THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *Mardi 7 mars 2023* **par :**

Lucas FUSTER

Contribution à l'étude théorique et numérique d'un dispositif de protection microonde par décharge plasma

---

JURY

Geneviève MAZE-MERCEUR	Directrice de recherche CEA-CESTA	Rapporteure
Mohamed CHAKER	Professeur des Universités	Rapporteur
Olivier LEROY	Chargé de Recherche CNRS	Examinateur
Gerjan HAGELAAR	Directeur de Recherche CNRS	Examinateur
Khaled HASSOUNI	Professeur des Universités	Examinateur
Thierry CALLEGARI	Maître de conférences, HDR	Directeur de thèse
Romain PASCAUD	Professeur Associé ISAE-SUPAERO	Co-directeur de thèse
Olivier PASCAL	Professeur des Universités	Président

École doctorale et spécialité :
GEETS : Ingénierie des PLASMAS
Unité de Recherche :
LAboratoire PLAsma et Conversion d'Energie (LAPLACE) - Équipe GREPHE
Directeur(s) de Thèse :
Thierry CALLEGARI et *Romain PASCAUD*
Rapporteurs :
Geneviève MAZE-MERCEUR et *Mohamed CHAKER*

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés conjointement au sein du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) de Gramat, du Laboratoire PLAsma et Conversion d'Energie (LAPLACE) de l'Université Paul Sabatier, et de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-Supaéro). Ils ont été financés par l'Agence Innovation Défense et par la Région Occitanie Pyrénées-Méditerranée.

Je tiens tout d'abord à remercier Mme. Geneviève Mazé-Merceur, Directrice de recherche au CEA-CESTA, et M. Mohamed Chaker, Professeur à l'INRS (Institut National de la Recherche Scientifique), d'avoir bien voulu consacrer du temps à rapporter cette thèse. Je remercie également M. Khaled Hassouni, Professeur au LSPM (Laboratoire des Sciences des Procédés et des Matériaux) et M. Olivier Leroy, Chargé de recherche CNRS au LPGP (Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasma), de s'être joints au jury de thèse. Enfin, je remercie M. Philippe Pouliguen pour sa participation au jury et pour son soutien au cours de ces trois années.

J'en viens maintenant à mes directeurs de thèse, Thierry Callegari et Romain Pascaud, qui m'ont accueilli en thèse sans aucune autre forme de procès qu'un entretien téléphonique d'une vingtaine de minutes. Ce fut un réel plaisir de réaliser ces travaux sous votre magistère. Je vous remercie infiniment pour la confiance que vous avez placée en moi et pour la liberté sans limites que vous m'avez laissée durant ces trois années. J'avoue toutefois avoir senti quelques pointes d'inquiétude chez toi Thierry au moment de rédiger le manuscrit ou bien de conclure certains calculs. Romain, je te remercie pour ton sens du détail et tes commentaires avisés lors de la rédaction des diverses communications, dont la mise en œuvre (quoique parfois pénible !) fut toujours remarquée. Je tacherai de m'en souvenir pour la suite. Je finis à mon tour par un conseil : s'il t'arrive encore de discuter avec tes doctorants après une réunion, essaie quand même de ne plus oublier tes enfants à l'école...

Autour de ce noyau dur gravitent en orbite basse trois autres personnes, dont la participation à ce travail mérite d'être soulignée. Tout d'abord Gerjan Hagelaar qui a mis son code de calcul à disposition de ces travaux de thèse et qui m'a formé aux problèmes de chimie et de paramètres d'entrée pour la simulation des plasmas froids. Ensuite, Jérôme Sokoloff pour sa pédagogie et son aide précieuse au sujet des ondes de surface et des ondes de fuite. Enfin, Olivier Pascal pour nos discussions autour des problèmes de raccordement modal, sans lesquelles ces excursions analytiques n'auraient pas abouti. Merci à vous trois.

Je me tourne ensuite vers le CEA de Gramat. Je remercie Patrick Hoffmann, pour nos nombreux échanges à la croisée de la physique, de la philosophie et de l'épistémologie. J'ai fait le calcul, et malheureusement, si tu avais trois questions supplémentaires à chaque fois que je suis sorti de ton bureau, je crains que nous ne puissions pas y répondre avant que tu partes en retraite ! J'en viens maintenant à Clovis Pouant, avec qui les campagnes expérimentales ont été réalisées, et pour lequel aucun mot ne suffirait à exprimer ma gratitude. Je retiendrai de toi ta précision, ta rigueur, ton efficacité et ton abnégation. Je crois important d'écrire ici que, si tu ne t'étais pas investi sur ce projet dans des proportions qui dépassaient de loin tes prérogatives, ces travaux de thèse n'auraient pas été le quart de la moitié du commencement de ce qu'ils sont devenus.

Hormis les gens qui ont contribué de près à ces travaux de thèse, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont gravité autour de moi durant ces trois années. Mention spéciale pour Laurent Garrigues, électron libre du laboratoire Toulousain pour sa bonne humeur, son humour et ses petits proverbes, dont voici une sélection : « Travail à distance, distance avec le travail » (nous ne mentionnerons pas les gens à qui cette phrase est destinée), « Une thèse, c'est pas ma vie mon œuvre ! », et le fameux « Le mieux est l'ennemi du bien... ». Bien que je n'ai pas réussi à rédiger ma thèse en trois semaines comme toi, j'ai finalement perçu toute la profondeur des deux derniers adages lorsque j'écrivais les dernières lignes de ce manuscrit !

En deuxième lieu, je remercie tous les étudiants qui furent présents au début de la thèse, notamment Sarah, Masayuki, Arturo, Rafael, Bernard et bien sûr Baptiste. Ah, que du beau monde ! Merci pour les moments passés ensemble, et pour nos conversations parfaitement et totalement orthogonales à toute forme de bien-pensance, qui me permettent encore de conserver un semblant de foi en l'humanité. En particulier, merci à Sarah et Masayuki de nous avoir fait découvrir les animés japonais, à Arturo de nous avoir mis au parfum de certaines classifications qui ont cours en Italie, et à Bernard de nous avoir initié aux chefs-d'œuvre du septième art belge, au laboratoire à des heures indues, ce qui faillit nous valoir d'être appréhendés par le service de sécurité de l'université. Je n'en écrirai pas davantage afin que ce manuscrit ne soit point censuré. Après ce départ sur des chapeaux de roues, vinrent ensuite les heures sombres, et une pandémie d'une ampleur jamais vue, qui comme chacun ne l'ignore pas, décima les neuf dixième de l'espèce humaine. Finalement, de ce petit groupe il ne resta que Baptiste. Nous commençâmes nos thèses respectives ensemble et nous les finîmes ensemble. Du travail « haut de gamme » ! (même s'il me semble avoir vu traîner un pixel dans ta version finale...). La conjoncture économique actuelle pourrait entraîner la concrétisation du Perroquet Vert en moins de temps qu'il ne faut pour le dire. A ce sujet, ne manque pas le dernier opus du grand Bernard L.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mes grands-parents, ma mère et ma sœur.

Table des matières

Introduction **1**

1 Notions de base en physique des plasmas et en électromagnétisme **15**
1.1 Introduction . . . 15
1.2 Caractérisation d'un plasma froid hors équilibre thermodynamique . . . 16
1.2.1 Écrantage électrique : pulsation plasma et longueur de Debye . . . 16
1.2.2 Le plasma : milieu diélectrique ou conducteur ? . . . 18
1.2.3 Marche aléatoire des électrons : libre parcours moyen et fréquence de collision . . . 20
1.3 Équations de base en physique des plasma . . . 23
1.3.1 Description particulaire sur l'échelle microscopique . . . 23
1.3.2 Description statistique sur l'échelle mésoscopique . . . 24
1.3.3 Description fluide sur l'échelle macroscopique . . . 25
1.3.3.1 Moment d'ordre zéro de l'équation de Boltzmann . . . 26
1.3.3.2 Moment d'ordre un de l'équation de Boltzmann . . . 26
1.3.3.3 Moment d'ordre deux de l'équation de Boltzmann . . . 26
1.3.3.4 Fermeture du système fluide et équation d'état thermodynamique . . . 27
1.4 Transport des particules . . . 28
1.4.1 Diffusion libre et mobilité . . . 28
1.4.2 Diffusion ambipolaire . . . 29
1.4.3 Diffusion mixte dans le cadre de l'interaction microonde-plasma . . . 30
1.5 Équations de base pour l'interaction microonde-plasma . . . 31
1.5.1 Réponse diélectrique d'un plasma froid collisionnel . . . 31
1.5.2 Équation de propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas . . . 34
1.5.3 Théorème de Poynting généralisé et puissance microonde absorbée . . . 35
1.5.3.1 Équation d'évolution de la polarisation . . . 35
1.5.3.2 Théorème de Poynting . . . 35
1.6 Confinement des décharges plasma et interaction plasma-paroi . . . 37
1.7 Conclusion . . . 39

2 Modèle numérique et dispositif expérimental **41**
2.1 Simulation de l'interaction microonde/plasma . . . 41
2.1.1 Géométrie simulée . . . 42
2.1.2 Système d'équations résolu . . . 43
2.1.2.1 Séparation des échelles . . . 43
2.1.2.2 Modèle plasma . . . 45
2.1.2.3 Modèle microonde . . . 46
2.1.2.4 Conditions initiales, conditions aux limites et maillage . . . 48
2.1.3 Cinétique chimique de l'Argon . . . 49
2.1.3.1 Niveaux d'énergie et chimie de l'Argon . . . 49
2.1.3.2 Cinétique simplifiée . . . 50
2.1.4 Résolution de l'équation de Boltzmann . . . 52

2.1.4.1 Sections efficaces considérées . . . 53
2.1.4.2 Fonctions de distribution et résolution de l'équation de Boltzmann . . 54
2.1.5 Détermination des taux de réaction effectifs . . . 57
2.1.5.1 Taux de quenching électronique, d'excitation du niveau résonnant et d'ionisation par étape . . . 57
2.1.5.2 Coefficients de désexcitation radiative . . . 58
2.1.6 Transport des espèces neutres excitées et des ions . . . 59
2.2 Présentation du banc d'essai . . . 61
2.2.1 Dispositif expérimental . . . 61
2.2.2 Protocole expérimental . . . 62
2.3 Conclusion . . . 62

3 Fonctionnement du limiteur à l'état stationnaire : physique de la limitation de puissance 65
3.1 Position du problème . . . 65
3.1.1 Observations préliminaires . . . 65
3.1.2 Positionnement du problème . . . 66
3.2 Solution générale de l'équation d'onde dans la ligne microruban suspendue . . . 67
3.3 Analyse modale . . . 72
3.3.1 Étude du mode principal, dans la limite des basses fréquences . . . 72
3.3.2 Étude des modes d'ordres supérieurs . . . 76
3.4 Mécanismes de couplage onde-plasma . . . 83
3.4.1 Modes de propagation en présence d'un plasma uniforme . . . 83
3.4.2 Comparaison théorie-simulation . . . 85
3.5 Puissance de fuite . . . 86
3.5.1 Caractérisation de la ligne . . . 86
3.5.2 Puissance de fuite . . . 87
3.5.2.1 Évolution en fonction de la de la longueur de cavité . . . 90
3.5.2.2 Évolution en fonction de la pression . . . 93
3.5.2.3 Évolution en fonction de l'épaisseur du diélectrique . . . 94
3.6 Conclusion . . . 96

4 Fonctionnement du limiteur en régime transitoire 99
4.1 Position du problème . . . 100
4.2 Mécanisme de propagation du plasma : étude de l'équation de diffusion non-linéaire . . . 103
4.2.1 Étude par la théorie des systèmes dynamiques . . . 104
4.2.1.1 Brève introduction à la théorie des systèmes dynamiques . . . 104
4.2.1.2 Recherche des points fixes pour l'équation de diffusion non-linéaire . . . 107
4.2.1.3 Analyse de stabilité et classification des points fixes . . . 107
4.2.1.4 Trajectoires dans l'espace des phases et profils de densité . . . 108
4.2.2 Étude par la théorie non-linéaire . . . 110
4.2.3 Comparaisons théorie-simulation-expérience . . . 112
4.3 Interaction microonde/plasma dans le front . . . 116
4.3.1 Raccordement modal . . . 118
4.3.2 Construction des bases modales . . . 122
4.3.2.1 Ordonnancement des modes . . . 122
4.3.2.2 Ordre de fermeture des bases modales . . . 123
4.3.3 Application à l'interaction microonde-plasma dans le limiteur . . . 125
4.4 Temps de claquage . . . 127
4.4.1 État de l'art pour l'approche analytique du claquage microonde . . . 127
4.4.2 Nouvelle approche : par l'équation d'énergie . . . 128
4.5 Temps de recouvrement . . . 132
4.5.1 Résultats numériques et expérimentaux . . . 132
4.5.2 Approche analytique . . . 133

4.6 Conclusion . . . 138

5 Vers une nouvelle topologie : la ligne inversée 141
5.1 Introduction : résumé des épisodes précédents . . . 142
5.2 Bilans de puissance stationnaires . . . 145
5.3 Dynamique transitoire . . . 147
5.3.1 Temps de claquage . . . 147
5.3.2 Temps de recouvrement . . . 148
5.4 Influence de la chimie . . . 149
5.4.1 Cinétique chimique du mélange Néon-Xénon 1% et du Xénon pur . . . 149
5.4.1.1 Niveaux d'énergie et chimie du Néon et du Xénon . . . 149
5.4.2 Présentation des résultats obtenus . . . 153
5.4.2.1 Bilans de puissance stationnaires . . . 153
5.4.2.2 Dynamique transitoire : temps de claquage et temps de recouvrement 156
5.5 Conclusion . . . 158

Conclusion générale 159

A Calcul des coefficients d'emprisonnement pour la ligne microruban suspendue 165
A.1 Élargissement Doppler . . . 165
A.2 Élargissement par collisions . . . 166

B Sections efficaces d'ionisation par étape dans le formalisme de Deutsch-Mark 169
B.1 Expression analytique des sections efficaces d'ionisation . . . 169
B.2 Données utiles pour le calcul des sections efficaces . . . 170

C Calcul des intégrales surfaciques du carré des modules des champs et du flux d'énergie 173
C.1 Intégrale surfacique du carré du module du champ dans le plasma . . . 173
C.2 Flux d'énergie . . . 175

D Établissement des solutions des équations de Korteweg-de Vries, de Burgers et de Burgers-Korteweg-de Vries 179
D.1 Équation de Korteweg-de Vries . . . 179
D.2 Équation de Burgers . . . 181
D.3 Équation de Burgers-Korteweg-de Vries . . . 182

E Expressions analytiques pour le raccordement modal 185
E.1 Constantes intervenant dans l'amplitude des champs . . . 185
E.2 Expressions analytiques des champs électromagnétiques . . . 185
E.2.1 Champs électromagnétiques dans la zone I . . . 185
E.2.2 Champ électromagnétique dans la zone II . . . 187
E.3 Système linéaire pour le raccordement modal . . . 187
E.4 Intégrales de couplage et termes de pondération . . . 189
E.4.1 Intégrale de couplage . . . 189
E.4.2 Termes de pondération . . . 190

F Sections efficaces d'excitation et d'ionisation de Hyman 195

G Transport des espèces excitées et des ions pour un mélange Ne-Xe à 1% 197
G.1 Coefficient de diffusion pour les espèces excitées . . . 197
G.2 Coefficient de transport pour les ions . . . 198

H Émission radiative pour les espèces excitées du Néon et du Xénon **199**
H.1 État simplement excité du Néon 199
H.2 État simplement excité du Xénon 199

Introduction

Contexte général de la limitation de puissance microonde

La fin du XIX ème et le début du XX ème siècle ont été le théâtre d'une formidable épopée technologique dans le domaine de l'électronique et des télécommunications sans fil, qui s'est prolongée jusqu'à nos jours. La théorisation des lois de l'électromagnétisme par James Clerk Maxwell en 1873, la découverte des ondes électromagnétiques de basse fréquence en 1887 par Heinrich Hertz, et l'invention de la radio par Guglielmo Marconi en 1896 aboutissent à la première liaison intercontinentale en 1901. La seconde guerre mondiale va permettre l'essor des RADAR crées en France en 1934. C'est finalement l'invention en 1947 par J. Bardeen, W. Shockley et W. Brattain du premier transistor aux laboratoires Bell, qui va permettre de supplanter les triodes inventées par Lee de Forest quarante-et-un ans plus tôt et conduire, grâce à l'apparition des circuits imprimés, à la miniaturisation de l'électronique, à l'avènement des processeurs puis des micro-processeurs, et finalement à l'émergence de la microinformatique. L'électronique va alors coloniser tous les pans de la société, à tel point qu'elle est devenue un élément essentiel du fonctionnement des sociétés modernes. Dans cette course, les micro-ondes se sont affirmées tout d'abord dans les applications RADAR, puis pour les satellites de télécommunications (car l'ionosphère est transparente pour ces bandes de fréquences), ou bien encore dans les différentes technologies de transmission sans fils (Wifi, 4G, etc...).
Les pannes des systèmes électroniques et de télécommunications pourraient alors paralyser complètement les sociétés modernes et entraîner des catastrophes matérielles, financières, voire même humaines.

En parallèle de ces développements technologiques, les progrès réalisés dans l'électronique de puissance ont conduit à l'apparition d'Armes à Énergie Dirigée ÉlectroMagnétique (AED EM) couplant des générateurs microondes de forte puissance et des antennes [1]. Ces développements ont conduit à étudier la vulnérabilité des équipements électroniques face à ces potentielles menaces. Dans [2], D. Nitsch *et al.* ont évalué les effets produits sur des systèmes électroniques courants par plusieurs types d'agressions électromagnétiques, qu'ils ont regroupé en trois classes : les impulsions électromagnétiques d'origine nucléaire ou NEMP (« Nuclear ElectroMagnetic Pulse »), les impulsions ultra-large bande ou UWB (« Ultra-Wide-Band pulse »), et les impulsions micro-ondes de forte puissance ou HPM (« High-Power Microwave pulse »). Les deux premières classes sont des impulsions électromagnétiques d'une largeur temporelle allant de la picoseconde à quelques centaines de nanosecondes, et les HPM sont quant à elles des impulsions modulées par un signal microonde dont la largeur temporelle peut être supérieure à la microseconde. Les allures des champs électriques pour ces trois types de signaux sont données sur la figure 1.

Au delà de leur largeur d'impulsion, ces signaux peuvent être discriminés en fonction de leur richesse spectrale. En effet, les NEMP et UWB ont des spectres fréquentiels très larges, ce qui en fait des agressions pouvant se coupler efficacement aux divers câbles électriques des appareils, aux pistes et aux composants des circuits électroniques, pourvu qu'il y ait dans le spectre des longueurs d'onde de l'ordre de la taille des systèmes agressés. On parle alors de couplage indirect. En revanche les HPM ont des spectres fréquentiels étroits où une fréquence prédomine. Ils sont conçus pour se coupler efficacement aux antennes des systèmes de réception et de télécommunications. On parle alors de couplage

direct.

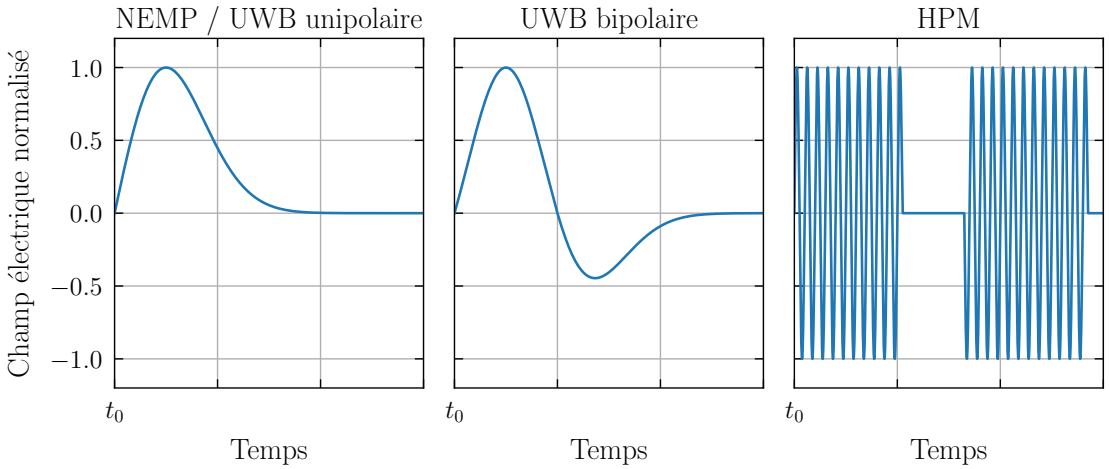


FIGURE 1 – Forme des champs électriques pour différents types d'agression [3].

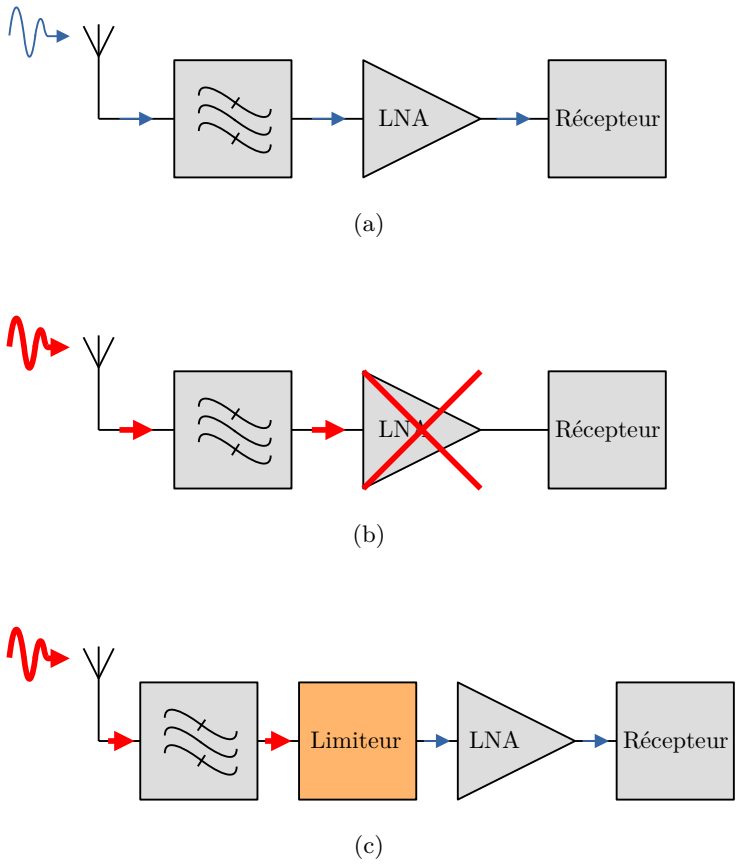
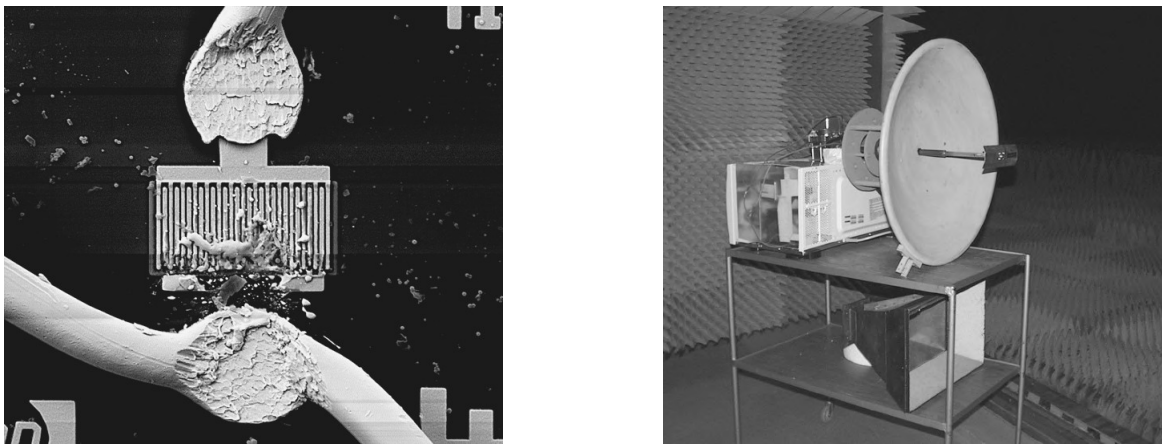


FIGURE 2 – Schéma de principe d'une chaîne de réception microonde (a) en fonctionnement nominal, (b) lorsqu'elle est soumise à une onde incidente de forte puissance, et (c) lorsqu'elle est équipée d'un limiteur de puissance [3].

La figure 2 présente le schéma simplifié d'une chaine de réception, composée d'une antenne, d'un filtre, d'un amplificateur à faible bruit ou LNA (« Low Noise Amplifier »), et d'un récepteur. Les signaux de télécommunication étant des signaux de basse puissance, le LNA permet alors de les amplifier et d'améliorer leur détectabilité. Cependant, si le signal en entrée de la chaine de réception véhicule une puissance trop grande, comme dans le cas des HPM, ce composant peut-être irrémédiablement

endommagé, voire détruit.

Pendant plus d'une décennie, Bäckström *et al.* [4] ont conduit des recherches avec le ministère de la défense et le monde industriel suédois afin d'étudier les effets des AED EM sur des systèmes électroniques. Ils ont alors éprouvé la vulnérabilité de plusieurs systèmes civils et militaires, que ce soient des voitures, des ordinateurs, des avions de chasse, pour des impulsions dont la fréquence se situe entre 1 et 15 GHz (bandes de fréquences L, S, C, X, Ku), et ont alors observé une prédominance des dommages entre 1 et 4 GHz. La figure 3a présente, par exemple, la destruction du transistor d'un LNA par un signal HPM. Les agressions conduites avec des armes à énergie dirigée de classe militaire ont permis d'endommager des systèmes jusqu'à un kilomètre de distance, mais ils ont également montré la possibilité de concevoir des sources compactes et portables, suffisamment puissantes pour endommager des systèmes de réception à plus courte distance (*cf.* figure 3b : générateur de signaux HPM fabriqué à partir d'un four microonde). Ce type de menaces n'est donc plus uniquement circonscrit au domaine de la guerre électronique, mais peut également représenter de nouvelles armes à la portée du terrorisme.



(a) Transistor d'un LNA détruit par une HPM. La largeur des doigts est d'environ 1 μm.

(b) Générateur de signaux HPM portable.

FIGURE 3 – Exemples de dégâts pouvant être commis par des signaux HPM à gauche, et de source de signaux HPM compacte et portable à droite [4].

L'émergence des AED EM [2] a rendu nécessaire le développement de systèmes pour protéger les récepteurs contre d'éventuelles agressions. C'est dans ce contexte que des dispositifs permettant de limiter la puissance microonde dans les chaines de réception, appelés limiteurs de puissance microonde, ont été développés pour être intégrés avant les éléments sensibles tels que le LNA (*cf.* figure 2).

Caractéristiques d'un limiteur de puissance microonde

Un limiteur de puissance microonde est un dispositif permettant de réduire le niveau de sa puissance de sortie selon la puissance en entrée. Pour qu'il soit efficace face à une agression de type HPM, il doit répondre à plusieurs critères. La figure 4 présente l'évolution typique de la puissance transmise en fonction de la puissance incidente à l'état stationnaire, et la figure 5 donne quant à elle la réponse temporelle d'un limiteur de puissance. Ce dernier peut alors être caractérisé par les grandeurs suivantes :

- **Seuil de limitation :** il s'agit de la puissance incidente à partir de laquelle le dispositif commence à limiter la puissance de sortie. Formellement, il est défini comme le point de compression à 1 dB, *i.e.* le point pour lequel la puissance d'entrée est égale à 90% de la puissance incidente.

- **Dynamique :** il s'agit de la plage de puissance d'entrée dans laquelle le système admet un comportement limiteur, soit une puissance transmise constante quelle que de la puissance d'en-

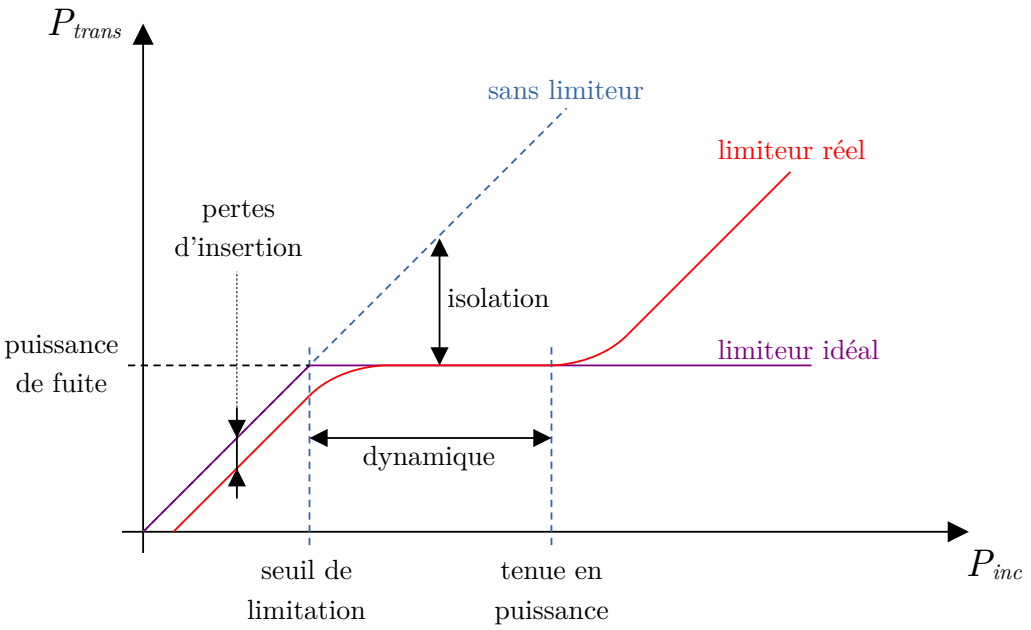


FIGURE 4 – Caractéristique d'un limiteur de puissance microonde en régime stationnaire [5]. La puissance P_{inc} est la puissance incidente sur le limiteur et la puissance P_{trans} est la puissance transmise par le limiteur.

trée. Pour un limiteur idéal, la dynamique est infinie, mais dans le cas d'un limiteur réel, le dispositif peut transiter vers un comportement atténuateur. La puissance transmise n'est alors plus constante en fonction de la puissance incidente.

- **Tenue en puissance :** c'est la puissance incidente pour laquelle le limiteur change de mode, *i.e.* transite vers le mode atténuateur ou subit des détériorations.

- **Pertes d'insertion :** pour des faibles signaux incidents, *i.e.* des signaux dont la puissance est inférieure au seuil de limitation, le limiteur peut tout de même atténuer la puissance du signal et introduire des pertes dites d'insertion. Il est donc nécessaire de diminuer ces pertes afin de ne pas dégrader les performances globales de la chaine de réception notamment en terme de rapport signal sur bruit.

- **Puissance de fuite :** il s'agit de la puissance transmise par le dispositif lorsque ce dernier est en mode limiteur.

- **Temps de réponse :** il définit le temps nécessaire pour que la puissance transmise soit égale à la puissance de fuite. Plusieurs définitions existent, mais dans ces travaux, nous le définirons comme le temps nécessaire pour que la puissance de sortie atteigne 10% de la puissance incidente.

- **Temps à mi-hauteur :** pour les limiteurs capables de contenir des agressions de forte puissance, on définit parfois le temps à mi-hauteur t_s, *i.e.* le temps nécessaire pour que la puissance en sortie du limiteur soit ramenée à 50% de la puissance incidente. Ce temps nous sera particulièrement utile dans ces travaux.

- **Temps de recouvrement :** Cette grandeur définit la durée nécessaire pour que le limiteur revienne dans son état initial une fois l'agression terminée. Autrement dit, après ce temps, les signaux utiles de faible puissance peuvent de nouveau traverser le limiteur sans être atténués (modulo les pertes d'insertion). Il est défini comme le temps nécessaire pour réduire l'isolation

de 90 % par rapport à sa valeur maximale.

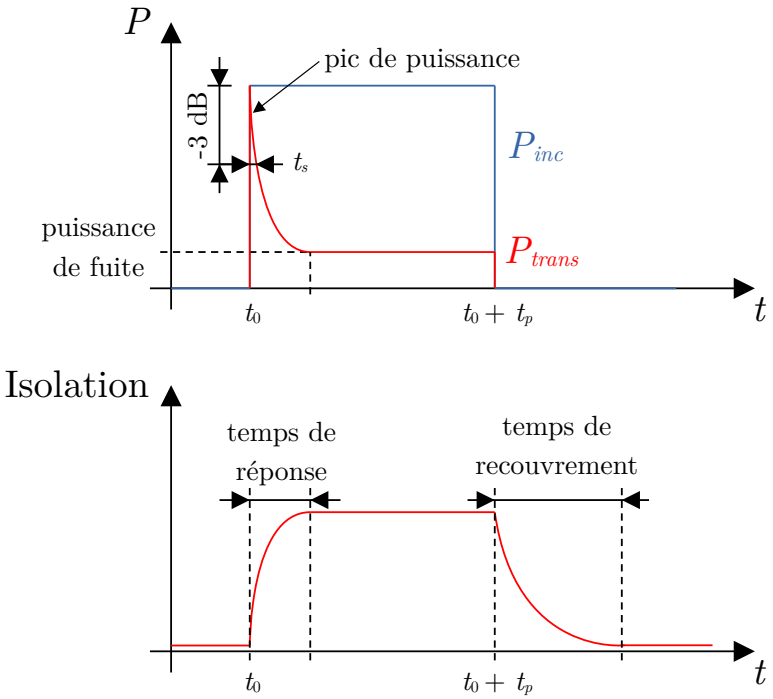


FIGURE 5 – Caractéristique d'un limiteur de puissance microonde en régime transitoire [5]. Le temps t_0 repère le début le l'agression, le temps t_p correspond à la durée de l'impulsion et le temps t_s est la largeur à mi-hauteur du pic de puissance transmise.

La caractérisation des limiteurs et donc l'obtention des grandeurs décrites ci-dessus peut être réalisée en régime CW (« Continuous Wave ») pour lequel on envoie une impulsion de type HPM très large dans le temps, ou bien en puissance crête où on évalue la réponse du limiteur à une impulsion courte. Aucune valeur standard n'a été définie à ces sujets. En effet, si la plupart des constructeurs semblent évaluer les limiteurs en puissance crête pour des largeurs d'impulsion égales à une microseconde, ils sont avares de mots quand il s'agit de définir la largeur d'impulsion pour le régime CW. Dans le cadre de ces travaux, nous avons donc arbitrairement considéré que le régime CW était atteint pour une largeur d'impulsion égale à une milliseconde, soit mille fois supérieure à la largeur d'impulsion en régime crête. Pour finir, notons que les ingénieurs hyperfréquences expriment les puissances en dBm plutôt qu'en Watt, les deux unités étant reliées par la relation :

$$P[\text{dBm}] \quad = \quad 10 \log_{10} \left(\frac{P[\text{W}]}{10^{-3}\ \text{W}} \right) \tag{1}$$

Dans ces conditions, les règles de conversion suivantes s'appliquent :

$$30\ \text{dBm} \quad = \quad 1\ \text{W} \tag{2}$$

$$P[\text{dBm}] + 3\ \text{dBm} \quad = \quad 2 \times P[\text{W}] \tag{3}$$

$$P[\text{dBm}] + 10\ \text{dBm} \quad = \quad 10 \times P[\text{W}] \tag{4}$$

Dans ces travaux, nous utiliserons préférentiellement le dBm comme unité de puissance.

A la lumière des caractéristiques évoquées ci-dessus, il apparait que la mise hors service d'une chaine de réception protégée peut toujours être réalisée en utilisant l'un des quatre moyens suivants :

- Envoyer une impulsion d'une puissance supérieure à la tenue en puissance du limiteur afin de détruire ce dernier.

- Envoyer une impulsion d'une puissance supérieure à la dynamique du limiteur qui pourra alors détruire les éléments sensibles de la chaine en aval du limiteur.

- Envoyer une impulsion d'une puissance suffisamment grande et dont la largeur temporelle est inférieure au temps de réponse ou au temps à mi-hauteur. Le limiteur n'a alors pas le temps de se déclencher et le récepteur est détruit.

- Envoyer un train d'impulsions HPM d'une puissance supérieure au seuil de limitation afin de déclencher le limiteur, et avec une fréquence de répétition telle que le temps séparant deux impulsions successives soit inférieur au temps de recouvrement. Dès lors, le limiteur est allumé en permanence et la chaine de réception est aveuglée.

Pour palier les agressions provenant d'AED EM, il est donc important d'augmenter la tenue en puissance, la dynamique, et de réduire autant que faire se peut les temps de réponse, à mi-hauteur et de recouvrement.

Dans les sections qui vont suivre, nous allons présenter les deux technologies qui prédominent dans le marché des limiteurs de puissance microonde. L'idée n'est pas de donner une vue exhaustive de toutes les technologies existantes mais d'illustrer les principaux points établis plus haut. Notons que plusieurs concepts ont été proposés par le monde de la recherche au fil des années dont un état de l'art a été exposé par A. Simon dans ses travaux de thèse [3].

Exemples de limiteurs de puissance opérationnels

Limiteur en technologie planaire : les diodes PIN

Parmi les technologies les plus répandues pour la conception de limiteurs de puissance microonde se trouvent les diodes PIN. Il s'agit de composants semiconducteurs qui possèdent une zone dopée P et une zone dopée N, séparées par une zone intrinsèque I qui n'est pas dopée. Lorsqu'un signal d'une puissance suffisante traverse une diode PIN, un courant continu dit d'auto-polarisation apparait dans la diode, et celle-ci devient passante. Cette propriété d'auto-polarisation de la diode PIN a été mise à profit des les années 1960, pour la limitation de puissance [6, 7]. En 1967, N. J. Brown [8] expose plusieurs topologies pouvant être utilisées afin de concevoir des limiteurs à diode PIN, notamment celle dite en « shunt » où une diode PIN est mise en parallèle, dans les circuits électroniques (*cf.* figure 6). Dès lors que la diode devient passante, elle engendre un court-circuit, et la puissance incidente est alors intégralement réfléchie.

La figure 7 présente quelques caractéristiques de diodes PIN vendues dans le commerce. Comme on peut le voir, le temps de recouvrement, la puissance crête maximale admissible, le seuil de limitation et la puissance de fuite tendent à augmenter lorsque la tenue en puissance CW augmente. Les temps de réponse de ces diodes sont généralement de l'ordre de quelques nanosecondes, et leur tenue en puissance ne dépasse pas la vingtaine de Watts (*cf.* figure 7). Cependant, la série de diodes PIN SMP du fabriquant Skyworks peut tenir des puissances CW supérieures à cent Watts et des puissances crêtes supérieures à cinq-cent Watts. En général, les temps de réponse de ces diodes sont de l'ordre de plusieurs dizaines de nanosecondes.

C'est pourquoi N. J. Brown a également proposé une deuxième topologie de limiteur à diodes PIN dite « branched », consistant à connecter en parallèle une diode rapide mais dont la tenue en puissance est

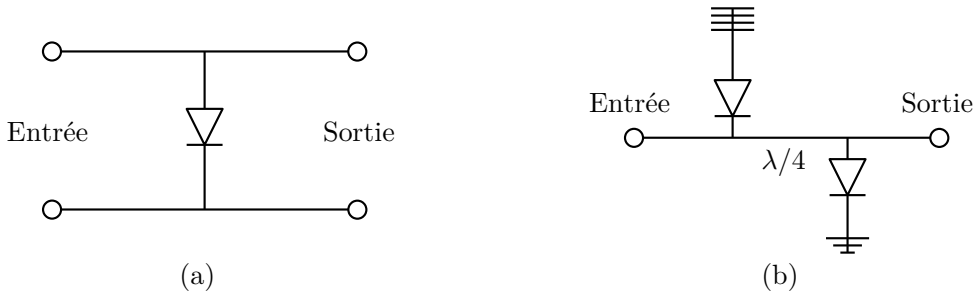


FIGURE 6 – Topologies (a) « shunt »et (b) « branched »de limiteur à diodes PIN [8].

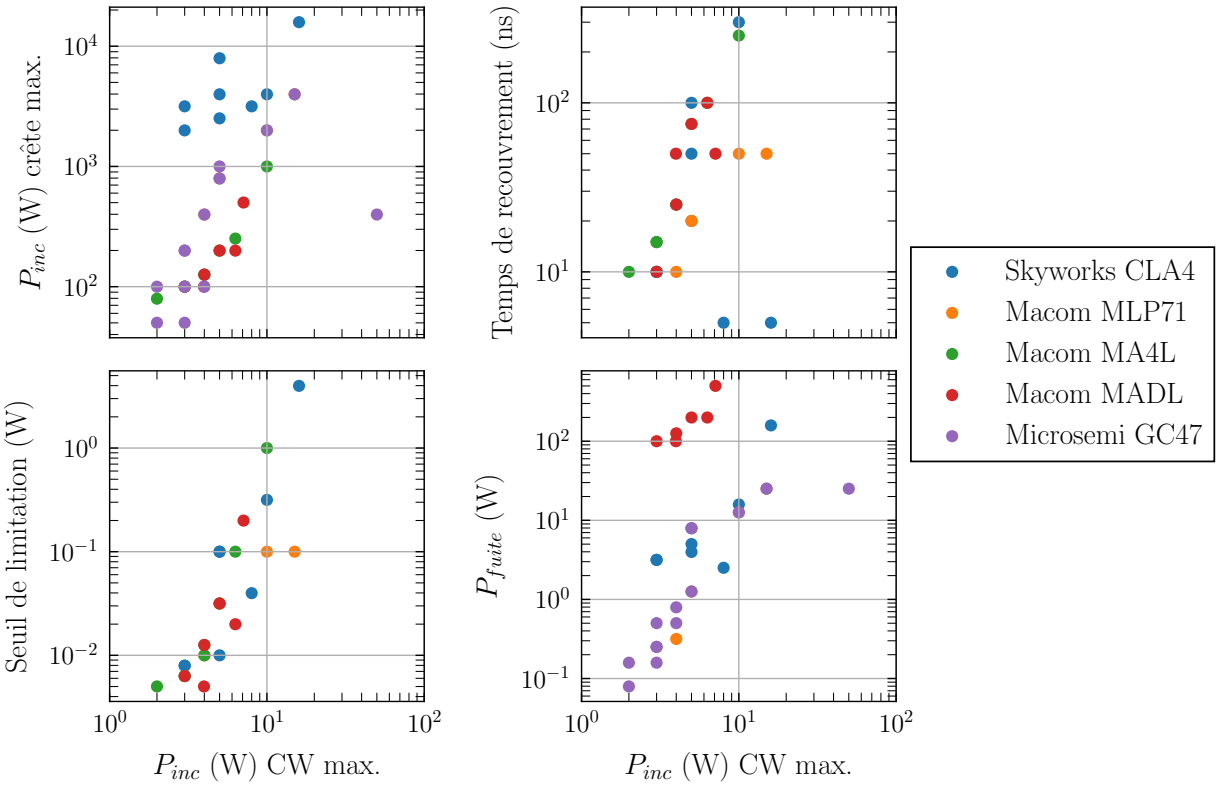


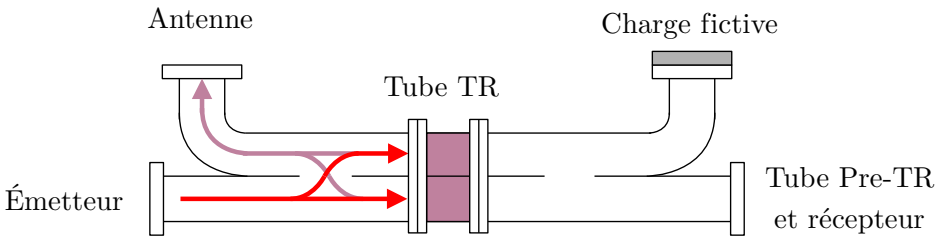
FIGURE 7 – Caractéristiques de quelques diodes PIN vendues dans le commerce en fonction de la tenue en puissance CW [9–11].

limitée et une diode capable d'endiguer les agressions de forte puissance, les deux étant séparées par une ligne quart-d'onde. Cet assemblage permet de concilier la rapidité de déclenchement et la tenue en puissance de chacune des diodes PIN. Des structures plus complexes peuvent être mises en œuvre par les fabricants, mais nous ne rentrerons pas dans ces détails ici. Par ailleurs, bien que les diodes PIN ont des pertes d'insertion généralement inférieures à 0.5 dB, la combinaison de plusieurs d'entre elles au sein d'un même limiteur augmente les pertes d'insertion de l'ensemble, qui peuvent alors être supérieures à 1 dB.

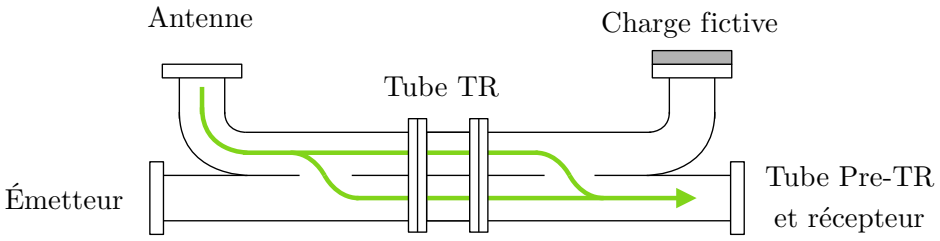
Si les limiteurs à diodes PIN présentent l'avantage de pouvoir être intégrés facilement sur les cartes électroniques des circuits de réception, le contexte de la guerre électronique impose de repousser sans cesse leur tenue en puissance. Dans la prochaine section, nous allons voir que les plasmas ont depuis longtemps été exploités afin de concevoir des dispositifs de protection pour les chaines de réception des RADAR.

Limiteur en technologie guides d'ondes : les tubes TR et les potentialités des plasmas

Les plasmas sont des gaz ionisés, *i.e* des gaz dans lesquels des électrons ont été arrachés aux espèces neutres qui constituent le milieu. Ils présentent des propriétés intéressantes vis-à-vis des ondes électromagnétiques, et peuvent sous certaines conditions engendrer une forte réflexion des signaux électromagnétiques incidents. Historiquement ils ont été mis à profit pour concevoir des duplexeurs pour les RADAR, qui permettent d'utiliser la même antenne en émission et en réception. Les signaux étant transportés par l'intermédiaire d'un guide d'ondes, le gaz à basse pression est alors enfermé dans une structure nommée tube TR (« Transmit-Receive »), qui vient s'insérer dans le guide en question. Le principe de fonctionnement des duplexeurs est présenté sur la figure 8. Lorsque le signal de forte puissance (de l'ordre de 100 kW) généré par l'émetteur arrive sur le tube TR, un plasma se forme et réfléchit alors l'intégralité du signal vers l'antenne pour l'émission. En revanche, lorsque l'antenne reçoit un signal de faible puissance, celui-ci est transmis intégralement vers le récepteur, en passant au travers du tube TR sans générer de décharge.



(a) Duplexeur en émission.



(b) Duplexeur en réception.

FIGURE 8 – Schéma illustrant le fonctionnement d'un duplexeur [12].

Pour qu'un tube TR soit réellement efficace, il convient de réduire au maximum son temps de commutation, *i.e.* le temps nécessaire pour former le plasma dans la cavité, temps de commutation qui peut être comparé au temps de réponse pour les limiteurs. Afin d'y parvenir les ingénieurs ont proposé de réaliser une *pré-ionisation* du milieu, *i.e.* d'apporter des électrons germes dans la cavité afin de réduire le temps de formation du plasma. Deux approches ont ainsi été proposées, soit l'emploi de sources radioactives (*cf.* figure 10) dont les rayonnements vont arracher des électrons aux atomes, soit l'utilisation d'électrodes « keep alive » (*cf.* figure 9) qui vont générer un courant afin de « garder en vie » une partie des charges créées d'une impulsion du RADAR à la suivante. De plus, il est également possible d'utiliser un système de deux pointes en vis-à-vis afin d'amplifier le champ électrique localement pour accélérer encore la formation de la décharge. Notons au passage qu'un tel système d'amplification réduit alors la bande passante du dispositif, ce qui ne pose pas de problème dans le cas d'un RADAR puisque le guide d'onde réduit également la bande de fréquences.
Ce concept de tube TR qui a tout d'abord été développé afin d'aiguiller les signaux au sein du duplexeur, a été repris par la suite afin de protéger les récepteurs contre d'éventuelles agressions arrivant sur l'antenne. On parle alors de tube pré-TR, qui sont disposés en amont de la chaine de

réception. Ces dispositifs ne suffisent pas à eux seuls à fournir un niveau de protection suffisant, c'est pourquoi ils sont utilisés comme élément pour la tenue des fortes puissances en addition d'autres technologies de limitation comme les diodes PIN, qui vont réduire la puissance de fuite à un niveau suffisamment bas en sortie de l'ensemble [13, 14].

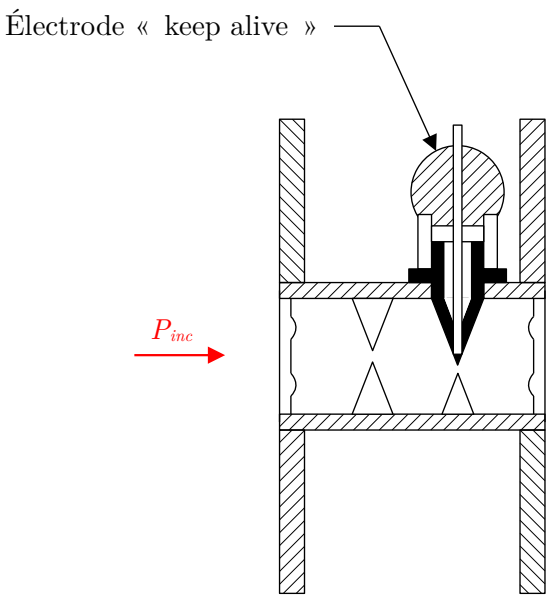


FIGURE 9 – Schéma d'un tube TR incorporant une électrode « keep alive » [15].

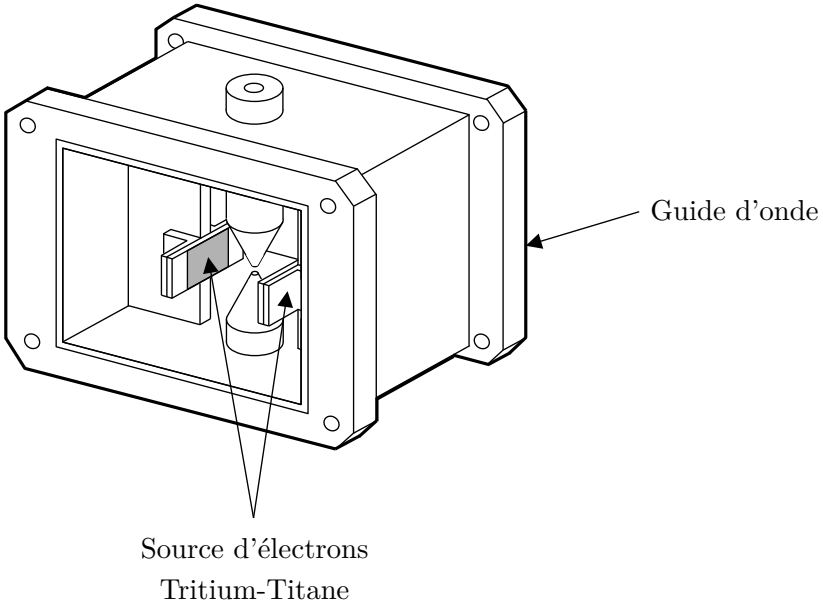


FIGURE 10 – Schéma d'un tube TR incorporant un élément radioactif [16].

Ainsi, si les potentialités des plasmas ont depuis longtemps été exploitées afin de concevoir des dispositifs de limitation de puissance microonde en technologie guide d'ondes, leur capacité à tenir la puissance en font des éléments intéressants pour le développement de limiteurs pour les systèmes de réception autre que les RADAR. Cependant, leur utilisation dans des topologies planaires susceptibles d'être intégrées directement sur les circuits imprimés reste complexe.

Le plasma en technologie planaire ?

Les premiers travaux sur l'intégration de plasmas comme éléments de limitation en technologie planaire remontent à 1989 [17]. Dans ces travaux, S. D. Patel *et al.* a déclenché une décharge plasma, dans du Xénon à 28 Torr (3733 Pa), au sein d'une ligne microruban 50 Ω suspendue, le tout se situant dans une capsule étanche (*cf.* 11).

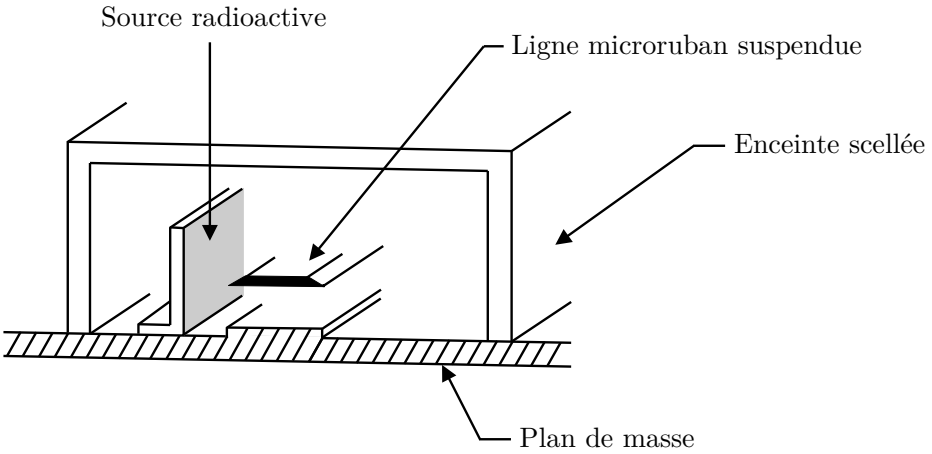


FIGURE 11 – Vue en coupe montrant le principe de fonctionnement d'un limiteur à plasma en technologie planaire.

Pour les non-initiés, le couple formé par la ligne microruban et le plan de masse peut être vu comme un guide d'ondes à plaques parallèles, qui permet le guidage du signal microonde d'un bout à l'autre du dispositif. Afin de faciliter le claquage du plasma, S. D. Patel reprend les concepts mis en œuvre pour la pré-ionisation des gaz dans les tubes TR, à savoir l'utilisation de sources radioactives. Par ailleurs, les bordures de la ligne microruban sont taillées en biseau afin de générer une amplification de champ électrique par effet de pointe.

f (GHz)	P_{inc}^{max} (W)	Seuil de limitation (W)	Temps à mi-hauteur (ns)	P_{fuite} (W)
1.3	5800	62	100	10
3.3	820	58	50	0.9
5.4	860	50	30	<0.01
9.6	1100	50	20	<0.01

TABLE 1 – Caractéristiques du limiteur conçu par Patel, mesurées avec des impulsions HPM de 1 μs, et une fréquence de répétition de 100 Hz.

Quelques caractéristiques de ce dispositif sont présentées dans le tableau 1. Ce limiteur en géométrie planaire présente des performances bien supérieures aux limites des diodes PIN en matière de tenue en puissance, puisqu'il peut endiguer des agressions proches du kilowatt. Ces limites n'ont pas pu être dépassées à cause de phénomènes d'arcages parasites sur les connecteurs. Notons que le temps de réponse à mi-hauteur est du même ordre que celui des diodes PIN conçues pour tenir les fortes puissances CW.

Le principal défaut de cette technologie est son seuil de limitation qui, malgré la mise en œuvre de la pré-ionisation et de l'amplification de champ, reste trop élevé pour envisager son utilisation pour la limitation de puissance. Cependant, ces travaux ont permis de démontrer la possibilité d'utiliser les plasmas comme éléments pour la conception de limiteurs de puissance en technologie planaire, et c'est la physique à l'œuvre dans ce type de technologie qui va être explorée dans ces travaux.

Contexte de l'étude

L'histoire des technologies montre qu'il peut y avoir une réactualisation des bonnes idées qui n'ont pas marché. En effet, si une idée ne fonctionne pas c'est soit qu'elle est orthogonale aux lois de la physique, auquel cas elle ne fonctionnera jamais, soit qu'il manque un élément qui n'est pas encore apparu qui permet au concept de fonctionner.

Dans ce contexte, le Département Électronique, Optronique et Signal (DEOS) de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-Supaéro) et le Groupe de Recherche Energétique, Plasmas et Hors Equilibre (GREPHE) du laboratoire LAPLACE (LAboratoire PLAsma et Conversion d'Energie), ont exploré depuis 2013 la possibilité d'utiliser des micro-décharges plasmas appelées MHCD (Micro Hollow Cathode Discharge), afin d'abaisser les seuils de déclenchement dans des limiteurs en technologie planaire.

Au cours de ses travaux, Antoine Simon a repris le concept de pré-ionisation démontré par Francisco Pizarro Torres, et a élaboré plusieurs prototypes de limiteurs en circuit imprimé incorporant des décharges plasma, dont un en bande étroite qui exploite des phénomènes de résonnance dans des circuits annulaires et deux en bande large [3]. Finalement, la topologie la plus prometteuse qui fut retenue est un limiteur en technologie microruban suspendue fonctionnant dans l'Argon à 10 Torr, présentée sur la figure 12. On retrouve alors une structure relativement proche de celle développée par S. D. Patel, où la pré-ionisation du milieu est assurée par un plasma de décharge.

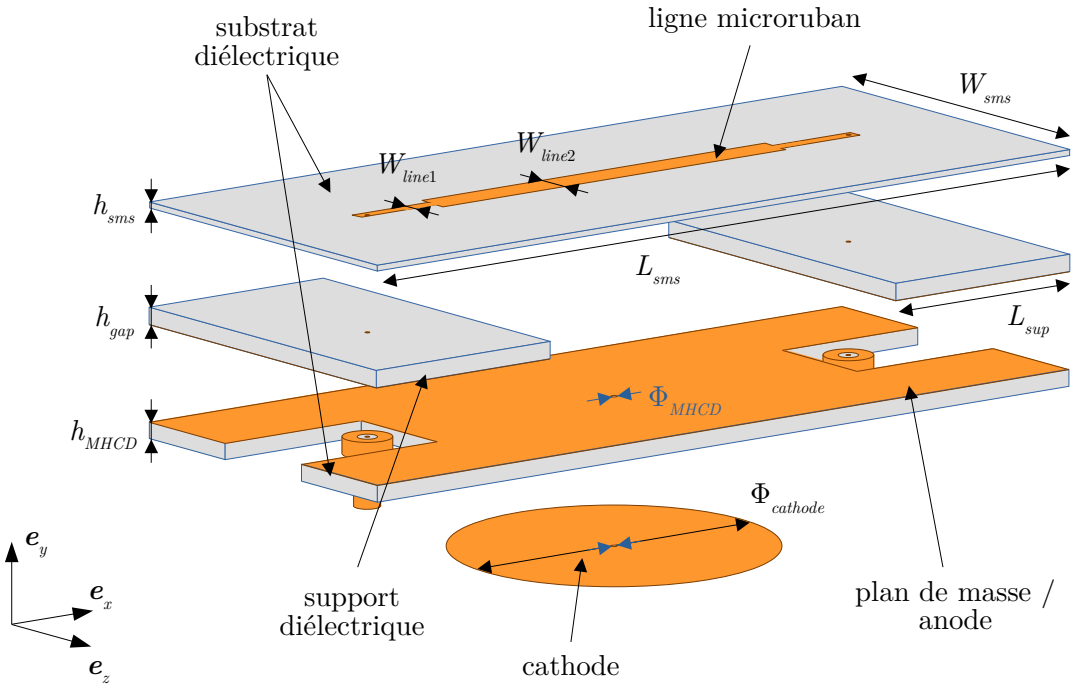


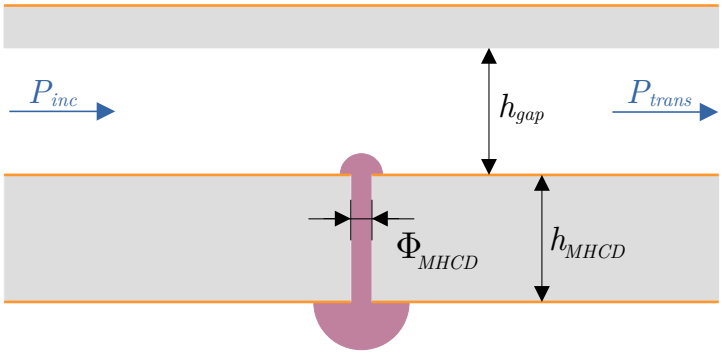
FIGURE 12 – Schéma de la ligne microruban suspendue développée par A. Simon [3].

Ce dispositif peut alors être séparé en deux sous-ensembles :

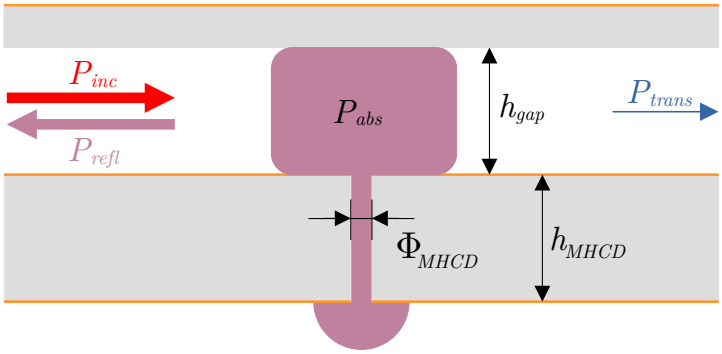
- L'ensemble formé par la ligne microruban et le plan de masse permet de guider le signal microonde d'un bout à l'autre du dispositif. La ligne microruban est imprimée sur un substrat Rogers RO4003C d'une permittivité relative $\epsilon_r = 3.55$, et d'une épaisseur de $h_{sms} = 0.508$ mm. Ce substrat est maintenu à distance du plan de masse par deux supports diélectriques d'une épaisseur de $h_{gap} = 1.524$ mm. La largeur de la ligne passe alors de $W_{line1} = 4.5$ mm à

$W_{line2} = 8$ mm afin de conserver une impédance caractéristique de 50 Ω

- L'ensemble formé par l'anode et la cathode constitue la MHCD. La cathode de $\Phi_{cathode} = 80$ mm de diamètre et l'anode qui se trouve être le plan de masse de la ligne de transmission, sont imprimées sur un substrat Rogers RO4003C d'une épaisseur de $h_{gap} = 1.524$ mm. Un trou de $\Phi_{MHCD} = 1$ mm de diamètre est percé au centre de la cathode et traverse le substrat et le plan de masse pour former la microdécharge. La polarisation de la cathode à une tension de l'ordre de 400 V engendre le claquage du gaz et la formation d'un plasma, et une gerbe d'électrons est alors présente dans l'espace qui sépare le plan de masse du substrat diélectrique. Les dimensions de la microdécharge sont alors optimisées pour fonctionner à 10 Torr (1 Torr = 133.3 Pa) dans l'Argon.



(a) Ligne microruban en fonctionnement nominal.



(b) Ligne microruban sous agression.

FIGURE 13 – Schéma illustrant le principe de fonctionnement de la ligne suspendue développée par A. Simon [3].

Le principe de fonctionnement de ce limiteur est présenté sur la figure 13. Lorsque la puissance du signal qui est guidé est inférieure au seuil de déclenchement, le signal est intégralement transmis à l'extrémité du dispositif, modulo les pertes d'insertion engendrée par la décharge. En revanche, lorsque le dispositif est agressé, alors le plasma s'étend dans la cavité, où il va absorber et réfléchir le signal incident et limiter le puissance transmise. Les performances de cette nouvelle topologie sont présentées dans le tableau 2, où elles ont été évaluées dans l'Argon à 10 Torr, pour un signal CW à 3 GHz.

Comme on peut le voir, l'utilisation d'une MHCD comme élément pour la pré-ionisation a permis d'abaisser le seuil de déclenchement aux alentours de 0.8 W. La puissance de fuite mesurée est de l'ordre de celle trouvée par S. D. Patel.

f (GHz)	P_{inc}^{max} (W)	Seuil de limitation (W)	Temps à mi-hauteur (ns)	P_{fuite} (W)
3.0	20	0.8	?	0.32

TABLE 2 – Caractéristiques du limiteur conçu par A. Simon, mesurées dans l'Argon à 10 Torr, pour un signal CW à 3 GHz.

Au delà de ces aspects, cette topologie offrait également la promesse de pouvoir simuler l'interaction entre les microondes et le plasma en deux dimensions, puisque le champ est quasi-TEM lorsqu'il n'y a pas de plasma dans la cavité et tant que l'on reste suffisamment loin des arrêtes de la ligne qui donnent naissance à des effets de bords.

Objectifs et contributions

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans la continuité des activités menées par l'ISAE Supaéro, le LAPLACE et le CEA de Gramat sur la limitation de puissance microonde en technologie planaire, intégrant des plasmas de décharge. Ils ont été réalisés au sein du laboratoire LAPLACE, de l'ISAE-Supaéro et du CEA de Gramat, et ont été financés par l'Agence Innovation Défense et la Région Occitanie Pyrénées-Méditerranée. Par ailleurs, ils ont été conduits parallèlement au projet ANR-ASTRID maturation DIOMEDE 2 (Dispositif d'Interaction Onde - Microdécharge Électrique pour le Durcissement Électromagnétique) mené par les trois laboratoires cités précédemment et par la société ANYWAVES.

L'objectif principal de cette thèse concerne la poursuite de l'étude du limiteur en technologie microruban suspendue. L'accent a été mis sur le développement de modèles analytiques pour appréhender finement les différents mécanismes physiques à l'œuvre dans le fonctionnement du limiteur. Plus précisément, ces travaux ont pour but de :

- comprendre le phénomène de couplage microonde/plasma.
- proposer une modélisation numérique auto-cohérente de l'interaction microonde/plasma.
- poursuivre l'évaluation des performances du limiteur à forte puissance.
- proposer des pistes d'amélioration afin de repousser les limites de tenue en puissance.

Pour répondre à ces objectifs, plusieurs études ont été menées au cours de cette thèse. Tout d'abord, une étude modale de la ligne de transmission sans plasma a été réalisée. La résolution analytique des équations de Maxwell a permis d'obtenir le diagramme de dispersion de la ligne, et de montrer que deux modes de propagation peuvent exister, à savoir les ondes de surface et les ondes de fuite. La prolongation de cette étude dans le cas d'un plasma uniforme a permis de montrer comment le signal passe d'un mode à un autre en fonction de la densité électronique du plasma.

Par ailleurs, l'utilisation d'un code de simulation multi-physique développé au laboratoire LAPLACE a permis d'explorer la physique de l'interaction microonde/plasma, et de relier la dynamique des puissances réfléchie, absorbée et transmise à celle du plasma. Afin d'y parvenir, un modèle chimique pour l'Argon a été proposé.

Ces travaux ont également poursuivi la caractérisation du limiteur à forte puissance. Pour ce faire, des mesures allant jusqu'à cent watts CW ont été réalisées au CEA de Gramat, permettant de mettre au jour une transition vers un comportement atténuateur pour des fortes puissances. Cet effet, également prévu par la simulation a pu être mis en relation avec la longueur de la cavité.

Finalement, une nouvelle topologie en « ligne microruban inversée » a été proposée. Elle permet d'amé-

liorer encore les performances en terme de tenue en puissance. Le nouveau dispositif voit ainsi sa dynamique de puissance s'étaler de un Watt à cent Watts, résultats obtenus pour des signaux CW. Enfin, les performances du dispositif ont été éprouvées pour des fréquences allant de 3 à 6 GHz.

Organisation du manuscrit

Ces travaux de thèse s'articulent autour de cinq chapitres dont les détails sont donnés ci-dessous :

- **Le premier chapitre** expose les notions théoriques nécessaires pour aborder la physique et la simulation des plasmas froids hors équilibre thermodynamique d'une part, et l'interaction entre les ondes électromagnétiques et les plasmas d'autre part.

- **Le deuxième chapitre** exploite les résultats théoriques établis au premier chapitre et présente le système d'équations résolu dans le code de simulation utilisé. Un modèle chimique pour l'Argon est alors proposé, et les différentes hypothèses utilisées pour obtenir les données d'entrée pour les simulations sont présentées. Enfin, le banc d'essai développé au CEA de Gramat et les protocoles expérimentaux permettant de caractériser le limiteur sont présentés.

- **Le troisième chapitre** concerne la physique du limiteur à l'état stationnaire. Les différents modes de propagation du signal dans la ligne sont présentés et les mécanismes de couplage entre les microondes et le plasma sont exposés. Une confrontation des résultats numériques et expérimentaux, permettra d'exposer les mécanismes à l'œuvre dans l'établissement de la puissance de fuite.

- **Le quatrième chapitre** concerne la physique du limiteur durant l'état transitoire. Une confrontation des résultats de simulation et des données expérimentales permet de relier la dynamique des puissances absorbée, réfléchie et transmise à la dynamique du plasma. Les mécanismes à l'œuvre dans cette dernière sont explorés à la fois numériquement et analytiquement. Pour finir, la physique à l'œuvre dans le temps de réponse à mi-hauteur et dans le temps de recouvrement sera étudiée analytiquement et les résultats seront confrontés aux résultats expérimentaux.

- **Le cinquième chapitre** est consacré à la présentation d'une nouvelle topologie de limiteur, dont les caractéristiques découlent de la compréhension des phénomènes à l'œuvre dans la précédente topologie. Ce nouveau limiteur a été caractérisé à forte puissance au CEA de Gramat. Ses performances ont également été éprouvées dans d'autres gaz comme le Xénon et un mélange de Néon-Xénon à 1% de Xénon.

Chapitre 1

Notions de base en physique des plasmas et en électromagnétisme

Sommaire

1.1 Introduction 15
1.2 Caractérisation d'un plasma froid hors équilibre thermodynamique . . . 16
1.2.1 Écrantage électrique : pulsation plasma et longueur de Debye 16
1.2.2 Le plasma : milieu diélectrique ou conducteur ? 18
1.2.3 Marche aléatoire des électrons : libre parcours moyen et fréquence de collision . 20
1.3 Équations de base en physique des plasma 23
1.3.1 Description particulaire sur l'échelle microscopique 23
1.3.2 Description statistique sur l'échelle mésoscopique 24
1.3.3 Description fluide sur l'échelle macroscopique 25
1.4 Transport des particules 28
1.4.1 Diffusion libre et mobilité 28
1.4.2 Diffusion ambipolaire 29
1.4.3 Diffusion mixte dans le cadre de l'interaction microonde-plasma 30
1.5 Équations de base pour l'interaction microonde-plasma 31
1.5.1 Réponse diélectrique d'un plasma froid collisionnel 31
1.5.2 Équation de propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas 34
1.5.3 Théorème de Poynting généralisé et puissance microonde absorbée 35
1.6 Confinement des décharges plasma et interaction plasma-paroi 37
1.7 Conclusion 39

1.1 Introduction

Dans l'environnement terrestre qui nous entoure, la matière se présente principalement sous trois états : solide, liquide et gazeux. Mais dans l'Univers, 99 % de la matière est à l'état plasma. Cet état constitue le quatrième état de la matière. Il s'agit d'un gaz ionisé, c'est-à-dire un gaz où l'on a apporté suffisamment d'énergie pour arracher des électrons aux cortèges électroniques des espèces neutres, atomes ou molécules, qui constituent le gaz au repos. Bien que le milieu présente des charges électriques libres, électrons et ions, il reste globalement neutre à l'échelle macroscopique. La classification des plasmas se fait en utilisant le degré d'ionisation :

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_n} \tag{1.1}$$

où n_n est la densité d'atomes neutres et n_e la densité d'électrons. On utilise également, en plus de ce paramètre, les températures des espèces en présence. Il existe alors toute une zoologie de plasmas qui vont des plasmas de basses pressions et températures comme les plasmas ionosphériques, aux plasmas chauds et denses comme les plasmas stellaires ou les plasmas de fusion thermonucléaires produits sur Terre, par confinement inertiel.

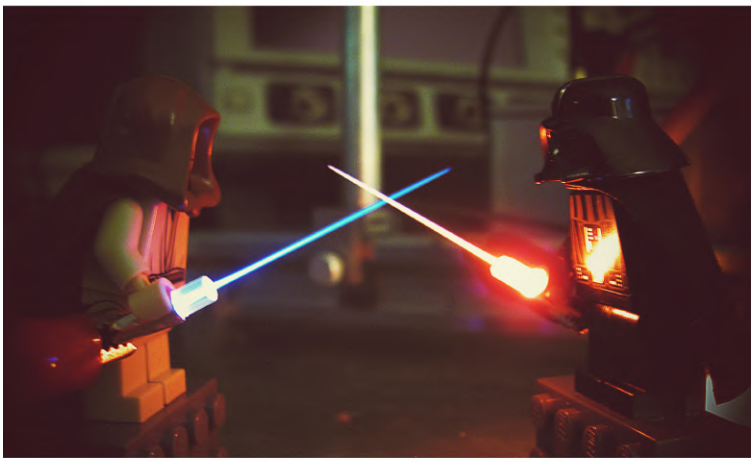


FIGURE 1.1 – Exemple de plasmas obtenus en laboratoire : deux jets à pression atmosphérique, dans deux gaz différents (helium en bleu, et néon en rouge). © Claire Douat / LPGP [18].

Les plasmas qui nous intéressent dans cette étude sont les plasmas de décharge, générés sur Terre en laboratoire, dans lesquels le degré d'ionisation se situe entre 10^{-6} et 10^{-3}, où les ions sont à la température des espèces neutres, c'est-à-dire 300 K, et où les électrons ont une température de l'ordre de l'électron-volt, *i.e.* de l'ordre de 11604 K. Ces plasmas sont dits hors équilibre thermodynamique, car les distributions des vitesses et de densité des particules (neutres, ions et électrons), ne suivent pas toutes les distributions d'équilibre de Maxwell et Boltzmann données par la physique statistique. Dans le propos ci-dessous, nous allons nous atteler à introduire les grandes notions qui nous seront utiles pour la description du plasma et de son interaction avec le champ microonde. Le but n'est pas de donner une description exhaustive de l'ensemble de cette vaste physique, mais d'introduire les concepts, grandeurs et formules essentielles qui seront employées tout au long de ce manuscrit. Nous renvoyons le lecteur à la littérature pour de plus amples détails [19–21].

1.2 Caractérisation d'un plasma froid hors équilibre thermodynamique

1.2.1 Écrantage électrique : pulsation plasma et longueur de Debye

Considérons la vision idéalisée d'un plasma bidimensionnel, invariant suivant une direction, et au repos. La répartition des charges est alors homogène de sorte que le milieu est électriquement neutre (figure 1.2). Les ions, très lourds et froids par rapport aux électrons, sont supposés immobiles. Les électrons très légers tendent alors à être éjectés du milieu, à la frontière plasma/vide, sous l'effet de l'agitation thermique.
Il en résulte une séparation de charges sur une distance spatiale ξ, comme indiqué sur la figure 1.3. Le milieu restant globalement neutre entre les frontières pourpres, le champ électrique de rappel résultant de la séparation des charges est égal au champ électrique d'un condensateur plan :

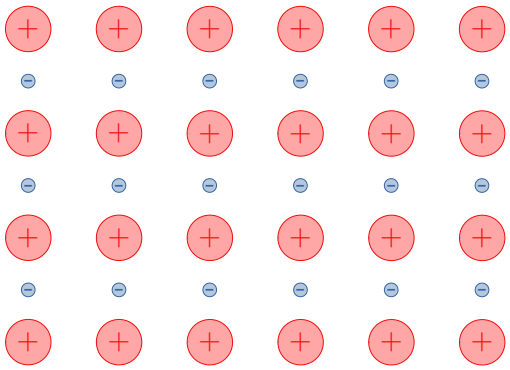


FIGURE 1.2 – Plasma au repos.

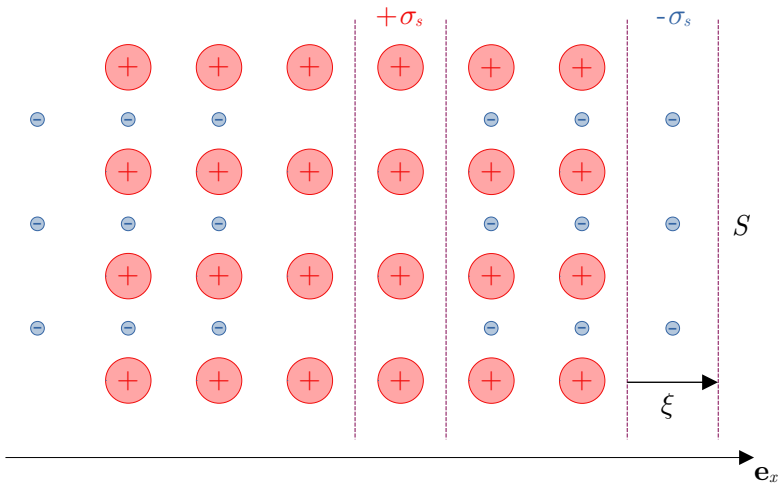


FIGURE 1.3 – Plasma perturbé par l'éjection des électrons à la frontière plasma/vide sous l'effet de l'agitation thermique.

$$\boldsymbol{E}_r = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}\,\mathbf{e}_x \tag{1.2}$$

où $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F.m^{-1} est la permittivité du vide et σ_s la densité surfacique de charge. Cette dernière se calcule facilement en remarquant que le volume $S\xi$ contient une charge électrique totale $Q = n_e e \times S\xi$, avec $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C la charge élémentaire, ce qui donne une charge surfacique égale à $\sigma_s = n_e e\,\xi$. Dès lors, le champ électrique de rappel subi par les électrons s'écrit :

$$\boldsymbol{E}_r = \frac{n_e e}{\epsilon_0}\xi\,\mathbf{e}_x \tag{1.3}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique à un électron s'écrit :

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_x = -e\boldsymbol{E}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}\xi = 0 \tag{1.4}$$

avec $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg la masse de l'électron. Nous aboutissons alors à l'équation d'un oscillateur harmonique, dont la pulsation propre est la pulsation plasma électronique :

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \tag{1.5}$$

Les électrons subissent alors une oscillation sous l'effet de l'agitation thermique qui tend à les éjecter et du champ de charge d'espace qui tend à les rappeler. Cette oscillation se fait à la fréquence plasma qui définit le temps nécessaire au plasma pour revenir à la neutralité. La résolution de l'équation (1.4) conduit à l'expression du déplacement infinitésimal :

$$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega_p t) \tag{1.6}$$

où l'on a pris $\xi = 0$ à $t = 0$, et où ξ_0 représente le déplacement maximal que peut subir un électron. En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient l'expression de la vitesse, dont on tire l'expression de ξ_0 :

$$\xi_0 = \frac{1}{\omega_p} \left.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{1.7}$$

La vitesse des électrons à la sortie du plasma est égale à la vitesse thermique v_{T_e}, qui se déduit en égalant les énergies cinétique et thermique, ce qui, dans notre modèle unidimensionnel conduit à :

$$v_{T_e} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}} = \left.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{1.8}$$

avec $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1} la constante de Boltzmann, et T_e la température électronique en kelvin. Il est alors possible de déduire la valeur de l'amplitude ξ_0, qui se trouve être égale à la longueur de Debye :

$$\lambda_{D_e} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} \tag{1.9}$$

Nous venons d'identifier l'échelle spatiale caractéristique, au delà de laquelle la séparation de charge, et donc l'écart à la neutralité, ne peut se faire. Bien que démontrée à l'aide d'un modèle unidimensionnel, cette grandeur peut-être généralisée en considérant le cas plus réaliste d'un profil tridimensionnel non uniforme de plasma [19]. On introduit alors la sphère de Debye dans laquelle un écart à la neutralité existe, mais à l'extérieur de laquelle la neutralité est assurée. Cette dépendance de la neutralité électrique du milieu à l'échelle spatiale que l'on considère conduit à qualifier le plasma de milieu *quasi-neutre*. Les deux échelles spatiale et temporelle ainsi introduites vont nous permettre d'aborder le problème de la modélisation mathématique du plasma, de laquelle découleront les outils nécessaires à la description de l'interaction entre champ électromagnétique et plasma.

1.2.2 Le plasma : milieu diélectrique ou conducteur ?

Les électrons qui sont arrachés aux atomes lors des réactions d'ionisation sont libres, bien que comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, ils restent liés aux ions dont ils subissent la force de rappel. Cet état de fait conduit alors à se poser la question suivante : le plasma est-il un milieu diélectrique ou conducteur ?

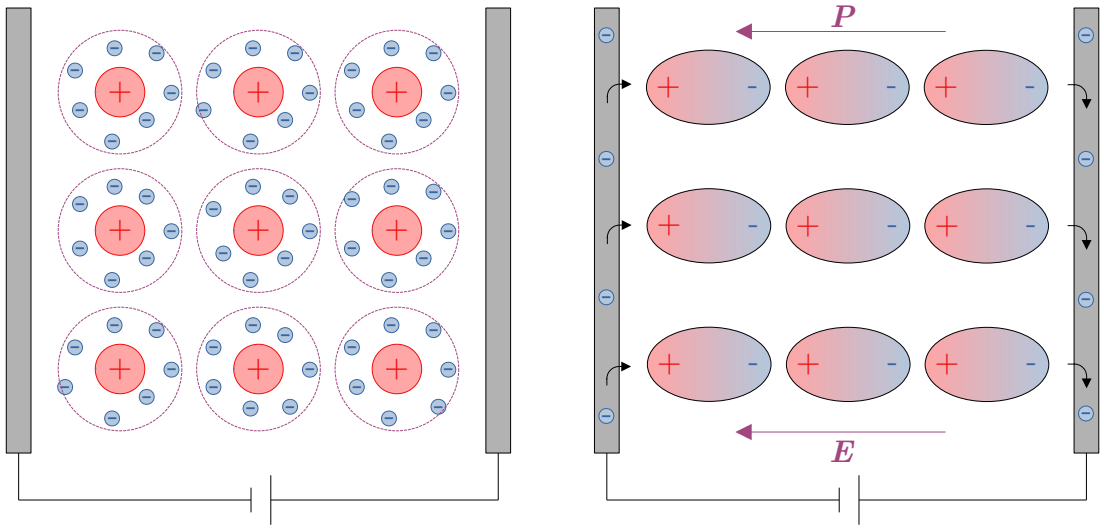


FIGURE 1.4 – A gauche : plasma à l'équilibre, ou les cercles pourpres représentent les sphères de Debye. A droite : plasma soumis à un champ électrique extérieur, qui polarise les sphères de Debye.

La figure 1.4 montre le comportement du plasma lorsque ce dernier est soumis à un champ électrique extérieur. Sous l'effet du champ, les sphères de Debye se polarisent, comme les cortèges électroniques des molécules dans les diélectriques classiques. Si l'on adopte cette vision, le champ électrique de rappel, que nous avons écrit au paragraphe précédent dans l'approche particulaire, s'identifie au champ *dépolarisant* de l'électrodynamique dans les diélectriques. Ce dernier s'écrit $\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{P}/\epsilon_0$, où $\boldsymbol{P}$ est la polarisation du plasma, qui dans l'hypothèse où le champ perturbateur $\boldsymbol{E}$ appliqué est faible, est donnée par la théorie de la réponse linéaire :

$$\boldsymbol{P}(t) = \epsilon_0 \chi(t) \circledast \boldsymbol{E}(t) \tag{1.10}$$

où χ est le tenseur de susceptibilité diélectrique qui dans le cas isotrope se réduit à un scalaire, et $\circledast$ désigne le produit de convolution tensoriel. La variation temporelle, de la polarisation entraine alors l'apparition d'un courant de polarisation $\boldsymbol{j}_p$, qui s'écrit :

$$\boldsymbol{j}_p = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1.11}$$

et la relation $\boldsymbol{j}_e = -en_e\boldsymbol{v}_e$ étant toujours vérifiée, on obtient alors le lien entre la vitesse électronique et la polarisation :

$$\boldsymbol{v}_e = -\frac{1}{n_e e}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1.12}$$

Bien entendu, les électrons d'un plasma sont libres, et bien qu'ils subissent la force de rappel des ions, ils ne sont pas parfaitement élastiquement liés à ces derniers. Ainsi, un électron peut céder sa place à un autre dans une sphère de Debye, qui lui même aura cédé sa place à un autre, etc. Il y a donc également des courants de charges libres $\boldsymbol{j}_l$, reliés au champ électrique perturbateur par la conductivité électrique $\boldsymbol{j}_l = \sigma \boldsymbol{E}$. Ainsi, pour des champs extérieurs dont la dépendance temporelle est en $\mathrm{e}^{-i\omega t}$, où

ω est la pulsation du signal, la susceptibilité diélectrique est reliée à la conductivité électrique par la relation :

$$\sigma = -i\omega\epsilon_0\chi \tag{1.13}$$

Ces deux visions du plasma résultent donc de l'échelle spatiale que l'on adopte pour décrire le milieu. Il ne s'agit pas d'un artifice mathématique mais d'une réalité physique, qui prend naissance dans le fait que les plasmas froids qui nous intéressent, ne sont ni de bons conducteurs, ni de bons diélectriques. Les deux approches étant possibles, nous choisirons néanmoins la formulation diélectrique, plus élégante pour le problème de la propagation des ondes électromagnétiques dans le plasma que nous adresserons plus bas.

1.2.3 Marche aléatoire des électrons : libre parcours moyen et fréquence de collision

Dans les plasmas qui nous occupent, les électrons soumis à un champ électrique extérieur subissent des phases d'accélération suivies de collisions (*cf.* figure 1.5). On parle alors de marche aléatoire, et la distance moyenne parcourue par la particule entre deux collisions successives est appelée *libre parcours moyen*. Le nombre de collisions par unité de temps définit la *fréquence de collision* ν. Ces collisions électron-neutre sont des collisions *binaires* puisqu'elle n'impliquent que deux corps. Elles sont dites :

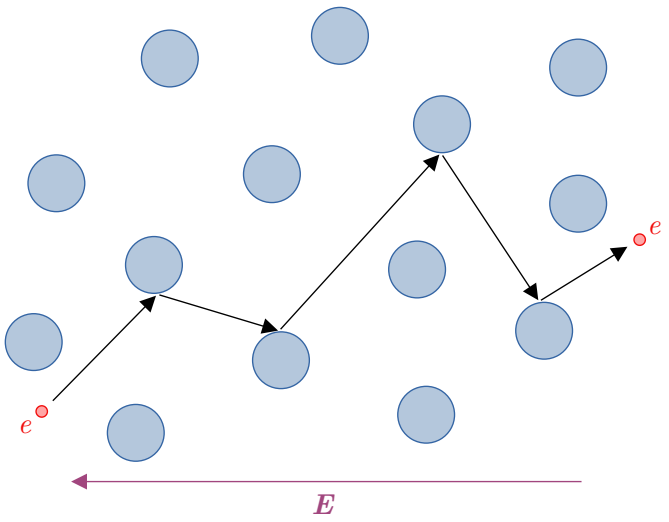


FIGURE 1.5 – Marche aléatoire d'un électron dans le gaz neutre.

- *élastiques* si la somme des énergies cinétiques de l'électron et de l'atome neutre est conservée lors du processus. Les électrons étant beaucoup plus énergétiques que les atomes, il peuvent transférer une partie de leur énergie cinétique au gaz. En pratique ce transfert reste négligeable, car le rapport des masses n'est pas favorable au transfert d'impulsion-énergie.

- *inélastiques* sinon. Ce type de collision signifie que l'électron a cédé une partie de son énergie cinétique au cortège électronique. Ces collisions n'entrainent pas de variation de l'énergie cinétique de l'atome. Les processus inélastiques les plus représentatifs sont l'excitation, durant laquelle un électron du niveau fondamental est promu à un niveau d'énergie supérieur, et l'ionisation, lors de laquelle un électron est arraché à l'atome.

Enfin, il est également possible de distinguer les collisions inélastiques qui entrainent un transfert d'énergie de l'électron libre vers le cortège électronique, et les collisions *superélastiques* lors desquelles le cortège électronique excité cède une partie de son énergie à l'électron libre. Notons qu'à proprement parler, ces collisions sont également des collisions inélastiques.

Outre les collisions binaires avec les neutres, un électron peut également interagir avec un autre électron par le biais de la force Coulombienne, et cette force étant à portée infinie, il n'entre pas en collision avec son plus proche voisin mais avec tous les électrons inclus dans la même sphère de Debye [22], le potentiel électrostatique étant écranté au delà. On parle alors de collisions *collectives*. Ces deux types de collisions, binaires ou collectives, ont des effets radicalement différents sur la distribution des électrons : au contraire des collisions binaires, les collisions collectives vont engendrer de grands transferts d'impulsion-énergie au sein de la population électronique, et si la densité d'électrons est suffisamment importante, elle vont faire tendre la population électronique vers l'équilibre thermodynamique.

La caractérisation des collisions entre particules nécessite d'introduire la notion de *section efficace*. Pour ce faire, nous allons étudier le cas de la diffusion Rutherford, qui correspond à la diffusion d'une particule chargée par une autre. Pour simplifier, on supposera le centre diffuseur plus lourd que la particule incidente, de sorte qu'il n'y ait qu'un transfert d'impulsion et non d'énergie. Ce cas d'école est particulièrement intéressant car la force à l'œuvre dans le processus est la force de coulomb qui rend possible les calculs de trajectoire. Soit une particule de charge q, de masse m, arrivant avec une impulsion $\boldsymbol{p}_\infty$, et un paramètre d'impact $\boldsymbol{b}$, sur une autre particule de charge Q au repos, dans la configuration décrite sur la figure 1.6. La trajectoire de la particule va alors être défléchie, et la variation d'impulsion δp s'écrit alors :

$$\frac{\delta p}{p_\infty} = \frac{2\frac{\lambda_L}{b}}{\sqrt{4+\left(\frac{\lambda_L}{b}\right)^2}} \tag{1.14}$$

où $\lambda_L(p_\infty) = qQm/2\pi\epsilon_0 p_\infty^2$ est la longueur de Landau qui correspond à la distance minimum d'approche pour un choc frontal ($b = 0$). Ainsi, la déviation de la particule est d'autant plus faible que le paramètre d'impact et l'impulsion p_∞ sont grands. Ce comportement n'est pas propre qu'à l'interaction coulombienne, il s'applique également lorsque d'autres phénomènes sont à l'œuvre comme les interactions quantiques, ou les interactions électromagnétiques de faible portée, dues à la polarisation des cortèges électroniques des espèces neutres.
Si on considère maintenant un flux de particules $\Gamma_A = n_A v_A$ de particules arrivant sur le centre diffuseur, les particules passant dans la couronne entre $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b} + \mathrm{d}\boldsymbol{b}$ se retrouvent diffusées dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$, entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. Le nombre de particules d^2N_A de particules A passant dans la couronne d'épaisseur $\mathrm{d}b$, durant un temps $\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\mathrm{d}^2N_A = n_A v_A \times \mathrm{d}\sigma \times \mathrm{d}t \tag{1.15}$$

où $\mathrm{d}\sigma = 2\pi b\,\mathrm{d}b$ est la surface de la couronne. Dès lors l'équation précédente se récrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2N_A}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t} = n_A v_A \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \tag{1.16}$$

ce qui signifie que le nombre de particules A diffusées par unité d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$, durant $\mathrm{d}t$ est égal au flux de particules incident que multiplie la section efficace différentielle $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$, avec :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} \tag{1.17}$$

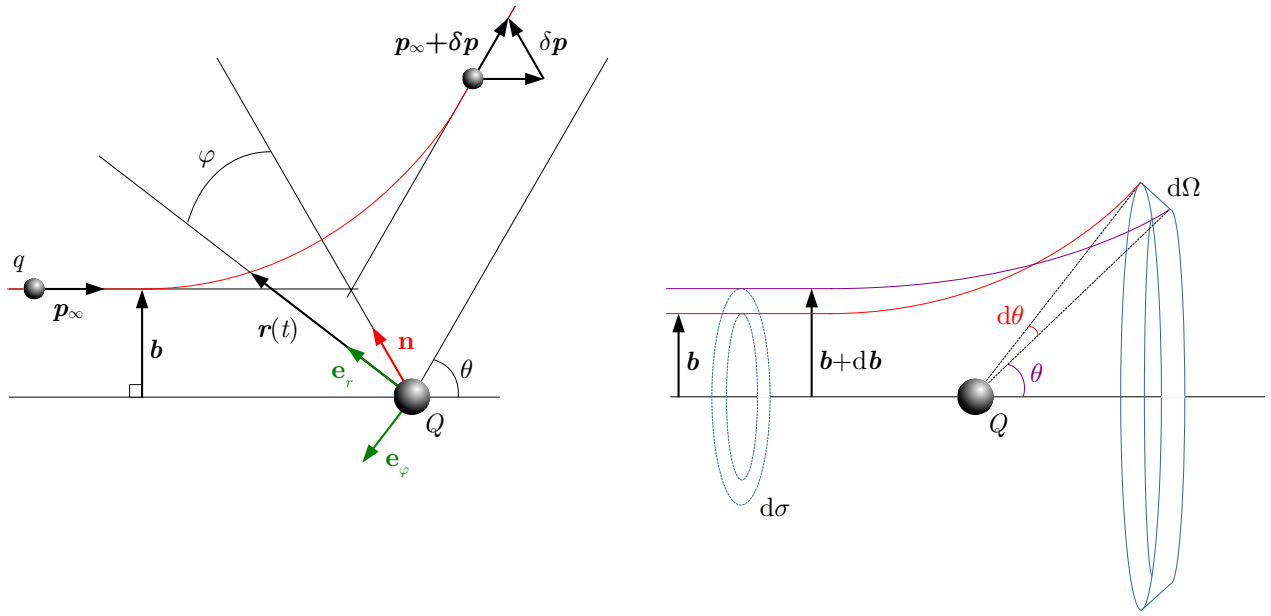


FIGURE 1.6 – Diffusion d'une particule chargée par une autre [22, 23].

La formule (1.16) se généralise pour une cible contenant une densité n_B de centres diffuseurs B sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 n_A}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t} = n_A v_A n_B \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \tag{1.18}$$

où n_A est la densité de particules A diffusées dans $\mathrm{d}\Omega$ durant $\mathrm{d}t$. Comme l'angle de diffusion θ dépend de l'énergie cinétique ε_A des particules A (aux grandes énergies les particules sont faiblement déviées), la section différentielle dépend donc également de l'énergie cinétique des particules composant le faisceau. Cette section efficace différentielle est parfaitement mesurable, elle se déduit de la connaissance du flux incident de particules, de la densité de centre diffuseurs de la cible, ainsi que des flux de particules diffusés. Une fois intégrée sur 4π stéradians on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}n_A}{\mathrm{d}t} = n_A v_A n_B \sigma_{eff}(\varepsilon_A) \tag{1.19}$$

où σ_{eff} est la section efficace de diffusion, qui a la dimension d'une surface. Bien que développée dans le cas de la diffusion coulombienne, cette notion de section efficace est généralisable quelque soit la nature des interactions à l'œuvre, que ce soient les interactions quantiques, ou bien les interactions électromagnétiques de faible portée, entre les ions et les neutres par exemple, qui sont dues à la polarisation du nuage électronique de l'atome neutre à l'approche de l'ion (diffusion de Langevin). Dans un modèle de collisions de sphères dures, valable à haute énergie, cette section efficace correspond au maître-couple du centre diffuseur. La fréquence de collision ν entre les particules A et B, et le libre parcours moyen λ des particules A dans la population de particules B, sont reliés à la section efficace de collision par les relations :

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_{eff}(\varepsilon_A) n_B} \qquad \nu = \sigma_{eff}(\varepsilon_A) v_A n_B = \frac{v_A}{\lambda} \tag{1.20}$$

Le libre parcours moyen et la fréquence de collision sont donc respectivement inversement proportionnel et proportionnel à la densité de centres diffuseurs, donc dans le cas où les électrons entrent principalement en collision avec le gaz neutre, à la pression.

1.3 Équations de base en physique des plasma

1.3.1 Description particulaire sur l'échelle microscopique

Comme nous l'avons écrit plus haut, un plasma est dans le cas le plus général, composé d'ions, d'électrons et d'espèces neutres, dont les densités dépendent de la pression de travail et de l'énergie injectée dans le plasma pour dissocier les charges. Les descriptions que nous avons données jusque là sont des descriptions particulaires simples, dans lesquelles nous avons, par exemple, appliqué le principe fondamental de la dynamique à un seul électron. Ces approches font fi de nombreux phénomènes physiques comme par exemple les interactions coulombiennes. Une description plus réaliste consiste à écrire l'équation de la dynamique pour tous les représentants d'une espèce simultanément, plutôt que pour un seul. Pour ce faire, supposons *ponctuelles* et *indiscernables* les particules d'une espèce s, et introduisons la densité de particules dans l'espace des phases :

$$\mathcal{N}_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_0} \delta^3\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_j(t)\right) \delta^3\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_j(t)\right) \tag{1.21}$$

où $\boldsymbol{R}_j(t)$ et $\boldsymbol{V}_j(t)$ désignent la position et la vitesse instantanées de la j-ième particule. Cette formule mathématique signifie que l'on compte les particules dans l'espace des phases. Notons que la distribution de Dirac tridimensionnelle δ^3, possède une dimension physique : sur l'espace des positions elle s'exprime en m^{-3} et sur l'espace des vitesses en $\mathrm{m}^{-3}.\mathrm{s}^3$. On obtient alors bien un nombre de particules par unité de volume d'espace des phases, c'est-à-dire une densité de particules dans l'espace des phases. La trajectoire de la i-ème particule est donnée par les équations de Newton :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_j(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}_j(t) \tag{1.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{V}_j(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{V}_j(t) \times \boldsymbol{B}_m\right) \tag{1.23}$$

où $\boldsymbol{E}_m$ et $\boldsymbol{B}_m$ sont les champs électrique et magnétique microscopiques, c'est-à-dire les valeurs ponctuelles de ces champs à la position $\boldsymbol{r}$. En dérivant l'expression de la densité $\mathcal{N}_s$ par rapport au temps et en utilisant les équations des trajectoires pour les particules, on aboutit finalement à l'équation de *Klimontovitch* :

$$\frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\mathcal{N}_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_m\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\mathcal{N}_s = 0 \tag{1.24}$$

où $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}$ et $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}$ sont les gradients sur l'espace des positions et sur l'espace des vitesses. Cette équation décrit l'évolution de la population s. Il s'agit du niveau de représentation le plus fondamental d'une population dans un plasma qui décrit un monde *discret*, dans lequel chaque particule est décrite individuellement. L'intérêt d'une telle description microscopique reste limité car elle nécessite la connaissance des trajectoires de toutes les particules au cours du temps. Il est donc nécessaire de définir une nouvelle approche, dans laquelle nous acceptons de perdre une partie de l'information au profit d'une simplification.

1.3.2 Description statistique sur l'échelle mésoscopique

Afin de se débarrasser d'une partie de l'information microscopique, il est possible de réaliser une moyenne statistique de l'équation de Klimontovitch sur un volume d'espace des phases $\delta^3 r \delta^3 v$, dont les dimensions doivent être judicieusement choisies, c'est-à-dire prises « suffisamment grandes pour lisser les fluctuations de l'échelle microscopique, mais suffisamment petites pour donner un sens au calcul différentiel et intégral » [19]. Sur l'espace des positions, la dimension δr adéquate correspond à la longueur de Debye. Sur l'espace des vitesses, il s'agit de la vitesse thermique des particules. La sphère de Debye est alors au plasmicien, ce que la particule fluide est au mécanicien des fluides.

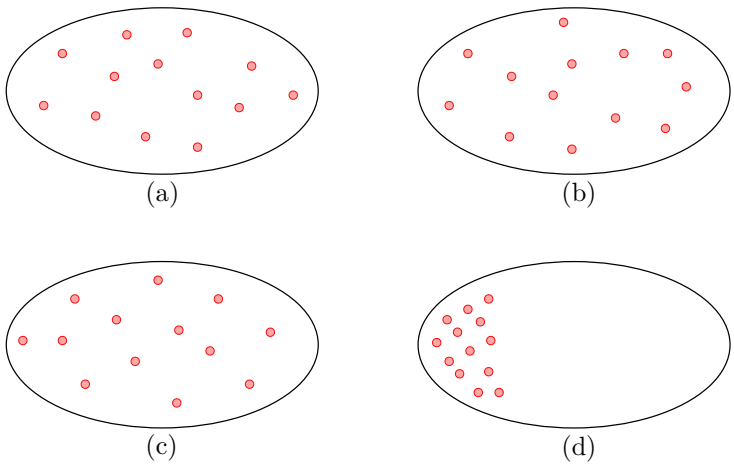


FIGURE 1.7 – Domaine pour la résolution des équations de Maxwell.

La moyenne statistique, que l'on note $\langle ... \rangle$, est la moyenne sur l'ensemble des *microétats* du système, c'est-à-dire sur l'ensemble des réalisations statistiques. Un microétat correspond à une photographie du système à un instant t. Par exemple, la figure 1.7 présente quatre réalisations statistiques possibles pour les membres de l'espèce s indiqués par les sphères rouges. Bien entendu, le cas (d) n'est qu'un cas d'illustration dont la probabilité de réalisation avoisine zéro. En effet, si l'espèce s est une espèce électriquement neutre elle tend à se répartir uniformément sous l'effet de l'agitation thermique, si c'est une espèce chargée, elle subit le même sort mais sous l'effet des répulsions coulombiennes.
Munis de cette moyenne, nous pouvons alors redéfinir les variables microscopiques $\mathcal{N}_s$, $\boldsymbol{E}_m$, et $\boldsymbol{B}_m$, en fonction des variables moyennes sur l'échelle mésoscopique f_s, $\boldsymbol{E}$, et $\boldsymbol{B}$, ainsi que des fluctuations statistiques $\delta\mathcal{N}_s$, $\delta\boldsymbol{E}$, et $\delta\boldsymbol{B}$, autour des valeurs moyennes, comme :

$$\mathcal{N}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) + \delta\mathcal{N}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.26}$$

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) + \delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.27}$$

A l'aide de ces nouvelles variables, il est alors possible de moyenner l'équation de Klimontovitch sur l'ensemble des microétats possibles, la moyenne statistique des fluctuations étant par définition égale à zéro, ce qui conduit à l'équation de *Boltzmann* :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} f_s = \mathcal{C}(f_s) \tag{1.28}$$

où $\mathcal{C}(f_s)$ est l'opérateur de collision qui s'écrit :

$$\mathcal{C}(f_s) = -\frac{q_s}{m_s} \langle (\delta \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} \, \delta \mathcal{N}_s \rangle \tag{1.29}$$

Ce terme est la résultante des interactions entre particules qui font intervenir, non pas les champs mésoscopiques, mais les fluctuations des champs engendrées par les particules elles-mêmes. L'équation de Boltzmann décrit alors l'évolution de la *fonction de distribution* f_s des particules s, qui s'apparente à une densité de probabilité sur l'espace des phases, puisqu'elle vérifie la relation :

$$\mathcal{N}_0 = \int \int f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}^3 v \tag{1.30}$$

où l'intégration est faite sur la totalité de l'espace des phases, et où $\mathcal{N}_0$ est le nombre total de particules. La quantité $f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}^3 v$ correspond à la probabilité de trouver une particule dans une sphère de Debye centrée en ($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$). Les champs intervenant dans l'équation de Boltzmann ne sont plus les champs microscopiques, mais les champs mésoscopiques. Nous sommes alors passés du monde discret et exact de Klimontovitch, au monde *continu* mais probabiliste de Boltzmann. Bien que cette équation puisse paraitre plus simple que la description proposée par Klimontovitch, elle reste néanmoins complexe car : primo, elle fait toujours intervenir sept variables indépendantes (le temps t, trois composantes de position et trois composantes de vitesses), et secundo, l'expression de l'opérateur de collision dépend des fluctuations sur l'échelle microscopique.
Cependant, elle peut être utilisée afin de simuler les plasmas (simulations Particle in cell), si tant est que les pressions restent suffisamment faibles, typiquement quelques dizaines de milliTorr, afin de maintenir un nombre de particules raisonnable. Pour des plasmas à plus forte pression, elle entraine une explosion des temps de calcul, et de fait elle n'est pas adaptée pour décrire les plasmas qui nous occupent. Cela étant dit, elle est d'un intérêt crucial pour nos travaux car sa résolution permet d'accéder aux taux de réaction des processus chimiques que l'on vient à considérer, ainsi qu'aux grandeurs décrivant le transport des particules. Ce point sera adressé en détail dans le chapitre suivant.

1.3.3 Description fluide sur l'échelle macroscopique

Il est possible de simplifier plus encore la description mathématique du plasma, en calculant les moments de l'équation de Boltzmann, le k-ième moment étant donné par l'expression :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} f_s \right) \alpha_k \boldsymbol{v}^k \, \mathrm{d}^3 v = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(f_s) \, \alpha_k \boldsymbol{v}^k \, \mathrm{d}^3 v \tag{1.31}$$

qui fait intervenir les k premiers moments de la fonction de distribution f_s. Le terme α_k est une constante propre à chaque moment d'ordre k, les quatre premières valeurs étant données par $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1/n_s$, $\alpha_2 = m_s$, et $\alpha_3 = m_s \boldsymbol{v}^2/2$. Les quatre premiers moments de la fonction de distribution s'écrivent :

$$n_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}^3 v \tag{1.32}$$

$$\boldsymbol{u}_s = \frac{1}{n_s} \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \, \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}^3 v \tag{1.33}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} m_s (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_s) \otimes (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_s) f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}^3 v \; = \; p_s \mathbb{I} + \overline{\overline{\boldsymbol{\Pi}}}_s \tag{1.34}$$

$$\boldsymbol{Q}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_s \boldsymbol{v}^2}{2} f_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \, \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}^3 v \tag{1.35}$$

où les notations $\otimes$ et $\mathbb{I}$ désignent le produit dyadique et la matrice identité. Le premier moment de la fonction de distribution correspond à la densité locale de particules, le deuxième moment correspond à la vitesse moyenne locale des particules, le troisième moment correspond au tenseur de pression, qui fait intervenir une partie isotrope p_s et une partie anisotrope $\overline{\overline{\boldsymbol{\Pi}}}_s$, et le quatrième moment $\boldsymbol{Q}_s$ correspond au flux thermique total au sein de la population. Intéressons nous, dès lors, aux trois premiers moments de l'équation de Boltzmann.

1.3.3.1 Moment d'ordre zéro de l'équation de Boltzmann

Si l'opérateur de collision $\mathcal{C}(f_s)$ de l'équation de Boltzmann décrit des collisions qui créent et détruisent localement des particules, alors le premier moment de l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (n_s \boldsymbol{u}_s) = S_s \tag{1.36}$$

où le terme source S_s, issu de l'intégration de l'opérateur de collision, représente la densité algébrique de particules s créées au cours du temps. Ce terme source dépend donc de l'ensemble des processus chimiques considérés pour l'espèce s, et l'équation décrit la conservation de la densité locale de particules de l'espèce s.

1.3.3.2 Moment d'ordre un de l'équation de Boltzmann

Le deuxième moment de l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$m_s n_s \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{\nabla}) \cdot \boldsymbol{u}_s \right] = n_s q_s \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_s \times \boldsymbol{B} \right) - \boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s + \boldsymbol{R}_s \tag{1.37}$$

Formellement, cette équation décrit l'évolution du champ de vitesses eulérien associé aux particules s. En reconnaissant la dérivée particulaire du champ de vitesses au membre de gauche, le membre de droite contient les termes sources de quantité de mouvement, à savoir les forces de Coulomb et de Laplace dans le cas où la particule est électriquement chargée, la densité de force de pression $\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s$ due à l'agitation thermique, ainsi que la densité de force de friction fluide $\boldsymbol{R}_s$ engendrée par les collisions de l'espèce s avec les autres espèces en présence. Pour la suite nous considérerons pour cette dernière la forme suivante :

$$\boldsymbol{R}_s = -m_s n_s \nu_s \boldsymbol{u}_s \tag{1.38}$$

où ν_s est la fréquence de collision de l'espèce s avec les autres espèces, qui découle de l'intégration de l'opérateur de collision. La similitude de ce deuxième moment avec l'équation de Navier-Stokes pour la mécanique des fluides conduit à parler de description fluide du plasma.

1.3.3.3 Moment d'ordre deux de l'équation de Boltzmann

Le troisième moment de l'équation de Boltzmann s'écrit, de manière la plus générale, sous la forme d'une équation de conservation :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_s}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{Q}_s = \boldsymbol{j}_s \cdot \boldsymbol{E} + C_s \tag{1.39}$$

où $\mathcal{U}_s$ est la densité d'énergie cinétique totale du fluide s, somme de la densité d'énergie cinétique macroscopique ou dirigée $\mathcal{U}_s^{macro.}$, et de la densité d'énergie cinétique microscopique ou aléatoire due à l'agitation thermique $\mathcal{U}_s^{micro.}$, respectivement définies par :

$$\mathcal{U}_s^{macro.} = \frac{m_s n_s}{2} \boldsymbol{u}_s^2 \tag{1.40}$$

$$\mathcal{U}_s^{micro.} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s\right) \tag{1.41}$$

où $\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s\right)$ désigne la trace du tenseur de pression. L'équation (1.39) fait également intervenir le flux thermique total $\boldsymbol{Q}_s$, qui s'écrit :

$$\boldsymbol{Q}_s = \mathcal{U}_s \boldsymbol{u}_s + \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s \cdot \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{q}_s \tag{1.42}$$

et qui se décompose comme la somme d'un flux convectif $\mathcal{U}_s \boldsymbol{u}_s + \overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_s \cdot \boldsymbol{u}_s$ dépendant de la vitesse macroscopique $\boldsymbol{u}_s$, et d'un flux thermique de conduction $\boldsymbol{q}_s$, dont une expression possible sera donnée au paragraphe suivant. Au membre de droite, apparaissent la densité de puissance de la force de Coulomb $\boldsymbol{j}_s \cdot \boldsymbol{E}$, qui correspond à la densité de puissance transférée aux particules via le travail du champ électrique, et C_s, le deuxième moment de l'opérateur de collision qui représente la puissance nette perdue par l'espèce s dans les collisions (élastiques et inélastiques) avec d'autres espèces.

1.3.3.4 Fermeture du système fluide et équation d'état thermodynamique

Comme nous pouvons le voir plus haut, chaque moment d'ordre k de l'équation de Boltzmann fait intervenir le moment d'ordre $k+1$ de la fonction de distribution. Tous ces moments sont alors liés entre eux si bien que le système fluide est par nature inutilisable. Il convient alors de fermer le système fluide, en imposant une forme pour le dernier moment de la fonction de distribution considérée. Deux approches sont alors possibles :

- La première consiste à ne pas résoudre l'équation d'énergie. On suppose alors que le troisième moment de la fonction de distribution, le tenseur de pression, est isotrope et suit la loi d'état $p_s = n_s k_B T_s$, où T_s est la température de l'espèce s en kelvin, considérée fixe et uniforme. Toutes les données qui entrent en compte dans les calculs, qu'il s'agisse des coefficients décrivant le transport des particules ou bien des taux des processus chimiques, sont alors fonction du champ électrique qui dépend de l'espace. On dit alors que l'on travaille dans le cadre de l'*approximation du champ local*. Ce cadre théorique a longtemps été utilisé dans la simulation des plasmas, notamment parce que les données de base issues de mesures expérimentales étaient tabulées en fonction du champ électrique. Nous reviendrons sur ces notions plus bas dans le manuscrit.

- La deuxième approche consiste à considérer l'équation d'énergie, on dit alors que l'on travaille dans l'*approximation de l'énergie moyenne locale*, les données d'entrée pour la résolution du système fluide sont alors tabulées en fonction de l'énergie moyenne des particules s. Dès lors, il est nécessaire d'imposer une forme pour le flux thermique de conduction $\boldsymbol{q}_s$, cette forme étant dépendante des hypothèses que l'on fait sur la population étudiée. On peut par exemple supposer que la population est à l'équilibre thermodynamique, ce qui conduit à annuler le flux, c'est l'hypothèse adiabatique. Mais il est également possible de supposer que la population est faiblement hors équilibre thermodynamique. Dès lors, en considérant la loi d'état pour la pression donnée plus haut, le flux thermique de conduction vérifie la loi de Fourier et s'écrit $\boldsymbol{q}_s = -\kappa_s \boldsymbol{\nabla} T_s$, où κ_s est la conductivité thermique associée à l'espèce s [24].

Notons qu'il serait possible de fermer le système d'équation fluide à un ordre plus élevé mais il deviendrait alors de plus en plus difficile d'attribuer une signification physique aux moments d'ordre supérieur. Nous reviendrons en détails sur l'équation d'énergie, en particulier pour les électrons, lorsque nous appliquerons le système d'équations fluides développé plus haut pour décrire la dynamique du plasma. Attendu que nous n'utiliserons plus que le système fluide dans la suite de ce manuscrit, nous emploierons la notation $\boldsymbol{v}_s$ en lieu et place de $\boldsymbol{u}_s$ pour désigner la vitesse fluide des particules s.

1.4 Transport des particules

Dans la section précédente, nous avons développé plusieurs descriptions mathématiques du plasma. La dernière d'entre elles, l'approche fluide, permet de décrire le plasma sur l'échelle macroscopique, en particulier, l'équation de conservation de la quantité de mouvement donne l'évolution de la vitesse dirigée pour la particule considérée. Partant de cette dernière, nous allons dériver les deux coefficients qui permettent de caractériser le transport des particules, que sont le coefficient de diffusion et la mobilité.

1.4.1 Diffusion libre et mobilité

Donnons nous l'équation fluide de l'espèce s (ion i ou électron e), dans la limite d'un plasma non magnétisé ($\boldsymbol{B} = 0$), pour lequel nous avons négligé l'anisotropie de pression ($\boldsymbol{\Pi}_s = 0$). :

$$m_s n_s \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v}_s \right] = -\boldsymbol{\nabla} p_s + n_s q_s \boldsymbol{E} - m_s n_s \nu_m \boldsymbol{v}_s \tag{1.43}$$

Comparons ensuite les deux termes du membre de gauche au terme de friction du membre de droite. Pour ce faire, notons que la fréquence de transfert de quantité de mouvement peut s'exprimer sous la forme $\nu_m = v_{T_s}/\lambda_s$ où v_{T_s} et λ_s sont la vitesse thermique et le libre parcours moyen des particules s. Dès lors, il vient :

$$\frac{|\partial \boldsymbol{v}_s/\partial t|}{|\nu_m \boldsymbol{v}_s|} \sim \frac{1}{\nu_m \tau} \qquad \text{et} \qquad \frac{|(\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v}_s|}{|\nu_m \boldsymbol{v}_s|} \sim \frac{v_s}{v_{T_s}} \frac{\lambda_s}{L} \tag{1.44}$$

où les valeurs absolues doivent être comprises au sens de « l'ordre de », où L désigne la distance sur laquelle s'établit le gradient de vitesse, ce qui peut être vu comme la taille typique du plasma, et où τ désigne le temps caractéristique de variation de la vitesse fluide. Il apparaît que si le libre parcours moyen est négligeable devant la taille typique du plasma, et que la vitesse fluide est négligeable devant la vitesse thermique, alors le terme d'inertie $(\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v}_s$ peut être négligé devant le terme de friction. De même, si la vitesse fluide varie sur un temps caractéristique τ supérieur à $1/\nu_m$, alors la variation temporelle de la vitesse fluide peut également être négligée devant le terme de friction. Lorsque ces trois limites sont vérifiées ($v_s \ll v_{T_s}$, $\lambda_s \ll L$ et $\tau \gg 1/\nu_m$), on dit que l'on adopte un *modèle collisionnel* et l'équation du mouvement se récrit alors sous la forme d'une équation *dérive-diffusion* :

$$m_s n_s \nu_m \boldsymbol{v}_s = -\boldsymbol{\nabla} p_s + n_s q_s \boldsymbol{E} \tag{1.45}$$

La pression isotrope se développant suivant la loi d'état $p_s = n_s k_B T_s$, il vient finalement l'expression du flux de particules $\boldsymbol{\Gamma}_s = n_s \boldsymbol{v}_s$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_s = -D_s \boldsymbol{\nabla} n_s + sign(q_s) n_s \mu_s \boldsymbol{E} \tag{1.46}$$

où $D_s = k_B T_s / m_s \nu_m$ et $\mu_s = |q_s / m_s \nu_m|$ sont le coefficient de diffusion et la mobilité de l'espèce s. Le coefficient de diffusion caractérise le transport des particules dans le gaz neutre sous l'effet de l'agitation thermique. On parle alors de *diffusion libre* car les particules marchent aléatoirement sans subir de contrainte (force de rappel électrostatique par exemple). La mobilité caractérise le transport dirigé des particules, sous l'effet du champ électrique. Le flux de particule est alors la somme d'un flux diffusif et d'un flux convectif. Remarquons également que le coefficient de diffusion et la mobilité de l'espèce s, sont reliés par la relation d'Einstein :

$$D_s = \frac{k_B T_s}{q_s} \mu_s \tag{1.47}$$

Pour un plasma d'argon à 300 K et à 10 Torr, la fréquence de collision des électrons est donnée par $\nu_m = 5.3 \times 10^{10}$ s^{-1} [20]. Dans les plasmas de décharge qui nous occupent, la température électronique est typiquement de l'ordre de $T_e = 1$ eV ou $T_e = 11604$ K, on trouve alors un coefficient de diffusion de l'ordre de $D_e = 3.31$ m.s^{-2}. Pour les ions d'argon monoatomiques ionisés une fois Ar^+, la mobilité à 300 K et à 10 Torr vaut $\mu_i = 116.3$ cm^2.V^{-1}.s^{-1} [25], et la relation d'Einstein permet d'obtenir le coefficient de diffusion $D_i = 3.02 \times 10^{-4}$ m.s^{-2}. Les ions diffusent alors beaucoup moins que les électrons.

1.4.2 Diffusion ambipolaire

Considérons un plasma en l'absence de champ électrique extérieur. Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2.1, les électrons très légers par rapport aux ions, ont tendance à quitter le plasma sous l'effet de l'agitation thermique. Un écart à la quasi-neutralité apparait alors, qui donne naissance à un champ de charge d'espace, le champ ambipolaire $\boldsymbol{E}_a$. Celui-ci entraine alors une régulation des flux de particules, afin de rétablir et d'assurer la quasi-neutralité. Plus précisément, il impose l'égalité des flux électronique et ionique, qui s'écrit alors :

$$-D_e \boldsymbol{\nabla} n_e - n_e \mu_e \boldsymbol{E}_a = -D_i \boldsymbol{\nabla} n_i + n_i \mu_i \boldsymbol{E}_a \tag{1.48}$$

Dans le cas particulier où l'on considère des ions monochargés, la condition de quasi-neutralité $n_i = n_e = n$, conduit à la valeur du champ ambipolaire $\boldsymbol{E}_a$:

$$\boldsymbol{E}_a = -\frac{D_e - D_i}{\mu_i + \mu_e} \frac{\boldsymbol{\nabla} n}{n} \tag{1.49}$$

En développant l'expression $2\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_e + \boldsymbol{\Gamma}_i$, et en injectant l'expression précédente du champ ambipolaire, il vient le flux de particules :

$$\boldsymbol{\Gamma} = -\frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \boldsymbol{\nabla} n \tag{1.50}$$

qui donne alors le coefficient de diffusion *ambipolaire* :

$$D_a = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \tag{1.51}$$

Ce coefficient permet de décrire le transport des particules dans un plasma quasi-neutre. Remarquons que, comme l'inertie des électrons est beaucoup plus faible que celle des ions, on montre alors en utilisant les relation d'Einstein que le coefficient de diffusion ambipolaire peut se récrire :

$$D_a \approx D_i\left(1+\frac{\mu_i}{\mu_e}\frac{D_e}{D_i}\right) = D_i\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right) \tag{1.52}$$

En reprenant les conditions du plasma d'Argon décrit au paragraphe précédent, nous trouvons un coefficient de diffusion ambipolaire de $D_a \approx 40D_i$. Compte tenu des ordres de grandeurs des coefficients de diffusion électronique et ionique donnés au paragraphe précédent, il apparait que dans un plasma quasi-neutre, la dynamique des espèces chargées est principalement pilotée par la dynamique des ions. En régime de diffusion ambipolaire, les électrons diffusent alors beaucoup moins qu'en régime de diffusion libre.

1.4.3 Diffusion mixte dans le cadre de l'interaction microonde-plasma

Nous avons établi plus haut les deux régimes de diffusion possibles pour les particules, libre ou ambipolaire. Le premier est bien adapté pour décrire la dynamique des particules du plasma à sa périphérie, ou la quasi-neutralité n'est pas assurée. Le deuxième permet quant à lui la description du transport des particules dans les zones dominées par la quasi-neutralité. Cependant, ni l'un ni l'autre ne s'appliquent dans les régions de densité intermédiaire lorsque l'écart à la quasi-neutralité apparait, et il faut alors dériver un proxy pour le coefficient de diffusion dans ces zones là. Dans [26], Boeuf *et. al* se sont intéressés au transport d'un plasma en interaction avec un champ électromagnétique microonde. Couplant les équations de Maxwell avec un plasma dont le front se déplace à une vitesse de l'ordre de $v_f = 2\sqrt{D_e\nu_i}$ [27], où ν_i est une fréquence d'ionisation uniforme (le terme source de création des électrons peut alors s'écrire $S_e = \nu_i n_e$) et D_e le coefficient de diffusion libre des électrons, ils ont montré que le champ de charge d'espace $\boldsymbol{E}_\alpha$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{E}_\alpha \sim -\frac{1}{1+\alpha}\frac{D_e-D_i}{\mu_e+\mu_i}\frac{\boldsymbol{\nabla} n}{n} \tag{1.53}$$

où $\alpha = \tau_M\nu_i = \lambda_{D_e}^2/L^2$, avec :

$$\tau_M = \frac{\epsilon_0}{n_e e(\mu_e+\mu_i)} \tag{1.54}$$

le temps de Maxwell, qui est le temps caractérisant la relaxation des charges sous l'effet des répulsions Coulombiennes [19]. La grandeur L est la longueur de gradient que l'on peut apparenter à la largeur du front. On remarque alors que le nouveau champ de charge d'espace correspond au champ ambipolaire, corrigé d'un facteur $1/(1+\alpha)$. En injectant cette formule dans l'expression du flux d'électrons, on obtient alors :

$$\boldsymbol{\Gamma}_e \approx -\frac{\alpha D_e + D_a}{1+\alpha}\boldsymbol{\nabla} n \tag{1.55}$$

ce qui permet d'introduire le coefficient effectif de diffusion :

$$D_{eff} = \frac{\alpha}{1+\alpha}D_e + \frac{1}{1+\alpha}D_a \tag{1.56}$$

On peut alors s'intéresser aux deux cas asymptotiques suivants :

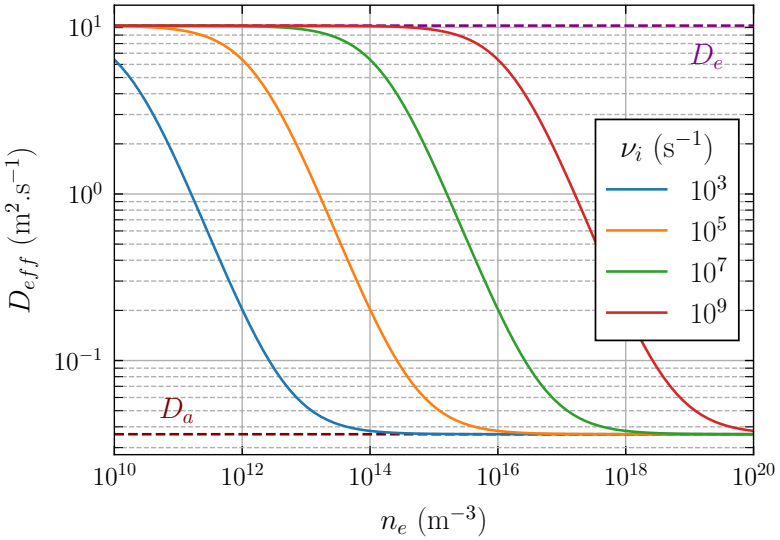


FIGURE 1.8 – Coefficient de diffusion effectif en fonction de la densité électronique et de la fréquence d'ionisation.

- Le cas où $\alpha \ll 1$, ce qui correspond au cas où $\lambda_{D_e} \ll L$, dans ce cas $D_{eff} \approx D_a$, le transport est dominé par la diffusion ambipolaire permettant d'assurer la quasi-neutralité au delà de la longueur de Debye.

- Le cas où $\alpha \gg 1$, ce qui correspond au cas où $\lambda_{D_e} \gg L$ ce qui correspond au cas où $D_{eff} \approx D_e$ et le transport est dominé par la diffusion libre.

Notons que cette variation du coefficient de diffusion cache en fait la variation de la densité électronique à travers la longueur de Debye. En effet, plus la densité électronique augmente plus la longueur de Debye diminue. Il apparaît donc que le coefficient de diffusion libre est bien adapté pour décrire le transport dans les zones de faibles densités électroniques, là où le coefficient de diffusion ambipolaire permet la description du transport dans les zones de fortes densités. Il est possible de tracer (*cf.* figure 1.8) l'évolution du coefficient de diffusion effectif en fonction de la densité électronique pour différentes valeurs de la fréquence d'ionisation. Pour un plasma dont la fréquence d'ionisation est de 10^5 s^{-1}, les électrons entrent en régime de diffusion ambipolaire pour une densité de 10^{17} m^{-3}. Par ailleurs, la tendance annoncée pour le coefficient de diffusion se retrouve également lorsque l'on considère la définition de α faisant intervenir le temps de Maxwell, les charges relaxant plus rapidement à forte densité sous l'effet des répulsions coulombiennes ($\tau_M \propto 1/n_e$).

1.5 Équations de base pour l'interaction microonde-plasma

1.5.1 Réponse diélectrique d'un plasma froid collisionnel

Donnons nous un plasma froid, non-magnétisé que l'on suppose perturbé par un champ électrique extérieur, et voyons comment les perturbations de densité électronique et de vitesse qui en découlent peuvent être reliées à la perturbation initiale. Pour ce faire, partons de l'équation de conservation de quantité de mouvement fluide introduite plus haut, pour laquelle nous négligeons le tenseur de pression anisotrope :

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_e \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_e\right] = -e n_e \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(n_e k_B T_e) - m_e n_e \nu_m \boldsymbol{v}_e \tag{1.57}$$

Effectuons un développement perturbatif de la densité électronique n_e, de la vitesse dirigée $\boldsymbol{v}_e$ et du champ électrique $\boldsymbol{E}$:

$$n_e(\boldsymbol{r},t) = n_e^{(0)}(\boldsymbol{r}) + n_e^{(1)}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.58}$$

$$\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}_e^{(0)}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}_e^{(1)}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.59}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.60}$$

où $n_e^{(0)}$, $\boldsymbol{v}_e^{(0)}$, et $\boldsymbol{E}^{(0)}$ sont la densité électronique, la vitesse dirigée et le champ électrique à l'équilibre, et où $n_e^{(1)}$, $\boldsymbol{v}_e^{(1)}$, et $\boldsymbol{E}^{(1)}$ représentent les perturbations d'ordre un, supposées négligeables devant les quantités d'ordre zéro. Avant perturbation, le plasma vérifie l'équation de quantité de mouvement d'ordre zéro, qui prend la forme d'une équation dérive-diffusion :

$$en_e^{(0)}\boldsymbol{E}^{(0)} + \boldsymbol{\nabla}(n_e^{(0)}k_BT_e) + m_e n_e^{(0)}\nu_m \boldsymbol{v}_e^{(0)} = 0 \tag{1.61}$$

ainsi que l'équation de Poisson d'ordre zéro :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}^{(0)} = -e\frac{n_e^{(0)} - n_i^{(0)}}{\epsilon_0} \tag{1.62}$$

Une fois perturbé le plasma vérifie l'équation de Poisson :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{E}^{(0)} + \boldsymbol{E}^{(1)}\right) = -e\frac{n_e^{(0)} - n_i^{(0)}}{\epsilon_0} - e\frac{n_e^{(1)}}{\epsilon_0} \tag{1.63}$$

dans laquelle on suppose que les ions ne subissent pas l'effet du champ perturbateur du fait de leur grande inertie. En retranchant à l'équation ci-dessus l'équation de Poisson à l'équilibre, il vient l'équation de Poisson perturbée [1] :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}^{(1)} = -e\frac{n_e^{(1)}}{\epsilon_0} \tag{1.64}$$

En se limitant au cas des ondes électromagnétiques (telles que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0$), on déduit alors que la perturbation de densité électronique est nulle, ce qui signifie que les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin d'une perturbation de densité pour se propager. Dès lors, l'équation de quantité de mouvement du plasma perturbé s'obtient en injectant les développements perturbatifs donnés plus haut dans l'équation (1.57), et on obtient alors l'équation de quantité de mouvement linéarisée :

1. Notons à ce sujet que l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit dans le cas général :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0}$$

où ρ_l est la densité de charges libres et ρ_p la densité de charges de polarisation définie par $\rho_p = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$, où $\boldsymbol{P}$ est le vecteur polarisation introduit plus haut. La perturbation de densité $n_e^{(1)}$ est donc un terme qui décrit à la fois les charges libres et les charges liées, ce qui traduit là encore la dualité conducteur/diélectrique du plasma déjà discutée plus haut.

$$m_e n_e^{(0)} \frac{\partial \boldsymbol{v}_e^{(1)}}{\partial t} = -e n_e^{(0)} \boldsymbol{E}^{(1)} - m_e n_e^{(0)} \nu_m \boldsymbol{v}_e^{(1)} \tag{1.65}$$

où les produits de termes d'ordre un ont été négligés étant d'ordre deux ou trois, et où nous avons utilisé l'équation (1.61) pour faire disparaître les termes d'ordre zéro. Pour finir le calcul, développons les perturbations sous la forme :

$$n_e^{(1)}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left(n_e^{(1)}(\boldsymbol{r}) \exp\left(-i\omega t\right)\right) \tag{1.66}$$

$$\boldsymbol{v}_e^{(1)}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{v}_e^{(1)}(\boldsymbol{r}) \exp\left(-i\omega t\right)\right) \tag{1.67}$$

$$\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r}) \exp\left(-i\omega t\right)\right) \tag{1.68}$$

où Re désigne la partie réelle du nombre complexe, et où nous avons retenu la convention temporelle des opticiens. Comme nous l'avons écrit dans la section 1.2.2, la vitesse des électrons dans l'approche diélectrique du plasma est reliée au champ perturbateur par :

$$\boldsymbol{v}_e^{(1)} = i \frac{\omega \epsilon_0}{n_e^{(0)} e} \chi^{(0)} \boldsymbol{E}^{(1)} \tag{1.69}$$

En utilisant les développements de Fourier de la perturbation, on obtient l'expression de la vitesse d'ordre un :

$$\boldsymbol{v}_e^{(1)} = -i \frac{e}{m_e} \frac{1}{(\omega + i\nu_m)} \boldsymbol{E}^{(1)} \tag{1.70}$$

ce qui combiné à l'équation (1.69), conduit à la susceptibilité diélectrique du plasma à l'ordre zéro :

$$\chi(\boldsymbol{r},\omega) \quad = \quad -\frac{\omega_{pe}^2(\boldsymbol{r})}{\omega(\omega + i\nu_m)} \tag{1.71}$$

Pour finir, notons que l'on dénombre, toujours dans la limite des plasmas non-magnétisés, deux types d'onde supplémentaires que sont les ondes de Langmuir, qui sont des ondes électrostatiques de haute fréquence portées par les électrons, et les ondes acoustiques ioniques, qui sont des ondes électrostatiques de basse fréquence portées par les ions. Ces modes étant des modes électrostatiques, ils vérifient la relation $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$, la perturbation de densité électronique est alors non-nulle, ce qui fait apparaître une correction thermique dans l'expression de la susceptibilité diélectrique par l'entremise du gradient de pression. La susceptibilité diélectrique pour les ondes de Langmuir s'écrit, par exemple :

$$\chi^{(0)}(k,\omega) \quad = \quad -\frac{{\omega_{pe}^{(0)}}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{T_e}^2} \tag{1.72}$$

où $\gamma_e = 3$ est le coefficient adiabatique du gaz électronique. Ces modes électrostatiques subissent des phénomènes d'amortissement non-collisionnel, comme l'amortissement Landau linéaire, qui est un processus cinétique impliquant la fonction de distribution des électrons. De tels processus ne seront pas considérés dans l'étude qui suit.

1.5.2 Équation de propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas

Partons de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \;=\; \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.73}$$

Formellement, la densité de courant qui intervient dans cette équation est la somme des densités de courant de charges libres, de charges de magnétisation et de charges de polarisation. Dans le cas du plasma, si nous adoptons une vision diélectrique, la densité de courant se réduit à la densité de courant de polarisation, et pour un champ dont les dépendances spatiales et temporelles sont harmoniques, la polarisation dans le domaine temporel est alors reliée au champ électrique par [28] :

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \;=\; \epsilon_0 \chi(\boldsymbol{r}, \omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.74}$$

si bien que l'équation de Maxwell-Ampère se récrit :

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \;=\; \mu_0 \epsilon_0 \left[1 + \chi(\boldsymbol{r}, \omega)\right] \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.75}$$

où l'on identifie la permittivité diélectrique relative du plasma :

$$\epsilon_r(\boldsymbol{r}, \omega) \;=\; 1 + \chi(\boldsymbol{r}, \omega) \;=\; 1 - \frac{\omega_{pe}^2(\boldsymbol{r})}{\omega^2 + \nu_m^2} + i \frac{\nu_m}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2(\boldsymbol{r})}{\omega^2 + \nu_m^2} \tag{1.76}$$

Ce développement justifie donc l'élégance d'utiliser la vision diélectrique du plasma, puisqu'il n'est pas d'usage de « mélanger » les densités de courant de charges libres et de courant de déplacement. La fin du développement pour l'établissement de l'équation de propagation est classique : en prenant la dérivée temporelle de l'équation (1.75), en y injectant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, en utilisant l'identité vectorielle $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{E}$, et en invoquant de nouveau la relation de constitution de l'onde électromagnétique $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, il vient :

$$\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{E} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\boldsymbol{r}, \omega) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.77}$$

Pour finir, en restant dans le cadre d'une évolution temporelle harmonique, et en remarquant que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, il vient finalement l'équation de d'Alembert en régime harmonique :

$$\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{E} + k^2(\boldsymbol{r}, \omega) \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.78}$$

où $k(\boldsymbol{r}, \omega) = k_0 \sqrt{\epsilon_r(\boldsymbol{r}, \omega)}$ est le nombre d'onde local, avec $k_0 = \omega/c$. Un cas particulier intéressant correspond à la propagation d'une onde plane progressive dans un plasma homogène et non-collisionnel, c'est-à-dire un plasma pour lequel la densité électronique est uniforme, et le rapport ν_m/ω tend vers zéro. Dès lors, le nombre d'onde se récrit :

$$k(\omega) = k_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \tag{1.79}$$

Le nombre d'onde peut alors devenir imaginaire pur si la densité électronique est supérieure à la densité critique, donnée par :

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m_e}{e^2}\omega^2 \tag{1.80}$$

La solution de l'équation d'onde étant de la forme $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{ikx}$, le champ est alors amorti sans dépôt d'énergie au delà de la densité critique, on parle alors de mode évanescent. Cette limite n'existe plus dans les plasmas collisionnels, mais peut tout de même être utilisée pour distinguer les zones où l'onde est faiblement couplée au plasma ($n_e < n_c$), l'énergie véhiculée par l'onde est alors faiblement absorbée par les électrons, des zones où elle est au contraire fortement couplée ($n_e > n_c$).

1.5.3 Théorème de Poynting généralisé et puissance microonde absorbée

1.5.3.1 Équation d'évolution de la polarisation

Considérons encore l'approche diélectrique du plasma, et établissons l'équation d'évolution de la polarisation. En reprenant l'équation d'évolution de la vitesse électronique linéarisée (**??**), et en invoquant la relation (1.12) entre vitesse électronique et polarisation, on déduit l'équation d'évolution de la polarisation :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} + \nu_m \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_{pe}^2 \boldsymbol{E} \tag{1.81}$$

Remarquons qu'en injectant dans l'équation ci-dessus l'expression de la polarisation donnée par la théorie de la réponse linéaire, on retrouve l'expression de la susceptibilité diélectrique du plasma donnée plus haut.

1.5.3.2 Théorème de Poynting

Dans ce paragraphe, nous allons établir la loi de conservation de l'énergie électromagnétique, pour un champ microonde en interaction avec un plasma uniforme. Soit un volume $\mathcal{V}$ de plasma délimité par une surface $\mathcal{S}$. Le vecteur de Poynting, décrivant le flux d'énergie à travers la surface $\mathcal{S}$, s'écrit $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, où $\boldsymbol{E}$ est le champ électrique et $\boldsymbol{H}$ s'exprime en fonction du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ par la relation $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ dans d'un milieu non magnétique, pour lequel la perméabilité magnétique se réduit à celle du vide. En utilisant l'identité vectorielle $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}$, en gardant l'approche diélectrique pour le plasma, et en utilisant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, il vient :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \;=\; -\left[\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \epsilon_0\, \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right] \tag{1.82}$$

Le premier et le troisième terme du membre de droite sont proportionnels aux dérivées temporelles des carrés des champs électrique et magnétique. Le deuxième terme peut être récrit en utilisant l'équation d'évolution de la polarisation sous la forme :

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \;=\; \frac{1}{2\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{\nu_m}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right)^2 \tag{1.83}$$

Tous calcul faits et après réorganisation des termes, on trouve le théorème de Poynting généralisé pour un milieu diélectrique, qui s'écrit sous la forme d'une équation de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\frac{\nu_m}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right)^2 \tag{1.84}$$

où u est la densité d'énergie électromagnétique donnée par :

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{2\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right)^2 \tag{1.85}$$

dans laquelle le premier et le deuxième terme décrivent la densité d'énergie électromagnétique de l'onde, et le troisième terme correspond à l'énergie cinétique des particules chargées [29]. En considérant la notation complexe des champs électromagnétiques, en supposant une dépendance temporelle harmonique en $e^{-i\omega t}$, et en exprimant la polarisation suivant la théorie de la réponse linéaire, il vient :

$$\langle u \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_m^2} \right) |\underline{\boldsymbol{E}}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\underline{\boldsymbol{B}}|^2 \tag{1.86}$$

Or, en remarquant que :

$$\epsilon'_{r,p} + \frac{2\omega}{\nu_m} \epsilon''_{r,p} \quad = \quad 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_m^2} \tag{1.87}$$

la relation peut également être récrite sous la forme :

$$\langle u \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4} \left(\epsilon'_{r,p} + \frac{2\omega}{\nu_m} \epsilon''_{r,p} \right) |\underline{\boldsymbol{E}}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\underline{\boldsymbol{B}}|^2 \tag{1.88}$$

Cette expression est générique et on retrouve la formule pour le diélectrique traité dans le cadre de l'électron élastiquement lié [30, 31]. Pour finir, notons que le terme :

$$p_{d,m} = \frac{\nu_m}{\epsilon_0 \omega_{pe}^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right)^2 \tag{1.89}$$

correspond à la densité de puissance électromagnétique dissipée par le milieu. On en déduit la puissance dissipée moyennée sur le temps, en considérant une dépendance harmonique ainsi que la susceptibilité diélectrique du plasma :

$$\langle p_{d,m} \rangle_t \quad = \quad \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\nu_m}{\omega^2 + \nu_m^2} \omega_{pe}^2 \, |\underline{\boldsymbol{E}}|^2 \tag{1.90}$$

Bien entendu, nous retrouvons par l'approche diélectrique, la même formule que pour l'approche conducteur (p. 38 dans [20]). Nous pouvons remarquer que la densité de puissance absorbée est nulle pour un plasma non collisionnel, *i.e.* un plasma pour lequel $\nu_m/\omega \ll 1$. Physiquement, cela vient du fait que les collisions permettent de transférer, dans toutes les directions, une partie de la quantité de mouvement acquise par l'électron dans la direction du champ. Les collisions permettent donc à un électron de conserver une partie de l'énergie cinétique acquise dans le champ, en convertissent l'énergie

dirigée en énergie d'agitation thermique, ce qui permet le chauffage des électrons. A contrario, pour un champ statique, la moyenne temporelle de la densité de puissance absorbée par les électrons s'écrit :

$$\langle p_{abs} \rangle_t = \epsilon_0 \frac{\omega_{pe}^2}{\nu_m} |\underline{\boldsymbol{E}}|^2 \tag{1.91}$$

Les collisions tendent alors à empêcher l'électron de gagner de l'énergie, puisque les collisions en viennent alors à s'opposer à l'accélération des électrons. Par ailleurs, si $\nu_m/\omega \gg 1$, la densité de puissance absorbée (*cf.* équation (1.90)) se réduit à la densité de puissance absorbée dans un champ statique. L'absorption de puissance électromagnétique est donc optimale pour $\omega \sim \nu_m$, le choix d'une fréquence de travail imposant ainsi la pression optimale pour la dissipation de l'onde.

1.6 Confinement des décharges plasma et interaction plasma-paroi

Tous les modèles établis ci-dessus sont des modèles décrivant des plasmas en espace libre, or la production des plasmas de laboratoires nécessite de confiner le plasma dans des enceintes. Le plasma est alors en interaction avec les parois, et dans notre cas, avec le substrat diélectrique et le plan de masse.

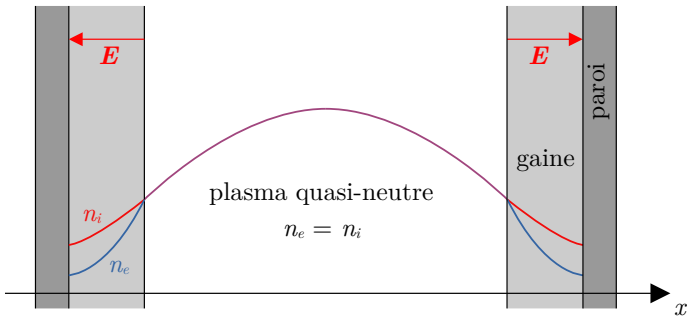


FIGURE 1.9 – Représentation des gaines en périphérie du plasma quasi-neutre.

Sous l'effet de l'agitation thermique, les électrons plus mobiles que les ions vont s'accumuler aux abords de la paroi. Cette accumulation de charges négatives entraine l'apparition d'un potentiel négatif à la paroi qui va tendre à repousser et confiner les électrons de plus faible énergie dans le plasma. Parallèlement, les ions qui sont froids sont accélérés vers la paroi sous l'effet de la chute de potentiel, transitant ainsi d'un régime subsonique vers un régime supersonique.
Le devenir des charges à la paroi est complexe : une partie des ions peut se recombiner avec les électrons présents, mais d'autres phénomènes peuvent se produire comme par exemple l'émission secondaire par laquelle des électrons vont être arrachés à la paroi sous l'effet du bombardement ionique. Quoi qu'il en soit, le potentiel plasma et le potentiel à la surface vont s'ajuster afin de garantir l'égalité des flux d'ions et d'électrons à la paroi. La zone où s'opère la chute de potentiel, et dans laquelle apparaît une rupture de quasi-neutralité (*cf.* figure 1.9), est alors appelée *gaine*. Elle s'établit sur des longueurs de l'ordre de quelques longueurs de Debye.
Le valeur du potentiel à la paroi peut être imposée en polarisant la surface, c'est le cas dans notre dispositif pour le plan de masse, où bien s'établir à une valeur qui permet de vérifier la condition d'égalité des flux, c'est le cas pour le substrat diélectrique. On parle alors de potentiel flottant.
Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet qui n'est pas l'objet de cette étude. Cependant, remarquons que la nécessaire chute de densité aux abords des parois va générer dans le plasma des zones où la densité électronique est supérieure à la densité critique (le plasma quasi-neutre) et des zones où elle est inférieure. Ces deux zones auront des effets différents sur la propagation de l'onde.

Soit l'équation de diffusion paramétrée par un coefficient pour lequel en tout point de la décharge la densité d'électrons est égale à la densité d'ions n, c'est à dire en négligeant la rupture de quasi-neutralité dans la gaine, de diffusion D et un terme source $S = \nu_i n$ uniforme, *i.e.* on suppose que les pertes de particules se font par diffusion aux parois :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \nu_i n \tag{1.92}$$

Cette équation est soluble en cherchant une expression pour la densité à variables séparables $n(x,t) = n_0 f(x)g(t)$, d'où :

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} - \nu_i = -\frac{D}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = K \tag{1.93}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \nu_i + K \tag{1.94}$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{K}{D} \tag{1.95}$$

On obtient alors les solutions :

$$f(t) = \mathrm{e}^{(\nu_i + K)t} \tag{1.96}$$

$$g(x) = \cos\left(2\sqrt{-\frac{K}{D}}x\right) \tag{1.97}$$

La constante K se déduit alors des conditions aux limites, puisqu'en $L/2$ et $-L/2$ la densité est supposée s'annuler, ce qui conduit alors à :

$$K = -\frac{\pi^2 D}{4L^2} \tag{1.98}$$

D'où l'expression pour le profil de densité :

$$n(x,t) = n_0 \exp\left(\left[\nu_i - \frac{\pi^2 D}{4L^2}\right]t\right)\cos\left(\frac{x}{\Lambda}\right) \tag{1.99}$$

où $\Lambda = L/\pi$ est la *longueur de diffusion*. La densité ainsi déterminée dépendant de l'espace au travers d'un cosinus, la double dérivée par rapport à x permet d'identifier la longueur de gradient L_∇ :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -\frac{n}{\Lambda^2} \quad \Leftrightarrow \quad L_\nabla^2 = -\Lambda^2 \tag{1.100}$$

dont le carré se trouve être égal à l'opposé du carré de la longueur de diffusion. Ce signe peut paraitre étrange de prime abord, mais si l'on récrit l'équation de diffusion en appliquant l'expression donnée ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nu_i n - D\frac{n}{\Lambda^2} \tag{1.101}$$

où l'approximation du laplacien apparaît alors comme un terme de pertes (en l'occurrence par diffusion aux parois).

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les principales grandeurs théoriques nécessaires pour représenter le plasma, en particulier les échelles spatiale et temporelle caractérisant ce milieu quasi-neutre, à savoir la longueur de Debye et la pulsation plasma.

Les trois niveaux de description du plasma, particulaire, cinétique et fluide ont été introduits, et nous avons alors pu identifier à partir des équations fluides les deux grandeurs caractérisant le transport des particules : le coefficient de diffusion et la mobilité.

Le problème de l'interaction d'un plasma avec une onde électromagnétique a finalement été étudié, dans la limite des faibles perturbations, afin d'extraire deux paramètres permettant de caractériser l'interaction : la permittivité diélectrique du plasma et la densité de puissance microonde dissipée.

Enfin, le problème du confinement des décharges plasma a été brièvement décrit, et nous avons pu mettre au jour l'échelle d'espace qui permet de décrire les pertes de particules par diffusion aux parois, à savoir la longueur de diffusion.

Dans le chapitre suivant, nous allons exploiter le modèle fluide pour la simulation numérique de l'interaction microonde/plasma. Les développements relatifs à la permittivité diélectrique du plasma, et à la densité de puissance microonde dissipée seront quant à eux exploités dans des développements analytiques permettant d'interpréter les résultats des simulations et des expérimentations.

Chapitre 2

Modèle numérique et dispositif expérimental

Sommaire

2.1 Simulation de l'interaction microonde/plasma 41
2.1.1 Géométrie simulée 42
2.1.2 Système d'équations résolu 43
2.1.3 Cinétique chimique de l'Argon 49
2.1.4 Résolution de l'équation de Boltzmann 52
2.1.5 Détermination des taux de réaction effectifs 57
2.1.6 Transport des espèces neutres excitées et des ions 59
2.2 Présentation du banc d'essai 61
2.2.1 Dispositif expérimental 61
2.2.2 Protocole expérimental 62
2.3 Conclusion 62

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous avons exposé les concepts fondamentaux nécessaires pour aborder et comprendre la dynamique du plasma, ainsi que la physique de l'interaction microonde/plasma.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le code de simulation utilisé afin de simuler l'interaction entre le signal microonde et la décharge plasma dans la ligne microruban suspendue. Les équations résolues seront ainsi exposées et nous présenterons les méthodes mises en œuvre afin de produire les données d'entrée pour la simulation. Par ailleurs, le banc expérimental utilisé dans cette thèse afin de caractériser le limiteur de puissance sera également présenté.

2.1 Simulation de l'interaction microonde/plasma

Afin d'étudier la réponse non-linéaire du limiteur (dont la structure est rappelée sur la figure 2.1), un modèle numérique 2D auto-cohérent a été implémenté, basé sur le code de simulation PlasmaSimWave développé par Gerjan Hagelaar [32] au laboratoire LAPLACE. Les adaptations spécifiques pour la présente étude ont fait l'objet d'une publication [33]. Les principes de fonctionnement du code de calcul sont exposés ci-dessous.

Comme les paramètres du plasma (densités d'espèces, potentiel électrostatique, etc...) évoluent sur une échelle de temps long (supérieure à la microseconde) comparée à celle des microondes (de l'ordre de la nanoseconde), le modèle est alors composé de deux sous-modèles décrivant ces deux échelles séparément. Ils sont basés sur une combinaison des équations fluides pour le plasma et des équations

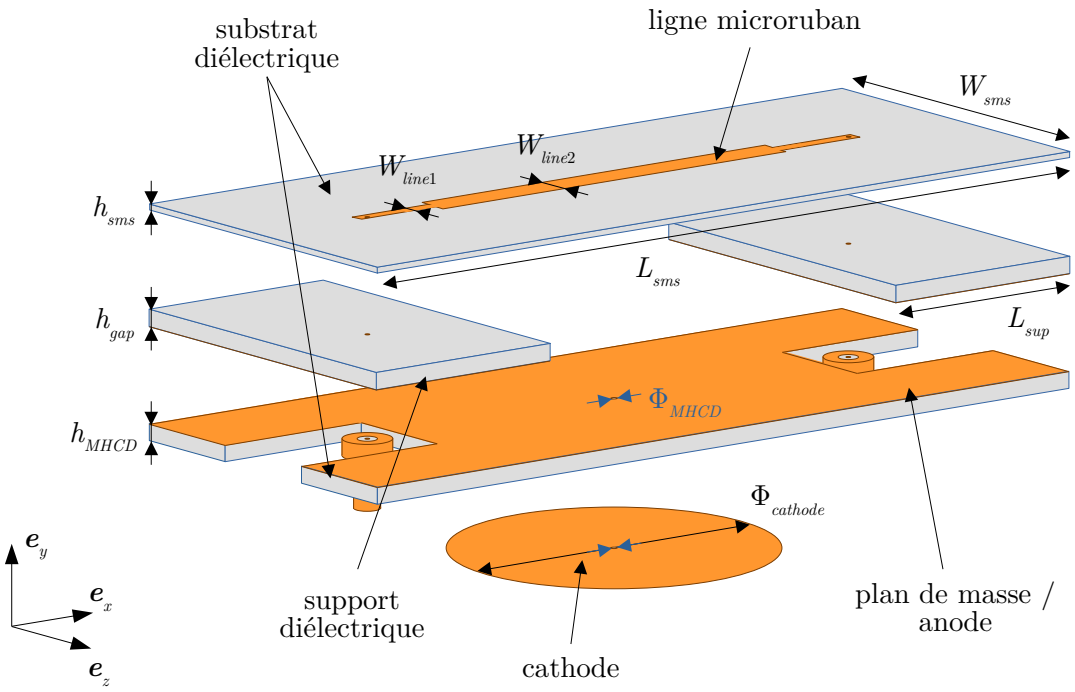


FIGURE 2.1 – Ligne microruban suspendue en vue éclatée.

de Maxwell. Le sous-modèle pour l'évolution du plasma est obtenu en faisant la moyenne de ces équations sur l'échelle de temps court (échelle des microondes), tandis que celui pour les microondes néglige les variations temporelles des paramètres du plasma. Les sous-modèles sont couplés via la puissance microonde absorbée qui alimente le plasma en énergie, et via la densité d'électrons et la fréquence de collision qui affectent le champ électromagnétique. Ainsi, pendant la simulation de l'évolution du plasma, le modèle microonde est périodiquement appelé pour mettre à jour le profil de puissance absorbée, en utilisant le dernier profil calculé pour les paramètres plasma.

Dans les sections suivantes, nous décrirons d'abord la géométrie du modèle, puis les deux sous-modèles, et enfin les processus physico-chimiques à l'œuvre dans la décharge.

2.1.1 Géométrie simulée

La ligne microruban suspendue exposée en introduction et rappelée sur la figure 2.1 présente un rapport d'aspect $w_{line2}/(h_{gap}+h_{sms})$ de 3.9. Par conséquent, les effets de bords peuvent être négligés et la partie centrale longitudinale peut être considérée comme une ligne de transmission à plaque parallèle inhomogène, *i.e* dans laquelle deux matériaux cohabitent [34]. Nous proposons donc de la simuler en utilisant le domaine de simulation 2D décrit sur la figure 2.2 qui représente une partie de la ligne dans le plan (x, y).

Ce modèle 2D suppose que la géométrie est invariante dans la direction z, et que les caractéristiques du plasma et du champ microonde sont uniformes le long de z, mais dépendent toujours des variables x et y. Comme le mode dominant est le mode TM_x, les composantes de champ E_x, E_y et B_z ont été considérées. Notons que ce mode se comporte comme un mode quasi-TEM dans la limite des basses fréquences, sans plasma, et qu'aucun mode d'ordre supérieur n'est excité tant que $k_0(h_{gap}+h_{sms}) \ll 1$, avec k_0 le nombre d'onde dans le vide [34]. Cette condition est satisfaite à 3 GHz, notre fréquence d'intérêt.

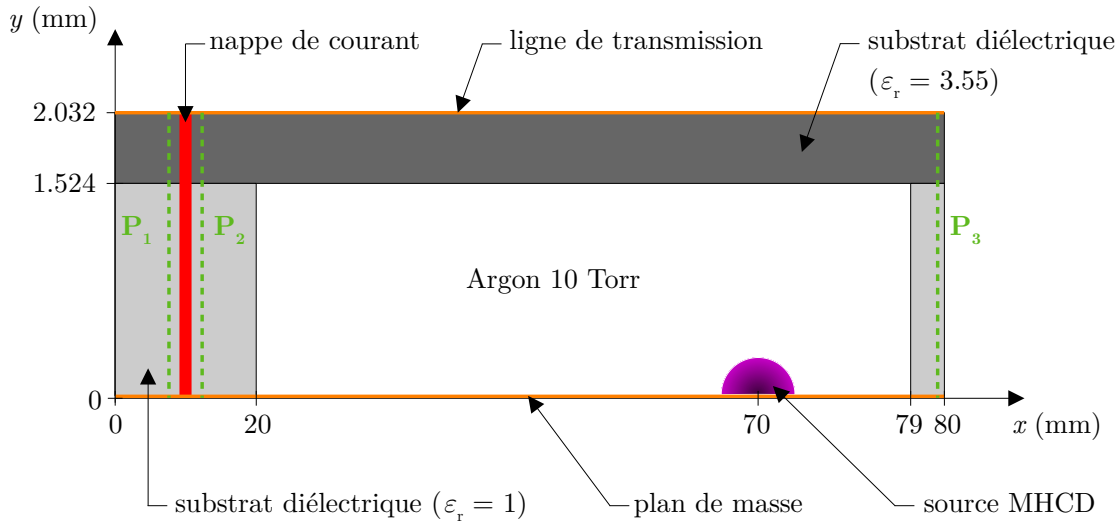


FIGURE 2.2 – Géométrie de la ligne microruban suspendue modélisée. Les parties métalliques sont représentées en orange et les parties diélectrique en gris.

Afin de réduire le temps de calcul, la longueur de la cavité à droite de la MHCD ($x > 70$ mm sur la figure 2.2) a été raccourcie à 9 mm. Des simulations ont été menées pour vérifier que cela ne modifiait pas les résultats numériques pour la gamme de puissances incidentes qui nous intéresse. La permittivité relative des deux supports diélectriques aux bords du dispositif a été fixée à 1 dans les simulations, au lieu de 3.55 dans l'expérience. Cette modification permet de reproduire l'adaptation d'impédance de la cavité à vide, qui est obtenue expérimentalement en changeant la largeur de la ligne imprimée.

La géométrie simulée ayant été exposée, nous allons maintenant pouvoir présenter les équations résolues pour simuler les dynamiques du plasma et du champ microonde.

2.1.2 Système d'équations résolu

2.1.2.1 Séparation des échelles

Comme nous l'avons introduit plus haut, l'échelle de temps associée à l'évolution ambipolaire du plasma est de l'ordre de la microseconde, et l'échelle de temps associée à l'évolution du champ microonde, pour des fréquences supérieures ou de l'ordre du gigahertz, est de l'ordre de la nanoseconde. Il est alors possible de décomposer la densité électronique, la vitesse moyenne, ainsi que le champ électrique, comme la somme deux composantes évoluant respectivement sur les échelles lente et rapide :

$$n_e = \bar{n}_e + \tilde{n}_e = \bar{n}_e \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{v}_e = \bar{\boldsymbol{v}}_e + \tilde{\boldsymbol{v}}_e \tag{2.3}$$

où la notation $\bar{x}$ indique l'évolution des grandeurs moyennes sur l'échelle des basses fréquences, $\tilde{x}$ l'évolution des perturbations sur l'échelle des hautes fréquences, et où on a supposé que la variation de densité engendrée par les microondes est négligeable devant la densité moyenne ($\bar{n}_e \gg \tilde{n}_e$). Notons qu'une telle approximation ne peut être faite ni sur le champ électrique, ni sur la vitesse. En effet, ces développements doivent être valables en tout point de l'espace, or, on peut s'attendre à trouver

des zones dans le plasma où le champ ambipolaire est faible et le champ microonde est fort, ce sont les zones de basse densité électronique, et des zones de fortes densités où c'est l'inverse. Par ailleurs, compte tenu de leur grande inertie ($m_i \gg m_e$), les ions ne subissent pas les perturbations engendrées par le champ microonde pour les fréquences considérées.

Pour réaliser la séparation des échelles, il faut introduire les développements ci-dessus dans l'équation de quantité de mouvement des électrons donnée au premier chapitre, dans laquelle on néglige le terme d'inertie $(\boldsymbol{v}_e \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_e$, dans l'approche du modèle collisionnel. Cette simplification revient à négliger les effets pondéromoteurs. En injectant les développements écrits plus haut dans l'équation de conservation de quantité de mouvement ainsi simplifiée, il vient :

$$m_e \bar{n}_e \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}_e}{\partial t} = -e\bar{n}_e \left(\bar{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{E}}\right) - \boldsymbol{\nabla} \bar{n}_e k_B T_e - m_e \bar{n}_e \nu_m \left(\bar{\boldsymbol{v}}_e + \tilde{\boldsymbol{v}}_e\right) \tag{2.4}$$

où l'on a :

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_e}{\partial t} \ll \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}_e}{\partial t} \tag{2.5}$$

puisque $\tilde{\boldsymbol{v}}_e$ évolue plus rapidement que $\bar{\boldsymbol{v}}_e$. La difficulté consiste alors essentiellement à traiter les termes qui mélangent les deux échelles de temps, mais compte tenu du fait que la dynamique microonde s'établit sur une échelle de temps bien plus courte que celle du plasma, et que la moyenne temporelle des perturbations est nulle, le théorème de mélange des phases assure alors que la moyenne temporelle sur l'échelle de temps court d'un produit de variables $\bar{x}\tilde{x}$ se réduit à :

$$\langle \bar{x}\tilde{x} \rangle_t \;=\; \frac{1}{\tilde{T}} \int_{-\tilde{T}/2}^{+\tilde{T}/2} \bar{x}\tilde{x}\, \mathrm{d}t \;=\; \frac{\bar{x}}{\tilde{T}} \int_{-\tilde{T}/2}^{+\tilde{T}/2} \tilde{x}\, \mathrm{d}t \;=\; \bar{x} \langle \tilde{x} \rangle_t \;=\; 0 \tag{2.6}$$

si bien que moyennée sur l'échelle des hautes fréquences, l'équation de la dynamique se récrit, après réorganisation des termes, sous la forme :

$$\bar{n}_e \bar{\boldsymbol{v}}_e = -\bar{n}_e \frac{e}{m_e \nu_m} \bar{\boldsymbol{E}} - \frac{k_B T_e}{m_e \nu_m} \boldsymbol{\nabla} \bar{n}_e \tag{2.7}$$

qui est l'équation de dérive-diffusion déjà introduite dans le premier chapitre. En soustrayant cette équation à l'équation originelle (2.4), on obtient alors l'équation de la dynamique sur l'échelle de temps court :

$$m_e \bar{n}_e \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}_e}{\partial t} = -e\bar{n}_e \tilde{\boldsymbol{E}} - m_e \bar{n}_e \nu_m \tilde{\boldsymbol{v}}_e \tag{2.8}$$

Il reste alors à compléter ce jeu d'équations décrivant la dynamique des électrons, par l'équation d'énergie pour les électrons, les équations de continuité pour toutes les espèces, et l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour les ions. Notons que par la suite, la notation spécifique introduite pour les variables moyennes sera oubliée, et nous noterons simplement $x = \bar{x}$.

2.1.2.2 Modèle plasma

L'évolution spatio-temporelle de chaque espèce, à savoir les électrons (e), les ions (i) et les neutres excités (n), est décrite par un ensemble d'équations fluides, qui ont été développées au premier chapitre dans le cas le plus général. Il reste à les adapter pour le problème qui nous occupe, et en particulier à préciser la nature des termes source. Ainsi, nous résolvons d'abord l'équation de continuité pour chaque espèce :

$$\frac{\partial n_{e,i,n}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (n_{e,i,n} \boldsymbol{v}_{e,i,n}) = S_{e,i,n} + S^0_{e,i} \tag{2.9}$$

où n est la densité de particules, $\boldsymbol{v}$ est la vitesse moyenne, S est le terme source net de particules dû aux réactions chimiques et $S^0_{e,i}$ est le terme source fixe que nous avons inclus pour les électrons et les ions afin de simuler la MHCD (*i.e.* la micro-décharge utilisée pour pré-ioniser le milieu). Pour les électrons, cette équation est combinée avec l'équation de dérive-diffusion développée plus haut :

$$n_e \boldsymbol{v}_e \;=\; -n_e \mu_e \boldsymbol{E} - \frac{\mu_e}{e} \boldsymbol{\nabla}(n_e T_e) \tag{2.10}$$

ainsi que l'équation d'énergie qui a été donnée dans le premier chapitre, et pour laquelle nous supposons que l'énergie cinétique dirigée $\mathcal{U}_e^{macro.}$ est négligeable devant l'énergie d'agitation thermique $\mathcal{U}_e^{micro.}$. En supposant de plus le tenseur de pression isotrope, cette dernière se réduit à :

$$\mathcal{U}_e^{micro.} \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\boldsymbol{P}}}_e\right) \;=\; \frac{3}{2} p_e \tag{2.11}$$

où p_e est la pression du fluide électronique. Bien qu'elle ne soit formellement valable que pour une fonction de distribution maxwellienne, on peut introduire l'équation d'état $p_e = n_e T_e$, où T_e est la température électronique en unité d'énergie. L'équation d'énergie pour les électrons se réduit alors à :

$$\frac{3}{2}\frac{\partial (n_e T_e)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} n_e \boldsymbol{v}_e T_e + \boldsymbol{q}_e\right) \;=\; n_e P_e - e n_e \boldsymbol{v}_e \cdot \boldsymbol{E} - C + \frac{3}{2} S^0_e T^0_e \tag{2.12}$$

et l'équation de fermeture pour le flux thermique de conduction s'écrit :

$$\boldsymbol{q}_e \;=\; -\frac{5\mu_e}{2e} n_e T_e \boldsymbol{\nabla} T_e \tag{2.13}$$

où μ_e est la mobilité des électrons, P_e est la puissance microonde absorbée par électron obtenue à partir du modèle microonde, C la densité de puissance nette perdue par les électrons dans les collisions et les réactions, et T^0_e est une température électronique fixe pour les électrons générés par la MHCD.

Pour les ions, nous utilisons l'équation de la quantité de mouvement incluant les termes d'inertie (*i.e.* le terme $(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_i$) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_i + \nu_{in} \boldsymbol{v}_i = \frac{q_i}{m_i} \boldsymbol{E} - \frac{e}{m_i n_i} \boldsymbol{\nabla}(n_i T_i) \tag{2.14}$$

où ν_{in} est la fréquence de transfert de quantité de mouvement avec le gaz neutre (qui tient compte des effets d'ionisation), q_i la charge de l'ion, m_i la masse de l'ion, et T_i la température des ions supposée

uniforme et égale à la température du gaz, qui est en l'occurrence prise égale à 300 K. Le flux des espèces neutres est décrit par une équation de diffusion similaire à l'équation (2.10) mais sans terme de dérive électrique.

Ces équations fluides sont couplées à l'équation de Poisson, qui est résolue à la fois dans le plasma et dans les diélectriques :

$$\epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\epsilon_r \boldsymbol{E}) = \sum_i q_i n_i - e n_e + \rho_w \tag{2.15}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide, ϵ_r la permittivité relative du milieu, égale à 1 dans le plasma, tandis que ρ_w représente les charges de surface déposées par le plasma sur les parois diélectriques. Le modèle plasma est résolu par la méthode semi-implicite des volumes finis en utilisant un maillage spatial rectangulaire uniforme.

2.1.2.3 Modèle microonde

L'évolution spatio-temporelle du champ microonde s'obtient en résolvant les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère [32] :

$$\boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{J}}_{exc} - e n_e \tilde{\boldsymbol{v}}_e + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{2.17}$$

où $\tilde{\boldsymbol{E}}$ et $\tilde{\boldsymbol{B}}$ sont les champs électrique et magnétique microonde, n_e la densité électronique moyenne obtenue via le modèle plasma, $\tilde{\boldsymbol{v}}_e$ la vitesse des électrons sur l'échelle rapide, $\tilde{\boldsymbol{J}}_{exc}$ un courant externe qui excite les microondes et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Le second terme du membre de droite de l'équation (2.17) est une approximation de la densité de courant du plasma, négligeant la contribution des ions (car $m_i \gg m_e$) et les oscillations de la densité électronique ($\tilde{n}_e \ll n_e$). La vitesse des électrons sur l'échelle rapide est donnée par l'équation de quantité de mouvement locale, développée à la section 2.1.2.1 :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \tilde{\boldsymbol{E}} - \nu_m \tilde{\boldsymbol{v}}_e \tag{2.18}$$

où ν_m est la fréquence de transfert de quantité de mouvement avec le gaz neutre. Cet ensemble d'équations est résolu par la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD), en utilisant un maillage de Yee qui coïncide avec le maillage du modèle plasma.

Une nappe de courant située sur le bord gauche du domaine de simulation (voir figure 2.2) permet d'exciter le champ microonde par le truchement du terme $\tilde{\boldsymbol{J}}_{exc}$ dans l'équation (2.17). Celle-ci génère un champ électrique dans la direction y qui se propage de part et d'autre de la nappe, tout en induisant d'autres composantes de champ et en interférant avec l'onde réfléchie par le plasma. L'amplitude de $\tilde{\boldsymbol{J}}_{exc}$ est fixée à une valeur arbitraire, ce qui implique que les amplitudes de $\tilde{\boldsymbol{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{B}}$, et $\tilde{\boldsymbol{v}}_e$ sont également arbitraires et doivent être normalisées par la suite. Cette opération est réalisée en imposant une puissance incidente fixe, comme suit. Tout d'abord, il convient de déterminer l'amplitude de l'onde réfléchie. Les champs électriques $\tilde{E}^y_-$ à gauche de la nappe de courant et $\tilde{E}^y_+$ à droite (*cf.* figure 2.2) sont la superposition d'un champ incident produit par la nappe et d'un champ réfléchi par le plasma. Ils s'écrivent donc respectivement :

$$\tilde{E}^y_+(x,y,t) = E_{inc}(y)\cos\left(\beta[x-\xi]-\omega t\right) + E_{refl}(y)\cos\left(-\beta[x-\xi]-\omega t+\varphi\right) \quad (2.19)$$

$$\tilde{E}^y_-(x,y,t) = E_{inc}(y)\cos\left(-\beta[x-\xi]-\omega t\right) + E_{refl}(y)\cos\left(-\beta[x-\xi]-\omega t+\varphi\right) \quad (2.20)$$

où ξ désigne l'abscisse de la nappe de courant, φ le déphasage temporel entre l'onde réfléchie et l'onde incidente et où β est la constante de propagation du mode principal dans la ligne, donnée dans la limite des basses fréquences par [34] :

$$\beta \approx k_0\sqrt{\frac{h_{gap}+h_{sms}}{h_{gap}+h_{sms}/\epsilon_r}} \quad (2.21)$$

i.e. $\beta \approx 1.1k_0$ pour notre problème, avec k_0 le nombre d'onde dans le vide. Les champs électriques $\tilde{E}^y_1$ en $x=\xi-\delta$ (*i.e* dans le plan P_1 à gauche de la nappe de courant) et $\tilde{E}^y_2$ en $x=\xi+\delta$ (*i.e* dans le plan P_2 à droite de la nappe de courant) s'écrivent alors :

$$\tilde{E}^y_1(y,t) = E_{inc}(y)\cos\left(\beta\delta-\omega t\right) + E_{refl}(y)\cos\left(-\beta\delta-\omega t+\varphi\right) \quad (2.22)$$

$$\tilde{E}^y_2(y,t) = E_{inc}(y)\cos\left(\beta\delta-\omega t\right) + E_{refl}(y)\cos\left(\beta\delta-\omega t+\varphi\right) \quad (2.23)$$

La combinaison de ces champs donne alors accès à l'amplitude du champ électrique réfléchi :

$$E^2_{refl}(y) = \frac{1}{2\sin^2(\beta\delta)}\left\langle\left(\tilde{E}^y_2(y,t)-\tilde{E}^y_1(y,t)\right)^2\right\rangle_t \quad (2.24)$$

où la notation $\langle.\rangle_t$ désigne la moyenne temporelle sur la période microonde. En appliquant la même méthode pour le champ magnétique, il vient également l'expression :

$$B^2_{refl}(y) = \frac{1}{2\cos^2(\beta\delta)}\left\langle\left(\tilde{B}^z_1(y,t)+\tilde{B}^z_2(y,t)\right)^2\right\rangle_t \quad (2.25)$$

La puissance réfléchie moyennée sur le temps se déduit alors en intégrant le vecteur de Poynting réfléchi sur la section transverse de la ligne de transmission :

$$P_{refl} = \frac{\alpha L_z}{2\mu_0}\int E_{refl}(y)B_{refl}(y)\,\mathrm{d}y \quad (2.26)$$

où L_z est la largeur effective de la ligne dans la direction z, qui est de l'ordre de la largeur de la ligne de transmission, et α est un facteur de normalisation pour corriger l'amplitude arbitraire du courant d'excitation. Enfin, en soustrayant l'expression (2.26) à la puissance nette passant par le plan P_2, on obtient une expression pour la puissance incidente qui permet de déterminer le facteur de normalisation α :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{L_z}{\mu_0 P_{inc}}\int\left(\left\langle\tilde{E}^y_2(y,t)\tilde{B}^z_2(y,t)\right\rangle_t - \frac{1}{2}E_{refl}(y)B_{refl}(y)\right)\mathrm{d}y \quad (2.27)$$

où P_{inc} est la puissance incidente, un des principaux paramètres d'entrée à fixer dans nos simulations. Une fois le facteur de normalisation connu, la puissance microonde absorbée par le plasma peut être exprimée et s'écrit :

$$P_{abs} = L_z \int\int P_e(x,y) n_e(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2.28}$$

où l'intégration est réalisée sur le domaine du plasma et où :

$$P_e = \alpha \left\langle -e\tilde{\boldsymbol{E}} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_e \right\rangle_t \tag{2.29}$$

est la moyenne temporelle de la puissance absorbée par électron, qui apparait dans l'équation d'énergie (2.12). Pour finir, la puissance transmise P_{trans} est calculée en intégrant le vecteur de Poynting sur le plan P_3 à droite du domaine. Les simulations reproduisent alors fidèlement la conservation de l'énergie en régime permanent $P_{inc} = P_{refl} + P_{abs} + P_{trans}$. Pour une cohérence optimale, nous avons calibré la valeur de L_z en utilisant des simulations tridimensionnelles de la ligne sans plasma, réalisées avec le logiciel commercial Ansys HFSS, qui nous ont permis d'accéder à l'amplitude du champ électrique $\tilde{E}_{3D}$ à la position de la MHCD en fonction de la puissance d'entrée P_{3D}. La longueur L_z a ensuite été ajustée de manière à reproduire la correspondance entre puissance incidente et champ :

$$\frac{\mu_0 \langle \tilde{E}^2 \rangle_t}{L_z \int \langle \tilde{E}^y \tilde{B}^z \rangle_t \mathrm{d}y} = \frac{\langle \tilde{E}_{3D}^2 \rangle_t}{P_{3D}} \tag{2.30}$$

Nous avons alors trouvé une valeur de $L_z = 7.34$ mm, que nous avons fixée dans les simulations (la valeur réelle de la ligne microruban est de $W_{line1} = 8$ mm). Pour finir, il nous reste à exposer les conditions initiales et les conditions aux limites utilisées dans les simulations.

2.1.2.4 Conditions initiales, conditions aux limites et maillage

Dans cette section nous allons préciser les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites utilisées dans le code numérique. En ce qui concerne les microondes, les conditions aux limites aux frontières métalliques 2.2) sont des conditions de conducteurs parfaits, et les conditions aux limites aux frontières ouvertes (à gauche et à droite du domaine) sont des conditions d'absorption de Mur du premier ordre [35], qui permettent d'empêcher tout phénomène de réflexion sur les bords du maillage. La valeur initiale du champ est alors prise égale à zéro sur tout le domaine de calcul.

Les conditions aux limites pour les équations fluides sont déduites des expressions physiques pour les flux aux parois [32]. Pour l'équation de Poisson, les potentiels sont fixes aux parois métalliques et suivent une condition de Neumann aux frontières ouvertes (à gauche et à droite du domaine).

La MHCD quant à elle n'est pas simulée de manière auto-cohérente, mais est modélisée par l'ajout d'un terme source localisé $S_{e,i}^0$ dans les équations de continuité du plasma (*cf.* équation (2.9)). Le terme source en question a un profil gaussien centré à $x = 70$ mm sur la figure 2.2, avec une largeur de 1 mm dans la direction x (qui correspond à la largeur du trou de la MHCD), et une hauteur de 0.3 mm dans la direction y, de sorte que les électrons soient injectés au voisinage immédiat du plan de masse. Les profils de densités d'espèces, de potentiel électrostatique, de vitesses et de températures sont alors établis de manière auto-cohérente par le système d'équations fluides pour le plasma, en l'absence du champ microonde, jusqu'à atteindre l'état stationnaire. Ces profils sont ensuite utilisés comme conditions initiales pour la simulation de l'interaction microonde/plasma dans le limiteur. L'amplitude du terme source $S_{e,i}^0$ a été prise égale à 1.35×10^{23} m^{-3}.s^{-1} afin que le claquage microonde se produise

pour la même puissance incidente qu'en expérience.

Une étude de convergence numérique a été réalisée afin de déterminer les valeurs appropriées pour les pas de maillage Δx et Δy, le pas de temps Δt, et l'intervalle de temps Δt_{MW} entre deux mises à jour successives de la puissance microonde. Les valeurs $\Delta x = 200$ μm, $\Delta y = 30$ μm, $\Delta t = 10$ ns, et $\Delta t_{MW} = 100$ ns sont suffisantes pour limiter les erreurs numériques à quelques pourcents.

Les modèles physique et numérique ayant été exposés, il nous reste à discuter de l'obtention des paramètres de transport pour les différentes espèces, ainsi que des réactions chimiques qui se produisent au sein du plasma.

2.1.3 Cinétique chimique de l'Argon

2.1.3.1 Niveaux d'énergie et chimie de l'Argon

Dans un atome, la répartition des électrons du cortège autour du noyau peut être appréhendée en utilisant un modèle en couches, caractérisées par le nombre quantique principal n qui est un entier naturel non nul. Ces couches peuvent à leur tour être subdivisées en sous-couches désignées par le nombre quantique l qui prend ses valeurs entre 0 et $n-1$. Chaque valeur de l est associée à une lettre, les quatre premières valeurs de l, à savoir 0, 1, 2 et 3 étant associée aux lettres s, p, d et f. Chaque sous-couche peut alors contenir $4l+2$ électrons de sorte que la configuration électronique d'un élément X dans son état fondamental, *i.e.* son état de plus basse énergie, s'écrit :

$$X : nl^{4l+2} \tag{2.31}$$

Dans le cas de l'Argon , il vient alors :

$$Ar : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \tag{2.32}$$

où les nombres en exposant désignent le nombre d'électrons par sous-couche, la somme de tous les exposants étant ici égale à 18, *i.e.* au nombre total d'électrons d'un atome d'Argon. La couche $3p^6$ constitue la dernière couche, ou couche de valence de l'atome. Un électron de cette couche peut alors être excité et promu dans une des couches supérieures, les deux premières configurations excitées de l'Argon étant, par exemple, les configurations $3p^5 4s$ et $3p^5 4p$ (voir figure 2.3). Chaque configuration donne naissance à un certain nombre de niveaux d'énergie, c'est la *structure fine* de l'atome. Ces niveaux sont désignés par des notations provenant de la physique atomique et de la spectroscopie, les trois principales sont les notations de Racah, Russell-Saunders et Paschen. C'est cette dernière notation que nous retiendrons dans la suite du propos pour désigner les différents niveaux considérés. Les différentes configurations électroniques ont été représentées sous forme de blocs sur la figure 2.3, chaque bloc contenant plusieurs niveaux d'énergie, le bloc $3p^5 4p$ contenant par exemple, dix niveaux différents allant du niveau $2p_{10}$ (à 13.07 eV) au niveau $2p_1$ (à 13.59 eV). Chaque niveau est affublé d'un poids statistique ou facteur de dégénérescence g, qui est un entier naturel. Il signifie que le niveau pourrait être séparé en g niveaux d'énergie distincts si on levait la dégénérescence, opération qui peut être réalisée en soumettant les états excités à un champ magnétique uniforme. On donne alors naissance à la *structure hyperfine*, et les nouveaux niveaux qui apparaissent peuvent alors également être dégénérés, etc. Au delà de ces considérations, ces poids statistiques interviennent également dans la relation de Boltzmann, qui donne le rapport des densités de deux niveaux d'énergie i et j :

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{\Delta\mathcal{E}_{ji}}{k_B T_e}\right) \tag{2.33}$$

où $\Delta\mathcal{E}_{ji}$ est l'énergie séparant les deux niveaux i et j, et où g_i et g_j sont les poids statistiques respectifs des deux niveaux. Dans le cas où $\Delta\mathcal{E}_{ji} \leqslant k_B T_e$, qui est souvent vérifié pour les plasmas de décharge, on voit que les rapports de densités de niveaux excités se réduisent aux rapports des poids statistiques. Comme toute distribution d'équilibre, la relation 2.33 n'est formellement valable qu'à l'équilibre thermodynamique.

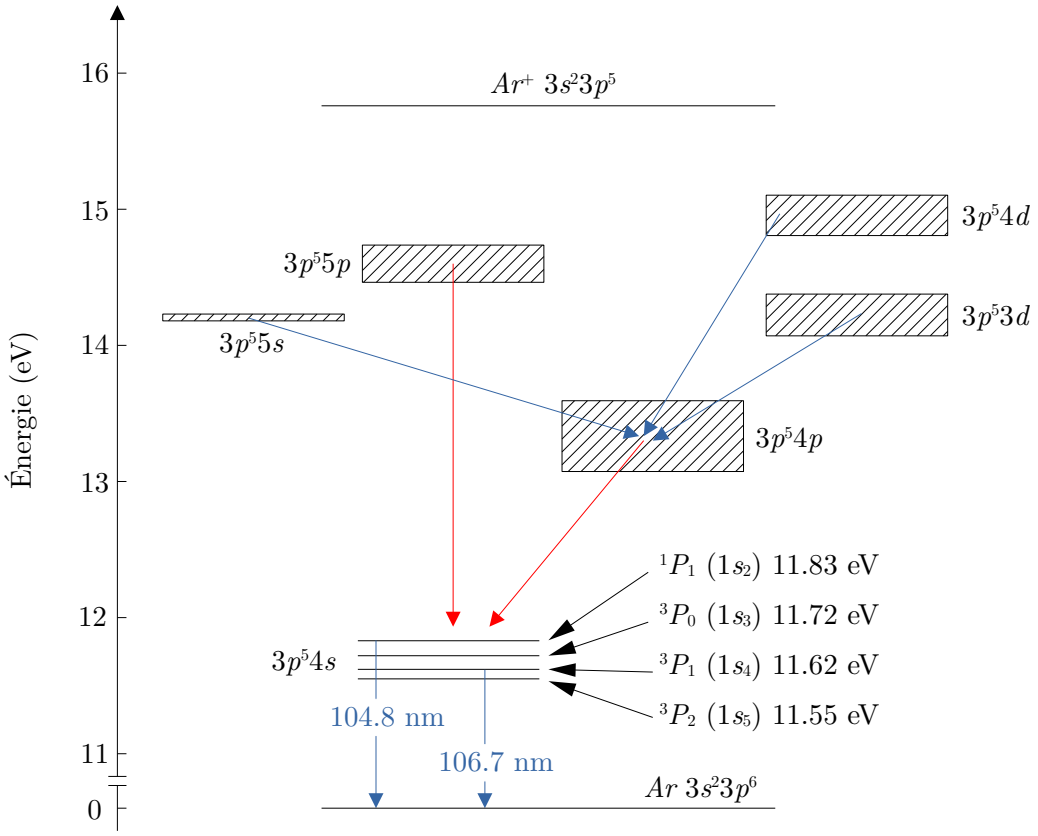


FIGURE 2.3 – Diagramme énergétique détaillé de l'Argon [36]

Les quatre niveaux issus de la configuration électronique $3p^5 4s$ ont été détaillés sur la figure 2.3. Parmi ceux-ci on distingue les niveaux rayonnants $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$ qui peuvent subir une désexcitation radiative, l'atome retourne alors à son niveau fondamental en émettant un photon, des niveaux métastables $Ar(1s_5)$ et $Ar(1s_3)$ qui ne peuvent pas subir une telle désexcitation. Les premiers ont des durées de vie relativement courtes, de l'ordre de la nanoseconde, encore que celles-ci puissent être rallongées si le rayonnement électromagnétique émis lors de la désexcitation est piégé dans le gaz, *i.e.* si les photons émis sont réabsorbés par des atomes au niveau fondamental. Les seconds ont des durées de vie très longues pouvant aller jusqu'à la seconde.

Un atome d'Argon peut-être amené à passer d'un niveau d'énergie à un autre, principalement lors de processus impliquant les électrons présents dans le plasma. La détermination d'un schéma cinétique est essentielle pour rendre compte des réactions qui ont lieu dans le plasma et par conséquent de sa dynamique. Tous les niveaux d'énergie ne pouvant pas être décrits du fait de leur nombre, il est alors nécessaire de proposer un schéma cinétique simplifié afin de simuler l'évolution du plasma.

2.1.3.2 Cinétique simplifiée

Afin de déterminer un schéma cinétique simple de l'Argon, on propose de ne considérer que les niveaux d'énergie issus de la configuration électronique $3p^5 4s$, en regroupant les deux niveaux métastables $Ar(1s_5)$ et $Ar(1s_3)$ au sein d'un niveau métastable effectif Ar^*_m et les deux niveaux rayonnants $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$ au sein d'un niveau rayonnant effectif Ar^*_r. Cette simplification est motivée à la fois par la nécessaire réduction du nombre d'espèces traitées (pour simplifier la résolution numérique du

problème), mais également par les données disponibles pour caractériser la production, la destruction et le transport de ces espèces, que nous discuterons ci-après. La cinétique de tous les niveaux supérieurs n'est alors pas décrite, cependant, les données de base pour le calcul des taux de création des niveaux Ar_m^* et Ar_r^* prendront en compte le cascading depuis les niveaux supérieurs, *i.e.* la création des niveaux Ar_m^* et Ar_r^*, due à la désexcitation des niveaux supérieurs. Le détail du calcul des taux de réaction sera présenté ci-dessous. Finalement, compte tenu de ces simplifications, on se propose de retenir le schéma cinétique représenté sur la figure 2.4.

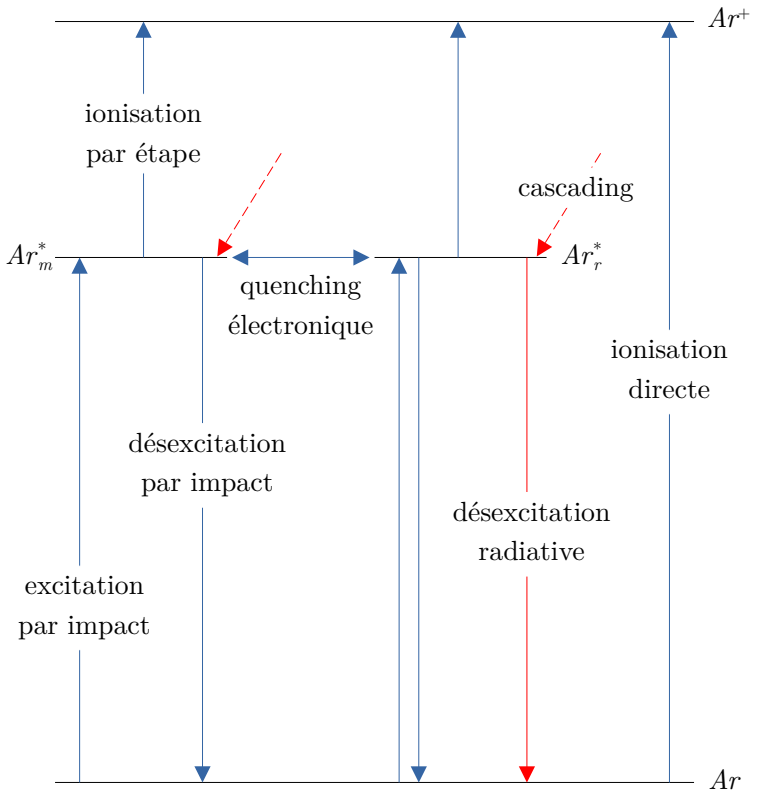


FIGURE 2.4 – Schéma cinétique simplifié de l'Argon incluant les métastables et les rayonnants.

Les niveaux Ar_m^* et Ar_r^* peuvent alors subir trois classes de processus : des processus de création (excitation par impact depuis le fondamental ou cascading depuis les niveaux supérieurs), de destruction (désexcitation par impact ou radiative, ionisation par étape) et de quenching. L'ionisation directe depuis le niveau fondamental est également prise en compte.

#	Réaction	Taux de réaction	Ref.
	Ionisation directe		
1	$e + Ar \mapsto 2e + Ar^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[37]
	Excitation par impact électronique		
2	$e + Ar \mapsto e + Ar_m^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[37]
3	$e + Ar \mapsto e + Ar_r^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[38]
	Désexcitation		
4	$e + Ar_m^* \mapsto e + Ar$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
5	$e + Ar_r^* \mapsto e + Ar$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]

Suite sur la page suivante

Table 2.1 – suite de la page précédente

#	Réaction	Taux de réaction	Ref.
	Ionisation par étape		
6	$e + Ar_m^* \mapsto 2e + Ar^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[40–42]
7	$e + Ar_r^* \mapsto 2e + Ar^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[40–42]
	Quenching		
8	$e + Ar_m^* \mapsto e + Ar_r^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
9	$e + Ar_r^* \mapsto e + Ar_m^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
	Désexcitation radiative		
10	$Ar_r^* \mapsto Ar + h\nu$	5.85×10^5 s^{-1}	[43–45]
	Ionisation par atomes excités		
11	$Ar_m^* + Ar_m^* \mapsto e + Ar_2^+$	$0.7 \times 6.4 \times 10^{-16}$ $m^3.s^{-1}$	[46]
12	$Ar_m^* + Ar_r^* \mapsto e + Ar_2^+$	$0.7 \times 6.4 \times 10^{-16}$ $m^3.s^{-1}$	[46]
13	$Ar_r^* + Ar_r^* \mapsto e + Ar_2^+$	$0.7 \times 6.4 \times 10^{-16}$ $m^3.s^{-1}$	[46]
14	$Ar_m^* + Ar_m^* \mapsto e + Ar + Ar^+$	$0.3 \times 6.4 \times 10^{-16}$ $m^3.s^{-1}$	[46]
15	$Ar_m^* + Ar_r^* \mapsto e + Ar + Ar^+$	$0.3 \times 6.4 \times 10^{-16}$ $m^3.s^{-1}$	[46]
16	$Ar_r^* + Ar_r^* \mapsto e + Ar + Ar^+$	$0.3 \times 6.4 \times 10^{-16}$ $m^3.s^{-1}$	[46]
	Formation des ions moléculaires		
17	$Ar^+ + 2Ar \mapsto Ar_2^+ + Ar$	2.5×10^{-43} $m^6.s^{-1}$	[47]
	Recombinaison dissociative		
18	$e + Ar_2^+ \mapsto Ar + Ar_m^*$	$7.35 \times 10^{-14} \times T_e^{-2/3}$ $m^3.s^{-1}$	[48]

TABLE 2.1 – Ensemble des réactions chimiques pour l'Argon prises en compte dans les simulations.

Ces réactions doivent, de plus, être complétées par des processus impliquant les collisions à deux ou trois corps entre les espèces neutres, et finalement, on obtient le schéma réactionnel résumé dans le tableau 2.1. Les taux des réactions 11 à 18 proviennent de mesures expérimentales. Il reste à discuter de l'obtention des taux pour les réactions 1 à 9 impliquant la population électronique, et à justifier le taux utilisé pour la réaction de désexcitation radiative. Les deux sections suivantes traitent des hypothèses et des méthodes utilisées afin d'obtenir les taux de réaction ainsi que les coefficients de transport des ions et des espèces excitées. Elles peuvent être sautées sans que cela nuise à la compréhension de la suite du discours.

2.1.4 Résolution de l'équation de Boltzmann

La détermination des paramètres de transport et des taux de réaction nécessite de se doter d'une fonction de distribution en énergie pour la population électronique qui peut être obtenue par résolution de l'équation de Boltzmann, ce qui le cas échéant, nécessite d'expliciter le second membre de ladite équation, à savoir l'opérateur de collisions. Nous ne rentrerons pas ici dans le détail des formules, mais ce dernier dépend de la fonction de distribution ainsi que des sections efficaces qui caractérisent les différents processus collisionnels retenus au sein du plasma [49].

Ainsi, la résolution de l'équation de Boltzmann a été réalisée à l'aide du solveur BOLSIG+ [49] à partir de jeux de sections efficaces disponibles sur la base de données LXCat. Certains de ces jeux ont été obtenus via des calculs de mécanique quantique, c'est le cas de la base de données BSR [39], d'autres en compilant des données expérimentales, c'est par exemple le cas de la base de données de Morgan [37]. Tous sont complets, ce qui signifie qu'ils ont été ajustés afin de reproduire les bons paramètres de transport et de production des électrons, mesurés dans des expériences de « swarm » [50]. Un certain nombre d'hypothèses sont alors nécessaires pour la résolution, hypothèses que nous allons discuter

dans les sections ci-dessous.

2.1.4.1 Sections efficaces considérées

Le jeu complet de sections efficaces que nous avons retenu pour le calcul des paramètres d'entrée est celui de Morgan, qui contient quatre sections efficaces [51] : (1) une section efficace pour les collisions élastiques, (2) une section efficace pour l'excitation totale des niveaux « interdits » (*i.e.* les niveaux qui ne peuvent pas subir de désexcitation radiative), (3) une section efficace pour l'excitation totale des niveaux « autorisés » (*i.e.* les niveaux qui peuvent subir une désexcitation radiative), et (4) une section efficace d'ionisation directe. Ces quatre sections efficaces sont tracées sur la figure 2.5 pour l'Argon.

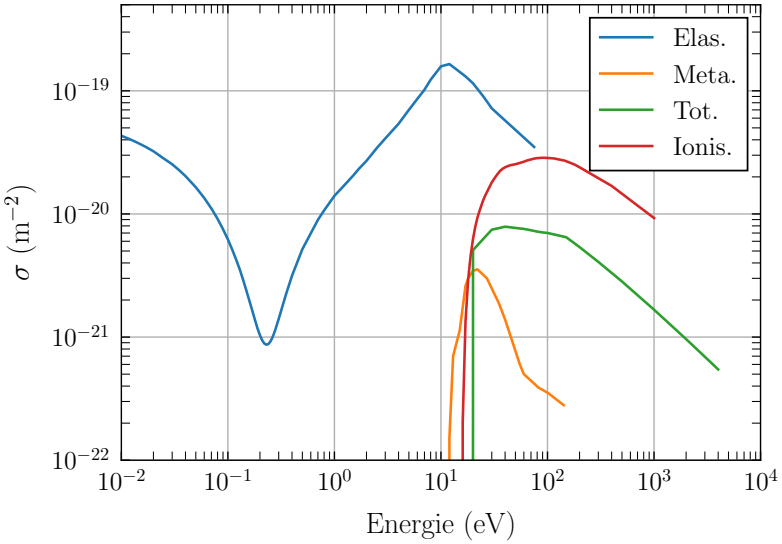


FIGURE 2.5 – Sections efficaces de Morgan pour l'Argon.

Comme les seuls niveaux « interdits » au sens de Morgan sont les niveaux métastables $Ar(1s_5)$ et $Ar(1s_3)$ (tous les autres niveaux pouvant se désexciter radiativement), la deuxième section efficace du jeu correspond en fait à la section efficace d'excitation de notre niveau métastable effectif Ar^*_m. Elle tient compte à la fois de l'excitation directe par impact électronique et indirecte par cascading depuis les niveaux supérieurs (elle est cohérente avec celle donnée par Ferreira *et. al.* [46], qui tient compte des deux phénomènes).

La troisième section efficace en revanche, prend en compte l'excitation de tous les niveaux pouvant subir une desexcitation radiative, donc des niveaux rayonnants $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$ mais également de tous les niveaux supérieurs. Comme on ne souhaite pas que l'excitation de ces niveaux supérieurs soit considérée comme l'excitation du niveau rayonnant effectif, on préfèrera à cette section efficace celles mesurées par McConkey *et. al.* [38]. Ces derniers ont en effet mesuré une section efficace d'excitation apparente (*i.e.* prenant en compte l'excitation directe par impact et par cascading) pour les deux niveaux rayonnants $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$.

Les sections efficaces utilisées pour calculer les taux de quenching proviennent quant à elles de la base de données BSR [39]. Ces sections efficaces permettent de décrire les équilibres qui apparaissent entre les quatre niveaux fondamentaux $Ar(1s_5)$, $Ar(1s_3)$, $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$:

$$e + Ar(1s_5) \rightleftharpoons e + Ar(1s_4) \tag{2.34}$$
$$e + Ar(1s_5) \rightleftharpoons e + Ar(1s_2) \tag{2.35}$$
$$e + Ar(1s_3) \rightleftharpoons e + Ar(1s_4) \tag{2.36}$$
$$e + Ar(1s_3) \rightleftharpoons e + Ar(1s_2) \tag{2.37}$$

Pour finir, les sections efficaces d'ionisation par étape des niveaux fondamentaux $Ar(1s_5)$, $Ar(1s_3)$, $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$ sont obtenues en utilisant les formules analytiques développées par Deutsch [40–42]. Des précisions pour l'obtention de ces sections efficaces sont données dans l'annexe B.

Comme on peut le voir, les trois derniers jeux de sections efficaces (McConkey, BSR et Deutsch) permettent de décrire des réactions entre les quatre niveaux fondamentaux $Ar(1s_5)$, $Ar(1s_3)$, $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$. Or comme notre schéma cinétique simplifié ne considère que les niveaux métastable et résonnant effectifs Ar^*_m et Ar^*_r, il faudra donc post-traiter les taux de réaction impliquant les niveaux fondamentaux, afin d'obtenir les taux de réaction impliquant les niveaux effectifs.

Pour l'heure, nous allons présenter la méthode et les hypothèses utilisées afin d'obtenir les données d'entrée pour la simulation, à partir des sections efficaces données ci-dessus, et par résolution de l'équation de Boltzmann.

2.1.4.2 Fonctions de distribution et résolution de l'équation de Boltzmann

La première étape dans l'obtention des paramètres d'entrée pour la simulation consiste à se donner une fonction de distribution en énergie pour les électrons. Deux options sont possibles :

- imposer une fonction de distribution Maxwellienne, dès lors, l'équation de Boltzmann n'est pas résolue, et BOLSIG+ calcule les taux de réaction et les coefficients de transport pour cette fonction de distribution.

- laisser BOLSIG+ déterminer la fonction de distribution en résolvant l'équation de Boltzmann. La forme de la fonction de distribution ainsi que les taux de réaction vont alors fortement dépendre des hypothèses faites lors de la résolution.

La fonction de distribution maxwellienne constitue le cas extrême d'un plasma à l'équilibre thermodynamique. Le deuxième cas extrême consiste à considérer une population électronique hors équilibre thermodynamique, gouvernée par une fonction de distribution que nous dénommerons « champ local » par opposition à la maxwellienne.

La figure 2.6 montre les deux fonctions de distribution en énergie obtenues dans l'Argon à 300 K pour une énergie moyenne de 4 eV. S'agissant de lois de probabilités, comme nous l'avons dit au premier chapitre, elles donnent la probabilité de trouver un électron à une énergie donnée. L'intégrale de ces fonctions de zéro à l'infini est par conséquent égale à un. Ces deux fonctions de distribution ont des effets très différents sur la cinétique du plasma. Considérons la réaction d'ionisation directe de l'Argon, qui possède un seuil énergétique de 15.76 eV. La distribution champ local sera moins favorable à ce processus que la Maxwellienne puisque la probabilité de trouver dans le plasma un électron possédant une énergie supérieure ou égale à 15.76 eV est quasiment nulle, comme le montre la figure 2.6.

En ce qui concerne la résolution de l'équation de Boltzmann, plusieurs hypothèses sont possibles :

- prise en compte d'un champ DC ou AC

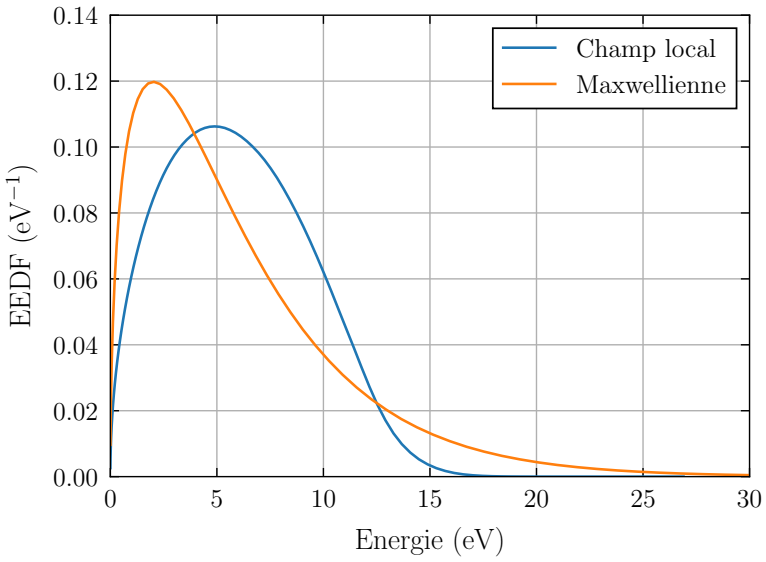


FIGURE 2.6 – Deux cas extrêmes de fonctions de distribution, à l'équilibre (Maxwellienne), et hors équilibre thermodynamique (champ local), calculées dans l'Argon à 300 K, pour une énergie moyenne de 4 eV. La fonction champ local a été calculée pour un champ extérieur DC.

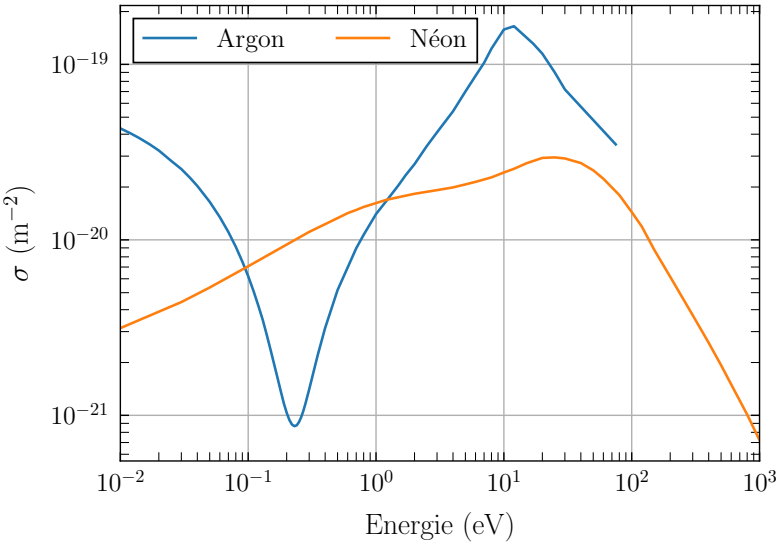


FIGURE 2.7 – Sections efficaces de collisions élastiques de Morgan pour l'Argon et le Néon. La section efficace pour l'Argon admet un minimum local en $E/N = 0.23$ Td, dit minimum de Ramsauer-Townsend.

- résolution pour un plasma magnétisé

- prise en compte des collisions coulombiennes électron-électron et/ou électron-ion. Cette hypothèse donne alors accès, en fonction du degré d'ionisation considéré, à une multitude de fonctions de distribution situées entre les deux cas extrêmes que constituent les distributions champ local et maxwellienne, les collisions coulombiennes faisant tendre la population électronique vers l'équilibre thermodynamique.

La résolution se fait comme suit : on se donne un vecteur de valeurs de champs électriques réduits E/N (DC ou AC), où N est la densité du gaz neutre, et BOLSIG+ résout l'équation de Boltzmann pour

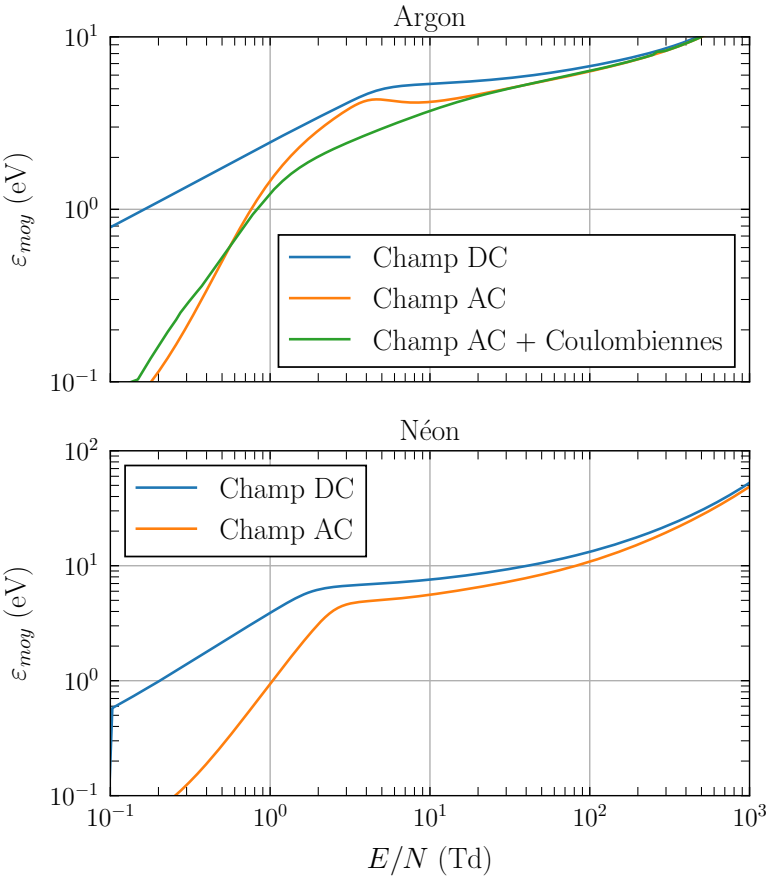


FIGURE 2.8 – Energie moyenne des électrons en fonction du champ réduit E/N pour l'Argon et le Néon, calculées à partir des sections efficaces de Morgan.

ces valeurs de champ réduit, ce qui donne accès à la fonction de distribution en énergie des électrons, donc à l'énergie moyenne, puis à la température de la population. Les données obtenues, coefficients de transport et taux de réaction, sont alors tabulées en fonction de la température électronique T_e (laquelle découle de la résolution de l'équation d'énergie dans PlasmaSimWave).

Bien que le plasma que nous souhaitons étudier est soutenu par un champ microonde, donc un champ AC, la prise en compte des oscillations de champ dans le calcul de la fonction de distribution soulève un problème en ce qui concerne l'Argon. En effet, ce dernier présente un minimum local dans la section efficace de diffusion élastique, le minimum de Ramsauer-Townsend [19]. L'énergie moyenne des électrons devient alors non-monotone en fonction du champ électrique réduit, ce qui signifie qu'une même valeur de température électronique, qui est supposée être égale à deux tiers de l'énergie moyenne, engendre trois valeurs possibles pour les coefficients de transport et les taux de réaction. Ce problème ne se pose pas pour le Néon qui ne possède pas un tel minimum (*cf.* figure 2.7). La seule manière physiquement valable pour lisser la non-monotonie de l'énergie moyenne, est de prendre en compte les collisions coulombiennes en plus des oscillations de champ. En considérant un degré d'ionisation de 10^{-4}, on peut faire disparaitre cet effet comme on peut le voir sur la figure 2.8. En appliquant cette démarche, nous sommes alors condamnés à ne pas pouvoir distinguer les effets dus aux oscillations de champ, des effets engendrés par les collisions coulombiennes. De plus, ces dernières ont pour effet d'abaisser la température du plasma dans les zones de forte densité [52], ce qui induit l'apparition de gradients de température.

Afin de ne pas cumuler tous les effets, nous choisissons de calculer les données d'entrée pour un champ DC. Cette approximation se justifie aussi par le fait que nous avons grandement simplifié la cinétique chimique, il n'est donc pas nécessaire d'introduire autant de complexité dans la résolution des paramètres de la simulation. De plus, l'objectif des simulations est avant tout, d'obtenir les bonnes ten-

dances et les bons ordres de grandeur, afin de dégager une compréhension générale du fonctionnement du limiteur.

2.1.5 Détermination des taux de réaction effectifs

Dans cette section, nous allons détailler les calculs pour l'obtention des taux de réaction impliquant les niveaux métastables et résonnants effectifs, à partir des taux de réaction impliquant les niveaux métastables et résonnants fondamentaux. Par ailleurs, nous discuterons également de la physique à l'œuvre dans le processus désexcitation radiative (*cf.* réaction 10 dans le tableau 2.1)

2.1.5.1 Taux de quenching électronique, d'excitation du niveau résonnant et d'ionisation par étape

La réaction de quenching électronique engendre un équilibre entre les populations de métastables et de rayonnants. Du fait du faible écart énergétique entre ces niveaux les métastables peuvent facilement être convertis en rayonnants par impact électronique, et vice-versa. Si on considère les niveaux effectifs Ar_m^* et Ar_r^* qui nous intéressent, la réaction de quenching s'écrit :

$$e + Ar_m^* \underset{k_{rm}}{\overset{k_{mr}}{\rightleftharpoons}} e + Ar_r^* \tag{2.38}$$

où l'on note k_{mr} et k_{rm} les taux effectifs des réactions directe et indirecte. En considérant les quatre niveaux fondamentaux $Ar(1s_5)$, $Ar(1s_3)$, $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$, on a alors les quatre équilibres suivants :

$$e + Ar(1s_5) \underset{k_{45}}{\overset{k_{54}}{\rightleftharpoons}} e + Ar(1s_4) \tag{2.39}$$

$$e + Ar(1s_5) \underset{k_{25}}{\overset{k_{52}}{\rightleftharpoons}} e + Ar(1s_2) \tag{2.40}$$

$$e + Ar(1s_3) \underset{k_{43}}{\overset{k_{34}}{\rightleftharpoons}} e + Ar(1s_4) \tag{2.41}$$

$$e + Ar(1s_3) \underset{k_{23}}{\overset{k_{32}}{\rightleftharpoons}} e + Ar(1s_2) \tag{2.42}$$

où les taux des processus directs et indirects sont donnés sur les flèches des réactions. A partir de ces taux, nous pouvons former le taux de réaction effectif k_{mr}, en commençant par définir les taux de réaction k_{5r} et k_{3r} de formation du niveau résonnant effectif à partir des niveaux métastables $Ar(1s_5)$ et $Ar(1s_3)$:

$$k_{5r} = k_{54} + k_{52} \tag{2.43}$$

$$k_{3r} = k_{34} + k_{32} \tag{2.44}$$

Puis, on peut exprimer le taux de réaction k_{mr}, comme la somme des taux k_{5r} et k_{3r}, pondérée par les rapports des poids statistiques des niveaux de départ $Ar(1s_5)$ et $Ar(1s_3)$:

$$k_{mr} = \frac{g_5}{g_5+g_3}k_{5r} + \frac{g_3}{g_5+g_3}k_{3r} = \frac{5}{6}\left(k_{54}+k_{52}\right) + \frac{1}{6}\left(k_{34}+k_{32}\right) \tag{2.45}$$

Il s'agit en fait de la formule des probabilités composées. Pour calculer le taux effectif k_{rm}, on emploie la même méthode que précédemment, il vient alors :

$$k_{rm} = \frac{g_4}{g_4+g_2}k_{4m} + \frac{g_2}{g_4+g_2}k_{2m} = \frac{1}{2}\left(k_{25}+k_{45}\right) + \frac{1}{2}\left(k_{43}+k_{23}\right) \tag{2.46}$$

En suivant la même méthode, il est possible d'obtenir le taux de création du niveau résonnant effectif k_{fr}, celui-ci s'exprimant simplement comme la somme des deux taux de production k_{f4} et k_{f2} des niveaux résonnants $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$.

Pour finir, les taux d'ionisation par étape k_{m+} et k_{r+} des niveaux excités effectifs Ar^*_m et Ar^*_r s'écrivent :

$$k_{m+} = \frac{g_5}{g_5+g_3}k_{5+} + \frac{g_3}{g_5+g_3}k_{3+} = \frac{5}{6}k_{5+} + \frac{1}{6}k_{3+} \tag{2.47}$$

$$k_{r+} = \frac{g_4}{g_4+g_2}k_{4+} + \frac{g_2}{g_4+g_2}k_{2+} = \frac{k_{4+}+k_{2+}}{2} \tag{2.48}$$

où les taux k_{5+}, k_{4+}, k_{3+} et k_{2+} sont les taux d'ionisation par étape des niveaux métastables et résonnants natifs.

2.1.5.2 Coefficients de désexcitation radiative

Les niveaux rayonnants sont caractérisés par leur probabilité de désexcitation (premier coefficient d'Einstein noté A) et la longueur d'onde de la radiation émise lors de la désexcitation. Dans le cas de notre niveau rayonnant effectif, on définit une longueur d'onde et une probabilité de désexcitation moyennes :

$$\lambda_{rf} = \frac{g_4}{g_4+g_2}\lambda_{4f} + \frac{g_2}{g_4+g_2}\lambda_{2f} = \frac{\lambda_{4f}+\lambda_{2f}}{2} \tag{2.49}$$

$$A^*_r = \frac{g_4}{g_4+g_2}A_4 + \frac{g_2}{g_4+g_2}A_2 = \frac{A_4+A_2}{2} \tag{2.50}$$

Les coefficients d'Einstein pour les niveaux $Ar(1s_4)$ et $Ar(1s_2)$ sont disponibles dans la base de données du NIST [45] et valent respectivement $A_4 = 5.32\times10^8\ \mathrm{s}^{-1}$ et $A_2 = 1.32\times10^8\ \mathrm{s}^{-1}$. Les longueurs d'onde des radiations émises lors de la désexcitation des deux niveaux rayonnants valent respectivement λ_{4f} = 106.7 nm et λ_{2f} = 104.8 nm. Il vient donc finalement :

$$\lambda_{rf} = 105.8\,\mathrm{nm} \tag{2.51}$$

$$A_r = 3.32\times10^8\,\mathrm{s}^{-1} \tag{2.52}$$

La durée de vie $\tau_r = 1/A_r$ ainsi calculée est la durée de vie naturelle du niveau rayonnant effectif. Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette durée de vie peut être rallongée si la radiation est piégée dans le gaz. Cet emprisonnement du rayonnement dépend de la géométrie de la cavité qui contient le gaz ainsi que de la pression de ce dernier.
La durée de vie calculée ci-dessus doit donc être multipliée par un facteur correctif, dit facteur d'échappement, qui permet de tenir compte de l'emprisonnement de la radiation. Des expressions analytiques ont été proposées par Holstein, pour un gaz enfermé dans une cavité cylindrique ou entre deux plans parallèles, en tenant compte de deux phénomènes physiques, l'élargissement de raie par effet Doppler

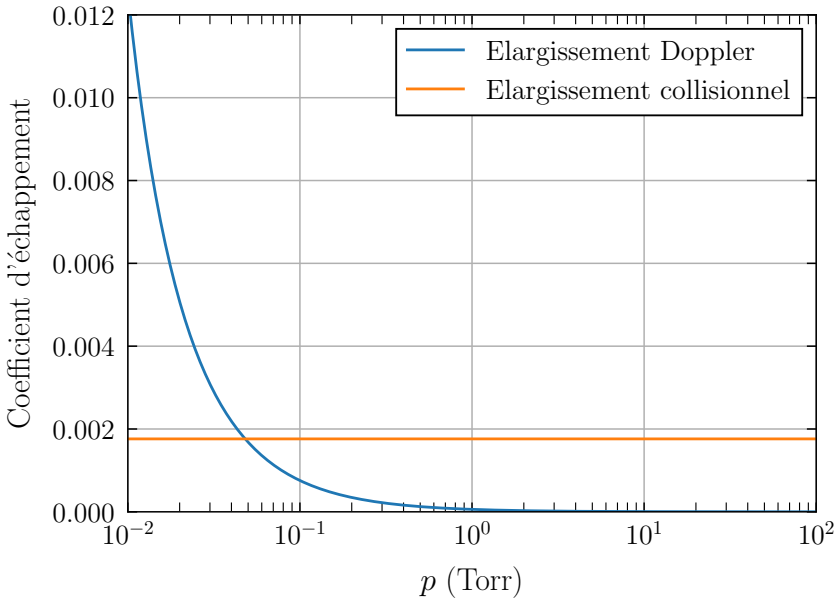


FIGURE 2.9 – Comparaison des deux coefficients d'échappement tenant compte de l'élargissement Doppler et collisionnel.

et par collisions. Le détail des calculs est donné dans l'annexe A, et les deux coefficients d'échappement pour notre géométrie sont respectivement donnés par :

$$\alpha_{rf}^{Doppler} = \frac{6.53 \times 10^{-6}}{\frac{p_f}{T_f^{3/2}} \sqrt{\pi \ln\left(1.44 \times 10^4 \frac{p_f}{T_f^{3/2}}\right)}} \tag{2.53}$$

$$\alpha_{rf}^{coll.} = 1.761 \times 10^{-3} \tag{2.54}$$

où p_f et T_f sont la pression et la température des atomes d'Argon à l'état fondamental, ce qui donne pour la température $T_f = 300$ K. Ces deux coefficients sont représentés sur la figure 2.9, en fonction de la pression. Comme on peut le constater, pour une pression de 10 Torr, c'est le coefficient d'échappement calculé sur la base de l'élargissement de raie collisionnel qui domine, c'est donc celui que l'on doit considérer. On déduit finalement le taux de réaction pour la désexcitation radiative :

$$\nu_{rf} = \alpha_{rf}^{coll.} A_r = 5.85 \times 10^5 \, \mathrm{s}^{-1} \tag{2.55}$$

La détermination du taux de désexcitation radiative clôt cette section sur l'obtention des taux de réaction. Pour que les simulations puissent être réalisée il reste à discuter des coefficients de transport pour les ions et pour les espèces neutres excitées.

2.1.6 Transport des espèces neutres excitées et des ions

Les données de transport pour les ions proviennent de mesures expérimentales [53]. Il s'agit de tables de mobilités standards données en fonction du champ électrique réduit E/N, qui ont été mesurées dans des conditions standards de pression et de température, à savoir $p^\circ = 1$ atm et $T^\circ = 300$ K. Les mobilités ne sont disponibles que pour des valeurs assez faibles de champ électrique réduit, au delà, elles doivent être extrapolées. Pour ce faire, on peut supposer qu'à haute énergie, les collisions entre

les ions et le gaz neutre sont de type « boules de billard », la section efficace est alors indépendante de l'énergie. La fréquence de collision s'écrit alors suivant l'expression donnée au premier chapitre, à savoir $\nu_i = \sigma_{in} v_i N$, où v_i est la vitesse dirigée de l'ion, N la densité de neutres, et σ_{in} la section efficace de collision ion-neutre. Aux grandes valeurs de champ électrique, la vitesse dirigée s'écrit $v_i = \mu_i E$ où E est l'amplitude du champ électrique, et μ_i la mobilité de l'ion considéré. Ainsi, en injectant la formule de ν_i et de v_i dans l'expression de la mobilité des ions, on obtient la relation :

$$\mu_i = \sqrt{\frac{q_i}{m_i \sigma_{in} E N}} \propto \sqrt{\frac{1}{E/N}} \tag{2.56}$$

Les mobilités standards ont alors été extrapolées (*cf.* figure 2.10) au delà des valeurs de champ réduit données par l'expérience. Ces jeux de mobilités peuvent ainsi être utilisés quelles que soient les conditions retenues pour la simulation.

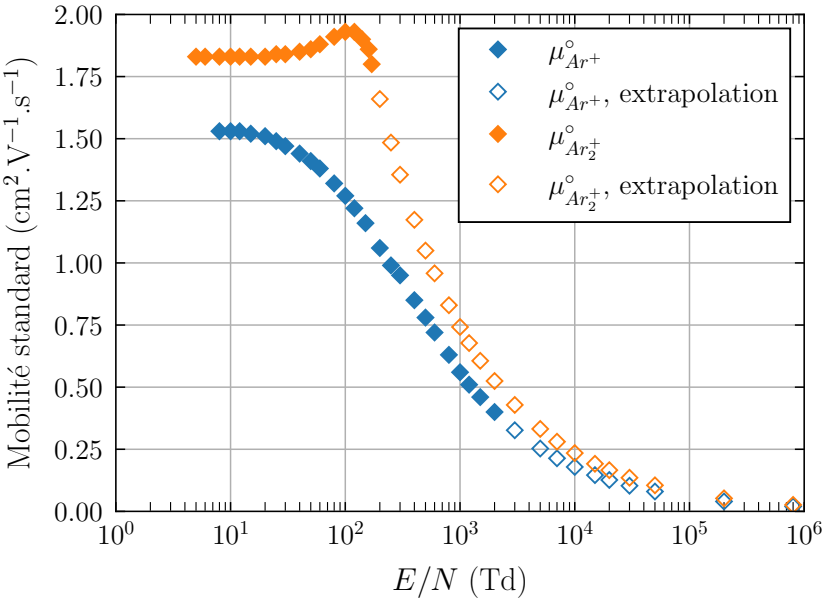


FIGURE 2.10 – Mobilités standards des ions atomique et moléculaire d'Argon en fonction du champ électrique réduit en Townsend.

Il reste pour finir à statuer sur le transport des espèces excitées, métastables et résonnants. Ces espèces étant neutres, elles ne peuvent que diffuser et le coefficient de diffusion qui régit leur mouvement prend alors la forme d'une loi d'Arrhenius [54]. En combinant la loi donnant le coefficient de diffusion des atomes d'Argon (*cf.* table 17.1 dans [54]) pour une pression standard $p^\circ = 10^5$ Pa, au coefficient de diffusion des atomes excités de configuration $3p^5 4s$ mesuré dans l'Argon à $p = 1$ Torr et à $T = 300$ K (*cf.* table 17.8 dans [54]), on obtient le coefficient de diffusion des métastables et des résonnants :

$$D^\circ(T) \quad = \quad 7 \times 10^{-6} \times \left(\frac{T}{273}\right)^{1.92} \tag{2.57}$$

où T est la température du gaz neutre en Kelvin. Pour obtenir le coefficient de diffusion $D(T)$ pour une densité de gaz N quelconque, il convient à nouveau utiliser la loi d'échelle $N^\circ D^\circ(T) = N D(T)$.

Cette section sur les coefficients de transport des ions et des espèces excitées dans l'Argon clôt le discours sur le modèle numérique utilisé pour simuler le comportement du limiteur. Dans la section suivante, nous allons présenter le dispositif expérimental utilisé afin de caractériser le limiteur en ligne microruban suspendue, et de compléter le jeu de mesures obtenu par Antoine Simon durant sa thèse.

2.2 Présentation du banc d'essai

2.2.1 Dispositif expérimental

Le banc de mesure utilisé durant cette thèse a été développé par Clovis Pouant au CEA de Gramat dans le cadre des projets ANR DIOMEDE et DIOMEDE 2. Il permet de réaliser l'étude de l'ensemble des caractéristiques du limiteur, à savoir la mesure des puissances incidente, réfléchie et transmise en régimes transitoire et stationnaire, ainsi que du seuil de limitation, du temps à mi-hauteur, du temps de réponse, et du temps de recouvrement. La figure 2.11 présente un schéma du banc expérimental. Trois parties peuvent être dégagées sur ce dispositif : une partie pour le contrôle de la pression, une partie pour les mesures des différentes puissances incidente réfléchie et transmise par le limiteur, et une partie pour les mesures de temps de recouvrement.

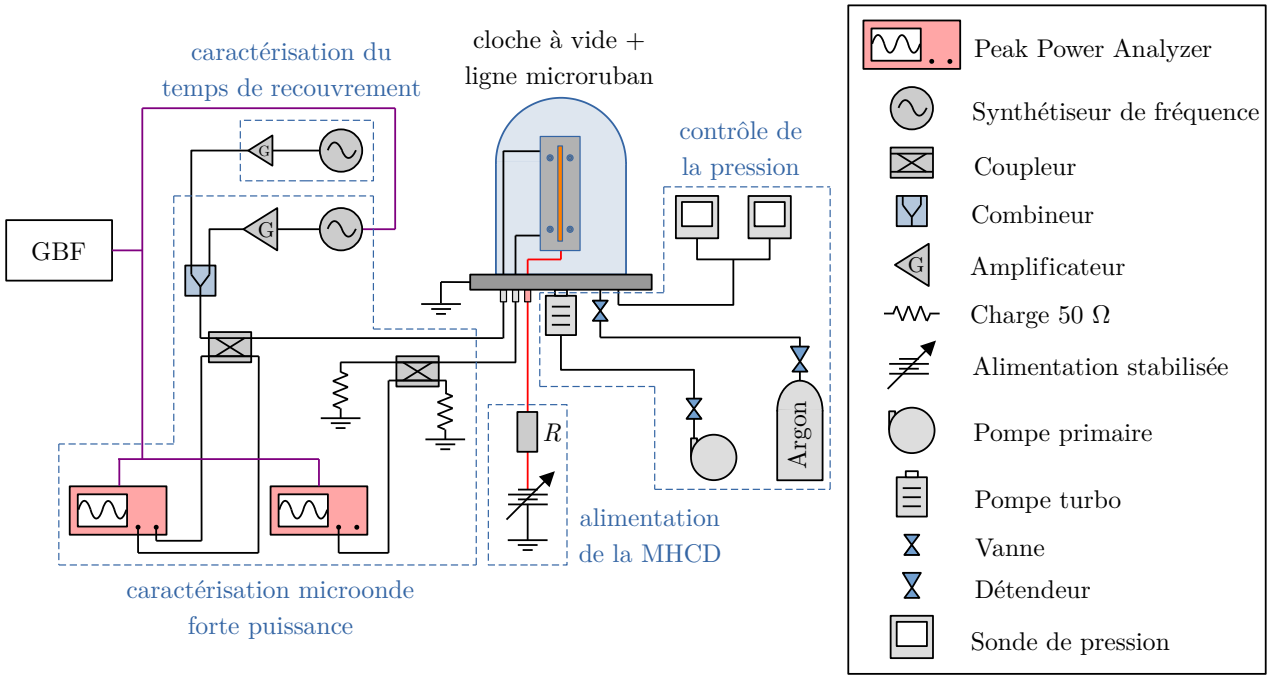


FIGURE 2.11 – Schéma du dispositif expérimental.

La partie pour le pompage et le contrôle du gaz se compose d'une pompe primaire Leybold SCROLLVAC 7 plus qui permet d'abaisser la pression dans la cloche à vide à 1 mTorr. Une pompe turbomoléculaire Leybold Turbodrive Td400 permet alors de pousser le vide jusqu'à une pression de 10^{-5} Torr. La pression est successivement contrôlée par une sonde haute pression Leybold et une sonde basse pression PENNINGVAC PM31.

La partie pour les mesures de puissance est composée d'un synthétiseur de fréquence Agilent EXG N5171B (9 kHz - 8 GHz) qui produit le signal microonde, lequel est ensuite amplifié à l'aide d'un amplificateur de puissance microonde BONN Electronik BLMA0760-150 (700-6000 MHz, 150 W) afin d'obtenir la puissance incidente souhaitée. Deux coupleurs Maury Microwave LLC18-N-MF sont disposés dans le circuit afin de prélever les puissances incidente, réfléchie et transmise. Ces puissances sont ensuite mesurées en fonction du temps avec deux Peak Power Analyzer KEYSIGHT 8990B munis de sondes de puissances dont la puissance maximale admissible est de 20 dBm, et dont la bande de puissances est de 40 dBm. L'avantage de ces appareils est qu'ils permettent d'extraire les enveloppes des signaux (*i.e.* sans la porteuse) et de restituer les puissances exprimées en dBm en fonction du temps, donnant ainsi accès à la réponse transitoire du limiteur. Une impulsion d'une durée d'une milliseconde est suffisante pour atteindre l'état stationnaire du plasma, et une mesure réalisée en fin de signal permet alors de récupérer les puissances réfléchie et transmise en régime stationnaire. En revanche, pour obtenir une information aussi précise que possible sur les premiers instants et notam-

ment sur le temps à mi-hauteur, il convient de réduire la durée de l'impulsion à cent microseconde afin d'augmenter la densité de points de mesures. En effet, la fréquence d'échantillonnage maximale de ces appareils est d'un point toutes les dix nanosecondes.

La mesure du temps de recouvrement nécessite l'ajout d'un synthétiseur de fréquence Trescal (10 kHz - 5.4 GHz) qui envoie un signal CW de fréquence 4.5 GHz, dit signal utile, lequel est amplifié au moyen d'un amplificateur de puissance microonde ETM Electronic Incorporated 20 W qui va élever la puissance du signal utile à une valeur de 15 dBm. L'évolution du signal, en fonction du temps après arrêt de l'agression permet alors d'accéder au temps de recouvrement.

Avec ce dispositif, il est alors possible de caractériser le limiteur pour une bande de fréquences comprise entre 3 GHz et 6 GHz, et pour des puissances incidentes allant jusqu'à 50 dBm (100 W).

2.2.2 Protocole expérimental

La première étape dans les procédures expérimentales consiste à établir l'environnement gazeux, *i.e.* à remplir la cloche à vide d'Argon à 10 Torr. Pour ce faire, un premier pompage est effectué avec la pompe primaire afin de faire chuter la pression à 1 mTorr. La pompe turbo est alors mise en marche, et une nuit de pompage est alors nécessaire afin que toutes les impuretés adsorbées sur les différentes surfaces soient relâchées (il s'agit d'une opération de dégazage). Une fois le vide limite de la pompe turbo atteint, on effectue un rinçage de la cavité à l'Argon afin d'évacuer les impuretés du tuyau qui relie la pompe turbo à la pompe primaire. Ainsi lorsque l'on ferme la vanne de la pompe primaire, et que l'on éteint la pompe turbo (qui ne peut pas fonctionner pour des pressions supérieures au Torr), les seules particules qui peuvent refouler sont des atomes d'Argon, ce qui permet d'éviter toute pollution de l'enceinte. La bouteille de gaz reste ouverte jusqu'à ce que la pression souhaitée soit atteinte dans l'enceinte. On travaille alors en statique et non en flux, et comme l'ensemble des mesures pour un limiteur donné est en général réalisé en moins de dix minutes, cela ne laisse a priori pas le temps à des impuretés provenant d'éventuelles fuites de pénétrer et de polluer significativement le gaz.

La MHCD est alors mise sous tension, et cette dernière est progressivement augmentée jusqu'à ce que la micro-décharge plasma se forme. Le courant qui traverse la MHCD est alors limité à 5 mA.

Le déclenchement du synthétiseur de fréquence qui envoie le signal de forte puissance et de l'acquisition par les Peak Power Analyser est piloté par un générateur basse fréquence KEYSIGHT 81150A. Notons qu'une correction est ensuite effectuée pour retrancher les pertes dans les différents appareils, les câbles et les connectiques de sortie afin que les puissances données dans les résultats soient les puissances en entrée et en sortie du limiteur sous test, et non pas au niveau des coupleurs. Le synthétiseur de fréquence et l'amplificateur de puissance permettant de produire le signal utile sont eux allumés en permanence.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le code numérique qui sera utilisé afin d'étudier l'interaction microonde/plasma dans le limiteur. Les équations résolues dans le modèle, à savoir le système d'équations fluides pour le plasma, l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique, et les équations de Maxwell pour le champ microonde ont ainsi été exposées. Un schéma cinétique simplifié pour l'Argon a été proposé, et nous avons détaillé les hypothèses et les méthodes mises en œuvre afin de déterminer les différentes données d'entrée utilisées dans les simulations, que ce soient les taux de réaction ou bien les coefficients de transport pour les différentes espèces composant le plasma.

Le dispositif expérimental utilisé afin de caractériser le limiteur et de compléter le jeu de données déjà obtenu par Antoine Simon dans sa thèse, a également été présenté.

Dans le chapitre suivant, nous allons exploiter le modèle numérique afin d'étudier l'interaction microonde/plasma dans le limiteur à l'état stationnaire. Ces résultats seront, autant que faire se peut, comparées aux résultats expérimentaux. Cette prospection numérique sera complétée par des développements analytiques permettant de mettre au jour les mécanismes à l'œuvre dans le couplage microonde/plasma. Enfin, nous prêterons une attention particulière à la puissance de fuite, et nous établirons en particulier une expression analytique permettant de comprendre sa dépendance à la géométrie de la cavité et à la pression du gaz.

Chapitre 3

Fonctionnement du limiteur à l'état stationnaire : physique de la limitation de puissance

Sommaire

3.1 Position du problème 65
3.1.1 Observations préliminaires 65
3.1.2 Positionnement du problème 66
3.2 Solution générale de l'équation d'onde dans la ligne microruban suspendue 67
3.3 Analyse modale 72
3.3.1 Étude du mode principal, dans la limite des basses fréquences 72
3.3.2 Étude des modes d'ordres supérieurs 76
3.4 Mécanismes de couplage onde-plasma 83
3.4.1 Modes de propagation en présence d'un plasma uniforme 83
3.4.2 Comparaison théorie-simulation 85
3.5 Puissance de fuite 86
3.5.1 Caractérisation de la ligne 86
3.5.2 Puissance de fuite 87
3.6 Conclusion 96

Dans les deux chapitres précédents, nous avons exposé d'une part les concepts fondamentaux nécessaires pour comprendre la dynamique du plasma et la physique de l'interaction microonde plasma, et d'autre part, le modèle numérique auto-cohérent qui doit nous permettre d'explorer les paramètres physiques de la décharge (densité électronique n_e, température électronique T_e, ...), et donner l'évolution des taux de puissance absorbée, réfléchie et transmise, qui sont les trois observables mesurées expérimentalement. Dans ce nouveau chapitre, nous allons nous intéresser au comportement du limiteur dans son état stationnaire, *i.e.* lorsque que les propriétés du plasma et les taux de puissance ne varient plus dans le temps. Nous tenterons autant que faire se peut de confronter les trois approches théorique, numérique et expérimentale.

3.1 Position du problème

3.1.1 Observations préliminaires

Le bilan de puissance obtenu par simulation de la ligne microruban suspendue à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr, est présenté sur la figure 3.1, en fonction de la puissance incidente. Ces résultats sont comparés aux résultats expérimentaux déjà obtenus dans la thèse d'Antoine Simon. Comme nous

pouvons le constater, le modèle numérique donne des résultats en bon accord avec les mesures expérimentales, qui nous permettent d'envisager son utilisation pour explorer la physique de la limitation de puissance.

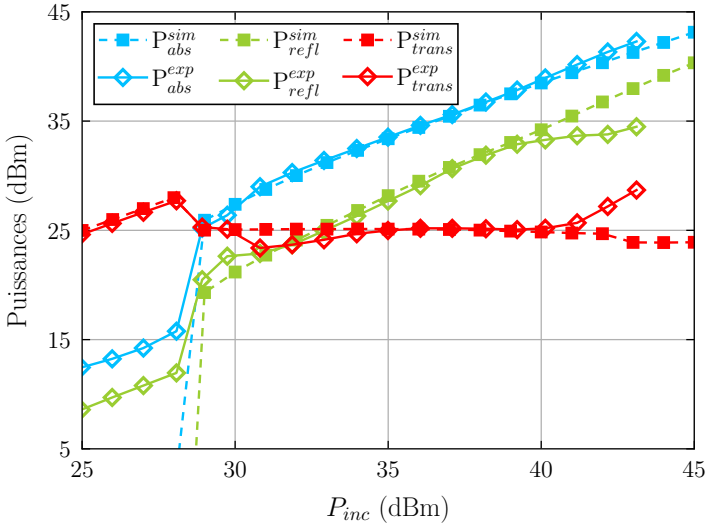


FIGURE 3.1 – Confrontation des bilans de puissance expérimentaux et simulés.

En observant plus précisément les courbes de la figure 3.1, on note que le limiteur possède un seuil de déclenchement à 29 dBm et limite la puissance de fuite à 25 dBm. Cette dernière est constante en fonction de la puissance incidente, pour la gamme de puissance étudiée.

Comme on peut le voir, le limiteur en ligne suspendue dissipe principalement (à plus de 60%) la puissance du signal par absorption dans le plasma. La légère divergence dans les résultats pour des puissances supérieures à 40 dBm provient de l'accumulation de chaleur, non pas dans le gaz mais dans la ligne, qui entraine une dilatation du ruban de cuivre, une distorsion du substrat diélectrique, et permet au plasma de se propager entre le support et le substrat diélectrique lors des mesures expérimentales. Ce problème expérimental a depuis été résolu en réduisant la longueur des impulsions à 1 milliseconde au maximum et en ajoutant un système d'atèles afin de plaquer efficacement les diverses parties qui composent le limiteur sous test.

Du point de vue du plasma, la figure 3.2 montre l'évolution de la densité électronique simulée en régime stationnaire dans la cavité pour quatre valeurs de puissance incidente. Comme on peut le voir, la densité maximale en tête de colonne augmente avec la puissance incidente. Les valeurs maximales de densité pour les quatre puissances incidentes sont reportées dans le tableau 3.1. Ainsi, une multiplication par dix de la puissance incidente (passage de 30 dBm à 40 dBm) entraine une augmentation de la densité maximale d'un facteur dix. Cette augmentation de la densité en tête de colonne amplifie la rupture d'impédance lors de la transition entre le diélectrique et le plasma, ce qui entraine une hausse de la puissance réfléchie.
Par ailleurs, nous observons également en plus de l'augmentation de la densité, que la longueur de la colonne plasma croît avec la puissance incidente. Ces deux augmentations traduisent une amplification de la production d'électrons dans le plasma, qui explique l'augmentation de la puissance absorbée.

3.1.2 Positionnement du problème

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier la physique du limiteur à l'état stationnaire suivant deux axes. Le premier consiste à établir une compréhension fine des mécanismes à l'œuvre dans le guidage de l'onde dans la ligne, et des mécanismes de couplage entre l'onde et le plasma. Pour ce

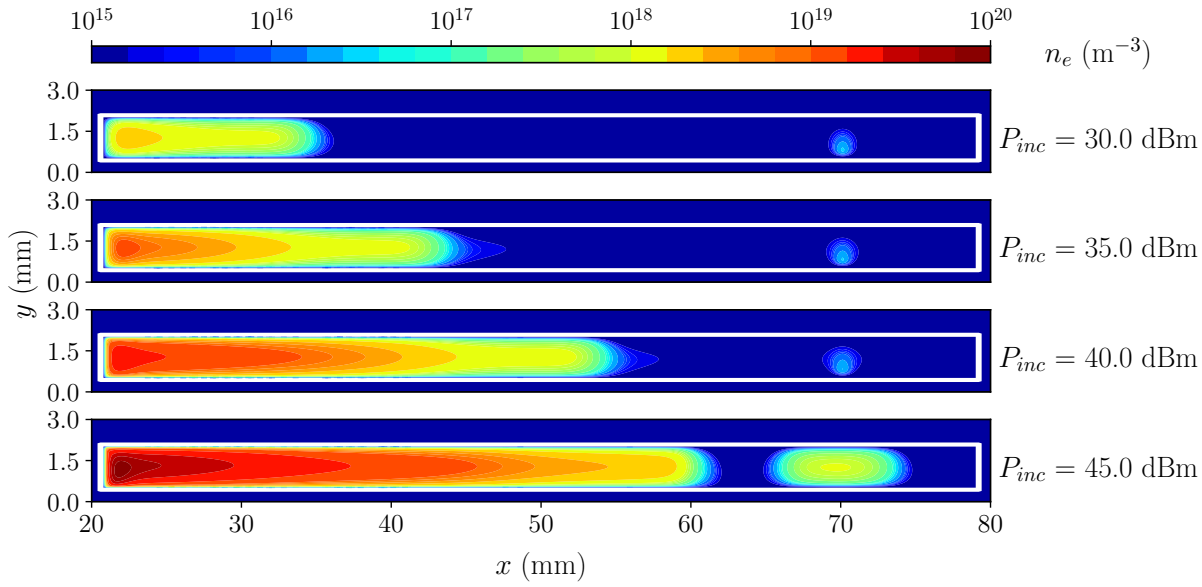


FIGURE 3.2 – Évolution de la densité électronique simulée en régime stationnaire en fonction de la puissance incidente.

P_{inc} (dBm)	30	35	40	45
n_e (10^{18} m^{-3})	3.01	12.6	33.4	95.5

TABLE 3.1 – Valeurs de densités électroniques maximales simulées en régime stationnaire en fonction de la puissance incidente.

faire, nous allons d'abord étudier analytiquement la ligne à vide, puis en présence de plasma, afin de comprendre comment le signal s'y propage et comment la puissance est déposée dans le plasma. Le deuxième axe consiste, une fois les modes de propagation décrits, à utiliser les expressions analytiques développées pour les champs afin de donner une expression de la puissance de fuite, qui nous permettra d'interpréter plus facilement les résultats numériques et expérimentaux, de comprendre pourquoi la puissance de fuite est constante en fonction de la puissance incidente et d'établir les paramètres qui permettent de jouer sur la limitation de puissance.

3.2 Solution générale de l'équation d'onde dans la ligne microruban suspendue

Dans cette section, nous allons déterminer l'expression analytique du champ électromagnétique dans la ligne. Comme nous l'avons démontré au premier chapitre, l'équation de propagation des ondes électromagnétiques en régime harmonique s'écrit :

$$\boldsymbol{\Delta}\underline{\boldsymbol{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\epsilon}_{r,m}(\boldsymbol{r},\omega)\underline{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{3.1}$$

où $\underline{\epsilon}_{r,m}$ est la permittivité relative du milieu dont la valeur dépend potentiellement de l'espace et de la fréquence, et qui dans le cas où le milieu en question est un plasma, se réduit à la permittivité de Drude. La géométrie étudiée dans ce développement analytique est représentée sur la figure 3.3. Il s'agit en pratique d'un guide d'onde inhomogène à plaques parallèles.
Comme dans la simulation, on considère le système invariant suivant la direction z et on va chercher la solution de l'équation d'onde en polarisation TM (*i.e.* en supposant le champ magnétique dirigé

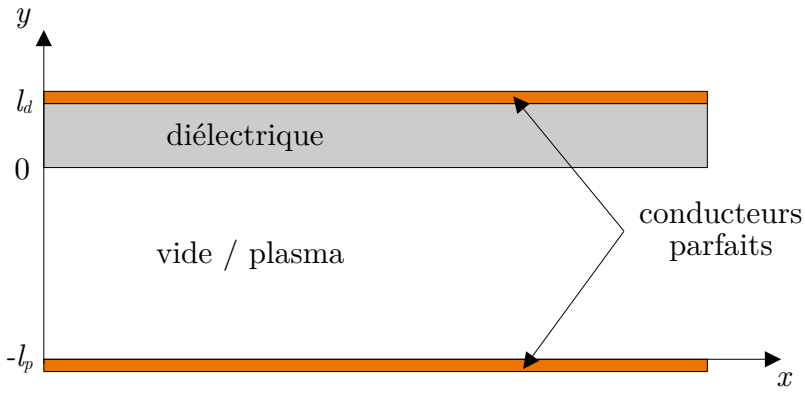


FIGURE 3.3 – Géométrie 2D considérée dans le développement analytique.

suivant z) qui est la polarisation utilisée dans le modèle numérique, si bien qu'il est possible de chercher la solution de l'équation sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{E}}_m = \underline{E}_m^x(x,y)\,\mathbf{e}_x + \underline{E}_m^y(x,y)\,\mathbf{e}_y \tag{3.2}$$

où m est l'identifiant du milieu (p pour le plasma, et d pour le diélectrique, le vide correspondant au cas d'un plasma de densité électronique nulle.). Pour l'une où l'autre des deux composantes $\underline{E}_m^\alpha(x,y)$, on va supposer la solution à variables séparables $\underline{E}_m^\alpha(x,y) = \underline{E}_m^\alpha(x)\underline{E}_m^\alpha(y)$, et la permittivité du milieu homogène, ce qui réinjecté dans l'équation d'onde conduit à :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\underline{E}_m^\alpha(x,y) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\epsilon}_{r,m}\underline{E}_m^\alpha(x,y) = 0 \tag{3.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\underline{E}_m^\alpha(x)}\frac{\partial^2\underline{E}_m^\alpha(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\epsilon}_{r,m} = -\frac{1}{\underline{E}_m^\alpha(y)}\frac{\partial^2\underline{E}_m^\alpha(y)}{\partial y^2} \tag{3.4}$$

Une telle égalité entre deux termes qui ne dépendent respectivement que des variables x et y conduit alors à la relation :

$$\frac{1}{\underline{E}_m^\alpha(x)}\frac{\partial^2\underline{E}_m^\alpha(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\epsilon}_{r,m} = -\frac{1}{\underline{E}_m^\alpha(y)}\frac{\partial^2\underline{E}_m^\alpha(y)}{\partial y^2} = \pm\underline{K}_m^2 \tag{3.5}$$

où $\underline{K}_m$ est une constante complexe qui a la dimension d'un nombre d'onde, et dont la signification physique sera discutée plus bas. En s'inspirant de la relation qui existe entre la constante de propagation et la permittivité diélectrique pour une onde plane progressive harmonique se propageant dans un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope, et en posant :

$$\underline{K}_m^2 \;=\; \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_m \tag{3.6}$$

il vient finalement le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\underline{E}_m^\alpha(x)}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(\underline{\epsilon}_{r,m} \mp \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_m\right)\underline{E}_m^\alpha(x) = 0 & (3.7) \\[2ex] \dfrac{\partial^2\underline{E}_m^\alpha(y)}{\partial y^2} \pm \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_m\underline{E}_m^\alpha(y) = 0 & (3.8) \end{cases}$$

On peut alors introduire le nombre d'onde local complexe $\underline{k}_m$:

$$\underline{k}_m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\underline{\epsilon}_{r,m} \mp \underline{\epsilon}_m\right) \tag{3.9}$$

Il faut alors résoudre le système d'équations dans le diélectrique et le vide ou le plasma puis raccorder les solutions à l'interface. La composante tangentielle du champ électrique est continue quelle que soit l'interface considérée, et s'annule à la surface des plans métalliques. On a donc les conditions aux limites suivantes pour les champs $\underline{E}_p^x(x,y)$ et $\underline{E}_d^x(x,y)$:

$$\underline{E}_p^x(x, y=-l_p) = 0 \tag{3.10}$$

$$\underline{E}_d^x(x, y=l_d) = 0 \tag{3.11}$$

$$\underline{E}_p^x(x, y=0) = \underline{E}_d^x(x, y=0) \tag{3.12}$$

Les conditions aux limites étant complètement déterminées pour les composantes $\underline{E}_p^x(x,y)$ et $\underline{E}_d^x(x,y)$, on résoudra l'équation d'onde pour cette composante. Les composantes $\underline{E}_p^y(x,y)$ et $\underline{E}_d^y(x,y)$ seront déterminées en utilisant le fait que le champ est électromagnétique, *i.e.* $\boldsymbol{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{E}} = 0$, et le champ magnétique sera déterminé à partir de l'équation de Maxwell-Faraday $\boldsymbol{\nabla}\times\underline{\boldsymbol{E}} = -\partial_t\underline{\boldsymbol{B}}$.

On résout alors le système d'équations pour les composantes $\underline{E}_p^x(x)$ et $\underline{E}_p^x(y)$ avec la convention de signe « - » (*i.e* on sélectionne le signe - dans l'équation (3.8) et donc le signe + dans l'équation (3.7)) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \underline{E}_p^x(x)}{\partial x^2} + k_0^2\left(\underline{\epsilon}_{r,p} + \underline{\epsilon}_p\right)\underline{E}_p^x(x) = 0 & (3.13) \\ \dfrac{\partial^2 \underline{E}_p^x(y)}{\partial y^2} - k_0^2\,\underline{\epsilon}_p\,\underline{E}_p^x(y) = 0 & (3.14) \end{cases}$$

avec, suivant les notations introduites plus haut :

$$\underline{k}_p^2 = k_0^2\left(\underline{\epsilon}_{r,p} + \underline{\epsilon}_p\right) \qquad \text{et} \qquad \underline{K}_p^2 = k_0^2\,\underline{\epsilon}_p \tag{3.15}$$

L'équation caractéristique associée à la première équation s'écrit $r^2 + \underline{k}_p^2 = 0$, ce qui donne les deux solutions $r_\pm = \pm i\underline{k}_p$. Puisque le plasma considéré est uniforme dans la cavité, il n'y a donc pas de rupture d'impédance et pas de réflexion, si bien qu'une solution particulière de la première équation s'écrit :

$$\underline{E}_p^x(x) = \mathrm{e}^{i\underline{k}_p x} \tag{3.16}$$

où l'amplitude a été prise égale à un. L'équation caractéristique associée à la deuxième équation s'écrit $r^2 - \underline{K}_p^2 = 0$, soit $r_\pm = \pm\underline{K}_p$. La solution de la deuxième équation s'écrit alors :

$$E_p^x(y) = C\,\mathrm{e}^{\underline{K}_p y} + D\,\mathrm{e}^{-\underline{K}_p y} \tag{3.17}$$

La composante $\underline{E}_p^x(x,y)$ s'annule sur le plan métallique (en $y=-l_p$) et prend la valeur $\underline{E}_{d,p}$ à l'interface diélectrique/plasma. On a alors les deux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} C\,\mathrm{e}^{-\underline{K}_p l_p} + D\,\mathrm{e}^{\underline{K}_p l_p} = 0 & (3.18) \\ C + D = \underline{E}_{d,p} & (3.19) \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les constantes C et D, et on déduit alors $\underline{E}_p^x(x,y)$:

$$\underline{E}_p^x(x,y) \;=\; \underline{E}_{d,p}\,\frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)}\mathrm{e}^{i\underline{k}_p x} \tag{3.20}$$

En utilisant la relation $\boldsymbol{\nabla}\cdot\underline{\boldsymbol{E}}=0$, il vient la composante transverse du champ électrique :

$$\underline{E}_p^y(x,y) \;=\; -i\underline{E}_{d,p}\,\frac{\underline{k}_p}{\underline{K}_p}\,\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)}\mathrm{e}^{i\underline{k}_p x} \tag{3.21}$$

Enfin, la résolution de l'équation de Maxwell-Faraday permet d'accéder au champ magnétique dans le plasma :

$$-\frac{\partial \underline{B}_p^z}{\partial t} = \frac{\partial \underline{E}_p^y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_p^x}{\partial y} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{B}_p^z(x,y) = -i\underline{E}_{d,p}\,\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,p}}{\omega\underline{K}_p}\,\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)}\mathrm{e}^{i\underline{k}_p x} \tag{3.22}$$

La solution dans le diélectrique s'obtient en suivant la même méthode. En prenant la convention de signe « + » et en posant :

$$\underline{k}_d^2 = k_0^2\left(\underline{\epsilon}_{r,d} - \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_d\right) \qquad \text{et} \qquad \underline{K}_d^2 = k_0^2\,\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_d \tag{3.23}$$

il vient :

$$\underline{E}_d^x(x,y) \;=\; \underline{E}_{d,p}\,\frac{\sin(\underline{K}_d[l_d-y])}{\sin(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}_d x} \tag{3.24}$$

$$\underline{E}_d^y(x,y) \;=\; -i\underline{E}_{d,p}\,\frac{\underline{k}_d}{\underline{K}_d}\,\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d-y])}{\sin(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}_d x} \tag{3.25}$$

$$\underline{B}_d^z(x,y) \;=\; -i\underline{E}_{d,p}\,\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}}{\omega\underline{K}_d}\,\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d-y])}{\sin(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}_d x} \tag{3.26}$$

Il reste pour finir à raccorder les solutions à l'interface entre le diélectrique et le plasma. Les équations de passage s'écrivent :

$$\underline{\boldsymbol{B}}_d(x,0) - \underline{\boldsymbol{B}}_p(x,0) = \mu_0 \boldsymbol{j}_s \times \mathbf{e}_y \tag{3.27}$$

$$\underline{\boldsymbol{E}}_d(x,0) - \underline{\boldsymbol{E}}_p(x,0) = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}\mathbf{e}_y \tag{3.28}$$

En l'absence de charges libres dans le plasma et le diélectrique, il n'y a pas de courants surfaciques à l'interface (il peut y avoir des courants dits de polarisation qui sont dus à la variation temporelle de la densité volumique de charges dipolaires mais c'est un phénomène volumique), par contre il peut y avoir des charges surfaciques, mais leur expression nous est inconnue, on déduit donc par projection que les deux équations de raccordement s'écrivent :

$$\underline{B}_d^z(x,0) - \underline{B}_p^z(x,0) = 0 \tag{3.29}$$

$$\underline{E}_d^x(x,0) - \underline{E}_p^x(x,0) = 0 \tag{3.30}$$

L'équation pour la composante longitudinale du champ électrique (*i.e.* dirigée suivant l'axe des x) s'écrit alors :

$$\underline{E}_{d,p}\, \mathrm{e}^{i\underline{k}_d x} = \underline{E}_{d,p}\, e^{i\underline{k}_p x} \tag{3.31}$$

Deux solutions sont alors possibles pour cette équation : soit $\underline{E}_{d,p} = 0$, soit $\underline{k}_d = \underline{k}_p = \underline{k}$. La seule solution qui ait un sens consiste alors à égaliser les constantes de propagation. Cette condition permet d'exprimer la constante $\underline{E}_{d,p}$, en définissant l'amplitude E_0 via la composante $\underline{E}_p^y(y)$ du champ prise en $y = 0$, comme :

$$\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} E_0 = \underline{E}_p^y(y=0) \tag{3.32}$$

il vient alors :

$$\underline{E}_{d,p} = iE_0 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \frac{\sinh(\underline{K}_p l_p)}{\cosh(\underline{K}_p l_p)} \tag{3.33}$$

En réinjectant l'expression ci-dessus dans la première relation de passage nous obtenons également l'expression :

$$\underline{E}_{d,p} = iE_0 \frac{\underline{K}_d}{\underline{k}} \frac{\sin(\underline{K}_d l_d)}{\cos(\underline{K}_d l_d)} \tag{3.34}$$

Finalement, les champs électrique et magnétique dans le plasma sont donnés par :

$$\underline{E}_p^x(x,y) = iE_0 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)} \mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{3.35}$$

$$\underline{E}_p^y(x,y) = E_0 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)} \mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{3.36}$$

$$\underline{B}_p^z(x,y) = E_0 \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}}{\omega \underline{k}} \frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)} \mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{3.37}$$

Les expressions suivantes se déduisent pour le diélectrique :

$$\underline{E}_d^x(x,y) = iE_0\frac{\underline{K}_d}{\underline{k}}\frac{\sin(\underline{K}_d[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{3.38}$$

$$\underline{E}_d^y(x,y) = E_0\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{3.39}$$

$$\underline{B}_d^z(x,y) = E_0\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}}{\omega\underline{k}}\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{3.40}$$

Cette reformulation des champs n'est pas superflue. Elle permet de faire apparaitre une dépendance en $1/\cos(\underline{K}_d l_d)$ pour le champ dans le diélectrique, et en $1/\cosh(\underline{K}_p l_p)$ pour le champ dans le plasma, ce qui permet de supprimer les singularités dans l'hypothèse où l'une ou l'autre des longueurs s'annulerait. L'équation de raccordement des composantes tangentielles du champ électrique à l'interface se récrit alors :

$$\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{K}_d}\operatorname{cotan}(\underline{K}_d l_d) = \frac{\underline{\epsilon}_{r,p}}{\underline{K}_p}\operatorname{cotanh}(\underline{K}_p l_p) \tag{3.41}$$

On retrouve alors l'équation transcendantale déjà dérivée dans [55], mais étendue au cas d'une cavité remplie d'un plasma uniforme et collisionnel. A ce stade une remarque s'impose en ce qui concerne les modes propres du guide étudié. Si nous nous étions intéressés au cas du guide d'onde à plaques parallèles homogène, les expressions des champs électrique et magnétique auraient dépendu explicitement de l'ordre du mode qui se propageât dans la cavité. Mathématiquement, ce sont les conditions aux limites « dures » (*i.e.* l'annulation de la composante tangentielle du champ électrique à la surface des plans métalliques) qui conduisent à obtenir de telles expressions.

Dans le cas du guide d'onde à plaques parallèles inhomogène qui nous occupe, des conditions aux limites « flottantes » apparaissent à l'interface entre le diélectrique et le plasma, où la valeur du champ va s'adapter afin d'assurer les raccordements appropriés. Cette condition flottante fait disparaitre la dépendance explicite en l'ordre du mode, ce dernier devenant implicite, et la détermination des modes nécessite alors de résoudre l'équation transcendantale pour trouver l'ensemble des couples de constantes ($\underline{K}_d$, $\underline{K}_p$) solutions de l'équation, et par là même, l'ensemble des valeurs que peut prendre la constante de propagation $\underline{k}$.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons déterminer une solution approchée de l'équation transcendantale pour le mode fondamental, et nous discuterons brièvement de la résolution de l'équation pour les modes d'ordres supérieurs.

3.3 Analyse modale

3.3.1 Étude du mode principal, dans la limite des basses fréquences

Suivant la dichotomie effectuée par Collin, nous choisissons tout d'abord de chercher la solution de l'équation transcendantale dans la limite dite des basses fréquences. Pour ce faire, nous effectuons un développement limité des cotangentes trigonométrique et hyperbolique à l'ordre le plus bas, ce qui conduit à récrire l'équation sous la forme :

$$\underline{\epsilon}_{r,d}\,\underline{K}_p^2 l_p = \underline{\epsilon}_{r,p}\,\underline{K}_d^2 l_d \tag{3.42}$$

qui n'est rien moins que l'équation transcendantale linéarisée. En développant les constantes $\underline{K}_d$ et $\underline{K}_p$ sous la forme $\underline{K}_d = k_0\sqrt{\underline{\epsilon}_d}$ et $\underline{K}_p = k_0\sqrt{\underline{\epsilon}_p}$, et en identifiant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons alors les deux équations suivantes :

$$\left(\epsilon'_{r,d}\epsilon'_p - \epsilon''_{r,d}\epsilon''_p\right) l_p = \left(\epsilon'_{r,p}\epsilon'_d - \epsilon''_{r,p}\epsilon''_d\right) l_d \tag{3.43}$$

$$\left(\epsilon''_{r,d}\epsilon'_p + \epsilon'_{r,d}\epsilon''_p\right) l_p = \left(\epsilon''_{r,p}\epsilon'_d + \epsilon'_{r,p}\epsilon''_d\right) l_d \tag{3.44}$$

Compte tenu de l'unicité du nombre d'onde $\underline{k}$, et des expressions données plus haut, à savoir :

$$\underline{k} = k_0\sqrt{\underline{\epsilon}_{r,p} + \underline{\epsilon}_p} \qquad \text{et} \qquad \underline{k} = k_0\sqrt{\underline{\epsilon}_{r,d} - \underline{\epsilon}_d} \tag{3.45}$$

il vient alors, en identifiant parties réelle et imaginaire, les deux équations suivantes :

$$\epsilon'_{r,p} + \epsilon'_p = \epsilon'_{r,d} - \epsilon'_d \tag{3.46}$$

$$\epsilon''_{r,p} + \epsilon''_p = \epsilon''_{r,d} - \epsilon''_d \tag{3.47}$$

Nous obtenons alors un système de quatre équations à quatre inconnues, et il vient après quelques calculs l'expression des quatre constantes ϵ'_p, ϵ''_p, ϵ'_d et ϵ''_d :

$$\begin{aligned}
\epsilon'_p &= -\left(\epsilon'_{r,p}l_d + \epsilon'_{r,d}l_p\right)\left(\frac{1}{l_d}+\frac{1}{l_p}\right)\left[\left(1+\frac{\epsilon'_{r,p}}{\epsilon'_{r,d}}\frac{l_d}{l_p}\right)^2 + \frac{\epsilon''^2_{r,p}}{\epsilon'^2_{r,d}}\frac{l_d^2}{l_p^2}\right]^{-1} + \epsilon'_{r,d}\left(1+\frac{l_p}{l_d}\right) - \epsilon'_{r,p} \\
\epsilon''_p &= \epsilon''_{r,p}\left(1+\frac{l_d}{l_p}\right)\left[\left(1+\frac{\epsilon'_{r,p}}{\epsilon'_{r,d}}\frac{l_d}{l_p}\right)^2 + \frac{\epsilon''^2_{r,p}}{\epsilon'^2_{r,d}}\frac{l_d^2}{l_p^2}\right]^{-1} - \epsilon''_{r,p} \\
\epsilon'_d &= \left(\epsilon'_{r,p}l_d + \epsilon'_{r,d}l_p\right)\left(\frac{1}{l_d}+\frac{1}{l_p}\right)\left[\left(1+\frac{\epsilon'_{r,p}}{\epsilon'_{r,d}}\frac{l_d}{l_p}\right)^2 + \frac{\epsilon''^2_{r,p}}{\epsilon'^2_{r,d}}\frac{l_d^2}{l_p^2}\right]^{-1} - \epsilon'_{r,d}\frac{l_p}{l_d} \\
\epsilon''_d &= -\epsilon''_{r,p}\left(1+\frac{l_d}{l_p}\right)\left[\left(1+\frac{\epsilon'_{r,p}}{\epsilon'_{r,d}}\frac{l_d}{l_p}\right)^2 + \frac{\epsilon''^2_{r,p}}{\epsilon'^2_{r,d}}\frac{l_d^2}{l_p^2}\right]^{-1}
\end{aligned}$$

En reprenant l'une des deux expressions possibles de la constante de propagation $\underline{k}$, et attendu que le nombre d'onde peut également être exprimé en fonction de la permittivité effective $\underline{\epsilon}_r$ vue par l'onde au cours de sa propagation puisque $\underline{k} = k_0\sqrt{\underline{\epsilon}_r}$, on en déduit ainsi l'expression de $\underline{\epsilon}_r$:

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_{r,d}\left(1+\frac{l_p}{l_d}\right) - \frac{\epsilon'_{r,p}l_d + \epsilon'_{r,d}l_p}{\left(1+\frac{\epsilon'_{r,p}}{\epsilon'_{r,d}}\frac{l_d}{l_p}\right)^2 + \frac{\epsilon''^2_{r,p}}{\epsilon'^2_{r,d}}\frac{l_d^2}{l_p^2}}\left(\frac{1}{l_d}+\frac{1}{l_p}\right) + i\frac{\epsilon''_{r,p}}{\left(1+\frac{\epsilon'_{r,p}}{\epsilon'_{r,d}}\frac{l_d}{l_p}\right)^2 + \frac{\epsilon''^2_{r,p}}{\epsilon'^2_{r,d}}\frac{l_d^2}{l_p^2}}\left(1+\frac{l_d}{l_p}\right) \tag{3.48}$$

Il apparaît donc clairement que, dès lors que le plasma absorbe l'énergie de l'onde électromagnétique (*i.e.* $\epsilon''_{r,p} \neq 0$), la permittivité effective possède une partie imaginaire non nulle. La constante de

propagation $\underline{k} = k_0\sqrt{\underline{\epsilon_r}}$ peut être décomposée comme une partie réelle k' et une partie imaginaire k'', définies par :

$$k' = k_0\sqrt{\frac{|\underline{\epsilon_r}| + \epsilon'_r}{2}} \qquad \text{et} \qquad k'' = k_0\sqrt{\frac{|\underline{\epsilon_r}| - \epsilon'_r}{2}} \tag{3.49}$$

où $|\underline{\epsilon_r}| = \sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r}$. Dès lors, il apparait que si la partie imaginaire de la permittivité effective est non nulle, conséquence du fait que la partie imaginaire de la permittivité relative du plasma est non nulle, alors la partie imaginaire de la constante de propagation est également non nulle. Or, comme les champs dans le diélectrique et le plasma s'écrivent respectivement (on se restreint à la composante $\underline{E}^y(x, y)$ par souci de légèreté) :

$$\underline{E}^y_d(x, y) = E_0\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{ik'x}\mathrm{e}^{-k''x} \tag{3.50}$$

$$\underline{E}^y_p(x, y) = E_0\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y + l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)}\mathrm{e}^{ik'x}\mathrm{e}^{-k''x} \tag{3.51}$$

on en déduit alors que si la puissance transportée par l'onde est absorbée par le plasma, alors l'onde s'atténue dans le diélectrique au cours de sa propagation. Attendu que le substrat diélectrique est supposé sans pertes (*i.e.* $\epsilon''_{r,d} = 0$), et qu'il n'y a pas de rupture d'impédance le long de la ligne susceptible d'engendrer une réflexion de la puissance, la diminution de l'énergie portée par l'onde dans le diélectrique au cours de la propagation ne peut s'expliquer que par un transfert d'énergie du diélectrique vers le plasma. Le mécanisme par lequel ce transfert se produit fera l'objet d'une description approfondie dans les sections suivantes.

Pour finir, notons que dans le cas où il n'y a pas de plasma dans la cavité, on a $\epsilon'_{r,p} = 1$ et $\epsilon''_{r,p} = 0$, et la permittivité effective se réduit à :

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_{r,p}\epsilon'_{r,d}\frac{l_p + l_d}{\epsilon'_{r,d}l_p + \epsilon'_{r,p}l_d} \tag{3.52}$$

qui est la formule donnée par Collin et rappelée dans le deuxième chapitre (*cf.* équation (2.21)). Le développement ci-dessus conduit à la solution de l'équation transcendantale linéarisée, *i.e.* à une solution approchée qui utilisée comme point de départ dans une méthode numérique de résolution de zéros (Newton ou Müller), donnerait la véritable valeur du nombre d'onde, mais toujours pour le mode d'ordre le plus bas.

La figure 3.4 présente une comparaison des solutions analytique et numérique (obtenue en utilisant la méthode de Müller) de l'équation transcendantale, en fonction de la fréquence dans le cas de la ligne à vide, et de la densité électronique pour une fréquence de 3 GHz. On remarque alors que pour les dimensions qui sont les nôtres, à savoir $l_d = 0.508$ mm et $l_p = 1.524$ mm, la formule donnée plus haut pour la permittivité relative (*cf.* équation (3.48)) est relativement robuste : l'erreur relative commise avec cette formule est inférieur à 1% pour des fréquences inférieures à 35 GHz, ce qui couvre largement la bande de fréquence que nous voulons étudier. En revanche, si on s'intéresse à sa validité en fonction de la densité électronique dans le plasma, l'erreur relative est inférieure à 1% pour des densités inférieures à 6×10^{18} m^{-3} et à 5% pour des densités inférieures à 4.4×10^{19} m^{-3}. Aussi est il préférable d'utiliser la solution numérique pour les plasmas que nous avons à traiter.

Les profils des valeurs efficaces des composantes de champ électrique E^x et E^y dans la direction y pour le mode principal, obtenus par résolution de l'équation transcendantale pour une fréquence de 3

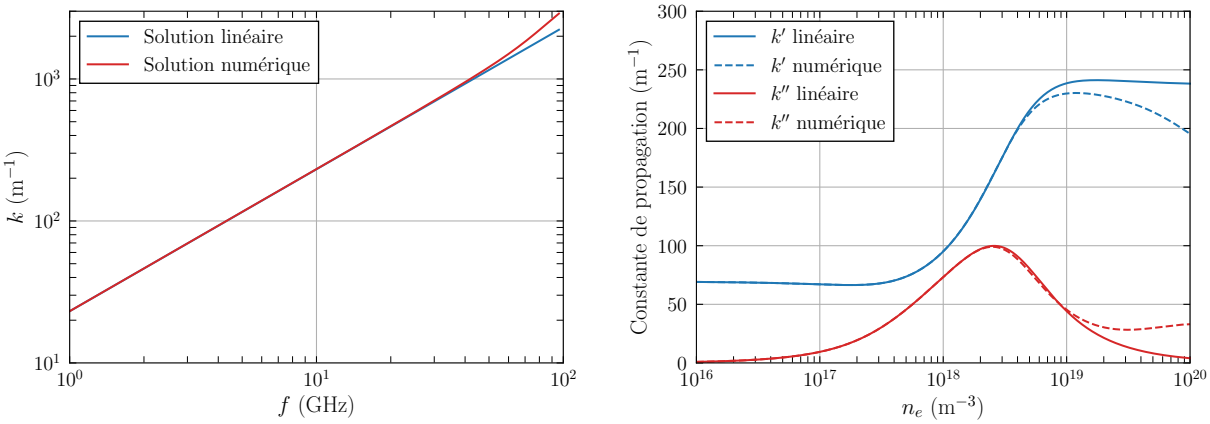


FIGURE 3.4 – A gauche : comparaison des solutions analytique et numérique de l'équation transcendantale en fonction de la fréquence de l'onde, pour la ligne à vide dont les dimensions sont celles déjà présentées. A droite : comparaison des solutions analytique et numérique de l'équation transcendantale en fonction de la densité de plasma dans la cavité, pour une fréquence incidente de 3 GHz, dans un plasma à 10 Torr (*i.e.* $\nu_m = 5.3 \times 10^{10}$ s^{-1}). Les dimensions de la cavité sont $l_d = 0.508$ mm et $l_p = 1.524$ mm.

GHz et une amplitude $E_0 = 1$ V.m^{-1} sont présentés sur la figure 3.5. On retrouve alors la structure typique attendue pour un champ quasi-TEM, pour lequel l'amplitude de la composante de champ E^x est cinquante-trois fois inférieure à l'amplitude de la composante de champ E^y (si on considère les valeurs maximales de chacune des amplitudes), d'où l'appellation « quasi-TEM ».

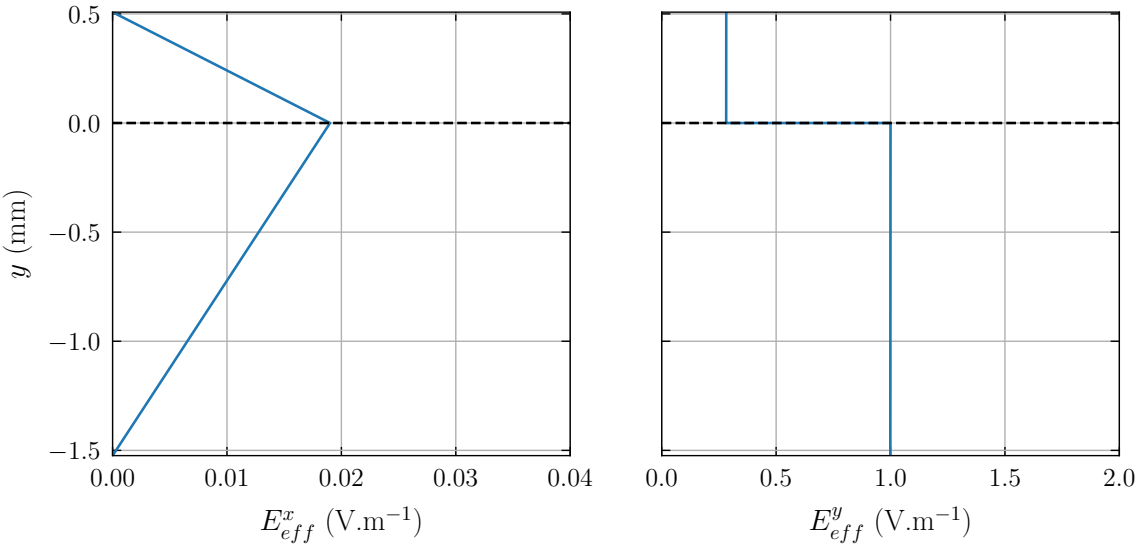


FIGURE 3.5 – Profils des valeurs efficaces des composantes de champ électrique E^x et E^y dans la direction y pour le mode principal, pour une fréquence de 3 GHz et une amplitude de $E_0 = 1$ V.m^{-1}. La ligne noire en pointillés matérialise la frontière entre le diélectrique et le vide.

Pour finir, une étude plus poussée de la ligne de transmission nécessite de déterminer tous les modes propres de la cavité, pour laquelle une résolution numérique de l'équation transcendantale est inévitable. Dans la prochaine section, nous allons donc étudier les modes d'ordres supérieurs, ce qui va nous permettre de mettre au jour deux types différents de propagation qui peuvent exister dans la ligne.

3.3.2 Étude des modes d'ordres supérieurs

Afin de déterminer tous les modes possibles dans la cavité, on s'appuie sur les travaux de P. Zouros [56] qui a développé l'algorithme CCOMP qui permet de déterminer les racines d'équations telle que celle qui nous occupe (*cf.* équation (3.41)). Cet algorithme recherche les « points candidats » du plan complexe, dans le voisinage desquels une racine de l'équation transcendantale pourrait se trouver. Il détermine ensuite les racines à partir de ces points candidats. Pour des raisons de simplicité, la méthode mathématique ne sera pas explicitée plus avant ici. Néanmoins, l'utilisation de cette méthode nécessite de reformuler l'équation transcendantale en introduisant la matrice $\mathbb{A}$ définie par :

$$\mathbb{A}(\hat{\underline{k}}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\hat{\underline{K}}_p}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \tanh(k_0 \hat{\underline{K}}_p l_p) \\ 1 & \frac{\hat{\underline{K}}_d}{\underline{\epsilon}_{r,d}} \tan(k_0 \hat{\underline{K}}_d l_d) \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

où $\hat{\underline{K}}_d$ et $\hat{\underline{K}}_p$ sont les nombres d'onde normalisés définis par :

$$\hat{\underline{K}}_d = \sqrt{\underline{\epsilon}_{r,d} - \hat{\underline{k}}^2} \qquad \text{et} \qquad \hat{\underline{K}}_p = \sqrt{\hat{\underline{k}}^2 - \underline{\epsilon}_{r,p}} \tag{3.54}$$

Ainsi l'équation :

$$\det\left(\mathbb{A}(\hat{\underline{k}})\right) = 0 \tag{3.55}$$

redonne bien l'équation transcendantale. Afin d'étudier les propriétés modales de la ligne sans pertes, nous avons cherché numériquement via cette méthode, l'ensemble des valeurs que peut prendre $\underline{k}$ pour la ligne dans la bande de fréquences allant de 0 Hz à 1 THz. Bien entendu, une telle bande de fréquences couvre largement la bande qui nous intéresse dans ces travaux, mais cela va nous permettre d'observer le comportement de plusieurs modes d'ordre supérieurs. Le diagramme de dispersion ainsi obtenu est présenté sur la figure 3.6.
Les modes sont représentés par les lignes noires, et le cône de lumière d'équation $k_0 = \omega/c$, est représenté par la droite en pointillés rouges. Ce type de diagramme de dispersion, où les modes passent à travers le cône de lumière, sont peu communs. On les retrouve par exemple dans l'étude des guides d'onde corrugués [57], ce comportement semblant apparaître lorsque deux dimensions cohabitent dans la direction transverse à la direction de propagation (les épaisseurs de diélectrique et de plasma l_d et l_p pour la ligne qui nous occupe, et les rayons r_1 et r_2 dans le cas du guide corrugué).

Considérons le mode d'ordre un pour lequel la traversée du cône s'effectue à $f_0 = 184.79$ GHz, et pour lequel les profils des composantes transverse et longitudinale du champ électrique sont représentées sur la figure 3.7 pour plusieurs fréquences. Les constantes $\underline{K}_d$ et $\underline{K}_p$ s'expriment en fonction de la constante de propagation $\underline{k}$ sous la forme :

$$\underline{K}_d = \sqrt{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d} - \underline{k}^2} \qquad \text{et} \qquad \underline{K}_p = \sqrt{\underline{k}^2 - k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,p}} \tag{3.56}$$

Deux types de comportement sont alors visibles que ce soit sur le diagramme de dispersion ou sur le profil des champs dans la cavité :

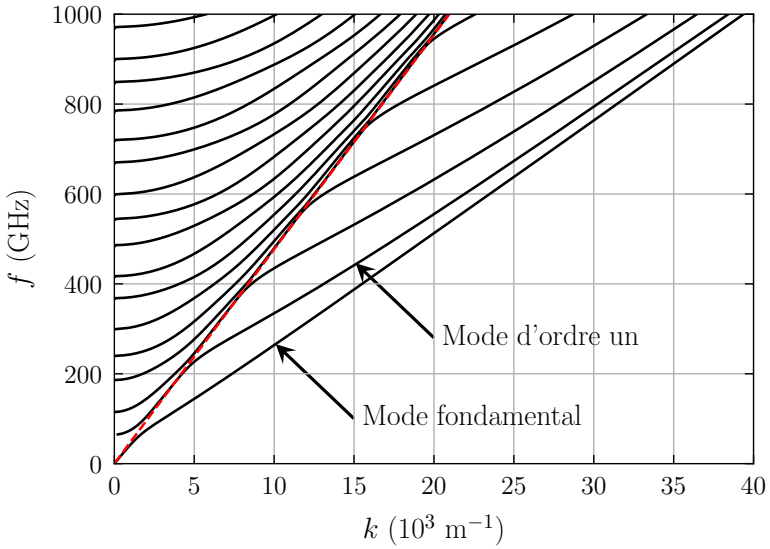


FIGURE 3.6 – Diagramme de dispersion de la ligne microruban suspendue à vide. Le cône de lumière ($k_0 = \omega/c$) est représenté en rouge.

- Soit $\underline{k} < k_0$ (*i.e.* nous nous situons à l'intérieur du cône de lumière), alors d'après l'équation (3.56), la constante $\underline{K}_p$ est imaginaire pure, et les profils de champ électrique sont alors composés d'arches de cosinus (*cf.* figure 3.7).

- Soit $\underline{k} > k_0$ (*i.e.* à l'extérieur du cône de lumière), la constante $\underline{K}_p$ est alors réelle, et les profils de champ électrique présentent alors une évanescence dans la direction transverse pour $y < 0$.

Notons de plus que les profils obtenus permettent d'illustrer le propos précédent sur le caractère implicite de l'ordre des modes. En effet, dans un guide d'onde à plaques parallèles homogène, le nombre d'arches de cosinus dans la direction transverse serait un entier naturel égal à l'ordre du mode considéré. Ici, le nombre d'arches de cosinus est un nombre réel, d'où la disparition de la dépendance explicite des champs en l'ordre du mode.

On peut difficilement obtenir plus d'informations de l'analyse de la solution obtenue par résolution des équations de Maxwell, qui quelque part peut s'apparenter à l'optique ondulatoire, où les signaux sont considérés sous la forme d'ondes électromagnétiques. Aussi, plutôt que d'observer les phénomènes qui nous occupent sous l'angle de l'optique ondulatoire, nous pouvons tenter de les décrire par le prisme de l'optique géométrique. Pour ce faire, intéressons nous à l'expression de la composante de champ $\underline{E}_d^y(y)$ qui s'écrit, comme nous l'avons démontré plus haut (*cf.* équation (3.39)) :

$$\underline{E}_d^y(y) \quad = \quad E_0 \frac{\cos(\underline{K}_d[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)} \tag{3.57}$$

Cette dernière peut être récrite en développant le cosinus comme une somme d'exponentielles complexes :

$$\underline{E}_d^y(y) \quad = \quad \frac{E_0}{2} \frac{\mathrm{e}^{i\underline{K}_d[l_d-y]} + \mathrm{e}^{-i\underline{K}_d[l_d-y]}}{\cos(\underline{K}_d l_d)} \tag{3.58}$$

Elle apparait alors comme une superposition de deux ondes planes se propageant dans la direction y mais dans des sens opposés, et la constante $\underline{K}_d$, sibylline jusqu'ici, apparaît alors comme le nombre

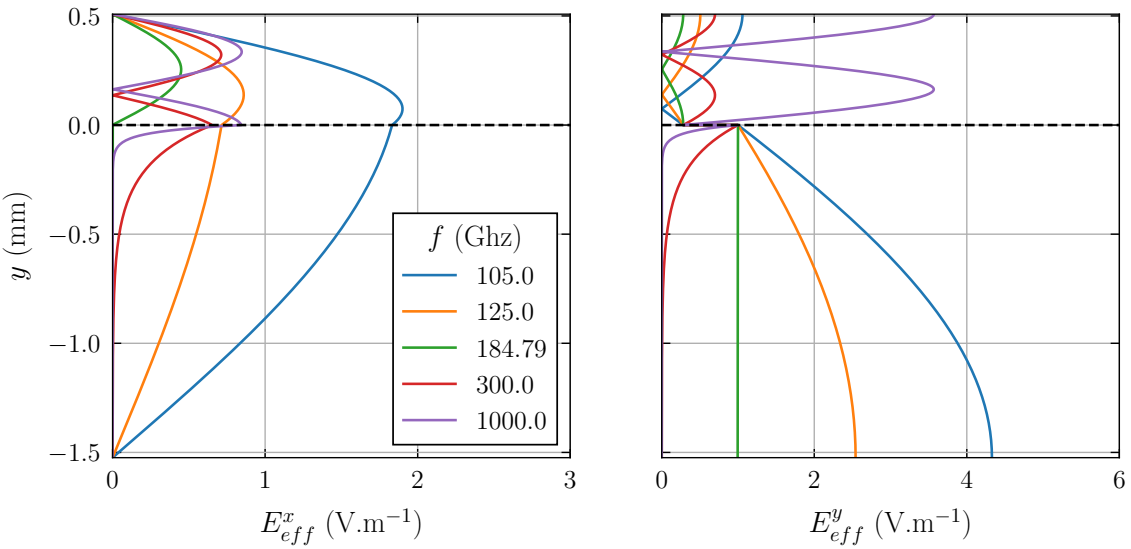


FIGURE 3.7 – Profils des valeurs efficaces des composantes de champ électrique E^x et E^y dans la direction y pour le mode d'ordre un, pour différentes fréquences et une amplitude de $E_0 = 1$ V.m^{-1}. La ligne noire en pointillés matérialise la frontière entre le diélectrique et le vide.

d'onde caractérisant cette propagation. On peut alors introduire le vecteur d'onde $\underline{\boldsymbol{k}}_d$ dans le diélectrique :

$$\underline{\boldsymbol{k}}_d = \underline{k}\,\mathbf{e}_x + \underline{K}_d\,\mathbf{e}_y \tag{3.59}$$

et le même raisonnement peut être utilisé pour déterminer l'expression du vecteur d'onde $\underline{\boldsymbol{k}}_p$ dans la cavité :

$$\underline{\boldsymbol{k}}_p = \underline{k}\,\mathbf{e}_x + i\underline{K}_p\,\mathbf{e}_y \tag{3.60}$$

où $\underline{k}_d = k_0\,\underline{\epsilon}_{r,d}$ et $\underline{k}_p = k_0\,\underline{\epsilon}_{r,p}$, de sorte qu'en norme, on retrouve les relations (3.56). Suivant le formalisme utilisé par O. Balosso [58], ces vecteurs d'onde peuvent être séparés en une partie réelle et une partie imaginaire qui décrivent respectivement la direction et le sens de propagation et d'atténuation de l'onde :

$$\underline{\boldsymbol{k}}_d = \left(k'\,\mathbf{e}_x + K'_d\,\mathbf{e}_y\right) + i\left(k''\,\mathbf{e}_x + K''_d\,\mathbf{e}_y\right) \tag{3.61}$$

$$\underline{\boldsymbol{k}}_p = \left(k'\,\mathbf{e}_x - K''_p\,\mathbf{e}_y\right) + i\left(k''\,\mathbf{e}_x + K'_p\,\mathbf{e}_y\right) \tag{3.62}$$

Considérons le cas du vecteur d'onde dans le plasma pour lequel nous notons $\boldsymbol{k}'_p$ et $\boldsymbol{k}''_p$ les parties réelle et imaginaire. Cette décomposition permet de faire apparaitre une propriété du signal qui se propage. Si $\boldsymbol{k}'_p$ est orthogonal à $\boldsymbol{k}''_p$, alors l'onde admet une évanescence suivant la direction de $\boldsymbol{k}''_p$, mais l'onde se propage sans dissipation d'énergie. En revanche si cette propriété d'orthogonalité n'est pas vérifiée, alors cela signifie que l'atténuation se fait pour partie dans la direction de propagation, ce qui signifie que l'onde est dissipée au fur et à mesure de la propagation. Le premier cas correspond au cas sans pertes qui nous occupe, et le second au cas où le milieu dans la cavité dissipe l'onde.

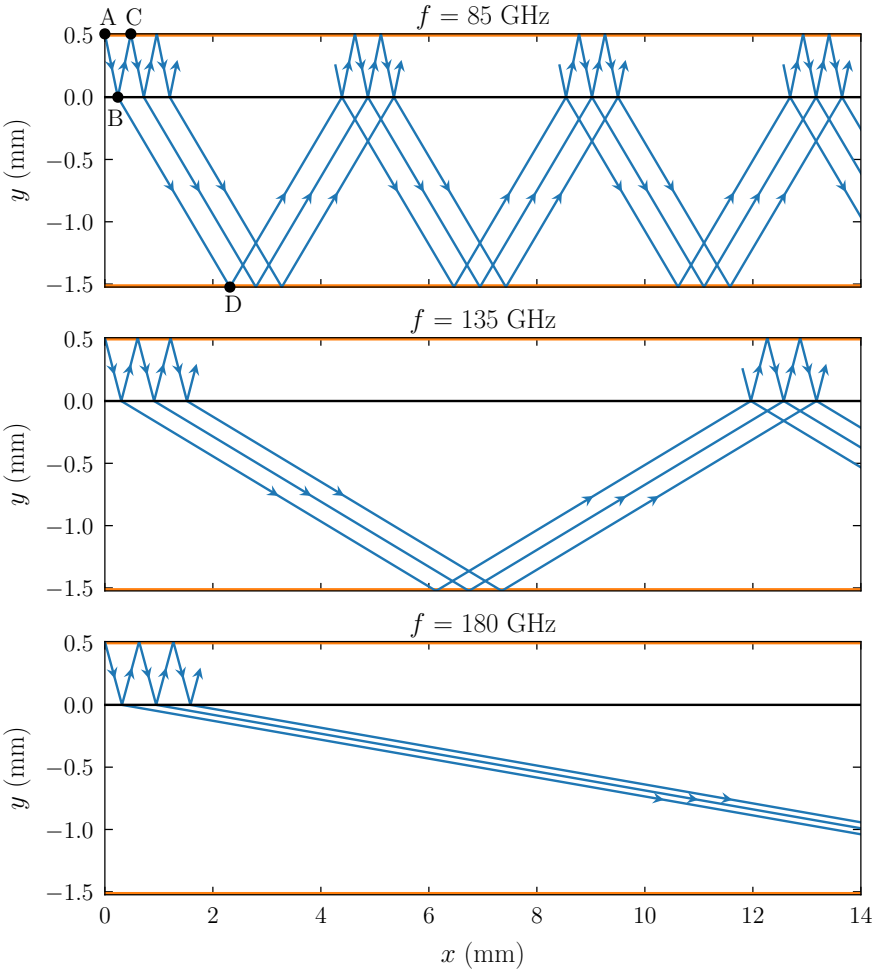


FIGURE 3.8 – Schéma illustrant le devenir d'un rayon pour le mode d'ordre un et pour plusieurs fréquences.

En considérant la partie réelle des vecteurs d'onde, il est possible de tracer les rayons dans le diélectrique et dans la cavité. La figure 3.8 montre les rayons obtenus pour le mode d'ordre un et pour différentes fréquences choisies de sorte que l'on se trouve à l'intérieur du cône de lumière. Si l'on considère la première fréquence $f = 85$ GHz, les coordonnées du point B s'obtiennent à partir des coordonnées du point A par une translation de vecteur $\boldsymbol{u}$ défini par :

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{K'_d l_d} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{\boldsymbol{k}}_d = \begin{pmatrix} \frac{k}{K'_d} l_d \\ \\ -l_d \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

De même, les coordonnées du point C s'obtiennent à partir des coordonnées du point B, par une translation de vecteur $\boldsymbol{u}$ défini par :

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{K'_d l_d} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\boldsymbol{k}}_d = \begin{pmatrix} \frac{k}{K'_d} l_d \\ \\ l_d \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

La même méthode peut être employée pour construire les rayons dans la cavité, et les coordonnées du point D s'obtiennent à partir des coordonnées du point B par une translation de vecteur $\boldsymbol{u}$ défini par :

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{K_p'' l_p}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underline{\boldsymbol{k}}_p = \begin{pmatrix}\frac{k}{K_p''} l_p\\ \\ -l_p\end{pmatrix} \tag{3.65}$$

Pour finir, le dioptre séparant le diélectrique du vide est représenté par la droite noire, les plans métalliques situés en $y = l_d$ et $y = -l_p$ par les droites oranges. Étudions le comportement des rayons dans la ligne pour la fréquence $f = 85$ GHz (*cf.* figure 3.8) :

- Un rayon dont on ne connaît pas l'histoire part du point A situé sur la ligne microruban, et se propage jusqu'au point B situé sur le dioptre. Là, il est en partie réfléchi et en partie réfracté.

- Le rayon réfléchi se propage alors du point B jusqu'au point C qui se situe sur la ligne où il va subir une réflexion totale.

- Le rayon réfracté dans la cavité se propage quant à lui jusqu'au point D situé sur le plan de masse où il va également subir une réflexion totale.

La propagation du signal dans la ligne est donc le fruit d'une succession de réflexions sur les plans métalliques et de réfractions par le dioptre. La répartition de puissance portée par l'onde dans le diélectrique et dans la cavité reste alors la même tout au long de la propagation.

Lorsque nous avons donné la solution de l'équation transcendantale linéarisée, nous avons observé qu'une absorption de l'onde dans la cavité, due à la présence d'un hypothétique plasma, entrainait une atténuation de l'onde dans le diélectrique. Cette atténuation s'illustre alors par le fait que la puissance réfractée dans la cavité, est en partie dissipée dans le plasma et ne revient donc pas dans le diélectrique, ce qui entraine un transfert irréversible de puissance du diélectrique vers le plasma. Mais nous reviendrons en détails sur la propagation en présence de plasma plus bas dans le manuscrit.

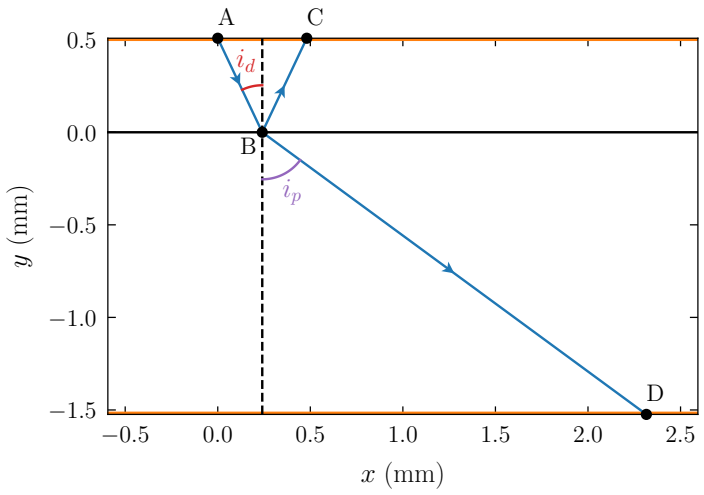


FIGURE 3.9 – Schéma présentant le devenir d'un rayon lumineux à la traversée du dioptre diélectrique/vide pour une fréquence $f = 85$ GHz. La normale au dioptre est représentée par la droite noire en pointillés. Les angles d'incidence et de réfraction sont respectivement notés i_d et i_p.

On remarque pour finir que lorsque la fréquence augmente, les rayons réfractés dans la cavité forment un angle de plus en plus petit avec le dioptre. Cette évolution de l'angle de réfraction en fonction de la fréquence, et le parallèle conduit jusqu'ici avec l'optique géométrique, nous poussent à voir si les

lois de Snell-Descartes de la réfraction sont valables dans le problème qui nous occupe. Pour ce faire, la figure 3.9 représente un zoom de la figure 3.8 pour la fréquence de 85 GHz, sur laquelle figurent l'angle d'incidence i_d du rayon dans le diélectrique et l'angle de réfraction i_p du rayon dans la cavité. Compte tenu de la construction des rayons que nous avons discutée plus haut (*cf.* equations (3.63) et (3.65)) et des formules de trigonométrie, les angles i_d et i_p sont alors respectivement définis par :

$$i_d = \arctan\left(\frac{|\underline{k}|}{|\underline{K}_d|}\right) \qquad \text{et} \qquad i_p = \arctan\left(\frac{|\underline{k}|}{|\underline{K}_p|}\right) \tag{3.66}$$

Étant donnée la relation :

$$\sin\left(\arctan\left(x\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{3.67}$$

il vient alors :

$$n_d \sin(i_d) = \frac{|\underline{k}|}{|\underline{K}_d|} \frac{n_d}{\sqrt{\left(\frac{|\underline{k}|}{|\underline{K}_d|}\right)^2 + 1}} = \frac{n_d}{\sqrt{|\underline{k}|^2 + |\underline{K}_d|^2}} |\underline{k}| \tag{3.68}$$

Or, la constante de propagation $\underline{k}$ et la constante $\underline{K}_d$ étant des constantes réelles et positives dans le cas étudié, la relation ci-dessus s'écrit finalement :

$$n_d \sin(i_d) = \frac{n_d}{\sqrt{\underline{k}^2 + \underline{K}_d^2}} \underline{k} \tag{3.69}$$

Pour finir, en utilisant l'expression donnée plus haut pour la constante $\underline{K}_d$, il vient finalement :

$$n_d \sin(i_d) = \frac{\underline{k}}{k_0} \tag{3.70}$$

Le même développement peut être conduit pour l'expression $n_p \sin(i_p)$, en remarquant que puisque la constante $\underline{K}_p$ est imaginaire pure, alors $|\underline{K}_p|^2 = -\underline{K}_p^2$, ce qui donne :

$$n_p \sin(i_p) = \frac{n_p}{\sqrt{\underline{k}^2 - \underline{K}_p^2}} \underline{k} \tag{3.71}$$

et en utilisant l'expression de $\underline{K}_p$ donnée plus haut, il vient :

$$n_p \sin(i_p) = \frac{\underline{k}}{k_0} \tag{3.72}$$

On retrouve donc bien la loi de Snell-Descartes de l'optique géométrique :

$$n_d \sin(i_d) = n_p \sin(i_p) \tag{3.73}$$

Finalement, il apparait que l'équation transcendantale de l'optique ondulatoire et la loi de Snell-Descartes de l'optique géométrique sont l'avers et le revers d'une même pièce. Cette reformulation du problème via les lois de l'optique géométrique, peut alors être mise en relation avec les profils de champ électrique donnés sur la figure 3.7. Puisque l'on étudie le cas où la cavité est vide, $n_p = 1$, et l'expression de l'angle de réfraction i_p se déduit de l'équation (3.72) :

$$i_p \quad = \quad \arcsin\left(\frac{\underline{k}}{k_0}\right) \tag{3.74}$$

Cette précision étant faite, nous pouvons alors distinguer trois modes de propagation différents :

- Si la constante de propagation $\underline{k}$ est inférieure à k_0, *i.e.* si l'on se trouve à l'intérieur du cône de lumière, alors le rayon se propage entre les deux plans métalliques.

- Lorsque $\underline{k} = k_0$, *i.e.* lorsque l'on se trouve sur le cône de lumière, alors l'angle de réfraction atteint la valeur limite $i_p = \pi/2$, et le rayon lumineux se propage alors à la surface du dioptre diélectrique/air. Le champ électrique E^y dans ce cas est alors parfaitement uniforme dans la cavité (*cf.* figure 3.7).

- Si la constante de propagation $\underline{k}$ devient supérieure au nombre d'onde dans le vide k_0, *i.e.* si on passe à travers le cône de lumière, alors le rayon continue à se propager sur le dioptre mais une évanescence apparait dans la direction y.

Si l'on suit la nomenclature introduite par O. Balosso, le premier cas correspond à une *onde de fuite* car l'onde réfractée fuit le dioptre, et les deuxième et troisième à une *onde de surface à simple évanescence* car le rayon se propage à la surface et qu'une évanescence apparait dans la cavité. Notons que dans notre cas l'onde de fuite n'en est pas une puisque le rayon subit une réflexion totale sur le plan de masse et retourne vers le diélectrique, mais par commodité nous conserverons cette nomenclature dans la suite du manuscrit. L'étude du diagramme de dispersion nous a ainsi permis d'identifier les deux types de modes qui peuvent s'établir dans la ligne sans pertes, ainsi que les mécanismes par lesquels ces modes se propagent.

Intéressons nous désormais au cas qui nous occupe, *i.e.* au mode fondamental pour une fréquence de 3 GHz. Compte tenu de ce que nous avons dit précédemment, la détermination de la nature du mode peut être réalisée en étudiant les constantes $\underline{K}_d$ et $\underline{K}_p$. Pour le mode qui nous occupe désormais, nous obtenons les valeurs suivantes par résolution numérique de l'équation transcendantale via la méthode de Newton :

$$\underline{K}_d \quad = \quad 95.992 \text{ m}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \underline{K}_p \quad = \quad 29.436 \text{ m}^{-1} \tag{3.75}$$

La résolution de l'équation transcendantale linéarisée dans la limite des basses fréquences donne quant à elle :

$$\underline{K}_d \quad = \quad 95.998 \text{ m}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \underline{K}_p \quad = \quad 29.416 \text{ m}^{-1} \tag{3.76}$$

Comme nous l'avions déjà montré à la section 3.3, la solution linéarisée approche de façon très satisfaisante la solution de l'équation transcendantale, pour les dimensions et la fréquence qui nous intéressent. La constante $\underline{K}_p$ est alors réelle, ce qui signifie que le mode principal à 3 GHz dans la ligne sans plasma est un mode d'onde de surface. Ainsi, Collin introduit une fausse distinction entre

les modes de haute fréquence et de basse fréquence, le mode d'ordre zéro dans notre cas étant toujours une onde de surface, même dans la limite des basses fréquences. Certes, la décroissance dans la direction y est particulièrement « lente » mais il n'en demeure pas moins qu'il n'y a pas de différence de nature entre le mode d'ordre zéro à 3 GHz et le même mode pour une fréquence plus élevée.

3.4 Mécanismes de couplage onde-plasma

La détermination analytique de la constante de propagation $\underline{k}$ et de la permittivité effective $\underline{\epsilon}_r$, pour le mode fondamental, dans la limite des basses fréquences, nous a permis de comprendre que dans le cas où un plasma uniforme remplit la cavité, un transfert de puissance électromagnétique a lieu du diélectrique vers le plasma. Nous avons également étudié en détail et posé les définitions des deux types de modes qui peuvent se propager dans la ligne sans pertes, à savoir l'onde de surface à simple évanescence, pour laquelle le signal est guidé dans le diélectrique et l'onde de fuite pour laquelle le signal est guidé entre les plans métalliques. Enfin, il apparut que le mode fondamental à la fréquence de 3 GHz qui nous intéresse appartenait à la première catégorie. Voyons maintenant comment ce mode se comporte lorsque l'on introduit un plasma uniforme dans la cavité, et en particulier, étudions la nature du mode en fonction de la densité électronique.

3.4.1 Modes de propagation en présence d'un plasma uniforme

Afin d'étudier le comportement du mode fondamental en présence d'un plasma uniforme, l'équation transcendantale a été résolue numériquement, à partir de la solution linéarisée (*cf.* équation (3.48)), pour des densités électroniques comprises entre 10^{16} m^{-3} et 10^{20} m^{-3}. Cette résolution a été effectuée à 3 GHz, pour les dimensions $l_d = 0.508$ mm et $l_p = 1.524$ mm, et pour une fréquence de quantité de mouvement à 10 Torr dans l'Argon de $\nu_m = 5.3 \times 10^{10}$ s^{-1} [20]. La prise en compte des pertes rend difficile la présentation des résultats sous la forme d'un diagramme de dispersion, mais l'analyse faite plus haut sur les constantes $\underline{K}_d$ et $\underline{K}_p$ et sur les vecteurs d'ondes qui en découlent reste valable.

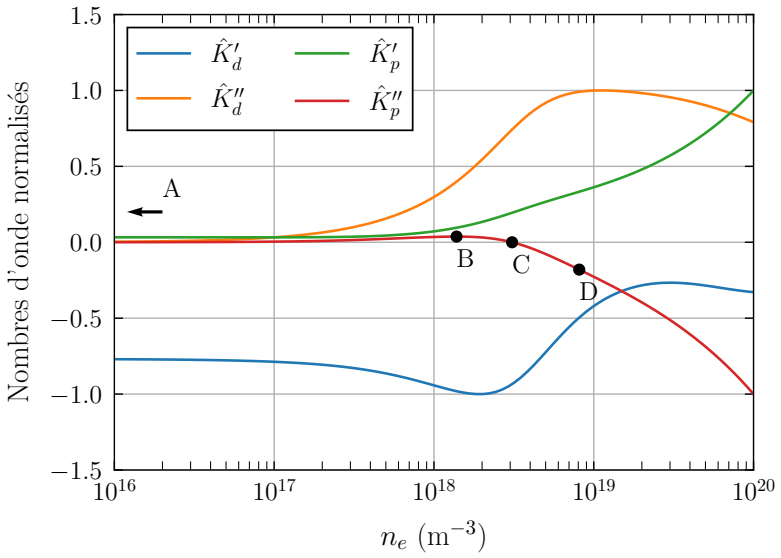


FIGURE 3.10 – Évolution des nombres d'onde normalisés à l'unité en fonction de la densité électronique du plasma uniforme dans la cavité. Le point A correspond au point $n_e = 0$ m^{-3}.

La figure 3.10 présente l'évolution des parties réelle et imaginaire des constantes $\underline{K}_d$ et $\underline{K}_p$, en fonction de la densité électronique du plasma. Puisque c'est uniquement le signe de ces constantes qui va définir la direction des vecteurs d'onde, elles ont été normalisées à l'unité. En ce qui concerne le vecteur d'onde dans le diélectrique, les constantes K'_d et K''_d ne changeant pas de signe quelle que soit la densité du plasma, il n'y a donc pas de changement de nature du mode dans le diélectrique en

fonction de la densité électronique.

Si l'on considère désormais le mode dans la cavité, on remarque que K'_p ne change jamais de signe quelle que soit la densité du plasma ce qui n'est pas le cas de la constante K''_p. Il est alors possible de distinguer quatre régimes différents en fonction de la densité du plasma :

- Lorsque la densité électronique est nulle, la constante K''_p est nulle. On se retrouve dans le cas sans pertes traité précédemment.
- Lorsque la densité électronique est comprise entre $n_e = 0$ m^{-3} et $n_e = 3.08 \times 10^{18}$ m^{-3}, la constante K''_p est positive.
- Pour une densité électronique égale à $n_e = 3.08 \times 10^{18}$ m^{-3}, la constante K''_p est nulle.
- Lorsque la densité est supérieure à $n_e = 3.08 \times 10^{18}$ m^{-3}, la constante K''_p est négative quelle que soit la valeur de la densité.

Ces quatre régimes sont matérialisés par les points A, B, C et D sur la figure 3.10, et les valeurs des constantes en ces points ont été utilisées afin de tracer les parties réelle et imaginaire des vecteurs d'onde dans le plasma. Pour simplifier l'analyse, ces vecteurs d'onde ont tous subi la même homothétie de facteur $l_p/|\boldsymbol{k}''_p(\mathrm{D})|$, où $\boldsymbol{k}''_p(\mathrm{D})$ est la partie imaginaire du vecteur d'onde dans le plasma pour la valeur de densité au point D. Les vecteurs d'onde sont représentés sur la figure 3.11.

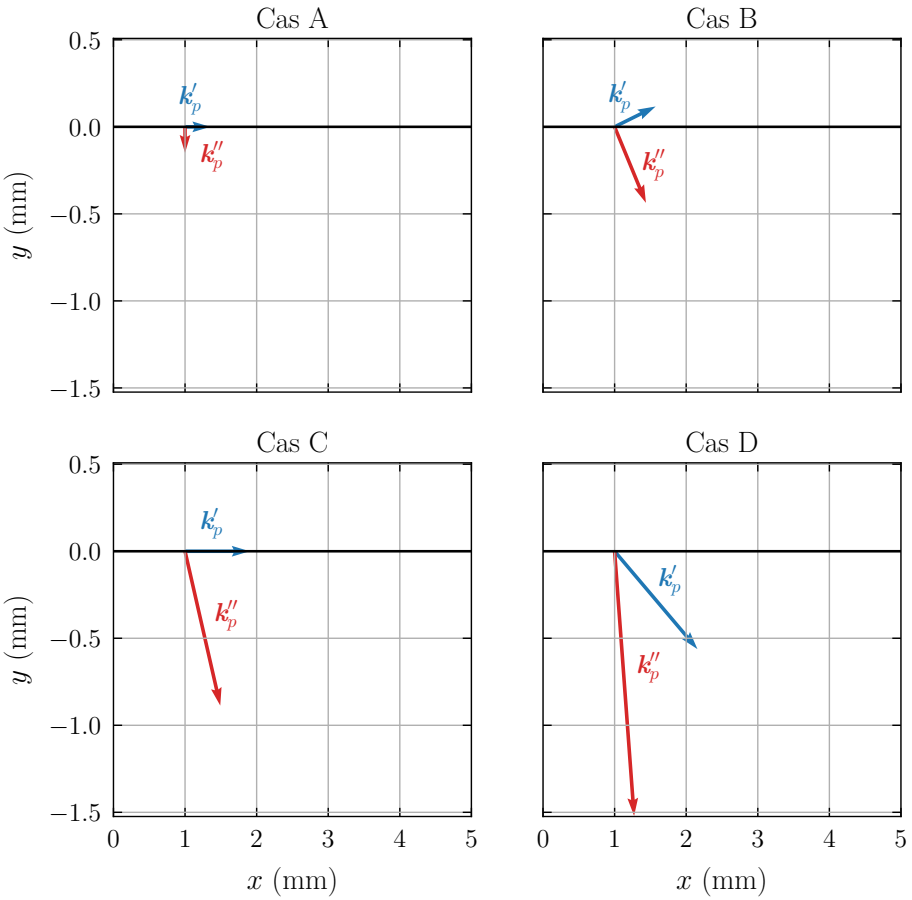


FIGURE 3.11 – Vecteurs d'ondes dans la ligne pour différentes densités électroniques représentées par les points A, B, C et D sur la figure 3.10.

Les quatre régimes A, B, C et D présentent les caractéristiques suivantes :

- Dans le cas A, *i.e.* dans le cas de la ligne à vide, la partie réelle $\boldsymbol{k}'_p$ du vecteur d'onde qui décrit la propagation est colinéaire au dioptre représenté par la droite noire. La partie imaginaire $\boldsymbol{k}''_p$ du nombre d'onde est orthogonale à la partie réelle, donc une évanescence apparait dans la direction y, il s'agit là de l'onde de surface dont nous avons déjà parlé.

- Dans le cas B, $\boldsymbol{k}'_p$ est dirigé vers l'interface et n'est plus orthogonal à la partie imaginaire $\boldsymbol{k}''_p$, l'onde subit donc une dissipation au cours de la propagation. Il s'agit d'une onde de fuite.

- Dans le cas C, $\boldsymbol{k}'_p$ est colinéaire à l'interface et n'est plus orthogonal à la partie imaginaire $\boldsymbol{k}''_p$, nous sommes en présence d'une onde de surface à pertes.

- Dans le cas D, la partie réelle $\boldsymbol{k}'_p$ du vecteur d'onde est dirigée vers le plasma, on retrouve alors une onde du même type que l'onde de fuite décrite plus haut, qui s'atténue fortement au cours de la propagation, ce qui permet dans notre cas l'entretien du plasma.

Nous venons d'exposer les quatre régimes de propagation qui peuvent exister dans la ligne. Il s'agit bien entendu d'une prospection analytique relativement simple, puisque elle ne considère pas les gradients de densité électronique. Les deux principaux résultats à retenir de cette étude sont que le couplage onde-plasma dans les zones de forte densité se fait par onde de fuite, *i.e.* le diélectrique rayonne de la puissance dans le plasma, et que ce couplage onde-plasma n'a lieu que si la densité électronique est supérieure à la densité critique. Dans le paragraphe suivant, nous allons tenter de vérifier si ces comportements sont observés sur les données simulées.

3.4.2 Comparaison théorie-simulation

Dans cette section, nous allons voir si les résultats mis au jour par l'étude analytique peuvent être observés dans les données obtenues numériquement. Pour simplifier la visualisation, la figure 3.12 montre les lignes tangentes en tout point au vecteur de Poynting, ainsi que la cartographie de densité électronique obtenus pour une puissance incidente de 40 dBm.

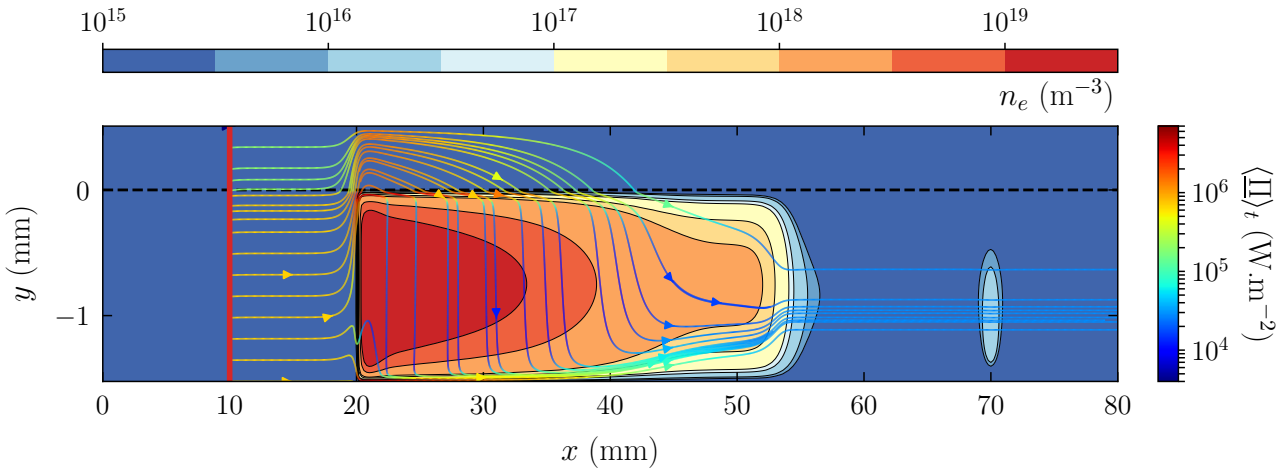


FIGURE 3.12 – Cartographie de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting et de la densité électronique pour une puissance incidente de 40 dBm. La ligne noire en pointillés repère l'interface diélectrique/plasma et la ligne rouge en $x = 10$ mm repère la nappe de courant.

Quatre étapes peuvent alors être dégagées dans la propagation de l'onde dans la ligne. Tout d'abord, le champ électromagnétique émis par la nappe de courant en $x = 10$ mm se propage sous forme d'onde de surface jusqu'à l'interface entre le support diélectrique et le plasma en $x = 20$ mm. Comme les

milieux dans lesquels se propage le signal sont parfaitement homogènes, la solution numérique des équations de Maxwell est égale à la solution analytique que nous avons développée plus haut.
Au voisinage du plan situé à $x = 20$ mm, une réorganisation de la puissance se produit à la traversée du front de plasma, qui permet de raccorder le mode d'onde de surface avant le front, au mode d'onde de fuite après le front. Lors de cette réorganisation, une partie de la puissance est réfléchie à cause de la rupture d'impédance. La physique en jeu dans ce raccordement sera exposée dans le chapitre suivant.

Au delà de $x = 20$ mm, après le front de densité, on observe le transfert de puissance qui s'effectue du diélectrique vers le plasma. En effet, l'amplitude du vecteur de Poynting dans le diélectrique passe par un maximum en $x = 22$ mm, et diminue progressivement au fur et à mesure de la propagation pour atteindre sa valeur minimale en fin de colonne. Les lignes tangentes permettent par ailleurs de visualiser la puissance rayonnée dans le plasma.

Pour finir, comme nous l'avions annoncé lors de l'établissement de l'expression de la permittivité linéarisée, le couplage a lieu tant que le plasma absorbe la puissance, *i.e.* tant que la densité électronique est supérieure à la densité critique (1.2×10^{17} m^{-3} à 3 GHz). En effet, comme on peut le voir sur la figure 3.12, au delà de cette valeur de densité, *i.e* au delà de $x = 53$ mm le vecteur de Poynting est de nouveau colinéaire à l'interface, son amplitude ne varie plus au fur et à mesure de la propagation, et on retrouve un mode d'onde de surface.

3.5 Puissance de fuite

Comme nous l'avions annoncé dans la première section de ce chapitre, les deux points essentiels pour la compréhension de la limitation de puissance sont la compréhension des mécanismes de couplage onde-plasma, que nous venons d'étudier dans le détail, et la maitrise de la physique qui pilote la puissance de fuite, à laquelle nous allons maintenant nous intéresser.

3.5.1 Caractérisation de la ligne

Dans les sections précédentes nous avons obtenu l'expression analytique du champ dans la ligne. Si nous voulons adapter ces développements au problème qui nous occupe, il est nécessaire d'exprimer l'amplitude E_0 du champ électromagnétique en fonction de la puissance incidente dans le dispositif. Pour ce faire, nous pouvons exprimer la puissance incidente à partir du vecteur de Poynting, qui peut être déterminé à partir des expressions des champs données ci-dessus. Il vient donc :

$$P_{inc} = \int_{-l_p}^{l_d} \int_{0}^{L_z} \langle \Pi_x \rangle_t \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{3.77}$$

où $\langle \Pi_x \rangle_t$ est la moyenne temporelle de la projection du vecteur de Poynting suivant la direction x, et L_z est la largeur analytique de la ligne. Comme nous l'avons écrit dans la section précédente, pour la ligne à vide, les constantes $\underline{K}_d$ et $\underline{K}_p$ sont réelles (onde de surface), $\underline{\epsilon}_{r,p} = 1$, si bien que l'on peut poser les notations :

$$\underline{K}_d = K_d^0 \qquad \text{et} \qquad \underline{K}_p = K_p^0 \tag{3.78}$$

Toutes les valeurs étant réelles, cette intégrale donne alors pour les champs considérés (*cf.* annexe C) :

$$P_{inc} = E_0^2 \frac{L_z}{4\mu_0} \frac{k_0^2 \epsilon_{r,d}}{\omega k} \left(\frac{2K_d^0 l_d + \sin(2K_d^0 l_d)}{2K_d^0 \cos^2(K_d^0 l_d)} + \epsilon_{r,d} \frac{2K_p^0 l_p + \sinh(2K_p^0 l_p)}{2K_p^0 \cosh^2(K_p^0 l_p)} \right) \tag{3.79}$$

Comme en simulation, la largeur L_z de la ligne doit être calibrée afin d'obtenir une cohérence optimale avec les simulations 3D réalisées avec Ansys HFSS. Pour ce faire, il suffit de remarquer que la ligne est

intégralement caractérisée par la donnée d'un champ électrique incident standard E°_{inc} qui correspond au module du champ électrique mesuré dans la ligne à vide, sur le plan de masse, à la position de la MHCD, à la puissance standard $P^{\circ}_{inc} = 1$ W. Cette valeur a été choisie arbitrairement, tout autre couple de puissance et de champ étant également utilisable. Il faut alors trouver l'expression de l'amplitude E_0 en fonction du couple $(P^{\circ}_{inc}, E^{\circ}_{inc})$. Le module du champ, s'écrit dans le cas de la ligne à vide sous la forme :

$$|\boldsymbol{E}(y)| = E_0 \epsilon_{r,d} \sqrt{\frac{K_p^{0\,2}}{k^2} \frac{\sinh^2(K_p^0[y+l_p])}{\cosh^2(K_p^0 l_p)} + \frac{\cosh^2(K_p^0[y+l_p])}{\cosh^2(K_p^0 l_p)}} \tag{3.80}$$

On déduit alors la valeur de E_0 en fonction de E°_{inc} en se plaçant en $y = -l_p$ au niveau du plan de masse :

$$E_0 = \frac{\cosh(K_p^0 l_p)}{\epsilon_{r,d}} E^{\circ}_{inc} \tag{3.81}$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (3.79), il vient alors l'expression de la largeur L_z en fonction de E°_{inc} et P°_{inc} :

$$L_z = \left[\frac{2K_d^0 l_d + \sin(2K_d^0 l_d)}{2K_d^0 \cos^2(K_d^0 l_d)} + \epsilon_{r,d} \frac{2K_p^0 l_p + \sinh(2K_p^0 l_p)}{2K_p^0 \cosh^2(K_p^0 l_p)} \right]^{-1} \frac{4\mu_0}{\cosh^2(K_p^0 l_p)} \frac{P^{\circ}_{inc}}{E^{\circ 2}_{inc}} \frac{\omega k}{k_0^2} \epsilon_{r,d} \tag{3.82}$$

En réinjectant cette expression dans celle de la puissance incidente, il vient alors l'amplitude E_0 du champ en fonction de la puissance incidente P_{inc} désirée, et des valeurs de puissance et de champ incidents standards caractérisant la ligne :

$$E_0 = \frac{\cosh(K_p^0 l_p)}{\epsilon_{r,d}} \frac{E^{\circ}_{inc}}{\sqrt{P^{\circ}_{inc}}} \sqrt{P_{inc}} \tag{3.83}$$

Ainsi, pour toute configuration de ligne que l'on souhaite étudier, il suffit de donner le couple $(P^{\circ}_{inc}, E^{\circ}_{inc})$, pour définir l'amplitude du champ analytique à partir de la puissance incidente désirée.

3.5.2 Puissance de fuite

Nous pouvons désormais tenter de développer une expression analytique pour la puissance de fuite. Pour ce faire, partons des résultats numériques retournés par PlasmaSimWave. La figure 3.13 montre les profils de densité pour les ions et pour les électrons, ainsi que le profil de température électronique, tous les profils étant moyennés suivant la hauteur de la cavité.
On remarque alors que la densité d'ions est égale à la densité électronique (quasi-neutralité du plasma) tant que cette dernière est supérieure à la densité critique. Lorsque la densité électronique devient inférieure à la densité critique, l'onde cesse de déposer de la puissance dans le plasma, la production d'électrons chute entrainant avec elle la densité et la température électronique. Les électrons commencent alors à transiter du mode de diffusion ambipolaire au mode de diffusion libre. Concentrons nous alors sur ce qu'il se passe au point où la densité est égale à la densité critique et tentons de développer une formule pour la puissance de fuite, en adoptant une approche énergétique et en effectuant un bilan de puissance. La densité moyenne de puissance absorbée par une tranche de plasma s'écrit (*cf.* chapitre 1) :

$$\langle p_{abs} \rangle_{t,y} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\nu_m}{\omega^2 + \nu_m^2} \frac{1}{l_p} \int_{-l_p}^{0} \omega_{pe}^2(y) \, |\underline{\boldsymbol{E}}(y)|^2 \, \mathrm{d}y \tag{3.84}$$

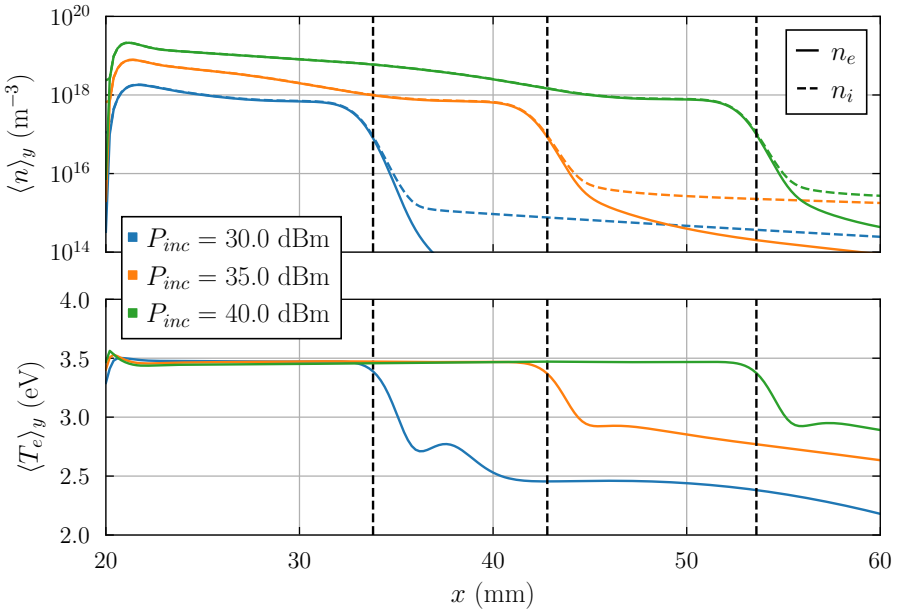


FIGURE 3.13 – Profils de densité électronique, de densité ionique, et de température électronique simulés en fonction de la position, pour des puissances incidentes de 30 dBm, 35 dBm et 40 dBm, à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

Or les expressions développées plus haut pour le champ électromagnétique dans la ligne nécessitent que nous considérions une densité homogène sur toute la section. En développant la pulsation plasma, la densité de puissance absorbée se réduit, alors à

$$\langle p_{abs} \rangle_{t,y} \approx \frac{e^2}{2m_e} \frac{\nu_m}{\omega^2 + \nu_m^2} \frac{\bar{n}_e}{l_p} \int_{-l_p}^{0} |\underline{\boldsymbol{E}}(y)|^2 \, \mathrm{d}y \tag{3.85}$$

où $\bar{n}_e$ est la densité électronique moyenne sur la section transverse. La puissance moyenne P_e absorbée par électron se déduit alors, en divisant la puissance absorbée par la densité moyenne :

$$P_e = \frac{e^2}{2m_e} \frac{\nu_m}{\omega^2 + \nu_m^2} \left\langle |\underline{\boldsymbol{E}}|^2 \right\rangle_y \tag{3.86}$$

Il reste alors à calculer la moyenne du module du champ électrique sur la section transverse de la ligne. Celle-ci s'écrit (*cf.* annexe C) :

$$\left\langle |\underline{\boldsymbol{E}}|^2 \right\rangle_y = |E_{fuite}|^2 \, \mathcal{F}(\bar{n}_c) \tag{3.87}$$

où $\mathcal{F}(\bar{n}_e)$ est une fonction de la densité électronique moyenne sur la section transverse ainsi que des paramètres qui caractérisent la ligne, définie par :

$$\mathcal{F}(\bar{n}_e) = \frac{1}{4K_p' K_p'' l_p^2} \left| \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \right|^2 \left(\left| \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \right|^2 \mathcal{A}_- \left(2K_p' l_p, 2K_p'' l_p \right) + \mathcal{A}_+ \left(2K_p' l_p, 2K_p'' l_p \right) \right) \tag{3.88}$$

Avec :

$$\mathcal{A}_{\pm}(\eta,\xi) = \frac{\xi\sinh(\eta)\pm\eta\sin(\xi)}{\cosh(\eta)+\cos(\xi)} \tag{3.89}$$

La valeur du champ de fuite E_{fuite} s'obtient alors à partir des équations (3.86) et (3.87), et s'écrit :

$$E_{fuite} = \sqrt{\frac{2m_e}{e^2}\frac{\omega^2+\nu_m^2}{\nu_m}\frac{P_e}{\mathcal{F}(\bar{n}_c)}} \tag{3.90}$$

En réinjectant E_{fuite} et P_{fuite}, dans l'expression (3.83) en lieu et place de E_0 et de P_{inc}, il vient alors l'expression de la puissance de fuite :

$$P_{fuite} = \frac{2m_e}{e^2}\frac{\omega^2+\nu_m^2}{\nu_m}\frac{P_e}{\mathcal{F}(\bar{n}_c)}\frac{\epsilon_{r,d}^2}{\cosh^2(K_p^0 l_p)}\frac{P_{inc}^{\circ}}{{E_{inc}^{\circ}}^2} \tag{3.91}$$

Il faut alors à déterminer la puissance absorbée par électron en fonction des paramètres qui caractérisent le plasma. Nous démontrerons dans le chapitre suivant que celle-ci peut s'écrire :

$$P_e = P_{loss}^{elas} + P_{loss}^{inelas} + \left(\frac{5}{2}-\frac{1}{1+\alpha}\right)\frac{D_{eff}}{\Lambda^2}T_e \tag{3.92}$$

avec :

- P_{loss}^{elas} et P_{loss}^{inelas} sont les puissances perdues par électron dans les collisions élastiques et inélastiques avec le gaz neutre.
- $\frac{5}{2}\frac{D_{eff}}{\Lambda^2}T_e$ est le flux d'énergie par convection, *i.e.* par transport des particules aux parois.
- $-\frac{1}{1+\alpha}\frac{D_{eff}}{\Lambda^2}T_e$ est le travail du champ électrique ambipolaire qui s'oppose à la diffusion des particules.

Il s'agit là de l'expression de la puissance absorbée par électron limite pour le maintien du plasma dans l'hypothèse où T_e est uniforme, hypothèse qui est cohérente avec les données issues de la simulation (*cf.* figure 3.13). Si la puissance absorbée est au moins supérieure à la valeur ci-dessus, alors le plasma est entretenu, sinon il s'effondre. Notons que telle qu'elle est écrite, la puissance P_e est exprimée en eV.s−1.

Il reste à se donner des lois pour l'évolution des grandeurs plasma en particulier pour la fréquence de transfert de quantité de mouvement ν_m, la température électronique T_e, et le paramètre α qui pilote la transition entre diffusion libre et ambipolaire. D'après [20] une formulation possible pour ν_m est donnée par $\nu_m = 5.3\times10^9\times p$ s^{-1}, où p est la pression du gaz en Torr. Connaissant désormais la fréquence de transfert de quantité de mouvement quelle que soit la pression, il est possible d'obtenir la température électronique du plasma qui correspond à cette fréquence de transfert, à partir des données d'entrée de chimie déjà calculées en utilisant BOLSIG+.

Cette valeur de température nous donne alors accès aux valeurs de P_{loss}^{elas} et P_{loss}^{inelas}, également obtenues avec BOLSIG+. La longueur de diffusion Λ a été définie au premier chapitre et vaut $\Lambda = l_p/\pi$. Le coefficient de diffusion libre pour les électrons peut être trouvé à partir des valeurs de ν_m et T_e, quant au coefficient de diffusion des ions il découle de la mobilité électronique dont on rappelle qu'elle suit la loi :

$$\mu_i = 1.54 \times 10^{-4} \times \frac{2.69 \times 10^5}{N_{gaz}} \tag{3.93}$$

où N_{gaz} est la densité d'Argon dans la ligne. Finalement la seule valeur qui nous est inconnue est le paramètre α. Pour une consistance optimale, nous choisissons alors d'ajuster cette valeur en utilisant la puissance de fuite obtenue de PlasmaSimWave et qui vaut 24.9 dBm. La valeur du paramètre α est alors prise égale à 0.157, ce qui donne un coefficient de diffusion effectif égal à :

$$D_{eff} \quad = \quad 0.14\, D_e + 0.86\, D_a \tag{3.94}$$

Autrement dit, la diffusion des électrons aux parois est à 86 % dominée par la diffusion ambipolaire, comme on pouvait s'y attendre pour les densités considérées, et comme le montre la figure 3.13, où l'on voit que l'écart entre la densité électronique et ionique, marqueur de cette transition, est toujours faible lorsque la densité est égale à la densité critique.

Pour finir, notons que le point essentiel de cette démonstration est que *la puissance de fuite est constante en fonction de la puissance incidente*. De plus, elle peut être décomposée et interprétée, tant que la longueur l_p reste la même, comme le produit de deux termes :

- $\frac{2m_e}{e^2}\frac{\omega^2+\nu_m^2}{\nu_m} P_e$ qui dépend des propriétés du plasma, et en particulier de la fréquence de collision.
- $\frac{\epsilon_{r,d}^2}{\mathcal{F}(\bar{n}_c)\cosh^2(K_p^0 l_p)} \frac{P_{inc}^\circ}{{E_{inc}^\circ}^2}$ qui dépend de la géométrie de la ligne à travers l'épaisseur du diélectrique et le champ standard.

Cette interprétation doit nécessairement se faire à l_p constante puisque ce paramètre intervient dans le deuxième terme mais également dans le premier à travers la longueur de diffusion $\Lambda = l_p/\pi$. Munis de cette formule, nous allons pouvoir analyser les résultats issus de la simulation, et notamment l'évolution de la puissance de fuite en fonction de la pression (*i.e.* en fonction des propriétés du plasma) et de l'épaisseur du diélectrique (*i.e.* en fonction des propriétés géométriques de la ligne).

3.5.2.1 Évolution en fonction de la de la longueur de cavité

Nous avons démontré dans la section précédente que la puissance de fuite n'était fonction que des paramètres du plasma et de la géométrie de la cavité, puisqu'elle dépend des longueurs l_d et l_p. Que se passe-t-il dès lors si l'on réduit la longueur de la cavité et que l'on force le plasma à occuper un volume plus faible que son volume propre ? Afin d'adresser cette question, nous avons réalisé plusieurs simulations de la ligne pour plusieurs longueurs de cavité, toujours pour un plasma d'Argon à 10 Torr, et pour une fréquence de 3 GHz. Ces longueurs de cavité s'étalent entre 20 mm et 80 mm, par pas de 10 mm. La position de la MHCD est fixée à 10 mm de la sortie quel que soit le dispositif.
La figure 3.14 présente les puissances transmises obtenues numériquement en fonction de la puissance incidente pour les différentes cavités. Comme on peut le voir, le dispositif transite d'un comportement de limiteur, pour lequel la puissance de fuite est constante en fonction de la puissance incidente, à un comportement d'atténuateur, où la puissance de fuite se remet à croître en fonction de la puissance incidente. Cette transition a lieu pour une puissance incidente d'autant plus basse que la longueur de la cavité est faible. Pour interpréter ce phénomène, nous proposons de mettre en regard l'évolution de la longueur propre de la colonne en fonction de la puissance incidente et de l'évolution de la longueur de la cavité.
Pour ce faire, nous avons déterminé les longueurs des colonnes pour les puissances incidentes comprises entre 30 dBm et 50 dBm, en considérant la cavité la plus longue, de sorte que le plasma puisse s'établir sans contrainte sur la plus large bande de puissances incidentes possible. La mesure a été réalisée en

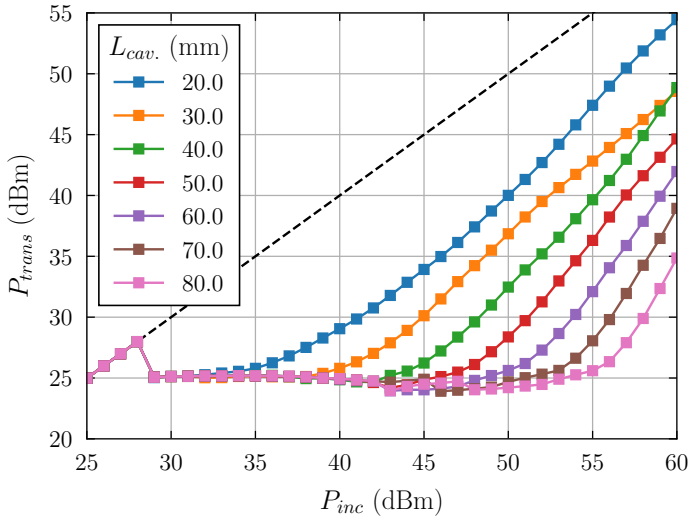


FIGURE 3.14 – Puissance de sortie en fonction de la puissance incidente pour différentes longueurs de cavité. La droite en pointillés noirs représente la réponse du circuit sans limitation.

considérant que la colonne débute à la position où la densité électronique moyenne dans la direction transverse $\langle n_e \rangle_y$ passe au dessus de la densité critique, et prend fin à la position où la densité moyenne passe en dessous de la densité critique. Les différentes longueurs mesurées sont présentées sur la figure 3.15. Nous avons également tracé sur cette figure quatre droites horizontales qui matérialisent les quatre premières longueurs de cavité considérées à savoir 20 mm, 30 mm, 40 mm, et 50 mm.

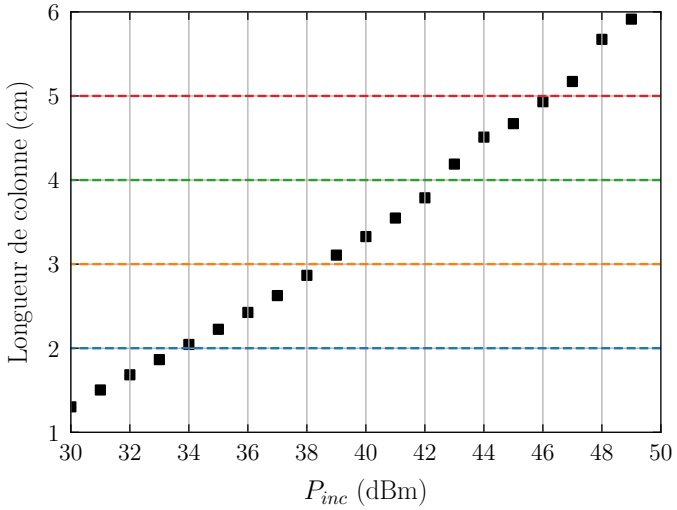


FIGURE 3.15 – Longueurs propres de la colonne plasma en fonction de la puissance incidente.

On remarque alors pour les quatre premières longueurs de cavité que :

- la longueur propre du plasma devient supérieure à 20 mm pour une puissance incidente de 34 dBm. Le comportement atténuateur pour la cavité de 20 mm apparaît pour des puissances incidentes supérieures à 34 dBm (*cf.* figure 3.15).

- La longueur propre de la colonne est supérieure à 30 mm pour des puissances incidentes supérieures ou égales à 39 dBm, et la transition limiteur atténuateur pour la cavité de 30 mm commence pour une puissance incidente de 39 dBm.

- La longueur propre du plasma est supérieure à 40 mm pour des puissances incidentes supérieures ou égales à 43 dBm, et la transition limiteur atténuateur pour la cavité de 40 mm commence pour une puissance incidente de 43 dBm.

- La longueur propre de la colonne est supérieure à 50 mm pour des puissances incidentes supérieures ou égales à 47 dBm, et la transition limiteur atténuateur pour la cavité de 50 mm commence pour une puissance incidente de 47 dBm.

Nous observons alors que le passage du comportement limiteur au comportement atténuateur se produit lorsque la colonne plasma ne peut plus s'étendre, *i.e.* lorsque le plasma remplit toute la cavité. Il apparaît que dans un régime où la colonne peut s'établir librement, le plasma va absorber l'énergie électromagnétique jusqu'à ce que la puissance absorbée par électron devienne inférieure à la puissance P_e définie plus haut. Au delà, le plasma n'est plus soutenu et les électrons partent en diffusion libre. Si par contre on empêche la colonne de s'établir librement, alors le surplus de puissance qui aurait dû être déposé dans le plasma sort du circuit sous forme de puissance de fuite et le dispositif passe en mode atténuateur.

Autrement dit, si le plasma est dans un régime libre et que la colonne peut s'établir sans contrainte, alors la puissance de fuite est constante en fonction de la puissance incidente, et la variable d'ajustement est la longueur de la colonne qui augmente, mais si nous contraignons la colonne à ne pas dépasser une certaine longueur alors l'ajustement qui ne peut plus se faire par étalement du plasma se fait par la puissance de fuite qui se met à croitre en fonction de la puissance incidente.

Il reste pour finir à vérifier que ces prévisions numériques peuvent être retrouvées expérimentalement. Pour ce faire, trois circuits ont été fabriqués, avec trois longueurs de cavité différentes, à savoir 40 mm, 60 mm et 80 mm (*cf.* figure 3.16), et toujours sur un substrat ROGERS RO4003C.

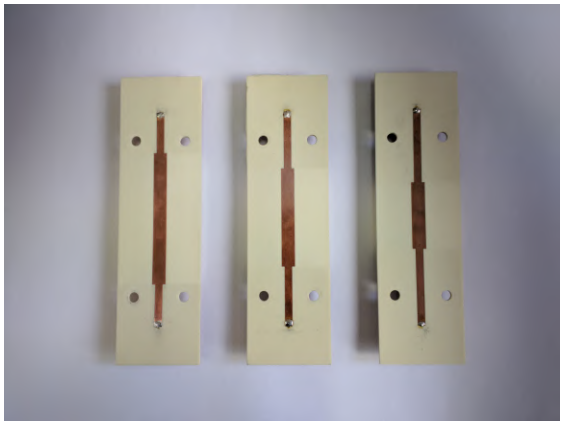


FIGURE 3.16 – Photographie des trois limiteurs fabriqués avec trois longueurs de cavité différentes (40 mm, 60 mm et 80 mm).

Ces circuits ont été testés en régime CW, au CEA de Gramat, sur une bande de puissance incidente allant de 25 dBm à 50 dBm. Les résultats expérimentaux obtenus sont présentés sur la figure 3.17, sur laquelle sont tracées les puissances de sortie en fonction des puissances d'entrée.
La transition limiteur/atténuateur est également observée en expérimentation, mais celle-ci se produit pour des valeurs de puissances incidentes beaucoup plus basse qu'en simulation. En effet, on observe :

- la transition limiteur/atténuateur pour la cavité de 40 mm se produit pour une puissance incidente de l'ordre de 40 dBm en expérience, contre une puissance incidente de 43 dBm en simulation.

- la transition limiteur/atténuateur pour la cavité de 60 mm se produit pour une puissance incidente de l'ordre de 42.5 dBm, contre une puissance de 50 dBm en simulation.

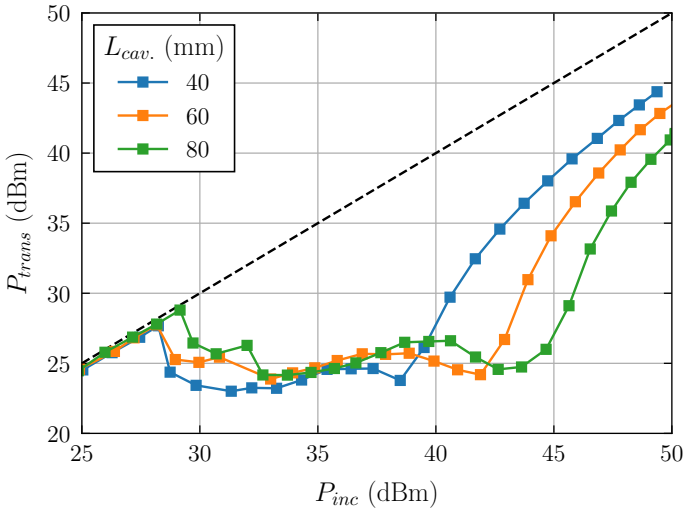


FIGURE 3.17 – Puissance transmise mesurée en fonction de la puissance incidente pour différentes longueurs de cavité.

- la transition limiteur/atténuateur pour la cavité de 80 mm se produit pour une puissance incidente de l'ordre de 45 dBm, contre une puissance de 55 dBm en simulation.

Pour chacune des longueurs testées, les transitions limiteur/atténuateur se produisent à 2.5 dBm d'intervalle en expérience contre 5 dBm en simulation. Notons de plus que si la simulation avait effectivement annoncé le passage du circuit en mode atténuateur, et que la tendance est bien vérifiée en expérience, la transition se produit quelle que soit la ligne, pour des valeurs de puissance incidente plus faibles en expérience qu'en simulation. En effet, pour la ligne de 80 mm, le circuit passe expérimentalement en atténuateur à une puissance de 45 dBm, contre 55 dBm en simulation, ce qui représente a peu près une erreur d'un facteur dix. Tout ceci vient probablement comme nous l'avions évoqué au deuxième chapitre des hypothèses simplificatrices qui ont été mises en œuvre dans le calcul des taux de réaction et des coefficients de transport dans BOLSIG+. Il apparait clairement que la colonne de plasma s'allonge en réalité beaucoup plus en fonction de la puissance incidente en expérience qu'en simulation. Mais la tendance reste la bonne.

Cette topologie de limiteur nécessite donc une cavité suffisamment grande, pour retarder le plus possible le passage en atténuateur, et tenir l'objectif de limiter la puissance pour une impulsion d'un kilowatt (*i.e.* 60 dBm).

3.5.2.2 Évolution en fonction de la pression

Après avoir étudié l'évolution de la puissance de fuite en fonction de la longueur de la cavité, on peut s'intéresser à l'influence de la pression du gaz. Pour ce faire, nous avons simulé la ligne dans l'Argon pour un diélectrique d'épaisseur $l_d = 508$ μm, pour sept valeurs de pression comprises entre 5 Torr et 100 Torr inclus, et pour une fréquence de 3 GHz. Nous utilisons la même méthode que précédemment afin de calibrer la valeur de α. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.18. Les points rouges représentent les données numériques, la courbe noire représente la puissance de fuite théorique lorsque la puissance P_e est définie en prenant en compte les pertes par collisions avec le gaz neutre et les pertes par transport (diffusion vers les parois et rétention par le champ ambipolaire). Afin d'observer l'effet de chacune de ces pertes, nous avons également tracé la puissance de fuite théorique lorsque l'on ne considère que les pertes par collisions (courbe bleue) et lorsque l'on ne considère que les pertes par transport (courbe orange). Comme on peut le voir, à basse pression, ce sont essentiellement les pertes par transport qui dominent, puisque le coefficient de diffusion est inversement proportionnel

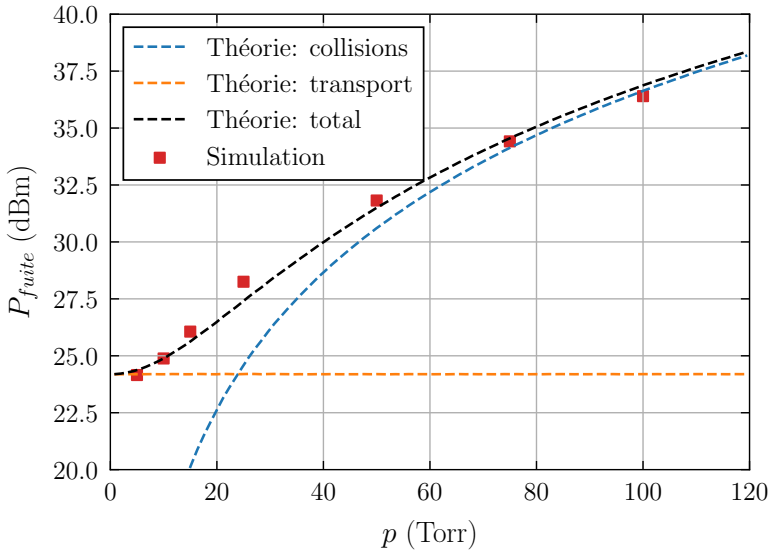


FIGURE 3.18 – Évolution de la puissance de fuite en fonction de la pression.

à la fréquence de transfert de quantité de mouvement, laquelle est d'autant plus faible que la pression est basse. A plus forte pression, ce sont les pertes d'énergie dans les collisions avec le gaz neutre qui dominent. Pour des pressions intermédiaires comme celles qui nous occupent, et plus généralement dans la bande de pression 10-50 Torr, les deux effets opèrent simultanément. Du point de vue de la limitation de puissance, il n'apparaît donc pas pertinent de travailler à haute pression, en effet au delà de 40 Torr, les puissances de fuite deviennent supérieures au Watt (30 dBm).

On remarque que la tendance analytique est en bon accord avec les données numériques, l'expression de la puissance de fuite obtenue plus haut semble donc capter relativement bien la physique à l'œuvre dans la réponse du limiteur.

3.5.2.3 Évolution en fonction de l'épaisseur du diélectrique

Pour finir, nous pouvons désormais nous intéresser à l'influence de la géométrie, en particulier à l'influence de l'épaisseur du substrat diélectrique. Nous choisissons volontairement de ne pas faire varier la hauteur de la cavité l_p, celle-ci intervenant également dans l'expression de la longueur de diffusion.

l_d (μm)	254	508	762	1016	1270	1524
E°_{inc} (V.m^{-1})	8826.3	8379.8	8013.0	7558.6	7132.3	6832.6
L_z^{HFSS} (mm)	7.5	8.0	8.5	8.95	9.45	9.95

TABLE 3.2 – Valeurs de champs standards et de largeur de la ligne microruban calculées avec le logiciel Ansys HFSS en fonction de l'épaisseur du diélectrique.

Une telle étude nécessite de mesurer les champs standards pour chacune des lignes, pour les différentes épaisseurs de diélectrique qui nous intéressent, afin d'obtenir l'évolution théorique de la puissance de fuite. Par ailleurs, il est également nécessaire de recalibrer le code de calcul pour chacune de ces épaisseurs. Les valeurs de calibration sont obtenues par simulation 3D des différentes lignes avec Ansys HFSS. Elles sont données dans le tableau 3.2 en fonction de l'épaisseur l_d du substrat.

La valeur du paramètre α est conservée. En effet, comme la géométrie de la cavité ne varie pas et que la pression est maintenue constante d'un circuit à l'autre, on ne s'attend pas à ce que la physique à l'œuvre dans le transport des électrons change. Les résultats obtenus en simulation et par la théorie

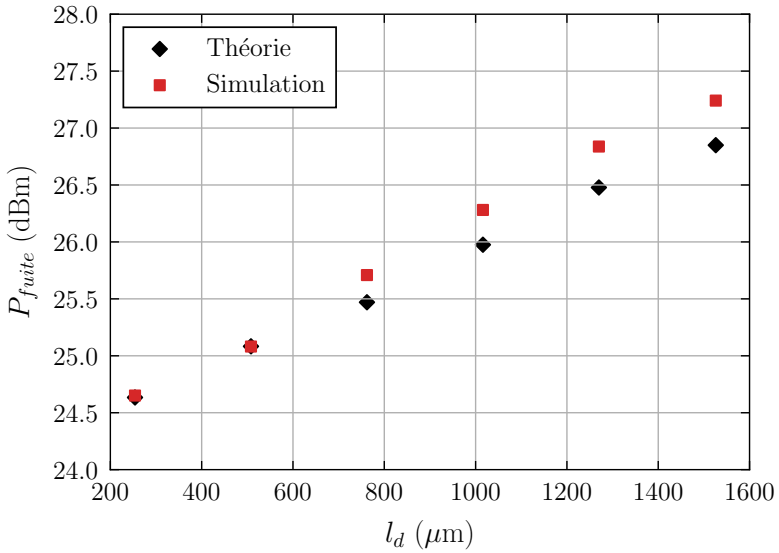


FIGURE 3.19 – Évolution de la puissance de fuite en fonction de l'épaisseur du diélectrique l_d.

pour une puissance incidente de 40 dBm sont présentés sur la figure 3.19. Là encore la théorie donne une assez bonne approximation des résultats numériques. L'erreur commise sur la puissance de fuite pour la plus grande épaisseur de diélectrique ($l_d = 1524$ μm) est de 8.6 %. Comme on peut le voir, bien que la puissance absorbée par électron P_e ne dépende pas de l'épaisseur du substrat diélectrique qui porte la ligne, la puissance de fuite augmente en fonction de cette dernière.

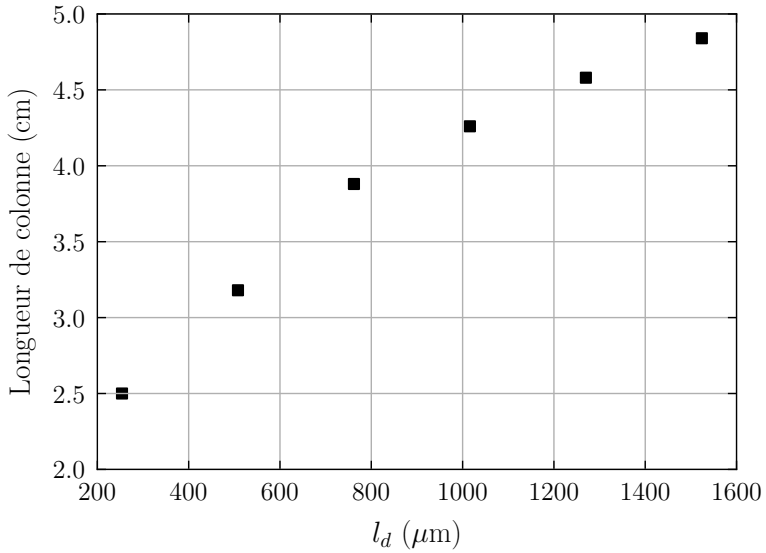


FIGURE 3.20 – Évolution de la longueur de colonne en fonction de l'épaisseur du substrat diélectrique pour une puissance incidente de 40 dBm.

Ce phénomène peut être interprété simplement de la manière suivante : l'augmentation de l'épaisseur du diélectrique (*cf.* tableau 3.2) entraine une augmentation de la section transverse de la ligne, ce qui conduit à une diminution de la densité surfacique de puissance en fonction de l_d. Or, comme la puissance P_e et la hauteur l_p de la cavité plasma, ne varient pas d'un dispositif à l'autre, le maintien de la colonne de plasma à la densité critique n_c se fait nécessairement à puissance de fuite plus haute.

Pour finir, attendu que nous avons démontré l'importance de maintenir des longueurs de colonne

raisonnables, on peut s'intéresser à l'évolution de la longueur de colonne en fonction de l'épaisseur du diélectrique. Comme le plasma est alimenté par onde de fuite et puisque la section transverse du substrat augmente avec l'épaisseur, on s'attend à ce que pour une épaisseur plus grande, le diélectrique véhicule plus de puissance et alimente le plasma sur de plus grandes distances. La longueur de colonne doit donc, en principe, augmenter avec l'épaisseur du diélectrique. La figure 3.20 présente l'évolution des longueurs de colonne obtenues en simulation, en fonction des six épaisseurs de diélectrique retenues. Il apparaît alors que nos prévisions analytiques sont en accord avec les résultats numériques. De plus on voit qu'une multiplication par 6 de l'épaisseur du substrat entraine une multiplication par environ 2 de la longueur de colonne, pour une puissance incidente de 40 dBm.

En ce qui concerne la limitation de puissance, il apparait nécessaire de travailler avec des substrats d'épaisseurs les plus faibles possible afin de limiter la puissance de fuite d'une part, et d'éviter de transiter en régime atténuateur d'autre part, ce qui ne manquerait pas de se produire compte tenu de l'augmentation de la longueur de la colonne.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse des phénomènes en jeu dans le limiteur en ligne microruban suspendue, à la fois théorique, numérique et expérimentale. Les résultats obtenus par simulation de la ligne avec PlasmaSimWave sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, sur une plage de puissance comprise entre 25 dBm et 45 dBm. Nous avons pu observer que le limiteur en ligne microruban suspendue est essentiellement un limiteur absorptif, puisque plus de 60 % de la puissance est absorbée par le plasma. Par ailleurs l'augmentation des puissances réfléchie et absorbée est la conséquence de l'augmentation de la densité en tête de colonne et de l'augmentation de la production d'électrons, visible par l'allongement de la colonne.

Une étude analytique a ensuite été conduite afin de comprendre comment le signal est guidé dans la ligne et comment la puissance microonde se couple au plasma. En ce qui concerne le premier point, une étude modale de la ligne a permis de mettre au jour deux types de propagation différents :

- La propagation par onde de surface pour laquelle le vecteur d'onde dans la cavité est colinéaire à l'interface, et où une évanescence apparait suivant la hauteur du dispositif. C'est le mode qui se propage dans la ligne sans plasma pour une fréquence de 3 GHz.

- La propagation par onde de fuite où le signal est guidé entre les deux plans métalliques, et subit une succession de réfractions par l'interface diélectrique/vide et de réflexions sur les plans métalliques.

Pour ce qui est du deuxième point une étude en présence d'un plasma uniforme a permis de montrer le changement de nature du mode en fonction de la densité électronique. Ainsi, pour une fréquence de 3 GHz et une pression de 10 Torr (*i.e* une fréquence de transfert de quantité de mouvement égale à $\nu_m = 5.3 \times 10^{10}$ s^{-1} [20]), les trois types de modes suivants sont observés :

- Si la densité électronique est nulle, *i.e.* s'il n'y a pas de plasma dans la cavité, le mode qui se propage est un mode d'onde de surface.

- Si la densité électronique est non nulle et inférieure à 3.08×10^{18} m^{-3}, le mode qui se propage dans la cavité est une onde de fuite à pertes, et le diélectrique rayonne alors de la puissance dans le plasma.

- Si la densité électronique est égale à 3.08×10^{18} m^{-3}, le mode qui se propage dans la cavité est une onde de surface à pertes.

- Si la densité électronique est supérieure à 3.08×10^{18} m^{-3}, le mode qui se propage est une onde de fuite.

Une étude des cartographies de vecteur de Poynting a permis de vérifier ces résultats obtenus analytiquement.

Pour finir, nous avons développé une expression analytique pour la puissance de fuite, laquelle correspond à la puissance minimale que doit véhiculer l'onde pour pouvoir entretenir le plasma. Cette approche calculatoire nous a permis de montrer que la puissance de fuite est indépendante de la puissance incidente, ce que nous avons pu observer en simulation et en expérience, mais dépend en revanche des paramètres qui caractérisent le plasma, en particulier de la fréquence de transfert de quantité de mouvement, ainsi que de la géométrie de la ligne. Pour le problème de la limitation de puissance qui nous occupe, il convient de retenir les points suivants :

- Le couplage onde plasma dans le limiteur s'effectue par onde de fuite, *i.e.* c'est le diélectrique qui rayonne dans le plasma et qui alimente la colonne.

- La puissance de fuite dans le limiteur est constante en fonction de la puissance incidente tant que le plasma est libre de s'étendre dans la cavité.

- Si le plasma remplit la cavité, alors le circuit passe en mode atténuateur, et la puissance de fuite se met à croître en fonction de la puissance incidente.

- Lorsque l'on augmente la hauteur du diélectrique en conservant constante la hauteur de la cavité, la puissance de fuite croît. De plus, cela entraine une augmentation de la longueur de colonne, la puissance transitant dans le diélectrique et rayonnée dans le plasma étant plus importante.

Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à la phase transitoire du limiteur, et nous tenterons en particulier de comprendre la dynamique du plasma et de dégager plusieurs temps caractéristiques d'intérêt pour la limitation (temps de claquage, temps de réponse et temps de recouvrement), en essayant là aussi, autant que faire se peut, de confronter les trois approches théorique, numérique et expérimentale.

Chapitre 4

Fonctionnement du limiteur en régime transitoire

Sommaire

4.1 Position du problème 100
4.2 Mécanisme de propagation du plasma : étude de l'équation de diffusion non-linéaire 103
4.2.1 Étude par la théorie des systèmes dynamiques 104
4.2.2 Étude par la théorie non-linéaire 110
4.2.3 Comparaisons théorie-simulation-expérience 112
4.3 Interaction microonde/plasma dans le front 116
4.3.1 Raccordement modal 118
4.3.2 Construction des bases modales 122
4.3.3 Application à l'interaction microonde-plasma dans le limiteur 125
4.4 Temps de claquage 127
4.4.1 État de l'art pour l'approche analytique du claquage microonde 127
4.4.2 Nouvelle approche : par l'équation d'énergie 128
4.5 Temps de recouvrement 132
4.5.1 Résultats numériques et expérimentaux 132
4.5.2 Approche analytique 133
4.6 Conclusion 138

Dans les deux premiers chapitres de ce manuscrit, nous avons exposé d'une part les concepts fondamentaux nécessaires pour aborder et comprendre la dynamique du plasma ainsi que la physique de l'interaction microonde/plasma, et d'autre part, le modèle numérique auto-cohérent qui doit nous permettre d'explorer les paramètres physiques de la décharge (densité électronique n_e, température électronique T_e, ...), mais également donner l'évolution des taux de puissance absorbée, réfléchie et transmise, qui sont les trois observables mesurées expérimentalement. Le troisième chapitre a été consacré à l'étude du comportement du limiteur dans son état stationnaire, *i.e.* lorsque les propriétés du plasma et les taux de puissance ne varient plus dans le temps. Nous nous sommes en particulier intéressés aux deux types de modes de propagation qui peuvent exister dans la ligne, à savoir les ondes de surface et les ondes de fuite, et avons montré que ce sont ces dernières qui permettent d'alimenter le plasma. Par ailleurs, nous avons exploré en détail la physique de la puissance de fuite, *i.e.* la puissance en sortie du limiteur, et sa dépendance à la longueur de la cavité plasma, à la pression et à l'épaisseur du diélectrique.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la réponse transitoire du limiteur. Nous tenterons dans un premier temps de relier l'évolution du bilan de puissance à l'évolution des paramètres du plasma,

en cherchant toujours à mettre en regard les résultats de simulation et les résultats expérimentaux. Puis nous explorerons la physique en jeu dans la dynamique du plasma et les mécanismes à l'œuvre dans l'interaction microonde-plasma en tête de colonne. Enfin, nous étudierons la physique qui régit les deux temps principaux pour la limitation de puissance, que sont le temps de claquage et le temps de recouvrement.

4.1 Position du problème

Le bilan de puissance transitoire obtenu par simulation de la ligne à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr, est présenté sur la figure 4.1, pour une puissance incidente de 40 dBm (*i.e.* 10 W). Ces résultats sont comparés aux résultats expérimentaux déjà obtenus dans la thèse d'Antoine Simon. Comme nous l'avions montré dans le chapitre précédent, le modèle donne des résultats en accord avec les mesures expérimentales, qui nous permettent d'envisager son utilisation pour explorer les mécanismes à l'œuvre dans la réponse du limiteur. Le temps $t = 0$ μs fait référence au début de l'impulsion, et on observe que le taux de puissance transmise diminue alors jusqu'à atteindre la valeur de fuite. La puissance transmise est réduite de 90 % après 25 μs, et au-delà de 150 μs, les taux de puissance ne varient plus et le régime stationnaire est atteint.

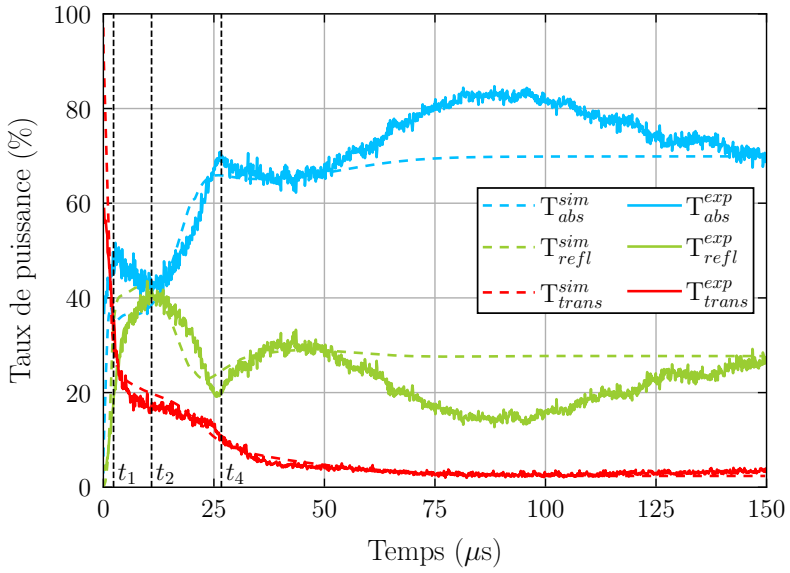
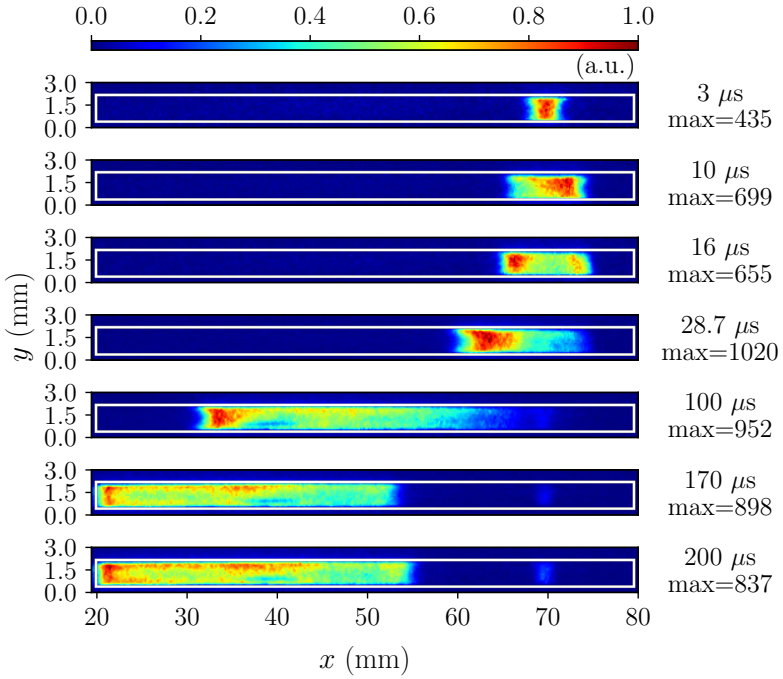


FIGURE 4.1 – Confrontation de l'évolution temporelle des taux de puissance expérimentaux et simulés pour une puissance incidente de 40 dBm, à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

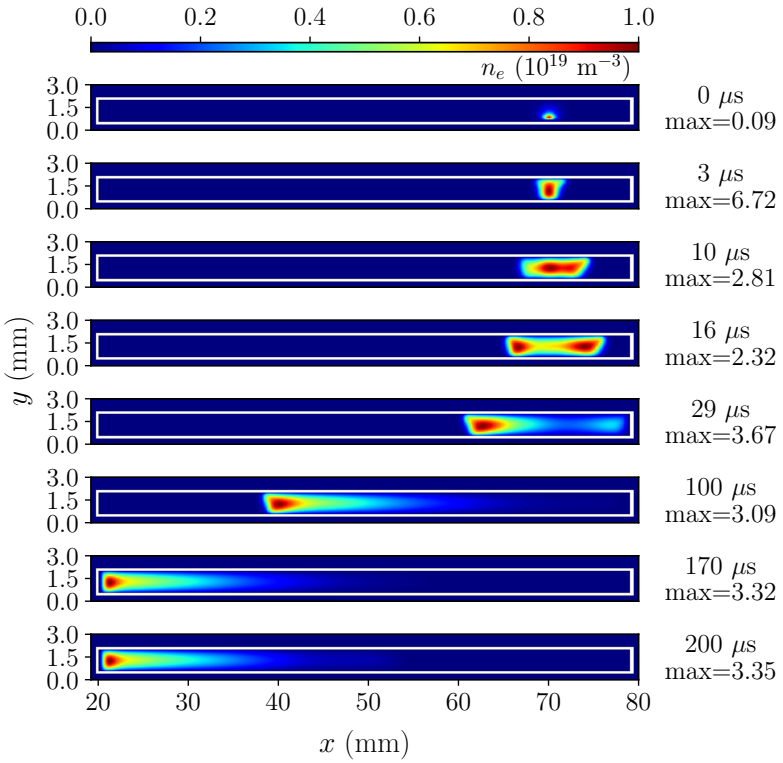
Des mesures optiques effectuées à la caméra rapide ont également permis de suivre la dynamique du plasma. Notons que contrairement à notre dispositif expérimental, la simulation nous donne accès à la densité électronique du plasma en fonction du temps.

Sur la figure 4.2, on peut voir par exemple l'intensité lumineuse émise par le plasma lors des mesures ainsi que la densité électronique simulée, prises à différents instants. Lorsque le claquage se produit dans le dispositif, la densité électronique croît puis se déplace vers la gauche depuis la position de la MHCD. Pour une puissance incidente de 40 dBm, la valeur maximale de la densité électronique simulée est de 3.33×10^{19} m^{-3}.

L'évolution temporelle des taux de puissance peut alors être reliée à la dynamique du plasma. Ainsi, en plus des cartographies de luminosité et de densité de la figure 4.2, la figure 4.3 montre l'évolution temporelle de la densité électronique moyenne du plasma $\langle n_e \rangle_{x,y}$ ainsi que du maximum de densité électronique $max(n_e)$. Quatre étapes peuvent être distinguées dans la dynamique du plasma (les temps



(a) Mesures d'intensité optique.



(b) Densité électronique simulée.

FIGURE 4.2 – Comparaison des dynamiques du plasma simulée et expérimentale à différents temps, pour une puissance incidente de 40 dBm, à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

indiqués sont ceux de la simulation) :

(1) Avant le début de l'impulsion, la MHCD est à l'état stationnaire, et elle produit une densité d'électrons localisée dont le maximum est de 9×10^{17} m^{-3}. De $t = 0$ μs à $t_1 = 2.31$ μs, le

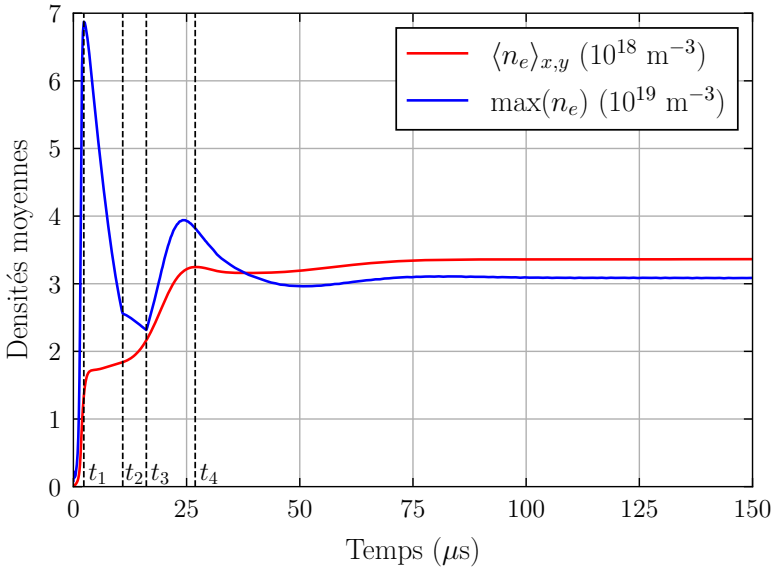


FIGURE 4.3 – Densités électroniques moyennes simulées en fonction du temps pour une puissance incidente de 40 dBm, à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

claquage microonde a lieu, la densité électronique croît et atteint un maximum à t_1 (voir figure 4.3). Cela correspond à la forte augmentation du taux de puissance absorbée qui atteint un maximum local à t_1. Comme le montre la figure 4.2, ce maximum de densité électronique demeure à l'emplacement de la MHCD, *i.e.* dans la région de pré-ionisation, jusqu'à $t_2 = 10.9$ μs, et le taux de puissance absorbée reste approximativement constant.

(2) De t_2 à $t_3 = 16.11$ μs, le maximum de densité électronique se propage à la droite de la MHCD et commence à diminuer. Dans le même temps, nous observons une augmentation de la densité électronique à gauche de la zone de pré-ionisation. À t_3, les deux pics de densité électronique ont la même amplitude comme le montre la figure 4.2.

(3) De t_3 à $t_4 = 26.70$ μs, la densité électronique finit de diminuer à droite et continue d'augmenter à gauche de la MHCD, entrainant une augmentation du taux de puissance absorbée et une diminution des taux de réflexion et de transmission. À t_4, la densité électronique moyenne sur le domaine du plasma $\langle n_e \rangle_{x,y}$ atteint une valeur constante (*cf.* figure 4.3).

(4) Enfin, comme le montre la figure 4.2, une structure de densité électronique se propage de la zone de pré-ionisation vers l'entrée de la ligne, le dispositif a alors atteint l'état stationnaire.

Cette première analyse, outre le fait qu'elle nous a permis de mettre en regard les dynamiques du plasma et des taux de puissance, nous montre également que le temps de réponse t_r, *i.e.* le temps nécessaire pour que la puissance en sortie du limiteur atteigne 90 % de la valeur de fuite, est subordonné à la formation de la colonne plasma. En effet, lorsque cette colonne est formée, les taux de puissance ne varient plus au cours du temps. Dès lors, l'ordre de grandeur du temps de réponse t_r est donc donné par :

$$t_r \propto \frac{L_c}{v_f} \tag{4.1}$$

où L_c est la longueur de colonne pour la puissance incidente considérée et v_f est la vitesse du front. Dans le cadre de la limitation de puissance qui nous occupe, on voit que la réduction du temps de réponse passe soit par la diminution de la longueur de colonne, dont nous avons démontré au précédent

chapitre qu'elle dépendait de l'épaisseur du substrat diélectrique qui porte la ligne microruban, soit par l'augmentation de la vitesse de propagation du front de densité, auquel cas il nous faut déterminer la dépendance de cette vitesse en fonction des paramètres du plasma, tâche que nous allons réaliser dans la section suivante.

4.2 Mécanisme de propagation du plasma : étude de l'équation de diffusion non-linéaire

Dans cette section, nous allons tenter d'explorer les mécanismes à l'œuvre dans la propagation du plasma, et en particulier de voir de quels paramètres dépend la vitesse du front de densité, qui est directement liée au temps de réponse du limiteur. S'agissant d'une étude du transport des électrons, partons de l'équation de diffusion non-linéaire, qui s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -r_{ei}n^2 + \nu_i n \tag{4.2}$$

où D est un coefficient de diffusion des électrons dont on ne précise pas la nature (libre ou ambipolaire), ν_i est une fréquence d'ionisation, et r_{ei} est le coefficient de recombinaison entre les électrons et les ions moléculaires. Afin de rendre possibles les développements analytiques, tous ces paramètres seront supposés uniformes. En introduisant les variables normalisées :

$$\phi = \frac{n}{n_{max}} \qquad \tau = \nu_i t \qquad s = \sqrt{\frac{\nu_i}{D}}\, x \qquad \beta = \frac{r_{ei} n_{max}}{\nu_i} \tag{4.3}$$

il est possible de récrire l'équation de diffusion sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = -\beta\phi^2 + \phi \tag{4.4}$$

Puisque nous cherchons à étudier le mouvement de la structure de densité qui se propage à vitesse constante, nous pouvons changer de référentiel pour nous placer dans celui du front qui se déplace à la vitesse normalisée u, en introduisant la nouvelle « variable d'espace » :

$$\eta = s - u\tau \tag{4.5}$$

On cherche alors la solution de l'équation sous la forme d'une onde progressive. Le front se propage dans le sens des x croissants si la vitesse u est positive, et dans le sens des x décroissants sinon. La vitesse normalisée est alors reliée aux variables η et τ par la relation :

$$u = -\left.\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right|_s \tag{4.6}$$

Pour une fonction f des variables s et τ qui vérifie $f(s,\tau) = f(\eta(s,\tau),\tau)$, il vient alors les deux expressions suivantes pour la différentielle totale exacte $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau \mathrm{d}\eta + \left.\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|_\eta \mathrm{d}\tau = \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau \left.\frac{\partial \xi}{\partial s}\right|_\tau \mathrm{d}s + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau \left.\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right|_s + \left.\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|_\eta\right)\mathrm{d}\tau \tag{4.7}$$

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_\tau \mathrm{d}s + \left.\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|_s \mathrm{d}\tau \tag{4.8}$$

où on a utilisé l'expression de la différentielle totale exacte $\mathrm{d}\eta$ dans la première équation. En identifiant les expressions en facteur de $\mathrm{d}\tau$, on déduit les relations :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_\tau = \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau \left.\frac{\partial \eta}{\partial s}\right|_\tau = \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau \tag{4.9}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|_s = \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau \left.\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right|_s + \left.\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|_\eta = -u \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_\tau + \left.\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|_\eta \tag{4.10}$$

Si on se limite maintenant à la recherche d'une solution $\phi(\eta(s,\tau))$ stationnaire, *i.e.* pour laquelle on a :

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right|_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right|_s = -u \left.\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right|_\tau \tag{4.11}$$

alors la fonction ϕ ne dépend plus que de la variable η, et les dérivées partielles par rapport à η sont alors des dérivées totales, d'où :

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial s}\right|_\tau = \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\right|_\tau \tag{4.12}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right|_s = -u \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\right|_\tau \tag{4.13}$$

On peut alors utiliser ces deux expressions pour récrire l'équation de la diffusion sous la forme :

$$-\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2} - u\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} = -\beta\phi^2 + \phi \tag{4.14}$$

Ces transformations étant faites, nous allons dès lors pouvoir étudier cette équation par le prisme de la théorie des systèmes dynamiques.

4.2.1 Étude par la théorie des systèmes dynamiques

4.2.1.1 Brève introduction à la théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques [60] constitue un ensemble de méthodes qui permettent d'aborder le comportement de systèmes physiques qui évoluent dans le temps, et qui sont régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires comme par exemple l'équation du pendule, l'équation de Navier-Stokes, les équations de réaction-diffusion en chimie, les systèmes proies-prédateurs de Lotka-Volterra, ou bien encore l'équation de diffusion non-linéaire, qui sont impossibles à résoudre analytiquement dans le cas général. Ces développements ne permettent pas d'obtenir l'expression de la solution mais ils donnent accès aux « trajectoires du système » étudié dans l'espace des phases. L'étude de ces trajectoires permet alors de prédire qualitativement la forme de la solution, voire même d'extraire quelques ordres de grandeur du problème étudié.

Pour simplifier et résumer, considérons tout d'abord un système régi par une équation différentielle d'ordre un telle que :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} + f(\phi) = 0 \tag{4.15}$$

où f est une fonction non linéaire de ϕ. La méthode consiste à chercher les points fixes ϕ_* de l'équation qui sont les racines de la fonction f (telles que $f(\phi_*) = 0$ donc) et qui définissent alors les valeurs de ϕ pour lesquelles la dérivée est nulle, *i.e.* pour lesquels ϕ atteint un extremum local. Physiquement, ces points fixes correspondent à des états ou le système est susceptible d'être à l'équilibre. Une fois les points fixes de l'équation déterminés, il faut étudier leur stabilité. En effet, le monde est ainsi fait qu'il n'y a que deux classes de systèmes dynamiques, ceux pour lesquels les effets s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance, et ceux pour lesquels les effets amplifient les causes qui leur ont donné naissance. Classiquement, pour une équation différentielle d'ordre un, l'étude de stabilité se fait en linéarisant l'équation autour des points fixes de la fonction f, *i.e.* en effectuant un développement perturbatif de la fonction ϕ autour des points fixes, en posant $\phi = \phi_* + \delta\phi$, où $\delta\phi$ est une perturbation. En injectant cette formule dans l'équation ci-dessus, en effectuant un développement de Taylor au premier ordre de la fonction f au voisinage du point fixe, et puisque $f(\phi_*) = 0$ car ϕ_* est une racine de f, on obtient l'équation différentielle pour la perturbation qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\delta\phi}{\mathrm{d}\eta} = -\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi_*} \delta\phi \tag{4.16}$$

On voit alors se dégager deux possibilités :

- Soit $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi_*}$ est positif et dans ce cas la perturbation croit exponentiellement en fonction de η. Le point fixe est alors dit instable.

- Soit $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi_*}$ est négatif et dans ce cas la perturbation décroit exponentiellement en fonction de η. Le point fixe est alors dit stable.

La méthode décrite ci-dessus est valable uniquement pour une équation d'ordre un. Pour une équation d'ordre deux telle que :

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2} + a\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} + f(\phi) = 0 \tag{4.17}$$

il convient de se ramener à un système de deux équations différentielles couplées d'ordre un, en posant $\psi = \dot{\phi}$ où $\dot{\phi}$ désigne la dérivée de ϕ par rapport à η. Dès lors l'équation se transforme en :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi & (4.18) \\ \dot{\psi} = -a\psi - f(\phi) & (4.19) \end{cases}$$

Les points fixes du système sont alors les points (ϕ_*, ψ_*) tels que $(\phi_*, \psi_*) = (0, 0)$. Si on reformule le système en introduisant les fonctions $g_\phi(\phi, \psi)$ et $g_\psi(\phi, \psi)$ telles que :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = g_\phi(\phi, \psi) & (4.20) \\ \dot{\psi} = g_\psi(\phi, \psi) & (4.21) \end{cases}$$

alors la détermination de la stabilité des points fixes se fait en linéarisant le système autour des points fixes, *i.e.* en effectuant un développement de Taylor des fonctions g_ϕ et g_ψ à l'ordre un :

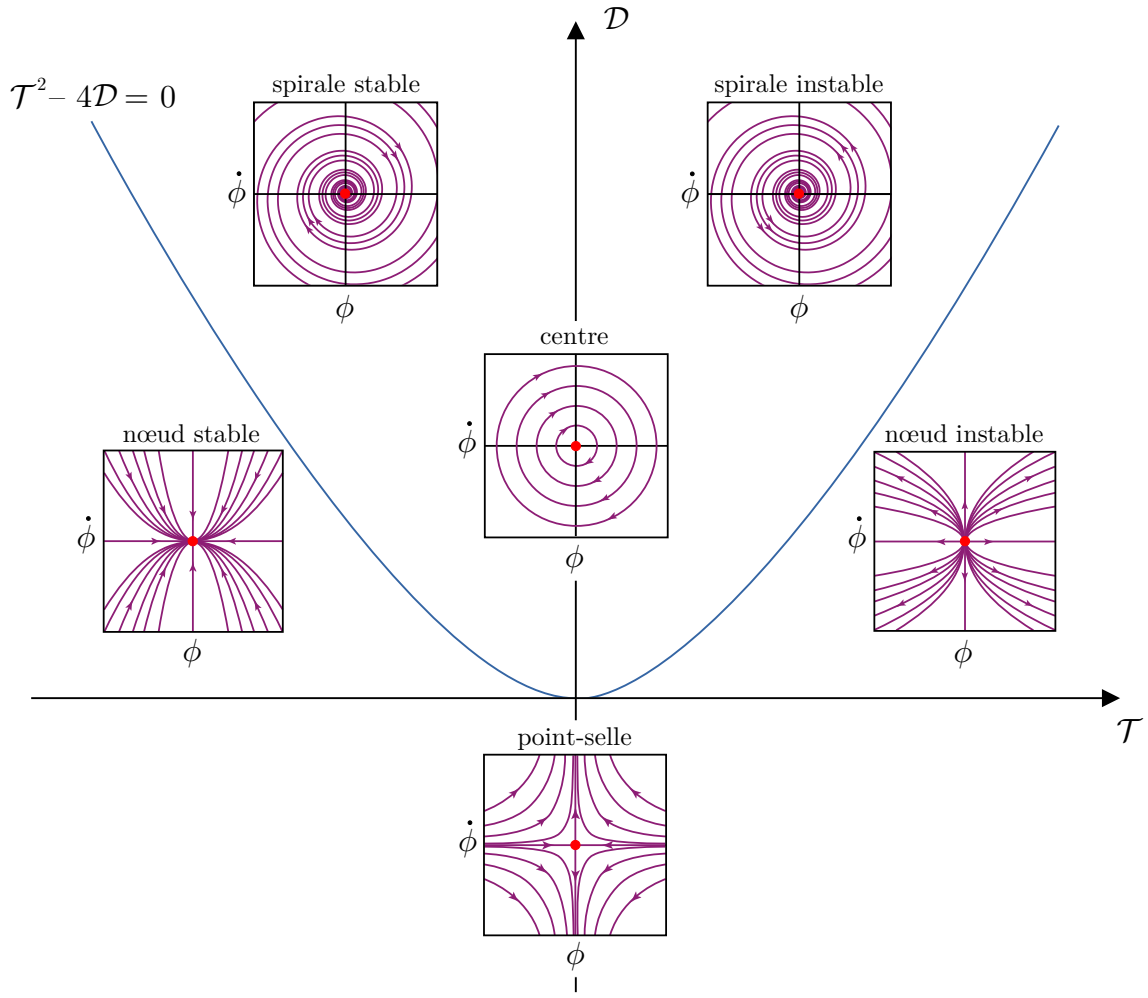


FIGURE 4.4 – Classification des points fixes en fonction de la trace et du déterminant de la Jacobienne [60]

$$\begin{cases} \delta\dot{\phi} = \left.\frac{\partial g_\phi}{\partial \phi}\right|_{\phi_*} \delta\phi + \left.\frac{\partial g_\phi}{\partial \psi}\right|_{\psi_*} \delta\psi & (4.22) \\ \delta\dot{\psi} = \left.\frac{\partial g_\psi}{\partial \phi}\right|_{\phi_*} \delta\phi + \left.\frac{\partial g_\psi}{\partial \psi}\right|_{\psi_*} \delta\psi & (4.23) \end{cases}$$

Pour finir, ce système peut se récrire sous forme matricielle en introduisant la Jacobienne $J(\phi_*, \psi_*)$, ce qui pour l'équation différentielle d'ordre deux considérée s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi^*} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\psi \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

L'analyse de stabilité des points fixes se réduit alors à un problème aux valeurs propres, il faut alors chercher les valeurs et vecteurs propres de la Jacobienne prise aux deux points fixes trouvés précédemment. Pour simplifier le discours, nous ne rentrerons pas dans ces détails de calculs, et ce d'autant plus

que la théorie des systèmes dynamiques fournit une description synthétique qui permet de classifier les points fixes en ne considérant que la trace et le déterminant de la matrice Jacobienne. La figure 4.4 schématise les différentes trajectoires possibles du système dans l'espace des phases $(\phi, \dot{\phi})$, en fonction de la trace $\mathcal{T}$ et du déterminant $\mathcal{D}$ de la Jacobienne. Par exemple, si le déterminant $\mathcal{D}$ de la Jacobienne est positif et que sa trace $\mathcal{T}$ est comprise entre 0 et $2\sqrt{\mathcal{D}}$, alors le point fixe est une spirale instable. Bien sûr, si le système étudié possède plusieurs points fixes, les trajectoires qui émanent de chaque point doivent se reconnecter, si bien que les portraits de phase ont rarement une allure aussi idéale que celles présentées sur la figure 4.4.

Munis de ces éléments de théorie, nous allons pouvoir étudier l'équation de diffusion non-linéaire qui nous occupe.

4.2.1.2 Recherche des points fixes pour l'équation de diffusion non-linéaire

L'équation de la diffusion non-linéaire (4.14) peut être reformulée en introduisant la fonction $f(\phi) = \phi - \beta\phi^2$, et s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2} + u\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} + f(\phi) = 0 \tag{4.25}$$

qui est alors exactement formulée comme l'équation (4.17). Il faut ensuite chercher les points fixes du système, *i.e.* les couples (ϕ_*, ψ_*) tels que $\dot{\phi} = 0$ et $\dot{\psi} = 0$. La première équation conduit à $\psi_* = 0$. En réinjectant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient que ϕ doit vérifier la condition $f(\phi_*) = 0$, ce qui donne deux valeurs possibles $\phi_* = 1/\beta$ et $\phi_* = 0$. On a donc deux points fixes pour le système $(1/\beta, 0)$ et $(0, 0)$. Arrêtons nous un instant sur la signification de ces points fixes, en renormalisant les valeurs, ceux-ci s'écrivent :

$$n_* = 0 \qquad \text{et} \qquad n_* = \frac{\nu_i}{r_{ei}} \tag{4.26}$$

ce qui signifie que le profil de densité prend la valeur $n = 0$ loin en amont du front (mathématiquement en $x = -\infty$), et la valeur maximale $n_* = \nu_i/r_{ei}$ loin en aval du front (mathématiquement en $x = +\infty$). Bien entendu, en simulation et en expérience, la densité diminue lorsque x augmente puisque l'onde perd de l'énergie au fur et à mesure qu'elle la transfère au plasma, ce qui entraine une chute de la production d'électrons. En revanche dans ce modèle, la fréquence d'ionisation a été prise uniforme, ce qui fait que la valeur de la densité est maximale en $x = +\infty$.

Il reste à déterminer l'allure des profils qui relient ces deux valeurs extrémales, et pour ce faire, il faut étudier la stabilité de ces points fixes. Suivant la théorie des systèmes dynamiques, on effectue le développement perturbatif du système qui se récrit en fonction de la Jacobienne $J(\phi_*, \psi_*)$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\beta\phi_* - 1 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\psi \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Il ne reste plus qu'à étudier les valeurs de la trace et du déterminant de la Jacobienne.

4.2.1.3 Analyse de stabilité et classification des points fixes

Classification du point fixe $P_1 = (0, 0)$

En P_1, la Jacobienne $J_1 = J(P_1)$ se récrit :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -u \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

La trace de la matrice est égale à $\mathcal{T}_{J_1} = -u$ et son déterminant vaut $\mathcal{D}_{J_1} = 1$. Le déterminant étant positif, constant et égal à 1, on détermine facilement que la valeur de la trace de J_1 telle que ${\mathcal{T}_{J_1}}^2 - 4\mathcal{D}_{J_1} = 0$ vaut $\mathcal{T}_{J_1} = \pm 2$. Il vient alors la valeur de la vitesse normalisée u :

$$u_\pm = \pm 2 \tag{4.29}$$

Or, comme la variable η vérifie $\eta = s - u\tau$, et que nous considérons un front se déplaçant dans le sens des x décroissants, *i.e.* vers la gauche, la vitesse normalisée que nous cherchons est alors nécessairement négative de sorte que $u = -2$. De fait, la trace de la matrice est positive et le déterminant étant égal à un, le premier point fixe est soit une spirale instable soit un nœud instable, en fonction que $\mathcal{T} > 4\mathcal{D}$ ou bien $\mathcal{T} < 4\mathcal{D}$.

Classification du point fixe $P_2 = (1/\beta, 0)$

En P_2, la Jacobienne $J_2 = J(P_2)$ se récrit :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -u \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

Le déterminant vaut $\mathcal{D}_{J_2} = -1$, il n'est donc pas besoin de s'intéresser à la trace de la matrice, le point fixe est nécessairement un point-selle.

4.2.1.4 Trajectoires dans l'espace des phases et profils de densité

Ayant déterminé la nature de ces points fixes, nous pouvons maintenant prédire l'allure théorique du profil de densité. Afin d'illustrer, traçons les portraits de phase pour les valeurs $\beta = 0.25$ ce qui impose que le deuxième point fixe P_2 est alors égal à $(\phi_*, \psi_*) = (4, 0)$. La vitesse u du front doit alors être prise inférieure à -2 pour avoir affaire à un nœud instable, et supérieure à -2 pour observer une spirale instable. Dans ces conditions, nous avons choisi arbitrairement les deux vitesses $u = -3.7$ et $u = -0.31$ pour tracer les portraits de phase. Ceux-ci sont présentés sur la figure 4.5, sur laquelle les points fixes P_1 et P_2 sont respectivement représentés par les points bleu et orange.

De ces portraits de phase, on déduit l'allure du profil de ϕ en fonction de η :

- Dans le cas où le point fixe P_1 est une spirale instable, on voit que la trajectoire en noir qui relie les deux points fixes passe par une succession de points tels que $(\phi < 0, \dot{\phi} = 0)$ et $(\phi > 0, \dot{\phi} = 0)$, *i.e.* par une succession de minima et de maxima. Le profil de ϕ décrit alors une oscillation dont l'amplitude croît en fonction de η, jusqu'à atteindre le point fixe P_2. La trajectoire ainsi obtenue est présentée sur la figure 4.5.

- Dans le cas où le point fixe P_1 est un nœud instable, alors il est connecté au point fixe P_2 par une trajectoire monotone. Ce profil possède un point d'inflexion en $\phi = 2$ où la dérivée $\dot{\phi}$ atteint un maximum.

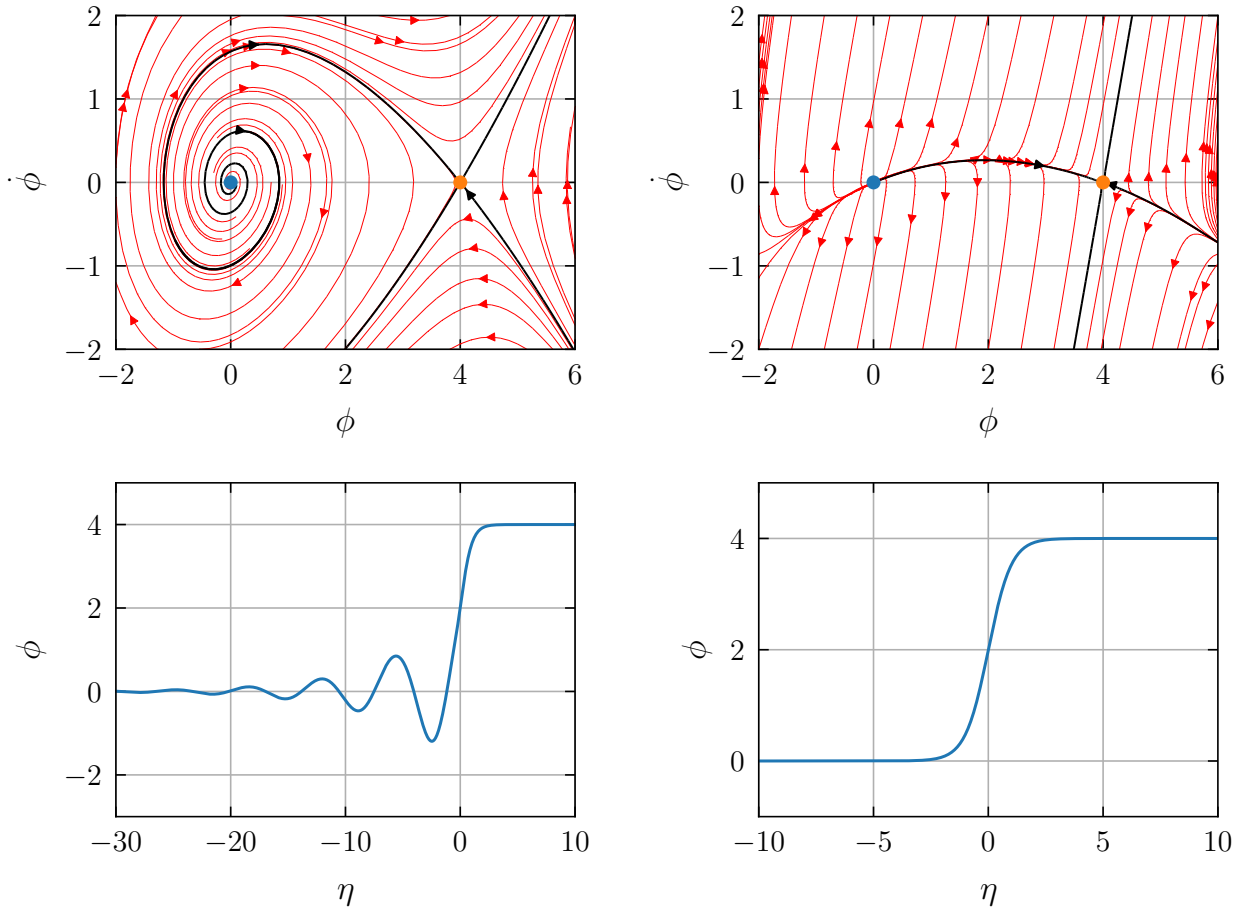


FIGURE 4.5 – Portraits de phase et profils de ϕ en fonction de η pour des valeurs de vitesses $u = -0.31$ (spirale instable) et $u = -3.7$ (nœud instable). Les points fixes P_1 (instable) et P_2 (stable) sont représentés en bleu et en orange respectivement. Les flèches montrent le sens de parcours des trajectoires dans l'espace $(\phi, \dot{\phi})$.

Ainsi, la théorie des systèmes dynamiques prévoit deux solutions possibles dont l'existence est fonction de la vitesse du front. Naturellement, la solution oscillante valable mathématiquement ne l'est pas physiquement puisque le profil passe par des valeurs négatives de ϕ, et attendu que $\phi = n/n_{max}$, cela supposerait des valeurs négatives de densité. Ainsi, la seule solution à retenir est le front monotone, le point fixe P_1 est donc nécessairement un nœud instable, et la vitesse normalisée du front de densité est au plus égale à $u = -2$ ce qui ramené aux unités physiques donne $v = -2\sqrt{D\nu_i}$. C'est cet ordre de grandeur, qui a été démontré par [27], puis utilisé par Bœuf *et al.* afin de déterminer le coefficient de diffusion effectif donné au premier chapitre, dans le cadre de l'interaction microonde-plasma.

Notons que ces profils illustrent le sens physique de la stabilité ou de l'instabilité des points fixes. Le point fixe P_1 est instable puisqu'au passage du front de densité, un point de densité $\phi = 0$ est transformé en un point de densité $\phi = 1$.

L'analyse des points fixes de l'équation de diffusion ainsi que leur stabilité a permis de démontrer que l'équation permet de décrire la physique de la propagation du plasma. Cependant, elle ne fournit qu'un majorant de la vitesse du front, qui correspond à la valeur de la vitesse sur la parabole d'équation $\mathcal{T}^2 - 4\mathcal{D} = 0$ sur la figure 4.4. Cette théorie ne nous dit rien quant à l'expression analytique du profil, ni même quant à la véritable valeur de la vitesse, aussi dans ces travaux proposons nous une deuxième approche, inédite pour autant que nous le sachions, que nous allons développer dans le paragraphe ci-dessous.

4.2.2 Étude par la théorie non-linéaire

La deuxième méthode que nous proposons dans ce manuscrit consiste à s'intéresser à l'équation de Burgers-Korteweg-de Vries, que nous abrègerons en équation de BKdV par la suite, qui est une équation classique de la physique non-linéaire qui s'écrit de manière générale sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + b\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \tag{4.31}$$

Il s'agit d'un mélange de deux équations fondamentales que sont les équations de Burgers [61] et Korteweg-de Vries [62], dont plusieurs formes existent mais qui dans le cas le plus général s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + b\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + c\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \tag{4.33}$$

Traditionnellement, ces équations se rencontrent en mécanique des fluides mais également en physique des plasmas, où le terme non-linéaire $\phi\,\partial_x\phi$ correspond à la projection suivant l'axe x du terme d'inertie $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ de l'équation de Navier-Stokes et de l'équation de quantité de mouvement des fluides électronique et ionique dans les plasmas. Les solutions en ondes progressives stationnaires de ces deux équations, *i.e.* lorsqu'on les récrit en effectuant le changement de référentiel $\xi = x - vt$, que nous avons déjà mis en œuvre pour l'équation de diffusion, sont le soliton de Korteweg-de Vries et l'onde de choc de Burgers. Elles sont dérivables analytiquement, mais afin d'alléger le discours, nous ne referons pas ces calculs dans le corps du manuscrit, ceux-ci étant mis à disposition dans les sections D.1 et D.2 en annexe. Ces solutions s'écrivent alors respectivement :

$$\phi_{KdV} = \frac{3v}{a}\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{v}{4c}}(x - vt)\right) \tag{4.34}$$

$$\phi_{Burgers} = \frac{v}{a}\left[1 + \tanh\left(\frac{v}{2b}(x - vt)\right)\right] \tag{4.35}$$

Si bien que la solution de l'équation de BKdV peut être cherchée sous la forme [63] :

$$\phi = A\,\mathrm{sech}^2(k\xi) + B\tanh(k\xi) + C \tag{4.36}$$

et en injectant cette forme dans l'équation de BKdV, on trouve alors après quelques calculs, détaillés dans la section D.3 en annexe, les expressions des constantes A, B, C, k et v :

$$A = \frac{3}{25}\frac{b^2}{ac} \qquad B_\pm = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{ac} \qquad C = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{ac} \qquad k_\pm = \pm\frac{1}{10}\frac{b}{c} \qquad v_\pm = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{c} \tag{4.37}$$

On obtient alors deux ensembles de solutions possibles selon que l'on considère le signe « + » ou le signe « − ». Venons en maintenant au rapport entre équation de BKdV et équation de diffusion non-linéaire. Cette dernière qui est donnée par l'équation (4.2) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -r_{ei}n^2 + \nu_i n \tag{4.38}$$

peut se récrire en posant le changement de variable $\xi = x - vt$, en dérivant par rapport à ξ, et en multipliant par v/ν_i, sous la forme :

$$-v\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\xi} + 2\frac{v}{\nu_i}r_{ei}n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\xi} - \frac{v^2}{\nu_i}\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\xi^2} - D\frac{v}{\nu_i}\frac{\mathrm{d}^3n}{\mathrm{d}\xi^3} = 0 \tag{4.39}$$

qui est une equation de BKdV stationnaire. A ce stade, précisons que l'équation de diffusion non-linéaire n'est pas une équation de BKdV, en revanche l'équation de diffusion non-linéaire stationnaire est une équation de BKdV stationnaire. On identifie alors les constantes a, b et c :

$$a = 2\frac{v}{\nu_i}r_{ei} \qquad b = -\frac{v^2}{\nu_i} \qquad c = -\frac{v}{\nu_i}D \tag{4.40}$$

L'expression de la vitesse v peut être déterminée, en utilisant l'expression (4.37) :

$$v_\pm = \mp\frac{6}{25}\frac{v_\pm^3}{D\nu_i} \qquad \Rightarrow \qquad v_\pm^2 = \mp\frac{25}{6}D\nu_i \tag{4.41}$$

La vitesse est réelle si et seulement si on retient la solution v_- qui est positive, ce qui impose le signe des constantes A, B, C, k et v qui s'écrivent alors :

$$A = -\frac{\nu_i}{4r_{ei}} \qquad B = \frac{\nu_i}{2r_{ei}} \qquad C = \frac{\nu_i}{2r_{ei}} \qquad k = \mp\frac{1}{10}\sqrt{\frac{25}{6}}\sqrt{\frac{\nu_i}{D}} \qquad v = \pm\sqrt{\frac{25}{6}}\sqrt{D\nu_i} \tag{4.42}$$

La solution finale de l'équation s'écrit alors :

$$n(x,t) = \frac{\nu_i}{4r_{ei}}\left[-\operatorname{sech}^2\left(k\left[x-vt\right]\right) + 2\tanh\left(k\left[x-vt\right]\right) + 2\right] \tag{4.43}$$

Pour un front qui se propage dans le sens des x décroissants, il convient de prendre v négatif et k positif, ce qui permet alors d'accéder au profil de densité donné par la théorie non-linéaire, et présenté sur la figure 4.6.
Ces développements analytiques nous ont ainsi permis d'accéder à l'expression analytique du profil que nous n'avions pas pu obtenir par la théorie des systèmes dynamiques. La vitesse du front ainsi dérivée vaut alors $v \approx -2.04\sqrt{D\nu_i}$, inférieure à $-2\sqrt{D\nu_i}$ comme nous pouvions nous y attendre, puisqu'il s'agit de la condition nécessaire pour observer un front monotone selon la théorie des systèmes dynamiques.

Pour finir, le parallèle dégagé entre équation de diffusion et équation de BKdV tend à laisser penser que la propagation de la structure de densité présentée sur la figure 4.2b, ne correspond pas à un transport macroscopique de matière mais à la propagation d'une perturbation qui entraine une élévation de la densité électronique sur son passage. Dans la section suivante, nous allons tenter de mettre au jour la physique de la propagation du front à partir des données obtenues avec PlasmaSimWave, et nous allons également vérifier que l'ordre de grandeur obtenu pour la vitesse est en accord avec les données simulées.

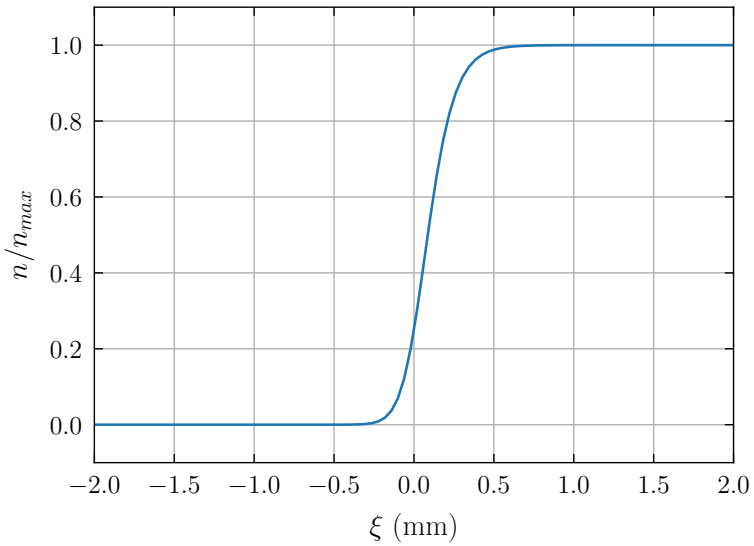


FIGURE 4.6 – Profil de densité normalisé se propageant dans le sens des x décroissants, obtenu par la théorie non-linéaire.

4.2.3 Comparaisons théorie-simulation-expérience

Dans cette section, nous nous proposons de donner une description plus précise des mécanismes physiques impliqués dans la propagation du front de densité, et pour ce faire, nous allons nous intéresser aux mécanismes par lesquels sont produits les électrons. Le code numérique nous permet d'examiner l'importance relative de chaque réaction dans la production d'électrons. Avec les données d'entrée obtenues pour une fonction de distribution calculée par BOLSIG+, aucun électron n'est créé par ionisation directe alors que 61.1 % et 33.2 % sont produits par l'ionisation des métastables et des résonnants respectivement. Il convient donc de s'intéresser aux densités d'électrons et d'espèces excitées, aux termes source de ces espèces, ainsi qu'à des grandeurs plus fondamentales qui sont liées à la production de ces espèces comme la température électronique et le champ électrique microonde efficace.

A ce titre, la figure 4.7 présente dans l'ordre :

- Les profils de densité d'électrons et d'états excités.
- Les profils de termes source S_e^+ d'électrons et $S^+_{Ar^*_{m,r}}$ d'états excités engendrés par l'excitation par impact électronique et l'ionisation par étapes, respectivement définis par :

$$S_e^+ = (k_6 n_{Ar^*_m} + k_7 n_{Ar^*_r}) n_e \tag{4.44}$$

$$S^+_{Ar^*_{m,r}} = (k_2 + k_3) n_{Ar} n_e \tag{4.45}$$

  où k_2, k_3, k_6 et k_7 sont les taux des réactions 2, 3, 6 et 7 (*cf.* tableau 2.1).
- Les valeurs efficaces du champ électrique microonde total, et de la composante E^y.
- Le profil de température électronique.

Tous les profils ont été moyennés suivant la direction y (*i.e.* la hauteur de la cavité), et obtenus pour une puissance incidente $P_{inc} = 40$ dBm, au temps $t = 75.2$ μs, lorsque le front de densité se situe

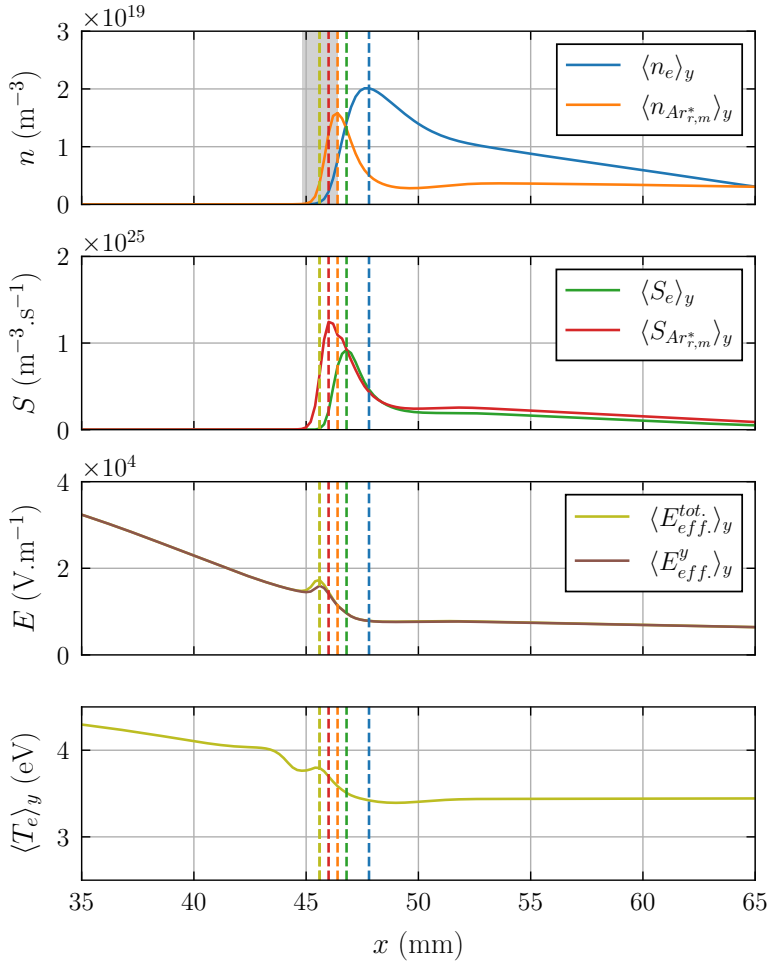


FIGURE 4.7 – Profils de densité simulés et termes source en fonction de x à $t = 75.1$ μs, pour $P_{inc} = 40$ dBm. Les densités et les termes source des états métastables et des résonnants ont été sommés de même que les termes d'ionisation par étapes depuis les états métastables et résonnants.

au milieu de la cavité. Pour chaque profil, nous avons repéré plusieurs positions par des droites en pointillés, reportées sur chaque graphe, et dont les couleurs correspondent à celles des profils auxquels elles sont associées. On repère alors les quatre positions suivantes :

- En $x = 47.8$ mm, le profil de densité électronique $\langle n_e \rangle_y$ atteint un maximum.
- En $x = 46.8$ mm, le terme source d'électrons $\langle S_e^+ \rangle_y$ passe également par un maximum.
- En $x = 46.4$ mm, la densité d'espèces excitées $\langle n_{Ar^*_{r,m}} \rangle_y$ est maximale.
- En $x = 46.0$ mm, le terme source d'espèces excitées $\langle S_{Ar^*_{r,m}} \rangle_y$ est maximal.
- En $x = 45.6$ mm, le champ électrique microonde efficace $\langle E^{tot.}_{eff.} \rangle_y$ et la température électronique $\langle T_e \rangle_y$ passent par un maximum local.

Il s'agit là d'une photographie à un instant donné qui permet de voir l'enchainement des événements qui conduisent à la propagation du front de densité. Intéressons nous tout d'abord au profil de température électronique. Comme le montre la figure 4.7, celui-ci possède une allure proche du profil de champ électrique ce qui se comprend puisque l'équation d'énergie fait notamment intervenir la puissance P_e absorbée par électron dont on rappelle qu'elle est reliée au champ microonde par la relation (*cf.* chapitre 1) :

$$P_e = \frac{e^2}{2m_e}\frac{\nu_m}{\nu_m^2+\omega^2}\left|\underline{\boldsymbol{E}}\right|^2 \tag{4.46}$$

Remarquons alors qu'il existe une amplification locale dans le profil de champ électrique qui correspond à un maximum local dans le profil de température électronique. Cette dernière qui prend la valeur $T_e = 3.39$ eV dans le cœur du plasma où elle passe par un minimum, prend la valeur $T_e = 3.80$ eV à la position du maximum local précédemment mentionné.

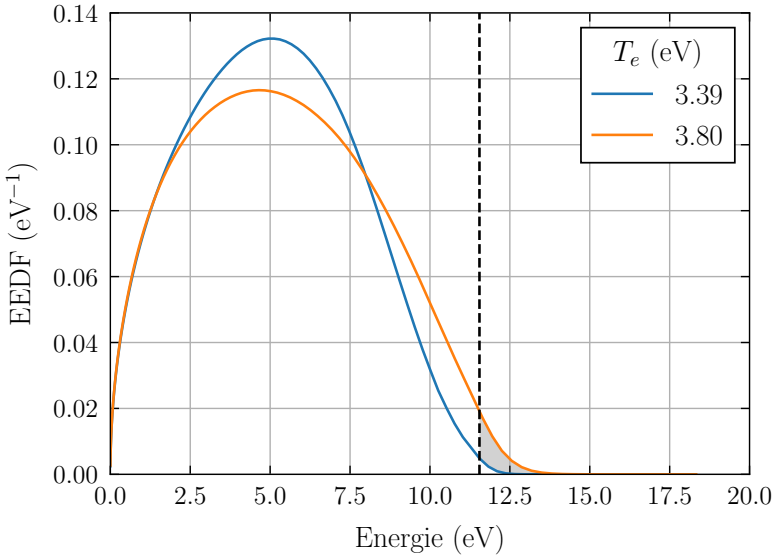


FIGURE 4.8 – Fonctions de distribution en énergie des électrons pour deux températures électroniques différentes.

Les électrons sont donc chauffés en tête de front, et bien que la différence de température paraisse faible, elle entraine de fortes variations des taux des processus inélastiques, et des taux de production des espèces excitées en particulier. En effet rappelons que la température est reliée à l'énergie moyenne des électrons, laquelle peut être interprétée comme la largeur à mi-hauteur de la fonction de distribution. La figure 4.8 présente les fonctions de distribution en énergie pour les deux températures électroniques mentionnées ci-dessus. La droite noire en pointillés repère l'énergie seuil de la réaction d'excitation par étape. Comme on peut le voir l'accroissement de température a bien engendré un élargissement de la fonction de distribution, et comme ces fonctions représentent la probabilité de trouver un électron à une énergie donnée, on voit clairement qu'il y a plus d'électrons chauds disponibles pour engendrer des espèces excitées, ce qui est matérialisé par la zone hachurée en gris. De fait, le taux de création des espèces excitées passe de 4.75×10^{-19} m^3.s^{-1} pour $T_e = 3.39$ eV, à 4.83×10^{-17} m^3.s^{-1} pour $T_e = 3.80$ eV, soit une augmentation d'un facteur 100. Il faut préciser pour finir que ce maximum local de température électronique est atteint à une position où la densité électronique atteint la valeur 3.62×10^{17} m^{-3} soit trois fois la densité critique à 3 GHz. En effet si ce chauffage avait eu lieu pour des densités plus faibles, la production d'électrons aurait été négligeable puisque le terme source S_e^+ est proportionnel à la densité d'électrons.

Ainsi, le mécanisme de propagation du front peut être résumé par les trois étapes suivantes :

- Une amplification du champ électrique microonde a lieu en tête de front, dans une zone où la densité électronique est trois fois supérieure à la densité critique.

- Ce chauffage des électrons entraine l'apparition d'espèces excitées, métastables et résonnants. Autrement dit ce phénomène engendre la propagation du terme source d'espèces excitées

$\langle S_{Ar^*_{r,m}} \rangle_y$ et par conséquent du profil de densité de ces mêmes espèces $\langle n_{Ar^*_{r,m}} \rangle_y$.

- Ces espèces excitées sont ionisées, ce qui entraine la propagation du terme source d'électrons $\langle S_e \rangle_y$ et par conséquent du profil de densité électronique $\langle n_e \rangle_y$. Et ainsi de suite.

La seule question qui reste en suspens pour l'instant est de savoir pourquoi une amplification du champ a lieu en tête de la colonne plasma. Ce point sera adressé en détails dans la section suivante.

Comme nous l'avions pressenti par l'approche théorique, le plasma ne se propage pas par transport d'ensemble d'ions et d'électrons, c'est une onde d'ionisation qui se propage le long de la cavité et qui fait monter la densité électronique lors de son passage. Il reste alors à vérifier que l'ordre de grandeur développé pour la vitesse du front est en accord avec les résultats de la simulation. Pour des puissances incidentes comprises entre 29 et 42 dBm, les vitesses du front ont été extraites à la fois numériquement et expérimentalement et sont présentées sur la figure 4.9.

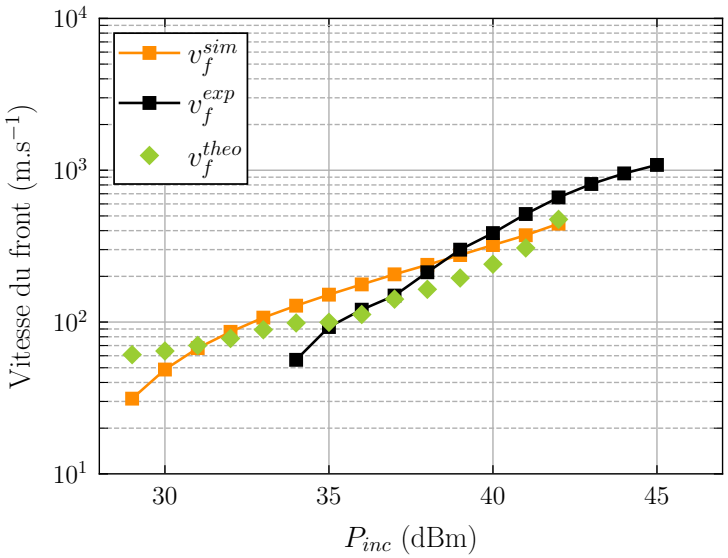


FIGURE 4.9 – Vitesses du front théorique, mesurée et simulée en fonction de la puissance incidente P_{inc}, à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

Nous pouvons dès lors chercher à vérifier que la vitesse de propagation obtenue par la théorie est cohérente avec celle observée dans les simulations. Pour cela, nous avons moyenné la vitesse de propagation théorique sur la largeur du front, puisque D_{eff} et ν_i dépendent tous deux fortement de la position dans les simulations. Nous avons considéré que l'entrée dans le front s'effectue au point x_i pour lequel la diffusion ambipolaire devient dominante, *i.e.* pour lequel $\langle \alpha \rangle_y$ devient inférieur à 1% (*cf.* équation (1.56)). L'extrémité du front est située à la position x_f pour laquelle la fréquence d'ionisation atteint son maximum. La zone du front est hachurée en gris sur la figure 4.7. La vitesse théorique du front v_f a finalement été généralisée en posant :

$$v_f = \frac{1}{x_f - x_i} \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}x \ \langle v(x,y) \rangle_y \tag{4.47}$$

avec $v(x,y) = 2\sqrt{D_{eff}(x,y)\nu_i(x,y)}$. La fréquence d'ionisation totale ν_i est la somme des trois fréquences d'ionisation ν_1, ν_6, et ν_7 des réactions 1, 6, et 7, respectivement (*cf.* tableau 2.1). L'équation (4.47) donne une bonne approximation de la vitesse du front simulé comme on peut le voir sur la figure 4.9. Cette vitesse dépend de la fréquence d'ionisation comme prévu, mais aussi du coefficient de diffusion. Cependant, la variation de la vitesse du front en fonction de la puissance incidente est

principalement due à l'augmentation de la fréquence d'ionisation puisque le coefficient de diffusion ne varie pas significativement dans la gamme de 30 à 40 dBm.

Pour clore ce propos sur la propagation de l'onde d'ionisation, il resterait à comprendre les mécanismes qui régissent l'amplification du champ électrique en tête de front, laquelle est responsable de l'apparition des états excités, et de leur ionisation.

4.3 Interaction microonde/plasma dans le front

Dans le chapitre précédent, nous avons longuement discuté des mécanismes de couplage microonde-plasma, pour un plasma uniforme et une ligne invariante par translation selon la direction de propagation. Dans cette section nous allons maintenant discuter de l'interaction microonde-plasma dans le front de densité. Du point de vue de l'onde qui se propage, il y a dans le plasma des zones sur-critiques, *i.e.* où la densité électronique est supérieure à la densité critique et des zones sous-critiques, *i.e.* où la densité électronique est inférieure à la densité critique. Les zones sous-critiques sont typiquement localisées, loin en tête du front et dans les gaines. Par conséquent, on choisit de modéliser le plasma comme indiqué sur la figure 4.10.

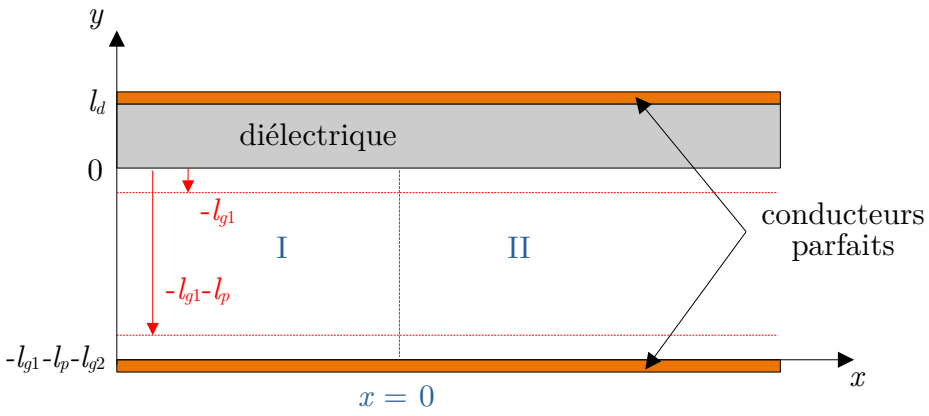


FIGURE 4.10 – Géométrie 2D considérée dans le développement analytique.

Comme on peut le voir, l'espace a été séparé en deux zones notées I et II suivant la direction x. Chaque zone s'est vue ajouter deux bandes supplémentaires par rapport au modèle du chapitre précédent, afin de représenter les gaines.

La première étape consiste à trouver les expressions des champs électromagnétiques, pour une ligne à quatre bandes, en supposant le système invariant suivant la direction x. Les calculs se déroulent en suivant la même démarche que celle explicitée au troisième chapitre, mais en raccordant cette fois-ci les solutions aux trois interfaces (diélectrique/gaine n°1, ...), si bien que les champs s'écrivent :

- dans le diélectrique :

$$\underline{E}_d^x(x,y) = iE_0\,\underline{\alpha}_{d,g_1}\frac{\underline{K}_d}{\underline{k}}\frac{\sin(\underline{K}_d[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{4.48}$$

$$\underline{E}_d^y(x,y) = E_0\,\underline{\alpha}_{d,g_1}\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{4.49}$$

$$\underline{B}_d^z(x,y) = E_0\,\underline{\alpha}_{d,g_1}\frac{k_0^2\epsilon_{r,d}}{\omega\underline{k}}\frac{\cos(\underline{K}_d[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_d l_d)}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \tag{4.50}$$

- dans la gaine n°1 :

$$\underline{E}^x_{g_1}(x,y) = iE_0\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}}\frac{\underline{K}_{g_1}}{\underline{k}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_1}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})} - \underline{\beta}_{p,g_1}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_1}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.51)$$

$$\underline{E}^y_{g_1}(x,y) = E_0\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})} - \underline{\beta}_{p,g_1}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.52)$$

$$\underline{B}^z_{g_1}(x,y) = E_0\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}}{\omega\underline{k}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})} - \underline{\beta}_{p,g_1}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.53)$$

- dans le plasma :

$$\underline{E}^x_p(x,y) = iE_0\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1}\frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)} - \underline{\alpha}_{p,g_2}\frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.54)$$

$$\underline{E}^y_p(x,y) = E_0\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)} - \underline{\alpha}_{p,g_2}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.55)$$

$$\underline{B}^z_p(x,y) = E_0\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}}{\omega\underline{k}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)} - \underline{\alpha}_{p,g_2}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_p l_p)}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.56)$$

- dans la gaine n°2 :

$$\underline{E}^x_{g_2}(x,y) = iE_0\,\underline{\beta}_{p,g_2}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}\frac{\underline{K}_{g_2}}{\underline{k}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_2}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2}l_{g_2})}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.57)$$

$$\underline{E}^y_{g_2}(x,y) = E_0\,\underline{\beta}_{p,g_2}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_2}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2}l_{g_2})}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.58)$$

$$\underline{B}^z_{g_2}(x,y) = E_0\,\underline{\beta}_{p,g_2}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}}{\omega\underline{k}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_2}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2}l_{g_2})}\mathrm{e}^{i\underline{k}x} \quad (4.59)$$

Comme on peut le voir, on trouve des expressions similaires à celles obtenues précédemment pour la ligne à deux milieux, bien que l'amplitude dépendant de y soit plus complexe. Les constantes $\underline{\alpha}_{p,g_2}$, $\underline{\beta}_{p,g_2}$, $\underline{\alpha}_{p,g_1}$, $\underline{\beta}_{p,g_1}$, $\underline{\alpha}_{d,g_1}$ et $\underline{\beta}_{d,g_1}$ dépendent des permittivités relatives des milieux ainsi que des constantes $\underline{K}_d$, $\underline{K}_{g_1}$, $\underline{K}_p$ et $\underline{K}_{g_2}$ définies par :

$$\underline{K}_d = \sqrt{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d} - \underline{k}^2} \qquad \underline{K}_{g_1} = \sqrt{\underline{k}^2 - k_0^2\underline{\epsilon}_{r,g_1}} \qquad \underline{K}_p = \sqrt{\underline{k}^2 - k_0^2\underline{\epsilon}_{r,p}} \qquad \underline{K}_{g_2} = \sqrt{\underline{k}^2 - k_0^2\underline{\epsilon}_{r,g_2}} \quad (4.60)$$

Leurs expressions sont données en annexe dans la section E.1. Pour finir, la détermination des différents modes dans la cavité se fait toujours par résolution d'une équation transcendantale qui s'écrit, dans le cas présent, sous la forme :

$$\frac{\underline{K}_p}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\tanh(\underline{K}_p l_p)\left[1 - \frac{\frac{\underline{K}_d}{\underline{\epsilon}_{r,d}}\tan(\underline{K}_d l_d)}{\cosh^2(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})\left[\frac{\underline{K}_d}{\underline{\epsilon}_{r,d}}\tan(\underline{K}_d l_d) - \frac{\underline{K}_{g_1}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}}\tanh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})\right]}\right]$$
$$+\frac{\underline{K}_{g_1}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}}\tanh(\underline{K}_{g_1}l_{g_1})\left[1 - \frac{\frac{\underline{K}_{g_2}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}\tanh(\underline{K}_{g_2}l_{g_2})}{\cosh^2(\underline{K}_p l_p)\left[\frac{\underline{K}_{g_2}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}\tanh(\underline{K}_{g_2}l_{g_2}) + \frac{\underline{K}_p}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\tanh(\underline{K}_p l_p)\right]}\right] = 0 \quad (4.61)$$

Comme nous l'avons déjà montré plus haut, plusieurs modes peuvent exister dans la ligne, chacun étant caractérisé par son ordre. Dans les calculs menés au troisième chapitre, nous n'avons jamais considéré qu'un seul mode à la fois. Pour réaliser le raccordement des champs à l'interface entre les zones I et II, en $x = 0$, il convient de considérer tous les modes possibles qui peuvent exister dans chaque zone. Ces familles de modes constituent alors une base modale, si bien que les champs dans les zones I et II, peuvent être décomposés comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base modale. Dans la zone I, le champ s'exprime comme la somme d'un champ incident et de plusieurs composantes de champ réfléchi, dans la zone II, le champ est la superposition de plusieurs modes transmis. Pour alléger le discours nous ne donnerons ici que les expressions pour le champ dans le diélectrique, dans les zones I et II, toutes les autres étant disponibles en annexe :

- Dans la zone I :

$$\underline{E}_d^{x,\mathrm{I}} = \sum_j i\left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}}{\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\frac{\sin(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}l_d)} \tag{4.62}$$

$$\underline{E}_d^{y,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} - B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}l_d)} \tag{4.63}$$

$$\underline{B}_d^{z,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\frac{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}l_d)} \tag{4.64}$$

- Dans la zone II :

$$\underline{E}_d^{x,\mathrm{II}} = \sum_m iA_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}}{\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\frac{\sin(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{4.65}$$

$$\underline{E}_d^{y,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{4.66}$$

$$\underline{B}_d^{z,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\frac{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{4.67}$$

où δ_{j0} est le symbole de Kronecker (*i.e.* on suppose que le mode incident est le mode fondamental de la ligne), et les constantes B_j^{I} et A_m^{II} sont les amplitudes des modes réfléchis dans la zone I, et transmis dans la zone II. Nous allons maintenant discuter du raccordement des champs à l'interface entre les zones I et II.

4.3.1 Raccordement modal

Pour effectuer le raccordement du champ à l'interface entre les deux zones, il convient d'imposer la continuité de la composante longitudinale du champ en $x = 0$, *i.e.* la composante dirigée suivant y, ce qui s'écrit :

$$\underline{E}^{y,\mathrm{I}}(0,y) = \underline{E}^{y,\mathrm{II}}(0,y) \tag{4.68}$$

que l'on peut également récrire sous la forme d'une combinaison linéaire des modes de base :

$$\sum_j \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}}(0,y) = \sum_m \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}}(0,y) \tag{4.69}$$

Nous n'obtenons alors qu'une seule équation pour une infinité d'inconnues. Classiquement, une méthode mise en œuvre pour effectuer le raccordement modal dans les guides d'onde rectangulaires coudés [64], dans les jonctions en Y [65] ou en H [66] pour les guides d'ondes, consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux sommes dans l'équation de raccordement, en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions par lesquelles sont exprimés les champs. Le produit scalaire de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, sur l'intervalle $[a, b]$, est défini par :

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \tag{4.70}$$

Si on réussit à trouver deux fonctions $f(y)$ et $g(y)$ telles qu'elles soient respectivement orthogonales à tous les vecteurs des bases de la zone I et de la zone II sauf au mode d'ordre q, alors dans ce cas l'équation de raccordement pour le champ électrique se récrit des deux façons suivantes :

$$\int_a^b \underline{E}_q^{y,\mathrm{I}}(0, y) f(y) \, \mathrm{d}y = \sum_m \int_a^b \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}}(0, y) f(y) \, \mathrm{d}y \tag{4.71}$$

$$\sum_j \int_a^b \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}}(0, y) g(y) \, \mathrm{d}y = \int_a^b \underline{E}_q^{y,\mathrm{II}}(0, y) g(y) \, \mathrm{d}y \tag{4.72}$$

On a alors éclaté la somme et fait naître autant d'équations qu'il y a d'amplitudes inconnues. Le problème est alors complètement déterminé et se réduit à la résolution d'un système linéaire. Ces propriétés d'orthogonalité prennent souvent naissance dans la quantification explicite des nombres d'onde, *i.e.* lorsque le nombre d'onde dépend explicitement de l'ordre du mode, et lorsque les vecteurs de la base modale sont exprimés en termes de cosinus et de sinus. Il s'agit par exemple des modes dans un guide d'onde à plaques parallèles homogène. Comme nous l'avons écrit plus haut, l'inhomogénéité de la ligne et les coordonnées dans lesquelles est traité le problème, rendent la quantification implicite. Dès lors cette méthode ne peut pas être utilisée, et il convient d'en trouver une autre pour résoudre le problème qui nous occupe. Pour ce faire, nous proposons d'égaliser les flux d'énergie, *i.e.* les intégrales des vecteurs de Poynting à l'interface, et de jouer avec les relations de passage des champs à cette même interface. Le vecteur élémentaire de surface s'écrit :

$$\mathrm{d}^2 \boldsymbol{S} = \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathbf{e}_x \tag{4.73}$$

La solution étant invariante suivant z, le raccordement des flux d'énergie en $x = 0$ se réduit à :

$$\int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}^{y,\mathrm{I}} \times \underline{B}^{z,\mathrm{I}^*} \, \mathrm{d}y = \int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}^{y,\mathrm{II}} \times \underline{B}^{z,\mathrm{II}^*} \, \mathrm{d}y \tag{4.74}$$

où $l_v = l_{g1} + l_p + l_{g2}$. Cette équation peut se récrire en décomposant le champ sur la base modale sous la forme :

$$\int_{-l_v}^{l_d} \sum_j \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}} \times \sum_q \underline{B}_q^{z,\mathrm{I}^*} \, \mathrm{d}y = \int_{-l_v}^{l_d} \sum_m \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}} \times \sum_r \underline{B}_r^{z,\mathrm{II}^*} \, \mathrm{d}y \tag{4.75}$$

Or le champ magnétique doit également être raccordé à l'interface pour les raisons déjà évoquées au chapitre précédent, et la relation de continuité s'écrit :

$$\sum_q \underline{B}_q^{z,\mathrm{I}} = \sum_r \underline{B}_r^{z,\mathrm{II}} \tag{4.76}$$

En injectant l'équation (4.76) dans l'équation (4.75) :

$$\int_{-l_v}^{l_d} \sum_j \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}} \times \sum_q \underline{B}_q^{z,\mathrm{I}^*}\,\mathrm{d}y = \int_{-l_v}^{l_d} \sum_m \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}} \times \sum_q \underline{B}_q^{z,\mathrm{I}^*}\,\mathrm{d}y \tag{4.77}$$

et puisque la relation de continuité (4.69) pour le champ électrique doit être vérifiée, on peut alors lever la somme sur q de sorte que :

$$\int_{-l_v}^{l_d} \underline{B}_q^{z,\mathrm{I}^*} \times \sum_j \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}}\,\mathrm{d}y = \int_{-l_v}^{l_d} \underline{B}_q^{z,\mathrm{I}^*} \times \sum_m \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}}\,\mathrm{d}y \tag{4.78}$$

ce qui s'écrit finalement :

$$\sum_j \int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}}(0,y)\, f_q^{\mathrm{I}}(y)\,\mathrm{d}y = \sum_m \int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}}(0,y)\, f_q^{\mathrm{I}}(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.79}$$

où la fonction $f_q^{\mathrm{I}}(y)$, correspond au champ magnétique conjugué, normalisé, de la zone I :

$$f_q^{\mathrm{I}}(y) = \begin{cases} \underline{\alpha}_{d,g_1,q}^{\mathrm{I}^*} \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}} \dfrac{\cos(\underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*}[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*} l_d)} \\ \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}} \left[\underline{\beta}_{d,g_1,q}^{\mathrm{I}^*} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}[y + l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*} l_{g_1})} - \underline{\beta}_{p,g_1,q}^{\mathrm{I}^*} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*} y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*} l_{g_1})} \right] \\ \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}} \left[\underline{\alpha}_{p,g_1,q}^{\mathrm{I}^*} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}[y + l_{g_1} + l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*} l_p)} - \underline{\alpha}_{p,g_2,q}^{\mathrm{I}^*} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}[y + l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*} l_p)} \right] \\ \underline{\beta}_{p,g_2,q}^{\mathrm{I}^*} \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*}[y + l_{g_1} + l_p + l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*} l_{g_2})} \end{cases} \tag{4.80}$$

On peut également écrire une deuxième équation avec la même méthode, en utilisant cette fois-ci la relation de raccordement pour le champ électrique :

$$\int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}_q^{y,\mathrm{II}} \times \sum_j \underline{B}_j^{z,\mathrm{I}^*}\,\mathrm{d}y = \int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}_q^{y,\mathrm{II}} \times \sum_m \underline{B}_m^{z,\mathrm{II}^*}\,\mathrm{d}y \tag{4.81}$$

ce qui conduit à l'équation :

$$\sum_j \int_{-l_v}^{l_d} \underline{B}_j^{z,\mathrm{I}^*}(0,y)\, g_q^{\mathrm{II}}(y)\,\mathrm{d}y = \sum_m \int_{-l_v}^{l_d} \underline{B}_m^{z,\mathrm{II}^*}(0,y)\, g_q^{\mathrm{II}}(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.82}$$

où la fonction $g_q^{\mathrm{II}}(y)$, correspond à la composante y du champ électrique, normalisée, de la zone II :

$$g_q^{\mathrm{II}}(y) = \begin{cases} \underline{\alpha}_{d,g_1,q}^{\mathrm{II}} \dfrac{\cos(\underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}}[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}} l_d)} \\ \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{II}}} \left[\underline{\beta}_{d,g_1,q}^{\mathrm{II}} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}}[y + l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}} l_{g_1})} - \underline{\beta}_{p,g_1,q}^{\mathrm{II}} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}} y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}} l_{g_1})} \right] \\ \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{II}}} \left[\underline{\alpha}_{p,g_1,q}^{\mathrm{II}} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}}[y + l_{g_1} + l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}} l_p)} - \underline{\alpha}_{p,g_2,q}^{\mathrm{II}} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}}[y + l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}} l_p)} \right] \\ \underline{\beta}_{p,g_2,q}^{\mathrm{II}} \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{II}}} \dfrac{\cosh(\underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}}[y + l_{g_1} + l_p + l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}} l_{g_2})} \end{cases} \tag{4.83}$$

L'indice q est un indice muet qui prend les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant q \leqslant J & \text{pour la zone I} \\ 0 \leqslant q \leqslant M & \text{pour la zone II} \end{cases} \tag{4.84}$$

Avec cette méthode, nous obtenons alors $J+M$ équations de raccordement à l'interface entre les zones I et II, ce qui conduit à un système de $J+M$ équations pour les $J+M$ inconnues qui s'écrit :

$$\sum_j \int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}_j^{y,\mathrm{I}}(0,y)\, f_q^{\mathrm{I}}(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \sum_m \int_{-l_v}^{l_d} \underline{E}_m^{y,\mathrm{II}}(0,y)\, f_q^{\mathrm{I}}(y)\,\mathrm{d}y \tag{4.85}$$

$$\sum_j \int_{-l_v}^{l_d} g_q^{\mathrm{II}}(y)\, \underline{B}_j^{z,\mathrm{I}^*}(0,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \sum_m \int_{-l_v}^{l_d} g_q^{\mathrm{II}}(y)\, \underline{B}_m^{z,\mathrm{II}^*}(0,y)\,\mathrm{d}y \tag{4.86}$$

Il reste alors à calculer toutes les intégrales. Comme les fonctions $f_q^{\mathrm{I}}(y)$ et $g_q^{\mathrm{II}}(y)$, sont inspirées des formes des champs électrique et magnétique, le système doit pouvoir se récrire sous la forme :

$$\sum_j \left[\delta_{j0} A_0^{\mathrm{I}} - B_j^{\mathrm{I}}\right] \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}} Q_{tot}^{\mathrm{I}}(j,q) = \sum_m A_m^{\mathrm{II}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,q) \tag{4.87}$$

$$\sum_j \left[\delta_{j0} A_0^{\mathrm{I}^*} + B_j^{\mathrm{I}^*}\right] \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_j^{\mathrm{I}^*}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(q,j) = \sum_m A_m^{\mathrm{II}^*} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}^*}}{\omega \underline{k}_m^{\mathrm{II}^*}} Q_{tot}^{\mathrm{II}}(q,m) \tag{4.88}$$

où $Q_{tot}^{\mathrm{I}}(j,q)$ et $Q_{tot}^{\mathrm{II}}(m,q)$ sont des termes de « pondération » dont les expressions sont données en annexe, et $\mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,q)$ et $\mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(q,j)$, sont les termes de l'intégrale de couplage totale $\mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,j)$ à l'interface entre les zones I et II :

$$\mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,j) \;=\; \mathcal{I}_d^{\mathrm{II,I}}(m,j) + \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{II}}} \mathcal{I}_{g_1}^{\mathrm{II,I}}(m,j) + \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{II}}} \mathcal{I}_p^{\mathrm{II,I}}(m,j) + \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{II}}} \mathcal{I}_{g_2}^{\mathrm{II,I}}(m,j) \tag{4.89}$$

qui s'expriment comme une combinaison linéaire des sous-intégrales de couplage dans le diélectrique, la gaine n°1, le plasma, et la gaine n°2, et dont les expressions sont données en annexe. En prenant le complexe conjugué de la deuxième équation du système et en gardant toutes les inconnues dans les membres de droite, et tous les termes qui dépendent de l'amplitude A_0^{I} du mode fondamental incident dans les membres de gauche, le système d'équations se récrit alors :

$$\sum_j B_j^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}*}} Q_{tot}^{\mathrm{I}}(j,q) + \sum_m A_m^{\mathrm{II}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}*}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,q) = A_0^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}*}} Q_{tot}^{\mathrm{I}}(0,q) \tag{4.90}$$

$$\sum_j B_j^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega \underline{k}_j^{\mathrm{I}}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(q,j)^* - \sum_m A_m^{\mathrm{II}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega \underline{k}_m^{\mathrm{II}}} Q_{tot}^{\mathrm{II}}(q,m)^* = -A_0^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega \underline{k}_0^{\mathrm{I}}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(q,0)^* \tag{4.91}$$

Pour résoudre ce système il convient de tronquer les sommes qui sont infinies. Pour simplifier, on considèrera seulement J vecteurs de base pour la zone I et M vecteurs de base pour la zone II. Le système linaire peut alors être reformulé sous forme matricielle en posant :

$$Y \cdot X = Z \tag{4.92}$$

où X est le vecteur inconnu dont les termes sont les amplitudes des champs, Y est une matrice dont les termes dépendent des intégrales de couplage et des termes de pondération, et Z est un vecteur dont les termes sont donnés par les seconds membres des équations du système. Les expressions de ces trois éléments sont données dans la section E.3 en annexe. Il nous reste pour finir à discuter de la construction des bases modales ainsi que du choix des ordres de fermeture du système.

4.3.2 Construction des bases modales

Pour pouvoir résoudre le système d'équations établi ci-dessus, il faut déterminer tous les modes propres qui peuvent exister dans la ligne. Comme nous l'avons déjà précisé maintes fois, du fait de l'inhomogénéité de la ligne, les modes ne dépendent pas explicitement de leur ordre, si bien qu'il est nécessaire d'élaborer une méthode afin de les ordonner. Nous traiterons cette question dans un premier temps, puis nous nous intéresserons ensuite à la détermination des ordres de fermeture, *i.e.* les ordres des derniers modes considérés dans les bases modales des zones I et II.

4.3.2.1 Ordonnancement des modes

Afin de pouvoir ordonnancer les modes de base, nous proposons tout d'abord de distinguer trois types de modes :

- Les modes propagatifs pour lesquels le nombre d'onde est réel. Nous en avons longuement parlé dans le précédent chapitre, ce sont typiquement les modes qui sont représentés sur le diagramme de dispersion de la ligne à vide (*cf.* figure 3.6).

- Les modes évanescents que nous n'avons pas encore évoqués, pour lesquels le nombre d'onde est imaginaire pur. Ce sont des modes localisés, qui s'atténuent fortement sans se propager et qui prennent souvent naissance dans les singularités (rupture d'impédance, angles dans les guides d'ondes, ...).

- Entre ces deux cas extrêmes se situe dans le plan complexe toute une zoologie de modes dont les nombres d'onde sont complexes, *i.e.* des modes qui se propagent en s'atténuant.

L'ordonnancement des deux premières classes de mode peut se faire simplement, même dans le cas où ils ne dépendent pas explicitement de leur ordre. En effet les modes propagatifs ont des nombres d'onde compris dans l'espace des réels $\mathbb{R}$, et les modes évanescents dans l'espace des imaginaires purs $i\mathbb{R}$. Ces deux espaces possèdent une relation d'ordre naturelle, si bien que l'on peut considérer que le mode propagatif d'ordre le plus bas est le mode de nombre d'onde le plus élevé, et que le mode

évanescent d'ordre le plus bas est le mode de nombre d'onde le moins élevé.

Une telle méthode n'est pas applicable pour la dernière classe de modes puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur le plan complexe. Une démarche heuristique pour les ordonnancer consiste à commencer par leur attribuer une profondeur de pénétration δ définie comme l'inverse de la partie imaginaire du nombre d'onde $\delta = 1/k''$. En effet, cette grandeur permet de quantifier l'échelle d'espace décrite par un mode. Plus la profondeur de pénétration sera faible, et plus l'échelle d'espace décrite par le mode le sera également.

On peut alors ordonner les modes en considérant que les modes d'ordre le plus bas sont les modes dont la profondeur de pénétration est la plus grande. Ainsi le mode principal sera le mode d'ordre zéro et le dernier mode considéré dans la base sera le mode de profondeur de pénétration la plus faible. Pour une même profondeur de pénétration, nous considérerons que le mode d'ordre le plus bas est celui dont la partie réelle du nombre d'onde est la plus élevée.

Cet ordonnancement est justifié par la nécessité de construire la solution et d'étudier la convergence modale, chaque ajout d'un nouveau mode permet alors de décrire des échelles d'espace de plus en plus petite. Il reste alors à déterminer les ordres de fermeture des bases modales.

4.3.2.2 Ordre de fermeture des bases modales

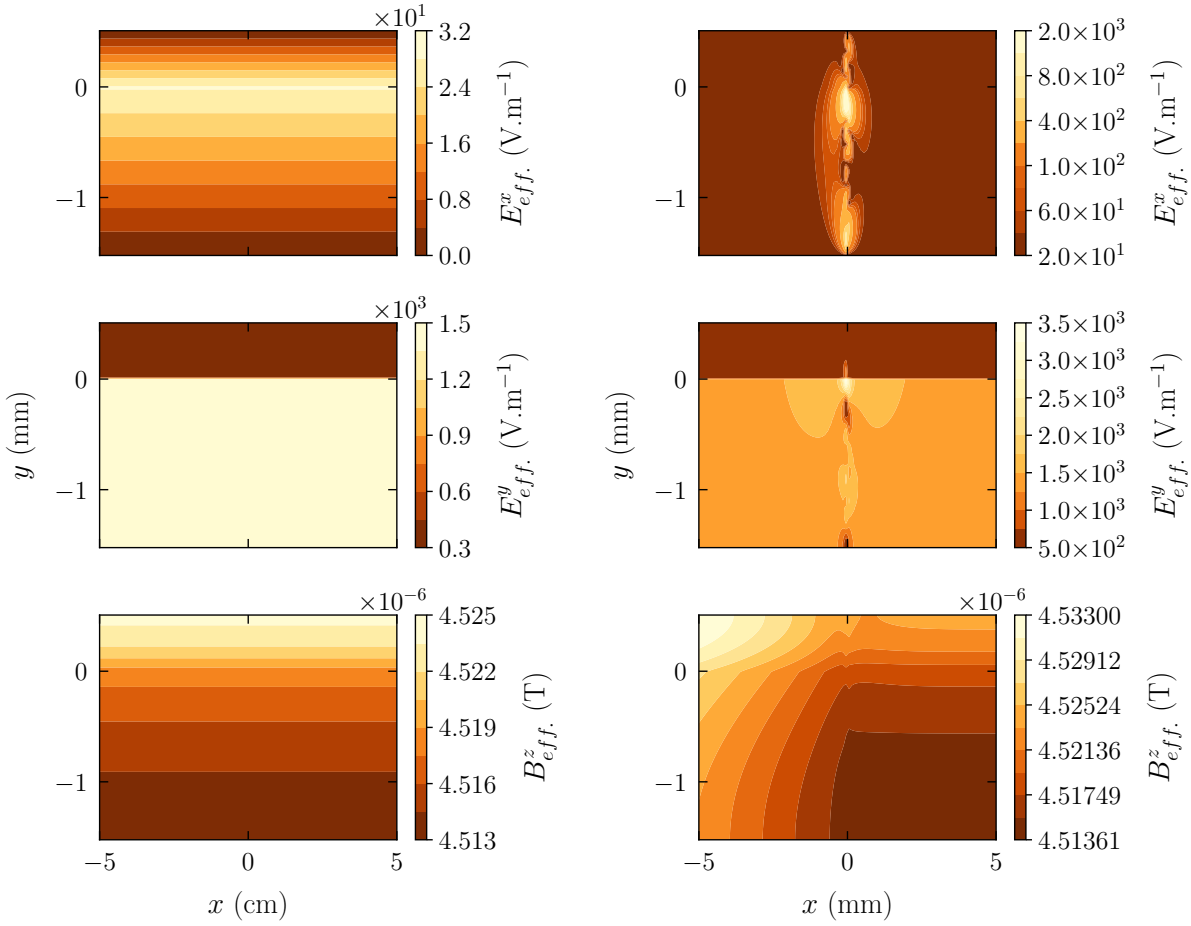
Classiquement, pour les cas mentionnés précédemment, la fermeture des bases modales ne nécessite pas d'étude particulière. Il suffit d'ajouter les modes au fur et à mesure, jusqu'à ce que la précision souhaitée sur le raccordement des champs soit atteinte. Mais ces cas sont toutefois moins violents que le cas qui nous occupe. En effet la solution trouvée peut très bien assurer la continuité des champs aux interfaces sans pour autant avoir un sens physique. Par exemple, la figure 4.11 montre les champs obtenus pour la cavité à vide, lorsque l'on ne considère que le mode principal dans les zones I et II (*cf.* figure 4.11a), et lorsque l'on ajoute les dix premiers modes évanescents dans chacune des deux bases (*cf.* figure 4.11b).
Dans le premier cas, l'échelle des x court sur dix centimètres et dans le deuxième cas, nous avons fait un gros plan sur l'interface en $x = 0$ mm. Comme on peut le voir dans le deuxième cas, un certain nombre de modes sont excités à l'interface. Bien entendu, la seule solution qui a un sens physique est la première, puisqu'il n'y a pas de rupture d'impédance le long de la ligne, pas de discontinuités, et donc aucune raison d'exciter des modes évanescents à l'interface. Cette excitation des modes évanescents ne découle donc pas d'un phénomène physique mais d'un phénomène numérique. Il faut donc construire un indicateur qui contienne à la fois une information sur la validité physique, mais également sur la validité numérique du résultat. En ce qui concerne le premier point, nous avons choisi de considérer l'erreur commise sur la valeur efficace de la composante de champ E^y :

$$\varepsilon(E^y) \quad = \quad \left\langle \frac{\left| E^{y,\mathrm{I}}_{eff.}(0,y) - E^{y,\mathrm{II}}_{eff.}(0,y) \right|}{E^{y,\mathrm{I}}_{eff.}(0,y) + E^{y,\mathrm{II}}_{eff.}(0,y)} \right\rangle_y \tag{4.93}$$

où la valeur efficace est définie par :

$$s_{eff.} \quad = \quad \sqrt{\langle s^2(t) \rangle_t} \quad = \quad \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\underline{s}(t)\underline{s}^*(t)\right]} \quad = \quad \frac{|\underline{s}|}{\sqrt{2}} \tag{4.94}$$

Pour ce qui est du second point, nous proposons d'utiliser la notion de conditionnement de matrice. Soit une matrice A, le conditionnement de cette matrice noté $C(A)$ est défini par :



(a) Mode principal.

(b) Mode principal + dix modes évanescents.

FIGURE 4.11 – Champ électromagnétique dans la ligne à vide pour une amplitude en considérant plusieurs modes. L'amplitude du champ électrique effectif $E^y_{eff.}$ est de 1500 V.m^{-1} dans la cavité.

$$C(A) \quad = \quad \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \tag{4.95}$$

où A^{-1} désigne l'inverse de la matrice A, et où la notation $\|\cdot\|$ désigne une norme matricielle. En l'occurrence pour les calculs, nous avons choisi la norme deux, définie par :

$$\|A\|_2 \quad = \quad \sqrt{\sum_i \sum_j |A_{i,j}|^2} \tag{4.96}$$

Le conditionnement permet de mesurer la dépendance de la solution du système à une variation des données d'entrée. En particulier, dans le cas qui nous intéresse, l'étude du conditionnement de la matrice Y permet de mesurer la dégradation ou l'amélioration de la solution pour chaque nouveau mode ajouté. Plus le conditionnement de la matrice est proche de un et mieux le problème est conditionné. A ce titre, le lecteur aura remarqué qu'il eût été possible de simplifier la première équation du système par $\frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}^*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}^*}}$, néanmoins une telle simplification aurait dégradé le conditionnement de la matrice Y. Afin d'assurer le meilleur conditionnement possible pour le système, on le récrit sous la forme :

$$H^{-1}YX = H^{-1}Z \tag{4.97}$$

où H^{-1} est la matrice inverse de H, et où H est le préconditionneur de Jacobi, *i.e.* la matrice diagonale dont la diagonale est égale à la diagonale de Y. Le système se récrit alors :

$$\mathcal{Y} \cdot X = \mathcal{Z} \tag{4.98}$$

Dès lors, on observe que le conditionnement de la matrice $\mathcal{Y}$ passe de $C(\mathcal{Y}) = 2.62$ dans le cas où on ne considère que le mode fondamental à $C(\mathcal{Y}) = 8.01$ dans le cas où les dix premiers modes évanescents sont considérés. La prise en compte de ces derniers, inutiles dans la description physique du problème, a donc dégradé le conditionnement de la matrice $\mathcal{Y}$.

Pour fermer les bases modales, on propose donc d'introduire l'indicateur Ξ, défini comme le produit de l'erreur commise sur le raccordement de la composante longitudinale du champ électrique à l'interface par le conditionnement de la matrice $\mathcal{Y}$:

$$\Xi \quad = \quad \varepsilon(E^y) \times C(\mathcal{Y}) \tag{4.99}$$

Dès lors, chercher les ordres de fermeture des bases revient à chercher le couple (J, M) qui minimise la valeur de Ξ. On comprend alors que les solutions que l'on va obtenir par ce calcul sont des solutions qui raccordent « au mieux » les champs à l'interface entre les zones I et II. En effet, l'erreur va diminuer au fur et à mesure que l'on ajoute des modes jusqu'au moment où elle va commencer à augmenter, le conditionnement de la matrice se dégradant de plus en plus violemment au fur et à mesure que l'on ajoute des modes dans la base. Muni de l'indicateur Ξ, nous allons maintenant pouvoir appliquer cette méthode au cas de l'interaction microonde-plasma dans le front de densité.

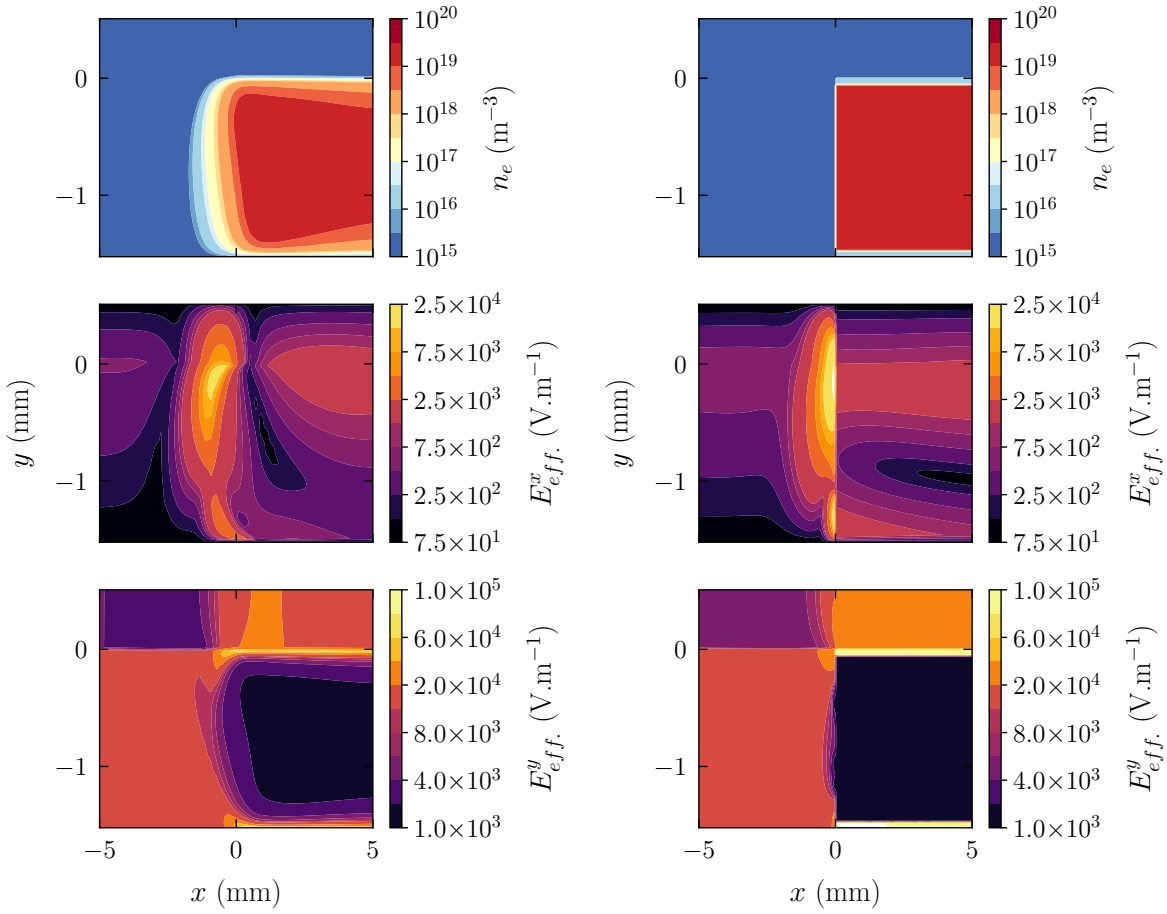
4.3.3 Application à l'interaction microonde-plasma dans le limiteur

Nous proposons dans ce paragraphe d'employer les développements réalisés ci-dessus afin d'explorer la physique de l'interaction microonde-plasma dans le front. Pour ce faire, nous allons considérer les données issues de la simulation pour une puissance incidente $P_{inc} = 40$ dBm, au temps $t = 75.1$ μs lorsque le front se trouve au milieu de la cavité. La densité électronique moyennée suivant y passe par la valeur crête $\langle n_e \rangle_y = 2.05 \times 10^{19}$ m^{-3}. Le modèle analytique a alors été paramétré avec les valeurs suivantes :

- Pour le diélectrique $l_d = 508$ μm et $\underline{\epsilon}_{r,d} = 3.55$.
- Pour les gaines : $l_{g_1} = l_{g_2} = 60.96$ μm, et $n_e = 5 \times 10^{16}$ m^{-3}.
- Pour le plasma : $l_p = 1402.08$ μm, et $n_e = 2.05 \times 10^{19}$ m^{-3}.

L'amplitude du champ électrique a été prise égale à $E_0 = 2.68 \times 10^4$ V.m^{-1}, ce qui correspond à la valeur déterminée avec Ansys HFSS pour une puissance incidente de 40 dBm.

La figure 4.12 met alors en regard les profils de densité, et de champs électriques $\underline{E}^x$ et $\underline{E}^y$ simulés et calculés. Suivant la méthode décrite plus haut pour effectuer le raccordement modal, nous avons déterminé qu'il est nécessaire de considérer les huit premiers modes évanescents en plus du mode



(a) Raccordement modal simulé.

(b) Raccordement modal analytique.

FIGURE 4.12 – Interaction microonde-plasma dans le front pour une puissance incidente de 40 dBm à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

principal dans la zone I, et un mode évanescent en plus du mode principal dans la zone II.

La prise en compte des modes évanescents pour assurer le raccordement de la composante de champ transverse $\underline{E}_y$ à l'interface, engendre un renforcement de la composante $\underline{E}_x$, qui se produit en tête de front. Ce phénomène est observé dans la simulation et dans le calcul, avec des ordres de grandeurs similaires. Bien sûr, les gradients de densité présents en simulation lissent les profils de champs. Par ailleurs, le renforcement est environ trois fois plus fort à l'interface diélectrique/plasma qu'à l'interface plan de masse/plasma, ce qui entraine alors une légère distorsion du front de densité.

Il reste à déterminer pourquoi l'amplification du champ se produit pour la composante $\underline{E}^x$ et non pas pour les autres composantes de champs. Pour ce faire, nous pouvons nous intéresser tout comme dans le précédent chapitre, à la cartographie de vecteur de Poynting, qui est présentée pour le temps considéré dans cette étude sur la figure 4.13.

Comme nous pouvons le voir, l'interaction microonde/plasma dans le front ne conduit pas seulement au raccordement de la composante E^y à l'interface, mais également à une redistribution de la puissance dans le diélectrique et dans les gaines. Les lignes sur la figure 4.13 étant tangentes en tout point au vecteur de Poynting, on voit alors que cette redistribution de puissance nécessite un changement de direction du vecteur de Poynting. Celui-ci se développe en fonction des composantes de champ sous la forme :

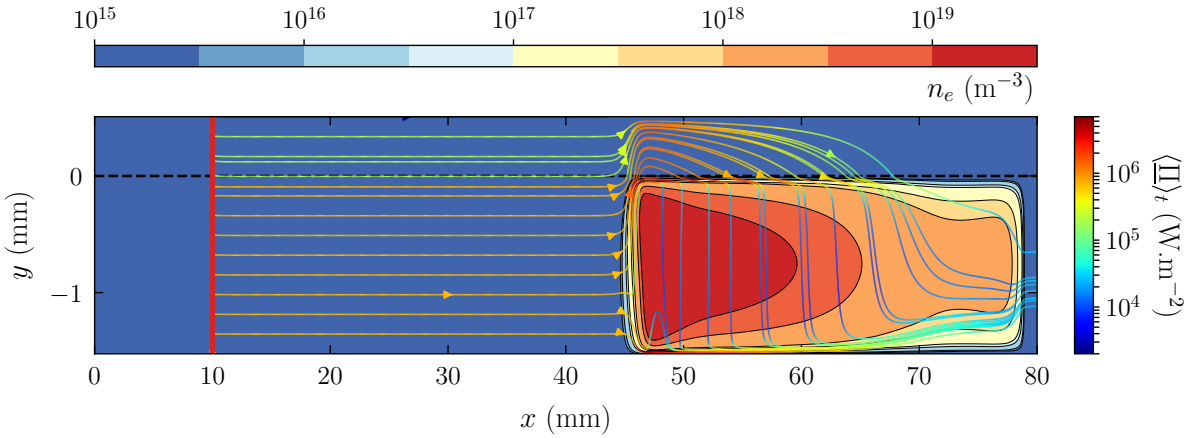


FIGURE 4.13 – Cartographie de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting et de la densité électronique pour une puissance incidente de 40 dBm à $t = 75.1$ μs.

$$\underline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2\mu_0} \begin{vmatrix} \underline{E}^y \underline{B}^z \\ \underline{E}^x \underline{B}^z \\ 0 \end{vmatrix} \tag{4.100}$$

Le changement de direction mentionné ci-dessus suppose alors un accroissement de $\underline{\Pi}^y$ et une décroissance de $\underline{\Pi}^x$. Or comme le champ magnétique intervient dans les deux composantes du vecteur de Poynting, la seule composante qui peut subir cette amplification est la composante $\underline{E}^x$, tandis que la composante E^y, elle, est atténuée par la naissance des modes évanescents (*cf.* figure 4.12b en $x = 0$ mm). Autrement dit, le plasma génère son amplification de champ qui entraine un chauffage des électrons en tête de front, qui va entrainer à son tour le déplacement du front par le mécanisme que nous avons déjà décrit précédemment.

4.4 Temps de claquage

4.4.1 État de l'art pour l'approche analytique du claquage microonde

Pour adresser le problème du seuil de claquage dans les guides d'onde, Lofgren [15] a proposé d'effectuer un bilan de particules, en s'appuyant notamment sur les travaux de MacDonald [67]. Partant de l'équation de diffusion pour les électrons :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \nu_i n \tag{4.101}$$

où ν_i est la fréquence d'ionisation directe, et en exprimant la dérivée seconde à l'aide de la longueur de diffusion déjà introduite au premier chapitre :

$$-D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \approx \frac{D}{\Lambda^2} n = \nu_l \, n \tag{4.102}$$

où ν_l est alors une fréquence de pertes par diffusion, l'équation de diffusion se récrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\nu_i - \nu_l) n \tag{4.103}$$

La densité augmente alors au cours du temps si, et seulement si $\nu_i > \nu_l$, ce qui constitue la condition de claquage microonde pour laquelle les gains compensent les pertes. Si l'amplitude du champ incident est bien supérieure à l'amplitude nécessaire pour amorcer le claquage, alors $\nu_i \gg \nu_l$, et l'équation de diffusion peut alors être intégrée pour donner le temps de claquage :

$$t_b \approx \frac{1}{\nu_i} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{4.104}$$

où n_p est la densité électronique atteinte au temps t_b, et n_0 la densité électronique initiale. L'application directe de cette méthode au cas qui nous occupe soulève quelques questions quant à la prise en compte des processus chimiques. En effet, on sait que l'ionisation par étapes, *i.e.* à partir des espèces excitées (métastables et résonnants) qui sont produites par la MHCD, est prépondérante par rapport à l'ionisation directe. La prise en compte de l'ionisation par étapes est particulièrement délicate, sachant que le terme source électronique associé à ces processus, qui s'écrit de manière générale $S_e^+ = k n_e n_{Ar^*}$, fait intervenir le taux de réaction k, la densité électronique n_e ainsi que la densité d'espèce excitées n_{Ar^*}. Il faudrait alors, d'une part, connaître la densité d'espèces excitées (métastables et résonnants), et d'autre part, trouver des formes fonctionnelles donnant les taux d'ionisation par étapes en fonction du champ local ou de l'énergie moyenne des électrons. Pour pallier ces problèmes, du moins en partie, nous proposons ci-dessous de suivre les grandes étapes du raisonnement de Löfgren, mais en effectuant un bilan d'énergie plutôt qu'un bilan de particules.

4.4.2 Nouvelle approche : par l'équation d'énergie

Pour autant que nous le sachions, les premiers travaux de simulation fluide des plasmas à avoir utilisé une équation d'énergie ont été publiés en 1986, pour l'étude des décharges DC et RF [68]. Ce travail a ensuite été suivi par d'autres [69, 70] qui ont démocratisé la méthode.

Les travaux de Löfgren s'inscrivent donc au début de la période de transition entre l'approximation du champ local et l'approximation de l'énergie moyenne locale. De fait, la deuxième approche n'étant pas très répandue à l'époque, ajoutée au fait que Lofgren s'est appuyé sur les travaux de MacDonald [67] datant de 1966, explique l'approche par le bilan de particules.

L'avantage de passer par l'équation d'énergie et la résolution de l'équation de Boltzmann avec BOLSIG+ est que l'on obtient la puissance perdue par les électrons dans les processus élastiques P_{loss}^{elas}, ainsi que la puissance perdue dans les processus inélastiques avec le gaz neutre P_{loss}^{inelas}, cette dernière regroupant tous les processus de pertes conduisant à une création de particules. De plus, le problème peut ainsi être formulé simplement en fonction des données du problème comme la puissance incidente P_{inc}.

Rappelons que l'énergie à apporter pour former un état excité du groupe $4s$ est en moyenne de 11.68 eV, l'énergie nécessaire pour ioniser l'état excité étant par conséquent de $15.76 - 11.68 = 4.08$ eV. La majeure partie de l'énergie (75%) mise en œuvre pour réaliser un processus complet d'ionisation par étape est donc absorbée par la formation des espèces excitées. La formation de ces états excités (de manière directe et par cascading) résultant de collisions avec le gaz neutre, la puissance perdue par les électrons dans les processus d'ionisation par étape est donc en grande partie comprise dans la puissance perdue dans les collisions inélastiques P_{loss}^{inelas} calculée par BOLSIG+. Pour être tout a fait exact, il faudrait ajouter à l'équation d'énergie un terme de perte de puissance dans l'ionisation par étape, égal au produit du terme source électronique mentionné ci-dessus que multiplie l'énergie d'ionisation, à savoir 4.08 eV, nous ramenant donc au problème que nous cherchions à éviter.

Nous allons maintenant re-développer les concepts de Löfgren dans le cadre de l'approche énergétique. Partons donc de l'équation de conservation d'énergie pour les électrons, donnée au chapitre deux (*cf.* équation (2.12)) :

$$\frac{3}{2}\frac{\partial(n_e T_e)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{5}{2}n_e\boldsymbol{v}_e T_e + \boldsymbol{q}_e\right) = n_e P_e - e n_e \boldsymbol{v}_e\cdot\boldsymbol{E} - C \tag{4.105}$$

pour laquelle nous allons supposer la température uniforme ce qui permet d'annuler le flux thermique $\boldsymbol{q}_e$ de conduction, et que nous avons divisée par e afin que l'unité d'énergie utilisée soit l'électronvolt. Il vient alors :

$$\frac{3T_e}{2}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{5T_e}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_e\boldsymbol{v}_e) = \left(P_e - P_{loss}^{elas} - P_{loss}^{inelas}\right)n_e - n_e\boldsymbol{v}_e\cdot\boldsymbol{E} \tag{4.106}$$

Or en développant le flux de particules sous la forme $n_e\boldsymbol{v}_e = -D_{eff}\boldsymbol{\nabla}n_e$, et en utilisant le proxy pour le champ de charge d'espace donné au premier chapitre (*cf.* équation (1.53)), alors la divergence du flux de particules et le travail du champ électrique se développent sous la forme :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_e\boldsymbol{v}_e) \approx -D_{eff}\left(\frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial y^2}\right) \tag{4.107}$$

$$n_e\boldsymbol{v}_e\cdot\boldsymbol{E} \approx \frac{D_{eff}}{(1+\alpha)n_e}\frac{D_e - D_i}{\mu_e + \mu_i}\left[\left(\frac{\partial n_e}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial n_e}{\partial y}\right)^2\right] \tag{4.108}$$

En rappelant que la longueur de gradient est une longueur imaginaire pure, proportionnelle à une longueur de diffusion (*cf.* équation (1.100)), et puisque $D_e \gg D_i$ et $\mu_e \gg \mu_i$, il vient alors :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_e\boldsymbol{v}_e) \approx D_{eff}\left[\frac{n_e}{\Lambda_x^2} + \frac{n_e}{\Lambda_y^2}\right] \tag{4.109}$$

$$n_e\boldsymbol{v}_e\cdot\boldsymbol{E} \approx -\frac{D_{eff}}{1+\alpha}\left[\frac{n_e}{\Lambda_x^2} + \frac{n_e}{\Lambda_y^2}\right]T_e \tag{4.110}$$

Ainsi, l'équation (4.106) se récrit sous la forme d'une équation différentielle d'ordre un en temps :

$$\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3T_e}\left(P_e - P_{loss}^{elas} - P_{loss}^{inelas} - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1+\alpha}\right)\left[\frac{D_{eff}}{\Lambda_x^2} + \frac{D_{eff}}{\Lambda_y^2}\right]T_e\right)n_e \tag{4.111}$$

On remarque alors que la densité croît, si et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

$$P_e > P_{loss}^{elas} + P_{loss}^{inelas} + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1+\alpha}\right)\left[\frac{D_{eff}}{\Lambda_x^2} + \frac{D_{eff}}{\Lambda_y^2}\right]T_e \tag{4.112}$$

ce qui permet alors d'identifier la puissance absorbée par électron seuil :

$$P_{e,seuil} = P_{loss}^{elas} + P_{loss}^{inelas} + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1+\alpha}\right)\left[\frac{D_{eff}}{\Lambda_x^2} + \frac{D_{eff}}{\Lambda_y^2}\right]T_e \tag{4.113}$$

Notons que la formule de la puissance seuil ainsi développée, si on néglige les termes dépendant de Λ_x, correspond à la puissance limite absorbée par électron pour le maintien de la colonne, donnée dans le

précédent chapitre (*cf.* équation (3.92)). Il est également possible d'accéder au temps de claquage en supposant P_e indépendant de l'évolution de la densité électronique, et donc du temps. Si l'on pose :

$$\Delta P_e \quad = \quad P_e - P_{e,seuil} \tag{4.114}$$

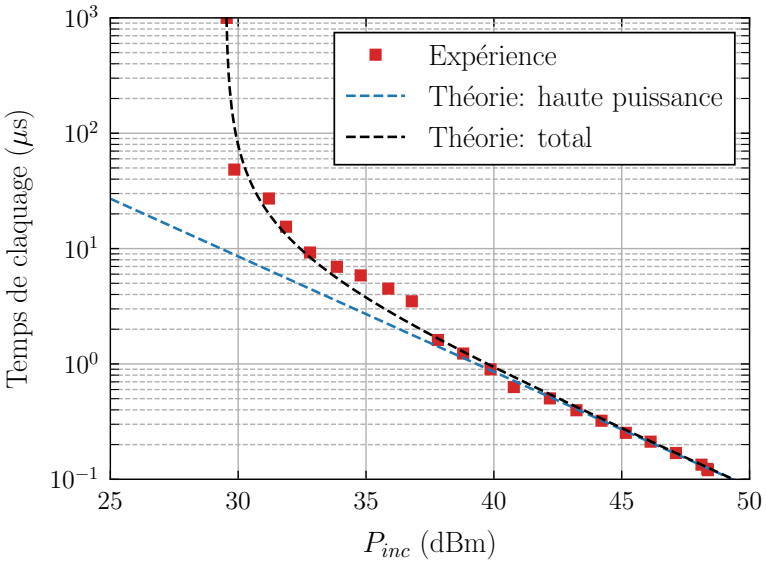


FIGURE 4.14 – Évolution du temps de claquage en fonction de la puissance incidente à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

On peut alors effectuer une intégration de l'équation d'énergie par variables séparées :

$$\int_{n_0}^{n_p} \frac{\mathrm{d}n_e}{n_e} \quad = \quad \int_0^{t_b} \frac{2}{3} \frac{\Delta P_e}{T_e} \mathrm{d}t \tag{4.115}$$

ce qui donne finalement l'expression du temps de claquage t_b dans l'approche énergétique :

$$t_b \quad = \quad \frac{3}{2} \frac{T_e}{\Delta P_e} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{4.116}$$

On retrouve une formule analogue à celle développée par Löfgren, mais où la dépendance en $1/\nu_i$ (où ν_i est la fréquence d'ionisation) a été remplacée par une dépendance en $\frac{3}{2}\frac{T_e}{\Delta P_e}$, qui a bien la dimension d'un temps. Bien que cette équation puisse paraître amphigourique, elle a en fait autant de sens que celle de Löfgren. En effet, ΔP_e correspond à la proportion de puissance qui n'a été perdue, ni dans les collisions, ni dans le flux thermique de convection, et qui est donc disponible pour le chauffage des électrons. Cependant, comme nous l'avons écrit plus haut, à une pression donnée est associée une fréquence de transfert de quantité de mouvement, et à cette fréquence de transfert est associée une température électronique. Donc, si la pression est constante au cours du temps, la température est également constante dans les hypothèses qui sont les nôtres. Dans ce cas, le chauffage des électrons est un « chauffage isotherme », ce qui n'est possible que si la densité électronique croît à due concurrence de ΔP_e. Autrement dit, plus ΔP_e est faible, plus la création d'électrons est faible sur un intervalle de temps donné, et donc plus le temps de claquage sera long. En revanche, plus ΔP_e est élevé, plus la création d'électrons est élevée sur un intervalle de temps donné, et donc plus le temps de claquage sera court. D'où la dépendance en $1/\Delta P_e$ du temps de claquage.

Notons qu'un autre avantage de ce formalisme d'énergie est de pouvoir exprimer directement le temps de claquage en fonction des observables mesurées expérimentalement. En effet, soit N_e le nombre d'électrons générés par la MHCD et responsables de l'absorption de la puissance incidente, le temps de recouvrement peut alors se récrire sous la forme :

$$t_b = \frac{3}{2}\frac{N_e T_e}{P_{abs} - P_{abs,seuil}} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{4.117}$$

où l'on a fait apparaître la puissance P_{abs} absorbée par la MHCD pour une puissance incidente donnée, ainsi que la puissance $P_{abs,seuil}$ absorbée au seuil de déclenchement. Pour finir en introduisant le taux d'absorption $\mathcal{A}$ de la MHCD, le temps de claquage peut se récrire sous la forme :

$$t_b = \frac{3}{2}\frac{N_e T_e}{\mathcal{A}\left(P_{inc} - P_{seuil}\right)} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{4.118}$$

où P_{inc} est la puissance incidente dans le dispositif et P_{seuil} est la puissance incidente seuil de déclenchement du limiteur. On voit alors se dégager deux comportements distincts en fonction de la puissance incidente. Lorsque P_{inc} est égale à P_{seuil} le temps de claquage est infini, et lorsque la puissance incidente est suffisamment élevée de sorte que $P_{inc} \gg P_{seuil}$, alors le temps de claquage se réduit simplement à :

$$t_b \approx \frac{3}{2}\frac{N_e T_e}{\mathcal{A} P_{inc}} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{4.119}$$

Pour finir, notons que l'expression (4.118) est difficilement utilisable pour des comparaisons avec l'expérience puisqu'elle dépend de nombreux paramètres auxquels nous n'avons pas accès, comme la température électronique par exemple. Cependant, l'expression est ainsi écrite qu'il suffit de mesurer le temps de claquage t_b° pour une puissance incidente P_{inc}° pour obtenir la valeur du préfacteur :

$$\frac{3}{2}\frac{N_e T_e}{\mathcal{A}} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) = \left(P_{inc}^\circ - P_{seuil}\right) t_b^\circ \tag{4.120}$$

Dès lors, la mesure d'un seul temps de claquage (préférentiellement à haute puissance incidente) et la connaissance de la puissance seuil, suffit à tracer le profil de temps de claquage, lequel s'écrit :

$$t_b = \frac{\left(P_{inc}^\circ - P_{seuil}\right) t_b^\circ}{P_{inc} - P_{seuil}} \tag{4.121}$$

et dans la limite des fortes puissances incidentes, il vient :

$$t_b \approx \frac{\left(P_{inc}^\circ - P_{seuil}\right) t_b^\circ}{P_{inc}} \tag{4.122}$$

La figure 4.14 présente une comparaison des résultats obtenus expérimentalement et par la théorie. La puissance seuil a été prise égale à $P_{inc} = 29.5$ dBm, et le temps de claquage de référence considéré est $t_b^\circ = 123$ ns, pour une puissance incidente de référence de $P_{inc}^\circ = 48.35$ dBm, ces deux valeurs provenant de l'expérience. On observe alors un bon accord entre la formule (4.121) et les données expérimentales. Comme nous l'avions pressenti, à forte puissance, le temps de claquage évolue suivant

la formule (4.122).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous n'avons pas pu effectuer de mesures au-delà de 50 dBm (*i.e.* 100 Watts) compte tenu de l'amplificateur de puissance utilisé, mais également compte tenu des claquages parasites qui peuvent se produire au niveau des connecteurs. Cependant, comme nous avons démontré analytiquement l'expression du temps de claquage, il nous est possible d'extrapoler ce dernier bien au delà des valeurs mesurées. Ainsi, pour une puissance incidente de 60 dBm (*i.e.* 1 kW), le temps de claquage sera donc de $t_b = 8.31$ ns.

Pour le sujet de la limitation de puissance qui nous occupe, la nécessaire diminution du temps de claquage peut se faire en augmentant la densité initiale du plasma n_0 ce qui aura pour effet de réduire la valeur du logarithme, ou bien en jouant sur la valeur du coefficient d'absorption $\mathcal{A}$ de la MHCD. Pour ce faire, on peut envisager deux méthodes :

- La première consiste à jouer sur les paramètres du plasma, comme par exemple la fréquence de quantité de mouvement ν_m, où bien sur la densité électronique générée par la MHCD, en augmentant le courant de pré-ionisation.

- La deuxième, plus brutale, consiste à faire en sorte que pour une puissance incidente donnée, la MHCD voie une puissance incidente plus grande. Cela peut être réalisé en augmentant le champ électrique, ce qui a pour effet d'augmenter la puissance absorbée par la MHCD. Cette technique a déjà été mise en œuvre dans des circuits résonnants par exemple [71].

Nous discuterons de ce sujet en détail dans le prochain chapitre.

4.5 Temps de recouvrement

4.5.1 Résultats numériques et expérimentaux

Il nous reste pour finir à explorer la physique du recouvrement, *i.e.* du retour du limiteur à son état nominal une fois que l'agression est arrêtée. Les mesures ont été réalisées au CEA de Gramat, avec le banc d'essai déjà présenté au deuxième chapitre. La mesure a été réalisée pour différentes puissances entre la puissance seuil et cent Watts, dans l'Argon à 10 Torr, pour deux fréquences d'agression de 4 et 6 GHz. Ces deux fréquences sont imposées par la bande passante du coupleur disponible au moment du test. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.15. Les résultats expérimentaux ne montrent pas une grande variabilité en fonction de la fréquence. Le temps de recouvrement augmente avec la puissance et passe de 18.8 μs pour une puissance incidente de 30.2 dBm à 60.6 μs pour une puissance incidente de 48.3 dBm.

Du point de vue de la simulation, il est possible de couper l'alimentation microonde et de suivre l'évolution de différents paramètres du plasma. On peut alors définir le temps de recouvrement comme le temps nécessaire pour que la densité électronique tombe en dessous de la densité critique, valeur à laquelle l'onde n'interagit plus avec le plasma. Avec cette définition, pour une puissance incidente de 40 dBm à 3 GHz, le temps de recouvrement est alors de $t_r = 149.6$ μs en simulation contre $t_r = 37.9$ μs en expérience, soit un écart d'un facteur quatre environ.

La physique du temps de recouvrement est plus difficile à aborder que les phénomènes physiques qui nous ont occupés jusqu'ici comme la puissance de fuite ou le temps de claquage. En effet, jusqu'à présent nous avons toujours travaillé à température et/ou à densité électronique fixée, mais lors du recouvrement, trois phénomènes sont concomitants :

- La thermalisation des électrons à la température des neutres, *i.e.* les électrons perdent leur énergie notamment dans les collisions avec le gaz neutre, et leur température finit par être

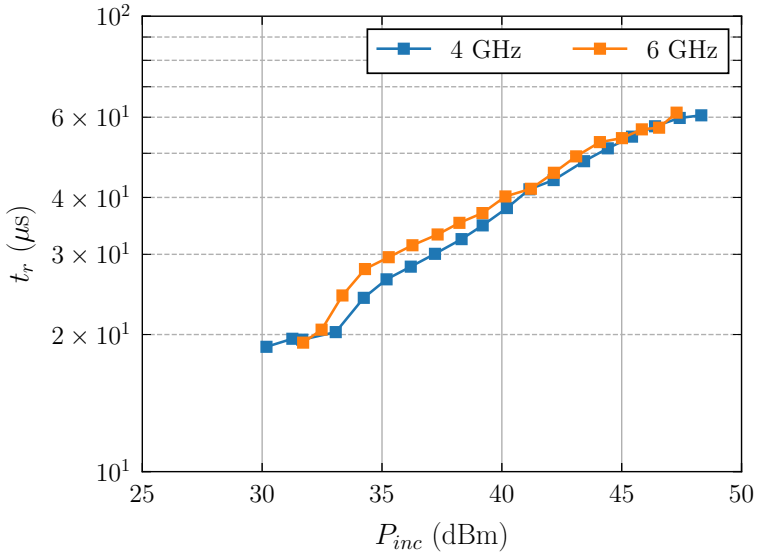


FIGURE 4.15 – Évolution du temps de recouvrement en fonction de la puissance incidente à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

égale à celle des atomes à savoir 300 K (0.026 eV).

- La recombinaison des électrons avec les ions moléculaires. Cette réaction est d'autant plus importante que la température électronique est faible, puisque la dépendance du coefficient de recombinaison avec la température électronique est en $T_e^{-2/3}$ (*cf.* taux de la réaction 18 dans le tableau 2.1)

- La perte d'électrons par diffusion aux parois.

En toute rigueur, il y a encore quelques processus d'ionisation qui ont lieu tant que les états métastables n'ont pas complètement disparu, et tant que la température électronique n'a pas chuté en dessous de 2 eV (température seuil pour les pertes d'énergie par collisions élastiques), mais pour simplifier le raisonnement nous négligerons ces réactions. Dans la section suivante, nous allons chercher à élaborer une description analytique de la post-décharge afin d'obtenir une expression du temps de recouvrement.

4.5.2 Approche analytique

Afin d'établir la physique du temps de recouvrement, il est nécessaire comme nous l'avons dit plus haut, de considérer les pertes d'électrons par diffusion aux parois et les pertes par recombinaison. Commençons par nous intéresser au processus de recombinaison entre les électrons et les ions qui s'écrit globalement :

$$e + Ar^+ \quad \rightarrow \quad Ar \tag{4.123}$$

mais qui se décompose essentiellement en deux réactions que sont les réactions 17 et 18 (*cf.* tableau 2.1) :

$$Ar^+ + 2Ar \quad \rightarrow \quad Ar_2^+ + Ar \tag{4.124}$$

$$e + Ar_2^+ \quad \rightarrow \quad Ar + Ar_m^* \tag{4.125}$$

En effet, les simulations montrent que les ions moléculaires sont essentiellement créés (à plus de 95 %) par la réaction 17, *i.e.* par collision des ions atomiques sur les neutres lors de collisions à trois corps, et sont détruits par la réaction 18 de recombinaison avec les électrons.

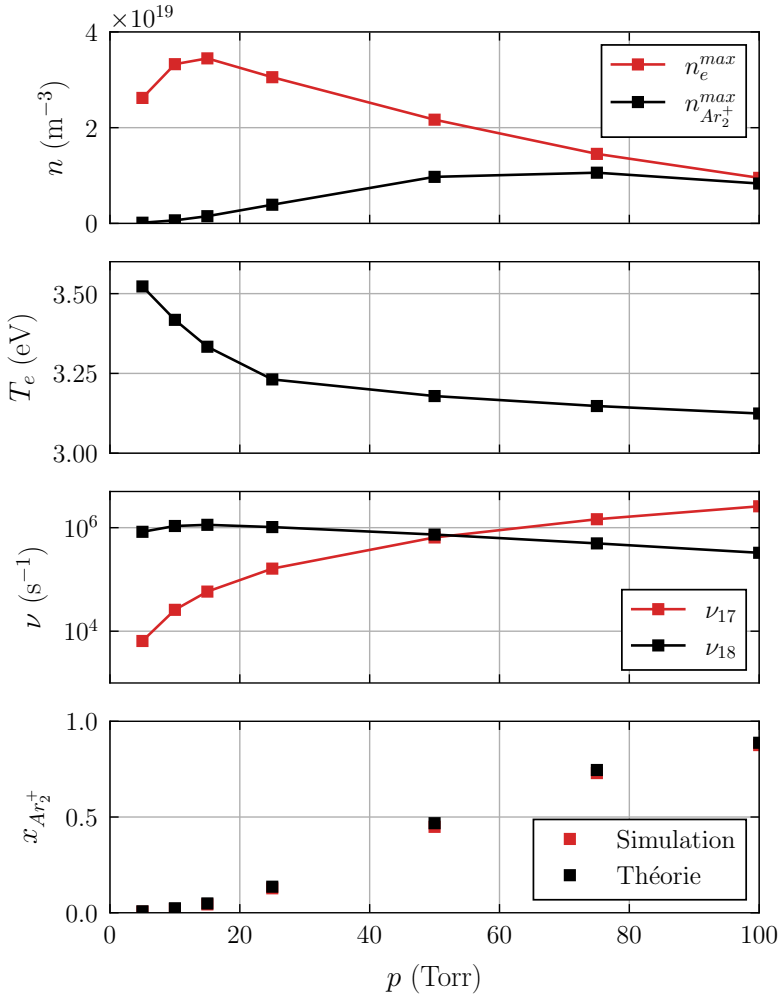


FIGURE 4.16 – Évolution des densités maximales d'ions moléculaires et d'électrons, de la température électronique, des fréquences des réactions 17 et 18 de production et de destruction des ions moléculaires et de la fraction d'ions moléculaires simulées en fonction de la pression.

Autrement dit, la recombinaison des électrons et des ions atomiques passe par la formation d'ions moléculaires Ar_2^+. Comparons alors les fréquences de disparition des ions atomiques et moléculaires, respectivement notées ν_{17} et ν_{18}, qui s'écrivent :

$$\nu_{17} \;=\; 2.5\times10^{-43}\,n_{Ar}^2 \qquad \text{et} \qquad \nu_{18} \;=\; 7.35\times10^{-14}\,T_e^{-2/3}\,n_e \tag{4.126}$$

L'évolution de ces fréquences en fonction de la pression est donnée sur la figure 4.16 en fonction des valeurs de températures électroniques obtenues en simulation pour une puissance incidente de 40 dBm. Pour une pression de 10 Torr, la fréquence ν_{18} de disparition de l'ion moléculaire est quarante-deux fois supérieure à la fréquence ν_{17} d'apparition de ces ions. A cette pression, l'ion Ar_2^+ constitue donc un *intermédiaire réactionnel*, *i.e.* une espèce chimique difficile à former et qui disparaît très vite, ce qui empêche toute accumulation de ladite espèce dans le milieu. De fait, à 10 Torr, l'ion moléculaire représente 1.93 % de l'ensemble des ions.

Il est alors nécessaire de déterminer une expression analytique de la fraction d'ions moléculaires dans le mélange. Pour ce faire, rappelons que pour un plasma quasi-neutre, les densités d'ions et d'électrons sont égales, il vient alors :

$$n_e = n_{Ar^+} + n_{Ar_2^+} \tag{4.127}$$

L'équation de conservation de la densité d'ions moléculaires s'écrit donc :

$$\frac{\partial n_{Ar_2^+}}{\partial t} = k_{17} n_{Ar^+} n_{Ar}^2 - k_{18} n_e n_{Ar_2^+} - \frac{D}{\Lambda^2} n_{Ar_2^+} \tag{4.128}$$

où k_{17} et k_{18} sont les taux des réactions 17 et 18. A l'état stationnaire, *i.e.* juste avant de mettre un terme à l'alimentation de la décharge, l'équation (4.128) se réduit à :

$$k_{17}\, n_{Ar^+} n_{Ar}^2 = \left(k_{18}\, n_e + \frac{D}{\Lambda^2} \right) n_{Ar_2^+} \tag{4.129}$$

Il est alors possible d'introduire les fractions d'ions atomiques et moléculaires dans le mélange, respectivement définies par $x_{Ar^+} = n_{Ar^+}/n_e$ et $x_{Ar_2^+} = n_{Ar_2^+}/n_e$. En reformulant l'équation (4.129) à l'aide de ces deux expressions, on obtient la relation entre les deux fractions :

$$x_{Ar^+} = \frac{1}{k_{17}\, n_{Ar}^2} \left(k_{18}\, n_e + \frac{D}{\Lambda^2} \right) x_{Ar_2^+} \tag{4.130}$$

qui réinjectée dans l'équation (4.127), permet d'accéder à la fraction d'ions moléculaires dans le mélange en fonction de la densité d'atomes neutres, de la densité électronique et des taux des réactions 17 et 18 :

$$x_{Ar_2^+} = \frac{k_{17}\, n_{Ar}^2}{k_{17}\, n_{Ar}^2 + k_{18}\, n_e + \frac{D}{\Lambda^2}} \tag{4.131}$$

Une comparaison entre les fractions d'ions moléculaires simulé et analytique est présentée sur la figure 4.16. La formule analytique approche très précisément les valeurs simulées, quelle que soit la pression considérée. Ainsi pour une pression de 10 Torr, la réaction de formation de l'ion moléculaire est l'*étape cinétiquement déterminante* du processus de recombinaison, ce qui signifie que le taux de recombinaison dissociatif importe peu, le temps nécessaire pour recombiner électrons et ions étant entièrement piloté par la cinétique de formation des ions moléculaires. Ainsi la disparition des électrons par recombinaison est entièrement subordonnée à la disparition des ions atomiques, ce qui simplifie l'étude. L'équation de disparition des ions Ar^+ dans la post-décharge, en effectuant l'hypothèse simplificatrice selon laquelle il n'y a plus d'ionisation, s'écrit alors :

$$\frac{\partial n_{Ar^+}}{\partial t} = -k_{17} n_{Ar}^2 n_{Ar^+} - \frac{D(t)}{\Lambda^2} n_{Ar^+} \tag{4.132}$$

où D est le coefficient de diffusion des ions dont la valeur va varier au cours du temps. De l'équation (4.132), ont tire alors l'expression de la densité d'ions atomiques en fonction du temps durant la post-décharge, et par là même, la densité électronique :

$$n_{Ar^+}(t) = n_{Ar^+}(0)\,\exp\left(-k_{17}n_{Ar}^2 t - \int_0^t \frac{D(\tau)}{\Lambda^2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{4.133}$$

On peut désormais s'intéresser à l'équation de conservation de la densité électronique qui s'écrit :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -k_{18}n_{Ar_2^+}n_e - \frac{D(t)}{\Lambda^2}n_e \tag{4.134}$$

En exprimant la densité d'ions moléculaires sous la forme $n_{Ar_2^+} = n_e - n_{Ar^+}$ et en utilisant l'expression (4.133), l'équation de conservation de la densité électronique se récrit alors :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -k_{18}n_e^2 - \left[\frac{D(t)}{\Lambda^2} - n_{Ar^+}(0)\,\exp\left(-k_{17}n_{Ar}^2 t - \int_0^t \frac{D(\tau)}{\Lambda^2}\mathrm{d}\tau\right)\right] n_e \tag{4.135}$$

Cette équation étant non-linéaire, il convient de la résoudre numériquement à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 par exemple. Notons que si l'analyse faite plus haut est valable, et que la disparition des électrons est subordonnée à la disparition des ions atomiques, alors un proxy pour la densité électronique s'écrit :

$$n_e(t) \approx n_e(0)\,\exp\left(-k_{17}n_{Ar}^2 t - \int_0^t \frac{D(\tau)}{\Lambda^2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{4.136}$$

Pour pouvoir résoudre l'équation d'évolution de la densité électronique ou utiliser l'expression (4.136), il convient de se donner une expression pour le coefficient de diffusion. On rappelle que le coefficient de diffusion ambipolaire est défini par (*cf.* chapitre 1) :

$$D_a \approx D_i\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \tag{4.137}$$

où D_i est le coefficient de diffusion libre des ions, T_i est la température des ions qui est supposée égale à la température des neutres (*i.e.* 300 K), et T_e est la température électronique qui varie au cours du temps dans la phase de post-décharge. Le coefficient de diffusion des ions atomiques d'Argon à 300 K pour une pression de 10 Torr est égal à $D_i = 3.02 \times 10^{-4}$ m^2.s^{-1}. La thermalisation des électrons à la température des neutres entraine alors une diminution de la valeur du coefficient de diffusion qui finit par être égal au coefficient de diffusion libre des ions.

Pour finir, il nous reste à déterminer l'évolution temporelle de la température électronique qui intervient dans le coefficient de recombinaison dissociative, ainsi que dans l'expression du coefficient de diffusion des ions. Pour ce faire, il convient de résoudre l'équation de conservation de l'énergie des électrons dans la post-décharge, qui s'écrit dans sa forme la plus simple comme :

$$\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\left(P_{loss}^{elas}(T_e) + P_{loss}^{inelas}(T_e)\right) \tag{4.138}$$

où l'on suppose que les électrons perdent leur énergie uniquement dans les collisions de toutes sortes avec le gaz neutre. Cette équation est également résolue avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4,

à partir des tableaux de données issues de BOLSIG+.

Pour chaque puissance incidente comprise entre 25 dBm et 50 dBm, les densité et température électronique initiales ont été prises égales à celles obtenues en simulation, en régime stationnaire. Une fois que l'évolution de la densité électronique en fonction du temps a été déterminée par les différentes méthodes décrites ci-dessus, le temps de recouvrement peut alors être recherché. On rappelle qu'il s'agit du temps nécessaire pour que la densité électronique passe de la densité initiale n_0 à la densité critique n_c, en dessous de laquelle l'onde n'interagit plus avec le plasma.

Les résultats analytiques obtenus pour le temps de recouvrement sont présentés sur la figure 4.17, où ils sont comparés aux données expérimentales. Comme on peut le voir, on commet une erreur d'un facteur quatre environ par rapport à l'expérience. Une telle erreur peut par exemple provenir du fait que la température électronique initiale soit sur-évaluée. En effet, lorsque nous avons calculé les données d'entrée de la simulation avec BOLSIG+, nous avons négligé l'effet des collisions coulombiennes. Or ces collisions sont connues pour faire tendre la fonction de distribution des électrons vers une Maxwellienne ce qui entraine une diminution de la température électronique dans le cœur du plasma. Cependant, on remarque que la tendance trouvée reste la bonne puisque le temps recouvrement augmente d'un facteur 3.22 entre 30 et 48 dBm en expérience, et d'un facteur 2.57 en théorie.

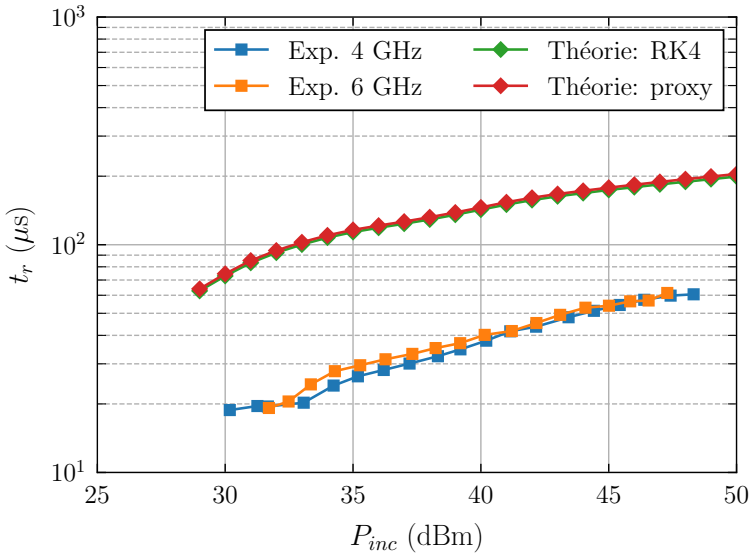


FIGURE 4.17 – Évolution des temps de recouvrement expérimentaux et analytiques en fonction de la puissance incidente, dans l'Argon à 10 Torr.

Comme nous l'avions pressenti, l'expression (4.136) approche de façon satisfaisante la solution numérique de l'équation (4.135) décrivant l'évolution de la densité électronique. Cette expression peut alors être récrite afin de donner le temps de recouvrement :

$$t_{recouv.} = \left[k_{17} n_{Ar}^2 + \frac{1}{t_{recouv.}} \int_0^{t_{recouv.}} \frac{D(\tau)}{\Lambda^2} \mathrm{d}\tau\right]^{-1} \ln\left(\frac{n_0}{n_c}\right) \tag{4.139}$$

où le terme :

$$\frac{1}{t_{recouv.}} \int_0^{t_{recouv.}} \frac{D(\tau)}{\Lambda^2} \mathrm{d}\tau \tag{4.140}$$

correspond à la moyenne temporelle des pertes par diffusion sur la phase de recouvrement. Or ces pertes dépendent de la géométrie de la cavité qui ne change pas, et de l'évolution de la température électronique qui est sensiblement la même quelle que soit la puissance incidente, puisque la température électronique initiale ne varie pas significativement (elle passe de 3.47 eV à 29 dBm à 3.42 eV à 50 dBm). On déduit alors que l'accroissement du temps de recouvrement dans la cavité est la conséquence de l'accroissement de la densité électronique initiale n_0.

En ce qui concerne notre problématique de la limitation de puissance, une façon de jouer facilement sur le temps de recouvrement consiste à amplifier les pertes d'électrons par diffusion, en jouant sur la longueur de diffusion, *i.e.* en modifiant la hauteur de la cavité.

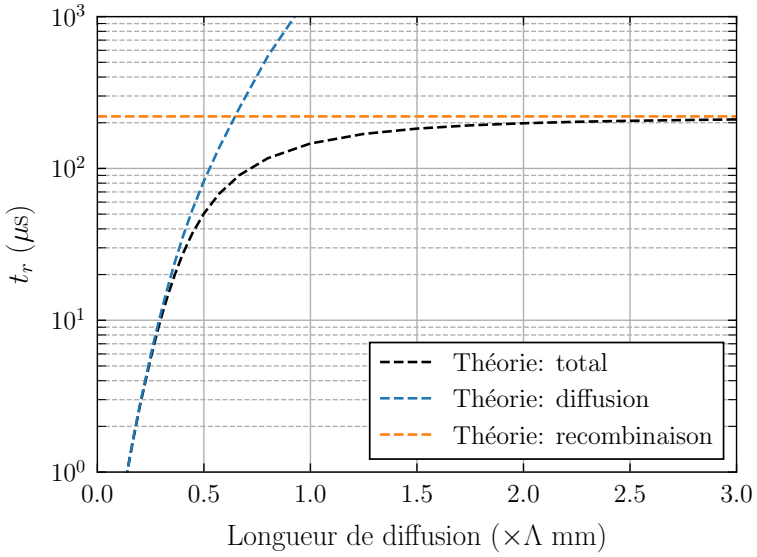


FIGURE 4.18 – Évolution du temps de recouvrement en fonction de la longueur de diffusion dans l'Argon à 10 Torr. La longueur Λ fait référence à la longueur de diffusion dans la ligne microruban suspendue à savoir $\Lambda = l_p/\pi$, où $l_p = 1.524$ mm.

La figure 4.18 montre l'évolution du temps de recouvrement en fonction de la longueur de diffusion, obtenue en utilisant l'équation (4.136). L'avantage de cette formule est qu'elle nous permet d'étudier séparément l'évolution du temps de recouvrement dans le cas où la disparition des électrons est uniquement due à la diffusion et dans le cas où elle est dominée par la recombinaison. Comme on peut le voir, les pertes par diffusion dominent pour les petites longueurs de diffusion, *i.e.* pour les petites longueurs de cavité. En revanche, plus la hauteur de la cavité croît, et plus la recombinaison domine dans le processus de destruction des électrons. Pour une pression de 10 Torr, si l'on divise la longueur de diffusion actuelle par un facteur trois, il est possible de gagner un facteur dix sur le temps de recouvrement, qui passe alors de $t_r = 146.02$ μs à $t_r = 14.95$ μs.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse des phénomènes transitoires en jeu dans le limiteur en ligne microruban suspendue, à la fois théorique, numérique et expérimentale. Les résultats obtenus par simulation de la ligne avec PlasmaSimWave fournissent les mêmes tendances que celles observées expérimentalement. Ainsi, nous avons pu relier finement la dynamique du plasma et la dynamique des taux de puissance. La dynamique du plasma a ensuite été explorée théoriquement, et nous avons montré que le déplacement de la densité électronique vers l'entrée du limiteur était due à la propagation d'une onde d'ionisation, se déplaçant à la vitesse $v_f = 2\sqrt{D\nu_i}$. En outre, une réflexion basée sur les données de simulation ainsi que sur un modèle d'interaction onde/plasma en tête de colonne ont permis de montrer que cette propagation est principalement due au chauffage des

électrons en tête de front qui génère des états excités, lesquels après avoir été ionisés permettent de faire avancer le front de densité.

Pour le problème de la limitation de puissance qui nous occupe, nous avons mené une étude sur les trois temps principaux caractéristiques du limiteur que sont le temps de claquage, le temps de réponse et le temps de recouvrement. Nous avons en particulier montré les trois résultats suivants :

- Le temps de claquage peut être défini analytiquement comme :

$$t_b = \frac{3}{2}\frac{N_e T_e}{\mathcal{A}(P_{inc} - P_{seuil})} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{4.141}$$

  où N_e est le nombre d'électrons générés par la MHCD, T_e la température électronique, P_{inc} la puissance incidente, P_{seuil} la puissance de déclenchement, n_0 la densité initiale générée par la MHCD, n_p la densité du plasma en fin de claquage et $\mathcal{A}$ le coefficient de puissance absorbée par le profil de pré-ionisation. La diminution du temps de claquage passe par une augmentation du coefficient $\mathcal{A}$, soit en modifiant les paramètres du plasma, soit en réduisant la section transverse de la ligne.

- Le temps de réponse du limiteur est proportionnel à :

$$t_r \propto \frac{L_c}{v_f} \tag{4.142}$$

  où L_c est la longueur de la colonne plasma et v_f la vitesse du front. La réduction du temps de réponse passe donc soit par une diminution de la longueur de la colonne soit par une augmentation de la vitesse du front.

- Le temps de recouvrement est quant à lui un temps plus complexe, puisqu'il dépend des pertes d'électrons par diffusion aux parois et par recombinaison avec les ions, lesquelles dépendent elles-mêmes de la température électronique. Aux basses densités d'Argon, on a montré qu'il est donné par l'équation :

$$t_{recouv.} = \left[k_{17} n_{Ar}^2 + \frac{1}{t_{recouv.}} \int_0^{t_{recouv.}} \frac{D_a(\tau)}{\Lambda^2} \mathrm{d}\tau\right]^{-1} \ln\left(\frac{n_c}{n_0}\right) \tag{4.143}$$

  où k_{17} est le taux de destruction des ions atomiques qui sont convertis en ions moléculaires, D_a le coefficient de diffusion ambipolaire, Λ la longueur de diffusion, n_c la densité critique en dessous de laquelle l'onde n'interagit plus avec le plasma et n_0 la densité électronique initiale en début de post-décharge. Nous avons alors montré que ce temps est principalement dominé par la diffusion pour des petites hauteurs de cavité et par la recombinaison pour des grandes hauteurs. Enfin, en ce qui concerne la limitation de puissance il apparait que pour un gaz d'Argon à 10 Torr et à 300 K, diviser par un facteur trois la hauteur du dispositif permettrait de diminuer d'un facteur dix le temps de recouvrement.

Dans le prochain chapitre, nous allons utiliser les éléments de physique mis au jour dans ce chapitre ainsi que dans le précédent afin de proposer une nouvelle topologie de circuit, plus à même de remplir les performances souhaitées.

Chapitre 5

Vers une nouvelle topologie : la ligne inversée

Sommaire

5.1 Introduction : résumé des épisodes précédents 142
5.2 Bilans de puissance stationnaires 145
5.3 Dynamique transitoire 147
5.3.1 Temps de claquage 147
5.3.2 Temps de recouvrement 148
5.4 Influence de la chimie 149
5.4.1 Cinétique chimique du mélange Néon-Xénon 1% et du Xénon pur 149
5.4.2 Présentation des résultats obtenus 153
5.5 Conclusion 158

Dans les deux premiers chapitres de ce manuscrit, nous avons exposé d'une part les concepts fondamentaux nécessaires pour aborder et comprendre la dynamique du plasma ainsi que la physique de l'interaction microonde plasma, et d'autre part, le modèle numérique auto-cohérent qui nous a permis d'explorer les paramètres physiques de la décharge (densité électronique n_e, température électronique T_e, ...), mais également de donner l'évolution des taux de puissance absorbée, réfléchie et transmise, qui sont les trois observables mesurées expérimentalement.

Le troisième chapitre a été consacré à l'étude du comportement du limiteur dans son état stationnaire, *i.e.* lorsque que les propriétés du plasma et les taux de puissance ne varient plus dans le temps. Nous nous sommes en particulier intéressés aux deux types de modes de propagation qui peuvent exister dans la ligne, à savoir les ondes de surface et les ondes de fuite, et avons montré que ce sont ces dernières qui permettent d'alimenter le plasma. Par ailleurs, nous avons exploré en détail la physique de la puissance de fuite, *i.e.* la puissance en sortie du limiteur, et sa dépendance à la longueur de la cavité plasma, à la pression et à l'épaisseur du diélectrique.

Le quatrième chapitre a été consacré à l'étude et la compréhension de la réponse transitoire du limiteur. En comparant les résultats de simulation et les résultats expérimentaux, nous avons pu relier l'évolution du bilan de puissance à l'évolution des paramètres du plasma, et en particulier à l'évolution de la densité électronique. Puis nous avons exploré la physique en jeu dans la dynamique du plasma et les mécanismes à l'œuvre dans l'interaction microonde-plasma en tête de colonne. Enfin, nous avons étudié la physique à l'œuvre dans le temps de claquage et dans le temps de recouvrement.

Dans ce dernier chapitre, nous allons exploiter la compréhension mise au jour dans les deux chapitres précédents afin de proposer une nouvelle topologie de limiteur qui devrait permettre d'atteindre les

objectifs de tenue en puissance d'une part et de rapidité d'autre part, que ce soit pour le temps de réponse ou pour le temps de recouvrement.

5.1 Introduction : résumé des épisodes précédents

Dans cette section, nous proposons de rappeler en détails au lecteur les principaux points utiles pour la limitation de puissance assistée par plasma qui furent établis dans les chapitres précédents. Tout d'abord, une étude analytique a été conduite afin de comprendre comment le signal est guidé dans la ligne et comment la puissance microonde se couple au plasma. En ce qui concerne le premier point, une analyse modale de la ligne a permis de mettre au jour deux types de propagation différentes :

- la propagation par onde de surface pour laquelle le vecteur d'onde dans la cavité est colinéaire à l'interface, et ou une évanescence apparait suivant la hauteur du dispositif. C'est le mode qui se propage dans la ligne sans plasma pour une fréquence de 3 GHz.

- la propagation par onde de fuite où le signal est guidé entre les deux plans métalliques, et subit une succession de réfractions par l'interface diélectrique/vide et de réflexions sur les plans métalliques. C'est ce type de mode qui permet l'alimentation du plasma, le diélectrique rayonnant de la puissance dans la décharge.

Deuxièmement, nous avons développé une approche analytique pour la puissance de fuite, qui nous a permis de montrer que celle-ci est indépendante de la puissance incidente, ce que nous avons pu observer en simulation et en expérience, mais dépend en revanche des paramètres qui caractérisent le plasma, en particulier de la fréquence de transfert de quantité de mouvement, ainsi que de la géométrie de la ligne. Plus précisément, nous avons montré que :

- La puissance de fuite dans le limiteur est constante en fonction de la puissance de fuite tant que le plasma est libre de s'étendre dans la cavité.

- Si le plasma remplit la cavité, alors le circuit passe en mode atténuateur, et la puissance de fuite se met à croitre en fonction de la puissance incidente.

- Lorsque l'on augmente la hauteur du diélectrique en conservant constante la hauteur de la cavité, la puissance de fuite croît. De plus, cela entraine une augmentation de la longueur de colonne, la puissance transitant dans le diélectrique et rayonnée dans le plasma étant plus importante.

Enfin, en ce qui concerne la dynamique temporelle du limiteur, nous avons mené une étude sur les trois principaux temps caractéristiques du limiteur que sont les temps de claquage, de réponse et de recouvrement. Nous avons en particulier montré les trois résultats suivants :

- Le temps de claquage peut être défini analytiquement comme :

$$t_b = \frac{3}{2}\frac{N_e T_e}{\mathcal{A}(P_{inc} - P_{seuil})} \ln\left(\frac{n_p}{n_0}\right) \tag{5.1}$$

où N_e est le nombre d'électrons générés par la MHCD, (*i.e*, l'intégrale de la densité électronique sur le volume du profil généré par la MHCD), T_e est la température électronique, P_{inc} est la puissance incidente, P_{seuil} est la puissance de déclenchement, n_0 est la densité maximale initiale générée par la MHCD, n_p est la densité du plasma en fin de claquage et $\mathcal{A}$ est le coefficient de puissance absorbée par le profil de pré-ionisation. La diminution du temps de claquage passe ainsi par une augmentation du coefficient $\mathcal{A}$, soit en modifiant les paramètres du plasma, soit

en réduisant la section transverse de la ligne.

- Le temps de réponse du limiteur est proportionnel à :

$$t_r \propto \frac{L_c}{v_f} \tag{5.2}$$

où L_c est la longueur de la colonne plasma et v_f la vitesse du front. Cette dernière s'exprime en fonction du coefficient de diffusion et de la fréquence d'ionisation sous la forme $v_f = 2\sqrt{D\nu_i}$. La réduction du temps de réponse passe donc soit par une diminution de la longueur de la colonne soit par une augmentation de la vitesse du front.

- Le temps de recouvrement est quant à lui un temps plus complexe, puisqu'il dépend des pertes d'électrons par diffusion aux parois et par recombinaison avec les ions, lesquelles dépendent elles-mêmes de la température électronique. Aux basses densités d'Argon, nous avons montré qu'il est donné par l'équation :

$$t_{recouv.} = \left[k_{17} n_{Ar}^2 + \frac{1}{t_{recouv.}} \int_0^{t_{recouv.}} \frac{D_a(\tau)}{\Lambda^2} \mathrm{d}\tau\right]^{-1} \ln\left(\frac{n_c}{n_0}\right) \tag{5.3}$$

où k_{17} est le taux de destruction des ions atomiques qui sont convertis en ions moléculaires, D_a le coefficient de diffusion ambipolaire, Λ la longueur de diffusion, n_c la densité critique en dessous de laquelle l'onde n'interagit plus avec le plasma et n_0 la densité électronique initiale en début de post-décharge. Nous avons alors montré que ce temps est principalement dominé par la diffusion pour des petites hauteurs de cavité et par la recombinaison pour des grandes hauteurs. Enfin, en ce qui concerne la limitation de puissanc,e il apparait que pour un gaz d'Argon à 10 Torr, diviser par un facteur trois la hauteur du dispositif permettrait de diminuer d'un facteur dix le temps de recouvrement.

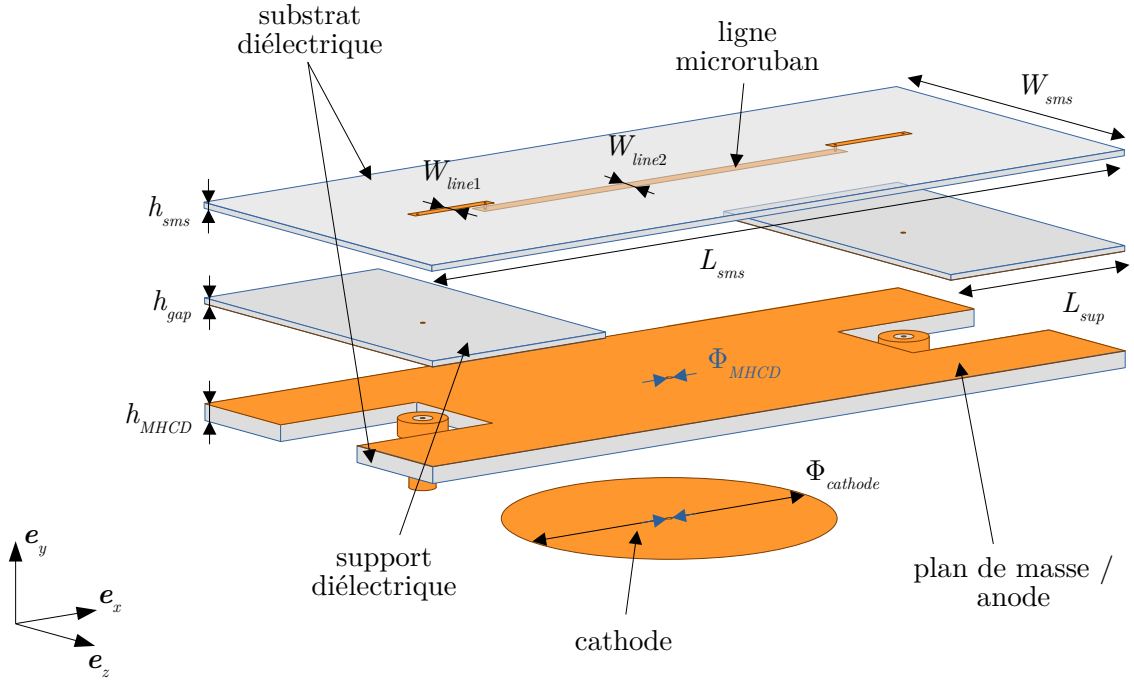


FIGURE 5.1 – Ligne microruban inversée en vue éclatée.

Au regard de tous ces éléments, nous avons proposé une nouvelle topologie de ligne, plus à même d'atteindre les objectifs fixés au départ, qui est présentée sur la figure 5.1. Il s'agit d'une ligne microruban inversée, qui peut être en fait vue comme un guide d'onde à plaques parallèles homogène dans l'espace de la cavité. On passe alors successivement d'une ligne microruban classique à une ligne inversée, puis à une ligne microruban classique. Deux vias métallisés assurent la continuité électrique pour la ligne. Le nouvel espace entre la ligne et le plan de masse, *i.e.* la hauteur de la cavité, est désormais de $h_{gap} = 0.508$ mm, et a donc été réduit d'un facteur trois par rapport à la première topologie. L'épaisseur des substrats diélectriques est conservée d'une topologie à l'autre ($h_{sms} = 0.508$ mm et $h_{MHCD} = 1.524$ mm). La longueur de la cavité est toujours de 80 mm, et la MHCD se trouve au milieu de la cavité.

Ainsi, la suppression du diélectrique entre les deux conducteurs au niveau de la cavité devrait permettre de diminuer l'alimentation en énergie de la colonne plasma, ce qui aura pour effet de réduire sa longueur, et selon toute vraisemblance de retarder le passage en mode atténuateur. Par ailleurs, la colonne étant plus courte, cela devrait également permettre de réduire le temps de réponse du limiteur. Si les prédictions théoriques sont valables, la réduction de la hauteur de cavité d'un facteur trois devrait permettre de réduire le temps de recouvrement d'un facteur dix selon les prévisions. Attendu qu'il faut conserver une impédance de 50 Ω pour le circuit, la réduction de l'espace entre la ligne et le plan de masse ne peut se faire sans réduire sa largeur. La largeur de la ligne passe alors de 8 mm pour la ligne suspendue à 2.1 mm pour la ligne inversée, soit une réduction d'un facteur 15.2 de la section de la ligne. Puisque la puissance qui se propage dans la ligne est égale à l'intégrale surfacique du vecteur de Poynting sur la section transverse, alors à puissance incidente égale, une telle réduction engendre une amplification du champ électrique dans la ligne. Le tableau 5.1 présente les valeurs de champ au niveau du plan de masse, simulées sous Ansys HFSS pour quelques puissances incidentes, dans la ligne suspendue et dans la ligne inversée.

$P_{inc.}$ (dBm)	25	30	35	40	45
$E_{susp.}$ (V.m^{-1})	4712	8380	14901	26499	47123
$E_{inv.}$ (V.m^{-1})	13728	24412	43411	77198	137279

TABLE 5.1 – Valeurs de champs électriques efficaces au niveau du plan de masse dans les lignes suspendue et inversée en fonction de la puissance incidente.

L'évolution de l'amplitude du champ électrique en fonction de la puissance incidente est la même dans les deux lignes, et la réduction de la section de la ligne a conduit à une amplification d'un facteur 2.91 du champ électrique. Par ailleurs, on ne s'attend pas à ce que cette augmentation de l'amplitude du champ électrique joue sur le seuil de claquage. En effet, on rappelle que la puissance absorbée par électron s'écrit :

$$P_e = \frac{e^2}{2m_e}\frac{\nu_m}{\nu_m^2+\omega^2}\left|\underline{\boldsymbol{E}}\right|^2 \tag{5.4}$$

Une augmentation d'un facteur trois du champ entraine donc une augmentation d'un facteur neuf de la puissance absorbée par électron. Or le claquage se produit si et seulement si la puissance absorbée par électron est supérieure à une puissance absorbée seuil définie par :

$$P_{e,seuil} = P_{loss}^{elas} + P_{loss}^{inelas} + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1+\alpha}\right)\left[\frac{D_{eff}}{\Lambda_x^2} + \frac{D_{eff}}{\Lambda_y^2}\right] T_e \tag{5.5}$$

La hauteur de la cavité ayant été diminuée d'un facteur trois par rapport à la ligne suspendue, les pertes par diffusion dans la direction y sont donc multipliées par un facteur neuf. Les gains sont donc

multipliés par neuf, les pertes aussi, donc le seuil ne devrait normalement pas changer. Ce raisonnement simple tend par ailleurs à laisser penser que le seuil de claquage est un invariant de la géométrie de la ligne.

Finalement, nous pouvons présumer au regard de tout ce qui a été dit précédemment que les deux apports majeurs de cette nouvelle topologie devraient consister en une suppression de la transition limiteur/atténuateur et en une réduction du temps de recouvrement. Dans les sections suivantes, nous allons présenter les résultats obtenus lors des campagnes expérimentales pour cette nouvelle topologie.

5.2 Bilans de puissance stationnaires

Les bilans de puissances stationnaires mesurés pour une fréquence de 3 GHz et une pression de 10 Torr sont présentés sur la figure 5.2. Comme nous l'avions pressenti à travers l'étude du couplage microonde/plasma, la suppression du substrat diélectrique a permis de réduire l'alimentation en énergie de la colonne et par conséquent sa taille, ce qui conduit à la disparition de la transition limiteur/atténuateur, garantissant ainsi une puissance de fuite de 25 dBm, sur une plage de puissances incidentes allant de 30 dBm (*i.e.* 1 W) à 50 dBm (*i.e.* 100 W), la valeur maximale lors de nos tests.

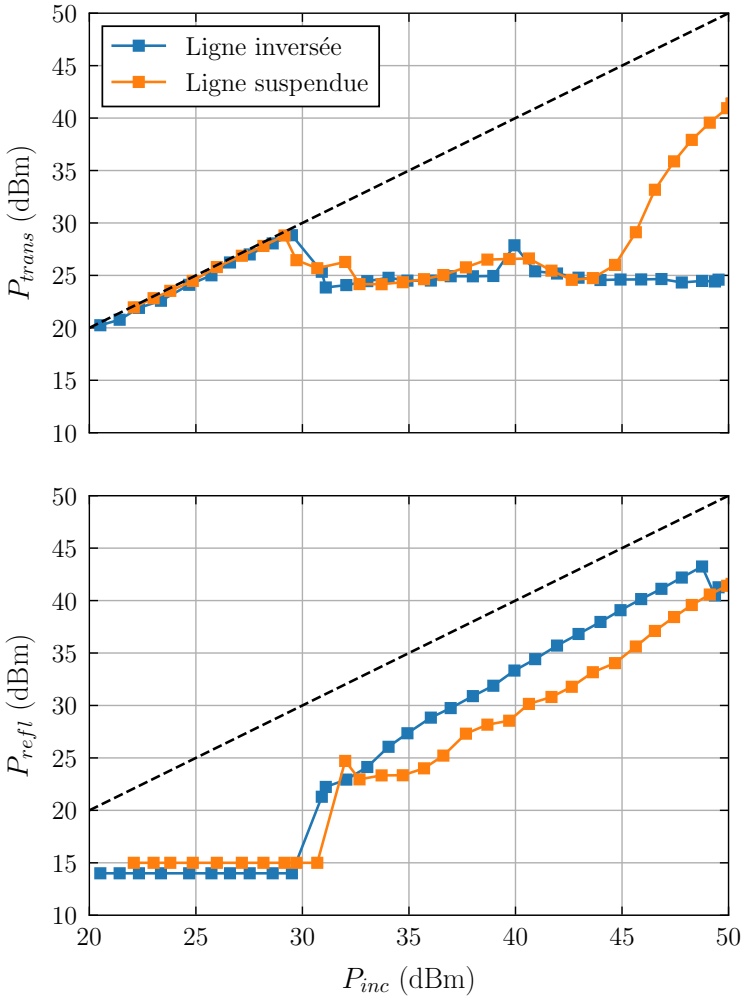


FIGURE 5.2 – Évolution des puissances transmises et réfléchies mesurées pour les lignes suspendue et inversée en fonction de la puissance incidente, à 3 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

Remarquons que pour une puissance incidente de 49 dBm un décrochage apparait sur la puissance réfléchie de la ligne inversée qui correspond à un claquage parasite sur le connecteur coaxial. Autrement dit, pour tester le limiteur pour des puissances incidentes supérieures à 100 W, il est nécessaire

d'encapsuler le dispositif, *i.e.* d'enfermer le gaz dans la cavité et d'étanchéifier le tout, de sorte que les connecteurs se trouvent à la pression atmosphérique, empêchant ainsi tout phénomène de claquage parasite.

Notons également que le nouveau dispositif est plus réflectif que le précédent. Ceci peut se comprendre en rappelant l'expression de la permittivité effective de la ligne à vide :

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_{r,p}\epsilon'_{r,d}\frac{l_p + l_d}{\epsilon'_{r,d}l_p + \epsilon'_{r,p}l_d} = \epsilon'_{r,p}\epsilon'_{r,d}\frac{1+\frac{l_p}{l_d}}{\epsilon'_{r,d}\frac{l_p}{l_d} + \epsilon'_{r,p}} = \epsilon'_{r,p}\epsilon'_{r,d}\frac{1+\frac{l_d}{l_p}}{\epsilon'_{r,d} + \epsilon'_{r,p}\frac{l_d}{l_p}} \tag{5.6}$$

Dans le cas extrême où l'épaisseur du diélectrique est très grande devant la hauteur de la cavité, la permittivité effective de la ligne se réduit à $\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_{r,d}$. De fait, la présence d'un diélectrique diminue la rupture d'impédance à l'entrée du dispositif, et ce d'autant plus que le diélectrique est épais. Dès lors pour la ligne inversée, la rupture d'impédance est plus grande que pour la ligne suspendue, d'où l'accroissement de puissance réfléchie

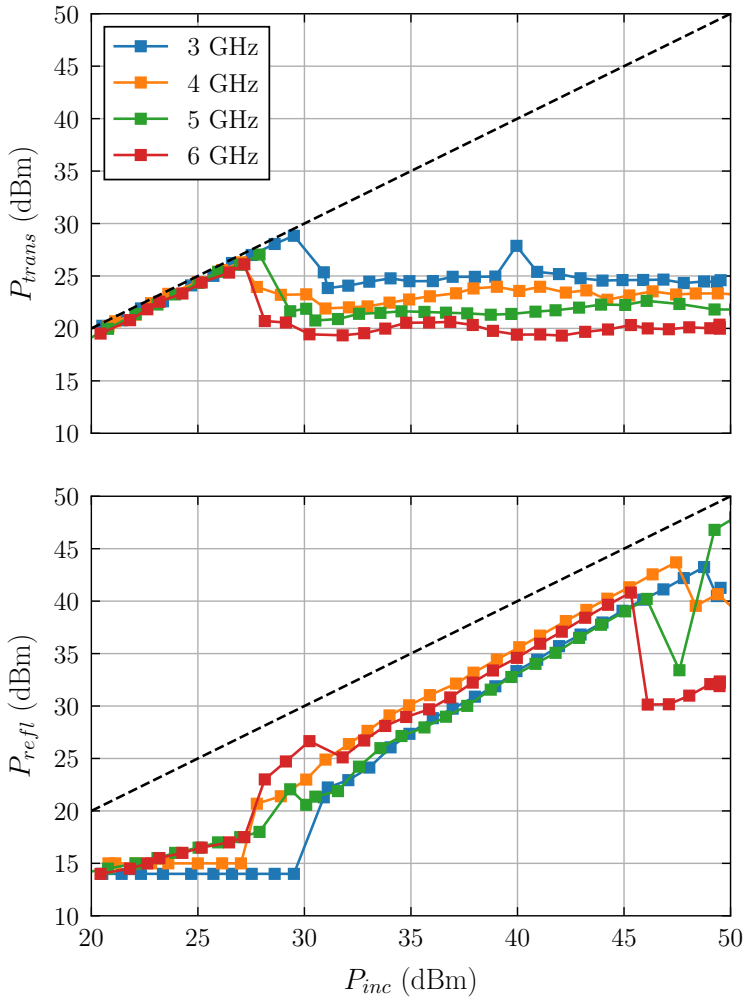


FIGURE 5.3 – Évolution des puissances transmise et réfléchie mesurées pour la ligne inversée en fonction de la puissance incidente et de la fréquence, dans l'Argon à 10 Torr.

Pour finir, la figure 5.3 présente la puissance de fuite et la puissance réfléchie pour la nouvelle topologie, pour différentes fréquences comprises entre 3 et 6 GHz (la bande de fréquence est imposée par l'amplificateur disponible au moment des tests). Comme on peut le remarquer, le limiteur assure la limitation sur toute la plage de fréquences étudiée. Une diminution de la puissance de fuite se produit

lorsque la fréquence augmente, laissant penser qu'il existe un optimum en fréquence pour la pression de 10 Torr fixée dans les essais. Cependant, cette dépendance à la fréquence de l'onde n'a pas été étudiée dans le cadre de cette thèse puisque, comme nous l'avions dit au chapitre deux, nous avons calculé les taux de réaction et les paramètres de transport avec BOLSIG+ en négligeant les oscillations de champ.

Dans la prochaine section, nous allons étudier la dynamique transitoire du limiteur, en nous focalisant en particulier sur le temps de claquage et sur le temps de recouvrement.

5.3 Dynamique transitoire

5.3.1 Temps de claquage

Dans cette section nous allons nous consacrer à l'étude du temps de claquage pour le nouveau limiteur. La figure 5.4 présente l'évolution du temps de claquage pour la ligne inversée, en fonction de la puissance incidente et pour différentes fréquences d'agression comprises entre 3 et 6 GHz. Les résultats présentent tous la même tendance, excepté à basse puissance pour une fréquence de 3 GHz. En revanche, pour des puissances incidentes supérieures à 45 dBm, les temps de claquage semblent tous converger vers la même valeur quelle que soit la fréquence. L'application de la formule 4.121 exposée dans le chapitre précédent au temps de claquage expérimental pour la fréquence de 4 GHz, permet d'extrapoler les résultats et de prévoir un temps de claquage de 3.3 ns pour une puissance incidente de 1 kW (*i.e.* 60 dBm).

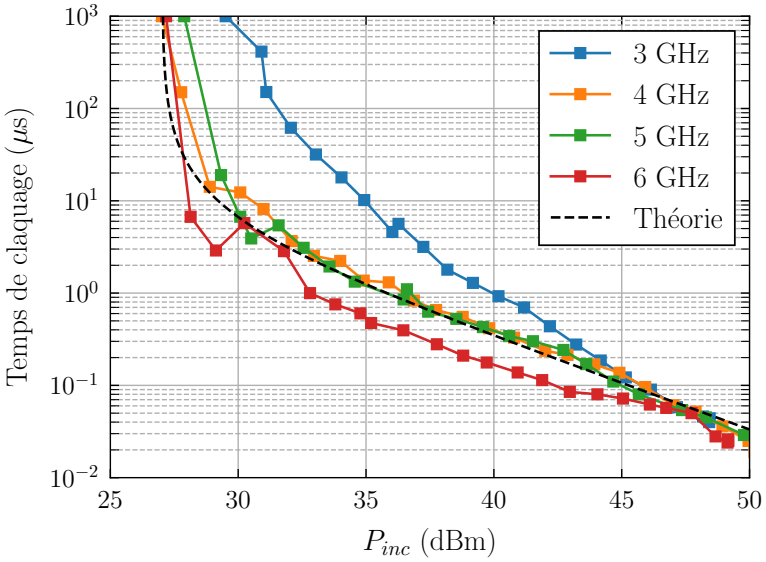


FIGURE 5.4 – Temps de claquage mesuré pour la ligne inversée en fonction de la puissance incidente, pour différentes fréquences, dans l'Argon à 10 Torr.

Notons que cette fréquence a été choisie car la formule théorique fonctionne mieux pour des fréquences supérieures à 3 GHz dans le cas de la ligne inversée.

Pour finir la figure 5.5 présente une comparaison des temps de claquage des lignes suspendue et inversée pour une fréquence de 4 GHz. Pour une puissance incidente de 60 dBm (1 kW), les temps de claquage prévus par extrapolation des données expérimentales sont de 5.7 ns pour la ligne suspendue et de 3.3 ns pour la ligne inversée. Comme nous pouvions nous y attendre, le temps de claquage n'a pas varié significativement d'une ligne à l'autre bien qu'il soit légèrement plus court pour la ligne inversée. Ce raccourcissement est probablement dû à des effets de renforcement de champ au niveau des arrêtes du trou de la MHCD, ces effets étant d'autant plus importants que la largeur de la ligne est de l'ordre du diamètre du trou. En effet, on rappelle que la MHCD possède un diamètre de 1 mm et que la largeur de la piste est de 8 mm pour la ligne suspendue contre 2.1 mm pour la ligne inversée.

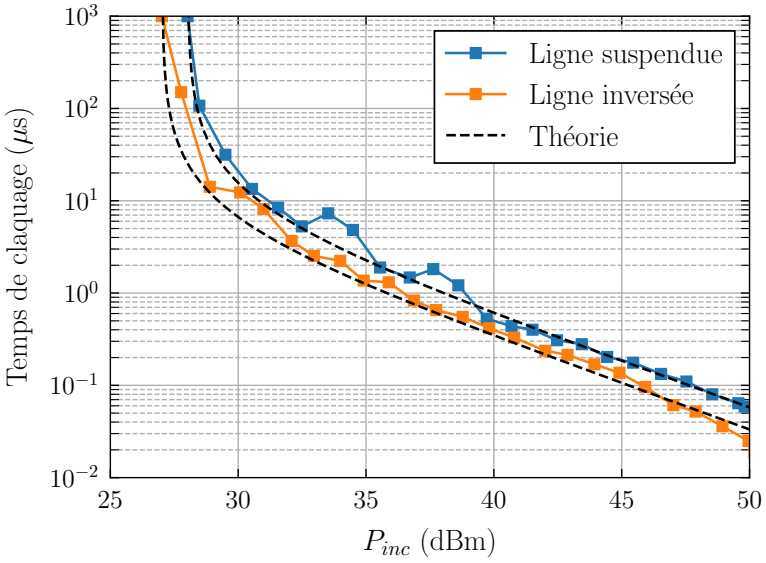


FIGURE 5.5 – Comparaison des temps de claquage mesurés pour les lignes suspendue et inversée en fonction de la puissance incidente, pour différentes fréquences, dans l'Argon à 10 Torr.

5.3.2 Temps de recouvrement

Dans cette section nous allons étudier les résultats obtenus pour le temps de recouvrement pour la nouvelle topologie de limiteur. L'étude de la physique du recouvrement a permis de montrer que la diminution de la hauteur de la cavité permettait de diminuer le temps de recouvrement, en particulier le passage de la ligne suspendue à la ligne inversée a conduit à une diminution d'un facteur trois de la hauteur de cavité, on s'attend donc d'après la théorie à gagner au mieux un facteur dix sur le temps de recouvrement.

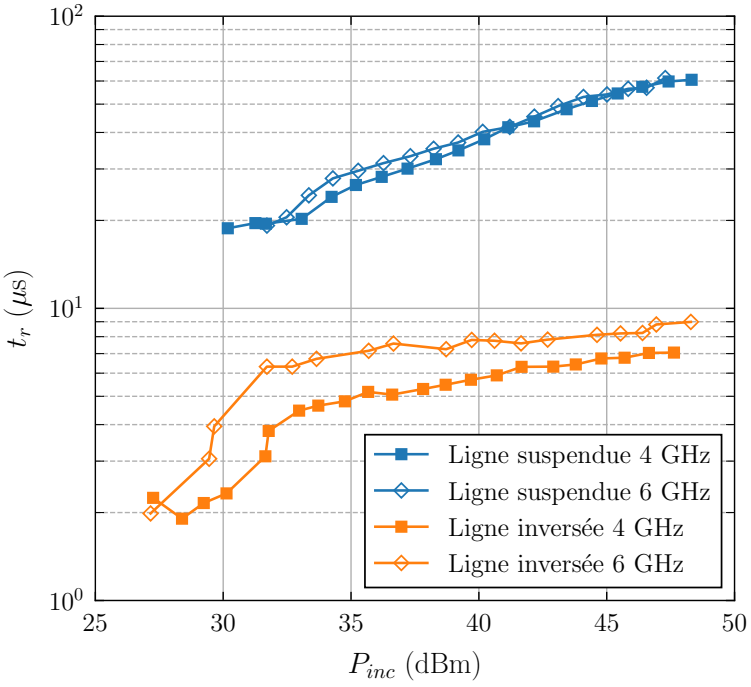


FIGURE 5.6 – Temps de recouvrement mesurés pour les lignes suspendue et inversée en fonction de la puissance incidente, pour des fréquences de 4 GHz et 6 GHz, dans l'Argon à 10 Torr.

La figure 5.6 présente le temps de recouvrement en fonction de la puissance incidente pour deux fréquences d'agression, à savoir 4 et 6 GHz. Les résultats pour la ligne inversée montrent une plus grande variabilité en fonction de la fréquence que pour la ligne suspendue.

La diminution de la hauteur de la cavité a bel et bien permis de diminuer le temps de recouvrement qui devient alors inférieur à 10 μs pour la nouvelle topologie, sur la gamme de puissances incidentes testées. Notons que le gain n'est pas aussi spectaculaire que celui qui avait été prévu théoriquement. En effet, il est au mieux d'un facteur 8.5 pour une puissance incidente de 47 dBm et une fréquence d'agression de 4 GHz.

5.4 Influence de la chimie

Pour clore ce chapitre sur la ligne inversée, nous avons voulu voir l'effet d'un changement de chimie, *i.e.* d'un changement du gaz, tout en conservant une pression de 10 Torr. Pour ce faire, nous avons travaillé dans le Xénon pur, et dans un mélange de Néon-Xénon à 1% de Xénon. Ces mélanges sont connus pour avoir été étudiés et utilisés dans les écrans à plasmas pour la production de rayonnements ultraviolets, et sont réputés pour favoriser des mécanismes d'ionisation dits de Penning, durant lesquels deux atomes excités entrant en collision produisent des électrons. Un tel mélange pourrait donc favoriser la production d'électrons, ce qui aurait pour effet d'augmenter l'absorption et/ou la réflexion de puissance.

Nous avons cherché à confronter les résultats théoriques, expérimentaux et numériques. En ce qui concerne ce dernier point, il faut préciser que la simulation de la ligne inversée est un problème plus épineux que la simulation de la ligne suspendue. En effet, la propagation de l'onde dans ce dispositif et la qualité des résultats obtenus sont fortement liés à la capacité de décrire et de discrétiser en détail l'épaisseur de peau (autrement dit la gaine) qui apparait au niveau du plan de masse et de la ligne microruban, et dans laquelle la densité électronique chute fortement. Ces zones de faible densité électronique ont des effets radicalement différents sur la propagation du signal par rapport au cœur du plasma. Qui plus est, la ligne faisant deux millimètres de large, l'hypothèse formulée d'un champ quasi-TEM qui avait conduit à simuler la ligne suspendue en deux dimensions est de fait, beaucoup moins pertinente dans le cas de la ligne inversée. Aussi avons nous fait le choix de simuler ces gaz dans la ligne suspendue, en notant que la production des différentes espèces ne dépend pas de la géométrie du circuit. De plus, la variation tendancielle des résultats, *i.e* l'augmentation ou la diminution des temps de claquage, des temps de recouvrement, des puissances transmises et réfléchies, devrait selon toute vraisemblance être la même d'un circuit à l'autre.

Avant d'exposer les résultats obtenus, tant sur le plan expérimental que par la simulation, nous allons nous arrêter un instant sur la cinétique chimique retenue pour le Néon et le Xénon.

5.4.1 Cinétique chimique du mélange Néon-Xénon 1% et du Xénon pur

Le schéma réactionnel retenu pour simuler la dynamique du plasma dans le mélange de Néon-Xénon est largement inspiré des travaux de Meunier *et al* [72] et de Hagelaar [73]. L'ensemble des réactions prises en compte est présenté dans le tableau 5.2. Les coefficients de transport et les taux de réaction sont obtenus en suivant la même démarche que pour l'Argon.

5.4.1.1 Niveaux d'énergie et chimie du Néon et du Xénon

Les diagrammes énergétiques des deux éléments sont présentés sur les figures 5.7 et 5.8. Comme on peut le voir, les niveaux d'énergie issus des différentes configurations électroniques du Xénon sont beaucoup moins disjoints énergétiquement que ceux du Néon. En effet, le dernier électron de valence du Xénon est beaucoup plus facile à exciter que celui du Néon car le potentiel électrostatique engendré

par le noyau se trouve écranté par les électrons de cœur, plus nombreux dans le Xénon. C'est aussi pour cela que l'énergie d'ionisation du Xénon (12.13 eV) est plus basse que celle de l'Argon (15.76 eV), elle-même étant plus basse que celle du Néon (21.56 eV).

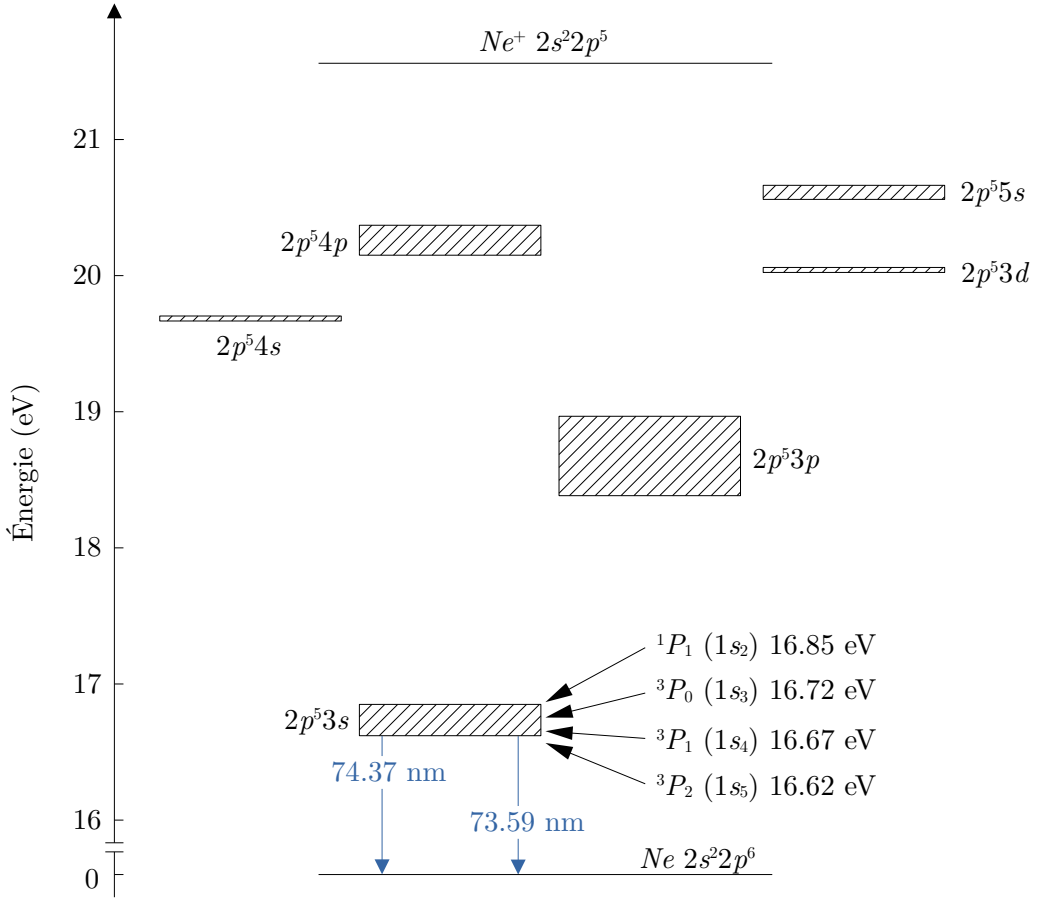


FIGURE 5.7 – Diagramme énergétique détaillé du Néon [74].

Comme pour le cas de l'Argon détaillé dans le deuxième chapitre, les configurations $2p^53s$ et $5p^56s$ du Néon et du Xénon, représentées sous forme de blocs sur les figures 5.7 et 5.8, contiennent quatre niveaux d'énergie distincts, et les configurations $2p^53p$ et $5p^56p$ donnent naissance à dix niveaux d'énergie. Afin de garder un schéma cinétique simple et de limiter le nombre de processus réactifs pris en compte dans la simulation, nous proposons de regrouper tous les niveaux d'énergie des configurations $2p^53s$ et $5p^56s$ du Néon et du Xénon dans deux niveaux effectifs notés Ne^* et Xe^*. En ce qui concerne les niveaux supérieurs, nous choisissons de ne considérer que les niveaux issus des configurations $2p^53p$ et $5p^56p$ du Néon et du Xénon, que nous regroupons dans deux niveaux effectifs Ne^{**} et Xe^{**}. Ces simplifications sont aussi inspirées par la disponibilité des sections efficaces pour le calcul des taux de réaction. Ce faisant, le schéma cinétique simplifié pour le mélange Néon-Xénon est présenté sur la figure 5.9.

Les sections efficaces pour l'excitation des niveaux Ne^*, Ne^{**}, Xe^* et Xe^{**} sont extraites de la base BSR. Le regroupement des taux de réaction natifs en taux effectifs se fait suivant la même méthode déjà détaillée pour l'excitation du résonnant et la réaction de quenching dans l'Argon. Les sections efficaces pour les transitions entre espèces excitées $Ne^* \leftrightarrow Ne^{**}$ et $Xe^* \leftrightarrow Xe^{**}$, ainsi que pour l'ionisation par étape sont tirées des travaux de Hyman [76, 77]. Elles peuvent être approchées par une formule inspirée des travaux de Deutsch [40], qui est donnée dans l'annexe F. Il resterait pour finir à statuer sur les valeurs des coefficients de transport des espèces ioniques et des espèces excitées, mais pour ne pas alourdir le manuscrit, cette partie a été traitée dans l'annexe G.

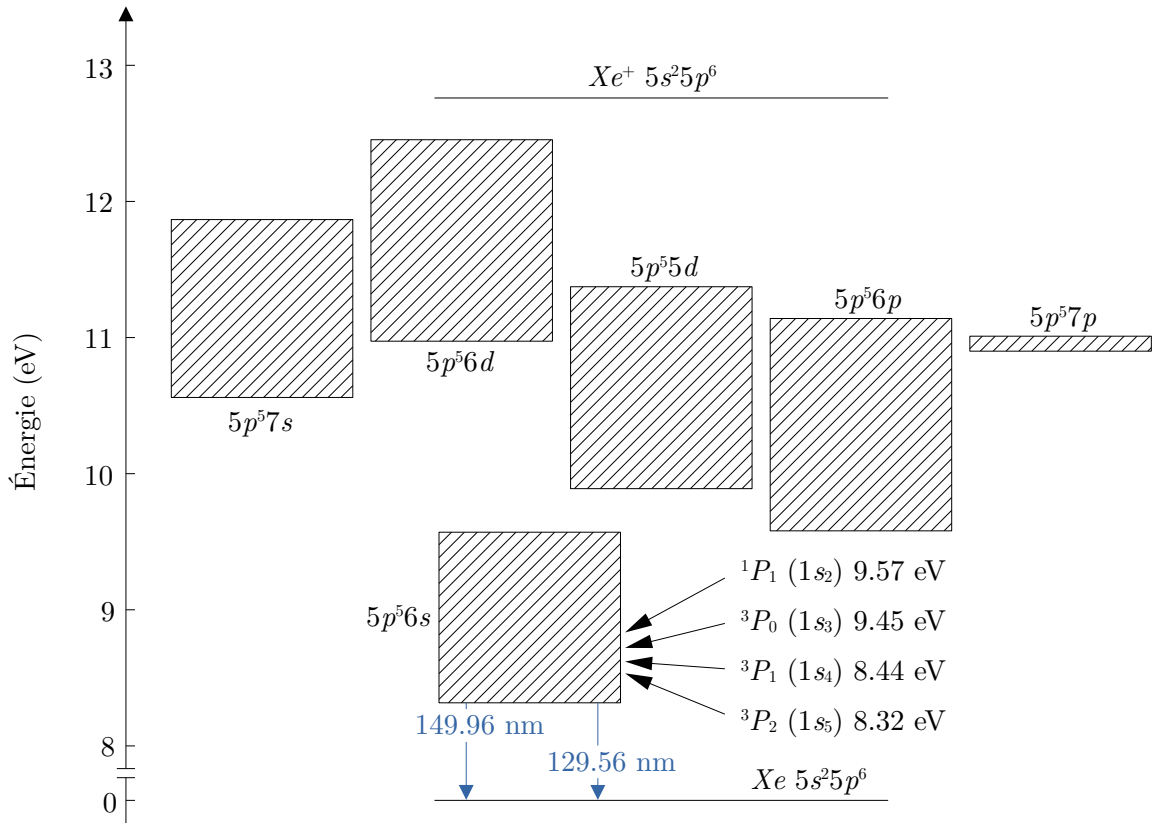


FIGURE 5.8 – Diagramme énergétique détaillé du Xénon [75].

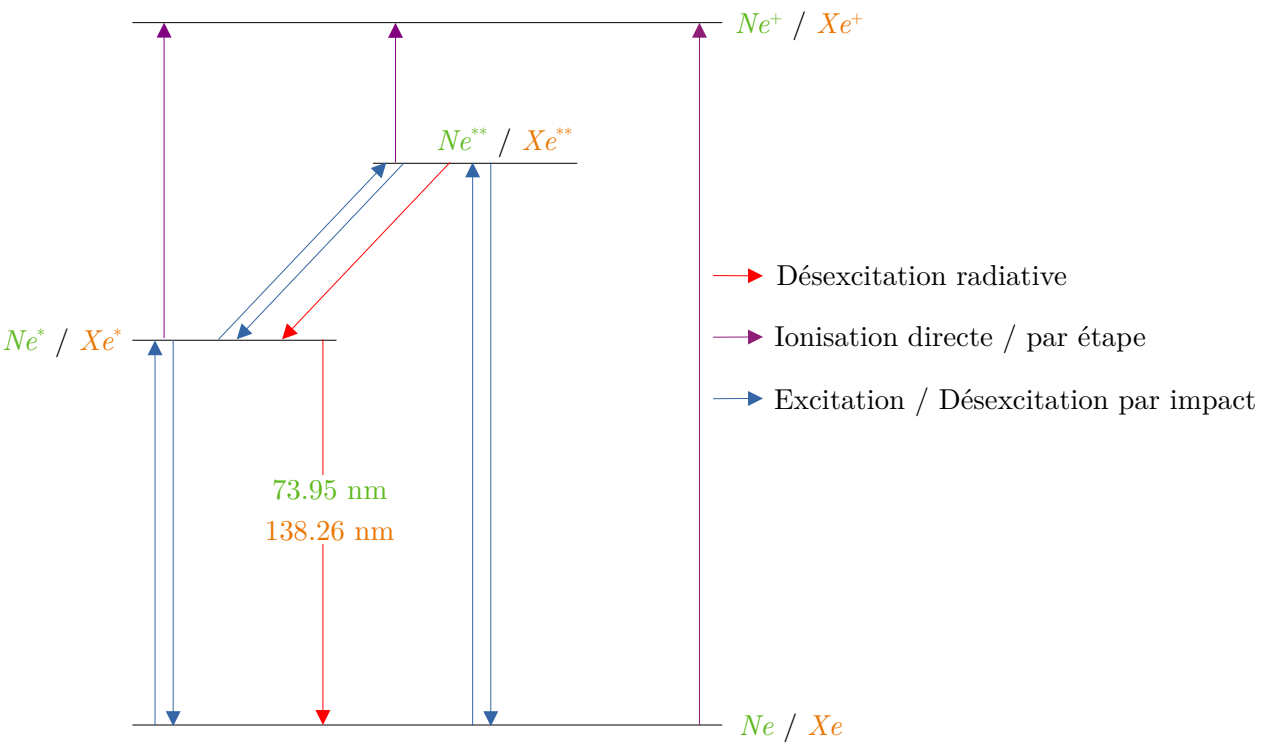


FIGURE 5.9 – Schémas cinétiques simplifiés du Néon et du Xénon.

#	Réaction	Taux de réaction	Ref.
	Ionisation directe		
1	$e + Ne \mapsto 2e + Ne^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[37]
2	$e + Xe \mapsto 2e + Xe^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[37]
	Excitation par impact électronique		
3	$e + Ne \mapsto e + Ne^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
4	$e + Ne \mapsto e + Ne^{**}$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
5	$e + Ne^* \mapsto e + Ne^{**}$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[77]
6	$e + Xe \mapsto e + Xe^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
7	$e + Xe \mapsto e + Xe^{**}$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
8	$e + Xe^* \mapsto e + Xe^{**}$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[77]
	Désexcitation par impact électronique		
9	$e + Ne^* \mapsto e + Ne$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
10	$e + Ne^{**} \mapsto e + Ne$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
11	$e + Ne^{**} \mapsto e + Ne^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[77]
12	$e + Xe^* \mapsto e + Xe$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
13	$e + Xe^{**} \mapsto e + Xe$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[39]
14	$e + Xe^{**} \mapsto e + Xe^*$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[77]
	Ionisation par étape		
15	$e + Ne^* \mapsto e + Ne^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[76]
16	$e + Ne^{**} \mapsto e + Ne^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[76]
17	$e + Xe^* \mapsto e + Xe^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[76]
18	$e + Xe^{**} \mapsto e + Xe^+$	EEDF ($m^3.s^{-1}$)	[76]
	Ionisation par atomes excités		
19	$Ne^* + Ne^* \mapsto e + Ne + Ne^+$	3.2×10^{-16} $m^3.s^{-1}$	[78]
20	$Ne^* + Xe \mapsto e + Ne + Xe^+$	7.5×10^{-17} $m^3.s^{-1}$	[79]
21	$Ne^* + Xe \mapsto e + NeXe^+$	2.3×10^{-17} $m^3.s^{-1}$	[79]
22	$Xe^* + Xe^* \mapsto e + Xe + Xe^+$	6.7×10^{-16} $m^3.s^{-1}$	[80]
	Formation des ions moléculaires		
23	$Ne^+ + 2Ne \mapsto Ne_2^+ + Ne$	4.4×10^{-44} $m^6.s^{-1}$	[79]
24	$Ne^+ + Xe + Ne \mapsto NeXe^+ + Ne$	1.0×10^{-43} $m^6.s^{-1}$	[79]
25	$Xe^+ + Ne + Ne \mapsto NeXe^+ + Ne$	1.0×10^{-43} $m^6.s^{-1}$	[79]
26	$Xe^+ + 2Xe \mapsto Xe_2^+ + Xe$	2.5×10^{-43} $m^6.s^{-1}$	[79]
27	$Xe^+ + Xe + Ne \mapsto Xe_2^+ + Ne$	1.5×10^{-43} $m^6.s^{-1}$	[79]
	Échange de charges		
28	$Ne_2^+ + Xe + Ne \mapsto Xe^+ + 3Ne$	4.0×10^{-42} $m^6.s^{-1}$	[79]
29	$NeXe^+ + Xe \mapsto Xe_2^+ + Ne$	5.0×10^{-18} $m^3.s^{-1}$	[79]
30	$NeXe^+ + Xe \mapsto Xe^+ + Ne + Xe$	5.0×10^{-16} $m^3.s^{-1}$	[79]
	Recombinaison dissociative		
31	$e + Ne_2^+ \mapsto Ne^* + Ne$	$3.7 \times 10^{-14} \times T_e^{-0.43}$ $m^3.s^{-1}$	[79]
32	$e + Xe_2^+ \mapsto Xe^{**} + Xe$	$2.0 \times 10^{-13} \times T_e^{-0.5}$ $m^3.s^{-1}$	[81]
33	$e + NeXe^+ \mapsto Xe^{**} + Ne$	$8.0 \times 10^{-14} \times T_e^{-0.5}$ $m^3.s^{-1}$	[79]
	Cinétique des états excités		
34	$Xe^{**} + Ne \mapsto Xe^* + Ne$	2.0×10^{-18} $m^3.s^{-1}$	[82]

Suite sur la page suivante

Table 5.2 – suite de la page précédente

#	Réaction	Taux de réaction	Ref.
35	$Xe^{**} + Xe \mapsto Xe^{*} + Xe$	1.0×10^{-16} m^3.s^{-1}	[82]
	Désexcitation radiative		
36	$Ne^{*} \mapsto Ne + h\nu$	4.03×10^{5} s^{-1}	[43, 44, 83]
37	$Ne^{**} \mapsto Ne^{*} + h\nu$	1.89×10^{7} s^{-1}	[83]
38	$Xe^{*} \mapsto Xe + h\nu$	4.95×10^{5} s^{-1}	[43, 44, 84]
39	$Xe^{**} \mapsto Xe^{*} + h\nu$	1.70×10^{7} s^{-1}	[84]

TABLE 5.2 – Ensemble de réactions chimiques pour le mélange Néon-Xénon prises en compte dans les simulations.

5.4.2 Présentation des résultats obtenus

5.4.2.1 Bilans de puissance stationnaires

Les bilans de puissance stationnaires mesurés expérimentalement dans la ligne inversée, pour les trois gaz testés, sont présentés sur la figure 5.10. La puissance de fuite dans l'Argon et le mélange Néon-Xénon à 1% se situe aux alentours de 25 dBm, en revanche la puissance de fuite et le seuil de claquage pour le Xénon sont plus bas que pour les deux autres gaz, et se situent respectivement aux alentours de 20 dBm et 26 dBm.

Eu égard à ce que nous avons expliqué dans le troisième chapitre, la puissance de fuite correspond à la puissance limite en dessous de laquelle le plasma n'est plus soutenu. Si les pertes d'énergie diminuent, alors il est possible d'alimenter le plasma avec une puissance plus faible et donc la puissance de fuite diminue également. Rappelons que les pertes d'énergie sont la conséquence des collisions entre les électrons et le gaz, ou bien encore du transport d'énergie vers les parois par les électrons. Les pertes d'énergie sont donc nécessairement plus faibles dans le Xénon que dans les autres gaz, et pour l'illustrer, nous avons tracé sur la figure 5.11 les mobilités standards de l'ion Ar^{+} dans l'Argon, des ions Xe^{+} et Ne^{+} dans le mélange de Néon-Xénon à 1%, et de l'ion Xe^{+} dans le Xénon en fonction du champ électrique réduit.

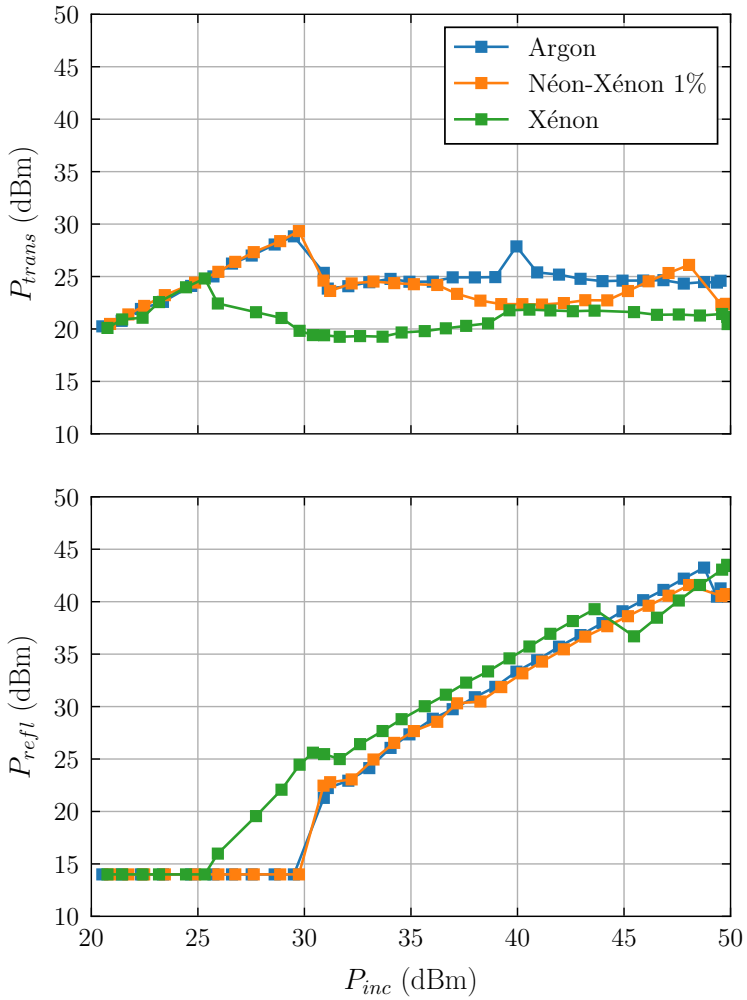


FIGURE 5.10 – Évolution des puissances transmises et réfléchies mesurées pour la ligne inversée en fonction de la puissance incidente, à 3 GHz, dans l'Argon, le Néon-Xénon 1% et le Xénon à 10 Torr.bub

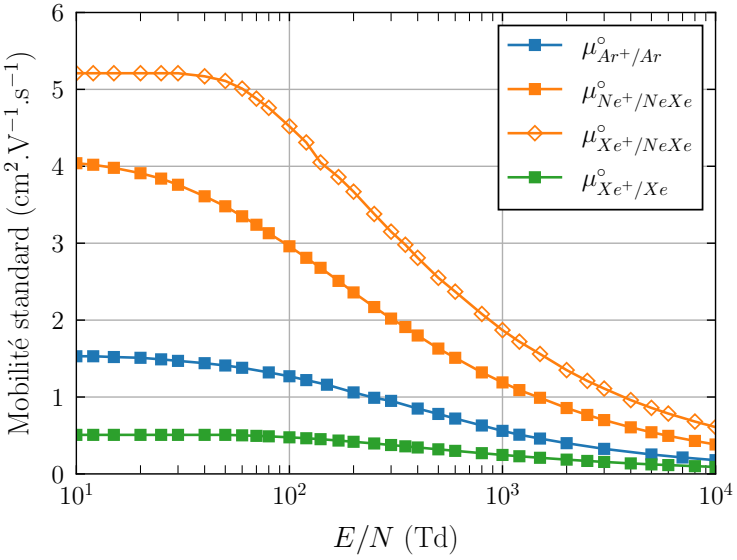


FIGURE 5.11 – Mobilités des ions atomiques Ar^+, Ne^+ et Xe^+ dans les gaz étudiés.

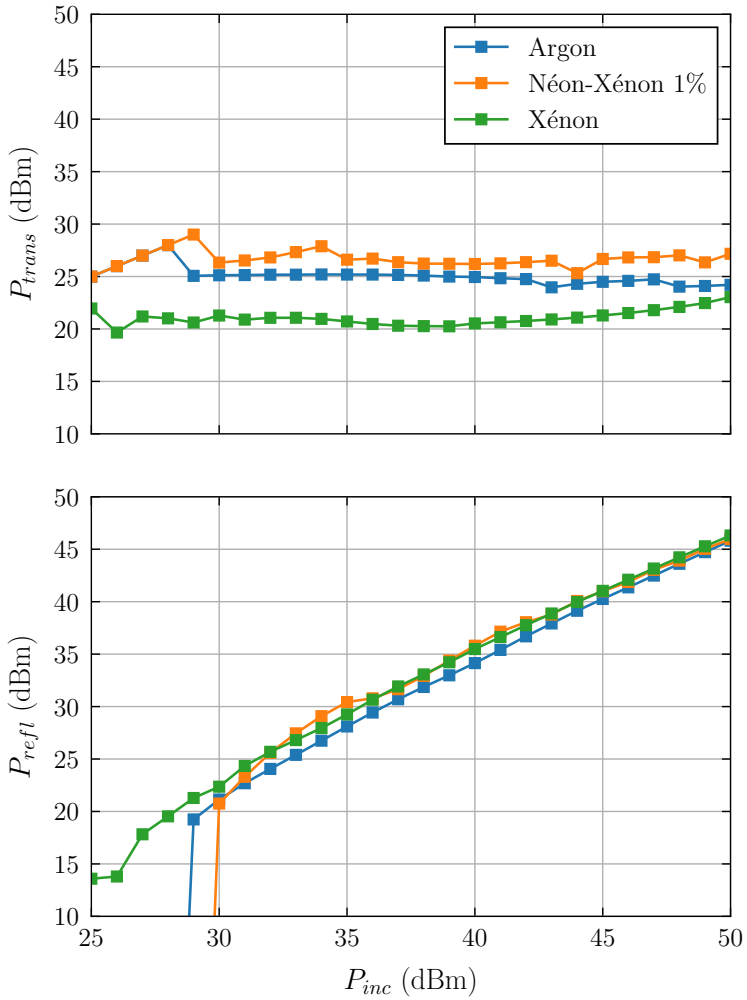


FIGURE 5.12 – Évolution des puissances transmises et réfléchies simulées pour la ligne suspendue en fonction de la puissance incidente, à 3 GHz, dans l'Argon, le Néon-Xénon 1% et le Xénon à 10 Torr.

Le coefficient de diffusion étant proportionnel à la mobilité (*cf.* relation d'Einstein), on comprend alors que les pertes par diffusion aux parois sont plus importantes dans le Néon-Xénon que dans l'Argon, et que toutes deux sont supérieures aux pertes par diffusion dans le Xénon. De fait, on s'attend à ce que la puissance de fuite soit plus basse dans le Xénon que dans l'Argon, et que cette dernière soit elle-même plus basse que dans le Néon-Xénon. C'est bien cette tendance qui se retrouve dans les résultats de simulation qui sont présentés sur la figure 5.12, dont on rappelle qu'ils ont été obtenus pour la ligne suspendue. En ce qui concerne la puissance réfléchie, l'interprétation est plus difficile sachant qu'aucune tendance claire ne se dégage des résultats simulés et expérimentaux.

Pour finir ce propos sur le bilan de puissance stationnaire, la simulation nous permet de donner quelques informations sur la production d'électrons dans les deux nouveaux gaz. Nous avions vu dans le chapitre précédent qu'en ce qui concerne l'Argon, que la totalité des électrons étaient créés par les réactions d'ionisation par étapes, *i.e.* par ionisation des espèces excitées, métastables et résonnants. La figure 5.13 présente le taux de production d'électrons par chaque réaction susceptible d'en produire, pour les trois gaz testés.

La production d'électrons dans le Néon-Xénon 1% et dans le Xénon pur est principalement assurée par l'ionisation des espèces excitées du Xénon, et particulièrement de l'état doublement excité Xe^{**} dont l'énergie d'ionisation est plus basse que pour l'état simplement excité Xe^{*}. Notons que la production d'électrons par ionisation directe du Xénon est plus importante dans le mélange de Néon-Xénon que

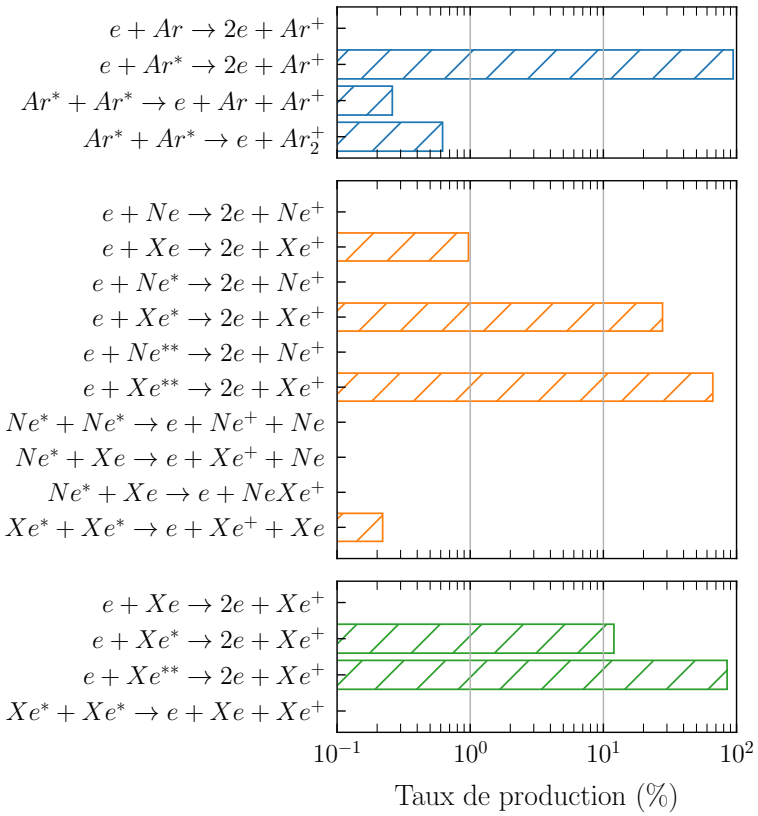


FIGURE 5.13 – Taux de production des électrons par les différentes réactions prises en compte dans l'Argon, le Néon-Xénon 1% et le Xénon, pour une puissance incidente de 40 dBm, à 3 GHz et pour une pression de 10 Torr.

dans le Xénon pur. Le mélange de Néon-Xénon utilisé étant à 99% constitué de Néon, la fréquence de transfert de quantité de mouvement est alors pilotée exclusivement par les collisions avec les espèces issues du Néon. Or, cette fréquence de transfert de quantité de mouvement est beaucoup plus faible dans le Néon que dans les autres gaz nobles, les électrons sont alors plus chauds, et nous avons montré au chapitre précédent comment une variation de température électronique, même faible, amplifiait les taux des processus inélastiques, et en particulier dans notre cas, la réaction d'ionisation directe du Xénon.

5.4.2.2 Dynamique transitoire : temps de claquage et temps de recouvrement

Pour clore cette étude de la ligne inversée, nous allons maintenant nous intéresser à la phase transitoire du limiteur, et plus particulièrement au temps de claquage et au temps de recouvrement. La figure 5.14 présente l'évolution des temps de claquage en fonction de la puissance incidente, pour une agression d'une fréquence de 4 GHz, dans les trois gaz étudiés. Comme on peut le constater, le temps de claquage ne varie pas significativement d'un gaz à l'autre. La formule donnée par l'équation (4.121) a de nouveau été utilisée afin d'extrapoler le temps de claquage pour une puissance de 1 kW. La différence entre les temps de claquage extrapolés pour cette puissance incidente est particulièrement infime (3.31 ns pour l'Argon, 3.23 ns pour le Néon-Xénon 1% et 3.35 ns pour le Xénon), si bien que l'on peut conclure qu'à forte puissance, la chimie n'influe pas sur la rapidité du claquage.

Pour finir, la figure 5.15 présente une comparaison des temps de recouvrement mesurés pour la ligne inversée, pour des fréquences d'agression de 4 et 6 GHz, dans les différents gaz étudiés. Comme nous l'avons montré dans le précédent chapitre, la phase de recouvrement est pilotée par deux phénomènes que sont les pertes d'électrons par diffusion aux parois, et les pertes d'électrons par recombinaison,

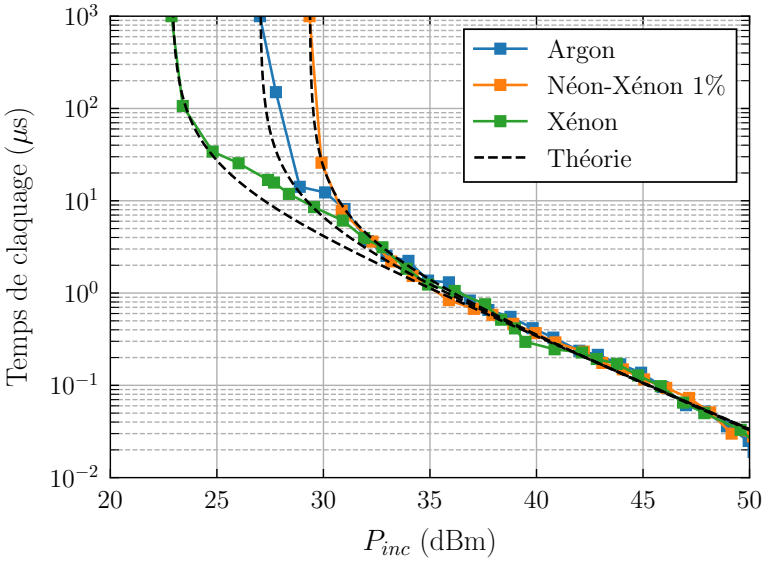


FIGURE 5.14 – Temps de claquage théoriques et mesurés pour la ligne inversée en fonction de la puissance incidente dans l'Argon, le Néon-Xénon 1% et le Xénon, pour une pression de 10 Torr et une fréquence d'agression de 4 GHz.

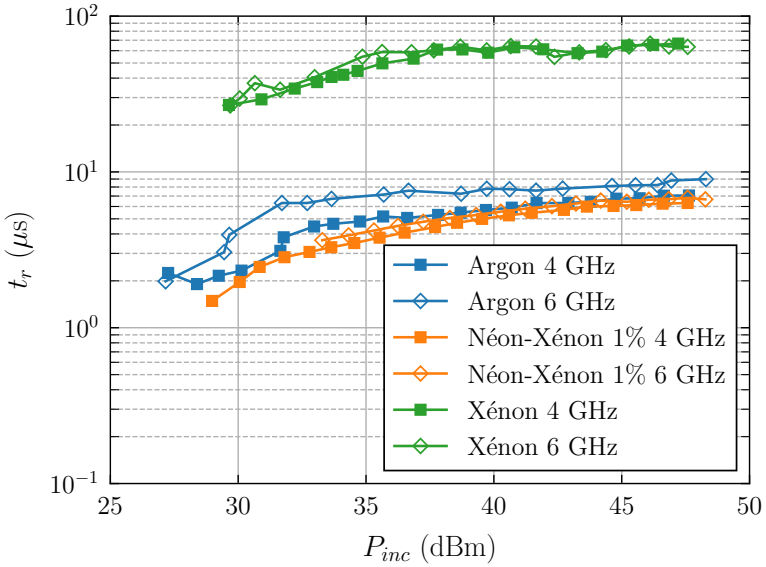


FIGURE 5.15 – Temps de recouvrement théoriques et mesurés pour la ligne inversée en fonction de la puissance incidente dans l'Argon, le Néon-Xénon 1% et le Xénon, pour une pression de 10 Torr et deux fréquences d'agression de 4 GHz et 6 GHz.

qui sont d'autant plus fortes que la température électronique est faible. La différence dans les temps de recouvrement s'explique alors par l'écart entre les coefficients de diffusion des ions dans chaque gaz. En effet, plus les pertes par diffusion sont lentes, plus le temps de recouvrement est long, ce qui explique que le Néon-Xénon 1% soit plus rapide que l'Argon, lui même étant plus rapide que le Xénon. Ainsi le Xénon qui avait amélioré les performances du point de vue de la puissance de fuite a fortement dégradé les résultats pour le temps de recouvrement. Cela illustre bien l'antinomie entre optimisation de la puissance de fuite et optimisation du temps de recouvrement. Tous deux sont fonctions des pertes de particules, mais le temps de recouvrement diminue lorsque les pertes augmentent alors que la puissance de fuite augmente.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle topologie de limiteur, en ligne microruban inversée, basée sur la compréhension du fonctionnement de la ligne microruban suspendue exposée dans les troisième et quatrième chapitres. Ce nouveau limiteur, a tout d'abord été testé dans l'Argon à 10 Torr, et il a été démontré que :

- La transition limiteur/atténuateur qui existait dans la ligne suspendue a été supprimée, et la puissance de fuite pour une fréquence d'agression de 3 GHz est désormais constante en fonction de la puissance incidente, pour des puissances d'agression allant jusqu'à 50 dBm, à savoir 100 W. Les performances de ce nouveau limiteur ont également été éprouvées pour différentes fréquences d'agression comprise entre 3 et 6 GHz.

- Le temps de recouvrement a été diminué par rapport à la ligne suspendue. Celui-ci est désormais inférieur à dix microsecondes quelle que soit la puissance incidente, pour des puissances d'agression allant jusqu'à 50 dBm. Le temps de recouvrement a alors été réduit, au mieux, d'un facteur neuf par rapport à la ligne suspendue.

Pour finir, nous avons également étudié l'effet d'un changement du gaz sur les performances du limiteur. Pour ce faire, deux gaz supplémentaires ont été testés, à savoir un mélange de Néon-Xénon à 1% de Xénon et du Xénon pur, à une pression de 10 Torr. Le mélange de Néon-Xénon a démontré des performances similaires à celles de l'Argon sur la puissance de fuite, avec un temps de recouvrement légèrement plus faible. Le Xénon quant à lui a des performances avec une puissance de fuite aux alentours de 20 dBm, en revanche le temps de recouvrement a été fortement dégradé, et est alors de l'ordre du temps de recouvrement de la ligne suspendue dans l'Argon. Les variations des puissances de fuite et des temps de recouvrement ont alors pu être reliées aux coefficients de diffusion des ions dans les différents gaz en suivant les principes dégagés dans les chapitres précédents. Ainsi, il apparait que l'augmentation des pertes d'énergie des électrons dans les collisions avec le gaz neutre et par transport convectif aux parois, améliorent le temps de recouvrement mais dégradent la puissance de fuite. Un compromis doit alors être trouvé, en fonction de la valeur de puissance de fuite que l'on souhaite avoir. Enfin, notons que les temps de claquage à haute puissance n'ont pas été radicalement modifiés.

Conclusion générale

Rappel du contexte

Avec la multiplication des systèmes de télécommunication et le développement d'armes à énergie dirigée électromagnétiques, il est devenu nécessaire de protéger les systèmes de réception contre des agressions électromagnétiques de forte puissance. Une solution pour y parvenir consiste à concevoir et à intégrer des dispositifs permettant de limiter la puissance arrivant sur les récepteurs. Dans ce contexte, ces travaux de thèse ont pour objectif de poursuivre le développement d'un dispositif de protection microonde dont le fonctionnement repose sur l'interaction non-linéaire du signal microonde avec une décharge plasma, le tout au sein d'une ligne microruban suspendue. Les travaux réalisés ont pour but d'approfondir le champ des connaissances sur les interactions entre les ondes électromagnétiques et les décharges plasma, de développer une compréhension fine de la physique à l'œuvre dans les différentes caractéristiques du limiteur et enfin d'exploiter ces connaissances afin de proposer des pistes d'optimisation pour le dispositif.

Conclusion

- **Notions de base en physique des plasmas et en électromagnétisme :** Ce premier chapitre a permis d'exposer les concepts théoriques nécessaires pour pouvoir décrire les plasmas, et en particulier les plasmas froids hors-équilibre thermodynamique, ainsi que la propagation des ondes électromagnétiques dans ces milieux. Ces notions ont été regroupées dans ce chapitre afin de simplifier la lecture et ont ensuite été utilisées tout au long du manuscrit afin d'élaborer des modèles analytiques permettant de décrire les phénomènes observés expérimentalement et numériquement.

- **Modèle numérique et dispositif expérimental :** Dans le deuxième chapitre, nous avons exploité les concepts présentés dans le premier chapitre afin d'introduire le code de simulation 2D PlasmaSimWave développé par Gerjan Hagelaar au laboratoire LAPLACE. Ce code de simulation permet de coupler un ensemble d'équations fluides décrivant la dynamique du plasma, aux équations de Maxwell décrivant la dynamique des microondes afin de simuler l'interaction microonde/plasma dans le limiteur. Un modèle chimique a par ailleurs été proposé afin de décrire les réactions à l'œuvre lorsque le limiteur est en fonctionnement. Dans un deuxième temps, le banc expérimental développé par Clovis Pouant au CEA de Gramat a été présenté. Ce banc a permis d'effectuer les caractérisations du limiteur et de compléter le jeu de données déjà obtenu dans la précédente thèse.

- **Fonctionnement du limiteur à l'état stationnaire :** Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse des phénomènes en jeu dans le limiteur en ligne microruban suspendue, à la fois théorique, numérique et expérimentale. Les résultats obtenus par simulation de la ligne avec PlasmaSimWave sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, sur une plage de puissance comprise entre 25 dBm et 45 dBm. Nous avons pu observer que le limiteur en ligne microruban suspendue est essentiellement un limiteur absorptif, puisque plus de 60 % de la

puissance est absorbée par le plasma. Par ailleurs l'augmentation des puissances réfléchie et absorbée est la conséquence de l'augmentation de la densité en tête de colonne et de l'augmentation de la production d'électrons, visible par l'allongement de la colonne.

Une étude analytique a ensuite été conduite afin de comprendre comment le signal est guidé dans la ligne et comment la puissance microonde se couple au plasma. En ce qui concerne le premier point, une étude modale de la ligne a permis de mettre au jour deux types de propagation différents :

- La propagation par onde de surface pour laquelle le vecteur d'onde dans la cavité est colinéaire à l'interface, et ou une évanescence apparait suivant la hauteur du dispositif. C'est le mode qui se propage dans la ligne sans plasma pour une fréquence de 3 GHz.

- La propagation par onde de fuite où le signal est guidé entre les deux plans métalliques, et subit une succession de réfractions par l'interface diélectrique/vide et de réflexions sur les plans métalliques.

Pour ce qui est du deuxième point une étude en présence d'un plasma uniforme a permis de montrer le changement de nature du mode en fonction de la densité électronique. Ainsi, pour une fréquence de 3 GHz et une pression de 10 Torr, les trois types de modes suivants sont observés :

- Si la densité électronique est nulle, *i.e.* s'il n'y a pas de plasma dans la cavité, le mode qui se propage est un mode d'onde de surface.

- Si la densité électronique est non nulle et inférieure à 3.08×10^{18} m^{-3}, le mode qui se propage dans la cavité est une onde de fuite à pertes, et le diélectrique rayonne alors de la puissance dans le plasma.

- Si la densité électronique est égale à 3.08×10^{18} m^{-3}, le mode qui se propage dans la cavité est une onde de surface à pertes.

- Si la densité électronique est supérieure à 3.08×10^{18} m^{-3}, le mode qui se propage est une onde de fuite.

Une étude des cartographies de vecteur de Poynting a permis de vérifier ces résultats obtenus analytiquement.

Pour finir, nous avons développé une expression analytique pour la puissance de fuite, *i.e.* la puissance en sortie du limiteur, laquelle correspond à la puissance minimale que doit véhiculer l'onde pour pouvoir entretenir le plasma. Cette approche calculatoire nous a permis de montrer que la puissance de fuite est indépendante de la puissance incidente, ce que nous avons pu observer en simulation et en expérience, mais dépend en revanche des paramètres qui caractérisent le plasma, en particulier de la fréquence de transfert de quantité de mouvement, ainsi que de la géométrie de la ligne. En effet, la puissance de fuite du limiteur est constante en fonction de la puissance incidente tant que le plasma est libre de s'étendre dans la cavité, lorsque le plasma remplit toute la cavité, le circuit passe en mode atténuateur, et la puissance de fuite se met à croitre en fonction de la puissance incidente. Par ailleurs la dépendance de la puissance de fuite en fonction de la hauteur du substrat diélectrique sur lequel est imprimée la ligne a été étudiée, en conservant constante la hauteur de la cavité. Nous avons alors observé qu'une augmentation de l'épaisseur du diélectrique entraine une augmentation de la puissance de fuite. De plus, cela entraine une augmentation de la longueur de colonne, la puissance transitant dans le diélectrique et rayonnée dans le plasma étant plus importante.

- **Fonctionnement du limiteur en régime transitoire :** Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse des phénomènes transitoires en jeu dans le limiteur en ligne microruban suspendue, à la fois théorique, numérique et expérimentale. Les résultats obtenus par simulation de la ligne avec PlasmaSimWave fournissent les mêmes tendances que celles observées expérimentalement. Ainsi, nous avons pu relier finement la dynamique des taux de puissance et la dynamique du plasma. Cette dernière a ensuite été explorée théoriquement, et nous avons montré que le déplacement de la densité électronique vers l'entrée du limiteur était due à la propagation d'une onde d'ionisation, se déplaçant à la vitesse $v_f = 2\sqrt{D\nu_i}$. En outre, une réflexion basée sur les données de simulation ainsi que sur un modèle d'interaction onde/plasma en tête de colonne ont permis de montrer que cette propagation est principalement due au chauffage des électrons en tête de front qui génère des états excités, lesquels après avoir été ionisés permettent de faire avancer le front de densité. Pour le problème de la limitation de puissance qui nous occupe, nous avons mené une étude sur les trois temps principaux caractéristiques du limiteur que sont le temps de claquage, le temps de réponse et le temps de recouvrement.

- **Vers une nouvelle topologie : la ligne inversée :** Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle topologie de limiteur, en ligne microruban inversée, basée sur la compréhension du fonctionnement de la ligne microruban suspendue exposée dans dans les troisième et quatrième chapitres. Ce nouveau limiteur, a tout d'abord été testé dans l'Argon à 10 Torr, et il a été démontré que la transition limiteur/atténuateur qui existait dans la ligne microruban suspendue a été supprimée et la puissance de fuite pour une fréquence d'agression de 3 GHz est désormais constante en fonction de la puissance incidente, pour des puissances d'agression allant jusqu'à 50 dBm, à savoir 100 W. Les performances de ce nouveau limiteur ont également été éprouvées pour différentes fréquences d'agression comprises entre 3 et 6 GHz, et une diminution de la puissance de fuite a pu être observée en fonction de la fréquence de l'onde. Pour finir, le temps de recouvrement a été diminué par rapport à la ligne suspendue. Celui-ci est désormais inférieur à dix microsecondes quelle que soit la puissance incidente, pour des puissances d'agression allant jusqu'à 50 dBm. Le temps de recouvrement a alors été réduit, au mieux, d'un facteur neuf par rapport à la ligne microruban suspendue.

  Pour finir, nous avons également étudié l'effet d'un changement du gaz sur les performances du limiteur. Pour ce faire, deux gaz supplémentaires ont été testés, à savoir un mélange de Néon-Xénon à 1% de Xénon et du Xénon pur, à une pression de 10 Torr. Le mélange de Néon-Xénon a démontré des performances similaires à celles de l'Argon sur la puissance de fuite, avec un temps de recouvrement légèrement plus faible. Le Xénon quant à lui a des performances avec une puissance de fuite aux alentours de 20 dBm, en revanche le temps de recouvrement a été fortement dégradé, et est alors de l'ordre du temps de recouvrement de la ligne suspendue dans l'Argon. Les variations des puissances de fuite et des temps de recouvrement ont alors pu être reliées aux coefficients de diffusion des ions dans les différents gaz en suivant les principes dégagés dans les chapitres précédents. Ainsi, il apparait que l'augmentation des pertes d'énergie des électrons dans les collisions avec le gaz neutre et par transport convectif aux parois, améliorent le temps de recouvrement mais dégradent la puissance de fuite. Un compromis doit alors être trouvé, en fonction de la valeur de puissance de fuite que l'on souhaite avoir. Enfin, notons que les temps de claquage à haute puissance n'ont pas été radicalement modifiés.

Perspectives

Les perspectives de ces travaux de thèse sont séparées en deux catégories, à savoir les améliorations sur le plan technologique et les évolutions sur le plan de la physique fondamentale. Sur le plan technologique tout d'abord :

- **Caractérisation de la ligne microruban inversée en régime pulsée :** Dans ces travaux de thèse nous avons caractérisé la ligne inversée en régime CW afin d'avoir une proximité entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation. Le nouveau limiteur a alors été caractérisé pour des puissances incidentes allant jusqu'à 100 W. Il serait intéressant de le caractériser en régime pulsé, afin de pouvoir atteindre de plus grande puissances d'entrée de l'ordre du kilowatt par exemple. A priori, les travaux menés par S. D. Patel nous laissent penser que le limiteur pourra supporter ces niveaux de puissance en entrée.

- **Encapsulation de la décharge :** Un pas essentiel vers la conception d'un limiteur opérationnel reste l'encapsulation du dispositif. Il s'agit alors d'enfermer le gaz dans une capsule étanche afin de pouvoir supprimer la cloche à vide, la bouteille de gaz et le système de pompage.

- **Couplage du circuit avec une diode PIN :** Comme nous l'avons dit en introduction, les limiteurs de puissance du marché combinent généralement plusieurs technologies : une dont les performances en termes de tenue en puissance sont moindres mais qui possède un temps de réponse très court, et une capable de tenir des fortes puissances incidentes. Une idée pour améliorer les performances de notre limiteur sur le plan du temps de réponse consisterait à reprendre une structure semblable à celle des limiteurs à diodes PIN en topologie « branched », et de remplacer la diode PIN capable de tenir la puissance par la ligne microruban inversée. Une diode PIN qui résiste à des agressions de deux ou trois Watts CW pourrait alors suffire puisque le seuil de déclenchement et la puissance de fuite sont inférieures à ces valeurs.

En ce qui concerne la physique fondamentale, voici quelques points qui pourraient être explorés :

- **Amélioration des données d'entrée pour la simulation :** Comme nous l'avons vu au cours de ces travaux, les résultats obtenus avec le code de simulation PlasmaSimWave, bien qu'ils donnent les bonnes tendances sont pour autant loin de reproduire fidèlement les résultats obtenus expérimentalement. Une prospection pourrait être réalisée afin d'améliorer les jeu de données d'entrée. On pourrait par exemple tabuler les données en fonction du degré d'ionisation et de la température électronique, ce qui permettrait en quelque sorte de décrire spatialement la fonction de distribution en énergie des électrons. Une autre option consisterait à prendre en compte l'effet des oscillations de champ dans le calcul de la fonction de distribution.

- **Prise en compte de la température du gaz :** Dans tous les développements que nous avons présentés au cours de cette thèse, la température du gaz a toujours été supposée égale à 300 K. Or pour des impulsions de très forte puissance, de l'ordre du kilowatt par exemple, il se pourrait que cette hypothèse ne soit plus vérifiée. Il conviendrait donc d'effectuer des mesures de température du gaz par des moyens spectroscopiques par exemple, afin de s'assurer qu'il n'y a pas une augmentation significative de la température des neutres. Dans le cas contraire, il conviendrait d'étudier l'effet de cette élévation de température sur les propriétés du limiteur, soit en adaptant les différentes formules analytiques, soit en modifiant le code de simulation.

- **Application de l'analyse modale au cas des surfatrons :** Les surfatrons sont des sources plasma alimentées par des champs microondes qui ont été développées dans les années 1980 notamment par M. Moisan [85, 86], dans lesquelles un plasma est généré dans un tube en verre à l'aide d'un signal microonde. Il est communément admis que l'alimentation de la décharge est assurée par une onde de surface qui se propage à l'interface entre le verre et le plasma. Bien qu'au départ ces sources microondes ont été conçues pour fonctionner à des pressions telles que la fréquence de transfert de quantité de mouvement soit négligeable devant la pulsation de l'onde, elles ont depuis été étendues pour fonctionner dans des gammes de pressions où cette condition n'est plus vérifiée. Il semble qu'aucune analyse modale rigoureuse n'ait été effectuée pour ces dispositifs, et il serait intéressant d'en effectuer une en reprenant les méthodes développées dans le troisième chapitre afin de savoir précisément comment l'onde se couple au

plasma.

.

Annexe A

Calcul des coefficients d'emprisonnement pour la ligne microruban suspendue

A.1 Élargissement Doppler

D'après Holstein [43], pour un gaz enfermé entre deux plans parallèles infinis séparés d'une distance L, et pour une radiation « résonnante », (*i.e.* d'un niveau excité vers le fondamental), le coefficient d'échappement α_{21} pour la radiation issue de la désexcitation d'un niveau excité 2 vers le niveau fondamental 1 s'écrit :

$$\alpha_{21} = \frac{1.875}{\kappa_{21} L \sqrt{\pi \ln\left(\frac{1}{2}\kappa_{21} L\right)}} \tag{A.1}$$

avec κ_{21} défini par :

$$\kappa_{21} = \frac{\lambda_{21}^3 N_1}{8\pi} \frac{g_2}{g_1} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_1 \tau_2} \tag{A.2}$$

où N_1 est la densité d'atomes dans l'état fondamental ($\sim$ densité de gaz dans notre cas), λ_{21} la longueur d'onde de la radiation émise, τ_2 est la durée de vie du niveau excité, g_1 et g_2 sont les poids statistiques des niveaux fondamental et excité, et v_1 est définie par :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2RT_1}{M_1}} \tag{A.3}$$

où $R = \mathcal{N}_A k_B$ est la constante d'état des gaz parfaits et M la masse molaire de l'élément constituant le gaz. De là on peut récrire κ_{21} sous la forme :

$$\kappa_{21} = \frac{\lambda_{21}^3}{8\pi\sqrt{\pi}\tau_2} \frac{g_2}{g_1} \sqrt{\frac{M_1}{2R}} \frac{N_1}{\sqrt{T_1}} \tag{A.4}$$

Ce qui se récrit en fonction de la pression p_1 du gaz :

$$\kappa_{21} = \frac{\lambda_{21}^3}{8\pi\sqrt{\pi}\tau_2} \frac{g_2}{g_1} \sqrt{\frac{M_1}{2R}} \frac{1}{k_B} \frac{p_1}{T_1^{3/2}} \tag{A.5}$$

En considérant $\lambda_{rf} = 105.8$ nm, $\tau_r = 3.01 \times 10^{-9}$ s, $g_r = 6$, $g_f = 1$, $L = 1.524 \times 10^{-3}$ m, $M_f = 39.95 \times 10^{-3}$ kg.mol^{-1}, et $R = 8.314$ J.mol^{-1}.K^{-1}, il vient l'expression de $\kappa_{rf}L$:

$$\kappa_{rf}L = 2.87 \times 10^5 \frac{p_f}{T_f^{3/2}} \tag{A.6}$$

On a donc :

$$\alpha_{rf} = \frac{6.53 \times 10^{-6}}{\frac{p_f}{T_f^{3/2}} \sqrt{\pi \ln\left(1.44 \times 10^4 \frac{p_f}{T_f^{3/2}}\right)}} \tag{A.7}$$

A.2 Élargissement par collisions

D'après Holstein, pour un gaz enfermé entre deux plans parallèles infinis séparés d'une distance L, et pour une radiation « résonnante »(*i.e.* d'un niveau excité vers le fondamental), le coefficient d'échappement α_{21} pour la radiation de désexcitation d'un niveau excité 2 vers le niveau fondamental 1 s'écrit [44] :

$$\alpha_{21} = \frac{1.150}{\sqrt{\pi \kappa_{21} L}} \tag{A.8}$$

avec κ_{21} défini par :

$$\kappa_{21} = \frac{\lambda_{21}^2 N_1}{2\pi} \frac{g_2}{g_1} \frac{\gamma_2}{\gamma_p} \tag{A.9}$$

où N_1 est la densité d'atomes dans l'état fondamental ($\sim$ densité de gaz dans notre cas), λ_{21} la longueur d'onde de la radiation émise, γ_2 et γ_p sont définis par (*cf.* [87] et [43, 88])

$$\gamma_2 = \frac{8\pi e^2}{m_1 c} \frac{g_1}{g_2} \frac{f_{21}}{\lambda_{21}^2} \tag{A.10}$$

$$\gamma_p = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{m_1 \omega} f_{21} N_1 = \frac{4}{3} \frac{e^2 \lambda_{21}}{m_1 c} f_{21} N_1 \tag{A.11}$$

où f_{21} est la force d'oscillateur associée à la transition. On déduit le rapport γ_2/γ_p :

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_p} = \frac{6\pi^2}{N_1 \lambda_{21}^3} \frac{g_1}{g_2} \tag{A.12}$$

Ce qui permet de simplifier la formule de κ_{21} :

$$\kappa_{21} = \frac{3\pi}{\lambda_{21}} \tag{A.13}$$

Et la formule pour le coefficient d'échappement se réduit alors à :

$$\alpha_{21} = \frac{1.150}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_{21}}{3L}} \tag{A.14}$$

qui est la formule considérée par Grégorio [89]. Dans notre cas, il vient :

$$\alpha_{rf} \quad = \quad 1.761 \times 10^{-3} \tag{A.15}$$

Annexe B

Sections efficaces d'ionisation par étape dans le formalisme de Deutsch-Mark

B.1 Expression analytique des sections efficaces d'ionisation

La section efficace d'ionisation totale pour l'Argon peut être décomposée comme une somme sur les sections efficaces d'ionisation des niveaux intermédiaires suivant la formule développée par Deustch-Mark :

$$\sigma_{i,tot} = \sum_{n,l} \sigma_{i,nl} \tag{B.1}$$

où $\sigma_{i,nl}$ est définie par :

$$\sigma_{i,nl} = g_{nl} \pi r_{nl}^2 \xi_{nl} f(u) \tag{B.2}$$

avec :

$$f(u) = d\frac{1}{u}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^a \left[b + c\left(1 - \frac{1}{2u}\right)\ln\left(2.7 + \sqrt{u-1}\right)\right] \tag{B.3}$$

$$u = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{nl}} \tag{B.4}$$

où r_{nl} est le rayon de la sous-couche complète caractérisée par les nombres quantiques n et l, ξ_{nl} est le nombre d'électrons dans la sous-couche, g_{nl} sont des poids dont les valeurs sont calibrées vis-à-vis de l'expérience, $\mathcal{E}_{nl}$ est l'énergie d'ionisation pour la couche n et $\mathcal{E}$ est l'énergie de l'électron incident. Les facteurs a, b, c et d ainsi que les poids g_{nl} sont rappelés dans les tableaux de les tableaux B.2 et B.3. On remarque que les énergies d'ionisation associées aux couches $4s$ et $4s'$ (*cf.* tableau B.1), sont en fait les énergies d'ionisation des niveaux $1s_5$ et $1s_3$. On peut donc facilement calculer les sections efficaces d'ionisation des niveaux $1s_4$ et $1s_2$ puisqu'on connaît leurs énergies d'ionisation qui sont respectivement égales à 4.14 eV et 3.93 eV. Pour les quatre niveaux cités ci-dessus, la fonction f prend la forme :

$$f(u) = \frac{1.1}{u}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{1.06} \left[0.23 + \left(1 - \frac{1}{2u}\right)\ln\left(2.7 + \sqrt{u-1}\right)\right] \tag{B.5}$$

Avec u qui prend les différentes valeurs suivantes en fonction du niveau considéré :

$$u(1s_5) = \frac{\mathcal{E}}{4.21} \qquad u(1s_4) = \frac{\mathcal{E}}{4.14} \qquad u(1s_3) = \frac{\mathcal{E}}{4.04} \qquad u(1s_2) = \frac{\mathcal{E}}{3.93} \tag{B.6}$$

et $g_{nl} \times \mathcal{E}_{nl} = 7.40$ eV quel que soit le niveau considéré. La section efficace obtenue pour le niveau metastable $1s_5$ est cohérente avec les mesures de Dixon *et. al.* [90] rappelées dans [42]. Le taux d'ionisation par étape du niveau métastable (resp. rayonnant) effectif, est alors la somme des taux d'ionisation des niveaux $Ar(1s5)$ et $Ar(1s3)$ (resp. $Ar(1s4)$ et $Ar(1s2)$).

B.2 Données utiles pour le calcul des sections efficaces

Nombres quantiques n et l de l'électron de valence	r_{nl} (m)	$\mathcal{E}_{nl}$ (eV)
$4s$, $4s'$	2.49×10^{-10}	4.21, 4.04
$5s$, $5s'$	6.35×10^{-10}	1.69, 1.52
$6s$, $6s'$	1.26×10^{-9}	0.92, 0.75
$7s$, $7s'$	2.08×10^{-9}	0.58, 0.40
$4p$, $4p'$	3.40×10^{-10}	2.67, 2.38
$5p$, $5p'$	8.15×10^{-10}	1.24, 1.05
$6p$, $6p'$	1.52×10^{-9}	0.73, 0.55
$7p$, $7p'$	2.35×10^{-9}	0.49, 0.31
$3d$, $3d'$	4.36×10^{-10}	1.76, 1.51
$4d$, $4d'$	1.05×10^{-9}	0.99, 0.79
$5d$, $5d'$	1.84×10^{-9}	0.62, 0.44
$6d$, $6d'$	2.84×10^{-9}	0.42, 0.25
$7d$, $7d'$	3.89×10^{-9}	0.32, 0.13

TABLE B.1 – Valeurs de r_{nl} et $\mathcal{E}_{nl}$ pour l'électron de valence de l'argon le plus externe [40]

électrons s	électrons p	électrons d	électrons f
$a = 1.06$	$a = 2$	$a = 3/2$	$a = 3/2$
$b = 0.23$	$b = 1$	$b = 3$	$b = 1$
$c = 1$	$c = 1$	$c = 2/3$	$c = 2/3$
$d = 1.1$	$d = 1$	$d = 1$	$d = 1$

TABLE B.2 – Valeurs des constantes a, b, c et d pour les différentes sous-couches l [41]

Électron de valence (nl), nombre d'électrons dans la sous-couche	Facteur de poids réduit $g_{nl} \times \mathcal{E}_{nl}$
$(1s)$, 1	38.20
$(1s)$, 2	70.00
$(2s)$, 1	12.00
$(2s)$, 2	20.00
$(2p)$, 1	32.50
$(2p)$, 2–6	30.00
$(3s)$, 1	9.80
$(3s)$, 2	14.00
$(3p)$, 1	31.50
$(3p)$, 2–4	25.00
$(3p)$, 5–6	22.00
$(3d)$, 1–10	13.60
$(4s)$, 1	7.40
$(4s)$, 2	10.00
$(4p)$, 1	31.00
$(4p)$, 2–4	22.40
$(4p)$, 5	18.50
$(4p)$, 6	17.50
$(4d)$, tous les électrons	11.20
$(4f)$, tous les électrons	20.00
$(5s)$, 1	6.35
$(5s)$, 2	7.5
$(5p)$, 1	30.50
$(5p)$, 2–4	20.00
$(5p)$, 5	16.00
$(5p)$, 6	13.00
$(5d)$, tous les électrons	8.85
$(5f)$, tous les électrons	1.00
$(6s)$, 1	5.40
$(6s)$, 2	6.00
$(6p)$, 1	30.00
$(6p)$, 2–4	18.00
$(6p)$, 5	14.50
$(6p)$, 6	7.50
$(6d)$, tous les électrons	6.50

TABLE B.3 – Facteurs de poids réduits en fonction des nombres quantiques n et l ainsi que du nombre d'électrons de la couche de valence [41]

Annexe C

Calcul des intégrales surfaciques du carré des modules des champs et du flux d'énergie

C.1 Intégrale surfacique du carré du module du champ dans le plasma

Le module du champ électrique dans la partie plasma s'écrit :

$$\left|\underline{\boldsymbol{E}}_p\right|^2 = \underline{\boldsymbol{E}}_p \cdot \underline{\boldsymbol{E}}_p^* = \underline{E}_p^x \cdot \underline{E}_p^{x*} + \underline{E}_p^y \cdot \underline{E}_p^{y*} \tag{C.1}$$

et les composantes de champ électrique s'écrivent :

$$\underline{E}_p^x(y) = iE_0 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)} \tag{C.2}$$

$$\underline{E}_p^y(y) = E_0 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)} \tag{C.3}$$

Il vient alors :

$$\underline{E}_p^x(y)\underline{E}_p^{x*}(y) = |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_p]) \sinh^*(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p) \cosh^*(\underline{K}_p l_p)} \tag{C.4}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\sinh(\underline{K}_p[y+l_p]) \sinh(\underline{K}_p^*[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p) \cosh(\underline{K}_p^* l_p)} \tag{C.5}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\cosh([\underline{K}_p + \underline{K}_p^*][y+l_p]) - \cosh([\underline{K}_p - \underline{K}_p^*][y+l_p]}{\cosh([\underline{K}_p + \underline{K}_p^*]l_p) + \cosh([\underline{K}_p - \underline{K}_p^*]l_p)} \tag{C.6}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\cosh(2K_p'[y+l_p]) - \cosh(2iK_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p' l_p) + \cosh(2iK_p'' l_p)} \tag{C.7}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\cosh(2K_p'[y+l_p]) - \cos(2K_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p' l_p) + \cos(2K_p'' l_p)} \tag{C.8}$$

et :

$$\underline{E}_p^y(y)\underline{E}_p^{y*}(y) = |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])\cosh^*(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_p l_p)\cosh^*(\underline{K}_p l_p)} \tag{C.9}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{\cosh([\underline{K}_p+\underline{K}_p^*][y+l_p]) + \cosh([\underline{K}_p-\underline{K}_p^*][y+l_p]}{\cosh([\underline{K}_p+\underline{K}_p^*]l_p) + \cosh([\underline{K}_p-\underline{K}_p^*]l_p)} \tag{C.10}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{\cosh(2K_p'[y+l_p]) + \cos(2K_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)} \tag{C.11}$$

Il ne reste alors plus qu'à calculer les intégrales entre $-l_p$ et 0 :

$$\int_{-l_p}^{0} \underline{E}_p^x(y)\underline{E}_p^{x*}(y)\,\mathrm{d}y \tag{C.12}$$

$$= \int_{-l_p}^{0} |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\cosh(2K_p'[y+l_p]) - \cos(2K_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)}\,\mathrm{d}y \tag{C.13}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{1}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)} \left[\frac{\sinh(2K_p'[y+l_p])}{2K_p'} - \frac{\sin(2K_p''[y+l_p])}{2K_p''}\right]_{-l_p}^{0} \tag{C.14}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{1}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)} \left[\frac{\sinh(2K_p'l_p)}{2K_p'} - \frac{\sin(2K_p''l_p)}{2K_p''}\right] \tag{C.15}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{4K_p'K_p''l_p} \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{2K_p''l_p\sinh(2K_p'l_p) - 2K_p'l_p\sin(2K_p''l_p)}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)} \quad \text{si } K_p' \neq 0 \text{ et } K_p'' \neq 0 \tag{C.16}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_p''} \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{2K_p''l_p - \sin(2K_p''l_p)}{1+\cos(2K_p''l_p)} \quad \text{si } K_p' = 0 \text{ et } K_p'' \neq 0 \tag{C.17}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_p'} \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{\underline{K}_p}{\underline{k}}\right|^2 \frac{\sinh(2K_p'l_p) - 2K_p'l_p}{\cosh(2K_p'l_p)+1} \quad \text{si } K_p' \neq 0 \text{ et } K_p'' = 0 \tag{C.18}$$

de même :

$$\int_{-l_p}^{0} \underline{E}_p^y(y)\underline{E}_p^{y*}(y)\,\mathrm{d}y \tag{C.19}$$

$$= \int_{-l_p}^{0} |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{\cosh(2K_p'[y+l_p]) + \cos(2K_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)}\,\mathrm{d}y \tag{C.20}$$

$$= |E_0|^2 \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{1}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)} \left[\frac{\sinh(2K_p'l_p)}{2K_p'} + \frac{\sin(2K_p''l_p)}{2K_p''}\right] \tag{C.21}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{4K_p'K_p''l_p} \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{2K_p''l_p\sinh(2K_p'l_p) + 2K_p'l_p\sin(2K_p''l_p)}{\cosh(2K_p'l_p) + \cos(2K_p''l_p)} \quad \text{si } K_p' \neq 0 \text{ et } K_p'' \neq 0 \tag{C.22}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_p''} \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{2K_p''l_p + \sin(2K_p''l_p)}{1+\cos(2K_p''l_p)} \quad \text{si } K_p' = 0 \text{ et } K_p'' \neq 0 \tag{C.23}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_p'} \left|\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\right|^2 \frac{\sinh(2K_p'l_p) + 2K_p'l_p}{\cosh(2K_p'l_p)+1} \quad \text{si } K_p' \neq 0 \text{ et } K_p'' = 0 \tag{C.24}$$

si bien que :

$$\left\langle \left| \underline{\boldsymbol{E}}_p(y) \right|^2 \right\rangle_y = \begin{cases} \dfrac{|E_0|^2}{4K'_pK''_pl_p^2} \left| \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \right|^2 \left(\left| \dfrac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \right|^2 \mathcal{A}_-(2K'_pl_p, 2K''_pl_p) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathcal{A}_+(2K'_pl_p, 2K''_pl_p) \right) & \text{si } K'_p \neq 0 \text{ et } K''_p \neq 0 \quad \text{(C.25)} \\ \dfrac{|E_0|^2}{2K''_pl_p} \left| \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \right|^2 \left(\left| \dfrac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \right|^2 \mathcal{B}_-(2K''_pl_p) + \mathcal{B}_+(2K''_pl_p) \right) & \text{si } K'_p = 0 \text{ et } K''_p \neq 0 \quad \text{(C.26)} \\ \dfrac{|E_0|^2}{2K'_pl_p} \left| \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \right|^2 \left(\left| \dfrac{\underline{K}_p}{\underline{k}} \right|^2 \mathcal{C}_-(2K'_pl_p) + \mathcal{C}_+(2K'_pl_p) \right) & \text{si } K'_p \neq 0 \text{ et } K''_p = 0 \quad \text{(C.27)} \end{cases}$$

où les fonctions $\mathcal{A}_\pm$, $\mathcal{B}_\pm$ et $\mathcal{C}_\pm$ sont définies par :

$$\mathcal{A}_\pm(\eta, \xi) = \frac{\xi \sinh(\eta) \pm \eta \sin(\xi)}{\cosh(\eta) + \cos(\xi)} \quad \text{(C.28)}$$

$$\mathcal{B}_\pm(\eta) = \frac{\eta \pm \sin(\eta)}{1 + \cos(\eta)} \quad \text{(C.29)}$$

$$\mathcal{C}_\pm(\eta) = \frac{\sinh(\eta) \pm \eta}{\cosh(\eta) + 1} \quad \text{(C.30)}$$

C.2 Flux d'énergie

La composante $\underline{\Pi}_d^x = \underline{E}_d^y \times \underline{B}_d^{z*}/\mu_0$ du vecteur de Poynting dans le diélectrique s'écrit :

$$\underline{\Pi}_d^x(y) = |E_0|^2 \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0 \omega \underline{k}^*} \frac{\cos(\underline{K}_d[l_d - y]) \cos^*(\underline{K}_d[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_d l_d) \cos^*(\underline{K}_d l_d)} \quad \text{(C.31)}$$

$$= |E_0|^2 \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0 \omega \underline{k}^*} \frac{\cos(\underline{K}_d[l_d - y]) \cos(\underline{K}_d^*[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_d l_d) \cos(\underline{K}_d^* l_d)} \quad \text{(C.32)}$$

$$= |E_0|^2 \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0 \omega \underline{k}^*} \frac{\cos(2K'_d[l_d - y]) + \cosh(2K''_d[l_d - y])}{\cos(2K'_d l_d) + \cosh(2K''_d l_d)} \quad \text{(C.33)}$$

Il vient alors l'intégrale de la composante $\underline{\Pi}_d^x$ suivant la direction y :

$$\int_0^{l_d} \underline{\Pi}_d^x(y)\,\mathrm{d}y \tag{C.34}$$

$$= |E_0|^2 \frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{1}{\cos(2K_d'l_d)+\cosh(2K_d''l_d)}\left[-\frac{\sin(2K_d'[l_d-y])}{2K_d'}-\frac{\sinh(2K_d''[l_d-y])}{2K_d''}\right]_0^{l_d} \tag{C.35}$$

$$= |E_0|^2 \frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{1}{\cos(2K_d'l_d)+\cosh(2K_d''l_d)}\left[\frac{\sin(2K_d'l_d)}{2K_d'}+\frac{\sinh(2K_d''l_d)}{2K_d''}\right] \tag{C.36}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{4K_d'K_d''l_d}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{2K_d''l_d\sin(2K_d'l_d)+2K_d'l_d\sinh(2K_d''l_d)}{\cos(2K_d'l_d)+\cosh(2K_d''l_d)} \quad \text{si } K_d'\neq 0 \text{ et } K_d''\neq 0 \tag{C.37}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_d''}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{2K_d''l_d+\sinh(2K_d''l_d)}{1+\cosh(2K_d''l_d)} \quad \text{si } K_d'=0 \text{ et } K_d''\neq 0 \tag{C.38}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_d'}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{\sin(2K_d'l_d)+2K_d'l_d}{\cos(2K_d'l_d)+1} \quad \text{si } K_d'\neq 0 \text{ et } K_d''=0 \tag{C.39}$$

La composante $\underline{\Pi}_p^x = \underline{E}_p^y \times \underline{B}_p^{z*}/\mu_0$ du vecteur de Poynting dans le plasma s'écrit :

$$\underline{\Pi}_p^x = |E_0|^2 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])\cosh^*(\underline{K}_p[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_pl_p)\cosh^*(\underline{K}_pl_p)} \tag{C.40}$$

$$= |E_0|^2 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{\cosh(\underline{K}_p[y+l_p])\cosh(\underline{K}_p^*[y+l_p])}{\cosh(\underline{K}_pl_p)\cosh(\underline{K}_p^*l_p)} \tag{C.41}$$

$$= |E_0|^2 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{\cosh(2K_p'[y+l_p])+\cosh(2iK_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p'l_p)+\cosh(2iK_p''l_p)} \tag{C.42}$$

$$= |E_0|^2 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{\cosh(2K_p'[y+l_p])+\cos(2K_p''[y+l_p])}{\cosh(2K_p'l_p)+\cos(2K_p''l_p)} \tag{C.43}$$

Il vient alors l'intégrale de la composante $\underline{\Pi}_p^x$ suivant la direction y :

$$\int_{-l_p}^0 \underline{\Pi}_p^x(y)\,\mathrm{d}y \tag{C.44}$$

$$= |E_0|^2 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{1}{\cosh(2K_p'l_p)+\cos(2K_p''l_p)}\left[\frac{\sinh(2K_p'[y+l_p])}{2K_p'}+\frac{\sin(2K_p''[y+l_p])}{2K_p''}\right]_{-l_p}^0 \tag{C.45}$$

$$= |E_0|^2 \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{1}{\cosh(2K_p'l_p)+\cos(2K_p''l_p)}\left[\frac{\sinh(2K_p'l_p)}{2K_p'}+\frac{\sin(2K_p''l_p)}{2K_p''}\right] \tag{C.46}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{4K_p'K_p''l_p}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{2K_p''l_p\sinh(2K_p'l_p)+2K_p'l_p\sin(2K_p''l_p)}{\cosh(2K_p'l_p)+\cos(2K_p''l_p)} \quad \text{si } K_p'\neq 0 \text{ et } K_p''\neq 0 \tag{C.47}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_p''}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{2K_p''l_p+\sin(2K_p''l_p)}{1+\cos(2K_p''l_p)} \quad \text{si } K_p'=0 \text{ et } K_p''\neq 0 \tag{C.48}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2K_p'}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}}\frac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*}\frac{\sinh(2K_p'l_p)+2K_p'l_p}{\cosh(2K_p'l_p)+1} \quad \text{si } K_p'\neq 0 \text{ et } K_p''=0 \tag{C.49}$$

On en déduit l'intégrale de la composante $\underline{\Pi}^x$ sur la hauteur totale de la ligne :

$$\int_{-l_p}^{l_d} \underline{\Pi}^x(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^{l_d} \underline{\Pi}_d^x(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-l_p}^{0} \underline{\Pi}_p^x(y)\,\mathrm{d}y \tag{C.50}$$

avec :

$$\int_0^{l_d} \underline{\Pi}_d^x(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{|E_0|^2}{4K_d' K_d'' l_d} \dfrac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*} \mathcal{A}_+(2K_d'' l_d, 2K_d' l_d) & \text{si } K_d' \neq 0 \text{ et } K_d'' \neq 0 \quad (C.51) \\ \dfrac{|E_0|^2}{2K_d''} \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*} \mathcal{C}_+(2K_d'' l_d) & \text{si } K_d' = 0 \text{ et } K_d'' \neq 0 \quad (C.52) \\ \dfrac{|E_0|^2}{2K_d'} \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*} \mathcal{B}_+(2K_d' l_d) & \text{si } K_d' \neq 0 \text{ et } K_d'' = 0 \quad (C.53) \end{cases}$$

et :

$$\int_{-l_p}^{0} \underline{\Pi}_p^x(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{|E_0|^2}{4K_p' K_p'' l_p} \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \dfrac{k_0^2\,\underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*} \mathcal{A}_+(2K_p' l_p, 2K_p'' l_p) & \text{si } K_p' \neq 0 \text{ et } K_p'' \neq 0 \quad (C.54) \\ \dfrac{|E_0|^2}{2K_p''} \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*} \mathcal{B}_+(2K_p'' l_p) & \text{si } K_p' = 0 \text{ et } K_p'' \neq 0 \quad (C.55) \\ \dfrac{|E_0|^2}{2K_p'} \dfrac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \dfrac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^*}{\mu_0\omega\underline{k}^*} \mathcal{C}_+(2K_p' l_p) & \text{si } K_p' \neq 0 \text{ et } K_p'' = 0 \quad (C.56) \end{cases}$$

Annexe D

Établissement des solutions des équations de Korteweg-de Vries, de Burgers et de Burgers-Korteweg-de Vries

D.1 Équation de Korteweg-de Vries

Une écriture possible de l'équation de Korteweg-de Vries est la suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} + c\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \tag{D.1}$$

Si on recherche une solution stationnaire de cette équation, on peut procéder à un changement de référentiel en passant dans le référentiel du front qui se propage à la vitesse v et en faisant le changement de coordonnées $\xi = x - vt$. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = -v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \tag{D.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \tag{D.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2\xi} \tag{D.4}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}^3\xi} \tag{D.5}$$

D'où :

$$-v\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + a\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + c\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3} = 0 \tag{D.6}$$

On peut donc pratiquer une intégration par rapport à s :

$$-v\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi + a\int\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi + c\int\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3}\mathrm{d}\xi = K \quad \Rightarrow \quad -v\phi + \frac{a}{2}\phi^2 + c\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} = K \tag{D.7}$$

où $K = 0$ si on considère les deux limites $\phi \to 0$ et $\mathrm{d}_{\xi^n}\phi \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$, on cherche une solution localisée. On peut poursuivre l'intégration plus avant en multipliant l'équation ci-dessus par $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\xi$:

$$-v\phi + \frac{a}{2}\phi^2 + c\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -v\int \phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi + \frac{a}{2}\int \phi^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi + c\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}\mathrm{d}\xi = K' \tag{D.8}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{v}{2}\phi^2 + \frac{a}{6}\phi^3 + \frac{c}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = K' \tag{D.9}$$

avec toujours $K' = 0$ pour les mêmes raisons que celles données plus haut. On obtient alors :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{v}{c}\phi^2 - \frac{a}{3c}\phi^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = \pm\sqrt{\frac{v}{c}\phi^2 - \frac{a}{3c}\phi^3} \tag{D.10}$$

On peut alors effectuer une intégration par séparation de variables :

$$\sqrt{c}\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{v - a\phi/3}} = \pm\int \mathrm{d}\xi \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{v - a\phi/3}} = \sqrt{\frac{1}{c}}\left(\pm\,\xi + K''\right) \tag{D.11}$$

Terminons l'intégration en effectuant le changement de variable :

$$y^2 = v - a\phi/3 \quad \Rightarrow \quad 2y\mathrm{d}y = -a\mathrm{d}\phi/3 \tag{D.12}$$

d'où :

$$\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{v - a\phi/3}} = -\int \frac{6ay\mathrm{d}y}{3a(v - y^2)|y|} = -2\epsilon_y\int \frac{\mathrm{d}y}{v - y^2} \tag{D.13}$$

où $\epsilon_y = y/|y|$. Or :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1 - y^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = \operatorname{arctanh}(y) \tag{D.14}$$

Il vient donc finalement en faisant le changement de variable $z = y/\sqrt{v}$:

$$-2\epsilon_y\int \frac{\mathrm{d}y}{v - y^2} = -\frac{2\epsilon_y}{\sqrt{v}}\operatorname{arctanh}(z) \tag{D.15}$$

Il vient donc :

$$-\frac{2\epsilon_y}{\sqrt{v}}\operatorname{arctanh}(z) = \sqrt{\frac{1}{c}}\left(\pm\,\xi + K''\right) \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \tanh^2\left(-\epsilon_y\sqrt{\frac{v}{4c}}\left(\pm\,\xi + K''\right)\right) \tag{D.16}$$

$$\Leftrightarrow \quad v - \frac{a}{3}\phi = v\tanh^2\left(\sqrt{\frac{v}{4c}}\left(\pm\,\xi + K''\right)\right) \tag{D.17}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi = \frac{3v}{a}\left[1 - \tanh^2\left(\sqrt{\frac{v}{4c}}\left(\pm\,\xi + K''\right)\right)\right] \tag{D.18}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi = \frac{3v}{a}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{v}{4c}}\left(\pm\,\xi + K''\right)\right) \tag{D.19}$$

On peut retenir la solution pour $K'' = 0$:

$$\boxed{\phi = \frac{3v}{a}\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{v}{4c}}\xi\right)}$$

D.2 Équation de Burgers

Une écriture générale de l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{D.20}$$

On effectue le changement de variable $\xi = x - vt$, pour trouver l'équation stationnaire :

$$-v\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + a\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + b\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} = 0 \tag{D.21}$$

que l'on peut intégrer comme plus haut :

$$-v\phi + \frac{a}{2}\phi^2 + b\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{a}{2b}\phi^2 + \frac{v}{b}\phi \tag{D.22}$$

On peut effectuer une intégration par variables séparées :

$$-\frac{2b}{a}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi^2 - 2v\phi/a} = \int\mathrm{d}\xi \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{2b}{a}\int\frac{\mathrm{d}\phi}{(\phi - v/a)^2 - v^2/a^2} = \int\mathrm{d}\xi \tag{D.23}$$

En posant le changement de variable :

$$z = \frac{\phi - v/a}{v/a} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}\phi}{v/a} \tag{D.24}$$

D'où :

$$\int\frac{\mathrm{d}\phi}{(\phi - v/a)^2 - v^2/a^2} = -\frac{a}{2b}(\xi + K) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a}{v}\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1} = -\frac{a}{2b}(\xi + K) \tag{D.25}$$

$$\Leftrightarrow\quad -\frac{a}{v}\,\mathrm{arctanh}(z) = -\frac{a}{2b}(\xi + K) \tag{D.26}$$

$$\Leftrightarrow\quad z = \tanh\left(\frac{v}{2b}(\xi + K)\right) \tag{D.27}$$

$$\Leftrightarrow\quad \phi = \frac{v}{a}\left[1 + \tanh\left(\frac{v}{2b}(\xi + K)\right)\right] \tag{D.28}$$

On retient également la solution pour $K = 0$:

$$\boxed{\phi = \frac{v}{a}\left[1 + \tanh\left(\frac{v}{2b}\xi\right)\right]}$$

D.3 Équation de Burgers-Korteweg-de Vries

L'équation de Burgers-KdV s'écrit :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + c\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} = 0 \tag{D.29}$$

On retrouve les équations de KdV et de Burgers dans les limites $b \to 0$ et $a \to 0$ respectivement. Pour trouver la solution de cette équation, on va, comme plus haut, effectuer le changement de coordonnées $\xi = x - vt$ pour obtenir l'équation sous sa forme stationnaire :

$$-v\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + a\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + b\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + c\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3} = 0 \tag{D.30}$$

On suppose une solution ϕ superposition des solutions ϕ_{KdV} et $\phi_{Burgers}$ des équations de KdV et de Burgers :

$$\phi = A\,\mathrm{sech}^2(k\xi) + B\tanh(k\xi) + C \tag{D.31}$$

que l'on injecte dans l'équation stationnaire pour obtenir les valeurs des constantes A, B et k. Pour simplifier les calculs, on peut choisir de travailler sur l'équation sous sa forme intégrale :

$$-v\phi + \frac{a}{2}\phi^2 - b\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + c\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} = 0 \tag{D.32}$$

Afin de calculer les termes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{sech}(x) = -\mathrm{sech}(x)\tanh(x) \tag{D.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) = \mathrm{sech}^2(x) \tag{D.34}$$

$$\mathrm{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x) \tag{D.35}$$

de sorte à n'avoir des expressions qui se réduisent à des combinaisons linéaires de monômes de $\mathrm{sech}(x)$ ou de $\tanh(x)$. Il vient donc :

$$-v\phi = -vA\,\mathrm{sech}^2(k\xi) - vB\tanh(k\xi) - vC \tag{D.36}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 = {} & A^2\,\mathrm{sech}^4(k\xi) + \left(2AC - B^2\right)\mathrm{sech}^2(k\xi) - 2AB\tanh^3(k\xi) \\ & +2(AB + BC)\tanh(k\xi) + (B^2 + C^2)\end{aligned} \tag{D.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = -2Ak\tanh(k\xi) + 2Ak\tanh^3(k\xi) + Bk\,\mathrm{sech}^2(k\xi) \tag{D.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} = -6Ak^2\,\mathrm{sech}^4(k\xi) + 4Ak^2\,\mathrm{sech}^2(k\xi) + 2Bk^2\tanh^3(k\xi) - 2Bk^2\tanh(k\xi) \tag{D.39}$$

En injectant les expressions obtenues ci-dessus dans l'équation intégrale de BKdV, il vient :

$$\left[\frac{a}{2}A^2 - 6cAk^2\right]\operatorname{sech}^4(k\xi) + \left[-vA + \left(aAC - \frac{a}{2}B^2\right) + 4cAk^2 + bBk\right]\operatorname{sech}^2(k\xi)$$
$$\left[-aAB + 2bAk + 2cBk^2\right]\tanh^3(k\xi) + \left[-vB + (aAB + aBC)\right.$$
$$\left.-2bAk - 2cBk^2\right]\tanh(k\xi) + \left[\frac{a}{2}B^2 + \frac{a}{2}C^2 - vC\right] = 0 \tag{D.40}$$

Pour vérifier l'équation, il faut annuler tous les préfacteurs, *i.e.* trouver les expressions des 4 inconnues A, B, k, et v :

$$\begin{cases} \frac{a}{2}A^2 - 6cAk^2 = 0 & \text{(D.41)} \\ -vA + aAC - \frac{a}{2}B^2 + 4cAk^2 + bBk = 0 & \text{(D.42)} \\ -aAB + 2bAk + 2cBk^2 = 0 & \text{(D.43)} \\ -vB + aAB + aBC - 2bAk - 2cBk^2 = 0 & \text{(D.44)} \\ \frac{a}{2}B^2 + \frac{a}{2}C^2 - vC = 0 & \text{(D.45)} \end{cases}$$

Remarquons que la combinaison des équations (D.43) et (D.44) conduit à l'expression de C :

$$B(-v + aC) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{v}{a} \tag{D.46}$$

Injectons cette expression pour C dans l'équation (D.45), il vient alors l'expression de B :

$$\frac{a}{2}B^2 + \frac{a}{2}\frac{v^2}{a^2} - \frac{v^2}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B^2 = \frac{v^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{v}{a} \tag{D.47}$$

L'équation (D.41) conduit à l'expression de A en fonction de k^2 :

$$A(aA - 12ck^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 12\frac{c}{a}k^2 \tag{D.48}$$

Injectons toutes ces expressions dans l'équation (D.43), il vient alors :

$$-aAB + 2bAk + 2cBk^2 = 0 \tag{D.49}$$
$$\Leftrightarrow \quad -a \times 12\frac{c}{a}k^2 \times \frac{v}{a} + 2bk \times 12\frac{c}{a}k^2 + 2ck^2 \times \frac{v}{a} = 0 \tag{D.50}$$
$$\Leftrightarrow \quad -12ck^2\frac{v}{a} + 24\frac{bc}{a}k^3 + 2ck^2\frac{v}{a} = 0 \tag{D.51}$$
$$\Leftrightarrow \quad 24\frac{b}{a}k = 10\frac{v}{a} \tag{D.52}$$
$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{5}{12}\frac{v}{b} \tag{D.53}$$

On déduit donc l'expression de A en fonction de v :

$$A = 12\frac{c}{a} \times \left(\frac{5}{12}\frac{v}{b}\right)^2 = \frac{25}{12}\frac{cv^2}{ab^2} \tag{D.54}$$

En réinjectant toutes les expressions dans l'équation (D.42), il vient :

$$-\frac{a}{2}B^2 + 4cAk^2 + bBk = 0 \tag{D.55}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{a}{2}\left(\frac{v}{a}\right)^2 + 4c\left(\frac{25}{12}\frac{cv^2}{ab^2}\right)\left(\frac{5}{12}\frac{v}{b}\right)^2 + b \times \frac{v}{a} \times \frac{5}{12}\frac{v}{b} = 0 \tag{D.56}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{v^2}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{25}{12}\right)^2 \frac{c^2v^4}{ab^4} + \frac{5}{12}\frac{v^2}{a} = 0 \tag{D.57}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(\frac{25}{12}\right)^2 \frac{c^2v^2}{b^4} = 1 \tag{D.58}$$

$$\Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{12}{25}\right)^2 \frac{b^4}{c^2} = \frac{36}{25^2}\frac{b^4}{c^2} \tag{D.59}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{c} \tag{D.60}$$

On tire alors les valeurs de A, B et k en fonction de a, b et c :

$$A = \frac{25}{12}\frac{cv^2}{ab^2} = \frac{3}{25}\frac{b^2}{ac} \tag{D.61}$$

$$B = \frac{v}{a} = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{ac} \tag{D.62}$$

$$C = \frac{v}{a} = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{ac} \tag{D.63}$$

$$k = \pm\frac{1}{10}\frac{b}{c} \tag{D.64}$$

D'où les deux ensembles de solutions :

$$A = \frac{3}{25}\frac{b^2}{ac} \qquad B_\pm = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{ac} \qquad C = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{ac} \qquad k_\pm = \pm\frac{1}{10}\frac{b}{c} \qquad v_\pm = \pm\frac{6}{25}\frac{b^2}{c}$$

Annexe E

Expressions analytiques pour le raccordement modal

E.1 Constantes intervenant dans l'amplitude des champs

$$\underline{\alpha}_{p,g_2} = \frac{\underline{\epsilon}_{r,g_1}}{\underline{\epsilon}_{r,d}} \left(\left[\frac{\cosh(\underline{K}_p l_p)}{\sinh(\underline{K}_p l_p)} + \frac{\underline{K}_p}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}{\underline{K}_{g_2}} \frac{\cosh(\underline{K}_{g_2} l_{g_2})}{\sinh(\underline{K}_{g_2} l_{g_2})} \right] \cosh(\underline{K}_p l_p) - \frac{1}{\sinh(\underline{K}_p l_p)} \right)^{-1} \tag{E.1}$$

$$\underline{\beta}_{p,g_2} = \frac{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{K}_{g_2}} \underline{\alpha}_{p,g_2} \tag{E.2}$$

$$\underline{\alpha}_{p,g_1} = \underline{\alpha}_{p,g_2} \left[\frac{\cosh(\underline{K}_p l_p)}{\sinh(\underline{K}_p l_p)} + \frac{\underline{K}_p}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{\epsilon}_{r,g_2}}{\underline{K}_{g_2}} \frac{\cosh(\underline{K}_{g_2} l_{g_2})}{\sinh(\underline{K}_{g_2} l_{g_2})} \right] \sinh(\underline{K}_p l_p) \tag{E.3}$$

$$\underline{\beta}_{p,g_1} = \frac{\underline{\epsilon}_{r,g_1}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{K}_{g_1}} \underline{\alpha}_{p,g_1} \tag{E.4}$$

$$\underline{\alpha}_{d,g_1} = \underline{\alpha}_{p,g_1} \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{\epsilon}_{r,p}} \frac{\underline{K}_p}{\underline{K}_d} \left[\frac{\sin(\underline{K}_d l_d)}{\cos(\underline{K}_d l_d)} \cosh(\underline{K}_{g_1} l_{g_1}) - \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{K}_d} \frac{\underline{K}_{g_1}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}} \sinh(\underline{K}_{g_1} l_{g_1}) \right]^{-1} \tag{E.5}$$

$$\underline{\beta}_{d,g_1} = \underline{\beta}_{p,g_1} \frac{\sin(\underline{K}_d l_d)}{\cos(\underline{K}_d l_d)} \left[\frac{\sin(\underline{K}_d l_d)}{\cos(\underline{K}_d l_d)} \cosh(\underline{K}_{g_1} l_{g_1}) - \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}}{\underline{K}_d} \frac{\underline{K}_{g_1}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}} \sinh(\underline{K}_{g_1} l_{g_1}) \right]^{-1} \tag{E.6}$$

E.2 Expressions analytiques des champs électromagnétiques

E.2.1 Champs électromagnétiques dans la zone I

Dans la zone I, les champs s'écrivent, en prenant l'origine en $x = 0$:

- Dans le diélectrique :

$$\underline{E}_d^{x,\mathrm{I}} = \sum_j i \left[\delta_{j0} A_0^{\mathrm{I}} \, \mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}} x} + B_j^{\mathrm{I}} \, \mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}} x} \right] \underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}} \frac{\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}}{\underline{k}_j^{\mathrm{I}}} \frac{\sin(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} l_d)} \tag{E.7}$$

$$\underline{E}_d^{y,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0} A_0^{\mathrm{I}} \, \mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}} x} - B_j^{\mathrm{I}} \, \mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}} x} \right] \underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}} \frac{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} l_d)} \tag{E.8}$$

$$\underline{B}_d^{z,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0} A_0^{\mathrm{I}} \, \mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}} x} + B_j^{\mathrm{I}} \, \mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}} x} \right] \underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega \underline{k}_j^{\mathrm{I}}} \frac{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}[l_d - y])}{\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} l_d)} \tag{E.9}$$

- Dans la gaine n°1 :

$$\underline{E}_{g_1}^{x,\mathrm{I}} = \sum_j i\left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{I}}}\frac{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}}{\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}l_{g_1})}\right.$$
$$\left. -\underline{\beta}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}l_{g_1})}\right] \tag{E.10}$$

$$\underline{E}_{g_1}^{y,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} - B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{I}}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}l_{g_1})}\right.$$
$$\left. -\underline{\beta}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}l_{g_1})}\right] \tag{E.11}$$

$$\underline{B}_{g_1}^{z,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}l_{g_1})}\right.$$
$$\left. -\underline{\beta}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}l_{g_1})}\right] \tag{E.12}$$

- Dans le plasma :

$$\underline{E}_{p}^{x,\mathrm{I}} = \sum_j i\left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{I}}}\frac{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}}{\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}l_p)}\right.$$
$$\left. -\underline{\alpha}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}}\frac{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}l_p)}\right] \tag{E.13}$$

$$\underline{E}_{p}^{y,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} - B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{I}}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}l_p)}\right.$$
$$\left. -\underline{\alpha}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}l_p)}\right] \tag{E.14}$$

$$\underline{B}_{p}^{z,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}l_p)}\right.$$
$$\left. -\underline{\alpha}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}l_p)}\right] \tag{E.15}$$

- Dans la gaine n°2 :

$$\underline{E}_{g_2}^{x,\mathrm{I}} = \sum_j i\left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\underline{\beta}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{I}}}\frac{\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}}{\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}l_{g_2})} \tag{E.16}$$

$$\underline{E}_{g_2}^{y,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} - B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\underline{\beta}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{I}}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}l_{g_2})} \tag{E.17}$$

$$\underline{B}_{g_2}^{z,\mathrm{I}} = \sum_j \left[\delta_{j0}A_0^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_0^{\mathrm{I}}x} + B_j^{\mathrm{I}}\,\mathrm{e}^{-i\underline{k}_j^{\mathrm{I}}x}\right]\underline{\beta}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega\underline{k}_j^{\mathrm{I}}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}l_{g_2})} \tag{E.18}$$

E.2.2 Champ électromagnétique dans la zone II

Dans la zone II, on va chercher le champ électromagnétique comme somme d'ondes incidentes (dont l'origine est en $x = 0$) et rétro-diffusées (dont l'origine est en $x = L$), il vient :

- Dans le diélectrique :

$$\underline{E}_d^{x,\mathrm{II}} = \sum_m iA_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}}{\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\frac{\sin(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.19}$$

$$\underline{E}_d^{y,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.20}$$

$$\underline{B}_d^{z,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\frac{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}[l_d-y])}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.21}$$

- Dans la gaine n°1 :

$$\underline{E}_{g_1}^{x,\mathrm{II}} = \sum_m iA_m^{\mathrm{II}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{II}}}\frac{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}}{\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}-\underline{\beta}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.22}$$

$$\underline{E}_{g_1}^{y,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{II}}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}-\underline{\beta}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.23}$$

$$\underline{B}_{g_1}^{z,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\left[\underline{\beta}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}-\underline{\beta}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}y)}{\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.24}$$

- Dans le plasma :

$$\underline{E}_p^{x,\mathrm{II}} = \sum_m iA_m^{\mathrm{II}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{II}}}\frac{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}}{\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}-\underline{\alpha}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.25}$$

$$\underline{E}_p^{y,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{II}}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}-\underline{\alpha}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.26}$$

$$\underline{B}_p^{z,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\left[\underline{\alpha}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}+l_p])}{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}-\underline{\alpha}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{\cosh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}])}{\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}\right]\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.27}$$

- Dans la gaine n°2 :

$$\underline{E}_{g_2}^{x,\mathrm{II}} = \sum_m iA_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\beta}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{II}}}\frac{\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}}{\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\frac{\sinh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}l_{g_2})}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.28}$$

$$\underline{E}_{g_2}^{y,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\beta}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{II}}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}l_{g_2})}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.29}$$

$$\underline{B}_{g_2}^{z,\mathrm{II}} = \sum_m A_m^{\mathrm{II}}\,\underline{\beta}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{k_0^2\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega\underline{k}_m^{\mathrm{II}}}\frac{\cosh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}[y+l_{g_1}+l_p+l_{g_2}])}{\sinh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}l_{g_2})}\,\mathrm{e}^{i\underline{k}_m^{\mathrm{II}}x} \tag{E.30}$$

E.3 Système linéaire pour le raccordement modal

Soit le vecteur solution X défini par :

$$X = \begin{pmatrix} B_0^{\mathrm{I}} \\ \vdots \\ B_J^{\mathrm{I}} \\ A_0^{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ A_M^{\mathrm{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(B_j^{\mathrm{I}}\right)_{0\leqslant j\leqslant J} \\ \\ \left(A_m^{\mathrm{II}}\right)_{0\leqslant m\leqslant M} \end{pmatrix} \tag{E.31}$$

celui-ci vérifie le système matriciel $Y \cdot X = Z$, où la matrice Y est une matrice carrée, définie par bloc :

$$Y = \begin{pmatrix} \left(Y_{qj}^{1,1}\right)_{\substack{0\leqslant q\leqslant M \\ 0\leqslant j\leqslant J}} & \left(Y_{qm}^{1,2}\right)_{\substack{0\leqslant q\leqslant M \\ 0\leqslant m\leqslant M}} \\ \\ \left(Y_{qj}^{2,1}\right)_{\substack{0\leqslant q\leqslant J \\ 0\leqslant j\leqslant J}} & \left(Y_{qm}^{2,2}\right)_{\substack{0\leqslant q\leqslant J \\ 0\leqslant m\leqslant M}} \end{pmatrix} \tag{E.32}$$

où on identifie :

$$Y_{qj}^{1,1} = \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}*}} Q_{tot}^{\mathrm{I}}(j,q) \tag{E.33}$$

$$Y_{qm}^{1,2} = \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}*}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,q) \tag{E.34}$$

$$Y_{qj}^{2,1} = \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega \underline{k}_j^{\mathrm{I}}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(q,j)^* \tag{E.35}$$

$$Y_{qm}^{2,2} = -\frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\omega \underline{k}_m^{\mathrm{II}}} Q_{tot}^{\mathrm{II}}(q,m)^* \tag{E.36}$$

tous les autres termes étant nuls. Le vecteur Z s'écrit alors :

$$Z = \begin{pmatrix} \left(Z_j^1\right)_{0\leqslant j\leqslant J} \\ \\ \left(Z_m^2\right)_{0\leqslant m\leqslant M} \end{pmatrix} \tag{E.37}$$

avec :

$$Z_j^1 = A_0^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}*}}{\omega \underline{k}_q^{\mathrm{I}*}} Q_{tot}^{\mathrm{I}}(0,q) \tag{E.38}$$

$$Z_m^2 = -A_0^{\mathrm{I}} \frac{k_0^2 \underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{I}}}{\omega \underline{k}_0^{\mathrm{I}}} \mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(q,0)^* \tag{E.39}$$

tous les autres termes étant nuls.

E.4 Intégrales de couplage et termes de pondération

E.4.1 Intégrale de couplage

Les intégrales de couplage s'écrivent :

$$\mathcal{I}_{tot}^{\mathrm{II,I}}(m,j) = \mathcal{I}_{d}^{\mathrm{II,I}}(m,j) + \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_1}^{\mathrm{II}}}\mathcal{I}_{g_1}^{\mathrm{II,I}}(m,j) + \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,p}^{\mathrm{II}}}\mathcal{I}_{p}^{\mathrm{II,I}}(m,j) + \frac{\underline{\epsilon}_{r,d}^{\mathrm{II}}}{\underline{\epsilon}_{r,g_2}^{\mathrm{II}}}\mathcal{I}_{g_2}^{\mathrm{II,I}}(m,j) \tag{E.40}$$

et où les sous-intégrales de couplage sont définies par :

$$\mathcal{I}_{d}^{\mathrm{II,I}}(m,j) = \underline{\alpha}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\alpha}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}}\frac{\mathcal{F}_d(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}^*},\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}) + \mathcal{F}_d(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}^*},-\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}})}{\cos(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}l_d)\cos(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}^*}l_d)} \tag{E.41}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{g_1}^{\mathrm{II,I}}(m,j) = {} & \frac{\mathcal{F}_{g_1}(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}^*},\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}) + \mathcal{F}_{g_1}(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}^*},-\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}})}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}^*}l_{g_1})\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}\left(\underline{\beta}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\beta}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{\beta}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\beta}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\right)\\ & -\frac{\mathcal{G}_{g_1}(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}^*},\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}) + \mathcal{G}_{g_1}(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}^*},-\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}})}{\sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}^*}l_{g_1})\sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}l_{g_1})}\left(\underline{\beta}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\beta}_{d,g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{\beta}_{d,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\beta}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}}\right)\end{aligned} \tag{E.42}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{p}^{\mathrm{II,I}}(m,j) = {} & \frac{\mathcal{F}_p(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}^*},\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}) + \mathcal{F}_p(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}^*},-\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}})}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}^*}l_p)\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}\left(\underline{\alpha}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\alpha}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{\alpha}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\alpha}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\right)\\ & -\frac{\mathcal{G}_p(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}^*},\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}) + \mathcal{G}_p(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}^*},-\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}})}{\sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}^*}l_p)\sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}l_p)}\left(\underline{\alpha}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\alpha}_{p,g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{\alpha}_{p,g_1,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\alpha}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\right)\end{aligned} \tag{E.43}$$

$$\mathcal{I}_{g_2}^{\mathrm{II,I}}(m,j) = \underline{\beta}_{p,g_2,j}^{\mathrm{I}^*}\,\underline{\beta}_{p,g_2,m}^{\mathrm{II}}\frac{\mathcal{F}_{g_2}(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}^*},\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}) + \mathcal{F}_{g_2}(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}^*},-\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}})}{\sinh(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}^*}l_{g_2})\sinh(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}l_{g_2})} \tag{E.44}$$

où les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, s'écrivent :

$$\mathcal{F}_d(\eta,\xi) = \begin{cases}\dfrac{\sin([\eta+\xi]\,l_d)}{2(\eta+\xi)} & \text{pour } \eta \neq -\xi\\ \dfrac{l_d}{2} & \text{pour } \eta = -\xi\end{cases} \tag{E.45}$$

$$\mathcal{F}_{g_1}(\eta,\xi) = \begin{cases}\dfrac{\sinh([\eta+\xi]\,l_{g_1})}{2(\eta+\xi)} & \text{pour } \eta \neq -\xi\\ \dfrac{l_{g_1}}{2} & \text{pour } \eta = -\xi\end{cases} \tag{E.46}$$

$$\mathcal{G}_{g_1}(\eta,\xi) = \begin{cases}\dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\eta+\xi]l_{g_1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\eta-\xi]l_{g_1}\right)}{\eta+\xi} & \text{pour } \eta \neq -\xi\\ \dfrac{l_{g_1}}{2}\cosh\left(\xi\,l_{g_1}\right) & \text{pour } \eta = -\xi\end{cases} \tag{E.47}$$

$$\mathcal{F}_p(\eta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\eta+\xi]\,l_p)}{2(\eta+\xi)} & \text{pour } \eta \neq -\xi \\ \dfrac{l_p}{2} & \text{pour } \eta = -\xi \end{cases} \tag{E.48}$$

$$\mathcal{G}_p(\eta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\eta+\xi]l_p\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\eta-\xi]l_p\right)}{\eta+\xi} & \text{pour } \eta \neq -\xi \\ \dfrac{l_p}{2}\cosh\left(\xi\, l_p\right) & \text{pour } \eta = -\xi \end{cases} \tag{E.49}$$

$$\mathcal{F}_{g_2}(\eta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\eta+\xi]\,l_{g_2})}{2(\eta+\xi)} & \text{pour } \eta \neq -\xi \\ \dfrac{l_{g_2}}{2} & \text{pour } \eta = -\xi \end{cases} \tag{E.50}$$

E.4.2 Termes de pondération

Les termes de pondération s'écrivent :

$$\begin{aligned}
Q^{\mathrm{I}}_{tot}(m,q) &= \mathcal{A}^{\mathrm{I}}_d(j,q)\,\frac{\underline{\alpha}^{\mathrm{I}}_{d,g_1,j}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{I}^*}_{d,g_1,q}}{\cos(\underline{K}^{\mathrm{I}}_{d,j}l_d)\cos(\underline{K}^{\mathrm{I}^*}_{d,q}l_d)} + \mathcal{A}^{\mathrm{I}}_{g_1}(j,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,g_1}}\,\frac{\underline{\beta}^{\mathrm{I}}_{d,g_1,j}\underline{\beta}^{\mathrm{I}^*}_{d,g_1,q} + \underline{\beta}^{\mathrm{I}}_{p,g_1,j}\underline{\beta}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_1,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}}_{g_1,j}l_{g_1})\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}^*}_{g_1,q}l_{g_1})} \\
&-\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_{g_1}(j,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,g_1}}\,\frac{\underline{\beta}^{\mathrm{I}}_{p,g_1,j}\,\underline{\beta}^{\mathrm{I}^*}_{d,g_1,q} + \underline{\beta}^{\mathrm{I}}_{d,g_1,j}\,\underline{\beta}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_1,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}}_{g_1,j}l_{g_1})\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}^*}_{g_1,q}l_{g_1})} + \mathcal{A}^{\mathrm{I}}_{p}(j,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,p}}\,\frac{\underline{\alpha}^{\mathrm{I}}_{p,g_1,j}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_1,q} + \underline{\alpha}^{\mathrm{I}}_{p,g_2,j}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_2,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}}_{p,j}l_p)\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}^*}_{p,q}l_p)} \\
&-\mathcal{B}^{\mathrm{I}}_{p}(j,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,p}}\,\frac{\underline{\alpha}^{\mathrm{I}}_{p,g_1,j}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_2,q} + \underline{\alpha}^{\mathrm{I}}_{p,g_2,j}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_1,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}}_{p,j}l_p)\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}^*}_{p,q}l_p)} + \mathcal{A}^{\mathrm{I}}_{g_2}(j,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{I}}_{r,g_2}}\,\frac{\underline{\beta}^{\mathrm{I}}_{p,g_2,j}\,\underline{\beta}^{\mathrm{I}^*}_{p,g_2,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}}_{g_2,j}l_{g_2})\sinh(\underline{K}^{\mathrm{I}^*}_{g_2,q}l_{g_2})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{\mathrm{II}}_{tot}(m,q) &= \mathcal{A}^{\mathrm{II}}_d(m,q)\,\frac{\underline{\alpha}^{\mathrm{II}}_{d,g_1,m}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{II}^*}_{d,g_1,q}}{\cos(\underline{K}^{\mathrm{II}}_{d,m}l_d)\cos(\underline{K}^{\mathrm{II}^*}_{d,q}l_d)} + \mathcal{A}^{\mathrm{II}}_{g_1}(m,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,g_1}}\,\frac{\underline{\beta}^{\mathrm{II}}_{d,g_1,m}\underline{\beta}^{\mathrm{II}^*}_{d,g_1,q} + \underline{\beta}^{\mathrm{II}}_{p,g_1,m}\underline{\beta}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_1,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}}_{g_1,m}l_{g_1})\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}^*}_{g_1,q}l_{g_1})} \\
&-\mathcal{B}^{\mathrm{II}}_{g_1}(m,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,g_1}}\,\frac{\underline{\beta}^{\mathrm{II}}_{p,g_1,m}\,\underline{\beta}^{\mathrm{II}^*}_{d,g_1,q} + \underline{\beta}^{\mathrm{II}}_{d,g_1,m}\,\underline{\beta}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_1,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}}_{g_1,m}l_{g_1})\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}^*}_{g_1,q}l_{g_1})} + \mathcal{A}^{\mathrm{II}}_{p}(m,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,p}}\,\frac{\underline{\alpha}^{\mathrm{II}}_{p,g_1,m}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_1,q} + \underline{\alpha}^{\mathrm{II}}_{p,g_2,m}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_2,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}}_{p,m}l_p)\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}^*}_{p,q}l_p)} \\
&-\mathcal{B}^{\mathrm{II}}_{p}(m,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,p}}\,\frac{\underline{\alpha}^{\mathrm{II}}_{p,g_1,m}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_2,q} + \underline{\alpha}^{\mathrm{II}}_{p,g_2,m}\,\underline{\alpha}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_1,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}}_{p,m}l_p)\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}^*}_{p,q}l_p)} + \mathcal{A}^{\mathrm{II}}_{g_2}(m,q)\,\frac{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,d}}{\underline{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{r,g_2}}\,\frac{\underline{\beta}^{\mathrm{II}}_{p,g_2,m}\,\underline{\beta}^{\mathrm{II}^*}_{p,g_2,q}}{\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}}_{g_2,m}l_{g_2})\sinh(\underline{K}^{\mathrm{II}^*}_{g_2,q}l_{g_2})}
\end{aligned}$$

où les constantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ s'écrivent :

$$\mathcal{A}_d^{\mathrm{I}}(j,q) = \begin{cases} \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} l_d + \sin(2\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} l_d)}{4\underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{d,j}^{\mathrm{I}} \in i\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{g_1}^{\mathrm{I}}(j,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1})}{2(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1})}{2(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1})}{2(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1} + \sinh(2\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_2})}{4\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{g_1}^{\mathrm{I}}(j,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*} - \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}]l_{g_1}\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*} - \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}]l_{g_1}\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{I}^*}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1} \cosh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1}) + \sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1})\cosh(2\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1})}{2\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}} & \text{guour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} \in i\mathbb{R} \\ \dfrac{\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1} \cosh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1}) + \sinh(\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_1})}{2\underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{g_1,j}^{\mathrm{I}} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_p^{\mathrm{I}}(j,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p + \sinh(2\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p)}{4\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_p^{\mathrm{I}}(j,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*} - \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}]l_p\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*} - \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}]l_p\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{I}^*}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p \cosh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p) + \sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p)\cosh(2\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p)}{2\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} \in i\mathbb{R} \\ \dfrac{\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p \cosh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p) + \sinh(\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}\, l_p)}{2\underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{p,j}^{\mathrm{I}} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{g_2}^{\mathrm{I}}(j,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{I}^*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_2} + \sinh(2\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}\, l_{g_2})}{4\underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{g_2,j}^{\mathrm{I}} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_d^{\mathrm{II}}(m,q) = \begin{cases} \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sin([\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*}]l_d)}{2(\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{d,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} l_d + \sin(2\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} l_d)}{4\underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{d,m}^{\mathrm{II}} \in i\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{g_1}^{\mathrm{II}}(m,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1})}{2(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1})}{2(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1})}{2(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1} + \sinh(2\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_2})}{4\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{g_1}^{\mathrm{II}}(m,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*} - \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}]l_{g_1}\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*} - \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}]l_{g_1}\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_1}\right)}{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_1,q}^{\mathrm{II}*}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1}\cosh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1}) + \sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1})\cosh(2\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1})}{2\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}} & \text{guour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} \in i\mathbb{R} \\ \dfrac{\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1}\cosh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1}) + \sinh(\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} l_{g_1})}{2\underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{g_1,m}^{\mathrm{II}} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_p^{\mathrm{II}}(m,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p)}{2(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p + \sinh(2\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p)}{4\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_p^{\mathrm{II}}(m,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*} - \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}]l_p\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}} \cosh\left(\dfrac{1}{2}[3\underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*} - \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}]l_p\right) \\ \quad + \dfrac{\sinh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p\right)\cosh\left(\frac{1}{2}[\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}]l_p\right)}{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{p,q}^{\mathrm{II}*}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p \cosh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p) + \sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p)\cosh(2\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p)}{2\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} \in i\mathbb{R} \\ \dfrac{\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p \cosh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p) + \sinh(\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}\, l_p)}{2\underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m, \text{ et } \underline{K}_{p,m}^{\mathrm{II}} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{g_2}^{\mathrm{II}}(m,q) = \begin{cases} \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q \neq m \\ \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} - \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*})} + \dfrac{\sinh([\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*}]l_{g_2})}{2(\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} + \underline{K}_{g_2,q}^{\mathrm{II}*})} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} \in (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \\ \dfrac{2\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}\, l_{g_2} + \sinh(2\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}\, l_{g_2})}{4\underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}}} & \text{pour } q = m \text{ et } \underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} \in \mathbb{R} \text{ ou } \underline{K}_{g_2,m}^{\mathrm{II}} \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Annexe F

Sections efficaces d'excitation et d'ionisation de Hyman

Les sections efficaces d'ionisation et d'excitation de Hyman utilisées dans le modèle Néon-Xénon sont données par :

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma_0 f(u) \tag{F.1}$$

où $f(u)$ est une fonction inspirée des travaux de Deustch [40], qui s'écrit :

$$f(u) \quad = \quad \frac{1}{u}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^a \left[b + c\left(1 - \frac{1}{2u}\right)\ln\left(2.7 + \sqrt{u-1}\right)\right] \tag{F.2}$$

et où $u = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$. Les coefficients σ_0, $\mathcal{E}_0$, a, b, et c sont donnés dans le tableau F.1.

σ_0 (m^2)	$\mathcal{E}_0$ (eV)	a	b	c
$Ne(3s) \mapsto Ne(3p)$				
2.956×10^{-16}	1.929	1.979×10^{-1}	-2.086×10^{-3}	1.182×10^{-2}
$Ne(3s) \mapsto Ne(3p)$				
2.152×10^{-18}	4.935	1.588×10^{-1}	-6.204×10^{-2}	1.266×10^{-1}
$Ne(3p) \mapsto Ne^+$				
9.259×10^{-18}	3.246	1.133×10^{-1}	-3.351×10^{-2}	7.695×10^{-2}
$Xe(6s) \mapsto Xe(6p)$				
9.860×10^{-18}	1.407	2.556×10^{-1}	-1.469×10^{-1}	7.557×10^{-1}
$Xe(6s) \mapsto Xe^+$				
2.088×10^{-17}	3.960	2.041×10^{-1}	-9.159×10^{-3}	2.069×10^{-2}
$Xe(6p) \mapsto Xe^+$				
8.189×10^{-18}	2.500	1.260×10^{-1}	-6.430×10^{-2}	1.360×10^{-1}

Table F.1 – Coefficients utiles pour le calcul des sections efficaces de Hyman.

Annexe G

Transport des espèces excitées et des ions pour un mélange Ne-Xe à 1%

G.1 Coefficient de diffusion pour les espèces excitées

Les coefficients de diffusion des espèces excitées dans le gaz parent sont obtenus en suivant la même méthode que pour l'Argon :

$$D_{Xe^*/Xe}(300\text{ K}, 10^5\text{ Pa}) = 2.54\times10^{-6}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.5}\text{ m}^2.\text{s}^{-1} \quad \text{(G.1)}$$

$$D_{Ne^*/Ne}(300\text{ K}, 10^5\text{ Pa}) = 4.97\times10^{-5}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.5}\text{ m}^2.\text{s}^{-1} \quad \text{(G.2)}$$

Les coefficients de diffusion des espèces excitées Ne^* et Xe^* dans le Xénon pur et le Néon pur respectivement, s'écrivent quant à eux (cf. table 17.6 dans [54]) :

$$D_{Xe^*/Ne}(300\text{ K}, 10^5\text{ Pa}) = 1.89\times10^{-5}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.584}\text{ m}^2.\text{s}^{-1} \quad \text{(G.3)}$$

$$D_{Ne^*/Xe}(300\text{ K}, 10^5\text{ Pa}) = 1.89\times10^{-5}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.584}\text{ m}^2.\text{s}^{-1} \quad \text{(G.4)}$$

Pour obtenir les coefficients de diffusion de ces espèces excitées dans un mélange de Néon et de Xénon, il convient d'appliquer la loi de Blanc [91], qui s'écrit, pour l'état excité du Xénon :

$$\frac{1}{D_{Xe^*/NeXe}} = \frac{x_{Ne}}{D_{Xe^*/Ne}} + \frac{x_{Xe}}{D_{Xe^*/Xe}} \quad \text{(G.5)}$$

où x_{Ne} et x_{Xe} sont les proportions de Néon et de Xénon dans le mélange. Pour un mélange de Néon-Xénon à 1% de Xénon, on obtient alors, pour des températures comprises entre 200 K et 1000 K, les deux coefficients de diffusion :

$$D_{Xe^*/NeXe} = 1.78\times10^{-5}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.577} \quad \text{(G.6)}$$

$$D_{Ne^*/NeXe} = 4.89\times10^{-5}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.5} \quad \text{(G.7)}$$

On supposera que les coefficients de diffusion des espèces doublement excitées Ne^{**} et Xe^{**} sont égaux aux coefficients de diffusion des espèces simplement excitées.

G.2 Coefficient de transport pour les ions

Les trois mobilités standard à notre disposition sont les mobilités de l'ion Xe^+ dans le xénon pur [92], et des ions Ne^+ et Ne_2^+ dans le Néon pur [92]. La mobilité standard des ions moléculaires Xe_2^+ dans le Xénon pur est supposée égale à 1.38 fois la mobilité standard des ions atomiques Xe^+ dans le xénon pur, le facteur 1.38 étant tiré du rapport des mobilités des ions de xénon mesurées par Biondi *et. al.* [93].

Les mobilités des ions atomique et moléculaire du Néon dans le Xénon ne sont pas connues probablement parce que le Xénon est bien plus facile à ioniser que le Néon, ce qui rend d'autant plus difficile la formation des ions de Néon dans du Xénon pur. Les autres mobilités doivent donc être fabriquées. On va alors supposer que la mobilité de l'ion moléculaire Xe_2^+ dans le Néon pur, est égale à celle de l'ion atomique Xe^+ dans le Néon pur multipliée par un 1.38. Les mobilités des ions moléculaires $NeXe+$, sont supposées se trouver entre celles des ions Xe^+ et Xe_2^+, et sont calculées en suivant la formule :

$$\mu^{\circ}_{NeXe^+/Xe} = \frac{m_{Xe^+}}{m_{Xe^+} + m_{Xe_2^+}} \mu^{\circ}_{Xe^+/Xe} + \frac{m_{Xe_2^+}}{m_{Xe^+} + m_{Xe_2^+}} \mu^{\circ}_{Xe_2^+/Xe} \tag{G.8}$$

Aux hautes valeurs de champ réduit, les mobilités sont extrapolées suivant la même méthode que pour l'Argon. Enfin, la loi de Blanc est appliquée pour déterminer les mobilités standards des ions dans le mélange de Néon-Xénon à 1% de Xénon.

Annexe H

Émission radiative pour les espèces excitées du Néon et du Xénon

H.1 État simplement excité du Néon

L'état simplement excité Ne^* du Néon est constitué de quatre niveaux d'énergie dont deux sont métastables et deux sont rayonnants. Leur dénominations dans la notation de Paschen reste la même que pour l'Argon, tous comme leurs poids statistiques, si bien que l'on peut réutiliser les notations déjà introduites plus haut. Les longueurs d'onde de désexcitation des deux niveaux résonnants ($1s_4$ et $1s_2$) de la configuration $2p^5 3s$ du néon, et les coefficients d'Einstein associés à ces niveaux niveaux valent [83] :

$$\lambda_{4f} = 74.37 \text{ nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{2f} = 73.59 \text{ nm} \tag{H.1}$$

$$A_4 = 4.40 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad A_2 = 5.88 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \tag{H.2}$$

On déduit :

$$\lambda_{rf} = 73.8 \text{ nm} \qquad \text{et} \qquad A_r = 3.16 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \tag{H.3}$$

On déduit le coefficient d'emprisonnement par élargissement collisionnel $\alpha_{rf} = 2.55 \times 10^{-3}$, d'où la fréquence d'émission de photon de l'état excité Ne^* :

$$\nu_{*f} = 0.5\, \alpha_{rf}\, A_r = 4.03 \times 10^5 s^{-1} \tag{H.4}$$

où le coefficient 0.5 est un rapport de poids statistiques, puisque seulement 50% des niveaux d'énergie qui composent l'état excité Ne^* sont des niveaux rayonnants.

H.2 État simplement excité du Xénon

Les longueurs d'onde de désexcitation des deux niveaux résonnants de la configuration $5p^5 6s$ du Xéon, et les coefficients d'Einstein associés au niveau valent :

$$\lambda_{4f} = 146.96 \text{ nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{2f} = 129.56 \text{ nm} \tag{H.5}$$

$$A_4 = 2.73 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad A_2 = 2.53 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \tag{H.6}$$

On déduit :

$$\lambda_{rf} = 138.3 \text{ nm} \qquad \text{et} \qquad A_r = 2.63 \times 10^8 \text{ s}^{-1} \tag{H.7}$$

On déduit le coefficient d'emprisonnement par élargissement collisionnel $\alpha_{rf} = 3.49 \times 10^{-3}$, et la fréquence d'émission de photon de l'état excité Xe^* :

$$\nu_{*f} = 0.5\, \alpha_{rf}\, A_r = 4.59 \times 10^5 s^{-1} \tag{H.8}$$

Bibliographie

[1] Bekefi G 1984 Survey of physics research in microwave devices *1984 International Electron Devices Meeting* pp 822–825

[2] Nitsch D, Camp M, Sabath F, ter Haseborg J and Garbe H 2004 *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **46** 380–389

[3] Simon A 2018 *Étude de dispositifs de limitation de puissance microonde en technologie circuit imprimé exploitant des plasmas de décharge* Ph.D. thesis

[4] Backstrom M and Lovstrand K 2004 *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **46** 396–403

[5] Gauvin J 2012 *Développement de limiteurs de puissance radiofréquence à MEMS-RF* Ph.D. thesis

[6] Leenov D, Forster J and Cranna N 1961 Pin diodes for protective limiter applications *1961 IEEE International Solid-State Circuits Conference. Digest of Technical Papers* vol 4 pp 84–85

[7] Garver R and Rosado J 1962 *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **10** 302–310

[8] Brown N J 1967 *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **15** 732–742

[9] Skyworks Plastic Surface Mount (SMT) Limiter Diodes

[10] Macom PIN Limiter Diodes

[11] Microsemi PIN Limiter Diodes

[12] Whitaker J 2002 *The RF Transmission Systems Handbook* (CRC Press)

[13] Coaker B M, Dowthwaite D M and Priestley N E 2006 High-power multi-function radar receiver protection *2006 European Radar Conference* pp 253–256

[14] Bilotta R *Reciever Protector : Theory of Operation* Communications & Power Industries 150 Sohier Road, Beverly, MA USA 01915

[15] Löfgren M, Anderson D, Bonder H, Hamnén H and Lisak M 1991 *Journal of Applied Physics* **69** 1981–1992

[16] Goldie H 1972 *IEEE Transactions on Electron Devices* **19** 917–928

[17] Patel S D, Dubrowsky L, Saddow S E, Kaul R and Garver R V 1989 Microstrip plasma limiter *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest* vol **3** pp 879–882

[18] Ecole technologique des plasmas froids 2020, Concours photos

[19] Rax J M 2005 *Physique des plasmas* (Dunod)

[20] Raizer Y P 1991 *Gas Discharge Physics* (Springer-Verlag)

[21] Liberman M A and Lichtenberg A J 2005 *Principles of plasma discharges and materials processing* (Wiley)

[22] Rax J M 2011 *Physique des Tokamaks* (Les éditions de l'Ecole Polytechnique)

[23] Patino M I and Wirz R E 2018 *Physics of Plasmas* **25** 062108

[24] Golant V E, Zhilinskiĭ A P and Sakharov I E 1980 *Fundamentals of Plasma Physics* (Wiley)

[25] Ellis H, Pai R, McDaniel E, Mason E and Viehland L 1976 *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **17** 177–210

[26] Boeuf J P, Chaudhury B and Zhu G Q 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 015002

[27] Ebert U and van Saarloos W 2000 *Physica D : Nonlinear Phenomena* **146** 1–99

[28] Rax J M 2017 *Électromagnétisme : Milieux, structures & énergie* (De Boeck supérieur)

[29] Quémada D 1968 *Ondes dans les plasmas - Physique Spatiale* (Hermann Paris - Collection Méthodes)

[30] Loudon R 1970 *Journal of Physics A : General Physics* **3** 233–245

[31] Ruppin R 2002 *Physics Letters A* **299** 309–312

[32] Hagelaar G J M, Makasheva K, Garrigues L and Boeuf J P 2009 *Journal of Physics D : Applied Physics* **42** 194019

[33] Fuster L, Hagelaar G, Pascaud R, Simon A, Hoffmann P, Liard L, Pascal O and Callegari T 2022 *Plasma Sources Science and Technology* **31** 025009

[34] Collin R E 2001 *Foundations for Microwave Engineering, Second Edition* (Wiley-IEEE Press)

[35] Taflove A and Hagness S C 2005 *Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method, Third Edition* (Artech House)

[36] Ferreira C M, Loureiro J and Ricard A 1985 *Journal of Applied Physics* **57** 82–90

[37] Morgan database, https://us.lxcat.net/contributors/, retrieved on July 15, 2020

[38] McConkey J W and Donaldson F G 1973 *Can. J. Phys.* **51** 914–921

[39] BSR database (Quantum-mechanical calculations by O. Zatsarinny and K. Bartschat), https://us.lxcat.net/contributors/, retrieved on July 15, 2020

[40] Deutsch H, Becker K, Grum-Grzhimailo A, Bartschat K, Summers H, Probst M, Matt-Leubner S and Märk T D 2004 *International Journal of Mass Spectrometry* **233** 39–43

[41] Deutsch H, Becker K, Matt S and Märk T D 2000 *International Journal of Mass Spectrometry* **197** 37–69

[42] Deutsch H, Becker K, Matt S and Märk T D 1999 *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **32** 4249–4259

[43] Holstein T 1947 *Phys. Rev.* **72** 1212–1233

[44] Holstein T 1951 *Phys. Rev.* **83** 1159–1168

[45] NIST database, https://physics.nist.gov/asd

[46] Ferreira C M and Loureiro J 1983 *Journal of Physics D : Applied Physics* **16** 1611–1621

[47] Lam S K, Zheng C E, Lo D, Dem'yanov A and Napartovich A P 2000 *Journal of Physics D : Applied Physics* **33** 242–251

[48] Mehr F J and Biondi M A 1968 *Phys. Rev.* **176** 322–326

[49] Hagelaar G J M and Pitchford L C 2005 *Plasma Sources Science and Technology* **14** 722–733

[50] Kumar K 1984 *Physics Reports* **112** 319–375 ISSN 0370-1573

[51] Pitchford L C, Alves L L, Bartschat K, Biagi S F, Bordage M C, Phelps A V, Ferreira C M, Hagelaar G J M, Morgan W L, Pancheshnyi S, Puech V, Stauffer A and Zatsarinny O 2013 *Journal of Physics D : Applied Physics* **46** 334001

[52] Hagelaar G J M 2015 *Plasma Sources Science and Technology* **25** 015015

[53] Ellis H, Pai R, McDaniel E, Mason E and Viehland L 1976 *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **17** 177–210

[54] Grigoriev I S and Meilikhov E Z 1997 *Handbook of physical quantities* (CRC Press)

[55] Collin R E 2007 *Foundations for microwave engineering* (John Wiley & Sons)

[56] Zouros G P 2018 *Computer Physics Communications* **222** 339–350 ISSN 0010-4655

[57] Thourel L 1988 *Circuits passifs. Calcul et conception des dispositifs en ondes centimétriques et millimétriques. Tome 1.* (Cepadues Editions)

[58] Balosso O 2014 *Introduction des ondes de surface dans un modèle adapté de faisceaux gaussiens pour le traitement du couplage antenne-structure.* Ph.D. thesis

[59] Kallel A 2014 *Modélisation et conception d'une antenne plasma à balayage basée sur des ondes de fuite.* Ph.D. thesis

[60] Hirsch M, Smale S and Devaney R 2013 *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (Elsevier Science) ISBN 9780123820105

[61] Burgers J 1948 A mathematical model illustrating the theory of turbulence (*Advances in Applied Mechanics* vol **1**) ed Von Mises R and Von Kármán T (Elsevier) pp 171–199

[62] Korteweg D J and de Vries G 1895 *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **39** 422–443

[63] Jeffrey A and Mohamad M N B 1991 *Wave Motion* **14** 369–375

[64] Kuehn E 1973 *AEU - International Journal of Electronics and Communications* **27** 511–518

[65] Kuwano S, Deno M and Kokubun K 2003 *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* **17** 969–987

[66] Widarta A, Kuwano S and Kokubun K 1994 *Electronics and Communications in Japan (Part II : Electronics)* **77** 29–38

[67] MacDonald A D 1966 *Microwave Breakdown in Gases* Wiley series in plasma physics (Wiley) ISBN 9780471559771

[68] Graves D B and Jensen K F 1986 *IEEE Transactions on Plasma Science* **14** 78–91

[69] Richards A D, Thompson B E and Sawin H H 1987 *Applied Physics Letters* **50** 492–494

[70] Boeuf J P and Pitchford L C 1995 *Phys. Rev. E* **51** 1376–1390

[71] Simon A, Pascaud R, Callegari T, Liard L and Pascal O 2018 Experimental comparison of wide-band and narrowband plasma-based microstrip power limiters *2018 IEEE Conference on Antenna Measurements & Applications (CAMA)* pp 1–4

[72] Meunier J, Belenguer P and Boeuf J P 1995 *Journal of Applied Physics* **78** 731–745

[73] Hagelaar G J M 2000 *Modeling of microdischarges for display technology* Ph.D. thesis

[74] Moore C E 1971 *Atomic Energy Levels, As Derived From the Analyses of Optical Spectra, Vol. I* (NSRDS-NBS)

[75] Moore C E 1971 *Atomic Energy Levels, As Derived From the Analyses of Optical Spectra, Vol. III* (NSRDS-NBS)

[76] Hyman H A 1979 *Phys. Rev. A* **20** 855–859

[77] Hyman H A 1981 *Phys. Rev. A* **24** 1094–1095

[78] Sheverev V A, Stepaniuk V P and Lister G G 2002 *Journal of Applied Physics* **92** 3454–3457

[79] Levin L, Moody S, Klosterman E, Center R and Ewing J 1981 *IEEE Journal of Quantum Electronics* **17** 2282–2289

[80] Eckstrom D J, Nakano H H, Lorents D C, Rothem T, Betts J A, Lainhart M E, Dakin D A and Maenchen J E 1988 *Journal of Applied Physics* **64** 1679–1690

[81] Oskam H J and Mittelstadt V R 1963 *Phys. Rev.* **132** 1445–1454

[82] Inoue G, Ku J K and Setser D W 1984 *The Journal of Chemical Physics* **81** 5760–5774

[83] NIST database, https://physics.nist.gov/asd

[84] NIST database, https://physics.nist.gov/asd

[85] Moisan M and Zakrzewski Z 1991 *Journal of Physics D : Applied Physics* **24** 1025

[86] Glaude V M M, Moisan M, Pantel R, Leprince P and Marec J 1980 *Journal of Applied Physics* **51** 5693–5698

[87] Mitchell A C G and Zemansky M W 1934 *Resonance Radiation and Excited Atoms* (The Macmillan Company)

[88] Furssov W and Vlassov A 1936 *Phys. Zeits. Sowjetunion* **10**

[89] Gregório J, Leprince P, Boisse-Laporte C and Alves L L 2012 *Plasma Sources Science and Technology* **21** 015013

[90] Dixon A J, Harrison M F A and Smith A C H *Contributed Papers, 8th Int. Conf. on the Physics of Electronic and Atomic Collisions (ICPEAC) (Belgrade)* 405

[91] Blanc A 1908 *J. Phys. Theor. Appl.* **7** 825–839

[92] Viehland L and Mason E 1995 *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **60** 37–95

[93] Biondi M A and Chanin L M 1954 *Phys. Rev.* **94** 910–916

Résumé — Les systèmes de réception microonde sont susceptibles d'être détériorés ou détruits lorsqu'ils sont soumis à des agressions électromagnétiques de fortes puissance (HPM). L'intégration d'éléments actifs tels que les diodes PIN permet en général de protéger les éléments sensibles des chaines de réception, cependant, elles peuvent également être détruites si la puissance du signal reçu est trop importante. Par conséquent, de nouvelles études ont vu le jour afin d'exploiter les propriétés des plasmas de décharge pour la limitation de puissance. Ceux-ci ont depuis longtemps été utilisés dans les tubes et limiteurs T/R afin de protéger les chaînes de réception des RADAR. Récemment, une nouvelle structure de limiteur en « ligne microruban suspendue » intégrant une micro-décharge plasma localisée à une dizaine de millibars dans l'argon a été proposée, et ses capacités de protection ont été expérimentalement démontrées pour des agressions allant jusqu'à 20 W. Dans ces travaux de thèse, nous poursuivons le développement et l'optimisation de ce limiteur de puissance. Pour ce faire, nous avons proposé une modélisation numérique du dispositif à partir d'un code de simulation multi-physique développé au laboratoire LAPLACE, afin de simuler l'interaction entre les microondes et le plasma. Conjointement, plusieurs modèles analytiques ont été développés afin, notamment, de comprendre comment s'opère le couplage de l'onde et du plasma. L'évaluation expérimentale des performances du limiteur à forte puissance (jusqu'à 100 W) a également été conduite. Finalement, l'exploitation des données obtenues numériquement, analytiquement et expérimentalement a permis de proposer une nouvelle topologie en « ligne microruban inversée » présentant de meilleures performances notamment en termes de tenue en puissance et de temps de recouvrement.

Mots clés — Limiteur de puissance microonde, décharge plasma/microonde, modélisation plasma, onde de surface/onde de fuite, onde d'ionisation, raccordement modal.

Abstract — Microwave receiving systems may be damaged or destroyed when they are subjected to High Power Microwave pulses (HPM). The integration of active components such as PIN diodes usually protects the sensitive elements of the receiving systems, but they can also be destroyed if the received power is too high. Therefore, new studies about limiters based on plasma discharges have been proposed to handle high power threats. Indeed, plasma discharges have long been used in T/R tubes and T/R limiters to protect RADAR receiving chains. Recently, a new plasma-based power limiter in a « suspended microstrip line » at around ten millibar in argon has been proposed, and its protection capabilities have been experimentally demonstrated for microwave up to 20 W. Here, we continue the development and optimisation of this power limiter. To this end, we proposed a numerical modelling of the device using a multi-physics simulation code developed at the LAPLACE laboratory, in order to simulate the interaction between the microwaves and the plasma. At the same time, several analytical models were developed in order to understand how the coupling between the wave and the plasma operates. The experimental evaluation of the limiter performances for high power microwave pulses (up to 100 W) was also conducted. Finally, the datas obtained numerically, analytically and experimentally have made it possible to propose a new plasma-based power limiter in an « inverted microstrip line » with better performances, particularly in terms of power handling and recovery time.

Keywords — Microwave power limiter, plasma/microwave discharge, plasma modelling, surface wave/leaky wave, ionization wave, mode matching.

.