Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *4 décembre 2023* **par :**

Maxence BRÉVARD

Étude des composantes de stabilité pour les familles holomorphes d'endomorphismes des espaces projectifs complexes.

JURY

François BERTELOOT	Université de Toulouse	Directeur de thèse
Fabrizio BIANCHI	Università di Pisa	Co-directeur de thèse
Volker MAYER	Université de Lille	Examinateur
Yûsuke OKUYAMA	Kyoto Institute of Technology	Rapporteur
Pascale ROESCH	Université de Toulouse	Examinatrice, Présidente
Gabriel VIGNY	Université de Picardie	Rapporteur

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales

Unité de Recherche :

IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Remerciements

Nous y voilà. C'est la fin d'un voyage. Après 1181 jours de navigation (et une demi-poignée de nuits en moins), c'est le moment d'écrire les lignes qui seront vraisemblablement les plus relues une fois ce manuscrit imprimé et publié. Celles qui prépareront les voyages suivants. Il est temps pour moi d'exprimer toute ma reconnaissance à l'égard des personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'aboutissement de mon travail de doctorant.

François, vous avez été bien plus qu'un directeur de thèse. Depuis mon arrivée à Toulouse, vous m'avez aidé à traverser des difficultés que j'étais loin d'anticiper. Je vous suis reconnaissant pour avoir gardé confiance lorsque je doutais de moi. Nos discussions dans votre bureau se sont souvent prolongées bien tard, mais elles m'ont toujours beaucoup enrichi. Vous m'avez partagé vos intuitions et votre vision sur nos pratiques scientifiques. Les leçons que j'en tire sont riches et aussi nombreuses sur le plan humain. Je suis heureux d'avoir été votre disciple. C'est un honneur de présenter mes travaux sous votre direction.

Fabrizio, je me souviens de notre première rencontre il y a 4 ans, lorsque tu m'avais parlé de dynamique holomorphe pour la première fois sur le quai de la gare d'Austerlitz. Depuis ce jour, tu n'as jamais cessé de me former au métier de mathématicien, avec toujours le même enthousiasme débordant. Merci de m'avoir ouvert les portes de cette discipline et d'avoir su te rendre disponible et à l'écoute. Merci pour ton accompagnement infaillible à tout instant. Je m'estime extrêmement chanceux d'avoir été ton premier doctorant.

Je remercie chaleureusement Yûsuke Okuyama et Gabriel Vigny pour avoir accepté de rapporter ma thèse et de faire partie de mon jury. Votre relecture très précise et vos suggestions d'une grande pertinence m'ont permis de parachever ce manuscrit. Merci également à Volker Mayer et Pascale Roesch d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je suis particulièrement honoré de défendre ma thèse devant vous.

Karim, you have been like my scientific big brother. Working with you has always been a great pleasure. I would like to thank you for your smile, authenticity, and mathematical interest. I hope you will allow me to challenge you to a chess game soon !

Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance à l'ensemble des personnels du laboratoire et de l'école doctorale dont le travail invisible participe à maintenir un environnement sain. Des agents d'entretien à la cellule informatique, vous êtes souvent les oubliées[1] des

1. Pour visibiliser plus de personnes, je genre au masculin ou au féminin de manière aléatoire uniforme.

pages de remerciements, mais votre importance est incontestable. En particulier, je tiens à remercier Agnès Requis pour votre patience et votre aide précieuse dans les démarches auprès de l'École Doctorale, ainsi que Dominique Barrère pour votre accompagnement dans la recherche documentaire et dans le dédale de la bibliothèque.

On ne se trouve jamais totalement seul quand on réalise un projet de recherche et j'aimerais remercier tous les doctorants et les post-doctorantes que j'ai pu côtoyer au sein du laboratoire. Parmi mes prédecesseurs, je pense notamment à Chung-Ming, Dimitri, Elena dont j'ai hâte de partager la passion dévorante pour les comédies musicales, Erfan, Florian qui m'a étonné par son imagination débordante en matière de pédagogie innovante, Fu-Hsuan, Julia, Simon, Solène qui aura toujours le droit à un accueil chez moi en cas de besoin, Valentin, Van Tu Le et Tuan. Parmi mes successeures, je pense notamment à Adrien, Anthony, Butian, Candice, Hugo, Jordi, qui ferait bien d'affûter ses cavaliers avant notre prochaine rencontre, Paul et Runze.

Le thèse est un processus qui se prépare dès la scolarité. C'est pourquoi je souhaite aussi remercier mes camarades rennais avec qui j'ai forgé mes intuitions mathématiques dans un climat particulièrement stimulant. Merci à vous Antoine, Bastien, Clarence, David, et Louis pour tous les moments partagés ensemble, et que j'espère partager encore longtemps. Votre amitié m'est très précieuse, et je ferai mon possible pour en prendre grand soin. Un merci spécial à Antoine dont je n'oublie pas la visite en avril 2021. Sache que le petit 3/2 qui parlait de suites de Cauchy en début d'année n'a jamais cessé de t'admirer. Merci également à Alice et Raoul pour m'avoir invité à Pampers. Emilie, merci d'avoir partagé cette folle année de colloc'Agreg, j'en garde des souvenirs ineffaçables. Ta créativité m'a toujours éboulouï et je suis très heureux de te savoir épanouïe aujourd'hui.

Pierre, je tiens à te remercier particulièrement. Depuis notre rencontre à Rouen, nous avançons sur des chemins parallèles (mais pas trop parallèles quand même, j'espère), toujours ponctués de jazz. Je te remercie pour tes mots chaleureux et ton soutien précieux pendant toutes les étapes. Pour moi non-plus, la prépa et la scolarité ENS n'auraient pas été les mêmes sans toi. Merci !

Ma vocation d'enseignant s'inscrivant pleinement dans ma démarche de futur docteur, je souhaite remercier spécifiquement les équipes pédagogiques auprès desquelles j'ai eu la chance et le plaisir de travailler pendant ma thèse. Claire et Guillaume, avec vous j'ai découvert et pratiqué ma passion pour l'enseignement en première année. Pascale, ta bienveillance m'encourage à trouver le bon équilibre entre exigence et tolérance pour devenir un bon professeur. Tu es aussi particulièrement attentive à la cohésion de l'équipe au sein laboratoire, ce qui est essentiel pour la socialisation et le bien-être des nouvelles recrues. Vincent, ton implication dans la CUPGE et ta réactivité surprenante sont devenues des modèles. Je suis fier de parvenir à éveiller des vocations avec toi aujourd'hui. Fanny, ton aide dans la valorisation de mon parcours de futur enseignant m'est très précieuse, je te remercie pour ta confiance.

Pour ton soutien émotionnel constant et ta grande disponibilité, Gontran, je tiens à te remercier du fond du cœur. Tu as su être à l'écoute quand j'en avais besoin et m'as fait

profiter de tes conseils de vie avisés. Merci pour tous les moments musicaux partagés que tu as l'art de rendre conviviaux. Que ce soit Toto Bello, la Lahue, la Rando Jazz, ou un call des ténèbres à une heure quelconque de la nuit pour venir jouer avec toi (et Jonatan ?), j'ai vraiment hâte de pouvoir te suivre dans ces projets !

Au cours de ce périple, je me suis fait un ami particulièrement précieux qui a, certes, longtemps (et avec **beaucoup** d'insistance) réclamé ces lignes, mais qui les mérite amplement. Toi et moi avons d'abord été co-animateurs scouts. Nous sommes devenus co-doctorants, puis même co-lacataires pour quelques mois ! Mon cher William, le temps que j'ai passé à tes côtés est inestimable. Tes valeurs et ton engagement m'inspirent tous les jours, du moins tous ceux que je note dans mon *magnifique* calendrier. Tu as été pour moi un guide de haute montagne, un ~~chien de traîneau~~ maître jedi qui m'as encore indiqué la route (vers la reprographie) il y a moins d'une semaine. J'espère de tout cœur que les midi-chloriens permettront à nos chemins de se croiser à nouveau, si possible en Occitanie. Si tu l'acceptes, et je suis sûr que l'idée va te plaire, j'aimerais te nommer *parrain* de ma thèse. Un dernier conseil : si tu comptes m'arriver à la cheville, je te suggère encore quelques "heures" de pratique sur Smash Ultimate.

Au cours de ce périple, je me suis aussi fait une amie particulièrement précieuse. Ma vie aurait été bien différente s'il ne m'avait pas été permis de faire une partie du voyage avec toi, Emeline. Tu as vu naître mon appétence pour les mathématiques au lycée, et tu m'as accompagné à devenir ce que je voulais être. Je te suis reconnaissant pour tout le soutien que tu m'as apporté depuis bien avant le début de cette thèse, et je suis si fier de la personne que tu es devenue. Merci de toujours prouver qu'il est possible de faire autrement pour imaginer le monde dans lequel nous souhaitons vivre. J'espère que ton soleil intérieur rayonnera toujours autant, peu importe où tu accosteras. En tout cas, je me tiendrai prêt à te soutenir. D'ailleurs, il serait temps qu'on la termine enfin cette partie de Pandemic Legacy !

Je voudrais aussi remercier toute ma famille, et plus particulièrement ma sœur et mes parents pour votre soutien inébranlable, votre patience et votre compréhension tout au long de mes études. Votre confiance et vos encouragements désintéressés m'ont donné la motivation nécessaire pour persévérer. Grâce à vous, je réalise littéralement mon rêve d'enfant. Merci infiniment pour tous les efforts que vous déployez, même en temps difficiles. Je vous dois tout.

Je souhaite enfin remercier Lucile, dont la lumière illumine mes jours depuis maintenant quelques mois. Ton accompagnement le long de mes derniers efforts ne m'aident pas seulement à parvenir au bout de ce projet, ils me donnent aussi une grande confiance en l'avenir. Merci pour ta bienveillance, ta patience et ton désir profond de mener une vie alignée avec les bonnes valeurs. J'ai vraiment hâte d'en écrire les prochains chapitres avec toi...

C'est peu orthodoxe, mais je voudrais terminer par un message adressé aux futurs lecteurs curieux, parmi lesquels, peut-être, des étudiants, tombés par hasard sur ce manuscrit. Quel que soit le chemin que vous emprunterez dans le futur, cultivez simultanément l'*exigence* et le *droit à l'erreur*. Créez de la *solidarité* là où ça surprend. Développez votre *langage* afin de nommer, puis refuser les violences, quelles qu'en soient leur forme. *Vous êtes capables* de faire des choses difficiles et d'incarner le changement que vous souhaiteriez voir.

Liste des notations

$[a, b)$ désigne l'intervalle $\{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$, où a, b sont deux réels.

$|X|$ désigne le cardinal, éventuellement infini, d'un ensemble X ;
$\mathbb{1}_X$ sa fonction indicatrice ;
$\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties.

$\mathcal{L}_c(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues entre deux espaces vectoriels normés E et F ;
$\mathcal{L}_c(E) := \mathcal{L}_c(E, E)$ l'espace des endomorphismes linéaires continus de E.

$B_G(x_0, r)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r d'un espace métrique (G, dist_G) ;
$\mathrm{dist}_G(x_0, B)$ la distance d'un point x_0 à un sous-ensemble $B \subset G$;
$\mathrm{diam}(B)$ le diamètre de ce sous-ensemble ;
$\mathrm{Lip}(f)$ la constante de Lipschitz d'une application lipschitzienne $f : G \to G$;
$\mathcal{C}^0(G)$ (respectivement $\mathcal{C}^0_b(G)$, $\mathcal{C}^0_c(G)$) l'espace des fonctions continues (resp. continues bornées, continues à support compact), muni de la norme de la convergence uniforme $|| \cdot ||_\infty$;
$\mathcal{M}(G)$ l'espace de ses mesures de Radon, identifié au dual de l'espace $\mathcal{C}^0_c(G)$;
$\mathcal{M}^+(G)$ l'espace de ses mesures boréliennes positives ;
$\mathcal{M}^1(G)$ l'espace de ses mesures boréliennes de probabilité.

$\|z\| := \sqrt{|z_1|^2, \ldots, |z_k|^2}$ désigne la norme euclidienne de $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k$, où $k \in \mathbb{N}$;
$\mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}$ la distance euclidienne ;
$\mathrm{Vol}(V)$ le volume d'un ouvert $V \subset \mathbb{C}^k$;
$\mathrm{Jac}\, f(z)$ le déterminant de la matrice de l'application différentielle $D_z f$ au point $z \in V$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{C})$;
$\mathcal{SH}(V)$ (respectivement $\mathcal{H}(V)$) l'espace des fonctions sousharmoniques (resp. harmoniques).

$\dim N$ la dimension complexe d'une variété complexe N ;
dist_N la distance associée à la métrique riemannienne sur N ;
$\mathcal{D}^{(l,l)}_c(N)$ l'espace des (l, l)-formes lisses à support compact dans N, où $l \in \mathbb{N}$;
$\mathcal{O}(N, N')$ l'espace des fonctions holomorphes de N à valeurs dans une variété complexe N', muni de la topologie de la convergence locale uniforme ;
$\mathcal{O}(N) := \mathcal{O}(N, \mathbb{C})$;
$\mathcal{PSH}(N)$ (respectivement $\mathcal{PH}(N)$) l'espace des fonctions plurisousharmoniques (resp. pluriharmoniques) sur N.

Table des matières

Introduction **10**

1 Matériel préliminaire **16**
1.1 Théorie du pluripotentiel . . . 16
1.1.1 Fonctions plurisousharmoniques . . . 16
1.1.2 Courants positifs fermés . . . 20
1.2 Dynamique complexe . . . 24
1.2.1 Dynamique des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ . . . 25
1.2.2 Théorie de la stabilité . . . 26
1.3 Propagation de régularité . . . 31
1.3.1 Estimation hölderienne pour les laminations sur $\mathbb{P}^1$ . . . 31
1.3.2 Prolongement des fonctions $h(t)$-continues . . . 34

2 Courant de ramification, normalité post-critique et stabilité **36**
2.1 Présentation du résultat . . . 36
2.2 Le rôle du Théorème 2.1.3 dans la théorie de la stabilité . . . 37
2.3 Preuve du Lemme 2.2.3 . . . 41
2.3.1 Étape 1 : Construction d'un grand ensemble de disques Δ_r pour lesquels $f^{\circ n}$ admet presque d^{kn} branches inverses . . . 42
2.3.2 Étape 2 : Estimation du nombre de préimages de a qui appartiennent à beaucoup de ces branches inverses . . . 43
2.3.3 Étape 3 : Prolongement des branches inverses à une boule de rayon uniforme $B(a, r)$ . . . 45
2.3.4 Étape 4 : Construction du tissu d'équilibre $\mathcal{M}$ . . . 46
2.3.5 Étape 5 : Le tissu d'équilibre $\mathcal{M}$ est acritique . . . 49

3 Propagation des propriétés thermodynamiques dans une famille stable **52**
3.1 Les états d'équilibre . . . 52
3.1.1 Une classe de mesures de grande entropie . . . 52
3.1.2 Les laminations préservent les propriétés statistiques . . . 54
3.1.3 Propagation des états d'équilibre . . . 56
3.2 Mouvement holomorphe des points périodiques avec poids . . . 59
3.2.1 Opérateurs de transfert sur $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ . . . 60
3.2.2 Des branches inverses contractantes pour les tissus expansifs . . . 62
3.2.3 Les tissus associés aux états d'équilibre . . . 68
3.2.4 Construction des graphes répulsifs . . . 70
3.2.5 Preuve du Théorème 3.2.2 . . . 74

4 Dynamique aléatoire des applications d'allure polynomiale **78**
4.1 Applications d'allure polynomiale . . . 78

4.2 Construction de la mesure stationnaire 80
4.2.1 Présentation du résultat 80
4.2.2 L'opérateur de transfert T_ν 82
4.2.3 L'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ 84
4.2.4 Effacement de l'ensemble exceptionnel 87
4.3 Familles aléatoires d'applications d'allure polynomiale 88
4.3.1 Familles de mesures stationnaires 88
4.3.2 Preuve du Théorème 4.3.4 90

Introduction

Le domaine de la *dynamique discrète* consiste à considérer un espace X admettant une certaine structure et à étudier l'itération d'une transformation $f : X \to X$ admettant une certaine régularité. Un premier type de questions concerne le comportement des *orbites* des points $z \in X$, c'est-à-dire des suites

$$z \to f(z) \to \cdots \to f^{\circ n}(z) \to \cdots$$

Une fois que le comportement d'une orbite typique est suffisamment bien compris, on peut s'intéresser aux propriétés dynamiques d'une perturbation naturelle de f. Ce deuxième type de questions aboutit à la notion de *famille paramétrée* (M, f) :

$$f \rightsquigarrow f_\lambda.$$

L'étude de la dynamique des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, portée par les travaux fondateurs de Fatou et Julia au début du XX^{è} siècle, marque l'origine du domaine de la *dynamique holomorphe*. Dans ce contexte, la dynamique globale est totalement décrite au moyen de la dichotomie Fatou-Julia. D'une part, l'*ensemble de Julia* $J(f)$ porte la partie chaotique du sytème, qui peut être décrite au moyen d'une mesure f-invariante canonique μ_f appelée *mesure d'équilibre* (voir [Bro65, FLM83, Lyu83a]). D'autre part, le célèbre théorème de non-errance de Sullivan [Sul85] complète la compréhension de la dynamique sur les composantes connexes de son complémentaire, appelé *ensemble de Fatou*. Dans ce contexte, la normalité au sens de Montel, le théorème d'uniformisation de Riemann et la chirurgie quasiconforme sont des techniques couramment utilisées. On pourra consulter les ouvrages [CG93, BM01, Mil06] pour une présentation détaillée.

Dans les années 1980, Mañe-Sad-Sullivan [MSS83] et Lyubich [Lyu83b] posent les bases de la théorie de la stabilité pour une famille de fractions rationnelles $\{f_\lambda : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\}_{\lambda \in M}$ paramétrée par une variété complexe M. Une telle famille (M, f) est dite *stable* si les ensembles de Julia $J(f_\lambda)$ peuvent être paramétrés holomorphiquement en λ, ce qu'on appelle un *mouvement holomorphe* des ensembles de Julia (voir les Définitions 1.2.7 et 1.3.1). La caractérisation de la stabilité dynamique (voir le Théorème 1.2.8) repose crucialement sur le λ-*lemme* qui consiste à prolonger un mouvement holomorphe des cycles répulsifs en un mouvement holomorphe des ensembles de Julia.

Dans cette thèse, nous contribuons au développement de la théorie de la stabilité des endomorphismes holomorphes des espaces projectifs introduite par Berteloot-Bianchi-Dupont [BBD18]. L'holomorphie à plusieurs variables fait apparaître des phénomènes nouveaux, ce qui complique inévitablement la dynamique. Par exemple, le théorème de non-errance a été

mis en défaut pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^2$ [AB+16]. On ne connaît pas la situation pour un choix générique d'endomorphisme f. En particulier, la dynamique stable est loin d'être comprise. En revanche, on peut toujours mettre en évidence, par des techniques de théorie ergodique, une mesure d'équilibre μ_f [FS94] supportée par un fermé totalement invariant, appelé (petit) ensemble de Julia $J(f) = \operatorname{Supp} \mu_f$ (voir aussi [Sib99, BrDu99, BrDu01, DS03]). Cette mesure de probabilité admet une entropie maximale, à savoir $h_{\mu_f}(f) = k \log d$, et vérifie des résultats d'équidistribution. Elle est obtenue comme l'auto-intersection $T^k = T \wedge \cdots \wedge T$ d'un certain $(1,1)$-courant positif fermé f-invariant T appelé *courant d'équilibre*. On pourra consulter l'étude [DS10a] pour une exposition des propriétés les plus importantes et davantage de références.

Les outils de la dimension 1 mentionnés précédemment se généralisent mal en dimension supérieure. Par exemple, le λ-*lemme*, crucial dans la théorie de [MSS83], est obtenu classiquement par la théorie de Picard-Montel comme une conséquence du lemme de Hurwitz. Or ce dernier tombe en défaut dans le cas $k \geq 2$. Une approche différente, faisant appel à la théorie ergodique et reposant essentiellement sur des techniques pluripotentielles introduites par DeMarco [DeM03] (voir aussi [Sib81, Prz85]) a été mise au point par [BBD18] pour étudier la stabilité dynamique des familles $\{f_\lambda : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k\}_{\lambda \in M}$. Cette approche consiste à substituer le mouvement holomorphe des ensembles de Julia par une notion de nature mesurable. Nous introduisons maintenant quelques éléments de vocabulaire relatifs à la théorie de la stabilité de [BBD18] dont nous aurons besoin dans cette introduction et qui seront repris en détails dans la Section 1.2.2.

Considérons une *famille holomorphe d'endomorphismes* de $\mathbb{P}^k$, c'est-à-dire une application holomorphe $f : M \times \mathbb{P}^k \to M \times \mathbb{P}^k$ de la forme $f(\lambda, z) = (\lambda, f_\lambda(z))$, telle que chaque application $f_\lambda : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ est holomorphe. Considérons l'espace $\mathcal{J}$ des applications holomorphes $\gamma : M \to \mathbb{P}^k$ telles que $\gamma(\lambda) \in J_\lambda$ pour tout paramètre $\lambda \in M$. La famille (M, f) induit une dynamique continue sur $\mathcal{J}$ définie par $\mathcal{F}(\gamma)(\lambda) := f_\lambda(\gamma(\lambda))$, pour tout $\gamma \in \mathcal{J}$ et $\lambda \in M$. Pour tout paramètre $\lambda \in M$, on considère l'application d'évaluation $p_\lambda : \mathcal{J} \to \mathbb{P}^k$ définie par $p_\lambda(\gamma) := \gamma(\lambda)$. Une *lamination d'équilibre* est un sous-ensemble mesurable $\mathcal{F}$-invariant $\mathcal{L} \subset \mathcal{J}$, dont les graphes ne s'intersectent pas, tel que $\mu_\lambda(\mathcal{L}_\lambda) = 1$, pour tout $\lambda \in M$, où μ_λ désigne la mesure d'équilibre de f_λ et $\mathcal{L}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{L})$. Une famille est dite μ-stable si elle admet une lamination d'équilibre. Un *tissu d'équilibre* est une mesure de probabilité $\mathcal{F}$-invariante $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ à support compact telle que $(p_\lambda)_* \mathcal{M} = \mu_\lambda$ pour tout $\lambda \in M$. Pour garantir la μ-stabilité, il suffit de construire un tissu d'équilibre satisfaisant une propriété d'*acriticité* ([BBD18, Theorem 4.1]). La μ-stabilité jouit de caractérisations similaires au résultat de [MSS83], comme nous le verrons dans le Théorème 1.2.15.

Cette thèse est constituée d'un premier chapitre de nature introductive, sans résultat original, puis de trois chapitres indépendants. Au cours du Chapitre 1, nous rappelons les outils techniques et mettons en place les notations qui seront utilisés dans la suite, notamment les résultats issus de la théorie de [BBD18]. Nous précisons en Section 1.3.1 un phénomène portant sur la régularité des laminations en dimension 1 et donnant lieu à une preuve du λ-lemme par un raisonnement issu de la théorie du potentiel.

Le Chapitre 2 est un travail en commun avec Berteloot et fait l'objet d'une publication [BeBr23]. Nous introduisons une nouvelle caractérisation de la μ-stabilité, ce qui permet de

simplifier l'approche initiale de [BBD18], tout en soulignant le rôle joué par la normalité post-critique dont l'utilisation n'était pas centrale. Cette caractérisation porte sur le *courant de ramification*, défini par la série formelle

$$R := \sum_{n\geq 0} d^{-kn}(f^{\circ n})^*[f(C_f)],$$

où $[f(C_f)]$ désigne le courant d'intégration sur l'image de l'ensemble critique C_f. On appelle *domaine de convergence* de R_f, et on note $\Omega(R_f)$, l'ensemble des points $(\lambda, z) \in M \times \mathbb{P}^k$ au voisinage desquels la convergence est normale. Introduit dans l'espace $\mathbb{P}^k$ par Dinh et Sibony [DS03], le courant de ramification permet de quantifier la présence de l'orbite post-critique. Nous l'adaptons ici en famille.

Théorème A. *Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1) $\Omega(R_f) = M \times \mathbb{P}^k$;
2) *La famille (M, f) est μ-stable.*

La démonstration de 1) $\implies$ 2) repose sur la construction d'un tissu d'équilibre acritique. Pour cela, nous adaptons l'approche de [DS10a] pour construire un grand nombre de branches inverses de f au-dessus d'un point générique $(\lambda, z) \in M \times \mathbb{P}^k$. L'idée est d'exploiter les nombres de Lelong du courant de ramification. La preuve de l'acriticité est un point délicat. Elle fait intervenir le théorème de prolongement de Sibony-Wong.

Dans la théorie de Mañé-Sad-Sullivan, le mouvement holomorphe des ensembles de Julia définit une conjugaison topologique $h^\lambda_{\lambda_0} : J_{\lambda_0} \to J_\lambda$ entre les systèmes $(J_{\lambda_0}, f_{\lambda_0})$ et (J_λ, f_λ), pour tous paramètres λ_0, λ dans une même composante stable. En particulier, toute mesure f_{λ_0}-invariante ν à support dans J_{λ_0} peut être propagée en une mesure $\nu_\lambda := (h^\lambda_{\lambda_0})_*\nu$ qui hérite des propriétés statistiques de ν.

Dans le Chapitre 3, nous nous intéressons à l'action, en dimension $k \geq 1$, du mouvement holomorphe mesurable sur une classe particulière de mesures invariantes sur $\mathbb{P}^k$ appelée *états d'équilibre* (voir par exemple [Prz90, DU91a, DU91b, Hay99, PU10] dans le cas $k = 1$). Un état d'équilibre associé au système $(\mathbb{P}^k, f_{\lambda_0})$ relativement à une fonction potentiel $\psi : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}$ est une probabilité ν sur $\mathbb{P}^k$ maximisant la fonctionnelle

$$P_\nu(\psi) := h_\nu(f_{\lambda_0}) + \int_{\mathbb{P}^k} \psi d\nu,$$

où $h_\nu(f_{\lambda_0})$ désigne l'entropie métrique du système $(\mathbb{P}^k, f_{\lambda_0}, \nu)$. On note $P(\psi) = \sup_\nu P_\nu(\psi)$, où la borne supérieure porte sur toutes les mesures invariantes ergodiques. On peut introduire de la même façon les états d'équilibre associés au système $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ relativement à un potentiel $\Psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$. Les états d'équilibre jouent un rôle particulier dans le *formalisme thermodynamique* [Zin96]. Leur existence est souvent gratuite, mais leur unicité est une propriété ergodique très importante.

Bianchi et Rakhimov [BR22] introduisent la notion de ν-tissu, généralisant la notion de tissu d'équilibre associé à la mesure d'entropie maximale, afin de propager, entre autres, la

classe des mesures d'entropie strictement supérieure à $(k-1)\log d$. Étant donnés un paramètre λ_0 et une mesure f_{λ_0}-invariante ν, on appelle (λ_0,ν)-*tissu* une mesure de probabilité $\mathcal{F}$-invariante $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ à support compact telle que $(p_{\lambda_0})_*\mathcal{M}=\nu$.

La première partie de ce chapitre fait l'objet d'un article en préparation avec Rakhimov. Nous exploitons les propriétés des (λ_0,ν)-tissus dans une composante stable pour propager les états d'équilibre. Plus précisément, étant donnés un état d'équilibre ν et un (λ_0,ν)-tissu associé $\mathcal{M}$, nous interprétons les mesures $\nu_\lambda := (p_\lambda)_*\mathcal{M}$ comme des états d'équilibre et montrons que la propriété d'unicité est propagée. Un point technique consiste d'abord à propager les potentiels. Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème B. *Considérons (M,f) une famille holomorphe μ-stable connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d\geq 2$. Fixons un paramètre $\lambda_0\in M$ et un potentiel $\psi : J_{\lambda_0}\to\mathbb{R}_+$ satisfaisant $\sup_{J_{\lambda_0}}\psi<\log d$. On suppose qu'il existe un (respectivement un unique) état d'équilibre ν associé au système $(J_{\lambda_0},f_{\lambda_0})$ relativement au potentiel ψ. Il existe un unique (λ_0,ν)-tissu $\mathcal{M}$ et, en notant $\nu_\lambda := (p_\lambda)_*\mathcal{M}$ sa tranche en $\lambda\in M$,*

(1) il existe un potentiel $\Psi:\mathcal{J}\to\mathbb{R}_+$ tel que $\mathcal{M}$ est un (resp. l'unique) état d'équilibre associé au système $(\mathcal{J},\mathcal{F})$ relativement à Ψ ;

(2) pour tout paramètre $\lambda\in M$, il existe un potentiel $\psi_\lambda:\mathbb{P}^k\to\mathbb{R}_+$ tel que ν_λ est un (resp. l'unique) état d'équilibre associé au système $(\mathbb{P}^k,f_\lambda)$ relativement à ψ_λ.

De plus, pour tout paramètre $\lambda\in M$, on a $\Psi=\psi_\lambda\circ p_\lambda$ $\mathcal{M}$-presque partout.

La démonstration repose sur l'existence d'une lamination analogue à une lamination d'équilibre, c'est-à-dire d'un sous-ensemble $\mathcal{L}\subset\mathcal{J}$ tel que les graphes Γ_{γ_1} et Γ_{γ_2} de deux fonctions distinctes $\gamma_1\neq\gamma_2\in\mathcal{L}$ sont disjoints, telle que $\mathcal{M}(\mathcal{L})=1$. Ceci fournit une conjugaison mesurable entre les systèmes $(\mathcal{L},\mathcal{F},\mathcal{M})$ et $(J_\lambda,f_\lambda,\nu_\lambda)$ pour tout $\lambda\in M$. Nous montrons ainsi que la mesure ν_λ hérite des propriétés statistiques de ν_{λ_0}.

En particulier, le Théorème B s'applique aux états d'équilibre construits par Urbański-Zdunik [UZ13] et Bianchi-Dinh [BiDi23]. Dans ces travaux, les auteurs obtiennent l'existence et l'unicité de l'état d'équilibre μ_ψ associé à un potentiel ψ suffisamment régulier, au moyen d'un processus d'équidistribution des préimages avec poids. On note $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$ le (λ_0,μ_ψ)-tissu associé. Dans [BiDi23], on trouve également un théorème d'équidistribution de certains points périodiques répulsifs avec poids pour la mesure μ_ψ. Dans la deuxième partie de ce chapitre, faisant l'objet d'un travail en commun avec Bianchi [BiBr23], nous démontrons un théorème d'équidistribution de ce type pour le tissu $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$ dans l'espace des graphes $\mathcal{J}$ (voir le Théorème 3.2.1 pour un énoncé plus précis).

Théorème C. *Considérons (M,f) une famille holomorphe μ-stable, connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. Fixons $\lambda_0\in M'\Subset M$ et un entier $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que f_{λ_0} satisfait une condition générique. Pour toute fonction $\psi:\mathbb{P}^k\to[0,\log d[$ $\log^q$-continue, avec $q>2$, il existe un sous-ensemble non-vide $\mathcal{P}_{\psi,n}\subset\mathcal{J}$ de mouvements holomorphes γ de points n-périodiques tels que $\gamma(\lambda)$ est répulsif pour tout $\lambda\in M'$, satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nP(\psi)}\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{\psi,n}} e^{\psi(\gamma(\lambda_0))+\cdots+\psi(f_{\lambda_0}^{n-1}\gamma(\lambda_0))}\delta_\gamma=\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}.$$

Nous suivons la stratégie désormais classique de Briend-Duval [BrDu99] concernant un résultat analogue pour la mesure d'entropie maximale μ_f d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Lorsque $\psi \neq 0$, le jacobien de la mesure μ_ψ n'est plus constant. Contrairement à la preuve classique, les éléments de la suite ne sont pas des mesures de probabilité et il n'y a pas une, mais deux inégalités à démontrer. La preuve donnée dans [BrDu99] repose sur des estimées précises de contraction le long d'une branche inverse générique pour μ_f, ce qui requiert des estimées quantitatives de distorsion le long des branches inverses établies par Berteloot-Dupont-Molino [BDM08, BeDu19]. Nous adaptons cette stratégie dans le cadre du système dynamique mesurable $(\mathcal{J}, \mathcal{F}, \mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi})$, ce qui nécessite un contrôle précis de la contraction de f sur des tubes centrés en des graphes de $\mathcal{J}$ génériques pour la mesure $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$. Comme conséquence, nous obtenons le mouvement des points périodiques répulsifs comme graphes périodiques répulsifs pour $\mathcal{F}$.

Dans le Chapitre 4, nous sortons du cadre de la dynamique déterministe pour nous placer dans le contexte de la *dynamique aléatoire*. Chaque endomorphisme à itérer est choisi aléatoirement dans la famille au moyen d'une certaine loi de probabilité ν sur l'espace des paramètres. Les orbites sont alors de la forme

$$z \to f_{\boldsymbol{\lambda_1}}(z) \to \cdots \to f_{\boldsymbol{\lambda_n}} \circ \cdots \circ f_{\boldsymbol{\lambda_1}}(z) \to \cdots,$$

où $\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi ν. Dans le cadre des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$, Fornaess et Weickert [FW00] ont construit une mesure d'équilibre adaptée au système aléatoire, en introduisant les fonctions de Green non-autonomes. Nous construisons un analogue de la mesure de Fornaess-Weickert dans le cadre plus général des applications d'allure polynomiale [DS03]. Comme les fonctions de Green n'existent pas dans ce contexte, nous adaptons l'approche dd^c de Dinh-Sibony (voir aussi [DS10a]).

Étant donnée une mesure de probabilité ν sur l'espace des paramètres, on considère l'*opérateur de tranfert moyennisé* $T_\nu(\varphi) : \mathcal{C}^0(V) \to \mathcal{C}^0(V)$, défini par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(V) \ : \ T_\nu(\varphi) := d_t^{-1} \int_\Lambda (f_\lambda)_* \varphi \, d\nu(\lambda),$$

où d_t désigne le *degré topologique* commun des applications f_λ. Son adjoint $\mathcal{T}_\nu : \mathcal{M}^1(V) \to \mathcal{M}^1(V)$ correspond à l'opération de pullback des mesures, en moyenne.

Théorème D. *Soit (M, f), une famille holomorphe d'applications d'allure polynomiale de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda \in M}$. Soit ν une mesure de probabilité à support compact sur M. Il existe une unique mesure de probabilité borélienne μ sur V et un ensemble pluripolaire $\mathcal{E} \subset V$ tels que :*

i) $\mathcal{T}_\nu(\mu) = \mu$;

ii) pour toute mesure $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(V)$ satisfaisant $\mu_0(\mathcal{E}) = 0$, la suite $(\mathcal{T}_\nu^n(\mu_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ pour la topologie faible-$*$;

iii) si $\mu' \in \mathcal{M}^1(V)$ satisfait $\mathcal{T}_\nu(\mu') = \mu'$, alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$, on a $\langle \mu', \varphi \rangle \leq \langle \mu, \varphi \rangle$.

Comme dans [FW00], un phénomène de disparition de l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ a lieu sous des hypothèses de régularité de la mesure ν (voir la Proposition 4.2.3).

Nous considérons ensuite que la loi ν dépend holomorphiquement d'un paramètre $s \in \Sigma$, où Σ est une variété complexe, et construisons un courant horizontal dans l'espace produit $\Sigma \times M$ dont les tranches sont les mesures stationnaires du Théorème D. La construction de ce type de courants est l'une des premières étapes pour attaquer des questions de stabilité dynamique dans ce contexte.

Théorème E. *Soit (M, f), une famille holomorphe d'applications d'allure polynomiale de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda \in M}$. Soit $(\nu_s)_{s\in\Sigma}$ un famille de mesures de probabilité sur M, paramétrée par une variété complexe Σ. Pour tout $s \in \Sigma$, on note μ_s la mesure ν_s-stationnaire du Théorème D. On suppose que*

i) $\cup_{s\in\Sigma} \operatorname{Supp} \nu_s$ *est relativement compact dans M ;*

ii) la famille $(\nu_s)_{s\in\Sigma}$ est holomorphe, (i.e. pour toute fonction ψ continue plurisousharmonique sur V, la fonction $s \mapsto \langle \nu_s, \psi\rangle$ est continue plurisousharmonique sur Σ) ;

iii) pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^0(V)$, l'application $\left\| \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & (\mathcal{C}^0_b(V), \|\cdot\|_\infty) \\ s & \mapsto & T_{\nu_s}(\psi) \end{array} \right.$ *est continue.*

Alors il existe un (k,k)-courant positif fermé horizontal $\mathcal{R}$ sur $\Sigma \times V$ dont les tranches sont les mesures ν_s-stationnaires construites au Théorème D. Autrement dit :

$$\forall s \in \Sigma \ : \ \langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle = \mu_s. \tag{1}$$

Nous adaptons la stratégie développée dans le cas déterministe par Pham [Pha05] et Dinh-Sibony [DS10a]. Nous construisons d'abord le courant $\mathcal{R}$ en tirant en arrière une forme lisse dont les tranches sont des mesures de probabilité. On démontre (1) par dualité en évaluant les deux termes contre des fonctions test φ. Par des techniques standard, on peut se ramener au cas où φ est continue et plurisousharmonique. Dans ce cas, la fonction $s \mapsto \langle\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle, \varphi\rangle$ est plurisousharmonique. Grâce au Théorème D *ii*), on montre qu'il suffit d'assurer que la fonction $s \mapsto \langle \mu_s, \varphi\rangle$ est plurisousharmonique sur Σ. Pour cela, on utilise la condition *iii*) du Théorème D ainsi que l'hypothèse *iii*) du Théorème E.

Chapitre 1

Matériel préliminaire

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux concepts utilisés pour étudier la dynamique holomorphe multivariée à l'aide de la théorie du pluripotentiel. Ces notions sont désormais classiques et seront utilisées abondamment dans la suite de la thèse. Les résultats sont référencés, mais pour la plupart donnés sans démonstration.

1.1 Théorie du pluripotentiel

La théorie du pluripotentiel est l'étude des fonctions plurisousharmoniques et plus généralement des courants positifs. Pour une présentation détaillée, nous renvoyons à [Kli91] et [Dem12]. Le contenu de cette section est standard, mais nous le rappelons car il est utile à la compréhension du Chapitre 2 et fondamental pour notre approche dans le Chapitre 4.

1.1.1 Fonctions plurisousharmoniques

Introduites indépendamment par Oka [Oka42] et Lelong [Lel42], les fonctions plurisousharmoniques jouent un rôle important en analyse complexe. On rappelle d'abord la notion de fonction sousharmonique, qui est fondamentalement une notion réelle.

Définition 1.1.1. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Une fonction $u : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinue supérieurement est dite *sousharmonique* (s.h.) si elle n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de V et si elle vérifie l'*inégalité de la moyenne multidimensionnelle*. Autrement dit, pour tout $z \in V$ et pour tout $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, \partial V)$, on a

$$u(z) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_{\mathbb{C}^k}(0,\varepsilon))} \int_{B_{\mathbb{C}^k}(0,\varepsilon)} u(z+x)dx.$$

On note $\mathcal{SH}(V)$ l'espace des fonctions sousharmoniques sur l'ouvert V. Une fonction $u : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *harmonique* si u et $-u$ sont sousharmoniques. On note $\mathcal{H}(V)$ l'espace ces fonctions harmoniques sur l'ouvert V. En dimension $k > 1$, la notion de fonction sousharmonique n'est pas invariante par changement de carte holomorphe. C'est pourquoi on introduit l'espace suivant, qui sera plus adapté au cadre des variétés complexes.

Définition 1.1.2. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Une fonction $u : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinue supérieurement est dite *plurisousharmonique* (p.s.h.) si elle n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de V et si elle vérifie l'*inégalité de la moyenne dans toutes les directions*. Autrement dit, pour tout $z \in V$ et pour tout $r \in \mathbb{C}^k$ tel que $0 < |r| < \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, \partial V)$, on a

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(0,2\pi)} u(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Si $V' \subset \mathbb{C}^k$ est ouvert connexe, u est une fonction p.s.h. sur V, et $h : V' \to V$ est holomorphe, alors la composée $u \circ h$ est p.s.h. sur V' ou identiquement égale à $-\infty$ ([Kli91, Corollary 2.5.7]). Comme il s'agit d'une notion locale invariante par changement de coordonnées, la définition s'étend à toute variété complexe N. On note $\mathcal{PSH}(N)$ l'espace des fonctions p.s.h. sur N. En particulier, la composition d'une fonction p.s.h. par toute carte locale holomorphe est sousharmonique.

Une fonction $u : N \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *pluriharmonique* si u et $-u$ sont plurisousharmoniques. On note $\mathcal{PH}(N)$ l'espace des fonctions pluriharmoniques. Une fonction pluriharmonique est analytique réelle et définit localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Pour un ouvert $V \subset \mathbb{C}^k$, on a les inclusions $\mathcal{PSH}(V) \subset \mathcal{SH}(V)$ et $\mathcal{PH}(V) \subset \mathcal{H}(V)$. Ces classes de fonctions sont invariantes par un certain nombre d'opérations et jouissent de propriétés de compacité qui sont cruciales en dynamique holomorphe à plusieurs variables, dont nous verrons des illustrations dans cette thèse au cours des Sections 1.3.1 et 2.2. Le résultat suivant (voir [Kli91, Lemma 2.2.9]) est appelé *inégalité de Harnack*. On l'obtient au moyen de la formule intégrale de Poisson.

Proposition 1.1.3. *Soit un entier $m \in \mathbb{N}^*$, un point $x_0 \in \mathbb{C}^m$, deux réels $0 < r < R$. On note $B := B_{\mathbb{C}^m}(x_0, R)$. Pour toute fonction $u \in \mathcal{H}(B) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B})$ et tout $x \in \overline{B_{\mathbb{C}^m}(x_0, r)}$, on a*

$$\frac{1 - r/R}{(1 + r/R)^{m-1}} f(x_0) \leq f(x) \leq \frac{1 + r/R}{(1 - r/R)^{m-1}} f(x_0).$$

Deux conséquences importantes de cette inégalité sont respectivement le *théorème de Harnack* et le *principe de compacité* (voir [Kli91, Theorem 2.2.10] et [Kli91, Theorem 2.2.11]).

Proposition 1.1.4. *Soit $V \subset \mathbb{C}^k$ un ouvert et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques sur V.*

i) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers une fonction $u : V \to \mathbb{R}$, alors u est harmonique. De plus, pour tout $1 \leq j \leq m$, la suite $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$.

ii) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la fonction $u := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est soit harmonique, soit constante égale à $+\infty$.

Proposition 1.1.5. *Soit $V \subset \mathbb{C}^k$ un ouvert et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques localement uniformément bornée. Il existe une sous-suite $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge localement uniformément vers une fonction $u : V \to \mathbb{R}$.*

En combinant les Propositions 1.1.4 et 1.1.5 appliquées dans le cas $k = 1$ pour des disques holomorphes, on obtient que toute limite d'une suite de fonctions pluriharmoniques localement uniformément majorées sur une variété complexe M est pluriharmonique.

Le résultat suivant (voir [Kli91, Corollaire 2.9.8]) est appelé *principe d'identité faible*.

Proposition 1.1.6. *Soient N une variété complexe de dimension k et $u, v \in \mathcal{PSH}(N)$. Si $u = v$ presque-partout, alors $u = v$ sur N.*

On peut remplacer l'égalité par une inégalité. Nous utiliserons le cas où v est une constante.

Proposition 1.1.7. *Soit N une variété complexe, $u \in \mathcal{PSH}(N)$, et $c \in \mathbb{R}$ une constante telle que $u \leq c$ Lebesgue-presque partout. Alors $u \leq c$ partout.*

Démonstration. On suppose que N est un ouvert de $\mathbb{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathcal{PSH}(V) \subset \mathcal{SH}(V)$, la fonction u est sous-harmonique. Ainsi, si $z \in V$ et $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, \partial V)$, on a

$$u(z) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(0,\varepsilon))} \int_{B(0,\varepsilon)} u(z+x)dx \leq c,$$

car $u(z + x) \leq c$ pour Lebesgue-presque tout $x \in B(0, \varepsilon)$. □

Le résultat suivant, moins standard, sera utilisé au cours du Chapitre 4.

Proposition 1.1.8. *On considère deux variétés complexes M et N, une fonction borélienne majorée $u : M \times N \to [-\infty, c]$, où $c \in \mathbb{R}$, et une variable aléatoire $\boldsymbol{\lambda}$ sur M suivant une loi de probabilité ν. On suppose que :*

- *pour ν-presque-tout $\lambda \in M$, la fonction $u(\lambda, \cdot)$ est p.s.h. sur N ;*
- *pour tout $z \in N$, la fonction $u(\cdot, z)$ est localement ν-intégrable sur M.*

Alors la fonction $z \mapsto \mathbb{E}_\nu[u(\boldsymbol{\lambda}, z)]$ est p.s.h. sur N.

Démonstration. La plurisousharmonicité étant une notion locale, il suffit de prouver le résultat lorsque N est un ouvert de $\mathbb{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Quitte à remplacer u par $u - c$, on peut supposer que la fonction u est négative, ce qui justifie l'utilisation du théorème de Fubini-Tonelli $(*)$ et du lemme de Fatou $(**)$ dans les raisonnements suivants. Soit $z \in V$ et $r \in \mathbb{C}^k$ tels que $B(z, |r|) \subset V$. Comme, pour ν-presque tout $\lambda \in M$, la fonction $z \mapsto u(\lambda, z)$ vérifie l'inégalité de la moyenne dans toutes les directions, on a

$$u(\boldsymbol{\lambda}, z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{]0,2\pi[} u(\boldsymbol{\lambda}, z + re^{i\theta})d\theta,$$

presque sûrement. Par croissance de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}_\nu[u(\boldsymbol{\lambda}, z)] \leq \mathbb{E}_\nu \left[\frac{1}{2\pi} \int_{]0,2\pi[} u(\boldsymbol{\lambda}, z + re^{i\theta})d\theta \right] \overset{*}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{]0,2\pi[} \mathbb{E}_\nu \left[u(\boldsymbol{\lambda}, z + re^{i\theta}) \right] d\theta.$$

Ainsi, la fonction $z \mapsto \mathbb{E}_\nu[u(\boldsymbol{\lambda}, z)]$ vérifie elle-même l'inégalité de la moyenne dans toutes les directions. Il reste à vérifier la semi-continuité supérieure. Soit $z \in V$ et $z_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. A

nouveau, comme $z \mapsto u(\lambda, z)$ est semi-continue supérieurement pour presque-tout $\lambda \in M$, par croissance de l'espérance, on a

$$\limsup_{j\to\infty} \mathbb{E}_\nu[u(\boldsymbol{\lambda}, z_j)] \overset{**}{\leq} \mathbb{E}_\nu\left[\limsup_{j\to\infty} u(\boldsymbol{\lambda}, z_j)\right] \leq \mathbb{E}_\nu\left[u(\boldsymbol{\lambda}, z)\right],$$

ce qui permet de conclure. □

Définition 1.1.9. Soit N une variété complexe et $u \in L^1_{loc}(N)$. L'*enveloppe régularisée supérieure* de u est définie par $u^*(a) = \limsup_{z\to a} u(z)$.

La compatibilité des espaces $\mathcal{SH}(N)$ et $\mathcal{PSH}(N)$ avec la régularisation supérieure est un résultat important de la théorie, découlant des techniques usuelles de régularisation par convolution (voir [Kli91, Theorem 2.9.14]). Nous utiliserons la version plurisousharmonique.

Proposition 1.1.10. *Soit N une variété complexe et $u \in L^1_{loc}(N)$ satisfaisant l'inégalité de la moyenne dans toutes les directions. On a $u^* \in \mathcal{PSH}(N)$.*

Corollaire 1.1.11. *Soit N une variété complexe et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions p.s.h. localement uniformément majorées. Notons $u = \limsup_{n\to\infty} u_n$. Alors $u^* \in \mathcal{PSH}(N)$.*

Démonstration. On peut supposer que N est un ouvert de $\mathbb{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. On cherche à appliquer la Proposition 1.1.10. Comme la suite u_n est localement uniformément majorée, la fonction u est localement intégrable. Il reste à montrer que la fonction u satisfait l'inégalité de la moyenne dans toutes les directions. Soit $z \in V$ et soit $r \in \mathbb{C}^k$ tels que $B(z, |r|) \subset V$. Quitte à remplacer localement u_n par $u_n - \sup u_n$, on peut supposer que $u_n \leq 0$. Ceci justifie l'utilisation du lemme de Fatou $(*)$. Comme $u_n \in \mathcal{PSH}(V)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{]0,2\pi[} u_n(z + re^{i\theta})d\theta.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, si n est assez grand, on obtient

$$u_n(z) \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{]0,2\pi[} u_n(z + re^{i\theta})d\theta\right) + \varepsilon \overset{*}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{]0,2\pi[} u(z + re^{i\theta})d\theta + \varepsilon.$$

Pour conclure, on passe à la limite supérieure selon n, puis on fait tendre ε vers 0. □

Nous présentons maintenant le *principe de compacité* (voir [Dem12, Proposition I.5.9]) pour l'espace $\mathcal{PSH}(N)$, et le *théorème de Hartogs* (voir [Kli91, Theorem 2.9.18]) qui précise le comportement de ses suites convergentes.

Proposition 1.1.12. *Soit N une variété complexe. Pour tout $p < +\infty$, l'espace $\mathcal{PSH}(N)$ est un sous-ensemble fermé de $L^p_{loc}(N)$. De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{PSH}(N)$ localement majorée, l'une des propriétés suivantes est satisfaite*

i) la suite u_n converge localement uniformément vers $-\infty$;

ii) il existe une sous-suite u_{n_i} qui converge dans $L^p_{loc}(N)$ vers $u = (\limsup u_{n_i})^*$, pour tout $1 \leq p < \infty$.

Proposition 1.1.13. *Dans le cas ii) de la Proposition 1.1.12, si $h : N \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $u < h$, alors $u_{n_i} < h$ pour i assez grand. De plus, on a $\limsup u_{n_i} \leq u$, avec égalité en-dehors d'un ensemble pluripolaire.*

Un ensemble est dit *pluripolaire* s'il est localement inclus dans l'ensemble $\{u = -\infty\}$ pour une fonction u plurisousharmonique. Les ensembles pluripolaires sont à la théorie du pluripotentiel ce que les ensembles négligeables sont à la théorie de la mesure. La classe des ensembles pluripolaires contient celle des sous-ensembles analytiques, mais elle est stable par réunion dénombrable, ce qui la rend particulièrement adaptée, par exemple, à l'étude de la dynamique post-critique. Comme pour les fonctions holomorphes, nous avons un résultat de prolongement pour les fonctions p.s.h. (voir par exemple [Kli91, Theorem 2.9.22]), obtenu comme une conséquence de la plurisousharmonicité de l'enveloppe régularisée supérieure.

Proposition 1.1.14. *Soit N une variété complexe et $F \subset N$ un ensemble pluripolaire fermé. Considérons une fonction $u \in \mathcal{PSH}(N \setminus F)$ majorée sur $N \setminus F$. Alors elle se prolonge en une fonction $\widetilde{u} \in \mathcal{PSH}(N)$ définie par la formule suivante*

$$\widetilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & si\ z \in N \setminus F, \\ \limsup\limits_{y \to z, y \notin F} u(y) & sinon. \end{cases}$$

Nous terminons cette section avec un simple résultat technique que nous utiliserons dans le Chapitre 4. Une fonction u p.s.h. sur un ouvert $V \subset \mathbb{C}^k$ est dite *strictement plurisousharmonique* s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que la fonction u_ε définie par $u_\varepsilon(z) := u(z) - \varepsilon\|z\|^2$ est plurisousharmonique.

Lemme 1.1.15. *Si $V \subset \mathbb{C}^k$ est un ouvert et $\varphi \in \mathcal{C}^2_c(V)$, il existe deux fonctions $\varphi_\pm \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{SPSH}(V)$ telles que $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.*

Démonstration. Il suffit de poser $\varphi_+(z) = \varphi(z) + A||z||^2$, $\varphi_-(z) = A||z||^2$ pour $A > 0$ suffisamment grand. □

1.1.2 Courants positifs fermés

Dans cette section, nous rappelons les concepts permettant de définir les courants, ainsi que la notion de positivité introduite par Lelong [Lel57]. Ces courants jouent un rôle crucial en théorie du pluripotentiel, et en particulier en dynamique complexe.

Soit N une variété complexe de dimension $n \in \mathbb{N}$. Une *forme différentielle* u de bidegré (p, q), sur N, ou (p, q)-forme, est une section du fibré vectoriel $\Lambda^{p,q}T^*N$. En fixant un système de coordonnées locales $\{dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_n}\}$, au voisinage de $z_0 \in N$, on peut écrire

$$u(z) = \sum_{|I|=p, |J|=q} u_{I,J}(z) dz_I \wedge d\overline{z_J},$$

où $u_{I,J}$ est une fonction lisse, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$ si $I = \{i_1, \ldots i_p\}$ et $d\overline{z_J} = d\overline{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z_{j_q}}$ si $J = j_1, \ldots, j_q$. On note $\mathcal{D}^{p,q}_c(N)$ l'espace des (p, q)-formes lisses à support compact et pour

tout compact $K \Subset N$, on note $\mathcal{D}^{p,q}(K)$ l'espace des (p,q)-formes à support dans K. On munit $\mathcal{D}^{p,q}(K)$ de la topologie induite par la famille de semi-normes $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par

$$p_i(u) := \max_{|I|=p,|J|=q} \sup_K \|D^i u_{I,J}\|.$$

On définit l'espace $\mathcal{D}_{p,q}(N)$ des courants de bidegré (p,q) sur N, ou (p,q)-courants comme l'espace des formes linéaires S sur $\mathcal{D}_c^{n-p,n-q}(N)$ dont la restriction à $\mathcal{D}^{n-p,n-q}(K)$ est continue pour tout compact $K \Subset N$. On notera $\langle S, u\rangle$ le crochet de dualité. En coordonnées locales, un (p,q)-courant S s'écrit

$$S(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q} S_{I,J}(z) dz_I \wedge d\overline{z_J},$$

où $S_{I,J}$ sont des distributions. Un courant S est dit *d'ordre* 0 s'il se prolonge aux formes continues, autrement dit si les distributions $S_{I,J}$ sont des mesures complexes. La *masse* d'un (p,p)-courant S d'ordre 0 est définie comme la mesure positive $||S|| := \sum_{I,J} |S_{I,J}|$. Elle dépend, a priori, du choix d'une carte locale. Le *support* de T, noté $\operatorname{Supp} T$ est le plus petit fermé $F \subset N$ pour lequel la restriction de T à $\mathcal{D}_c^{n-p,n-q}(N\backslash F)$ est nulle. On dit qu'une suite de (p,q)-courants $(S_i)_{i\in N}$ *converge* vers un (p,q)-courant S si pour toute forme $u \in \mathcal{D}_c^{n-p,n-q}(N)$, on a $\lim_{i\to\infty} \langle S_i, u\rangle = \langle S, u\rangle$. Le lemme suivant est une conséquence directe des définitions. Il traduit une propriété de semi-continuité inférieure du support.

Lemme 1.1.16. *Soit $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de (p,q)-courants sur une variété complexe N qui converge vers un (p,q)-courant S. Alors*

$$\operatorname{Supp} S \subset \overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geq k} \operatorname{Supp} S_i}.$$

Exemple 1.1.17. *Une (p,q)-forme différentielle u sur N définit un (p,q)-courant par*

$$\forall v \in \mathcal{D}_c^{n-p,n-q}(N) \ : \ \langle u, v\rangle := \int_N u \wedge v.$$

Exemple 1.1.18. *[Dem12, III §2.B] Une sous-ensemble analytique $A \subset N$ de dimension p définit un $(n-p,n-p)$-courant $[A]$, appelé* courant d'intégration, *par*

$$\forall v \in \mathcal{D}_c^{n-p,n-q}(N) \ : \ \langle [A], v\rangle := \int_{A_{\text{reg}}} v,$$

où A_{reg} désigne la sous-variété analytique des points réguliers de A. Cette intégrale converge au voisinage des points singuliers A_{sing} au moyen d'une estimée de Lelong [Lel57].

Le *produit* $T \wedge u$ d'un courant T par une forme lisse à support compact, le *poussé en avant* g_*T par une application propre g, le *tiré en arrière* g^*T par une submersion et la *différentielle extérieure* dT sont définies naturellement par dualité et jouissent des mêmes propriétés de compatibilité que pour les formes. Les opérateurs

$$T \mapsto T \wedge u \quad ; \quad T \mapsto g_*T \quad ; \quad T \mapsto g^*T \quad ; \quad T \mapsto dT$$

sont continus sur l'espace $\mathcal{D}^{p,q}(N)$ pour la topologie de la convergence faible.

En particulier, les opérateurs de différentielle extérieure ∂ et $\overline{\partial}$ sur les formes s'étendent par dualité aux courants en

$$\partial : \mathcal{D}_{p,q}(N) \to \mathcal{D}_{p+1,q}(N) \quad \text{et} \quad \overline{\partial} : \mathcal{D}_{p,q}(N) \to \mathcal{D}_{p,q+1}(N).$$

Le théorème de Stokes assure que ces prolongements coïncident avec les définitions usuelles pour les formes différentielles. On a la décomposition $d = \partial + \overline{\partial}$ et on définit l'opérateur $d^c := \frac{1}{2\pi}(\partial - \overline{\partial})$, de sorte que $dd^c = \frac{1}{2\pi}\partial\overline{\partial}$. Un courant S est dit fermé si $dS = 0$.

Un (p,p)-courant S est *faiblement positif* si $\langle S, u\rangle \geq 0$ pour tout forme u de la forme $u = i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha_p}$, avec $\alpha_j \in \mathcal{D}^{1,0}_c(M)$. Un (p,p)-courant S est *positif* si $\langle S, u\rangle \geq 0$ pour toute forme u faiblement positive comme $(n-p,n-p)$ courant. Le courant d'intégration $[A]$ sur une sous-variété complexe $A \subset N$ est positif. Les notions de positivité et de faible positivité coïncident en bidegré $(0,0)$, $(1,1)$, $(n-1,n-1)$ et (n,n) [Dem12, Corollary III.1.9], ce dernier cas correspondant aux mesures positives. Un $(1,1)$-courant fermé S est positif si et seulement s'il s'écrit localement $S = dd^c u$, avec u plurisousharmonique. Dans ce cas, la fonction u est appelée *potentiel local* du courant S.

Un courant positif S est d'ordre 0. Étant donné un système de coordonnées locales, sa masse est équivalente à la semi-norme define par $\|S\| = S \wedge \omega^{k-p}$, où ω est la $(1,1)$-forme différentielle strictement positive définie localement par $\omega(z) = dd^c\|z\|^2$. L'espace des (p,p)-courants positifs fermés S de masse $\|S\| \leq 1$ définit un cône convexe compact dans $\mathcal{D}_{p,p}(N)$.

Lelong [Lel68] a introduit une généralisation de la notion de multiplicité d'un sous-ensemble analytique en un point singulier pour un courant positif fermé.

Définition 1.1.19. Soit T un (p,p)-courant positif fermé de $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$. Pour tout $a \in B(a,r)$, on définit

$$\nu(T,a,r) := \frac{\|\mathbb{1}_{B(a,r)} T \wedge (dd^c\|z\|^2)^{n-p}\|}{\pi^{n-p} r^{2(n-p)}}.$$

Le *nombre de Lelong* de T en a est défini par

$$\nu(T,a) := \lim_{r\to 0} \nu(T,a,r).$$

Cette limite existe toujours et est invariante par changement de coordonnées holomorphes (voir par exemple [Dem12, Chapter III.5]), ce qui permet de donner un sens à la notion de nombre de Lelong sur une variété complexe. Le nombre de Lelong en a d'un sous-ensemble analytique A est un entier qui est exactement la multiplicité de A en a ([Thi67, Theorem 5.1]).

Un problème central et récurrent concerne la définition du produit entre deux courants. Comme pour les distributions, il n'existe aucune application produit $(S,T) \mapsto S \wedge T$ qui soit continue et qui prolonge le produit entre un courant et une forme à support compact, à moins d'en restreindre l'ensemble de définition. La *théorie de l'intersection*, une partie importante de la théorie du pluripotentiel, consiste à définir un tel produit pour une classe suffisamment

grande de courants positifs fermés. Nous considérerons la situation dans laquelle le courant T est un (p,p)-courant positif fermé, où $p<n$, et S un $(1,1)$-courant positif fermé dont les potentiels locaux sont suffisamment réguliers. En suivant l'approche de [BeTa82], si u est une fonction p.s.h. bornée sur N, on définit le produit extérieur de $dd^c u$ et T par la formule

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT).$$

Cependant, cette définition est encore insuffisante pour considérer le produit $(dd^c u)^l$, pour $l<n$, dans le cas où le potentiel u admet une singularité logarithmique. En notant $L(u)$ l'ensemble des points $z\in N$ telle que la fonction u n'est bornée sur aucun voisinage de z, le courant produit sera bien défini dès lors que $L(u)$ évite suffisamment le support de T. C'est l'objet du résultat suivant, qui est une conséquence de [Dem12, Proposition III.4.1].

Proposition 1.1.20. *Soit T un (p,p)-courant positif fermé sur une variété complexe N de dimension $n>p$, et $u\in\mathcal{PSH}(N)$. On suppose que $L(u)\cap \operatorname{Supp} T$ est discret. Le produit uT définit un courant d'ordre 0. En particulier, les courants $T\wedge(dd^c u)^l$ définissent des courants positifs fermés pour tout $1\leq l\leq n-p$.*

Le résultat suivant est un cas particulier de la formule de Crofton (voir par exemple [Dem12, Corollary III.7.11]). Nous l'exploiterons dans la Section 2.3.5.

Proposition 1.1.21. *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{D}$ l'espace des droites complexes de $\mathbb{C}^n$ passant par a. On munit $\mathcal{D}$ de la structure d'espace projectif complexe et on note $\mathcal{W}$ la mesure de probabilité induite par la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{D}$. Alors*

$$\int_{\mathcal{D}}[\Delta]d\mathcal{W} = (dd^c\log|z-a|)^{n-1}.$$

Dans [DS06], les auteurs développent une théorie de l'intersection adaptée à l'étude de la classe des courants positifs fermés dits *horizontaux*. Voici une définition simplifiée qui conviendra dans notre contexte.

Définition 1.1.22. Soient Σ une variété complexe de dimension l et V un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Considérons $\pi_V:\Sigma\times V\to V$ et $\pi_\Sigma:\Sigma\times V\to\Sigma$ les projections canoniques. Un (k,k)-courant positif fermé R sur $\Sigma\times V$ est dit *horizontal* si $\pi_V(\operatorname{Supp} R)\Subset V$.

Si le courant R était une (k,k)-forme lisse, on pourrait définir sa *tranche* $\langle R,\pi_\Sigma,s\rangle$ comme sa restriction à la fibre $\pi^{-1}(s)$. Dans ce cas, la tranche correspond à l'intersection $R\wedge[\pi^{-1}(s)]$. Pour généraliser cette définition aux courants, nous spécifions l'approche de [DS06] (voir aussi [Fed69]) dans le cas du bidegré (k,k), que nous utiliserons par la suite. Cette approche constitue la *théorie du slicing*, dont l'idée de base est de régulariser par des approximations de l'unité horizontales.

On fixe un système de coordonnées locales sur Σ, une forme volume $d\operatorname{vol}_\Sigma$, une fonction lisse à support compact θ d'intégrale 1, et on considère $\theta_{s,\varepsilon}(y):=\varepsilon^{-2l}\theta(\varepsilon^{-1}(y-s))$. On définit la *tranche* $\langle R,\pi_\Sigma,s\rangle$, si la limite suivante existe et est indépendante des choix des coordonnées locales, de $d\operatorname{vol}_\Sigma$ et de θ, par

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R\wedge\pi_\Sigma^*(\theta_{s,\varepsilon}d\operatorname{vol}_\Sigma).$$

Dans ce cas, il s'agit d'un $(k+l, k+l)$-courant positif fermé supporté dans $\{s\} \times V$, que l'on confondra avec une mesure positive sur V. Cette mesure jouit d'une caractérisation fondamentale, précisée par le point $i)$ du résultat suivant (voir [DS06, Théorème 2.1]).

Proposition 1.1.23. *Soit R un (k,k)-courant positif fermé horizontal sur $\Sigma \times V$.*

i) Pour tout $s \in \Sigma$, il existe une unique mesure $\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle$ à support compact sur V satisfaisant

$$\forall \Omega \in \mathcal{D}_c^{(l,l)}(\Sigma)\ \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)\ :\ \int_\Sigma \langle\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle, \psi(s,\cdot)\rangle \Omega(s) = \langle R \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega), \psi\rangle.$$

ii) Si $\psi \in \mathcal{PSH}(\Sigma \times V)$, alors la fonction $s \mapsto \langle\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle, \psi(s,\cdot)\rangle$ est p.s.h. sur Σ.

iii) La masse de la mesure $\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle$ ne dépend pas de s.

Corollaire 1.1.24. *Avec les notations de la Proposition 1.1.23, l'application*

$$s \mapsto \mathrm{Supp}\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle$$

est semi-continue inférieurement pour la topologie de Hausdorff sur les compacts de V.

Démonstration. Soit $s \in \Sigma$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $r > 0$ et $z \in \mathrm{Supp}\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle$ tel que

$$\sup_{0<\mathrm{dist}_\Sigma(s,s')<r} \{\mathrm{dist}(z, \mathrm{Supp}\langle R, \pi_\Sigma, s'\rangle)\} > \varepsilon.$$

Soit une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $B(s, r/2) \times B(z, \varepsilon/2)$ et $\chi \equiv 0$ hors de $B(s,r) \times B(z,\varepsilon)$. Considérons aussi une forme lisse $\Omega \in \mathcal{D}_c^{(l,l)}(B(s,r))$. D'après la Proposition 1.1.23 *i)*, on obtient

$$\langle R \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega), \chi\rangle = \int_\Sigma \langle R, \pi_\Sigma, s'\rangle(\chi(s',\cdot))\Omega(s') = 0,$$

car $\mathrm{Supp}\,\chi \cap \mathrm{Supp}\langle R, \pi_\Sigma, s'\rangle = \emptyset$ pour Ω-presque tout $s' \in \Sigma$. Comme cette égalité est vérifiée pour tout choix de $\Omega \in \mathcal{D}_c^{(l,l)}(B(s,r))$, ceci montre que $(s,z) \notin \mathrm{Supp}\, R$. En particulier, $z \notin \mathrm{Supp}\langle R, \pi_\Sigma, s\rangle$. □

1.2 Dynamique complexe

Nous décrivons dans cette section un panorama des résultats principaux concernant la dynamique des endomorphismes des espaces projectifs complexes de dimension quelconque qui nous seront utiles dans les chapitres suivants. Les deux références principales pour cette section sont [DS10a, BBD18].

1.2.1 Dynamique des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$

On désigne par $\mathbb{P}^k$ l'espace projectif complexe de dimension $k \in \mathbb{N}^*$, muni de sa structure de variété complexe. On rappelle que le théorème de Chow (voir par exemple [Chi89, §7.1]) assure que les sous-ensembles algébriques de $\mathbb{P}^k$ correspondent à ses sous-ensembles analytiques. Un *endomorphisme* de $\mathbb{P}^k$ est une application holomorphe $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$. Comme l'espace $\mathbb{P}^k$ est compact, ces endomorphismes réalisent des applications propres. Le résultat suivant renseigne leur nature algébrique.

Propriété-Définition 1.2.1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Il existe un entier d et des polynômes homogènes $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_k]$ de degré d, sans facteur commun, tels que

$$\forall z \in \mathbb{P}^k \ : \ f(z) = [P_0(z) : \dots : P_k(z)].$$

On appelle d le *degré algébrique* de f et on note $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ l'espace des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré d.

L'espace $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ est paramétré par un ouvert dense dans $\mathbb{P}^{N_{k,d}}$ pour la topologie de Zariski, avec $N_{k,d} = \frac{(k+1)(d+k)!}{d!k!}$, ce qui donne un sens analytique aux questions de généricité (voir [FS94]). Dans cette thèse, on supposera toujours que $d \geq 2$.

La description algébrique des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ permet d'utiliser des outils propres à l'arithmétique des polynômes. Par exemple, le théorème de Bézout sur le nombre de solutions d'un système polynomial (voir [Chi89, §10.4]) assure qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{H}_d(P^k)$ admet exactement $\frac{d^{k+1}-1}{d-1}$ points fixes, comptés avec multiplicité. En particulier, si on note $\mathrm{Per}_n(f)$ l'ensemble des points périodiques de f de période n, comptés avec multiplicité, on obtient $|\mathrm{Per}_n(f)| \underset{n\to\infty}{\sim} d^{kn}$. De la même façon, un point $z \in \mathbb{P}^k$ admet exactement d^k préimages par f, comptées avec multiplicité. En outre, f réalise une application ouverte, ce qui en fait un revêtement analytique ramifié de $\mathbb{P}^k$ de degré d^k, dont on note C_f l'ensemble critique. L'entropie topologique (voir [KH99]) du système $(\mathbb{P}^k, f)$ vaut

$$h(f) = k \log d.$$

La minoration $h(f) \geq k \log d$ est obtenue par un résultat de Misiurewicz-Przytycki [MP77] portant sur la dynamique des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur une variété compacte orientable. L'inégalité réciproque est obtenue par Gromov [Gro77] (voir aussi [DS10a]).

Le théorème suivant condense les résultats [Bro65, FLM83, Lyu83a] pour la dimension 1 et [FS94, BrDu01, DS03] pour la dimension supérieure.

Théorème 1.2.2. *Soit $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$, $d \geq 2$. Il existe une unique mesure de probabilité borélienne μ_f sur $\mathbb{P}^k$ f-invariante, ergodique, d'entropie maximale. De plus, la mesure μ_f ne charge aucun sous-ensemble analytique et il existe un sous-ensemble analytique $\mathcal{E} \subsetneq \mathbb{P}^k$ tel que pour tout point $z \notin \mathcal{E}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} d^{-kn} \sum_{f^n(y)=z} \delta_y = \mu_f,$$

où les préimages sont comptées avec multiplicité.

Définition 1.2.3. On note $J_f := \operatorname{Supp} \mu_f$ l'*ensemble de Julia* du système $(\mathbb{P}^k, f)$.

L'ensemble $\mathcal{E}$, appelé *ensemble exceptionnel* de f, est vide pour un choix générique de $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ (voir [FS94, Théorème 4.6]). En dimension $k = 1$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est consitué d'au plus deux points et évite toujours l'ensemble de Julia. La vacuité de l'ensemble $\mathcal{E} \cap J_f$ constitue une question ouverte en dynamique holomorphe multivariée.

Le Théorème 1.2.2 admet de nombreuses conséquences pour la mesure μ_f (voir par exemple [BrDu01, §3]). En particulier, elle est mélangeante. Dinh et Sibony [DS10b] précisent aussi une vitesse exponentielle explicite pour la convergence du Théorème 1.2.2 pour des fonctions test suffisamment régulières.

Un second résultat d'équidistribution portant sur les points périodiques répulsifs joue un rôle central (voir [BrDu99] et [DS10a]). On note $R_n(f)$ l'ensemble des *points périodiques répulsifs* de f de période n, i.e. les points $z \in \operatorname{Per}_n(f)$ au voisinage desquels f^n est expansive. En dimension $k = 1$, on a toujours $R_n(f) \subset J(f)$. Ce n'est plus le cas en dimension supérieure (voir [HP94] et [FS01]). On définit l'ensemble des *J-cycles* de f par $R_n^J(f) := R_n(f) \cap J(f)$. La compréhension asymptotique de l'ensemble $R_n(f) \setminus R_n^J(f)$ reste un problème délicat.

Théorème 1.2.4. *Soit $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} d^{-kn} \sum_{z \in R_n^J(f)} \delta_z = \mu_f.$$

Le Théorème 1.2.4 assure à la fois que $|R_n^J(f)| \underset{n\to\infty}{\sim} d^{kn}$ et que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n^J(f)} = J(f)$. Les J-cycles jouent donc un rôle important pour comprendre l'ensemble de Julia, qui constitue le compact totalement f-invariant sur lequel la dynamique est la plus chaotique. La vitesse de convergence dans le Théorème 1.2.4 constitue une question difficile.

On considérera au cours du Chapitre 3 une classe naturelle de mesures invariantes de grande entropie. Le résultat suivant [DeT05, Din07] sera utilisé à plusieurs reprises.

Lemme 1.2.5. *Soit $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$, $d \geq 2$ et ν une mesure ergodique f-invariante telle que $h_\nu(f) > (k-1)\log d$. Alors* $\operatorname{Supp} \nu \subset J(f)$.

1.2.2 Théorie de la stabilité

On rappelle les éléments de la théorie de la stabilité introduits dans [BBD18]. On pourra aussi consulter [BeBi18a].

Définition 1.2.6. Une *famille holomorphe d'endomorphismes* de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$, est un couple (M, f), où M est une variété complexe et $f : M \times \mathbb{P}^k \to M \times \mathbb{P}^k$ est une application holomorphe, de la forme $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, f_\lambda(z))$, telle que chaque application f_λ admet le même degré algébrique d, en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{P}^k$.

Étant donnée (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$, considérons l'espace $\mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ des applications holomorphes sur M à valeurs dans $\mathbb{P}^k$. Muni de la topologie de la convergence uniforme locale, il s'agit d'un espace polonais (i.e. métrique complet séparable), comme fermé de l'espace polonais $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{P}^k)$. Plus précisément, la distance entre deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ est donnée par :

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{O}}(\gamma_1, \gamma_2) := \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \max\left(1, \sup_{\lambda \in K_n} \mathrm{dist}_{\mathbb{P}^k}(\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda))\right),$$

où la famille $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *exhaustion* de M par des compacts, c'est-à-dire une suite croissante de compacts recouvrant M et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intérieur de K_{n+1} contient K_n. La topologie induite par cette distance ne dépend pas du choix d'une telle exhaustion. La famille f induit une application continue $\mathcal{F}$ sur l'espace $\mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$, définie de la manière suivante.

$$\forall \gamma \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)\, \forall \lambda \in M \ : \ \mathcal{F}(\gamma)(\lambda) := (f_\lambda \circ \gamma)(\lambda).$$

On note $\Gamma_\gamma := \{(\lambda, \gamma(\lambda)), \lambda \in M\} \subset M \times \mathbb{P}^k$ le graphe d'un élément $\gamma \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$. Pour tout paramètre $\lambda \in M$, on note aussi $p_\lambda : \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k) \to \mathbb{P}^k$ l'application d'évaluation en λ :

$$\forall \lambda \in M \ : \ p_\lambda(\gamma) := \gamma(\lambda).$$

Pour tout $\lambda \in M$, l'application p_λ est continue et satisfait la relation $p_\lambda \circ \mathcal{F} = f_\lambda \circ p_\lambda$.

Définition 1.2.7. Une *lamination* (au-dessus de M sur $\mathbb{P}^k$) est un sous-ensemble borélien $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ tel que pour tout couple de graphes $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}$, on a

$$\Gamma_{\gamma_1} \cap \Gamma_{\gamma_2} \neq \emptyset \implies \gamma_1 = \gamma_2.$$

Pour tout $\lambda \in M$, on note $\mathcal{L}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{L}) = \{\gamma(\lambda), \gamma \in \mathcal{L}\}$ la *fibre* de $\mathcal{L}$ en λ.

On dit qu'une famille d'ensembles mesurables E_λ admet un *mouvement holomorphe* le long de M s'il existe une lamination $\mathcal{L}$ telle que pour tout paramètre $\lambda \in M$ on a $\mathcal{L}_\lambda = E_\lambda$.

Le résultat fondamental suivant, dû à Mañe-Sad-Sullivan [MSS83], Lyubich [Lyu83b], et DeMarco [DeM03] définit et caractérise la stabilité dynamique au sein des familles de fractions rationnelles.

Théorème-Définition 1.2.8. Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ de degré $d \geq 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) les ensembles de Julia J_λ admettent un mouvement holomorphe le long de M ;

(2) $dd^c L \equiv 0$, où $L(\lambda) := \displaystyle\int_{\mathbb{P}^1} \log|f'_\lambda(z)| \mu_\lambda(z)$ est l'*exposant de Lyapunov* de la mesure μ_λ ;

(3) les ensembles $R_\lambda := \cup_{n\in\mathbb{N}} R_n(f_\lambda)$ des points périodiques répulsifs de f_λ admettent un mouvement holomorphe de long de M.

On dit que la famille est *stable* si ces conditions sont vérifiées.

Plus généralement, le lieu de stabilité $\mathrm{Stab}(f) \subset M$ d'une famille holomorphe (M, f) d'endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ est l'ensemble des paramètres $\lambda \in M$ qui admettent un voisinage ouvert $O_\lambda \subset M$ tel que la famille $(O_\lambda, f|_{U_\lambda \times \mathbb{P}^1})$ est stable.

Comme énoncé dans l'introduction, la situation devient hautement plus complexe en dimension $k \geq 2$. Nous donnons maintenant les éléments de [BBD18] qui généralisent la théorie de la stabilité en dimension supérieure.

On considère (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Pour tout paramètre $\lambda \in M$, notons μ_λ la mesure d'équilibre de f_λ et $J_\lambda := \mathrm{Supp}(\mu_\lambda)$ son ensemble de Julia. Une idée clef dans [BBD18] consiste à remplacer la condition $\mathcal{L}_\lambda = J_\lambda$ dans la définition du mouvement holomorphe de l'ensemble de Julia par $\mu_\lambda(\mathcal{L}_\lambda) = 1$. En ce sens, il s'agit d'une théorie mesurable des mouvements holomorphes.

Définition 1.2.9. Une *lamination d'équilibre*, ou *mouvement holomorphe mesurable des ensembles de Julia*, est une lamination $\mathcal{F}$-invariante $\mathcal{L}$ telle que $\mu_\lambda(\mathcal{L}_\lambda) = 1$, pour tout $\lambda \in M$, et telle que l'application $\mathcal{F} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ est d^k-to-1.

Définition 1.2.10. On dit que la famille (M, f) est *μ-stable* si un tel mouvement holomorphe mesurable des ensembles de Julia existe. Plus généralement, le lieu de stabilité $\mu\text{-}\mathrm{Stab}(f) \subset M$ d'une famille (M, f) d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ est l'ensemble des paramètres $\lambda \in M$ qui admettent un voisinage $M_0 \subset M$ tel que la famille $(M_0, f|_{M_0 \times \mathbb{P}^k})$ est μ-stable.

Considérons l'espace

$$\mathcal{J} := \{\gamma \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k) \ : \ \gamma(\lambda) \in J_\lambda, \ \forall \lambda \in M\}.$$

Il s'agit d'un sous-ensemble fermé de $\mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ invariant par $\mathcal{F}$, ce qui en fait un système dynamique topologique $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$. Les propriétés ergodiques de ce système dynamique sont cruciales dans l'approche de [BBD18]. On désigne par $C_f \subset M \times \mathbb{P}^k$ l'ensemble critique de f et on note $GO_f(C_f) := \left(\bigcup_{m \geq 0} f^{-m}\left(\bigcup_{n \geq 0} f^n(C_f)\right)\right)$ sa *grande orbite*, c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble totalement f-invariant de $M \times \mathbb{P}^k$ qui contient C_f.

Définition 1.2.11. Un *tissu d'équilibre* est une mesure de probabilité borélienne $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ satisfaisant :

i) $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M}$ est compact ;

ii) $\mathcal{F}_* \mathcal{M} = \mathcal{M}$;

iii) $\forall \lambda \in M \ : \ p_{\lambda *} \mathcal{M} = \mu_\lambda$.

Un tissu d'équilibre est dit *acritique* si $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$, où $\mathcal{J}_s := \{\gamma \in \mathcal{J} \ : \ \Gamma_\gamma \cap GO_f(C_f) \neq \emptyset\}$.

Dans [BBD18], la définition requiert que la mesure $\mathcal{M}$ soit supportée dans l'espace $\mathcal{J}$. C'est en fait une conséquence de la définition simplifiée ci-dessus [BeBr23, Definition 2.3].

Proposition 1.2.12. *Si $\mathcal{M}$ est un tissu d'équilibre, alors* $\mathrm{Supp}\, \mathcal{M} \subset \mathcal{J}$.

Démonstration. Soit $\gamma \notin \mathcal{J}$. Il existe λ tel que $\gamma(\lambda) \notin J_\lambda$. Comme l'application $p_\lambda : \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k) \to \mathbb{P}^k$ est continue et $J_\lambda \subset \mathbb{P}^k$ est fermé, l'ensemble $p_\lambda^{-1}(\mathbb{P}^k \setminus J_\lambda)$ est un ouvert contenant γ. De plus :

$$\mathcal{M}(p_\lambda^{-1}(\mathbb{P}^k \setminus J_\lambda)) = (p_{\lambda *}\mathcal{M})(\mathbb{P}^k \setminus J_\lambda)) = 1 - \mu_\lambda(J_\lambda)) = 0,$$

ce qui montre que $\gamma \notin \operatorname{Supp} \mathcal{M}$. □

L'existence d'un tissu d'équilibre acritique implique celle d'une lamination d'équilibre [BBD18, Theorem 4.1] et est, en principe, beaucoup plus facile à démontrer. Pour construire une lamination d'équilibre $\mathcal{L}$ à partir d'un tissu d'équilibre acritique $\mathcal{M}$, les auteurs utilisent d'abord la théorie de Choquet pour rendre la mesure $\mathcal{M}$ ergodique [BBD18, Proposition 2.4]. La construction de $\mathcal{L}$ [BBD18, proof of Theorem 4.1] repose ensuite sur l'important résultat suivant.

Proposition 1.2.13. *Soit $\mathcal{M}$ un tissu d'équilibre acritique et $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ un compact. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{K}_\cap := \bigcup_{\gamma' \in \mathcal{K}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\gamma \in \mathcal{J} \,:\, \Gamma_{\mathcal{F}^j(\gamma)} \cap \Gamma_{\gamma'} \neq \emptyset \text{ et } \Gamma_{\mathcal{F}^j(\gamma)} \neq \Gamma_{\gamma'}\}$$

est de mesure nulle. Autrement dit, on a $\mathcal{M}(\mathcal{K}_\cap) = 0$.

La lamination d'équilibre est construite à partir de $\mathcal{L} := \mathcal{K} \setminus \mathcal{J}_s \setminus \mathcal{K}_\cap$, pour $\mathcal{K} = \operatorname{Supp} \mathcal{M}$. La question de la vacuité de $\mathcal{K}_\cap$ est délicate. La preuve de la Proposition 1.2.13 repose sur une estimée de contraction pour les branches inverses, sur le théorème de récurrence de Poincaré [BBD18, Section 4.3], et sur une étude locale de la *fonction de ramification*

$$R_\mathcal{K}(\gamma) := \sup\{\operatorname{dist}_\mathcal{J}(\gamma, \gamma') \,,\, \gamma' \in \mathcal{K} \,:\, \Gamma_\gamma \cap \Gamma_{\gamma'} \neq \emptyset\}.$$

On remarque que $\mathcal{K}_\cap = \{R_\mathcal{K} > 0\}$. Une propriété de semi-continuité assure donc que l'ensemble $\mathcal{K}_\cap$ est un sous-ensemble borélien.

Dans le chapitre 2, nous construirons un tissu d'équilibre sous une hypothèse de normalité post-critique, et montrerons que ce tissu est acritique. A cet effet, nous utiliserons le résultat suivant, déjà présent sous une autre forme dans la théorie [BBD18, Proof of Corollary 1.7].

Proposition 1.2.14. *Soit $\mathcal{M}$ un tissu d'équilibre et $p \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\mathcal{M}(\{\gamma \in \mathcal{J} \,:\, \Gamma_\gamma \subset f^p(C_f)\}) = 0.$$

Démonstration. Pour tout paramètre $\lambda \in M$, on a

$$\mathcal{M}(\{\gamma \in \mathcal{J} \,:\, \Gamma_\gamma \subset f^p(C_f)\}) \leq \mathcal{M}(\{\gamma \in \mathcal{J} \,:\, (\lambda, \gamma(\lambda)) \in f^p(C_f)\}) = \mathcal{M}(p_\lambda^{-1}(f_\lambda^p(C_{f_\lambda})).$$

Or la mesure $p_{\lambda *}\mathcal{M} = \mu_\lambda$ ne donne pas de masse au sous-ensemble analytique $f_\lambda^p(C_{f_\lambda})$.

□

On note $L(\lambda) := \displaystyle\int_{\mathbb{P}^k} \log|\operatorname{Jac} f_\lambda(z)| \mu_\lambda(z)$ la somme des exposants de Lyapunov de μ_λ. Le résultat principal de [BBD18] généralise le Théorème 2.1.1 et caractérise de manière mesurable la stabilité dynamique au sein des endomorphismes.

Théorème 1.2.15. *Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) μ-Stab$(f) = M$;

(2) $dd^c L \equiv 0$.

De plus, la condition

(3) les ensembles $R^J_\lambda = \cup_{n\in\mathbb{N}} R^J_n(f_\lambda)$ des J-cycles de f_λ admettent un mouvement holomorphe le long de M,

implique les deux conditions (1) et (2), et leur est équivalente si $k = 2$ ou si $M \subset \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ est un ouvert simplement connexe.

Le résultat suivant assure que la μ-stabilité est une notion locale et nous sera utile dans le Chapitre 2. Il consiste en un procédé de recollement des laminations d'équilibre dont la preuve est esquissée dans [Bia19, Proposition 4.18]. Par souci de clarté, nous la détaillons ici. Le point important est que si $\mathcal{M}$ est un tissu d'équilibre ergodique acritique, alors $\mathcal{M}(\mathcal{L}_1 \Delta \mathcal{L}_2) = 0$ pour toute paire de laminations d'équilibre $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, d'après [BBD18, Theorem 4.1].

Proposition 1.2.16. *Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. On suppose que M est simplement connexe et que μ-Stab$(f) = M$. Alors la famille (M, f) est μ-stable.*

Démonstration. Quitte à considérer les composantes connexes de M, on peut supposer que M est connexe. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts recouvrant M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(U_n, f|_{U_n})$ est μ-stable. On peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$V_n := \bigcup_{k\leq n} U_k$$

est connexe et simplement connexe. En particulier, cela assure que $V_n \cap U_{n+1}$ est simplement connexe et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = M$.

Étape 1 : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_n, f|_{V_n})$ est μ-stable.*
On définit $\mathcal{L}^{(1)}_0 := \mathcal{L}_0$. Soit $n \geq 0$. On suppose qu'on a construit une lamination d'équilibre $\mathcal{L}^{(1)}_n$ pour la famille $(V_n, f|_{V_n})$. On considère les applications de restriction

$$\begin{aligned} R_1 &: \mathcal{O}(V_{n+1}, \mathbb{P}^k) \to \mathcal{O}(V_n \cap U_{n+1}, \mathbb{P}^k); \\ R_2 &: \mathcal{O}(V_n, \mathbb{P}^k) \to \mathcal{O}(V_n \cap U_{n+1}, \mathbb{P}^k); \\ R_3 &: \mathcal{O}(U_{n+1}, \mathbb{P}^k) \to \mathcal{O}(V_n \cap U_{n+1}, \mathbb{P}^k). \end{aligned}$$

Comme V_n, V_{n+1} et U_{n+1} sont connexes, par unicité du prolongement analytique, les applications R_1, R_2 et R_3 sont injectives. On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)}_{n+1} &:= R_1^{-1}(R_2(\mathcal{L}^{(1)}_n) \cap R_3(\mathcal{L}_{n+1})), \text{ et} \\ \mathcal{L}^{(1)}_{n+1} &:= \mathcal{J} \setminus GO_f((\mathcal{L}^{(0)}_{n+1})^c), \end{aligned}$$

où on rappelle que la grande orbite d'un ensemble $X \subset \mathcal{J}$ est définie par $GO_f(X) := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^i(f^{-j}(X))$. Comme $V_n \cap U_{n+1}$ est simplement connexe, d'après [BBD18, Theorem 4.1] et l'injectivité des applications R_i, la famille $\mathcal{L}^{(0)}_{n+1}$ est une lamination telle que

$\mu_\lambda(p_\lambda(\mathcal{L}^{(0)}_{n+1})) = 1$ pour tout $\lambda \in V_n \cap U_{n+1}$. On a $\mathcal{L}^{(1)}_{n+1} \subset \mathcal{L}^{(0)}_{n+1}$, donc la famille $\mathcal{L}^{(1)}_{n+1}$ est aussi une lamination. De plus, comme $p_\lambda(GO_f((\mathcal{L}^{(0)}_{n+1})^c)) = GO_{f_\lambda}(p_\lambda((\mathcal{L}^{(0)}_{n+1})^c))$ est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, on a $p_\lambda(\mathcal{L}^{(1)}_{n+1}) = 1$. Comme la grande orbite est totalement invariante, ceci prouve que la famille $\mathcal{L}^{(0)}_{n+1}$ est une lamination d'équilibre.

Étape 2 : *La famille (M, f) est μ-stable.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme M est supposé connexe, l'application de restriction

$$r_n : \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k) \to \mathcal{O}(V_n, \mathbb{P}^k)$$

est injective. Ainsi, la famille

$$\mathcal{L}^{(2)}_n := r_n^{-1}(\mathcal{L}^{(1)}_n)$$

définit une famille décroissante de laminations sur M satisfaisant $\mu_\lambda(p_\lambda(\mathcal{L}^{(2)}_n)) = 1$ pour tout $\lambda \in V_n$. Dès lors, la lamination $\mathcal{L} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^{(2)}_n$ définit une lamination d'équilibre sur M. □

1.3 Propagation de régularité

Étant donnés une famille stable (M, f) d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ et un paramètre $\lambda_0 \in M$, la restriction $\psi|_{J_{\lambda_0}}$ de toute fonction $\psi : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}$ à l'ensemble de Julia de f_{λ_0} jouit de la même régularité que ψ. Le mouvement holomorphe des ensembles de Julia permet alors de définir $\psi_\lambda : J_\lambda \to \mathbb{R}$ en propageant la fonction $\psi_{\lambda_0} = \psi$. Dans cette section, on met en évidence, d'une part, que si $k = 1$, les fonctions ψ_λ héritent de la même régularité que ψ, et, d'autre part, que les fonctions ψ_λ peuvent être prolongées à $\mathbb{P}^k$ en préservant cette régularité. En particulier, cela justifie que les fonctions potentiel ψ_λ qui seront utilisées dans la Section 3.1 seront définies uniquement sur J_λ.

1.3.1 Estimation hölderienne pour les laminations sur $\mathbb{P}^1$

En dimension 1, la stratégie de Mañe-Sad-Sullivan [MSS83] repose sur le λ-lemme, dont voici une reformulation.

Définition 1.3.1. On dit qu'une lamination $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^1)$ au-dessus d'une variété complexe M sur $\mathbb{P}^1$ induit un *mouvement holomorphe continu* si pour tout paramètre $\lambda_0 \in M$, l'application $h_{\lambda_0} : M \times \mathcal{L}_{\lambda_0} \to \mathbb{P}^1$ définie par

$$\forall \gamma \in \mathcal{L} \ : \ h_{\lambda_0}(\lambda, \gamma(\lambda_0)) := \gamma(\lambda)$$

est continue.

Lemme 1.3.2 (λ-lemme)**.** *Soit M un variété complexe. L'adhérence $\overline{\mathcal{L}}$ d'une lamination $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^1)$ définit une lamination et induit un mouvement holomorphe continu.*

En particulier, étant donnée une famille holomorphe (M, f) de fractions rationnelles, si chaque tranche $\mathcal{L}_\lambda$ contient l'ensemble des cycles répulsifs de f_λ, alors $\overline{\mathcal{L}}$ définit un mouvement holomorphe de l'ensemble de Julia le long de M. Par conséquent, tout mouvement

holomorphe mesurable de l'ensemble de Julia dans $\mathbb{P}^1$ (au sens de la Définition 1.2.9) induit un mouvement holomorphe continu.

Il est remarquable que la continuité des applications $h^\lambda_{\lambda_0} : \mathcal{L}_{\lambda_0} \to \mathcal{L}_\lambda$, définies par $h^\lambda_{\lambda_0}(z) := h_{\lambda_0}(\lambda, z)$, est obtenue comme une conséquence dans le λ-lemme. Ce sont en fait des applications quasiconformes [Ahl96]. Le prolongement en un mouvement holomorphe de l'espace $\mathbb{P}^1$ tout entier fait l'objet du lemme de Słodkowski [Sło91].

Dujardin [Duj06] a observé que l'inégalité de Harnack (Proposition 1.1.3) permet d'obtenir une condition hölderienne pour les laminations dans $\mathbb{C}$. Nous reprenons sa preuve pour montrer que cette condition est satisfaite pour toute lamination $\mathcal{L}$ équicontinue en tant que sous-ensemble de $\mathcal{O}(M, \mathbb{P}^1)$, et qu'elle implique le Lemme 1.3.2. Cela nous permet de souligner le rôle joué par la dimension 1. Il s'agit donc d'une version alternative du λ-lemme dont la preuve fait appel à un outil élémentaire de théorie du potentiel.

Proposition 1.3.3. *Soit M une variété complexe et $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^1)$ une lamination équicontinue. Pour tout ouvert $M_0 \Subset M$, il existe des constantes $b > 0$ et $\beta \leq 1$ telles que pour tous paramètres $\lambda_0, \lambda \in M_0$, on a*

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L} \ : \ \mathrm{dist}_{\mathbb{P}^1}(\gamma_1(\lambda_0), \gamma_2(\lambda_0)) \leq b \cdot \mathrm{dist}^\beta_{\mathbb{P}^1}(\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)) \tag{1.1}$$

En particulier, l'adhérence $\overline{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ définit une lamination et induit un mouvement holomorphe continu.

Démonstration. Dans tout ce qui suit, on choisit une normalisation de $\mathrm{dist}_{\mathbb{P}^1}$ de sorte que $\mathrm{diam}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = 1$. Soit un paramètre $\lambda_0 \in M_0$. Il suffit de montrer l'estimation (1.1) pour tout λ appartenant à un voisinage ouvert de λ_0. On considère un atlas holomorphe $\{\mathcal{U}_i, \varphi_i\}_{i=1}^s$ de $\mathbb{P}^1$ tel que pour chaque couple de points $(z_1, z_2) \in \mathbb{P}^1$, il existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $z_1 \in \mathcal{U}_i$, $z_2 \in \mathcal{U}_i$ et $A := \sup\limits_{1 \leq i \leq s} \mathrm{diam}_{\mathbb{C}}(\varphi_i(\mathcal{U}_i)) \leq 1$.

Pour tout $1 \leq i \leq s$, par équicontinuité de $\mathcal{L}$ en λ_0, il existe un réel $R_i > 0$ suffisamment petit pour que pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{L}$ tel que $\gamma(\lambda_0) \in \mathcal{U}_i$, on a $\gamma(\lambda) \in \mathcal{U}_i$ pour tout paramètre $\lambda \in B_M(\lambda_0, R_i) \subset M_0$. On fixe $0 < R < \min\limits_{1 \leq i \leq s} R_i$ et on note $B := B_M(\lambda_0, R)$. On considère deux graphes $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}$. Si $\gamma_1 = \gamma_2$, l'estimation (1.1) est immédiatement vérifiée pour tout $\lambda \in B$. Sinon, on considère la fonction $u^{\gamma_2}_{\gamma_1} : B \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie par

$$u^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda) := -\log \mathrm{dist}_{\mathbb{P}^1}(\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)).$$

Comme $\mathcal{L}$ est une lamination, la fonction $u^{\gamma_2}_{\gamma_1}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Les distances $\mathrm{dist}_{\mathbb{P}^1}$ et $\varphi_i^*(\mathrm{dist}_{\mathbb{C}})$ sont équivalentes sur $\mathcal{U}_i$. Ainsi, il existe $c \geq 0$ telle que pour tout $\lambda \in B$, on a

$$u^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda) - c \leq v^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda) \leq u^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda) + c, \tag{1.2}$$

où la fonction $v^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda) : B \to [-\log A, +\infty[$ est définie par

$$v^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda) := -\log |(\varphi_i(\gamma_1(\lambda)) - \varphi_i(\gamma_2(\lambda))|. \tag{1.3}$$

Comme les fonctions $\varphi\circ\gamma_1$ et $\varphi\circ\gamma_2$ sont holomorphes, l'équation (1.3) assure que la fonction $v^{\gamma_2}_{\gamma_1}$ est harmonique. En particulier, $v^{\gamma_2}_{\gamma_1}\in\mathcal{H}(B)\cap\mathcal{C}^0(\overline{B})$. Par hypothèse sur l'atlas, on a $-\log A\geq 0$ et la fonction $v^{\gamma_2}_{\gamma_1}$ est positive. D'après la Proposition 1.1.3, pour tout $0<r<R$, et tout $\lambda\in B_M(\lambda_0,r)$, on a

$$v^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda)\leq\frac{1+r/R}{(1-r/R)^{m-1}}v^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda_0). \tag{1.4}$$

En combinant (1.2) avec (1.4), on obtient

$$u^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda)\leq c\left(1+\frac{1+r/R}{(1-r/R)^{m-1}}\right)+\frac{1+r/R}{(1-r/R)^{m-1}}u^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\lambda_0),$$

ce qui montre l'estimation (1.1), en posant $b:=e^{-c\left(1+\frac{1+r/R}{(1-r/R)^{m-1}}\right)}$ et $\beta:=-\frac{1+r/R}{(1-r/R)^{m-1}}$.

Soit maintenant deux graphes $\gamma_1,\gamma_2\in\overline{\mathcal{L}}$ et un paramètre $\lambda\in M$ tel que $\gamma_1(\lambda)=\gamma_2(\lambda)$. Considérons un paramètre $\lambda_0\in M$ et un ouvert $M_0\Subset M$ contenant λ et λ_0. Il existe une suite $(\gamma_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(\gamma_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$) de $\mathcal{L}$ qui converge localement uniformément vers γ_1 (resp. γ_2). On applique l'estimation (1.1) et on obtient, pour tout tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{P}^1}(\gamma_1^n(\lambda_0),\gamma_2^n(\lambda_0))\leq b\cdot\mathrm{dist}^{\beta}_{\mathbb{P}^1}(\gamma_1^n(\lambda),\gamma_2^n(\lambda)). \tag{1.5}$$

En passant à la limite dans (1.5) quand $n\to\infty$, on obtient $\gamma_1(\lambda_0)=\gamma_2(\lambda_0)$, ce qui prouve que $\overline{\mathcal{L}}$ définit une lamination. La continuité du mouvement holomorphe induit par $\overline{\mathcal{L}}$ découle alors de l'estimation (1.1) et de l'équicontinuité de la famille. □

En dimension 1, une conséquence du théorème de Montel assure que pour qu'une famille de fonctions holomorphes soit équicontinue, il suffit que leurs graphes évitent au moins trois graphes holomorphes distincts. En particulier, toute lamination sur $\mathbb{P}^1$ est équicontinue. La situation n'est plus aussi simple en dimension supérieure. Le contre-exemple suivant fournit une lamination dénombrable sur $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas équicontinue, mais il n'est pas de nature dynamique. En pratique, les laminations construites usuellement par des méthodes dynamiques sont équicontinues.

Contre-exemple 1.3.4. *Soit $M=B_{\mathbb{C}}(0,1)$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui diverge vers $+\infty$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère le graphe $\gamma_n\in\mathcal{O}(M,\mathbb{P}^2)$ défini par*

$$\gamma_n(\lambda):=[\lambda t_n:1/n:1].$$

L'ensemble $\mathcal{L}=\{\gamma_n,n\in\mathbb{N}\}$ définit une lamination. Chaque fonction γ_n est à valeurs dans la carte $[z_2\neq 0]\simeq\mathbb{C}^2\subset\mathbb{P}^2$. Dans cette carte, la matrice jacobienne de l'application γ_n au point $\lambda=0$ est $D_0(\gamma_n)=\begin{pmatrix}t_n&0\\0&0\end{pmatrix}$, ce qui montre que $\mathcal{L}$ n'est pas équicontinue.

L'absence de lemme de Hurwitz rend le λ-lemme inaccessible en dimension supérieure. La preuve donnée ici ne s'étend pas pour $k\geq 2$, puisque la fonction $v^{\gamma_2}_{\gamma_1}$ définie par (1.3) n'est plus harmonique. Ainsi, la généralisation de la Proposition 1.3.3 est fausse sans hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{L}$. On rappelle que l'adhérence $\overline{\mathcal{L}}$ d'une lamination d'équilibre $\mathcal{L}$ admet mesurablement peu d'intersections (voir la Proposition 1.2.13). La question de la régularité (estimation (1.1)) pour les laminations d'équilibre dans $\mathbb{P}^k$ se pose.

1.3.2 Prolongement des fonctions $h(t)$-continues

Considérons (E, d_E) un espace métrique connexe satisfaisant $\mathrm{diam}(E) \leq 1$ et une fonction strictement croissante continue $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $h(0) = 0$. Comme h est injective, on définit une semi-distance sur E par $d_h = h \circ d_E$. On dit qu'une fonction $\psi : E \to \mathbb{R}$ est $h(t)$-*continue* s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x, y \in E$, on a

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c \cdot d_h(x, y). \tag{1.6}$$

On munit l'espace E_h des fonctions $h(t)$-continues de la semi-norme $||\cdot||_h$ définie par

$$\forall \psi \in E_h \ : \ ||\psi||_h = \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{d_h(x, y)}.$$

L'espace E_h est une partie équicontinue de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$. Si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions $h(t)$-continues, alors la fonction $m = \min(\psi_1, \psi_2)$ est encore $h(t)$-continue.

Lemme 1.3.5. *Si h est concave, alors pour tout triplet $(x, y, z) \in E$, on a*

$$d_h(x, y) \leq d_h(x, z) + d_h(z, y).$$

En particulier, la semi-distance d_h est une distance sur E.

Pour toute fonction uniformément continue ψ, on peut trouver une fonction strictement croissante concave h telle que $h(0) = 0$ et pour laquelle ψ est $h(t)$-continue. Quitte à obtenir une semi-norme équivalente, on peut remplacer la fonction h par toute autre fonction h' avec le même comportement asymptotique en 0, ce qui garantit $E_h = E_{h'}$. Par exemple on peut définir l'espace des fonctions α-höldériennes, avec $0 < \alpha \leq 1$ comme l'espace E_{h^α}, où $h^\alpha(t) := t^\alpha$. De même, l'espace des fonctions $\log^q$-continues, où $q > 0$, peut être défini comme E_{h_q}, où $h_q(t) = \frac{1}{|\ln(t) - q - 1|^q}$. Remarquons que les fonctions h_α, pour $0 < \alpha < 1$ et h_q, pour $q > 0$ sont concaves.

Proposition 1.3.6. *Soit (E, d_E) un espace métrique connexe satisfaisant* $\mathrm{diam}(E) \leq 1$*, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante, concave, telle que $h(0) = 0$, $F \subset E$ un sous-ensemble fermé et $\psi : F \to [0, M]$ une fonction $h(t)$-continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction ψ se prolonge à E en une fonction $h(t)$-continue $\widehat{\psi} : E \to [0, M + \epsilon[$.*

Démonstration. Fixons $c > 0$ tel que pour tout $x, y \in F$, on a $|\psi(x) - \psi(y)| \leq c \cdot d_h(x, y)$. On procède alors en trois étapes.
Étape 1 : *la fonction ψ se prolonge en une fonction $\widetilde{\psi} : E \to \mathbb{R}_+$.*
On définit la fonction $\widetilde{\psi} : E \to \mathbb{R}$ par

$$\widetilde{\psi}(x) := \inf_{z \in F} \{\psi(z) + c \cdot d_h(x, z)\}.$$

Soit $x \in E$. Pour tout $y, z \in F$, en combinant l'inégalité 1.6 avec le Lemme 1.3.5, on obtient

$$c \cdot d_h(x, z) + \psi(z) - \psi(y) \geq c \cdot d_h(x, z) - c \cdot d_h(z, y) \geq -c \cdot d_h(x, y).$$

En particulier, pour tout $y, z \in F$, on a

$$\psi(z) + c \cdot d_h(x, z) \geq \psi(y) - c \cdot d_h(x, y),$$

ce qui conduit, en considérant la borne inférieure selon z à

$$\widetilde{\psi}(x) \geq \psi(y) - c \cdot d_h(x, y).$$

Enfin, en fixant $x = y \in F$, on obtient $\widetilde{\psi}(x) \geq \psi(x)$. L'inégalité réciproque provient directement de la définition de c. Cela montre que $\widetilde{\psi}_{|F} = \psi$.
Étape 2 : *la fonction $\widetilde{\psi}$ est $h(t)$-continue.*
Soient $y, z \in E$. Considérons $\eta > 0$ et $x \in F$ tels que

$$\psi(x) + c \cdot d_h(x, z) \leq \widetilde{\psi}(z) + \eta,$$

ce qui conduit, d'après la définition de $\widetilde{\psi}$, à

$$\widetilde{\psi}(z) - \widetilde{\psi}(y) \geq \psi(x) + c \cdot d_h(x, z) - \eta - (\psi(x) + c \cdot d_h(y, x)) \geq c \cdot [d_h(x, z) - d_h(y, x)] - \eta.$$

On utilise de nouveau le Lemme 1.3.5 pour obtenir

$$\forall \eta > 0 \ : \ \widetilde{\psi}(z) - \widetilde{\psi}(y) \geq -c \cdot d_h(y, z) - \eta.$$

Passer à la limite pour $\eta \to 0$ et échanger les rôles de y et z permet de conclure que $||\widetilde{\psi}||_h \leq c$.
Étape 3 : *conclusion.*
Soit $\varepsilon > 0$ et $M_\epsilon := M + \varepsilon$. D'après les définitions, il est clair que $\widetilde{\psi} \geq \min_F \psi \geq 0$. On définit

$$\widehat{\psi}(x) \coloneqq \min(\widetilde{\psi}(x), M_\epsilon) = \begin{cases} \widetilde{\psi}(x) & \text{si } x \in K_\epsilon(\psi)\,; \\ M_\epsilon & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $K_\varepsilon(\psi)$ désigne l'ensemble $K_\varepsilon(\psi) := \{x \in E \ : \ \widetilde{\psi}(x) \leq M_\varepsilon\}$, de sorte que $\widehat{\psi} \leq M_\epsilon$. Comme la fonction $\widetilde{\psi}$ est $h(t)$-continue, il résulte que la fonction $\widehat{\psi}$ est aussi $h(t)$-continue. Enfin, on a $F \subset K_\varepsilon(\psi)$, ce qui assure que $\widehat{\psi}|_F = \widetilde{\psi}|_F = \psi$, et met fin à la preuve. □

Chapitre 2

Courant de ramification, normalité post-critique et stabilité

Dans ce chapitre, issu d'une collaboration avec Berteloot [BeBr23], nous établissons une nouvelle caractérisation de la stabilité pour les familles holomorphes d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ en exploitant une version paramétrique du courant de ramification introduit par Dinh et Sibony [DS10a]. Cela nous permet à la fois de simplifier l'approche originale de [BBD18], et de mieux comprendre la stabilité en termes de normalité post-critique.

2.1 Présentation du résultat

Au coeur de la théorie de Mañe-Sad-Sullivan et Lyubich pour les familles de fractions rationnelles réside une caractérisation de la stabilité dynamique globale par une condition de normalité post-critique qui permet d'encoder la stabilité dynamique de l'ensemble critique. Quitte à considérer un revêtement de l'espace des paramètres M, on peut toujours supposer que les points critiques sont *marqués*, c'est-dire que l'ensemble critique C_f de f est constitué de la réunion des graphes d'un ensemble de $2d-2$ fonctions holomorphes $c_j : M \to \mathbb{P}^k$, $1 \leq j \leq 2d-2$. Sous cette hypothèse non-restrictive, cette caractérisation vient compléter le Théorème 1.2.8 et prend la forme suivante.

Théorème 2.1.1 ([MSS83] [Lyu83b])**.** *Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^1$ dont les points critiques $\{c_j\}_{1\leq j\leq n}$ sont marqués. La famille (M, f) est stable si et seulement si les familles de fonctions holomorphes $\{f^{\circ n} \circ c_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont normales sur M.*

Un corollaire important de ce résultat et de la finitude de l'ensemble critique est la densité du lieu de stabilié $\mathrm{Stab}(f)$ dans l'espace des paramètres M. Rappelons que DeMarco [DeM03] a démontré que l'exposant de Lyapunov $L(\lambda)$ de μ_λ définit une fonction plurisousharmonique qui est pluriharmonique exactement sur le lieu de stabilité. Le courant positif fermé $T_{bif} := dd^c L$, appelé *courant de bifurcation* jouit de propriétés d'équidistribution dans l'espace des paramètres [DF08, BaBe09, Ber11, Duj11, Oku14, GV17, GOV19].

En dimension supérieure, bien qu'une condition de normalité post-critique a joué un rôle crucial dans le travail [BBD18] (voir aussi [Bia19]), elle n'était pas directement reliée à la

μ-stabilité. Le but de ce chapitre est à la fois d'introduire une nouvelle notion de normalité post-critique valable en toute dimension, et de montrer qu'elle implique naturellement la μ-stabilité. A cet effet, nous adaptons, dans le cadre des familles, le concept de *courant de ramification*, emprunté au travail [DS03] (voir aussi [DS10a]) de Dinh et Sibony sur l'équidistribution des préimages pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$.

Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de dimension $d \geq 2$. On rappelle que $C_f \subset M \times \mathbb{P}^k$ désigne l'ensemble critique de f.

Définition 2.1.2. Pour tout $n \geq 0$, on définit un courant positif fermé sur $M \times \mathbb{P}^k$ par

$$R_{n,f} := d^{-kn}(f^{\circ n})_*[f(C_f)],$$

où $[f(C_f)]$ désigne le courant d'intégration sur le sous-ensemble analytique $f(C_f) \subset M \times \mathbb{P}^k$. Le *courant de ramification* R_f est défini comme la somme formelle

$$R_f := \sum_{n\geq 0} R_{n,f} = \sum_{n\geq 0} d^{-kn}(f^{\circ n})_*[f(C_f)].$$

Le *domaine de convergence* $\Omega(R_f) \subset M \times \mathbb{P}^k$ de R_f est l'ensemble des points qui admettent un voisinage U tel que la série $\sum_{n\geq 0} \|\mathbb{1}_U R_{n,f}\|$ est convergente. Remarquons que R_f définit un $(1,1)$-courant positif fermé sur son domaine de convergence $\Omega(R_f)$.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant. On rappelle que l'ensemble μ-Stab(f) a été introduit en Définiton 1.2.10.

Théorème 2.1.3. *Soit (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$ et $\pi_M : M \times \mathbb{P}^k \to M$ la projection canonique. Alors :*

$$\Omega(R_f) = \pi_M^{-1}(\mu\text{-Stab}(f)) = \pi_M(\Omega(R_f)) \times \mathbb{P}^k.$$

Comme nous le verrons dans la prochaine section, il suit du Théorème 2.1.3 qu'un paramètre λ_0 est μ-stable si et seulement si $\|(f^{\circ n})_*[C_f]\|_{D_0\times\mathbb{P}^k} = O(d^{(k-1)n})$, pour un certain voisinage $D_0 \subset M$ de λ_0. Cette dernière condition apparaissait déjà (voir [BBD18, Proposition 3.12(3)] ou [Bia19, Proposition A']), et comme pour tout λ, on a $\|(f_\lambda^{\circ n})_*[C_{f_\lambda}]\|_{\mathbb{P}^k} \sim_n d^{(k-1)n}$, on peut l'interpéter comme une condition de normalité post-critique. En dimension $k = 1$, cette condition est effectivement équivalente à celle fournie par le Théorème 2.1.1 (voir [BeBi18a, Theorem 3.9, proof of (5) $\implies$ (6)]).

2.2 Le rôle du Théorème 2.1.3 dans la théorie de la stabilité

Dans toute cette section, on fixe une famille holomorphe (M, f) d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. On note $m := \dim M$ la dimension de M comme variété complexe. On rappelle que la mesure d'équilibre μ_λ de f_λ est une mesure de Monge-Ampère donnée par $\mu_\lambda = (dd^c_z g(\lambda, z) + \omega_{\mathbb{P}^k})^k$, où g est la fonction de Green (voir [DS10a, Theorem 1.16], qui est continue sur $M \times \mathbb{P}^k$, et $\omega_{\mathbb{P}^k}$ est la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k$. On note $L(\lambda) =$

$\int_{\mathbb{P}^k} \log|\operatorname{Jac} f_\lambda(z)| d\mu_\lambda(z)$ la somme des exposants de Lyapunov de (f_λ, μ_λ). Pour chaque entier n et chaque paramètre λ, on rappelle que l'ensemble $R_n^J(\lambda) := R_n(f_\lambda) \cap J_\lambda$ des J-cycles de période n désigne l'ensemble des cycles répulsifs de f_λ qui appartiennent à l'ensemble de Julia de f_λ. On peut maintenant introduire deux notions a priori affaiblies de stabilité.

Définition 2.2.1. La famille (M, f) est dite *faiblement stable* (respectivement *asymptotiquement faiblement stable*) si, pour tout sous-ensemble compact $M_0 \Subset M$, il existe une suite de laminations $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ au-dessus de M telle que pour tout paramètre $\lambda \in M_0$, on a : $(\mathcal{L}_n)_\lambda = R_n^J(\lambda)$ (respectivement $(\mathcal{L}_n)_\lambda \subset R_n^J(\lambda)$ et $|\mathcal{L}_n| \sim_n |R_n^J(\lambda)|$).

Le résultat suivant rassemble ceux de [BBD18, Bia19] avec le Théorème 2.1.3. Il apporte à la fois une preuve plus directe de certains résultats de [BBD18, Bia19] tout en les complétant par une caractérisation plus fine de la stabilité en termes de normalité post-critique. L'équivalence *iii)* $\iff$ *iv)* constitue notre Théorème A.

Théorème 2.2.2. *On suppose que M est simplement connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $dd^c L \equiv 0$;

ii) $\|f_*^{\circ n}[C_f]\|_{D_0\times\mathbb{P}^k} = O(d^{(k-1)n})$ *pour tout ouvert* $D_0 \Subset M$;

iii) $\Omega(R_f) = M \times \mathbb{P}^k$;

iv) la famille (M, f) *est* μ*-stable ;*

v) la famille (M, f) *est asymptotiquement faiblement stable.*

Remarquons que le Théorème 1.2.15 fournit aussi l'équivalence avec la stabilité faible lorsque $k = 2$ ou lorsque $M \subset \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ est ouvert. La condition *v)* n'apparaissait pas dans [BBD18]. Berteloot [Ber18] a observé que le mouvement holomorphe d'une proportion non-nulle des J-cycles suffit à garantir la μ-stabilité. Bianchi [Bia19] a montré l'équivalence des assertions *i)*, *iv)*, *v)* et une version de *ii)* dans le contexte plus général des applications d'allure polynomiale.

Nous rappelons les outils principaux utilisés pour la démonstration du Théorème 2.2.2. L'idée principale est que les propriétés de stabilité peuvent se lire à travers la fonction de Lyapunov $L(\lambda)$. C'est l'objet des deux formules suivantes :

Formule du $dd^c L$: $dd^c L = \pi_{M*}\left((dd^c_{\lambda,z} g(\lambda, z) + \omega_{\mathbb{P}^k})^k \wedge [C_f]\right)$.

Formule d'approximation : $L(\lambda) = \lim_{n\to\infty} d^{-kn} \sum_{z\in R_n^J(\lambda)} \log|\operatorname{Jac} f_\lambda(z)|$.

La première formule a été obtenue par Bassanelli et Berteloot dans [BaBe07]. Elle généralise les formules de Przytycki [Prz85] (voir aussi Manning [Man84]) pour les polynômes en dimension 1, et DeMarco [DeM03] pour les fractions rationnelles. La deuxième est issue des travaux de Berteloot, Dupont, Molino dans [BDM08] et une preuve simplifiée, contournant certaines difficultés liées à de possibles résonnances entre les exposants de Lyapunov, a été fournie par Berteloot et Dupont dans [BeDu19].

On montre maintenant comment le Théorème 2.2.2 est obtenu à partir du lemme principal suivant, dont la preuve fait l'objet de la Section 2.3. Appliquer le Théorème 2.2.2 à la famille (μ-Stab$(f), f$) conduit naturellement au Théorème 2.1.3.

Lemme 2.2.3. *Si $\lambda_0 \in \pi_M(\Omega(R_f))$, alors il existe un voisinage $D_0 \subset M$ de λ_0 tel que la famille (D_0, f) admet un tissu d'équilibre acritique.*

Preuve du Théorème 2.2.2. i) $\Rightarrow$ ii) Il s'agit d'une conséquence directe de l'estimation suivante qui provient de la formule du dd^cL (voir [BBD18, Lemma 3.13]). Il existe un réel $\alpha > 0$ qui ne dépend que des dimensions k et m, tel que pour tout ouvert $D_0 \Subset M$, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_*^{\circ n}[C_f]\|_{D_0 \times \mathbb{P}^k} = \alpha \|dd^c L\|_{D_0} + O(d^{(k-1)n}), \tag{2.1}$$

ce qui conclut, puisque $dd^cL \equiv 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii) est immédiate.

iii) $\Rightarrow$ iv). D'après le Lemme 2.2.3, chaque paramètre $\lambda_0 \in M$ admet un voisinage $D_0 \subset M$ tel que la famille (D_0, f) admet un tissu d'équilibre acritique. Le théorème de Choquet assure que (D_0, f) admet un tissu d'équilibre acritique ergodique $\mathcal{M}$ (voir [BBD18, Proposition 2.4]). D'après [BBD18, Theorem 4.1], on en déduit que (D_0, f) admet une lamination d'équilibre. La preuve de ce théorème exploite complètement l'ergodicité du système dynamique $(\mathcal{J}, \mathcal{F}, \mathcal{M})$. On conclut au moyen de la Proposition 1.2.16.

iv) $\Rightarrow$ v). Ce résultat a été démontré par Bianchi [Bia19, Theorem 4.11] dans le cadre plus général des familles d'applications d'allure polynomiale de grand degré topologique. La preuve consiste à généraliser au système $(\mathcal{J}, \mathcal{F}, \mathcal{M})$, où $\mathcal{M}$ est un tissu d'équilibre acritique ergodique associé à la lamination $\mathcal{L}$, la stratégie de Briend et Duval [BrDu99] pour retrouver le résultat d'équidistribution des cycles répulsifs à partir des propriétés de la mesure d'équilibre.

v) $\Rightarrow$ i). On suit la stratégie de [BaBe07] qui traite le cas où tous les J-cycles bougent holomorphiquement. Par hypothèse, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fini $\{\gamma_{j,n}\}_{1 \leq j \leq N_n}$ d'applications holomorphes $\gamma_{j,n} \in \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ telles que $N_n \sim_n d^{kn}$ et $\gamma_{j,n}(\lambda) \in R_n^J(\lambda)$ pour tout $\lambda \in M$. Cet ensemble est invariant par $\mathcal{F}$. On obtient donc :

$$d^{-kn} \sum_{z \in R_n^J(\lambda)} \log |\operatorname{Jac} f_\lambda(z)| = d^{-kn} \sum_{1 \leq j \leq N_n} \log |\operatorname{Jac} f_\lambda(\gamma_{j,n}(\lambda))| + d^{-kn} \sum_{z \in R_n'(\lambda)} \log |\operatorname{Jac} f_\lambda(z)|,$$

où $R_n'(\lambda) := R_n^J(\lambda) \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq N_n} \{\gamma_{j,n}(\lambda)\}$.

Comme l'ensemble $R_n'(\lambda)$ est constitué de cycles répulsifs, le deuxième terme dans la somme ci-dessus est strictement positif, majoré par $K_\lambda d^{-kn} |R_n'(\lambda)| \leq K_\lambda(1 - d^{-kn} N_n)$, où $K_\lambda > 0$ dépend continûment de λ. D'après la formule d'approximation, la fonction L est donc la limite ponctuelle de la suite de fonctions $u_n(\lambda) := d^{-kn} \sum_{1 \leq j \leq N_n} \log |\operatorname{Jac} f_\lambda(\gamma_{j,n}(\lambda))|$. Comme u_n est pluriharmonique et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est localement uniformément bornée, le Lemme 1.1.5 assure la convergence uniforme, quitte à extraire une sous-suite. D'après la Proposition 1.1.4, la fonction L est donc pluriharmonique. □

Pour clore cette section, nous rappelons le rôle joué par un certain ensemble de paramètres dans l'étude de la stabilité. Un paramètre $\lambda_0 \in M$ est appelé *paramètre de Misiurewicz* si un point pérodique répulsif de f_{λ_0} appartient à l'ensemble post-critique de f_{λ_0}, et que cette situation n'est pas persistente sous perturbations du paramètre (voir [BBD18, Definition 1.5] ou [Bia19] pour la définition précise). Remarquons que les paramètres Misiurewicz sont des exemples élémentaires de paramètres au voisinage desquels, en un certain sens, il n'y a pas normalité post-critique. Ces paramètres apparaissaient déjà en dimension 1 pour caractériser la stabilité dans les familles de fractions rationnelles (voir par exemple [Lev83, Lyu83b]).

Le résultat essentiel concernant les paramètre Misiurewicz est le suivant [BBD18, Proposition 3.7]. La preuve combine la formule du dd^cL avec un argument de transfert phase-paramètre déjà utilisé par Buff-Epstein [BE09] dans le cas des frations rationnelles.

Proposition 2.2.4. *Si $dd^cL = 0$ sur M, alors M ne contient aucun paramètre Misiurewicz.*

Ce résultat a été utilisé par plusieurs auteurs pour construire des familles holomorphes d'endomorphismes dont le lieu de bifurcation $M \setminus \mu\text{-Stab}(f)$ admet un intérieur non-vide [BiTa17, Duj17, Taf21, Bie19], ou pour estimer la dimension de Hausdorff du lieu de bifurcation [BeBi18b]. Notons également que, au moyen de techniques différentes que celles utilisées dans [BBD18], Bianchi a généralisé la Proposition 2.2.4 au cadre des familles d'applications d'allure polynomiale de grand degré topologique [Bia19, Theorem A].

On peut aussi montrer que les paramètres Misiurewicz sont denses dans le lieu de bifurcation [BBD18, Theorem 1.6]. Ainsi, une conséquence de la Proposition 2.2.4 est que l'adhérence des paramètres Misiurewicz est exactement le lieu de bifurcation, ce qui renforce le parallèle paramétrique de la densité des J-cycles dans l'ensemble de Julia. Ce résultat jouait un rôle très important dans l'approche de [BBD18]. Sa preuve représente un point délicat qui fait intervenir des arguments entropiques. La preuve du Théorème 2.2.2 présentée ici permet de s'en passer.

Schéma de l'approche [BBD18] + [Bia19].

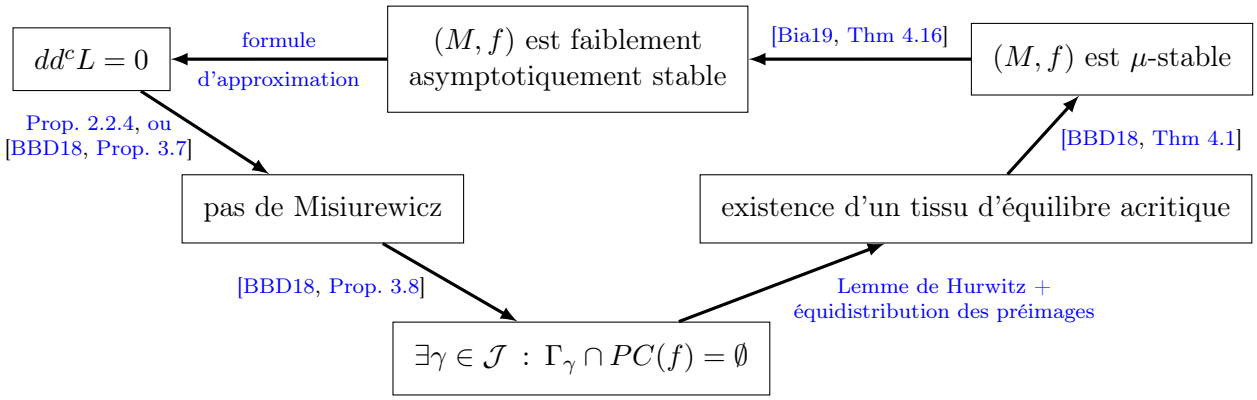
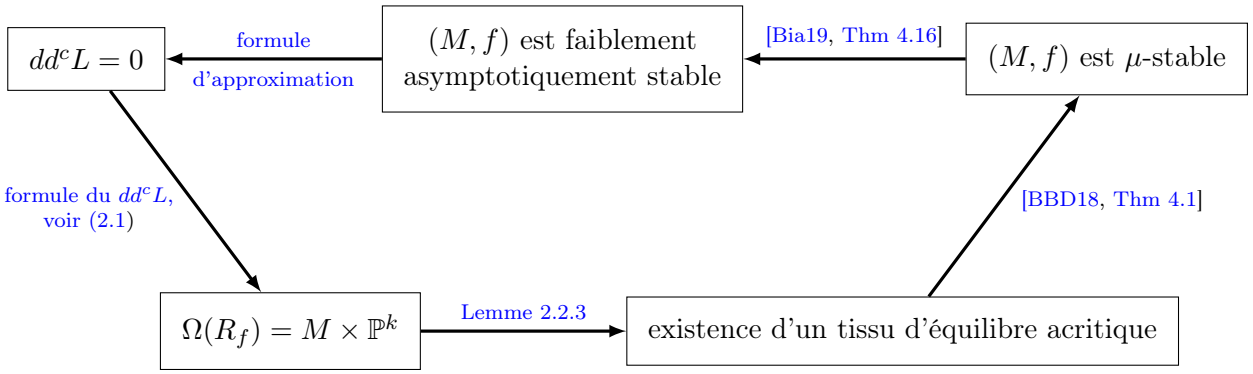


Schéma de la nouvelle approche.



2.3 Preuve du Lemme 2.2.3

Dans toute la preuve, on notera $Y := f(C_f)$. On fixe $a := (\lambda_0, z_0) \in \Omega(R_f)$ et on considère $D \subset M$ (respectivement $B \subset \mathbb{P}^k$) un voisinage de λ_0 (respectivement de z_0) satisfaisant $\sum_{n=0}^{+\infty} \|\mathbb{1}_U R_{n,f}\| < +\infty$, où $U := D \times B$. Quitte à modifier z_0, on peut supposer que

$$a \notin \bigcup_{n\geq 0} f^{\circ n}(Y).$$

En effet, remarquons que $\bigcup_{n\geq 0} f^{\circ n}(Y) = \bigcup_{\lambda\in M} \left(\{\lambda\} \times \bigcup_{n\geq 0} f_\lambda^{\circ(n+1)}(C_{f_\lambda})\right)$. Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $f_\lambda^{\circ(n+1)}(C_{f_\lambda}) \cap B$ est un sous-ensemble analytique de B d'après le théorème de Remmert. En vertu du théorème de Baire, le fermé $\cup_{n\geq 0} f_\lambda^{\circ(n+1)}(C_{f_\lambda}) \cap B$ est donc d'intérieur vide. En particulier, son complémentaire est non-vide.

Comme le problème est local, quitte à réduire le voisinage D (respectivement B), on peut supposer qu'il est contenu dans une carte locale de M (respectivement de $\mathbb{P}^k$). Autrement dit, on peut supposer que U est un ouvert de $\mathbb{C}^{m+k}$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^{m+k}$ passant par a, et pour chaque droite $\Delta \in \mathcal{D}$, on désigne par Δ_r le disque euclidien contenu dans Δ, de centre a et de rayon $r > 0$. On identifie l'espace $\mathcal{D}$ à $\mathbb{P}^{m+k-1}$, et on le munit de la mesure de probabilité $\mathcal{W}$ induite par la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^{m+k-1}$.

Fixons $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et posons $\delta := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Nous allons construire un tissu d'équilibre acritique pour la famille $(D_0, f|_{D_0})$, où $D_0 \subset D$ est un voisinage de λ_0. La preuve est découpée en cinq étapes. Les trois premières sont directement inspirées des travaux de Dinh et Sibony sur l'équidistribution des préimages (voir [DS03, Section 3.4] ou [DS10a, Section 1.4]).

2.3.1 Étape 1 : Construction d'un grand ensemble de disques Δ_r pour lesquels $f^{\circ n}$ admet presque d^{kn} branches inverses

Lemme 2.3.1. *Il existe un réel $r > 0$ et un sous-ensemble $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ tels que :*

i) $B(a,r) \cap Y = \emptyset$;

ii) $\mathcal{W}(\mathcal{D}') > 1 - \delta$;

iii) $\forall \Delta \in \mathcal{D}' \ : \ \sum_{n=0}^{+\infty} \|R_{n,f} \wedge [\Delta_r]\| \leq \varepsilon$;

iv) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute droite $\Delta \in \mathcal{D}'$, il existe un ensemble $\Gamma_r^n(\Delta)$ de branches inverses de $f^{\circ n}$ au-dessus de Δ_r telles que $|\Gamma_r^n(\Delta)| \geq (1-\varepsilon)d^{kn}$;

v) $\forall \Delta \in \mathcal{D}' \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathcal{F}(\Gamma_r^{n+1}(\Delta)) \subset \Gamma_r^n(\Delta)$;

vi) $\forall \Delta \in \mathcal{D}' \ \forall \gamma \in \Gamma_r^n(\Delta) \ : \ \gamma(\Delta_r) \cap (C_f \cup Y) = \emptyset$.

Démonstration. Considérons $r > 0$ assez petit pour que la boule euclidienne fermée $\overline{B(a,r)}$ de $\mathbb{C}^{m+k}$ soit contenue dans U. Nous allons utiliser le résultat classique suivant (voir [DS10a, Lemma 1.53]).

Lemme 2.3.2. *Soit S un $(1,1)$-courant positif fermé sur U. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ tel que $\mathcal{W}(\mathcal{D}') > 1 - \delta$ et une constante $A_\delta > 0$ indépendante de S, telle que pour toute droite $\Delta \in \mathcal{D}'$, la mesure positive $S \wedge [\Delta_r]$ est bien définie et $\|S \wedge [\Delta_r]\| \leq A_\delta \cdot \|S\|$.*

En appliquant le Lemme 2.3.2 au courant $S = \mathbb{1}_U R_f$, on obtient un réel $A_\delta > 0$ et un sous-ensemble de droites $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ satisfaisant *ii)* et tels que pour tout $\Delta \in \mathcal{D}'$, le produit $\mathbb{1}_U R_f \wedge [\Delta_r]$ est bien défini comme mesure positive, dont on majore la masse par $A_\delta \cdot \|\mathbb{1}_U R_f\|$. D'autre part, quitte à retirer un sous-ensemble $\mathcal{W}$-négligeable de droites de $\mathcal{D}'$, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le courant $\mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r]$ est bien défini. Cela assure la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \|\mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r]\|$, pour tout $\Delta \in \mathcal{D}'$. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \|\mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r]\| &= \left\| \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r] \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r] \right\| + \left\| \mathbb{1}_U \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} R_{n,f} \right) \wedge [\Delta_r] \right\| \\
&= \left\| \mathbb{1}_U \left(\sum_{n=0}^{N} R_{n,f} \right) \wedge [\Delta_r] + \mathbb{1}_U \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} R_{n,f} \right) \wedge [\Delta_r] \right\| \\
&= ||\mathbb{1}_U R_f \wedge [\Delta_r]|| \\
&\leq A_\delta \cdot ||\mathbb{1}_U R_f|| < +\infty.
\end{aligned}$$

Fixons $\mathcal{D}'(N) := \{\Delta \in \mathcal{D}' \ : \ N(\Delta) \leq N\}$, où $N(\Delta)$ est le plus petit entier strictement positif satisfaisant $\sum_{n=N(\Delta)+1}^{+\infty} \|\mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r]\| \leq \varepsilon$. La réunion $\mathcal{D}' = \cup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{D}'(N)$ étant croissante, quitte à remplacer $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{D}(N)$ pour N assez grand, on peut supposer que

$$\forall \Delta \in \mathcal{D}' \ : \ \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|\mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r]\| \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Comme $a \notin \cup_{n\leq N} f^{\circ n}(Y)$, quitte à réduire r, on peut aussi supposer que

$$B(a,r) \cap \cup_{n\leq N} f^{\circ n}(Y) = \emptyset.$$

Ainsi, $R_{n,f} \wedge [\Delta_r] = 0$ pour tout $n \leq N$. En particulier, la condition $i)$ est satisfaite et l'inégalité (2.2) aboutit à la condition $iii)$.

Établissons la condition $iv)$. A cet effet, posons $\varepsilon_n^\Delta := \|\mathbb{1}_U R_{n,f} \wedge [\Delta_r]\|$. Remarquons que $d^{kn}\varepsilon_n^\Delta$ est exactement le cardinal de l'intersection entre $f^n(Y)$ et Δ_r, comptée avec multiplicité. En particulier, $\varepsilon_n^\Delta = 0$ pour $n \leq N$. Fixons $\Delta \in \mathcal{D}'$. On démontre par récurrence sur n que le nombre ν_n^Δ de branches inverses de $f^{\circ n}$ qui ne rencontrent pas Y sur Δ_r satisfait

$$\nu_n^\Delta \geq \left(1 - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^\Delta\right) d^{kn}. \tag{2.3}$$

L'initialisation ($n = 0$) est assurée par la condition $i)$. Montrons l'hérédité. Supposons que (2.3) est vérifiée pour un certain rang $n \geq 0$. Comme l'application f réalise un revêtement non-ramifié de degré d^k, l'application $f^{\circ(n+1)}$ admet au moins $\nu_n^\Delta d^k \geq \left(1 - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^\Delta\right) d^{k(n+1)}$ branches inverses au-dessus de Δ_r. Parmi elles, au plus $d^{k(n+1)}\varepsilon_{n+1}^\Delta$ intersectent Y, ce qui aboutit à la propriété souhaitée pour $f^{\circ(n+1)}$.

On note $\Gamma_r^n(\Delta)$ l'ensemble des branches inverses ainsi construites. La propriété $iii)$ et l'inégalité (2.3) fournissent l'estimation $\nu_n^\Delta \geq (1-\varepsilon)d^{kn}$, ce qui montre la propriété $iv)$. Les propriétés $v)$ et $vi)$ découlent naturellement de la construction.

□

2.3.2 Étape 2 : Estimation du nombre de préimages de a qui appartiennent à beaucoup de ces branches inverses

Soit $r > 0$ donné par le Lemme 2.3.1. Notons $(f^{\circ n})^{-1}(a) =: \{a_1^n, \dots, a_{l_n}^n\}$ et posons $I_n : \mathcal{D}' \to \mathcal{P}\{1, 2, \dots, l_n\}$ l'application qui associe à chaque droite $\Delta \in \mathcal{D}'$ l'ensemble des entiers $s \in \{1, 2, \dots, l_n\}$ tels qu'il existe une branche inverse de $f^{\circ n}$ passant par a_s^n sur Δ_r. Pour tout $s \leq l_n$, on note aussi $\mathcal{D}_s^{r,n} := \{\Delta \in \mathcal{D}' \ : \ s \in I_n(\Delta)\}$ et $\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n} := \{1 \leq s \leq l_n \ : \ \mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}) \geq 1 - 2\sqrt{\varepsilon}\}$.

Lemme 2.3.3. *i)* $(1-\sqrt{\varepsilon})d^{kn} \leq |\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}| \leq d^{kn}$;

ii) il existe une application $i_n : \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n} \to \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}$ *telle que pour tout* $s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$, $f(a_s^n) = a_{i_n(s)}^{n-1}$ *et* $|i_n^{-1}(s)| \leq d^k$;

iii) la suite $(d^{-kn}|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Démonstration. On établit l'estimation suivante :

$$\sum_{s=1}^{l_n} \mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}) \geq (1-\delta)(1-\varepsilon)d^{kn}. \tag{2.4}$$

On note ν la mesure de comptage sur $\{1, 2, \ldots, l_n\}$ et on définit $\widetilde{\mathcal{W}} := \nu \otimes \mathcal{W}$. On considère aussi le sous-ensemble $\mathcal{Q}_n := \{(s, \Delta) : \{s\} \in I_n(\Delta)\} \subset \{1, 2, \ldots, l_n\} \times \mathcal{D}'$. On calcule $\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{Q}_n)$ en partitionnant le sous-ensemble $\mathcal{Q}_n$ de deux manières différentes. On partitionne d'abord selon la valeur de $s \in \{1, 2, \ldots, l_n\}$. On obtient

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{Q}_n) = \widetilde{\mathcal{W}}\left(\bigcup_{s=1}^{l_n} \{s\} \times \mathcal{D}_s^{r,n}\right) = \sum_{s=1}^{l_n} \widetilde{\mathcal{W}}\left(\{s\} \times \mathcal{D}_s^{r,n}\right) = \sum_{s=1}^{l_n} \mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}). \tag{2.5}$$

On partitionne ensuite selon la valeur de $I_n(\Delta) \in \mathcal{P}\{1, 2, \ldots, l_n\}$. On obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}}(\mathcal{Q}_n) &= \widetilde{\mathcal{W}}\left(\bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}\{1,2,\ldots,l_n\}} \mathcal{S} \times I_n^{-1}(\{\mathcal{S}\})\right) \\ &= \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}\{1,2,\ldots,l_n\}} \nu(\mathcal{S}) \cdot \mathcal{W}(I_n^{-1}(\{\mathcal{S}\})). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le Lemme 2.3.1 *iv)* assure que $I_n^{-1}(\{\mathcal{S}\}) = \emptyset$ lorsque $|\mathcal{S}| < (1-\varepsilon)d^{kn}$. Ainsi, l'égalité (2.6) conduit immédiatement à la minoration

$$\widehat{\mathcal{W}}(\mathcal{Q}_n) \geq (1-\varepsilon)d^{kn}\mathcal{W}(\mathcal{D}'). \tag{2.7}$$

L'estimation (2.4) est une conséquence immédiate de (2.5), (2.7) et du Lemme 2.3.1 *ii)*.

On peut maintenant conclure la preuve du Lemme 2.3.3. Comme $l_n \leq d^{kn}$, pour montrer le point *i)*, il suffit de montrer la première inégalité, c'est-à-dire : $(1-\sqrt{\varepsilon})d^{kn} \leq |\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|$. Or :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{l_n} \mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}) &= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}} \mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}) + \sum_{s \notin \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}} \mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}) \\ &\leq |\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}| + (l_n - |\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|)(1-2\sqrt{\varepsilon}) \\ &\leq 2\sqrt{\varepsilon}|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}| + (1-2\sqrt{\varepsilon})d^{kn}, \end{aligned}$$

ce qui, combiné avec (2.4), donne :

$$2\sqrt{\varepsilon}|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}| \geq [(1-\delta)(1-\varepsilon) - (1-2\sqrt{\varepsilon})]d^{kn}.$$

Par choix de δ, il suit :

$$|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}| \geq \left[1 - \frac{\varepsilon + \delta(1-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}\right] d^{kn} = (1-\sqrt{\varepsilon})d^{kn},$$

ce qui prouve le point i).

Montrons maintenant le point ii). On définit l'application $i_n : S_{\varepsilon,r,n} \to \{1, 2, \dots, l_{n-1}\}$ par

$$\forall s \in S_{\varepsilon,r,n} \ : \ f(a_s^n) = a_{i_n(s)}^{n-1}.$$

D'après le Lemme 2.3.1 v) et la définition de $\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$, l'image $i_n(\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n})$ de cette application est contenue dans $\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}$. D'après le Lemme 2.3.1 vi), l'application f réalise un revêtement non-ramifié de degré d^k, ce qui prouve bien que $|i_n^{-1}(s)| \leq d^k$.

Enfin, on obtient l'égalité $|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}| = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}} |i_n^{-1}(s)| \leq d^k |\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}|$ en partitionnant $\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$ selon la valeur de $i_n(s)$. La suite de réels positifs $(d^{-kn}|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante, donc convergente, ce qui montre le point iii) et conclut la preuve.

□

2.3.3 Étape 3 : Prolongement des branches inverses à une boule de rayon uniforme $B(a, r)$

Nous allons montrer que l'application $f^{\circ n}$ admet au moins $(1 - \sqrt{\varepsilon})d^{kn}$ branches inverses au-dessus d'une boule ouverte $B(a, \tau r) \subset B(a, r)$ de $\mathbb{C}^{m+k}$ centrée en a. Pour cela, nous allons combiner le Lemme 2.3.3 avec le théorème de prolongement de Sibony-Wong (voir [SW80] ou [DS10a, Theorem 1.54]), que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 2.3.4 (Sibony-Wong). *Soit $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$ tel que $\mathcal{W}(\mathcal{D}'') \geq c$ pour une constante $c > 0$ et considérons l'ensemble $\Sigma := \bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}''} \Delta_r \subset \mathbb{C}^{m+k}$. Il existe un réel $\tau \in (0, 1)$, indépendant de r et $\mathcal{D}''$, tel que chaque fonction h holomorphe sur un voisinage de Σ admet un prolongement holomorphe $\tilde{h}$ sur $B(a, \tau r)$. De plus, le prolongement $\tilde{h}$ satisfait l'estimation suivante : $\sup_{B(a,\tau r)}|\tilde{h}| \leq \sup_\Sigma |h|$.*

En gardant les notations introduites pour le Lemme 2.3.3, notre résultat précis s'énonce comme suit.

Lemme 2.3.5. *Il existe $\tau \in (0, 1)$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$, l'application $f^{\circ n}$ admet une branche inverse $\gamma_s^n : B(a, \tau r) \to \mathbb{C}^m \times \mathbb{P}^k$ telle que $\gamma_s^n(a) = a_s^n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$, on a $f \circ \gamma_s^n = \gamma_{i_n(s)}^{n-1}$.*

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$. Pour tout $\Delta \in \mathcal{D}_s^{r,n} = \{\Delta \in \mathcal{D}' \ : \ s \in I_n(\Delta)\}$, on note $\gamma_{s,\Delta}^n$ la branche inverse de $f^{\circ n}$ au-dessus de Δ_r passant par a_s^n, c'est-à-dire $\gamma_{s,\Delta}^n(a) = a_s^n$. Remarquons que pour toute paire de droites $\{\Delta, \Delta'\} \subset \mathcal{D}_s^{r,n}$, les applications holomorphes $\gamma_{s,\Delta}^n$ et $\gamma_{s,\Delta'}^n$ sont respectivement définies sur un voisinage de Δ_r et Δ'_r, et coïncident sur l'intersection, qui est un voisinage de a. Par prolongement analytique, on peut donc considérer la branche γ_s^n définie sur un voisinage de $\cup_{\Delta\in\mathcal{D}_s^{r,n}} \Delta_r$.

Par définition de $\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$, on a $\mathcal{W}(\mathcal{D}_s^{r,n}) \geq 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$ et on peut appliquer le Théorème 2.3.4 avec $c = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$ et $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}_s^{r,n}$ et aux fonctions coordonnées de γ_s^n. Ainsi, chaque application γ_s^n se prolonge en une branche inverse de $f^{\circ n}$ au-dessus de $B(a, \tau r)$.

Si $s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$, l'application $f \circ \gamma_s^n$ est une branche inverse de $f^{\circ n}$ au-dessus de $B(a, \tau r)$ et passant par $a_{i_n(s)}^{n-1}$. En d'autres termes, on a $f(a_s^n) = a_{i_n(s)}^{n-1}$. Cette application doit donc coïncider avec la branche $\gamma_{i_n(s)}^{n-1}$ dont l'existence est assurée par le Lemme 2.3.3 et la construction ci-dessus. □

Le lemme suivant est aussi une conséquence du théorème de prolongement de Sibony-Wong. Nous l'utiliserons au cours de l'étape 5.

Lemme 2.3.6. *Soit $\rho > 0$. Pour $u \in \mathcal{O}(B(a,\rho))$, on note $\mathcal{D}_u := \{\Delta \in \mathcal{D} \,:\, 0 \notin u(\Delta_\rho)\}$. Il existe $\tau' \in (0,1)$ tel que si $\mathcal{W}(\mathcal{D}_u) > \frac{1}{2}$, alors $0 \notin u(B(a,\tau'\rho))$.*

Démonstration. Si $u \in \mathcal{O}(B(a,\rho))$ et $\mathcal{W}(\mathcal{D}_u) > \frac{1}{2}$, en particulier, $u(a) \neq 0$ et la fonction u n'est identiquement nulle sur aucun disque $\Delta \in \mathcal{D}$. Le lemme d'Hurwitz assure alors que pour tout disque $\Delta \in \overline{\mathcal{D}_u}$, la fonction u ne s'annule pas sur Δ_ρ. Ceci montre que $\mathcal{D}_u$ est fermé et que la fonction $h := \frac{1}{u}$ est holomorphe sur un voisinage de $\Sigma_u := \bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_u} \Delta_{\rho/2}$. D'après le Théorème 2.3.4, la fonction h se prolonge holomorphiquement en une fonction $\tilde{h} \in \mathcal{O}(B(a,\tau'\rho))$, où $\tau' \in (0,1/2)$ est indépendant de u et de ρ. Comme $u\tilde{h} = uh = 1$ sur l'ensemble $\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_u} \Delta_{\tau'\rho}$, de mesure de Lebesgue est positive, on a $u\tilde{h} = 1$ sur $B(a,\tau'\rho)$, et u ne s'annule pas sur $B(a,\tau'\rho)$. □

2.3.4 Étape 4 : Construction du tissu d'équilibre $\mathcal{M}$

Nous allons utiliser la famille de branches inverses $\{\gamma_s^n, n \geq 1, s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}\}$ obtenue lors de l'étape précédente afin de construire un tissu d'équilibre $\mathcal{M}$ pour la famille (D_0, f), où $D_0 \subset D$ est un voisinage de λ_0. Le théorème d'équidistribution des préimages pour les mesures μ_λ, ainsi que l'ergodicité de ces mesures, joueront ici un rôle important.

Soit $D_0 \times B_0 \subset B(a,\tau r)$ un voisinage de a, où $\tau > 0$ est donné par le Lemme 2.3.5. Pour tout $z \in B_0$, on considère la suite de mesures discrètes $(m_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{O}(D_0, \mathbb{P}^k)$, et leur moyenne de Cesàro $(\mathcal{M}^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$m^n(z) := d^{-kn} \sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}} \delta_{\gamma_{s,z}^n} \text{ et } \mathcal{M}^n(z) := \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} m^l(z),$$

où $\gamma_s^n(\lambda, z) =: (\lambda, \gamma_{s,z}^n(\lambda))$. Notons vol la mesure de Lebesgue sur B_0. On définit alors :

$$m^n := \frac{1}{\mathrm{vol}(B_0)} \int_{B_0} m^n(z) d\,\mathrm{vol}(z) \qquad \text{et}$$
$$\mathcal{M}^n := \frac{1}{\mathrm{vol}(B_0)} \int_{B_0} \mathcal{M}^n(z) d\,\mathrm{vol}(z) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} m^l.$$

Le tissu d'équilibre $\mathcal{M}$ sera obtenu comme une limite faible-$*$ renormalisée de la suite $(\mathcal{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans les définitions ci-dessus, la moyenne sur B_0 permet d'exploiter que pour chaque paramètre $\lambda \in D_0$, presque-tout $z \in B_0$ évite l'ensemble exceptionnel de f_λ. La moyenne de Cesàro assurera la $\mathcal{F}$-invariance de la mesure $\mathcal{M}$. Enfin, la compactié du support de $\mathcal{M}$ sera obtenue grâce au cas particulier suivant d'un résultat classique de Ueda [Ued98, Theorem 2.1].

Lemme 2.3.7. *La famille de toutes les branches inverses de $f^{\circ n}$ au-dessus de $B(a,\tau r)$, lorsque l'entier n parcourt $\mathbb{N}$, est normale dans $\mathcal{O}(B(a,\tau r),\mathbb{P}^k)$. En particulier, pour tout $\alpha>0$, on peut réduire r de sorte que $\mathrm{dist}_{\mathbb{P}^k}(\gamma_s^n(z),\gamma_s^n(a))\leq\alpha$ pour tout point $z\in B(a,\tau r)$ et toute application γ_s^n donnée par le Lemme 2.3.5.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette étape.

Lemme 2.3.8. *La suite de mesures positives $(\mathcal{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{O}(D_0,\mathbb{P}^k)$ admet une valeur d'adhérence $\widetilde{\mathcal{M}}$ pour la topologie faible-$*$, de masse non-nulle. De plus, la mesure de probabilité $\mathcal{M}:=\dfrac{\widetilde{\mathcal{M}}}{\|\widetilde{\mathcal{M}}\|}$ est un tissu d'équilibre pour la famille (D_0,f).*

Par définition, on a :

$$\|\mathcal{M}^n\|=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\|m^l\|=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{vol}(B_0)}\int_{B_0}\|m^l(z)\|d\,\mathrm{vol}(z)=d^{-kn}|\mathcal{S}_{\epsilon,r,n}|,$$

ce qui assure, d'après le Lemme 2.3.3 *iii*), qu'il existe un réel $\alpha\in[0,1)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{M}^n\|=1-\alpha.$$

En vertu du Lemme 2.3.7, la famille de toutes les branches inverses de $f^{\circ n}$ au-dessus de $B(a,\tau r)$, lorsque l'entier n parcourt $\mathbb{N}$, est normale dans $\mathcal{O}(B(a,\tau r),\mathbb{P}^k)$. La famille des restrictions à $D_0\times\{z\}$, pour $z\in B_0$, est aussi normale. En particulier, il existe un sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ de l'espace $(\mathcal{O}(B(a,\tau r),\mathbb{P}^k),\mathrm{dist}_{\mathcal{O}})$ tel que $\mathrm{Supp}(\mathcal{M}^n)\subset\mathcal{K}$ pour chaque entier n. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, la suite $(\mathcal{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\widetilde{\mathcal{M}}$ pour la topologie faible-$*$, dont le support est dans $\mathcal{K}$ et de masse $1-\alpha$.

Montrons que la mesure $\widetilde{\mathcal{M}}$ est $\mathcal{F}$-invariante. Pour cela, on établit l'estimation suivante.

$$\forall z\in B_0\ :\ a_n(z):=\|m^{n-1}(z)-\mathcal{F}_*m^n(z)\|\leq\frac{|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}|}{d^{k(n-1}}-\frac{|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|}{d^{kn}}=:a_n \tag{2.8}$$

Remarquons que $\mathcal{F}(\gamma_{s,z}^n)=\gamma_{i_n(s),z}^{n-1}$. En effet, d'après le Lemme 2.3.5, pour tout $\lambda\in D_0$, on a

$$\mathcal{F}(\gamma_{s,z}^n)(\lambda)=f_\lambda(\gamma_s^n(\lambda,z))=\Pi_{\mathbb{P}^k}\circ f\circ\gamma_s^n(\lambda,z)=\Pi_{\mathbb{P}^k}\circ\gamma_{i_n(s)}^{n-1}(\lambda,z)=\gamma_{i_n(s),z}^{n-1}(\lambda),$$

où $\Pi_{\mathbb{P}^k}:M\times\mathbb{P}^k\to\mathbb{P}^k$ est la projection canonique. Ainsi, en partitionnant $\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}$ selon la valeur de $i_n(s)$, où la fonction i_n est définie par le Lemme 2.3.3 *ii*), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_*m^n(z)&=d^{-kn}\sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}}\mathcal{F}_*(\delta_{\gamma_{s,z}^n})=d^{-kn}\sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}}\delta_{\gamma_{i_n(s),z}^{n-1}}\\&=d^{-kn}\sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}}|i_n^{-1}(s)|\delta_{\gamma_{s,z}^{n-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $m^{n-1}(z)-\mathcal{F}_*m^n(z)=d^{-kn}\sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}}(d^k-|i_n^{-1}(s)|)\delta_{\gamma_{s,z}^{n-1}}$, et comme $|i_n^{-1}(s)|\leq d^k$ d'après le Lemme 2.3.3 *ii*), on obtient

$$a_n(z) \leq d^{-kn} \sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}} d^k - |i_n^{-1}(s)| = d^{-k(n-1)}|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}| - d^{-kn} \sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}} |i_n^{-1}(s)|,$$

ce qui est bien l'inégalité souhaitée, puisque $\sum_{s\in\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n-1}} |i_n^{-1}(s)| = |\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|$. Pour tout $2 \leq l \leq n$, d'après l'estimation (2.8), on obtient alors

$$\|m^{l-1} - \mathcal{F}_* m^l\| \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(B_0)} \int_{B_0} a_l(z) d\,\mathrm{vol}(z) \leq a_l. \tag{2.9}$$

Dès lors, puisque

$$\mathcal{M}^n - \mathcal{F}_*\mathcal{M}^n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n m^l - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n \mathcal{F}_* m^l = \frac{1}{n}\sum_{l=2}^n (m^{l-1} - \mathcal{F}_* m^l) + \frac{m^n - \mathcal{F}_* m^1}{n},$$

on déduit de (2.9) la majoration suivante

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}^n - \mathcal{F}_*\mathcal{M}^n\| &\leq \frac{1}{n}\sum_{l=2}^n \|m^{l-1} - \mathcal{F}_* m^l\| + \frac{2}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{l=2}^n a_l + \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,1}|}{d^k} - \frac{|\mathcal{S}_{\varepsilon,r,n}|}{d^{kn}}\right) + \frac{2}{n} \leq \frac{3}{n}.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}_*$ est continue pour la topologie faible-$*$, ce calcul montre que $\mathcal{F}_*\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}$.

On rappelle que $\|\widetilde{\mathcal{M}}\| = 1 - \alpha$. Dès lors, $\mathcal{M} := \dfrac{\widetilde{\mathcal{M}}}{1-\alpha}$ est une mesure de probabilité $\mathcal{F}$-invariante à support compact dans l'espace métrique $(\mathcal{O}(B(a,\tau r),\mathbb{P}^k), \mathrm{dist}_{\mathcal{O}})$, et il reste à montrer que $p_{\lambda *}\mathcal{M} = \mu_\lambda$ pour tout $\lambda \in D_0$. Pour tout $(\lambda, z) \in D_0 \times B_0$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la mesure $\mu_\lambda^n(z) := d^{-kn}(f_\lambda^{\circ n})^*\delta_z$. Par définition, pour tout $z \in B_0$, on a $0 \leq p_{\lambda *}(\mathcal{M}^n(z)) \leq \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n \mu_\lambda^l(z)$. On obtient donc

$$0 \leq p_{\lambda *}(\mathcal{M}^n) \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(B_0)} \int_{B_0} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^n \mu_\lambda^r(z) d\,\mathrm{vol}(z). \tag{2.10}$$

Comme l'ensemble exceptionnel de f_λ est un sous-ensemble pluripolaire de $\mathbb{P}^k$ (voir [FS95]), le théorème d'équidistribution des préimages 1.2.2 assure que la suite $(\mu_\lambda^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_λ pour la topologie faible-$*$ sur $\mathbb{P}^k$, pour presque-tout $z \in B_0$. Par théorème de convergence de Lebesgue, le terme de droite de (2.10) converge vers μ_λ, ce qui conduit à

$$\forall \lambda \in D_0 \ : \ p_{\lambda *}\widetilde{\mathcal{M}} \leq \mu_\lambda.$$

On rappelle que $\alpha \in [0,1)$. Si $\alpha = 0$, comme $\|p_{\lambda *}\widetilde{\mathcal{M}}\| = \|\widetilde{\mathcal{M}}\| = 1 - \alpha$, on obtient automatiquement l'égalité. Sinon, il suffit d'écrire $\mu_\lambda = (1-\alpha)\dfrac{p_{\lambda *}\widetilde{\mathcal{M}}}{1-\alpha} + \alpha\dfrac{\mu_\lambda - p_{\lambda *}\widetilde{\mathcal{M}}}{\alpha}$, ce qui prouve également, en invoquant l'ergodicité de la mesure μ_λ, que $\dfrac{p_{\lambda *}\widetilde{\mathcal{M}}}{1-\alpha} = p_{\lambda *}\widetilde{\mathcal{M}} = \mu_\lambda$.

2.3.5 Étape 5 : Le tissu d'équilibre $\mathcal{M}$ est acritique

On montre d'abord qu'on peut réduire r et le voisinage $D_0 \times B_0$ de a, de sorte que $D_0 \times B_0 \subset B(a, \tau'\tau r)$, où $\tau' \in (0,1)$ est donné par le Lemme 2.3.6, et que pour tout $p \geq 0$ et toute branche inverse γ_s^n apparaissant dans la définition $\mathcal{M}$, le sous-ensemble analytique $f^{\circ p}(Y)$ est défini comme l'ensemble des zeros d'une unique fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\gamma_s^n(B(a, \tau r))$.

A cet effet, on réduit d'abord r de sorte que pour chaque branche γ_s^n, l'ensemble $\gamma_s^n(B(a, \tau r))$ soit contenu dans le domaine de définition d'une section de la projection canonique $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^k$. Pour cela, on applique le Lemme 2.3.7 avec $\alpha > 0$ assez petit. On réduit ensuite $D_0 \times B_0$ de sorte que $D_0 \times B_0 \subset B(a, \tau'\tau r)$, et que la famille $(D_0, f|_{D_0 \times \mathbb{P}^k})$ puisse être relevée en une famille holomorphe $(D_0, F|_{D_0 \times \mathbb{C}^{k+1}})$ de polynômes homogènes non-dégénérés de $\mathbb{C}^{k+1}$. Notons C_F l'ensemble critique de F. Comme les applications $F^{\circ p} : D_0 \times \mathbb{C}^{k+1} \to D_0 \times \mathbb{C}^{k+1}$ sont propres, la fonction $\varphi_p(z) := \Pi_{i=1}^{d^{pk}} \operatorname{Jac} F(\eta_i(z))$, où $\{\eta_1(z), \dots, \eta_{d^{pk}}(z)\}$ est l'ensemble des préimages de z par $F^{\circ p}$ comptées avec multiplicité, est une fonction holomorphe définissant l'hypersurface analytique $F^{\circ p}(C_F)$ sur $D_0 \times \mathbb{C}^{k+1}$. Par conséquent, sur chaque ouvert $U \subset \mathbb{P}^k$ sur lequel $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{P}^k$ admet une section holomorphe, le sous-ensemble analytique $f^{\circ p}(C_f)$ est défini par une unique fonction holomorphe sur $D_0 \times U$.

Le résultat suivant sera crucial. On rappelle que $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des droites complexes $\Delta \in \mathbb{C}^{m+k}$ passant par a, et $\mathcal{W}$ la mesure de probabilité induite par la métrique de Fubini-Study sur $\mathcal{D} \simeq \mathbb{P}^{m+k-1}$.

Lemme 2.3.9. *Si $B(a, \rho) \subset \Omega(R_f)$, alors la série $\sum_{l \geq 0} \int_{\mathcal{D}} \left\| \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge [\Delta] \right\| d\mathcal{W}$ est convergente.*

Démonstration. D'après la Proposition 1.1.21 appliquée avec $n = m + k$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W} = (dd^c \log|z - a|)^{m+k-1}.$$

Soit $l \geq 0$. On rappelle que $a \notin f^l(Y) = \operatorname{Supp} R_{l,f}$. Comme la fonction plurisousharmonique $u(z) := \log|z-a|$ est localement bornée sur $\mathbb{C}^{m+k} \setminus \{a\}$, d'après la Proposition 1.1.20 appliquée avec u et $T = R_{l,f}$, le courant $R_{l,f} \wedge \int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W}$ est bien défini. Pour tout $\Delta \in \mathcal{D}$, comme $\Delta \not\subset f^l(Y)$, l'intersection des sous-ensembles analytiques $\Delta \cap f^l(Y)$ est de dimension nulle. D'après le théorème de Rouché, le cardinal de $\Delta \cap f^l(Y) \cap B(a, \rho)$, compté avec multiplicité, est borné par une constante C indépendante de Δ. Ainsi, l'intersection de courants $R_{l,f} \wedge [\Delta]$ existe sur $B(a, \rho)$ et $\| \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge [\Delta] \| \leq C$. En particulier, comme $\mathcal{D} \simeq \mathbb{P}^{m+k-1}$ est compact, ceci montre que $\mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge [\Delta]$ est $\mathcal{W}$-intégrable. Par théorème de Fubini, on obtient alors

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge [\Delta] d\mathcal{W} = \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge \int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W},$$

ce qui justifie le calcul suivant, valable pour tout $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{N} \int_{\mathcal{D}} \left\| \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge [\Delta] \right\| d\mathcal{W} &= \sum_{l=0}^{N} \left\| \int_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge [\Delta] d\mathcal{W} \right\| \\
&= \sum_{l=0}^{N} \left\| \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \wedge \int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W} \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{l=0}^{N} \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \right) \wedge \int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W} \right\| \\
&\leq \left\| \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_{l,f} \right) \wedge \int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W} \right\| \\
&= \left\| \mathbb{1}_{B(a,\rho)} R_f \wedge \int_{\mathcal{D}} [\Delta] d\mathcal{W} \right\|.
\end{aligned}$$

Le majorant de la somme partielle de la série à termes positifs est indépendant de N, ce qui montre le résultat annoncé. □

Il reste à montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$, où $\mathcal{J}_s$ est l'ensemble des applications $\gamma \in \mathcal{J}$ dont le graphe Γ_γ ne rencontre pas la grande orbite de C_f, ou de façon équivalente, celle de Y (voir la définition 1.2.11).

Le lemme suivant permet de réduire le problème à une estimation de masse sur certains ouverts de $(\mathcal{J}, \mathrm{dist}_{\mathcal{O}})$. Pour tout entier p, on définit

$$\mathcal{Y}_p := \{\gamma \in \mathcal{J} \ : \ \Gamma_\gamma \cap f^{\circ p}(Y) \neq \emptyset \text{ et } \Gamma_\gamma \not\subset f^{\circ p}(Y)\}.$$

Lemme 2.3.10. *Si $\mathcal{M}(\mathcal{Y}_p) = 0$ pour tout entier p, alors $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$.*

Démonstration. Remarquons que $\mathcal{J}_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_s^n$, où pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}_s^n := \{\gamma \in \mathcal{J} \ : \ \Gamma_\gamma \cap (f^{\circ n})^{-1}(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} f^{\circ p}(Y)) \neq \emptyset\}$, et que $\mathcal{J}_s^0 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{Y}}_p$, où pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\mathcal{Y}}_p := \{\gamma \in \mathcal{J} \ : \ \Gamma_\gamma \cap f^{\circ p}(Y) \neq \emptyset\}$. D'après la Proposition 1.2.14, on a $\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{Y}}_p \setminus \mathcal{Y}_p) = 0$. La $\mathcal{F}$-invariance de $\mathcal{M}$ assure alors que la conclusion est une conséquence directe de l'inclusion $\mathcal{J}_s^n \subset (\mathcal{F}^{\circ n})^{-1}(\mathcal{J}_s^0)$. □

Fixons un entier $p \geq 0$. Le lemme de Hurwitz assure que $\mathcal{Y}_p$ est un ouvert de $(\mathcal{O}(D_0, \mathbb{P}^k), \mathrm{dist}_{\mathcal{O}})$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^n(\mathcal{Y}_p) = 0$.

D'après la définition de $\mathcal{M}^n$ et comme $D_0 \times B_0 \subset B(a, \tau'\tau r)$, on obtient

$$\mathcal{M}^n(\mathcal{Y}_p) \leq d^{-kn} |\{s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n} \ : \ \gamma_s^n(B(a,\tau'\tau r)) \cap f^{\circ p}(Y) \neq \emptyset\}|. \tag{2.11}$$

Notons $\varphi_{p,n} : \gamma_s^n(B(a,\tau r)) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définissant $f^{\circ p}(Y)$ sur $\gamma_s^n(B(a,\tau r))$. En d'autres termes, on a $\{\varphi_{p,n} = 0\} = f^{\circ p}(Y) \cap \gamma_s^n(B(a,\tau r))$. On note aussi

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{N_n}\} := \{s \in \mathcal{S}_{\varepsilon,r,n} \ : \ 0 \in \varphi_{p,n} \circ \gamma_s^n(B(a,\tau'\tau r))\},$$

de sorte qu'on peut réécrire l'inégalité 2.11 de la manière suivante :

$$\mathcal{M}^n(\mathcal{Y}_p) \leq d^{-kn} N_n. \tag{2.12}$$

Pour tout $1 \leq j \leq N_n$, on note $E_j := \{\Delta \in \mathcal{D} \,:\, 0 \in \varphi_{p,n} \circ \gamma_{s_j}^n(\Delta_{\tau r})\}$. Ainsi, $\sum_{j=1}^{N_n} \mathbb{1}_{E_j}(\Delta)$ est le nombre de brances inverses de $f^{\circ n}$ qui rencontre $f^{\circ p}(Y)$ au-dessus de $\Delta_{\tau r}$ et pour un choix générique de disques $\Delta \in \mathcal{D}$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{N_n} \mathbb{1}_{E_j}(\Delta) \leq |f^{\circ(n+p)}(Y) \cap \Delta_{\tau r}| \leq d^{k(n+p)} \, \|R_{n+p,f} \wedge [\Delta_{\tau r}]\| \,. \tag{2.13}$$

D'autre part, comme la fonction $\varphi_{p,n} \circ \gamma_{s_j}^n$ s'annule sur $B(a, \tau'\tau r)$ pour tout $1 \leq j \leq N_n$, le Lemme 2.3.6 assure que $\mathcal{W}(E_j) > \frac{1}{2}$. On en déduit l'inégalité suivante.

$$\frac{N_n}{2} \leq \sum_{j=1}^{N_n} \mathcal{W}(E_j) = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbb{1}_{E_j}(\Delta) d\mathcal{W}. \tag{2.14}$$

En combinant (2.12), (2.13) et (2.14), on obtient

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}^n(\mathcal{Y}_p) \leq d^{kp} \int_{\mathcal{D}} \|R_{n+p,f} \wedge [\Delta_{\tau r}]\| d\mathcal{W}.$$

Le Lemme 2.3.9 assure alors que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^n(\mathcal{Y}_p) = 0$.

Comme la mesure $\mathcal{M}$ est à support compact dans $(\mathcal{O}(D_0, \mathbb{P}^k), \mathrm{dist}_{\mathcal{O}})$ et comme, d'après le Lemme 2.3.8, c'est une valeur d'adhérence faible-$*$ de la suite $\left(\frac{1}{1-\alpha}\mathcal{M}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $\mathcal{M}(\mathcal{Y}_p) = 0$. On déduit alors du Lemme 2.3.10 que le tissu d'équilibre $\mathcal{M}$ est acritique. □

Chapitre 3

Propagation des propriétés thermodynamiques dans une famille stable

Dans ce chapitre, étant donnée une famille stable d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$, nous étudions d'abord l'action du mouvement holomorphe mesurable des ensembles de Julia sur les états d'équilibre, une classe de mesures jouant un rôle important dans le formalisme thermodynamique. Il s'agit d'une collaboration avec Rakhimov. Nous démontrons ensuite un théorème de distribution pondérée pour les mouvements holomorphes de cycles répulsifs, qui fait l'objet d'un travail avec Bianchi [BiBr23].

3.1 Les états d'équilibre

Dans cette section, nous étudions comment le mouvement holomorphe de certaines mesures invariantes introduit dans [BR22] propage les propriétés statistiques de ces mesures. Plus précisément, nous montrons qu'on peut interpréter le mouvement holomorphe d'un état d'équilibre comme un état d'équilibre. On commence par rappeler les définitions et les propriétés importantes sur les états d'équilibre dont nous aurons besoin.

3.1.1 Une classe de mesures de grande entropie

Considérons un système dynamique topologique (X, T) qui admet des mesures de probabilité invariantes ergodiques ν à support compact. Un *potentiel* est une fonction borélienne $\psi : X \to \mathbb{R}$. On définit la *pression variationnelle* d'une telle mesure ν relativement au potentiel ψ par

$$P_\nu(\psi) := h_\nu(T) + \langle \nu, \psi \rangle,$$

où $h_\nu(T)$ désigne l'entropie métrique du système dynamique (X, T, ν) et $\langle \nu, \psi \rangle := \int_X \psi d\nu$. On définit la *pression topologique* de T relativement au potentiel ψ par

$$P(\psi) = \sup_\nu P_\nu(\psi),$$

où la borne supérieure est calculée sur l'ensemble des mesures de probabilité T-invariantes ergodiques ν à support compact.

Définition 3.1.1. Un *état d'équilibre* associé au système (X, T) relativement au potentiel ψ est une mesure de probabilité borélienne T-invariante ergodique ν à support compact telle que $P_\nu(\psi) = P(\psi)$.

Lorsque $P(\psi) = P_\nu(\psi)$, on dit que la mesure ν est un *état d'équilibre* du système (X, T, ν). L'existence des états d'équilibre est gratuite sous certaines hypothèses de compacité, alors que leur unicité est une propriété statistique très importante. Quitte à soustraire la constante $\inf_X \psi$, on pourra toujours supposer que ψ est positive. Si $\sup_X \psi$ est proche de 0, la pression topologique d'un état d'équilibre relativement à ψ est proche de l'entropie topologique $h(f)$. Notons que le cas $\psi = 0$ correspond à la mesure d'entropie maximale. Nous renvoyons à [Prz90, DU91a, DU91b, Hay99] (voir aussi [PU10]) pour une étude des états d'équilibre pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^1$.

Dans le cadre des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$, des conditions suffisantes portant sur l'endomorphisme f et la régularité du potentiel ψ garantissant l'existence et l'unicité de tels états d'équilibre sont fournies dans [UZ13, BiDi23]. On renvoie également à [Dup12, SUZ14, BiDi22] pour davantage de propriétés sur ces mesures. On considère les hypothèses suivantes.

(A) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max_{a\in\mathbb{P}^k} \deg(f^n, a) = 0,$$

où $\deg(f^n, a)$ désigne la multiplicité de a comme solution de l'équation $f^n(z) = f^n(a)$.

(B) Il existe un réel $q > 2$ et une constante $c > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{P}^k$, on a

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c \cdot h_q(\mathrm{dist}_{\mathbb{P}^k}(x, y)),$$

avec $h_q(t) := |\log(t) - q - 1|^{-q}$.

L'hypothèse **(A)** est satisfaite pour un choix générique de $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ (voir [DS10b]). L'hypothèse **(B)** porte sur la régularité du potentiel. Elle assure que ψ est une fonction $\log^q$-continue. Considérer un potentiel défini sur $\mathbb{P}^k$ ou sur J_f n'a pas d'importance (voir la Section 1.3.2).

Le résultat suivant précise des propriétés d'équidistribution de préimages et de points périodiques répulsifs vers les états d'équilibre [BiDi22]. On rappelle que l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ est défini par le Théorème 1.2.2 et que $R_n^J(f)$ désigne l'ensemble des J-cycles de f (voir le Théorème 1.2.4).

Théorème 3.1.2. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$ satisfaisant l'hypothèse **(A)**. Soit $\psi : \mathbb{P}^k \to [0, \log d)$ un potentiel satisfaisant l'hypothèse **(B)**. Alors le système $(\mathbb{P}^k, f)$ admet un unique état d'équilibre μ_ψ relativement à ψ et pour tout $y \notin \mathcal{E}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nP(\psi)} \sum_{f^n(x)=y} e^{\psi(x)+\psi(f(x))+\ldots+\psi(f^{n-1}(x))} \delta_x = \mu_\psi. \tag{3.1}$$

De plus, il existe un ensemble $P'_n \subset R^J_n(f)$ de J-cycles tel que.

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nP(\psi)} \sum_{z\in P'_n} e^{\psi(z)+\psi(f(z))+\ldots+\psi(f^{n-1}(z))}\delta_z = \mu_\psi. \tag{3.2}$$

Les convergences (3.1) et (3.2) généralisent à n'importe quel potentiel ψ les Théorèmes d'équidistribution 1.2.2 et 1.2.4, ces derniers correspondant au cas $\psi \equiv 0$. Remarquons enfin que les états d'équilibre construits avec un potentiel ψ positif tel que $\sup \psi < \log d$ satisfont toujours

$$h_\nu(f) > (k-1)\log d. \tag{3.3}$$

En particulier, le Lemme 1.2.5 assure que $\operatorname{Supp} \nu = J(f)$.

3.1.2 Les laminations préservent les propriétés statistiques

Dans le cadre des familles holomorphes stables (M, f) de fractions rationnelles, la théorie de Mañe-Sad-Sullivan fournit un mouvement holomorphe continu $h^\lambda_{\lambda_0}$ des ensembles de Julia (voir la Section 1.3.1). Pour tous paramètres $\lambda_0, \lambda \in M$, la fonction $h^\lambda_{\lambda_0}$ définit une conjugaison topologique entre les systèmes $(J_{\lambda_0}, f_{\lambda_0})$ et (J_λ, f_λ). En particulier, étant donnée une mesure de probabilité f_{λ_0}-invariante ν supportée dans J_{λ_0}, la mesure $\nu_\lambda := (h^\lambda_{\lambda_0})_*\nu$ hérite des propriétés statistiques de ν. En dimension supérieure, la situation n'est plus aussi simple.

Considérons une famille holomorphe d'endomorphismes (M, f) de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. On rappelle (voir la Section 1.2.2) que pour tout $\lambda \in M$, l'application d'évaluation $p_\lambda : \mathcal{J} \to J_\lambda$ est continue et rend commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{J} \\ {\scriptstyle p_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\lambda} \\ J_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & J_\lambda \end{array}$$

L'application p_λ définit donc une semi-conjugaison topologique entre les systèmes $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ et (J_λ, f_λ). En considérant une lamination $\mathcal{F}$-invariante $\mathcal{L} \subset \mathcal{J}$, l'application restreinte $p_\lambda|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\lambda$ devient injective et on obtient une conjugaison mesurable.

Dans [BR22], Bianchi et Rakhimov adaptent la construction du mouvement holomorphe mesurable de [BBD18] pour la mesure d'équilibre dans une famille stable à la classe des mesures invariantes ergodiques satisfaisant l'estimation (3.3). Leur travail assure que, pour chacune de ces mesures, presque-tout point bouge holomorphiquement. La preuve repose sur la construction d'une lamination. A cet effet, ils proposent l'extension suivante de la notion de tissu d'équilibre (voir la Définition 1.2.11).

Définition 3.1.3. Fixons un paramètre $\lambda \in M$ et ν une mesure de probabilité f_λ-invariante sur $\mathbb{P}^k$ supportée par J_λ. Un (λ, ν)-*tissu* (ou ν-*tissu lorsqu'il n'y a pas ambiguïté*) est une mesure de probabilité borélienne $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ telle que

1. $\mathcal{F}_*\mathcal{M} = \mathcal{M}$;
2. $(p_\lambda)_*\mathcal{M} = \nu$;
3. $\operatorname{Supp}\mathcal{M}$ est compact.

Un ν-tissu est dit *acritique* si $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$.

En suivant l'approche de [BBD18], Bianchi et Rakhimov montrent que l'existence d'un tel ν-tissu $\mathcal{M}$ implique celle d'une lamination $\mathcal{L}$ satisfaisant $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$. Pour cela, ils établissent une version de la Proposition 1.2.13 pour les ν-tissus. Nous montrons qu'un tel ν-tissu est unique et que les systèmes mesurables $(\mathcal{J}, \mathcal{F}, \mathcal{M})$ et $(J_\lambda, f_\lambda, \nu)$ ont la même entropie métrique.

Lemme 3.1.4. *Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{J}$ une lamination et $\lambda \in M$ un paramètre. Pour tout sous-ensemble borélien $\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$, on a*

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{A} = \mathcal{L} \cap p_\lambda^{-1}(p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})). \tag{3.4}$$

En particulier, pour toute mesure de probabilité f_λ-invariante ν sur J_λ, il existe au plus un (λ, ν)-tissu $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$ un ensemble borélien. L'inclusion directe est immédiate. Pour l'inclusion réciproque, considérons un graphe $\gamma \in \mathcal{L}$ tel que $\gamma(\lambda) \in p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$. Il existe un graphe $\gamma' \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ tel que $\gamma(\lambda) = \gamma'(\lambda)$. Comme $\mathcal{L}$ est une lamination, on a $\gamma = \gamma'$. En particulier, $\gamma \in \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$, ce qui montre l'égalité (3.4). On conclut, pour tout ν-tissu $\mathcal{M}$, en passant à l'égalité des mesures dans (3.4)

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{L} \cap p_\lambda^{-1}(p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}))) = \nu(p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})).$$

La dernière expression ne dépend pas du choix du ν-tissu $\mathcal{M}$, ce qui montre l'unicité. □

Proposition 3.1.5. *Soit (M, f) une famille holomorphe μ-stable, connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Soit $\lambda_0 \in M$ et ν une probabilité f_{λ_0}-invariante ergodique satisfaisant $h_\nu(f_{\lambda_0}) > (k-1)\log d$. Il existe un unique (λ_0, ν)-tissu $\mathcal{M}$. De plus, $\mathcal{M}$ est acritique en tant que (λ_0, ν)-tissu, ergodique en tant que mesure $\mathcal{F}$-invariante, et pour tout paramètre $\lambda \in M$, on a $h_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}) = h_{\nu_\lambda}(f_\lambda) = h_\nu(f_{\lambda_0})$, où $\nu_\lambda := (p_\lambda)_*\mathcal{M}$.*

Démonstration. [BR22, Theorem 3.12] fournit l'existence d'un (λ_0, ν)-tissu acritique ergodique $\mathcal{M}$ ainsi que d'une lamination $\mathcal{F}$-invariante $\mathcal{L}$ satisfaisant $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$. Pour montrer l'unicité, considérons un autre (λ_0, ν)-tissu $\mathcal{M}'$. On a $\mathcal{M}'(\mathcal{L}) = \nu(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = \mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$. Le Lemme 3.1.4 assure que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. Il reste à montrer la dernière propriété. Soit un paramètre $\lambda \in M$. L'application $p_\lambda|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\lambda$ est continue donc borélienne. L'espace $\mathcal{J}$ est polonais, comme sous-espace fermé de l'espace polonais $\mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$. Or l'ensemble $\mathcal{L} \subset \mathcal{J}$ est borélien, donc l'application réciproque $p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}$ est automatiquement borélienne (voir par exemple [Kur66, Theorem 3 §39.V]). L'application p_λ réalise donc une conjugaison mesurable des deux systèmes $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{M})$ et $(\mathcal{L}_\lambda, f_\lambda, \nu_\lambda)$. L'entropie métrique étant invariante par conjugaison mesurable [Wal82, Theorem 4.11], la conclusion provient des égalités $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$ et $\nu(\mathcal{L}_\lambda) = 1$. □

Remarque 3.1.6. *En particulier, même dans le cas où ν est la mesure d'entropie maximale, on obtient l'unicité du tissu d'équilibre dans une famille stable, ce qui n'apparaissait pas tel quel dans [BBD18].*

3.1.3 Propagation des états d'équilibre

On considère (M, f) une famille holomorphe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ et on s'intéresse aux systèmes dynamiques topologiques $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ et $(\mathbb{P}^k, f_\lambda)$, pour tout $\lambda \in M$. Pour chaque paramètre $\lambda \in M$, on considère la mesure d'équilibre μ_λ associée au système $(\mathbb{P}^k, f_\lambda)$ qui est l'unique mesure f_λ-invariante ergodique d'entropie maximale. Elle est supportée par le compact J_λ. Quitte à réduire l'espace des paramètres M pour rendre $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}(M, \mathbb{P}^k)$ compact, en utilisant le théorème de Krylov-Bogolyubov et le théorème de Choquet, on peut toujours supposer que le système $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ admet lui-aussi des mesures invariantes ergodiques à support compact. Sans réduire l'espace des paramètres, on peut aussi se placer sous l'hypothèse de μ-stabilité pour la famille (M, f) (voir Section 1.2.2). Dans ce dernier cas, le tissu d'équilibre construit dans [BBD18] est un cas particulier de mesure borélienne invariante ergodique sur $\mathcal{J}$ à support compact.

Nous cherchons à propager la classe des états d'équilibre au moyen d'une lamination. Pour cela, il faut d'abord construire des potentiels relativement auxquels les mesures propagées sont susceptibles d'être des états d'équilibre. C'est l'objet du résultat suivant. Rappelons que si $\mathcal{L}$ est une lamination, l'application $p_\lambda|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\lambda$ réalise une bijection bimesurable.

Proposition 3.1.7. *Considérons (M, f) une famille holomorphe μ-stable connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Fixons un paramètre $\lambda_0 \in M$, une mesure f_{λ_0}-invariante ergodique ν satisfaisant $h_\nu(f_{\lambda_0}) > (k-1)\log d$, et un potentiel $\psi : J_{\lambda_0} \to \mathbb{R}_+$. Soit $\mathcal{M}$ un (λ_0, ν)-tissu et $\mathcal{L}$ une lamination $\mathcal{F}$-invariante satisfaisant $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$. Pour tout paramètre $\lambda \in M$, on note*

$$\Psi := \begin{cases} \psi \circ p_{\lambda_0} & \text{sur } \mathcal{L}; \\ 0 & \text{en-dehors de } \mathcal{L}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_\lambda := \begin{cases} \Psi \circ p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1} & \text{sur } \mathcal{L}_\lambda; \\ 0 & \text{en-dehors de } \mathcal{L}_\lambda. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors pour tout paramètre $\lambda \in M$, on a $P_{\mathcal{M}}(\Psi) = P_{\nu_\lambda}(\psi_\lambda)$, où $\nu_\lambda := (p_\lambda)_* \mathcal{M}$.

Démonstration. La Proposition 3.1.5 assure déjà que l'entropie est préservée. Il reste à montrer que $\langle \mathcal{M}, \Psi \rangle = \langle \nu_\lambda, \psi_\lambda \rangle$ pour tout $\lambda \in M$. On note $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ (respectivement $\mathcal{B}(J_\lambda)$) l'ensemble des parties boréliennes de $\mathcal{J}$ (resp. J_λ). On considère $\Sigma(\mathcal{J})$ (resp. $\Sigma(J_\lambda)$) l'espace des fonctions simples, c'est-à-dire les fonctions $\Theta = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{\mathcal{A}_i}$ (resp. $\theta = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$), où $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, et les ensembles $\mathcal{A}_i \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ (resp. $A_i \in B(J_\lambda)$) sont deux à deux disjoints.

D'une part, si $\Theta = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{\mathcal{A}_i} \in \Sigma(\mathcal{J})$, on obtient $\langle \mathcal{M}, \Theta \rangle = \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{M}(\mathcal{A}_i)$, et

$$\langle \mathcal{M}, \Psi \rangle = \sup_{\substack{\Theta \leq \Psi, \\ \Theta \in \Sigma(\mathcal{J})}} \langle \mathcal{M}, \Theta \rangle.$$

D'autre part, si $\theta = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i} \in \Sigma(J_\lambda)$, on obtient $\langle \nu_\lambda, \theta \rangle = \sum_{i=1}^N \nu_\lambda(A_i)$, et

$$\langle \nu_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \sup_{\substack{\theta \leq \psi_\lambda, \\ \theta \in \Sigma(J_\lambda)}} \langle \nu_\lambda, \theta \rangle.$$

Considérons un borélien $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$. D'après (3.4), comme $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$, on obtient

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}) = \mathcal{M}(p_\lambda^{-1}(p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}))) = \nu_\lambda(p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})).$$

Comme $\mathcal{L} \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ et l'application $p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}$ est mesurable, l'ensemble $p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$ est borélien. De plus, si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ sont disjoints, alors $p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}_1)$ et $p_\lambda(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}_2)$ sont également disjoints. Ceci montre que

$$\langle \mathcal{M}, \Theta \rangle \leq \langle \nu_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \tag{3.6}$$

pour toute fonction simple $\Theta \leq \Psi$. Considérer la borne supérieure selon Θ dans (3.6) aboutit à $\langle \mathcal{M}, \Psi \rangle \leq \langle \nu_\lambda, \psi_\lambda \rangle$.

Pour montrer l'inégalité réciproque, on considère un borélien $A \in \mathcal{B}(J_\lambda)$. Comme, par hypothèse, $\nu_\lambda(\mathcal{L}_\lambda) = \mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$, on obtient

$$\nu_\lambda(A) = \nu_\lambda(A \cap \mathcal{L}_\lambda) = \nu_\lambda(p_\lambda|_{\mathcal{L}}(p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}(A \cap \mathcal{L}_\lambda))) = \mathcal{M}(p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}(A \cap \mathcal{L}_\lambda)).$$

Comme $\mathcal{L}_\lambda \in \mathcal{B}(J_\lambda)$ et l'application $p_\lambda|_{\mathcal{L}}$ est mesurable, l'ensemble $p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}(A \cap \mathcal{L}_\lambda)$ est borélien. De plus, le fait que $\mathcal{L}$ est une lamination assure que si les ensembles $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(J_\lambda)$ sont disjoints, alors $p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}(A_1 \cap \mathcal{L}_\lambda)$ et $p_\lambda|_{\mathcal{L}}^{-1}(A_1 \cap \mathcal{L}_\lambda)$ sont également disjoints, ce qui permet de conclure. □

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le résultat principal de cette section, dont voici l'énoncé. Il s'agit de notre Théorème B.

Théorème 3.1.8. *Considérons (M, f) une famille holomorphe μ-stable connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Fixons un paramètre $\lambda_0 \in M$ et un potentiel $\psi : J_{\lambda_0} \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $\sup_{J_{\lambda_0}} \psi < \log d$. On suppose qu'il existe un (respectivement un unique) état d'équilibre ν associé au système $(J_{\lambda_0}, f_{\lambda_0})$ relativement au potentiel ψ. Il existe un unique (λ_0, ν)-tissu $\mathcal{M}$ et, en notant $\nu_\lambda := (p_\lambda)_* \mathcal{M}$ sa tranche en $\lambda \in M$,*

(1) il existe un potentiel $\Psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_+$ tel que $\mathcal{M}$ est un (resp. l'unique) état d'équilibre associé au système $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ relativement à Ψ ;

(2) pour tout paramètre $\lambda \in M$, il existe un potentiel $\psi_\lambda : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}_+$ tel que ν_λ est un (resp. l'unique) état d'équilibre associé au système $(\mathbb{P}^k, f_\lambda)$ relativement à ψ_λ.

De plus, pour tout paramètre $\lambda \in M$, on a $\Psi = \psi_\lambda \circ p_\lambda$ $\mathcal{M}$-presque partout.

Démonstration. On rappelle que μ_λ désigne la mesure d'entropie maximale de f_λ. Comme $\psi \geq 0$, par définition de l'état d'équilibre ν, on obtient

$$h_\nu(f_{\lambda_0}) + \langle \nu, \psi \rangle = P_\nu(\psi) \geq P_{\mu_{\lambda_0}}(\psi) = k \log d + \langle \mu_{\lambda_0}, \psi \rangle \geq k \log d. \tag{3.7}$$

Par hypothèse, $\langle \nu, \psi \rangle < \log d$. Ainsi, l'équation (3.7) assure que $h_\nu(f_{\lambda_0}) > (k-1) \log d$. La Proposition 3.1.5 fournit alors un unique (λ_0, ν)-tissu $\mathcal{M}$. Considérons $\nu_\lambda := (p_\lambda)_* \mathcal{M}$. D'après la Proposition 3.1.5, on a aussi $h_{\nu_\lambda}(f_\lambda) > (k-1) \log d$, pour tout paramètre $\lambda \in M$. Pour tout paramètre $\lambda \in M$, on considère les fonctions mesurables $\psi_\lambda : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}_+$ et $\Psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_+$ définies par la Proposition 3.1.7 appliquée à la lamination $\mathcal{L}$ fournie par [BR22, Theorem 3.12].

Montrons maintenant le point (1). Supposons qu'il existe une autre mesure de probabilité borélienne $\mathcal{F}$-invariante ergodique $\mathcal{M}'$ sur $\mathcal{J}$ à support compact satisfaisant

$$P_{\mathcal{M}'}(\Psi) \geq P_{\mathcal{M}}(\Psi).$$

On définit $\omega := (p_{\lambda_0})_*\mathcal{M}'$, de sorte que la mesure $\mathcal{M}'$ réalise un (λ_0, ω)-tissu. A nouveau, la Proposition 3.1.5 assure que

$$P_\omega(\psi_{\lambda_0}) = P_{\mathcal{M}'}(\Psi) \geq P_{\mathcal{M}}(\Psi) = P_\nu(\psi_{\lambda_0}). \tag{3.8}$$

En particulier, comme ν est un état d'équilibre associé au système $(J_{\lambda_0}, f_{\lambda_0})$ relativement au potentiel ψ, on a

$$P_\nu(\psi) \geq P_{\mu_{\lambda_0}}(\psi) \geq k \log d, \tag{3.9}$$

ce qui conduit, d'après l'hypothèse $\sup_{\mathbb{P}^k} \psi < \log d$, à $h_\nu(f_{\lambda_0}) > (k-1)\log d$. Ainsi, le Lemme 1.2.5 fournit $\operatorname{Supp}\nu \subset J_{\lambda_0}$. En particulier, $\nu(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = 1$, ce qui assure l'égalité $\psi = \psi_{\lambda_0}$ ν-presque partout. En d'autres termes, on a

$$P_\nu(\psi_{\lambda_0}) = P_\nu(\psi), \tag{3.10}$$

ce qui, avec les inégalités (3.8) et (3.9), assure que $P_\omega(\psi_{\lambda_0}) \geq k \log d$. Le Lemme 1.2.5 assure encore que $\operatorname{Supp}\omega \subset J_{\lambda_0}$ et que $\psi = \psi_{\lambda_0}$ ω-presque partout. Dès lors, on obtient

$$P_\omega(\psi_{\lambda_0}) = P_\omega(\psi). \tag{3.11}$$

En combinant (3.8) avec (3.10) et (3.11), on obtient

$$P_\omega(\psi) = P_{\mathcal{M}'}(\Psi) \geq P_{\mathcal{M}}(\Psi) = P_\nu(\psi). \tag{3.12}$$

Comme ν est un état d'équilibre relativement à ψ, il y a égalité dans (3.12), ce qui montre que $\mathcal{M}$ est un état d'équilibre relativement à Ψ. Si, de plus, ν est unique, alors $\omega = \nu$ et chacune des deux mesures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ réalise un (λ_0, ν)-tissu. Il suit, d'après le Lemme 3.1.4, que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, ce qui montre l'unicité et conclut la preuve du point (1).

Pour montrer le point (2), considérons un paramètre $\lambda \in \mathcal{M}$ et supposons qu'il existe une mesure f_λ-invariante ergodique ω_λ telle que

$$P_{\omega_\lambda}(\psi_\lambda) \geq P_{\nu_\lambda}(\psi_\lambda). \tag{3.13}$$

Quitte à éventuellement remplacer ω_λ par μ_λ, on peut aussi supposer que

$$P_{\omega_\lambda}(\psi_\lambda) \geq P_{\mu_\lambda}(\psi_\lambda), \tag{3.14}$$

ce qui conduit à nouveau à $h_{\omega_\lambda} > (k-1)\log d$, au moyen de l'hypothèse $\sup_{J_{\lambda_0}} \psi < \log d$. La Proposition 3.1.5 fournit alors un $(\lambda, \omega_\lambda)$-tissu $\mathcal{M}'$ et l'inégalité suivante.

$$P_{\mathcal{M}'}(\Psi) = P_{\omega_\lambda}(\psi_\lambda) \geq P_{\nu_\lambda}(\psi_\lambda) = P_{\mathcal{M}}(\Psi). \tag{3.15}$$

Comme $\mathcal{M}$ est un état d'équilibre relativement à Ψ, il y a en fait égalité dans (3.15). Dès lors, la mesure ν_λ réalise un état d'équilibre relativement à ψ_λ. Enfin, si, de plus, l'état d'équilibre ν est unique, alors le point (1) assure que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. On en déduit que $\omega_\lambda = \nu_\lambda$, ce qui montre l'unicité dans le point (2). □

Remarque 3.1.9. *Dans la Section 1.3.1, on a vu que les mouvements holomorphes en dimension* 1 *admettent une régularité (non-uniformément) hölderienne. Autrement dit, si le potentiel ψ appartient à une classe de régularité invariante par composition à droite par une fonction höldérienne, on peut montrer que le potentiel ψ_λ appartient à la même classe. En dimension supérieure, la propagation de la régularité est une question plus délicate. Cela dit, compte tenu de l'hypothèse* ***(B)*** *du Théorème 3.1.2, la classe des fonctions $\log^q$-continues apparaît comme candidate.*

3.2 Mouvement holomorphe des points périodiques avec poids

En dimension $k = 1$, la théorie de Mañe-Sad-Sullivan caractérise la stabilité par le mouvement holomorphe de tous les cycles répulsifs (voir le Théorème-Définition 1.2.8). En dimension supérieure, la question du mouvement holomorphe de tous les J-cycles dans une famille stable est encore ouverte. Néanmoins, on a vu que le mouvement holomorphe d'une partie des J-cycles suffit à garantir la stabilité (voir l'implication $v) \implies i)$ dans le Théorème 2.2.2). En utilisant l'équidistribution des cycles répulsifs vers la mesure d'entropie maximale (Théorème 1.2.4), on observe que la construction d'une lamination par des graphes répulsifs satisfaisant la Définition 2.2.1 à partir d'un tissu d'équilibre conduit au résultat d'équidistribution des graphes périodiques suivant [Bia19, Theorem 4.11].

Théorème 3.2.1. *Considérons (M, f) une famille holomorphe μ-stable connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Pour tout $M' \Subset M$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{J}$ formant un mouvement holomorphe de points n-périodiques γ le long de M tels que $\gamma(\lambda)$ est répulsif pour tout $\lambda \in M'$ et*

$$\lim_{n\to\infty} d^{-kn} \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_n} \delta_\gamma = \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ est un tissu d'équilibre.

Au lieu de considérer les cycles qui équidistribuent la mesure d'équilibre, nous nous intéressons dans cette section à ceux qui équidistribuent un état d'équilibre. On rappelle que les hypothèses **(A)** et **(B)** sont données dans la Section 3.1. On rappelle aussi que, étant donné un état d'équilibre ν associé au système $(\mathbb{P}^k, f_{\lambda_0})$ relativement à un potentiel ψ, le Théorème 3.1.8 permet de construire un unique (λ_0, ν)-tissu, que nous noterons $\mathcal{M}_{\lambda_0,\psi}$. Le résultat principal de cette section est le suivant. Il constitue notre Théorème C.

Théorème 3.2.2. *Considérons (M, f) une famille holomorphe μ-stable connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ de degré $d \geq 2$. Fixons $\lambda_0 \in M$ et supposons que f_{λ_0} satisfait l'hypothèse* **(A)**. *Soit $\psi : \mathbb{P}^k \to [0, \log d)$ satisfaisant l'hypothèse* **(B)** *et notons μ_ψ son état d'équilibre associé. Pour tout $M' \Subset M$ contenant λ_0, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{P}_{\psi,n} \subset \mathcal{J}$ formant un mouvement holomorphe de points n-périodiques γ le long de M tel que $\gamma(\lambda)$ est répulsif pour tout $\lambda \in M'$ et*

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nP(\psi)} \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{\psi,n}} e^{\psi(\gamma(\lambda_0))+\cdots+\psi(f_{\lambda_0}^{n-1}(\gamma(\lambda_0)))}\delta_\gamma = \mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}.$$

En particulier, on remarque que le Théorème 3.2.2 généralise à toute une classe de potentiels ψ le Théorème 3.2.1, ce dernier correspondant au cas $\psi \equiv 0$.

En un paramètre $\lambda_0 \in M$, l'équidistribution des J-cycles répulsifs vers la mesure μ_ψ a été établie par Bianchi et Dinh (voir l'identité 3.2 dans le Théorème 3.1.2). La preuve suit la stratégie générale de Briend-Duval [BrDu99], qui ont montré ce résultat pour la mesure d'entropie maximale. Lorsque $\psi \neq 0$, le jacobien de la mesure μ_ψ n'est plus constant. La preuve

de [BrDu99] repose sur des estimées précises de contraction le long d'une branche inverse générique pour μ_ψ, ce qui requiert les estimées de distorsion le long des branches inverses de Berteloot-Dupont-Molino [BDM08, BeDu19]. Nous adaptons ici cette stratégie dans le cadre du système dynamique mesurable $(\mathcal{J}, \mathcal{F}, \mathcal{M}_{\lambda_0,\psi})$, ce qui nécessite un contrôle précis sur la contraction de f sur des tubes (i.e. des voisinages tubulaires, de rayon indépendant de λ, des graphes dans $M' \times \mathbb{P}^k$ d'éléments de $\mathcal{J}$) centrés en des graphes de $\mathcal{J}$ génériques pour la mesure $\mathcal{M}_{\lambda_0,\psi}$. Comme conséquence, nous obtenons le mouvement des points périodiques répulsifs comme graphes périodiques répulsifs pour $\mathcal{F}$.

3.2.1 Opérateurs de transfert sur $(\mathcal{J}, \mathcal{F})$

Considérons (M, f) une famille holomorphe connexe et simplement connexe d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ et $\Psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ un potentiel continu borné. Remarquons qu'on ne fait pas l'hypothèse que la famille (M, f) est μ-stable. On définit l'*opérateur de transfert* (associé à Ψ) Λ_Ψ agissant sur les fonctions réelles g mesurables sur $\mathcal{J}$ par

$$\Lambda_\Psi(g)(\gamma) = \sum_{\mathcal{F}(\gamma')=\gamma} e^{\Psi(\gamma')} g(\gamma'). \tag{3.16}$$

Remarquons que l'opérateur Λ_Ψ est positif. Autrement dit, si la fonction g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il en est de même pour la fonction $\Lambda_\Psi(g)$. Cependant, il est possible que cet opérateur ne préserve pas la continuité (l'application $\mathcal{F} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ n'est pas un revêtement, en général).

On rappelle que l'ensemble borélien $\mathcal{J}_s$ (voir la Définition 1.2.11) est totalement $\mathcal{F}$-invariant. On note $\mathcal{X} := \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_s$ son complémentaire. Dès lors, tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$ admet exactement d^k préimages par $\mathcal{F}$. Ces préimages se situant aussi dans $\mathcal{X}$, et la fonction Ψ étant bornée, l'opérateur Λ_Ψ est un endomorphisme linéaire continu de $\mathcal{C}_b(\mathcal{X})$, de norme $d^k e^{\sup_{\mathcal{J}} \Psi}$.

Considérons maintenant $\mathcal{N}$ une mesure positive satisfaisant $\mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$. La mesure $\mathcal{N}$ intègre toutes les fonctions continues bornées sur $\mathcal{X}$. On peut ainsi définir l'adjoint $\Lambda_\Psi^* \mathcal{N}$ comme une mesure sur $\mathcal{X}$ par la relation suivante

$$\langle \Lambda_\Psi^* \mathcal{N}, g \rangle := \langle \mathcal{N}, \Lambda_\Psi(g) \rangle,$$

pour toute fonction continue bornée g sur $\mathcal{X}$. On étend ensuite la mesure $\Lambda_\Psi^* \mathcal{N}$ à $\mathcal{J}$ en fixant $\Lambda_\Psi^*(\mathcal{J}_s) = 0$. Nous évaluerons l'opérateur Λ_Ψ^* uniquement sur des mesures qui ne donnent aucune masse à l'ensemble $\mathcal{J}_s$.

Lemme 3.2.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe une fonction continue $\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{n\to\infty} \Lambda_\Psi^n(g) = c_g \theta$ pour toute fonction continue $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, où la constante c_g dépend linéairement et continûment de g.*

(2) *Il existe une mesure positive $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{J}$ satisfaisant $\mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$, telle que $\lim_{n\to\infty} (\Lambda_\Psi^*)^n \delta_\gamma = c_\gamma \mathcal{N}$ pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$, où la constante $c_\gamma > 0$ dépend continûment de $\gamma \in \mathcal{X}$.*

Démonstration. Pour montrer (1) $\implies$ (2), on définit la mesure $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{X}$ en posant $\langle \mathcal{N}, g\rangle := c_g$ pour toute fonction continue $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, avec c_g comme en (1). On prolonge $\mathcal{N}$ en une mesure sur $\mathcal{J}$ en posant $\mathcal{N}(\mathcal{J} \setminus \mathcal{X}) = 0$. Une telle mesure est positive, puisque d'après la convergence en (1), pour toute fonction g à valeurs positives, on a $c_g \geq 0$.
Pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$, et toute fonction continue $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, on obtient alors

$$\langle (\Lambda_\Psi^*)^n \delta_\gamma, g\rangle = \langle \delta_\gamma, \Lambda_\Psi^n(g)\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta(\gamma) c_g.$$

Par définition de $\mathcal{N}$, et en posant $c_\gamma := \theta(\gamma)$, cela montre que $\lim_{n\to\infty} (\Lambda_\Psi^*)^n \delta_\gamma = c_\gamma \mathcal{N}$.

Pour montrer (2) $\implies$ (1), on définit la fonction $\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ en posant $\theta(\gamma) := c_\gamma$, pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$, avec c_γ comme en (2). Pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$ et toute fonction continue $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, on obtient alors

$$\Lambda_\Psi^n(g)(\gamma) = \langle \delta_\gamma, \Lambda_\Psi^n(g)\rangle = \langle (\Lambda_\Psi^*)^n \delta_\gamma, g\rangle \to \langle c_\gamma \mathcal{N}, g\rangle = c_\gamma \langle \mathcal{N}, g\rangle.$$

Par définition de θ, et en posant $c_g := \langle \mathcal{N}, g\rangle$, cela montre que $\lim_{n\to\infty} \Lambda_\Psi^n(g) = c_g \theta$. □

Remarque 3.2.4. *Les deux assertions du Lemme 3.2.3 restent équivalentes si on suppose seulement que $\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ dans* (1) *et que $c_\gamma \geq 0$ dans* (2).

Pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la mesure

$$\mathcal{M}_{\gamma,n} := \theta \cdot \theta(\gamma)^{-1} \cdot (\Lambda_\Psi^*)^n \delta_\gamma = \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\mathcal{F}^n(\gamma')=\gamma} e^{\Psi(\gamma')+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\gamma'))} \theta(\gamma') \delta_{\gamma'}. \tag{3.17}$$

Lemme 3.2.5. *Sous l'une des deux conditions équivalentes du Lemme 3.2.3, la mesure $\mathcal{M} := \theta\mathcal{N}$ est bien définie et les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(1) $\Lambda_\Psi \theta = \theta$;
(2) $\Lambda_\Psi^* \mathcal{N} = \mathcal{N}$;
(3) *la mesure $\mathcal{M}$ définit une mesure de probabilité et $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$;*
(4) *la mesure $\mathcal{M}$ est $\mathcal{F}$-invariante ;*
(5) *pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_{\gamma,n} = \mathcal{M}$;*
(6) $\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{Supp} \mathcal{M}) \subset \operatorname{Supp} \mathcal{M}$.

Démonstration. (1) est une conséquence de la condition (1) du Lemme 3.2.3. En effet, comme l'opérateur Λ_Ψ est continu sur $\mathcal{C}^0(\mathcal{X})$, on obtient

$$c_\theta \theta = \lim_{n\to\infty} \Lambda_\Psi^{n+1} \theta = \Lambda_\psi(\lim_{n\to\infty} \Lambda_\Psi^n \theta) = \Lambda_\Psi(c_\theta \theta) = c_\theta \Lambda_\Psi \theta.$$

Comme $c_\theta > 0$, on en déduit que $\theta = \Lambda_\Psi(\theta)$. En particulier, comme $\Lambda_\Psi^n \theta = \theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \Lambda_\Psi^n \theta = c_\theta \theta$, ceci implique que $c_\theta = 1$.

(2) Remarquons que, comme $\mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$, la mesure $\Lambda_\Psi^* \mathcal{N}$ est bien définie, et satisfait encore $\Lambda_\Psi^* \mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$. Il suffit de vérifier que $\langle \Lambda_\Psi^* \mathcal{N}, g\rangle = \langle \mathcal{N}, g\rangle$, pour toute fonction continue

$g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{J})$. Avec les notations du Lemme 3.2.3, on a aussi $\langle \mathcal{N}, g\rangle = c_g$, où la constante c_g est caractérisée par la convergence $\lim_{n\to\infty} \Lambda_\Psi^n(g) = c_g\rho$. En particulier, on a $c_g = c_{\Lambda_\Psi(g)}$. La conclusion résulte alors du calcul suivant.

$$\langle \Lambda_\Psi^*\mathcal{N}, g\rangle = \langle \mathcal{N}, \Lambda_\Psi g\rangle = c_{\Lambda_\Psi g} = c_g = \langle \mathcal{N}, g\rangle.$$

(3) Comme θ est strictement positive sur $\mathcal{X}$, on déduit des égalités $\mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$ et $\langle \mathcal{N}, \theta\rangle = c_\theta = 1$ que $\theta \in L^1(\mathcal{N})$. La condition $\mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$ assure aussi que $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$ et, comme la fonction θ et la mesure $\mathcal{N}$ sont positives, la mesure $\mathcal{M}$ est aussi positive. Le calcul suivant montre que c'est une probabilité

$$\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \langle \theta\mathcal{N}, \mathbb{1}_{\mathcal{X}}\rangle = \langle \mathcal{N}, \theta\rangle = c_\theta = 1.$$

(4) Comme $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$, il suffit de montrer que $\langle \mathcal{M}, g\rangle = \langle \mathcal{M}, g\circ\mathcal{F}\rangle$, pour toute fonction continue $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{X})$. De l'égalité $\Lambda_\Psi^*\mathcal{N} = \mathcal{N}$, on déduit

$$\langle \mathcal{M}, g\circ\mathcal{F}\rangle = \langle \theta\mathcal{N}, g\circ\mathcal{F}\rangle = \langle \mathcal{N}, \theta\cdot g\circ\mathcal{F}\rangle = \langle \mathcal{N}, \Lambda_\Psi(\theta\cdot g\circ\mathcal{F})\rangle. \tag{3.18}$$

La définition de Λ_Ψ et la Λ_Ψ-invariance de θ assurent que

$$\Lambda_\Psi(\theta\cdot g\circ\mathcal{F}) = g\cdot\Lambda_\Psi(\theta) = g\theta. \tag{3.19}$$

Comme $\langle \mathcal{N}, g\theta\rangle = \langle \mathcal{M}, g\rangle$, le résultat résulte directement des égalités (3.18) et (3.19).

(5) Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{X})$. D'après la propriété (2) du Lemme 3.2.3, en rappelant que $c_\gamma = \theta(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$, on a

$$\langle \mathcal{M}_{\gamma,n}, g\rangle = \theta(\gamma)^{-1}\langle \theta\cdot(\Lambda_\Psi^*)^n\delta_\gamma, g\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta(\gamma)^{-1}\langle c_\gamma\mathcal{N}, \theta g\rangle = \langle \mathcal{M}, g\rangle,$$

ce qui conclut, puisque $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$ et $\mathcal{M}_{\gamma,n}(\mathcal{J}_s) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(6) Comme $\theta > 0$, on a $\operatorname{Supp}\mathcal{M} = \operatorname{Supp}\mathcal{N}$. Soit $\gamma \in \operatorname{Supp}\mathbb{N}$ et $\gamma' \in \mathcal{J}$ satisfaisant $\mathcal{F}(\gamma') = \gamma$. Considérons un ouvert U suffisamment petit. Comme $\mathcal{F}$ est continue, $\mathcal{F}^{-1}(U)$ est un ouvert contenant γ'. Notons U' sa composante connexe qui contient γ'. Comme $\gamma \in \operatorname{Supp}\mathcal{N}$, on a $\mathcal{N}(U) > 0$, ce qui assure, d'après la définition de l'opérateur Λ_Ψ, que $\Lambda_\Psi^*\mathcal{N}(U') > 0$. Il suit $\gamma' \in \operatorname{Supp}\Lambda_\Psi^*\mathcal{N}$ et, par (2), on obtient $\gamma' \in \operatorname{Supp}\mathcal{N}$, ce qui conclut. □

3.2.2 Des branches inverses contractantes pour les tissus expansifs

On suppose dans la suite qu'il existe une mesure $\mathcal{F}$-invariante $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{J}$ à support compact satisfaisant les propriétés suivantes :

(M1) $\mathcal{M}$ est *acritique*, i.e. $\mathcal{M}(\mathcal{J}_s) = 0$;

(M2) il existe une constante $A_1 > 0$ telle que pour tout paramètre $\lambda \in M$, la mesure de probabilité $(p_\lambda)_*\mathcal{M}$ est ergodique et les exposants de Lyapunov de $(p_\lambda)_*\mathcal{M}$ sont strictement minorés par A_1 ;

(M3) il existe deux fonctions continues $\Psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+^*$ et une mesure positive $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{J}$ telle que $\mathcal{N}(\mathcal{J}_s) = 0$, satisfaisant

(1) $\mathcal{M} = \theta\mathcal{N}$;

(2) $\Lambda_\Psi \theta = \theta$;

(3) $\Lambda_\Psi^* \mathcal{N} = \mathcal{N}$;

(4) pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_{\gamma,n} = \mathcal{M}$, où la mesure $\mathcal{M}_{\gamma,n}$ est définie par (3.17).

La condition **(M1)** est suffisante pour garantir la stabilité de la famille (M, f) [BBD18, Proposition 2.2]. Réciproquement, toute famille stable admet un tissu d'équilibre (Théorème 2.1.3 $(iii) \implies iv)$), que l'on peut rendre acritique [BBD18, Proposition 2.4]. Cela produit un tissu d'équilibre $\mathcal{M}_0$ satisfaisant la condition **(M1)** par acriticité, et la condition **(M3)** avec $\Psi \equiv 0$ et $\theta \equiv 1$. La condition **(M2)** est assurée par une propriété de contraction asymptotique le long des branches inverses génériques pour $\mathcal{M}_0$ (voir [BBD18, Proposition 4.2 et Proposition 4.3]). Cette propriété est essentielle pour construire un mouvement holomorphe de l'ensemble de Julia. Elle a été généralisée dans [BR22] pour une classe plus large de tissus satisfaisant **(M1)** et **(M2)**, que nous énoncerons plus tard (voir la Proposition 3.2.12). Nous établissons ici une version quantitative de cette propriété de contraction, sous l'hypothèse supplémentaire **(M3)**. En particulier, ceci s'applique également au tissu d'équilibre $\mathcal{M}_0$ ci-dessus.

Étant donnés un ouvert $\Omega \subset M$, un élément $\gamma \in \mathcal{X}$ et un réel $\eta > 0$, on note $T_\Omega(\gamma, \eta)$ le η-voisinage du graphe Γ_γ de γ dans $\Omega \times \mathbb{P}^k$, i.e.

$$T_\Omega(\gamma, \eta) := \{(\lambda, z) \in \Omega \times \mathbb{P}^k \ : \ \mathrm{dist}_{\mathbb{P}^k}(z, \gamma(\lambda)) < \eta\}.$$

Un tel voisinage est appelé *tube* centré en γ au-dessus de Ω. Remarquons qu'un tel tube $T_\Omega(\gamma, \eta)$ correspond à une boule $\mathcal{B}_\Omega(\gamma, \eta)$ dans l'espace $(\mathcal{J}, \mathrm{dist}_\Omega)$. On définit la *tranche* $T|_\lambda$ d'un sous-ensemble $T \subset \Omega \times \mathbb{P}^k$ par $T|_\lambda := T \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^k)$, que l'on identifie à un sous-ensemble de $\mathbb{P}^k$.

Dans ce qui suit, on se place sous les hypothèses **(M1)**, **(M2)** et **(M3)** et on fixe une constante A_0 satisfaisant $0 < A_0 < A_1$.

Définition 3.2.6. Soit $\Omega \subset M$ un ouvert, T un tube centré en $\gamma \in \mathcal{X}$ au-dessus de Ω, $n \in \mathbb{N}$ et $m > 0$. On dit qu'une application $g : T \to g(T)$ est une *branche inverse m-contractante* de f d'ordre n au-dessus de T si

(1) $g \circ f^n = \mathrm{id}_{g(T)}$;

(2) pour tout paramètre $\lambda \in \Omega$, pour tout entier $0 \leq l \leq n$, on a

$$\mathrm{diam}_{\mathbb{P}^k} f_\lambda^l(g(T)|_\lambda) \leq e^{-m-(n-l)A_0}.$$

En particulier, on remarque que si un tube T admet une branche inverse m-contractante, alors $\mathrm{diam}_{\mathbb{P}^k}(T|_\lambda) \leq e^{-m}$.

Étant donnée g une branche inverse de f d'ordre n au-dessus d'un tube $T = T(\gamma_0, \eta)$, on peut associer à tout graphe $\gamma \in \mathcal{J}$ tel que $\Gamma_\gamma \subset T$, une fonction holomorphe γ'_g telle que $\Gamma_{\gamma'_g} \subset g(T)$ et $\mathcal{F}(\gamma'_g) = \gamma|_\Omega$. L'association $\gamma \mapsto \gamma'_g$ définit une application $\mathcal{G}$ sur la boule $\mathcal{B}_\Omega(\gamma_0, \eta)$, que l'on peut voir comme une branche inverse de $\mathcal{F}$ au-dessus de cette boule.

Étant donnés un ouvert $\Omega \subset M$ et un tube T centré en $\gamma \in \mathcal{X}$ au-dessus de Ω, on définit la mesure $\mathcal{M}_{T,n}^{(m)}$ par

$$\mathcal{M}_{T,n}^{(m)} := \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\gamma'_g} e^{\Psi(\gamma'_g)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\gamma'_g))} \theta(\gamma'_g) \delta_{\gamma'_g}, \tag{3.20}$$

où la somme porte sur toutes les préimages γ'_g de γ associées à une branche inverse m-contractante g de f d'ordre n au-dessus de T.

Remarque 3.2.7. *Pour tout $n \geq 0$, on a $\mathcal{M}_{T,n}^{(m)} \leq \mathcal{M}_{\gamma,n}$. Ainsi, la condition* **(M3)** *assure que toute valeur d'adhérence $\mathcal{M}'_T$ de la suite $(\mathcal{M}_{T,n}^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $\|\mathcal{M}'_T\| \leq 1$.*

Définition 3.2.8. Soit $\Omega \subset M$ un ouvert, $m > 1$. On dit qu'un tube T centré en $\gamma \in \mathcal{X}$ est m-contractant si, pour n suffisamment grand, on a $\|\mathcal{M}_{T,n}^{(m)}\| \geq 1 - 1/m$. Une boule $\mathcal{B}_\Omega(\gamma, \eta)$ est m-contractante si le tube associé $T_\Omega(\gamma, \eta)$ est m-contractant.

Remarque 3.2.9. *Si $T(\gamma, \eta)$ est un tube m-contractant, alors $\eta \leq e^{-m}$, et toute valeur d'adhérence $\mathcal{M}'_T$ de la suite $\mathcal{M}_{T,n}^{(m)}$ satisfait $\|\mathcal{M}'_T\| \geq 1 - 1/m$.*

Le résultat principal de cette section est le suivant. Il donne un contrôle quantitatif sur la contraction asymptotique le long des branches inverses génériques pour $\mathcal{M}$.

Proposition 3.2.10. *Soit $\mathcal{M}$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{J}$ $\mathcal{F}$-invariante, ergodique, à support compact et satisfaisant* **(M1)**, **(M2)** *et* **(M3)**. *Pour $\mathcal{M}$-presque tout $\gamma \in \mathcal{X}$, pour tout Ω, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \eta < \eta_0$, le tube $T_\Omega(\gamma, \eta)$ est m-contractant.*

Afin de démontrer la Proposition 3.2.10, nous allons utiliser l'*extension naturelle* du système $(\hat{\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{M}})$. On pourra consulter [CFS12, Section 10.4] et [PU10, Theorem 2.7.1] dans le cadre plus général des espaces de Lebesgue. La difficulté principale est de montrer que $\hat{\mathcal{M}}$ est σ-additive. On rappelle ici la construction de l'extension naturelle dans le cas de l'espace polonais $\mathcal{J}$, tout en introdusant quelques notations qui nous seront utiles dans la suite.

On définit l'espace $\hat{\mathcal{J}}$ par

$$\hat{\mathcal{J}} := \{\hat{\gamma} = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{J}^{\mathbb{Z}} \ : \ \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathcal{F}(\gamma_n) = \gamma_{n+1}\}.$$

On note $\pi_n : \hat{\mathcal{J}} \to \mathcal{J}$ la projection définie par $\pi_n(\hat{\gamma}) := \gamma_n$ et $\hat{\mathcal{F}} : \hat{\mathcal{J}} \to \hat{\mathcal{J}}$ le décalage de Bernoulli, défini par

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{\gamma}) := (\mathcal{F}(\gamma_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (\gamma_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Ces applications satisfont $\pi_n \circ \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \circ \pi_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On munit l'espace $\mathcal{J}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{J})$. Pour tout entier $j \in \mathbb{Z}$, on définit le cylindre $\mathcal{A}_{j,\mathcal{B}} \subset \hat{\mathcal{J}}$ de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{J})$ par

$$\mathcal{A}_{j,\mathcal{B}} := \pi_j^{-1}(\mathcal{B}) = \{\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{J}} \ : \ \gamma_j \in \mathcal{B}\}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $j \in \{-n, \dots, n\}$, on peut aussi considérer $\mathcal{A}_{j,\mathcal{B}}$ comme une partie de l'ensemble

$$\hat{\mathcal{J}}_{\{-n,\dots,n\}} := \{(\gamma_k)_{k=-n}^{n} \in \mathcal{J}^{2n+1} \ : \ \forall k \in \{-n, \dots, n\},\ \mathcal{F}(\gamma_k) = \gamma_{k+1}\}.$$

La famille de tous les cylindres à base ouverte forme une base pour la topologie produit sur $\hat{\mathcal{J}}_{\{-n,n\}}$. En remarquant que $\mathcal{A}_{-n,\mathcal{B}_{-n}} \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{n,\mathcal{B}_n} = \mathcal{A}_{-n,\mathcal{B}_{-n} \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{B}_{-(n-1)}) \cap \cdots \cap \mathcal{F}^{-2n}(\mathcal{B}_n)}$, la continuité de $\mathcal{F}$ assure qu'il s'agit aussi d'un π-système (voir par exemple [Kal22, Chapter 1]) dont la tribu engendrée est la tribu borélienne de $\hat{\mathcal{J}}_{\{-n,\dots,n\}}$. Le Lemme des classes monotones [Kal22, Theorem 1.1] assure que toute mesure sur $\hat{\mathcal{J}}_{\{-n,\dots,n\}}$ est définie par ses valeurs sur les cylindres. Étant donné un ouvert $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}$ et un entier $-n \leq j \leq n$, on définit

$$\hat{\mathcal{M}}_n(\mathcal{A}_{j,\mathcal{B}}) := \mathcal{M}(\mathcal{F}^{-(n+j)}(\mathcal{B})). \tag{3.21}$$

La mesure de probabilité $\hat{\mathcal{M}}_n$ est bien définie sur $\hat{\mathcal{J}}_{\{-n,\dots,n\}}$. Comme $\gamma_j \in \mathcal{B}$ si, et seulement si $\gamma_{k-1} \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{B})$, l'invariance de $\mathcal{M}$ conduit à la condition de consistance suivante

$$\hat{\mathcal{M}}_n(\mathcal{A}_{j,\mathcal{B}}) = \hat{\mathcal{M}}_{n+1}(\mathcal{A}_{j,\mathcal{B}}),$$

pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ et tout entiers $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{-n, \dots, n\}$. En vertu du théorème d'extension de Kolmogorov, la famille consistante de mesures $\{\hat{\mathcal{M}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se prolonge de manière unique en une mesure $\hat{\mathcal{M}}$ sur la limite projective $\hat{\mathcal{J}}$. On remarque que la mesure $\hat{\mathcal{M}}$ est $\hat{\mathcal{F}}$-invariante et satisfait $(\pi_n)_*\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$, on applique la même construction à la mesure conditionnelle $\mathcal{M}^\gamma$ de $\mathcal{M}$ sachant γ, dont on notera $\hat{\mathcal{M}}^\gamma$ le prolongement à $\hat{\mathcal{J}}$. On pourra consulter [Kal22, Theorem III.8.5] pour l'existence et la caractérisation des mesures conditionnelles dans un espace polonais. Il résulte que la mesure $\hat{\mathcal{M}}^\gamma$ est caractérisée par

$$\langle \hat{\mathcal{M}}, g \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle \hat{\mathcal{M}}^\gamma, g \rangle \mathcal{M}(\gamma), \tag{3.22}$$

pour tout fonction borélienne positive bornée $g : \hat{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$. Nous donnons maintenant une approximation de la mesure conditionnelle $\hat{\mathcal{M}}^\gamma$ qui nous sera utile par la suite.

Fixons un entier $n > 0$. On considère la projection $\pi^n : \hat{\mathcal{J}} \to \mathcal{J}^{n+1}$ définie par

$$\pi^n := (\pi_{-n}, \dots, \pi_0).$$

D'après l'hypothèse **(M1)**, on a $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = 1$ et l'application $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est bien définie et surjective. En particulier, on a l'inclusion $\mathcal{X}^{n+1} \cap \hat{\mathcal{J}}_{\{-n,\dots,0\}} \subset \pi^n(\hat{\mathcal{J}})$. Ainsi, si $\beta = (\beta_{-n}, \dots, \beta_0) \in \mathcal{X}^{n+1}$ satisfait $\mathcal{F}(\beta_j) = \beta_{j+1}$ pour tout $j \in \{-n, , \dots, -1\}$, on peut choisir un représentant $\hat{\beta} \in (\pi^n)^{-1}(\beta)$. (remarquons que l'axiome du choix n'est pas nécessaire ici). Dès lors, pour tout $\gamma_0 \in \mathcal{X}$, il existe d^{kn} éléments $\beta = (\beta_{-n}, \dots, \beta_0) \in \mathcal{X}^{n+1}$ satisfaisant $\beta_0 = \gamma_0$, et on obtient autant de représentants $\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{J}}$. On note $\hat{\mathcal{Z}}_n(\gamma_0) \subset \hat{\mathcal{J}}$ cet ensemble de d^{kn} représentants.

Pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$, on définit

$$\hat{\mathcal{M}}_n^\gamma := \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{Z}}_n(\gamma_0)} e^{\Psi(\beta_{-n})+\ldots+\Psi(\beta_{-1})} \theta(\beta_{-n}) \delta_{\hat{z}}.$$

La fonction θ est strictement positive sur $\mathcal{X}$, la mesure $\hat{\mathcal{M}}_n^\gamma$ est bien définie pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$. En particulier, elle est bien définie pour $\mathcal{M}$-presque tout $\gamma \in \mathcal{J}$.

Lemme 3.2.11. *Pour $\mathcal{M}$-presque tout $\gamma \in \mathcal{X}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathcal{M}}_n^\gamma = \hat{\mathcal{M}}^\gamma.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour $\mathcal{M}$-presque tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$, tout entier $j \geq 0$ et tout borélien $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{J})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathcal{M}}_n^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) = \hat{\mathcal{M}}^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}).$$

Dès lors, le résultat est une conséquence des deux identités suivantes :

(1) $\hat{\mathcal{M}}_n^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) = \hat{\mathcal{M}}_j^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}})$ pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$ et $n > j > 0$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \hat{\mathcal{M}}_j^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) d\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ pour tout $j \geq 0$.

L'identité (1) assure que la suite dont on cherche à déterminer la limite quand $n \to +\infty$ est en fait stationnaire. L'identité (2) permet de caractériser la limite à l'aide de (3.22). On démontre d'abord l'identité (1). Il s'agit d'une conséquence de l'égalité $\Lambda_\psi \theta = \theta$. En effet, pour tout $n > j \geq 0$ et tout borélien $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{M}}_n^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) &= \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{Z}}_n(\gamma_0)} e^{\Psi(\beta_{-n})+\ldots+\Psi(\beta_{-1})} \theta(\beta_{-n}) \delta_{\hat{\beta}}(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) \\
&= \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{Z}}_n(\gamma_0)} (\Lambda_\Psi^{n-i}\theta)(\beta_{-i}) e^{\Psi(\beta_{-i})+\ldots+\Psi(\beta_{-1})} \delta_{\hat{\beta}}(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) \\
&= \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{Z}}_n(\gamma_0)} \theta(\beta_{-j}) e^{\Psi(\beta_{-j})+\ldots+\Psi(\beta_{-1})} \delta_{\hat{\beta}}(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) \\
&= \hat{\mathcal{M}}_j^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la première identité.

Montrons maintenant l'identité (2). Nous allons utiliser le fait que la mesure $\mathcal{N}$ est un point fixe de l'opérateur Λ_Ψ^*. Soit $j \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\int \hat{\mathcal{M}}_j^\gamma(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) \mathcal{M}(\gamma) &= \int \Big(\theta(\gamma)^{-1} \sum_{\hat{\beta} \in \hat{\mathcal{Z}}_j \,:\, \beta_0 = \gamma} \theta(\beta_{-j}) e^{\Psi(\beta_{-j})+\ldots+\Psi(\beta_{-1})} \delta_{\hat{\beta}}(\mathcal{A}_{-j,\mathcal{B}}) \Big) \mathcal{M}(\gamma) \\
&= \int \Big(\theta(\gamma)^{-1} \sum_{\mathcal{F}^j(\gamma') = \gamma} \theta(\gamma') e^{\Psi(\gamma')+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{j-1}(\gamma'))} \mathbb{1}_{\mathcal{B}}(\gamma) \Big) \mathcal{M}(\gamma) \\
&= \big\langle \mathcal{M}, \theta^{-1} \Lambda_\Psi^j(\theta \mathbb{1}_{\mathcal{B}}) \big\rangle = \big\langle \mathcal{N}, \Lambda_\Psi^j(\theta \mathbb{1}_{\mathcal{B}}) \big\rangle \\
&= \langle (\Lambda_\Psi^j)^* \mathcal{N}, \theta \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \rangle = \langle \mathcal{N}, \theta \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \rangle = \mathcal{M}(\mathcal{B}),
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité $\mathcal{M} = \theta \mathcal{N}$ dans la dernière étape. Cela complète la preuve. □

Pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$ et tout $\hat{\gamma} = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{J}}$ tel que $\gamma_0 = \gamma$, on note $f_{\hat{\gamma}}^{-n}$ l'unique branche inverse de f^n, définie sur un voisinage de Γ_γ, satisfaisant $f_{\hat{\gamma}}^{-n}(\gamma(\lambda)) = \gamma_{-n}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in M$. De telles branches inverses sont définies pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$, mais seulement sur un voisinage de diamètre a priori non-uniforme de Γ_γ. La proposition suivante fournit un contrôle uniforme en λ de la taille du voisinage de $\gamma(\lambda)$ sur lequel ces branches inverses sont définies. On trouvera une démonstration dans [BBD18, Propositions 4.2 et 4.3] pour le cas des états d'équilibre, voir aussi [BR22, Proposition A.1] pour l'énoncé dans le cas général.

Proposition 3.2.12. *Considérons (M, f) une famille holomorphe stable d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. Soit $\mathcal{M}$ une mesure de probabilité $\mathcal{F}$-invariante sur $\mathcal{J}$ à support compact satisfaisant les hypothèses* **(M1)** *et* **(M2)**. *Alors, il existe un ouvert $\Omega \Subset M$, une constante $0 < A < A_1$, un borélien $\hat{\mathcal{Y}} \subset \hat{\mathcal{J}}$ avec $\mathcal{M}(\hat{\mathcal{Y}}) = 1$, et deux fonctions boréliennes $\eta_A : \hat{\mathcal{Y}} \to (0, 1]$ et $l_A : \hat{\mathcal{Y}} \to [1, +\infty[$ satisfaisant les propriétés suivantes.*

- *Pour tout $\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{Y}}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la branche inverse $f_{\hat{\gamma}}^{-n}$ est définie et lipschitzienne sur le tube $T_\Omega(\gamma_0, \eta_A(\hat{\gamma}))$;*
- *$f_{\hat{\gamma}}^{-n}(T_\Omega(\gamma_0, \eta_A(\hat{\gamma}))) \subset T_\Omega(\gamma_{-n}, e^{-nA})$;*
- *$\widetilde{\mathrm{Lip}}(f_{\hat{\gamma}}^{-n}) \leq l_A(\hat{\gamma})e^{-nA}$,*

où $\widetilde{\mathrm{Lip}}(f_{\hat{\gamma}}^{-n}) := \sup_{\lambda\in\Omega} \mathrm{Lip}(f_{\hat{\gamma}}^{-n}|_{B_{\mathbb{P}^k}(\gamma_0,\lambda),\eta_A})$.

Preuve de la Proposition 3.2.10. On fixe $m > 0$. On rappelle qu'on a fixé une contante A_0 telle que $0 < A_0 < A_1$ (voir ce qui précède la Définition 3.2.6). On fixe une constante A telle que $A_0 < A < A_1$ et un entier $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit

$$\hat{\mathcal{Y}}_N := \{\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{Y}} \ : \ \eta_A(\hat{\gamma}) \geq N^{-1} \text{ et } l_A(\hat{\gamma}) \leq N\}.$$

D'après la Proposition 3.2.12, on a $\lim_{N\to\infty} \hat{\mathcal{M}}(\hat{\mathcal{Y}}_N) = 1$. On fixe $N_0 = N_0(m, r)$ tel que $\hat{\mathcal{M}}(\hat{\mathcal{Y}}_N) > 1 - 1/(2m^{r+1})$ pour tout $N \geq N_0$. Dès lors, l'inégalité de Markov et la caractérisation des mesures $\hat{\mathcal{M}}^\gamma$ assurent qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{X}_r \subset \mathcal{X}$ tel que $\mathcal{M}(\mathcal{X}_r) > 1-1/m^r$ et pour tout $\gamma \in \mathcal{X}_r$ et $N \geq N_0$, on a

$$\hat{\mathcal{M}}^\gamma(\hat{\mathcal{Y}}_N \cap \{\gamma_0 = \gamma\}) > 1 - 1/(2m). \tag{3.23}$$

Il suffit de démontrer le résultat pour tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}_r$. Soit $\gamma \in \mathcal{X}_r$ un tel graphe. D'après la Proposition 3.2.12, toutes les branches inverses d'ordre n définies sur le tube $T_\Omega(\gamma, e^{-m}/(2N))$ correspondant à $\hat{\gamma} \in \hat{\mathcal{Y}}_n \cap \{\gamma_0 = \gamma\}$ sont m-contractantes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le Lemme 3.2.11 et l'estimation (3.23) aboutissent alors à l'inégalité suivante, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

$$\hat{\mathcal{M}}_n^\gamma(\hat{\mathcal{Y}}_N \cap \{\gamma_0 = \gamma\}) > 1 - 1/m.$$

Cette inégalité assure que, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, en notant $T := T_\Omega(\gamma, e^{-m}/(2N))$, on a $\|\mathcal{M}_{T,n}^{(m)}\| > 1 - 1/m$, ce qui prouve que le tube T est m-contractant. □

3.2.3 Les tissus associés aux états d'équilibre

Nous travaillons maintenant sous les hypothèses du Théorème 3.2.2. En particulier, nous supposons que f_{λ_0} satisfait l'hypothèse **(A)** et que le potentiel ψ satisfait l'hypothèse **(B)** et $\max_{\mathbb{P}^k} \psi - \min_{\mathbb{P}^k} \psi < \log d$. Quitte à remplacer ψ par $\psi - P(\psi)$, on peut supposer que $P(\psi) = 0$. On note Λ_ψ l'opérateur de transfert, défini par

$$\forall g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{P}^k)\ \forall y \in \mathbb{P}^k\ :\ \sum_{f_{\lambda_0}(x)=y} e^{\psi(x)} g(x),$$

où les préimages dans la somme sont comptées avec multiplicité. D'après [BiDi23, Theorem 1.1], il existe une unique mesure de probabilité m_ψ et une fonction continue $\rho_\psi : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}_+^*$, unique à une constante multiplicative près, telles que pour toute fonction continue $g : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{P}^k$, on a

$$\Lambda_\psi^n(g) \to \langle m_\psi, g\rangle \rho_\psi \quad \text{et} \quad (\Lambda_\psi^n)^* \delta_x \to \rho_\psi(x) m_\psi.$$

On renormalise la fonction ρ_ψ de sorte que $\langle m_\psi, \rho_\psi\rangle = 1$. Ainsi, la mesure de probabilité $\mu_\psi := \rho_\psi m_\psi$ est f_{λ_0}-invariante, et il s'agit de l'unique état d'équilibre associé au système $(\mathbb{P}^k, f_{\lambda_0})$ relativement au potentiel ψ. En particulier, pour tout point $x \in \mathbb{P}^k$, les mesures

$$\mu_{x,n} := \rho_\psi \cdot \rho_\psi(x)^{-1} (\Lambda_\psi^n)^* \delta_x = \rho_\psi^{-1}(x) \sum_{f^n(y)=x} e^{\psi(y)+\ldots+\psi(f^{n-1}(y))} \rho_\psi(y) \delta_y$$

satisfont $\lim_{n\to\infty} \mu_{x,n} = \mu_\psi$.

En vertu de la condition $\max_{\mathbb{P}^k} \psi - \min_{\mathbb{P}^k} \psi < \log d$, la mesure μ_ψ satisfait $h_{\mu_\psi} > (k-1)\log d$ (voir par exemple la Section 3.1 ou [BiDi23, Proposition 4.9]). Ainsi, d'après [BR22, Theorem 3.12], il existe $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$ une mesure de probabilité $\mathcal{F}$-invariante sur $\mathcal{J}$ à support compact satisfaisant les hypothèses **(M1)** et **(M2)**. Le lemme suivant fournit l'unicité d'un tel tissu.

Lemme 3.2.13. *Soit (M, f) une famille holomorphe μ-stable d'endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. Soit $\lambda_0 \in M$ un paramètre et $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ deux (λ_0, μ_ψ)-tissus. On suppose que $\mathcal{M}_1$ est acritique. Alors $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{M}_1$ est acritique, la lamination $\mathcal{L}$ définie comme en Proposition 1.2.13 par $\mathcal{L} := \mathcal{J} \setminus (\operatorname{Supp} \mathcal{M}_1)_\cap$ satisfait $\mathcal{M}_1(\mathcal{L}) = 0$ (voir [BR22, Sketch of proof of Proposition 4.10]). Dès lors, comme $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des (λ_0, μ_ψ)-tissus, et que l'application $p_{\lambda_0} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_{\lambda_0}$ est bijective, on obtient

$$\mathcal{M}_2(\mathcal{L}) = \mathcal{M}_2(p_{\lambda_0}^{-1}(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = \mu_\psi(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = \mathcal{M}_1(p_{\lambda_0}^{-1}(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = \mathcal{M}_1(\mathcal{L}) = 1.$$

Le Lemme 3.1.4 permet de conlure. □

On définit les fonctions $\theta, \Psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ par

$$\theta(\gamma) := \rho_\psi(\gamma(\lambda_0)) \quad \text{et} \quad \Psi(\gamma) := \psi(\gamma(\lambda_0)).$$

Remarquons que ces fonctions sont continues sur $\mathcal{J}$.

Lemme 3.2.14. *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tout graphe $\gamma \in \mathcal{J}$ admet un voisinage ouvert $\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$ satisfaisant*

$$\inf_{\mathcal{A}} \theta \geq (1 - 1/m) \sup_{\mathcal{A}} \theta. \tag{3.24}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{J}$ un voisinage ouvert de γ. Par continuité de θ en γ et la stricte positivité de ρ_ψ sur le compact $\mathbb{P}^k$, il existe un ouvert $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ tel que pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}$, on a

$$\theta(\gamma_1) - \theta(\gamma_2) \leq \frac{\inf_{\mathcal{A}'} \theta}{m}.$$

En remarquant que $\inf_{\mathcal{A}'} \theta \leq \inf_{\mathcal{A}} \theta \leq \sup_{\mathcal{A}} \theta$, on obtient

$$\theta(\gamma_1) - \theta(\gamma_2) \leq \frac{\sup_{\mathcal{A}} \theta}{m},$$

ce qui montre le résultat, en passant à la borne supérieure selon γ_1 et à la borne inférieure selon γ_2. □

On considère l'opérateur Λ_Ψ comme défini en (3.16). Pour tout $\gamma \in \mathcal{X}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la mesure $\mathcal{M}_{\gamma,n}$ par 3.17. En vertu des Lemmes 3.2.3, 3.2.5 et 3.2.13, il existe une unique mesure de probabilité $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{X}$ telle que $\Lambda_\Psi^*(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ et $\Lambda_\Psi(\theta) = \theta$. De plus, la mesure $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$ satisfait $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi} = \theta\mathcal{N}$, et pout tout graphe $\gamma \in \mathcal{X}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\gamma,n} &= \theta(\gamma)^{-1} \sum_{\mathcal{F}^n(\gamma')=\gamma} e^{\Psi(\gamma')+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\gamma'))} \theta(\gamma') \delta_{\gamma'} \\
&= \rho_\psi(\gamma(\lambda_0))^{-1} \sum_{\mathcal{F}^n(\gamma')=\gamma} e^{\psi(\gamma'(\lambda_0))+\ldots+\psi(\mathcal{F}^{n-1}(\gamma')(\lambda_0))} \rho_\psi(\gamma'(\lambda_0)) \delta_{\gamma'} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En particulier, la mesure $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$ satisfait l'hypothèse **(M3)**.

On conclut cette section avec un résultat dont nous aurons besoin dans la section suivante. On rappelle que, dans le cadre de l'hypothèse **(B)**, on a $q > 2$ et ψ est $\log^q$-continue.

Lemme 3.2.15. *Il existe une constante $C = C(A_0, q) > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, toute branche inverse $g : T \to g(T)$ de f, d'ordre n, au-dessus d'un tube T, m-contractante, et toutes familles de graphes $\{\gamma_l^1\}_{l=0}^{n-1}$ et $\{\gamma_l^2\}_{l=0}^{n-1}$ avec $\{\Gamma_{\gamma_l^1}, \Gamma_{\gamma_l^2}\} \subset f^l(g(T))$ pour tout $0 \leq l \leq n-1$, on a*

$$\sum_{l=0}^{n-1} |\Psi(\gamma_l^1) - \Psi(\gamma_l^2)| \leq C m^{-(q-1)}.$$

Démonstration. D'après la définition de Ψ, on a

$$\sum_{l=0}^{n-1} |\Psi(\gamma_l^1) - \Psi(\gamma_l^2)| = \sum_{l=0}^{n-1} |\psi(\gamma_l^1(\lambda_0)) - \psi(\gamma_l^2(\lambda_0))|.$$

Le résultat peut alors être obtenu comme une conséquence directe de [BiDi23, Lemma 4.13]. Nous rappelons ici les arguments. Comme g est m-contractante, pour tout $0 \leq l \leq n-1$, on a $\mathrm{dist}_{\mathbb{P}^k}(\gamma_l^1(\lambda_0), \gamma_l^2(\lambda_0)) \leq e^{-m-(n-l)L_0}$. Ainsi, en considérant la fonction $h_q(t) := |\ln(t) - q - 1|^{-q}$ (voir la Section 1.3.2), et en utilisant $q > 2$, on obtient

$$\sum_{l=0}^{n-1} |\Psi(\gamma_l^1) - \Psi(\gamma_l^2)| \leq \sum_{l=0}^{n-1} \|\psi\|_{\log^q} h_q \circ \mathrm{dist}_{\mathbb{P}^k}(\gamma_l^1(\lambda_0), \gamma_l^2(\lambda_0)) \lesssim m^{(-q-1)},$$

où la constante implicite dépend seulement de L_0 et q. □

3.2.4 Construction des graphes répulsifs

Pour simplifier, on note dans cette section $\mathcal{M}$ la mesure $\mathcal{M}_{\lambda_0,\mu_\psi}$ introduite dans la section précédente. On rappelle aussi qu'on a supposé, sans perdre de généralité, que $P(\psi) = 0$. On fixe un ouvert relativement compact $M' \Subset M$, et on considère les graphes des éléments de $\mathcal{J}$ comme des graphe au-dessus de M'. En particulier, la distance dist_∞ désignera, dans la suite, la distance uniforme sur $\mathcal{O}(M', \mathbb{P}^k)$.

Le résultat suivant réalise l'estimation clé pour démontrer le Théorème 3.2.2. En vertu des résultats démontrés dans les Sections 3.2.1 et 3.2.2, nous pouvons suivre l'approche de [BiDi23, Lemma 4.14]. En particulier, nous employons une technique due à Buff [Buf05] qui simplifie la preuve originale de [BrDu99] pour l'équidistribution des J-cycles répulsifs vers la mesure d'entropie maximale.

Proposition 3.2.16. *Soit $\mathfrak{U}$ une collection finie d'ouverts de $\mathcal{J}$ deux à deux disjoints. Pour tout $m > 0$, il existe $N(m, \mathfrak{U}) > m$ tel que pour tout $n > N(m, \mathfrak{U})$, il existe un ensemble $\mathcal{Q}_{m,n}$ de mouvements de cycles répulsifs de période n satisfaisant, pour tout $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$*

$$(1 - 1/m)\mathcal{M}(\mathcal{U}) \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Q}_{m,n}} e^{\Psi(\gamma) + \cdots + \Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\gamma))} \leq (1 + 1/m)\mathcal{M}(\mathcal{U}).$$

Avant de démontrer la Proposition 3.2.16, nous effectuons quelques simplifications préliminaires. Tout d'abord, il suffit de montrer l'estimation pour un seul ouvert $\mathcal{U}$. Le cas général se déduit en posant $N(m, \mathfrak{U}) := \max_{\mathcal{U} \in \mathfrak{U}} N(m, \{\mathcal{U}\})$. On peut aussi supposer que $\mathcal{M}(\mathcal{U}) > 0$. En effet, si $\mathcal{M}(\mathcal{U}) = 0$, on conclut en posant $N(m, \mathfrak{U}) := m + 1$ et $\mathcal{Q}_{m,n} = \emptyset$.

On fixe des entiers $m_2 \gg m_1 \gg m$. D'après la Proposition 3.2.10, pour $\mathcal{M}$-presque tout $\gamma \in \mathcal{J}$, le tube $T_{M'}(\gamma, \eta)$ (et donc la boule $\mathcal{B}_\infty(\gamma, \eta) \subset \mathcal{J}$) est m_2-contractant, pour un $\eta = \eta(\gamma)$ suffisamment petit. D'après le Lemme 3.2.14, en recouvrant un compact de mesure arbitrairement grande, on peut trouver un ensemble fini de boules m_2-contractantes $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{J}$ dont les centres sont des éléments de $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ telles que $\mathcal{B}_i \Subset \mathcal{U}$, satisfaisant (3.24) et $\mathcal{M}(\mathcal{U} \setminus \cup_i \mathcal{B}_i) < \mathcal{M}(\mathcal{U})/m_2$. Quitte à considérer des ouverts de la forme $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \setminus \cup_{j<i} \overline{\mathcal{B}_j}$, on obtient un recouvrement par des ouverts deux à deux disjoints, de sorte qu'il suffit de montrer l'estimation pour chaque ouvert $\mathcal{B}_i'$. Pour simplifier, nous supposons que les boules $\mathcal{B}_i$ sont deux à deux disjointes. Ainsi, pour démontrer la Proposition 3.2.16, il suffit de prouver l'estimation suivante.

Proposition 3.2.17. *Pour tout $m_1 > 0$, il existe $\bar{m}_2(m_1) > m_1$ tel que pour tout $m_2 > \bar{m}_2$ et toute boule m_2-contractante $\mathcal{T} = \mathcal{B}_\infty(\gamma, \eta)$, avec $\gamma \in \operatorname{Supp}\mathcal{M}$, satisfaisant (3.24) (avec $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ et $m = m_2$), il existe $n(m_2) > m_2$ tel que pour tout $n \geq n(m_2)$, il existe un ensemble $\mathcal{Q}_n \subset \mathcal{T} \cap \operatorname{Supp}\mathcal{M}$ de mouvements de points n-répulsifs satisfaisant l'estimation suivante*

$$(1 - 1/m_1)\mathcal{M}(\mathcal{T}) \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}_n} e^{\Psi(\gamma)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\gamma))} \leq (1 + 1/m_1)\mathcal{M}(\mathcal{T}).$$

Rappelons que $\mathcal{M}(\mathcal{T}) > 0$. On peut fixer un entier $m_3 \geq m_2/\mathcal{M}(\mathcal{T})$ et une boule $\mathcal{T}^\star := \mathcal{B}_\infty(\gamma, \eta^\star)$, où $\eta^\star < \eta$ satisfait $\mathcal{M}(\mathcal{T}^\star) > (1 - 1/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T})$. On désigne aussi T et $T^\star$ les tubes correspondant respectivement aux boules $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^\star$. D'après le Lemme 3.2.14, il existe une famille finie de boules m_3-contractantes $\mathcal{D}_i := \mathcal{B}_\infty(\gamma_i, \eta_i)$ telles que $\mathcal{M}(\cup_i \mathcal{D}_i) > 1 - 1/m_3$ et satisfaisant (3.24) (avec $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ et $m = m_3$). Comme précédemment, on suppose que les boules $\mathcal{D}_i$ sont deux à deux disjointes. On pose $\mathcal{D} := \cup_i \mathcal{D}_i$. On considère aussi des boules $\mathcal{D}_i^\star := \mathcal{B}_\infty(\gamma_i, \eta_i^*) \subset \mathcal{D}_i$ satisfaisant $\eta_i^* < \eta_i$ et $\mathcal{M}(\cup_i \mathcal{D}_i^\star) > 1 - 1/m_3$. On pose également $\mathcal{D}^\star := \cup_i \mathcal{D}_i^\star$. On notera D_i le tube correspondant à la boule $\mathcal{D}_i$ et on pose $D := \cup_i D_i$.

Lemme 3.2.18. *Il existe un entier $n_1 = n_1(m_2, \mathcal{T}, \mathcal{T}^\star, \mathcal{D}_i)$ tel que*

$$(1 - 4/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T}) \leq \mathcal{M}_{D_i,N}^{(m_3)}(\mathcal{T}^\star) \leq (1 + 4/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T}) \text{ pour tout } i \text{ et } N \geq n_1.$$

On rappelle que la mesure $\mathcal{M}_{D_i,N}^{(m_3)}$ est définie par (3.20).

Démonstration. Comme les boules $\mathcal{D}_i$ sont m_3-contractantes, et $m_3 \geq m_2/\mathcal{M}(\mathcal{T})$, pour chaque i et tout N assez grand, on a

$$\mathcal{M}_{D_i,N}^{(m_3)} \geq (1 - \mathcal{M}(\mathcal{T})/m_2).$$

Comme $\mathcal{M}_{D_i,N}^{(m3)} \leq \mathcal{M}_{\gamma_i,N}$ et $\|\mathcal{M}_{\gamma_i,N}\| = 1 + o(1)$, on en déduit que

$$\|\mathcal{M}_{\gamma_i,N} - \mathcal{M}_{D_i,N}^{(m_3)}\| \leq \mathcal{M}(\mathcal{T})/m_2 + o(1).$$

Ainsi, il suffit de montrer que, pour chaque i et tout N assez grand, on a

$$(1 - 2/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T}) \leq \mathcal{M}_{\gamma_i,N}(\mathcal{T}^\star) \leq (1 + 2/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T}),$$

ce qui se déduit de (3.25) et de l'inégalité $\mathcal{M}(\mathcal{T}^\star) \geq (1 - 1/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T})$. □

Lemme 3.2.19. *Il existe un entier $n_2 = n_2(m_2, \mathcal{T}, \mathcal{D}^\star)$ tel que*

$$(1 - 4/m_2) \leq \mathcal{M}_{T,N}^{(m_2)}(\mathcal{D}^\star) \leq (1 + 4/m_2) \text{ pour tout } i \text{ et } N \geq n_2.$$

Démonstration. Comme $\mathcal{T}$ est m_2-contractante, pour N assez grand, on obtient

$$\|\mathcal{M}_{T,N}^{(m_2)}\| \geq (1 - 1/m_2).$$

On rappelle également que $\mathcal{M}_{T,N}^{(m_2)} \leq \mathcal{M}_{\gamma,N}$ et que $\|\mathcal{M}_{\gamma,N}\| \leq 1 + o(1)$. Ainsi, il suffit de montrer que

$$1 - 2/m_2 \leq \mathcal{M}_{\gamma,N}(\mathcal{D}^\star) \leq 1 + 1/m_2,$$

ce qui se déduit, puisque $m_3 \geq m_2$, de (3.25) et de l'inégalité $\mathcal{M}(\mathcal{D}^\star) \geq 1 - 1/m_3$. □

Nous construisons maintenant l'ensemble $\mathcal{Q}$ des mouvements de cycles répulsifs de la Proposition 3.2.17.

Dès que N_1 est suffisamment grand, à tout élément du support de $\mathbb{1}_{\mathcal{T}^\star}\mathcal{M}_{D_i,N_1}^{(m_3)}$ correspond une branche inverse de $f : M \times \mathbb{P}^k \to M \times \mathbb{P}^k$ d'ordre N_1 m_3-contractante au-dessus du tube D_i, qui envoie D_i sur un sous-ensemble du tube T dont la tranche en λ est relativement compacte dans $T|_\lambda$. De la même manière, dès que N_2 est suffisamment grand, à tout élément du support de $\mathbb{1}_{\mathcal{D}^\star}\mathcal{M}_{T,N_2}^{(m_2)}$ correspond une branche inverse d'ordre N_2 m_2-contractante qui envoie le tube T sur un sous-ensemble de $D = \cup_i D_i$.

On définit la famille $\{g_j\}$ comme la composition de ces branches inverses, ce qui fournit des branches inverses de $f^{N_1+N_2}$ qui envoient le tube T sur un sous-ensemble de T dont la tranche en λ est relativement compacte dans $T|_\lambda$. Étant donnée une telle branche g_j, on note $g_j = g_j^{(1)} \circ g_j^{(2)}$, où $g_j^{(2)} : T \to D$ est une branche inverse de f^{N_2} et $g_j^{(1)} : D_i \to T$ est une branche inverse de f^{N_1}. Pour chaque j, on note aussi $i(j)$ l'entier défini par $g_j^{(2)}(T) \subset D_{i(j)}$.

Par définition, la branche g_j est de la forme $g_j(\lambda, z) =: (\lambda, g_j^\lambda(z))$, où la fonction $\lambda \mapsto g_j^\lambda(z)$ est holomorphe pour tout z. Pour tout graphe $\gamma' \in \mathcal{T}$, et tout paramètre λ, on définit $\mathcal{G}_j(\gamma')(\lambda) := g_j^\lambda(\gamma'(\lambda))$, de sorte que $\mathcal{G}_j(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}^\star$. On définit de la même manière $\mathcal{G}_j^{(1)} : \mathcal{D}_i \to \mathcal{T}^\star$ et $\mathcal{G}_j^{(2)} : \mathcal{T} \to \mathcal{D}_i$. Remarquons alors que $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j^{(1)} \circ \mathcal{G}_j^{(2)}$. On rappelle que dist_∞ désigne la distance uniforme sur $\mathcal{O}(M', \mathbb{P}^k)$.

Lemme 3.2.20. *Pour $N = N_1 + N_2$ suffisamment grand, l'opérateur $\mathcal{G}_j$ admet un point fixe $\gamma_j^\infty \in \mathcal{T} \cap \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$. De plus, $\gamma_j^\infty(\lambda)$ est un point N-périodique pour f_λ pour tout $\lambda \in M$, qui est répulsif pour $\lambda \in M'$.*

Démonstration. Comme $\gamma \in \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$, et que l'espace $(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}, \mathrm{dist}_\infty)$ est complet, il suffit, d'après le Lemme 3.2.5 (6), de montrer que $\mathcal{G}_j$ est une application contractante sur un sous-ensemble fermé de $\mathcal{T}$ qui contient γ. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{T}$. D'après la Proposition 3.2.12, on obtient

$$\mathrm{dist}_\infty(\mathcal{G}_j(\gamma_1), \mathcal{G}_j(\gamma_2)) \lesssim e^{-NA}\,\mathrm{dist}_\infty(\gamma_1, \gamma_2), \tag{3.26}$$

où la constante implicite ne dépend pas de N. Ainsi, pour N suffisamment grand, l'opérateur $\mathcal{G}_j$ réalise une contraction du sous-ensemble fermé $\overline{\mathcal{T}^\star} = \{\gamma' \in \mathcal{J} : \mathrm{dist}_\infty(\gamma, \gamma') \leq \eta^\star\}$. D'après le théorème de point fixe de Picard appliqué à l'espace métrique complet $\overline{\mathcal{T}^\star} \cap \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$, l'opérateur $\mathcal{G}_j$ admet un point fixe $\gamma_j^\infty \in \mathcal{T} \cap \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$. En particulier, on remarque que pour tout $\lambda \in M$, le point $\gamma_j^\infty(\lambda)$ se situe dans J_λ. Pour conclure, il reste à prouver que le graphe γ_j^∞ se prolonge en un point N-périodique pour $\lambda \in M$ et qu'il est répulsif pour $\lambda \in M'$.

Rappelons que $T = T(\gamma, \eta)$ est le tube associé à la boule $\mathcal{T}$. Remarquons que la fonction $f^N : g_j(T) \to T$ est surjective, ce qui assure que $f^N \circ g_j = \mathrm{Id}_T$. Ainsi, pour tout $\lambda \in M'$, l'égalité $\gamma_j^\infty(\lambda) = \mathcal{G}_j(\gamma_j^\infty)(\lambda) = g_j(\gamma_j^\infty(\lambda))$ conduit à $f_\lambda^N(\gamma_j^\infty(\lambda)) = \gamma_j^\infty(\lambda)$. Cela montre que γ_j^∞ est le mouvement d'un point N-périodique au-dessus de M'. Pour montrer qu'il s'étend en un mouvement de point périodique au-dessus de M, il suffit de montrer que $\gamma_j^\infty(\lambda)$ est

périodique pour tout $\lambda \in M'$. En effet, comme $\gamma_j^\infty \in \operatorname{Supp} \mathcal{M}$, [BBD18, Lemma 2.5] permet de conclure.

Remarquons que l'estimation (3.26) fournit aussi l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout graphe $\gamma_1 \in \mathcal{T}\left(\mathcal{G}_j^q(\gamma_1), c \cdot e^{-qNA}\right)$, on a

$$\operatorname{dist}_\infty(\mathcal{F}^{qN}(\gamma_1), \gamma_j^\infty) \gtrsim e^{qNA} \operatorname{dist}_\infty(\gamma_1, \gamma_j^\infty),$$

où la constante implicite ne dépend pas de q. Dès lors, $\gamma_j^\infty(\lambda)$ est répulsif pour tout $\lambda \in M'$, ce qui conclut la preuve. □

On peut désormais conclure la preuve de la Proposition 3.2.17, ce qui démontre, comme vu précédemment, la Proposition 3.2.16.

Fin de la démonstration de la Proposition 3.2.17. Nous gardons les notations introduites ci-dessus. Quitte à augmenter n_1 et n_2 dans les Lemmes 3.2.18 et 3.2.19, on peut supposer que $N_1 = n_1$ et $N_2 = n_2$ dans la construction qui précède le Lemme 3.2.20. On définit $n(m_2) := n_1(m_2) + n_2(m_2)$, pour un choix de m_2 et m_3 suffisamment grands, comme précédemment. Pour tout $n > n(m_2)$, on désigne par

$$\mathcal{Q}_n := \{\sigma_j\}$$

l'ensemble des points fixes σ_j fournis par le Lemme 3.2.20 avec $N_1 = n_1(m_2)$ et $N_2 = n - n_2(m_2)$ lorsque j varie. Chaque élément $\sigma \in \mathcal{Q}_n$ est alors un mouvement de point n-périodique répulsif. On fixe

$$\mathcal{M}_n := \sum_{\sigma \in \mathcal{Q}_n} e^{\Psi(\sigma)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\sigma))} \delta_\sigma = \sum_j e^{\Psi(\sigma_j)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}(\sigma_j))} \delta_{\sigma_j}.$$

On rappelle que $\mathcal{T} = \mathcal{B}_\infty(\gamma, \eta)$ et que l'entier $i(j)$ est défini par $g_j^{(2)}(T) \subset D_{i(j)}$. Le but est de contrôler $\mathcal{M}_n(\mathcal{T})$. Pour cela, on va approcher $\mathcal{M}_n$ par la mesure $\tilde{\mathcal{M}}$ définie par

$$\tilde{\mathcal{M}}_n := \sum_j \Big(e^{\Psi(\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_{i(j)}))+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{N_1-1}\circ\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_{i(j)}))} \cdot \frac{\theta(\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_{i(j)}))}{\theta(\gamma_{i(j)})} \cdot e^{\Psi(\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma))+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{N_2-1}\circ\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma))} \frac{\theta(\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma))}{\theta(\gamma)} \Big) \delta_{\mathcal{G}_j(\gamma)}.$$

On rappelle que $\mathcal{D}_i = \mathcal{B}_\infty(\gamma_i, \eta_i)$. En utilisant les définitions, on a

$$\mathcal{M}_{T,N_2}^{(m_2)} = \theta(\gamma)^{-1} \sum_j e^{\Psi(\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma))+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{N_2-1}\circ\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma))} \theta(\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma)) \delta_{\mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma)}$$

et

$$\mathcal{M}_{D_i,N_1}^{(m_3)} = \theta(\gamma_i)^{-1} \sum_j e^{\Psi(\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_i))+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{N_1-1}\circ\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_i))} \theta(\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_i)) \delta_{\mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_i)}.$$

Par un calcul direct, on obtient alors

$$\tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T}) = \sum_i \mathcal{M}^{(m_2)}_{T,N_2}(\mathcal{D}^\star_i) \cdot \mathcal{M}^{(m_3)}_{D_i,N_1}(\mathcal{T}^\star). \tag{3.27}$$

Le Lemme 3.2.18 et l'égalité $\sum_i \mathcal{M}^{(m_2)}_{T,N_2}(\mathcal{D}^\star_i) \cdot \mathcal{M}^{(m_3)}_{D_i,N_1}(\mathcal{T}^\star)$ conduisent à

$$(1-4/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T})\mathcal{M}^{(m_2)}_{T,N_2}(\mathcal{D}^\star) \leq \tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T}) \leq (1+4/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T})\mathcal{M}^{(m_2)}_{T,N_2}(\mathcal{D}^\star).$$

Le Lemme 3.2.19 conduit alors à

$$(1-10/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T}) \leq \tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T}) \leq (1+10/m_2)\mathcal{M}(\mathcal{T}). \tag{3.28}$$

Ainsi, quitte à choisir m_2 suffisamment grand, on a montré l'estimation souhaitée en remplaçant $\mathcal{M}_n(\mathcal{T})$ par $\tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T})$. Il reste à comparer $\mathcal{M}_n(\mathcal{T})$ avec $\tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T})$.

Remarquons que, pour chaque i et j, les graphes de γ et $\mathcal{G}^{(1)}_j(\gamma_{i(j)})$ se situent dans T et ceux de $\gamma_{i(j)}$ et $\mathcal{G}^{(2)}_j(\gamma)$ se situent dans D_i. Ainsi, comme les tubes T et D_i sont m_2-contractants et satisfont (3.24) (avec respectivement $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ et $\mathcal{A} = D_i$), on obtient, pour chaque j,

$$\Big|\frac{\theta(\mathcal{G}^{(1)}_j(\gamma_{i(j)}))}{\theta(\gamma)} - 1\Big| \leq \frac{2}{m_2} \quad \text{et} \quad \Big|\frac{\theta(\mathcal{G}^{(2)}_j(\gamma))}{\theta(\gamma_{i(j)})} - 1\Big| \leq \frac{2}{m_2}.$$

De ces deux inégalités et du Lemme 3.2.15, il suit $|\mathcal{M}_n(\mathcal{T}) - \tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T})| \lesssim \tilde{\mathcal{M}}_n(\mathcal{T})/m_2$, ce qui, avec (3.28), conclut la preuve de la proposition. □

3.2.5 Preuve du Théorème 3.2.2

Nous pouvons désormais démontrer le Théorème 3.2.2. On rappelle qu'on peut supposer, sans perdre de généralité, que $P(\psi) = 0$ et on a noté $\mathcal{M}$ la mesure $\mathcal{M}_{\lambda,\mu_\psi}$, dont la construction est détaillée dans la Section 3.2.3.

Nous construisons tout d'abord une famille de partitions mesurables de $(\mathcal{J}, \mathcal{M})$ dont le diamètre tend vers 0. Dans cette section, on considère $\mathrm{diam}_{\mathcal{J}}$ le diamètre associé à la distance dans l'espace métrique $\mathcal{J}$, muni de la distance $\mathrm{dist}_{\mathcal{J}} := \mathrm{dist}_{\mathcal{O}(M,\mathbb{P}^k)}$ définie en Section 1.2.2.

Lemme 3.2.21. *Il existe une suite $(\mathfrak{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de familles finies d'ouverts deux à deux disjoints $\mathfrak{U}_i = \{\mathcal{U}_{i,j}\}_{1\leq j\leq J_i}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

(U1) *pour tout $i \in N$, on a $\mathcal{M}(\cup_{1\leq j\leq J_i}\mathcal{U}_{i,j}) = 1$;*

(U2) $\sup_{i\in\mathbb{N}}(i \cdot \max_{1\leq j\leq J_i} \mathrm{diam}\,\mathcal{U}_{i,j}) \leq 1$;

(U3) *pour tout $i \geq 2$ et tout $1 \leq j \leq J_i$, il existe $1 \leq j' \leq J_{i-1}$ tel que $\mathcal{U}_{i,j} \subset \mathcal{U}_{i-1,j'}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. On fixe $J_0 := 1$ et $\mathcal{U}_{0,1} := \mathcal{J}$. La famille $\mathfrak{U}_i := \{\mathcal{U}_{0,1}\}$ satisfait les conditions **(U1)** et **(U2)**. La condition **(U3)** est vide dans ce cas, ce qui montre l'initialisation.

Pour l'hérédité, considérons $i \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $\mathfrak{U}_i = \{\mathcal{U}_{i,j}\}_{1\leq j\leq J_i}$ satisfaisant les conditions **(U1)**, **(U2)** et **(U3)**. On fixe l'intervalle $I := (\frac{1}{2(i+2)}, \frac{1}{2(i+1)})$. Comme $\operatorname{Supp}\mathcal{M} \subset \cup_{\gamma\in\operatorname{Supp}\mathcal{M}}\mathcal{B}_{\mathcal{J}}(\gamma, \frac{1}{2(i+2)})$ et $\operatorname{Supp}\mathcal{M}$ est compact, il existe $m_i \in \mathbb{N}$ et un ensemble fini de graphes $\{\gamma_{i,m}\}_{1\leq m\leq m_i} \subset \operatorname{Supp}\mathcal{M}$ telle que pour tout $\varepsilon \in I$, on a $\operatorname{Supp}\mathcal{M} \subset \cup_{m=A}^{m_i}\mathcal{B}_{\mathcal{J}}(\gamma_{i,m}, \varepsilon)$. On définit $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,m} := \mathcal{B}_{\mathcal{J}}(\gamma_{i,m}, \varepsilon)$ et $D^{\varepsilon}_{i,m} := \partial\mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,m}$.

Fait 1 : *l'ensemble* $A_i := \{\varepsilon \in I \,:\, \mathcal{M}(\cup_{1\leq m\leq m_i} D^{\varepsilon}_{i,m}) > 0\}$ *est dénombrable.*
Il suffit de montrer que $A_{i,m} := \{\varepsilon \in I \,:\, \mathcal{M}(D^{\varepsilon}_{i,m}) > 0\}$ est dénombrable pour tout $1 \leq m \leq m_i$. Supposons que $A_{i,\bar{m}}$ est indénombrable, pour un certain $1 \leq \bar{m} \leq m_i$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on définit $A_{i,\bar{m}} := \{\varepsilon \in I \,:\, \mathcal{M}(D^{\varepsilon}_{i,\bar{m}}) > \frac{1}{\alpha+1}\}$. On remarque que $A_{i,\bar{m}} = \cup_{\alpha\in\mathbb{N}} A^{\alpha}_{i,\bar{m}}$, de sorte qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $A^{\alpha}_{i,\bar{m}}$ est infini. Autrement dit, $|A^{\alpha}_{i,\bar{m}}| = +\infty$. Comme $D^{\varepsilon}_{i,\bar{m}} \cap D^{\varepsilon'}_{i,\bar{m}} = \emptyset$ pour tout $\varepsilon \neq \varepsilon' \in I$, on obtient

$$1 \geq \mathcal{M}(\cup_{\epsilon\in A^{\alpha}_{i,\bar{m}}} D^{\epsilon}_{i,\bar{m}}) = \sum_{\epsilon\in A^{\alpha}_{i,\bar{m}}} \mathcal{M}(D^{\epsilon}_{i,\bar{m}}) \geq \frac{|A^{\alpha}_{i,\bar{m}}|}{\alpha+1} = +\infty,$$

ce qui constitue une contradiction et montre le Fait 1.

Considérons $\varepsilon \in I$ tel que $\mathcal{M}(D^{\varepsilon}_{i,m}) = 0$ pour tout $1 \leq m \leq m_i$. On désigne par $\mathcal{U}_{i+1,1}, \ldots, \mathcal{U}_{i+1,l_1}$ l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert $\cup_{j=1}^{J_i}\mathcal{U}_{i,j} \cap \mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,1}$. Par itération, on définit aussi, pour $1 < m \leq m_i$, $\mathcal{U}_{i+1,l_{m-1}+1}, \ldots, \mathcal{U}_{i+1,l_m}$ comme l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert

$$\bigcup_{j=1}^{J_i}\mathcal{U}_{i,j} \cap \left(\mathcal{B}^{\epsilon}_{i,m} \setminus \bigcup_{l=1}^{l_{m-1}} \overline{\mathcal{U}_{i+1,l}}\right).$$

On fixe $J_{i+1} := l_{m_i}$. Par définition, les ensembles $\mathcal{U}_{i+1,l}$ sont ouverts et deux à deux disjoints.

Fait 2 : $$\bigcup_{l=1}^{J_{i+1}}\mathcal{U}_{i+1,l} \supset \left(\bigcup_{m=1}^{m_i}\mathcal{B}^{\epsilon}_{i,m} \setminus \bigcup_{l=1}^{J_{i+1}}\partial\mathcal{U}_{i+1,l}\right) \cap \bigcup_{j=1}^{J_i}\mathcal{U}_{i,j}.$$
Fixons $m \leq m_i$ et considérons $\gamma \in \mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,m} \setminus \cup_{1\leq l\leq J_{i+1}}\partial\mathcal{U}_{i+1,l}$, pour un certain $m \leq m_i$. Quitte à choisir un autre m, on peut supposer que γ ne satisfait cette propriété pour aucun $m' < m$. Par définition des ensembles $\mathcal{U}_{i+1,l}$, cela assure que pour tout $l \leq l_{m-1}$, on a $\gamma \notin \mathcal{U}_{i+1,l}$, de sorte que $\gamma \in \mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,m} \setminus \cup_{l=1}^{l_m-1}\overline{\mathcal{U}_{i+1,l}}$, ce qui montre le fait.

Remarquons que $\bigcup_{l=1}^{J_{i+1}}\partial\mathcal{U}_{i+1,l} \subset \bigcup_{m=1}^{m_i} D^{\varepsilon}_{i,m}$ et rappelons que $\mathfrak{U}_i$ satisfait **(U1)**. Ainsi, le choix de ε conduit à l'estimation suivante

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{l=1}^{J_{i+1}}\mathcal{U}_{i+1,l}\right) \geq \mathcal{M}\left(\bigcup_{m=1}^{m_i}\mathcal{B}^{\epsilon}_{i,m} \setminus \bigcup_{l=1}^{J_{i+1}}\partial\mathcal{U}_{i+1,l}\right) \geq \mathcal{M}\left(\bigcup_{m=1}^{m_i}\mathcal{B}^{\epsilon}_{i,m}\right) - \mathcal{M}\left(\bigcup_{m=1}^{m_i} D^{\epsilon}_{i,m}\right) = 1,$$

ce qui prouve que $\mathfrak{U}_{i+1}$ satisfait **(U1)**. La propriété **(U2)** provient de la définition des $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,m}$ et du fait que, d'après la construction, pour chaque l, il existe $m(l)$ tel que $\mathcal{U}_{i+1,l} \subset \mathcal{B}^{\varepsilon}_{i,m(l)}$.

Enfin, la connexité du sous-ensemble $\mathcal{U}_{i+1,l} \subset \cup_{j=1}^{J_i} \mathcal{U}_{i,j}$ assure **(U3)**, ce qui termine la preuve du lemme. □

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on applique la Proposition 3.2.16 avec $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $i_n := \max\{m \leq n \,:\, n(m, \mathfrak{U}_m) < n\}$, où l'entier $n(m, \mathfrak{U}_m)$ est donné par la Proposition 3.2.16. Pour tout $\alpha > 0$, on fixe $m_\alpha := \lfloor \alpha + 1 \rfloor$, de sorte que pour tout $n > \max(m_\alpha, n(m_\alpha, \mathfrak{U}_{m_\alpha}))$, on obtient $i_n \geq m_\alpha > \alpha$. Cela assure que $\lim_{n\to\infty} i_n = +\infty$.

La Proposition 3.2.16 fournit aussi une certaine collection $\mathcal{P}_{\psi,n} \subset \cup_{1\leq j\leq J_{i_n}} \mathcal{U}_{i_n,j}$ formant un mouvement holomorphe de points n-périodiques répulsifs. On considère la mesure $\mathcal{M}'_n$ définie par

$$\mathcal{M}'_n := \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_{\psi,n}} e^{\Psi(\sigma)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}\sigma)}\delta_\sigma. \tag{3.29}$$

Lemme 3.2.22. *Toute valeur d'adhérence $\mathcal{M}'$ de la suite $(\mathcal{M}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de masse 1.*

Démonstration. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\mathcal{M}'_n\| = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}_{\psi,n}} e^{\Psi(\sigma)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}\sigma)} = \sum_{j=1}^{J_{i_n}} \sum_{\sigma\in\mathcal{U}_{i_n,j}\cap\mathcal{P}_{\psi,n}} e^{\Psi(\sigma)+\ldots+\Psi(\mathcal{F}^{n-1}\sigma)}.$$

Comme la famille $\mathfrak{U}_n$ est constituée d'ouverts deux à deux disjoints, la Proposition 3.2.16 conduit à

$$\left(1-\frac{1}{i_n}\right)\mathcal{M}\left(\bigcup_{j=1}^{J_{i_n}}\mathcal{U}_{i_n,j}\right) \leq \|\mathcal{M}'_n\| \leq \left(1+\frac{1}{i_n}\right)\mathcal{M}\left(\bigcup_{j=1}^{J_{i_n}}\mathcal{U}_{i_n,j}\right).$$

On conclut avec la propriété **(U1)** en passant à la limite quand $n \to \infty$. □

Lemme 3.2.23. *Pour tout $i^* \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j^* \leq J_{i^*}$, on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{M}'_n(\mathcal{U}_{i^*,j^*}) \geq \mathcal{M}(\mathcal{U}_{i^*,j^*}).$$

Démonstration. Soit $i^* \in \mathbb{N}$, $1 \leq j^* \leq J_{i^*}$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer que, pour n suffisamment grand, on a

$$\mathcal{M}'_n(\mathcal{U}_{i^*,j^*}) \geq \mathcal{M}(\mathcal{U}_{i^*,j^*}) - \varepsilon.$$

Il suffit pour cela de considérer seulement les indices n satisfaisant $i_n > i^*$. Pour un tel n, comme les ouverts $\mathcal{U}_{i^*,j^*}$ sont deux à deux disjoints, la propriété **(U1)** conduit à

$$\mathcal{M}(\mathcal{U}_{i^\star,j^\star}) = \sum_{j'} \mathcal{M}(\mathcal{U}_{i_n,j'}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}'_n(\mathcal{U}_{i^\star,j^\star}) \geq \sum_{j'} \mathcal{M}'_n(\mathcal{U}_{i_n,j'}),$$

où les deux sommes portent sur les indices j' tels que $\mathcal{U}_{i_n,j'} \subset \mathcal{U}_{i^*,j^*}$. En utilisant la même convention pour les indices dans les sommes, la définition de $\mathcal{M}'_n$ et la Proposition 3.2.16 conduisent à

$$\mathcal{M}(\mathcal{U}_{i^\star,j^\star}) - \mathcal{M}'_n(\mathcal{U}_{i^\star,j^\star}) \leq \sum_{j'} \mathcal{M}(\mathcal{U}_{i_n,j'}) - \mathcal{M}'_n(\mathcal{U}_{i_n,j'}) \leq i_n^{-1} \sum_{j'} \mathcal{M}(\mathcal{U}_{i_n,j'}) = i_n^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{U}_{i^*,j^*}),$$

ce qui conclut la preuve. □

Fin de la démonstration du Théorème 3.2.2. On montre que la suite $(\mathcal{M}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (3.29) converge vers $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{A}\subset\mathcal{J}$ un sous-ensemble fermé. Considérons $\mathcal{A}' := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_{i_n}^{\mathcal{A}}}\mathcal{U}$, où $\mathfrak{U}_i^{\mathcal{A}} := \{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_i \ : \ \mathcal{U}\cap\mathcal{A}\neq\emptyset\}$. D'après la propriété **(U1)**, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_{i_n}^{\mathcal{A}}}\mathcal{U}\right) = 1-\mathcal{M}\left(\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_{i_n}\setminus\mathfrak{U}_{i_n}^{\mathcal{A}}}\mathcal{U}\right) \geq 1-\mathcal{M}(\mathcal{A}^c) = \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Remarquons que la propriété **(U3)** assure que $\mathcal{A}'$ est une intersection croissante dénombrable. On en déduit, en passant à la limite lorsque $n\to\infty$, que $\mathcal{M}(\mathcal{A}')\geq\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Fait : *On a l'inclusion $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$. En particulier, on a l'égalité $\mathcal{M}(\mathcal{A}')=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*
Comme $\mathcal{M}(\mathcal{A}')\leq\mathcal{M}(\mathcal{A})$, il suffit de montrer que $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$. A cet effet, considérons $\gamma\in\mathcal{A}'$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_{i_n}$ et un graphe $\gamma_n\in\mathcal{J}$ tels que $\gamma\in\mathcal{U}$ et $\gamma_n\in\mathcal{U}\cap\mathcal{A}$. La propriété **(U2)** conduit à $\mathrm{dist}_{\mathcal{J}}(\gamma,\gamma_n)<1/i_n$, ce qui assure que $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n\in\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{A}$ et démontre le fait.

Soit $\mathcal{M}'$ une valeur d'adhérence de la suite $(\mathcal{M}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le fait ci-dessus et le Lemme 3.2.23 conduisent au calcul suivant

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})=\mathcal{M}(\mathcal{A}')=\lim_{n\to\infty}\sum_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_{i_n}^{\mathcal{A}}}\mathcal{M}(\mathcal{U})\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}_{i_n}^{\mathcal{A}}}\mathcal{M}'(\mathcal{U})=\mathcal{M}'(\mathcal{A}')\leq\mathcal{M}'(\mathcal{A}).$$

Le fermé $\mathcal{A}$ étant quelconque, le Lemme 3.2.22 et le fait que $\|\mathcal{M}\|=1$ assurent que $\mathcal{M}=\mathcal{M}'$. Ainsi, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{M}'_n=\mathcal{M}$, ce qui termine la démonstration. □

Chapitre 4

Dynamique aléatoire des applications d'allure polynomiale

La dynamique aléatoire des endomorphismes des espaces projectifs a fait l'objet de nombreux travaux. On pourra consulter [FS91, HM96, Sum11, Sum97, Sum98, SSS04, SW19, SW22] pour la dimension 1 et [FW00, DD12, DeT13, DeT15, Bay15, GP20] pour la dimension supérieure. Dans ce chapitre, nous adaptons au cas aléatoire deux constructions de la dynamique des applications d'allure polynomiale, en suivant l'approche de Dinh et Sibony. Plus précisément, nous construisons un analogue de la mesure d'équilibre à l'aide de la théorie du pluripotentiel et établissons un résultat d'équidistribution des tirés en arrière en moyenne, ce qui correspond à notre Théorème D. Dans le cadre des familles, nous montrons que ces mesures peuvent être obtenues comme les tranches d'un certain courant positif fermé horizontal, ce qui correspond à notre Théorème E.

4.1 Applications d'allure polynomiale

Définition 4.1.1. On dit qu'une famille $\{U_\lambda\}_{\lambda\in M}$ d'ouverts connexes non-vides relativement compacts de $\mathbb{C}^k$ paramétrée par une variété complexe M *dépend continûment de* λ si pour tout $\lambda \in M$ et tout compact $K \subset \mathbb{C}^k$, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) Si $K \subset U_\lambda$, alors $K \subset U_{\lambda'}$ pour λ' dans un voisinage assez petit de λ.

ii) Si $\overline{U_\lambda} \cap K = \emptyset$, alors $\overline{U_{\lambda'}} \cap K = \emptyset$ pour λ' dans un voisinage assez petit de λ.

Lemme 4.1.2. *Soit $\{U_\lambda\}_{\lambda\in M}$ une famille d'ouverts connexes non-vides relativement compacts de $\mathbb{C}^k$ qui dépend continûment de λ. Pour tout $\lambda \in M$, on a :*

— $\sup_{z\in U_\lambda} \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, U_{\lambda'}) \underset{\lambda'\to\lambda}{\longrightarrow} 0$ *(semi-continuité inférieure).*

— $\sup_{z\in U_{\lambda'}} \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, U_\lambda) \underset{\lambda'\to\lambda}{\longrightarrow} 0$ *(semi-continuité supérieure).*

Démonstration. Montrons d'abord que la famille $(U_\lambda)_{\lambda\in M}$ est localement uniformément bornée. Soit $\lambda \in M$. L'ouvert U_λ est borné, donc il existe une boule $B = B_{\mathbb{C}^k}(0, R)$ telle que $\overline{U_\lambda} \Subset B$. D'après la propriété *ii*), appliquée à $K = \partial B$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\mathrm{dist}_M(\lambda, \lambda') < \delta$, alors $U_{\lambda'} \cap \partial B = \emptyset$. Or U_λ est non-vide et $U_{\lambda'}$ connexe. Quitte à réduire δ,

d'après la propriété i), on a donc $U_{\lambda'} \subset B$ pour tout $\lambda' \in M$ satisfaisant $\mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(\lambda, \lambda') < \delta$.

On considère $\varepsilon > 0$ assez petit pour que le compact $K_{\lambda,\varepsilon} = \{z \in \overline{B} \ : \ \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, U_\lambda) \geq \varepsilon\}$ soit non-vide. Comme $\overline{U_\lambda}$ ne rencontre pas $K_{\lambda,\varepsilon}$, d'après la propriété ii), il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{U_{\lambda'}} \subset K^c_{\lambda,\varepsilon}$ pour tout paramètre $\lambda' \in M$ satisfaisant $\mathrm{dist}_M(\lambda, \lambda') < \delta$. En particulier, $\sup_{z \in U_{\lambda'}} \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, U_\lambda) < \varepsilon$, ce qui prouve la semi-continuité supérieure.

Pour la semi-continuité inférieure, supposons qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$, un paramètre $\lambda \in M$, une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de U_λ, et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z_n, U_{\lambda_n}) > \varepsilon. \tag{4.1}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans U_λ, de sorte qu'il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1 \ : \ \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z_n, z_{n_1}) \leq \varepsilon. \tag{4.2}$$

D'autre part, comme $z_{n_1} \in U_\lambda$, d'après la propriété i), il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $z_{n_1} \in U_{\lambda_n}$ pour tout $n \geq n_2$. En d'autres termes, on obtient

$$\forall n \geq n_2 \ : \ \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z_n, U_{\lambda_n}) \leq \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z_n, z_{n_1}). \tag{4.3}$$

Les inégalités (4.2) et (4.3) contredisent (4.1), ce qui prouve la semi-continuité inférieure. □

Remarque 4.1.3. *En remarquant que* $\mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, U) = \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, \overline{U})$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}^k$ *et tout ouvert* $U \subset \mathbb{C}^k$*, le Lemme 4.1.2 assure que cette notion de continuité est plus fine que la continuité de Hausdorff sur les adhérences. C'est en fait une notion strictement plus fine, comme le montre le contre-exemple suivant. La famille d'ouverts définie par* $U_\lambda = B_{\mathbb{C}}(0,1)^2$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et* $U_0 = B_{\mathbb{C}}(0,1)^2 \setminus \{z_1 = 0\}$ *ne dépend pas continûment de* λ*, pourtant la famille de leurs adhérences* $\overline{U_\lambda} = B_{\mathbb{C}}(0,1)^2$ *est constante, donc Hausdorff-continue.*

Définition 4.1.4. Une *famille d'applications d'allure poynomiale* est un couple (M, f), où M est une variété complexe, connexe, et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est une application holomorphe propre, de la forme $f(\lambda, z) = (\lambda, f_\lambda(z))$, où $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ sont des ouverts de $M \times \mathbb{C}^k$, telles que pour tout $\lambda \in M$, les ensembles $U_\lambda = \mathcal{U} \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{C}^k)$ et $V_\lambda = \mathcal{V} \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{C}^k)$, identifiés à des ouverts de $\mathbb{C}^k$, satisfont $\emptyset \neq U_\lambda \Subset V_\lambda \Subset \mathbb{C}^k$. On suppose, de plus, que les ouverts U_λ sont connexes, que les ouverts V_λ sont convexes, et que les familles d'ouverts $(U_\lambda)_{\lambda\in M}$ et $(V_\lambda)_{\lambda\in M}$ dépendent continûment de λ.

On note d_t le degré topologique de f comme revêtement ramifié. Remarquons que chaque application holomorphe $f_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ est propre, de degré d_t comme revêtement ramifié. La proposition suivante assure que quitte à réduire M, on peut supposer que $V_\lambda = V$ et que $\mathcal{V} = M \times V$. Autrement dit, il n'est pas restrictif de considérer des familles de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda\in M}$.

Proposition 4.1.5. *Soit* (M, f) *une famille d'applications d'allure polynomiale. Considérons* $V = \cap_{\lambda\in M} V_\lambda$*. Alors, quitte à réduire* M*, l'application* $\tilde{f} : f^{-1}(M \times V) \to M \times V$ *définit une famille d'applications d'allure polynomiale.*

Lemme 4.1.6. *Soit (M, f) une famille d'applications d'allure polynomiale de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda\in M}$, et $M_0 \Subset M$. Il existe un ouvert $U_* \Subset V$ tels que pour tout $\lambda \in M_0$, $U_\lambda \Subset U_*$.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{dist}_{M\times\mathbb{C}^k}(\overline{\mathcal{U}}, \overline{M_0}\times\partial V) = 0$. Comme $\overline{\mathcal{U}}$ est fermé dans $M\times\mathbb{C}^k$ et $\overline{\mathcal{M}_0}\times\partial V$ est compact, la distance est atteinte. Il existe donc $(\lambda, z) \in \overline{M_0}\times\partial V$ et deux suites λ_n, $z_n \in U_{\lambda_n}$ telles que $(\lambda_n, z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\lambda, z)$. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(U_\lambda, \partial V) \leq \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(U_\lambda, z_n) + \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z_n, \partial V).$$

Comme $z_n \in U_{\lambda_n}$, le premier terme tend vers 0 par semi-continuité supérieure en vertu du Lemme 4.1.2. Le second terme tend vers 0 car $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in \partial V$. Par conséquent, $\mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(U_\lambda, \partial V) = 0$, ce qui est absurde puisque $U_\lambda \Subset V$. Ainsi, $\varepsilon := \mathrm{dist}_{M\times\mathbb{C}^k}(\overline{\mathcal{U}}, \overline{M_0}\times\partial V)) > 0$. On conclut en considérant $U_* := \{z \in V \mid \mathrm{dist}_{\mathbb{C}^k}(z, \partial V) > \varepsilon/2\}$. □

Définition 4.1.7. On dit qu'une famille (M, f) d'applications d'allure polynomiale de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda\in M}$ est *non-dégénérée* si pour tout couple $(z, w) \in V \times V$, l'ensemble $\{\lambda \in M : w \in U_\lambda \text{ et } f_\lambda(w) = z\}$ est fini.

Remarque 4.1.8. *La définition 4.1.7 impose la condition $\dim M \leq k$. En effet, pour tout $z \in V$, considérons le sous-ensemble analytique $W := \{(\lambda, w) \in \mathcal{U} \ : \ f_\lambda(w) = z\} \subset \mathcal{U}$ et notons $\Pi_M : W \to M$ et $\Pi_V : W \to V$ les restrictions des projections analytiques. Comme chaque application $f_\lambda : U_\lambda \to V$ est de degré topologique d_t, la projection Π_M est finie, propre, et surjective, donc $\dim W = \dim \Pi_M(W) = \dim M$ (voir par exemple [Chi89, §3.3 Proposition 2]). La définition 4.1.7 assure que la projection Π_V est finie et propre, donc $\dim W = \dim \Pi_V(W) \leq k$. Elle est surjective si et seulement si $\dim M = k$. Dans ce cas, elle réalise un revêtement analytique ramifié au-dessus de V.*

4.2 Construction de la mesure stationnaire

Dans le cadre des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$, Fornaess et Weickert [FW00] ont construit une mesure d'équilibre adaptée au système aléatoire, en introduisant les fonctions de Green non-autonomes. Nous construisons un analogue de la mesure de Fornaess-Weickert dans le cadre des applications d'allure polynomiale. Comme les fonctions de Green n'existent pas dans ce contexte, nous adaptons l'approche dd^c de Dinh et Sibony [DS10a].

4.2.1 Présentation du résultat

Étant données une application holomorphe propre $h : U \to V$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{C}$, on rappelle que la fonction $h_*\varphi : V \to \mathbb{C}$ est définie par par

$$\forall y \in V \ : \ h_*\varphi(y) = \sum_{h(x)=y} \varphi(x),$$

les préimages étant comptées avec multiplicité. Si la fonction φ est continue, la fonction $h_*\varphi$ est aussi continue, ce qui permet de considérer l'*opérateur de transfert* $h_* : \mathcal{C}^0(U) \to \mathcal{C}^0(V)$.

Dans toute cette section, on considère une mesure de probabilité $\nu \in \mathcal{M}^1(M)$ sur l'espace des paramètres d'une famille d'applications d'allure polynomiale (M, f) de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda \in M}$, et une variable aléatoire $\boldsymbol{\lambda}$ suivant la loi ν. Ceci produit un système dynamique aléatoire $(f, \boldsymbol{\lambda})$ sur $\mathbb{C}^k$. Nous construisons une mesure d'équilibre associée au système $(f, \boldsymbol{\lambda})$ en adaptant la construction de [DS03]. Cependant, chercher une mesure μ f_λ-invariante, c'est-à-dire satisfaisant $(f_\lambda)_*\mu = \mu$, pour tout $\lambda \in M$ (ou même ν-presque tout $\lambda \in M$) est déraisonnable. En général, de telles mesures invariantes n'existent pas. Il faut donc assouplir la notion d'invariance.

On considère l'*opérateur de transfert moyennisé*, défini par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(V) \ : \ T_\nu(\varphi) := \mathbb{E}_\nu[d_t^{-1}(f_{\boldsymbol{\lambda}})_*\varphi] = d_t^{-1} \int_M (f_\lambda)_*\varphi d\nu(\lambda).$$

On montrera dans la Section 4.2.2 que T_ν définit une application linéaire continue de $\mathcal{C}_c^0(V)$ sur $\mathcal{C}_b^0(V)$ pour la norme $||.||_\infty$ et que son adjoint $\mathcal{T}_\nu = T_\nu^* : (\mathcal{C}_b^0(V))^* \to (\mathcal{C}_c^0(V))^*$ induit un opérateur positif, sur l'espace $\mathcal{M}^1(V)$ des mesures de probabilité, via la définition

$$\forall \mu_0 \in \mathcal{M}^1(V) \, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^0(V) \ : \ \langle \mathcal{T}_\nu(\mu_0), \varphi \rangle = \langle \mu_0, T_\nu(\varphi) \rangle.$$

Le couple $(\mathcal{M}^1(V), \mathcal{T}_\nu)$ définit alors un système dynamique topologique.

Définition 4.2.1. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}^1(V)$ est dite *totalement ν-stationnaire* si $\mathcal{T}_\nu(\mu) = \mu$.

Lorsque $\nu = \delta_{\lambda_0}$, pour un paramètre fixé $\lambda_0 \in M$, on retrouve la notion de *mesure totalement invariante* du système déterministe défini par f_{λ_0}, c'est-à-dire une mesure μ sur V satisfaisant $f_{\lambda_0}^*\mu = d_t\mu$. Pour simplifier, dans toute la suite, on appellera *mesure ν-stationnaire* une mesure totalement ν-stationnaire. Le résultat principal de cette section garantit l'existence et l'unicité de telles mesures.

Théorème 4.2.2. *Soit (M, f) une famille d'applications d'allure polynomiale de la forme $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda \in M}$. Soit $\nu \in \mathcal{M}^1(M)$ une mesure de probabilité à support compact. Il existe une unique mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}^1(V)$ telle que*

i) la mesure μ est ν-stationnaire ;

ii) il existe un ensemble pluripolaire $\mathcal{E} \subset V$ tel que pour toute mesure de probabilité $\mu_0 \in \mathcal{P}(V)$ satisfaisant $\mu_0(\mathcal{E}) = 0$, la suite $(\mathcal{T}_\nu^n(\mu_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ pour la topologie faible-$*$;

iii) si $\mu' \in \mathcal{P}(V)$ satisfait $\mathcal{T}_\nu(\mu') = \mu'$, alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$, on a $\langle \mu', \varphi \rangle \leq \langle \mu, \varphi \rangle$.

On rappelle que la définition de famille non-dégénérée est donnée en Définition 4.1.7.

Proposition 4.2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.2, on suppose, de plus, que la famille (M, f) est non-dégénérée, que $\dim M = k$, et que ν ne charge pas les ensembles pluripolaires de M. Il existe une unique mesure de probabilité ν-stationnaire $\mu \in \mathcal{M}^1(V)$ telle que pour toute mesure de probabilité $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(V)$, la suite $(\mathcal{T}_\nu^n(\mu_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ pour la topologie faible-$*$.*

4.2.2 L'opérateur de transfert T_ν

Dans un premier temps, on étudie l'opérateur T_ν et son adjoint $\mathcal{T}_\nu$. Notons U_* l'ouvert donné par le Lemme 4.1.6 avec $M_0 := \operatorname{Supp}\nu$.

Lemme 4.2.4. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V)$, on a $T_\nu(\varphi) = T_\nu(\varphi|_{\overline{U_*}})$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour tout $\lambda \in M$ et tout $y \in f_\lambda^{-1}(V)$, on a $y \in \overline{U_*}$. Ainsi, pour tout $z \in V$, on a

$$T_\nu(\varphi)(z) = \mathbb{E}_\nu\Big[d_t^{-1} \sum_{f_{\boldsymbol{\lambda}}(y)=z} \varphi(y)\Big] = \mathbb{E}_\nu\Big[d_t^{-1} \sum_{f_{\boldsymbol{\lambda}}(y)=z} \varphi|_{\overline{U_*}}(y)\Big] = T_\nu(\varphi|_{\overline{U_*}})(z),$$

ce qui conclut. □

Lemme 4.2.5. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V)$, on a $T_\nu(\varphi) \in \mathcal{C}_b^0(V)$ et $\|T_\nu(\varphi)\|_\infty \leq \sup_{U_*} |\varphi|$. En particulier,*

$$T_\nu \in \mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\overline{U_*}), \mathcal{C}_b^0(V)).$$

Démonstration. L'opérateur T_ν est linéaire par linéarité de l'espérance.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(V)$ une fonction continue. Alors :

1. $\forall \lambda \in M, (f_\lambda)_*\varphi \in \mathcal{C}^0(V)$.
2. $\forall z \in V, \lambda \mapsto (f_\lambda)_*\varphi(z)$ est mesurable.
3. $\forall z \in V,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ |(f_\lambda)_*\varphi(z)| \leq \sup_{U_*} |\varphi|$.

Ainsi, par théorème de continuité sous l'intégrale pour la mesure de Radon ν, la fonction $T_\nu(\varphi) = \mathbb{E}_\nu[d_t^{-1}(f_{\boldsymbol{\lambda}})_*\varphi]$ est continue et bornée. De plus, le point 3. fournit l'estimation $||T_\nu(\varphi)||_\infty \leq \sup_{U_*} \varphi = \sup_{\overline{U_*}} \varphi$, ce qui assure que l'opérateur $T_\nu : \mathcal{C}^0(\overline{U_*}) \to \mathcal{C}_b^0(V)$ est continu, de norme $||T_\nu||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\overline{U_*}), \mathcal{C}_b^0(V))} \leq 1$. □

Lemme 4.2.6. *L'opérateur T_ν est positif. Son adjoint induit un opérateur $\mathcal{T}_\nu : \mathcal{M}^1(V) \to \mathcal{M}^1(\overline{U_*})$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(V)$ une fonction positive et $z \in V$. Par positivité de l'espérance, on obtient

$$T_\nu(\varphi)(z) = \mathbb{E}_\nu\Big[d_t^{-1} \sum_{f_{\boldsymbol{\lambda}}(y)=z} \varphi(y)\Big] \geq 0.$$

Ceci assure la positivité de l'opérateur T_ν. Par dualité, son adjoint $\mathcal{T}_\nu$ stabilise le sous-espace fermé $\mathcal{M}^+(V)$. Notons $E = \mathcal{C}^0(\overline{U_*})$ et $F = \mathcal{C}_b^0(V)$. Il reste à montrer que l'opérateur $\mathcal{T}_\nu$ réalise une isométrie de F^* sur E^* (remarquons que T_ν n'est pas une isométrie de E sur F).

Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(V)$. On sait que

$$||\mathcal{T}_\nu(\mu)||_{E^*} \leq ||\mathcal{T}_\nu||_{\mathcal{L}_c(F^*,E^*)}||\mu||_{F^*} = ||T_\nu||_{\mathcal{L}_c(E,F)}||\mu||_{F^*} \leq ||\mu||_{F^*}.$$

Pour montrer l'inégalité réciproque, on considère une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^0(V)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur U_*. D'après le Lemme 4.2.4, on obtient

$$\langle \mathcal{T}_\nu(\mu), \chi\rangle = \langle \mu, T_\nu(\chi)\rangle = \langle \mu, T_\nu(\mathbb{1}_{U_*})\rangle = \langle \mu, \mathbb{1}_V\rangle = ||\mu||_{E^*}.$$

Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{T}_\nu$ stabilise le sous-espace fermé $\mathcal{M}^1(V)$ des mesures de probabilité. □

Lemme 4.2.7. *L'opérateur $\mathcal{T}_\nu : \mathcal{M}^1(V) \to \mathcal{M}^1(\overline{U_*})$ est séquentiellement continu pour les topologies faible-$*$.*

Démonstration. Considérons $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur V qui converge vers $\mu \in \mathcal{M}^1(V)$ pour la topologie faible-$*$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\overline{U_*})$. Remarquons que la fonction $T_\nu(\varphi)$ est continue bornée. Par convergence faible-$*$ sur $\mathcal{M}^1(V)$, on obtient

$$\langle \mathcal{T}_\nu(\mu_n), \varphi\rangle = \langle \mu_n, T_\nu(\varphi)\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mu, T_\nu(\varphi)\rangle = \langle \mathcal{T}_\nu(\mu), \varphi\rangle,$$

ce qui montre que la suite $(\mathcal{T}_\nu(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{T}_\nu(\mu)$ pour la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{P}(\overline{U_*})$. □

La définition de $T_\nu(\varphi)$ s'étend naturellement pour les fonctions $\varphi \in \mathcal{PSH}(V)$.

Lemme 4.2.8. *Si $\varphi \in \mathcal{PSH}(V)$ alors $T_\nu(\varphi) \in \mathcal{PSH}(V)$.*

Démonstration. Comme f est propre et surjective, la fonction $(f_\lambda)_*\varphi$ est p.s.h. pour tout $\lambda \in M$. C'est une conséquence de la Proposition 1.1.14 (voir par exemple [Kli91, Proposition 2.9.26] ou [Dem12, Proposition III.1.17.a)]). Il reste à calculer l'espérance selon la loi ν. On considère l'ouvert $U_* \Subset V$ obtenu par le Lemme 4.1.6 avec $M_0 := \operatorname{Supp}\nu \Subset M$. Comme φ est semi-continue supérieurement, elle est majorée sur U_*. Ainsi, pour tout $\lambda \in M_0$, la fonction $(f_\lambda)_*\varphi$ est majorée par une constante indépendante de λ. Quitte à lui soustraire cette constante, on peut donc supposer que la fonction $(f_\lambda)_*\varphi$ est négative, pour tout $\lambda \in M$. En vertu de la Proposition 1.1.8, on conclut que la fonction $\mathbb{E}_\nu[d_t^{-1}(f_{\boldsymbol{\lambda}})_*\varphi] = T_\nu(\varphi)$ est p.s.h. sur V. □

Lemme 4.2.9. *Soit $\varphi \in \mathcal{PSH}(V)$. Si la suite $T_\nu^n(\varphi)$ ne converge pas localement uniformément vers $-\infty$, alors il existe une constante $c_\varphi \in \mathbb{R}$ et un ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_\varphi$ de V tels que la suite $T_\nu^n(\varphi)$ converge vers c_φ dans $L^p_{loc}(V)$, pour tout $1 \le p < +\infty$, et ponctuellement en-dehors de $\mathcal{E}_\varphi$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{PSH}(V)$. La fonction φ est localement majorée comme fonction semi-continue supérieurement. En vertu du Lemme 4.2.8, la suite $T_\nu^n(\varphi)$ est donc une suite de fonctions p.s.h. localement uniformément majorées. Le Corollaire 1.1.11 assure alors que $c_\varphi \in \mathcal{PSH}(V)$, où $c_\varphi := (\limsup_{n\to+\infty} T_\nu^n\varphi)^*$.

Étape 1 : *la fonction c_φ, à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, est constante.*
Supposons le contraire et considérons l'ouvert $U_* \Subset V$ obtenu par le lemme 4.1.6 avec $M_0 = \operatorname{Supp}\nu \Subset M$. Par principe du maximum, il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{\overline{U_*}} c_\varphi < \tau < \sup_V c_\varphi.$$

D'après la Proposition 1.1.13, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$, on a $T_\nu^n(\varphi) < \tau$ sur U_*. Ainsi, on obtient

$$\sup_V T_\nu^{N+1}\varphi = \sup_V T_\nu(T_\nu^N\varphi) = \sup_V \mathbb{E}_\nu[d_t^{-1}(f_{\boldsymbol{\lambda}})_*T_\nu^N(\varphi)] \le \sup_{U_*} \mathbb{E}_\nu[T_\nu^N(\varphi)] \le \sup_{U_*} T_\nu^N(\varphi) < \tau,$$

ce qui constitue une contradiction.

Étape 2 : *on a* $c_\varphi > -\infty$.
Sinon, comme $\limsup_{n\to\infty} T_\nu^n\varphi \leq (\limsup_{n\to\infty} T_\nu^n\varphi)^* = -\infty$, en vertu de la Proposition 1.1.12, la suite $T_\nu^n\varphi$ constitue une suite de fonctions plurisousharmoniques qui converge uniformément vers $-\infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

Étape 3 : *la suite* $(T_\nu^n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* c_φ *dans* $L^p_{loc}(V)$ *et en-dehors d'un pluripolaire.*
Pour cela, on considère ϕ une valeur d'adhérence dans $L^p_{loc}(V)$, dont l'existence est assurée par la Proposition 1.1.12, et on montre que $\phi \equiv c_\varphi$. Par hypothèse, il existe une sous suite n_i telle que

$$T_\nu^{n_i}\varphi \xrightarrow[i\to\infty]{L^p} \phi \in \mathcal{PSH}(V).$$

Montrons que $\phi \leq c_\varphi$. Par définition de la limite supérieure, pour tout $z \in V$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $i(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ tel que si $i > i(\varepsilon, z)$, alors

$$T_\nu^{n_i}\varphi(z) \leq \limsup_{n\to\infty} T_\nu^n\varphi(z) + \varepsilon \leq c_\varphi + \varepsilon.$$

Comme toute suite convergeant dans $L^p(V)$ admet des sous-suites qui convergent Lebesgue-presque partout, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\phi \leq c_\varphi + \varepsilon \quad \text{presque partout sur } V.$$

En vertu de la Proposition 1.1.7, on obtient l'inégalité partout.

Supposons maintenant que $\phi \not\equiv c_\varphi$. Si ϕ est une constante, on a donc $\phi < c_\varphi$. Sinon, comme ϕ est plurisousharmonique, par principe du maximum, on a $\sup_{\overline{U}} \phi < \sup_V \phi \leq c_\varphi$. Dans les deux cas, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_U < c_\varphi - \delta.$$

D'après la Proposition 1.1.13, $T_\nu^{n_i}\varphi < c_\varphi - \delta$ pour i suffisamment grand. Ainsi, on a

$$\sup_V T_\nu^n(\varphi) = \sup_V T_\nu^{n-n_i}(T_\nu^{n_i}) \leq \sup_U T_\nu^{n_i}\varphi \leq c_\varphi - \delta.$$

En passant à la $\limsup_{n\to+\infty}$ et à la régularisation supérieure (voir la Définition 1.1.9), on obtient $c_\varphi \leq c_\varphi - \delta$, ce qui constitue une contradiction.

La seule valeur d'adhérence dans L^p_{loc} est donc c_φ. On conclut par la Proposition 1.1.13 que $T_\nu^n\varphi$ converge vers c_φ en-dehors du pluripolaire $\mathcal{E}_\varphi := \{\limsup T_\nu^n(\varphi) < c_\varphi\} \subset V$. □

4.2.3 L'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$

On établit maintenant le Théorème 4.2.2.

Soit Ω une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur V, dont la densité est lisse et à support compact dans V. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2_c(V)$, d'après le Lemme

1.1.15, il existe deux fonctions $\varphi_\pm \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$ telles que $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, de sorte que $\langle \mathcal{T}_\nu^n(\Omega), \varphi\rangle = \langle \Omega, T_\nu^n(\varphi_+)\rangle - \langle \Omega, T_\nu^n(\varphi_-)\rangle$. Or, d'après le Lemme 4.2.9, $T_\nu^n(\varphi_\pm)$ converge vers $c_{\varphi_\pm} \in \mathbb{R}$ en-dehors de l'ensemble pluripolaire $\mathcal{E}_{\varphi_+} \cup \mathcal{E}_{\varphi_-}$. Cet ensemble étant négligeable pour la mesure de Lebesgue, il l'est aussi pour Ω. Ainsi, deux valeurs d'adhérence pour la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}^1(\overline{U_*})$ de la suite $(\mathcal{T}_\nu^n(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident sur le sous-espace $\mathcal{C}_c^2(V)$ dense de $\mathcal{C}_c^0(V)$. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, la suite $(\mathcal{T}_\nu^n(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une unique valeur d'adhérence pour la topologie faible-$*$ dans $\mathcal{M}^1(\overline{U_*})$, que l'on note μ. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(V)$, on note $c_\varphi := \langle \mu, \varphi\rangle$.

La prochaine étape consiste à rendre l'ensemble $\mathcal{E}_\varphi := \{\limsup_n T_\nu^n(\varphi) < c_\varphi\} \subset V$ indépendant de φ sur un sous-espace de $\mathcal{PSH}(V)$. On notera, pour tout $z \in V$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n^z := \mathcal{T}_\nu^n(\delta_z).$$

Lemme 4.2.10. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{SPSH}(V)$. Alors*

$$\mathcal{E}_\varphi = \{z \in V \ : \ \mu \text{ n'est pas valeur d'adhérence de la suite } (\mu_n^z)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Démonstration. Si $z \in \mathcal{E}_\varphi$, alors $\limsup_{n\to\infty} \langle \mu_n^z, \varphi\rangle < \langle \mu, \varphi\rangle$, donc μ n'est pas valeur d'adhérence de la suite $(\mu_n^z)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui montre l'inclusion directe.

Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons $z \notin \mathcal{E}_\varphi$. On a $\limsup_{n\to\infty} T_\nu^n(\varphi)(z) = c_\varphi$. Soit $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une extractrice telle que

$$T^{n_j}(\varphi)(z) \underset{n\to\infty}{\to} c_\varphi. \tag{4.4}$$

Soit μ' une valeur d'adhérence de la suite $\mu_{n_j}^z$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^2(V)$. Montrons que $\langle \mu, \chi\rangle = \langle \mu', \chi\rangle$. Quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que la suite $\mu_{n_j}^z$ converge vers μ', de sorte que

$$\lim_{j\to\infty} T_\nu^{n_j}(\chi)(z) = \langle \mu', \chi\rangle. \tag{4.5}$$

Comme φ est strictement plurisousharmonique, il existe $A > 0$ tel que

$$\varphi_+ := \varphi + A\chi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V) \tag{4.6}$$

et

$$\varphi_- := \varphi - A\chi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V). \tag{4.7}$$

D'après le Lemme 4.2.9, la suite de fonctions p.s.h. localement uniformément majorées $T_\nu^{n_j}(\varphi_+)$ converge vers c_{φ_+} dans $L_{loc}^p(V)$, pour tout $1 \leq p < +\infty$. La Proposition 1.1.13 fournit alors la majoration

$$\limsup_{j\to\infty} T_\nu^{n_j}(\varphi_+)(z) \leq c_{\varphi_+}, \tag{4.8}$$

En combinant la linéarité de T_ν avec l'équation (4.6), on obtient

$$T_\nu^{n_j}(\chi)(z) = \frac{1}{A}(T_\nu^{n_j}(\varphi_+)(z) - T_\nu^{n_j}(\varphi)(z)). \tag{4.9}$$

On passe à la limite supérieure pour $j \to \infty$ dans l'équation (4.9), ce qui conduit, avec les convergences (4.4), (4.5) et la majoration (4.8), à l'inégalité

$$\langle \mu', \chi \rangle \leq \frac{1}{A}(c_{\varphi_+} - c_\varphi) = \langle \mu, \frac{1}{A}(\varphi_+ - \varphi_-) \rangle = \langle \mu, \chi \rangle. \tag{4.10}$$

Pour obtenir l'inégalité réciproque, on applique le Lemme 4.2.9 et la Proposition 1.1.13 à la suite $T_\nu^{n_{j_i}}(\varphi_-)$, ce qui conduit, en combinant l'équation (4.7) avec les convergences (4.4) et (4.5) à

$$\langle \mu, \chi \rangle = \frac{1}{A}(c_\varphi - c_{\varphi_-}) \leq \langle \mu', \chi \rangle. \tag{4.11}$$

Par conséquent, les mesures μ et μ' coïncident sur le sous-ensemble dense $\mathcal{C}_c^2(V) \subset \mathcal{C}^0(\overline{U_0})$, ce qui permet de conclure puisque les mesures μ et μ' sont supportées dans $\overline{U_0}$. □

On note à présent $\mathcal{E} := \{z \in V \mid \mu \text{ n'est pas valeur d'adhérence de } \mu_n^z\}$ cet ensemble pluripolaire. On l'appelle *ensemble exceptionnel* associé au système $(f, \boldsymbol{\lambda})$.

Fin de la preuve du Théorème 4.2.2. D'après le Lemme 4.2.6, les mesures $\mu_n := \mathcal{T}_\nu^n(\Omega)$, $n \geq 1$ sont supportées dans $\overline{U_*}$. Ainsi, d'après le Lemme 4.2.7, on obtient $\mu = \mathcal{T}_\nu(\mu)$ en passant à la limite faible-$*$ dans l'égalité $\mathcal{T}_\nu^{n+1}(\Omega) = \mathcal{T}_\nu(\mathcal{T}_\nu^n(\Omega))$.

Soit μ_0 une mesure de probabilité sur V ne chargeant pas $\mathcal{E}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(V)$. D'après le Lemme 1.1.15, il existe $\varphi_\pm \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{SPSH}(V)$ telles que $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. D'après le Lemme 4.2.9, la suite $T^n(\varphi)$ converge vers $c_{\varphi_+} - c_{\varphi_-} = \langle \mu, \varphi \rangle$ en-dehors de l'ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$, donc μ_0-presque partout. D'après le théorème d'interversion limite-intégrale, justifié par la domination $||T_\nu^n(\varphi)||_\infty \leq ||\varphi||_\infty$, on obtient la convergence $\langle \mathcal{T}_\nu^n(\mu_0), \varphi \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mu, \varphi \rangle$. Ainsi, la suite $\mathcal{T}_\nu^n(\mu_0)$ admet des valeurs d'adhérence dans $\mathcal{M}^1(\overline{U_0})$, par le théorème de Banach-Alaoglu, et toutes ses valeurs d'adhérence coïncident avec μ sur le sous-espace dense $\mathcal{C}_c^2(V)$. Ceci prouve le deuxième point du théorème.

Soit maintenant $\mu' \in \mathcal{M}^1(V)$ une mesure de probabilité ν-stationnaire. Considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$. Comme $\mathcal{T}_\nu(\mu') = \mu'$, on obtient

$$\langle \mu', \varphi \rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{T}_\nu^n(\mu'), \varphi \rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle \mu', T_\nu^n(\varphi) \rangle. \tag{4.12}$$

D'autre part, comme $c_\varphi = (\limsup_{n\to\infty} T_\nu^n(\varphi))^* \geq \limsup_{n\to\infty} T_\nu^n(\varphi)$, on a

$$\langle \mu', \limsup_{n\to\infty} T_\nu^n(\varphi) \rangle \leq \langle \mu', c_\varphi \rangle = c_\varphi = \langle \mu, \varphi \rangle. \tag{4.13}$$

La suite $(T_\nu^n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément majorée. Quitte à lui soustraire une constante, on peut donc la supposer négative. En vertu du Lemme de Fatou, en combinant les équations (4.12) et (4.13), on obtient

$$\langle \mu', \varphi \rangle \leq \langle \mu, \varphi \rangle,$$

ce qui conclut la preuve. □

4.2.4 Effacement de l'ensemble exceptionnel

Dans cette section, on renforce la conclusion *ii)* du Théorème 4.2.2 sous des hypothèses de régularité, ce qui aboutit à la Proposition 4.2.3. Le raisonnement est issu de [FW00].

Lemme 4.2.11. *On suppose que* $\dim(M) = k$*, que la famille* (M, f) *est non-dégénérée, et que la mesure* ν *ne charge pas les ensembles pluripolaires de* M*. Pour toute mesure de probabilité* $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(V)$*, la mesure* $\mathcal{T}_\nu(\mu_0)$ *ne charge pas les ensembles pluripolaires de* V*.*

Démonstration. On montre d'abord le résultat pour les mesures de Dirac, c'est-à-dire dans le cas où il existe un point $z \in V$ tel que $\mu_0 = \delta_z$. Soit $E \subset V$ un ensemble pluripolaire, et un point $z \in V$. On considère le sous-ensemble analytique

$$W := \{(\lambda, w) \in \mathcal{U} \mid f_\lambda(w) = z\} \subset \mathcal{U},$$

qui est de dimension k. On considère $\Pi_M : W \to M$ et $\Pi_V : W \to V$ les restrictions des projections holomorphes et on note $M_E := \Pi_M(\Pi_V^{-1}(E))$. Ainsi, on a

$$\langle \mathcal{T}_\nu(\delta_z), \mathbb{1}_E \rangle = \mathbb{E}_\nu[\langle \delta_z, d_t^{-1}(f_{\boldsymbol{\lambda}})_* \mathbb{1}_E \rangle] = \int_M d_t^{-1} \sum_{f_\lambda(y)=z} \mathbb{1}_E(y) d\nu(\lambda).$$

La dernière intégrande est nulle dès que $\lambda \notin M_E$. Comme $\sum_{f_\lambda(y)=z} \mathbb{1}_E(y) \leq d_t$, on a

$$\langle \mathcal{T}_\nu(\delta_z), \mathbb{1}_E \rangle \leq \int_{M_E} d\nu(\lambda) = \nu(M_E).$$

Il suffit donc de montrer que $\nu(M_E) = 0$. Comme la famille (M, f) est non-dégénérée et que $\dim M = k$, la projection Π_V définit un revêtement analytique ramifié au-dessus de V (voir la remarque 4.1.8). L'application f étant de la forme $f : (\lambda, z) \mapsto (\lambda, f_\lambda(z))$, la projection Π_M réalise un revêtement analytique ramifié de degré d_t au-dessus de M. Notons C l'union des lieux de ramification de Π_V et Π_M. L'ensemble $\Pi_M(C)$ est pluripolaire comme sous-ensemble analytique de dimension $< l$. On montre que l'ensemble $M_E \setminus \Pi_M(C)$ est pluripolaire.

L'ensemble $\overline{M_E} \setminus \Pi_M(C)$ est fermé dans $M \setminus \Pi_M(C)$ donc σ-compact. Ainsi, il existe une suite $z_i \in M$ et des réels $r_i > 0$ tels que, en notant $B_i := B(z_i, r_i)$, on a

1. $M_E \setminus \Pi_M(C) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$;
2. $B_i \cap \Pi_M(C) = \emptyset$ pour tout entier $i \in \mathbb{N}$.

Par définition de C, le point 2. assure que l'ensemble $\Pi_M^{-1}(B_i)$ est une réunion disjointe de d_t ouverts $B_i^1, \ldots, B_i^{d_t} \subset M$ et que les applications $P_i^j := \Pi_V \circ \Pi_M|_{B_i^j}^{-1} : B_i^j \to V$, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d_t$, réalisent des biholomorphismes sur leurs images $V_i^j := P_i^j(B_i^j)$. Ainsi, l'ensemble

$$M_E \setminus \Pi_M(C) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq j \leq d_t} (P_i^j)^{-1}(E \cap V_i^j)$$

est un ensemble pluripolaire. Par conséquent, l'ensemble $M_E = \Pi_M(C) \cup M_E \setminus \Pi_M(C)$ est un ensemble pluripolaire. Par hypothèse sur ν, on obtient $\nu(M_E) = 0$, ce qui montre que

$\mathcal{T}_\nu(\delta_z)(E) = 0$ pour tout $z \in V$.

Considérons maintenant une mesure quelconque $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(V)$ et une fonction $\chi \in \mathcal{C}^0_c(V)$ telle que $\operatorname{Supp}\chi \subset E$ avec $\chi \geq 0$. Comme $\langle \mathcal{T}_\nu(\delta_z), \chi\rangle = 0$ pour tout $z \in V$, et comme la mesure $\mathcal{T}_\nu(\mu_0)$ est positive d'après le Lemme 4.2.6, on obtient

$$0 \leq \langle \mathcal{T}_\nu(\mu_0), \chi\rangle = \langle \mu_0, T_\nu(\chi)\rangle = \int_V \langle \delta_z, T_\nu(\chi)\rangle d\mu_0(z) = \int_V \langle \mathcal{T}_\nu(\delta_z), \chi\rangle d\mu_0(z) = 0.$$

Ceci est vrai pour tout choix de χ. On obtient donc $\mathcal{T}_\nu(\mu_0)(E) = 0$, ce qui conclut la preuve. □

Preuve de la Proposition 4.2.3. Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(V)$. On considère la mesure ν-stationnaire μ et l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ fournis par le Théorème 4.2.2. D'après le Lemme 4.2.11, la mesure $\mathcal{T}_\nu(\mu_0)$ ne charge pas l'ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$. D'après le point *ii*) du Théorème 4.2.2, en choisissant $\mathcal{T}_\nu(\mu_0)$ pour mesure initiale, la suite $(\mathcal{T}^n_\nu(\mu_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers μ pour la topologie faible-$*$ dans $\mathcal{M}^1(V)$. □

4.3 Familles aléatoires d'applications d'allure polynomiale

Etant donnée une famille $\{f_\lambda : U_\lambda \to V\}_{\lambda\in M}$ d'applications d'allure polynomiale, on considère maintenant que l'erreur aléatoire $\boldsymbol{\lambda}$ introduite dans le système va dépendre d'un paramètre $s \in \Sigma$, où Σ est une variété complexe. A chaque système $(f, \boldsymbol{\lambda}_s)$ est associée une unique mesure stationnaire μ_s par le Théorème 4.2.2. Dans cette section, nous construisons un courant horizontal R sur le produit $\Sigma \times V$, dont la tranche en $s \in \Sigma$ coïncide avec μ_s. Nous adaptons l'approche de Pham [Pha05] et Dinh-Sibony [DS10a] dans le cadre déterministe. Ceci nous amène à considérer des familles de mesures, et à en préciser une forme de régularité holomorphe compatible avec l'holomorphie des fonctions.

4.3.1 Familles de mesures stationnaires

Définition 4.3.1. Une famille $(\nu_s)_{s\in\Sigma}$ paramétrée par une variété complexe Σ de mesures sur une variété complexe N est dite *continue* (respectivement *holomorphe*) si pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^0(N)$ (resp. $\psi \in \mathcal{C}^0(N) \cap \mathcal{PSH}(N)$), la fonction $s \mapsto \langle \nu_s, \psi\rangle$ est continue (resp. p.s.h. et continue) sur Σ.

Exemple 4.3.2. *On considère $z : \Sigma \to N$ une fonction continue. La famille $\nu_s = \delta_{z(s)}$ est holomorphe si et seulement si la fonction z est holomorphe.*

Exemple 4.3.3. *Pour tout $s \in \Sigma \subset \mathbb{C}^l = N$, on considère une mesure de probabilité ν_s à densité $\rho_s(\cdot) = \rho(\cdot - s)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^l$, où $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{C}^l)$ est une fonction lisse à support compact. La famille ν_s est alors holomorphe. En effet, si $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C}^l) \cap \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^l)$, par un changement de variable affine, on obtient*

$$\langle \nu_s, \psi\rangle = \int_{\mathbb{C}^l} \psi(\lambda)\rho_s(\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{C}^l} \psi(\lambda)\rho(\lambda - s)d\lambda = \int_{\mathbb{C}^l} \psi(\lambda + s)\rho(\lambda)d\lambda.$$

Or la fonction $s \mapsto \psi(\lambda + s)\rho(\lambda)$ est p.s.h. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^l$, et on conclut par la Proposition 1.1.8.

Théorème 4.3.4. *Soit (M, f) une famille d'applications d'allure polynomiale de degré d_t de la forme $(f_\lambda : U_\lambda \to V)_{\lambda \in M}$. Soit $(\nu_s)_{s\in\Sigma}$ une famille de mesures de probabilité sur M, paramétrée par une variété complexe Σ. On note μ_s la mesure ν_s-stationnaire construite dans le Théorème 4.2.2. On suppose que :*

i) $\cup_{s\in\Sigma} \operatorname{Supp} \nu_s$ *est relativement compact dans* M *;*

ii) la famille $(\nu_s)_{s\in\Sigma}$ *est holomorphe ;*

iii) pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^0(V)$*, la fonction* $\left\| \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & (\mathcal{C}^0_b(V), ||\cdot||_\infty) \\ s & \mapsto & T_{\nu_s}(\psi) \end{array} \right.$ *est continue.*

Alors il existe un (k,k)-courant positif fermé horizontal $\mathcal{R}$ sur $\Sigma \times V$ tel que

$$\forall s \in \Sigma, \langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle = \mu_s.$$

Remarque 4.3.5. *Les hypothèses ii) et iii) sont vérifiées pour toute combinaison convexe des Exemples 4.3.2 et 4.3.3.*

La preuve du Théorème 4.3.4 fait l'objet de la Section 4.3.2. Nous montrons le résultat préliminaire suivant.

Lemme 4.3.6. *Sous les hypothèses du Théorème 4.3.4, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$, la fonction*

$$\xi_\varphi : s \mapsto \langle \mu_s, \varphi\rangle$$

est plurisousharmonique sur Σ.

Démonstration. Considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$.

Étape 1 : *la fonction ξ_φ est semi-continue supérieurement.*
Considérons $s_\infty \in \Sigma$ et $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s_\infty$. Il existe une extractrice $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\limsup_{n\to\infty} \xi_\varphi(s_n) = \lim_{i\to\infty} \xi_\varphi(s_{n_i})$. En vertu du théorème de Banach-Alaoglu, la suite $(\mu_{s_{n_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence μ' pour la topologie faible-$*$. Quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que la suite $(\mu_{s_{n_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers μ'.

Montrons que la suite $(\mathcal{T}_{\nu_{s_{n_i}}}(\mu_{s_{n_i}}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu')$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^0_c(V)$ et $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(\mu_{s_{n_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers μ', il existe un entier i_1 tel que pour tout $i \geq i_1$, on a l'estimation

$$|\langle \mu_{s_{n_i}} - \mu', T_{s_\infty}(\psi)\rangle| \leq \varepsilon/2. \tag{4.14}$$

D'après l'hypothèse *iii)* du Théorème 4.3.4, il existe un entier i_2 tel que pour tout $i \geq i_2$, on a l'estimation

$$||T_{\nu_{s_{n_i}}}(\psi) - T_{\nu_{s_\infty}}(\psi)||_\infty \leq \varepsilon/2. \tag{4.15}$$

Fixons $i \geq \max(i_1, i_2)$. Les estimations (4.14) et (4.15) conduisent à

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_{\nu_{s_{n_i}}}(\mu_{s_{n_i}}) - \mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu'), \psi\rangle| &\leq |\langle \mathcal{T}_{\nu_{s_{n_i}}}(\mu_{s_{n_i}}) - \mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu_{s_{n_i}}), \psi\rangle| + |\langle \mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu_{s_{n_i}}) - \mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu'), \psi\rangle| \\ &\leq |\langle \mu_{s_{n_i}}, T_{\nu_{s_{n_i}}}(\psi) - T_{\nu_{s_\infty}}(\psi)\rangle| + |\langle \mu_{s_{n_i}} - \mu', T_{s_\infty}(\psi)\rangle| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(\mathcal{T}_{\nu_{s_{n_i}}}(\mu_{s_{n_i}}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu')$ pour la topologie faible-$*$.

D'autre part, la mesure $\mu_{s_{n_i}}$ étant $\nu_{s_{n_i}}$-stationnaire, on a $\mathcal{T}_{\nu_{s_{n_i}}}(\mu_{s_{n_i}}) = \mu_{s_{n_i}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc la suite $(\mathcal{T}_{\nu_{s_{n_i}}}(\mu_{s_{n_i}}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers μ' pour la topologie faible-$*$. On en déduit que $\mathcal{T}_{\nu_{s_\infty}}(\mu') = \mu'$ et la mesure μ' est ν_{s_∞}-stationnaire. D'après la propriété de maximalité du Théorème 4.2.2, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \xi_\varphi(s_n) = \lim_{i\to\infty} \xi_\varphi(s_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} \langle \mu_{s_{n_i}}, \varphi\rangle = \langle \mu', \varphi\rangle \leq \langle \mu_{s_\infty}, \varphi\rangle = \xi_\varphi(s_\infty),$$

ce qui prouve la semi-continuité supérieure.

Étape 2 : *la fonction ξ_φ est limite simple de fonctions p.s.h. uniformément majorées.*
Soit Ω une mesure de probabilité borélienne lisse sur V. En particulier, la mesure Ω ne charge pas les ensembles pluripolaires et le Théorème 4.2.2 assure que la suite $(\mathcal{T}^n_{\nu_s}\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_s pour la topologie faible-$*$. Ainsi, la fonction ξ_φ est limite simple de la suite de fonctions définie par $\xi^n_\varphi(s) := \langle \mathcal{T}^n_{\nu_s}\Omega, \varphi\rangle$. Comme $|\xi^n_\varphi(s)| \leq \sup_V |\varphi|$ pour tout $s \in \Sigma$, et tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que la fonction ξ^n_φ est p.s.h. sur Σ.

Pour tout $z \in V$, la fonction $u_z : M \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_z(\lambda) := d_t^{-1}(f_\lambda)_*\varphi(z) \tag{4.16}$$

est continue et p.s.h. sur M. On rappelle que, par définition de l'opérateur de transfert moyennisé, on a

$$T_{\nu_s}(\varphi)(z) = \langle \nu_s, u_z\rangle, \tag{4.17}$$

pour tout $z \in V$ et $s \in \Sigma$. Comme, d'après l'hypothèse $ii)$ du Théorème 4.3.4, la famille de mesures $(\nu_s)_{s\in\Sigma}$ est holomorphe, les équations (4.16) et (4.17) assurent donc que la fonction $s \mapsto T_{\nu_s}(\varphi)(z)$ est continue et p.s.h. sur Σ. Quitte à remplacer φ itérativement par $T^j_{\nu_s}(\varphi)$, pour $1 \leq j \leq n-1$, dans le raisonnement précédent, on obtient en particulier que la fonction $s \mapsto T^n_{\nu_s}(\varphi)(z)$ est plurisousharmonique. On remarque alors que

$$\xi^n_\varphi(s) = \int_V T^n_{\nu_s}(\psi)(z)d\Omega(z) = \mathbb{E}_\Omega[T^n_{\nu_s}(\psi)],$$

ce qui conclut l'étape 2, en vertu de la Proposition 1.1.8 appliquée avec $M = V$ et $N = \Sigma$.

Comme la fonction ξ_φ est limite de fonctions plurisousharmoniques uniformément majorées, le Corollaire 1.1.11 assure que sa régularisée supérieure ξ^*_φ est une fonction plurisousharmonique. Or la fonction ξ_φ étant semicontinue supérieurement, on a $\xi^*_\varphi = \xi_\varphi$, ce qui conclut la preuve. □

4.3.2 Preuve du Théorème 4.3.4

On considère $\omega \in \mathcal{M}^1(V)$ une mesure de probabilité lisse à support compact. Son pullback $\mathcal{S} = \pi^*_V(\omega)$ par la projection canonique $\pi_V : \Sigma \times V \to V$ est bien défini comme (k,k)-courant

positif fermé sur le produit $\Sigma \times V$. On note l la dimension de Σ. On considère un système de coordonnées locales de $\Sigma \times V$ adapté à la structure produit :

$$\begin{aligned} &dz_1, \ \cdots, dz_{l+k}, d\overline{z}_1, \ \cdots, d\overline{z}_{l+k} \\ &= d\sigma_1, \ \cdots, d\sigma_l, dv_1, \ \cdots, dv_k, d\overline{\sigma}_1, \ \cdots, d\overline{\sigma}_l, d\overline{v}_1, \ \cdots, d\overline{v}_k. \end{aligned} \tag{4.18}$$

On note $d\operatorname{vol}_V = (dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_k \wedge d\overline{v}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{v}_k)$ et $d\operatorname{vol}_\Sigma = (d\sigma_1 \wedge \cdots \wedge d\sigma_l \wedge d\overline{\sigma}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{\sigma}_l)$. Le courant $\mathcal{S}$ est *saturé en* V, c'est-à-dire qu'il s'écrit localement comme $\mathcal{S} = S d\operatorname{vol}_V$, où S est une distribution sur $\Sigma \times V$.

Pour tout $s \in \Sigma$, $z \in V$, $n \in \mathbb{N}$, et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)$, on note

$$u_\psi^n(s,z) := T_{\nu_s}^n(\psi(s,\cdot))(z), \tag{4.19}$$

et on considère la suite de courants $\mathcal{S}_n = S_n d\operatorname{vol}_V$ où S_n est la distribution définie par

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V) \ : \ \langle S_n, \psi \rangle := \langle S, u_\psi^n \rangle. \tag{4.20}$$

Par construction, le courant $\mathcal{S}_n$ est la moyenne des tirés en arrière du courant positif fermé $\mathcal{S}$. C'est donc un courant positif fermé. Remarquons que $|\langle S_n, \psi \rangle| \leq ||S|| \cdot ||\psi||_\infty$. Ainsi, par compacité du cône convexe des courants positifs fermés, la suite $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(\mathcal{S}_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un courant positif fermé $\mathcal{R}$ sur $\Sigma \times V$.

D'après le Lemme 4.1.6, appliqué avec $M_0 := \cup_{s\in\Sigma} \operatorname{Supp} \nu_s$, il existe un ouvert $U_* \Subset V$ tel que pour tout $\lambda \in M_0$, on a $f_\lambda^{-1}(V) \subset U_*$. Montrons que $\operatorname{Supp} \mathcal{S}_n \subset \Sigma \times U_*$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)$ tel que $\operatorname{Supp} \varphi \subset \Sigma \times U_*^c$. Il suffit de remarquer, dans le calcul suivant, que les fonctions $\varphi(s,\cdot)$ sont toujours évaluées en des points de U_*.

$$\langle S_n, \varphi \rangle = \int_{M^n} (f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1})_* \varphi(s,\cdot) d\nu_s^n(\lambda_1, \ \cdots \lambda_n) = 0.$$

Ainsi, les courants $\mathcal{S}_n$ sont horizontaux. Il en est de même pour le courant limite $\mathcal{R}$. En effet, d'après le Lemme 1.1.16, on a

$$\operatorname{Supp} \mathcal{R} \subset \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Supp}(\mathcal{S}_{n_i})} \subset \Sigma \times \overline{U_*}.$$

La Proposition 1.1.23 *i)* assure que pour tout $s \in \Sigma$ et tout $n \in \mathbb{N}$, les mesures $\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s \rangle$ et $\langle \mathcal{S}_n, \pi_\Sigma, s \rangle$ sont bien définies. Il reste à montrer que la mesure $\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s \rangle$ coïncide avec la mesure ν_s-stationnaire μ_s introduite au Théorème 4.2.2.

Pour toute fonction lisse $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)$, on note

$$\psi_s(z) = \psi(s,z). \tag{4.21}$$

Lemme 4.3.7. *Pour toute fonction lisse $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)$, toute forme volume $\Omega \in \mathcal{D}_c^{(l,l)}(\Sigma)$ continue sur Σ à support compact, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int_\Sigma \langle \mathcal{T}_{\nu_s}^n(\omega), \psi_s \rangle \Omega(s) = \langle \mathcal{S}_n \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega), \psi \rangle. \tag{4.22}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle \mathcal{S}_n, \pi_\Sigma, s \rangle = \mathcal{T}_{\nu_s}^n(\omega)$.

Démonstration. Comme Ω et ω sont des mesures lisses, on peut écrire, dans le système de coordonnées locales (4.18), $\pi_\Sigma^*(\Omega) = \alpha(s) d\,\mathrm{vol}_\Sigma$ et $\pi_V^*(\omega) = \beta(z) d\,\mathrm{vol}_V$, où α et β sont des fonctions lisses. Le calcul suivant résulte du théorème de Fubini et de la linéarité de $T^n_{\nu_s}$.

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle \mathcal{T}^n_{\nu_s}(\omega), \psi_s\rangle \Omega(s) &= \int_\Sigma \langle \omega, T^n_{\nu_s}(\psi_s)\rangle \Omega(s)\\ &= \int_{\Sigma\times V} T^n_{\nu_s}(\psi_s)(z)\alpha(s)\beta(s) d\,\mathrm{vol}_\Sigma \wedge d\,\mathrm{vol}_V\\ &= \langle \pi_V^*(\omega), u^n_{\psi\alpha} d\,\mathrm{vol}_\Sigma\rangle,\end{aligned}$$

où on rappelle que la fonction $u^n_{\psi\alpha}$ est définie par (4.19). Dès lors, l'égalité (4.20) conduit à

$$\int_\Sigma \langle \mathcal{T}^n_{\nu_s}(\omega), \psi_s\rangle \Omega(s) = \langle S, u^n_{\psi\alpha}\rangle = \langle S_n, \psi\alpha\rangle. \tag{4.23}$$

D'autre part, en appliquant directement les définitions, on trouve

$$\langle \mathcal{S}_n \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega), \psi\rangle = \langle \mathcal{S}_n, \psi \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega)\rangle = \langle \mathcal{S}_n, \psi \wedge \alpha d\,\mathrm{vol}_\Sigma\rangle = \langle S_n, \psi\alpha\rangle. \tag{4.24}$$

En combinant (4.23) avec (4.24), on aboutit à l'identité recherchée. □

Fin de la preuve du Théorème 4.3.4. On considère une forme volume $\Omega \in \mathcal{D}_c^{(l,l)}(\Sigma)$ continue à support compact sur Σ. Le courant positif fermé $\pi_\Sigma^*(\Omega)$ est lisse, donc l'opérateur $S \mapsto S \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega)$ est faiblement continu sur le cône convexe fermé des courants positifs fermés. Ainsi, la suite de mesures $(\mathcal{S}_n \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\Sigma \times V$ converge vers la mesure $\mathcal{R} \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega)$. D'après la caractérisation par dualité de la Proposition 1.1.23 *i)*, pour toute fonction lisse $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma \times V)$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{S}_n \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega), \psi\rangle = \langle \mathcal{R} \wedge \pi_\Sigma^*(\Omega), \psi\rangle = \int_\Sigma \langle\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle, \psi_s\rangle \Omega(s), \tag{4.25}$$

où on rappelle que la fonction ψ_s est définie par (4.21). D'autre part, comme ω ne charge pas les ensembles pluripolaires, d'après la conclusion *ii)* du Théorème 4.2.2, pour tout $s \in \Sigma$, la suite $(\langle \mathcal{T}^n_{\nu_s}(\omega), \psi_s\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle \mu_s, \psi_s\rangle$. Ainsi, par convergence dominée, il suit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Sigma \langle \mathcal{T}^n_{\nu_s}(\omega), \psi_s\rangle \Omega(s) = \int_\Sigma \langle \mu_s, \psi_s\rangle \Omega(s). \tag{4.26}$$

En combinant les équations (4.25), (4.26) et l'identité (4.22) du Lemme 4.3.7, on obtient

$$\langle \mu_s, \psi_s\rangle = \langle\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle, \psi_s\rangle\,, \tag{4.27}$$

pour Ω-presque tout $s \in \Sigma$. On veut montrer que les mesures μ_s et $\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle$ coïncident sur $\mathcal{C}^\infty(V)$. On commence par généraliser l'équation (4.27) en remplaçant ψ_s par n'importe quelle fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(V)$. C'est possible, quitte à multiplier par une fonction plateau, car les mesures μ_s et $\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle$ sont supportées dans $U_* \Subset V$.

Or, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(V) \cap \mathcal{PSH}(V)$, les deux fonctions suivantes sont p.s.h. sur Σ :

— $s \mapsto \langle \mu_s, \phi\rangle$ par le Lemme 4.3.6.

— $s \mapsto \langle\langle \mathcal{R}, \pi_\Sigma, s\rangle, \phi\rangle$ par la Proposition 1.1.23 *ii)*.

D'après le Lemme 1.1.6, ces deux fonctions sont donc égales partout. La conclusion provient du Lemme 1.1.15 et de la densité de $\mathcal{C}^2_c(V)$ dans $\mathcal{C}^0_b(V)$. □

Remarque 4.3.8. *Si chaque variable aléatoire $\boldsymbol{\lambda}_s$ suit la même loi $\nu_s = \delta_{\lambda_0}$, pour un même paramètre $\lambda_0 \in M$, on retrouve bien la définition de [Pha05] dans le cadre déterministe, à savoir $\mathcal{S}_n = (f^n_{\lambda_0})^* \mathcal{S}$.*

Bibliographie

[AB+16] Matthieu Astorg, Xavier Buff, Romain Dujardin, Han Peters et Jasmin Raissy, *A two-dimensional mapping with a wandering Fatou component*, Annals of Mathematics **184** (2016), 263-313.

[Ahl96] Lars Valerian Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, Princeton (1996).

[BaBe07] Giovanni Bassanelli et François Berteloot, *Bifurcation currents in holomorphic dynamics on* $\mathbb{CP}^k$, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) **608** (2007), 201-235.

[BaBe09] Giovanni Bassanelli et François Berteloot, *Lyapunov exponents, bifurcation currents and laminations in bifurcation loci*, Mathematische Annalen **345.1** (2009), 1-23.

[Bay15] Turgay Bayraktar, *Ergodic Properties of Random Holomorphic Endomorphisms of* $\mathbb{P}^k$, Internatonal Mathematics Research Notes **2015.4** (2015), 927-959.

[BBD18] François Berteloot, Fabrizio Bianchi et Christophe Dupont, *Dynamical stability and Lyapunov exponents for holomorphic endomorphisms of* $\mathbb{P}^k$, Annales Scientifiques de l'ENS **51.4** (2018), 215-262.

[BeBi18a] François Berteloot et Fabrizio Bianchi, *Stability and bifurcations in projective holomorphic dynamics*, Dynamical systems, Banach Center Publications, Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Warsaw **115** (2018), 37-71.

[BeBi18b] François Berteloot et Fabrizio Bianchi, *Perturbations d'exemples de Lattès et dimension de Hausdorff du lieu de bifurcation*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **116** (2018), 161-173.

[BeDu19] François Berteloot et Christophe Dupont, *A distortion Theorem for iterated inverse branches of holomorphic endomorphisms of* $\mathbb{P}^k$, Journal of the London Mathematical Society **99.1** (2019), 153-172.

[BeBr23] François Berteloot et Maxence Brévard, *Ramification current, post-critical normality and stability of holomorphic endomorphisms of* $\mathbb{P}^k$, Fundamenta Mathematicae **263** (2023), 253-270.

[BDM08] François Berteloot, Chritophe Dupont et Laura Molino, *Normalization of bundle holomorphic contractions and applications to dynamics*, Annales de l'Institut Fourier **58.6** (2008), 2137-2168.

[BE09] Xavier Buff et Adam Epstein, *Bifurcation measure and postcritically finite rational maps*, Complex Dynamics : Families and Friends (2009), 491-512.

[Ber11] François Berteloot, *Bifurcation currents in one-dimensional holomorphic dynamics*, CIME Lecture notes (2011).

[Ber18] François Berteloot, *Les cycles répulsifs bifurquent en chaîne*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **197** (2018), 517-520.

[BeTa82] Eric Bedford et Bert Alan Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Mathematica **149** (1982), 1-41.

[Bia19] Fabrizio Bianchi, *Misiurewicz parameters and dynamical stability of polynomial-like maps of large topological degree*, Mathematische Annalen **373** (2019), 901-928.

[BiBr23] Fabrizio Bianchi, Maxence Brévard, *Holomorphic motions of weighted periodic points*, Prépublication arXiv : 2307.12734 (2023).

[BiDi23] Fabrizio Bianchi et Tien-Cuong Dinh, *Equilibrium states of endomorphisms of $\mathbb{P}^k$ I : existence and properties*, Journal de mathématiques pures et appliquées **172** (2023), 164-201.

[BiDi22] Fabrizio Bianchi et Tien-Cuong Dinh, *Equilibrium states of endomorphisms of $\mathbb{P}^k$ II : spectral gap and limit theorems*, Prépublication arXiv : 2204.02856 (2022).

[BiTa17] Fabrizio Bianchi et Johan Taflin, *Bifurcations in the elementary Desboves family*, Proceedings of the American Mathematical Society **145.10** (2017), 4337-4343.

[Bie19] Sébastien Biebler, *Lattès maps and the interior of the bifurcation locus*, Journal of Modern Dynamics **15** (2019), 95-130.

[BM01] François Berteloot et Volker Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés 7, Société Mathématique de France, Paris, Les Ulis (2001).

[BR22] Fabrizio Bianchi et Karim Rakhimov, *Strong probabilistic stability in holomorphic families of endomorphisms of $\mathbb{P}^k$ and polynomial-like maps*, Prépublication arXiv : 2206.04165 (2022).

[BrDu99] Jean-Yves Briend et Julien Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$*, Acta Mathematica **182.2** (1999), 143-157.

[BrDu01] Jean-Yves Briend et Julien Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **93** (2001), 145-159, et *erratum*, **109** (2009), 295-296.

[Bro65] Hans Brolin, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Arkiv for Mathematik **6** (1965), 103-144.

[Buf05] Xavier Buff, *La mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$*, Séminaire Bourbaki **47** (2004-2005), 33-70.

[CG93] Lenart Carleson et Theodore William Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext : Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1993).

[Chi89] Evgenii Mikhailovich Chirka, *Complex Analytic Sets*, Kluwer Acadademic Publishers, Dordrecht (1989).

[CFS12] Isaac Cornfeld, Sergey Fomin et Yakov Sinai, *Ergodic theory*, Springer Science and Business Media Volume 245 (2012).

[DD12] Bertrand Deroin et Romain Dujardin, *Random walks, Kleinian groups, and bifurcation currents*, Inventiones Mathematicæ **190** (2012), 57-118.

[Dem12] Jean-Pierre Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, URL : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf (2012).

[DeM03] Laura DeMarco, *Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity*, Mathematische Annalen **326** (2003), 43-73.

[DeT05] Henry De Thélin, *Un phénomène de concentration de genre*, Mathematische Annalen **332** (2005), 483-498.

[DeT13] Henry de Thélin, *Endomorphismes aléatoires dans les espaces projectifs I*, Manuscripta Mathematica **142** (2013), 347-367.

[DeT15] Henry de Thélin, *Endomorphismes aléatoires dans les espaces projectifs II*, The Journal of Geometric Analysis **25** (2015), 204-225.

[DF08] Romain Dujardin et Charles Favre, *Distribution of rational maps with a preperiodic critical point*, American Journal of Mathematics **130.4** (2008), 979-1032.

[Din07] Tien-Cuong Dinh, *Attracting current and equilibrium measure for attractors on* $\mathbb{P}^k$, Journal of Geometric Analysis **17.2** (2007), 227-244.

[DNS10] Tien-Cuong Dinh, Viêt-Anh Nguyên et Nessim Sibony, *Exponential estimates for plurisubharmonic functions*, Journal of Differential Geometry **84.3** (2010), 465-488.

[DS03] Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **82.4** (2003), 367–423.

[DS05] Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony, *Green Currents for Holomorphic Automorphisms of Compact Kähler Manifolds*, Journal of the American Mathematical Society **18.2** (2005), 291-312.

[DS06] Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony, *Geometry of currents, intersection theory and dynamics of horizontal-like maps*, Annales de l'Institut Fourier **56.2** (2006), 423–457.

[DS10a] Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony, *Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings*, Lecture Notes in Mathematics Springer, Berlin, Holomorphic dynamical systems, Volume 1998. (2010), 165–294.

[DS10b] Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony, *Equidistribution speed for endomorphisms of projective spaces*, Mathematische Annalen **347.3** (2010), 613-626.

[DS14] Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony, *Rigidity of Julia sets for Hénon type maps*, Journal of Modern Dynamics **8.3-4** (2014), 499–548.

[DU91a] Manfred Denker et Marius Urbański, *Ergodic theory of equilibirium states for rational maps*, London Mathematical Society, Nonlinearity **4.1** (1991), 103.

[DU91b] Manfred Denker et Marius Urbański, *On the existence of conformal measures*, Transactions of the American Mathematical Society **328.2** (1991), 563-587.

[Duj06] Romain Dujardin, *Approximation des fonctions lisses sur certaines laminations*, Indiana University Mathematics Journal **55** (2006), 579-592.

[Duj11] Romain Dujardin, *Bifurcation currents and equidistribution on parameter space*, Frontiers in Complex Dynamics : In Celebration of John Milnor's 80th Birthday (2011).

[Duj17] Romain Dujardin, *Non-density of stability for holomorphic mappings on* $\mathbb{P}^k$, Journal de l'École polytechnique, Mathématiques **4** (2017), 813-843.

[Dup12] Christophe Dupont, *Large entropy measures for endomorphisms of* $\mathbb{CP}^k$, Israel Journal of Mathematics **192** (2012), 505–533.

[Fed69] Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **153** (1969).

[FLM83] Alexandre Freire, Artur Lopes et Ricardo Mañé, *An invariant mesure for rational maps*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **14.1** (1983), 45-62.

[FS91] John Erik Fornæss et Nessim Sibony, *Random iteration of rational functions*, Cambridge University Press, Ergodic Theory and Dynamical Systems **11.4** (1991), 687-708.

[FS94] John Erik Fornæss et Nessim Sibony, *Complex dynamics in higher dimenson. I*, Complex analytic methods in dynamical systems, IMPA, Astérisque **222** (1994), 201-231.

[FS95] John Erik Fornæss et Nessim Sibony, *Complex dynamics in higher dimenson. II*, Modern methods in complex analysis , Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press **137** (1995), 135-182.

[FS01] John Erik Fornæss et Nessim Sibony, *Dynamics of* $\mathbb{P}^2$ *(examples)*, Contemporary Mathematics **269** (2001), 47-86.

[FW00] John Erik Fornæss et Brendan Weickert, *Random iteration in* $\mathbf{P}^k$, Ergodic Theory and Dynamical Systems **20.4** (2000), 1091-1109.

[GP20] Lorenzo Guerini et Han Peters, *Random local complex dynamics*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **40.8** (2020), 2156-2186.

[GOV19] Thomas Gauthier, Yûsuke Okuyama et Gabriel Vigny, *Hyperbolic components of rational maps : Quantitative equidistribution and counting*, Commentarii Mathematici Helvetici **94.2** (2019), 347-398.

[Gro77] Mikhaïl Gromov, *On the entropy of Holomorphic Maps*, L'enseignement Mathématique **49** (2003), 217-235, et prépublication SUNY (1977).

[GV17] Thomas Gauthier et Gabriel Vigny, *Distribution of postcritically finite polynomials II : Speed of convergence*, Journal of Modern Dynamics **11.3** (2017), 57-98.

[Hay99] Nicolai Haydn, *Convergence of the transfer operator for rational maps*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **19.3** (1999), 657-669.

[HM96] Aimo Hinkkanen et Gaven John Martin, *The dynamics of semigroups of Rational Fractions I*, Proceedings of the London Mathematical Society **73.2** (1996), 358-384.

[HP94] John Hamal Hubbard et Peter Papadopol, *Superattractive fixed points in* $\mathbb{C}^n$, Indiana University Mathematics Journal **43** (1994), 321-365.

[Kal22] Olav Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer Cham (2022).

[KH99] Anatole Katok et Boris Hasselblat, *Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[Kli91] Maciej Klimek, *Pluripotential theory*, Volume 6 of London Mathematical Society Monographs. New Series, Oxford University Press, New York (1991).

[Kur66] Kazimierz Kuratowski, *Topology*, Volume I, Academic Press, New York (1966).

[Lel42] Pierre Lelong, *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, Compte-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris **215** (1942), 398.

[Lel57] Pierre Lelong, *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bulletin de la Société Mathématique de France **85** (1957), 239-262.

[Lel68] Pierre Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon and Breach, New York (1968).

[Lev83] Genadi Levin, *On the irregular values of the parameter of a family of polynomial mappings*, Uspekhi Mathematicheskikh Nauk **37.3** (1982), 189-190.

[Lyu83a] Mikhail Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Ergodic theory of dynamical systems **3.2** (1983), 193-217.

[Lyu83b] Mikhail Lyubich, *Some typical properties of the dynamics of rational mappings*, Uspekhi Mathematicheskikh Nauk **36.6**, 197-198 et Traduction dans Russian Mathematical Surveys **38.5** (1983), 154-155.

[Man84] Anthony Manning, *The dimension of the maximal measure for a polynomial map*, Annals of Mathematics **119.2** (1984), 425-430.

[Mil06] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg, 3rd edition (2006).

[MP77] Michał Misiurewicz et Feliks Przytycki, *Topological entropy and degree of smooth mappings*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, série des sciences mathématiques, astronomiques, et physiques **25.6** (1977), 573-574.

[MSS83] Ricardo Mañe, Paulo Sad et Denis Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Annales scientifiques de l'ENS **16.2** (1983), 193-217.

[Oka42] Kiyoshi Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables - VI Domaines pseudoconvexes*, Tôhoku Mathemattical Journal **49** (1942), 15-52.

[Oku14] Yûsuke Okuyama, *Equidistribution of rational functiond having a supperattracting periodic point towards the activity current and the bufurcation current*, Conformal Geometry and Dynamics **18** (2014), 217-228.

[Pha05] Ngoc-Mai Pham, *Lyapunov exponents and bifurcation current for polynomial-like maps* (2005), Prépublication arXiv : math/0512557.

[Prz85] Feliks Przytycki, *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map*, Inventiones Mathematicæ **80** (1985), 161-180.

[Prz90] Feliks Przytycki, *On the Perron-Frobenius-Ruelle operator for rational maps on the Riemann sphere and for Hölder continuous functions*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **20.2** (1990), 95-125.

[PU10] Feliks Przytycki et Mariusz Urbański, *Conformal fractals : ergodic theory methods*, Cambridge University Press, Volume 371 (2010).

[Sib81] Nessim Sibony, Exposé Orsay (1981).

[Sib99] Nessim Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$, Société Mathématique de France, Paris **8** (1999), 97-185.

[Sło91] Zbigniew Słodkowski, *Holomorphic motions and polynomial hulls*, Proceedings of the American Mathematical Society **111** (1991), 347-355.

[SSS04] Rich Stankewitz, Toshiyuki Sugawa et Hiroki Sumi, *Some counterexamples in dynamics of rational semigroups*, Annales Academiæ Scientarum Fennicæ Mathematica **29** (2004), 357-366.

[Sul85] Dennis Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Annals of mathematics **122** (1985), 401-418.

[Sum97] Hiroki Sumi, *On dynamics of hyperbolic rational semigroups*, Journal of Mathematics of Kyoto University **37.4** (1997), 717-733.

[Sum98] Hiroki Sumi, *On hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups*, Kodai Mathematical Journal **21** (1998), 10-28.

[Sum11] Hiroki Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proceedings of the London Mathematical Society **102.1** (2011), 50-112.

[SUZ14] Michał Szostakiewicz, Mariusz Urbański et Anna Zdunik, *Stochastics and thermodynamics for equilibrium measures of holomorphic endomorphisms on complex projective spaces*, Monatshefte für Mathematik **174.1** (2014), 141-162.

[SW80] Nessim Sibony et Pit-Mann Wong, *Some results on global analytic sets*, Mathematics Springer, Berlin **822** (1980), 221-237.

[SW19] Hiroki Sumi et Takayuki Watanabe, *Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity*, London Mathematical Society, Nonlinearity **32** (2019), 3742-3771.

[SW22] Hiroki Sumi et Takayuki Watanabe, *Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the generic dichotomy*, London Mathematical Society, Nonlinearity **35**, (2022) 1857-1875 et *Erratum*, **36** (2023), C1-C2.

[Taf21] Johan Taflin, *Blenders near polynomial product maps of* $\mathbb{C}^2$, Journal of the European Mathematical Society **11** (2021), 3555-3589.

[Thi67] Paul Thie, *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Mathematische Annalen **172** (1967), 269-312.

[Ued98] Tetsuedo Ueda, *Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces*, The Journal of Geometric Analysis **8** (1998), 319-334.

[UZ13] Mariusz Urbański et Anna Zdunik, *Equilibrium measures for holomorphic endomorphisms of complex projective spaces*, Fundamenta Mathematicae **220** (2013), 23-69.

[Wal82] Peter Walters, *An introduction to ergodic theory*, Topics Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York (1982).

[Zin96] Michel Zinmeister, *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, Société Mathématique de France, Parnorama et Synthèses **4** (1996).

Résumé

Dans cette thèse, nous contribuons au développement de la théorie de la stabilité dynamique au sens de Berteloot-Bianchi-Dupont pour les familles holomorphes d'endomorphismes des espaces projectifs complexes. Dans un premier temps, nous établissons une nouvelle caractérisation de la stabilité dynamique portant sur le courant de ramification introduit par Dinh-Sibony en exploitant la théorie du pluripotentiel. Cela nous permet à la fois de simplifier l'approche originale et de mieux comprendre la stabilité dynamique en termes de normalité post-critique.

Dans un deuxième temps, nous étudions la propagation de certaines propriétés statistiques au sein d'une famille stable. En particulier, nous utilisons la notion de ν-tissu de Bianchi-Rakhimov pour propager les états d'équilibre, qui constituent une classe importante de mesures ergodiques apparaissant dans le formalisme thermodynamique. Nous établissons également un résultat d'équidistribution des cycles répulsifs avec poids pour les ν-tissus dans l'espace des graphes.

Dans un troisième temps, nous nous intéressons à la dynamique aléatoire des applications d'allure polynomiale. Nous construisons les mesures stationnaires introduites pour les endomorphismes par Fornaess-Weickert. Nous démontrons ensuite l'existence d'un courant positif fermé horizontal dont les tranches sont exactement les mesures stationnaires. La construction de ce type de courants est l'une des premières étapes pour attaquer des questions de stabilité dynamique dans ce contexte.

Abstract

In this thesis, we contribute to the development of the theory of dynamical stability in the sense of Berteloot-Bianchi-Dupont for holomorphic families of endomorphisms of complex projective spaces. First, we establish a new characterisation of dynamical stability concerning the ramification current introduced by Dinh-Sibony by exploiting pluripotential theory. This allows us both to simplify the original approach and to better understand dynamical stability in terms of post-critical normality.

Secondly, we study the propagation of some statistical properties within a stable family. In particular, we use the notion of ν-web of Bianchi-Rakhimov to propagate the equilibrium states, which are an important class of ergodic measures appearing in the thermodynamical formalism. We also establish a weighted equidistribution result of repelling cycles for ν-webs in the space of graphs.

In a third step, we focus on the random dynamics of polynomial-like maps. We construct the stationary measures introduced for endomorphisms by Fornaess-Weickert. We then build a horizontal closed positive current whose slices are exactly the stationary measures. The construction of this type of current is one of the first steps in tackling questions of dynamical stability in this context.