THÈSE

Pour l' obtention du grade de

DOCTEUR DE L' UNIVERSITÉ DE POITIERS

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
Diplôme National — Arrêté du 25 mai 2016

École Doctorale : Mathématiques, Informatique, Matériaux, Mécanique, Énergétique — MIMME
Secteur de Recherche : Mathématiques et applications

Présentée par :
Dieunel DOR

Étude de modèles mathématiques pour les croissances tumorales

Directeur de thèse :
Alain MIRANVILLE
Achis CHERY

Soutenue le 04 décembre 2023
Devant la commission d'examen

JURY

Olivier GOUBET, professeur, Université de Lille ..... Rapporteur
Xinguang YANG, professeur, Henan Normal University, Chine ..... Rapporteur
Laurence CHERFILS, maître de conférence (HDR), Université de La Rochelle Examinatrice
Morgan PIERRE, maître de conférence (HDR), Université de Poitiers ..... Examinateur
Pauline LAFITTE, professeur, Ecole Centrale de Paris ..... Examinatrice
Edès DESTYL, maître de conférence, Université d' État d' Haïti ..... Examinateur
Souleymane KADRI-HAROUNA ,maître de conférence, Université de La Rochelle .. Invité
Alain MIRANVILLE, professeur, Université de Poitiers ..... Directeur de thèse
Achis CHERY, maître de conférence, Université d' État d' Haïti ..... Co-directeur de thèse

THÈSE de doctorat en Cotutelle

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

École Doctorale : Mathématiques, Informatique, Matériaux, Mécanique, Énergétique — MIMME
Et
École Doctorale : Direction des Etudes Post-Graduée—DEP

Secteur de Recherche : Mathématiques et applications

Présentée par :
Dieunel DOR

Étude de modèles mathématiques pour les croissances tumorales

Directeur de thèse :
Alain MIRANVILLE
Achis CHERY

Soutenue le 04 décembre 2023
Devant la commission d'examen

JURY

Olivier GOUBET, professeur, Université de Lille ..... Rapporteur
Xinguang YANG, professeur, Henan Normal University, Chine ..... Rapporteur
Laurence CHERFILS, maître de conférence (HDR), Université de La Rochelle Examinatrice
Morgan PIERRE, maître de conférence (HDR), Université de Poitiers ..... Examinateur
Pauline LAFITTE, professeur, Ecole Centrale de Paris ..... Examinatrice
Edès DESTYL, maître de conférence, Université d' État d' Haïti ..... Examinateur
Souleymane KADRI-HAROUNA ,maître de conférence, Université de La Rochelle.. Invité
Alain MIRANVILLE, professeur, Université de Poitiers ..... Directeur de thèse
Achis CHERY, maître de conférence, Université d' État d' Haïti ..... Co-directeur de thèse

Remerciements

D' abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse : professeur Achis Chery et professeur Alain Miranville. Je leur suis reconnaissant pour leurs conseils, leur patience, leur gentillesse, leurs encouragements et leur soutien infaillible tout au long de ma poursuite de doctorat. J'ai pu apprendre des choses précieuses de leur expérience, notamment leur passion pour les mathématiques et la vie, leur clairvoyance, leur responsabilité, leur tendresse et leur générosité. Ces enseignements m'accompagneront pour le reste de ma vie.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements envers le professeur Olivier Goubet et le professeur Xinguang Yang pour avoir accepté d' être les rapporteurs de ma thèse. Leurs commentaires et remarques constructifs et précieux ont grandement contribué à l'amélioration de ma recherche et de mon travail.

Je voudrais également exprimer ma gratitude envers les professeurs Morgan Pierre, Laurence Cherfils, Edes Destyl, Pauline Lafitte et Kadri Harouna Souleymane pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Leur participation a été très précieuse et leur expertise a été essentielle pour évaluer la qualité de mon travail. Je suis reconnaissant pour leur temps, leur engagement et leur soutien tout au long de ce processus.

Je remercie aussi le professeur Patrice Naudin pour la relecture de la thèse et les conseils constructifs. Je remercie également le professeur Pol Vanheacke et le professeur Jean Keveny Innocent pour les conseils et les mots d'encouragement.

Un remerciement speciale à tous les professeurs de l'Ecole Normale Superieure de l' Université d' Etat d'Haiti, particulierement à ceux du departement de mathematiques.

A tous les membres du Laboratoire de mathématiques et applications : Professeur Boris Pasquier, directeur du LMA ; Mme Alicia Lecesve, Mme Léa Nabit, les secrétaires de l'ED MIMME et LMA ; Mme Jocelyne Attab à la bibliothèque et à l' infographie ; Mme Nathalie Mongin au service de comptabilité ; M. Philippe Augustin, le technicien de l' informatique. Merci beaucoup pour votre aide et votre soutien quotidiens.

A mes meilleurs amis docteurs et futurs docteurs : Ruben Louis, Mickenson Francois, Francilien Bien aimé, Anderson Augusma et Lesly Lalanne.

Un grand merci pour votre accompagnement quotidien, vos encouragements et votre réconfort, ainsi que pour votre attention et votre considération.

Je tiens à remercier mes amies : Louis Roodlin Hibart, Gustave Onel, Reginald Jean Pierre, Sabine Bieneson et Marie Lucie Theodore pour les mots d'encouragements. Je voudrais remercier mes autres amis qui me soutiennent constamment.

Avant de finir, je n'oublie pas de m' adresser à toute ma famille : Magarette Dor, Sophonie Dor, Dieulitha Dor, Elias Dor, Thelusme Marie-Ange, Muller Pierre, Wilson Cadet et Christopher Pedy. Merci pour votre amour, votre soutien et vos mots d'encouragement.

A mes très chers parents : Zilmithe Cadet et Dieulibon Dor, c'est ton rêve qui se réalise par l' accomplissement de ce travail. Merci d'avoir toujours cru en moi. Pour tous les sacrifices que tu as faits pour éduquer tes enfants et pour tes prières, merci.

Table des matières

1 Introduction générale **7**
- 1.1 L' équation de Cahn-Hilliard . . . 7
  - 1.1.1 Terme non linéaire . . . 7
  - 1.1.2 Conditions aux limites . . . 8
- 1.2 Les variantes de l' équation de Cahn-Hilliard . . . 8
- 1.3 Dérivation du modèle de Cahn-Hilliard relaxé . . . 10
- 1.4 Présentation de la thèse . . . 10
- 1.5 Plan de la thèse . . . 11

2 Préliminaires et Rappels **13**
- 2.1 Espaces fonctionnels et propriétés . . . 14
  - 2.1.1 Résultats de compacité . . . 14
- 2.2 Injections et Inégalités . . . 15
  - 2.2.1 Injections de Sobolev . . . 15
  - 2.2.2 Inégalités de Young . . . 15
  - 2.2.3 Inégalités de Hölder et d' interpolation . . . 16
- 2.3 Inégalités de Poincaré . . . 16
- 2.4 Lemmes de Gronwall . . . 17
- 2.5 Attracteurs et système dynamiques . . . 18
- 2.6 Dimension de l'attracteur global . . . 20

3 Comportement asymptotique du modèle de Cahn-Hilliard relaxé avec le terme de symport **23**
- 3.1 Présentation du modèle . . . 24
  - 3.1.1 Notations . . . 24
- 3.2 Estimations a priori . . . 25
- 3.3 Existence et unicité . . . 28
- 3.4 Dissipativité . . . 31
- 3.5 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur . . . 37
- 3.6 Existence d' attracteurs exponentiels . . . 41

4 Relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard visqueux avec un terme de symport pour des applications biologiques **47**
- 4.1 Présentation du modèle . . . 49

4.1.1 Hypothèses . . . 49
4.1.2 Notations . . . 49
4.2 Estimations a priori . . . 52
4.3 Existence et unicité de la solution . . . 54
4.4 Dissipativité . . . 56
4.4.1 Existence de l' attracteur global . . . 62
4.5 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur . . . 64
4.6 Familles robustes d' attracteurs exponentiels . . . 71
4.7 Résultats Numériques . . . 83
4.7.1 Stabilité par la méthode de l' énergie dans le cas $g \equiv 0$. . . . 83
4.7.2 Simulations en dimension deux de l' espace . . . 85

5 Modèle de la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération 89
5.1 Présentation du modèle . . . 90
5.1.1 Hypothèses . . . 90
5.2 Notations . . . 90
5.3 Estimations a priori . . . 91
5.4 Existence et unicité . . . 93
5.5 Dissipativité . . . 96
5.6 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur . . . 101
5.7 Existence d' attracteurs exponentiels . . . 105
5.8 Simulations Numériques . . . 112
5.8.1 Simulations numériques dans une dimension spatiale . . . 112

6 Convergence d' attracteurs exponentiels pour une discrétisation en temps linéaire du modèle de Cahn-Hilliard avec un terme source 117
6.1 Presentation du problème continu . . . 118
6.1.1 Notations et Hypothèses . . . 118
6.2 Estimations a priori . . . 120
6.3 Existence et unicité . . . 125
6.4 Dissipativité . . . 126
6.5 Existence d' attracteurs exponentiels . . . 127
6.6 Présentation du problème semi-discret . . . 130
6.7 Estimations a priori de la solution, uniforme en δt . . . 131
6.7.1 Estimations pour la différence des solutions, uniforme en δt . . . 138
6.8 Estimation d' erreur uniforme en temps fini . . . 140
6.9 Convergence d' attracteurs exponentiels . . . 142
6.9.1 Quelques définitions . . . 142
6.9.2 Le résultat principal . . . 143

7 Conclusion générale et perspectives 145

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 L' équation de Cahn-Hilliard

L' équation de Cahn-Hilliard est une équation aux dérivées partielles qui décrit l' évolution de la séparation de phases dans les matériaux, notamment dans les alliages binaires. Elle a été proposée par John W. Cahn et John E. Hilliard à la fin des années 1950 (voir, [5, 4]). Cette équation est basée sur l' énergie libre de Ginzburg-Landau suivante :

$$\Psi_{GL} = \int_{\Omega} (\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + F(u))dx, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.1}$$

où u représente la concentration de l' un des deux composants dans le mélange, ε est le coefficient de la tension surfacique à l' interface, F est le potentiel à double puits et Ω est le domaine occupé par le système. l' équation de Cahn-Hilliard correspond à un flot de gradient dans l' espace de Hilbert H^{-1} par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\kappa\Delta^2 u - \kappa\Delta f(u) = 0, \tag{1.2}$$

où f est la dérivée du potentiel à deux puits F. Nous renvoyons le lecteur à [71, 60, 59, 18] pour plus de détails.

1.1.1 Terme non linéaire

Le potentiel à deux puits F correspond aux deux phases des matériaux. Ce potentiel est très pertinent d' un point de vue thermodynamique et il est représenté par la fonction logarithmique suivante qui découle d' un modèle de champs moyens (voir [5, 10]) :

$$F(s) = \frac{\theta_c}{2}(1-s^2) + \frac{\theta}{2}[(1-s)\ln(\frac{1-s}{2}) + (1+s)\ln(\frac{1+s}{2})], \tag{1.3}$$
$$s \in (-1,1), \qquad 0 < \theta < \theta_c,$$

c'est-à-dire

$$f(s) = -\theta_c s + \frac{\theta}{2}\ln(\frac{1+s}{1-s}), \tag{1.4}$$

où θ et θ_c sont proportionnels respectivement à la température absolue et critique du mélange.

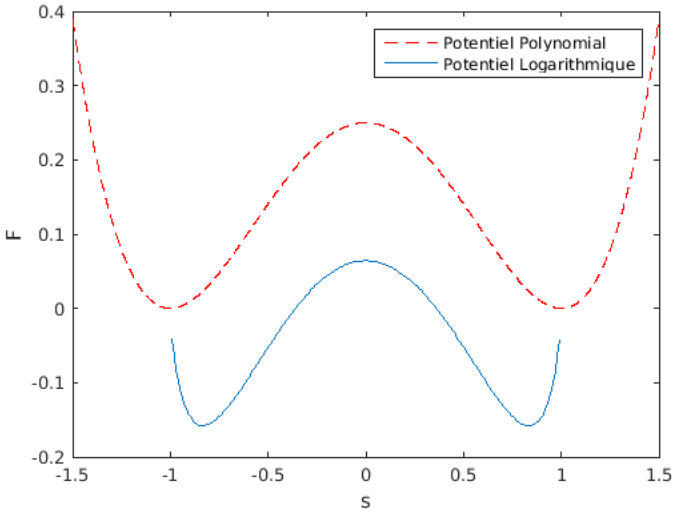

FIGURE 1.1 – Le Potentiel Logarithmique et le potentiel polynomial.

La condition $0 < \theta < \theta_c$ assure la forme à double puits de F et que la séparation de phases. (Voir, [15, 64] pour plus détails). Le potentiel logarithmique précédent est souvent approché par le potentiel polynomial suivant (Voir, [9, 31]) :

$$F(s) = \frac{1}{4}(s^2 - 1)^2, \tag{1.5}$$

c'est-à-dire,

$$f(s) = s^3 - s. \tag{1.6}$$

Cette approximation est très pertinente d' un point de vue thermodynamique lorsque le mélange est suffisamment refroidi. La comparaison entre les deux potentiels se trouve dans la Figure 1.1 ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur à [70, 65, 66, 42, 8, 16] pour plus de détails.

1.1.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont des conditions spécifiques pour un problème mathématique ou physiques permettant de définir le comportement du système à ses frontières. Elles jouent un rôle essentiel dans la résolution de nombreux problèmes tels que les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles et les problèmes de valeurs propres. Suivant la nature du problème en étude, les conditions aux limites peuvent prendre différentes formes. Par exemple, dans les conditions aux limites de Dirichlet, la valeur de la fonction inconnue est fixée sur la frontière, tandis que dans celles de Neumann, il n'y a pas de perte de masse à travers la frontière, ce qui implique une conservation de masse. On a aussi les conditions aux limites mixtes, combinaisons entre les conditions de Dirichlet et de Neumann.

1.2 Les variantes de l' équation de Cahn-Hilliard

Il est intéressant de noter que l' équation de Cahn-Hilliard et certaines de ses variantes sont aussi utilisées pour modéliser d' autres phénomènes que la séparation de phases telles que : les processus de corrosion (voir, [27]), la dynamique des populations (voir, [14]), la croissance tumorale (voir,

[49, 30]), les films bactériens (voir, [50]), les couches minces (voir, [73]), également en chimie (voir, [47]), en traitement d' images (voir, [2, 7]), en écologie (voir, [58]), en astronomie (voir, [78]).

En particulier, beaucoup de ces phénomènes sont modélisés par l' équation généralisée de Cahn-Hilliard suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\kappa\Delta^2 u(t) - \kappa\Delta f(u) + g(x,u) = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.7}$$

Les lecteurs peuvent consulter [1, 7, 29, 12, 67, 11, 36, 51, 54] pour plus d' études sur l' équation générale (1.7). En particulier, l' équation (1.7) contient les modèles déduits à la suite.

(i) **Equation de Cahn-Hilliard-Oono.** Dans ce cas,

$$g(x,s) = g(s) = \beta s, \quad \beta > 0.$$

Ce terme g a été proposé dans [72] pour tenir compte des interactions à longue portée (c'est-à-dire non locales), mais aussi pour simplifier les simulations numériques. Dans [6], les auteurs ont utilisé une équation similaire à l' équation de Cahn-Hilliard-Oono pour modéliser la séparation de microphases des copolymères diblocs (voir aussi pour plus de details [13, 63, 61]).

(ii) **Terme de prolifération.** Dans ce cas,

$$g(x,s) = g(s) = \beta s(s-1), \quad \beta > 0.$$

Ce terme g a été introduit dans [49] pour des applications en biologie et plus précisément pour modéliser la cicatrisation des plaies, la croissance tumorale et aussi des cellules cancéreuses dans le cerveau (voir aussi [30, 1]) pour le choix des autres fonctions polynomes de degré 4 pour g.

(iii) **Terme de fidelité.** Dans ce cas,

$$g(x,s) = \lambda_0 X_{\Omega\setminus D(x)}(s - h(x)), \quad \lambda_0 > 0, \quad D \subset \Omega, \quad h \in L^2(\Omega).$$

Cette fonction a été proposée dans [2] pour des applications en retouche d' images. Dans ce cas, h est une image binaire, D est la zone endommagée de l' image. l' idée de cette méthode est de résoudre l' équation jusqu'à l' état d' équilibre. La solution obtenue est la solution restaurée de l' image $h(x)$.

(iv) **Terme symport.** Dans ce cas,

$$g(x,s) = \frac{ks}{k' + |s|},$$

où k, k' sont les constantes de Michael Mentens.

La fonction g a été proposée dans [48], pour prendre en compte les échanges entre les cellules et leur environnement.

1.3 Dérivation du modèle de Cahn-Hilliard relaxé

Récemment, les chercheurs ont porté une attention considérable à l' une des variantes de l' équation de Cahn-Hilliard, à savoir la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard. Le terme de relaxation a été introduit dans l' équation de Cahn-Hilliard par P. Galenko et ses collaborateurs (voir, [34, 33, 32, 17, 35]) afin de traiter de manière plus précise les effets de non-équilibre dans la décomposition spinodale générée par la solidification rapide dans certains matériaux (par exemple les verres).
Nous allons donner une brève description des équations du modèle relaxé. Nous supposons qu'un alliage binaire suffisamment refroidi pour subir un processus de séparation de phases. On note $u = u(x,t)$ la concentration relative d' un composant du système et $J = J(x,t)$ la diffusion ; la loi de la conservation donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot J. \tag{1.8}$$

Afin de décrire l' évolution de u, nous devons introduire l' hypothèse constitutive sur J :

$$\tau_D \frac{\partial J}{\partial t} + J = -\nabla \frac{\delta E}{\delta u}\,, \tag{1.9}$$

où $\tau_D \geq 0$ est le paramètre de la relaxation et $E(u)$ est l' énergie libre totale qui prend la forme suivante :

$$E(u) = \int_\Omega (\frac{\varepsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + F(u))dx\,,$$

où ε est une constante positive qui mesure la largeur interfaciale et F est le potentiel à deux puits qui tient compte de la présence de deux composantes.

En combinant (1.8) et (1.9), on obtient :

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(-\varepsilon \Delta u + f(u))\,, \tag{1.10}$$

où f est la dérivée du potentiel à double puits F.

l' équation (1.10) est l' équation de la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard ou l' équation de Cahn-Hilliard relaxée.

Nous renvoyons le lecteur à [19, 81, 80, 38, 45] et (voir aussi [52, 40, 37]) pour l' analyse mathématique et numérique de l' équation (1.10).

1.4 Présentation de la thèse

Cette thèse contient des travaux que j'ai réalisés au sein des équipes EDP et DACTIM-MIS du laboratoire de mathématiques et applications de l' Université de Poitiers. Dans la thèse, nous faisons les études analytiques et numériques des modèles de type Cahn-Hilliard avec des applications biologiques. Les résultats de la thèse se trouvent dans les chapitres 3, 4, 5, 6 nommés comme suit :

- **Chapitre 3 :** Comportement asymptotique du modèle de Cahn-Hilliard relaxé avec le terme symport.

- **Chapitre 4 :** Relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard visqueux avec un terme symport pour des applications biologiques.
- **Chapitre 5 :** Modèle de la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération.
- **Chapitre 6 :** Convergence d' attracteurs exponentiels pour une discrétisation en temps linéaire du modèle de Cahn-Hilliard avec un terme source

1.5 Plan de la thèse

Dans un premier article [21], nous considérerons un modèle de la relaxation de Cahn-Hilliard avec le terme symport. Ce modèle se présente,

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta f(u) + \frac{ku}{k' + |u|} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \tag{1.11}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{1.12}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.13}$$

où u est la concentration, $\frac{ku}{k'+|u|}$ le terme symport et prend en compte les échanges entre les cellules et leur environnement, $\Omega \subset \mathbb{R}$ le domaine régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier et f le potentiel régulier (typiquement $f(s) = s^3 - s$).

Nous démontrerons d' abord, l' existence et l' unicité de la solution du système (1.11)-(1.13) pour des données initiales dans l' espace de phases $H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, la régularité de la solution dans l' espace $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Ensuite, nous étudierons aussi le comportement asymptotique du système (1.11)-(1.13) c'est- à-dire l' existence d' un semi-groupe dissipatif $\{S_{\tau_D}(t) \quad t \geq 0\}$ sur l' espace de phase. Ceci nous a permis de montrer l' existence de l' attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D}$ dépendant du paramètre de la relaxation. Enfin, l' existence des attracteurs exponentiels, ce qui implique que l' attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D}$ est de dimension fractale finie.

Dans le deuxième article [23], nous considérerons le modèle de la relaxation hyperbolique de Cahn-Hilliard viscous avec le terme symport, qui est proposé pour des applications en biologie, nous avons

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(-\Delta u + f(u) + \delta u_t) + \frac{ku}{k' + |u|} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \tag{1.14}$$

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{1.15}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1, \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.16}$$

où u correspond à une concentration, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le domaine régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier, $\tau_D, \delta \geq 0$ sont les paramètres de relaxation et de viscosité respectivement et f le potentiel régulier (typiquement $f(s) = s^3 - s$). Nous supposons dans ce modèle que le paramètre de relaxation est dominé par le paramètre de viscosité, c'est-à-dire

$$\tau_D, \delta \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \delta \geq \mu\tau_D \quad \forall\, \mu \in]0, 1]. \tag{1.17}$$

Nous montrerons comme dans le premier modèle que le système (1.14)-(1.16) est bien posé dans l' espace de phase $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et qu'il génère un système dynamique dissipatif dépendant des paramètres. Nous montrerons aussi que le semi-groupe $\{S_{\tau_D,\delta}(t) \;\; t \geq 0\}$ possède un attracteur global. Ensuite, nous construirons une famille robuste d' attracteurs exponentiels qui est une perturbation robuste des attracteurs exponentiels de l' équation de Cahn-Hilliard classique. Enfin, nous donnerons des simulations numériques sur l' évolution de la solution dependant des paramètres.

Dans le troisième article[22], nous considérerons le modèle présenté dans le premier article et en remplaçant le terme symport $\frac{ku}{k'+|u|}$ par un terme de prolifération $g(u)$. Le système devient,

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta f(u) + g(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \tag{1.18}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{1.19}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.20}$$

où u est la concentration, g le terme de prolifération, $\Omega \subset \mathbb{R}$ le domaine régulier et f est le potentiel polynomial.

Comme dans le premier papier, nous démontrerons l' existence, l' unicité et la régularité de la solution sur l' espace de phases dépendant du paramètre de la relaxation. Ensuite, nous montrerons que le système (1.18)-(1.20) génère un semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t) \;\; t \geq 0\}$ dissipatif. Ceci nous a permis de montrer l' existence d' un attracteur global et d' une famille d' attracteurs exponentiels. Enfin, nous ferons des simulations numériques.

Enfin, dans le quatrième article [24],Nous considérerons une discrétisation en temps linéaire implicite-explicite (IMEX) de l' équation de Cahn-Hilliard avec un terme source. Ce modèle se présente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta f(u) + \frac{ku}{k' + |u|} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \tag{1.21}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{1.22}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.23}$$

où u correspond à une concentration, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 1, 2, 3)$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier et f est le potentiel régulier.

d' abord, pour chaque pas de temps suffisamment petit, nous construirons un attracteur exponentiel du système dynamique en temps discret associé à la discrétisation. Nous démontrerons aussi lorsque le pas de temps tend vers 0 que cet attracteur converge pour la distance de Hausdorff symétrique vers un attracteur exponentiel du système dynamique en temps continu associé à ce modèle. Ensuite, nous montrerons également que la dimension fractale de l' attracteur exponentiel (et par conséquent, de l' attracteur global) est bornée par une constante indépendante du pas de temps. Enfin, les résultats s' appliquent aussi à l' équation classique de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann.

Chapitre 2

Préliminaires et Rappels

Contents

2.1 Espaces fonctionnels et propriétés 14
2.1.1 Résultats de compacité 14
2.2 Injections et Inégalités 15
2.2.1 Injections de Sobolev 15
2.2.2 Inégalités de Young 15
2.2.3 Inégalités de Hölder et d' interpolation 16
2.3 Inégalités de Poincaré 16
2.4 Lemmes de Gronwall 17
2.5 Attracteurs et système dynamiques 18
2.6 Dimension de l'attracteur global 20

Dans ce chapitre, nous allons énoncer un ensemble de résultats et des inégalités qui seront utilisées au cours des prochains chapitres. Leurs démonstrations pouront- êtres consultées dans les références indiquées.

2.1 Espaces fonctionnels et propriétés

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|_E$.

Définition 2.1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$. On désigne par $L^p(\Omega, E)$ l'espace des fonctions défini par : $f : \Omega \to E$ mesurables telles que*

$$\int_\Omega \|f(s)\|_E ds < \infty,$$

et si $\Omega = (a, b)$, alors $L^p(\Omega\,,\, E)$ est l'espace des fonctions bornées presque sûrement sur (a, b). Autrement dit, il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\|f\|_E \leq k, \;\; p.p., \quad t \in (a, b).$$

Proprietés 2.1.2. *Si $p < \infty$, alors*

$$f \mapsto (\int_\Omega \|f(s)\|_E^p ds)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(\Omega,E)}$$

sinon

$$f \mapsto \sup_{s\in(a,b)} \|f(s)\|_E = \|f\|_{L^\infty(\Omega,E)},$$

est une norme sur $L^p(\Omega, E)$ pour tout $1 < p \leq \infty$ et $L^p(\Omega, E)$ est lui-même un espace de Banach.

Proprieté 2.1.3. *Soient E et F deux espaces de Banach tel que E s'injecte et est dense dans F. Alors $L^p(\Omega, E)$ est aussi dense dans $L^p(\Omega, F)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

2.1.1 Résultats de compacité

Théorème 2.1.4 (théorème de compacité de J.-P. Aubin & J.- L. Lions, voir [69])**.** *Soientt E_1, E_2, E_3 trois espaces de Banach tels que $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ de manière continue et dense, avec $E_1 \subset E_2$ qui est compacte. Soit $p \geq 1, 1 \leq q \leq \infty$ et $T > 0$ donné. On pose :*

$$W = \{\, u \in L^p(0, T; E_1) \;\; et \;\; u_t(t) \in L^q(0, T; E_3) \,\}.$$

Alors, nous avons les assertions suivantes

1. *Si $p < \infty$, alors $W \subset L^q(0, T; E_2)$ est compact.*
2. *Si $p = \infty$, alors $W \subset C([0, T]; E_2)$ est compact.*

Remarques 2.1.5.

1. *Nous supposons que $p = q = 2$; E_1, E_2, E_3 sont des espaces de Hilbert et les inclusions sont aussi continues et denses. Alors, si E_2 est l' espace d' interpolation entre E_1 et E_3 d' ordre $\frac{1}{2}$, nous avons*

$$W \subset C([0,T],E_2)$$

avec inclusion continue.

2. *On suppose que l'inclusion $E_1 \subset E_3$ est continue et que E_1 est réflexive. Alors, si*

$$u \in C([0,T],E_3) \cap L^\infty(0,T;E_1)$$

il suit la forme du lemme de W.A. Strauss disant que

$$u \in C([0,T],E_{1,w})$$

ou w désigne la topologie faible étoile.

2.2 Injections et Inégalités

2.2.1 Injections de Sobolev

Théorème 2.2.1 (d' injections de Sobolev, voir [77]). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert régulier et borné. soit $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p \leq \infty$ un réel. Alors*

1. *si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [1,p^*], \ \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$$

2. *si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1,p[,$$

3. *si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \textit{tel que} \ 0 \leq k \leq m - \frac{n}{p}$$

Toutes les injections ci-dessous sont compactes pour $m = 1$.

Remarque 2.2.2. *Si on suppose de plus que Ω est plus régulier. Alors les injections sont toujours vraies. Si on remplace $W^{m,p}(\Omega)$ par $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$. Alors, elles sont vraies de manière globale.*

2.2.2 Inégalités de Young

Théorème 2.2.3 (inégalités de Young, voir [69]). *Soit $1 < p < q$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour tous $a, b \in (0,\infty)$ on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

on a également l' inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$,

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^q, \qquad c(\varepsilon) = \frac{1}{q(p\varepsilon)^{\frac{q}{p}}}$$

2.2.3 Inégalités de Hölder et d' interpolation

Théorème 2.2.4 (inégalité de Hölder, voir [77]). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |f \cdot g| ds \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Corollaire 2.2.5 (inégalité d' interpolation). *Soit $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a l' inégalité suivante :*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)},$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

2.3 Inégalités de Poincaré

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, connexe. On appelle espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, l' ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée aux sens des distributions est aussi dans $L^2(\Omega)$. Sa norme naturelle est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L' espace $H^1_0(\Omega)$ est défini aussi comme l' adhérence de $D(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$. L' orsque Ω est suffisamment régulier, on peut montrer que l' espace $H^1_0(\Omega)$ est l' ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ s' annulant sur $\partial\Omega$.

Théorème 2.3.1 (voir, [77]). *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ dans une seule direction. Alors, il existe $k > 0$ dépendant uniquement de Ω telle que :*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq k \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \quad 1 \leq p < \infty$$

Cette inégalité peut être généralisée. Soit $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont la norme suivante est définie

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On définit l' espace $W^{1,p}(\Omega)$ comme étant l' adhérence de l' ensemble des fonctions $D(\Omega)$ pour la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2.3.2. *Soit $p \in [1, \infty]$ et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et borné. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant de Ω et p telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Remarque 2.3.3. *l' inégalité de Poincaré-Wirtinger est une autre généralisation. Elle a l' avantage d' être valable pour toutes fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Théorème 2.3.4 (voir, [69]). *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et de mesure finie et $1 \leq p \leq \infty$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u - < u > \|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier pour $p = 2$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3.5. *Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de Ω telle que*

$$\|u(x) - < u(x) > \| \leq C\|\nabla u\|, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

et

$$\|u(x) - < u(x) > \|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

De plus si Ω est suffisamment régulier, on a :

$$\|u(x) - < u(x) > \|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|, \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

où

$$< u >= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx.$$

2.4 Lemmes de Gronwall

Lemme 2.4.1 (forme intégrale, voir [69]). *Soit u, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq u(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq u(t) + \int_a^t \psi(s)u(s)\exp(\int_s^t \psi(u)du)ds.$$

Lemme 2.4.2 (lemme de Gronwall uniforme, voir [77]). *Soit g, h et y trois fonctions positives localement intégrables sur $[t_0, \infty)$ avec y' la dérivée de y par rapport a t. On suppose que :*

$$y'(t) \leq g(t)y(t) + h(t), \quad t \geq t_0 \tag{2.1}$$

et que

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1(r), \quad \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2(r), \quad \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3(r), \quad t \geq t_0 \tag{2.2}$$

où $r > 0$ est donné. Alors

$$y(t + r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)\exp(a_1), \quad t \geq t_0. \tag{2.3}$$

Lemme 2.4.3 (lemme de Gronwall uniforme discret, voir [74]). *Soit $n_0, N \in \mathbb{N}, a_1, a_2, a_3, \delta t, r > 0$ et $(d^n), (g^n), (h^n)$ trois suites de nombres réel et positif qui satisfont :*

$$\frac{d^{n+1} - d^n}{\delta t} \leq g^n d^n + h^n, \quad n \geq n_0$$

et

$$\delta t \sum_{n=k_0}^{k_0+N} g^n \leq a_1, \ \ \delta t \sum_{n=k_0}^{k_0+N} h^n \leq a_2, \ \ \delta t \sum_{n=k_0}^{k_0+N} d^n \leq a_3,$$

pour tout $k_0 \geq n_0$ avec $r = \delta t N > 0$. Alors

$$d^n \leq (a_2 + \frac{a_3}{r}) \exp(a_1), \quad \forall n \geq n_0 + N.$$

2.5 Attracteurs et système dynamiques

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|$. On considère une famille d' opérateurs $\{S(t), \ \ t \geq 0\}$ définie par :

$$S(t) : E \to E, \ \ \forall t \geq 0.$$

Nous supposons que cette famille d' opérateurs satisfaits les propriétés suivantes :

1. $S(0) = \mathrm{Id}$
2. $S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad s, t \geq 0,$

où Id est l' opérateur identité. Nous aurons besoin que les opérateurs $S(t)$ soient continus. Pour cela, on prend $S(t)$ continue de E dans lui-même.

Définition 2.5.1. *Un ensemble $X \subset E$ est invariant pour le semi-groupe $S(t)$ si*

$$S(t)X = X, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $S(t)X \subset X, \ \forall t \geq 0$ (resp.$X \subset S(t)X, \ \forall t \geq 0$), on dit que X est positivement (resp. négativement) invariant.

Définition 2.5.2 (voir,[69]). *Soit $u_0 \in E$ l' ensemble oméga-limite de u_0 est l' ensemble*

$$\omega(u_0) := \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t) u_0},$$

où l' adhérence est prise dans E. De la même manière, on peut définir, pour tout ensemble borné β de E, l' ensemble oméga-limite de β par

$$\omega(\beta) := \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t) \beta}.$$

Remarque 2.5.3. *l' ensemble $\omega(\beta)$ est caractérisé par :*

$$x \in \omega(\beta) \Leftrightarrow \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \ x_k \in \beta, \ \forall k \in \mathbb{N}, \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}}, t_k \to \infty \text{ quand } k \to \infty$$

telle que,

$$S(t_k)x_k \to x \ \text{ quand } \ k \to \infty$$

Proposition 2.5.4 (voir, [77]). *On suppose que $B \subset E, B \neq \emptyset$ et qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\bigcup S(t)B$ est relativement compact dans E. Alors $\omega(B)$ est non vide, compact et invariant.*

Définition 2.5.5. *Un ensemble X satisfait la propriété d' attraction si, pour tout $B \subset E$ borné, on a*

$$\mathrm{dist_E}(S(t)B, X) \to 0, \ \ t \to +\infty$$

où $\mathrm{dist_E}$ est la semi-distance de Hausdorff entre les ensembles, définie par

$$dis_E(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|_E.$$

Définition 2.5.6. *Le semi-groupe $\{S(t), \ \ t \geq 0\}$ est dissipatif dans E s' il possède un ensemble borné absorbant $B \subset E$. Dans la pratique, cette propriété est habituellement vérifiée en démontrant une estimation dissipative de la forme*

$$\|S(t)u_0\|_E \leq Q(\|u_0\|_E)e^{-\varepsilon t} + C_1, \quad t \geq 0, \tag{2.4}$$

avec laquelle Q est une fonction monotone et les constantes positives ε et C_1 sont indépendantes de $u_0 \in E$.

Définition 2.5.7. *Soit B un sous ensemble borné de E. La mesure de non-compacité de Kuratowski de B est la quantité*

$$\kappa(B) = \inf\{d\,, B \text{ est recouvrement fini de boules de } E \text{ de diamètre} < d\}.$$

Définition 2.5.8. *On dit que le semi-groupe $\{S(t)\,, \ \ t \geq 0\}$ est asymptotiquement compact si, pour tout ensemble borné $B \subset E$, la mesure de non-compacité de Kuratowski de l'image $S(t)B$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, c'est-à-dire*

$$\lim_{t\to\infty} \kappa(S(t)B) = 0, \ \ B\, borné\, dans\, E.$$

Définition 2.5.9. *Un ensemble $\mathcal{A} \subset E$ est un attracteur global pour le semi-groupe $S(t)$ sur E si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *c'est un sous-ensemble compact de E ;*
2. *il est invariant, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \forall t \geq 0$;*
3. *c'est un ensemble attractif pour $S(t)$ sur E.*

Remarque 2.5.10. *La propriété d'invariance satisfaite par l'attracteur global $\mathcal{A}$ nous assure son unicité (s'il existe). De plus, $\mathcal{A}$ est le plus petit (pour l'inclusion) ensemble fermé qui satisfait la propriété d'attraction et apparaît ainsi comme un objet qui permet d'étudier le comportement asymptotique du système.*

Théorème 2.5.11. *On suppose que le semi-groupe $S(t)$ est continu, dissipatif (c.-à-d., il possède un ensemble borné absorbant B_0), et asymptotiquement compact (au sens de la définition 2.5.8). Alors, il possède l'attracteur global connexe $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \omega(B_0)$.*

2.6 Dimension de l'attracteur global

La dimension de l'attracteur global est une propriété géométrique intéressante dans la mesure où elle nous donne des informations sur le nombre de paramètres physiques ou de degrés de liberté définissant le système dynamique considéré. Nous intéressons ici aux dimensions de recouvrement telles que la dimension de Hausdorff et la dimension fractale.

Définition 2.6.1. *Soit $X \subset E$ un espace relativement compact. Soit $\mu > 0$ donné, soit $N_\mu(X)$ le nombre minimum de boules de rayon μ nécessaires pour recouvrir X. Alors la dimension fractale de X est la quantité :*

$$\dim_{\mathrm{F}}(X) := \lim_{\mu \to 0^+} \sup \frac{\ln(N_\mu(X))}{\ln(\frac{1}{\mu})}$$

(noter que $\dim_{\mathrm{F}}(X) \in [0, \infty]$). De plus, la quantité $\mathbb{H}_\mu(X) := \ln(N_\mu(X))$ est appelée μ-entropie de Kolmogorov de X.

Une façon de démontrer que l'attracteur global $\mathcal{A}$ existe et est de dimension fractale finie est de prouver par exemple l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$. La notion d'attracteur exponentiel, encore appelé ensemble inertiel, a été introduite par Eden, Foias, Nicolaenko, et Temam dans [25], dans le but de corriger certains défauts de l'attracteur global, notamment la vitesse d'attraction et la robustesse.

Définition 2.6.2. *Un ensemble compact $\mathcal{M}$ est un attracteur exponentiel pour le semi-groupe $S(t)$ si :*

1. *il est de dimension fractale finie, $dim_F(\mathcal{M}) < \infty$;*
2. *il est positivement invariant, $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \ \forall t \geq 0$;*
3. *il attire de façon exponentielle les sous-ensembles bornés de E au sens suivant :*

$$\forall B \subset E \text{ borné} \quad \mathrm{dist}_{\mathrm{E}}(S(t)B, \mathcal{M}) \leq Q(\|B\|_E)e^{-ct}, \quad t \geq 0$$

où la constante positive c et la fonction monotone Q sont indépendantes de B.

Théorème 2.6.3 (voir,[74]). *Soit $E = H$ et $E_1 = V$ deux espaces de Banach tels que E_1 est compact dans E.*
Soit $\{S_0(t), \ t \geq 0\}$ un semi-groupe continu sur E. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(H1) Il existe un ensemble borné β dans E tel que

$$\forall B \subset E, \quad \exists t(B) \geq 0, \ t \geq t(B) \Rightarrow S_0 B \subset \beta$$

(H2) Pour tout $T > 0$, pour tout $u_1, u_2 \in \beta$, on a

$$\|S_0(T)u_1 - S_0(T)u_2\|_{E_1} \leq c_1(T)\|u_1 - u_2\|_E$$

où la fonction $c_1 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ est continue

(H3) Pour tout $T > 0$, il existe $\alpha = \alpha(T) \in (0, 1]$ et une constante $c_2(T)$ telle que, pour tout $t_1, t_2 \in [0, T], u \in \beta$ nous avons

$$\|S_0(t_1)u - S_0(t_2)u\|_E \leq c_2(T)|t_1 - t_2|^\alpha \tag{2.5}$$

(H4) Pour tout $T > 0$ et pour tout $B \subset E$ borné, il existe $c_3(T, B)$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, $u_1, u_2 \in B$,

$$\|S_0(t)u_1 - S_0(t)u_2\|_E \leq c_3(T, B)\|u_1 - u_2\|_E \tag{2.6}$$

Alors le système dynamique continu $\{S_0(t), \quad t \geq 0\}$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_0$.

Théorème 2.6.4. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.6.3 sont vérifiées. Soit $\{S^n_{\delta t}, \quad n \in \mathbb{N}, \delta t \in (0, \delta t_0]\ (\delta t_0 > 0)\}$ une famille de semi-groupes discrets sur E. Supposons que les cinq conditions additionnelles suivantes sont satisfaites*

(H5) (Borné absorbant indépendant de δt) l' ensemble borné $\beta \subset E$ de l' hypothèse (H1) peut être choisi de telle sorte que, pour tout $B \subset E$ borné, il existe un temps $t(B) \geq 0$ tel que, pour tous $\delta t \in (0, \delta t_0]$ et $n \in \mathbb{N}$ qui satisfait $n\delta t \geq t(B)$, nous avons $S^n_{\delta t}(t)B \subset \beta$.

(H6) (Propriété de lissage, uniforme avec δt) Pour tout $T \geq \delta t$, il existe $\widetilde{\delta t}_0(T) \in (0, \delta t_0]$ et une constante $c_4(T)$ telle que pour tout $\delta t \in (0, \widetilde{\delta t}_0]$, pour tout $u_1, u_2 \in \beta$,

$$\|S^{[T/\delta t]}_{\delta t}u_1 - S^{[T/\delta t]}_{\delta t}u_2\|_{E_1} \leq c_4(T)\|u_1 - u_2\|_E.$$

Ici, $[-]$ est la fonction partie entière, c'est-à-dire que pour tout nombre réel x, $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

(H7) (Estimation uniforme de l' erreur en temps fini). Pour tout $T > 0$, il existe une constante $\gamma = \gamma(T) \in (0, 1)$ et une constante $c_5(T)$ telle que, pour tout $\delta t \in (0, \delta t_0]$,

$$\sup_{u \in \beta,\, 0 \leq n\delta t \leq T} \|S^n_{\delta t}u - S_0(n\delta t)u\|_E \leq c_5(T)\,(\delta t)^\gamma.$$

(H8) (Continuité Lipschitz sur des ensembles bornés, uniforme avec δt) Pour tout $T > 0$ et pour tout $B \subset E$ borné, il existe $c_6(T, B)$ tel que pour tout $\delta t \in (0, \delta t_0]$, pour tout $0 \leq n\delta t \leq T$, pour tout $u_1, u_2 \in B$,

$$\|S^n_{\delta t}u_1 - S^n_{\delta t}u_2\|_E \leq c_6(T, B)\|u_1 - u_2\|_E. \tag{2.7}$$

(H9) (Limite sur les ensembles bornés, uniforme avec δt) Pour tout $T > 0$ et pour tout $B \subset E$ borné, il existe $c_7(T, B)$ tel que pour tout $\delta t \in (0, \delta t_0]$, pour tout $0 \leq n\delta t \leq T$, pour tout $u \in B$,

$$\|S^n_{\delta t}u\|_E \leq C_7(T, B) \tag{2.8}$$

Alors, pour tout $\delta t \in (0, \delta t']$, $\delta t' > 0$ suffisamment petit, le système dynamique discret $\{S^n_{\delta t}, \quad n \in \mathbb{N}\}$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_{\delta t}$ sur E, et le système dynamique continu $\{S_0(t), \quad t \geq 0\}$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_0$ tel que :

1. *La dimension fractale de $\mathcal{M}_{\delta t}$ est borné, uniformément par rapport à $\delta t \in (0, \delta t']$, c'est-à-dire $dim_F(\mathcal{M}_{\delta t}) \leq c_8$, où c_8 est indépendant de δt ;*
2. *$\mathcal{M}_{\delta t}$ attire les ensembles bornés de E, uniformément par rapport à $\delta t \in (0, \delta t']$, c'est-à-dire pour tout $\delta t \in (0, \delta t']$, pour tout $B \subset E$ borné*

$$\mathrm{dist_E}(S^n_{\delta t}B, \mathcal{M}_{\delta t}) \leq Q(\|B\|_E)e^{-c_9 n\delta t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où la constante c_9 et la fonction monotone Q sont indépendantes de δt ;

3. *La famille* $\{\mathcal{M}_{\delta t},\ \delta t \in (0, \delta t']\}$ *est continue en* 0*,*

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{M}_{\delta t}, \mathcal{M}_0) \leq c_{10}(\delta t)^{c_{11}},$$

où c_{10} *et* $c_{11} \in (0, 1)$ *sont indépendants de* δt *et* $\mathrm{dist}_{\mathrm{sym}}$ *désigne la distance de Hausdorff symétrique entre les ensembles, définie par :*

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{sym}}(A, B) := \max(\,\mathrm{dist}_{\mathrm{E}}(A, B)\,,\,\mathrm{dist}_{\mathrm{E}}(B, A)).$$

Remarque 2.6.5. *Les hypothèses (H5), (H6) et (H8) sont les contreparties discrètes des hypothèses (H1), (H2) et (H4) respectivement (uniformément par rapport à* δt *). l' hypothèse (H9) est une version discrète faible de (H3). l' hypothèse (H7) donne la relation entre les semi-groupes continus et discrets. Nous soulignons que l' ensemble borné* β *est le même dans les hypothèses (H1)-(H3) et (H5)-(H7).*

Remarques 2.6.6.

1. *un attracteur exponentiel lorsqu'il existe n'est pas unique, cela est dû à la propriété d'invariance positive de celui-ci. Ainsi, l'existence d'un attracteur exponentiel implique en fait l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels.*
2. *La dimension finie de l'attracteur global signifie que la dynamique du système peut être décrite par un nombre fini de degrés de liberté, et ce, en dépit du fait que l'espace initial des phases est de dimension infinie.*
3. *Il est à noter que l'attracteur global peut être extrêmement sensible aux perturbations, aussi minimes soient elles. Cela est lié à la vitesse d'attraction de trajectoires de l'attracteur global qui peut être lente, contrairement à l'attracteur exponentiel qui lui est robuste face aux perturbations.*

Chapitre 3

Comportement asymptotique du modèle de Cahn-Hilliard relaxé avec le terme de symport

Résumé : On s' intéresse dans ce chapitre au comportement asymptotique du modèle de Cahn-Hilliard relaxé unidimensionnel avec le terme symport. On associe ce modèle à des conditions aux limites de Dirichlet. Nous montrons d' abord que le modèle est bien posé, c'est-à-dire l' existence, l' unicité et la régularité de la solution. Ensuite, l' existence d' un système dynamique dépendant du paramètre de relaxation qui nous a permis de montrer l' existence de l' attracteur global. Enfin, nous construirons une famille d' attracteurs exponentiels.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié,
▷ Dieunel DOR. On the modified of the one-dimensional Cahn-Hilliard equation with a source term. AIMS Mathematics, 7(8) : 14672-14695, 2022.

Contents

3.1 Présentation du modèle **24**
3.1.1 Notations 24
3.2 Estimations a priori **25**
3.3 Existence et unicité **28**
3.4 Dissipativité **31**
3.5 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur **37**
3.6 Existence d' attracteurs exponentiels **41**

3.1 Présentation du modèle

Le modèle se présente comme suit :

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta f(u) + \frac{ku}{k' + |u|} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \tag{3.1}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{3.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1, \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{3.3}$$

où u correspond à une concentration, $\tau_D \geqslant 0$ représente le paramètre de la relaxation, $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier, f est le potentiel polynomial et $g(u) = \frac{ku}{k'+|u|}$ est le terme symport (k,k' sont les constantes de Michaelis-Menten, voir [48]).

Le potentiel f vérifie :

$$f \in C^2(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \tag{3.4}$$

$$f(s)s \geq F(s) - c_1 \geq c_2, \quad c_1, \ c_2 \geq 0, \ s \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$$F(s) \geq c_3 s^4 - c_4, \quad c_3 > 0, \ c_4 \geq 0, \ s \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

$$f'(s) \geq -c_5, \quad c_5 \geq 0, \ s \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

où $F(s) = \int_0^s f(t)dt \ \ s \in \mathbb{R}$.

Le terme symport g satisfait :

$$g \ \text{ est de classe } \ C^1(\mathbb{R}), \tag{3.8}$$

$$g \ \text{ est borné}, \tag{3.9}$$

$$g \ \text{ est Lipschitz}. \tag{3.10}$$

3.1.1 Notations

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \quad W = H^2(\Omega),$$

et on note V' l' espace de dual de V.
Nous considérons le produit d' espaces de Hilbert :

$$\Psi^s_{\tau_D} = D(A^{\frac{s+1}{2}}) \times D(A^{\frac{s-1}{2}})$$

qui correspond à l' espace de phase de notre modèle. Le symbole $< .,. >$ représente le produit de dualité entre V et V'. On note ensuite par $\| . \|$ la norme usuelle dans H (avec $((.,.))$ le produit scalaire associé) et $\| . \|_{-1} = \|(-\Delta)^{-1}. \|$, où $(-\Delta)^{-1}$ est l' opérateur associé aux conditions limites de Dirichlet. Plus généralement, $\| . \|_X$ est la norme dans l' espace de Banach X.
On pose :

$$A = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \Omega =]0,\ \ell[\subset \mathbb{R}.$$

On notera dans la suite c, c' et c'' des constantes positives dont le sens poura changer d' une ligne à l' autre et parfois dans la même ligne.

3.2 Estimations a priori

Dans cette section, nous allons établir des estimations a priori du système (3.1)-(3.3) qui seront utilisées dans la suite pour montrer l' existence et la régularité de la solution.

On réécrit (3.1) sous la forme équivalente

$$\tau_D(-\Delta)^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + (-\Delta)^{-1}\frac{du}{dt} - \Delta u + f(u) + (-\Delta)^{-1}g(u) = 0. \tag{3.11}$$

Multiplions (3.11) par u et integrons sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(2\tau_D(\frac{du}{dt}(t),u)_{-1} + \|u\|^2_{-1}) - 2\tau_D\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + 2\|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega f(u)udx \\ +2(g(u),(-\Delta)^{-1}u) = 0. \tag{3.12}$$

On multiplie (3.11) par $u_t(t)$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx) + 2\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + 2(g(u),(-\Delta)^{-1}\frac{du}{dt}(t)) = 0. \tag{3.13}$$

En additionnant (3.13) et α fois(3.12), on obtient

$$\frac{d}{dt}E_1 + (2-2\alpha\tau_D)\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + 2\alpha\|\nabla u\|^2 + 2\alpha\int_\Omega f(u)udx + 2\alpha(g(u),(-\Delta)^{-1}u) \\ +(g(u),(-\Delta)^{-1}\frac{du}{dt}(t)) = 0, \tag{3.14}$$

où

$$E_1 = 2\alpha\tau_D(\frac{du}{dt}(t),u)_{-1} + \alpha\|u\|^2_{-1} + \tau_D\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx. \tag{3.15}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$, on obtient grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young

$$\alpha\tau_D|(\frac{du}{dt}(t),u)_{-1}| \leqslant \alpha\tau_D\|\frac{du}{dt}(t)\|_{-1}\|u\|_{-1} \\ \leqslant \frac{\tau_D}{4}\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{-1}.$$

l' équation (3.15) satisfait

$$\begin{aligned} E_1(t) &\geqslant c_1(\tau_D\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u(t)\|^2 + \int_\Omega F(u)dx), \quad c_1 > 0 \\ E_1(t) &\leqslant c_2(\tau_D\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u(t)\|^2 + \int_\Omega F(u)dx), \quad c_2 > 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Grâce à (3.9) et aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\begin{aligned} |(g(u), (-\Delta)^{-1}\frac{du}{dt}(t))| &\leqslant \|g(u)\|\,\|\frac{du}{dt}(t)\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + c_4, \qquad c_4 \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha|(g(u), (-\Delta)^{-1}u)| &\leqslant \alpha\|g(u)\|\,\|u\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|u\|^2_{-1} + c_5, \qquad c_5 \geq 0. \end{aligned}$$

En utilisant (3.5), on a

$$\int_\Omega f(u)udx \geq c_6\int_\Omega F(u)dx - c_7, \quad c_6 > 0, \quad c_7 \geq 0.$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (3.14) et en choisissant $\alpha > 0$ assez petit tel que $\frac{3}{4} - \alpha\tau_D > 0$, on trouve

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + cE_1(t) \leqslant c', \quad c > 0, \quad c' \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{3.17}$$

On applique le lemme de Gronwall à (3.17), on a

$$E_1(t) \leqslant e^{-ct}E(0) + c'', \quad c > 0, \quad c'' \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3.18}$$

Multiplions (3.11) par Δu et integrons sur Ω, on obtient

$$\frac{d}{dt}(2\tau_D(u_t(t), u) + \|u\|^2) - 2\tau_D\|u_t(t)\|^2 + 2\|\Delta u\|^2 + 2(f'(u)\nabla u, \nabla u) + 2(g(u), u) = 0. \tag{3.19}$$

On multiplie (3.11) par $\Delta u_t(t)$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|u_t(t)\|^2 + \|\Delta u\|^2) + 2(f'(u)\nabla u, \nabla u_t(t)) + 2\|u_t(t)\|^2 + 2(g(u), u_t(t)) = 0. \tag{3.20}$$

En faisant la somme de (3.19) et β fois(3.20), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_2(t) + 2(f'(u)\nabla u, \nabla u_t(t)) + 2(g(u), u_t(t)) + (2 - 2\beta\tau_D)\|u_t(t)\|^2 + 2\beta\|\Delta u\|^2 \\ +2\beta(f'(u)\nabla u, \nabla u) + 2\beta(g(u), u) = 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

où

$$E_2(t) = \tau_D\|u_t(t)\|^2 + \|\Delta u\|^2 + 2\beta\tau_D(u_t(t), u) + \beta\|u\|^2. \tag{3.22}$$

En utilisant (3.9) et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\begin{aligned}|(g(u),\frac{du}{dt}(t))| &\leqslant \|g(u)\|\,\|\frac{du}{dt}(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|\frac{du}{dt}(t)\|^2 + c_7, \qquad c_7 \geq 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta|(g(u),u)| &\leqslant \beta\|g(u)\|\,\|\nabla u\| \\ &\leqslant \frac{\beta}{4}\|\nabla u\|^2 + c_8, \qquad c_8 \geq 0.\end{aligned}$$

On déduit de (3.4)-(3.7), les relations suivantes

$$\beta(f'(u)\nabla u,\nabla u) \geq -\frac{\beta}{4}\|\nabla u\|^2, \quad \beta > 0$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2dx = \int_\Omega f''(u)u_t(t)|\nabla u|^2dx + 2\int_\Omega f'(u)\nabla u\cdot\nabla u_t(t)dx.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, d' interpolation et de Young, on trouve

$$\begin{aligned}|\int_\Omega f''(u)u_t(t)|\nabla u|^2dx| &\leqslant |f''(u)\|\nabla u|^2|u_t(t)| \\ &\leqslant c_9\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}\|u_t(t)\| \\ &\leqslant c_9c_{10}\|\nabla u\|\,\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}}\|\Delta u\|^{\frac{1}{2}}\|u_t(t)\| \\ &\leqslant c_{11}\|\Delta u\|^{\frac{1}{2}}\|u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{\beta}{4}\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2 + c_{12}\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (3.21) et en choisissant $\beta > 0$ assez petit tel que $\frac{3}{4} - \beta\tau_D > 0$, on conclut

$$\frac{d}{dt}E_3(t) + cE_3(t) \leqslant c', \quad c > 0,\ c' \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \tag{3.23}$$

où

$$E_3(t) = E_2(t) + f'(u)|\nabla u|^2,$$

donc

$$E_3(t) \geqslant E_2(t) - c_{13}. \tag{3.24}$$

Par (3.2) et le lemme de Gronwall, on conclut

$$E_2(t) \leqslant e^{-ct}E_2(0) + c_{15}, \quad c > 0,\ c_{15} \geqslant 0,\ t \geqslant 0. \tag{3.25}$$

3.3 Existence et unicité

Dans cette section, nous allons établir l' existence et l' unicité de la solution du système. Pour ce faire, nous utilisons les estimations obtenues dans la section précédente. On annonce le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Nous supposons que* $(u_0, u_1) \in V \times V'$. *Alors,* (3.1)-(3.3) *possède une unique solution* $(u, u_t(t))$ *telle que :*

$$(u, u_t(t)) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, V \times V').$$

De plus, si $(u_0, u_1) \in W \times H$. *Alors*

$$(u, u_t(t)) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, W \times H).$$

Démonstration :
1) Existence : La preuve de l' existence de la solution est basée sur la méthode standard de Galerkin (voir,[77]).
On considère l' opérateur $-\Delta$ associé à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et une suite de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$. Soient $(\omega_i)_{i=1,\cdots,n}$ les vecteurs propres correspondants qui forment une base orthonormée dans H. Pour $n \in \mathbb{N}$, on cherche une fonction approchée $(u_n(t), \frac{du_n}{dt}(t)(t))$ de la forme :

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{i,n}\omega_i \qquad \frac{du_n}{dt}(t)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{du_{i,n}}{dt}\omega_i$$

vérifiant

$$\tau_D A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2}(t) + A^{-1}\frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) + f(u_n(t)) + A^{-1}g(u_n(t)) = 0 \tag{3.26}$$

$$u_n(0) = u_{0,n} \quad \text{et} \quad \frac{du_n(0)}{dt} = u_{1,n} \tag{3.27}$$

est équivalent à :

$$(\tau_D A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2}(t), \omega_i) + (A^{-1}\frac{du_n}{dt}(t), \omega_i) + (Au_n(t), \omega_i) + (f(u_n(t)), \omega_i) + (A^{-1}g(u_n(t)), \omega_i) = 0, \tag{3.28}$$

associé aux conditions (3.27) et ω_i suffisamment régulier.
La preuve de l' existence d' une solution locale en temps du problème approché est standard. Résoudre (3.28) revient à trouver les $u_{i,n}$, $\frac{du_{i,n}}{dt}$ tels que $u_n(t)$, $\frac{du_n}{dt}(t)$ vérifient (3.26)-(3.27). En remplaçant $u_n(t)$ par sa valeur dans (3.28), on trouve une équation différentielle ordinaire du second ordre que l' on résout grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. En remplaçant à nouveau u et $u_t(t)$ par $u_n(t)$ et $\frac{du_n}{dt}(t)$ dans les estimations (3.18) et (3.25), on obtient respectivement,

$$E_{n,1}(t) \leqslant e^{-ct}E_{n,1}(0) + c'', \quad c > 0, \quad c'' \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3.29}$$

et

$$E_{n,3}(t) \leqslant e^{-ct}E_{n,3}(0) + c_{15}, \quad c > 0, \quad c_{15} \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3.30}$$

où $E_{n,1}, E_{n,3}$ satisfaient

$$\begin{aligned} E_{n,1} &\geq c_1(\tau_D\|\frac{du_n}{dt}(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u_n(t)\|^2 + \int_\Omega F(u_n(t))dx), \quad c_1 > 0 \\ E_{n,1} &\leqslant c_2(\tau_D\|\frac{du_n}{dt}(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u_n(t)\|^2 + \int_\Omega F(u_n(t))dx), \quad c_2 > 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

et

$$E_{n,3}(t) \geq (\tau_D\|\frac{du_n}{dt}(t)\|^2 + \|Au_n(t)\|^2) - c_{10}. \tag{3.32}$$

De (3.29)-(3.30), on déduit

$u_n(t)$ est bornée dans $L^\infty(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$

$\frac{du_n}{dt}$ est aussi bornée dans $L^\infty(L^2(\Omega)\cap H_0^{-1}(\Omega))$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l' existence grâce au résultat de compacité d' Aubin-Lions (voir,[77]).

2) Unicité : Soient (u^1, u_t^1) et (u^2, u_t^2) deux solutions du système (3.1)-(3.3) avec des conditions initiales respectivement (u_0^1, u_1^1) et (u_0^2, u_1^2). On pose

$$(u, u_t(t)) = (u^1 - u^2, u_t^1 - u_t^2)$$

Alors, $(u, u_t(t))$ vérifie

$$\tau_D A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + A^{-1}\frac{du}{dt} + Au + (f(u^1) - f(u^2)) + A^{-1}(g(u^1) - g(u^2)) = 0 \tag{3.33}$$

$$u(0) = u_0^1 - u_0^2 \quad \text{et} \quad u_t(t)(0) = u_1^1 - u_1^2 \tag{3.34}$$

On multiplie (3.33) par u et on intègre sur Ω, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[2\tau_D(u_t(t), u)_{-1} + \|u\|_{-1}^2] - 2\tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2 + 2\|\nabla u\|^2 + 2(f(u^1) - f(u^2), u) \\ +2(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u) = 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Multiplions (3.33) par $u_t(t)$ et integrons sur Ω, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2] + 2\|u_t(t)\|_{-1}^2 + 2(f(u^1) - f(u^2), u_t(t)) \\ +2(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u_t(t)) = 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

On additionne β fois (3.35) et (3.36), on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_4(t) + (2 - 2\beta\tau_D)\|u_t(t)\|_{-1}^2 + 2\beta\|\nabla u\|^2 + 2\beta(f(u^1) - f(u^2), u) \\ +2(f(u^1) - f(u^2), u_t(t)) + 2\beta(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u) \\ +2(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u_t(t)) = 0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

où

$$E_4(t) = 2\beta\tau_D(u_t(t), u)_{-1} + \beta\|u\|_{-1}^2 + \tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2, \tag{3.38}$$

satisfait

$$E_4(t) \geq c_{11}(\|u\|_{-1}^2 + \tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2), \quad c_{11} > 0. \tag{3.39}$$

Grâce à (3.4) et aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\beta(f(u^1) - f(u^2), u) &= \beta(\int_0^1 f'(su^1 + (1-s)u^2)dsu, u)\\ &\geq -\beta c_5\|\nabla u\|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(f(u^1) - f(u^2), u_t(t))| &= |(\nabla(u\int_0^1 f'(su^1 + (1-s)u^2)ds), A^{-\frac{1}{2}}u_t(t))|\\ &\leqslant \|\nabla(u\int_0^1 f'(su^1 + (1-s)u^2)ds)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|\\ &\leqslant \|\nabla u\int_0^1 f'(su^1 + (1-s)u^2)ds\|\\ &+ \|u\int_0^1 f''(su^1 + (1-s)u^2)(s\nabla u^1 + (1-s)\nabla u^2)ds\|\\ &\leqslant c_{25}(\|\nabla u\| + \|u\|_{L^4(\Omega)}(\|\nabla u^1\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla u^2\|_{L^4(\Omega)})\|u_t(t)\|_{-1}\\ &\leqslant c_{26}(\|\nabla u\| + \|u\|_{L^4(\Omega)}(\|u^1\|_{H^2(\Omega)} + \|u^2\|_{H^2(\Omega)})\|u_t(t)\|_{-1}\\ &\leqslant c_{27}\|\nabla u\|\,\|u_t(t)\|_{-1}\\ &\leqslant c_{28}\|\nabla u\|^2 + \|u_t(t)\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

On utilise (3.10) et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\begin{aligned}\beta|((g(u^1) - g(u_2), A^{-1}u))| &\leqslant \beta|g(u^1) - g(u^2)\\ &\quad |u\|_{-1}\\ &\leqslant \beta c_{26}\|u^1 - u^2\|\,\|u\|_{-1}\\ &\leqslant c_{26}\|\nabla u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|_{-1}^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|((g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u_t(t))| &\leqslant \|g(u^1) - g(u^2)\|\,\|A^{-1}u_t(t)\|\\ &\leqslant c_{27}\|u^1 - u^2\|\,\|u_t(t)\|_{-1}\\ &\leqslant c_{27}\|\nabla u\|^2 + \|u_t(t)\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (3.37) et en choisissant $\beta > 0$ assez petit, on déduit

$$\frac{dE_4}{dt}(t) \leqslant cE_4(t), \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{3.40}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.40), permet de déduire l' unicité ainsi que la dépendance continue.

■

3.4 Dissipativité

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de bornés absorbants des solutions du problème (3.1)-(3.3). Le théorème 3.3.1, nous a permis de définir une famille d' opérateurs continus sur l' espace des phases.

$$\begin{aligned} S_{\tau_D}(t) :&\Psi^0_{\tau_D} \to \Psi^0_{\tau_D} \\ &(u_0, u_1) \mapsto S_{\tau_D}(t)(u_0, u_1) = (u, u_t(t)(t)) \end{aligned}$$

où $(u, u_t(t)(t))$ est la solution du système (3.1)-(3.3).

Théorème 3.4.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, est dissipatif sur $\Psi^0_{\tau_D}$. Autrement dit, le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, possède un ensemble borné absorbant β_0 dans $\Psi^0_{\tau_D}$.*

Démonstration :
On choisit les données initiales (u_0, u_1) dans un borné B. Pour tout $R_0 > 0$, on a $(u_0, u_1) \in B_{R_0}$, avec B_{R_0} une boule B de centre 0 et de rayon R_0. l' estimation (3.18) donne

$$E_1(t) \leqslant e^{-ct} E_1(0) + c'',\ \ c > 0,\ \ c'' \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0. \tag{3.41}$$

Puisque les données initiales sont dans un borné, l' estimation (3.41) devient

$$E_1(t) \leqslant M_0 e^{-ct} + c'',\ \ c > 0,\ \ c'' \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0, \tag{3.42}$$

avec $M_0 = M_0(R_0) > 0$.
On peut prendre $N_0 > 0$ assez grand pour que

$$M_0 e^{-ct} + c'' \leqslant N_0.$$

Donc la boule de centre 0 et de rayon N_0 est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$.
On déduit

$$\tau_D \|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2 \leqslant N_0, \quad t \geqslant t_0, \tag{3.43}$$

avec $t_0 = t_0(R_0) = \max(0, -\frac{1}{c}\ln(\frac{N_0 - c''}{M_0}))$.

■

Remarque 3.4.2. *Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que β_0 est positivement invariante par le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, c'est-à-dire $S_{\tau_D}(t)\beta_0 \subset \beta_0$, pour tout $t \geq 0$.*

Lemme 3.4.3. *Pour tout $R \geq 0$, il existe $K = K(R) \geq 0$ tel que, pour deux données initiales $u_0, u_1 \in \Psi^0_{\tau_D}$ avec $\|u_i\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant R$, on a*

$$\|S_{\tau_D}(t)u_0 - S_{\tau_D}(t)u_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant e^{Kt}\|u_0 - u_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}}, \quad t \geqslant 0, \tag{3.44}$$

avec $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ et $u_1 = (u_1^1, u_1^2)$.

Démonstration :
On considère deux solutions u^1 et u^2 avec des données initiales $u_0^1, u_0^2 \in \Psi^0_{\tau_D}$, la différence $u = u^1 - u^2$ satisfait

$$\tau_D \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + A^2u + A(f(u^1) - f(u^2)) + (g(u^1) - g(u^2)) = 0. \tag{3.45}$$

On multiplie (3.45) par $A^{-1}u_t(t)$ et on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2) + 2\|u_t(t)\|^2_{-1} &= -2(f(u^1) - f(u^2), u_t(t)) \\ &\quad -2(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u_t(t)).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Grâce au théorème 3.3.1, on déduit

$$\|(A^{\frac{1}{2}}(f(u^1) - f(u^2)\| \leqslant c_{28}\|\nabla u\|$$

En utilisant (3.10) et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\begin{aligned}|(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u_t(t))| &\leqslant \|g(u^1) - g(u^2)\|\,\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant c_{29}\|u^1 - u^2\|\,\|u_t(t)\|_{-1} \\ &\leqslant c_{29}\|\nabla u\|^2 + \|u_t(t)\|^2_{-1}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations précédentes dans (3.46), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|(u, u_t(t)(t)\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant K\|(u, u_t(t)(t)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}, \quad K \geqslant 0, \;\; t \geqslant 0. \tag{3.47}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.47) donne le résultat du lemme.

■

Théorème 3.4.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \;\; t \geq 0\}$ définit sur l' espace de phase $\Psi^0_{\tau_D}$ possède un attracteur $\mathcal{A}_{\tau_D}$ dans $\Psi^1_{\tau_D}$.*

Avant de donner la démonstration du théorème 3.4.4, nous allons énoncer la remarque suivante.

Remarque 3.4.5. *l' absence de la Propriété de lissage des données initiales liée au terme inertiel $\tau_D\frac{d^2u}{dt^2}$, va nous amener à décomposer le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \;\; t \geq 0\}$ en une somme de deux familles d' opérateurs, la première tendant vers 0 quand t tend vers l' infini et la seconde étant asymptotiquement compacte au sens de la mesure de non compacte de Kuratowski (voir, Chapitre 2). C'est-à-dire,*

$$S_{\tau_D}(t) = S^1_{\tau_D}(t) + S^2_{\tau_D}(t), \quad t \geq 0,$$

où les opérateurs,

$$S^1_{\tau_D}(t) \longrightarrow 0 \;\; \textit{quand} \;\; t \longrightarrow \infty,$$

et les opérateurs $S^2_{\tau_D}(t)$ sont asymptotiquement compacts.

Démonstration :
Suivant la remarque 3.4.5, nous considérons la décomposition suivante,

$$(u, u_t(t)(t)) = (v(t), v_t(t)) + (w(t), w_t(t)), \tag{3.48}$$

où $(v(t), v_t(t)(t))$ est la solution du système,

$$\tau_D \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}(t) + A^2 v + A(f(u) - f(w)) + c_5 v = 0 \tag{3.49}$$

$$v|_{t=0} = u_0 \qquad v_t(t)|_{t=0} = u_1, \tag{3.50}$$

et $(w(t), w_t(t)(t))$ est la solution du système

$$\tau_D \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{dw}{dt}(t) + A^2 w + Af(w) + c_5 w - c_5 u + g(u) = 0, \tag{3.51}$$

$$w|_{t=0} = 0 \qquad w_t(t)|_{t=0} = 0. \tag{3.52}$$

Pour la suite de la preuve, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.4.6. *Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, le semi-groupe $\{S^2_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, associé avec le système (3.51)-(3.52) est dissipatif sur $\Psi^0_{\tau_D}$. Autrement dit, le semi-groupe $\{S^2_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, possède un ensemble borné absorbant B_0 dans $\Psi^0_{\tau_D}$*

Démonstration :
On choisit les données initiales (w_0, w_1) dans un borné B. Pour tout $R_1 > 0$, on a $(w_0, w_1) \in B_{R_1}$, avec B_{R_1} une boule B de centre 0 et de rayon R_1.

Multiplions (3.51) par $A^{-1}w$ et $A^{-1}w_t(t)$, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2\tau_D(w_t(t), w)_{-1} + \|w\|^2_{-1}) - 2\tau_D\|w_t(t)\|^2_{-1} + 2\int_0^l f(w)w dx + 2c_5\|w\|^2_{-1} \\ +2\|\nabla w\|^2 - 2c_5(u, A^{-1}w) + 2(g(u), A^{-1}w) = 0\end{aligned} \tag{3.53}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\tau_D\|w_t(t)\|^2_{-1} + \|\nabla w\|^2 + 2\int_0^\ell F(w)dx + c_5\|w\|^2_{-1}) + 2\|w_t(t)\|^2_{-1} \\ -2c_5(u, A^{-1}w_t(t)) + 2(g(u), A^{-1}w_t(t)) = 0.\end{aligned} \tag{3.54}$$

On additionne (3.53) et α fois (3.54), (avec $\alpha > 0$ très petit), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t) + 2\|w_t(t)\|^2_{-1} - 2c_5(u, A^{-1}w_t(t)) - 2\alpha\tau_D\|w_t(t)\|^2_{-1} + 2\alpha\int_0^\ell f(w)w dx \\ +2\alpha c_5\|w\|^2_{-1} + 2\alpha\|\nabla w\|^2 - 2\alpha c_5(u, A^{-1}w) + 2\alpha(g(u), A^{-1}w) \\ +2(g(u), A^{-1}w_t(t)) = 0,\end{aligned} \tag{3.55}$$

où

$$\begin{aligned}H = \tau_D\|w_t(t)\|^2_{-1} + \|\nabla w\|^2 + 2\int_0^\ell F(w)dx + c_5\|w\|^2_{-1} \\ +2\alpha\tau_D(w_t(t), A^{-1}w) + \alpha\|w\|^2_{-1}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Par (3.5), on a

$$\alpha(f(w),w) \geq \alpha \int_0^\ell F(w)dx - c_1|\Omega|.$$

En utilisant le théorème 3.3.1 et l' inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}|\alpha c_5(u, A^{-1}w)| + |c_5(u, A^{-1}w_t(t))| &\leqslant \alpha c_5\|\nabla u\|\,\|w\|_{-1} + c_5\|\nabla u\|w_t(t)\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|\nabla w\|^2 + \frac{1}{4}\|w_t(t)\|^2_{-1} + c_{30}.\end{aligned}$$

On combine alors toutes les estimations précédentes de (3.55), (pour $\alpha > 0$ tel que $(\frac{3}{4} - 2\alpha\tau_D) > 0$) et on a

$$\frac{d}{dt}H(t) + c_{31}H(t) \leqslant c_{32}. \tag{3.57}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.57), donne

$$H(t) \leqslant e^{-c_{31}t}H(0) + c_{33}. \tag{3.58}$$

Puisque les données initiales sont dans un borné, l' estimation (3.58) devient

$$H(t) \leqslant K_0 e^{-c_{31}t} + c_{33}, \quad c_{31} > 0, \quad c_{33} \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.59}$$

avec $K_0 = K_0(R_1) > 0$.
On peut prendre $M_0 > 0$ assez grand pour que

$$K_0 e^{-c_{31}t} + c_{33} \leqslant M_0.$$

Donc la boule de centre 0 et de rayon M_0 est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S^2_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$.
On déduit

$$\tau_D\|\frac{dw}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla w\|^2 \leqslant M_0, \quad t \geqslant t_0, \tag{3.60}$$

avec $t_0 = t_0(R_1) = \max(0, -\frac{1}{c_{31}}\ln(\frac{M_0 - c_{33}}{K_0}))$.

■

Pour continuer avec la preuve du théorème 3.4.4, nous allons multiplier (3.49) par $A^{-1}v$ et $A^{-1}v_t(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2\tau_D(v_t(t),v)_{-1} + \|v\|^2_{-1}) + 2\|\nabla v\|^2 + 2c_5\|v\|^2_{-1} - 2\tau_D\|v_t(t)\|^2_{-1} \\ +2(f(u) - f(w), v) = 0\end{aligned} \tag{3.61}$$

et

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|v_t(t)\|^2_{-1} + \|\nabla v\|^2 + c_5\|v\|^2_{-1}) + 2\|v_t(t)\|^2_{-1} + 2(f(u) - f(w), v_t(t)) = 0. \tag{3.62}$$

En additionnant (3.61) et α fois (3.62), (avec $\alpha > 0$ très petit) on déduit

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}Y(t) + 2\|v_t(t)\|^2_{-1} + 2\alpha\|\nabla v\|^2 + 2\alpha c_5\|v\|^2_{-1} - 2\alpha\tau_D\|v_t(t)\|^2_{-1} \\ &\quad +2\alpha(f(u) - f(w), v) - 2(f(u) - f(w) - vf'(w), v_t(t)) = 0,\end{aligned} \tag{3.63}$$

où

$$Y(t) = \tau_D\|v_t(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla v\|^2 + c_5\|v\|_{-1}^2 + 2\alpha\tau_D(v_t(t), v)_{-1} + \alpha\|v\|_{-1}^2 \\ +2\int_0^\ell (F(u) - F(w) - vf(w))dx \tag{3.64}$$

Grâce à (3.7) et l' inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$2\int_0^\ell (F(u) - F(w) - vf(w))dx \geq -\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{c_5}{2}\|v\|_{-1}^2$$

et

$$(f(u) - f(w), v) \geq -\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{c_5}{2}\|v\|_{-1}^2,$$

de plus

$$\begin{aligned}\alpha\tau_D|(v_t(t), v)_{-1}| &\leqslant \alpha\tau_D\|v_t(t)\|_{-1}\|\nabla v\| \\ &\leqslant \frac{\tau_D}{2}\|v_t(t)\|_{-1}^2 + \frac{\alpha}{4}\|\nabla\|^2.\end{aligned}$$

l' égalité (3.64), satisfait

$$c_{40}\|(v, v_t(t))\|_{\Psi^0_{\tau_D}}^2 \leqslant Y(t) \leqslant c_{41}\|(v, v_t(t))\|_{\Psi^0_{\tau_D}}^2. \tag{3.65}$$

Suivant le lemme 3.4.3 et le fait que $H_0^1(0, \ell)$ est une algèbre, on trouve

$$\begin{aligned}2(f(u) - f(w) - vf'(w), w_t(t)) &\leqslant c_{35}\|w_t(t)\|_{-1}\|A^{\frac{1}{2}}(f(u) - f(w) - vf'(w))\| \\ &\leqslant c_{35}\|w_t(t)\|_{-1}\|\nabla v\|^2 \\ &\leqslant c_{36}\|\nabla v\|^2.\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (3.63), (avec $\alpha > 0$ très petit tel que $(2 - 2\alpha\tau_D) > 0$) on conclut

$$\frac{d}{dt}Y(t) + c_{37}Y(t) \leqslant 0, \quad c_{37} > 0, \quad t \geq 0. \tag{3.66}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.66) permet de prouver la première partie du théorème3.4.4.

On multiplie (3.51) par w et $w_t(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + c_5\|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx) + 2\|\frac{dw}{dt}(t)\|^2 - 2c_5(u, w_t(t)) \\ -\int_0^\ell f''(w)|\nabla w|^2 w_t(t)dx + 2(g(u), w_t(t)) = 0 \tag{3.67}$$

et

$$\frac{d}{dt}(2\tau_D(w_t(t), w) + \|w\|^2) - 2\tau_D\|w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + \int_0^\ell f(w)Awdx + c_5\|w\|^2 \\ -2c_5(u, w) + 2(g(u), w) = 0. \tag{3.68}$$

La somme de (3.67) et α fois (3.68), (avec $\alpha > 0$ très petit) donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1(t) + 2\|w_t(t)\|^2 - 2c_5(u, w_t(t)) - 2\alpha\tau_D\|w_t(t)\|^2 + \alpha\|Aw\|^2 \\ - \int_0^\ell f''(w)|\nabla w|^2 w_t(t)dx + \alpha\int_0^\ell f(w)Awdx + \alpha c_5\|w\|^2 \\ -2\alpha c_5(u, w) + 2\alpha(g(u), w) + 2(g(u), w_t(t)) = 0,\end{aligned} \tag{3.69}$$

où

$$Y_1(t) = \tau_D\|w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + c_5\|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx + 2\tau_D(w_t(t), w) + \|w\|^2.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$, on aura

$$\begin{aligned}Y_1(t) &\geqslant c_{38}(\tau_D\|w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + \|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx), \quad c_{30} > 0 \\ Y_1(t) &\leqslant c_{39}(\tau_D\|w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + \|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx), \quad c_{39} > 0.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Par le théorème 3.4.1 et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on déduit

$$\begin{aligned}-2c_5(u, \frac{dw}{dt}(t)) - 2\alpha c_5(u, w) &\geq -c_5\|u\|\,\|w_t(t)\| - \alpha c_5\|u\|\,\|w\| \\ &\geq -c_5\|\nabla u\|\,\|w_t(t)\| - \alpha c_5\|\nabla u\|\,\|w\| \\ &\geq -\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 - \frac{\alpha c_5}{2}\|w\|^2 - \alpha c_{40}.\end{aligned}$$

Suivant le lemme 3.51 et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\ell f''(w)|\nabla|^2 w_t(t)dx &\leqslant c_{41}\|w\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla w\|^2\|w_t(t)\| \\ &\leqslant c_{41}\|Aw\|^{\frac{1}{2}}\|w_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|Aw\|^2 + \frac{1}{4}\|w_t(t)\|^2 + c_{42}.\end{aligned}$$

l' équation (3.69), satisfait (pour $\alpha > 0$ tel que $\frac{3}{4} - 2\alpha\tau_D > 0$)

$$\frac{d}{dt}Y_1(t) + c_{43}Y_1(t) \leqslant c_{44}, \quad c_{43} > 0, \quad c_{44} \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{3.71}$$

On applique le lemme de Gronwall à (3.71) et cela permet de conclure le preuve de la seconde partie du théorème 3.4.4.

■

Corollaire 3.4.7. *l' attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D}$ est borné dans $\Psi^1_{\tau_D}$, avec une borne indépendante de τ_D.*

3.5 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur

Notre objectif dans cette section est de montrer que pour f et g satisfaisant les conditions de compatibilité, le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \quad t \geq 0\}$ défini sur l' espace $\Psi^n_{\tau_D}$ (pour $1 \leqslant n \leqslant 4$) possède un borné absorbant qui est fermé dans $B^n_{\tau_D}$ dans $\Psi^n_{\tau_D}$. Nous supposons que :

$$f \in C^{n+1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f''(0) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 3, 4 \tag{3.72}$$

et

$$g^{(n-1)}(u) \quad \text{est} \quad \text{borné.} \tag{3.73}$$

Si $n = 1$, alors 3.72 et 3.73 n'ajoutent rien à nos hypothèses précédentes sur f et g. Remarquons que la dérivée du potentiel classique de Cahn-Hilliard satisfait (3.72) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les hypothèses ci-dessus nous ont permis d' introduire les résultats suivants.

Théorème 3.5.1. *On suppose que les hypothèses (3.72) et (3.73) sont vérifiées, pour tout $1 \leq n \leq 4$. Alors, il existe $R_n > 0$ tel que la boule $B^n_{\tau_D}$ de centre zéro et de rayon R_n est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \quad t \geq 0\}$ dans $\Psi^n_{\tau_D}$. C'est-à-dire, pour tout ensemble borné $B \subset \Psi^n_{\tau_D}$, il existe $t_n = t_n(B)$ tel que*

$$S_{\tau_D}(t)B \subset B^n_{\tau_D}, \quad t \geq t_n.$$

Le théorème 3.5.1 est une conséquence directe du lemme 3.5.2. La preuve découle directement de la preuve du lemme.

Lemme 3.5.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 3.5.1 sont vérifiées. Pour tout $\rho_{n-1}, \rho_n \geq 0$, il existe $K_{n-1} = K_{n-1}(\rho_{n-1}) \geq 0$, $K_n = K_n(\rho_n) \geq 0$ et $\nu_n(t) > 0$ de telle sorte que, si.*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\Psi^{n-1}_{\tau_D}} \leqslant \rho_{n-1} \quad \text{et} \quad \|u_0, u_1)\|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant \rho_n.$$

Alors, nous avons l' inégalité suivante

$$\|S_{\tau_D}(t)(u_0, u_1)\|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant K_n e^{-\nu_n(t)t} + K_{n-1}.$$

Démonstration :

Dans toute la preuve, on suppose que $c_j \geq 0$ pour $j \in \mathbb{N}$ dépendre de ρ_{n-1}. Nous allons raisonner par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, la propriété est vraie grâce à l' estimation (3.18). Supposons que le résultat soit valable pour le rang $n - 1$, c'est-à-dire

$$\sup_{\|(u_0,u_1)\|_{\Psi^{n-1}_{\tau_D}} \leqslant \rho_{n-1}} (\|A^{\frac{n}{2}}u\|^2 + \tau_D \|A^{\frac{n-2}{2}}u_t(t)\|^2) \leqslant c_1, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.74}$$

En particulier, les hypothèses sur f satisfaient

$$\sup_{t\geq 0} \sum_{k=0}^{n+1} \|f^{(k)}(u)\|_{L^\infty} \leqslant c \quad \text{et} \quad f(u) \in D(A^{\frac{n}{2}}). \tag{3.75}$$

Grâce à la formule de la dérivée des fonctions composée de Faà di Bruno, on a

$$D^n f(u) = f'(u)D^n u + \Gamma, \tag{3.76}$$

avec $\Gamma = 0$ si $n = 1$, et

$$\Gamma = \sum_{k=2}^{n+1} \Gamma_k f^{(k)}(u),$$

où Γ_k est une combinaison linéaire de la forme

$$(D^1u)^{i_1}(D^2u)^{i_2}\cdots(D^{n-1}u)^{i_{n-1}}.$$

Pour certains entiers $i_1, \cdots, i_{n-1}$ non négatifs, satisfaisant

$$i_1 + \cdots + i_{n-1} = k \quad \text{et} \quad 2i_1 + \cdots + (n-1)i_{n-1} = n.$$

On multiplie (3.1) par $A^{n-1}u$ et $A^{n-1}u_t(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}(2\tau_D(u_t(t), A^{n-1}u) + \|A^{\frac{n-1}{2}}u\|^2) + 2\|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 - 2\tau_D\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + 2(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n}{2}}u) + 2(g(u), A^{n-1}u) = 0 \tag{3.77}$$

et

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2) + 2\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + 2(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n}{2}}u_t(t)) + 2(g(u), A^{n-1}u_t(t)) = 0. \tag{3.78}$$

On somme finalement (3.78) et β fois (3.77), avec $\beta > 0$ assez petit, on trouve

$$\frac{d}{dt}Y_2(t) + 2\beta\|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 + (2 - 2\beta\tau_D)\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + 2\beta(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n}{2}}u) + 2\beta(g(u), A^{n-1}u) + 2(A^{\frac{n}{2}}f(u)), A^{\frac{n}{2}}u_t(t)) + 2(g(u), A^{n-1}u_t(t)) = 0. \tag{3.79}$$

Pour $\alpha > 0$ tel que $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$, Y_2 satisfait

$$c_{10}\|S_{\tau_D}(t)(u_0, u_1)\|^2_{u^n_{\tau_D}} \leqslant Y_2(t) \leqslant c_{11}\|S_{\tau_D}(t)(u_0, u_1)\|^2_{u^n_{\tau_D}}, \quad c_{10}, c_{11} > 0 \tag{3.80}$$

Grâce à (3.74), (3.75) et (3.76), nous obtenons

$$\|A^{\frac{1}{2}}\Gamma\| \leqslant c_{12}$$

et

$$-2\beta(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n}{2}}u) \leqslant \beta c_{13}.$$

En utilisant (3.76), on déduit

$$\begin{aligned} 2(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n}{2}}u_t(t)) &= 2(f'(u)A^{\frac{n}{2}}u, A^{\frac{n}{2}}u_t(t))2(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u_t(t)) \\ &= -\int_0^\ell |A^{\frac{n}{2}}u|^2 f''(u)u_t(t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^\ell |A^{\frac{n}{2}}u|^2 f'(u)dx + 2(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u_t(t)). \end{aligned}$$

En gardant à l' esprit (7.74) et (7.75), nous évaluons maintenant les autres termes de l' égalité ci-dessus. Si $n = 1$, comme dans la preuve du théorème 3.4.4, nous avons

$$\int_0^\ell |A^{\frac{1}{2}}u|^2 f''(u)u_t(t)dx \leqslant \frac{1}{2}\|Au\|^2 + \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2 + c_{14}.$$

Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, on a

$$\int_0^\ell |A^{\frac{n}{2}}u|^2 f''(u)u_t(t)dx \leqslant c_{15}\|u_t(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{4}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + c_{16}.$$

En ce qui concerne le dernier terme, nous déduisons

$$2(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u_t(t)) \leqslant 2(A^{\frac{1}{2}}\Gamma, A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)) \leqslant c_{17}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\| \leqslant \frac{1}{4}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + c_{18}.$$

Grâce à (7.73) et (7.74) et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous avons

$$\begin{aligned} 2\beta(g(u), A^{n-1}u) &= 2\beta(A^{\frac{n-1}{2}}g(u), A^{\frac{n-1}{2}}u) \\ &\leqslant \beta c_{54} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2(g(u), A^{n-1}u_t(t)) &= 2(A^{\frac{n-1}{2}}g(u), A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)) \\ &\leqslant c_{19}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + c_{20}. \end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (3.79) et en choisissant $\beta > 0$ assez petit, on obtient

$$\frac{d}{dt}Y_2(t) + c_{21}Y_2(t) \leqslant c_{22}, \quad c_{21} > 0,\ c_{22} \geq 0,\ \ t \geq 0. \tag{3.81}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.81) donne le résultat du lemme.

■

Jusqu'à un éventuel élargissement du rayon R_n, l' ensemble absorbant $B^n_{\tau_D}$ attrape exponentiellement les bornes dans $\Psi^0_{\tau_D}$.

Lemme 3.5.3. *Soit $S(t)$ un semi-groupe continu sur un espace de Banach Ψ. Soit B_0, B_1, B_3 trois sous-ensembles de Ψ tels que*

$$\mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_1) \leqslant K_1 e^{-\nu_1 t}, \quad \mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_1, B_2) \leqslant K_2 e^{-\nu_2 t}, \quad \nu_1,\, \nu_2 > 0\,,\ K_1,\, K_2 \geq 0.$$

On suppose de plus que z_1, z_2 dans Ψ, on a.

$$\|S(t)z_1 - S(t)z_2\|_\Psi \leqslant e^{\nu_0 t}\|z_1 - z_2\|_\Psi, \quad \nu_0 \geq 0,\ \ t \geq 0.$$

Alors

$$\mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_2) \leqslant (K_1 + K_2)e^{-\nu t}, \quad \nu > 0, \quad t \geq 0, \tag{3.82}$$

où $\nu = \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_0+\nu_1+\nu_2}$. Ici, dist_Ψ représente la semi-distance de Hausdorff dans Ψ.

Nous avons aussi le lemme suivant.

Lemme 3.5.4. *Supposons que les hypothèses du théorème 3.5.1 sont vérifiées pour tout* $1 \leqslant n \leqslant 4$ *. Alors, pour* R_n *suffisamment grand, on a*

$$\mathrm{dist}_{\Psi^0_{\tau_D}}(S_{\tau_D}(t)B^{n-1}_{\tau_D}, B^n_{\tau_D}) \leqslant L_n e^{-\omega_n t}, \quad \omega_n > 0, \ \ t \geq 0, \tag{3.83}$$

où $L_n \geq 0$.

Démonstration :
Nous allons montrer que la solution de notre système peut se décomposer en une somme de deux termes. Le premier terme décroît exponentiellement dans l' espace $\Psi^0_{\tau_D}$ et le second est uniformément borné dans $\Psi^n_{\tau_D}$. En adaptant la preuve du théorème 3.4.4 (compte tenu de la preuve du lemme 3.5.2), il est facile de voir que le système (3.49)-(3.50) est exponentiellement stable dans $\Psi^0_{\tau_D}$, tandis que la solution w de (3.51)-(3.52) satisfait la borne uniforme,

$$\| \ (w(t), w_t(t)(t) \ \|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant c, \quad t \geq 0.$$

Pour un certain c dépendant du rayon R_{n-1} de $B^{n-1}_{\tau_D}$. En redéfinissant R_n comme étant supérieur ou égal à la constante c ci-dessus, on obtient le résultat du lemme.

■

Les deux lemmes précédents nous a permis d' énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.5.5. *Supposons que les hypothèses du théorème 3.5.1 sont vérifiées pour* $1 \leqslant n \leqslant 4$ *. Il existe alors* $\omega_n > 0$ *et une fonction croissante positive* J_n *tel que, pour tout sous-ensemble borné* B *de* $\Psi^0_{\tau_D}$,

$$\mathrm{dist}_{\Psi^0_{\tau_D}}(S_{\tau_D}(t)B, B^n_{\tau_D}) \leqslant J_n(R)e^{-\omega_n t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $R = \sup_{(u_0,u_1)\in B} \| \ (u_0, u_1) \ \|_{\Psi^0_{\tau_D}}$.

Démonstration :
Nous redéfinissons d' abord, le rayon R_n de manière inductive pour que le lemme 3.5.4 s' applique. On utilise ensuite, le lemme 3.4.3, théorème 3.4.1 et le lemme 3.5.3, en appliquant récursivement le lemme 3.5.4, nous obtenons enfin, le résultat.

■

Corollaire 3.5.6. *Sous les hypothèses du théorème 3.5.1 et pour* $1 \leqslant n \leqslant 4$ *. Alors l' attracteur global* $\mathcal{A}_{\tau_D}$ *est borné dans* $\Psi^n_{\tau_D}$*, avec une borne indépendante de* τ_D.

Théorème 3.5.7. *Supposons que les hypothèses du théorème 3.5.1 sont vérifiées pour tout* $1 \leqslant n \leqslant 4$ *. Alors*

$$\lim_{\tau_D \to 0}[\mathrm{dist}_{\Psi^0_1}(\mathcal{A}_{\tau_D}, \tilde{\mathcal{A}}_0)] = 0,$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 = \{(u, \psi) : u \in \mathcal{A}_0, \ \psi = -[A(Au + f(u)) + g(u)]\}.$$

On peut souligner que la semi-distance d' Hausdorff utilise dans le théorème précédent est prise dans Ψ^0_1. Il s' agit d' un résultat de stabilité fort.

3.6 Existence d' attracteurs exponentiels

Notre objectif dans cette section, c'est introduit des notions qui vont nous servir dans la construction de l' attracteurs exponentiels associe à notre modèle.

On suppose que les hypothèses (7.72) et (7.73) définis dans la section précédente sont vérifiées pour $n = 4$. Alors, il existe une famille robuste d' attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_{\tau_D}$ qui est uniformément bornée dans $\Psi^4_{\tau_D}$. En outre, le bassin d' attraction de $\mathcal{M}_{\tau_D}$ coïncide avec l' ensemble de l' espace des phases $\Psi^0_{\tau_D}$. En particulier, $\mathcal{A}_{\tau_D} \subset \mathcal{M}_{\tau_D}$.

Nous définissons l' application $\mathbb{J}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{J} : \mathbb{B}^4_0 &\to D(A^{-\frac{1}{2}}) \\ u &\mapsto \mathbb{J}(u) = -[A(Au + f(u)) + g(u)]. \end{aligned}$$

On définit ensuite l' application $\mathbb{L}_{\tau_D}$ par :

$$\mathbb{L}_{\tau_D} : \mathbb{B}^4_0 \to \Psi^0_{\tau_D}$$

$$u \mapsto \mathbb{L}_{\tau_D} u = \begin{cases} (u, \mathbb{J}u), & if \ \ \tau_D > 0 \\ u, & if \ \ \tau_D = 0 \end{cases}$$

Remarque 3.6.1. *En associant $\mathbb{B}^4_0$ avec la topologie dans l' espace métrique $D(A^{-\frac{1}{2}})$, il est facile de vérifier que $\mathbb{J}$ est Hölder continue de $\mathbb{B}^4_0$ dans $D(A^{-\frac{1}{2}})$. En effet, une telle continuité est essentielle pour appliquer le lemme 3.6.3 suivant, c'est la raison pour laquelle nous travaillerons dans toute cette section dans $\mathbb{B}^4_0$.*

Nous allons énoncer l' un des meilleurs résultats du chapitre.

Théorème 3.6.2. *Supposons que les hypothèses (3.72) et (3.73) sont vérifiées pour $n = 4$. Alors le semi-groupe $S_{\tau_D}(t)$ possèdent des ensembles compacts positivement invariants $\mathcal{M}_{\tau_D} \subset \mathbb{B}^4_0$ (appelés attracteurs exponentiels) qui satisfait les conditions suivantes.*

(T1) Il existe $\omega > 0$ et une fonction croissante positive J telle que, pour tout ensemble borné $\mathbb{B} \subset Psi^0_{\tau_D}$, on a

$$\mathrm{dist}_{\Psi^0_{\tau_D}}(S_{\tau_D}(t)\mathbb{B}, \mathcal{M}_{\tau_D}) \leqslant J(R)e^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

où $R = \sup_{(u_0,u_1)\in B} \|(u_0, u_1)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}$

(T2) La dimension fractale de $\mathcal{M}_{\tau_D}$ est uniformément bornée par rapport à τ_D.

(T3) Il existe $\varepsilon \in (0, \frac{1}{8})$ et $C > 0$ tel que

$$\mathrm{dist}^{\mathrm{sym}}_{\Psi^0_{\tau_D}}(\mathcal{M}_{\tau_D}, \mathbb{L}_{\tau_D}\mathcal{M}_0) \leqslant C\tau_D^{\varepsilon}.$$

Les quantités ω, J, ε et C sont indépendantes de τ_D. Ici, $\mathcal{M}_{\tau_D}$ est la distance d' Hausdorff symétrique dans $\Psi^0_{\tau_D}$.

La preuve du théorème ci-dessus est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 3.6.3. *Il existe $\Delta_j \geq 0$ $j \in \mathbb{N}$, $k \in (0, \frac{1}{2})$ et $t^* \geq t_n$ (tous indépendants de τ_D) tels que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(L1) l' application $S_{\tau_D} = S_{\tau_D}(t^*)$ satisfait, pour chaque $z_1 = (u_0^1, u_1^1)$, $z_2 = (u_0^2, u_1^2)$ dans $\mathbb{B}_0^4$,

$$S_{\tau_D} z_1 - S_{\tau_D} z_2 = \mathbb{L}_{\tau_D}(z_1, z_2) + \mathbb{N}_{\tau_D}(z_1, z_2),$$

où

$$\| \mathbb{L}_{\tau_D}(z_1, z_2) \|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant k \| z_1 - z_2 \|_{\Psi^0_{\tau_D}}$$

$$\| \mathbb{N}_{\tau_D}(z_1, z_2) \|_{\Psi^1_{\tau_D}} \leqslant \Delta_1 \| z_1 - z_2 \|_{\Psi^0_{\tau_D}} .$$

(L2) l' application $\mathbb{L}_{\tau_D}$ satisfait les conditions suivantes

$$\| S^k_{\tau_D} z - \mathbb{L}_{\tau_D} S^k_0 \mathbb{P}_{\tau_D} z \|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant \Delta_2^k \sqrt[8]{\tau_D}, \quad \forall z \in \mathbb{B}_0^4, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où

$$\mathbb{P}_{\tau_D} : \mathbb{B}^4_{\tau_D} \to \mathbb{B}^4_0$$

est la projection sur la première composante lorsque $\tau_D > 0$, et l' identité dans le cas contraire.

(L3) pour tout $z \in \mathbb{B}^4_{\tau_D}$, il existe

$$\| S_{\tau_D} z - \mathbb{L}_{\tau_D} S_0 \mathbb{P}_{\tau_D} z \|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant \Delta_3 \sqrt[8]{\tau_D}, \quad \forall t \in [t^*, 2t^*].$$

(L4) l' application

$$(t, z) :\mapsto S_{\tau_D}(t) z : [t^*, 2t^*] \times \mathbb{B}^4_{\tau_D} \to \mathbb{B}^4_{\tau_D}$$

est $(\frac{1}{2})$-Hölder continue. De plus, l' application $z :\mapsto S_{\tau_D}(t) z$ est Lipschitz continue sur $\mathbb{B}^4_{\tau_D}$, avec une constante de Lipschitz indépendante de τ_D et $t \in [t^*, 2t^*]$.

Démonstration :
La preuve du lemme se fait en 3 étapes, d' abord, nous allons démontrer (L1), ensuite (L2) et (L3) en fin (L4). Dans toute la preuve, les constantes c_i peuvent dépendre du rayon R_n des bornés absorbant dans $\mathbb{B}^4_{\tau_D}$.

Preuve de (L1). Soit $z_1 = (u_0^1, u_1^1)$, $z_2 = (u_0^2, u_1^2)$ dans $\mathbb{B}_0^4$. Nous écrivons alors la différence $S_{\tau_D}(t) z_1 - S_{\tau_D}(t) z_2 = (\widetilde{u}, \widetilde{u}_t) = (\widetilde{w}(t), \widetilde{w}_t) + (\widetilde{v}, \widetilde{v}_t)$, où $\widetilde{w}$ et $\widetilde{v}$ sont les solutions des problèmes

$$\tau_D \widetilde{v}_{tt} + \widetilde{v}_t + A^2 \widetilde{v} + A(f(\widetilde{u}) - f(\widetilde{w})) + c_5 \widetilde{v} = 0, \tag{3.84}$$

$$\widetilde{v}(0) = \widetilde{u}_0 \qquad \widetilde{v}_t(0) = \widetilde{u}_1 \tag{3.85}$$

et

$$\tau_D \widetilde{w}_{tt} + \widetilde{w}_t + A^2 \widetilde{w} + A f(\widetilde{w}) + c_5 \widetilde{w} - c_5 \widetilde{u} + g(\widetilde{u}) = 0 \tag{3.86}$$

$$\widetilde{w}(0) = 0 \qquad \widetilde{w}_t(0) = 0. \tag{3.87}$$

On multiplie (3.86) par $\widetilde{w}_t$, on a

$$\frac{d}{dt}(\|A\widetilde{w}\|^2+\tau_D\|\widetilde{w}_t\|^2+c_5\|\widetilde{w}\|^2+\int_0^\ell f'(\widetilde{w})|\nabla\widetilde{w}|^2dx)+2\|\widetilde{w}_t\|^2$$
$$+2(g(\widetilde{u}),\widetilde{w}_t)=\int_0^\ell f''(\widetilde{w})|\nabla\widetilde{w}|^2\widetilde{w}_tdx+2c_5(\widetilde{u},\widetilde{w}_t). \tag{3.88}$$

Grâce aux lemmes 3.4.6 et 3.4.3 et le lemme de Gronwall, nous trouvons

$$\|(\widetilde{w},\widetilde{w}_t)\|_{\Psi^1_{\tau_D}}\leqslant c_5e^{Kt}\|(\widetilde{u}_0,\widetilde{u}_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \tag{3.89}$$

En multipliant (3.84) par $A^{-1}\widetilde{v}$ et $A^{-1}\widetilde{v}_t$ et grâce à la première partie du théorème 3.4.4, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|(\widetilde{v},\widetilde{v}_t)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}+c\|(\widetilde{v},\widetilde{v}_t)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}\leqslant 0. \tag{3.90}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (3.90), nous obtenons

$$\|(\widetilde{v},\widetilde{v}_t)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}\leqslant e^{-ct}\|(\widetilde{u}_0,\widetilde{u}_1)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}.$$

En prenant $t^*\geq t_n$ suffisamment grand, on conclut

$$\mathbb{N}_{\tau_D}(z_1,z_2)=(\widetilde{w}(t^*),\widetilde{w}_t(t^*))$$

et

$$\mathbb{L}_{\tau_D}(z_1,z_2)=(\widetilde{v}(t^*),\widetilde{v}_t(t^*)).$$

Ce qui termine la preuve de **(L1)**.

Preuve (L2) et (L3). Maintenant, nous allons aborder la preuve de **(L2)** et **(L3)**. On constate que les deux affirmations sont équivalentes à

$$\|S_{\tau_D}(t)z-\mathbb{L}_{\tau_D}S_0\mathbb{P}_{\tau_D}(t)z\|_{\Psi^0_{\tau_D}}\leqslant ce^{ct}\sqrt[8]{\tau_D}+ce^{\frac{-t}{2\tau_D}},\quad\forall t\geq 0,\quad z\in\mathbb{B}^4_{\tau_D}. \tag{3.91}$$

Pour démontrer l' estimation ci-dessus, nous avons besoin le lemme suivant

Lemme 3.6.4. *Il y a :*

$$\sup_{u_0\in\mathbb{B}^4_0}\int_0^\infty\|A^{-\frac{1}{2}}u^0_{tt}(y)\|dy<\infty, \tag{3.92}$$

où $S_0(t)u^0_0=u^0$.

Démonstration.
Puisque u_0 est borné dans $D(A^{\frac{5}{2}})$, alors $\mathbb{J}(u_0)$ est borné dans $D(A^{\frac{1}{2}})$. Considérons le problème obtenu en prenant dérivée par rapport au temps de (3.1) pour $\tau_D=0$, c'est-à-dire :

$$\frac{d\psi}{dt}+A(A\psi+f'(u^0)\psi)+\psi g'(u^0)=0, \tag{3.93}$$

$$\psi(0)=\mathbb{J}(u_0), \tag{3.94}$$

où $\psi = u_t^0$.
Il est classique de voir grâce au théorème de Cauchy Lipschitz qu'il existe une solution unique au problème (3.93)-(3.94) dans $C([0,T], D(A^{\frac{1}{2}}))$, pour tout $T > 0$.

Multiplions (3.93) par $\alpha A^{-1}\psi + A^{-1}\psi_t$, on déduit

$$\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \alpha\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2) + 2\alpha\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + 2\|A^{-\frac{1}{2}}\psi_t\|^2 = -2\alpha(A^{\frac{1}{2}}(\psi f'(u^0), A^{-\frac{1}{2}}\psi) \\ -2(A^{\frac{1}{2}}(\psi f'(u^0), A^{-\frac{1}{2}}\psi_t) - 2\alpha(g'(u^0)\psi, A^{-1}\psi) \\ -2(g'(u^0)\psi, A^{-1}\psi_t). \quad (3.95)$$

En raison de ces estimations

$$\|A^{\frac{1}{2}}(\psi f'(u^0))\| \leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|$$

et

$$\|(g'(u^0)\psi\| \leqslant c\|\psi\| \leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|$$

l' équation (3.95), satisfait (pour $\alpha > 0$ suffisamment grand)

$$\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2) + \|A^{-\frac{1}{2}}\psi_t\|^2 \leqslant c(\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2). \quad (3.96)$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (3.96), nous obtenons le résultat du lemme.

■

Etant donné, $z = (u_0, u_1) \in \mathbb{B}^4_{\tau_D}$ nous fixons

$$(u^{\tau_D}, u_t^{\tau_D}) = S_{\tau_D}(t)z \quad et \quad (u^0, u_t^0) = \mathbb{L}_{\tau_D} S_0(t)\mathbb{P}_{\tau_D} z$$

La différence $u = u^{\tau_D} - u^0$ solution du problème

$$\tau_D u_{tt} + u_t(t) + A(Au + f(u^{\tau_D}) - f(u^0)) = -\tau_D u_{tt}^0 - g(u^{\tau_D}) + g(u^0), \quad (3.97)$$

$$u(0) = 0, \quad u_t(t)(0) = u_1 - \mathbb{J}(u_0). \quad (3.98)$$

On multiplie(3.97) par $A^{-1}u_t(t)$, on déduit

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2) + 2\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 = -2(A^{\frac{3}{2}}u, A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)) - 2\tau_D(A^{-\frac{1}{2}}u_{tt}^0, A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)) \\ -2(A^{\frac{1}{2}}(f(u^{\tau_D}) - f(u^0)), A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)) + 2(g(u^{\tau_D}) - g(u^0), A^{-1}u_t(t)). \quad (3.99)$$

Le côté droit de l' égalité ci-dessus est contrôlé par

$$\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + c + c\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_{tt}^0\|^2.$$

Par conséquent, le lemme 3.6.4 et le lemme de Gronwall, nous ont permis de conclu

$$\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 \leqslant ce^{-\frac{t}{2\tau_D}} + 2c\tau_D. \quad (3.100)$$

d' autre part, on peut réécrire (3.99) comme suit

$$\frac{d}{dt}\|(u,u_t(t))\|^2_{\Psi^0_{\tau_D}}+2\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2=2(A^{\frac{1}{2}}f(u^{\tau_D})-f(u^0)),A^{-\frac{1}{2}}u_t(t))-2(g(u^{\tau_D})+g(u^0),A^{-1}u_t(t))-2\tau_D(A^{-\frac{1}{2}}u^0_{tt},A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)). \quad (3.101)$$

Cette fois, nous contrôlons le côté droit par

$$2\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+c\|(u,u_t(t))\|^2_{\Psi^0_{\tau_D}}+c\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u^0_{tt}\|^2.$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|(u,u_t(t))\|^2_{\Psi^0_{\tau_D}}\leqslant c\|(u,u_t(t))\|^2_{\Psi^0_{\tau_D}}+c\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u^0_{tt}\|^2. \quad (3.102)$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (3.102) sur $(\sqrt{\tau_D},t+\sqrt{\tau_D})$, ainsi que (3.100) et le lemme 3.6.4, on obtient

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}}u(t+\sqrt{\tau_D})\|^2+\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)(t+\sqrt{\tau_D})\|^2 &\leqslant e^{ct}(\|A^{\frac{1}{2}}u(\sqrt{\tau_D})\|^2\\ &+\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)(\sqrt{\tau_D})\|^2)\\ &\leqslant e^{ct}(\|A^{\frac{1}{2}}u(\sqrt{\tau_D})\|^2\\ &+ce^{-\frac{1}{2\sqrt{\tau_D}}}+2c\tau_D). \quad (3.103)\end{aligned}$$

Mais, d' après le théorème 3.4.1, nous obtenons immédiatement que

$$\|A^{\frac{1}{2}}u\|\leqslant\|A^{\frac{3}{2}}u\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u\|\leqslant c\int_0^t\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)(y)\|dy\leqslant c\sqrt{t},$$

donc,

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(\sqrt{\tau_D})\|\leqslant c\sqrt[4]{\tau_D}.$$

L' estimation (3.103) satisfait

$$\|(u,\frac{du}{dt}(t))\|^2\leqslant e^{ct}(c\sqrt[4]{\tau_D}+ce^{-\frac{1}{2\sqrt{\tau_D}}}+2c\tau_D).$$

d' où la preuve de (**L2**) et (**L3**).

Démonstration de (L4). Pour tout $t',t\in[t^*,2t^*]$ et pour tout $z_1,z_2\in\mathbb{B}^4_{\tau_D}$, grâce au lemme 3.4.3, il existe

$$\begin{aligned}\|S_{\tau_D}(t)z_1-S_{\tau_D}(t')z_2\|_{\Psi^0_{\tau_D}} &\leqslant\|S_{\tau_D}(t)z_1-S_{\tau_D}(t')z_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}}+\|S_{\tau_D}(t')z_1-S_{\tau_D}(t')z_2\|_{\Psi^0_{\tau_D}}\\ &\leqslant\|S_{\tau_D}(t)z_1-S_{\tau_D}(t')z_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}}+e^{2Kt^*}\|z_1-z_2\|_{\Psi^0_{\tau_D}}.\end{aligned}$$

En fixant $t=t'$, on obtient immédiatement la deuxième partie de (**L4**). Pour démontrer la première partie, nous allons montrer l' estimation suivante

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^4_{\tau_D}}\int_{t^*}^{2t^*}\|(u_t(t)(y),u_{tt}(y))\|^2_{\Psi^0_{\tau_D}}dy\leqslant c, \quad (3.104)$$

où u désigne la première composante de $S_{\tau_D}(t)z$.
Multiplions (3.11) par $A^2u_t(t)$, on trouve

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+\|A^{\frac{3}{2}}u\|^2)+2\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2=-2(A^{\frac{3}{2}}f(u),A^{\frac{1}{2}}u_t(t))$$
$$-2(A^{\frac{1}{2}}g(u),A^{\frac{1}{2}}u_t(t)). \tag{3.105}$$

Grâce à la preuve du lemme (3.5.2), nous avons

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+\|A^{\frac{3}{2}}u\|^2)+\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2\leqslant c.$$

Ainsi, en intégrant sur $(t^*,2t^*)$, on trouve

$$\int_{t^*}^{2t^*}\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)(y)\|^2dy\leqslant c. \tag{3.106}$$

En multipliant (3.11) par u_{tt}, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+2(A^{\frac{3}{2}}u,A^{-\frac{1}{2}}u_t(t))+2(A^{\frac{1}{2}}f(u),A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)))+2\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_{tt}\|^2$$
$$=2\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+2(f'(u)u_t(t),u_t(t))-2(g(u),A^{-1}u_{tt}).$$

Compte tenu des estimations ci-dessus, une intégration sur é$(t^*,2t^*)$ permet d' obtenir la partie restante de (3.104)

■

Remarque 3.6.5. *En fait, le coefficient de continuité de Hölder n'a pas besoin d' être indépendant de τ_D pour déduire la dimension fractale uniforme (par rapport à τ_D) de la famille robustes d' attracteurs exponentiels é$\mathcal{M}_{\tau_D}$. Rappelons que la dimension fractale d' un ensemble (relativement) compact $\mathbb{K}$é dans un espace métrique $\mathbb{X}$ est définie par :*

$$\dim_{\mathrm{F}}(\mathbb{K},\mathbb{X})=\limsup_{\mu\to 0}\frac{\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{\mu})},$$

où $\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})=\log N_\mu(\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})$ représente l'entropie de Kolmogorov μ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{X}$, $N_\mu(\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})$ étant le nombre minimal de boules μ de $\mathbb{X}$ pour couvrir $\mathbb{K}$. Ainsi, si la constante dans la continuité de Hölder est indépendante de τ_D, comme c'est le cas ici, nous en déduisons que l' entropie de Kolmogorov μ de la famille robustes des attracteurs exponentiels est, pour $\mu>0$ fixer, limitée par le haut indépendamment de τ_D.

Chapitre 4

Relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard visqueux avec un terme de symport pour des applications biologiques

Résumé : Notre objectif dans ce chapitre est d' étudier le modèle de la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard visqueux avec le terme de symport. Ce modèle est caractérisé par la présence de deux termes supplémentaires. Le terme de la relaxation $\tau_D u_{tt}$ et le terme de viscosité $\delta \Delta u_t(t)$. Nous supposons que τ_D est dominé par le coefficient de viscosité δ. d' abord, nous montrons que le système est bien posé et qu'il génère un semi-groupe dissipatif agissant sur l' espace de phase dépendant de τ_D. Nous montrons aussi la dissipativité d' ordre élevé de notre modèle. Nous montrons que ce système possède un attracteur global qui est semi-continu supérieur par rapport à $\tau_D = \delta = 0$. Nous construisons ensuite une famille d' attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ qui est une perturbation robuste d' un attracteur exponentiel de l' équation de Cahn-Hilliard classique, à savoir la distance symétrique de Hausdorff entre $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ et $\mathcal{M}_{0,0}$ tend vers 0 quand (τ_D, δ) tend vers $(0, 0)$ d' une manière explicitement contrôlée. Enfin, nous donnons des simulations numériques qui confirment les résultats.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis,
▷ Dieunel DOR, Alain MIRANVILLE and Morgan PIERRE. Hyperbolic relaxation of the viscous Cahn-Hilliard equation with a symport term for the biological applications. Math. Meth. Appl. Sci.,to appear.

Contents

4.1 Présentation du modèle 49
4.1.1 Hypothèses 49
4.1.2 Notations 49
4.2 Estimations a priori 52
4.3 Existence et unicité de la solution 54
4.4 Dissipativité 56
4.4.1 Existence de l' attracteur global 62

4.5 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur 64
4.6 Familles robustes d' attracteurs exponentiels 71
4.7 Résultats Numériques 83
4.7.1 Stabilité par la méthode de l' énergie dans le cas $g \equiv 0$. 83
4.7.2 Simulations en dimension deux de l' espace 85

4.1 Présentation du modèle

Le modèle se présente comme suit :

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(-\Delta u + f(u) + \delta \frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{ku}{k' + |u|} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \tag{4.1}$$

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{4.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{et} \quad \tau_D \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \tau_D u_1, \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.3}$$

où u correspond à une concentration, $\tau_D \geq 0$ et $\delta \geq 0$ représentent respectivement les paramètres de relaxation et de viscosité, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier, f le potentiel polynomial et $g(u) = \frac{ku}{k'+|u|}$ est le terme symport (k, k' sont les constantes de Michael Mentens [48, 56]).

4.1.1 Hypothèses

Le cas $\tau_D > 0$ et $\delta = 0$ semble hors de portée en dimensions 2 et 3, où les estimations standard ne tiennent pas (les problèmes se posent concernant le résultat d'unicité). Cet obstacle est contourné en une dimension, en profitant de l'inclusion continue $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (voir [80, 81, 21, 20]). En raison de cette remarque, nous devons exiger que τ_D soit dominé par δ. Nous faisons donc l'hypothèse suivante

$$\tau_D, \delta \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \delta \geq \mu\tau_D \quad \forall \mu \in]0, 1]. \tag{4.4}$$

Le potentiel f vérifie :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \tag{4.5}$$

f'' est localement Lipschitz et continue telle que :

$$|f''(s)| \leqslant c(1 + |s|), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall c \geq 0 \tag{4.6}$$

$$\liminf_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{s} \geq -\lambda_1, \tag{4.7}$$

où $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre de A.
Le terme symport g satisfait :

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \tag{4.8}$$

$$g \quad \text{est} \quad \text{borné}, \tag{4.9}$$

$$g \quad \text{est} \quad \text{Lipschitz}. \tag{4.10}$$

4.1.2 Notations

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \quad W = H^2(\Omega),$$

et on note V' l' espace de dual de V. Le symbole $< ., . >$ représente le produit de dualité entre V et V'. On note $\| \cdot \|$ la norme usuelle dans H (avec $((., .))$ le produit scalaire associé) et $\| . \|_{-1} =$

$\|(-\Delta)^{-1}.\|$, où $-\Delta$ est l' opérateur associé aux conditions limites de Dirichlet. Plus généralement, $\|\,.\,\|_X$ est la norme dans l' espace de Banach X. L' espace V est muni du produit scalaire

$$((u,v)) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \tag{4.11}$$

et de la norme correspondante.
On note aussi $A : D(A) \to H$ l' opérateur de Laplace associé avec des conditions aux limites de Dirichlet. l' opérateur A est un opérateur strictement positif avec $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$. On définit ensuite pour $s \in \mathbb{R}$, les puissances de A par :

$$A^s : D(A^s) \to H.$$

De plus, nous introduisons l' échelle des espaces de Hilbert par :

$$\Psi^s_{\tau_D} := D(A^{\frac{s+1}{2}}) \times D(A^{\frac{s-1}{2}}) \tag{4.12}$$

Les espaces $\Psi^s_{\tau_D}$ sont naturellement associés à la norme du graphe

$$\|(u,v)\|^2_{\Psi^s_{\tau_D}} := \|A^{\frac{s+1}{2}}u\|^2 + \tau_D \|A^{\frac{s-1}{2}}v\|^2.$$

Pour la suite, nous devons également considérer une autre échelle d' espace de Hilbert, à savoir

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_s(\tau_D,\delta) = \begin{cases} D(A^{\frac{s+1}{2}}) \times D(A^{\frac{s-1}{2}}), & \text{si } \tau_D > 0 \\ D(A^{\frac{s+1}{2}}) \times D(A^{\frac{s-2}{2}}) & \text{si } \tau_D = 0 \text{ et } \delta > 0 \\ D(A^{\frac{s+1}{2}}) \times D(A^{\frac{s-3}{2}}) & \text{si } \tau_D = \delta = 0 \end{cases}$$

normé par

$$\|(u,v)\|^2_{\mathbf{H}_s} = \|A^{\frac{s+1}{2}}u\|^2 + \tau_D\|A^{\frac{s-1}{2}}v\|^2 + \delta\|A^{\frac{s-2}{2}}v\|^2 + \|A^{\frac{s-3}{2}}v\|^2.$$

On observe que les injections $\Psi^{s_1}_{\tau_D} \hookrightarrow \Psi^{s_2}_{\tau_D}$ et $\mathbf{H}_{s_1} \hookrightarrow \mathbf{H}_{s_2}$ sont compactes pour tout $s_1 > s_2$.

Remarque 4.1.1. *Il est important de noter que d'autres conditions aux limites peuvent être prises en considération. Par exemple, nous pouvons imposer*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega,$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ représente la dérivée normale sortante à $\partial\Omega$. Il n'y a pas de différence entre la dérivée normale sortante et la dérivée normale sortante à $\partial\Omega$. Dans ce cas, en intégrant (4.1) sur Ω et en appliquant le théorème de la divergence, nous pouvons facilement déduire l'identité suivante :

$$\frac{d}{dt}[\tau_D < u_t > + < u >] =< g(u) >, \quad t \geq 0,$$

où $< \cdot >= \frac{1}{Vol(\Omega)} \int_\Omega \cdot dx$. Cependant, afin de démontrer la nature dissipative du système dynamique, nous devons introduire une contrainte supplémentaire dans l'espace des phases. Ces questions spécifiques seront abordées dans d'autres travaux.

La formulation abstraite de (4.1) est :

$$\tau_D \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + A(Au + f(u) + \delta\frac{du}{dt}) + g(u) = 0. \tag{4.13}$$

Nous allons introduire le lemme suivant qui sera très utile dans la suite du chapitre.

Lemme 4.1.2. *Soit $R_0 \geq 0$. Supposons que les hypothèses (4.4)-(4.7) et (4.9) sont vérifiées pour tout $R \geq 0$. Alors, il existe $t_0 = t_0(R) \geq 0$, tel que*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant R.$$

on a

$$\|(u, u_t(t))\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant R_0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.14}$$

De plus, on a

$$\sup_{t\geq 0} \|(u, u_t(t))\|_{\Psi^0_{\tau_D}} + \int_0^\infty \|u_t(t)(y)\|^2 dy \leqslant C_0, \tag{4.15}$$

où $C_0 = C_0(R) \geq 0$.

Démonstration :
On multiplie (4.13) par $\alpha A^{-1}u + A^{-1}u_t(t)$ et on intègre sur Ω, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t) + (2 - 2\alpha\tau_D)\|u_t(t)\|^2_{-1} + 2\alpha\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + 2\delta\|u_t(t)\|^2 + 2\alpha(f(u), u)\\ +2\alpha(g(u), A^{-1}u) + 2(g(u), A^{-1}u_t(t)) = 0,\end{aligned} \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned}Y(t) = 2\alpha\tau_D(u_t(t), A^{-1}u) + \tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \alpha\|A^{-\frac{1}{2}}u\|^2\\ +\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + 2\delta\|u\|^2 + 2(F(u), 1).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Grâce à (4.7) et à l' inégalité de Poincaré, on déduit

$$2\alpha(f(u), u) \geq -\alpha(1 - \eta)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - \alpha c_\eta, \quad \eta > 0$$

et

$$2(F(u), 1) \geq -(1 - \eta)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - c_\eta, \quad \eta > 0.$$

L' estimation précédente et l' inégalité de Cauchy-Schwarz permettent de déduire de (4.17) que

$$\begin{aligned}Y(t) &\geq c_1(\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1} + \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \delta\|u\|^2) - c_\eta, \quad c_1 > 0, \ \ c_\eta \geq 0\\ Y(t) &\leq c_2(\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1} + \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \delta\|u\|^2) + c_\eta, \quad c_1 > 0, \ \ c_\eta \geq 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Grâce à (4.9) aux inégalités de Young et de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha|(g(u), A^{-1}u)| &\leqslant \alpha c\|A^{-1}u\|\\ &\leq \alpha c'\|u\|\\ &\leqslant c'\|u\|^2 + c''\alpha\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(g(u), A^{-1}u_t(t))| &\leqslant c\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|A_t^{-\frac{1}{2}}\|^2 + c.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous pouvons réécrire (4.16) comme suit

$$\frac{d}{dt}Y(t) + \gamma Y(t) + \delta\|u_t(t)\|^2 \leqslant c, \quad \gamma > 0, \quad c \geqslant 0, \quad t \geq 0. \tag{4.19}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.19) (voir, par exemple, [69]), permet de conclure que

$$\|(u, u_t(t))\|_{\Psi^0_{\tau_D}} + \delta\int_0^t \|u_t(t)(y)\|^2 dy \leqslant e^{-\gamma t}\|(u_0, u_1)\|_{\Psi^0_{\tau_D}} + c', \ \gamma > 0, \ c' \geqslant 0, \ t \geq 0. \tag{4.20}$$

En faisant tendre t vers l' infini, on retrouve les résultats.

■

4.2 Estimations a priori

Dans cette section, nous allons établir un ensemble d' estimations a priori du système (4.1)-(4.3) qui seront utilisées dans la suite pour montrer l'existence, la régularité ainsi que la dissipativité de la solution.

On réécrit (4.13) sous la forme équivalente

$$\tau_D u_{tt} + u_t(t) + A(Au + f(u) + \delta u_t(t)) + g(u) = 0. \tag{4.21}$$

Multiplions (4.21) par $u_t(t) + \alpha u + \frac{1}{4}A_{tt}^{-2}$ et intégrons sur Ω, on a

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}H(t) + (\frac{3}{2} - 2\alpha\tau_D)\|u_t(t)\|^2 + 2\alpha\|Au\|^2 + 2\delta\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{\tau_D}{2}\|A^{-1}u_{tt}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(u_t(t)f'(u), A^{-1}u_t(t)) - 2(Af(u), u_t(t)) - 2\alpha(Af(u), u) - 2(g(u), u_t(t)) \\ &\qquad -2\alpha(g(u), u) - \frac{1}{2}(g(u), A^{-2}u_{tt}),\end{aligned} \tag{4.22}$$

où

$$\begin{aligned}H(t) = \tau_D\|u_t(t)\|^2 + 2\alpha\tau_D(u, u_t(t)) + \alpha\|u\|^2 + \|Au\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{-1}u_t(t)\|^2 \\ + \frac{1}{2}(u, u_t(t)) + \frac{\delta}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}(f(u), A^{-1}u_t(t)).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$ et grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous déduisons de (4.23)

$$\begin{aligned}&H(t) \geqslant c_3(\tau_D\|u_t(t)\|^2 + \|Au\|^2 + \delta\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{-1}u_t(t)\|^2), \qquad c_3 > 0 \\ &H(t) \leqslant c_4(\tau_D\|u_t(t)\|^2 + \|Au\|^2 + \delta\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{-1}u_t(t)\|^2) + c_5, \ \ c_4 > 0.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Grâce à (4.9), (4.15), aux inégalités de Young, de Poincaré et d' interpolation, nous trouvons

$$\begin{aligned} 2\alpha|(A^{\frac{1}{2}}uf'(u), A^{\frac{1}{2}}u)| &\leqslant \alpha\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant \alpha c(1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}) \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|Au\|^2 + c_6 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|(u_t(t)f'(u), A^{-1}u_t(t))| &\leqslant c\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_t(t)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant c(1+\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|Au\|^2 + \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2 + c_7. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} 2|(g(u), u_t(t))| &\leqslant \|g(u)\|\,\|u_t(t)\| \\ &\leqslant c\|u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2 + c_8 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\alpha|(g(u), u)| &\leqslant \alpha\|g(u)\|\,\|u\| \\ &\leqslant \alpha c\|u\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|Au\|^2 + c_9. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|(g(u), A^{-2}u_{tt})| &\leqslant \|g(u)\|\,\|A^{-2}u_{tt}\| \\ &\leqslant c\|A^{-1}u_{tt}\| \\ &\leqslant \frac{\tau_D}{4}\|A^{-1}u_{tt}\|^2 + c_{10}. \end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous pouvons réécrire (4.22) comme suit

$$\frac{d}{dt}H(t) + c_{11}H(t) + \delta\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \tau_D\|A^{-1}u_{tt}\|^2 \leqslant c_{12}, \quad c_{11} > 0,\ c_{12} \geq 0,\ t \geq 0. \tag{4.25}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.25), on conclut

$$H(t) + \int_0^T (\delta\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \tau_D\|A^{-1}u_{tt}\|^2)ds \leq e^{-c_{11}t}H(0) + c_{13}, \quad c_{11} > 0, \quad t \geq 0. \tag{4.26}$$

L' estimation (4.26) et la relation (4.24) nous ont permis de déduire que

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{4.27}$$
$$u_t(t) \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{4.28}$$
$$\delta u_t(t) \in L^\infty(0,T; D(A^{-\frac{1}{2}}) \cap L^2(0,T; D(A^{\frac{1}{2}}), \tag{4.29}$$
$$u_{tt} \in L^2(0,T; D(A^{-1}). \tag{4.30}$$

4.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous allons établir l' existence et l' unicité de la solution du système. Pour ce fait, on utilise les estimations obtenues dans la section précédente. On annonce le résultat suivant.

Théorème 4.3.1. *Nous supposons que* $(u_0, u_1) \in \Psi^1_{\tau_D}$. *Alors, le système* (4.1)-(4.3) *possède une unique solution* $(u, u_t(t))$ *telle que*

$$(u, u_t(t)) \in C([0,T], \Psi^1_{\tau_D}) \text{ et } \delta u_t(t) \in L^\infty(0,T; D(A^{-\frac{1}{2}}) \cap L^2(0,T; D(A^{\frac{1}{2}}))$$

Démonstration :
Existence : La preuve de l' existence de la solution est basée sur la méthode standard de Galerkin. On considère l' opérateur $-\Delta$ associé à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et une suite de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$. Soit $(\omega_i)_{i=1,\cdots,n}$ les vecteurs propres correspondants qui forment une base orthonormée dans H. Pour $n \in \mathbb{N}$, on cherche une fonction approchée $(u_n(t), \frac{du_n}{dt}(t)(t))$ de la forme

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{i,n}\omega_i$$

vérifiant de plus

$$\tau_D A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2}(t) + A^{-1}\frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) + f(u_n(t)) + \delta\frac{du_n}{dt}(t) + A^{-1}g(u_n(t)) = 0 \tag{4.31}$$

$$u_n(t)|_{t=0} = u_{0,n} \text{ et } \frac{du_n}{dt}(t)|_{t=0} = u_{1,n}, \tag{4.32}$$

alors (4.31) est équivalent à

$$\begin{aligned}(\tau_D A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2}(t), \omega_i) + (A^{-1}\frac{du_n}{dt}(t), \omega_i) + (Au_n(t), \omega_i) + (f(u_n(t)), \omega_i)\\ +(\delta\frac{du_n}{dt}(t), \omega_i) + (A^{-1}g(u_n(t)), \omega_i) = 0,\end{aligned} \tag{4.33}$$

associé aux conditions (4.32) et ω_i suffisamment régulier.
La preuve de l' existence d' une solution locale en temps du problème approché est standard. Résoudre (4.33) revient à trouver les $u_{i,n}$, $\frac{du_{i,n}}{dt}$ tel que $u_n(t)$, $\frac{du_n}{dt}(t)$ vérifient (4.31)-(4.32). En remplaçant $u_n(t)$ par sa valeur dans (4.33), on trouve une équation différentielle ordinaire du second ordre que l' on résout grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. En remplacant à nouveau $u(t)$ et $u_t(t)$ par $u_n(t)$ et $\frac{du_n}{dt}(t)$ dans l' estimation (4.26), on obtient

$$H_n(t) + \int_0^T (\delta\|A^{\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\|^2 + \tau_D\|A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2}(t)\|^2)ds \leq e^{-c_{11}t}H_n(0) + c_{13}, \quad t \geq 0. \tag{4.34}$$

où $H_n(t)$ satisfait

$$\begin{aligned}H_n(t) &\geqslant c_3(\tau_D\|\frac{du_n}{dt}(t)\|^2 + \|Au_n(t)\|^2 + \delta\|A^{-\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\|^2 + \|A^{-1}\frac{du_n}{dt}(t)\|^2)\\ H_n(t) &\leqslant c_4(\tau_D\|\frac{du_n}{dt}(t)\|^2 + \|Au_n(t)\|^2 + \delta\|A^{-\frac{1}{2}}\frac{du_n}{dt}(t)\|^2 + \|A^{-1}\frac{du_n}{dt}(t)\|^2) + c_5.\end{aligned} \tag{4.35}$$

On déduit de (4.34) et (4.35) que

$$u_n(t) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{du_n}{dt}(t) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.36}$$

$$\delta\frac{du_n}{dt}(t) \in L^\infty(0,T;D(A^{-\frac{1}{2}})\cap L^2(0,T;D(A^{\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad \frac{d^2u_n}{dt^2}(t) \in L^2(0,T;D(A^{-1}). \tag{4.37}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les estimations précédentes, on obtient l' existence grâce aux résultats de compacité d' Aubin-Lions (voir, [77])

unicité : Soient (u^1,u_t^1) et (u^2,u_t^2) deux solutions du système (4.141)-(4.3) avec des conditions initiales respectivement (u_0^1,u_1^1) et (u_0^2,u_1^2). On pose :

$$(u,u_t(t)) = (u^1-u^2, u_t^1-u_t^2).$$

Alors, $(u,u_t(t))$ vérifie

$$\tau_D\frac{d^2u}{dt^2}(t)+\frac{du}{dt}(t)+A^2u(t)+A(f(u^1)-f(u^2))+\delta A\frac{du}{dt}(t)+(g(u^1)-g(u^2))=0 \tag{4.38}$$

$$u|_{t=0} = u_0^1-u_0^2 \quad \text{et} \quad u_t(t)|_{t=0} = u_1^1-u_1^2. \tag{4.39}$$

On multiplie (4.38) par $u_t(t)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t)+2\|u_t(t)\|^2+2\delta\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 = &-2(A(f(u^1)-f(u^2)),u_t(t))\\ &-2(g(u^1)-g(u^2),u_t(t)),\end{aligned} \tag{4.40}$$

où

$$Y(t) = \tau_D\|u_t(t)\|^2+\|Au(t)\|^2,$$

est tel que

$$c_{12}(\tau_D\|u_t(t)\|^2+\|Au(t)\|^2) \leqslant Y(t) \leqslant c_{13}(\tau_D\|u_t(t)\|^2+\|Au(t)\|^2), \;\; c_{12},\, c_{13}>0.$$

Grâce à (4.6), (4.7), (4.10) et aux inégalités de Young, de Poincaré et d' interpolation, nous déduisons que

$$\begin{aligned}-2|(A(f(u^1)-f(u^2)),u_t)| &\leq ||A(f(u^1)-f(u^2))||\,||u_t||\\ &\leq ||Au^2(f'(u^1)-f'(u^2))+|A^{\frac{1}{2}}u^2|^2(f''(u^1)-f''(u^2))\\ &+Auf'(u^1)+|A^{\frac{1}{2}}u|^2(f''(u^1)||\,||u_t||\\ &\leq c(||Au^2||\,||u\int_0^1 f''(su^1+(1-s)u^2)ds||+||Au||\,||f'(u^1)||\\ &+||A^{\frac{1}{2}}u^2||^2||f''(u^1)-f''(u^2)||+||A^{\frac{1}{2}}u||^2\,||f''(u^1)||)\,||u_t||\\ &\leq c(||Au^2||\,||u||^2_{L^\infty(\Omega)}+||A^{\frac{1}{2}}u^2||^2\,||u||_{L^\infty(\Omega)}\\ &+||Au||(1+||u^1||^2_{L^\infty(\Omega)}+||A^{\frac{1}{2}}u||^2\,||u^2||_{L^\infty(\Omega)})\,||u_t||\\ &\leq (\text{grâce à (4.26) et l'inégalité d'Agmon})\\ &\leq c||Au||\,||u_t||\\ &\leq c||Au||^2+||u_t||^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2|(g(u^1)-g(u^2),u_t(t))| &\leqslant \|g(u^1)-g(u^2)\|\,\|u_t(t)\| \\ &\leqslant c\|u(t)\|\,\|u_t(t)\| \\ &\leqslant c'\|Au(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2. \end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus dans (4.40), on trouve

$$\frac{d}{dt}Y(t)+2\delta\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2\leq\kappa\,Y(t),\quad \kappa>0,\ \ t\geqslant 0 \tag{4.41}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (4.41), on conclut

$$\|(u(t),u_t(t))\|_{\Psi^1_{\tau_D}}\leqslant e^{\kappa t}\,\|(u_0,u_1)\|_{\Psi^1_{\tau_D}},\quad \kappa>0,\ \ t\geqslant 0. \tag{4.42}$$

d' où l' unicité, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données initiales.

■

4.4 Dissipativité

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de bornés absorbants des solutions du problème (4.1)-(4.3). Le théorème 4.3.1, nous a permis de définir une famille d' opérateurs continus sur l' espace des phases.

$$S^1_{\tau_D,\delta}(t):\mathbf{H}_1\to\mathbf{H}_1$$

de la manière suivante,

$$S^1_{\tau_D,\delta}(t)(u_0,u_1)=\begin{cases} S^0_{\tau_D,\delta}(t)(u_0,u_1), & \text{si } \tau_D>0,\\ (S^0_{0,\delta}(t)u_0,L_\delta((S^0_{0,\delta}(t)u_0)) & \text{si } \tau_D=0, \end{cases}$$

où

$$L_\delta(u)=-(\mathbf{I}+\delta A)^{-1}[A(Au+f(u))+g(u)]. \tag{4.43}$$

Lorsque $\tau_D=0$, nous lisons directement dans l' équation parabolique les égalités suivantes

$$u=S^0_{0,\delta}(t)u_0\quad et\quad u_t(t)(t)=L_\delta((S^0_{0,\delta}(t)u_0).$$

Par conséquent

$$S^1_{\tau_D,\delta}(t)(u_0,u_1)=(u,u_t(t)(t)),$$

Dans le cas parabolique, il est important de noter que lorsque $\tau_D=0$, la donnée initiale u_1 est fictive, car elle ne joue aucun rôle dans la dynamique du système.

Remarque 4.4.1. *Lorsque $\tau_D > 0$ il est facile de voir que $S^1_{\tau_D,\delta}(t)$ satisfait les propriétés du semi-groupe sur l' espace $\mathbf{H}_1$. Ceci est faux quand $\tau_D = 0$. En effet, dans ce cas $S^1_{0,\delta}(t)$ fait passer l' espace $\mathbf{H}_1$ en $M_1(\delta)$ de $\mathbf{H}_1$ donné par :*

$$M_1(\delta) = \{(u, u_t(t)) \in \mathbf{H}_1(0,\delta) : u_t(t) = L_\delta(u)\}.$$

En particulier, $S^1_{0,\delta}(0)$ est la projection de $\mathbf{H}_1$ sur $M_1(\delta)$. Cependant, la restriction de $S^1_{0,\delta}(t)$ sur $M_1(\delta)$ est à nouveau un semi-groupe.

La remarque ci-dessus suggère la façon de construire l' espace de phases approprié pour $S^1_{0,\delta}(t)$. On définit donc

$$\Psi^s_{\tau_D,\delta} = \begin{cases} \mathbf{H}_s(\tau_D,\delta), & \text{si } \tau_D > 0, \\ \\ M_s(\delta) & \text{si } \tau_D = 0, \end{cases}$$

où

$$M_s(\delta) = \{(u, u_t(t)) \in \mathbf{H}_s(0,\delta) : u_t(t) = L_\delta(u)\}.$$

Il est facile de vérifier que $\Psi^s_{\tau_D,\delta}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{H}_s$. Ainsi, $\Psi^s_{\tau_D,\delta}$ est un espace métrique complet, dont la distance est donnée par la norme de $\mathbf{H}_s$. En abusant de la notation, nous écrirons

$$\|(u, u_t(t))\|_{\Psi^s_{\tau_D,\delta}} \text{ pour signifier } \|(u, u_t(t))\|_{\mathbf{H}_s},$$

pour tout $(u, u_t(t)) \in \Psi^s_{\tau_D,\delta}$.

Nous allons énoncer ce petit lemme qui va nous servir dans la suite du chapitre.

Lemme 4.4.2. *Pour tout $R \geq 0$, il existe $K = K(R) \geq 1$ tel que, pour deux données initiales $u_1, u_2 \in \Psi^1_\ell$ avec $\|u_i\|_{\Psi^1_\ell} \leqslant R$ (ici et dans la suite, $\ell = 0, 1$), on a :*

$$\|S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)u_1 - S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)u_2\|_{\Psi^1_\ell} \leqslant Ke^{kt}\|u_1 - u_2\|_{\Psi^1_\ell}, \quad t \geq 0 \tag{4.44}$$

où

$$u_1 = (u_{0,1}, u_{1,1}) \ et \ u_2 = (u_{0,2}, u_{1,2}).$$

Démonstration :
Dans toute la preuve, la constante $c \geq 0$ peut dépendre de R. Tout d' abord, nous considérons le cas $\ell = 0$. étant donné deux solutions u^1 et u^2 correspondant à des données initiales différentes $u_1, u_2 \in \Psi^1_0$, la différence $\overline{u} = u^1 - u^2$ satisfait l' équation suivante

$$\tau_D\overline{u}_{tt} + \overline{u}_t + \delta A\overline{u}_t + A^2\overline{u} + A(f(u^1) - f(u^2)) + (g(u^1) - g(u^2)) = 0. \tag{4.45}$$

Multiplions (4.45) par $\overline{u}_t$ et intégrons sur Ω, on trouve

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|\overline{u}_t\|^2 + \|A\overline{u}\|^2) + 2\|\overline{u}_t\|^2 + 2\delta\|A^{\frac{1}{2}}\overline{u}_t\|^2 = -2(A(f(u^1) - f(u^2)), \overline{u}_t) \\ -2(g(u^1) - g(u^2), \overline{u}_t). \tag{4.46}$$

Grâce à (4.6), (4.7), (4.10), aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
-2|(A(f(u^1)-f(u^2)),\overline{u}_t)| &\leq ||A(f(\phi^1)-f(\phi^2))||\,||\overline{u}_t|| \\
&\leq ||Au^2(f'(u^1)-f'(u^2))+|A^{\frac{1}{2}}u^2|^2(f''(u^1)-f''(u^2)) \\
&+A\overline{u}f'(u^1)+|A^{\frac{1}{2}}u|^2(f''(u^1)||\,||\overline{u_t}|| \\
&\leq c(||Au^2||\,||\overline{u}\int_0^1 f''(su^1+(1-s)u^2)ds||+||A\overline{u}||\,||f'(u^1)|| \\
&+||A^{\frac{1}{2}}u^2||^2||f''(u^1)-f''(u^2)||+||A^{\frac{1}{2}}\overline{u}||^2\,||f''(u^1)||)\,||\overline{u_t}|| \\
&\leq c(||Au^2||\,||\overline{u}||^2_{L^\infty(\Omega)}+||A^{\frac{1}{2}}u^2||^2\,||\overline{u}||_{L^\infty(\Omega)}+||A\overline{u}||(1+||u^1||^2_{L^\infty(\Omega)} \\
&+||A^{\frac{1}{2}}\overline{u}||^2\,||u^2||_{L^\infty(\Omega)})\,||\overline{u_t}|| \\
&\leq (\text{grâce à (4.26) et l'inégalité d'Agmon}) \\
&\leq c||A\overline{u}||^2+\frac{1}{2}||\overline{u}_t||^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2|(g(u^1)-g(u^2),\overline{u}_t)| &\leqslant \|(g(u^1)-g(u^2)\|\,\|\overline{u}_t\| \\
&\leqslant c\|u^1-u^2\|\,\|\overline{u}_t\| \\
&\leqslant c\|\overline{u}\|\,\|\overline{u}_t\| \\
&\leqslant c\|A\overline{u}\|\,\|\overline{u}_t\| \\
&\leqslant c\|A\overline{u}\|^2+\|\overline{u}_t\|^2.
\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (4.46), nous avons

$$\frac{d}{dt}\|(\overline{u},\overline{u}_t)\|_{\Psi_0^1}+\|\overline{u}_t\|^2\leqslant c'\|(\overline{u},\overline{u}_t)\|_{\Psi_0^1}. \tag{4.47}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.47), on obtient

$$\|(\overline{u},\overline{u}_t)\|_{\Psi_0^1}+\int_0^T\|\overline{u}_t(y)\|^2dy\leqslant e^{c't}\|(\overline{u}(0),\overline{u}_t(0))\|_{\Psi_0^1},\quad c'>0,\ \ t\geqslant 0,\quad T>0. \tag{4.48}$$

On trouve la première partie du lemme.
Dans le cas $\ell=1$, on multiplie (4.45) par $A^{-2}\overline{u}_{tt}$ et on intègre sur Ω, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t)-2\|\overline{u}_t\|^2+2\tau_D\|A^{-1}\overline{u}_{tt}\|^2 &= 2((f'(u^1)-f'(u^2))u_t^2,A^{-1}\overline{u}_t) \\
&+2(f'(u^1)\overline{u}_t,A^{-1}\overline{u}_t)-2(g(u^1)-g(u^2),A^{-2}\overline{u}_{tt}),
\end{aligned} \tag{4.49}$$

où

$$H(t)=\|A^{-1}\overline{u}_t\|^2+2(\overline{u},\overline{u}_t)+\delta\|A^{-\frac{1}{2}}\overline{u}_t\|^2+2(f(u^1)-f(u^2),A^{-1}\overline{u}_t),$$

est tel que

$$c_{16}(\|A^{-1}\overline{u}_t\|^2+\delta\|A^{-\frac{1}{2}}\overline{u}_t\|^2-\|A\overline{u}\|^2)\leqslant H(t)\leqslant c_{17}(\|A^{-1}\overline{u}_t\|^2+\delta\|A^{-\frac{1}{2}}\overline{u}_t\|^2+\|A\overline{u}\|^2).$$

Suivant (4.6), (4.7), (4.10) et les inégalités de Young, de Poincaré et d' interpolation, nous déduisons que

$$\begin{aligned} 2|(f'(u^1)\overline{u}_t, A^{-1}\overline{u}_t)| &\leqslant \|f'(u^1)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\overline{u}_t\|\,\|A^{-1}\overline{u}_t\| \\ &\leqslant c\|\overline{u}_t\|\,\|A^{-1}\overline{u}_t\| \\ &\leqslant c\|\overline{u}_t\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2|((f'(u^1)-f'(u^2))u_t^2, A^{-1}\overline{u}_t)| &\leqslant c\|A\overline{u}\|\,\|u_t^2\|\,\|A^{-1}\overline{u}_t\| \\ &\leqslant c\|A\overline{u}\|^2\|u_t^2\|^2 + \|A^{-1}\overline{u}_t\|^2. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} 2|(g(u^1)-g(u^2), A^{-2}\overline{u}_{tt})| &\leqslant \|g(u^1)-g(u^2)\|\,\|A^{-2}\overline{u}_{tt}\| \\ &\leqslant c\|A\overline{u}\|\,\|A^{-1}\overline{u}_{tt}\| \\ &\leqslant c\|A\overline{u}\|^2 + \tau_D\|A^{-1}\overline{u}_{tt}\|^2. \end{aligned}$$

Les estimations ci-dessus, combinées dans (4.49), on déduit

$$\frac{d}{dt}H(t) + \tau_D\|A^{-1}\overline{u}_{tt}\|^2 \leqslant c'H(t) + c\|\overline{u}_t\|^2 + c\|A\overline{u}\|^2\|u_t^2\|^2 + c\|A\overline{u}\|^2. \tag{4.50}$$

En utilisant les estimations (4.48), (4.15) et le lemme de Gronwall, on conclut que

$$\|(\overline{u},\overline{u}_t)\|_{\Psi_1^1} \leqslant ce^{c't}\|(\overline{u}(0),\overline{u}_t(0))\|_{\Psi_1^1},\quad c>0,\quad t\geqslant 0. \tag{4.51}$$

Les estimations (4.51), (4.48) donnent le résultat du lemme.

■

Maintenant, nous allons prouver l' existence d' un ensemble absorbant borné pour le semi-groupe $S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)$ sur l' espace-phase Ψ^1_ℓ. Pour ce faire, on énonce le lemme suivant

Lemme 4.4.3. *Soit $R \geq 0$ et $\nu \geq 0$. Il existe $K_1 = K_1(R) \geq 0, K_0 = K_0(\nu) \geq 0$ et $e_0 > 0$ telle que*

$$\|(u_0,u_1)\|_{\Psi_0^0} \leqslant \nu \quad \textit{et} \quad \|(u_0,u_1)\|_{\Psi_\ell^1} \leqslant R,$$

on a

$$\|S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)(u_0,u_1)\|_{\Psi_\ell^1} \leqslant K_1e^{-e_0t} + K_0. \tag{4.52}$$

Démonstration :
On multiplie (4.21) par $u_t(t) + \frac{\mu}{2}Au + \frac{1}{4}A^{-2}u_{tt}$ et on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}Y(t) + (2\delta - 2\mu\tau_D)\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{3}{2}\|u_t(t)\|^2 + \mu\|A^{\frac{3}{2}}u\|^2 + \frac{\tau_D}{2}\|A^{-1}u_{tt}\|^2 \\ &\quad = -\mu(Af(u),Au) + \frac{1}{2}(u_t(t)f'(u),A^{-1}u_t(t)) - 2(u_t(t)f'(u),Au) \\ &\qquad -2(g(u),u_t(t)) - \mu(g(u),Au) - \frac{1}{2}(g(u),A^{-2}u_{tt}), \end{aligned} \tag{4.53}$$

où

$$Y(t) = \tau_D\|u_t(t)\|^2 + \mu\tau_D(Au, u_t(t)) + \frac{\mu}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \frac{1}{2}(u, u_t(t)) + \frac{\mu\delta}{2}\|Au\|^2 + \|Au\|^2$$
$$+\frac{1}{4}\|A^{-1}u_t(t)\|^2 + \frac{\delta}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}(f(u), A^{-1}u_t(t)) + 2(f(u), Au)$$

Grâce à (4.6), (4.7), (4.15), aux inégalités de Young, de Poincaré et d' interpolation, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|(f(u), A^{-1}u_t(t))| &\leqslant \|u\|\,\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant c(1 + \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant c(1 + \|Au\|)\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant c\|Au\|^2 + c\|A^{-1}u_t(t)\|^2 + c\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(A^{-1}u_t(t), Au)| &\leqslant \|A^{-1}u_t(t)\|\,\|Au\| \\ &\leqslant c\|Au\|^2 + \frac{1}{4}\|A^{-1}u_t(t)\|^2.\end{aligned}$$

Alors,

$$c_{18}\|S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)(u_0, u_1)\|_{\Psi^1_\ell} \leq Y(t) \leq c_{19}\|S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)(u_0, u_1)\|_{\Psi^1_\ell} + c,\ c_{18} > 0,\ c_{19} > 0. \quad (4.54)$$

De la même manière

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|(u_t(t)f'(u), A^{-1}u_t(t))| &\leqslant \|u_t(t)\|\,\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant c(1 + \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)})\|u_t(t)\|\,\|A^{-1}u_t(t)\| \\ &\leqslant c(1 + \|Au\|)\|u_t(t)\|\,\|u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2 + c\|u_t(t)\|^2\|Au\|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\mu|(Af(u), Au)| &\leqslant \mu\|A^{\frac{1}{2}}u\|\,\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^{\frac{3}{2}}u\| \\ &\leqslant \mu c(1 + \|Au\|)\|A^{\frac{3}{2}}u\| \\ &\leqslant \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}u\|^2 + c.\end{aligned}$$

Suivant (4.9) et les inégalités de Young et de Poincaré, on déduit

$$\begin{aligned}\mu|(g(u), Au)| &\leqslant c\mu\|g(u)\|\,\|Au\| \\ &\leqslant c\mu\|A^{\frac{3}{2}}u\| \\ &\leqslant \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}u\|^2 + c.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|(g(u), A^{-2}u_{tt})| &\leqslant \|g(u)\|\,\|A^{-2}u_{tt}\| \\ &\leqslant c\|A^{-1}u_{tt}\| \\ &\leqslant \frac{\tau_D}{4}\|A^{-1}u_{tt}\|^2 + c\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous pouvons réécrire (4.53) comme suit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t) + e_0 Y(t) + \frac{\mu}{2}\|A^{\frac{3}{2}}u\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \delta\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 \\ + \frac{\tau_D}{4}\|A^{-1}u_{tt}\|^2 \leqslant c + Y(t)\|u_t(t)\|^2.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Grâce à l' estimation (4.15) et le lemme 3.1 de [20] appliqué à (4.55), nous permet de déduire que

$$Y(t) \leqslant cY(0)e^{-e_0 t} + c', \;\; c > 0, \;\; e_0 > 0, \;\; c' \geqslant 0 \tag{4.56}$$

d' où la preuve du lemme.

■

Ensuite, nous avons annoncé le résultat de dissipativité suivant.

Théorème 4.4.4. *Le semi-groupe $S^{\ell}_{\tau_D,\delta}(t)$ associé au le système (4.141)-(4.3) possède un ensemble borné absorbant $\boldsymbol{B}^{\ell}_0$ dans Ψ^1_{ℓ} tel que, pour tout $B \subset \Psi^1_{\ell}$, il existe $t_0 = t_0(B) \geq 0$ tel que $t \geq t_0$ implique*

$$S^{\ell}_{\tau_D,\delta}(t)B \subset \boldsymbol{B}^{\ell}_0 \quad \forall t \geq t_0.$$

Démonstration :
Soit $\|(u_0, u_1)\|_{\Psi^1_{\ell}} \leqslant R$ donné. En particulier, $\|(u_0, u_1)\|_{\Psi^0_0} \leqslant \frac{R}{\sqrt{\lambda_1}}$ et grâce au lemme **??** on obtient

$$\|(u, u_t(t))\|_{\Psi^0_0} \leqslant R_0, \qquad t \geq t_0 = t_0(\frac{R}{\sqrt{\lambda_1}}).$$

En appliquant le lemme 4.4.3, nous affirmons que

$$\|(u(t_0), u_t(t)(t_0))\|_{\Psi^1_{\ell}} \leqslant \overline{R} = K_1(R)e^{-e_0 t_0} + K_0(\frac{R}{\sqrt{\lambda_1}}).$$

Ainsi, pour $t \geq t_0$ et le lemme 4.4.3 encore une fois, nous concluons

$$\|(u, u_t(t)(t))\|_{\Psi^1_{\ell}} \leqslant K_1(\overline{R})e^{-e_0 t}e^{e_0 t_0} + K_0(R_0), \;\; e_0 > 0.$$

d' où le résultat du théorème.

■

4.4.1 Existence de l' attracteur global

L' attracteur global est le plus petit ensemble compact de l' espace des phases qui est invariant par le semi-groupe $S^{\ell}_{\tau_D,\delta}(t)$ et qui attire toutes les données initiales bornées. Les résultats de la section précédente nous ont permis d' énoncer le résultat suivant

Théorème 4.4.5. *Sous les hypothèses du théorème 4.3.1, le semi-groupe $S^{\ell}_{\tau_D,\delta}(t)$ $(\ell = 0, 1)$ défini sur l' espace de phase $\Psi^1_\ell(\tau_D, \delta)$ possède un attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ dans $\Psi^2_\ell(\tau_D, \delta)$.*

Démonstration.
Comme dans le chapitre précédent, nous allons décomposer le semi-groupe $S^{\ell}_{\tau_D,\delta}(t)$ en une somme de deux semi-groupes de telle sorte que le premier tende tend vers 0 lorsque t tend vers l' infini et que le second est asymptotiquement compact dans $\Psi^2_\ell(\tau_D, \delta)$.

$$S^{\ell}_{\tau_D,\delta}(t) = S^{1,\ell}_{\tau_D,\delta}(t) + S^{2,\ell}_{\tau_D,\delta}(t), \qquad t \geq 0.$$

Considérons la décomposition suivante

$$(u, u_t(t)) = (w, w_t(t)) + (v, v_t(t)), \tag{4.57}$$

où $(v(t), v_t(t)(t))$ est la solution du système

$$\tau_D v_{tt} + v_t(t) + A^2 v + \delta A v_t(t) = 0 \tag{4.58}$$

$$v|_{t=0} = u_0 \qquad v_t(t)|_{t=0} = u_1, \tag{4.59}$$

associé au semi-groupe $S^{1,\ell}_{\tau_D,\delta}(t)$ et $(w(t), w_t(t)(t))$ est la solution du système

$$\tau_D w_{tt} + w_t(t) + A^2 w + \delta A w_t(t) + A f(u) + g(u) = 0 \tag{4.60}$$

$$w|_{t=0} = 0 \qquad w_t(t)|_{t=0} = 0, \tag{4.61}$$

associé au semi-groupe $S^{2,\ell}_{\tau_D,\delta}(t)$.

Tout d' abord, nous considérons le cas $\ell = 0$. On multiplie (4.58) par $\alpha v(t) + v_t(t)$ et on intègre sur Ω, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} H(t) + (2 - 2\alpha\tau_D)\|v_t(t)\|^2 + 2\alpha\|Av\|^2 + \delta\|A^{\frac{1}{2}} v_t(t)\|^2 = 0, \tag{4.62}$$

où

$$H(t) = 2\alpha\tau_D(v_t(t), v) + \alpha\|v\|^2 + \|Av\|^2 + \alpha\delta\|A^{\frac{1}{2}} v\|^2.$$

satisfait, pour $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$

$$c_{19}(\tau_D\|v_t(t)\|^2 + \|Av\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2) \leqslant H(t) \leqslant c_{20}(\tau_D\|v_t(t)\|^2 + \|Av\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2).$$

On a alors,

$$\frac{d}{dt} H(t) + cH(t) + \delta\|A^{\frac{1}{2}} v_t(t)\|^2 \leqslant 0, \quad c > 0. \tag{4.63}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (4.63), nous obtenons le résultat de la première partie.

Maintenant, nous multiplions (4.60) par $\alpha Aw(t) + Aw_t(t)$ et nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t) + (2-2\alpha\tau_D)\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + 2\alpha\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + 2\delta\|Aw_t(t)\|^2 \\ = -2\alpha(Af(u), Aw) + 2(A(u_t(t)f'(u)), Aw) \\ -2\alpha(g(u), Aw) - 2(g(u), Aw_t(t))\end{aligned} \tag{4.64}$$

où

$$Y(t) = 2\alpha(w_t(t), Aw) + \tau_D\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \alpha\|A^{\frac{1}{2}}w\|^2 + 2\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + \alpha\delta\|Aw\|^2$$

Pour $\alpha > 0$ tel que $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$ nous avons

$$c_{21}(\tau_D\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}}w\|^2) \leqslant Y(t) \leqslant c_{22}(\tau_D\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \|Aw\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}}w\|^2)$$

En exploitant (4.6), (4.7), (4.15), (4.52), les inégalités de Young, de Poincaré et d' interpolation, nous trouvons

$$\begin{aligned}-2\alpha|(Af(u), Aw)| &\leqslant \alpha\|A^{\frac{1}{2}}u\|\,\|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^{\frac{3}{2}}w\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2}\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + c\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2|(A(u_t(t)f'(u)), Aw)| &\leqslant \|A^{\frac{1}{2}}(u_t(t)f'(u))\|\,\|A^{\frac{3}{2}}w\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + c.\end{aligned}$$

Grâce à (4.9), aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}-2\alpha|(g(u), Aw)| &\leqslant \alpha\|g(u)\|\,\|Aw\| \\ &\leqslant \alpha c\|A^{\frac{3}{2}}w\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + c\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-2|(g(u), Aw_t(t))| &\leqslant \|g(u)\|\,\|Aw_t(t)\| \\ &\leqslant c\|Aw_t(t)\| \\ &\leqslant \delta\|Aw_t(t)\|^2 + c.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (4.64), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}Y(t) + (2-2\alpha\tau_D)\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \alpha\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + \delta\|Aw_t(t)\|^2 \leqslant c. \tag{4.65}$$

Ainsi, pour $2 - 2\alpha\tau_D > 0$, on a

$$\frac{d}{dt}Y(t) + c'Y(t) \leqslant c, \quad c' > 0, \quad c \geqslant 0, \quad t \geq 0. \tag{4.66}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.66), on conclut

$$\|(w, w_t(t))\|_{\Psi_0^2(\tau_D)} \leqslant e^{-c't}\|(w(0), w_t(t)(0))\|_{\Psi_0^2(\tau_D)} + c'', \;\; c' > 0, \;\; c'' \geqslant 0. \tag{4.67}$$

d' où la deuxième partie du théorème dans le cas $\ell = 0$.

Ensuite, nous allons aborder le cas $\ell = 1$. Pour cela, nous multiplions (4.58) par $\frac{1}{2}A^{-2}v_{tt}$ et nous intégrons sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\|A^{-1}v_t(t)\|^2 + 2(v, v_t(t)) + \delta\|A^{-\frac{1}{2}}v_t(t)\|^2) - 2\|v_t(t)\|^2 + 2\tau_D\|A^{-1}v_{tt}\|^2 = 0. \tag{4.68}$$

On additionne (4.68) et (4.62), nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\|(v, v_t(t))\|_{\Psi_\ell^1} + \|(v, v_t(t))\|_{\Psi_\ell^1} + \tau_D\|A^{-1}v_{tt}\|^2 + \delta\|A^{\frac{1}{2}}v_t(t)\|^2 \leqslant 0. \tag{4.69}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (4.69), nous obtenons le résultat de la première partie.

Multiplions maintenant (4.60) par $A^{-1}w_{tt}$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((Aw, w_t(t)) + \frac{1}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \frac{\delta}{2}\|w_t(t)\|^2) - \|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}w_{tt}\|^2 \\ = -(A^{\frac{1}{2}}uf'(u), A^{-\frac{1}{2}}w_{tt}) - (g(u), A^{-1}w_{tt}).\end{aligned} \tag{4.70}$$

En additionnant (4.70) et (4.65), nous déduisons

$$\frac{d}{dt}\|(w, w_t(t))\|_{\mathsf{V}_2^\ell} + c\|(w, w_t(t))\|_{\mathsf{V}_2^\ell} + \delta\|Aw_t(t)\|^2 + \frac{\tau_D}{2}\|A^{-\frac{1}{2}}w_{tt}\|^2 \leqslant c', \;\; c > 0. \tag{4.71}$$

On applique le lemme de Gronwall à (4.71) et on obtient

$$\|(w, w_t(t))\|_{\Psi_\ell^2} \leqslant e^{-ct}\|(w(0), w_t(t)(0))\|_{\Psi_\ell^2} + c'', \quad c > 0, \quad c'' \geqslant 0. \tag{4.72}$$

On obtient la deuxième partie du théorème dans le cas $\ell = 1$. La conclusion de la preuve du théorème découle directement des estimations (4.63), (4.68), (4.69) et (4.72).

■

Corollaire 4.4.6. *L'attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ est borné dans Ψ_ℓ^2, avec une borne indépendante de τ_D et δ.*

4.5 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur

Notre objectif dans cette section est de montrer que pour f et g satisfaisant les conditions de compatibilité, le semi-groupe $S_{\tau_D,\delta}^\ell(t)$ défini sur l'espace Ψ_ℓ^n (pour $1 \leqslant n \leqslant 4$) possède un borné absorbant qui est fermé dans $\mathbf{B}_n^\ell(\tau_D, \delta)$ dans Ψ_ℓ^n. Nous supposons que

$$f \in C^{n+1}(\mathbf{R}) \quad \text{si } n = 3, 4 \quad f''(0) = 0 \tag{4.73}$$

et

$$g^{(n-1)}(u) \qquad \text{est} \quad \text{borné}. \tag{4.74}$$

Grâce aux hypothèses précédentes, nous avons les résultats suivants.

Théorème 4.5.1. *Supposons que (4.73) et (4.74) sont vérifiées, pour* $1 \leqslant n \leqslant 4$. *Alors, il existe* $R_n \geq 0$ *tel que, la boule fermée* $\boldsymbol{B}_\ell^n(\tau_D, \delta)$ *de* Ψ_ℓ^n *centrée en zéro et de rayon* R_n *est un ensemble absorbant pour le semi-groupe* $S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)$ *dans* Ψ_ℓ^n. *En d' autres termes, pour tout ensemble borné* $B \subset \Psi_\ell^n$, *il existe* $t_n = t_n(B) \geq 0$ *tel que*

$$S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)B \subset \Psi_\ell^n(\tau_D, \delta), \quad \forall t \geq t_n,$$

où

$$\boldsymbol{B}_0^n = \boldsymbol{B}_0^n(\tau_D) \quad et \quad \boldsymbol{B}_1^n = \boldsymbol{B}_1^n(\tau_D, \delta).$$

Théorème 4.5.2. *Supposons que (4.73) et (4.74) sont vérifiées, pour* $1 \leqslant n \leqslant 4$. *Pour tout* $\boldsymbol{B} \in \Psi_\ell^n$, *il existe* $C_n = C_n(\boldsymbol{B}) \geq 0$ *tel que*

$$\sup_{z_0 \in \boldsymbol{B}} \|S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)z_0\|_{\Psi_\ell^n} + \sup_{z_0 \in \boldsymbol{B}} \int_t^{t+1} \|A^{\frac{n}{2}} u_t(y)\|^2 dy \leqslant C_n, \tag{4.75}$$

où $z_0 = (u(0), u_t(t)(0))$.

La preuve des théorèmes 4.5.1 et 4.5.2 découle directement du lemme 4.5.3. En effet, nous procédons exactement comme dans les preuves du théorème 4.4.4 et du lemme 4.4.3, qui découlent du lemme suivant (en particulier, pour le théorème 4.5.2, il faut intégrer sur $(t, t+1)$ la formule (4.83) ci-dessous).

Lemme 4.5.3. *Sous les hypothèses du théorème 4.5.1. Soit* $r_n \geq 0$, $r_{n-1} \geq 0$, *donnés, il existe* $K_{n-1} = K_{n-1}(r_{n-1}) \geq 0$, $K_n = K_n(r_n) \geq 0$ *et* $\nu_n > 0$ *tel que, si*

$$\|z_0\|_{\Psi_\ell^{n-1}} \leqslant r_{n-1} \quad et \quad \|z_0\|_{\Psi_\ell^n} \leqslant r_n.$$

Alors

$$\|S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)z_0\|_{\Psi_\ell^n} \leqslant K_n e^{-\nu_n t} + K_{n-1} \quad t \geq 0. \tag{4.76}$$

Démonstration :
Tout au long de la preuve, c dépends de r_{n-1}. Nous exploitons un argument inductif sur $n \geq 1$. Nous supposons que

$$\sup_{\|z_0\|_{\Psi_\ell^{n-1}} \leq r_{n-1}} (\|A^{\frac{n+1}{2}} u\|^2 + \|A^{\frac{n-1}{2}} u_t(t)\|^2) \leq c \tag{4.77}$$

On remarque que, pour $n = 1$, (4.77) est vraie grâce à l' estimation (4.26). En particulier, les hypothèses sur f permettent de dire que

$$\sup_{t \geq 0} \sum_{j=1}^{n+1} \|f^{(j)}(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c \quad \text{et} \quad f(u) \in D(A^{\frac{n}{2}}). \tag{4.78}$$

Par conséquent,

$$\|A^{\frac{n}{2}} f(u)\| \leqslant c \quad \text{et} \quad \|A^{\frac{n}{2}}(f'(u)u_t(t))\| \leqslant c\|A^{\frac{n}{2}} u_t(t)\| \tag{4.79}$$

Multiplions (4.21) par $\alpha A^n u + A^n u_t(t) + \frac{1}{2}A^{n-2}u_{tt}$ et intégrons sur Ω, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_n + (1-2\alpha\tau_D)\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + 2\alpha\|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + 2\delta\|A^{\frac{n+1}{2}}u_t(t)\|^2 + \tau_D\|A^{\frac{n-2}{2}}u_{tt}\|^2 \\ = -(g(u), A^{n-2}u_{tt}) - 2\alpha(Af(u), A^n u) + 2(A^{\frac{n}{2}}(f'(u)u_t(t)), A^{\frac{n+2}{2}}u) \\ +(A^{\frac{n}{2}}(f'(u)u_t(t)), A^{\frac{n-2}{2}}u_t(t)) - 2\alpha(g(u), A^n u) - 2(g(u), A^n u_t(t)),\end{aligned} \tag{4.80}$$

où

$$\begin{aligned}Y_n(t) = 2\alpha\tau_D(A^{\frac{n}{2}}u_t(t), A^{\frac{n}{2}}u) + \tau_D\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + \alpha\|A^{\frac{n}{2}}u\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{n-2}{2}}u_t(t)\|^2 \\ +\|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + (A^{\frac{n}{2}}u_t(t), A^{\frac{n}{2}}u) + \alpha\delta\|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 + \delta\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 \\ +2(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n+2}{2}}u) + 2(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n-2}{2}}u_t(t)).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$, nous obtenons

$$\begin{aligned}Y_n &\geqslant c_{23}(\tau_D\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + \delta\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{n-2}{2}}u_t(t)\|^2) \\ Y_n &\leqslant c_{24}(\tau_D\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + \delta\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{n-2}{2}}u_t(t)\|^2).\end{aligned} \tag{4.81}$$

Grâce à (4.78) et (4.79), aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}2|(A^{\frac{n}{2}}(f'(u)u_t(t)), A^{\frac{n+2}{2}}u)| &\leqslant c\|A^{\frac{n}{2}}(f'(u)u_t(t))\|\,\|A^{\frac{n+2}{2}}u\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|\,\|A^{\frac{n+2}{2}}u\| \\ &\leqslant \alpha\|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + \frac{1}{4}\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-2\alpha|(A^{\frac{n}{2}}f(u), A^{\frac{n+2}{2}}u)| &\leqslant \alpha\|A^{\frac{n}{2}}f(u)\|\,\|A^{\frac{n+2}{2}}u\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + c.\end{aligned}$$

Suivant (4.74) et les inégalités de Young et de Poincaré, on trouve

$$\begin{aligned}-2\alpha|(g(u), A^n u)| &\leqslant \alpha\|A^{\frac{n-2}{2}}g(u)\|\,\|A^{\frac{n+2}{2}}u\| \\ &\leqslant \alpha c_g\|A^{\frac{n+2}{2}}u\| \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + c\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-2|(g(u), A^n u_t(t))| &\leqslant \|A^{\frac{n}{2}}g(u)\|\,\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant c_g\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + c.\end{aligned}$$

En insérant les estimations ci-dessus dans (4.80), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}Y_n + (\frac{1}{2} - 2\alpha\tau_D)\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|A^{\frac{n+2}{2}}u\|^2 + 2\delta\|A^{\frac{n+1}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{\tau_D}{2}\|A^{\frac{n-2}{2}}u_{tt}\|^2 \leqslant c. \tag{4.82}$$

Alors, pour $\frac{1}{2} - 2\alpha\tau_D > 0$, on a

$$\frac{d}{dt}Y_n + \nu_n Y_n + c'\|A^{\frac{n}{2}}u_t(t)\|^2 + 2\delta\|A^{\frac{n+1}{2}}u_t(t)\|^2 + \frac{\tau_D}{2}\|A^{\frac{n-2}{2}}u_{tt}\|^2 \leqslant c, \quad t \geq 0. \tag{4.83}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (4.83), nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_n(t) + c'\int_0^t (\|A^{\frac{n}{2}}u_t(s)\|^2 + \delta\|A^{\frac{n+1}{2}}u_t(s)\|^2 + \frac{\tau_D}{2}\|A^{\frac{n-2}{2}}u_{tt}(s)\|^2)ds \\ \leq e^{-\nu_n t}\, Y_n(0) + c'' \end{aligned} \tag{4.84}$$

l' estimation (4.84) et la relation (4.81) donnent le résultat du lemme.

■

Nous allons énoncer deux lemmes qui vont nous servir dans la preuve de l' existence de l' attracteur global.

Lemme 4.5.4. *Soit $S(t)$ un semi-groupe fortement continu sur un espace métrique (Ψ, d). Soit $B_0, B_1, B_2 \subset \Psi$ tels que*

$$\mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_1) \leqslant M_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad \mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_1) \leqslant M_2 e^{-\alpha_2 t},$$

pour certains $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $M_1, M_2 \geq 0$.

Supposons également que pour tous $z_1, z_2 \in \cup_{t\geq 0} S(t)B_j$ $(j = 0, 1, 2)$ il existe

$$d(S(t)z_1, S(t)z_2) \leqslant M_0 e^{\alpha_0 t} d(z_1, z_2),$$

pour certains $\alpha_0 \geq 0$ et certains $M_0 \geq 0$. Il s' ensuit que

$$\mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_2) \leqslant M e^{-\alpha t}, \tag{4.85}$$

où $\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}$ et $M = M_0M_1 + M_2$.

Pour la preuve (voir [28]).

Lemme 4.5.5. *Supposons que (4.73)-(4.74) sont vérifiées, pour $1 \leqslant n \leqslant 4$. En prenant R_n suffisamment grand, on a*

$$\mathrm{dist}_{\Psi^1_\ell}(S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)B^\ell_{n-1}, B^\ell_n) \leqslant L_n e^{-\omega t}, \quad L_n \geq 0, \quad \omega > 0, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{4.86}$$

Démonstration :
Dans cette preuve, $c \geq 0$ dépends du rayon R_{n-1} de $B^{n-1}_{\tau_D,\delta}$. Nous devons montrer que la carte solution est la somme d'un terme exponentiellement décroissant dans l'espace $\mathbf{V}^\ell_1$, et un terme uniformément borné dans $\mathbf{V}^\ell_n$. Nous considérons la décomposition (4.57) du semigroupe. Pour des données initiales $(u_0, u_1) \in B^\ell_0$, nous multiplions (4.58) par $\alpha v + v_t$ et en utilisant le théorème 4.4.5 nous avons

$$||(v(t), v_t(t))||_{\mathbf{V}^\ell_1} \leq c||(u_0, u_1)||_{\mathbf{V}^\ell_1} e^{-\omega t}, \quad t \geq 0, \tag{4.87}$$

pour un certain $\omega > 0$. Le système (4.58)-(4.59) est donc exponentiellement stable dans $\mathbf{V}_1^\ell$. En multipliant (4.60) par $\alpha A^n w + A^n w_t$ et en suivant le lemme 4.5.1, nous trouvons

$$||(w(t), w_t(t))||_{\mathbf{V}_n^\ell} \leq c, \quad \forall t \geq 0,$$

pour un certain $c \geq 0$ dépendant du rayon R_{n-1} de $B^{n-1}_{\tau_D,\delta}$. En redéfinissant R_n comme supérieur ou égal à la constante c ci-dessus, on obtient la conclusion souhaitée.

■

Proposition 4.5.6. *Supposons que (4.73) et (4.74) sont vérifiées, pour $1 \leqslant n \leqslant 4$. Alors, à condition que R_n soit convenablement agrandi, il existe $\omega_n > 0$ et une fonction croissante J_n telle que*

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{V}_1^\ell}(S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)B, B_n^\ell) \leqslant J_n(R)e^{-\omega_n t}, \tag{4.88}$$

pour tout $B \subset \Psi^1_\ell$ avec $\sup_{z\in B} \|z\|_{\Psi^1_\ell} \leqslant R$, $\mathrm{dist}_{\Psi^1_\ell}$ désigne la semi-distance d' Hausdorff standard dans Ψ^1_ℓ.

Démonstration : La preuve de la proposition 4.5.6. On observe que, grâce aux lemmes 4.4.3 et 4.5.5, la transitivité de l'attraction s'applique, on en déduit

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{V}_1^\ell}(S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)B_0^\ell, B_n^\ell) \leq L'_n e^{-\omega'_n t}, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{4.89}$$

pour certains $L'_n \geq 0$ et $\omega'_n > 0$. Maintenant, pour tout $B \subset \mathbf{V}_1^\ell$, avec $\sup_{(u,u_t)\in B} ||(u, u_t)||_{\mathbf{V}_1^\ell} \leq R$, le théorème 4.4.4 donne

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{V}_1^\ell}(S^\ell_{\tau_D,\delta}(t)B, B_0^\ell) \leq J_0(R)e^{-\omega_0 t}, \quad t \geq 0, \tag{4.90}$$

pour certains $\omega_0 > 0$ et certaines fonctions croissantes $J_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Par conséquent, par les lemmes 4.4.3 et 4.5.5, nous trouvons le résultat.

■

Corollaire 4.5.7. *Sous les hypothèses du théorème 4.5.1, l' attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ est borné dans B_n^0, avec une borne indépendante de τ_D et δ.*

Théorème 4.5.8. *Sous les hypothèses du théorème 4.5.1, le sous-ensemble $\mathcal{A}_{0,0}$ de l' attracteur global est semi-continu supérieur à zéro par rapport à la famille $\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ dans la semi-distance de Hausdorff de Ψ_0^1, c'est-à-dire,*

$$\lim_{\delta\to 0}[\mathrm{dist}_{\mathbf{V}_1^0}(\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}, \mathcal{A}_{0,0})] = 0.$$

Remarque 4.5.9. *Le résultat du théorème est toujours vrai si l' on prend $\tau_D \to 0$ et $\delta \to \delta_0 > 0$.*

La preuve du théorème découle directement de deux lemmes suivants.

Lemme 4.5.10. *L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné dans Ψ_3^0. En outre, lorsque $\tau_D > 0$ toute solution u s' éloignant de l' attracteur $\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ satisfait l' inégalité suivante*

$$\tau_D \|u_{tt}(t)\|^2 \leqslant Q, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.91}$$

pour un certain $Q \geq 0$, indépendant de τ_D et δ.

Démonstration :
Grâce au corollaire 4.5.7, $\|A^2u(0)\|$ est borné. Nous considérons d' abord le cas $\tau_D = 0$. Puisque $\mathcal{A}_{0,\delta}$ est borné dans $D(A^3)$, pour tout $u(0) \in \mathcal{A}_{0,\delta}$ fixé, le u correspondant est égal à :

$$Au_t(t) = AL_\delta(u).$$

Ainsi, en faisant appel à l' invariance de l' attracteur global, nous obtenons une borne uniforme pour $\|Au_t(0)\|$, et à la fois le caractère borné de $\mathcal{A}_{0,\delta}$ dans Ψ_3^0.
Lorsque $\tau_D > 0$, nous introduisons le problème auxiliaire suivant, formellement obtenu en prenant la dérivée temporelle de (4.1) :

$$\tau_D v_{tt} + v_t(t) + A(Av + f'(u)v + \delta v_t(t)) + vg'(u) = 0 \tag{4.92}$$

et

$$v(0) = u_1 \quad et \quad v_t(0) = \frac{1}{\tau_D}[-u_1 - A(Au(0) + f(u(0)) + \delta u_1) - g(u(0))], \tag{4.93}$$

avec $(u(0), u_1) \in \mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ et $u_t(t) = v$.

Pour tout $T > 0$, le problème a une solution unique

$$(v, v_t(t)) \in C([0, T], \Psi_0^1).$$

Multiplions (4.89) par $v_t(t) + \mu Av$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t) + (2\delta - \mu\tau_D)\|A^{\frac{1}{2}}v_t(t)\|^2 + 2\|v_t(t)\|^2 + 2\mu\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2 = -2(A(vf'(u)), v_t(t)) \\ -2\mu(A(vf'(u)), Av) - 2(vg'(u), v_t(t)) - 2\mu(vg'(u), Av)\end{aligned} \tag{4.94}$$

où

$$Y(t) = \tau_D\|v_t(t)\|^2 + 2\mu\tau_D(v_t(t), Av) + \frac{\mu}{2}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|Av\|^2 + \delta\mu\|Av\|^2$$

Soit $\mu > 0$ de tel sorte que

$$c_{27}(\tau_D\|v_t(t)\|^2 + \|Av\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2) \leqslant Y(t) \leqslant c_{28}(\tau_D\|v_t(t)\|^2 + \|Av\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2)$$

d' après (4.79), les inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}-2|(A(vf'(u)), v_t(t))| &\leqslant \|A(vf'(u))\|\,\|v_t(t)\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{3}{2}}v\|\,\|v_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mu|(A(vf'(u)), Av)| &\leqslant \mu\|A^{\frac{3}{2}}v\|\,\|A^{\frac{1}{2}}v\| \\ &\leqslant \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2 + c\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\ &\leqslant \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2 + c\|A^{-\frac{1}{2}}v\|^2.\end{aligned}$$

En utilisant (4.74), et les inégalités de Young et de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2|(vg'(u), v_t(t))| &\leqslant \|vg'(u)\| \, \|v_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu|(vg'(u), Av)| &\leqslant \mu\|A^{-\frac{1}{2}}(vg'(u))\| \, \|A^{\frac{3}{2}}v\| \\ &\leqslant \mu c\|A^{-\frac{1}{2}}v\| \, \|A^{\frac{3}{2}}v\| \\ &\leqslant c\|A^{-\frac{1}{2}}v\|^2 + \frac{\mu}{4}\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2. \end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (4.94), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}Y(t) + \varepsilon Y(t) + \delta\|A^{\frac{1}{2}}v_t(t)\|^2 + \mu\|A^{\frac{3}{2}}v\|^2 \leqslant c\|A^{-\frac{1}{2}}v\|^2 \tag{4.95}$$

En intégrant sur $(0, t)$ l' estimation (4.95), on conclut

$$\tau_D\|u_{tt}\|^2 + \|Au_t(t)\|^2 \leqslant c(1 + \frac{1}{\tau_D}e^{-\varepsilon t}), \;\; \varepsilon > 0, \;\; c > 0$$

Grâce à l' invariance de l' attracteur global, cette borne est indépendante de τ_D ce qui donne la conclusion du lemme.

■

Nous considérons la projection $P : \Psi_1^0(1) \to \Psi_1^0(0)$, définie comme suit

$$P(u(0), u_1) = u(0).$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 4.5.11. *La famille* $\boldsymbol{G} = \{\widehat{u} \in C(\mathbf{R}^+, \Psi_1^0(0))\}$, *ou,*

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} PS^0_{\tau_D,\delta}(t)(u_0, u_1), & si \;\; \tau_D > 0, \\ (S^0_{0,\delta}(t)P(u_0, u_1) & si \;\; \tau_D = 0, \end{cases}$$

est équicontinue en zéro.

Maintenant, nous démontrons le théorème 4.5.8 en faisant un raisonnement par l' absurde.

Démonstration :

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe deux suites τ_{Dn}, δ_n satisfaisant (4. 4) avec $\delta_n \to 0$, $(u_n(t), u_{t,n}) = z_n \in \mathcal{A}_{\tau_{Dn},\delta_n}$ et une constante $Q > 0$ telle que :

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{V}_1^0(1)}(z_n, \mathcal{A}_{0,0}) \geq Q.$$

En supposant $\tau_{Dn} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $z^n(t) = S^0_{\tau_{Dn},\delta_n}(t)z_n$, et on observe que cette fonction peut être étendue à une trajectoire complète bornée de $z^n(t) = S^0_{\tau_{Dn},\delta_n}(t)$. De plus, l' ensemble

$$\cup_{t\in\mathbb{R}} \cup_{n\in\mathbb{N}} z^n(t) \subset \mathcal{A},$$

est relativement compact dans $\mathbf{V}^0_1(1)$. La famille Pz^n est semi-continue de $\mathbb{R}$ dans $\Psi^0_1(0)$, grâce au lemme 4.5.11 et aux propriétés des semi-groupes. Ainsi, par le théorème d' Ascoli et la procédure classique de diagonalisation, nous déduisons l' existence de $\overline{z} \in C(\mathbb{R}, \Psi^0_1(0))$ telle que

$$Pz^n \to \overline{z} \quad in \quad C([-N, N], \mathbf{V}^0_1(0)),$$

pour tout $N > 0$.

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\overline{z}(t)\|_{\mathbf{V}^0_1(0)} < \infty.$$

d' abord, on montre comme dans [43], que $\overline{z}$ est une trajectoire complète bornée de $S^0_{0,0}(t)$. Ensuite, en caractérisant l' attracteur global comme l' ensemble de toutes les trajectoires complètes bornées, nous concluons que $\overline{z}(0) \in \mathcal{A}_{0,0}$. Enfin, en exploitant le caractère borné de $\mathcal{A}$ dans $\Psi^0_3(1)$, nous obtenons facilement la convergence $z^n \to \overline{z}(0)$ dans $\Psi^0_1(1)$, ainsi que la validité du lemme 4.5.11, ce qui nous permet d' obtenir une contradiction.

■

4.6 Familles robustes d' attracteurs exponentiels

Dans cette section, nous allons formuler l' un des meilleurs résultats du chapitre, à savoir l' existence d' une famille robuste d' attracteurs exponentiels pour le semi-groupe $S^1_{\tau_D,\delta}(t)$ sur l' espace des phases $\Psi^1_1(\tau_D, \delta)$ associé aux problèmes (4.1)-(4.3).

Nous commançons cette section par quelques définitions.

Définitions 4.6.1. *Soit $S(t)$ un semi-groupe fortement continu sur un espace métrique complet $(\mathbf{V}, d_{\mathbf{V}})$. Un ensemble compact $\mathcal{M} \subset \mathbf{V}$ est appelé attracteur exponentiel ou ensemble inertiel pour $S(t)$ si les conditions suivantes sont réunies*

1. *l'ensemble $\mathcal{M}$ est invariant pour $S(t)$, c'est-à-dire $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ pour chaque $t \geq 0$,*
2. *$\dim_{\mathrm{F}}(\mathcal{M}, \mathbf{V}) < \infty$, c'est-à-dire que $\mathcal{M}$ a une dimension fractale finie,*
3. *il existe une fonction croissante $J : \mathbf{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $k > 0$ telle que*

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{V}}(S(t)B, \mathcal{M}) \leqslant J(R)e^{-kt},$$

pour tout ensemble $B \subset \mathbf{V}$ avec $\sup_{z\in B} d_{\mathbf{V}}(z, z_*) \leqslant R$, où z_* est un vecteur choisi pour cela.

Rappelons que la dimension fractale $\dim_{\mathrm{F}}(K, \mathbf{V})$ d' un sous-ensemble compact $K \subset \mathbf{V}$ est donnée par

$$\dim_{\mathrm{F}}(K, \mathbf{V}) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N_\varepsilon(K, \mathbf{V})}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

où $N_\varepsilon(K, \mathbf{V})$ est le nombre minimum de boules ε de $\mathbf{V}$ nécessaires pour recouvrir K. La quantité $\mathbf{H}_\varepsilon(K, \mathbf{V}) = \log N_\varepsilon(K, \mathbf{V})$ est généralement appelée l' entropie de Kolmogorov ε de K. Remarquons que l' entropie, et donc la dimension fractale, dépendent de l' espace sous-jacent $\mathbf{V}$.

Remarque 4.6.2. *La définition ci-dessus est en fait plus générale que celle de [25], car ici le bassin d'attraction exponentielle est l'espace des phases, et pas seulement un sous-ensemble compact invariant de l'espace des phases.*

Théorème 4.6.3. *Supposons que (4.73)-(4.74) sont vérifiées pour $(n = 4)$. Il existe alors une famille $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta} \subset \Psi_1^1(\tau_D, \delta)$ d' attracteurs exponentiels pour les semi-groupes $S^1_{\tau_D,\delta}(t)$ agissant sur l'espace des phases Ψ_1^1. En outre, la famille $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ satisfait les propriétés suivantes :*

(1) $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ est borné dans $\Psi_4^1(\tau_D, \delta)$, uniformément par rapport à τ_D et δ,

(2) le taux d' attraction exponentielle k et la fonction J de définition 4.6.1 sont indépendants de τ_D et δ,

(3) $\dim_{\mathrm{F}}(\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}, \Psi_1^1)$ est uniformément bornée par rapport à τ_D et δ.

(4) la distance symétrique de Hausdorff entre $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ et $\mathcal{M}_{0,0}$ est égale à

$$\mathrm{dist}^{\mathrm{sym}}_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}(\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}, \mathcal{M}_{0,0}) \leqslant c(\tau_D + \delta)^\tau,$$

pour un certain $c \geq 0$ et $\tau \in (0, 1)$.

Les constantes k, τ, C et la fonction J peuvent être calculées explicitement.

En référence à la définition 4.6.1, nous convenons de choisir $z_* = 0 \in \Psi_1^1(\tau_D, \delta)$, puisque $f(0) = 0$. En particulier, l' affirmation (4) du théorème ci-dessus garantit que la famille $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ est robuste par rapport à la double limite (singulière) $\tau_D, \delta \to 0$, à condition, bien sûr, qu'elle soit prise conformément à la condition (4.4).

Remarque 4.6.4. *Il est facile de réaliser que, pour $\tau_D > 0$, l'ensemble, $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ est un attracteur exponentiel pour le semi-groupe $S^0_{\tau_D,\delta}(t)$, tandis que, pour $\tau_D = 0$, la projection de $\mathcal{M}_{0,\delta}$ sur la première composante est un attracteur exponentiel pour $S^0_{0,\delta}(t)$.*

l' étape clé pour prouver le théorème 4.6.3 est le lemme suivant, dont la preuve est présentée dans cette section. Pour cela, nous introduisons les ensembles

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\tau_D, \delta) = \begin{cases} B_4^1(\tau_D, \delta), & si\ \ \tau_D > 0 \\ \{(u(0), L_\delta(u(0)) \in \Psi_4^1(0, \delta) : \|A^3 u(0)\| \leqslant R_4\}, & si\ \ \tau_D = 0 \end{cases}$$

où R_4 est le rayon de la boule B_4^1 de Ψ_4^1.

Il est évident que $B_4^1 \subset \mathbf{B}$. De plus, lorsque $\tau_D = 0$, si $(u(0), L_\delta(u(0)) \in \mathbf{B}$ il s' avère que

$$\|(u(0), L_\delta(u(0))\|_{\Psi_4^1} \leqslant r\|A^3 u(0)\| \leqslant rR_4,$$

pour tout $r > 1$. Cela découle facilement du fait que L_δ est (localement Lipschitz) continue de $D(A^3)$ à $D(A)$, uniformément par rapport à δ, et la borne

$$\|A(\mathbf{I} + \delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta}, \qquad \forall \delta > 0.$$

Par conséquent, nous concluons que

$$B_4^1 \subset \mathbf{B} \subset rB_4^1,$$

ce qui implique que $\mathbf{B}$ satisfait les mêmes propriétés que B_4^1.

Lemme 4.6.5. *Il existe des constantes positives Δ_i (indépendantes de τ_Dé et δ), telles que les conditions suivantes sont réunies,*

(L1) Pour tout $z_0 \in \mathbf{B}(0,0) \subset \Psi_1^1(\tau_D,\delta)$,

$$\|z_0\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} \leqslant \Delta_1 \|z_0\|_{\Psi_1^1(0,0)} + \Delta_2\sqrt{\tau_D+\delta}.$$

(L2) Il existe $t^* \geq t_{\mathbf{B}}$ tel que le semi-groupe $S^1_{\tau_D,\delta} = S^1_{\tau_D,\delta}(t^*)$ peut être décomposée en la somme suivante

$$S^1_{\tau_D,\delta} = V_{\tau_D,\delta} + W_{\tau_D,\delta},$$

avec, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbf{B}(\tau_D,\delta)$,

$$\|V_{\tau_D,\delta} z_1 - V_{\tau_D,\delta} z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} \leqslant \frac{1}{4}\|z_1 - z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)},$$

$$\|W_{\tau_D,\delta} z_1 - W_{\tau_D,\delta} z_2\|_{\Psi_2^1(\tau_D,\delta)} \leqslant \Delta_3 \|z_1 - z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)},$$

(L3) Il existe une projection (non linéaire) $\Pi_{\tau_D,\delta} : \mathbf{B}(\tau_D,\delta) \to \mathbf{B}(0,0)$ telle que

$$\Pi_{\tau_D,\delta}\mathbf{B}(\tau_D,\delta) = \mathbf{B}(0,0)$$

et

$$\|(S^1_{\tau_D,\delta})^n z_0 - (S^1_{0,0})^n \Pi_{\tau_D,\delta} z_0\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} \leqslant \Delta_4^n(\tau_D+\delta), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pour tout $z_0 \in \mathbf{B}(\tau_D,\delta)$.

(L4) Il existe

$$\|S^1_{\tau_D,\delta} z_0 - S^1_{0,0} z_0\|_{\Psi_1^1(0,0)} \leqslant \Delta_5(\tau_D+\delta) + \Delta_6\|z_0 - \overline{z}_0\|_{\Psi_1^1(0,0)},$$

pour tout $t\, dans [0,t^*]$ et tout $z_0 \in \mathbf{B}(\tau_D,\delta) \subset \Psi_1^1(0,0), \overline{z}_0 \in \mathbf{B}(0,0)$.

(L5) l' application

$$(t,z) \mapsto S^1_{\tau_D,\delta} z : [0,t^*] \times \mathbf{B}(\tau_D,\delta) \to \Psi_1^1(\tau_D,\delta)$$

est continûment Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz qui peut dépendre de τ_D et δ. Ici, $\mathbf{B}(\tau_D,\delta)$ est muni de la topologie métrique de $\Psi_1^1(\tau_D,\delta)$. En outre, la constante de Lipschitz de l'application $z \to S^1_{\tau_D,\delta} z$ est indépendante de τ_D, δ et $t \in [0,t^*]$.

En utilisant le lemme 4.6.5 et le fait que les inclusions compactes $H_2(\tau_D,\delta) \hookrightarrow H_1(\tau_D,\delta)$ sont uniformes, au sens où la quantité $\mathbf{H}_\varepsilon(B_1, H_2(\tau_D,\delta))$, où B_1 désigne la boule unité de $H_1(\tau_D,\delta)$, est indépendante de τ_D et δ, nous sommes en mesure d' exploiter un résultat abstrait dû à Fabrice, Galusinski, Miranville et Zelik [28]. La conclusion que l' on peut en tirer est "presque" l' énoncé du théorème 4.6.3. Précisément, nous trouvons une famille d' ensembles $\mathcal{M}_{\tau_D,\delta}$ satisfaisant les conditions (1), (3) et (4) du théorème, avec (2) remplacé par la propriété d' attraction plus faible

$$\mathrm{dist}_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}(S^1_{\tau_D,\delta}(t)\mathbf{B}(\tau_D,\delta), \mathcal{M}_{\tau_D,\delta}) \leqslant J_* e^{-k_* t},$$

pour $J_* \geq 0$é et $k_* \geq 0$. Mais on voit alors facilement, grâce à la transitivité de l' attraction exponentielle, en rassemblant la formule ci-dessus, le lemme 4.4.2, le théorème 4.4.5 et le lemme 4.5.4 (avec **B** dans l' espace de B_4^1), on obtient la conclusion (2), qui complète la preuve du théorème 4.6.3.

Démonstration du lemme 4.6.5 :
Tout au long de la preuve, la constante $c_i \geq 0,\ i \in \mathbb{N}$ dépends de R_4

Démonstration de (L1) : Soit $z_0 \in \mathbf{B}(0,0) \subset \Psi_1^1(\tau_D,\delta)$ on a

$$\begin{aligned}\|z_0\|^2_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} &= \|Au(0)\|^2 + \tau_D\|u_1\|^2 + \delta\|A^{-\frac{1}{2}}u_1\|^2\\ &\leqslant \|Au(0)\|^2 + \tau_D\|u_1\|^2 + c\delta\|u_1\|^2\\ &\leqslant \|z_0\|^2_{\Psi_1^1(0,0)} + c(\tau_D+\delta).\end{aligned}$$

Alors,

$$\|z_0\|^2_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} \leqslant \Delta_1\|z_0\|^2_{\Psi_1^1(0,0)} + \Delta_2(\tau_D+\delta)$$

d' où la conclusion de **(L1)**.

Démonstration de (L2) : Soit $z_0 \in \mathbf{B}$, on définit les applications $V_{\tau_D,\delta}(t)$ et $W_{\tau_D,\delta}(t)$ comme suit

$$V_{\tau_D,\delta}(t)z_0 = (v(t), v_t(t)(t)), \qquad W_{\tau_D,\delta}(t)z_0 = (w(t), w_t(t)(t)),$$

avec v et w solution du système (4.58)-(4.59) et (4.60)-(4.61), respectivement.
On multiplie (4.58) par $\alpha v + v_t(t)$ et on intègre sur Ω ; on déduit grâce au lemme de Gronwall

$$\|(v, v_t(t))\|_{\Psi_1^1} \leqslant ce^{-c't}\|(v(0), v_t(t)(0))\|_{\Psi_1^1},\quad c' > 0,\ \ c > 0. \tag{4.96}$$

Ensuite, on en déduit

$$\|V_{\tau_D,\delta}(t)z_1 - V_{\tau_D,\delta}(t)z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} \leqslant ce^{-c't}\|z_1 - z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{B},\ \ c' > 0,\ \ c > 0.$$

Il est alors évident que nous pouvons fixer un $t^* \geq t_B$ de sorte que l' application $V_{\tau_D,\delta}(t) = V_{\tau_D,\delta}(t^*)$ satisfasse

$$\|V_{\tau_D,\delta}z_1 - V_{\tau_D,\delta}z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)} \leqslant \frac{1}{4}\|z_1 - z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}, \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{B},$$

Ce qui prouve la première partie de (L2).
Pour la preuve de la deuxième partie de (L2), on considère la différence $w(t) = w^1(t) - w^2(t)$ qui satisfait (4.60)

$$\tau_D w_{tt} + w_t(t) + A^2 w + \delta A w_t(t) + A(f(u^1) - f(u^2)) + g(u^1) - g(u^2) = 0, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{B}. \tag{4.97}$$

Multiplions (4.94) par $\frac{\mu}{2}A^2w + Aw_t(t) + \frac{1}{8}A^{-1}w_{tt}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}H(t) + (2\delta - \mu\tau_D)\|Aw_t(t)\|^2 + \frac{7}{4}\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \mu\|A^2w\|^2 + \frac{\tau_D}{4}\|A^{-\frac{1}{2}}w_{tt}\|^2 =\\ &-\mu(A(f(u^1) - f(u^2)), A^2w) - \mu(g(u^1) - g(u^2), A^2w) - \frac{1}{4}(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}w_{tt})\\ &-2(g(u^1) - g(u^2), Aw_t(t)) + 2(u_t^1 f'(u^1) - u_t^2 f'(u^2), A^2w)\\ &+\frac{1}{4}(u_t^1 f'(u^1) - u_t^2 f'(u^2), w_t(t)),\end{aligned} \tag{4.98}$$

où

$$H(t) = \tau_D\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \mu\tau_D(Aw_t(t), Aw) + \frac{\mu}{2}\|Aw\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + \frac{1}{4}(w_t(t), Aw) + \frac{1}{8}\|A^{-\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \frac{\delta}{2}\|wt\|^2 + \frac{\delta\mu}{2}\|A^{\frac{3}{2}}w\|^2 + 2(A(f(u^1) - f(u^2)), Aw) + \frac{1}{4}(f(u^1) - f(u^2), w_t(t)),$$

satisfait

$$c_1\|(w, w_t(t))\|^2_{\mathbf{V}^1_2(\tau_D,\delta)} - c\|Au\|^2 \leqslant H(t) \leqslant c_2\|(w, w_t(t))\|^2_{\mathbf{V}^1_2(\tau_D,\delta)} + c\|Au\|^2.$$

Grâce à (4.4)-(4.9) et aux inégalités de Young, de Hölder et de Poincaré, nous avons

$$\frac{d}{dt}H(t) + \delta\|Aw_t(t)\|^2 + \frac{5}{4}\|A^{\frac{1}{2}}w_t(t)\|^2 + \frac{\mu}{4}\|A^2w\|^2 + \frac{\tau_D}{8}\|A^{-\frac{1}{2}}w_{tt}\|^2 \leqslant c(\|u_t(t)\|^2 + \|Au\|^2). \tag{4.99}$$

En intégrant (4.96) sur $(0, t)$ et grâce au lemme 4.4.2, on déduit

$$\|W_{\tau_D,\delta}z_1 - W_{\tau_D,\delta}z_2\|_{\Psi^1_2(\tau_D,\delta)} \leqslant ce^{ct^*}\|z_1 - z_2\|_{\Psi^1_1(\tau_D,\delta)}, \tag{4.100}$$

où $W_{\tau_D,\delta}(t) = W_{\tau_D,\delta}(t^*)$, qui donne le résultat de la deuxième partie de **(L2)**.

Démonstration de (L3) : Supposons que τ_D et δ satisfont (4.4) et $z_0 \in \mathbf{B}$. On fixe $\Pi_{\tau_D,\delta} = \Pi$, où Π est donné par

$$\Pi(u_0, u_1) = (u_0, L_0(u_0)),$$

avec L_0 défini comme dans (4.43) (pour $\delta = 0$). Par construction, $\Pi : \mathbf{B}(\tau_D, \delta) \to \mathbf{B}(0, 0)$. Afin de montrer l' inégalité souhaitée, nous allons exploiter la décomposition suivante. Pour cela, nous écrivons la première composante u de la solution $S^1_{\tau_D,\delta}(t)z_0$ sous la forme

$$u = u^0(t) + \tau_D\widehat{u}(\frac{t}{\tau_D}) + \tau_D R(t), \tag{4.101}$$

où u^0 résout le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} u^0_t + A(Au^0 + f(u^0)) + g(u^0) = 0\,, \\ \\ u^0(0) = u_0\,, \end{cases}$$

Le changement de paramètre satisfait

$$\tau = \frac{t}{\tau_D} \qquad \text{et} \qquad \widehat{u}_0 = u_1 - u^0_t(0) \in D(A),$$

cette partie $\widehat{u} = \widehat{u}(\tau)$é de la décomposition est la solution du système

$$\begin{cases} \widehat{u}_{\tau\tau} + \widehat{u}_\tau + \delta A\widehat{u}_\tau = 0 \\ \\ \widehat{u}_\tau(0) = \widehat{u}_0, \\ \\ \lim_{\tau\to\infty} \widehat{u}(\tau) = 0. \end{cases}$$

On constate facilement que $\widehat{u}(\tau)$ et $\widehat{u}_\tau(\tau)$ peuvent être exprimés comme suit

$$\widehat{u}(\tau) = -(\mathbf{I} + \delta A)^{-1}\mathbf{T}(\tau)\widehat{u}_0 \tag{4.102}$$

et

$$\widehat{u}_\tau(\tau) = \mathbf{T}(\tau)\widehat{u}_0, \tag{4.103}$$

où $\mathbf{T}$ est le semi-groupe fortement continu sur $L^2(\Omega)$ dont le générateur infinitésimal est $-(\mathbf{I}+\delta A)$. Remarquons que $\mathbf{T}(\tau)$ est exponentiellement stable, plus précisément,

$$\|\mathbf{T}(\tau)\| \leqslant e^{-\tau}, \qquad \forall\tau \geq 0, \ \ \delta > 0 \tag{4.104}$$

Puisque $\widehat{u}_\tau(\tau) = \tau_D\widehat{u}(\frac{t}{\tau_D})$, nous obtenons immédiatement la borne

$$\sup_{\tau\geq 0} \|A\widehat{u}(\tau)\| + \int_0^\infty \|A\widehat{u}_\tau(\frac{y}{\tau_D})\|dy \leqslant c. \tag{4.105}$$

Nous commençons à fournir une estimation de la composante u^0.

Lemme 4.6.6. *On a*

$$\|Au_t^0(t)\|^2 + \|A^{-1}u_{tt}^0(t)\|^2 + \int_0^\infty [\|u_{tt}^0(y)\|^2 + \|A^{-2}u_{ttt}^0(y)\|^2]dy \leqslant c, \quad t \geq 0 \tag{4.106}$$

Démonstration du lemme 4.6.6 : l' estimation du terme $\|Au_t^0(t)\|^2$ est déjà connue, du fait que $z_0 \in \mathbf{B}$. Nous considérons le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} \psi_t + A(A\psi + \psi f'(u^0)) + \psi g'(u^0) = 0, \\ \\ \psi(0) = L(u_0), \end{cases}$$

où $u_t^0 = \psi$. Le système admet une solution unique dans $C([0,T], D(A))$. En multipliant la première équation du système par $\psi_t + A\psi$ et en intègrant sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|A\psi_t\|^2) + 2\|\psi_t\|^2 + 2\|A^{\frac{3}{2}}\psi\|^2 = -2(A(f'(u^0)\psi), \psi_t) \\ +2(A(f'(u^0)\psi), A\psi) - 2(\psi g'(u^0), \psi_t) - 2(\psi g'(u^0), A\psi). \end{aligned} \tag{4.107}$$

Grâce à (4.78)-(4.79), aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned} -2|(A(f'(u^0)\psi), \psi_t)| &\leqslant \|A(f'(u^0))\psi\| \, \|\psi_t\| \\ &\leqslant \|A\psi\| \, \|\psi_t\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{3}{2}}\psi\| \, \|\psi_t\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\psi_t\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{3}{2}}\psi\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2|(A(f'(u^0)\psi), A\psi)| &\leqslant \|A^{\frac{1}{2}}(f'(u^0)\psi)\| \, \|A^{\frac{3}{2}}\psi\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\| \, \|A^{\frac{3}{2}}\psi\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{3}{2}}\psi\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant (4.74), les inégalités de Young et de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2|(\psi g'(u^0), \psi_t)| &\leqslant \|\psi g'(u^0)\| \, \|\psi_t\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\| \, \|\psi_t\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_t\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2|(\psi g'(u^0), A\psi)| &\leqslant \|\psi g'(u^0)\| \, \|A\psi\| \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2. \end{aligned}$$

En insérant les estimations ci-dessus dans (4.104), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|A\psi_t\|^2) + \|\psi_t\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}}\psi\|^2 \leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2. \tag{4.108}$$

En intégrant l' inégalité ci-dessus sur $(0, t)$, en passant à la limite quand $t \to \infty$, et grâce à (4.26), on déduit

$$\int_0^\infty [\|A^{\frac{3}{2}}u_t^0(y)\|^2 + \|u_{tt}^0(y)\|^2]dy \leqslant c. \tag{4.109}$$

Nous obtenons l' estimation d' intégrale pour u_{tt}^0. Afin de contrôler les deux termes restants, nous introduisons un problème auxiliaire supplémentaire

$$\begin{cases} \theta_t + A(A\theta + \theta f'(u^0) + f''(u^0)|u_t^0|^2) + \theta g'(u^0) + g''(u^0)|u_t^0|^2 = 0 \\ \\ \theta(0) = -[A(AL_0(u_0)) + f'(u_0)L_0(u_0) + g'(u_0)L_0(u_0)] \end{cases}$$

où $\theta_t = \psi_{tt}$. Le système admet une solution unique dans $C([0, T], D(A^{-1}))$. Multiplions la première équation par $A^{-4}\theta$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|A^{-1}\theta\|^2 + 2\|A^{-2}\theta_t\|^2 = &-2(A^{-1}(f'(u^0)\theta), A^{-2}\theta_t) - 2(A^{-1}(f''(u^0)|u_t^0|^2), A^{-2}\theta_t) \\ &-2(g'(u^0)\theta), A^{-4}\theta_t) - 2(g''(u^0)|u_t^0|^2), A^{-4}\theta_t). \end{aligned} \tag{4.110}$$

Suivant (4.78)-(4.79) et les inégalités de Young, de Poincaré et d' interpolation, nous obtenons

$$\begin{aligned} -2|(A^{-1}(f'(u^0)\theta), A^{-2}\theta_t)| &\leqslant \|A^{-1}(f'(u^0)\theta)\| \, \|A^{-2}\theta_t)\| \\ &\leqslant c\|\theta\| \, \|A^{-2}\theta_t\| \\ &\leqslant c\|\theta\|^2 + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-2|(A^{-1}(f''(u^0)|u_t^0|^2), A^{-2}\theta_t)| &\leqslant \|A^{-1}(f''(u^0)|u_t^0|^2)\|\,\|A^{-2}\theta_t\| \\ &\leqslant c\|A^{-1}u_t^0\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2 \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}u_t^0\|^4 + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2 \\ &\leqslant c\|A^{\frac{3}{2}}u_t^0\|^2 + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2.\end{aligned}$$

En utilisant (4.74), les inégalités de Young et de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned}2|(g'(u^0)\theta), A^{-4}\theta_t)| &\leqslant \|(g'(u^0)\theta)\|\,\|A^{-4}\theta_t\| \\ &\leqslant c\|\theta\|\,\|A^{-2}\theta_t\| \\ &\leqslant c\|\theta\|^2 + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2|(g''(u^0)|u_t^0|^2), A^{-4}\theta_t)| &\leqslant \|g''(u^0)|u_t^0|^2\|\,\|A^{-4}\theta_t\| \\ &\leqslant \\ |u_t^0|^2\|\,\|A^{-2}\theta_t\| & \\ &\leqslant \|u_t^0\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|A^{-4}\theta_t\|^2 \\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}u_t^0\|^4 + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2 \\ &\leqslant c\|A^{\frac{3}{2}}u_t^0\|^2 + \frac{1}{4}\|A^{-2}\theta_t\|^2.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, on peut réécrire (4.107) comme suit

$$\frac{d}{dt}\|A^{-1}\theta\|^2 + \|A^{-2}\theta_t\|^2 \leqslant c(\|A^{\frac{3}{2}}u_t^0\|^2 + \|u_{tt}^0\|^2). \tag{4.111}$$

En intégrant l' estimation ci-dessus sur $(0,t)$, en passant à la limite quand $t \to \infty$, on obtient grâce à (4.106)

$$\int_0^\infty (\|u_{ttt}^0(y)\|^2)dy \leqslant c. \tag{4.112}$$

l' estimation (4.106) conbinée à (4.109) donnent le résultat du lemme.

■

Nous avons besoin aussi les deux lemmes suivants pour finaliser la preuve de **(L3)**.

Lemme 4.6.7. *Le reste $R(t)$é de la décomposition (4.98) satisfait la borne*

$$\|(R(t), R_t(t))\|_{\Psi_1^1} \leqslant c(1 + \frac{\delta}{\tau_D})e^{ct}, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.113}$$

Démonstration du lemme 4.6.7 : Soit

$$\gamma_0(t) = \int_0^1 f'(su + (1-s)u^0(t))ds$$

$$\gamma_1(t) = \int_0^1 g'(su + (1-s)u^0(t))ds.$$

Il faut noter que

$$f(u) - f(u^0) = \tau_D \gamma_0 \widehat{u}(\frac{t}{\tau_D}) + \tau_D \gamma_0 R(t)$$

$$g(u) - g(u^0) = \tau_D \gamma_1 \widehat{u}(\frac{t}{\tau_D}) + \tau_D \gamma_1 R(t).$$

Par définition, $R(t)$ satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} \tau_D R_{tt} + R_t + \delta A R_t + A^2 R = -u^0_{tt} - \frac{\delta}{\tau_D} A u^0_t - A^2 \widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}) - A(\gamma_0 \widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}) \\ \qquad -A\gamma_0 R + \gamma_1 \widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}) + \gamma_1 R, \\ R(0) = (\mathbf{I} + \delta A)^{-1} \widehat{u(0)}, \\ R_t(0) = 0. \end{cases} \tag{4.114}$$

En multipliant la première équation du système par R_t, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) + 2\|R_t\|^2 + 2\delta \|A^{\frac{1}{2}} R_t\|^2 = -2(u^0_{tt}, R_t) - 2\frac{\delta}{\tau_D}(Au^0_t, R_t) \\ +2(A\widehat{u}_t(\frac{\cdot}{\tau_D}), AR) - 2(A(\gamma_0 \widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}), R_t) - 2(A\gamma_0 R, R_t) \\ +2(\gamma_1 \widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}), R_t) + 2(\gamma_1 R, R), \end{aligned} \tag{4.115}$$

où

$$H(t) = \tau_D \|R_t\|^2 + \|AR\|^2 + 2(A(\gamma_0 \widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}), AR),$$

satisfait

$$c_5(\tau_D \|R_t\|^2 + \|AR\|^2) - c \leqslant H(t) \leqslant c_6(\tau_D \|R_t\|^2 + \|AR\|^2) + c, \ c_5 > 0, \ c_6 > 0.$$

Grâce aux inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} -2(u^0_{tt}, R_t) - 2\frac{\delta}{\tau_D}(Au^0_t, R_t) &\leqslant \|u^0_{tt}\| \, \|R_t\| + \frac{\delta}{\tau_D}\|Au^0_t\| \, \|R_t\| \\ &\leqslant c\|u^0_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\|R_t\|^2 + \frac{\delta^2}{\tau_D^2}\|Au^0_t\|^2 \end{aligned}$$

et

$$2(A\widehat{u}_t(\frac{\cdot}{\tau_D}),AR)-2(A(\gamma_0\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}),R_t)\leqslant\|A\widehat{u}_t(\frac{\cdot}{\tau_D})\|\,\|AR\|+\|A(\gamma_0\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D})\,|R_t\|$$
$$\leqslant c\|A\widehat{u}_t(\frac{\cdot}{\tau_D})\|^2+c\|AR\|^2+c\|A\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D})\|^2+\frac{1}{8}|R_t\|^2.$$

De la même manière

$$-2(A\gamma_0R,R_t)+2(\gamma_1\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D}),R_t)+2(\gamma_1R,R)\leqslant\|A\gamma_0R\|\,\|R_t\|+\|\gamma_1\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D})\|\,\|R_t\|+\|\gamma_1R\|\,\|R_\|$$
$$\leqslant c\|AR\|^2+\frac{3}{8}\|R_t\|^2+c\|A\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D})\|^2.$$

En combinant ce qui précède dans (4.112), on trouve

$$\frac{d}{dt}H(t)+\|R_t\|^2+2\delta\|A^{\frac{1}{2}}R_t\|^2\leqslant c\|AR\|^2+c\|A\widehat{u}(\frac{\cdot}{\tau_D})\|^2+c\|A\widehat{u}_t(\frac{\cdot}{\tau_D})\|^2+c\|u^0_{tt}\|^2+\frac{\delta^2}{\tau_D^2}\|Au^0_t\|^2 \tag{4.116}$$

Ainsi, grâce à (4.102) et (4.103), nous concluons que

$$\|AR\|^2+\tau_D\|R_t\|^2+\int_t^{t+1}(\delta\|A^{\frac{1}{2}}R_t\|^2+\|R_t\|^2)dy\leqslant c(1+\frac{\delta^2}{\tau_D^2})e^{ct}\qquad\forall t\geq 0. \tag{4.117}$$

Ce qui prouve la première partie du lemme.

Maintenant, multiplions la première équation du système par $A^{-2}R_{tt}$ et on déduit

$$\frac{d}{dt}Y(t)+2\tau_D\|A^{-1}R_{tt}\|^2=2\|R_t\|^2+(g'(u^0)u^0_t,A^{-2}R_t)+\frac{2\delta}{\tau_D}(u^0_{tt},A^{-1}R_t)$$
$$+\frac{2}{\tau_D}(f'(u)(u_t(t)-u^0_t),A^{-1}R_t)-\frac{2}{\tau_D}(g'(u)(u_t(t)-u^0_t),A^{-2}R_t)$$
$$+\frac{2}{\tau_D}((f'(u)-f'(u^0))u^0_t,A^{-1}R_t)+2(A\widehat{u},A^{-1}R_t)$$
$$-\frac{2}{\tau_D}((g'(u),R_t)+2(A^{-2}u^0_{ttt},R_t), \tag{4.118}$$

où

$$Y(t)=\delta\|A^{-\frac{1}{2}}R_t\|^2+\|A^{-1}R_t\|^2+2(R_t,R)+2(A^{-1}u^0_{tt},A^{-1}R_t)+2(\widehat{u},R_t)$$
$$+\frac{2\delta}{\tau_D}(u^0_t,A^{-1}R_t)+2(\gamma_0\widehat{u},A^{-1}R_t)+2(\gamma_0R,A^{-1}R_t)-2(\gamma_2R,A^{-2}R_t),$$

satisfait

$$\begin{aligned}Y(t)&\geq c_7(\delta\|A^{-\frac{1}{2}}R_t\|^2+\|A^{-1}R_t\|^2+\|AR\|^2)-c(1+\frac{\delta^2}{\tau_D^2}),\quad c_7>0\\ Y(t)&\leq c_8(\delta\|A^{-\frac{1}{2}}R_t\|^2+\|A^{-1}R_t\|^2+\|AR\|^2)+c(1+\frac{\delta^2}{\tau_D^2}),\quad c_8>0.\end{aligned} \tag{4.119}$$

Grâce aux inégalités de Young et de Poincaré, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\tau_D}(f'(u)(u_t(t)-u_t^0),A^{-1}R_t)+\frac{2}{\tau_D}(g'(u)(u_t(t)-u_t^0),A^{-2}R_t)\\&+\frac{2}{\tau_D}((f'(u)-f'(u^0))u_t^0,A^{-1}R_t)+\frac{2}{\tau_D}((g'(u)-g'(u^0))u_t^0,A^{-2}R_t)\\&\leqslant c\|A^{-1}R_t\|^2+c\|AR\|^2+c\|R_t\|^2+c\|A\widehat{u}\|^2+c\|\widehat{u}_t\|^2.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (4.115), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}Y(t)+2\tau_D\|A^{-1}R_{tt}\|^2\leqslant c\|A^{-1}R_t\|^2+c\|AR\|^2+c\|R_t\|^2+c\|A\widehat{u}\|^2+c\|\widehat{u}_t\|^2. \tag{4.120}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous concluons que

$$\delta\|A^{-\frac{1}{2}}R_t\|^2+\|A^{-1}R_t\|^2\leqslant c(1+\frac{\delta^2}{\tau_D^2})e^{ct}. \tag{4.121}$$

Les estimations (4.117) et (4.121) donnent le résultat du lemme.

■

Lemme 4.6.8. *Il y a*

$$\|S^1_{\tau_D,\delta}(t)z_0-S^1_{0,0}(t)\Pi z_0\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}\leqslant c(\delta+\tau_D)e^{ct}+ce^{-\frac{t}{\tau_D}}. \tag{4.122}$$

Démonstration : Du point de vue de la décomposition (4.98), nous avons

$$\|S^1_{\tau_D,\delta}(t)z_0-S^1_{0,0}(t)\Pi z_0\|_{\mathbf{V}_1^1(\tau_D,\delta)}=\tau_D\|(\widehat{u}+R,\widehat{u}_t+R_t)\|.$$

Grâce à (4.99), (4.101), (4.102) et au lemme 4.6.7, nous obtenons

$$\|S^1_{\tau_D,\delta}(t)z_0-S^1_{0,0}(t)\Pi z_0\|_{\mathbf{V}_1^1(\tau_D,\delta)}\leqslant c(\delta+\tau_D)e^{ct}+ce^{-\frac{t}{\tau_D}}. \tag{4.123}$$

Ce qui implique la preuve du lemme.

■

La démonstration de **(L3)** découle directement des trois lemmes précédents.

Démonstration de (L4) : Soit $z_0\in\mathbf{B}(\tau_D,\delta)$ et $\overline{z}_0\in\mathbf{B}(0,0)$ fixé. Puisque $\overline{z}_0=\Pi$ on a

$$\begin{aligned}\|S^1_{\tau_D,\delta}(t)z_0-S^1_{0,0}(t)\Pi\overline{z}_0\|_{\Psi_1^1(0,0)}&\leqslant\|S^1_{\tau_D,\delta}(t)z_0-S^1_{0,0}(t)\Pi z_0\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}\\&+\|S^1_{0,0}(t)\Pi z_0-S^1_{0,0}(t)\Pi\overline{z}_0\|_{\Psi_1^1(0,0)}\end{aligned}$$

Le lemme 4.6.2 et 4.6.8 donnent le résultat de **(L4)**.

Démonstration de (L5) : Pour tout $z_1,z_2\in\mathbf{B}$ et $t_1,t_2\in[0,t^*]$ on a

$$\begin{aligned}\|S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_1-S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_2\|_{\mathbf{V}_1^1(\tau_D,\delta)}&\leqslant\|S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_1-S^1_{\tau_D,\delta}(t_2)z_2\|_{\mathbf{V}_1^1(\tau_D,\delta)}\\&+\|S^1_{\tau_D,\delta}(t_2)z_2-S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_2\|_{\mathbf{V}_1^1(\tau_D,\delta)}.\end{aligned} \tag{4.124}$$

En prenant $t_1=t_2$ et grâce au lemme 4.4.2, on obtient

$$\|S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_1-S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}\leqslant ce^{ct^*}\|z_1-z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}, \tag{4.125}$$

il reste à prouver la deuxième partie de **(L5)** pour $t_1\neq t_2$. La preuve de la deuxième partie découle du lemme suivant.

Lemme 4.6.9. *Pour τ_D et δ satisfaisant (4.4) il existe $Q_{\tau_D,\delta}$ telle que*

$$\sup_{z_0\in\mathcal{B}}\sup_{t\in[0,t^*]}\|(u_t(t),u_{tt})\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}\leqslant Q_{\tau_D,\delta}. \tag{4.126}$$

Démonstration : Multiplions (4.89) par $v_t(t)+\frac{1}{8}A^{-2}v_{tt}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t)+\frac{\tau_D}{2}\|A^{-1}v_{tt}\|^2+\frac{7}{4}\|v_t(t)\|^2+2\delta\|A^{\frac{1}{2}}v_t(t)\|^2=-2(A(f'(u)v),v_t(t))\\ +\frac{1}{4}(A(f'(u)v)_t,A^{-2}v_t(t))-2(g'(u)v,v_t(t))+\frac{1}{4}(g'(u)v,A^{-2}v_{tt}).\end{aligned} \tag{4.127}$$

Par (4.79) et aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}-2(A(f'(u)v),v_t(t))+\frac{1}{4}(A(f'(u)v)_t,A^{-2}v_t(t))&\leqslant\|A(f'(u)v)\|\,\|v_t(t)\|\\ &\quad+\|(A(f'(u)v)_t\|\,\|A^{-2}v_t(t)\|\\ &\leqslant c\|Av\|^2+c\|v\|^4_{L^4(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2\\ &\leqslant c\|v\|^2\|Av\|^2+c\|Av\|^2+\frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2\\ &\leqslant c\|Av\|^2+\frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2.\end{aligned}$$

En exploitant (4.74), les inégalités de Young et de Poincaré, nous trouvons

$$\begin{aligned}2(g'(u)v,v_t(t))+\frac{1}{4}(g'(u)v,A^{-2}v_{tt})&\leqslant\|g'(u)v\|\,\|v_t(t)\|+\|g'(u)v\|\,\|A^{-2}v_{tt}\|\\ &\leqslant\|v\|\,\|v_t(t)\|+\|v\|\,\|A^{-1}v_{tt}\|\\ &\leqslant\frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2+\frac{\tau_D}{4}\|A^{-1}v_{tt}\|^2+c.\end{aligned}$$

Ainsi, (4.124) devient

$$\frac{d}{dt}H(t)+\|v_t(t)\|^2+2\delta\|A^{\frac{1}{2}}v_t(t)\|^2+\frac{\tau_D}{4}\|A^{-1}v_{tt}\|^2\leqslant c(1+H). \tag{4.128}$$

En intégrant l' estimation (4.128) sur $(0,t)$, on obtient le résultat du lemme.

■

En raison du lemme 4.6.9, nous concluons

$$\begin{aligned}\|S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_1-S^1_{\tau_D,\delta}(t_1)z_2\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}&\leqslant\sup_{z_0\in\mathcal{B}}\sup_{t\in[0,t^*]}\|(u_t(t),u_{tt})\|_{\Psi_1^1(\tau_D,\delta)}|t_1-t_2|\\ &\leqslant Q_{\tau_D,\delta}|t_1-t_2|.\end{aligned}$$

d' où la démonstration de **(L5)**.

■

4.7 Résultats Numériques

Pour les simulations numériques du modèle, nous réécrivons (4.1) sous la forme équivalente suivante (voir [44, 41]) :

$$(S)\begin{cases} \tau_D u_{tt} + u_t(t) - \Delta\mu + g(u) = 0, \\ \\ \mu = -\Delta u + f(u) + \delta u_t(t), \end{cases}$$

où $\tau_D,\ \delta \geqslant 0$ sont les paramètres de relaxation et de viscosité.
Nous considérons une approche par éléments finis P_1 et une discrétisation temporelle d' Euler semi-implicite. Soit T_h la triangulation de $\overline{\Omega}$ et $V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}); v_h = 0$ sur $\partial\overline{\Omega},\ v_h|_K \in P_1,\ \forall K \subset T_h\}$ l' espace des éléments finis. Nous désignons par $\Delta t > 0$ le pas de temps. La formulation variationnelle du modèle semi-discrétisé est la suivante.

Soit $u^0, u^1 \in V_h$ et pour $n = 1, 2, \cdots$, trouvons $u^{n+1}, \mu^{n+1} \in V_h$ tels que

$$(\tau_D \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \chi) + (\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \chi) + (\nabla\mu^{n+1}, \nabla\chi) + (g(u^n), \chi) = 0, \tag{4.129}$$

$$(\mu^{n+1}, \psi) = (\nabla u^{n+1}, \nabla\psi) + (\delta\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \psi) - (f(u^n), \psi), \tag{4.130}$$

pour tout $\chi, \psi \in V_h$ (noter que μ^0 et μ^1 ne sont pas nécessaires).
Notre schéma est linéaire. Nous allons donner une condition sur le pas de tempsé Δt qui est suffisante pour la stabilité du schéma lorsque $g \equiv 0$.

4.7.1 Stabilité par la méthode de l' énergie dans le cas $g \equiv 0$.

Dans cette section, nous supposons que $g \equiv 0$. Le problème (4.1)-(4.3) possède alors une fonctionnelle d'énergie. En effet, en appliquant $(-\Delta)^{-1}$ à (4.1) et en prenant le produit scalaire dans L^2 avec $u_t(t)$, on voit que

$$\frac{\tau_D}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \|u_t(t)\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \frac{d}{dt}F(u) + \delta\|u_t(t)\|^2 = 0, \tag{4.131}$$

où $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. Nous avons donc

$$\frac{d}{dt}E(u, u_t(t)) + \|u_t(t)\|_{-1}^2 + \delta\|u_t(t)\|^2 = 0,$$

où

$$E(u, v) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + (F(u), 1) + \frac{\tau_D}{2}\|v\|_{-1}^2.$$

Si Δt est suffisamment petit, alors le schéma (4.126)-(4.127) possède également une fonctionnelle de Lyapunov. Par souci de simplicité, nous ne considérons ici que la version semi-discrète en temps de (4.126)-(4.127), qui se lit comme suit : soit $u^0, u^1 \in H_0^1(\Omega) = V$ et pour $n = 1, 2, \cdots$ trouver $u^{n+1}, \mu^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\tau_D\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \Delta\mu^{n+1} = 0, \tag{4.132}$$

$$\mu^{n+1} = -\Delta u^{n+1} + \delta \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + f(u^n), \tag{4.133}$$

Nous supposons que f satisfait aux hypothèses (4.5)-(4.7) et que

$$f \text{ est continûment Lipschitz sur } \mathbb{R}. \tag{4.134}$$

Soit (u^n, μ^n) une suite d'éléments dans $V \times V$ qui satisfait le schéma (4.129)-(4.130), nous définissons la dérivée discrète suivante

$$v^{n+1} := \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \quad n \geqslant 0 \tag{4.135}$$

et l' énergie discrète

$$E^n := \frac{\tau_D}{2}\|v^n\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}\|u^n\|_1^2 + (F(u^n), 1), \quad n \geqslant 0. \tag{4.136}$$

Nous allons énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.7.1. *Si* $\Delta t \leqslant \max(\frac{2\delta}{L}, \frac{8}{L^2})$, *alors pour tout* $n \geq 1$ *nous avons*

$$E^{n+1} \leqslant E^n,$$

où $L = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f'(s)|$.

Démonstration : Multiplions (4.132) par $(-\Delta)^{-1}(u^{n+1} - u^n)$; on a

$$\frac{\tau_D}{\Delta t^2}(\delta u^{n+1} - \delta u^n, u^{n+1} - u^n)_{-1} + \frac{1}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2 + (\mu^{n+1}, u^{n+1} - u^n) = 0 \tag{4.137}$$

où $\delta u^n = u^n - u^{n-1}$.

On multiplie (4.133) par $(u^{n+1} - u^n)$ et on déduit

$$\frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|_1^2 - \|u^n\|_1^2 + \|u^{n+1} - u^n\|_1^2) + \frac{\delta}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|^2 - (\mu^{n+1}, u^{n+1} - u^n) + (f(u^n), u^{n+1} - u^n) = 0 \tag{4.138}$$

où

$$(\nabla u^{n+1}, \nabla(u^{n+1} - u^n)) = \frac{1}{2}\|u^{n+1}\|_1^2 - \frac{1}{2}\|u^n\|_1^2 + \frac{1}{2}\|u^{n+1} - u^n\|_1^2.$$

En faisant la somme entre (4.134) et (4.135), nous déduisons

$$\frac{\tau_D}{2\Delta t^2}(\|\delta u^{n+1} - \delta u^n\|_{-1}^2 - \|\delta u^n\|_{-1}^2 + \|\delta u^{n+1}\|_{-1}^2) + \frac{1}{2}\|u^{n+1}\|_1^2 - \frac{1}{2}\|u^n\|_1^2 + \frac{1}{2}\|u^{n+1} - u^n\|_1^2 + \frac{\delta}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|^2 + \frac{1}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2 = -(f(u^n), u^{n+1} - u^n). \tag{4.139}$$

d' après l' inégalité de Taylor, on a

$$(F(u^{n+1}) - F(u^n), 1) = (f(u^n), u^{n+1} - u^n) + \frac{1}{2}(f'(\xi_{u^{n+1},u^n})(u^{n+1} - u^n)^2, 1),$$

pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi,

$$\frac{\tau_D}{2\Delta t^2}\|\delta u^{n+1} - \delta u^n\|_{-1}^2 + E^{n+1} - E^n + \frac{1}{2}\|u^{n+1} - u^n\|_1^2 + \frac{\delta}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|^2 + \frac{1}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2 \leqslant \frac{L}{2}\|u^{n+1} - u^n\|^2, \quad (4.140)$$

où $L = \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.
Par conséquent, si $\frac{\delta}{\Delta t} \geq \frac{L}{2}$, on conclut que $E^{n+1} \leqslant E^n$.

Grâce aux inégalités d' interpolation et de Young, nous déduisons également de (4.137) que

$$\frac{\tau_D}{2\Delta t^2}(\|\delta u^{n+1} - \delta u^n\|_{-1}^2) + E(u^{n+1}) + \frac{1}{2}\|u^{n+1} - u^n\|_1^2 + \frac{\delta}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|^2 - E(u^n) + \frac{1}{\Delta t}\|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u^{n+1} - u^n\|_1^2 + \frac{L^2}{8}\|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2. \quad (4.141)$$

Cette fois, si $\frac{1}{\Delta t} \geq \frac{L^2}{8}$, $E^{n+1} \leqslant E^n$. On obtient ainsi le résultat de la proposition.

■

Remarques 4.7.2. *Dans le cas $\delta = 0$, un résultat similaire a été obtenu dans [53] pour des schémas étroitement liés. En utilisant la fonctionnelle de Lyapunov E^n, il est possible de prouver à l' aide de l' estimation d' énergie (4.137) que la suite (u^n, μ^n) converge vers un état stable lorsque $n \to \infty$ (voir [3] et les références qui y figurent). Lorsque $g \neq 0$, ce résultat semble hors de portée, car il n'y a pas de fonction de Lyapunov associée au système. Les simulations numériques de la section suivante indiquent que c'est toujours le cas.*

4.7.2 Simulations en dimension deux de l' espace

Les simulations numériques sont réalisées avec le logiciel Freefem++ [46]. Dans les résultats numériques présentés ci-dessous, le domaine Ω est l'ellipse $\{t \in [0, 2\pi];\ x = 1.3\cos(t),\ y = \sin(t)\}$. La triangulation est obtenue en divisant Ω en 6 042 triangles et 3 122 sommets. Nous prenons ici $f(s) = \frac{1}{\varepsilon^2}(s^3 - s)$ et $g(s) = \frac{k(s+1)}{2k' + |s+1|}$, où $\varepsilon = 0.1, k = 12$ et $k' = 1$.

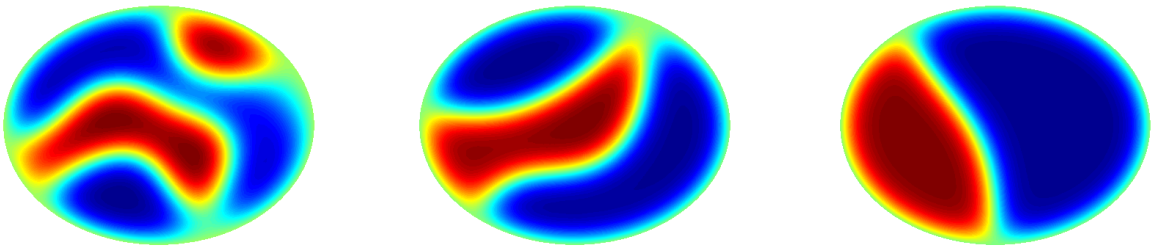

FIGURE 4.7.1. *Évolution dans le temps de la solution à $t = 4.10^{-3}$ (gauche), $t = 10^{-2}$ (milieu) et $t = 29.10^{-3}$ (droite) pour $\tau_D = \delta = 0$ et $k = 12$. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-4}$.*

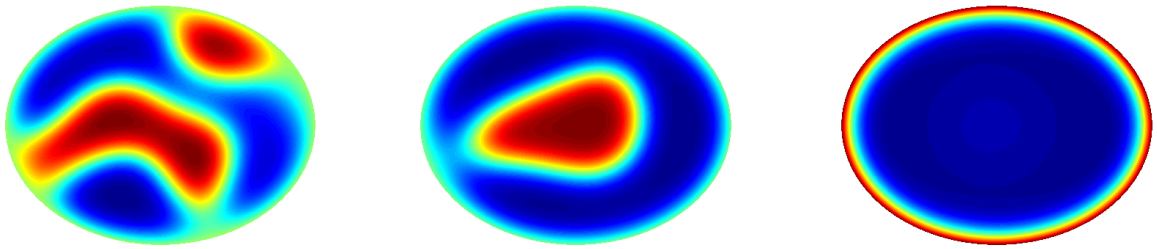

FIGURE 4.7.2. *Évolution dans le temps de la solution à* $t = 4.10^{-3}$ *(gauche),* $t = 10^{-2}$ *(milieu) et* $t = 29.10^{-3}$ *(droite) pour* $\tau_D = 0,\ \delta = 0.02$ *et* $k = 12$. *Le pas de temps est* $\Delta t = 10^{-4}$.

Dans les FIGURES 4.7.1 – 4.7.3, nous présentons l' évolution de la solution pour différents temps sous l' influence des paramètres τ_D, δ et k. En général, la couleur bleu représente la partie négative de la solution et la couleur rouge la partie positive.

Dans les FIGURES 4.7.4 – 4.7.6, nous montrons l' influence des paramètres τ_D, δ et k. Nous prenons la condition initiale aléatoire dans l' intervalle $[-0.03, 0.03]$ sur un maillage grossier. Dans les trois cas, la solution u du (4.1)-(4.3) évolue de u_0 vers un état stable, qui prend des valeurs proches de ± 1.

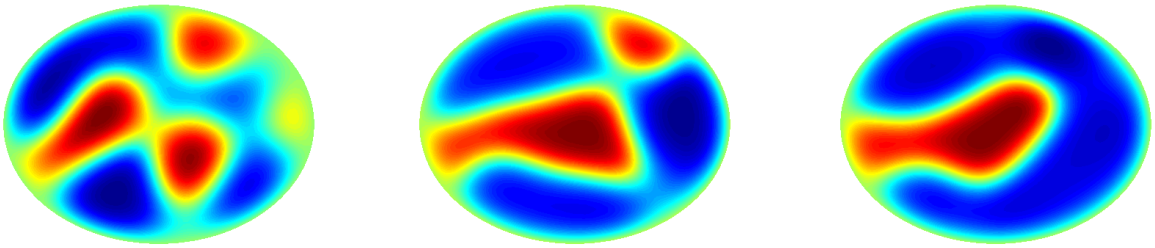

FIGURE 4.7.3. *évolution dans le temps de la solution à* $t = 17.10^{-3}$ *(gauche),* $t = 23.10^{-3}$ *(milieu) et* $t = 29.10^{-3}$ *(droite) pour* $\tau_D = 0.01,\ \delta = 0.02$ *et* $k = 12$. *Le pas de temps est* $\Delta t = 10^{-4}$.

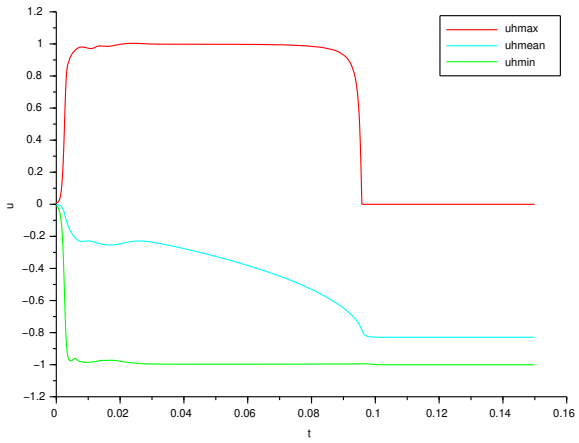

FIGURE 4.7.4. *Évolution de* u_{max}, u_{min} *et* $u_{moyenne}$ *pour 1500 itérations. Dans ce cas, nous prenons* $k = 12$ *et* $\tau_D = \delta = 0$, *c'est-à-dire l' équation classique de Cahn-Hilliard avec le terme de symport. Le pas de temps est* $\Delta t = 10^{-4}$

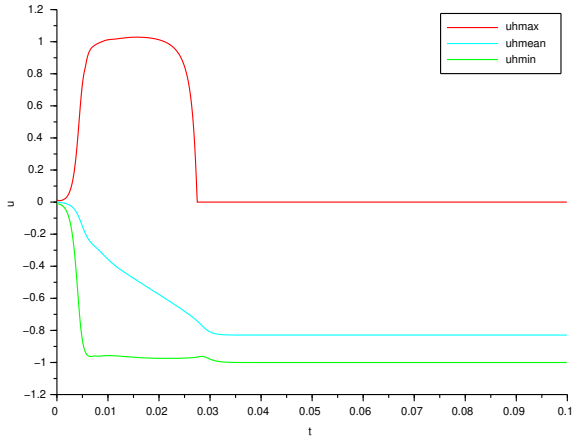

FIGURE 4.7.5. *Évolution de u_{max}, u_{min} et $u_{moyenne}$ pour 1000 itérations. Dans ce cas, nous prenons $k = 12$, $\tau_D = 0$ et $\delta = 0.02$, c'est-à-dire l' équation de Cahn-Hilliard visqueux avec le terme de symport. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-4}$*

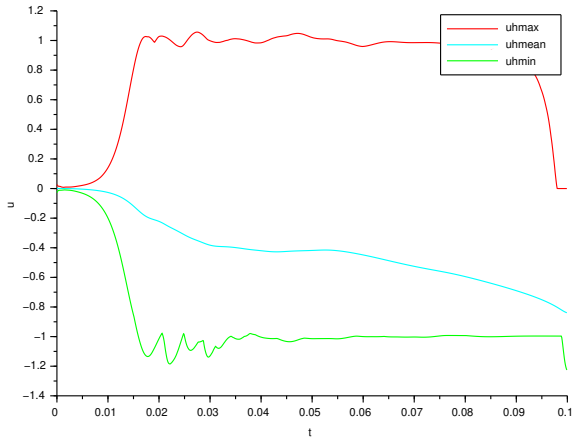

FIGURE 4.7.6. *Évolution de u_{max}, u_{min} et $u_{moyenne}$ pour 1000 itérations. Dans ce cas, nous prenons $k = 12$, $\tau_D = 0.01$ et $\delta = 0.02$, c'est-à-dire la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard visqueux avec le terme de symport. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-4}$*

Chapitre 5

Modèle de la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération

Résumé : On s' intéresse dans ce chapitre au comportement asymptotique du modèle de la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard unidimensionnel avec le terme de prolifération. On associe ce modèle à des conditions aux limites de Dirichlet. Nous montrons d' abord que le modèle est bien posé, c'est-à-dire l' existence, l' unicité et la régularité de la solution. Ensuit l' existence d' un système dynamique dépendant du paramètre de relaxation qui nous a permis de montrer l' existence de l' attracteur global et une famille d' attracteurs exponentiels. En fin, nous donnons des simulations numériques qui confirment les résultats théoriques.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié,
▷ Dieunel DOR. On the relaxation of the Cahn-Hilliard equation with a mass source. Asymptot. Anal. , 135 (1), 25–53., 2023.

Contents

5.1 Présentation du modèle 90
5.1.1 Hypothèses 90
5.2 Notations 90
5.3 Estimations a priori 91
5.4 Existence et unicité 93
5.5 Dissipativité 96
5.6 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur 101
5.7 Existence d' attracteurs exponentiels 105
5.8 Simulations Numériques 112
5.8.1 Simulations numériques dans une dimension spatiale 112

5.1 Présentation du modèle

Le modèle se présente comme suit :

$$\tau_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta f(u) + g(u) = 0, \text{ dans } \Omega \times (0,\infty), \tag{5.1}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{5.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1, \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{5.3}$$

où u correspond à une concentration, $\tau_D \geqslant 0$ représente le paramètre de la relaxation, $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier et f est le potentiel polynomial (typiquement $f(s) = s^3 - s$).

5.1.1 Hypothèses

Le potentiel f vérifie :

$$f \in C^2(\mathbb{R}), \ \ f(0) = 0, \tag{5.4}$$

$$f(s)s \geq F(s) - c_1 \geq c_2, \ \ c_1, \ c_2 \geq 0, \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

$$F(s) \geq c_3 s^{2k} - c_4, \ \ c_3 > 0, \ c_4 \geq 0, \ s \in \mathbb{R}, \ k > 0, \tag{5.6}$$

$$f'(s) \geq -c_5, \ \ c_5 \geq 0, \ s \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

où $F(s) = \int_0^s f(t)dt \ \ s \in \mathbb{R}$.

Le terme de prolifération g satisfait :

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \tag{5.8}$$

$$|g(s)| \leqslant c_6 s^k + c_7, \quad c_6 > 0, \ c_7 \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad k > 0. \tag{5.9}$$

5.2 Notations

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$H = L^2(\Omega), \qquad V = H_0^1(\Omega), \qquad W = H^2(\Omega),$$

et on note V' l' espace de dual de V. Nous considérons le produit d' espaces de Hilbert

$$\Psi^s_{\tau_D} = D(A^{\frac{s+1}{2}}) \times D(A^{\frac{s-1}{2}})$$

qui correspond à l' espace de phases de notre modèle. Le symbole $< ., . >$ représente le produit de dualité entre V et V'. On note ensuite par $\| \ . \ \|$ la norme usuelle dans H (avec $((.,.))$ le produit scalaire associé) et $\| \ . \ \|_{-1} = \|(-\Delta). \|$, où $-\Delta$ est l' opérateur associé aux conditions limites de Dirichlet. Plus généralement, $\| \ . \ \|_X$ est la norme dans l' espace de Banach X. On pose :

$$A = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \Omega =]0, \ell[\subset \mathbb{R}.$$

On notera dans la suite c, c' et c'' des constantes positives qui pourront changer d' une ligne à l' autre et parfois dans la même ligne.

5.3 Estimations a priori

Dans cette section, nous établissons des estimations a priori du système (5.1)-(5.3) qui seront utilisées dans la suite pour montrer l' existence et la régularité de la solution.

On réécrit (5.1) sous la forme équivalente

$$\tau_D \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + A^2u + Af(u) + g(u) = 0. \tag{5.10}$$

Multiplions (5.10) par $\alpha A^{-1}u + A^{-1}$ et intégrons sur Ω , on a

$$\frac{d}{dt}Y(t) + (2 - 2\alpha\tau_D)\|u_t\|_{-1}^2 + 2\alpha\|\nabla u\|^2 + 2\alpha\int_\Omega f(u)udx + 2\alpha(g(u), A^{-1}u) \\ +2(g(u), A^{-1}u_t) = 0, \tag{5.11}$$

où

$$Y(t) = 2\alpha\tau_D(u_t, u)_{-1} + \alpha\|u\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2 + \tau_D\|u_t\|_{-1}^2 + 2\int_\Omega F(u)dx. \tag{5.12}$$

Grâce à (5.5) et aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young (avec $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$) nous donne

$$\begin{aligned}\alpha\tau_D|(u_t, u)_{-1}| &\leqslant \alpha\tau_D\|u_t(t)\|_{-1}\|u(t)\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{\tau_D}{4}\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \frac{\alpha}{2}\|u(t)\|_{-1}^2\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega F(u)dx \geqslant c_2\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k} - c_3(|\Omega|).$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (**??**), nous déduisons que

$$\begin{aligned}Y(t) \geq c_7(\tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \|u(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k}) - c_3(|\Omega|), \ \ c_7 > 0 \\ Y(t) \leqslant c_8(\tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2 + \|u(t)\|_{-1}^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k})+\end{aligned} \tag{5.13}$$

Par (5.5) et (5.6), on a

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega f(u)udx &\geqslant \alpha c_9\int_\Omega F(u)dx - \alpha c_{10}\int_\Omega dx \\ &\geqslant \alpha c_{11}\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k} - \alpha c_{12}(|\Omega|), \qquad c_{11}, c_9 > 0.\end{aligned}$$

En utilisant (5.9), les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha|(g(u), A^{-1}u)| &\leqslant \alpha|g(u)|\,\|A^{-1}u\| \\ &\leqslant \alpha c_{13}\|u^k(t)\|\,\|u(t)\|_{-1} + \alpha c_{14}\|u(t)\|_{-1} \\ &\leqslant \alpha c_{13}\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k} + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{-1}^2 + \alpha c_{15}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(g(u), A^{-1}u_t)| &\leqslant |g(u)|\,\|A^{-1}u_t\| \\ &\leqslant c_{16}\|u^k(t)\|\,\|u_t(t)\|_{-1} + c_{17}\|u_t\|_{-1} \\ &\leqslant c_{16}\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k} + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{-1}^2 + c_{18}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous pouvons réécrire (5.11) comme suit

$$\frac{d}{dt}Y(t)+\kappa Y(t)\leqslant \alpha c_{19},\quad \kappa>0,\quad c_{19}\geq 0. \tag{5.14}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (5.14) (voir, par exemple, [77]), nous donne

$$\tau_D\|u_t(t)\|_{-1}^2+\|u(t)\|_{-1}^2+\|\nabla u(t)\|^2+\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k}\leqslant Y(0)\exp\left(-\kappa t\right)+c_{20},\ \kappa>0. \tag{5.15}$$

On multiplie (5.10) par $\beta u(t)+u_t(t)$, avec $\beta\in(0,\frac{1}{2\tau_D}$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1(t)+(2-2\beta\tau_D)\|u_t\|^2+2\beta((\nabla u)f'(u),\nabla u)+2((\nabla u)f'(u),\nabla u_t))\\ +2\beta\|Au\|^2+2\beta(g(u),u)+2(g(u),u_t)=0,\end{aligned} \tag{5.16}$$

où

$$Y_1(t)=2\beta(u,u_t)+\beta\|u\|^2+\|Au\|^2+\tau_D\|u_t\|^2,$$

satisfait,

$$c_{21}(\|u\|^2+\|Au\|^2+\tau_D\|u_t\|^2)\leqslant Y_1(t)\leqslant c_{22}(\|u\|^2+\|Au\|^2+\tau_D\|u_t\|^2).$$

En raison de (5.4) et (5.7), de l' inégalité de Young et de $H^1(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}|(f'(u)\nabla u,\nabla u_t)|&\leqslant c_{23}(1+\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2)\|\nabla u(t)\|\,\|\nabla u_t(t)\|\\ &\leqslant c_{24}(1+\|\nabla u(t)\|^2)\|\nabla u(t)\|\,\|\nabla u_t(t)\|\\ &\leqslant c_{24}\|\nabla u(t)\|^2+c_{25}\|\nabla u(t)\|_{L^6(\Omega)}^6+\frac{1}{4}\|\nabla u_t(t)\|^2\end{aligned}$$

et

$$\beta(f'(u)\nabla u,\nabla u)\geqslant -\beta c_{24}\|\nabla u(t)\|^2.$$

Grâce à (5.9), aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\beta|(g(u),u)|&\leqslant \beta|g(u)|\,\|u(t)\|\\ &\leqslant \beta c_{27}\|u^k(t)\|\,\|\nabla u(t)\|+\beta c_{27}\|\nabla u(t)\|\\ &\leqslant \beta c_{28}\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k}+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\alpha c_{29}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(g(u),u_t)|&\leqslant |g(u)|\,\|u_t(t)\|\\ &\leqslant c_{30}\|u^k(t)\|\,\|u_t(t)\|+c_{31}\|u_t(t)\|\\ &\leqslant c_{31}\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k}+\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+c_{32}.\end{aligned}$$

En insérant les estimations ci-dessus dans (5.16), on déduit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y_1(t)+(1-2\beta\tau_D)\|u_t(t)\|^2+2\beta\|Au(t)\|^2+c_{34}(\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|_{L^6(\Omega)}^6)\\ +c_{25}\|\nabla u(t)\|^2\leq \beta c_{28}\|u(t)\|_{L^{2k}(\Omega)}^{2k}+\beta c_{35}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Par (5.15) et $1-2\beta\tau_D>0$, on conclut

$$\frac{d}{dt}Y_1(t)+cY_1(t)+c_{36}(\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^6_{L^6(\Omega)}+\|\nabla u_t(t)\|^2)\leqslant c_{37},\quad c>0,\ \ c_{36}>0. \tag{5.18}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (5.18), on trouve

$$Y_1(t)+\int_0^T(\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^6_{L^6(\Omega)}+\|\nabla u_t(t)\|^2)ds\leqslant Y_1(0)\exp(-ct)+c_{38},\quad t\geq 0. \tag{5.19}$$

Les estimations (5.19) et (5.15), nous ont permis de conclure que

$$u(t)\in L^\infty(0,T;W\cap V)\cap L^2(0,T,V), \tag{5.20}$$
$$u_t(t)\in L^\infty(0,T;H\cap V')\cap L^2(0,T,V) \tag{5.21}$$
$$u(t)\in L^\infty(0,T;L^{2k}(\Omega)). \tag{5.22}$$

5.4 Existence et unicité

Dans cette section, nous établissons l' existence et l' unicité de la solution du système. Pour ce faire, nous utilisons les estimations obtenues dans la section précédente. On annonce le résultat suivant.

Théorème 5.4.1. *Soit $(u_0,u_1)\in\Psi^0_{\tau_D}$. On suppose que (5.4)-(5.7) et (5.9) sont vérifiées. Alors, le système (5.1)-(5.3) possède une solution (u,u_t) telle que*

$$(u,u_t)\in L^\infty(\mathbb{R}^+,V\times V')\cap L^2(0,T;V\times H)\quad \textit{pour tout}\quad T>0.$$

Démonstration :
La preuve de l' existence de la solution est basée sur la méthode standard de Galerkin.
On considère l' operateur $-\Delta$ associé à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et une suite de valeurs propres $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$. Soit $(\omega_i)_{i=1,\cdots,n}$ les vecteurs propres correspondants qui forment une base orthonormée dans H. Pour $n\in\mathbb{N}$, on cherche une fonction approchée $(u_n,\frac{du_n}{dt})$ de la forme

$$u_n=\sum_{i=1}^n u_{i,n}\omega_i$$

vérifiant

$$\tau_D A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2}+A^{-1}\frac{du_n}{dt}+Au_n+f(u_n)+A^{-1}g(u_n)=0 \tag{5.23}$$

$$u_n(0)=u_{0,n}\ \ \text{et}\ \ \frac{du_n(0)}{dt}=u_{1,n}, \tag{5.24}$$

est équivalent a

$$(\tau_D A^{-1}\frac{d^2u_n}{dt^2},\omega_i)+(A^{-1}\frac{du_n}{dt},\omega_i)+(Au_n,\omega_i)+(f(u_n),\omega_i)+(A^{-1}g(u_n),\omega_i)=0, \tag{5.25}$$

associé aux conditions (5.24) et ω_i suffisamment régulier.
La preuve de l' existence d' une solution locale en temps du problème approché est standard. Résoudre (5.25) revient à trouver les $u_{i,n}$, $\frac{du_{i,n}}{dt}$ tel que u_n, $\frac{du_n}{dt}$ vérifient (5.23)-(5.24). En remplaçant

u_n par sa valeur dans (5.25), on trouve une équation différentielle ordinaire du second ordre que l' on résout grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. En remplaçant à nouveau u et u_t par u_n et $\frac{du_n}{dt}$ dans les estimations (5.18) et (5.15), on obtient respectivement,

$$Y_n(t) \leqslant e^{-\kappa t} Y_n(0) + c'', \quad \kappa > 0, \quad c'' \geqslant 0, \quad t \geqslant 0 \tag{5.26}$$

et

$$Y_{n,1}(t) + \int_0^T (\|\nabla u_n(t)\|^2 + \|\nabla u_n(t)\|^6_{L^6(\Omega)} + \|\nabla \frac{du_n}{dt}\|^2) ds \leqslant e^{-ct} Y_{n,1}(0) + c_{15}, \tag{5.27}$$

où $Y_n, Y_{n,1}$ satisfont

$$\begin{aligned} Y_n(t) &\geq c_7(\tau_D \|\frac{du_n(t)}{dt}\|^2_{-1} + \|u_n(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u_n(t)\|^2 + \|u_n(t)\|^{2k}_{L^{2k}(\Omega)}) - c_3(|\Omega|) \\ Y_n(t) &\leqslant c_8(\tau_D \|\frac{du_n(t)}{dt}\|^2_{-1} + \|u_n(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u_n(t)\|^2 + \|u_n(t)\|^{2k}_{L^{2k}(\Omega)}) + c_3(|\Omega|) \end{aligned} \tag{5.28}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{n,1} &\geq c_{21}(\|u_n(t)\|^2 + \|Au_n(t)\|^2 + \tau_D \|\frac{du_n}{dt}\|^2) \\ Y_{n,1} &\leq c_{22}(\|u_n(t)\|^2 + \|Au_n(t)\|^2 + \tau_D \|\frac{du_n}{dt}\|^2). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Nous déduisons de (5.26)-(5.27) que

$$\begin{aligned} &u_n(t) \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1_0(\Omega)) \\ &\tfrac{du_n}{dt}(t) \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l' existence grâce aux résultats de compacité d' Aubin-Lions (voir, [69]).

■

Théorème 5.4.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.1 et pour $k \geq 1$, la solution (u, u_t) du système est unique.*

Démonstration :
Considérons $(u_1, \frac{du_1}{dt})$ et $(u_2, \frac{du_2}{dt})$é deux solutions du système (5.1)-(5.3) avec les données initiales respectives $(u_{0,1}, u_{1,1})$ et $(u_{0,2}, u_{1,2})$ dans $\Psi^0_{\tau_D}$. On pose :

$$(u, u_t) = (u_1 - u_2, \tfrac{du_1}{dt} - \tfrac{du_2}{dt})$$

Le système (5.1)-(5.3) satisfait

$$\tau_D u_{tt} + u_t + A^2 u + A(f(u_1) - f(u_2)) + (g(u_1) - g(u_2)) = 0, \tag{5.30}$$

$$u(0) = u_{0,1} - u_{0,2} \qquad \text{et} \qquad u_t(0) = u_{1,1} - u_{1,2}. \tag{5.31}$$

Multiplions (5.30) par $\lambda A^{-1}u + A^{-1}u_t$, avec $\lambda \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma(t) + (2 - 2\lambda\tau_D)\|u_t\|^2_{-1} + 2\lambda\|\nabla u\|^2 + 2(f(u_1) - f(u_2), \lambda u + u_t) \\ +2(g(u_1) - g(u_2), \lambda A^{-1}u + A^{-1}u_t) = 0, \end{aligned} \tag{5.32}$$

où

$$\Gamma(t) = 2\lambda\tau_D(u_t,u)_{-1} + \lambda\|u\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2 + \tau_D\|u_t\|^2_{-1}.$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on déduit

$$c_{39}(\|u\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2 + \tau_D\|u_t\|^2_{-1}) \leqslant \Gamma(t) \leqslant c_{40}(\|u\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2 + \tau_D\|u_t\|^2_{-1}), \quad c_{39}\,,\, c_{40} > 0.$$

De (5.4)-(5.5), on déduit

$$\begin{aligned}\lambda|(f(u_1)-f(u_2),u)| &= \lambda|(u\int_0^1 f'(su_1+(1-s)u_2)ds,u)|\\ &\geqslant -\lambda c_4\|u\|^2\\ &\geqslant -\lambda c_{41}\|u\|^2_{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|\nabla(f(u_1)-f(u_2))| &\leqslant \|\nabla(u\int_0^1 f'(su_1+(1-s)u_2)ds)\|\\ &\leqslant \|\nabla u(\int_0^1 f'(su_1+(1-s)u_2)ds)\|\\ &+ \|u(\int_0^1 f''(su_1+(1-s)u_2)(s\nabla u_1+(1-s)\nabla u_2)ds)\|\\ &\leqslant Q(\|u_{0,1}\|_{H^1(\Omega)},\|u_{0,2}\|_{H^1(\Omega)})(\|\nabla u\|+\|u|\nabla u_1|\|+\|u|\nabla u_2|\|)\\ &\leqslant Q(\|u_{0,1}\|_{H^1(\Omega)},\|u_{0,2}\|_{H^1(\Omega)})\|\nabla u\|.\end{aligned}$$

On déduit de l' inégalité de Young que

$$\|\nabla(f(u_1)-f(u_2)\|\,\|u_t\|_{-1} \leqslant Q(\|u_{0,1}\|_{H^1(\Omega)},\|u_{0,2}\|_{H^1(\Omega)})\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{-1}$$

En utilisant (5.5), les inégalités de Young et de Poincaré, on déduit

$$\begin{aligned}\lambda|(g(u_1)-g(u_2),A^{-1}u)| &\leqslant \lambda\|(u\int_0^1 g'(su_1+(1-s)u_2)ds\|\,\|u\|_{-1}\\ &\leqslant Q(\lambda,\|u_{0,1}\|^{k-1}_{H^1},\|u_{0,2}\|^{k-1}_{H^1})\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2_{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(g(u_1)-g(u_2),A^{-1}u_t)| &\leqslant \|(u\int_0^1 g'(su_1+(1-s)u_2)ds\|\,\|u_t\|_{-1}\\ &\leqslant Q(\|u_{0,1}\|^{k-1}_{H^1},\|u_{0,2}\|^{k-1}_{H^1})\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{-1}.\end{aligned}$$

En insérant toutes les estimations précédentes dans (5.32), on trouve

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) \leqslant Q(\lambda,\|u_{0,1}\|_{H^1(\Omega)},\|u_{0,2}\|_{H^1(\Omega)},\|u_{0,1}\|^{k-1}_{H^1},\|u_{0,2}\|^{k-1}_{H^1})\Gamma(t), \quad t\geq 0. \tag{5.33}$$

En appliquant lemme de Gronwall à (5.33), on conclut

$$\|(u(t),u_t(t))\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} \leqslant e^{Qt}\|(u(0),u_t(0))\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}}, \quad t\geq 0. \tag{5.34}$$

d' où l' unicité, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données initiales.

■

Remarque 5.4.3. *Pour $k \in]0,1[$, nous n'avons pas l' unicité de la solution du système (5.1)-(5.3).*

5.5 Dissipativité

Dans cette section, nous étudions l'existence de bornés absorbants des solutions du problème (5.1)-(5.3). Grâce aux théorèmes 5.4.1 et 5.4.2, on peut définir une famille d' opérateurs continus sur l' espace des phases.

Théorème 5.5.1. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.2, le système (5.1)-(5.3) génère une famille d' opérateurs continus*

$$S_{\tau_D}(t) : \Psi^0_{\tau_D} \to \Psi^0_{\tau_D}, \quad S_{\tau_D}(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)),$$

où $(u(t), u_t(t))$ *est la solution du système (5.1)-(5.3).*

Corollaire 5.5.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.2, le semi-groupe* $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$ *est dissipatif sur* $\Psi_0^{\tau_D}$. *Autrement dit, le semi-groupe* $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, *possède un ensemble borné absorbant* β_1 *dans* $\Psi_0^{\tau_D}$
.

Démonstration : On considère les données initiales (u_0, u_1) dans un borné B. Pour tout $R_1 > 0$, on a $(u_0, u_1) \in B_{R_1}$ avec B_{R_1} une boule B de centre 0 et de rayon R_1. l' estimation (5.15) devient.

$$Y(t) \leqslant Y(0) \exp(-\kappa t) + c_{20}, \quad \kappa >, \quad t \geq 0. \tag{5.35}$$

Puisque les données initiales sont dans un borné, l' estimation (5.35) satisfait

$$Y(t) \leqslant M_1 e^{-\kappa t} + c_{20}, \quad \kappa > 0, \quad t \geqslant 0, \tag{5.36}$$

avec $M_1 = M_1(R_1) > 0$.
On peut prendre $N_1 > 0$ assez grand pour que

$$M_1 e^{-\kappa t} + c_{20} \leqslant N_1.$$

On déduit que la boule de centre 0 et de rayon N_1 est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$.
On conclut que

$$\tau_D \|\frac{du}{dt}(t)\|^2_{-1} + \|\nabla u(t)\|^2 \leqslant N_1, \quad t \geqslant t_0, \tag{5.37}$$

avec $t_0 = t_0(R_1) = \max(0, -\frac{1}{\kappa} \ln(\frac{N_1 - c_{20}}{M_1}))$.

Remarque 5.5.3. *On peut supposer, sans perte de généralité, que* β_1 *est positivement invariante par le semi-groupe* $\{S_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, *c'est-à-dire* $S_{\tau_D}(t)\beta_1 \subset \beta_1$, *pour tout* $t \geq 0$.

Nous allons énoncer le lemme suivant qui sera très utile dans la suite du chapitre.

Lemme 5.5.4. *Soit* $R \geq 0$, *il existe* $Q = Q(R) \geq 0$ *tel que, pour des données initiales* $u_0, u_1 \in \Psi^0_{\tau_D}$ *avec* $\|u_i\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant R$, *on a*

$$\|S_{\tau_D}(t)u_0 - S_{\tau_D}(t)u_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant e^{Qt}\|u_0 - u_1\|_{\Psi^0_{\tau_D}}, \quad t \geqslant 0, \tag{5.38}$$

avec $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ *et* $u_1 = (u_1^1, u_1^2)$.

Démonstration : Soit u^1 et u^2 deux solutions du système avec des données initiales $u_0^1, u_0^2 \in \Psi^0_{\tau_D}$. La différence $u = u^1 - u^2$ satisfait

$$\tau_D \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + A^2u + A(f(u^1) - f(u^2)) + (g(u^1) - g(u^2)) = 0. \tag{5.39}$$

Multiplions (3.45) par $A^{-1}u_t$ et intégrons sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|u_t\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2) + 2\|u_t\|^2_{-1} = -2(f(u^1) - f(u^2), u_t) - 2(g(u^1) - g(u^2), A^{-1}u_t). \tag{5.40}$$

On déduit du théorème 5.4.2 que

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|u_t\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2) + 2\|u_t\|^2_{-1} \leqslant c(\tau_D\|u_t\|^2_{-1} + \|\nabla u\|^2), \quad c > 0. \tag{5.41}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (5.39) donne le résultat du lemme.

Nous avons le résultat de régularité suivant

Théorème 5.5.5. *Sous les hypothèses du théorème 5.4.2 et pour $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, le système (5.1)-(5.3) possède une solution unique (u, u_t) telle que*

$$u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, W \cap V) \cap L^2(0, T; V)$$

$$u_t(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H) \cap L^2(0, T; V), \quad \forall T > 0$$

Démonstration : La preuve du théorème découle directement des estimations (5.15) et (5.19). ■

Le résultat de l' existence de l' attracteur global s' énonce comme suit

Théorème 5.5.6. *Supposons que les hypothèses des théorèmes 5.4.1 et 5.4.2 sont vérifiées. Alors le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \ t \geq 0\}$ défini sur l' espace de phases $\Psi_0^{\tau_D}$ dans lui-même possède un attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D}$ dans $\Psi_1^{\tau_D}$.*

Démonstration : Suivant la remarque 3.4.5 dans le chapitre 3, nous considérons cette décomposition

$$(u(t), u_t(t)) = (v(t), v_t(t)) + (w(t), w_t(t)), \tag{5.42}$$

où $(v(t), v_t(t))$ est la solution du système,

$$\tau_D \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + A^2v + A(f(u) - f(w)) + c_5v = 0 \tag{5.43}$$

$$v|_{t=0} = u_0 \qquad v_t|_{t=0} = u_1, \tag{5.44}$$

et $(w(t), w_t(t))$ est la solution du système

$$\tau_D \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} + A^2w + Af(w) + c_5w - c_5u + g(u) = 0, \tag{5.45}$$

$$w|_{t=0} = 0 \qquad w_t|_{t=0} = 0. \tag{5.46}$$

La preuve du théorème utilise le Lemme suivant.

Lemme 5.5.7. *Sous les hypothèses du théorème , le semi-groupe* $\{S^2_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, *associé avec le système (5.45)-(5.46) est dissipatif sur* $\Psi^0_{\tau_D}$. *Autrement dit, le semi-groupe* $\{S^2_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$, *possède un ensemble borné absorbant* B_0 *dans* $\Psi^0_{\tau_D}$.

Démonstration : On choisit les données initiales (w_0, w_1) dans un borné B. Pour tout $R_2 > 0$, on a $(w_0, w_1) \in B_{R_2}$, avec B_{R_2} la boule B de centre 0 et de rayon R_2. On multiplie (5.45) par $A^{-1}w$ et $A^{-1}w_t$, et on déduit

$$\frac{d}{dt}(2\tau_D(w_t, w)_{-1} + \|w\|^2_{-1}) - 2\tau_D\|w_t\|^2_{-1} + 2\int_0^l f(w)wdx + 2c_5\|w\|^2_{-1} \\ +2\|\nabla w\|^2 - 2c_5(u, A^{-1}w) + 2(g(u), A^{-1}w) = 0 \tag{5.47}$$

et

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|w_t(t)\|^2_{-1} + \|\nabla w(t)\|^2 + 2\int_0^\ell F(w)dx + c_5\|w(t)\|^2_{-1} + 2\|w_t(t)\|^2_{-1} \\ -2c_5(u, A^{-1}w_t) + 2(g(u), A^{-1}w_t) = 0 \tag{5.48}$$

En additionnant (5.47) et α fois (5.48), (avec $\alpha > 0$ très petit), on obtient

$$\frac{d}{dt}H(t) + 2\|w_t\|^2_{-1} - 2c_5(u, A^{-1}w_t) - 2\alpha\tau_D\|w_t\|^2_{-1} + 2\alpha\int_0^\ell f(w)wdx \\ +2\alpha c_5\|w\|^2_{-1} - 2\alpha c_5(u, A^{-1}w) + 2\alpha(g(u), A^{-1}w) \\ +2\alpha\|\nabla w\|^2 + 2(g(u), A^{-1}w_t) = 0, \tag{5.49}$$

où

$$H = \tau_D\|w_t\|^2_{-1} + \|\nabla w\|^2 + 2\int_0^\ell F(w)dx + c_5\|w\|^2_{-1} + 2\alpha\tau_D(w_t, A^{-1}w) + \alpha\|w\|^2_{-1}. \tag{5.50}$$

Suivant le théorème 5.5.5 et les inégalités de Young et Poincaré, on aura

$$\alpha|(w, u)| + |(w_t, u)| \leq \alpha\|w\|\,\|u\| + \|w_t\|_{-1}\|\nabla u\| \\ \leq \alpha c\|w\|^2 + \frac{1}{4}\|w_t\|^2_{-1} + \alpha c'.$$

On déduit de (5.50) que,

$$c_5(\|w(t)\|^2 + \|\nabla w(t\|^2 + \tau_D\|w_t\|^2_{-1}) \leqslant H(t) \leqslant c_6(\|w(t)\|^2 + \|\nabla w(t)\|^2 + \tau_D\|w_t\|^2_{-1}).$$

En utilisant les mêmes démarches dans la section des estimations a priori, on conclut que

$$\frac{d}{dt}H(t) + cH(t) \leq c', \quad c > 0, \quad c' \geq 0, \quad t \geq O. \tag{5.51}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (5.51) donne

$$H(t) \leq H(0)e^{-ct} + c'', \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{5.52}$$

Puisque les données initiales sont dans un borné, l' estimation (5.52) devient

$$H(t) \leqslant K_2e^{-ct} + c'', \quad c > 0, \quad c'' \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \tag{5.53}$$

avec $K_2 = K_2(R_2) > 0$. On peut prendre $M_2 > 0$ assez grand pour que

$$K_2 e^{-ct} + c'' \leqslant M_2.$$

Donc la boule de centre 0 et de rayon M_2 est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S^2_{\tau_D}(t),\ t \geq 0\}$. On déduit

$$\tau_D \|\frac{dw}{dt}\|^2_{-1} + \|\nabla w\|^2 \leqslant M_2, \quad t \geqslant t_0, \tag{5.54}$$

avec $t_0 = t_0(R_2) = \max(0, -\frac{1}{c}\ln(\frac{M_2 - c''}{K_2}))$.

Ce qui prouve le résultat du lemme.

On continue avec la preuve du théorème en multipliant (5.43) par $\lambda A^{-1}v + A^{-1}v_t$ et en intègrant sur Ω

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_1(t) + (2 - 2\lambda\tau_D)\|v_t(t)\|^2_{-1} + \lambda\|v(t)\|^2_{-1} + 2(f(u) - f(w), \lambda v(t) + v_t(t)) \\ +2\lambda\|\nabla v(t)\|^2 = 2(g(u) - g(w), \lambda A^{-1}v(t) + A^{-1}v_t(t)),\end{aligned} \tag{5.55}$$

où

$$H_1(t) = 2\lambda\tau_D(v(t), v_t(t)_{-1} + \tau_D\|v_t(t)\|^2_{-1} + \lambda\|v(t)\|^2_{-1} + \|\nabla v(t)\|^2 + \|v(t)\|^2_{-1}.$$

Alors, pour $\lambda \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$ très petit, on déduit

$$\begin{aligned}H_1 \geq (t)c_5(\tau_D\|v_t(t)\|^2_{-1} + \|v(t)\|^2_{-1} + \|\nabla v(t)\|^2), \quad c_5 > 0 \\ H_1(t) \leqslant c_6(\tau_D\|v_t(t)\|^2_{-1} + \|v(t)\|^2_{-1} + \|\nabla v(t)\|^2), \quad c_6 > 0.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Suivant (5.4)-(5.7) et les inégalités de Young, Hölder et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda|(f(u) - f(w), v)| = \lambda|(v\int_0^1 f'(su + (1-s)w)ds, v)| \\ \geqslant -c_7\lambda\|\nabla v\|^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2_{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(A^{\frac{1}{2}}(f(u) - f(w)), A^{-\frac{1}{2}}v_t)| &\leqslant \|\nabla(v\int_0^1 f'(su + (1-s)w)ds)\|\ \|v_t\|_{-1} \\ &\leqslant \|v\int_0^1 f''(su + (1-s)w)(s\nabla u + (1-s)\nabla w)ds\|\ \|v_t\|_{-1} \\ &+ \|\nabla v\int_0^1 f'(su + (1-s)w)ds\|\ \|v_t\|_{-1} \\ &\leqslant c\|\nabla v\|\ \|v_t\|_{-1} + c'(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H^2(\Omega)}))\|\nabla v\|\ \|v_t\|_{-1}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.4.7, le théorème 5.4.5 et l' inégalité de Young, on trouve

$$|(A^{\frac{1}{2}}(f(u) - f(w)), A^{-\frac{1}{2}}v_t)| \leqslant c''\|\nabla v(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|^2_{-1}.$$

On combine toutes les estimations ci-dessus dans (5.53), on a

$$\frac{d}{dt}H_1(t) + cH_1(t) \leq 0, \quad c > 0, \quad t \geq 0. \tag{5.57}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (5.55), on conclut

$$\|(v(t), v_t(t))\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} \leq e^{-ct}\|(u_0, u_1)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}}, \quad c > 0. \tag{5.58}$$

Ce qui donne le résultat de la première partie du théorème.

On multiplie (5.45) par $w(t)$ et $w_t(t)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\tau_D\|w_t\|^2 + \|Aw\|^2 + c_5\|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx) + 2\|\frac{dw}{dt}\|^2 - 2c_5(u, w_t)\\ - \int_0^\ell f''(w)|\nabla w|^2 w_t dx + 2(g(u), w_t) = 0\end{aligned} \tag{5.59}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2\tau_D(w_t, w) + \|w\|^2) - 2\tau_D\|w_t\|^2 + \|Aw\|^2 + \int_0^\ell f(w)Awdx + c_5\|w\|^2\\ -2c_5(u, w) + 2(g(u), w) = 0.\end{aligned} \tag{5.60}$$

La somme de (5.59) et α fois (5.60), (avec $\alpha > 0$ très petit) donne

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}Y_1(t) + 2\|w_t\|^2 - 2c_5(u, w_t) - 2\alpha\tau_D\|w_t\|^2 + \alpha\|Aw\|^2 - \int_0^\ell f''(w)|\nabla w|^2 w_t dx\\ &+\alpha\int_0^\ell f(w)Awdx + \alpha c_5\|w\|^2 - 2\alpha c_5(u, w) + 2\alpha(g(u), w) + 2(g(u), w_t) = 0,\end{aligned} \tag{5.61}$$

où

$$Y_1(t) = \tau_D\|w_t\|^2 + \|Aw\|^2 + c_5\|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx + 2\tau_D(w_t, w) + \|w\|^2.$$

Soit $\alpha > 0$ telle que $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$ et grâce aux inégalités Cauchy-Schwarz et de Young, on aura

$$\begin{aligned}Y_1(t) &\geqslant c_5(\tau_D\|w_t\|^2 + \|Aw\|^2 + \|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx), \quad c_5 > 0\\ Y_1(t) &\leqslant c_6(\tau_D\|w_t\|^2 + \|Aw\|^2 + \|w\|^2 + \int_0^\ell f'(w)|\nabla w|^2 dx), \quad c_6 > 0.\end{aligned} \tag{5.62}$$

Suivant le corollaire 5.5.2, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\begin{aligned}-2c_5(u, \frac{dw}{dt}) - 2\alpha c_5(u, w) &\geq -c_5\|u\|\,\|w_t\| - \alpha c_5\|u\|\,\|w\|\\ &\geq -c_5\|\nabla u\|\,\|w_t\| - \alpha c_5\|\nabla u\|\,\|w\|\\ &\geq -\frac{1}{2}\|w_t\|^2 - \frac{\alpha c_5}{2}\|w\|^2 - \alpha c_{40}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.5.4, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\ell f''(w)|\nabla|^2 w_t dx &\leqslant c_{41}\|w\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla w\|^2\|w_t\|\\ &\leqslant c_{41}\|Aw\|^{\frac{1}{2}}\|w_t\|\\ &\leqslant \frac{1}{4}\|Aw\|^2 + \frac{1}{4}\|w_t\|^2 + c_{42}.\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus dans (5.61), (pour $\alpha > 0$ telle que $\frac{3}{4} - 2\alpha\tau_D > 0$), on déduit

$$\frac{d}{dt}Y_1(t) + c'Y_1(t) \leqslant c'', \quad c' > 0, \quad c'' \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{5.63}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (5.63), donne

$$Y_1(t) \leq Y_1(0)e^{-c't} + c_1, \qquad t \geq 0. \tag{5.64}$$

La relation (5.62) et l' estimation (5.64) donnent le résultat de la deuxième partie du théorème.

■

Corollaire 5.5.8. *L' attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D}$ est borné dans $\Psi^1_{\tau_D}$, avec une borne indépendante de τ_D.*

5.6 Dissipativité dans les espaces d' ordre supérieur

Notre objectif dans cette section est de montrer que pour f et g satisfaisant les conditions de compatibilité, le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \quad t \geq 0\}$ défini sur l' espace $\Psi^n_{\tau_D}$ (pour $1 \leqslant n \leqslant 4$) possède un borné absorbant qui est fermé dans $B^n_{\tau_D}$ dans $\Psi^n_{\tau_D}$. On suppose que

$$f \in C^{n+1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f''(0) = 0 \quad pour \quad n = 3, 4, \tag{5.65}$$

et

$$g \in C^n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g^{(n)}(0) = 0 \quad si \quad k > n. \tag{5.66}$$

Si $n = 1$, alors (5.65) et (5.66) n'ajoutent rien à nos hypothèses précédentes sur f et g. Remarquons que la dérivée du potentiel classique de Cahn-Hilliard satisfait (5.65) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons les résultats suivant.

Théorème 5.6.1. *Supposons que les hypothèses (5.65) et (5.66) sont vérifiées pour tout $1 \leqslant n \leqslant 4$. Alors pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, il existe $R_n > 0$ tel que la boule $B^n_{\tau_D}$ de centre zéro et de rayon R_n est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S_{\tau_D}(t), \quad t \geq 0\}$ dans $\Psi^n_{\tau_D}$. C'est-à-dire, pour tout ensemble borné $B \subset \Psi^n_{\tau_D}$, il existe $t_n = t_n(B) \geq 0$ tel que*

$$S_{\tau_D}(t)B \subset B^n_{\tau_D}, \qquad t \geq t_n.$$

La preuve du théorème 5.6.1 découle directement de la preuve du lemme suivant.

Lemme 5.6.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.6.1 sont vérifiées. Pour tout $\rho_{n-1}, \rho_n \geq 0$,é il existe $K_{n-1} = K_{n-1}(\rho_{n-1}) \geq 0$, $K_n = K_n(\rho_n) \geq 0$ et $\nu_n > 0$ de telle sorte que, si*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\Psi^{n-1}_{\tau_D}} \leqslant \rho_{n-1} \quad et \quad \|u_0, u_1)\|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant \rho_n,$$

alors, nous avons l' inégalité suivante

$$\|S_{\tau_D}(t)(u_0, u_1)\|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant K_n e^{-\nu_n t} + K_{n-1}.$$

Démonstration : Dans toute la preuve, on suppose que $c_i \geq 0$ pour $i \in \mathbb{N}$ dépends de ρ_{n-1}. Nous allons raisonner par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, la propriété est vraie grâce à l' estimation (5.19). Supposons que le résultat soit valable pour le rang $n-1$, c'est-à-dire

$$\sup_{\|(u_0,u_1)\|_{\Psi_{\tau_D}^{n-1}} \leqslant \rho_{n-1}} (\|A^{\frac{n}{2}}u\|^2 + \|u\|^{2k-2(n-1)}_{L^{2k-2(n-1)}(\Omega)} + \tau_D \|A^{\frac{n-2}{2}}u_t\|^2) \leqslant c. \tag{5.67}$$

En particulier, les hypothèses sur f donnent

$$\sup_{t\geqslant 0}(\sum_{i=0}^{n+1} \|f^{(i)}(u)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leqslant c_1. \tag{5.68}$$

Grâce à la formule de la dérivée d' une composition de fonctions de la Faa di Bruno, on a

$$D^n f(u) = f'(u)D^n u + \Gamma \tag{5.69}$$

$$D^n g(u) = g'(u)D^n u + \Gamma_1, \tag{5.70}$$

avec $\Gamma = \Gamma_1 = 0$ si $n = 1$, et

$$\Gamma = \sum_{k=2}^{n+1} \Gamma_k f^{(k)}(u)$$

$$\Gamma_1 = \sum_{k=2}^{n+1} \Gamma_k g^{(k)}(u)$$

où Γ_k est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$(D^1u)^{i_1}(D^2u)^{i_2}\cdots(D^{n-1}u)^{i_{n-1}},$$

pour certains entiers non négatifs $i_1, \cdots, i_{n-1}$ satisfaisant

$$i_1 + \cdots + i_{n-1} = k \quad \text{et} \quad 2i_1 + \cdots + (n-1)i_{n-1} = n.$$

Multiplions (5.1) par $\alpha A^{n-1}u$+ $A^{n-1}u_t$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Y(t) + (2 - 2\alpha\tau_D)\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + 2\alpha\|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 + \int_0^\ell u_t g''(u)|A^{\frac{n-1}{2}}u|^2dx = \\ -2\alpha(f'(u)A^{\frac{n}{2}}u, A^{\frac{n}{2}}u) - 2\alpha(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u) + 2\alpha(g'(u)A^{\frac{n-1}{2}}u + \Gamma_1, A^{\frac{n-1}{2}}u) \\ + \int_0^\ell u_t f''(u)|A^{\frac{n-1}{2}}u|^2dx - 2(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u_t) + 2(\Gamma_1, A^{\frac{n-1}{2}}u_t),\end{aligned} \tag{5.71}$$

où

$$\begin{aligned}Y_2(t) = 2\alpha\tau_D(A^{\frac{n-1}{2}}u_t, A^{\frac{n-1}{2}}u) + \|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + \|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 \\ + \int_0^\ell |A^{\frac{n}{2}}u|^2 f'(u)dx - \int_0^\ell |A^{\frac{n-1}{2}}u|^2 g'(u)dx.\end{aligned} \tag{5.72}$$

Alors, pour $\alpha \in (0, \frac{1}{2\tau_D})$ on déduit grâce à l' inégalité de Cauchy-Schwarz

$$2\alpha\tau_D|(A^{\frac{n-1}{2}}u_t, A^{\frac{n-1}{2}}u)| \leqslant \tau_D\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|A^{\frac{n-1}{2}}u\|^2.$$

Grâce à (5.67) et à l' inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\int_0^\ell |A^{\frac{n-1}{2}}u|^2 g'(u)dx &\leqslant c_2\|g'(u)\| \\ &\leqslant \|u\|^{2k-2}_{L^{2k-2}(\Omega)} + c_3 \end{aligned}$$

et

$$\int_0^\ell |A^{\frac{n}{2}}u|^2 f'(u)dx \leqslant c_4.$$

On déduit de (5.72) que

$$\begin{aligned} Y_2(t) &\geq c_5(\tau_D\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + \|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 + \|u\|^{2k-2}_{L^{2k-2}(\Omega)}) - c_6, \quad c_5 > 0 \ c_6 \geq 0 \\ Y_2(t) &\leqslant c_7(\tau_D\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + \|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 + \|u\|^{2k-2}_{L^{2k-2}(\Omega)}) + c_8, \quad c_7 > 0 \ c_8 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Suivant (5.67) et l' inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_t f''(u)|A^{\frac{n-1}{2}}u|^2 dx &\leqslant c_9\|u_t\|\,\|f''(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant c_{10}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + c_{11} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_t g''(u)|A^{\frac{n-1}{2}}u|^2 dx &\leqslant c_{12}\|u_t\|\,\|g''(u)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + c_{13}\|u\|^{2k-4}_{L^{2k-4}(\Omega)}. \end{aligned}$$

En raison de (5.67)-(5.70), on trouve

$$2\alpha|(\Gamma_1, A^{\frac{n-1}{2}}u)| \leqslant \alpha c_{14}$$

et

$$2|(\Gamma_1, A^{\frac{n-1}{2}}u_t)| \leqslant c_{15}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} 2\alpha|(g'(u)A^{\frac{n-1}{2}}u, A^{\frac{n-1}{2}}u)| &\leqslant c\alpha\|g'(u)\|\,\|A^{\frac{n-1}{2}}u\|^2 \\ &\leqslant c_{20}\|u\|^{2k-2}_{L^{2k-2}(\Omega)} + \alpha c_{21}. \end{aligned}$$

Grâce à (5.67) et (5.69) et(aux inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$-2\alpha|(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u)| \leqslant \alpha c_{16}$$

et

$$\begin{aligned} -2|(\Gamma, A^{\frac{n}{2}}u_t)| &= c_{17}|(A^{\frac{1}{2}}\Gamma, A^{\frac{n-1}{2}}u_t)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + c_{18}. \end{aligned}$$

Enfin, en combinant toutes les estimations ci-dessus dans (5.71), on conclut

$$\frac{d}{dt}Y_2(t) + (\frac{3}{2} - 2\alpha\tau_D)\|A^{\frac{n-1}{2}}u_t\|^2 + 2\alpha\|A^{\frac{n+1}{2}}u\|^2 + c_{23}\|u\|^{2k-4}_{L^{2k-4}(\Omega)} \leqslant c_{20}Y_2(t) + c'. \quad (5.74)$$

Donc, pour $\frac{3}{2} - 2\alpha\tau_D > 0$, on déduit

$$\frac{d}{dt}Y_2(t) + 2\kappa Y_2(t) \leqslant cY_2(t) + c',\ \kappa > 0,\ c > 0,\ c' \geqslant 0. \quad (5.75)$$

En appliquant le lemme 2.1 de ([20]) à (5.75), nous concluons que

$$Y_2(t) \leqslant c''Y_2(0)e^{-\kappa t} + c''',\ \kappa > 0,\ c'' > 0,\ c''' \geqslant 0.$$

d' où

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant c. \quad (5.76)$$

Ce qui finalise le résultat du lemme.

■

Par un éventuel élargissement du rayon R_n, l' ensemble absorbant $B^n_{\tau_D}$ absorbe exponentiellement les bornés de $\Psi^0_{\tau_D}$. Pour démontrer l' un des meilleurs résultat de cette section, nous avons besoin les deux lemmes suivant.

Lemme 5.6.3. *Soit $S(t)$ un semi-groupe continu sur un espace de Banach Ψ. Soit B_0, B_1, B_2 trois sous-ensembles de Ψ tels que*

$$\mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_1) \leqslant K_1e^{-\nu_1 t},\quad \mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_1, B_2) \leqslant K_2e^{-\nu_2 t},\quad \nu_1, \nu_2 > 0\,,\ K_1, K_2 \geq 0.$$

On suppose de plus que z_1, z_2é dans Ψ, on a.

$$\|S(t)z_1 - S(t)z_2\|_\Psi \leqslant e^{\nu_0 t}\|z_1 - z_2\|_\Psi,\quad \nu_0 \geq 0,\ t \geq 0.$$

Alors

$$\mathrm{dist}_\Psi(S(t)B_0, B_2) \leqslant (K_1 + K_2)e^{-\nu t},\quad \nu > 0,\ t \geq 0, \quad (5.77)$$

où $\nu = \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_0+\nu_1+\nu_2}$. Ici, dist_Ψ représente la semi-distance de Hausdorff dans Ψ.

Pour la preuve du lemme 5.6.3 (voir, [28]).

Lemme 5.6.4. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.5.1 sont vérifiées pour tout $1 \leqslant n \leqslant 4$. Alors, pour R_n suffisamment grand, on a*

$$\mathrm{dist}_{\Psi^0_{\tau_D}}(S_{\tau_D}(t)B^{n-1}_{\tau_D}, B^n_{\tau_D}) \leqslant L_ne^{-\omega_n t},\quad \omega_n > 0,\ t \geq 0, \quad (5.78)$$

où $L_n \geq 0$.

Démonstration : Nous allons établir que la solution est divisée en une somme de deux, l' un décroît exponentiellement dans l' espace $\Psi^0_{\tau_D}$, et l' autre terme est uniformément borné dans $\Psi^n_{\tau_D}$. En inspirant de la preuve du théorème 5.4.6 (compte tenu du lemme 5.5.2), il est facile de constater que le système (5.43)-(5.44) est exponentiellement stable dans $\Psi^0_{\tau_D}$, tandis que la solution $w(t)$ de (5.45), (5.46) satisfait la borne uniforme suivante

$$\|(w(t), w_t(t)\|_{\Psi^n_{\tau_D}} \leqslant c,\quad \forall t \geq 0.$$

Pour un certain c dépendant du rayon R_{n-1} de $B^{n-1}_{\tau_D}$. En redéfinissant R_n comme étant supérieur ou égal à la constante c ci-dessus, on obtient la conclusion souhaitée.

Théorème 5.6.5. *Sous les hypothèses du théorème 5.5.1 et pour* $1 \leqslant n \leqslant 4$, *il existe* $\omega_n > 0$ *et une fonction croissante positive* J_n *telle que, pour tout sous-ensemble borné* B *de* $\Psi^0_{\tau_D}$,

$$dist_{\Psi^0_{\tau_D}}(S_{\tau_D}(t)B, B^n_{\tau_D}) \leqslant J_n(R)e^{-\omega_n t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $R = \sup_{(u_0,u_1)\in B} \|(u_0,u_1)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}$.

Démonstration : Pour la preuve du théorème, nous allons redéfinir de manière récurrente le rayon R_n pour que le lemme 5.5.4 s' applique. Ensuite, on utilise successivement le lemme 5.4.4, le corollaire 5.4.2, le lemme 5.5.4 et le lemme 5.5.3, nous obtenons le résultat.

Corollaire 5.6.6. *Sous les hypothèses du théorème 5.5.1 et pour* $1 \leqslant n \leqslant 4$. *Alors l' attracteur global* $\mathcal{A}_{\tau_D}$ *est borné dans* $\Psi^n_{\tau_D}$, *avec une borne indépendante de* τ_D.

Nous déduisons le résultat de stabilité suivant.

Théorème 5.6.7. *Supposons que les hypothèses du théorème 5.5.1 sont vérifiées pour tout* $1 \leqslant n \leqslant 4$. *Alors*

$$\lim_{\tau_D\to 0}[\mathrm{dist}_{\Psi^0_1}(\mathcal{A}_{\tau_D}, \tilde{\mathcal{A}}_0)] = 0,$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 = \{(u,\psi) : u \in \mathcal{A}_0,\ \psi = -[A(Au + f(u)) + g(u)]\}.$$

On peut souligner que la semi-distance de Hausdorff utilisée dans le théorème précédent est prise dans Ψ^0_1. Il s' agit d' un résultat de stabilité fort.

5.7 Existence d' attracteurs exponentiels

Notre but dans cette section est d' introduire des notions qui vont nous servir dans la construction d' attracteurs exponentiels associés à notre modèle.

On suppose que les hypothèses (5.65) et (5.66) définies dans la section précédente sont vérifiées pour $n = 4$. Alors, il existe une famille robuste d' attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_{\tau_D}$ qui est uniformément bornée dans $\Psi^4_{\tau_D}$. De plus, le bassin d' attraction de $\mathcal{M}_{\tau_D}$ coïncide avec l' ensemble de l' espace des phases $\Psi^0_{\tau_D}$. En particulier, $\mathcal{A}_{\tau_D} \subset \mathcal{M}_{\tau_D}$.

Nous définissons les applications $\mathbb{J}$ et $\mathbb{L}_{\tau_D}$ suivantes

$$\begin{aligned}\mathbb{J} : \mathbb{B}^4_0 &\to D(A^{-\frac{1}{2}})\\ u &\mapsto \mathbb{J}(u) = -[A(Au + f(u)) + g(u)].\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{L}_{\tau_D} : \mathbb{B}^4_0 \to \Psi^0_{\tau_D}$$

$$u \mapsto \mathbb{L}_{\tau_D}u = \begin{cases} (u, \mathbb{J}u), & si\ \ \tau_D > 0 \\ u, & si\ \ \tau_D = 0 \end{cases}$$

Remarque 5.7.1. *En associant $\mathbb{B}_0^4$ avec la topologie dans l' espace métrique $D(A^{-\frac{1}{2}})$, il n'est pas compliqué de vérifier que $\mathbb{J}$ est Hölder continue de $\mathbb{B}_0^4$ dans $D(A^{-\frac{1}{2}})$. En effet, une telle continuité est essentielle pour appliquer le lemme 5.6.3 suivant, c'est la raison pour laquelle nous travaillerons dans toute cette section dans $\mathbb{B}_0^4$.*

Nous avons le résultat suivant

Théorème 5.7.2. *Supposons que les hypothèses (5.65)-(5.66) sont vérifiées pour $n = 4$. Alors le semi-groupe $S_{\tau_D}(t)$ possède des ensembles compacts positivement invariants $\mathcal{M}_{\tau_D} \subset \mathbb{B}_0^4$ (appelés attracteurs exponentiels) qui satisfont les conditions suivantes.*

(T1) Il existe $\omega > 0$ et une fonction croissante positive J telle que, pour tout borné $\mathbb{B} \subset \Psi^0_{\tau_D}$, on a

$$\operatorname{dist}_{\Psi^0_{\tau_D}}(S_{\tau_D}(t)\mathbb{B}, \mathcal{M}_{\tau_D}) \leqslant J(R)e^{-\omega t}, \quad t \geq 0,$$

où $R = \sup_{(u_0,u_1)\in B} \|(u_0, u_1)\|_{\Psi^0_{\tau_D}}$

(T2) La dimension fractale de $\mathcal{M}_{\tau_D}$ est uniformément bornée par rapport à τ_D.

(T3) Il existe $\varepsilon \in (0, \frac{1}{8})$ et $C > 0$ tel que

$$\operatorname{dist}^{\mathrm{sym}}_{\Psi^0_{\tau_D}}(\mathcal{M}_{\tau_D}, \mathbb{L}_{\tau_D}\mathcal{M}_0) \leqslant C\tau_D^{\varepsilon}.$$

Les quantités ω, J, ε et C sont indépendantes de τ_D. Ici, $\mathcal{M}_{\tau_D}$ est la distance de Hausdorff symétrique dans $\Psi^0_{\tau_D}$.

La preuve du théorème ci-dessus découle directement du lemme suivant.

Lemme 5.7.3. *Il existe $\Delta_j \geq 0, k \in (0, \frac{1}{2})$ et $t^* \geq t_n$ (tous indépendants de τ_D) tels que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(L1) l' application $S_{\tau_D} = S_{\tau_D}(t^*)$ satisfait, pour chaque $z_1 = (u_0^1, u_1^1), z_2 = (u_0^2, u_1^2)$ dans $\mathbb{B}_0^4$,

$$S_{\tau_D}z_1 - S_{\tau_D}z_2 = \mathbb{L}_{\tau_D}(z_1, z_2) + \mathbb{N}_{\tau_D}(z_1, z_2),$$

où

$$\|\mathbb{L}_{\tau_D}(z_1, z_2)\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant k\|z_1 - z_2\|_{\Psi^0_{\tau_D}}$$

$$\|\mathbb{N}_{\tau_D}(z_1, z_2)\|_{\Psi^1_{\tau_D}} \leqslant \Delta_1\|z_1 - z_2\|_{\Psi^0_{\tau_D}}.$$

(L2) l' application $\mathbb{L}_{\tau_D}$ satisfait les conditions suivantes

$$\|S^k_{\tau_D}z - \mathbb{L}_{\tau_D}S^k_0\mathbb{P}_{\tau_D}z\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant \Delta_2^k \sqrt[8]{\tau_D}, \quad \forall z \in \mathbb{B}_0^4, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où

$$\mathbb{P}_{\tau_D} : \mathbb{B}^4_{\tau_D} \to \mathbb{B}_0^4$$

est la projection sur la première composante lorsque $\tau_D > 0$, et l' identité dans le cas contraire.

(L3) Pour tout $z \in \mathbb{B}^4_{\tau_D}$, *il existe*

$$\|S_{\tau_D} z - \mathbb{L}_{\tau_D} S_0 \mathbb{P}_{\tau_D} z\|_{\Psi^0_{\tau_D}} \leqslant \Delta_3 \sqrt[8]{\tau_D}, \quad \forall t \in [t^*, 2t^*].$$

(L4) l' application

$$(t, z) :\mapsto S_{\tau_D}(t)z : [t^*, 2t^*] \times \mathbb{B}^4_{\tau_D} \to \mathbb{B}^4_{\tau_D}$$

est $(\frac{1}{2})$*-Hölder continue. De plus, l' application* $z :\mapsto S_{\tau_D}(t)z$ *est Lipschitz continue sur* $\mathbb{B}^4_{\tau_D}$, *avec une constante de Lipschitz indépendante de* τ_D *et* $t \in [t^*, 2t^*]$.

Démonstration : La démonstration du lemme se fait en 3 étapes, d' abord, nous prouvons (L1), ensuite (L2) et (L3) enfin (L4). Dans toute la preuve, les constantes $c_i \geq 0, i \in \mathbb{N}$ peuvent dépendre du rayon R_n des bornés absorbants de $\mathbb{B}^4_{\tau_D}$.

Preuve de (L1). Soit $z_1 = (u_0^1, u_1^1)$, $z_2 = (u_0^2, u_1^2)$ dans $\mathbb{B}^4_0$. Nous écrivons alors la différence $S_{\tau_D}(t)z_1 - S_{\tau_D}(t)z_2 = (\widetilde{u}, \widetilde{u}_t) = (\widetilde{w}(t), \widetilde{w}_t) + (\widetilde{v}, \widetilde{v}_t)$, où $\widetilde{w}$ et $\widetilde{v}$ sont les solutions des problèmes

$$\tau_D \widetilde{v}_{tt}(t) + \widetilde{v}_t(t) + A^2\widetilde{v}(t) + A(f(\widetilde{u}(t)) - f(\widetilde{w}(t))) + \widetilde{v}(t) + g(\widetilde{u}(t)) - g(\widetilde{w}(t)) = 0 \tag{5.79}$$

$$\widetilde{v}(0) = \widetilde{u}_0 \qquad \widetilde{v}_t(0) = \widetilde{u}_1 \tag{5.80}$$

et

$$\tau_D \widetilde{w}_{tt}(t) + \widetilde{w}_t(t) + A^2\widetilde{w}(t) + Af(\widetilde{w}(t)) + \widetilde{w}(t) - \widetilde{u}(t) + g(\widetilde{w}(t)) = 0 \tag{5.81}$$

$$\widetilde{w}(0) = 0 \qquad \widetilde{w}_t(0) = 0. \tag{5.82}$$

Multiplions (5.81) par $\widetilde{w}_t$ et intégrons sur Ω, nous obtenons alors

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) + 2\|\widetilde{w}_t(t)\|^2 - 2\int_0^\ell \widetilde{w}_t g'(\widetilde{w})\widetilde{w}dx = 2(\widetilde{u}, \widetilde{w}_t) + \int_0^\ell \widetilde{w}_t f''(\widetilde{w})|\widetilde{w}|^2 dx, \tag{5.83}$$

où

$$\Gamma(t) = \tau_D\|\widetilde{w}_t\|^2 + \|A\widetilde{w}(t)\|^2 + \|\widetilde{w}(t)\|^2 + \int_0^\ell |A^{\frac{1}{2}}\widetilde{w}(t)|^2 f'(\widetilde{w})dx + \int_0^\ell |\widetilde{w}|g(\widetilde{w})dx. \tag{5.84}$$

Grâce aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell |A^{\frac{1}{2}}\widetilde{w}|^2 f'(\widetilde{w})dx &\leqslant \|f'(\widetilde{w})\|_{L^\infty(\Omega)}\|A^{\frac{1}{2}}\widetilde{w}(t)\|^2 \\ &\leqslant c\|A\widetilde{w}(t)\|^2 + c'\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\ell |\widetilde{w}|g(\widetilde{w})dx &\leqslant \|g(\widetilde{w})\|\,\|\widetilde{w}(t)\| \\ &\leqslant c\|\widetilde{w}(t)\|^{2k}_{L^{2k}(\Omega)} + c.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous pouvons réécrire (5.84) comme suit

$$\Gamma(t) \geq c_1(\|A\widetilde{w}(t)\|^2 + \tau_D\|\widetilde{w}_t(t\|^2 + \|\widetilde{w}(t)\|^{2k}_{L^{2k}(\Omega)})$$

$$\Gamma(t) \leq c_2(\|A\widetilde{w}(t)\|^2 + \tau_D\|\widetilde{w}_t(t)\|^2 + \|\widetilde{w}(t)\|^{2k}_{L^{2k}(\Omega)}) + c'.$$

Suivant le théorème 5.5.5 et l' inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}|(\widetilde{u},\widetilde{w}_t)| &\leqslant \|\widetilde{u}(t)\|\,\|\widetilde{w}_t(t)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\widetilde{w}_t(t)\|^2 + c'\|\widetilde{u}(t)\|^2.\end{aligned}$$

En insérant les estimations ci-dessus dans (5.83), nous avons

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) + \|\widetilde{w}(t)\|^{2k-2}_{L^{2k-2}(\Omega)} \leqslant c\Gamma(t) + c'\|\widetilde{u}(t)\|^2. \tag{5.85}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (5.85)et grâce au lemme 5.5.4, on conclut

$$\|(\widetilde{w}(t),\widetilde{w}_t(t)\|^2_{\Psi_1^{\tau_D}} \leqslant e^{kt}\|(\widetilde{u}_0,\widetilde{u}_1)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}}. \tag{5.86}$$

On multiplie (5.79) par $A^{-1}(\alpha\widetilde{v}+\widetilde{v}_t)$ et grâce au théorème 5.5.5, on trouve

$$\|(\widetilde{v}(t),\widetilde{v}_t(t)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} \leqslant e^{-kt}\|(\widetilde{u}_0,\widetilde{u}_1)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}}. \tag{5.87}$$

En prenant $t^* \geq t_n$ suffisamment grand, on en déduit

$$\mathbb{N}_{\tau_D}(z_1,z_2) = (\widetilde{w}(t^*),\widetilde{w}_t(t^*))$$

et

$$\mathbb{L}_{\tau_D}(z_1,z_2) = (\widetilde{v}(t^*),\widetilde{v}_t(t^*)),$$

d' où la preuve de **(L1)**.

Démonstration de (L2) et (L3) : Maintenant, nous allons aborder la preuve de **(L2)** et **(L3).** On constate que les deux assertions ont la même forme suivante

$$\|S_{\tau_D}(t)z - \mathbb{L}_{\tau_D}S_0(t)\mathbb{P}_{\tau_D}z\|_{\Psi_0^{\tau_D}} \leqslant ce^{ct}\sqrt[4]{\tau_D} + ce^{\frac{-t}{\tau_D}}, \quad \forall t\geq 0, \quad z\in\mathbb{B}^4_{\tau_D}. \tag{5.88}$$

Pour la preuve de l' estimation précédente, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 5.7.4. *On a*

$$\sup_{u_0\in\mathbb{B}_0^4}\int_0^\infty \|A^{-\frac{1}{2}}u^0_{tt}(y)\|dy < \infty, \tag{5.89}$$

où $S_0(t)u_0^0 = u^0$.

Démonstration : Puisque u_0 est borné dans $D(A^{\frac{5}{2}})$, alors $\mathbb{J}(u_0)$ est borné dans $D(A^{\frac{1}{2}})$. Considérons le problème obtenu en prenant la dérivée par rapport au temps de (5.1) pour $\tau_D = 0$, c'est-à-dire

$$\psi_t + A(A\psi + f'(u^0)\psi) + \psi g'(u^0) = 0 \tag{5.90}$$

$$\psi(0) = \mathbb{J}(u_0), \tag{5.91}$$

où $\psi = u^0_t$.

Il est facile de voir qu'il existe une solution unique pour le problème (5.90)-(5.91) dans $C([0,T],D(A^{\frac{1}{2}})$, pour tout $T>0$.

Multiplions (5.90) par $\alpha A^{-1}\psi + A^{-1}\psi_t$, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{1}{2}}\psi(t)\|^2+\alpha\|A^{-\frac{1}{2}}\psi(t)\|^2)+2\alpha\|A^{\frac{1}{2}}\psi(t)\|^2+2\|A^{-\frac{1}{2}}\psi_t(t)\|^2\\ =-2\alpha(A^{\frac{1}{2}}(\psi f'(u^0),A^{-\frac{1}{2}}\psi)-2(g'(u^0)\psi,A^{-1}\psi_t)\\ -2(A^{\frac{1}{2}}(\psi f'(u^0),A^{-\frac{1}{2}}\psi_t)-2\alpha(g'(u^0)\psi,A^{-1}\psi)\end{aligned} \tag{5.92}$$

Compte tenu des contrôles

$$\|A^{\frac{1}{2}}(\psi f'(u^0))\|\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi(t)\|$$

et

$$\begin{aligned}\|(g'(u^0)\psi\|&\leqslant c\|g'(u^0)\|\,\|\psi(t)\|\\ &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|\,\|u^0(t)\|^{k-1}_{L^{2k-2}(\Omega)}\\ &\leqslant c'\|A^{\frac{1}{2}}\psi(t)\|.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus, nous pouvons réécrire (5.92) comme suit

$$\frac{d}{dt}(\|A^{\frac{1}{2}}\psi(t)\|^2+\|A^{-\frac{1}{2}}\psi(t\|^2)+\|A^{-\frac{1}{2}}\frac{d\psi}{dt}(t)\|^2\leqslant c(\|A^{\frac{1}{2}}\psi(t)\|^2+\|A^{-\frac{1}{2}}\psi(t)\|^2). \tag{5.93}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (5.93) donne le résultat du lemme.

Soit $(u_0,u_1)\in\mathbb{B}_0^4$. on pose

$$(u^{\tau_D}(t),u_t^{\tau_D}(t))=S_{\tau_D}(t)(u_0,u_1)\quad et\quad (u^0(t),u_t^0(t))=\mathbb{L}_{\tau_D}S_0(t)\mathbb{P}_{\tau_D}(u_0,u_1),$$

et

$$u=u^{\tau_D}-u^0.$$

Le problème est le suivant

$$\tau_D u_{tt}+u_t+A^2u+A(f(u^{\tau_D})-f(u^0)+g(u^{\tau_D})-g(u^0)=-\tau_D u_{tt}^0 \tag{5.94}$$

$$u(0)=0,\qquad u_t(0)=u_1-\mathbb{J}(u_0). \tag{5.95}$$

Multiplions (5.94) par $A^{-1}u_t$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1}]+2\|u_t(t)\|^2_{-1}=-2(A^{\frac{3}{2}}u,A^{-\frac{1}{2}}u_t)-2\tau_D(u_{tt}^0,A^{-1}u_t)\\ -2(g(u^{\tau_D})-g(u^0),A^{-1}u_t)-2(f(u^{\tau_D})-f(u^0),u_t).\end{aligned} \tag{5.96}$$

Grâce au lemme 5.6.2, aux inégalités de Young et de Poincaré, nous déduisons que

$$\begin{aligned}-2\tau_D|(u_{tt}^0,A^{-1}u_t)|&\leqslant\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_{tt}^0(t)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|\\ &\leqslant c'\tau_D\|u_{tt}^0(t)\|^2_{-1}+\frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2_{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-2|(A^{\frac{3}{2}}u, A^{-\frac{1}{2}}u_t)| &\leqslant c\|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant c' + \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2_{-1}.\end{aligned}$$

En exploitant le théorème 5.4.2 et le lemme 5.6.2, on trouve

$$\begin{aligned}-2|(A^{\frac{1}{2}}(f(u^{\tau_D}) - f(u^0)), A^{-\frac{1}{2}}u_t)| &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant c'' + \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2_{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2|(g(u^{\tau_D}) - g(u^0), A^{-1}u_t)| &\leqslant c\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\| \\ &\leqslant c''' + \frac{1}{4}\|u_t(t)\|^2_{-1}.\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (5.96), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1}) + \frac{1}{\tau_D}(\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1}) \leqslant c_1 + c'\tau_D\|u^0_{tt}(t)\|^2_{-1}. \tag{5.97}$$

Grâce aux lemme de Gronwall, lemme 5.7.4, nous obtenons

$$\tau_D\|u_t(t)\|^2_{-1} \leqslant e^{-\frac{t}{\tau_D}} + c'\tau_D. \tag{5.98}$$

Nous réécrivons (5.96) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|(u(t), u_t(t)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} + 2\|u_t(t)\|^2_{-1} &= -2(g(u^{\tau_D}) - g(u^0), A^{-1}u_t) \\ &\quad -2\tau_D(u^0_{tt}, A^{-1}u_t) - 2(f(u^{\tau_D}) - f(u^0), u_t).\end{aligned} \tag{5.99}$$

En insérant toutes les estimations ci-dessus dans (5.99), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|(u(t), u_t(t)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} \leqslant c\|(u(t), u_t(t)\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} + c'\tau_D\|u^0_{tt}(t)\|^2_{-1}. \tag{5.100}$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (5.100) sur $(\sqrt{\tau_D}, t + \sqrt{\tau_D})$, ainsi que (5.98) et le lemme 5.7.4, nous obtenons

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(t + \sqrt{\tau_D})\|^2 \leqslant e^{ct}(\|A^{\frac{1}{2}}u(\sqrt{\tau_D})\|^2 + ce^{-\frac{1}{\sqrt{\tau_D}}} + c'\tau_D).$$

Ainsi, on constate que

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \leqslant e^{ct}(\|A^{\frac{1}{2}}u(\sqrt{\tau_D})\|^2 + c'\tau_D).$$

Grâce au lemme 5.6.2 et à l' inégalité d' interpolation, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 &\leqslant \|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|\,\|A^{-\frac{1}{2}}u(t)\| \\ &\leqslant c\int_0^t \|u_t(y)\|_{-1}dy \\ &\leqslant c\sqrt{t}.\end{aligned}$$

Enfin, en combinant les deux inégalités ci-dessus, on peut conclure que

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\| \leqslant ce^{ct}\sqrt[4]{\tau_D}. \tag{5.101}$$

Le résultat de l' estimation découle directement des estimations (5.101) et (5.98). D' où la preuve de **(L2)** et **(L3).**

Démonstration de (L4) : Pour tout $t', t \in [t^*, 2t^*]$ et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{B}^4_{\tau_D}$, du point de vue du lemme 5.5.4, on a

$$\begin{aligned}\|S_{\tau_D}(t)z_1 - S_{\tau_D}(t')z_2\|_{\Psi_0^{\tau_D}} &\leqslant \|S_{\tau_D}(t)z_1 - S_{\tau_D}(t')z_1\|_{\Psi_0^{\tau_D}} + \|S_{\tau_D}(t')z_1 - S_{\tau_D}(t')z_2\|_{\Psi_0^{\tau_D}} \\ &\leqslant \|S_{\tau_D}(t)z_1 - S_{\tau_D}(t')z_1\|_{\Psi_0^{\tau_D}} + e^{2Kt^*}\|z_1 - z_2\|_{\Psi_0^{\tau_D}}.\end{aligned}$$

En fixant $t = t'$, on obtient immédiatement la deuxième assertion de **(L4)**. Maintenant, on va aborder la preuve de la première partie de **(L4)**. nous allons montrer que

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^4_{\tau_D}} \int_{t^*}^{2t^*} \|(u_t(y), u_{tt}(y))\|^2_{\Psi_0^{\tau_D}} dy \leqslant c, \tag{5.102}$$

où $u(t)$ désigne la première composante de $S_{\tau_D}(t)z$.

On multiplie (5.1) par Au_t, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\tau_D\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|^2) + 2\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 = -2(A^{\frac{3}{2}}f(u), A^{\frac{1}{2}}u_t) \\ -2(A^{\frac{1}{2}}g(u(t)), A^{\frac{1}{2}}u_t(t).\end{aligned} \tag{5.103}$$

Grâce au lemme 5.5.2, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\tau_D\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}}u\|^2) + \|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2 \leqslant c.$$

Ainsi, en intégrant sur $(t^*, 2t^*)$, on trouve

$$\int_{t^*}^{2t^*} \|A^{\frac{1}{2}}u_t(y)\|^2 dy \leqslant c. \tag{5.104}$$

Ce qui donne la première partie de **(L4)**.

Multiplions (5.1) par $A^{-1}u_{tt}$, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|A^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 2(A^{\frac{3}{2}}u, A^{-\frac{1}{2}}u_t) + 2(A^{\frac{1}{2}}f(u), A^{-\frac{1}{2}}u_t)) + 2\tau_D\|A^{-\frac{1}{2}}u_{tt}\|^2 = \\ 2\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2 + 2(f'(u)u_t, u_t) - 2(g(u), A^{-1}u_{tt}).\end{aligned} \tag{5.105}$$

Compte tenu des estimations ci-dessus, une intégration sur $(t^*, 2t^*)$ permet d' obtenir la partie restante de **(L4).** ■

Comme dans le chapitre 3, nous avons la remarque suivante.

Remarque 5.7.5. *En fait, le coefficient de continuité de Hölder n'a pas besoin d' être indépendant de τ_D pour déduire la dimension fractale uniforme (par rapport à τ_D) de la famille d' attracteurs exponentiels robustes $\mathcal{M}_{\tau_D}$. Rappelons que la dimension fractale d' un ensemble (relativement) compact $\mathbb{K}$ dans un espace métrique $\mathbb{X}$ est définie par*

$$\dim_{\mathrm{F}}(\mathbb{K},\mathbb{X}) = \limsup_{\mu\to 0} \frac{\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})}{\log(\frac{1}{\mu})},$$

où $\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X}) = \log N_\mu(\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})$ représente l' entropie de Kolmogorov μ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{X}$, $N_\mu(\mathbb{H}_\mu(\mathbb{K},\mathbb{X})$ étant le nombre minimal de boules μ de $\mathbb{X}$ pour couvrir $\mathbb{K}$. Ainsi, si la constante dans la continuité de Hölder est indépendante de τ_D, comme c'est le cas ici, nous en déduisons que l' entropie de Kolmogorov μ de la famille des attracteurs exponentiels robustes est, pour $\mu > 0$ fixeé, limitée par le haut, indépendamment de τ_D.

5.8 Simulations Numériques

Pour les simulations numériques du modèle, nous réécrivons (5.1) sous la forme équivalente suivante (voir [44, 41]) :

$$(H)\begin{cases} \tau_D u_{tt} + u_t - \Delta\mu + g(u) = 0, \\ \\ \mu = -\Delta u + f(u), \end{cases}$$

où $\tau_D \geq 0$ est le paramètre de relaxation.

Nous considérons une approche par éléments finis P_1 et une discrétisation temporelle d' Euler semi-implicite. Soit T_h la triangulation de $\overline{\Omega}$ et $V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega});\ v_h = 0\ on\ \partial\overline{\Omega}\ v_h|_K \in P_1,\ \forall K \in T_h\}$ l' espace des éléments finis. Nous désignons par $\Delta t > 0$ le pas de temps. La formulation variationnelle du modèle semi-discrétisé est la suivante.

Soit $u^0, u^1 dans V_h$ et pour $n = 1, 2, \cdots$, trouver $u^{n+1}, \mu^{n+1} \in H_0^1(\Omega) = V$, tel que

$$(\tau_D \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \chi) + (\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \chi) + (\nabla\mu^{n+1}, \nabla\chi) + (g(u^n), \chi) = 0, \tag{5.106}$$

$$(\mu^{n+1}, \psi) = (\nabla u^{n+1}, \nabla\psi) + f(u^n), \psi), \tag{5.107}$$

pour tout $\chi, \psi \in V_h$ (notez que μ^0 et μ^1 ne sont pas nécessaires).

Remarque 5.8.1. *Dans le cas $g = 0$, le résultat de stabilité du schéma (5.106)-(5.107) a été obtenu dans [53].*

5.8.1 Simulations numériques dans une dimension spatiale

Les simulations numériques sont réalisées avec le logiciel Scilab (http ://www.scilab.org/). Dans les résultats numériques présentés ci-dessous, le domaine est $\Omega = [0, 1]$. Le maillage est égal à $h = \frac{1}{500}$ et le pas de temps à $\delta t = 0.00005$. Nous choisissons $\lambda_d = 240, M = 500, \varepsilon = 0.1$, $f(s) = \frac{1}{\varepsilon^2}(s^3 - s)$ et $g(s) = \lambda_d(s + 1) - \lambda_g(s + 1)^2(s - 1)^2$.

où λ_g et λ_d sont les coefficients de croissance et de mort des cellules tumorales (voir [30, 1]).

Dans les FIGURES 5.8.1 – 5.8.3, nous présentons l'évolution de la solution pour différentes itérations sous l' influence des paramètres τ_D, et λ_g .

Dans les FIGURES 5.8.4 – 5.8.6, nous montrons l' influence des paramètres τ_D, λ_g et λ_d sur l' évolution de la décomposition des phases. Nous prenons la condition initiale aléatoire sur un maillage grossier. Dans les trois cas, la solution u du (5.1)-(5.3) évolue de u_0 vers un état stable. Le paramètre de relaxation τ_D correspond à un temps d' amortissement typique des oscillations. On peut voir dans la figure 5.8.5, que nous avons mis 5 fois plus de temps que dans la figure 5.8.6 pour l' amortissement.

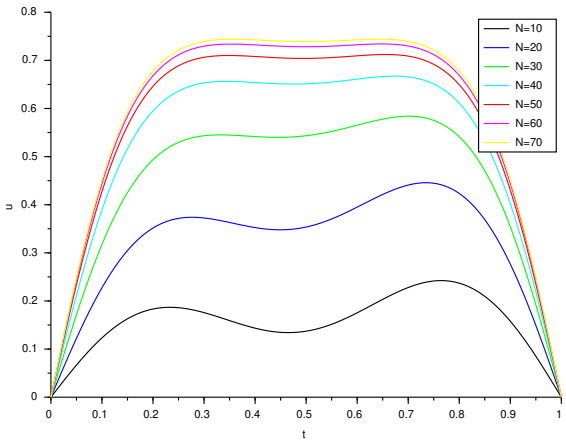

FIGURE 5.8.1. *Évolution de la solution toutes les 10 itérations. Dans ce cas, nous prenons* $N = 70$, $\lambda_d = 240$, $\lambda_g = 560$ *et* $\tau_D = 0$, *c'est-à-dire l' équation classique de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Le pas de temps est* $\Delta t = 5.10^{-5}$

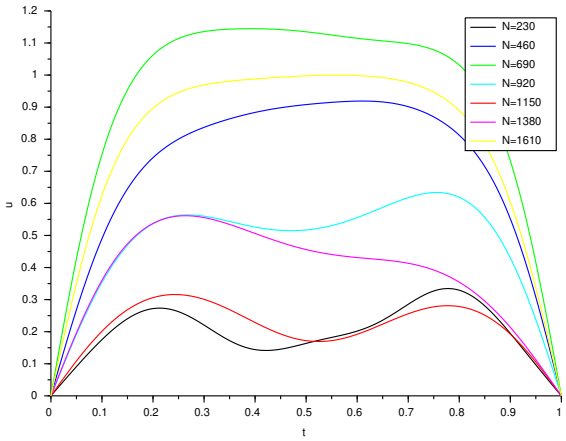

FIGURE 5.8.2. *Évolution de la solution après chaque 230 itérations. Dans ce cas, nous prenons* $N = 1650$, $\lambda_d = 240$, $\lambda_g = 560$ *et* $\tau_D = 0.1$, *c'est-à-dire la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Le pas de temps est* $\Delta t = 5.10^{-5}$

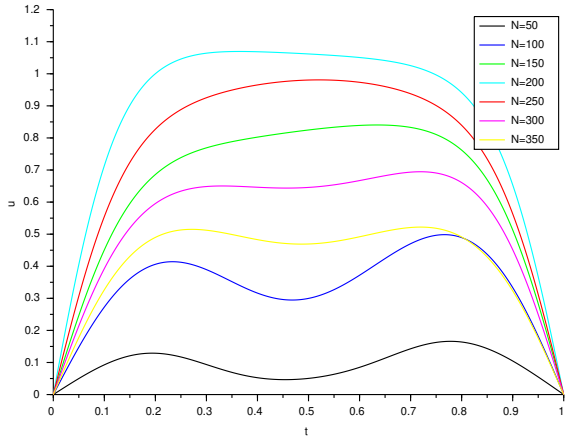

FIGURE 5.8.3. *Évolution de la solution toutes les 50 itérations. Dans ce cas, nous prenons* $N = 350$, $\lambda_d = 240$, $\lambda_g = 560$ *et* $\tau_D = 0.01$, *c'est-à-dire la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Le pas de temps est* $\Delta t = 5.10^{-5}$

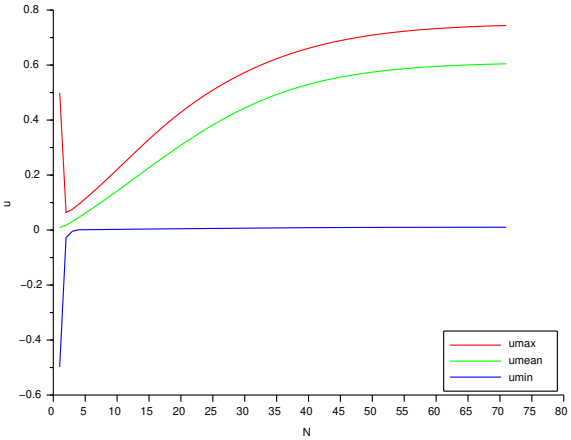

FIGURE 5.8.4. *Évolution de* u_{max}, u_{min} *et* u_{moy} *pour 70 itérations. Dans ce cas, nous prenons* $\tau_D = 0.0$ *et* $\lambda_d = 240$, $\lambda_g = 560$, *c'est-à-dire l' équation classique de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Le pas de temps est* $\Delta t = 5.10^{-5}$

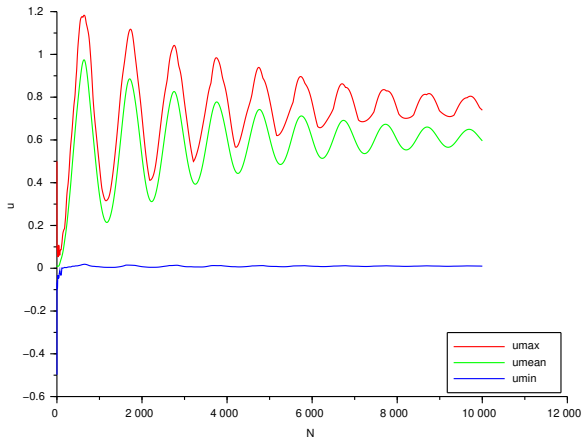

FIGURE 5.8.5. *Évolution de u_{max}, u_{min} et u_{moy} pour 10000 itérations. Dans ce cas, nous prenons $\lambda_d = 240$, $\lambda_g = 560$ et $\tau_D = 0.1$, c'est-à-dire la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Le pas de temps est $\Delta t = 5.10^{-5}$*

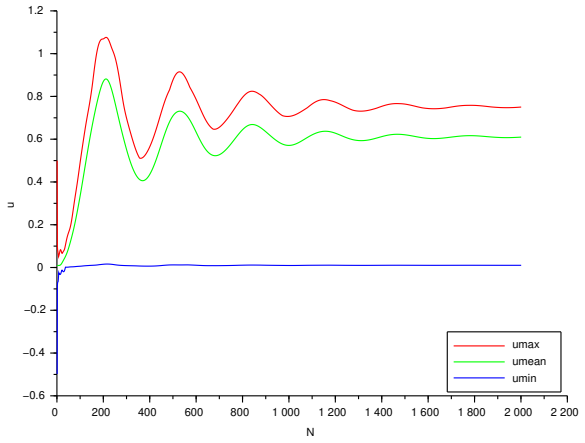

FIGURE 5.8.6. *Évolution de u_{max}, u_{min} et u_{moy} pour 2000 itérations. Dans ce cas, nous prenons $\lambda_d = 240$, $\lambda_g = 560$ et $\tau_D = 0.01$, c'est-à-dire la relaxation hyperbolique de l' équation de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Le pas de temps est $\Delta t = 5.10^{-5}$*

Chapitre 6

Convergence d' attracteurs exponentiels pour une discrétisation en temps linéaire du modèle de Cahn-Hilliard avec un terme source

Résumé : Nous considérons une discrétisation en temps linéaire (IMEX) de l'équation de Cahn-Hilliard avec un terme source, muni de conditions aux limites de Dirichlet. Pour chaque pas de temps suffisamment petit, nous construisons un attracteur exponentiel du système dynamique en temps discret associé à la discrétisation. Nous prouvons que, lorsque le pas de temps tend vers 0, cet attracteur converge pour la distance symétrique de Hausdorff vers un attracteur exponentiel du système dynamique en temps continu associé à l' EDP. Nous prouvons également que la dimension fractale de l' attracteurs exponentiels (et par conséquent, de l' attracteur global) est bornée par une constante indépendante du pas de temps. Les résultats s' appliquent aussi à l' équation classique de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis,
▷ Dieunel DOR and Morgan PIERRE, A robust family of exponential attractors for a linear discretization of Cahn-Hilliard equation with a source term.submitted, 2023 .

6.1 Presentation du problème continu

Le modèle se présente comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta f(u) + g(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \tag{6.1}$$

$$u = \Delta u = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{6.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{6.3}$$

où u correspond à une concentration, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 1, 2, 3)$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ le bord régulier et f est le potentiel polynomial et g le terme source.

Lorsque $g = 0$, l' équation (6.1) est connue sous le nom de l' équation de Cahn-Hilliard (voir [5]) et a été largement étudiée (voir [64] et les références citées). La généralisation avec un terme source g a suscité beaucoup d' intéret ces dernières années, notamment pour les applications en biologie (voir [29, 48, 36]).

l' équation (6.1) associe à des conditions aux limites de Dirichlet (6.2) a été analysée dans [29, 62] avec differentes hypothèses sur f et g (voir aussi [21]). En particulier, l' existence des solutions globales dans le temps a été démontrée, et leur comportement asymptotique a été étudiée. l' existence d' attracteurs de dimension finie a été établie. Des simulation numeriques ont été réalisées, par exemple, dans [1, 29, 55].

Pour $g \neq 0$, le système (6.1)-(6.2) n'est plus un flux de gradient et il n'existe aucun fonctionnel d' energie associé. Cependant, l' equation aux dérivées partielles (6.1)-(6.2) reste un système dissipatif si f satisfait une hypothèse standard de dissipativité (6.8) et si g est subordonné à f. Nous démontrons dans ce chapitre que le système dynamique discret dans le temps associé au schema IMEX est également dissipatif si le pas de temps est suffisamment petit. Typiquement, f peut etre la nonlinéarité cubique qui est modifiée en une fonction affine en dehors d' un intervalle compact comme dans (6.12). En revanche, un choix typique pour g est le terme symport.

$$g(s) = \frac{ks}{k' + |s|} \quad (s \in \mathbb{R}), \tag{6.4}$$

où $k, k' > 0$ [56, 57, 68]. Notre analyse inclut également le cas $g = 0$ (l' équation classique de Cahn-Hilliard).

6.1.1 Notations et Hypothèses

Le potentiel f vérifie :

$$f \in C^{1,1}(\mathbb{R}), \quad f(0) = 0, \tag{6.5}$$

$$f' \text{ est borné sur } \mathbb{R}, \tag{6.6}$$

$$f' \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux et } f'' \text{ est borné sur } \mathbb{R}, \tag{6.7}$$

$$\lim_{|s| \to \infty} \inf f'(s) > 0. \tag{6.8}$$

Le terme symport g satisfait :

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \tag{6.9}$$

$$g \text{ est borné sur } \mathbb{R}, \tag{6.10}$$

$$g' \text{ est borné sur } \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Exemple 6.1.1. *La fonction g définie par (6.4) satisfait (6.9)-(6.11). Si $g = 0$, alors g satisfait également (6.9)-(6.11) et l' équation (6.1) devient l' équation classique de Cahn-Hilliard .*

Nous avons les remarques suivant concernant les termes non-linéaires ;

Remarque 6.1.2. *Nous notons que $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f'' bornée sur $\mathbb{R}$, alors l' hypothèse (6.7) est satisfaite. Cependant, l' hypothèse plus faible (6.7) est intéresante car elle permet la regularisation habituelle de la non-linéarité cubique $s^3 - s$, définie par*

$$f(s) = f_K(s) = \begin{cases} (3K^2-1)s - 2K^3, & s > K, \\ s^3 - s, & s \in [-K, K], \\ (3K^2-1)s + 2K^3, & s < -K, \end{cases} \tag{6.12}$$

où $K \geq 1$. Ainsi , é $f_K \in C^1(\mathbb{R})$ a une croissance linéaire à $\pm\infty$ avec

$$\max_{s\in\mathbb{R}} |f_K'(s)| = 3K^2 - 1.$$

Cette régularisation est très populaire pour le schema IMEX [3, 76].

Remarque 6.1.3. *La croissance de g est controlée par la croissance de f afin de garentir que l' equation aux derivées partielles est dissipative (voir, [62, remarque 2.1]). Si nous supprimons l' hypothèse (6.10), la dissipativité n'est plus garantie. En effet, prenons é $f(s) = s$ et $g(s) = -\alpha s$ ($s \in \mathbb{R}$) avec $\alpha > \lambda_1^2 + \lambda_1$ et $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre de l' operateur Laplace négatif avec des conditions aux limites de Dirichlet. Nous avons $-\Delta e_1 = \lambda_1 e_1$ où $e_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre associée à λ_1. Alors, la fonction $u(t) = e^{\beta t} e_1$ avec $\beta = \alpha - \lambda_1^2 - \lambda_1 > 0$ résout (6.1)-(6.2) mais $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$.*

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \quad W = H^2(\Omega),$$

et on note V' l' espace de dual de V.
Le symbole $< ., . >$ représente le produit de dualité entre V et V'. On note ensuite par $\| . \|$ la norme usuelle dans H (avec $((., .))$ le produit scalaire associé) et $\| . \|_{-1} = \|(-\Delta)^{-1} . \|$, où $-\Delta$ est l' opérateur associé aux conditions limites de Dirichlet. Plus généralement, $\| . \|_X$ est la norme dans l' espace de Banach X. L' espace V est muni du produit scalaire

$$((u, v)) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \tag{6.13}$$

et de la norme correspondante.

On note aussi $A : D(A) \to H$ l' opérateur de Laplace associé avec des conditions aux limites de Dirichlet. l' opérateur A est un opérateur strictement positif avec $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$. On définit ensuite pour $s \in \mathbb{R}$, les puissances de A par :

$$A^s : D(A^s) \to H.$$

Si $s_1 < s_2$, alors l' espace $D(A^{s_2})$é est inclus de manière continue dans $D(A^{s_1})$, c'est-à-dire que

$$\|v\|_{2s_1} \leq c_S \|v\|_{2s_2}, \quad \forall v \in D(A^{s_2}), \tag{6.14}$$

où la constante positive c_S dépend de s_1 et s_2.

d' après (6.5)-(6.6), l' application $v \mapsto f(v)$ est continuement Lipschitzienne de H dans H et de V dans V et nous avons :

$$\|f(v) - f(w)\| \leq L_f \|v - w\|, \quad \forall v, w \in H, \tag{6.15}$$

où $L_f = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f'(s)|$. De même, d' après (6.9)-(6.10), l' application $v \mapsto g(v)$ est continuement Lipschitzienne de H dans H et de V dans V et nous avons :

$$\|g(v)\| \leq c_g, \quad \forall v \in H, \tag{6.16}$$

$$\|g(v) - g(w)\| \leq L_g \|v - w\|, \quad \forall v, w \in H. \tag{6.17}$$

On définit F par

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt. \tag{6.18}$$

On déduit de (6.8) que

$$F(s) \geq \gamma_1 s^2 - \gamma_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ où } \gamma_1 > 0, \ \gamma_2 \geq 0. \tag{6.19}$$

Grâce à (6.6), on déduit

$$F(s) \leq \gamma_3 s^2 + \gamma_4, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ où } \gamma_3 > 0, \ \gamma_4 \geq 0. \tag{6.20}$$

Grâce à (6.8), nous avons aussi

$$f(s)s \geq \gamma_5 s^2 - \gamma_6, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ où } \gamma_5 > 0, \ \gamma_6 \geq 0, \tag{6.21}$$

et

$$f'(s) \geq -\gamma_7, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ où } \gamma_7 \geq 0. \tag{6.22}$$

l' hypothèse (6.7) implique que f'' a un nombre fini de discontinuités (les points anguleux de f'). Ici, f'' désigne la dérivée distributionnelle de f', car $C^{1,1}(\mathbb{R}) = W^{2,\infty}(\mathbb{R})$. De plus, la règle de chaine suivante est vérifiée [39, Theorem 7.8] : si $v \in H^1(\Omega)$, alors $f'(v) \in H^1(\Omega)$ et

$$\nabla f'(v) = f''(v)\nabla v.$$

En consequence, si $v \in H^2(\Omega)$, alors $f(v) \in H^2(\Omega)$ et

$$\Delta f(v) = f''(v)\Delta v + f'(v)|\nabla v|^2. \tag{6.23}$$

Nous utilisons ici le fait que $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ puisque $d \leq 3$, ce qui implique que $\|\nabla v\|^2 \in L^2(\Omega)$.

6.2 Estimations a priori

Dans cette section, nous allons établir un ensemble d' estimations a priori du système (6.1)-(6.3) qui seront utilisées dans la suite pour montrer l' existence, la régularité ainsi que la dissipativité de la solution.

Proposition 6.2.1 (Ensemble absorbant dans $L^2(\Omega)$)**.** *Nous avons*

$$\|u(t)\|^2 + e^{-\varepsilon_0 t}\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq C_0\|u(0)\|^2 e^{-\varepsilon_0 t} + M_0, \quad t \geq 0, \tag{6.24}$$

où les constantes positives ε_0, C_0 *et* M_0 *sont indépendantes de* $u(0)$.

Démonstration :
Multiplions (6.1) par $(-\Delta)^{-1}u$ et intégrons sur Ω, nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{-1}^2 + 2\|\nabla u\|^2 + 2(f(u), u) + 2(g(u), (-\Delta)^{-1}u) = 0 \tag{6.25}$$

En utilisant (6.21),(6.16), (6.14) et les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}(f(u), u) &\geq c_1\int_\Omega u^2 dx - c_2\\ &\geq c_1\|u\|^2 - c_2, \quad c_1 = \gamma_5 > 0,\ c_2 \geq 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(g(u), (-\Delta)^{-1}u)| &\leq \|g(u)\|\,\|(-\Delta)^{-1}u\|\\ &\leq c_g c_S\|u\|\\ &\leq \frac{c_1}{2}\|u\|^2 + \frac{c_g^2 c_S^2}{2c_1}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (6.25), nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{-1}^2 + c_3(\|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) \leq c_4, \quad c_3 = \min(2, \frac{c_1}{2}) > 0, \ \ c_4 \geq 0. \tag{6.26}$$

On multiplie (6.1) par u et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|\Delta u\|^2 + 2(\nabla u f(u), \nabla u) + 2(g(u,), u) = 0. \tag{6.27}$$

Grâce à (6.22), (6.16) et aux inégalités de Young et de Poincaré, on déduit

$$(f'(u)\nabla u, \nabla u) \geq -\gamma_7\|\nabla u\|^2, \quad \gamma_7 > 0$$

et

$$\begin{aligned}|(g(u), u)| &\leq \|g(u)\|\,\|u\|\\ &\leq c_g\|u\|\\ &\leq \gamma_7\|u\|^2 + \frac{c_g^2}{4\gamma_7}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (6.27), nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\|\Delta u(t)\|^2 \leq 2\gamma_7(\|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) + c_5, \quad c_5 = c_5(c_g, \gamma_7) \geq 0. \tag{6.28}$$

En additionnant (6.26) et α fois (6.28), où $\alpha > 0$ est suffisamment petit, nous concluons que

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + c_6(E_1(t) + \|\Delta u(t)\|^2) \leq c_7, \quad c_6 > 0,\ c_7 \geq 0, \tag{6.29}$$

où

$$E_1(t) = \alpha\|u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2_{-1}.$$

En particulier,

$$E_1(t) \geq \alpha\|u(t)\|^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (6.29) (voir, par exemple, [77]), on obtient

$$E_1(t) + c_6 e^{-c_6 t}\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq E_1(0)e^{-c_6 t} + \frac{c_7}{c_6}, \quad c_6 > 0, \quad t \geq 0. \tag{6.30}$$

On obtient donc le résultat de la proposition 6.2.1.

Proposition 6.2.2 (Ensemble absorbant dans $H^1(\Omega)$)**.** *Nous avons*

$$\|\nabla u(t)\|^2 + e^{-\varepsilon_1 t}\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{-1} ds \leq C_1\|\nabla u(0)\|^2 e^{-\varepsilon_1 t} + M_1, \tag{6.31}$$

où les constantes strictements positives ε_1, C_1 et M_1 sont independantes de $u(0)$.

Démonstration :
En testant (6.1) par $(-\Delta)^{-1}u_t$ et en intégrant sur Ω, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + 2\|u_t\|^2_{-1} + 2(f(u), u_t) + 2(g(u), (-\Delta)^{-1}u_t) = 0. \tag{6.32}$$

En utilisant (6.16), (6.18) et les inégalités de Young et de Poincaré, on en déduisant que

$$\begin{aligned} |(g(u), (-\Delta)^{-1}u_t)| &\leq \|g(u)\|\,\|(-\Delta)^{-1}u_t\| \\ &\leq c_g\|u_t\|_{-1} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{-1} + \frac{c_g^2}{2} \end{aligned}$$

et

$$(f(u), u_t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u)dx.$$

On obtient donc

$$\frac{d}{dt}E_2(t) + \|u_t(t)\|^2_{-1} \leq c_g^2, \quad t \geq 0, \tag{6.33}$$

où

$$E_2(t) = \|\nabla u(t)\|^2 + 2(F(u), 1).$$

En additionnant (6.29) et β fois (6.33), où $\beta > 0$ est suffisamment petit, nous déduisons que

$$\frac{d}{dt}E_3(t) + c_8(E_1(t) + \|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2_{-1}) \leq c_9, \quad t \geq 0, \tag{6.34}$$

où $c_8 = \min(c_6, \beta) > 0$, $c_9 = c_9(c_7, c_g) \geq 0$ et

$$E_3(t) = E_1(t) + \beta\|\nabla u(t)\|^2 + 2\beta(F(u), 1).$$

Par (6.19), nous avons

$$E_3(t) \geq c_{10}(\|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2) - c_{11}, \quad c_{10} > 0, \ c_{11} \geq 0 \tag{6.35}$$

et par (6.20), on a

$$E_3(t) \leq c\|\nabla u\|^2 + c', \quad c, c' > 0. \tag{6.36}$$

Nous déduisons de (6.34) que

$$\frac{d}{dt}E_3(t) + c_{12}(E_3(t) + \|u_t(t)\|_{-1}^2) \leq c_{13}. \tag{6.37}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (6.37) donne

$$E_3(t) + c_{12}e^{-c_{12}t}\int_0^t \|u_t(s)\|_{-1}^2 ds \leq E_3(0)e^{-c_{12}t} + c_{13}, \quad t \geq 0. \tag{6.38}$$

d' où le résultat de la proposition 6.2.2.

Proposition 6.2.3 (Ensemble absorbant dans $H^2(\Omega)$)**.** *Nous avons*

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leq Q_2(\|\Delta u(0)\|)e^{-\varepsilon_2 t} + M_2, \quad t \geq 0, \tag{6.39}$$

et

$$\int_0^t \|\Delta^2 u(s)\|^2 ds \leq Q_2(\|\Delta u(0)\|) + C_2 t, \quad t \geq 0, \tag{6.40}$$

où la fonction monotone Q_2 et les constantes strictements positives ε_2, M_2 et C_2 sont indépendantes de $u(0)$.

Démonstration :
Nous multiplions (6.1) par $\Delta^2 u$ et nous intégrons sur Ω, alors nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2 + 2\|\Delta^2 u\|^2 + 2(g(u), \Delta^2 u) = 2(\Delta f(u), \Delta^2 u). \tag{6.41}$$

En utilisant (6.16) et l' inégalité de Young, nous trouvons

$$\begin{aligned} |(g(u), \Delta^2 u)| &\leq \|g(u)\| \, \|\Delta^2 u\| \\ &\leq c_g\|\Delta^2 u\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|\Delta^2 u\|^2 + c_g^2. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} |(\Delta f(u), \Delta^2 u)| &\leq \|\Delta f(u)\| \, \|\Delta^2 u\| \\ &\leq \|\Delta f(u)\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta^2 u\|^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2 + \|\Delta^2 u\|^2 \leq 2\|\Delta f(u)\|^2 + 2c_g^2. \tag{6.42}$$

En utilisant la règle de chaîne (6.23), les hypothèses (6.6)-(6.7) et des inégalités d' interpolation, nous obtenons (voir [69, 77])

$$\begin{aligned}\|\Delta f(u)\| &\leq \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta u\| + \|f''(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}\\ &\leq c_{f'}\|\Delta u\| + c_{f''}\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}\\ &\leq c'_{f'}\|u\|^{\frac{2}{3}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{3}}_{H^4(\Omega)} + c'_{f''}\|u\|^2_{H^{\frac{7}{4}}}, \quad H^{\frac{3}{4}} \subset L^4(\Omega)\\ &\leq c'_{f'}\|u\|^{\frac{2}{3}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{3}}_{H^4(\Omega)} + c''_{f''}\|u\|^{\frac{3}{4}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{4}}_{H^4(\Omega)}\\ &\leq \text{(grâce à l' estimation (6.26))}\\ &\leq c''_{f'}(R_1)\|u\|^{\frac{1}{3}}_{H^4(\Omega)} + c'''_{f''}(R_1)\|u\|^{\frac{1}{4}}_{H^4(\Omega)}, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

où $R_1 = \|\nabla u(0)\|$. Puisque la norme $v \mapsto \|\Delta^2 v\|$ est équivalente à la norme usuelle de $D(A^2)$, nous avons

$$\|\Delta f(u)\|^2 \leq c_{14}\|\Delta^2 u\|^{\frac{2}{3}} + c_{15}\|\Delta^2 u\|^{\frac{1}{2}}, \tag{6.43}$$

où $c_{14} = c_{14}(f', R_1)$ et $c_{15} = c_{15}(f'', R_1)$. Ainsi, par l' inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}\|\Delta f(u)\|^2 &\leq \frac{1}{8}\|\Delta^2 u\|^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}} c_{14}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\|\Delta^2 u\|^2 + \frac{3}{4}\times 2^{\frac{1}{3}} c_{15}^{\frac{4}{3}}\\ &\leq \frac{1}{4}\|\Delta^2 u\|^2 + c_{16}, \quad c_{16} = c_{16}(c_{14}, c_{15}) \geq 0.\end{aligned} \tag{6.44}$$

Cette estimation, combinée avec (6.42), donne

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u(t)\|^2 ds \leq c_{-(\mu^{n+1},\psi)17}, \quad c_{17} = 2c_g^2 + c_{16}(R_1) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{6.45}$$

l' estimation dissipative (6.26) montre qu'il existe un temps $t_1 = t_1(R_1)$ tel que $\|\nabla u(t)\|^2 \leq C_1 + M_1$, pour tout $t \geq t_1$. En intégrant (6.45) sur l' intervalle $[0, t]$ pour $t \leq t_1$, nous obtenons

$$\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta^2 u(s)\|^2 ds \leq \|\Delta u(0)\|^2 + c_{17}t_1(R_1), \quad t \in [0, t_1]. \tag{6.46}$$

Pour $t \geq t_1(R_1)$, les constantes c_{14} et c_{15} dans (6.43) ne dépendent pas de R_1 et par conséquent, nous pouvons reformuler (6.45) comme suit

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u(t)\|^2 + c_{18}\|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta^2 u(t)\|^2 \leq c_{17}, \quad t \geq t_1(R_1), \tag{6.47}$$

où $c_{18} > 0$ et c_{17} ne dépendent pas de R_1. En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leq \|\Delta u(t_1)\|^2 e^{-c_{18}(t-t_1)} + \frac{c_{17}}{c_{18}}, \quad t \geq t_1(R_1). \tag{6.48}$$

En intégrant sur $[t_1, t]$, nous déduisons également de (6.47) que

$$\frac{1}{4}\int_{t_1}^t \|\Delta^2 u(s)\|^2 ds \leq \|\Delta u(t_1)\|^2 + c_{17}(t - t_1), \quad t \geq t_1(R_1). \tag{6.49}$$

l' estimation dissipative (6.39) découle de (6.46) et (6.48). l' estimation (6.40) découle de (6.46) et (6.49). ■

6.3 Existence et unicité

Dans cette section, nous établissons l' existence et l' unicité de la solution du système. On a le résultat suivant.

Théorème 6.3.1. *1. Nous supposons que $u_0 \in V$, le système (6.1)-(6.3) possède une unique solution u telle que :*

$$u \in C^0([0,T],V) \cap L^2(0,T;D(A)), \quad \forall T>0$$
$$u_t \in L^2(0,T;V')$$

2. De plus, si $u_0 \in D(A)$ a lors la solution u du système (6.1)-(6.3) satisfait

$$u \in C^0([O,T],D(A)) \cap L^2(0,T;D(A^2)), \quad \forall T>0.$$

Démonstration : Existence : La preuve de l' existence de la solution est basée sur la méthode standard de Galerkin.
On considère l' opérateur $-\Delta$ associé à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et une suite de valeurs propres $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$. Soit $(\omega_i)_{i=1,\cdots,n}$ les vecteurs propres correspondants qui forment une base orthonormée dans H. Pour $n \in \mathbb{N}$, on cherche une fonction approchée u_n de la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} u_{i,n}\omega_i$$

vérifiant

$$\frac{du_n}{dt} + A^2u_n + Af(u_n) + g(u_n) = 0 \tag{6.50}$$
$$u_n(0) = u_{0,n} \tag{6.51}$$

En remplaçant u par u_n dans les estimations (6.38) et (6.30), on déduit que

$$u_n \text{ est borné dans } L^\infty(0,T;H\cap V)\cap L^2(0,T;W),$$
$$\tfrac{du_n}{dt} \text{ est borné dans } L^2(0,T;V'), \quad \forall T>0$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la continuité dans H par le lemme d' Aubin-Lions (voir [69]). La continuité dans V est obtenue par un argument standard (voir,[77]). Nous montrons d' abord que u est faiblement continue dans V, grâce au lemme de Strauss et nous remarquons que $t \mapsto \|\nabla u(t)\|^2$ est absolument continue puisque $\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2$ appartient à $L^1(0,T)$ d' après (6.27). Pour $u_0 \in D(A)$, la preuve de l' existence est basée sur l' estimation (6.39).
Unicité : Soient u_1 et u_2 deux solutions du système (6.1)-(6.3) avec des conditions initiales respectivement $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$. On pose

$$u_t + A^2u + A(f(u_1)-f(u_2)) + (g(u_1)-g(u_2)) = 0, \quad \text{dans } \Omega\times(0,+\infty), \tag{6.52}$$
$$u|_{t=0} = u_0(=u_{0,1}-u_{0,2}), \quad \text{dans } \Omega, \tag{6.53}$$
$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times(0,+\infty). \tag{6.54}$$

Multiplions (6.52) par u et intégrons sur Ω, on a

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|Au\|^2 + 2(f(u_1) - f(u_2, Au) + 2(g(u_1) - g(u_2), u) = 0. \tag{6.55}$$

En utilisant (6.6), (6.10) et l' inégalité de Young, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |(g(u_1) - g(u_2), u)| &\leq |g(u_1) - g(u_2)|\,\|u\| \\ &\leq L_g\|u\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(f(u_1) - f(u_2), Au)| &\leq |f(u_1) - f(u_2|\,\|Au\| \\ &\leq L_f\|u\|\,\|Au\| \\ &\leq \frac{L_f^2}{4}\|u\|^2 + \|Au\|^2. \end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations précédentes dans (6.55), on trouve

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \|Au(t)\|^2 \leq c_{f,g}\|u(t)\|^2, \quad c_{f,g} = (L_g + \frac{L_f^2}{4}) > 0, \quad t \geq 0. \tag{6.56}$$

On conclut finalement à partir de (6.56) et du lemme de Gronwall que

$$\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq e^{c_{f,g}t}\|u_{0,1} - u_{0,2}\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad t \geq 0. \tag{6.57}$$

Cela prouve l' unicité, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données initiales pour la norme $L^2(\Omega)$.

■

6.4 Dissipativité

Dans cette section, nous allons étudier l' existence des bornés absorbants des solutions du problème (6.1)-(6.3). Le théorème 6.3.1, nous a permis de défini une famille d' opérateurs continue sur l' espace des phases.

Le semi-groupe $S_0(t)$ défini par :

$$\begin{aligned} S_0(t) : D(A) &\to D(A) \\ u_0 &\mapsto u(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

satisfait $S(0) = \mathrm{Id}$ (Id est l' operateur identité), $S(s+t) = S(s) \circ S(t)$, $\forall s,\ t \geq 0$ et u est l' unique solution du système (6.1)-(6.3). Nous avons le résultat suivant.

Théorème 6.4.1. *Sous les hypothèses du théorème 6.3.1, le semi-groupe $\{S(t),\ t \geq 0\}$, associé avec le système (6.1)-(6.3) est dissipatif sur $D(A)$. Autrement dit, le semi-groupe $\{S(t),\ t \geq 0\}$, possède un ensemble borné absorbant B_0 dans $D(A)$*

Démonstration : On choisit les données initiales u_0 dans un borné B. Pour tout $R_0 > 0$, on a $u_0 \in B_{R_0}$, avec B_{R_0} une boule B de centre 0 et de rayon R_0. l' estimation (6.39) devient

$$\|\Delta u(t)\| \leq Q_2(\|\Delta u(0)\|)\, e^{-\varepsilon_2 t} + M_2, \quad t \geq 0. \tag{6.58}$$

Puisque les données initiales sont dans un borné, l' estimation (6.58) satisfait

$$\|\Delta u(t)\| \leq M(0)e^{-\varepsilon_2 t} + M_2, \quad t \geq 0, \tag{6.59}$$

avec $M_0 = M_0(R_0) > 0$. On peut prendre $N_0 > 0$ assez grand pour que

$$M_0 e^{-\varepsilon_2 t} + M_2 \leqslant N_0.$$

Donc la boule de centre 0 et de rayon N_0 est un borné absorbant pour le semi-groupe $\{S_0(t),\ t \geq 0\}$. On conclut que

$$\|\Delta u(t)\|^2 \leqslant N_0, \quad t \geqslant t_0, \tag{6.60}$$

avec $t_0 = t_0(R_0) = \max(0, -\frac{1}{\varepsilon_2}\ln(\frac{N_0 - M_2}{M_0}))$.

Remarque 6.4.2. *Il est facile de voir que l' on peut supposer, sans perte de généralité, que B_1 est positivement invariant par $S(t)$, c'est-à-dire que $S(t)B_1 \subset B_1,\ t \geq 0$.*

Nous énonçons aussi le résultat suivant

Théorème 6.4.3. *Le semi-groupe $S_0(t)$ possède un attracteur global $\mathcal{A} \subset D(A)$ qui est invariant ($S_0(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$), borné dans $H^2(\Omega)$, compact dans $L^2(\Omega)$, et qui attire les ensembles bornés de $D(A)$ pour la norme $L^2(\Omega)$.*

l' existence de l' attracteur global étant établi, nous intéressons à sa dimension. Il s' agit de la dimension de recouvrement telle que la dimension de Hausdorf ou la dimension fractale. Dans la section suivante, nous prouvons l' existence des attracteurs exponentiels qui impliquent que l' attracteur global est de dimension fractale finie.

6.5 Existence d' attracteurs exponentiels

Notre objectif dans cette section, c'est introduit des notions qui vont nous servir dans la construction de l' attracteurs exponentiels pour le semi-groupe $\{S_0(t),\ t > 0\}$, associé au problème (6.1)-(6.3). Pour cela, nous avons besoin que le semi-groupe soit lipschitzienne en espace, satisfait la Propriété de lissage et vérifie la continuité de Hölder en temps.

Soit u_1 et u_2 deux solutions du système (6.1)-(6.3) avec les données initiales $u_{0,1}$ et $u_{0,2}$, respectivement. On pose $u = u_1 - u_2$ et $u_0 = u_{0,1} - u_{0,2}$ et on a

$$u_t + A^2 u + A(f(u_1) - f(u_2)) + (g(u_1) - g(u_2)) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \tag{6.61}$$

$$u|_{t=0} = u_0 (= u_{0,1} - u_{0,2}), \quad \text{dans } \Omega, \tag{6.62}$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty). \tag{6.63}$$

De plus, il suffit ici de prendre des données initiales appartenant à l' ensemble absorbant borné B_1 défini dans la section précédente. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.5.1. *Si* $\|u_i(0)\|_{H^2(\Omega)} \leqslant R_2$*(i=1,2), alors pour tout* $t > 0$ *on a :*

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_S}{t} e^{(c(R_2)t)} \|u(0)\|^2 \tag{6.64}$$

Démonstration :
On multiplie (6.61) par $t(-\Delta)^{-1}u_t$ et on intègre sur Ω, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(t\|\nabla u\|^2) + 2t\|u_t\|^2_{-1} + 2t(g(u_1) - g(u_2), (-\Delta)^{-1}u_t) \\ +2t(f(u_1) - f(u_2), u_t) = \|\nabla u\|^2. \end{aligned} \tag{6.65}$$

En utilisant (6.17),(6.14) les inégalités de Young et de Poincaré, nous avons

$$\begin{aligned} |(g(u_1) - g(u_2), (-\Delta)^{-1}u_t)| &\leqslant \|g(u_1) - g(u_2)\| \, \|(-\Delta)^{-1}u_t\| \\ &\leqslant L_g\|u\| \, \|u_t\|_{-1} \\ &\leqslant L_g c_S\|\nabla u\| \, \|u_t\|_{-1} \\ &\leqslant L_g^2 c_S^2\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{-1}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons l' inégalité de Cauchy-Schwarz et l' inégalité de Poicaré, on a

$$\begin{aligned} &|(f(u_1) - f(u_2), u_t)| = |(A^{\frac{1}{2}}(f(u_1) - f(u_2)), A^{-\frac{1}{2}}u_t)| \\ &\leq \left\|\nabla\left(\int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1))dsu\right)\right\| \|u_t\|_{-1} \\ &\leq \left\|\int_0^1 f'(u_1 + s(u_2 - u_1))ds\nabla u\right\| \|u_t\|_{-1} \\ &+ \left\|\int_0^1 f''(u_1 + s(u_2 - u_1))(\nabla u_1 + s\nabla(u_2 - u_1))dsu\right\| \|u_t\|_{-1} \\ &\leq c_f\left(\|\nabla u\| + \||u| \, |\nabla u_1|\| + \||u| \, |\nabla u_2|\|\right) \|u_t\|_{-1} \\ &\leq c_f(\|\nabla u\| + \|u\|_{L^4(\Omega)}\left(\|\nabla u_1\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla u_2\|_{L^4(\Omega)}\right) \|u_t\|_{-1} \\ &\leq (\text{grâce à l' inclusion continue } H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)) \\ &\leq c(\|\nabla u\| + \|\nabla u\|\left(\|u_1\|_{H^2(\Omega)} + \|u_1\|_{H^2(\Omega)}\right) \|u_t\|_{-1} \\ &\leq (\text{puisque } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont bornés dans } H^2(\Omega) \text{ par (6.39)}) \\ &\leq c(R_2)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{-1}. \end{aligned} \tag{6.66}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (6.65), nous trouvons

$$\frac{d}{dt}(t\|\nabla u(t)\|^2) + t\|u_t(t)\|^2_{-1} \leq c't\|\nabla u(t)\|^2 + |\nabla u(t)\|^2, \quad c' = 2L_g^2c_S^2 + 2c(R_2). \tag{6.67}$$

Grâce au lemme de Gronwall, on trouve

$$t\|\nabla u(t)\|^2 \leq e^{c't}\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds, \quad t \geq 0.$$

Nous concluons à partir de (6.37) que (6.64) est vérifiée avec $c(R_2) = c' + c_{f,g}$.
l' estimation suivante montre que le semi-groupe est Hölder continu en temps.

Lemme 6.5.2. *Pour tout* $t_1, t_2 \geqslant 0$. *Si* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *alors*

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|^2 \leq Q_1(T, \|u_0\|_{H^2(\Omega)})|t_1 - t_2|. \tag{6.68}$$

Démonstration : Multiplions (6.1) par u_t et intégrons sur Ω, on trouve

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u(t)\|^2 + 2\|u_t(t)\|^2 + 2(\Delta f(u), u_t) + 2(g(u), u_t) = 0. \tag{6.69}$$

Grâce à (6.17) et aux inégalités de Young, Cauchy-Schwarz et d' interpolation, on déduit

$$\begin{aligned} |(g(u), u_t)| &\leq \|g(u)\| \, \|u_t\| \\ &\leq c_g\|u_t\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|u_t\|^2 + c_g^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(\Delta f(u), u_t)| &\leq \|\Delta f(u)\| \, \|u_t\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|u_t\|^2 + \|\Delta f(u)\|^2 \\ &\leq \text{proposition 6.2.3} \\ &\leq \frac{1}{4}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u(t)\|^2 + c_{16}(R_1). \end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (6.69), nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\|\Delta u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 \leq |\Delta^2 u(t)\|^2 + 2c_{16}(R_1) \qquad t \geq 0. \tag{6.70}$$

En intégrant sur $[0, T]$, nous obtenons

$$\|\Delta u(T)\|^2 + \int_0^T \|u_t(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \|\Delta^2 u(t)\|^2 dt + 2c_{16}(R_1)T.$$

.

Ainsi, d' après la proposition 6.2.3,

$$\int_0^T |u_t(t)|^2 dt \leq Q(|u(0)|_2, T), \tag{6.71}$$

où Q est une fonction continue et monotone de ses arguments.

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$. Suivant l' inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\| &= \|\int_{t_1}^{t_2} \frac{du}{dt} ds\| \\ &\leq |\int_{t_1}^{t_2} \|\frac{du}{dt}(t)\|^2 ds| \\ &\leq |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} |\int_{t_1}^{t_2} \|\frac{du}{dt}(t)\|^2 ds|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous déduisons de (6.71) que

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \leq Q(T, \|u_0\|_W)|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \tag{6.72}$$

Ce qui donne le résultat du lemme.

Nous déduisons finalement de (6.57), (6.64), (6.72) les résultats suivants (voir[69, 29])

Théorème 6.5.3. *Soit $\{S_0(t),\ t \geq 0\}$ un semi-groupe continu sur $D(A)$. Un ensemble borné $\mathcal{M} \subset D(A)$ est un attracteur exponentiel du système dynamique si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\mathcal{M}$ *est compact dans* $L^2(\Omega)$;

(ii) $\mathcal{M}$ *est positivement invariant,* $S_0(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \quad \forall t \geq 0$;

(iii) $\mathcal{M}$ *a une dimension fractale finie dans* H ;

(iv) $\mathcal{M}$ *attire exponentiellement le sous-ensemble borné de* $D(A), \forall B \subset D(A)$ *borné,*

$$\mathrm{dist_H}(S_0(t)B, \mathcal{M}) \leq Q(\|B\|_H)e^{-ct}, \quad c > 0, \ \ t \geq 0$$

où la constante c est indépendante de B et $dist_H$ désigne la semi-distance de Hausdorff entre les ensembles définis par

$$\mathrm{dist_H}(A, B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|_H$$

Corollaire 6.5.4. *Le semi-groupe $S_0(t)$ possède l' attracteur global de dimension finie $\mathcal{A} \subset B_1$.*

6.6 Présentation du problème semi-discret

Pour la semi-discrétisation temporelle, nous appliquons le schéma d' Euler semi-implicites à (6.1). Tout au long de cette section, $\delta t > 0$ désigne le pas de temps. Le schéma est le suivant : soit $u^0 \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et pour $n = 0, 1, 2, \cdots$, soit $u^{n+1} \in D(A)$ résoudre

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + A^2u^{n+1} + Af(u^n) + g(u^n) = 0, \tag{6.73}$$

$$u^{n+1} = \Delta u^{n+1} = 0. \tag{6.74}$$

Il s' agit d' un schéma linéaire connu sous le nom de schéma IMEX (Implicit-Explicit) : à chaque pas de temps, u^{n+1} est calculé en résolvant un système linéaire dont le second membre dépend de u^n. Grâce à la régularité elliptique, pour $u^n \in D(A)$, u^{n+1} est unique et appartient à $D(A)$. Le résultat suivant montre que le semi-groupe discret $S_{\delta t}^n u^0 = u^n$ est bien défini sur $D(A)$.

Théorème 6.6.1. *Supposons que $\delta t \leq 1/(2L_g)$, où L_g est la constante dans (6.17). Alors, pour chaque $u^n \in D(A)$, il existe un unique $u^{n+1} \in D(A)$ qui résout (6.74). De plus, l' application $S_{\delta t} : u^n \mapsto u^{n+1}$ est lipschitzienne pour la norme $L^2(\Omega)$ de $D(A)$ dans $D(A)$.*

La continuité lipschitzienne dans $L^2(\Omega)$ découle de (6.114).
Le résultat de régularité suivant sera utile :

Lemme 6.6.2. *Si $u^n \in D(A)$, alors $u^{n+1} = S_{\delta t}u^n$ appartient à $D(A^2)$ et*

$$\delta t\|A^2u^{n+1}\|^2 \leq 2\|\Delta u^n\|^2 + C\delta t\left(\|\Delta u^n\|^4 + 1\right), \tag{6.75}$$

où la constante positive C est indépendante de δt et de u^n. De plus,

$$\|\Delta u^{n+1}\|^2 \leq \|\Delta u^n\|^2 + C\delta t\left(\|\Delta u^n\|^4 + 1\right). \tag{6.76}$$

Démonstration : L' équation (6.74), devient

$$u^{n+1} - u^n + \delta t A^2 u^{n+1} = \delta t\, h, \tag{6.77}$$

où $h = \Delta f(u^n) - g(u^n)$. Grâce à la règle de chaîne (6.23), $h \in L^2(\Omega)$ avec

$$\begin{aligned} \|h\| &\leq \|f'(u^n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\Delta u^n\| + \|f''(u^n)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u^n\|^2_{L^4(\Omega)} + \|g(u^n)\| \\ &\leq (H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)) \\ &\leq c_{f'}\|\Delta u^n\| + c_{f''}c_S^2\|\Delta u^n\|^2 + c_g. \end{aligned} \tag{6.78}$$

Puisque u^n, u^{n+1} et h appartiennent à $L^2(\Omega)$, nous déduisons de (6.77) que $u^{n+1} \in D(A^2)$. Ensuite, nous prenons le produit scalaire dans L^2 de (6.77) avec $u^{n+1} - u^n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u^{n+1} - u^n\|^2 + \delta t\|\Delta u^{n+1}\|^2 &= \delta t(\Delta u^{n+1}, \Delta u^n) + \delta t(h, u^{n+1} - u^n) \\ &\leq \delta t\|\Delta u^{n+1}\|\,\|\Delta u^n\| + \delta t\|h\|\,\|u^{n+1} - u^n\|. \end{aligned}$$

Nous déduisons de l' inégalité de Young que

$$\|u^{n+1} - u^n\|^2 + \delta t\|\Delta u^{n+1}\|^2 \leq \delta t\|\Delta u^n\|^2 + \delta t^2\|h\|^2. \tag{6.79}$$

Maintenant, nous prenons le produit scalaire L^2 de (6.77) avec A^2u^{n+1}. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta t\|A^2u^{n+1}\|^2 &= -(u^{n+1} - u^n, A^2u^{n+1}) + \delta t(h, A^2u^{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{\delta t}\|u^{n+1} - u^n\|^2 + \frac{\delta t}{4}\|A^2u^{n+1}\|^2 + \delta t\|h\|^2 + \frac{\delta t}{4}\|A^2u^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, d' après (6.79),

$$\delta t\|A^2u^{n+1}\|^2 \leq 2\|\Delta u^n\|^2 + 4\delta t\|h\|^2.$$

En utilisant (6.78), nous obtenons (6.75). De plus, à partir de (6.79) et (6.78), nous déduisons également que

$$\begin{aligned} \|\Delta u^{n+1}\|^2 &\leq \|\Delta u^n\|^2 + \delta t\|h\|^2 \\ &\leq \|\Delta u^n\|^2 + C\delta t\left(\|\Delta u^n\|^4 + 1\right). \end{aligned}$$

Donc, on trouve le resultat de l' estimation (6.76).

6.7 Estimations a priori de la solution, uniforme en δt

Dans cette section, nous commençons par établir des estimations a priori du schéma (6.73). l' identité bien connue suivante sera très utile

$$(a - b, a)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a - b\|^2), \quad a,\, b \in L^2(\Omega). \tag{6.80}$$

Dans (6.80), nous pouvons également remplacer le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$ par un autre produit scalaire et la norme qui lui est associée. Nous rappelons le lemme de Gronwall discret suivant.

Lemme 6.7.1. *Soient $C, \gamma > 0$ et $(a_n), (b_n)$ deux suites de nombres réels non négatifs tels que*

$$a_{n+1} + \delta t b_{n+1} \leq (1 - \gamma\delta t)a_n + \delta t C, \quad \forall n \geq 0, \tag{6.81}$$

où $\delta t \in (0, 1/(2\gamma)]$. Alors, pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$a_n \leq e^{-n\gamma\delta t} a_0 + \frac{C}{\gamma} \tag{6.82}$$

et

$$\delta t \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} \leq a_0 + n\delta t C. \tag{6.83}$$

Par convention, pour $n = 0$, la somme dans le membre de gauche de (6.83) est égale à zéro.

Démonstration : Puisque

$$a_{n+1} \leq (1 - \gamma\delta t)a_n + \delta t C, \quad \forall n \geq 0,$$

nous trouvons par récurrence que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} a_n &\leq (1 - \gamma\delta t)^n a_0 + \delta t C \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \gamma\delta t)^k \\ &\leq (1 - \gamma\delta t)^n a_0 + \frac{C}{\gamma}. \end{aligned}$$

Par convexité, nous avons $1 - s \leq e^{-s}$ pour tout $s \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n \leq e^{-n\gamma\delta t} a_0 + \frac{C}{\gamma}.$$

Ceci est l' équation (6.82). En utilisant (6.83), nous avons également que

$$a_{n+1} + \delta t b_{n+1} \leq a_n + \delta t C, \quad \forall n \geq 0.$$

En faisant la somme de $n = 0$ à $n = N - 1$, nous trouvons que

$$a_N + \delta t \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \leq a_0 + N\delta t C.$$

Cela conduit à l' estimation (6.83).

Nous avons le premier résultat de la dissipativité suivant.

Proposition 6.7.2 (Ensemble absorbant dans $L^2(\Omega)$)**.** *Si δt est suffisamment petit, alors*

$$\|u_n\|^2 \leq C_0 \|u_0\|^2 e^{-\varepsilon_0 n\delta t} + M_0, \quad \forall n \geq 0, \tag{6.84}$$

et

$$\delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\Delta u_{k+1}\|^2 \leq C_0' \|u_0\|^2 + n\delta t M_0', \quad \forall n \geq 0, \tag{6.85}$$

où les constantes strictements positives C_0, ε_0, M_0, C_0' et M_0' sont indépendants de u_0 et δt.

Démonstration : Multiplions (6.73) par $(-\Delta)^{-1}u^{n+1}$ et intégrons sur Ω, nous obtenons

$$\frac{1}{2\delta t}(\|u^{n+1}\|_{-1}^2 - \|u^n\|_{-1}^2 + \|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2) + \|\nabla u^{n+1}\|^2 + (f(u^{n+1}),u^{n+1}) \\ +(f(u^n)-f(u^{n+1}),u^{n+1}) + (g(u^n),(-\Delta)^{-1}u^{n+1}) = 0. \tag{6.86}$$

Grâce à (6.16),(6.15),(6.14),(6.21), aux inégalités de Young et de Poincaré, on déduit

$$(f(u^{n+1}),u^{n+1}) \geq c_1\|u^{n+1}\|^2 - c_2, \quad c_1 = \gamma_5 > 0,\ c_2 \geq 0$$

et

$$\begin{aligned}|(f(u^n)-f(u^{n+1}),u^{n+1})| &\leq \|f(u^n)-f(u^{n+1})\|\,\|u^{n+1}\| \\ &\leq L_f\|u^n-u^{n+1}\|\,\|u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{c_1}{4}\|u^{n+1}\|^2 + \frac{L_f^2}{c_1}\|u^n-u^{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}|(g(u^n),(-\Delta)^{-1}u^{n+1})| &\leq \|g(u^n)\|\,\|(-\Delta)^{-1}u^{n+1}\| \\ &\leq c_g c_S\|u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{c_1}{4}\|u^{n+1}\|^2 + \frac{c_g'^2}{c_1}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (6.86), nous trouvons

$$\frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}\|_{-1}^2 + \frac{c_1}{2}\|u^{n+1}\|^2 + \|\nabla u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2 \leq \frac{L_f^2}{c_1}\|u^{n+1}-u^n\|^2 \\ +\frac{1}{2\delta t}\|u^n\|_{-1}^2 + c_3. \tag{6.87}$$

En multipliant maintenant (6.73) par u^{n+1} et en intégrant sur Ω, nous avons

$$\frac{1}{2\delta t}(\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2 + \|u^{n+1}-u^n\|^2) + \|\Delta u^{n+1}\|^2 + (g(u^n),u^{n+1}) \\ +(f(u^n),\Delta u^{n+1}) = 0. \tag{6.88}$$

Par (6.16), (6.5), (6.9),(6.14) et aux inégalités de Young et de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned}|(g(u^n),u^{n+1})| &\leq \|g(u^n)\|\,\|u^{n+1}\| \\ &\leq c_g\|u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|u^{n+1}\|^2 + c_g^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(f(u^n),\Delta u^{n+1})| &\leq \|f(u^n\|\,\|\Delta u^{n+1}\| \\ &\leq L_f\|u^n\|\,\|\Delta u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{L_f^2 c_S^2}{2}\|\nabla u^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

En insérant toutes les estimations ci-dessus dans (6.88), nous déduisons que

$$\frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}\|^2+\frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}-u^n\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq\frac{1}{4}\|u^{n+1}\|^2+\frac{L_f^2}{2}\|u^n\|^2 +\frac{1}{2\delta t}\|u^n\|^2+c_g^2. \tag{6.89}$$

En additionnant (6.87) et α fois (6.89) avec ($\alpha>0$ suffisamment petit), on obtient

$$\frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}\|_{-1}^2+(c_1-\frac{\alpha}{4})\|u^{n+1}\|^2+\|\nabla u^{n+1}\|^2+\frac{1}{2\delta t}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2+\frac{\alpha}{2\delta t}\|u^{n+1}\|^2 +\frac{\alpha}{2\delta t}\|u^{n+1}-u^n\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq\frac{L_f^2}{c_1}\|u^{n+1}-u^n\|^2 +\frac{1}{2\delta t}\|u^n\|_{-1}^2+\alpha L_f^2\|u^n\|^2+\frac{\alpha}{2\delta t}\|u^n\|^2+c', \tag{6.90}$$

où $c'=\frac{c_g'^2}{c_1}+\alpha c_g^2$. Nous choisissons $\alpha>0$ suffisamment petit pour que $\alpha\leq c_1$ et $\frac{\alpha c_S^2 L_f^2}{2}\leq 1$, et nous posons :

$$a_n=\|u^n\|_{-1}^2+\alpha\|u^n\|^2 \tag{6.91}$$

et l' estimation (6.90) donne

$$\frac{1}{2\delta t}a_{n+1}+\frac{c_1'}{2}a_{n+1}+\frac{\alpha}{2}\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq\frac{1}{2\delta t}a_n+c',\quad c_1'=c_1'(c_1,c_S). \tag{6.92}$$

Alors,

$$a_{n+1}+\frac{\alpha\delta t}{1+c_1'\delta t}\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq\frac{1}{1+c_1'\delta t}a_n+\frac{2\delta t}{1+c_1'\delta t}c'. \tag{6.93}$$

Grâce à un développement asymptotique d' ordre 2, pour δt suffisamment petit (dépendant uniquement de c_1'), nous avons

$$a_{n+1}+\frac{\alpha\delta t}{2}\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq(1-\frac{c_1'}{2}\delta t)a_n+2c'\delta t. \tag{6.94}$$

En appliquant le lemme 6.7.1 à (6.94), nous déduisons pour tout $n\geq 0$ que

$$a_n\leq e^{-c_1' n\delta t/2}a_0+\frac{4c'}{c_1'}$$

et

$$\frac{\alpha}{2}\delta t\sum_{k=0}^{n-1}\|\Delta u^{k+1}\|^2\leq a_0+2c'n\delta t.$$

Ce qui donne le résultat de la proposition.

■

Proposition 6.7.3 (Ensemble absorbant dans $H^1(\Omega)$)**.** *Si δt est suffisamment petit, alors*

$$\|\nabla u^n\|^2\leq C_1 e^{-\varepsilon_1 n\delta t}\|\nabla u^0\|^2+M_1,\quad\forall n\geq 0, \tag{6.95}$$

et

$$\delta t\sum_{k=0}^{n-1}\|u^{k+1}-u^k\|_{-1}^2\leq C_1'\|\nabla u^0\|^2+M_1',\quad\forall n\geq 0,$$

où les constantes strictements positives C_1, ε_1, M_1, C_1' et M_1' sont indépendants de u_0 et δt.

Démonstration : En multipliant (6.73) par $(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}$ et en intégrant sur Ω, on a

$$\frac{1}{\delta t^2}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2+\frac{1}{\delta t}(\|\nabla u^{n+1}\|^2-\|\nabla u^n\|^2+\|\nabla(u^{n+1}-u^n)\|^2)$$
$$+\frac{1}{\delta t}(F(u^{n+1})-F(u^n))+(g(u^n),(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})=\frac{1}{2\delta t}\int_\Omega f'(\zeta)(u^{n+1}-u^n)^2dx. \quad (6.96)$$

Ici, nous avons utilisé que pour tout $r,s\in\mathbb{R}$,

$$F(s)=F(r)+f(r)(s-r)+f'(\xi_{s,r})\frac{(s-r)^2}{2},\quad \text{pour certains}\quad \xi_{s,r}\in[r,s],$$

et $(r,s)\mapsto f'(\xi_{s,r})$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, puisque $F\in C^2(\mathbb{R})$.
Grâce à (6.5), (6.6), (6.9), (6.16), aux inégalités de Young et d' interpolation, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f'(\zeta_{u^{n+1},u^n})(u^{n+1}-u^n)^2dx\right| &\le \|f'\|_{L^\infty(\Omega)}\|u^{n+1}-u^n\|^2\\ &\le L_f\|u^{n+1}-u^n\|^2\\ &\le L_f\|\nabla(u^{n+1}-u^n)\|\,\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}\\ &\le \frac{1}{2}\|\nabla(u^{n+1}-u^n)\|^2+\frac{L_f^2}{2}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|(g(u^n),(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})\right| &\le \|g(u^n)\|\left\|(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\right\|\\ &\le c_g c_S\|\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\|_{-1}\\ &\le \frac{1}{2\delta t^2}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2+\frac{c_g^2}{2}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations ci-dessus dans (6.96), on obtient

$$\frac{1}{2\delta t^2}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2+\frac{1}{2\delta t}\|\nabla u^{n+1}\|^2+\frac{1}{4\delta t}\|\nabla(u^{n+1}-u^n)\|^2+\frac{1}{\delta t}(F(u^{n+1}),1)\le$$
$$\le\frac{1}{2\delta t}\|\nabla u^n\|^2+\frac{1}{\delta t}(F(u^n),1)+\frac{L_f^2}{2\delta t}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2+\frac{c_g^2}{2} \quad (6.97)$$

Soit δt suffisamment petit pour que (6.90) tienne et que $\delta t\le 1/(2L_f^2)$. En ajoutant (6.90) à $2\delta t\beta$ fois (6.97) où $\beta>0$ est suffisamment petit, nous déduisons que

$$E_2^{n+1}+\frac{\alpha}{2}\delta t\|\Delta u^{n+1}\|^2+\frac{\beta}{2\delta t}\|u^{n+1}-u^n\|_{-1}^2\le E_2^n+(2c'+\beta c_g^2)\delta t, \quad (6.98)$$

où

$$E_2^n=a_n+\beta\|\nabla u^n\|^2+2\beta(F(u^n),1)$$

et a_n est défini par (6.91). Par (6.19), $F(s)+\gamma_2\ge 0$ pour tout $s\in\mathbb{R}$, de sorte que

$$\tilde{E}_2^n=E_2^n+2\beta(\gamma_2,1)\ge 0,\quad \forall n\ge 0.$$

De plus, par (6.20) et l' inégalité de Poincaré, nous avons

$$\tilde{E}_2^n \leq c_3 \|\nabla u^n\|^2 + c_4, \quad c_3,\, c_4 > 0, \tag{6.99}$$

de sorte que (6.98) donne

$$\tilde{E}_2^{n+1} + c_5 \delta t \tilde{E}_2^{n+1} + \frac{\beta}{2\delta t} \|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2 \leq \tilde{E}_2^n + c_6 \delta t, \quad c_5,\, c_6 > 0.$$

Alors,

$$\tilde{E}_2^{n+1} + \frac{1}{1 + c_5 \delta t} \frac{\beta}{2\delta t} \|u^{n+1} - u^n\|_{-1}^2 \leq \frac{1}{1 + c_5 \delta t} \tilde{E}_2^n + \frac{c_6}{1 + c_5 \delta t} \delta t.$$

Par conséquent, pour δt suffisamment petit (dépendant uniquement de c_5), nous avons

$$\tilde{E}_2^{n+1} + \frac{\beta \delta t}{4} \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} \right\|_{-1}^2 \leq (1 - \frac{c_5}{2} \delta t) \tilde{E}_2^n + c_6 \delta t.$$

Nous pouvons appliquer le lemme 6.7.1, qui donne

$$\tilde{E}_2^n \leq e^{-n c_5 \delta t/2} \tilde{E}_2^0 + \frac{2 c_6}{c_5} \tag{6.100}$$

et

$$\frac{\beta}{4\delta t} \sum_{k=0}^{n-1} \|u^{k+1} - u^k\|_{-1}^2 \leq \tilde{E}_2^0 + n \delta t c_6, \tag{6.101}$$

pour tout $n \geq 0$. Enfin, nous notons que

$$\tilde{E}_2^n \geq \beta \|\nabla u^n\|^2,$$

et cette estimation ainsi que (6.99), (6.100) et (6.101), on concluent la preuve de la proposition.

Nous avons le résultat de la régularité suivant.

Proposition 6.7.4. *Si δt est suffisamment petit, alors*

$$\|\Delta u^n\|^2 \leq Q_2(\|\Delta u^0\|) e^{-\varepsilon_2 n \delta t} + M_2, \quad \forall n \geq 0, \tag{6.102}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|\Delta(u^{k+1} - u^k)\|^2 \leq Q_2(\|\Delta u^0\|) + M_2' n \delta t, \quad n \geq 0, \tag{6.103}$$

où la fonction monotone Q_2 et les constantes strictements positives ε_2, M_2 et M_2' sont indépendantes de u^0 et δt.

Démonstration : Par le lemme 6.6.2, nous savons que pour tout $n \geq 1$, $u^n \in D(A^2)$. Multiplions (6.73) par $A^2 u^{n+1}$ et intégrons sur Ω, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\delta t} \left(\|\Delta u^{n+1}\|^2 - \|\Delta u^n\|^2 + \|\Delta(u^{n+1} - u^n)\|^2 \right) + \|\Delta^2 u^{n+1}\|^2 \\ &= -(g(u^n), \Delta^2 u^{n+1}) + (\Delta f(u^n), \Delta^2 u^{n+1}). \end{aligned} \tag{6.104}$$

En utilisant (6.16) et l' inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}|(g(u^n), \Delta^2 u^{n+1})| &\leq \|g(u^n)\| \, \|\Delta^2 u^{n+1}\| \\ &\leq c_g \|\Delta^2 u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|\Delta^2 u^{n+1}\|^2 + c_g^2.\end{aligned}$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}|(\Delta f(u^n), \Delta^2 u^{n+1})| &\leq \|\Delta f(u^n)\| \, \|\Delta^2 u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|\Delta^2 u^{n+1}\|^2 + \|\Delta f(u^n)\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\delta t}\left(\|\Delta u^{n+1}\|^2 - \|\Delta u^n\|^2 + \|\Delta(u^{n+1}-u^n)\|^2\right) + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u^{n+1}\|^2 \\ \leq \|\Delta f(u^n)\|^2 + c_g^2.\end{aligned} \tag{6.105}$$

En argumentant comme dans le cas continu (voir (6.44)) et en utilisant l' estimation H^1 (6.95), nous trouvons pour tout $n \geq 1$,

$$\|\Delta f(u^n)\| \leq \frac{1}{4}\|\Delta^2 u^n\|^2 + c_{16}(R_1), \tag{6.106}$$

où c_{16} dépend de $R_1 = \|\nabla u(0)\|$. L' estimation (6.105) devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\delta t}\|\Delta u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2\delta t}\|\Delta(u^{n+1}-u^n)\|^2 \\ \leq \frac{1}{2\delta t}\|\Delta u^n\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta^2 u^n\|^2 + c_7,\end{aligned}$$

où $c_7(R_1) = c_g^2 + c_{16}(R_1)$. On multiplie cette estimation par $2\delta t$ et on obtient

$$b_{n+1} + \frac{\delta t}{2}\|\Delta^2 u^{n+1}\|^2 + \|\Delta(u^{n+1}-u^n)\|^2 \leq b_n + 2c_7\delta t, \tag{6.107}$$

où

$$b_n = \|\Delta u^n\|^2 + \frac{\delta t}{4}\|\Delta^2 u^n\|^2.$$

En utilisant le fait que δt est borné et que (6.14) est valable pour $s_1 = 1$ et $s_2 = 2$, nous trouvons

$$b_n \leq c_8\|\Delta^2 u^n\|^2, \quad \forall n \geq 1$$

pour une constante $c_8 > 0$ indépendante de δt. Ainsi, (6.107) implique

$$b_{n+1} + \frac{\delta t}{2c_8}b_{n+1} + \|\Delta(u^{n+1}-u^n)\|^2 \leq b_n + 2c_7\delta t, \quad \forall n \geq 1.$$

Par conséquent, pour δt suffisamment petit, nous avons

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}\|\Delta(u^{n+1}-u^n)\|^2 \leq (1 - c_9\delta t)b_n + 2c_7\delta t \quad \forall n \geq 1, \tag{6.108}$$

où $c_9 = 1/(4c_8)$. Par le lemme 6.7.1,

$$b_n \leq e^{-(n-1)c_9\delta t} b_1 + \frac{2c_7}{c_9}, \quad \forall n \geq 1, \tag{6.109}$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \|\Delta(u^{k+1}-u^k)\|^2 \leq b_1 + (n-1)\delta t \frac{2c_7}{c_9}, \quad \forall n \geq 1. \tag{6.110}$$

Grâce à l' estimation dissipative (6.95), il existe un temps $t_1 = t_1(R_1)$ tel que

$$\|\nabla u^n\|^2 \leq C_1 + M_1, \quad \forall n \geq t_1/\delta t.$$

Soit $n_1 = \lceil t_1/\delta t \rceil$, où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la fonction partie entière. Alors pour $n \geq n_1$, la constante c_{16} dans (6.106) ne dépend plus de R_1. Par conséquent, (6.108) est vraie pour tout $n \geq n_1$ avec c_7 et c_9 indépendants de R_1. Par induction (comme dans le lemma 6.7.1), nous avons

$$b_n \leq e^{-(n-n_1)c_9\delta t} b_{n_1} + \frac{2c_7}{c_9}, \quad \forall n \geq n_1, \tag{6.111}$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n_1}^{n-1} \|\Delta(u^{k+1}-u^k)\|^2 \leq b_{n_1} + (n-n_1)\delta t \frac{2c_7}{c_9}, \quad \forall n \geq n_1. \tag{6.112}$$

L' estimation dissipative (6.102) découle de (6.111) (pour $n \geq n_1$), (6.109) (pour $1 \leq n \leq n_1$ et lemme 6.6.2 (pour $n = 0$). L' estimation (6.103) découle de (6.112) (pour $n \geq n_1$), (6.110) (pour $1 \leq n \leq n_1$), (6.109) (pour b_{n_1}) et du lemme 6.6.2 (pour $n = 0$).

6.7.1 Estimations pour la différence des solutions, uniforme en δt

Soit v^n et w^n deux séquences générées par le schéma (6.73) et correspondant à la condition initiale v^0 et w^0 respectivement. On note $u^n = v^n - w^n$ leur différence qui vérifie

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} + \Delta^2 u^{n+1} - \Delta(f(v^n) - f(w^n)) + (g(v^n) - g(w^n)) = 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{6.113}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.7.5. *Supposons que $\delta t < \frac{1}{2L_g}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a,*

$$\|u^n\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|u^{k+1}-u^k\|^2 + \delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|\Delta u^{k+1}\|^2 \leq \exp\left(2c_{f,g} n\delta t\right) \|u^0\|^2. \tag{6.114}$$

Démonstration : Multiplions (6.113) par u^{n+1} et intégrons sur Ω, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t}(\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2 + \|u^{n+1}-u^n\|^2) + \|\Delta u^{n+1}\|^2 + (g(v^n) - g(w^n), u^{n+1}) \\ = (\Delta(f(v^n) - f(w^n)), u^{n+1}). \end{aligned} \tag{6.115}$$

Par (6.6), (6.10) et aux inégalités de Young et de Poincaré, on déduit

$$\begin{aligned} |(g(v^n) - g(w^n), u^{n+1})| &\leq \|g(v^n) - g(w^n\| \, \|u^{n+1}\| \\ &\leq L_g \|u^n\| \, \|u^{n+1}\| \\ &\leq \frac{L_g}{2}\|u^{n+1}\|^2 + \frac{L_g}{2}\|u^n\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|(f(v^n)-f(w^n),\Delta u^{n+1})| &\leq \|f(v^n)-f(w^n)\|\,\|\Delta u^{n+1}\|\\ &\leq L_f\|u^n\|\,\|\Delta u^{n+1}\|\\ &\leq \frac{L_f^2}{2}\|u^n\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u^{n+1}\|^2.\end{aligned}$$

L' équation (6.115) satisfait

$$(1-L_g\delta t)\|u^{n+1}\|^2+\|u^{n+1}-u^n\|^2+\delta t\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq(1+c\delta t)\|u^n\|^2, \tag{6.116}$$

où $c=L_f^2+L_g$. Ainsi, pour $\delta t\leq 1/(2L_g)$, on a

$$\|u^{n+1}\|^2+\|u^{n+1}-u^n\|^2+\delta t\|\Delta u^{n+1}\|^2\leq(1+2c'\delta t)\|u^n\|^2,\quad\forall n\geq 0, \tag{6.117}$$

où $c'=c'(c,L_g)$. Nous appliquons

$$1+s\leq\exp(s),\quad\forall s\in\mathbb{R}, \tag{6.118}$$

à $s=c'\delta t$ et on trouve le résultat (6.7.5) par induction, $c'=c_f,g$.

Proposition 6.7.6 (Propriété de lissage). *Soit $R_2>0$ et $\delta t<\frac{1}{2L_g}$. Si $\|v^0\|_{H^2(\Omega)}\leq R_2$ et $\|w^0\|_{H^2(\Omega)}\leq R_2$, alors pour tout $n\geq 1$, on a :*

$$n\delta t\|u^n\|^2_{H^1(\Omega)}\leq c_S\,\exp(c(R_2)n\delta t)\,\|u^0\|^2. \tag{6.119}$$

Démonstration :
Multiplions (6.113) par $(-\Delta)^{-1}(\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})$ et integrons sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta t^2}\|u^{n+1}-u^n\|^2_{-1}+\frac{1}{2\delta t}(\|\nabla u^{n+1}\|^2-\|\nabla u^n\|^2+\|\nabla(u^{n+1}-u^n)\|^2)\\ &+(f(v^n)-f(w^n),\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})+(g(v^n)-g(w^n),(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})=0.\end{aligned} \tag{6.120}$$

En utilisant (6.16),(6.14), les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}|(g(v^n)-g(w^n),(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})| &\leq \|g(v^n)-g(w^n)\|\,\|(-\Delta)^{-1}\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\|\\ &\leq L_g\|u^n\|\,c_S\|\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\|_{-1}\\ &\leq L_g^2c_S^2\|\nabla u^n\|^2+\frac{1}{4\delta t^2}\|u^{n+1}-u^n\|^2_{-1}\end{aligned}$$

et en argumentant comme dans le cas continu, on a

$$\begin{aligned}|(f(v^n)-f(w^n),\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t})| &\leq \|A^{\frac{1}{2}}(f(v^n)-f(w^n))\|\,\|\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\|_{-1}\\ &\leq c(R_2)\|\nabla u^n\|^2+\frac{1}{4\delta t^2}\|u^{n+1}-u^n\|^2_{-1}.\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus dans (6.120), nous déduisons que

$$\frac{1}{2\delta t}\|\nabla u^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\delta t}\|\nabla u^n\|^2 + c'\|\nabla u^n\|^2, \tag{6.121}$$

où $c' = c'(R_2) = L_g^2 c_S^2 + c(R_2)$ pour tout $n \geq 0$. En multipliant (6.121) par $2n\delta t$ on obtient

$$(n+1)\|\nabla u^{n+1}\|^2 \leq (1 + 2c'\delta t)n\|\nabla u^n\|^2 + \|\nabla u^{n+1}\|^2 \tag{6.122}$$

On pose : $c_n = n\|\nabla u^n\|^2$ et l' estimation (6.122) satisfait

$$c_{n+1} \leq (1 + 2c'\delta t)c_n + c_S\|\Delta u^{n+1}\|^2, \quad n \geq 0. \tag{6.123}$$

En utilisant $c_0 = 0$, on déduit par induction que

$$c_n \leq (1 + 2c'\delta t)^n \, (c_S \sum_{k=0}^{n-1} \|\Delta u^{k+1}\|^2), \qquad n \geq 1. \tag{6.124}$$

On conclut (6.119) à partir de (6.117) et de (6.118) avec $s = 2c'\delta t$.

6.8 Estimation d' erreur uniforme en temps fini

Pour l' estimation de l' erreur sur un intervalle de temps fini, nous présentons la méthodologie dans [79, 74].

On considère une suite (u^n) engendrée par (6.73). On associe la suite (u^n) à trois fonctions $u_{\delta t}$, $\overline{u}_{\delta t}, \underline{u}_{\delta t} : \mathbb{R}_+ \to D(A)$, notamment

$$u_{\delta t} = u^n + \frac{t - n\delta t}{\delta t}(u^{n+1} - u^n)\,, \qquad t \in [n\delta t\,,\,(n+1)\delta t)$$

$$\overline{u}_{\delta t} = u^{n+1}\,, \qquad t \in [n\delta t\,,\,(n+1)\delta t)$$

$$\underline{u}_{\delta t} = u^n\,, \qquad t \in [n\delta t\,,\,(n+1)\delta t).$$

Nous notons que $u_{\delta t} \in C^0([0,T], D(A))$ est linéaire par morceaux, $\overline{u}_{\delta t} \in L^\infty(0,T;D(A))$ et $\underline{u}_{\delta t} \in L^\infty(0,T;D(A))$, pour tout $T > 0$. Le schéma (6.73) peut être réécrit

$$\frac{du_{\delta t}}{dt} + \Delta^2 \overline{u}_{\delta t} - \Delta f(\underline{u}_{\delta t}) + g(\underline{u}_{\delta t}) = 0, \tag{6.125}$$

de façon équivalente

$$\frac{du_{\delta t}}{dt} + \Delta^2 u_{\delta t} - \Delta f(u_{\delta t}) + g(u_{\delta t}) = -\Delta^2(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}) + \Delta(f(\underline{u}_{\delta t}) - f(u_{\delta t})) \\ +(g(\underline{u}_{\delta t}) - g(u_{\delta t})). \tag{6.126}$$

Nous notons u la solution de (6.1)-(6.3) avec $u_0 \in D(A)$ et nous fixons $e_{\delta t} = u_{\delta t} - u$. On soustrait (6.1) de (6.126), on obtient

$$\frac{de_{\delta t}}{dt} + \Delta^2 e_{\delta t} - \Delta(f(u_{\delta t}) - f(u)) + (g(u_{\delta t}) - g(u)) = -\Delta^2(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}) \\ +\Delta(f(\underline{u}_{\delta t}) - f(u_{\delta t})) + (g(\underline{u}_{\delta t}) - g(u_{\delta t})). \tag{6.127}$$

On multiplie (6.127) par $e_{\delta t}$ et on intègre sur Ω, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e_{\delta t}(t)\|^2 + \|\Delta e_{\delta t}(t)\|^2 - (f(u_{\delta t}) - f(u), \Delta e_{\delta t}) + (g(u_{\delta t}) - g(u), e_{\delta t}) = \\ = -(\Delta(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}), \Delta e_{\delta t}) + (f(\underline{u}_{\delta t}) - f(u_{\delta t}), \Delta e_{\delta t}) + (g(\underline{u}_{\delta t}) - g(u_{\delta t}), e_{\delta t}). \quad (6.128)$$

En utilisant (6.16), (6.13) et les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |(g(u_{\delta t}) - g(u), e_{\delta t})| &\leq \|g(u_{\delta t}) - g(u)\| \, \|e_{\delta t}\| \\ &\leq L_g \|e_{\delta t}\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(g(\underline{u}_{\delta t}) - g(u_{\delta t}), e_{\delta t})| &\leq \|g(\underline{u}_{\delta t}) - g(u_{\delta t})\| \, \|e_{\delta t}\| \\ &\leq L_g \|\underline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}\| \, \|e_{\delta t}\| \\ &\leq \frac{L_g^2}{4}\|\underline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}\|^2 + \|e_{\delta t}\|^2. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |(f(u_{\delta t}) - f(u), \Delta e_{\delta t})| &\leq \|f(u_{\delta t}) - f(u)\| \, \|\Delta e_{\delta t}\| \\ &\leq L_f \|u_{\delta t} - u\| \, \|\Delta e_{\delta t}\| \\ &\leq L_f \|e_{\delta}\| \, \|\Delta e_{\delta t}\| \\ &\leq L_f^2 \|e_{\delta}\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta e_{\delta}\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(\Delta(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}), \Delta e_{\delta t})| &\leq \|\Delta(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t})\| \, \|\Delta e_{\delta t}\| \\ &\leq \|\Delta(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t})\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta e_{\delta t}\|^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |(f(\underline{u}_{\delta t}) - f(u_{\delta t}), \Delta e_{\delta t})| &\leq \|f(\underline{u}_{\delta t}) - f(u_{\delta t})\| \, \|\Delta e_{\delta t}\| \\ &\leq L_f \|\underline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}\| \, \|\Delta e_{\delta t}\| \\ &\leq \frac{L_f^2}{4}\|\underline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta e_{\delta t}\|^2. \end{aligned}$$

En insérant toutes les estimations ci-dessus dans (6.128), on conclut que

$$\frac{d}{dt}\|e_{\delta t}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta e_{\delta t}(t)\|^2 \leq c_1\|e_{\delta t}(t)\|^2 + c_2\|\underline{u}_{\delta t} - u_{\delta t}\|^2 + 2\|\Delta(\overline{u}_{\delta t} - u_{\delta t})\|^2, \quad (6.129)$$

où $c_1 = c_1(2 + 2L_g + 2L_f^2)$, $c_2 = c_2(\frac{L_g^2}{2} + \frac{L_f^2}{2})$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 6.8.1. *Pour tout $T > 0$ et $R_2 > 0$, il existe une constante $K(T, R_2)$ indépendante de δt telle que $u^0 = u_0$ et $\|u^0\|_{D(A)} \leq R_2$.*

$$\sup_{t\in[0,N\delta t]} \|e_{\delta t}(t)\| \leq K(T, R_2)\,(\delta t)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.130)$$

où $N = \lfloor T/\delta t \rfloor$ et $\lfloor\cdot\rfloor$ représente la fonction partie entière.

Démonstration :
Soit $T > 0$ et $N = \lfloor T/\delta t \rfloor$. Grâce à $e_{\delta t}(0) = 0$ et au lemme classique de Gronwall appliqué à (6.129), on trouve

$$\|e_{\delta t}(t)\|^2 \leq \exp(c_1 T)\Big(\int_0^{N\delta t} c_2 \|\underline{u}_{\delta t}(s) - u_{\delta t}(s)\|^2 ds + 2\int_0^{N\delta t} \|\Delta(\overline{u}_{\delta t}(s) - u_{\delta t}(s))\|^2 ds\Big), \quad \forall t \in [0, N_{\delta t}]. \tag{6.131}$$

Sur $[n\delta t, (n+1)\delta t)$, nous avons $\|\underline{u}_{\delta t}(s) - u_{\delta t}(s)\| \leq \|u^{n+1} - u^n\|$ et $\|\Delta(\overline{u}_{\delta t}(s) - u_{\delta t}(s))\| \leq \|\Delta(u^{n+1} - u^n)\|$
tel que :

$$\int_0^{N\delta t} c_2 \|\underline{u}_{\delta t}(s) - u_{\delta t}(s)\|^2 ds \leq c_2 \delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \tag{6.132}$$

et

$$\int_0^{N\delta t} \|\Delta(\overline{u}_{\delta t}(s) - u_{\delta t}(s))\|^2 ds \leq \delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|\Delta(u^{k+1} - u^k)\|^2. \tag{6.133}$$

Alors,

$$\|e_{\delta t}(t)\|^2 \leq \exp(c_1 T)\left(\sum_{k=0}^{N-1} \|\Delta(u^{k+1} - u^k)\|^2 + c_2 \sum_{k=0}^{N-1} \|u^{k+1} - u^k\|^2\right) \delta t. \tag{6.134}$$

Nous déduisons de (6.119) et (6.103) que

$$\|e_{\delta t}(t)\|^2 \leq c_3 \exp(c_1 T)\left(Q_2(\|\Delta u^0\|) + M_2' T\right) \delta t, \quad \forall t \in [0, N\delta t], \tag{6.135}$$

où $c_3 = c_2 c_S^2 + 2$ et qui donne le résultat du théorème.

■

6.9 Convergence d' attracteurs exponentiels

6.9.1 Quelques définitions

Avant d' énoncer notre résultat principal, nous rappelons quelques définitions (voir par exemple [26, 77]). Nous rappelons que $H = L^2(\Omega)$ et $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Un semi-groupe continu dans le temps $\{S(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$ sur $D(A)$ est une famille d' opérateurs (non linéaires) tels que $S(t)$ est un opérateur continu (pour la norme $L^2(\Omega)$) de $D(A)$ dans lui-même, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, avec $S(0) = Id$ (identité) et

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Un semi-groupe discret en temps $\{S(t),\, t \in \mathbb{N}\}$ sur $D(A)$ est une famille d' opérateurs (non linéaires) qui satisfont ces propriétés avec $\mathbb{R}_+$ remplacé par $\mathbb{N}$. Un semi-groupe discret en temps est généralement noté $\{S^n,\, n \in \mathbb{N}\}$, où $S(= S(1))$ est un opérateur continu (non linéaire) de $D(A)$ dans lui-même.

Un semi-groupe (continu ou discret) $\{S(t),\, t \geq 0\}$ définit un système dynamique (continu ou discret) : si u_0 est l' état du système dynamique au temps 0, alors $u(t) = S(t)u_0$ est l' état au temps $t \geq 0$. Le terme "système dynamique" sera parfois utilisé à la place de "semi-groupe".

6.9.2 Le résultat principal

Nous avons vu que $\{S_0(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par (6.4) est un système dynamique continu sur $D(A)$, et que pour chaque $\delta t > 0$ suffisamment petit, $\{S_{\delta t}^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ définit un système dynamique discret en temps sur $D(A)$ (théorème 6.6.1). On a le résultat de notre chapitre suivant :

Théorème 6.9.1. *Soit $\delta t^\star > 0$ suffisamment petit. Pour tout $\delta t \in (0, \delta t^\star]$, le système dynamique discret $\{S_{\delta t}^n, \mathbb{N}\}$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_{\delta t}$ dans $D(A)$, et le système dynamique continu $\{S_0(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_0$ dans $D(A)$ tel que :*

1. *la dimension fractale de $\mathcal{M}_{\delta t}$ est bornée, uniformément par rapport à $\delta t \in [0, \delta t^\star]$,*

$$\dim_{\mathrm{F}} \mathcal{M}_{\delta t} \leq c_1,$$

où c_1 est indépendant de δt ;

2. *$\mathcal{M}_{\delta t}$ attire les ensembles bornés de $D(A)$, uniformément par rapport à $\delta t \in (0, \delta t^\star]$, c'est-à-dire pour tous $\delta t \in (0, \delta t^\star]$,*

$$\forall B \subset D(A) \text{ bounded},\ \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(S_{\delta t}^n B, \mathcal{M}_{\delta t}) \leq \mathcal{Q}(\|B\|_H) e^{-c_2 n \delta t},\ \ n \in \mathbb{N},$$

où la constante positive c_2 et la fonction monotone $\mathcal{Q}$ sont indépendantes de δt ;

3. *la famille $\{\mathcal{M}_{\delta t},\ \delta t \in [0, \delta t^\star]\}$ est continue à 0,*

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{M}_{\delta t}, \mathcal{M}_0) \leq c_3 (\delta t)^{c_4},$$

où c_3 et $c_4 \in (0,1)$ sont indépendants de δt et $\mathrm{dist}_{\mathrm{sym}}$ désigne la distance de Hausdorff symétrique entre ensembles, définie par

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{sym}}(B_1, B_2) := \max\{\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(B_1, B_2), \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(B_2, B_1)\}.$$

Démonstration :
Nous appliquons le théorème 2.6.4 dans le chapitre 2 avec les espaces $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$ et l' ensemble

$$\mathcal{B} = \{v \in D(A)\ :\ \|v\|_2 \leq M_2 + 1\},$$

où M_2 est la constante dans (6.39) et (6.102). La propriété de lissage est satisfaite, uniformément par rapport à δt (lemme 6.5.1 et lemme 6.7.6). De plus, $\mathcal{B}$ est absorbant dans $D(A)$, uniformément par rapport à $\delta t \in [0, \delta t_0]$, où $\delta t_0 > 0$ est choisi suffisamment petit. Les estimations dans les sections 6.2 et 6.7 montrent que les hypothèses (H1)-(H9) du théorème 2.6.4 dans le chapitre 2 sont satisfaites. Ainsi, les conclusions du théorème 6.9.1 sont valables pour $\delta t \in [0, \delta t^\star]$, pour quelque soit $\delta t^\star \in (0, \delta t_0]$ suffisamment petit. Nous notons que le théorème 2.6.4 dans le chapitre 2 est énoncé pour une famille de semi-groupes qui agissent sur l' espace entier H, mais avec une modification mineure de la preuve, il peut être appliqué à notre situation où le semi-groupe agit sur $D(A)$ et est continu pour la norme H. l' outil principal est la construction d' attracteurs exponentiels basés sur une Propriété de lissage uniforme proposée par Efendiev, Miranville et Zelik dans [26, théorème 4.4].

■

Comme dans [74, Corollaire 6.2], nous avons :

Corollaire 6.9.2. *Pour tout $\delta t \in [0, \delta t^\star]$, le semi-groupe $\{S_{\delta t}(t),\ t \geq 0\}$ possède un attracteur global $\mathcal{A}_{\delta t}$ dans $D(A)$ qui est borné dans $D(A)$ et compact dans H. De plus, $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\mathcal{A}_{\delta t}, \mathcal{A}_0) \to 0$ lorsque $\delta t \to 0^+$, et la dimension fractale de $\mathcal{A}_{\delta t}$ est bornée par une constante indépendante de δt.*

Remarque 6.9.3. *Remplaçons les conditions de Dirichlet (6.2) par des conditions de Neumann, qui se lisent comme suit*

$$\partial_n u = \partial_n \Delta u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{6.136}$$

où n est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$.

Si $g = 0$ dans (6.1), nous avons affaire à l' équation classique de Cahn-Hilliard et un résultat similaire au théorème 6.9.1 peut être obtenu. Dans ce cas, nous avons la conservation de la masse et il est commode d' introduire les espaces de fonctions

$$H_\beta = \left\{ v \in H \ :\ \int_\Omega v = \beta \right\} \text{ et } \mathcal{H}_\alpha = \bigcup_{|\beta| \leq \alpha} H_\beta,$$

comme dans [75, 77], où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Si $g \neq 0$, la situation est plus délicate car nous n'avons plus la conservation de la masse [62, remarque 5.7]. Si g est un terme de prolifération, la masse peut même exploser en temps fini [12, 69, 67].

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous étudions plusieurs modèles de type Cahn-Hilliard pour des applications en biologie. Tout d' abord, nous nous intéressons au modèle de la relaxation hyperbolique de Cahn-Hilliard avec le terme symport. Nous examinons le comportement asymptotique de la solution du modèle pour des temps longs. Nous montrons que le système génère un semi-groupe continu dissipatif dans l' espace des phases dépendant du paramètre de relaxation τ_D. De plus, nous démontrons la dissipativité d' ordre élevé du système. Enfin, nous prouvons l' existence d' un attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D}$ et l' existence des attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_{\tau_D}$.

Ensuite, nous étudions le modèle de la relaxation de Cahn-Hilliard visqueux avec le terme symport. Ce modèle est caractérisé par la présence de deux termes supplémentaires : le terme de la relaxation $\tau_D u_{tt}$ et le terme de viscosité $\delta \Delta u_t$. Nous supposons que le coefficient de relaxation τ_D est dominé par le coefficient de viscosité δ. Comme dans le modèle précédent, nous montrons que le système est dissipatif dans un espace de phases simple et un espace de phases d' ordre élevé. Nous démontrons également l' existence d' un attracteur global $\mathcal{A}_{\tau_D,\delta}$ dans les deux cas. De plus, nous construisons une famille robuste d' attracteurs exponentiels, qui est une perturbation de l' équation de Cahn-Hilliard classique. Des simulations numériques confirment les résultats théoriques pour ces modèles.

Enfin, nous nous penchons sur le modèle de la relaxation hyperbolique de Cahn-Hilliard avec le terme de prolifération. Nous remplaçons le terme symport dans le premier modèle par le terme de prolifération et obtenons des résultats théoriques similaires. Les simulations numériques confirment également les résultats obtenus.

Nous considérons également une discrétisation en temps linéaire implicite-explicite (IMEX) de l' équation de Cahn-Hilliard avec un terme source, dotée de conditions aux limites de Dirichlet. Pour chaque pas de temps suffisamment petit, nous construisons un attracteur exponentiel du système dynamique en temps discret associé à la discrétisation. Nous prouvons que, lorsque le pas de temps tend vers 0, cet attracteur converge pour la distance de Hausdorff symétrique vers un attracteur exponentiel du système dynamique en temps continu associé à l' EDP. Nous prouvons également que la dimension fractale de l' attracteur exponentiel (et par conséquent, de l' attracteur global) est bornée par une constante indépendante du pas de temps. Les résultats s' appliquent aussi à l' équation classique de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann.

Cette thèse contribue donc à l' étude approfondie des modèles de type cahn-Hilliard en biologie, en examinant leur comportement asymptotique et en démontrant l' existence d' attracteurs globaaux et exponentiels, ainsi qu'en fournissant des simulations numériques pour confirmer les résultat théoriques.

Cependant, d' autres directions de travail pourraient être envisagées. Nous pourions étudier les modèles avec des conditions aux limites de Neumann ou périodiques, ce qui nous permettrait de mieux comprendre comment les différentes conditions aux limites affectent le comportement asymptotique du système. De plus, nous pourrions considérer le couplage de ces modèle avec une équation de réaction-diffusion, d' abord avec des condition de Dirichlet, puis avec des conditions de Neumann ou périodiques. Cette approche permettrait d' explorer des systèmes plus complexes et d' analyser comment les interactions entre les différents termes influencent le comportement global du système.

En résumé, les perspectives de recherche pourraient inclure l' étude de ces modèles avec des conditions aux limites différentes (Neumann ou périodiques) et le couplage de ces modèles avec une équation de réaction-diffusion sous différentes conditions aux limites. Ces travaux pourraient contribuer à une compréhension plus approfondie du comportement des systèmes étudiés et ouvrir de nouvelles voies d' applications en biologie et dans d' autres domaines.

Bibliographie

[1] A. Aristotelous, O. Karakashian, and S. Wise. Adaptive, second-order in time, primitive-variable discontinuous galerkin schemes for a Cahn-Hilliard equation with a mass source. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 35, 07 2014.

[2] A. Bertozzi, S. Esedog¯lu, and A. Gillette. Analysis of a two-scale Cahn–Hilliard model for binary image inpainting. *Multiscale Modeling and Simulation*, 6(3) :913–936, 2007.

[3] M. Brachet, P. Parnaudeau, and M. Pierre. Convergence to equilibrium for time and space discretizations of the Cahn-Hilliard equation. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS. SERIES S*, 15(8) :1987–2031, 2022.

[4] J. W. Cahn. On spinodal decomposition. *Acta. Metall.*, 9 :795–801, 1961.

[5] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. I : Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 28 :258–267, 1958.

[6] Q. Cheng, X. Yang, and J. Shen. Efficient and accurate numerical schemes for a hydrodynamically coupled phase field diblock copolymer model. *Journal of Computational Physics*, 341, 01 2017.

[7] L. Cherfils, H. Fakih, and A. Miranville. A Cahn-Hilliard system with a fidelity term for color image inpainting. *J. Math. Imaging Vis.*, 54(1) :117–131, 2016.

[8] L. Cherfils, S. Gatti, A. Miranville, R. Guillevin, et al. Analysis of a model for tumor growth and lactate exchanges in a glioma. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS. SERIES S*, 14(8) :2729–2749, 2021.

[9] L. Cherfils, A. Miranville, and S. Peng. Higher-order models in phase separation. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 7(1) :39–56, 2017.

[10] L. Cherfils, A. Miranville, and S. Zelik. The Cahn-Hilliard equation with logarithmic potentials. *Milan Journal of Mathematics*, 79 :561–596, 12 2011.

[11] L. Cherfils, A. Miranville, and S. Zelik. The cahn-hilliard equation with logarithmic potentials. *Milan Journal of Mathematics*, 79 :561–596, 12 2011.

[12] L. Cherfils, A. Miranville, and S. Zelik. On a generalized Cahn-Hilliard equation with biological applications. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS. SERIES -B*, 19(7) :2013–2026, 2014.

[13] R. Choksi, M. Maras, and J. F. Williams. 2d phase diagram for minimizers of a Cahn–Hilliard functional with long-range interactions. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 10(4) :1344–1362, 2011.

[14] D. S. Cohen and J. D. Murray. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population. *J. Math. Biol.*, 1981.

[15] M. Conti, S. Gatti, and A. Miranville. Attractors for a caginalp model with a logarithmic potential and coupled dynamic boundary conditions. *Analysis and Applications*, 11, 11 2013.

[16] M. Conti, S. Gatti, and A. Miranville. Attractors for a caginalp model with a logarithmic potential and coupled dynamic boundary conditions. *Analysis and Applications*, 11, 11 2013.

[17] M. Criado-Sancho, J. Casas-Vázquez, and D. Jou. Non-equilibrium thermodynamic potential and flux fluctuation theorem. *Phys. Lett., A*, 373(37) :3301–3303, 2009.

[18] S. Dai and R. Pego. Universal bounds on coarsening rates for mean-field models of phase transitions. *SIAM J. Math. Analysis*, 37 :347–371, 04 2005.

[19] A. Debussche. A singular perturbation of the Cahn-Hilliard equation. *Asymptotic Analysis*, 4(2) :161–185, 1991.

[20] A. Debussche. A singular perturbation of the Cahn-Hilliard equation. *Asymptotic Anal.*, 4(2) :161–185, 1991.

[21] D. Dor. On the modified of the one-dimensional Cahn-Hilliard equation with a source term. *AIMS Mathematics*, 7(8) :14672–14695., 2022.

[22] D. Dor. On the hyperbolic relaxation of the Cahn–Hilliard equation with a mass source. *Asymptotic Analysis*, 135(1) :25–53, 2023.

[23] D. Dor, A. Miranville, and M. Pierre. Hyperbolic relaxation of the viscous Cahn-Hilliard equation with a symport term for the biological applications. *Math. Meth. Appl. Sci, to appear.*

[24] D. Dor and M. Pierre. A robust family of exponential attractors for a linear discretization of Cahn-Hilliard equation with a source term. *submitted*, 2023.

[25] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. *Exponential attractors for dissipative evolution equations*. Chichester : Wiley ; Paris : Masson, 1994.

[26] M. Efendiev, A. Miranville, and S. Zelik. Exponential attractors for a singularly perturbed Cahn-Hilliard system. *Math. Nachr.*, 272 :11–31, 2004.

[27] J. Erlebacher, M. Aziz, A. Karma, N. Dimitrov, and K. Sieradzki. Evolution of nanoporosity in dealloying. *Nature.*, 410(4) :450–453, 2001.

[28] P. Fabrie, C. Galusinski, A. Miranville, and S. Zelik. Uniform exponential attractors for a singularly perturbed damped wave equation. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS.*, 10(1-2) :211–238, 2004.

[29] H. Fakih. A Cahn–Hilliard equation with a proliferation term for biological and chemical applications. *Asymptotic Analysis*, 94 :71–104, 08 2015.

[30] H. Fakih, R. Mghames, and N. Nasreddine. On the Cahn-Hilliard equation with mass source for biological applications. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 20(2) :495–510, 2021.

[31] C. G. Gal, A. Giorgini, and M. Grasselli. The nonlocal Cahn–Hilliard equation with singular potential : Well-posedness, regularity and separation property. *Journal of Differential Equations*, 263, 05 2017.

[32] P. Galenko. Local nonequilibrium phase transition model with relaxation of the diffusion flux. *Phys. Lett., A*, 190(3) :292–294, 1994.

[33] P. Galenko and D. Jou. Kinetic contribution to the fast spinodal decomposition controlled by diffusion. *Physica., A*, 388(10) :3113–3123, 2009.

[34] P. Galenko and V. Lebedev. Non-equilibrium effects in spinodal decomposition of a binary system. *Phys. Lett., A*, 372(7) :985–989, 2008.

[35] P. Galenko and V. Lebedev. Non-equilibrium effects in spinodal decomposition of a binary system. *Phys. Lett., A*, 372(7) :985–989, 2008.

[36] H. Garcke and K. F. Lam. Well-posedness of a Cahn-Hilliard system modelling tumour growth with chemotaxis and active transport. *European Journal of Applied Mathematics*, 28(2) :284–316, 2017.

[37] S. Gatti, M. Grasselli, A. Miranville, and V. Pata. On the hyperbolic relaxation of the one-dimensional Cahn–Hilliard equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 312(1) :230–247, 2005.

[38] S. Gatti, M. Grasselli, V. Pata, and A. Miranville. Hyperbolic relaxation of the viscous Cahn-Hilliard equation in 3-D. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(2) :165–198, 2005.

[39] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Class. Math. Berlin : Springer, reprint of the 1998 ed. edition, 2001.

[40] M. Grasselli, N. Lecoq, and M. Pierre. A long-time stable fully discrete approximation of the Cahn-Hilliard equation with inertial term. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 2011 :543–552, 2011.

[41] M. Grasselli, N. Lecoq, and M. Pierre. A long-time stable fully discrete approximation of the cahn-hilliard equation with inertial term. 2011(Special) :543–552, 2011.

[42] M. Grasselli, A. Miranville, G. Schimperna, et al. The caginalp phase-field system with coupled dynamic boundary conditions and singular potentials. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 28(1) :67–98, 2010.

[43] M. Grasselli and V. Pata. Asymptotic behavior of a parabolic-hyperbolic system. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 3(4) :849–881, 2004.

[44] M. Grasselli and M. Pierre. A splitting method for the cahn–hilliard equation with inertial term. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(08) :1363–1390, 2010.

[45] M. Grasselli, G. Schimperna, and S. Zelik. On the 2d Cahn-Hilliard equation with inertial term. *Commun. Partial Differ. Equations*, 34(2) :137–170, 2009.

[46] F. Hecht. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265, 2012.

[47] P. B. J. Verdasca and G. Dewel. Chemically frozen phase separation in an adsorbed layer. *Rev.Phys. E*, 52 :4616–4619, 1995.

[48] J. Keener and J. Sneyd, editors. *Renal Physiology*. Springer New York, New York, NY, 2009.

[49] E. Khain and L. M. Sander. Generalized Cahn-Hilliard equation for biological applications. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 2008.

[50] I. Klapper and J. Dockery. Role of cohesion in the material description of biofilms. *Phys. Rev. E*, 74 :319021–319028, 2006.

[51] K. F. Lam. Global and exponential attractors for a cahn-hilliard equation with logarithmic potentials and mass source. *Journal of Differential Equations*, 312 :237–275, 2022.

[52] N. Lecoq, H. Zapolsky, and P. K. Galenko. Numerical approximation of the Cahn-Hillard equation with memory effects in the dynamics of phase separation. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS.*, 2011 :953–962, 2011.

[53] N. Lecoq, H. Zapolsky, and P. K. Galenko. Numerical approximation of the Cahn-Hillard equation with memory effects in the dynamics of phase separation. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS.*, 2011 :953–962, 2011.

[54] C. Lee, H. Kim, S. Yoon, J. Park, S. Kim, J. Yang, and J. Kim. On the evolutionary dynamics of the Cahn-Hilliard equation with cut-off mass source. *Numerical Mathematics-Theory Methods And Applications*, 14(1) :242–260, 2020.

[55] C. Lee, H. Kim, S. Yoon, J. Park, S. Kim, J. Yang, and J. Kim. On the evolutionary dynamics of the cahn-hilliard equation with cut-off mass source. *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications*, 14 :242–260, 06 2021.

[56] L. Li, A. Miranville, and R. Guillevin. Cahn-Hilliard models for glial cells. *Appl. Math. Optim.*, 84(2) :1821–1842, 2021.

[57] L. Li, A. Miranville, and R. Guillevin. A coupled Cahn-Hilliard model for the proliferative-to-invasive transition of hypoxic glioma cells. *Q. Appl. Math.*, 79(2) :383–394, 2021.

[58] Q.-X. Liu, A. Doelman, V. Rottschafer, M. de Jager, P. Herman, M. Rietkerk, and J. van de Koppel. Phase separation explains a new class of self-organized spatial patterns in ecological systems", keywords = "mussels, mathematical model, spatial self-organization, animal a ggregation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 110(29) :11905–11910, jul 2013.

[59] S. Maier-Paape and T. Wanner. Spinodal decomposition for the cahn–hilliard equation in higher dimensions.¶part i : Probability and wavelength estimate. *Communications in Mathematical Physics*, 195 :435–464, 1998.

[60] S. Maier-Paape and T. Wanner. Spinodal decomposition for the Cahn-Hilliard equation in higher dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 151(3) :187–219, 2000.

[61] A. Miranville. Asymptotic behavior of the CAHN-HILLIARD-oono equation. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 1(4) :523–536, 2011.

[62] A. Miranville. Asymptotic behaviour of a generalized Cahn-Hilliard equation with a proliferation term. *Appl. Anal.*, 92(6) :1308–1321, 2013.

[63] A. Miranville. Asymptotic behavior of a sixth-order Cahn-Hilliard system. *Open Mathematics*, 12(1) :141–154, 2014.

[64] A. Miranville. Some mathematical models in phase transition. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS. SERIES S*, 7(2) :271–306, 2014.

[65] A. Miranville. Some mathematical models in phase transition. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS. SERIES S*, 7(2) :271–306, 2014.

[66] A. Miranville. On the phase-field-crystal model with logarithmic nonlinear terms. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 110 :145–157, 2016.

[67] A. Miranville. The cahn–hilliard equation and some of its variants. *AIMS Mathematics*, 2(3) :479–544, 2017.

[68] A. Miranville. A singular reaction-diffusion equation associated with brain lactate kinetics. *Math. Methods Appl. Sci.*, 40(7) :2454–2465, 2017.

[69] A. Miranville. *The Cahn-Hilliard equation. Recent advances and applications*, volume 95 of *CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math.* Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2019.

[70] A. Miranville and S. Zelik. Robust exponential attractors for cahn-hilliard type equations with singular potentials. *Mathematical methods in the applied sciences*, 27(5) :545–582, 2004.

[71] A. Novick-Cohen. The Cahn-Hilliard equation : mathematical and modeling perspectives. *Advances in mathematical sciences and applications*, 8 :965–985, 1998.

[72] Y. Oono and S. Puri. Computationally efficient modeling of ordering of quenched phases. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :836–839, Feb 1987.

[73] A. Oron, S. Davis, and S. Bankoff. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 69 :931–980, 1997.

[74] M. Pierre. Convergence of exponential attractors for a finite element approximation of the Allen-Cahn equation. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 39(16) :1755–1784, 2018.

[75] M. Pierre and N. Batangouna. Convergence of exponential attractors for a time splitting approximation of the caginalp phase-field system. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 17 :1–19, 09 2017.

[76] J. Shen and X. Yang. Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS.*, 28(4) :1669–1691, 2010.

[77] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Appl. Math. Sci.* New York etc. : Springer-Verlag, 1988.

[78] S. Tremaine. On the origin of irregular structure in saturn's rings. *Astron. J.*, 125 :894–901, 2003.

[79] X. Wang. Approximation of stationary statistical properties of dissipative dynamical systems : time discretization. *Math. Comp.*, 79(269) :259–280, 2010.

[80] S. Zheng and A. Milani. Exponential attractors and inertial manifolds for singular perturbations of the Cahn-Hilliard equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 57(5-6) :843–877, 2004.

[81] S. Zheng and A. Milani. Global attractors for singular perturbations of the Cahn-Hilliard equations. *J. Differ. Equations*, 209(1) :101–139, 2005.