# THÈSE

**En vue de l'obtention du**

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :** *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

**Présentée et soutenue le** *18/12/2023* **par :**

**Pierre POMERET-COQUOT**

# Décision individuelle et stratégique sous incertitude : une approche algébrique et formelle

---

**JURY**

| | | |
|---|---|---|
| Patrice PERNY | Professeur des universités | Président du jury |
| Hélène FARGIER | Directrice de recherche | Directrice de thèse |
| Érik MARTIN-DOREL | Maître de conférences | Co-directeur de thèse |
| Micaela MAYERO | Maîtresse de conférences | Rapporteure |
| Sébastien DESTERCKE | Directeur de recherche | Rapporteur |
| Stéphane LE ROUX | Maître de conférences | Examinateur |

---

**École doctorale et spécialité :**
*MITT : Domaine STIC : Intelligence Artificielle*

**Unité de Recherche :**
*Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (UMR 5505)*

**Directeur(s) de Thèse :**
*Hélène FARGIER* et *Érik MARTIN-DOREL*

**Rapporteurs :**
*Sébastien DESTERCKE* et *Micaela MAYERO*

# Décision individuelle et stratégique sous incertitude : une approche algébrique et formelle

Pierre Pomeret-Coquot

2023

# Résumé

Prendre une décision, c'est souvent faire un compromis entre les bénéfices et les risques. Plusieurs théories de la décision ont été proposées pour modéliser ces compromis, la plus connue étant celle de l'utilité espérée qui repose sur l'utilisation de la théorie des probabilités. Beaucoup d'autres approches pour modéliser l'incertitude, qu'elle provienne de la variabilité des phénomènes ou de l'ignorance qu'on en a, reposent sur l'utilisation de capacités (ou mesures non additives), telles que les probabilités imprécises, les fonctions de croyances, les mesures de possibilité, les intervalles de probabilité, etc. Pour chacune d'elles, une ou plusieurs règles permettent de modéliser la prise de décision au regard du type d'information qu'elles décrivent. Dans cette thèse, nous proposons un modèle algébrique général permettant de décrire les théories basées sur l'utilisation d'une capacité, qu'elle soit numérique ou non, grâce à une règle de décision universelle que nous appelons XEU. Pour cela, nous proposons en particulier de représenter les capacités algébriques par des fonctions de masses algébriques.

Nous appliquons d'abord ce modèle aux théories usuelles, dans un cadre mono-agent, et montrons que nous pouvons représenter toutes les règles de décision usuelles par une XEU. Nous considérons ensuite ce modèle dans le cadre multi-agent appelé « jeux stratégiques », sous information complète et sous information incomplète. Nous vérifions la pertinence du modèle dans ce cadre avant d'y exprimer une généralisation du théorème de Howson et Rosenthal. Ce théorème étendu permet d'étudier un jeu exprimé dans notre cadre algébrique avec les outils théoriques et algorithmiques provenant de la théorie des jeux classique. Puis nous détaillons un cas particulier de jeu à information incomplète basé sur les fonctions de croyance (les Bel-Games), que nous avons proposé durant cette thèse, et qui constituent une instance particulière du modèle général.

Enfin, nous formalisons cette approche algébrique dans l'assistant de preuve Coq, ce qui certifie la majorité de nos résultats d'une part et constitue une bibliothèque modulaire réutilisable d'autre part. Cette formalisation est la réunion de deux groupes de travaux, l'un concernant les capacités et les théories de la décision en général, l'autre formalisant les différentes preuves que nous proposons pour le théorème de Howson et Rosenthal généralisé aux Bel-Games et aux jeux à information incomplète en général.

# Abstract

Making a decision often involves a trade-off between benefits and risks. Several decision theories have been proposed to model these trade-offs, the best known being the expected utility theory, based on the use of probabilities. Many other approaches to the modeling of uncertainty, whether it arises from the variability of phenomena or from ignorance of them, rely on the use of capacities (or non-additive measures), such as imprecise probabilities, belief functions, possibility measures, probability intervals and so on. For each of these, one or more rules are used to model decision-making with respect to the type of information they describe. In this thesis, we propose a general algebraic model which captures all these theories as particular cases. This model is based on the use of a capacity, whether numerical or not, thanks to a universal decision rule that we call XEU. In particular, we propose to represent algebraic capacities by algebraic mass functions.

We first apply the model to the usual theories, in a single-agent framework, and show that we can represent all the usual decision rules by an XEU. We then consider this model in the multi-agent framework of "strategic games", under complete and incomplete information. We check the validity of the approach before expressing the generalization of Howson and Rosenthal's theorem. This theorem enables the study of a game expressed in the algebraic framework using theoretical and algorithmic tools from classical game theory. We then turn to the Bel-Game model (incomplete-information games based on belief functions) proposed during this thesis, which constitute a particular instance of our general model.

Finally, we formalize our algebraic approach in the Coq proof assistant. This certifies the majority of the results obtained and constitutes a reusable and modular library. This formalization is the union of two groups of works : the first one deals with capacities and decision theories in general, the second one formalizes the various proofs we propose for Howson and Rosenthal's theorem generalized to Bel-Games and to games of incomplete information in general.

# Remerciements

À l'issue de mon doctorat, je ne peux que constater l'importance du collectif durant ce travail. Je tiens à remercier toutes celles et ceux qui m'ont permis d'aboutir : leur aide m'a été indispensable pour y parvenir, mais aussi pour y parvenir dans de bonnes conditions.

Hélène, je te remercie en premier. Tu as été une directrice de thèse exceptionnelle. En ce qui concerne la direction, aussi loin que l'on puisse filer la métaphore : tu as su faire progresser cette recherche, la freiner lorsque nécessaire, l'orienter, etc. Si j'en suis arrivé là, c'est avant tout grâce à toi. En ce qui concerne notre collaboration : c'est un plaisir de travailler avec toi. Motivée, motivante, tes conseils et idées ont marqué mon doctorat de l'élaboration du sujet à la relecture du manuscrit. Enfin, en ce qui concerne ta personnalité : toujours bienveillante, toujours à l'écoute, j'ai vraiment apprécié te côtoyer durant ces trois années. Merci, merci, et encore merci.

Érik, en tant que co-directeur, je te remercie aussi. Tu m'as montré les difficultés à concilier les différentes méthodes de travail, tu m'as formé à l'utilisation de l'assistant de preuve Coq, tu m'as également beaucoup aidé sur de nombreux aspects techniques.

Merci aussi aux membres de mon jury de thèse pour vos remarques et questions pertinentes. En particulier, merci à Micaela Mayero et Sébastien Destercke, rapporteurs de cette thèse, pour le temps que vous avez accordé et les critiques constructives qui en ont découlé.

Je tiens également à remercier tous mes collègues de travail, de tous âges et de tous statuts, ceux que j'ai côtoyés pendant trois ans et ceux que je n'ai vus qu'une seule fois. Les interactions avec vous ont toujours été agréables et souvent constructives. Je ne citerai que deux d'entre vous qui ont fortement contribué à cette thèse, de manière très différente. Les autres m'excuseront et se reconnaîtront. Didier Dubois d'une part, qui fut mon professeur avant d'être mon collègue et qui m'a donné le goût de la théorie de la décision : ton expertise et ta bienveillance manifestes sont le reflet de ta compétence incontestable, et nos échanges ont été des moments privilégiés dans le développement de cette thèse. D'autre part, merci à Armand Gautier, qui a rejoint l'équipe plusieurs mois en tant que stagiaire et qui a réalisé une partie des expérimentations présentées dans cette thèse : notre travail en commun a fait germer beaucoup d'idées.

Merci enfin à mes proches, chacun d'entre vous, qui avez toujours été là : votre soutien a grandement contribué à l'aboutissement de cette thèse. En par-

ticulier, merci à toi, Rosalie, tu m'as soutenu tous les jours, tu m'as écouté radoter mille fois le même problème, enfin tu m'as supporté à la maison pendant les confinements et les surcharges de travail :-). Merci aussi, Papa, pour m'avoir aidé à débusquer les dernières coquilles dans le manuscrit.

En outre, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers le système éducatif français, pilier essentiel de mon parcours académique. La possibilité de bénéficier d'une formation de qualité, quasiment gratuite en licence et master, ainsi que l'obtention d'une bourse doctorale, ont été des éléments déterminants dans la réalisation de cette thèse. Malgré les défis rencontrés, notamment liés à la pandémie de Covid-19, cette opportunité m'a offert un environnement propice à la réalisation de travaux de recherche de qualité, contribuant ainsi à l'aboutissement de ma thèse en seulement trois ans.

Merci !

# Introduction

Prendre une décision, c'est choisir parmi plusieurs alternatives possibles : on souhaite le plus souvent prendre une bonne décision, voire la meilleure décision possible. Or, si certains choix sont simples, beaucoup nous semblent difficiles : c'est le cas lorsque les enjeux sont importants et que les tenants et les aboutissants sont mal connus. Dans de telles situations, identifier les « bonnes » décisions n'est pas évident.

Depuis Sun-Tzu (VIe av JC) et Aristote (IVe av. JC) au moins, on s'intéresse à la question de savoir comment les décisions sont prises, ou comment elles devraient être prises par des individus ou des institutions, particulièrement lorsque les conséquences d'une décision ne sont que partiellement connues (Aristote, 350 av. JC ; Tzu, env. 450 av. JC) [1]. La question a resurgi au cours des XVIIe et XVIIIe siècles. Pascal, Bernouilli, Laplace par exemple, ont étudié la prise de décision sous deux formes d'incertitude distinctes : l'aléatoire (dans le cadre des jeux de hasard) et la confiance (pour la prise en compte judiciaire des témoignages). D'autres se sont intéressés à la prise de décision par plusieurs agents, particulièrement dans un contexte de concurrence économique sans incertitude (Cournot, 1838 ; Bertrand, 1883).

L'aléatoire a été rapidement rattaché à l'évaluation des fréquences, dans les travaux précurseurs de Bernouilli (Bernoulli, 1738), puis, avec le développement des mathématiques au XVIIIe siècle, à la notion de probabilité (Kolmogorov, 1933). Les probabilités sont ainsi naturellement supposées additives (c'est-à-dire que la probabilité qu'un événement advienne, parmi deux événements disjoints, égale la somme des probabilités associées à ces deux événements).

Au cours de la première partie du XXe siècle, la théorie de la décision « classique », reposant sur les probabilités et la règle de l'utilité espérée, est suffisament bien établie pour être utilisée en pratique, particulièrement en économie (Simon, 1947) et dans le domaine militaire (Driscoll, Parnell et Henderson, 2007). Cette mise à l'épreuve a permis de constater sa pertinence, dans certaines situations, par exemple pour l'aide à la décision dans les entreprises (Cyert, March et al., 1963). En contrepartie, c'est aussi à cette période que l'on exprimera les principales critiques sur cette théorie classique.

1. La chronologie présente en introduction suit celle proposée dans les chapitres 1 et 3 du livre *Decision-making Process* (Dubois, Prade et al., 2013), rédigés par Tsoukiàs d'une part et par Dubois et Prade d'autre part.

La théorie de l'utilité espérée est *normative*, sa justification est exogène (sa légitimité ne vient pas de la situation modélisée). Elle décrit quelles *devraient être* les préférences du décideur (s'il est d'accord avec un petit nombre d'axiomes raisonnables). Or, dans certaines situations, la plupart des décideurs humains ne décident pas du tout de la façon prévue par la théorie. Dès 1947, Simon a observé ces comportements en situation réelle (Simon, 1947) ; plusieurs expériences permettent de les observer en laboratoire (Allais, 1953 ; Ellsberg, 1961). Dès lors, avec le développement des sciences cognitives, de la psychologie et de l'économie expérimentale, plusieurs théories alternatives ont été proposées. Elles reposent principalement sur trois principes : la correction des valeurs (par exemple, la distortion des probabilités, Kahneman et Tversky, 1979 ; Quiggin, 1982) ; le relachement de la théorie des probabilités (par exemple, les théories des fonctions de croyances et des possibilités, Dempster, 1967 ; Shafer, 1976 ; Dubois et Prade, 1988) ; l'évolution du modèle (par exemple, la théorie des perspectives, ou *Prospect theory,* Kahneman et Tversky, 1979). Ces théories alternatives de la décision ont souvent été proposées dans une approche *descriptive* (en cherchant à modéliser ce que les décideurs décident, et non pas ce qu'ils devraient décider ; la justification est interne à la situation, mais externe au décideur), parfois dans une approche *constructive* (en cherchant à modéliser le décideur et sa connaissance du problème ; la justification est alors totalement endogène). Notons que chacune de ces théories peut être vue comme normative, descriptive ou constructive selon que son utilisation est justifiée par les axiomes, par l'étude du même type de prises de décision ou par l'élicitation du modèle auprès de l'agent étudié.

Parallèlement, avec l'essor des sciences numériques et de l'intelligence artificielle dans la seconde partie du XXe siècle, une autre communauté s'est intéressée à la problématique de la connaissance humaine et du raisonnement, souvent basé sur des informations imprécises, incertaines ou contradictoires. On constate dès lors les apports des approches logiques (classiques et modales) et surtout ceux de la représentation de la nature graduelle des informations (particulièrement par les ensembles flous, Zadeh, 1965). Cela mènera a un regain d'intérêt pour les probabilités non-additives (Shackle, 1961 ; Smith, 1961 ; Good, 1966 ; Dempster, 1967 ; Kyburg, 1974 ; Shafer, 1976).

Enfin, plus récemment, certains auteurs ont cherché à comparer et éventuellement regrouper ces différentes approches, qui parfois se rejoignent (Destercke et Dubois, 2006). En particulier, des approches algébriques ont été proposées pour abstraire la théorie de l'incertitude considérée, qui devient alors un paramètre supplémentaire du modèle décrivant la prise d'une décision. De tels cadres génériques permettent une meilleure compréhension des formalismes, en identifiant leurs similitudes et leurs différences, apportent de l'expressivité aux modèles en permettant d'exprimer des connaissances incomplètes et permettent de concevoir des concepts de solutions et des algorithmes génériques. De telles approches algébriques ont été proposées pour la modélisation d'un décideur unique, n'interagissant pas avec d'autres décideurs, d'abord dans un cadre statique (Friedman et Halpern, 1995 ; Halpern, 2001 ; Chu et Halpern, 2003), puis dans un cadre dynamique (Perny, Spanjaard et Weng, 2005 ; Pralet,

Verfaillie et Schiex, 2007).

La théorie de la décision comprend plusieurs sous-domaines : les théories de l'incertitude proposent des outils pour représenter les connaissances incomplètes, la théorie des jeux s'intéresse aux prises de décisions multi-agents (lorsque les choix des uns impactent ceux des autres) ; la théorie du vote se concentre sur l'agrégation des préférences individuelles en préférences collectives ; etc.

Tous ces sous-domaines sont en réalité transverses, même s'ils sont souvent étudiés séparément. Ainsi, la problématique de l'incertitude concerne autant les théoriciens des jeux que les théoriciens du vote (la connaissance est partielle pour quasiment toute prise de décision), mais elle se retrouve souvent rattachée à l'étude des prises de décision par un unique décideur. Dans le cadre de la théorie des jeux, l'incertitude est habituellement exprimée dans le cadre de la théorie classique de l'utilité espérée (l'utilisation de théories alternatives a tout de même été proposée pour certains problèmes), après que Nash a proposé l'utilisation de stratégies probabilistes randomisées (Nash, 1950) puis que Harsanyi a proposé le modèle de *jeu bayésien* en 1967 (Harsanyi, 1967). Ce modèle permet de décrire des situations où plusieurs décideurs prennent chacun une décision, dans un contexte incertain ; la conséquence dépend des choix pris par tous les décideurs et de l'état de certains paramètres mal connus. C'est un modèle très expressif : il permet d'exprimer l'incertitude pesant à la fois sur l'environnement (par exemple, l'incertitude sur les conséquences d'une décision) et sur les décideurs eux-mêmes (par exemple, l'incertitude sur les préférences de tel décideur). Par contre, comme son nom l'indique, il est exprimé dans le cadre de la théorie classique, et se retrouve ainsi associé à l'approche probabiliste.

Les jeux bayésiens ont été beaucoup utilisés : en économie, pour étudier les situations de concurrence (Kreps et Wilson, 1982 ; Milgrom et Roberts, 1982 ; Fudenberg et Kreps, 1987), mais aussi pour justifier d'autres résultats de théorie des jeux (Harsanyi, 1967 ; Myerson, 2007), de choix social et de théorie du vote (Downs, 1957 ; Gibbard, 1973 ; Lau et Redlawsk, 2006). Néanmoins, ce modèle étant basé sur la théorie classique de l'utilité espérée, les critiques concernant cette dernière concernent aussi les jeux bayésiens : dans certaines situations, le comportement des décideurs n'est pas celui décrit par le modèle. Les théories alternatives n'ont été étudiées dans le cadre multi-agents que très récemment. En 2019, Ben Amor *et al.* ont proposé le modèle des *jeux possibilistes*, dont l'approche est similaire à celle des jeux bayésiens mais basée sur la théorie alternative des possibilités (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2019) ; durant mon doctorat nous avons développé le modèle des *jeux évidentiels* et *crédaux* que nous présentons et généralisons dans cette thèse (Fargier, Martin-Dorel et Pomeret-Coquot, 2021a ; Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022).

Dans cette thèse, nous proposons dans un premier temps un modèle algébrique appelé *modèle d'agent* permettant d'abstraire la théorie de la décision considérée par des opérateurs algébriques et une fonction d'agrégation. Ces composants deviennent ainsi des paramètres du modèle qui peut alors être étudié en

toute généralité ou dans certains cas particuliers. Dans un second temps, nous utilisons ce modèle d'agent algébrique pour définir un modèle générique de *jeu à information incomplète* permettant de modéliser les situations de prise de décision multi-agents dans différentes théories de la décision : la théorie considérée est donnée en paramètre du modèle. Cela accroît évidemment l'expressivité du modèle puisqu'on peut ainsi étudier par exemple des situations où les agents ne sont pas modélisés par les mêmes règles de décision et même exprimer l'incertitude quant à la théorie considérée pour un agent donné. Par ailleurs, nous pensons que cela participe à une meilleure compréhension des modèles eux-mêmes, en identifiant les éléments communs à toute théorie de la décision et ceux dépendants de la théorie considérée. Nous verrons par exemple que la définition usuelle basée sur les *types* potentiels des agents (utilisée dans les jeux bayésiens, possibilistes et crédaux) n'est pas aussi générale qu'elle le semble dans la théorie classique. Enfin, en proposant un tel cadre générique, nous permettons l'expression de résultats théoriques et algorithmiques génériques eux-aussi. Nous montrons par exemple que le théorème de Howson et Rosenthal peut être étendu à ce cadre générique, et précisons sous quelles conditions (Howson et Rosenthal, 1974). Ce théorème garantit l'équivalence d'un jeu à information incomplète et d'un jeu à information complète (sans incertitude), et permet ainsi d'étendre directement certains résultats théoriques et algorithmiques au modèle générique que nous proposons.

L'élaboration de ce modèle générique a suivi deux directions complémentaires. La première a consisté à s'assurer que le modèle proposé a du sens. En détaillant les définitions, et en revenant aux justifications élémentaires, nous nous sommes assurés que les théories considérées y sont correctement appliquées. La seconde direction est formelle, elle a consisté à exprimer nos résultats dans l'assistant de preuve formelle Coq. Les résultats y sont ainsi vérifiés automatiquement, ce qui apporte une très forte garantie sur leur correction, au prix d'un effort supplémentaire de rigueur et de détail. Nous pouvons ainsi certifier que le modèle générique que nous proposons est correct, ainsi que les généralisations du théorème de Howson et Rosenthal. De plus, cette approche formelle offre deux avantages supplémentaires : d'une part, en construisant une bibliothèque de preuves, il devient facile de réutiliser nos résultats et de les instancier dans les cas particuliers d'intérêt ; d'autre part, cela permettra la génération de programmes « zéro défaut » formellement certifiés, dont on peut extraire une version efficace en OCaml. Bien que nous ne nous attachions pas particulièrement à l'aspect algorithmique dans ce travail, nous pensons que la possibilité de certifier certains algorithmes s'avèrera utile dans le futur. En effet, les cas d'applications des jeux à information incomplète comprennent des situations critiques où la demande de fiabilité est importante. Nous pensons par exemple aux véhicules autonomes, dont les décisions sont clairement prises dans un environnement multi-agents, ou encore à la dématérialisation des consultations et autres services publics (vote en ligne, ParcoursSup, etc.), où les choix de chacun doivent évidemment être pris en compte. La question de savoir comment les décisions sont prises puis traitées est une question sociétale, à laquelle la réponse ne peut être que collective. Mais, une fois cette réponse établie, de tels traite-

ments peuvent être automatisés. Il nous semble alors indispensable de garantir la correction des résultats obtenus qui sont difficiles voire impossibles à vérifier manuellement.

Le contexte de ce travail est présenté dans les deux premiers chapitres, où nous donnons les principaux concepts et définitions nécessaires.

Dans le chapitre 1, nous posons les bases mathématiques permettant d'exprimer les préférences d'un agent, sa connaissance partielle de l'environnement, et les façons de combiner préférences et connaissances pour évaluer les différentes choix possibles lors d'une prise de décision.

Dans le chapitre 2, nous abordons la prise de décision multi-agents, lorsque les choix faits par les uns impactent les résultats obtenus par les autres.

Les chapitres suivants présentent le *modèle d'agent* et celui des *jeux à information incomplète généralisés*, qui sont les contributions principales de cette thèse.

Le *modèle d'agent* est d'abord défini dans le chapitre 3. Il décrit de manière algébrique les préférences, la connaissance et le comportement face au risque d'un décideur. Nous le donnons d'une part en toute généralité, de manière abstraite, puis nous précisons d'autre part les différents paramétrages qui permettent de retrouver les théories de la décision classiques et alternatives.

Ensuite, dans le chapitre 4, nous considérons ce modèle dans le cadre multi-agents : ce sont les jeux à information incomplète. Nous étendons les concepts de solutions habituels à notre cadre, et montrons une contrepartie algébrique du théorème de Howson et Rosenthal. Nous y donnons, ici aussi, les instances permettant de retrouver les jeux bayésiens, possibilistes et crédaux. En particulier, nous détaillons le modèle des jeux crédaux (ou évidentiels) que nous avons développé durant mon doctorat.

Puis, dans le chapitre 5, nous présentons la bibliothèque de preuve formelle que nous fournissons pour l'assistant de preuve Coq. Nous y certifions certains résultats de la littérature et y montrons la correction de nos généralisations du théorème de Howson et Rosenthal.

Enfin, la conclusion de ce travail constitue le sixième et dernier chapitre de cette thèse.

# Table des matières

**Résumé** iii

**Abstract (english version)** v

**Remerciements** vii

**Introduction** ix

**1 Prise de décision sous incertitude** 1
- 1.1 Représentation des préférences . . . 2
  - 1.1.1 Relations binaires . . . 3
  - 1.1.2 Fonctions de gain et d'utilité . . . 7
- 1.2 Théorie classique de la décision . . . 10
  - 1.2.1 Prise de décision sous ignorance totale . . . 13
  - 1.2.2 Prise de décision sous connaissance probabiliste . . . 16
- 1.3 Théories alternatives à l'utilité espérée . . . 25
  - 1.3.1 Capacités et intégrale de Choquet . . . 26
  - 1.3.2 Déformations des probabilités . . . 27
  - 1.3.3 Probabilités imprécises . . . 29
  - 1.3.4 Théorie des fonctions de croyances . . . 31
  - 1.3.5 Ordres de grandeur de probabilité . . . 40
  - 1.3.6 Théorie des possibilités . . . 41
- 1.4 Conclusion du chapitre . . . 43

**2 Décision multi-agent stratégique** 45
- 2.1 Jeux à information complète . . . 46
  - 2.1.1 Représentation d'un jeu . . . 48
  - 2.1.2 Dominance, rationalisabilité et équilibres de Nash . . . 51
  - 2.1.3 Stratégies mixtes . . . 56
  - 2.1.4 Équilibre corrélé . . . 62
- 2.2 Jeux à information incomplète . . . 66
  - 2.2.1 L'intuition . . . 66
  - 2.2.2 Définitions . . . 70
  - 2.2.3 Théorème de Howson et Rosenthal . . . 75
  - 2.2.4 Jeux possibilistes et jeux crédaux . . . 77

2.3 Conclusion du chapitre . . . . . 78

**3 Le modèle d'agent** **81**
3.1 Le modèle d'agent . . . . . 82
3.1.1 Fonctions d'utilité algébriques et structures de préférence 82
3.1.2 Capacités algébriques et structures de connaissance . . . . 83
3.1.3 Cadres de décision . . . . . 88
3.1.4 Règles de décision . . . . . 91
3.1.5 Modèle d'agent . . . . . 92
3.2 Fonctions de masse algébriques . . . . . 93
3.2.1 Définitions . . . . . 93
3.2.2 Construction d'une $\boxplus$-représentation . . . . . 94
3.2.3 Représentations basées sur la somme . . . . . 96
3.2.4 Représentations basées sur le maximum . . . . . 96
3.3 Règle de décision algébrique . . . . . 97
3.3.1 Définitions . . . . . 97
3.3.2 Instances de règles de décision . . . . . 99
3.4 Conclusion du chapitre . . . . . 105

**4 Les jeux généralisés** **109**
4.1 Jeux à information complète généralisés . . . . . 110
4.1.1 Situation de jeu et jeu à information complète . . . . . 110
4.1.2 Extension des concepts de solutions pour les jeux à information complète généralisés . . . . . 113
4.1.3 Incertitude dans les jeux à information complète généralisés 114
4.2 Jeux hypergraphiques généralisés . . . . . 126
4.3 Jeux à information incomplète généralisés . . . . . 130
4.3.1 Situation de jeu et jeu à information incomplète . . . . . 130
4.3.2 La notion de type et le modèle à loterie initiale . . . . . 136
4.3.3 Stratégies mixtes dans les jeux à information incomplète généralisés . . . . . 140
4.3.4 Jeux à information incomplète particuliers . . . . . 143
4.4 Howson-Rosenthal généralisé . . . . . 146
4.4.1 Jeux en correspondance et modèle de Selten . . . . . 147
4.4.2 Transformation hypergraphique à la Howson et Rosenthal 149
4.4.3 Complexité spatiale et temporelle de la transformation hypergraphique . . . . . 157
4.5 Bel-games : les jeux évidentiels et crédaux . . . . . 161
4.5.1 Définition et interprétation d'un Bel-Game . . . . . 161
4.5.2 Stratégies mixtes dans les Bel-Games . . . . . 165
4.5.3 Transformations à la Howson et Rosenthal . . . . . 166
4.5.4 Expérimentations . . . . . 170
4.6 Conclusion du chapitre . . . . . 176

**5 Points clés de la formalisation Coq** **179**
5.1 Introduction à Coq/SSReflect . . . . . 181
5.1.1 La vérification automatique . . . . . 181
5.1.2 Comment ça fonctionne ? . . . . . 182
5.1.3 Éléments de syntaxe Coq et SSReflect . . . . . 184
5.2 Résultats généraux . . . . . 187
5.3 Fonctions d'ensemble et capacités . . . . . 190
5.3.1 Propriétés des fonctions d'ensemble . . . . . 191
5.3.2 Fonction duale . . . . . 193
5.3.3 Représentation d'une fonction d'ensemble . . . . . 194
5.3.4 Capacités : structures et hiérarchie . . . . . 199
5.4 Modèle d'agent et règles de décision . . . . . 203
5.4.1 Structures de préférences, de connaissance et de règle de décision . . . . . 203
5.4.2 Règles de décision numériques et leurs instances algébriques 205
5.5 Théorie des jeux et théorème.s de howson et Rosenthal . . . . . 210
5.5.1 Conditionnement . . . . . 210
5.5.2 Décision et XEU . . . . . 213
5.5.3 Jeux à information complète . . . . . 215
5.5.4 Jeux à information incomplète . . . . . 217
5.5.5 Transformations à la Howson et Rosenthal . . . . . 218
5.6 Transformations algébriques . . . . . 222
5.7 Conclusion du chapitre . . . . . 228

**6 Conclusions** **231**

# Chapitre 1

# Prise de décision sous incertitude

L'étude de la prise de décision sous incertitude s'intéresse à modéliser la façon dont un agent effectue un choix (ou dont il devrait l'effectuer). Notre modèle est établi dans le cadre classique où tout choix de l'agent mène à une unique conséquence. Or, cette conséquence est souvent mal connue, et plusieurs conséquences sont possibles pour un même choix. L'approche usuelle est de supposer (ou de déduire) que plusieurs « états du monde » sont possibles, mais que le décideur ignore lequel correspond effectivement au monde réel. La conséquence d'un choix dépend de l'état du monde. Les croyances ou les connaissances du décideur permettent souvent d'attacher à chaque état possible du monde un degré de confiance indiquant combien cet état est probable, possible, crédible, etc. Ces degrés de confiance peuvent être explicitement donnés par l'agent ou par une source externe ; ils peuvent aussi être déduits de l'observation des préférences de l'agent face à des décisions sous incertitude (par exemple en observant la mise maximale que l'agent est prêt à payer pour participer à un pari).

En tous cas, les préférences de l'agent en termes de conséquences sont connues : étant données deux conséquences possibles, l'agent sait dire s'il préfère l'une, l'autre, si les deux lui sont indifférentes, ou au contraire si elles sont incomparables. C'est la donnée initiale. L'objectif est alors d'établir ses préférences sur les différents choix possibles, en considérant bien entendu sa connaissance (qui relie les choix disponibles à leurs conséquences possibles) et ses préférences sur les conséquences.

Pour cela, il faut identifier d'une part la *théorie de l'incertain* permettant de décrire la connaissance partielle de l'agent (et de la mettre-à-jour si le contexte est dynamique), et d'autre part la *règle de décision* qui capture les préférences de l'agent sur les différents choix qu'il peut prendre.

Une décision consiste donc à choisir un élément appelé *action* parmi un ensemble d'actions disponibles. Dans un souci de simplicité, il est souvent plus facile de s'imaginer des actions atomiques : par exemple, un décideur devant

choisir un bouton sur lequel appuyer. En toute généralité, une action peut être complexe et composée de plusieurs mouvements successifs, éventuellement dépendants d'observations. Imaginons par exemple un conducteur au volant de sa voiture. Parmi les décisions qu'il peut prendre, des actions atomiques peuvent être exprimées (par exemple « prendre à gauche au prochain carrefour ») mais aussi des actions complexes (par exemple « Si le feu est vert, prendre à gauche, puis si il y a des travaux, prendre à droite, sinon tout droit. Enfin, si le feu est rouge, attendre qu'il passe au vert et aller tout droit. »). Sans perte de généralité, et par souci de simplicité, nous considèrerons dans ce document des actions atomiques.

Ce chapitre est composé de trois sections. D'abord, la section 1.1 décrit comment des préférences sont représentées par une relation binaire ou par une fonction d'utilité (ces préférences peuvent porter sur les conséquences possibles, sur les actions disponibles, etc.). Ensuite, dans la section 1.2, nous abordons les approches *classiques* en théorie de la décision sous incertitude, telles qu'élaborées au cours du XIXe et du début du XXe siècle, et qui aboutissent à la règle de l'utilité espérée (Savage, 1951 ; Morgenstern et Von Neumann, 1953 ; De Finetti, 1974). Nous détaillons la façon dont les décisions y sont évaluées, sous ignorance totale d'une part, et sous connaissance probabiliste d'autre part. Nous terminons cette section en présentant certaines limitations de cette théorie classique. Enfin, la section 1.3 présente plusieurs théories *alternatives* pour la décision sous incertitude. Nous portons notre attention sur les théories les plus usuelles : d'abord les variations autour de la théorie classique (déformations de l'utilité espérée, bornes de probabilité) ; puis la théorie des fonctions de croyances, pour laquelle plusieurs interprétations ont été proposées, dont certaines sont non-probabilistes ; enfin la théorie des possibilités, qui décrit une connaissance qualitative qui peut être interprétée de manière logique.

## 1.1 Représentation des préférences par des relations binaires ou des fonctions d'utilité

Les préférences d'un agent (ou d'un groupe d'agents) peuvent concerner une variété d'objets différents : par exemple des candidats à une élection, des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou encore des projets dont l'évaluation monétaire dépend d'événements extérieurs et/ou des actions produites par les agents. Pour cette raison, ces travaux concernant la modélisation des préférences sont issus de disciplines différentes, telles que l'économie (Debreu, 1959), la psychologie (Kahneman et Tversky, 1979), les sciences politiques (Sen, 1986), la recherche opérationnelle (Roy et al., 1985) ou encore l'intelligence artificielle (Wellman et Doyle, 1992).

Pour rester général, nous parlons dans cette section de préférences exprimées sur une collection d'*objets*. Par la suite, nous considérons des préférences exprimées soit sur les conséquences possibles d'une action, soit sur les actions disponibles.

Il existe deux façons usuelles de représenter des préférences sur un ensemble d'objets $A$ : par une relation binaire ou par une fonction d'utilité. [1]

### 1.1.1 Relations binaires [2]

Une relation binaire $T$ sur un ensemble fini d'objets $A$ est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$, c'est-à-dire un ensemble de paires $(a, b)$ d'éléments de $A$. Si la paire $(a, b)$ appartient à la relation binaire $T$, on écrira $aTb \equiv (a, b) \in T$. Dans le cas contraire, on écrira $\neg(aTb) \equiv (a, b) \notin T$.

Une relation binaire $T$ sur $A$ est dite : [3]

— *reflexive* si $\forall a,\ aTa$ ;
— *antisymétrique* si $\forall a, b,\ (aTb \wedge bTa) \implies a = b$ ;
— *complète* (ou *totale*) si $\forall a, b,\ aTb \vee bTa$ ;
— *transitive* si $\forall a, b, c,\ (aTb \wedge bTc) \implies aTc$ ;
— *de Ferrers* si $\forall a, b, c, d\ (aTb \wedge cTd) \implies (aTd \vee cTb)$ ;
— *semi-transitive* si $\forall a, b, c, d,\ (aTb \wedge bTc) \implies (aTd \vee dTc)$ ;

La *relation inverse* de $T$ est la relation $T'$ vérifiant $\forall a, b,\ aT'b \iff bTa$

Étant donné deux objets $a$ et $b$, on fait classiquement l'hypothèse que la question « est-ce que $a$ est au moins aussi bien que $b$ ? » n'admet que deux réponses possibles : « oui » et « non ». De telles préférences sont représentables par une relation binaire reflexive :

**Définition 1.1 (Relation de préférence qualitative).** Une relation de préférence qualitative sur $A$ est une relation binaire $\succeq$ reflexive sur $A$.

On notera :
— $\not\succeq$ la relation complémentaire de $\succeq$, définie par $a \not\succeq b \iff \neg(a \succeq b)$ ;
— $\succ$ la partie asymétrique de $\succeq$, définie par $a \succ b \iff a \succeq b \ \wedge\ b \not\succeq a$ ;
— $\sim$ la partie symétrique de $\succeq$, définie par $a \sim b \iff a \succeq b \ \wedge\ b \succeq a$ ;
— $\prec\!\!\succ$ la partie incomparable de $\succeq$, définie par $a \prec\!\!\succ b \iff a \not\succeq b \ \wedge\ b \not\succeq a$

Les relations inverses de $\succeq$, $\not\succeq$ et $\succ$ seront notées respectivement $\preceq$, $\not\preceq$, $\prec$.

*Remarque* 1. À la question « est-ce que $a$ est au moins aussi bien que $b$ ? », on peut envisager d'autres réponses que « oui » ou « non », par exemple, on pourrait répondre « je ne sais pas », ou encore « un peu », « beaucoup », etc., voire « je pense que oui », « je suis sûr que non », etc. Ces réponses impliquent d'utiliser une structure de préférence plus riche qu'une relation binaire (par

1. Des structures de plus haut niveau ont été proposées pour encoder des préférences, permettant de décrire de manière succincte des relations binaires (Fraser, 1993, 1994 ; Wallace et Wilson, 2009)) ou des fonctions d'utilité (Schiex, Fargier, Verfaillie et al., 1995 ; Joachims, 2002 ; Gonzales et Perny, 2004). Nous ne les étudions pas ici.

2. Cette sous-section 1.1.1 est guidée par le chapitre 2 du livre *Decision-makin Process* (Dubois, Prade et al., 2013) rédigé par Bouysson et Vincke, auquel le lecteur intéressé est invité à se référer.

3. Le vocabulaire français concernant les relations binaires ne coïncide pas avec le vocabulaire anglais : les deux sont parfois ambigus, mais pas sur les mêmes concepts. Nous utilisons ici les termes qui semblent les plus usités en langue française, en nous basant sur (Monjardet, 1978). Le lecteur intéressé pourra s'y référer pour une discussion approfondie de ces choix.

exemple avec des langages utilisant des logiques non classiques (Tsoukias et Vincke, 1992), permettant de représenter l'intensité de la préférence (Costa et Vansnick, 1994), l'hésitation (Roy et Vincke, 1987) ou l'expression de degrés de confiance (Doignon et al., 1986))

À partir d'une structure de préférences qualitative $\succeq$ sur $A$, on peut identifier l'*ensemble de choix*[4] $C(B, \succeq)$ pour une collection d'objets $B \subseteq A$. L'intuition est que si l'agent pouvait choisir un objet, il choisirait un objet de $C(B, \succeq)$. En effet, tout objet $b \notin C(B, \succeq)$ serait un mauvais choix dans le sens où il existe un objet $a$ strictement préféré à $b$, c'est-à-dire tel que $a \succ b$.

**Définition 1.2 (Ensemble de choix).** Pour toute structure de préférences qualitative $\succeq$ sur $A$ et pour tout sous-ensemble $B \subseteq A$, l'ensemble de choix est :

$$C(B, \succeq) = \{b \in B \mid \forall a \in B, a \not\succ b\}$$

### Ordres et préordres totaux

**Définition 1.3 (Ordre total).** Une structure de préférence qualitative $\succeq$ est un ordre total (ou complet) ssi $\succeq$ est reflexive, complète, transitive et antisymétrique.

**Définition 1.4 (Préordre total).** Une structure de préférence qualitative $\succeq$ est un préordre total (ou complet) ssi $\succeq$ est reflexive, complète et transitive.

Les ordres et préordres totaux garantissent donc que tous les objets sont comparables : $\forall a, b, a \succeq b \vee b \succeq a$. La relation d'incomparabilité $\prec\!\!\!\succ$ est vide. Pour les ordre totaux, la relation d'indifférence est limitée aux paires d'objets identiques (i.e. $a \sim b \implies a = b$) ; les préordres totaux n'ont pas cette contrainte. Ces deux types de structures de préférences qualitative peuvent être représentées numériquement par des fonctions à valeurs réelles :

**Propriété 1.1 (Représentation numériques des ordres et préordre totaux).** Une structure de préférences qualitative $\succeq$ sur $A$ est un préordre total ssi il existe une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a, b \in A$ :

$$a \preceq b \iff f(a) \leq f(b)$$

De plus, $\succeq$ est un ordre total ssi :

$$a = b \iff f(a) = f(b)$$

*Remarque* 2. La représentation d'un ordre ou d'un préordre total n'est pas unique : si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors $g \circ f$ est une autre représentation admissible.

*Remarque* 3. Soit $f$ une fonction représentant numériquement un (pré)ordre total. Il semble possible de comparer les différences $f(a) - f(b)$ et $f(c) - f(d)$. Or,

4. Traduction de l'anglais *Choice set*.

ces comparaisons dépendent clairement du choix de la fonction particulière $f$ : un autre choix serait tout aussi légitime mais peut mener à une autre comparaison. En effet, il n'est pas toujours possible de donner du sens à ces comparaisons : dans ce cas, l'échelle décrite par $f$ est dite *ordinale*, les valeurs prises par $f$ sont *qualitatives* : toute transformation croissante de $f$ décrit la même échelle ordinale (par opposition aux échelles *cardinales* dont les valeurs sont *quantitatives*, cf. définitions 1.9 et 1.10).

**Propriété 1.2 (Ensemble de choix d'un préordre total).** L'ensemble de choix d'un préordre total $\succeq$ sur un ensemble fini $A$ et représenté numériquement par la fonction $f$ est la classe d'équivalence définie par :

$$C(B, \succeq) \quad = \quad \underset{b \in B}{\operatorname{argmax}} f(b) \quad = \quad \left\{ a \in B \mid f(a) = \max_{b \in B} f(b) \right\}$$

Si $\succeq$ est un ordre total, $C(B, \succeq)$ contient un unique élément.

**Exemple 1.1.** *Supposons des préférences établies sur $A = \{a, b, c\}$ par la relation $\succeq = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}$. La relation est réflexive, transitive, complète et anti-symétrique : c'est une ordre total où $a \succ b \succ c$, représentable par exemple par les fonctions $f$ et $g$ suivantes :*

$$\begin{array}{lll} f(a) = 1 & f(b) = 2 & f(c) = 3 \\ g(a) = 1 & g(b) = 10 & g(c) = 100 \end{array}$$

*Soient $A' = A \cup \{d\}$ et $\succeq' = \succeq \cup \{(d,d), (a,d), (b,d), (d,b), (d,c)\}$.*
*La relation $\succeq'$ est réflexive, transitive et complète : c'est un préordre total où $a \succ' b \sim' d \succ' c$, représentable par exemple en étendant les fonctions ci-dessus par $f(d) = f(b)$ ou $g(d) = g(b)$.*

### Quasi-ordres

Dans les préordres totaux, la relation d'indifférence est transitive. Cette hypothèse est parfois inadéquate car elle implique que tous les objets différents, aussi proches soient-ils, sont parfaitement discriminés. Luce a été le premier à suggérer une strutcure de préférence où l'indifférence n'est pas transitive (Luce, 1956).

**Exemple 1.2 (Luce, 1956).** *Soit un ensemble $A$ de 101 tasses de café noir, numérotées 0 à 100. Dans chaque tasse $i$, on ajoute $i$ grains de sucre. Soit un indifidu préférant le café sucré : $a_{100} \succ a_0$. Il ne peut vraisemblablement pas différencier deux tasses consécutives : $a_i \sim a_{i+1}$. Si la relation d'indifférence était transitive, on aurait $a_0 \sim a_1 \sim \cdots \sim a_{100} \implies a_0 \sim a_{100}$.*

Dans cet exemple, on aimerait introduire un seuil d'indifférence : le nombre de grains de sucre à partir duquel le sujet est capable de différencier deux tasses. Dès lors qu'un tel seuil d'indifférence est introduit, on obtient quasi-ordre (ou *semiorder* en anglais) :

**Définition 1.5 (Quasi-ordre).** Une structure de préférences qualitative $\succeq$ est un quasi-ordre ssi $\succeq$ est reflexive, complète, de Ferrers et semi-transitive.

**Propriété 1.3 (Représentation numérique d'un quasi-ordre).** Une structure de préférences qualitative $\succeq$ sur $A$ est un quasi-ordre ssi il existe une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ et une constante $q \geq 0$ telle que :

$$\forall a, b \in A, \quad a \succeq b \iff f(a) \geq f(b) - q$$

### Ordres d'intervalle

La notion d'*ordre d'intervalle* généralise les structures de préférences qualitatives présentées jusqu'ici. Comme nous le verrons dans l'exemple 1.3, elle surgit naturellement lorsqu'on compare des intervalles sur une échelle qualitative.

**Définition 1.6 (Ordre d'intervalle).** Une structure de préférences qualitative $\succeq$ est un ordre d'intervalle ssi $\succeq$ est reflexive, complète et de Ferrers.

**Propriété 1.4 (Représentation numérique d'un ordre d'intervalle).** Une structure de préférences qualitative $\succeq$ sur $A$ est un ordre d'intervalle ssi il existe une fonction associant à tout objet $a \in A$ un intervalle réel $I_a = [x_a, y_a]$ tel que :

$$\forall a, b \in A, \quad a \succeq b \iff y_a \geq x_b$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a \succ b &\iff x_a > y_b \\ a \sim b &\iff (x_a \leq y_b) \wedge (x_b \leq y_a) \end{aligned}$$

**Exemple 1.3.** *Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et la structure de préférences qualitative $\succeq = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,b), (c,c), (c,d), (d,d)\}$. $\succeq$ est reflexive, complète et de Ferrers, c'est donc un ordre d'intervalle. On peut le représenter numériquement par les intervalles ci-dessous (figure 1.1) :*

$$I_a = [9, 14] \qquad I_b = [4, 10] \qquad I_c = [5, 8] \qquad I_d = [2, 3]$$

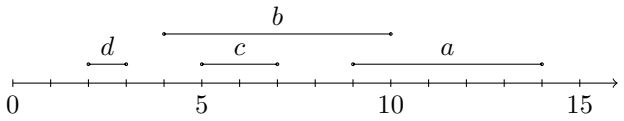



FIGURE 1.1 – Représentation d'un ordre-intervalle par des intervalles

**Ordres et préordres partiels**

Jusqu'à présent, nous avons considéré des ordres totaux, où toute paire d'objets est comparable. Néanmoins, il n'est pas toujours possible d'exprimer de telles préférences, par exemple lorsque le modélisateur ou le décideur manque d'information sur certains éléments de $A$, ou encore lorsque les préférences décrivent plusieurs points de vues.

**Définition 1.7 (Ordre partiel).** Une structure de préférence $\succeq$ est un ordre partiel ssi $\succeq$ est refléxive, transitive et anti-symétrique.

**Définition 1.8 (Préordre partiel).** Une structure de préférence $\succeq$ est un préordre partiel ssi $\succeq$ est refléxive et transitive.

Intuitivement, un ordre partiel est tel que deux objets distincts sont soit incomparables, soit l'un des deux est strictement préféré à l'autre. Un préordre partiel permet d'avoir des éléments différents mais pour lesquels l'agent est indifférent. Les ordres et préordres partiels apparaissent par exemple lorsqu'on compare les objets selon plusieurs critères.

**Exemple 1.4.** *Un agent doit effectuer des travaux. Il a reçu quatre devis $a$, $b$, $c$ et $d$ pour lesquels il compare les coûts et les délais, et préfère les coûts faibles et les délais courts. Pour le devis $a$, le coût est 500€ et le délai est de 3 jours ; pour $b$ : 600€ et 5 jours de travaux ; pour $c$ : 800€ et 4 jours de travaux ; pour $d$ : 1000€ et 8 jours de travaux. Les préférences sur $A = \{a, b, c, d\}$ sont :*

$$\succeq = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)\}$$

*$\succeq$ est reflexive, transitive et anti-symétrique, c'est un ordre partiel où :*

$$a \succ b \succ d, \quad a \succ c \succ d \quad et \quad b \prec\succ c$$

*Soit un nouveau devis $e$ pour lequel le coût est 600€ et le délai est de 5 jours. Alors $A' = A \cup \{e\}$ et $\succeq' = \succeq \cup \{(a,e), (b,e), (e,b), (e,d)\}$. $\succeq'$ est reflexive et transitive, c'est un préordre partiel où :*

$$a \succ' b \sim' e \succ' d, \quad a \succ' c \succ' d, \quad b \prec\succ' c \quad et \quad e \prec\succ' c$$

### 1.1.2 Fonctions de gain et d'utilité

En représentant les préférences d'un agent par une relation binaire, on encode des informations du type $a \succeq b$, c'est-à-dire « $a$ est au moins aussi bon que $b$ ». Une relation binaire (ou sa représentation numérique) fournit ainsi une information qualitative. Si on souhaite encoder une information quantitative, permettant d'exprimer par exemple que « $a$ est deux fois mieux que $b$ », il est nécessaire de considérer une structure de préférence plus expressive.

**Définition 1.9 (Échelle d'intervalle).** Une échelle d'intervalle $f : A \to \mathbb{R}$ est une échelle quantitative donnant du sens aux comparaisons entre les écarts de valeurs, c'est-à-dire aux ratios de la forme $x = \frac{f(a)-f(b)}{f(c)-f(d)}$.

Une échelle d'intervalle permet ainsi d'encoder des préférences du type « obtenir $a$ au lieu de $b$ est $x$ fois mieux qu'obtenir $c$ au lieu de $d$ ». Elle est unique à une transformation affine positive près : pour tout $\alpha > 0$ et $\beta$, la fonction $g(a) = \alpha \times f(a) + \beta$ décrit la même échelle d'intervalle.

**Définition 1.10 (Échelle de ratio).** Une échelle de ratio $f : A \to \mathbb{R}$ est une échelle quantitative donnant du sens aux comparaisons entre les valeurs, c'est-à-dire aux ratios de la forme $x = \frac{f(a)}{f(b)}$.

Une échelle de ratio permet donc d'encoder des informations du type « $a$ est $x$ fois mieux que $b$ ». Elle est unique à une constante multiplicative positive près : pour tout $\alpha > 0$, la fonction $g(a) = \alpha \times f(a)$ décrit la même échelle de ratio.

*Remarque* 4. Toute échelle de ratio est une échelle d'intervalle. Tout échelle d'intervalle définit un préordre total.

Historiquement, les premiers travaux se sont concentrés sur l'étude des jeux de hasard, puis sur des questions économiques. Dans ces situations, les conséquences des décisions prises par les agents sont des gains ou des pertes monétaires.

Sous l'hypothèse que l'agent modélisé préfère les gains élevés, les premiers auteurs ont directement considéré la valeur (cardinale) de ces gains. D'une part, le gain est une représentation numérique de telles préférences. D'autre part, en considérant les valeurs des gains potentiels, on dispose d'une information plus riche qu'avec des préférences qualitatives : on peut par exemple savoir si un gain compense une perte donnée. Le gain forme une échelle de ratio.

Dans un second temps, il a été proposé de considérer une mesure de la satisfaction de l'agent, plutôt que le gain lui-même. D'abord parce que la satisfaction n'est pas nécessairement proportionnelle au gain (par exemple, augmenter de 10€ un gain monétaire faible semble plus important que d'augmenter de 10€ un gain élevé) ; ensuite parce que parfois l'agent ne préfère pas les gains élevés (par exemple, laisser 10€ pour les œuvres caritatives peut être plus satisfaisant que les prendre pour soi) ; enfin parce qu'en supposant que la satisfaction et la variabilité se « compensent », on déduit des degrés de satisfaction qui ne sont pas non plus proportionnels au gains (par exemple lorsqu'un agent préfère avoir deux fois plus de chances de gagner deux fois moins). L'échelle considérée est alors une échelle d'intervalle.

Le gain ou son utilité sont tous deux représentés par une fonction $u : A \to \mathbb{R}$ projetant chaque objet $a \in A$ sur une échelle d'intervalle. Son usage est quasi-systématique dans la théorie de la décision classique (cf. section 1.2). En effet, les travaux pionniers du XVIIIe siècle, puis les axiomatiques proposées au XXe siècle supposent toutes soit l'existence d'une telle fonction, soit les conditions nécessaires pour son existence.

**Définition 1.11 (Fonction d'utilité).** Une fonction d'utilité est une fonction à valeurs réelles $u : A \to \mathbb{R}$ projetant tout objet $a \in A$ sur une échelle d'intervalle.

Une fonction d'utilité décrit des préférences quantitatives sur une échelle d'intervalle : pour tous $a, b, c, d \in A$, $u(a) - u(b) = x \times \big(u(c) - u(d)\big)$ si et seulement si choisir l'objet $a$ plutôt que $b$ est $x$ fois mieux que choisir l'objet $c$ au lieu de $d$. Une fonction de gain est aussi une fonction $u : A \to \mathbb{R}$, elle projette tout objet $a \in A$ sur une échelle de ratio.

La théorie classique de la décision postule l'existence de telles préférences quantitatives permettant de décrire tout décideur. Cramer, Bernoulli et les auteurs du XIXe siècle, dans une approche psychologique, ont proposé que l'utilité décrive le degré de satisfaction de l'agent (Cramer, 1728 ; Bernoulli, 1738 ; Bentham, 1789). L'utilité est alors déduite de la conséquence (le gain) et de paramètres décrivant l'agent (sa richesse, etc.) : elle existe « dans l'absolu », même lorsqu'aucune décision ne doit être prise. Cette approche psychologique peut être retrouvée chez Allais et chez Loomes et Sugden par exemple (Allais, 1953, 1979 ; Loomes et Sugden, 1982, 1986). En effet, les auteurs du XXe siècle se placent dans une approche préférentialiste : l'utilité encode alors les préférences de l'agent dans l'incertain, et découle ainsi d'une situation particulière où une décision doit être prise (Morgenstern et Von Neumann, 1953 ; Savage, 1954). Si c'est le cas (cette théorie est normative, elle affirme que ça *devrait* être le cas), alors on peut éliciter cette fonction d'utilité par différentes méthodes basées sur l'observation de l'agent (Jacquet-Lagreze et Siskos, 1982 ; Grabisch, Nguyen et Walker, 2013) ou sur les réponses de l'agent à un questionnaire (Fishburn, 1967 ; Krantz et al., 1971).

Ainsi, les approches préférentialistes considèrent que la fonction d'utilité est propre à chaque agent, voire à chaque prise décision. Pour étudier une décision particulière, elle doit être connue (ou élicitée) auparavant. À l'inverse, l'utilité proposée par Bernoulli dans le cadre des jeux de hasard est déduite de la conséquence (le gain monétaire) et de paramètres décrivant l'agent (sa richesse) : elle peut donc être calculée *à la volée* pour chaque décision à prendre.

Bernoulli propose d'utiliser une loi logarithmique pour modéliser d'une part le fait qu'une même somme d'argent procure plus de satisfaction à un agent pauvre qu'à un agent riche ; et d'autre part le fait qu'augmenter le gain est toujours une bonne chose, mais est plus utile lorsque le gain est faible que lorsqu'il est déjà élevé. En notant $x$ le gain monétaire, $a$ un coefficient représentant la fortune initiale du joueur et $b$ une constante arbitraire, il propose la fonction d'utilité suivante :

**Définition 1.12 (Utilité de Bernoulli, 1738).** Pour un agent de richesse $a$ et une constante $b$ arbitraire, l'utilité d'un gain $x$ est :

$$v(x) = b \times \ln \frac{a + x}{a}$$

Par cette approche, Bernoulli (Daniel) « résoud » le paradoxe de Saint-Pétersbourg proposé par son cousin Bernoulli (Nicolas).

**Exemple 1.5 (Paradoxe de St-Pétersbourg).** Pierre jette en l'air une pièce et refait de même jusqu'à ce que, à la chute à terre, face apparaisse pour la première fois : si ceci se produit au premier jet, il est tenu de donner à Paul un

ducat ; si c'est au second, deux ; au troisième, quatre ; au quatrième, huit et ainsi de suite en doublant à chaque jet le nombre de ducats. On demande quel est le gain espéré de Paul ?
*Bien que le calcul montre que le « sort » espéré de Paul est infini, il n'est cependant personne sain d'esprit,* dit-il, *qui ne vendrait très volontiers son espoir de gain pour vingt ducats. Et en vérité, chaque fois qu'on est disposé à se fier aux règles usuelles de calcul, on trouve que la chance de Paul est infinie, bien qui il n'y ait personne pour l'estimer à ce prix où même à un prix bien plus médiocre. De fait, en menant le calcul selon nos principes, on comprend précisément comment cette difficulté est résolue (Traduction* Charreton, *1985).*

## 1.2 Théorie classique de la décision

Prendre une décision, c'est choisir entre plusieurs alternatives appelées « actions ». Chaque action correspond à un processus simple ou complexe qui mène à une conséquence. Une seule action sera choisie, ainsi une seule conséquence adviendra.

Notons $A$ l'ensemble fini des actions, et $\mathbb{X}$ l'ensemble des conséquences.

Dans la suite du chapitre, nous supposons, comme dans la majorité des travaux, que la fonction d'utilité quantitative $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, décrivant les préférences de l'agent sur les conséquences possibles $x \in \mathbb{X}$, est connue. Elle aura donc été soit déduite directement de la conséquence, soit élicitée auprès de l'agent. Les deux ouvrages de référence supposent qu'une telle fonction existe toujours (sous réserve d'accepter quelques axiomes) : Von Neumann et Morgenstern montrent que la représentation probabiliste de la connaissance de l'agent implique l'existence de cette fonction $u$ (Morgenstern et Von Neumann, 1953), Savage, sans supposer cette connaissance probabiliste, montre l'existence de la fonction $u$ (et d'une loi de probabilité alors appelée *probabilité subjective*, dont l'agent n'est pas nécessairement conscient, Savage, 1954).

On cherchera alors à décrire les préférences de l'agent sur les actions $a \in A$, c'est-à-dire sur les différentes décisions qu'il peut prendre.

Lorsque la connaissance est complète, la conséquence $x_a \in \mathbb{X}$ de chaque action $a \in A$ est parfaitement identifiée. Ainsi, on déduit directement de la structure de préférence quantitative $u$ ou qualitative $\succeq^{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{X}$ une structure de préférence de même type sur $A$ :

$$v(a) = u(x_a) \quad \text{c'est-à-dire} \quad a \succeq^A b \iff x_a \succeq^{\mathbb{X}} x_b$$

Si une décision doit être effectivement prise, l'ensemble de choix $C(A, \succeq^A) = \operatorname{argmax}_{a \in A} v(a)$ peut être identifié : il contient les « meilleures » actions du point de vue de l'agent, c'est-à-dire celles dont les conséquences ont les utilités les plus élevées.

Cependant, dans de nombreuses situations, la conséquence provoquée par telle ou telle action est mal connue. La théorie classique s'intéresse aux deux cas

suivants : l'ignorance totale, où l'on considère simplement les conséquences possibles (Morgenstern et Von Neumann, 1953), et l'approche probabiliste dite bayésienne, où l'on considère la probabilité d'obtenir telle ou telle conséquence (Morgenstern et Von Neumann, 1953 ; Savage, 1954).

Dans ces deux cas, on explicite un ensemble $\Omega$, appelé *cadre de discernement* (ou *espace des états*), dont chaque élément $\omega \in \Omega$ décrit un état du monde possible. Les états du monde sont exclusifs : un seul état du monde $\omega^*$ advient. Cet $\omega^*$ nous est inconnu.

**Définition 1.13 (Cadre de discernement).** Un cadre de discernement est un ensemble fini non vide $\Omega = \{\omega^1, \ldots, \omega^{|\Omega|}\}$.

La conséquence d'une décision dépend uniquement de l'état réel du monde $\omega^*$. On appelle *acte* la fonction décrivant les conséquences possibles d'une décision, que cette décision soit réalisable (l'acte décrit alors les conséquences possibles d'une action $a \in A$ disponible) ou hypothétique (lorsqu'aucune action disponible n'a de telles conséquences) :

**Définition 1.14 (Acte).** Pour tout cadre de discernement $\Omega$ et tout ensemble de conséquence $\mathbb{X}$, un acte est une fonction $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$

Particulièrement, pour toute action $a \in A$, on notera $\chi_a : \Omega \to \mathbb{X}$ l'acte qui associe à chaque état du monde $\omega$ la conséquence de l'action $a$ ; l'ensemble des actes réalisables sera noté $\mathbb{A} = \{\chi_a \mid a \in A\}$ .

*Remarque* 5. Il ne faut pas confondre les *actions*, qui sont les identifiants des différentes décisions que peut effectivement prendre l'agent, et les *actes*, qui sont des fonctions décrivant les conséquences obtenues dans chaque état du monde. Le premier concept, usuel en théorie des jeux (cf. chapitre 2), sert à représenter les choix disponibles uniquement. Le second, usuel en théorie de la décision, sert à représenter les conséquences des choix disponibles mais aussi celles des choix hypothétiques qui ne peuvent pas être effectués. Seuls les actes réalisables de l'ensemble $\mathbb{A}$ correspondent à des choix disponibles.

On cherche alors à capturer les préférences de l'agent sur les actes, c'est-à-dire sur l'ensemble des fonctions $\Omega \to \mathbb{X}$, ou au moins sur le sous-ensemble $\mathbb{A}$ des actes réalisables. Or, selon les agents et les situations, ces préférences ne sont pas toujours identiques. Par exemple, certains agents préfèrent avoir une chance de gagner beaucoup, alors que d'autres préfèrent une garantie de gagner peu (on parle de goût ou d'aversion pour le risque ou l'ambiguïté, ou encore d'optimisme et de pessimisme). Plusieurs *règles de décisions* ont été proposées pour capturer de telles préférences sur les actes.

Après Chu et Halpern, on distinguera la *situation de décision* et le *problème de décision* (Chu et Halpern, 2003). La situation décrit la partie « objective » du problème [5] ; le problème est ainsi la donnée d'une situation de décision d'une

5. Nous reprenons la distinction « objectif/subjectif » utilisée par Chu et Halpern. Néanmoins, la situation de décision peut être formulée subjectivement, du point de vue du décideur (*cf.* théorie des perspectives) et, à l'inverse, les croyances de l'agent peuvent être constituées de connaissances objectives (par exemple, des données statistiques).

part, et des préférences et croyances de l'agent d'autre part. Nous n'introduisons pas encore la structure algébrique permettant l'abstraction des structures de préférences et de croyance. Nous le ferons, d'une manière légèrement différente de ce que proposent ces auteurs, dans la deuxième partie de cette thèse (chapitre 3).

**Définition 1.15 (Situation de décision).** Une situation de décision est un triplet $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ où $\Omega$ est le cadre de discernement, $\mathbb{X}$ est l'ensemble des conséquences et $\mathbb{A}$ est l'ensemble des actes réalisables $\chi_a : \Omega \to \mathbb{X}$ pouvant être effectivement choisis.

**Définition 1.16 (Problème de décision).** Un problème de décision est un triplet $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, Z, u)$ où $\mathcal{A}$ est une situation de décision, $Z$ un paramètre ad-hoc et $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction de gain ou d'utilité quantitative.

Dans les théories classiques de la décision, les règles de décision, comme les préférences, sont quantitatives. Elles associent donc une valeur réelle à chaque acte.

**Définition 1.17 (Règle de décision).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D}$, une règle de décision $U_{\mathcal{D}} : (\Omega \to \mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle[6] évaluant les actes.

On modélise par une règle $U_{\mathcal{D}}$ un agent qui préfère les actes auxquels $U_{\mathcal{D}}$ associe une valeur élevée : pour tous actes $\chi$ et $\chi' : \Omega \to \mathbb{X}$,

$$U_{\mathcal{D}}(\chi) \geq U_{\mathcal{D}}(\chi') \quad \Longleftrightarrow \quad \chi \succeq \chi'$$

Enfin, si l'agent doit effectivement prendre une décision, c'est-à-dire s'il doit choisir l'une des actions $a \in A$ disponibles, on identifiera l'ensemble de choix $C(\mathbb{A}, \succeq^{\mathbb{A}}) = C(\mathbb{A}, \succeq^{\Omega \to \mathbb{X}}) = \operatorname{argmax}_{\chi_a \in \mathbb{A}} U_{\mathcal{D}}(\chi_a)$ contenant les actes préférés parmi ceux réalisables.

**Exemple 1.6 (Situation de décision).** *Soit une urne dans laquelle le démonstrateur a mis 90 boules. Ces boules peuvent être rouges, blanches ou noires. Avant de tirer une boule au hasard, le démonstrateur propose à l'agent de choisir une action parmi les quatre actions suivantes :*

- *$a_1$ : Si la boule tirée est rouge, l'agent gagne 100€, et sinon rien.*
- *$a_2$ : Si la boule tirée est rouge, l'agent gagne 300€, et sinon rien.*
- *$a_3$ : Si la boule tirée est rouge, l'agent ne gagne rien, sinon 100€.*
- *$a_4$ : L'agent gagne 100€ quelque soit la couleur de la boule tirée.*

*La situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ peut être modélisée ainsi :*

- *Le cadre de discernement $\Omega = \{R, B, N\}$ décrit la couleur de la boule tirée ;*
- *L'ensemble des conséquences $\mathbb{X} = \{0€, 100€, 300€\}$ décrit les gains possibles ;*

6. Le terme *fonctionnelle*, ou *fonction d'ordre supérieur*, désigne les fonctions dont l'un des arguments au moins est lui-même une fonction.

— *L'ensemble des actes réalisables* $\mathbb{A} = \{\chi_{a_1}, \chi_{a_2}, \chi_{a_3}, \chi_{a_4}\}$ *est défini par :*

$$\begin{array}{lll} \chi_{a_1}(R) = 100€ & \chi_{a_1}(B) = 0€ & \chi_{a_1}(N) = 0€ \\ \chi_{a_2}(R) = 300€ & \chi_{a_2}(B) = 0€ & \chi_{a_2}(N) = 0€ \\ \chi_{a_3}(R) = 0€ & \chi_{a_3}(B) = 100€ & \chi_{a_3}(N) = 100€ \\ \chi_{a_4}(R) = 100€ & \chi_{a_4}(B) = 100€ & \chi_{a_4}(N) = 100€ \end{array}$$

*Dans les sections suivantes, nous illustrerons les règles de décision classiques sur cette situation de décision.*

### 1.2.1 Prise de décision sous ignorance totale

On parle d'*ignorance totale* lorsque la connaissance est réduite au strict minimum. On dispose alors de très peu d'information : seuls $\Omega$ et $\mathbb{A}$ sont connus, c'est-à-dire que pour chaque action, on connaît l'ensemble des conséquences qui peuvent advenir. Le terme *ignorance* indique ici que nous ne savons pas dire combien une conséquence est probable, crédible, etc. ; nous savons uniquement qu'une conséquence est possible ou non si telle action est choisie. Un problème de décision sous ignorance totale est donc décrit par une situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ et par les préférences $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ de l'agent, exprimées sur les conséquences. Ainsi, $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$.

Selon l'agent modélisé, plusieurs règles de décision sont applicables (Resnik, 1987). La règle Min (maximin, ou *règle de Wald*) décrit un agent pessimiste (considérant le pire scénario possible) ; la règle Max décrit un agent optimiste (considérant le meilleur scénario possible) ; la règle de Hurwicz est un compromis entre les deux règles précédentes ; la règle du regret de Savage consiste à minimiser la déception de l'agent lorsqu'il découvre finalement l'état réel du monde ; enfin, la règle de Laplace consiste à faire une moyenne de toutes les gains possibles, selon le principe « équi-possibilité = équi-probabilité » (Laplace, 1814 ; Wald, 1949 ; Hurwicz, 1951 ; Savage, 1951).

**Définition 1.18 (Règle Min, ou règle de Wald, 1949).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$, l'utilité d'un acte $\chi$ est l'utilité minimale garantie :

$$\mathrm{Min}_{\mathcal{D}}(\chi) = \min_{\omega \in \Omega} u(\chi(\omega))$$

**Définition 1.19 (Règle Max).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$, l'utilité d'un acte $\chi$ est l'utilité maximale possible :

$$\mathrm{Max}_{\mathcal{D}}(\chi) = \max_{\omega \in \Omega} u(\chi(\omega))$$

**Définition 1.20 (Règle de Hurwicz, 1951).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$, l'utilité d'un acte $\chi$ est un compromis entre l'utilité minimale garantie et l'utilité maximale possible, avec un degré de pessimisme $\alpha \in [0, 1]$ :

$$\mathrm{Hurwicz}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(\chi) = \alpha \times \mathrm{Min}_{\mathcal{D}}(\chi) + (1 - \alpha) \times \mathrm{Max}_{\mathcal{D}}(\chi)$$

**Définition 1.21 (Règle du regret de Savage, 1951).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$, le regret d'un acte $\chi$ est l'écart maximal possible entre son utilité et celle d'un acte réalisable :

$$\text{Regret}_{\mathcal{D}}(\chi) = \max_{\chi_a, \omega \in \mathbb{A} \times \Omega} u(\chi_a(\omega)) - u(\chi(\omega))$$

*Remarque* 6. Le regret est une désutilité, c'est-à-dire que le décideur préfère l'action ayant le plus petit regret. L'ensemble de choix est donc $C(\mathbb{A}, \succeq^{\mathbb{A}}) = \text{argmin}_{\chi_a \in \mathbb{A}} \text{Regret}_{\mathcal{D}}(\chi_a)$. La règle de décision, au sens de la définition 1.17, est alors $U_{\mathcal{D}}(\chi) = -\text{Regret}_{\mathcal{D}}(\chi)$.

**Définition 1.22 (Règle de Laplace, 1814).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$, l'utilité d'un acte $\chi$ est la moyenne des gains possibles :

$$\text{Laplace}_{\mathcal{D}}(\chi) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{u(\chi(\omega))}{|\Omega|}$$

Cette définition peut être étendue sans difficulté à la moyenne des utilités, en conservant le principe directeur « équi-possibilité = équi-probabilité » : c'est ce que propose Bernoulli pour le paradoxe de Saint-Petersbourg (définition 1.12 et exemple 1.5)

*Remarque* 7. Les règles Min et Max ne font intervenir que des comparaisons : elles peuvent être utilisées avec des préférences qualitatives autant que quantitatives, et décriront alors des préférences de même type sur les actes. À l'inverse, les règles d'Hurwicz et de Laplace font intervenir une combinaison linéaire des utilités, et la règle du regret de Savage considère les écarts entre les utilités ; leur utilisation n'a de sens qu'avec des préférences quantitatives.

**Exemple 1.7 (Décision sous ignorance totale).** *Reprenons la situation $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ décrite à l'exemple 1.6, et plaçons nous dans un contexte d'ignorance totale : l'agent n'a aucune idée sur les proportions de boules rouges, blanches et noires dans l'urne – il sait uniquement que ces trois couleurs sont possibles.*

*Supposons que l'agent préfère gagner le plus d'argent possible. Ses préférences sur les conséquences sont modélisables de manière qualitative par toute fonction d'utilité $u$ vérifiant $u(0€) < u(100€) < u(300€)$. Nous considérons ici deux fonctions d'utilité quantitatives acceptables : $u(x) = x$ est la fonction de gain, et $v(x) = \log(x+1)$ est une déformation logarithmique à la Bernoulli (définition 1.12) :*

$$\begin{array}{lll} u(0€) = 0 & u(100€) = 100 & u(300€) = 300 \\ v(0€) = 0 & v(100€) = 2 & v(300€) = 2.5 \end{array}$$

*Enfin, posons $\mathcal{D}_u = (\mathcal{A}, \emptyset, u)$ et $\mathcal{D}_v = (\mathcal{A}, \emptyset, v)$ les problèmes de décision sous ignorance totale correspondants.*

— *La règle* Min *encode les préférences d'un agent pessimiste, qui préfère garantir un gain de 100€ en choisissant $a_4$ plutôt que de risquer de ne*

*rien gagner en choisissant autre chose :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_4}) = 100 &> \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_1}) = \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_2}) = \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_3}) = 0 \\ \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_4}) = 2 &> \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_1}) = \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_2}) = \mathrm{Min}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_3}) = 0 \end{aligned}$$

*Les préférences ainsi décrites sont identiques pour $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$ :*

$$a_1 \sim a_2 \sim a_3 \prec a_4$$

— *La règle* Max *encode les préférences d'un agent optimiste, préférant l'opportunité de gagner 300€ en choisissant $a_2$ plutôt que l'opportunité de gagner 100€ seulement en choisissant autre chose :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_2}) = 300 &> \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_1}) = \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_3}) = \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_4}) = 100 \\ \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_2}) = 2.5 &> \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_1}) = \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_3}) = \mathrm{Max}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_4}) = 2 \end{aligned}$$

*Les préférences ainsi décrites sont identiques pour $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$ :*

$$a_1 \sim a_3 \sim a_4 \prec a_2$$

— *La règle* Hurwicz$^\alpha$ *permet de moduler le degré de pessimiste $\alpha \in [0,1]$ de l'agent. Pour la fonction d'utilité linéaire $u$, on obtient :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_1}) = \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_3}) &= 100 \times (1-\alpha), \\ \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_2}) &= 300 \times (1-\alpha) \\ \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_4}) &= 100 \end{aligned}$$

*Pour la déformation logarithmique $v$, on obtient :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_1}) = \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_3}) &= 2 \times (1-\alpha), \\ \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_2}) &= 2.5 \times (1-\alpha) \\ \mathrm{Hurwicz}^\alpha_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_4}) &= 2 \end{aligned}$$

*Posons $x_u = \frac{1}{3}$ et $x_v = \frac{1}{5}$. Pour chaque problème $\mathcal{D}_k$ ($k \in \{u, v\}$), on observe :*

— *Les préférences d'un agent optimiste, avec $\alpha \in [0, x_k[$, sont : $a_1 \sim a_3 \prec a_4 \prec a_2$, il préfère l'opportunité de gagner 300€ en choisissant $a_2$ ;*

— *Les préférences d'un agent pessimiste, avec $\alpha \in ]x_k, 1]$, sont : $a_1 \sim a_3 \prec a_2 \prec a_4$, il préfère assurer 100€ de gain en choisissant $a_4$ ;*

— *Lorsque $\alpha = x_k$, l'agent est indifférent entre $a_2$ et $a_4$* [7] *;*

7. On remarque que $x_v < x_u$ : le seuil auquel la décision de l'agent bascule du choix optimiste $a_2$ au choix pessimiste $a_4$ est plus faible pour $v$ que pour $u$. En effet, une fonction d'utilité concave telle que $v$ permet de représenter les préférences de l'agent sous certitude d'une part (comme le propose Bernoulli), et son aversion au risque d'autre part. L'aversion au risque portée par la fonction d'utilité $u$ est une forme de pessimisme qui interfère avec celui porté par le paramètre $\alpha$.

— *Enfin, pour* $\alpha = 0$ *et* $\alpha = 1$*, on retrouve les résultats obtenus avec les règles* Min *et* Max*.*

— *La règle* Regret *décrit le manque à gagner potentiel de chaque acte :*

$$\begin{aligned}\text{Regret}_{\mathcal{D}_u}(a_2) = 100 &< \text{Regret}_{\mathcal{D}_u}(a_1) = \text{Regret}_{\mathcal{D}_u}(a_4) = 200\\ &< \text{Regret}_{\mathcal{D}_u}(a_3) = 300\\ \text{Regret}_{\mathcal{D}_v}(a_4) = 0.5 &< \text{Regret}_{\mathcal{D}_v}(a_1) = \text{Regret}_{\mathcal{D}_v}(a_2) = 2\\ &< \text{Regret}_{\mathcal{D}_v}(a_3) = 2.5\end{aligned}$$

*Les préférences ainsi décrites pour* $\mathcal{D}_u$ *sont :* $a_3 \prec a_1 \sim a_4 \prec a_2$ *: l'agent préfère* $a_2$ *car il peut ne peut regretter qu'un manque à gagner de 100€, pour les autres choix il pourrait regretter un manque de 200€ voire 300€. À l'inverse, les préférences décrites pour* $\mathcal{D}_v$ *sont :* $a_3 \prec a_1 \sim a_2 \prec a_4$*. Le regret étant exprimé en terme d'utilité, la déformation logarithmique proposée est très impactante : gagner 0€ au lieu de 100€ représente alors un regret de 2 points d'utilité, plus élevé que gagner 100€ au lieu de 300€ qui représente un regret de 0.5 point d'utilité.*[8]

— *La règle de Laplace correspond au principe d'équiprobabilité. Pour* $\mathcal{D}_u$ *:*

$$\begin{aligned}\text{Laplace}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_1}) &= 100/3 & \text{Laplace}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_3}) &= 200/3\\ \text{Laplace}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_2}) &= 100 & \text{Laplace}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_4}) &= 100\end{aligned}$$

*Les préférences décrites sont :* $a_2 \prec a_3 \prec a_2 \sim a_4$*. L'agent étant neutre face au risque (u est linéaire par rapport au gain), on constate qu'il est indifférent entre le gain certain et le fait d'avoir une chance sur trois de gagner le triple. À l'inverse, pour* $\mathcal{D}_v$ *:*

$$\begin{aligned}\text{Laplace}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_1}) &= 2/3 & \text{Laplace}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_3}) &= 4/3\\ \text{Laplace}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_2}) &= 2.5/3 & \text{Laplace}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_4}) &= 6/3\end{aligned}$$

*Les préférences décrites sont alors :* $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4$*. La déformation logarithmique de l'utilité impacte ces préférences et décrit l'aversion au risque de l'agent, qui préfère alors le gain certain.*

### 1.2.2 Prise de décision sous connaissance probabiliste

Lorsque l'environnement présente une certaine variabilité, provenant par exemple de phénomènes aléatoires, il est naturel de la décrire par une loi de probabilité, qui capture alors une connaissance générique (par exemple issue de données statistiques en nombre suffisant). Cette connaissance est alors « absolue » : on peut l'interroger mais elle n'est pas sensée évoluer, sauf si l'environnement évolue lui aussi.

8. Pour cette règle, il semble que la déformation concave de l'utilité ne décrive pas d'aversion au risque, mais uniquement les préférences de l'agent « sous certitude », c'est-à-dire sa satisfaction de recevoir une telle somme d'argent « dans l'absolu », en dehors de tout problème de décision.

De nombreux auteurs ont argumenté que les probabilités ne décrivent pas uniquement la variabilité objective des phénomènes, mais peuvent aussi décrire aussi la connaissance subjective de l'agent : la connaissance de l'agent serait toujours représentable par une unique loi de probabilité. C'est le cas pour la règle de Laplace (Définition 1.22) et surtout pour les deux axiomatiques classiques proposées par Von Neumann et Morgenstern d'une part, où la loi de probabilité est supposée initialement (Morgenstern et Von Neumann, 1953), et celle proposée par Savage d'autre part (Savage, 1954), où l'existence de cette loi de probabilité est déduite (l'agent y décide « comme si » il se basait sur une loi de probabilité, même s'il ne la connaît pas lui-même). Une telle probabilité capture alors une connaissance particulière (relative aux croyances de l'agent), qui peut être interrogée, mais qui doit aussi être précisée ou corrigée si l'agent acquiert de nouvelles connaissances.

**Définition 1.23 (Événement).** Un événement du cadre de discernement $\Omega$ est un sous-ensemble $B \subseteq \Omega$

Un événement $B$ représente la proposition « $\omega^* \in B$ », c'est-à-dire la proposition « le véritable état du monde est l'un de ceux de $B$ ».

**Définition 1.24 (Mesure de probabilité à support fini).** Pour tout cadre de discernement $\Omega$ fini, une mesure de probabilité $\Pr : 2^\Omega \to [0,1]$ est une fonction vérifiant $\Pr(\emptyset) = 0$, $\Pr(\Omega) = 1$ et $\forall A, B \subseteq \Omega$ disjoints, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$. [9]

Pr donne la probabilité de tout événement, i.e. $\Pr(X)$ est la probabilité que $\omega^* \in X$. Elle est souvent représentée par sa distribution $p : \Omega \to [0,1]$ :

$$\Pr(X) = \sum_{\omega \in X} p(x)$$

**Exemple 1.8 (Urne simple).** *Reprenons l'exemple 1.6, mais supposons que l'on connaisse parfaitement le contenu de l'urne :* $1/3$ *des boules sont rouges,* $1/3$ *sont blanches et* $1/3$ *sont noires. La distribution de probabilité* $p$*, vérifiant* $p(R) = p(B) = p(N) = 1/3$*, définit la mesure de probabilité* Pr *donnée en Table 1.1.*

| $X$ | $\emptyset$ | $\{R\}$ | $\{N\}$ | $\{B\}$ | $\{R,N\}$ | $\{R,B\}$ | $\{N,B\}$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X)$ | 0 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 2/3 | 2/3 | 2/3 | 1 |

Table 1.1 – Mesure de probabilité définie par $p$ (exemple 1.8)

*Remarque* 8. Notons que la connaissance est ici totalement quantifiée : les valeurs prises par Pr sont cardinales et cohérentes entre elles, c'est-à-dire qu'elles

9. Nous définissions un cadre de discernement $\Omega$ comme un ensemble fini non vide (définition 1.13). Dans un cadre probabiliste, puisque $\Pr(\emptyset) \neq \Pr(\Omega)$, nous pouvons déduire que $\Omega$ est non vide : ce n'est pas une hypothèse mais une conclusion.

vérifient $\Pr(X) = \sum_{\omega \in X} p(x)$ pour tout $X$). On dit qu'une loi de probabilité est une connaissance *précise* : les valeurs prises par $p$ et par Pr sont parfaitement connues.

### La mise à jour des connaissances

Une loi de probabilité Pr peut décrire une connaissance générique à propos d'une situation, issue par exemple d'un ensemble de données statistiques représentatif, ou bien de manière subjective, Pr peut représenter les croyances d'un agent sur cette situation. Lorsqu'on apprend une nouvelle information $\omega^* \in C$, il faut mettre à jour cette connaissance. Selon la nature de l'information apprise, on distingue deux types de mises à jour : le *focus* et la *révision* (Dubois et Prade, 1993, 1994a, 1997). Si la nouvelle information décrit une vérité générique, il faut corriger la connaissance initiale (le *prior*) afin de créer une nouvelle connaissance (le *posterior*) : c'est une révision de connaissance. Le prior devient alors caduque, seul le posterior est maintenant pertinent pour décrire la connaissance. À l'inverse, si l'information apprise décrit l'observation d'un cas particulier, alors on souhaite effectuer un changement de référence : c'est un focus. Le posterior décrit alors une connaissance particulière (relative à l'observation), mais le prior reste pertinent pour décrire la connaissance générique (et pourra être interrogé à nouveau pour étudier un autre cas particulier).

**Exemple 1.9.** *Considérons les deux situations suivantes, proposées par* Dubois *et* Prade, *1992 :*

1. *Un dé a été lancé un million de fois, et* $\Pr(i)$ *est la probabilité que la face* $i$ *advienne.* $\Pr(i)$ *est bien entendu basée sur les fréquences d'observations de chaque face. On considère alors la question suivante : « Combien de fois le dé s'est arrêté sur la face* $i$ *parmi les fois où le dé s'est arrêté sur une face impaire ? »*
2. *Un dé a été jeté par un joueur qui n'a pas encore vu le résultat. Il a des croyances sur les résultats les plus probables, sous la forme d'une probabilité* $\Pr(i)$*. Avant de connaître le résultat, un ami lui dit que ce résultat est impair. Comment le joueur doit-il mettre à jour ses croyances ?*

*Les deux situations sont clairement différentes : la première entraîne un focus (le prior est toujours pertinent, le posterior est une restriction de la connaissance aux cas où le résultat est impair) ; la seconde implique une révision (le prior devient caduque, le posterior est la nouvelle croyance, affinée, corrigée, étant donnée la nouvelle information).*

L'école bayésienne affirme que les deux questions doivent être répondues en considérant la probabilité conditionnelle $\Pr(i \mid \text{impair})$. Cela fait consensus dans le cas du focus (le conditionnement bayésien correspond ici à considérer les fréquences au sein de la classe des résultats impairs), mais est débattu dans le cas de la révision. En effet, s'il est clair qu'il faut établir une nouvelle distribution $\Pr'$ sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en forçant $\Pr'(\mathit{pair}) = 0$, plusieurs règles permettent d'arriver à ce résultat, et toutes peuvent prétendre à réviser la connaissance.

La règle de Bayes n'est ainsi que l'une des règles possibles. Son usage pour la révision est justifié par le fait que c'est la règle qui implique le moins de changement dans les valeurs (au sens de l'entropie croisée), ou encore que c'est la seule règle conservant les rapports $\Pr'(A)/\Pr'(B) = \Pr(A)/\Pr(B)$, pour tout $A, B \subseteq C$, où $C = \{1, 3, 5\}$ est l'information apprise. Néanmoins, ce n'est pas nécessairement le comportement attendu pour la révision. La règle d'*imaging* proposée par Lewis, par exemple, est une autre règle de révision où la probabilité de $C^c$ (que l'on sait maintenant impossible) est reportée sur l'état du monde $\omega$ le plus proche de $C^c$, et non pas répartie sur tous les états du monde possibles (Lewis, 1976).

Les théoriciens de la décision adoptent classiquement le point de vue bayésien. L'utilisation des probabilités conditionnelles est ainsi systématique, tant pour la révision que pour le focus.

**Définition 1.25 (Probabilité conditionnelle).** Soient une mesure de probabilité $\Pr : 2^\Omega \to [0, 1]$ définie sur un cadre de discernement fini $\Omega$, $p$ sa distribution, et $C$ un événement vérifiant $\Pr(C) > 0$. La distribution $p(\cdot \mid C)$ encodant la mesure de probabilité conditionnelle $\Pr(\cdot \mid C)$ est :

$$p(\omega \mid C) = \begin{cases} p(\omega)/\Pr(C) & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De cette définition découlent les expressions suivantes :

$$\Pr(B \mid C) = \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(B \cap C) + \Pr(B^c \cap C)} \tag{1.1}$$

$$= \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} \tag{1.2}$$

**Exemple 1.10 (Conditionnement).** *Reprenons l'Exemple 1.8, et considérons les deux mises-à-jour suivantes :*

- *Le démonstrateur annonce : « Aujourd'hui, il n'y avait pas de boules blanches, il n'y en a donc aucune dans l'urne ». Il faut corriger la connaissance initiale concernant le contenu de l'urne : il s'agit d'une révision des connaissance.*
- *Le démonstrateur tire une boule au hasard, et annonce : « Cette boule n'est pas blanche ». La connaissance initiale n'est pas remise en cause, mais on peut déduire une nouvelle connaissance concernant la couleur des boules qui ne sont pas blanches : il s'agit d'un focus.*

*Dans les deux cas, l'approche bayésienne mène à la probabilité conditionnelle décrite dans la table 1.2, attribuant autant de chances aux couleurs rouge et noire, mais où la couleur blanche est impossible.*

### L'utilité espérée

La règle de décision la plus courante est celle de l'« utilité espérée », proposée dès XVIIIe siècle, pour les probabilités objectives puis subjectives (Bernoulli,

| $X$ | $\emptyset$ | $\{R\}$ | $\{N\}$ | $\{B\}$ | $\{R,N\}$ | $\{R,B\}$ | $\{N,B\}$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(X \mid \{R,N\})$ | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 1/2 | 1 |

TABLE 1.2 – Mesure de probabilité définie par $p(\cdot \mid \{R,N\})$ (Exemple 1.10)

1738 ; LAPLACE, 1814 ; MORGENSTERN et VON NEUMANN, 1953 ; SAVAGE, 1954). Elle décrit assez bien les préférences des décideurs dans certaines situations, particulièrement dans les situations qui se répètent et où la connaissance est précise.

Cette règle fait bien évidemment intervenir la mesure de probabilité décrivant la connaissance de l'agent. La description d'un problème de décision bayésien est ainsi un triplet $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \Pr, u)$.

**Définition 1.26 (Règle EU – Utilité Espérée).** Pour un problème de décision bayésien $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \Pr, u)$, l'utilité espérée d'un acte $\chi$ est :

$$\mathrm{EU}_{\mathcal{D}}(\chi) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\{\omega\}) \times u(\chi(\omega))$$

*Remarque* 9. Les valeurs prises par la fonction d'utilité doivent être cardinales, comme celles prises par la loi de probabilité. En effet, la règle EU fait intervenir de la proportionnalité entre les valeurs d'utilité et les probabilités : on considère donc les rapports et écarts entre les valeurs.

**Exemple 1.11 (Utilité espérée).** *Reprenons la situation $\mathcal{A}$ de l'exemple 1.6, où l'agent doit choisir parmi ces quatre actions :*

- *$a_1$ : Si la boule tirée est rouge, l'agent gagne 100€, et sinon rien.*
- *$a_2$ : Si la boule tirée est rouge, l'agent gagne 300€, et sinon rien.*
- *$a_3$ : Si la boule tirée est rouge, l'agent ne gagne rien, sinon 100€.*
- *$a_4$ : L'agent gagne 100€ quelque soit la couleur de la boule tirée.*

*Par contre, nous supposons maintenant que l'agent a une connaissance probabilisée de l'urne.*

*Avec 1/3 de chance pour chacune des trois couleurs, nous retrouvons directement les préférences obtenues avec la règle de Laplace (exemple 1.7). En effet, ici, les trois couleurs sont équiprobables. C'est ce qu'on avait supposé sous ignorance totale.*

*Intéressons-nous maintenant à cette même situation $\mathcal{A}$, mais après que le démonstrateur a annoncé la couleur blanche impossible. Que ce soit par révision ou par focus, on a déduit la probabilité $\Pr(\cdot \mid \{R,N\})$ dont la distribution est $p(R) = p(N) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = 0$ (exemple 1.10). Ici encore, nous considèrerons les deux fonctions d'utilité $u$ et $v$. La première est linéaire par rapport au gain : $u(x€) = x$ ; la seconde est une déformation logarithmique : $v(x€) = \log(x+1)$.*

*La situation de décision n'a pas changé. Les problèmes de décision contiennent la connaissance mise à jour et les préférences de l'agent :*

$$\mathcal{A} = \big(\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A}\big) \quad \mathcal{D}_u = \big(\mathcal{A}, \Pr(\cdot \mid \{R,N\}), u\big) \quad \mathcal{D}_v = \big(\mathcal{A}, \Pr(\cdot \mid \{R,N\}), v\big)$$

*La règle de l'utilité espérée permet d'évaluer chaque acte. Pour $\mathcal{D}_u$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_1}) &= \frac{1}{2} \times u(100€) + \frac{1}{2} \times u(0€) && = 50 \\
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_2}) &= \frac{1}{2} \times u(300€) + \frac{1}{2} \times u(0€) && = 150 \\
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_3}) &= \frac{1}{2} \times u(0€) + \frac{1}{2} \times u(100€) && = 50 \\
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_u}(\chi_{a_4}) &= \frac{1}{2} \times u(100€) + \frac{1}{2} \times u(100€) && = 100
\end{aligned}$$

*Les préférences ainsi décrites sont : $a_1 \sim a_3 \prec a_4 \prec a_2$ : l'agent préfère avoir une chance sur deux de gagner 300€ plutôt qu'un gain certain de 100€. Inversement, pour $\mathcal{D}_v$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_1}) &= \frac{1}{2} \times v(100€) + \frac{1}{2} \times v(0€) && = 1 \\
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_2}) &= \frac{1}{2} \times v(300€) + \frac{1}{2} \times v(0€) && = 1.25 \\
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_3}) &= \frac{1}{2} \times v(0€) + \frac{1}{2} \times v(100€) && = 1 \\
\mathrm{EU}_{\mathcal{D}_v}(\chi_{a_4}) &= \frac{1}{2} \times v(100€) + \frac{1}{2} \times v(100€) && = 2
\end{aligned}$$

*Les préférences ainsi établies sont : $a_1 \sim a_3 \prec a_2 \prec a_4$ : l'agent préfère le gain certain de 100€. La concavité de la fonction $v$ capture l'aversion au risque de l'agent.*

### Limites de l'utilité espérée

La théorie classique de la décision sous incertitude, basée sur la règle de l'utilité espérée, a permis au cours du XXe siècle de modéliser et d'étudier de nombreuses situations de décision avec un succès indéniable, conjointement avec l'essor des méthodes de recherche opérationnelle (Blackett, 1950 ; Dantzig, 1951 ; Lenstra, Rinnooy Kan et Schrijver, 1991). Cette mise en pratique a aussi révélé les limites de cette théorie. Les travaux précurseurs de Simon (Simon, 1947 ; Emerson, 1962 ; Cyert, March et al., 1963 ; March et Simon, 1993) sur les décisions prises par des organisations en situation réelle, ainsi que les expériences réalisées en laboratoire (Allais, 1953 ; Ellsberg, 1961), ont révélé que dans certaines situations, les préférences de la majorité des décideurs ne peuvent pas être capturées par la règle de l'utilité espérée.

Nous illustrons certaines de ces limites en donnant les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg, ainsi qu'une sélection des résultats obtenus par Kahneman et Tversky, 1979, issue de Loomes et Sugden, 1982.

**Exemple 1.12 (Paradoxe d'Allais, 1953).** *Un agent est confronté successivement à deux jeux de hasard. Dans un premier temps, on lui demande de choisir l'une des actions suivantes :*

— $a_1$ : *1M€ à coup sûr*
— $a_2$ : *5M€ avec 10% de chances, 1M€ avec 89% de chances, et rien sinon*

*Dans un second temps, on lui propose de choisir l'une des actions suivantes :*

— $b_1$ : *1M€ avec 11% de chances, rien sinon*
— $b_2$ : *5M€ avec 10% de chances, rien sinon*

*La majorité des candidats choisissent $a_1$ puis $b_2$ : leurs préférences sont telles que $a_1 \succ a_2$ et que $b_1 \prec b_2$. Or, de telles préférences ne peuvent pas être représentées par la théorie de l'utilité espérée ! En effet, quel que soit $u$, on a :*

$$\begin{aligned} a_1 \succ a_2 &\iff u(1M€) > 0.10 \times u(5M€) + 0.89 \times u(1M€) + 0.01 \times u(0€) \\ &\iff 0.11 \times u(1M€) > 0.10 \times u(5M€) + 0.01 \times u(0€) \\ b_1 \prec b_2 &\iff 0.11 \times u(1M€) + 0.89 \times u(0€) < 0.1 \times u(5M€) + 0.90 \times u(0€) \\ &\iff 0.11 \times u(1M€) < 0.10 \times u(5M€) + 0.01 \times u(0€) \end{aligned}$$

*On obtient ainsi une contradiction : la règle de l'utilité espérée est incapable de capturer de telles préférences.*

**Exemple 1.13 (Paradoxe d'Ellsberg, 1961).** *Une urne contient 30 boules rouges et 60 boules issues d'un sac contenant des boules noires et/ou des boules blanches. Le démonstrateur s'apprête à tirer une boule au hasard, et propose au candidat d'effectuer deux choix : Dans un premier temps, il demande au candidat de choisir l'une des actions suivantes :*

— $a_1$ : *100€ si la boule tirée est rouge, rien sinon*
— $a_2$ : *100€ si la boule tirée est blanche, rien sinon*

*Dans un second temps, il lui propose de choisir l'une des actions suivantes :*

— $b_1$ : *100€ si la boule tirée n'est pas rouge, rien sinon*
— $b_2$ : *100€ si la boule tirée n'est pas blanche, rien sinon*

*La majorité des candidats choisissent $a_1$ et $b_1$. Or, il n'existe aucune fonction d'utilité et probabilité permettant de décrire de telles préférences avec la règle de l'utilité espérée. En effet, supposons sans perte de généralité que $u(100€) = 1$ et $u(0€) = 0$, alors :*

$$\begin{aligned} a_1 \succ a_2 &\iff \Pr(R) > \Pr(B) \\ b_1 \succ b_2 &\iff \Pr(R, N) < \Pr(B, N) \\ &\iff \Pr(R) + \Pr(N) < \Pr(B) + \Pr(N) \\ &\iff \Pr(R) < \Pr(B) \end{aligned}$$

*Ainsi, on obtient une contradiction : le candidat considérerait que $\Pr(R) > \Pr(B)$ lors du premier choix, mais que $\Pr(B) > \Pr(N)$ lors du second. La règle de l'utilité espérée est incapable de capturer ces préférences.*

**Exemple 1.14 (Extrait de l'étude de Kahneman et Tversky, 1979).** *Plusieurs choix hypothétiques entre des paires d'actions ont été proposés à des étudiants et des universitaires. Pour chaque action, les gains ou pertes monétaires possibles sont associés à des probabilités. On note $(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$ l'action qui provoque le gain ou la perte $x_i$ avec une probabilité $p_i$, les gains nuls*

*($x_i = 0$) ne sont pas représentés. La table 1.3 liste certains des résultats obtenus par Kahneman et Tversky dans leur étude. On y voit que la majorité des sondés présente une aversion au risque pour les gains de probabilité élevée ($X_5 \prec X_6$) et une « recherche » du risque pour ceux de probabilité faible ($X_{19} \succ X_{20}$). Cette attitude est inversée lorsqu'on considère des pertes au lieu de gains ($X_7 \succ X_8$ et $X_{21} \prec X_{22}$).*

| Actions | Préférences | Prop. | Type |
|---|---|---|---|
| $X_1 = (2500, 0.33; 2400, 0.66)$<br>$X_2 = (2400, 1)$ | $X_1 \prec X_2$ | 82% | Aversion au risque |
| $X_3 = (2500, 0.33)$<br>$X_4 = (2400, 0.34)$ | $X_3 \succ X_4$ | 83% | ? |
| $X_5 = (4000, 0.8)$<br>$X_6 = (3000, 1)$ | $X_5 \prec X_6$ | 80% | Aversion au risque |
| $X_7 = (-4000, 0.8)$<br>$X_8 = (-3000, 1)$ | $X_7 \succ X_8$ | 92% | Recherche du risque |
| $X_9 = (4000, 0.2)$<br>$X_{10} = (3000, 0.25)$ | $X_9 \succ X_{10}$ | 65% | ? |
| $X_{11} = (-4000, 0.2)$<br>$X_{12} = (-3000, 0.25)$ | $X_{11} \prec X_{12}$ | 58% | ? |
| $X_{13} = (6000, 0.45)$<br>$X_{14} = (3000, 0.09)$ | $X_{13} \prec X_{14}$ | 86% | Aversion au risque |
| $X_{15} = (6000, 0.001)$<br>$X_{16} = (3000, 0.002)$ | $X_{15} \succ X_{16}$ | 73% | Recherche du risque |
| $X_{17} = (X_5, 0.25)$<br>$X_{18} = (X_6, 0.25)$ | $X_{17} \prec X_{18}$ | 78% | Aversion au risque |
| $X_{19} = (5000, 0.001)$<br>$X_{20} = (5, 1)$ | $X_{19} \succ X_{20}$ | 72% | Recherche du risque |
| $X_{21} = (-5000, 0.001)$<br>$X_{22} = (-5, 1)$ | $X_{21} \prec X_{22}$ | 83% | Aversion au risque |

TABLE 1.3 – Extrait des résultats obtenus par Kahneman et Tversky, issu de (LOOMES et SUGDEN, 1982). Pour chaque paire d'actions, les préférences majoritaires, leur proportion et leur type sont indiqués.

Ces trois exemples illustrent certaines incompatibilités entre la théorie de l'utilité espérée et les préférences réelles de décideurs. De nombreux auteurs ont débattu les raisons de ces limitations. Ils ont noté que :

**Les axiomatisations sont criticables.** Les travaux fondateurs de Morgenstern et Von Neumann d'une part et ceux de Savage d'autre part,

sont des axiomatisations : à partir d'axiomes supposés acceptables, ces auteurs en dérivent la règle de l'utilité espérée. La pertinence des axiomes peut être mise en cause. Par exemple, le paradoxe d'Allais et les préférences majoritaires $X_1 \prec X_2$ et $X_3 \succ X_4$ de l'étude de Kahneman et Tversky mettent en défaut l'axiome d'indépendance considéré dans un cadre séquentiel : les préférences entre deux actions ne sont pas conservées lorsqu'on les combine chacune avec une même troisième action.

**L'ignorance est ignorée.** Le paradoxe d'Ellsberg met en évidence le fait que la plupart des décideurs ne traitent pas de la même manière la variabilité intrinsèque des phénomènes et leur propre ignorance de ces phénomènes. Or la théorie classique postule, après Laplace, que l'ignorance doit être représentée par l'équiprobabilité. La variabilité apporte une connaissance précise et, dans une vision à long terme au moins, l'espérance est très pertinente : les gains élevés compensent les gains faibles, et après de nombreuses expériences, le gain moyen est proche de l'espérance. À l'inverse, l'ignorance n'apporte aucune connaissance. Même dans une vision à long terme, il n'y a aucune raison pour que les gains se compensent ni ne s'approchent de l'espérance (Ellsberg, 1961 ; Ferson et Ginzburg, 1996 ; Anderson et Hattis, 1999).

**L'expression du problème n'est pas prise en compte.** La théorie classique évalue les préférences de l'agent en fonction de l'état final (par exemple, sa richesse totale après que la décision est prise). Or, Kahneman et Tversky ont montré que l'expression du problème en termes de gains ou de pertes impacte grandement les préférences de l'agent, même lorsque les états finaux sont identiques (par exemple, avoir une chance de gagner, ou bien recevoir une somme et avoir une chance de la perdre). Une fonction d'utilité peut décrire les préférences de l'agent dans un cas mais pas dans l'autre, ce qui semble étonnant.

**L'aversion *et* la recherche du risque cohabitent.** Ces mêmes auteurs ont montré que la majorité des sondés présentent une aversion au risque pour les gains et une recherche du risque pour les pertes de probabilité élevée, mais une aversion au risque pour les pertes et une recherche du risque pour les gains de probabilité faible. Dans la théorie classique cette aversion est capturée par la concavité de la fonction d'utilité. Une même fonction d'utilité ne peut donc pas décrire deux expériences qui ont les mêmes conséquences (mais pas les mêmes probabilités d'advenir), ce qui est surprenant.

D'autres limitations ont aussi été identifiées. Certains auteurs ont remarqué, en particulier, que dans la théorie de l'utilité espérée :

**L'utilité joue un double rôle.** Dans la théorie classique l'aversion à l'ambiguïté ou au risque est modélisée par une fonction d'utilité concave, et la recherche du risque par une fonction d'utilité convexe. Or, dans une approche psychologique, la concavité représente aussi les préférences du décideur sous certitude (cf. utilité de Bernoulli, définition 1.12). Ces deux effets deviennent alors indiscriminables (Allais, 1953 ; Kahneman et

Tversky, 1979 ; Loomes et Sugden, 1982 ; Quiggin, 1982 ; Loomes et Sugden, 1986).

**On recherche le « meilleur » choix.** La théorie classique suppose que l'agent est absoluement maximisateur de l'utilité espérée. Or, Simon a développé la notion de « rationalité locale » (bounded rationality, Simon, 1955) pour capturer le fait que bien souvent, le décideur se contente de décisions « suffisement bonnes », sans chercher le maximum absolu : la règle de l'utilité espérée serait ainsi trop restrictive.

**Il faut tout quantifier.** Définir la fonction d'utilité et la loi de probabilité nécessite une connaissance précise de la situation modélisée. Or souvent, l'information disponible n'est pas assez riche. Les préférences et la connaissance sont souvent exprimées de manière qualitative, par exemple en langage naturel. Les méthodes d'élicitation visant à les quantifier ont montré des limites, par exemple : l'agent ne sait pas donner un prix unique à un pari (Walley, 1991), ou encore le prix qu'il attribue ne reflète pas ses préférences (Slovic et Lichtenstein, 1968 ; Lichtenstein et Slovic, 1971 ; Lindman, 1971 ; Lichtenstein et Slovic, 1973).

Pour répondre à ces critiques et capturer le comportement effectif des décideurs, plusieurs théories alternatives à l'utilité espérée ont été proposées. C'est l'objet de la section suivante.

## 1.3 Théories alternatives à l'utilité espérée

Plusieurs théories alternatives ont été proposées pour dépasser les limitations de la théorie de l'utilité espérée. Après avoir introduit la notion de capacité et celle d'intégrale de Choquet, deux outils mathématiques qui nous sont utiles dans cette section, nous présentons certaines de ces théories alternatives.

Nous abordons d'abord plusieurs théories découlant directement de celle de l'utilité espérée. Nous commencons avec deux modèles de décision probabilistes alternatifs menant à la même règle : l'*Utilité Dépendante du Rang* (ou RDU, Quiggin, 1982 ; Schmeidler, 1989 ; Diecidue et Wakker, 2001) et la *théorie des perspectives* (*prospect theory*, Kahneman et Tversky, 1979 ; Tversky et Kahneman, 1992), où la probabilité et/ou l'utilité est déformée.

Nous considérons ensuite plusieurs modèles de la décision où la connaissance n'est pas capturée par une unique mesure de probabilité mais par l'ensemble des mesures possibles, ce qui permet d'exprimer l'ignorance à propos des valeurs de probabilités : les *intervalles de probabilités* (De Campos, Huete et Moral, 1994) et les *familles de probabilités* (Boole, 1854 ; Keynes, 1921 ; Gilboa et Schmeidler, 1989).

Ensuite, nous nous arrêtons longuement sur la théorie des fonctions de croyances de Dempster-Shafer (Dempster, 1967 ; Shafer, 1976), généralisant les probabilités en permettant d'exprimer l'ignorance partielle voire totale, et sur les règles de décision de cette théorie. Nous y précisons que plusieurs opérateurs de conditionnements sont disponibles, pour la révision et pour le focus.

Enfin, nous évoquons le cadre des *ordres de grandeurs de probabilité* (Wilson, 1995) où la connaissance n'a pas besoin d'être aussi précise qu'avec les probabilités usuelles, et celui des possibilités, qui permet de travailler avec des préférences et des croyances purement ordinales.

### 1.3.1 Capacités et intégrale de Choquet

Commençons par définir deux notions que nous retrouverons tout au long de ce chapitre : les capacités qui généralisent les mesures de probabilités ; et l'intégrale de Choquet, qui généralise le calcul de l'espérance aux capacités.

**Définition 1.27 (Capacité).** Une capacité sur $\Omega$ est une fonction d'ensemble $\mu : 2^\Omega \to [0,1]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$ et qui est monotone au sens de l'inclusion :

$$\forall A \subseteq B \subseteq \Omega, \quad \mu(A) \leq \mu(B)$$

À l'inverse des mesures de probabilité, les capacités sont généralement non-additives : pour tout paire d'événements $A$ et $B$ disjoints, on a possiblement $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$. Plus précisément :

**Définition 1.28 (Sous-/Super-additivité).** Une capacité $\mu : 2^\Omega \to [0,1]$ est sous-additive (ou 2-monotone) si et seulement si, $\forall A, B$ disjoints :

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

Elle est super-additive (ou 2-*alternating*) si et seulement si :

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$$

Une capacité est une mesure additive si elle est à la fois sous-additive et super-additive. Dans ce cas, c'est une mesure de probabilité.

Toute capacité possède une fonction duale.

**Définition 1.29 (Fonction duale).** Soit $\mu : 2^\Omega \to [0,1]$ une capacité. Sa fonction duale est la fonction $\mu^c$ définie par :

$$\mu^c(A) = 1 - \mu(A^c).$$

Notons que $(\mu^c)^c = \mu$ : une capacité $\mu$ et sa duale $\mu^c$ encodent la même information, et l'une peut être retrouvée à partir de l'autre. Une mesure additive (mesure de probabilité) est sa propre fonction duale.

Toute capacité $\mu$ possède une unique fonction de masse.

**Définition 1.30 (Fonction de masse).** La fonction de masse d'une capacité $\mu : 2^\Omega \to [0,1]$ est la fonction $m_\mu : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad \mu(A) = \sum_{B \subseteq A} m_\mu(B).$$

*Remarque* 10. Une capacité prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Cependant, la fonction de masse associée peut prendre des valeurs en dehors de cet intervalle, par exemple des valeurs négatives.

Cette fonction de masse est unique (voir le théorème 3.1) et elle peut être calculée à partir de $\mu$ de différentes façons formellement équivalentes, par exemple grâce à la transformée inverse de Moëbius :

**Définition 1.31 (Transformée inverse de Moëbius).** Soit $\mu : 2^\Omega \to [0, 1]$ un capacité. Sa transformée inverse de Moëbius $m_\mu : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$m_\mu(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \times \mu(B).$$

La capacité duale $\mu^c$ est facilement définie d'après la fonction de masse : $\forall A, \mu^c(A) = \sum_{B|B \cap A \neq \emptyset} m_\mu(B)$.

Pour toute capacité, l'espérance d'une variable aléatoire $v : \Omega \to \mathbb{R}$ est généralisée par l'intégrale de Choquet de cette variable (Choquet, 1954) :

**Définition 1.32 (Intégrale de Choquet discrète).** Soient une capacité $\mu : 2^\Omega \to [0, 1]$ et une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$. Notons $x_1, \ldots, x_k$ les valeurs prises par $v$, ordonnées telles que $x_1 < \cdots < x_k$. L'intégrale de Choquet discrète de $v$ selon $\mu$ est :

$$\text{Choquet}_\mu(v) = x_1 + \sum_{i=2}^{k} (x_i - x_{i-1}) \times \mu\left(\{\omega \mid v(\omega) \geq x_i\}\right)$$

Pour une capacité sous-additive $\mu$, l'intégrale de Choquet discrète s'exprime facilement sur la fonction de masse $m_\mu$ (Gilboa et Schmeidler, 1994) :

$$\text{Choquet}_\mu(v) = \sum_{A \subseteq \Omega} m_\mu(A) \cdot \min_{\omega \in A} v(\omega).$$

### 1.3.2 Déformations des probabilités

Dans une approche descriptive, nous avons vu que de nombreux décideurs attachent une grande importance aux pertes, même peu probables, et parfois aux gains élevés aussi. De plus, les décideurs ne sont majoritairement pas neutres face au risque car ils préfèrent souvent les gains certains même faibles et les pertes évitables mêmes importantes (Simon, 1947 ; Emerson, 1962 ; Cyert, March et al., 1963 ; March et Simon, 1993). Pour capturer ce type de préférences, il a été proposé d'utiliser une intégrale similaire à celle de l'utilité espérée, non pas sur $u$ et Pr, mais sur des transformations de ces fonctions. Les approches proposées par Handa (Handa, 1977), Karmarkar (Karmarkar, 1978, 1979) ainsi que la version initiale de la théorie des perspectives (Kahneman et Tversky, 1979) reposent sur une déformation $f$ croissante de la distribution de probabilité (et, pour la théorie des perspectives, d'une déformation de la fonction d'utilité). La connaissance de l'agent est toujours décrite par une mesure de probabilité mais son attitude face au risque est capturée par la déformation de cette probabilité.

Dans de tels cadres, un problème de décision $\mathcal{D}$ est donné par une situation de décision $\mathcal{A}$, d'une probabilité Pr, d'une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante (telle que $x > y \to f(x) > f(y)$) vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et d'une fonction d'utilité $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, i.e.

$$\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \{\Pr, f\}, u)$$

La règle de décision est alors la règle de l'utilité espérée, mais calculée en fonction de la probabilité déformée $f \circ p$ :

**Définition 1.33 (Règle de l'utilité espérée déformée).** Pour un problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \{\Pr, f\}, u)$ où $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction croissante vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, la règle dEU est :

$$\mathrm{dEU}_{\mathcal{D}}(\chi) = \sum_{\omega \in \Omega} f\big(p(\omega)\big) \times u\big(\chi(\omega)\big)$$

Les approches présentées ci-dessus sont finalement assez limitées. D'une part, les probabilités de deux conséquences, si elles sont égales, sont déformées de la même façon : ces approches ne permettent donc pas de surestimer la probabilité d'une perte par rapport à celle d'un gain, par exemple. D'autre part, si on souhaite éviter les violations de dominance (c'est-à-dire, par exemple, éviter que « gagner $x > 0$, sinon rien » soit préféré à « gagner $x > 0$, sinon $y > 0$ » avec les mêmes probabilités), il a été montré que la seule transformation $f$ admissible est $f(x) = x$ (Fishburn, 1978). On retrouve alors la théorie de l'utilité espérée.

Afin de dépasser ces limites, Quiggin a proposé la théorie de l'utilité dépendante du rang (RDU, appelée originellement théorie de l'utilité anticipée) où les déformations des probabilités dépendent non seulement de la probabilité elle-même, mais aussi du rang de l'utilité de la conséquence associée (Quiggin, 1982). Cette approche sera reprise dans la théorie cumulative des perspectives (Tversky et Kahneman, 1992).

Considérons un acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$. Les conséquences possibles sont les $x_i \in \{\chi(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$, ordonnées telles que $u(x_i) < u(x_{i+1})$. Chaque conséquence $x_i$ est associée à une probabilité $p_i$, les $p_i$ sont ainsi ordonnées selon l'utilité de la conséquence associée. L'idée de Quiggin est de transformer la probabilité $p_i$ non pas en une valeur $f(p_i)$ ne dépendant que de $p_i$, mais en une valeur $h_i(p)$ calculée d'après la suite ordonnée $p = (p_1, \ldots, p_n)$ des probabilités. Ainsi, la valeur de $h_i(p)$ dépend à la fois de $p_i$ et de son rang : on peut alors distinguer les probabilités associées à des utilités faibles ou élevées.

Quiggin montre ensuite que quel que soit le nombre de conséquences (et donc de probabilités $p_i$), la valeur de $h_i(p)$ peut être déduite d'actes n'ayant que deux conséquences : en notant $g(p_1) = h_1(p_1, 1 - p_1)$ la déformation appliquée à la probabilité de la plus faible des conséquences, il conclut que pour toute suite de probabilités ordonnées $p = (p_1, \ldots, p_n)$, on a $h_i(p) = g\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - g\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)$. D'où la règle :

**Définition 1.34 (Règle de l'utilité dépendante du rang).** Pour un problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \{\Pr, g\}, u)$ et pour tout acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$, soient

$x_1, \ldots, x_n$ les conséquences ordonnées selon leurs utilités et $p = (p_1, \ldots, p_n)$ les probabilités d'obtenir chaque conséquence $x_i$. La règle de décision RDU est :

$$\mathrm{RDU}_{\mathcal{D}}(\chi) = \sum_{i=1}^{n} \left[ g\left( \sum_{j=1}^{i} p_j \right) - g\left( \sum_{j=1}^{i-1} p_j \right) \right] \times u(x_i)$$

Cette règle revient à calculer l'intégrale de Choquet sur la capacité $g \circ \Pr$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{RDU}_{\mathcal{D}}(\chi) &= u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \Big( u(x_i) - u(x_{i-1}) \Big) \times g\Big( \Pr\left( \{x \mid u(x) \geq u(x_i)\} \right) \Big) \\ &= \mathrm{Choquet}_{g \circ \Pr}(u \circ \chi) \end{aligned}$$

### 1.3.3 Probabilités imprécises

Plusieurs autres théories alternatives proposent de dépasser les limitations de l'UE en considérant non pas *une unique* loi de probabilité, mais une famille de probabilités (chaque probabilité de la famille est possible, l'une d'entre elle décrit effectivement la variabilité des états du monde, mais l'agent (ou le modélisateur) ne sait pas laquelle). Après les travaux initiaux de Schmeidler dans le cadre d'Ascombe-Aumann appelé *Horse lotteries*, non présentés ici (Anscombe et Aumann, 1963 ; Schmeidler, 1986), plusieurs théories considérant des bornes, familles ou intervalles de probabilités ont été étudiées. On trouve plusieurs justifications à l'utilisation de probabilités imprécises :

**Fréquentisme** On sait que les valeurs de convergence des fréquences *à la limite* sont dans des intervalles donnés (Walley et Fine, 1982) ;

**Ignorance** L'incertitude porte sur le modèle stochastique lui-même, que ce soit sur certains paramètres (p.ex. variance) (Bernard, 2005) ou de manière non paramétrique (Baudrit et Dubois, 2006) ;

**Paris échangeables** Les degrés de confiance de l'agent sont étalonnés d'après des paris, pour lesquels le prix d'achat maximal que l'agent est prêt à payer pour participer au pari diffère du prix de vente minimal auquel l'agent veut bien céder sa place (Walley, 1991) ;

**Axiomatique** Après l'axiomatisation dans le cadre d'Ascombe et Aumann, Gilboa et Schmeidler proposent une axiomatique basée sur une relaxation des axiomes de Savage dans le cadre classique (Gilboa et Schmeidler, 1989).

Dans tous ces cas, une famille $\mathcal{F}$ de probabilités décrit la connaissance de l'agent. On s'intéresse principalement à ses bornes inférieures et supérieures :

**Définition 1.35 (Probabilité inférieure et supérieure).** Pour toute famille $\mathcal{F}$ de probabilités sur $\Omega$, les bornes inférieures et supérieures de $\mathcal{F}$ sont les fonctions Pinf et Psup : $2^{\Omega} \to [0, 1]$ définies par :

$$\mathrm{Pinf}(B) = \inf_{\Pr \in \mathcal{F}} \Pr(B) \quad \mathrm{Psup}(B) = \sup_{\Pr \in \mathcal{F}} \Pr(B)$$

Ces deux mesures Pinf et Psup sont duales. À l'inverse des mesures de probabilité, Pinf et Psup sont non-additives : Pinf est sous-additive, Psup est super-additive, et Pinf = Psup est additive si et seulement si $\mathcal{F} = \{\text{Pinf}\}$ (cf. définition 1.28).

Une famille $\mathcal{F}$ contenant un nombre fini de mesures de probabilité peut être donnée en extension (Smith, 1961). Il est aussi possible de donner ses bornes Pinf et Psup (Good, 1966). De plus, certains travaux considèrent les *intervalles de probabilité* : les lois de probabilités de la famille $\mathcal{F}$ sont décrites par les valeurs possiblement prises par leurs distributions (De Campos, Huete et Moral, 1994). À chaque état du monde $\omega \in \Omega$ est attaché un intervalle $[p_*(\omega), p^*(\omega)]$ borné par les valeurs minimales et maximales possibles pour $\Pr(\{\omega\})$.

**Définition 1.36 (Intervalles de probabilité).** Les intervalles décrit par deux fonction $p_* : \Omega \to [0,1]$ et $p^* : \Omega \to [0,1]$ sont des intervalles de probabilités si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq p_*(\omega \leq p^*(\omega) \leq 1$ ;
- $\sum_{\omega \in \Omega} p_*(\omega) \leq 1 \leq \sum_{\omega \in \Omega} p^*(\omega)$ ;
- $\forall \omega \in \Omega, p^*(\omega) + \sum_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} p_*(\omega') \leq 1 \leq p_*(\omega) \sum_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} p^*(\omega')$.

La famille décrite est $\mathcal{F} = \{\Pr \mid \forall \omega, p_*(\omega) \leq \Pr(\{\omega\}) \leq p^*(\omega)\}$ et les trois propriétés que vérifient $p_*$ et $p^*$ assurent respectivement que les intervalles $[p_*(\omega), p^*(\omega)]$ sont bien définis, que la famille $\mathcal{F}$ n'est pas vide et que les valeurs $p_*(\omega)$ et $p^*(\omega)$ sont atteignables (*reachable*), c'est-à-dire que $\text{Pinf}(\{\omega\}) = p_*(\omega)$ et $\text{Psup}(\{\omega\}) = p^*(\omega)$. La borne inférieure d'un événement $B \subseteq \Omega$ est donnée par l'expression suivante :

$$\text{Pinf}(B) = \max\left(\sum_{\omega \in B} p_*(\omega)\ ,\ 1 - \sum_{\omega \notin B} p^*(\omega)\right).$$

Ayant des bornes inférieures et supérieures pour les probabilités, il est possible de calculer les valeurs minimales et maximales possibles pour l'utilité espérée (dès lors qu'une fonction d'utilité quantitative peut être définie). La majorité des décideurs étant « pessimistes », on s'intéresse particulièrement à la valeur minimale. Gilboa et Schmeidler considèrent ainsi la règle de décision *MaxiMin Expected Utility* (MMEU) : un acte est préféré à un autre si et seulement si l'utilité espérée minimale de cet acte est supérieure à celle de l'autre (Gilboa, 1987 ; Schmeidler, 1989). Ces mêmes auteurs ont montré que lorsque Pinf est sous-additive, cette utilité espérée minimale est égale à la valeur de Choquet sur Pinf et proposent le jeu de mots « min of mean = mean of min » qui associe l'espérance minimale possible et l'expression de l'intégrale de Choquet sur la fonction de masse (Gilboa et Schmeidler, 1994).

**Définition 1.37 (Règle de l'utilité espérée minimale (MMEU)).** Pour un problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \text{Pinf}, u)$, l'utilité espérée minimale d'un acte

est :

$$\begin{aligned}\mathrm{MMEU}_{\mathcal{D}}(\chi) &= \inf_{\mathrm{Pr}\in\mathcal{F}} \mathrm{EU}_{\{\mathcal{A},\mathrm{Pr},u\}}(\chi) \\ &= \mathrm{Choquet}_{\mathrm{Pinf}}(u\circ\chi) \\ &= \sum_{A\subseteq\Omega} m_{\mathrm{Pinf}}(A)\times\min_{\omega\in A} u(\chi(a)).\end{aligned}$$

*Remarque* 11. En calculant la valeur de Choquet sur Psup, on obtient la valeur maximale possible de l'utilité espérée. Cette valeur est moins utilisée car la majorité des décideurs sont "prudents" ou "pessimistes".

### 1.3.4 Théorie des fonctions de croyances de Dempster-Shafer

La théorie des fonctions de croyances proposée par Shafer (Shafer, 1976) constitue un cas particulier de familles de probabilités, dont les différentes interprétations peuvent sembler plus évidentes. Mathématiquement, elle repose sur des mesures sous-additives appelées *fonctions de croyance*, étudiées par Dempster pour l'inférence statistique basée sur des sources imprécises et/ou contradictoires (Dempster, 1967).

Pour un cadre de discernement $\Omega$, cette théorie considère la fonction de masse $m : 2^{\Omega} \to [0,1]$. Cette fonction de masse ne prenant pas de valeurs négatives, c'est une distribution de probabilité sur les parties d'$\Omega$. Pour tout événement $B$, $m(B)$ n'est pas la probabilité de $B$, mais la croyance donnée à $B$ et à aucun de ses sous-ensembles (Shafer, 1976). $m(B)$ peut aussi être comprise comme la quantité de probabilité qu'il faudrait répartir entre les éléments de $B$, mais qui ne peut pas être attribuée faute de connaissance. Enfin, de manière subjective, $m(B)$ peut être vue comme la probabilité que l'agent sache uniquement $\omega^* \in B$.

Néanmoins, cette justification probabiliste n'est pas la plus usitée pour les fonctions de croyances. Smets et Kennes ont même proposé, dans le Modèle des Croyances Transférables (*Transferable Belief Model*, ou TBM), une justification pour l'usage d'une telle fonction de masse $m$ ne reposant pas sur les probabilités (Smets et Kennes, 1994). D'une manière générale, certains auteurs restent dans une approche probabiliste ; mais de nombreux autres s'en détachent au moins partiellement, ce qui impactera les opérations utilisées, telles que le conditionnement.

On suppose habituellement $m(\emptyset) = 0$, dans le sens où aucune croyance de peut supporter l'événement impossible. Néanmoins, le TBM autorise qu'$\emptyset$ ait une masse non nulle : $m(\emptyset)$ y représente le degré de contradiction interne de $m$ (Smets et Kennes, 1994).

En pratique, une fonction de masse apparaît lorsqu'une connaissance probabiliste n'est pas exprimée directement sur $\Omega$, mais sur un ensemble $W$ pour lequel on connaît une fonction multi-valuée $\Gamma : W \to 2^{\Omega}$.

**Exemple 1.15 (Fonction de masse définie par une probabilité et une fonction multi-valuée).** *Le démonstrateur a vidé deux sacs de boules dans*

*une urne (le sac* I *contient 30 boules et le sac* II *en contient 60). Posons* $W = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$*, la proportion des boules est donnée par la probabilité dont la distribution* $p : W \to [0, 1]$ *est :*

$$p(\mathrm{I}) = 1/3 \quad et \quad p(\mathrm{II}) = 2/3$$

*S'il tire une boule au hasard, la probabilité de tirer une boule du sac* I *est 1/3, celle de tirer une boule du sac* II *est 2/3.*

*Maintenant, supposons que toutes les boules du sac* I *sont rouges (R), et que les boules du sac* II *peuvent être soit blanches (B) soit noires (N). Posons* $\Omega = \{R, B, N\}$*. Cela établit le mapping multi-valué* $\Gamma : W \to 2^\Omega$ *suivant :*

$$\Gamma(\mathrm{I}) = \{R\} \quad et \quad \Gamma(\mathrm{II}) = \{B, N\}$$

*Dont découle directement la fonction de masse* $m$ *définie par* $m(\Gamma(x)) = p(x)$ *:*

$$m(\{R\}) = 1/3, \quad m(\{B, N\}) = 2/3 \quad et \quad m(B) = 0 \text{ sinon}$$

*Effectivement, il y a une chance sur trois de tirer une boule rouge (issue du sac* I*), et deux chances sur trois de tirer une boule blanche ou noire (issue du sac* II*), mais nous ne savons pas comment attribuer cette dernière probabilité ni aux boules blanches, ni aux boules noires.*

Une fonction de masse définit deux mesures duales (définition 1.30). La mesure inférieure est appelée *fonction de croyance*, notée Bel, et la mesure supérieure est appelée *mesure de plausibilité*, notée Pl :

$$\begin{aligned} \mathrm{Bel}(X) &= \sum_{\emptyset \neq Y \subseteq X} m(Y) \quad = 1 - \mathrm{Pl}(X^c) \\ \mathrm{Pl}(X) &= \sum_{Y \cap X \neq \emptyset} m(Y) \quad = 1 - \mathrm{Bel}(X^c) \end{aligned}$$

Dans l'interprétation probabiliste utilisée en introduction, $\mathrm{Bel}(B) = \mathrm{Pinf}(B)$ est la probabilité minimale de l'événement $B$, et $\mathrm{Pl}(B) = \mathrm{Psup}(B)$ sa probabilité maximale. Ainsi, toute fonction de croyance définit une famille de probabilités $\mathcal{F} = \{\mathrm{Pr} \mid \forall B, \mathrm{Bel}(B) \leq \mathrm{Pr}(B) \leq \mathrm{Pl}(B)\}$, alors comprise comme un cas particulier de probabilités imprécises (section 1.3.3).

Bien souvent, $\mathrm{Bel}(B)$ et $\mathrm{Pl}(B)$ ne sont pas vues comme les bornes d'une probabilité $\mathrm{Pr}(B)$ inconnue, mais plutôt comme des degrés de confiance non probabilistes : $\mathrm{Bel}(B)$ est la somme des masses soutenant la proposition « $\omega^* \in B$ » et décrit donc à quel point cette proposition est impliquée par la connaissance ; $\mathrm{Pl}(B)$ est la somme des masses non contradictoires avec la proposition « $\omega^* \in B$ » et décrit donc à quel point cette proposition est compatible avec la connaissance.

*Remarque* 12. Les trois fonctions $m$, Bel et Pl sont telles que :

- Ayant l'une des trois fonctions, on peut retrouver les deux autres,
- $m$ est la transformée de Möebius de Bel – la retrouver à partir de Bel (ou de Pl) est une opération coûteuse,

— $m$ est parfois « creuse » (de nombreuses valeurs sont égales à 0), sa représentation peut être exponentiellement moins coûteuse en mémoire que celles de Bel ou de Pl.

**Définition 1.38 (Élement focal).** Les éléments focaux d'une fonction de croyance sont les ensembles pour lesquels la fonction de masse $m$ ne s'annule pas. On notera $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des éléments focaux :

$$\mathcal{S}_m = \{X \in \Omega \mid m(X) \neq 0\}$$

**Définition 1.39 ($k$-additivité).** Une fonction de croyance est dite $k$-additive si ses éléments focaux sont au plus de taille $k$ :

$$m \text{ est } k\text{-additive} \iff \max_{B \in \mathcal{S}_m} |B| = k$$

*Remarque* 13. La théorie des fonctions de croyances généralise celle des probabilités : toute mesure de probabilité est une fonction de croyance *1-additive*, c'est-à-dire seuls les singletons sont éléments focaux : $\forall A, |A| \neq 1 \implies m(A) = 0$. Dans ce cas, $\Pr(X) = \text{Bel}(X) = \text{Pl}(X)$ est encodée par la distribution $p$ vérifiant $p(\omega) = m(\{\omega\})$.

**Exemple 1.16.** *Reprenons l'Exemple 1.15, dans lequel l'urne a été remplie avec 1/3 de boules issues du sac* I *(et donc rouges) et 2/3 de boules issues du sac* II *(et donc noires ou blanches). On s'intéresse à la couleur de la boule que le démonstrateur va tirer.*

**Interprétation crédale.** *Les lois de probabilités compatibles avec la connaissance du contenu de l'urne vérifient* $\Pr(\{R\}) = \frac{1}{3}$, $\Pr(\{B, N\}) = \frac{2}{3}$, $\Pr(\emptyset) = 0$ *et* $\Pr(\Omega) = 1$. *Par contre, nous n'avons pas d'information sur les valeurs de* $\Pr(\{B\})$ *et* $\Pr(\{N\})$, *hormis que* $\Pr(\{B\}) + \Pr(\{N\}) = \frac{2}{3}$. *Cela définit une famille de probabilité $\mathcal{F}$ que nous pouvons décrire en posant* $\Pr(\{N\}) = x$. *La famille* $\mathcal{F} = (\Pr_x)_{x \in [0, \frac{2}{3}]}$ *est donnée en Table 1.4, où on peut lire, pour tout $B \subseteq \Omega$ les valeurs* $\text{Pinf}(B) = \text{Bel}(B)$ *et* $\text{Psup}(B) = \text{Pl}(B)$.

**Interprétation évidentielle.** *Seuls deux événements sont focaux : ce sont les événements pour lesquels on donne une croyance non nulle sans pouvoir donner une croyance non nulle à leurs sous-ensembles :*

— *$\{R\}$ est focal, car on sait qu'un tiers des boules sont rouges (c'est-à-dire que l'on croit que la boule tirée sera rouge avec un degré 1/3) ;*

— *$\{B, N\}$ est focal, car on sait que deux tiers des boules sont blanches ou noires, mais on ne peut pas attribuer ces deux tiers ni aux boules blanches (il n'y en a peut-être aucune) ni aux boules noires (il n'y en a peut-être aucune non plus).*

*On retrouve ainsi la fonction de masse $m$ donnée en Table 1.4, où on peut lire pour tout $B \subseteq \Omega$ les valeurs* $\text{Bel}(B)$ *(décrivant à quel point la proposition $\omega^* \in B$ est* impliquée *par la connaissance) et* $\text{Pl}(B)$ *(décrivant à quel point cette même proposition est* compatible *avec la connaissance).*

| $X$ | $\emptyset$ | $\{R\}$ | $\{N\}$ | $\{B\}$ | $\{R,N\}$ | $\{R,B\}$ | $\{N,B\}$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m(X)$ | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2/3 | 0 |
| $\mathrm{Bel}(X)$ | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 | 1/3 | 2/3 | 1 |
| $\mathrm{Pl}(X)$ | 0 | 1/3 | 2/3 | 2/3 | 1 | 1 | 2/3 | 1 |
| $\mathrm{Pr}_x(X)$ | 0 | 1/3 | $x$ | $2/3-x$ | $1/3+x$ | $1-x$ | 2/3 | 1 |

TABLE 1.4 – Urne d'Ellsberg – Fonction de masse, de croyance, de plausibilité et, pour l'interprétation probabiliste, la famille $(\mathrm{Pr}_x)_{x\in[0,\frac{2}{3}]}$ correspondante

### La mise-à-jour des connaissances

Dans la théorie des fonctions de croyances, la distinction entre la *révision des connaissances* et le *focus* est bien marquée. Rappelons que la révision des connaissances vise à modifier la connaissance initiale pour la préciser ou la corriger au vu d'une nouvelle information générique, alors que le focus constitue un changement de référence, en déduisant une connaissance particulière relative aux cas où l'information observée est vraie (cf. section 1.2.2).

L'interprétation probabiliste d'une fonction de croyance repose sur la famille de probabilités bornée par Bel = Pinf et Pl = Psup. Or, dans une optique purement bayésienne, la révision comme le focus sont capturés par les probabilités conditionnelles. Il s'agit alors d'identifier la famille des probabilités conditionnelles (c'est-à-dire la famille obtenue en conditionnant toutes les probabilités possibles). C'est le rôle du conditionnement de Fagin-Halpern qui donne la borne inférieure $\mathrm{Bel}(\cdot \mid C)$ de cette famille de probabilités conditionnelles (DEMPSTER, 1967 ; FAGIN et HALPERN, 1991 ; JAFFRAY, 1992). À l'inverse, dans les interprétations non probabilistes, le conditionnement de Fagin-Halpern ne permet que le focus. La révision des connaissances est capturée par le conditionnement de Dempster (DEMPSTER, 1967) ou par le conditionnement géométrique (SMETS, 1993). Ces conditionnements se distinguent par la façon dont ils traitent les connaissances devenues ambigües lorsqu'une nouvelle information est apprise.

**Définition 1.40 (Conditionnement de Dempster).** Soient une fonction de plausibilite $\mathrm{Pl} : 2^\Omega \to [0,1]$ et un événement $C$ tel que $\mathrm{Pl}(C) > 0$. Le conditionnement de Dempster sachant $C$ est défini par :

$$\mathrm{Pl}(B \mid\mid C) = \frac{\mathrm{Pl}(B \cap C)}{\mathrm{Pl}(C)}$$

**Définition 1.41 (Conditionnement géométrique).** Soient une fonction de croyance $\mathrm{Bel} : 2^\Omega \to [0,1]$ et un événement $C$ tel que $\mathrm{Bel}(C) > 0$. Le conditionnement géométrique sachant $C$ est défini par :

$$\mathrm{Bel}(B \mid\mid\mid C) = \frac{\mathrm{Bel}(B \cap C)}{\mathrm{Bel}(C)}$$

**Définition 1.42 (Conditionnement de Fagin-Halpern).** Soient une fonction de croyance $\text{Bel} : 2^\Omega \to [0,1]$, sa duale Pl et un événement $C$ tel que $\text{Pl}(C) > 0$. Le conditionnement de Fagin-Halpern sachant $C$ est défini par :

$$\text{Bel}(B \mid C) = \frac{\text{Bel}(A \cap C)}{\text{Bel}(A \cap C) + \text{Pl}(A^c \cap C)} \quad \text{Pl}(B \mid C) = \frac{\text{Pl}(A \cap C)}{\text{Pl}(A \cap C) + \text{Bel}(A^c \cap C)}$$

*Remarque* 14. En comparant les trois définitions précédentes avec les équations (1.1) et (1.2), il est clair que ces trois conditionnements généralisent le conditionnement probabiliste, que l'on retrouve directement lorsque $\text{Bel} = \text{Pl} = \text{Pr}$.

Ces trois conditionnements se distinguent par la façon de traiter les connaissances qui deviennent ambigües lorsqu'on apprend une information $C$. En effet, supposons qu'on ait une connaissance telle que $m(\{\omega_1, \omega_2\}) > 0$. Si on apprend que $\omega_1$ est impossible, que faut-il faire ?

- Par conditionnement de Dempster, l'information qui portait sur $\{\omega_1, \omega_2\}$ porte maintenant sur $\omega_2$ ;
- Par conditionnement géométrique, l'information qui portait sur $\{\omega_1, \omega_2\}$ devient caduque et est supprimée ;
- Par conditonnement de Fagin-Halpern, l'information qui portait sur $\{\omega_1, \omega_2\}$ peut potentiellement porter sur $\omega_2$ et potentiellement être caduque.

Observons cela sur l'exemple suivant :

**Exemple 1.17 (Urne d'Ellsberg – Conditionnements).** *Reprenons l'urne contenant 1/3 de boules rouges (issues du sac* I*) et 2/3 de boules noires ou blanches (issues du sac* II*).*

*Considérons d'abord un focus : le démonstrateur tire une boule et déclare « Cette boule n'est pas blanche ». C'est donc l'une des 30 boules rouges ou l'une des* $x \in [0, 60]$ *boules noires. Le conditionnement de Fagin-Halpern effectue ce focus : les « chances » d'avoir tiré une boule rouge sont de* $\frac{30}{30+x} \in [\frac{1}{3}, 1]$ *et celles d'avoir tiré une boule noire sont de* $\frac{x}{30+x} \in [0, \frac{2}{3}]$*. La connaissance particulière concernant la boule tirée, sachant qu'elle n'est pas noire, est ainsi* $\text{Bel}(\{R\}) = 1/3$, $\text{Pl}(\{R\}) = 1$, $\text{Bel}(\{N\}) = 0$ *et* $\text{Pl}(\{N\}) = 2/3$*. Ces fonctions* Bel *et* Pl *sont décrites par la fonction de masse* $m(\{R\}) = 1/3$ *et* $m(\{R, N\}) = 2/3$*. Notons que le contenu de l'urne est toujours décrit par le prior, seules l'information concernant la boule tirée est décrite par le posterior : c'est un focus.*

*Considérons maintenant une révision de connaissance, c'est-à-dire une correction du prior étant données de nouvelles informations. Supposons que le démonstrateur annonce « Il n'y a aucune boule blanche dans l'urne ». Il faut mettre-à-jour le prior, qui est maintenant caduque : seul le posterior sera pertinent pour décrire la connaissance à propos de l'urne.*

- *Dans une approche crédale,* Bel *et* Pl *sont les bornes de la famille de probabilité qui décrivent, peut-être, le contenu de l'urne. Si on savait quelle mesure de probabilité de cette famille était la bonne, on la conditionnerait « sachant qu'il n'y a pas de boules blanches ». Or, nous l'ignorons : plusieurs priors sont possibles. Nous pouvons tout de même les conditionner,*

*et obtenons une famille de probabilités conditionnelles. C'est ce que fait le conditionnement de Fagin-Halpern.*

— *Dans une approche évidentielle*[10] *cependant,* Bel *et* Pl *ne délimitent pas une famille de probabilité et ce raisonnement ne tient pas. Informellement, nous pouvons avoir deux raisonnements différents qui impliquent qu'aucune boule blanche ne soit présente dans l'urne. D'un côté, nous pouvons imaginer que les 60 boules issues du sac* II *sont toutes noires (alors l'information* $m(\{N,B\}) = 2/3$ *ne concerne plus que* $\{N\}$*, et nous savons que* $\text{Bel}(\{R\}) = \text{Pl}(\{R\}) = 1/3$ *et* $\text{Bel}(\{N\}) = \text{Pl}(\{N\}) = 2/3$*). C'est ce que fait le conditionnement de Dempster. D'un autre côté, nous pouvons imaginer que les 60 boules issues du sac* II *n'ont pas été ajoutées dans l'urne (alors l'information* $m(\{B,N\}) = 2/3$ *est fausse, il faut la supprimer, et nous savons que* $\text{Bel}(\{R\}) = \text{Pl}(\{R\}) = 1$*). C'est ce que fait le conditionnement géométrique.*

*Les valeurs prises par* $m$*,* Bel *et* Pl *sont données, pour les trois conditionnements, dans la table 1.5.*

| $X$ | $\emptyset$ | $\{R\}$ | $\{N\}$ | $\{B\}$ | $\{R,N\}$ | $\{R,B\}$ | $\{N,B\}$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Prior** | | | | | | | | |
| $m(X)$ | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2/3 | 0 |
| $\text{Bel}(X)$ | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1/3 | 1/3 | 2/3 | 1 |
| $\text{Pl}(X)$ | 0 | 1/3 | 2/3 | 2/3 | 1 | 1 | 2/3 | 1 |
| $\text{Pr}_x(X)$ | 0 | 1/3 | $x$ | $2/3-x$ | $1/3+x$ | $1-x$ | 2/3 | 1 |
| **Dempster** | | | | | | | | |
| $m(X \,\|\|\, \{R,N\})$ | 0 | 1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\text{Bel}(X \,\|\|\, \{R,N\})$ | 0 | 1/3 | 2/3 | 0 | 1 | 1/3 | 2/3 | 1 |
| $\text{Pl}(X \,\|\|\, \{R,N\})$ | 0 | 1/3 | 2/3 | 0 | 1 | 1/3 | 2/3 | 1 |
| **Géométrique** | | | | | | | | |
| $m(X \,\|\|\|\, \{R,N\})$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\text{Bel}(X \,\|\|\|\, \{R,N\})$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\text{Pl}(X \,\|\|\|\, \{R,N\})$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **Fagin-Halpern** | | | | | | | | |
| $m(X \mid \{R,N\})$ | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 2/3 | 0 | 0 | 0 |
| $\text{Bel}(X \mid \{R,N\})$ | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1 | 1/3 | 0 | 1 |
| $\text{Pl}(X \mid \{R,N\})$ | 0 | 1 | 2/3 | 0 | 1 | 1 | 2/3 | 1 |
| $\text{Pr}_x(X \mid \{R,N\})$ | 0 | $1-x$ | $x$ | 0 | 1 | $1-x$ | $x$ | 1 |

TABLE 1.5 – Urne d'Ellsberg après conditionnement « sachant $\{R,N\}$ » (Dempster, géométrique et Fagin-Halpern)

10. Le terme *evidence* est ici un anglicisme faisant écho à la *theory of evidence*. Il désigne une notion intermédiaire entre l'indice et la preuve. En s'inspirant du vocabulaire judiciaire, nous pourrions aussi parler de « charges ».

Enfin, un dernier conditionnement pour les fonctions de croyance peut être trouvé dans la littérature, appelé *conditionnement faible* (*Weak conditioning*, Planchet, 1989). Nous ne sommes pas certains de son interprétation en tant que focus ou révision.

**Définition 1.43 (Weak conditioning).** Soient une fonction de croyance Bel : $2^\Omega \to [0,1]$ et un événement $C$ tel que $\mathrm{Pl}(C) > 0$. Le conditionnement faible sachant $C$ est défini par :

$$\mathrm{Bel}(B \mid C) = \frac{\mathrm{Bel}(A) - \mathrm{Bel}(A \cap C^c)}{\mathrm{Pl}(C)}.$$

Ce conditionnement n'est guère utilisé. En effet, il est possible d'avoir $\mathrm{Bel}(C \mid C) < 1$, ou encore $\mathrm{Pl}(C^c \mid C) > 0$ (c'est-à-dire qu'après avoir appris que $C$ est vrai, la connaissance mise-à-jour ne garantit pas que $C$ soit vrai !).

### Règles de décision

Un problème de décision, dans la théorie des fonctions de croyance, est un triplet $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, m, u)$ où $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ est une situation de décision, $m : 2^\Omega \to [0,1]$ une fonction de masse et $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité quantitative. Rappelons que $m$, Bel et Pl se déduisent les unes des autres, mais que $m$ est une représentation *a priori* moins coûteuse.

Nous présentons ici quatre règles de décision (les trois premières forment un pré-ordre total sur les actes, la dernière un ordre partiel seulement).

La première considère, dans l'interprétation probabiliste, qu'une fonction de croyance est la borne inférieure d'une famille de probabilités. On peut donc calculer l'utilité espérée minimale d'un acte, en appliquant l'intégrale de Choquet à Bel = Pinf.

**Définition 1.44 (CEU – Règle de l'utilité de Choquet).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, m, u)$, la règle de l'utilité de Choquet est :

$$\mathrm{CEU}_\mathcal{D}(a) = \mathrm{Choquet}_{\mathrm{Bel}}(u \circ \chi) = \sum_{B \subseteq \Omega} m(B) \times \min_{\omega \in B} u(a, \omega)$$

Ensuite, Jaffray a proposé une règle permettant de moduler le pessimisme de l'agent, à la façon de la règle d'Hurwicz, mais localement, pour tout élément focal (Jaffray, 1989). Cette règle fait intervenir une collection de paramètres $\alpha(v, v') \in [0,1]$ indiquant le degré de pessimisme pour toute paire de valeurs d'utilité $v < v'$ et se calcule directement sur la fonction de masse $m$ :

**Définition 1.45 (JEU – Règle de Jaffray).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, m, u)$, soient $\alpha : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ une collection de paramètres et $\chi$ un acte. En notant $v_B^- = \min_{\omega \in B} u(\chi(\omega))$ et $v_B^+ = \max_{\omega \in B} u(\chi(\omega))$ les utilités minimale et maximale possibles en $B$, la règle de Jaffray est :

$$\mathrm{JEU}^\alpha_\mathcal{D}(\chi) = \sum_{B \subseteq \Omega} m(B) \times \left[\alpha(v_B^-, v_B^+) \times v_B^- + (1 - \alpha(v_B^-, v_B^+)) \times v_B^+\right]$$

*Remarque* 15. Cette règle généralise celle de Choquet (que l'on retrouve lorsque $\forall x, y, \alpha(x, y) = 1$), et celle proposée par Strat, où le coefficient $\alpha$ est constant (Strat, 1990).

Enfin, la dernière règle est issue du *Transferable Belief Model* (TBM), où la connaissance représentée par une fonction de croyance et mise-à-jour par le conditionnement de Dempster mais où, au moment de la décision, une probabilité BetP appelée *probabilité pignistique* est inférée par équiprobabilité : $\text{BetP}(\omega) = \sum_{\omega \in B \subseteq \Omega} m(B)/|B|$. On considère alors la règle de l'utilité espérée par rapport à BetP :

**Définition 1.46 (TBEU – Règle du TBM).** Pour tout problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, m, u)$, l'utilité espérée calculée sur la probabilité pignistique BetP est la valeur :

$$\text{TBEU}_{\mathcal{D}}(\chi) = \sum_{\omega \in \Omega} \text{BetP}(\omega) \times u(\chi(\omega)) = \sum_{B \subseteq \Omega} \frac{m(B)}{|B|} \times \sum_{\omega \in X} u(\chi(\omega))$$

*Remarque* 16. Ces trois règles généralisent la règle de l'utilité espérée (définition 1.26), que l'on retrouve lorsque Bel = Pl = Pr. De plus, les fonctions de croyance permettent d'exprimer l'ignorance totale par $m(\Omega) = 1$. On remarque alors que CEU généralise la règle Min (Définition 1.18), JEU généralise la règle d'Hurwicz (Définition 1.20) et que TBEU généralise les règles de Laplace et de Bernoulli.

**Exemple 1.18 (« Paradoxe » d'Ellsberg).** *La théorie des fonctions de croyance est capable de décrire les préférences majoritaires des décideurs dans l'expérience proposée par Ellsberg (exemple 1.13) : une urne contient 30 boules rouges et 60 boules noires ou blanches, on propose à l'agent de choisir d'abord entre $a_1$ et $a_2$, ensuite entre $b_1$ et $b_2$ :*

- *$a_1$ : 100€ si la boule tirée est rouge, rien sinon*
- *$a_2$ : 100€ si la boule tirée est blanche, rien sinon*
- *$b_1$ : 100€ si la boule tirée n'est pas rouge, rien sinon*
- *$b_2$ : 100€ si la boule tirée n'est pas blanche, rien sinon*

*La majorité des décideurs préfèrent $a_1 \succ a_2$ et $b_1 \succ b_2$, ce qui n'est pas capturé par la règle de l'utilité espérée, mais est capturé par les règles* CEU *et* JEU. *Sans perte de généralité, posons $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité quantitative définie par $u(100€) = 1$ et $u(0€) = 0$.*
*La règle de Choquet vérifie :*

$$\begin{aligned}
\text{CEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_1}) &= 0 + 1 \times \text{Bel}(\{R\}) &&= 1/3 \\
\text{CEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_2}) &= 0 + 1 \times \text{Bel}(\{B\}) &&= 0 \\
\text{CEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{b_1}) &= 0 + 1 \times \text{Bel}(\{B, N\}) &&= 2/3 \\
\text{CEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{b_2}) &= 0 + 1 \times \text{Bel}(\{R, N\}) &&= 1/3
\end{aligned}$$

*On retrouve ainsi les préférences $a_1 \succ a_2$ et $b_1 \succ b_2$.*

*La règle de Jaffray vérifie, pour toute famille de paramètre $\alpha$ :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{JEU}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_1}) &= \frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times 0 && = \frac{1}{3}\\
\mathrm{JEU}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_2}) &= \frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times\Big[\alpha_{0,1}\times 0+(1-\alpha_{0,1})\times 1\Big] && = \frac{2}{3}\times(1-\alpha_{0,1})\\
\mathrm{JEU}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(\chi_{b_1}) &= \frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times\Big[\alpha_{1,1}\times 1+(1-\alpha_{1,1})\times 1\Big] && = \frac{2}{3}\\
\mathrm{JEU}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(\chi_{b_2}) &= \frac{1}{3}\times\Big[\alpha_{1,1}\times 1+(1-\alpha_{1,1})\times 1\Big]+\frac{2}{3}\times\Big[\alpha_{0,1}\times 0+(1-\alpha_{0,1})\times 1\Big]\\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times(1-\alpha_{0,1})
\end{aligned}$$

*Pour un degré de pessimisme $\alpha_{0,1} > 1/2$, on retrouve les préférences majoritaires $a_1 \succ a_2$ et $b_1 \succ b_2$. Pour $\alpha_{0,1} < 1/2$, on obtient les préférences inverses, et pour $\alpha_{0,1} = 1/2$ l'agent est indifférent : $a_1 \sim a_2$ et $b_1 \sim b_2$.*
*La règle du TBM vérifie :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{TBEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_1}) &= 1/3\times 1+1/3\times 0+1/3\times 0 && = 1/3\\
\mathrm{TBEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_1}) &= 1/3\times 0+1/3\times 0+1/3\times 1 && = 1/3\\
\mathrm{TBEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_1}) &= 1/3\times 0+1/3\times 1+1/3\times 1 && = 2/3\\
\mathrm{TBEU}_{\mathcal{D}}(\chi_{a_1}) &= 1/3\times 1+1/3\times 1+1/3\times 0 && = 2/3
\end{aligned}$$

*L'agent modélisé est indifférent : $a_1 \sim a_2$ et $b_1 \sim b_2$.*

### Utilité de Denœux et Shenoy

Enfin, nous terminons cette section sur les fonctions de croyance en abordant la théorie de la décision proposée par Denœux et Shenoy (Denœux et Shenoy, 2020). Ils arrivent, par une démarche axiomatique, à une généralisation de la règle de Jaffray (JEU, définition 1.45), où l'utilité d'un acte n'est pas décrite par une valeur réelle mais par un intervalle.

Essayons d'abord de donner l'intuition de cette règle de décision, en se basant sur l'exemple de l'urne proposée par Ellsberg. Pour cela, nous donnons d'abord l'intuition de la règle proposée par Jaffray, où l'utilité d'une « conséquence ambiguë », c'est-à-dire d'un ensemble $X$ de conséquences possibles, est associée à une valeur intermédiaire entre l'utilité de la pire conséquence possible et celle de la meilleure conséquence possible. Si $X = \{x_*, \ldots, x^*\}$ où $x_*$ est la pire conséquence et $x^*$ est la meilleure, alors l'utilité associée à $X$ est $\alpha \times u(x_*) + (1-\alpha)\times u(x^*)$. Pour le décideur, obtenir l'une des conséquences $x \in X$ est équivalent à tirer au hasard une boule dans une urne contenant $\alpha$ boules indicées $x_*$ et $(1-\alpha)$ boules indicées $x^*$. Denœux et Shenoy déduisent de leurs axiomes que l'utilité d'une conséquence ambiguë $X$ est décrite par deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ positifs tels que $\alpha+\beta \leq 1$. Pour le décideur, obtenir l'une des conséquences $x \in X$ est alors équivalent à tirer au hasard une boule dans une urne contenant $\alpha$ boules indicées $x_*$, $\beta$ boules indicées $x^*$ et $1-\alpha-\beta$ boules indicées $x_*$ ou $x^*$ en proportion inconnue.

Formellement, les préférences de l'agent sont décrites par une fonction d'utilité quantitative $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, et sa connaissance par une fonction de croyance Bel dont $m$ est la fonction de masse. De plus, une famille $(\alpha_{x,y}, \beta_{x,y})_{x,y \in \mathbb{X}^2}$ décrit le comportement du décideur face à l'ambiguïté, comme expliqué ci-dessus : toute conséquence incertaine $X = \{x_*, \ldots, x^*\}$ où $x_*$ et $x^*$ sont respectivement les pires et meilleures conséquence d'$X$, est équivalente, du point de vue de l'agent, à piocher dans une urne contenant au moins $\alpha_{x_*,x^*} \equiv \alpha_X$ boules $x_*$ et au moins $\beta_{x_*,x^*} \equiv \beta_X$ boules $x^*$ (les autres boules étant $x_*$ ou $x^*$ en proportion inconnue). L'utilité d'un acte $\chi$ est alors l'intervalle réel $[a, a+b]$ tel que :

$$a = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m(B) \times \alpha_{\chi(B)} \times \min_{\omega \in B} u(\chi(\omega))$$
$$b = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m(B) \times \beta_{\chi(B)} \times \max_{\omega \in B} u(\chi(\omega))$$

L'agent préfère l'acte $\chi$ à l'acte $\chi'$ si $u(\chi) = [a, a+b]$ et $u(\chi') = [a', a'+b']$ sont tels que $a \geq a'$ et $a + b \geq a' + b'$. L'ordre correspondant est un ordre partiel : il peut y avoir plusieurs actes qui ne sont pas comparables.

### 1.3.5 Ordres de grandeur de probabilité

Considérons maintenant le cadre de décision des ordres de grandeur de probabilité proposée par Wilson, 1995. Dans ce formalisme, la connaissance est décrite par une mesure de probabilité dont les valeurs ne sont pas des réels, mais des ordres de grandeurs. Cela évite d'avoir a donner des valeurs arbitrairement précises lorsque la connaissance dont on dispose ne le permet pas. Formellement, une fonction d'utilité et une distribution de probabilité « en ordre de grandeur » sont des fonction prennant leurs valeurs dans :

$$\mathbb{R}^o = \{(\sigma, z) \mid z \in \mathbb{Z}, \sigma \in \{+, -, 0\}\} \cup \{(0, \infty)\}.$$

De tels couples $(\sigma, z) \in \mathbb{R}^o$ représentent des ordres de grandeur calibrés par un événement donné de probabilité $\epsilon$ : les couples $(+, z)$ représentent les valeurs réelles positives d'ordre de grandeur $\epsilon^z$, telles que $2\epsilon^z$ ou $\epsilon^z/2$ par exemple (et $(+, 0)$ représente la valeur 1) ; les couples $(-, z)$ représentent les valeurs réelles négatives d'ordre de grandeur $-\epsilon^z$ (et $(-, 0)$ représente la valeur $-1$) ; enfin les couples $(0, z)$ représentent tous la valeur 0.

La somme de deux couples est définie par :

$$(\sigma, z) \oplus^o (\sigma', z') = \begin{cases} (\sigma, z) & \text{si } z < z' \\ (\sigma', z') & \text{si } z > z' \\ (\sigma \boxplus^o \sigma', z) & \text{si } z = z' \end{cases}$$

avec $\boxplus^o : \{+, -, 0\}^2 \to \{+, -, 0\}$ l'addition usuelle des signes, telle que $+ \boxplus^o + = +$, $- \boxplus^o - = -$ et $\sigma \boxplus^o \sigma' = 0$ sinon ; et le produit de deux couples est défini

par :

$$(\sigma, z) \otimes^o (\sigma', z') = (\sigma \boxtimes \sigma', z + z')$$

avec $\boxtimes^o : \{+, -, 0\}^2 \to \{+, -, 0\}$ le produit usuel des signes, tel que $+ \boxtimes^o + = - \boxtimes^o - = +$, $+ \boxtimes^o - = - \boxtimes^o + = -$ et $\sigma \boxtimes^o 0 = 0 \boxtimes^o \sigma = 0$, et avec l'addition étendue à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par $x + \infty = \infty + x = \infty$.

L'ordre $\succeq^{\mathbb{R}^o}$ sur $\mathbb{R}^o$ est défini par :

$$(\sigma, z') \succeq^{\mathbb{R}^o} (\sigma', z') \iff \begin{cases} (\sigma = +) \wedge (z < z'), \\ (\sigma' = -) \wedge (z' < z), \\ (\sigma = +) \wedge (\sigma' = -) \wedge (z = z') \text{ ou} \\ (\sigma = \sigma') \wedge (z = z') \end{cases}$$

Nous pouvons alors représenter une mesure de probabilité $\Pr^o$ en ordre de grandeur par sa distribution $p^o$ sur $\mathbb{R}^o$. Elle est calibrée par un événement $A$ de probabilité $\epsilon$ : $p^o(A) = (+, 1)$. Tout événement $B$ tel que $p^o(B) = (+, n)$ a une probabilité du même ordre de grandeur que celle de $n$ événements indépendants de probabilité $\epsilon$. Similairement, une fonction d'utilité en ordre de grandeur $u^o$ : $\mathbb{X} \to \mathbb{R}^o$ est définie, sur laquelle ne pèse aucune contrainte. Un problème de décision est alors un triplet $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, p^o, u^o)$ où la règle de l'utilité espérée en ordre de grandeur est définie, pour tout acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$, par :

$$\mathrm{U}^{\mathrm{OOM}}(\chi) = \bigoplus_{\omega \in \Omega}^{o} p^o(\omega) \otimes^o u(\chi(\omega)).$$

### 1.3.6 Théorie des possibilités

La théorie des possibilité, introduite par Zadeh en 1978, permet une représentation de l'ignorance partielle de manière qualitative (Zadeh, 1978 ; Dubois et Prade, 1988). La connaissance est représentée par une distribution de possibilité, associant à chaque état du monde $\omega \in \Omega$ un *degré de possibilité* sur une échelle ordinale linéaire bornée $\Lambda$, c'est-à-dire munie d'un ordre total possédant un élément minimal et un élément maximal (ici, nous utiliserons l'intervalle réel $[0, 1]$), indiquant à quel point chaque état du monde est plausible. Cette échelle est totalement ordonnée, ce qui permet l'utilisation des opérations min et max. De plus, elle doit aussi être munie d'une opération de « renversement d'ordre » $r$. En général, lorsque $\Lambda = [0, 1]$, $r(v) = 1 - v$. Certains auteurs considèrent cette même théorie dans un cadre quantitatif, alors l'échelle $\Lambda = [0, 1]$ est une échelle de ratio (définition 1.10). Dans le cas contraire, l'échelle $\Lambda = [0, 1]$ est ordinale, et les valeurs numériques n'ont aucune signification, seul l'ordre $\geq$ est pris en compte.

**Définition 1.47 (Distribution de possibilité).** Une distribution de possibilité sur $\Omega$ est une fonction $\pi : \Omega \to [0, 1]$.

$\pi(\omega) \geq \pi(\omega')$ indique que $\omega$ est au moins aussi possible que $\omega'$. $\pi(\omega) = 1$ indique qu'$\omega$ est totalement possible, et $\pi(\omega) = 0$ indique qu'$\omega$ est impossible.

Une distribution de possibilité $\pi$ permet de représenter les croyances d'un agent. On dira que $\pi$ est *normalisée* si au moins un état du monde $\omega$ est totalement possible, i.e. $\exists \omega, \pi(\omega) = 1$. Les croyances de l'agent sont alors cohérentes. Dans les cas extrêmes, on représente l'ignorance totale par $\forall \omega, \pi(\omega) = 1$ (tous les états du monde sont possibles), et la certitude par $\exists \omega_0, \pi(\omega_0) = 1 \wedge \forall \omega \neq \omega_0, \pi(\omega) = 0$ ($\omega_0$ est possible, tous les autres états du monde sont impossibles).

Deux mesures non-additives duales peuvent être déduites d'une distribution de possibilité :

**Définition 1.48 (Mesure de possibilité et de nécessité).** Toute distribution de possibilité $\pi : \Omega \to [0,1]$ définit une mesure de possibilité $\Pi : 2^\Omega \to [0,1]$ et une mesure de nécessité $\mathrm{N} : 2^\Omega \to [0,1]$ par :

$$\forall B \subseteq \Omega, \qquad \Pi(B) = \max_{\omega \in B} \pi(\omega)$$
$$\forall B \subseteq \Omega, \qquad \mathrm{N}(B) = 1 - \Pi(B^c) = \min_{\omega \notin B} 1 - \pi(\omega)$$

La valeur $\Pi(B)$ indique à quel point $B$ est cohérent avec la connaissance ; la valeur $\mathrm{N}(B)$ indique à quel point $B^c$ est incohérent, c'est-à-dire à quel point $B$ est impliqué par la connaissance.

Les mesures $\Pi$ et N sont dites *maxitives* et *minitives* respectivement (par analogies aux mesures dites additives, i.e. les mesures de probabilité). En effet, $\Pi(B \cup B') = \max\big(\Pi(B), \Pi(B')\big)$ et $\mathrm{N}(B \cap B') = \min\big(\mathrm{N}(B), \mathrm{N}(B')\big)$. Notons que N est aussi une capacité sous-additive (définition 1.28) : c'est une fonction de croyance dont les éléments focaux sont emboîtés (tous éléments focaux $A$ et $B$ vérifient $A \subseteq B \vee B \subseteq A$).

Plusieurs auteurs ont voulu établir une théorie alternative de la décision sous incertitude basée sur la théorie des possibilités. Citons les approches proposées par Pearl et Tan dans un cadre quantitatif similaire à celui des Kappa-fonctions (Pearl, 1993 ; Tan et Pearl, 1994a,b), et l'approche proposée par Boutilier, où seuls les $\omega$s les plus plausibles sont considérés (Boutilier, 1994). Nous présentons ici la théorie proposée par Dubois et Prade, reposant sur une axiomatisation dans l'esprit de celle de Von Neumann et Morgenstern (Dubois et Prade, 1995). Elle permet de rester dans un cadre purement ordinal, en faisant l'hypothèse usuelle de commensurabilité entre l'échelle des degrés de possibilité et celle des degrés d'utilité.

Dans cette théorie, une opération de conditionnement adaptée doit aussi être ordinale. On considèrera la mesure de possibilité conditionnelle proposée par Hisdal (Hisdal, 1978) :

**Définition 1.49 (Conditionnement possibiliste ordinal).** Pour toute mesure de possibilité $\Pi : 2^\Omega \to [0,1]$, la mesure de possibilité conditionnelle « sachant $C$ » est définie par :

$$\Pi(B \mid C) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Pi(B \cap C) = \Pi(C) \\ \Pi(B \cap C) & \text{sinon} \end{cases}$$

Plusieurs autres opérations de conditionnement ont été proposées (Walley et De Cooman, 1999), dont certaines impliquent de quitter le cadre ordinal pour passer dans un cadre cardinal. Parmi les conditionnnements ordinaux, celui de la définition 1.49 produit la mesure de possibilité la *moins spécifique*, c'est-à-dire la moins informative : aucune hypothèse supplémentaire n'est faite.

Un problème de décision possibiliste est un triplet $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \pi, u)$ où $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ est une situation de décision, $\pi : \Omega \to [0,1]$ une distribution de possibilité et $u : \mathbb{X} \to [0,1]$ une fonction d'utilité, les échelles $[0,1]$ des degrés de possibilité et d'utilité étant commensurables. Pour de tels problèmes, deux règles de décision ont été proposées :

**Définition 1.50 (Règles de l'utilité pessimiste et optimiste).** Pour tout problème de décision possibiliste $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \pi, u)$, l'utilité pessimiste d'un acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$ est :

$$\mathrm{U}^{\mathrm{Pes}}(\chi) = \min_{\omega \in \Omega} \max\big(\, 1 - \pi(\omega) \;,\quad u(\chi(\omega)) \,\big)$$

L'utilité optimiste de $\chi$ est :

$$\mathrm{U}^{\mathrm{Opt}}(\chi) = \max_{\omega \in \Omega} \min\big(\, \pi(\omega) \;,\quad u(\chi(\omega)) \,\big)$$

*Remarque* 17. La règle de l'utilité pessimiste généralise la règle Min (définition 1.18) et celle de l'utilité optimiste généralise la règle Max (définition 1.19), que l'on retrouve bien sous ignorance totale, i.e. lorsque $\forall \omega, \pi(\omega) = 1$.

## 1.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes approches pour représenter les préférences et la connaissance (ou les croyances) d'un agent, et pour modéliser la prise de décision au regard de ces deux composants.

Nous avons vu, d'abord, que les préférences peuvent être exprimées de manière plus ou moins riches par des relations binaires ou par des fonctions d'utilité. Les premières décrivent des préférences qualitatives où les éléments ne sont pas nécessairement tous comparables. Les secondes permettent d'exprimer des préférences quantitatives, qui offrent une information plus riche en permettant par exemple de considérer des mécanismes de compensation. Cependant, elles sont aussi moins expressives dans le sens où tous les éléments sont nécessairement comparables.

Ensuite, nous avons présenté les théories classiques de la décision, et en particulier la théorie de l'utilité espérée, qui repose sur l'utilisation de préférences quantitatives et de mesures de probabilité. Cette théorie est bien connue, très fortement justifiée (à la fois par les axiomatisations et par ses succès pratiques). Cependant, nous avons essayé de d'identifier les limitations de cette théorie, en particulier le fait qu'elle nécessite une connaissance précise du problème considéré pour éliciter les utilités et les probabilités. Lorsque nous ne disposons pas

d'une telle connaissance, nous ne pouvons appliquer la théorie de l'utilité espérée qu'au prix d'hypothèses plus où moins légitimes. Pour cette raison, de nombreuses approches ont été proposées pour dépasser ces limitations.

Nous avons évoqué plusieurs théories alternatives de la décision sous incertitude. La plupart reposent sur l'utilisation d'une fonction d'utilité quantitative et d'une capacité sous-additive : les probabilités, les fonctions de croyance, les intervalles de probabilité, etc. D'autres permettent une approche purement qualitative (théorie des possibilités). Toutes considèrent la capacité sous-additive, sa duale super-additive ou la fonction de masse. Ces trois fonctions, qui encodent la même information, peuvent être retrouvées les unes à partir des autres.

Nous avons détaillé, en particulier, la théorie des fonctions de croyance. En effet, ce cadre nous semble très intéressant car il est suffisament riche pour y exprimer la connaissance (ou les croyances) et l'ignorance. Il généralise les probabilités et les possibilités, qui constituent d'après nous deux types de connaissance fondamentalement distincts : les probabilités décrivent naturellement la connaissance précise de la variabilité des phénomènes, les possibilités décrivent naturellement l'ignorance partielle ou totale que l'on peut en avoir, de manière graduelle. Ainsi, la théorie des fonctions de croyance est adaptée pour modéliser l'expérience d'Ellsberg, par exemple, car elle permet d'exprimer à la fois la connaissance précise concernant les proportions de boules dans l'urne et l'ignorance concernant leurs couleurs.

Nous avons vu, en particulier, que plusieurs conditionnements sont définis pour les fonctions de croyance, et qu'ils ne capturent pas le même type de mise à jour (focus et révision de connaissance) : il faut choisir le conditionnement adapté selon la nature des informations qui sont apprises. Nous avons aussi vu que pour cette théorie, plusieurs règles de décision ont été proposées, et qu'elles ne capturent pas le même type de préférences sous incertitude : il faut choisir la règle adaptée à l'agent que l'on modélise.

Nous espérons que ce chapitre introductif donnera au lecteur une bonne idée du foisonnement des formalismes existants. Peut-être aura-t-il aussi remarqué les similitudes entre ces formalismes. Nous les exploiterons, dans le chapitre 3, pour proposer une règle de décision universelle, définie de manière algébrique, pour laquelle la théorie de l'incertitude sera un paramètre.

Durant tout le chapitre, nous avons considéré un agent devant prendre une décision. Il s'agit d'un cadre « simple », dans le sens où l'agent est seul à choisir, et peut envisager faire le « meilleur choix ». Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons aux situations où plusieurs agents effectuent des choix simultanément. Alors, les choix faits par les uns impactent les résultats obtenus par les autres. La situation se complexifie : même si l'état du monde est parfaitement connu, il n'est pas évident pour un agent de faire le « meilleur choix », car ce meilleur choix dépend de ce que choisissent les autres !

# Chapitre 2

# Prise de décision multi-agents stratégique sous incertitude

La théorie des jeux est un sous-domaine de la théorie de la décision, dans lequel on s'intéresse aux situations où plusieurs agents prennent une décision, les choix des uns impactant les résultats obtenus par les autres. Commençons par décrire une telle situation du point de vue de l'un des participants.

Considérons pour l'exemple un garde-chasse dont l'objectif est de protéger plusieurs parcelles du braconnage. Ce garde-chasse va prendre en compte les préférences des braconniers pour estimer les parcelles qui risquent d'être braconnées, et savoir où se rendre. Plus important encore, il va raisonner en sachant que les braconniers devraient tenir un raisonnement similaire : ils devraient eux aussi estimer où le garde-chasse va se rendre pour choisir leur lieu de braconnage.

L'approche classique en théorie des jeux propose de définir un modèle du comportement de chacun des intervenants (le garde-chasse et les braconniers), et de chercher, par exemple, s'il y a certaines stratégies moins intéressantes que d'autres pour le garde-chasse ou pour les braconniers. Avant cela, il faut savoir quel type de modèle nous devrions considérer. Est-ce que les intervenants décident de leur déplacement de manière définitive ? Est-ce que certains d'entre eux connaîtront les choix des uns avant de décider du leur ? Est-ce qu'il disposent d'une information complète sur les contraintes et préférences des concurrents ? Est-ce qu'il est possible que plusieurs braconniers s'associent ?

Les premières études en théorie des jeux datent du XIXe siècle. Cournot, Bertrand puis Edgeworth s'intéressent au choix des prix ou des moyens de productions dans les oligopoles (Cournot, 1838 ; Bertrand, 1883 ; Edgeworth, 1897). Ces résultats sont encore très spécifiques et c'est la théorie générale proposée par von Neumann et Morgenstern (Morgenstern et Von Neumann, 1953), qui impacta le plus les sciences économiques. En effet, ces auteurs ont montré que la plupart des questions économiques *devraient* être analysées comme des jeux. Nash proposa ensuite le concept d'*équilibre de Nash*, généralisant les solutions proposées par Cournot et Bertrand à cette théorie générale (Nash,

1950). Selten s'intéressa particulièrement aux jeux dynamiques, pour lesquels il affine le concept d'équilibre (Selten, 1965). Harsanyi proposa un modèle de jeux stratégiques à information incomplète, dans un cadre probabiliste : les *jeux bayésiens* (Harsanyi, 1967).

Plus récemment, la théorie des jeux a été appliquée à d'autres domaines que l'économie. Citons par exemple : la politique, la psychologie et la philosophie, où on étudie les décisions prises par des humains (Schelling, 1958 ; Binmore, 1994 ; De Mesquita et al., 2005 ; Saad, 2007 ; Berne, 2011) ; l'informatique et la robotique, où des décisions doivent être effectivement prises par des algorithmes ou des robots, et donc calculables efficacement (Roughgarden, Tardos et Vazirani, 2008 ; Shoham et Leyton-Brown, 2008 ; Han et al., 2012) ; ou encore la biologie, où les jeux sont utilisés pour modéliser les interactions au sein de populations (inter-individus, inter-espèces, etc.) et l'évolution des populations (Dawkins, 1976 ; Axelrod et Hamilton, 1981 ; Colman, 1995 ; Sandholm, 2010).

Ici, nous considérons les *jeux stratégiques* (ou simultanés), un modèle permettant de représenter les situations où chaque participant prend une seule décision sans avoir connaissance de celles prises par les autres. Ce modèle permet aussi de représenter des situations où plusieurs décisions sont prises successivement ; même si ces situations sont plus aisément représentées par le modèle *en forme extensive*. Dans la section 2.1, nous supposons que chaque participant a une connaissance complète des moyens et préférences de tous les participants (on parle alors de *jeu à information complète*) ; puis dans la section 2.2, nous considérons le cas où certains participants n'en ont qu'une connaissance partielle (on parle alors de *jeu à information incomplète*).

## 2.1 Jeux à information complète

La théorie des jeux a été grandement développée par Von Neumann et Morgenstern. Leur approche repose sur la théorie classique de la décision : l'utilité des agents est représentée par une fonction quantitative à valeurs réelles, et lorsque l'information n'est pas parfaite, l'incertitude est capturée par une loi de probabilité.

Un *jeu* est un problème de décision impliquant plusieurs agents. Il décrit l'ensemble des participants (les *joueurs*), leurs choix possibles respectifs (les *actions*) et leurs préférences (les *utilités*). La conséquence qui en découle dépend du choix de tous les joueurs ; en effet souvent aucun joueur ne peut décider de la conséquence par son choix uniquement, mais doit considérer les choix faits par les autres joueurs. L'espace des conséquences possibles $\mathbb{X}$ est habituellement laissé implicite, et les préférences sont exprimées directement sur les décisions jointes, c'est-à-dire sur la donnée de l'action choisie par chaque joueur.

**Définition 2.1 (Jeu à information complète).** Un jeu à information complète est un $n$-uplet $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$ où :

— $N = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble fini des joueurs,

— $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i$,

— $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur $i$.

*Remarque* 18. Il est toujours possible de faire apparaître un espace des conséquences $\mathbb{X}$ en posant $\mathbb{X} = A_1 \times \cdots \times A_n$ ; ainsi toute conséquence $x_a = a = (a_1, \ldots, a_n)$ est comprise comme « ce qu'il advient lorsque $a$ est choisi ».

Étant donné un ensemble de joueurs $N = \{1, \ldots, n\}$ et, pour chaque joueur $i \in N$, un ensemble $Y_i$, on notera $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ le produit cartésien des $Y_i$. Tout élément $y \in Y$ est un vecteur $y = (y_1, \ldots, y_n)$ appelé *profil d'ys*, où la $i$-ème composante est $y_i \in Y_i$. On notera $y_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in Y_{-i}$ le profil où la $i$-ème composante a été retirée. La concaténation est notée avec le point (.), telle que $\forall i \in N, y = y_i.y_{-i} \in Y$. Enfin, pour tout $e \subset N$ et tout profil $y \in Y$, le profil partiel constitué des $y_i$ pour $i \in e$ sera noté $y_e \in Y_e$ (par exemple, $y_{\{1,3,5\}} = (y_1, y_3, y_5) \in Y_{\{1,3,5\}} = Y_1 \times Y_3 \times Y_5$).

En particulier, un profil d'actions est un vecteur $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ qui décrit le choix de chacun des joueurs. On l'appelle souvent *profil de stratégies pures*. Le terme « stratégie » implique qu'il s'agit de choix raisonnables faits par les joueurs. Le terme « pure » fait opposition au terme « mixte » et signifie qu'une action est pleinement choisie, ou pas du tout. Il n'y a alors ni incertitude ni variabilité sur les choix réalisés par les joueurs. Ainsi, les termes « action » et « stratégie pure » sont mathématiquement équivalents ; nous parlerons plutôt d'actions dans la définition d'un jeu et de stratégies pures dans la recherche des choix pertinents des joueurs.

**Définition 2.2 (Profil de stratégies pures).** Soit $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$ un jeu à information complète. Un profil de stratégies pures de $G$ est un vecteur $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A = \prod_{i \in N} A_i$.

Si $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$ est un jeu à deux joueurs ($N = \{1, 2\}$) dont les ensembles d'actions $A_i$ sont finis, alors on le représentera souvent sous forme d'une matrice à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (ou de manière équivalente de deux matrices à valeurs réelles), ayant $|A_1|$ lignes et $|A_2|$ colonnes. À l'intersection de la ligne $a_1$ et de la colonne $a_2$ se trouve la paire $\big(u_1(a_1.a_2), u_2(a_1.a_2)\big)$. La matrice contient ainsi toute l'information du jeu $G$, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant.

**Exemple 2.1 (Jeu de conservation écologique 1).** *Un garde-chasse souhaite protéger deux parcelles $P_1$ et $P_2$ du braconnage, et un braconnier souhaite, lui, braconner l'une de ces parcelles. Le braconnier cherche à éviter le garde-chasse, inversement le garde-chasse cherche à se rendre sur la même parcelle que le braconnier. Il s'agit d'un exemple simple de* jeu de conservation écologique *(ou* « green security game », Fang, Stone *et* Tambe, *2015 ;* Fang *et* Nguyen, *2016 ;* Jourdan, *2022), que nous représenterons graphiquement par la figure 2.1 : les losanges représentent les parcelles, les triangles représentent le garde-chasse (à gauche) et le braconnier (à droite), et les flèches en pointillé indiquent les parcelles sur lesquelles chaque joueur peut se rendre.*

*La figure 2.1 décrit ainsi l'ensemble des joueurs $N = \{G, B\}$ et les ensembles de leurs actions respectives $A_G = A_B = \{P_1, P_2\}$, mais pas leurs fonctions*

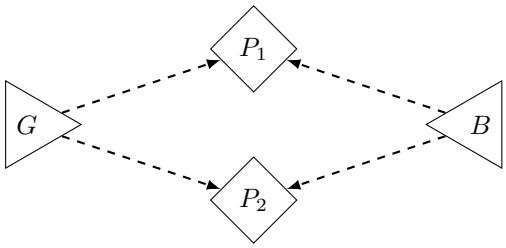



FIGURE 2.1 – Diagramme du jeu de conservation écologique 2.1

*d'utilité. Par soucis de simplicité, nous supposerons que toutes les parcelles contiennent le même gibier, dont le braconnier tire une utilité de* 10*. Si par ailleurs le garde-chasse trouve le braconnier, ce dernier doit s'acquitter d'une amende, l'utilité du garde-chasse est alors de* $x > 0$*, et celle du braconnier est diminuée de* $y > 0$ *(selon le joueur, l'utilité peut être différente). Les fonctions d'utilités sont donc définies par :*

$$u_G(a_G, a_B) = \begin{cases} x & si\ a_G = a_B \\ 0 & si\ a_G \neq a_B \end{cases} \qquad u_B(a_G, a_B) = \begin{cases} 10 & si\ a_B \neq a_G \\ 10 - x & si\ a_B = a_G \end{cases}$$

*Nous pouvons résumer toute l'information de ce jeu* $G = (N, (A_i, u_i)_{i \in N})$ *dans la matrice d'utilité donnée à la table 2.1.*

| | $B$ | |
|---|---|---|
| $G$ | $P_1$ | $P_2$ |
| $P_1$ | $(x, 10-y)$ | $(0, 10)$ |
| $P_2$ | $(0, 10)$ | $(x, 10-y)$ |

TABLE 2.1 – Matrice d'utilité du jeu de conservation écologique 2.1.

*Modéliser la situation sous forme d'un jeu à information complète permet de bien décrire les différents scénarios possibles, selon les choix des joueurs. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que pour être dissuasive, la désutilité que l'amende procure au braconnier doit être supérieure à 10. En effet, si* $y < 10$*, le braconnier est toujours satisfait, même s'il se fait arrêter.*[1] *Cependant, il semble difficile d'en dire plus. Il est par exemple difficile d'identifier la parcelle sur laquelle le garde-chasse devrait se rendre.*

### 2.1.1 Représentation d'un jeu

Considérons un jeu $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$ où les ensembles $A_i$ des actions des joueurs sont finis. Un tel jeu est représentable de plusieurs façons.

1. Pour pouvoir affirmer cela, il faut que 0 représente une utilité neutre (ni bonne, ni mauvaise). C'est le cas lorsqu'on considère une échelle de ratio (définition 1.10), mais pas nécessairement lorsqu'on considère une échelle d'intervalle (définition 1.9).

**Définition 2.3 (Forme normale standard).** Un jeu en *forme normale standard* est représenté par sa *matrice d'utilité*, c'est-à-dire par un $n$-tenseur [2] dont les rangées de chaque dimension $i \leq n$ sont indicées par les actions du joueur $i$. Ce $n$-tenseur possède $|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$ cellules qui contiennent chacunes un vecteur de $\mathbb{R}^n$ décrivant les utilités obtenues par les $n$ joueurs lorsqu'ils jouent le profil dont les stratégies sont les indices de la cellule : la cellule indicée par $a = (a_1, \ldots, a_n)$ contient ainsi les valeurs d'utilité $\big(u_1(a), \ldots, u_n(a)\big) \in \mathbb{R}^n$.

**Propriété 2.1 (Complexité spatiale d'un jeu en forme normale standard).** La taille d'un jeu $G$ en forme normale standard dans lequel les joueurs ont au plus $\alpha$ actions est :

$$\text{Taille}(G) \;=\; n \times |A_i| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n| \;\in\; O\left(n\alpha^n\right)$$

Un jeu peut parfois être représenté de manière plus concise sous forme hypergraphique. Dans un jeu hypergraphique, les joueurs participent à un ou plusieurs *jeux locaux* qui n'impliquent qu'une partie des joueurs. Chaque joueur choisit une seule action qu'il joue dans tous jeux locaux auxquels il participe. Il obtient ainsi plusieurs « utilités locales ». Son utilité (globale) est alors la somme des utilités locales obtenues.

**Définition 2.4 (Forme hypergraphique).** Un jeu sous forme hypergraphique est un $n$-uplet $\big(N, E, (A_i)_{i\in N}, (u_i^e)_{e\in E, i\in e}\big)$ où :

- $N$ est l'ensemble des joueurs ;
- $E \subseteq 2^N$ est l'ensemble des jeux locaux (chaque $e \in E$ est à la fois l'identifiant du jeu local $e$ et l'ensemble des joueurs qui y participent) ;
- $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i$,
- $u_i^e : A_e \to \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur $i$ dans le jeu local $e$.

L'utilité globale du joueur $i$ est alors : $u_i(a) = \sum_{i\in e\in E} u_i^e(a_e)$

Chaque $e \in E$ est un sous-ensemble des joueurs, lesquels participent au jeu local $G^e = \big(e, (A_i, u_i^e)_{i\in e}\big)$. On dira que le jeu est en *forme hypergraphique standard* dès lors que les jeux locaux sont en *forme normale standard*, c'est-à-dire décrits par leurs matrices d'utilités.

**Propriété 2.2 (Complexité spatiale d'un jeu en forme hypergraphique standard).** La taille d'un jeu $G$ en forme hypergraphique standard dans lequel les joueurs ont au plus $\alpha$ actions et où les jeux locaux impliquent au plus $k$ joueurs est :

$$\text{Taille}(G) \;=\; \sum_{e\in E} |e| \times \prod_{i\in e} |A_i| \;\in\; O\left(|E| \times k\alpha^k\right)$$

On appelle *jeu polymatriciel* un jeu hypergraphique où les jeux locaux ne font intervenir que deux joueurs chacuns (Yanovskaya, 1968). La complexité spatiale d'un jeu polymatriciel est donc en $O\big((n\alpha)^2\big)$.

2. Un $n$-tenseur est la généralisation en $n$ dimensions du concept de matrice. Ainsi, une valeur est un 0-tenseur, un vecteur est un 1-tenseur, une matrice est un 2-tenseur, etc.

*Remarque* 19. Il existe d'autres manières de représenter un jeu à information complète. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de Papadimitriou par exemple, où il trouvera aussi les résultats de complexité (Daskalakis, Fabrikant et Papadimitriou, 2006 ; Papadimitriou et Roughgarden, 2008).

**Exemple 2.2.** *Considérons le jeu de conservation écologique décrit informellement par la figure 2.2, où un garde-chasse et deux braconniers peuvent se rendre sur les parcelles $P_1$ ou $P_2$. Comme dans l'exemple précédent, chaque braconnier obtient une utilité de 10, qui est diminuée de $y$ si le garde-chasse le trouve. L'utilité du garde-chasse sera 0, $x$ ou $2x$ s'il trouve respectivement aucun, un ou les deux braconniers, c'est-à-dire :*

$$N = \{G, B_1, B_2\} \qquad A_G = A_{B_1} = A_{B_2} = \{P_1, P_2\}$$

$$u_G(a) = \begin{cases} 2x & si\ a_G = a_{B_1} = a_{B_2} \\ x & si\ a_G = a_{B_1} \neq a_{B_2} \\ x & si\ a_G = a_{B_2} \neq a_{B_1} \\ 0 & si\ a_G \neq a_{B_1} = a_{B_2} \end{cases} \qquad u_{B_k}(a) = \begin{cases} 10 & si\ a_{B_k} \neq a_G \\ 10 - y & si\ a_{B_k} = a_G \end{cases}$$

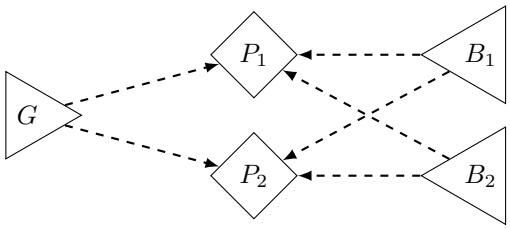



Figure 2.2 – Diagramme du jeu de conservation écologique 2.2

*Pour représenter ce jeu en forme normale standard, il faut donner les valeurs d'utilité des trois joueurs pour chaque profil de stratégies pures. Il y a $2^3 = 8$ profils de stratégies, il faut donc donner les $3 \times 8 = 24$ valeurs d'utilités (table 2.2).*

*Ce jeu de conservation écologique peut être représenté sous la forme hypergraphique $\tilde{G} = (N, E, (A_i)_{i \in N}, (u_i^e)_{e \in E, i \in N})$ où les deux jeux locaux $\{G, B_1\}$ et $\{G, B_2\}$ impliquent chacun le garde-chasse et l'un des braconniers. Alors, $E = \{\{G, B_1\}, \{G, B_2\}\}$ et les fonctions d'utilités locales sont définies, pour $k \in \{1, 2\}$, par :*

$$u_G^{\{G,B_k\}}(a_G, a_{B_k}) = \begin{cases} x & si\ a_G = a_{B_k} \\ 0 & si\ a_G \neq a_{B_k} \end{cases}$$

$$u_{B_k}^{\{G,B_k\}}(a_G, a_{B_k}) = \begin{cases} 10 & si\ a_G \neq a_{B_k} \\ 10 - y & si\ a_G = a_{B_k} \end{cases}$$

| $B_2$ \ $B_1$ | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | $(2x, 10-y, 10-y)$ | $(x, 10, 10-y)$ |
| $P_2$ | $(x, 10-y, 10)$ | $(0, 10, 10)$ |

(a) Utilités si le garde-chasse se rend en $P_1$ ($a_G = P_1$).

| $B_2$ \ $B_1$ | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | $(0, 10, 10)$ | $(x, 10-y, 10)$ |
| $P_2$ | $(x, 10, 10-y)$ | $(2x, 10-y, 10-y)$ |

(b) Utilités si le garde-chasse se rend en $P_2$ ($a_G = P_2$).

TABLE 2.2 – Forme normale standard de l'exemple 2.2. Le 3-tenseur est représenté « à plat », la valeur de chaque cellule est un triplet $(u_G(a), u_{B_1}(a), u_{B_2}(a))$.

*Nous pouvons vérifier que pour chaque joueur, l'utilité globale obtenue est égale à la somme des utilités locales. En particulier, pour le garde-chasse, et pour tout profil de stratégies pures* $a = (a_G, a_{B_1}, a_{B_2}) \in A$ *:*

$$u_G(a_G, a_{B_1}, a_{B_2}) = u_G^{\{G,B_1\}}(a_G, a_{B_1}) + u_G^{\{G,B_2\}}(a_G, a_{B_2}).$$

*Toute l'information de ce jeu hypergraphique est décrite dans la figure 2.3. Il a suffit de donner les valeurs d'utilité des deux jeux locaux. Dans chaque jeu local, il y a deux joueurs, donc* $2^2 = 4$ *profils de stratégies pures. Il faut donner* $2 \times 4 = 8$ *valeurs par jeu local, soit* 16 *valeurs en tout.*

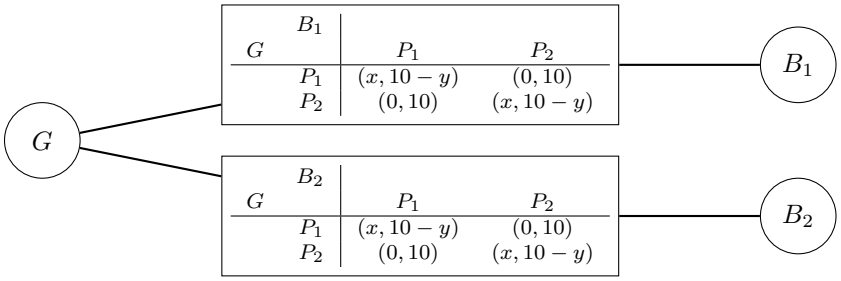



FIGURE 2.3 – Représentation hypergraphique de l'exemple 2.2

### 2.1.2 Dominance, rationalisabilité et équilibres de Nash

Une fois le problème modélisé sous forme d'un jeu à information complète, il est directement possible de l'étudier. Quel que soit le point de vue adopté (celui d'un joueur ou alors un point de vue extérieur), on s'intéressera à identifier les « bonnes » et les « mauvaises » stratégies des joueurs, et éventuellement les profils de stratégies « à l'équilibre », c'est-à-dire tels qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie.

*Remarque* 20. Les concepts de dominance, de rationalisabilité et d'équilibre de Nash présentés dans cette section sont des concepts purement ordinaux. Ainsi, tout au long de cette section, nous pouvons considérer des jeux où les préférences d'un joueur sont décrites par l'une des représentations numériques (qualitatives) d'un pré-ordre, et non par des fonctions d'utilités quantitatives.

Dans les exemples 2.1 et 2.2, il n'est pas évident d'identifier les bons et les mauvais choix des joueurs, car les utilités obtenues dépendent des choix réalisés par les autres joueurs. Dans certaines situations cependant, il est possible d'identifier de manière absolue certaines actions comme étant des bons ou des mauvais choix.

**Exemple 2.3 (Jeu de conservation écologique 3).** *Considérons le jeu de conservation écologique décrit à la figure 2.4, dans lequel deux braconniers vont nécessairement sur la parcelle $P_1$, un troisième braconnier peut aller en $P_1$ ou en $P_2$, et le garde-chasse aussi. Les utilités du garde-chasse et des braconniers sont supposées identiques aux exemples précédents : le garde-chasse gagne $x$ par braconnier trouvé, et chaque braconnier gagne 10, auxquels on retranche $y$ si le garde-chasse le trouve.*

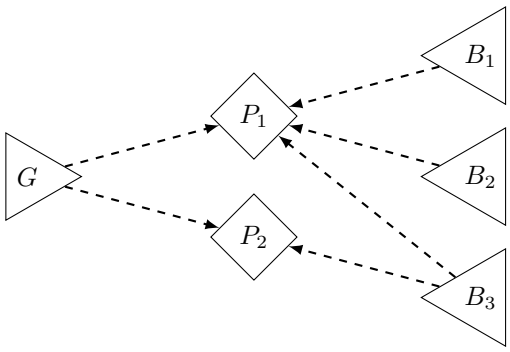



FIGURE 2.4 – Diagramme du jeu de conservation écologique 2.3

Dans l'exemple 2.3, on peut observer que le meilleur choix du garde-chasse ne dépend pas des choix des autres joueurs. En effet, quoi que choisisse le braconnier $B_3$, le garde-chasse arrêtera toujours plus de braconniers en allant en $P_1$ qu'en $P_2$ (il est certain de gagner au moins $2x$ en $P_1$, et au plus $x$ en $P_2$). C'est cette idée que capturent les concepts de dominance et de rationalisabilité (MORGENSTERN et VON NEUMANN, 1953 ; BERNHEIM, 1984 ; PEARCE, 1984 ; AUMANN, 1987 ; BRANDENBURGER et DEKEL, 1987 ; TAN et COSTA WERLANG, 1988 ; MYERSON, 1997).

**Définition 2.5 (Stratégies strictement dominées et dominantes).** Une stratégie $a_i \in A_i$ du joueur $i$ est strictement dominée s'il existe une stratégie $a'_i \in A_i$ la dominant strictement, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(a'_i.a_{-i}) > u_i(a_i.a_{-i})$$

La stratégie $a_i$ est faiblement dominée s'il existe $a'_i$ telle que l'équation précédente tient avec une inégalité faible, et stricte pour au moins un $a_{-i}$.

**Définition 2.6 (Stratégies faiblement dominées et dominantes).** Une stratégie $a_i \in A_i$ du joueur $i$ est faiblement dominée s'il existe une stratégie $a'_i \in A_i$ la dominant faiblement, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(a'_i.a_{-i}) \geq u_i(a_i.a_{-i}) \text{ et } \exists a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(a'_i.a_{-i}) > u_i(a_i.a_{-i})$$

Un joueur $i$ n'a jamais intérêt à choisir une stratégie strictement dominée $a_i$. En effet, quels que soient les choix pris par les autres joueurs, il aura intérêt à jouer la stratégie strictement dominante $a'_i$ plutôt que la stratégie strictement dominée $a_i$. Un joueur peut raisonnablement décider de ne pas jouer non plus une stratégie $a_i$ faiblement dominée par $a'_i$. Cependant, $a_i$ n'est pas nécessairement « pire » qu'$a'_i$. En effet, elle ne procurera jamais plus d'utilité au joueur $i$ que la stratégie $a'_i$, mais selon des stratégies choisies par autres joueurs, elle peut tout de même en procurer autant.

Il est raisonnable de penser que le joueur $i$ tiendra ce raisonnement, et qu'il ne jouera effectivement pas ses stratégies strictement dominées. Ce raisonnement peut aussi être tenu par les autres joueurs : tout le monde peut raisonnablement penser que le joueur $i$ ne jouera pas ses stratégies strictement dominées. On peut alors simplifier le jeu en « enlevant les stratégies strictement dominées » de la définition. Or, une telle simplification peut faire apparaître de nouvelles stratégies strictement dominées : on applique alors la simplification à nouveau.

Ce processus est appelé *élimination itérée des stratégies strictement dominées*, ou EISD, et permet donc de simplifier le jeu sans jamais éliminer de stratégies qui pourraient raisonnablement être jouées. Après (potentiellement) plusieurs étapes, il n'y a plus de stratégies strictement dominées : on obtient alors l'*ensemble des stratégies qui survivent à l'EISD*.

**Définition 2.7 (Ensemble des stratégies qui survivent à l'EISD).** Le processus d'EISD est défini récursivement pour tout jeu $G = (N, (A_i, u_i)_{i \in N})$, pour tout $i \in N$, par :

$$A_i^{(0)} = A_i$$
$$A_i^{(k)} = \left\{ a_i \in A_i^{(k-1)} \mid \nexists a'_i \in A_i^{(k-1)},\ \forall a_{-i} \in A_{-i}^{(k-1)},\ u_i(a'_i.a_{-i}) > u_i(a_i.a_{-i}) \right\}$$

L'ensemble des stratégies du joueur $i$ qui survivent à l'EISD est $A_i^{(\infty)} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_i^{(k)}$.

Le jeu $G' = (N, (A_i^{(\infty)}, u_i)_{i \in N})$ est alors une simplification de $G$, où toutes les stratégies qui peuvent être raisonnablement jouées ont été conservées.

Intuitivement, à chaque étape $k$, l'ensemble $A_i^{(k)}$ contient les actions du joueur $i$ de l'étape précédente ($A_i^{(k-1)}$) sauf celles qui sont strictement dominées lorsque l'on se restreint aux profils d'actions de $A^{(k-1)}$. Finalement, il y a un rang $K$ auquel plus aucune stratégie d'aucun joueur n'est strictement dominée, alors on conservera $A_i^{(K)} = A_i^{(\infty)}$.

*Remarque* 21. Il est possible d'appliquer un algorithme d'élimination similaire en considérant les stratégies faiblement dominées. Cependant, puisque qu'une stratégie faiblement dominée peut parfois être un bon choix (selon les choix des autres joueurs), l'ensemble des stratégies qui survivent à cette élimination peut mettre de côté certaines stratégies pertinentes.

Parfois, lors de la simplification d'un jeu par EISD, il ne reste plus qu'une seule stratégie pour chaque joueur. On dit alors qu'on a « résolu » le jeu par dominance.

**Exemple 2.4 (EISD).** *Appliquons l'EISD au jeu de conservation écologique de l'exemple 2.3.*

— *Initialisons l'EISD avec* $A_i^{(0)} = A_i$ *pour tout joueur* $i \in N$ *:*

$$A_G^{(0)} = A_{B_3}^{(0)} = \{P_1, P_2\}, \qquad A_{B_1}^{(0)} = A_{B_2}^{(0)} = \{P_1\}.$$

— *La stratégie* $P_2$ *du garde-chasse est strictement dominée par sa stratégie* $P_1$ *(en effet, il est certain d'arrêter au moins deux braconniers en* $P_1$*). Les autres joueurs n'ont pas de stratégies strictement dominées.*

$$A_G^{(1)} = A_G^{(0)} \setminus \{P_2\} = \{P_1\}, \qquad \forall k \leq 3, A_{B_k}^{(1)} = A_{B_k}^{(0)}.$$

— *En se restreignant à* $A^{(1)} = A_G^{(1)} \times A_{B_1}^{(1)} \times A_{B_2}^{(1)} \times A_{B_3}^{(1)}$*, la stratégie* $P_1$ *du braconnier* $B_3$ *est maintenant strictement dominée par sa stratégie* $P_2$ *(en effet, à l'étape précédente, on a identifié que le garde-chasse devrait se rendre en* $P_1$*). Les autres joueurs n'ont pas de stratégies structement dominées.*

$$A_{B_3}^{(2)} = A_{B_3}^{(1)} \setminus \{P_1\} = \{P_2\}, \quad A_G^{(2)} = A_G^{(1)}, \quad \forall k \leq 2, A_{B_k}^{(2)} = A_{B_k}^{(1)}.$$

— *Plus aucun joueur n'a de stratégies strictement dominées, l'EISD s'arrête.*

$$A_G^{(\infty)} = A_G^{(2)} = \{P_1\}, \quad A_{B_3}^{(\infty)} = A_{B_3}^{(2)} = \{P_2\}, \quad \forall k \leq 2, A_{B_k}^{(\infty)} = \{P_1\}.$$

*Dans cet exemple, l'EISD n'a conservé qu'une seule stratégie par joueur : il est raisonnable de penser que le garde-chasse doit/devrait/va choisir de se rendre en* $P_1$*, et le braconnier* $B_3$ *en* $P_2$ *(les autres braconniers n'ont pas le choix, ils se rendent en* $P_1$*).*

*Remarque* 22. Ici, le braconnier $B_3$ choisit d'aller en $P_2$ parce qu'il suppose que le garde-chasse ira en $P_1$. C'est un raisonnement pertinent. Tous les joueurs peuvent tenir ce raisonnement : par exemple, le garde-chasse $G$ peut raisonnablement supposer que $B_3$ ira en $P_1$. Pour cela, $G$ suppose que $B_3$ suppose que $G$ ira en $P_1$. Plus l'EISD nécessite d'étapes, plus la chaîne de suppositions s'allonge. Bien que le raisonnement soit valable à l'infini, il semble peu vraisemblable que des agents raisonnent au delà de quelques étapes.

Une autre notion très étudiée est celle d'équilibre de Nash (Nash, 1950). Intuitivement, un équilibre de Nash est un profil de stratégies $a = (a_1, \ldots, a_n)$ pour lequel aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie : si on propose aux joueurs de jouer les stratégies de ce profil $a$, alors ils devraient effectivement les jouer. En effet, $a$ est un équilibre de Nash si chaque joueur $i$ n'a pas de stratégie meilleure qu'$a_i$ lorsque les autres joueurs jouent $a_{-i}$.

**Définition 2.8 (Meilleure réponse).** Les meilleures réponses du joueur $i$ face aux choix des autres joueurs $a_{-i} \in A_{-i}$ sont les actions $a_i^*$ maximisant son utilité, c'est-à-dire :

$$a_i^* \text{ est une meileure réponse à } a_{-i} \iff a_i^* \in \operatorname*{argmax}_{a_i \in A_i} u_i(a_i.a_{-i}).$$

**Définition 2.9 (Équilibre de Nash).** Un profil de stratégies pures $a$ est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout joueur $i$, $a_i$ est une meilleure réponse à $a_{-i}$, c'est-à-dire :

$$\forall i, \nexists a_i', \quad u_i(a_i'.a_{-i}) > u_i(a)$$

L'EISD conserve les équilibres de Nash : ils ne peuvent pas être éliminés. De plus, si le jeu est résolu par EISD, alors l'unique profil de stratégies restant est un équilibre de Nash.

De manière générale, dans un jeu à information complète, il peut n'y avoir aucun équilibre de Nash (en stratégies pures). Il peut aussi en exister plusieurs, et l'EISD ne les identifie pas nécessairement. Il n'est pas évident de savoir si un équilibre sera atteint, ou même simplement identifié par les joueurs : on ne sait pas si un équilibre sera effectivement joué, ni lequel. Le concept est pertinent, à l'inverse, lorsqu'un organisme normalisateur affirme que les choix doivent être pris de telle façon : si ces recommendations correspondent à un équilibre de Nash, on peut raisonnablement penser que les joueurs suivront les recommendations. Inversement, si elles ne correspondent pas à un équilibre de Nash, alors au moins un joueur aura intérêt à ne pas les suivre.

**Exemple 2.5.** *Dans l'exemple 2.3, l'unique profil de stratégies survivant à l'EISD est* $(P_1, P_1, P_1, P_2) \in A^{(\infty)} \subset A$. *C'est un équilibre de Nash. En effet :*

- *Les braconniers* $B_1$ *et* $B_2$ *n'ont pas d'autres choix que d'aller en* $P_1$ *;*
- *Le garde-chasse* $G$ *n'a pas intérêt à aller en* $P_2$*, car il n'arrêterait qu'un seul braconnier et non deux ;*
- *Le braconnier* $B_3$ *n'a pas intérêt à aller en* $P_1$*, car il se ferait arrêter.*

Enfin, nous terminerons cette sous-section en évoquant le concept de rationalisabilité proposé par Aumann (Aumann, 1987). C'est en quelque sorte le complémentaire de la dominance. Alors que la question de la dominance est « quelles stratégies ne seront raisonnablement jamais jouées ? », la question de la rationalisabilité est « quelles stratégies peuvent être raisonnablement jouées ? ».

Les stratégies rationalisables sont celles qui sont les meilleures réponses à l'un des profils de stratégies possibles, c'est-à-dire qu'il est possible pour le joueur

de penser qu'une stratégie rationalisable est le meilleur choix. En considérant la contraposée (le joueur ne jouera raisonnablement pas de stratégie qui n'est pas une meilleure réponse à au moins un profil de stratégies), on voit que le concept est plus large que celui de dominance : une stratégie strictement dominée n'est pas rationalisable, mais une stratégie non-rationalisable peut ne pas être strictement dominée.

De plus, une stratégie rationalisable $a_i$ devrait être une meilleure réponse à un profil $a_{-i}$ lui-même constitué de stratégies rationalisables (sinon, il ne serait pas vraiment raisonnable pour le joueur $i$ de jouer $a_i$, puisqu'il ne devrait raisonnablement pas penser que les autres joueurs joueront $a_{-i}$). L'ensemble des stratégies rationalisables est obtenu par un processus itératif similaire à l'EISD, appelé *élimination des stratégies non-rationalisables* (ou EISNR), qui permet lui-aussi de simplifier un jeu en éliminant les stratégies qui ne seront jamais jouées.

**Définition 2.10 (EISNR).** L'ensemble des stratégies rationalisables est défini de manière récursive, pour tout $i \in N$, par :

$$A_i^{(0)} = A_i$$
$$A_i^{(k)} = \left\{ a_i \in A_i^{(k-1)} \mid \exists a_{-i} \in A_{-i}^{(k-1)},\ \forall a_i' \in A_i^{(k-1)},\ u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i'.a_{-i}) \right\}$$

*Remarque* 23. Les concepts de dominance et de rationalisabilité sont très proches. À deux joueurs, les deux concepts sont équivalents. D'une manière générale, l'ensemble des stratégies rationalisables est un sous-ensemble des stratégies qui survivent à l'EISD : l'EISNR élimine généralement plus de stratégies que l'EISD.

### 2.1.3 Stratégies mixtes – une forme d'incertitude dans les jeux à information complète

Assez rapidement, l'étude des jeux en termes de stratégies pures (c'est-à-dire en termes d'actions) a montré ses limites. La justification initiale est pratique : souvent, les joueurs n'ont pas de « meilleure » stratégie pure (ce qui peut être voulu). Alors, que doivent-ils jouer ? Que vont-ils jouer ? Si la réponse « nous ne pouvons pas prédire ou prescrire quoi jouer » est déjà un résultat en soit, il est souvent possible d'être plus précis en considérant des *stratégies mixtes*.

En effet, en introduisant de l'incertitude et/ou de la variabilité sur les choix faits par les joueurs (de manière classique, donc probabiliste), on étend l'expressivité des concepts présentés précédemment et on garantit l'existence d'au moins un équilibre de Nash.

Revenons à l'exemple 2.1, où un garde-chasse et un braconnier doivent choisir de se rendre en $P_1$ ou en $P_2$. Dans cet exemple, il n'y a pas de stratégies dominées. Toutes les stratégies sont rationalisables. Et il n'y a pas non plus d'équilibre de Nash (en stratégies pures). C'est déjà un constat pertinent. En effet, aucune parcelle n'est « meilleure » qu'une autre, que ce soit du point de vue du garde-chasse ou du braconnier. Tout dépend de la décision prise par l'autre joueur.

Cependant, en considérant les *stratégies mixtes* (probabilistes), il est possible d'en dire plus.

**Définition 2.11 (Stratégie mixte).** Une stratégie mixte $\sigma_i$ du joueur $i$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble de ses actions $A_i$, vérifiant donc $\sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) = 1$ et pour tout $a_i$, $0 \leq \sigma_i(a_i) \leq 1$.

On notera $\Sigma_i$ l'ensemble des stratégies mixtes du joueur $i$ et $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes.

Le concept de stratégies mixtes est plus expressif que celui de stratégies pures, puisque l'ensemble des stratégies pures est inclus dans celui des stratégies mixtes (la stratégie pure $a_i$ est la stratégie mixte $\sigma_i$ vérifiant $\sigma_i(a_i) = 1$ et $\sigma_i(a'_i) = 0$ sinon). Son interprétation est néanmoins plus délicate : $\sigma_i$ peut représenter le fait que le joueur $i$ choisit réellement au hasard ; de manière subjective $\sigma_i$ peut représenter les croyances des autres joueurs conernant l'action que va jouer le joueur $i$. De plus, Harsanyi a montré que sous certaines conditions, un équilibre de Nash en stratégies mixtes décrit un équilibre en stratégies pures lorsque les joueurs ont une incertitude infime concernant les utilités des autres joueurs (théorème de purification, Harsanyi, 1973). Enfin notons que dans certains cas un *joueur* peut modéliser une population d'agents (par exemple dans les modèles de biologie, tels que les jeux évolutionnaires) ; alors une stratégie mixte peut représenter la proportion des agents choisissant telle ou telle stratégie pure (Hammerstein et Selten, 1994). Dans tous les cas, ce concept repose sur la théorie classique de la décision : les joueurs considèrent leur utilité espérée.

Remarquons d'abord qu'un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est un vecteur de distributions de probabilité, qui définit une distribution de probabilité $p^\sigma$ sur l'ensemble des profils de stratégies pures $A$ (en supposant l'indépendance entre les stratégies mixtes des joueurs) :

$$p^\sigma(a) = \prod_{i \in N} \sigma_i(a_i)$$

Cela nous permet d'évaluer l'utilité espérée d'un profil de stratégies mixtes pour un joueur donné.

**Définition 2.12 (Utilité d'un profil de stratégie mixte).** Soit un jeu à information complète $G = \big(N, (a_i, u_i)_{i \in N}\big)$. Pour tout joueur $i \in N$, l'utilité espérée d'un profil de stratégies mixtes $\sigma \in \Sigma$ est :

$$\mathrm{EU}_i(\sigma) = \sum_{a \in A} p^\sigma(a) \times u_i(a)$$

Les définitions des concepts de solutions présentées auparavant sont étendues sans difficulté aux stratégies mixtes, en considérant l'utilité espérée au lieu de l'utilité :

— Une stratégie mixte $\sigma_i$ du joueur $i$ domine strictement une autre $\sigma'_i$ si et seulement si son utilité espérée est toujours meilleure, quoi que choisissent les autres joueurs :

$$\forall \sigma_{-i},\ \mathrm{EU}_i(\sigma_i.\sigma_{-i}) > \mathrm{EU}_i(\sigma'_i.\sigma_{-i})$$

— Une stratégie mixte $\sigma_i^*$ du joueur $i$ est une meilleure réponse à $\sigma_{-i}$ si et seulement si elle maximise son utilité espérée :

$$\sigma_i^* \in \underset{\sigma_i \in \Sigma_i}{\operatorname{argmax}} \operatorname{EU}_i(\sigma_i.\sigma_{-i})$$

— Une stratégie mixte $\sigma_i^*$ du joueur $i$ est rationalisable si et seulement sii elle est une meilleure réponse à un $\sigma_{-i}$ lui-même rationalisable :

$$\exists \sigma_{-i},\ \sigma_i^* \in \underset{\sigma_i \in \Sigma_i}{\operatorname{argmax}} \operatorname{EU}_i(\sigma_i^*.\sigma_{-i})$$

— Un profil de stratégies mixtes $\sigma_i$ est un équilibre de Nash si et seulement si aucun joueur n'a intérêt à être le seul à changer de stratégie mixte :

$$\forall i,\ \nexists \sigma_i', \operatorname{EU}_i(\sigma_i'.\sigma_{-i}) > \operatorname{EU}_i(\sigma_i.\sigma_{-i})$$

Enfin, les processus d'élimination (EISD et EISNR) sont étendus aux stratégies mixtes sans difficulté, en considérant, comme ci-dessus, l'utilité espérée au lieu de l'utilité. Les ensembles des stratégies mixtes survivant à l'EISD et des stratégies mixtes rationalisables sont donc bien définis. De plus, il est possible qu'une stratégie mixte domine strictement une stratégie pure, l'ensemble des stratégies survivant à l'EISD est donc plus restreint, c'est-à-dire plus informatif, en termes de stratégies mixtes qu'en termes de stratégies pures.

*Remarque* 24. En considérant les stratégies mixtes, nous introduisons de la commensurabilité entre les valeurs d'utilité et les probabilités. Pour que cela soit possible, il faut nécessairement que les utilités soient quantitatives, c'est-à-dire que les valeurs d'utilité forment une échelle d'intervalle (définition 1.9).

**Exemple 2.6 (Stratégies mixtes).** *Considérons l'exemple 2.1, et supposons que le garde-chasse décide de se rendre en $P_1$ ou en $P_2$ avec des probabilités respectives de $1/3$ et $2/3$, et que le braconnier décide de s'y rendre avec des probabilités respectives de $1/4$ et $3/4$. Leurs stratégies mixtes sont :*

$$\sigma_G(P_1) = 1/3, \qquad \sigma_B(P_1) = 1/4,$$
$$\sigma_G(P_2) = 2/3, \qquad \sigma_B(P_2) = 3/4.$$

*Le profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$ définit la distribution de probabilité jointe $p^\sigma$ donnée en table 2.3.*

| | $P_1$ | $P_2$ | marg.$= \sigma_G$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1/12 | 1/4 | 1/3 |
| $P_2$ | 1/6 | 1/2 | 2/3 |
| marg. $= \sigma_B$ | 1/4 | 3/4 | 1 |

TABLE 2.3 – Probabilité jointe $p^\sigma$, dont les marginales sont $\sigma_G$ et $\sigma_B$.

*L'utilité espérée de ce profil de stratégies mixtes $\sigma$, pour le garde-chasse et le braconnier, est calculée selon $p^\sigma$ :*

$$\begin{aligned}\mathrm{EU}_G(\sigma) &= \frac{1}{12}\times x + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{6}\times 0 + \frac{1}{2}\times x &&= \frac{7x}{12},\\ \mathrm{EU}_B(\sigma) &= \frac{1}{12}\times (10-y) + \frac{1}{4}\times 10 + \frac{1}{6}\times 10 + \frac{1}{2}\times (10-y) &&= \frac{50-7y}{12}\end{aligned}$$

*Le profil de stratégies mixtes $\sigma$ n'est pas un équilibre de Nash : le garde-chasse aurait intérêt à jouer une autre stratégie si le braconnier joue $\sigma_B$. Par exemple, il pourrait aller en $P_2$ (c'est-à-dire, jouer la stratégie mixte $\sigma'_G$ vérifiant $\sigma'_G(P_2) = 1$), son utilité espérée $\mathrm{EU}_G(\sigma'_G.\sigma_B) = 3x/4$ serait alors meilleure.*

*Dans ce jeu, il y a un unique équilibre de Nash $\sigma^*$, en stratégies mixtes :*

$$\begin{aligned}\sigma^*_G(P_1) &= 1/2, & \sigma^*_B(P_1) &= 1/2,\\ \sigma^*_G(P_2) &= 1/2, & \sigma^*_B(P_2) &= 1/2.\end{aligned}$$

*Cet équilibre de Nash est subtilement différent de celui que nous avons vu en stratégies pures. En effet, si le garde-chasse joue $\sigma^*_G$, alors le braconnier, quoi qu'il joue, aura une chance sur deux de se faire arrêter par le garde-chasse, et son utilité espérée sera $10 - y/2$. La stratégie mixte $\sigma^*_B$ est bien une meilleure réponse à $\sigma^*_G$, mais c'est aussi le cas de toutes les stratégies du braconnier. Symétriquement, si le braconnier joue $\sigma^*_B$, alors le garde-chasse, quoi qu'il joue, aura une chance sur deux de trouver le braconnier, et son utilité espérée sera $x/2$ : toutes ses stratégies (dont $\sigma^*_G$) sont des meilleures réponses à $\sigma^*_B$. Aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie (ils ne gagneraient pas plus d'utilité), mais il ne semble pas non plus qu'ils aient d'intérêt à choisir ces stratégies-ci (puisqu'ils obtiennent la même utilité quoi qu'ils jouent). Alors pourquoi les choisiraient-ils ? Ils les choisiraient car ce sont les seules stratégies qui empêchent l'adversaire d'avoir l'avantage. En effet, si le garde-chasse choisit une autre stratégie que $\sigma^*_B$, le braconnier peut s'adapter et diminuer les chances de se faire arrêter. Symétriquement, si le braconnier joue autre chose que $\sigma^*_B$, le garde-chasse peut s'adapter et augmenter ses chances d'arrêter le braconnier*

- *Sur le long terme, si le garde-chasse choisit effectivement son action au hasard, il empêche le braconnier d'adopter une stratégie gagnante ; et symétriquement le braconnier empêche le garde-chasse d'adopter une stratégie gagnante.*
- *Avec une vision épistémique (relative aux croyances des joueurs), si le braconnier ne sait pas ce que va jouer le garde-chasse, alors il ne peut pas adopter de stratégie gagnante. Le garde-chasse a donc intérêt à ne pas être prévisible. Symétriquement, le braconnier n'a pas intérêt à être prévisible non plus.*
- *Dans une approche « population », le joueur $G$ peut représenter plusieurs gardes-chasse, et le joueur $B$ plusieurs braconniers. Dans ce cas, si $\sigma^*$ décrit la proportion des joueurs qui vont en $P_1$ et en $P_2$, alors ni les braconniers ni les gardes-chasse n'ont intérêt à changer cette proportion.*

La notion de stratégie mixte a été aussi étudiée pour une théorie alternative de l'incertitude : celle des possibilités. L'idée est similaire, il s'agit d'exprimer l'incertitude sur les choix faits par les joueurs.

### Stratégies mixtes possibilistes

Une stratégie mixte possibiliste d'un joueur $i$ est une distribution de possibilité sur ses actions (cf. section 1.3.6). Du point de vue du joueur $i$, elle indique un degré d'engagement sur le choix de son action. Du point de vue des autres joueurs, elle indique un degré de vraisemblance sur le fait que le joueur $i$ jouera telle ou telle action (Ben Amor, Fargier et Sabbadin, 2017; Hosni et Marchioni, 2019).

**Définition 2.13 (Stratégie mixte possibiliste).** Une stratégie mixte possibiliste $\sigma_i$ du joueur $i$ est une distribution de possibilité normalisée sur ses actions, c'est-à-dire vérifiant $\max_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) = 1$ et pour tout $a_i \in A_i$, $0 \leq \sigma_i(a_i) \leq 1$.

Un profil de stratégies mixtes possibilistes $\sigma$ définit alors une distribution de possibilité jointe $\pi^\sigma$, elle aussi normalisée :

$$\pi^\sigma(a) = \min_{i \in N} \sigma_i(a_i)$$

Dans un cadre ordinal (lorsque les utilités du jeu $G$ sont ordinales, et définies sur la même échelle de valeur $[0, 1]$ que les possibilités), les joueurs peuvent considérer les règles de décision optimistes et pessimistes (définition 1.50). Néanmoins, dans le cadre des jeux stratégiques, l'utilité pessimiste semble plus pertinente que l'utilité optimiste (Ben Amor, Fargier et Sabbadin, 2017; Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2019).

**Définition 2.14 (Utilité pessimiste ordinale d'un profil de stratégies mixtes possibilistes).** Pour le joueur $i$, l'utilité d'un profil $\sigma$ est :

$$\mathrm{U}_i^{\mathrm{Pes}}(\sigma) = \min_{a \in A} \max\big(1 - \pi^\sigma(a), u_i(a)\big)$$

Une contrepartie quantitative a été proposée par Hosni et Marchioni (Hosni et Marchioni, 2019), basée sur l'intégrale de Choquet (définition 1.37). L'interprétation est plus difficile : elle fait intervenir de la compensation entre les engagements partiellement incompatibles et leurs utilités.

**Définition 2.15 (Utilité de Choquet d'une stratégie mixte possibiliste).** Soient $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots a^{(m)} \in A$ les profils de stratégies pures, ordonnés selon l'utilité du joueur $i$, i.e., tels que $u_i(a^{(1)}) \leq u_i(a^{(2)}) \leq \cdots \leq u_i(a^{(m)})$. Soit $\Pi : 2^A \to [0, 1]$ la mesure de possibilité générée d'après $\pi^\sigma$, telle que $\Pi^\sigma(X) = \max_{a \in X} \pi^\sigma(a)$. L'utilité de Choquet d'un profil de stratégies mixtes possibilistes $\sigma$, pour le joueur $i$, est alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_i^{\mathrm{Ch}}(\sigma) &= u(a^{(1)}) + \sum_{k=2}^{m} \Pi^\sigma\big(\{a^{(m)} \mid m \geq k\}\big) \times \big[u_i(a^{(k)}) - u_i(a^{(k-1)})\big] \\ &= \mathrm{Choquet}_\Pi(u_i).\end{aligned}$$

### Équilibres épistémiques et « stratégies mixtes non-additives »

Nous avons vu que les stratégies mixtes probabilistes et possibilistes peuvent représenter les croyances qu'ont les joueurs sur les stratégies pures que vont choisir les autres joueurs. De telles croyances ont été étudiées dans le cas plus général des probabilités inférieures (section 1.3.3), mais amènent à un concept sensiblement différent de ceux considérés en stratégies mixtes : les équilibres épistémiques (Dow et Werlang, 1994 ; Eichberger et Kelsey, 2000). Chaque joueur $i$ a des croyances, capturées par une probabilité inférieure, sur l'ensembe $A_{-i}$ des combinaisons de stratégies pouvant être choisies par les autres joueurs. Ainsi, un système de croyances est un profil de telles probabilités inférieures :

$$(\mathrm{Pinf}_1, \ldots, \mathrm{Pinf}_n) \in \left(2^{A_{-1}} \to [0,1]\right) \times \cdots \times \left(2^{A_{-n}} \to [0,1]\right).$$

*Remarque* 25. Un système de croyance n'est pas un profil de stratégies mixtes : les croyances du joueur $i$ sont définies sur $A_{-i}$, alors que ses stratégies mixtes sont définies sur $A_i$.

Intuitivement, dans un tel système de croyances, tous les joueurs ont des croyances sur ce que va jouer le joueur $i$, sauf le joueur $i$ lui-même. Si chaque joueur $i$ peut choisir une stratégie pure $a_i$ que tout les autres joueurs croient possible et qui est une meilleure réponse, en terme d'intégrale de Choquet sur ses propres croyances $\mathrm{Pinf}_i$, à un profil $a_{-i}$ de stratégies pures que tout les joueurs croient possibles elles aussi, alors le système de croyance est un équilibre épistémique (ou équilibre sous incertitude).

Nous laissons au lecteur intéressé le loisir d'approfondir la notion d'équilibre épistémique, qui dépasse l'objet de cette thèse, par exemple dans (Eichberger et Kelsey, 2000).

Nous noterons également ici que Stauber a proposé une manière de caractériser des équilibres épistémiques par des *équilibres de Nash en fonctions de croyance* (Stauber, 2019). Dans ce travail, il considère des profils de stratégies mixtes en fonction de croyance de la forme $\mathrm{Bel} = (\mathrm{Bel}_1, \ldots, \mathrm{Bel}_n)$. Chaque fonction de croyance $\mathrm{Bel}_i : 2^{A_i} \to [0,1]$ est une « stratégie mixte crédale » du joueur $i$, définie sur l'ensemble $A_i$ de ses propres actions. La fonction de croyance jointe sur l'ensemble $A$ des profils de stratégies pures est obtenue par une opération particulière appelée *strategic product integral*, définie de telle sorte que tout équilibre de Nash en fonction de croyance décrit un équilibre épistémique, c'est-à-dire qu'il permet de retrouver d'une part le système de croyances et d'autre part les stratégies (mixtes probabilistes) à l'équilibre. Là encore, nous laissons au lecteur intéressé le soin d'approfondir cette notion par lui-même.

*Remarque* 26. Nous avons vu que les stratégies mixtes probabilistes sont parfois vues comme des stratégies randomisées, où le joueur choisit effectivement son action au hasard, par exemple par un lancer de dé. Nous sommes relativement surpris de ne pas avoir trouvé, dans la littérature, une interprétation similaire des stratégies mixtes non-additives. En effet, il nous semble justifié de modéliser de cette façon un joueur qui choisirait son action grâce à un dispositif décrit par une fonction de croyance, par exemple, en tirant une boule dans une urne

dont le contenu est mal connu (cf. paradoxe d'Ellsberg, exemple 1.13). Un profil de telles stratégies définirait alors directement une loi jointe, par l'opération de combinaison de Dempster, sur laquelle les règles de décision de la théorie des fonctions de croyance pourraient être appliquées.

### 2.1.4 Équilibre corrélé

Nous présentons enfin une dernière notion, appelée *équilibre corrélé*. C'est un concept de solution plus général que l'équilibre de Nash, permettant d'identifier de nouveaux équilibres dans un jeu à information complète (parfois plus satisfaisants pour les joueurs que les équilibres de Nash), où les joueurs choisissent leurs stratégies en fonction d'un *appareil corrélateur* probabiliste (Aumann, 1974 ; Myerson, 1986). Cet appareil corrélateur peut être n'importe quel phénomène (partiellement) observable par les joueurs. On peut considérer que les joueurs décident quel appareil ils utilisent, en même temps qu'ils choisissent leurs stratégies : on cherchera donc ici à identifier à la fois l'appareil corrélateur et les stratégies correspondantes.

Commençons par introduire un ensemble d'états du monde $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_w\}$. Pour chaque état du monde, l'appareil corrélateur envoie un signal (potentiellement différent) à chacun des joueurs : si le monde est $\omega$, le joueur $i$ reçoit le signal $\theta_i = \tau_i(\omega)$. Notons $\Theta_i$ l'ensemble des signaux que peut recevoir le joueur $i$ (i.e., $\tau_i : \Omega \to \Theta_i$). Le joueur $i$ a $|\Theta_i|$ *ensembles d'information* ; ce sont les ensembles d'états du monde $H_i^{\theta_i} = \{\omega \mid \tau_i(\omega) = \theta_i\}$ qui lui sont indiscernables, pour lesquels le même signal $\theta_i \in \Theta_i$ est reçu. L'ensemble de ces ensembles d'information $\mathcal{H}_i = \{H_i^{\theta_i} \mid \theta_i \in \Theta_i\}$ est donc une partition d'$\Omega$.

**Définition 2.16 (Appareil corrélateur).** Pour un jeu $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$, un appareil corrélateur est un triplet $\big(\Omega, \Pr, (\mathcal{H}_i)_{i \in N}\big)$ où $\Omega$ est un ensemble d'état du monde, Pr une probabilité sur $\Omega$ et $\mathcal{H}_i = \{H_i^{\theta_i} \mid \theta_i \in \Theta_i\}$ est une partition d'$\Omega$ définie par :

$$H_i^{\theta_i} = \{\omega \mid \tau_i(\omega) = \theta_i\}.$$

Un appareil corrélateur, grâce aux signaux qu'il envoie, permettra aux joueurs de se coordonner. Plus généralement, les joueurs ne recevant pas nécessairement les mêmes signaux, les stratégies qu'ils jouent seront corrélées (sans être forcément dépendantes). En effet, si le joueur $i$ reçoit le signal $\tau_i(\omega) = \theta_i$, il ne sait pas nécessairement quel $\omega$ a provoqué le signal, mais il sait que $\omega \in H_i^{\theta_i}$.

Les joueurs observent leur signal (mais pas ceux des autres joueurs) avant de jouer. Ainsi, une stratégie $s_i$ du joueur $i$ est une décision prise en fonction du signal observé, que nous appelons *stratégie signalisée*.

**Définition 2.17 (Stratégies pures signalisées).** Soit $N$ un ensemble de joueurs pouvant recevoir chacun des signaux. Pour tout joueur $i$, soit $A_i$ l'ensemble de ses actions et $\Theta_i$ l'ensemble des signaux qu'ils peut recevoir. Une stratégie signalisée du joueur $i$ est une fonction :

$$s_i : \Theta_i \to A_i.$$

Un profil de stratégies signalisées est un vecteur de telles fonctions :

$$(s_1, \ldots, s_n) \in (\Theta_1 \to A_1) \times \cdots \times (\Theta_n \to A_n).$$

On notera $S_i = \Theta_i \to A_i$ l'ensemble des stratégies pures signalisées du joueur $i$, et $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ l'ensemble des profils de stratégies pures signalisées.

Ici encore, nous nous plaçons dans la théorie classique de la décision, où les joueurs considèrent leur utilité espérée. Néanmoins, les joueurs ayant observé leur signaux respectifs, leurs connaissances ne sont plus décrites par Pr, elles ont été mise à jour sachant le signal reçu et deviennent donc $\Pr(\cdot \mid H_i^{\theta_i})$. Pour tout profil $s \in S$, notons $s(\omega) = \big(s_1(\tau_1(\omega)), \ldots, s_n(\tau_n(\omega))\big)$ le profil de stratégies qui sera effectivement joué si l'état du monde est $\omega$.

**Définition 2.18 (Utilité d'un profil de stratégies signalisées).** Soient $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$ un jeu à information complète et $\big(\Omega, \Pr, (\mathcal{H}_i)_{i \in N}\big)$ un appareil corrélateur. L'utilité du profil $s \in S$, pour le joueur $i \in N$, peut être évaluée à différents moments du jeu :

**Ex-ante** Avant que le joueur $i$ n'observe son signal :

$$\mathrm{EU}_i(s) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) \times u_i(s(\omega))$$

**Ex-interim** Après que le joueur $i$ observe le signal $\theta_i = \tau_i(\omega)$ l'informant que $\omega \in H_i^{\theta_i}$, mais avant qu'il ne découvre le véritable état du monde (et donc les signaux observés par les autres joueurs) :

$$\mathrm{EU}_{(i,\theta_i)}(s) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega \mid H_i^{\theta_i}) \times u_i(s(\omega))$$

**Ex-post** Après que le joueur $i$ découvre le véritable état du monde $\omega$ :

$$\mathrm{U}_i^{\omega}(s) = u_i(s(\omega))$$

**Propriété 2.3.** Un joueur maximisant son utilité espérée *ex-ante* maximise aussi son utilité espérée *ex-interim*, quel que soit le signal qu'il reçoit. Par contre, cela n'implique pas qu'il maximise son utilité *ex-post*.

**Définition 2.19 (Équilibre corrélé).** Soit $G = \big(N, (A_i, u_i)_{i \in N}\big)$ un jeu. Un équilibre corrélé est une paire constituée d'un appareil corrélateur $\big(\Omega, \Pr, (\mathcal{H}_i)_{i \in N}\big)$ et d'un profil $s \in S$ telle qu'aucun joueur, quel que soit le signal $\theta_i$ qu'il reçoit, n'a intérêt à changer de stratégie, c'est-à-dire :

$$\forall i, \forall \theta_i, \nexists s_i' \ \ \mathrm{EU}_{(i,\theta_i)}(s_i'.s_{-i}) > \mathrm{EU}_{(i,\theta_i)}(s)$$

Ou de manière équivalente, en considérant l'utilité espérée *ex-ante* (propriété 2.3) :

$$\forall i, \nexists s_i' \ \ \mathrm{EU}_i(s_i'.s_{-i}) > \mathrm{EU}_i(s)$$

**Exemple 2.7 (Appareil corrélateur, stratégies et équilibre corrélé).** *Considérons l'exemple d'Aumann donné en table 2.4.*

*Dans ce jeu, il y a trois équilibres de Nash. Deux équilibres sont en stratégies pures :* $(U, L)$*, dont les utilités sont* $(5, 1)$*, et* $(D, R)$*, dont les utilités sont* $(1, 5)$*. Le troisième équilibre est en stratégies mixtes, où les joueurs jouent avec une probabilité 1/2 chacune de leurs actions, les utilités sont alors* $(2.5, 2.5)$*.*

*Un premier équilibre corrélé est identifié si les joueurs utilisent une pièce de monnaie comme appareil corrélateur, et les stratégies « Pile* $\to U$*, Face* $\to D$ *» (resp. « Pile* $\to L$*, Face* $\to R$ *»). L'appareil corrélateur* $\big(\Omega, \Pr, (\mathcal{H}_i)_{i\in N}\big)$ *est défini par :*

— $\Omega = \{Pile, Face\}$,
— $\Pr(Pile) = \Pr(Face) = 1/2$,
— $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \big\{\ \{Pile\}, \{Face\}\ \big\}$.

*Les stratégies* $s_1$ *et* $s_2$ *des joueurs 1 et 2 sont les fonctions définies par :*

— $s_1(Pile) = U$ *et* $s_1(Face) = D$,
— $s_2(Pile) = L$ *et* $s_2(Face) = R$.

*L'utilité espérée* ex-ante *de chaque joueur est* $\mathrm{EU}_i(s) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 5 = 3$*. C'est mieux que l'utilité obtenu avec l'équilibre de Nash en stratégies mixtes, et représente un bon compromis entre les deux équilibres de Nash en stratégies pures. L'utilité espérée* ex-interim *et l'utilité* ex-post *sont égales à* 1 *ou* 5*, selon le joueur et le côté visible de la pièce de monnaie. C'est un équilibre corrélé : aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie (ni* ex-ante*, ni* ex-interim*).*

*Il est possible de trouver un équilibre corrélé encore meilleur. Considérons l'appareil corrélateur* $\big(\Omega, \Pr, \mathcal{H}_i)_{i\in N}\big)$ *défini par :*

— $\Omega = \{x, y, z\}$,
— $\Pr(x) = \Pr(y) = \Pr(z) = 1/3$,
— $\mathcal{H}_1 = \{\ \{x\}, \{y, z\}\ \}$ *et* $\mathcal{H}_2 = \{\ \{x, y\}, \{z\}\ \}$.

*Les joueurs reçoivent alors des signaux différents : le joueur 1 est parfaitement informé si* $\omega = x$*, mais il ne peut pas discerner les cas où* $\omega = y$ *de ceux où* $\omega = z$ *; le joueur 2 est parfaitement informé si* $\omega = z$ *mais ne peut pas discerner si les cas où* $\omega = x$ *de ceux où* $\omega = y$*.*

*Dans une telle situation, supposons que le joueur 1 adopte la stratégie suivante : lorsqu'il observe qu'*$\omega = x$ *il joue* $U$*, et joue* $D$ *sinon ; supposons encore que le joueur 2 adopte la stratégie suivante : lorsqu'il observe qu'*$\omega = z$ *il joue*

| | J2 | |
|---|---|---|
| J1 | $L$ | $R$ |
| $U$ | $(5, 1)$ | $(0, 0)$ |
| $D$ | $(4, 4)$ | $(1, 5)$ |

TABLE 2.4 – Matrice d'utilité de l'exemple utilisé par Aumann pour illustrer les équilibres corrélés (AUMANN, 1974).

*R, et joue L sinon.*

$$s_1^*(x) = U \qquad s_1^*(y \text{ ou } z) = D$$
$$s_2^*(z) = R \qquad s_2^*(x \text{ ou } y) = L$$

*Ce profil de stratégies est lui-aussi un équilibre corrélé. Si le joueur 1 observe qu'*$\omega = x$*, alors il sait que le joueur 2 observe* $\omega \in \{x, y\}$ *et qu'il jouera L : le joueur 1 a intérêt à jouer U, qui est sa meilleure réponse. S'il observe* $\omega \in \{y, z\}$*, alors conditionnellement à son observation il s'attend à ce que le joueur 2 joue L ou R avec une probabilité 1/2 : quoi qu'il choisisse son utilité espérée est de 2.5, il n'a pas d'intérêt à changer sa stratégie D. Symmétriquement, si le joueur 2 observe* $\omega = z$*, il sait que le joueur 1 observe* $\omega \in \{y, z\}$ *et joue D, sa meilleure réponse est bien R. S'il observe* $\omega \in \{x, y\}$*, il considère alors aussi vraisemblable que le joueur 1 joue U ou D, et obtient une utilité espérée de 2.5 quoi qu'il choisisse : il n'a pas intérêt à changer sa stratégie L.*

*L'utilité espérée* ex-ante *du profil* $s^*$*, pour chaque joueur, est* $\mathrm{EU}_i = \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 1 = 3.333$*. C'est encore mieux que l'utilité espérée* ex-ante *du profil de stratégies s ; c'est même une utilité qui se trouve hors de l'enveloppe convexe des utilités à l'équilibre dans le jeu original (sans appareil corrélateur) !*

*Les utilités espérées* ex-interim *des joueurs valent* 5 *ou* 2.5 *selon le signal reçu ; enfin les utilités* ex-post *valent* 5, 4 *ou* 1 *selon l'état du monde.*

*Par rapport à l'équilibre en stratégies mixtes, l'appareil corrélateur a permis d'éviter de jouer le profil* $(U, R)$*, pour lequel les utilités sont nulles. Par rapport aux équilibres en stratégies pures, l'appareil corrélateur a permis de jouer occasionnellement le profil* $(D, L)$*, qui n'est pas un équilibre de Nash, mais qui est très rentable pour les deux joueurs à la fois.*

Il existe une définition alternative de l'équilibre correlé. En effet, supposons que l'appareil correlateur n'envoie pas un signal $\tau_i(\omega)$ aux joueurs (en fonction duquel ils choisiront ensuite leurs stratégies), mais leur indique directement la stratégie pure $a_i$ à jouer. Un tel appareil est alors simplement défini par la probabilité qu'il indique tel ou tel profil de stratégies pures, c'est-à-dire, une probabilité sur $A = A_1 \times \cdots \times A_n$. Notons qu'à l'inverse de la probabilité jointe déduite d'un profil de stratégies mixtes, ici, l'hypothèse d'indépendance entre les stratégies des joueurs n'est pas faite (et c'est d'ailleurs tout l'intérêt).

**Définition 2.20 (Équilibre correlé, définition alternative).** Un équilibre correlé est une distribution de probabilité $p$ sur l'ensemble des profils de stratégies pures $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ telle que pour tout joueur $i \in N$ et pour chacune de ses actions $a_i \in A_i$,

$$\nexists a_i' \in A_i, \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} p(a_{-i} \mid a_i) \times u_i(a_i'.a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} p(a_{-i} \mid a_i) \times u_i(a_i.a_{-i})$$

Ou de manière équivalente, en considérant l'utilité ex-ante :

$$\nexists a_i' \in A_i, \sum_{a \in A} p(a) \times u(a_i'.a_{-i}) \geq \sum_{a \in A} p(a) \times u(a)$$

Nous voyons par cette définition que tout équilibre de Nash $\sigma$, pur ou mixte, est un équilibre corrélé en stratégies pures : il suffit de poser $p = \Pr^{\sigma}$ la distribution jointe déduite de $\sigma$ (dans ce cas, les signaux reçu par les joueurs sont indépendants).

Nous avons considéré plusieurs concepts concernant les jeux à information complète (où les joueurs, leurs actions et leurs utilités sont parfaitement connus). Certains concepts impliquent déjà de l'incertitude (les stratégies mixtes et les équilibres corrélés), ce sont alors les stratégies effectivement jouées par les joueurs qui sont mal connues. Dans la section suivante, nous aborderons les *jeux à information incomplète*, où l'incertitude pèse directement sur la définition du jeu : ce seront alors les joueurs, leurs actions et leurs préférences qui pourront être mal connus.

## 2.2 Jeux à information incomplète

Harsanyi a proposé en 1967 son modèle fondateur appelé *jeu bayésien*, permettant de modéliser la prise de décision multi-agents simultanée lorsqu'il y a de l'incertitude sur les utilités, les actions voire sur les joueurs eux-mêmes (Harsanyi, 1967). Ce modèle repose lui-aussi sur la théorie classique de la décision : la connaissance des joueurs y est représentée par une unique loi de probabilité et leur comportement de décision est capturé par la règle de l'utilité espérée.

La majeure partie de cette section décrit le modèle de jeu bayésien et l'extension des concepts de solutions. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux articles d'Harsanyi, ainsi qu'à l'un des nombreux ouvrages de théorie des jeux (Harsanyi, 1967, 1968a,b ; Kreps, 1990 ; Fudenberg et Tirole, 1991). Nous évoquons rapidement, en fin de chapitre, une version similaire de ce modèle récemment proposée dans le cadre de la théorie des possibilités (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2019), que nous reprendrons dans le chapitre 4. Nous reportons aussi au chapitre 4 le modèle que nous avons proposé durant mon doctorat, reposant sur la théorie des fonctions de croyances (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022).

### 2.2.1 L'intuition

Considérons l'exemple 2.1, où un braconnier et un garde-chasse doivent se rendre en $P_1$ ou en $P_2$. Par contre, nous supposons maintenant que le garde-chasse n'est pas certain des préférences du braconnier. Dans cette région, en effet, il y a deux types de braconniers : un tiers des braconniers travaillent avec la mafia locale et peuvent écouler facilement n'importe quel gibier ; et deux tiers des braconniers travaillent à leur compte et peuvent vendre le gibier braconné en $P_2$ mais pas celui provenant de $P_1$. L'information concernant le braconnier est incomplète : le garde-chasse ne peut pas donner les préférences du braconnier

car il ignore s'il travaille avec la mafia locale ou pas. Le braconnier, bien entendu, connaît ses propres préférences. Nous supposons aussi que le garde-chasse préfère arrêter le braconnier dans les deux cas, et qu'il en tire une utilité $x$. Les préférences du garde-chasse sont connues de tous : l'information le concernant est complète.

Comme nous l'avons fait jusqu'à présent, nous cherchons à identifier les « bons » et les « mauvais » choix de chacun des joueurs, ceux que nous pourrions leur conseiller de jouer ou d'éviter, et éventuellement à identifier les profils de stratégies à l'équilibre. Nous nous demandons particulièrement :

— Quelles sont les meilleurs choix du braconnier s'il travaille avec la mafia locale ? Et s'il travaille à son compte ?

— Quelles sont les meilleurs choix du garde-chasse alors qu'il ne sait pas si le braconnier travaille ou non avec la mafia locale ?

Dans une première étape, nous pouvons identifier deux jeux possibles, selon le type de braconnier considéré : celui où le braconnier travaille avec la mafia locale, décrit par les fonctions d'utilité $v_i$, et celui où il travaille à son compte, décrit par les fonctions d'utilité $v'_i$ (table 2.5).

| $G$ \ $B$ | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | $(x, 10-y)$ | $(0, 10)$ |
| $P_2$ | $(0, 10)$ | $(x, 10-y)$ |

(a) Fonctions d'utilité $v_i$ lorsque le braconnier travaille avec la mafia locale.

| $G$ \ $B$ | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | $(x, -y)$ | $(0, 10)$ |
| $P_2$ | $(0, 0)$ | $(x, 10-y)$ |

(b) Fonctions d'utilité $v'_i$ lorsque le braconnier travaille à son compte.

TABLE 2.5 – Matrices d'utilités décrivant les fonctions $v_i$ (table a) et $v'_i$ (table b) pour les deux jeux possibles.

Supposons par ailleurs que les amendes sont faibles (au regard du bénéfice produit par le braconnage), c'est-à-dire que $y < 10$. Alors, si le braconnier travaille à son compte, sa stratégie $P_1$ est strictement dominée par sa stratégie $P_2$ : le braconnier n'a alors pas intérêt à aller en $P_1$, quoi que décide le garde-chasse. Par contre, si le braconnier travaille avec la mafia locale, sa meilleure stratégie dépend du choix fait par le garde-chasse : si ce dernier va en $P_1$, le braconnier préfère aller en $P_2$, et inversement.

Pour le garde-chasse, il faut considérer les deux cas : si le braconnier travaille à son compte, il devrait aller en $P_2$, et donc le garde-chasse préfèrera lui-aussi aller en $P_2$. Par contre, si le braconnier travaille avec la mafia locale, la meilleure stratégie du garde-chasse dépend du choix du braconnier.

De manière classique, dans les jeux bayésiens, on considère que les croyances du garde-chasse sont décrites par une loi de probabilité. Puisque deux tiers des braconniers sont à leur compte, et un tiers d'entre eux travaillent avec la mafia locale, il semble légitime pour le garde-chasse de supposer que :

$$\Pr(B \text{ travaille avec la mafia locale}) = \frac{1}{3} \quad \Pr(B \text{ travaille à son compte}) = \frac{2}{3}.$$

De plus, les préférence sous incertitude du garde-chasse sont capturées par la règle de l'utilité espérée. Nous avons identifié que « le braconnier travaillant à son compte » devrait jouer $P_2$, mais nous ne savons pas ce que jouera « le braconnier travaillant avec la mafia locale », notons cette stratégie $a_B$. Si le garde-chasse joue $a_G \in \{P_1, P_2\}$, son utilité espérée est :

$$\frac{1}{3} \times v_G(a_G.a_B) + \frac{2}{3} \times v'_G(a_G.P_2).$$

Dans cette exemple, on peut remarquer que la stratégie $a_G = P_1$ du garde-chasse est strictement dominée par sa stratégie $P_2$. En effet, quoi que vale $a_B$, on a :

$$\frac{1}{3} \times v_G(P_1.a_B) + \frac{2}{3} \times v'_G(P_1, P_2) \leq \frac{x}{3},$$
$$\frac{1}{3} \times v_G(P_2.a_B) + \frac{2}{3} \times v'_G(P_2.P_2) \geq \frac{2x}{3}.$$

Le garde-chasse devrait donc jouer la stratégie $a_G = P_2$. De plus, le braconnier devrait aussi tenir ce raisonnement, et déduire que le garde-chasse ira en $P_2$. Pour cette raison, s'il travaille avec la mafia, il devrait choisir $P_1$, car il ne se fera pas arrêter par le garde-chasse.

Nous avons identifié un équilibre de Nash par EISD. Cela nous apprend, entre autres, qu'il n'est pas rentable pour le garde-chasse d'arrêter un braconnier qui irait en $P_1$, c'est-à-dire un braconnier qui travaille pour la mafia locale. Si un mafieux peut se satisfaire de cette conclusion, un protecteur de la nature doit aussi l'accepter : on peut raisonnablement penser que le garde-chasse ira en $P_2$ et n'arrêtera donc le braconnier que s'il travaille à son compte. Pour modifier cette conclusion, il faut modifier le jeu lui-même. Nous pourrions proposer, par exemple, d'appliquer des amendes dissuasives (telles que $y > 10$) ou d'embaucher plus de gardes-chasse.

Nous avons pu étudier cet exemple où l'information est incomplète grâce aux relations de dominance, en raisonnant sur les deux jeux à information complète possibles. Il s'agit d'une étude ad-hoc. Harsanyi, dans sa série d'articles fondateurs, a montré qu'il est toujours possible d'étudier de tels jeux à information incomplète avec les outils habituels de la théorie des jeux qui ont été présentés dans la section précédente (Harsanyi, 1967, 1968a,b). Pour cela, il est nécessaire d'exprimer ce genre de situations comme des jeux à proprement parler, où les joueurs, leurs actions et leurs préférences sont parfaitement connus de tous les joueurs. Or, dans l'exemple que nous venons de voir, les préférences du braconnier ne sont pas parfaitement connues du garde-chasse (ni du modélisateur). Harsanyi appelle ce genre de modélisations des *modèles à loterie initiale* (*Prior lottery models*) car du point de vue du garde-chasse, le braconnier est comme « tiré au sort » parmi une population de braconniers de différents types.

L'idée d'Harsanyi consiste à traduire cette situation dans un autre modèle appelé *modèle à vecteurs aléatoire* (*Random vector model*). Selon ses termes, cela consiste à *compléter* l'information, qui devient alors *imparfaite* mais complète, en ajoutant un joueur supplémentaire : la nature. On obtient ainsi un

jeu séquentiel à deux coups, où les joueurs, leurs actions et leurs préférences sont complètement définis dès le début du jeu. C'est l'état du monde qui est incertain, il est « choisi » par la nature lors du premier coup. Les joueurs observent un signal qui dépend du coup joué par la nature, en fonction duquel ils choisissent leur action (les joueurs jouent donc des stratégies signalisées, comme lorsque nous considérions les équilibres corrélés[3]). Il s'agit donc de modéliser une situation différente mais équivalente grâce au modèle à vecteurs aléatoires : l'état du monde est un vecteur de paramètres dont dépendent la connaissance et les préférences des joueurs. Ce modèle est clairement différent, mais équivalent d'un point de vue mathématique : les « bonnes » et les « mauvaises » stratégies y sont les mêmes.

**Exemple 2.8 (Modèle à vecteurs aléatoires).** *Considérons une situation clairement différente de l'exemple introductif, où les préférences du braconnier sont connues de tous, mais où l'état du monde ne l'est pas. Le gibier en $P_2$ est présent, mais celui en $P_1$ a deux chances sur trois d'avoir déjà migré (dans ce cas, il ne peut pas être braconné). Le braconnier obtient 10 points d'utilité s'il peut braconner, 0 sinon, et dans les deux cas cette utilité est diminuée de $y$ points s'il se fait arrêter par le garde-chasse. Par ailleurs, nous supposons que le braconnier habite à proximité de $P_1$ et qu'il aura observé, avant de choisir son action, si le gibier y est présent ou s'il a déjà migré. Inversement, le garde-chasse ne le sait pas et devra donc raisonner sous incertitude.*

*Il y a deux scénarios possibles : celui où le gibier de $P_1$ a migré et celui où le gibier de $P_1$ est présent. Les utilités du garde-chasse et du braconnier sont décrites par les mêmes fonctions $v_i$ et $v'_i$ considérées dans l'exemple introductif (table 2.5). Nous pouvons donc raisonner de la même manière : si le gibier a déjà migré, alors le braconnier le sait et a intérêt à se rendre en $P_2$. Du point de vue du garde-chasse, il y a deux chances sur trois que ce scénario soit le bon, son utilité espérée est meilleure s'il se rend en $P_2$. Alors le braconnier, s'il a vu le gibier en $P_1$, a intérêt à s'y rendre, car il ne s'y fera pas arrêter.*

C'est grâce au modèle à vecteurs aléatoires qu'Harsanyi rattache les jeux à information incomplète à la théorie des jeux classique. En effet, il s'agit d'un jeu séquentiel bien défini : les utilités des joueurs sont connues de tous dès le « début » du jeu (en effet, l'incertitude est décrite par les différents « choix » que peut faire la nature). Cependant son objectif est de décrire les situations capturées par un modèle à loterie initiale, qui correspondent à son sujet d'étude (et a des situations très courantes où l'on ignore effectivement quelles sont les caractéristiques des autres joueurs). Cela transparaîtra dans les définitions mathématiques.

Enfin, il décrit un troisième modèle qui lui aurait été proposé par Selten, et qu'il appelle *modèle a loterie finale* (*Posterior lottery model*). Ce modèle se différencie du modèle à loterie initiale par le fait que les différents types possibles

3. Cependant, dans un jeu bayésien les joueurs ne décident pas du cadre de discernement $\Omega$, qui est imposé par la situation. Par ailleurs, leurs utilités peuvent dépendre de l'état du monde, ce qui n'était pas le cas lorsque nous considérions les équilibres corrélés.

de chaque joueur choisissent tous une stratégie ; ensuite seulement un type par joueur est sélectionné au hasard. Ce modèle capture encore d'autres situations, mais est équivalent aux deux autres modèles d'un point de vue mathématique.

**Exemple 2.9 (Modèle de Selten).** *Considérons un jeu à trois joueurs : un garde-chasse, un braconnier qui travaille pour la mafia locale et un braconnier qui travaille à son compte. Leurs préférences sont parfaitement connues de tous. Chaque joueur choisit la parcelle sur laquelle il veut se rendre. Cependant, un braconnier uniquement ira braconner : il sera tiré au sort (le braconnier qui travaille à son compte a deux chances sur trois d'être selectionné). Le braconnier qui n'est pas sélectionné ne jouera pas. Ici, comme dans les deux exemple précédents, nous pouvons raisonner sur les deux cas possibles, selon le braconnier qui sera sélectionné, ainsi nous arrivons aux mêmes conclusions.*

Il semble que les situations capturées par le modèle de Selten sont moins courantes que celles capturées par les deux autres modèles. Par contre, nous verrons que le théorème de Howson et Rosenthal repose sur ce modèle (section 2.2.3).

Ces trois modèles sont basés sur la théorie de l'utilité espérée, et obéissent donc aux les axiomes et hypothèses qui y sont faites. De plus, Harsanyi suppose l'existence d'une probabilité unique, partagée par tous les joueurs, pour décrire la connaissance : dans le modèle à vecteurs aléatoires, tous les joueurs ont la même connaissance initiale ; dans le modèle à loterie initiale ; tous les types de tous les joueurs ont des connaissances cohérentes entre elles, dans le sens où elles peuvent toutes être déduites par conditionnement d'une probabilité initiale unique (et potentiellement inconnue). Cette hypothèse supplémentaire n'est pas nécessaire dans le modèle à loterie finale.

L'hypothèse de cohérence des connaissances des joueurs peut sembler restrictive (dans l'approche bayésienne, cette unique probabilité devrait décrire simultanément les connaissances subjectives propres à chaque joueur). Néanmoins, Harsanyi argumente que l'étude d'une telle situation se fait habituellement du point de vue de l'un des joueurs, disons le joueur $i$. Ainsi la connaissance supposée du joueur $j \neq i$ est la connaissance que le joueur $i$ attribue au joueur $j$ : le joueur $i$ étant supposé cohérent avec lui-même, les connaissances qu'il attribue à tous les joueurs seront cohérentes entre-elles.

### 2.2.2 Définitions

**Définition 2.21.** Un jeu Bayésien est un $n$-uplet $\left(N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i \in N}, p\right)$ où :
- $N = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble fini des joueurs ;
- $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i$ ;
- $\Theta_i = \{\theta_i^1, \ldots, \theta_i^{|\Theta_i|}\}$ est l'ensemble fini des types [4] du joueur $i$ ;
- $u_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur $i$,

4. Comme cela est souvent fait, nous parlerons de « types » quel que soit le modèle considéré. Dans le modèle à loterie initiale, chaque joueur est de tel ou tel type, et dans le modèle à vecteurs aléatoires, chaque joueur « apprend » qu'il est de tel ou tel type en observant son signal.

— $p : \Theta \to [0,1]$ est la distribution de probabilité décrivant la connaissance initiale commune.

**Exemple 2.10 (Jeu bayésien).** *Nous modélisons formellement le jeu à information incomplète déroulé en introduction (et ceux des exemples 2.8 et 2.9) par un jeu bayésien à deux joueurs ($N = \{G, B\}$) ayant chacun deux actions ($A_G = A_B = \{P_1, P_2\}$). Le garde-chasse a un seul type possible ($\Theta_G = \{\theta_G^1\}$, c'est-à-dire que l'information le concernant est complète), et le braconnier a deux types possibles ($\Theta_B = \{\theta_B^1, \theta_B^2\}$, où $\theta_B^1$ est le type « travaillant pour la mafia locale » et $\theta_B^2$ est le type « travaillant à son compte »). La probabilité* a priori *est définie sur $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$ par :*

$$p\big((\theta_G^1, \theta_B^1)\big) = 1/3, \qquad p\big((\theta_G^1, \theta_B^2)\big) = 2/3.$$

*Enfin, les fonctions d'utilité du jeu bayésien sont définies par les fonctions $v_i$ et $v_i'$ de l'exemple, c'est-à-dire, pour tout $\theta_B \in \{\theta_B^1, \theta_B^2\}$ :*

$$u_G\big((a_G, a_B), (\theta_G^1, \theta_B)\big) = v_G\big((a_G, a_B)\big) = v_G'\big((a_G, a_B),$$
$$u_B\big((a_G, a_B), (\theta_G^1, \theta_B)\big) = \begin{cases} v_B\big((a_G, a_B) & \text{si } \theta_B = \theta_B^1, \\ v_B'\big((a_G, a_B) & \text{si } \theta_B = \theta_B^2. \end{cases}$$

*Remarque* 27. La donnée d'un *profil de types*, c'est-à-dire d'un $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta$, spécifie un jeu à information complète $(N, (A_i, v_i)_{\beta \in N})$ dans lequels les utilités des joueurs sont données par $v_i(a) = u_i(a, \theta)$. Dans l'exemple, ce sont les deux jeux décrits par les deux matrices de la table 2.5. Ainsi, $\Theta$ est le cadre de discernement, chaque $\theta \in \Theta$ est un état du monde posible.

Un joueur connaîtra toujours son type avant de jouer. Il peut aussi avoir une information concernant les types des autres joueurs, si il y a des corrélations entre les types. La partition du cadre de discernement en ensemble d'information, pour le joueur $i$, est ainsi $\mathcal{H}_i = \big\{H_i^{\theta_i} \mid \theta_i \in \Theta_i\big\}$, avec $H_i^{\theta_i} = \{\theta' \mid \theta_i' = \theta_i\}$, c'est-à-dire que les $\theta$s sont regroupés selon leur $i$-ème composante.

*Remarque* 28. Pour arriver à cette définition commune à partir du modèle à vecteurs aléatoires, Harsanyi suppose d'abord un ensemble d'états du monde $\Omega$ muni d'une probabilite $\Pr^\Omega$. Les joueurs reçoivent chacun leur type par un signal $\tau_i(\omega) = \theta_i \in \Theta_i$ dépendant de l'état du monde, ce qui forme une partition d'$\Omega$ en ensembles d'information. Pour définir le problème équivalent en fonction des profils de types $\theta \in \Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$, il faut considérer plusieurs cas :

— Certains profils de types $\theta \in \Theta$ peuvent ne correspondre à aucun état du monde [5]. Ces $\theta$s sont bien définis dans le jeu bayésien, mais associés à une probabilité nulle. L'utilité correspondante est alors fixée arbitrairement et n'impactera pas les résultats.

5. Par exemple, considérons deux joueurs $i$ et $j$ qui observent une même pièce de monnaie. Ils reçoivent tous les deux le signal « pile », ou tous les deux le signal « face ». Les profils de types $\theta$ tels que $\theta_i \neq \theta_j$ sont impossibles, ils ne correspondent à aucun état du monde.

— Certains états du monde ne sont discernables par aucun joueur (ils correspondent au même $\theta$). La probabilité de $\theta$ est alors la somme des probabilités des états du monde concernés. Les utilités des joueurs, pour ce $\theta$, doivent être calculées d'après les utilités des différents $\omega$s, au pro-rata de leur probabilité, de telle sorte que cela n'impacte pas les valeurs d'utilité espérée calculées ultérieurement.

Cette remarque est pertinente dans le cadre du modèle à vecteur aléatoires, où une probabilité initiale est établie sur les états du monde. Dans les modèles à loterie initiale ou finale, la connaissance porte directement sur les types et cette étape n'est pas nécessaire.

Dans un jeu Bayésien, comme lorsqu'un appareil corrélateur est utilisé, les joueurs choisissent leur stratégie en fonction de leur type $\theta_i$. Ainsi, une stratégie du joueur $i$ décrit ce qu'il choisirait s'il était de tel ou tel type : les joueurs jouent donc des stratégies signalisées, c'est-à-dire des fonctions $s_i : \Theta_i \to A_i$ (définition 2.17) ; Si le joueur $i$ est de type $\theta_i^*$, alors il jouera effectivement $s_i(\theta_i^*)$. On notera comme précédemment $s(\theta) = \big(s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n)\big)$ le profil de stratégie qui sera joué si les types des joueurs sont $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Les joueurs évaluent les profils de stratégies signalisées $s$ en fonction de leurs types respectifs. En effet, le type $\theta_i$ d'un joueur $i$ définit d'une part ses préférences (l'utilité du joueur $i$ dépend de $\theta_i$ puisqu'elle dépend de $\theta$), et définit d'autre part sa connaissance *ex-interim* (le joueur $i$ connaissant son type, sa connaissance devient $p(\cdot \mid \theta_i) = p(\cdot \mid H_i^{\theta_i})$). Comme avec les appareils corrélateurs, l'utilité peut être évaluée à différents moments (Fudenberg et Tirole, 1991).

**Définition 2.22 (Utilité dans un jeu bayésien).** Dans un jeu Bayésien $G$, l'utilité d'un profil de stratégies pures signalisées $s$ peut être évaluée à différents moments du jeu :

**Ex-ante** Avant que le joueur $i$ n'observe son type :

$$\mathrm{EU}_i(s) = \sum_{\theta \in \Theta} \Pr(\theta) \times u_i(s(\theta), \theta).$$

**Ex-interim** Après que le joueur $i$ observe son type $\theta_i$ mais avant qu'il ne découvre les types des les autres joueurs :

$$\mathrm{EU}_{(i,\theta_i)}(s) = \sum_{\theta \in \Theta} \Pr(\theta \mid \theta_i) \times u_i(s(\theta)).$$

**Ex-post** Après que le joueur $i$ découvre les types de tous les joueurs :

$$\mathrm{U}_i^{\theta}(s) = u_i(s(\theta), \theta).$$

Dans le modèle à vecteurs aléatoires, les choix de joueurs se font ex-interim (alors ils choisissent chacun une stratégie en fonction du signal qu'ils ont reçu) ou ex-ante (alors ils choisissent une stratégie signalisée qui indique ce qu'ils choisiront pour chaque signal possible). Dans le modèle à loterie initiale, les

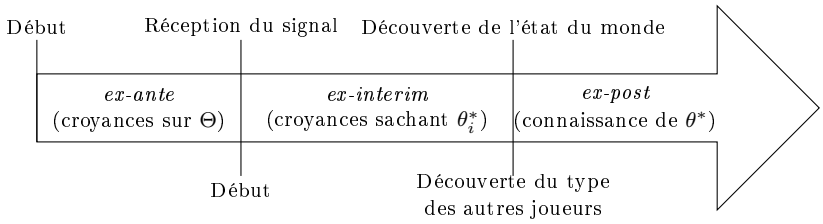



FIGURE 2.5 – Déroulé du jeu (en haut : modèle à vecteurs aléatoires ; en bas : modèle à loterie initiale). Sont indiquées les croyances ou la connaissance de chaque agent $i$ à chaque moment du jeu.

joueurs connaissent leur propre type, et choisissent nécessairement leur action ex-interim. Les différents moments du jeu sont illustrés par la figure 2.5.

Les joueurs évaluent leur utilité espérée au moment où ils choisissent leur stratégie, c'est-à-dire ex-interim et éventuellement ex-ante (ce qui leur permet de choisir une stratégie pertinente). Une fois que les stratégies auront été jouées, ils obtiendront finalement une utilité ex-post, puisque l'un des états du monde uniquement adviendra.

**Exemple 2.11 (Utilités des joueurs).** *Dans l'exemple 2.10, nous avons identifié en introduction le profil de stratégies signalisées $s^* = (s_G^*, s_B^*)$ tel que :*

$$s_G^*(\theta_G^1) = P_2, \qquad s_B^*(\theta_B^1) = P_1, \qquad s_B(\theta_B^2) = P_2.$$

*En notant $\theta = (\theta_G^1, \theta_B^1)$ et $\theta' = (\theta_G^1, \theta_B^2)$, les utilités ex-ante de ce profil, pour les deux joueurs sont :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{EU}_G(s^*) &= p(\theta) \times u_G(s^*(\theta), (\theta)) + p(\theta') \times u_G(s^*(\theta'), (\theta')) \\
&= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times x = 2x/3, \\
\mathrm{EU}_B(s^*) &= p(\theta) \times u_B(s^*(\theta), (\theta)) + p(\theta') \times u_B(s^*(\theta'), (\theta')) \\
&= \frac{1}{3} \times 10 + \frac{2}{3} \times (10 - y) = 10 - 2y/3.
\end{aligned}$$

*Les utilités ex-interim de ce profil, pour les deux joueurs et pour chacun de leurs types, sont :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{EU}_{(G,\theta_G^1)}(s^*) &= p(\theta \mid \theta_G^1) \times u_G(s^*(\theta), (\theta)) + p(\theta' \mid \theta_G^1) \times u_G(s^*(\theta'), (\theta')) \\
&= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times x = 2x/3, \\
\mathrm{EU}_{(B,\theta_B^1)}(s^*) &= p(\theta \mid \theta_B^1) \times u_B(s^*(\theta), (\theta)) + p(\theta' \mid \theta_B^1) \times u_B(s^*(\theta'), (\theta')) \\
&= 1 \times 10 + 0 \times (10 - y) = 10, \\
\mathrm{EU}_{(B,\theta_B^2)}(s^*) &= p(\theta \mid \theta_B^2) \times u_B(s^*(\theta), (\theta)) + p(\theta' \mid \theta_B^2) \times u_B(s^*(\theta'), (\theta')) \\
&= 0 \times 10 + 0 \times (10 - y) = 10 - y.
\end{aligned}$$

*Les utilités ex-post de ce profil, si l'état réel du monde est* $\theta^* = (\theta_G^1, \theta_B^1)$*, sont :*

$$\mathrm{U}_G^{\theta^*}(s^*) = u_G(s^*(\theta^*), (\theta^*)) = 0, \qquad \mathrm{U}_B^{\theta^*}(s^*) = u_B(s^*(\theta^*), (\theta^*)) = 10.$$

*Si l'état réel du monde est* $\theta^* = (\theta_G^1, \theta_B^2)$*, les utilités ex-post sont :*

$$\mathrm{U}_G^{\theta^*}(s^*) = u_G(s^*(\theta^*), (\theta^*)) = x, \qquad \mathrm{U}_B^{\theta^*}(s^*) = u_B(s^*(\theta^*), (\theta^*)) = 10 - y.$$

Les concepts de la théorie des jeux sous information complète sont applicables sous information incomplète, en considérant l'utilité espérée ex-ante ou ex-interim (selon que l'on soit dans un modèle à vecteurs aléatoires ou dans un modèle à loterie initiale) pour évaluer les profils de stratégies pures ou mixtes.

Les stratégies pures $s_i : \Theta_i \to A_i$ ou mixtes $\sigma_i : \Theta_i \to \Sigma_i$ du joueur $i$ peuvent être strictement dominées ou dominantes, selon les mêmes principes que ceux décrits pour les jeux à information complète (définition 2.5), et les stratégies strictement dominées peuvent être retirées itérativement. Rappelons tout de même que la dominance (itérée) repose sur un raisonnement où les joueurs essaient de prédire ce que les autres joueurs vont jouer. Cela pose la question quivante : est-ce que les différents types d'un joueur sont vus comme les différents ensembles d'information d'un unique joueur (dont le choix est réalisé ex-ante, pour tous les signaux qui peuvent être reçus, comme dans le modèle à vecteur aléatoires) ; ou bien est-ce que les types d'un joueur sont vus comme des joueurs potentiels différents, dont l'un d'eux seulement sera sélectionné pour le jeu (son choix est réalisé ex-interim, uniquement pour son propre type, comme dans le modèle à loterie initiale) ?

Dans le modèle à vecteurs aléatoires, l'unique joueur devrait essayer de prédire ex-ante les choix que les autres joueurs feront ex-ante, ainsi tous les types de ce joueur feront la même prédiction. À l'inverse, dans le modèle à loterie initiale, les différents types d'un joueur, qui sont alors vus comme différents individus potentiels, font leurs prédictions ex-interim, et peuvent alors faire des prédictions différentes (Fudenberg et Tirole, 1991).

**Définition 2.23 (Dominance ex-ante).** Une stratégie $s_i$ du joueur $i$ est strictement dominée ex-ante par une stratégie $s_i^*$ ssi, pour tout $s_{-i}$ :

$$\sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(s_i(\theta_i) s_{-i}(\theta_{-i}), \theta) < \sum_{\theta_i \in \Theta_i} p(\theta_i) \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(s_i^*(\theta_i) s_{-i}(\theta_{-i}), \theta)$$

**Définition 2.24 (Dominance ex-interim).** Une stratégie $s_i$ du joueur $i$ est strictement dominée ex-interim par une stratégie $s_i^*$ ssi, pour tout $s_{-i}$ :

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(s_i(\theta_i).s_{-i}(\theta_{-i}), \theta) < \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(s_i^*(\theta_i).s_{-i}(\theta_{-i}), \theta)$$

La notion d'équilibre de Nash, elle aussi, est directement traduite en utilité espérée. On parle alors parfois d'équilibre bayésien.

**Définition 2.25 (Équilibre de Nash).** Un profil de stratégies $s$ est un équilibre de Nash ssi aucun joueur n'a intérêt à être le seul à changer de stratégie, quel que soit son type, c'est-à-dire ssi :

$$\forall i \in N, \quad \nexists s'_i \in s_i, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \mathrm{EU}_{(i,\theta_i)}(s_i) < \mathrm{EU}_{(i,\theta_i)}(s'_i.s_{-i})$$

### 2.2.3 Théorème de Howson et Rosenthal

Le théorème d'Howson et de Rosenthal affirme qu'il existe un jeu à information complète permettant d'étudier tout jeu bayésien : les deux jeux ont les mêmes valeurs d'utilités (Howson et Rosenthal, 1974). Il consiste en fait en une implémentation du modèle à loterie finale pondérée par les probabilités *ex-interim* : c'est une preuve par construction.

Howson et Rosenthal ont proposé cette contribution pour les jeux bayésiens à deux joueurs, qui sont alors transformés en jeux polymatriciels (c'est-à-dire en jeux sous forme hypergraphique standard dont les jeux locaux ont tous deux joueurs uniquement, définition 2.4). Nous présentons ici directement une généralisation de ce résultat, quel que soit le nombre de joueurs considérés.

**Définition 2.26 (Jeu hypergraphique équivalent).** Soit un jeu bayésien $G = \big(N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i\in N}, p\big)$. Son jeu hypergraphique équivalent est :

$$\mathrm{HR}(G) = \Big(\tilde{N}, \tilde{E}, (\tilde{A}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}, (\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)})_{e\in\tilde{E},(i,\theta_i)\in e}\Big)$$

tel que :

- $\tilde{N} = \{(i,\theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ est l'ensemble des paires joueur-type,
- $\tilde{E} = \{e^\theta \mid \theta \in \Theta\}$ est l'ensemble des jeux locaux ($e^\theta = \{(i,\theta_i) \mid i \in N\}$ est l'ensemble des $n$ paires joueur-type compatibles avec $\theta$),
- $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ est l'ensemble des actions de la paire $(i,\theta_i)$,
- $\tilde{u}^{e^\theta}_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}^{e^\theta}) = p(\theta \mid \theta_i) \times u_i(\tilde{a}^{e^\theta}, \theta)$ est la fonction d'utilité locale à $e^\theta$. [6]

**Théorème 2.1 (Théorème de Howson et Rosenthal à $n$ joueurs).** Pour tout jeu bayésien $G$, les utilités ex-interim du joueur $i$ de type $\theta_i$ sont égales aux utilités globales de la paire $(i,\theta_i)$ dans le jeu hypergraphique équivalent $\mathrm{HR}(G)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{EU}^G_{(i,\theta_i)}(s) = u^{\mathrm{HR}(G)}_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}) \ ;$$

où $\tilde{a}$ est le profil de stratégies pures de $\mathrm{HR}(G)$ en bijection avec $s$, tel que :

$$\forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad s_i(\theta_i) = \tilde{a}_{(i,\theta_i)}.$$

6. Par abus de notation, nous pouvons considérer que pour tout jeu local $e^\theta$, un profil de stratégies pures $\tilde{a}_{e^\theta} \in \tilde{A}_{e^\theta}$ de $\mathrm{HR}(G)$ est aussi un profil de stratégies pures de $G$. En effet, les joueurs participant à $e^\theta$ sont les $n$ paires $(1,\theta_1), \ldots, (n,\theta_n)$. Alors, tout profil de stratégies $\tilde{a}^{e^\theta} = \Big(\tilde{a}^{e^\theta}_{(1,\theta_1)}, \ldots, \tilde{a}^{e^\theta}_{(n,\theta_n)}\Big) \in \tilde{A}_{e^\theta}$ est anologue à $\Big(\tilde{a}^{e^\theta}_1, \ldots, \tilde{a}^{e^\theta}_n\Big) \in A$.

*Démonstration.* Les fonctions d'utilité locales $\tilde{u}^{e^\theta}_{(i,\theta_i)}$ associent à tout profil de stratégies la « part d'espérance » qui est calculée sur l'état du monde $\theta$. L'utilité globale de la paire $(i, \theta_i)$ étant la somme des utilités locales, elle est égale l'utilité espérée ex-intérim pour le joueur $i$ de type $\theta_i$. □

Les deux jeux $G$ et $\mathrm{HR}(G)$ associent les mêmes utilités aux profils de stratégies qui sont en bijection, pour chaque type de chaque joueur. Un corollaire direct est que les stratégies dominées ex-interim et les équilibres de Nash de $G$ et de $\mathrm{HR}(G)$ sont en bijection.

**Exemple 2.12 (Jeu hypergraphique équivalent).** *Considérons le jeu bayésien de l'exemple 2.10. Son jeu hypergraphique équivalent est*

$$\mathrm{HR}(G) = \left(\tilde{N}, \tilde{E}, (\tilde{A}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}, (\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)})_{e\in\tilde{E},(i,\theta_i)\in e}\right),$$

*où :*

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \left\{(G,\theta^1_G),(B,\theta^1_B),(B,\theta^2_B)\right\},\\
\tilde{A}_{(G,\theta^1_G)} &= \tilde{A}_{(B,\theta^1_B)} = \tilde{A}_{(B,\theta^2_B)} = \{P_1, P_2\},\\
\tilde{E} &= \left\{(\theta^1_G,\theta^1_B),(\theta^1_G,\theta^2_B)\right\},
\end{aligned}$$

*et où les fonctions d'utilité locales sont définies par :*

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^{\{(G,\theta^1_G),(B,\theta^1_B)\}}_{(G,\theta^1_G)}(\tilde{a}) &= \frac{1}{3}\times u_G(\tilde{a},\theta^1_G.\theta^1_B),\\
\tilde{u}^{\{(G,\theta^1_G),(B,\theta^2_B)\}}_{(G,\theta^1_G)}(\tilde{a}) &= \frac{2}{3}\times u_G(\tilde{a},\theta^1_G.\theta^2_B),\\
\tilde{u}^{\{(G,\theta^1_G),(B,\theta^1_B)\}}_{(B,\theta^1_B)}(\tilde{a}) &= 1\times u_B(\tilde{a},\theta^1_G.\theta^1_B),\\
\tilde{u}^{\{(G,\theta^1_G),(B,\theta^2_B)\}}_{(B,\theta^2_B)}(\tilde{a}) &= 1\times u_B(\tilde{a},\theta^1_G.\theta^2_B).
\end{aligned}$$

*Toute l'information du jeu hypergraphique équivalent* $\mathrm{HR}(G)$ *est exprimée par sa forme hypergraphique standard, donnée à la figure 2.6.*

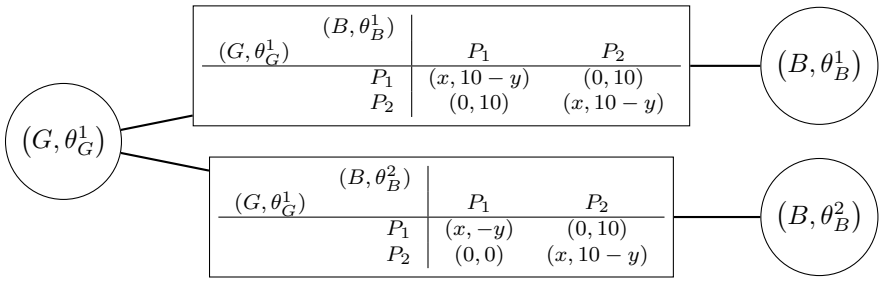



FIGURE 2.6 – Représentation hypergraphique de l'exemple 2.2

### 2.2.4 Jeux possibilistes et jeux crédaux

Le modèle de jeu à information incomplète a été récemment proposé dans le cadre de la théorie des possibilités (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2019, 2020 ; Trabelsi, 2020). Mathématiquement et sémantiquement, il s'agit d'un modèle très similaire à celui des jeux bayésiens : les utilités des joueurs dépendent à la fois des stratégies choisies et de l'état du monde $\omega^*$, lequel est, ici aussi, exprimé comme une combinaisons de types $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Ces types sont les signaux que reçoivent les joueurs, ou alors ils décrivent directement les caractéristiques des joueurs, comme pour les modèles à vecteurs aléatoires et à loterie initiale. Ici encore, les joueurs décident de leur stratégies en fonction leurs types respectifs, ils jouent donc des stratégies signalisées (définition 2.17). La différence réside dans la théorie de la décision considérée : la connaissance initiale est possibiliste (définition 1.48), le conditionnement de Hisdal est utilisé (définition 1.49), et la règle de l'utilité pessimiste est considérée pour tous les agents (définition 1.50), ce qui semble naturel dans un cadre stratégique. De plus, si on souhaite considérer les stratégies mixtes, ce seront les stratégies mixtes possibilistes (définition 2.13).

Nous retrouvons donc des définitions similaires à celles des jeux bayésiens.

**Définition 2.27 (Jeu possibiliste).** Un jeu possibiliste est un triplet

$$G = (N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i \in N}, \pi)\,,$$

où $N$ est l'ensemble fini des joueurs, $A_i$ l'ensemble des actions du joueur $i$, $\Theta_i$ l'ensemble fini de ses types, $u_i : A \times \Theta \to [0,1]$ sa fonction d'utilité et $\pi : \Theta \to [0,1]$ est une distribution de possibilité sur les combinaisons de types.

Rappelons que dans la théorie des possibilité, l'échelle $[0,1]$ est utilisée pour décrire tout préordre complet (qualitatif) muni d'un opérateur de renversement. Les possibilités et les utilités doivent être définies sur des échelles commensurables, puisque leurs valeurs sont comparées dans l'expression de l'utilité pessimiste.

**Définition 2.28 (Utilité pessimiste d'un profil de stratégies pures).** Pour le joueur $i$ ayant le type $\theta_i$, l'utilité pessimiste du profil de stratégies pures $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ est :

$$\mathrm{U}^{\mathrm{Pes}}_{(i,\theta_i)}(a) = \min_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \max\left(1 - \pi(\theta_{-i} \mid \theta_i), u_i(a_i, \theta_i.\theta_{-i})\right)$$

Les concepts présentés pour les jeux bayésiens sont souvent transposables directement. Ainsi, un équilibre de Nash est un profil de stratégies tel qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie (quelque soit son type).

**Définition 2.29 (Équilibre de Nash dans un jeu possibiliste).** Un profil de stratégies $a$ est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i, \forall a'_i \in A_i, \quad \mathrm{U}^{\mathrm{Pes}}_{(i,\theta_i)}(a) \geq \mathrm{U}^{\mathrm{Pes}}_{(i,\theta_i)}(a'_i.a_{-i})$$

Ainsi que l'ont montré Ben Amor *et al.*, une contrepartie possibiliste du théorème de Howson et Rosenthal existe pour les jeux possibilistes à deux joueurs (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2020). Ils sont alors transformés en jeu polymatriciel, c'est-à-dire en jeu hypergraphique dont les jeux locaux impliquent deux joueurs uniquement. Nous reviendrons sur ce résultat dans le chapitre 4. Rappelons que les jeux polymatriciels sont des jeux à information complète : ce résultat, en plus de permettre une représentation succincte, rattache les jeux possibilistes à la théorie des jeux classique.

Durant mon doctorat, nous avons proposé un modèle de jeu incomplet basé sur les fonctions de croyances, appelé *jeu crédal* ou *jeu évidentiel*, selon l'interprétation attachée aux fonctions de croyance, ou *Bel-Game* d'une manière générale (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022). Là encore, il s'agit d'un modèle similaire où la connaissance est exprimée par une fonction de croyance (plus exactement : par une fonction de masse qui représente une fonction de croyance). Nous avons longuement discuté les conditionnements et les règles de décision de cette théorie, dans l'article cité ainsi que dans la section 1.3.4. Nous avons montré que tous ces conditionnements et règles de décisions sont utilisables, et proposé trois généralisation différentes du théorème de Howson et Rosenthal (l'une est générale, les deux autres sont particulières à un conditionnement ou à une règle de décision) et donné leurs complexité théorique.

Nous avons montré que les règles de décision considérées dans la théorie des fonctions de croyance peuvent être exprimées comme un calcul d'espérance généralisée, notion qui sera reprise et détaillée dans le chapitre 3. Les définitions et les résultats obtenus, dans le cadre des jeux évidentiels ou crédaux, seront repris et généralisés dans le chapitre 4, et détaillés en particulier dans la section 4.5. Nous ne les présentons donc pas ici.

## 2.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle des jeux stratégiques, qui capture les situations où plusieurs agents choisissent chacun une stratégie sans connaître les choix effectués par les autres, et les concepts usuels qui s'appliquent à ce modèle. D'une part, la dominance (et son complémentaire la rationalisabilité) permet à un joueur d'identifier des stratégies qui sont pertinentes ou non, quoi que décident les autres joueurs. Ces stratégies sont facilement identifiées par les joueurs eux-mêmes. D'autre part, la notion d'équilibre de Nash permet de caractériser des profils de stratégies où personne n'a intérêt à changer sa propre stratégie. L'existence de tels équilibres, en stratégies pures, n'est pas garantie. Surtout, il n'est pas toujours évident de savoir si les joueurs identifieront un équilibre de Nash, et s'ils identifieront le même. Le concept est pertinent, en revanche, du point de vue du modélisateur. Un organisme extérieur peut en effet chercher les équilibres de Nash et, s'ils conviennent, il peut les recommander aux joueurs. Ces recommandations seront alors sûrement respectées.

Inversement, un équilibre de Nash peut aussi correspondre à une situation que l'on souhaite éviter, alors l'organisme externe peut chercher à les modifier en impactant les utilités des joueurs (par exemple, avec des récompenses ou des pénalités), pour que d'autres équilibres apparaissent, ou bien pour qu'il n'y en ait aucun.

Nous avons aussi vu, dans le cadre des jeux à information complète, que nous pouvons décrire une certaine incertitude ou variabilité sur les choix des joueurs, grâce aux stratégies mixtes et aux appareils corrélateurs. Puis, nous avons abordé le modèle des jeux bayésiens, en discutant les différentes interprétations que l'on peut en donner. Ce modèle permet d'exprimer l'incertitude sur les préférences des joueurs mais aussi sur l'environnement dans lequel les décisions sont prises ; il permet, dans une certaine mesure, de modéliser le fait que les joueurs peuvent avoir des connaissance différentes. Les concepts de dominance et d'équilibre de Nash y sont définis. Nous avons terminé cette seconde section en exposant le théorème de Howson et Rosenthal, qui permet de transformer un jeu bayésien en jeu à information complète, et donc d'utiliser les outils théoriques et algorithmiques usuels sur les jeux bayésiens.

Dans les deux sections qui composent ce chapitre, nous avons évoqué les rares travaux qui cherchent à dépasser la théorie de l'utilité espérée, que ce soit à propos des stratégies mixtes ou du cadre des jeux à information incomplète. Peu de résultats concernent l'application de théories alternatives de la décision à la théorie des jeux, qui reste très majoritairement probabiliste. Ces travaux sont tous très récents : la plupart d'entre eux a été publiée au cours des cinq dernières années. On y trouve, en particulier, des résultats dans le cadre de la théorie des possibilités, et ceux que nous avons proposés durant mon doctorat dans le cadre des fonctions de croyance. Dans chacun de ces travaux, les auteurs ont dû partir des justifications initiales et tout redéfinir « à partir de zéro ».

Dans les chapitres suivants, nous présentons la contribution principale de cette thèse. Nous pensons qu'elle facilitera l'application des théories alternatives de la décision à la théorie des jeux. Dans le chapitre 3, nous proposerons une approche algébrique permettant de modéliser la prise de décision par un modèle général : la théorie de la décision considérée sera alors simplement un paramètre du modèle. Puis, dans le chapitre 4, nous appliquerons ce modèle algébrique à la théorie des jeux. Nous verrons alors que les jeux bayésiens, comme les jeux possibilistes et les jeux évidentiels ou crédaux que nous avons rapidement évoqués en fin de chapitre, sont des instances particulières de ce modèle. De manière similaire, les stratégies mixtes probabilistes et possibilistes seront toutes les deux capturées par ce modèle algébrique. Pour cela, nous devrons repartir, une fois encore, des justifications initiales. Ceci devrait être la dernière occurence d'un retour à ces prémisses car le modèle algébrique que nous proposerons permet de décrire les jeux à information incomplète dans les différentes théories alternatives de la décision, et même des modèles mixtes où les joueurs ne considèrent pas la même théorie, voire où l'incertitude pèse sur la théorie considérée. Enfin, cela nous permettra d'exprimer des résultats généraux, par exemple nous montrerons une version algébrique du théorème de Howson et Rosenthal, dont les instances probabilistes, possibilistes, évidentielles et crédales

correspondent aux résultats proposés par Howson et Rosenthal pour les jeux bayésiens, par Ben Amor *et. al.* pour les jeux possibilistes, et par nous pour les jeux évidentiels ou crédaux.

Pour atteindre ces objectifs, nous devons donc d'abord établir le modèle algébrique appelé *modèle d'agent* avec lequel nous modéliserons chaque joueur. Ce modèle, qui permet d'abstraire la théorie de la décision considérée, est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 3

# Le modèle d'agent

Nous avons vu dans les chapitres 1 et 2 que la modélisation des agents, dans un contexte de décision sous incertitude, implique de décrire leurs préférences (sur l'espace des conséquences $\mathbb{X}$), leurs connaissances (sur le cadre de discernement $\Omega$), et les règles de décision capturant leurs préférences sur les actes (c'est-à-dire, sur les fonctions $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$). Nous avons vu aussi que plusieurs cadres de décision ont été proposés pour modéliser les agents. Dans un cadre de décision, seuls certains types de préférences et de connaissances peuvent être exprimées (par exemple, dans le cadre bayésien, les préférences sont quantitatives et les connaissances sont probabilistes) ; les règles de décision d'un cadre de décision donné sont alors applicables à toutes les préférences et les connaissances exprimables dans ce cadre (par exemple, la règle de l'utilité espérée est applicable à toutes préférences quantitatives et toute connaissance probabiliste).

L'objectif de ce chapitre est double. Nous proposons d'une part un modèle générique que nous appelons *modèle d'agent* et qui permet de bien distinguer les composants par lesquels nous modélisons un agent donné. Nous proposons d'autre part de représenter algébriquement les règles de décision utilisées dans ces modèles d'agent par deux opérateurs abstraits $\oplus$ et $\otimes$ et par une fonction $\mathbf{f}$ qui associe une utilité à tout ensemble de conséquences possibles. Cela nous permet de considérer, pour les règles de décision représentables, un calcul d'espérance généralisé que nous appelons *XEU*, dont l'expression est de la forme :

$$\mathrm{XEU}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \bigoplus_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m_{\mathbf{w}}(B) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{v} \circ \chi, B).$$

Dans cette expression qui évalue l'acte $\chi$, $\mathbf{v}$ est analogue à une fonction d'utilité et $m_{\mathbf{w}}$ à une fonction de masse. Le lecteur attentif aura remarqué la similarité avec les expressions que nous avons données pour les règles de décision du formalisme des fonctions de croyances (définitions 1.44, 1.45 et 1.46).

Des approches algébriques ont déjà été proposées dans un cadre statique (Friedman et Halpern, 1995 ; Halpern, 2001 ; Chu et Halpern, 2003), ainsi que dans un cadre dynamique (Perny, Spanjaard et Weng, 2005 ; Pralet, Verfaillie et Schiex, 2007). Durant mon doctorat, nous les avons utilisées

dans un cadre multi-agents (Fargier, Martin-Dorel et Pomeret-Coquot, 2021b). Nous ne les réutilisons pas ici : nous proposons une nouvelle structure de règle de décision algébrique qui nous semble plus proche des définitions classiques ; elle est surtout davantage adaptée aux capacités d'une part, et au cadre multi-agents d'autre part. Particulièrement, et à l'inverse de (Chu et Halpern, 2003) par exemple, nous verrons que nous pouvons représenter les règles basées sur l'intégrale de Choquet.

Dans la section 3.1, nous décrivons d'abord le modèle d'agent général. Nous définissons ses composants : les *fonctions d'utilité algébriques*, les *capacités algébriques* et les *règles de décision algébriques* qui décrivent respectivement les préférences, les connaissances et les règles de décision utilisables pour modéliser un décideur. Nous formalisons la notion de *cadre de décision*, ce qui permet d'exprimer le fait que certaines règles de décision ne sont applicables qu'à certains types de préférences et de connaissances.

Dans la section 3.2, nous représentons les capacités algébriques par des *fonctions de masse algébriques*, de manière similaire à ce que nous avons présenté pour les fonctions de croyance. Ici, l'opérateur $+$ est remplacé par un opérateur abstrait $\boxplus$, ce qui permet de considérer les fonctions de masse usuelles ($\boxplus = +$), les distributions de possibilités ($\boxplus = \max$) et d'autres représentations plus exotiques.

Dans la section 3.3, nous représentons algébriquement les règles de décision par une *instance de règle de décision*. Une telle instance décrit les opérateurs $\oplus$, $\otimes$ et les autres composants de l'expression XEU donnée ci-dessus et permet donc d'appliquer cette règle algébrique. Nous verrons que les règles de décision usuelles, présentées au chapitre 1, sont toutes représentables par des instances de règle de décision.

## 3.1 Le modèle d'agent

### 3.1.1 Fonctions d'utilité algébriques et structures de préférence

Considérons les deux types de représentations des préférences présentées en section 1.1 : les relations binaires (qualitatives) et les fonctions de gain ou d'utilité (quantitatives). Notons que, d'un côté, les préférences qualitatives semblent plus riches car elles permettent de représenter des préférences qui ne forment pas nécessairement un pré-ordre complet. D'un autre côté, les préférences quantitatives peuvent également sembler plus riches car elles encodent plus d'information en rendant possible la comparaison entre écarts de gain ou d'utilité.

Nous représentons ces deux types de préférences, lorsqu'elles sont établies sur une collection d'objets $X$, par des *fonctions d'utilité algébriques* de type $\mathbf{v} : X \to V$ prenant leurs valeurs dans un domaine $V$ muni d'une relation $\succeq^V$. Ainsi, une fonction d'utilité algébrique modélisant un agent qui préfère au moins autant l'objet $x$ à l'objet $y$ vérifiera $\mathbf{v}(x) \succeq^V \mathbf{v}(y)$. Formellement, une fonction d'utilité algébrique sur $X$ est décrite par une structure que nous

appelons *structure de préférence*.

**Définition 3.1 (Structure de préférence).** Une structure de préférences sur un ensemble fini $X$ est un triplet $\mathcal{V} = \left(V, \succeq^V, \mathbf{v}\right)$ où :
— $V$ est un ensemble ;
— $\succeq^V$ est une relation binaire réflexive sur $V$ (telle que $\forall v, v \succeq^V v$) ;
— $\mathbf{v} : X \to V$ est une fonction appelée *fonction d'utilité algébrique*.

L'ensemble des structures de préférences sur une collection d'objets $X$ est noté $\mathcal{P}refs(X)$. Lorsque le contexte le permet, nous confondons la structure de préférence $\mathcal{V} = (V, \succeq^V, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}refs(X)$ avec la fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v} : X \to V$ qu'elle décrit, et notons alors $\mathbf{v} \in \mathcal{P}refs(X)$.

Tout ensemble ordonné $(X, \succeq^X)$ décrivant une relation de préférence qualitative (définition 1.1) est trivialement représenté par la structure de préférence $\left(X, \succeq^X, x \mapsto x\right)$.

La classe des structures de préférences qualitatives sur $X$ est notée $\mathcal{P}refs_X$, c'est-à-dire $\mathcal{P}refs_X(X) = \{(X, \succeq^X, x \mapsto x) \mid \succeq^X \text{ est reflexive}\}$

*Remarque* 29. La représentation d'une relation de préférence (qualitative) n'est pas unique : plusieurs structures sont capables de représenter les mêmes préférences. Par exemple, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une représentation numérique d'un préordre total $\succeq^X$, alors $(\mathbb{R}, \geq, f)$ décrit la même relation de préférence. Cependant, nous réservons le domaine $\mathbb{R}$ à l'expression des préférences quantitatives.

Les préférences quantitatives sont données par une fonction de gain ou d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$, telle que $x \succeq^X x'$ ssi $u(x) \geq u(x')$ (définition 1.11). Elles sont donc capturées par la structure de préférence $(\mathbb{R}, \geq, u)$. Une telle structure de préférence conserve les valeurs des gains ou des utilités, qui sont utilisées par les règles de décision le cas échéant.

La classe des structures de préférences quantitatives sur $X$ est notée $\mathcal{P}refs_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}refs_{\mathbb{R}}(X) = \{(\mathbb{R}, \geq, u) \mid u : X \to \mathbb{R}\}$.

*Remarque* 30. Souvent, plusieurs fonctions $u : X \to \mathbb{R}$ peuvent décrire les mêmes préférences quantitatives. Par contre, pour chaque fonction $u$, la structure de préférence $(\mathbb{R}, \geq, u)$ qui la représente est unique.

### 3.1.2 Capacités algébriques et structures de connaissance

Les théories permettant de représenter l'incertitude que nous avons abordées dans le chapitre 1 reposent sur l'utilisation d'une paire de capacités duales (mesure de possibilité et nécessité, fonction de croyance et plausibilité, borne inférieure et supérieure de probabilité, etc.).

Nous représentons de telles connaissances, lorsqu'elles sont établies sur un cadre de discernement $\Omega$, par une capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ prenant ses valeurs dans un domaine $W$ muni d'une relation $\succeq^W$. Cette capacité algébrique peut correspondre à une capacité inférieure (mesure de nécessité, fonction de croyance ou borne inférieure de probabilité, par exemple) ; la capacité supérieure, duale, sera alors déduite le cas échéant. Une capacité algébrique modélisant la connaissance d'un agent ayant au moins autant confiance en la réalisation de

l'événement $A$ qu'en celle de l'événement $B$ vérifiera $\mathbf{w}(A) \succeq^W \mathbf{w}(B)$. Formellement, une capacité algébrique est décrite par une structure que nous appelons *structure de connaissance*.

**Définition 3.2 (Structure de connaissance).** Une structure de connaissance sur un cadre de discernement $\Omega$ est un triplet $\mathcal{W} = \left(W, \succeq^W, \mathbf{w}\right)$ où :
— $W$ est un ensemble ;
— $\succeq^W$ est une relation binaire réflexive sur $W$ ;
— $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ est une fonction d'ensemble appelée *capacité algébrique*.

L'ensemble des structures de connaissances sur un cadre de discernement $\Omega$ est noté $\mathcal{K}n(\Omega)$. Lorsque le contexte le permet, nous confondons la structure de connaissance $\mathcal{W} = (W, \succeq^W, \mathbf{w}) \in \mathcal{K}n(\Omega)$ et la capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ qu'elle décrit. Nous notons alors $\mathbf{w} \in \mathcal{K}n(\Omega)$.

Après Friedman et Halpern, nous supposons sauf mention contraire qu'une structure de connaissance est *pointée* et *monotone croissante* et que la relation $\succeq^W$ est un ordre partiel (c'est-à-dire que $\succeq^W$ est réflexive, transitive et antisymétrique, définition 1.7).Il s'agit de la spécification la plus générale d'une structure de connaissance (sur les événements) que nous avons trouvé dans la littérature (Friedman et Halpern, 1995).

**Définition 3.3 (Structure de connaissance pointée).** Une structure de connaissance $\mathcal{W} = (W, \succeq^W, \mathbf{w}) \in \mathcal{K}n(\Omega)$ est dite *pointée par* $\bot$ *et* $\top$ s'il existe deux éléments particuliers $\bot \in W$ et $\top \in W$ tels que les trois propositions ci-dessous sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \forall w \in W,\ \top \succeq^W w \succeq^W \bot, \\ \mathbf{w}(\emptyset) = \bot, \\ \mathbf{w}(\Omega) = \top. \end{aligned}$$

**Définition 3.4 (Structure de connaissance monotone).** Une structure de connaissance $\mathcal{W} = (W, \succeq^W, \mathbf{w}) \in \mathcal{K}n(\Omega)$ est dite *monotone croissante* si pour tout $A \subseteq \Omega$ et $B \subseteq \Omega$,

$$A \subseteq B \implies \mathbf{w}(B) \succeq^W \mathbf{w}(A).$$

L'interprétation d'une structure de connaissance pointée et monotone croissante est claire : le degré de vraisemblance minimal est celui associé à l'événement impossible ($\mathbf{w}(\emptyset) = \bot$), le degré maximal est celui associé à l'événement certain ($\mathbf{w}(\Omega) = \top$) et, pour deux événements $A \subseteq B$, on sait que si $A$ est réalisé alors $B$ est réalisé (c'est-à-dire $\omega^* \in A \implies \omega^* \in B$), on a donc au moins autant confiance en la réalisation de $B$ qu'en celle de $A$.

Les différents types de connaissances que nous avons présentés dans le chapitre 1 étaient quasiment toujours capturés par une capacité $\mu : 2^\Omega \to [0, 1]$ pointée et monotone croissante, qui est naturellement décrite par la structure de connaissance $([0, 1], \geq, \mu)$. Nous avons précisé que la théorie des possibilités

permet de considérer un cadre purement ordinal. Les valeurs prises par une mesure de nécessité N peuvent ainsi être exprimées sur un ensemble quelconque $W$ muni d'un pré-ordre complet $\succeq^W$. Une telle mesure de nécessité est alors décrite par la structure de connaissance $\big(W, \succeq^W, \mathrm{N}\big)$.

Ces différents types de connaissances définissent, pour un cadre de discernement $\Omega$ donné, des classes de capacités algébriques :

- $\mathcal{K}n_{\mathrm{PrInf}}(\Omega) = \{([0,1], \geq, \mathrm{Pinf}) \mid \mathrm{Pinf}$ est une probabilité inférieure$\}$ est la classe des probabilités inférieures sur $\Omega$ ;
- $\mathcal{K}n_{\mathrm{Bel}}(\Omega) = \{([0,1], \geq, \mathrm{Bel}) \mid \mathrm{Bel}$ est une fonction de croyance$\}$ est la classe des fonctions de croyances sur $\Omega$ ;
- $\mathcal{K}n_{\mathrm{N}}(\Omega) = \{(W, \succeq^W, \mathrm{N}) \mid \mathrm{N}$ est une mesure de nécessité $\wedge\ \succeq^W$ est un préordre total$\}$ est la classe des mesures de nécessité sur $\Omega$ ;
- etc.

Nous distinguons la classe des mesures de nécessité à valeurs dans $[0,1]$, que nous notons $\mathcal{K}n_{\mathrm{N}[0,1]}(\Omega) = \{([0,1], \geq, \mathrm{N})\} \mid \mathrm{N}$ est une mesure de nécessité$\}$.

Enfin, la connaissance considérée pour la prise de décision sous « ignorance totale » permet uniquement de distinguer les états du monde possibles de ceux qui sont impossibles. Afin d'harmoniser les définitions, nous proposons de les représenter par des mesures de nécessité catégoriques, c'est-à-dire définies par une distribution de possibilité $\pi$ ne prenant que les valeurs 0 et 1 (indiquant qu'$\omega$ est impossible par $\pi(\omega) = 0$, ou complètement possible par $\pi(\omega) = 1$). Si $A = \{\omega \mid \pi(\omega) = 1\}$ est l'ensemble des états du monde possibles, la mesure de nécessité $\mathrm{N}_\pi$ est telle que $\mathrm{N}_\pi(B) = 1 \iff A \subseteq B$. Nous notons $\mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}(\Omega) = \{(\{0,1\}, \geq, \mathrm{N})\} \cap \mathcal{K}n_{\mathrm{N}[0,1]}(\Omega)$ la classe des mesures de nécessité catégoriques sur $\Omega$ exprimant l'« ignorance totale ».

Toutes les capacités algébriques d'une même classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$ (où $\beta \in \{\mathrm{Pr}, \mathrm{Bel}, \mathrm{Ign} \dots\}$ est l'identifiant de la classe) partagent, en particulier, le même co-domaine $W$ et le même opérateur de comparaison $\succeq^W$. Alors, pour une classe $\mathcal{K}n_\beta$ de capacités algébriques donnée, nous notons ces deux composants $W_\beta$ et $\succeq_\beta^W$. Ainsi, la notation $\mathbf{w} \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega)$ n'est pas ambigüe : elle implique que $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W_\beta$ soit décrite par la structure de connaissance $(W_\beta, \succeq_\beta^W, \mathbf{w}) \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega)$.

**Exemple 3.1 (Classe des mesures de probabilité).** *La classe $\mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}$ des mesures de probabilité est définie, pour tout cadre de discernement $\Omega$, par :*

$$\mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}(\Omega) = \left\{ ([0,1], \geq, \mathrm{Pr}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Pr}(\emptyset) = 0 \ \wedge\ \mathrm{Pr}(\Omega) = 1 \ \wedge \\ \forall A, B \ \textit{disjoints}, \mathrm{Pr}(A \cup B) = \mathrm{Pr}(A) + \mathrm{Pr}(B) \end{array} \right\}.$$

*Le co-domaine des capacités de la classe $\mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}$ est $W_{\mathrm{Pr}} = [0,1]$ et leur opérateur de comparaison est $\succeq_{\mathrm{Pr}} = \geq$. Toute capacité $\mathbf{w} \in \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}(\Omega)$ de cette classe est une mesure de probabilité $\mathbf{w} : 2^\Omega \to [0,1]$ sur $\Omega$.*

### Conditionnement d'une capacité algébrique

Nous avons vu au chapitre 1 que dans un cadre dynamique, il est nécessaire de mettre à jour la connaissance. Que ce soit pour effectuer une révision

des connaissances ou bien un focus, la mise à jour consiste à établir la capacité conditionnelle : après avoir observé un événement $C \subseteq \Omega$, la capacité $\mathbf{w}$ devient $\mathbf{w}(\cdot \mid C)$, comme expliqué à la section 1.2.2. Ce conditionnement « sachant $C$ » est défini pour une classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$ donnée ($\beta \in \{\mathrm{Pr}, \mathrm{Bel}, \mathrm{Ign}, \dots\}$) : il peut être appliqué à toute capacité algébrique de cette classe (et pour tout cadre de discernement $\Omega$). Cependant, pour être appliqué, l'événement conditionnel $C$ doit souvent vérifier une précondition (par exemple si l'événement $C$ est impossible, de nombreux auteurs affirment que les probabilités conditionnelles « sachant $C$ » ne sont pas définies).

**Définition 3.5 (Conditionnement).** Pour une classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$ donnée, un conditionnement est un couple :

$$\mathcal{C} = (\mathrm{cond}, \mathrm{precond}),$$

où, pour tout cadre de discernement $\Omega$,

— $\mathrm{cond} : \mathcal{K}n_\beta(\Omega) \times 2^\Omega \to \mathcal{K}n_\beta(\Omega)$ est l'opérateur de conditionnement ;

— $\mathrm{precond} : \mathcal{K}n_\beta(\Omega) \times 2^\Omega \to \{\bot, \top\}$ est un prédicat booléen.

On notera $\mathcal{C}ond_\beta$ l'ensemble des opérations de conditionnement de la classe de structure de connaissance $\mathcal{K}n_\beta$.

Supposons $\mathbf{w} \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega)$ une capacité algébrique sur le cadre de discernement $\Omega$, appartenant à la classe $\mathcal{K}n_\beta$. Alors, un conditionnenemt $(\mathrm{cond}, \mathrm{precond}) \in \mathcal{C}ond_\beta$ de cette classe $\mathcal{K}n_\beta$ définit toutes les capacités algébriques conditionnelles $\mathbf{w}(\cdot \mid C) = \mathrm{cond}(\mathbf{w}, C) \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega)$ pour tous les événements $C$ vérifiant $\mathrm{precond}(\mathbf{w}, C) = \top$. Ces capacités conditionnelles $\mathbf{w}(\cdot \mid C)$ appartiennent à la même classe $\mathcal{K}n_\beta$ que la capacité algébrique *a priori* $\mathbf{w}$.

**Exemple 3.2 (Probabilités conditionnelles).** *Le conditionnement probabiliste classique (ou bayésien) est défini par le couple* $\mathcal{C}_{\mathrm{Pr}} = (\mathrm{cond}_{\mathrm{Pr}}, \mathrm{precond}_{\mathrm{Pr}}) \in \mathcal{C}ond_{\mathrm{Pr}}$ *tel que, pour tout* $\Omega$ *:*

$$\mathrm{cond}_{\mathrm{Pr}}(\mathrm{Pr}, C) = \left([0,1],\ \geq,\ A \mapsto \frac{\mathrm{Pr}(A \cap C)}{\mathrm{Pr}(C)}\right) \in \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}(\Omega)$$
$$\mathrm{precond}_{\mathrm{Pr}}(\mathrm{Pr}, C) = (\mathrm{Pr}(C) \neq 0)$$

*Remarque* 31. Après les travaux pionniers de De Finetti, plusieurs auteurs ont étudié l'*objet conditionnel* $(A \mid C)$ en tant que tel. Dans cette approche, $\mathbf{w}(A \mid C)$ ne correspond pas à la capacité $\mathbf{w}(\cdot \mid C)$ mise à jour, pour laquelle on demande la valeur associée à l'événement $A$, mais de la capacité initiale $\mathbf{w}$ pour laquelle on demande la valeur associée à l'objet conditionnel $(A \mid C)$ (De Finetti, 1936, 1937 ; Adams, 1965 ; Calabrese, 1987 ; Goodman et Nguyen, 1988 ; Dubois et Prade, 1994b). Dans notre travail, nous n'avons pas considéré cette approche, qui pourrait cependant être appliquée en définissant $\mathrm{cond}(\mathbf{w}, C) = A \mapsto \mathbf{w}(A \mid C)$ et $\mathrm{precond}(\mathbf{w}, C) = \top \iff$ la valeur associée à l'objet conditionnel $(A \mid C)$ est définie.

### Produit de capacités algébriques

Nous avons également vu, dans le chapire 2, qu'il est parfois nécessaire de construire une capacité algébrique jointe sur $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ à partir de $n$ capacités, respectivement sur $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ (c'est le cas en théorie des jeux, par exemple, lorsqu'on considère les stratégies mixtes, voir la définition 2.12). Cette opération est appelée *produit* (ou parfois *fusion*) et sert à combiner plusieurs connaissances différentes. Cette opération est définie pour une classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$ donnée et pour tous cadres de discernement.

Nous abstrayons cette opération par deux fonctions $\times^{\text{cart}}$ et $\times^{\text{dep}}$, chacune permettant de construire une capacité algébrique jointe.

La première fonction, $\times^{\text{cart}}$, est appelée *produit cartesien* ; elle fusionne deux capacités algébriques capturant une connaissance sur des événements indépendants. Pour une classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$ donnée, le produit cartésien de $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1)$ et $\mathbf{w}_2 \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_2)$ établies respectivement sur les cadres de discernement $\Omega_1$ et $\Omega_2$, est une capacité algébrique *jointe* $\times^{\text{cart}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_{1\times 2} \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1 \times \Omega_2)$ dont le cadre de discernement est $\Omega_1 \times \Omega_2$. Cette capacité jointe $\mathbf{w}_{1\times 2}$ appartient à la même classe $\mathcal{K}n_\beta$ que les deux capacités $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$.

La seconde fonction, $\times^{\text{dep}}$, est appelée *produit dépendant*, elle fusionne une capacité algébrique sur un cadre de discernement $\Omega_1$ et plusieurs capacités algébriques sur un cadre de discernement $\Omega_2$ qui capturent la connaissance sur $\Omega_2$ en fonction d'$\omega_1 \in \Omega_1$. Formellement, $\times^{\text{dep}}$ met en jeu une capacité algébrique $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1)$ sur $\Omega_1$, et une fonction $f : \Omega_1 \to \mathcal{K}n_\beta(\Omega_2)$ associant à tout $\omega_1 \in \Omega_1$ une capacité algébrique $f(\omega_1)$ sur $\Omega_2$. Cette fonction $f$ associe ainsi des connaissances différentes sur $\Omega_2$ à tout état du monde $\omega_1 \in \Omega_1$ : la connaissance sur $\Omega_2$ dépend [1] d'$\omega_1 \in \Omega_1$. La capacité algébrique jointe issue de $\mathbf{w}_1$ et de $f$ est exprimée sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et appartient à la même classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$, c'est-à-dire $\times^{\text{dep}}(\mathbf{w}_1, f) = \mathbf{w}_{1\times f} \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

**Définition 3.6 (Produit dépendant).** Pour une classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_\beta$, et pour tous cadres de discernement $\Omega_1$ et $\Omega_2$, toute opération de produit dépendant est une fonction de type :

$$\times^{\text{dep}} : \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1) \times (\Omega_1 \to \mathcal{K}n_\beta(\Omega_2)) \to \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Une telle fonction $\times^{\text{dep}}$ combine une capacité algébrique $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1)$ et une fonction $f : \Omega_1 \to \mathcal{K}n_\beta(\Omega_2)$ associant à tout $\omega_1 \in \Omega_1$ une capacité algébrique sur $\Omega_2$. Ainsi, $\mathbf{w}_{1\times f} = \times^{\text{dep}}(\mathbf{w}_1, f) \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On notera $\mathcal{P}rod_\beta$ l'ensemble des produits dépendants de la classe $\mathcal{K}n_\beta$. Le produit cartésien de deux capacités $\mathbf{w}_1 \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_1)$ et $\mathbf{w}_2 \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega_2)$ est le cas particulier du produit dépendant lorsque la capacité algébrique décrivant la connaissance sur $\Omega_2$ est la même pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$, c'est-à-dire que la fonction $f$ est constante. La connaissance sur $\Omega_2$ ne dépend plus d'$\omega_1 \in \Omega_1$.

1. De telles connaissances sont parfois appelées « conditionnelles », $f(\omega_1)$ est alors vue comme le conditionnement « sachant $\omega_1$ » d'une capacité *a priori* non représentée. Nous ne souhaitons pas introduire de relation entre le produit et le conditionnement, et utilisons ici le terme « produit dépendant ».

**Définition 3.7 (Produit cartésien).** Pour une classe de capacités algébriques $\mathcal{Kn}_\beta$, et pour tous cadres de discernement $\Omega_1$ et $\Omega_2$, l'opération de produit indépendant est la fonction de type :

$$\times^{\text{cart}} : \mathcal{Kn}_\beta(\Omega_1) \times \mathcal{Kn}_\beta(\Omega_2) \to \mathcal{Kn}_\beta(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

définie par :

$$\times^{\text{cart}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \times^{\text{dep}}(\mathbf{w}_1, \omega \mapsto \mathbf{w}_2).$$

Pour toute famille de capacités algébriques $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \in \mathcal{Kn}_\beta(\Omega_1) \times \dots \times \mathcal{Kn}_\beta(\Omega_n)$, nous notons $\times^{\text{cart}}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \in \mathcal{Kn}_\beta(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n)$ la capacité algébrique jointe par produits successifs, c'est à dire :

$$\times^{\text{cart}}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \times^{\text{cart}}(\mathbf{w}_1, \times^{\text{cart}}(\mathbf{w}_2, \times^{\text{cart}}(\dots, \mathbf{w}_n)\dots)).$$

*Remarque* 32. Il semble naturel de demander des propriétés sur ces opérations « produit » (en un sens, le produit cartésien devrait être associatif et commutatif, par exemple). Cependant, nous n'en n'avons pas besoin dans ce travail et laissons au lecteur le soin de définir des produits pertinentes. Il pourra se référer par exemple à (Walley et Fine, 1982 ; Dubois et Prade, 1991 ; Destercke, 2013)

**Exemple 3.3 (Opérations « produit » pour les probabilités).** *Soient* $p_1 : \Omega_1 \to [0,1]$ *et* $p_2 : \Omega_2 \to [0,1]$ *deux distributions de probabilité représentant les mesures de probabilité* $\Pr_1 \in \mathcal{Kn}_{\Pr}(\Omega_1)$ *et* $\Pr_2 \in \mathcal{Kn}_{\Pr}(\Omega_2)$*. La mesure jointe* $\Pr_{1\times 2} = \times^{\text{cart}}(\Pr_1, \Pr_2) \in \mathcal{Kn}_{\Pr}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *est la mesure de probabilité représentée par la distribution* $p_{1\times 2}$*, telle que :*

$$p_{1\times 2}(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \times p_2(\omega_2).$$

*Soit maintenant une fonction* $f : \Omega_1 \to \mathcal{Kn}_{\Pr}(\Omega_2)$ *qui associe à tout* $\omega_1 \in \Omega_1$ *la mesure de probabilité* $f(\omega_1)$ *dont la distribution est* $p_{\omega_1} : \Omega_2 \to [0,1]$*. La mesure de probabilité jointe* $\Pr_{1\times f} = \times^{\text{dep}}(\mathbf{w}_1, f) \in \mathcal{Kn}_{\Pr}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *obtenue par produit dépendant est la mesure de probabilité définie par la distribution* $p_{1\times f}$ *telle que :*

$$p_{1\times f}(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \times p_{\omega_1}(\omega_2).$$

*Bien entendu, si la fonction* $f$ *est constante (c'est-à-dire si* $p_{\omega_1} = p_{\omega_1'}$ *pour tous* $\omega_1, \omega_1' \in \Omega_1$*), nous retrouvons le produit cartésien ci-dessus.*

### 3.1.3 Cadres de décision

Nous formalisons dans cette section, grâce à la notion de *cadre de décision*, les différents paramétrages avec lesquels sont établies les théories de la décision présentées au chapitre 1. Un cadre de décision fixe la classe des fonctions d'utilité algébriques et celle des capacités algébriques utilisables pour modéliser un agent. Nous avons vu par exemple le cadre de décision bayésien, où les préférences sont quantitatives et où la connaissance est décrite par une mesure de probabilité ; ou

encore le cadre de l'ignorance totale, où les préférences peuvent être de n'importe quel type, et où la connaissance est catégorique (c'est-à-dire que seul l'ensemble des états du monde possibles est connu).

Une fonction d'utilité algébrique est définie sur un ensemble de conséquences $\mathbb{X}$, et une capacité algébrique sur un cadre de discernement $\Omega$. Elles dépendent donc toutes les deux de la *situation de décision* $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ considérée, qui définit le cadre de discernement, l'ensemble des conséquences et les actes réalisables d'une prise de décision particulière (définition 1.15). À l'inverse, un cadre de décision est défini pour toute situation de décision, c'est-à-dire pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$. En effet, on peut considérer un même cadre de décision dans plusieurs situations différentes. Par exemple, le cadre de décision bayésien impose l'utilisation de mesure de probabilités et de fonction d'utilités quantitatives, quelque soit la situation de décision considérée.

**Définition 3.8 (Cadre de décision).** Un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ associe à tout ensemble de conséquences $\mathbb{X}$ et tout cadre de discernement $\Omega$ la classe de fonctions d'utilité algébriques $\mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha}(\mathbb{X})$ sur $\mathbb{X}$ et la classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_{\beta}(\Omega)$ sur $\Omega$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\mathbb{X}, \Omega) = \mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha}(\mathbb{X}) \times \mathcal{K}n_{\beta}(\Omega) \subseteq \mathcal{P}\mathit{refs}(\mathbb{X}) \times \mathcal{K}n(\Omega).$$

L'indice $\alpha$ est donc l'identifiant de la classe de fonctions d'utilité algébriques ; l'indice $\beta$ celui de la classe de capacités algébriques. Comme précédemment, le co-domaine des fonctions d'utilité algébriques du cadre $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ est noté $V_{\alpha}$ et le co-domaine des capacités algébriques est noté $W_{\beta}$.

Les différents cadres de décision que nous avons présentés au chapitre 1 peuvent être caractérisés de cette façon.

**Exemple 3.4 (Cadre de décision bayésien).** *Le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$ dans lequel la théorie de l'utilité espérée est établie est celui où les fonctions d'utilités sont quantitatives (à valeurs réelles) et les capacités sont des mesures de probabilité (discrètes). Pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$, il est défini par :*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}(\mathbb{X}, \Omega) = \mathcal{P}\mathit{refs}_{\mathbb{R}}(\mathbb{X}) \times \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}(\Omega) = \Big\{\big((\mathbb{R}, \geq, u), ([0,1], \geq, \mathrm{Pr})\big)\Big\}$$

*où* Pr *est une mesure de probabilité.*
*Les co-domaines de $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$ sont $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $W_{\mathrm{Pr}} = [0,1]$, c'est-à-dire que toute fonction d'utilité algébrique de ce cadre est de la forme $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ et que toute capacité algébrique de ce cadre est de la forme $\mathrm{Pr} : 2^{\Omega} \to [0,1]$.*

La table 3.1 en page suivante liste les cadres de décision usuels que nous avons présentés au chapitre 1. Pour les cadres de décision $\mathcal{F}_{V,\mathrm{N}}$ et $\mathcal{F}_{X,\mathrm{Ign}}$ où une mesure de nécessité est considérée, nous donnons également leurs restrictions aux domaines réels, respectivement $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$.

Il est bien connu (et souvent facilement vérifiable) que certains cadres de décision en généralisent d'autres. Par exemple, le cadre de décision des fonctions de croyance avec utilité quantitative généralise le cadre de décision bayésien. Avec

| Cadre $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ | Classe $\mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha}(\mathbb{X})$ [1] | Classe $\mathcal{K}\mathit{n}_{\beta}(\Omega)$ [2] | $V_\alpha$ | $W_\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{(\mathbb{R},\geq,u)\}$ | $\{([0,1],\geq,\mathrm{Pinf})\}$ | $\mathbb{R}$ | $[0,1]$ |
| $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrIntv}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{(\mathbb{R},\geq,u)\}$ | $\{([0,1],\geq,\mathrm{Pr}^-)\}$ | $\mathbb{R}$ | $[0,1]$ |
| $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{(\mathbb{R},\geq,u)\}$ | $\{([0,1],\geq,\mathrm{Bel})\}$ | $\mathbb{R}$ | $[0,1]$ |
| $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{(\mathbb{R},\geq,u)\}$ | $\{([0,1],\geq,\mathrm{Pr})\}$ | $\mathbb{R}$ | $[0,1]$ |
| $\mathcal{F}_{V,\mathrm{N}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{V,\succeq^V,u)\}$ | $\{(V,\succeq^V,\mathrm{N})\}$ | $V$ | $V$ |
| $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{([0,1],\geq,u)\}$ | $\{([0,1],\geq,\mathrm{N})\}$ | $[0,1]$ | $[0,1]$ |
| $\mathcal{F}_{\mathbb{X},\mathrm{Ign}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{(\mathbb{X},\succeq^{\mathbb{X}},x\mapsto x)\}$ | $\{(\{0,1\},\geq,\mathrm{N})\}$ | $\mathbb{X}$ | $[0,1]$ |
| $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}(\mathbb{X},\Omega)$ | $\{(\mathbb{R},\geq,u)\}$ | $\{(\{0,1\},\geq,\mathrm{N})\}$ | $\mathbb{R}$ | $[0,1]$ |

[1] *Les classes de structures de préférence sont définies pour toute fonction d'utilité algébrique* $u:\mathbb{X}\to V_\alpha$.

[2] *Les classes de structures de connaissance sont définies pour certains types de capacités algébriques uniquement, qui sont précisés ici par les notations :* Pinf *dénote une probabilité inférieure,* $\mathrm{Pr}^-$ *une capacité induite par des intervalles de probabilité,* Bel *une fonction de croyance,* Pr *une mesure de probabilité et* N *une mesure de nécessité.*

TABLE 3.1 – Cadres de décision usuels.

nos notations, un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ généralise le cadre $\mathcal{F}_{\gamma,\delta}$ si et seulement si pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$, $\mathcal{F}_{\gamma,\delta}(\mathbb{X},\Omega)\subseteq\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\mathbb{X},\Omega)$, c'est-à-dire si l'inclusion est vérifiée pour les classes de fonctions d'utilité algébriques ($\mathcal{P}\mathit{refs}_{\gamma}(\mathbb{X})\subseteq\mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha}(\mathbb{X})$) et pour les classes de capacités algébriques ($\mathcal{K}\mathit{n}_{\delta}(\Omega)\subseteq\mathcal{K}\mathit{n}_{\beta}(\Omega)$). Ces relations d'inclusions sont illustrées par la figure 3.1, et vérifiées dans l'assistant de preuve COQ (voir la section 5.4).

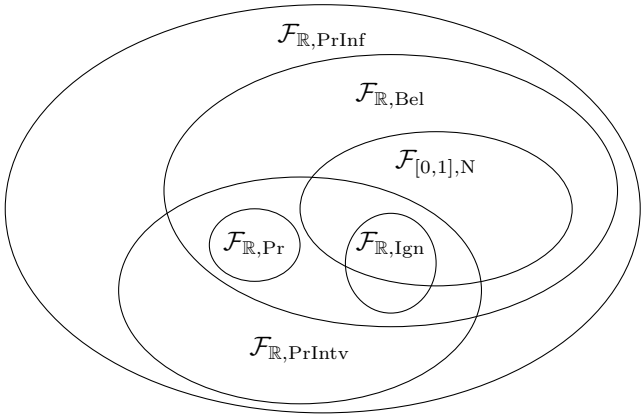



FIGURE 3.1 – Diagramme d'inclusion des cadres de décision

### 3.1.4 Règles de décision

Nous nous intéressons maintenant aux règles de décision. Pour tout ensemble de conséquences $\mathbb{X}$ et tout cadre de discernement $\Omega$, une règle de décision indique la manière dont des préférences sur $\mathbb{X}$ et des connaissances sur $\Omega$ sont combinées, ce qui produit une relation de préférence sur les actes (c'est-à-dire sur les fonctions $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$ indiquant la conséquence qui advient en fonction de l'état du monde). Une règle de décision n'est cependant pas toujours applicable : il faut que les préférences et la connaissance soient exprimées dans un cadre de décision adapté. Par exemple, la règle de l'utilité espérée est définie pour tout $\mathbb{X}$ et pour tout $\Omega$, mais uniquement pour des préférences quantitatives et une connaissance probabiliste. Une règle de décision est donc définie pour un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ donné (celui de l'utilité espérée est $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$).

Une règle de décision est une fonctionnelle[2] paramétrée par une fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v} : \Omega \to V$ et par une capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$. Elle associe à tout acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$ un degré d'utilité dans un domaine $U$ muni d'une relation $\succeq^U$. Ainsi, la règle de décision modélisant un agent qui préfère au moins autant l'acte $\chi$ à l'acte $\chi'$ vérifiera $\mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) \succeq^U \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi')$. Formellement, une règle de décision est définie par une structure que nous appelons *structure de règle de décision*.

**Définition 3.9 (Structure de règle de décision).** Une structure de règle de décision du cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ est un triplet $\mathcal{U} = (U, \succeq^U, \mathbf{u})$ où :

- $U$ est un ensemble ;
- $\succeq^U$ est une relation binaire réflexive sur $U$ ;
- Pour tout $\mathbb{X}$ et tout $\Omega$, $\mathbf{u}$ est une fonctionnelle associant une valeur de $U$ à tout triplet constitué d'une fonction d'utilité algébrique, d'une capacité algébrique et d'un acte, c'est-à-dire dont le type est $\mathbf{u} : \mathcal{P}\mathit{refs}_\alpha(\mathbb{X}) \times \mathcal{K}\mathit{n}_\beta(\Omega) \times (\Omega \to \mathbb{X}) \to U$.

L'ensemble des structures de règle de décision du cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ est noté $\mathcal{D}\mathit{ec}_{\alpha,\beta}$. Comme précédemment, nous confondons la structure $\mathcal{U} = (U, \succeq^U, \mathbf{u}) \in \mathcal{D}\mathit{ec}_{\alpha,\beta}$ avec la règle de décision $\mathbf{u}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté et notons alors $\mathbf{u} \in \mathcal{D}\mathit{ec}_{\alpha,\beta}$.

*Remarque* 33. Le cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ pour lequel une règle de décision $\mathbf{u} \in \mathcal{D}\mathit{ec}_{\alpha,\beta}$ est définie ne permet pas d'identifier ni le co-domaine $U$, ni l'opérateur de comparaison $\succeq^U$. Souvent, la règle de décision $\mathbf{u}$ a le même co-domaine que la fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v}$, muni du même ordre, c'est-à-dire $U = V_\alpha$ et $\succeq^U = \succeq^{V_\alpha}$, mais nous n'imposons pas cette contrainte.

Au chapitre 1, nous avions exprimé les règles de décision par des fonctionnelles $\mathrm{U}_\mathcal{D} : (\Omega \to \mathbb{X}) \to \mathbb{R}$. Elles étaient ainsi paramétrées par un problème de décision $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \mu, u)$, lequel était défini de manière ad-hoc par une situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$, une capacité $\mu$ (ou les éléments permettant de la définir) et une fonction d'utilité $u$. La structure de règle de décision $\mathcal{U}$ correspondant à

2. Une fonctionnelle, ou fonction d'ordre supérieur, est une fonction dont au moins un des arguments est lui-même une fonction.

une telle règle de décision U est $\mathcal{U} = (\mathbb{R}, \mathbf{u}, \geq)$ où la fonctionnelle $\mathbf{u}$ est définie, pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$, et quel que soit $\mathbb{A}$, par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \mathrm{U}_{((\Omega,\mathbb{X},\mathbb{A}),\mathbf{w},\mathbf{v})}(\chi).$$

**Exemple 3.5 (Structure de l'utilité espérée).** *Au chapitre 1, la règle de l'utilité espérée était définie, pour toute situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$, par $\mathrm{EU}_{(\mathcal{A},\mathrm{Pr},u)}(\chi) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{Pr}(\{\omega\}) \times u(\chi(\omega))$ (définition 1.26). La règle de décision correspondante est donc décrite par la structure $\mathcal{U}^{\mathrm{EU}} = \left(\mathbb{R}, \geq, \mathbf{u}^{\mathrm{EU}}\right) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$, où la fonctionnelle $\mathbf{u}^{\mathrm{EU}}$ est définie, pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$, par :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{EU}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{w}(\{\omega\}) \times \mathbf{v}(\chi(\omega))$$

### 3.1.5 Modèle d'agent

Nous avons pu abstraire les fonctions d'utilité, les capacités et les règles de décision, qui sont décrites formellement par des structures (de préférence, de connaissance et de règle de décision) exprimées dans un cadre de décision donné. Cela nous permet de modéliser un agent lors d'une prise de décision. Un agent est modélisé dans un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ d'abord par une règle de décision (applicable à toute situation de décision), puis, pour une situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ particulière, par une fonction d'utilité algébrique sur $\mathbb{X}$ et par une capacité algébrique sur $\Omega$.

Par exemple, un agent rationnel, au sens de l'école bayésienne, souhaite maximiser son utilité espérée. Si cela correspond à nos choix de modélisation, alors cet agent est modélisé dans le cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$ des probabilités et des utilités quantitatives par la règle de décision $\mathcal{U}^{\mathrm{EU}} \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$. Pour la situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$ considérée, nous établirons la fonction d'utilité $\mathbf{v} \in \mathcal{P}refs_{\mathbb{R}}(\mathbb{X})$ et la mesure de probabilité $\mathbf{w} \in \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}(\Omega)$ qui décrivent ses préférences sur $\mathbb{X}$ et sa connaissance sur $\Omega$ pour cette situation particulière.

Nous appelons *modèle d'agent* la donnée de ces composants, c'est-à-dire la donnée de trois structures du même cadre $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ : une structure de règle de décision $\mathcal{U} \in \mathcal{D}ec_{\alpha,\beta}$, une structure de préférence $\mathcal{V} \in \mathcal{P}refs_{\alpha}$ et une structure de connaissance $\mathcal{W} \in \mathcal{K}n_{\beta}$.

**Définition 3.10 (Modèle d'agent).** Dans un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ donné et pour toute situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$, un modèle d'agent est un triplet :

$$\mathcal{I} = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$$

où :

- $\mathcal{U} = (U, \succeq^U, \mathbf{u}) \in \mathcal{D}ec_{\alpha,\beta}$ est une structure de règle de décision adaptée au cadre $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ ;
- $\mathcal{V} = (V, \succeq^V, \mathbf{v}) \in \mathcal{P}refs_{\alpha}(\mathbb{X})$ est une structure de préférence sur $\mathbb{X}$ ;
- $\mathcal{W} = (W, \succeq^W, \mathbf{w}) \in \mathcal{K}n_{\beta}(\Omega)$ est une structure de connaissance sur $\Omega$.

Pour un ensemble de conséquences $\mathbb{X}$ et un cadre de discernement $\Omega$ donnés, l'ensemble des modèles d'agents exprimables dans un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ est noté $\mathit{Agent}_{\alpha,\beta}(\mathbb{X},\Omega)$. Comme précédemment, nous confondons les structures avec les fonctions qu'elles définissent et notons ainsi $\mathcal{I} = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \in \mathit{Agent}_{\alpha,\beta}(\mathbb{X},\Omega)$.

Pour une situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega,\mathbb{X},\mathbb{A})$ donnée, un modèle d'agent $\mathcal{I} = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \in \mathit{Agent}_{\alpha,\beta}(\mathbb{X},\Omega)$ contient tous les arguments pour la règle de décision $\mathbf{u}$, et permet donc de comparer les actes $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$ (particulièrement les actes réalisables $\chi \in \mathbb{A}$). $\mathcal{I}$ modélise un agent qui préfère au moins autant l'acte $\chi$ à l'acte $\chi'$ si et seulement si :

$$\mathbf{u}(\mathbf{v},\mathbf{w},\chi) \quad \succeq^U \quad \mathbf{u}(\mathbf{v},\mathbf{w},\chi').$$

*Remarque* 34. Un modèle d'agent permet d'établir les préférences d'un agent sur les actes (à partir de ses préférences sur les conséquences $\mathbb{X}$ et de sa connaissance sur $\Omega$). On peut donc en déduire une fonction d'utilité algébrique, non pas sur $\mathbb{X}$, mais sur l'ensemble des actes, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $\Omega \to \mathbb{X}$. Elle est décrite formellement par la structure de préférence suivante :

$$\left(U,\ \succeq^U,\ \chi \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{v},\mathbf{w},\chi)\right) \in \mathit{Prefs}(\Omega \to \mathbb{X}).$$

## 3.2 Fonctions de masse algébriques

### 3.2.1 Définitions

Nous souhaitons ici représenter les capacités algébriques $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ décrites par des structures de connaissance (définition 3.2) grâce à des fonctions de masse algébriques, de manière similaire à ce qui a été présenté dans le cadre de la théorie des fonctions de croyances (section 1.3.4). Formellement, une fonction de masse algébrique est elle aussi définie par une structure.

**Définition 3.11 (Fonction de masse algébrique).** Pour un cadre de discernement $\Omega$ donné, une structure de fonction de masse algébrique est un quadruplet :

$$\mathcal{M} = (W^*, \boxplus, 0_W, m)$$

où $(W^*, \boxplus, 0_W)$ est un monoïde commutatif [3] sur $W^*$ et $m : 2^\Omega \to W^*$ est une fonction d'ensemble appelée *fonction de masse algébrique*.

Une fonction de masse algébrique a vocation à représenter une capacité algébrique.

**Définition 3.12 (Représentation basée sur $\boxplus$).** Soient $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ une capacité algébrique décrite par la structure $\mathcal{W} = (W, \succeq^W, \mathbf{w}) \in \mathcal{K}n(\Omega)$ d'une part, et $m : 2^\Omega \to W^*$ une fonction de masse algébrique décrite par la structure

3. Un monoïde commutatif est tel que $\boxplus$ est associatif $(w_1 \boxplus (w_2 \boxplus w_3) = (w_1 \boxplus w_2) \boxplus w_3)$, commutatif $(w_1 \boxplus w_2 = w_2 \boxplus w_1)$ et possède un élément neutre noté $0_W$ $(w \boxplus 0_W = 0_W \boxplus w = w)$

$\mathcal{M} = (W^*, \boxplus, 0_W, m)$ d'autre part. La fonction de masse $m$ est une *représentation basée sur* $\boxplus$ de $\mathbf{w}$ (ou $\boxplus$-représentation de $\mathbf{w}$) si et seulement si pour tout $A \subseteq \Omega$ :

$$\mathbf{w}(A) = \boxplus_{B \subseteq A} m(B).$$

On note $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}$ une fonction de masse algébrique $m$ qui $\boxplus$-représente la capacité algébrique $\mathbf{w}$.

**Définition 3.13 (Éléments focaux d'une fonction de masse algébrique).** Les éléments focaux d'une fonction de masse algébrique $m : 2^\Omega \to W^*$ décrite par la structure $\mathcal{M} = (W^*, \boxplus, 0_W, m)$ sont les éléments $B \subseteq \Omega$ pour lesquels $m$ ne s'annule pas, c'est-à-dire tels que $m(B) \neq 0_W$. L'ensemble des éléments focaux de $m$ est alors :

$$\mathcal{S}_m = \left\{ B \in 2^\Omega \mid m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \neq 0_W \right\}.$$

*Remarque* 35. L'existence d'un élément neutre $0_W$ pour l'opération $\boxplus$ n'est pas un axiome nécessaire pour établir une $\boxplus$-représentation. Nous la demandons pour des raisons de complexité. En effet, grâce à cet axiome, la sommation de la définition 3.12 se réécrit en $\mathbf{w}(A) = \boxplus_{B \subseteq A \cap \mathcal{S}_m} m(B)$ : seuls les éléments focaux inclus dans $A$ y sont considérés.

Enfin, nous pouvons caractériser les fonctions de masses algébriques par leur degré de $(k, \boxplus)$-additivité, c'est-à-dire par la cardinalité de leur plus grand élément focal.

**Définition 3.14 (Degré de $(k, \boxplus)$-additivité).** On dit qu'une fonction de masse algébrique $m$ est $(k, \boxplus)$-additive si son plus grand élément focal est de taille $k$ :

$$m \text{ est } (k, \boxplus)\text{-additive} \iff \max_{A \in \mathcal{S}_m} |A| = k.$$

Par analogie avec les cas additifs ($\boxplus = +$) et maxitifs ($\boxplus = \max$), une fonction de masse $(1, \boxplus)$-additive (où seuls les singletons sont focaux) sera appelée $\boxplus$-distribution.

### 3.2.2 Construction d'une $\boxplus$-représentation

Une capacité algébrique n'a pas forcément de $\boxplus$-représentation. Elle peut n'en avoir aucune, une seule ou plusieurs pour un monoïde $(W^*, \boxplus, 0_W)$ donné. Dans le cas où $\boxplus$ posséde une opération inverse[4] $\boxminus$, $(W^*, \boxplus, \boxminus, 0_W)$ est un groupe commutatif et toute capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ dont le co-domaine $W$ est inclus dans $W^*$ possède une unique $\boxplus$-représentation.

Nous proposons ici une définition récursive de l'unique $\boxplus$-représentation d'une fonction $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ lorsque $\boxplus$ possède une opération inverse.

4. $\boxminus$ est une inverse de $\boxplus$ si $\forall w_1, \forall w_2,\ w_1 \boxplus w_2 \boxminus w_2 = w_1$.

**Définition 3.15 (Fonction de masse algébrique sur un groupe).** Soit une capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ prenant ses valeurs dans un groupe commutatif $(W^*, \boxplus, \boxminus, 0_W)$. La fonction de masse algébrique $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}} : 2^\Omega \to W$ est la fonction dont les valeurs sont définies inductivement sur la cardinalité de l'argument $A$ :

$$\begin{aligned} |A| = 0 \quad &\implies m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(A) = \mathbf{w}(A) \\ |A| \geq 1 \quad &\implies m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(A) = \mathbf{w}(A) \boxminus \bigboxplus_{B \subset A} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \end{aligned}$$

Notons que la dernière expression est bien formée : la valeur de $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(A)$ est définie d'après les valeurs de $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B)$ pour tout $B \subset A$, donc tels que $|B| < |A|$.

**Théorème 3.1 (Unicité de la $\boxplus$-représentation sur un groupe).** Soit une capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ prenant ses valeurs dans un groupe commutatif $(W^*, \boxplus, \boxminus, 0_W)$. La fonction de masse algébrique $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}} : 2^\Omega \to W$ définie ci-dessus est l'unique $\boxplus$-représentation de $\mathbf{w}$.

*Démonstration.* Ce théorème est vérifié en Coq (section 5.3.3). □

Lorsque l'opérateur $\boxplus$ ne possède pas d'opération inverse, il est tout de même possible de chercher une $\boxplus$-représentation $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}$ de $\mathbf{w}$. Cependant, il peut y avoir zéro, une ou plusieurs fonctions de masse vérifiant la définition 3.12. En s'inspirant de cette définition, nous pouvons établir les contraintes que doit vérifier $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}$.

**Théorème 3.2 (Conditions nécessaires et suffisantes d'une $\boxplus$-représentation).** La fonction $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}} : 2^\Omega \to W^*$ est une $\boxplus$-représentation de $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} |A| = 0 \quad &\mathbf{w}(A) = m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(A) \\ |A| \geq 1 \quad &\mathbf{w}(A) = m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(A) \boxplus \bigboxplus_{B \subset A} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Partant de la définition 3.12, remarquons que $\bigboxplus_{B \subseteq A} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) = m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(A) \boxplus \bigboxplus_{B \subset A} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B)$. Ce théorème est vérifié en Coq (section 5.3.3). □

Par exemple, nous pouvons voir qu'une capacité $\mathbf{w} : 2^\Omega \to [0, 1]$ pointée par 0 et 1 et monotone croissante (définitions 3.3 et 3.4) n'a généralement pas de min-représentation. En effet, dès qu'il existe un événement $C \neq \emptyset$ tel que $\mathbf{w}(C) < 1$, nous ne pouvons satisfaire les conditions exposées au théorème 3.2. En effet, supposons que $m^{\min}_{\mathbf{w}}$ existe. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\Omega) = 1 &= \min\left(m^{\min}_{\mathbf{w}}(\Omega), \min_{B \subset \Omega} m^{\min}_{\mathbf{w}}(B)\right) \\ &= \min\left(m^{\min}_{\mathbf{w}}(\Omega), \min_{B \subset \Omega} m^{\min}_{\mathbf{w}}(B), \min_{B \subset C} m^{\min}_{\mathbf{w}}(B)\right) \\ &= \min\left(m^{\min}_{\mathbf{w}}(\Omega), \min_{B \subset \Omega} m^{\min}_{\mathbf{w}}(B), \mathbf{w}(C)\right) \leq \mathbf{w}(C) < 1. \end{aligned}$$

Inversement, toute capacité $\mathbf{w} : 2^\Omega \to [0,1]$ pointée et monotone croissante possède au moins une max-représentation : elle-même. En effet, pour tout $A$, $\max_{B \subset A} \mathbf{w}(B) \leq \mathbf{w}(A)$. Alors $\mathbf{w}(A) = \max(\mathbf{w}(A), \max_{B \subset A} \mathbf{w}(B))$. Remarquons cependant que cette max-représentation n'est généralement pas unique (elle l'est si $\mathbf{w}$ est strictement croissante). Si il existe $A \subset B$ tels que $\mathbf{w}(A) = \mathbf{w}(B)$, alors la contrainte se réécrit en $\mathbf{w}(A) = \max(m^{\max}_{\mathbf{w}}(A), \mathbf{w}(B))$ et toute valeur $m^{\max}_{\mathbf{w}}(A) \leq \mathbf{w}(B)$ est admissible. Dans ce cas, nous chercherons à réduire le nombre d'éléments focaux et préfèrerons la valeur $m^{\max}_{\mathbf{w}}(A) = 0$. En effet, 0 est l'élément neutre de $\boxplus = \max$ sur $W^* = [0,1]$ et $A$ n'est donc pas focal.

Les $\boxplus$-représentations les plus courantes sont celles basées sur la somme ($\boxplus = +$) et, dans une moindre mesure, celles basées sur le maximum ($\boxplus = \max$). Dans la littérature, elles sont appelées *transformées inverses de Moëbius*.

### 3.2.3 Représentations basées sur la somme

Toute fonction d'ensemble $\mathbf{w} : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ à valeurs réelles possède une $+$-représentation qui est donnée par la transformée inverse de Möebius (Shafer, 1976, peut-être d'après Möbius, 1832). C'est le cas, particulièrement, lorsque $\mathbf{w} \in \mathcal{K}\!n_{\mathrm{Pinf}}(\Omega)$ est une probabilité inférieure.

**Définition 3.16 (Transformée inverse de Moëbius).** Soit $\mathbf{w} : 2^\Omega \to \mathbb{R}$. Sa transformée inverse de Moëbius $m^+_{\mathbf{w}} : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$m^+_{\mathbf{w}}(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \times \mathbf{w}(B).$$

Bien entendu, l'addition a une opération inverse (l'opération $-$). Cette $+$-représentation est donc unique et est également caractérisée par le théorème 3.1.

*Remarque* 36. La $+$-représentation d'une capacité algébrique $\mathbf{w} : 2^\Omega \to \mathbb{R}^+$ (ne prenant que des valeurs positives) peut prendre des valeurs négatives. Considérons par exemple la mesure inférieure $\mathrm{Pr}^- : 2^\Omega \to [0,1]$ sur $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ définie par les intervalles de probabilité $p(\omega_i) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. $\mathrm{Pr}^-$ vérifie $\mathrm{Pr}^-(\emptyset) = \mathrm{Pr}^-(\{\omega_i\}) = 0$, $\mathrm{Pr}^-(\{\omega_i, \omega_j\}) = 1/2$ et $\mathrm{Pr}^-(\Omega) = 1$. Alors, nous trouvons $m^+_{\mathrm{Pr}^-}(\emptyset) = m^+_{\mathrm{Pr}^-}(\{\omega_i\}) = 0$, $m^+_{\mathrm{Pr}^-}(\{\omega_i, \omega_j\}) = 1/2$ et $m^+_{\mathrm{Pr}^-}(\Omega) = -1/2$. Nous avons introduit le domaine $W^*$ dans la définition 3.11 pour cette raison. En effet, ici, $W = [0,1] \subset W^*$.

### 3.2.4 Représentations basées sur le maximum

Toute fonction d'ensemble $\mathbf{w} : 2^\Omega \to [0, +\infty[$ à valeurs réelles et monotone croissante possède une max-représentation. Cette représentation n'est généralement pas unique, et $\mathbf{w}$ est une max-représentation d'elle-même. Cependant, la meilleure max-représentation de $\mathbf{w}$, au sens où elle minimise à la fois le nombre d'éléments focaux et le degré de $k$-maxitivité, est la « transformée qualitative de Moëbius », c'est-à-dire la contrepartie qualitative de la transformée inverse de Moëbius (Mesiar, 1997 ; Grabisch et al., 2016).

**Définition 3.17 (Transformée qualitative de Möebius).** Soit $\mathbf{w} : 2^\Omega \to [0, +\infty[$ une fonction croissante au sens de l'inclusion. Sa transformée qualitative de Moëbius $m^{\max}_{\mathbf{w}} : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$m^{\max}_{\mathbf{w}}(A) = \begin{cases} \mathbf{w}(A) & \text{si } \forall \omega \in A,\ \mathbf{w}(A \setminus \{\omega\}) < \mathbf{w}(A)\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Remarque* 37. Si $\mathbf{w}$ n'est pas monotone croissante au sens de l'inclusion, elle ne possède pas de max-représentation.

## 3.3 Règle de décision algébrique

### 3.3.1 Définitions

Comme nous l'avons évoqué en introduction de ce chapitre, nous cherchons maintenant à représenter les règles de décision par une unique règle algébrique que nous appelons XEU, dont l'expression est de la forme :

$$\mathrm{XEU}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \bigoplus_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{v} \circ \chi, B).$$

Ainsi, cette règle de décision algébrique est définie par deux opérateurs $\oplus$ et $\otimes$ et par une fonction d'agrégation $\mathbf{f}$. Cette expression est paramétrée par une fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v}$ et par une capacité algébrique $\mathbf{w}$. Cependant, ce ne sont pas les valeurs de $\mathbf{w}$ qui sont prises en compte, mais celles de la fonction de masse algébrique $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}$. Cette expression est donc également définie par le monoïde commutatif $(W^*, \boxplus, 0_W)$ pour lequel $\mathcal{M}_{\mathbf{w}} = (W^*, \boxplus, 0_W, m^{\boxplus}_{\mathbf{w}})$ est une $\boxplus$-représentation de $\mathbf{w}$.

**Définition 3.18 (Instance de règle de décision).** Soit $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ un cadre de décision. Une *instance de règle de décision* $\mathcal{Z}$ de ce cadre est un $n$-uplet :

$$\mathcal{Z} = \left((W^*, \boxplus, 0_W), (U, \oplus, 0_U), \otimes, \mathbf{f}\right),$$

où :

- $W^* \subseteq W_\beta$ ;
- $(W^*, \boxplus, 0_W)$ et $(U, \oplus, 0_U)$ sont deux monoïdes commutatifs ;
- $\otimes : W^* \times U \to U$ est un opérateur pour lequel $0_W$ est « absorbant », c'est-à-dire tel que $0_W \otimes x = 0_U$ ;
- Pour tout cadre de discernement $\Omega$, $\mathbf{f} : (\Omega \to V_\alpha) \times 2^\Omega \setminus \{\emptyset\} \to U$ est une fonction d'agrégation.

*Remarque* 38. Les opérateurs $\oplus$ et $\otimes$ jouent le rôle de l'addition et de la multiplication. Cependant, ici, ils ne forment pas nécessairement un (demi-)anneau. En effet, $\otimes$ n'est généralement pas une loi interne, et n'est donc généralement ni associative, ni commutative, ni distributive par rapport à $\oplus$, et n'a généralement pas d'élément neutre. Même lorsque $U = V_\alpha = W^*$, ces propriétés ne sont pas attendues, seul le rôle d'élément absorbant de $0_W$ est demandé.

La fonctionnelle $\mathbf{f}$ est une fonction d'agrégation : $\mathbf{f}(\mathbf{v} \circ \chi, B) \in U$ est une valeur « représentative » de cet ensemble, au regard de la fonction d'utilité $\mathbf{v}$ et de l'acte $\chi$. Par exemple, la fonction minf telle que $\text{minf}(\mathbf{v} \circ \chi, B) = \min_{\omega \in B} \mathbf{v}(\chi(\omega))$ associe à tout ensemble non vide la valeur minimale prise par $\mathbf{v} \circ \chi$.

Dans l'expression de la XEU donnée ci-dessus, nous considérons la fonction de masse algébrique $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}$. Il s'agit de la $\boxplus$-représentation de la capacité algébrique $\mathbf{w}$, décrite par la structure $\mathcal{M} = (W^*, \boxplus, 0_W, m^{\boxplus}_{\mathbf{w}})$. [5] Une instance de règle de décision $\mathcal{Z}$ définit ainsi tous les composants de cette expression.

**Définition 3.19 (Utilité espérée généralisée – XEU).** Soit une instance de règle de décision $\mathcal{Z} = ((W^*, \boxplus, 0_W), (U, \oplus, 0_U), \otimes, \mathbf{f})$ du cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$. Pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$, toute fonction d'utilité $\mathbf{v} : \mathbb{X} \to V_\alpha$ et toute capacité $\mathbf{w} : 2^\Omega \to W_\beta$, l'utilité espérée généralisée d'un acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$ est :

$$\text{XEU}(\mathcal{Z})(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \bigoplus_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{v} \circ \chi, B),$$

où $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}} : 2^\Omega \to W^*$ est la $\boxplus$-représentation de $\mathbf{w}$.

*Remarque* 39. Nous avons remarqué à la section 3.2.1 que l'existence de l'élément neutre $0_W$ pour $\boxplus$ n'était pas un axiome nécessaire ; nous le demandions pour des raisons de complexité. Ici aussi, le fait que $0_W$ soit un élément « absorbant » de $\otimes$ et le fait que $0_U$ soit un élément neutre de $\oplus$ ne sont pas des axiomes nécessaires pour définir une XEU. Nous les demandons pour les mêmes raisons de complexité : tout ensemble $B$ qui n'est pas focal pour $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}$ (c'est-à-dire tel que $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) = 0_W$) vérifie ainsi $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \otimes v = 0_U$. Or, $0_U$ étant élément neutre de $\oplus$, la sommation ci-dessus se réécrit en $\bigoplus_{B \in \mathcal{S}_{m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}}} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{v} \circ \chi, B)$ : seuls les éléments focaux y sont considérés.

On dira qu'une instance de règle de décision $\mathcal{Z}$ représente une règle de décision $\mathbf{u}$ si $\text{XEU}(\mathcal{Z}) = \mathbf{u}$ au sens de Leibniz, c'est-à-dire si les deux fonctionnelles prennent les mêmes valeurs lorsqu'on leur donne les mêmes arguments.

**Définition 3.20 (Représentation d'une règle de décision).** Pour un cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ donné, une instance de règle de décision $\mathcal{Z}$ est une représentation de la règle de décision $\mathbf{u}$ décrite par la structure $\mathcal{U} = (U, \succeq^U, \mathbf{u}) \in \mathcal{D}ec_{\alpha,\beta}$ si, pour tous $\mathbb{X}$ et $\Omega$, pour toute fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v} \in \mathcal{P}refs_\alpha(\mathbb{X})$, toute capacité algébrique $\mathbf{w} \in \mathcal{K}n_\beta(\Omega)$ et tout acte $\chi : \Omega \to \mathbb{X}$, on a :

$$\text{XEU}(\mathcal{Z})(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \mathbf{u}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi).$$

Ainsi, lorsqu'un agent est modélisé par une règle de décision $\mathcal{U}$ dont l'instance $\mathcal{Z}$ est une représentation, la comparaison des valeurs prises par $\text{XEU}(\mathcal{Z})$ permettra d'établir ses préférences sur les actes (quelles que soient la situation de décision, la fonction d'utilité algébrique et la capacité algébrique considérées).

5. Lorsqu'il existe plusieurs fonctions de masse $\boxplus$-représentant $\mathbf{w}$, il s'agit de celle qui minimise le nombre d'éléments focaux

**Exemple 3.6.** *Dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$ des probabilités et utilités quantitatives, la structure de règle de décision de l'utilité espérée $\mathcal{U}^{\mathrm{EU}} = (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{u}^{\mathrm{EU}})$ (voir l'exemple 3.5) est représentée par l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{EU}} = ((\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), \times, \mathbf{f}),$$

*où $\mathbf{f}$ est n'importe quelle fonction vérifiant $\mathbf{f}(g, \{x\}) = g(x)$ (par exemple la fonction* minf *évoquée plus haut). En effet, la $+$-représentation d'une probabilité* Pr *est 1-additive (c'est une $+$-distribution), ainsi :*

$$\begin{aligned}\mathrm{XEU}(\mathcal{Z}^{\mathcal{EU}})(\mathbf{v}, \mathrm{Pr}, \chi) &= \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m^{+}_{\mathrm{Pr}}(B) \times \mathrm{minf}(\mathbf{v} \circ \chi, B) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} m^{+}_{\mathrm{Pr}}(\{\omega\}) \times \mathbf{v}(\chi(\omega)) = \mathbf{u}^{\mathrm{EU}}(\mathbf{v}, \mathrm{Pr}, \chi).\end{aligned}$$

### 3.3.2 Instances de règles de décision

#### Règles de Choquet, de Jaffray et du *Transferable Belief Model*

La règle de décision basée sur l'intégrale de Choquet est proposée dans le cadre de décision général $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$ des probabilités inférieures et utilités quantitatives. Celle proposée par Jaffray et celle du TBM (proposée par Smets) sont données pour le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$ des fonctions de croyances et utilités quantitatives. Nous les étendons ici au cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$ qui généralise celui des fonctions de croyance[6] (voir la figure 3.1).

**Exemple 3.7 (Règle MMEU et instance correspondante).** *La règle de décision MMEU (*MaxiMin Expected Utility*, définition 1.37) associe à tout acte la valeur minimale possible d'utilité espérée, au regard de la famille de probabilité $\mathcal{P}_{\mathbf{w}}$ délimitée par la probabilité inférieure $\mathbf{w}$ et sa duale. Elle est ainsi décrite par la structure $\mathcal{U}^{\mathrm{MMEU}} = (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{u}^{\mathrm{MMEU}}) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$ avec :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{MMEU}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \min_{\mathrm{Pr} \in \mathcal{P}_{\mathbf{w}}} \mathrm{EU}(\mathrm{Pr}, \mathbf{v} \circ \chi).$$

*Pour toute capacité sous-additive (ou capacité 2-monotone, telle que $\forall A, B \subseteq \Omega$, $\mathbf{w}(A \cup B) + \mathbf{w}(A \cap B) \geq \mathbf{w}(A) + \mathbf{w}(B)$, définition 1.28), l'utilité espérée minimale est égale à l'intégrale de Choquet de $\mathbf{v}$ par rapport à $\mathbf{w}$, et se réécrit alors :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{MMEU}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \mathbf{u}^{\mathrm{Choquet}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m^{+}_{\mathbf{w}}(B) \times \min_{\omega \in B} \mathbf{v}(\chi(\omega)).$$

6. Leurs définitions sont valides d'un point de vue mathématique. Cependant, l'interprétation de la règle de Jaffray hors de la théorie des fonctions de croyance reste à proposer. Inversement, celle du TBM nous semble claire : il s'agit d'évaluer l'utilité espérée au regard d'une probabilité « moyenne » (appelée probabilité pignistique) dans le sens où les masses des éléments focaux sont distribuées équitablement sur les singletons, à la manière de la valeur de Shapley. On revient ainsi dans le formalisme des probabilités par le principe d'indifférence (ou principe de la raison insuffisante), où l'ignorance est « répartie » de manière symétrique de façon à ne privilégier aucun état du monde.

*Ainsi, la règle MMEU est représentée par l'instance de règle de décision :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{C}hoquet} = ((\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), \times, \mathrm{minf}),$$

*où* minf *est définie pour tout* $g$ *et tout* $B \neq \emptyset$ *par* $\mathrm{minf}(g, B) = \min_{x \in B} g(x)$.

**Exemple 3.8 (Règle de Jaffray et instance correspondante).** *La règle de décision proposée par Jaffray (définition 1.45) est étendue ici au cadre* $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$. *Elle est établie directement sur la fonction de masse* $m^+_{\mathbf{w}}$ *et paramétrée par une fonction* $\alpha : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$. *Elle est définie par la structure* $\mathcal{U}^{\mathrm{Jaffray}^\alpha} = (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{u}^{\mathrm{Jaffray}^\alpha}) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$ *où :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{Jaffray}^\alpha}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m^+_{\mathbf{w}}(B) \times \big(\alpha(B_*, B^*) \times B_* + (1 - \alpha(B_*, B^*)) \times B^*\big),$$

*avec* $B_* = \min_{\omega \in B} \mathbf{v}(\chi(\omega))$ *et* $B^* = \max_{\omega \in B} \mathbf{v}(\chi(\omega))$. *Elle est donc représentée par l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{J}affray^\alpha} = ((\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), \times, \mathrm{minmax}^\alpha),$$

*où* $\mathrm{minmax}^\alpha$ *est définie pour tout* $\mathbf{v}$, *tout* $\chi$ *et tout* $B \neq \emptyset$ *par :*

$$\mathrm{minmax}^\alpha(\mathbf{v} \circ \chi, B) = \alpha(B_*, B^*) \times B_* + (1 - \alpha(B_*, B^*)) \times B^*.$$

*Remarque* 40. Soit la fonction $\alpha 1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha 1(x, y) = 1$. Alors, $\mathrm{minmax}^{\alpha 1}(\mathbf{v} \circ \chi, B) = \mathrm{minf}(\mathbf{v} \circ \chi, B)$, c'est-à-dire $\mathcal{Z}^{\mathcal{J}affray^{\alpha 1}} = \mathcal{Z}^{\mathcal{C}hoquet}$ : la règle de Jaffray généralise celle basée sur l'intégrale de Choquet.

**Exemple 3.9 (Règle du TBM et instance correspondante).** *La règle proposée par Smets pour le* Transferable Belief Model *(définition 1.46), et généralisée ici au cadre* $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$, *est décrite par la structure* $\mathcal{U}^{\mathrm{TBM}} = (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{u}^{\mathrm{TBM}}) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$ *avec :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{PrInf}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{BetP}_{\mathbf{w}}(\omega) \times \chi(\mathbf{v})(\omega),$$

*où* $\mathrm{BetP}_{\mathbf{w}}(\omega) = \sum_{\omega \in B \subseteq \Omega} m^+_{\mathbf{w}}(B)/|B|$ *est la probabilité pignistique déduite de* $\mathbf{w}$. *Elle est représentée par l'instance de règle de décision :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{TBM}} = ((\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), \times, \mathrm{moy}),$$

*où* moy *est définie pour tout* $g$ *et tout* $B \neq \emptyset$ *par* $\mathrm{moy}(g, B) = \sum_{x \in B} g(x)/|B|$.

Ces trois règles de décision sont applicables dans les cadres de décision inclus dans $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrInf}}$. En particulier, la règle de Choquet est celle utilisée pour les intervalles de probabilité (le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{PrIntv}}$). Elle a également été proposée pour le formalisme possibiliste quantitatif (donc, pour le cadre de décision $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}$) et pour la théorie des fonctions de croyances (cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$). Les règles de Jaffray et du TBM sont proposées initialement pour le cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$. De plus :

— Dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$ des probabilités, ces trois instances de règle de décision représentent la règle de l'utilité espérée. En effet, cette dernière est représentée par toute instance $((\mathbb{R},+,0),(\mathbb{R},+,0),\times,\mathbf{f})$ où $\mathbf{f}(g,\{x\}) = g(x)$ (propriété que vérifient minf, moy et minmax$^{\alpha}$ pour tout $\alpha$) ;
— Dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$ de l'ignorance totale avec utilités quantitatives, l'instance de règle de décision $\mathcal{Z}^{\mathit{Choquet}} = \mathcal{Z}^{\mathit{Jaffray}^{\alpha 1}}$ représente la règle $\mathcal{U}^{\mathrm{Min}}$ (ou règle de Wald, définition 1.18) ;
— Dans ce même cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$, l'instance de règle de décision $\mathcal{Z}^{\mathit{Jaffray}^{\alpha}}$ représente la règle de Hurwicz$^{\beta}$ si $\alpha(x,y) = \beta$ pour $x$ et $y$ les valeurs minimales et maximales d'utilité possibles (définition 1.20) ;
— Dans ce même cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$, l'instance de règle de décision $\mathcal{Z}^{\mathit{TBM}}$ représente la règle de Laplace (définition 1.22) ;

Ces résultats, pour la plupart bien connus, sont vérifiés dans la formalisation Coq (voir la section 5.4.2).

### Règles de l'utilité optimiste et pessimiste

Les règles de l'utilité optimiste et pessimiste (définition 1.50) sont proposées dans le cadre des possibilités.

Ici, inversement à ce que nous présentions ci-dessus, nous considérerons la fonction de masse qui max-représente la mesure de possibilité $\Pi$, et non pas celle qui représente la mesure de nécessité N ; c'est-à-dire que $m_{\Pi}^{\max}$ représente la mesure supérieure et non pas la mesure inférieure. L'opérateur considéré est $\boxplus = \max$, ainsi la fonction de masse $m_{\Pi}^{\max}$ minimisant le nombre d'éléments focaux est très facilement identifiée : c'est la max-distribution de possibilité $\pi$, c'est-à-dire la transformée de Möebius qualitative (définition 3.17) :

$$\begin{array}{lll} \forall A \subseteq \Omega, & |A| = 1 \implies & m_{\Pi}^{\max}(\{\omega\}) = \pi(\omega) \\ & |A| \neq 1 \implies & m_{\Pi}(A) = 0 \end{array}$$

**Exemple 3.10 (Règle de l'utilité optimiste et instance correspondante).** *La règle de décision de l'utilité optimiste, dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}$ de la théorie des possibilités sur l'intervalle réel $[0,1]$, est décrite par la structure $\mathcal{U}^{\mathrm{Opt}} = ([0,1],\geq,\mathbf{u}^{\mathrm{Opt}}) \in \mathcal{D}ec_{[0,1],\mathrm{N}}$ avec :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{Opt}}(\mathbf{v},\mathbf{w},\chi) = \max_{\omega\in\Omega} \min\left(\pi_{\mathbf{w}}(\omega), \mathbf{v}(\chi(\omega))\right),$$

*où $\pi_{\mathbf{w}}$ est la distribution de possibilité dont est issu $\mathbf{w}$. Puisque $\pi_{\mathbf{w}} = m_{\mathbf{w}}^{\max}$ est la meilleure* max*-représentation de $\mathbf{w}$, la règle $\mathcal{U}^{\mathrm{Opt}}$ est représentée par l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{\mathit{Opt}} = (([0,1],\max,0),(\mathbb{R},\max,0),\min,\mathbf{f}),$$

*où $\mathbf{f}$ est n'importe quelle fonction vérifiant $\mathbf{f}(g,\{x\}) = g(x)$, par exemple la fonction* minf *présentée ci-dessus.*

**Exemple 3.11 (Règle de l'utilité pessimiste et instance correspondante).** *La règle de décision de l'utilité pessimiste, dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}$ de la théorie des possibilités sur l'intervalle réel $[0,1]$, est décrite par la structure $\mathcal{U}^{\mathrm{Pess}} = ([0,1], \geq, \mathbf{u}^{\mathrm{Pess}}) \in \mathcal{D}ec_{[0,1],\mathrm{N}}$ avec :*

$$\mathbf{u}^{\mathrm{Pess}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \min_{\omega \in \Omega} \max\left(1 - \pi_{\mathbf{w}}(\omega), \mathbf{v}(\chi(\omega))\right),$$

*où $\pi_{\mathbf{w}}$ est la distribution de possibilité dont est issu $\mathbf{w}$. Puisque $\pi_{\mathbf{w}} = m^{\max}_{\mathbf{w}}$ est la meilleure* max*-représentation de $\mathbf{w}$, la règle $\mathcal{U}^{\mathrm{Pess}}$ est représentée par l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{P}ess} = (([0,1], \max, 0), (\mathbb{R}, \min, 1), \mathrm{nmax}, \mathbf{f}),$$

*où* nmax *est définie par* $\mathrm{nmax}(w, v) = \max(1 - w, v)$ *et* $\mathbf{f}$ *est n'importe quelle fonction vérifiant* $\mathbf{f}(g, \{x\}) = g(x)$*, par exemple la fonction* minf *présentée ci-dessus.*

Dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}$, les valeurs prises par la règle de décision $\mathbf{u}$ sont toutes dans l'intervalle $[0,1]$. Nous aurions pu donner $U = [0,1]$ au lieu de $U = \mathbb{R}$. Cependant, cela nous permet appliquer ces règles de décision dans le cadre de l'ignorance totale et utilités réelles $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$. En effet, dans ce cas, $\mathrm{U}^{\mathrm{Pes}} = \mathrm{Min}$ (ou règle de Wald) et $\mathrm{U}^{\mathrm{Opt}} = \mathrm{Max}$. Ces instances de règle de décision $\mathcal{Z}^{\mathcal{U}pes}$ et $\mathcal{Z}^{\mathcal{U}opt}$ sont donc également des instances des règles Min et Max.

### Règle de Denœux et Shenoy et règle de Wilson

Intéressons-nous maintenant à la règle de décision proposées par Denœux et Shenoy pour le cadre de décision des fonctions de croyance (Denœux et Shenoy, 2020) et à celle proposée par Wilson pour le cadre de décision des ordres de grandeur de probabilité (Wilson, 1995). Il nous semble qu'elles ont été peu étudiées et peu utilisées (la première a été proposée très récemment). Elles sont présentées ici pour illustrer le fait que l'approche algébrique permet de travailler facilement hors du cadre des réels.

La règle de l'utilité de Denœux et Shenoy, que nous avons présentée en section 1.3.4, associe un intervalle à tout acte. Cet intervalle est calculé à partir d'une fonction d'utilité (à valeurs réelles) et d'une fonction de croyance : c'est une règle du cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$. Cette règle modélise un agent qui préfère l'acte $\chi$ à l'acte $\chi'$ si les bornes de l'intervalle associé à $\chi$ sont supérieures aux bornes de l'intervalle associé à $\chi'$. Ce n'est donc pas un ordre d'intervalle au sens de la définition 1.6. Rappelons enfin que cette règle est définie au regard d'une famille de coefficients $(\alpha_{x,y}, \beta_{x,y})_{x,y \in \mathbb{X}^2}$ dont la signification est la suivante : si un ensemble de conséquences possibles $X = \{x_*, \ldots, x^*\}$ est assuré ($x_*$ étant la pire et $x^*$ la meilleure conséquence possible), alors cette règle modélise un agent qui est indifférent entre « obtenir $x \in X$ » et « tirer dans une urne contenant $\alpha_{x_*;x^*}$ boules $x_*$, $\beta_{x_*,x^*}$ boules $x^*$ et $1 - \alpha_{x_*,x^*} - \beta_{x_*,x^*}$ boules $x_*$ ou $x^*$. ».

**Exemple 3.12 (Règle de décision de Denœux et Shenoy et instance correspondante).** *Soient $(\alpha_{x,y}, \beta_{x,y})_{x,y\in\mathbb{X}^2}$ une famille de coefficients. La règle de décision de Denœux et Shenoy est décrite par la structure de règle de décision $\mathcal{U}^{\mathrm{DSEU}^{\alpha,\beta}} = \left(\mathrm{I}\mathbb{R}, \mathbf{u}^{\mathrm{DSEU}^{\alpha,\beta}}, \succeq^{\mathrm{I}\mathbb{R}}\right) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$ où :*

— $\mathrm{I}\mathbb{R} = \{[a,b] \mid a \leq b\}$ *est l'ensemble des intervalles fermés bornés de* $\mathbb{R}$ ;

— $\mathbf{u}^{\mathrm{DSEU}^{\alpha,\beta}}(\chi) = [a_\chi, b_\chi]$ *est définie par :*

$$a_\chi = \sum_{\emptyset\neq B\subseteq\Omega} m^+_{\mathrm{Bel}}(B) \times \alpha_{\chi(B)} \times \min_{\omega\in B} u(\chi(\omega))$$
$$b_\chi = \sum_{\emptyset\neq B\subseteq\Omega} m^+_{\mathrm{Bel}}(B) \times \beta_{\chi(B)} \times \max_{\omega\in B} u(\chi(\omega))$$

— $\succeq^{\mathrm{I}\mathbb{R}}$ *est la relation définie par* $[a,b] \succeq^{\mathrm{I}\mathbb{R}} [c,d] \iff (a \geq c) \wedge (b \geq d)$.

*Elle est représentée par l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{DSEU}^{\alpha,\beta}} = ((\mathbb{R},+,0),(\mathrm{I}\mathbb{R},\oplus,[0,0]),\otimes,\mathbf{f}^{\mathrm{DSEU}}_{\alpha,\beta}),$$

*où :*

$$x \otimes [a,b] = [x\times a, x\times b]\ ;$$
$$[a,b]\oplus[c,d] = [a+c, b+d]\ ;$$
$$\mathbf{f}^{\mathrm{DSEU}}_{\alpha,\beta}(u,B) = [\alpha_B \times \min_{x\in B} u(x), \alpha_B \times \min_{x\in B} u(x) + \beta_B \times \max_{x\in B} u(x)].$$

*Notons que l'opérateur $\otimes$ est bien défini puisque dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$ dans lequel s'applique cette règle, les fonctions de masses basées sur $+$ représentent des fonctions de croyance et ne prennent donc que des valeurs positivies.*

Nous avons présenté la règle proposée par Wilson pour les ordres de grandeur de probabilité à la section 1.3.5. Elle met en œuvre une capacité algébrique dont le co-domaine n'est pas non plus un intervalle réel. En effet, un ordre de grandeur est décrit par un couple $(\sigma, z) \in \mathbb{R}^o = (\{+,-,0\}\times\mathbb{Z}) \cup \{(0,\infty)\}$ dont la signification est calibrée par un événement de probabilité $\epsilon$ :

— Les couples $(+,n)$ représentent les valeurs réelles positives d'ordre $\epsilon^n$, telle que $2\epsilon^n$ ou $\epsilon^n/2$ par exemple ;

— Les couples $(-,n)$ représentent les valeurs réelles négatives d'ordre $-\epsilon^n$ ;

— Les couples $(0,n)$ représentent tous la valeur 0.

Les opérateurs correspondant à l'addition et à la multiplication sont notés $\oplus^o$ et $\otimes^o$ ; l'ordre total sur $\mathbb{R}^o$ est noté $\succeq^o$ ; tous sont définis dans la section 1.3.5. Dans ce cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^o,\mathrm{OOM}}$, les préférences sont capturées par une fonction d'utilité $\mathbf{v} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^o$ (associant un ordre de grandeur d'utilité à chaque conséquence possible) et la connaissance est capturée par une distribution d'ordre de grandeur de probabilité $p^o : \Omega \to \mathbb{R}^o$ dont on déduit la capacité $\mathbf{w} : 2^\Omega \to \mathbb{R}^o$ par :

$$\mathbf{w}(A) = \bigoplus_{\omega\in A}^{o} p^o(\omega).$$

**Exemple 3.13 (Règle de décision de Wilson et instance correspondante).** *La règle de décision proposée par Wilson est décrite par la structure* $\mathcal{U}_{\text{OOM}} = \left(\mathbb{R}^o, \mathbf{u}_{\text{OOM}}, \succeq^{\mathbb{R}^o}\right) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R}^o,\text{OOM}}$*, où :*

$$\mathbf{u}_{\text{OOM}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \bigoplus_{\omega\in\Omega}^{o} \ \mathbf{w}(\{\omega\}) \ \otimes^o \ \mathbf{v}(\chi(\omega)).$$

*Elle est représentée par l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{OOM}} = \left(\left(\mathbb{R}^o, \oplus^o, (0,\infty)\right), \left(\mathbb{R}^o, \oplus^o, (0,\infty)\right), \otimes^o, \mathbf{f}^{\text{OOM}}\right)$$

*où* $\mathbf{f}$ *est une fonction vérifiant* $\mathbf{f}(g, \{x\}) = g(x)$.

### Critères de Bernoulli et du regret de Savage : préférences et règles

Enfin, nous terminons cette section en traitant deux des « règles de décision » les plus anciennes : l'utilité de Bernoulli (où l'agent considère non pas le gain, mais le logarithme du gain, voir la définition 1.12) et la règle du regret de Savage (où l'agent considère non pas le gain, mais le « manque à gagner » dans le pire scénario possible, voir la définition 1.21).

La règle de décision de Bernoulli peut être exprimée sans difficulté comme une structure de règle de décision, puis représentée par une instance de règle de décision (grâce à la fonction $\mathbf{f}$ définie par $\mathbf{f}(\mathbf{v}\circ\chi, B) = \sum_{x\in B} b\times\ln\frac{a+\mathbf{v}(\chi(x))}{a}/|B|$). Cependant, Bernoulli se place dans une approche préférentialiste : le fait que la satisfaction d'un agent soit proportionnelle au logarithme du gain n'est pas lié à une quelconque prise de décision, mais aux caractéristiques propres de l'agent (d'après Bernouilli, cela dépend uniquement de sa richesse). Dans notre cadre, Bernoulli propose une structure de préférence (qui décrit les préférences sur les conséquences, c'est-à-dire sur les gains, lorsque l'agent est certain de les obtenir). Ensuite, si une décision doit être prise et que les gains associés sont mal connus, il propose d'appliquer la règle de décision de Laplace, c'est-à-dire de supposer l'équiprobabilité et de considérer l'espérance, non pas des gains possibles, mais de leurs utilités. Nous modélisons donc de tels agents par des structures de préférence de la forme :

$$\mathcal{V} = \left(\mathbb{R},\ \geq,\ x \mapsto b \times \ln\frac{a+x}{a},\right)$$

et par la structure $\mathcal{U}_{\text{Laplace}}$ de la règle de décision de Laplace (cette dernière étant généralisée par $\mathcal{U}_{\text{TBEU}}$, et donc représentée par l'instance $\mathcal{Z}^{\mathcal{TBEU}}$).

Nous comprenons la règle du regret de Savage de la même façon : nous pensons que Savage propose surtout une façon d'exprimer les préférences sous certitude d'un agent qui préfère gagner $x > y$ plutôt que $y$ car le regret $x-x = 0$ est plus faible que le regret $x-y > 0$. Savage se placerait donc dans une approche préférentialiste : ces préférences existeraient en dehors de toute prise de décision.

En effet, si par exemple une conséquence est imposée à l'agent, il peut regretter d'avoir obtenu $x$ alors que $y$, $z$, etc. étaient possibles. Dans notre compréhension de ce critère, Savage proposerait donc d'utiliser la règle de décision Min, ou critère de Wald (sous ignorance totale, l'agent considère le pire scénario pour chaque acte, c'est-à-dire celui où le regret d'un acte est maximal).

Notons que le regret de Savage n'est pas exprimable dans notre cadre par une structure de règle de décision. En effet, une structure de règle de décision est définie quels que soient $\mathbb{X}$ et $\Omega$, et n'a donc pas accès à l'ensemble des actes réalisables $\mathbb{A}$ d'une situation de décision particulière.

Cela nous semble normal et intuitif. Comme pour l'utilité de Bernoulli, nous pensons en effet que le regret doit être capturé par la structure de préférence [7] et que seule l'approche pessimiste doit être capturée par la règle de décision Min (qui est représentée par les instances de règle de décision $\mathcal{Z}^{\mathit{Choquet}}$ et $\mathcal{Z}^{\mathit{Pess}}$).

Ces deux « règles de décision » indiquent donc chacune une façon alternative de décrire les préférences quantitatives d'un agent. Si une décision doit effectivement être prise, c'est au regard de ces préférences qu'elle le sera. Bernoulli comme Savage proposent alors chacun de considérer une règle de décision existante (la règle de Laplace ou la règle Min).

## 3.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons d'abord développé un modèle d'agent générique permettant de bien distinguer les différents composants que l'on considère pour modéliser la prise de décision : les préférences sur les conséquences, la connaissance et la règle de décision. Nous avons ensuite montré que les capacités algébriques peuvent être représentées par des fonctions de masse algébriques, particulièrement celles considérées dans les principales théories de l'incertitude. Enfin, nous avons montré que de nombreuses règles de décision peuvent aussi être représentées algébriquement par la règle XEU, et avons donné les instances des règles les plus usuelles. Cette approche algébrique nous permettra, dans le chapitre 4 consacré à la prise de décision multi-agents, d'exprimer nos résultats « quelle que soit la théorie de l'incertitude et la règle de décision considérées ». Bien entendu, des hypothèses pourront être imposées pour ne considérer que

7. Pour cela, il est nécessaire de reformuler le problème. Si l'ensemble des gains possibles est $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$, alors un tel agent considère que l'ensemble des conséquences est $\mathbb{X} \times 2^{\mathbb{X}} \subseteq \mathbb{R} \times 2^{\mathbb{R}}$. Chaque élément $(x, B) \in \mathbb{X} \times 2^{\mathbb{X}}$ représente la conséquence « obtenir le gain $x$ alors qu'on aurait pu obtenir les gains $x' \in B$ ». Les préférences quantitatives, sur $\mathbb{R} \times 2^{\mathbb{R}}$, sont définies par : $(x, B) \succeq^{\mathbb{R}\times 2^{\mathbb{R}}} (x', B') \iff \min_{y\in B} x - y \geq \min_{y'\in B'} y' - x'$.
Les préférences sur $\mathbb{X}\times 2^{\mathbb{X}}$ d'un tel agent seraient ainsi modélisées par la structure de préférence $\mathcal{V}^{\mathrm{Reg}} = \left(\mathbb{R},\ (x, B) \mapsto \min_{y\in B} x - y,\ \geq\right) \in \mathit{Prefs}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{X} \times 2^{\mathbb{X}}\right)$. Sous ignorance totale, un agent suivant la « règle du regret de Savage » est alors modélisé par la structure de préférence $\mathcal{V}^{\mathrm{Reg}}$, par une capacité catégorique et par la règle de décision Min (ou règle de Wald) décrite par la structure $\mathcal{U}^{\mathrm{Min}}$.
Note : avec une telle définition, il est possible, sans difficulté, de considérer les règles de Laplace et de Hurwicz avec des préférences basées sur le regret. Dans un cadre de décision plus général, nous pourrions par exemple également considérer le regret espéré.

certaines de ces théories et règles (par exemple, nous considérerons dans la section 4.4 uniquement les règles de décision qui peuvent être représentées la règle de décision algébrique XEU).

Notre travail fait écho, particulièrement, aux résultats proposés par Chu, Friedman et Halpern dans un cadre statique (Friedman et Halpern, 1995 ; Halpern, 2001 ; Chu et Halpern, 2003, 2004). Leur ambition, comme la nôtre, est de capturer par une structure universelle la diversité des théories de l'incertitude et/ou des règles de décision. Particulièrement, l'approche suivie pour définir les structures de connaissance de manière très générale, en n'introduisant des propriétés que lorsqu'elles sont nécessaires, correspond à celle suivie par Friedman et Halpern. L'approche que nous proposons s'en distingue lorsque nous proposons de représenter ces structures de connaissance par des fonctions de masse. Les fonctions de masse basées sur $+$ sont largement utilisées et celles basées sur max peuvent se retrouver dans la littérature concernant la théorie des possibilités. Il nous semble que la notion de *fonction de masse algébrique*, basée sur un opérateur abstrait, est nouvelle. Enfin, la représentation algébrique des règles de décision par une règle universelle (utilité espérée généralisée, ou XEU) a déjà été proposée par Chu et Halpern (Chu et Halpern, 2004). Cependant, notre approche est différente : la principale différence est que là où ces auteurs travaillent sur la capacité algébrique, nous travaillons sur la fonction de masse algébrique. Cela nous permet, en particulier, de représenter la règle de décision basée sur l'intégrale de Choquet.

Le critère du regret de Savage, dans notre cadre, ne peut pas être décrit par une règle de décision et doit être capturé par la structure de préférence. En effet, la règle de décision est définie pour tout ensemble de conséquences $\mathbb{X}$ et pour tout cadre de discernement $\Omega$, et n'a pas accès à l'ensemble des actes réalisables $\mathbb{A}$, ce qui nécessaire pour exprimer le regret. Bien qu'il soit facile d'étendre notre définition afin qu'une règle de décision soit définie pour toute situation de décision $\mathcal{A} = (\Omega, \mathbb{X}, \mathbb{A})$, nous ne souhaitons pas faire cette extension. En effet, nous nous plaçons dans un approche préférentialiste (où les préférences de l'agent sur $\mathbb{X}$ existent en dehors de toute prise de décision) ; comme nous l'avons expliqué, il nous semble que le critère du regret de Savage, comme l'utilité de Bernoulli, est avant tout une description des préférences de l'agent.

Il reste par ailleurs plusieurs pistes à explorer dans le cadre mono-agent. Nous pensons en particulier qu'il serait intéressant de chercher une « axiomatisation algébrique », c'est-à-dire un ensemble d'axiomes consensuels, s'il existe, permettant de caractériser les propriétés minimales des fonctions d'utilité algébriques et des fonctions de masse algébriques. Cela ferait écho, particulièrement, à la transcription des postulats de Savage proposée par Chu et Halpern dans leur cadre (Chu et Halpern, 2003). Cela constituerait un travail à part entière, qui n'a pas été ébauché dans cette thèse.

Enfin, nous pensons (et nous espérons) que le modèle d'agent que nous proposons, et surtout sa représentation par des fonctions de masse algébriques et des instances algébriques de règle de décision, permettra de développer des algorithmes généraux comme ceux développés d'après les travaux des auteurs précédemment cités (Perny, Spanjaard et Weng, 2005 ; Pralet, Verfaillie

et Schiex, 2007). Notre cadre est au moins aussi adapté et il nous semble plus aisé d'y caractériser les complexités liées aux calculs nécessaires aux règles de décision. C'est en effet la fonction de masse algébrique qui détermine le nombre d'opérations nécessaires (plus précisément, c'est le nombre et la taille des éléments focaux qui dicte le nombre d'opérations, lesquels sont bornés le degré de $(k, \boxplus)$-additivité).

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la façon dont les différentes théories de l'incertain s'appliquent dans les situations de prise de décision multi-agents. Dans ces situations, la conséquence, et par suite l'utilité des agents, dépend des choix faits par tous les agents : un agent ne peut généralement pas décider seul de son utilité. Grâce au modèle d'agent que nous avons développé dans ce chapitre, nous pourrons aborder cette problématique en toute généralité.

# Chapitre 4

# Les jeux généralisés

Dans le chapitre précédent nous avons proposé un cadre très général, le *modèle d'agent*, qui permet de capturer les modèles les plus usuels rencontrés en théorie de la décision. Nous avons aussi montré que la plupart des règles de décision peuvent être décrites par une unique règle algébrique que nous appelons XEU. Nous nous intéressons maintenant aux situations de décision multi-agents stratégiques appelées jeux simultanés, qui ont déjà été présentées dans le chapitre 2. De telles situations impliquent plusieurs agents (les choix des uns impactant les résultats obtenus par les autres) que nous souhaitons modéliser grâce au *modèle d'agent* défini dans le chapitre précédent. Nous les appelons alors *jeux généralisés*.

Nous nous intéressons d'abord, dans la section 4.1, aux jeux à information complète, c'est-à-dire aux situations de décision multi-agents où les conséquences des choix des joueurs sont parfaitement connues. Dans de tels jeux tous types de préférences peuvent être considérés. Nous constatons que les concepts usuels (dominance, équilibres) peuvent très facilement s'y exprimer. Puis, nous discutons les deux formes d'incertitude que l'on rencontre dans les jeux à information complète : les stratégies mixtes, où l'incertitude pèse sur les choix des joueurs, et les équilibres corrélés, où l'incertitude pèse sur un appareil que les joueurs observent pour faire leurs choix respectifs. En traitant ces deux points, nous répondons aux deux difficultés du modèle des jeux généralisés.

Puis, nous étudions dans la section 4.2 la façon dont les modèles d'agents s'expriment dans les jeux hypergraphiques (à information complète). Cela nous permet d'harmoniser nos définitions tout en offrant un plus grand degré de liberté dans les choix de modélisation. Nous précisons les contraintes permettant de retrouver les jeux hypergraphiques classiques, tels que présentés dans la section 2.1.1.

Ensuite, nous traitons dans la section 4.3 les jeux généralisés à information incomplète (où la conséquence des choix des joueurs n'est pas parfaitement connue). Dans de tels jeux, les agents sont modélisés par un modèle d'agent complet : on y représente leurs préférences, leurs connaissances et leurs règles de décision respectives. À l'inverse de ce que propose Harsanyi pour les jeux

bayésiens, nous exprimons notre modèle en terme de signaux et non pas en termes de types. En effet, hors de la théorie de l'utilité espérée, la définition basée sur les types est moins générale. Nous constatons ensuite que les principaux concepts (dominance, équilibres) y sont bien définis et que les difficultés ont déjà été traitées en considérant des stratégies mixtes et des équilibres corrélés dans le cas des jeux à information complète.

Enfin, nous proposons dans la section 4.4 deux façons de transformer un jeu à information incomplète en un jeu à information complète équivalent, dans le sens où l'on peut étudier l'un en se basant sur l'autre : les deux jeux ont par exemple les mêmes stratégies dominées et les mêmes équilibres de Nash. La première transformation, dite *de Selten*, est applicable à tout jeu à information incomplète. Le simple fait que cette transformation existe nous permet de bénéficier de l'ensemble des résultats qui ont été proposés dans le cadre de la théorie des jeux classique (Kreps, 1990 ; Fudenberg et Tirole, 1991). La seconde transformation, dite de *Howson et Rosenthal*, est applicable aux jeux où les règles de décision des joueurs sont représentées par des instances de la règle algébrique XEU. Alors, à la manière de ce que ces auteurs ont proposé pour les jeux bayésiens, le jeu à information complète équivalent est donné sous forme hypergraphique. Cette représentation potentiellement succincte permet l'utilisation d'algorithmes en temps raisonnable (Wilson, 1971 ; Jourdan, 2022). Nous établissons la complexité spatiale et temporelle de cette transformation.

Nous terminons ce chapitre par la section 4.5, où nous considérons les *Bel-Games* (jeux évidentiels ou crédaux). Cette appellation désigne le cas particulier des jeux à information incomplète dans la théorie des fonctions de croyance (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022). Nous les avons définis durant mon doctorat et nous avons proposé deux transformations de Howson et Rosenthal supplémentaires, l'une adaptée à un conditionnement particulier, l'autre à une règle de décision particulière. Nous présentons en fin de section les expérimentations que nous avons réalisées, qui viennent conforter et affiner les résultats théoriques de complexité.

## 4.1 Jeux à information complète généralisés

### 4.1.1 Situation de jeu et jeu à information complète

Dans un jeu à information complète, les conséquences des choix des joueurs sont parfaitement connues. Seules les préférences des agents (sur l'ensemble des conséquences $\mathbb{X}$) ont besoin d'être considérées. Or, nous avons vu que dans un jeu ces conséquences sont habituellement laissées implicites (définition 2.1). Afin de les expliciter, nous représentons d'une part la *situation de jeu*, qui décrit la situation « objective » à la manière d'une situation de décision (définition 1.15), mais pas les préférences des joueurs, à la manière de (Gibbard, 1973). Dans un jeu de société, la situation de jeu serait appelée « règle du jeu » : elle décrit les conséquences des choix faits par les joueurs et est donc identique pour tous les joueurs, quels qu'ils soient. D'autre part, nous représentons les préférences

des joueurs, qui varient en fonction des joueurs considérés. Par exemple, un joueur altruiste peut préférer laisser gagner son adversaire : il considère la même situation de jeu, mais ses préférences diffèrent de celles d'un joueur compétitif.

Considérons un ensemble de joueurs $N = \{1, \ldots, n\}$, chacun choisissant une action $a_i \in A_i$. La conséquence de leurs choix, c'est-à-dire la conséquence du profil de stratégies pures $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ effectivement joué, est un élément $x \in \mathbb{X}$. Nous pouvons donc poser une fonction $\mathbf{c} : A \to \mathbb{X}$, appelée *fonction-conséquence*, qui associe à tout profil de stratégies pures $a \in A$ une unique conséquence $\mathbf{c}(a) \in \mathbb{X}$. Le choix de l'ensemble des conséquences $\mathbb{X}$ étant laissé à la discrétion du modélisateur, il est possible de décrire des conséquences simples (par exemple, « le joueur $i$ gagne la partie », alors $\mathbb{X} = N$) comme des conséquences complexes (par exemple, « chaque joueur $i$ gagne $x_i$ euros, alors $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$).

**Définition 4.1 (Situation de jeu à information complète).** Une situation de jeu à information complète est un quadruplet :

$$\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i \in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$$

où :
- $N$ est l'ensemble des joueurs ;
- $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i$ ;
- $\mathbb{X}$ est l'ensemble des conséquences ;
- $\mathbf{c} : A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{X}$ est la fonction-conséquence.

Pour tout jeu à deux joueurs, on peut expliciter la *matrice des conséquences* décrivant les valeurs que peut prendre la fonction-conséquence $\mathbf{c}$ (exemple 4.1). Cette matrice contient toute l'information présente dans la situation de jeu, c'est-à-dire les joueurs, leurs actions et les conséquences associées à leurs choix potentiels.

**Exemple 4.1 (Situation de jeu et matrice de conséquences).** *Considérons le jeu de conservation écologique de l'exemple 2.1, dont le diagramme est rappelé page suivante (figure 4.1) : un garde-chasse $G$ et un braconnier $B$ doivent chacun décider d'aller en $P_1$ ou en $P_2$ (si le braconnier est seul, il braconne ; si il est avec le garde-chasse, il se fait arrêter).*

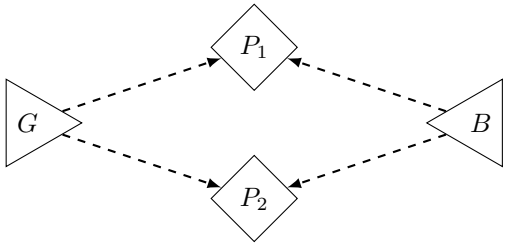



FIGURE 4.1 – Diagramme du jeu de conservation 2.1

*La situation de jeu est* $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$*, avec :*

$$\begin{aligned} & N = \{G, B\} \\ \forall i \in N, \quad & A_i = \{P_1, P_2\} \\ & \mathbb{X} = \{\texttt{Arrestation}, \texttt{P1 braconné}, \texttt{P2 braconné}\} \end{aligned}$$

$$\forall a \in A_G \times A_B, \qquad \mathbf{c}(a) = \begin{cases} \texttt{Arrestation} & si\ a_G = a_B \\ \texttt{P1 braconné} & si\ a_B = P_1 \neq a_G \\ \texttt{P2 braconné} & si\ a_B = P_2 \neq a_G. \end{cases}$$

*Toute l'information décrite par la situation de jeu* $\mathcal{CG}$ *est résumée dans la matrice des conséquences donnée en table 4.1.*

| $G$ \ $B$ | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | Arrestation | P2 braconné |
| $P_2$ | P1 braconné | Arrestation |

TABLE 4.1 – Matrice des conséquences pour le jeu de conservation écologique 2.1

Pour une même situation, plusieurs jeux à information complète peuvent être définis : ils ne diffèrent alors que par les préférences des joueurs. L'idée est que tous les braconniers et gardes-chasse jouant à ce « jeu » considèrent la situation de jeu $\mathcal{CG}$ donnée ci-dessus (en effet ce sont les « règles du jeu »), mais n'ont pas nécessairement les mêmes préférences sur les conséquences. Par exemple, un garde-chasse corrompu peut préférer laisser le braconnier braconner.

Un jeu à information complète est donc simplement défini par une situation de jeu et par les fonctions d'utilité algébriques décrivant les préférences des joueurs sur l'ensemble des conséquences $\mathbb{X}$.

**Définition 4.2 (Jeu à information complète).** Un jeu à information complète CG est la donnée d'une situation de jeu $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ et des structures de préférence $\mathcal{V}_i \in \mathcal{P}refs(\mathbb{X})$ de chaque joueur $i \in N$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{CG} = \left(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\right).$$

*Remarque* 41. Les types de structures de préférence des joueurs sont indépendants : par exemple certaines structures peuvent décrire des préférences qualitatives et d'autres des préférences quantitatives.

**Exemple 4.2 (Jeu avec utilités homogènes).** *Le jeu de conservation écologique décrit à l'exemple 2.1 est modélisé par la situation de jeu* $\mathcal{CG}$ *ci-dessus (exemple 4.1) et par les structures de préférences* $\mathcal{V}_G = (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{v}_G)$ *et* $\mathcal{V}_B = (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{v}_B)$*. Les fonctions d'utilités sont :*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G(\texttt{Arrestation}) &= x & \mathbf{v}_B(\texttt{Arrestation}) &= 10 - y \\ \mathbf{v}_G(\texttt{P1 braconné}) &= 0 & \mathbf{v}_B(\texttt{P1 braconné}) &= 10 \\ \mathbf{v}_G(\texttt{P2 braconné}) &= 0 & \mathbf{v}_B(\texttt{P2 braconné}) &= 10 \end{aligned}$$

*Dans ce jeu, les préférences des joueurs sont homogènes : les deux fonctions d'utilité sont quantitatives.*

**Exemple 4.3 (Jeu avec utilités hétérogènes).** *Considérons maintenant la même situation de jeu, mais supposons que nous ne disposons pas de l'information quantitative concernant les préférences du garde-chasse. Nous savons seulement qu'il préfère arrêter le braconnier et, sinon, qu'il préfère que $P_2$ soit braconnée plutôt que $P_1$. Ces préférences sont qualitatives, totalement ordonnées, et telles que :*

$$\texttt{Arrestation} \succ_G^{\mathbb{X}} \texttt{P2 braconné} \succ_G^{\mathbb{X}} \texttt{P1 braconné}.$$

*Elles sont décrites formellement par la structure $\mathcal{V}_G = (\mathbb{X}, \succeq_G^{\mathbb{X}}, x \mapsto x) \in \mathcal{P}refs_{\mathbb{X}}$. Si par ailleurs nous considérons la fonction d'utilité quantitative $\mathbf{v}_B$ du braconnier donnée à l'exemple précédent, alors les préférences des joueurs sont hétérogènes : elles n'appartiennent pas à la même classe de fonctions d'utilité algébriques. Le jeu $\mathrm{CG} = \big(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\big)$ est néanmoins bien défini, nous pourrons l'étudier avec les outils habituels de la théorie des jeux résumés dans la sous-section suivante..*

Nous retrouvons la définition classique d'un jeu à information complète (définition 2.1) dès lors que les préférences des joueurs sont quantitatives : il suffit de considérer, pour tout joueur $i$, la composition $\mathbf{v}_i \circ \mathbf{c} : A \to \mathbb{R}$ de sa fonction d'utilité algébrique et de la fonction-conséquence. En effet, pour le joueur $i$, l'utilité associée au profil de stratégies pures $a \in A$ est $\mathbf{v}_i(\mathbf{c}(a))$. Ainsi le jeu à information complète (au sens de la définition 4.2) :

$$\mathrm{CG} = \big((N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c}),\ (\mathbb{R}, \mathbf{v}_i, \geq)_{i\in N}\big)$$

capture le jeu à information complète (au sens de la définition 2.1) :

$$(N, (A_i, \mathbf{v}_i \circ \mathbf{c})_{i\in N}).$$

### 4.1.2 Extension des concepts de solutions pour les jeux à information complète généralisés

Les concepts de solutions présentés dans la section 2.1 (dominance, rationalisabilité et équilibres de Nash) sont des notions purement ordinales, du moins lorsque l'on considère les stratégies pures : seules sont considérées les relations $\succeq_i^V$ décrivant les préférences éventuellement partielles de chaque joueur $i$ sur les conséquences. Ainsi ces concepts sont bien définis dans notre cadre, quelles que soient les fonctions d'utilité algébriques considérées. En effet la fonction d'utilité du joueur $i$ définit une relation comparant les conséquences $\mathbf{c}(a) \in \mathbb{X}$ pour tout $a \in A$, et donc les profils de stratégies pures $a \in A$.

Soient $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ une situation de jeu à information complète, et $\mathrm{CG} = \big(\mathcal{CG}, (V_i, \mathbf{v}_i, \succeq_i^V)_{i\in N}\big)$ un jeu à information complète pour cette situation. Les préférences du joueur $i$ sur l'ensemble $A$ des profils de stratégies pures sont telles que le profil $a$ est au moins autant préféré que le profil $a'$ si et seulement si $a$ amène à une conséquence au moins aussi bonne que celle provoquée par $a'$, c'est-à-dire si $\mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a)\big) \succeq_i^V \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a')\big)$.

Une stratégie du joueur $i$ domine une autre de ses stratégies si elle lui est toujours préférée, quoi que choisissent les autres joueurs.

**Propriété 4.1 (Dominance stricte).** Une stratégie pure $a_i$ du joueur $i$ est strictement dominée par une autre de ses stratégies pures $a'_i$ si et seulement si :

$$\forall a_{-i} \in A_{-i}, \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a_i.a_{-i})\big) \quad \prec_i^V \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a'_i.a_{-i})\big).$$

*Remarque* 42. Le processus d'élimination des stratégies strictement dominées et l'ensemble des stratégies qui survivent à ce processus sont ainsi directement définis par la définition 2.7.

Les meilleures réponses du joueur $i$ sont ses stratégies préférées lorsque qu'il connaît les choix faits par les autres joueurs.

**Propriété 4.2 (Meilleure réponse).** Une stratégie pure $a_i$ du joueur $i$ est une meilleure réponse à $a_{-i}$ si et seulement si :

$$\forall a'_i \in A_i, \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a_i.a_{-i})\big) \quad \not\prec_i^V \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a'_i.a_{-i})\big).$$

Les stratégies rationalisables du joueur $i$ sont celles qui peuvent être des meilleures réponses.

**Propriété 4.3 (Rationalisabilité).** Une stratégie pure $a_i$ de l'agent $i$ est rationalisable si et seulement si :

$$\exists a_{-i} \in A_{-i}, \quad \forall a'_i \in A_i, \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a_i.a_{-i})\big) \quad \not\prec_i^V \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a'_i.a_{-i})\big).$$

*Remarque* 43. Le processus d'élimination des stratégies non rationalisables et l'ensemble des stratégies qui survivent à ce processus sont ainsi directement définis par la définition 2.10.

Les équilibres de Nash sont des profils de stratégies où chaque joueur joue l'une de ses meilleures réponses.

**Propriété 4.4 (Équilibre de Nash).** Un profil de stratégie $a$ est un équilibre de Nash si et seulement si

$$\forall i \in N, \quad \forall a'_i \in A_i, \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a)\big) \quad \not\prec_i^V \quad \mathbf{v}_i\big(\mathbf{c}(a'_i.a_{-i})\big).$$

Tous ces concepts (propriétés 4.1 à 4.4) permettent d'étudier un jeu à information complète en ne considérant que les préférences des joueurs. Ils sont bien définis dans notre cadre algébrique et conservent leur signification.

### 4.1.3 Incertitude dans les jeux à information complète généralisés

Lors de notre présentation des jeux à information complète (section 2.1), nous avons croisé l'incertitude par deux fois : lorsque l'on considère les stratégies mixtes (alors les choix des joueurs sont incertains), et lorsqu'on considère les équilibres corrélés (alors les choix des joueurs dépendent d'un signal incertain).

**Stratégies mixtes**

Rappelons d'abord la façon dont nous avons considéré les stratégies mixtes dans les jeux à information complète au chapitre 2. Dans un jeu, chaque joueur $i$ doit choisir une stratégie pure, c'est-à-dire une action $a_i \in A_i$. Cependant, en stratégies mixtes, les joueurs ne communiquent pas leurs choix, mais ils s'engagent sur les choix qu'ils pourraient faire. Tout se passe alors comme s'ils basaient leurs choix sur un phénomène incertain, tel qu'un lancer de dé ou un tirage dans une urne. Ce peut être effectivement le cas, mais ce peut être aussi une façon de décrire que le choix des joueurs n'est que partiel, par exemple : « je jouerai $a_i$ ou $a'_i$, mais pas $a''_i$ ».

Les stratégies mixtes, c'est-à-dire les engagements pris par les joueurs, sont ensuite partagées : tous les joueurs en prennent connaissance. Puisque tous les joueurs connaissent leurs propres engagements et ceux pris par les autres, ils connaissent les combinaisons des choix possiblement pris, c'est-à-dire les profils de stratégies pures possibles. Mathématiquement, une connaissance jointe est déduite du profil de stratégies mixtes. Cette connaissance porte sur l'ensemble des profils de stratégies pures $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ ; elle indique à quel point un profil $a \in A$ peut effectivement advenir. Pour ce faire, on suppose que les choix des joueurs sont indépendants (s'ils basent leur choix sur un lancer de dé, par exemple, alors chaque joueur lancera son propre dé).

Enfin, comme nous en avons maintenant l'habitude, nous évaluons la satisfaction que procure un profil de stratégies mixtes à un joueur, c'est-à-dire la satisfaction que procurent les engagements des joueurs, grâce à une règle de décision. Chaque joueur est donc modélisé par une règle de décision qui combine les préférences du joueur sur l'ensemble des conséquences $\mathbb{X}$ avec la connaissance (commune) déduite du profil de stratégies mixtes en question.

Dans notre cadre de jeux généralisés, nous souhaitons pouvoir considérer tout type de stratégie mixte, c'est-à-dire tout type de capacité algébrique, pour décrire les choix pouvant être pris (probabilités, possibilités, fonctions de croyance, etc.). Cependant, il faut pouvoir déduire une capacité jointe sur $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, à partir des stratégies mixtes de chaque joueur $i$, sur $A_i$. Cela impose donc une certaine homogénéité des cadres de décision utilisés pour modéliser les joueurs. Dans la littérature, l'hypothèse faite impose que tous les joueurs soient modélisés dans le même cadre de décision, par la même règle de décision : l'homogénéité est totale. Cependant, nous pouvons faire une hypothèse moins forte et laisser un plus grand degré de modélisation. En effet, seules les stratégies mixtes doivent être exprimées dans la même théorie de l'incertain pour permettre de déduire la capacité jointe. Nous n'imposons pas que les règles de décision avec lesquelles nous modélisons les joueurs soient identiques (par exemple, un joueur pessimiste peut être modélisé par la règle Min et un autre joueur, optimiste, par la règle Max), ni que leurs préférences soient exprimées dans la même classe (un joueur peut avoir des préférences quantitatives et un autre des préférences qualitatives). Il faut cependant que la règle de décision de chaque joueur soit adaptée d'une part à la théorie de l'incertain considé-

rée pour les stratégies mixtes (commune à tous) et d'autre part à ses propres préférences.

La contrainte d'homogénéité se résume donc ainsi :

— Les stratégies mixtes de tous les joueurs sont des capacités algébriques appartenant à la même classe $\mathcal{Kn}_\beta \in \{\mathcal{Kn}_{\mathrm{Pr}}, \mathcal{Kn}_{\mathrm{Bel}}, \mathcal{Kn}_{\mathrm{Ign}}, \dots\}$ ;

— La fonction d'utilité algébrique de chaque joueur $i$ appartient à la classe $\mathcal{Prefs}_{\alpha_i} \in \{\mathcal{Prefs}_{\mathbb{X}}, \mathcal{Prefs}_{\mathbb{R}}\}$ éventuellement différente d'un joueur à l'autre (c'est-à-dire, éventuellement, telle que $\mathcal{Prefs}_{\alpha_i} \neq \mathcal{Prefs}_{\alpha_j}$) ;

— La règle de décision modélisant le joueur $i$ est compatible avec $\mathcal{Prefs}_{\alpha_i}$ et $\mathcal{Kn}_\beta$, elle appartient donc à la classe $\mathcal{Dec}_{\alpha_i,\beta}$.

Étendre un jeu à information complète aux stratégies mixtes consistera alors à donner la classe des capacités algébriques avec lesquelles nous exprimons les stratégies mixtes, l'opération « produit » de cette classe permettant d'établir la capacité algébrique jointe à partir des stratégies mixtes et la règle de décision de chaque joueur $i$.

**Définition 4.3 (Extension en stratégies mixtes d'un jeu à information complète).** Soit $\mathrm{CG} = \left(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\right)$ un jeu à information complète. Une extension en stratégies mixtes de CG est un quadruplet :

$$\mathrm{MCG} = \left(\mathrm{CG}, \mathcal{Kn}_\beta, \times^{\mathrm{cart}}, (\mathcal{U}_i)_{i\in N}\right),$$

où :

— $\mathrm{CG} = \left(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\right)$ est le jeu à information complète ;

— $\mathcal{Kn}_\beta$ est la classe de capacités algébriques dans laquelle les stratégies mixtes sont exprimées ;

— $\times^{\mathrm{cart}} \in \mathcal{Prod}_\beta$ est un produit cartésien de la classe $\mathcal{Kn}_\beta$ ;

— $\mathcal{U}_i = \left(U_i, \mathbf{u}_i, \succeq_i^U\right) \in \mathcal{Dec}_{\alpha_i,\beta}$ est la structure de règle de décision décrivant la règle $\mathbf{u}_i$ du joueur $i$ (adaptée à la fois à sa fonction d'utilité algébrique décrite par $\mathcal{V}_i \in \mathcal{Prefs}_{\alpha_i}(\mathbb{X})$ et à la classe de capacités algébriques $\mathcal{Kn}_\beta$).

**Exemple 4.4 (Extension aux stratégies mixtes du jeu 4.3).** *Considérons le jeu à information complète* $\mathrm{CG} = \left(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\right)$ *de l'exemple 4.3, où un braconnier et un garde-chasse doivent chacun se rendre en* $P_1$ *ou en* $P_2$*, et où les préférences des joueurs sont hétérogènes (les préférences du garde-chasse sont qualitatives et les celles du braconnier sont quantitatives).*

— *Les engagements des joueurs indiquent s'il est possible ou non qu'ils se déplacent sur une parcelle donnée : la classe des stratégies mixtes est donc celle de l'« ignorance totale »* $\mathcal{Kn}_{\mathrm{Ign}}$*, c'est-à-dire celle des connaissances catégoriques, où* $W_{\mathrm{Ign}} = \{0, 1\}$ *ne permet que les valeurs 0 (impossible) et 1 (possible) ;*

— *Le produit cartésien de la classe* $\mathcal{Kn}_{\mathrm{Ign}}$ *considérée est* $\times_{\mathrm{Ign}}$*, défini par la multiplication :*

$$\times_{\mathrm{Ign}}(\mathbf{w}_G, \mathbf{w}_B)(B) = \mathbf{w}_G(\{a_G \mid (a_G, a_B) \in B\}) \cdot \mathbf{w}_B(\{a_B \mid (a_G, a_B) \in B\}),$$

*c'est-à-dire que le profil $(a_G, a_B)$ sera possiblement joué si et seulement si les stratégies $a_G$ et $a_B$ sont toutes les deux possiblement choisies ;*

— *Le garde-chasse est modélisé par la règle* Min*, décrite par la structure* $\mathcal{U}_G = (\mathbb{X}, \min, \succeq_G^{\mathbb{X}}) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{X},\mathrm{Ign}}$ *;*

— *Le braconnier est modélisé par la règle* Laplace*, décrite par la structure* $\mathcal{U}_B = (\mathbb{R}, \mathrm{moy}, \geq) \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$.

*L'extension en stratégies mixtes que nous proposons est donc définie par le quadruplet suivant :*

$$\mathrm{MCG} = \left(\mathrm{CG}, \mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}, \times_{\mathrm{Ign}}, (\mathcal{U}_i)_{i\in N}\right).$$

*Notons que cette extension en stratégies mixtes de* CG *est bien définie, même si les préférences des joueurs sont hétérogènes : d'une part la règle de décision* Min *modélisant le garde-chasse est adaptée à la classe $\mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}$ des stratégies mixtes et à la classe $\mathcal{P}refs_{\mathbb{X}}$ de ses préférences ; d'autre part la règle* Laplace *modélisant de braconnier est adaptée à la classe $\mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}$ et à la classe $\mathcal{P}refs_{\mathbb{R}}$ de ses préférences.*

*Dans cette extension aux stratégies mixtes de* CG*, chaque joueur a exactement trois stratégies mixtes possibles (qui appartiennent à la classe $\mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}(A_i)$). Ce sont les mesures de nécessité catégoriques $\mathbf{w}_i : 2^{A_i} \to \{0,1\}$ suivantes :*

— $\mathbf{w}_i(B) = 1$ *ssi* $P_1 \in B$ *: le joueur $i$ s'engage à aller en $P_1$ ;*

— $\mathbf{w}_i(B) = 1$ *ssi* $P_2 \in B$ *: le joueur $i$ s'engage à aller en $P_2$ ;*

— $\mathbf{w}_i(\{P_1, P_2\}) = 1$ *et* $\mathbf{w}_i(B) = 0$ *sinon : le joueur $i$ s'engage à aller en $P_1$ ou en $P_2$ ;*

*chacune de ces capacités algébriques étant formellement décrite par la structure de connaissances $\sigma_i = (\{0,1\}, \mathbf{w}_i, \geq) \in \mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}(A_i)$. Par souci de lisibilité, nous désignons ces stratégies mixtes par l'ensemble des actions possibles, c'est-à-dire respectivement $\{P_1\}$, $\{P_2\}$ et $\{P_1, P_2\}$.*

*Alors, pour chaque profil de stratégies mixtes $(\sigma_G, \sigma_B)$, nous pouvons déduire les profils de stratégies pures possibles grâce au produit cartésien $\times_{\mathrm{Ign}}$. La table 4.2 donne ces profils de stratégies pures possibles, déduits de la structure de connaissance jointe $\sigma_\times = \times_{\mathrm{Ign}}(\sigma_G, \sigma_B)$, en fonction des stratégies mixtes $\sigma_G$ et $\sigma_B$.*

| $\sigma_G$ \ $\sigma_B$ | $\{P_1\}$ | $\{P_2\}$ | $\{P_1, P_2\}$ |
|---|---|---|---|
| $\{P_1\}$ | $\{(P_1, P_1)\}$ | $\{(P_1, P_2)\}$ | $\{(P_1, P_1), (P_1, P_2)\}$ |
| $\{P_2\}$ | $\{(P_2, P_1)\}$ | $\{(P_2, P_2)\}$ | $\{(P_2, P_1), (P_2, P_2)\}$ |
| $\{P_1, P_2\}$ | $\{(P_1, P_1), (P_2, P_1)\}$ | $\{(P_1, P_2), (P_2, P_2)\}$ | $\left\{\begin{array}{l}(P_1, P_1), (P_1, P_2),\\ (P_2, P_1), (P_2, P_2)\end{array}\right\}$ |

TABLE 4.2 – Profils de stratégies pures possibles, pour chaque profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_G, \sigma_B)$, d'après la loi jointe $\sigma_\times = \times_{\mathrm{Ign}}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple, après que chaque joueur s'est engagé sur une stratégie mixte, on déduit la capacité algébrique jointe décrivant la connaissance sur les profils de stratégies pures qui pourront être joués.

Une stratégie mixte du joueur $i$ est une capacité algébrique $\mathbf{w}_i$ sur $A_i$, de la classe $\mathcal{Kn}_\beta$. Elle est décrite formellement par la structure de connaissance $\sigma_i = (W_\beta, \mathbf{w}_i, \succeq_\beta^W) \in \mathcal{Kn}_\beta(A_i)$. La connaissance jointe qui est déduite des stratégies mixtes des joueurs est la capacité algébrique $\mathbf{w}_\times$ sur $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ obtenue par produit cartésien des stratégies mixtes, c'est-à-dire celle décrite par la structure de connaissance :

$$\sigma_\times = \big(W_\beta, \mathbf{w}_\times, \succeq_\beta^W\big) = \times^{\text{cart}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{Kn}_\beta(A).$$

La capacité algébrique $\mathbf{w}_\times$ décrit donc la connaissance que peuvent déduire les joueurs à propos des profils de stratégies pures qui seront peut-être joués. Par ailleurs, nous avons donné la fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v}_i$ de chaque joueur $i$ (décrite par la structure $\mathcal{V}_i \in \mathcal{Prefs}_{\alpha_i}(\mathbb{X})$) dans la définition du jeu et sa règle de décision $\mathbf{u}_i$ (décrite par la structure $\mathcal{U}_i \in \mathcal{Dec}_{\alpha_i,\beta}$) dans l'extension aux stratégies mixtes. Nous disposons donc du modèle d'agent $(\mathcal{I}_i, \mathcal{V}_i, \sigma_\times) \in \mathcal{Agent}_{\alpha_i,\beta}(\mathbb{X}, A)$ de chaque joueur $i$. L'ensemble de conséquences de ces modèles d'agent est $\mathbb{X}$, et leur cadre de discernement est $A$.

Pour évaluer la satisfaction que procure le profil $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ à un joueur, nous allons donc évaluer la capacité jointe $\mathbf{w}_\times$ (décrite par la structure $\sigma_\times$) grâce aux règles de décision $\mathbf{u}_i$ des joueurs. Au chapitre précédent nous évaluions des « actes », c'est-à-dire des fonctions associant une conséquence à chaque élément du cadre de discernement, et particulièrement les actes réalisables. Ici, le cadre de discernement est l'ensemble des profils de stratégies pures $A$. Or, la fonction qui associe à chaque profil de stratégies pures sa conséquence est la fonction-conséquence $\mathbf{c}$, qui jouera donc le rôle de l'acte.

*Remarque* 44. Contrairement à ce qui est présenté au chapitre précédent, en stratégies mixtes, les joueurs ne choisissent pas l'acte (la fonction-conséquence est imposée par la situation) mais s'engagent sur des stratégies mixtes. L'engagement pris par chaque joueur impacte la connaissance qu'ont les autres joueurs, ainsi les engagements pris par tous les joueurs fixent la connaissance. Cette connaissance est décrite par une capacité algébrique. Ainsi, au lieu de comparer les actes possibles pour une capacité algébrique donnée, nous comparons les capacités algébriques possibles pour un « acte » donné.

**Définition 4.4 (Utilité d'un profil de stratégies mixtes).** Pour une extension en stratégies mixtes $\text{MCG} = \big(\text{CG}, \mathcal{Kn}_\beta, \times^{\text{cart}}, (\mathcal{U}_i)_{i\in N}\big)$ d'un jeu à information complète $\text{CG} = \big(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\big)$, l'utilité d'un profil de stratégies mixtes $\sigma$, pour le joueur $i$, est :

$$\mathbf{u}_i\big(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma), \mathbf{c}\,\big).$$

Le joueur $i$ préfère au moins autant le profil $\sigma$ au profil $\sigma'$ si :

$$\mathbf{u}_i\big(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma), \mathbf{c}\,\big) \quad \succeq_i^U \quad \mathbf{u}_i\big(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma'), \mathbf{c}\,\big).$$

**Exemple 4.5 (Utilité d'un profil de stratégies mixtes).** *Dans l'exemple 4.4, considérons le profil de stratégies mixtes $\sigma = (\{P_2\}, \{P_1, P_2\})$ où le garde-chasse s'engage à aller en $P_2$ et où le braconnier s'engage à aller en $P_1$ ou en $P_2$. La*

*connaissance jointe sur $A = A_G \times A_B$ déduite du profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_G, \sigma_B)$ indique les deux profils de stratégies pures possibles :*

$$\sigma_\times = \times^{\text{cart}}(\sigma_G, \sigma_B) = \{(P_2, P_1), (P_2, P_2)\}.$$

*L'utilité de ce profil $\sigma$, pour le garde-chasse, est :*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_G(\mathbf{v}_G, \sigma_\times, \mathbf{c}) &= \min\left(\mathbf{v}_G(\mathbf{c}(P_2, P_1)), \mathbf{v}_G(\mathbf{c}(P_2, P_2))\right) \\ &= \min\left(\texttt{P1 braconné}, \texttt{Arrestation}\right) = \texttt{P1 braconné}\end{aligned}$$

*L'utilité de ce profil $\sigma$, pour le braconnier, est :*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_B(\mathbf{v}_B, \sigma_\times, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \times \mathbf{v}_B(\mathbf{c}(P_2, P_1)) + \frac{1}{2} \times \mathbf{v}_B(\mathbf{c}(P_2, P_2)) \\ &= \frac{1}{2} \times (-10) + \frac{1}{2} \times 5 = -2.5\end{aligned}$$

Au chapitre 1, l'introduction des stratégies mixtes probabilistes a entraîné une redéfinition (triviale) de tous les concepts de solution : les fonctions d'utilité $u_i : A \to \mathbb{R}$ évaluant les profils de stratégies pures étant simplement remplacées par les fonctions $\text{EU}_{u_i} : \Sigma \to \mathbb{R}$ évaluant les profils de stratégies mixtes probabilistes selon la règle de l'utilité espérée. Dans notre cadre, le passage aux stratégies mixtes entraîne les mêmes redéfinitions triviales. En effet, les concepts de dominance, de meilleure réponse et d'équilibre de Nash sont des concepts purement ordinaux, ils peuvent donc être appliqués autant à des règles cardinales qu'à des règles ordinales. Ainsi, nous remplaçons les fonctions $\mathbf{v_i} \circ \mathbf{c} : A \to V_i$ évaluant les profils de stratégies pures par les fonctions évaluant les profils de stratégies mixtes, c'est-à-dire par les fonctions :

$$\sigma \mapsto \mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma), \mathbf{c}),$$

et les opérateurs $\succeq_i^V$ seront remplacés par $\succeq_i^U$.

Une stratégie mixte $\sigma_i$ du joueur $i$ domine une autre de ses stratégies mixtes $\sigma_i'$ si les conséquences qu'amènent $\sigma_i$ sont toujours préférées à celles qu'amènent $\sigma_i'$, quoi que choisissent les autres joueurs, c'est-à-dire si :

$$\forall \sigma_{-i}, \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma_i.\sigma_{-i}), \mathbf{c}) \quad \not\preceq_i^U \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma_i'.\sigma_{-i}), \mathbf{c}).$$

Une stratégie mixte $\sigma_i$ du joueur $i$ est une meilleure réponse aux stratégies mixtes des autres joueurs $\sigma_{-i}$ si aucune autre de ses stratégies mixtes n'amène à une conséquence qu'il préfère, c'est-à-dire si :

$$\forall \sigma_i', \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma_i.\sigma_{-i}), \mathbf{c}) \quad \not\prec_i^U \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma_i'.\sigma_{-i}), \mathbf{c}).$$

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes où chaque stratégie est une meilleure réponse aux autres, c'est-à-dire tel que :

$$\forall i, \forall \sigma_i', \quad \mathbf{u}_i\big(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma), \mathbf{c}\big) \not\prec_i^U \mathbf{u}_i\big(\mathbf{v}_i, \times^{\text{cart}}(\sigma_i'.\sigma_{-i}), \mathbf{c}\big).$$

### Équilibre corrélé

Nous nous intéressons maintenant à la deuxième forme d'incertitude que nous avons croisée dans les jeux à information complète : les équilibres corrélés.

L'idée présentée ici est similaire à celle proposée par Aumann (AUMANN, 1974), et présentée à la section 2.1.4 (définition 2.19). Nous quittons simplement la théorie de l'utilité espérée. Les joueurs s'accordent ainsi sur le choix d'un *appareil corrélateur*, qui envoie des signaux $\tau_i(\omega) \in \Theta_i$ à chaque joueur $i$ en fonction de l'état du monde $\omega \in \Omega$. Ces signaux sont potentiellement différents pour chaque joueur $i$ et définissent ses ensembles d'information $\mathcal{H}_i = \{H_i^1, H_i^2, \dots\}$ (c'est-à-dire la partition d'$\Omega$ en ensembles d'états du monde indiscernables par le joueur $i$, définition 2.16). Chaque joueur a une connaissance sur le cadre de discernement $\Omega$ et choisit sa stratégie en fonction du signal qu'il reçoit (stratégie signalisée, définition 2.17). Un profil de stratégies signalisées sera un *équilibre corrélé* lorsqu'aucun joueur n'aura intérêt à changer de stratégie (quel que soit le signal qu'il reçoit).

**Exemple 4.6 (Exemple d'Aumann avec préférences hétérogènes).** *Considérons l'exemple 2.7 proposé par Aumann pour illustrer les équilibres corrélés. Dans notre cadre algébrique, la situation de jeu $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ est résumée dans la matrice de conséquences donnée en table 4.3 (où nous faisons apparaître les conséquences triviales : $\mathbb{X} = A$).*

| | 2 | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | $L$ | $R$ |
| | $U$ | UL | UR |
| | $D$ | DL | DR |

TABLE 4.3 – Matrice de conséquences de l'exemple utilisé par Aumann pour illustrer les équilibres corrélés

*Nous supposons ici que les préférences du joueur 1 sont qualitatives et forment un ordre total tel que :*

$$\texttt{UL} \succ_1 \texttt{DL} \succ_1 \texttt{DR} \succ_1 \texttt{UR}.$$

*Les préférences du joueur 2 sont quantitatives et telles que dans l'exemple 2.7 :*

$$\mathbf{v}_2(\texttt{UL}) = 1 \qquad \mathbf{v}_2(\texttt{DL}) = 4 \qquad \mathbf{v}_2(\texttt{DR}) = 5 \qquad \mathbf{v}_2(\texttt{UR}) = 0$$

*Ce jeu est donc défini formellement par* $(\mathcal{CG}, ((\mathbb{X}, \succeq_1, x \mapsto x), (\mathbb{R}, \geq, \mathbf{v}_2)))$.

**Définition 4.5 (Appareil corrélateur).** Pour toute situation de jeu à information complète $\mathcal{G} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$, un appareil corrélateur est un couple :

$$\mathcal{S} = \left(\Omega, \left(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i, \times_i^{\text{dep}}\right)_{i\in N}\right)$$

où :

— $\Omega$ est un cadre de discernement ;

— $\mathcal{H}_i = \left\{ H_i^{\theta_i} = \{\omega \mid \tau_i(\omega) = \theta_i\} \mid \theta_i \in \Theta_i \right\}$ est une partition du cadre de discernement $\Omega$ définie par les signaux [1] $\tau_i(\omega) = \theta_i \in \Theta_i$ que le joueur $i$ peut recevoir dans chaque état du monde $\omega \in \Omega$ ;
— $\mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}$ est le cadre de décision dans lequel le joueur $i$ est modélisé (imposant donc des préférences exprimées dans la classe $\mathcal{P}refs_{\alpha_i}$ et des connaissances exprimées dans la classe $\mathcal{K}n_{\beta_i}$) ;
— $\mathcal{W}_i = \left(W_i, \mathbf{w}_i, \succeq_i^W\right) \in \mathcal{K}n_{\beta_i}(\Omega)$ est la structure de connaissance du joueur $i$, de la classe $\mathcal{K}n_{\beta_i}$ ;
— $\mathcal{U}_i = \left(U_i, \mathbf{u}_i, \succeq_i^U\right) \in \mathcal{D}ec_{\alpha_i,\beta_i}$ est la structure de règle de décision du joueur $i$, adaptée au cadre de discernement $\mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}$ ;
— $\mathcal{C}_i = (\mathrm{cond}_i, \mathrm{precond}_i) \in \mathcal{C}ond_{\beta_i}$ est la structure de conditionnement du joueur $i$ ;
— $\times_i^{\mathrm{dep}} \in \mathcal{P}rod_{\beta_i}$ est un produit dépendant [2] pour la classe de capacités algébriques $\mathcal{K}n_{\beta_i}$ ;

et tel que tous les conditionnements sont faisables, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall i \in N, \quad \forall H_i^{\theta_i} \in \mathcal{H}_i, \quad \mathrm{precond}_i\left(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}\right) = \top.$$

*Remarque* 45. La structure de conditionnement ne dépend pas du joueur, mais du type de mise à jour qui est effectuée (focus ou révision) et donc de la nature de l'appareil corrélateur. De la même façon, le produit dépendant dépend du type de connaissance, et donc de la nature de l'appareil corrélateur. Néanmoins, nous demandons une structure par joueur ; ainsi la définition 4.5 n'impose aucune dépendance entre les cadres de décision $\mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}$. À la différence des stratégies mixtes, nous n'exigeons pas d'être dans une théorie homogène de la connaissance. Les joueurs pourront avoir des connaissances différentes sur le cadre de discernement $\Omega$, être modélisés par des règles de décision différentes, mais aussi être modélisés dans des cadres de décision différents. Par exemple, un joueur peut croire qu'$\omega^*$ est certain et un autre le croire impossible, ou bien encore un joueur peut avoir une connaissance probabiliste et un autre une connaissance possibiliste.

Un appareil corrélateur $\mathcal{S}$ est bien défini au regard d'un jeu à information complète $\mathrm{CG} = (\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N})$ si il est *bien typé*, c'est-à-dire si les structures de préférence définies dans CG sont adaptées au cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}$ défini dans $\mathcal{S}$.

Considérons d'abord le cas des stratégies pures.

**Définition 4.6 (Appareil corrélateur bien défini).** Soit $\mathcal{CG}$ une situation de jeu, $\mathrm{CG} = (\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N})$ un jeu à information complète (en stratégies pures)

1. Les fonctions $\tau_i$ et les signaux $\theta_i$ sont ensuite laissé implicites ; nous les explicitons ici pour faciliter la compréhension. Ayant les ensembles d'information $\mathcal{H}_i = \{H_i, H_i', H_i'', \dots\}$, nous pouvons les retrouver en posant $\Theta_i = \mathcal{H}_i$ et en définissant $\tau_i$ comme la fonction associant à $\omega$ l'ensemble $H_i \in \mathcal{H}_i$ contenant $\omega$.

2. Une opération de produit cartésien suffirait dans cette définition. Cependant, nous considérons par la suite les stratégies mixtes qui nécessitent un produit dépendant. Puisque qu'un produit dépendant définit un produit cartésien comme cas particulier (définition 3.7), nous l'introduisons dès maintenant afin de n'avoir qu'une unique définition.

et $\mathcal{S} = \left(\Omega, \left(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i, \times_i^{\text{dep}}\right)_{i\in N}\right)$ un appareil corrélateur. On dit que $\mathcal{S}$ est *bien défini pour* CG si :

$$\forall i \in N, \quad \mathcal{V}_i \in \mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha_i}(\mathbb{X}).$$

**Exemple 4.7 (Appareil corrélateur).** *Pour le jeu de l'exemple 4.6 comme pour l'exemple d'Aumann, nous proposons de considérer un appareil corrélateur basé sur trois états possibles du monde : $\Omega = \{x, y, z\}$. Le joueur 1 reçoit un signal l'informant que l'état du monde est $x$ ou non (c'est-à-dire $\mathcal{H}_1 = \{\{x\}, \{y, z\}\}$), et le joueur 2 reçoit un signal l'informant que l'état du monde est $z$ ou non (c'est-à-dire $\mathcal{H}_2 = \{\{x, y\}, \{z\}\}$). Ici, aucune information n'est donnée sur le degré de vraisemblance des états du monde. Le joueur 1 considère que les trois états sont complètement possibles, ce qui est capturé par la mesure de nécessité catégorique dont la distribution de possibilité vérifie $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 1$. Le joueur 2, selon le principe d'indifférence de Laplace, considère la probabilité dont la distribution vérifie $p(x) = p(y) = p(z) = 1/3$. Nous modélisons le joueur 1 par la règle de l'utilité pessimiste (*Min*) et le joueur 2 par celle de l'utilité espérée (*EU*). L'appareil corrélateur considéré est donc défini par :*

$$\mathcal{S} = \left(\Omega, \left(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i, \times_i^{\text{dep}}\right)_{i\in N}\right),$$

*où le cadre de décision du joueur 1 est $\mathcal{F}_{\mathbb{X},\text{Ign}}$ (le cadre de l'ignorance totale et utilités qualitatives) et celui du joueur 2 est $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\text{Pr}}$ (celui des probabilités et utilités quantitatives). Les opérateurs de conditionnement et de produit dépendant sont les opérateurs usuels pour ces cadres.*

Dans un jeu en stratégies pures, un appareil corrélateur est proposé (par les joueurs ou par un organisme externe) et chaque joueur joue une stratégie pure signalisée $s_i : \Theta_i \to A_i$, c'est-à-dire qu'il jouera une stratégie pure selon le signal qu'il reçoit de l'appareil corrélateur. Si le véritable état du monde est $\omega^*$, le joueur $i$ jouera la stratégie pure $s_i(\tau_i(\omega^*)) \in A_i$ (où $\tau_i(\omega^*)$ est le signal qu'il reçoit lorsque l'état du monde est $\omega^*$). Un profil de stratégies pures signalisées est alors un vecteur $s = (s_1, \ldots, s_n)$, et nous notons $s(\omega^*) = (s_1(\tau_1(\omega^*)), \ldots, s_n(\tau_n(\omega^*)))$ le profil de stratégies pures (non signalisées) effectivement joué lorsque l'état du monde est $\omega^*$.

**Définition 4.7 (Acte équivalent à un profil de stratégies pures signalisées).** Pour toute situation de jeu $\mathcal{G} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ et tout appareil corrélateur $\mathcal{S} = \left(\Omega, \left(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i, \times_i^{\text{dep}}\right)_{i\in N}\right)$, un profil de stratégies pures signalisées $s$ définit l'acte $\chi_s : \Omega \to \mathbb{X}$ tel que :

$$\chi_s(\omega) = \mathbf{c}(s(\omega)).$$

En effet, un profil de stratégies signalisées pures $s$ indique quel profil de stratégies pures sera joué, selon l'état du monde. Par composition avec la fonction-conséquence, on obtient directement la conséquence qui sera produite : si le

profil $s$ est choisi, alors $s(\omega)$ sera joué dans l'état du monde $\omega$ et la conséquence produite sera $\chi_s(\omega) = \mathbf{c}(s(\omega))$.

Soit maintenant un jeu CG $= (\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N})$ et un appareil corrélateur $\mathcal{S}$ bien défini au regard de CG. La satisfaction que procure un profil $s$ au joueur $i$ est donc celle que lui procure l'acte $\chi_s$ ; elle est évaluée par la règle de décision du joueur $i$ qui combine ses préférences et sa connaissance, c'est-à-dire à partir des structures $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \mathcal{W}_i)$ (la structure de préférence $\mathcal{V}_i$ est définie par jeu CG, les structures de connaissance et de règle de décision sont définies par l'appareil corrélateur $\mathcal{S}$). Cependant, lorsque le joueur $i$ reçoit le signal $\theta_i = \tau_i(\omega^*)$, il acquiert de l'information : il sait que $\omega^* \in H_i^{\theta_i}$. Il met à jour sa connaissance qui est alors capturée la capacité algébrique conditionnelle $\mathbf{w}_{i,|\theta_i}$ décrite par la structure $\mathcal{W}_{i,|\theta_i} = \text{cond}_i(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}) \in \mathcal{K}\!\mathit{n}_{\beta_i}(\Omega)$. Ainsi, le joueur $i$, après avoir reçu le signal $\theta_i = \tau_i(\omega^*)$, préfère au moins autant le profil $s$ au profil $s'$ si :

$$\mathbf{u}_i\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_{i,|\theta_i}, \chi_s\right) \succeq_i^{U_i} \mathbf{u}_i\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_{i,|\theta_i}, \chi_{s'}\right).$$

Un équilibre corrélé pur est un profil de stratégies pures signalisées tel qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie, quel que soit le signal qu'il reçoit.

**Définition 4.8 (Équilibre corrélé pur).** Soient $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ une situation de jeu, CG $= (\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N})$ un jeu à information complète en stratégies pures et $\mathcal{S} = \left(\Omega, (\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\lambda i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i)_{i\in N}\right)$ un appareil corrélateur bien défini au regard de CG. Un profil de stratégies pures signalisées $s = (s_1, \ldots, s_n)$ est un équilibre corrélé si et seulement si :

$$\forall i, \forall \theta_i, \nexists s_i',\ \mathbf{u}_i\left(\mathcal{V}_i, \text{cond}_i\left(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}\right), \chi_{s_i'.s_{-i}}\right) \succ_i^{U_i} \mathbf{u}_i\left(\mathcal{V}_i, \text{cond}_i\left(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}\right), \chi_s\right).$$

**Exemple 4.8 (Équilibre corrélé pur).** *Dans le jeu défini à l'exemple 4.6, en considérant l'appareil corrélateur de l'exemple 4.7, nous pouvons trouver un équilibre corrélé pur similaire à celui proposé par Aumann dans la théorie de l'utilité espérée (exemple 2.7). Considérons le profil de stratégies signalisées $s^*$ tel que :*

$$s_1^*(x) = U \qquad s_1^*(y \text{ ou } z) = D$$
$$s_2^*(z) = R \qquad s_2^*(x \text{ ou } y) = L$$

*dont l'acte équivalent $\chi_{s^*}$ vérifie :*

$$\chi_{s^*}(x) = \texttt{UL} \qquad \chi_{s^*}(y) = \texttt{DL} \qquad \chi_{s^*}(z) = \texttt{DR}$$

*Ce profil de stratégies pures signalisées est un équilibre corrélé. En effet aucun joueur, quel que soit le signal qu'il reçoit, n'a intérêt à changer de stratégie.*

— *Le joueur 1, s'il sait que l'état du monde est $x$, est alors certain que la conséquence sera* `UL`*. C'est sa conséquence préférée, il n'a pas intérêt à changer de stratégie. S'il sait que l'état du monde est $y$ ou $z$, alors les deux conséquences possibles sont* `DL` *et* `DR`*. S'il changeait de stratégie, les deux conséquences possibles seraient* `UL` *et* `UR`*. Il n'a pas donc intérêt à changer de stratégie non plus :* $\min(\texttt{DL}, \texttt{DR}) = \texttt{DR} \succ_1 \texttt{UR} = \min(\texttt{UL}, \texttt{UR})$.

— *Le joueur 2, s'il sait que l'état du monde est $z$, est certain que la conséquence sera* `DR`*. Son utilité est alors maximale :* $u_2(\texttt{DR}) = 5$*; il n'a pas intérêt à changer de stratégie. S'il sait que l'état du monde est $x$ ou $y$, alors les deux conséquences possibles sont* `UL` *et* `DL`*, et son utilité sachant cela (au sens de la règle de Laplace) est égale à $5/2$. Or, s'il choisissait l'autre stratégie $R$, son utilité serait aussi égale à $5/2$ : il n'a pas intérêt à changer de stratégie non plus.*

Considérons maintenant les stratégies mixtes. Le principe est identique : chaque joueur joue une stratégie mixte en fonction du signal qu'il reçoit. Cependant, comme nous l'avons vu à la sous-section 4.1.3, les stratégies mixtes imposent une contrainte d'homogénéité sur les connaissances. En effet, pour évaluer un profil de stratégies mixtes, on déduit une capacité algébrique jointe sur $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ grâce à une opération produit. De plus, cette capacité jointe sur $A$ sera combinée par chaque joueur $i$ avec sa propre connaissance sur $\Omega$, encore une fois grâce à l'opération produit. Les joueurs auront ainsi une connaissance sur $\Omega \times A$, par exemple un joueur ayant une croyance élevée en $(\omega, a) \in \Omega \times A$ pensera qu'il est vraisemblable qu'$\omega$ advienne et qu'on y joue $a$.

L'approche la plus simple consiste à exprimer les stratégies mixtes, les connaissances propres des joueurs et les opérateurs de conditionnement dans une même classe de connaissance $\mathcal{Kn}_\delta$. La théorie de l'incertitude est alors complètement homogène. Cependant, l'hypothèse est plus forte que nécessaire : nous pouvons permettre un plus grand degré de liberté dans nos choix de modélisation. Deux conditions sont nécessaires : d'une part les stratégies mixtes de tous les joueurs doivent être des capacités algébriques de la même classe de connaissance $\mathcal{Kn}_\delta$ ; d'autre part les connaissances propres à chaque joueur $i$ et l'opérateur de conditionnement doivent être exprimés dans une classe $\mathcal{Kn}_{\beta_i}$ généralisant $\mathcal{Kn}_\delta$ (telle que $\forall \Omega, \mathcal{Kn}_\delta(\Omega) \subseteq \mathcal{Kn}_{\beta_i}(\Omega)$). Alors les connaissances de deux joueurs $i$ et $j$ peuvent être exprimées dans des classes de capacités algébriques différentes. Ainsi, même en stratégies mixtes, les joueurs peuvent avoir des connaissances différentes (éventuellement contradictoires) exprimées dans des cadres de décision différents et peuvent être modélisés par des règles de décision différentes. La seule contrainte est que les stratégies mixtes (qui sont des capacités algébriques) soient exprimables dans chacun des cadres de décision considérés (au moins en tant que cas particulier). Par exemple, la connaissance concernant un appareil corrélateur peut être exprimée par une fonction de croyance pour un joueur et par des intervalles de probabilité pour un autre. Dans ce cas, les deux joueurs peuvent s'engager sur des stratégies mixtes probabilistes, car ils sont tous les deux capables de les interpréter dans leurs cadres de décision respectifs. En effet, $\forall \Omega, \mathcal{Kn}_{\mathrm{Pr}}(\Omega) \subseteq \mathcal{Kn}_{\mathrm{Bel}}(\Omega)$ et $\mathcal{Kn}_{\mathrm{Pr}}(\Omega) \subseteq \mathcal{Kn}_{\mathrm{PrIntv}}(\Omega)$.

**Définition 4.9 (Appareil corrélateur bien défini pour une extension en stratégies mixtes).** Soient $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i \in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ une situation de jeu, $\mathrm{CG} = \left(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i \in N}\right)$ un jeu à information complète pour la situation $\mathcal{CG}$ et $\mathrm{MCG} = \left(\mathrm{CG}, \mathcal{Kn}_\beta, \times^{\mathrm{cart}}, (\mathcal{U}'_i)_{i \in N}\right)$ une extension en stratégies mixtes de CG.

On dit qu'un appareil corrélateur $\mathcal{S} = \left(\Omega, \left(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i, \times_i^{\text{dep}}\right)_{i\in N}\right)$ est *bien défini* pour une extension en stratégies mixtes MCG si :

$$\forall i \in N, \left(\mathcal{K}n_\delta \subseteq \mathcal{K}n_{\beta_i}\right) \wedge \left(\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_i'\right) \wedge \left(\mathcal{V}_i \in \mathcal{P}refs_{\alpha_i}(\mathbb{X})\right).$$

Posons maintenant une situation de jeu $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i\in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$, un jeu $\text{CG} = \left(\mathcal{CG}, (\mathcal{V}_i)_{i\in N}\right)$ pour cette situation, une extension en stratégies mixtes $\text{MCG} = \left(\text{CG}, \mathcal{K}n_\beta, \times^{\text{cart}}, (\mathcal{U}_i)_{i\in N}\right)$ de ce jeu, et un appareil corrélateur $\mathcal{S} = \left(\Omega, \left(\mathcal{H}_i, \mathcal{F}_{\alpha_i,\beta_i}, \mathcal{W}_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{C}_i, \times_i^{\text{dep}}\right)_{i\in N}\right)$ bien défini.

Étant donné un profil de stratégies mixtes signalisées $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, on sait, pour chaque $\omega \in \Omega$, quel profil de stratégies mixtes (non signalisées) sera effectivement joué. On le note $\sigma(\omega) = (\sigma_1(\tau_1(\omega)), \ldots, \sigma_n(\tau_n(\omega)))$. Alors, pour tout $\omega$, on peut établir la connaissance jointe $\sigma_\omega^\times$ par l'opération de produit cartésien :

$$\sigma_\omega^\times = \times^{\text{cart}}(\sigma(\omega)) \in \mathcal{K}n_\delta(A) \subseteq \mathcal{K}n_{\beta_i}(A).$$

Par ailleurs, dans l'état du monde $\omega$, le joueur $i$ reçoit le signal $\tau_i(\omega) = \theta_i$. Il ne connaît pas nécessairement $\omega$, mais sait que $\omega \in H_i^{\theta_i}$. Il met à jour sa propre connaissance $\mathcal{W}_i$, qui devient ainsi :

$$\mathcal{W}_{i,|\theta_i} = \text{cond}_i\left(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}\right) \in \mathcal{K}n_{\beta_i}(A).$$

Enfin, cette connaissance mise à jour et propre au joueur $i$ doit maintenant être combinée avec la connaissance jointe induite par le profil de stratégies mixtes, grâce au produit dépendant :

$$\mathcal{W}_{i,|\theta_i}^{\times\sigma} = \times_i^{\text{dep}}(\mathcal{W}_{i,|\theta_i},\ \omega \mapsto \sigma_\omega^\times) \in \mathcal{K}n_{\beta_i}(\Omega \times A).$$

La connaissance du joueur $i$ est maintenant exprimée par une capacité algébrique sur le cadre de discernement $\Omega \times A$. Nous disposons par ailleurs de sa fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v}_i$ sur $\mathbb{X}$, et de sa règle de décision avec laquelle nous souhaitons comparer les profils de stratégies mixtes. Comme nous l'avons vu dans la section 4.1.3, il faut définir ce qui correspond à un « acte » (au sens de la théorie de la décision, définition 1.14), c'est-à-dire à une fonction $\chi : \Omega \times A \to \mathbb{X}$ associant à chaque élément $(\omega, a) \in \Omega \times A$ sa conséquence $x \in \mathbb{X}$. Or, la conséquence ne dépend pas ici de l'état du monde $\omega$, mais seulement des actions choisies par les joueurs : la situation modélisée impose que le choix du profil $a$ provoque la conséquence $\mathbf{c}(a)$. Ici encore, en considérant les stratégies mixtes, un seul « acte » est réalisable : $\chi^*(\omega, a) = \mathbf{c}(a)$. L'utilité d'un profil de stratégies mixtes, pour le joueur $i$, est ainsi l'utilité de $\chi^*$ au regard de la connaissance jointe induite d'une part par le profil de stratégie mixtes signalisées (sur les choix potentiels des autres joueurs) et d'autre part par la connaissance propre du joueur (sur les états du monde). Pour un joueur $i$ ayant reçu le signal $\theta_i$, l'utilité du profil de stratégies mixtes signalisées $\sigma$ est ainsi :

$$\mathbf{u}_i\Big(\mathcal{V}_i, \times_i^{\text{dep}}\big(\text{cond}_i(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}), \times^{\text{cart}}(\sigma(\omega))\big), \chi^*\Big).$$

*Remarque* 46. Ici encore, nous souhaitons comparer les différents profils de stratégies mixtes. Comme nous l'avons mentionné dans la section 4.1.3, nous ne comparons pas des actes étant donné une capacité algébrique, mais nous comparons des capacités algébriques étant donné l'« acte » $\chi^* = (\omega, a) \mapsto \mathbf{c}(a)$.

Un équilibre corrélé en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes signalisées tel qu'aucun joueur, quel que soit le signal qu'il reçoit, n'a intérêt à changer de stratégie.

**Définition 4.10 (Équilibre corrélé en stratégies mixtes).** Un profil de stratégies mixtes signalisées $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est un équilibre corrélé si et seulement $\forall i, \forall \theta_i$,

$$\nexists \sigma_i', \quad \mathbf{u}_i\Big(\mathcal{V}_i,\ \mathcal{W}_{i,|\theta_i}^{\times\sigma},\ (\omega, a) \mapsto \mathbf{c}(a)\Big) \prec^W \mathbf{u}_i\Big(\mathcal{V}_i,\ \mathcal{W}_{i,|\theta_i}^{\times\sigma_i'.\sigma_{-i}},\ (\omega, a) \mapsto \mathbf{c}(a)\Big),$$

où, pour tout profil de stratégies mixtes signalisées $\sigma$ :

$$\mathcal{W}_{i,|\theta_i}^{\times\sigma} = \times_i^{\text{dep}}\big(\text{cond}_i(\mathcal{W}_i, H_i^{\theta_i}),\ \omega \mapsto \times^{\text{cart}}(\sigma(\omega))\big) \in \mathcal{K}\!\mathit{n}_{\beta_i}(\Omega \times A).$$

## 4.2 Jeux hypergraphiques généralisés

Nous proposons dans cette section une définition des jeux hypergraphiques similaire à celle présentée pour les jeux à information complète dans la section précédente. En effet, les jeux hypergraphiques sont simplement une autre manière de représenter les jeux à information complète, souvent de manière succincte. Les joueurs participent à des jeux locaux, chaque joueur choisit une (unique) stratégie qui impactera le résultat de tout jeu local auquel il participe. L'utilité d'un joueur est la somme des utilités locales obtenues (voir section 2.1.1).

Afin d'unifier les définitions avec celles proposées ci-dessus pour les jeux à information complète généralisés, nous souhaitons d'abord définir une situation de jeu hypergraphique. Comme pour la définition 4.1, la situation de jeu ne décrit que les conséquences des actions, mais pas les préférences des joueurs, et ne fait donc pas référence à leur utilité. Un jeu hypergraphique étant composé de plusieurs jeux locaux, une conséquence locale $x_e$ adviendra dans chaque jeu local $e$. La conséquence globale d'un profil de stratégies sera alors le vecteur $(x_e)_e$ des conséquences locales advenues dans chaque jeu local $e$.

**Définition 4.11 (Situation de jeu hypergraphique).** Une situation de jeu hypergraphique est un quintuplet :

$$\mathcal{HG} = (N, (A_i)_{i\in N}, E, \mathrm{P}, (\mathbb{X}^e, \mathbf{c}^e)_{e\in E})$$

où :

- $N$ est l'ensemble des joueurs ;
- $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i$ ;
- $E$ est l'ensemble des jeux locaux ;
- $\mathrm{P} : E \to 2^N$ est la fonction donnant les participants des jeux locaux (tout joueur $i \in \mathrm{P}(e)$ joue dans le jeu local $e \in E$) ;

— $\mathbb{X}^e$ est l'ensemble des conséquences locales du jeu local $e \in E$ ;
— $\mathbf{c}^e : A_e \to \mathbb{X}^e$ est la fonction-conséquence du jeu local $e \in E$ (si le profil partiel[3] $a_e$ est joué, alors la conséquence $\mathbf{c}^e(a_e)$ advient localement).

La conséquence globale du profil du stratégie $a \in A$ est alors le vecteur constitué des conséquences obtenues localement :

$$\mathbf{c}(a) = (\mathbf{c}^e(a_e))_{e \in E} \in \mathbb{X} = \prod_{e \in E} \mathbb{X}^e.$$

*Remarque* 47. À l'inverse de la définition 2.4, un jeu local $e \in E$ est ici un simple identifiant. Le joueur $i$ y participe si $i \in \mathrm{P}(e)$. Il peut donc y avoir plusieurs jeux locaux dont les participants sont les mêmes.

Une telle situation de jeu hypergraphique $\mathcal{HG}$ décrit la situation de jeu à information complète $\mathcal{G} = (N, (A_i)_{i \in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ où les mêmes joueurs jouent avec les mêmes actions, où l'ensemble des conséquences globales $\mathbb{X}$ est l'ensemble des vecteurs $(x_e)_{e \in E}$ de conséquences locales et où la fonction-conséquence globale $\mathbf{c}$ est telle que la conséquence globale du profil $a$ est le vecteur $\mathbf{c}(a) = (\mathbf{c}^e(a^e))_{e \in E}$ dont les composantes sont les conséquences locales associées aux restrictions locales $a^e$ du profil $a$.

Un jeu hypergraphique HG est un jeu à information complète établi sur une situation de jeu hypergraphique : cela consiste simplement à donner les préférences des joueurs sur l'ensemble des conséquences globales $\mathbb{X}$. Cela n'entraîne pas de nouvelle définition : $\mathrm{HG} = \left(\mathcal{HG}, (\mathcal{V}_i)_{i \in N}\right)$, avec $\forall i \in N, \mathcal{V}_i \in \mathcal{Prefs}(\mathbb{X})$, selon la définition 4.2.

Notre définition est bien plus générale que la définition classique (définition 2.4). D'abord, parce que les préférences globales des joueurs sont décrites par une fonction d'utilité algébrique ne prenant pas nécessairement ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Ensuite, parce que nous n'avons pas encore imposé que cette fonction d'utilité algébrique soit décomposée en une somme d'utilité algébriques locales. Enfin, parce que l'utilité globale d'un joueur dépend de toutes les conséquences locales, et non pas uniquement des conséquences locales des jeux auxquels il participe. Ces spécialisations seront vues comme des cas particuliers.

Soit $\mathrm{HG} = \left(\mathcal{HG}, (V_i, \mathbf{v}_i, \succeq_i^{V_i})_{i \in N}\right)$ un jeu à information complète sur la situation de jeu hypergraphique $\mathcal{HG} = (N, (A_i)_{i \in N}, E, \mathrm{P}, (\mathbb{X}^e, \mathbf{c}^e)_{e \in E})$. Le jeu HG est décomposable si les utilités des joueurs sur $\mathbb{X}$ peuvent être exprimées comme une sommation abstraite de leurs utilités locales (sur $\mathbb{X}^e$ pour tout jeu local $e \in E$).

**Définition 4.12 (Jeu hypergraphique décomposable).** Le jeu HG est *décomposable par* $(\oplus_i, 0_{V_i}, (\mathbf{v}_i^e)_{e \in E})_{i \in N}$ si pour tout joueur $i \in N$, $(V_i, \oplus_i, 0_{V_i})$ est un monoïde commutatif et si :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \mathbf{v}_i(x) = \bigoplus_{e \in E}{}_i \, \mathbf{v}_i^e(x^e).$$

3. Similairement à ce qui est présenté à la définition 2.4, le profil partiel $a_e$ est la restriction du profil $a$ aux joueurs participant au jeu local $e$, c'est-à-dire le vecteur $(a_i)_{i \in \mathrm{P}(e)}$.

Le jeu HG est graphiquement décomposable si les joueurs obtiennent des utilités locales uniquement dans les jeux locaux auxquels ils participent.

**Définition 4.13 (Jeu hypergraphique graphiquement décomposable).** Le jeu HG est *graphiquement décomposable par* $(\oplus_i, 0_{V_i}, (\mathbf{v}_i^e)_{e\in E})_{i\in N}$ si il est décomposable par $(\oplus_i, 0_{V_i}, (\mathbf{v}_i^e)_{e\in E})_{i\in N}$ et si :

$$\forall i \in N, \forall e \in E, \quad i \notin \mathrm{P}(e) \implies \forall x^e \in \mathbb{X}^e, \mathbf{v}_i^e(x^e) = 0_{V_i}.$$

Ainsi, si un jeu hypergraphique HG est tel que

- Les joueurs ont des préférences quantitatives ($\mathrm{HG} = (\mathcal{HG}, (\mathbb{R}, \mathbf{v}_i, \geq)_{i\in N})$),
- HG est graphiquement décomposable par la somme (c'est-à-dire par le triplet $(+, 0, \mathbf{v}_i^e)_{i\in N}$), et
- Aucun jeu local n'a les mêmes participants (c'est-à-dire pour tous jeux locaux $e, e' \in E$, $\mathrm{P}(e) \neq \mathrm{P}(e')$),

alors HG est un jeu hypergraphique classique : au sens de la définition 2.4 il s'agit de :

$$(N, E, (A_i)_{i\in N}, (\mathbf{v}_i^{e'})_{e\in E, i\in e}).$$

*Remarque* 48. Lorsqu'un jeu hypergraphique est décomposable ou graphiquement décomposable, il peut être défini simplement en donnant les fonctions d'utilité locales, pour chaque joueur et chaque jeu local, au lieu des fonctions d'utilité globales. Ainsi, la structure $\left(\mathcal{HG}, \left(V_i, (\oplus_i, 0_{V_i}, (\mathbf{v}_i^e)_{e\in E}), \succeq_i^V\right)_{i\in N}\right)$ définit le jeu hypergraphique décomposable :

$$\mathrm{HG} = \left(\mathcal{HG}, \left(V_i,\ x \mapsto \bigoplus_{e\in E}{}_i\, \mathbf{v}_i^e(x^e),\ \succeq_i^V\right)_{i\in N}\right).$$

**Exemple 4.9 (Situation de jeu et jeu hypergraphique).** *Considérons le jeu de conservation écologique de l'exemple 2.2, dans lequel un garde-chasse $G$ et deux braconniers $B_1$ et $B_2$ doivent chacun décider d'aller en $P_1$ ou en $P_2$ (le diagramme est donné en figure 2.2). Les braconniers préfèrent éviter le garde-chasse (alors ils peuvent braconner et gagnent 10, sinon ils doivent payer une amende et leur utilité est $10 - y$), le garde-chasse préfère être avec le plus de braconniers possible (alors il peut les arrêter et son utilité est de $x$ par arrestation).*

*Les braconniers n'interagissent pas entre eux, mais uniquement avec le garde-chasse. Il y a donc une forme hypergraphique intuitive, où les deux jeux locaux $e_i$ décrivent chacun l'interaction entre le garde-chasse et le braconnier $B_i$ :*

$$\mathcal{HG} = (N, (A_i)_{i\in N}, E, \mathrm{P}, (\mathbb{X}^e)_{e\in E}, (\mathbf{c}^e)_{e\in E})$$

*définie par :*

$$\begin{aligned} N &= \{G, B_1, B_2\} \\ A_i &= \{P_1, P_2\} && \forall i \in N \\ E &= \{e_1, e_2\} \\ \mathrm{P}(e_i) &= \{G, B_i\} && \forall e_i \in E \\ \mathbb{X}^{e_1} &= \{\texttt{B1 arrêté}, \texttt{B1 braconne}\} \\ \mathbb{X}^{e_2} &= \{\texttt{B2 arrêté}, \texttt{B2 braconne}\} \end{aligned}$$

*et où les fonctions-conséquence locales* $\mathbf{c}^{e_i} : A_G \times A_{B_i} \to \mathbb{X}^{e_i}$ *sont définies par la situation, par exemple* $\mathbf{c}^{\{G,B_1\}}(P_1, P_2) = \texttt{B1 braconne}$. *Les valeurs que prennent ces fonctions peuvent être lues sur la figure 4.2 représentant la situation de jeu hypergraphique.*

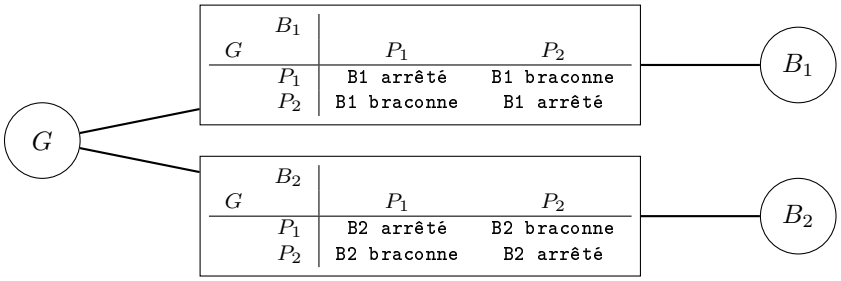



FIGURE 4.2 – Situation de jeu hypergraphique de l'exemple 4.9

*L'ensemble des conséquences globales est :*

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}^{e_1} \times \mathbb{X}^{e_2} = \left\{ \begin{matrix} (\texttt{B1 arrêté}, \texttt{B2 arrêté}), & (\texttt{B1 arrêté}, \texttt{B2 braconne}), \\ (\texttt{B1 braconne}, \texttt{B2 arrêté}), & (\texttt{B1 braconne}, \texttt{B2 braconne}) \end{matrix} \right\},$$

*et la fonction-conséquence globale est telle que* $\mathbf{c}(a) = (\mathbf{c}^{e_1}(a_G, a_{B_1}), \mathbf{c}^{e_2}(a_G, a_{B_2}))$.

*Les fonctions d'utilité des joueurs sont quantitatives et définissent le jeu hypergraphique* $\mathrm{HG} = (\mathcal{HG}, (\mathbb{R}, \mathbf{v}_i, \geq)_{i \in N})$ *où les fonctions* $\mathbf{v}_i$ *sont telles que :*

$$\mathbf{v}_G(x^{e_1}, x^{e_2}) = \sum_{e_i \in E} \begin{cases} x & \textit{si } x^{e_i} = \texttt{B}i\ \texttt{arrêté} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} = \sum_{e_i \in E} \mathbf{v}_G^{e_i}(x^{e_i})$$

$$\mathbf{v}_{B_i}(x^{e_1}, x^{e_2}) = \sum_{e_k \in E} \begin{cases} 10 & \textit{si } x^{e_k} = \texttt{B}i\ \texttt{braconne} \\ 10 - y & \textit{si } x^{e_k} = \texttt{B}i\ \texttt{arrêté} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} = \sum_{e_k \in E} \mathbf{v}_{B_i}^{e_k}(x^{e_k})$$

*Ce jeu est graphiquement décomposable par* $(+, 0, \mathbf{v}_i^{e_k})$. *En effet, chaque braconnier* $B_i$ *participe au jeu local* $e_i$ *mais pas au jeu local* $e_k$ $(k \neq i)$. *Or, dans* $e_k$, *l'utilité locale du braconnier* $B_i$ *est nulle (quelle que soit la conséquence* $x^{e_k}$ *qui*

*y advient, c'est-à-dire quel que soit les stratégies choisie par le garde-chasse et par l'autre braconnier).*

**Exemple 4.10 (Jeu hypergraphique non graphiquement décomposable).** *Reprenons la situation de jeu hypergraphique de l'exemple précédent, mais supposons que les préférences du braconnier $B_1$ sont telles qu'il préfère être le seul braconnier à braconner (par exemple, parce qu'il vendra sa chasse plus cher). Considérons les conséquences globales $x$ et $x' \in \mathbb{X}$ suivantes :*

$$x = (\texttt{B1 braconne}, \texttt{B2 arrêté})$$
$$x' = (\texttt{B1 braconne}, \texttt{B2 braconne})$$

*Pour la conséquence $x$, le joueur 1 est le seul à braconner. Pour la conséquence $x'$, le braconnier $B_2$ braconne aussi. Donc, $B_1$ préfère $x$ à $x'$, c'est-à-dire :*

$$\mathbf{v}_{B_1}(x) \quad \succ^V_{B_1} \quad \mathbf{v}_{B_1}(x').$$

*Or, $x$ et $x'$ ne diffèrent que par la conséquence locale $x^{e_2} \neq x'^{e_2}$. Le joueur 1 les distingue, elles ne peuvent donc pas avoir la même utilité algébrique pour lui : ce jeu hypergraphique n'est pas graphiquement décomposable.*

## 4.3 Jeux à information incomplète généralisés

Nous nous intéressons maintenant aux jeux à information incomplète, qui permettent de modéliser des situations de décision multi-agents où les préférences des agents sont mal connues (voir la section 2.2.2), mais aussi ici des situations où leurs connaissances, leurs règles de décision et plus généralement les cadres de décision dans lesquels ils sont modélisés sont mal connus.

De la même façon qu'à la section précédente, nous proposons de considérer d'abord la situation d'un jeu à information incomplète, qui décrit les paramètres « objectifs » du jeu mais ne décrit ni les préférences ni la connaissance des joueurs. Pour une situation de jeu donnée, nous pourrons considérer pour chaque joueur différents modèles d'agent (qui décrivent ses préférences, sa connaissance et la règle de décision par laquelle on le modélise, voir la section 3.1). Ici encore, les modèles d'agent des joueurs sont totalement indépendants lorsqu'on considère les stratégies pures (les joueurs peuvent avoir des connaissances différentes exprimées dans des cadres de décision différents) ; une certaine homogénéité des théories de l'incertain devient nécessaire lorsqu'on considère les stratégies mixtes (alors les agents peuvent avoir des connaissances différentes, mais exprimées dans des cadres de décision compatibles).

Nous constaterons que nous avons déjà répondu aux principales subtilités dans la section 4.1 en traitant les stratégies mixtes et les équilibres signalisés pour les jeux à information complète.

### 4.3.1 Situation de jeu et jeu à information incomplète

Commençons par étendre la définition d'un jeu bayésien à notre cadre de modélisation. Nous parlons de jeu à information incomplète pour ne pas réutili-

ser le vocabulaire de la théorie de l'utilité espérée (les jeux bayésiens deviennent ainsi un cas particulier des jeux à information incomplète). À l'inverse d'Harsanyi et de la définition 2.21, nous basons nos définitions sur le modèle à vecteurs aléatoire, c'est-à-dire sur l'interprétation en terme de signaux que les joueurs reçoivent. Nous verrons en fin de section que le modèle à loterie initiale (interprétation en terme de types des joueurs) est moins général dès lors qu'on quitte la théorie de l'utilité espérée.

Considérons un cadre de discernement $\Omega$, un ensemble $N$ de joueurs et un appareil[4] envoyant à chaque joueur $i$ un signal $\theta_i = \tau_i(\omega)$ en fonction de l'état du monde $\omega \in \Omega$. Chaque joueur $i$ choisit son action $a_i \in A_i$ en fonction du signal $\theta_i$ qu'il a reçu : les joueurs jouent donc des stratégies signalisées. Ici, à l'inverse du cadre des équilibres corrélés, la conséquence obtenue ne dépend pas uniquement des stratégies choisies par les joueurs, mais aussi de l'état du monde $\omega$.

**Définition 4.14 (Situation de jeu à information incomplète).** Une situation de jeu à information incomplète est un $n$-uplet :

$$\mathcal{G} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c})$$

où :
- $N$ est un ensemble fini de joueurs ;
- $\Omega$ est un cadre de discernement ;
- $\mathbb{X}$ est un ensemble de conséquences ;
- $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i \in N$ ;
- $\Theta_i$ est l'ensemble des signaux que peut recevoir le joueur $i \in N$ ;
- $\tau_i : \Omega \to \Theta_i$ est la *fonction-signal* du joueur $i$ ;
- $\mathbf{c} : A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega \to \mathbb{X}$ est la *fonction-conséquence*.

*Remarque* 49. Une situation de jeu à information incomplète peut être comprise comme une collection de situations de jeu à information complète : une pour chaque état du monde. En effet, si l'état du monde est $\omega^*$, alors la situation de jeu est effectivement :

$$\mathcal{G}^{\omega^*} = (N, (A_i)_{i \in N}, \mathbb{X}, a \mapsto \mathbf{c}(a, \omega^*)) .$$

**Exemple 4.11 (Situation de jeu à information incomplète).** *Considérons la situation du jeu de sécurité écologique décrite ci-dessous, dans laquelle un garde-chasse $G$ et un braconnier $B$ doivent décider sur quelle parcelle se rendre : trois parcelles $P_1$, $P_2$ et $P_3$ sont accessibles aux deux joueurs, comme indiqué sur la figure 4.3.*

*Dans cet exemple, il n'y a qu'un seul troupeau, sur l'une des parcelles. C'est donc la seule parcelle qui peut être braconnée par le braconnier, et la seule où le garde-chasse peut arrêter le braconnier. Cependant, ces deux joueurs ne*

4. Cet appareil est semblable à un appareil corrélateur au sens de la définition 4.5. Cependant, il n'est pas choisi par les joueurs mais imposé par la situation modélisée : il est donc décrit par la situation de jeu à information incomplète.

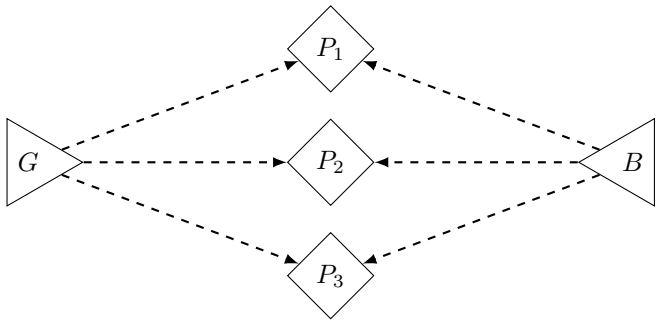



FIGURE 4.3 – Diagramme du jeu de conservation écologique 4.11

*connaissent pas exactement l'emplacement de ce troupeau : le garde-chasse est informé de la présence ou non du troupeau en $P_1$, le braconnier de sa présence ou non en $P_2$. Nous modélisons donc la situation de jeu à information incomplète :*

$$\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c})$$

*où, en notant $T_k$ le signal « le troupeau est en $P_k$ » et $T_{k,l}$ le signal « le troupeau est en $P_k$ ou $P_l$ » :*

$$N = \{G, B\} \qquad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$
$$\mathbb{X} = \{\texttt{Rien}, \texttt{Braconnage}, \texttt{Arrestation}\}$$
$$A_G = \{P_1, P_2, P_3\} \qquad A_B = \{P_1, P_2, P_3\}$$
$$\Theta_G = \{T_1, T_{2,3}\} \qquad \Theta_B = \{T_2, T_{1,3}\}$$
$$\tau_G(\omega_k) = \begin{cases} T_1 & si\ k = 1 \\ T_{2,3} & sinon \end{cases} \qquad \tau_B(\omega_k) = \begin{cases} T_2 & si\ k = 2 \\ T_{1,3} & sinon \end{cases}$$
$$\mathbf{c}((P_g, P_b), \omega_k) = \begin{cases} \texttt{Arrestation} & si\ b = g = k \\ \texttt{Braconnage} & si\ b = k \neq g \\ \texttt{Rien} & sinon \end{cases}$$

Une situation de jeu à information incomplète est une situation de décision multi-agents où les joueurs jouent des stratégies signalisées. Tout profil de stratégies pures signalisées $s$ définit un acte $\chi_s : \Omega \to \mathbb{X}$ (au sens de la théorie de la décision, définition 1.14). Bien entendu, à l'inverse du cas mono-agent, un joueur ne peut généralement pas décider seul de l'« acte » en choisissant son action : l'« acte » serait en quelque sotre choisi collectivement par l'ensemble des joueurs (sans concertation cependant, puisque nous nous intéressons aux jeux stratégiques).

**Définition 4.15 (Acte équivalent à un profil de stratégies pures signalisées).** Soit $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c})$ une situation de jeu à information

incomplète. Un profil de stratégies pures signalisées $s$ définit l'acte $\chi_s : \Omega \to \mathbb{X}$ :

$$\chi_s(\omega) = \mathbf{c}(s(\omega), \omega).$$

En effet, si l'état du monde est $\omega$, alors chaque joueur reçoit le signal $\theta_i = \tau_i(\omega)$. Le profil de stratégies pures effectivement joué est donc $s(\omega) = (s_1(\tau_1(\omega)), \ldots, s_n(\tau_n(\omega))) \in A$ et la conséquence obtenue est $\mathbf{c}(s(\omega), \omega)$.

**Exemple 4.12 (Acte équivalent à un profil de stratégies pures signalisées).** *Dans la situation de jeu décrite à l'exemple 4.11, supposons que le garde-chasse décide d'aller en $P_1$ s'il y observe le troupeau, sinon en $P_2$, et que le braconnier décide d'aller en $P_2$ s'il y observe le troupeau, sinon en $P_3$. Alors, leurs stratégies signalisées $s_G$ et $s_B$ sont telles que :*

$$s_G(T_1) = P_1 \qquad s_G(T_{2,3}) = P_2 \qquad s_B(T_2) = P_2 \qquad s_B(T_{1,3}) = P_3.$$

*Le profil de stratégies pures signalisées correspondant est $s = (s_G, s_B)$. Pour chaque état du monde $\omega_k \in \Omega$, la conséquence $\chi_s(\omega_k)$ de ce profil est :*

$$\begin{aligned}
\chi_s(\omega_1) &= \mathbf{c}\left(s(\omega_1),\ \omega_1\right) = \mathbf{c}\left((P_1, P_3), \omega_1\right) = \texttt{Rien} \ ; \\
\chi_s(\omega_2) &= \mathbf{c}\left(s(\omega_2),\ \omega_2\right) = \mathbf{c}\left((P_2, P_2), \omega_2\right) = \texttt{Arrestation} \ ; \\
\chi_s(\omega_3) &= \mathbf{c}\left((s(\omega_3),\ \omega_3\right) = \mathbf{c}\left((P_2, P_3), \omega_3\right) = \texttt{Braconnage}.
\end{aligned}$$

De la même manière que pour les jeux à information complète, une situation de jeu à information incomplète décrit les paramètres « objectifs » du problème. Nous pourrions définir plusieurs jeux à information incomplète sur cette situation : ils ne diffèreraient alors que par les préférences (sur $\mathbb{X}$), les connaissances (sur $\Omega$) et les règles de décisions des joueurs (c'est-à-dire par leurs modèles d'agent respectifs) – ainsi que par le type de stratégies mixtes considérées le cas échéant..

Comme pour les jeux bayésiens, nous souhaitons modéliser des situations où l'incertitude pèse sur les conséquences. Grâce à la notion de *type* (discutée à la section 2.2.1 et reprise à la section 4.3.2), cela permet également d'exprimer l'incertitude sur les préférences des agents. Mais nous souhaitons aussi pouvoir modéliser des situations où l'incertitude pèse sur le modèle choisi pour tel ou tel joueur (par exemple : Quelles connaissances a-t'il ? Est-il probabiliste ou possibiliste ? Est-il optimiste ou pessimiste ?). Pour cette raison, nous ne supposerons pas que la connaissance a priori est commune, ni même qu'elle est unique pour un joueur donné. La connaissance, et plus généralement le modèle d'agent, dépendra du signal reçu par le joueur : pour deux états du monde $\omega$ et $\omega'$, un joueur $i$ pourra être décrit par deux modèles d'agent différents, éventuellement exprimés dans des cadres de décision différents (nous modélisons un tel problème dans l'exemple 4.14 à la prochaine section). Les théories de l'incertitude pourront ainsi être totalement hétérogènes. Bien entendu, lorsque ces modèles d'agents sont similaires (par exemple, lorsque tous sont basés sur la règle de l'utilité espérée) et que leurs structures de connaissance sont obtenues par le conditionnement d'une connaissance commune, nous retrouvons le cadre usuel.

**Définition 4.16 (Jeu à information incomplète).** Soit une situation de jeu à information incomplète $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}, \mathbf{c})$. Un jeu à information incomplète IG sur $\mathcal{IG}$ est une paire :

$$\text{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\mathcal{I}_{(i,\theta_i)}\right)_{i\in N, \theta_i\in\Theta_i}\right)$$

où $\mathcal{I}_{(i,\theta_i)} = \left(\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)}\right) \in \mathcal{A}gent_{\alpha_{(i,\theta_i)},\beta_{(i,\theta_i)}}(\mathbb{X}, \Omega)$ est le modèle d'agent sur $\mathbb{X}$ et $\Omega$ décrivant le joueur $i \in N$ lorsqu'il reçoit le signal $\theta_i \in \Theta_i$.

Dans un jeu à information incomplète, tout joueur $i$, s'il reçoit le signal $\theta_i$, est modélisé dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{\alpha_{(i,\theta_i)},\beta_{(i,\theta_i)}}$, c'est-à-dire que sa fonction d'utilité algébrique $\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}$ est décrite par la structure $\mathcal{V}_{(i,\theta_i)} \in \mathcal{P}refs_{\alpha_{(i,\theta_i)}}(\mathbb{X})$, sa capacité algébrique $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}$ est décrite par la structure $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)} \in \mathcal{K}n_{\beta_{(i,\theta_i)}}(\Omega)$ et sa règle de décision $\mathbf{u}_{(i,\theta_i)}$ est décrite par la structure $\mathcal{U}_{(i,\theta_i)} \in \mathcal{D}ec_{\alpha_{(i,\theta_i)},\beta_{(i,\theta_i)}}$. Ce joueur préfère alors au moins autant le profil $s$ à $s'$ si et seulement si :

$$\mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\left(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{w}_{(i,\theta_i)}, \chi_s\right) \succeq^{U}_{(i,\theta_i)} \mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\left(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{w}_{(i,\theta_i)}, \chi_{s'}\right)$$

**Exemple 4.13 (Jeu à information incomplète et utilités des joueurs).** *Reprenons la situation donnée ci-dessus (exemple 4.11). Supposons que les préférences du garde-chasse sont quantitatives, identiques quel que soit le signal $\theta_G \in \{T_1, T_{2,3}\}$ qu'il reçoit, et telles que :*

$$\mathbf{v}_{(G,\theta_G)}(\texttt{Arrestation}) = 10 \quad \mathbf{v}_{(G,\theta_G)}(\texttt{Rien}) = 0 \quad \mathbf{v}_{(G,\theta_G)}(\texttt{Braconnage}) = -5.$$

*Ces préférences sont décrites par la structure de préférence quantitative :*

$$\mathcal{V}_{(G,\theta_G)} = \left(\mathbb{R}, \geq, \mathbf{v}_{(G,\theta_G)}\right) \in \mathcal{P}refs_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}).$$

*Le garde-chasse dispose de l'information suivante : le troupeau a été vu en $P_1$ la veille, et il y a une chance sur deux qu'il se soit déplacé durant la nuit. S'il observe la présence du troupeau en $P_1$, sa connaissance est modélisée par la mesure de probabilité $\mathbf{w}_{(G,T_1)}$ dont la distribution $p$ vérifie $p(\omega_1) = 1$. S'il n'observe pas le troupeau en $P_1$, il sait qu'il y a autant de chance qu'il soit en $P_2$ ou en $P_3$, ce qu'on modélise par la mesure de probabilité $\mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}$ dont la distribution $p'$ vérifie $p'(\omega_2) = p'(\omega_3) = 1/2$. Formellement, nous modélisons les connaissances du garde-chasse par deux structures de la classe $\mathcal{K}n_{\text{Pr}}(\Omega)$ :*

$$\mathcal{W}_{(G,T_1)} = \left([0,1], \geq, \mathbf{w}_{(G,T_1)}\right) \qquad \mathcal{W}_{(G,T_{2,3})} = \left([0,1], \geq, \mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}\right)$$

*Enfin, nous modélisons le garde-chasse, quel que soit le signal $\theta_G$ qu'il reçoit, par la règle de l'utilité espérée, décrite par la structure $\mathcal{U}^{\text{EU}} \in \mathcal{D}ec_{\mathbb{R},\text{Pr}}$.*

*Supposons maintenant que les préférences du braconnier sont qualitatives, complètement ordonnées, identiques quel que soit le signal $\theta_B \in \{T_2, T_{1,3}\}$ qu'il reçoit, et telles que :*

$$\texttt{Braconnage} \succ^{\mathbb{X}}_{(B,\theta_B)} \texttt{Rien} \succ^{\mathbb{X}}_{(B,\theta_B)} \texttt{Arrestation}.$$

*Ces préférences sont décrites par la structure de préférence qualitative :*

$$\mathcal{V}_{(B,\theta_B)} = \left(\mathbb{X}, \succeq^{\mathbb{X}}_{(B,\theta_B)}, x \mapsto x\right) \in \mathcal{P}refs_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}).$$

*Le braconnier ne connaît rien d'autre que le signal qu'il reçoit : soit le troupeau est en $P_2$ (lorsqu'il reçoit le signal $\theta_B = T_2$), soit le troupeau n'y est pas (lorsqu'il reçoit $\theta_B = T_{1,3}$). Ce sont des connaissances catégoriques capturées par les mesures de nécessité suivantes :*

$$\mathbf{w}_{(B,T_2)}(B) = \begin{cases} 1 & si\ \{\omega_2\} \subseteq B \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad \mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}(B) = \begin{cases} 1 & si\ \{\omega_1, \omega_3\} \subseteq B \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*et décrites formellement par deux structures de la classe $\mathcal{K}n_{\mathrm{Ign}}(\Omega)$ :*

$$\mathcal{W}_{(B,T_2)} = \left(\{0,1\}, \geq, \mathbf{w}_{(B,T_2)}\right) \qquad \mathcal{W}_{(B,T_{1,3})} = \left(\{0,1\}, \geq, \mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}\right)$$

*Enfin, nous modélisons le braconnier, quel que soit le signal $\theta_B$ qu'il reçoit, par la règle de décision* Min *(ou critère de Wald, définition 1.18), décrite par la structure $\mathcal{U}^{\mathrm{Min}}$.*

*Nous avons effectué tous nos choix de modélisation : pour chaque signal $\theta_i$ que peut recevoir chaque joueur $i$, nous avons donné le modèle d'agent $\mathcal{I}_{(i,\theta_i)} = \left(\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)}\right)$ décrivant ses préférences, sa connaissance et sa règle de décision. Ainsi, le jeu à information incomplète que nous modélisons est :*

$$\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\mathcal{I}_{(i,\theta_i)}\right)_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}\right).$$

*Nous pouvons maintenant évaluer l'utilité de tout profil de stratégies pures signalisées, pour tout joueur, quel que soit le signal qu'il reçoit. Par exemple, le profil $\sigma$ de l'exemple 4.12, tel que :*

$$s_G(T_1) = P_1 \qquad s_G(T_{2,3}) = P_2 \qquad s_B(T_2) = P_2 \qquad s_B(T_{1,3}) = P_3,$$

*est associé aux utilités suivantes :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{(G,T_1)}(\mathbf{v}_{(G,T_1)}, \mathbf{w}_{(G,T_1)}, \chi_s) &= \sum_{\omega_k \in \Omega} \mathbf{w}_{(G,T_1)}(\{\omega_k\}) \times \mathbf{v}_{(G,T_1)}(\chi_s(\omega_k)) \\
&= 1 \times 0 + 0 \times 10 + 0 \times (-5) = 0 \\
\mathbf{u}_{(G,T_{2,3})}(\mathbf{v}_{(G,T_{2,3})}, \mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}, \chi_s) &= \sum_{\omega_k \in \Omega} \mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}(\{\omega_k\}) \times \mathbf{v}_{(G,T_{2,3})}(\chi_s(\omega_k)) \\
&= 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times (-5) = 2.5 \\
\mathbf{u}_{(B,T_2)}(\mathbf{v}_{(B,T_2)}, \mathbf{w}_{(B,T_2)}, \chi_s) &= \min_{\omega_k \in \{\omega_2\}} \left(\mathbf{v}_{(G,T_2)}(\chi_s(\omega_k))\right) \\
&= \min\left(\texttt{Arrestation}\right) = \texttt{Arrestation} \\
\mathbf{u}_{(B,T_{1,3})}(\mathbf{v}_{(B,T_{1,3})}, \mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}, \chi_s) &= \min_{\omega_k \in \{\omega_1,\omega_3\}} \left(\mathbf{v}_{(B,T_{1,3})}(\chi_s(\omega_k))\right) \\
&= \min\left(\texttt{Rien}, \texttt{Braconnage}\right) \\
&= \texttt{Rien}.
\end{aligned}$$

Les concepts de solution présentés pour les jeux bayésiens (section 2.2.2) sont des concepts cardinaux, dans le sens où l'utilité espérée ne peut être calculée que sur des préférences quantitatives. Cependant, si l'on considère les valeurs de l'utilité espérée comme des scores de préférence, alors les concepts de dominance et d'équilibre de Nash sont définis uniquement par comparaison de ces scores : ce sont bien les mêmes concepts ordinaux considérés déjà pour les jeux à information complète, que l'on applique sur des scores qui, eux, font intervenir des valeurs cardinales. Cela étant, l'extension du concept d'« équilibre bayésien » (c'est-à-dire du concept d'équilibre de Nash dans les jeux bayésiens) à notre cadre algébrique est directe et triviale : un profil de stratégies pures signalisées est un équilibre de Nash si et seulement si aucun des joueurs, quel que soit le signal qu'il reçoit, n'a intérêt à changer de stratégie.

**Définition 4.17 (Équilibre de Nash dans les jeux à information incomplète).** Soient $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}, \mathbf{c})$ une situation de jeu à information incomplète et $\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\mathcal{I}_{(i,\theta_i)}\right)_{i\in N, \theta_i\in\Theta_i}\right)$ un jeu à information incomplète. Un profil de stratégies pures signalisées $s$ est un équilibre de Nash si et seulement si $\forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\nexists s'_i \in S_i, \quad \mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\big(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, \chi_{s'_i.s_{-i}}\big) \quad \succ^U_{(i,\theta_i)} \quad \mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\big(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, \chi_s\big).$$

Le lecteur aura remarqué la similitude entre la définition 4.17 ci-dessus et la définition 2.25 d'une part, où la fonction $\mathrm{EU}_{u_i}$ remplace la fonction $\mathbf{u}_i$, et la définition 4.4 d'autre part, où la fonction $\mathbf{v}_i \circ \mathbf{c}$ remplace la fonction $\mathbf{u}_i$ (et où la notion de signal n'apparaît pas). En effet, quelque soit le critère avec lequel un joueur évalue un profil de stratégies ($\mathbf{u}$, EU, $\mathbf{v} \circ \mathbf{c}$, etc.), il y joue une meilleure réponse s'il n'a pas de meilleure stratégie à jouer (au sens de ce critère) ; il s'agit d'un équilibre de Nash si chacun joue une meilleure réponse.

### 4.3.2 La notion de type et le modèle à loterie initiale

Harsanyi, dans son article fondateur, discute longuement la notion de *type* (Harsanyi, 1967). En effet, il est très intéressant de pouvoir modéliser des joueurs dont on ignore les caractéristiques (chaque joueur peut être de tel ou tel type). Puisqu'il se place dans une approche probabiliste, Harsanyi nomme *Modèle à loterie initiale* une telle approche basée sur les types potentiels des joueurs : chaque joueur $i$ est « tiré au sort » parmi une population de joueurs $i$ potentiels (voir la section 2.2.1). Les préférences d'un joueur dépendent alors bien sûr du profil de stratégies joué, mais aussi de son propre type et des types des autres joueurs. Par exemple : si un joueur peut être de type « altruiste » ou « égoiste », alors on ignore s'il préfère ou non les conséquences qui plaisent aussi aux autres joueurs ; si un joueur peut être de type « appréciable » ou « détestable », alors on ignore si les autres joueurs préfèrent ou non les conséquences qui lui plaisent aussi. Avec la notion de type, ce n'est pas la conséquence qui est incertaine (elle ne dépend que du profil de stratégies joué), mais les caractéristiques des joueurs.

**Exemple 4.14 (Incertitude sur le type des joueurs).** *Considérons la situation de jeu à information complète de l'exemple 4.1, où un garde-chasse et un braconnier doivent chacun choisir d'aller en $P_1$ ou en $P_2$. Ici, l'information est complète : la conséquence obtenue ne dépend que du choix des deux joueurs. Par contre, supposons que nous souhaitons modéliser le fait que le garde-chasse peut être soit intègre, soit corrompu, ce que le braconnier ignore (mais que le garde-chasse sait évidemment). Nos choix de modélisation sont les suivants :*

— *Si le garde-chasse est intègre (I), alors ses préférences et celles du braconnier sont telles que décrites à l'exemple 4.2 :*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G^I(\texttt{Arrestation}) &= x & \mathbf{v}_B^I(\texttt{Arrestation}) &= 10 - y \\ \mathbf{v}_G^I(\texttt{P1 braconné}) &= 0 & \mathbf{v}_B^I(\texttt{P1 braconné}) &= 10 \\ \mathbf{v}_G^I(\texttt{P2 braconné}) &= 0 & \mathbf{v}_B^I(\texttt{P2 braconné}) &= 10. \end{aligned}$$

— *Si le garde-chasse est corrompu (C), alors il n'a aucun intérêt à arrêter le braconnier. Dans ce cas, il ne souhaite pas arrêter le braconnier, et préfère donc se rendre sur parcelle différente. Les préférences du braconnier sont inchangées.*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G^C(\texttt{Arrestation}) &= -x & \mathbf{v}_B^C(\texttt{Arrestation}) &= 10 - y \\ \mathbf{v}_G^C(\texttt{P1 braconné}) &= 0 & \mathbf{v}_B^C(\texttt{P1 braconné}) &= 10 \\ \mathbf{v}_G^C(\texttt{P2 braconné}) &= 0 & \mathbf{v}_B^C(\texttt{P2 braconné}) &= 10. \end{aligned}$$

*Puisque le braconnier ignore le type du garde-chasse, sa décision se fera sous incertitude. Supposons que nous hésitons sur la façon de modéliser ce braconnier. Deux types de braconniers sont possibles : soit il décide en accord avec la règle* Min*, soit en accord avec la règle* Laplace*. Le braconnier sait quelle règle de décision le modélise, mais le garde-chasse l'ignore. Alors, ce dernier décide aussi sous incertitude et nous le modéliserons grâce à la règle* Min*. Nous pouvons résumer les types de joueurs possibles, qui décrivent les différents modèles d'agents que l'on peut considérer :*

— *Le garde-chasse est soit corrompu ($\theta_G = C$), soit intègre ($\theta_G = I$). Ses préférences sont mal connues du braconnier, par contre nous savons qu'il décide sous ignorance totale selon la règle* Min *;*

— *Le braconnier décide sous ignorance totale soit selon la règle* Min *($\theta_B = M$), soit selon la règle* Laplace *($\theta_B = L$). Sa règle de décision est mal connue du garde-chasse, par contre nous connaissons ses préférences.*

Nous avons vu dans la section 2.2.1 qu'en considérant plusieurs types possibles pour un joueur, un problème se pose. En effet, si les joueurs sont « tirés au sort », alors ils ne sont pas complètement définis dès le début et le jeu n'est pas bien formé (dans notre cadre, l'incertitude pèserait sur la situation du jeu). Harsanyi l'a résolu en remarquant que tout se passe comme si chaque joueur recevait le signal « votre type est $\theta_i$ ». Dans ce cas, il y a un cadre de discernement sous-jacent, où chaque état du monde correspond à la combinaison des types des joueurs, c'est-à-dire $\omega = \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Nous pouvons alors étendre

l'espace des conséquences $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}^* = \mathbb{X} \times \Theta$ : la conséquence $(x, \theta)$ est comprise comme « la conséquence $x$ advient alors que types des joueurs sont $\theta$ ». Ainsi, en exprimant les préférences d'un joueur $i$ sur $\mathbb{X}^* = \mathbb{X} \times \Theta$, on exprime ses préférences sur $\mathbb{X}$ lorsque son propre type est $\theta_i$ et celui des autres est $\theta_{-i}$.

Formellement, soit $\mathcal{CG} = (N, (A_i)_{i \in N}, \mathbb{X}, \mathbf{c})$ une situation de jeu à information complète, décrivant les joueurs, leurs actions et les conséquences associées. Pour chaque joueur $i \in N$, notons $\Theta_i$ l'ensemble de ses types potentiels. et $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$ l'ensemble des combinaisons de types. L'incertitude ne pèse que sur les types des joueurs, c'est-à-dire qu'on ignore quel $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta$ décrit effectivement les types des joueurs. Les préférences du joueur $i$ dépendent de son propre type et de ceux des autres : elles donc sont connues pour un $\theta \in \Theta$ donné. Nous pouvons donc supposer l'existence d'une fonction $f_i : \Theta \to \mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha_i}(\mathbb{X})$ telle que $f_i(\theta) \in \mathcal{P}\mathit{refs}_{\alpha_i}(\mathbb{X})$ soit la structure de préférence décrivant la fonction d'utilité algébrique du joueur $i$ lorsque son type est $\theta_i$ et ceux des autres joueurs sont $\theta_{-i}$.

Pour exprimer cela sous la forme d'un jeu à signaux, posons $\Omega = \Theta$ et $\mathbb{X}^* = \mathbb{X} \times \Theta$. La fonction-conséquence $\mathbf{c}^*$ est définie par $\mathbf{c}^*(a, \theta) = (\mathbf{c}(a), \theta)$. Les préférences du joueur $i$ sur $\mathbb{X}$ sont telles que $(x, \theta) \succeq_i (x', \theta') \iff f_i(\theta)(x) \succeq_i f_i(\theta')(x')$. L'incertitude sur les types des joueurs s'exprime donc bien en terme de signaux par la situation de jeu à information incomplète :

$$\mathcal{IG} = (N, \Theta, \mathbb{X} \times \Theta, (A_i, \Theta_i, \theta \mapsto \theta_i)_{i \in N}, (a, \theta) \mapsto (\mathbf{c}(a), \theta)),$$

et par une contrainte sur les structures de préférences des joueurs :

$$\forall i \in N, \quad \mathbf{v}_i(x, \theta) = f_i(\theta)(x).$$

Reste ensuite à terminer la modélisation des joueurs en donnant leurs structures de connaissances et de règles de décision.

**Exemple 4.15 (Incertitude sur les types des joueurs modélisée par un jeu basé sur des signaux).** *Dans notre exemple, il y a deux types possibles pour le garde-chasse : il peut être intègre (I) ou corrompu (C). Nous ferons* comme si *le garde chasse recevait un signal $\theta_G \in \{I, C\}$ qui l'informe de son type : le signal $\theta_G = I$ est « vous êtes intègre » et le signal $\theta_G = C$ est « vous êtes corrompu ». De manière similaire, nous ferons comme si le braconnier reçoit un signal $\theta_B \in \{M, L\}$ qui l'informe de son type : le signal $\theta_B = M$ est « vous décidez selon la règle* Min *» et le signal $\theta_B = L$ est « vous décidez selon la règle de Laplace ».*

$$\Omega = \Theta = \Theta_G \times \Theta_B = \{I, C\} \times \{M, L\} = \{(I, M), (I, L), (C, M), (C, L)\}.$$

*Il y a quatre états du monde : par exemple, $\omega = (I, M)$ est l'état du monde où le garde chasse est intègre et le braconnier décide selon la règle Min. Les conséquences sont* $\mathbb{X} = \{$`Arrestation`, `P1 braconné`, `P2 braconné`$\}$. *Nous po-*

*sons alors :*

$$\mathbb{X}^* = \begin{Bmatrix} (\texttt{Arrestation}, (I, M)) & (\texttt{Arrestation}, (C, M)) \\ (\texttt{P1 braconné}, (I, M)) & (\texttt{P1 braconné}, (C, M)) \\ (\texttt{P2 braconné}, (I, M)) & (\texttt{P2 braconné}, (C, M)) \\ (\texttt{Arrestation}, (I, L)) & (\texttt{Arrestation}, (C, L)) \\ (\texttt{P1 braconné}, (I, L)) & (\texttt{P1 braconné}, (C, L)) \\ (\texttt{P2 braconné}, (I, L)) & (\texttt{P2 braconné}, (C, L)) \end{Bmatrix}$$

*Les conséquences deviennent donc des paires, par exemple* $(\texttt{Arrestation}, (I, M))$ *est la conséquence « arrestation d'un braconnier décidant selon la règle Min par un garde-chasse intègre ». Nous avons déjà donné les fonctions d'utilité des joueurs dans l'exemple ci-dessus :*

$$\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}(x, (I, \theta_B)) = \mathbf{v}_i^I(x) \qquad \mathbf{v}_{(i,\theta_i)}(x, (C, \theta_B)) = \mathbf{v}_i^C(x).$$

*Les deux joueurs décident sous ignorance totale. Puisque chacun connaît son propre type mais ignore celui de l'autre, leurs capacités algébriques sont des mesures de nécessité catégoriques telles que :*

$$\mathbf{w}_{(G,\theta_G)}(B) = \begin{cases} 1 & si\ \{(\theta'_G, \theta_B) \mid \theta'_G = \theta_G\} \subseteq B \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\mathbf{w}_{(B,\theta_B)}(B) = \begin{cases} 1 & si\ \{(\theta_G, \theta'_B) \mid \theta_G B = \theta_B\} \subseteq B \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*Enfin, leur règles de décision respectives sont :*

$$\mathcal{U}_{(G,\theta_G)} = \mathcal{U}^{\text{Max}} \qquad \mathcal{U}_{(B,M)} = \mathcal{U}^{\text{Min}} \qquad \mathcal{U}_{(G,L)} = \mathcal{U}^{\text{Laplace}}$$

*Nous avons donc donné un modèle d'agent pour chaque signal de chaque joueur : la modélisation est terminée. Le jeu à information incomplète basé sur les signaux qui modélise ces joueurs est donc :*

$$\text{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\mathcal{I}_{(i,\theta_i)}\right)_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}\right).$$

*Remarque* 50. Notre définition d'un jeu à information incomplète permet de considérer des règles de décision, voire des cadres de décision différents pour les différents signaux que peut recevoir un joueur. Il nous semble que cela est utile lorsqu'on modélise une situation en terme de types (alors, un joueur peut être incertain quant au type de connaissance d'un autre joueur, par exemple : a-t'il une connaissance probabiliste ou possibliste ?). Inversement, lorsqu'on modélise une situation en termes de signaux, il nous semble qu'une telle incertitude sur la théorie de l'incertitude elle-même sera rencontrée plus rarement (même si nous pouvons fabriquer de tels exemples : le joueur a-t-il lu une étude qualitative ou quantitative avant de prendre sa décision ?).

### 4.3.3 Stratégies mixtes dans les jeux à information incomplète généralisés

Pour aborder le cas des stratégies mixtes dans un jeu à information incomplète, nous allons tenir un raisonnement similaire à celui adopté lorsque nous avons traité des équilibres corrélés en stratégies mixtes (section 4.1.3). En effet, il s'agit ici aussi de stratégies mixtes signalisées, qui induiront donc aussi une structure de connaissance jointe sur $\Omega \times A$. Notons deux différences[5] : d'une part, les connaissances des joueurs sont données pour chacun des signaux qu'ils peuvent recevoir (nous n'aurons donc aucun conditionnement à faire) et d'autre part la conséquence obtenue dépend de l'état du monde. En considérant les stratégies mixtes, nous aurons besoin ici également d'une certaine homogénéité quant aux théories de l'incertain avec lesquelles nous modélisons les connaissances des joueurs. Dans le cas simple, les connaissances des joueurs sur $\Omega$ et les stratégies mixtes seront exprimées dans la même classe de capacités algébriques : l'homogénéité est alors totale. Comme nous l'avons vu, nous pouvons permettre un plus grand degré de modélisation en affaiblissant cette contrainte : les stratégies mixtes doivent toutes être exprimées dans une même classe $\mathcal{K}n_\delta$, et les connaissances de chaque joueur $i$, quel que soit son type $\theta_i$, doivent être exprimées dans une classe $\mathcal{K}n_{\beta_{(\mathrm{i},\theta_\mathrm{i})}}$ généralisant $\mathcal{K}n_\delta$, c'est-à-dire $\forall \Omega, \forall i, \forall \theta_i, \mathcal{K}n_\delta(\Omega) \subseteq \mathcal{K}n_{\beta_{(\mathrm{i},\theta_\mathrm{i})}}(\Omega)$.

Nous retrouvons ainsi les différents paramétrages trouvés dans la littérature :

— Dans les jeux bayésiens, les connaissances des joueurs et les stratégies mixtes sont probabilistes, c'est-à-dire $\forall i, \forall \theta_i, \mathcal{K}n_{\beta_{(\mathrm{i},\theta_\mathrm{i})}} = \mathcal{K}n_\delta = \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}$ (Harsanyi, 1967) ;

— Dans les jeux possibilistes, les connaissances des joueurs et les stratégies mixtes sont possibilistes, c'est-à-dire $\forall i, \forall \theta_i, \mathcal{K}n_{\beta_{(\mathrm{i},\theta_\mathrm{i})}} = \mathcal{K}n_\delta = \mathcal{K}n_{\mathrm{N}}$ (Azzabi et al., 2020 ; Trabelsi, 2020 ; Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2022) ;

— Dans les jeux évidentiels ou crédaux, les connaissances des joueurs sont exprimées par des fonctions de croyances et les stratégies mixtes sont probabilistes, c'est-à-dire $\mathcal{K}n_\delta = \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}$, et $\forall i, \forall \theta_i, \mathcal{K}n_{\beta_{(\mathrm{i},\theta_\mathrm{i})}} = \mathcal{K}n_{\mathrm{Bel}}$, ce qui est admissible puisque les fonctions de croyance généralisent les probabilités : $\forall \Omega, \mathcal{K}n_{\mathrm{Pr}}(\Omega) \subseteq \mathcal{K}n_{\mathrm{Bel}}(\Omega)$ (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022). Nous détaillons les jeux évidentiels et crédaux à la section 4.5.

Reprenons les étapes détaillées dans la section 4.1.3 : d'abord, chaque joueur s'engage sur une stratégie mixte signalisée, c'est-à-dire une capacité algébrique de la classe $\mathcal{K}n_\delta$, qui indique à quel point ce joueur peut choisir telle ou telle stratégie pure signalisée. Cela étant, une connaissance jointe est déduite par produit cartésien, c'est donc aussi une capacité algébrique de la classe $\mathcal{K}n_\delta$. Elle indique à quel point peut advenir un profil de stratégies pures signalisées.

5. Une troisième différence est que les joueurs ne peuvent pas choisir l'appareil signalisateur, qui est ici imposé par la situation modélisée. Cependant, cela n'a aucun impact sur le raisonnement que nous tenons ici.

Cette connaissance jointe décrit les choix qui peuvent être faits en fonction des signaux reçus, donc en fonction de l'état du monde $\omega \in \Omega$ ; elle est analogue à une fonction $\Omega \to \mathcal{Kn}_\delta(A)$ indiquant à quel point un profil de stratégies pures (non signalisé) peut advenir, en fonction de l'état du monde $\omega$. Enfin, chaque joueur $i$, s'il reçoit le signal $\theta_i$, combine cette connaissance jointe avec sa propre connaissance $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}$ sur $\Omega$, qui est d'une classe $\mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}$ généralisant $\mathcal{Kn}_\delta$ (donc, $\mathcal{Kn}_\delta(A) \subseteq \mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}(A)$), grâce à un produit dépendant de la classe $\mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}$. Il obtient ainsi une connaissance sur $\Omega \times A$ : s'il associe un degré élevé à la paire $(\omega, a)$, alors il lui semble vraisemblable que $a \in A$ soit choisi et que l'état du monde soit $\omega \in \Omega$.

Enfin, nous évaluons la satisfaction que procure un profil de stratégies mixtes signalisées à un joueur $i$ dont le signal est $\theta_i$ par la règle de décision $\mathbf{u}_{(i,\theta_i)}$, qui combine la connaissance obtenue ci-dessus, exprimée dans la classe de capacités algébriques $\mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}(\Omega \times A)$, avec les préférences sur $\mathbb{X}$ du joueur, exprimées dans la classe de fonctions d'utilité algébriques $\mathcal{Prefs}_{\alpha_{(i,\theta_i)}}(\mathbb{X})$. Cette règle de décision doit donc être adaptée à la fois à $\mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}$ et à $\mathcal{Prefs}_{\alpha_{(i,\theta_i)}}$, c'est-à-dire $\mathbf{u}_{(i,\theta_i)} \in \mathcal{Dec}_{\alpha_{(i,\theta_i)},\beta_{(i,\theta_i)}}$.

Soient $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}, \mathbf{c})$ une situation de jeu à information incomplète et $\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\mathcal{I}_{(i,\theta_i)}\right)_{i\in N, \theta_i \in \Theta_i}\right)$ un jeu à information incomplète. Pour considérer les stratégies mixtes dans le jeu à information incomplète IG, nous lui attachons la classe $\mathcal{Kn}_\delta$ des stratégies mixtes, une opération de produit indépendant, et les opérations de produit dépendants considérées pour tous les signaux de tous les joueurs.

**Définition 4.18 (Extension en stratégies mixtes d'un jeu à information incomplète).** L'extension en stratégies mixtes MIG de IG est décrite par la structure :

$$\mathrm{MIG} = \left(\mathrm{IG}, \mathcal{Kn}_\delta, \times^{\mathrm{cart}}, \left(\times^{\mathrm{dep}}_{(i,\theta_i)}\right)_{i\in N, \theta_i\in\Theta_i}\right),$$

où :

- IG est le jeu à information incomplète étudié ;
- $\mathcal{Kn}_\delta$ est la classe de capacités algébriques considérée pour les stratégies mixtes ;
- $\times^{\mathrm{cart}} \in \mathcal{Prod}_\delta$ est un produit cartésien de la classe $\mathcal{Kn}_\delta$ ;
- $\times^{\mathrm{dep}}_{(i,\theta_i)} \in \mathcal{Prod}_{\beta_{(i,\theta_i)}}$ est le produit dépendant pour la classe $\mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}$ avec laquelle le joueur $i$ est modélisé lorsqu'il reçoit le signal $\theta_i$ ;

et telle que $\mathcal{Kn}_\delta$ soit généralisée par chacune des classes de capacités algébriques des joueurs, quel que soit les signaux qu'ils reçoivent, c'est-à-dire telle que $\forall i \in N, \forall\theta_i \in \Theta_i, \forall\Omega, \mathcal{Kn}_\delta(\Omega) \subseteq \mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}(\Omega)$.

*Remarque* 51. Ici, comme lorsque nous avons traité des stratégies mixtes pour les jeux à information complète, nous pouvons remarquer que le produit dépendant est donné pour tout signal de tout joueur. Pourtant, le choix de cette

opération ne dépend pas du joueur lui-même, mais de la nature des informations à combiner. Nous proposons cette définition afin de pouvoir modéliser des joueurs dans des cadres de décision différents. En effet, la nature des informations à combiner dépend, entre autres, du cadre de décision dans lequel elles sont exprimées.

Soit maintenant $\text{MIG} = \left(\text{IG}, \mathcal{Kn}_\delta, \times^{\text{cart}}, \left(\times^{\text{dep}}_{(i,\theta_i)}\right)_{i\in N,\theta_i\in\Theta_i}\right)$ une extension en stratégies mixtes de IG.

Une stratégie mixte signalisée du joueur $i$ est une fonction $\sigma_i$ associant à chacun de ses types $\theta_i \in \Theta_i$ la stratégie mixte non signalisée $\sigma_i(\theta_i) \in \mathcal{Kn}_\delta(A_i)$. Un profil de stratégies mixtes signalisées est un vecteur $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de telles fonctions. Dans l'état du monde $\omega$, le profil de stratégies mixtes non signalisées effectivement joué est noté $\sigma(\omega) = (\sigma_1(\tau_1(\omega)), \ldots, \sigma_n(\tau_n(\omega)))$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut déduire de $\sigma(\omega)$ la capacité algébrique $\mathbf{w}^{\times\sigma}_\omega$ décrite par la structure de connaissance :

$$\mathcal{W}^{\times\sigma}_\omega = (W_\delta, \mathbf{w}^{\times\sigma}_\omega, \succeq^W_\delta) = \times^{\text{cart}}(\sigma_1(\tau_1(\omega)), \ldots, \sigma_n(\tau_n(\omega))) \in \mathcal{Kn}_\delta(A).$$

La capacité algébrique du joueur $i$ lorsqu'il reçoit le signal $\theta_i$, est $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}$. Elle est décrite par la structure $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)} \in \mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}(\Omega)$ qui est donnée dans la définition du jeu à information incomplète IG. Ce joueur peut alors combiner cette connaissance propre $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)}$ et celle déduite du profil de stratégies mixtes $\mathcal{W}^{\times\sigma}_\omega$, et ainsi obtenir une capacité algébrique jointe sur $\Omega \times A$ décrite par la structure de connaissance :

$$\left(W_{\beta_{(i,\theta_i)}}, \mathbf{w}^{\times\sigma}_{(i,\theta_i)}, \succeq^W_{\beta_{(i,\theta_i)}}\right) = \times^{\text{dep}}_{(i,\theta_i)}\left(\mathbf{w}_{(i,\theta_i)},\ \omega \mapsto \mathbf{w}^{\times\sigma}_\omega\right) \in \mathcal{Kn}_{\beta_{(i,\theta_i)}}(\Omega \times A).$$

Comme nous l'avons remarqué pour les jeux à information complète, un profil de stratégies mixtes fixe la connaissance qu'ont les joueurs sur les profils de stratégies pures qui peuvent être joués : le cadre de discernement est $\Omega \times A$. La fonction (analogue à un acte) qui associe à tout élément $(\omega, a) \in \Omega \times A$ sa conséquence est unique. Elle est imposée par la situation. En effet, si $a$ est choisi dans l'état du monde $\omega$, la conséquence est $\mathbf{c}(a, \omega)$. Ainsi, le joueur $i$, lorsqu'il reçoit le signal $\theta_i$, évaluera l'utilité de cette fonction au regard de ses préférences et de la connaissance induite par le profil de stratégies mixtes signalisées d'une part, et par sa propre connaissance d'autre part. En stratégies mixtes, on ne compare pas les actes pour une connaissance donnée et constante, mais on compare les connaissances (induites par les stratégies mixtes) pour un « acte » donné et constant (la fonction-conséquence). Ainsi, l'utilité de $\sigma$, pour le joueur $i$ ayant reçu le signal $\theta_i$, est :

$$\mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\left(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{w}^{\times\sigma}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{c}\right) = \mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\left(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}, \times^{\text{dep}}_{(i,\theta_i)}\left(\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}, \omega \mapsto \times^{\text{cart}}(\sigma(\omega))\right), \mathbf{c}\right).$$

Les difficultés étant levées, il devient très facile de redéfinir les concepts de solutions usuels. En effet, comme cela fut le cas dans les sections précédentes, nous avons simplement à réécrire la définition en utilisant l'expression ci-dessus.

Ainsi, un équilibre de Nash mixte, dans un jeu à information incomplète, est un profil de stratégies mixtes signalisées telle qu'aucun joueur, quel que soit le signal qu'il reçoit, n'a intérêt à changer de stratégie, c'est-à-dire :

**Définition 4.19 (Équilibre de Nash mixtes dans un jeu à information incomplète).** Un profil de stratégies mixtes signalisées $\sigma$ est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\forall i, \forall \theta_i, \forall \sigma'_i, \quad \mathbf{u}_i\Big(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}^{\times\sigma}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{c}\Big) \not\prec^{U}_{(i,\theta_i)} \mathbf{u}_i\Big(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}^{\times\sigma'_i.\sigma_{-i}}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{c}\Big).$$

### 4.3.4 Jeux à information incomplète particuliers

Dans la section précédente, nous avons proposé un modèle très général de jeu à information incomplète, où différentes théories de la décision sous incertitude peuvent être considérées. Nous détaillons maintenant quelques spécialisations de ce modèle. Cela permet d'une part une définition plus simple des jeux dans certains cas particuliers et amène d'autre part à retrouver les jeux proposés dans la littérature (jeux bayésiens, jeux possibilistes et jeux évidentiels ou crédaux).

Posons $\mathcal{G} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}), \mathbf{c})$ une situation de jeu à information incomplète.

En premier lieu, la connaissance des joueurs, lorsqu'ils reçoivent un signal particulier, est habituellement obtenue par conditionnement de leur connaissance a priori. Cela semble naturel dans l'interprétation en terme de signaux, où chaque joueur $i$ met à jour sa connaissance « sachant le signal reçu ».

**Définition 4.20 (Jeu conditionnel).** Un *jeu conditionnel* est un $n$-uplet :

$$\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, (\mathcal{I}_i, \mathcal{C}_i)_{i\in N}\right),$$

où $\mathcal{IG}$ est une situation de jeu à information incomplète, $\mathcal{I}_i \in \mathcal{Agent}_{\alpha_i,\beta_i}$ est le modèle a priori du joueur $i$ (sa structure de préférence est dans la classe $\mathcal{Prefs}_{\alpha_i}$ et sa structure de connaissance dans la classe $\mathcal{Kn}_{\beta_i}$) et $\mathcal{C}_i \in \mathcal{Cond}_{\beta_i}$ est un opérateur de conditionnement adapté à la classe $\mathcal{Kn}_{\beta_i}$.

Un jeu conditionnel est correctement défini si tous les conditionnements « sachant $\theta_i$ » sont possibles, c'est-à-dire si :

$$\forall i \in N, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \mathrm{precond}_i\left(\mathcal{W}_i, \ \{\omega \mid \tau_i(\omega) = \theta_i\}\right) = \top.$$

Un jeu conditionnel définit le jeu à information incomplète suivant :

$$\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, \ \Big( \ \mathcal{U}_i, \ \mathcal{V}_i, \ \mathrm{cond}\left(\mathcal{W}_i, \{\omega \mid \tau_i(\omega) = \theta_i\}\right) \ \Big)_{i\in N, \theta_i\in\Theta_i}\right).$$

Ensuite, une hypothèse courante est que tous les joueurs considèrent la même connaissance a priori. Une justification à cette hypothèse est proposée dans l'article fondateur d'Harsanyi : on modélise le jeu d'un point de vue de l'un des joueurs, disons le joueur $x$ (il nous semble que l'on puisse tenir le même

argument du point de vue d'un modélisateur exterieur). Dans un tel cas, la connaissance du joueur $i \neq x$ n'est pas réellement sa propre connaissance mais celle qui lui attribue le joueur $x$. Si le joueur $x$ est cohérent avec lui-même, il devrait attribuer à tout le monde des connaissances cohérentes entre elles que l'on peut obtenir par conditionnement d'un prior commun.

**Définition 4.21 (Jeu à prior commun).** Un jeu à prior commun est un quadruplet :

$$\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, , \mathcal{W}, \mathcal{C}, (\mathcal{V}_i, \mathcal{U}_i)_{i \in N}\right),$$

où $\mathcal{IG}$ est une situation de jeu à information incomplète, $\mathcal{W} \in \mathcal{Kn}_\beta(\Omega)$ une structure de connaissance décrivant la capacité algébrique commune, $\mathcal{C} \in \mathcal{Cond}_\beta$ un conditionnement adapté à la classe $\mathcal{Kn}_\beta$. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{Prefs}_{\alpha_i}(\mathbb{X})$ et $\mathcal{U}_i \in \mathcal{Dec}_{\alpha_i,\beta}$ sont les structures décrivant la fonction d'utilité algébrique et la règle de décision du joueur $i$.

Un jeu à prior commun modélise les mêmes joueurs que le jeu conditionnel :

$$\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\left(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \mathcal{W}\right), \mathcal{C}\right)_{i \in N}\right).$$

Il est bien défini si tous les conditionnements sont possibles, c'est-à-dire si le jeu conditionnel correspondant est bien défini, et modélise alors le même jeu à information incomplète que ce dernier.

**Exemple 4.16 (Jeu à prior commun).** *Considérons le jeu de sécurité écologique à information incomplète de l'exemple 4.13. Un garde-chasse $G$ et un braconnier $B$ doivent décider sur quelle parcelle se rendre : trois parcelles $P_1$, $P_2$ et $P_3$ sont accessibles aux deux joueurs. Il n'y a qu'un seul troupeau, qui a été vu la veille en $P_2$. Nous savons qu'il a une chance sur deux de s'être déplacé. Alors la connaissance (commune) a priori sur la position actuelle du troupeau est une fonction de croyance dont la fonction de masse est telle que $m(\{\omega_2\}) = m(\{\omega_1, \omega_3\}) = 1/2$ (l'état du monde est $\omega_i$ si le troupeau est sur la parcelle $P_i$). Le garde-chasse est informé de la présence ou non du troupeau en $P_1$, le braconnier de sa présence ou non en $P_2$.*

*Nous avons déjà modélisé la situation de jeu à information incomplète à l'exemple 4.11 : $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c})$.*

*Dans ce jeu, la connaissance a priori est commune. Nous pouvons le donner comme un jeu à prior commun* $\mathrm{IG} = \left(\mathcal{IG}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \left(\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}\right)_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}\right)$ *: les joueurs, après avoir observé leur signal (la présence ou non du troupeau sur la parcelle qu'ils observent), déduisent leur connaissance en révisant la connaissance initiale (par le conditionnement de Dempster). Nos choix de modélisation sont les suivants :*

- $\mathcal{W} = ([0,1], \mathbf{w}, \geq) \in \mathcal{Kn}_{\mathrm{Bel}}(\Omega)$ *est la structure de connaissance décrivant la fonction de croyance* $\mathbf{w}$ *dont la fonction de masse vérifie* $m^+_{\mathbf{w}}(\{\omega_2\}) = m^+_{\mathbf{w}}(\{\omega_1, \omega_3\}) = 1/2$ *;*
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{Dempster}} \in \mathcal{Cond}_{\mathrm{Bel}}$ *est le conditionnement de Dempster.*

— *Les fonctions d'utilités* $\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}$ *sont quantitatives. Elles sont décrites par les structures de préférences* $\mathcal{V}_{(i,\theta_i)} = \big(\mathbb{R}, \mathbf{v}_{(i,\theta_i)}, \geq\big) \in \mathcal{P}refs_{\mathbb{R}}$*, où :*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{(G,\theta_G)}(\texttt{Rien}) &= 0 & \mathbf{v}_{(B,\theta_B)}(\texttt{Rien}) &= 0 \\ \mathbf{v}_{(G,\theta_G)}(\texttt{Braconnage}) &= -5 & \mathbf{v}_{(B,\theta_B)}(\texttt{Braconnage}) &= 10 \\ \mathbf{v}_{(G,\theta_G)}(\texttt{Arrestation}) &= 10 & \mathbf{v}_{(B,\theta_B)}(\texttt{Arrestation}) &= -10. \end{aligned}$$

— *La règle de décision de chaque joueur est la règle de Choquet :* $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}^{\text{CEU}}$*. Ce jeu est correctement défini : tous les conditionnements sont possibles. Les capacités algébriques* $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}$ *« sachant* $\theta_i$ *» sont des fonctions de croyance. Elles sont décrites par les structures de connaissances* $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)} = \big([0,1], \mathbf{w}_{(i,\theta_i)}, \geq\big) \in \mathcal{K}n_{\text{Bel}}$*. Les fonctions de masse correspondantes sont :*

$$m^+_{\mathbf{w}_{(G,T_1)}}(B) = \begin{cases} 1 & si\ B = \{\omega_1\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$m^+_{\mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}}(B) = \begin{cases} 1/2 & si\ B = \{\omega_2\} \\ 1/2 & si\ B = \{\omega_3\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$m^+_{\mathbf{w}_{(B,T_2)}}(B) = \begin{cases} 1 & si\ B = \{\omega_2\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$m^+_{\mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}}(B) = \begin{cases} 1 & si\ B = \{\omega_1, \omega_3\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*Nous pouvons remarquer que les connaissances « sachant* $\theta_i$ *» des joueurs sont identiques à celles proposées dans l'exemple 4.13 : le garde-chasse, après avoir observé la parcelle* $P_1$*, a maintenant une connaissance probabiliste précise (les probabilités constituent en effet un cas particulier de fonctions de croyance) ; le braconnier, après avoir observé la parcelle* $P_2$*, a une connaissance catégorique (qui constitue également un cas particulier de fonction de croyance). De plus, nous avons considéré pour le garde-chasse la même fonction d'utilité quantitative, et pour le braconnier l'une des représentations numériques de ses préférences qui étaient supposées qualitatives dans l'exemple 4.13. Dans cet exemple nous modélisions le garde-chasse par la règle* EU *et le braconnier par la règle* Min*. Puisque la règle* CEU *généralise ces deux règles, nos choix de modélisation sont quasiment identiques. En considérant les stratégies pures, les mêmes profils de stratégies seront préférés, ou non, par le garde-chasse et par le braconnier. Cependant, en supposant des préférences quantitatives pour le braconnier, nous pouvons également considérer ici des stratégies mixtes, de la classe* $\mathcal{K}n_{\text{Bel}}$ *ou des classes incluses dans celle-ci (*$\mathcal{K}n_{\text{Pr}}$ *et* $\mathcal{K}n_{\text{Ign}}$*). Dans l'exemple 4.13, ce n'était pas possible, puisque le garde-chasse était modélisé dans* $\mathcal{K}n_{\text{Pr}}$ *et le braconnier dans* $\mathcal{K}n_{\text{Ign}}$ *et que ces deux classes sont incompatibles.*

Dans la littérature, l'hypothèse de prior commun est toujours faite. Nous pouvons donc résumer :

— Un jeu bayésien est un jeu à prior commun du cadre de décision bayésien $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$, où le conditionnement est $\mathcal{C}^{\mathrm{Pr}}$ et où tous les joueurs sont modélisés par la règle de l'utilité espérée : $\forall i, \mathcal{U}_i = \mathcal{U}^{\mathrm{EU}}$ (Harsanyi, 1967).
— Un jeu possibiliste est un jeu à prior commun du cadre de décision possibiliste $\mathcal{F}_{[0,1],\mathrm{N}}$ où $\mathcal{C}$ est le conditionnement de Hisdal et où tous les joueurs sont modélisés par la règle de l'utilité pessimiste : $\forall i, \mathcal{U}_i = \mathcal{U}^{\mathrm{U}^{\mathrm{Pes}}}$ (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2019).
— Un jeu évidentiel ou crédal (Bel-game) est un jeu à prior commun[6] du cadre des fonctions de croyance $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Bel}}$ où $\mathcal{C}$ est l'un des conditionnements parmi {Dempster, Fagin-Halpern, Strong, Weak} et où tous les joueurs sont modélisés par la règle de Choquet, la règle de Jaffray ou celle du TBM : $\forall i, \mathcal{U}_i \in \{\mathcal{U}^{\mathrm{CEU}}, \mathcal{U}^{\mathrm{JEU}^{\alpha}}, \mathcal{U}^{\mathrm{TBEU}}\}$ (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022). Nous détaillons ces jeux dans la section 4.5.

## 4.4 Modèles de Selten et théorème de Howson et Rosenthal

Le théorème de Howson et Rosenthal consiste à établir, pour un jeu bayésien (à deux joueurs) donné, son modèle à loterie finale (section 2.2.3), c'est-à-dire un jeu où tous les couples joueur-signal choisissent une action (et où finalement un seul couple par joueur la joue effectivement). Nous l'étendons ici aux jeux à information incomplète généralisés. Il s'agit alors de donner une transformation qui convertit tout jeu à information incomplète en un jeu à information complète dans lequel les utilités sont en correspondance (et ce, pour chaque signal que peut recevoir chaque joueur).

Nous proposons d'abord dans la sous-section suivante une transformation générale appelée Selten[7] applicable à tout jeu à information incomplète IG. Puisque Selten(IG) est un jeu à information complète, il pourra être étudié avec les outils de la théorie des jeux classiques (sans incertitude). Ensuite, nous nous intéressons aux jeux où les structures de règles de décision des joueurs sont représentés par des instances algébriques et proposons une autre transformation, appelée HR, généralisant celle proposée par Howson et Rosenthal. HR(IG) est un jeu hypergraphique décomposable dont la taille dépend du degré de $(k, \boxplus)$-additivité des fonctions de masse algébriques. Alors, la représentation de HR(IG) est potentiellement succincte et des algorithmes adaptés peuvent y être appliqués (Wilson, 1971 ; Jourdan, 2022). Nous illustrons ce résultat sur un exemple de *Bel-Game*, c'est-à-dire de jeu à prior commun du cadre des fonctions de croyance. Enfin, nous discutons la complexité de cette transformation en fonction des instances algébriques considérées.

6. Notamment, l'exemple 4.16 est un Bel-Game.

7. Harsanyi a proposé d'appeler *modèle de Selten*, d'après une conversation privée avec Reinhard Selten, le modèle à loterie finale où chaque type de chaque joueur est vu comme un joueur potentiel et choisit effectivement une stratégie. Nous nommons dans ce chapitre *transformation de Selten* la transformation générale qui produit, à partir d'un jeu à information incomplète, un jeu à information complète équivalent au modèle à loterie finale du jeu initial.

### 4.4.1 Jeux en correspondance et modèle de Selten

Partant d'un jeu à information incomplète IG, nous pouvons donner son *modèle à loterie finale* CG = Selten(IG) : c'est un jeu à information complète qui est en *correspondance* avec IG, dans le sens où les deux jeux ont les mêmes valeurs d'utilité (pour chaque signal que peut recevoir chaque joueur). Il est donc possible d'utiliser le second pour étudier le premier.

Précisons d'abord la notion de *correspondance* entre un jeu à information incomplète et un jeu à information complète. Soient une situation de jeu à information incomplète :

$$\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c}),$$

et une situation de jeu à information complète :

$$\mathcal{CG} = \left(\tilde{N}, (\tilde{A}_k)_{k \in \tilde{N}}, \tilde{\mathbb{X}}, \tilde{\mathbf{c}}\right).$$

Ces deux situations sont en correspondance si les joueurs de $\mathcal{CG}$ représentent tous les signaux possibles de $\mathcal{IG}$, et si les actions des joueurs de $\mathcal{CG}$ sont celles des joueurs de $\mathcal{IG}$.

**Définition 4.22 (Correspondance des situations de jeu).** On dit que les situations de jeu $\mathcal{IG}$ et $\mathcal{CG}$ sont *en correspondance de Selten* (ou simplement *en correspondance*) si :

$$\tilde{N} = \{(i, \theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\} \quad \text{et} \quad \forall (i, \theta_i) \in \tilde{N},\ \tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i.$$

*Remarque* 52. La correspondance entre deux situations de jeu ne fait pas intervenir l'ensemble des conséquences $\mathbb{X}$.

Alors, nous avons une bijection entre les profils de stratégies pures signalisées de $\mathcal{IG}$ et les profils de stratégies pures (non signalisées) de $\mathcal{CG}$. Un profil $s$ de $\mathcal{IG}$ est en correspondance avec le profil $\tilde{a}$ de $\mathcal{CG}$ lorsque les stratégies des joueurs y sont identiques quels que soient les signaux qu'ils reçoivent.

**Définition 4.23 (Correspondance des profils de stratégies).** On dit que le profil de stratégies signalisées $s$ de $\mathcal{IG}$ est *en correspondance* avec le profil de stratégies $\tilde{a}$ de $\mathcal{CG}$ si les situations $\mathcal{IG}$ et $\mathcal{CG}$ sont en correspondance et si :

$$\forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i,\ s_i(\theta_i) = \tilde{a}_{(i,\theta_i)}.$$

Deux jeux établis respectivement sur $\mathcal{IG}$ et sur $\mathcal{CG}$ sont en correspondance si leurs profils de stratégies en correspondance amènent aux mêmes valeurs d'utilité.

**Définition 4.24 (Correspondance des jeux).** Un jeu à information incomplète IG = $\left(\mathcal{IG}, (\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)})_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}\right)$ et un jeu à information complète CG = $\left(\mathcal{CG}, (\tilde{\mathcal{V}}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}}\right)$ sont en correspondance si les conditions suivantes sont toutes satisfaites :

1. Les situations de jeu $\mathcal{IG}$ et $\mathcal{CG}$ sont en correspondance ;
2. Pour tout $(i,\theta_i) \in \tilde{N}$, la structure $\tilde{\mathcal{V}}_{(i,\theta_i)} = (\tilde{V}, \tilde{\mathbf{v}}, \succeq^{\tilde{V}})$ de CG et la structure $\mathcal{U}_{(i,\theta_i)} = (U, \mathbf{u}, \succeq^{U})$ de IG sont telles que :
   (a) Leurs co-domaines sont les mêmes ($\tilde{V} = U$),
   (b) Leurs opérateurs de comparaison sont les mêmes ($\succeq^{\tilde{V}} = \succeq^{U}$),
   (c) Tous profils $s$ et $\tilde{a}$ en correspondance ont les mêmes utilités algébriques, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\left(\mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)}, \chi_s\right) = \tilde{\mathbf{v}}_{(i,\theta_i)}\big(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a})\big).$$

Ainsi, deux jeux IG et CG en correspondance associent les mêmes valeurs d'utilité algébrique à tout profil de stratégies, pour tout joueur et tout signal. Si un profil de stratégies $s$ de IG est satisfaisant pour un joueur $i$ ayant reçu le signal $\theta_i$, alors le profil $\tilde{a}$ qui lui correspond est tout aussi satisfaisant pour le couple $(i,\theta_i)$ du jeu CG. Il est donc possible d'étudier IG en étudiant CG. En particulier, les deux jeux ont les mêmes équilibres de Nash (en effet, aucun joueur $i$ de IG, quelque soit le signal $\theta_i$ qu'il reçoit, n'a intérêt à changer de stratégie si et seulement si aucun couple $(i,\theta_i)$ de CG n'a intérêt à changer de stratégie).

Nous pouvons dès maintenant donner la transformation de Selten, générale et naturelle, qui associe à tout jeu IG le jeu CG = Selten(IG) en correspondance avec IG, dans lequel l'ensemble des conséquences $\tilde{\mathbb{X}}$ est l'ensemble $\{\omega \mapsto \mathbf{c}(a,\omega) \mid a \in A\}$ des actes réalisables de IG :

**Définition 4.25 (Transformation de Selten).** Soit un jeu à information incomplète $\text{IG} = \left(\mathcal{IG}, (\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)})_{i\in N, \theta_i \in \Theta_i}\right)$. La transformation de Selten de IG est $\text{Selten(IG)} = \left(\mathcal{CG}, (\tilde{\mathcal{V}}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}\right)$ ; elle est définie par :

— Sa situation de jeu $\mathcal{CG} = (\tilde{N}, \tilde{\mathbb{X}}, (\tilde{A}_k)_{k\in\tilde{N}}, \tilde{\mathbf{c}})$, où :
  — $\tilde{N} = \{(i,\theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ (l'ensemble des joueurs de $\mathcal{CG}$ est l'ensemble des couples joueur-signal de $\mathcal{IG}$) ;
  — $\tilde{\mathbb{X}} = \{\omega \mapsto \mathbf{c}(a,\omega) \mid a \in A\}$ (l'ensemble des conséquences de $\mathcal{CG}$ est l'ensemble des actes réalisables de $\mathcal{IG}$) ;
  — $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ (l'ensemble des actions du couple $(i,\theta_i)$ de $\mathcal{CG}$ est l'ensemble des actions du joueur $i$ de $\mathcal{IG}$ ;
  — $\tilde{\mathbf{c}} : \tilde{A} \to \tilde{\mathbb{X}}$ est définie par $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a}) = \omega \mapsto \mathbf{c}(\tilde{a}(\omega), \omega)$ (dans $\mathcal{CG}$, la conséquence du profil $\tilde{a}$ est l'acte correspondant dans $\mathcal{IG}$, c'est-à-dire la fonction associant à $\omega$ la conséquence du profil de stratégies $\big(\tilde{a}_{(1,\tau_1(\omega))}, \ldots, \tilde{a}_{(n,\tau_n(\omega))}\big)$).

— Sa famille de structures de préférences $(\tilde{V}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}$, décrivant les fonctions d'utilités algébriques des joueurs $(i,\theta_i)$ de Selten(IG), où pour tout couple $(i,\theta_i) \in \tilde{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{X}}$ par :

$$\tilde{\mathbf{v}}_{(i,\theta_i)}(\tilde{x}) = \mathbf{u}_{(i,\theta_i)}\left(\mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)}, \tilde{x}\right).$$

**Théorème 4.1 (Correction de la transformation de Selten).** Pour tout jeu à information incomplète IG, IG et Selten(IG) sont en correspondance.

*Démonstration.* Vérifié en Coq, cf. section 5.6. □

**Exemple 4.17 (Transformation** Selten**).** *Considérons le jeu à prior commun* IG *donné à l'exemple 4.16. Sa transformation de Selten est*

$$\text{Selten(IG)} = \left(\mathcal{CG}, (\tilde{\mathcal{V}}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}\right),$$

*où la situation* $\mathcal{CG} = (\tilde{N}, \tilde{\mathbb{X}}, (\tilde{A}_k)_{k\in\tilde{N}}, \tilde{\mathbf{c}})$ *est définie par :*

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \{(G,T_1),(G,T_{2,3}),(B,T_2),(B,T_{1,3})\}\\ \tilde{\mathbb{X}} &= \{\omega \mapsto \mathbf{c}(a,\omega) \mid a \in A\}\\ \tilde{A}_{(i,\theta_i)} &= \{P_1,P_2,P_3\}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a}_{(G,T_1)},\tilde{a}_{(G,T_{2,3})},\tilde{a}_{(B,T_2)},\tilde{a}_{(B,T_{1,3})}) = \omega \mapsto \mathbf{c}((\tilde{a}_{(G,\tau_G(\omega))},\tilde{a}_{(B,\tau_B(\omega))}),\omega)$$

*et les structures de préférences* $\tilde{V}_{(i,\theta_i)} = (\mathbb{R},\geq,\tilde{\mathbf{v}}_{(i,\theta_i)})$ *sont définies par :*

$$\tilde{\mathbf{v}}_{(i,\theta_i)}(\tilde{x}) = \mathbf{u}^{\text{CEU}}(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)},\mathbf{w}_{(i,\theta_i)},\tilde{x}).$$

*Remarque* 53. Cette transformation est très générale : elle ne considère même pas la façon dont les connaissances sont représentées (en effet, les structures de connaissance $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)}$ pourraient décrire autre chose qu'une capacité algébrique et cette transformation resterait valide). Par contre, sa complexité grandit exponentiellement avec le nombre de signaux que les joueurs peuvent recevoir. Nous nous intéressons dans la section suivante à une autre transformation qui ne dépend pas du nombre de signaux, mais du degré de $(k,\boxplus)$-additivité des structures de connaissance.

### 4.4.2 Transformation hypergraphique à la Howson et Rosenthal

Howson et Rosenthal ont proposé une façon alternative de construire un modèle de Selten, pour les jeux bayésiens à deux joueurs. Le jeu à information complète qui en résulte est alors donnée sous forme hypergraphique, ce qui est permis par la propriété d'additivité des mesures de probabilité et la décomposabilité de l'utilité espérée comme une somme. Nous étendons ici cette transformation au cadre des jeux incomplets généralisés. Pour cela, nous supposerons que les règles de décision modélisant les joueurs du jeu à information incomplète IG sont toutes représentées par des instances algébriques (définition 3.18), ce qui garantit la $(k,\boxplus)$-additivité des capacités algébriques considérées et la décomposition des valeurs d'utilité espérée généralisée (XEU) par une sommation abstraite $\oplus$.

Soit la situation de jeu à information complète :

$$\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c})$$

et le jeu à information incomplète :

$$\text{IG} = \left(\mathcal{IG}, (\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)})_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}\right).$$

Supposons de plus que chaque structure de règle de décision $\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}$ est représentée par l'instance algébrique :

$$\mathcal{Z}_{(i,\theta_i)} = \left(\left(W^*_{(i,\theta_i)}, \boxplus_{(i,\theta_i)}, 0^W_{(i,\theta_i)}\right), \left(U_{(i,\theta_i)}, \oplus_{(i,\theta_i)}, 0^U_{(i,\theta_i)}\right), \otimes_{(i,\theta_i)}, \mathbf{f}_{(i,\theta_i)}\right).$$

Chaque instance $\mathcal{Z}_{(i,\theta_i)}$ prescrit de représenter $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)}$ par une fonction de masse algébrique $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}$ basée sur $\boxplus_{(i,\theta_i)}$ dont l'ensemble des éléments focaux est $\mathcal{S}_{m^{\boxplus}_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}}$.

**Définition 4.26 (Transformation hypergraphique** HR**).** Soit IG un jeu à information incomplète. Sa *transformation hypergraphique* est le jeu hypergraphique $\text{HR(IG)} = \left(\mathcal{HG}, (\tilde{\mathcal{V}}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}}\right)$. Ce jeu hypergraphique est décomposable par $\left(\oplus_{(i,\theta_i)}, 0^U_{(i,\theta_i)}, (\mathbf{v}^e_{(i,\theta_i)})_{e \in \tilde{E}}\right)$ et est défini par :

— La situation de jeu hypergraphique :

$$\mathcal{HG} = \left(\tilde{N}, \tilde{E}, \text{P}, (\tilde{A}_k)_{k \in \tilde{N}}, (\tilde{\mathbb{X}}^e, \tilde{\mathbf{c}}^e)_{e \in E}\right)$$

avec :

— $\tilde{N} = \{(i, \theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ est l'ensemble des couples joueur-signal ;

— $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ sont les actions du joueur $i$ (toutes les paires $(i, \theta_i)$ choisissent l'une des actions du joueur $i$) ;

— $\tilde{E} = \bigcup_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}} \mathcal{S}_{m^{\boxplus}_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}}$ est l'ensemble des identifiants des jeux locaux (chaque jeu local est identifié par un élément qui est focal pour au moins un type de joueur) ;

— $\text{P}(e) = \{(i, \tau_i(\omega)) \mid i \in N, \omega \in e\}$ (les joueurs participant au jeu local $e$ sont toutes les paires $(i, \tau_i(\omega))$ pour tout $\omega \in e$) ;

— $\tilde{\mathbb{X}}^e = 2^{A \times \Omega}$ est l'ensemble des parties de $A \times \Omega$ (une conséquence locale $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{X}}^e$ du jeu local $e$ est un ensemble de paires $(a, \omega)$ du jeu initial IG) ;

— $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a}^e) = \left\{\left(\left(\tilde{a}^e_{(1,\tau_1(\omega))}, \ldots, \tilde{a}^e_{(n,\tau_n(\omega))}\right), \omega\right) \mid \omega \in e\right\}$ (la conséquence locale $\tilde{x}^e \in \tilde{\mathbb{X}}^e$ d'un profil partiel $\tilde{a}^e$, dans le jeu local $e$, est l'ensemble des couples décrivant un profil de stratégies pures possible étant donné $\tilde{a}^e$ et l'état du monde $\omega$ correspondant, pour tout $\omega \in e$).

— Les fonctions d'utilité locales, pour tout joueur $(i, \theta_i)$ et tout jeu local $e \in \tilde{E}$, sont :

$$\tilde{\mathbf{v}}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{x}) = m^{\boxplus}_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}(e) \otimes \mathbf{f}_{(i,\theta_i)}(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)} \circ \mathbf{c},\ \tilde{x}^e).$$

Cela définit les structures de préférences décrivant les fonctions d'utilité algébriques globales de tous les joueurs :

$$\tilde{\mathcal{V}}_{(i,\theta_i)} = \left( U_{(i,\theta_i)},\ \tilde{x} \mapsto \bigoplus_{e \in E}{}_{(i,\theta_i)}\, \tilde{\mathbf{v}}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{x}^e),\ \succeq^U_{(i,\theta_i)} \right).$$

**Théorème 4.2 (Correction de la transformation** HR**).** Soit IG un jeu à information incomplète. Alors, IG et HR(IG) sont en correspondance.

*Démonstration.* Par définition des instances algébriques, dans le jeu incomplet IG, l'utilité du profil de stratégies signalisées $s$ pour le joueur $i$ ayant reçu le signal $\theta_i$ est :

$$\bigoplus_{B \subseteq 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}}{}_{(i,\theta_i)}\, m^{\boxplus}_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}(B) \otimes_{(i,\theta_i)} \mathbf{f}_{(i,\theta_i)} \left( \mathbf{v}_{(i,\theta_i)} \circ \chi_s,\ B \right).$$

Rappelons que $\chi_s(\omega) = \mathbf{c}(s(\omega), \omega)$. Or, nous pouvons remarquer que pour $\tilde{a}$ en correspondance avec $s$, et pour tout $e \in 2^\Omega$, $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a}^e) = \{s(\omega), \omega) \mid \omega \in e\} \in \tilde{\mathbb{X}}^e$. De plus, puisqu'un ensemble $B \notin E$ n'est focal pour aucun $(i, \theta_i)$, il est correct d'effectuer la sommation uniquement sur $E \subseteq 2^\Omega$. On a donc bien, pour tout $(i, \theta_i)$ et tous profils $s$ et $\tilde{a}$ en correspondance :

$$\mathbf{u}_{(i,\theta_i)} \left( \mathbf{v}_{(i,\theta_i)}, \mathbf{w}_{(i,\theta_i)}, \chi_s \right) = \tilde{\mathbf{v}}_{(i,\theta_i)} \left( \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{a}) \right).$$

Ce théorème est vérifié en Coq, voir la section 5.6. □

Plusieurs cas particuliers de cette transformation générale peuvent être trouvés dans la littérature.

**Jeux bayésiens** Tout jeu bayésien est un jeu à prior commun où la connaissance a priori est une mesure de probabilité et où la règle de décision de tous les joueurs, quel que soit le signal qu'ils reçoivent, est celle de l'utilité espérée. Cette règle est représentée par trois instances algébriques de règle de décision : $\mathcal{Z}^{\mathit{Choquet}}$, $\mathcal{Z}^{\mathit{Jaffray}^\alpha}$ et $\mathcal{Z}^{\mathit{TBM}}$. Dans le cas $n = 2$ joueurs, et pour chacune de ces instances algébriques, la transformation hypergraphique HR produit le même jeu hypergraphique que celui proposé par Howson et Rosenthal dans l'énoncé initial de leur théorème (Howson et Rosenthal, 1974) ;

**Jeux possibilistes** Tout jeu possibiliste est un jeu à prior commun où la connaissance a priori est une mesure de nécessité, où le conditionnement considéré est celui de Hisdal et où la règle de décision de tous les joueurs, quel que soit le signal qu'ils reçoivent, est celle de l'utilité pessimiste. Cette règle est représentée par l'instance algébrique $\mathcal{Z}^{\mathit{Pess}}$. Dans le cas $n = 2$ joueurs, la transformation hypergraphique HR basée sur l'instance $\mathcal{Z}^{\mathit{Pess}}$ produit le même jeu hypergraphique que celui proposé dans (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2020) ;

**Jeux évidentiels et crédaux** Tout jeu évidentiel ou crédal est un jeu à prior commun où la connaissance a priori est une fonction de croyance, où le conditionnement est celui de Dempster, de Fagin-Halpern, le conditionnement géométrique ou le conditionnement faible et où les règles de décision des joueurs, quel que soit le signal qu'ils reçoivent, sont identiques : soit la règle de Choquet, soit celle de Jaffray, soit celle du TBM. Pour un nombre quelconque de joueurs, la transformation hypergraphique HR basée sur l'instance $\mathcal{Z}^{Choquet}$, $\mathcal{Z}^{Jaffray^{\alpha}}$ ou $\mathcal{Z}^{TBM}$ produit le même jeu hypergraphique que la transformation appelée *transformation conditionnée* (*Conditioned Transform*) que nous avons proposées dans (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022, 2023). Dans cet article, on trouve deux autres transformations produisant d'autres jeux hypergraphiques (eux-aussi en correspondance avec IG). Nous les détaillons dans la section 4.5 consacrée aux jeux évidentiels et crédaux.

**Exemple 4.18 (Transformation hypergraphique).** *Considérons le jeu à information incomplète* IG *donné à l'exemple 4.13, dont la situation de jeu* $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}, \mathbf{c})$ *est définie par :*

$$N = \{G, B\} \qquad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$
$$\mathbb{X} = \{\texttt{Rien}, \texttt{Braconnage}, \texttt{Arrestation}\}$$
$$A_G = \{P_1, P_2, P_3\} \qquad A_B = \{P_1, P_2, P_3\}$$
$$\Theta_G = \{T_1, T_{2,3}\} \qquad \Theta_B = \{T_2, T_{1,3}\}$$
$$\tau_G(\omega_k) = \begin{cases} T_1 & si\ k = 1 \\ T_{2,3} & sinon \end{cases} \qquad \tau_B(\omega_k) = \begin{cases} T_2 & si\ k = 2 \\ T_{1,3} & sinon \end{cases}$$
$$\mathbf{c}((P_g, P_b), \omega_k) = \begin{cases} \texttt{Arrestation} & si\ g = b = k \\ \texttt{Braconnage} & si\ g = k \neq b \\ \texttt{Rien} & sinon \end{cases}$$

*Dans ce jeu* IG*, le garde-chasse peut recevoir le signal $T_1$ ou le signal $T_{2,3}$. Sa connaissance dépend du signal reçu. Inversement, ses préférences et sa règle de décision n'en dépendent pas. Il est modélisé par $\mathcal{I}_{(G,T_1)} = \left(\mathcal{U}^{\mathrm{EU}}, \mathcal{V}_G, \mathcal{W}_{(G,T_1)}\right)$ ou par $\mathcal{I}_{(G,T_{2,3})} = \left(\mathcal{U}^{\mathrm{EU}}, \mathcal{V}_G, \mathcal{W}_{(G,T_{2,3})}\right)$, dans le cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$. Sa fonction d'utilité algébrique, décrite par $\mathcal{V}_G$, est :*

$$\mathbf{v}_G(\texttt{Arrestation}) = 10 \qquad \mathbf{v}_G(\texttt{Rien}) = 0 \qquad \mathbf{v}_G(\texttt{Braconnage}) = -5,$$

*et les distributions des mesures de probabilité $\mathbf{w}_{(G,\theta_G)} \in \mathcal{K}\!\mathit{n}_{\mathrm{Pr}}(\Omega)$ vérifient, respectivement, $p_{(G,T_1)}(\omega_1) = 1$ et $p_{(G,T_{2,3})}(\omega_2) = p_{(G,T_{2,3})}(\omega_3) = 1/2$.*

*Le braconnier peut recevoir le signal $T_2$ ou le signal $T_{1,3}$. Comme pour le garde-chasse, dans cet exemple, sa connaissance dépend du signal reçu mais ses préférences et sa règle de décision n'en dépendent pas. Il est modélisé par $\mathcal{I}_{(B,T_2)} = \left(\mathcal{U}^{\mathrm{Min}}, \mathcal{V}_B, \mathcal{W}_{(B,T_2)}\right)$ ou par $\mathcal{I}_{(B,T_{1,3})} = \left(\mathcal{U}^{\mathrm{Min}}, \mathcal{V}_B, \mathcal{W}_{(B,T_{1,3})}\right)$, dans le*

*cadre de décision $\mathcal{F}_{\mathbb{X},\mathrm{Ign}}$. Sa fonction d'utilité algébrique, décrite par $\mathcal{V}_G$, représente les préférences qualitatives :*

$$\texttt{Braconnage} \succeq_B^{\mathbb{X}} \texttt{Rien} \succeq_B^{\mathbb{X}} \texttt{Arrestation},$$

*pour laquelle nous pouvons considérer la représentation numérique suivante : $\mathbf{v}_B(x) = -\mathbf{v}_G(x)$. Les mesures de nécessité catégoriques $\mathbf{w}_{(B,\theta_B)} \in \mathcal{K}\!n_{\mathrm{Ign}}(\Omega)$ sont telles que :*

$$\mathbf{w}_{(B,T_2)}(B) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \{\omega_2\} \subseteq B \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \qquad \mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}(B) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \{\omega_1,\omega_3\} \subseteq B \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

*Les règles $\mathcal{U}^{\mathrm{EU}}$ et $\mathcal{U}^{\mathrm{Min}}$ considérées pour les joueurs sont toutes les deux représentées par l'instance algébrique :*

$$\mathcal{Z}^{\textit{Choquet}} = ((\mathbb{R},+,0),(\mathbb{R},+,0),\times,\mathrm{minf})\,,$$

*Les fonctions de masse algébriques décrivant les capacités algébriques des joueurs selon le signal qu'ils reçoivent sont telles que :*

$$\begin{aligned}
m^+_{\mathbf{w}_{(G,T_1)}}(\{\omega_1\}) &= 1 && && \textit{et 0 sinon}\\
m^+_{\mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}}(\{\omega_2\}) &= 1/2 && m^+_{\mathbf{w}_{(G,T_{2,3})}}(\{\omega_3\}) = 1/2 && \textit{et 0 sinon}\\
m^+_{\mathbf{w}_{(B,T_2)}}(\{\omega_2\}) &= 1 && && \textit{et 0 sinon}\\
m^+_{\mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}}(\{\omega_1,\omega_3\}) &= 1 && && \textit{et 0 sinon}
\end{aligned}$$

*Alors, l'union des ensembles des éléments focaux est :*

$$\mathcal{S}^* = \Big\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_{1,3}\}\Big\},$$

*et la situation de jeu hypergraphique de* HR(IG) *est*

$$\mathcal{HG} = \left(\tilde{N}, \left(\tilde{A}_{(i,\theta_i)}\right)_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}, E, \mathrm{P}, \left(\tilde{\mathbb{X}}^e, \tilde{\mathbf{c}}^e\right)_{e\in E}\right),$$

*où :*

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \Big\{\ (G,T_1),\ (G,T_{2,3}),\ (B,T_2),\ (B,T_{1,3})\ \Big\}\\
\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i &= \Big\{P_1,P_2,P_3\Big\}\\
\tilde{E} = \mathcal{S}^* &= \Big\{\ \{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_3\},\ \{\omega_1,\omega_3\}\ \Big\}\\
\mathrm{P}(\{\omega_1\}) &= \Big\{(G,T_1),(B,T_{1,3})\Big\}\\
\mathrm{P}(\{\omega_2\}) &= \Big\{(G,T_{2,3}),(B,T_2)\Big\}\\
\mathrm{P}(\{\omega_3\}) &= \Big\{(G,T_{2,3}),(B,T_{1,3})\Big\}\\
\mathrm{P}(\{\omega_1,\omega_3\}) &= \Big\{(G,T_1),(G,T_{2,3}),(B,T_{1,3})\Big\}.
\end{aligned}$$

*Les fonctions-conséquences locales sont données (pour les jeux locaux à deux joueurs) dans la figure 4.4, Pour le jeu local $\{\omega_1, \omega_3\}$, auquel les trois couples $(G, T_1)$, $(G, T_{2,3})$ et $(B, T_{1,3})$ participent, la matrice des conséquences est tridimensionnelle et les conséquences locales à $\{\omega_1, \omega_3\}$ sont données en table 4.4 page suivante (ce sont les profils de stratégies pures possibles si $\omega_1$ ou si $\omega_3$ est le vrai état du monde).*

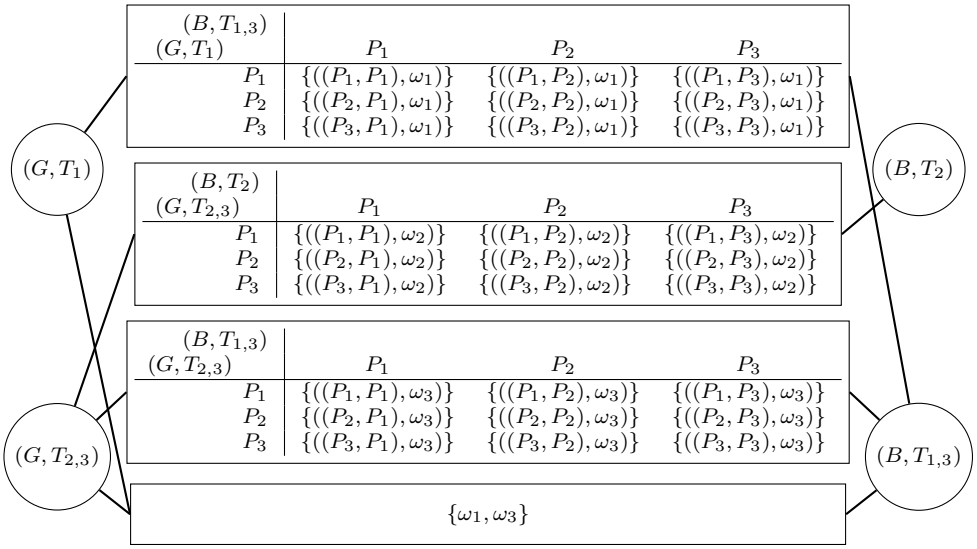



FIGURE 4.4 – Situation de jeu hypergraphique

*Enfin, les fonctions d'utilités locales des joueurs $(i, \theta_i)$, pour tout jeu local $e \in \tilde{E}$ sont :*

$$\tilde{\mathbf{v}}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{x}^e) = m^+_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}(e) \times \min_{x \in \tilde{x}^e} \mathbf{v}_{(i,\theta_i)}(\mathbf{c}(x)).$$

*Nous avons donc :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}^{\{\omega_1\}}_{(G,T_1)}(\{x\}) &= \mathbf{v}_G(\mathbf{c}(x)) & \tilde{\mathbf{v}}^e_{(G,T_1)}(B) &= 0 \text{ sinon} \\
\tilde{\mathbf{v}}^{\{\omega_2\}}_{(G,T_{2,3})}(\{x\}) = \tilde{\mathbf{v}}^{\{\omega_3\}}_{(G,T_{2,3})}(\{x\}) &= 1/2 \times \mathbf{v}_G(\mathbf{c}(x)) & \tilde{\mathbf{v}}^e_{(G,T_{2,3})}(B) &= 0 \text{ sinon} \\
\tilde{\mathbf{v}}^{\{\omega_2\}}_{(B,T_2)}(\{x\}) &= \mathbf{v}_B(\mathbf{c}(x)) & \tilde{\mathbf{v}}^e_{(B,T_2)}(\{x\}) &= 0 \text{ sinon} \\
\tilde{\mathbf{v}}^{\{\omega_1,\omega_3\}}_{(B,T_{1,3})}(B) &= \min_{x \in B} \mathbf{v}_B(\mathbf{c}(x)) & \tilde{\mathbf{v}}^e_{(B,T_{1,3})}(\{x\}) &= 0 \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

*Nous pouvons vérifier que, pour tous profils $s$ de* IG *et $\tilde{a}$ de* HR(IG) *en correspondance, les utilités sont égales.*

| $\tilde{a}^{\{\omega_1,\omega_3\}}_{(G,T_{2,3})}$ | $\tilde{a}^{\{\omega_1,\omega_3\}}_{(B,T_{1,3})}$ | $\tilde{a}^{\{\omega_1,\omega_3\}}_{(G,T_1)}$ | $\tilde{x}^{\{\omega_1,\omega_3\}}$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | $P_1$ | $P_1$ | $\{((P_1,P_1),\omega_1),((P_1,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_1$ | $P_2$ | $\{((P_1,P_2),\omega_1),((P_1,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_1$ | $P_3$ | $\{((P_1,P_3),\omega_1),((P_1,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_2$ | $P_1$ | $\{((P_1,P_1),\omega_1),((P_2,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_2$ | $P_2$ | $\{((P_1,P_2),\omega_1),((P_2,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $\{((P_1,P_3),\omega_1),((P_2,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_3$ | $P_1$ | $\{((P_1,P_1),\omega_1),((P_3,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_3$ | $P_2$ | $\{((P_1,P_2),\omega_1),((P_3,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_1$ | $P_3$ | $P_3$ | $\{((P_1,P_3),\omega_1),((P_3,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_1$ | $P_1$ | $\{((P_2,P_1),\omega_1),((P_1,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_1$ | $P_2$ | $\{((P_2,P_2),\omega_1),((P_1,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_1$ | $P_3$ | $\{((P_2,P_3),\omega_1),((P_1,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_2$ | $P_1$ | $\{((P_2,P_1),\omega_1),((P_2,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_2$ | $P_2$ | $\{((P_2,P_2),\omega_1),((P_2,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_2$ | $P_3$ | $\{((P_2,P_3),\omega_1),((P_2,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_3$ | $P_1$ | $\{((P_2,P_1),\omega_1),((P_3,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_3$ | $P_2$ | $\{((P_2,P_2),\omega_1),((P_3,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_2$ | $P_3$ | $P_3$ | $\{((P_2,P_3),\omega_1),((P_3,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_1$ | $P_1$ | $\{((P_3,P_1),\omega_1),((P_1,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_1$ | $P_2$ | $\{((P_3,P_2),\omega_1),((P_1,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_1$ | $P_3$ | $\{((P_3,P_3),\omega_1),((P_1,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_2$ | $P_1$ | $\{((P_3,P_1),\omega_1),((P_2,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_2$ | $P_2$ | $\{((P_3,P_2),\omega_1),((P_2,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_2$ | $P_3$ | $\{((P_3,P_3),\omega_1),((P_2,P_3),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_3$ | $P_1$ | $\{((P_3,P_1),\omega_1),((P_3,P_1),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_3$ | $P_2$ | $\{((P_3,P_2),\omega_1),((P_3,P_2),\omega_3)\}$ |
| $P_3$ | $P_3$ | $P_3$ | $\{((P_3,P_3),\omega_1),((P_3,P_3),\omega_3)\}$ |

TABLE 4.4 – Conséquences pour le jeu local $\{\omega_1,\omega_3\}$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_{(G,T_1)}(\tilde{a}) = \sum\nolimits_{e\in\tilde{E}} \tilde{\mathbf{v}}^e_{(G,T_1)}(\tilde{\mathbf{c}}^e(\tilde{a}^e)) \quad &= 1 \times \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_1),\omega_1)) \\
&= \mathbf{u}^{\mathrm{EU}}(\mathbf{v},\mathbf{w}_{(G,T_1)},\chi_s) \\
\tilde{\mathbf{v}}_{(G,T_{2,3})}(\tilde{a}) = \sum\nolimits_{e\in\tilde{E}} \tilde{\mathbf{v}}^e_{(G,T_{2,3})}(\tilde{\mathbf{c}}^e(\tilde{a}^e)) \quad &= \frac{\mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_2),\omega_2)) + \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_3),\omega_3))}{2} \\
&= \mathbf{u}^{\mathrm{EU}}(\mathbf{v},\mathbf{w}_{(G,T_{2,3})},\chi_s) \\
\tilde{\mathbf{v}}_{(B,T_2)}(\tilde{a}) = \sum\nolimits_{e\in\tilde{E}} \tilde{\mathbf{v}}^e_{(B,T_2)}(\tilde{\mathbf{c}}^e(\tilde{a}^e)) \quad &= 1 \times \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_2),\omega_2)) \\
&= \mathbf{u}^{\mathrm{Min}}(\mathbf{v},\mathbf{w}_{(B,T_2)},\chi_s) \\
\tilde{\mathbf{v}}_{(B,T_{1,3})}(\tilde{a}) = \sum\nolimits_{e\in\tilde{E}} \tilde{\mathbf{v}}^e_{(B,T_{1,3})}(\tilde{\mathbf{c}}^e(\tilde{a}^e)) \quad &= \min\left(\mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_1),\omega_1)),\mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_3),\omega_3))\right) \\
&= \mathbf{u}^{\mathrm{Min}}(\mathbf{v},\mathbf{w}_{(B,T_{1,3})},\chi_s)
\end{aligned}
$$

**Exemple 4.19 (Même transformation, autre instance algébrique).** *Nous avons proposé deux instance algébriques représentant la règle* Min *: l'instance*

$\mathcal{Z}^{Choquet}$ *considérée ci-dessus, et l'instance :*

$$\mathcal{Z}^{Pess} = (([0,1], \max, 0), (\mathbb{R}, \min, 1), \text{nmax}, \text{minf}),$$

*Nous pouvons donc effectuer la transformation* HR *en considérant cette dernière instance. Les fonctions de masse algébriques* max*-représentant* $\mathbf{w}_{(B,\theta_B)}$ *sont les distributions de possibilité :*

$$\begin{array}{lll} m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,T_2)}}(\{\omega_1\}) = 0 & m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,T_2)}}(\{\omega_2\}) = 1 & m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,T_2)}}(\{\omega_3\}) = 0, \\ m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}}(\{\omega_1\}) = 1 & m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}}(\{\omega_2\}) = 0 & m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}}(\{\omega_3\}) = 1. \end{array}$$

*Alors, l'union des ensembles des éléments focaux est* $\mathcal{S}^* = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}\}$. *La situation de jeu hypergraphique de* HR(IG) *est similaire à celle donnée en figure 4.4, sauf que le jeu local* $e = \{\omega_1, \omega_3\}$ *n'existe plus. Les fonctions d'utilité locales du garde-chasse sont identiques, quel que soit le signal qu'il reçoit. Par contre, les fonctions d'utilité locale du braconnier deviennent :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}^{\{\omega_k\}}_{(B,\theta_B)}(x) &= \text{nmax}\left(m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,\theta_B)}}(\{\omega_k\}), \mathbf{v}_B(\mathbf{c}(x))\right) \\ &= \begin{cases} \mathbf{v}_B(\mathbf{c}(x)) & \textit{si } m^{\max}_{\mathbf{w}_{(B,\theta_B)}}(\{\omega_k\}) = 1 \\ 1 & \textit{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

*Tous les profils* $s$ *de* IG *et* $\tilde{a}$ *de* HR(IG) *en correspondance ont les mêmes utilités :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{(B,T_2)}(\tilde{a}) &= \min_{e\in\tilde{E}} \tilde{\mathbf{v}}^e_{(B,T_2)}(\tilde{\mathbf{c}}^e(\tilde{a}^e)) \\ &= \min\left(1, \text{nmax}\left(1, \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_2), \omega_2))\right), 1\right) \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_2), \omega_2)) = \mathbf{u}^{\text{Min}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}_{(B,T_2)}, \chi_s) \\ \tilde{\mathbf{v}}_{(B,T_{1,3})}(\tilde{a}) &= \min_{e\in\tilde{E}} \tilde{\mathbf{v}}^e_{(B,T_{1,3})}(\tilde{\mathbf{c}}^e(\tilde{a}^e)) \\ &= \min\left(\text{nmax}\left(1, \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_1), \omega_1))\right), 1, \text{nmax}\left(1, \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_3), \omega_3))\right)\right) \\ &= \min\left(\mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_1), \omega_1)), \mathbf{v}(\mathbf{c}(s(\omega_3), \omega_3))\right) = \mathbf{u}^{\text{Min}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}_{(B,T_{1,3})}, \chi_s) \end{aligned}$$

Grâce à ces deux exemples, nous voyons que la taille du jeu hypergraphique produit par la transformation hypergraphique HR dépend des instances algébriques de règle de décision considérées, en particulier de la taille des éléments focaux des fonctions de masse qu'elles impliquent. Dans le second exemple, l'ensemble $\{\omega_1, \omega_3\}$ n'est pas focal et il n'y a donc pas de jeu local qui lui correspond. Le jeu hypergraphique produit est plus succinct que celui du premier exemple. En effet, nous définissons ces jeux hypergraphiques décomposables par les fonctions d'utilité locales. Dans le second exemple, pour chacun des trois jeux locaux $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$ et $\{\omega_3\}$, il y a $3 \times 3 = 9$ valeurs à donner pour les fonctions d'utilité locales correspondantes. Dans le premier exemple, il y a un jeu local supplémentaire $\{\omega_1, \omega_3\}$ qui implique trois joueurs, il y a donc $3 \times 3 \times 3 = 27$ valeurs à donner pour les fonctions d'utilité locales correspondantes.

Dans la sous-section suivante, nous établissons plus formellement la complexité théorique (en temps et en espace) de cette transformation, en fonction du jeu initial IG et des instances algébriques considérées.

### 4.4.3 Complexité spatiale et temporelle de la transformation hypergraphique

Partant d'un jeu à information incomplète IG, la transformation hypergraphique HR produit un jeu hypergraphique HR(IG) dont la taille et le nombre d'opérations nécessaires pour le construire (c'est-à-dire la complexité spatiale et temporelle) dépendent à la fois du jeu initial IG et des instances algébriques de règles de décision considérées. Dans cette sous-section, nous donnons des bornes supérieures de ces complexités en fonction de IG et des instances algébriques. Nous utilisons pour cela les notations de Landau :

— $u \in O(v) \iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que, pour un $n$ assez grand, $u(n) \leq k \times v(n)$ ;
— $u \in \Theta(v) \iff u \in O(v) \wedge v \in O(u)$ ;

Ainsi, $u \in \Theta(n^2)$ signifie que $u$ est de l'ordre de $n^2$, par exemple, $u(n) = 5n^2+3 \in \Theta(n^2)$ ; et $u \in O(n^2)$ signifie que $u$ est majorée par une fonction de l'ordre de $n^2$, par exemple, $u(n) = 2n - 1 \in O(n^2)$.

*Remarque* 54. La notation $u \in \Theta(v)$ utilise le même symbole que l'ensemble des combinaisons de signaux $\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$. Le contexte permet toujours de différencier ces deux seignifications : si $\Theta$ est suivi de parenthèses, c'est la notation de Landau.

Introduisons dès à présent quelques notations et hypothèses simplificatrices. D'abord, nous supposons que les joueurs disposent d'exactement $\alpha = |A_i| > 1$ actions chacun, et qu'ils peuvent recevoir exactement $\beta = |\Theta_i|$ signaux chacun. Alors, le nombre de profils de stratégies pures est $|A| = \alpha^n$ et le nombre de combinaisons de signaux est $|\Theta| = \beta^n$. De plus, nous supposons que la taille $w$ du cadre de discernement est du même ordre de grandeur que le nombre de combinaisons de signaux, c'est-à-dire $w = |\Omega| \in \Theta(\beta^n)$, ce qui est le cas par exemple lorsque nous modélisons une situation où l'incertitude porte sur les types potentiels des joueurs. Nous supposons aussi que le nombre de conséquences est maximal, c'est-à-dire que pour tous profils de stratégies pures $a$ et $a' \in A$, et pour tous états du monde $\omega$ et $\omega' \in \Omega, \mathbf{c}(a, \omega) \neq \mathbf{c}(a', \omega')$. Alors, $|\mathbb{X}| = |A| \times |\Omega| = w\alpha^n$. Nous supposons encore que toutes les fonctions sont représentées *en extension*, c'est-à-dire par une table ou une liste de valeurs. Ainsi, une fonction $f : X \to Y$ est une table contenant $|X|$ valeurs. Si un élément $y \in Y$ est représenté en $\Theta(z)$, la taille de $f$ est donc en $\Theta(|X| \times z)$. En particulier, la fonction-conséquence et les fonctions d'utilité algébriques de IG sont représentées chacunes par une table contenant $w\alpha^n \in \Theta\left((\alpha\beta)^n\right)$ valeurs.

Ensuite, nous supposons que les fonctions de masse qui représentent les structures de connaissance sont toutes $(k, \boxplus_{(i,\theta_i)})$-additives (rappelons que les opérateurs $\boxplus_{(i,\theta_i)}$ définissant les fonctions de masses sont imposés par les instances algébriques de règles de décision considérées), et qu'elles sont données en entrée

(nous ne considérons pas le temps nécessaire pour les calculer, le cas échéant). Le nombre $s$ des éléments focaux de toutes les fonctions de masse est donc borné par $s \leq \binom{w}{k} \leq w^k$.

Enfin, nous supposons que les relations $\succeq^U$, $\succeq^V$ et $\succeq^W$ sont représentées ou calculées en $O(1)$, c'est-à-dire qu'elles n'impactent ni la taille ni le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer la transformation. Nous supposons que la taille des éléments de $U_{(i,\theta_i)}$, de $V_{(i,\theta_i)}$ et de $W_{(i,\theta_i)}$ est identique pour tous les joueurs et tous leurs signaux, nous la notons $v$. Nous supposons que le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer un calcul avec $\oplus_{(i,\theta_i)}$ est identique pour tous les joueurs et tous leurs signaux, nous le notons $T_\oplus$ ; la même hypothèse est faite pour $\otimes_{(i,\theta_i)}$, dont le nombre d'opération est noté $T_\otimes$.

Remarquons que pour les règles de décision usuelles dont les co-domaines sont $U = V = W = \mathbb{R}$, nous avons $v \in O(1)$ et $T_\oplus = T_\otimes \in O(1)$.

La donnée de départ est un jeu à information incomplète $\mathcal{IG}$ défini pour une situation de jeu $\mathcal{IG}$. La taille de la situation de jeu $\mathcal{IG}$ est la somme des tailles de ses composants.

**Propriété 4.5 (Taille d'une situation de jeu à information incomplète).** Soit $\mathcal{IG} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}, \mathbf{c})$ une situation de jeu à information incomplète. Sa taille est :

$$\text{Taille}\left(\mathcal{IG}\right) \in \Theta\left(w\alpha^n\right).$$

*Démonstration.* Les éléments des ensembles $N$, $\Omega$ et $\mathbb{X}$ sont des identifiants, ces ensembles sont donc représentés en $O(1)$ (par exemple, pour représenter $N = \{1, \ldots, n\}$, il suffit de stocker la valeur $n$). De manière similaire, chaque ensemble $A_i$ ou $\Theta_i$ est représenté en $O(1)$. Les fonctions $\tau_i : \Omega \to \Theta_i$ sont données en extension par une table contenant $|\Omega| = w$ entrées, donc en $\Theta(w)$. Ainsi, la famille $(A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i\in N}$ est représentée en $O(nw)$. Enfin, la fonction-conséquence $\mathbf{c} : A \times \Omega \to \mathbb{X}$ est donnée en extension par une table contenant $|A| \times |\Omega| = a^n \times w$ éléments, donc en $\Theta(w\alpha^n)$. Puisque $n < \alpha^n$ pour $\alpha > 1$, nous pouvons conclure que Taille$(\mathcal{IG}) \in \Theta(w\alpha^n)$. □

La taille d'un jeu à information incomplète IG est donc au moins de l'ordre de la taille de la situation de jeu Taille$(\mathcal{IG}) \in \Theta(w\alpha^n)$. Il s'avère qu'elle est supérieure.

**Propriété 4.6 (Taille d'un jeu à information incomplète).** La taille d'un jeu à information incomplète $\text{IG} = \left(\mathcal{IG}, \left(\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)}\right)_{i\in N, \theta_i \in \Theta_i}\right)$ est :

$$\text{Taille}\left(\text{IG}\right) \in \Theta\left(nv\left(w\alpha^n + \beta s\right)\right).$$

*Démonstration.* D'abord, toute structure de règle de décision $\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}$ est indépendante du problème considéré : sa taille est en $O(1)$. Les $n\beta$ structures de décision sont donc représentées en $\Theta(n\beta)$.

Ensuite, la taille d'une structure de préférence $\mathcal{V}_{(i,\theta_i)}$ est la taille de la fonction $\mathbf{v}_{(i,\theta_i)} : \mathbb{X} \to V_{(i,\theta_i)}$ qu'elle décrit (rappelons que nous faisons l'hypothèse que la relation $\succeq^V_{(i,\theta_i)}$ est représentée en $O(1)$). Puisqu'elle associe aux $|\mathbb{X}|$

conséquence une valeur de taille $v$, nous avons donc naïvement $\text{Taille}(\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}) \in \Theta(|\mathbb{X}| \times v) = \Theta(vw\alpha^n)$. Cependant, nous pouvons représenter plusieurs fonctions dans une seule table de cette taille. En effet, dans une table de $w\alpha^n$ entrées (chaque entrée correspondant à un profil $a \in A$ et à un état du monde $\omega \in \Omega$), nous pouvons lister les valeurs de toutes les fonctions $\mathbf{v}_{(i,\theta_i)}$ du joueur $i$ (pour tous ses signaux $\theta_i$) puisqu'$\omega$ spécifie le signal $\theta_i$ qu'il reçoit : à l'entrée $(a, \omega)$ se trouve la valeur de $\mathbf{v}_{(i,\tau_i(\omega))}(a, \omega)$. Ainsi, les $\beta$ structures de préférences d'un même joueur $i$ (pour les $\beta$ signaux qu'il peut recevoir) sont décrites par une seule table de taille $\Theta(vw\alpha^n)$. Il faut donc seulement $n$ tables pour représenter les $n\beta$ structures de préférence, c'est-à-dire en $\Theta(nvw\alpha^n)$.

Enfin, la taille d'une structure de connaissance $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)}$ est la taille de sa capacité algébrique $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)} : 2^\Omega \to W_{(i,\theta_i)}$, naïvement bornée par $v2^w$. Or, nous considérons des instances algébriques de règles de décision, qui impliquent l'existence de fonction de masses. Nous pouvons considérer les tailles de ces fonctions de masses. Chacune a moins de $s$ éléments focaux ($s$ étant le nombre des éléments qui sont focaux pour au moins un couple $(i, \theta_i)$). Les $n\beta$ structures de connaissances sont ainsi représentées en $O(n\beta vs)$.

Nous pouvons conclure que la taille d'un jeu à information incomplète est en $\Theta(nvw\alpha^n + n\beta vs) = \Theta(nv(w\alpha^n + \beta s))$. □

Intéressons-nous maintenant à la taille du jeu hypergraphique HR (IG).

**Propriété 4.7 (Taille de la situation de jeu hypergraphique).** La taille de la situation de jeu hypergraphique $\mathcal{HG}$ de HR (IG) est :

$$\text{Taille}(\mathcal{HG}) \in O\left(s\alpha^{kn}\right) \subseteq O\left(\text{Taille}(\mathcal{IG})^k\right).$$

*Démonstration.* La situation de jeu hypergraphique $\mathcal{HG}$ est complètement spécifiée par le graphe du jeu qui décrit les $n\beta$ joueurs et les $s$ matrices de conséquences locales (une matrice de conséquence par jeu local). Or, chaque jeu local $e \in E$ est un élément focal pour au moins un couple $(i, \theta_i)$, donc $|e| \leq k$, et $\mathrm{P}(e) \leq kn$ (au pire, les $n$ joueurs reçoivent des signaux différents dans les $k$ états du monde du jeu local $e$, il y a alors $kn$ couples joueur-signal qui y participent). Il y a donc $O(\alpha^{kn})$ conséquences locales par jeu local. Nous pouvons conclure que $\text{Taille}(\mathcal{HG}) \in O(s\alpha^{kn})$. De plus, $s < w^k$, donc $\text{Taille}(\mathcal{HG}) \in O\left(w^k\alpha^{kn}\right) = O\left((w\alpha^n)^k\right) \subseteq O\left(\text{Taille}(\mathcal{IG})^k\right)$. □

Enfin, nous avons vu que jeu hypergraphique HR (IG) est décomposable par $\oplus_{(i,\theta_i)}$ (l'opérateur étant défini par l'instance algébrique de la règle de décision du couple $(i, \theta_i)$). Il suffit donc de donner les fonctions d'utilité algébriques locales pour le définir.

**Propriété 4.8 (Taille du jeu HR (IG)).** La taille du jeu hypergraphique HR (IG) est :

$$\text{Taille}(\text{HR(IG)}) \in O\left(snv\beta\alpha^{kn}\right) \subseteq O\left(\beta\,\text{Taille}(\text{IG})^k\right).$$

Si HR(IG) est graphiquement décomposable ou si $n\beta \leq n^k$, alors :

$$\text{Taille}\left(\text{HR(IG)}\right) \in O\left(sv(n\alpha^n)^k\right) \subseteq O\left(\text{Taille}\left(\text{IG}\right)^k\right).$$

*Démonstration.* Les fonctions d'utilité algébriques locales définissant HR(IG) donnent, pour tout jeu local $e$, l'utilité des $|A^e|$ conséquences locales. A priori, il faut les donner pour les $n\beta$ joueurs, et si le jeu est graphiquement décomposable il suffit de les donner pour les $x \leq kn$ joueurs participant au jeu local $e$. Chacune est représentée en extension par une table listant $|A^e| < \alpha^{kn}$ entrées (chaque entrée étant une valeur de $U_{(i,\theta_i)}$ de taille $v$). Nous pouvons directement conclure que

- Dans le cas général, Taille(HR(IG)) $\in O(snv\beta\alpha^{kn})$. Or, $s < w^k$, donc Taille(HR(IG)) $\in O(vw^kn\beta\alpha^{kn}) = O(\beta(wnv\alpha^n)^k) \subseteq O(\beta\,\text{Taille(IG)}^k)$ ;
- Si $n\beta \leq n^k$, alors Taille(HR(IG)) $\in O(vw^kn^k\alpha^{kn}) = O(v(wn\alpha^n)^k) \subseteq O(\text{Taille(IG)}^k)$ ;
- Enfin, si le jeu est graphiquement décomposable, alors il n'y a que $x \leq kn$ fonctions d'utilités algébriques locales à donner pour chaque jeu local. Or $kn \leq n^k$, donc comme précédemment nous pouvons réécrire Taille(HR(IG)) $\in O(vw^kn^k\alpha^{kn}) = O(v(wn\alpha^n)^k) \subseteq O(\text{Taille(IG)}^k)$.

□

**Propriété 4.9 (Nombre d'opérations pour construire le jeu** HR (IG)**).** Le nombre d'opérations pour construire le jeu hypergraphique HR (IG) est :

$$\text{Durée}\left(\text{HR(IG)}\right) \in O\left(T_{\otimes}s\beta n\alpha^{kn}\right) \subseteq O\left(T_{\otimes}\beta\,\text{Taille}\left(\text{IG}\right)^k\right).$$

Si HR(IG) est graphiquement décomposable ou si $n\beta \leq n^k$, alors :

$$\text{Durée}\left(\text{HR(IG)}\right) \in O\left(T_{\otimes}s(n\alpha^n)^k\right) \subseteq O\left(T_{\otimes}\,\text{Taille}\left(\text{IG}\right)^k\right).$$

*Démonstration.* Le nombre d'opérations nécessaires pour construire HR(IG) est le nombre d'opérations nécesssaires pour calculer toutes les valeurs des fonctions d'utilité locales. Nous avons vu ci-dessus qu'il y a $O(s\beta n\alpha^{kn})$ ou $O(s(n\alpha^n)^k)$ valeurs dans ces tables, selon que HR(IG) est décomposable ou graphiquement décomposable. Pour calculer l'une de ces valeurs, il suffit d'effectuer une opération $\otimes_{(i,\theta_i)}$ nécessitant $T_{\otimes}$ opérations. □

*Remarque* 55. Le jeu HR(IG) est très souvent graphiquement décomposable. En effet, pour que ce soit le cas, il suffit que la connaissance capturée par toute capacité algébrique $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}$ soit telle qu'un événement $B \subseteq \Omega$ pour lequel le signal $\theta_i$ est impossible ne soit pas focal pour la $\boxplus$-représentation (c'est-à-dire pour sa fonction de masse algébrique $m^{\boxplus}_{\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}}$). C'est une hypothèse raisonnable : si un joueur reçoit le signal $\theta_i$, aucun élément focal ne peut supporter une assertion $B$ contradictoire (disant que $\theta_i$ est impossible). Dans nos travaux sur les jeux évidentiels et crédaux à prior commun, les capacités algébriques $\mathbf{w}_{(i,\theta_i)}$ étaient des fonctions de croyances obtenus par conditionnement. Si le conditionnement

vérifie $\text{Bel}(C \mid C^c) = 0$, alors le jeu est graphiquement décomposable. Cette propriété est garantie pour les conditionnements usuels (Dempster, Fagin-Halpern et géométrique), mais pas pour le conditionnement faible (Weak conditioning, Planchet, 1989).

La complexité spatiale et temporelle de la transformation HR hypergraphique est donc de l'ordre du degré de $(k, \boxplus_{(i,\theta_i)})$-additivité des fonctions de masses imposées par les instances algébriques de règle de décision. Particulièrement, lorsque $k = 1$ (nous avons alors affaire à des $\boxplus$-distributions), la transformation se fait en temps linéaire, et le jeu obtenu HR(IG) à la même taille que le jeu initial IG. Pour des valeurs de $k$ relativement petites (typiquement, $k = 2$ ou $k = 3$), la transformation semble effectivement faisable. Fort heureusement, de petites valeurs de $k$ permettent déjà d'être très expressif.

## 4.5 Bel-games : les jeux évidentiels et crédaux

Durant mon doctorat, nous nous sommes particulièrement intéressés à la théorie des fonctions de croyance. Nous avons d'abord proposé un modèle de jeu à information incomplète basé sur cette théorie, ce que nous avons appelé *Bel-Game*, en distinguant parfois les jeux évidentiels (traduction maladroite de *evidential games*) et les jeux crédaux (*credal games*), selon l'interprétation que l'on donne aux fonctions de croyance (Fargier, Martin-Dorel et Pomeret-Coquot, 2021a; Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022, 2023).

Ces jeux constituent un cas particulier du modèle de jeux algébriques présenté dans ce chapitre : ce sont des jeux à prior commun dans le cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\text{Bel}}$ des fonctions de croyances et utilités quantitatives. Nous les abordons plus en détail dans cette section et illustrons ainsi une application du cadre algébrique. La compréhension du modèle des Bel-Games, des concepts qui s'y appliquent et des transformations de Howson et Rosenthal que nous proposons ne devrait pas poser de difficulté au lecteur qui a pris connaissance du reste du chapitre.

Bien qu'ils constituent un cas particulier du modèle algébrique général, les Bel-Games sont déjà très expressifs : ils généralisent en effet les jeux bayésiens en permettant d'exprimer des connaissances précises et imprécises. Ils sont donc adaptés pour modéliser les jeux où les connaissances des joueurs mélangent variabilité et ignorance. De telles connaissances sont mal modélisées dans la théorie des probabilités, comme l'illustre le paradoxe d'Ellsberg (exemple 1.13). Nous revenons dans cette section sur l'exemple 4.16 où, de manière similaire, la connaissance des joueurs capture à la fois la variabilité d'un phénomène et l'ignorance partielle qu'ils en ont.

### 4.5.1 Définition et interprétation d'un Bel-Game

Un Bel-game est un jeu à information incomplète particulier (définition 4.16), où la connaissance a priori est commune (définition 4.21), c'est-à-dire que tous

les joueurs considèrent la même fonction de croyance a priori, et qu'ils la conditionnent « sachant leur type » ou « sachant le signal qu'ils reçoivent ».

**Définition 4.27 (Bel-Game).** Un Bel-Game BelG est un $n$-uplet :

$$\text{BelG} = (N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i \in N}, m)\,,$$

où :
- $N = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble fini des joueurs ;
- $A_i$ est l'ensemble des actions du joueur $i$ ;
- $\Theta_i$ est l'ensemble des types du joueur $i$ ;
- $u_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité quantitative du joueur $i$ ;
- $m : 2^{\Theta} \to [0, 1]$ est la fonction de masse décrivant la connaissance commune a priori $\text{Bel}_m$.

Nous pouvons constater la ressemblance entre cette définition et celle d'un jeu bayésien (définition 2.21) : d'une part elle regroupe la situation de jeu et les modèles des joueurs et d'autre part l'ensemble des conséquences possibles $\mathbb{X}$ comme le cadre de discernement $\Omega$ sont laissé implicites. Cependant, nous pouvons toujours poser $\Omega = \Theta$ et $\mathbb{X} = A \times \Theta$ ; la conséquence $(a, \omega) \in \mathbb{X}$ est alors comprise comme « ce qui arrive lorsque les joueurs jouent $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et que leurs types sont $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ».

Soit un Bel-Game $\text{BelG} = (N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i \in N}, m)$. Dans notre cadre général présenté dans à la section 4.3, BelG décrit la situation de jeu suivante :

$$\mathcal{IG}^{\text{BelG}} = (N, \Omega, \mathbb{X}, (A_i, \Theta_i, \tau_i)_{i \in N}, \mathbf{c})\,,$$

où le cadre de discernement est l'ensemble des combinaisons de types ($\Omega = \Theta$), l'ensemble des conséquences est $\mathbb{X} = A \times \Theta$, la fonction-signal est trivialement définie par $\tau_i(\theta) = \theta_i$ et la fonction-conséquence par $\mathbf{c}(a, \theta) = (a, \theta)$.

Ce même Bel-Game BelG définit seulement partiellement le jeu à information incomplète IG :

$$\text{IG}^{\text{BelG}} = \left(\mathcal{IG}, (\mathcal{I}_{(i,\theta_i)})_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}\right).$$

où, pour tout joueur $i$ et chacun de ses types $\theta_i$, le modèle d'agent $\mathcal{I}_{(i,\theta_i)} = \left(\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{V}_{(i,\theta_i)}, \mathcal{W}_{(i,\theta_i)}\right)$ est tel que :
- $\mathcal{V}_{(i,\theta_i)} = (\mathbb{R}, \geq, u_i)$ est la structure de préférence décrivant la fonction d'utilité quantitative du joueur $i$, quel que soit son type ;
- $\mathcal{W}_{(i,\theta_i)} = ([0, 1], \geq, \text{Bel}_m(\cdot \mid \theta_i))$ est la structure de connaissance décrivant la fonction de croyance « sachant $\theta_i$ » déduite de $m$.

Les modèles des joueurs ne sont pas complètement spécifiés. D'une part leurs règles de décision respectives ne sont pas données et d'autre part le conditionnement utilisé dans l'expression $\text{Bel}_m(\cdot \mid \theta_i)$ n'est pas précisé non plus. Ce sont deux paramètres qu'il faut définir « à côté » du Bel-Game. Comme nous l'avons évoqué à plusieurs reprises, le conditionnement dépend de la nature des informations apprises (des signaux reçus ou des types) et sera donc naturellement le même pour chaque type de chaque joueur. Inversement, la règle de décision

dépend des joueurs que l'on modélise. Dans un Bel-Game, nous faisons l'hypothèse que tous les joueurs considèrent la même règle de décision : la règle de Choquet, de Jaffray ou du TBM (définitions 1.44, 1.45 et 1.46).

Comme dans tous les jeux à information incomplète, les joueurs connaissent leurs propres types (ou signaux) respectifs. L'utilité d'un joueur $i$ est donc donnée par la règle de décision considérée (CEU, JEU$^\alpha$ ou TBEU) au regard de la connaissance « sachant $\theta_i$ ». Dans le cas de la règle basée sur l'intégrale de Choquet, par exemple, l'utilité espérée généralisée d'un profil de stratégies pures signalisées $s$ est :

$$\mathrm{CEU}_{(i,\theta_i)}(s) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m(B \mid \theta_i) \times \min_{\omega \in B} u_i(s(\theta), \theta).$$

Nous résumons les trois règles de décision considérées en une unique expression, paramétrée par une fonction $\mathbf{f}^{\mathrm{XEU}}$, comme nous l'avons fait pour les instances de règles de décision (section 3.3, définitions 3.7, 3.8 et 3.9)). Posons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{\mathrm{CEU}} = \mathrm{minf} \qquad &= (g, B) \mapsto \min_{x \in B} g(B) \\
\mathbf{f}^{\mathrm{JEU}^\alpha} = \mathrm{minmax}^\alpha \qquad &= (g, B) \mapsto \alpha_B \min_{x \in B} g(x) + (1 - \alpha_B) \max_{x \in B} g(x) \\
\mathbf{f}^{\mathrm{TBEU}} = \mathrm{moy} \qquad &= (g, B) \mapsto \sum_{x \in B} \frac{g(B)}{|B|}.
\end{aligned}$$

Alors, l'expression de l'utilité espérée généralisée (XEU) est la même pour les trois règles de décision :

$$\mathrm{XEU}_{(i,\theta_i)}(s) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m(B \mid \theta_i) \times \mathbf{f}^{\mathrm{XEU}}(\theta \mapsto u_i(s(\theta), \theta), B).$$

*Remarque* 56. Dans le cadre algébrique présenté à la section prédécente, cela correspond aux instances de règle de décision $\mathcal{Z} = \big((\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), \times, \mathbf{f}^{\mathrm{XEU}}\big)$ avec $\mathbf{f}^{\mathrm{XEU}} \in \{\mathbf{f}^{\mathrm{CEU}}, \mathbf{f}^{\mathrm{JEU}^\alpha}, \mathbf{f}^{\mathrm{TBEU}}\}$.

Les concepts usuels sont naturellement définis sur cette expression. Ainsi un équilibre de Nash pur est un profil de stratégies pures signalisées $s$ tel que :

$$\forall i \in N, \forall \theta_i \in \Theta_i, \forall s'_i, \quad \mathrm{XEU}_{(i,\theta_i)}(s) \geq \mathrm{XEU}_{(i,\theta_i)}(s'_i.s_{-i}).$$

**Exemple 4.20 (Bel-Game).** *Considérons le jeu de sécurité écologique dont la situation est donnée à l'exemple 4.11, dans lequel un garde-chasse $G$ et un braconnier $B$ doivent décider d'aller en $P_1$, en $P_2$ ou en $P_3$. Rappelons qu'il n'y a qu'un seul troupeau dont l'emplacement n'est pas parfaitement connu des joueurs : le garde-chasse est informé de la présence ou non du troupeau en $P_1$ et le braconnier de sa présence ou non en $P_2$. Nous avons donné dans notre cadre général un jeu à prior commun (exemple 4.16) pour cette situation, et nous le reprenons ici. En effet, puisque le prior commun est une fonction de croyance, ce jeu peut être modélisé par un Bel-Game (dans lequel la situation de*

*jeu n'apparaît pas : les conséquences possibles sont laissées implicites et le cadre de discernement est l'ensemble des combinaisons de types).*

*Sans aucune difficulté, les actions des joueurs sont* $A_G = A_B = \{P_1, P_2, P_3\}$, *et leurs « types » sont les observations qu'ils peuvent faire, c'est-à-dire pour le garde-chasse :* $\Theta_G = \{T_1, T_{2,3}\}$, *et pour le braconnier :* $\Theta_B = \{T_2, T_{1,3}\}$. *La question est moins évidente quand à la fonction de masse* $m$. *Dans l'exemple 4.16, nous avions donné comme prior la fonction de croyance* $\mathrm{Bel}^*$ *dont la fonction de masse* $m^* : 2^\Omega \to [0,1]$ *vérifie :*

$$m^*(\{\omega_1, \omega_3\}) = m^*(\{\omega_2\}) = 1/2.$$

*Cependant la définition d'un Bel-Game est basée sur les types et* $\Omega$ *n'y apparaît pas. Or ici nous avons une correspondance entre* $\Theta$ *et* $\Omega^*$ *: chaque combinaison de signaux* $\theta \in \Theta$ *correspond à exactement zero ou un* $\omega_i \in \Omega^*$. *Il y a donc une fonction partielle bijective qui relie* $\Theta$ *à* $\Omega$ *:*

$$\begin{aligned} (T_1, T_2) &\text{ est impossible} & (T_{2,3}, T_2) &\equiv \omega_2 \\ (T_1, T_{1,3}) &\equiv \omega_1 & (T_{2,3}, T_{1,3}) &\equiv \omega_3 \end{aligned}$$

*Ayant établi cette bijection, la suite de la modélisation ne pose plus de difficulté. En effet, la fonction de masse* $m : 2^\Theta \to [0,1]$ *équivalente à* $m^*$, *mais dont le cadre de discernement est* $\Theta$, *est définie par :*

$$m\big(\{(T_1, T_{1,3}), (T_{2,3}, T_{1,3})\}\big) = m\big(\{(T_{2,3}, T_2)\}\big) = 1/2.$$

*Lorsqu'un joueur observe ou non le troupeau sur une parcelle, il « corrige » sa connaissance a priori grâce à l'information nouvelle acquise. C'est une révision de connaissance. Elle est donc capturée par le conditionnement de Dempster. Selon les observations que feront les joueurs, leurs connaissances vérifieront :*

$$\begin{aligned} m(\{(T_1, T_{1,3})\} \mid T_1) &= 1 \quad \textit{ou} \\ m(\{(T_{2,3}, T_2)\} \mid T_{2,3}) = m(\{(T_{2,3}, T_{1,3})\} \mid T_{2,3}) &= 1/2 \ ; \quad \textit{et} \\ m(\{(T_{2,3}, T_2)\} \mid T_2) &= 1 \quad \textit{ou} \\ m(\{(T_1, T_{1,3}), (T_{2,3}, T_{1,3})\} \mid T_{1,3}) &= 1. \end{aligned}$$

*Les fonctions d'utilités des joueurs sont, elles aussi, définies en fonction de la combinaison des signaux reçus. Nous pouvons simplement considérer les compositions*[8] *des fonctions d'utilité et de la fonction-conséquence de l'exemple 4.16,*

8. Pour les combinaisons de types impossibles, comme ici $(T_1, T_2)$ où le garde-chasse voit le troupeau en $P_1$ et le braconnier le voit en $P_2$, ces compositions ne sont pas définies. Cependant, n'importe quelle valeur d'utilité peut être donnée. En effet ces valeurs ne seront pas considérées dans les calculs d'espérance généralisée et n'impacteront donc pas le modèle.

*c'est-à-dire :*

$$u_G((a_G,a_B),\theta) = \begin{cases} 10 & si\ a_G = a_B = P_k \wedge \theta \equiv \omega_k \\ -5 & si\ a_B = P_k \neq a_G \wedge \theta \equiv \omega_k \\ 0 & sinon\,; \end{cases}$$

$$u_B((a_G,a_B),\theta) = \begin{cases} -10 & si\ a_G = a_B = P_k \wedge \theta \equiv \omega_k \\ 10 & si\ a_B = P_k \neq a_G \wedge \theta \equiv \omega_k \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*Les joueurs, s'ils considèrent la règle* CEU*, décident alors de la même manière que dans les exemples 4.13 et 4.16. Le Bel-Game ainsi modélisé est donc défini par le n-uplet* $\mathrm{BelG} = (N,(A_i,\Theta_i,u_i)_{i\in N},m)$ *et par les paramètres donnés « à côté » : le conditionnement à l'œuvre est celui de Dempster et la règle de décision* CEU *est décrite par la fonction* $\mathbf{f}^{\mathrm{CEU}} = \mathrm{minf}$.

### 4.5.2 Stratégies mixtes dans les Bel-Games

Dans les Bel-Games, nous avions considéré les stratégies mixtes probabilistes uniquement. Ces stratégies mixtes sont en effet bien justifiées (ce sont les stratégies mixtes « usuelles » en théorie des jeux). Leur utilisation est possible puisque toute probabilité est une fonction de croyance. Comme nous l'avons déjà expliqué dans ce chapitre, une loi jointe sur les actions possiblement choisies est déduite des stratégies mixtes de chaque joueur, puis cette loi jointe est combinée avec les croyances personnelles de chaque joueur « sachant $\theta_i$ ». Nous définissions la façon de combiner ces connaissances (d'abord les stratégies mixtes probabilistes entre elles, puis avec la fonction de croyance), ce qui correspond au produit cartésien pour les probabilités, et à la règle de combinaison de Dempster pour les fonctions de croyance.

Soit $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n)$ un profil de stratégies mixtes probabilistes signalisées (où pour chaque composante $\rho_i$, $\rho_i(\theta_i)$ est une distribution de probabilité sur $A_i$). Nous déduisons la distribution de probabilité $p^\rho$ sur l'ensemble des profils de stratégies pures signalisées suivante :

$$p^\rho(s) = \prod_{i\in N}\prod_{\theta_i\in\Theta_i} \rho_i(\theta_i)(\sigma_i(\theta_i)).$$

Nous pouvons alors combiner cette distribution de probabilité $p^\rho$ avec toute fonction de masse $m : \Theta \to [0,1]$, et obtenons alors une fonction de masse $m^\rho$ sur $A\times\Theta$. À tout élément $X = \{(a,\theta),(a',\theta')\ldots\} \subseteq A\times\Theta$ sont associés à la fois un ensemble de combinaisons de types $B_X = \{\theta \mid (a,\theta)\in X\}$ et un ensemble de profils compatibles $S_X = \{s \mid \forall(a,\theta)\in X, \sigma(\theta) = a\}$. La masse associée à $X$ est $m^\rho(X) = m(B_X)\times\sum_{\sigma\in S_X} p^\rho(\sigma)$, c'est-à-dire que $X$ est focal si $B_X$ est focal et qu'au moins un profil de stratégies pures est possible. Puisque chaque agent reçoit le type $\theta_i$, nous combinerons pour chacun d'entre eux $p^\rho$ avec $m(\cdot \mid \theta_i)$,

d'où l'utilité d'un profil de stratégies mixtes :

$$\mathrm{XEU}_{(i,\theta_i)}(\rho) = \sum_{\sigma} \left( \prod_{i \in N} \prod_{\theta_i \in \Theta_i} \rho_i(\theta_i)(\sigma_i(\theta_i)) \right) \times \sum_{\emptyset \neq B \subseteq \Theta} m(B \mid \theta_i) \times \mathbf{f}^{\mathrm{XEU}}(B, \theta \mapsto u_i(s(\theta), \theta)).$$

### 4.5.3 Transformations à la Howson et Rosenthal

Nous avons proposé trois transformations à la Howson et Rosenthal pour les Bel-Games : une transformation générale (appelée *transformation conditionnée*), une transformation spécifique au conditionnement de Dempster (*transformation directe*) et une spécifique à la règle de décision du TBM (*transformation TBM*). Pour chacune d'entre elles, nous avons établi les complexités théoriques (en temps et en espace) qui peuvent être lues dans la table 4.5. Nous avons aussi réalisé des expérimentations qui permettent de vérifier ces complexités théoriques d'une part et de préciser les performances relatives des transformations en pratique d'autre part ; elle sont présentées dans la section suivante.

| Transformation | Complexité spatiale | Complexité temporelle |
|---|---|---|
| Tr. conditionnée | $O\left(\mathrm{Taille(BelG)}^k\right)$ * | $O\left(k\,\mathrm{Taille(BelG)}^k\right)$ * |
| Tr. directe | $O\left(\mathrm{Taille(BelG)}^k\right)$ | $O\left(k\,\mathrm{Taille(BelG)}^k\right)$ |
| Tr. TBM | $O\left(\mathrm{Taille(BelG)}\right)$ | $O\left(k\,\mathrm{Taille(BelG)}\right)$ |

TABLE 4.5 – Complexité spatiale et temporelle des transformations de Howson et Rosenthal pour les Bel-Games, en fonction de la taille du Bel-game BelG transformé et du degré de $k$-additivité de la fonction de masse.
* Résultat pour les conditionnements de Dempster, géométrique ou faible.

Ces trois transformations consistent à construire un jeu hypergraphique (au sens classique, définition 2.4) à partir d'un Bel-Game dans lequel les utilités y sont en correspondance : pour tout profil de stratégies, tout joueur $i$ et chacun de ses types $\theta_i$, les utilités sont égales (à la manière de ce qui est présenté pour le théorème original de Howson et Rosenthal, définition 2.26, puis généralisé algébriquement dans la section 4.4). Nous les donnons ci-dessous.

#### Transformation conditionnée

La transformation conditionnée correspond à la transformation hypergraphique générique présentée pour notre modèle algébrique de jeu à information incomplète (définition 4.26), dans le cas particulier des Bel-Games. Comme précédemment, elle produit un jeu hypergraphique où chaque jeu local $e$ vient d'un ensemble $B_e \subseteq \Theta$ qui est focal à au moins une fonction de masse conditionnée « sachant $\theta_i$ », pour un type $\theta_i$ d'un joueur $i$.

**Définition 4.28 (Transformation conditionnée).** La transformation conditionnée d'un Bel-Game $\text{BelG} = (N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i\in N}, m)$ est le jeu hypergraphique :

$$\tilde{G} = \left(\tilde{N}, \tilde{E}, (\tilde{A}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}}, (\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)})_{e\in\tilde{E},(i,\theta_i)\in e}\right)$$

où :

- $\tilde{N} = \{(i, \theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ ;
- $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ ;
- $\tilde{E} = \left[P(B) \mid B \in \bigcup_{(i,\theta_i)\in\tilde{N}} \mathcal{S}_{m(\cdot|\theta_i)}\right]$ est le multi-ensemble[9] des jeux locaux et $P(B) = \{(i, \theta_i) \mid \theta \in B, i \in N\}$ est l'ensemble des paires $(i, \theta_i)$ compatibles avec $B \subseteq \Theta$ ;
- Pour tout $e \in \tilde{E}$, $(i, \theta_i) \in e$ et $\tilde{a} \in \tilde{A}$, en notant $\tilde{v}^\sigma_i(\theta) = u_i(\sigma(\theta), \theta)$,

$$\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}_e) = m(B_e \mid \theta_i) \times f^{\text{XEU}}_{\tilde{v}^\sigma_i}(B_e).$$

**Exemple 4.21.** *L'hypergraphe de la transformation conditionnée du Bel-Game de l'exemple 4.20 est donné en figure 4.5.*

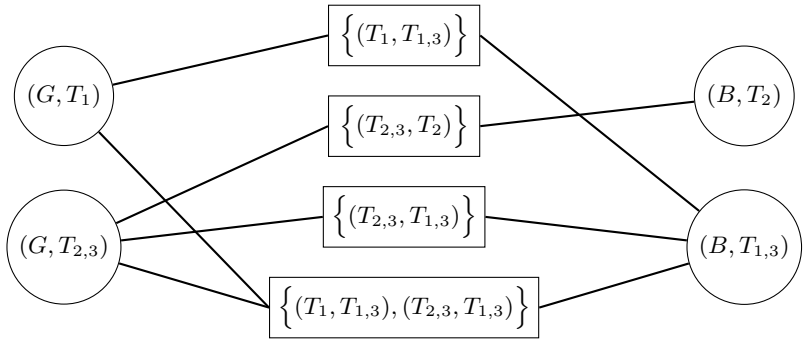



FIGURE 4.5 – Hypergraphe de la transformation conditionnée appliquée au Bel-Game de l'exemple 4.20

Les complexités spatiale et temporelle données dans la table 4.5 pour cette transformation sont $O\left(\text{Taille}(G)^k\right)$ et $O\left(k\,\text{Taille}(G)^k\right)$, elles sont exprimées en fonction du degré de $k$-additivité de la fonction de masse $m$ initiale. Elles sont valides pour les conditionnements de Dempster, géométrique et faible. Par contre, avec le conditionnement de Fagin-Halpern, il n'est pas possible d'établir de telles bornes en fonction du degré de $k$-additivité du prior. En effet, les éléments focaux obtenus après conditionnement de Fagin-Halpern peuvent être plus nombreux et de plus grande cardinalité que ceux du prior[10] qui n'est donc pas pertinent pour borner la taille du jeu hypergraphique ou le temps pour le construire.

9. Un multi-ensemble est un ensemble dans lequel peuvent se trouver des doublons. Son utilisation simplifie la définition puis la preuve de complexité. Pour retrouver un ensemble standard, il faut faire disparaître les doublons en sommant les fonctions d'utilité locales correspondantes, c'est-à-dire $\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}_e) = \sum_{B|P(B)=e} m(B \mid \theta_i) \times f^{\text{XEU}}_{\tilde{v}^\sigma_i}(B)$.

10. Par exemple, considérons un cadre de discernement $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ et une fonction

### Transformation directe

La transformation directe exploite le fait que les éléments focaux obtenus après conditionnement de Dempster peuvent être déduits de ceux du prior. En effet, le conditionnement de Dempster « sachant $C$ » consiste à transférer les masses : si $B$ est un élément focal du prior, la masse $m(B)$ sera transférée sur $B \cap C$ (qui devient alors focal), ou supprimée si $B \cap C = \emptyset$. Ainsi, tout élément focal de $\mathrm{Bel}(\cdot \mid \theta_i)$ est nécessairement un sous-ensemble d'un élément focal de Bel. Dans la transformation directe, chaque jeu local $e$ du jeu hypergraphique produit correspond à un élément focal $B_e$ du prior.

**Définition 4.29 (Transformation directe).** La transformation directe d'un Bel-Game $\mathrm{BelG} = (N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i \in N}, m)$ est le jeu hypergraphique :

$$\tilde{G} = \left(\tilde{N}, \tilde{E}, (\tilde{A}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}}, (\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)})_{e \in \tilde{E}, (i,\theta_i) \in e}\right)$$

où :

- $\tilde{N} = \{(i, \theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ ;
- $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ ;
- $\tilde{E} = \big\{P(B) \mid B \in \mathcal{S}_m)\big\}$, où $P(B) = \{(i, \theta_i) \mid \theta \in B, i \in N\}$ est l'ensemble des paires $(i, \theta_i)$ compatibles avec $B \subseteq \Theta$ ;
- Pour tout $e \in \tilde{E}$, $(i, \theta_i) \in e$ et $\tilde{a} \in \tilde{A}$,

$$\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}_e) = K_{|\theta_i} \times m(B_e \cap \{\theta' \mid \theta'_i = \theta_i\}) \times f^{\mathrm{XEU}}_{\tilde{v}^\sigma_i}(B_e),$$

avec $\tilde{v}^p_i \sigma(\theta) = u_i(\sigma(\theta), \theta)$.

*Remarque* 57. Nous pouvons observer, dans l'expression des utilités locales, une expression correspondant au conditionnement de Dempster effectué « à la volée » : on y considère l'ensemble $B_e \cap \{\theta' \mid \theta'_i = \theta_i\}$ sur lequel la masse est transférée, et le facteur de normalisation $K_{|\theta_i} = 1/\mathrm{Pl}(\{\theta' \mid \theta'_i = \theta_i\})$. Notons par ailleurs que la normalisation est facultative, puisqu'une fonction d'utilité quantitative est définie à une transformation affine près.

**Exemple 4.22.** *L'hypergraphe du jeu produit par la transformation directe appliquée à l'exemple 4.20 est donné en figure 4.6 (page suivante).*

Par rapport à la transformation générale, la transformation directe produit généralement moins de jeux locaux, mais qui peuvent impliquer plus de joueurs. Cela est dû au fait que les jeux locaux sont construits à partir des éléments focaux du prior :

- Généralement, les différents conditionnements « sachant $\theta_i$ » nécessaires ont chacun transféré les masses sur des sous-ensembles différents, il y a donc plus d'éléments focaux considérés pour la transformation générale ;

de masse 2-additive telle que $m(\{\omega_i\}) > 0$ pour tout $i$ et $m(\{\omega_i, \omega_j\}) > 0$ pour tout $i \neq j$. Alors, pour tout $\emptyset \neq C \subseteq \Omega$, chaque sous-ensemble $B \subseteq C$ est un élément focal de $\mathrm{Bel}(\cdot \mid C)$. Donc, $\mathrm{Bel}(\cdot \mid C)$ possède $2^{|C|} - 1$ éléments focaux et est $|C|$-additive.

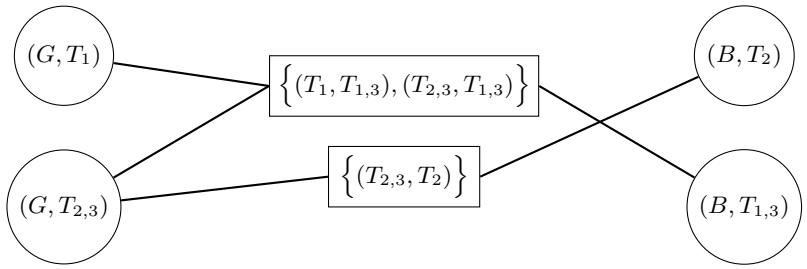



FIGURE 4.6 – Hypergraphe de la transformation directe appliquée au Bel-Game de l'exemple 4.20

— Généralement, les différents conditionnements « sachant $\theta_i$ » transfèrent les masses sur des sous-ensembles stricts, et les jeux correspondants impliquent donc moins de joueurs que ceux établis sur les éléments focaux du prior.

### Transformation TBM

La transformation TBM exploite le fait que la règle de décision du TBM consiste à calculer l'utilité espérée au regard d'une distribution de probabilité BetP déduite des différents conditionnements « sachant $\theta_i$ ». Or, ces distributions de probabilité sont 1-additives et leurs éléments focaux sont des singletons. Nous pouvons ainsi définir une transformation linéaire (en temps et en espace), où tous les jeux locaux impliquent $n$ joueurs exactement.

Notons $\mathrm{BetP}_{|C}$ la distribution pignistique déduite de $m(\cdot \mid C)$, cette dernière étant obtenue par conditionnement de Dempster (définition 1.46). BetP est définie par :

$$\mathrm{BetP}_{|C}(\{\theta\}) = \frac{1}{\mathrm{Pl}(C)} \times \sum_{\theta \in B \in \mathcal{S}_m} \frac{m(B)}{|B \cap C|}.$$

**Définition 4.30 (Transformation TBM).** La transformation TBM d'un Bel-Game $\mathrm{BelG} = (N, (A_i, \Theta_i, u_i)_{i \in N}, m)$ est le jeu hypergraphique :

$$\tilde{G} = \left(\tilde{N}, \tilde{E}, (\tilde{A}_{(i,\theta_i)})_{(i,\theta_i) \in \tilde{N}}, (\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)})_{e \in \tilde{E}, (i,\theta_i) \in e}\right)$$

où :

— $\tilde{N} = \{(i, \theta_i) \mid i \in N, \theta_i \in \Theta_i\}$ ;
— $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$ ;
— $\tilde{E} = \{P(\{\theta\}) \mid \theta \in \Theta\}$, où $P(B) = \{(i, \theta_i) \mid \theta \in B, i \in N\}$ est l'ensemble des paires $(i, \theta_i)$ compatibles avec $B \subseteq \Theta$ ;
— Pour tout $e \in \tilde{E}$, $(i, \theta_i) \in e$ et $\tilde{a} \in \tilde{A}$,

$$\tilde{u}^e_{(i,\theta_i)}(\tilde{a}_e) = \mathrm{BetP}(\{\theta_e\}) \times u_i(\tilde{a}_e, \theta).$$

**Exemple 4.23.** *L'hypergraphe du jeu produit par la transformation Dempster appliquée à l'exemple 4.16 est donné en figure 4.7.*

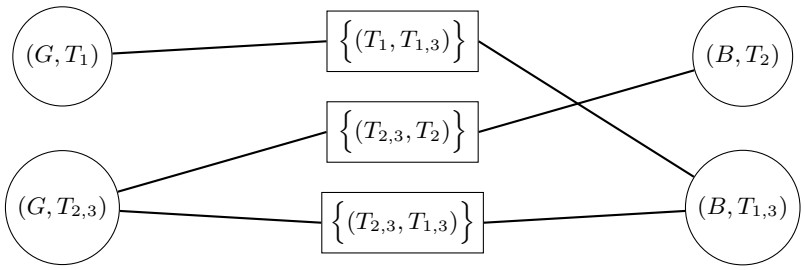



FIGURE 4.7 – Hypergraphe de la transformation TBM appliquée au Bel-Game de l'exemple 4.16

Le conditionnement de Dempster est celui considéré dans le Transferable Belief Model. Cependant, cette transformation peut facilement être étendue pour d'autres conditionnements. Il faut néanmoins quelques modifications pour le conditionnement faible. En effet, il est possible que l'utilité d'une paire $(i, \theta_i)$ ne dépende pas uniquement des $\theta'$ tels que $\theta'_i = \theta_i$ (c'est d'ailleurs pour cette raison, assez surprenante, que le condtionnement faible n'est guère utilisé). Un tel exemple est proposé dans la formalisation COQ attachée à l'article que nous avons présenté à la conférence ITP2023, dans lequel nous généralisons cette transformation à tout conditionnement (POMERET-COQUOT, FARGIER et MARTIN-DOREL, 2023).

### 4.5.4 Expérimentations

Nous avons réalisé des expérimentations afin de mesurer les performances de ces trois transformations en pratique. Cela nous permet d'une part de confirmer et d'affiner les résultats de complexité théorique, et d'autre part d'identifier des différences quant aux performances réelles.

Nous utilisons Python 3 pour générer des Bel-games aléatoires[11] en forme normale. Les trois transformations de Howson et Rosenthal présentées dans la section précédente sont alors appliquées sur chaque Bel-Game généré, ce qui nous permet de comparer les jeux hypergraphiques qui en résultent. Les plages de paramètres considérées pour les jeux générés aléatoirement sont données en table 4.6.

Pour chaque Bel-Game généré, le protocole est identique. Nous mesurons d'abord sa taille, c'est-à-dire le nombre de valeurs utilisées dans les matrices d'utilités (dans nos expérimentations, la représentation de la fonction de masse est négligeable). La taille d'un Bel-Game où tous les joueurs ont exactement $\alpha$

11. Le script Python est disponible sur Github à l'adresse https://github.com/pPomCo//belgames/experimentations/.

| Paramètre | Plage de valeurs |
|---|---|
| Nombre de joueurs | $[2, 5]$ |
| Nombre d'actions par joueur | $[2, 4]$ |
| Nombre de types par joueur | $[2, 4]$ |
| Nombre d'éléments focaux | $[5, 10]$ |
| Degré de $k$-additivité | $[2, 10]$ |

TABLE 4.6 – Plages des paramètres considérés pour la génération de Bel-Games aléatoires.

actions et $\beta$ types est donc $n(\alpha\beta)^n$. Puis, nous appliquons les trois transformations les unes après les autres. Lorsque nous avons le choix, nous considérons la règle du TBM et le conditionnement de Dempster [12] afin de pouvoir comparer les trois transformations entre elles. Pour chaque transformation, nous mesurons d'une part le temps de calcul et d'autre part les paramètres du jeu hypergraphique résultant : nous nous intéressons particulièrement à sa taille, c'est-à-dire le nombre de valeurs utilisées dans les différentes matrices d'utilité aux jeux locaux, au nombre de jeux locaux et au nombre de maximal de participants des jeux locaux.

Nous illustrerons ces expérimentations en donnant la taille des jeux hypergraphiques produits par les transformations. En effet, nous avons constaté que le temps de calcul lui est fortement corrélé (corrélation de 0.99 pour les transformations directe et conditionnée et de 0.95 pour la transformation TBM). Surtout, la taille d'un jeu est directement liée à la difficulté pour identifier des profils de stratégies particuliers, typiquement les équilibres de Nash (DASKALAKIS, FABRIKANT et PAPADIMITRIOU, 2006). Il s'agit donc d'une mesure pertinente et informative.

### Transformation TBM

Considérons d'abord la transformation TBM, pour laquelle nous avons pu montrer que la complexité temporelle et spatiale est linéaire en la taille du Bel-Game initial. Nous traçons sur la figure 4.8 la taille du jeu hypegraphique produit en fonction de celle du Bel-Game aléatoire initial. Le degré de $k$-additivité est représenté par le code couleur (plus le point est sombre, plus ce degré est élevé). La droite $y = x$ est tracée en bleu pour faciliter la lecture du graphique..

Nous constatons que la taille du jeu hypergraphique est inférieure ou égale à celle du Bel-Game, ce qui confirme et précise nos résultats de complexité. Nous observons aussi que les faibles degrés de $k$-additivité sont associés à des jeux de plus petite taille, ce que nous expliquons par le fait que lorsque $k$ est faible, il y

12. La règle de décision n'impacte ni le temps de calcul ni la taille du jeu produit. À l'inverse, l'algorithme de conditionnement peut impacter le temps de calcul et la taille, en particulier le conditionnement de Fagin-Halpern est potentiellement plus coûteux que les autres conditionnements de la théorie des fonctions de croyance.

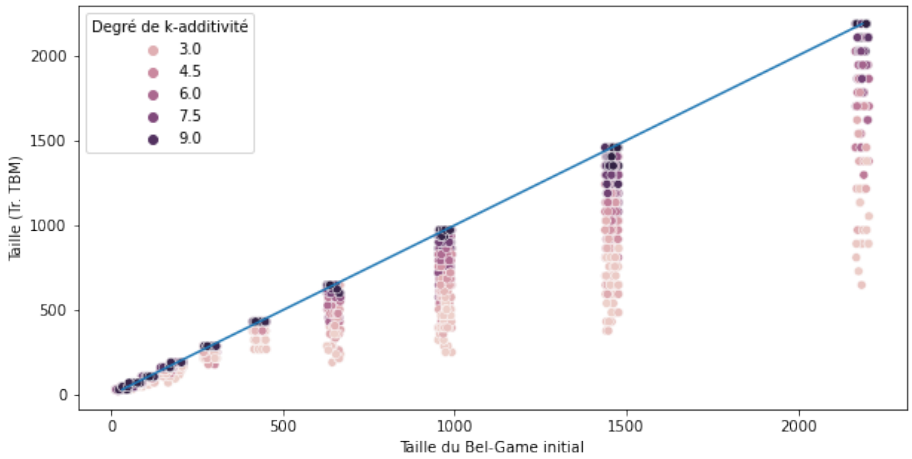



FIGURE 4.8 – Taille du jeu hypergraphique produit par la transformation TBM en fonction de la taille du Bel-Game initial. La droite $y = x$ est tracée en bleu.

a plus de chances pour qu'une configuration de type soit impossible. Alors, dans ce cas, le jeu local correspondant n'est pas instancié, ce qui diminue la taille du jeu hypergraphique.

### Transformations directe et conditionnée

Nous avons donné les mêmes bornes de complexité (au pire cas) pour les transformations directe et conditionnée : $O(\text{Taille(BelG)}^k)$, où $k$ est le degré de $k$-additivité des fonctions de masse. Sans surprise, elles s'avèrent toutes les deux plus coûteuses en temps de calcul que la transformation TBM et le jeu produit a une taille supérieure. Nous le constatons aisément sur la figure 4.9 en page suivante, où les tailles de jeux produits par les différentes transformations sont indiquées sur une échelle logarithmique.

Les transformations directe et conditionnée produisent toutes les deux des jeux hypergraphiques dont la taille est supérieure à la taille du Bel-Game initial. Nous constatons que cette taille est tout de même nettement plus faible que celle annoncée par la complexité théorique. Cependant, il est difficile de conclure qu'il existe une meilleure borne de complexité, puisque c'est le comportement asymptotique qui détermine la complexité. Nous observons sur les figures 4.10 et 4.11 que les tailles sont corrélées au degré de $k$-additivité (ce que laissaient déjà penser les résultats de complexité, mais qui est peut-être en partie dû au phénomène expliqué précédemment : lorsque $k$ est petit, il y a plus de chance pour que certaines combinaisons de types soient impossibles et n'entraînent pas la création de jeux locaux). Nous traçons sur ces figures les courbes $y = x^2/2$ afin de faciliter les comparaisons.

La taille du jeu produit par la transformation directe est toujours supérieure à celle du jeu produit par la transformation conditionnée. La figure 4.12, où les

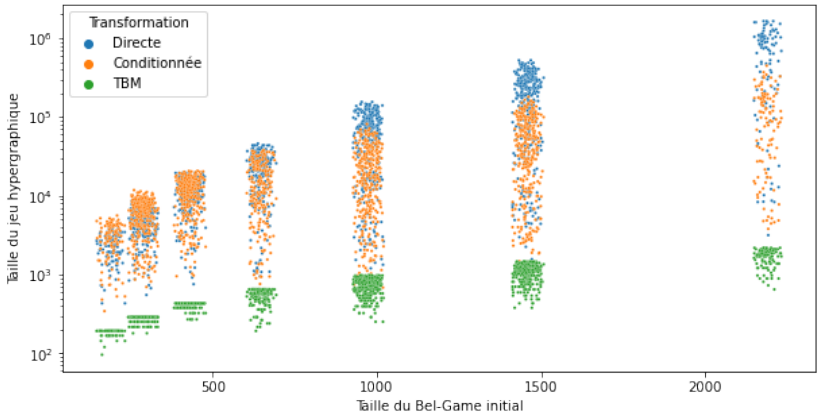



FIGURE 4.9 – Taille des transformations directe (bleu), conditionnée (orange) et TBM (vert) en fonction de la taille du Bel-Game initial, dans le cas $n = 3$ joueurs (échelle logarithmique).

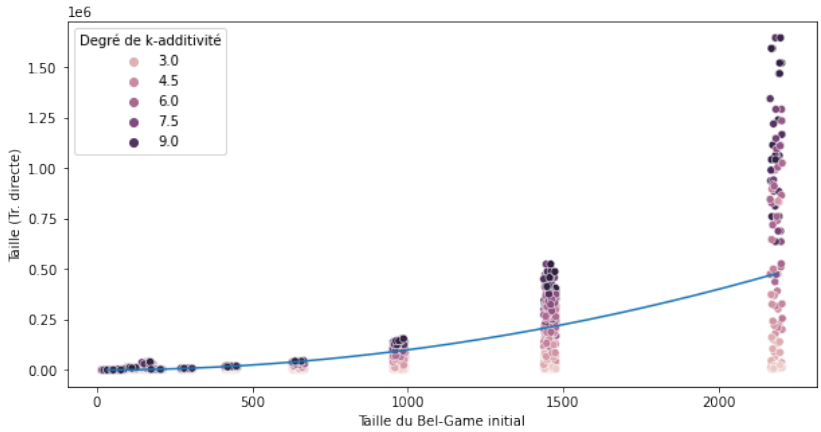



FIGURE 4.10 – Taille du jeu hypergraphique produit par la transformations directe en fonction de la taille du Bel-Game initial. La courbe $y = x^2/2$ est tracée en bleu.

tailles des jeux hypergraphiques produits par ces deux transformations à partir du même Bel-Game initial sont comparées, illustre ce résultat. Pour faciliter les comparaisons, nous traçons la droite $y = x$ (en bleu) sous laquelle se situent toutes les expérimentations, et la droite $y = x/4$ (en orange) qui traverse le nuage de points. Il apparaît donc que la transformation conditionnée produit des jeux hypergraphiques de taille environ quatre fois plus petite que la transformation directe.

Il semble clair que les meilleures performances de la transformation condi-

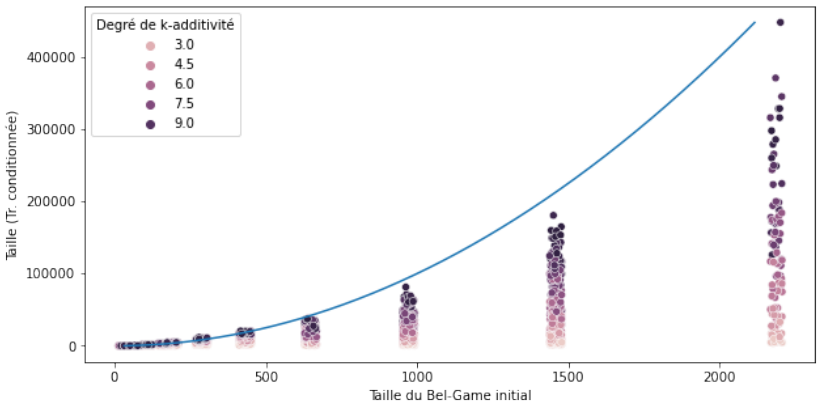



FIGURE 4.11 – Taille du jeu hypergraphique produit par la transformations conditionnée en fonction de la taille du Bel-Game initial. La courbe $y = x^2/2$ est tracée en bleu.

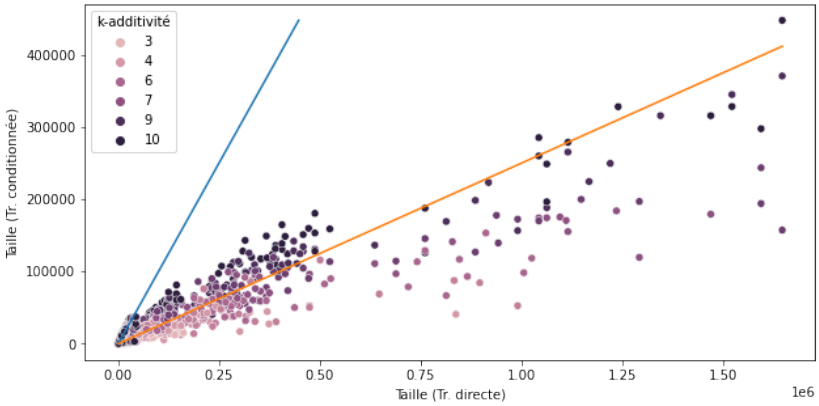



FIGURE 4.12 – Taille du jeu hypergraphique produit par la transformations conditionnée en fonction de la taille de celui produit par la transformation directe. La courbe $y = x$ est tracée en bleu et la courbe $y = x/4$ en orange.

tionnée (par rapport à la transformation directe) viennent de la taille des jeux locaux qu'elle produit. En effet, la transformation directe crée des jeux locaux correspondant aux éléments focaux du prior et la transformation conditionnée crée des jeux locaux qui correspondent aux éléments focaux des posteriors. Or avec le conditionnement de Dempster, la cardinalité de ces derniers est généralement plus faible et jamais plus élevée. Comme le nombre de joueurs participant à un jeu local dépend de la cardinalité de l'élément focal considéré, les jeux locaux produits par la transformation conditionnée impliquent généralement moins de participants : les matrices d'utilités sont alors de plus faible dimension, ce qui

nécessite moins de valeurs et moins de temps pour les calculer. Nous voyons sur la figure 4.13, où le nombre de participants au plus grand jeu local de la transformation conditionnée est tracé en fonction de celui de la transformation directe. La droite $x = y$ est tracée pour faciliter les comparaisons (notons que nous avons légèrement bruité les données afin de mieux voir les points). La couleur des points indique le nombre de joueurs et le nombre de types possibles pour chaque joueur.

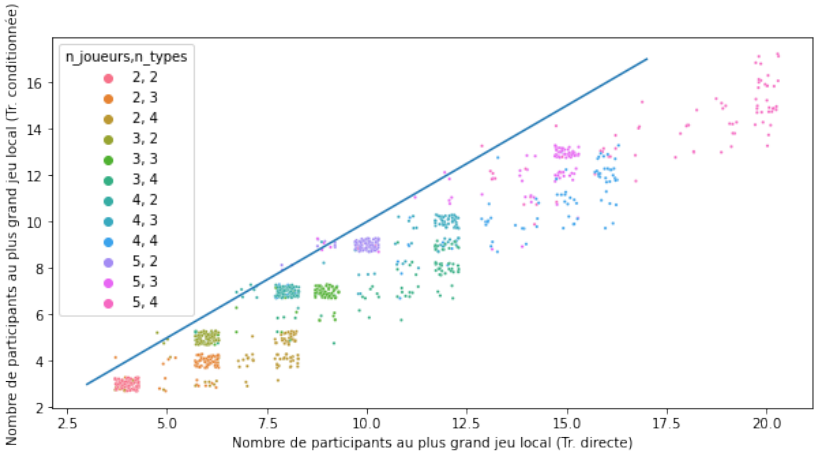



FIGURE 4.13 – Nombre de participants au plus grand jeu local pour la transformation conditionnée en fonction de celui pour la transformation directe. La droite $y = x$ est tracée en bleu. La couleur des points indique le nombre de joueurs et le nombre de types par joueur dans le Bel-Game initial.

Pour la quasi-totalité des Bel-Games générés, le nombre de joueurs et celui de types par joueur détermine le nombre de participants au plus grand jeu local dans le jeu hypergraphique obtenu après les transformations directe et conditionnée. Par exemple, pour $n = 3$ joueurs et $t = 3$ types par joueurs, la transformation directe produit généralement un jeu dont le plus grand jeu local a 9 participants alors que la transformation conditionnée en produit un dont le plus grand jeu local n'a que 7 participants (points verts).

*Remarque* 58. Pour la transformation TBM présentée auparavant, la taille de tous les jeux locaux est égale au nombre de joueurs $n$ du Bel-Game initial.

### Conclusion des expérimentations

Nous avons comparé les tailles des jeux hypergraphiques produits par les trois transformations. Cette taille est fortement corrélée au temps de calcul nécessaire pour effectuer la transformation. De plus, c'est cette taille qui détermine la difficulté pour identifier les profils de stratégies d'intérêt, tels que les équilibres de Nash.

Ces expérimentations nous amènent à penser que les transformations proposées sont réalistes en pratique, même pour des degrés de $k$-additivité relativement élevés. En particulier, la transformation TBM est linéaire en la taille du Bel-Game initial, et devrait être préférée dès que l'utilité des joueurs est modélisée par la règle du TBM. La transformation conditionnée est applicable aux trois règles de décision considérées (celle de Choquet, celle de Jaffray et celle du TBM) et à tout conditionnement. Lorsque le conditionnement considéré est celui de Dempster, il apparaît qu'elle devrait être préférée à la transformation directe car elle offre de meilleures performances en pratique.

## 4.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons montré comment le *modèle d'agent* très général se marie avec la théorie des jeux, tant pour les jeux à information complète que ceux à information incomplète. D'une part, cela permet de bien identifier les composants qui constituent un jeu, c'est-à-dire ceux avec lesquels nous modélisons les différents aspects d'une prise de décision multi-agents. D'autre part, nous définissons et montrons que les concepts usuels de théorie des jeux sont valides pour de nombreux types de préférences et de nombreuses théories de l'incertitude (celles qui sont capturées par un modèle d'agent). En plus de valider ces concepts pour notre cadre très expressif, cela nous permet de proposer des résultats généraux, à des degrés divers, selon les propriétés des modèles d'agents qui sont nécessaires pour établir ces résultats. Par exemple, nous avons montré qu'un modèle de Selten existe toujours, quelle que soit la théorie de la décision considérée ; et montré qu'une transformation à la Howson et Rosenthal est possible si les modèles d'agents algébriques peuvent être représentés par des instances de règle de décision..

Les transformations à la Howson et Rosenthal ont été développées dans une section conséquente de ce chapitre, d'abord pour les jeux à information incomplète, puis dans le cas particulier des Bel-games. En effet, nous pensons qu'elles constituent un point pratique important, puisqu'elles produisent un jeu hypergraphique dont la taille est potentiellement faible. Cela permet d'étudier des jeux à information incomplète grâce à des algorithmes existants, définis pour les jeux à information complète (par exemple pour identifier des équilibres de Nash, Wilson, 1971 ; Jourdan, 2022).

Plusieurs directions de recherche s'ouvrent grâce à ce cadre général.

Nous pensons par exemple à l'identification des conditions nécessaires pour obtenir certains résultats. Un résultat classique est l'existence d'équilibres de Nash en stratégies mixtes, qui a été montrée pour les stratégies mixtes probabilistes et possibilistes. Nous avons vu que le jeu en stratégies mixtes catégoriques de l'exemple 4.5 n'a aucun équilibre de Nash, et ignorons actuellement les conditions nécessaires pour garantir son existence dans le cas général. Il nous semble que la convexité de l'espace des capacités algébriques est une condition suffisante, puisque s'il existe un continuum de capacités algébriques intermédiaires entre deux capacités algébriques données nous pouvons considérer l'argument

de point fixe utilisé par (Nash, 1950) ; cependant nous ne sommes pas sûrs que ce soit une condition nécessaire : pour les jeux possibilistes par exemple, la propriété de convexité est assurée, mais l'existence est montrée par un autre argument par (Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2022).

Nous pensons aussi à l'application du modèle algébrique à un pan conséquent de la théorie des jeux que nous n'avons pas considéré dans cette thèse : les jeux séquentiels (ou dynamiques), c'est-à-dire les situations où les joueurs jouent les uns après les autres, éventuellement plusieurs fois (par exemple, les échecs constituent un jeu séquentiel à deux joueurs). Cet aspect de la théorie des jeux est d'une grande importance, puisqu'il d'une part il permet de modéliser de nombreuses situations réelles, et d'autre part se retrouve au sein de nombreux algorithmes aux applications variées.

Nous pensons enfin à certains sous-domaines de la théorie de la décision, dans lesquels l'application de la théorie des jeux est plus théorique. Un exemple connu est le résultat annonçant qu'il n'existe pas de système de vote qui soit « strategy-proof », c'est-à-dire où tous les électeurs ont intérêt à donner leurs véritables préférences (à l'inverse, ils ont souvent intérêt à privilégier un candidat qui n'est pas leur préféré, par exemple en « votant utile »). La preuve de ce résultat se base sur une approche de théorie des jeux, où l'élection est capturée par un jeu bayésien (les électeurs ont alors une croyance probabiliste sur les préférences des autres électeurs). Une question qui nous semble importante pour les théoriciens du vote est de savoir si cette impossibilité est intrinsèque aux systèmes de vote, où si elle découle de l'hypothèse bayésienne affirmant que les électeurs ont une représentation probabiliste de leur incertitude. En effet, comme nous l'avons vu, de nombreuses expériences ont montré que cette hypothèse n'est pas toujours valide pour modéliser des décideurs humains. Nous ne savons actuellement pas répondre à cette question.

Nous allons maintenant présenter la formalisation que nous avons effectuée dans l'assistant de preuve Coq. Ce travail de *preuve assistée par ordinateur*, en plus de fournir une bibliothèque de code qui a vocation a être réutilisée (par exemple pour certifier des algorithmes de théorie des jeux), garantit la validité de la quasi-totalité des résultats présentés dans ce chapitre et dans le chapitre précédent (les résultats de complexité, non vérifiés en Coq, ont été démontré dans ce mémoire de thèse).

# Chapitre 5

# Points clés de la formalisation Coq

Ce chapitre est dévolu à la formalisation des résultats présentés dans les deux chapitres précédents et que nous proposons pour l'assistant de preuve formelle Coq. Nous y décrivons notre implémentation du modèle d'agent et des jeux généralisés, leurs représentations algébriques (basées sur les fonctions de masses algébriques et les instances de règles de décision), ainsi que les transformations que nous avons présentées (d'une part les transformations algébriques Selten et HR et d'autre part les transformations explicitées dans le cadre des Bel-Games à la section 4.5). L'intérêt de ce travail est multiple. D'abord, puisque le logiciel Coq vérifie automatiquement les preuves que nous écrivons, nous pouvons nous reposer sur lui : toute preuve que Coq valide est correcte. La revue de nos résultats est ainsi simplifiée : il suffit de vérifier que les énoncés des théorèmes sont corrects et Coq fait le reste (c'est-à-dire qu'il vérifie automatiquement que la preuve est correcte et qu'elle prouve effectivement le théorème énoncé). La garantie offerte est donc plus forte que celle provenant d'une simple relecture. Ensuite, nos définitions et nos preuves sont compilées en une *bibliothèque de preuves* modulaire et réutilisable. Notre travail offre ainsi de nombreuses structures et de nombreux résultats qui peuvent, au besoin, être instanciés séparément. Ainsi, exprimer et vérifier de nouveaux résultats sera maintenant plus facile et plus rapide : s'ils concernent les théories de l'incertitude, de la décision ou la théorie des jeux, il suffira de charger le module Coq correspondant pour bénéficier de notre travail. Par ailleurs l'implémentation des résultats dans l'assistant Coq permet également d'identifier plus facilement les conditions nécessaires et/ou suffisantes pour obtenir tel ou tel résultat, ce qui est important dans une approche algébrique telle que la nôtre. En effet, d'une part, aucune hypothèse ne peut être laissée implicite, et d'autre part, les hypothèses superflues sont facilement identifiables (soit parce qu'elle ne sont pas utilisées du tout, alors Coq les ignore, soit parce qu'elles sont plus fortes que nécessaire, alors nous pouvons facilement les modifier et « rejouer la preuve » avec une hypothèse

affaiblie). De plus, notre travail nous a amené à montrer plusieurs résultats très généraux (particulièrement sur les ensembles et les fonctions ensemblistes). Ces résultats ne concernent pas spécialement notre domaine : ils sont intéressants pour tout utilisateur de Coq. Certains d'entre eux ont déjà été intégrés dans la bibliothèque *Mathematical Components* et nous en proposons actuellement d'autres.

Ce chapitre débute par une section introductive qui présente quelques notions élémentaires au lecteur qui ne serait pas familier avec l'environnement Coq (section 5.1). Après avoir abordé la problématique de la vérification automatique de programme et de théorèmes mathématiques, nous essayons d'expliquer sur un exemple simple et compréhensible le fonctionnement interne de Coq : nous souhaitons donner au lecteur une bonne intuition de ce fonctionnement, sans pour autant aborder la théorie de la preuve sous-jacente. Cette section introduit aussi quelques éléments de syntaxe qui seront nécessaires pour la suite du chapitre.

Les sections suivantes décrivent la formalisation[1] que nous proposons, et correspondent chacune à un domaine particulier et à un ou plusieurs modules de cette formalisation (habituellement appelés *théories*, terme que nous éviterons ici). Ce découpage vise à faciliter la relecture et la maintenance du code.

Dans la section 5.2, nous décrivons tout d'abord rapidement le contenu de plusieurs modules placés dans un dossier `lib/`, qui contiennent des résultats très généraux concernant principalement les ensembles. Nous nous arrêterons uniquement sur les nouveaux principes inductifs que nous proposons pour raisonner sur les ensembles. En effet, puisque ces scripts ne contiennent que des lemmes intermédiaires, leur revue n'est pas nécessaire. La plupart d'entre eux est ou sera proposée pour l'intégration dans la bibliothèque *Mathematical Components*, et le lecteur intéressé pourra se pencher directement sur le code.

Dans la section 5.3, nous présentons ensuite les modules `setfun`, `massfun` et `capacity` où nous formalisons les fonctions d'ensembles. Particulièrement, nous énonçons plusieurs propriétés des fonctions d'ensemble, formalisons les notions de fonction duale, de fonction de masse et de transformée inverse de Moëbius, ce dont nous bénificions pour établir la hierarchie des capacités que nous avons présentée au chapitre 3.

Dans la section 5.4, nous présentons le module `decision` dévolu à l'implémentation du modèle d'agent. Particulièrement, nous y définissons les règles de décision usuelles et les instances algébriques qui les représentent.

Dans la section 5.5, nous décrivons les modules `game` et `HRtransform` portant respectivement sur les jeux et leurs transformations de Howson et Rosenthal. Ces modules sont basés sur le travail publié dans les actes de la conférence ITP2023 (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2023). Ce travail formalisait initialement les trois transformations de Howson et Rosnethal pour les Bel-Games présentées à la section 4.5. Nous le généralisons ici aux capacités algébriques à valeurs réelles.

Dans la section 5.6, nous décrivons le module `game2` (partiellement intégré

1. La formalisation est disponible à `https://github.com/pPomCo/belgames`

à cette formalisation Coq). Il reprend certains éléments du module `game` pour vérifier la correction des deux transformations algébriques (transformation de Selten et transformation hypergraphique). Nous certifions ainsi les résultats du chapitre 4.

Dans la section 5.7, concluons ce chapitre avant d'aborder la conclusion générale de cette thèse.

## 5.1 Introduction à Coq/SSReflect

### 5.1.1 La vérification automatique

Dans certains contextes, la fiabilité des programmes informatiques est cruciale, particulièrement lorsque ces programmes aident à la décision dans des domaines sensibles (évidemment lorsque des vies sont en jeu, mais aussi lorsque les enjeux, quels qu'ils soient, sont importants). Or, il est très difficile d'obtenir une garantie de fiabilité sur un programme. En effet, pour cela, il faut exécuter deux tâches ardues : d'une part, écrire un programme « zéro défauts » ; d'autre part s'assurer que c'est le cas, quel que soit le contexte d'exécution de ce programme.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour obtenir une garantie (plus ou moins forte) sur la correction des programmes. Toutes commencent de la même façon : expliciter les *spécifications* du programme, c'est-à-dire le comportement qu'il doit avoir en fonction des arguments qu'on lui donne, dans un langage non ambigu (mathématique, logique, etc.). Ainsi, s'assurer que le programme à le comportement attendu revient à s'assurer qu'il vérifie les spécifications.

Les spécifications sont établies par des humains, et leur expression ne peut être validée que par des humains : il s'agit d'exprimer les objectifs du programme. Par contre, une fois ces spécifications exprimées, on peut envisager d'utiliser des outils plus ou moins automatisés pour s'assurer qu'un programme donné les respecte.

Différentes méthodes apportent des garanties plus ou moins fortes, de manière plus ou moins automatisée. Par exemple, des tests peuvent être effectués. Mais ces tests sont rarement exhaustifs (le nombre de façons d'appeler un programme est souvent prohibitif). De nombreuses types de tests existent. Par exemple, ils peuvent être effectués en conditions normales de fonctionnement, ou encore « aux limites » (c'est souvent dans les cas d'utilisation extrêmes que les défauts apparaissent). Dans tous les cas, des tests apportent une garantie faible : le programme semble correct, mais on n'en est pas absolument certain. D'autres approches, à l'inverse, permettent de raisonner rigoureusement (à l'aide de logique mathématique) pour démontrer la validité des programmes. On parle alors de *méthodes formelles*. Une première approche formelle consiste à utiliser des solveurs pour montrer qu'il est impossible de violer les spécifications (par exemple avec un solveur SAT, Biere et al., 1999 ; Sheeran, Singh et Stålmarck, 2000).

C'est une autre approche formelle qui nous concerne ici, qui consiste à prou-

ver que le programme en question vérifie les spécifications, et non pas à le vérifier a posteriori. Une telle preuve peut être effectuée sur papier (alors il faut la vérifier manuellement), mais elle sera avantageusement effectuée dans un assistant de preuve formelle tel que Coq, Isabelle/HOL, etc. (Nipkow, Paulson et Wenzel, 2002 ; Coq Development Team, 2022). Ainsi, le travail de preuve est réalisé conjointement par l'humain et par la machine : l'humain construit la preuve et la machine la vérifie (la machine peut aussi automatiser certaines parties de la construction de la preuve, malheureusement assez peu). Si l'on accepte la validité de l'assistant de preuve (c'est-à-dire la validité de son principe de fonctionnement et la validité de son implémentation), alors toute preuve qui est vérifiée par l'assistant est valide. Cette preuve peut être compliquée, longue, etc., il n'y a même pas besoin de la relire : elle est correcte par construction. Ainsi, par exemple, le compilateur CompCert, certifié en Coq, est valide si la théorie sous-jacente (le calcul des constructions inductives) et le noyau interne de Coq sont valides, ce qui est largement accepté (Leroy et al., 2016). Le travail de vérification est donc grandement simplifié : il suffit aux relecteurs de s'assurer que les spécifications sont correctes et Coq fait le reste.

Nous verrons ci-après qu'un programme (fonctionnel) et ses spécifications sont analogues à un énoncé mathématique : prouver la correction d'un programme revient alors à prouver la correction de l'énoncé mathématique. Ainsi, les assistants de preuve, dont Coq, permettent de garantir des résultats mathématiques (dans le sens le plus général). De nombreux résultats ont été énoncés et prouvés en Coq, ainsi des pans entiers des mathématiques sont formalisés et vérifiés. Parmi les exemples fameux, nous pouvons citer le théorème des quatre couleurs (où on traite exhaustivement plus d'un milliers de cas différents, Gonthier et al., 2008) et celui de Feit-Thompson (dont la démonstration fait plus de deux cent cinquante pages, Gonthier et al., 2013) dont la formalisation en Coq a mené à l'élaboration de la bibliothèque *Mathematical Component* (Mahboubi et Tassi, 2021). Un tel travail de formalisation permet parfois de déceler des erreurs. Surtout, cela permet de simplifier et d'étendre de nombreux résultats et de les réutiliser facilement. De plus, en constituant d'énormes bases de données de preuves (qui sont des programmes informatiques), on commence aujourd'hui à penser les exploiter, grâce aux différentes techniques issues de l'intelligence artificielle, afin d'accompagner les mathématiciens dans d'autres tâches, telles que la découverte de nouveaux résultats. La formalisation Coq que nous proposons dans ce chapitre est d'abord pensée comme une vérification des résultats mathématiques obtenus. Ses composants pourront par ailleurs être réutilisés pour exprimer et vérifier de nouveaux résultats ou encore pour élaborer des programmes certifiés.

### 5.1.2 Comment ça fonctionne ?

Le fonctionnement interne de l'assistant de preuve Coq est un sujet compliqué qui dépasse largement le cadre de cette thèse. Nous souhaitons donner ici au lecteur néophyte une bonne intuition sans pour autant trop entrer dans les détails de la théorie sous-jacente (le calcul des constructions inductives, Coquand

et Huet, 1986 ; Paulin-Mohring, 1996). Nous illustrerons simplement, sur un exemple de logique propositionnelle, la correspondance de Curry, De Bruijn et Howard (dite aussi correspondance preuve/programme ou correspondance formule/type, Curry et al., 1958 ; Bruijn, 1967 ; Howard, 1980), pour montrer la façon dont une machine peut garantir qu'un énoncé mathématique est correct.

Considérons un programme fonctionnel dans lequel deux types $A$ et $B$ et une fonction $f : A \to B$ sont définis. Alors, pour tout élément $a$ de type $A$, l'appel de fonction $f(a)$ est un élément de type $B$ : si l'on peut avoir un élément $a$ de type $A$, quel qu'il soit, alors on peut fabriquer l'élément $f(a)$ qui est de type $B$.

Considérons maintenant son pendant en logique propositionnelle. Soient deux propositions $A$ et $B$ et une implication $A \implies B$. Si l'on peut montrer que la proposition $A$ est vraie, de n'importe quelle manière, alors l'implication $A \implies B$ permet de montrer que la proposition $B$ est vraie.

Une fonction $A \to B$ et une implication $A \implies B$ sont en correspondance. En effet, elles ont le même rôle : elles transforment les instances de $A$ en instances de $B$. Ainsi, le type de la fonction $f : A \to B$ correspond à l'énoncé mathématique (c'est l'implication), et le code de la fonction correspond à la preuve de l'énoncé (c'est l'implémentation de cette implication qui transforme effectivement toute preuve de $A$ en preuve de $B$).

Considérons la tautologie suivante comme un exemple supplémentaire :

$$(A \implies B) \implies (B \implies C) \implies (A \implies C).$$

Pour toutes propositions $A$, $B$ et $C$, si l'implication $A \implies B$ est vraie, alors si l'implication $B \implies C$ est vraie elle-aussi, alors l'implication $A \implies C$ est nécessairement vraie. En effet, en supposant les deux prémisses vraies, si l'on donne une preuve que $A$ est vraie, on peux utiliser la première implication pour fabriquer une preuve que $B$ est vraie, puis la seconde implication pour fabriquer une preuve que $C$ est vraie à partir de la précédente : ayant les deux prémisses, on peux montrer $C$ à partir de $A$, c'est-à-dire que $A$ implique $C$.

D'un point de vue « programme », il s'agit d'une composition de fonction. En effet, l'implication $A \implies B$ est analogue au type d'une fonction $f : A \to B$ (et le code de la fonction est analogue à une preuve de cette l'implication). De manière similaire, l'implication $B \implies C$ est analogue au type d'une fonction $g : B \to C$. Alors, pour montrer $A \implies C$, il faut construire une fonction $h : A \to C$. La composition de $f$ et $g$ est une telle fonction, c'est-à-dire la fonction définie par $h(a) = g(f(a))$. Ainsi, une preuve de cette tautologie est donnée par la fonction $c$ suivante :

$$\begin{aligned} &c : (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C \\ &c := f \mapsto g \mapsto a \mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

*Remarque* 59. Toute autre fonction de même type est une autre preuve de cette tautologie.

Dans ce dernier exemple, la fonction $c$ attend trois arguments : une fonction $f : A \to B$, une fonction $g : B \to C$ et un élément $a : A$, donnés successivement.

Ainsi, $c(f)(g)(a)$ est un terme de type $C$. Cette fonction est *curryfiée*, c'est-à-dire que les arguments sont donnés les un après les autres. Elle est analogue à la fonction non-curryfée $c'$, dont l'appel serait $c'(f, g, a)$, et dont l'usage serait plus ordinaire en mathématiques. Cependant, nous considérerons toujours les fonctions sous leur forme curryfiée, et pourrons ainsi effectuer des *appels partiels* de fonction. Par exemple, $c(f)(g)$ est la fonction définie ci-dessus, à laquelle nous n'avons donné que les deux premiers arguments. Elle attend un argument $a : A$ pour produire le terme $c(f)(g)(a)$ de type $C$. L'appel partiel $c(f)(g)$ est donc un terme de type $A \to C$, qui est analogue à une preuve de l'implication $A \implies C$, établie d'après les preuves $f$ et $g$ des prémisses.

Coq fonctionne sur ce principe, avec des types étendus. Ainsi, un type peut être une simple proposition, mais aussi correspondre à un énoncé plus complexe. En effet, Coq permet le typage polymorphe et dépendant des termes (le type d'un argument dépend alors des types des arguments précédents). Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1) \to (x^2 > x)$ est le type des fonctions $f$ qui attendent un premier argument $x \in \mathbb{R}$, un deuxième argument $h$ de type $(x > 1)$ et qui construisent le terme $f(x)(h)$ dont le type est $(x^2 > x)$. En définissant une fonction $f$ de ce type, on montre la validité de cette implication. En effet, pour tout nombre réel $(x : \mathbb{R})$ et toute preuve $(h : x > 1)$ que $x$ est plus grand que 1, le terme $f(x)(h)$ est une preuve que $x^2 > x$.

### 5.1.3 Éléments de syntaxe Coq et SSReflect

Plusieurs environnements logiciels existent pour Coq, nous utilisons le plugin ProofGeneral pour Emacs. Cet environnement est composé d'un part d'un éditeur de texte, dans lequel on écrit le « code Coq », et d'un interpréteur en temps réel de ce code (qui est évalué à la demande, ligne par ligne, et l'utilisateur peut suivre l'avancée de l'évaluation).

Cette sous-section présente quelques éléments de syntaxe du « code Coq », qui fait intervenir plusieurs langages : le langage Vernacular est un langage déclaratif qui offre les primitives pour l'interpréteur ; le langage Gallina est un langage fonctionnel pur qui permet la définition de fonctions totales (et sans effet de bord) ; les langages LTac et SSReflect sont des langages impératifs qui offrent des « tactiques » de preuve permettant la définition interactive des fonctions par chaînage arrière (*backward reasoning*), c'est-à-dire par étapes successives, en partant du but (le résultat attendu). La définition d'une fonction, c'est-à-dire la complétion d'une preuve, se termine alors lorsque tous les sous-buts ont été prouvés.

Le langage Vernacular contient les primitives pour l'interpréteur. Il permet d'importer des bibliothèques, d'ouvrir et de fermer des modules, etc. Il permet aussi de définir et d'évaluer des expressions fonctionnelles exprimées en Gallina. Le langage Gallina, quant à lui, permet la définition du corps des fonctions, sa syntaxe semblera intuitive pour le lecteur habitué au langage OCaml. La coloration syntaxique utilisée ici colore en violet les mots-clés de Vernacular. Par exemple :

```
Check fun (n : nat) (m : nat) ⇒ n + m.
  (* fun (n : nat) (m : nat) ⇒ n + m : nat -> nat -> nat *)
```

Ici, la primitive Vernacular `Check` demande à l'interpréteur le type du terme `fun (n : nat) (m : nat) ⇒ n + m` exprimé dans le langage Gallina. La commande est terminée par un point. L'interpréteur affiche alors le terme, suivi de deux points et de son type. L'affichage est donné ici en commentaire, délimité par `(* ... *)`. Ici, le terme `fun (n : nat) (m : nat) ⇒ n + m` est une fonction qui attend un argument $n$ puis un argument $m$ de type `nat` (entiers naturels) et renvoie un élément de type `nat`. Notons que l'interpréteur est capable d'inférer les types (lorsqu'ils sont inférables).

```
Check fun n m ⇒ n + m.
  (* fun (n : nat) (m : nat) ⇒ n + m : nat -> nat -> nat *)
```

Cette instruction produit le même affichage : le type `nat` des termes `n` et `m` est inféré car `n` et `m` sont utilisés avec l'addition `+` sur les entiers naturels.

Pour définir des fonctions, nous utilisons le mot-clé Vernacular `Definition`. Plusieurs syntaxes sont possibles, les trois lignes suivantes sont équivalentes :

```
Definition f := fun n ⇒ fun m ⇒ n + m.
Definition f := fun n m ⇒ n + m.
Definition f n m := n + m.
```

Après l'évaluation d'une de ces trois lignes, la fonction `f : nat -> nat -> nat` est définie. Nous pouvons évidemment lui appliquer des arguments de type `nat` : ils sont simplement donnés à la suite, séparés par une espace. Ainsi, `(f 3 5)` est un terme de type `nat` : c'est l'application de 3 et de 5 à `f`, c'est-à-dire `f` avec `n`=3 et `m`=5. Il n'est pas nécessaire d'appliquer la totalité des arguments. Par exemple, l'application partielle `(f 3)` est une fonction de type `nat -> nat` : c'est la fonction `f` pour laquelle l'argument `n`=3, elle attend le second argument `m` de type `nat`. L'application partielle `(f 3)` est donc analogue à la fonction `(fun m ⇒ 3 + m)`.

Lorsque les types ne sont pas inférables par l'interpréteur, ils doivent être donnés explicitement. En effet, supposions que nous souhaitions définir la fonction qui a deux entiers naturels `a` et `b` associe la paire `(a,b)`. La définition suivante n'est pas valide :

```
Fail Definition g := fun a b ⇒ (a,b).
  (* The command has indeed failed with message:
     The following term contains unresolved implicit arguments:
     (fun (a : ?A) (b : ?B) ⇒ (a, b)) *)
```

La commande échoue car les types de `a` et `b` ne sont pas inférables. Les définitions suivantes sont valides (et équivalentes) :

```
Definition g := fun (a : nat) (b : nat) ⇒ (a,b).
Definition g := fun (a b : nat) ⇒ (a,b).
```

```
Definition g (a b : nat) := (a,b).
Check g.
  (* g : nat -> nat -> nat * nat *)
```

Tout expression bien formée a un type bien défini. Ici, il a fallu fixer le type `nat` des arguments `a` et `b`. Si on souhaite définir la fonction qui crée la paire `(a,b)` pour n'importe quels `a` et `b` de n'importe quel type, alors il faut passer ces types en arguments. Ainsi, on donnera d'abord les types voulus, puis les `a` et `b` ayant ces types : la fonction sera donc bien définie pour tout `a` et `b` de tout type.

```
Definition h := fun (A B : Type) (a : A) (b : B) => (a,b).
Check h.
   (* ∀A B : Type, A -> B -> A * B *)
```

Cette fonction[2] attend deux arguments `A` et `B` de type `Type`, puis un argument `a` de type `A` et un argument `b` de type `B`; elle produit la paire `(a,b)` de type `A * B`. Ici, le typage est polymorphe : le type des derniers arguments dépend des arguments précédents. L'application partielle `(h X Y)` est donc une fonction de type `X -> Y -> X * Y` construisant des paires d'éléments de `X` et `Y`. Par exemple, `h nat nat` est analogue à la fonction `g` définie ci-dessus : elles attendent toutes les deux deux arguments `a` et `b` de type `nat` pour construire la paire `(a,b)`.

Il est aussi possible de définir une fonction par chaînage arrière grâce au langages de tactiques LTac et SSReflect : on énonce d'abord son type, puis on donne ensuite les tactiques qui créent le corps de la fonction. C'est l'approche que l'on utilisera principalement lorsque l'on souhaitera prouver des énoncés mathématiques (rappelons qu'un énoncé est un type, et qu'une preuve de cet énoncé est une fonction ayant ce type), d'où les deux mots-clé Vernacular équivalents `Lemma` et `Theorem` :

```
Theorem h : ∀A B : Type, A -> B -> A * B.
Proof.
move=> A B a b.
exact: (a,b).
Qed.
```

Le mot-clé `Theorem` crée ici le symbole `h`, de type `∀A B, A -> B -> A * B`. Néanmoins, la définition n'est pas complète : il manque le corps de la fonction, qui est construit grâce aux tactiques donnés entre les mots-clé `Proof.` et `Qed`. Les tactiques utilisées ici (`move=>` et `exact:`) permettent de faire évoluer le but initial (donner une fonction du type `∀A B, A -> B -> A * B`) à la manière de la déduction naturelle (séquents) : `move=>` passe les arguments dans le contexte (le but devient alors de construire un élément de type `(A * B)` étant donnés `A`, `B`, `a` et `b`), puis `exact:` permet de donner un élément de ce type. Avec la primitive `Print`, l'interpréteur nous affiche le code de cette fonction `h`.

2. En Coq, la notation `∀_, _` généralise la notation `->`. Par exemple, le type `∀n : nat, nat` est une autre notation pour le type `nat -> nat` : c'est le type des fonctions qui à tout entier naturel associent un entier naturel.

```
Print h.
(*  h = fun (A B : Type) (a : A) (b : B) => (a, b)
    : ∀A B : Type, A -> B -> A * B *)
```

Nous avons bien construit la même fonction `h` que tout à l'heure., mais interactivement par chaînage arrière.

Les tactiques des langages LTac et SSReflect ne sont pas détaillées ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux manuels de référence[3] en ligne, ainsi qu'au livre/tutoriel (Mahboubi et Tassi, 2021). Dans ce chapitre, pour simplifier la lecture, les énoncés des théorèmes sont donnés, mais pas les preuves Coq correspondantes. On trouve le tout à l'adresse https://github.com/pPomCo/belgames. Il n'est pas nécessaire pour le lecteur de vérifier les preuves, puisque le compilateur Coq le fait pour nous.

Enfin, nous terminons cette présentation de la syntaxe en notant qu'il existe plusieurs mécanismes permettant l'héritage multiple en Coq (*type classes* et *canonical structures*). Nous ne souhaitons pas décrire ces mécanismes ici, ce qui alourdirait ce mémoire de thèse sans apporter de plus-value significative à la lecture. En effet, nous utilisons *Hierarchical Builder*, un outil qui permet de déclarer ces relations d'héritage à un niveau « méta » avec une syntaxe dédiée, en en abstrayant l'implémentation (Cohen, Sakaguchi et Tassi, 2020). Par exemple, nous avons vu au chapitre 1 qu'un ordre total est un quasi-ordre particulier, qu'un quasi-ordre est un ordre partiel particulier, etc. Alors, nous dirons qu'un ordre total hérite des propriétés des quasi-ordres, et qu'un quasi-ordre hérite des propriétés des ordres partiels (l'héritage est transitif : un ordre total hérite donc aussi des propriétés des ordres partiels). En Coq, les ordres totaux et partiels sont déjà implémentés (dans la bibliothèque *Mathematical Components*), leurs types sont respectivement `orderType` et `porderType`. Puisque `orderType` hérite de `porderType`, alors tout ordre total `(T : orderType _)` est aussi un ordre partiel, il peut être utilisé comme tel. Particulièrement, tout résultat vérifié pour les ordres partiels l'est aussi pour `T`. Bien entendu, la réciproque est fausse, et les résultats vérifiés pour les ordres totaux ne sont pas applicables aux ordres partiels.

## 5.2 Résultats généraux : `lib/*.v`

La formalisation que nous décrivons dans les sections à venir est conséquente, et a nécessité beaucoup de travail de notre part. Pour cela, il est important de bien organiser le code, et de décomposer les théorèmes en plusieurs lemmes intermédiaires correspondant aux différentes étapes d'une preuve. Cela présente plusieurs avantages : d'abord il est plus facile de se retrouver dans la bibliothèque de preuves et dans les preuves elles-mêmes ; ensuite la réutilisation des résultats intermédiaires est facilitée ; enfin les lemmes intermédiaires généraux peuvent être utilisés dans d'autres domaines.

3. Le manuel de référence est disponible à l'adresse https://coq.inria.fr/refman/.

Nous avons montré ou étendu beaucoup de lemmes généraux, et nous les proposons pour l'intégration dans la bibliothèque *Mathematical Components*. La plupart d'entre eux peuvent être considérés comme triviaux (au moins lorsqu'on raisonne sur papier). Par exemple, nous montrons que pour tous ensembles $A$ et $B$, $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$, ou encore que $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$. En Coq, nous écrivons :

```
Lemma setUD A B : A :|: (B :\: A) = A :|: B.
Lemma setDU A B : (A :|: B) :\: A = B :\: A.
```

Ces lemmes sont évidemment pratiques, et donc utiles, néanmoins, nous pensons qu'il n'est pas nécessaire de les décrire dans cette thèse. Nous considérons que la plupart sont des lemmes « manquants » dans *Mathematical Components*. Ils concernent principalement les ensembles et les *bigops*, c'est-à-dire les grands opérateurs, tels que $\sum_x$, $\prod_x$ et $\bigoplus_x$ (environ 60 lemmes), mais aussi les ordres partiels, les nombres (environ 15 lemmes), les opérateurs min et max (environ 25 lemmes) et quelques autres sujets divers.

Nous détaillerons uniquement les quatre principes inductifs que nous avons exprimé en Coq pour raisonner sur les ensembles car nous pensons qu'ils présentent un intérêt en eux-mêmes et parce que nous les utilisons dans certaines de nos preuves.

Le terme *induction* (ou *récurrence*) caractérise les raisonnements ou les définitions qui se font « de proche en proche ». Ainsi s'il est possible de déduire qu'un objet possède une propriété lorsque l'un de ses « voisins » la possède aussi, alors il suffit de montrer cette propriété pour un objet uniquement et l'on peut la déduire pour tout son « voisinage ». Nombreux sont ceux qui ont étudié la récurrence sur les entiers : pour montrer une propriété $P$ pour l'entier $n^* > n_0$ par induction, on vérifie le *cas inductif* d'une part ($P(n) \implies P(n+1)$, la propriété se « transmet » de $n$ à $n+1$), et le cas de base d'autre part ($P(n_0)$, la propriété est vraie pour un élément). Alors pour montrer $P(n^*)$, puisque $P(n^*-1) \implies P(n^*)$, il suffit de montrer $P(n^*-1)$. Or, $P(n^*-2) \implies P(n^*-1)$, il suffit de montrer $P(n^*-2)$. Ainsi de suite, on diminue le rang $n$ jusqu'à atteindre $n = n_0$, et $P(n_0)$ est vraie puisqu'on l'a montré à part. Le raisonnement tient dans l'autre sens : partant de $P(n_0)$, on construit $P(n_0+1)$, puis $P(n_0+2)$ et ainsi de suite jusqu'à $P(n^*)$.

Nous pouvons raisonner par induction sur la cardinalité des ensembles. En effet, supposons que nous souhaitons montrer qu'une propriété $P$ est vraie pour tout ensemble. Montrons d'abord qu'elle est vraie pour l'ensemble vide : c'est le cas de base. Ensuite, pour montrer que $P(A)$ pour un certain ensemble $A$, nous supposons que $P$ est vérifiée pour tous les ensembles $B$ de taille strictement inférieure à $A$ (c'est-à-dire tels que $|B| < |A|$), et montrons $P(A)$ sous cette hypothèse : c'est le cas inductif. Nous pouvons alors tenir ce raisonnement inductif :

— $P(\emptyset)$ est vraie (c'est le cas de base) ;
— $P(\emptyset) \implies \forall x, P(\{x\})$ par induction ;

— $P(\emptyset) \wedge \forall x, P(\{x\}) \implies \forall x, y, P(\{x, y\})$ par induction ;
— et ainsi de suite jusqu'à atteindre la cardinalité de $A$.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que pour montrer $P(\emptyset)$, nous pouvons supposer que la propriété $P$ est vérifiée pour tous les ensembles de cardinalité inférieure à $|\emptyset| = 0$. En effet, il n'y en a aucun, cette propriété est nécessairement vraie (et n'apporte aucune information). Ainsi, le cas de base $P(\emptyset)$ peut être réécrit comme une version triviale du cas inductif $(\forall B, |B| < |\emptyset| \implies P(\emptyset)) \implies P(\emptyset)$. Nous proposons donc le principe inductif suivant (table 5.1) :

$$\frac{\forall A,\ \big(\forall B, |B| < |A| \implies P(B)\big) \implies P(A)}{\forall A, P(A)}$$

TABLE 5.1 – Principe d'induction sur la cardinalité des ensembles

En COQ, nous définissons d'abord la fonction récursive `card_rect_coq_nat`, pour tout `P : {set T} -> Type`[4]. Pour cela, nous utilisons `Program Fixpoint`, qui nous permet de montrer la terminaison de cette fonction inductive « à la main » (en effet, elle n'est pas décroissante structurellement et COQ ne peut donc pas s'en assurer automatiquement).

```
Context {T : finType}.          (* Supposons T un type fini *)
Context {P : {set T} -> Type}. (* Supposons P A un type dépendant de A *)
Variable HA :                   (* Supposons le cas inductif vérifié *)
  ∀A : {set T}, (∀B : {set T}, (#|B| < #|A|)%coq_nat -> P B) -> P A.

(* Alors, nous construisons P(A) pour tout A : *)
Program Fixpoint card_rect_coq_nat (A : {set T}) {measure #|A|} : P A
  := HA card_rect_coq_nat.
Next Obligation. (* ... *) Qed.
```

Nous pouvons ensuite aisément utiliser cette définition pour les entiers de *Mathematical Components* (une autre implémentation des entiers naturels).

```
Definition card_rect {P : {set T} -> Type}
    (H : ∀A : {set T}, (∀B : {set T}, #|B| < #|A| -> P B) -> P A) A :=
  card_rect_coq_nat (fun A IH => H A (fun B H => IH B (elimTF ltP H))) A.
```

Enfin, nous restreignons cette fonction pour les propriétés uniquement.

```
Definition card_ind  {P : {set T} -> Prop} := @card_rect P.
```

Nous utiliserons donc `card_ind` pour montrer une propriété par induction sur la cardinalité d'un ensemble. Lorsque nous souhaitons prouver un but de la forme `∀A : {set T}, P A`, nous pourrons utiliser la tactique `apply:card_ind`. Dans notre contexte de preuve, une hypothèse supplémentaire apparaît, affirmant

4. En COQ, la notation `{set T}` désigne le type des ensembles dont les éléments sont de type `T`, et pour tout ensemble `A : {set T}`, la notation `#|A|` désigne sa cardinalité. Les notations ensemblistes sont listées dans la table 5.5 à la section suivante.

que `∀B : {set T}, #|B| < #|A| -> P B`. Nous pouvons alors utiliser cette hypothèse pour monter `P A`.

Nous proposons le principe d'induction « symétrique » où l'on raisonne en partant de l'ensemble $T$ au lieu de l'ensemble $\emptyset$. Si la propriété $P(A)$ peut être déduite lorsqu'elle est supposée vraie pour tous les ensembles de cardinalité strictement supérieure à $|A|$, alors elle est vraie pour tout $A$. Le raisonnement et l'implémentation en Coq sont similaires mais se font en descendant de $T$ vers $\emptyset$. Nous pouvons ici aussi exprimer le cas de base comme un cas particulier du cas inductif (en effet, aucun ensemble n'a de cardinalité strictement supérieure à $|T|$). Formellement, le principe inductif est le suivant (table 5.2) :

$$\frac{\forall A,\ \big(\forall B, |B| > |A| \implies P(B)\big) \implies P(A)}{\forall A, P(A)}$$

Table 5.2 – Principe d'induction « descendant » sur la cardinalité des ensembles

Enfin, nous proposons deux autres principes d'induction symétriques (de la même manière, l'un est ascendant et part d'$\emptyset$, l'autre est descendant et part de $T$), applicables lorsque la propriété $P(A)$ est déductible lorsque $P$ est vraie pour tous les sous-ensembles stricts de $A$, dans le cas ascendant, et pour tous les ensembles dont $A$ est un sous-ensemble strict, dans le cas descendant. Le raisonnement et l'implémentation en Coq sont là aussi similaires et nous pouvons encore exprimer le cas de base comme un cas particulier du cas inductif (en effet, aucun sous-ensemble n'est strictement inclus dans $\emptyset$, et $T$ n'est le sous-ensemble strict d'aucun ensemble). Nous donnons uniquement les principes eux-mêmes (tables 5.3 et 5.4).

$$\frac{\forall A,\ \big(\forall B, B \subset A \implies P(B)\big) \implies P(A)}{\forall A, P(A)}$$

Table 5.3 – Principe d'induction « ascendant » sur les sous-ensembles stricts

$$\frac{\forall A,\ \big(\forall B, A \subset B \implies P(B)\big) \implies P(A)}{\forall A, P(A)}$$

Table 5.4 – Principe d'induction « descendant » sur les sous-ensembles stricts

## 5.3 Fonctions d'ensemble et capacités

Nous décrivons ici les résultats exprimés dans les modules `setfun`, `massfun` et `capacity`, qui portent sur les fonctions d'ensembles à support fini, et en

particulier sur les capacités algébriques et sur les capacités usuelles (à valeurs réelles), ainsi que sur leurs représentations par des fonctions de masse. Dans notre travail, nous faisons régulièrement des allers et retours entre les différentes vues d'une même connaissance : la mesure inférieure, la mesure supérieure et la fonction de masse. En effet, certaines propriétés sont établies facilement sur la capacité elle-même (par exemple la monotonie au regard de l'inclusion) alors que d'autres le sont plus naturellement sur la fonction de masse (par exemple, la fonction de masse d'une fonction de croyance ne prend que des valeurs positives). Nous avons découpé la formalisation des capacités et de leurs représentations en trois parties. Les résultats généraux concernant les fonctions d'ensemble sont d'abord formalisés de manière classique dans le module `setfun`. Ensuite, nous définissons les types et sous-types de fonctions de masse dans le module `massfun`. Enfin, les capacités et leurs sous-types sont formalisés dans le module `capacity`. Ces définitions nous permettent de passer facilement d'une représentation à une autre et sont présentées dans cette section.

Le type d'une fonction d'ensembles est $\mu : 2^T \to R$, où $T$ est un ensemble fini et $R$ un ensemble de valeurs (souvent numérique, par exemple $R = \mathbb{Q}$ ou $R = \mathbb{R}$). Nous bénéficions ici des types et sous-types proposés par la bibliothèque *Mathematical Components*. D'abord, un *type fini* `T` (c'est-à-dire un type `T` pour lequel on peut construire la liste de ses éléments), est encapsulé dans une structure de *fintype*, et est noté `(T : finType)`. Alors, nous pouvons utiliser un élément `(t : T)` normalement (en tant que terme de type `T`) mais nous bénéficions aussi des résultats communs à tous les types finis (par exemple, nous pouvons les utiliser dans les *bigops* tels que les grandes sommations et produits).

En particulier, nous bénéficions du type des sous-ensembles de `T` qui est noté `{set T}` : un ensemble $A \subseteq T$ est dont typé `(A : {set T})`. Puisque le type `{set T}` est lui aussi fini, nous pouvons exprimer des termes tels que $\sum_{B \subseteq A} f(B)$.

Enfin, nous utilisons les *finfuns*, (*finite support functions*, c'est-à-dire fonctions à support fini), dont le type est noté `{ffun _ -> _}`. Une fonction d'ensemble $\mu : 2^T \to R$ sera ainsi un terme `(mu : {ffun {set T} -> R})` : c'est une fonction dont le domaine est `{set T}` (l'ensemble des parties de `T`) et le co-domaine est `R`. Une *finfun* est une fonction : nous pouvons l'utiliser comme toute fonction. Par exemple, `(mu A)` est un terme bien formé (si `A` est de type `{set T}`) dont le type est `R` : c'est la valeur que `mu` associe à l'ensemble `A`. De plus, une *finfun* hérite de plusieurs propriétés, dont l'égalité décidable. Nous pouvons ainsi montrer que deux *finfuns* `u` et `v` sont égales en vérifiant qu'elles prennent les mêmes valeurs : `(∀A : {set T}, u A = v A) -> u = v`.

Puisque nous travaillons beaucoup sur les ensembles, il est pertinent de donner l'équivalence entre les notations utilisées dans *Mathematical Components* et les notations mathématiques usuelles. La table 5.5 liste les principales notations.

### 5.3.1 Propriétés des fonctions d'ensemble

Les fonctions d'ensemble (et en particulier les capacités) peuvent être caractérisées par différentes propriétés. Nous les définissons dans le module `setfun`.

| | Notation usuelle | Notation *Mathematical Components* |
|---|---|---|
| Ensemble vide | $\emptyset$ | `set0` |
| Singleton | $\{t\}$ | `[set t]` |
| Ensemble « plein » | $T$ | `setT` |
| Cardinalité | $\lvert A\rvert$ | `#\|A\|` |
| Complémentaire | $A^c$ ou $\bar{A}$ | `~:A` |
| Union | $A \cup B$ | `A :\|: B` |
| Intersection | $A \cap B$ | `A :&: B` |
| Différence | $A \setminus B$ ou $A - B$ | `A :\: B` |
| Sous-ensemble | $A \subseteq B$ | `A \subset B` |
| Sous-ensemble strict | $A \subset B$ | `A \proper B` |
| Disjoint | $A \cap B = \emptyset$ | `[disjoint A & B]` |
| Image et sélection | $\{f(t) \mid P(t)\}$ | `[set f t \| P t]` |
| Sommation | $\sum_{t \in A \text{ tq. } P(t)} f(t)$ | `\sum_(t in A \| P t) f t` |
| Sommation abstraite | $\bigoplus_{t \in A \text{ tq. } P(t)} f(t)$ | `\big[op/idx]_(t in A \| P t) f t` |

TABLE 5.5 – Notations utilisées dans *Mathematical Components*

Posons d'abord `R` le co-domaine d'une fonction d'ensemble. Selon la propriété formalisée, `R` sera soit un type quelconque, soit un type ordonné, soit un anneau intègre (c'est-à-dire qu'il n'a aucun diviseur de zéro), soit encore un type analogue aux réels. Pour simplifier la lecture, nous supposerons ici que `R`$= \mathbb{R}$ (le type des réels étant un sous-type de ceux évoqués précédemment). Posons aussi le domaine fini `T` et supposons une fonction d'ensemble `mu` $: 2^T \to R$.

```
Variables (R : realDomainType) (T : finType) (mu : {ffun {set T} -> R}).
```

Une fonction $\mu$ est monotone croissante si pour tous $A, B \subseteq T$, $\mu(A \cup B) \geq \mu(A)$ :

```
Definition monotonic := ∀A B, mu (A :|: B) ≥ mu A.
```

Plusieurs définitions alternatives sont possibles pour la monotonie, selon l'opération ensembliste considérée :

```
Lemma monotonicI : monotonic mu <-> ∀A B, mu (A :&: B) ≤ mu A.
Lemma monotonicD : monotonic mu <-> ∀A B, mu (A :\: B) ≤ mu A.
Lemma monotonicS : monotonic mu <-> ∀A B, A \subset B -> mu A ≤ mu B.
```

Une fonction d'ensemble $\mu$ est 2-monotone si $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B)$, c'est alors une mesure inférieure. Elle est 2-alternante si l'on renverse l'inégalité, c'est alors une mesure supérieure. Enfin, elle est additive si l'on remplace l'inégalité par l'égalité, $\mu$ est alors une mesure :

```
Definition is_2monotone :=
  ∀A B, mu (A :|: B) + mu (A :&: B) ≥ mu A + mu B.
Definition is_2alternating :=
  ∀A B, mu (A :|: B) + mu (A :&: B) ≤ mu A + mu B.
```

```
Definition additiveUI :=
  ∀A B, mu (A :|: B) + mu (A :&: B) = mu A + mu B.
```

Les propriétés de sur-additivité, sous-additivité et d'additivité sont exprimées pour les ensembles disjoints.

```
Definition superadditive :=
  ∀A B, [disjoint A & B] -> mu (A :|: B) ≥ mu A + mu B.
Definition subadditive :=
  ∀A B, [disjoint A & B] -> mu (A :|: B) ≤ mu A + mu B.
Definition additive :=
  ∀A B, [disjoint A & B] -> mu (A :|: B) = mu A + mu B.
```

Lorsque $\mu(\emptyset) = 0$, elles sont équivalentes aux définitions de 2-monotonie, 2-alternance et d'additivité données ci-avant. Ainsi, nous montrons :

```
Lemma superadditiveE:
  mu set0 = 0 -> (is_2monotone mu <-> superadditive mu).
Lemma subadditiveE :
  mu set0 = 0 <-> (is_2alternating mu <-> subadditive mu).
Lemma additiveE :
  mu set0 = 0 <-> (additiveUI mu <-> additive mu).
```

Enfin, une fonction d'ensemble est pointée si $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(T) = 1$.

```
Definition pointed := [&& mu set0 == 0 & mu setT == 1].
```

La plupart des propriétés exprimées ci-dessus sont dans `Prop` : elles ne peuvent être montrées qu'en raisonnant. Une approche idiomatique avec *Mathematical Components* et SSReflect est la réflexion vers les booléens (qui donne son nom à SSReflect, pour *Small Scale Reflection*) : il s'agit d'exprimer la même propriété dans `bool`, ce qui est très souvent possible pour les types finis. Alors, cette propriété booléenne a pour valeurs de vérité `true` et `false` et elle peut être calculée. Pour toute propriété `xxx`, nous établissons d'abord une version booléenne `xxxb`, puis nous montrons le lemme `xxxP` qui garantit que `xxx` est vérifiée si et seulement si `xxxb = true`. Ainsi, par exemple :

```
Definition monotonicb :=
  [∀A : {set T}, [∀B : {set T}, mu (A :|: B) ≥ mu A]].
Lemma monotonicP : reflect (monotonic mu) (monotonicb mu).
```

### 5.3.2 Fonction duale

Lorsque nous étudions les capacités à valeurs réelles, nous considérons deux fonctions duales : la mesure inférieure et la mesure supérieure : chacune est la duale de l'autre. Dans les chapitre précédents, nous notions $\mathrm{Psup}(A) = 1 - \mathrm{Pinf}(A^c)$. Dans cette expression, la valeur 1 représente la valeur maximale prise par la capacité mais n'est associée à aucune propriété. Dans le cas général, nous devons donc définir la duale de $\mu$ par $\mathtt{dual}_\mu(A) = \mu(T) - \mu(A^c)$.

```
Definition dual := [ffun A : {set T} => mu setT - mu (~: A)].
```

Nous montrons ensuite plusieurs lemmes concernant les fonctions duales. La duale de la duale de $\mu$ ressemble à la fonction $\mu$. Elle lui est identique si $\mu(\emptyset) = 0$ est un élément neutre de l'opérateur `+` (alors, la fonction `dual` est involutive) :

```
Lemma dual2E :  dual (dual mu) = [ffun A : {set T} => mu A - mu set0].
Lemma dualK :   mu set0 = 0 -> dual (dual mu) = mu.
```

La duale de $\mu$ s'annule toujours pour $A = \emptyset$. Pour $A = T$, elle prend la même valeur que $\mu$ si et seulement si $\mu(\emptyset) = 0$.

```
Lemma dual0 :   dual mu set0 = 0.
Lemma dualT :   mu set0 = 0  <-> dual mu setT = mu setT.
Lemma dualTb : (mu set0 == 0) = (dual mu setT == mu setT).
```

Certaines propriétés de la duale de $\mu$ peuvent être déduites des propriétés de $\mu$. Ainsi :

```
Lemma dual_monotonic :    monotonic mu <-> monotonic (dual mu).
Lemma dual_2alternating : is_2monotone mu <-> is_2alternating (dual mu).
Lemma dual_2monotone :    is_2alternating mu <-> is_2monotone (dual mu).
Lemma dual_additiveUI :   additiveUI mu <-> additiveUI (dual mu).
Lemma dual_pointed :      pointed mu <-> pointed (dual mu).
```

### 5.3.3 Représentation d'une fonction d'ensemble

Nous avons vu dans la section 3.2 qu'une fonction d'ensemble peut être représentée par une autre fonction d'ensemble, que nous appelons *fonction de masse*, au regard d'un monoïde commutatif $(W, 0_W, \boxplus)$ donné (définition 3.12).

Supposons d'abord un monoïde commutatif [5] `(R,idx,op)` dans notre contexte :

```
Context {R : eqType} {idx : R} (op : SemiGroup.com_law idx).
```

Alors, $\mu : 2^T \to R$ est $\boxplus$-représentée par $m : 2^T \to R$ si et seulement si la propriété `is_mass_function mu m` définie c-dessous est vraie :

```
Definition is_mass_function mu m :=
  ∀A, mu A = \big[op/idx]_(B : {set T} | B \subset A) m B.
```

Nous introduisons ensuite la notion d'élément focal (définition 3.13) et de $(k, \boxplus)$-additivité (définition 3.14) :

5. En Coq, nous considérons un « semi-groupe commutatif », c'est-à-dire n'ayant pas nécessairement d'élément neutre, et donnons l'élément neutre `idx` à part. Cela nous permet de contourner une difficulté technique pour les opérateurs min et max qui, en Coq, sont définis sur des ensemble non bornés (par exemple les réels) et n'ont pas d'élément neutre. Nous imposons un monoïde lorsque cela est nécessaire.

```
Definition focal m A := m A != idx.
Definition k_additivity m := \max_(A in focal m) #|A|.
```

Lorsque `idx` est effectivement un élément neutre de `op`, nous pouvons réécrire la sommation sur les éléments focaux uniquement :

```
Variable op : Monoid.com_law idx.
Lemma mass_function_focal mu m :
  is_mass_function mu m
  -> ∀A, mu A = \big[op/idx]_(B in focal m | B \subset A) m B.
```

Dans le module `massfun`, nous définissons le type d'une fonction de masse comme étant une fonction d'ensemble, laquelle est associée à son opérateur `op` et son élément (potentiellement neutre) `idx`. Nous ne demandons pas encore de propriétés pour le type `massfun`, mais les réservons pour les sous-types de `massfun`. Pour établir la hiérarchie des types, nous utilisons *Hierarchy Builder* qui nous permet de déclarer les types et qui, en montrant leur inclusion, construit automatiquement les relations d'héritage (Cohen, Sakaguchi et Tassi, 2020). La définition se fait alors en deux étapes : nous donnons d'abord le *mixin* qui associe à une fonction d'ensemble les propriétés attendues, puis ensuite déclarons la *structure* bâtie sur ce *mixin*. *Hierarchy Builder* génère alors le type correspondant. Une `massfun` générale n'ayant aucune propriété, nous écrivons donc :

```
HB.mixin Record MassFun_of_Ffun R T idx op (m : {ffun {set T} -> R}) :=
    {  }.

#[short(type="massfun")]
HB.structure Definition MassFun R T idx op := {m of MassFun_of_Ffun R T
    idx op m}.
```

Alors un terme `(m : massfun T idx op)` est une fonction de masse. Cela nous permet déjà de définir les mesures inférieures et supérieures correspondantes.

```
Definition Pinf (m : massfun T idx op) :=
  [ffun A => \big[op/idx]_(B : {set T} | B \subset A) m B].

Definition Psup (m : massfun T idx op) :=
  [ffun A => \big[op/idx]_(B : {set T} | ~~[disjoint B & A]) m B].
```

Dans le chapitre 3, nous donnions les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de masse algébrique représente une capacité algébrique (théorème 3.2). Nous le vérifions ici.

```
Lemma is_massfunE mu m :
  (m set0 = mu set0) ∧ (∀A, #|A| ≥ 1 ->
              mu A = op (m A) (\big[op/idx]_(B | B \proper A) m B))
  <-> is_massfun idx op mu m.
```

Nous appelons `mkmassfun` la fonction qui construit la fonction de masse d'une fonction d'ensemble quelconque. Supposons une opération `(inv : R -> R)`. Pour l'instant, nous n'imposons aucune propriété à `inv`. Nous définissons d'abord `mkmassfun_wf` grâce à un `Program Fixpoint`, ce qui nous permet de montrer la terminaison de cette fonction récursive bien qu'elle ne soit pas décroissante structurellement. Son expression est basée sur la définition 3.12.

Cette sommation abstraite est itérée sur les sous-ensembles $B \subset A$ (la notation `\proper` désigne les sous-ensembles stricts). Pour montrer la terminaison d'après la décroissance de la cardinalité, nous avons besoin de la propriété que $B \subset A$. Pour cette raison, la sommation itère non pas sur les ensembles, mais sur les éléments du $\Sigma$-type `{B0 : {set T} | B0 \proper A}` : le type des ensembles qui sont des sous-ensembles stricts de $A$. Cette « astuce » est nécessaire pour contourner une difficulté technique. En effet, les *bigops* de *Mathematical Components* permettent d'exprimer la condition `B \proper A` mais pas de la réutiliser dans l'expression sous la portée du *bigop*. Or, pour montrer la terminaison de la fonction `moebius_wf`, nous avons besoin de cette propriété au niveau de l'appel récursif qui est sous la portée du *bigop*. En considérant le $\Sigma$-type, la propriété est attachée à `B` et reste donc accessible.

```
Program Fixpoint mkmassfun_wf mu A {measure #|A|} :=
  op (mu A) (inv
   (\big[op/idx]_(B : {B0: {set T} | B0 \proper A}) mkmassfun_wf mu B)).
```

Une fois la fonction `mkmassfun_wf` définie et sa terminaison prouvée, il ne reste plus qu'à l'encapsuler dans une structure de `finfun` :

```
Definition mkmassfun mu := [ffun A : {set T} => mkmassfun_wf mu A].
```

Puis nous montrons par récurrence, grâce aux principe d'induction donné en table 5.3, le lemme `mkmassfun_def` qui nous permet de ne pas déplier la définition de `mkmassfun_wf` lorsque nous en avons besoin (en effet, le code de `mkmassfun_wf` est assez compliqué car il contient aussi la preuve de la terminaison de la fonction).

```
Lemma mkmassfun_def mu A :
  mkmassfun mu A = op (mu A)
      (inv (\big[op/idx]_(B : {set T} | B \proper A) mkmassfun mu B)).
```

Enfin, dès lors que `inv` est une opération inverse de `op` (telle que $\forall$`x, op x (inv x) = idx`), la fonction `mkmassfun` produit l'unique fonction de masse qui `op`-représente une fonction d'ensemble (théorème 3.1). En effet, nous montrons :

```
Variable (massfunV : right_inverse idx inv op).
Lemma mkmassfunE mu A :
  mu A = \big[op/idx]_(B : {set T} | B \subset A) mkmassfun op inv mu B.

Lemma massfun_unique (m1 m2 : massfun T idx op) :
  Pinf m1 =1 Pinf m2 -> m1 =1 m2.
```

Grâce à *Hierarchy Builder*, il est très facile d'indiquer que `(mkmassfun mu)` est une instance de fonction de masse bâtie sur le monoïde `(R,op,idx)`. Nous écrivons simplement :

```
HB.instance Definition _ mu :=
  MassFun_of_Ffun.Build R T idx op (mkmassfun op inv mu).
```

Alors, nous pouvons vérifier que le type `massfun` peut être inféré pour le terme `(mkmassfun idx op mu)`

```
Check (mkmassfun op mu : massfun idx op mu).
(*  ...  : massfun idx op mu *)
```

Nous pouvons alors utiliser les définitions établies pour le type `massfun`, telle que `Pinf` par exemple. Ainsi le lemme `mkmassfunE` se réécrit :

```
Lemma mkmassfunE mu : mu = Pinf (mkmassfun op inv mu).
```

### Transformée inverse de Moëbius et fonctions de masse basées sur l'addition

Les fonctions de masse que nous considérons dans la théorie des fonctions de croyance par exemple sont souvent associées à l'addition réelle, et parfois au maximum. Nous les voyons comme des sous-types de `massfun` et les présentons ci-après.

La transformée inverse de Moëbius (définition 1.31) permet de calculer la fonction de masse basée sur l'addition lorsque la fonction d'ensemble en question prend des valeurs réelles. C'est donc simplement une instance de `mkmassfun`, puisque l'addition admet une opération inverse. En Coq, l'addition réelle est notée `+%R` et la soustraction `-%R`. Nous définissons donc simplement :

```
Definition moebius := (mkmassfun +%R -%R).
```

Nous bénéficions ainsi des résultats établis pour la fonction `mkmassfun`. Par exemple, le lemme `mkmassfunE` se réécrit :

```
Lemma moebiusE mu A :
  mu A = \sum_(B : {set T} | B \subset A) moebius mu B.
```

Nous montrons ces lemmes intermédiaires concernant les valeurs prises par `moebius mu` en fonction de la fonction d'ensemble `mu` :

```
Lemma moebius0 mu :     moebius mu set0 = mu set0.
Lemma moebius1 mu t :   moebius mu [set t] = mu [set t] - mu set0.
Lemma moebius1E mu t :  mu [set t] = moebius mu [set t] + mu set0.
```

Nous montrons ensuite plusieurs lemmes nous permettant de caractériser une fonction d'ensemble en fonction de sa transformée inverse de Moëbius, et réciproquement. Particulièrement, la valeur de `dual mu A` s'exprime comme la somme des valeurs prises par `moebius mu` pour tous les ensembles qui intersectent `A` :

```
Lemma dual_moebius mu A :
dual mu A = \sum_(B | ~~[disjoint B & A]) moebius mu B.

Lemma moebius_dual mu A :
  mu A - mu set0 = \sum_(B | ~~[disjoint B & A]) moebius (dual mu) B.
```

Enfin, nous pouvons utiliser `moebius` pour définir la propriété `mpositive`, qui caractérise les fonctions d'ensemble dont la transformée inverse de Moëbius ne prend que des valeurs positives ou nulles (c'est une propriété permettant de caractériser les fonctions de croyance, qui sont pointées et « mpositives »).

```
Definition mpositive mu := ∀A, moebius mu A ≥ 0.
```

Une fonction « mpositive » est 2-monotone (super-additive) et donc monotone croissante.

```
Lemma mpositive_2monotone mu : mpositive mu -> is_2monotone mu.
Lemma mpositive_monotonic mu : mpositive mu -> monotonic mu.
```

Les fonctions de masse basées sur l'addition réelle (comme celles produites par la fonction `moebius`) sont d'usage courant. Grâce à *Hierarchy Builder*, nous définissons `addMassufun` comme un sous-type de `massfun`.

```
HB.mixin Record AddMassFun_of_Mf R T m of MassFun_of_Ffun R T 0 +%R m :=
  { massfun0 : m set0 = 0 ;
    massfun1 : \sum_(A : {set T}) m A = 1 }.

#[short(type="addMassfun")]
HB.structure Definition AddMassFun R T :=
  {m of AddMassFun_of_MassFun R T m & MassFun_of_Ffun R T 0 +%R m}.
```

Les deux propriétés `massfun0` et `massfun1` impliquent que la mesure inférieure représentée par une `addMassfun` est pointée (mais pas nécessairement monotone). La relation d'héritage est gérée automatiquement par *Hierarchy Builder*. Ainsi, nous pouvons utiliser les définitions et résultats concernant le type `massfun` (par exemple `Pinf` et `Psup`) pour le sous-type `addMassfun`. Nous vérifions ainsi :

```
Lemma Pinf01 (m : addMassfun R T) : pointed (Pinf m).
Lemma Psup01 (m : addMassfun R T) : pointed (Psup m).
```

Certaines fonctions de masse ne prennent que des valeurs positives (dans ce cas, si la mesure inférieure déduite est pointée, elle est une fonction de croyance). Nous les appelons `bpa` et les définissons comme un sous-type de `addMassfun`. Enfin, les éléments focaux de certaines sont uniquement des singletons (alors,

leurs mesures inférieures sont des mesures de probabilité). Nous les appelons `prBpa` et les définissons comme un sous-type de `bpa`. Les sous-types de fonctions de masse sont listés en table 5.6 en page suivante.

#### Transformée inverse de Moëbius qualitative et fonctions de masse basées sur le maximum

Considérons maintenant les fonctions de masse basées sur le maximum (telles que les distributions de possibilité). La définition de la transformée qualitative de Moëbius (définition 3.17) en Coq est plus simple que la contrepartie quantitative. En effet, sa définition n'est pas inductive, et peut donc être définie directement (et non pas par un `Fixpoint`) : il n'y a pas besoin de montrer sa terminaison. Nous supposons ici un type `(R : realFieldType)` analogue aux réels. En particulier, il est totalement ordonné, et l'opérateur max est bien défini.

```
Definition qmoebius mu : {ffun {set T} -> R} :=
  [ffun A : {set T} => if [∀t, (t \in A) ==> (mu A > mu (A :\ t))]
                       then mu A else mu set0].
```

Nous nous assurons de sa validité : c'est une max-représentation pour toutes les fonctions d'ensemble monotones.

```
Lemma qmoebiusE mu : monotonic mu ->
  ∀A, mu A = \big[max/mu set0]_(B | B \subset A) qmoebius mu B.

Lemma is_mass_function_qmoebius mu :  monotonic mu ->
  is_mass_function (mu set0) max mu (qmoebius mu).
```

La max-représentation produite par `qmoebius` n'est généralement pas unique. En effet la fonction `mu`, si elle est monotone, est une max-représentation d'elle-même. Nous le vérifions également.

```
Lemma maxmassfun_id mu : monotonic mu -> is_massfun (mu set0) max mu mu.
```

Grâce à *Hierarchy Builder*, nous définissons le type `maxMassfun` de manière similaire au type `addMassfun`. Les deux héritent de `massfun`, mais n'héritent pas l'un de l'autre. Les types et sous-types de fonctions de masse sont données dans la table 5.6 avec les propriétés correspondantes, et les relations d'héritage sont illustrées à la figure 5.1 en page suivante.

### 5.3.4 Capacités : structures et hiérarchie

Nous avons défini les propriétés qui peuvent caractériser les capacités algébriques, et montré certains résultats qui en découlent. Nous avons aussi défini les types usuels pour les fonctions de masse. Cela nous permet maintenant d'établir la hiérarchie des capacités les plus usuelles : les mesures de probabilité, les fonctions de croyances et mesures de plausibilité, les mesures de nécessité et de possibilité et les capacités définies par des intervalles de probabilité. Ce travail

| Type de `m` | Propriétés | |
|---|---|---|
| `massfun R T idx op` | | |
| `addMassfun R T` | `massfun0 :` | `m set0 = 0` |
| | `massfun1 :` | `\sum_A m A = 1` |
| `maxMassfun R T` | `massfun0 :` | `m set0 = 0` |
| | `massfun1 :` | `\big[max/0]_A m A = 1` |
| `bpa R T` | `massfun0 :` | `m set0 = 0` |
| | `massfun1 :` | `\sum_A m A = 1` |
| | `massfun_ge0 :` | `∀A, m A ≥ 0` |
| `prBpa R T` | `massfun0 :` | `m set0 = 0` |
| | `massfun1 :` | `\sum_A m A = 1` |
| | `massfun_ge0 :` | `∀A, m A ≥ 0` |
| | `massfun_card1 :` | `∀A, m A != 0 -> #\|A\| = 1` |

TABLE 5.6 – Sous-types de fonction de masse et propriétés correspondantes.

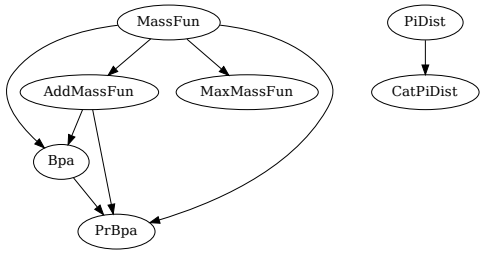



FIGURE 5.1 – Graphique d'héritage des types et sous-types de fonctions de masse (généré automatiquement avec la commande `HB.graph` de *Hierarchy Builder*). Une flèche $T_1 \to T_2$ indique que $T_2$ est un sous-type de $T_1$.

se trouve dans le module `capacity` dans lequel nous utilisons aussi *Hierarchy Builder*.

Concernant les capacités, le type le plus général auquel nous nous intéressons ici est `pointed_fun`, qui désigne les fonctions d'ensemble pointées (mais pas nécessairement monotones). Ce type est pertinent car il correspond aux mesures inférieures des `addMassfun`. Le type `capacity` qui en hérite et qui garantit la monotonie correspond aux capacités numériques munies des propriétés minimales généralement requises, comme nous le faisions dans le chapitre 3. Nous définissons ensuite les types des capacités inférieures et supérieures comme étant des sous-types de capacité. Les capacités inférieures, par exemple, sont des capacités qui sont 2-monotones. Grâce à *Hierarchy Builder*, nous déclarons les uns après les autres les différents sous-types de capacité. Ces sous-types sont listés dans la table 5.7, avec les propriétés nécessaires pour les définir. Nous voyons

que le type `probability R T`, par exemple, est attaché à deux jeux de propriétés. Cela correspond aux deux façons de construire une probabilité : soit en tant que capacité additive, soit en tant que fonction de croyance dont les éléments focaux sont des singletons. Il est aussi possible d'instancier une `probability R T` à partir d'une distribution de probabilité, bien que cela n'apparaisse pas dans la table ci-dessous.

| Type de `mu` | Propriétés | |
|---|---|---|
| `pointed_fun R T` | `capa01 :` | `pointed mu` |
| `capacity R T` | `capaM :` | `monotonic mu` |
| | `capa01 :` | `pointed mu` |
| `capa2inf R T` | `capaM :` | `monotonic mu` |
| | `capa01 :` | `pointed mu` |
| | `capa2mon :` | `is_2monotone mu` |
| `capa2sup R T` | `capaM :` | `monotonic mu` |
| | `capa01 :` | `pointed mu` |
| | `capa2mon :` | `is_2alternating mu` |
| `belief_function R T` | `capa01 :` | `pointed mu` |
| | `massfun_ge0 :` | `mpositive mu` |
| `plausibility R T` | `capa01 :` | `pointed mu` |
| | `massfunD_ge0 :` | `mpositive (dual mu)` |
| `probability R T` | `capaM :` | `monotonic mu` |
| | `capa01 :` | `pointed mu` |
| | `capaAdd :` | `additiveUI mu` |
| `probability R T` | `capa01 :` | `pointed mu` |
| | `massfun_ge0 :` | `mpositive mu` |
| | `massfun_card1 :` | `∀A, moebius mu A != 0 -> #\|A\| = 1` |
| `possibility R T` | `has_pidist :` | `∃p : pidist R T, ∀A : {set T}, mu A = \big[max/0]_(t in A) p t` |
| `necessity R T` | `has_pidistC :` | `∃p : pidist R T, ∀A : {set T}, mu A = 1-\big[max/0]_(t in ~:A) p t` |
| `cat_capacity R T` [1] | `cat_dist :` | `T -> bool` |
| | `cat_distE :` | `∃t, cat_dist t` |
| | `catE :` | `∀A, mu A = if [set t \| cat_dist t] \subset A then 1 else 0` |

TABLE 5.7 – Sous-types de capacités et propriétés correspondantes

[1] Les termes `cat_capacity` et les propriétés `cat_xxx` associées sont des abréviations de `categorical_capacity` et `categorical_xxx`.

Nous pouvons utiliser Hierarchical Builder pour extraire le graphique d'inclusion des types, qui est donné en figure 5.2. Le lecteur pourra le comparer au graphique d'inclusion des classes et des cadres de décision donné au chapitre 3 (figure 3.1 en page suivante). Il remarquera alors qu'à l'heure où nous écrivons ces lignes, toutes les relations d'inclusion n'ont pas été formellement vérifiées. À ce jour, nous n'avons pas considéré les mesures déduites d'intervalles de probabilités.

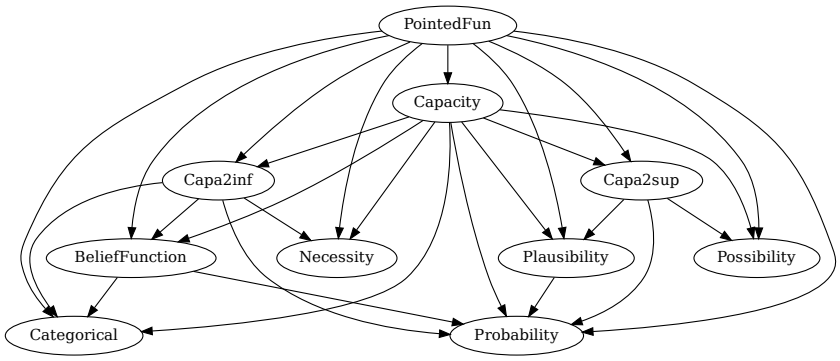



FIGURE 5.2 – Graphique d'héritage des types et sous-types de capacités algébriques (généré avec la commande `HB.graph` de *Hierarchy Builder*). Une flèche $T_1 \to T_2$ indique que $T_2$ est un sous-type de $T_1$.

Notons que pour caractériser les mesures de possibilité et de nécessité, nous utilisons le fait qu'elles possèdent une distribution de possibilité. Nous pouvons aussi définir une probabilité de cette manière. Pour cela, nous définissons dans le module `massfun` deux types de distributions, `prdist R T` et `pidist R T`, qui ne sont pas des fonctions d'ensemble et dont les propriétés sont données dans la table 5.8.

| Type de `p` | Propriétés |
|---|---|
| `prdist R T` | `prdist_ge0 :` $\forall$`t : T, p t` $\geq$ `0`<br>`prdist_sum1 : \sum_t p t = 1` |
| `pidist R T` | `pidist_in01 :` $\forall$`t, 0` $\leq$ `p t` $\leq$ `1`<br>`pidist_max1 :` $\exists$`t, p t = 1` |

TABLE 5.8 – Types de distribution et propriétés correspondantes

Enfin, nous munissons de la structure correspondante les fonctions duales (table 5.9), qui héritent ainsi des propriétés du type en question et des types qui le généralisent.

| Type de `mu` | Type de `dual mu` |
|---|---|
| `pointed_fun R T` | `pointed_fun R T` |
| `capacity R T` | `capacity R T` |
| `capa2inf R T` | `capa2sup R T` |
| `capa2sup R T` | `capa2inf R T` |
| `belief_function R T` | `plausibility R T` |
| `plausibility R T` | `belief_function R T` |
| `probability R T` | `probability R T` |
| `possibility R T` | `necessity R T` |
| `necessity R T` | `possibility R T` |

TABLE 5.9 – Types des fonctions duales

Nous avons ainsi bâti une bibliothèque définissant les capacités et leurs sous-types, dont l'utilisation est très simple. De plus, nous avons montré un certain nombre de lemmes qui permettent de manipuler aisément ces capacités, et de faire des allers-retours entre les capacités et leurs fonctions de masse. Cette bibliothèque peut être utilisée en tant que telle pour montrer des résultats concernant les théories de l'incertitude. Nous nous en servirons, dans la section suivante, pour formaliser la notion de modèle d'agent et de règle de décision.

## 5.4 Modèle d'agent et règles de décision

Dans cette section, nous décrivons le module `drule` où nous reprenons en COQ le modèle d'agent développé dans le chapitre 3. Dans un premier temps, nous formalisons les structures de préférence et de connaissance, et la notion de cadre de décision. Nous constatons que le travail est ici facilité par nos définitions précédentes, par les types existants dans la bibliothèque *Mathematical Components* et par la notion de type paramétré intrinsèque à COQ. Puis nous formalisons la notion de règle de décision, et donnons l'implémentation des règles de décision usuelles. Nous montrons aussi que certaines règles en généralisent d'autre. Enfin, nous nous intéressons aux instances algébriques de règles de décision, et montrons que les instances présentées dans la section 3.3 sont correctes.

### 5.4.1 Structures de préférences, de connaissance et de règle de décision

Les structures de préférence et les structures de connaissance sont définies de manières similaire : elles encapsulent un co-domaine ($V$ ou $W$) muni d'un opérateur de comparaison ($\succeq^V$ ou $\succeq^W$), et une fonction prenant ses valeurs dans ce co-domaine ordonné. La différence entre les deux structures est que la fonction d'utilité algébrique décrite dans la structure de préférence est une fonction $T \to R$ alors que la capacité algébrique décrite par la structure de connaissance est une fonction d'ensemble $2^T \to R$.

Avec la bibliothèque *Mathematical Components*, nous disposons d'un type pour les domaines (partiellement) ordonnés : c'est le type `porderType`. Les fonctions d'utilité algébriques et capacités algébriques sont alors simplement définies :

```
Definition prefs d (V : porderType d) (T : finType) := {ffun T -> V}.
Definition kn d (W : porderType d) (T : finType) := {ffun {set T} -> W}.
```

Alors, tout élément `(v : prefs V T)` est une fonction d'utilité algébrique, dont le co-domaine $V$ est ordonné (le paramètre `disp` sert à différencier les différents ordres que l'on peut donner pour `V`). De la même façon, tout élément `(w : kn W T)` est une capacité algébrique.

Les deux classes de fonctions d'utilité algébriques se différencient par leurs domaines respectifs : pour un ensemble de conséquences $\mathbb{X}$, les fonctions d'utilité quantitatives seront typées `(v : prefs` $\mathbb{R}$ $\mathbb{X}$`)` et les fonctions d'utilité qualitatives seront typées `(v : prefs` $\mathbb{X}$ $\mathbb{X}$`)`. Dans ce dernier cas, c'est l'ordre (éventuellement partiel) défini sur $\mathbb{X}$ par le `porderType` qui sera pris en compte. Pour les fonctions d'utilité quantitatives, c'est l'ordre naturel $\geq$ sur $\mathbb{R}$ qui est considéré.

Les classes de capacités algébriques ont été définies dans la section précédente. Puisqu'une capacité algébrique est une fonction d'ensemble typée `{ffun {set T} -> R}` (`R` étant un domaine ordonné), ce sont des structures de connaissance. Nous pouvons vérifier que les capacités sont convertibles en structures de connaissance. Par exemple :

```
Check fun R T (mu : belief_function R T) => (mu : kn R T).
  (* ∀(R : numFieldType) (T : finType), belief_function R T -> kn R T *)
```

Enfin, un cadre de décision est défini par une classe de capacités algébriques et une classe de fonctions d'utilité algébriques. La notion de cadre nous sert à restreindre l'application des règles de décision aux seules fonctions d'utilité et capacités compatibles. Puisque nous pouvons les différencier par leurs types respectifs, nous ne formaliserons pas cette notion explicitement. En définissant une règle de décision, nous la contraindrons à sa classe par le type des arguments qu'elle attend.

Une règle de décision est une fonctionnelle qui, pour tout $\mathbb{X}$ et $\Omega$, évalue un acte au regard d'une structure de préférence et d'une structure de connaissance, en lui associant une valeur dans un domaine ordonné $U$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}(\mathbb{X}, \Omega) : \mathcal{P}refs(\mathbb{X}) \to \mathcal{K}n(\Omega) \to (\Omega \to \mathbb{X}) \to U.$$

Nous donnons la définition suivante :

```
Definition drule dispU (U : porderType dispU)
                 dispV (V : porderType dispV)
                 dispW (W : porderType dispW) :=
  ∀X T, prefs V X -> kn W T -> (T -> X) -> U.
```

Ainsi, par exemple, un terme `u : drule` $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ est une règle de décision à valeurs réelles pour le cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\beta}$ qui accepte toute fonction d'utilité et capacité à valeurs réelles. Une telle règle de décision est alors définie pour toutes les classes de capacités à valeurs réelles. Ainsi la règle de l'utilité espérée est :

```
Definition ExpectedUtility : drule R R R :=
  fun X T (v : prefs R X) (w : kn R T) χ =>
       \sum_t w [set t] * v (χ t).
```

Cette règle peut être appelée avec n'importe quelle capacité à valeur réelle. Bien entendu, la valeur retournée n'est pertinente que lorsque `w` est une probabilité. Cependant, nous ne l'imposons pas encore, mais nous le ferons uniquement lorsque nous vérifierons le bien fondé des instances algébriques.

Nous donnons les règles de décision usuelles et leurs instances algébriques dans la sous-section suivante.

### 5.4.2 Règles de décision numériques et leurs instances algébriques

Nous formalisons ici les règles de décision usuelles dont les valeurs sont réelles. Nous posons donc un type `(R : realFieldType)` analogue aux réels.

Nous avons déjà donné la règle de l'utilité espérée. À la suite, nous définissons les règles de décision usuelles. Pour cela, nous définissons la fonction `minSb` qui renvoie la valeur minimale prise par une fonction dans un ensemble non vide, et une valeur par défaut sinon (module `lib/minmax`).

```
Definition minSb disp {T : orderType disp} I i0 F (A : {set I}) :=
    match [pick t in A] with
    | Some x => \big[min/F x]_(i in A) F i
    | None => i0
    end.
```

La fonction `maxS` est définie de manière similaire, et `(maxS i0 u A)` renvoie la valeur $\min_{x\in A} u(A)$ si $A \neq \emptyset$ et `i0` sinon.

Les règles de Choquet et de Jaffray (définitions 1.44 et 1.45) sont exprimées directement sur la fonction de masse (basée sur l'addition). Puisque la transformée inverse de Moëbius est unique, nous pouvons écrire :

```
Definition Choquet : drule R R R :=
  fun X T v w χ =>
  \sum_A moebius w A * minSb 0 (fun t => v (χ t)) A.
```

```
Definition Jaffray (α : R -> R -> R)  : drule R R R :=
  fun X T v w χ => \sum_(A : {set T})
  let vmin :=  minSb 0 (fun t => v (χ t)) A in
  let vmax :=  maxSb 0 (fun t => v (χ t)) A in
  moebius w A * ((α v0 vm) * v0 + (1 - α v0 vm) * vm).
```

La règle du TBM consiste à calculer l'utilité espérée au regard de la *probabilité pignistique* déduite d'une fonction de croyance. Nous donnons d'abord la distribution pignistique puis exprimons ensuite la règle du TBM :

```
Definition BetP T (w : kn R T) : {ffun T -> R} :=
  [ffun t => \sum_(A : {set T} | t \in A) moebius w A / #|A|%:R].
```

```
Definition TBEU : drule R R R :=
  fun X T v w χ => \sum_t (BetP w t) * (v (χ t)).
```

Nous exprimons ensuite les deux règles possibilistes : l'utilité optimiste et l'utilité pessimiste. Elles sont basées sur la distribution de possibilité qui est donnée par la fonction `qmoebius`.

```
Definition Uopt : drule2 R R R :=
  fun X T v w χ => \big[max/0]_t min (qmoebius w [set t]) (v (χ t)).

Definition Upes : drule2 R R R :=
  fun X T v w χ => \big[min/0]_t max (1 - qmoebius w [set t]) (v (χ t)).
```

Nous exprimons aussi les règles pour l'ignorance totate : la règle Min (ou règle de Wald, définition 1.18, la règle de Laplace (définition 1.22) et la règle de Hurwicz (définition 1.20). Dans les définitions suivantes, le terme qui est noté `[set t | cat_dist t]` désigne l'ensemble des états du monde possibles.

```
Definition Wald : drule R R R :=
  fun X T v w χ => minSb 0 (fun t => v (χ t)) [set t | cat_dist t].
```

```
Definition Laplace : drule R R R :=
  fun X T v w χ =>
  let worlds := [set t | cat_dist t] in
  \sum_(t in worlds) v (χ t) / #|worlds|%:R.
```

```
Definition Hurwicz (alpha : R) : drule R R R :=
  fun X T v w χ =>
  let vmin :=  minSb 0 (fun t => v (χ t)) [set t | cat_dist t] in
  let vmax :=  maxSb 0 (fun t => v (χ t)) [set t | cat_dist t] in
  alpha * v0 + (1 - alpha) * vm.
```

### Instances algébriques de règles de décision

Nous souhaitons représenter ces règles par des instance algébriques de règles de décision, comme nous l'avons fait à la section 3.3. Une instance algébrique est un $n$-uplet :

$$\mathcal{Z} = \left( \left( W^*, \boxplus, 0_W \right), \left( U, \oplus, 0_U \right), \otimes, \mathbf{f} \right).$$

En Coq, nous encapsulons tous ces éléments dans une structure. Puisque nous n'aurons ici aucune relation d'héritage, il n'est pas nécessaire d'utiliser *Hierarchy Builder*. Après avoir posé les trois domaines $U$, $V$ et $W$ (chacun étant un `porderType`), nous définissons directement :

```
Structure zinst :=
  { z_idw : W ;
    z_op_mfun : Monoid.com_law z_idw ;
    z_idu : U ;
    z_oplus : Monoid.com_law z_idu ;
    z_otimes : W -> V -> U ;
    z_f_agg : ∀(X : finType), (X -> V) -> {set X} -> V }.
```

Une instance algébrique $\mathcal{Z}$ permet le calcul d'une valeur de XEU, pour toute fonction d'utilité $\mathbf{v}$, toute capacité algébrique $\mathbf{w}$ et tout acte $\chi$ :

$$\mathrm{XEU}(\mathcal{Z})(\mathbf{v},\mathbf{w},\chi) = \bigoplus_{\emptyset\neq B\subseteq\Omega} m^{\boxplus}_{\mathbf{w}}(B)\otimes \mathbf{f}(\mathbf{v},\chi(B)).$$

En Coq, nous écrivons donc :

```
Definition XEU (zi : zinst W) :
  ∀X T, prefs V X -> kn W T -> (T -> X) -> U :=
    fun v m χ => \big[z_oplus zi/z_idu zi]_(B : {set T})
              z_otimes zi (m B) (z_f_agg zi (fun t => v (χ t)) B).
```

Nous nous intéressons ici aux trois instances algébriques $\mathcal{Z}^{Choquet}$, $\mathcal{Z}^{Jaffray^{\alpha}}$ et $\mathcal{Z}^{TBM}$ (définitions 3.7, 3.8 et 3.9). Nous avons vu dans le chapitre 3 que ces instances algébriques sont définies grâce aux fonctions minf, minmax et moy. Commençons par les définir.

```
Definition minf := fun T (u : T -> R) B => minSb 0 u B.

Definition minmaxf alpha := fun T (u : T -> R) B =>
  let vmin := minSb 0 u B in
  let vmax := maxSb 0 u B in
  alpha vmin vmax * vmin + (1-alpha vmin vmax) * vmax.

Definition moyf := fun T (u : T -> R) B => \sum_(x in B) u x / #|B|%:R.
```

L'instance $\mathcal{Z}^{Choquet}$ est définie par :

```
Definition zChoquet : zinst R R R :=
  {| z_op_mfun := +%R ;
     z_oplus := +%R ;
     z_otimes := *%R ;
     z_f_agg := minf |}.
```

Elle représente la règle de Choquet, d'où son nom. Elle représente aussi la règle de l'utilité espérée (dans le cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Pr}}$) et la règle Min (dans le cadre $\mathcal{F}_{\mathbb{R},\mathrm{Ign}}$).

```
Lemma zChoquet_CEU v (w : capacity R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun zChoquet) w m
  -> Choquet v w χ = XEU zChoquet v m χ.
```

```
Lemma zChoquet_EU v (w : probability R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun zChoquet) w m
  -> ExpectedUtility v w χ = XEU zChoquet v m χ.
```

```
Lemma zChoquet_Wald v (w : categorical_capacity R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun zChoquet) w m
  -> Wald v w χ = XEU zChoquet v  m χ.
```

L'instance $\mathcal{Z}^{Jaffray^{\alpha}}$ est définie par :

```
Definition zJaffray (alpha : R -> R -> R) : zinst R R R :=
  {| z_op_mfun := +%R ;
     z_oplus := +%R ;
     z_otimes := *%R ;
     z_f_agg := minmaxf |}.
```

Elle représente la règle de Jaffray, d'où son nom. Elle généralise aussi la règle de Choquet et la règle Min (lorsque $\forall x, \forall y, \alpha(x, y) = 1$) et la règle de l'utilité espérée (pour tout $\alpha$). Enfin, elle généralise la règle de Hurwicz avec le paramètre $\beta$ lorsque $\forall x, \forall y, \alpha(x, y) = \beta$. Nous montrons donc :

```
Lemma zJaffray_JEU alpha v (w : capacity R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun (zJaffray alpha)) w m
  -> Jaffray alpha v w χ = XEU (zJaffray alpha) v m χ.
```

```
Lemma zJaffray_CEU v (w : capacity R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun (zJaffray (fun _ _ =>1))) w m
  -> Choquet v w χ = XEU (zJaffray (fun _ _=>1)) v m χ.
```

```
Lemma zJaffray_Wald v (w : categorical_capacity R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun (zJaffray (fun _ _ =>1))) w m
  -> Wald v w χ = XEU (zJaffray (fun _ _=>1)) v m χ.
```

```
Lemma zJaffray_Hurwicz alpha beta v (w : categorical_capacity R T) m χ:
  (∀x y, alpha x y = beta)
  -> is_mass_function (z_op_mfun (zJaffray alpha)) w m
  -> Hurwicz beta v w χ = XEU (zJaffray alpha) v m χ.
```

Enfin, l'instance $\mathcal{Z}^{TBM}$ est définie par :

```
Definition zTBM : zinst R R R :=
  {| z_op_mfun := +%R ;
```

```
    z_oplus := +%R ;
    z_otimes := *%R ;
    z_f_agg := moyf |}.
```

Elle représente la règle du TBM, d'où son nom. Elle généralise aussi la règle de l'utiltié espérée et la règle de Laplace. Nous montrons donc :

```
Lemma zTBM_TBEU v (w : belief_function R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun zTBM) w m
  -> TBEU v w χ = XEU zTBM v m χ.
```

```
Lemma zTBM_EU v (w : probability R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun zTBM) w m
  -> ExpectedUtility v w χ = XEU zTBM v m χ.
```

```
Lemma zTBM_Laplace v (w : categorical_capacity R T) m χ :
  is_mass_function (z_op_mfun zTBM) w m
  -> Laplace v w χ = XEU zTBM v m χ.
```

Les instances des deux règles possibilistes imposent des fonctions de masse basées sur le maximum. Celle de l'utilité optimiste est :

```
Definition zUopt : zinst R R R :=
  {| z_idw := 0 ;
     z_op_mfun := max ;
     z_idu := 0 ;
     z_oplus := max ;
     z_otimes := min ;
     z_f_agg := minf |}.
```

Celle de l'utilité pessimiste est :

```
Definition zUpes : zinst R R R :=
  {| z_idw := 0 ;
     z_op_mfun := max ;
     z_idu := 0 ;
     z_oplus := min ;
     z_otimes := fun x y ⇒ max (1-x) y ;
     z_f_agg := minf |}.
```

Les deux points clé de cette première formalisation, concernant le modèle d'agent, ont donc été tous présentés : d'une part la formalisation des fonctions de masse et des capacités offre une hiérarchie de types pour les fonctions d'ensemble, et d'autre part les règles de décision, représentables par des instances algébriques, sont exprimées facilement sur ces capacités. Nous allons maintenant aborder la seconde partie de la formalisation qui porte sur nos résultats de théorie des jeux.

## 5.5 Théorie des jeux et théorème.s de Howson et Rosenthal

Dans cette section, nous présentons la formalisation Coq des transformations de Howson et Rosenthal qui ont été définies pour les Bel-Games à la section 4.5. Nous nous appuyons sur la formalisation publiée dans les actes de la conférence ITP2023 (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2023), où nous avions montré que, pour toute fonction de croyance, les trois transformations (générale, Dempster et TBM, qui dans l'article étaient appelée respectivement directe, conditionnée et TBM) sont valides et produisent des jeux en correspondance. Cependant, nous avons depuis allégé les hypothèses, et ainsi montré que ce résultat tient pour les capacités et pour des fonctions un peu plus générales encore (les fonctions pointées, typées `pointed_fun`, dont les fonctions de masse sont typées `addMassfun`). Cela a constitue un *refactoring* assez important, où plusieurs résultats ont dû être à nouveau vérifiés. En effet, en affaiblissant les hypothèses, certains chemins de preuve n'étaient plus pertinents et il nous a fallu considérer d'autres arguments pour garantir les résultats.

Les hypothèses considérées dans cette section impliquent que :

- Toute fonction de masse $m$ est associée à l'addition réelle ($\boxplus = +$) et représente donc la fonction $\mathrm{Pinf}_m$ telle que $\mathrm{Pinf}_m(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ ;
- Les règles de décision possibles sont de type « $+\times$ » ($\oplus = +$ et $\otimes = \times$), par exemple les règles de Choquet, de Jaffray ou du TBM ;
- Les fonctions d'utilité des joueurs prennent des valeurs réelles ;
- Les jeux à information incomplète sont des jeux à prior commun (définition 4.21, comme les Bel-Games présentés à la section 4.5).

Nous montrons les transformations algébriques (transformation de Selten et transformation hypergraphique) dans la section suivante.

Dans cette section, nous suivons le déroulé de cette formalisation étendue, dans les modules `decision`, `game` puis `HRtransform`. Nous détaillons cette formalisation en cinq sous-sections qui abordent, dans l'ordre : le conditionnement d'une fonction de masse, les XEUs de type « $+\times$ », les jeux à information complète, les jeux à information incomplète et enfin les trois transformations de Howson et Rosenthal.

### 5.5.1 Conditionnement

Les Bel-Games sont des jeux à prior commun, c'est-à-dire que tous les joueurs considèrent la même connaissance *a priori* et la conditionnent « sachant le signal qu'ils reçoivent ». Formellement, un conditionnement est une fonction qui transforme une fonction de masse $m$ en la fonction de masse « sachant $C$ » $m(\cdot \mid C)$, pour tout événement $C$. Comme nous l'avons vu à la section 3.1.2, pour qu'un conditionnement « sachant $C$ » soit bien défini, il faut qu'un certain prédicat, nomé `revisable`, soit vérifié (par exemple, les probabilités conditionnelles « sachant $C$ » sont définies uniquement sur $\Pr(C) > 0$). Enfin, nous supposons ici que tout conditionnement vérifie $\mathrm{Pinf}(C^c \mid C) = 0$, c'est-à-dire qu'aucune masse

ne supporte exclusivement l'événement contraire $C^c$.

Pour tout algorithme de conditionnement `cond` et toute preuve `Hrev` que le prédicat `(revisable m C)` est vérifié (c'est-à-dire que le conditionnement de $m$ « sachant $C$ » est faisable), la post-condition s'écrit :

```
Definition conditioning_axiom (rev : addMassfun R T -> pred {set T})
                    (cond : ∀m C, revisable m C -> addMassfun R T) :=
  ∀m C (Hrev : rev m C), Pinf (cond m C Hrev) (~:C) = 0.
```

Nous formalisons donc un conditionnement par une structure contenant ces trois éléments : l'algorithme, la précondition et la preuve de la postcondition `conditioning_axiom`, c'est-à-dire la preuve de $\mathrm{Pinf}(C^c \mid C) = 0$ :

```
Structure conditioning := {
  revisable : addMassfun R T -> pred {set T} ;
  cond_val :> ∀m C, revisable m C -> addMassfun R T ;
  cond_ax : conditioning_axiom cond_val }.
```

Il nous reste ensuite à définir les quatre conditionnements que nous avons considérés : le conditionnement de Dempster, celui de Fagin-Halpern (qui n'était pas formalisé dans l'article initial), le conditionnement géométrique (ou Strong conditioning) et le conditionnement faible (Weak conditioning).

Le conditionnement de Dempster (définition 1.40) est applicable dès lors que $\mathrm{Psup}(C) \neq 0$ :

```
Definition Dempster_rev m C := Psup m C != 0.
Definition Dempster_cond (m : addMassfun R T) (C : {set T}) :=
  [ffun A : {set T} => if A == set0 then 0
         else \sum_(B : {set T} | (B :&: C == A)) m B / Psup m C].
```

Nous montrons ensuite que la fonction `Dempster_cond m` produit une fonction de masse vérifiant les hypothèses de `addMassfun R T` puis utilisons *Hierarchy Builder* afin que le type `addMassfun R T` puisse être inféré.

```
Lemma Dempster_cond_massfun0 m C (HC : Dempster_rev m C) :
  Dempster_cond HC set0 = 0.

Lemma Dempster_cond_massfun1 m C (HC : Dempster_rev m C) :
  \sum_(A : {set T}) Dempster_cond HC A = 1.

HB.instance Definition _ m C (HC : Dempster_rev m C) :=
  MassFun_of_Ffun.Build R T 0 +%R (Dempster_cond HC).

HB.instance Definition _ m C (HC : Dempster_rev m C) :=
  AddMassFun_of_MassFun.Build R T (Dempster_cond HC)
    (Dempster_cond_massfun0 HC) (Dempster_cond_massfun1 HC).
```

Nous faisons de même pour le type `bpa` qui caractérise les fonctions de masse de la théorie des fonctions de croyance : si la fonction de masse en entrée est une `bpa`, alors son conditionnement de Dempster produit aussi une `bpa`.

```
Lemma Dempster_cond_ge0 (m : bpa R T) C (HC : Dempster_rev m C) A :
  Dempster_cond HC A ≥ 0.

HB.instance Definition _ (m : bpa R T) C (HC : Dempster_rev m C) :=
  Bpa_of_AddMassFun.Build R T (Dempster_cond HC) (Dempster_cond_ge0 HC).
```

Enfin, nous montrons que la post-condition est vérifiée, puis définissons la structure `Dempster_conditioning` à proprement parler :

```
Lemma Dempster_cond_axiom :
  @conditioning_axiom Dempster_rev Dempster_cond.
Definition Dempster_conditioning : conditioning :=
  {| cond_val := Dempster_cond ; cond_ax := Dempster_cond_axiom |}.
```

Pour les trois autres conditionnements, nous suivons exactement le même chemin. Le conditionnement de Fagin-Halpern (définition 1.42) est applicable dès que $\mathrm{Pinf}(C) \neq 0$. Nous posons donc :

```
Definition FH_rev (m : addMassfun R T) := fun C ⇒ Pinf m C != 0.
```

Pour définir le conditionnement de Fagin-Halpern, nous considérons l'expression basée sur Pinf et Psup, c'est-à-dire $\mathrm{Pinf}(A \mid C) = \frac{\mathrm{Pinf}(A \cap B)}{\mathrm{Pinf}(A \cap B) - \mathrm{Psup}(A^c \cap B)}$. Pour cela, nous réutilisons la fonction `moebius` définie à la section 5.3.3, et utilisons dans nos preuves le principe d'induction basée sur les sous-ensembles stricts présenté à la section 5.2. La fonction $\mathrm{Pinf}(\cdot \mid C)$ est définie, en Coq, par :

```
Definition FH_Pinf m C A :=
  Pinf m (A :&: C) / (Pinf m (A :&: C) + Psup m ((~:A) :&: C)).
```

Alors, la fonction `FH_cond` est simplement la fonction de masse de `FH_Pinf` obtenue pas la transformée inverse de Moëbius :

```
Definition FH_cond (m : addMassfun R T) (C : {set T}) :=
  [ffun A : {set T} ⇒ moebius (FH_Pinf m C) A].
```

Puis nous vérifions que la fonction `FH_cond` produit une fonction de masse vérifiant les hypothèses de `addMassfun` et l'indiquons à *Hierarchy Builder*. Enfin, nous vérifions la post-condition et définissons la structure correspondante :

```
Lemma FH_cond_axiom :
  @conditioning_axiom FH_rev FH_cond.
Definition FH_conditioning : conditioning :=
  {| cond_val := FH_cond ; cond_ax := FH_cond_axiom |}.
```

Ensuite, le conditionnement géométrique (Strong conditioning, définition 1.41) est défini de manière similaire. Il est applicable dès que $\mathrm{Pinf}(C) \neq 0$. Nous posons donc :

```
Definition Strong_rev (m : addMassfun R T) := fun C => Pinf m C != 0.
Definition Strong_cond (m : addMassfun R T) (C : {set T}) :=
  [ffun A : {set T} => if (A != set0) && (A \subset C)
                       then m A / Pinf m C else 0].
```

Ici encore, nous vérifions que la fonction `Strong_cond_fun` produit une fonction de masse vérifiant les hypothèses de `addMassfun` et l'indiquons à *Hierarchy Builder*. Après cela, nous vérifions la post-condition et définissons la structure correspondante :

```
Lemma Strong_cond_axiom :
  @conditioning_axiom Strong_rev Strong_cond.
Definition Strong_conditioning : conditioning :=
  {| cond_val := Strong_cond ; cond_ax := Strong_cond_axiom |}.
```

Enfin, le conditionnement faible (Weak conditioning, définition 1.43) est défini de manière similaire. Il est applicable dès que $\mathrm{Psup}(C) \neq 0$, ainsi :

```
Definition Weak_rev (m : addMassfun R T) C := Psup m C != 0.
Definition Weak_cond (m : addMassfun R T) C :=
  [ffun A : {set T} => if A :&: C != set0
                       then m A / Psup m C else 0]

Lemma Weak_cond_axiom :
  @conditioning_axiom Weak_rev Weak_cond.

Definition Weak_conditioning : conditioning :=
  {| cond_val := Weak_cond ; cond_ax := Weak_cond_axiom |}.
```

### 5.5.2 Décision et XEU

Dans le chapitre 3, nous définissions une XEU (ou utilité espérée généralisée) comme une somme de la forme :

$$\mathrm{XEU}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \chi) = \bigoplus_{\emptyset \neq B \subseteq \Omega} m_{\mathbf{w}}(B) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{v}, \chi(B)),$$

où $\mathbf{v} : \mathbb{X} \to V$ est une fonction d'utilité définie sur l'ensemble $\mathbb{X}$ des conséquences possibles, et où $\chi(B) \subset \mathbb{X}$ est l'image de $B \subseteq \Omega$ par l'acte $\chi$ (c'est-à-dire la fonction qui associe la conséquence correspondant à tout état du monde). Dans cette formalisation, nous avons deux différences notables avec cette règle de décision algébrique. D'une part, nous nous intéressons aux XEUs à valeurs dans `R`, c'est-à-dire où $U = V = W = \mathbb{R}$, et basées sur la somme, c'est-à-dire correspondant à des instances de règles de décision de la forme $\mathcal{Z} = ((\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), \times, \mathbf{f})$ où le seul degré de liberté est la fonction d'agrégation $\mathbf{f}$. D'autre part, l'espace des conséquences est laissé implicite, comme nous l'avons vu pour les Bel-Games

dans la section 4.5. Les fonctions d'utilité que nous considérons sont alors des fonctions $u_a : \Omega \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions qui associent à tout état du monde la valeur d'utilité correspondante si $a$ est choisi : $u_a(\omega) = \mathbf{v}(\chi_a(\omega))$.

Alors, la fonction d'agrégation $\mathbf{f} : (\Omega \to V) \times 2^{\mathbb{X}} \to V$ est bien typée et la fonction $u_a$ peut lui être passée en premier argument. L'expression de la XEU se réécrit donc :

$$\mathrm{XEU}(m)(u_a) = \sum_{B \in \mathcal{S}_m} m(B) \times \mathbf{f}(u_a)(B).$$

Nous posons donc :

```
Definition XEUm (m : addMassfun R T) (phi_u_a : {ffun {set T} -> R}) :=
  \sum_(B in focalset m) m B * phi_u_a B.
```

Les trois XEUs auquelles nous nous intéressons ici en particulier sont :

— CEU, la XEU correspondant à la règle basée sur l'intégrale de Choquet, représentée par l'instance $\mathcal{Z}^{Choquet}$ (définitions 1.44 et 3.7) ;

— JEU$^\alpha$, la XEU correspondant à la règle de Jaffray, représentée par l'instance $\mathcal{Z}^{Jaffray^\alpha}$ (définitions 1.45 et 3.8) ;

— TBEU$^\alpha$, la XEU correspondant à la règle du *Transferable Belief Model*, représentée par l'instance $\mathcal{Z}^{TBM}$ (définitions 1.46 et 3.9).

Pour les deux premières, nous utilisons les opérateurs `minSb` et `maxSb` décrits dans la section 5.3.3 donnant les valeurs minimum et au maximum que prend une fonction sur un ensemble. Ils renvoient la valeur minimale ou maximale prise par une fonction sur un ensemble non vide, ou une valeur par défaut si l'ensemble est vide.

Nous posons ainsi la définition de la CEU (règle pessimiste basée sur l'intégrale de Choquet, où pour chaque élément focal on considère la valeur d'utilité minimale) :

```
Definition fCEU (u_a : T -> R) : {ffun {set T} -> R} :=
  [ffun B => minSb 0 u_a B].
Definition CEU (m : addMassfun R T) (u_a : T -> R) := XEUm m (fCEU u_a).
```

Nous posons ensuite la définition de la JEU (règle de Jaffray, où le coefficient $\alpha$ module le pessimisme pour chaque élément focal) :

```
Definition fJEU (α : R -> R -> R) (u_a : T -> R) : {ffun {set T} -> R} :=
  [ffun B => let rmin := minSb 0 u_a B in let rmax := maxSb 0 u_a B in
             alpha rmin rmax * rmin + (1-alpha rmin rmax) * rmax].
Definition JEU α (m : bpa) (u_a : T -> R) := XEU m (fJEU α u_a).
```

De manière similaire, nous posons ensuite la définition de la TBEU (règle du *Transferable Belief Model*, où une probabilité moyenne est retrouvée, ce qui correspond à considérer l'utilité moyenne pour chaque élément focal) :

```
Definition fTBEU (u_a: T -> R) := [ffun B => \sum_(w in B) u_a w / #|B|].
Definition TBEU (m : bpa) (u_a : T -> R) := XEU m (fTBEU u_a).
```

Nous en profitons pour confirmer que ces trois règles de décision généralisent l'utilité espérée (ce que nous avions déjà montré dans la formalisation des capacités, voir la section précédente). Dans cette formalisation, cela s'exprime tout aussi aisément. En effet, puisque `proba` est un sous-type de `addMassfun R T`, nous pouvons écrire simplement :

```
Lemma CEU_EU (p : proba) u_a : CEU p u_a = \sum_w dist p w * u w.
Lemma JEU_EU α (p : proba) u_a : JEU α p u_a = \sum_w dist p w * u w.
Lemma TBEU_EU (p : proba) u_a : TBEU p u_a = \sum_w dist p w * u w.
```

Nous avons maintenant fini de traiter l'aspect « décision sous incertitude » de cette formalisation, et allons maintenant basculer vers la théorie des jeux.

### 5.5.3 Jeux à information complète

La définition classique d'un jeu à information complète ne fait pas apparaître l'espace des conséquences : d'après la définition 2.1, un jeu à information complète est un triplet $(N, (A_i, u_i)_{i \in N})$ où $N$ est l'ensemble des joueurs, et pour chaque joueur $i$, $A_i$ est l'ensemble de ses actions et $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$ est sa fonction d'utilité quantitative. En Coq, un tel jeu à information complète sera décrit par les fonctions d'utilité, dont les ensembles $N$ et $A_i$ sont des paramètres. Une fonction d'utilité associe une valeur réelle à tout profil de stratégies pures. Ces derniers attribuent une stratégie pure par agent, nous les formalisons par des fonctions à support fini :

```
Definition cprofile (I: finType) (A: I -> eqType) := {ffun ∀i : I, A i}.
```

Alors un jeu à information complète, appelé ici `cgame`, est défini par ses fonctions d'utilité :

```
Definition cgame (I : finType) (A : I -> eqType) := cprofile A -> I -> R.
```

Ainsi, l'utilité d'un profil `(a : cprofile A)` pour le joueur `(i : i)` dans un jeu à information complète `(G : cgame A)` est `(G a i : R)`.

Un équilibre de Nash est un profil tel qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie :

```
Definition change_strategy (p : cprofile A) (i : I) (a'_i : A i) :
    cprofile A. (*...*)
Definition Nash_equilibrium (G : cgame A) (a : cprofile A) :=
  [∀i : I, [∀a'_i : A i, ~~ (G a i < G (change_strategy a a'_i) i]].
```

Dans les Bel-Games, nous ne considérons que les stratégies mixtes probabilistes, où les stratégies des joueurs sont des distributions de probabilité sur leurs actions respectives. Ainsi, nous notons :

```
Definition mixed_cprofile := cprofile (fun i => proba R (A i)).
```

La distribution de probabilité $p_\rho$ sur $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ déduite d'un profil de stratégies mixtes $\rho$ est définie par $p_\rho(a) = \prod_{i \in N} \rho_i(a_i)$. Nous encapsulons cette information dans une structure `proba` :

```
Definition mk_prod_proba (ρ : mixed_cprofile A) : {ffun cprofile A -> R}
  := [ffun a => \prod_i ρ i (a i)].
Definition prod_proba ρ : proba R (cprofile A) := (*...*).
```

Cela nous permet de définir l'utilité d'un profil de stratégies mixtes d'après la règle de l'utilité espérée (et en suivant, de caractériser les équilibres de Nash mixtes).

```
Definition ms_util (G : cgame A) (ρ : mixed_cprofile) (i : I) : R :=
  \sum_(a : cprofile A) (prod_proba ρ a) * (G a i).
Definition ms_Nash_equilibrium (G : cgame A) (ρ : mixed_cprofile) :=
  ∀(i : I) (ρ'_i : proba (A i)),
  ~ ms_util G ρ i < ms_util G (change_strategy ρ ρ'_i) i.
```

Enfin, nous montrons que pour tout jeu à information complète où l'on considère les stratégies mixtes, nous pouvons bâtir un "jeu mixte" où les actions des joueurs sont leurs stratégies mixtes. Ces jeux sont équivalents : ils ont les mêmes utilités (et donc les mêmes équilibres de Nash).

```
Definition mixed_cgame (G : cgame A) : cgame (fun i => proba R (A i)) :=
  fun mp i => ms_util G mp i.
Lemma mixed_cgameE G mp i : ms_util G mp i = (mixed_cgame G) mp i.
Lemma ms_NashE (G : cgame R A) (mp : mixed_cprofile) :
  ms_Nash_equilibrium G mp <-> Nash_equilibrium (mixed_cgame G) mp.
```

Enfin, notre objectif est de montrer la correction des transformations de Howson et Rosenthal que nous proposons. Pour cela, nous nous intéressons aussi aux jeux hypergraphiques basés sur la somme (jeux hypergraphiques classiques, définition 2.4). Dans cette formalisation, nous considérons une définition intermédiaire entre la définition classique (définition 2.4) et la définition de la situation de jeu hypergraphique que nous proposions dans le chapitre 4 (définition 4.11) : d'un côté, l'espace des conséquence est implicite comme dans la définition classique, d'un autre côté les jeux locaux sont indéxés par un type fini `(localgame : finType)`, leurs participants sont donnés par une fonction `P` (`(i : I)` joue participe à `(lg : localgame)` si le booléen `(P lg i)` est égal à `true`. Nous posons donc :

```
Variables (localgame : finType) (P : localgame -> pred I).
```

Dans chaque jeu local `lg`, nous considérons les profils partiels qui n'impliquent que les joueurs de `lg` (lequels sont formalisés par le $\sigma$-type `{i : I | P lg i}`) :

```
Definition localprof (lg : localgame) :=
  {ffun ∀s : {i : I | P lg i}, A (val s)}.
```

Comme nous l'avons vu, dans un jeu hypergraphique (basé sur la somme), l'utilité d'un joueur $i$ est la somme de ses utilités locales. Un jeu hypergraphique est donc un jeu à information complète, où les fonctions d'utilité des joueurs sont définies par :

```
Definition hg_game (u: ∀lg, localprof lg -> {i | P lg i} -> R) :
  cgame A :=
  fun a i => \sum_(s : {lg : localgame | P lg i})
        u (tag s) [ffun i => a (val i)] (exist _ i (tagged s)).
```

Dans cette expression, pour tout `(s : {i : I | P lg i})` représentant un joueur `i` qui participe au jeu local `lg`, le terme `(tag s : I)` est ce joueur `i`, et le terme `(tagged s : P lg i)` est la preuve que `i` participe à `lg`.

### 5.5.4 Jeux à information incomplète

Dans la formalisation Coq présentée à la conférence ITP2023, nous nous concentrons sur les Bel-Games uniquement. Nous considérons maintenant les jeux où l'incertitude est représentée par une `addMassfun R T`, c'est-à-dire les jeux à information incomplète à prior commun où les préférences sont quantitatives et où l'incertitude est décrite par une capacité pointée à valeurs réelles.

Un tel jeu, défini à la manière des Bel-Games (définition 4.27), est un $n$-uplet $(N, (A_i, \theta_i, u_i)_{i\in N}, m)$ où $N$ est l'ensemble des joueurs, pour chaque joueur $i$, $A_i$ est l'ensemble de ses actions, $\Theta_i$ celui de ses types et $u_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ sa fonction d'utilité. Ici encore, la fonction d'utilité est paramétré par $N$ et par les ensembles $A_i$ et $\Theta_i$. Le dernier composant du jeu est $m$, la fonction de masse décrivant la connaissance commune a priori. Nous formalisons donc un jeu à information incomplète par une couple paramétré, contenant d'une part les fonctions d'utilité et d'autre part la fonction de masse. Par souci de lisibilité, nous notons `Tn` les combinaisons de types, c'est à dire que `Tn` est un alias pour le type `cprofile T`.

```
Definition igame := (addMassfun R Tn * (cprofile A -> Tn -> I -> R)).
```

Un profil de stratégies signalisé, dans un jeu à information incomplète, associe à chaque joueur $i$ une fonction $a_i : \Theta_i \to A_i$ indiquant l'action qu'il choisit en fonction de son type. Nous les formalisons par :

```
Definition iprofile A T := cprofile (fun i => {ffun T i -> A i}).
```

Un profil de stratégies signalisées est donc un profil dont les composantes ne sont pas des actions mais des fonctions.

Pour tout profil signalisé $s$, si l'état du monde impose la combinaison de types $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, alors le profil effectivement joué sera $s_\theta = (s_1(\theta_1), \ldots, s_n(\theta_n))$. Ce profil est construit par la fonction `proj_iprofile` :

```
Definition proj_iprofile (s : iprofile A T) : Tn -> cprofile A :=
  fun theta => [ffun i => s i (theta i)].
```

Dans les Bel-Games, et plus généralement dans les jeux à prior commun, les joueurs mettent à jour la connaissance a priori par conditionnement « sachant leur type $\theta_i$ ». L'événement conditionnant est alors, formellement, l'ensemble des combinaisons de types $\theta'$ dont la $i$ème composante est $\theta_i$ (tels que $\theta'_i = \theta_i$), c'est-à-dire :

```
Definition event_ti i (ti : T i) := [set t : Tn | t i == ti].
```

Alors, un jeu à prior commun est correctement défini si tous les conditionnements nécessaires sont faisables (c'est-à-dire tous les conditionnements « sachant $\theta_i$ », pour tout $i$ et $\theta_i$). Un tel jeu vérifie le prédicat `proper_igame`.

```
Definition proper_igame (G : igame) (cond : conditioning R Tn) : bool :=
  [∀i : I, [∀ti : T i, revisable cond G.1 (event_ti ti)]].
```

Enfin, dans un `igame`, l'utilité d'un profil signalisé `s` pour le joueur $i$, s'il a le type $\theta_i$, est la valeur de la `XEU` correspondante au regard de la connaissance conditionnée « sachant $\theta_i$ », c'est-à-dire l'intégration de $u_{i,s} = \theta \mapsto u_i(s(\theta), \theta)$ :

```
Definition igame_utility (G : igame) (cond : conditioning R Tn)
  fXEU (HG : proper_igame G cond) (s : iprofile A T) i (ti : T i) : R :=
  let kn := cond G.1 (event_ti ti) (is_revisable HG ti) in
  XEUm kn (fXEU [ffun t => G.2 (proj_iprofile p t) t i]).
```

Comme nous l'avons précédemment mentionné, un équilibre de Nash est un profil tel qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégies. Dans un `igame`, cela s'exprime par :

```
Definition igame_Nash_equilibrium (G : igame) (cond : conditioning R Tn)
  fXEU (HG : proper_igame G cond) (p : iprofile A T) : Prop :=
  ∀i : I, ∀ti : T i, ∀ai : A i,
  ~ (igame_utility fXEU HG p ti < igame_utility fXEU HG
                                  (change_istrategy p ti ai) ti).
```

Nous avons maintenant défini tous les composants nécessaires pour exprimer les trois transformations à la Howson et Rosenthal que nous proposons pour les Bel-Games (et que nous étendons ici aux capacités pointées) et pour vérifier leur correction.

### 5.5.5 Transformations à la Howson et Rosenthal

Les transformations à la Howson et Rosenthal que nous formalisons ici sont celles que nous avons présentées en section 4.5 et que nous étendons à toute fonction d'ensemble pointée par 0 et 1 (donc en particulier à toute capacité usuelle).

Ces trois transformations prennent un `igame` IG en entrée et produisent un `cgame` HG sous forme hypergraphique en correspondance avec IG (définition 4.24). Les joueurs du jeu hypergraphique sont les couples $(i, \theta_i)$ décrivant les types possibles de tous les joueurs, et leurs actions sont celles d'origine (c'est-à-dire $\tilde{A}_{(i,\theta_i)} = A_i$). Nous posons donc, pour toutes les transformations :

```
Definition HR_player : finType := {i : I & T i}.
Definition HR_action (i_ti : HR_player) : eqType := A (projT1 i_ti).
```

Un profil de stratégies signalisées $s$ de IG et un profil de stratégies (non signalisées) $\tilde{a}$ de HG sont en correspondance si $\forall i, \forall \theta_i, s_i(\theta_i) = \tilde{a}_{(i,\theta_i)}$. Cela définit une bijection, et le profil $\tilde{a}$ correspondant à $s$ est en quelque sorte la version « aplatie » de $s$, tel que $\tilde{a} = (s_1(\theta_1), s_1(\theta'_1) \dots, s_n(\theta_n), s_n(\theta'_n), \dots)$. Formellement :

```
Definition flatten I (T : I -> finType) A (s : iprofile A T) :=
  [ffun i_ti => s (projT1 i_ti) (projT2 i_ti)].
```

### Transformation directe

La transformation directe est adaptée au conditionnement de Dempster et à toute XEU (définitions et 4.29). Soient un jeu à information incomplète `IG` correctement défini et une fonction `fXEU` pour les XEUs de tous les joueurs.

```
Variable G : igame R A T.
Variable proper_G : proper_igame G (Dempster_conditioning R Tn).
Variable fXEU : {ffun Tn -> R} -> {ffun {set Tn} -> R}.
```

Les jeux locaux sont les éléments focaux, qui sont des ensembles de combinaisons de types :

```
Definition HRdirect_localgame : finType := {set Tn}.
```

Une paire $(i, \theta_i)$ participe à un jeu local `lg` si $\theta_i$ est possible dans `lg` :

```
Definition HRdirect_P : HRdirect_localgame -> pred HR_player :=
  fun lg i_ti =>
    [∃t : Tn, [&& t \in lg & t (projT1 i_ti) == projT2 i_ti]].
```

Les fonctions d'utilité locales sont données par une fonction intermédiaire qui construit, à partir d'un profil $\tilde{a}^{\mathtt{lg}}$ local à `lg` et d'une conbinaison de types $\theta$, le `cprofile` $a = (\tilde{a}^{\mathtt{lg}}_{(1,\theta_1)}, \dots, \tilde{a}^{\mathtt{lg}}_{(n,\theta_n)})$. Cette fonction a pour type :

```
Definition HRdirect_mkprofile lg i_ti (Hi_ti : HRdirect_P lg i_ti)
  (a : HRdirect_localprof lg) (t : Tn) : profile A.
```

L'utilité locale, dans un jeu local `lg`, est la part de la XEU qui est calculée à partir de l'élément focal a priori `lg`. Puisque le conditionnement de Demspter consiste à transférer la masse de `lg` $\subseteq \Theta$ sur `lg` $\cap$ (`event_ti` $\theta_i$) (si l'intersection est non-vide), alors l'utilité locale définie ci-dessous correspond à un

conditionnement de Dempster « à la volée ». Le jeu hypergraphique résultant est finalement bâti sur ces fonctions d'utilité locales.

```
Definition HRdirect_u lg :
  HRdirect_localprof lg -> HRdirect_localagent lg -> R :=
  fun p x => let (i_ti, Hi_ti) := x in let (i, ti) := i_ti in
  G.1 lg * fXEU [ffun t => G.2 (HRdirect_mkprofile Hi_ti p t) t i]
                (lg :&: (event_ti ti)) / Pl G.1 (event_ti ti).

Definition HRdirect : cgame R HR_action := hg_game HRdirect_u.
```

Nous pouvons vérifier la correction de cette transformation en vérifiant l'égalité des utilités. Un corollaire direct est que les deux jeux ont les mêmes équilibres de Nash.

```
Theorem HRdirect_correct (i : I) (ti : T i) (p : iprofile A T) :
  igame_utility fXEU proper_G p ti = HRdirect (iprofile_flatten p)
    (existT _ i ti).

Theorem HRdirect_eqNash (p : iprofile A T) :
  igame_Nash_equilibrium fXEU proper_G p <-> Nash_equilibrium HRdirect
    (iprofile_flatten p).
```

### Transformation conditionnée

La transformation conditionnée est adaptée à tout conditionnement et à toute XEU (définitions 4.28).

La formalisation suit le même chemin que pour la transformation directe.

```
Variable G : igame R A T.
Variable cond : conditioning R Tn.
Variable proper_G : proper_igame G cond.
Variable fXEU : {ffun Tn -> R} -> {ffun {set Tn} -> R}.
```

De manière similaire, les jeux locaux de cette transformation sont les éléments focaux.

```
Definition HRcond_localgame : finType := {set Tn}.
```

Un couple $(i, \theta_i)$ participe à un jeu local si $\theta_i$ y est possible.

```
Definition HRcond_P : HRcond_localgame -> pred HR_player :=
  fun lg it => [∃t : Tn , [&& t \in lg & t (projT1 it) == projT2 it]].
```

L'utilité locale, dans un jeu local `lg`, est la part de la XEU qui est calculée à partir de l'élément focal `lg`. Pour cela, nous effectuons le conditionnement « sachant $\theta_i$ », grâce au conditionnement `cond`. Le jeu hypergraphique résultant est finalement bâti sur ces fonctions d'utilité locales.

```
Definition HRcond_u lg :
  HRcond_localprof lg -> HRcond_localagent lg -> R :=
  fun lg p x => let (i_ti, Hi_ti) := x in let (i, ti) := i_ti in
  let kn := cond G.1 (event_ti ti) (is_revisable proper_G ti) in
  kn lg * xeu [ffun t => G.2 (HRcond_mkprofile Hi_ti p t) t i] lg.

Definition HRcond : cgame R HR_action := hg_game HRcond_u.
```

Ici également, nous vérifions la correction de cette transformation en vérifiant l'égalité des utilités, ainsi que son corollaire direct affirmant l'égalité des équilibres de Nash.

```
Theorem HRcond_correct (i : I) (ti : T i) (p : iprofile A T):
  igame_utility xeu proper_G p ti
  = HRcond (iprofile_flatten p) (existT _ i ti).

Theorem HRcond_eqNash (p : iprofile A T) :
  igame_Nash_equilibrium xeu proper_G p
  <-> Nash_equilibrium HRcond (iprofile_flatten p).
```

### Transformation TBM

La transformation TBM est adaptée à tout conditionnement mais à une seule règle de décision : celle du TBM (définition 4.30).

La formalisation suit encore une fois le même chemin. Nous commençons par poser un conditionnement et un jeu à information incomplète bien défini au regard de ce conditionnement.

```
Variable G : igame R A T.
Variable cond : conditioning R Tn.
Variable proper_G : proper_igame G cond.
```

Les jeux locaux, ici, ne sont pas des ensembles mais des éléments $\theta' \in \Theta$. Un couple $(i, \theta_i)$ a deux raisons pour y participer : soit parce que $\theta'_i = \theta_i$ (alors, le choix du joueur impacte le résultat du jeu local), soit parce que $\theta'$ appartient à un élément focal de la connaissance du joueur $i$ mise à jour « sachant $\theta_i$ » (alors, l'utilité du joueur $i$ dépend de ce jeu local, mais ses choix n'impactent pas nécessairement la conséquence locale implicite). Pour les conditionnements de Dempster, de Fagin-Halpern et géométrique, ces deux cas sont identiques : $\theta'$ peut appartenir à un élément focal de la connaissance « sachant $\theta_i$ » uniquement si $\theta'_i = \theta_i$. Pour le conditionnement faible par contre, il est possible que certaines combinaisons de type $\theta'$ vérifiant $\theta'_i \neq \theta_i$ appartiennent à de tels éléments focaux (c'est d'ailleurs pour cette raison contre-intuitive, permettant que $\mathrm{Bel}(C \mid C^c) > 0$, que ce conditionnement n'est guère utilisé, et un tel exemple est disponible dans la formalisation, à la fin du module `belgames/HRtransform.v`). Ainsi, pour rester général, le prédicat `P` doit considérer ces deux cas :

```
Definition HRTBM_localgame : finType := Tn.

Definition HRTBM_P : HRTBM_localgame -> pred HR_player :=
 fun lg i_ti => [|| lg (projT1 i_ti) == projT2 i_ti |
     [∃A : {set Tn}, [&& A \in focalset (m_ti i_ti), lg \in A &
        [∃t : Tn, (t \in A) && (t (projT1 i_ti) == projT2 i_ti)]]]].
```

L'utilité locale, dans un jeu local `lg`, est calculée au regard de la probabilité pignistique (définition 1.46)

```
Definition HRTBM_u lg :
  HRTBM_localprof lg -> HRTBM_localagent lg -> R :=
  fun lg p x => let (i_ti, _) := x in let (i, ti) := i_ti in
  let betp := BetP_fun (m_ti i_ti) in
  betp lg * G.2 (HRTBM_mkprofile p) lg i.

Definition HRTBM : cgame R HR_action := hg_game HRTBM_u.
```

Ici également, nous vérifions la correction de cette transformation en vérifiant l'égalité des utilités, ainsi que son corollaire direct affirmant l'égalité des équilibres de Nash.

```
Theorem HRTBM_correct (i : I) (ti : T i) (p : iprofile A T) :
  igame_utility (@fTBEU _ _) proper_G p ti = HRTBM (iprofile_flatten p)
    (existT _ i ti).

Theorem HRTBM_eqNash (p : iprofile A T) :
  igame_Nash_equilibrium (@fTBEU _ _) proper_G p
  <-> Nash_equilibrium HRTBM (iprofile_flatten p).
```

## 5.6 Transformations algébriques

La formalisation en Coq des transformations de Howson et Rosenthal présentées à la section précédente vérifie nos résultats dans le cadre des BelGames. Plus généralement, elle vérifie ces résultats pour les jeux à prior commun où ce prior est décrit par une fonction de masse basée sur l'addition (typée `addMassfun`), lorsque la règle de décision des joueurs est elle-aussi basée sur l'addition. Or, dans la section 4.4, nous présentions deux transformations algébriques appelées *transformation de Selten* et *transformation hypergraphique*, basée sur le modèle d'agent algébrique décrit au chapitre 3. Il nous semble donc important d'évoquer le module `game2` qui les vérifie. Ce module reprend en partie le module `game` décrit dans la section précédente, et nous indiquerons ici uniquement les différences entre ces modules.

### Jeux algébriques

Dans ce module, nous suivons exactement les définitions proposées au chapitre 4. En particulier, nous faisons apparaître, pour les jeux à information complète et ceux à information incomplète, la *situation de jeu*. Dans un jeu à information complète, la situation de jeu décrit les joueurs, leurs actions, et la fonction conséquence qui associe à tout profil d'actions la conséquence correspondante (définition 4.1). En Coq, une situation de jeu à information complète est simplement la fonction-conséquence, dont les praramètres sont les ensembles des joueurs `I`, de leurs actions `A i` et des conséquences possibles `X`.

```
Definition cgame_situation I (A : I -> eqType) (X : eqType) :=
  cprofile A -> X.
```

Un jeu à information complète est alors la donnée d'une situation de jeu et des fonctions d'utilité algébriqque des joueurs (définition 4.2). En Coq, il s'agit aussi d'une fonction dont les paramètres sont la situation de jeu et les co-domaines $V_i$ des fonctions d'utilité de chaque joueur $i$ (munis d'une relation d'ordre éventuellement partielle). Cette fonction associe à tout joueur et toute conséquence la valeur d'utilité correspondante.

```
Definition cgame I A X (CGS : cgame_situation A X)
                 (disp : I -> unit) (V : ∀i, porderType (disp i)) :=
  ∀(i : I), X -> V i.
```

Alors dans un jeu `CG`, l'utilité d'un profil `a` pour le joueur `i` est `(CG i (CGS a))`. Un équilibre de Nash est donc défini par :

```
Definition Nash_equilibrium CGS (CG : cgame CGS V) (a : cprofile A) :=
  ∀i (ai : A i), ~ (CG i (CGS a) < CG i (CGS (change_strategy a ai))).
```

Nous faisons aussi apparaître la situation de jeu dans les jeux hypergraphiques. Une situation de jeu hypergraphique décrit les ensembles des joueurs `I`, de leurs actions `A i`, des jeux locaux `E`, ainsi que leurs participants (décrits par le prédicat `P`) et les fonctions-conséquence locales qui associent à tout profil local une conséquence locale (définition 4.11). En Coq, cela consiste à donner les fonctions-conséquences locales, les autres éléments étant les paramètres de ces fonctions.

```
Definition hg_situation I A E (P : E -> pred I) X :=
  ∀e : E, local_cprofile A (P e) -> X e.
```

Un jeu hypergraphique est un jeu à information complète où les préférences des joueurs sont établies sur les conséquences globales. Une conséquence globale est un vecteur de conséquences locales (représenté en Coq par une fonction `{dffun ∀e, X e}` associant à chaque jeu local `e` une conséquence locale de l'ensemble `X e`). Nous définissons donc aisément la situation de jeu à information complète correspondante, puis le jeu à information complète correspondant à un jeu hypergraphique.

```
Definition global_conseq (HGS: hg_situation A e P) a: {dffun ∀e, X e} :=
  [ffun e : E => HGS e (localize (P e) a)].

Definition hggame_csituation (HGS : hg_situation A E P) :
    cgame_situation A {dffun ∀e, X e} :=
  global_conseq HGS.

Definition hggame (HGS : hg_situation A E P)
                  (disp : I -> unit) (V : ∀i, porderType (disp i)) :=
  cgame (hggame_csituation HGS) V.
```

Nous avons décrit les jeux hypergraphiques décomposables et graphiquement décomposables, où les fonctions d'utilité globales des joueurs peuvent être exprimées comme une sommation (abstraite) des utilités localements obtenues (définitions 4.12 et 4.13).

```
Definition hggame_decomp (HGS : hg_situation A E P) disp V idx op
                         (HG : hggame HGS V) (v : ∀i e, X e -> V i) :=
  ∀i x, HG i x = \big[op i/idx i]_(e : E) v i e (x e).

Definition hggame_gdecomp (HGS : hg_situation A E P) disp V idx op
                          (HG : hggame HGS V) (v : ∀i e, X e -> V i) :=
  ∀i x, HG i x = \big[op i/idx i]_(e : E | P e i) v i e (x e).
```

Nous pouvons alors construire un jeu hypergraphique décomposable en donnant de telles fonctions d'utilité locales.

```
Definition mkhggame (v : ∀i e, X e -> V i) : hggame HGS V :=
  fun i x => \big[op i/idx i]_(e : E) v i e (x e).

Lemma mkhggame_decomp v : hggame_decomp (mkhggame v) v.
```

Enfin, nous faisons aussi apparaître la situation de jeu dans les jeux à information incomplète. Une situation de jeu à information incomplète décrit les joueurs, le cadre de discernement `FoD`, les actions et signaux des joueurs et la fonction-conséquence qui associe à tout profil d'action et tout état du monde la conséquence correspondante (définition 4.14). En Coq, il s'agit encore de donner la fonction-conséquence, les autres éléments étant les paramètres de cette fonction.

```
Definition igame_situation I FoD A T (signal : ∀i, FoD -> T) X :=
  cprofile A -> FoD -> X.
```

Un jeu à information incomplète est alors défini par une situation de jeu à information incomplète et, pour tout joueur `(i : I)` et chacun de ses signaux `(ti : T i)`, par le modèle d'agent qui le modélise (définition 4.16). Il s'agit donc d'une fonction qui associe à chaque signal possible le triplet constitué de la règle de décision, de la fonction d'utilité algébrique et de la capacité algébrique

correspondantes. Cette fonction est paramétrée par la situation de décision et par les co-domaines $U_{(i,\theta_i)}$, $V_{(i,\theta_i)}$ et $W_{(i,\theta_i)}$ qui sont munis d'une relation d'ordre éventuellement partielle.

```
Definition igame (IGS : igame_situation A signal X)
    (dispU : ∀i, T i -> unit) (U : ∀i ti, porderType (dispU i ti))
    (dispV : ∀i, T i -> unit) (V : ∀i ti, porderType (dispV i ti))
    (dispW : ∀i, T i -> unit) (W : ∀i ti, porderType (dispW i ti)) :=
  ∀i (ti : T i), ((drule2 (U i ti) (V i ti) (W i ti)) *
                  (X -> V i ti) * ({set FoD} -> W i ti)).
```

À tout profil de stratégies signalisées correspond un acte (au sens de la théorie de la décision, c'est-à-dire une fonction `FoD -> X`, définition 4.15)

```
Definition act_of_iprofile IGS (s : iprofile A T) : {ffun FoD -> X} :=
  [ffun t ⇒ IGS (proj_iprofile s [ffun i ⇒ signal i t]) t].
```

L'utilité d'un profil de stratégies signalisées, pour chaque signal de chaque joueur, est alors calculée d'après cet acte.

```
Definition iutility IGS U V W (IG : igame IGS U V W) (s : iprofile A T)
                    i (ti : T i) :=
  let u := (IG ti).1.1 in let v := (IG ti).1.2 in let w := (IG ti).2 in
  u X FoD v w (act_of_iprofile IGS s).
```

Dans le module `game2`, les définitions des différentes sortes de jeux suivent ainsi exactement les définitions algébriques proposées au chapitre 4. Nous pouvons donc maintenant exprimer et vérifier les deux transformations algébriques. Soit un jeu à information incomplète `(IG : igame IGS U V W)` définit sur la situation de jeu `(IGS : igame_situation A signal X)`. Ces deux transformations produisent chacune un jeu équivalent à `IG`, dont les joueurs sont les couples $(i, \theta_i)$, leurs actions sont celles d'`IG`, et leurs utilités sont exprimées dans $U_{(i,\theta_i)}$ pour tout joueur $i$ et tout signal $\theta_i$. Nous introduisons, pour les deux transformations, les notations suivantes :

```
Notation HR_I := ({i : I & T i}).
Notation HR_A := (fun i_ti : HR_I ⇒ A (tag i_ti)).
Notation HR_V := (fun i_ti : HR_I ⇒ U (tagged i_ti)).
```

Un jeu à information complète `CG` (qu'il soit hypergraphique ou non), est équivalent à `IG` si l'ensemble de ses joueurs est `HR_I`, les ensembles de ses actions sont `HR_A`, si les utilités sont exprimées dans `HR_V` et si l'utilité de tout profil signalisé de `IG` pour le joueur $i$ ayant reçu le signal $\theta_i$ est égale à l'utilité du profil de stratégies correspondant dans `CG` pour le couple $(i, \theta_i)$ (définition 4.24). En Coq, nous notons donc :

```
Definition HRequiv (CGS: cgame_situation HR_A X') (CG: cgame CGS HR_V):=
  ∀i ti (s : iprofile A T),
    iutility IG s ti = CG (existT T i ti) (CGS (iprofile_flatten s)).
```

### Transformation de Selten

Considérons d'abord la transformation de Selten (définition 4.25). L'espace des conséquences du jeu Selten(IG) est l'ensemble des actes, c'est-à-dire des fonctions `FoD -> X`. La fonction-conséquence associe à tout profil de stratégie l'acte correspondant, et les fonctions d'utilité du jeu Selten(IG) sont simplement définies par l'application de l'acte à la règle de décision du joueur $(i, \theta_i)$.

```
Notation HR_X := {ffun FoD -> X}.

Definition Selten_cgame_situation : cgame_situation HR_A HR_X :=
  fun a : cprofile HR_A => [ffun t => IGS (projprofile a t) t].

Definition Selten_cgame : cgame Selten_cgame_situation HR_V :=
  fun (i_ti : HR_I) (x : HR_X) =>
    let u:= (IG ti).1.1 in let v:= (IG ti).1.2 in let w:= (IG ti).2 in
    u X FoD v w x.
```

Cette transformation produit un jeu équivalent. Pour le montrer, nous vérifions :

```
Theorem Selten_correct : HRequiv Selten_cgame.
```

### Transformation hypergraphique

La transformation hypergraphique (définition 4.26) est basée sur la représentation des règles de décision par des instances $\mathcal{Z}_{(i,\theta_i)}$ : l'utilité des joueurs, pour chacun de leurs signaux, est capturée par une XEU. Nous supposons donc l'existence de ces instances de règles de décision ainsi que l'existence de fonctions de masse. Nous posons donc :

```
Variable zi : ∀i (ti : T i), zinst (U ti) (V ti) (W ti).
Variable m : ∀i (ti : T i), {ffun {set FoD} -> W ti}.
```

Le jeu HR(IG) est un jeu hypergraphique décomposable, dans lequel les jeux locaux correspondent aux éléments focaux des différentes fonctions de masse. Chaque jeu local est donc un événement $e \subseteq \Omega$, un couple $(i, \theta_i)$ y participe si le signal $\theta_i$ y est possible et l'ensemble de ses conséquences locales est l'ensemble des conséquences possibles au regard de cet élément focal. Nous posons donc :

```
Notation HR_E := {set FoD}.
Notation HR_P := (fun (e : HR_E) (i_ti : HR_I) =>
  [∃t, (t \in e) && (tagged i_ti == signal (tag i_ti) t)]).
Notation HR_X := (fun e : HR_E => {set FoD * cprofile A}).
```

La conséquence locale d'un profil de stratégies local est alors l'ensemble des couples $(\omega, a)$ où $a$ est un profil de stratégies pures possible et $\omega$ l'état du monde correspondant. Puisqu'il n'y a pas de fonctions partielles en Coq d'une part, et puisqu'il nous faut accéder à la preuve `(H : t \in e)` pour construire un profil local d'autre part, nous avons besoin de traiter les deux cas (`t \in e` et

`t \notin e`) dans le corps de la fonction et de renvoyer une valeur par défaut lorsque `t \notin e`. Cependant, nous appelons cette fonction dans l'ensemble `[set f t | t \in e]`, la valeur par défaut ne sera donc jamais renvoyée.

```
Definition HRG_local_c (e: HR_E) (ae: local_cprofile HR_A (HR_P e)) :=
  let f t :=  match (boolP (t \in e)) with
              | AltTrue H => (t, (proj_flatlocprofile ae H))
              | AltFalse _ => x0 end in
  [set f t | t in e].
```

Cela nous permet de définir la situation de jeu hypergraphique de HR(IG).

```
Definition HRG_hggame_situation : hggame_situation HR_A HR_P HR_X :=
  fun (e : HR_E) (ae : local_cprofile HR_A (HR_P e)) =>
    HRG_local_c ae.
```

Le jeu HR(IG) est un jeu décomposable, nous le définissons à partir de ses fonctions d'utilité locales. Ces fonctions renvoient la « part de XEU » qui est calculée pour un élément focal `e`, d'après l'instance de règle de décision définissant les opérateurs $\otimes_{(i,\theta_i)}$ et les fonctions d'agrégations $\mathbf{f}_{(i,\theta_i)}$.

```
Definition HRG_local_u (i_ti : HR_I) (e : HR_E) : HR_X e -> HR_V i_ti :=
  let v := (IG (tagged i_ti)).1.2 in
  fun A => z_otimes (zi (tagged i_ti))
              (m (tagged i_ti) e)
              (z_f_agg (zi (tagged i_ti)) (fun x => v (IGS x.2 x.1)) A).
```

Le jeu hypergraphique est ainsi défini grâce à la fonction `mkhggame`, en considérant les opérateurs $\oplus_{(i,\theta_i)}$ des instances de règles de décision et leurs éléments neutres.

```
Definition HRG_hggame : hggame HRG_hggame_situation HR_V :=
  mkhggame HRG_hggame_situation
     (fun i_ti : HR_I => z_idu (zi (tagged i_ti)))
     (fun i_ti : HR_I => z_oplus (zi (tagged i_ti)))
     HRG_local_u.
```

Nous vérifions finalement la correction de cette transformation : si les instances de règle de décision $\mathcal{Z}_{(i,\theta_i)}$ représentent les règles de décision $\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}$ (c'est-à-dire que pour tout joueur, tout signal et tout acte, $\mathrm{XEU}(\mathcal{Z}_{(i,\theta_i)})$ produit la même valeur que la règle de décision $\mathcal{U}_{(i,\theta_i)}$), alors les deux jeux sont en correspondance.

```
Lemma HRGeneral_correct :
  (∀i (ti : T i),
    let u:= (IG ti).1.1 in let v:= (IG ti).1.2 in let w:= (IG ti).2 in
    ∀χ, u _ _ v w χ = XEU (zi ti) v (m ti) χ)
  -> HRequiv HRG_hggame.
```

## 5.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté les deux formalisations Coq que nous avons successivement développées puis fusionnées pour cette thèse.

La première concerne les capacités algébriques, en particulier les capacités usuelles à valeurs réelles, telles que les fonctions de croyance et de plausibilité, les mesures de possibilité et de nécessité, etc., et les règles de décisions qui leurs sont associées. Dans ce travail, l'approche formelle permise par Coq, la bibliothèque *Mathematical Components* et *Hierarchy Builder* permet d'exprimer aisément les résultats algébriques. En particulier, nous montrons d'une part que les capacités sont représentables par des fonctions de masses, avec un intérêt particulier pour la transformée inverse de Moëbius et sa contrepartie qualitative qui produisent de telles fonctions de masse. D'autre part, nous montrons que les règles de décision usuelles sont représentables par des instances de la règle de décision algébrique universelle que nous appelons XEU..

La seconde formalisation est une généralisation de celle présentée lors de la conférence ITP2023 (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2023). Elle certifie la correction des trois transformations présentées dans le cadre des Bel-Games, que nous généralisons ici aux fonctions d'ensembles pointées (donc, au moins, aux capacités à valeurs réelles). Cette formalisation a aussi servi de base pour montrer les deux transformations algébriques (transformation de Selten et transformation hypergraphique) pour les jeux à information incomplète généralisés. Ces résultats sont importants en eux-mêmes, puisque ces transformations permettent d'étudier un jeu à information incomplète avec les outils des la théorie des jeux classique développés initialement pour les jeux à information complète. De plus, ils constituent un exemple démontrant l'utilité de l'approche algébrique pour représenter les préférences et l'incertitude : nous formalisons ainsi en une fois les résultats obtenus par plusieurs personnes (y compris par nous-mêmes) à différentes époques, depuis (Harsanyi, 1967; Howson et Rosenthal, 1974) jusqu'à (Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022).

Par ailleurs, l'effort de formalisation a permis d'identifier les hypothèses implicites des travaux formalisés sur papier et les limites de ces travaux. Par exemple, dans notre travail sur les Bel-Games, nous n'explicitions pas les propriétés nécessaires des conditionnements, ni le fait que les jeux doivent être bien définis au regard du conditionnement considéré. C'est aussi en cherchant à étendre la transformation TBM à tous les conditionnements que nous avons identifié la subtilité pour le conditionnement faible (où après conditionnement « sachant $C$ », un élément focal peut contenir des états du monde $\omega$ contradictoires tels que $\omega \notin C$).

Enfin, ce travail a impliqué de montrer de nombreux lemmes intermédiaires, concernant principalement la théorie des ensembles. Pour la plupart d'entre eux, ils sont ou seront intégrés à la bibliothèque *Mathematical Components*. Nous sommes confiants que notre effort de formalisation pourra bénéficier à des utilisateurs qui ne travaillent pas directement dans le même domaine que nous.

Plusieurs directions de recherche et de travail se dessinent, suite à ces deux

formalisations.

Tout d'abord, bien entendu, nous souhaitons vérifier et intégrer certains résultats annexes qui n'étaient pas nécessaires pour ces travaux, mais qui en découlent naturellement. Par exemple, nous n'avons pas vérifié en Coq que la mesure déduite d'intervalles de probabilité est une capacité (qui est 2-monotone).

Ensuite, dans le chapitre 4, nous avons montré la complexité théorique des transformations, ce que nous avons confirmé expérimentalement dans la section 4.5.4. Nous aimerions certifier ces bornes de complexité en Coq.

Enfin, cette formalisation a été pensée principalement comme un outil visant à être réutilisé, soit en partie, soit en totalité. Nous entrevoyons en effet plusieurs applications. D'une part, comme nous l'évoquions à la fin du chapitre 4, la théorie des jeux est parfois utilisée pour montrer des résultats théoriques dans d'autre domaines connexes (nous donnions en exemple un résultat célèbre de théorie du vote affirmant qu'aucun système de vote de garantit que les électeurs ont intérêt à voter selon leurs véritables préférences, mais qu'ils ont parfois intérêt à voter utile). De tels résultats seraient « facilement » vérifiés en Coq grâce à la formalisation que nous proposons ici. D'autre part, nous pensons aux algorithmes existants ou à venir qui reposent les théories de l'incertitude, de la décision et/ou des jeux. Ces algorithmes se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'aide à la décision, l'intelligence artificielle ou encore le vote en ligne. Dans de nombreux cas, les enjeux de ces domaines sont importants voire cruciaux. Nous pensons que de tels algorithmes auraient intérêt à être certifiés « zéro défaut », que ce soit pour garantir effectivement leur correction ou pour appuyer leur acceptation auprès des publics et des autorités concernés. Ainsi les travaux que nous présentons dans ce chapitre pourront constituer une première pierre pour la certification de ces algorithmes, préalable nécessaire à leur mise en œuvre au delà du monde de la recherche.

# Chapitre 6

# Conclusions

Dans cette thèse, nous avons d'abord proposé un modèle algébrique générique appelé *modèle d'agent* capturant de nombreuses théories de la décision usuelles : la théorie classique de l'utilité espérée, celle des fonctions de croyance, celle des possibilités, etc. qui repose sur l'utilisation d'une capacité et d'une fonction d'utilité algébriques. Les différentes manières d'évaluer les choix possibles lors d'une prise de décision sous incertitude sont capturées par différentes règles de décision. Nous avons proposé une règle de décision algébrique « universelle » qui capture toutes les règles usuelles et des règles plus exotiques. Pour chacune d'entre elles, nous donnons l'instance qui la représente : cette instance décrit le type de fonction de masse, les opérateurs et la fonction d'agrégation avec lesquels la règle est calculée. La règle de décision et les théories sous-jacentes deviennent ainsi un paramètre du *modèle d'agent* : ce modèle permet ainsi d'adopter un point de vue général mais peut aussi être spécialisé au besoin. En distinguant les différents composants avec lesquels un agent est modélisé (préférences, connaissance et règle de décision) et en offrant un cadre commun, l'utilisation d'un *modèle d'agent* simplifie et accélère la tâche de modélisation. De plus, cela permet de faire varier la théorie de la décision considérée (ou certains composants uniquement) pour une même situation, ce qui facilite l'étude d'une situation donnée selon le type de l'agent considéré.

Les instances de règles de décision imposent de considérer non pas la capacité algébrique, mais la fonction de masse, c'est-à-dire une fonction qui décompose la croyance ou la connaissance en « masses » atomiques portant sur les ensembles d'états. La capacité est alors retrouvée à partir de cette fonction en combinant les masses avec un opérateur adapté (usuellement l'addition ou plus rarement le maximum).

Nous avons ensuite appliqué ce *modèle d'agent* à la théorie des jeux à information incomplète et avons montré qu'il est adapté au cas multi-agents. Les outils usuels de la théorie des jeux y sont définis. Cela facilite donc également la tâche de modélisation pour ce type de situations, offre un plus grand degré de liberté que les modèles existants et permet d'étudier ces situations en fonction des théories considérées. De plus, cela rend possible l'expression de résultats

généraux. Nous avons montré en particulier une version algébrique du théorème de Howson et Rosenthal qui rattache tout jeu à information incomplète généralisé à la théorie des jeux classique en permettant une approche algorithmique. Pour se faire, nous avons proposé une preuve unique pour trois résultats jusqu'alors considérés comme différents (Howson et Rosenthal, 1974 ; Ben Amor, Fargier, Sabbadin et Trabelsi, 2020 ; Pomeret-Coquot, Fargier et Martin-Dorel, 2022) ; nous avons aussi montré la validité de la transformation dans des cadres qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été étudiés, tels que les jeux à information incomplète basés sur les intervalles de probabilité où les familles de probabilités. Nous avons établi la complexité spatiale et temporelle de cette transformation qui dépend du degré de $k$-additivité des fonctions de masse considérées.

Nous avons également détaillé le modèle des Bel-Games, où l'incertitude est capturée par une fonction de croyance et les préférences des agents par les règles habituellement associées aux fonctions de croyances : l'intégrale de Choquet, la règle de Jaffray et celle du Transferable Belief Model. Les Bel-Games sont ainsi un cas d'application du modèle algébrique pour trois instances de règles de décision. De plus, nous avons proposé deux autres transformations spécifiques aux Bel-Games. En particulier, la transformation TBM bénéficie des propriétés de la règle du Transferable Belief Model : elle est linéaire en temps et en espace. Nos expérimentations ont montré qu'elle est très efficace en pratique.

Enfin, nous avons formalisé nos contributions dans l'assistant de preuve Coq, ce qui apporte une très forte garantie sur nos résultats et facilite leur revue. Pour cela, nous avons élaboré une bibliothèque pratique et réutilisable permetant de manipuler facilement les objets mathématiques que sont les capacités, les fonctions de masse et les règles de décision, ainsi que leur sous-types. Nous avons également développé plusieurs outils pour la théorie des jeux, à commencer par des définitions pertinentes pour les jeux à information complète, les jeux hypergraphiques et les jeux à information incomplète, et avons montré la correction des deux transformations algébriques ainsi que celle des transformations spécifiques aux Bel-Games.

### Portée et limites des résultats obtenus

Nos résultats font écho à plusieurs autres travaux algébriques, tels que ceux proposés par Friedman, Chu et Halpern dans le cadre statique (Friedman et Halpern, 1995 ; Halpern, 2001 ; Chu et Halpern, 2003) où ceux proposés par Perny, Spanjaard et Weng ou encore Pralet, Verfaillie et Schiex dans un cadre dynamique (Perny, Spanjaard et Weng, 2005 ; Pralet, Verfaillie et Schiex, 2007). Ils s'en distinguent en particulier par le fait que nous considérons des fonctions de masses algébriques dans notre règle de décision universelle. Cela permet de capturer les règles basées sur l'intégrale de Choquet par exemple. Nous pensons et espérons que cela mènera à l'élaboration de résultats et d'algorithmes génériques comme nous l'avons fait en proposant la transformation algébrique de Howson et Rosenthal. En effet, il nous semble que les fonctions de masse (algébriques) constituent l'élément clé du modèle et de ses applications.

En particulier, il apparaît que la complexité liée au calcul d'une règle dépend de la fonction de masse et plus précisément du nombre et de la taille des éléments focaux.

Les transformations que nous avons proposées pour les jeux à information incomplète généralisés et pour les Bel-Games peuvent être considérées de manière théorique pour étudier n'importe quel jeu à information incomplète avec les outils d'analyse issus de la théorie des jeux classique. On peut également envisager de les implémenter pour générer effectivement des jeux à information complète équivalents et les étudier par ordinateur. La transformation TBM en particulier est très efficace car linéaire en temps et en espace. Il faut cependant rappeler que la taille d'un jeu à information incomplète augmente exponentiellement lorsqu'on augmente le nombre de joueurs ou de types ; alors même une complexité linéaire peut s'avérer prohibitive.

La formalisation en Coq de ces contributions nous a amené à vérifier de nombreux lemmes et théorèmes répartis dans plusieurs modules. Si certains modules sont consacrés à la vérification des transformations de Howson et Rosenthal, d'autres modules tels que ceux concernant les capacités, les fonctions de masse, les règles de décision ou les jeux à information complète et ceux à information incomplète, ont clairement vocation à être réutilisés. Ils offrent des structures facilement manipulables pour les théories de l'incertitude, de la décision et des jeux, et facilitent ainsi la vérification et la certification de résultats de ces domaines. Par ailleurs, l'utilisation de *Hierarchy Builder* nous fait espérer que la maintenance de la bibliothèque Coq que nous avons produite sera simplifiée et que de nouveaux modules y seront facilement intégrés. En effet, en se reposant sur cet outil pour déclarer les types et les relations d'héritage, nous favorisons la compatibilité avec les futures versions de Coq et simplifions donc les travaux de maintenance à venir.

### Perspectives et ouvertures

Le travail effectué dans cette thèse ouvre plusieurs directions de recherche.

Il nous semble important de considérer l'extension des nombreux résultats théoriques et algorithmiques qui reposent sur la théorie de l'utilité espérée et qui sont fondamentaux dans plusieurs domaines dont l'économie et les sciences sociales et politiques. Ils devraient être exprimés en fonction des théories considérées. En les considérant dans notre cadre générique, certains d'entre eux pourront être généralisés (dans ce cas, il est possible que plusieurs théorèmes soient fusionnés) et d'autres pourront être identifiés comme n'étant valides que dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. Cela apporterait un nouveau regard sur ces résultats, en permettant de déterminer s'ils ressortent principalement de l'hypothèse bayésienne ou bien de la nature des problèmes sur lesquels ils portent. Par exemple, les théoriciens du vote savent qu'il n'existe pas de système de vote « strategy-proof », c'est-à-dire que dans tous les systèmes de vote, il se peut que les électeurs n'aient pas intérêt à voter pour leur candidat préféré mais qu'ils aient intérêt à l'inverse à voter utile par exemple. Ce théorème repose sur une modélisation du vote par un jeu bayésien ; nous nous demandons s'il est

intrinsèque aux systèmes de vote ou s'il découle de cette hypothèse.

Par ailleurs, dans nos sociétés où les algorithmes sont de plus en plus présents, le besoin de certification est devenu crucial. Les théories de l'incertitude, de la décision et des jeux trouvent en effet de nombreuses applications algorithmiques, que ce soit pour les véhicules autonomes ou concernant la dématérialisation des consultations et services publics par exemple. Pour favoriser l'acceptation de l'usage de ces algorithmes, leur certification nous semble indispensable. Pour cela, la bibliothèque Coq que nous proposons fournira une base de départ adaptée qu'il sera nécessaire d'étoffer selon la direction suivie.

Nous pensons aussi, bien évidemment, aux sous-domaines de la théorie des jeux que nous n'avons pas considérés, et en particulier les jeux séquentiels où les joueurs jouent plusieurs coups à la suite. Ces types de jeux sont également très importants, autant pour les tâches de modélisation que par leurs applications directes. Nous pensons que le *modèle d'agent* s'y appliquera sans difficulté mais ne l'avons pas vérifié. De plus, plusieurs résultats et concepts propres aux jeux séquentiels mériteront alors d'être étudiés et étendus à ce cadre algébrique générique.

Enfin, l'approche algébrique peut être étudiée en tant que telle, et nous nous demandons si certaines justifications ne peuvent pas être proposées de manière algébrique. La théorie classique de l'utilité espérée comme plusieurs théories alternatives sont déduites d'une axiomatisation : si l'on accepte quelques axiomes de « rationalité », alors on doit accepter l'ensemble de la théorie. Nous nous demandons si une axiomatisation algébrique consensuelle de la théorie de la décision pourrait être élaborée, et si nous pourrions en déduire la pertinence de la règle universelle que nous proposons. En plus du résultat en lui-même, cela permettrait de justifier ou à l'inverse de critiquer notre approche.

À l'issue de cette thèse, nous pensons avoir modestement contribué à l'enrichissement des connaissances liées la modélisation de la prise de décision sous incertitude ainsi qu'à leurs applications directes et indirectes.

# Bibliographie


Adams, Ernest (1965). "The logic of conditionals". In : *Inquiry* 8.1-4, p. 166-197.

Allais, Maurice (1953). "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine". In : *Econometrica : Journal of the econometric society*, p. 503-546.

— (1979). *The so-called Allais paradox and rational decisions under uncertainty*. Springer.

Anderson, Elizabeth L. et Dale Hattis (1999). "A. Uncertainty and Variability". In : *Risk Analysis* 19.1, p. 47-49.

Anscombe, Francis J. et Robert J. Aumann (1963). "A definition of subjective probability". In : *Annals of mathematical statistics* 34.1, p. 199-205.

Aristote (350 av. JC). *Ethica Nicomachea*.

Aumann, Robert J (1987). "Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality". In : *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 1-18.

— (1974). "Subjectivity and correlation in randomized strategies". In : *Journal of mathematical Economics* 1.1, p. 67-96.

Axelrod, Robert et William D. Hamilton (1981). "The evolution of cooperation". In : *Science* 211.4489, p. 1390-1396.

Azzabi, Arij et al. (2020). "Ordinal Graph-Based Games". In : *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems* 1237, p. 271-285.

Baudrit, Cédric et Didier Dubois (2006). "Practical representations of incomplete probabilistic knowledge". In : *Computational statistics & data analysis* 51.1, p. 86-108.

Ben Amor, Nahla, Hélene Fargier et Régis Sabbadin (2017). "Equilibria in ordinal games : a framework based on possibility theory". In.

Ben Amor, Nahla, Hélene Fargier, Régis Sabbadin et Meriem Trabelsi (2019). "Possibilistic Games with Incomplete Information". en. In : *28th International Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI19*. Macao, China, p. 1544-1550.

— (2020). "Ordinal polymatrix games with incomplete information". In : *17th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning – KR 2020*, p. 99-108.

Ben Amor, Nahla, Hélène Fargier, Régis Sabbadin et Meriem Trabelsi (2022). "Solving possibilistic games with incomplete information". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 143, p. 139-158.

Bentham, Jeremy (1789). "An introduction into the principles of morals and legislation". In : *New York, Hafner Library*.

Bernard, Jean-Marc (2005). "An introduction to the imprecise Dirichlet model for multinomial data". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 39.2-3, p. 123-150.

Berne, Eric (2011). *Games people play : The basic handbook of transactional analysis*. Tantor eBooks.

Bernheim, B Douglas (1984). "Rationalizable strategic behavior". In : *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 1007-1028.

Bernoulli, Daniele (1738). *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*.

Bertrand, Joseph (1883). "Théorie mathématique de la richesse sociale". In : *Journal des savants*.

Biere, Armin et al. (1999). "Symbolic model checking without BDDs". In : *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems : 5th International Conference*, p. 193-207.

Binmore, Kenneth George (1994). *Game theory and the social contract : just playing*. T. 2. MIT press.

Blackett, PMS (1950). "Operational research". In : *Journal of the Operational Research Society* 1.1, p. 3-6.

Boole, George (1854). *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Walton et Maberly.

Boutilier, Craig (1994). "Toward a logic for qualitative decision theory". In : *4th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning – KR94*, p. 75-86.

Brandenburger, Adam et Eddie Dekel (1987). "Rationalizability and correlated equilibria". In : *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 1391-1402.

Bruijn, NG de (1967). *Description of the language Automath*. Technische Hogeschool Eindhoven.

Calabrese, Philip (1987). "An algebraic synthesis of the foundations of logic and probability". In : *Information Sciences* 42.3, p. 187-237.

Charreton, Raoul (1985). "Esquisse d'une théorie nouvelle de mesure du sort". In : *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 6, p. 61-77.

Choquet, Gustave (1954). "Theory of Capacities". In : *Annales de l'institut Fourier*. T. 5, p. 131-295.

Chu, Francis C. et Joseph Y. Halpern (2003). "Great Expectations. Part I : On the Customizability of Generalized Expected Utility". In : *18th International Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI03*, p. 291-296.

— (2004). "Great expectations. Part II : Generalized expected utility as a universal decision rule". In : *Artificial intelligence* 159.1-2, p. 207-229.

Cohen, Cyril, Kazuhiko Sakaguchi et Enrico Tassi (2020). "Hierarchy Builder : algebraic hierarchies made easy in Coq with Elpi". In : *5th Internatio-*

*nal Conference on Formal Structures for Computation and Deduction*. 167, p. 34-1.

Colman, Andrew M (1995). *Game theory and its applications in the social and biological sciences*. Psychology Press.

Coq Development Team, The (2022). *The Coq Proof Assistant*. URL : https://doi.org/10.5281/zenodo.1003420.

Coquand, Thierry et Gérard Huet (1986). "The calculus of constructions". PhD Thesis. INRIA.

Costa, Carlos A Bana e et Jean-Claude Vansnick (1994). "MACBETH—An interactive path towards the construction of cardinal value functions". In : *International transactions in operational Research* 1.4, p. 489-500.

Cournot, Antoine-Augustin (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. L. Hachette.

Cramer, Gabriel (1728). "Letter to N. Bernoulli". In : *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Commentarii Academiae Scientarum Imperialis Petropolitane* 22.1, p. 175-92.

Curry, Haskell Brooks et al. (1958). *Combinatory logic*. T. 1. North-Holland Amsterdam.

Cyert, Richard M, James G March et al. (1963). "A behavioral theory of the firm". In : *Englewood Cliffs, NJ* 2.4, p. 169-187.

Dantzig, George B (1951). "Application of the simplex method to a transportation problem". In : *Activity analysis and production and allocation*.

Daskalakis, Constantinos, Alex Fabrikant et Christos H. Papadimitriou (2006). "The Game World Is Flat : The Complexity of Nash Equilibria in Succinct Games". en. In : *Automata, Languages and Programming*. Lecture Notes in Computer Science, p. 513-524.

Dawkins, Richard (1976). *The selfish gene*. Oxford university press.

De Campos, Luis M, Juan F Huete et Serafin Moral (1994). "Probability intervals : a tool for uncertain reasoning". In : *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 2.02, p. 167-196.

De Finetti, Bruno (1936). "La logique de la probabilité". In : *Actes du congrès international de philosophie scientifique*. T. 4, p. 1-9.

— (1937). "La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives". In : *Annales de l'institut Henri Poincaré*. T. 7. 1, p. 1-68.

— (1974). *Theory of probability : A critical introductory treatment*. T. 6. John Wiley & Sons.

De Mesquita, Bruce Bueno et al. (2005). *The logic of political survival*. MIT press.

Debreu, Gerard (1959). *Theory of value : An axiomatic analysis of economic equilibrium*. T. 17. Yale University Press.

Dempster, A. P. (1967). "Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping". In : *The Annals of Mathematical Statistics* 38.2, p. 325-339.

Denœux, Thierry et Prakash P. Shenoy (2020). "An interval-valued utility theory for decision making with Dempster-Shafer belief functions". en. In : *International Journal of Approximate Reasoning* 124, p. 194-216.

DESTERCKE, Sebastien (2013). "Independence and 2-monotonicity : Nice to have, hard to keep". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 54.4, p. 478-490.

DESTERCKE, Sébastien et Didier DUBOIS (2006). "A unified view of some representations of imprecise probabilities". In : *Soft Methods for Integrated Uncertainty Modelling*, p. 249-257.

DIECIDUE, Enrico et Peter P WAKKER (2001). "On the intuition of rank-dependent utility". In : *Journal of Risk and Uncertainty* 23, p. 281-298.

DOIGNON, J-P et al. (1986). "Biorder families, valued relations, and preference modelling". In : *Journal of Mathematical Psychology* 30.4, p. 435-480.

DOW, James et Sérgio Ribeiro da Costa WERLANG (1994). "Nash equilibrium under Knightian uncertainty : breaking down backward induction". In : *Journal of Economic Theory* 64.2, p. 305-324.

DOWNS, Anthony (1957). "An economic theory of democracy". In : *Harper and Row* 28.

DRISCOLL, Patrick J, Gregory S PARNELL et Dale L HENDERSON (2007). *Decision making in systems engineering and management*. John Wiley & Sons.

DUBOIS, Didier et Henri PRADE (1988). *Possibility Theory*. en. Boston, MA : Springer US.

— (1991). "Random sets and fuzzy interval analysis". en. In : *Fuzzy Sets and Systems* 42.1, p. 87-101.

— (1992). "Evidence, knowledge, and belief functions". en. In : *International Journal of Approximate Reasoning* 6.3, p. 295-319.

— (1993). "Belief revision and updates in numerical formalisms : An overview, with new results for the possibilistic framework". In : *13th International Joint Conference on Artifical Intelligence – IJCAI93*. T. 1, p. 620-625.

— (1994a). "A survey of belief revision and updating rules in various uncertainty models". en. In : *International Journal of Intelligent Systems* 9.1, p. 61-100.

— (1994b). "Conditional objects as nonmonotonic consequence relationships". In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 24.12, p. 1724-1740.

— (1995). "Possibility theory as a basis for qualitative decision theory". In : *14th International Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI95*. T. 95, p. 1924-1930.

— (1997). "Focusing vs. belief revision : A fundamental distinction when dealing with generic knowledge". en. In : *Qualitative and Quantitative Practical Reasoning*. T. 1244. Berlin, Heidelberg, p. 96-107.

DUBOIS, Didier, Henri PRADE et al. (2013). *Decision Making Process : Concepts and Methods*. John Wiley & Sons.

EDGEWORTH, Francis Y (1897). "La teoria pura del monopolio". In : *Giornale degli economisti*, p. 13-31.

EICHBERGER, Jürgen et David KELSEY (2000). "Non-additive beliefs and strategic equilibria". In : *Games and Economic Behavior* 30.2, p. 183-215.

ELLSBERG, Daniel (1961). "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms". In : *The Quarterly Journal of Economics*, p. 643-669.

EMERSON, Richard M (1962). "Power-dependence relations". In : *American sociological review*, p. 31-41.

FAGIN, Ronald et Joseph Y. HALPERN (1991). "Uncertainty, belief, and probability 1". In : *Computational Intelligence* 7.3, p. 160-173.

FANG, Fei et Thanh H. NGUYEN (2016). "Green security games : apply game theory to addressing green security challenges". en. In : *ACM SIGecom Exchanges* 15.1, p. 78-83. (Visité le 14/03/2022).

FANG, Fei, Peter STONE et Milind TAMBE (2015). "When Security Games Go Green : Designing Defender Strategies to Prevent Poaching and Illegal Fishing." In : *24th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, p. 2589-2595.

FARGIER, Hélène, Érik MARTIN-DOREL et Pierre POMERET-COQUOT (2021a). "Games of Incomplete Information : A Framework Based on Belief Functions". In : *16th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty – ECSQARU 2021*. T. 12897, p. 328-341.

— (2021b). "Jeux incomplets algébriques". In : *Rencontres des Jeunes Chercheurs en Intelligence Artificielle – RJCIA 2021*, p. 46-53.

FERSON, Scott et Lev R. GINZBURG (1996). "Different methods are needed to propagate ignorance and variability". en. In : *Reliability Engineering & System Safety* 54.2-3, p. 133-144.

FISHBURN, Peter C (1967). "Methods of estimating additive utilities". In : *Management science* 13.7, p. 435-453.

— (1978). "On Handa's" New theory of cardinal utility" and the maximization of expected return". In : *Journal of Political Economy* 86.2, Part 1, p. 321-324.

FRASER, Niall M (1993). "Applications of preference trees". In : *IEEE Systems Man and Cybernetics Conference-SMC*. T. 1, p. 132-136.

— (1994). "Ordinal preference representations". In : *Theory and Decision* 36.1, p. 45.

FRIEDMAN, Nir et Joseph Y. HALPERN (1995). "Plausibility Measures : A User's Guide". In : *11th conference on Uncertainty in Artificial Intelligence – UAI95*, p. 175-184.

FUDENBERG, Drew et David M. KREPS (1987). "Reputation in the simultaneous play of multiple opponents". In : *The Review of Economic Studies* 54.4, p. 541-568.

FUDENBERG, Drew et Jean TIROLE (1991). *Game theory*. MIT press.

GIBBARD, Allan (1973). "Manipulation of voting schemes : a general result". In : *Econometrica : journal of the Econometric Society*, p. 587-601.

GILBOA, Itzhak (1987). "Expected utility with purely subjective non-additive probabilities". In : *Journal of mathematical Economics* 16.1, p. 65-88.

GILBOA, Itzhak et David SCHMEIDLER (1989). "Maxmin expected utility with non-unique prior". In : *Journal of mathematical economics* 18.2, p. 141-153.

— (1994). "Additive Representations of Non-Additive Measures and the Choquet Integral". In : *Annals of Operations Research* 52.1, p. 43-65.

GONTHIER, Georges et al. (2008). "Formal proof–the four-color theorem". In : *Notices of the American Mathematical Society* 55.11, p. 1382-1393.

GONTHIER, Georges et al. (2013). "A machine-checked proof of the odd order theorem". In : *International conference on Interactive Theorem Proving*, p. 163-179.

GONZALES, Christophe et Patrice PERNY (2004). "GAI networks for utility elicitation". In : *9th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning – KR04*, p. 224-233.

GOOD, I. J. (1966). "Symposium on Current Views of Subjective Probability : Subjective Probability As the Measure of a Non-Measurable Set". In : *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. T. 44. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, p. 319-329.

GOODMAN, Irwin R et Hung T NGUYEN (1988). "Conditional objects and the modeling of uncertainties". In : *Fuzzy computing*, p. 119-138.

GRABISCH, Michel et al. (2016). *Set functions, games and capacities in decision making*. T. 46. Springer.

GRABISCH, Michel, Hung T NGUYEN et Elbert A WALKER (2013). *Fundamentals of uncertainty calculi with applications to fuzzy inference*. T. 30. Springer Science & Business Media.

HALPERN, Joseph Y. (2001). "Plausibility measures : A general approach for representing uncertainty". In : *17th International Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI01*. T. 17. 1, p. 1474-1483.

HAMMERSTEIN, Peter et Reinhard SELTEN (1994). "Game theory and evolutionary biology". In : *Handbook of game theory with economic applications* 2, p. 929-993.

HAN, Zhu et al. (2012). *Game theory in wireless and communication networks : theory, models, and applications*. Cambridge university press.

HANDA, Jagdish (1977). "Risk, probabilities, and a new theory of cardinal utility". In : *Journal of Political Economy* 85.1, p. 97-122.

HARSANYI, John C (1973). "Games with randomly disturbed payoffs : A new rationale for mixed-strategy equilibrium points". In : *International journal of game theory* 2.1, p. 1-23.

— (1967). "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III Part I. The basic model". In : *Management science* 14.3, p. 159-182.

— (1968a). "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III Part II. Bayesian equilibrium points". In : *Management Science* 14.5, p. 320-334.

— (1968b). "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III Part III. The Basic Probability Distribution of the Game". In : *Management Science* 14.7, p. 486-502.

HISDAL, Ellen (1978). "Conditional possibilities independence and noninteraction". en. In : *Fuzzy Sets and Systems* 1.4, p. 283-297.

HOSNI, Hykel et Enrico MARCHIONI (2019). "Possibilistic randomisation in strategic-form games". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 114, p. 204-225.

HOWARD, William A. (1980). "The formulae-as-types notion of construction". In : *To HB Curry : essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism* 44, p. 479-490.

HOWSON, Joseph T. Jr et Robert W. ROSENTHAL (1974). "Bayesian equilibria of finite two-person games with incomplete information". In : *Management Science* 21.3, p. 313-315.

HURWICZ, Leonid (1951). *Optimality criteria for decision making under ignorance*. Rapp. tech. Cowles Commission discussion paper, statistics.

JACQUET-LAGREZE, Eric et Jean SISKOS (1982). "Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method". In : *European journal of operational research* 10.2, p. 151-164.

JAFFRAY, J.-Y. (1992). "Bayesian updating and belief functions". In : *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics* 22.5, p. 1144-1152.

JAFFRAY, Jean-Yves (1989). "Linear Utility Theory for Belief Functions". In : *Operations Research Letters* 8.2, p. 107-112.

JOACHIMS, Thorsten (2002). "Optimizing search engines using clickthrough data". In : *8th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, p. 133-142.

JOURDAN, Paul (2022). "Représentation et algorithmique des jeux à information incomplète. Application à la conservation de la biodiversité". Thèse de doct.

KAHNEMAN, Daniel et Amos TVERSKY (1979). "Prospect theory : An analysis of decision under risk". In : *Econometrica : Journal of the econometric society* 47.2, p. 363-391.

KARMARKAR, Uday S (1978). "Subjectively weighted utility : A descriptive extension of the expected utility model". In : *Organizational behavior and human performance* 21.1, p. 61-72.

— (1979). "Subjectively weighted utility and the Allais paradox". In : *Organizational Behavior and Human Performance* 24.1, p. 67-72.

KEYNES, John Maynard (1921). *A Treatise on Probability*. Macmillan et Co.

KOLMOGOROV, Andrej Nikolaevič (1933). "Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitreichnung". In : *Ergebnisse der Mathematik*.

KRANTZ, David H et al. (1971). *Foundations of measurement*. T. 2. academic press.

KREPS, David M (1990). *A course in microeconomic theory*. Harvester Wheatsheaf.

KREPS, David M. et Robert WILSON (1982). "Reputation and imperfect information". In : *Journal of economic theory* 27.2, p. 253-279.

KYBURG, Henry E (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Reidel, Dordrecht.

LAPLACE, Pierre Simon de (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*.

LAU, Richard R. et David P. REDLAWSK (2006). *How voters decide : Information processing in election campaigns*. Cambridge University Press.

LENSTRA, Jan Karel, Alexander HG RINNOOY KAN et Alexander SCHRIJVER (1991). *History of mathematical programming : a collection of personal reminiscences*. Centrum voor Wiskunde en Informatica.

LEROY, Xavier et al. (2016). "CompCert-a formally verified optimizing compiler". In : *Embedded Real Time Software and Systems, 8th European Congress*.

LEWIS, D.K. (1976). "Probabilities of conditionals and conditional probabilities". In : *The Philosophical Reviex* 85, p. 297-315.

LICHTENSTEIN, Sarah et Paul SLOVIC (1971). "Reversals of preference between bids and choices in gambling decisions." In : *Journal of experimental psychology* 89.1, p. 46.

— (1973). "Response-induced reversals of preference in gambling : An extended replication in Las Vegas." In : *Journal of experimental psychology* 101.1, p. 16.

LINDMAN, Harold R (1971). "Inconsistent preferences among gambles." In : *Journal of Experimental Psychology* 89.2, p. 390.

LOOMES, Graham et Robert SUGDEN (1982). "Regret theory : An alternative theory of rational choice under uncertainty". In : *The economic journal* 92.368, p. 805-824.

— (1986). "Disappointment and dynamic consistency in choice under uncertainty". In : *The Review of Economic Studies* 53.2, p. 271-282.

LUCE, R Duncan (1956). "Semiorders and a theory of utility discrimination". In : *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, p. 178-191.

MAHBOUBI, Assia et Enrico TASSI (jan. 2021). *Mathematical Components*. Zenodo.

MARCH, James G et Herbert A SIMON (1993). *Organizations*. John wiley & sons.

MESIAR, Radko (1997). "k-order Pan-discrete fuzzy measures". In : *7th International Fuzzy Systems Association World Congress*, p. 25-29.

MILGROM, Paul et John ROBERTS (1982). "Predation, reputation, and entry deterrence". In : *Journal of economic theory* 27.2, p. 280-312.

MÖBIUS, A.F. (1832). "Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen." ger. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 9, p. 105-123.

MONJARDET, Bernard (1978). "Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres". In : *Mathématiques et Sciences humaines* 63, p. 51-82.

MORGENSTERN, Oskar et John VON NEUMANN (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

MYERSON, Roger B (1986). "Acceptable and predominant correlated equilibria". In : *International Journal of Game Theory* 15, p. 133-154.

— (1997). *Game theory : analysis of conflict*. Harvard University Press.

— (2007). "Virtual utility and the core for games with incomplete information". en. In : *Journal of Economic Theory* 136.1, p. 260-285.

NASH, John F. (1950). "Equilibrium Points in n-Person Games". en. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 36.1, p. 48-49.

NIPKOW, Tobias, Lawrence C PAULSON et Markus WENZEL (2002). *Isabelle/-HOL : a proof assistant for higher-order logic*. T. 2283. Springer Science & Business Media.

PAPADIMITRIOU, Christos H et Tim ROUGHGARDEN (2008). "Computing correlated equilibria in multi-player games". In : *Journal of the ACM* 55.3, p. 1-29.

PAULIN-MOHRING, Christine (1996). "Définitions Inductives en Théorie des Types". PhD Thesis.

PEARCE, David G (1984). "Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection". In : *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 1029-1050.

PEARL, J. (1993). "From qualitative utility to conditional" ought to". In : *Proc. 9th Inter. Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence*, p. 12-20.

PERNY, Patrice, Olivier SPANJAARD et Paul WENG (2005). "Algebraic Markov Decision Processes". In : *19th International Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI05*, p. 1372-1377.

PLANCHET, Bernard (1989). "Credibility and conditioning". en. In : *Journal of Theoretical Probability* 2.3, p. 289-299.

POMERET-COQUOT, Pierre, Hélène FARGIER et Érik MARTIN-DOREL (2022). "Games of incomplete information : A framework based on belief functions". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 151, p. 182-204.

— (2023). "Bel-Games : A Formal Theory of Games of Incomplete Information Based on Belief Functions in the Coq Proof Assistant". In : *14th International conference on Interactive Theorem Proving – ITP2023*. T. 268, 25 :1-25 :19.

PRALET, Cédric, Gérard VERFAILLIE et Thomas SCHIEX (2007). "An Algebraic Graphical Model for Decision with Uncertainties, Feasibilities, and Utilities". In : *Journal of Artificial Intelligence Research* 29, p. 421-489.

QUIGGIN, John (1982). "A Theory of Anticipated Utility". In : *Journal of economic behavior & organization* 3.4, p. 323-343.

RESNIK, Michael D (1987). *Choices : An introduction to decision theory*. University of Minnesota Press.

ROUGHGARDEN, Tim, Eva TARDOS et Vijay V. VAZIRANI (2008). *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press.

ROY, Bernard et al. (1985). *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica.

ROY, Bernard et Ph VINCKE (1987). "Pseudo-orders : definition, properties and numerical representation". In : *Mathematical Social Sciences* 14.3, p. 263-274.

SAAD, Gad (2007). *The evolutionary bases of consumption*. Psychology Press.

SANDHOLM, William H (2010). *Population games and evolutionary dynamics*. MIT press.

SAVAGE, Leonard J (1951). "The theory of statistical decision". In : *Journal of the American Statistical association* 46.253, p. 55-67.

— (1954). *The Foundations of Statistics*. Wiley.

SCHELLING, Thomas C. (1958). "The strategy of conflict. Prospectus for a reorientation of game theory". In : *Journal of Conflict Resolution* 2.3, p. 203-264.

SCHIEX, Thomas, Hélene FARGIER, Gerard VERFAILLIE et al. (1995). "Valued constraint satisfaction problems : Hard and easy problems". In : *14th International Joint Conference on Artificial Intelligence – IJCAI95* 95, p. 631-639.

SCHMEIDLER, David (1986). "Integral representation without additivity". In : *Proceedings of the American mathematical society* 97.2, p. 255-261.

— (1989). "Subjective probability and expected utility without additivity". In : *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, p. 571-587.

SELTEN, Reinhard (1965). "Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfrageträgheit : Teil i : Bestimmung des dynamischen preisgleichgewichts". In : *Journal of Institutional and Theoretical Economics* H. 2, p. 301-324.

SEN, Amartya (1986). "Social choice theory". In : *Handbook of mathematical economics* 3, p. 1073-1181.

SHACKLE, George Lennox Sharman (1961). *Decision, order, and time in human affairs*. CUP Archive.

SHAFER, Glenn (1976). *A mathematical theory of evidence*. T. 42. Princeton university press.

SHEERAN, Mary, Satnam SINGH et Gunnar STÅLMARCK (2000). "Checking safety properties using induction and a SAT-solver". In : *International conference on formal methods in computer-aided design*, p. 127-144.

SHOHAM, Yoav et Kevin LEYTON-BROWN (2008). *Multiagent systems : Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge University Press.

SIMON, Herbert A (1947). *Administrative behavior : A Study of Decision Making Processes in Administrative Organizations*. MaxMillan.

— (1955). "A behavioral model of rational choice". In : *The quarterly journal of economics*, p. 99-118.

SLOVIC, Paul et Sarah LICHTENSTEIN (1968). "Relative importance of probabilities and payoffs in risk taking." In : *Journal of experimental psychology* 78.3p2, p. 1.

SMETS, Philippe (1993). "Jeffrey's Rule of Conditioning Generalized to Belief Functions". In : *Uncertainty in artificial intelligence*, p. 500-505.

SMETS, Philippe et Robert KENNES (1994). "The transferable belief model". In : *Artificial intelligence* 66.2, p. 191-234.

SMITH, Cedric AB (1961). "Consistency in statistical inference and decision". In : *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* 23.1, p. 1-25.

STAUBER, Ronald (juill. 2019). "A strategic product for belief functions". en. In : *Games and Economic Behavior* 116, p. 38-64.

STRAT, Thomas M. (1990). "Decision analysis using belief functions". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 4.5-6, p. 391-417.

TAN, Sek-Wah et Judea PEARL (1994a). "Qualitative decision theory". In : *AAAI*. T. 928.

— (1994b). "Specification and evaluation of preferences under uncertainty". In : *Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 530-539.

TAN, Tommy Chin-Chiu et Sérgio Ribeiro da COSTA WERLANG (1988). "The Bayesian foundations of solution concepts of games". In : *Journal of Economic Theory* 45.2, p. 370-391.

TRABELSI, Mariem (2020). "Games with incomplete information : a framework based on possibility theory". These de doctorat.

Tsoukias, Alexis et Philippe Vincke (1992). "A survey on non conventional preference modelling". In : *Ricerca Operativa* 61, p. 5-49.

Tversky, Amos et Daniel Kahneman (1992). "Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty". In : *Journal of Risk and uncertainty* 5, p. 297-323.

Tzu, Sun (env. 450 av. JC). *The art of war*. Shambhala Publications.

Wald, Abraham (1949). "Statistical decision functions". In : *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 165-205.

Wallace, Richard J et Nic Wilson (2009). "Conditional lexicographic orders in constraint satisfaction problems". In : *Annals of Operations Research* 171, p. 3-25.

Walley, Peter (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. T. 42. Springer.

Walley, Peter et Gert De Cooman (1999). "Coherence of rules for defining conditional possibility". In : *International Journal of Approximate Reasoning* 21.1, p. 63-107.

Walley, Peter et Terrence L Fine (1982). "Towards a frequentist theory of upper and lower probability". In : *The Annals of Statistics* 10.3, p. 741-761.

Wellman, Michael P et Jon Doyle (1992). "Modular utility representation for decision-theoretic planning". In : *Artificial Intelligence Planning Systems*, p. 236-242.

Wilson, Nic (1995). "An order of magnitude calculus". In : *11th conference on Uncertainty in artificial intelligence*, p. 548-555.

Wilson, Robert (1971). "Computing equilibria of n-person games". In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 21.1, p. 80-87.

Yanovskaya, Elena B (1968). "Equilibrium points in polymatrix games (in russian)". In : *Litovskii Matematicheskii Sbornik* 8, p. 381-384.

Zadeh, Lotfi Asker (1965). "Fuzzy sets". In : *Information and control* 8.3, p. 338-353.

— (1978). "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility". In : *Fuzzy sets and systems* 1.1, p. 3-28.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

Université de Toulouse

**Titre :** Décision individuelle et stratégique sous incertitude : une approche algébrique et formelle

**Mots clés :** Théorie des jeux, Décision, Incertitude, Coq, Preuve formelle

**Résumé :** Prendre une décision, c'est souvent faire un compromis entre les bénéfices et les risques. Plusieurs théories de la décision ont été proposées pour modéliser ces compromis, la plus connue étant celle de l'utilité espérée qui repose sur l'utilisation de la théorie des probabilités. Beaucoup d'autres approches pour modéliser l'incertitude, qu'elle provienne de la variabilité des phénomènes ou de l'ignorance qu'on en a, reposent sur l'utilisation de capacités (ou mesures non additives), telles que les probabilités imprécises, les fonctions de croyances, les mesures de possibilité, les intervalles de probabilité, etc. Pour chacune d'elles, une ou plusieurs règles permettent de modéliser la prise de décision au regard du type d'information qu'elles décrivent. Dans cette thèse, nous proposons un modèle algébrique général permettant de décrire les théories basées sur l'utilisation d'une capacité, qu'elle soit numérique ou non, grâce à une règle de décision universelle que nous appelons XEU. Pour cela, nous proposons en particulier de représenter les capacités algébriques par des fonctions de masses algébriques. Nous appliquons d'abord ce modèle aux théories usuelles, dans un cadre mono-agent, et montrons que nous pouvons représenter toutes les règles de décision usuelles par une XEU. Nous considérons ensuite ce modèle dans le cadre multi-agent appelé « jeux stratégiques », sous information complète et sous information incomplète. Nous vérifions la pertinence du modèle dans ce cadre avant d'y exprimer une généralisation du théorème de Howson et Rosenthal. Ce théorème étendu permet d'étudier un jeu exprimé dans notre cadre algébrique avec les outils théoriques et algorithmiques provenant de la théorie des jeux classique. Puis nous détaillons un cas particulier de jeu à information incomplète basé sur les fonctions de croyance (les Bel-Games), que nous avons proposé durant cette thèse, et qui constituent une instance particulière du modèle général. Enfin, nous formalisons cette approche algébrique dans l'assistant de preuve Coq, ce qui certifie la majorité de nos résultats d'une part et constitue une bibliothèque modulaire réutilisable d'autre part. Cette formalisation est la réunion de deux groupes de travaux, l'un concernant les capacités et les théories de la décision en général, l'autre formalisant les différentes preuves que nous proposons pour le théorème de Howson et Rosenthal généralisé aux Bel-Games et aux jeux à information incomplète en général.

**Title:** Individual and strategic decision under uncertainty: an algebraic and formal approach

**Key words:** Game theory, Decision Theory, Uncertainty, Coq, Formal proof

**Abstract:** Making a decision often involves a trade-off between benefits and risks. Several decision theories have been proposed to model these trade-offs, the best known being the expected utility theory, based on the use of probabilities. Many other approaches to the modeling of uncertainty, whether it arises from the variability of phenomena or from ignorance of them, rely on the use of capacities (or non-additive measures), such as imprecise probabilities, belief functions, possibility measures, probability intervals and so on. For each of these, one or more rules are used to model decision-making with respect to the type of information they describe. In this thesis, we propose a general algebraic model which captures all these theories as particular cases. This model is based on the use of a capacity, whether numerical or not, thanks to a universal decision rule that we call XEU. In particular, we propose to represent algebraic capacities by algebraic mass functions. We first apply the model to the usual theories, in a single-agent framework, and show that we can represent all the usual decision rules by an XEU. We then consider this model in the multi-agent framework of "strategic games", under complete and incomplete information. We check the validity of the approach before expressing the generalization of Howson and Rosenthal's theorem. This theorem enables the study of a game expressed in the algebraic framework using theoretical and algorithmic tools from classical game theory. We then turn to the Bel-Game model (incomplete-information games based on belief functions) proposed during this thesis, which constitute a particular instance of our general model. Finally, we formalize our algebraic approach in the Coq proof assistant. This certifies the majority of the results obtained and constitutes a reusable and modular library. This formalization is the union of two groups of works : the first one deals with capacities and decision theories in general, the second one formalizes the various proofs we propose for Howson and Rosenthal's theorem generalized to Bel-Games and to games of incomplete information in general.