THÈSE

pour l'obtention du Grade de
DOCTEURE DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

et du Grade de
DOCTEURE DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
(Département d'informatique et de recherche opérationnelle. Faculté des arts et des sciences)

École Doctorale 651 : **MIMME – Mathématiques – Informatique – Matériaux – Mécanique - Énergétique**
Secteur de Recherche : **Informatique Graphique**

Présentée par :
Elsa TAMISIER

Représentations géométriques de détails fins pour la simulation d'éclairage

Directeurs et encadrants de thèse :
Pierre POULIN
Daniel MENEVEAUX
Mickaël RIBARDIÈRE
Sébastien HORNA

Soutenue le 18 décembre 2023 devant la Commission d'Examen composée de :

Kadi Bouatouch. Professeur émérite. Université de Rennes, ISTIC ..... Président du Jury
Nicolas Holzschuch. Directeur de recherche. INRIA Rhône-Alpes ..... Rapporteur
Jean-Michel Dischler. Professeur. Université de Strasbourg, ICube ..... Rapporteur
Céline Roudet. Maître de conférences. Université de Bourgogne, LIB ..... Examinatrice
Daniel Meneveaux. Professeur. Université de Poitiers, XLim ..... Directeur
Pierre Poulin. Professeur titulaire. Université de Montréal, DIRO ..... Directeur

Résumé

Lors du processus de création d'une image de synthèse photoréaliste, l'objectif principal recherché est de reproduire le transport de la lumière dans un environnement virtuel, en prenant en compte aussi précisément que possible les caractéristiques des objets de la scène 3D. Dans la perception de notre environnement, les détails très fins ont une grande importance sur l'apparence des objets, tels que des rayures sur un morceau de métal, des particules dans du vernis, ou encore les fibres d'un tissu. Il est primordial de pouvoir les reproduire à tout niveau d'échelle. Créer ces détails grâce à des informations géométriques, par exemple un maillage, mène à une trop forte complexité en termes de construction, de stockage, de manipulation et de temps de rendu. Il est donc nécessaire d'utiliser des modèles mathématiques qui permettent d'approcher au mieux les comportements lumineux induits par ces détails.

Le travail de cette thèse s'inscrit dans cette problématique de gestion des détails fins par la théorie des microfacettes. En particulier, nous nous sommes intéressés à la notion de masquage-ombrage permettant de calculer la proportion de surface qui est à la fois visible de l'observateur et éclairée. Pour cela, nous étudions le modèle théorique proposé par Smith [**Smi67**] et par Ashikhmin et al. [**APS00**] dans lequel la représentation mathématique est basée sur des contraintes liées à la position des facettes, leur orientation, leur aire et les corrélations entre ces caractéristiques.

Nous avons éprouvé le modèle sur plus de 400 maillages 3D reconstruits à partir de surfaces réelles qui ne respectent pas nécessairement les contraintes imposées du modèle. Quelques maillages sont également générés à partir de distributions des orientations de microfacettes de Beckmann et GGX largement utilisées dans les moteurs de simulation académiques et industriels. Pour chacun des maillages, une fonction de masquage de référence est mesurée grâce à un algorithme de tracer de rayons. Nous pouvons ainsi comparer le masquage réel d'une microsurface prenant en compte la donnée dans son entièreté, à son masquage théorique calculé seulement par la distribution de ses micronormales.

Cette étude met en évidence un lien entre l'erreur du masquage théorique et certaines caractéristiques de la microsurface, telles que sa rugosité, son anisotropie, ou le non respect des contraintes du modèle. Nous proposons une méthode pour développer un modèle prédictif de l'erreur calculable à partir de ces caractéristiques et sans avoir recours au lourd processus de tracer de rayons. L'analyse montre également le lien entre l'erreur au niveau du terme de masquage et sa répercussion dans le rendu final d'une image de synthèse. La possibilité de prédire l'erreur grâce à un processus rapide permet d'estimer la complexité de l'usage d'une microgéométrie dans un rendu photoréaliste. Nous complétons nos travaux en proposant un facteur correctif au masquage théorique pour les surfaces isotropes, là encore calculable directement à partir des caractéristiques du maillage. Nous montrons le gain de précision que cette correction apporte, tant au niveau du masquage lui-même qu'au niveau des rendus d'images de synthèse. La thèse est conclue avec une discussion présentant les limites actuelles de notre étude et ses perspectives futures.

Mots clés : modèles de réflectance, apparence, théorie des microfacettes, carte de hauteurs, matériaux réels, auto-masquage, auto-ombrage, tracer de rayons.

Abstract

During the creation process of a photorealistic image, the main goal is to reproduce light transport in a virtual environment by considering as accurately as possible the characteristics of the surfaces from the 3D scene. In the real world, very fine details may have a tremendous impact on the visual aspect. For instance, scratches over metal, particles within varnish, or fibers of a fabric, will visually alter surface appearance. It is therefore crucial to be able to simulate such effects at every level of detail. However, creating such microgeometry for a given 3D mesh is a complex task that results in very high memory requirements and computation time. Mathematical models must be used to approximate as precisely as possible light effects produced by these details.

This thesis considers fine details from the microfacet theory, and in particular, the masking-shadowing factor that corresponds to the proportion of microsurfaces that are both visible and illuminated. We study the commonly used theoretical model of Smith [**Smi67**] and Ashikhmin et al. [**APS00**] where the mathematical representation is derived from constraints about microfacets positions, orientations, areas, and correlations between those characteristics.

The proposed model has been confronted to more than 400 3D meshes, built from real-world measured surfaces that do not necessarily fulfill the theory constraints. Some of them have also been generated from the widely used Beckmann and GGX distributions. For each mesh, the ground-truth masking effect is measured using ray tracing, and compared with the theoretical masking computed only from the distribution of micronormals.

Our study highlights a connection between the theoretical masking's error and some microsurface's characteristics, such as roughness, anisotropy, or non-compliance with required constraints. We provide a method for deriving a predictive model for this error. The mesh characteristics are sufficient to compute this model without requiring heavy ray tracing computation. Our analysis shows how the masking error impacts the rendering process. We also derive a model capable of predicting rendering errors from surface characteristics. With the

opportunity to predict the error with a fast computation from a 3D mesh, one can estimate the complexity to use a given microgeometry for a photorealistic rendering. Our study concludes with the formulation of a correction function added to the theoretical masking term for isotropic surfaces. This correction is computed directly from the 3D mesh characteristics without any ray tracing involved. We show gains in the accuracy of the model when corrected with our formula, both for the masking effect itself and its impact on the exactness of the renderings. This thesis is concluded with a discussion about the current limitations of our study and some future perspectives.

Keywords: reflectance models, appearance, microfacet theory, height field, real-life materials, self-masking, self-shadowing, ray casting.

Table des matières

Résumé i

Abstract iii

Liste des tableaux xi

Table des figures xiii

Liste des sigles et des abréviations xix

Remerciements xxi

Chapitre 1. Introduction 1

1.1. Apparence des matériaux dans la synthèse d'images 1

1.2. Problématique 4

1.3. Travaux réalisés 7

Chapitre 2. Notions essentielles 9

2.1. Grandeurs physiques et notations 9

2.1.1. Notations 9

2.1.2. Quantités radiométriques 12

2.2. Réflexion et apparence des matériaux 12

2.2.1. BSDF 13

2.2.2. Éclairement local 14
2.2.3. Modèles de réflexion 15
2.3. Théorie des microfacettes 19
2.3.1. Distribution des normales D 19
2.3.2. Facteur d'atténuation géométrique 22
A. Terme géométrique G 22
B. Fonction de masquage G_1 : profil des cavités en V 23
C. Fonction de masquage G_1 : profil de Smith 24
2.4. Analyse et problématique 28
Chapitre 3. Mise en place d'un outil d'analyse du terme de masquage 29
3.1. Génération de microsurfaces 29
3.1.1. À partir d'une distribution 29
3.1.2. Cartes de hauteurs mesurées 32
A. Source des cartes de hauteurs 32
B. Création du maillage 35
3.1.3. Hypothèses du modèle 36
3.2. Mesure du terme de masquage 37
3.2.1. Échantillonnage hémisphérique 38
3.2.2. Mesure du terme de référence G_1^{rc} 39
3.2.3. Calcul du modèle théorique 41
A. Distribution discrète D de la microsurface 41
B. G_1 théorique 43
3.2.4. Gestion des effets de bord 44

A. Restreindre la zone échantillonnée 45
B. Supposer la microsurface infinie 47
3.2.5. Lissage des normales 49
3.3. BRDFs et rendus 50
3.3.1. BRDF 50
3.3.2. Rendus 52
3.4. Conclusion du chapitre 53
Chapitre 4. Prédiction de l'erreur 55
4.1. Analyse des microsurfaces 56
4.1.1. Erreur du terme de masquage théorique 56
4.1.2. Description statistique d'une microsurface 56
4.1.3. Corrélation entre les statistiques et l'erreur 60
4.2. Prédiction de l'erreur 63
4.2.1. Sélection des caractéristiques 63
4.2.2. Modèle prédictif 66
A. Pour les microsurfaces mesurées 66
Valeurs aberrantes 69
B. Pour toutes les microsurfaces 72
C. Pour les microsurfaces générées à partir de distributions 75
4.2.3. Prédiction de l'erreur sur le calcul d'images 77
4.3. Conclusion du chapitre 82
Chapitre 5. Facteur correctif pour les microsurfaces isotropes 85

5.1. Définition de la famille : microsurfaces isotropes 85
5.2. Approcher d avec une fonction paramétrable 87
5.3. Approcher d à partir des caractéristiques 93
5.4. Correction du masquage théorique 98
5.5. Conclusion du chapitre 104
Chapitre 6. Conclusion et perspectives 105
6.1. Conclusion 105
6.2. Perspectives 110
6.2.1. Perspectives à court terme 110
6.2.2. Perspectives à long terme 114
Références bibliographiques 117
Annexe A. Détail des prédictions 123
A.1. $P \approx E$, 5 caractéristiques, surfaces mesurées 124
A.2. $P \approx E$, 25 caractéristiques, surfaces mesurées 128
A.3. $P \approx E$, 5 caractéristiques, *PerTex* 133
A.4. $P \approx E$, 25 caractéristiques, *PerTex* 137
A.5. $P \approx E$, 5 caractéristiques, *ambientCG* 141
A.6. $P \approx E$, 25 caractéristiques, *ambientCG* 145
A.7. $P \approx E$, 5 caractéristiques, toutes les données 149
A.8. $P \approx E$, 25 caractéristiques, toutes les données 153

A.9. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, surfaces mesurées 158

A.10. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, surfaces mesurées 162

A.11. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, *PerTex* 167

A.12. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, *PerTex* 171

A.13. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, *ambientCG* 175

A.14. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, *ambientCG* 179

A.15. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, toutes les données 183

A.16. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, toutes les données 187

Liste des tableaux

2.1 Notations utilisées dans le document. 11

3.1 Comparaison des temps de calcul pour tabuler G_1^{rc} et G_1. 44

4.1 Notation des différentes caractéristiques utilisées pour décrire une microsurface. . 57

4.2 Valeurs absolues maximales pour chaque caractéristique. 64

4.3 Tableau de prédiction. 68

4.4 Quantiles des résidus ϵ. 69

4.5 Tableau de prédiction de E^r. 81

4.6 Quantiles des résidus ϵ^r. 82

5.1 Coefficients de chaque caractéristique pour calculer les paramètres de φ_+. 95

5.2 Coefficients de chaque caractéristique pour calculer les paramètres de φ_-. 96

Table des figures

1.1 *Moana*. Disney, 2017. Moteur de rendu *Hyperion*. 2

1.2 *Valerian and the City of a Thousand Planets*. EuropaCorp, 2017. Moteur de rendu *Arnold*. 3

1.3 À gauche : modification des normales (*bump mapping*). À droite : modification de la géométrie (*displacement mapping*). 3

1.4 Deux microgéométries en 2D pour lesquelles l'orientation locale en un point est corrélée à sa position. 4

1.5 Plusieurs exemples de spécularités issus de la vie réelle. 5

1.6 La peau humaine vue à plusieurs niveaux de détail. 6

1.7 Effets de masquage et d'ombrage. Les deux effets combinés donnent un facteur de visibilité, également appelée masquage-ombrage. 7

2.1 Notations géométriques. 10

2.2 Modèle de Phong. 16

2.3 Modèle à microfacettes. 17

2.4 Distributions GGX et Beckmann. 20

2.5 Différences d'apparence entre GGX et Beckmann. 21

2.6 Plusieurs microsurfaces avec des cavités en V différentes. 24

2.7 Microsurface sans corrélation entre une microfacette et ses voisines. 24

3.1 Maillage à partir d'une distribution analytique. 30

3.2 Évolution du bruit de la distribution en fonction de la résolution du maillage. . . . 30

3.3 Intégrale de la différence absolue entre la distribution analytique et la distribution du maillage, en fonction de la résolution du maillage. 31

3.4 Surfaces générées selon des distributions de Beckmann. 31

3.5 Surfaces générées selon des distributions GGX. 32

3.6 Méthode pour mesurer la géométrie d'une surface utilisée par Halley pour construire la base de données *PerTex*. 33

3.7 Exemples de cartes de hauteurs issues de la base de données *PerTex*. 33

3.8 Exemples de cartes de hauteurs issues de la base de données *ambientCG*. 34

3.9 Les autres cartes de hauteurs. 35

3.10 Maillage fin à partir d'une carte de hauteurs. 36

3.11 Différentes cartes de hauteurs pour lesquelles les hypothèses pour G_1 ne sont pas respectées. 37

3.12 Procédé de notre système, découpé en trois étapes principales. 38

3.13 Représentation schématique de structure des tableaux 2D utilisés pour stocker G_1^{rc}, G_1 et D. 39

3.14 Tracer de rayons utilisé pour mesurer $G_1^{rc}(\boldsymbol{k})$. 39

3.15 Stratification aléatoire illustrée avec 100 pixels et 8 échantillons par pixel. 40

3.16 Qualité de la mesure pour G_1^{rc} en fonction du nombre d'échantillons total. 41

3.17 Distribution discrète illustrée avec un exemple de sept micronormales. 42

3.18 Restriction de la microsurface échantillonnée. 45

3.19 Impact des effets de bord avec une restriction de la macrosurface dans les calculs. 46

3.20 Utilisation de la boîte englobante. 47

3.21 Impact des effets de bord avec restriction par boîte englobante. 47

3.22 Impact des effets de bord avec visualisation de la restriction par boîte englobante. 48

3.23 Avec intersection de la boîte englobante, la portion de microsurface incertaine augmente à angles rasants. 48

3.24 Lissage des normales. 49

3.25 Segmentation du capteur pour le goniophotomètre virtuel. 50

3.26 BRDFs f_r^{rc} et f_r ainsi que leur différence absolue, pour la microsurface 219. 51

3.27 BRDFs f_r^{rc} et f_r ainsi que leur différence absolue, pour la microsurface 310. 51

3.28 Interpolation entre différents capteurs pour calculer la valeur de BRDF correcte pour une paire de directions $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$. 52

3.29 Rendus pour les microsurfaces 219 et 310. 53

4.1 Deux organisations de microfacettes avec la même distribution, en crêtes et en failles. 58

4.2 Distribution et gradient de trois microsurfaces. 59

4.3 Partitionnement en 3-moyennes, pour calculer C_b. 60

4.4 Matrice de corrélation entre les différentes caractéristiques considérées dans notre analyse et l'erreur E. 61

4.5 Coefficient d'asymétrie. 62

4.6 Validation croisée en cinq blocs réalisée sur 70% des données. 65

4.7 Matrice de corrélation entre les cinq caractéristiques les plus pertinentes pour l'erreur E. 67

4.8 Comparaison entre notre modèle prédictif P et l'erreur E. 68

4.9 Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$ pour 423 microsurfaces mesurées. 69

4.10 Cartes de hauteurs des microsurfaces pour lesquelles la prédiction P est la plus erronée. 70

4.11 Cartes de hauteurs présentant des motifs géométriques pour lesquelles la précision de la prédiction P est acceptable ($\epsilon < 0.1$). 70

4.12 Résidus de la prédiction et écart-type des angles θ_m. 70

4.13 R^2 pour 50 différentes régressions linéaires avec exclusivement des microsurfaces respectant $\sigma(\theta_m) < 0.387$. 71

4.14 Élimination des microsurfaces ayant $\sigma(\theta_m) \geq 0.387$. 71

4.15 Régressions linéaires sur 423 microsurfaces mesurées. 72

4.16 Régressions linéaires sur 334 microsurfaces mesurées issues de *PerTex*. 73

4.17 Régressions linéaires sur 85 microsurfaces mesurées issues de *ambientCG*. 74

4.18 Régressions linéaires sur 431 microsurfaces mesurées et générées. 75

4.19 Prédiction P pour des maillages générés à partir de distributions de Beckmann et GGX. 76

4.20 Erreur et rendus pour la microsurface labelisée *295* dans la base de données *PerTex*. 77

4.21 Rendus pour quatre microsurfaces différentes. 78

4.22 RMSE moyenne E^r comparée à l'erreur E et la prédiction P. 80

4.23 Comparaison entre notre modèle prédictif P^r et la RMSE E^r. 81

4.24 Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$ pour 423 microsurfaces mesurées. 82

5.1 Exemples de microsurfaces isotropes. 86

5.2 Représentation de la forme usuelle de $d^{rc}(\theta_o)$. 87

5.3 Exemples de PDFs de la distribution SB de Johnson pour différentes valeurs de paramètres. 89

5.4 Combinaison de deux distributions SB de Johnson en fixant ou non leurs bornes respectives. 90

5.5 Exemple d'une approximation de d^{rc} avec la combinaison d de deux distributions SB de Johnson. 92

5.6 Combinaison de deux distributions SB de Johnson avec et sans fixer leurs bornes. 93

5.7 Histogramme de la répartition des RMSEs entre d^{rc} et d. 93

5.8 Résultats des régressions linéaires permettant de trouver les cinq paramètres de φ_+. 95

5.9 Résultats des régressions linéaires permettant de trouver les cinq paramètres de φ_-. 96

5.10 Comparaison des différences d^{rc}, d et $\widehat{d}$. 98

5.11 Comparaison des masquages G_1^{rc}, G_1 et G_1^d. 99

5.12 Diminution des erreurs du terme de masquage théorique ($E(G_1)$) en ajoutant la correction ($E(G_1^d)$). 100

5.13 Comparaison des rendus avec et sans correction. 101

5.14 Diminution des erreurs E^r pour les rendus réalisés avec le masquage corrigé G_1^d. . 103

5.15 Deux microsurfaces pour lesquelles la correction trouvée fait légèrement empirer les rendus. 103

6.1 Caractéristiques considérées dans l'étude de l'erreur. 107

6.2 Résultats des prédictions des erreurs pour le masquage théorique et pour les rendus. 109

6.3 Rapport entre l'erreur E et des caractéristiques fréquentielles. 113

Liste des sigles et des abréviations

BRDF	Fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle, de l'anglais *Bidirectional Reflectance Distribution Function*
BSDF	Fonction de distribution de répartition bidirectionnelle, de l'anglais *Bidirectional Scattering Distribution Function*
BTDF	Fonction de distribution de la transmittance bidirectionnelle, de l'anglais *Bidirectional Transmittance Distribution Function*
CDF	Fonction de répartition, de l'anglais *Cumulative Distribution Function*
GAF	Facteur d'atténuation géométrique, de l'anglais *Geometric Attenuation Factor*
GGX	Distribution développée par Walter et al. [**WMLT07**], de l'anglais *Ground Glass unknown*
MCO	Moindres Carrés Ordinaires
MSE	Erreur quadratique moyenne, de l'anglais *Mean Squared Error*
NDF	Fonction de distribution des normales, de l'anglais *Normal Distribution Function*
PDF	Fonction de densité, de l'anglais *Probability Density Function*
RC	Tracer de rayons, de l'anglais *Ray Casting*
RMSE	Racine de l'erreur quadratique moyenne, de l'anglais *Root Mean Squared Error*
SB	Système délimité, de l'anglais *System Bounded*

Remerciements

Je ne remercierai jamais assez les quatre encadrants que j'ai eu l'honneur de côtoyer durant ces quatre ans de thèse. Daniel Meneveaux qui a toujours su se libérer du temps à une rapidité qui relève probablement de la sorcellerie, pour m'écouter et me conseiller dans mes moments de doute. Qui a également bataillé pour me faire apprendre des bases de rédaction, sans jamais perdre patience, et en ayant toujours un petit commentaire encourageant (perdu dans les nombreuses corrections en rouge). Pierre Poulin, mon encadrant à Montréal qui a toujours eu la porte de son bureau ouverte et dont l'humour intarissable est venu animer absolument toutes nos conversations. Même les problèmes les plus complexes étaient abordés avec le sourire. Merci également pour les idées toujours novatrices et l'apport permanent de questions pertinentes. Mickaël Ribardière qui en quatre ans de thèse n'a jamais manqué de garder contact avec moi lorsque je m'enfermais trop dans mon travail ou mes blocages. Merci d'être venu aussi souvent à mon bureau pour réfléchir avec moi aux problèmes sur lesquels je butais. Enfin, Sébastien Horna, la quatrième pilier de ma thèse, qui a toujours vérifié que j'allais bien, qui a poussé l'administration quand il y avait des soucis, qui a sans cesse gardé un œil la direction de ma thèse et mon intérêt pour celle-ci. Merci de m'avoir encouragée, conseillée et poussée à affirmer mes choix et mes souhaits dans une thèse encadrée par une telle équipe.

Merci aux membres de mon jury de thèse d'avoir accepté d'évaluer mes travaux et dont les commentaires et les retours ont tous été pertinents. C'était un plaisir d'échanger avec chacun d'entre eux.

Je souhaite également remercier Benjamin Bringier pour son aide sur la recherche de données pour compléter notre études et pour les conseils donnés durant la thèse. Et tous les autres membres des laboratoires XLIM et LIGUM qui ont contribué à rendre ces quatre ans agréables et joyeux. Ça a toujours été un plaisir de retourner à Poitiers après des mois d'absence et d'échanger, sourire au visage, avec les personnes retrouvées. Et plus spécifiquement, merci à tous les doctorants de XLIM qui ont su animer la cafétéria de l'Université aussi bien que des soirées hors campus. Et à Arnaud, Jonas, Keith, Luis, Caio, Mathieu

et Karl-Etienne du LIGUM de Montréal avec qui les sujets de discussion ont toujours été variés et intéressants, et qui me donnaient une raison de plus de venir au laboratoire avec le sourire.

Le rapport de recherche d'Éric Heitz sur la fonction de masquage a probablement été le document qui m'a été le plus utile durant toute ma recherche. Un grand merci à lui pour l'avoir rédigé, et avoir rapidement répondu à une question que je me posais. Au-delà de l'apport de connaissances incroyable du document, il a également été une source de motivation et d'inspiration pour rédiger et continuer d'explorer ma propre problématique.

Gilles Baube a été un formateur professionnalisant dont je garderai et chérirai à jamais les enseignements. Sa pédagogie, son ouverture d'esprit, son amour des autres et sa capacité à s'intéresser à tout ce qui lui est présenté ont fait que j'attendais toujours avec hâte ses enseignements pour en apprendre plus.

Enfin, mes remerciements les plus chaleureux vont à mes proches. Benoît, qui m'a encouragée (avec beaucoup d'insistance) à partir en thèse alors même que ma fénéantise me poussait à refuser tout engagement dans un travail ardu. Mes amis qui sont parfois restés éveillés pendant des nuit-blanches en France et qui m'ont changé les esprits chaque week-end sans faute, même quand j'étais à Montréal. Damien, mon compagnon dont la patience ne connaît pas de limite et qui n'a fait que m'encourager malgré mes nombreuses soirées passées au laboratoire. Et enfin ma famille, pour avoir été présente et d'un immense support tout du long de ma thèse, sans jamais hésiter à m'écouter pendant des heures parler de mes doutes ou de mes joies. Les conseils que vous m'avez apportés, le soutien, et la bonne humeur infaillible ont été le moteur certain de ma motivation. Sans vous, jamais je n'aurai trouvé l'énergie suffisante pour ces quatre années. Je vous remercie tous du fond du cœur.

Chapitre 1

Introduction

La synthèse d'images consiste à créer une image grâce à un ordinateur afin de l'utiliser dans un domaine du numérique : jeux vidéo, effets spéciaux de films, reconstruction d'objets virtuels, etc. Durant ce processus de création, plusieurs étapes interviennent. La première consiste à définir une scène virtuelle. La géométrie des objets, leur forme, est créée ; les propriétés de réflectance des surfaces sont choisies pour définir leur apparence ; les sources de lumière sont placées pour éclairer la scène. Enfin, le calcul des images (rendu) de la scène est réalisé, grâce à un processus de simulation d'éclairage.

Le rendu d'images reprend les principes de la photographie en positionnant une caméra virtuelle à l'intérieur de la scène. Un algorithme simule les interactions entre la lumière et la matière dans la scène, utilisant les informations sur la géométrie et sur le comportement de la lumière à la surface des objets (ou dans le volume). C'est la simulation de l'éclairage. La caméra virtuelle collecte ainsi les rayons lumineux issus des calculs. Différents algorithmes existent dont les objectifs peuvent varier : rapidité, réalisme, rendu sur processeur graphique (GPU, de l'anglais *Graphics Processing Unit*) ou sur unité centrale de calcul (CPU, de l'anglais *Central Processing Unit*), etc.

1.1. Apparence des matériaux dans la synthèse d'images

Pour mettre en oeuvre ce processus dans une scène, les propriétés de réflectance de chaque surface doivent être définies. Les interactions lumineuses sont multiples et tout élément de surface de la scène visible sur un pixel peut avoir une influence visuelle sur l'image produite : directe si l'élément de surface est visible du point de vue de la caméra, ou indirecte s'il transmet de la lumière à des éléments de surfaces qui y sont visibles. La réflectance

d'une surface est dépendante de la microgéométrie de ses éléments. Un miroir standard est une microsurface parfaitement plane, une microsurface lisse est brillante, alors qu'une microsurface rugueuse donne une apparence plus mate. Il est donc important d'avoir des modèles de représentation de la géométrie et de la microgéométrie les plus complets et minutieux possible. De plus, les configurations d'éclairage peuvent être diverses et également complexes.

La scène de la figure 1.1 est constituée de nombreux matériaux différents (la surface de l'eau et de la plage, les cheveux de Moana, la végétation à distance, le bois de la pirogue, etc.) ; la scène de la figure 1.2 comprend des surfaces avec une microgéométrie très détaillée et un grand nombre de sources de lumière différentes créant un éclairage complexe. D'une part, modéliser une scène à un tel niveau de détail est une tâche longue et ardue à réaliser pour l'artiste. D'autre part la complexité numérique de la scène et les temps de calcul augmentent avec l'ajout d'informations géométriques.



Figure 1.1 – *Moana*. Disney, 2017. Moteur de rendu *Hyperion*.

Pour aider à résoudre ces problèmes, des textures appliquées sur les surfaces des objets peuvent contenir les informations nécessaires pour calculer la réflectance des éléments de surface. Elles sont utiles pour colorer un objet, contrôler les normales pour le calcul d'éclairement, ou modifier la géométrie en ajoutant du relief. La figure 1.3 présente à gauche une sphère dont les normales ont été modifiées grâce à une carte de normales, et à droite une sphère dont la géométrie a été déplacée grâce à une carte de déplacements. Ce sont deux utilisations de textures produisant des effets différents : la carte de normales ne modifie pas réellement la géométrie mais affecte le calcul d'éclairement. La silhouette et l'ombre de la sphère ne sont pas en concordance avec le relief simulé. De son côté, la carte de déplacements modifie la géométrie directement et produit donc une géométrie en accord avec le relief de



Figure 1.2 – *Valerian and the City of a Thousand Planets*. EuropaCorp, 2017. Moteur de rendu *Arnold*.

l'objet, permettant ainsi d'obtenir une ombre et une silhouette correctes mais pour un temps de simulation plus long.

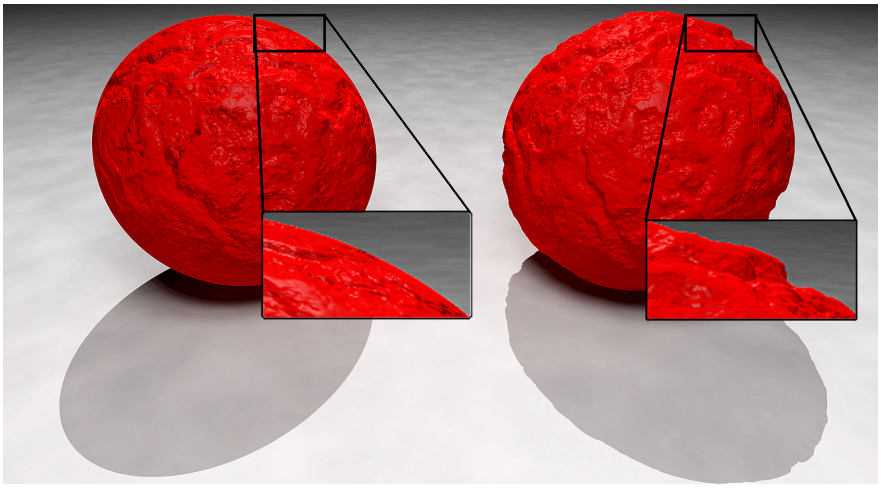


Figure 1.3 – À gauche : modification des normales (*bump mapping*). À droite : modification de la géométrie (*displacement mapping*). *https ://en.wikipedia.org/*

Pour décrire le comportement de la lumière sur la surface d'un matériau opaque, une fonction bidirectionnelle est utilisée, dépendant de deux directions - l'incidence et la réflexion de la lumière. Cette fonction est appelée fonction de distribution de répartition bidirectionnelle, ou BRDF (*Bidirectional Reflectance Distribution Function*). Le choix du modèle d'apparence et de ses paramètres est important puisqu'il détermine le type du matériau et son apparence. S'il est lisse et mat, ou au contraire rugueux, spéculaire, ou encore pailleté, les théories physiques dont découlent ces modèles ne sont pas les mêmes et les résultats visuels non plus.

Les effets optiques observés suivent des modèles physiques, pris en compte et retravaillés pour proposer des modèles mathématiques utilisés pour calculer la BRDF dans la simulation de l'éclairage. Ils permettent de réduire la complexité explicite de la scène en intégrant la microgéométrie des éléments de surface sous-pixellaires dans leurs formulations. La microgéométrie des surfaces est alors définie par des caractéristiques physiques et statistiques dont découlent des équations mathématiques, et elle n'a plus besoin d'être définie par un maillage en 3D.

1.2. Problématique

Dans la littérature actuelle, il n'existe pas une unique fonction mathématique pour représenter toutes les apparences possibles. Certains modèles d'apparence reposent sur des hypothèses fortes contraignant la microgéométrie des éléments de surface. Ces conditions sont nécessaires pour arriver à des équations calculables, mais diminuent la généralité des modèles. Bien que ces hypothèses soient souvent posées pour correspondre à des cas assez généraux, elles ne permettent pas forcément de représenter des microsurfaces réelles. À titre d'exemple, certaines représentations reposent sur une absence de corrélation entre la position d'un point de la microsurface et l'orientation de la microsurface à ce point (sa normale). Pourtant il est facile d'imaginer un grand nombre de microgéométries pour lesquelles cette hypothèse n'est pas respectée. Dans la figure 1.4, la microgéométrie de gauche possède des parties horizontales à seulement deux hauteurs différentes et espacées régulièrement. À droite, plus un point de la microgéométrie est bas (dans le creux des demi-cylindres), plus l'orientation de la microsurface à ce point est verticale.

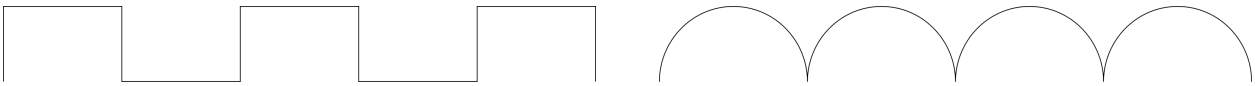


Figure 1.4 – Deux microgéométries en 2D pour lesquelles l'orientation locale en un point est corrélée à sa position.

Dans la grande diversité des microsurfaces qui recouvrent les objets de notre environnement, il est très probable que plusieurs d'entre elles ne valident aucune des hypothèses des modèles existants. Ils ne produisent peut-être pas de résultats satisfaisants, sur le plan visuel ou optique. Le problème de la prise en compte de ces microsurfaces se pose alors. Dans les domaines d'application du grand public tels que les films d'animation ou les jeux vidéo, le réalisme produit est déjà très élevé et les problématiques soulevées concernent également les temps de calcul et l'espace en mémoire nécessaires au calcul de ces modèles. Nous ne nous concentrons que sur la question du réalisme physique d'un modèle. Les contraintes imposées

par un modèle de BRDF induisent une microsurface aux caractéristiques pouvant différer de celles voulues par l'artiste. Cette différence impacte le résultat final du processus de synthèse d'images. Elle n'est pas nécessairement perceptible à l'œil nu, mais certains domaines d'application de la synthèse d'images requièrent une très grande précision des modèles. Pour permettre de faire les meilleures simulations possibles, par exemple dans la conception d'un nouveau matériau aux propriétés optiques intéressantes, ils doivent correspondre au mieux à la mesure obtenue dans le monde réel.



Figure 1.5 – Plusieurs exemples de spécularités issus de la vie réelle.

Peu importent les modèles utilisés et les hypothèses qui les caractérisent, produire efficacement une image d'une scène virtuelle complexe se heurte à la difficulté de gérer les niveaux de détail. De nombreuses solutions ont été apportées au cours des dernières décennies. Le principe est de pré-filtrer les informations des surfaces afin de les utiliser optimalement selon la quantité de détails couverts par un pixel, dépendant de la distance à laquelle l'observateur se trouve de cet objet. Ainsi, les objets lointains sont définis avec une résolution plus faible, simplifiant le calcul de l'image finale. Cependant, cette simplification de la géométrie et de son apparence peut entraîner la perte de détails fins. Bien qu'ils soient petits et

lointains, ils peuvent avoir une importance sur l'apparence finale car ils peuvent collecter une forte concentration de lumière et créer des reflets locaux intenses, ou à l'inverse produire des zones d'ombres très fines. Plusieurs exemples sont donnés dans la figure 1.5. D'un autre côté, ces données pré-filtrées peuvent rapidement nécessiter beaucoup de ressources. Un autre phénomène difficile à traiter est celui de la transition entre différentes résolutions, entre différents niveaux de détail (figure 1.6) ; elle doit être fluide afin d'éviter l'apparition d'artefacts lors des changements de niveaux. En effet, lorsque la caméra est très proche de la surface, il est souhaitable de représenter la géométrie complète en 3D. À l'inverse lorsqu'elle s'éloigne, une représentation de tous les détails devenus microgéométriques devient trop complexe à évaluer et il est alors préférable d'utiliser un modèle théorique statistique ou une fonction mathématique, permettant d'utiliser moins de mémoire ou de diminuer les temps de calcul.

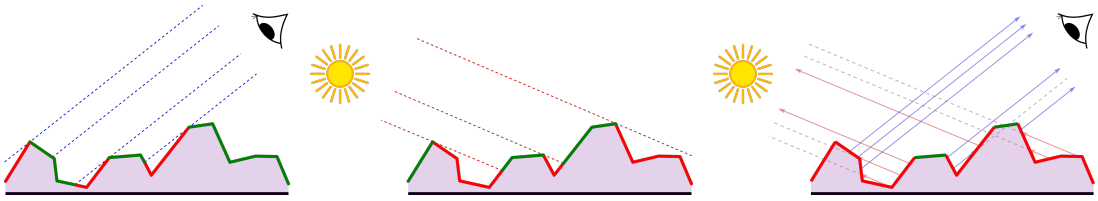


Figure 1.6 – La peau humaine vue à plusieurs niveaux de détail.

La microgéométrie d'un élément de surface couvert par une infime partie d'un pixel n'a pas d'intérêt à être représentée par un maillage 3D. À la place, il est d'usage de théoriser la modélisation d'un tel élément de surface en se basant sur des statistiques et des valeurs numériques. La théorie la plus utilisée est celle des microfacettes. La microsurface est supposée être constituée d'une infinité de microfacettes parfaitement planes définissant la microgéométrie. Chaque microfacette théorique n'est jamais représentée individuellement dans la scène 3D mais ce sont les statistiques de l'ensemble qui sont utilisées dans le modèle d'apparence. Ainsi, chaque élément de surface peut être défini par des fonctions mathématiques et des valeurs numériques représentant la distribution des micronormales des microfacettes ainsi que la BRDF de celles-ci. En ajustant ces paramètres, le modèle d'apparence peut ainsi simuler des microsurfaces rugueuses, lisses, anisotropes ou non, sans que l'artiste n'ait à construire un maillage extrêmement fin.

Pour évaluer l'apparence d'un élément de surface à ce niveau de détail, il est important de prendre en compte le fait que toute la microgéométrie n'est pas forcément visible dans une direction d'observation, ni forcément éclairée par une source de lumière qui atteint l'élément de surface. Une microfacette peut en masquer d'autres à l'observateur, tout comme elle peut occulter la lumière et mettre dans l'ombre des microfacettes voisines, diminuant la

portion visible de la microgéométrie. Ce facteur d'atténuation géométrique (GAF, de l'anglais *Geometric Attenuation Factor*), illustré dans la figure 1.7, est un terme très important de la théorie des microfacettes pour lequel il existe quelques modèles mathématiques. C'est sur celui-ci que se concentre notre travail.



(a) Masquage **(b)** Ombrage **(c)** Visibilité

Figure 1.7 – Effets de (a) masquage et (b) d'ombrage. Les deux effets combinés donnent un facteur de visibilité (c), également appelée masquage-ombrage. La partie de la microsurface en rouge est soit masquée, soit ombrée, soit non visible des deux directions. La partie en vert est à l'inverse visible de la ou des directions indiquées.

1.3. Travaux réalisés

Notre travail se place dans le contexte de la théorie des microfacettes et se concentre sur le modèle de visibilité pour des microsurfaces. Nous étudions l'applicabilité d'un modèle théorique de visibilité à des données issues de matériaux réels, représentés par des maillages triangulaires.

Durant cette thèse, nous avons développé un outil permettant de mesurer la visibilité d'un maillage (c'est-à-dire ses effets de masquage et d'ombrage) grâce à un algorithme de tracer de rayons et un senseur hémisphérique virtuel. Il permet de comparer cette mesure de référence au modèle théorique de Smith [**Smi67**] et d'Ashikhmin et al. [**APS00**] calculé directement grâce aux statistiques du maillage. Nous comparons ainsi plus de 400 microsurfaces acquises sur des matériaux réels ainsi que des microsurfaces générées à partir de distributions de normales [**RBSM19**] et d'autres générées de manière procédurale. Nous montrons que les hypothèses permettant de formuler le terme de visibilité de Smith et d'Ashikhmin et al. ne sont pas facilement validées par des maillages obtenus à partir de cartes de hauteurs.

Notre travail permet d'obtenir l'erreur du modèle théorique de visibilité pour un maillage donné. Nous analysons la relation entre cette erreur et les caractéristiques de la microsurface. Nous proposons un modèle prédictif de l'erreur, estimant celle-ci à partir des caractéristiques de la microsurface sans avoir à mesurer un terme de référence par tracer de rayons. Cette prédiction permet de discriminer l'application du terme de visibilité théorique proposé par

Smith et Ashikhmin et al. lorsque l'erreur est estimée trop importante. Pour pouvoir visualiser l'impact de l'erreur au niveau du rendu, notre étude est complétée par des comparaisons de rendus d'images pour lesquels nous utilisons soit le terme de visibilité de référence mesuré, soit le terme de visibilité théorique calculé.

Cette analyse et le modèle prédictif de l'erreur ont été soumis dans un article pour la revue *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, actuellement en révision.

Ce document est organisé de la manière suivante. Le chapitre 2 présente le vocabulaire et les notations nécessaires à la compréhension du document, ainsi qu'un état de l'art des techniques de rendu pour les matériaux rugueux. La théorie du terme de masquage-ombrage dans les modèles à microfacettes y est approfondie. Le chapitre 3 explique notre méthode de travail pour mettre en place une analyse entre les modèles mathématiques et les mesures réelles. Le chapitre 4 détaille cette analyse comparative et propose le modèle prédictif de l'erreur. Enfin, le chapitre 5 présente quelques pistes possibles pour continuer les travaux réalisés. Le chapitre 6 donne une conclusion finale de la thèse.

Chapitre 2

Notions essentielles

La création d'images photoréalistes se base sur des lois physiques simulant des phénomènes optiques. Elle requiert donc la résolution d'un problème de transport de lumière en utilisant les quantités radiométriques appropriées. Dans la section 2.1, nous introduisons dans un premier temps les notations utilisées dans la thèse, puis les mesures indispensables à la création d'une image photoréaliste. La section 2.2 rappelle les équations permettant de calculer l'apparence des matériaux et leur interaction avec la lumière. Nous y présentons plusieurs modèles de réflexion qui sont (ou ont été) utilisés dans le domaine de la synthèse d'images. La section 2.3 approfondit la théorie des microfacettes aujourd'hui largement utilisée pour la production d'images virtuelles photoréalistes, plus fréquemment que les modèles empiriques.

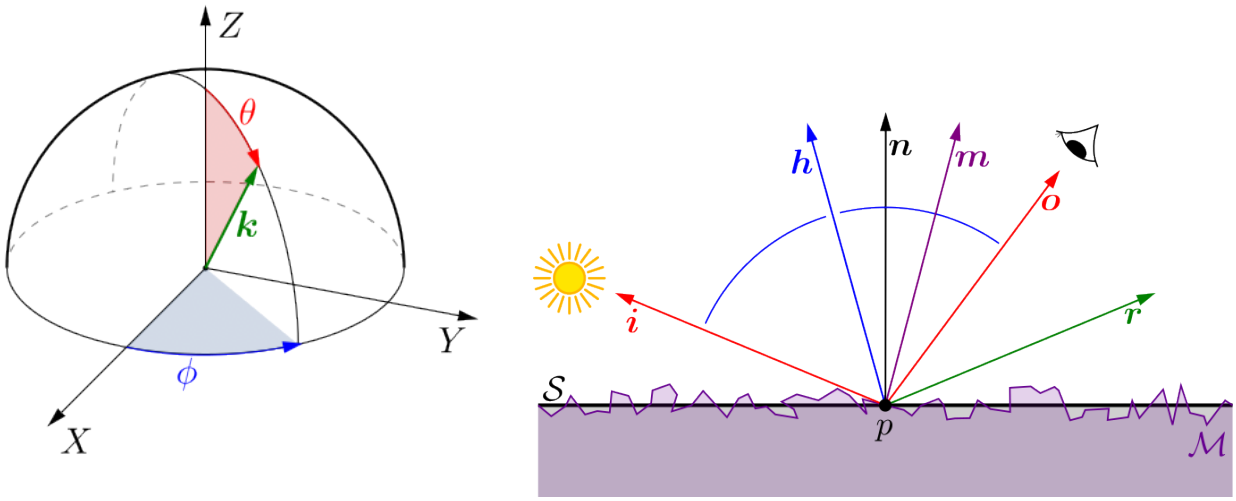
2.1. Grandeurs physiques et notations

2.1.1. Notations

La figure 2.1a représente l'espace 3D dans lequel le travail est effectué, avec un repère cartésien orthonormé (X, Y, Z). Dans le domaine de l'informatique graphique, les angles entre vecteurs sont importants puisqu'ils permettent de pondérer les interactions de la lumière à la surface des objets. Les directions sont notées avec leurs coordonnées sphériques (θ, ϕ) où θ est l'angle polaire du vecteur (angle avec l'axe Z) et ϕ en est l'azimuth (angle orienté dans le sens anti-horaire avec l'axe X). En coordonnées cartésiennes, le vecteur normé associé est $(\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$. Sauf indication spécifique, une direction correspond toujours à un vecteur normé.

Un élément de surface est une partie infinitésimale de la surface considérée localement planaire. Sa projection sur l'espace écran lors du rendu de l'image est inférieure à la taille d'un

pixel. Toutes les valeurs 3D liées à un élément de surface sont considérées dans son repère local où le plan est défini par les directions tangentes $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.



(a) Repère hémisphérique. Une direction quelconque est notée $\boldsymbol{k}$ et est toujours normalisée (de longueur unitaire). Elle est définie par deux angles θ et ϕ donnant son orientation dans l'espace 3D cartésien (X, Y, Z).

(b) Notations des vecteurs usuels. $\mathcal{S}$ est la macrosurface plane de macronormale $\boldsymbol{n}$ et $\mathcal{M}$ est la microsurface déplacée où une micronormale à un point est notée $\boldsymbol{m}$. $\boldsymbol{o}$ est la direction d'observation, $\boldsymbol{i}$ la direction d'incidence, $\boldsymbol{r}$ la direction réfléchie et $\boldsymbol{h}$ le vecteur bissecteur entre incidence et observation.

Figure 2.1 – Notations géométriques. (a) Une direction $\boldsymbol{k}$ est définie par deux angles (θ, ϕ) en coordonnées sphériques et trois valeurs (x, y, z) en coordonnées cartésiennes. (b) Chaque direction usuelle est notée par une lettre permettant de l'identifier.

La figure 2.1b illustre en 2D les différentes notations associées à un élément de surface. La partie planaire de l'élément de surface est appelée la macrosurface $\mathcal{S}$. Elle est différenciée de la partie rugueuse qui est appelée sa microsurface $\mathcal{M}$, définie par la microgéométrie. De manière générale, une direction (unitaire) est toujours dénotée par une lettre en gras (telle que $\boldsymbol{k}$). L'ensemble complet des directions (la sphère) est noté Ω. La macrosurface a une unique normale sur tout l'élément, notée $\boldsymbol{n}$. La microsurface possède de nombreuses normales différentes, appelées micronormales. La prise en compte de l'éclairement en un point p de micronormale $\boldsymbol{m}$ consiste à considérer une direction d'incidence $\boldsymbol{i}$ (le "i" vient de "*incoming*" en anglais) et le transfert du flux vers une direction d'observation $\boldsymbol{o}$ (le "o" vient de "*outgoing*" en anglais). Les coordonnées cartésiennes ou sphériques sont indexées de la même manière que la direction. La notation $\boldsymbol{h}$ est utilisée pour le vecteur bissecteur entre $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{o}$, tandis que la notation $\boldsymbol{r}$ désigne la réflexion parfaite (miroir) de $\boldsymbol{i}$. Les notations sont résumées dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 – Notations utilisées dans le document.

Notation	Description
$\boldsymbol{k}$	Direction quelconque
$\boldsymbol{i}$	Direction d'incidence
$\boldsymbol{o}$	Direction d'observation
$\boldsymbol{r}$	Réflexion de $\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{h}$	Vecteur bissecteur entre $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{o}$
$\boldsymbol{n}$	Normale de la macrosurface (macronormale)
$\boldsymbol{m}$	Normale d'une microfacette (micronormale)
$\tilde{s}_{\boldsymbol{m}}$	Pente d'une microfacette
Ω	Sphère des directions
Ω_+	Hémisphère des directions $\boldsymbol{k}$ où $(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}) > 0$
$\omega_{\boldsymbol{k}}$	Angle solide associé à $\boldsymbol{k}$
$\theta_{\boldsymbol{k}}$	Angle polaire de la direction $\boldsymbol{k}$
$\phi_{\boldsymbol{k}}$	Angle azimuthal de la direction $\boldsymbol{k}$
z_f	Hauteur du barycentre de la microfacette f
$\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \rangle$	Produit scalaire limité à [0,1]
$\mathbf{1}_I(x)$	Fonction caractéristique de I
$H(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	Fonction Heaviside
$f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$	BRDF de $\boldsymbol{i}$ vers $\boldsymbol{o}$
$F(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m})$	Terme de Fresnel
$D(\boldsymbol{m})$	Distribution des normales de microfacettes
$\mathrm{pdf}(\boldsymbol{m})$	Densité de probabilité
$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m})$	Terme de masquage-ombrage
$G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{m})$	Terme de masquage
$G_1^{\mathrm{local}}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{m})$	Terme de masquage local
$G_1^{\mathrm{dist}}(\boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{o})$	Terme de masquage distant
$G_1^{\mathrm{rc}}(\boldsymbol{o})$	Terme de masquage distant mesuré par tracer de rayons
E	Erreur mesurée pour G_1 sur Ω
E^r	Erreur mesurée pour les rendus réalisés avec G_1
P	Prédiction de l'erreur E
P^r	Prédiction de l'erreur P^r
$\vartheta = (\psi, \delta, \xi, \lambda)$	Paramètres pour une distribution SB de Johnson
$\widehat{\vartheta} = (\widehat{\psi}, \widehat{\delta}, \widehat{\xi}, \widehat{\lambda})$	Paramètres estimés
$\varphi(x \mid \vartheta)$	Distribution SB de Johnson
$L(\vartheta\ ; T)$	Vraisemblance de ϑ pour l'ensemble de données T
$d^{rc}(\boldsymbol{o})$	Différence exacte entre $G_1(\boldsymbol{o})$ et $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$
$\widehat{d}(\boldsymbol{o})$	Approximation de d^{rc} avec deux distributions SB de Johnson
$d(\boldsymbol{o})$	Différence prédite entre $G_1(\boldsymbol{o})$ et $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$
$G_1^d(\boldsymbol{o})$	Terme de masquage distant corrigé

2.1.2. Quantités radiométriques

Le rendu physique se base sur des quantités radiométriques utilisées pour définir des modèles de réflectance. Nous rappelons brièvement les unités principales utilisées en informatique graphique.

Flux énergétique

Le flux énergétique Φ décrit la quantité d'énergie émise ou absorbée par une surface. C'est une énergie définie par unité de temps et mesurée en Watts ($\mathrm{W} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$).

Luminance energétique

La luminance L est la densité de flux énergétique par unité de surface et par angle solide. Elle est définie par

$$\begin{aligned} L &: \mathcal{S} \times \Omega \to \mathbb{R}, \\ L(p, \boldsymbol{i}) &= \frac{\partial^2 \Phi(p, \boldsymbol{i})}{\cos\theta_i \, \partial \boldsymbol{i} \, \partial A}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

mesurée en Watts par mètre carré par stéradian ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{sr}^{-1}$).

Éclairement

L'éclairement E à un point de la surface correspond à la densité de flux énergétique par unité de surface :

$$\begin{aligned} E &: \mathcal{S} \to \mathbb{R}, \\ E(p) &= \frac{\partial \Phi(p)}{\partial A(p)}, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

mesurée en Watts par mètre carré ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$). Il s'agit du total des luminances arrivant de toutes les directions possibles à ce point. Il peut donc s'exprimer :

$$E(p) = \int_\Omega L(p, \boldsymbol{i}) \, \cos\theta_i \, d\omega_i. \tag{2.1.3}$$

2.2. Réflexion et apparence des matériaux

Le problème de transport de lumière peut être formalisé par une formule mathématique. Pour cela, la première étape est de définir comment la lumière est dispersée lorsqu'elle interagit avec une surface, grâce à la fonction de distribution de répartition bidirectionnelle. Puisque nous nous intéressons seulement à la lumière réfléchie par la surface et non pas celle transmise à travers la surface, nous réduisons notre étude à fonction de distribution de la réflectance

bidirectionnelle, utilisée pour définir l'équation d'éclairement local à la base du transport de lumière.

La fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle a été définie par de nombreux modèles depuis les débuts de l'informatique graphique. Nous introduisons rapidement les principaux d'entre eux, puis nous abordons plus en détail le modèle construit avec la théorie des microfacettes, un modèle largement utilisé dans la production d'images virtuelles photoréalistes et qui est à la base de notre étude.

2.2.1. BSDF

La fonction de distribution de répartition bidirectionnelle (notée BSDF pour *Bidirectional Scattering Distribution Function* en anglais) décrit la façon dont une surface réflichit la lumière qu'elle reçoit. Fixons $p \in \mathcal{S}$ un point sur une surface. La luminance incidente $L_i(p, \boldsymbol{i})$ au point p est différenciée de la luminance repartant $L_o(p, \boldsymbol{o})$ de ce point. La relation entre ces deux quantités dépend des propriétés de dispersion de la surface au point p.

La lumière incidente $\boldsymbol{i}$ est considérée dans un cône infinitésimal d'angle solide $d\omega_{\boldsymbol{i}}$. Celle-ci génère au point p un éclairement partiel :

$$\partial E(\omega_{\boldsymbol{i}}) = L_i(p, \boldsymbol{i}) \cos\theta_{\boldsymbol{i}} \, \partial\omega_{\boldsymbol{i}}. \tag{2.2.1}$$

La surface est alors distribuée dans toutes les directions. La partie de la luminance repartant de p et produite par l'éclairement partiel arrivant de $\boldsymbol{i}$ est notée $\partial L_o(p, \boldsymbol{o})$.

La luminance partielle est liée à l'éclairement partiel par la relation

$$\partial L(p, \boldsymbol{o}) = f_s(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) \, \partial E(\omega_{\boldsymbol{i}}). \tag{2.2.2}$$

La BSDF $f_s(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$ est alors définie comme étant la luminance sortante en direction $\boldsymbol{o}$, par unité d'éclairement arrivant de $\boldsymbol{i}$. Elle est égale au ratio :

$$f_s(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \frac{\partial L(p, \boldsymbol{o})}{\partial E(\omega_{\boldsymbol{i}})} = \frac{\partial L(p, \boldsymbol{o})}{L(p, \boldsymbol{i}) \cos\theta_{\boldsymbol{i}} \, \partial\omega_{\boldsymbol{i}}}. \tag{2.2.3}$$

Cependant en informatique graphique la BSDF n'est pas utilisée sous la forme d'une unique fonction. À la surface, un flux de lumière arrivant par la direction $\boldsymbol{i}$ peut être distribué des deux côtés de la surface. Il est réfléchi (la lumière repart du même côté) et/ou transmis (la surface est traversée). Ces deux quantités sont traitées séparément et définies par deux nouvelles fonctions : la fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle f_r (ou BRDF pour *Bidirectional Reflectance Distribution Function* en anglais) pour la lumière réfléchie et la

fonction de distribution de la transmittance bidirectionnelle f_t (ou BTDF pour *Bidirectional Transmittance Distribution Function* en anglais) pour la lumière transmise.

La surface correspond à l'élément d'un objet où la lumière réfléchie se sépare de la lumière transmise. La sphère des directions est divisée en deux hémisphères complémentaires selon le plan tangent de la surface. Ω_+ est l'hémisphère positif orienté sur la normale géométrique $\boldsymbol{n}$ et contenant $\boldsymbol{i}$. Ω_- est son hémisphère complémentaire. Les domaines de définition de la BRDF et de la BTDF sont respectivement réduits aux hémisphères Ω_+ et Ω_-.

2.2.2. Éclairement local

La BRDF est définie comme la BSDF dans l'équation 2.2.3 [**Nic65**] :

$$f_r(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \frac{\partial L(p, \boldsymbol{o})}{\partial E(\omega_i)} = \frac{\partial L(p, \boldsymbol{o})}{L(p, \boldsymbol{i}) \cos\theta_i \, \partial\omega_i} \tag{2.2.4}$$

où les directions entrante et sortante sont restreintes à l'hémisphère positif, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o} \in \Omega_+$.

Une BRDF physiquement plausible respecte les propriétés suivantes.

— Elle est **positive**. La BRDF correspond à un rapport de luminance, à une énergie transmise, or une telle quantité ne peut pas être négative.

$$f_r(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) \geq 0. \tag{2.2.5}$$

— Elle est **symétrique**. Un flux de lumière suivant un chemin de directions a les mêmes interactions qu'un flux de lumière suivant le chemin inversé.

$$f_r(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = f_r(p, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{i}). \tag{2.2.6}$$

— Elle **conserve l'énergie**. Une surface ne peut pas transmettre plus d'énergie qu'elle n'en reçoit ; il ne peut y avoir plus de lumière sortante que de lumière incidente.

$$\int_\Omega f_r(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) \cos\theta_i \, d\omega_i \leq 1. \tag{2.2.7}$$

Notons que toutes ces propriétés ne sont pas définies pour les surfaces transmettant la lumière. La symétrie n'est pas nécessairement assurée. Cet effet est par exemple observable en regardant des objets sous l'eau. Aussi, elles ne sont pas nécessairement satisfaites par les BSDF et BTDF.

La BRDF ne décrit le comportement de la lumière que pour une combinaison de deux directions : incidence et observation. La luminance observée dépend de la luminance arrivant de l'ensemble des directions possibles. L'équation 2.2.4 peut être reformulée pour donner la luminance partielle :

$$\partial L(p, \boldsymbol{o}) = f_r(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) \, L(p, \boldsymbol{i}) \cos\theta_i \, \partial\omega_i. \tag{2.2.8}$$

En intégrant sur l'ensemble des directions, nous obtenons l'équation d'éclairement local [Kaj86] (ou équation du rendu) :

$$L(p, \boldsymbol{o}) = \int_{\Omega} L(p, \boldsymbol{i})\, f_r(p, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})\, \cos\theta_{\boldsymbol{i}}\, d\omega_{\boldsymbol{i}}. \tag{2.2.9}$$

Nous posons l'hypothèse commune que la BRDF pour une surface est la même en tout point p. Il n'y a alors plus de paramètre spatial :

$$L(\boldsymbol{o}) = \int_{\Omega} L(\boldsymbol{i})\, f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})\, \cos\theta_{\boldsymbol{i}}\, d\omega_{\boldsymbol{i}}. \tag{2.2.10}$$

2.2.3. Modèles de réflexion

Tous les matériaux ne réfléchissent pas la lumière de la même manière. Leurs BRDFs ne sont donc pas les mêmes. Depuis les débuts de la synthèse d'images, plusieurs modèles mathématiques ont vu le jour, pour permettre de simuler ou approcher l'apparence de divers matériaux.

Parfaitement spéculaire. Le modèle probablement le moins complexe est le modèle idéal des surfaces parfaitement spéculaires. Ces surfaces sont des miroirs parfaits, complètement plats et complètement réfléchissants. Leur géométrie parfaitement plane induit que la lumière n'est réfléchie que dans une seule direction $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = 2|\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{i}. \tag{2.2.11}$$

Et puisqu'elles réfléchissent complètement la lumière sans aucune absorption, leur BRDF s'écrit grâce à la distribution de dirac δ :

$$f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \frac{\delta_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{o})}{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}. \tag{2.2.12}$$

Parfaitement diffus. À l'opposé des surfaces complètement spéculaires se trouvent les surfaces complètement diffuses, les matériaux mats. Ces surfaces théoriques sont décrites par la loi de Lambert [Lam60], de 1760, qui indique que la lumière est réfléchie uniformément en intensité dans toutes les directions. La BRDF est donc constante :

$$f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \text{cst} \tag{2.2.13}$$

où cst est l'albédo de la surface. Il doit être inférieur ou égal à $\frac{1}{\pi}$ pour assurer la conservation de l'énergie.

Modèles empiriques. Certains modèles ont été dérivés de manière empirique, cherchant à approcher des effets particulièrement visibles de la surface éclairée. Ils se concentrent particulièrement sur la brillance des surfaces et créent des formules faciles à calculer et donnant des résultats satisfaisants pour les reflets de ces matériaux.

L'exemple le plus connu est le modèle de Phong [**Pho75**]. Il travaille avec la direction réfléchie miroir. Au lieu de prendre un dirac le long de $\boldsymbol{r}$, Phong utilise un lobe directionnel $k_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{o})$ centré sur la direction réfléchie. Ce lobe permet de représenter non pas une réflexion parfaite mais une réflexion plus diffuse de la brillance. C'est ce lobe qui produit l'effet d'éclats lumineux plus ou moins nets sur les surfaces brillantes (aussi appelé *peak* de Phong en anglais). Le modèle de Phong ne traite pas correctement les cas où l'angle entre les directions $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{o}$ est supérieur à 90°, puisque le produit scalaire des deux vecteurs devient alors négatif et la formule utilise 0 à la place, induisant des résultats incorrects dans le reste de l'équation. Fortement inspiré par Torrance et Sparrow [**TS67**] en optique, le modèle Blinn-Phong [**Bli77**] propose une version modifiée travaillant sur le vecteur bissecteur $\boldsymbol{h}$ plutôt que sur $\boldsymbol{o}$, et calcule son angle $\theta_{\boldsymbol{h}}$ avec la normale, angle toujours inférieur à 90°. Lewis [**Lew94**] corrige finalement ce modèle en ajoutant un terme de normalisation pour assurer la conservation de l'énergie. La BRDF s'écrit alors en une composante diffuse et une composante spéculaire (figure 2.2) :

$$f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = k_d \frac{1}{\pi} + k_s \frac{n+2}{2\pi} \cos^n \theta_{\boldsymbol{h}} \tag{2.2.14}$$

où k_d (resp. k_s) est le coefficient de réflexion diffuse (resp. spéculaire) et le paramètre n contrôle la largeur du lobe spéculaire et donc la rugosité de la surface.

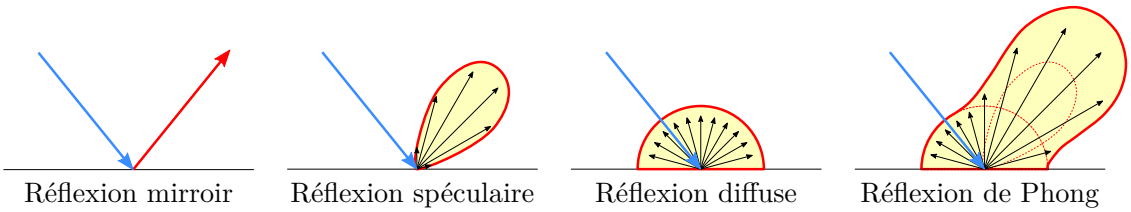


Figure 2.2 – Modèle de Phong.

Modèle à microfacettes général. D'autres modèles sont construits pour être physiquement corrects. Ils sont communément nommés *physically based*. Parmi eux, la famille la plus connue est celle qui suppose que la surface est organisée en un ensemble de microfacettes créant la microgéométrie du matériau et donc sa rugosité (figure 2.3). Ces microfacettes sont de taille plus grande que la longueur d'onde de la lumière, permettant ainsi de voir apparaître les phénomènes optiques liés à la géométrie tout en évitant la diffraction. La théorie des microfacettes est détaillée dans la section 2.3 ci-après considérant leur importance dans cette thèse. Elle a permis de développer des modèles de BRDF plus réalistes que

les modèles empiriques et, aujourd'hui, pouvant être calculés en temps réel. Ces modèles sont donc maintenant très présents dans les domaines de la synthèse d'images (films, jeux vidéo, ...).

L'approche consiste à évaluer la proportion de microfacettes qui vont être correctement orientées, illuminées et visibles pour contribuer au flux de lumière de $\boldsymbol{i}$ vers $\boldsymbol{o}$. Dans le cas général, la macro-BRDF s'écrit sous la forme d'une intégrale sur l'ensemble des micronormales :

$$f_r(\boldsymbol{i},\boldsymbol{o}) = \int_\Omega f_r^\mu(\boldsymbol{i},\boldsymbol{o},\boldsymbol{m}) G(\boldsymbol{i},\boldsymbol{o}) D(\boldsymbol{m}) \frac{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{m}\rangle}{|\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}|} \frac{\langle \boldsymbol{o},\boldsymbol{m}\rangle}{|\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{n}|} d\omega_{\boldsymbol{m}} \tag{2.2.15}$$

où $f_r^\mu(\boldsymbol{i},\boldsymbol{o},\boldsymbol{m})$ est la micro-BRDF d'une facette de micronormale $\boldsymbol{m}$, et D et G sont des fonctions symétriques caractérisant la microsurface. D est la fonction de distribution des micronormales (NDF) ; elle donne la proportion de microfacettes orientées avec la micronormale $\boldsymbol{m}$. G est le facteur d'atténuation géométrique (GAF) prenant en compte les effets de masquage et d'ombrage de la microsurface sur elle-même.

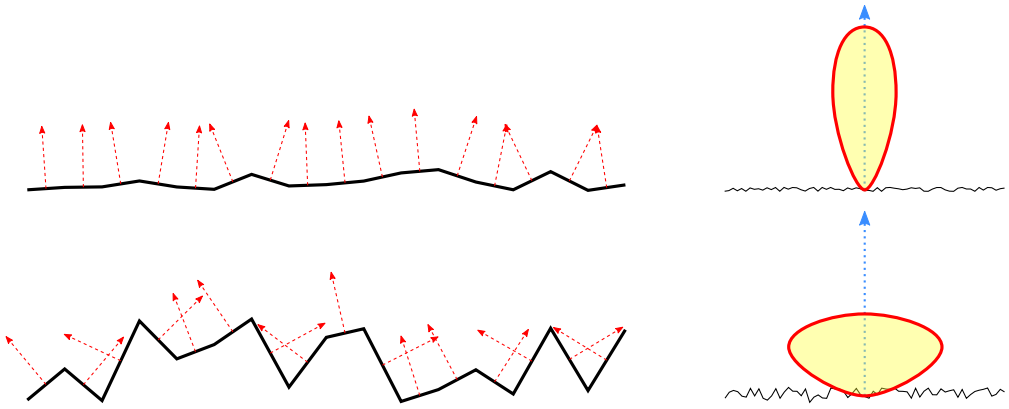


Figure 2.3 – Modèle à microfacettes. Plus la distribution des micronormales est concentrée (rangée du haut), plus la BRDF est spéculaire. Plus la distribution est dispersée, plus la BRDF est diffuse (rangée du bas).

Ces modèles de BRDF ne couvrent pas le calcul complexe de la contribution des interréflexions entre les facettes. Plusieurs travaux cherchent à répondre à cette problématique [**HHdD16**, **DHd16**, **LJJ+18**, **XH18**, **WJF+22**] que nous ne traitons pas dans le travail de cette thèse. Nous donnons plus de détails sur cette problématique dans les perspectives en conclusion (section 6.2.2).

Modèles à microfacettes spéculaires. Si les microfacettes sont parfaitement spéculaires (miroirs) [**TS67**, **CT82**], la micro-BRDF est :

$$f_r^\mu(\boldsymbol{i},\boldsymbol{o},\boldsymbol{m}) = F(\boldsymbol{i},\boldsymbol{o},\boldsymbol{m}) \frac{\delta_h(\boldsymbol{m})}{4|\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}||\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{n}|} \tag{2.2.16}$$

où F est le terme de Fresnel qui permet de décrire le comportement des microfacettes lorsqu'elles sont éclairées. Seules les microfacettes orientées parfaitement pour réfléchir $\boldsymbol{i}$ sur $\boldsymbol{o}$ contribuent (autrement dit celles dont la micronormale $\boldsymbol{m}$ est exactement $\boldsymbol{h}$. La macro-BRDF s'écrit sous la forme sans intégrale :

$$f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \frac{F(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) D(\boldsymbol{h})}{4|\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}||\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{n}|}. \tag{2.2.17}$$

Le dénominateur est un facteur de normalisation ; il est expliqué dans de multiples travaux [**CT82**, **APS00**, **WMLT07**].

Le terme de Fresnel donne la fraction de lumière incidente réfléchie. Il dépend de l'angle entre la direction d'incidence $\boldsymbol{i}$ et le vecteur bissecteur $\boldsymbol{h}$, et de l'indice de réfraction μ du matériau. Plusieurs formulations pour ce terme de Fresnel existent. Cook et Torrance [**CT82**] posent une équation pour une lumière incidente non polarisée :

$$F(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) = \frac{1(g-c)^2}{2(g+c)^2}\left(1 + \frac{(c(g+c)-1)^2}{(c(g-c)+1)^2}\right) \tag{2.2.18}$$

où

$$c = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{h}$$
$$g^2 = \mu^2 + c^2 - 1.$$

Schlick [**Sch94**] en dérive l'approximation suivante :

$$F(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) = R + (1-R)(1-c)^5, \tag{2.2.19}$$

où $R = (\mu-1)^2/(\mu+1)^2$ est la réflectance de la microsurface à une incidence normale $\boldsymbol{n}$.

Modèles à microfacettes diffuses. En 1994, Oren et Nayar [**ON94**] reprennent cette théorie mais pour des microfacettes parfaitement diffuses, c'est-à-dire dont la micro-BRDF individuelle est Lambertienne. Le modèle final n'est pas lui-même Lambertien et prend en compte les effets de masquage, ombrage et surtout d'inter-réflexion entre les microfacettes. En 2009, Simonot [**Sim09**] étend ce modèle à des composantes diffuses et spéculaires pour les microfacettes. Il introduit les microfacettes Lambertiennes avec une interface de Fresnel. Elles reposent sur un substrat Lambertien dont la rugosité correspond exactement à celle de l'interface. Ce modèle théorique est défini pour une distribution Gaussienne des micronormales sans prendre en compte le masquage et l'ombrage. Meneveaux et al. [**MBT+18**] proposent en 2018 une méthodologie générale avec ce modèle pour gérer tout type de distribution. Les réflexions multiples de la lumière entre l'interface et le substrat sont exprimées analytiquement et leur travail montre comment la transmission de Fresnel affecte l'apparence d'un matériau pour des microsurfaces planes ou rugueuses.

2.3. Théorie des microfacettes

La théorie des microfacettes est au centre de notre étude, notamment le facteur d'atténuation géométrique G. Dans cette section, nous détaillons les termes importants D et G et présentons la problématique principale de la thèse.

La BRDF de la macrosurface est calculée en intégrant les contributions de toutes les microfacettes visibles et correctement orientées pour réfléchir la lumière selon la BRDF de la microsurface $f_r^\mu(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m})$. Le produit de D et G donne cette proportion de la microsurface à prendre en compte pour chaque micronormale $\boldsymbol{m}$. Puisque de l'énergie peut également être réfractée, le terme de Fresnel F doit être calculé avec l'indice de réfraction de la microsurface. Il donne la proportion d'énergie réfléchie par la microsurface, le reste étant transmis. Dans le cas de microfacettes purement spéculaires, la BRDF de la microsurface peut s'écrire avec l'équation 2.2.17.

2.3.1. Distribution des normales D

La distribution des normales D est une représentation statistique caractérisant la microsurface. D est une fonction sur les micronormales donnant une indication sur la proportion des microfacettes de la microsurface orientées selon une normale $\boldsymbol{m}$. En travaillant sur un élément de surface unitaire (appelé macrosurface) et puisque l'aire projetée de la microsurface sur la macrosurface doit être la même, alors D satisfait

$$\int_{\Omega_+} D(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}) d\omega_{\boldsymbol{m}} = 1. \tag{2.3.1}$$

La distribution respecte également d'autres propriétés.

- Ses valeurs sont positives : $0 \leq D(\boldsymbol{m}) \leq \infty$ ($D(\boldsymbol{m}) = \infty$ est possible seulement avec la distribution théorique de Dirac).
- L'aire totale est au moins aussi grande que l'aire de la macrosurface : $1 \leq \int_\Omega D(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}$.

Plusieurs modèles paramétriques de ces distributions existent et produisent des résultats différents. Pour décrire des micronormales distribuées selon une Gaussienne sur l'élévation $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, Beckmann et Spizzichinola [**BS63**] proposent une distribution qui est nommée la distribution de Beckmann. Un modèle plus récent développé par Walter et al. [**WMLT07**] et basé sur les normales d'un ellipsoïde (idée introduite bien plus tôt par Trowbridge et Reitz [**TR75**] en physique), appelé GGX (pour *ground glass unknown*), permet de mieux représenter certaines microsurfaces. La distribution est contrôlée par un unique paramètre de rugosité, mais les distributions de micronormales réelles présentent des formes

complexes ne pouvant être décrites par un seul paramètre. Ribardière et al. [**RMBS17**] proposent une distribution plus générale : elle regroupe à la fois les formes des distributions de Beckmann et GGX en utilisant un second paramètre.

Ces modèles paramétriques sont définis par un paramètre de rugosité, généralement noté α, ou par le couple (α_x, α_y) pour les matériaux anisotropes. Pour une microsurface complètement plane dont toutes les microfacettes ont une même normale $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, la distribution est alors le dirac $D(\boldsymbol{m}) = \delta_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m})$. Plus le paramètre α est élevé, plus il y a de micronormales avec un angle θ élevé et plus une microsurface est rugueuse (figure 2.4). Chaque distribution produit des effets légèrement différents (figure 2.5).

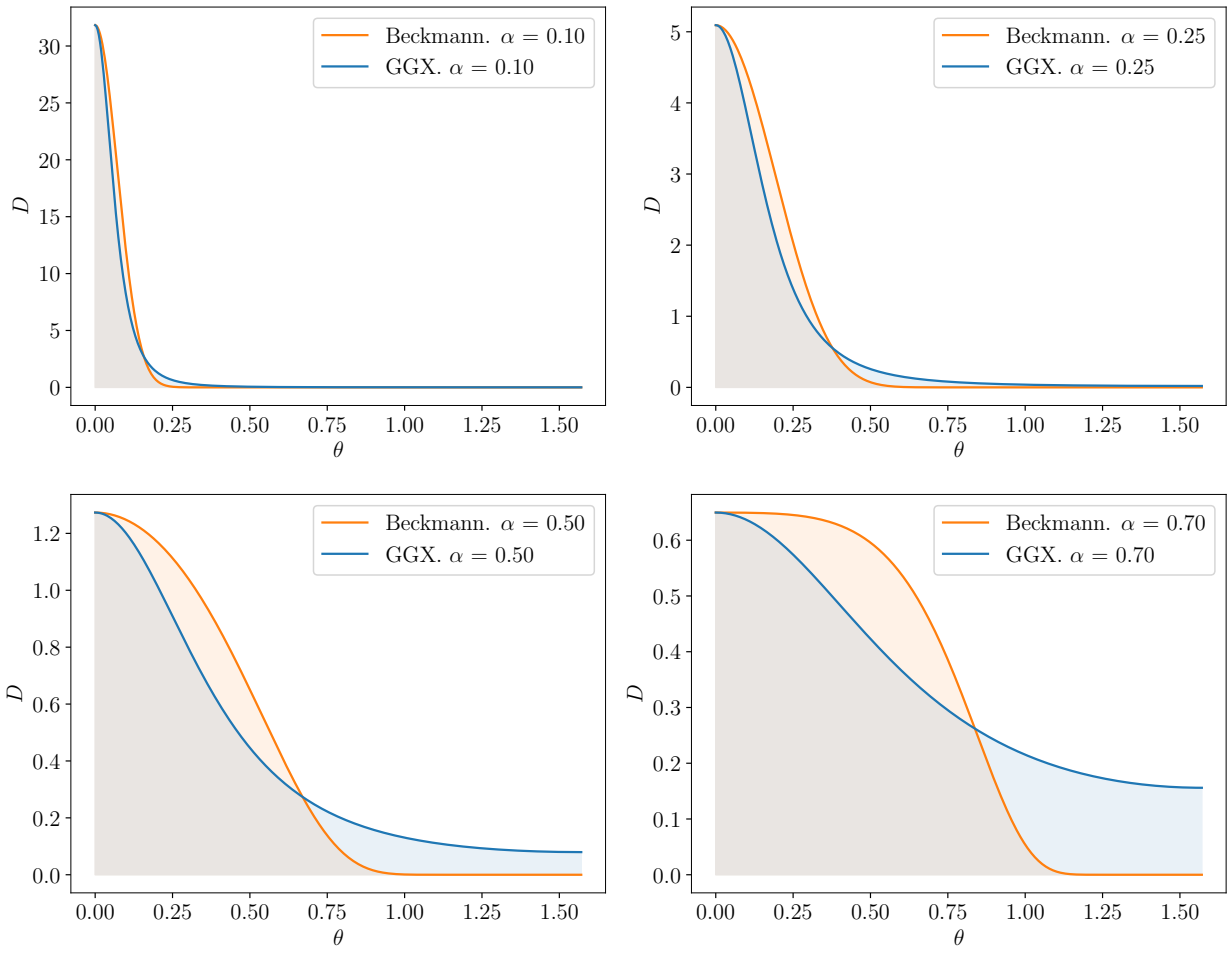


Figure 2.4 – Distributions GGX et Beckmann.

L'espace des pentes. Une pente est un paramètre en bijection avec une normale pour les cartes de hauteurs, c'est-à-dire les microsurfaces où toutes les normales sont orientées vers

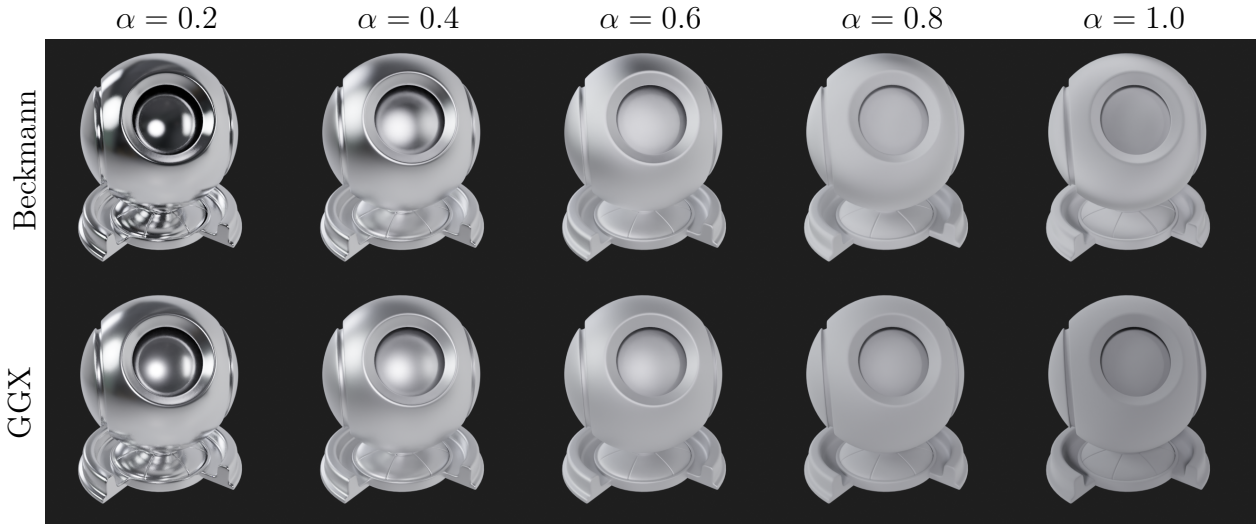


Figure 2.5 – Différences d'apparence entre GGX et Beckmann où le paramètre α correspond à la rugosité.

l'extérieur ($\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} > 0$). Exprimées en deux dimensions, elles sont plus faciles à étudier et manipuler que les normales. Dans Ω_+, la pente $\tilde{s}_{\boldsymbol{m}} = (\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}, \tilde{y}_{\boldsymbol{m}})$ et la normale $\boldsymbol{m} = (x_{\boldsymbol{m}}, y_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{m}})$ sont liées par la relation :

$$\tilde{s}_{\boldsymbol{m}} = \left(-\frac{x_{\boldsymbol{m}}}{z_{\boldsymbol{m}}}, -\frac{y_{\boldsymbol{m}}}{z_{\boldsymbol{m}}} \right) \tag{2.3.2}$$

dont la réciproque est :

$$\boldsymbol{m} = \frac{(-\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}, -\tilde{y}_{\boldsymbol{m}}, 1)}{\sqrt{\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}^2 + \tilde{y}_{\boldsymbol{m}}^2 + 1}}. \tag{2.3.3}$$

La distribution des normales peut donc être exprimée grâce à la distribution des pentes P_{22} par la relation :

$$D(\boldsymbol{m}) = \frac{P_{22}(\tilde{s}_{\boldsymbol{m}})}{\cos^4 \theta_{\boldsymbol{m}}}. \tag{2.3.4}$$

Le facteur $\cos^{-4} \theta_{\boldsymbol{m}}$ vient du Jacobien

$$\left\| \frac{\partial \tilde{s}_{\boldsymbol{m}}}{\partial \boldsymbol{m}} \right\| = \cos^{-3} \theta_{\boldsymbol{m}} \tag{2.3.5}$$

et de la projection inverse $\cos^{-1} \theta_{\boldsymbol{m}}$ qui normalise la PDF. Cette distribution des pentes décrit donc la proportion des pentes projetées sur la surface plane sous-jacente.

La distribution 1D des pentes est donnée par :

$$P_2(\tilde{y}_{\boldsymbol{m}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{22}(\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}, \tilde{y}_{\boldsymbol{m}}) d\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}. \tag{2.3.6}$$

2.3.2. Facteur d'atténuation géométrique

A. Terme géométrique G

Toutes les microfacettes d'une microsurface ne sont pas forcément observables par une direction $\boldsymbol{o}$ puisque le relief même de la géométrie peut en masquer une partie. Pour les mêmes raisons, des fractions de microfacettes peuvent ne pas être éclairées par une source de lumière de direction $\boldsymbol{i}$ et restent dans l'ombre. Une microfacette contribue à la BRDF si elle peut réfléchir de la lumière de $\boldsymbol{i}$ vers $\boldsymbol{o}$, c'est-à-dire si elle est visible depuis les deux directions. La probabilité qu'une facette soit visible et éclairée est donnée par le facteur d'atténuation géométrique (GAF : *Geometric Attenuation Factor*), autrement appelé terme de masquage-ombrage. Il permet de ne pas ajouter de contribution à la BRDF pour des microfacettes masquées ou non éclairées, une nécessité pour garantir la conservation de l'énergie, sans quoi la microsurface pourrait réfléchir plus d'énergie qu'elle n'en reçoit. Le facteur d'atténuation géométrique a une influence majeure aux angles rasants, où les effets de masquage et d'ombrage sont très critiques. Il est donc très important dans la BRDF finale.

La probabilité qu'une microfacette soit visible et éclairée est calculée pour une microfacette orientée selon $\boldsymbol{m}$ et se note $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m})$. Puisque nous travaillons sur des microfacettes spéculaires, seules les microfacettes orientées selon le vecteur bissecteur $\boldsymbol{h}$ réfléchissent la lumière de la direction d'incidence $\boldsymbol{i}$ vers la direction sortante $\boldsymbol{o}$. Aussi, le terme de masquage-ombrage n'est jamais calculé pour les microfacettes orientées différemment puisque leur contribution est nulle. Nous calculons donc toujours $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h})$ qui peut être ré-écrit $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$ pour une simplicité de lecture.

Walter et al. [**WMLT07**] explicitent les propriétés de cette fonction.

- C'est une probabilité : $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) \in [0, 1]$.
- Elle est symétrique : $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) = G(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{h})$.
- Certaines microfacettes sont masquées et/ou ombrées par leur simple orientation : $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) = 0$ si $(\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{h})(\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{n}) \leq 0$ ou $(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{h})(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}) \leq 0$.

Sans aucune information sur la microsurface, il n'existe aucune formulation analytique du GAF permettant de le calculer pour n'importe quel cas. Cependant, en maîtrisant le profil de la microsurface et sa distribution, des solutions peuvent exister. Il est commun de calculer séparément le masquage et l'ombrage avec la même fonction (appelée alors fonction de masquage) G_1. Le terme de masquage-ombrage est alors une combinaison de $G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h})$ (ombrage) et $G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h})$ (masquage). Sous l'hypothèse d'indépendance entre le masquage et l'ombrage, G s'écrit simplement :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}) G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}). \tag{2.3.7}$$

Mais le masquage et l'ombrage sont en réalité fortement corrélés lorsque les directions d'incidence et d'observation sont proches l'une de l'autre. Plus les deux directions sont proches, plus les microfacettes visibles par $\boldsymbol{i}$ ont une forte probabilité d'être également visible par $\boldsymbol{o}$, et alors le masquage et l'ombrage deviennent sur-évalués, résultant en une sous-estimation de la BRDF. Et lorsque $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{o}$ alors la corrélation est totale. Dans un tel cas, seul l'un des deux termes de masquage ou d'ombrage devrait être pris en compte. Ashikhmin et al. [**APS00**] prennent en compte cette corrélation directionnelle avec la formule suivante :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \lambda(\varphi) G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}) G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) + (1 - \lambda(\varphi)) \min(G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}), G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h})) \tag{2.3.8}$$

où $-\pi < \varphi < \pi$ est l'angle entre les projections des vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{o}$ sur le plan tangent à la surface et $0 \leq \lambda(\varphi) \leq 1$ est un facteur de corrélation empirique.

B. Fonction de masquage G_1 : profil des cavités en V

Lorsqu'ils posent le modèle des microfacettes, Torrance et Sparrow utilisent un profil de cavités en V pour dériver l'expression du GAF [**TS67**, **CT82**, **ON94**]. Une forte hypothèse est posée sur la microstructure de la microsurface. Le modèle ne considère pas une unique microsurface mais un ensemble de microsurfaces indépendantes les unes des autres et dont les contributions individuelles peuvent être moyennées pour donner une contribution finale. Pour chacune de ces microsurfaces, les microfacettes sont contraintes à deux uniques orientations. Pour une microfacette donnée, l'hypothèse est faite qu'il y en a une autre juste en face avec la même inclinaison. Ainsi, une microsurface est parcourue de cavités parallèles de longueurs infinies (e.g. des rayures) en forme de V, avec un même angle d'ouverture plus ou moins obtu (figure 2.6). Le terme de masquage est calculé pour chaque microsurface, puis les résultats sont fusionnés (avec pondération). Un résultat final isotrope est constitué d'une infinité de microsurfaces pour chaque angle ϕ avec des cavités qui ont le même angle d'ouverture,

Chaque microsurface résultant peut avoir des cavités de longueurs infinies suivant des directions arbitraires et dont l'étroitesse est également arbitraire. Ce modèle n'est pas physiquement possible puisqu'une telle configuration n'existe que si les cavités ne se croisent jamais. L'hypothèse posée permet cependant de définir une formulation simple et analytique de la fonction de masquage pour une microsurface à deux micronormales :

$$G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) = \min\left(1, 2\frac{(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{n})}{\langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h} \rangle}\right). \tag{2.3.9}$$

La contribution d'une microfacette d'une microsurface réelle devrait dépendre de son aire projetée selon $\boldsymbol{o}$. En effet, si deux microfacettes sont d'aires égales mais l'une d'entre elles fait face à $\boldsymbol{o}$ et l'autre lui est presque parallèle, la contribution de la première sera plus élevée

que celle de la seconde. Ce n'est pas le cas dans le modèle des cavités en V. Une microsurface est modélisée par paire de micronormales et leurs contributions sont moyennées en fonction de la distribution D. La pondération des micronormales n'est pas dépendante de la direction d'observation $\boldsymbol{o}$ contrairement à ce qui est attendu.

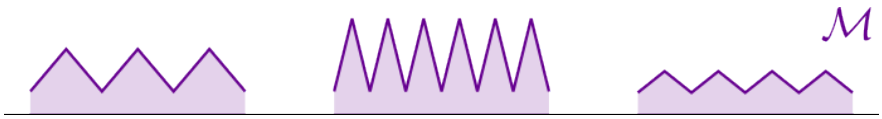


Figure 2.6 – Plusieurs microsurfaces avec des cavités en V différentes. Le résultat final est obtenu en moyennant les contributions de chaque résultat individuel.

C. Fonction de masquage G_1 : profil de Smith

En 1967, Smith [**Smi67**] propose une fonction de masquage en considèrant que **la microsurface n'est pas autocorrélée**, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune corrélation entre la hauteur (ou la normale) à un point de la microsurface et la hauteur (ou la normale) à n'importe quel autre point, même les plus proches. Cela induit un ensemble aléatoire de microfacettes, plutôt qu'une microsurface continue, où les hauteurs et les normales de la microsurface sont des variables aléatoires indépendantes (figure 2.7).



Figure 2.7 – Microsurface sans corrélation entre une microfacette et ses voisines.

En 2010, Jakob et al. [**JAM+10**] introduisent la nouvelle théorie des *microflakes* qui considère le volume plutôt que la surface, utilisant un ensemble de particules non sphériques orientées dans le volume. De cette théorie, ils dérivent la fonction de phase, l'équivalent de la BRDF mais dans le volume, tout en assurant la conservation d'énergie et la contrainte de réciprocité. Malgré son intérêt, notre travail ne se concentre pas sur cette théorie pour laquelle il est plus complexe d'obtenir des mesures de microsurfaces réelles.

C'est grâce à cette hypothèse que la probabilité $G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$ donnée par la fonction de masquage est indépendante de l'orientation de la micronormale tant qu'elle n'est pas opposée à la direction d'observation ($\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{m} > 0$). Il est ainsi possible de séparer les propriétés locales et distantes et obtenir la fonction de masquage sous une forme séparée :

$$G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = G_1^{\text{local}}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) G_1^{\text{dist}}(\boldsymbol{o}) \tag{2.3.10}$$

où la fonction locale G_1^{local} est la fonction binaire permettant d'éliminer les microfacettes à l'orientation opposée :

$$G_1^{\text{local}}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = H(\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{m})$$

avec la fonction $H(x)$ la fonction indicatrice, également appelée fonction de Heaviside, qui vaut 1 si $x > 0$ et 0 sinon.

Pour une facilité d'écriture, nous noterons la fonction distante G_1^{dist} avec un unique paramètre $G_1^{\text{dist}}(\boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{o})$.

La fonction de masquage distante de Smith est exprimée par la fraction :

$$G_1(\boldsymbol{o}) = \frac{1}{1 + \Lambda(\boldsymbol{o})} \tag{2.3.11}$$

où la fonction $\Lambda(\boldsymbol{o})$ est exprimée par une intégrale sur les pentes de la microsurface [**WMLT07**, **Hei14**] :

$$\Lambda(\boldsymbol{o}) = \frac{1}{\cot \theta_{\boldsymbol{o}}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y_{\tilde{\boldsymbol{k}}} - \cot \theta_{\boldsymbol{o}}) P_2(y_{\tilde{\boldsymbol{k}}}) dy_{\tilde{\boldsymbol{k}}}. \tag{2.3.12}$$

La fonction Λ possède des formes analytiques pour plusieurs distributions connues (par exemple Beckmann et GGX) [**Hei14**]. La distribution contrôle la rugosité d'une microsurface. Chacune d'elles a un paramètre de rugosité à deux dimensions pour permettre des distributions anisotropes. Il est noté $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ pour Beckmann et $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$ pour GGX. α et σ sont reliés par la relation $\alpha = \sqrt{2}\sigma$.

Grâce à ce modèle, Bourlier et al. [**BBS02**] dérivent le terme de masquage-ombrage en prenant en compte une corrélation sur les hauteurs. Ils proposent la formulation suivante :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \frac{H(\boldsymbol{i} \cdot \omega_h) H(\boldsymbol{o} \cdot \omega_h)}{1 + \Lambda(\boldsymbol{i}) + \Lambda(\boldsymbol{o})}. \tag{2.3.13}$$

Distribution de Beckmann. Les formules statistiques avec une distribution de Beckmann de rugosité (α_x, α_y) sont :

$$\begin{aligned}
P_{22}(\tilde{s}_{\boldsymbol{m}}) &= \frac{1}{\pi \alpha_x \alpha_y} \exp\left(-\frac{\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}^2}{\alpha_x^2} - \frac{\tilde{y}_{\boldsymbol{m}}^2}{\alpha_y^2}\right) \\
D(\boldsymbol{m}) &= \frac{H(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n})}{\pi \alpha_x \alpha_y \cos^4 \theta_{\boldsymbol{m}}} \exp\left(-\tan^2 \theta_{\boldsymbol{m}} \left(\frac{\cos^2 \phi_{\boldsymbol{m}}}{\alpha_x^2} + \frac{\sin^2 \phi_{\boldsymbol{m}}}{\alpha_y^2}\right)\right) \\
\Lambda(\boldsymbol{o}) &= \frac{\exp(-\nu^2)}{2\nu\sqrt{\pi}} + \frac{\operatorname{erf}(\nu) - 1}{2} \\
\nu &= \frac{1}{\tan \theta_{\boldsymbol{o}} \sqrt{\cos^2 \phi_{\boldsymbol{o}} \alpha_x^2 + \sin^2 \phi_{\boldsymbol{o}} \alpha_y^2}}
\end{aligned}$$

Distribution GGX. Pour une distribution GGX de rugosité (σ_x, σ_y), elles sont :

$$P_{22}(\tilde{s}_{\boldsymbol{m}}) = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y\left(1+\frac{\tilde{x}_{\boldsymbol{m}}^2}{\sigma_x^2}+\frac{\tilde{y}_{\boldsymbol{m}}^2}{\sigma_y^2}\right)^2}$$

$$D(\boldsymbol{m}) = \frac{H(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})}{\pi\sigma_x\sigma_y\cos^4\theta_{\boldsymbol{m}}\left(1+\tan^2\theta_{\boldsymbol{m}}\left(\frac{\cos^2\phi_{\boldsymbol{m}}}{\sigma_x^2}+\frac{\sin^2\phi_{\boldsymbol{m}}}{\sigma_y^2}\right)\right)^2}$$

$$\Lambda(\boldsymbol{o}) = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}}{2}$$

$$\nu = \frac{1}{\tan\theta_{\boldsymbol{o}}\sqrt{\cos^2\phi_{\boldsymbol{o}}\sigma_x^2+\sin^2\phi_{\boldsymbol{o}}\sigma_y^2}}$$

En 2000, Ashikhmin et al. [**APS00**] observent également que l'aire projetée est une quantité qui est conservée de la surface géométrique à la microsurface. Ils utilisent cette information pour dériver un terme général d'une fonction de masquage correcte. Celle-ci assure une normalisation et la conservation de l'énergie. Il s'avère qu'ils ont redéfini la fonction de Smith sans le savoir, puisque leur terme de masquage présente une intégrale dont ils ne dérivent pas de forme analytique. À la place, elle est pré-calculée numériquement et gardée dans un tableau de recherche. La preuve de cette égalité a été dérivée par Heitz et peut être trouvée en annexe A de sa thèse [**Hei14**].

$$G_1(\boldsymbol{o}) = \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{\int_\Omega \langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m}\rangle D(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}}. \tag{2.3.14}$$

Cette formulation est générale et valide pour toute distribution de normales D.

Note sur les notations d'Ashikhmin et al. [APS00] et de Heitz [Hei14]. L'équation 2.3.14 est écrite ici comme elle est trouvée dans les travaux de Heitz. La formulation donnée par Ashikhmin et al. en 2000, dans le cadre d'une carte de hauteurs, est différente :

$$G_1(\boldsymbol{o}) = \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}} g(\boldsymbol{n})}{g(\boldsymbol{o})},$$

où

$$g(\boldsymbol{k}) = \int_\Omega \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}\rangle p(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}.$$

$p(\omega_n)$ est une PDF et non pas une distribution. Elle est liée à la distribution par la formule :

$$p(\boldsymbol{m}) = \frac{D(\boldsymbol{m})}{\int_\Omega D(\boldsymbol{v}) d\omega_{\boldsymbol{v}}}.$$

Dans la théorie des microfacettes, la projection sur la normale géométrique est souvent utilisée comme facteur de normalisation. La distribution des normales, dont cette projection est normalisée, est plus intéressante à utiliser que la PDF des normales. C'est l'équation 2.3.1 :

$$\int_{\Omega_+} D(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})d\omega_{\boldsymbol{m}} = 1.$$

En utilisant la PDF à la place de la distribution, cette propriété est perdue :

$$\int_{\Omega_+} p(\boldsymbol{m})(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})d\omega_{\boldsymbol{m}} \neq 1.$$

Le $g(\boldsymbol{n})$ au numérateur permet de compenser :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{n}) &= \int_{\Omega_+} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})p(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}} \\ &= \int_{\Omega_+} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})\frac{D(\boldsymbol{m})}{\int_\Omega D(\boldsymbol{v})d\omega_{\boldsymbol{v}}}d\omega_{\boldsymbol{m}} \\ &= \int_{\Omega_+} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}\frac{1}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}} \\ &= \frac{1}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}}. \end{aligned}$$

La formule pour le terme de masquage devient :

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{o}) &= \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{g(\boldsymbol{o})} \times \frac{1}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}} \\ &= \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{\int_\Omega \langle \boldsymbol{o},\boldsymbol{m}\rangle D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}} \times \int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}} \times \frac{1}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}} \\ &= \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{\int_\Omega \langle \boldsymbol{o},\boldsymbol{m}\rangle D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}}. \end{aligned}$$

Ashikhmin et al. et Heitz n'utilisent pas les mêmes formulations pour l'équation de $G_1(\boldsymbol{o})$, mais elles sont toutes deux égales.

Discussion sur les hypothèses. Ces équations sont dérivées sous les deux hypothèses suivantes :

— *L'orientation d'une microfacette n'est pas corrélée à sa position.* Le masquage d'une microfacette ne dépend donc pas de son orientation $\boldsymbol{m}$ (tant qu'elle ne se masque pas elle-même, c'est-à-dire qu'elle n'est pas dos à la direction d'observation $\boldsymbol{o}$). L'hypothèse est équivalente à l'absence de corrélation entre la hauteur d'un point sur la

microsurface et la hauteur de n'importe quel autre point de la microsurface. L'équivalence est également valable pour la micronormale d'une microfacette et les micronormales voisines.

— *Toutes les microfacettes ont la même aire* (ou la distribution des aires n'est pas corrélée avec D). Ashikhmin et al. explicitent clairement cette hypothèse dans leur travail. Smith s'attarde moins sur cette question, mais il utilise le théorème ergodique pour établir une équivalence exacte entre la moyenne des aires et l'intégrale des aires. La théorie ergodique n'est applicable que si le nombre de microfacettes tend vers l'infini et que la distribution des aires d'une sous-partie de la microsurface est indépendante de sa position.

2.4. Analyse et problématique

Il existe plusieurs profils pour représenter des microsurfaces dans la théorie des microfacettes. Celui des cavités en V n'est pas physiquement réalisable et de moins en moins utilisé dans la communauté de l'informatique graphique ; il ne peut être considéré pour des comparaisons avec des microsurfaces réelles. En revanche, le modèle de Smith (et donc de Ashikhmin et al.) pose des contraintes physiquement acceptables et la formulation proposée dépend de la distribution des normales de la microsurface. Cela en fait un modèle théoriquement plus réaliste, motivant notre choix de les utiliser.

Les deux hypothèses imposées par le profil de Smith peuvent être validées par des microsurfaces seulement représentées par des distributions statistiques. En revanche, les microsurfaces du monde réel sont souvent très complexes avec différents types de structures qui ne sont pas correctement représentées par les distributions de microfacettes générales. La question se pose de savoir si ce modèle théorique peut tout de même être utilisé à partir d'une mesure d'un matériau réel. Plus exactement, nous étudions la différence entre la théorie et la réalité. Nous proposons une formule permettant de prédire la qualité de cette théorie pour une microsurface précise.

L'objectif de cette thèse est d'étudier le réalisme du modèle théorique avec des microsurfaces "réalisables" continues, représentées par des maillages (soit construits de manière virtuelle, soit issus de mesures).

Chapitre 3

Mise en place d'un outil d'analyse du terme de masquage

Nous étudions l'applicabilité du modèle théorique du terme de masquage à des microsurfaces mesurées sur des matériaux réels. Pour cela, notre travail repose sur des maillages représentant la microgéométrie d'éléments de surfaces à partir desquels nous pouvons mesurer un terme de masquage grâce à un algorithme de tracer de rayons. Cette mesure sert de référence dans l'analyse du modèle théorique, calculé en utilisant la distribution D également récupérée du maillage.

3.1. Génération de microsurfaces

Afin de calculer le terme de masquage d'une microsurface spécifique et d'évaluer son exactitude, notre étude utilise des maillages triangulaires créés soit à partir d'une distribution analytique (Beckmann ou GGX), soit à partir de mesures sur des surfaces réelles (produisant des cartes de hauteurs ou directement des maillages), soit de manière procédurale.

3.1.1. À partir d'une distribution

À partir d'une distribution donnée (Beckmann ou GGX dans notre cas), nous utilisons la méthode proposée par Ribardière et al. [**RBSM19**]. Les micronormales sont échantillonnées selon la distribution choisie et utilisées dans un procédé itératif pour construire un maillage simplement connexe (sans trous) à partir d'une grille régulière dont les faces triangulaires sont orientées au cours du processus (figure 3.1).

Le maillage généré est cependant discret, ainsi que la distribution D qui peut en être déduite. Ceci introduit dans la majorité des cas du bruit dans la distribution. Pour minimiser ce phénomène de bruit, nous l'avons quantifié sur des maillages de 256^2, 512^2, 1024^2, 2048^2 et

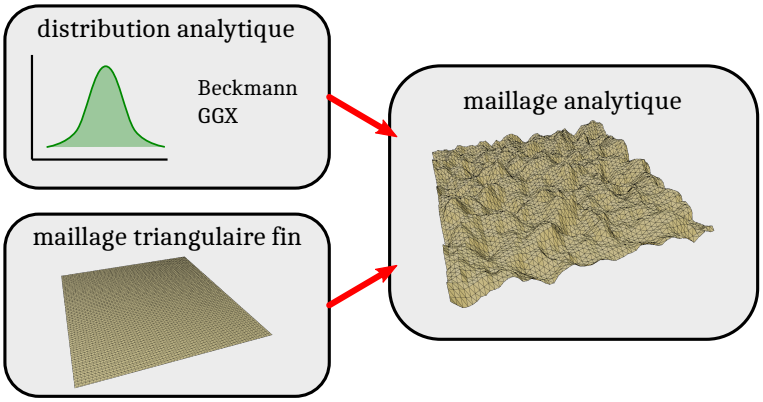


Figure 3.1 – Maillage à partir d'une distribution analytique [RBSM19].

4096^2 sommets. Nous constatons que le bruit dans la distribution diminue en augmentant la résolution du maillage (figure 3.2). De ce fait, la qualité de la distribution réellement générée s'améliore avec la résolution du maillage (figure 3.3). C'est pourquoi nous utilisons des maillages de 4096^2 sommets dans notre travail.

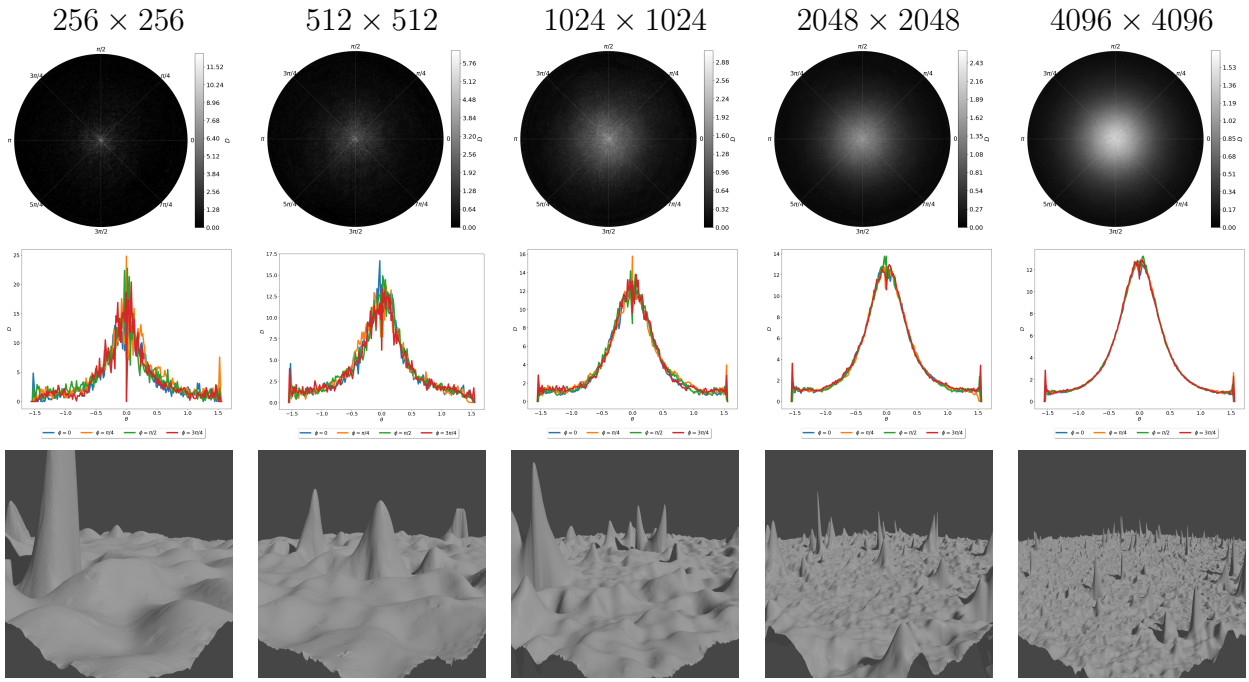
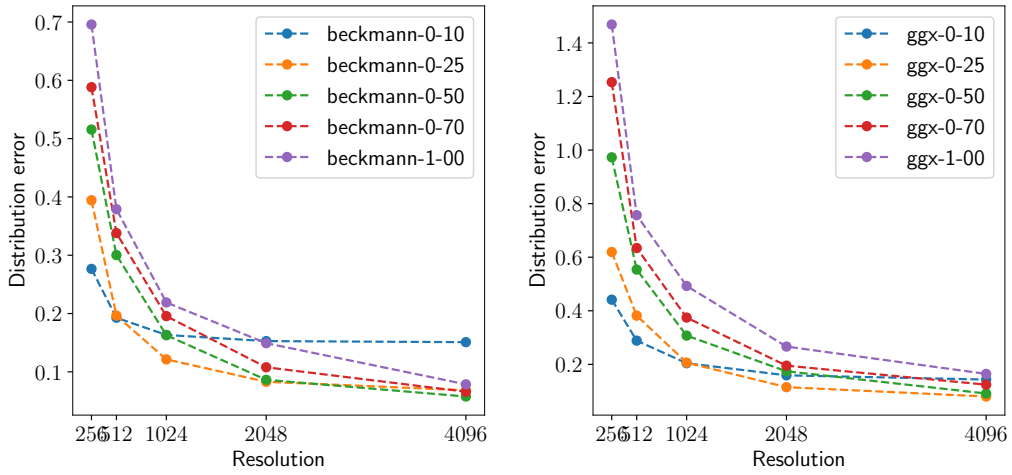


Figure 3.2 – Évolution du bruit de la distribution en fonction de la résolution du maillage, pour une distribution GGX de rugosité $\alpha = 0.5$.

Les microfacettes quasi-verticales empêchent le procédé itératif de converger. Afin d'éviter cela, Ribardière et al. [RBSM19] limitent les orientations θ_m des microfacettes à un angle maximum de 88°. Pour des distributions de Beckmann, de tels angles ne sont presque jamais

échantillonnés. Mais pour des distributions GGX, une quantité non négligeable de micronormales ont une orientation telle que $\theta > 88^{o}$; elles s'accumulent donc dans la distribution. Cet effet est visible dans les graphes de la figure 3.2, autour de $\theta = \pm 1.53\text{rad}$.



(a) Beckmann **(b)** GGX

Figure 3.3 – Intégrale de la différence absolue entre la distribution analytique et la distribution du maillage, en fonction de la résolution du maillage.

Au total, nous avons généré des maillages pour cinq paramètres de rugosité α différents, pour Beckmann (figure 3.4) et pour GGX (figure 3.5). Ces données permettent d'une part de valider notre outil d'analyse puisque nous pouvons les comparer aux distributions analytiques connues, et d'autre part de proposer une analyse spécifique à ces distributions usuelles.

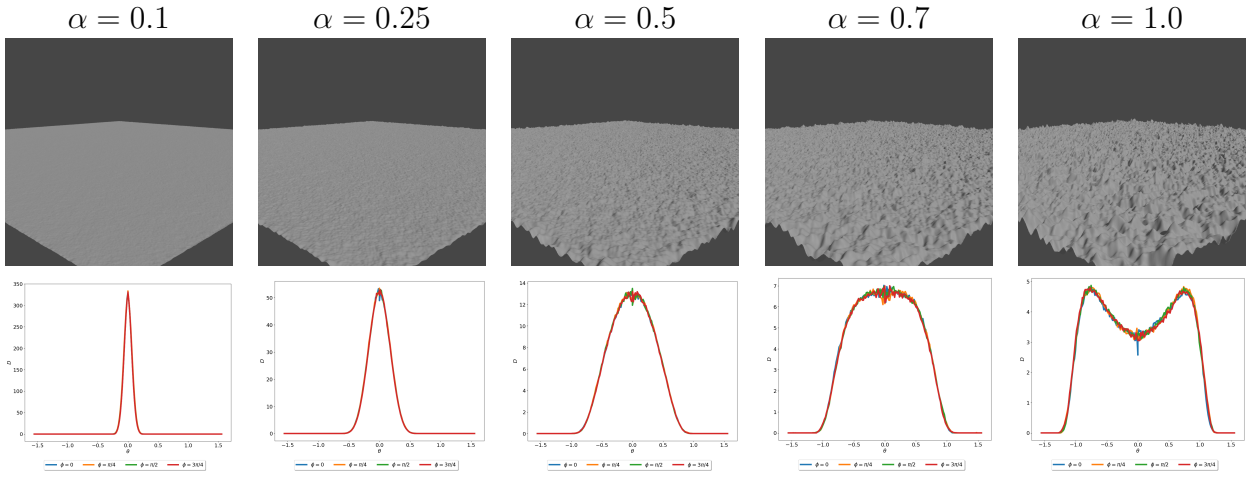


Figure 3.4 – Surfaces générées selon des distributions de Beckmann et leurs distributions reproduites.

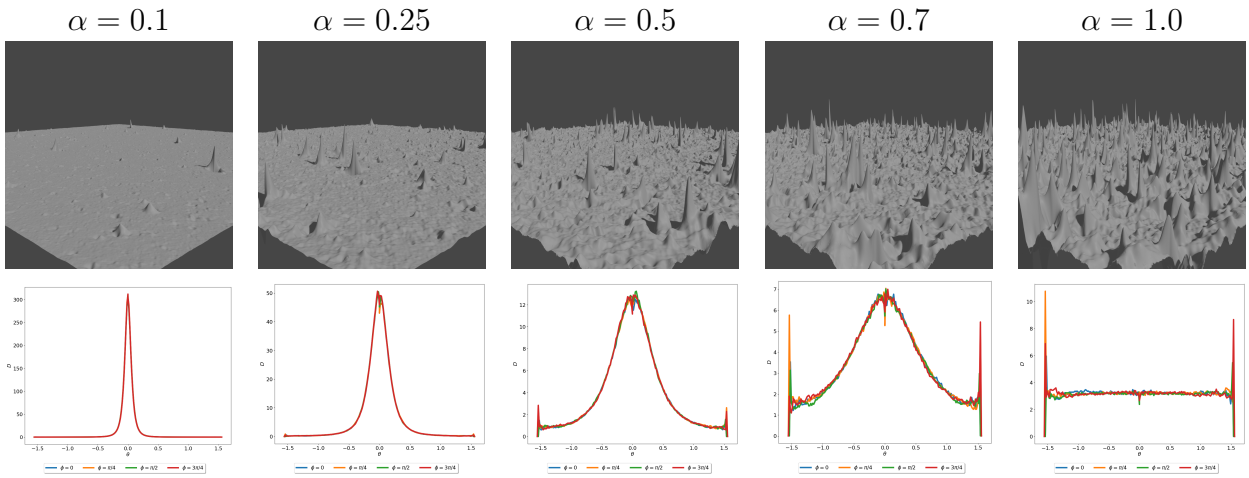


Figure 3.5 – Surfaces générées selon des distributions GGX et leurs distributions reproduites.

3.1.2. Cartes de hauteurs mesurées

L'objectif de notre étude est de comparer le masquage simulé par le modèle théorique de Smith et d'Ashikhmin et al. au masquage de matériaux réels. Le masquage est seulement dépendant de la géométrie des microsurfaces qui peut être facilement représentée par une carte de hauteurs : une texture contenant la hauteur d'un point dans chaque pixel. Cette information permet ensuite de créer numériquement des maillages à partir desquels nous pouvons travailler.

A. Source des cartes de hauteurs

Nous avons besoin de cartes de hauteurs déjà mesurées et en assez grande quantité pour qu'une analyse soit pertinente. Les sources des images doivent respecter les conditions suivantes :

- droit d'utilisation des images ;
- cartes de hauteurs mesurées à partir de matériaux réels ;
- diversité des types de microsurfaces mesurées ;
- texture de résolution minimale de 1024×1024 pixels.

Nous avons trouvé deux bases de données assez importantes (334 et 85 microsurfaces) qui respectaient ces conditions.

PerTex. La première base de données, appelée *PerTex*, provient de la thèse de Halley [Hal12]. Elle contient 334 microsurfaces de textures en relief, vinyles soufflés, revêtements

muraux tissés, tapis et moquettes, stores, tissus d'ameublement, matériaux de construction et emballages de produits. Les cartes de hauteurs sont reconstruites grâce à un procédé de stéréophotométrie [**Woo92**] : une texture de 1024×1024 pixels est créée à partir de quatre photos du matériau, prises du même point de vue perpendiculaire à la surface et sous quatre éclairages directionnels azimutaux différents à 0°, 90°, 180° et 270° (figure 3.6).

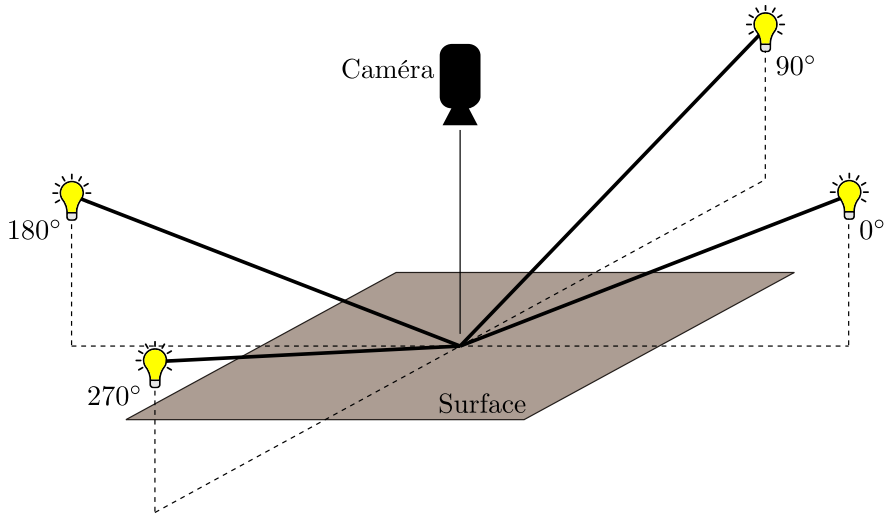


Figure 3.6 – Méthode pour mesurer la géométrie d'une surface utilisée par Halley pour construire la base de données *PerTex*.

La figure 3.7 présente quelques exemples variés choisis pour donner une représentation (non exhaustive) de cette base de données.

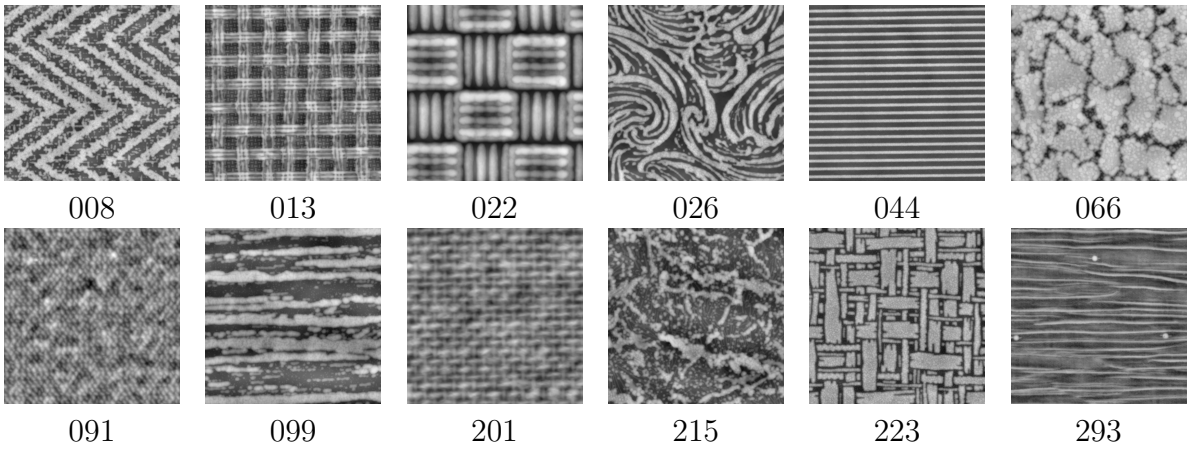


Figure 3.7 – Exemples de cartes de hauteurs issues de la base de données *PerTex*. Le label de la texture est indiqué sous chaque image.

AmbientCG. La deuxième base de données provient du site internet *ambientCG* [**Dem17**] contenant de nombreuses ressources destinées aux artistes souhaitant créer des matériaux

réalistes. Afin de faciliter notre étude, nous avons éliminé les microsurfaces trop floues, contenant trop d'artefacts (des pixels noirs ou blancs, des poussières présentes lors de l'acquisition, des reflets spéculaires faussant la mesure, etc.) ainsi que les microsurfaces extrêmement similaires entre elles. Ainsi, nous avons sélectionné 85 cartes de hauteurs variées, d'une résolution de 1024×1024 pixels, acquises par des techniques de photogrammétrie. Cela inclut des terrains, des roches, des revêtements muraux ou de sol, des écorces et d'autres matériaux variés. Toutes ces microsurfaces n'ont pas été acquises avec une méthodologie unique : les angles de prises de vue peuvent varier, ainsi que la qualité du matériel de mesure, les conditions d'éclairage, l'intensité, le niveau de détail, ou encore l'échelle choisie pour créer la texture en niveaux de gris. De plus, les données peuvent avoir des artefacts. Ce sont les utilisateurs du site internet qui fournissent les textures de leur choix. Elle est ainsi variée, autant par les matériaux représentés que par les méthodes d'acquisition.

La figure 3.8 présente quelques exemples variés choisis pour donner une représentation (non exhaustive) de cette base de données.

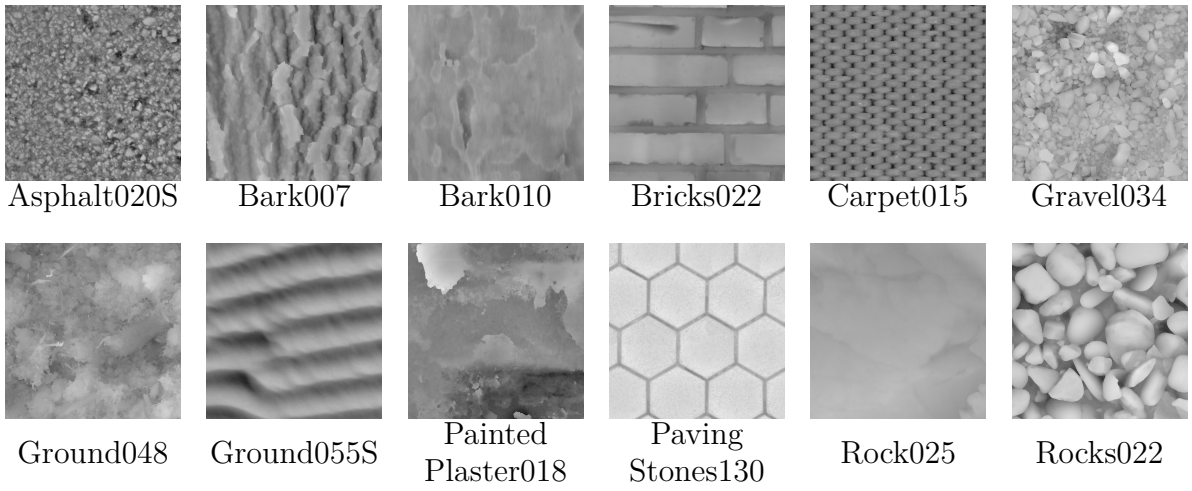


Figure 3.8 – Exemples de cartes de hauteurs issues de la base de données *ambientCG*. Le label de la texture est indiqué sous chaque image.

Autres sources. Nous avons également l'opportunité de travailler à partir de quatre microsurfaces supplémentaires fournies par d'autres chercheurs. Deux d'entre elles correspondent à des terrains volcaniques mesurés par drones par l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP) [**Lab17**] (nommées *siteQ* et *siteR*), et deux autres sont acquises à partir de revêtements de routes provenant des travaux de Prouteau et al. [**PJBK23**] (nommées *Surface_1* et *Surface_2*). Ces quatre microsurfaces sont données dans la figure 3.9.

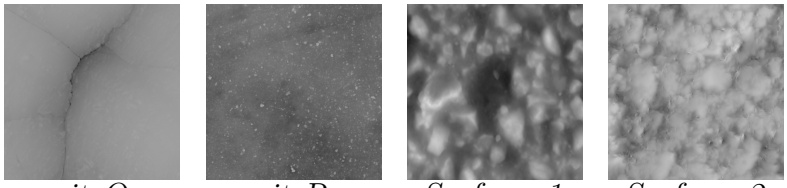


Figure 3.9 – Les autres cartes de hauteurs.

B. Création du maillage

Les cartes de hauteurs carrées sont utilisées pour créer des maillages représentant des micro-géométries en 3D pour un macrosurface carrée également. Ces maillages doivent être assez précis pour que le calcul du terme de masquage soit fiable. La formule théorique de G_1 utilise la distribution des normales D qui doit être extraite du maillage. Celle-ci est fortement dépendante de la résolution du maillage ; une résolution plus haute crée plus de micronormales et produit une fonction de distribution des normales plus dense. Tout comme pour les microsurfaces générées à partir d'une distribution analytique, nous utilisons des maillages déplacés de 4096×4096 sommets. L'importance de la précision de la distribution a été discutée par plusieurs auteurs [**YHJ+14**, **YHMR16**, **GGN18**, **ZXW19**, **CCM19**]. Ils ont montré que si celle-ci est trop faible, des détails fins peuvent être manqués, avec une répercussion sur l'apparence car certains reflets nets ou scintillements ne sont pas représentés. Nous ne portons pas notre travail sur ces questionnements.

Pour chaque texture, un maillage 3D triangulé est créé en suivant les étapes suivantes (figure 3.10) :

(1) création d'une grille carrée régulière avec la même résolution que la texture permettant d'associer un sommet à chaque pixel ;

(2) déplacement vertical des sommets en fonction de la carte de hauteurs et d'un facteur d'échelle (ces facteurs n'étant pas fournis avec les textures, ils sont choisis de sorte à ce que le déplacement semble plausible et réaliste, en évitant une variance des hauteurs trop élevée) ;

(3) subdivision par l'algorithme de Catmull-Clark [**CC78**] pour obtenir un minimum de 4096×4096 sommets ;

(4) triangulation finale du maillage.

Si l'objet à traiter est initialement un maillage triangulé et non une carte de hauteurs, il est possible de le subdiviser avec l'algorithme de subdivision de Loop [**Loo87**].

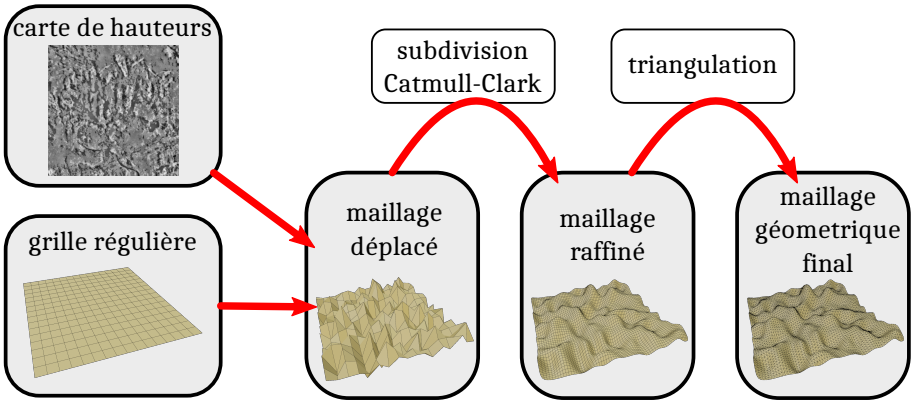


Figure 3.10 – Maillage fin à partir d'une carte de hauteurs.

3.1.3. Hypothèses du modèle

La représentation théorique de Smith [**Smi67**] et d'Ashikhmin et al. [**APS00**] repose sur les deux hypothèses présentées dans la section 2.3.2. La première stipule que la microsurface ne doit pas être autocorrélée, c'est-à-dire que la position d'une microfacette sur le plan tangent, sa hauteur et son orientation doivent toutes être indépendantes les unes des autres et du voisinage. La seconde hypothèse requiert que la distribution des aires des microfacettes soit arbitraire et non corrélée à la distribution des micronormales.

Très fréquemment, les microsurfaces mesurées à partir de matériaux réels montrent des corrélations entre les positions des microfacettes et leurs orientations. Elles ne respectent donc généralement pas la première hypothèse.

La seconde hypothèse nécessite une décorrélation complète entre les aires des microfacettes $\mathcal{A}_f$ et leurs normales θ_m. Par construction, ces deux valeurs sont liées par une relation bijective :

$$\theta_m = \arccos\left(\frac{s^2}{\mathcal{A}_f}\right) \tag{3.1.1}$$

$$\mathcal{A}_f = \frac{s^2}{2\,\cos\theta_m}, \tag{3.1.2}$$

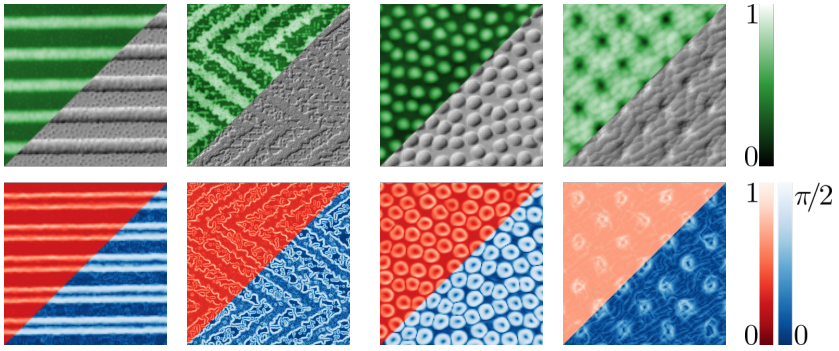
où s est le pas constant en x et en y entre chaque sommet du maillage. Par conséquent, la seconde hypothèse ne peut pas être tenue.

La figure 3.11 présente quatre microsurfaces pour lesquelles ces hypothèses ne sont pas respectées. Les cartes de hauteurs sont montrées sur la première rangée, dans la moitié haute-gauche des images (teintes vertes), où les hauteurs sont indiquées en unité arbitraire entre [0,1]. La moitié basse-droite correspondante montre le rendu de cette microsurface. Les aires des triangles sont montrées sur la seconde rangée, dans la moitié haute-gauche des images

(teintes rouges), indiquées en unité arbitraire entre [0,1]. Enfin, les angles θ des micronormales associées sont montrées sur la seconde rangée, dans la moitié basse-droite (teintes bleues), en radians entre $[0,\pi/2]$. Pour chacune des quatre microsurfaces, il y a une forte corrélation entre les hauteurs, les aires des microfacettes, leurs normales et leurs positions sur le plan tangent.

Par exemple, la microsurface de la figure 3.11a possède principalement deux hauteurs différentes pour des microfacettes structurées, au sommet ou en bas de chaque rainure. Pour une microfacette donnée, ses voisines le long de l'axe x sont systématiquement positionnées à la même hauteur.

La figure 3.11c montre des pointes ellipsoïdales verticales sur une microsurface plane. Les microfacettes sur chaque pointe ont des aires plus petites sur la partie planaire au sommet et des aires plus grandes sur les côtés presque verticaux des ellipsoïdes.



(a) 044 **(b)** 008 **(c)** 020 **(d)** 090

Figure 3.11 – Différentes cartes de hauteurs pour lesquelles les hypothèses pour G_1 ne sont pas respectées.

Bien qu'une microsurface ne respecte aucune des deux hypothèses, il est possible de calculer son terme de masquage théorique G_1 à partir de l'estimation de sa distribution, en appliquant l'équation 3.2.10. Il n'est alors pas attendu que la valeur trouvée soit égale à la valeur réelle de masquage de la microsurface. La différence entre les deux valeurs varie entre chaque microsurface et peut n'induire aucune différence visible sur les rendus ou au contraire mener à un rendu très erroné. L'objectif de notre analyse et de comprendre cette erreur pour pouvoir la prédire en n'utilisant que les données et statistiques du maillage, calculables plus rapidement que le terme de masquage de référence.

3.2. Mesure du terme de masquage

Une distribution discrète D est établie à partir du maillage et utilisée pour calculer le terme de masquage théorique G_1. Il peut ensuite être comparé à une valeur de référence G_1^{rc} afin de

mettre en évidence et comprendre les biais dans la théorie. Pour la référence, nous utilisons un algorithme de tracer de rayons pour échantillonner G_1^{rc}. La figure 3.12 fournit un aperçu du procédé complet de notre analyse.

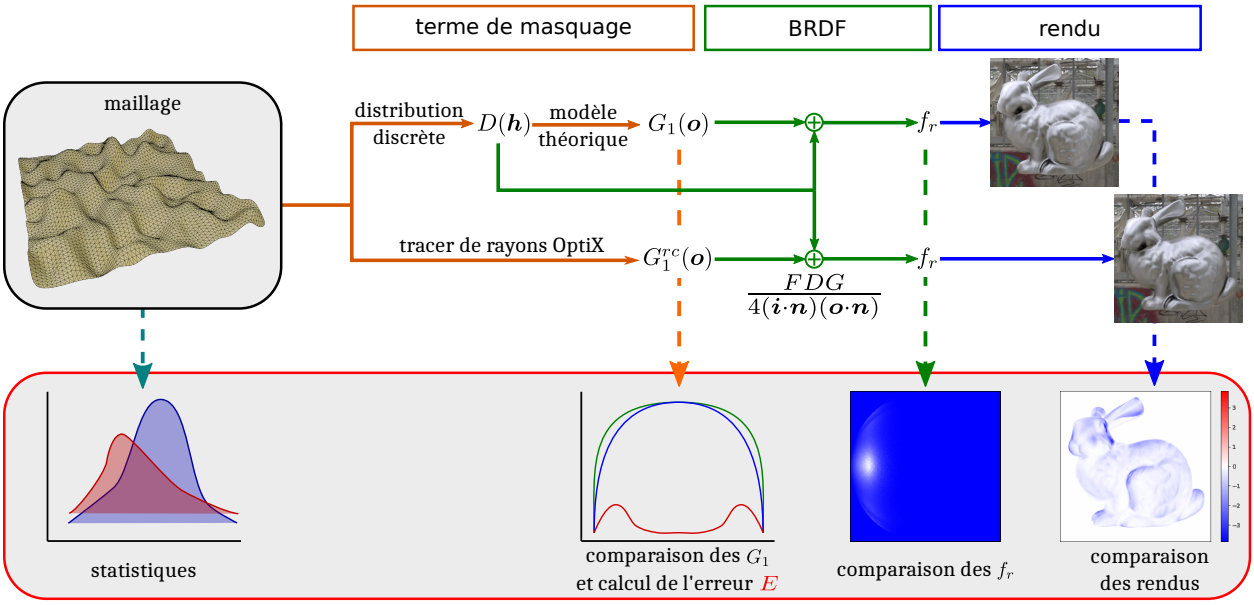


Figure 3.12 – Procédé de notre système, découpé en trois étapes principales. Premièrement, à partir d'un maillage donné, le terme de masquage de référence G_1^{rc} est mesuré par tracer de rayons sur GPU et le terme théorique G_1 est calculé sur CPU. La BRDF est ensuite évaluée à partir des données tabulées, avec le travail de Ribardière et al. [**RBSM19**]. Enfin, les masquages, les BRDFs et les rendus peuvent être comparés.

3.2.1. Échantillonnage hémisphérique

Les termes G_1^{rc} et G_1 sont comparés entre eux et utilisés dans le calcul final de la BRDF. Ils sont pour cela discrétisés et stockés dans une structure de données adéquate. Trois tableaux hémisphériques sont donc utilisés pour stocker respectivement le terme de référence mesuré G_1^{rc}, le terme théorique calculé G_1 et la distribution discrète D récupérée à partir du maillage. Les échantillons sont stockés dans un tableau 2D hémisphérique (figure 3.13) uniformément distribué sur N_θ angles θ et N_ϕ angles ϕ. Le pas $d\theta$ (resp. $d\phi$) est constant entre deux angles θ adjacents (resp. ϕ). Une valeur associée à une direction arbitraire $\boldsymbol{k}$ est estimée par interpolation bilinéaire.

Pour de petites valeurs N_θ et N_ϕ, les tableaux hémisphériques moyennent les valeurs pour de nombreuses directions dans chaque cellule. Par conséquent, cela lisse la distribution D. À l'inverse, pour de grandes valeurs N_θ et N_ϕ, le tableau de la distribution peut contenir des valeurs proportionnellement plus changeantes, générant du bruit et des incohérences dans l'interpolation. Avec une résolution de maillage de 4096×4096 sommets, nous avons trouvé

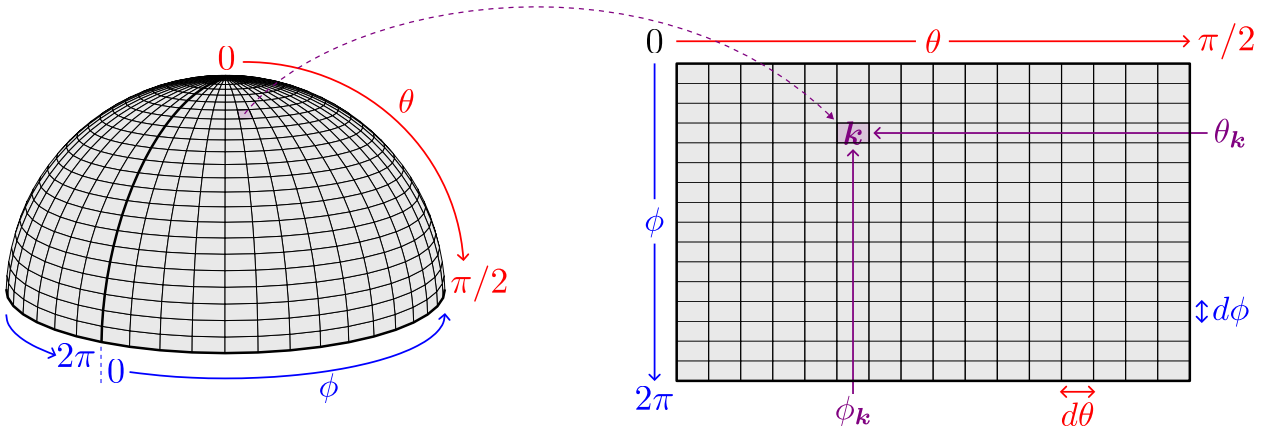


Figure 3.13 – Représentation schématique de structure des tableaux 2D utilisés pour stocker G_1^{rc}, G_1 et D.

expérimentalement que $N_\theta = 100$ et $N_\phi = 400$ sont un bon compromis entre la préservation de la qualité des valeurs et le temps de calcul des différents termes.

3.2.2. Mesure du terme de référence G_1^{rc}

Pour un ensemble de directions sur l'hémisphère complète, le terme de masquage distant $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$ est mesuré pour chaque direction $\boldsymbol{o}$ avec l'algorithme 1. Un point $p_\mathcal{S}$ est échantillonné sur la macrosurface plane. Son projeté $p_\mathcal{M}$ selon la macronormale $\boldsymbol{n}$ sur la microsurface déplacée et sa micronormale associée $\boldsymbol{m}$ sont récupérés à partir des données du maillage. Si le triangle contenant le point $p_\mathcal{M}$ est dos à la direction $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m} \leq 0$), le point échantillonné est invalide et rejeté (segments en rouge). Sinon, un rayon est lancé dans la direction $\boldsymbol{k}$ à partir de $p_\mathcal{M}$. Si le rayon n'intersecte pas la microsurface, alors $p_\mathcal{M}$ est visible (segments en vert), sinon il est masqué (segments en noir). La valeur finale pour $G_1^{rc}(\boldsymbol{k})$ est la proportion des points visibles parmi tous les points valides. Cette valeur est utilisée comme référence pour la comparaison avec la fonction de masquage théorique.

La figure 3.14 illustre en 2D le procédé d'échantillonnage du terme de masquage de la microsurface pour une direction $\boldsymbol{o}$ donnée.

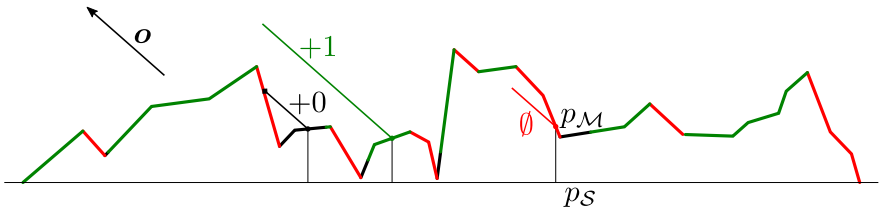
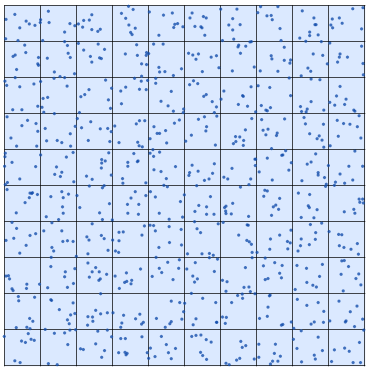


Figure 3.14 – Tracer de rayons utilisé pour mesurer $G_1^{rc}(\boldsymbol{k})$. La microsurface est soit visible (verte), soit masquée (noire), soit mal orientée (*backfacing*) (rouge).

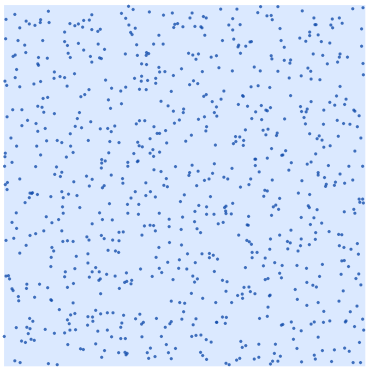
Algorithme 1 G_1^{rc} pour la direction $\boldsymbol{o}$, mesuré par tracer de rayons

procedure $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$
  $G_1 \leftarrow 0$; $samples \leftarrow 0$; ▷ Initialisations
  for $c = 0$; $c < N_{\text{rays}}$; c++ **do**
    $(u_1, u_2) \leftarrow uniform(0, 1)$
    $p_{\mathcal{S}} \leftarrow sample(u_1, u_2)$ ▷ Échantillonnage d'un point
    $p_{\mathcal{M}} \leftarrow proj(p_{\mathcal{S}})$ ▷ Projection du point sur la microsurface
    $\boldsymbol{m} \leftarrow micronormal(p_{\mathcal{M}})$ ▷ Calcul de la normale à $p_{\mathcal{M}}$
    if $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{m} > 0$ **then** ▷ Normale orientée face à $\boldsymbol{o}$
      $samples$++
      if not $intersectSurface(ray(p_{\mathcal{M}}, \boldsymbol{o}))$ **then**
        G_1++
      end if
    end if
  end for
  return $G_1/samples$
end procedure

Notre algorithme de tracer de rayons utilise un échantillonnage stratifié de la macrosurface de 1024×1024 pixels avec 8 rayons par pixel, pour un total de $N_{\text{rays}} = 8\,388\,608$ échantillons au total. La figure 3.15 montre une stratification aléatoire réalisée avec 100 pixels et 8 échantillons par pixel. Une mesure précise de la valeur de référence G_1^{rc} sur l'ensemble de l'hémisphère des directions est donc un calcul lourd répétant la même tâche pour chaque rayon. Ce processus peut être parallélisé en étant lancé sur GPU. Nous utilisons pour cela le moteur d'accélération logiciel OptiX développé par Nvidia et réalisant les calculs sur GPU.



(a) Projection des points échantillonnés sur la macrosurface pour un sous-ensemble de 10×10 pixels.



(b) Les mêmes échantillons montrés sans la structure de stratification.

Figure 3.15 – Stratification aléatoire illustrée avec 100 pixels et 8 échantillons par pixel.

La figure 3.16 montre la qualité du terme de référence G_1^{rc} en fonction du nombre d'échantillons pour mesurer le masquage d'une direction.

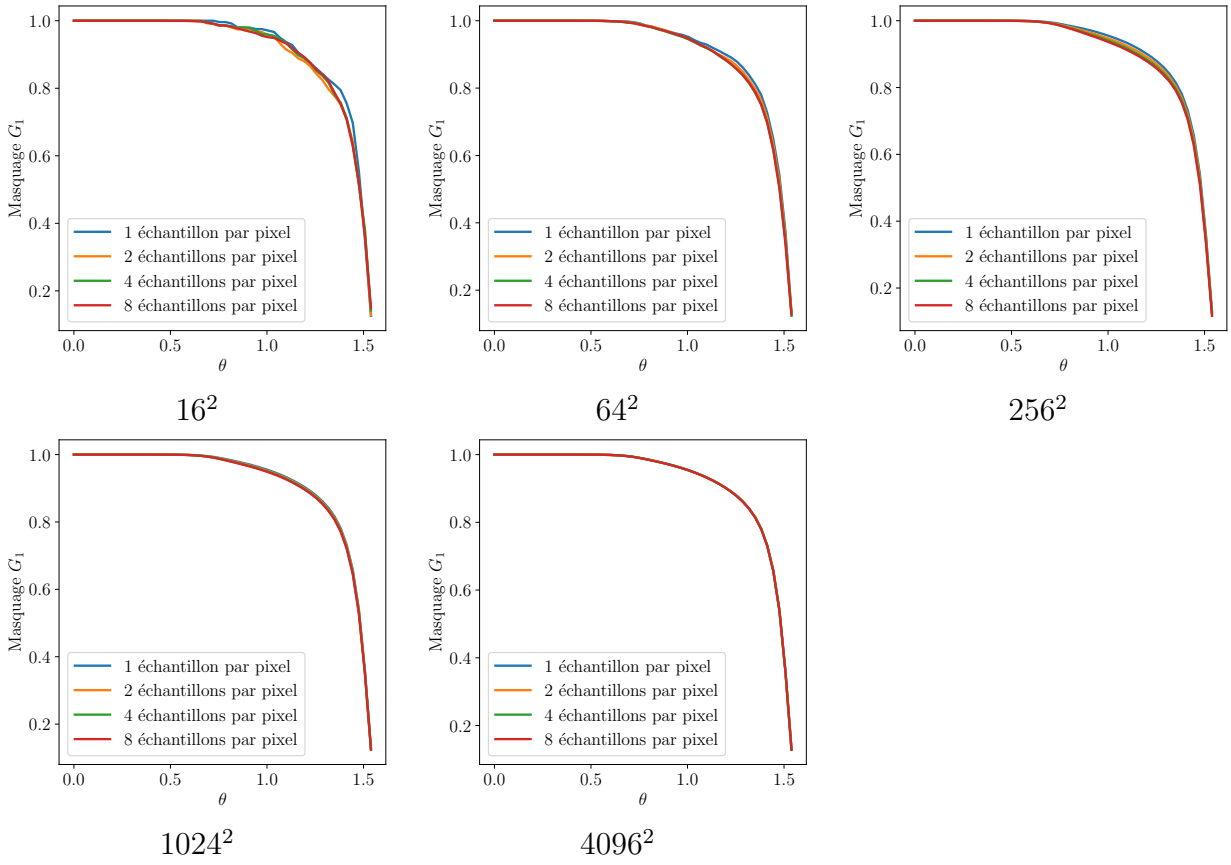


Figure 3.16 – Qualité de la mesure pour G_1^{rc} en fonction du nombre d'échantillons total. Le nombre de pixels pour la stratification est indiqué sous chaque graphe. Nous utilisons une stratification de 1024^2 pixels (en bas à gauche) avec 8 échantillons par pixel (courbe rouge).

3.2.3. Calcul du modèle théorique

Le terme de masquage théorique G_1 dépend de la fonction de distribution des normales D (Équations 3.2.10 et 3.2.4). La distribution des normales discrète doit être construite à partir de cette géométrie spécifique afin d'estimer le terme G_1 théorique pour un maillage donné. Cette distribution est tabulée et stockée sous la forme d'un histogramme hémisphérique dans une structure régulière sur ϕ et θ.

A. Distribution discrète D de la microsurface

Chaque microfacette f (face triangulaire) est associée à une micronormale $\boldsymbol{m}$ et à une aire $\mathcal{A}_f$. La fonction de répartition (CDF pour *Cumulative Distribution Function*) de la distribution

est construite en accumulant dans un tableau les aires (poids) associées à chaque micronormale. $\mathcal{A}_i$ est la somme des aires des microfacettes associées à la même micronormale $\boldsymbol{m}_i$ où i est l'indice de la micronormale dans le tableau 2D hémisphérique de toutes les micronormales considérées.

$$\mathcal{A}_i = \sum_{f=0}^{N_{\text{facets}}} \mathbf{1}_{[\theta_i,\theta_{i+1}[}(\theta_{\boldsymbol{m}})\mathbf{1}_{[\phi_i,\phi_{i+1}[}(\phi_{\boldsymbol{m}})\mathcal{A}_f, \tag{3.2.1}$$

où $[\theta_i, \theta_{i+1}[$ et $[\phi_i, \phi_{i+1}[$ sont les minima et maxima 2D de la i-ème cellule de la table. Puisque le tableau est uniforme, $\theta_{i+1} - \theta_i = d\theta$ pour tout indice i avec $d\theta$ une constante (et de la même manière pour $d\phi$).

Ce tableau est ensuite normalisé, chaque entrée est divisée par la somme de toutes les aires. Son dernier élément (somme de toutes les aires) est égal à 1. En tirant un nombre aléatoire uniforme $u \in [0, 1]$, il est possible d'échantillonner la normale à l'indice `entry` de pdf `cdf[entry] - cdf[entry - 1]`.

La figure 3.17 présente un schéma du procédé.

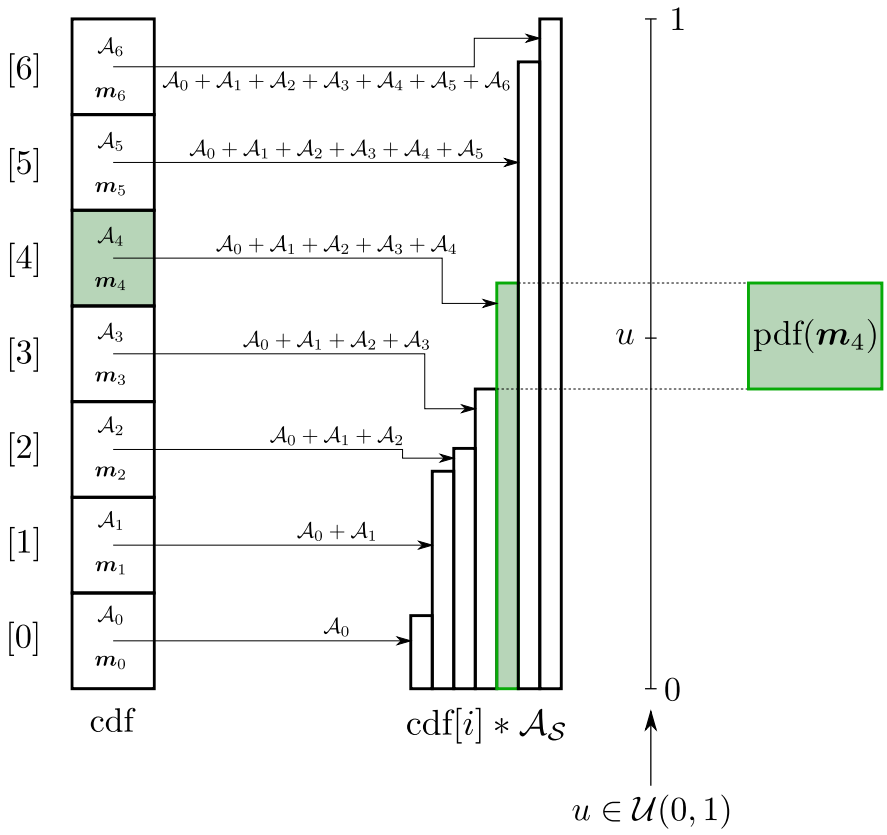


Figure 3.17 – Distribution discrète illustrée avec un exemple de sept micronormales. $\mathcal{A}_i$ est la somme des aires $\mathcal{A}_f$ des microfacettes ayant pour micronormale $\boldsymbol{m}_i$. $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \sum_{i=0}^{N_\theta N_\phi} \mathcal{A}_i$ est l'aire totale de la microsurface.

La somme $\mathcal{A}_i$ est ensuite divisée par la taille de la cellule. La distribution non normalisée s'écrit :

$$\tilde{D}(\boldsymbol{m}_i) = \frac{\mathcal{A}_i}{(\cos\theta_i - \cos\theta_{i+1})d\phi} \tag{3.2.2}$$

où $d\phi = [(\phi_{i+1} - \phi_i) \mod 2\pi]$ est le pas constant du tableau selon la dimension ϕ.

Enfin, la cellule est normalisée telle que $\int_\Omega \tilde{D}(\boldsymbol{m}) \cos\theta_{\boldsymbol{m}} d\omega_{\boldsymbol{m}} = 1$. La distribution tabulée finale s'écrit :

$$D(\boldsymbol{m}_i) = \frac{\tilde{D}(\boldsymbol{m}_i)}{\int_\Omega \tilde{D}(\boldsymbol{k}) \cos\theta_{\boldsymbol{k}} d\omega_{\boldsymbol{k}}} \tag{3.2.3}$$

où l'intégrale est calculée à partir du tableau 2D.

B. G_1 théorique

Ashikhmin et al. [**APS00**] notent que l'aire projetée est une quantité préservée entre la macrosurface géométrique et la microsurface déplacée. Le terme de masquage G_1 assure la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{o}) &= \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}} \int_\Omega \mathrm{pdf}(\boldsymbol{m}) \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \rangle d\omega_{\boldsymbol{m}}}{\int_\Omega \mathrm{pdf}(\boldsymbol{m}) \langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m} \rangle d\omega_{\boldsymbol{m}}} \\ &= \frac{g(\boldsymbol{n}) \cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{g(\boldsymbol{o})} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

où

$$g(\boldsymbol{k}) = \int_\Omega \mathrm{pdf}(\boldsymbol{m}) \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m} \rangle d\omega_{\boldsymbol{m}}. \tag{3.2.5}$$

La fonction de Smith [**Smi67**] peut ainsi être reformulée, mais l'intégrale ne permet pas de conclure avec une formule analytique. Ashikhmin et al. proposent à la place de précalculer un tableau de correspondances pour des configurations données.

En liant la pdf à D par l'équation suivante :

$$\mathrm{pdf}(\boldsymbol{k}) = \frac{D(\boldsymbol{k})}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}}, \tag{3.2.6}$$

on peut ré-écrire :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{k}) &= \int_\Omega \mathrm{pdf}(\boldsymbol{m}_1) \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}_1 \rangle d\omega_{\boldsymbol{m}_1} \\ &= \int_\Omega \frac{D(\boldsymbol{m}_1)}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m}_2) d\omega_{\boldsymbol{m}_2}} \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}_1 \rangle d\omega_{\boldsymbol{m}_1} \\ &= \frac{\int_\Omega D(\boldsymbol{m}_1) \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}_1 \rangle d\omega_{\boldsymbol{m}_1}}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m}_2) d\omega_{\boldsymbol{m}_2}}. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

On note $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ les variables d'intégration pour chaque intégrale utilisée afin de pouvoir les différencier.

Puisque la distribution D respecte la propriété de normalisation :

$$\int_\Omega D(\boldsymbol{m})\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle d\omega_{\boldsymbol{m}} = 1, \tag{3.2.8}$$

on a :

$$g(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}}. \tag{3.2.9}$$

La fonction de masquage devient :

$$\begin{aligned} G_1(\boldsymbol{o}) &= \cos\theta_{\boldsymbol{o}} g(\boldsymbol{n}) \frac{1}{g(\boldsymbol{o})} \\ &= \cos\theta_{\boldsymbol{o}} \frac{1}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}} \frac{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})d\omega_{\boldsymbol{m}}}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})\langle \boldsymbol{o},\boldsymbol{m}\rangle d\omega_{\boldsymbol{m}}} \\ &= \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{\int_\Omega D(\boldsymbol{m})\langle \boldsymbol{o},\boldsymbol{m}\rangle d\omega_{\boldsymbol{m}}}, \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ce qui correspond à la forme plus commune donnée par Heitz [**Hei14**].

À partir de la distribution tabulée déduite du maillage, l'intégrale peut être approchée par la somme suivante :

$$G_1(\boldsymbol{o}) \approx \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{\sum_{N_\phi}\sum_{N_\theta} D(\boldsymbol{m})\,\langle \boldsymbol{o},\boldsymbol{m}\rangle\,\sin\theta_{\boldsymbol{m}}\,d\theta_{\boldsymbol{m}}\,d\phi_{\boldsymbol{m}}}, \tag{3.2.11}$$

où N_ϕ angles ϕ_n et N_θ angles θ_n sont également espacés respectivement par $d\phi$ et $d\theta$.

Le temps de calcul du terme de masquage théorique G_1 pour un maillage de 4096^2 sommets est de l'ordre de 4 minutes sur CPU (*Intel core i9-9900K*) avec un seul fil d'exécution. Soit environ 4 fois plus rapide que la mesure par tracer de rayons, sans avoir parallélisé le code (tableau 3.1).

	Processeur	Nombre d'échantillons	Temps	Parallélisé
G_1^{rc}	GPU (*NVidia RTX 2080Ti*)	8 388 608 rayons	15 mn	oui
G_1	CPU (*Intel core i9-9900K*)	40 000 (tabulation de D)	4 mn	non

Tableau 3.1 – Comparaison des temps de calcul pour tabuler G_1^{rc} et G_1 à partir d'un maillage de 4096^2 sommets et pour 400×100 directions différentes. Le temps de chargement du maillage n'est pas inclus.

3.2.4. Gestion des effets de bord

Nous voulons étudier la visibilité d'une microsurface plane supposée infinie. Or les macrosurfaces obtenues à partir des cartes de hauteurs sont des maillages carrés de taille prédéfinie.

Ces maillages ne fournissent pas la totalité de l'information théoriquement nécessaire pour calculer les intersections des rayons avec la microsurface. Lorsqu'un point $p_{\mathcal{M}}$ de la microsurface est évalué comme étant visible dans la direction $\boldsymbol{o}$ (c'est-à-dire qu'un rayon lancé à partir de $p_{\mathcal{M}}$ dans la direction $\boldsymbol{o}$ n'intersecte pas le reste de la microsurface), cette visibilité est incertaine. Cette incertitude est d'autant plus grande que le point $p_{\mathcal{M}}$ est proche du bord du maillage. En revanche le masquage des points est certain pour tout point $p_{\mathcal{M}}$ de la microsurface. Puisque seuls les tests induisant un point visible sont biaisés, la probabilité d'être visible peut être trop élevée : G_1^{rc} final est possiblement surévalué.

A. Restreindre la zone échantillonnée

Nous proposons deux méthodes pour limiter cette surévaluation. La première consiste à réduire la zone d'échantillonnage au centre de la macrosurface (figure 3.18). Les tests d'intersection sont toujours réalisés sur la totalité de la microsurface. Ainsi, les points échantillonnés ne se trouvent pas sur les bords où la probabilité d'avoir un biais est la plus forte. Le risque de surévaluation est ainsi réduit. La restriction de la macrosurface est appliquée aussi bien pour la mesure de G_1^{rc} que pour le calcul de G_1 afin d'obtenir les deux termes à partir de la même microgéométrie.



Figure 3.18 – Restriction de la microsurface échantillonnée.

En revanche, la réduction de la macrosurface échantillonnée entraîne une perte d'information. Si elle est trop importante, cette perte peut induire une erreur non désirable. Lorsque les caractéristiques géométriques de la microsurface sont assez homogènes, l'information perdue reste représentée dans le maillage restant. En revanche, si les caractéristiques sont localement différentes d'un endroit à un autre, les informations en bordure de maillage ne se retrouvent pas nécessairement dans la partie centrale. La perte de ces informations peut engendrer une erreur plus grande que pour les microsurfaces homogènes. En restreignant trop la zone d'échantillonnage il y a un risque de ne plus travailler sur des particularités géométriques présentes en bordure du maillage.

La figure 3.19 présente des exemples de résultats obtenus avec cette méthode. Les courbes en bleu représentent le masquage mesuré à partir de toute la macrosurface. Les courbes en

orange sont obtenues à partir d'une zone d'échantillonnage restreinte à un certain pourcentage de la macrosurface (indiqué dans la première rangée). Les première et seconde microsurfaces contiennent des motifs géométriques qui se répètent sur l'entièreté de la microsurface. Ainsi, réduire la zone d'échantillonnage ne crée pas une erreur importante puisque l'information perdue est semblable à celle conservée pour le calcul. Ce n'est pas le cas pour les troisième et quatrième microsurfaces qui ont des caractéristiques géométriques plus locales, perdues avec la restriction.

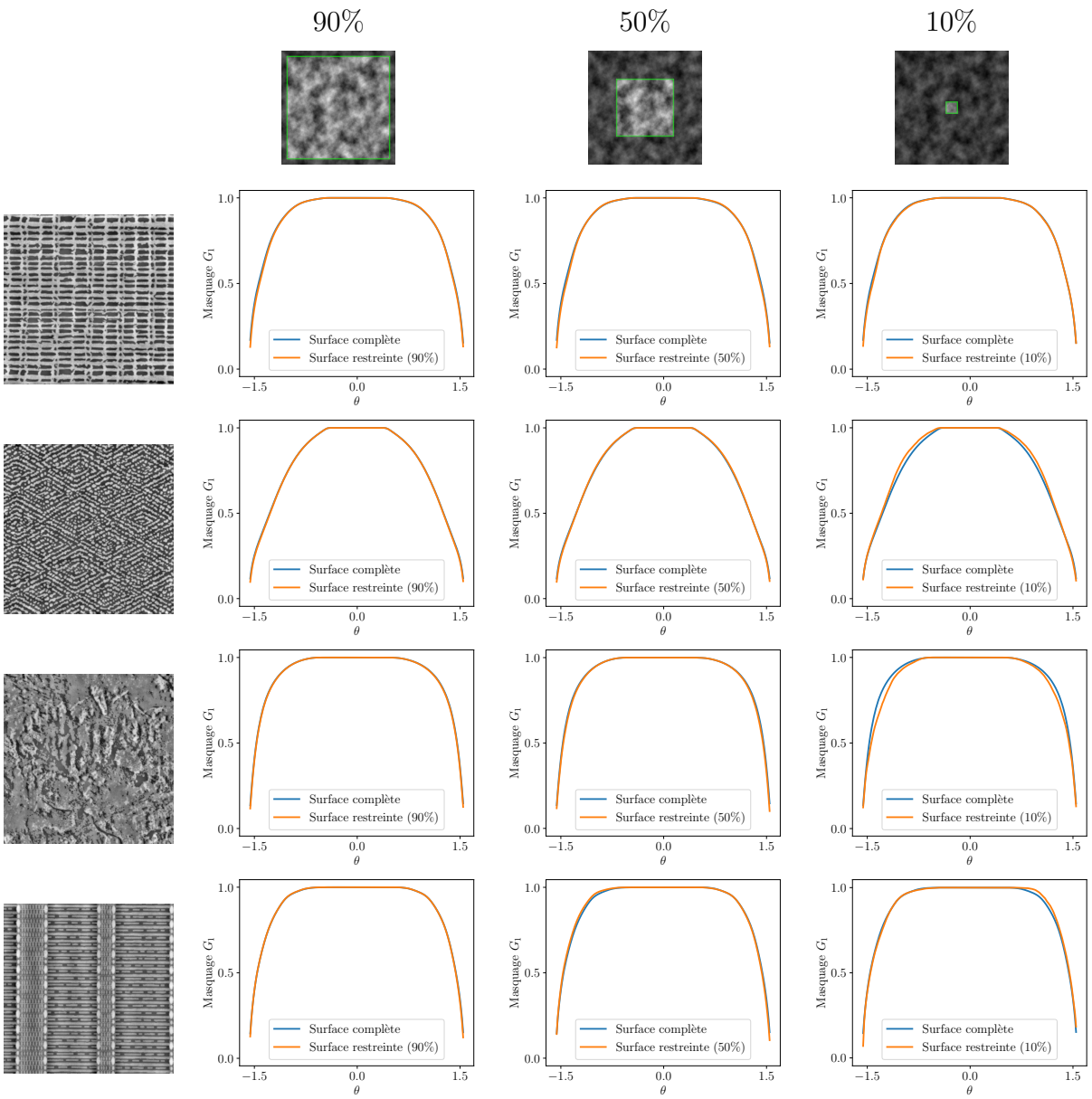


Figure 3.19 – Impact des effets de bord avec une restriction de la macrosurface dans les calculs.

B. Supposer la microsurface infinie

La seconde méthode revient à supposer que la microsurface est infinie (figure 3.20). Les points extrema les plus hauts et les plus bas du maillage sont également les extrema de la microsurface hypothétique infinie. Supposons une boîte englobante de la microsurface déplacée. Lorsqu'un rayon sort de la microsurface sans intersection, il quitte la boîte englobante par le dessus (rayons verts sur la figure 3.20) ou par un côté (rayons gris). Dans ce dernier cas, la microsurface hypothétique infinie peut théoriquement être intersectée. Mais aucun test ne peut être réalisé puisqu'aucun maillage ne la représente. À cause de cette incertitude, le rayon est rejeté et n'est pas utilisé dans le calcul final.

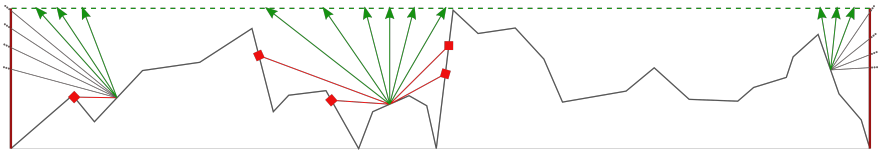


Figure 3.20 – Utilisation de la boîte englobante.

La figure 3.21 présente également les résultats pour cette technique de gestion des effets de bord.

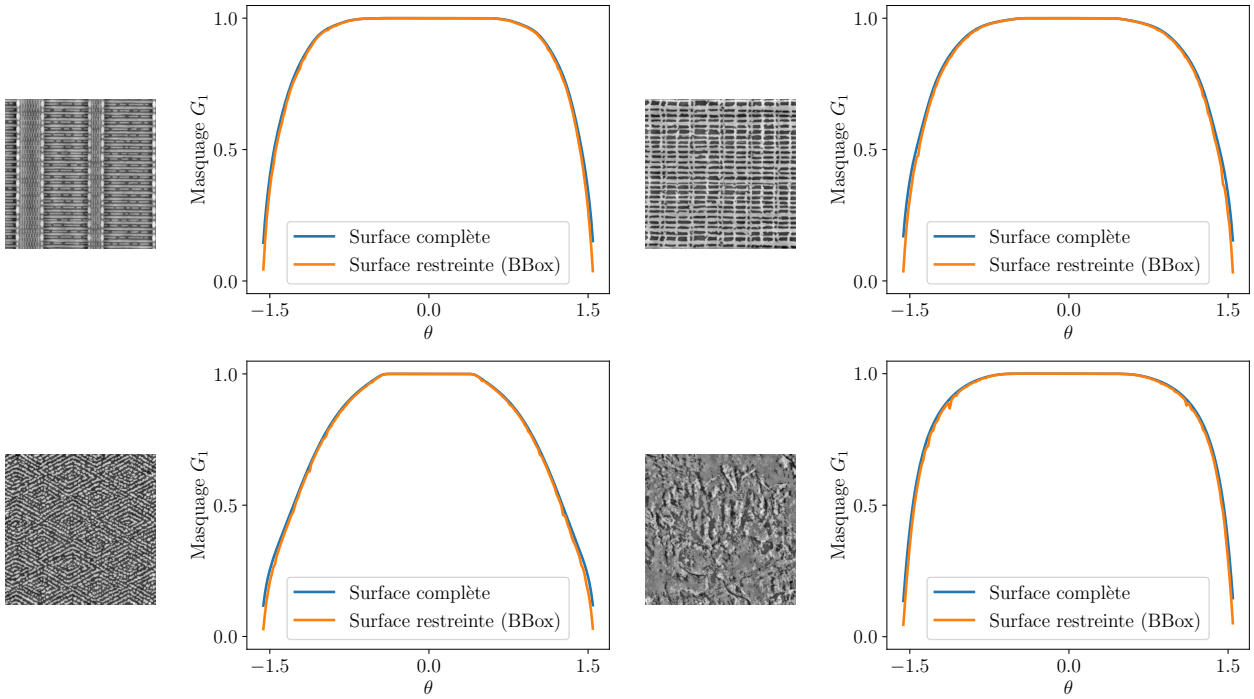


Figure 3.21 – Impact des effets de bord avec restriction par boîte englobante.

La figure 3.22 permet de visualiser en noir les points échantillonnés dont la visibilité dans une direction donnée est incertaine, en rouge ceux qui ne sont pas visibles et en vert ceux qui le sont.

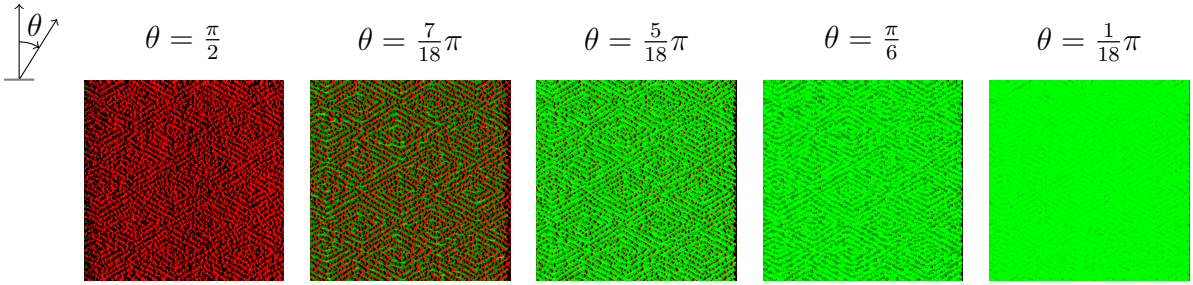
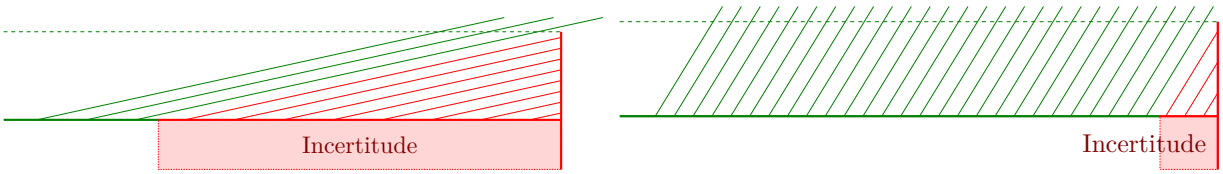


Figure 3.22 – Impact des effets de bord avec visualisation de la restriction par boîte englobante. En rouge, les points ne sont pas visibles. En vert, les points sont visibles. En noir, la visibilité des points est incertaine, ils sont donc rejetés du calcul.

La figure 3.22 montre que pour une direction très rasante ($\theta = \frac{\pi}{2}$), les microfacettes sont toutes masquées, soit par d'autres microfacettes (en rouge) auquel cas leur masquage est certain, soit par la boîte englobante (en noir) auquel cas leur masquage est incertain. Cette incertitude n'existe pas pour les microfacettes visibles (en vert). La quantité de microfacettes dont la visibilité est certaine dépend de la direction. À "l'ombre" de la boîte englobante, un grand nombre de points échantillonnés ont un masquage incertain (figure 3.23). Cette technique crée une quantité d'informations non fiables sur un "bord", celui par lequel la direction d'observation arrive.



(a) Élévation faible **(b)** Élévation élevée

Figure 3.23 – Avec intersection de la boîte englobante, la portion de microsurface incertaine augmente à angles rasants.

Un rayon intersectant la microsurface est toujours considéré comme certain, peu importe son élévation θ. À l'inverse, un rayon quittant la microsurface est valide seulement si l'élévation θ de sa direction est suffisante pour sortir par le haut de la boîte englobante. Ce choix de restriction des effets de bord par boîte englobante diminue donc la valeur calculée pour G_1.

Le biais induit est lié à l'extremum le plus haut de la microsurface qui définit la hauteur de la boîte englobante. Or cet extremum n'est pas nécessairement représentatif de la rugosité de

la microsurface. C'est une information trop spécifique à chacune des microsurfaces étudiées. Nous avons décidé de ne pas appliquer cette méthode par défaut dans nos tests. Il peut être intéressant de la considérer pour des microsurfaces dont la dispersion des hauteurs n'est pas trop importante et dont la hauteur maximale n'est pas une valeur aberrante.

3.2.5. Lissage des normales

Les maillages que nous utilisons sont discrets. Ceci se répercute sur la distribution des normales des microfacettes, également discrète, où chaque face est associée à une normale unique. En simulation d'éclairage, il est usuel de "casser" cette discrétisation des normales pour obtenir un rendu plus lisse, ne laissant pas apparaître le maillage. C'est ce qu'on appelle le lissage des normales. Pour chaque face, les points ne sont plus associés à une même normale, mais chaque point permet de calculer sa propre normale locale, grâce à une interpolation sur les coordonnées barycentriques entre les normales de chaque sommet de la face (figure 3.24).

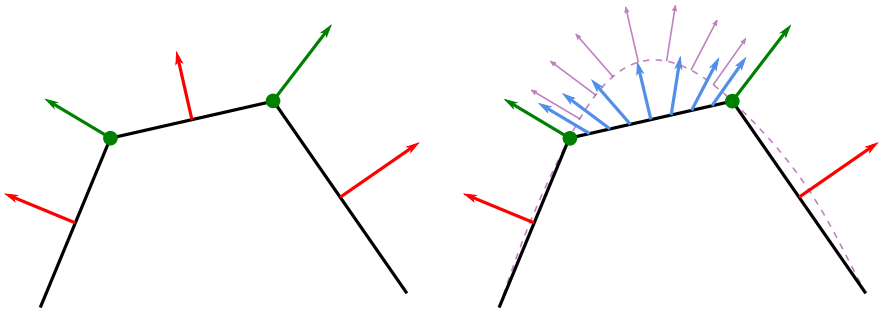


Figure 3.24 – Lissage des normales. En rouge, les normales discrètes de chaque face. En vert, les normales des sommets. En violet, la courbure de la microsurface qui est simulée. En bleu, les normales de la microsurface courbée mais associée aux points de la face plane.

En lissant les normales de la sorte, nous pourrions construire une distribution des normales plus complète en échantillonnant chaque face du maillage plusieurs fois et sans pondérer par les aires. La distribution correspond alors à celle de la microsurface lissée (en violet sur la figure) que le tracer de rayons ne peut pas évaluer correctement. Les intersections trouvées par l'algorithme de tracer de rayons pour mesurer G_1^{rc} correspondent à la microsurface non lissée et il y a une inconsistance entre la donnée mesurée pour G_1^{rc} et la donnée simulée pour G_1.

Nous avons donc décidé de ne pas lisser les normales. La mesure par tracer de rayons reste ainsi en cohérence avec le calcul théorique du terme de masquage G_1. La qualité de la distribution D est assurée par un maillage assez fin de 4096×4096 sommets. S'il n'est pas possible de considérer des maillages de cette taille, alors la solution du lissage des normales peut être envisagée pour éviter les distributions de normales clairsemées.

3.3. BRDFs et rendus

Une fois les données tabulées (G_1^{rc}, G_1 et D), nous cherchons à comparer l'impact de la différence entre G_1^{rc} et G_1 sur un rendu final. Les tabulations sont premièrement utilisées dans le calcul de la BRDF grâce à la théorie des microfacettes spéculaires. Cette BRDF permet ensuite de calculer l'illumination locale afin d'obtenir des simulations d'éclairage de différentes scènes.

3.3.1. BRDF

Afin de calculer les BRDFs à partir de G_1^{rc} et G_1, nous utilisons un goniophotomètre virtuel mesurant la BRDF d'un maillage fourni ou d'une distribution [**RBSM19**]. Pour une direction entrante $\boldsymbol{i} = (\theta_{\boldsymbol{i}}, \phi_{\boldsymbol{i}})$ fixée, un capteur virtuel récolte les réflectances $f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$ pour un ensemble discret de directions sortantes $\boldsymbol{o}$ réparties sur l'ensemble de l'hémisphère. Un capteur contient plusieurs anneaux, chacun est composé de plusieurs cellules d'angle solide similaire. Ainsi, les anneaux à la base de l'hémisphère contiennent plus de cellules que ceux proches du pôle (figure 3.25). À la fin du processus, chaque cellule contient la valeur de réflectance pour la direction $\boldsymbol{o} = (\theta_{\boldsymbol{o}}, \phi_{\boldsymbol{o}})$ associée au centre de la cellule.

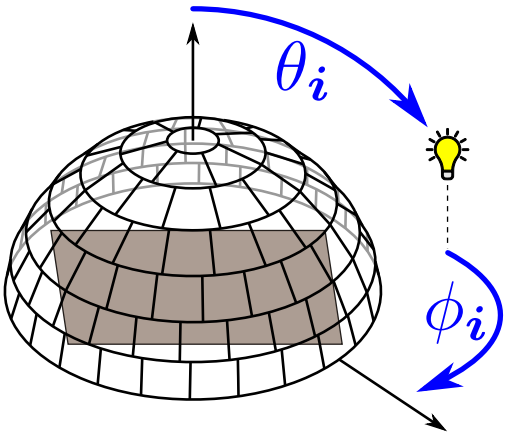


Figure 3.25 – Segmentation du capteur pour le goniophotomètre virtuel.

Nous n'utilisons pas l'algorithme du tracer de rayons pour mesurer directement la BRDF à partir du maillage. Cela serait utile si nous souhaitions étudier la théorie des microfacettes au complet, mais ce n'est pas le sujet de notre étude. À la place, nous utilisons les tabulations G_1^{rc}, G_1 et D (qui représentent la microsurface) afin de les injecter dans la mesure de la BRDF :

$$f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \frac{F(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) D(\boldsymbol{h})}{4 \cos\theta_{\boldsymbol{i}} \cos\theta_{\boldsymbol{o}}}, \tag{3.3.1}$$

où $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = G_1^{rc}(\boldsymbol{i}) G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$ pour la BRDF de référence f_r^{rc}, ou bien $G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{i}) G_1(\boldsymbol{o})$ pour la BRDF f_r qui découle du terme de masquage théorique.

La différence entre f_r^{rc} et f_r dépend donc de la différence entre G_1^{rc} et G_1, seule partie qui change dans le calcul des deux BRDFs. Selon la microsurface choisie, la différence entre les deux termes change sur l'ensemble de l'hémisphère. Ainsi, certaines microsurfaces plutôt isotropes induisent une différence relativement homogène sur l'ensemble des directions (figure 3.26). Alors que d'autres, plus anisotropes, induisent une différence directionnelle (figure 3.27).

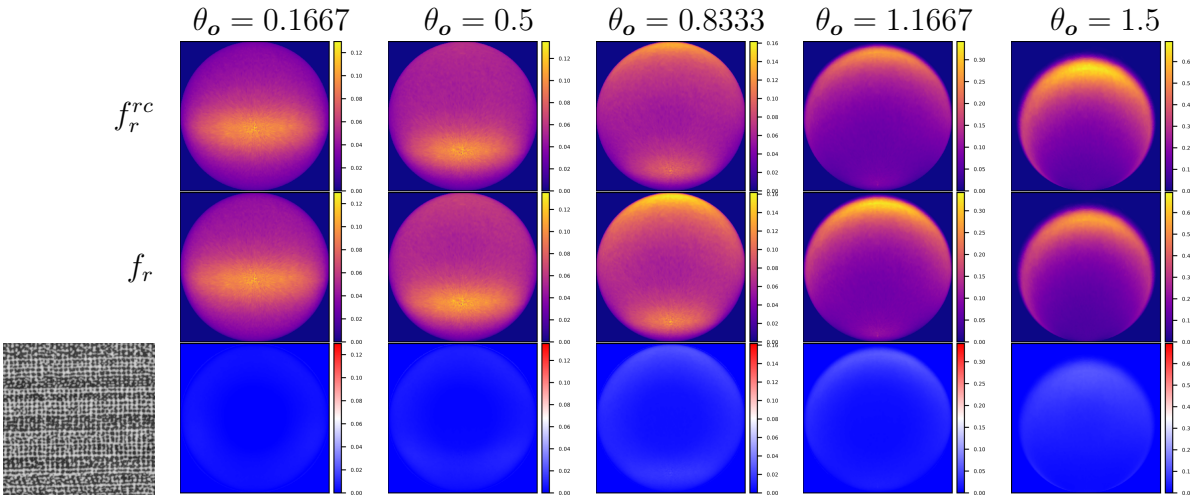


Figure 3.26 – BRDFs f_r^{rc} (première rangée) et f_r (deuxième rangée) ainsi que leur différence absolue (troisième rangée), pour la microsurface 219 dans le jeu de données *PerTex*.

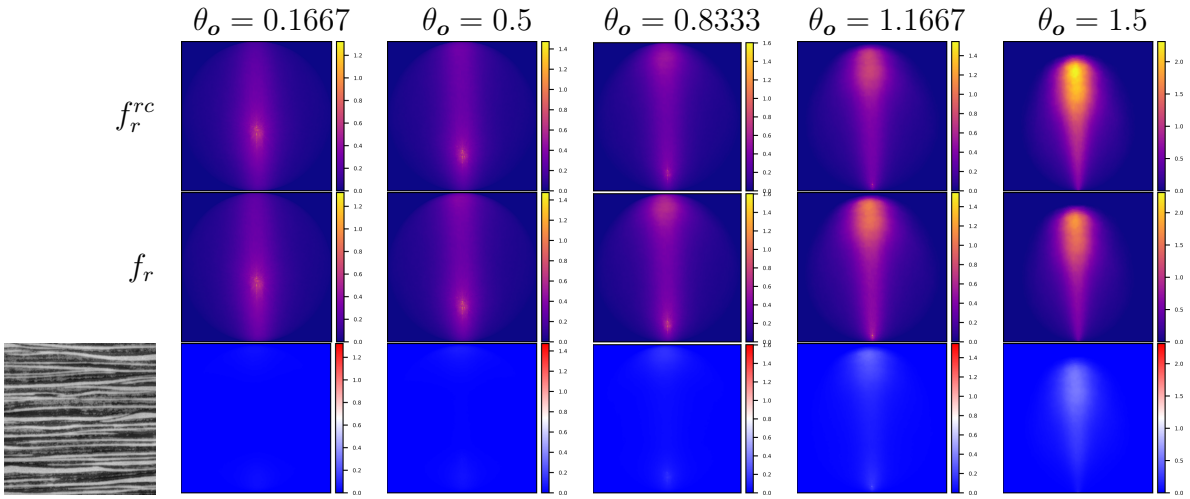


Figure 3.27 – BRDFs f_r^{rc} (première rangée) et f_r (deuxième rangée) ainsi que leur différence absolue (troisième rangée), pour la microsurface 310 dans le jeu de données *PerTex*.

3.3.2. Rendus

Pour calculer une image, nous utilisons l'équation d'éclairement local calculée à partir de la BRDF :

$$L(\boldsymbol{o}) = \int_{\Omega} L(\boldsymbol{i}) f_r(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) \cos\theta_{\boldsymbol{i}} d\omega_i. \tag{3.3.2}$$

f_r^{rc} et f_r sont stockées dans des fichiers binaires, tabulées selon le capteur du goniophotomètre virtuel (figure 3.25). Les valeurs de la BRDF sont lues pour calculer $L(\boldsymbol{o})$ lors du processus de rendu, en interpolant entre les différents capteurs et les différentes cellules.

Pour une paire de directions $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$, nous trouvons les quatre capteurs les plus proches de la direction $\boldsymbol{i}$ tels que $\theta_{\boldsymbol{i}} \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ et $\phi_{\boldsymbol{i}} \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$ où les quatre capteurs sont associés à leurs directions respectives $(\theta_{min}, \phi_{min})$, $(\theta_{min}, \phi_{max})$, $(\theta_{max}, \phi_{min})$ et $(\theta_{max}, \phi_{max})$. Pour chaque capteur, la valeur associée à la cellule contenant $\boldsymbol{o}$ est récupérée puis interpolée, comme montré dans la figure 3.28.

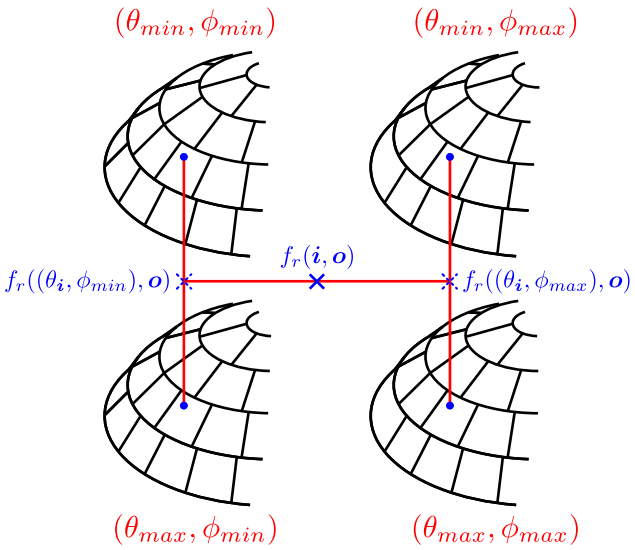


Figure 3.28 – Interpolation entre différents capteurs pour calculer la valeur de BRDF correcte pour une paire de directions $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$.

En calculant ainsi toutes les configurations nécessaires pour $L(\boldsymbol{o})$ dans un algorithme de tracer de rayons, nous pouvons comparer les rendus de référence réalisés avec G_1^{rc} (et donc f_r^{rc}) à ceux réalisés avec le terme de masquage théorique G_1 (et donc f_r). Tout comme pour les BRDFs, la différence entre deux rendus n'est pas la même pour chaque microsurface. La figure 3.29 présente deux exemples différents. La première microsurface (première rangée) est rugueuse et génère une apparence assez matte. La seconde microsurface (seconde rangée) est très anisotropique et moins rugueuse, l'apparence est plus brillante et moins uniforme.

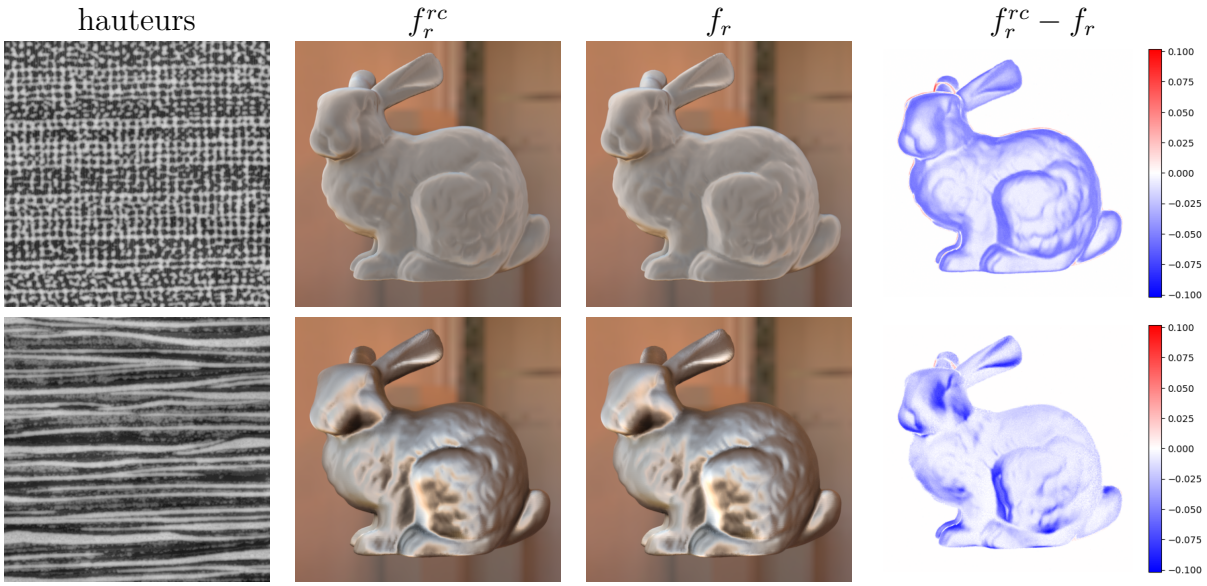


Figure 3.29 – Rendus pour les microsurfaces 219 (première rangée) et 310 (deuxième rangée) du jeu de données *PerTex*.

3.4. Conclusion du chapitre

Nous présentons un processus complet et contrôlé permettant de calculer le masquage d'une microsurface définie par une carte de hauteurs ou directement par un maillage. Le travail de cette thèse utilise plus de 400 textures provenant de matériaux mesurés et utilisés pour créer des maillages, ainsi que quelques maillages générés à partir de distributions connues (Beckmann et GGX). Ces données sont utilisées pour calculer le masquage par la formule théorique de Smith et Ashikhmin et al. ; il est alors noté G_1. Il est également mesuré par tracer de rayons pour obtenir un terme de référence G_1^{rc}, un processus pouvant être long selon la résolution du maillage (4096^2 dans notre étude afin d'assurer une distribution D assez fine des micronormales). Les fonctions 2D utilisées dans le calcul de la BRDF (D, G_1 et G_1^{rc}) sont stockées sous la forme de simples tableaux hémisphériques 2D, pour permettre le calcul d'images.

Dans le chapitre suivant, nous utilisons le terme de référence G_1^{rc} pour calculer l'erreur du masquage théorique G_1. Nous calculons cette erreur pour plus de 400 microsurfaces différentes dont nous étudions ensuite différentes caractéristiques afin de mettre en évidence un lien entre les microsurfaces et leurs erreurs. Cette étude nous permet de proposer une formule de prédiction de l'erreur. L'étude est également étendue à l'impact de l'erreur du masquage G_1 sur l'erreur d'un rendu.

Chapitre 4

Prédiction de l'erreur

Le masquage de référence G_1^{rc} est précis mais mesuré avec un coûteux algorithme de tracer de rayons. Le masquage théorique G_1 est rapide à calculer mais manque parfois d'exactitude. Cette différence est attendue puisque les microsurfaces issues de matériaux réels et représentées par des maillages ne respectent pas nécessairement les hypothèses posées par le modèle de Smith [**Smi67**] et Ashikhmin et al. [**APS00**]. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la différence entre les masquages mesurés par tracer de rayons, considérés comme référence, et ceux calculés par modèle théorique de masquage, puis de proposer un modèle prédictif de cette erreur.

La section 4.1 propose une analyse de toutes les microsurfaces et de la précision de leur masquage théorique. De la comparaison entre G_1^{rc} et G_1, nous déduisons l'erreur d'une microsurface spécifiée (4.1.1). Chaque microsurface peut être décrite par un ensemble de caractéristiques uniques. Nous proposons une analyse des microsurfaces en établissant une liste de caractéristiques (4.1.2), et regardons leurs corrélations avec l'erreur (4.1.3).

La section 4.2 présente une méthodologie permettant de prédire l'erreur du masquage à partir des caractéristiques d'une microsurface. À partir de l'analyse, la liste de caractéristiques est réduite aux cinq les plus significatives (4.2.1). Elles sont utilisées pour établir un modèle prédictif permettant d'estimer l'erreur sans avoir à mesurer G_1^{rc} (4.2.2). La méthodologie est étendue pour trouver un modèle prédictif de l'erreur au niveau du calcul d'images virtuelles (4.2.3).

4.1. Analyse des microsurfaces

4.1.1. Erreur du terme de masquage théorique

Le terme de masquage G_1 proposé par Smith et Ashikhmin et al. est théorique ; n'est pas nécessairement représentatif de tous les phénomènes de masquage des matériaux réels. Pour estimer sa précision pour des microsurfaces réelles ou des maillages, nous proposons de le comparer à la mesure de référence G_1^{rc} (obtenue par tracer de rayons). Nous définissons une mesure d'erreur E comme l'intégrale de la différence absolue entre les deux fonctions 2D G_1 et G_1^{rc} sur l'ensemble des directions :

$$E = \int_{\Omega} |G_1(\boldsymbol{o}) - G_1^{rc}(\boldsymbol{o})| d\omega_{\boldsymbol{o}}. \tag{4.1.1}$$

E fournit un indicateur sur la justesse avec laquelle le terme de masquage théorique G_1 permet de calculer la réflexion d'une microsurface donnée. L'erreur est calculée avec G_1^{rc}, mais les temps de calcul sont importants pour obtenir les résultats. Notre objectif est d'étudier différentes microsurfaces et leurs erreurs E afin de comprendre ce qui peut causer de faibles ou grandes erreurs. De cette étude, nous en déduisons un modèle prédictif de l'erreur pouvant être calculé directement à partir de statistiques d'un maillage donné sans avoir besoin d'une mesure coûteuse et lente par tracer de rayons.

4.1.2. Description statistique d'une microsurface

Le modèle de Smith [**Smi67**] et d'Ashikhmin et al. [**APS00**] reposent sur plusieurs hypothèses de non-corrélation entre certaines variables de la microsurface : les aires des microfacettes $\mathcal{A}_f$, leurs hauteurs z_f et leurs orientations $\theta_{\boldsymbol{m}}$. Cette section examine quelles caractéristiques, principalement des statistiques, permettent de décrire une microsurface et l'erreur de son terme de masquage théorique G_1. Nous nous concentrons sur les variables au centre des hypothèses afin d'établir si les microsurfaces respectent les contraintes du modèle de Smith et d'Ashikhmin et al. Puis nous étudions le lien entre les caractéristiques et l'erreur. Le tableau 4.1 référence les différentes valeurs numériques calculées pour caractériser chaque microsurface.

Pour une variable donnée (parmi $\mathcal{A}_f$, z_f et $\theta_{\boldsymbol{m}}$), ces statistiques peuvent comprendre le maximum, la moyenne, des indicateurs de dispersion ou encore les paramètres de forme de la distribution.

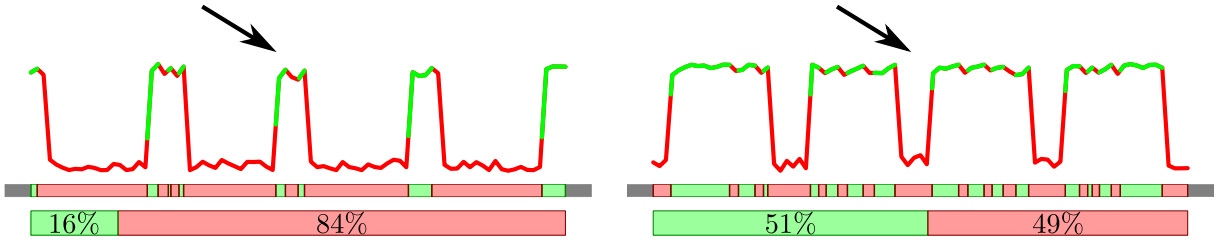
Les corrélations entre deux variables peuvent être évaluées par le coefficient de corrélation de Pearson. Il s'agit d'une mesure de corrélation linéaire qui détermine si un changement sur une variable induit un changement proportionnel sur l'autre variable. Sa valeur se situe entre

Tableau 4.1 – Notation des différentes caractéristiques utilisées pour décrire une microsurface. Toutes ces caractéristiques peuvent être déduites du maillage fourni.

Notation	Description	Formule de calcul	Calculée pour z_f	Calculée pour $\theta_{\boldsymbol{m}}$	Calculée pour $\mathcal{A}_f$
Variables					
z_f	hauteur d'une microfacette				
$\theta_{\boldsymbol{m}}$	angle (élévation) d'une micronormale				
$\mathcal{A}_f$	aire d'une microfacette				
Statistiques de la variable X					
$\max(X)$	maximum		✓	✓	✓
$\mu(X)$	moyenne		✓	✓	✓
$\sigma(X)$	écart-type		✓	✓	✓
$\mathrm{cv}(X)$	coefficient de variation	$\dfrac{\sigma(X)}{\mu(X)}$	✓	✓	
$Q_i(X)$	i-ème quartile		✓	✓	
$\mathrm{MAD}(X)$	écart absolu médian	$Q_2(\lvert X_i - \mu(X)\rvert)$	✓	✓	
$\mathrm{IQR}(X)$	écart interquartile	$Q_3(X) - Q_1(X)$	✓	✓	
$\mathrm{QCD}(X)$	coefficient de dispersion des quartiles	$\dfrac{Q_3(X) - Q_1(X)}{Q_3(X) + Q_1(X)}$	✓	✓	
$\gamma_1(X)$	asymétrie	$\mu\left[\left(\dfrac{X_i - \mu(X)}{\sigma(X)}\right)^3\right]$		✓	
$\beta_2(X)$	kurtosis	$\mu\left[\left(\dfrac{X_i - \mu(X)}{\sigma(X)}\right)^4\right]$		✓	
$\rho(X,Y)$	coefficient de corrélation de Pearson	$\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$	✓	✓	✓
Autres caractéristiques de mesure					
r	anisotropie	$\displaystyle\int_\Omega \left\lvert \frac{\partial D(\theta_{\boldsymbol{m}}, \phi_{\boldsymbol{m}})}{\partial \phi_{\boldsymbol{m}}} \right\rvert \mathrm{pdf}(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}$			
$\mathcal{A}_\mathcal{S}$	aire de la microsurface $\mathcal{S}$	$\sum \mathcal{A}_f$			
C_b	portion de la plus basse partition	trouvé avec un algorithme KMeans, avec trois classes sur les hauteurs z_f			

-1.0 et $+1.0$, et lorsque les deux variables sont exactement liées par une relation linéaire (de la forme $Y = aX + b$), il vaut ± 1. Il est calculé seulement pour évaluer la corrélation entre les hauteurs et les orientations. L'équation 3.1.1 montre qu'il existe une relation bijective exacte entre $\theta_{\boldsymbol{m}}$ et $\mathcal{A}_f$, mais puisqu'elle n'est pas linéaire le coefficient de corrélation de Pearson associé n'aurait pas une valeur de 1.0. Les hypothèses de Smith et d'Ashikhmin et al. contraignent en théorie une non-corrélation entre certaines hypothèses, signifiant que leur coefficient de corrélation de Pearson devrait être nul.

Une même distribution des micronormales peut produire plusieurs organisations de microfacettes ayant donc un masquage différent (figure 4.1). Les microfacettes en hauteur de la microsurface peuvent masquer les microfacettes situées plus bas. Dans la théorie proposée par Smith et Ashikhmin et al., le coefficient de corrélation $\rho(\theta_{\boldsymbol{m}}, z_f)$ entre les hauteurs et les orientations doit être nul, permettant de dissocier le masquage de l'organisation des microfacettes. Cette contrainte est relâchée dans le modèle récent proposé par D'Eon et al. [**dBWZ23**]. Ils étendent les modèles de microfacettes basées sur le profil de Smith et simulent des microsurfaces statistiques en les représentant par une distribution D constante par morceaux corrélés à la hauteur. Ainsi, les microsurfaces asymétriques sont supportées. Cependant, leur nouveau modèle n'a pas été comparé à des mesures de matériaux réels. Le partitionnement des hauteurs selon des distributions de micronormales constantes demanderait une résolution du maillage très précise pour chaque couche. Les travaux présentés dans cette thèse peuvent offrir une perspective intéressante pour l'étude du modèle de D'Eon et al. avec des matériaux réels, mais ce travail est laissé pour un projet futur (voir section 6.2.2).



(a) Organisation en crêtes **(b)** Organisation en failles

Figure 4.1 – Deux organisations de microfacettes avec la même distribution. La flèche indique la direction d'observation. La microsurface en rouge est masquée et ne représente pas la même proportion masquée de la macrosurface dans les deux configurations (ni la même proportion de la microsurface).

Chaque microsurface est également décrite par trois autres caractéristiques. La première décrit l'anisotropie r de la microsurface, calculée avec le gradient de la distribution 1D des micronormales sur ϕ :

$$r = \int_\Omega \left| \frac{\partial D(\theta_{\boldsymbol{m}}, \phi_{\boldsymbol{m}})}{\partial \phi_{\boldsymbol{m}}} \right| \text{pdf}(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}. \tag{4.1.2}$$

La figure 4.2 montre des exemples de microsurfaces et leur gradient à partir duquel la valeur d'anisotropie est calculée.

La seconde caractéristique est l'aire totale de sa microsurface $\mathcal{A}_\mathcal{S} = \sum \mathcal{A}_f$.

La troisième caractéristique est calculée en considérant la microsurface partitionnée en trois niveaux de hauteurs. Elle correspond à la portion C_b de la partie la plus basse. Les microfacettes sont séparées grâce à un partitionnement en k-moyennes réalisé sur les hauteurs,

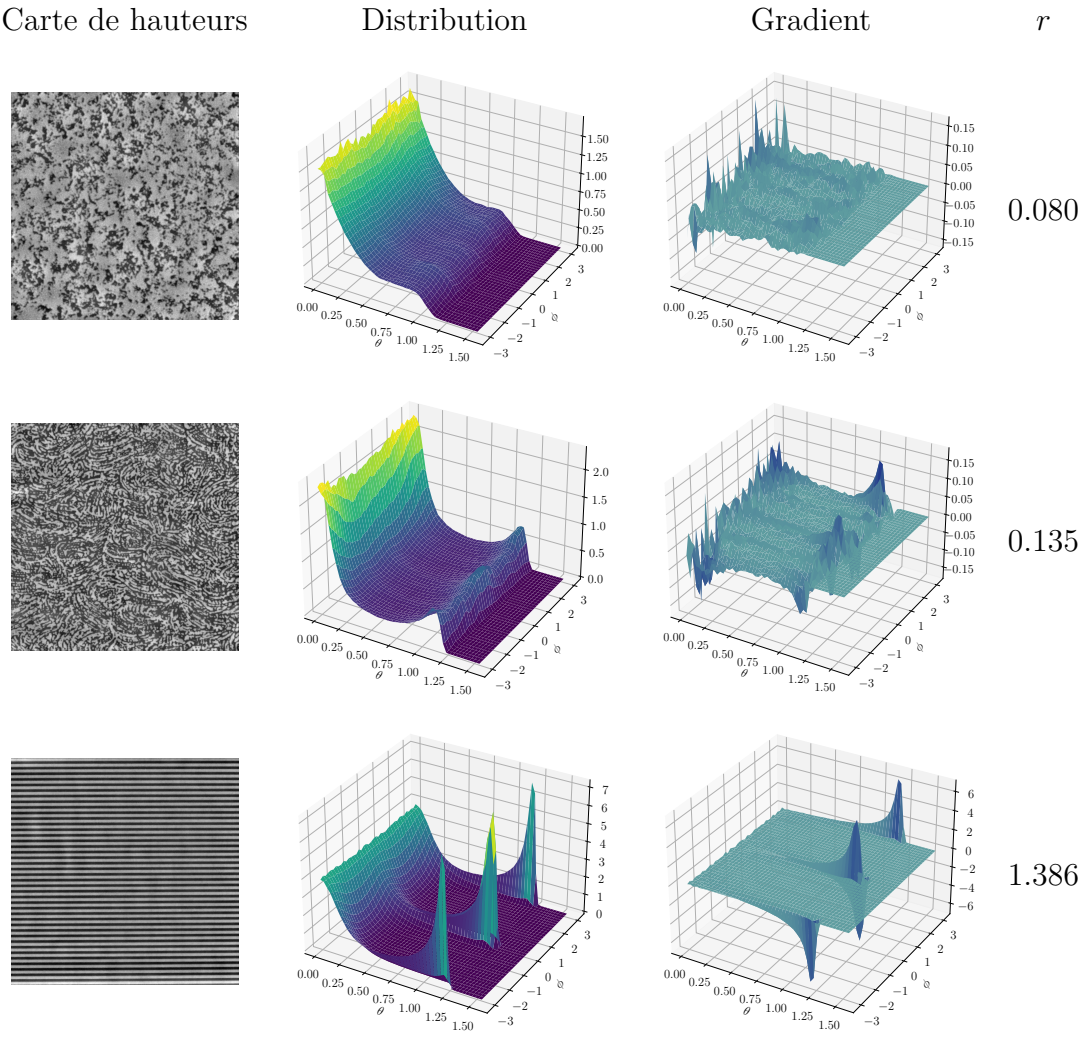
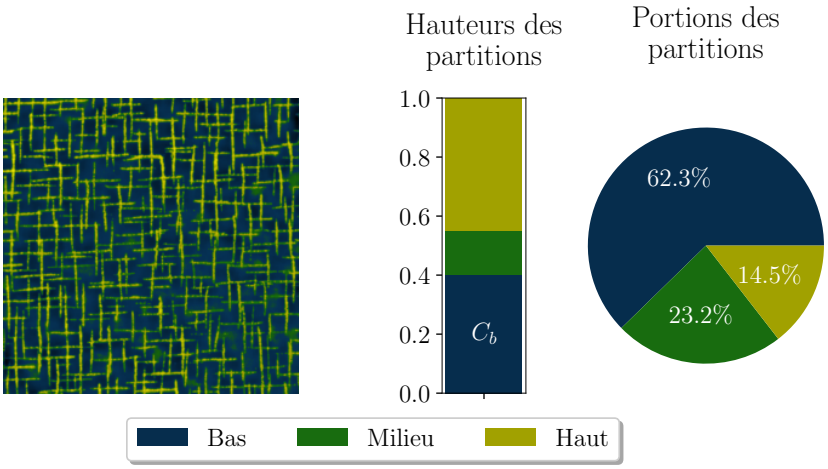


Figure 4.2 – Distribution et gradient de trois microsurfaces. Celle de la première rangée est isotrope, la distribution ne varie que faiblement selon ϕ, son gradient a donc toujours une valeur assez faible et l'intégrale r du gradient est faible. La microsurface de la deuxième rangée est légèrement anisotrope. L'absolue du gradient augmente autour de certains φ, augmentant la valeur de son intégrale. La troisième rangée présente une microsurface anisotrope dont la distribution varie fortement selon ϕ. Le gradient associé atteint des valeurs bien plus élevées et son intégrale a également une valeur plus forte.

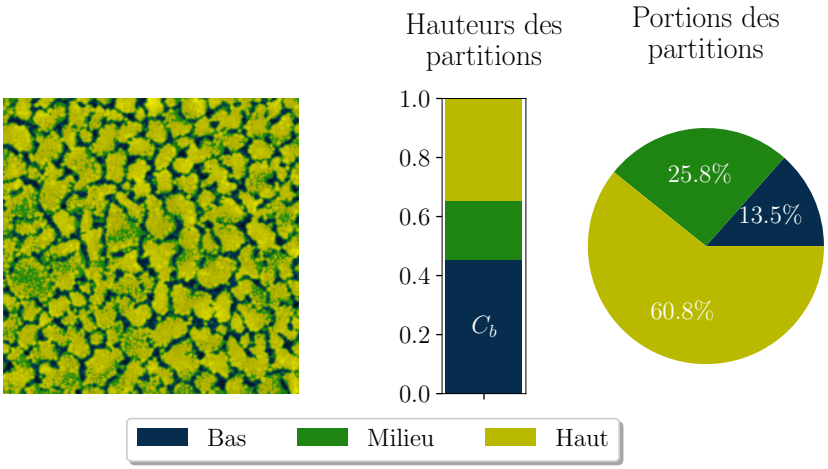
où $k = 3$. Plus la portion de la partition la plus basse est importante, plus l'organisation des microfacettes tend vers une organisation en crêtes (figure 4.1a). Cette portion notée C_b permet donc d'associer une valeur numérique à la distribution des hauteurs de la microsurface (figure 4.3).

Nous avons sélectionné au total 25 caractéristiques pour décrire une microsurface grâce à ses distributions des angles $\theta_{\boldsymbol{m}}$ des microfacettes, de leurs aires $\mathcal{A}_f$, et des hauteurs z_f. Nous étudions ensuite ces caractéristiques pour trouver lesquelles ont un impact non négligeable

sur la précision du masquage théorique G_1 dans l'objectif de prédire son erreur seulement à partir des caractéristiques intéressantes.



(a) Microsurface ayant près de deux tiers (62.3%) de ses microfacettes appartenant à la partition la plus basse.



(b) Microsurface ayant près de deux tiers (60.8%) de ses microfacettes appartenant à la partition la plus haute.

Figure 4.3 – Partitionnement en k-moyennes, où $k = 3$, de deux microsurfaces aux distributions des hauteurs différentes. C_b est la proportion de la partie en bleu foncé.

4.1.3. Corrélation entre les statistiques et l'erreur

Chacune des caractéristiques a une corrélation propre à l'erreur E. Certaines lui sont très fortement liées, d'autres ne semblent avoir aucune influence sur l'erreur. De plus, certaines caractéristiques sont également fortement corrélées à d'autres. Toutes ces informations peuvent être exploitées pour rechercher quel lien existe entre une microsurface et l'erreur E du masquage théorique.

La figure 4.4 présente une matrice de corrélation entre toutes les valeurs numériques calculées sur les microsurfaces de notre étude, avec leurs erreurs respectives. Cette matrice met en évidence des corrélations fortes entre différentes caractéristiques.

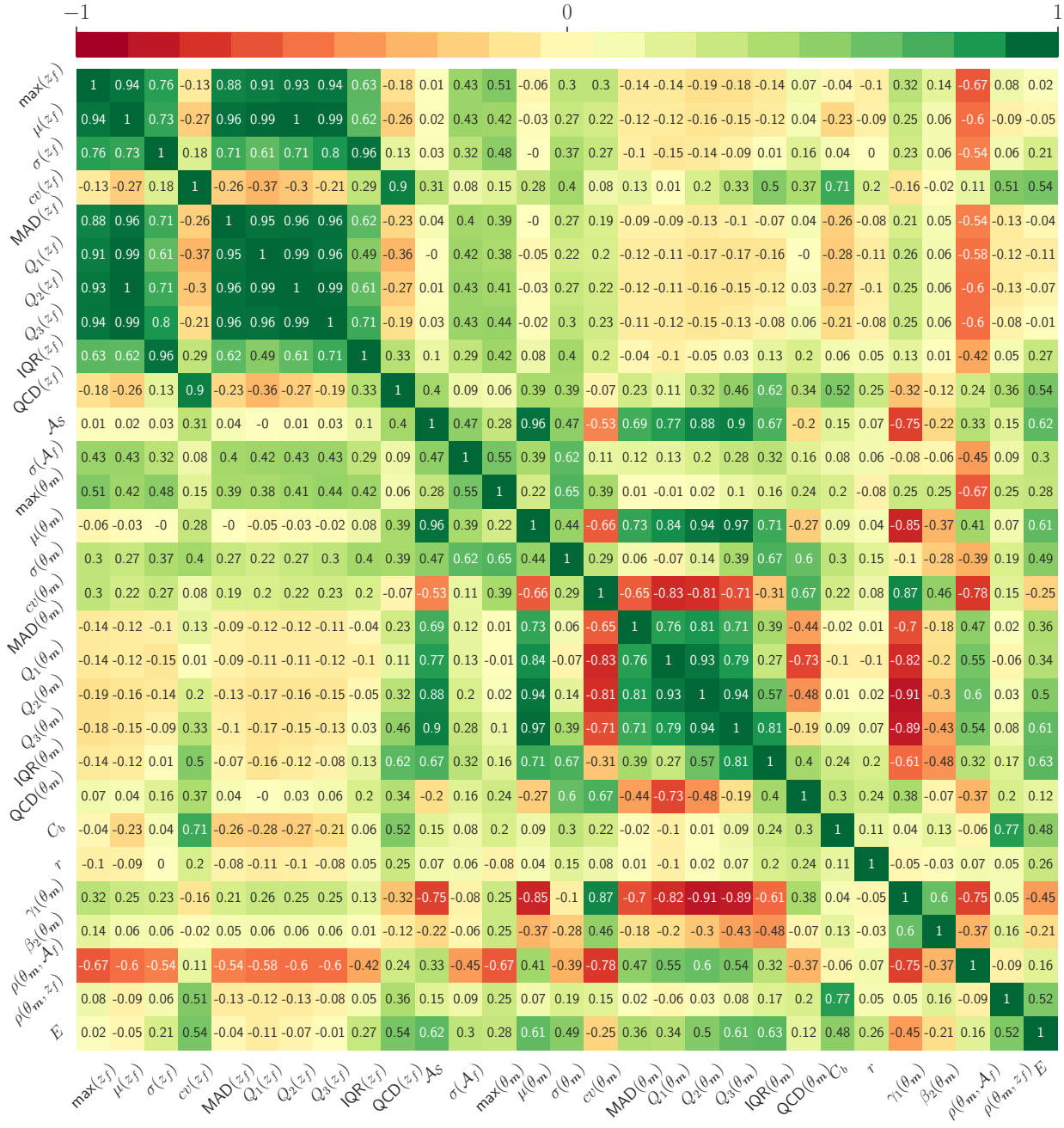


Figure 4.4 – Matrice de corrélation entre les différentes caractéristiques considérées dans notre analyse et l'erreur E. La corrélation entre deux caractéristiques X et Y est lue au croisement entre la ligne X et la colonne Y (ou inversement). Si deux caractéristiques sont très fortement corrélées, l'une peut être approchée comme un multiple de l'autre (à une constante près). Si une caractéristique a une très faible corrélation avec l'erreur E (proche de 0), elle n'a pas d'influence sur la précision du masquage théorique.

Voici quelques exemples de caractéristiques corrélées :

— $\rho(\gamma_1(\theta_m), Q_2(\theta_m)) = -0.91$. L'asymétrie (figure 4.5) de la distribution des angles θ_m est fortement corrélée à sa médiane. Cela fait sens puisque les angles θ_m sont limités entre 0 et $\pi/2$ non inclus. Aussi, lorsque la médiane de cette distribution tend vers $\pi/2$, le maximum ne peut pas dépasser $\pi/2$ et la médiane s'écarte d'autant plus de la moyenne, créant ainsi une asymétrie négative.

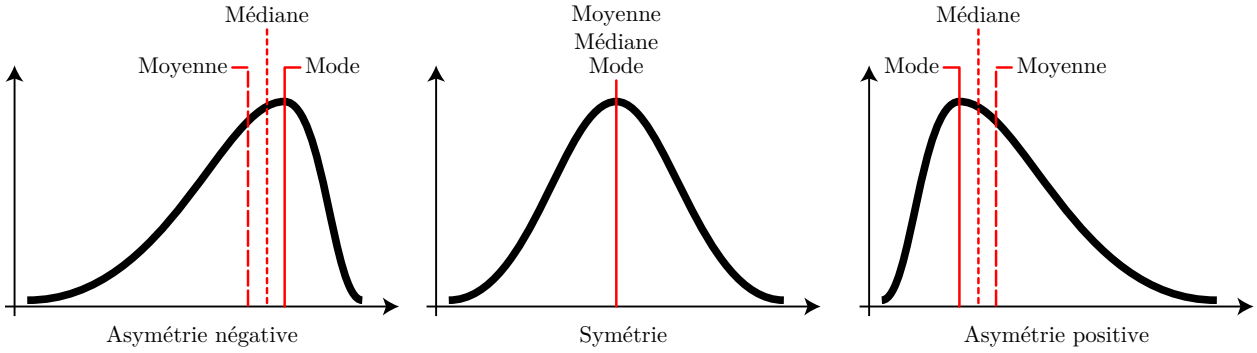


Figure 4.5 – Le coefficient d'asymétrie mesure l'asymétrie d'une distribution. Une asymétrie négative correspond à une distribution décalée à droite de la médiane (mode > médiane), sa queue s'étale vers la gauche. Une asymétrie positive correspond à une distribution décalée à gauche de la médiane (mode < médiane), sa queue s'étale vers la droite. Une asymétrie nulle indique que le mode et la médiane sont égaux (mais ce n'est pas nécessairement équivalent à une symétrie parfaite).

— $\rho(C_b, \rho(\theta_m, z_f)) = 0.77$. Lorsque la corrélation $\rho(\theta_m, z_f)$ tend vers +1.0, cela signifie que plus une microfacette est haute (z_f élevée), plus elle a de chance d'être inclinée (θ_m élevé) et donc ses voisines sont à une hauteur différente. Plus une microfacette est basse, plus elle est orientée à l'horizontale permettant de garder une hauteur stable dans son voisinage. En d'autres termes, la proportion C_b de microfacettes en bas de la microsurface est plus importante, ce que nous appelons une organisation en crêtes (figure 4.1a). À l'inverse, lorsque le coefficient de corrélation tend vers -1.0, les microfacettes se trouvent plus souvent en hauteur et C_b est plus faible, ce que nous appelons une organisation en failles (figure 4.1b).

— $\rho(\mathcal{A}_\mathcal{S}, \mu(\theta_m)) = 0.96$. Avec le processus de création de maillage déplaçant verticalement des sommets d'une grille régulière, l'aire d'une microfacette peut être calculée à partir de son orientation : $\mathcal{A}_f = \frac{s^2}{2\cos\theta_m}$. Plus une microfacette est orientée à la verticale ($\theta_m \to \pi/2$), plus son aire est grande ($\mathcal{A}_f \to \infty$). Par conséquent, plus la moyenne $\mu(\theta_m)$ est élevée, plus la moyenne des microfacettes l'est également. Et donc plus l'aire totale de la microsurface est élevée.

— Les mesures de dispersion (μ, σ, cv, MAD, Q_1, Q_2, Q_3, IQR) sont logiquement fortement corrélées entre elles la plupart du temps (selon la robustesse de la mesure et la différence d'échelle entre les différentes données).

4.2. Prédiction de l'erreur

4.2.1. Sélection des caractéristiques

L'erreur E est influencée différemment par chaque caractéristique, sa valeur de corrélation avec chacune d'entre elles est différente. Certaines caractéristiques X n'ont presque aucune corrélation avec l'erreur ($\rho(E, X) \approx 0$), d'autres lui semblent fortement corrélées ($\rho(E, X) \approx \pm 1$). En combinant celles qui sont liées à E, l'erreur peut être approchée en utilisant seulement ces caractéristiques. Cette combinaison linéaire est notée P et est de la forme :

$$P = \sum_i w_i \, X_i + c \tag{4.2.1}$$

où les X_i sont les caractéristiques de la microsurface, les w_i les coefficients linéaires associés et c une constante.

Afin de faciliter l'étude et avoir une meilleure compréhension des influences de chaque caractéristique, nous normalisons les données entre $[-1, +1]$:

$$\bar{X} = \frac{X}{\max(|X|)}. \tag{4.2.2}$$

La combinaison linéaire recherchée doit s'exprimer en fonction de ces données normalisées, sous la forme :

$$\bar{P} = \sum_i \bar{X}_i \, \bar{w}_i + c. \tag{4.2.3}$$

Pour trouver la combinaison linéaire $\bar{P}$, nous réalisons une régression linéaire multiple grâce à la méthode des Moindres Carrés Ordinaire (MCO) sur les données normalisées. La méthode MCO consiste à trouver les paramètres $\bar{w}_i$ permettant de minimiser la somme des carrés des résidus estimés (la différence entre le résultat de la régression linéaire et l'erreur E visée). La qualité de la régression linéaire est donnée par le coefficient de détermination R^2 défini par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{\mathcal{S}} (E_{\mathcal{S}} - \bar{P}_{\mathcal{S}})^2}{\sum_{\mathcal{S}} (E_{\mathcal{S}} - \mu(E))^2} \tag{4.2.4}$$

où $\mathcal{S}$ représente une microsurface (et donc $E_{\mathcal{S}}$ et $P_{\mathcal{S}}$ l'erreur et la prédiction associée) et $\mu(E)$ la moyenne de toutes les erreurs. Le meilleur coefficient possible est 1.0, équivalant à une régression parfaite ; il peut être négatif.

La prédiction finale P peut ensuite être calculée avec :

$$P = \sum_i \frac{X_i}{\max(|X_i|)} \bar{w}_i + c. \tag{4.2.5}$$

Le tableau 4.2 présente la valeur absolue maximale de chaque caractéristique permettant de procéder à la normalisation, selon l'ensemble de nos données mesurées.

Tableau 4.2 – Valeurs absolues maximales pour chaque caractéristique.

$\max(z_f)$	30.82	$\max(\theta_m)$	1.582	$\mathcal{A}_S$	1.986
$\mu(z_f)$	15.02	$\mu(\theta_m)$	0.9961	$\sigma(\mathcal{A}_f)$	1.488e-07
$\sigma(z_f)$	3.240	$\sigma(\theta_m)$	0.5263	C_b	0.8063
$cv(z_f)$	0.7358	$cv(\theta_m)$	1.439	r	3.299
$\mathrm{MAD}(z_f)$	16.25	$\mathrm{MAD}(\theta_m)$	1.184	$\gamma_1(\theta_m)$	3.672
$Q_1(z_f)$	14.35	$Q_1(\theta_m)$	0.6913	$\beta_2(\theta_m)$	17.72
$Q_2(z_f)$	14.99	$Q_2(\theta_m)$	0.9685	$\rho(\theta_m,\mathcal{A}_f)$	1.037
$Q_3(z_f)$	15.66e	$Q_3(\theta_m)$	1.147	$\rho(\theta_m,z_f)$	0.5539
$\mathrm{IQR}(z_f)$	4.092	$\mathrm{IQR}(\theta_m)$	0.8803		
$\mathrm{QCD}(z_f)$	0.6714	$\mathrm{QCD}(\theta_m)$	0.7273		

Parmi toutes les caractéristiques, certaines n'ont aucune corrélation avec l'erreur. D'autres sont fortement corrélées à d'autres caractéristiques et la présence de deux caractéristiques hautement corrélées dans la régression linéaire devient inutile. Afin de rendre le calcul plus simple mais sans perdre en efficacité, il est possible d'éliminer les caractéristiques les moins significatives dans la régression linéaire et ainsi réduire sa complexité.

Sur les 419 microsurfaces mesurées, nous en sélectionnons au hasard 70% pour réaliser une validation croisée en cinq blocs d'environ 60 chacun. L'un après l'autre, chaque bloc est utilisé comme ensemble de validation pendant que les quatre autres servent d'entraînement pour trouver une régression linéaire par la méthode MCO. Le coefficient R^2 est calculé grâce à l'ensemble de validation. Ce processus est ainsi réalisé cinq fois, donnant cinq coefficients de détermination permettant d'estimer la robustesse du modèle à partir de leur moyenne et de leur écart-type (figure 4.6).

L'une après l'autre, nous étudions l'impact des caractéristiques sur l'efficacité du modèle et sa robustesse. Nous mesurons la moyenne et l'écart-type des cinq coefficients de détermination R^2 donnés par une validation croisée, avec la caractéristique, puis sans elle. Si la perte dans la moyenne est négligeable, cela signifie que la caractéristique n'est pas déterminante pour avoir un modèle efficace. Si l'écart-type reste stable, la caractéristique n'est pas nécessaire pour que le modèle soit robuste. Si ces deux conditions sont réunies, alors la caractéristique n'est pas choisie pour la prédiction finale. Les coefficients $\bar{w}_i$ sont recalculés

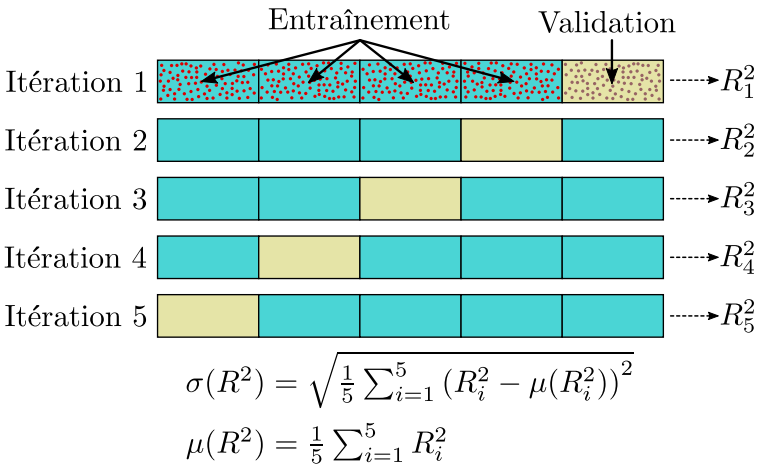


Figure 4.6 – Validation croisée en cinq blocs réalisée sur 70% des données.

à chaque fois qu'une caractéristique est éliminée. L'algorithme 2 présente le processus sous une forme pseudo-algorithmique.

Algorithme 2 Algorithme de sélection des caractéristiques les plus intéressantes pour minimiser la complexité de la régression linéaire.

```
procedure getLeastInterestingFeature(E, data, nBlocs)
    LIFeature ← None ; bestScore ← 0 ;
    for feature ∈ data.features do
        dataTmp ← data.remove(feature) ;          ▷ Enlève temporairement la caractéristique
        R² ← CrossValidationScores(E, dataTmp, nBlocs) ;   ▷ Calcule les cinq coefficients R²
        if σ(R²) < 0.1 and μ(R²) > bestScore then   ▷ Les coefficients sont stables et meilleurs
            bestScore ← μ(R²)
            LIFeature ← feature                   ▷ La caractéristique est la moins intéressante
        end if
    end for
    return LIFeature, bestScore ;
end procedure
procedure keepBestFeatures
    E ← getErrors() ; data ← getData() ; nBlocs ← 5 ; loss ← 0 ;          ▷ Initialisations
    score ← μ(CrossValidationScores(E, data, nBlocs)) ;   ▷ Calcule le coefficient moyen initial
    repeat
        feature, newScore ← getLeastInterestingFeature(E, data, nBlocs)
        if feature not None then                  ▷ S'il y a une caractéristique à enlever
            if score − newScore < 0.01 then       ▷ Si régression ne perd pas trop en précision
                score ← newScore ;
                data ← data.remove(feature) ;     ▷ Enlève définitivement la caractéristique
            end if
        else
            break ;
        end if
    until score − newScore < 0.01                 ▷ Tant que R² ne diminue pas trop.
    return data.features ;
end procedure
```

4.2.2. Modèle prédictif

Les microsurfaces que nous utilisons proviennent de différentes base de données (334 microsurfaces de *PerTex* [**Hal12**], 85 de *ambientCG* [**Dem17**], deux pour *IPGP* [**Lab17**], deux venant de *Prouteau et al.* [**PJBK23**] et sept générées à partir de distributions [**RBSM19**]) et sont acquises par différents procédés. La base de données *PerTex*, la plus importante de notre étude, a été constituée en normalisant un procédé d'acquisition identique pour chacune des microsurfaces. Les cartes de hauteurs obtenues ont donc toute une qualité identique et la fonction bijective associant une nuance de gris $g \in [\![0, 255]\!]$ à une hauteur $z \in \mathbb{R}$ est commune à toutes les données. Ce n'est pas le cas pour la seconde base de données la plus importante, *ambientCG*, provenant d'un site internet où chaque utilisateur peut publier ses propres cartes de hauteurs sans devoir suivre un processus normalisé imposé, ni indiquer les détails de son acquisition. Les microsurfaces générées à partir de distribution (GGX ou de Beckmann) quant à elles sont issues d'un processus visant à respecter une distribution des microfacettes et diminuant l'autocorrélation de la microsurface. Toutes ces différences dans la constitution des bases de données induisent que certaines caractéristiques varient en fonction de la base de données dont elles sont issues.

Notre travail vise à proposer un modèle permettant de prédire l'erreur E de microsurfaces obtenues à partir de mesures du monde réel (peu importe leur processus d'acquisition). Aussi, dans un premier temps, nous considérons comme un seul ensemble toutes les microsurfaces générées à partir de cartes de hauteurs mesurées. En annexe A nous proposons des modèles plus spécifiques à chaque base de données, biaisées par les modes des captures des cartes de hauteurs mais plus fiables pour des données acquises selon les mêmes modalités. Les microsurfaces générées par les distributions sont considérées à part. Nous montrons qu'il est possible d'exploiter leur paramètre de rugosité pour prédire l'erreur.

Dans ce qui suit, la partie A présente les résultats pour les microsurfaces mesurées. La partie B donne un premier aperçu des résultats obtenus avec la même méthodologie mais sur des bases de données différentes (seulement *PerTex*, seulement *ambientCG*, ou toutes les microsurfaces y compris celles générées par distribution). La partie C présente une étude spécifique aux microsurfaces générées à partir de distributions.

A. Pour les microsurfaces mesurées

Pour l'ensemble des microsurfaces réelles mesurées, nous obtenons cinq caractéristiques ayant un impact significatif sur le coefficient de détermination R^2. Leur matrice de corrélation est donnée dans la figure 4.7 :

— l'écart interquartile $\mathrm{IQR}(z_f)$ des hauteurs des microfacettes ;

— l'anisotropie r de la microsurface ;

— l'écart interquartile $\mathrm{IQR}(\theta_m) = Q_3 - Q_1$ des angles θ_m ;

— le coefficient de corrélation de Pearson $\rho(\theta_m, z_f)$ entre les angles θ_m et les hauteurs z_f ;

— la moyenne $\mu(\theta_m)$ des angles θ_m.

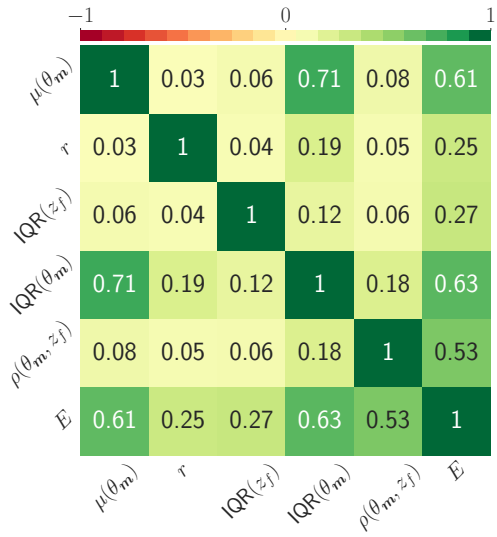


Figure 4.7 – Matrice de corrélation entre les cinq caractéristiques les plus pertinentes pour l'erreur E. Elles sont toutes corrélées, même légèrement, avec l'erreur E ($|\rho(X, E)| > 0.25$) mais assez faiblement entre elles pour qu'aucune caractéristique ne puisse s'exprimer en fonction d'une autre avec assez d'exactitude ($|\rho(X, Y)| < 0.90$).

À partir de ces cinq caractéristiques, nous réalisons une dernière régression linéaire grâce à deux tiers des données pour l'entraînement et un tiers utilisé pour la validation :

$$\begin{aligned} E \approx \bar{P} = \; & 0.216\,\bar{\mu}(\theta_m) + 0.147\,\bar{r} + 0.142\,\bar{\mathrm{IQR}}(z_f) + \\ & 0.124\,\bar{\mathrm{IQR}}(\theta_m) + 0.118\,\bar{\rho}(\theta_m, z_f) + 0.018. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

La formule de prédiction finale, sans normalisation des données, est :

$$\begin{aligned} E \approx P = \; & 0.222\,\mu(\theta_m) + 0.045\,r + 0.035\,\mathrm{IQR}(z_f) + \\ & 0.141\,\mathrm{IQR}(\theta_m) + 0.172\,\rho(\theta_m, z_f) + 0.018. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

La figure 4.8 montre à quel point l'erreur prédite P correspond à l'erreur mesurée E obtenue par tracer de rayons. Chaque point correspond au maillage d'une microsurface parmi 334 pour *PerTex*, 85 pour *ambientCG*, deux pour *IPGP* et deux venant de *Prouteau et al.*

Les points sont répartis équitablement autour de la diagonale et leur dispersion reste stable. À droite, les boîtes à moustaches montrent où se situent 50% des points ($Q_3 - Q_1$), principalement proches de la diagonale. Nous observons que les valeurs de $P \in [0.0,0.1]$ et $[0.4,0.5]$ sont légèrement surestimées, mais elles ne représentent que 6% des données. L'efficacité de

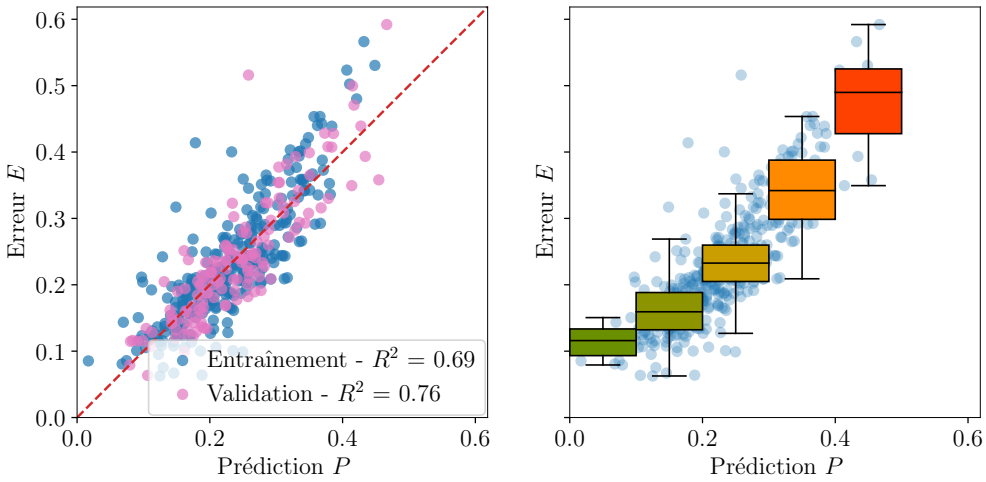


Figure 4.8 – Comparaison entre notre modèle prédictif P et l'erreur E. Le nuage de points sur la gauche montre la proximité entre chaque point (une microsurface du jeu de données) et sa projection parallèle à l'axe des abscisses sur la diagonale (le cas idéal). Les boîtes à moustaches sur le graphe de droite montrent où se situent 50% des points pour chaque prédiction dans les intervalles de taille 0.1.

la prédiction P est exprimée dans une représentation différente dans le tableau 4.3, où cinq colonnes fournissent des statistiques par taille d'intervalle de 0.1 pour les prédictions P.

Tableau 4.3 – Tableau de prédiction. Chaque colonne représente un intervalle de $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$, avec le nombre correspondant de microsurfaces et les statistiques des erreurs calculées.

P	min-max	0.0-0.1	0.1-0.2	0.2-0.3	0.3-0.4	0.4-0.5
	# surfaces	15	130	193	73	12
E	moyenne μ	0.12	0.16	0.24	0.34	0.48
	variance	0.0015	0.0023	0.0029	0.0033	0.0055
	min	0.08	0.06	0.10	0.21	0.35
	Q_1	0.09	0.13	0.21	0.30	0.43
	Q_2	0.12	0.16	0.23	0.34	0.49
	Q_3	0.13	0.19	0.26	0.39	0.53
	max	0.21	0.41	0.52	0.45	0.59
	$Q_3 - Q_1$	0.04	0.06	0.05	0.09	0.10
	étendue	0.13	0.35	0.42	0.24	0.24
	MSE	0.0028	0.0020	0.0024	0.0025	0.0076

Le tableau 4.3 met en évidence la fiabilité de l'erreur prédite pour certaines valeurs de P. Pour les prédictions $P \in$ [0.1,0.3], nous notons également :

— Une prédiction $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$ entraîne une erreur moyenne E_μ et une erreur médiane E_{Q_2} dans le même intervalle.

— Plus de 50% des données sont contenues dans le même intervalle d'erreur que $E_{Q_1} \geq P_{\min}$ et $E_{Q_3} \leq P_{\max}$.

— Une erreur de prédiction plus faible a une variance plus faible.

Valeurs aberrantes

Quelques rares microsurfaces résultent en des valeurs de prédiction aberrantes, bien plus éloignées de leurs erreurs associées que le reste des données. On note le résidu $\epsilon = |E - P|$ comme étant la distance entre l'erreur et la prédiction. En moyenne, on a $\mu(\epsilon) = 0.0381$. Les quantiles des résidus sont donnés dans le tableau 4.4 et leur histogramme dans la figure 4.9. On estime qu'une prédiction est acceptable quand son résidu est inférieur à 0.1. Ce seuil permet d'éliminer les valeurs aberrantes ($\epsilon > 0.15$) tout en gardant l'ensemble des données réparties équitablement autour de la diagonale $E = P$ (un peu plus de 95%).

Tableau 4.4 – Quantiles des résidus ϵ.

Quantile	25%	50%	75%	80%	90%	95%	96%	97%	98%	99%
Valeur ϵ	0.014	0.029	0.053	0.059	0.074	0.094	0.103	0.107	0.121	0.147

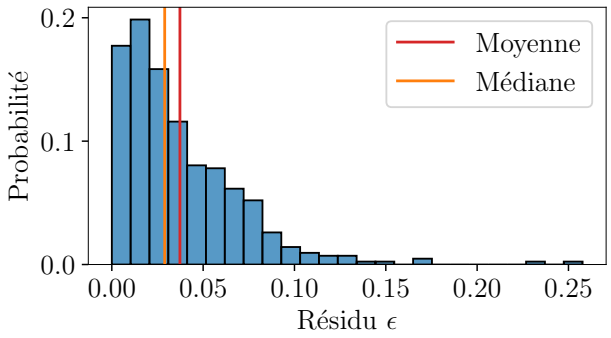
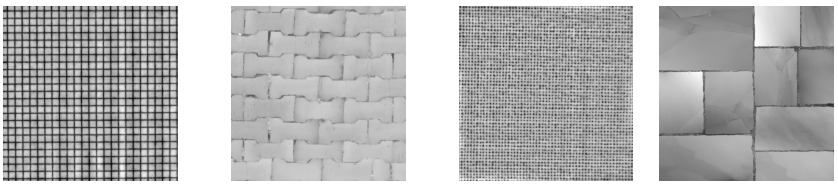


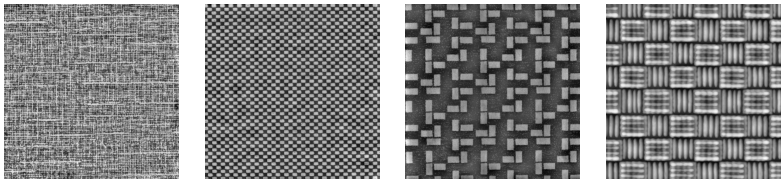
Figure 4.9 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$ pour 423 microsurfaces mesurées.

Les quatre microsurfaces ayant la plus grande divergence sont présentées dans la figure 4.10. Elles présentent toutes des motifs géométriques se répétant ou étant très orientés selon deux axes principaux et orthogonaux. Pour autant, nous ne pouvons pas utiliser cette observation pour discriminer de telles données, puisque bien d'autres microsurfaces similaires ont une prédiction correcte. Quelques exemples sont montrés dans la figure 4.11.



Label	278	PavingStones044	286	Tiles116
Source	*PerTex*	*ambientCG*	*PerTex*	*ambientCG*
Erreur E	0.516	0.4139	0.3171	0.4002
Prédiction P	0.2583	0.1782	0.1149	0.2329
Résidu ϵ	0.2577	0.2357	0.1682	0.1674

Figure 4.10 – Cartes de hauteurs des microsurfaces pour lesquelles la prédiction P est la plus erronée.



Label	045	046	159	081
Source	*PerTex*	*PerTex*	*PerTex*	*PerTex*
Erreur E	0.2895	0.2938	0.1951	0.1643
Prédiction P	0.305	0.3107	0.2241	0.2331
Résidu ϵ	0.0155	0.0169	0.029	0.0688

Figure 4.11 – Cartes de hauteurs présentant des motifs géométriques pour lesquelles la précision de la prédiction P est acceptable ($\epsilon < 0.1$).

Parmi toutes les caractéristiques, aucune ne permet réellement d'identifier les microsurfaces produisant des valeurs aberrantes de P. La meilleure caractéristique candidate pour cette discrimination est l'écart-type des angles θ_m : il présente une légère corrélation avec les résidus de la prédiction (figure 4.12).

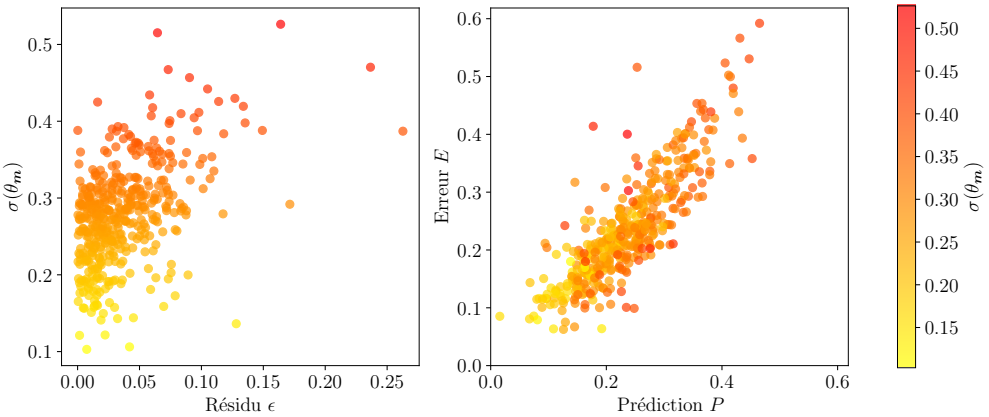


Figure 4.12 – Résidus de la prédiction et écart-type des angles θ_m.

La valeur la plus erronée (avec le résidu ϵ maximum) a un écart-type $\sigma(\theta_m) = 0.387$. En éliminant toutes les microsurfaces ayant un écart-type $\sigma(\theta_m)$ supérieur à 0.387, il est possible d'obtenir une légère amélioration du coefficient R^2 de la prédiction (figure 4.13).

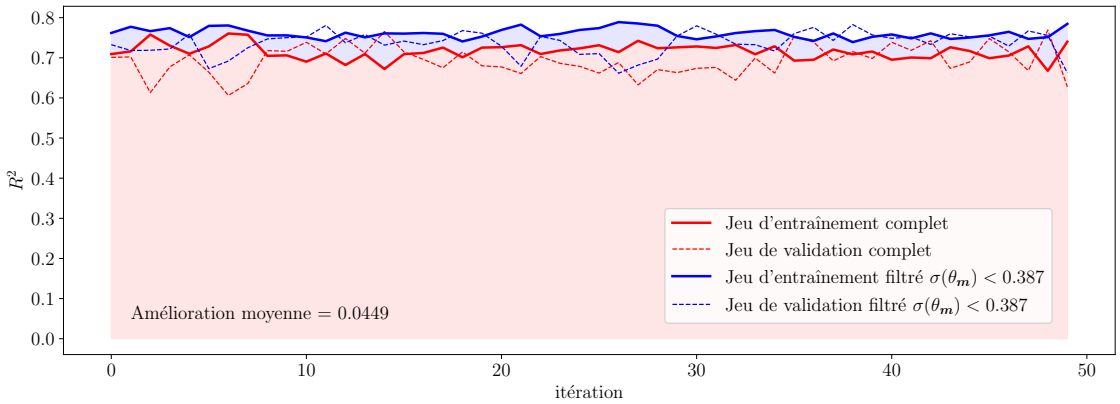


Figure 4.13 – R^2 pour 50 différentes régressions linéaires calculées sur différentes séparations en ensembles d'entraînement et de validation, avec exclusivement des microsurfaces respectant $\sigma(\theta_m) < 0.387$ (en bleu).

Cette procédure exclut certaines des microsurfaces dont l'erreur était prédite correctement (les croix ❌ proches de la diagonale sur la figure 4.14).

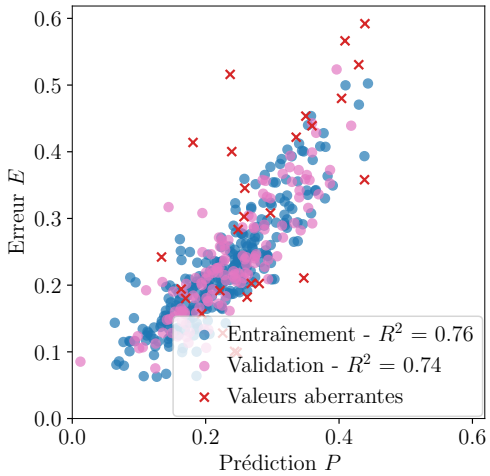


Figure 4.14 – Élimination des microsurfaces ayant $\sigma(\theta_m) \geq 0.387$.

Malheureusement, nous n'avons pas trouvé d'autres facteurs plus discriminants parmi les caractéristiques des microsurfaces (ou des combinaisons de caractéristiques). Notre étude ne met en avant aucun trait clair commun aux microsurfaces dont la prédiction P est très éloignée de l'erreur réelle E. Il s'agirait d'un complément intéressant à débloquer, pour éliminer en amont seulement les rares microsurfaces pour lesquelles la prédiction ne fonctionne pas. Cela permettrait d'assurer que la prédiction d'un maillage donné est correctement calculée

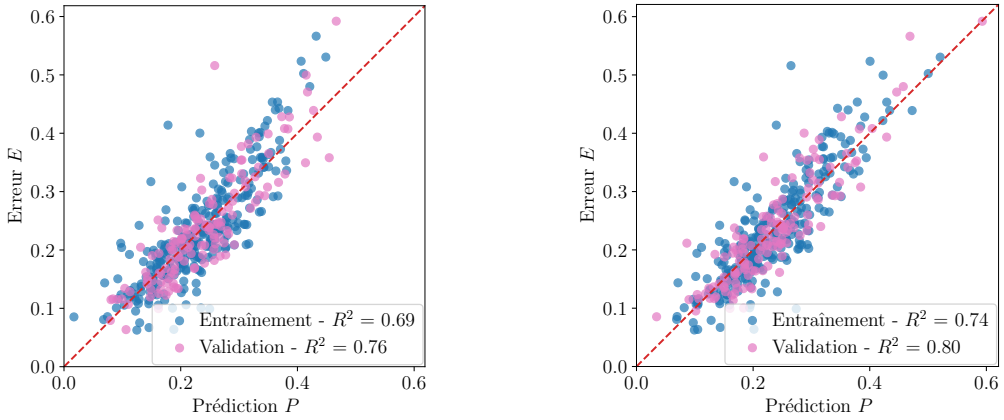
avec les caractéristiques fournies par le tableau 4.3 et qu'il ne s'agit pas d'une prédiction aberrante, dont la probabilité est faible mais existe tout de même.

B. Pour toutes les microsurfaces

La prédiction P (équation 4.2.7) correspond à une régression linéaire trouvée à partir de 423 données mesurées provenant de différentes sources et calculée sur cinq caractéristiques optimales (figure 4.15). Il est possible de refaire le même processus à partir de plus de caractéristiques pour obtenir un meilleur coefficient R^2 en augmentant le nombre de facteurs de la régression (améliorant le coefficient de détermination à $R^2 = 0.76$ au lieu de $R^2 = 0.71$).

Il est également possible de calculer la régression linéaire séparément à partir des 334 données de *PerTex* (figure 4.16) ou des 85 données de *ambientCG* (figure 4.17) pour diminuer la variance dans l'acquisition des données, ou encore en y ajoutant les quelques microsurfaces générées à partir de distributions pour au contraire englober encore plus de données différentes (figure 4.18).

Toutes ces configurations possibles et les régressions linéaires associées sont détaillées dans l'annexe A. Dans les graphes qui suivent, nous présentons les résultats de chaque prédiction comparée à l'erreur des microsurfaces.

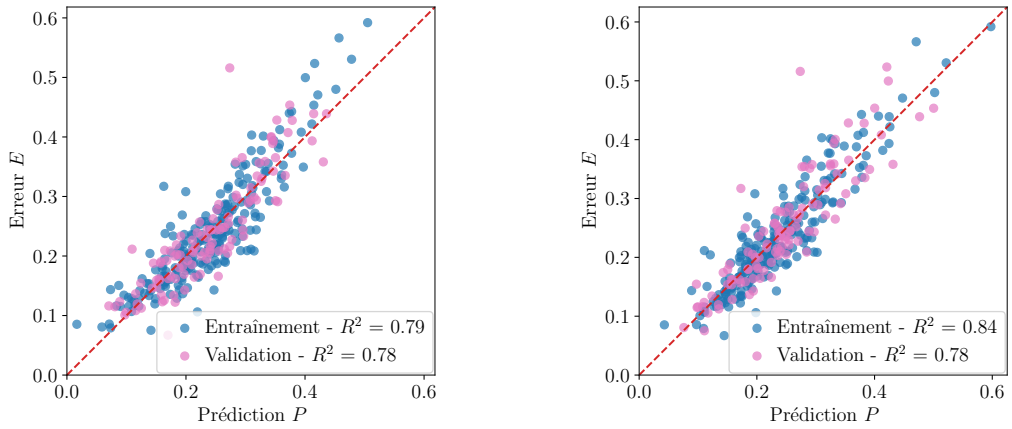


(a) 5 caractéristiques **(b)** 25 caractéristiques

Figure 4.15 – Régressions linéaires sur 423 microsurfaces mesurées. La prédiction P approche bien l'erreur E sauf pour quelques valeurs aberrantes. La régression faite sur 25 caractéristiques (b) est plus précise que celle faite sur 5 (a).

L'utilisation des 25 caractéristiques (figure 4.15b) pour calculer la prédiction P permet de trouver une meilleure régression linéaire dont le coefficient R^2 est légèrement amélioré. Cela permet de réaliser une prédiction plus efficace mais plus lente puisque 20 caractéristiques

supplémentaires doivent être calculées à partir du maillage. Les cinq caractéristiques les plus significatives sont calculées en 20 secondes en un seul parcours des microfacettes. L'ajout de 20 caractéristiques dans le même parcours augment le temps de calcul à 80 secondes, soit quatre fois plus lent. Cela reste tout de même bien inférieur à la mesure de l'erreur exacte par tracer de rayons (15 minutes).



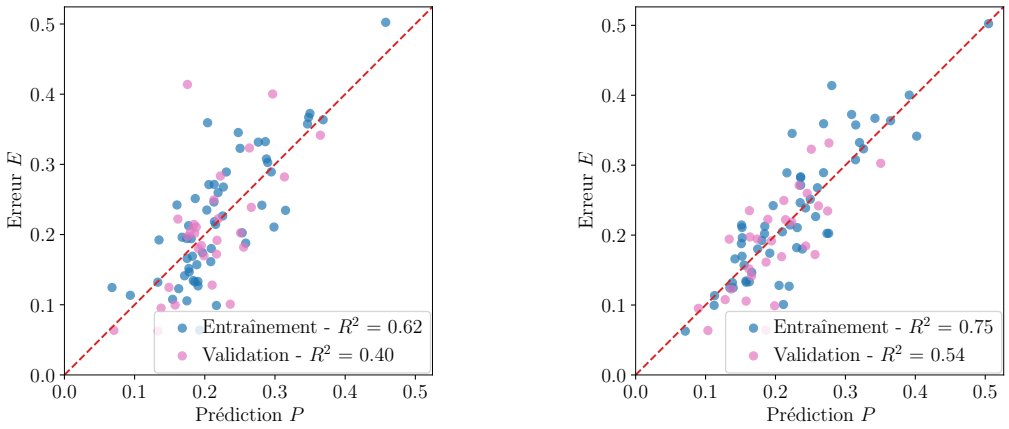
(a) 5 caractéristiques **(b)** 25 caractéristiques

Figure 4.16 – Régressions linéaires sur 334 microsurfaces mesurées issues de *PerTex*. Les régressions linéaires sont plus précises que lorsqu'elles sont entraînées sur des données plus variées (figure 4.15).

Lorsque seule la base de données de *PerTex* est utilisée (figure 4.16), le processus de mesure des matériaux réels est normalisé pour toutes les microsurfaces. La variance des caractéristiques est donc diminuée. La régression linéaire trouvée par la méthode des Moindres Carrés Ordinaire est réalisée sur des données moins bruitées et donne de meilleurs résultats. Cependant, il y a un sur-apprentissage du modèle qui ne se généralise pas efficacement à des données obtenues grâce à d'autres procédés d'acquisition.

À l'inverse de *PerTex*, les microsurfaces de *ambientCG* (figure 4.17) produisent des caractéristiques à fortes variances. De plus, les données sont bien moins nombreuses (85 contre 334 pour *PerTex*). Le modèle de régression linéaire est donc entraîné sur un faible nombre de données, environ 60, très bruitées. Les données de validation sont tout autant variées et ne s'adaptent pas très bien au modèle sous-appris. La différence entre les coefficients R^2 entre le jeu d'entraînement et celui de validation est assez considérable, même pour une régression linéaire calculée sur l'ensemble des 25 caractéristiques.

Ce modèle entraîné seulement sur la base de données de *ambientCG* a cependant un avantage. Il n'est pas biaisé par les microsurfaces de *PerTex* représentant près de 80% des données mesurées et ses données d'entraînement présentent beaucoup de bruit. Il est donc moins



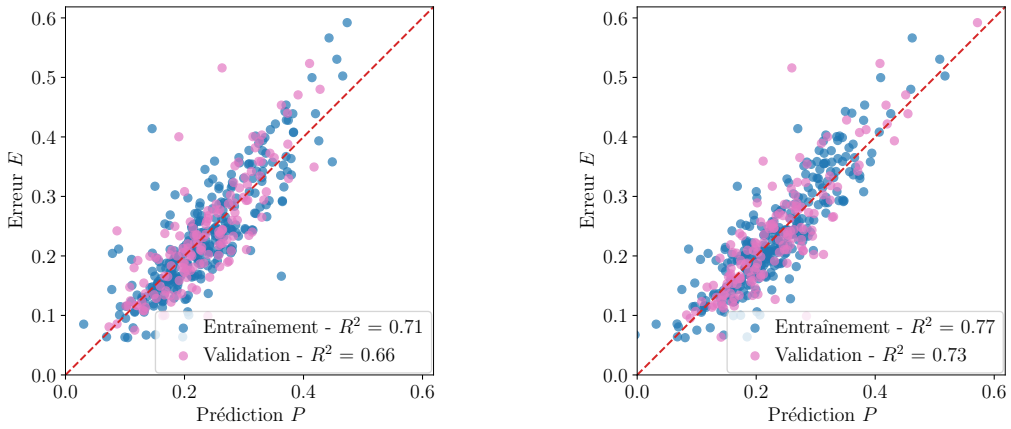
(a) 5 caractéristiques **(b)** 25 caractéristiques

Figure 4.17 – Régressions linéaires sur 85 microsurfaces mesurées issues de *ambientCG*. L'entraînement est effectué sur trop peu de données mais elles contiennent beaucoup de variance permettant de proposer un modèle plus général.

précis, mais il est également plus général. De plus, les cartes de hauteurs issues de *ambientCG* font parties des ressources types auxquelles des artistes graphiques peuvent avoir accès, ce qui rend ce modèle intéressant pour un usage individuel.

Ce modèle pourrait être amélioré et rendu plus fiable en ajoutant de nouvelles données pour enrichir l'entraînement de la régression linéaire. Un tel ajout devrait être fait avec des données tout aussi variées que celles fournies par *ambientCG* pour garder la généralisation du modèle. Une possibilité serait de générer des textures procédurales en utilisant des méthodes existantes qui sont aujourd'hui extrêmement nombreuses. Nous renvoyons le lecteur vers des synthèses réalisées sur le sujet au cours des vingt dernières années [**DG01**, **LLC+10**, **DLY+20**, **GAM+21**].

Nous proposons deux derniers modèles de prédiction entraînés sur des données auxquelles sont ajoutées huit microsurfaces générées à partir des distributions des micronormales (figure 4.18). La différence est assez faible par rapport aux modèles créés seulement grâce aux microsurfaces mesurées, puisque l'ajout correspond à moins de 2% des données. C'est un modèle très légèrement plus général mais également moins fiable, les prédictions des erreurs pour les microsurfaces générées par distribution ne sont pas précises. Pour de telles microsurfaces, il est plus intéressant de réaliser une étude spécifique ne se basant pas sur une régression linéaire sur 25 caractéristiques. Leur cas particulier est étudié dans la section suivante.



(a) 5 caractéristiques **(b)** 25 caractéristiques

Figure 4.18 – Régressions linéaires sur 431 microsurfaces mesurées et générées. Cela correspond à l'entièreté de nos données, mais la qualité des régressions linéaires est très semblable à celles pour les microsurfaces seulement mesurées (figure 4.15).

C. Pour les microsurfaces générées à partir de distributions

Les maillages générés à partir des distributions de Beckmann et GGX ne proviennent pas de mesures du monde réel. Ils sont créés à partir d'un processus itératif [**RBSM19**] qui réduit les motifs géométriques et la corrélation entre les orientations et les hauteurs des microfacettes ($\rho(\theta_{\boldsymbol{k}}, z_f) \approx 0$). Puisqu'ils représentent seulement 1-2% de notre jeu de données complet, ils auraient très peu d'impact sur le calcul du coefficient de détermination R^2 mais les y inclure reste possible.

Cependant, une analyse plus spécifiquement centrée sur ces maillages permet d'observer que l'erreur E de ces microsurfaces est fortement corrélée à deux caractéristiques suffisantes pour donner un modèle prédictif pour chacune des familles de distributions :

$$P_{\text{Beckmann}} = 0.594\,\mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.265\,\text{IQR}(z_f). \tag{4.2.8}$$

$$P_{\text{GGX}} = 0.345\,\mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.133\,\text{IQR}(z_f) - 0.046. \tag{4.2.9}$$

Chaque microsurface générée dépend d'un unique paramètre de rugosité α. En comparant ce paramètre à l'erreur E de chaque microsurface, nous observons que les erreurs semblent suivre une fonction monotone croissante de α (une par distribution). En testant plusieurs configurations possibles, nous trouvons que la forme $a\tanh(b\,\alpha + c) + d$ donne les meilleurs résultats. Pour chaque distribution, l'erreur peut donc être prédite grâce au paramètre de

rugosité α, sans aucun calcul à partir du maillage :

$$P^{\alpha}_{\text{Beckmann}} = 0.327 \tanh(1.912\,\alpha - 0.052) + 0.017. \quad (4.2.10)$$

$$P^{\alpha}_{\text{GGX}} = 0.098 \tanh(3.483\,\alpha - 0.892) + 0.069. \quad (4.2.11)$$

La figure 4.19 montre la précision presque parfaite de ces prédictions spécifiques.

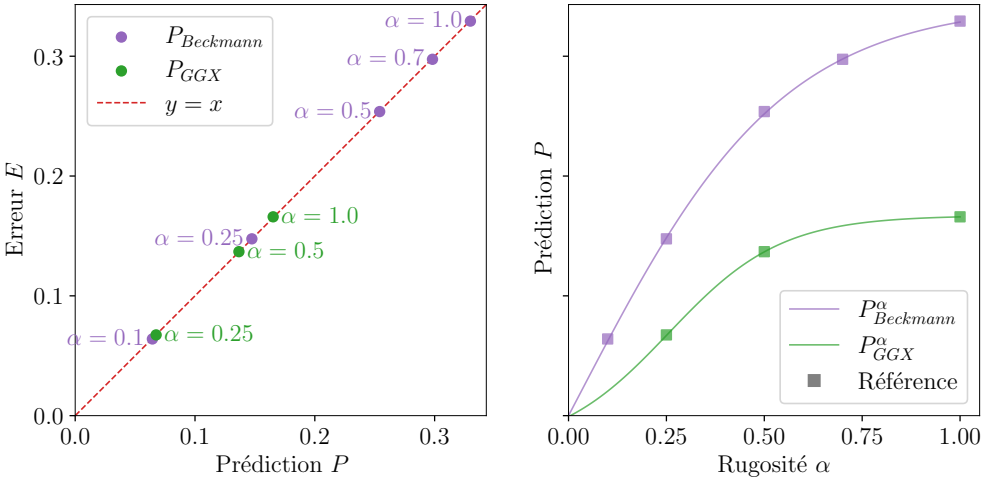


Figure 4.19 – Prédiction P pour des maillages générés à partir de distributions de Beckmann (violet) et GGX (vert). Le graphe de gauche compare l'erreur mesurée à celle prédite par la régression linéaire calculée à partir des caractéristiques $\mu(\theta_{\boldsymbol{m}})$ et $\text{IQR}(z_f)$. Le graphe de droite montre les prédictions calculées à partir du paramètre de rugosité α. L'ordonnée des carrés correspond à l'erreur E mesurée sur les maillages générés. Ils tombent vraiment proche de la courbe de prédiction.

Les prédictions plus précises pour les distributions de Beckmann ou GGX permettent de rapidement estimer l'erreur pour des maillages générés à partir de telles distributions. Ainsi, il est par exemple possible d'estimer la différence du terme de masquage entre différents niveaux d'échelle dans un contexte de rendu multi-échelle.

Ribardière et al. [**RBSM19**], dont nous utilisons la méthode de génération de microsurfaces, proposent d'ajouter des motifs au maillage généré tout en respectant la distribution D donnée en entrée. Il serait intéressant de pousser l'étude à des microgéométries respectant des distributions aléatoires tout en présentant une structure organisée des microfacettes.

Ces deux modèles spécifiques aux distributions de Beckmann et GGX complètent un ensemble de modèles prédictifs permettant d'estimer l'erreur du masquage théorique G_1 pour une microsurface donnée. Au sein du processus complet de calcul d'une image, le terme de masquage n'est qu'une petite partie du calcul complet de la BRDF. Son erreur n'est donc pas toujours visible à l'oeil nu dans le rendu final d'une scène. Nous étendons notre étude à l'erreur E propagée jusqu'à la création de l'image finale.

4.2.3. Prédiction de l'erreur sur le calcul d'images

Afin d'observer l'impact de l'erreur du terme de masquage théorique G_1 sur un rendu final, nous utilisons la représentation tabulée de G_1 dans l'équation 2.2.4 de la BRDF des microfacettes. Le facteur de masquage-ombrage G dépend des deux directions $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{o}$ et il est plus simple de considérer que le masquage et l'ombrage sont décorrélés. G est ainsi calculé avec sa forme donnée par l'équation 2.3.7 :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{i})G_1(\boldsymbol{o}).$$

Des formules existent pour calculer G en prenant en compte la corrélation entre le masquage et l'ombrage, telle que celle donnée dans l'équation 2.3.8 :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \lambda(\varphi)G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h})G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) + (1 - \lambda(\varphi)) \min(G_1(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}), G_1(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h})).$$

Notre analyse est spécifiquement basée sur G_1 et son erreur. Le choix de G n'a pas d'importance et nous prenons la formulation la plus simple (masquage et ombrage décorrélés).

La figure 4.20 montre un exemple d'une différence obtenue entre deux images, en utilisant le terme de masquage théorique G_1 d'un côté et la référence mesurée G_1^{rc} de l'autre, pour une microsurface à l'erreur conséquente (374e plus grande erreur sur un total de 423). Elle représente un tissu dont les fils sont orientés sur deux axes orthogonaux définis par $\phi \in \{0, \pi/2\}$. L'erreur est plus forte pour des directions autour de $\phi = \pm\pi/2$ et avec un angle assez rasant. La différence apparaît clairement sur la silhouette de l'objet où la géométrie est presque perpendiculaire à la direction d'observation, par exemple sur le devant de la patte arrière du lapin. Pour la majorité des directions, le terme de masquage théorique G_1 sous-estime l'effet de masquage, c'est-à-dire que $G_1 > G_1^{rc}$, produisant un lapin plus lumineux.



(a) Hauteurs **(b)** $|G_1^{rc} - G_1 1|$ **(c)** Rendu (G_1^{rc}) **(d)** Rendu (G_1) **(e)** Différence

Figure 4.20 – Erreur et rendus pour la microsurface labelisée *295* dans la base de données *PerTex* représentée par sa carte de hauteurs (a) et pour laquelle $E = 0.35$ et $P = 0.32$. La différence absolue entre G_1 et G_1^{rc} (b) est représentée en 3D et présente une anisotropie évidente. Le rendu réalisé en utilisant le masquage de référence G_1^{rc} (c) est plus sombre que celui réalisé en utilisant le masquage théorique G_1 (d). La différence de luminance entre les deux (e) est négative et dépendante de la configuration $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o})$.

Lorsque l'erreur est faible, la différence n'est pas (ou presque pas) visible dans les images générées. Cependant, avec des erreurs plus importantes, la différence est clairement perceptible. La figure 4.21 montre quatre exemples avec des microsurfaces et des erreurs E différentes. Pour chaque microsurface, trois scènes ont été rendues avec trois cartes d'environnement différentes, pour G_1^{rc} et G_1, afin de prendre en compte plus de configurations d'éclairement ($\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{o}$). Pour chaque carte d'environnement, la RMSE entre les deux images rendues est calculée. Enfin, la RMSE moyenne finale est calculée à partir des trois rendus. C'est la valeur de cette RMSE moyenne qui est considérée dans le reste de l'étude comme erreur des rendus. Elle est notée E^r.

Les images sont générées avec Mitsuba 0.6 [**Jak10**], avec seulement un calcul d'éclairement provenant des cartes d'environnement. Les images ont une résolution de 512×512 pixels et sont échantillonnées avec 512 rayons par pixel. Pour chaque intersection avec la microsurface, la carte d'environnement est échantillonnée dix fois.

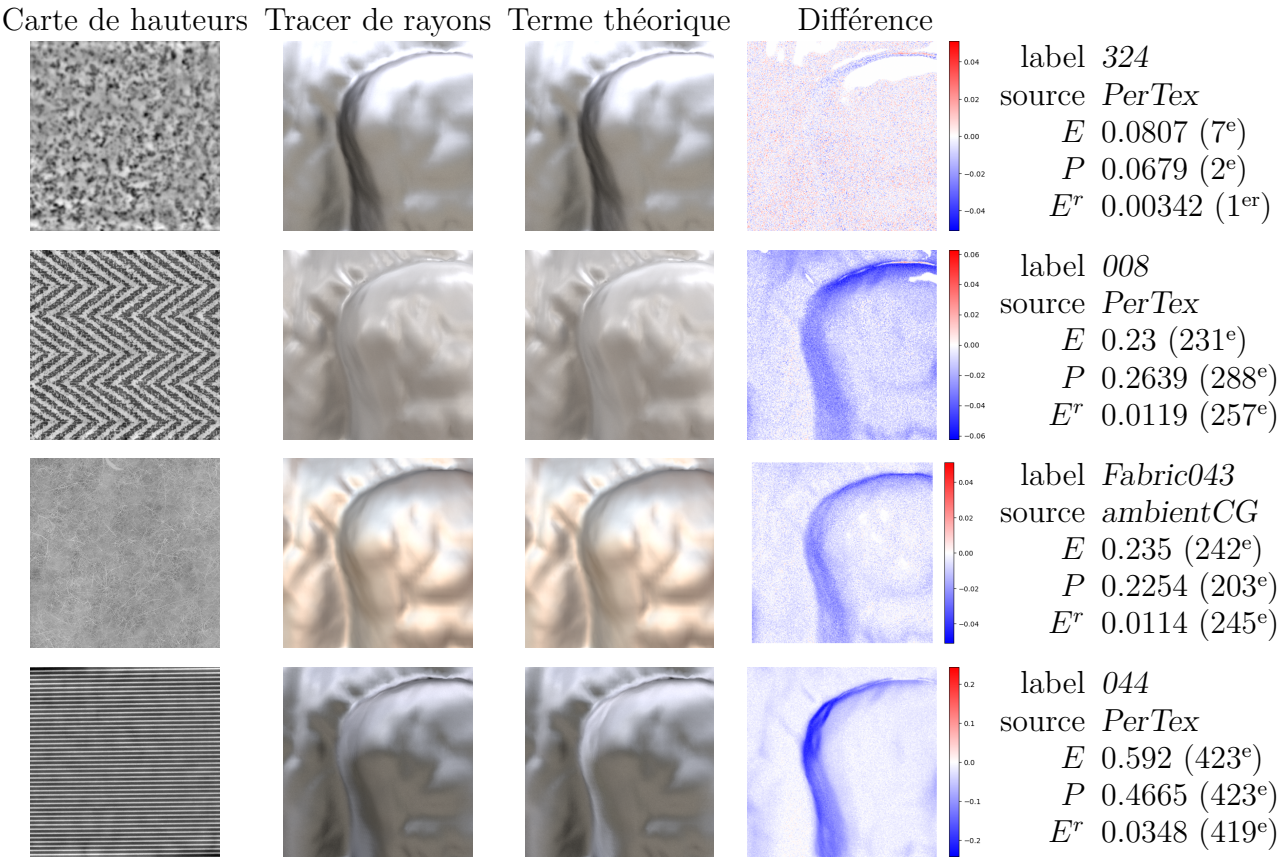


Figure 4.21 – Résultats pour quatre microsurfaces différentes. Chaque rangée contient les données d'une microsurface. De gauche à droite : la carte de hauteurs, un rendu de référence réalisé avec G_1^{rc}, la même scène rendue avec G_1, la différence entre les deux, et les valeurs numériques associées (l'erreur E de G_1, la prédiction P, l'erreur E^r des rendus) avec leur rang au sein des 423 microsurfaces.

Chaque microsurface présente des caractéristiques spécifiques dont l'influence se retrouve dans le calcul de la prédiction P. La rugosité d'une microsurface, son anisotropie ou encore sa corrélation entre hauteurs et orientations des microfacettes peuvent être à l'origine de la différence entre G_1^{rc} et G_1 (ces trois exemples ne sont pas exhaustifs).

La microsurface labélisée *324* dans la base de données *PerTex* (figure 4.21, première rangée) a une erreur $E = 0.0807$, une des erreurs les plus faibles parmi les 423 microsurfaces provenant de cartes de hauteurs mesurées. La microsurface est isotrope, avec une faible rugosité et pas de motif géométrique. La prédiction donne le résultat faible $P = 0.0679$, pour un résidu $\epsilon = 0.0129$. Avec cohérence, l'erreur des rendus E^r fait également partie des plus faibles.

La microsurface labélisée *008* (figure 4.21, deuxième rangée) a une erreur moyenne de $E = 0.23$. La microsurface est rugueuse et présente une structuration évidente des hauteurs en deux paliers principaux (les pixels sombres et clairs sur la carte de hauteurs). La différence entre les deux paliers n'est cependant pas extrêmement abrupte ; le changement se fait progressivement sur quelques microfacettes, réduisant ainsi l'erreur de la microsurface. La prédiction $P = 0.2639$ est assez correcte, avec un résidu de $\epsilon = 0.0339$. E^r reflète cette erreur.

La microsurface labélisée *Fabric043* dans la base de données *ambientCG* (figure 4.21, troisième rangée) a également une erreur moyenne de $E = 0.2349$. Cependant, son profil diffère de l'exemple précédent. Elle possède une rugosité plutôt homogène dans l'espace, et est donc isotrope. Mais elle présente de longues crêtes courbes (lignes claires sur la carte de hauteurs) positionnées un peu partout sur le plan tangent. Le modèle théorique ne peut pas prendre en compte correctement cette caractéristique géométrique, expliquant l'erreur non négligeable. La prédiction prend en compte cette difficulté et prévoit une erreur $P = 0.2254$, proche de l'erreur réelle avec un résidu $\epsilon = 0.0096$. La différence entre les rendus montre bien une erreur assez uniformisée et non pas portée majoritairement par une direction.

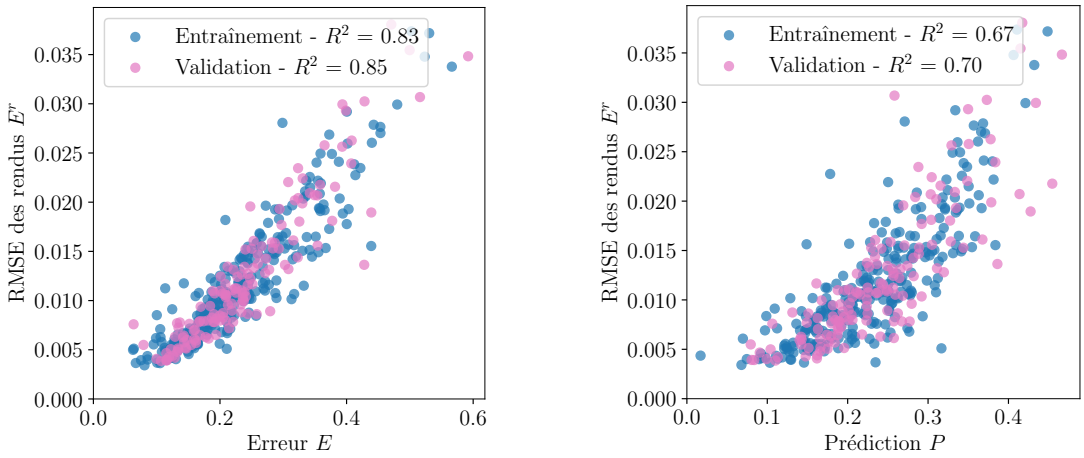
La microsurface labélisée *044* (figure 4.21, troisième rangée) a la plus forte erreur parmi les 423 microsurfaces mesurées. Elle est très fortement anisotrope avec deux paliers de hauteurs de microfacettes clairement séparés. La prédiction trouvée, bien qu'elle ne soit pas la meilleure et qu'elle sous-estime l'erreur (avec un résidu $\epsilon = 0.1256$), est tout de même la plus forte prédiction parmi les 423. La RMSE E^r entre les rendus est également assez forte, et la différence rend bien visible l'anisotropie de cette erreur.

Pour chaque microsurface, la RMSE moyenne E^r (à partir des trois scènes rendues avec chacune une carte d'environnement différente) est comparée à l'erreur E dans la figure 4.22a et à la prédiction P dans la figure 4.22b. Le premier graphe montre comme attendu qu'une

erreur E du G_1 théorique plus importante implique un rendu plus erroné, moins proche de la référence avec G_1^{rc}. L'observation est similaire avec la valeur de prédiction P bien que légèrement moins précise.

En réalisant le même procédé que pour trouver la régression linéaire optimale pour P, nous pouvons essayer d'approcher la RMSE entre les rendus directement avec la prédiction P^r :

$$\begin{aligned} E^r \approx P^r = &+ 0.0898 * \mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0677 * Q_3(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0446 * \mathrm{IQR}(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\ &- 0.044 * \sigma(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0132 * \rho(\theta_{\boldsymbol{m}}, z_f) + 0.0035. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$



(a) RMSE E^r comparée à l'erreur E **(b)** RMSE E^r comparée à la prédiction P

Figure 4.22 – RMSE moyenne E^r entre trois images aux cartes d'environnement différentes et leurs références, comparée à l'erreur E (gauche) et la prédiction P (droite).

Le tableau 4.5 de prédiction correspondant est donné ci-dessous. L'intervalle $P^r \in [0.03, 0.04]$ ne contient que deux données et il est donc difficile d'en tirer des déductions fiables. Mais pour les autres intervalles ($P^r < 0.3$), nous pouvons observer que la prédiction est efficace.

— L'intervalle $[P^r_{\min}, P^r_{\max}]$ est centré correctement autour de la RMSE recherchée. E^r_μ et $E^r_{Q_2}$ sont également dans l'intervalle.

— Plus de 50% des données sont contenues dans le bon intervalle d'erreur :

$$\begin{aligned} E^r_{Q_1} &\geq P^r_{\min}, \\ E^r_{Q_3} &\leq P^r_{\max}, \\ E^r_{Q_3} - E^r_{Q_1} &\leq P^r_{\max} - P^r_{\min} = 0.001. \end{aligned}$$

— La variance et l'erreur quadratique moyenne restent faibles, bien qu'avec une légère croissance à mesure que la prédiction augmente.

Tableau 4.5 – Tableau de prédiction de E^r.

P^r	min-max # surfaces	0.00-0.01 164	0.01-0.02 213	0.02-0.03 43	0.03-0.04 2
E^r	moyenne μ	0.007	0.013	0.025	0.026
	variance	1e-05	2e-05	4e-05	2e-05
	min	0.003	0.004	0.014	0.022
	Q_1	0.005	0.01	0.02	0.024
	Q_2	0.007	0.012	0.024	0.026
	Q_3	0.008	0.015	0.028	0.028
	max	0.016	0.037	0.038	0.03
	$Q_3 - Q_1$	0.003	0.005	0.007	0.004
	étendue	0.012	0.034	0.024	0.008
	MSE	0.0	1e-05	2e-05	5e-05

La figure 4.23 compare la prédiction P^r à la valeur de référence E^r. Les données sont rassemblées autour de la diagonale $P^r = E^r$ avec une répartition stable au-dessus ou en-dessous de celle-ci (lorsque la prédiction sous-estime ou sur-estime l'erreur), mise à part quelques valeurs aberrantes qui correspondent aux mêmes valeurs aberrantes que pour la prédiction P (figure 4.8) ; la discussion sur ces valeurs est donc la même que celle présentée pour P. Les boîtes à moustaches montrent bien que plus de 50% des données sont réparties autour de cette diagonale (la dernière boîte à moustaches de l'intervalle $P^r \in [0.03, 0.04]$ est calculée sur deux données seulement donc n'est pas représentative du comportement de la prédiction pour ces valeurs).

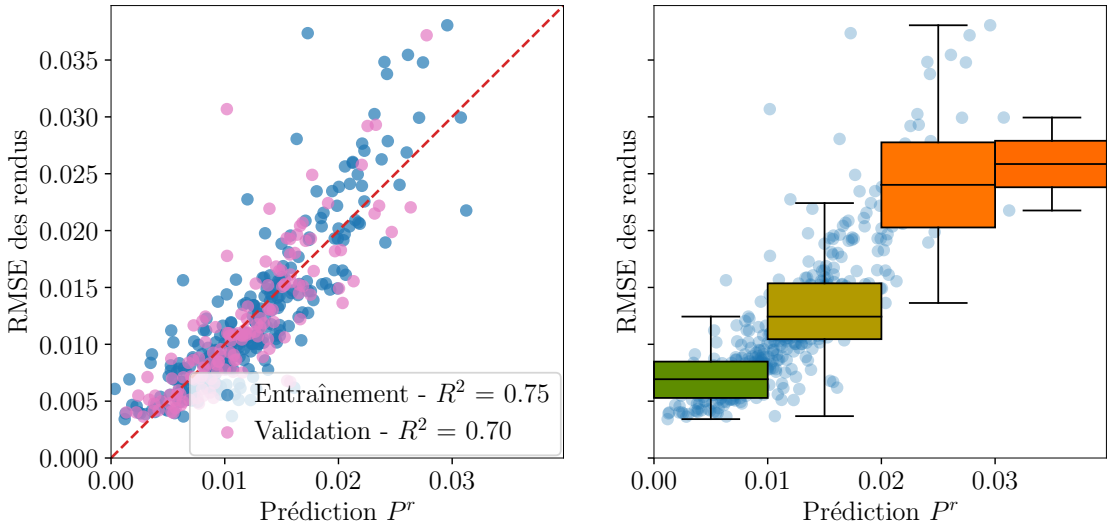


Figure 4.23 – Comparaison entre notre modèle prédictif P^r (équation 4.2.12) et la RMSE E^r entre les rendus.

Les résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$ associés sont répartis selon les quantiles présentés dans le tableau 4.6 et leur histogramme dans la figure 4.24. On estime qu'une prédiction est acceptable quand son résidu est inférieur à 0.007. Ce seuil permet d'éliminer les valeurs aberrantes ($\epsilon^r \geq 0.009$) tout en gardant l'ensemble des données réparties équitablement autour de la diagonale $E^r = P^r$ (environ 95% des données).

Tableau 4.6 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	25%	50%	75%	90%	95%	96%	97%	0.98%	0.99%
Valeur ϵ^r	0.0008	0.0017	0.0032	0.0051	0.0069	0.0072	0.0086	0.0094	0.0106

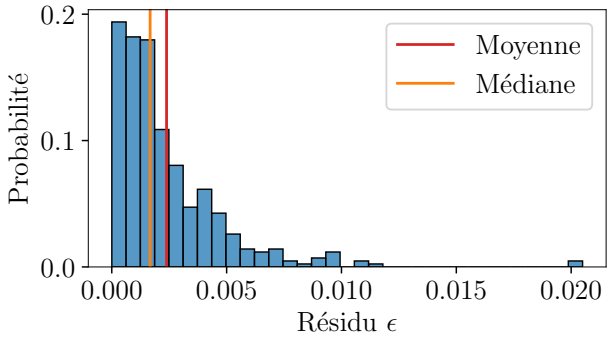


Figure 4.24 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$ pour 423 microsurfaces mesurées.

De même que pour la prédiction de l'erreur E, la prédiction de la RMSE E^r des rendus peut être calculée à partir de plus de caractéristiques ou de bases de données plus spécifiques. Les détails sont donnés en annexe A.

4.3. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous proposons de caractériser une microsurface par plusieurs valeurs numériques à partir de la microgéométrie correspondante. Nous avons choisi et identifié 25 caractéristiques basées sur les statistiques contraintes par le modèle de Smith et Ashikhmin et al. : les orientations des micronormales $\theta_{\boldsymbol{m}}$ et $\phi_{\boldsymbol{m}}$, les aires des microfacettes $\mathcal{A}_f$ et leurs hauteurs z_f. En étudiant ces caractéristiques pour plus de 400 microsurfaces différentes, nous mettons en avant une corrélation entre celles-ci et l'erreur E du masquage théorique G_1. En combinant ces caractéristiques dans une régression linéaire, nous proposons un modèle prédictif pour approcher l'erreur $P \approx E$ sans avoir besoin de réaliser une mesure par tracer de rayons. Nous étendons ensuite la réflexion à l'erreur E^r produite au niveau du rendu d'une image pour estimer l'impact de cette erreur sur le calcul final d'une image. Par la même méthodologie, nous proposons un nouveau modèle prédictif pour approcher l'erreur d'un rendu $P^r \approx E^r$.

Dans le chapitre suivant, nous étudions la différence entre le masquage théorique G_1 et celui de référence G_1^{rc} pour les microsurfaces isotropes. Cette analyse nous permet de proposer un facteur correctif au modèle de Smith et Ashikhmin et al. pour ces microsurfaces.

Chapitre 5

Facteur correctif pour les microsurfaces isotropes

Prédire l'erreur du terme de masquage théorique de Smith [**Smi67**] et Ashikhmin et al. [**APS00**] ne permet pas de la corriger, seulement de l'anticiper et de s'y adapter. Dans ce chapitre, nous proposons un facteur correctif permettant de réduire considérablement l'erreur pour les microsurfaces isotropes.

Afin de proposer un facteur correctif du modèle théorique G_1 le plus efficace possible, nous restreignons notre cas d'étude à une famille de microsurfaces partageant une anisotropie faible. Une fois les microsurfaces identifiées, pour chacune d'entre elles, nous analysons dans un premier temps la différence d^{rc} calculée à partir du masquage de référence G_1^{rc} mesuré par tracer de rayons et le masquage théorique G_1

$$d^{rc}(\boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{o}) - G_1^{rc}(\boldsymbol{o}). \tag{5.0.1}$$

Dans un second temps, nous utilisons cette analyse pour proposer une correction au modèle approchant cette différence $\widehat{d} \approx d^{rc}$ et calculable seulement à partir des caractéristiques d'un maillage.

$$G_1^{rc}(\boldsymbol{o}) \approx G_1(\boldsymbol{o}) - \widehat{d}(\boldsymbol{o}). \tag{5.0.2}$$

5.1. Définition de la famille : microsurfaces isotropes

Toutes les caractéristiques vues dans le chapitre 4 pour décrire les propriétés d'une microsurface sont représentées par une unique valeur numérique. Elles sont indépendantes de toute direction d'observation et se contentent de décrire la microsurface dans son espace sans prendre en compte une orientation particulière. Peu importe la direction $\boldsymbol{o}$ pour laquelle la

différence $\widehat{d}(\boldsymbol{o})$ doit être calculée, les valeurs de ces caractéristiques pour une microsurface restent constantes et ne permettent pas, à elles seules, d'obtenir une variation anisotrope de $\widehat{d}(\boldsymbol{o})$. Il faudrait pour cela considérer des caractéristiques orientées, par exemple en pondérant chaque microfacette par son aire projetée sur $\boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{o}$) dans le calcul des statistiques liées aux angles $\theta_{\boldsymbol{m}}$ ou aux hauteurs z_f. Cela demande de calculer chacune d'entre elles pour un nombre suffisant de directions $\boldsymbol{o} = (\theta_{\boldsymbol{o}}, \phi_{\boldsymbol{o}})$ et de les interpoler pour les dimensions manquantes.

Notre choix d'étude se restreint pour le moment aux microsurfaces isotropes. Les microsurfaces anisotropes sont laissées pour des travaux futurs. Ainsi, la fonction recherchée $\widehat{d}(\boldsymbol{o})$ est réduite à une seule dimension $\widehat{d}(\theta_{\boldsymbol{o}})$. En fixant la valeur d'anisotropie r (équation 4.1.2) à un maximum de 0.112, nous gardons environ 20% des microsurfaces dans notre analyse, soit 81. Au-delà de ce seuil, l'anisotropie commence à devenir trop forte pour considérer que $\widehat{d}$ puisse être réduite à une seule dimension tout en restant une bonne approximation de d^{rc} sur l'ensemble des directions Ω_+. Quelques exemples de microsurfaces respectant cette isotropie sont présentées dans la figure 5.1.

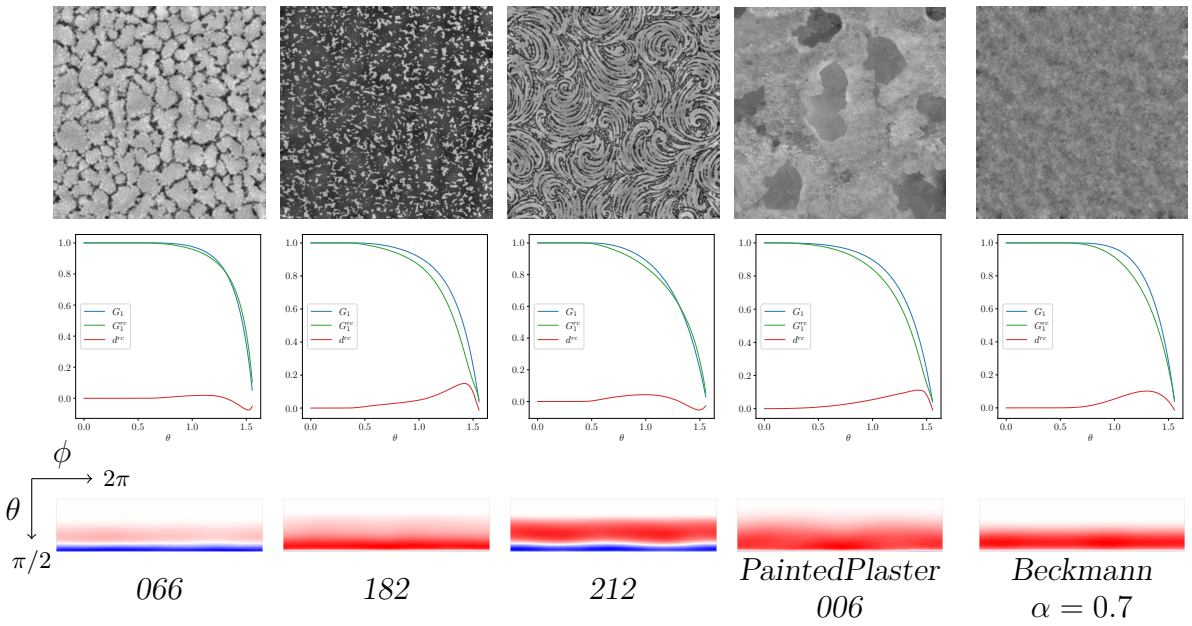


Figure 5.1 – Exemples de microsurfaces isotropes ($r < 0.112$). La première rangée illustre les cartes de hauteurs de chaque microsurface. La deuxième rangée présente la différence $d^{rc}((\theta_{\boldsymbol{o}}, 0))$ pour ϕ fixé à 0. Les graphes de la troisième rangée présentent $d^{rc}(\boldsymbol{o})$ en rouge (positif) et bleu (négatif), où ϕ est en abscisse et θ en ordonnée (orientée de haut en bas, de 0 à $\pi/2$).

La première microsurface de la figure 5.1 (*066*) possède un profil plutôt en failles, où la majorité de la microgéométrie se situe autour d'une même hauteur et quelques microfacettes

se trouvent bien en-dessous, créant ces failles. La deuxième (*182*) a à l'inverse un profil en crêtes, la majorité des microfacettes étant dans les hauteurs faibles mais certaines sont plus élevées. Son erreur est bien plus grande que celle de la microsurface *066*. La troisième (*212*) présente des motifs géométriques qui se répètent. La quatrième (*PaintedPlaster006*) possède deux profils isotropes séparés dans des zones distinctes. La cinquième (*Beckmann*) est générée à partir d'une distribution de Beckmann, son erreur est dépendante de sa rugosité α.

5.2. Approcher d avec une fonction paramétrable

Pour ϕ fixé, la fonction $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ définie sur $[0, \pi/2]$ peut être découpée en trois intervalles, bornés aux valeurs $0 = a_0, a_1, a_2, a_3 = \pi/2$ sur lesquels son comportement varie (figure 5.2).

- Pour $\theta_{\boldsymbol{o}} \in [0, a_1[$, la direction $\boldsymbol{o}$ est assez proche de la normale $\boldsymbol{g}$. Le terme de masquage théorique G_1 et la mesure de référence G_1^{rc} valent tous les deux 1. $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ est nul.
- Pour $\theta_{\boldsymbol{o}} \in [a_1, a_2[$, G_1 surestime la mesure G_1^{rc}. $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ est positif. La variation est monotone croissante jusqu'à l'erreur maximale, puis monotone décroissante jusqu'à 0. L'intervalle est généralement assez grand, de 40° à 70°.
- Pour $\theta_{\boldsymbol{o}} \in [a_2, \pi/2[$ (angles rasants), G_1 sous-estime la mesure G_1^{rc}. $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ est négatif. La variation est monotone décroissante puis monotone croissante jusqu'à 0. L'intervalle est généralement assez étroit, moins de 15°, voire même inexistant dans certains cas non majoritaires ($a_2 = \pi/2$).
- À $\theta_{\boldsymbol{o}} = \pi/2$, les deux termes valent chacun 0. $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ est nul.

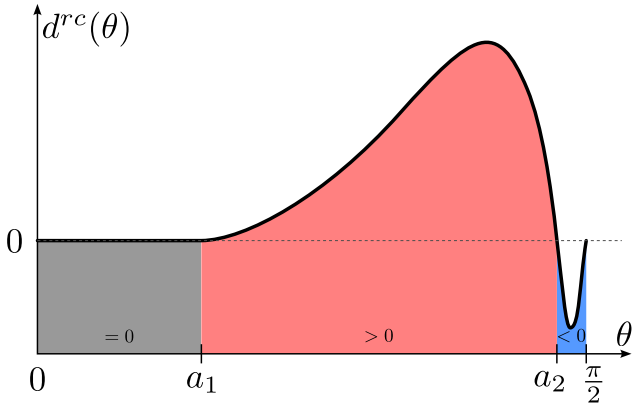


Figure 5.2 – Représentation de la forme usuelle de $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$.

Sur les 81 microsurfaces isotropes sélectionnées, seulement trois ne suivent pas ce schéma. L'une génère une différence d^{rc} dont l'intervalle positif est après l'intervalle négatif ($a_1 > a_2$). Le schéma s'adapte à un tel cas en échangeant les bornes. Nous considérerons le cas majoritaire $a_1 < a_2$ dans le reste du chapitre. Deux microsurfaces ont une différence d^{rc} non

monotone sur l'intervalle $[a_1, a_2[$, où la fonction croît une seconde fois sur un très court intervalle (de moins de 5°). Ce cas n'est en revanche pas modélisé par le schéma décrit mais reste un cas très minoritaire.

Les valeurs absolues des sous-fonctions définies sur les intervalles $[a_1, a_2[$ et $[a_2, \pi/2[$ ont presque toujours une forme qui s'apparente à une distribution mais dont les paramètres diffèrent d'une microsurface à l'autre. Leur moyenne et leur écart-type ne sont pas toujours les mêmes, ni leur asymétrie et leur kurtosis. Il existe plusieurs distributions continues pouvant être contrôlées avec plusieurs paramètres. Nous avons testé différentes distributions (Bêta, Gamma généralisée, Kappa à quatre paramètres, log-normale, etc.) et essayé pour chacune de trouver les paramètres optimaux pour une correspondance avec $d \approx d^{rc}$, en combinant des fonctions spécifiques à chacun des intervalles $[a_1, a_2[$ et $[a_2, \pi/2[$

$$d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}}) \approx d(\theta_{\boldsymbol{o}}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta_{\boldsymbol{o}} < a_1 \\ \varphi_+(\theta_{\boldsymbol{o}}) & \text{si} \quad \theta_{\boldsymbol{o}} \in [a_1, a_2[\\ -\varphi_-(\theta_{\boldsymbol{o}}) & \text{si} \quad \theta_{\boldsymbol{o}} \geq a_2 \end{cases} \tag{5.2.1}$$

où φ_+ et φ_- sont des fonctions positives définies sur leurs intervalles respectifs et construites à partir d'une distribution aux paramètres à définir. φ_+ représente la partie positive de l'erreur, φ_- sa partie négative.

Suite à différentes expérimentations, la distribution SB (*System Bounded*) de Johnson [**Joh49**] a été choisie comme la plus intéressante. Elle permet d'approcher efficacement la majorité des différences d^{rc}. Elle est d'autant plus intéressante qu'elle est définie sur un intervalle hors duquel sa PDF est nulle. Ainsi, la fonction d peut être calculée en sommant les deux distributions trouvées sans se soucier de leurs valeurs hors des bornes de leurs intervalles. La distribution SB de Johnson est définie avec quatre paramètres ψ, $\delta > 0$, ξ et $\lambda > 0$, permettant d'ajuster la moyenne, l'écart-type, le kurtosis et l'asymétrie (figure 5.3). ξ définit la borne minimum de la PDF, et λ l'étendue de l'intervalle sur lequel la PDF est définie (jusqu'à $\xi + \lambda$). $\xi + \lambda/2$ donne donc la valeur de "positionnement" de la PDF, au milieu. Les paramètres ψ et δ influent sur la forme de la distribution et permettent de fixer le kurtosis et l'asymétrie.

Sa PDF est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi(\theta|\vartheta) = &\frac{\delta}{x(1-x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\psi + \delta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)^2\right),\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

$$\text{avec } x = \frac{\theta - \xi}{\lambda}. \tag{5.2.3}$$

Elle est positive si $\xi < \theta < \xi + \lambda$, et nulle si θ est hors des bornes.

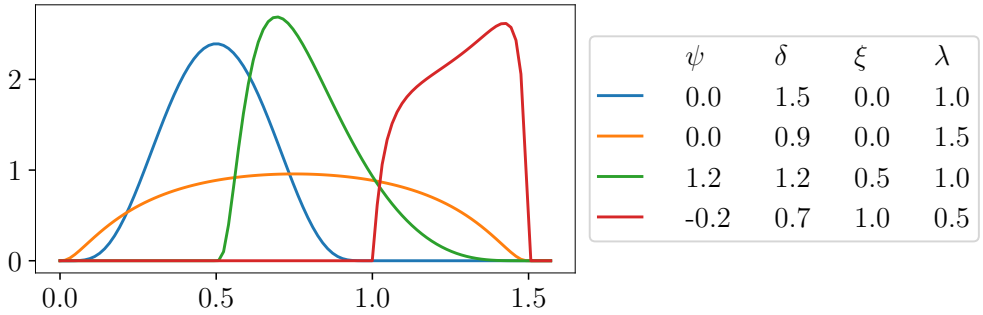


Figure 5.3 – Exemples de PDFs de la distribution SB de Johnson pour différentes valeurs de paramètres.

La PDF de la distribution SB de Johnson fournit des fonctions de formes qui semblent adaptées pour approcher $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$, mais l'échelle n'est pas correcte. En effet, $d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ n'est pas la PDF d'une distribution et son intégrale n'est soumise à aucune contrainte, alors que l'intégrale d'une PDF est égale à 1 (c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x|\psi, \delta, \xi, \lambda)dx = 1$). Nous ajoutons donc un cinquième paramètre s de mise à l'échelle de sorte que

$$\varphi_+(x) = s_+ \, \varphi(x|\psi_+, \delta_+, \xi_+, \lambda_+) \tag{5.2.4}$$

et

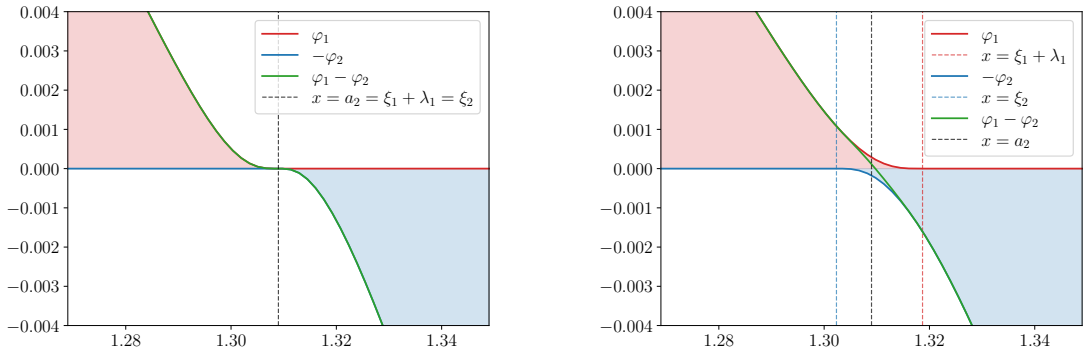
$$\varphi_-(x) = s_- \, \varphi(x|\psi_-, \delta_-, \xi_-, \lambda_-). \tag{5.2.5}$$

La différence d^{rc} peut être approchée en sommant $\varphi_+(x)$ et l'opposé de $\varphi_-(x)$.

$$\begin{aligned}d^{rc}(\theta_{\boldsymbol{o}}) \approx d(\theta_{\boldsymbol{o}}) &= \varphi_+(\theta_{\boldsymbol{o}}) - \varphi_-(\theta_{\boldsymbol{o}}) \\ &= s_+ \, \varphi(\theta_{\boldsymbol{o}}|\psi_+, \delta_+, \xi_+, \lambda_+) - s_- \, \varphi(\theta_{\boldsymbol{o}}|\psi_-, \delta_-, \xi_-, \lambda_-).\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Dans notre cas, $\xi_+ \approx a_1$, $\lambda_+ \approx a_2 - a_1$, $\xi_- \approx a_2$, $\lambda_- \approx \pi/2 - a_2$. La forme de la PDF de la distribution SB de Johnson tend à avoir des tangentes horizontales aux bornes de $[\xi, \xi + \lambda]$ hors desquelles elle vaut 0. De fait, si ces bornes sont fixées strictement à a_1 et a_2, la somme de φ_+ et $-\varphi_-$ génère un point d'inflexion non négligeable autour de a_2

(figure 5.4a). À l'inverse, si nous autorisons un léger dépassement autour des bornes et donc un chevauchement des intervalles $[\xi_+, \xi_+ + \lambda_+]$ et $[\xi_-, \xi_- + \lambda_-]$, la somme est plus lisse autour de a_2 (figure 5.4b). Le point d'inflexion n'est généralement pas complètement éliminé, mais il est grandement adouci.



(a) Bornes fixées avec a_2.

(b) Bornes flexibles autour de a_2.

Figure 5.4 – Combinaison de deux distributions SB de Johnson en fixant ou non leurs bornes respectives $\xi_+ + \lambda_+$ et ξ_- exactement à la valeur a_2. Le point d'inflexion de la combinaison des deux intervalles (courbe verte) est bien plus prononcé en fixant les bornes strictement (a), qu'en laissant les intervalles se chevaucher (b).

Pour chaque microsurface, les paramètres optimaux de chaque PDF composant d sont à déduire de la fonction d^{rc} elle-même. Elle est considérée comme une densité non normalisée afin de générer un ensemble de valeurs $T = (t_1, t_2, t_3, ...)$ dont il faut par la suite trouver la distribution. Pour une fonction d^{rc}, l'histogramme associé est construit avec l'algorithme 3. L'histogramme associé à la partie positive est créé à partir de d^{rc}, celui associé à la partie négative est créé à partir de l'opposé $-d^{rc}$.

Algorithme 3 Algorithme permettant de construire un ensemble de données respectant la densité définie par d^{rc}.

procedure CREATEHISTOGRAM($[\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n]$, d^{rc})
  $T \leftarrow [\,]$; ▷ Initialisation avec un tableau vide
  for $i \in [\![0, n]\!]$ **do** ▷ Pour chaque valeur de θ
    $count \leftarrow \max(0, \lfloor d^{rc}(\theta_i) * 1000 \rfloor)$; ▷ Calcul du nombre d'occurrences de θ_i
    for $j \in [\![0, count]\!]$ **do**
      T.push(θ_i) ; ▷ Ajout de θ_i autant de fois que nécessaire
    end for
  end for
  return T ;
end procedure

L'objectif est de trouver les paramètres $\vartheta_+ = (\psi_+, \delta_+, \xi_+, \lambda_+)$ dont la vraisemblance est maximisée, avec la PDF φ_+ comme PDF de l'ensemble des données T (et similairement pour φ_-).

La vraisemblance représente la plausibilité que ϑ soit le bon ensemble de paramètres pour T. Pour une donnée réalisée $t \in T$, la vraisemblance de l'ensemble de paramètres ϑ est notée $L(\vartheta\ ;\ t) = \varphi(t\ ;\ \psi, \delta, \xi, \lambda)$, c'est-à-dire la valeur de la PDF paramétrée par ϑ pour la valeur t. La vraisemblance de ϑ pour l'ensemble des données est le produit des vraisemblances pour chaque donnée :

$$L(\vartheta\ ;\ T) = \prod_{t_i \in T} L(\vartheta\ ;\ t_i) = \prod_{t_i \in T} \varphi(t_i\ ;\ \psi, \delta, \xi, \lambda). \tag{5.2.7}$$

$L(\vartheta\ ;\ T)$ doit être maximisée pour trouver les paramètres optimaux. Cela revient à minimiser l'opposé (le négatif) de la vraisemblance, c'est-à-dire à trouver un minimum local de cette fonction à quatre paramètres. Un tel minimum peut être trouvé grâce à un algorithme de descente de gradient, qui utilise la différentielle de L. Effectuer la descente de gradient pour une fonction consistant en un produit de nombreux termes est complexe. Pour supprimer cette difficulté, la minimisation est faite sur l'opposé du logarithme de la vraisemblance, appelé la log-vraisemblance. La fonction logarithme étant monotone croissante, minimiser la vraisemblance revient à minimiser la log-vraisemblance, leurs minima locaux correspondent aux mêmes paramètres. Le produit est ainsi transformé en somme :

$$\log(L(\vartheta\ ;\ T)) = \log\left(\prod_{t_i \in T} L(\vartheta\ ;\ t_i)\right) = \sum_{t_i \in T} \log(L(\vartheta\ ;\ t_i)), \tag{5.2.8}$$

dont le négatif doit être minimisé.

Ainsi, pour chaque microsurface nous trouvons quatre paramètres optimaux $(\psi_+, \delta_+, \xi_+, \lambda_+)$ de la distribution pour φ_+ (similairement pour φ_-). Les facteurs de mise à l'échelle s_+ et s_- sont ensuite calculés comme le ratio des extrema :

$$\begin{aligned} s_+ &= \frac{\max\{d^{rc}(\theta)\}}{\max\{\varphi(\theta|\psi_+, \delta_+, \xi_+, \lambda_+)\}} \\ s_- &= \frac{\min\{d^{rc}(\theta)\}}{\min\{-\varphi(\theta|\psi_-, \delta_-, \xi_-, \lambda_-)\}}. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Nous obtenons ainsi dix paramètres permettant d'approcher d^{rc} comme combinaison de deux PDFs de distribution SB de Johnson. La figure 5.5 montre une comparaison entre cette approximation et l'erreur de référence.

Quelques rares microsurfaces (cinq sur les 81) présentent une différence d^{rc} dont la forme ne permet pas de trouver un minimum local évident au problème d'optimisation des paramètres, même en guidant les paramètres initiaux grâce aux valeurs a_1 et a_2. Dans de tels cas, il est intéressant de fixer strictement $\xi_+ = a_1$, $\lambda_+ = a_2 - a_1$, $\xi_- = a_2$ et $\lambda_- = \pi/2 - a_2$. L'optimisation

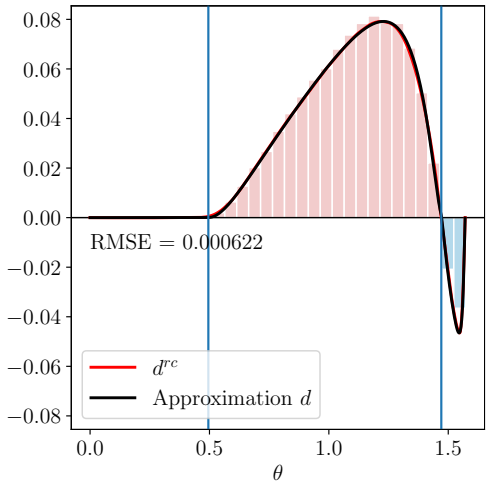
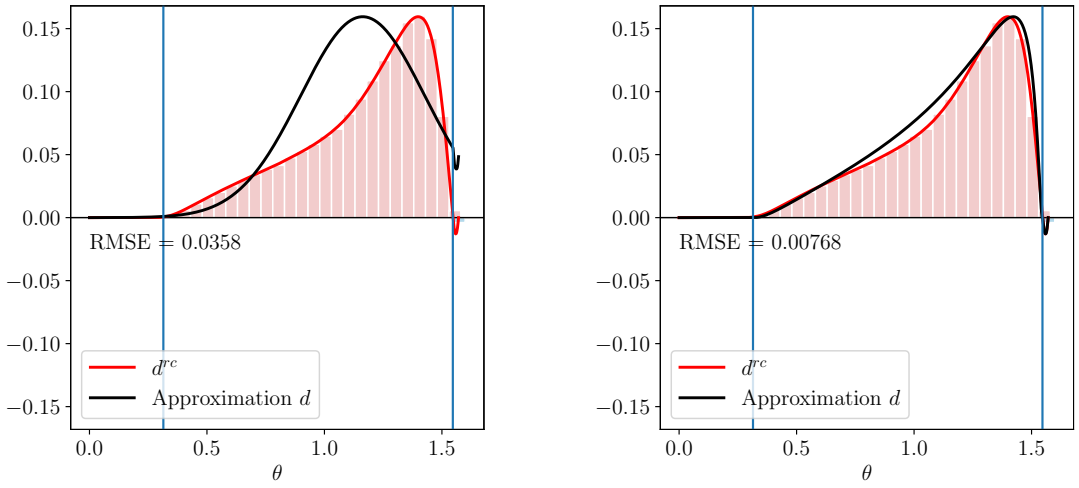


Figure 5.5 – Exemple d'une approximation de d^{rc} (courbe en rouge) avec la combinaison d de deux distributions SB de Johnson mises à l'échelle (courbe en noir).

ne se fait alors plus que sur deux paramètres pour chaque distribution. Avec cette contrainte additionnelle, les optimisations des d^{rc} problématiques convergent bien plus efficacement vers une solution idéale, comme le montre la figure 5.6. Détecter si les paramètres ξ_+, λ_+, ξ_- et λ_- doivent être contraints peut être automatisé en fixant une distance maximum ε_a entre les bornes des distributions (ξ et $\xi+\lambda$) et les valeurs a_1 et a_2. Par exemple, si $|a_1-\xi_+| > \varepsilon_a$ alors ξ_+ doit être fixé à la valeur a_1. De la même manière, il est possible de contraindre les bornes dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ pour assurer que l'approximation d vaille 0 aux extrémités.

En moyenne, la RMSE entre d^{rc} et d est de 2.53e-03 avec une variance de 2.44e-05. Les histogrammes de la figure 5.7 présentent la répartition des différentes RMSEs sur la totalité des microsurfaces isotropes sélectionnées. L'histogramme en bleu correspond à une optimisation mixte selon la forme de d^{rc} ; cinq microsurfaces requièrent une contrainte sur les paramètres ξ et λ tandis que 77 microsurfaces permettent d'utiliser une optimisation sur les quatre paramètres de la distribution SB de Johnson. L'histogramme en rouge correspond à une optimisation toujours strictement contrainte pour toutes les microsurfaces.

Avec le tracer de rayons, il est possible de calculer le terme de masquage de référence G_1^{rc} ; le processus est cependant coûteux. La différence entre le masquage de référence et le masquage théorique G_1 est approchable par une combinaison linéaire de deux distributions SB de Johnson. Dans la prochaine section, nous approchons cette différence grâce aux caractéristiques des microsurfaces afin de s'abstraire du tracer de rayons.



(a) Bornes flexibles, guidées avec a_1 et a_2.

(b) Bornes contraintes avec a_1 et a_2.

Figure 5.6 – Combinaison de deux distributions SB de Johnson sans fixer (a) et en fixant (b) leurs paramètres ξ et λ avec les valeurs de a_1 et a_2. En gardant quatre dimensions au problème d'optimisation (a), la solution trouvée d est très erronée. En contraignant deux paramètres (b) et réduisant le problème à l'optimisation des deux paramètres de forme (ψ et δ), la solution trouvée est bien meilleure.

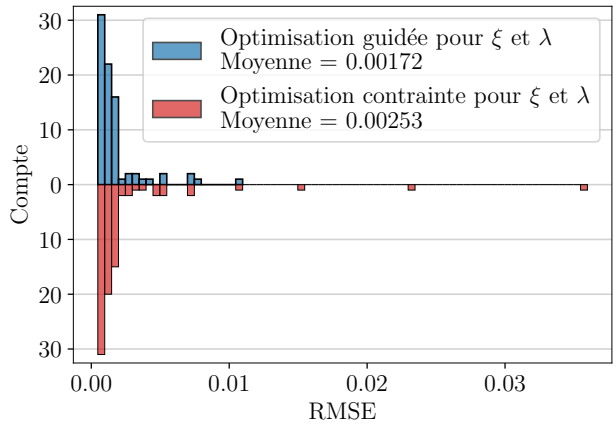


Figure 5.7 – Histogramme de la répartition des RMSEs entre d^{rc} et d.

5.3. Approcher d à partir des caractéristiques

Pour chacune des microsurfaces isotropes sélectionnées, nous avons dix paramètres de référence trouvés grâce à d^{rc}, c'est-à-dire grâce à G_1^{rc}. Tout comme pour la prédiction de l'erreur, notre objectif est de pouvoir approcher d^{rc} sans avoir à calculer le terme de référence par tracer de rayons. Pour cela, nous utilisons de nouveau les caractéristiques de la microsurface. À partir de celles-ci, nous réalisons dix régressions linéaires différentes permettant de retrouver les dix paramètres. Le résultat d'une régression linéaire est un paramètre estimé grâce aux caractéristiques d'une microsurface ; il est noté par le symbole $\widehat{\cdot}$. L'ensemble des

paramètres ainsi retrouvés pour φ_+ est noté $\widehat{\vartheta_+} = (\widehat{\psi_+}, \widehat{\delta_+}, \widehat{\xi_+}, \widehat{\lambda_+})$ (et similairement pour φ_-). La différence d est ainsi approchée par :

$$\widehat{d}(\theta_{\boldsymbol{o}}) = \widehat{s_+}\,\varphi(\theta_{\boldsymbol{o}} \,|\, \widehat{\vartheta_+}) \;-\; \widehat{s_-}\,\varphi(\theta_{\boldsymbol{o}} \,|\, \widehat{\vartheta_-}). \tag{5.3.1}$$

Les tableaux 5.1 et 5.2 donnent pour chaque paramètre la régression linéaire associée sous la forme d'un tableau de coefficients (chaque rangée correspond au coefficient de la caractéristique indiquée). La rangée c donne la constante à ajouter à chaque combinaison linéaire. Les figures 5.8 et 5.9 comparent les paramètres s et ceux de ϑ aux paramètres $\widehat{s}$ et ceux de $\widehat{\vartheta}$ calculés grâce à la régression linéaire sur les caractéristiques.

	$\widehat{\psi_+}$	$\widehat{\delta_+}$	$\widehat{\xi_+}$	$\widehat{\lambda_+}$	$\widehat{s_+}$
c	-3.93	0.873	1.72	0.0394	-0.0660
$\sigma(z_f)$	-1.4	-0.265	0.647	-0.732	-0.0749
$cv(z_f)$	0.235	0.576	-2.4	2.21	0.0721
IQR(z_f)	0.814	0.157	-0.739	0.881	0.0627
QCD(z_f)	-0.825	-0.8	2.95	-3.08	-0.142
$\mathcal{A}_\mathcal{S}$	-0.448	1.14	0.0422	-0.0531	0.0504
$\sigma(\mathcal{A}_f)$	5.42e+06	-1.01e+06	8.42e+05	-2.28e+06	3.37e+05
C_b	-0.226	-0.362	0.178	-0.0346	0.0311
$\mu(\theta_o)$	1.99	-3.77	1.51	-1.73	-0.367
$\sigma(\theta_o)$	0.923	2.8	0.246	-1.63	0.474
$cv(\theta_o)$	4.27	-1.28	2.35	-2.54	-0.188
$Q_1(\theta_o)$	-0.421	2.33	-5.62	6.83	0.313
QCD(θ_o)	-2.68	0.633	-5.39	6.33	0.135
$\gamma_1(\theta_o)$	-0.462	-0.0136	-0.541	0.671	0.00617
$\beta_2(\theta_o)$	-0.0931	0.00154	0.0226	-0.0696	0.00406
$\rho(\theta_o,\mathcal{A}_f)$	1.84	-0.111	0.803	-1.28	0.0646
$\rho(\theta_o,z_f)$	-0.34	-0.0542	-0.0377	0.364	0.0533

Tableau 5.1 – Coefficients de chaque caractéristique (arrondis à trois chiffres significatifs) pour calculer les paramètres de φ_+. Chaque paramètre (colonne) est calculé en faisant la somme pondérée des caractéristiques (rangées) définie par les coefficients de la colonne.

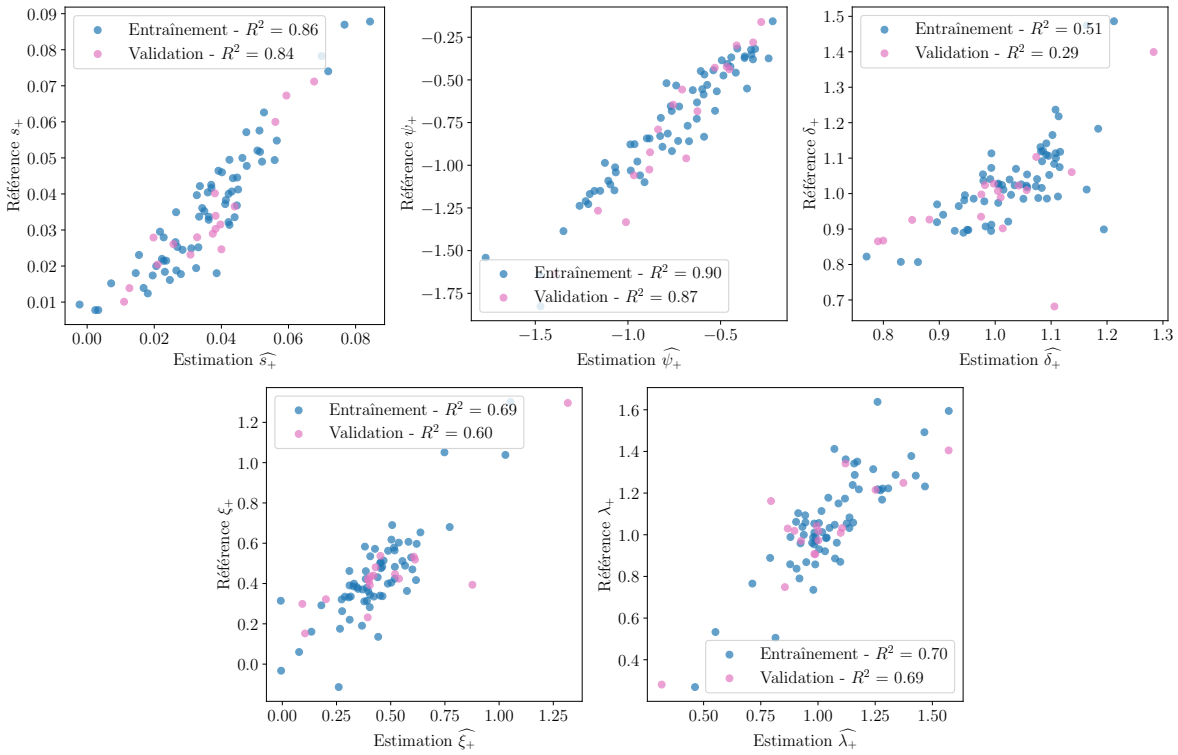


Figure 5.8 – Résultats des régressions linéaires permettant de trouver les cinq paramètres de φ_+ (quatre paramètres pour la distribution et un paramètre de mise à l'échelle). L'ordonnée est la valeur de référence trouvée pour chaque microsurface en maximisant la vraisemblance des paramètres. L'abscisse est la valeur recalculée à partir des caractéristiques.

	$\widehat{\psi_-}$	$\widehat{\delta_-}$	$\widehat{\xi_-}$	$\widehat{\lambda_-}$	$\widehat{s_-}$
c	0.972	-0.134	2.71	-0.914	-0.0317
$\sigma(z_f)$	-0.746	0.15	0.421	-0.260	-0.00550
$cv(z_f)$	-0.0332	0.175	-0.238	0.247	0.0178
IQR(z_f)	0.289	0.113	-0.311	0.169	0.00037
QCD(z_f)	-0.512	-0.455	0.387	-0.255	-0.00763
$\mathcal{A}_\mathcal{S}$	-0.179	0.343	-0.597	0.409	0.0178
$\sigma(\mathcal{A}_f)$	-2.69e+06	2.22e+06	-3.87e+06	3.21e+06	95300
C_b	0.534	0.128	0.0756	-0.125	-0.0102
$\mu(\theta_o)$	2.59	-1.98	0.951	-0.691	-0.0284
$\sigma(\theta_o)$	-6.49	2.49	-4.67	3.78	0.119
$cv(\theta_o)$	-0.233	-1.06	-0.781	0.563	0.0111
$Q_1(\theta_o)$	-0.0769	1.68	1.87	-1.47	-0.0463
QCD(θ_o)	2.29	0.409	3.42	-2.56	-0.0583
$\gamma_1(\theta_o)$	0.312	0.234	0.115	-0.109	-0.00588
$\beta_2(\theta_o)$	-0.0855	-0.00941	-0.0498	0.0493	0.00201
$\rho(\theta_o,\mathcal{A}_f)$	-1.72	0.893	-1.54	1.25	0.0335
$\rho(\theta_o,z_f)$	0.566	-0.0146	0.35	-0.345	-0.0174

Tableau 5.2 – Coefficients de chaque caractéristique (arrondis à trois chiffres significatifs) pour calculer les paramètres de φ_-. Chaque paramètre (colonne) est calculé en faisant la somme pondérée des caractéristiques (rangées) définie par les coefficients de la colonne.

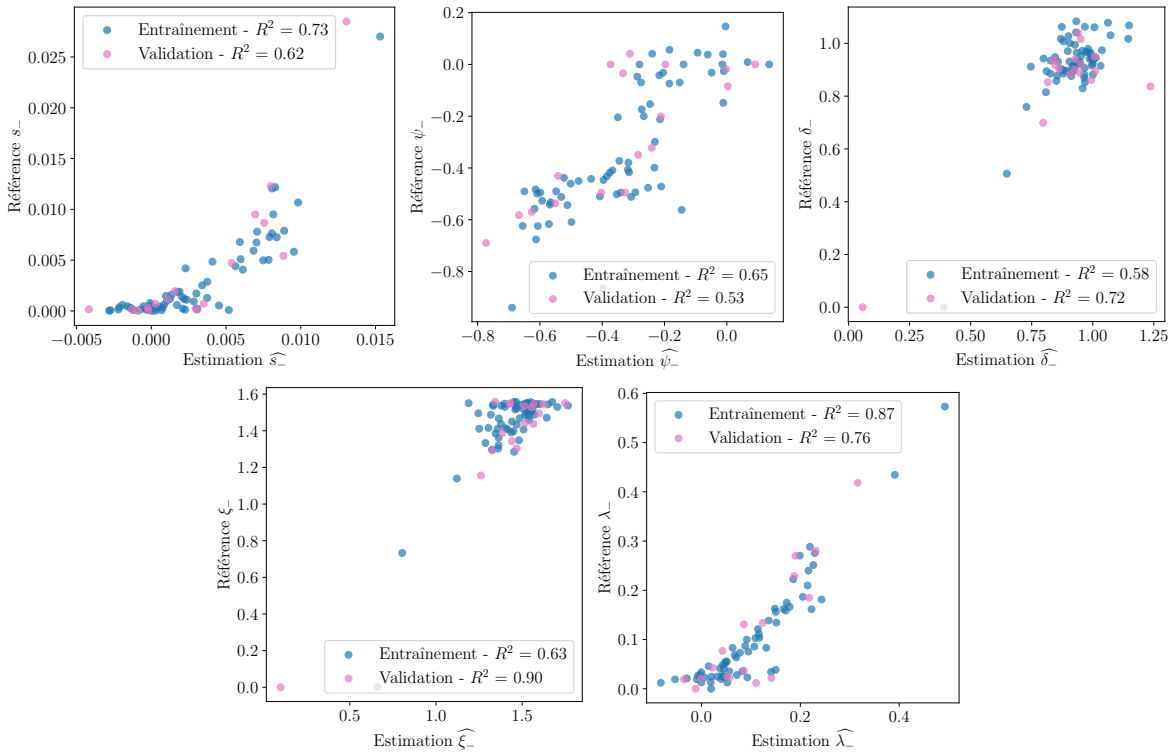


Figure 5.9 – Résultats des régressions linéaires permettant de trouver les cinq paramètres de φ_- (quatre paramètres pour la distribution et un paramètre de mise à l'échelle). L'ordonnée est la valeur de référence trouvée pour chaque microsurface en maximisant la vraisemblance des paramètres. L'abscisse est la valeur recalculée à partir des caractéristiques.

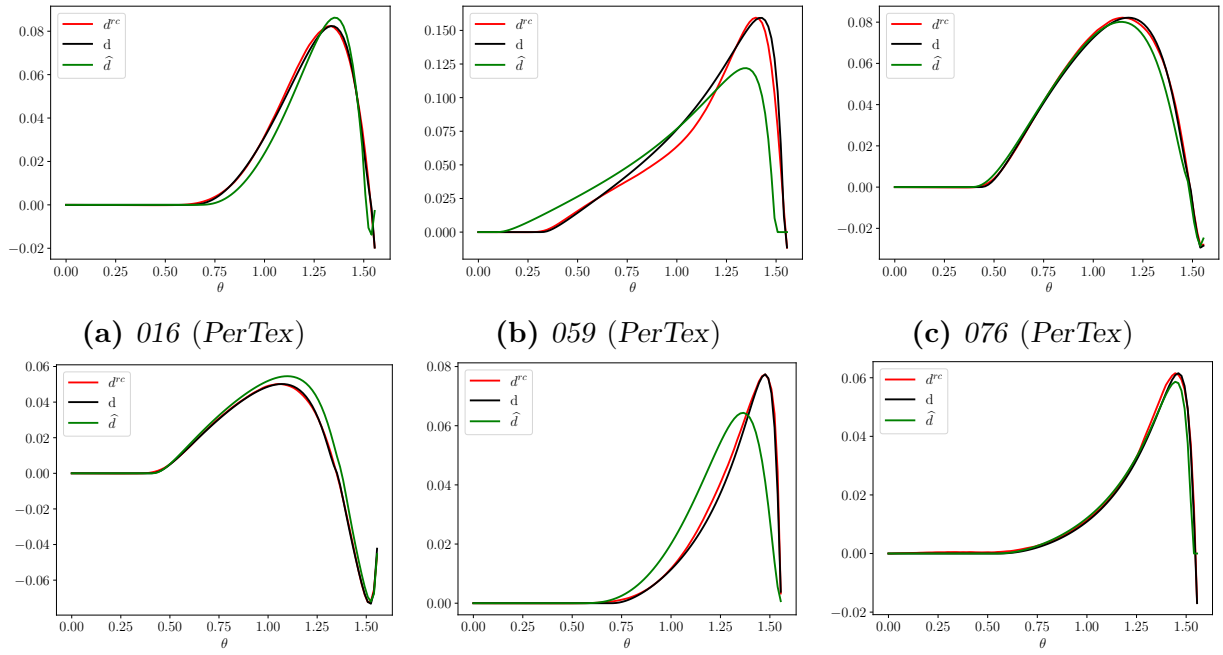
Les régressions linéaires pour retrouver les paramètres $\widehat{\vartheta_-}$ de φ_-, composante négative de $\widehat{d}$, sont moins fiables que pour la composante positive. Cela est dû notamment au fait que cette composante négative est, dans la majorité des cas, étendue sur un intervalle bien plus petit que celui de la composante positive ($a_2 - a_1 > \pi/2 - a_2$). Il y a donc moins de données t pour permettre de maximiser la vraisemblance efficacement. De plus, cette composante négative pourrait être causée par un problème d'effet de bord dans le calcul de G_1^{rc} et non pas à cause des caractéristiques elles-mêmes de la microsurface. Les données sont donc plus bruitées pour l'optimisation de φ_- que de φ_+.

À partir de ces dix paramètres, il est possible d'estimer la différence d^{rc} :

$$\widehat{d}(\theta_{\boldsymbol{o}}) = \widehat{s_+}\,\varphi(\theta_{\boldsymbol{o}} \,|\, \widehat{\psi_+}, \widehat{\delta_+}, \widehat{\xi_+}, \widehat{\lambda_+}) \;-\; \widehat{s_-}\,\varphi(\theta_{\boldsymbol{o}} \,|\, \widehat{\psi_-}, \widehat{\delta_-}, \widehat{\xi_-}, \widehat{\lambda_-}). \tag{5.3.2}$$

La figure 5.10 compare, pour quelques microsurfaces, la différence de référence d^{rc} (en rouge), la combinaison idéale d des PDFs de la distribution SB de Johnson (en noir), et l'estimation $\widehat{d}$ retrouvée à partir des caractéristiques de la microsurface (en vert). La correction finale $\widehat{d}$ approche correctement la différence de référence d^{rc} dans la majorité des cas. Les corrections pour les microsurfaces *059* et *PavingStones109* ne sont pas excellentes mais permettent quand même de compenser en partie la différence entre G_1 et G_1^{rc}. En effet, en toute inclinaison θ (abscisses), $\widehat{d}(\theta)$ ne fait pas empirer le masquage : $|\widehat{d}(\theta)| < 2|d^{rc}(\theta)|$.

Ainsi en résumé, à partir de 81 microsurfaces isotropes ($r < 0.112$) pour lesquelles le masquage de référence G_1^{rc} a été mesuré par tracer de rayons, nous calculons la différence $d^{rc}(\theta) = G_1(\theta) - G_1^{rc}(\theta)$. La forme de cette fonction de différence peut être découpée en trois intervalles : sur le premier la fonction est nulle, sur le second elle est positive, sur le dernier elle est négative. Sur chacun des deux intervalles non nuls, la valeur absolue de la sous-fonction est approchée par une distribution SB de Johnson. Dans un premier temps, les paramètres sont trouvés en maximisant la vraisemblance avec la sous-fonction de référence. La fonction complète est ensuite approchée par une combinaison linéaire des deux distributions SB de Johnson. Dans un second temps, nous réalisons des régressions linéaires afin de trouver une formule pour calculer chaque paramètre à partir des caractéristiques de la microsurface. Nous proposons ainsi une méthode pour calculer une approximation de la différence $\widehat{d} \approx d^{rc}$ sans avoir recours au tracer de rayons et qui peut être utilisée pour corriger le masquage théorique.



(a) *016* (*PerTex*) **(b)** *059* (*PerTex*) **(c)** *076* (*PerTex*)

(d) *165* (*PerTex*) **(e)** *PavingStones109* (*ambientCG*) **(f)** GGX, $\alpha = 0.5$

Figure 5.10 – Comparaison des différences. En rouge, la différence de référence $d^{rc} = G_1 - G_1^{rc}$. En noir, son approximation d par une combinaison de distributions SB de Johnson dont les paramètres sont trouvés pour approcher au mieux d^{rc}. En vert, son estimation $\widehat{d}$ calculée en trouvant les paramètres des distributions SB de Johnson à partir de combinaisons linéaires sur les caractéristiques.

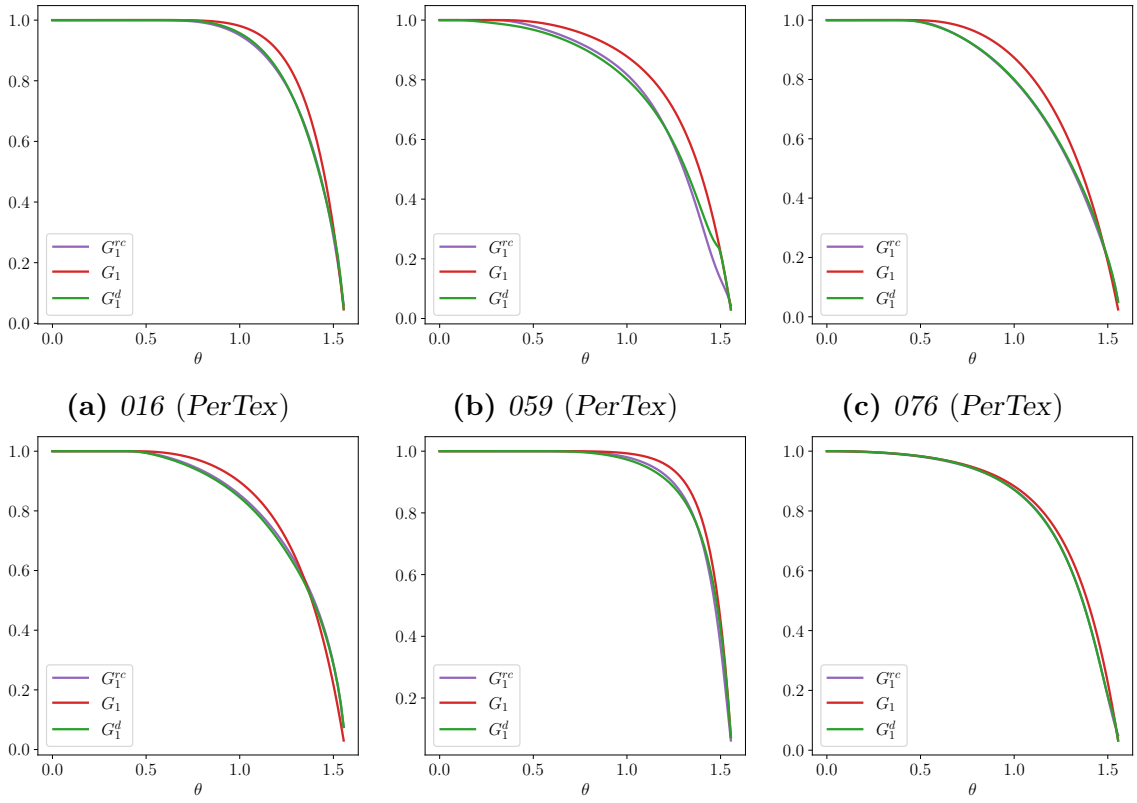
5.4. Correction du masquage théorique

Lors du calcul du terme de masquage théorique G_1 pour des microsurfaces isotropes, la différence $\widehat{d}$ estimée à partir des caractéristiques de la microsurface peut être ajoutée au masquage pour produire un nouveau terme plus proche de G_1^{rc}

$$G_1^d(\boldsymbol{o}) = G_1(\boldsymbol{o}) - \widehat{d}(\theta_{\boldsymbol{o}}). \tag{5.4.1}$$

La figure 5.11 montre le terme de masquage corrigé pour les six microsurfaces dont l'erreur est présentée dans la figure 5.10.

Le facteur correctif $\widehat{d}$ améliore grandement le terme de masquage G_1 (rouge) et produit un masquage corrigé G_1^d (vert) proche de la référence G_1^{rc} (violet). Pour les microsurfaces *059* et *PavingStones109*, lorsque la correction $\widehat{d}$ est plus élevée que la différence exacte d^{rc}, le masquage corrigé devient trop faible (alors qu'il était trop élevé avant correction) ; cependant la différence absolue entre $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$ et $G_1^d(\boldsymbol{o})$ est plus faible pour tout angle $\theta_{\boldsymbol{o}}$ que la différence



(a) *016* (*PerTex*) **(b)** *059* (*PerTex*) **(c)** *076* (*PerTex*)

(d) *165* (*PerTex*) **(e)** *PavingStones109* (*ambientCG*) **(f)** GGX, $\alpha = 0.5$

Figure 5.11 – Comparaison des masquages. En violet, le masquage de référence G_1^{rc} par tracer de rayons. En rouge, le masquage théorique G_1 selon le modèle de Smith et Ashikhmin et al. En vert, le masquage corrigé $G_1^d = G_1 - \widehat{d}$, toujours plus proche de la référence que le masquage théorique.

absolue entre $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$ et $G_1(\boldsymbol{o})$. Il y a toujours une amélioration, même lorsque la surestimation du masquage théorique devient une sous-estimation après correction (ou inversement).

Ce nouveau terme de masquage produit une erreur E beaucoup plus faible pour les 81 microsurfaces de notre analyse. La figure 5.12 présente la diminution des erreurs obtenues avec le masquage corrigé G_1^d par rapport aux erreurs obtenues avec G_1. La majorité des microsurfaces ont un terme de masquage qui est fortement amélioré par la correction $\widehat{d}$. Pour quelques autres, la réduction de l'erreur est plus faible. Mais elle est toujours favorable : $E(G_1^d) < E(G_1)$.

Le nouveau modèle de masquage peut ensuite être utilisé dans le calcul de la BRDF d'une microsurface isotrope. L'équation de la BRDF à microfacettes parfaitement spéculaires (équation 2.2.17) peut se calculer en utilisant G_1^d dans le calcul du terme masquage-ombrage G,

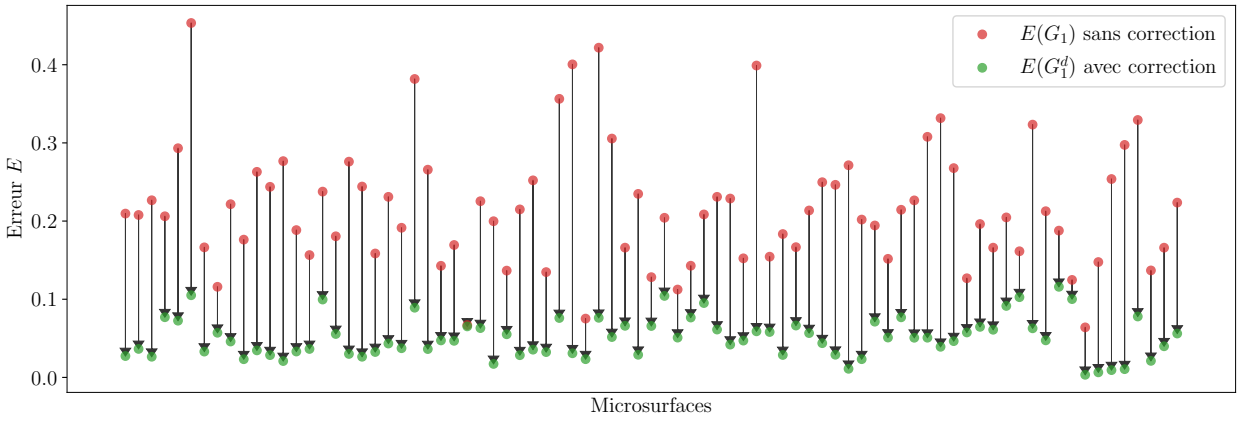


Figure 5.12 – Diminution des erreurs du terme de masquage théorique ($E(G_1)$) en ajoutant la correction ($E(G_1^d)$).

que ce soit en ré-écrivant sa forme décorrélée (équation 2.3.7) :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = G_1^d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}) G_1^d(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}), \tag{5.4.2}$$

ou sa forme corrélée (équation 2.3.8) :

$$G(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}) = \lambda(\varphi) G_1^d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}) G_1^d(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h}) + (1 - \lambda(\varphi)) \min(G_1^d(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{h}), G_1^d(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{h})). \tag{5.4.3}$$

La figure 5.13 présente une comparaison des rendus pour trois microsurfaces isotropes. La troisième rangée correspond à un rendu réalisé avec le masquage de référence G_1^{rc} mesuré par tracer de rayons. Elle est comparée au-dessus avec un rendu réalisé avec le masquage théorique G_1 sans aucune correction, tel que proposé par Smith et Ashikhmin et al. La comparaison en-dessous est faite avec le masquage G_1^d qui correspond au masquage théorique auquel a été ajouté le facteur correctif $-\widehat{d}$ trouvé grâce aux caractéristiques de la microsurface. La dernière rangée montre la correction apportée (courbe verte) par rapport à la réelle différence (courbe rouge).

L'ajout de ce facteur correctif dans le calcul du terme de masquage-ombrage (équation 5.4.2) permet de calculer une BRDF plus proche de la référence. Le facteur correctif $\widehat{d}$ n'est pas exactement égal à la différence d^{rc} de référence. Lorsque $\widehat{d} > d^{rc} > 0$, le facteur de correction est trop fort et le terme de masquage corrigé sous-estime le masquage de référence, alors qu'il le surestimait avant ($G_1^d < G_1^{rc} < G_1$). La nouvelle sous-estimation est cependant bien plus faible que la surestimation originale et nous considérons que le terme de masquage s'en trouve tout de même amélioré. Cela est notamment visible dans la figure 5.13, première et cinquième rangées (les différences) de la colonne du milieu. Avant correction, l'image calculée avec G_1 (deuxième rangée) est globalement plus claire que la BRDF de référence calculée avec G_1^{rc}

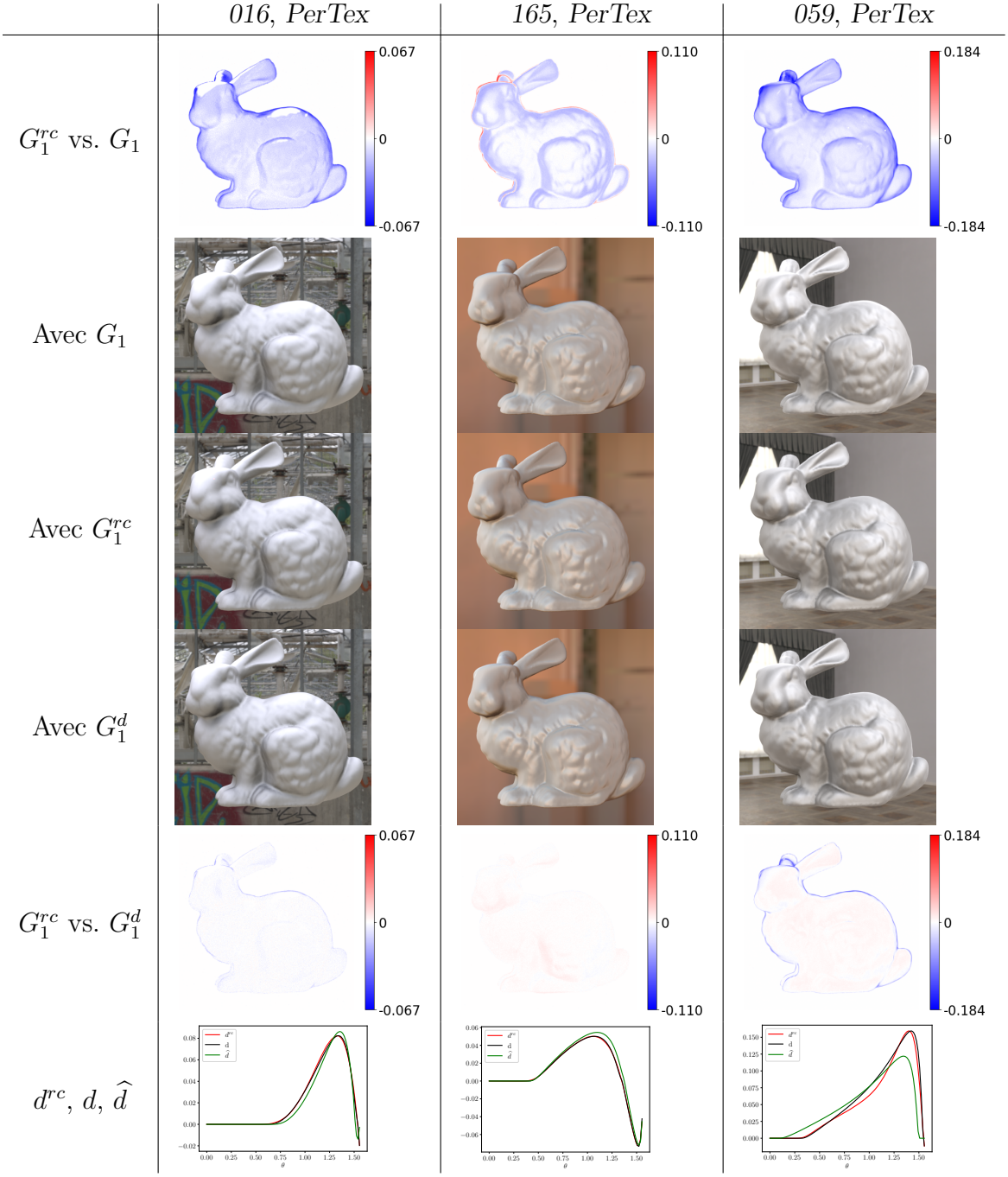


Figure 5.13 – Comparaison des rendus. Chaque colonne correspond aux résultats pour une microsurface : *016* (*PerTex*) pour la première colonne, *165* (*PerTex*) pour la deuxième colonne, *059* (*PerTex*) pour la troisième colonne. La première rangée donne la différence entre le rendu réalisé avec le masquage théorique G_1 (deuxième rangée) et le rendu de référence réalisé avec le masquage G_1^{rc} (troisième rangée). La cinquième rangée donne la différence entre le rendu réalisé avec le masquage corrigé G_1^d (quatrième rangée) et le rendu de référence. Elle est plus faible que la différence de la première rangée.

(troisième rangée). La différence est principalement négative (première rangée). À l'inverse, avec le masquage corrigé G_1^d (quatrième rangée), l'image calculée devient plus sombre que la BRDF de référence, mais cette fois-ci l'assombrissement est difficilement perceptible à l'oeil nu. La différence pour G_1^d est principalement positive (cinquième rangée), mais en valeur absolue elle est bien plus faible que pour G_1.

La forme de la différence d^{rc} peut être particulièrement complexe à approcher aux angles très rasants. La composante φ_- associée est non nulle sur un intervalle très étroit, et parfois même toujours nulle pour certaines microsurfaces. Cela rend difficile la recherche des cinq paramètres optimaux pour la calculer et les cinq régressions linéaires sont peu précises. Aussi, plus l'intervalle de φ_- est étroit, plus le facteur de correction $-\widehat{d}$ a de chances d'être peu efficace pour ces angles rasants, ce qu'on observe sur la silhouette du lapin où l'erreur reste maximale.

L'inexactitude de la correction aux angles rasants est d'autant plus renforcée lorsque la composante φ_+ approche difficilement d sur son intervalle $[a_1, a_2]$, par exemple lorsqu'elle présente un point d'inflexion. La troisième colonne de la figure 5.13 présente un tel cas. L'influence de la correction (sixième rangée) ne s'étend pas jusqu'aux angles très rasants et le terme de masquage n'y est presque pas modifié alors que son erreur y est grande. Cependant, cette mauvaise correction est au pire des cas nulle, ne changeant rien au masquage théorique lorsque $\theta_{\boldsymbol{o}}$ est proche de zéro ; elle ne détériore jamais le modèle. L'erreur du rendu corrigé (cinquième rangée) montre une erreur bien plus faible que celle du rendu non modifié (première rangée) sur l'intérieur de l'objet, mais l'erreur sur la silhouette n'est presque pas modifiée.

La RMSE moyenne E^r (calculée sur trois rendus de trois cartes d'environnement différentes, visibles sur la figure 5.13) diminue lorsque le masquage corrigé G_1^d est utilisé dans le calcul de la BRDF. La figure 5.14 présente cette amélioration pour chacune des 81 microsurfaces isotropes de l'étude. La grande majorité des microsurfaces permet bien de trouver une correction $\widehat{d}$ améliorant le terme de masquage et également les rendus réalisés.

Pour une minorité de microsurfaces, deux sur les 81, l'erreur E^r est très légèrement plus importante. La détérioration est faible et le changement n'est pas visible à l'oeil nu. Ces microsurfaces sont présentées dans la figure 5.15. Pour celle de la première rangée, la différence de référence d^{rc} ne peut pas être représentée par une combinaison de deux distributions SB de Johnson et même la différence approchée d ne permet pas de trouver une paramétrisation correcte. La correction finale $\widehat{d}$ est bien proche de d mais elle-même est trop différente de d^{rc} pour produire un résultat correct. Pour la microsurface de la seconde rangée, la différence de référence d^{rc} est très bien approchée par d pour laquelle dix paramètres satisfaisants sont

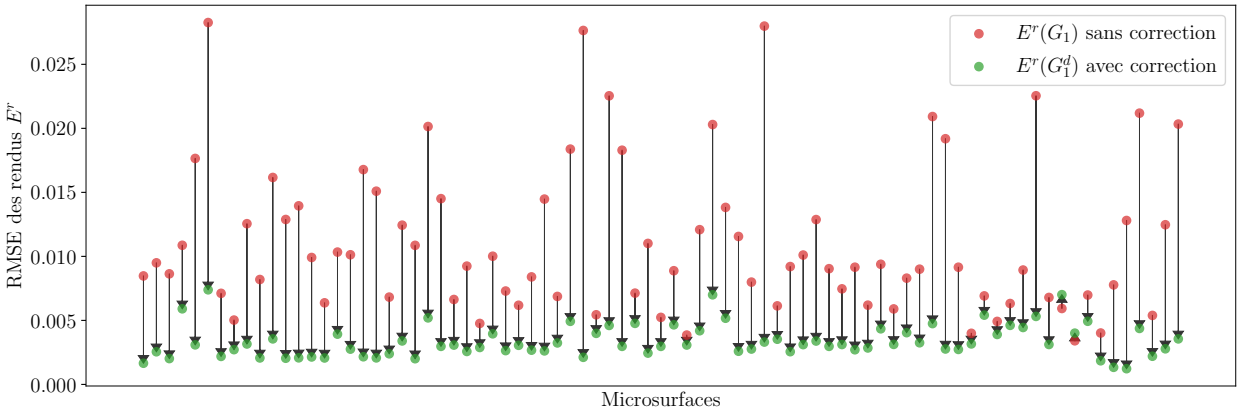


Figure 5.14 – Diminution des erreurs E^r pour les rendus réalisés avec le masquage corrigé G_1^d.

trouvés. Ces paramètres ne sont pas bien approchés par la régression linéaire permettant de calculer $\widehat{d}$, notamment :

$$\widehat{\xi}_- = 0.93, \quad \widehat{\xi}_- + \widehat{\lambda}_- = 1.39,$$
$$\widehat{\xi}_+ = 0.93, \quad \widehat{\xi}_+ + \widehat{\lambda}_+ = 1.5.$$

Aussi, la composante négative φ_- (en violet) commence au même endroit que la composante positive φ_+ (en orange) et les deux s'annulent.

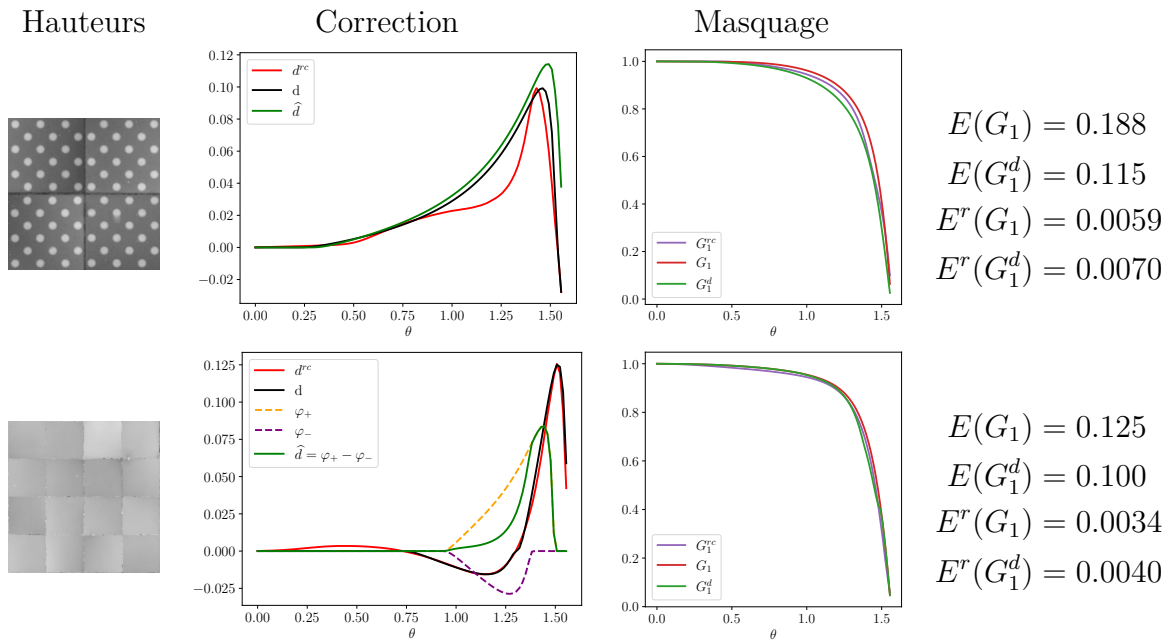


Figure 5.15 – Deux microsurfaces pour lesquelles la correction trouvée fait légèrement empirer les rendus.

5.5. Conclusion du chapitre

Le modèle théorique du masquage proposé par Smith [**Smi67**] et Ashikhmin et al. [**APS00**] ne permet pas de calculer le masquage exact d'une microsurface fournie par un maillage. Nous proposons une étude plus poussée de l'erreur pour les microsurfaces isotropes et proposons un modèle correctif pour mieux approcher le masquage de référence G_1^{rc}. Nous remarquons que la différence entre G_1 et G_1^{rc} peut être approchée par une combinaison de distributions SB de Johnson. Pour chacune des 81 microsurfaces isotropes, nous trouvons des paramétrisations de deux distributions SB de Johnson qui minimisent la différence entre la combinaison de ces distributions et la différence exacte trouvée avec le tracer de rayons. Nous formulons ainsi un facteur de correction calculé à partir de dix paramètres. Une régression linéaire est ensuite réalisée pour estimer chacun des dix paramètres grâce aux 81 données et 17 de leurs caractéristiques. Ainsi, la formule du facteur correctif peut être paramétrée directement à partir des caractéristiques du maillage, sans avoir recours au lourd processus de tracer de rayons.

Nous montrons que le terme de masquage ainsi corrigé génère toujours une erreur plus faible que sans la correction. Cette amélioration se répercute similairement dans le calcul de la BRDF, et l'erreur visuelle sur des images générées par simulation d'éclairage est également diminuée.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1. Conclusion

La production d'une image de synthèse photoréaliste requiert la prise en compte des effets de lumière produits par les détails fins des microsurfaces, déterminant l'apparence des matériaux. La théorie des microfacettes a été proposée dans cet objectif, afin d'approcher par des fonctions mathématiques le comportement de la lumière à la surface d'un matériau rugueux. Elle est très populaire et grandement utilisée dans les moteurs de simulation d'images. Dans cette théorie, le facteur d'atténuation géométrique est indispensable au calcul de la BRDF. Il permet de prendre en compte le masquage et l'ombrage de la microsurface sur elle-même. Quelques modèles existent pour représenter la proportion de la microsurface étant à la fois visible et illuminée pour une paire de directions données. Ces modèles reposent sur des hypothèses théoriques de la microsurface, mais elles ne sont pas nécessairement respectées par les microgéométries de matériaux réels. Dans cette thèse, nous étudions spécifiquement le modèle proposé en 1967 par Smith [**Smi67**] et en 2000 par Ashikhmin et al. [**APS00**], et son applicabilité pratique à des microsurfaces mesurées sur des matériaux réels.

Nous avons réalisé une étude sur plus de 400 microsurfaces mesurées sur des matériaux réels pour étudier la précision du terme de masquage de Smith et Ashikhmin et al. Pour chaque microsurface, nous avons mesuré l'erreur du masquage théorique avec celui mesuré sur la microgéométrie elle-même. En comparant cette erreur à différentes caractéristiques de la microsurface, nous proposons une méthode pour prédire l'erreur directement avec les statistiques géométriques fournies par le maillage. La même méthodologie a ensuite été appliquée pour trouver une correction au masquage théorique à partir des caractéristiques, pour les microsurfaces isotropes.

Base de données de microsurfaces. Notre étude est réalisée sur plus de 400 microsurfaces mesurées sur des matériaux réels provenant de deux sources principales différentes.

— 334 cartes de hauteurs ont été mesurées par Halley [**Hal12**] et reconstruites grâce à un procédé de stéréophotométrie. Les matériaux mesurés sont des vinyles soufflés, revêtements muraux tissés, tapis et moquettes, stores, tissus d'ameublement, matériaux de construction et emballages de produits. Toutes les mesures et créations des textures sont réalisées avec les mêmes paramètres tout au long du processus. La base de données contient très peu de bruit.

— 85 cartes de hauteurs ont été acquises par des techniques de photogrammétrie et proviennent du site internet *ambientCG* [**Dem17**] contenant de nombreuses ressources destinées aux artistes souhaitant créer des matériaux réalistes. L'ensemble des textures comprend des terrains, des roches, des revêtements muraux ou de sol, des écorces et d'autres matériaux variés. Les méthodes d'acquisition sont très variées, plus représentatives de méthodes accessibles dans un usage personnel, et les données peuvent avoir des artefacts. La base de données contient donc plus de bruit.

Quatre autres cartes de hauteurs viennent compléter l'ensemble des données, fournissant un total de 423 microsurfaces mesurées. Ces cartes de hauteurs sont ensuite utilisées pour créer des maillages 3D triangulés.

Nous ajoutons également quelques microsurfaces générées afin de respecter une distribution des micronormales, de Beckmann ou GGX.

Calcul du masquage. Pour une microsurface donnée sous la forme d'un maillage, le terme de masquage G_1^{rc} peut être mesuré de manière précise grâce à un algorithme de tracer de rayons (figure 3.14). Les rayons sont lancés dans la direction pour laquelle le masquage doit être mesuré depuis des points échantillonnés sur la microsurface. La proportion de macrosurface visible correspond au nombre de rayons ayant pu rebondir et sortir de la microgéométrie sans intersecter le maillage une deuxième fois. La mesure du masquage donne ainsi une valeur de référence pour réaliser une étude comparative de la théorie. Cela dit, cette méthode requiert un grand nombre de rayons pour être assez précise (8 millions dans notre étude) et engendre donc des temps de calcul importants. Pour un maillage de 4096×4096 sommets, le temps de calcul est de l'ordre de 15 minutes sur GPU (*NVidia RTX 2080Ti*).

Le terme de masquage théorique [**Smi67**, **APS00**] est un modèle statistique. Il a l'avantage de reposer uniquement sur la distribution des microfacettes et par conséquent, il est rapide à calculer. Pour un maillage de 4096×4096 sommets, le temps de calcul pour tabuler le

masquage G_1 est de l'ordre de 4 minutes sur CPU (*Intel core i9-9900K*) avec un seul fil d'exécution, pour un tableau 2D de 400 valeurs sur l'azimuth $\phi_{\boldsymbol{m}}$ et 100 valeurs sur l'élévation $\theta_{\boldsymbol{m}}$. La distribution des micronormales est évaluée en 3 secondes sous une forme discrète grâce au maillage fourni représentant la microgéométrie. Elle est stockée dans un tableau 2D de mêmes dimensions. Le tableau est ensuite interpolé afin de retrouver la valeur de la distribution $D(\boldsymbol{m})$. Cette distribution discrète permet de calculer le terme de masquage théorique G_1 dérivé par Smith et Ashikhmin et al. (équation 2.3.14) :

$$G_1(\boldsymbol{o}) = \frac{\cos\theta_{\boldsymbol{o}}}{\int_\Omega \langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{m}\rangle D(\boldsymbol{m}) d\omega_{\boldsymbol{m}}}.$$

Caractérisation géométrique d'une microsurface. Le modèle théorique du calcul du terme de masquage est dérivé selon des hypothèses de non-corrélation entre les distributions des aires, des hauteurs et des orientations des microfacettes. Ces hypothèses ne sont pas nécessairement respectées par les microsurfaces réelles et le masquage théorique n'est donc pas nécessairement réaliste. Un maillage permet de donner une représentation discrète de ces variables et ainsi de caractériser une microsurface par un ensemble de valeurs statistiques. Nous en sélectionnons 25 intéressantes (figure 6.1) pour étudier l'erreur du masquage théorique et analyser son comportement en fonction de chaque microsurface.

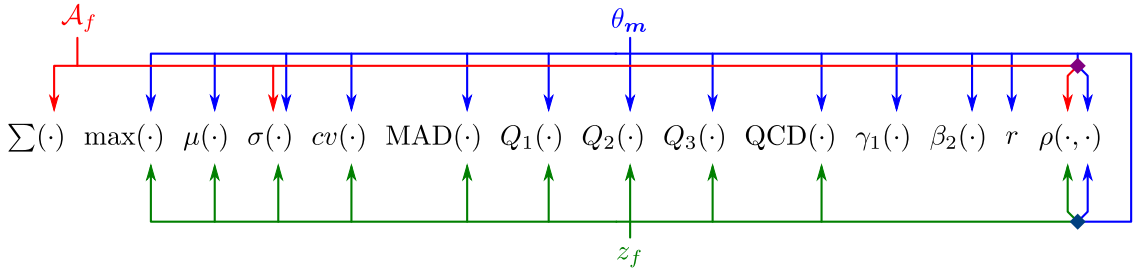


Figure 6.1 – Caractéristiques considérées dans l'étude de l'erreur. Chaque variable (aires $\mathcal{A}_f$, hauteurs z_f et micronormales $\theta_{\boldsymbol{m}}$ des microfacettes) est utilisée dans certaines fonctions mathématiques statistiques pour fournir un ensemble de 25 valeurs numériques.

Évaluation de l'erreur du modèle. Le masquage théorique G_1 ne correspond pas exactement à la mesure G_1^{rc}. Son erreur E est quantifiée par la formule suivante (équation 4.1.1) :

$$E = \int_\Omega |G_1(\boldsymbol{o}) - G_1^{rc}(\boldsymbol{o})| d\omega_{\boldsymbol{o}}.$$

L'erreur du masquage G_1 se répercute sur le photoréalisme d'une image calculée. Pour quantifier l'erreur des rendus, nous utilisons trois scènes éclairées sous trois cartes d'environnement

différentes. Chaque scène permet de calculer deux images : l'une utilisant le masquage théorique G_1, l'autre utilisant le masquage de référence G_1^{rc}. La différence entre ces deux images est calculée grâce à la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE). L'erreur E^r générée par le modèle théorique au niveau des rendus est estimée par la moyenne de ces trois RMSEs.

On observe que plus l'erreur du modèle E est grande, plus celle des rendus l'est également (figure 4.22a).

Prédiction de l'erreur du masquage théorique. Grâce aux 25 caractéristiques pertinentes pour l'étude de l'erreur, nous réalisons des régressions linéaires multiples grâce à la méthode des Moindres Carrés Ordinaire (MCO) pour approcher les erreurs E. L'efficacité d'une régression linéaire est mesurée par le coefficient de détermination R^2 (équation 4.2.4) :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{\mathcal{S}}(E_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{S}})^2}{\sum_{\mathcal{S}}(E_{\mathcal{S}} - \mu(E))^2},$$

où $\mathcal{S}$ représente une microsurface.

Par une validation croisée, nous réduisons la complexité de la régression linéaire finale à seulement cinq caractéristiques nécessaires pour garder un coefficient R^2 assez élevé. L'erreur E peut être estimée par une combinaison linéaire P trouvée avec ces cinq caractéristiques et rapide à calculer à partir d'un maillage (équation 4.2.7)

$$\begin{aligned} E \approx P = {} & 0.222\,\mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.045\,r + 0.035\,\mathrm{IQR}(z_f) + 0.141\,\mathrm{IQR}(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\ & + 0.172\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},z_f) + 0.018, \end{aligned}$$

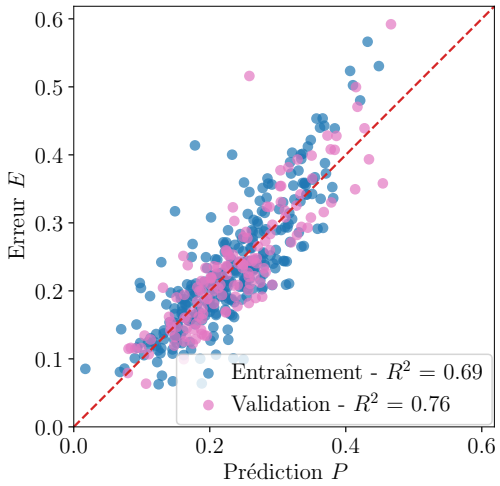
dont les résultats sont présentés dans la figure 6.2a.

Afin de permettre d'estimer l'erreur au niveau des rendus directement, nous appliquons la même méthode pour trouver une combinaison linéaire pour E^r (équation 4.2.12) :

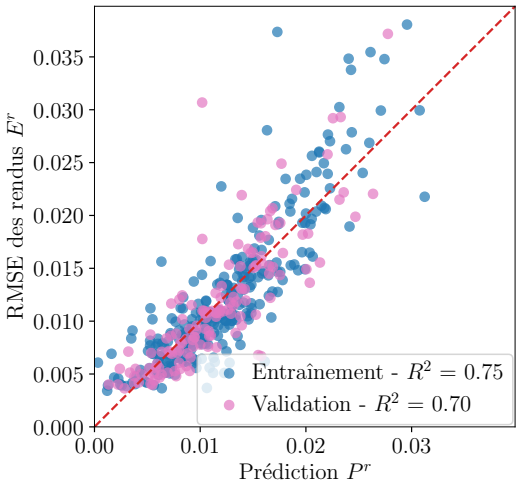
$$\begin{aligned} E^r \approx P^r = {} & 0.0898\,\mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0677\,Q_3(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0446\,\mathrm{IQR}(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.044\,\sigma(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\ & + 0.0132\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},z_f) + 0.0035, \end{aligned}$$

dont les résultats sont présentés dans la figure 6.2b.

Pour plus de précision et de versatilité, nous proposons en annexe A des régressions linéaires calculées sur les 25 caractéristiques de l'étude, ou entraînées à partir de bases de données moins diversifiées.



(a) Comparaison de l'erreur E et de sa prédiction P. Reprise de la figure 4.8.



(b) Comparaison de l'erreur E^r et de sa prédiction P^r. Reprise de la figure 4.23.

Figure 6.2 – Résultats des prédictions des erreurs pour le masquage théorique (a) et pour les rendus (b).

Des microsurfaces peuvent être générées selon des distributions de Beckmann ou GGX, grâce à la méthode proposée par Ribardière et al. [**RBSM19**]. Pour de telles microsurfaces, l'erreur du masquage est prédite par des formules spécifiques utilisant la valeur de rugosité α (équations 4.2.10 et 4.2.11) :

$$\begin{aligned} P^{\alpha}_{\text{Beckmann}} &= 0.327\,\tanh(1.912\,\alpha - 0.052) + 0.017. \\ P^{\alpha}_{\text{GGX}} &= 0.098\,\tanh(3.483\,\alpha - 0.892) + 0.069. \end{aligned}$$

Amélioration du masquage théorique. Nous proposons une correction à ajouter au masquage théorique G_1 de Smith et Ashikhmin et al. pour les microsurfaces isotropes (81 éléments dans notre jeu de données). Cette fonction corrective $\widehat{d}$ est calculée grâce à la combinaison linéaire de deux distributions SB de Johnson, l'une permettant de corriger la surestimation de G_1 et l'autre la sous-estimation (équation 5.3.2)

$$\widehat{d}(\theta_{\boldsymbol{o}}) = \widehat{s_+}\,\varphi(\theta_{\boldsymbol{o}} \,|\, \widehat{\psi_+}, \widehat{\delta_+}, \widehat{\xi_+}, \widehat{\lambda_+}) \;-\; \widehat{s_-}\,\varphi(\theta_{\boldsymbol{o}} \,|\, \widehat{\psi_-}, \widehat{\delta_-}, \widehat{\xi_-}, \widehat{\lambda_-})$$

où φ dénote une distribution SB de Johnson.

Dans un premier temps, les paramètres de référence de chaque microsurface sont trouvés en maximisant la vraisemblance entre la combinaison des distributions SB de Johnson et la différence de référence $G_1 - G_1^{rc}$. Puis, pour chaque paramètre, une régression linéaire est réalisée sur les caractéristiques de la microsurface. Ainsi, les caractéristiques d'une microsurface permettent de calculer dix paramètres déterminant la valeur de $\widehat{d}(\theta_{\boldsymbol{o}})$ pour une direction $\boldsymbol{o}$

donnée. Cette valeur est ensuite soustraite à $G_1(\boldsymbol{o})$ pour approcher au mieux la mesure du masquage de référence $G_1^{rc}(\boldsymbol{o})$.

L'utilisation de cette fonction corrective pour les microsurfaces isotropes permet de réduire l'erreur E du masquage théorique sans utiliser de tracer de rayons couteux (figure 5.12).

6.2. Perspectives

Nous avons proposé dans cette thèse une méthode pour prédire l'erreur d'un modèle de masquage théorique, puis pour corriger ce modèle pour les microsurfaces isotropes. La méthodologie appliquée ne permet pas d'obtenir des résultats parfaits et fiables puisqu'elle est basée sur un ensemble de statistiques qui ne permet pas de définir l'entièreté des détails d'une microsurface réelle. Notre étude est basée sur plus de 400 mesures de surfaces réelles, mais il en existe une infinité. Plusieurs pistes peuvent être explorées pour l'améliorer ou l'étendre à d'autres modèles. Nous discutons aussi d'autres approches au problème de l'exactitude du modèle théorique appliqué sur des microsurfaces réelles.

6.2.1. Perspectives à court terme

Étude des points d'inflexion. Le modèle théorique G_1 de Smith et Ashikhmin et al. n'arrive pas à reproduire une particularité de la mesure du masquage G_1^{rc} : les points d'inflexion selon $\theta_{\boldsymbol{o}}$. Un point d'inflexion est défini sur une courbe plane (2D) là où la concavité de la courbe change. Il se définit également par sa dérivée seconde nulle. À ce point, la tangente traverse la courbe. Malheureusement ces points d'inflexion sont définis sur G_1^{rc}, donc par tracer de rayons. Nous avons tout de même constaté qu'ils sont présents lorsque le relief de la microgéométrie change rapidement et fortement de hauteur ; sur la carte de hauteurs cela s'identifie rapidement lorsque les teintes de gris changent en très peu de pixels du sombre (hauteurs basses) au clair (hauteurs élevées). En étudiant de telles microsurfaces, il devrait être possible de détecter à quelles élévations θ ces points d'inflexion ont lieu sans utiliser le tracer de rayons, mais en étudiant les changements de hauteurs soudains (leurs variations, leurs pentes, leurs fréquences, leurs proportions, leurs organisation, etc.). Ceci permettrait d'adapter le modèle, par exemple en ajoutant des contraintes de tangente pour simuler ces points d'inflexion.

Mesures d'entropie. Une microsurface présentant des schémas organisés ou répétitifs dans sa microgéométrie possède forcément une corrélation entre ses microfacettes. L'entropie de Shannon pourrait être utilisée pour représenter cette structuration non aléatoire d'une microsurface. C'est une fonction qui permet de mesurer l'incertitude d'une distribution. Plus précisément, elle correspond intuitivement à la diversité de l'information contenue dans un

signal discret. Pour une carte de hauteurs, elle indique la quantité de hauteurs différentes. Dans une distribution de normales, elle indique la quantité de normales différentes. Elle peut également être calculée pour la distribution des aires, ou bien l'occultation ambiante qui donne les zones difficiles à éclairer (si elle est fournie). Plus une information d'une micro-géométrie a de valeurs différentes (par exemple les hauteurs, ou les micronormales), plus son entropie est grande, et plus il y a d'incertitude sur l'information. Cela implique donc que plus l'information est redondante, moins elle contient de valeurs. L'entropie est maximale, en l'absence de contraintes particulières, lorsque toutes les valeurs sont équiprobables. Pour une variable X, l'entropie est donnée par la formule :

$$H_b(X) = -\sum_{x \in X} p(x) \log_b(p(x)) \tag{6.2.1}$$

où $p(x)$ donne la probabilité de la valeur x, et b est la base utilisée pour le logarithme. La base est choisie en fonction du type d'information. Pour une entropie mesurée en bits, la base choisie sera deux ; une base e permet de mesurer l'entropie en unité naturelle de l'information (nats). De plus, il existe l'entropie conjointe qui permet de mesurer l'entropie dans un système à plusieurs variables. Elle permettrait de mesurer l'entropie d'une variable en considérant sa répartition dans l'espace pour évaluer la présence de schémas répétés sur la microgéométrie, ou l'entropie d'une variable par rapport à d'autres

$$H_b(X_1, ..., X_n) = -\sum_{x_1 \in X_1} ... \sum_{x_n \in X_n} p(x_1, ..., x_n) \log_b(p(x_1, ..., x_n)), \tag{6.2.2}$$

où $p(x_1, ..., x_n)$ est la probabilité que ces valeurs se réalisent ensemble. L'entropie des variables supposées être décorrélées les unes des autres peut probablement donner une information supplémentaire sur l'erreur. Les mesures des différentes entropies pourraient être utilisées comme caractéristiques supplémentaires pour affiner la régression linéaire afin de prédire l'erreur.

Comparaison du modèle de D'Eon à des matériaux réels. Bien qu'encore largement utilisé, le modèle théorique de Smith et Ashikhmin et al. n'est pas le plus récent, ni le plus général. Récemment en 2023, D'Eon et al. [**dBWZ23**] ont proposé un nouveau modèle permettant de relâcher les contraintes de non-autocorrélation de la microsurface. Ils adaptent la théorie des microfacettes à des cartes de hauteurs non uniformes en permettant de fusionner des distributions de normales différentes en fonction de la hauteur. La distribution des normales totale de la microsurface est définie par plusieurs couches de différentes distributions posées les unes sur les autres. Leur modèle n'est cependant pas comparé à des données réelles, comme ils le précisent dans leurs limitations. Nous pensons que nos travaux peuvent être une piste de méthodologie pour étudier le modèle de D'Eon et al. dans un contexte de

matériaux réels. Un maillage peut être découpé en sous-maillages discontinus, séparés selon leurs hauteurs. Pour chacun, il est possible de récupérer la distribution discrète des micronormales et de paramétrer ainsi le modèle. La séparation sur les hauteurs peut être affinée pour obtenir des distributions les plus ergodiques possibles.

Correction du masquage pour les microsurfaces anisotropes. Nous proposons un facteur correctif seulement pour les microsurfaces isotropes. Cette limitation permet de créer une fonction 1D sur $\theta_{\boldsymbol{o}}$, indépendante de $\phi_{\boldsymbol{o}}$. Malheureusement, de nombreux matériaux qui nous entourent sont anisotropes et notre facteur correctif ne peut donc pas leur être appliqué. Il serait intéressant de généraliser la fonction à deux dimensions, également sur ϕ, afin de prendre en compte l'anisotropie des microsurfaces. Une possibilité serait d'explorer une approche par des distributions multidimensionnelles dépendantes de ϕ, pour chaque variable statistique (les hauteurs, les aires, les micronormales).

Modification de la microgéométrie. L'erreur du masquage est dépendante de la microgéométrie pour laquelle elle est calculée. Nous avons proposé une méthode pour corriger le masquage en gardant la même microsurface. Une autre possibilité pour améliorer l'exactitude du masquage théorique G_1 serait de s'intéresser à la microsurface elle-même et de la modifier pour que le modèle théorique évalue plus précisément son masquage. Grâce à la combinaison linéaire donnant la prédiction P, pour chaque microsurface, les caractéristiques peuvent être classées par ordre d'influence sur l'erreur (la caractéristique pondérée $X * w$). En considérant la caractéristique la plus influente (ou les caractéristiques), nous pensons qu'il est possible de mettre en place une stratégie pour modifier le maillage de la microsurface pour diminuer l'erreur tout en restant au plus proche de la microgéométrie initiale. Par exemple, si la prédiction d'une erreur indique que la caractéristique la plus influente est la moyenne des angles $\mu(\theta_{\boldsymbol{m}})$, alors diminuer cette moyenne fera probablement diminuer l'erreur tant qu'aucune autre caractéristique ne gagne en influence, contrecarrant la diminution de $\mu(\theta_{\boldsymbol{m}})$. Ceci peut être fait en modifiant la microsurface par un algorithme itératif réorientant chaque microfacette dont l'angle $\theta_{\boldsymbol{m}}$ est trop élevé, tout en minimisant la différence avec le maillage original. La fonction de coût utilisée dans un tel algorithme de minimisation peut être construite en combinant la distance de Hausdorff et la moyenne $\mu(\theta_{\boldsymbol{m}})$. Ainsi, à partir d'une microsurface définie par un maillage, il serait possible de proposer une déformation légère permettant de calculer un masquage théorique plus précis sur le nouveau maillage. Il est en plus possible de combiner cela avec la solution de correction proposée dans le chapitre 5.

Analyse fréquentielle. L'étude que nous avons proposée est basée sur les statistiques des aires, orientations et hauteurs des microfacettes du maillage. Ces caractéristiques sont

calculées dans le domaine de l'espace 3D. Nous pensons qu'il serait intéressant d'étendre l'étude au domaine fréquentiel. Les transformations de Fourier peuvent être généralisées à n'importe quelle dimension, et une analyse fréquentielle peut être effectuée sur les cartes de hauteurs ou sur les maillages directement. Nous avons calculé, à partir des cartes de hauteurs de la base de données *PerTex*, les magnitudes des fréquences des hauteurs d'une microsurface donnée. La relation de certaines statistiques obtenues à partir de ces valeurs présentent une corrélation avec l'erreur, comme montré dans la figure 6.3. Ces caractéristiques pourraient être utilisées pour améliorer la prédiction P en ajoutant des caractéristiques pour la recherche d'une régression linéaire optimale. Elles apportent également la possibilité de modifier la microsurface dans le domaine fréquentiel puis de reconstruire la donnée (la carte de hauteurs ou le maillage) en lissant par exemple la microgéométrie ou en ajoutant du bruit.

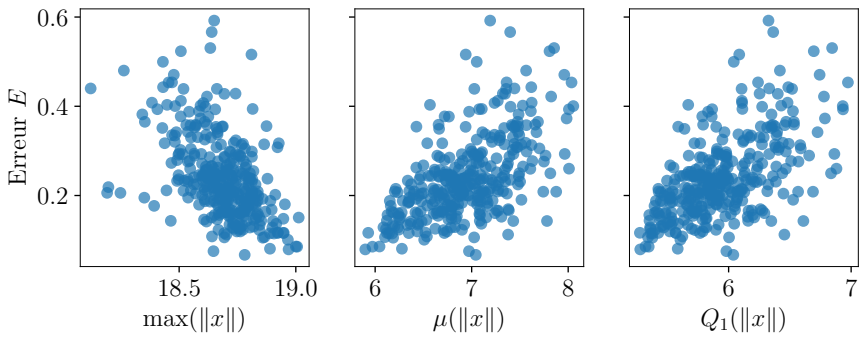


Figure 6.3 – Rapport entre l'erreur E (en ordonnée) et le maximum des magnitudes $\max(\|x\|)$, la moyenne des magnitudes $\mu(\|x\|)$ et le premier quartile des magnitudes $Q_1(\|x\|)$.

Théorie des *microflakes*. La théorie des microfacettes s'étend à la théorie des *microflakes* [**JAM+10**, **HDCD15**, **DHd16**]. Elle considère qu'une microsurface est constituée de microfacettes non connectées les unes aux autres flottant dans un substrat. Elle modélise une microgéométrie théorique discontinue. Cette théorie permet de respecter plus facilement la contrainte de non-autocorrélation de la microsurface puisqu'elle ne requiert pas que les microfacettes s'organisent dans une microgéométrie continue, corrélant ainsi forcément leurs hauteurs. La théorie des *microflakes* est également fortement utilisée dans le domaine du rendu physique réaliste. Aussi, l'analyse de l'erreur du modèle théorique comme celle que nous proposons pour le modèle de Smith et Ashikhmin et al. pourrait être étendue à cette théorie.

6.2.2. Perspectives à long terme

Réflexions lumineuses multiples. Le facteur d'atténuation géométrique G permet de prendre en compte le masquage et l'ombrage directs. La lumière qui rebondit sur une microfacette et repart dans une autre direction peut être bloquée par une autre microfacette distante, et alors cette lumière ne sort donc pas directement de la géométrie. Cependant, son chemin ne s'arrête pas là et elle continue à être réfléchie jusqu'à, au final, sortir de la microgéométrie. Lorsque ces inter-réflexions ne sont pas prises en compte, les matériaux rugueux semblent légèrement plus sombres puisque seules les contributions directes sont effectives, négligeant les contributions indirectes. L'énergie totale n'est pas conservée.

Plusieurs travaux proposent une amélioration de la théorie originale des microfacettes pour prendre en compte les réflexions multiples entre les microfacettes. Lee et al. [**LJJ+18**] et Xie et Hanrahan [**XH18**] proposent une formule analytique pour prendre en compte l'énergie manquante avec le modèle des cavités en V, pratique pour dériver des analyses numériques. Heitz et al. [**HHdD16**] et Dupuy et al. [**DHd16**] montrent qu'il est possible de mesurer l'énergie manquante pour le modèle de Smith grâce à un algorithme de marche aléatoire à l'intérieur de la microgéométrie, aux temps de calcul conséquents. Récemment en 2022, Wang et al. [**WJF+22**] proposent deux nouveaux termes de masquage-ombrage, l'un corrélé aux hauteurs et l'autre non, améliorant grandement les temps de calcul et diminuant le bruit des rendus. Leur méthode est cependant toujours restreinte au profil de Smith et aux distributions de micronormales usuelles, telles que Beckmann et GGX. En utilisant un algorithme de tracer de chemins bidirectionnel sur le maillage de la microsurface pour mesurer une fonction de masquage-ombrage de référence, il est envisageable d'étudier les problèmes causés par les microsurfaces réelles ne suivant pas la théorie de Smith et d'y apporter une correction.

Niveaux de détail / Multi-échelle. L'utilisation de cartes de hauteurs de hautes résolutions a été grandement popularisée pour décrire des microgéométries, permettant de produire de nombreuses apparences différentes. Comparées à des cartes de normales, elles améliorent le réalisme du masquage-ombrage et des silhouettes. Cependant, il n'est pas envisageable de générer un maillage de haute résolution lorsque la microsurface couverte par la carte de hauteurs ne s'étend que sur quelques pixels, voire même est sous-pixellaire. Pour cela, les cartes de hauteurs doivent être préfiltrées pour adapter leur résolution au niveau de détail pertinent. Ce processus n'est pas trivial, puisque réduire la résolution d'une carte de hauteurs lisse le relief qu'elle décrit et diminue donc les effets de masquage (et d'ombrage), menant à

des rendus trop clairs. La même problématique est posée avec l'usage de cartes de normales qui sont également complexes à préfiltrer.

Plusieurs travaux ont été menés pour développer des méthodes de préfiltrage des textures, qu'il s'agisse de cartes de normales ou de cartes de hauteurs. Au fur et à mesure des années, les nombreux verrous ont eu des solutions apportées, faisant apparaître de nombreux modèles multi-échelles de plus en plus performants, aux différents avantages (généralité des distributions, préservation des détails, prise en compte des inter-réflexions, BRDF variant spatialement, coût de stockage raisonnable/constant, aucune ou légère précomputation requise, temps de calcul efficaces/constants). Parmi ces travaux, plusieurs se concentrent sur le terme D de distribution des micronormales de la théorie des microfacettes [**YHJ+14**, **YHMR16**, **DLW+22**] et utilisent le modèle commun de masquage-ombrage de Smith. Aussi, bien qu'une amélioration considérable soit faite sur la distribution D et son adaptation à différents niveaux de détail, la généralisation de ces travaux à des distributions générales est toujours détériorée par l'utilisation du profil théorique de Smith dans le calcul du masquage et de l'ombrage. Wu et al. [**WZYR19**] proposent une toute nouvelle BRDF prenant en compte le masquage et l'ombrage, ainsi que les inter-réflexions et des distributions générales. Cependant, leurs résultats montrent la limitation de leur modèle lorsque la carte de hauteurs produit des déplacement trop importants. Cette limitation n'est pas détaillée et il pourrait être intéressant d'approfondir le lien entre l'erreur de leur modèle et la distribution des hauteurs décrit par la texture.

Multi-couches. De nombreux matériaux du monde réel sont constitués de plusieurs fines couches au travers desquelles la lumière se disperse avant de ressortir dans une certaine direction, réfléchie (du même côté que son arrivée) ou réfractée (du côté opposé). Un vieux meuble en bois peut être couvert d'un vernis (surface du vernis et surface du bois) contenant des paillettes, un tissus peut être floqué d'un motif, une voiture peut être peinte avec une couche matte au-dessous d'une couche brillante. A un niveau encore plus microscopique, la peau suit une décomposition en plusieurs couches distinctes de différentes cellules, également apparente dans la structure d'une feuille d'arbre. Les interactions de lumière entre ces différentes couches sont complexes et ne peuvent pas être représentées par une simple combinaison linéaire des différents profils de BSDFs.

Hanrahan et Krueger [**HK93**] introduisent en 1993 un modèle analytique de matériaux multi-couches permettant d'approcher des effets de lumière variés à l'intérieur de la surface et passant à travers différents profils de BSDFs différents. Chaque couche est paramétrée par un ensemble de propriétés définissant son épaisseur, son indice de réfraction et comment la lumière est dispersée à l'intérieur de la couche. La BSDF du matériau global est obtenue en calculant

analytiquement l'éclairement direct en combinant tous ces paramètres, et avec un algorithme de Monte Carlo pour l'éclairement indirect. A partir de ce modèle, plusieurs améliorations ou variations ont été apportées, mais des verrous restent pour chacune. Trois approches différentes existent pour les matériaux multi-couches, grossièrement résumés comme suit. La première approche cherche à donner une formule analytique en combinant des BSDFs statistiques en un seul modèle [**WW07**, **GQGP17**, **Bel18**, **YYTM19**, **WB20**, **WJHY22**, **dDB22**]. Ces méthodes sont en général rapides et efficaces mais reposent sur des approximations et de fortes contraintes (par exemple pas d'anisotropie, ou encore seulement des BSDFs à microfacettes). La deuxième approche considère les différentes BSDFs discrètement et propose un système pour estimer précisément les effets de dispersion de la lumière au sein de chaque couche [**Sta01**, **JdJM14**, **ZJ18**]. Plus précises et permettant une meilleure prise en compte des interactions à l'intérieur de la surface, ces méthodes sont lourdes à calculer et sont donc difficilement applicables à des BSDFs variant spatialement (puisqu'il faudrait recalculer toute la discrétisation). La troisième approche plus récente utilise des estimateurs de Monte Carlo pour évaluer la BSDF stochastiquement [**GHZ18**, **XWHM20**, **GGN20**, **GMG+20**]. Bien que précise, cette méthode ajoute du bruit et donc de la variance au résultat, et requiert de longs temps de calcul pour converger vers un rendu stable.

Plusieurs modèles multi-couches considèrent des interfaces entre chaque couche déterminant comment la lumière passe de l'une à l'autre. Ces interfaces ont une BRDF et une BTDF souvent contrainte, elles doivent par exemple être Lambertiennes ou encore respectant la théorie des microfacettes. Lorsque la lumière arrive selon une certaine direction sur une interface couvrant une couche, elle est réfractée dans une autre direction dépendante de l'indice de réfraction de l'interface. La quantité de lumière qui continue alors de parcourir le matériau dans les couches inférieures dépend du masquage de l'interface pour la direction réfractée. Une meilleure compréhension du masquage d'une interface à microfacettes permettrait d'approfondir le comportement de la lumière passant entre les différentes couches d'un matériau multi-couches à interfaces.

Références bibliographiques

[APS00] Michael Ashikhmin, Simon Premože, and Peter Shirley. A microfacet-based BRDF generator. In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH, pages 65—-74. ACM, 2000.

[BBS02] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard. One- and two-dimensional shadowing functions for any height and slope stationary uncorrelated surface in the monostatic and bistatic configurations. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 50(3) :312–324, 2002.

[Bel18] Laurent Belcour. Efficient rendering of layered materials using an atomic decomposition with statistical operators. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 37(4), July 2018.

[Bli77] James F. Blinn. Models of light reflection for computer synthesized pictures. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 11(2) :192—-198, July 1977.

[BS63] P. Beckmann and A. Spizzichino. *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. International series of monographs on electromagnetic waves. Pergamon Press ; distributed in the Western Hemisphere by Macmillan, New York, 1963.

[CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10(6) :350–355, 1978.

[CCM19] Xavier Chermain, Frédéric Claux, and Stéphane Mérillou. Glint rendering based on a multiple-scattering patch BRDF. *Computer Graphics Forum*, 38(4) :27–37, 2019.

[CT82] R. L. Cook and K. E. Torrance. A reflectance model for computer graphics. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 1(1) :7—-24, January 1982.

[dBWZ23] Eugene d'Eon, Benedikt Bitterli, Andrea Weidlich, and Tizian Zeltner. Microfacet theory for non-uniform heightfields. In *SIGGRAPH 2023 Conference Papers*. ACM, 2023.

[dDB22] Heloise de Dinechin and Laurent Belcour. Rendering layered materials with diffuse interfaces. *Proc. ACM Comput. Graph. Interact. Tech.*, 5(1), May 2022.

[Dem17] Lennart Demes. ambientCG - public domain resources for physically based rendering. Available at https://ambientcg.com/, 2017.

[DG01] J.M. Dischler and D. Ghazanfarpour. A survey of 3D texturing. *Computers & Graphics*, 25(1) :135–151, 2001. Shape Blending.

[DHd16] Jonathan Dupuy, Eric Heitz, and Eugene d'Eon. Additional progress towards the unification of microfacet and microflake theories. In *Proceedings of the Eurographics Symposium on Rendering : Experimental Ideas and Implementations*, EGSR, pages 55—-63. Eurographics Association, 2016.

[DLW+22] Hong Deng, Yang Liu, Beibei Wang, Jian Yang, Lei Ma, Nicolas Holzschuch, and Ling-Qi Yan. Constant-cost spatio-angular prefiltering of glinty appearance using tensor decomposition. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 41(2), January 2022.

[DLY+20] Junyu Dong, Jun Liu, Kang Yao, Mike Chantler, Lin Qi, Hui Yu, and Muwei Jian. Survey of procedural methods for two-dimensional texture generation. *Sensors*, 20(4), 2020.

[GAM+21] Lena Gieseke, Paul Asente, Radomír Měch, Bedrich Benes, and Martin Fuchs. A survey of control mechanisms for creative pattern generation. *Computer Graphics Forum*, 40(2) :585–609, 2021.

[GGN18] Luis E. Gamboa, Jean-Philippe Guertin, and Derek Nowrouzezahrai. Scalable appearance filtering for complex lighting effects. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 37(6), December 2018.

[GGN20] Luis E. Gamboa, Adrien Gruson, and Derek Nowrouzezahrai. An efficient transport estimator for complex layered materials. *Computer Graphics Forum*, 39(2) :363–371, 2020.

[GHZ18] Yu Guo, Miloš Hašan, and Shuang Zhao. Position-free Monte Carlo simulation for arbitrary layered BSDFs. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 37(6), December 2018.

[GMG+20] Ibón Guillén, Julio Marco, Diego Gutierrez, Wenzel Jakob, and Adrian Jarabo. A general framework for pearlescent materials. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 39(6), November 2020.

[GQGP17] Jie Guo, Jinghui Qian, Yanwen Guo, and Jingui Pan. Rendering thin transparent layers with extended normal distribution functions. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 23(9) :2108—-2119, September 2017.

[Hal12] Fraser Halley. *Perceptually relevant browsing environments for large texture databases.* PhD thesis, Heriot-Watt University, Edinburgh, UK, 2012.

[HDCD15] Eric Heitz, Jonathan Dupuy, Cyril Crassin, and Carsten Dachsbacher. The SGGX microflake distribution. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 34(4), July 2015.

[Hei14] Eric Heitz. Understanding the masking-shadowing function in microfacet-based BRDFs. *Journal of Computer Graphics Techniques (JCGT)*, 3(2) :48–107, June 2014.

[HHdD16] Eric Heitz, Johannes Hanika, Eugene d'Eon, and Carsten Dachsbacher. Multiple-scattering microfacet BSDFs with the Smith model. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 35(4), July 2016.

[HK93] Pat Hanrahan and Wolfgang Krueger. Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH, pages 165—-174. ACM, 1993.

[Jak10] Wenzel Jakob. Mitsuba renderer, 2010. http ://www.mitsuba-renderer.org.

[JAM+10] Wenzel Jakob, Adam Arbree, Jonathan T. Moon, Kavita Bala, and Steve Marschner. A radiative transfer framework for rendering materials with anisotropic structure. In *ACM SIGGRAPH 2010 Papers*, SIGGRAPH. ACM, 2010.

[JdJM14] Wenzel Jakob, Eugene d'Eon, Otto Jakob, and Steve Marschner. A comprehensive framework for rendering layered materials. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 33(4), July 2014.

[Joh49] N. L. Johnson. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36(1/2) :149–176, 1949.

[Kaj86] James T. Kajiya. The rendering equation. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 20(4) :143—-150, August 1986.

[Lab17] Sébastien Labarre. *Caractérisation et modélisation de la rugosité multi-échelle des surfaces naturelles par télédétection dans le domaine solaire*. PhD dissertation, Université Paris Diderot, Paris, FR, November 2017.

[Lam60] J.H. Lambert. *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*. Nineteenth Century Collections Online (NCCO) : Photography : The World through the Lens. sumptibus vidvae E. Klett, typis C.P. Detleffsen, 1760.

[Lew94] Robert R. Lewis. Making shaders more physically plausible. *Computer Graphics Forum*, 13(2) :109–120, 1994.

[LJJ+18] Joo Ho Lee, Adrian Jarabo, Daniel S. Jeon, Diego Gutierrez, and Min H. Kim. Practical multiple scattering for rough surfaces. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 37(6), December 2018.

[LLC+10] A. Lagae, S. Lefebvre, R. Cook, T. DeRose, G. Drettakis, D.S. Ebert, J.P. Lewis, K. Perlin, and M. Zwicker. A survey of procedural noise functions. *Computer Graphics Forum*, 29(8) :2579–2600, 2010.

[Loo87] Charles Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master's thesis, Department of Mathematics, The University of Utah, Masters Thesis, January 1987.

[MBT+18] Daniel Meneveaux, Benjamin Bringier, Emmanuelle Tauzia, M Ribardière, and Lionel Simonot. Rendering rough opaque materials with interfaced lambertian microfacets. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 24(3) :1368–1380, March 2018.

[Nic65] Fred E. Nicodemus. Directional reflectance and emissivity of an opaque surface. *Appl. Opt.*, 4(7) :767–775, July 1965.

[ON94] Michael Oren and Shree K. Nayar. Generalization of lambert's reflectance model. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH, pages 239—-246. ACM, 1994.

[Pho75] Bui Tuong Phong. Illumination for computer generated pictures. *Communications of the ACM*, 18 :311–317, 1975.

[PJBK23] Nicolas Prouteau, Clément Joubert, Benjamin Bringier, and Majdi Khoudeir. Continuous material reflectance map for deep photometric stereo. *J. Opt. Soc. Am. A*, 40(4) :792–802, April 2023.

[RBSM19] Mickaël Ribardière, Benjamin Bringier, Lionel Simonot, and Daniel Meneveaux. Microfacet BSDFs generated from NDFs and explicit microgeometry. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 38(5), June 2019.

[RMBS17] M. Ribardière, D. Meneveaux, B. Bringier, and L. Simonot. Appearance of interfaced lambertian microfacets, using std distribution. In *Proceedings of the Workshop on Material Appearance Modeling*, MAM, pages 1—4. Eurographics Association, 2017.

[Sch94] Christophe Schlick. An inexpensive BRDF model for physically-based rendering. *Computer Graphics Forum*, 13(3) :233–246, 1994.

[Sim09] Lionel Simonot. Photometric model of diffuse surfaces described as a distribution of interfaced lambertian facets. *Appl. Opt.*, 48(30) :5793–5801, October 2009.

[Smi67] Bruce G. Smith. Geometrical shadowing of a random rough surface. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 15(5) :668–671, 1967.

[Sta01] Jos Stam. An illumination model for a skin layer bounded by rough surfaces. In S. J. Gortler and K. Myszkowski, editors, *Eurographics Workshop on Rendering*. The Eurographics Association, 2001.

[TR75] T. S. Trowbridge and K. P. Reitz. Average irregularity representation of a rough surface for ray reflection. *J. Opt. Soc. Am.*, 65(5) :531–536, May 1975.

[TS67] Kenneth E. Torrance and Ephraim M. Sparrow. Theory for off-specular reflection from roughened surfaces. *J. Opt. Soc. Am.*, 57(9) :1105–1114, September 1967.

[WB20] Philippe Weier and Laurent Belcour. Rendering layered materials with anisotropic interfaces. *Journal of Computer Graphics Techniques (JCGT)*, 9(2) :37–57, June 2020.

[WJF+22] Beibei Wang, Wenhua Jin, Jiahui Fan, Jian Yang, Nicolas Holzschuch, and Ling-Qi Yan. Position-free multiple-bounce computations for Smith microfacet BSDFs. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 41(4) :134 :1–134 :14, 2022.

[WJHY22] Beibei Wang, Wenhua Jin, Miloš Hašan, and Ling-Qi Yan. Spongecake : A layered microflake surface appearance model. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 42(1), September 2022.

[WMLT07] Bruce Walter, Stephen R. Marschner, Hongsong Li, and Kenneth E. Torrance. Microfacet models for refraction through rough surfaces. In *Proceedings of the 18th Eurographics Conference on Rendering Techniques*, EGSR, pages 195—-206. Eurographics Association, 2007.

[Woo92] Robert Woodham. Photometric method for determining surface orientation from multiple images. *Optical Engineering*, 19, January 1992.

[WW07] Andrea Weidlich and Alexander Wilkie. Arbitrarily layered micro-facet surfaces. In *Proceedings of the 5th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australia and Southeast Asia*, GRAPHITE, pages 171—-178. ACM, 2007.

[WZYR19] Lifan Wu, Shuang Zhao, Ling-Qi Yan, and Ravi Ramamoorthi. Accurate appearance preserving prefiltering for rendering displacement-mapped surfaces. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 38(4), July 2019.

[XH18] Feng Xie and Pat Hanrahan. Multiple scattering from distributions of specular v-grooves. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 37(6), December 2018.

[XWHM20] Mengqi (Mandy) Xia, Bruce Walter, Christophe Hery, and Steve Marschner. Gaussian product sampling for rendering layered materials. *Computer Graphics Forum*, 39(1) :420–435, 2020.

[YHJ+14] Ling-Qi Yan, Miloš Hašan, Wenzel Jakob, Jason Lawrence, Steve Marschner, and Ravi Ramamoorthi. Rendering glints on high-resolution normal-mapped specular surfaces. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 33(4), July 2014.

[YHMR16] Ling-Qi Yan, Miloš Hašan, Steve Marschner, and Ravi Ramamoorthi. Position-normal distributions for efficient rendering of specular microstructure. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 35(4), July 2016.

[YYTM19] Tomoya Yamaguchi, Tatsuya Yatagawa, Yusuke Tokuyoshi, and Shigeo Morishima. Real-time rendering of layered materials with anisotropic normal distributions. In *SIGGRAPH Asia 2019 Technical Briefs*, SA, pages 87—-90. ACM, 2019.

[ZJ18] Tizian Zeltner and Wenzel Jakob. The layer laboratory : A calculus for additive and subtractive composition of anisotropic surface reflectance. *ACM Trans. Graphs. (TOG)*, 37(4), July 2018.

[ZXW19] Junqiu Zhu, Yanning Xu, and Lu Wang. A stationary SVBRDF material modeling method based on discrete microsurface. *Computer Graphics Forum*, 38(7) :745–754, 2019.

Annexe A

Détail des prédictions

A.1. $P \approx E$, 5 caractéristiques, surfaces mesurées

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 423 données provenant des bases de données :

— 334 de *PerTex* [**Hal12**],

— 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

— 2 de *IPGP* [**Lab17**],

— 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.

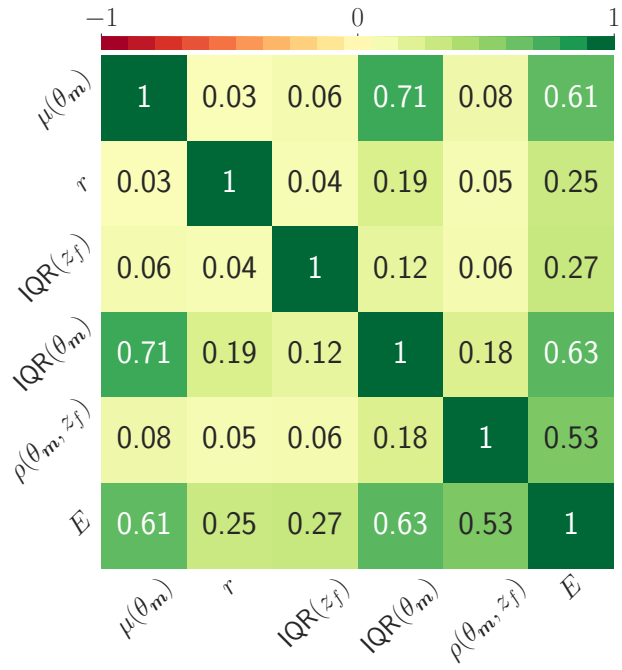


Figure A.1 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E \approx P = 0.222\,\mu(\theta_m) + 0.045\,r + 0.035\,\mathrm{IQR}(z_f) + 0.141\,\mathrm{IQR}(\theta_m) + 0.172\,\rho(\theta_m,z_f) + 0.018.$$

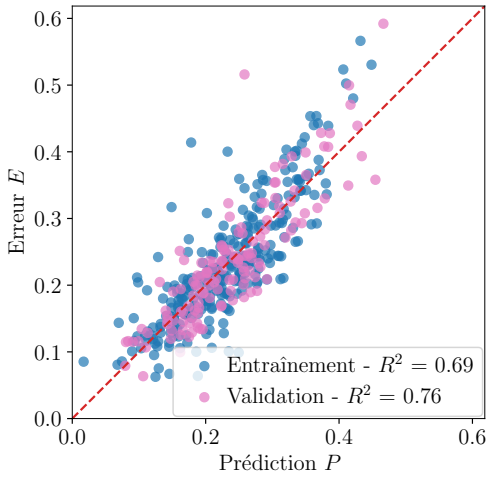


Figure A.2 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.1 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	15	0.12	0.0015	0.08	0.09	0.12	0.13	0.21	0.04	0.13	0.0028
0.1	0.2	130	0.16	0.0023	0.06	0.13	0.16	0.19	0.41	0.06	0.35	0.002
0.2	0.3	193	0.24	0.0029	0.1	0.2	0.23	0.26	0.52	0.05	0.42	0.0024
0.3	0.4	73	0.34	0.0033	0.21	0.3	0.34	0.39	0.45	0.09	0.24	0.0025
0.4	0.5	12	0.48	0.0055	0.35	0.43	0.49	0.53	0.59	0.1	0.24	0.0076

Tableau A.2 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.01	0.02	1	0.09	0.0	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.0	0.0	
0.02	0.03	0										
0.03	0.04	0										
0.04	0.05	0										
0.05	0.06	0										
0.06	0.07	2	0.11	0.001	0.08	0.1	0.11	0.13	0.14	0.03	0.06	0.0028
0.07	0.08	2	0.08	0.0	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.0	0.01	0.0001
0.08	0.09	3	0.11	0.0	0.1	0.11	0.11	0.12	0.12	0.01	0.02	0.0008
0.09	0.1	7	0.15	0.0016	0.12	0.12	0.12	0.18	0.21	0.06	0.1	0.0042
0.1	0.11	4	0.11	0.0007	0.06	0.09	0.11	0.13	0.13	0.03	0.07	0.0007
0.11	0.12	6	0.13	0.0008	0.11	0.12	0.13	0.13	0.19	0.01	0.09	0.0012
0.12	0.13	9	0.12	0.0024	0.06	0.1	0.11	0.12	0.24	0.02	0.18	0.0024
0.13	0.14	5	0.16	0.0008	0.13	0.14	0.14	0.18	0.2	0.04	0.08	0.0015
0.14	0.15	18	0.15	0.0024	0.07	0.13	0.15	0.16	0.32	0.03	0.25	0.0024
0.15	0.16	14	0.16	0.0007	0.12	0.14	0.16	0.19	0.2	0.05	0.08	0.0007
0.16	0.17	21	0.17	0.0014	0.1	0.15	0.16	0.18	0.25	0.04	0.15	0.0013
0.17	0.18	22	0.18	0.004	0.11	0.15	0.16	0.2	0.41	0.05	0.3	0.0041
0.18	0.19	16	0.17	0.0015	0.06	0.15	0.17	0.2	0.21	0.05	0.15	0.002
0.19	0.2	15	0.19	0.0011	0.13	0.17	0.19	0.21	0.25	0.04	0.12	0.0011
0.2	0.21	28	0.19	0.0016	0.11	0.17	0.2	0.22	0.31	0.04	0.2	0.0017
0.21	0.22	14	0.22	0.0005	0.19	0.2	0.22	0.23	0.27	0.03	0.08	0.0005
0.22	0.23	27	0.22	0.0017	0.13	0.19	0.22	0.26	0.29	0.07	0.16	0.0018
0.23	0.24	19	0.23	0.0042	0.1	0.19	0.23	0.25	0.4	0.06	0.3	0.0042
0.24	0.25	18	0.23	0.0019	0.1	0.21	0.24	0.25	0.28	0.05	0.18	0.0022
0.25	0.26	26	0.25	0.0047	0.18	0.21	0.23	0.27	0.52	0.06	0.33	0.0047
0.26	0.27	21	0.25	0.0009	0.19	0.23	0.24	0.27	0.3	0.04	0.11	0.0011
0.27	0.28	18	0.26	0.0021	0.19	0.22	0.25	0.29	0.35	0.07	0.16	0.0025
0.28	0.29	13	0.3	0.0019	0.23	0.26	0.29	0.32	0.37	0.06	0.14	0.002
0.29	0.3	9	0.26	0.002	0.21	0.23	0.25	0.29	0.36	0.06	0.15	0.0032
0.3	0.31	9	0.32	0.002	0.24	0.29	0.33	0.35	0.38	0.06	0.13	0.0023
0.31	0.32	14	0.3	0.003	0.21	0.27	0.3	0.32	0.39	0.05	0.18	0.0032
0.32	0.33	7	0.34	0.0017	0.28	0.32	0.33	0.37	0.4	0.06	0.12	0.002
0.33	0.34	13	0.34	0.0022	0.26	0.29	0.36	0.38	0.4	0.08	0.14	0.0023
0.34	0.35	8	0.36	0.002	0.29	0.33	0.35	0.4	0.42	0.07	0.13	0.0021
0.35	0.36	6	0.36	0.0023	0.29	0.35	0.36	0.37	0.45	0.02	0.16	0.0024
0.36	0.37	7	0.38	0.0038	0.29	0.33	0.39	0.44	0.45	0.12	0.16	0.0041
0.37	0.38	4	0.38	0.0014	0.33	0.36	0.39	0.41	0.43	0.05	0.1	0.0016
0.38	0.39	5	0.39	0.0017	0.34	0.35	0.41	0.43	0.44	0.08	0.1	0.0016
0.39	0.4	0										
0.4	0.41	1	0.52	0.0	0.52	0.52	0.52	0.52	0.52	0.0	0.0	
0.41	0.42	4	0.46	0.0039	0.35	0.44	0.49	0.5	0.5	0.06	0.15	0.0056
0.42	0.43	2	0.46	0.0004	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.02	0.04	0.0018
0.43	0.44	2	0.48	0.0075	0.39	0.44	0.48	0.52	0.57	0.09	0.17	0.0098
0.44	0.45	1	0.53	0.0	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.0	0.0	
0.45	0.46	1	0.36	0.0	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.0	0.0	

Tableau A.3 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.014	0.029	0.053	0.059	0.074	0.094	0.103	0.107	0.121	0.147

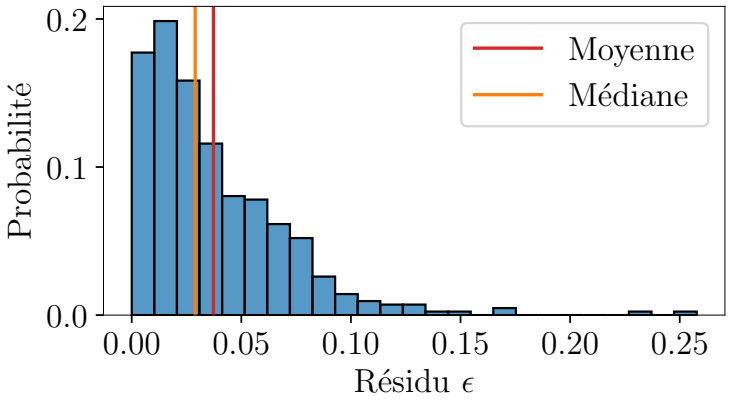


Figure A.3 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.2. $P \approx E$, 25 caractéristiques, surfaces mesurées

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 423 données provenant des bases de données :

  — 334 de *PerTex* [**Hal12**],

  — 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

  — 2 de *IPGP* [**Lab17**],

  — 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

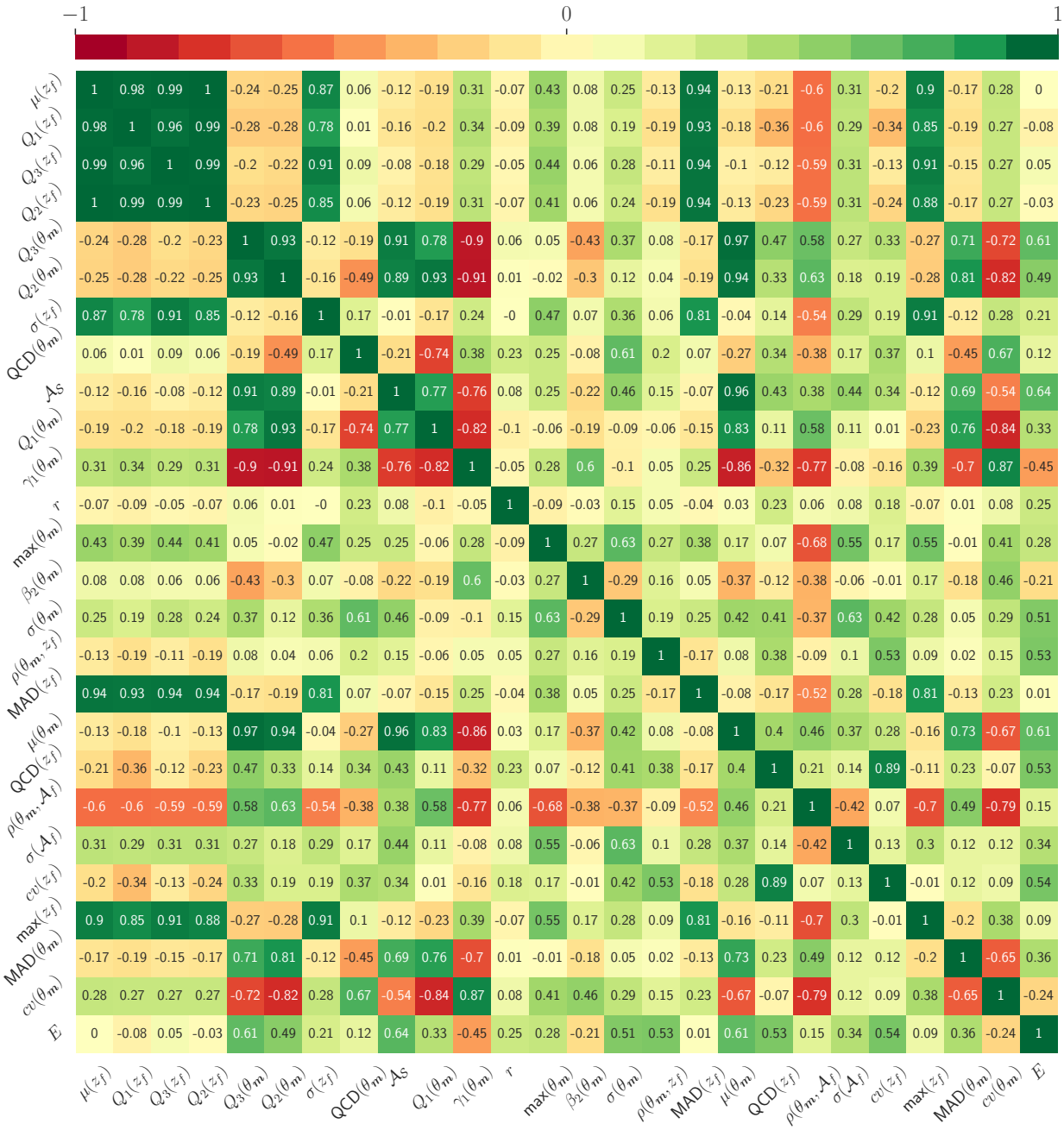


Figure A.4 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E \approx P = &- 0.313\,\mu(z_f) + 0.283\,Q_1(z_f) + 0.12\,Q_3(z_f) - 0.096\,Q_2(z_f) \\
&+ 0.603\,Q_3(\theta_m) - 0.651\,Q_2(\theta_m) + 0.18\,\sigma(z_f) - 0.633\,\mathrm{QCD}(\theta_m) \\
&+ 0.225\,\mathcal{A}_{\mathcal{S}} - 0.436\,Q_1(\theta_m) - 0.069\,\gamma_1(\theta_m) + 0.055\,r \\
&+ 0.113\,\max(\theta_m) + 0.008\,\beta_2(\theta_m) + 0.218\,\sigma(\theta_m) + 0.153\,\rho(\theta_m,z_f) \\
&- 0.006\,\mathrm{MAD}(z_f) - 0.09\,\mu(\theta_m) + 0.118\,\mathrm{QCD}(z_f) + 0.066\,\rho(\theta_m,\mathcal{A}_f) \\
&- 232972.929\,\sigma(\mathcal{A}_f) - 0.039\,cv(z_f) + 0.001\,\max(z_f) + 0.004\,\mathrm{MAD}(\theta_m) \\
&- 0.001\,cv(\theta_m) + 0.001.
\end{aligned}
$$

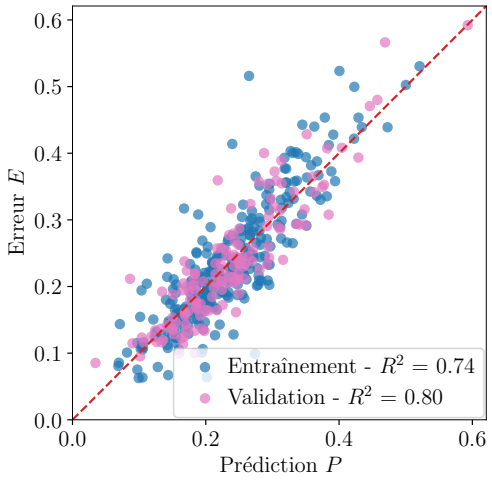


Figure A.5 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.4 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	10	0.11	0.0017	0.06	0.08	0.09	0.12	0.21	0.03	0.15	0.0027
0.1	0.2	147	0.16	0.0018	0.06	0.13	0.16	0.19	0.32	0.06	0.25	0.0015
0.2	0.3	189	0.24	0.0031	0.06	0.21	0.24	0.27	0.52	0.06	0.45	0.0024
0.3	0.4	63	0.35	0.0023	0.24	0.31	0.35	0.38	0.45	0.07	0.21	0.0021
0.4	0.5	11	0.46	0.0024	0.39	0.43	0.45	0.49	0.57	0.06	0.17	0.0031

Tableau A.5 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.03	0.04	1	0.09	0.0	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.0	0.0	
0.04	0.05	0										
0.05	0.06	0										
0.06	0.07	2	0.08	0.0	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.0	0.0	0.0002
0.07	0.08	1	0.14	0.0	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.0	0.0	
0.08	0.09	3	0.14	0.0024	0.1	0.11	0.11	0.16	0.21	0.06	0.11	0.0055
0.09	0.1	3	0.08	0.0005	0.06	0.07	0.08	0.1	0.12	0.03	0.05	0.0007
0.1	0.11	11	0.12	0.001	0.06	0.11	0.11	0.12	0.19	0.01	0.13	0.0012
0.11	0.12	2	0.16	0.0016	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	0.04	0.08	0.0043
0.12	0.13	7	0.12	0.0004	0.08	0.12	0.13	0.13	0.15	0.01	0.07	0.0005
0.13	0.14	6	0.14	0.0007	0.12	0.12	0.12	0.13	0.19	0.02	0.08	0.0007
0.14	0.15	12	0.15	0.0021	0.07	0.12	0.14	0.18	0.24	0.05	0.18	0.0022
0.15	0.16	22	0.15	0.0009	0.11	0.13	0.15	0.18	0.21	0.05	0.11	0.0009
0.16	0.17	19	0.16	0.0023	0.1	0.14	0.16	0.16	0.32	0.02	0.22	0.0022
0.17	0.18	19	0.18	0.0009	0.13	0.16	0.18	0.2	0.23	0.04	0.1	0.0008
0.18	0.19	27	0.19	0.0016	0.1	0.17	0.19	0.21	0.31	0.04	0.21	0.0016
0.19	0.2	22	0.17	0.0015	0.1	0.14	0.17	0.2	0.27	0.06	0.17	0.002
0.2	0.21	25	0.2	0.0017	0.06	0.18	0.19	0.22	0.29	0.04	0.23	0.0017
0.21	0.22	18	0.21	0.0023	0.13	0.19	0.21	0.24	0.36	0.05	0.23	0.0023
0.22	0.23	18	0.22	0.001	0.14	0.2	0.22	0.25	0.26	0.05	0.12	0.001
0.23	0.24	19	0.24	0.0028	0.18	0.21	0.23	0.26	0.41	0.05	0.23	0.0027
0.24	0.25	25	0.23	0.0012	0.13	0.21	0.24	0.24	0.28	0.03	0.15	0.0016
0.25	0.26	23	0.25	0.0012	0.18	0.23	0.24	0.28	0.32	0.05	0.14	0.0013
0.26	0.27	17	0.28	0.0045	0.21	0.24	0.26	0.3	0.52	0.05	0.31	0.0046
0.27	0.28	13	0.25	0.0044	0.1	0.22	0.25	0.28	0.37	0.07	0.27	0.005
0.28	0.29	12	0.28	0.003	0.21	0.24	0.27	0.3	0.4	0.06	0.19	0.003
0.29	0.3	19	0.29	0.0025	0.2	0.24	0.29	0.33	0.35	0.09	0.15	0.0025
0.3	0.31	5	0.33	0.0011	0.29	0.29	0.32	0.36	0.37	0.07	0.08	0.0017
0.31	0.32	12	0.32	0.0022	0.24	0.29	0.32	0.36	0.39	0.07	0.15	0.0021
0.32	0.33	8	0.34	0.0014	0.27	0.33	0.35	0.36	0.4	0.03	0.14	0.0019
0.33	0.34	10	0.34	0.0021	0.26	0.3	0.35	0.39	0.4	0.09	0.14	0.0022
0.34	0.35	5	0.33	0.0032	0.29	0.29	0.31	0.32	0.44	0.02	0.15	0.0035
0.35	0.36	6	0.37	0.0018	0.29	0.35	0.37	0.39	0.43	0.04	0.14	0.0021
0.36	0.37	6	0.37	0.0012	0.34	0.35	0.37	0.38	0.44	0.04	0.1	0.0013
0.37	0.38	4	0.37	0.0023	0.33	0.34	0.35	0.38	0.45	0.03	0.12	0.0022
0.38	0.39	5	0.37	0.0016	0.31	0.34	0.37	0.41	0.41	0.07	0.1	0.0019
0.39	0.4	2	0.39	0.0012	0.36	0.38	0.39	0.41	0.43	0.03	0.07	0.0013
0.4	0.41	2	0.47	0.0033	0.41	0.44	0.47	0.49	0.52	0.06	0.12	0.0076
0.41	0.42	0										
0.42	0.43	4	0.44	0.0016	0.39	0.41	0.44	0.46	0.5	0.05	0.11	0.0019
0.43	0.44	1	0.44	0.0	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.0	0.0	
0.44	0.45	1	0.47	0.0	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.0	0.0	
0.45	0.46	1	0.48	0.0	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.0	0.0	
0.46	0.47	1	0.57	0.0	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.0	0.0	
0.47	0.48	1	0.44	0.0	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.0	0.0	
0.48	0.49	0										
0.49	0.5	0										
0.5	0.51	1	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.0	
0.51	0.52	0										
0.52	0.53	1	0.53	0.0	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.0	0.0	
0.53	0.54	0										
0.54	0.55	0										
0.55	0.56	0										
0.56	0.57	0										
0.57	0.58	0										
0.58	0.59	0										

Tableau A.6 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.013	0.027	0.045	0.052	0.074	0.084	0.091	0.098	0.117	0.141

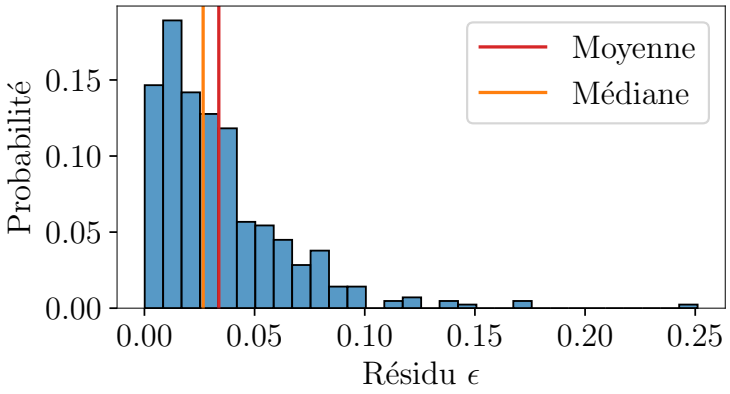


Figure A.6 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.3. $P \approx E$, 5 caractéristiques, *PerTex*

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 334 données provenant de *PerTex* [**Hal12**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.

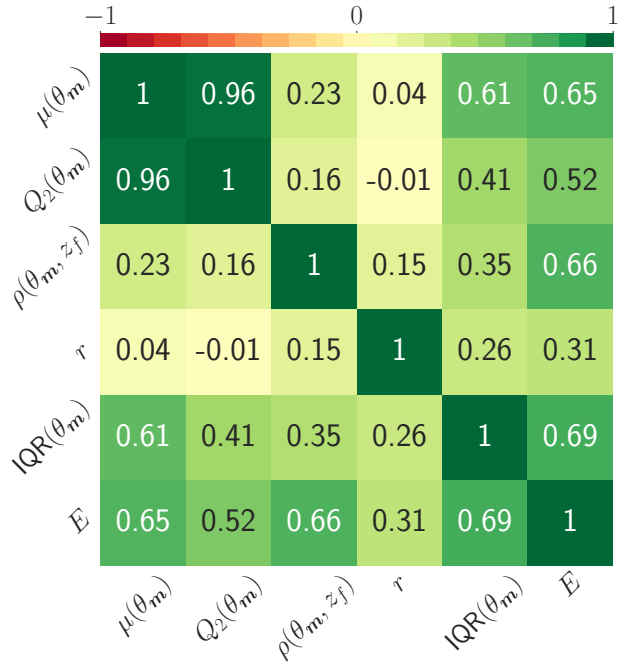


Figure A.7 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E \approx P = 0.616\,\mu(\theta_m) - 0.327\,Q_2(\theta_m) + 0.172\,\rho(\theta_m, z_f) + 0.048\,r + 0.071\,\mathrm{IQR}(\theta_m) + 0.009.$$

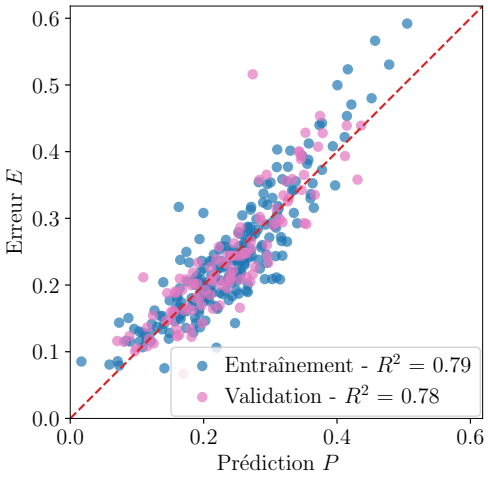


Figure A.8 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.7 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	14	0.11	0.0005	0.08	0.09	0.11	0.12	0.15	0.03	0.07	0.0016
0.1	0.2	99	0.17	0.0018	0.07	0.14	0.16	0.19	0.32	0.05	0.25	0.0014
0.2	0.3	145	0.24	0.0025	0.11	0.21	0.23	0.26	0.52	0.05	0.41	0.0018
0.3	0.4	63	0.34	0.0033	0.21	0.29	0.34	0.38	0.45	0.09	0.25	0.0022
0.4	0.5	12	0.46	0.0033	0.36	0.43	0.46	0.51	0.57	0.07	0.21	0.0039

Tableau A.8 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.01	0.02	1	0.09	0.0	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.0	0.0	
0.02	0.03	0										
0.03	0.04	0										
0.04	0.05	0										
0.05	0.06	1	0.08	0.0	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.0	0.0	
0.06	0.07	0										
0.07	0.08	4	0.11	0.0007	0.08	0.08	0.1	0.12	0.14	0.04	0.06	0.0018
0.08	0.09	4	0.13	0.0002	0.11	0.12	0.12	0.13	0.15	0.01	0.04	0.0019
0.09	0.1	4	0.11	0.0002	0.1	0.1	0.11	0.12	0.13	0.02	0.03	0.0005
0.1	0.11	5	0.14	0.0014	0.11	0.12	0.13	0.13	0.21	0.01	0.1	0.0023
0.11	0.12	5	0.12	0.0001	0.11	0.12	0.12	0.12	0.14	0.01	0.03	0.0001
0.12	0.13	6	0.14	0.0003	0.11	0.12	0.14	0.15	0.16	0.03	0.05	0.0005
0.13	0.14	5	0.16	0.0006	0.13	0.14	0.15	0.15	0.2	0.02	0.07	0.001
0.14	0.15	7	0.14	0.0012	0.08	0.12	0.14	0.16	0.19	0.04	0.11	0.0012
0.15	0.16	11	0.16	0.0002	0.13	0.15	0.16	0.16	0.19	0.01	0.06	0.0003
0.16	0.17	18	0.17	0.0025	0.07	0.15	0.17	0.19	0.32	0.04	0.25	0.0026
0.17	0.18	9	0.18	0.0016	0.13	0.16	0.17	0.21	0.25	0.05	0.12	0.0016
0.18	0.19	15	0.18	0.0009	0.12	0.16	0.18	0.2	0.22	0.05	0.1	0.0009
0.19	0.2	18	0.2	0.0018	0.14	0.17	0.19	0.22	0.31	0.05	0.17	0.0018
0.2	0.21	12	0.19	0.0005	0.15	0.18	0.19	0.2	0.24	0.02	0.09	0.0006
0.21	0.22	16	0.2	0.0012	0.11	0.18	0.21	0.22	0.25	0.04	0.14	0.0015
0.22	0.23	13	0.22	0.001	0.16	0.19	0.23	0.24	0.26	0.05	0.09	0.001
0.23	0.24	13	0.22	0.0007	0.18	0.21	0.23	0.25	0.27	0.04	0.09	0.0009
0.24	0.25	19	0.22	0.0008	0.14	0.21	0.22	0.24	0.26	0.04	0.12	0.0014
0.25	0.26	19	0.24	0.0013	0.17	0.22	0.24	0.28	0.3	0.06	0.14	0.0014
0.26	0.27	18	0.24	0.0008	0.19	0.22	0.24	0.26	0.29	0.04	0.1	0.0015
0.27	0.28	13	0.29	0.0052	0.22	0.25	0.27	0.3	0.52	0.05	0.3	0.0054
0.28	0.29	11	0.29	0.0019	0.22	0.26	0.3	0.33	0.36	0.07	0.13	0.002
0.29	0.3	11	0.27	0.0024	0.21	0.24	0.26	0.31	0.37	0.07	0.16	0.0028
0.3	0.31	12	0.29	0.0024	0.21	0.28	0.29	0.32	0.38	0.04	0.17	0.0027
0.31	0.32	12	0.3	0.0024	0.21	0.27	0.3	0.32	0.4	0.05	0.19	0.0027
0.32	0.33	7	0.34	0.0016	0.26	0.33	0.35	0.37	0.4	0.04	0.14	0.0019
0.33	0.34	5	0.34	0.0003	0.31	0.34	0.34	0.36	0.36	0.01	0.05	0.0004
0.34	0.35	7	0.37	0.0014	0.29	0.37	0.39	0.4	0.4	0.03	0.11	0.0021
0.35	0.36	7	0.37	0.0025	0.29	0.33	0.38	0.4	0.43	0.07	0.14	0.0025
0.36	0.37	5	0.33	0.0001	0.32	0.33	0.34	0.34	0.35	0.01	0.04	0.001
0.37	0.38	6	0.42	0.0007	0.37	0.41	0.43	0.44	0.45	0.03	0.08	0.0031
0.38	0.39	0										
0.39	0.4	2	0.38	0.0009	0.35	0.36	0.38	0.39	0.41	0.03	0.06	0.0012
0.4	0.41	1	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.0	
0.41	0.42	5	0.45	0.0019	0.39	0.42	0.44	0.45	0.52	0.03	0.13	0.0028
0.42	0.43	1	0.47	0.0	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.0	0.0	
0.43	0.44	2	0.4	0.0016	0.36	0.38	0.4	0.42	0.44	0.04	0.08	0.0026
0.44	0.45	0										
0.45	0.46	2	0.52	0.0019	0.48	0.5	0.52	0.54	0.57	0.04	0.09	0.0064
0.46	0.47	0										
0.47	0.48	1	0.53	0.0	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.0	0.0	
0.48	0.49	0										
0.49	0.5	0										
0.5	0.51	1	0.59	0.0	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.0	0.0	

Tableau A.9 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.011	0.025	0.046	0.052	0.066	0.08	0.091	0.099	0.105	0.109

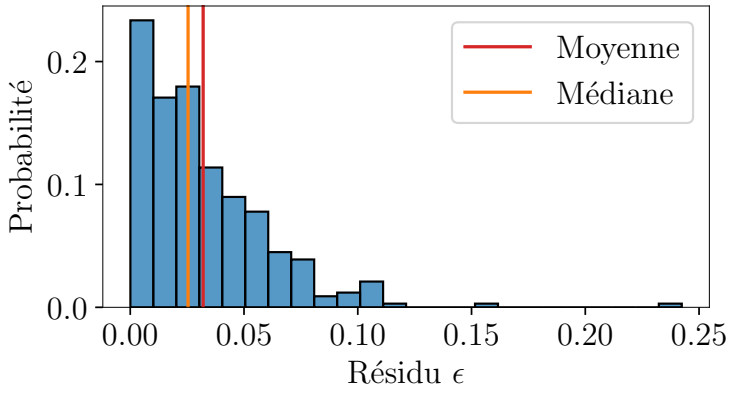


Figure A.9 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.4. $P \approx E$, 25 caractéristiques, *PerTex*

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 334 données provenant de *PerTex* [**Hal12**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

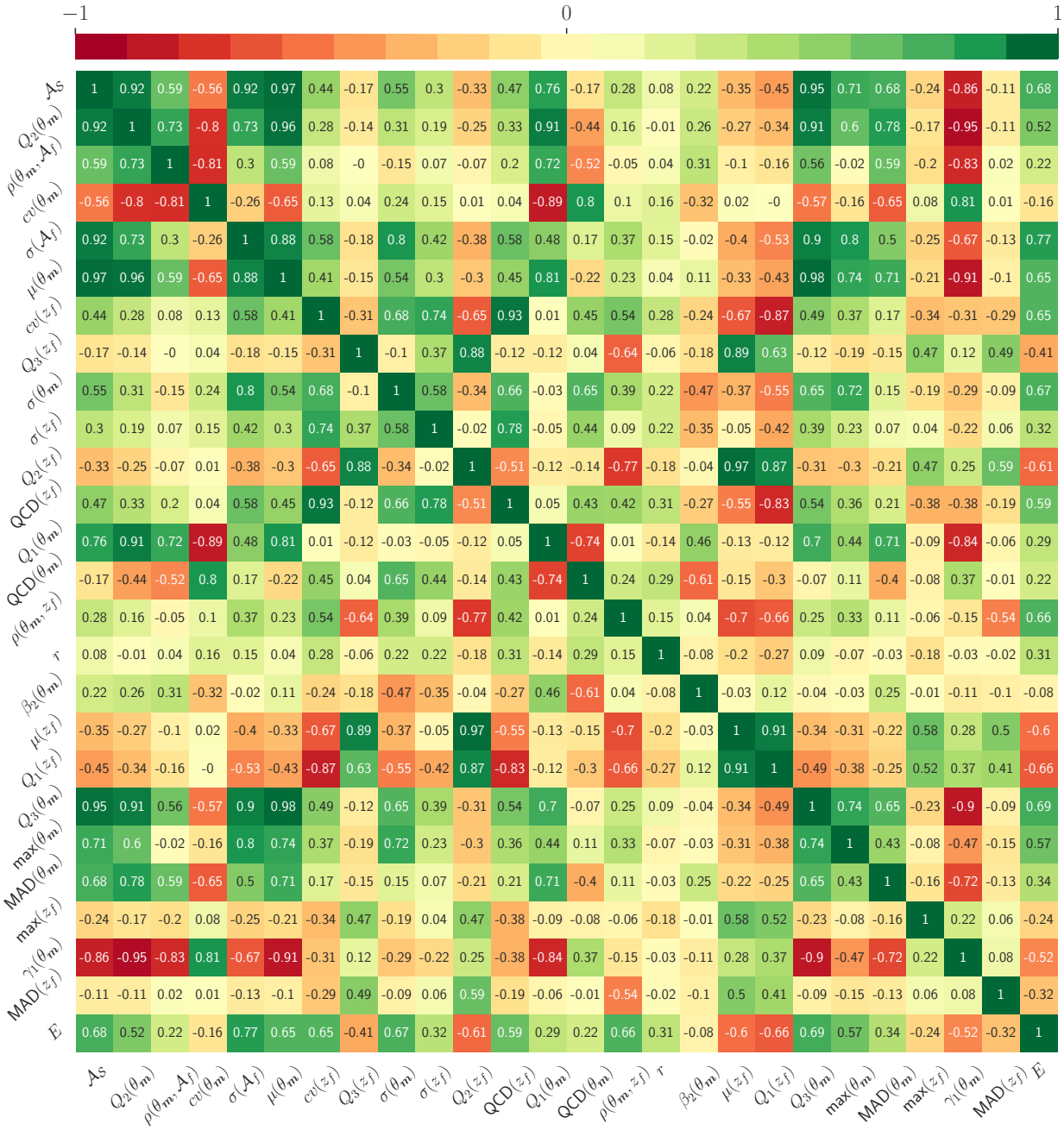


Figure A.10 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E \approx P = & -0.33\,\mathcal{A}_{\mathcal{S}} - 0.478\,Q_2(\theta_m) + 0.415\,\rho(\theta_m,\mathcal{A}_f) - 0.433\,cv(\theta_m) \\
& + 9475024.254\,\sigma(\mathcal{A}_f) + 0.301\,\mu(\theta_m) + 0.366\,cv(z_f) + 0.126\,Q_3(z_f) \\
& + 0.485\,\sigma(\theta_m) - 0.287\,\sigma(z_f) - 0.079\,Q_2(z_f) - 0.171\,\mathrm{QCD}(z_f) \\
& + 0.153\,Q_1(\theta_m) + 0.137\,\mathrm{QCD}(\theta_m) + 0.142\,\rho(\theta_m,z_f) + 0.048\,r \\
& + 0.022\,\beta_2(\theta_m) - 0.021\,\mu(z_f) + 0.018\,Q_1(z_f) + 0.017\,Q_3(\theta_m) \\
& + 0.014\,\max(\theta_m) + 0.014\,\mathrm{MAD}(\theta_m) + 0.004\,\max(z_f) - 0.004\,\gamma_1(\theta_m) \\
& + 0.002\,\mathrm{MAD}(z_f) + 0.109.
\end{aligned}
$$

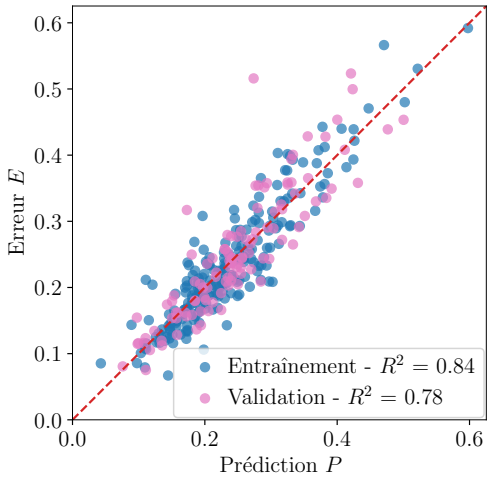


Figure A.11 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.10 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	7	0.11	0.0007	0.08	0.09	0.11	0.13	0.15	0.04	0.07	0.0012
0.1	0.2	114	0.17	0.0019	0.07	0.13	0.16	0.19	0.32	0.06	0.25	0.0012
0.2	0.3	144	0.24	0.0023	0.14	0.21	0.24	0.26	0.52	0.05	0.37	0.0016
0.3	0.4	52	0.34	0.0024	0.21	0.31	0.34	0.38	0.44	0.07	0.23	0.0019
0.4	0.5	13	0.45	0.0031	0.36	0.41	0.44	0.47	0.57	0.06	0.21	0.003

Tableau A.11 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.04	0.05	1	0.09	0.0	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.0	0.0	
0.05	0.06	0										
0.06	0.07	0										
0.07	0.08	1	0.08	0.0	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.0	0.0	
0.08	0.09	1	0.14	0.0	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.0	0.0	
0.09	0.1	4	0.12	0.0006	0.09	0.11	0.12	0.13	0.15	0.02	0.07	0.001
0.1	0.11	4	0.1	0.0002	0.08	0.1	0.1	0.11	0.12	0.01	0.04	0.0002
0.11	0.12	7	0.13	0.0016	0.08	0.11	0.12	0.14	0.21	0.03	0.14	0.0019
0.12	0.13	4	0.15	0.0012	0.12	0.12	0.13	0.15	0.2	0.03	0.09	0.0018
0.13	0.14	7	0.12	0.0001	0.11	0.12	0.12	0.13	0.14	0.01	0.02	0.0002
0.14	0.15	9	0.13	0.0008	0.07	0.13	0.14	0.15	0.17	0.02	0.11	0.0009
0.15	0.16	16	0.15	0.0004	0.12	0.14	0.15	0.16	0.19	0.02	0.07	0.0004
0.16	0.17	7	0.16	0.0001	0.13	0.16	0.16	0.16	0.17	0.01	0.04	0.0002
0.17	0.18	18	0.18	0.0022	0.12	0.15	0.17	0.2	0.32	0.06	0.19	0.0022
0.18	0.19	22	0.19	0.001	0.14	0.17	0.18	0.21	0.27	0.04	0.13	0.0011
0.19	0.2	20	0.19	0.0017	0.11	0.17	0.19	0.21	0.31	0.04	0.2	0.0017
0.2	0.21	16	0.21	0.0007	0.16	0.19	0.2	0.24	0.25	0.05	0.08	0.0007
0.21	0.22	11	0.2	0.0006	0.17	0.18	0.2	0.22	0.24	0.04	0.08	0.0008
0.22	0.23	16	0.21	0.0006	0.17	0.2	0.21	0.23	0.26	0.03	0.09	0.0006
0.23	0.24	22	0.23	0.001	0.14	0.21	0.23	0.25	0.28	0.04	0.14	0.001
0.24	0.25	19	0.24	0.0011	0.19	0.22	0.24	0.25	0.32	0.04	0.13	0.0012
0.25	0.26	17	0.25	0.0006	0.19	0.24	0.25	0.26	0.29	0.02	0.1	0.0007
0.26	0.27	9	0.25	0.0007	0.2	0.23	0.26	0.27	0.29	0.04	0.09	0.001
0.27	0.28	13	0.3	0.0051	0.22	0.26	0.28	0.32	0.52	0.06	0.29	0.0058
0.28	0.29	12	0.28	0.0033	0.21	0.23	0.27	0.34	0.37	0.11	0.16	0.0033
0.29	0.3	9	0.27	0.0017	0.21	0.24	0.26	0.29	0.36	0.05	0.15	0.0024
0.3	0.31	7	0.3	0.0017	0.21	0.29	0.31	0.31	0.35	0.03	0.15	0.0017
0.31	0.32	9	0.32	0.0015	0.27	0.29	0.32	0.33	0.4	0.04	0.14	0.0015
0.32	0.33	9	0.35	0.0015	0.29	0.33	0.36	0.38	0.4	0.04	0.11	0.0024
0.33	0.34	7	0.36	0.0019	0.26	0.34	0.36	0.39	0.4	0.05	0.14	0.0025
0.34	0.35	4	0.33	0.0016	0.29	0.29	0.32	0.35	0.39	0.06	0.1	0.0017
0.35	0.36	3	0.37	0.0024	0.31	0.34	0.37	0.4	0.43	0.06	0.12	0.0024
0.36	0.37	3	0.34	0.001	0.32	0.32	0.33	0.36	0.39	0.04	0.07	0.0015
0.37	0.38	4	0.38	0.0018	0.34	0.35	0.38	0.42	0.44	0.07	0.11	0.0019
0.38	0.39	5	0.38	0.0012	0.34	0.36	0.37	0.41	0.43	0.06	0.09	0.0012
0.39	0.4	1	0.35	0.0	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.0	0.0	
0.4	0.41	2	0.45	0.0	0.44	0.44	0.45	0.45	0.45	0.01	0.01	0.002
0.41	0.42	2	0.39	0.0002	0.38	0.39	0.39	0.4	0.41	0.01	0.03	0.0005
0.42	0.43	5	0.46	0.0024	0.39	0.42	0.44	0.5	0.52	0.08	0.13	0.0035
0.43	0.44	1	0.36	0.0	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.0	0.0	
0.44	0.45	1	0.47	0.0	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.0	0.0	
0.45	0.46	0										
0.46	0.47	0										
0.47	0.48	2	0.5	0.0041	0.44	0.47	0.5	0.53	0.57	0.06	0.13	0.0053
0.48	0.49	0										
0.49	0.5	0										
0.5	0.51	2	0.47	0.0002	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.01	0.03	0.0013
0.51	0.52	0										
0.52	0.53	1	0.53	0.0	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.0	0.0	
0.53	0.54	0										
0.54	0.55	0										
0.55	0.56	0										
0.56	0.57	0										
0.57	0.58	0										
0.58	0.59	0										

Tableau A.12 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.01	0.023	0.041	0.045	0.062	0.076	0.08	0.088	0.093	0.102

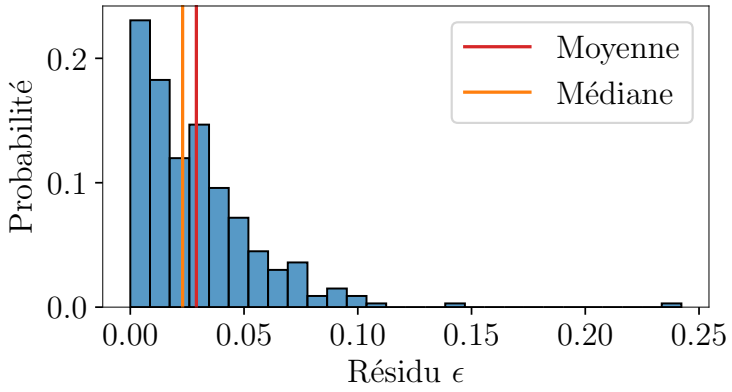


Figure A.12 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.5. $P \approx E$, 5 caractéristiques, *ambientCG*

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 85 données provenant de *ambientCG* [Dem17].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.

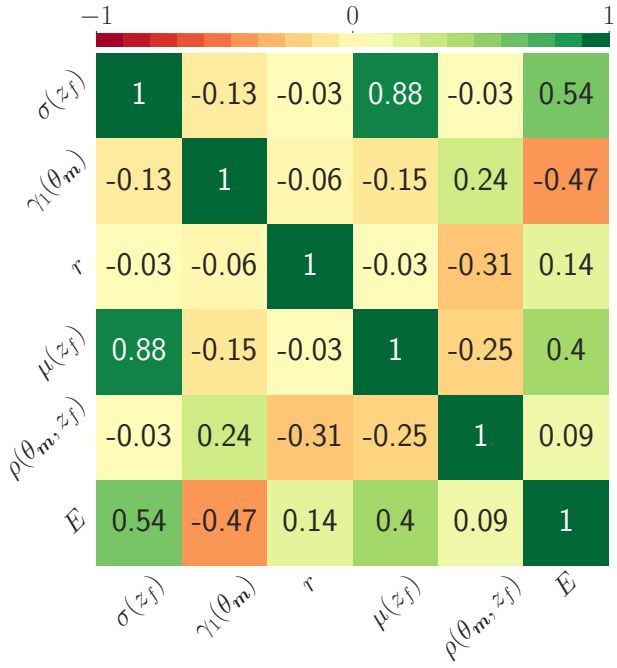


Figure A.13 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E \approx P = 0.098\,\sigma(z_f) - 0.053\,\gamma_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.042\,r - 0.011\,\mu(z_f) + 0.092\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},z_f) + 0.203.$$

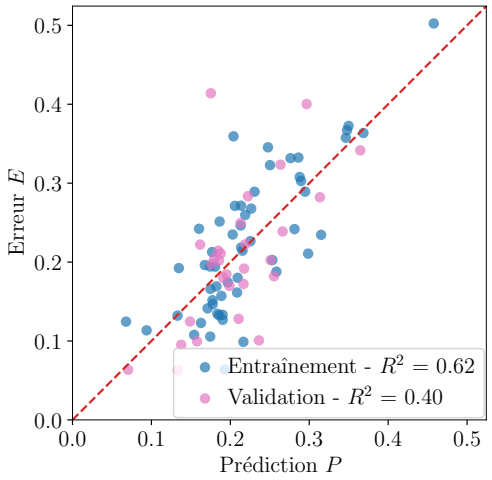


Figure A.14 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.13 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	3	0.1	0.0007	0.06	0.09	0.11	0.12	0.12	0.03	0.06	0.0012
0.1	0.2	37	0.17	0.0038	0.06	0.13	0.17	0.2	0.41	0.07	0.35	0.0036
0.2	0.3	37	0.25	0.0048	0.1	0.2	0.24	0.29	0.4	0.09	0.3	0.0041
0.3	0.4	7	0.33	0.0024	0.23	0.31	0.36	0.37	0.37	0.05	0.14	0.0013
0.4	0.5	1	0.5	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	

Tableau A.14 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.06	0.07	1	0.12	0.0	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.0	0.0	
0.07	0.08	1	0.06	0.0	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.0	0.0	
0.08	0.09	0										
0.09	0.1	1	0.11	0.0	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.0	0.0	
0.1	0.11	0										
0.11	0.12	0										
0.12	0.13	0										
0.13	0.14	4	0.12	0.0023	0.06	0.09	0.11	0.15	0.19	0.06	0.13	0.0025
0.14	0.15	1	0.12	0.0	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.0	0.0	
0.15	0.16	2	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1	0.11	0.11	0.0	0.01	0.0028
0.16	0.17	4	0.2	0.002	0.12	0.18	0.21	0.23	0.24	0.05	0.12	0.0032
0.17	0.18	10	0.19	0.0064	0.11	0.15	0.18	0.2	0.41	0.05	0.31	0.0067
0.18	0.19	9	0.19	0.0014	0.13	0.16	0.19	0.21	0.25	0.05	0.12	0.0014
0.19	0.2	7	0.15	0.0016	0.06	0.13	0.17	0.18	0.18	0.05	0.12	0.0036
0.2	0.21	5	0.24	0.005	0.16	0.18	0.23	0.27	0.36	0.09	0.2	0.0065
0.21	0.22	11	0.21	0.0027	0.1	0.18	0.22	0.25	0.27	0.07	0.17	0.0028
0.22	0.23	3	0.26	0.0006	0.23	0.25	0.27	0.28	0.28	0.03	0.06	0.0018
0.23	0.24	2	0.19	0.0089	0.1	0.15	0.19	0.24	0.29	0.09	0.19	0.0109
0.24	0.25	1	0.35	0.0	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.0	0.0	
0.25	0.26	5	0.22	0.0027	0.18	0.19	0.2	0.2	0.32	0.01	0.14	0.0041
0.26	0.27	2	0.28	0.0018	0.24	0.26	0.28	0.3	0.32	0.04	0.08	0.0022
0.27	0.28	1	0.33	0.0	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.0	0.0	
0.28	0.29	4	0.3	0.0011	0.24	0.29	0.31	0.31	0.33	0.03	0.09	0.0011
0.29	0.3	3	0.3	0.006	0.21	0.25	0.29	0.34	0.4	0.09	0.19	0.0062
0.3	0.31	0										
0.31	0.32	2	0.26	0.0006	0.23	0.25	0.26	0.27	0.28	0.02	0.05	0.0037
0.32	0.33	0										
0.33	0.34	0										
0.34	0.35	3	0.37	0.0	0.36	0.36	0.37	0.37	0.37	0.01	0.01	0.0003
0.35	0.36	0										
0.36	0.37	2	0.35	0.0001	0.34	0.35	0.35	0.36	0.36	0.01	0.02	0.0003
0.37	0.38	0										
0.38	0.39	0										
0.39	0.4	0										
0.4	0.41	0										
0.41	0.42	0										
0.42	0.43	0										
0.43	0.44	0										
0.44	0.45	0										
0.45	0.46	1	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.0	

Tableau A.15 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.023	0.04	0.06	0.065	0.082	0.115	0.125	0.132	0.142	0.169

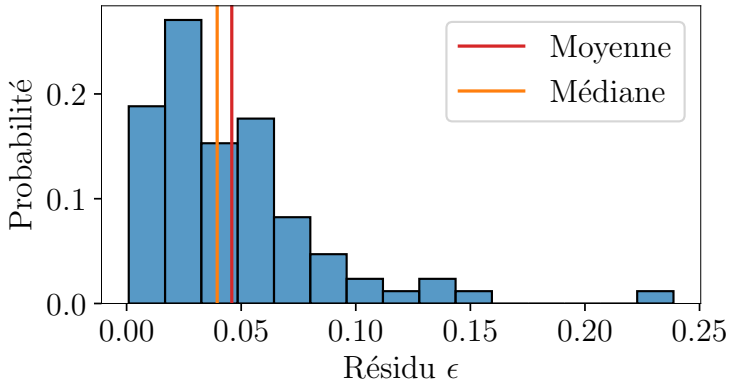


Figure A.15 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.6. $P \approx E$, 25 caractéristiques, *ambientCG*

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 85 données provenant de *ambientCG* [Dem17].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

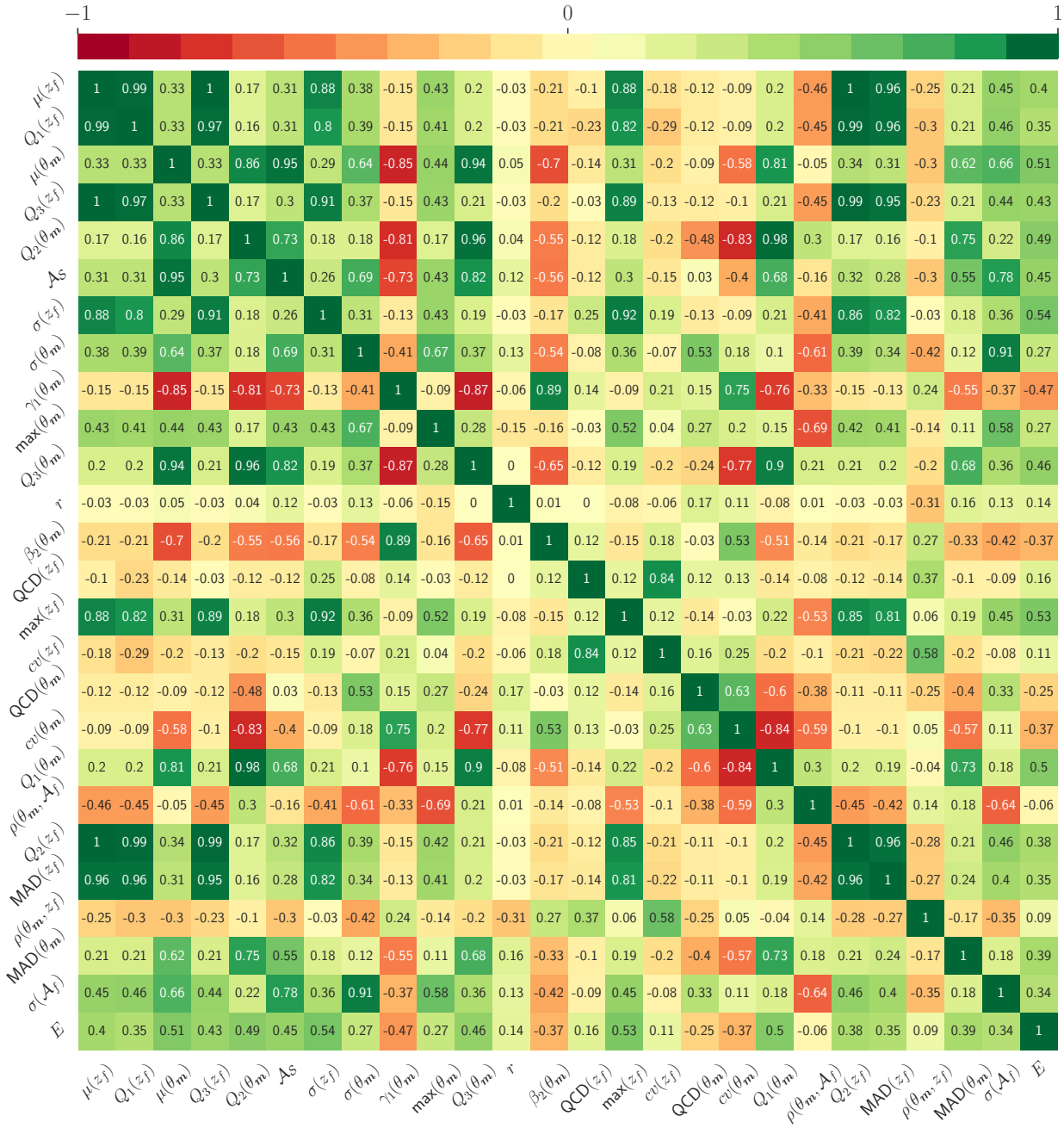


Figure A.16 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E \approx P = & -0.484\,\mu(z_f) + 0.349\,Q_1(z_f) + 2.218\,\mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.11\,Q_3(z_f) \\
& - 1.453\,Q_2(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.572\,\mathcal{A}_{\mathcal{S}} + 0.226\,\sigma(z_f) - 1.242\,\sigma(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
& - 0.176\,\gamma_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.397\,\max(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.624\,Q_3(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.099\,r \\
& + 0.017\,\beta_2(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.451\,\mathrm{QCD}(z_f) + 0.012\,\max(z_f) - 0.271\,cv(z_f) \\
& - 0.187\,\mathrm{QCD}(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.083\,cv(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.238\,Q_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.123\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},\mathcal{A}_f) \\
& - 0.007\,Q_2(z_f) - 0.004\,\mathrm{MAD}(z_f) + 0.112\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},z_f) + 0.05\,\mathrm{MAD}(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
& - 722951.896\,\sigma(\mathcal{A}_f) + 0.756.
\end{aligned}
$$

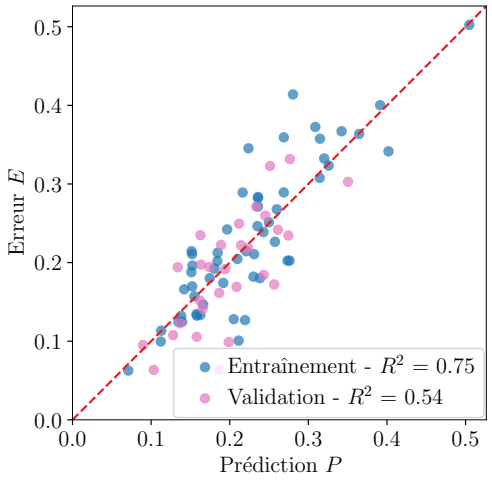


Figure A.17 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.16 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	2	0.08	0.0003	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.02	0.03	0.0001
0.1	0.2	37	0.16	0.0021	0.06	0.12	0.16	0.19	0.24	0.07	0.18	0.0016
0.2	0.3	35	0.24	0.0044	0.1	0.2	0.24	0.28	0.41	0.07	0.31	0.0035
0.3	0.4	9	0.35	0.0009	0.3	0.32	0.36	0.37	0.4	0.04	0.1	0.001
0.4	0.5	1	0.34	0	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0	0	

Tableau A.17 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.07	0.08	1	0.06	0.0	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.0	0.0	
0.08	0.09	1	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	
0.09	0.1	0										
0.1	0.11	1	0.06	0.0	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.0	0.0	
0.11	0.12	2	0.11	0.0	0.1	0.1	0.11	0.11	0.11	0.01	0.01	0.0001
0.12	0.13	1	0.11	0.0	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.0	0.0	
0.13	0.14	5	0.14	0.0008	0.12	0.12	0.12	0.13	0.19	0.01	0.07	0.0008
0.14	0.15	1	0.17	0.0	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.0	0.0	
0.15	0.16	9	0.17	0.0013	0.11	0.13	0.17	0.2	0.21	0.06	0.11	0.0017
0.16	0.17	6	0.17	0.0013	0.13	0.14	0.15	0.19	0.23	0.04	0.1	0.0014
0.17	0.18	2	0.19	0.0001	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.01	0.01	0.0002
0.18	0.19	6	0.18	0.0029	0.06	0.17	0.2	0.21	0.22	0.04	0.16	0.003
0.19	0.2	4	0.18	0.0026	0.1	0.16	0.18	0.2	0.24	0.05	0.14	0.0031
0.2	0.21	3	0.17	0.001	0.13	0.15	0.17	0.19	0.2	0.04	0.08	0.0025
0.21	0.22	5	0.2	0.0052	0.1	0.13	0.22	0.25	0.29	0.12	0.19	0.0055
0.22	0.23	3	0.26	0.0037	0.21	0.22	0.22	0.28	0.35	0.07	0.13	0.0049
0.23	0.24	8	0.24	0.0017	0.18	0.2	0.26	0.27	0.28	0.07	0.1	0.0017
0.24	0.25	4	0.23	0.0009	0.18	0.23	0.25	0.25	0.26	0.03	0.08	0.0009
0.25	0.26	4	0.25	0.003	0.17	0.21	0.25	0.28	0.32	0.07	0.15	0.0033
0.26	0.27	3	0.3	0.0023	0.24	0.27	0.29	0.32	0.36	0.06	0.12	0.003
0.27	0.28	4	0.24	0.0028	0.2	0.2	0.22	0.26	0.33	0.06	0.13	0.0038
0.28	0.29	1	0.41	0.0	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41	0.0	0.0	
0.29	0.3	0										
0.3	0.31	1	0.37	0.0	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.0	0.0	
0.31	0.32	2	0.33	0.0006	0.31	0.32	0.33	0.35	0.36	0.02	0.05	0.0009
0.32	0.33	2	0.33	0.0	0.32	0.33	0.33	0.33	0.33	0.0	0.01	0.0001
0.33	0.34	0										
0.34	0.35	1	0.37	0.0	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.0	0.0	
0.35	0.36	1	0.3	0.0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.0	0.0	
0.36	0.37	1	0.36	0.0	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.0	0.0	
0.37	0.38	0										
0.38	0.39	0										
0.39	0.4	1	0.4	0.0	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.0	0.0	
0.4	0.41	1	0.34	0.0	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.0	0.0	
0.41	0.42	0										
0.42	0.43	0										
0.43	0.44	0										
0.44	0.45	0										
0.45	0.46	0										
0.46	0.47	0										
0.47	0.48	0										
0.48	0.49	0										
0.49	0.5	0										
0.5	0.51	1	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.0	

Tableau A.18 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.011	0.026	0.055	0.06	0.076	0.098	0.107	0.116	0.122	0.124

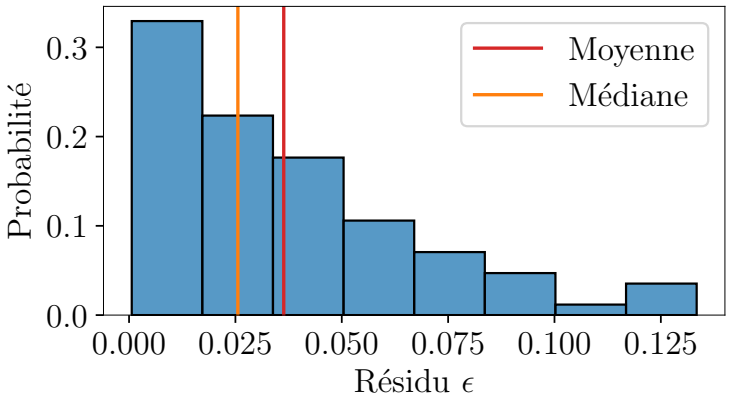


Figure A.18 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.7. $P \approx E$, 5 caractéristiques, toutes les données

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 430 données provenant des bases de données :

— 334 de *PerTex* [**Hal12**],

— 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

— 2 de *IPGP* [**Lab17**],

— 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**],

— 7 générées à partir de distributions [**RBSM19**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.



Figure A.19 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E \approx P = 0.415\,\mathrm{IQR}(\theta_m) + 0.063\,\sigma(z_f) - 0.272\,\mathrm{QCD}(\theta_m) + 0.051\,r + 0.177\,\rho(\theta_m, z_f) + 0.138.$$

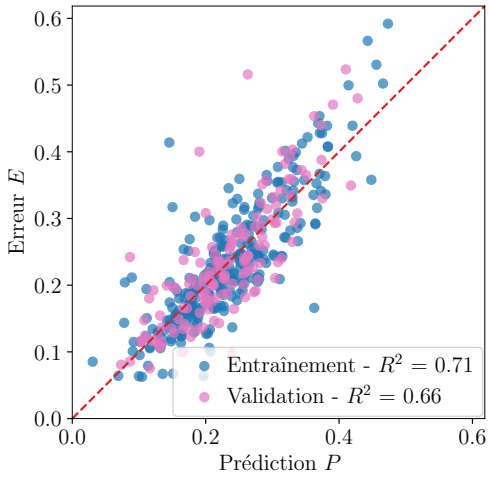


Figure A.20 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.19 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.1	11	0.13	0.0037	0.06	0.08	0.1	0.17	0.24	0.09	0.18	0.0058
0.1	0.2	137	0.16	0.0028	0.06	0.13	0.16	0.19	0.41	0.06	0.35	0.0023
0.2	0.3	198	0.24	0.0029	0.1	0.21	0.23	0.26	0.52	0.06	0.42	0.0022
0.3	0.4	74	0.34	0.0042	0.17	0.29	0.34	0.39	0.47	0.1	0.3	0.0032
0.4	0.5	11	0.48	0.006	0.35	0.42	0.5	0.53	0.59	0.11	0.24	0.0067

Tableau A.20 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.03	0.04	1	0.09	0.0	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.0	0.0	
0.04	0.05	0										
0.05	0.06	0										
0.06	0.07	1	0.06	0.0	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.0	0.0	
0.07	0.08	3	0.14	0.0025	0.08	0.11	0.14	0.17	0.2	0.06	0.12	0.0067
0.08	0.09	3	0.18	0.0046	0.09	0.15	0.21	0.23	0.24	0.08	0.16	0.0131
0.09	0.1	3	0.09	0.0005	0.06	0.08	0.1	0.11	0.11	0.03	0.05	0.0006
0.1	0.11	7	0.11	0.0006	0.06	0.11	0.12	0.12	0.15	0.02	0.08	0.0006
0.11	0.12	9	0.13	0.0015	0.08	0.11	0.12	0.15	0.19	0.05	0.12	0.0018
0.12	0.13	7	0.14	0.0006	0.12	0.12	0.13	0.13	0.19	0.01	0.08	0.0007
0.13	0.14	10	0.12	0.0005	0.07	0.11	0.11	0.13	0.15	0.02	0.09	0.0008
0.14	0.15	11	0.18	0.0064	0.12	0.14	0.15	0.19	0.41	0.05	0.3	0.0074
0.15	0.16	16	0.16	0.0026	0.07	0.14	0.15	0.19	0.32	0.05	0.25	0.0027
0.16	0.17	16	0.15	0.0018	0.1	0.12	0.14	0.17	0.25	0.05	0.15	0.002
0.17	0.18	23	0.18	0.0011	0.12	0.16	0.17	0.19	0.27	0.03	0.15	0.0011
0.18	0.19	22	0.18	0.0015	0.13	0.16	0.17	0.2	0.3	0.04	0.17	0.0016
0.19	0.2	16	0.19	0.0043	0.06	0.17	0.18	0.21	0.4	0.04	0.34	0.0045
0.2	0.21	26	0.19	0.0025	0.1	0.17	0.19	0.22	0.31	0.05	0.21	0.0026
0.21	0.22	26	0.21	0.001	0.15	0.2	0.22	0.24	0.27	0.04	0.12	0.001
0.22	0.23	28	0.22	0.0014	0.14	0.19	0.21	0.24	0.29	0.05	0.15	0.0014
0.23	0.24	18	0.22	0.0027	0.1	0.2	0.23	0.25	0.35	0.06	0.25	0.003
0.24	0.25	14	0.24	0.0026	0.16	0.21	0.22	0.28	0.33	0.07	0.17	0.0025
0.25	0.26	30	0.24	0.0016	0.18	0.22	0.24	0.27	0.36	0.05	0.18	0.0018
0.26	0.27	17	0.26	0.0045	0.21	0.23	0.24	0.27	0.52	0.03	0.31	0.0046
0.27	0.28	18	0.26	0.0019	0.19	0.22	0.25	0.29	0.34	0.07	0.15	0.0023
0.28	0.29	14	0.28	0.0018	0.21	0.24	0.28	0.31	0.35	0.07	0.14	0.0018
0.29	0.3	7	0.32	0.0018	0.23	0.31	0.33	0.36	0.37	0.05	0.13	0.0027
0.3	0.31	12	0.3	0.0026	0.21	0.25	0.3	0.34	0.38	0.09	0.17	0.0026
0.31	0.32	13	0.31	0.004	0.21	0.24	0.31	0.35	0.4	0.11	0.19	0.0039
0.32	0.33	9	0.35	0.002	0.26	0.33	0.36	0.39	0.4	0.05	0.14	0.0025
0.33	0.34	12	0.34	0.0017	0.27	0.3	0.34	0.37	0.4	0.07	0.13	0.0019
0.34	0.35	4	0.36	0.0018	0.29	0.34	0.37	0.38	0.41	0.04	0.12	0.002
0.35	0.36	2	0.39	0.0008	0.37	0.38	0.39	0.41	0.42	0.03	0.06	0.0025
0.36	0.37	8	0.33	0.0073	0.17	0.29	0.33	0.38	0.45	0.08	0.29	0.0083
0.37	0.38	10	0.39	0.0019	0.33	0.35	0.38	0.43	0.45	0.08	0.12	0.0023
0.38	0.39	3	0.42	0.0002	0.41	0.41	0.41	0.42	0.44	0.02	0.03	0.0015
0.39	0.4	1	0.47	0.0	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.0	0.0	
0.4	0.41	0										
0.41	0.42	3	0.46	0.0059	0.35	0.42	0.5	0.51	0.52	0.09	0.17	0.0083
0.42	0.43	3	0.44	0.0013	0.39	0.42	0.44	0.46	0.48	0.04	0.09	0.0014
0.43	0.44	0										
0.44	0.45	2	0.46	0.0108	0.36	0.41	0.46	0.51	0.57	0.1	0.21	0.0117
0.45	0.46	1	0.53	0.0	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.0	0.0	
0.46	0.47	1	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.0	

Tableau A.21 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.014	0.03	0.054	0.063	0.075	0.093	0.106	0.114	0.124	0.163

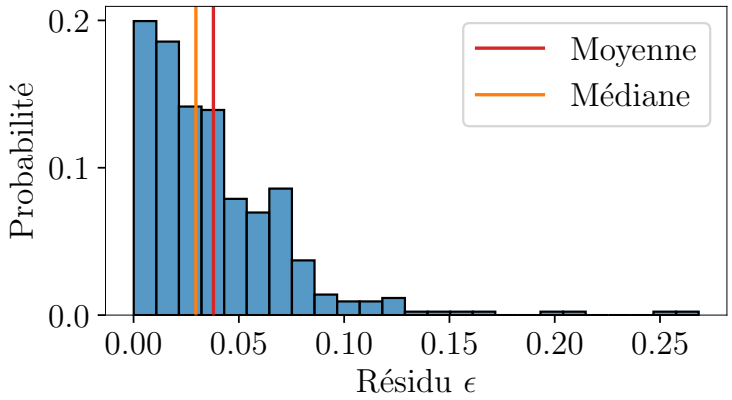


Figure A.21 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.8. $P \approx E$, 25 caractéristiques, toutes les données

— Prédiction P de l'erreur E (erreur du G_1).

— Modèle prédictif entraîné sur 430 données provenant des bases de données :

  — 334 de *PerTex* [**Hal12**],

  — 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

  — 2 de *IPGP* [**Lab17**],

  — 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**],

  — 7 générées à partir de distributions [**RBSM19**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

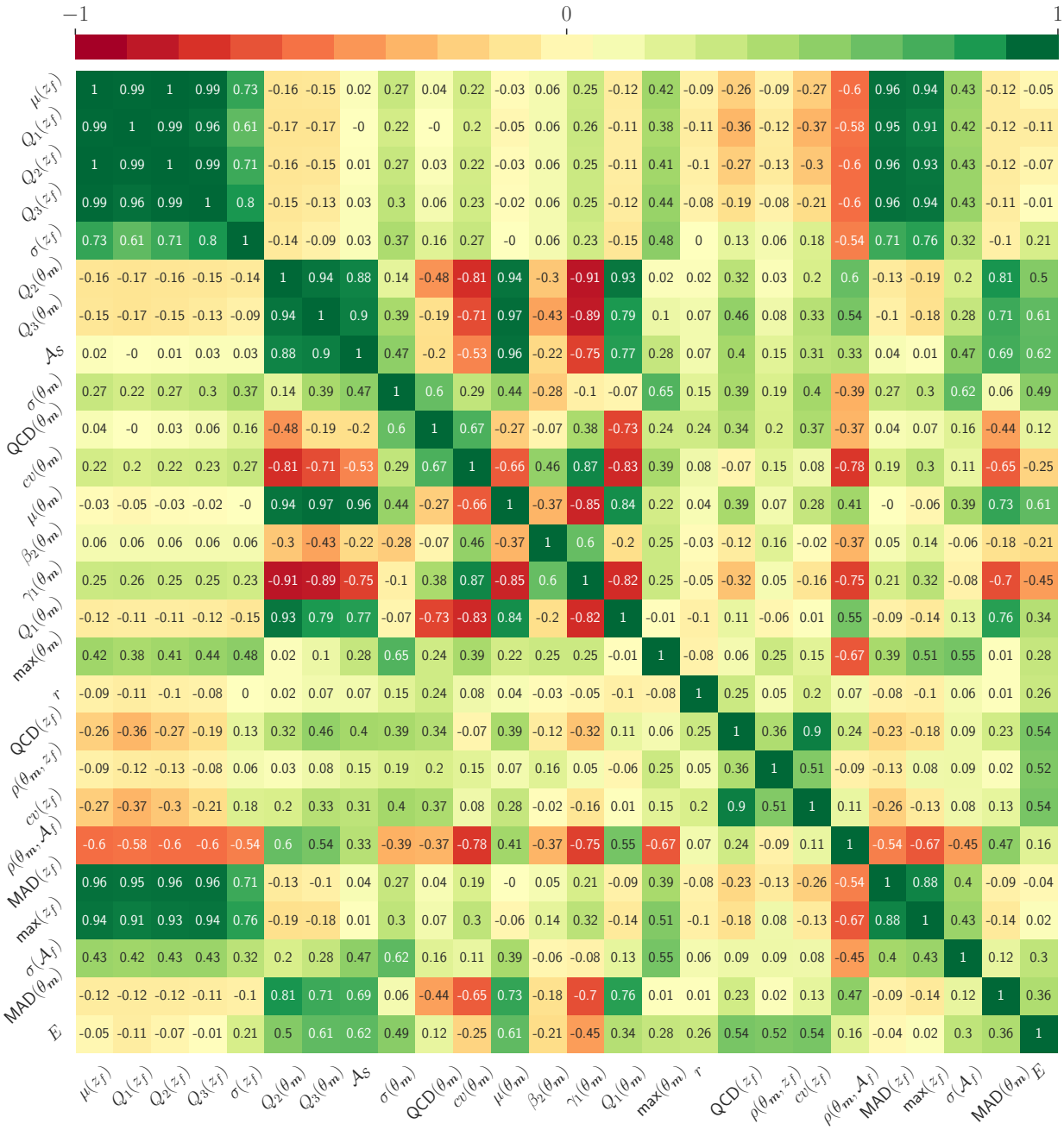


Figure A.22 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E \approx P = & -0.307\,\mu(z_f) + 0.318\,Q_1(z_f) - 0.104\,Q_2(z_f) + 0.076\,Q_3(z_f) \\
& + 0.26\,\sigma(z_f) - 0.549\,Q_2(\theta_m) + 0.428\,Q_3(\theta_m) + 0.232\,\mathcal{A}_S \\
& + 0.824\,\sigma(\theta_m) - 0.494\,\mathrm{QCD}(\theta_m) - 0.236\,cv(\theta_m) - 0.333\,\mu(\theta_m) \\
& + 0.018\,\beta_2(\theta_m) - 0.081\,\gamma_1(\theta_m) - 0.258\,Q_1(\theta_m) + 0.103\,\max(\theta_m) \\
& + 0.045\,r + 0.174\,\mathrm{QCD}(z_f) + 0.147\,\rho(\theta_m, z_f) - 0.114\,cv(z_f) \\
& + 0.072\,\rho(\theta_m, \mathcal{A}_f) - 0.003\,\mathrm{MAD}(z_f) - 0.001\,\max(z_f) - 148006.561\,\sigma(\mathcal{A}_f) \\
& - 0.008\,\mathrm{MAD}(\theta_m) + 0.081.
\end{aligned}
$$

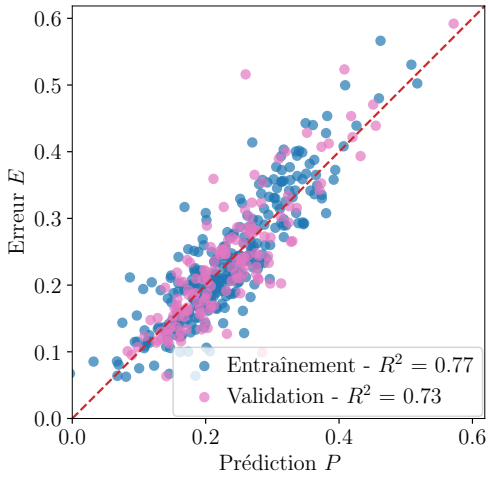


Figure A.23 – Prédiction P comparée à l'erreur E.

Tableau A.22 – Tableau de prédiction à une précision 10e-1.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.1	0	1	0.07	0	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0	0	
0	0.1	13	0.11	0.0016	0.06	0.09	0.1	0.12	0.21	0.03	0.15	0.0022
0.1	0.2	147	0.16	0.0018	0.06	0.13	0.16	0.19	0.32	0.06	0.25	0.0014
0.2	0.3	189	0.24	0.003	0.1	0.21	0.24	0.26	0.52	0.06	0.42	0.0025
0.3	0.4	67	0.35	0.0024	0.2	0.31	0.35	0.38	0.45	0.07	0.25	0.0022
0.4	0.5	11	0.46	0.0024	0.39	0.43	0.45	0.49	0.57	0.06	0.17	0.0033

Tableau A.23 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P			E									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.01	0	1	0.07	0.0	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.0	0.0	
0	0.01	0										
0.01	0.02	0										
0.02	0.03	0										
0.03	0.04	1	0.09	0.0	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.0	0.0	
0.04	0.05	0										
0.05	0.06	0										
0.06	0.07	3	0.08	0.0001	0.06	0.07	0.08	0.08	0.09	0.01	0.02	0.0002
0.07	0.08	1	0.14	0.0	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.0	0.0	
0.08	0.09	4	0.12	0.0032	0.06	0.09	0.1	0.13	0.21	0.04	0.15	0.0041
0.09	0.1	4	0.12	0.0003	0.11	0.11	0.11	0.13	0.15	0.01	0.05	0.001
0.1	0.11	6	0.12	0.0013	0.08	0.11	0.12	0.13	0.19	0.02	0.12	0.0015
0.11	0.12	6	0.14	0.001	0.11	0.12	0.12	0.14	0.2	0.03	0.09	0.0014
0.12	0.13	6	0.12	0.0005	0.08	0.11	0.13	0.14	0.15	0.02	0.07	0.0005
0.13	0.14	5	0.15	0.0011	0.12	0.13	0.14	0.19	0.2	0.06	0.08	0.0014
0.14	0.15	18	0.13	0.0016	0.06	0.11	0.13	0.14	0.21	0.03	0.15	0.0016
0.15	0.16	20	0.16	0.001	0.12	0.14	0.16	0.18	0.24	0.04	0.12	0.001
0.16	0.17	17	0.16	0.0025	0.1	0.12	0.16	0.19	0.32	0.07	0.22	0.0023
0.17	0.18	19	0.17	0.0015	0.1	0.15	0.16	0.2	0.25	0.04	0.15	0.0015
0.18	0.19	25	0.19	0.0014	0.06	0.17	0.18	0.2	0.25	0.03	0.19	0.0014
0.19	0.2	25	0.19	0.0012	0.13	0.16	0.18	0.21	0.27	0.05	0.14	0.0013
0.2	0.21	23	0.2	0.0028	0.1	0.17	0.19	0.21	0.31	0.05	0.21	0.0029
0.21	0.22	20	0.22	0.0017	0.16	0.19	0.21	0.24	0.36	0.04	0.2	0.0017
0.22	0.23	19	0.22	0.0016	0.14	0.2	0.23	0.25	0.32	0.06	0.17	0.0016
0.23	0.24	22	0.22	0.0012	0.13	0.21	0.23	0.25	0.28	0.04	0.15	0.0013
0.24	0.25	19	0.23	0.0008	0.19	0.21	0.22	0.24	0.29	0.03	0.1	0.001
0.25	0.26	22	0.26	0.0055	0.13	0.22	0.24	0.28	0.52	0.06	0.39	0.0053
0.26	0.27	22	0.26	0.0021	0.18	0.24	0.25	0.29	0.41	0.05	0.23	0.002
0.27	0.28	19	0.25	0.0016	0.2	0.23	0.24	0.28	0.37	0.05	0.16	0.0021
0.28	0.29	13	0.28	0.0048	0.1	0.25	0.29	0.34	0.36	0.09	0.26	0.0048
0.29	0.3	10	0.27	0.0023	0.2	0.24	0.25	0.3	0.35	0.06	0.15	0.0033
0.3	0.31	8	0.34	0.001	0.29	0.33	0.34	0.36	0.39	0.04	0.1	0.0023
0.31	0.32	15	0.33	0.0028	0.2	0.3	0.33	0.36	0.4	0.07	0.2	0.003
0.32	0.33	8	0.32	0.0012	0.26	0.29	0.33	0.35	0.38	0.05	0.11	0.0012
0.33	0.34	9	0.33	0.0018	0.27	0.31	0.33	0.36	0.4	0.06	0.13	0.0017
0.34	0.35	7	0.35	0.0034	0.29	0.29	0.36	0.4	0.44	0.11	0.15	0.0035
0.35	0.36	4	0.38	0.001	0.34	0.36	0.37	0.39	0.43	0.03	0.09	0.0018
0.36	0.37	5	0.38	0.0013	0.34	0.35	0.37	0.39	0.44	0.04	0.1	0.0016
0.37	0.38	5	0.35	0.0008	0.33	0.34	0.34	0.35	0.41	0.02	0.08	0.0012
0.38	0.39	4	0.4	0.0031	0.31	0.39	0.42	0.43	0.45	0.05	0.15	0.0033
0.39	0.4	2	0.37	0.0001	0.36	0.36	0.37	0.37	0.37	0.01	0.01	0.0008
0.4	0.41	3	0.48	0.0025	0.41	0.45	0.5	0.51	0.52	0.06	0.12	0.0072
0.41	0.42	1	0.45	0.0	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.0	0.0	
0.42	0.43	2	0.43	0.0001	0.42	0.43	0.43	0.43	0.44	0.01	0.02	0.0001
0.43	0.44	1	0.39	0.0	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39	0.0	0.0	
0.44	0.45	0										
0.45	0.46	3	0.46	0.0003	0.44	0.45	0.47	0.48	0.48	0.02	0.04	0.0003
0.46	0.47	1	0.57	0.0	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.0	0.0	
0.47	0.48	0										
0.48	0.49	0										
0.49	0.5	0										
0.5	0.51	1	0.53	0.0	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.0	0.0	
0.51	0.52	1	0.5	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0	0.0	
0.52	0.53	0										
0.53	0.54	0										
0.54	0.55	0										
0.55	0.56	0										
0.56	0.57	0										

Tableau A.24 – Quantiles des résidus ϵ

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ	0.014	0.027	0.047	0.054	0.072	0.089	0.094	0.104	0.113	0.14

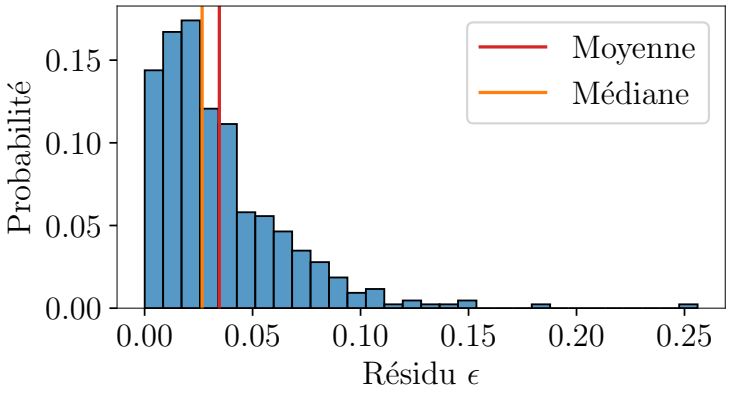


Figure A.24 – Histogramme des résidus $\epsilon = |E - P|$.

A.9. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, surfaces mesurées

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 423 données provenant des bases de données :

  — 334 de *PerTex* [**Hal12**],

  — 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

  — 2 de *IPGP* [**Lab17**],

  — 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.

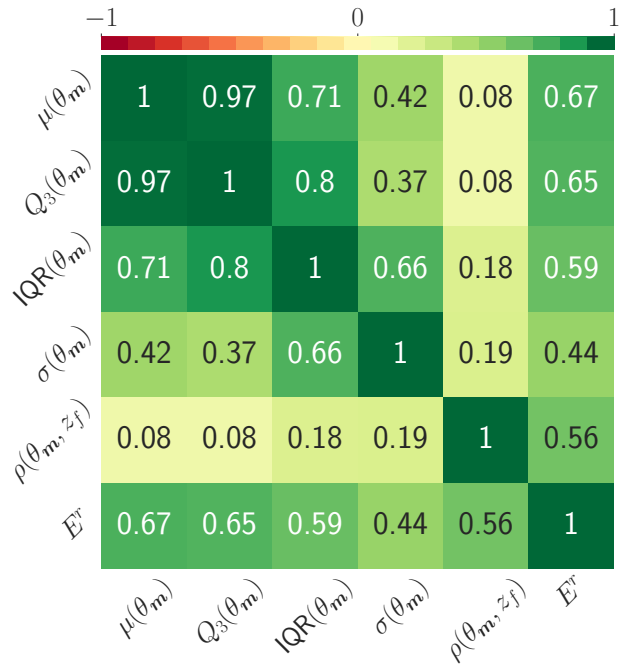


Figure A.25 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E^r \approx P^r = 0.0898\,\mu(\theta_m) - 0.0677\,Q_3(\theta_m) + 0.0446\,\mathrm{IQR}(\theta_m) - 0.044\,\sigma(\theta_m) + 0.0132\,\rho(\theta_m,z_f) + 0.0035.$$

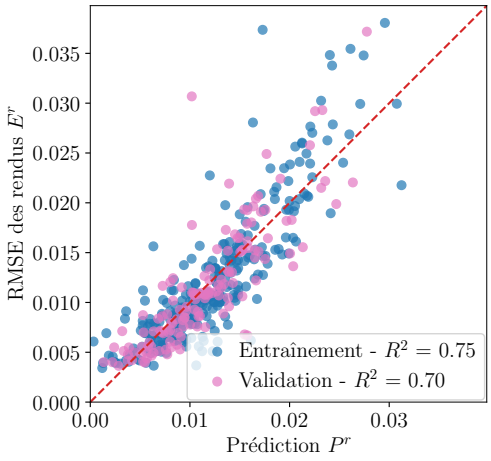


Figure A.26 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.25 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.01	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0.01	164	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.01	0.0
0.01	0.02	213	0.01	0	0	0.01	0.01	0.02	0.04	0	0.03	0.0
0.02	0.03	43	0.02	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.02	0.0
0.03	0.04	2	0.03	0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0	0.01	0.0

Tableau A.26 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.003	-0.002	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
-0.002	-0.001	0										
-0.001	0	0										
0	0.001	1	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	
0.001	0.002	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.002	0.003	6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.003	0.004	12	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.004	0.005	6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.005	0.006	26	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.006	0.007	20	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.007	0.008	24	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	31	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	33	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	33	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.03	0.0	0.03	0.0
0.011	0.012	29	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.02	0.0
0.012	0.013	33	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.013	0.014	27	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	25	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.015	0.016	21	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.016	0.017	16	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.01	0.02	0.0
0.017	0.018	14	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.04	0.0	0.02	0.0
0.018	0.019	6	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.019	0.02	9	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.02	0.021	11	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.021	0.022	8	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.022	0.023	6	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.023	0.024	5	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.024	0.025	5	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.01	0.02	0.0001
0.025	0.026	2	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	0.0
0.026	0.027	2	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.01	0.01	0.0001
0.027	0.028	3	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.0	0.01	0.0001
0.028	0.029	0										
0.029	0.03	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	
0.03	0.031	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.031	0.032	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	

Tableau A.27 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0008	0.0017	0.0032	0.0038	0.0051	0.0069	0.0072	0.0086	0.0094	0.0106

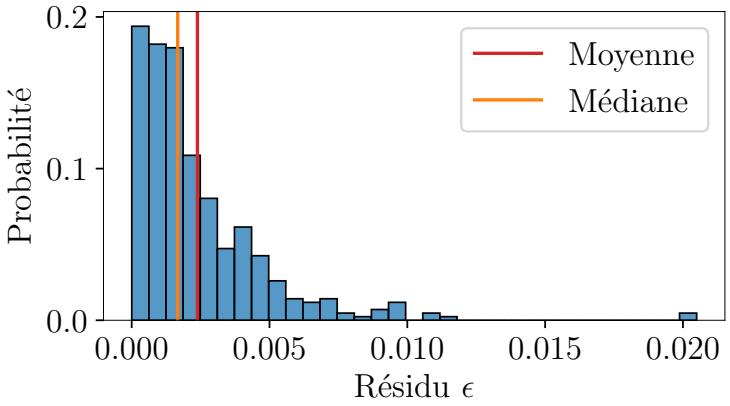


Figure A.27 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.10. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, surfaces mesurées

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 423 données provenant des bases de données :

  — 334 de *PerTex* [**Hal12**],

  — 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

  — 2 de *IPGP* [**Lab17**],

  — 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

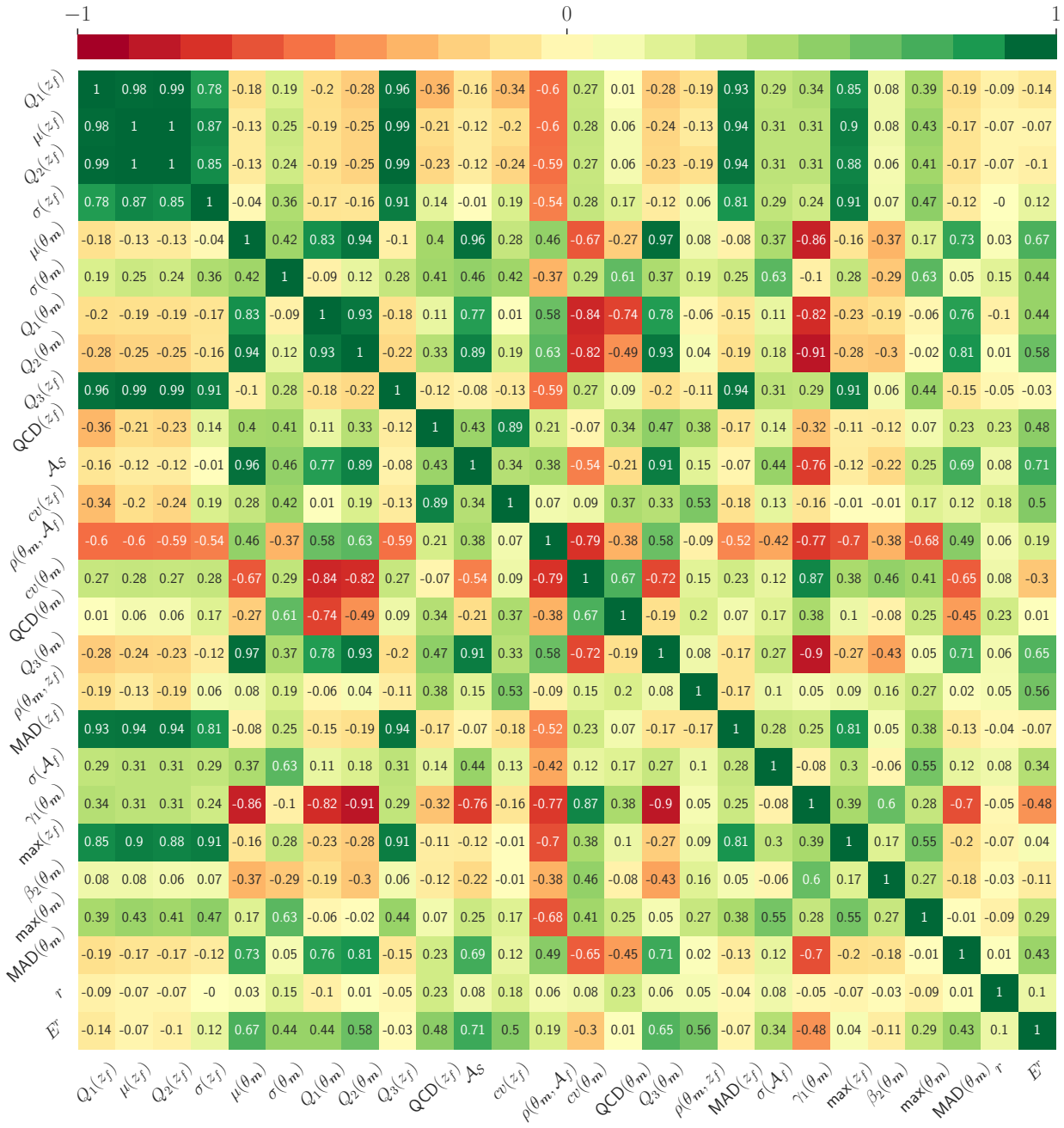


Figure A.28 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E^r \approx P^r = {} & 0.0295\, Q_1(z_f) - 0.0239\, \mu(z_f) - 0.0077\, Q_2(z_f) + 0.0255\, \sigma(z_f) \\
& + 0.0784\, \mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0632\, \sigma(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0423\, Q_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.025\, Q_2(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
& + 0.0015\, Q_3(z_f) + 0.0195\, \mathrm{QCD}(z_f) + 0.0064\, \mathcal{A}_{\mathcal{S}} - 0.0151\, cv(z_f) \\
& - 0.0107\, \rho(\theta_{\boldsymbol{m}}, \mathcal{A}_f) + 0.007\, cv(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0125\, \mathrm{QCD}(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.007\, Q_3(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
& + 0.0117\, \rho(\theta_{\boldsymbol{m}}, z_f) - 0.0004\, \mathrm{MAD}(z_f) - 40621.0107\, \sigma(\mathcal{A}_f) - 0.0016\, \gamma_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
& - 0.0003\, \max(z_f) + 0.0003\, \beta_2(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0006\, \max(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0009\, \mathrm{MAD}(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
& + 0.0003\, r + 0.0089.
\end{aligned}
$$

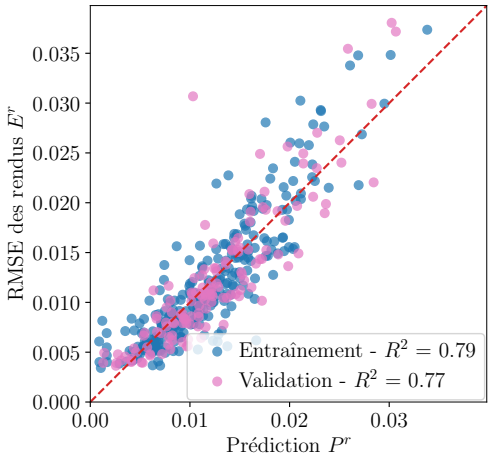


Figure A.29 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.28 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.01	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0.01	164	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.01	0.0
0.01	0.02	216	0.01	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0	0.03	0.0
0.02	0.03	38	0.02	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.02	0.0
0.03	0.04	4	0.04	0	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0	0	0.0

Tableau A.29 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.001	0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
0	0.001	2	0.01	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.001	0.002	8	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.002	0.003	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.003	0.004	5	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.004	0.005	16	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.005	0.006	18	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.006	0.007	25	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.007	0.008	30	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	30	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	26	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	33	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.0	0.03	0.0
0.011	0.012	33	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.012	0.013	30	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.02	0.0
0.013	0.014	21	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.02	0.0
0.014	0.015	27	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.015	0.016	20	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.016	0.017	16	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.017	0.018	16	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.01	0.02	0.0
0.018	0.019	8	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.019	0.02	12	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.02	0.021	9	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.01	0.01	0.0
0.021	0.022	6	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.022	0.023	7	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.023	0.024	6	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.024	0.025	0										
0.025	0.026	3	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.01	0.01	0.0
0.026	0.027	3	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.027	0.028	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.028	0.029	2	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.029	0.03	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.03	0.031	3	0.04	0.0	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	0.0
0.031	0.032	0										
0.032	0.033	0										
0.033	0.034	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	

Tableau A.30 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0007	0.0017	0.0031	0.0036	0.0049	0.0062	0.0064	0.007	0.0079	0.0092

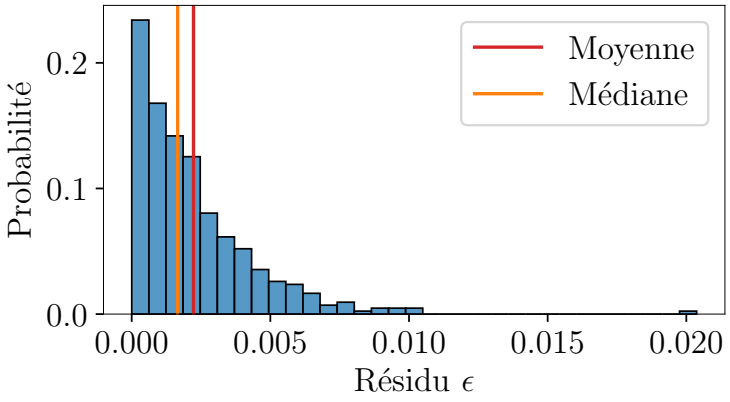


Figure A.30 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.11. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, *PerTex*

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 334 données provenant de *PerTex* [**Hal12**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.

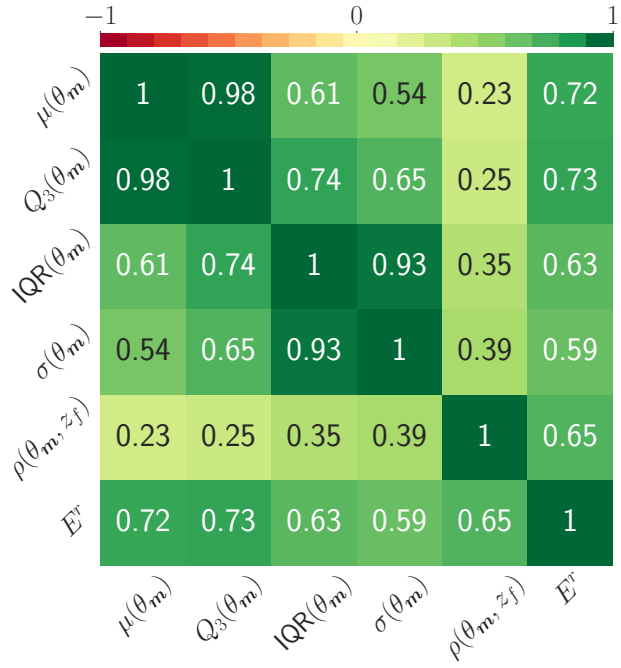


Figure A.31 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E^r \approx P^r = 0.0917\,\mu(\theta_m) - 0.0703\,Q_3(\theta_m) + 0.052\,\mathrm{IQR}(\theta_m) - 0.0527\,\sigma(\theta_m) + 0.013\,\rho(\theta_m, z_f) + 0.0034.$$

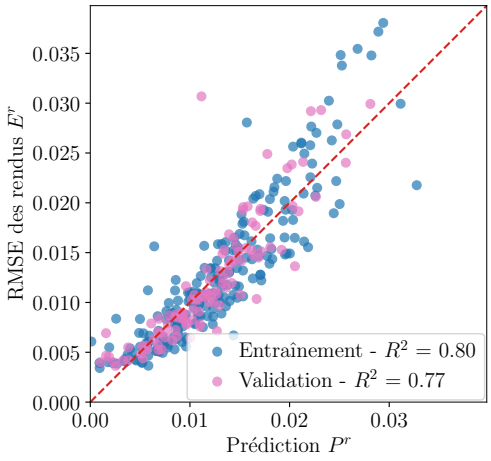


Figure A.32 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.31 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.01	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0.01	121	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.01	0.0
0.01	0.02	169	0.01	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0	0.02	0.0
0.02	0.03	41	0.02	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.02	0.0
0.03	0.04	2	0.03	0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0	0.01	0.0001

Tableau A.32 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.004	-0.003	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
-0.003	-0.002	0										
-0.002	-0.001	0										
-0.001	0	0										
0	0.001	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.001	0.002	6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.002	0.003	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.003	0.004	7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.004	0.005	7	0.01	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.005	0.006	18	0.01	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.006	0.007	16	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.007	0.008	17	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	22	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	20	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	24	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.011	0.012	21	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.0	0.02	0.0
0.012	0.013	24	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.013	0.014	24	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	20	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.015	0.016	14	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.0	0.02	0.0
0.016	0.017	14	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.017	0.018	11	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.018	0.019	8	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.019	0.02	9	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.02	0.021	9	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.021	0.022	7	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.022	0.023	9	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.023	0.024	2	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	0.0
0.024	0.025	4	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.025	0.026	5	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.026	0.027	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	
0.027	0.028	0										
0.028	0.029	3	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.0	0.01	0.0
0.029	0.03	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	
0.03	0.031	0										
0.031	0.032	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.032	0.033	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	

Tableau A.33 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0008	0.0017	0.003	0.0036	0.0048	0.0063	0.0068	0.0075	0.0086	0.0095

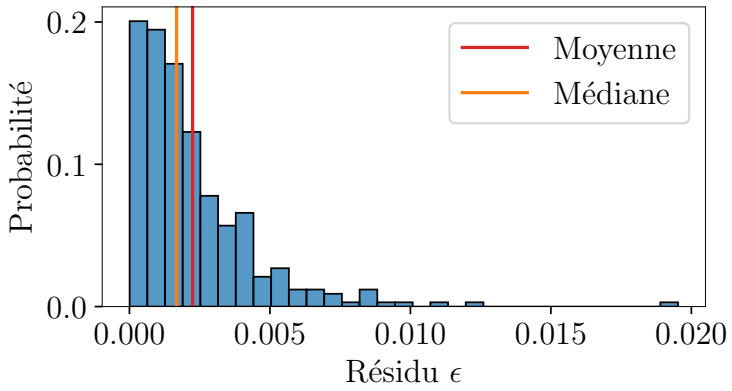


Figure A.33 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.12. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, *PerTex*

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 334 données provenant de *PerTex* [**Hal12**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

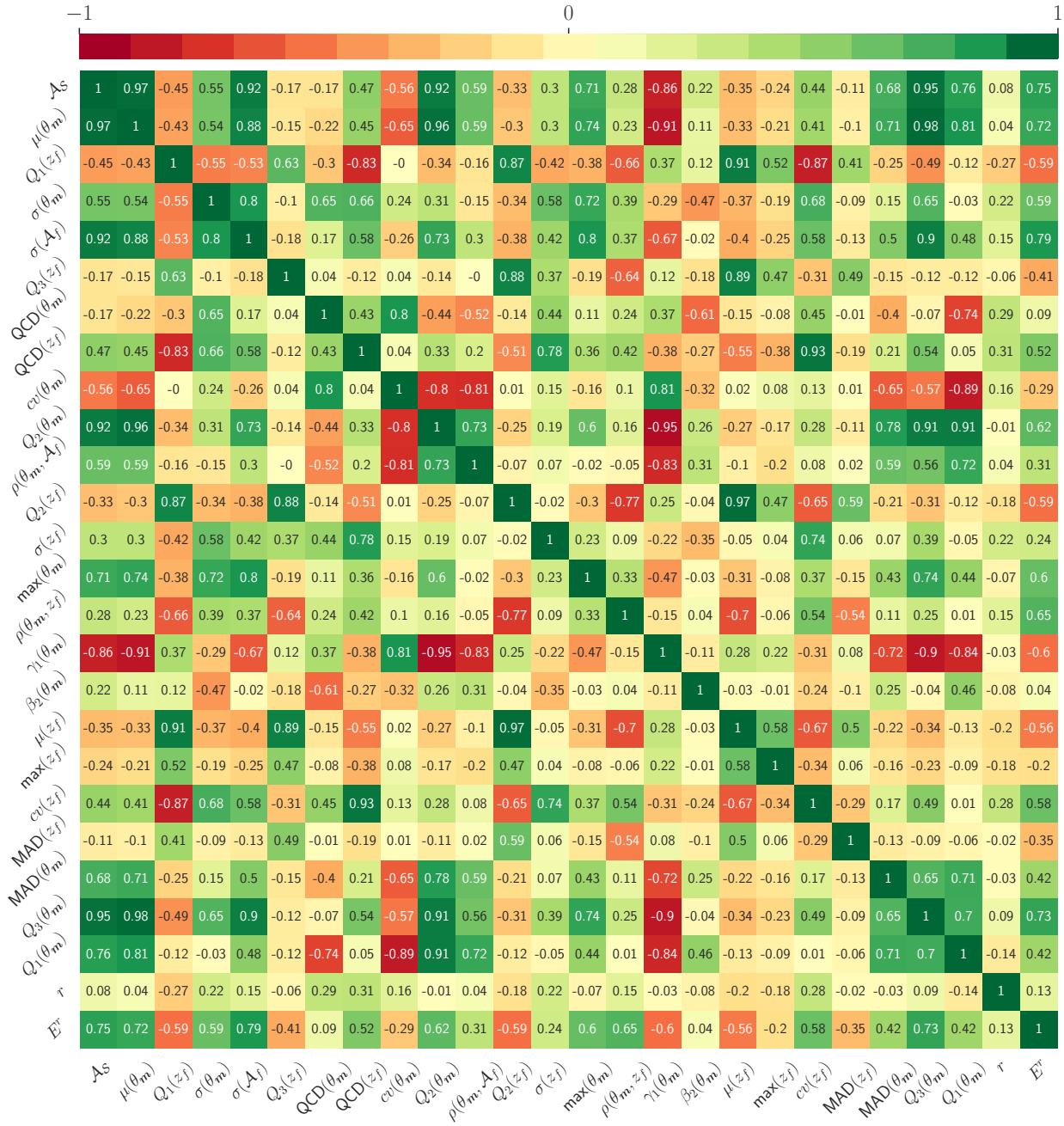


Figure A.34 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E^r \approx P^r = & -0.0513\,\mathcal{A}_S + 0.0839\,\mu(\theta_m) + 0.0269\,Q_1(z_f) - 0.0864\,\sigma(\theta_m) \\
& + 1074536.3109\,\sigma(\mathcal{A}_f) - 0.015\,Q_3(z_f) + 0.034\,\mathrm{QCD}(\theta_m) + 0.0353\,\mathrm{QCD}(z_f) \\
& - 0.0205\,cv(\theta_m) - 0.0184\,Q_2(\theta_m) + 0.0133\,\rho(\theta_m,\mathcal{A}_f) - 0.007\,Q_2(z_f) \\
& + 0.0118\,\sigma(z_f) - 0.005\,\max(\theta_m) + 0.0101\,\rho(\theta_m,z_f) + 0.0035\,\gamma_1(\theta_m) \\
& + 0.0019\,\beta_2(\theta_m) + 0.0012\,\mu(z_f) + 0.0004\,\max(z_f) - 0.0013\,cv(z_f) \\
& - 0.0005\,\mathrm{MAD}(z_f) - 0.0008\,\mathrm{MAD}(\theta_m) - 0.0009\,Q_3(\theta_m) + 0.0\,Q_1(\theta_m) \\
& + 0.0\,r + 0.0322.
\end{aligned}
$$

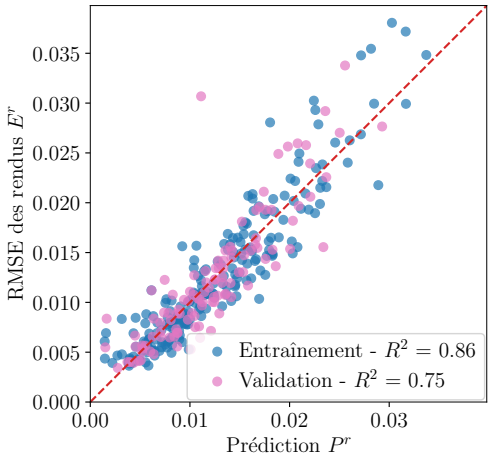


Figure A.35 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.34 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.01	132	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.01	0
0.01	0.02	156	0.01	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0	0.03	0
0.02	0.03	42	0.02	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.02	0
0.03	0.04	4	0.03	0	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0	0.01	0

Tableau A.35 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.001	0.002	5	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.002	0.003	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.003	0.004	9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.004	0.005	13	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.005	0.006	20	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.006	0.007	15	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.007	0.008	19	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	28	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	20	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	22	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.011	0.012	25	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.0	0.02	0.0
0.012	0.013	16	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.013	0.014	16	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	19	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.015	0.016	15	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.016	0.017	18	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.017	0.018	10	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.018	0.019	12	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.019	0.02	3	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.02	0.021	12	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.01	0.01	0.0
0.021	0.022	4	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.022	0.023	7	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.023	0.024	8	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.024	0.025	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.025	0.026	3	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.026	0.027	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.027	0.028	2	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.028	0.029	3	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.01	0.01	0.0
0.029	0.03	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.03	0.031	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	
0.031	0.032	2	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.0	0.01	0.0
0.032	0.033	0										
0.033	0.034	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	

Tableau A.36 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0006	0.0016	0.0026	0.0031	0.0046	0.0054	0.006	0.0067	0.0074	0.0078

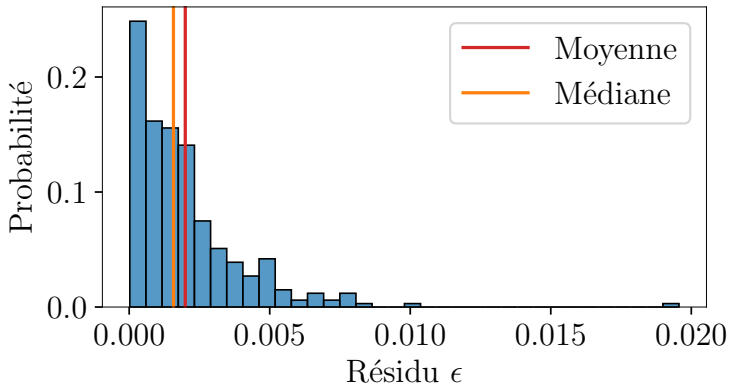


Figure A.36 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.13. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, *ambientCG*

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 85 données provenant de *ambientCG* [Dem17].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.



Figure A.37 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E^r \approx P^r = 0.0607\,\mu(\theta_m) - 0.0316\,\mathrm{IQR}(\theta_m) - 0.0172\,\sigma(\theta_m) - 0.0094\,Q_3(\theta_m) + 0.0085\,\rho(\theta_m, z_f) + 0.0037.$$

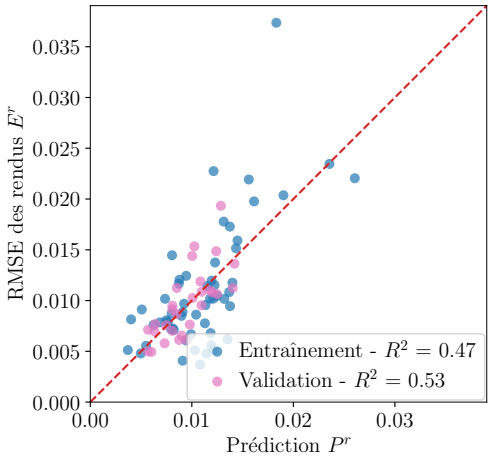


Figure A.38 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.37 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.01	40	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0.01	0
0.01	0.02	43	0.01	0	0	0.01	0.01	0.02	0.04	0.01	0.03	0
0.02	0.03	2	0.02	0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0	0	0

Tableau A.38 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.003	0.004	1	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	
0.004	0.005	2	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.005	0.006	4	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.006	0.007	5	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.007	0.008	6	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.008	0.009	14	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	8	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	9	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.011	0.012	9	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.012	0.013	10	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.02	0.0
0.013	0.014	7	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	4	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.0	0.0
0.015	0.016	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.016	0.017	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.017	0.018	0										
0.018	0.019	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	
0.019	0.02	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.02	0.021	0										
0.021	0.022	0										
0.022	0.023	0										
0.023	0.024	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.024	0.025	0										
0.025	0.026	0										
0.026	0.027	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	

Tableau A.39 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0008	0.0018	0.0035	0.0042	0.0063	0.007	0.0071	0.0072	0.0084	0.012

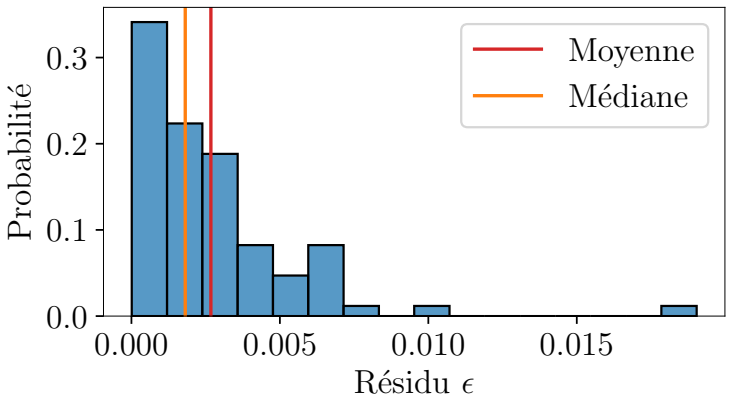


Figure A.39 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.14. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, *ambientCG*

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 85 données provenant de *ambientCG* [Dem17].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

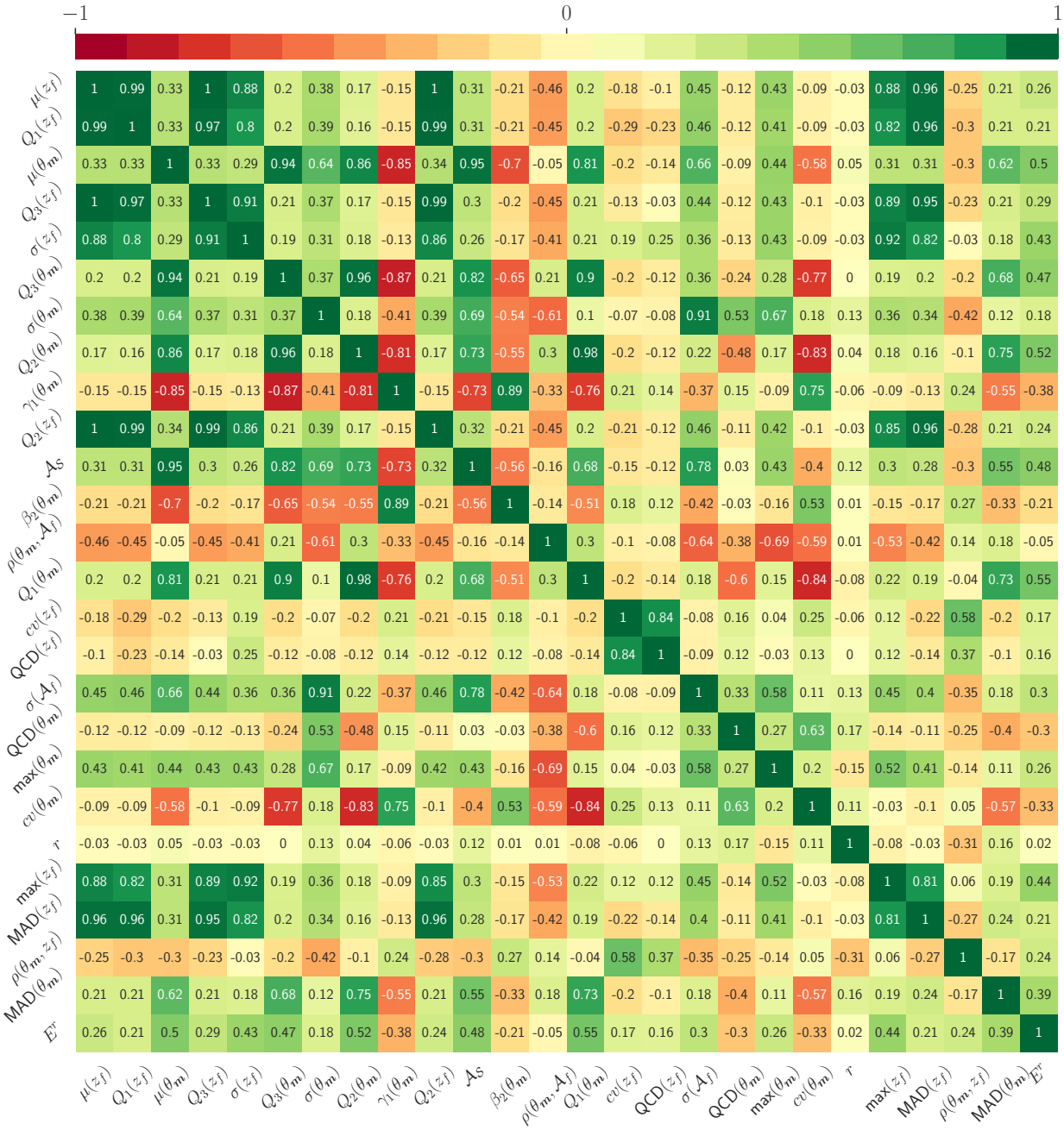


Figure A.40 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E^r \approx P^r = &-0.0363\,\mu(z_f) + 0.03\,Q_1(z_f) + 0.1558\,\mu(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0071\,Q_3(z_f) \\
&+ 0.0215\,\sigma(z_f) - 0.0614\,Q_3(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0895\,\sigma(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0672\,Q_2(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
&- 0.0116\,\gamma_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0029\,Q_2(z_f) - 0.0161\,\mathcal{A}_{\mathcal{S}} + 0.0013\,\beta_2(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
&- 0.0253\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},\mathcal{A}_f) + 0.0447\,Q_1(\theta_{\boldsymbol{m}}) - 0.0277\,cv(z_f) + 0.033\,\mathrm{QCD}(z_f) \\
&- 295863.2637\,\sigma(\mathcal{A}_f) + 0.0216\,\mathrm{QCD}(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0069\,\max(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0069\,cv(\theta_{\boldsymbol{m}}) \\
&+ 0.003\,r + 0.0005\,\max(z_f) - 0.0003\,\mathrm{MAD}(z_f) + 0.0096\,\rho(\theta_{\boldsymbol{m}},z_f) \\
&+ 0.0009\,\mathrm{MAD}(\theta_{\boldsymbol{m}}) + 0.0386.
\end{aligned}
$$

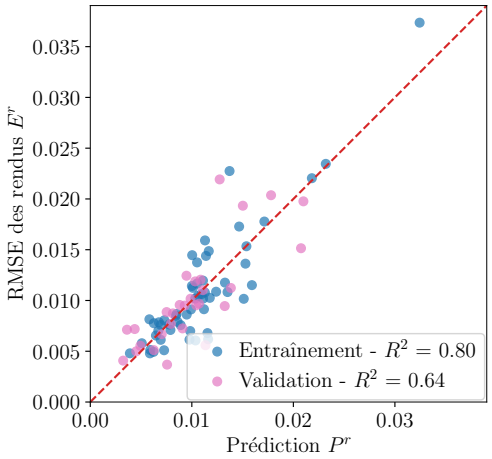


Figure A.41 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.40 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0	0.01	40	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0.01	0.0
0.01	0.02	40	0.01	0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.02	0.0
0.02	0.03	4	0.02	0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0	0.01	0.0
0.03	0.04	1	0.04	0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0	0	

Tableau A.41 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
0.003	0.004	3	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.004	0.005	3	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.005	0.006	4	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.006	0.007	8	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.007	0.008	8	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	6	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.009	0.01	8	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	13	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.011	0.012	12	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.012	0.013	2	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.013	0.014	5	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.015	0.016	5	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.016	0.017	0										
0.017	0.018	2	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	0.0
0.018	0.019	0										
0.019	0.02	0										
0.02	0.021	2	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	0.0
0.021	0.022	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.022	0.023	0										
0.023	0.024	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	
0.024	0.025	0										
0.025	0.026	0										
0.026	0.027	0										
0.027	0.028	0										
0.028	0.029	0										
0.029	0.03	0										
0.03	0.031	0										
0.031	0.032	0										
0.032	0.033	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	

Tableau A.42 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0007	0.0012	0.0029	0.0033	0.0045	0.0053	0.0055	0.0057	0.0068	0.0091

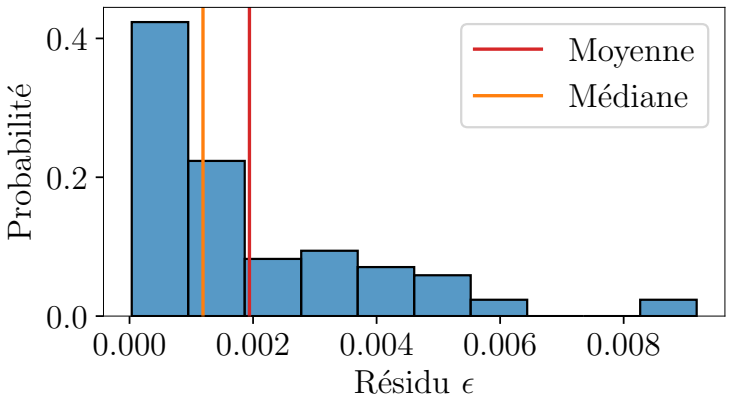


Figure A.42 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.15. $P^r \approx E^r$, 5 caractéristiques, toutes les données

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 430 données provenant des bases de données :

  — 334 de *PerTex* [**Hal12**],

  — 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

  — 2 de *IPGP* [**Lab17**],

  — 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**],

  — 7 générées à partir de distributions [**RBSM19**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 5 caractéristiques.

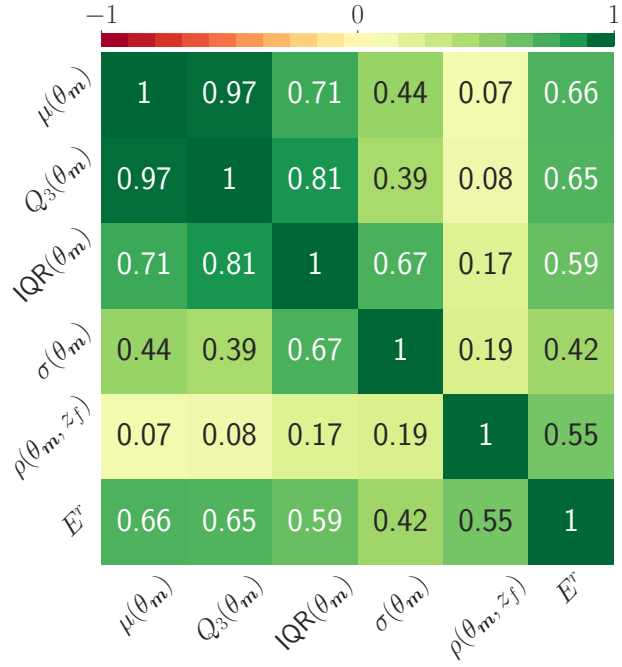


Figure A.43 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$E^r \approx P^r = 0.0711\,\mu(\theta_m) - 0.0505\,Q_3(\theta_m) + 0.0363\,\mathrm{IQR}(\theta_m) - 0.0341\,\sigma(\theta_m) + 0.0131\,\rho(\theta_m, z_f) + 0.0025.$$

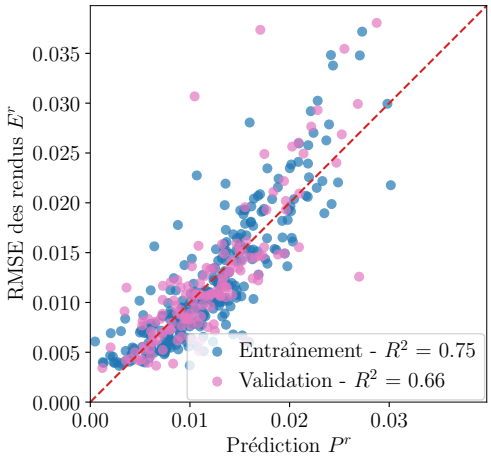


Figure A.44 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.43 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.01	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0.01	168	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.01	0.0
0.01	0.02	219	0.01	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.04	0	0.03	0.0
0.02	0.03	42	0.03	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.03	0.0
0.03	0.04	1	0.02	0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0	0	

Tableau A.44 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.003	-0.002	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
-0.002	-0.001	0										
-0.001	0	0										
0	0.001	1	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	
0.001	0.002	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.002	0.003	7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.003	0.004	10	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.004	0.005	10	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.005	0.006	22	0.01	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.006	0.007	20	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.007	0.008	28	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	32	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	34	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	30	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.0	0.03	0.0
0.011	0.012	31	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.012	0.013	28	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.013	0.014	37	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	21	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.015	0.016	23	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.0	0.02	0.0
0.016	0.017	18	0.02	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.017	0.018	14	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.04	0.01	0.02	0.0
0.018	0.019	7	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.0
0.019	0.02	10	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.02	0.021	13	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.021	0.022	6	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.022	0.023	6	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.023	0.024	4	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.024	0.025	5	0.03	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.025	0.026	2	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.0	0.01	0.0001
0.026	0.027	2	0.02	0.0001	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.02	0.0001
0.027	0.028	2	0.04	0.0	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	0.0001
0.028	0.029	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	
0.029	0.03	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.03	0.031	1	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	

Tableau A.45 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0008	0.0018	0.0034	0.0038	0.0051	0.0073	0.0078	0.009	0.0096	0.0116

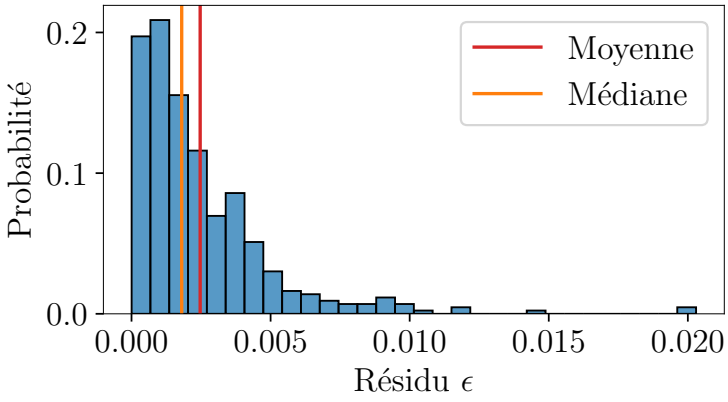


Figure A.45 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.

A.16. $P^r \approx E^r$, 25 caractéristiques, toutes les données

— Prédiction P^r de l'erreur E^r (erreur du rendu).

— Modèle prédictif entraîné sur 430 données provenant des bases de données :

  — 334 de *PerTex* [**Hal12**],

  — 85 de *ambientCG* [**Dem17**],

  — 2 de *IPGP* [**Lab17**],

  — 2 de *Prouteau et al.* [**PJBK23**],

  — 7 générées à partir de distributions [**RBSM19**].

— Modèle prédictif calculé à partir de 25 caractéristiques.

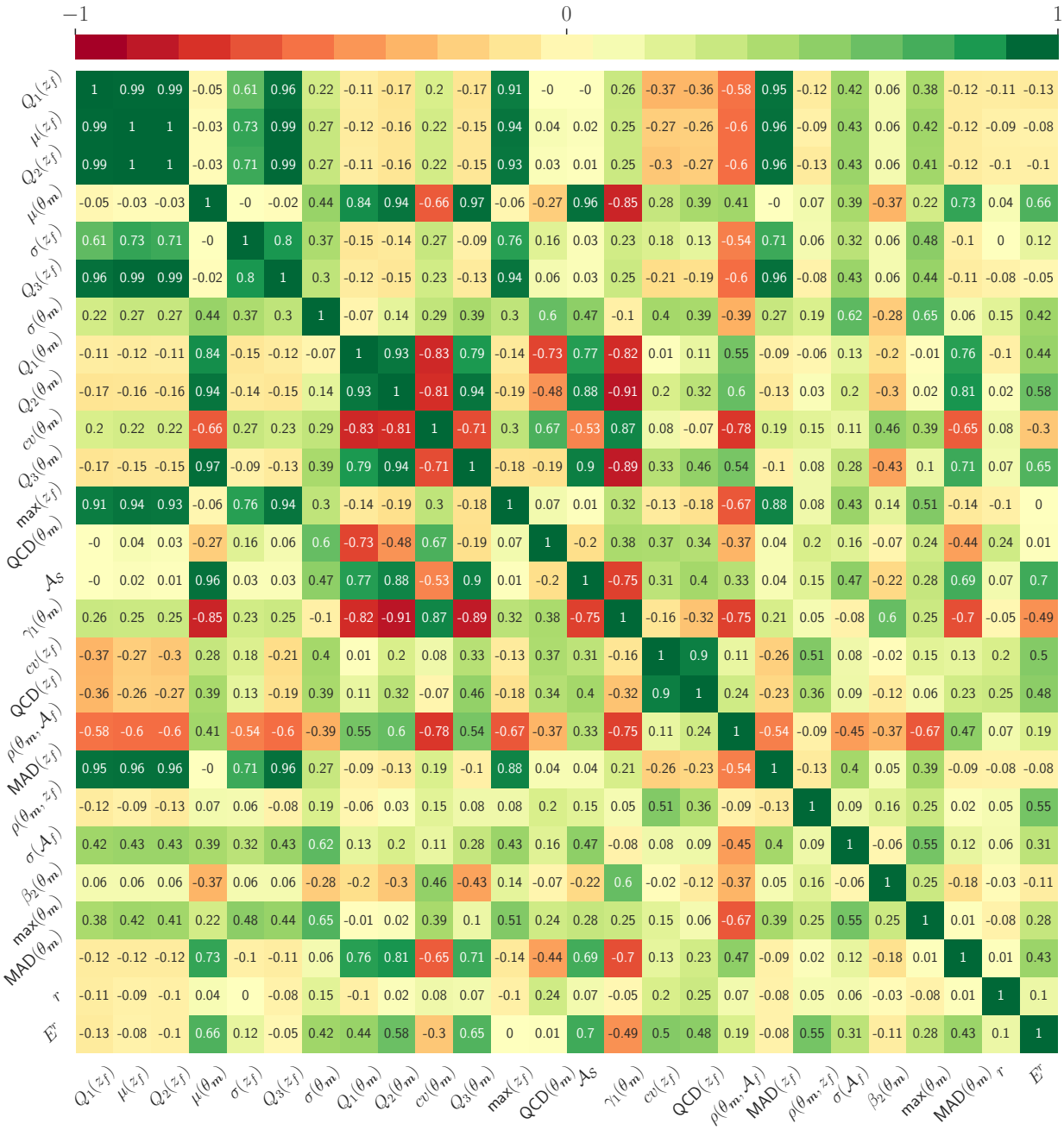


Figure A.46 – Matrice de corrélation.

Modèle prédictif :

$$
\begin{aligned}
E^r \approx P^r = & 0.0233\, Q_1(z_f) - 0.016\, \mu(z_f) - 0.0107\, Q_2(z_f) + 0.0794\, \mu(\theta_m) \\
& + 0.0207\, \sigma(z_f) + 0.0028\, Q_3(z_f) - 0.0789\, \sigma(\theta_m) - 0.05\, Q_1(\theta_m) \\
& - 0.0276\, Q_2(\theta_m) + 0.0172\, cv(\theta_m) + 0.0138\, Q_3(\theta_m) - 0.0004 \max(z_f) \\
& - 0.019\, \mathrm{QCD}(\theta_m) + 0.006\, \mathcal{A}_{\mathcal{S}} - 0.0032\, \gamma_1(\theta_m) - 0.0148\, cv(z_f) \\
& + 0.0147\, \mathrm{QCD}(z_f) - 0.0095\, \rho(\theta_m, \mathcal{A}_f) - 0.0005\, \mathrm{MAD}(z_f) + 0.0115\, \rho(\theta_m, z_f) \\
& - 26565.3542\, \sigma(\mathcal{A}_f) + 0.0002\, \beta_2(\theta_m) + 0.0006 \max(\theta_m) - 0.0008\, \mathrm{MAD}(\theta_m) \\
& + 0.0\, r + 0.0098.
\end{aligned}
$$

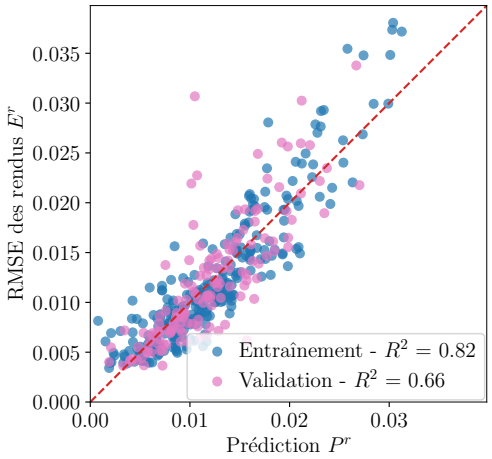


Figure A.47 – Prédiction P^r comparée à l'erreur E^r.

Tableau A.46 – Tableau de prédiction à une précision 10e-2.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.01	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.01	170	0.01	0	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0	0.01	0
0.01	0.02	218	0.01	0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0	0.03	0
0.02	0.03	37	0.02	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.01	0.02	0
0.03	0.04	4	0.04	0	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0	0	0

Tableau A.47 – Tableau de prédiction à une précision 10e-3.

P^r			E^r									
min	max	# surf.	μ	var	min	Q_1	Q_2	Q_3	max	IQR	étendue	MSE
-0.005	-0.004	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
-0.004	-0.003	0										
-0.003	-0.002	0										
-0.002	-0.001	0										
-0.001	0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
0	0.001	1	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	
0.001	0.002	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.0	0.0
0.002	0.003	5	0.01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.003	0.004	9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.004	0.005	14	0.01	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.005	0.006	20	0.01	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.006	0.007	29	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.0	0.0
0.007	0.008	22	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.008	0.009	35	0.01	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.009	0.01	31	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.0	0.01	0.0
0.01	0.011	35	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.0	0.02	0.0
0.011	0.012	34	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.012	0.013	26	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.013	0.014	25	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.0	0.01	0.0
0.014	0.015	25	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.015	0.016	17	0.01	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.016	0.017	23	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.017	0.018	13	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.01	0.02	0.0
0.018	0.019	6	0.02	0.0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.019	0.02	14	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0	0.01	0.0
0.02	0.021	7	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.01	0.0
0.021	0.022	6	0.02	0.0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.0	0.02	0.0
0.022	0.023	5	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.0	0.01	0.0
0.023	0.024	7	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.024	0.025	2	0.02	0.0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.0	0.0	0.0
0.025	0.026	3	0.03	0.0	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.01	0.01	0.0
0.026	0.027	2	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.027	0.028	3	0.03	0.0	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.0
0.028	0.029	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.029	0.03	1	0.03	0.0	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0	0.0	
0.03	0.031	3	0.04	0.0	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	0.0
0.031	0.032	1	0.04	0.0	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.0	0.0	

Tableau A.48 – Quantiles des résidus ϵ^r.

Quantile	0.25	0.50	0.75	0.80	0.90	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
Valeur ϵ^r	0.0007	0.0018	0.0032	0.0037	0.0048	0.006	0.0062	0.0072	0.0078	0.0096

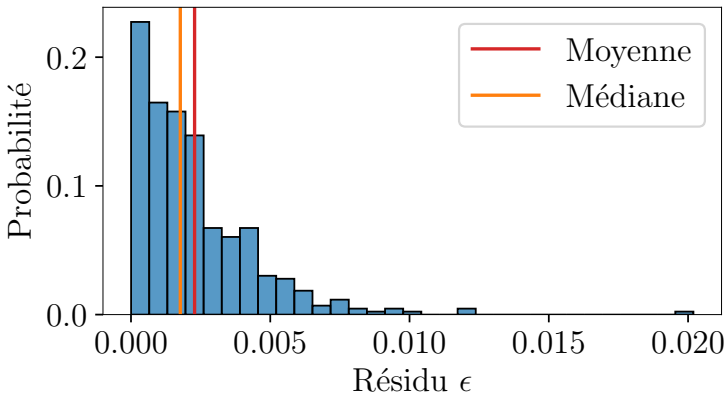


Figure A.48 – Histogramme des résidus $\epsilon^r = |E^r - P^r|$.