

Université de Limoges

École Doctorale 653- Sciences et Ingénierie

Faculté des Sciences et Techniques – Institut de Recherche XLIM

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Limoges
Mathématiques appliquées

Présentée et soutenue par

Ghadir JRADI

Le 16 Juin 2023 à 14h

DES EDPs POUR LE MOUVEMENT DE FOULE

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR CROWDS MOTION

Thèse dirigée par Nouredine IGBIDA

JURY :

Président du jury

M. Boris Andreianov, Professeur, Université de Tours

Rapporteurs

M. Mostafa Bendahmane, Maître de Conférences, Université de Bordeaux

M. Fahd Karami, Professeur, Université Cady Ayyad

Examineurs

M. Boris Andreianov, Professeur, Université de Tours

Mme Catherine Choquet, Professeure, Université de La Rochelle

M. Thibault Liard, Maître de Conférences, Université de Limoges

Directeur de thèse

M. Nouredine IGBIDA, Professeur, Université de Limoges



Remerciement

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Nouredine IGBIDA. Merci de m'avoir proposé un sujet de thèse intéressant qui m'a permis de cumuler des différentes compétences aux niveaux théoriques et numériques. Merci aussi pour ta patience et ta confiance pendant ces années.

Je tiens à remercier les membres du jury de ma thèse qui ont accepté d'évaluer mes travaux de recherche. Merci à Mostafa Bendahmane et Fahd Karami pour le temps qu'ils ont passé à rapporter ma thèse. Merci aussi à Boris Andreianov, Catherine Choquet et Thibault Liard d'être les examinateurs de mes travaux.

Je tiens à remercier Hamza Ennaji (futur maître de conférence) pour les travaux réalisés ensemble. Merci pour tous les discussions surtout pendant les weekends.

Je souhaite remercier aussi tous les membres d'XLIM pour l'accueil. Je remercie particulièrement Sophie Queille, Débora Thomas et Henri Massias pour l'aide apportée au quotidien. Je remercie Pascale Sénéchaux qui m' a fait confiance en m'acceptant pour un poste d'ATER à la faculté des sciences de Limoges et d'avoir ma première expérience dans l'enseignement.

J'adresse une pensée aux personnes les plus importantes dans ma vie, à ma famille. Merci à mon père Hassan et ma mère Siham, mes premiers enseignants dans cette vie, merci de croire toujours en moi. Merci à ma grande soeur Zahraa, qui était presque présente depuis mon enfance dans les pluparts étapes de ma vie et qui m'a accompagné aussi depuis mon arrivé en France. Merci à mes soeurs Hawraa et Rayane, je vous souhaite une bonne continuation dans vos études. Merci à mes petits frères Houssein et Mohammad, sans savoir vous êtes devenus la source de joie dans notre maison. Je remercie aussi Alaa Fahs, qui fait aussi une partie de notre famille, je n'oublie jamais les jours qu'on a passé ensemble à Marseille pendant l'année du master2.

La période que j'ai passé pour terminer cette thèse a connu de nombreux moments difficiles. Pour cela je vais remercier une personne qui a toujours été à mes côtés et que grâce à lui j'ai pu aborder ces moments. Merci à toi Mohammad Ghousein de me rassurer toujours que tu es la pour moi. Merci d'exister et merci de faire partie de ma vie. Je t'aime.

Saint Quentin, le 21/08/2023.

Table des matières

Table des matières	v
1 Préliminaires	5
1.1 Dualité de Fenchel-Rockafellar	5
1.2 Algorithme Primal-Dual de Chambolle et Pock	7
1.3 Opérateurs multivoques et théorie des semigroupes	8
1.4 Opérateurs pseudo-monotones	9
2 Modélisation de mouvement de foule	11
2.1 État de l'art	11
2.1.1 Modèles microscopiques :	12
2.1.2 Modèles macroscopiques :	14
2.2 Nouvelle approche macroscopique pour représenter la foule	16
2.3 Travaux effectués	18
3 Nouveau modèle macroscopique	23
4 Étude théorique	57
4.1 Problème stationnaire	59
4.2 Problème de Cauchy et bonne solution	62
4.2.1 Définition des bonnes solutions	62
4.2.2 Existence d'une bonne solution	63
4.3 Solution Variationnelle	65
4.3.1 Existence d'une solution variationnelle	65
4.3.2 Unicité de la solution variationnelle	67
4.4 Conclusion	70
5 Une version modifiée du modèle de Hughes	71
5.1 Modèle de Hughes	71
5.2 Version modifiée du modèle de Hughes	73
5.3 Existence d'une solution variationnelle	74
5.4 Aspect numérique	82
5.4.1 Méthode de splitting	82
5.5 Implémentation	84

5.5.1	Discrétisation du domaine	84
5.5.2	Étape de transport	85
5.5.3	Étape de correction	85
5.5.4	Mise à jour de la vitesse	86
5.6	Simulations numériques	87
5.6.1	Effet de la vitesse	87
5.6.1.1	Test 1 : Évacuation d'une salle avec une sortie	87
5.6.1.2	Test 2 : Évacuation d'une salle avec deux sorties	88
5.6.2	Comparaison avec le modèle de Hughes	88
5.6.2.1	Test 1 : Évacuation d'une salle avec une sortie	88
5.7	Conclusion	89

Bibliographie	91
----------------------	-----------

Notations

Nous introduisons ici des notations qui seront utilisées dans ce manuscrit.

Ω : ouvert de \mathbb{R}^N , qui représente une salle.

$\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ frontière topologique de Ω ,

Γ_D représente la sortie de la salle et Γ_N représente les murs de la salle.

$Q = [0, T[\times \Omega$, $T > 0$

ν : normale extérieure à Ω

∇p : gradient de p

$\operatorname{div}(\Phi), \nabla \cdot \Phi$: divergence de Φ

$\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(Q), \mathcal{D}(0, T)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans $\Omega, Q, [0, T]$

$\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}'(Q)$: l'espace des distributions sur Ω, Q

$C(\Omega), C(Q)$: espace des fonctions continues dans Ω, Q

$L^s(\Omega)$: espace des fonctions de puissance s -ème intégrables sur Ω pour la mesure de Lebesgue

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$W^{1,s}(\Omega) = \{u \in L^s(\Omega), \nabla u \in (L^s(\Omega))^d\}$$

$$\|u\|_{W^{1,s}(\Omega)} = (\|u\|_{L^s(\Omega)}^s + \|\nabla u\|_{L^s(\Omega)^d}^s)^{\frac{1}{s}}$$

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

$$W_D^{1,s}(\Omega) = \{u \in W^{1,s}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

$$W_0^{1,s}(\Omega) = \{u \in W^{1,s}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$W^{-1,s'}(\Omega) : \text{espace dual de } W_0^{1,s}(\Omega)$$

$$L^s(0, T, X) = \{u : (0, T) \rightarrow X, \text{ mesurable ; } \int_0^T \|u(t)\|_X^s dt < \infty\}$$

$$L^\infty(0, T, X) = \{u : (0, T) \rightarrow X, \text{ mesurable ; } \operatorname{ess-sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X < \infty\}$$

$$C(0, T, X) = \{u : (0, T) \rightarrow X, \text{ continue}\}$$

$\operatorname{Lip}(\Omega)$: espace des fonctions lipschitziennes dans Ω

$$\operatorname{Lip}_D(\Omega) = \{z \in \operatorname{Lip}(\Omega) \text{ tel que } z = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

$$\operatorname{Lip}_D^*(\Omega) : \text{espace dual de } \operatorname{Lip}_D(\Omega)$$

Contexte de la thèse

Résumé : Dans cette thèse, nous proposons un nouveau modèle de type Prédiction-Correction décrivant le mouvement de foule. Le modèle proposé est un modèle macroscopique de transport où la foule est représentée par la densité des individus. Dans la première partie de la thèse, la vitesse de transport est donnée par un champ de vecteur constant au cours du temps, orienté vers les sorties les plus proches. La congestion est gérée par un terme de second ordre non-linéaire de diffusion active uniquement sur les régions du domaine où la densité coïncide avec la densité maximale autorisée (égale à 1). Nous proposons une résolution numérique basée sur la méthode de splitting en deux étapes, transport (prédiction) et diffusion (correction). Pour le transport, nous utilisons un schéma volumes finis. Pour la correction, nous proposons un nouveau problème d'optimisation de type Beckmann qu'on résout en utilisant un algorithme Primal-Dual (Chamboll-Pock). Dans la deuxième partie de la thèse, nous proposons une modification du modèle précédent (avec vitesse constante). Cette modification est basée sur le modèle de Hughes, où l'équation de transport est couplée avec une équation Eikonal, permettant à chaque instant de calculer un champ de vitesse orienté vers les sorties les plus proches en évitant les régions à densité élevée. Nous réalisons également différents tests numériques pour l'évacuation d'une salle avec différentes géométries et conditions initiales.

La thèse est composée de cinq chapitres :

Chapitre 1 : Préliminaires

Dans ce chapitre, nous fixons les notations et exposons les définitions et les résultats nécessaires pour la suite de ce travail.

Chapitre 2 : Modélisation du mouvement de foule

Dans ce chapitre, nous commençons par la présentation des modèles existants pour décrire le mouvement de foule. Puis, nous présentons notre nouveau modèle macroscopique.

Chapitre 3 : Résolution numérique

Dans ce chapitre, nous expliquons d'une façon détaillée notre modèle. Nous présentons ensuite l'algorithme de type prédiction-corrrection utilisé pour calculer la densité. Puis, nous présentons la

discrétisation et les schémas numériques qui nous ont permis d'approximer la densité. Après, nous réalisons des simulations numériques pour analyser le comportement de la foule pour différents scénarios et géométries. Les résultats exposés dans ce chapitre font l'objet de l'article [15].

Chapitre 4 : Étude théorique

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique du modèle proposé dans un cas particulier. En s'appuyant sur la théorie de semigroupes, nous montrons l'existence d'une solution variationnelle. L'unicité de la solution est prouvée en utilisant la méthode de doublement et dédoublement.

Chapitre 5 : Une version modifiée du modèle de Hughes

Dans ce chapitre, notre objectif est de proposer une amélioration du modèle proposé au chapitre 3. Nous commençons par présenter le modèle amélioré basé sur le modèle de Hughes. Ensuite, nous présentons les résultats théoriques obtenues. Un résultat d'existence est prouvé pour le modèle régularisé. Nous finissons ce chapitre par la présentation de quelques simulations numériques.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations et définitions qui seront utilisés dans cette thèse.

1.1 Dualité de Fenchel-Rockafellar

Soit \mathcal{H} un espace de Banach. On note par \mathcal{H}^* le dual topologique de \mathcal{H} .

Dans ce travail, on s'intéresse à des problèmes d'optimisations qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(\Lambda u) \quad (1.1)$$

où $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ et $\mathcal{G} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ sont deux fonctions propres, s.c.i et convexes, et $\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire. Le problème (1.1) est qualifié de primal. Pour passer au problème dual, on utilise la notion de transformée de Legendre-Fenchel.

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre, sci et convexe. On définit sa conjuguée ou sa transformée de Legendre-Fenchel $\mathcal{F}^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}^*(x) = \sup_{\phi \in \mathcal{H}} \langle \phi, x \rangle_{\mathcal{H}, \mathcal{H}^*} - \mathcal{F}(\phi), \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}^*. \quad (1.2)$$

Le bi-conjuguée de \mathcal{F} , est la fonction $\mathcal{F}^{**} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\mathcal{F}^{**}(x) = \sup_{\phi \in \mathcal{H}^*} \langle \phi, x \rangle_{\mathcal{H}^*, \mathcal{H}} - \mathcal{F}(\phi), \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

Théorème 1.1.1 (Fenchel-Moreau). Si $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre, s.c.i. et convexe, alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{**}$.

Définition 1.1.2. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. $\Phi \in \mathcal{H}^*$ est appelée sous-gradient de \mathcal{F} en u si

$$\mathcal{F}(\xi) \geq \mathcal{F}(u) + \langle \Phi, \xi - u \rangle_{\mathcal{H}^*, \mathcal{H}}, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{H}.$$

L'ensemble de sous-gradients de \mathcal{F} en u est appelé le sous-différentiel de \mathcal{F} en u , et on le note par $\partial\mathcal{F}(u)$.

En utilisant les définitions de \mathcal{F}^* et \mathcal{G}^* , on montre que pour tout $v \in \mathcal{Y}^*$ et pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a :

$$\sup_{v \in \mathcal{Y}^*} -\mathcal{F}^*(-\Lambda^*v) - \mathcal{G}^*(v) \leq \inf_{u \in \mathcal{H}} \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(\Lambda u), \quad (1.4)$$

L'inégalité (1.4) nous permet d'avoir la forme du problème dual associé au problème primal (1.1) qui est de la forme

$$\sup_{v \in \mathcal{Y}^*} -\mathcal{F}^*(-\Lambda^*v) - \mathcal{G}^*(v). \quad (1.5)$$

Or, pour avoir l'égalité dite la dualité forte, des conditions supplémentaires sur les deux fonctions \mathcal{F} et \mathcal{G} sont nécessaires.

Théorème 1.1.2. [13] Soient $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{G} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions propres, s.c.i et convexes. $\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire. S'il existe $u_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{F}(u_0) < \infty$, $\mathcal{G}(\Lambda u_0) < \infty$ et \mathcal{G} continue en Λu_0 , alors le problème dual (D) admet au moins une solution $v \in \mathcal{Y}^*$. Et dans ce cas, on a

$$\sup_{v \in \mathcal{Y}^*} -\mathcal{F}^*(-\Lambda^*v) - \mathcal{G}^*(v) = \inf_{u \in \mathcal{H}} \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(\Lambda u). \quad (1.6)$$

De plus, $u \in \mathcal{H}$ et $v \in \mathcal{Y}^*$ sont des solutions de (1.1) et (1.5) respectivement, si et seulement si

$$-\Lambda^*u \in \partial\mathcal{F}(u) \text{ et } v \in \partial\mathcal{G}(\Lambda u).$$

Problème de Point selle : D'après la définition 1.1.1, pour tout $u \in \mathcal{H}$ on a $\mathcal{G}(\Lambda u) = \sup_{v \in \mathcal{Y}^*} \langle \Lambda^*v, u \rangle_{\mathcal{H}^*, \mathcal{H}} - \mathcal{G}^*(v)$. En remplaçant l'expression de $\mathcal{G}(\Lambda u)$ dans le problème primal (1.1) on se ramène au problème suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} \sup_{v \in \mathcal{Y}^*} \langle \Lambda^*v, u \rangle_{\mathcal{H}^*, \mathcal{H}} - \mathcal{F}^*(v) + \mathcal{G}(u). \quad (1.7)$$

Le problème (1.7) est un problème de recherche de point selle. Pour résoudre ce type de problèmes des algorithmes de type primal-dual sont utilisés. Dans cette thèse, nous allons utiliser l'algorithme qui été introduit en 2011 par Chambolle et Pock [10]. La section suivante sera consacré à l'explication de cet algorithme.

Avant de présenter l'algorithme primal-dual qui sera utilisé, nous rappelons la définition de l'opérateur proximal.

Définition 1.1.3. Si $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre, convexe et sci. Pour $\tau > 0$, l'opérateur proximal de $\tau\mathcal{F}$ défini par Moreau [3] est donné par :

$$\mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{F}}(u) = (I + \tau\partial\mathcal{F})^{-1}(u) = \arg \min_{v \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{\|v - u\|^2}{2\tau} + \mathcal{F}(v) \right\}. \quad (1.8)$$

Remarque 1.1.1. Dans le cas où \mathcal{F} est la fonction indicatrice d'un ensemble C convexe, le calcul de l'opérateur proximal revient à calculer une projection, i.e.,

$$\mathbf{Prox}_{\mathbb{1}_C}(u) = \arg \min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} \|v - u\|^2 \right\} = P_C(u). \quad (1.9)$$

Proposition 1.1.1. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre, convexe et sci. Pour tout $\tau > 0$ et $u \in \mathcal{H}$ on a :

1. $\mathbf{Prox}_{\tau(\mathcal{F}+\lambda)}(u) = \mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{F}}(u)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Identité de Moreau :

$$u = \mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{F}}(u) + \tau \mathbf{Prox}_{\tau^{-1}\mathcal{F}^*}\left(\frac{u}{\tau}\right). \quad (1.10)$$

Rappelons aussi que si $\mathcal{F}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions propres, convexes et sci et \mathcal{F} est la fonction définie par

$$\mathcal{F}(u_1, u_2) = \mathcal{F}_1(u_1) + \mathcal{F}_2(u_2), \quad (1.11)$$

alors

$$\mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{F}}(u_1, u_2) = (\mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{F}_1}(u_1), \mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{F}_2}(u_2)). \quad (1.12)$$

1.2 Algorithme Primal-Dual de Chambolle et Pock

Étant donnés deux espaces euclidiens X et Y et une fonction $J : X \rightarrow \mathbb{R}$, l'algorithme de Chambolle et Pock consiste à donner une approximation numérique de la solution du problème d'optimisation

$$\min_{u \in X} J(u) \quad (1.13)$$

où J s'écrit comme $J(u) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(\Lambda u)$ sous les conditions :

- $\mathcal{F} : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ et $\mathcal{G} : Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ sont deux fonctions convexes, propres et semi-continues inférieurement.
- $\Lambda : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire.

Description de l'algorithme primal-dual : L'algorithme de minimisation est défini comme suit :

Algorithm 1 Algorithme primal-dual (Chambolle-Pock)

Initialisation

- Choix des paramètres $\sigma, \tau > 0$.
- Initialisation de deux variables u^0 et v^0 .
- On pose $\bar{v}^0 = v^0$.

Mise à jour des variables

Étape primal :

$$u^{l+1} = \mathbf{Prox}_{\sigma\mathcal{F}}(u^l - \sigma\Lambda^*\bar{v}^l) \quad (1.14)$$

Étape dual :

$$v^{l+1} = \mathbf{Prox}_{\tau\mathcal{G}^*}(v^l + \tau\Lambda u^{l+1}) \quad (1.15)$$

Extragradient :

$$\bar{v}^{l+1} = v^{l+1} + \theta(v^{l+1} - v^l), \text{ pour } \theta \in [0, 1].$$

Convergence : Dans le cas où $\theta = 1$, l'algorithme converge vers une solution de (1.13) sous la condition suivante :

$$\tau\sigma\|\Lambda\|^2 < 1.$$

1.3 Opérateurs multivoques et théorie des semigroupes

Dans le chapitre 4, nous prouvons l'existence d'une solution de notre modèle en utilisant la théorie des semigroupes. C'est pour cela, nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans le chapitre 4.

Opérateurs multivoques

Soit X un espace de Banach. On appelle opérateur multivoque l'application $\mathcal{A} \rightarrow P(X)$ de domaine

$$D_{\mathcal{A}} = \{x \in X; \mathcal{A}(x) \neq \emptyset\},$$

et d'image

$$R_{\mathcal{A}} = \{y \in X; \exists x \in X, y \in \mathcal{A}(x)\}.$$

Définition 1.3.1. Soit \mathcal{A} un opérateur multivoque de X .

1. On dit que l'opérateur \mathcal{A} est accréatif dans X si

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|_X, \text{ pour tout } \lambda > 0, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{A}.$$

2. On dit que l'opérateur \mathcal{A} est m -accréatif dans X si

$$\mathcal{A} \text{ est accréatif et } R(I + \lambda\mathcal{A}) = X, \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

De plus, si l'espace X est réticulé, alors

1. On dit que l'opérateur \mathcal{A} est T -accréatif dans X si

$$\|(x_1 - x_2)^+\|_X \leq \|(x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2))^+\|_X, \text{ pour tout } \lambda > 0, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{A}.$$

2. On dit que l'opérateur \mathcal{A} est m - T -accréatif dans X si

$$\mathcal{A} \text{ est } T\text{-accréatif et } R(I + \lambda\mathcal{A}) = X, \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Bonnes solutions

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(CP(\rho_0, f)) \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \mathcal{A}\rho = f \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

où \mathcal{A} est un opérateur multivoque défini sur l'espace de Banach X , $\rho_0 \in X$ et $f \in L^1([0, T], X)$. Pour $\epsilon > 0$, on considère la discrétisation suivante de l'intervalle $[0, T]$:

$$\begin{cases} 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = T, \\ t_{i+1} - t_i = \epsilon, \text{ pour tout } i \in 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

On approche la fonction f par la fonction f_ϵ constante par morceaux, définie par

$$\begin{cases} f_\epsilon(t) = f_i & \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ f_i \in X & \forall i \in 0, \dots, n-1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(t) - f_i\|_X < \epsilon, \end{cases}$$

Discrétisons la première équation de problème $(CP(\rho_0, f))$ par un schéma Euler implicite en temps, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\rho(t_{i+1}) - \rho(t_i)}{t_{i+1} - t_i} + \mathcal{A}\rho(t_{i+1}) = f_{i+1} & \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

La fonction constante par morceaux ρ^ϵ définie par :

$$\rho^\epsilon(t) = \begin{cases} \rho^{i+1} & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ \rho^0 & \text{si } t \in [0, t_1[, \end{cases}$$

est appelée solution ϵ -approximation du problème de Cauchy discrétisé. L'ensemble des éléments de la discrétisation noté par $D_{\mathcal{A}}^\epsilon(t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n; \rho_0)$ est appelé ϵ -discrétisation.

Définition 1.3.2. Une fonction $\rho \in C([0, T], X)$ est appelée une bonne solution du problème de Cauchy $(CP(\rho_0, f))$ s'il existe une ϵ -discrétisation et une solution ϵ -approximation ρ^ϵ telle que

$$\rho^\epsilon \rightarrow \rho \text{ dans } C([0, T], X),$$

avec $\rho(0) = \rho_0$.

1.4 Opérateurs pseudo-monotones

Définition 1.4.1. Un opérateur $\mathcal{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ est dit pseudo-monotone si :

1. \mathcal{T} est borné,
2. lorsque $u_n \rightarrow u$ dans \mathcal{V} faible et $\limsup \langle \mathcal{T}(u_n), u_n - u \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} \leq 0$ alors

$$\liminf \langle \mathcal{T}(u_n), u_n - v \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} \geq \langle \mathcal{T}(u), u - v \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}, \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (1.16)$$

Dans le chapitre 4, nous prouvons l'existence d'une solution du problème stationnaire associé au modèle en utilisant le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. (Voir théorème 8.1 dans [27])

Soit \mathcal{V} un espace de Banach séparable et réflexif et soit \mathcal{W} un ensemble convexe fermé borné non vide de \mathcal{V} . Soit \mathcal{T} un opérateur défini de \mathcal{V} dans \mathcal{V}^* . Si \mathcal{T} est pseudo-monotone de $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$, alors pour tout $f \in \mathcal{V}^*$, il existe $u \in \mathcal{W}$ tel que

$$\langle \mathcal{T}(u), u - v \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}} \leq \langle f, u - v \rangle_{\mathcal{V}^*, \mathcal{V}}, \text{ pour tout } v \in \mathcal{W}.$$

Chapitre 2

Modélisation de mouvement de foule

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un nouveau modèle macroscopique de mouvements de foule que nous étudions. Nous commençons par présenter quelques modèles existants, ensuite nous présentons le modèle étudié, nous finissons ce chapitre par présentation des travaux effectués dans ce manuscrit.

2.1 État de l'art

Depuis des décennies, les études sur la modélisation des mouvements de foule ne cessent d'évoluer, vu l'importance de ce sujet dans notre vie quotidienne. En fait, les effets de quelques mouvements de foule sont dangereux, et peuvent être fatals. Par exemple, sept bousculades géantes se sont produites entre 1990 et 2015 à la Mecque, lors du pèlerinage annuel. La dernière était la plus meurtrière avec la mort de 2300 personnes. Plus récemment, en octobre 2022, 127 personnes sont décédées lors d'un bousculement lié à des affrontements lors d'un match de football en Indonésie.

Étudier les dynamiques des piétons permettrait de limiter ce type de phénomènes. En effet, le but principal est de prédire le mouvement des piétons au sein d'une foule dans différents lieux accueillants des rassemblements comme les stades, les gares, les lieux de cultes et les lieux de loisirs. Ces prédictions jouent un rôle important dans l'architecture et dans la planification des constructions. En effet, prévoir le mouvement des piétons, permettrait de mieux planifier les constructions au niveau des tailles et des voies d'évacuations. Ce qui peut optimiser les temps de parcours, et diminuer le nombre d'accidents liés aux phénomènes de congestion, et les situations de panique qui en suivent.

Le mouvement de foule a été modélisé la première fois par Henderson [21]. En effet, Henderson a remarqué qu'il est possible d'approcher les piétons dans une foule par des particules d'un gaz compressible, en proposant un modèle basé sur la théorie des gaz cinétiques. Depuis, de nombreux scientifiques ont été attirés par ce sujet. Différents modèles ont été introduits pour modéliser le mouvement de foule. Certains modèles sont basés sur le modèle gazeux de Hen-

derson. D'autres sont inspirés de la mécanique des fluides, dans lesquels la foule est considérée comme un fluide, comme par exemple dans le modèle de Hughes [22, 23]. D'autres techniques de modélisation sont totalement différents, comme par exemples les modèles d'automates cellulaires [29, 24, 26, 25], les modèles des forces sociales [20, 18, 19], et les modèles utilisant des graphes. L'ensemble de ces différents modèles existants pour modéliser les foules peuvent être classifiés en deux classes, selon le critère de la représentation de la foule. La première classe, celle des modèles macroscopiques, dans lesquels la foule est représentée par une densité de population. Le problème est donc traité avec une description globale de la dynamique de la foule. Comme par exemple : le modèle des gaz cinétiques de Henderson [21], le modèle de Hughes [22, 23], les modèles de second ordre introduits dans [4, 12], le modèle développé par Maury et Roudneff-Chupin [32], dans lequel les auteurs décrivent la dynamique de la foule par une équation de transport corrélée avec un terme de correction pour la vitesse, active uniquement dans les endroits encombrés. La deuxième classe, est celle des modèles microscopiques, dans lesquels la foule est représentée par tous ses individus. Les plus répandus parmi ces modèles, sont ceux de forces sociales introduits par Helbing [20, 18, 19], les modèles utilisant les automates cellulaires [29, 24, 26, 25], et les modèles utilisant des graphes. Malgré l'avantage de ces modèles au niveau de la description individuelle de la foule, ils restent plus adaptés aux situations où les nombres des piétons n'est pas trop élevé. En effet, vu que le mouvement de chaque individu est décrit par une équation, le calcul devient coûteux dans le cas des foules denses. Cependant, les modèles macroscopiques sont plus adaptés aux milieux vastes et denses, vu que le mouvement de foule est décrit d'une manière collective par sa densité.

Chacune de ces deux classes a ses avantages et ses inconvénients. Au même temps, chacune est adaptée à des situations spécifiques. Par exemple, dans le cas des foules très denses, comme les mouvements dans des grands villes, les modèles macroscopiques sont plus efficaces. Pour les mouvements qui nécessitent le suivi de comportement de chaque individu, comme dans le cas des évacuations d'urgence, ces mouvements font appel à des modèles microscopiques.

Citons quelques modèles existant pour décrire le mouvement de foule :

2.1.1 Modèles microscopiques :

Dans cette classe des modèles, la foule est représentée par tous ses individus. La dynamique de chaque individu est décrite par une équation différentielle décrivant l'évolution de sa position, ou sa vitesse en fonction du temps. Le mouvement global de la foule est alors décrit par un système de N équations, où N est le nombre total des individus présents dans la foule. Parmi ces modèles, nous présentons les suivants :

- **Modèles des automates cellulaires :** Cette catégorie de modèles, a été introduite par Nagel dans [29]. L'idée de ces modèles, est de discrétiser l'espace de déplacement de la foule en cellules carrées. À chaque pas du temps, chaque cellule peut être occupée au plus par un seul piéton. Nous distinguons sur la grille trois types de cellule :
 - Cellules occupées : représentent les endroits occupés ou saturés. À chaque instant chacune de ces cellules peut être occupée par un seul piéton.
 - Cellules libres : représentent les endroits libres, vers lesquels les piétons sont autorisés

de se déplacer. À chaque instant un piéton est autorisé de se déplacer vers une cellule libre.

- Cellules inaccessibles : représentent les obstacles et les endroits vers lesquels les piétons sont interdits de se déplacer.

À chaque pas de temps, chaque piéton a le choix de se déplacer vers une de ses cellules voisines. Par exemple, dans [24] les piétons sont autorisés à se déplacer dans 3 directions seulement, par contre dans [26, 25] vers 4 directions. Ce passage d'une cellule à une autre se fait suivant une probabilité de transition, et la mise à jour de la position de chaque piéton peut être réalisé par deux méthodes :

- Soit par déplacement de chaque piéton à son tour d'une manière aléatoire, et cela évite le cas deux ou plusieurs piétons ont la même cellule cible.
- Soit par déplacement de tous les piétons d'une manière global, et dans le cas où deux ou plusieurs piétons décident de choisir la même cellule cible, des règles de probabilités sont définies pour choisir le piéton gagnant.

Ce modèle n'est pas couteux, par contre il manque de réalisme. En effet, les interactions entre les piétons ne sont pas prises en compte.

- **Modèles de forces sociales :** Cette catégorie de modèles microscopiques a été introduite initialement par Helbing [20], et développée après par d'autres auteurs dans [19, 30, 31, 18].

Dans ces modèles, la dynamique des piétons est décrite par une approche newtonienne. Pour chaque piéton de masse p , son mouvement est régi par un ensemble de forces sociales F_p . Ces forces sont réparties en trois catégories :

1. Forces de répulsion entre deux piétons, ou entre piéton et un obstacle, pour éviter les collisions.
2. Forces d'attractions pour faire déplacer un piéton vers un endroit souhaité ou pour rejoindre un autre piéton.
3. Un terme d'accélération a_p , due au changement de la vitesse, effectuée par chaque piéton pour changer sa direction et atteindre son but.

Helbing a exprimé le terme d'accélération comme suit :

$$a_p = \frac{1}{\tau_p}(v_p^0 e_p - v_p),$$

où v_p est la vitesse du piéton p , v_p^0 est la vitesse avec laquelle il souhaite se déplacer vers une direction e_p , et τ_p est un temps de relaxation.

L'évolution de la vitesse des piétons est représentée par le système suivant :

$$\frac{dv_p}{dt} = F_p.$$

L'avantage de ces modèles réside dans la simplicité de la modélisation, ainsi que le réalisme pour décrire le mouvement des piétons en introduisant les forces d'attractions et des répulsions. Cependant, dans le cas des foules denses, un inconvénient apparaît, les piétons commencent à osciller dans les endroits à densité élevée [31].

- **Modèle Granulaire de Maury et Venel** : Développé par Maury et Venel [34], ce modèle prend en compte les interactions directes entre les individus qui sont représentés par des disques. Chaque individu i est représenté par un disque de centre q_i et de rayon R

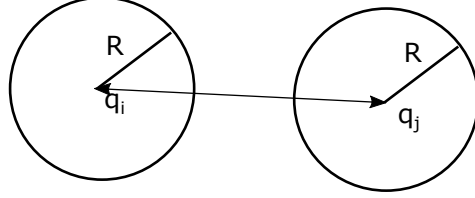


FIGURE 2.1 – Représentation de deux disques.

ayant une vitesse souhaitée U_i de déplacement i.e., celle qu'il aurait en l'absence des autres. Cependant, puisque le déplacement d'un piéton avec sa vitesse souhaitée sans la considération de la présence des autres provoque la collision, un changement de trajectoire est nécessaire pour éviter ces collisions. Pour gérer ces problèmes de collisions, les auteurs ont proposé de corriger la trajectoire de chaque piéton, en modifiant sa vitesse souhaitée. Cette vitesse est corrigée par projection sur un ensemble de vitesses dites admissibles, noté C_q , qui garantissent la contrainte de congestion suivante : $|q_i - q_j| \geq 2R$

$$C_q := \left\{ v \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{i,j}(q) = 0 \implies \nabla D_{i,j}(q) \cdot v \geq 0 \right\},$$

avec $D_{i,j} = |q_i - q_j| - 2R$ où $|q_i - q_j|$ est la distance entre les centres de deux disques de rayon R représentant deux individus i et j .

Le mouvement de la foule est décrit par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = u(q_i), & i = 1, \dots, N \\ u = P_{C_q} U, \end{cases}$$

où P_{C_q} est la projection sur C_q , u est la vitesse corrigée, U est la vitesse souhaitée et N le nombre totale des piétons.

Cette correction au niveau de la vitesse, permettrait à chaque piéton de corriger sa trajectoire, en choisissant la trajectoire la plus proche à sa vitesse souhaitée satisfaisant la contrainte de congestion.

2.1.2 Modèles macroscopiques :

Dans ces modèles, la foule est représentée par une densité de population. L'évolution de la foule est décrite d'une manière collective sans prendre en compte les interactions directes entre les piétons. Dans [21], Henderson a proposé pour une première fois un modèle macroscopique dans lequel il assimile le comportement de la foule à celui d'un fluide compressible en s'inspirant de la théorie de gaz cinétique et en se basant sur les équations de Maxwell-Boltzmann. L'idée principale étant de faire l'analogie entre les particules de gaz et les piétons. Depuis, d'autres modèles ont été développés, les plus connus parmi ces modèles :

- **Modèle de Hughes** : Hughes a proposé dans [22, 23] un modèle macroscopique basé sur une équation de conservation de masse pour décrire l'évolution de la densité ρ , couplée avec une équation Eikonal pour calculer la distance ϕ la plus courte de la sortie, tout en évitant les zones saturées. La vitesse de la foule à chaque instant est calculée en fonction de la densité globale ρ , en utilisant la distance ϕ . L'évolution de la densité de la foule est gouvernée par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho U[\rho]) = 0, \\ U[\rho] = f(\rho)^2 \nabla \phi, \\ \|\nabla \phi\| = \frac{1}{f(\rho)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où f est une fonction décroissante avec $f(0) = 1$ et $f(\rho_{max}) = 0$ ($\rho_{max} = 1$ en général), la forme la plus simple et la plus utilisée est $f(\rho) = (\rho_{max} - \rho)$.

- **Modèles de second ordre** : Proposés dans [4, 12] pour les dimensions ≥ 2 , l'évolution de la densité est gouvernée par une équation de conservation de masse. En plus, un terme d'accélération est introduit dans ces modèles vu son importance dans la modélisation du mouvement de foule. En effet, l'accélération a une grande influence sur le mouvement des piétons, et peut être la cause des accidents. L'évolution de la foule est donc décrite dans ces modèles par deux équations : équation conservation de masse pour la densité, et équation de conservation de moment pour la vitesse

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = F(\rho, v), \end{cases} \quad (2.2)$$

où F est la somme des forces qui influencent le mouvement de la foule.

- **Modèle de seconde ordre de Maury et Roudneff-Chupin** : Une nouvelle approche a été introduite par Maury et Roudneff-Chupin [32]. C'est la version macroscopique du modèle microscopique de Maury et Venel [34], décrite dans 2.1.1. Dans [32], les auteurs proposent un modèle du transport où le mouvement de foule est décrit en l'absence de congestion par l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \\ \rho(t=0) = \rho_0, \end{cases}$$

où $V \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ est la vitesse souhaitée de la foule. Afin de garantir une densité admissible ($0 \leq \rho \leq \rho_{max}$), les auteurs proposent de corriger la vitesse V en la projetant sur l'ensemble des vitesses admissibles qui conduisent à une densité admissible. L'espace des vitesses admissibles est défini par :

$$C_\rho = \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2), \nabla \cdot v \geq 0 \text{ où } \rho = 1\}.$$

Le modèle complet s'écrit comme, dans les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0 \\ U = P_{C_\rho}(V) \\ \rho(t = 0) = \rho_0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où P_{C_ρ} est l'opérateur projection. La nouvelle vitesse corrigée U peut s'écrire comme $U = V + W$ où $W = W[\rho]$ est un terme de correction de la vitesse. Dans le cas où le champ de vitesse souhaité V s'écrit comme un gradient d'une fonction i.e., $V = -\nabla D$ (avec D fonction Lipschitzienne), Maury et al. ont prouvé dans [28] qu'il est possible d'écrire $W[\rho]$ sous la forme suivante :

$$W[\rho] = -\nabla p, \text{ avec } p \geq 0 \text{ et } p(\rho - 1) = 0.$$

Avec cette dernière définition de $W[\rho]$, Maury et al. proposent le modèle macroscopique suivant pour modéliser le mouvement de foule

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho (V - \nabla p)) = 0 \\ p \geq 0, 0 \leq \rho \leq 1, p(\rho - 1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Une extension du modèle (2.4) au cas d'une population à deux types (avec deux densités ρ_1 et ρ_2) a été ensuite étudiée dans [6] en imposant une contrainte de congestion maximale : $\rho_1 + \rho_2 \leq \rho_{max}$.

2.2 Nouvelle approche macroscopique pour représenter la foule

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle approche macroscopique pour décrire le mouvement de foule. L'approche proposée s'inspire du modèle de Maury et al. [32] décrit dans la section précédente. Elle est basée sur un algorithme de type prédiction-corrrection. L'étape de prédiction consiste à prédire la densité de population grâce à l'équation du transport. Alors que, pour l'étape de correction, nous proposons une nouvelle méthode pour calculer le champ de correction $W[\rho]$ en définissant un problème d'optimisation de type Beckmann.

Description du modèle proposé :

Considérons un domaine Ω de frontière $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Nous calculons la densité ρ en deux étapes : étape de prédiction et étape de correction. Pour présenter l'approche proposée, on considère l'intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$. Pour $\tau > 0$ un pas de temps, nous discrétisons $[0, T]$ en sous intervalles de la forme $[t_k, t_{k+1}]$ où $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, n - 1$. Pour une densité initiale

ρ_0 , à chaque instant t_{k+1} la densité ρ_{k+1} est calculée par deux étapes, pour cela chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ sera divisé en deux sous-intervalles $[t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[$ et $[t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[$ où chaque intervalle correspond à une étape de l'algorithme.

- **Étape de Prédiction** : Dans cette étape, on calcule la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}} = \rho(t_{k+\frac{1}{2}})$ le transport de $\rho_k = \rho(t_k)$ par le champ de vitesse V . Donc, la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ est la solution de l'équation de continuité suivante :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \quad \text{dans } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[\times \Omega, \quad (2.5)$$

où V est un champ de vitesse dérivant d'un potentiel φ , solution de l'équation Eikonal suivante :

$$\begin{cases} \|\nabla \varphi\| = k & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec k est une fonction continue et positive. Le champ de vitesse V est donnée par $V := -\nabla \varphi / \|\nabla \varphi\|$. Dans le cas où $k = 1$, la solution de (2.6) (au sens de viscosité) est la distance géodésique à la sortie Γ_D . Les piétons se déplacent alors vers la sortie représentée par Γ_D en choisissant la trajectoire la plus courte.

- **Étape de Correction** : En général, sans aucune condition supplémentaire sur la vitesse V , chaque piéton va se déplacer avec sa vitesse souhaitée V sans prendre en compte la présence des autres piétons dans le domaine Ω . Dans ce cas, plusieurs piétons peuvent choisir de se déplacer dans la même direction. Il y aura donc des endroits qui vont être complètement saturés, où la densité transportée $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ va dépasser la densité maximale autorisée ($\rho_{max} = 1$).

Pour garantir une densité admissible ($0 \leq \rho \leq 1$) et résoudre le problème de congestion, nous corrigeons la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ en utilisant le problème de flux minimal suivant :

$$\inf_{\rho, \Phi} \left\{ \int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) \, dx + \int_{\Gamma_D} g(x) \nu(x) \, dx : \rho \in L^{\infty}(\Omega), 0 \leq \rho \leq 1, \right. \\ \left. \Phi \in (L^1(\Omega))^N, \Phi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_N, -\operatorname{div}(\Phi) = \tilde{\rho} - \rho \text{ dans } \bar{\Omega} \right\}. \quad (2.7)$$

Le flux Φ solution du problème (2.7) minimisant le coût de passage de la densité $\tilde{\rho}$ vers la densité ρ correspond à une correction du champ de vitesse V qui permet à un piéton de dévier de sa trajectoire initiale (décrit par la vitesse V) en prenant la trajectoire la plus proche qui garantit une densité admissible $\tilde{\rho}$. Le terme $\int_{\Gamma_D} g(x) \nu(x) \, dx$ est un coût supplémentaire sur Γ_D qui exporte de la masse vers l'extérieur.

Le problème de flux minimal utilisé dans l'étape de correction sera présenté d'une manière plus détaillée dans le chapitre 3.

Choix de F : Dans ce travail, $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction qui vérifie les hypothèses suivantes :

1. **(F1)** Pour tout $x \in \Omega$, $F(x, \cdot)$ est convexe.
2. **(F2)** Pour tout $x \in \Omega$, $F(x, \cdot)$ est s.c.i.

De plus, nous nous intéressons aux fonctions de la forme suivante :

$$F(x, \xi) = \frac{c(x)}{s} |\xi|^s, \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

avec $1 \leq s < \infty$.

2.3 Travaux effectués

Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle proposé dans le cas où

$$F(x, \xi) = \frac{c(x)}{s} |\xi|^s, \quad \text{pour tout } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Puis, pour les résultats théoriques nous nous focalisons sur un cas particulier où

$$F(x, \xi) = k(x) |\xi|, \quad \text{pour tout } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N,$$

avec $0 \leq k(x) \in C(\bar{\Omega})$. C'est-à-dire lorsque l'étape de correction revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) := \inf_{\Phi, \rho} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx - \tau \int_{\Gamma_D} g \Phi \cdot \nu dx : \tau \Phi \in \mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho) \text{ et } \rho \in \mathcal{K}_1 \right\}, \quad (2.8)$$

avec $\mathcal{F}(\mu) := \left\{ \Phi \in L^s(\Omega)^N : -\operatorname{div}(\Phi) = \mu \text{ dans } \Omega \text{ et } \Phi \cdot \nu = \eta \text{ sur } \Gamma_N \right\}$, $0 \leq \tilde{\rho} \in L^s(\Omega)$ et \mathcal{K}_1 est l'ensemble des densités admissibles définie par

$$\mathcal{K}_1 = \{ \rho \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

Nous montrons dans cet article [15] le théorème suivant :

Theorem 2.2 Pour tout $0 \leq \tilde{\rho} \in L^s(\Omega)$, on a

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int_{\Omega} \tilde{\rho} p dx + \tau \int_{\Gamma_N} \eta p dx - \int_{\Omega} p^+ dx \right\} := D_g^\infty(\tilde{\rho}), \quad (2.9)$$

avec

$$\mathcal{G}_k := \left\{ z \in W^{1,\infty}(\Omega) : z = g \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } |\nabla z(x)| \leq k(x) \text{ p.p. } x \in \Omega \right\}.$$

De plus, on a

1.

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \min_{\rho \in \mathcal{K}_1} \inf_{\tau \Phi \in \mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho)} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx - \tau \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu dx \right\}, \quad (2.10)$$

2. si ρ et p sont deux solutions respectivement de $\mathcal{N}(\tilde{\rho})$ et $D_g^\infty(\tilde{\rho})$, alors $p \in \mathcal{G}_k$, $\rho \in \mathcal{K}_1$, $\rho \in \text{Sign}^+(p)$, p.p. dans Ω et

$$\int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) (p - \xi) \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} \eta (p - \xi) \, dx \geq 0, \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{G}_k. \quad (2.11)$$

Et le triplet (ρ, p, Φ) satisfait l'EDP suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \text{div}(\Phi) + \text{div}(\rho V) = 0 \\ \Phi = m \nabla p, \, m \geq 0, \, |\nabla p| \leq k, \, m(k - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \text{Sign}^+(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega, \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D. \end{array}$$

Dans la suite, nous présentons la méthode de splitting proposée pour l'approximation numérique. Une description détaillée de la discrétisation du domaine de calcul et des opérateurs est présentée. Puis, pour chaque étape de l'algorithme nous expliquons le schéma utilisé. Pour l'étude théorique, nous n'avons pas pu montrer l'existence et l'unicité d'une solution du modèle. La difficulté majeur provient de l'absence de la régularité et de la compacité puisque dans notre modèle la densité ρ est représentée par un graphe de Sign^+ . À cause de cette difficulté, nous montrons dans le chapitre suivant l'existence et l'unicité d'une solution du problème régularisé, où le graphe Sign^+ est remplacé par une fonction lipschitzienne notée b i.e., nous nous intéressons à l'étude théorique du problème suivant :

$$(\mathcal{PE}) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \text{div}(\Phi) + \text{div}(\rho V) = 0 \\ \Phi = m \nabla p, \, m \geq 0, \, |\nabla p| \leq 1, \, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho = b(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D, \end{array}$$

Nous notons que les travaux effectués dans ce chapitre sont dans le cas où le champ vitesse est indépendant de la densité. C'est pour cela, nous nous intéressons après à ce qui se passe si le champ vitesse dépend de la densité.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la preuve d'existence et d'unicité d'une solution du modèle dans le cas où $F(x, \xi) = |\Phi|$, avec un terme source f . C'est-à-dire nous étudions le modèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, \quad m \geq 0, \quad |\nabla p| \leq 1, \quad m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \operatorname{Sign}^+(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega,$$

$$\left. \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D. \end{array}$$

Pour des difficultés liées à la non-régularité du graphe Sign^+ , nous étudions la version régularisée où nous considérons une approximation lipschitzienne de Sign^+ notée b i.e., nous étudions

$$(\mathcal{PE}) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, \quad m \geq 0, \quad |\nabla p| \leq 1, \quad m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho = b(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega,$$

$$\left. \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D, \end{array}$$

où b est une fonction lipschitzienne et croissante.

Nous démontrons que le problème (\mathcal{PE}) admet une solution au sens de la définition suivante

Définition 2.3.1. *On appelle solution variationnelle du problème (\mathcal{PE}) tout couple (ρ, p) tel que $\rho \in C([0, T], L^1(\Omega))$, $\rho(0) = \rho_0$, $p(t) \in \mathcal{K}$ sachant que $\rho = b(p)$, et pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$, on a :*

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \sigma(t) \int_0^p T_k(s - \xi) db(s) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \quad (2.13)$$

avec $\mathcal{K} := \{u \in W^{1,s}(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } |\nabla u| \leq 1\}$.

La preuve d'existence a été établie en deux étapes. En se basant sur la théorie de semigroupes, nous avons montré que le problème de Cauchy associé à (\mathcal{PE}) admet une bonne solution. Puis, par passage à la limite, nous démontrons que chaque bonne solution du problème de Cauchy est

une solution de (\mathcal{PE}) au sens de la définition 2.3.1.

Pour prouver l'unicité de cette solution, nous utilisons la méthode de doublement et dédoublement de variables.

Chapitre 5

Rappelons que les travaux effectués dans le chapitre 3 sont dans le cas où le champ vitesse est indépendant de la densité. Dans ce chapitre, nous travaillons avec un champ vitesse qui dépend de la densité. Le modèle devient le suivant :

$$(P_H) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\Phi) - \operatorname{div}(\rho \nabla \mathbf{D}) = f \\ \Phi = m \nabla p, m \geq 0, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \operatorname{Sign}^+(p), \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = 0 \\ p = 0, \mathbf{D} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D, \end{array}$$

Nous démontrons dans ce chapitre l'existence d'une solution du modèle ci dessus dans le cas où le graphe Sign^+ est approximé par une fonction lipschitzienne b . Le problème régularisé (P_H) admet une solution au sens du théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Pour tout $f \in L^1(0, T, Lip_D^*(\Omega))$, le problème (P_H) admet une solution variationnelle (ρ, p, \mathbf{D}) au sens suivant : $\rho \in L^1(0, T, L^1(\Omega))$, $p \in L^\infty(0, T, H_D^1(\Omega))$ avec $\rho = b(p)$, et $\mathbf{D} \in L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega))$ où \mathbf{D} est la solution maximale de l'équation Eikonal suivante*

$$(E) \left\{ \begin{array}{ll} \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{array} \right.$$

tels que pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$ on a :

$$- \int_0^T \partial_t \sigma(t) \int_\Omega \int_0^\rho T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt + \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla \mathbf{D} \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt. \quad (2.14)$$

En suite, nous réalisons des simulations numériques pour comparer le comportement du nouveau modèle avec celui du chapitre 3. Nous trouvons que le modèle est amélioré dans la cas où le champ vitesse dépend de la densité.

Chapitre 3

Nouveau modèle macroscopique

Ce chapitre est un article soumis en collaboration avec Nouredine Igbida et Hamza Ennaji.

PREDICTION-CORRECTION PEDESTRIAN FLOW BY MEANS OF MINIMUM FLOW PROBLEM

HAMZA ENNAJI [†], NOUREDDINE IGBIDA[‡], AND GHADIR JRADI[‡]

ABSTRACT. We study a new variant of mathematical prediction-correction model for crowd motion. The prediction phase is handled by a transport equation where the vector field is computed via an eikonal equation $\|\nabla\varphi\| = f$, with a positive continuous function f connected to the speed of the spontaneous travel. The correction phase is handled by a new version of the minimum flow problem. This model is flexible and can take into account different types of interactions between the agents, from gradient flow in Wasserstein space to granular type dynamics like in sandpile. Furthermore, different boundary conditions can be used, such as non-homogeneous Dirichlet (e.g., outings with different exit-cost penalty) and Neumann boundary conditions (e.g., entrances with different rates). Combining finite volume method for the transport equation and Chambolle-Pock's primal dual algorithm for the eikonal equation and minimum flow problem, we present numerical simulations to demonstrate the behavior in different scenarios.

1. INTRODUCTION

Macroscopic model for a congested pedestrian flow involves treating the crowd as a whole and is applicable for large crowds. It was first introduced in [4] and developed in [23, 24]. In these models, the crowd behave similarly to a moving fluid in a spatio-temporal dynamic governed by a flow velocity vector field U . Thus the master equation of each macroscopic crowd flows model is the continuity equation:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho U) = 0, \tag{1.1}$$

where $\rho = \rho(t, x)$ the density of the individuals, at time $t \geq 0$ and at the position $x \in \mathbb{R}^N$ ($N = 2$), needs to accurate some admissible global distribution of the population. Though there is much speculation, discussion and experience to define appropriate choice of flow velocity vector field U , there is no definitive universal choice to describe crowd motion in general. The main difficulties lies in the fact that while maintaining a suitable dynamic esteeming the admissible global distribution ρ , U needs to manage both, the overall behavior of the crowd (for example of reaching an objective like exit, point of interest, avoidance of danger, etc.) and certain local

Date: April 17, 2023.

Key words and phrases. Mathematical prediction-correction model, crowd motion, transport equation, eikonal equation, minimum flow problem, granular type dynamics, numerical simulation, duality in optimization, primal-dual algorithm.

[†]Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, France. Email : hamza.ennaji@unicaen.fr.

[‡]Institut de recherche XLIM-DMI, UMR-CNRS 6172, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges, France. Emails: noureddine.igbida@unilim.fr, ghadir.jradi@unilim.fr .

behavior of pedestrians (pedestrian in a hurry, pedestrian who adapts their speed, pedestrian who avoids the crowd, pedestrian attracted by the crowd, etc).

Inspired by traffic flow models, many crowd motion models were performed essentially in one-dimensional space (c.f. [10, 23, 24]). In higher dimensions, Bellomo and Dogbe (c.f. [3, 15]) proposed coupling the continuity equation with

$$\partial_t U + (U \cdot \nabla_x)U = F(\rho, U),$$

where the motion is governed by F , which has two parts: a relaxation term towards a definite speed, and a repulsive term to take into account that pedestrians tend to avoid high-density areas. A barrier method was proposed by Degond (cf. [13]) wherein the motion F depends on a pressure that blows up when the density approaches a given congestion density. Piccoli and Tosin proposed another class of models in the framework of a time-evolving measure in [35, 36]. In their model the velocity of the pedestrian is composed by two terms: a desired velocity and an interaction velocity.

Roger Hughes proposed a completely different approach to describing pedestrian dynamics in [25], where a group of people wants to leave a domain with one or more exits/doors as quickly as possible. His main idea was to include some kind of saturation effects in the vector field. He considered $U = U[\rho]$ driven by the gradient of a potential Φ and weighted by a nonlinear mobility $f = f(\rho)$. More precisely

$$U = f(\rho)^2 \nabla \Phi \quad \text{and} \quad \|\nabla \Phi\| = 1/f(\rho),$$

where mobility includes saturation effects, i.e., degenerate behavior when approaching a given maximum density ρ_{max} (assumed to be known); for instance one can take $f(\rho) = (\rho - \rho_{max})^2$ among others. See also [11] and [26] for further details.

To handle local behaviors of pedestrian, we go here with second order PDE for crowded motion to perform congestion phenomena which may appear if one consider velocity field U looking out solely to the exists (doors). The main idea is to get in U together a vector field V with an overview looking out to the exit and some kind of patch W , a vector filed with a local view looking out to the allowable neighbor positions taking into account the local distribution of the pedestrian. To come out with U through this perspective, we process by splitting the dynamic into two instantaneous phases: a first one, the so-called prediction phase, where the pedestrians move along the given vector filed V , the so called spontaneous velocity field, and a second phase, the correction, which generates a patch W that enables the pedestrian to move along allowable local paths to avoid congestion and maintain admissible global distribution of the pedestrian. A typical example of this point of view remains to be the constrained diffusion-transport equation which was performed in the pioneering work by B. Maury and al. (cf. [31]) through a predicting-correcting algorithm using a gradient flow in the Wasserstein space of probability measures. In this paper, we use a new manner to handle this perspective. In contrast with [31] where the author straighten up the density using some kind of projection in \mathbb{W}_2 -Wasserstein space in the correction phase, our approach is based on a new version of minimum flow problem. The approach is flexible and makes it possible to integrate several scenarios to deal with congestion. One can see also [27] where the approach is used to study similar dynamic in the case of two populations. In particular it allows to retrieve and compute otherwise the typical model of B. Maury, where the patch $W = W[\rho]$ is traced strictly in the so called congested/saturated regions

as follow

$$W[\rho] = -\nabla p, \text{ with } p \geq 0 \text{ and } p(\rho - 1) = 0.$$

Here $\rho \equiv 1$ workouts the utmost distribution of the population in Ω . Therefore, via this approach, the proposed system reads

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho (V - \nabla p)) = 0 \\ p \geq 0, 0 \leq \rho \leq 1, p(\rho - 1) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Furthermore, the approach enables to built a new model based on granular dynamic like in sandpile, presuming that individuals behave like grains in the congested zones. In some sense, at the microscopic level, the individuals travel by accruing randomly to the crowded, being placed either upon a heretofore unoccupied position in the direction of the exit or else upon the top of the stack of the crowd. Moreover, the local movement of the individuals may be weighted by a given function k connected to the speed of the spontaneous local movement. In this case, we prove that the patch is given by

$$W[\rho] = -m\nabla p$$

with unknown m and p satisfying

$$m \geq 0, p \geq 0, |\nabla p| \leq k, p(\rho - 1) \text{ and } m(|\nabla p| - k) = 0.$$

Here $m \geq 0$ is Lagrange multiplier associated with the additional constraint $|\nabla p| \leq k$. The approach enables also to handle and integrate different boundary conditions. Neumann boundary condition is connected to the crossing boundary amount, and Dirichlet is connected to the possibility of crossing some parts of the boundary with different charges.

After all, via this approach, we introduce a new model of granular type :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho (V - m\nabla p)) = 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1, p \geq 0, |\nabla p| \leq k \\ p(\rho - 1) = 0, m(|\nabla p| - k) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

subject to mixed boundary conditions (not necessary homogeneous), to describe a crowd motion where the movement of the agent is of granular type like in sandpile. In this paper, we propose its numerical study based on a new manner to handle the predicting-correcting algorithm to build the patch W . Over and above the transport equation (1.1), we proceed using as well a new version of minimum flow problem for optimal assignation as a step in the process to find the right assignment of the pedestrian. Roughly speaking, in the correction step we put together two nested optimization procedures: a computation of a minimum flow with gainful assignment towards a specific part of the boundary (towards the exit) for arbitrary target, and then a coming up with the right target among all admissible ones. We show how one can retrieve and compute otherwise the typical model of B.Maury *et al.*, (c.f. [31]) that we call up above. Then, we focus on the new model based on granular dynamics-like for sandpile.

The theoretical study of (1.3) is a challenging problem, especially existence and uniqueness questions, that we'll treat likely in forthcoming works. Recall that, the case where the PDE is

of diffusive type like in (1.2), the model is very employed to describe the behavior of population subject to global behavior governed by a vector field V and a local one governed by the patch $W[\rho]$ (c.f. [31, 32, 33, 34] and the references therein). The uniqueness of a solution is a hard issue for these kind of problems that was treated recently by the second author in [28] (see also [12, 14]).

Organization of the paper. This paper is organized as follows. In Section-2 we present our model, we give the details of each of its steps and we discuss two peculiar related PDEs to this model as well as some duality results on which our algorithm reposes. In Section-3, we show how to discretize the model. Since the approximation of the continuity equation is more or less classical, the novelty will be the use of a primal-dual method to solve the Beckmann-like problem. More particularly, this is given in Algorithm-3. In Section-4 we given several examples to illustrate our approach and we compare with some related works. Finally, we recall some tools and give some technical proofs in the Appendix.

2. THE MODEL

We consider an exit scenario, where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$) is a bounded open set with regular boundary $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. The set Ω represents the region where the crowd is moving, Γ_N represents the (impenetrable) walls and Γ_D the exits/doors.

2.1. Minimum flow problem. The key idea concerning the minimum flow problem goes back to Beckmann [2]. It consists in finding the optimal traffic flow field Φ between the two distributions given by μ_1 and μ_2 . That is to find the vector field Φ which satisfies the divergence equation

$$-\operatorname{div}(\Phi) = \mu_1 - \mu_2 \text{ in } \bar{\Omega}, \quad (2.4)$$

and minimize a total cost of the traffic $\int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) dx$, where $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a given function assumed to be at least continuous and convex with respect to the second variable. The equation (2.4) needs to be understood in the sense of $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. In particular, the equation assigns a fixed normal trace to Φ on $\partial\Omega$ which is connected to the formal values of $\mu_1 - \mu_2$ on $\partial\Omega$.

Here, we use a new variant to handle the pedestrian flow and carried out the patch W for the spontaneous velocity field when the pedestrian is hindered by the other one. Indeed, we work with a modified traffic cost which handles some kind of gainful assignment towards a specific part of the boundary Γ_D . More precisely, we consider the following momentum cost of the traffic

$$\mathcal{M}(\Phi) := \int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) dx - \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu dx,$$

where $\Phi \cdot \nu$ denotes the normal trace of Φ and g patterns a given gainful charge for the assignment towards Γ_D . Of course, for the optimization problem we have in mind we need to keep unrestricted the normal trace of Φ on Γ_D . Thus, the balance equation (2.4) turns into

$$-\operatorname{div}(\Phi) = \mu_1 - \mu_2 \text{ in } \mathcal{D}'(\bar{\Omega} \setminus \Gamma_D).$$

See here, that the normal trace of Φ on the odd part Γ_N remains to be given by $\mu_1 - \mu_2$ on Γ_N . For instance, working with μ_1 and μ_2 supported in Ω , we keep unrestricted the normal trace of Φ on Γ_D but assigned it to 0 on Γ_N .

This being said, we consider the transportation cost associated with given densities μ_1 and μ_2 to be

$$\inf_{\Phi} \left\{ \int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) \, dx - \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx : -\operatorname{div}(\Phi) = \mu_1 - \mu_2 \text{ in } \mathcal{D}'(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D) \right\}. \quad (2.5)$$

Actually, for any arbitrary distributions μ_1 and μ_2 , the optimization problem (2.5) aims to minimize both the transportation between μ_1 and μ_2 , in Ω and towards Γ_D , by means of the cost function F in Ω , as well as the transportation towards the boundary Γ_D paying the gainful charge $g(x)$ for each target position $x \in \Gamma_D$, respectively. Moreover, the new formulation enables to handle as well a provided incoming (or outgoing) flux on the remaining part Γ_N .

Notice here, that one needs to be careful with the notion of trace of Φ on the boundary since it is not well defined for all Φ . One needs to be careful here with the notion of trace of Φ on the boundary since it is not well defined for all Φ . However, working in

$$H_{\operatorname{div}} := \left\{ \Phi \in L^2(\Omega) : \operatorname{div}(\Phi) \in L^2(\Omega) \right\},$$

enables us to define $\Phi \cdot \nu$ on Γ_D in the right sense. Indeed, let $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ be the linear and continuous mapping satisfying $\gamma_0(u) = u|_{\Gamma}$ for all $u \in C(\overline{\Omega})$, where $\Gamma = \partial\Omega$. Then, defining $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\overline{\Omega}))$ and $H^{-1/2}(\Gamma)$ its dual, there exists a continuous trace operator $\gamma_{\mathbf{n}} : H_{\operatorname{div}}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ such that $\gamma_{\nu}(\Phi) = \Phi \cdot \nu$ for any $\Phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$. Thanks to Gauss's Theorem, we have

$$\langle \gamma_{\nu}(\Phi), \gamma_0(u) \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\Phi) \, dx \quad \text{for all } u \in H^1(\Omega), \Phi \in H_{\operatorname{div}}(\Omega).$$

To simplify the presentation, we denote $\Phi \cdot \nu := \gamma_{\nu}(\Phi)$, and moreover

$$\int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx := \langle \gamma_{\nu}(\Phi), \tilde{g} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}},$$

where $\tilde{g}|_{\Gamma_D} = g$ for $\tilde{g} \in H^{1/2}$. Yet, one needs to assume that such \tilde{g} exists (see the assumptions in Section 2.3).

Before ending this section, let us recall that a similar problem to (2.5) appears in [19] in the study of Hamilton-Jacobi equation (see also [21] and [20]). It appears also on a different form in the study of some Sobolev regularity for degenerate elliptic PDEs in [38]. Indeed, to avoid technicalities related to the normal trace of the flux on the boundary, it is possible to rewrite (2.5) as follows

$$\inf_{\Phi, v} \left\{ \int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) \, dx - \int_{\Gamma_D} g(x) v(x) \, dx : -\operatorname{div}(\Phi) = \mu_1 - \mu_2 \text{ in } \mathcal{D}'(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D) \right. \\ \left. \text{and } \Phi \cdot \nu = v \text{ on } \Gamma_D \right\}. \quad (2.6)$$

Remark 2.1. Taking non-homogeneous boundary data g and η enables the treatment of congestion crowd motion in an urban area with many issues : incoming issues included in Γ_N with supply rate given by η and outgoing issues in Γ_D with some kind of rate of return pictured by g .

In [38], the author studied some particular cases of (2.6) (like for instance the case where $\Gamma_D = \emptyset$ and also $\Gamma_D = \partial\Omega$). We notice also that in (2.5), the infimum in Φ is not reached in general and one looks in some situations (like for homogeneous F) for measure flow fields instead. This is related to the question of regularity of the transport density in mass transportation (see for instance the recent paper [17] and the references therein).

2.2. The algorithm. The main idea of prediction-correction algorithm is to split the dynamic into instantaneous successive processes : prediction then correction. The prediction step aims beforehand to move the population through a spontaneous velocity field. For this to happen, we use simply the transport equation (1.1) with $U = V$, where V derives from a potential governed by fast exit access trajectories. Afterward, as though the output of the prediction may be not feasible, we propose to catch up the upright deployment by applying the minimum flow assignment process (2.5) to the output of the prediction step; that we denote for the moment by $\tilde{\rho}$ and which should be a priori an L^∞ function. Moreover, assuming that the dynamic is subject to some supply of population through incoming issues included in Γ_N , we propose to take

$$\mu_1 = \tilde{\rho} \llcorner \Omega + \eta \llcorner \Gamma_N,$$

where η precisely designates the incoming supply through Γ_N . In this case, the constraint $-\operatorname{div}(\Phi) = \mu_1 - \rho$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega} \setminus \Gamma_D)$ is equivalent to say

$$-\operatorname{div}(\Phi) = \tilde{\rho} - \rho \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{and} \quad \Phi \cdot \nu = \eta \quad \text{on } \Gamma_N.$$

The correction step we propose to construct ρ requires to solve precisely the following optimization problem

$$\inf_{(\Phi, \rho)} \left\{ \int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) \, dx - \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx : 0 \leq \rho \leq 1, -\operatorname{div}(\Phi) = \tilde{\rho} - \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \right. \\ \left. \text{and } \Phi \cdot \nu = \eta \text{ on } \Gamma_N \right\}. \quad (2.7)$$

The right space for each terms in (2.7) will be given in the following section. See that the output of the correction step provides as well the correction associated with $\tilde{\rho}$ and the suitable flow for the adjustment of the dynamic. We will see in the following section how the optimal flux Φ enables to carry out the patch W for the spontaneous velocity field when this is necessary.

So, the algorithm may be written as follows : we consider $T > 0$ a given time horizon. For a given time step $\tau > 0$, we consider a uniform partition of $[0, T]$ given by $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, n-1$. Supposing that we know the density of the population ρ_k at a given step k , starting by ρ_0 . Then, we superimpose successively the following two steps :

- **Prediction:** In this predictive step, the density of population trends to grow up into

$$\rho_{k+\frac{1}{2}} = \rho(t_{k+\frac{1}{2}}),$$

where ρ is the solution of the transport equation

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \quad \text{in } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[, \quad (2.8)$$

with $\rho(t_k) = \rho_k$. Here, V is spontaneous velocity field given by the geodesics toward the exit. To built its corresponding potential φ , we propose to solve the eikonal equation

$$\begin{cases} \|\nabla\varphi\| = f & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Gamma_D, \end{cases} \quad (2.9)$$

where f is a given positive continuous function. Then, the spontaneous velocity field V is given by $V := -\nabla\varphi/\|\nabla\varphi\|$. One sees here that the solution of (2.9) (in the sense of viscosity) gives the speedy path to the exit Γ_D . The potential φ corresponds to the expected travel time to maneuver towards an exit. In particular, φ is proportional to f which may template space movement of traffic. As we will see, we can upgrade the spontaneous velocity field by taking f depending on the density on real time (like in Hugue's model).

- **Correction:** In general it is not expected that $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ to be an allowable density of pedestrian, since this value may evolve outside the interval $[0, 1]$. We propose then to proceed by the Beckmann-like process we introduced above to find the right apportionment of the pedestrian. That is to find ρ_{k+1} using the optimization problem (2.7). More precisely, we propose to consider ρ_{k+1} given by the following optimization problem

$$\begin{aligned} \arg \min_{\rho} \inf_{\Phi} \left\{ \int_{\Omega} F(x, \Phi(x)) dx - \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu dx : \rho \in L^{\infty}(\Omega), 0 \leq \rho \leq 1, \right. \\ \left. \Phi \in L^2(\Omega)^N, -\tau \operatorname{div}(\Phi) = \rho_{k+1/2} - \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ and } \Phi \cdot \nu = \eta \text{ on } \Gamma_N \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. Related PDE. The application $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ is assumed firstly to be continuous. As a primer practical case, one can consider the quadratic case, i.e.,

$$F(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2, \quad \text{for any } x \in \Omega \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

More sophisticated situations arise by considering non-homogeneous F that weights the cost according to space variables; like for instance

$$F(x, \xi) = \frac{c(x)}{s} |\xi|^s, \quad \text{for any } x \in \Omega \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (2.11)$$

with $1 < s < \infty$. In particular, with the parameter c one can scale the cost by focusing on and/or avoiding certain regions in space. A formal computation using duality à la Fenchel-Rockafellar (see e.g., [18]) implies that the infimum in (2.7) should coincide with

$$\inf_p \left\{ \int p^+(x) dx + \frac{1}{s'} \int c(x)^{s'-1} |\nabla p(x)|^{s'} dx - \int p(x) \tilde{\rho}(x) dx : p \in W^{1,s'}(\Omega), p = g \text{ on } \Gamma_D \right\},$$

where s' is the conjugate index of s , i.e., it satisfies $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Moreover, p and (ρ, Φ) are solutions of both problems respectively, if and only if (p, ρ, Φ) is a solution of the following PDE

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho - \operatorname{div}(\Phi) = \tilde{\rho} \\ \rho \in \operatorname{Sign}^+(p), \quad k \Phi = c^{s'} |\nabla p|^{s'-2} \nabla p \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = \eta \\ p = g \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{on } \Gamma_N, \\ \text{on } \Gamma_D, \end{array}$$

where Sign^+ is the maximal monotone graph given by

$$\operatorname{Sign}^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } r > 0 \\ [0, 1] & \text{for } r = 0 \\ 0 & \text{for } r < 0 \end{cases} \quad \text{for } r \in \mathbb{R}.$$

In other words, $\rho \in \operatorname{Sign}^+(p)$ is equivalent to says that $0 \leq \rho \leq 1$ and $p(1 - \rho) = 0$ in Ω . In this paper, we focus on the case where $s = 1$. For the treatment of the other cases, one can see [27] for more details. In particular, one sees that the quadratic case is closely connected to the system (1.2) which was proposed by B. Maury *et al.*, [31] in the framework of gradient flows in the Wasserstein space of probability measures. As to the case (2.11), dynamical model which comes off following our approach is given by some kind of non linear s' -Laplace equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(V - W)) = 0, \quad k W = c^{s'} |\nabla p|^{s'-2} \nabla p \\ p \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad p(\rho - 1) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega \quad (2.13)$$

subject to boundary conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = \eta \quad \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_N, \\ p = g \quad \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_D. \end{array} \right.$$

Notice that we use in (2.13), the fact that $\nabla p = \rho \nabla p$, which is connected to $\rho \in \operatorname{Sign}^+(p)$.

As we said above, we focus here on the case where

$$F(x, \xi) = k(x) |\xi|, \quad \text{for any } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \quad (2.14)$$

where $0 \leq k \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. This case is closely connected to granular dynamic like sandpile (see [16] and the references therein). In other words the individuals behaves like grains of sand (see [22] and also [29] for a stochastic microscopic description of the granular dynamic), in the congestion zone and not like a fluid as follows from the quadratic case. A peculiar choice may be the same function f

Moreover, in connection with gradient flow in the Wasserstein space, it is possible to connect our approach (in the case (2.14)) to the gradient flow in the Wasserstein space of probability measures equipped with W_1 . Indeed, in the case where $V \equiv 0$, the link is well established at least in some particular case of nonlinearity connecting ρ to p (cf. [1]).

To treat the problem (2.7), we assume that the boundary data g and η are such that
 (H1): there exists $\tilde{g} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, such that

$$\nabla \tilde{g}(x) \in G(x) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : |\xi| \leq k(x) \right\}, \text{ a.e. in } \Omega.$$

and

$$\tilde{g} = g \chi_{\Gamma_D} \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2.15)$$

(H2): there exists $1 < s < \infty$ such that

$$\eta \in W^{-\frac{1}{s},s}(\Gamma_N).$$

Then, for any $\mu \in L^s(\Omega)$, we define

$$\mathcal{F}(\mu) := \left\{ \Phi \in L^s(\Omega)^N : -\operatorname{div}(\Phi) = \mu \text{ in } \Omega \text{ and } \Phi \cdot \nu = \eta \text{ on } \Gamma_N \right\}.$$

Remind here, that $-\operatorname{div}(\Phi) = \mu$ in Ω and $\Phi \cdot \nu = \eta$ on Γ_N needs to be understood in the sense that

$$\int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \xi \, dx = \int_{\Omega} \mu \xi \, dx + \int_{\Gamma_N} \eta \xi \, dx, \quad \text{for any } \xi \in W_{\Gamma_D}^{1,s'}(\Omega).$$

We are interested into the interpretation in terms of PDE of the solution of the problem

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) := \inf_{\Phi, \rho} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| \, dx - \tau \int_{\Gamma_D} g \Phi \cdot \nu \, dx : \tau \Phi \in \mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho) \text{ and } \rho \in \mathcal{K}_1 \right\},$$

where $0 \leq \tilde{\rho} \in L^s(\Omega)$ is fixed and \mathcal{K}_1 is the set of admissible densities:

$$\mathcal{K}_1 = \{ \rho \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega \}.$$

See that, all the terms in $\mathcal{N}(\tilde{\rho})$ are well defined. Indeed, since $\Phi \in L^s(\Omega)^N$ and $\nabla \cdot \Phi \in L^s(\Omega)$, the normal trace of Φ is well defined on Γ_D and Γ_N . Actually $\int_{\Gamma_D} g \Phi \cdot \nu \, dx$ and $\Phi \cdot \nu = \eta$ on Γ_N need to be understood, respectively, in the sense of

$$\langle \Phi \cdot \nu, \tilde{g} \rangle_{W^{-1/s,s}(\Gamma_D), W^{1-1/s',s'}(\Gamma)}$$

and

$$\int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \xi \, dx + \int_{\Omega} \xi \nabla \cdot \Phi \, dx = \langle \eta, \xi \rangle_{W^{-1/s,s}(\Gamma), W^{1-1/s',s'}(\Gamma)}, \quad \text{for any } \xi \in W_{\Gamma_D}^{1,s}(\Omega).$$

Our main result here is the following

Theorem 2.2. *For any $0 \leq \tilde{\rho} \in L^s(\Omega)$, we have*

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int_{\Omega} \tilde{\rho} p \, dx + \tau \int_{\Gamma_N} \eta p \, dx - \int_{\Omega} p^+ \, dx \right\} := D_g^\infty(\tilde{\rho}),$$

where

$$\mathcal{G}_k := \left\{ z \in W^{1,\infty}(\Omega) : z = g \text{ on } \Gamma_D \text{ and } |\nabla z(x)| \leq k(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \right\}.$$

Moreover,

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \min_{\rho \in \mathcal{K}_1} \inf_{\tau \Phi \in \mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho)} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| \, dx - \tau \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx \right\}, \quad (2.16)$$

and, if ρ and p are optimal solutions of both problems $\mathcal{N}(\tilde{\rho})$ and $D_g^\infty(\tilde{\rho})$ respectively, then $p \in \mathcal{G}_k$, $\rho \in \mathcal{K}_1$, $\rho \in \text{Sign}^+(p)$, a.e. in Ω and

$$\int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) (p - \xi) \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} \eta (p - \xi) \, dx \geq 0, \quad \text{for any } \xi \in \mathcal{G}_k.$$

Remark 2.3. Thanks to Theorem 2.2, one sees that the condition (2.15) is a sufficient and necessary condition. It is more or less well known by now that this condition is equivalent to the fact that (see for instance [19])

$$g(x) - (y) \leq \min \left\{ \int_0^1 k(\varphi(t)) |\dot{\varphi}(t)| \, dt : \varphi \in \text{Lip}([0, 1], \Omega), \varphi(0) = x, \varphi(1) = y \right\}.$$

To prove Theorem 2.2, we use Von Neumann-Fan minimax theorem that we remind below

Theorem (Von Neumann-Fan minimax theorem, see for instance [5]). *Let X and Y be Banach spaces. Let $C \subset X$ be nonempty and convex, and let $D \subset Y$ be nonempty, weakly compact and convex. Let $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ be convex with respect to $x \in C$ and concave and upper-semicontinuous with respect to $y \in D$, and weakly continuous in y when restricted to D . Then*

$$\max_{y \in D} \inf_{x \in C} g(x, y) = \inf_{x \in C} \max_{y \in D} g(x, y).$$

To this aim, we use the following result which goes back to [19] in the case where $\eta \equiv 0$. For completeness, a proof is given in Appendix-C.

Lemma 2.4. *We have*

$$\begin{aligned} & \inf_{\tau \Phi \in \mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho)} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| \, dx - \tau \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx \right\} \\ &= \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) p \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Proof of Theorem 2.2. Since $\tilde{\rho} - \rho \in L^s(\Omega)$ and $\eta \in W^{-\frac{1}{s}, s}(\Gamma_N)$, we know that $\mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho) \neq \emptyset$. Moreover, since

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \inf_{\rho \in \mathcal{K}_1} \inf_{\tau \Phi \in \mathcal{F}(\tilde{\rho} - \rho)} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| \, dx - \tau \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx \right\},$$

by Lemma 2.4, we get

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \inf_{\rho \in \mathcal{K}_1} \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) p \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}.$$

Using Von Neumann-Fan minimax theorem as in [5], we deduce that

$$\mathcal{N}(\tilde{\rho}) = \max_{p \in \mathcal{G}_k} \inf_{\rho \in \mathcal{K}_1} \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) p \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}$$

$$= \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int \tilde{\rho} p \, dx - \int p^+ \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}.$$

Taking

$$p = \arg \max_{p \in W^{1,\infty}(\Omega), p|_{\Gamma_D} = g} \left\{ \int \tilde{\rho} p \, dx - \int p^+ \, dx + \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}$$

and $\rho = \text{Sign}_0^+(p)$ and using Lemma 2.4, we deduce the equivalence between the solutions of (2.17) and (2.12). Thus the result of the theorem. \square

Remark 2.5. (1) It is known that the optimal flux in (2.16) is not reached for a Lebesgue vector valued function Φ . Indeed, since the structure of F , one expects the optimal flux to be a Radon measure vector valued function Φ . However, if this is true and if (ρ, Φ) and p are solutions of both problems $\mathcal{N}(\tilde{\rho})$ and $D(\tilde{\rho})$ respectively, then $\rho \in \text{Sign}^+(p)$, a.e. in Ω , $\Phi \cdot \nabla p = k |\Phi|$ in Ω and

$$\tau \int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \xi \, dx = \int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) \xi \, dx + \tau \int_{\Gamma_N} \eta \xi \, dx, \quad \text{for any } \xi \in W_{\Gamma_D}^{1,s'}(\Omega).$$

In general, one needs to be careful with the treatment of $\Phi \cdot \nabla p$, since Φ is not regular in general. Here one needs, to use the notion of tangential gradient of p (see e.g., [6]) to handle the related PDE.

(2) In connection with Evans-Gangbo formulation, the corresponding PDE may be written as

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho} - \tau \operatorname{div}(\rho W) = 0, \quad W = m \nabla p \\ m \geq 0, p \geq 0, 0 \leq \rho \leq 1, p(\rho - 1) = 0 \\ |\nabla p| \leq k, m(|\nabla p| - k) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega,$$

subject to boundary condition

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi \cdot \nu = \eta & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_N, \\ p = g & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_D. \end{array} \right.$$

(3) As a formal consequence of Theorem 2.2, under the assumptions (H1)-(H2), the algorithm in Section 2.2 turns out in solving successively two PDEs, a transport equation and a nonlinear second order equation. This enables also to establish a continuous model in terms of nonlinear PDE. This is summarized in the following items.

(a) The sequence $\rho_{1/2}, \rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1/2}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_n$ given by the algorithm in Section 2.2 is characterized by: for each $k = 0, \dots, n-1$, we have

- **Prediction:** $\rho_{k+\frac{1}{2}} = \rho(t_{k+\frac{1}{2}})$, where ρ is the solution of the transport equation :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \quad \text{in } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}],$$

with $\rho(t_k) = \rho_k$, V is a given vector field. For instance $V = -\nabla \varphi / \|\nabla \varphi\|$ and φ is the solution of the eikonal equation (2.9).

- **Correction:** ρ_{k+1} is a solution of the PDE

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{k+1} - \tau \operatorname{div}(\rho_{k+1} W) = \rho_{k+1/2}, \quad W = m \nabla p_{k+1} \\ m \geq 0, p_{k+1} \geq 0, 0 \leq \rho_{k+1} \leq 1, p_{k+1}(\rho_{k+1} - 1) = 0 \\ |\nabla p_{k+1}| \leq k, m(k - |\nabla p_{k+1}|) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega,$$

$$\Phi \cdot \nu = \eta \quad \text{on } \Gamma_N,$$

$$p_{k+1} = g \quad \text{on } \Gamma_D.$$

- (b) Considering the application $\rho_\tau : [0, T) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ and $p_\tau : [0, T) \rightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ given by

$$\rho_\tau(t) = \begin{cases} \rho_{k+\frac{1}{2}} & \text{for any } t \in [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[\\ \rho_{k+1} & \text{for any } t \in [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\end{cases} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

and

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{for any } t \in [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[\\ p_{k+1} & \text{for any } t \in [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\end{cases} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

one expects that

- $\rho_\tau \rightarrow \rho$ and $p_\tau \rightarrow p$ as $\tau \rightarrow 0$,
- the couple (ρ, p) satisfies the following evolution PDE

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(V - W)) = 0, \quad W = m \nabla p \\ m \geq 0, p \geq 0, 0 \leq \rho \leq 1, p(\rho - 1) = 0 \\ |\nabla p| \leq k, m(|\nabla p| - k) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega. \quad (2.21)$$

subject to boundary condition

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = \eta \quad \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_N \\ p = g \quad \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_D. \end{array} \right.$$

- (4) See that the patch W is null outside the congestion zone $[\rho = 1]$.
(5) Remember here, that the main operator which governs the correction step in this case, given by

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (m \nabla p) = \mu \\ m \geq 0, |\nabla p| \leq k, m(|\nabla p| - k) = 0, \end{array} \right.$$

is well known in the study of sandpile (see [16] and the references therein). The dynamic here is connected to a granular one. In other words the individuals behaves like grains of sand (see [22] and also [29] for a stochastic microscopic description of the granular dynamic), in the congestion zone and not like a fluid as follows from the quadratic case.

Remark 2.6. After all, the nonlinear PDE (2.21) is a new model we propose for the description of dynamical population where the movement of the agent is of granular type like in sandpile. In this paper, we are proposing its numerical study. The theoretical study is a challenging problem for existence and uniqueness. This is an open problem and will not be treated in this paper. Recall that, the case where the PDE is of diffusive type the PDE is well used and studied. There is a huge literature on this case, one can see the recent paper [28] and the references therein for more details.

Remark 2.7. In the case where V is computed just before the k -th prediction step by taking the speedy path given the following eikonal equation

$$\begin{cases} \|\nabla\varphi\| = H(p_k) & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Gamma_D, \end{cases}$$

where H is a given positive continuous function, the evolution problem (2.21) needs to be coupled with the system

$$\begin{cases} V = -\nabla\varphi/\|\nabla\varphi\| & \text{in } \Omega \\ \|\nabla\varphi\| = H(p) & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Gamma_D. \end{cases}$$

This is an interesting variant of Hugues model where the speedy path is computed by taking into account the congestion of the crowd. Indeed, taking H a continuous function such that $H(p)$ is take instantaneously large value for positive p , enables to avoid congestion zones. From theoretical point of view, the eikonal equation turns out to be a well posed and stable problem since p and then $H(p)$ are regular, rather than ρ as in Hugues model. To improve the algorithm, we take in some numerical computation $f = f(p)$ in (2.9) to compute the spontaneous velocity field V . The theoretical study of the corresponding evolution problem will be treated in forthcoming works.

Remark 2.8 (Quadratic case). Before to end up this section let summarize here some formal results concerning the quadratic case. The proofs may be found in [27] where the second author study some connected dynamic in the case of two populations. The quadratic case corresponds to

$$F(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2, \text{ for any } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

The infimum in (2.10) coincides with

$$\inf_p \left\{ \int p^+(x) dx + \frac{1}{2} \int |\nabla p(x)|^2 dx - \int p(x) \tilde{\rho}(x) dx : p \in H^1(\Omega), p = g \text{ on } \Gamma_D \right\}.$$

Moreover, p and (ρ, Φ) are solutions of both problems respectively, if and only if (p, ρ, Φ) is a solution of the following PDE

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho - \operatorname{div}(\Phi) = \tilde{\rho}, & \Phi = \nabla p \\ \rho \in \operatorname{Sign}^+(p) & \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi \cdot \nu = \eta & \\ p = g & \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{on } \Gamma_N, \\ \text{on } \Gamma_D. \end{array}$$

In some sense, this implies that the quadratic case is closely connected to the system (1.2) which was proposed by B. Maury *et al.*, (c.f. [31]) in the framework of gradient flows in the Wasserstein space of probability measures. And, moreover, the correction step corresponds simply to the time Euler-Implicit discretization for the diffusion process in (1.2).

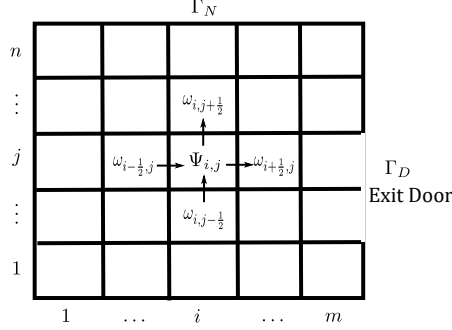
Remark 2.9. (1) Notice here that even though our approaches (based on minimum flow problem), provide the same continuous dynamics (at least in the quadratic case) with gradient flow in the Wasserstein space of probability measures, both approaches are not the same at discrete level. While, the correction with this approach is recovered by a projection with respect to W_2 on the set $\{\rho \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega\}$, our approach provides the correction by solving an elliptic problem through a minimum flow problem. As far as we know, these are not the same even though one can be considered as an approximation of the other.

- (2) In contrast of the quadratic case, in the homogeneous case we do believe here that recovering the correction by a projection with respect to W_1 on the set $\{\rho \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega\}$, or by using our approach are the same in the homogeneous case. This issue would be treated in forthcoming works.

3. NUMERICAL APPROXIMATION

3.1. Formulation and discretization. As discussed in Section-2, the approximation of the density ρ is performed via a prediction-correction strategy. The first step (prediction) consists in the resolution of the continuity equation (2.8) which will be done using an Euler scheme for the time discretization, whereas the term $\operatorname{div}(V\rho)$ is discretized using finite volumes. The second step (correction or projection) relies on a minimum flow problem which will be solved using a primal dual algorithm (PD). To begin with, let us give details concerning the discretization of the problems (2.8)-(2.10).

Domain discretization: In this section, we solve numerically (2.8) and (2.10) on the domain Ω shown on Figure 1. This domain represents a room surrounded by walls which we call Γ_N and has an exit door Γ_D . The domain is divided into a set of $m \times n$ control volumes of length h and width equal to h . We denote by $C_{i,j}$ the cell at the position (i, j) and by $\Psi_{i,j}$ is the average value of the quantity Ψ on $C_{i,j}$. At the interface of $C_{i,j}$, $\omega_{i+\frac{1}{2},j}$, $\omega_{i-\frac{1}{2},j}$, $\omega_{i,j+\frac{1}{2}}$ and $\omega_{i,j-\frac{1}{2}}$ are the in/out flow quantities (see Figure-1).


 FIGURE 1. Discretization of the domain Ω .

We define discrete divergence is defined by:

$$(\operatorname{div}_h \Phi)_{i,j} = \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^1 - \Phi_{i-\frac{1}{2},j}^1}{h} + \frac{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - \Phi_{i,j-\frac{1}{2}}^2}{h}. \quad (3.22)$$

To take into account the Neumann boundary condition $\Phi \cdot \nu = 0$ on Γ_N , we impose:

- $\Phi_{\frac{1}{2},j}^1 = 0$, for $1 \leq j \leq n$,
- $\Phi_{m+\frac{1}{2},j}^1 = 0$, if $((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_N$,
- $\Phi_{i,\frac{1}{2}}^2 = 0$, for $1 \leq i \leq m$,
- $\Phi_{i,n+\frac{1}{2}}^2 = 0$, for $1 \leq i \leq m$.

We can rewrite this in a more compact way

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \Phi)_{i,j}^1 &= D_p^1 \Phi_{i,j}^1, \text{ if } ((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_D, \\ (\operatorname{div}_h \Phi)_{i,j}^1 &= D_m^1 \Phi_{i,j}^1, \text{ if } ((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_N, \\ (\operatorname{div}_h \Phi)_{i,j}^2 &= D^2 \Phi_{i,j}^2, \end{aligned}$$

where the matrices D_m^1, D_p^1, D^2 are recalled in Appendix-A. Then, we define the discrete gradient operator as follows:

$$\begin{aligned} (\nabla_h p)_{i,j}^1 &= -{}^t D_p^1 p(i, j), \text{ if } ((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_D, \\ (\nabla_h p)_{i,j}^1 &= -{}^t D_m^1 p(i, j), \text{ if } ((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_N, \\ (\nabla_h p)_{i,j}^2 &= -{}^t D^2 p(i, j). \end{aligned}$$

This being said, one can easily check that $\operatorname{div}_h = -\nabla_h^*$.

Discretization of the transport equation (2.8) : We use a splitting method as follows. Given a final time $T > 0$ and a timestep $\tau > 0$, we decompose the interval $[0, T]$ into subintervals

$[t_k, t_{k+\frac{1}{2}}]$ and $[t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}]$, with $k = 0, \dots, n-1$. On each interval $[t_k, t_{k+\frac{1}{2}}]$ we solve the following continuity equation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(V\rho) = 0 \\ \rho(t_k) = \rho^{k-1}, \end{cases} \quad (3.23)$$

to obtain $\rho^{k+\frac{1}{2}}$, where $V = (V^x, V^y)$ is the velocity field given by $V = -\nabla \mathbf{D} / \|\nabla \mathbf{D}\|$, and \mathbf{D} being the distance (not necessary euclidean) to the boundary Γ_D given by the eikonal equation (2.9) whose resolution is recalled in Appendix-B. Solving (3.23) can be done by combining a finite difference method in the time variable combined with a 2D finite volume method in the space variable. We approximate the term $\operatorname{div}(V\rho)$ in the cell $C_{i,j} = [x_{i-\frac{1}{2},j}, x_{i+\frac{1}{2},j}] \times [y_{i,j-\frac{1}{2}}, y_{i,j+\frac{1}{2}}]$ as follow:

$$(\operatorname{div}(V\rho))_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} [\rho_{i+\frac{1}{2},j} V_{i+\frac{1}{2},j}^x - \rho_{i-\frac{1}{2},j} V_{i-\frac{1}{2},j}^x] + \frac{1}{\Delta y} [\rho_{i,j+\frac{1}{2}} V_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \rho_{i,j-\frac{1}{2}} V_{i,j-\frac{1}{2}}^y],$$

where $(\operatorname{div}(V\rho))_{i,j}$ the value of $\operatorname{div}(V\rho)$ in the cell $C_{i,j}$ and $(\Delta x, \Delta y)$ are the spatial discretization. Notice that in practice, we take $\Delta x = \Delta y = h$, where h is the mesh size introduced above.

For the time discitization, we use the Euler explicit method to approximate the time derivative of the density. The overall scheme can the be written as:

$$\frac{\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \rho_{i,j}^k}{\tau} + \frac{1}{\Delta x} [\rho_{i+\frac{1}{2},j}^k V_{i+\frac{1}{2},j}^x - \rho_{i-\frac{1}{2},j}^k V_{i-\frac{1}{2},j}^x] + \frac{1}{\Delta y} [\rho_{i,j+\frac{1}{2}}^k V_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \rho_{i,j-\frac{1}{2}}^k V_{i,j-\frac{1}{2}}^y] = 0 \quad (3.24)$$

where $\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ is the average value of ρ in the cell $C_{i,j} = [x_{i-\frac{1}{2},j}, x_{i+\frac{1}{2},j}] \times [y_{i,j-\frac{1}{2}}, y_{i,j+\frac{1}{2}}]$ at time $(k + \frac{1}{2})\tau$, and $\rho_{i+\frac{1}{2},j}^k, V_{i+\frac{1}{2},j}^x$ are the values of ρ and V at the interface $x_{i+\frac{1}{2},j}$ at time $k\tau$ respectively. Similarly, $(\rho_{i-\frac{1}{2},j}^k, V_{i-\frac{1}{2},j}^x)$, $(\rho_{i,j+\frac{1}{2}}^k, V_{i,j+\frac{1}{2}}^y)$ and $(\rho_{i,j-\frac{1}{2}}^k, V_{i,j-\frac{1}{2}}^y)$ are the values, at time τk , of (ρ, V) at the interface $x_{i-\frac{1}{2},j}, y_{i,j+\frac{1}{2}}$ and $y_{i,j-\frac{1}{2}}$ respectively.

Using the upwind scheme we have $\rho_{i+\frac{1}{2},j}^k = \rho_{i,j}^k$ and $\rho_{i,j+\frac{1}{2}}^k = \rho_{i,j}^k$. Substituting in (3.24), the density $\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ can be written as:

$$\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \rho_{i,j}^k - \frac{\tau}{\Delta x} [\rho_{i,j}^k V_{i+\frac{1}{2},j}^x - \rho_{i-1,j}^k V_{i-\frac{1}{2},j}^x] - \frac{\tau}{\Delta y} [\rho_{i,j}^k V_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \rho_{i,j-1}^k V_{i,j-\frac{1}{2}}^y]$$

We consider that no flux is entering the room from the walls at Γ_N . This is equivalent to impose $\rho_{i-\frac{1}{2},j}^k V_{i-\frac{1}{2},j}^x = 0$ and $\rho_{i,j-\frac{1}{2}}^k V_{i,j-\frac{1}{2}}^y = 0$ at $i = 1$ and $j = 1$ respectively.

Finally, let us recall that the values of h and τ are chosen to satisfy a CFL-type constraint $\max(\|V_{i,j}\|) \frac{\tau}{h} < \frac{1}{2}$ in order to guarantee the stability of the numerical scheme (3.24). We summarize this in the following algorithm:

Algorithm 1 Prediction step

1st step. Initialization: Compute the velocity $V = (V^x, V^y)$. Choose $\Delta x = \Delta y = h$ and τ such $\max(\|V_{i,j}\|) \frac{\tau}{h} < \frac{1}{2}$ and take a initial density given by $\rho_{i,j}^k$ at time $k\tau$.

2nd step. Update the density at time $(k + \frac{1}{2})\tau$ by

$$\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \rho_{i,j}^k - \frac{\tau}{\Delta x} [\rho_{i,j}^k V_{i+\frac{1}{2},j}^x - \rho_{i-\frac{1}{2},j}^k V_{i-\frac{1}{2},j}^x] - \frac{\tau}{\Delta y} [\rho_{i,j}^k V_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \rho_{i,j-\frac{1}{2}}^k V_{i,j-\frac{1}{2}}^y].$$

Remark 3.10. The discretization of $\operatorname{div}(V\rho)$ assumes a positive direction for the speed i.e., $V^x > 0$ and $V^y > 0$. However, the scheme can be easily adapted to other cases. For example, if $V^x > 0$ and $V^y < 0$ for some (i, j) , the discretization of $\operatorname{div}(\rho V)$ becomes:

$$(\operatorname{div}(V\rho))_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} [\rho_{i+\frac{1}{2},j} V_{i+\frac{1}{2},j}^x - \rho_{i-\frac{1}{2},j} V_{i-\frac{1}{2},j}^x] + \frac{1}{\Delta y} [\rho_{i,j-\frac{1}{2}} V_{i,j-\frac{1}{2}}^y - \rho_{i,j+\frac{1}{2}} V_{i,j+\frac{1}{2}}^y],$$

Since the obtained density $\rho^{k+\frac{1}{2}}$ may violate the constraint $\rho \leq 1$, the next step is to handle congestion by solving the following minimum flow problem

$$\inf_{(\rho, \Phi)} \left\{ \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx : -\tau \operatorname{div}(\Phi) = \rho^{k+\frac{1}{2}} - \rho \text{ in } \Omega, \Phi \cdot \nu = 0 \text{ on } \Gamma_N \text{ and } 0 < \rho \leq 1 \right\}, \quad (3.25)$$

where where $k \geq 0$ is a continuous function and, for the simplicity of the presentation, we take vanishing g and η (see Remark 3.11).

Discretization of the minimum flow problem (3.25) : First, let us rewrite (3.25) in the form

$$(M) : \min_{(\rho, \Phi)} \mathcal{A}(\rho, \Phi) + \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(\Lambda(\rho, \Phi)),$$

where (we omit the variable τ to lighten the notation)

$$\mathcal{A}(\rho, \Phi) = \int_{\Omega} \tau k(x) |\Phi(x)| dx + \mathbb{I}_{[0,1]}(\rho), \quad \Lambda(\rho, \Phi) = \rho - \tau \operatorname{div} \Phi \quad \text{and} \quad \mathcal{B} = \mathbb{I}_{\{\rho^{k+\frac{1}{2}}\}}.$$

This problem can be efficiently solved by Chambolle-Pock's primal-dual algorithm (PD) (c.f. [7]).

Based on the discrete gradient and divergence operators, we propose a discrete version of (M) as follows

$$(M)_d : \min_{(\rho, \Phi)} \left\{ h^2 \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} \tau k_{i,j} \|\Phi_{i,j}\| + \mathbb{I}_{[0,1]}(\rho) + \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(\Lambda_h(\rho, \Phi)) \right\}$$

where $\mathcal{C} := \left\{ (a_{i,j}) : a_{i,j} = \rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$, $\Lambda_h(\rho, \Phi) = \rho - \tau \operatorname{div}_h \Phi$ and $k_{i,j}$ is the value of k in $C_{i,j}$. In other words, the discrete version $(M)_d$ can be written as

$$\min_{(\rho, \Phi)} \mathcal{A}_h(\rho, \Phi) + \mathcal{B}_h(\Lambda_h(\rho, \Phi)), \quad (3.26)$$

or in a primal-dual form as

$$\min_{(\rho, \Phi)} \max_p \mathcal{A}_h(\rho, \Phi) + \langle u, \Lambda_h(\rho, \Phi) \rangle - \mathcal{B}_h^*(p),$$

where

$$\mathcal{A}_h(\rho, \Phi) = h^2 \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} \tau k_{i,j} \|\Phi_{i,j}\| + \mathbb{I}_{[0,1]}(\rho) \text{ and } \mathcal{B}_h = \mathbb{I}_{\mathcal{C}}.$$

Notice that in this case, (2.28) has a dual problem that reads

$$\min_{\substack{\rho \in X \\ 0 \leq \rho \leq 1}} \max_{\substack{p \in X \\ p=0 \text{ on } \Gamma_D}} h^2 \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{i,j} (\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \rho_{i,j}) : \|\nabla_h p_{i,j}\| \leq k_{i,j} \right\}.$$

Then (PD) algorithm [8] can be applied to (M)_d as follows:

Algorithm 2 (PD) iterations

1st step. Initialization: choose $\alpha, \beta > 0$, $\theta \in [0, 1]$, ρ_0, Φ^0 and take $u_0 = \Lambda_h(\rho^0, \Phi^0)$, $\bar{p}^0 = p^0$

2nd step. For $l \leq \text{Iter}_{max}$ do

$$\begin{aligned} (\rho^{l+1}, \Phi^{l+1}) &= \mathbf{Prox}_{\beta \mathcal{A}_h} \left((\rho^l, \Phi^l) - \beta \Lambda_h^*(\bar{p}^l) \right); \\ p^{l+1} &= \mathbf{Prox}_{\alpha \mathcal{B}_h^*} \left(p^l + \alpha \Lambda_h(\rho^{l+1}, \Phi^{l+1}) \right); \\ \bar{p}^{l+1} &= p^{l+1} + \theta(p^{l+1} - p^l). \end{aligned}$$

Recall here that the proximal operator is defined through

$$\mathbf{Prox}_{\alpha E}(p) = \operatorname{argmin}_q \frac{1}{2} \|p - q\|^2 + \eta E(q).$$

3.2. Computation of the proximal operators. See that for the functional \mathcal{A}_h and \mathcal{B}_h^* can be computed explicitly. Indeed, the functional \mathcal{A}_h is separable in the variables ρ and Φ :

$$\mathcal{A}_h(\rho, \Phi) = \mathbb{I}_{[0,1]}(\rho) + \|\Phi\|_1.$$

So, $\mathbf{Prox}_{\eta \mathcal{A}_h}$ is the some of a projection in the first component and the so-called soft-thresholding. Namely

$$(\mathbf{Prox}_{\mathcal{A}_h}(\rho, \Phi))_{i,j} = \left(\max(0, \min(1, \rho_{i,j})), \max(0, 1 - \frac{1}{|\Phi_{i,j}|}) \Phi_{i,j} \right). \quad (3.27)$$

As to \mathcal{B}_h^* , in order to compute $\mathbf{Prox}_{\alpha \mathcal{B}_h^*}$, we make use of Moreau's identity

$$p = \mathbf{Prox}_{\alpha \mathcal{B}_h^*}(p) + \alpha \mathbf{Prox}_{\alpha^{-1} \mathcal{B}_h}(p/\alpha),$$

and the fact that $\mathbf{Prox}_{\alpha^{-1} \mathcal{B}_h}(a, b)$ is given simply by the projection onto \mathcal{C} . Consequently,

$$\left(\mathbf{Prox}_{\alpha \mathcal{B}_h^*}(p) \right)_{i,j} = \left(p_{i,j} - \alpha \mathbf{Proj}_{\mathcal{C}_{i,j}}(p_{i,j}/\alpha) \right).$$

Thus, the details of [Algorithm 3](#) to solve (M)_d are as follow :

Algorithm 3 (PD) iterations for $(M)_d$

Initialization: Let $k = 0$, choose $\alpha, \beta > 0$ such that $\alpha\beta\|\Lambda_h\|^2 < 1$. Choose ρ^0, Φ^0 and $p^0 = \bar{p}^0 = p_0$.

Primal step:

$$(\rho_{i,j}^{l+1}, \Phi_{i,j}^{l+1}) = \left(\max\left(0, \min(1, \rho_{i,j}^l - \beta \bar{p}_{i,j}^l)\right), \max\left(0, 1 - \frac{1}{|\Phi_{i,j}^l - \beta \nabla_h \bar{p}_{i,j}^l|}\right) \left(\Phi_{i,j}^l - \beta \nabla_h \bar{p}_{i,j}^l\right) \right).$$

Dual step:

$$v^{l+1} = p^l + \alpha \rho^{l+1} - \alpha \operatorname{div}_h(\Phi^{l+1}).$$

$$p_{i,j}^{l+1} = v_{i,j}^{l+1} - \alpha \mathbf{Proj}_{C_{i,j}}(v_{i,j}^{l+1}/\alpha), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Extragradient:

$$\bar{p}^{l+1} = 2p^{l+1} - p^l.$$

It was shown in [8] that when $\theta = 1$ and $\alpha\beta\|\Lambda_h\|^2 < 1$, the sequence $\{(\rho^l, \Phi^l)\}$ converges to an optimal solution of $(M)_d$. So in practice, we choose $\alpha > 0$ and we take $\beta = 1/(\eta K^2)$, where K is an upper bound of $\|\Lambda_h\|$. More precisely, $K = \sqrt{\|\nabla_h\|^2 + \|\operatorname{id}_X\|^2} \equiv \|\Lambda_h\|$. The algorithm was implemented in Matlab and all the numerical examples below were executed on a 2,6 GHz CPU running macOS High Sierra system.

Remark 3.11 (Non-homogeneous Neuman boundary condition : non null η). In is not difficult to see that in the case of non null η , one can handle this case by considering η as a source term on the boundary on Γ_N . To avoid numerical computation for the correction we propose to handle the condition

$$-\tau \operatorname{div}(\Phi) = \rho_{k+1/2} - \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ and } \Phi \cdot \nu = \eta \text{ on } \Gamma_N.$$

as

$$-\tau \operatorname{div}(\Phi) = \rho_{k+1/2} + \tau \eta - \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\bar{\Omega} \setminus \Gamma_D).$$

In other words, at each iteration we take $\rho^l + \tau \eta$ instead of ρ^l in the Algorithms 1-2.

4. NUMERICAL SIMULATIONS

In this section we present several examples to illustrate our approach ¹. We first examine the scenario of evacuation of a population ρ_0 from a the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ via an exit Γ_D with different velocities. In the last two examples we compare our approach to the one in [31, 32], the configuration in the first one is similar to the previous ones, i.e., the crowd is initially located in a part of the room Ω and try to escape through the doors, while in the second example the domain Ω is constituted by two rooms connected by a "bridge". In all these examples, the velocity field V derives from a potential φ that is considered as the distance function to the door Γ_D and is computed by solving the eikonal equation

$$\begin{cases} \|\nabla \varphi\| = f(\mathbf{x}) \\ \varphi|_{\Gamma_D} = 0, \end{cases}$$

¹Demonstration videos are available at <https://github.com/enhamza/crowd-motion>

using the primal-dual method proposed in [19] (see also [21]), where $f \geq 0$ is a continuous function that will be precised for each example. All the tests of this section are performed with a mesh size $h = 0.01$ and a timestep $\tau = 0.004$. Moreover, the corresponding velocities are displayed in red.

4.1. One room evacuation. In this first example (c.f. Figure-2), the initial density ρ_0 is given by $\rho_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{S_1}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_{S_2}(\mathbf{x})$ with $S_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}]$ and $S_2 = [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{2}{3}, 1]$. The exit is given by $\Gamma_D =$

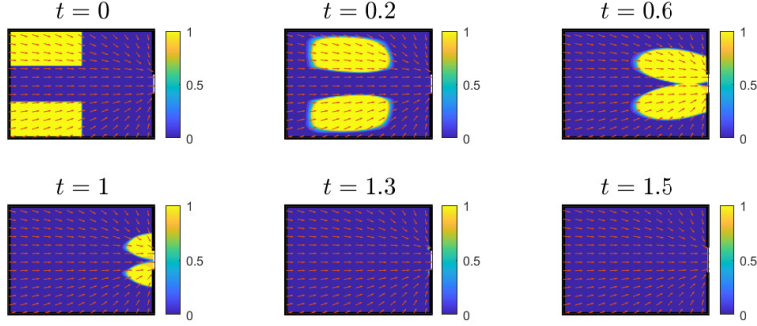


FIGURE 2. The crowd density ρ computed at 6 different timesteps with $T = 2$ and $f \equiv 1$.

In the second example (c.f. Figure-3), the initial density is $\rho_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{S_1}(\mathbf{x})$ with $S_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ and $\Gamma_D = (\{1\} \times [0, 0.4]) \cup (\{1\} \times [0.9, 1])$ and $f(\mathbf{x}) = e^{-3 \times ((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)}$.

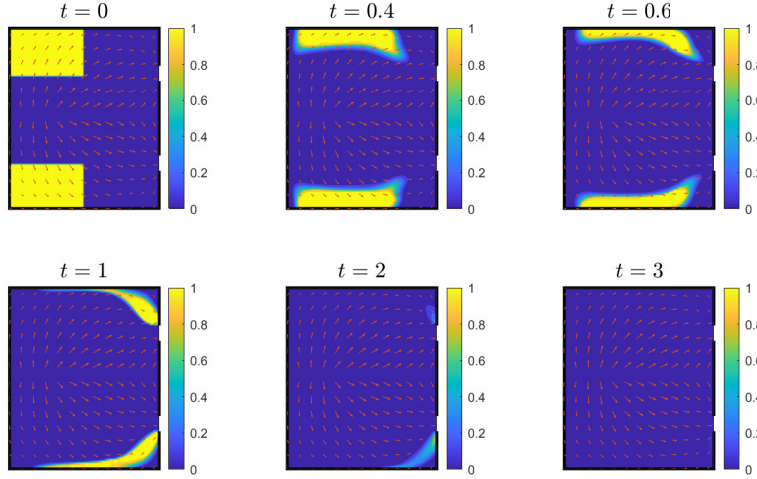


FIGURE 3. The crowd density ρ computed at 6 different timesteps with $T = 3$ and $f(\mathbf{x}) = e^{-3 \times ((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2)}$.

In this example, the function f has a bump in the middle of the domain, and we can observe in Figure-3 that the population is avoiding this region while heading the doors.

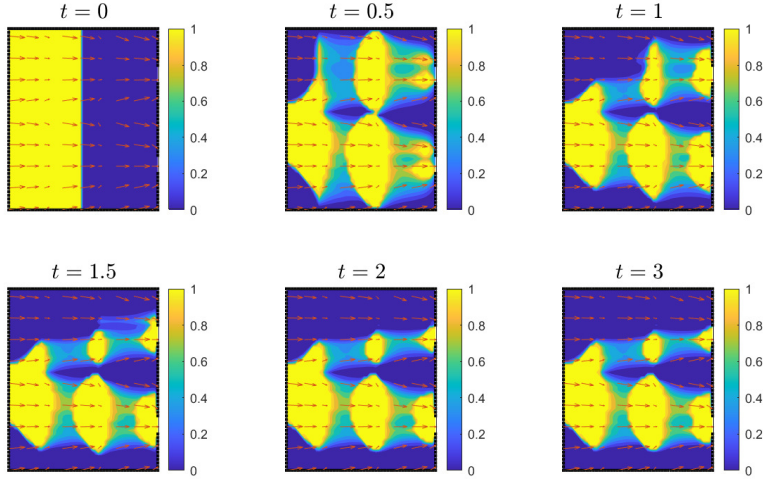


FIGURE 4. The crowd density ρ computed at 6 different timesteps with $T = 3$ and $f(\mathbf{x}) = |\cos(3x + 5y)| + 0.2$.

In the third example (c.f. Figure-4),, the initial condition for the density is $\rho_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{S_1}(\mathbf{x})$ with $S_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ and $\Gamma_D = (\{1\} \times [0.2, 0.3]) \cup (\{1\} \times [0.7, 0.8])$ and $f(\mathbf{x}) = |\cos(3x + 5y)| + 0.2$. The source term is located on the entry of the domain at $\Gamma_S = \{0\} \times [0.3, 0.6]$. In this example one sees that the vector field of spontaneous velocity has small values in successive (periodic) regions. This produce in turns successive congestion zones. Moreover, the system reaches its equilibrium after $t = 2$. One can notice that no variation in the density is observed as the number of persons leaving the room is equal to the number of person entering the room.

4.2. Homogeneous case vs quadratic case. As we pointed out in Subsection-2.3, in the case where $F(x, \xi) = |\xi|$, our model is connected to the gradient flow in the Wasserstein space equipped with W_1 . Whereas the case $F(x, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ can be related to the gradient flow in the Wasserstein space equipped with the W_2 distance (c.f. [31, 32]), where decongestion is performed using the Laplace operator as we discussed in Remark-2.8. The solution of the continuity equation is computed first (prediction step), then it is projected onto the set of admissible densities with respect to W_2 -Wasserstein distance (correction step). Using our approach, this can be simply solved by changing the functional \mathcal{A}_h to $\mathcal{A}_h(\rho, \Phi) = \mathbb{I}_{[0,1]}(\rho) + 1/2\|\Phi\|_2^2$ and modifying formula (3.27) using the fact that

$$\mathbf{Prox}_{\frac{\sigma}{2}\|\cdot\|_2^2}(\Phi) = \frac{1}{1 + \sigma}\Phi.$$

To observe differences between the two methods, we consider two examples. In the first one (c.f. Figure-5), the initial density is $\rho_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{S_1}(\mathbf{x})$ with

$$S_1 = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \text{ and } \Gamma_D = (\{1\} \times [0, 0.4]) \cup (\{1\} \times [0.9, 1]).$$

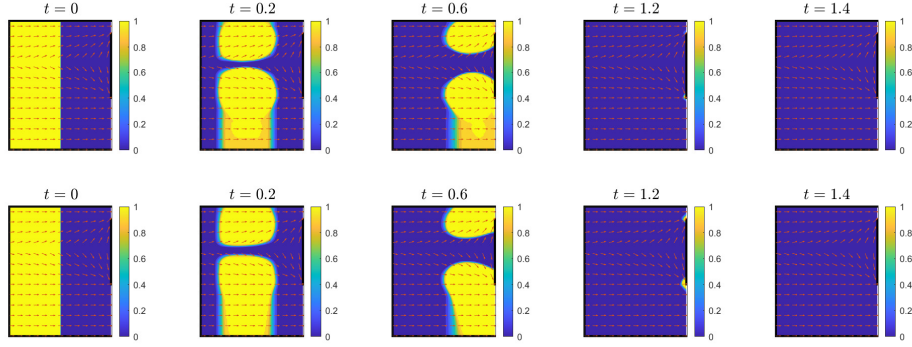


FIGURE 5. The distribution of crowd at equivalent timesteps with $T = 2$. Top row: result using our approach. Bottom row: result using the Laplacian.

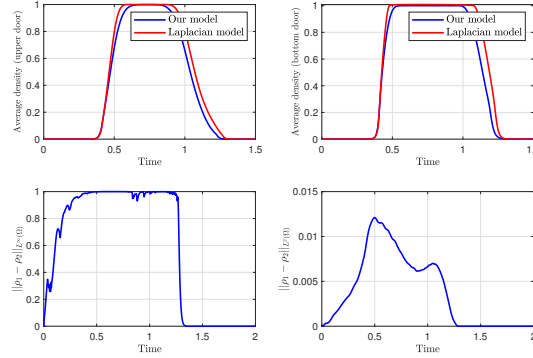


FIGURE 6. Top: Variation of the average density over time for the two models at the exist doors. Bottom: Variation of $\|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty(\Omega)}$ and $\|\rho_1 - \rho_2\|_{L^2(\Omega)}$ as a function of time for the two rooms case. ρ_1 is the solution obtained by our approach and ρ_2 the solution obtained by the Laplacian model.

Now, we consider a domain $\Omega = [0, 1]^2 = \Omega_l \cup \Omega_r$ composed of two rooms linked by a bridge in the spirit of [30], where $\Omega_l = [0, 0.4] \times [0, 1]$ and $\Omega_r = [0.6, 1] \times [0, 1]$. The initial density ρ_0 is located at the left room and is given by $\rho_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_S(\mathbf{x})$ with $S = [0, 0.4] \times [0, 1]$. The exit is given by the two end points $(1, 0)$ and $(1, 1)$, that is $\Gamma_D = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

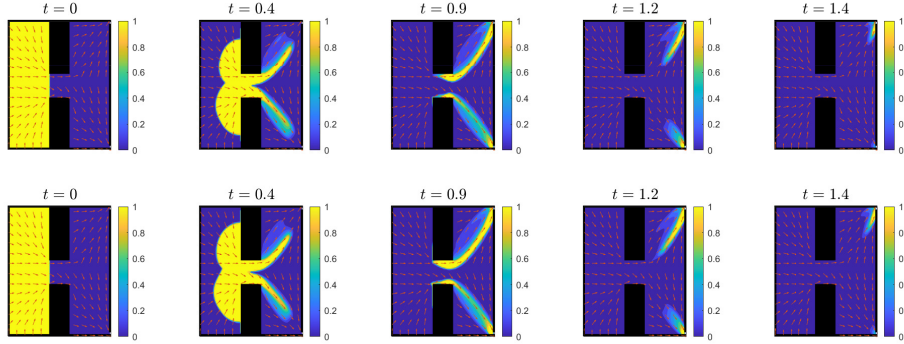


FIGURE 7. The distribution of the crowd over the domain at equivalent timesteps. Top row: result using our approach. Bottom row: result using the Laplacian.

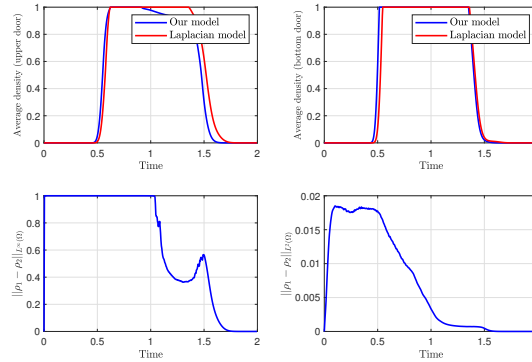


FIGURE 8. Top: Variation of the average density over time for the two models at the exist doors. Bottom: Variation of $\|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty(\Omega)}$ and $\|\rho_1 - \rho_2\|_{L^2(\Omega)}$ as a function of time for the two rooms case. ρ_1 is the solution obtained by our approach and ρ_2 the solution obtained by the Laplacian model.

Figures-5-7 provide a comparison between our method to and one using the Laplace operator in equivalent timesteps. Overall, both models behave similarly except that our model seems to perform faster evacuation. In most of the timesteps examples, it is difficult to visualize differences in of the evolution of the crowd only through the figures. Yet, we can observe this by measuring the L^∞ and L^2 norms of the obtained solutions as well as the variation of the average density over time for the two models at the exist doors. Thanks to Figures-6-8, one can clearly notice that our model is faster than the Laplacian model in achieving population evacuation, as the blue curve (our model) remains under the red curve (Laplacian model) over all the time period.

4.3. Evacuation with path obstacles. In this section, we analyse the evacuation process in the presence of in-domain obstacles. At the microscopic level, it was shown in [37] that pedestrians might be blocked from exiting the room in case where no obstacle is placed in front of the exist. The reason is that pedestrians start to push each other once near to the exist blocking the continuation of the evacuation process. The authors [37] have concluded that placing an obstacle just in front of the exist regulates the evacuation and avoids blocking of pedestrians. To observe the effect of placing an obstacle in front in the exist on the fluidity and speed of the evacuation in the macroscopic case, we consider the following example in $\Omega = [0, 1]^2$ where the obstacle is placed at the region $[0.8, 0.9] \times [0.2, 0.8]$. The initial density ρ_0 is located at the left room and is given by $\rho_0(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_S(\mathbf{x})$ with $S = [0, 0.5] \times [0, 1]$. The exit is given by $\Gamma_D = 1 \times [0.4, 0.6]$.

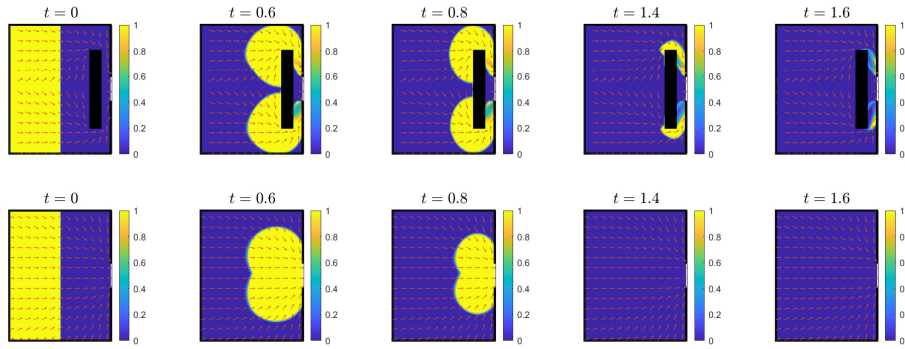


FIGURE 9. The distribution of the crowd over the domain at equivalent timesteps.

As shown in Figure-9, we can notice that after $t = 1.4$, the room is completely evacuated in absence of the obstacle in front of the exist. However, when considering obstacle we can notice that the evacuation is partial and some pedestrian are stuck in the room. In fact, placing an obstacle slowed down the evacuation.

Unlike the microscopic case, adding an obstacle in the macroscopic case have had negative effects on the evacuation process due to the continuum model of the density.

ACKNOWLEDGMENT

The work of H.E was partially supported by the ANR grant, reference ANR-20-CE38-0007.

A. ON THE DISCRETE OPERATORS

In this section, we recall some details concerning the discrete divergence and gradient operators that were used in Section-3. First, let us recall that the space $X = \mathbb{R}^{m \times n}$ is equipped with a

scalar product and an associated norm as follows:

$$\langle u, v \rangle = h^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j} v_{i,j} \quad \text{and} \quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

where h is a given mesh size. Following the definition of the discrete divergence operator given in (3.22), the discrete gradient $\nabla_h : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^{(m+1) \times n} \times \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ is given by $(\nabla_h u)_{i,j} = ((\nabla_h u)_{i,j}^1, (\nabla_h u)_{i,j}^2)$, where

$$\begin{aligned} (\nabla_h u)_{i,j}^1 &= -{}^t D_p^1 u(i, j), \quad \text{if } ((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_D, \\ (\nabla_h u)_{i,j}^1 &= -{}^t D_m^1 u(i, j), \quad \text{if } ((m + \frac{1}{2})h, jh) \in \Gamma_N, \\ (\nabla_h u)_{i,j}^2 &= -{}^t D^2 u(i, j). \end{aligned}$$

and the matrices D_p^1, D_m^1, D^2 are given by

$$D_p^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/h & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1/h & 1/h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 1/h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1/h & 1/h \end{pmatrix}$$

$$D_m^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/h & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1/h & 1/h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 1/h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1/h & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/h & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1/h & 1/h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1/h & 1/h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1/h & 0 \end{pmatrix}.$$

This being said, we check easily that $-\text{div}_h$ and ∇_h are in duality. Moreover, we recall the following

Proposition 1.12. ([7, 8]) *Under the above-mentioned definitions and notations, one has that*

- *The adjoint operator of ∇_h is $\nabla_h^* = -\text{div}_h$.*
- *Its norm satisfies: $\|\nabla_h\|^2 = \|\text{div}_h\|^2 \leq 8/h^2$.*

B. DISCRETIZATION OF THE EIKONAL EQUATION:

For a self-contained presentation, let us recall our main approach to compute the velocity field

V by solving the eikonal equation (2.9). As pointed out in [21] (see also [19]), the solution \mathbf{D} of (2.9) can be obtained by solving

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} : |\nabla u| \leq f, u = 0 \text{ on } \Gamma_D \right\}$$

which can be written, at a discrete level, as

$$\min_{u \in X} \mathcal{A}_h(u) + \mathcal{B}_h(\nabla_h u), \quad (2.28)$$

where

$$\mathcal{A}_h(u) = \begin{cases} -h^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j} & \text{if } u_{i,j} = 0 \ \forall (i,j) \in D_d, \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ and } \mathcal{B}_h = \mathbb{I}_{B(0,f)},$$

where $D_d = \{(i,j) : (ih, jh) \in \Gamma_D\}$ the indexes whose spatial positions belong to Γ_D and $B(0, f)$ is the unit ball of radius f . Then we apply Algorithm-2 with the functionals \mathcal{A}_h and \mathcal{B}_h above.

C. DUALITY RESULTS

The idea for the proof of Lemma 2.4 goes back to [19, Theorem 3.10]. The aim is to define a convex and l.s.c functional $\mathcal{H} : \mathcal{M}_b(\overline{\Omega}) \mapsto]-\infty, \infty]$ such that

$$\mathcal{H}(0) = \inf_{\tau \Phi \in \mathcal{F}^q(\tilde{\rho}-\rho)} \left\{ \tau \int_{\Omega} \mathbf{k}(x) |\Phi(x)| \, dx - \tau \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \boldsymbol{\nu} \, dx \right\}$$

and

$$\sup_{p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})} -\mathcal{H}^*(p) = \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int_{\Omega} (\tilde{\rho} - \rho) p \, dx - \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}.$$

Then conclude by classical duality results

$$\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}^{**}(0) = \sup_{p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})} -\mathcal{H}^*(p). \quad (3.29)$$

One sees that in order to built \mathcal{H} , we need to use vector fields whose divergences are Radon measures (c.f. [9]). Thanks to [9], we know that for any $\Phi \in L^1(\Omega)^N$ such that $\text{div } \Phi =: \mu_{\Phi} \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, in the sense of $\mathcal{D}'(\Omega)$, the normal trace of Φ is well defined on the boundary of Ω . Indeed, for such Φ , we have $\Phi \cdot \boldsymbol{\nu} : \text{Lip}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous linear functional and satisfies

$$\langle \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi|_{\partial\Omega} \rangle = \int_{\Omega} \xi \, d\mu_{\Phi} + \int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \xi \, dx, \quad \text{for any } \xi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

We will denote again $\langle \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi|_{\partial\Omega} \rangle =: \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \boldsymbol{\nu} \xi \, dx$. As for H_{div} vector valued field, it is possible to define the restriction of the normal trace of Φ on Γ_D by working with Lipschitz continuous test functions which vanishes on Γ_N . For any $g \in \text{Lip}(\Gamma_D)$ such that there exists $\tilde{g} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, satisfying

$$\tilde{g} = g \text{ on } \Gamma_D \text{ and } \tilde{g} = 0 \text{ on } \Gamma_N.$$

For such g , we'll define $\int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g \, dx := \langle \Phi \cdot \nu, \tilde{g}|_{\partial\Omega} \rangle$, for any $\Phi \in L^1(\Omega)^N$; i.e.,

$$\int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g \, dx = \int_{\Omega} \tilde{g} \, d\mu_{\Phi} + \int_{\Omega} \nabla \tilde{g} \cdot \Phi \, dx. \quad (3.30)$$

So, for any $\mu \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$, we can define

$$\mathcal{F}(\mu) := \left\{ \Phi \in L^1(\Omega)^N : -\operatorname{div}(\Phi) = \mu \llcorner \Omega \text{ in } \Omega \text{ and } \Phi \cdot \nu = \eta + \mu \llcorner \Gamma_N \text{ on } \Gamma_N \right\}.$$

Here, the condition $-\operatorname{div}(\Phi) = \mu \llcorner \Omega$ in Ω and $\Phi \cdot \nu = \eta + \mu \llcorner \Gamma_N$ on Γ_N , needs to be understood in the sense

$$\int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \xi \, dx = \int_{\Omega} \xi \, d\mu + \int_{\Gamma_N} \eta \xi \, dx, \quad \text{for any } \xi \in \operatorname{Lip}(\Omega) \text{ s.t. } \xi|_{\Gamma_D} = 0.$$

Proposition 3.13. *For any $\mu \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$, we have*

$$\begin{aligned} & \inf_{\tau \Phi \in \mathcal{F}(\mu)} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| \, dx - \tau \int_{\Gamma_D} g(x) \Phi \cdot \nu \, dx \right\} \\ & = \max_{p \in \mathcal{G}_k} \left\{ \int_{\Omega} p \, d\mu - \tau \int_{\Gamma_N} p \eta \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Proof. We consider on $\mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$ the following functional $\mathcal{H} : \mathcal{M}_b(\overline{\Omega}) \mapsto]-\infty, \infty]$ defined by

$$\mathcal{H}(h) = \inf_{\tau \phi \in \mathcal{F}(\mu+h)} \left\{ \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| \, dx + \int_{\Gamma_D} g \, dh - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g \, dx \right\},$$

for any $h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$. Then \mathcal{H} is convex and l.s.c.

Convexity. Indeed, take $h_1, h_2 \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$ and set $h := th_1 + (1-t)h_2$ for $t \in [0, 1]$. Let $\Phi_{1,n}, \Phi_{2,n} \in L^1(\Omega)^N$ be two minimizing sequences of fluxes corresponding to h_1 and h_2 respectively, i.e., $\tau \Phi_{1,n} \in \mathcal{F}(\mu + h_1)$ and $\tau \Phi_{2,n} \in \mathcal{F}(\mu + h_2)$ such that

$$\mathcal{H}(h_i) = \tau \lim_n \int_{\Omega} k(x) |\Phi_{i,n}(x)| \, dx + \int_{\Gamma_D} g \, dh_i - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi_{i,n} \cdot \nu g \, dx \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Set $\Phi_n = t\Phi_{1,n} + (1-t)\Phi_{2,n}$. We clearly see that ϕ_n are admissible for h and

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(h) & \leq \tau \lim_n \int_{\Omega} k(x) |\Phi_n(x)| \, dx + \int_{\Gamma_D} g \, dh - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi_n \cdot \nu g \, dx \\ & = \tau \lim_n \int_{\Omega} k(x) |t\Phi_{1,n} + (1-t)\Phi_{2,n}| \, dx + \int_{\Gamma_D} g \, dh - \tau \int_{\Gamma_D} (t\Phi_{1,n} + (1-t)\Phi_{2,n}) \cdot \nu g \, dx \\ & \leq \lim_n t \left(\tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi_{1,n}| \, dx + \int_{\Gamma_D} g \, dh - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi_{1,n} \cdot \nu g \, dx \right) \\ & \quad + (1-t) \left(\tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi_{2,n}| \, dx + \int_{\Gamma_D} g \, dh - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi_{2,n} \cdot \nu g \, dx \right) \\ & \leq t\mathcal{H}(h_1) + (1-t)\mathcal{H}(h_2) \end{aligned}$$

and this proves convexity.

Lower semicontinuity. Take a sequence $h_n \rightarrow h$ in $\mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$. For every $n \in \mathbb{N}$, we consider a sequence $\tau(\Phi_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ of $\mathcal{F}(\mu + h_n)$ such that

$$\mathcal{H}(h_n) = \tau \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} k(x) |\Phi_n^k(x)| dx + \int_{\Gamma_D} g dh_n - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi_n^k \cdot \nu g dx.$$

We may find some $\psi_n \in L^1(\Omega)^N$ satisfying

$$\tau \int_{\Omega} \psi_n \cdot \nabla \xi dx = \int_{\overline{\Omega}} (h - h_n) \xi dx, \quad \text{for any } \xi \in \text{Lip}(\Omega) \cap W_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega). \quad (3.31)$$

and such that $\|\psi_n\|_{L^1} \rightarrow 0$ and $\langle \psi_n \cdot \nu, g \rangle \rightarrow 0$. In fact, since $W_{\Gamma_D}^{1,s}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, for $s > N$, one sees that the optimization problem

$$\min_{z \in W_{\Gamma_D}^{1,s}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{s} \int_{\Omega} |\nabla z|^s dx - \int_{\overline{\Omega}} z d(h - h_n) \right\}$$

has a unique solution that we denote u_n . We consider $\psi_n := |\nabla u_n|^{s-2} \nabla u_n$. It is clear that $\psi_n \in L^{s'}(\Omega)$, and then in $L^1(\Omega)$. Moreover, using standard techniques of calculus of variation, we see that ψ_n satisfies (3.31). Clearly u_n is bounded in $W_{\Gamma_D}^{1,s}(\Omega)$, so that by taking a subsequence if necessary, we have $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,s}(\Omega)$ and uniformly in $\overline{\Omega}$. This implies that

$$\tau \int_{\Omega} |\psi_n|^{s'} dx = \tau \int_{\Omega} |\nabla u_n|^s dx = \int_{\overline{\Omega}} u_n d(h - h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

and then $|\psi_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ in $L^1(\Omega)$. In addition, thanks to (3.30), we have

$$\tau \langle \psi_n \cdot \nu, g \rangle = \tau \int_{\Omega} \psi_n \cdot \nabla \tilde{g} dx - \int_{\overline{\Omega}} \tilde{g} d(h - h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

This being said, we clearly have $-\text{div}(\Phi_n^k + \psi_n) = \mu + h \llcorner \Omega$ in Ω and $(\Phi_n^k + \psi_n) \cdot \nu = \eta + h \llcorner \Gamma_N$ on Γ_N ; i.e., $\tau(\Phi_n^k + \psi_n) \in \mathcal{F}(\mu + h)$. By semicontinuity of the integral, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(h) &\leq \tau \int_{\Omega} k(x) |(\Phi_n^k + \psi_n)(x)| dx + \int_{\Gamma_D} g dh - \tau \int_{\Gamma_D} (\Phi_n^k + \psi_n) \cdot \nu g dx \\ &\leq \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi_n^k(x)| dx + \int_{\Gamma_D} g dh_n - \tau \int_{\Gamma_D} \Phi_n^k \cdot \nu g dx \\ &\quad + \tau \int_{\Omega} k(x) |\psi_n(x)| dx + \int_{\Gamma_D} g d(h - h_n) - \tau \int_{\Gamma_D} \psi_n \cdot \nu g dx. \end{aligned}$$

Letting $k \rightarrow \infty$ we get

$$\mathcal{H}(h) \leq \mathcal{H}(h_n) + \tau \int_{\Omega} k(x) |\psi_n(x)| dx + \int_{\Gamma_D} g d(h - h_n) - \tau \int_{\Gamma_D} \psi_n \cdot \nu g dx.$$

Now, letting $n \rightarrow \infty$, and using the fact that $\psi_n \rightarrow 0$ in $L^1(\Omega)^N$, and $h_n \rightarrow h$ in $\mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$, as $n \rightarrow \infty$, we obtain the lower semicontinuity, i.e.,

$$\mathcal{H}(h) \leq \liminf_n \mathcal{H}(h_n).$$

Next let us compute \mathcal{H}^* . For any $p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(p) &= \sup_{h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})} \left\{ \int_{\overline{\Omega}} p dh - \mathcal{H}(h) \right\} \\ &= \sup_{h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega}), \tau \Phi \in \mathcal{F}(\mu+h)} \left\{ \int_{\overline{\Omega}} p dh - \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx - \int_{\Gamma_D} g dh + \tau \int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g dx \right\} \\ &= I_1(p) + I_2(p), \end{aligned}$$

where $I_1(p) := - \int_{\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D} p d\mu$ and $I_2(p)$ is given by

$$\sup_{h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega}), \tau \Phi \in \mathcal{F}(\mu+h)} \left\{ \int_{\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D} p d(\mu+h) - \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx + \int_{\Gamma_D} (p-g) dh + \tau \int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g dx \right\}.$$

Using Lemma 3.14 below, we deduce that, for any $u \in \text{Lip}(\Omega)$, we have

$$\mathcal{H}^*(p) = \begin{cases} - \int_{\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D} p d\mu & \text{if } u \in \mathcal{G}_k \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, using (3.29) we deduce the result. \square

Lemma 3.14. *Let $p \in \text{Lip}(\Omega)$, we have*

$$\sup_{\substack{h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega}) \\ \tau \Phi \in \mathcal{F}(\mu+h)}} \left\{ \int_{\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D} p d(\mu+h) - \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx + \int_{\Gamma_D} (p-g) dh + \tau \int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g dx \right\} = \begin{cases} 0 & \text{if } p \in \mathcal{G}_k \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. Take p as a test function in the divergence constraint $-\tau \text{div}(\Phi) = \mu + h$ in $\mathcal{D}'(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D)$, we get

$$\begin{aligned} I(h, \Phi) &:= \int_{\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D} p d(\mu+h) - \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx + \int_{\Gamma_D} (p-g) dh + \tau \int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu g dx \\ &= \tau \int_{\Omega} \nabla p \cdot \Phi dx - \tau \int_{\Omega} k(x) |\Phi(x)| dx + \int_{\Gamma_D} (p-g) dh + \tau \int_{\Gamma_D} \Phi \cdot \nu (g-p) dx. \end{aligned}$$

It is clear that for any $p \in \mathcal{G}_k$, we have $I(h, \Phi) \leq 0$, and by taking $h \equiv -\mu$ and $\Phi \equiv 0$ we obtain $\sup I(h, \Phi) = 0$. For the case where $p \not\equiv g$ on Γ_D ; i.e., $p(x_0) \neq g(x_0)$ for some $x_0 \in \Gamma_D$, one can work with $h_n = n \text{Sign}(p(x_0) - g(x_0)) \delta_{x_0}$ for $n \in \mathbb{N}$, where δ_{x_0} is Dirac mass at x_0 , and fix any $\Phi_0 \in \mathcal{F}(\mu+h)$ such that $-\text{div} \Phi_0 = \mu$ in $\mathcal{F}(\mu+h)$, to see that $I(h_n, \Phi) \rightarrow \infty$, as $n \rightarrow \infty$. Now, for the remaining case, i.e., $p = g$ on Γ_D and $|\nabla p| > k$ on a subset $A \subset \Omega$ such that $|A| \neq 0$, we consider $\Phi_{n\epsilon} = n (\nabla p \chi_A) * \eta_\epsilon$, where η_ϵ is a sequence of mollifiers. It is clear that there exists $h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$, such that $-\text{div} \Phi_{n\epsilon} = \mu + h$ in $\mathcal{D}'(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_D)$. Moreover, for any n , we have

$$\sup I(h, \phi) \geq \tau \int_{\Omega} \Phi_{n\epsilon} \cdot \nabla u - \tau \int_{\Omega} k(x) |\nabla p(x)| dx.$$

Letting $\epsilon \rightarrow 0$, we get

$$\sup I(h, \Phi) \geq n\tau \underbrace{\int_A (|\nabla p(x)|^2 - k(x) |\nabla p(x)|) dx}_{>0} \rightarrow \infty, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

This concludes the proof. \square

Proof of Lemma 2.4. Now, the proof is a simple consequence of Proposition 3.13. \square

REFERENCES

- [1] M. Agueh, G. Carlier, and N. Igbida. On the minimizing movement with the 1-Wasserstein distance. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 24(4):1415–1427, 2018. 8
- [2] M. Beckmann. A continuous model of transportation. *Econometrica*, 20:643–660, 1952. 4
- [3] N. Bellomo and C. Dogbé. On the modelling crowd dynamics from scaling to hyperbolic macroscopic models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18:1317–1345, 2008. 2
- [4] T. Bord. Highway capacity manual, 204 TRB. 1
- [5] J. M. Borwein and D. Zhuang. On Fan’s minimax theorem. *Math. Programming*, 34(2):232–234, 1986. 10
- [6] G. Bouchitte, G. Buttazzo, and P. Seppecher. Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures. *ArXiv preprint arXiv: 2105.00182*, 5, 1997. 11
- [7] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2):89–97, 2004. 17, 25
- [8] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *J. Math. Imaging Vis.*, 40(1):120–145, 2011. 18, 19, 25
- [9] G.-Q. Chen and H. Frid. Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 147(2):89–118, 1999. 26
- [10] R. M. Colombo and M. D. Rosini. Pedestrian flows and non-classical shocks. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28(13):1553–1567, 2005. 2
- [11] V. Coscia and C. Canavesio. First-order macroscopic modelling of human crowd dynamics. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(suppl.):1217–1247, 2008. 2
- [12] N. David and M. Schmidtchen. On the incompressible limit for a tumour growth model incorporating convective effects, 2021. arXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/2103.02564>. 4
- [13] P. Degond, L. Navoret, R. Bon, and D. Sanchez. Congestion in a macroscopic model of self-driven particles modeling gregariousness. *J. Stat. Phys.*, 138(1-3):85–125, 2010. 2
- [14] S. Di Marino and A. R. Mészáros. Uniqueness issues for evolution equations with density constraints. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(9):1761–1783, 2016. 4
- [15] C. Dogbé. On the numerical solutions of second order macroscopic models of pedestrian flows. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(7):1884–1898, 2008. 2
- [16] S. Dumont and N. Igbida. On a dual formulation for the growing sandpile problem. *European J. Appl. Math.*, 20(2):169–185, 2009. 8, 13
- [17] S. Dweik. $W^{1,p}$ regularity on the solution of the BV least gradient problem with Dirichlet condition on a part of the boundary. *Nonlinear Anal.*, 223:Paper No. 113012, 18, 2022. 6

- [18] I. Ekeland and R. Temam. Convex analysis and variational problems. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 1. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976. Translated from the French. 7
- [19] H. Ennaji, N. Igbida, and V. T. Nguyen. Augmented Lagrangian methods for degenerate Hamilton-Jacobi equations. Calc. Var. Partial Differential Equations, 60(6):Paper No. 238, 28, 2021. 5, 10, 20, 26
- [20] H. Ennaji, N. Igbida, and V. T. Nguyen. Beckmann-type problem for degenerate Hamilton-Jacobi equations. Quart. Appl. Math., 80(2):201–220, 2022. 5
- [21] H. Ennaji, N. Igbida, and V. T. Nguyen. Continuous Lambertian shape from shading: a primal-dual algorithm. ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 56(2):485–504, 2022. 5, 20, 26
- [22] L. C. Evans and F. Rezakhanlou. A stochastic model for growing sandpiles and its continuum limit. Comm. Math. Phys., 197(2):325–345, 1998. 8, 13
- [23] D. Helbing. A mathematical model for the behavior of pedestrians. Systems Research and Behavioral Science, 36:298–310, 1991. 1, 2
- [24] D. Helbing, P. Molnar, and F. Schweitzer. Computer simulations of pedestrian dynamics and trail formation. 01 1994. 1, 2
- [25] R. L. Hughes. The flow of human crowds. In Annual review of fluid mechanics, Vol. 35, volume 35 of Annu. Rev. Fluid Mech., pages 169–182. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 2003. 2
- [26] R. L. Hughes. The flow of human crowds. Annual Review of Fluid Mechanics, 35:169–182, 2003. 2
- [27] N. Igbida. New variant of cross-diffusion system. 2, 8, 13
- [28] N. Igbida. L^1 -theory for reaction-diffusion hele-shaw flow with linear drift. arXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/2105.00182>. 4, 13
- [29] N. Igbida. Back on stochastic model for sandpile. In Recent developments in nonlinear analysis, pages 266–277. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010. 8, 13
- [30] H. Leclerc, Q. Mérigot, F. Santambrogio, and F. Stra. Lagrangian discretization of crowd motion and linear diffusion. SIAM J. Numer. Anal., 58(4):2093–2118, 2020. 22
- [31] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. A macroscopic crowd motion model of gradient flow type. Math. Models Methods Appl. Sci., 20(10):1787–1821, 2010. 2, 3, 4, 8, 14, 19, 21
- [32] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. Congestion-driven dendritic growth. Discrete Contin. Dyn. Syst., 34(4):1575–1604, 2014. 4, 19, 21
- [33] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, and J. Venel. Handling congestion in crowd motion modeling. Netw. Heterog. Media, 6(3):485–519, 2011. 4
- [34] A. R. Mészáros and F. Santambrogio. Advection-diffusion equations with density constraints. Anal. PDE, 9(3):615–644, 2016. 4
- [35] B. Piccoli and A. Tosin. Pedestrian flows in bounded domains with obstacles. Contin. Mech. Thermodyn., 21(2):85–107, 2009. 2
- [36] B. Piccoli and A. Tosin. Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow. Arch. Ration. Mech. Anal., 199(3):707–738, 2011. 2
- [37] F. A. Reda. Crowd motion modelisation under some constraints. Theses, Université Paris Saclay (COMUE), Sept. 2017. 24

- [38] F. Santambrogio. Regularity via duality in calculus of variations and degenerate elliptic PDEs. J. Math. Anal. Appl., 457(2):1649–1674, 2018. [5](#), [6](#)

Chapitre 4

Étude théorique

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude théorique du modèle proposé dans le chapitre 3 dans un cas particulier où $F(x, \Phi) = |\Phi|$, i.e., le modèle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, \quad m \geq 0, \quad |\nabla p| \leq 1, \quad m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \operatorname{Sign}^+(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega, \quad (4.1)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D. \end{array}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, ν est le vecteur normal unitaire extérieure à Ω , $f \in L^1(Q)$, $T > 0$ et V est un champ de vitesse constant au cours du temps transportant la densité ρ vers la sortie Γ_D .

Pour des difficultés liées à la non-régularité de Sign^+ , nous montrons dans ce travail l'existence d'une solution variationnelle du problème (4.1), dans le cas où le graphe Sign^+ est approximé par une fonction lipschitzienne notée b .

Ce chapitre se focalise donc sur l'étude théorique du problème suivant

$$(\mathcal{PE}) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, m \geq 0, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho = b(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega, \\
\left. \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T] \times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T] \times \Gamma_D. \end{array}$$

Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution du problème (\mathcal{PE}) . Pour montrer l'existence, nous passons par plusieurs étapes. Tout d'abord, en utilisant la méthode des semigroupes non linéaires, pour montrer que le problème de Cauchy associé à (\mathcal{PE}) défini par :

$$(\mathcal{CP}(\rho_0, f)) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \mathcal{A}\rho = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

admet une bonne solution. Ici, \mathcal{A} est un opérateur multivoque défini sur $L^1(\Omega)$ par : $\gamma \in \mathcal{A}\rho$ si, et seulement si $\rho \in L^1(\Omega)$, $\exists p \in \mathcal{K}$ tel que $\rho = b(p)$, et pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ on a :

$$\int_{\Omega} \gamma(p - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla(p - \xi) dx \geq 0.$$

L'étude de l'existence d'une bonne solution est liée à l'étude du problème stationnaire associé à (\mathcal{PE}) défini par

$$(\mathcal{S}_f) \left\{ \begin{array}{l} \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho = b(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } \Omega, \\
\left. \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_N, \\ \text{sur } \Gamma_D. \end{array}$$

La section 4.1 est consacrée à l'étude de l'existence d'une solution variationnelle du problème stationnaire (\mathcal{S}_f) . Puis, dans la section 4.2, nous commençons par la définition de la notion de bonne solution. Après, nous montrons que le problème de Cauchy (\mathcal{CP}) admet une bonne solution. Dans la section 4.3, nous montrons que cette bonne solution est une solution variationnelle du problème d'évolution (\mathcal{PE}) . De plus, nous montrons en utilisant les techniques de doublement et dédoublement de variables l'unicité de la solution variationnelle.

4.1 Problème stationnaire

L'étude du problème (\mathcal{PE}) est liée directement à la version stationnaire associée (\mathcal{S}_f) via la théorie de semi groupe :

$$(\mathcal{S}_f) \left\{ \begin{array}{l} \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, m \geq 0, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho = b(p) \\ (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \\ \\ \text{sur } \Gamma_N, \\ \text{sur } \Gamma_D. \end{array}$$

Soit \mathcal{K} l'ensemble défini par $\mathcal{K} := \{u \in W^{1,s}(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } |\nabla u| \leq 1\}$.

Définition 4.1.1. Pour tout $f \in L^1(\Omega)$, on appelle solution variationnelle du problème stationnaire (\mathcal{S}_f) tout couple $(\rho, p) \in L^1(\Omega) \times \mathcal{K}$, avec $\rho = b(p)$ et pour tout $\xi \in \mathcal{K}$, on a :

$$\int_{\Omega} \rho(p - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla(p - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f(p - \xi) dx. \quad (4.3)$$

Théorème 4.1.1. Pour tout $f \in L^1(\Omega)$, il existe une solution variationnelle (ρ, p) du problème (\mathcal{S}_f) . De plus, si (ρ_1, p_1) , respectivement (ρ_2, p_2) , est solution variationnelle du problème (\mathcal{S}_{f_1}) , respectivement (\mathcal{S}_{f_2}) , alors

$$\|(\rho_1 - \rho_2)^+\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\Omega)}, \quad (4.4)$$

et

$$\|(\rho_1 - \rho_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(f_1 - f_2)\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Lemme 4.1.1. L'opérateur $\mathcal{T} : W_D^{1,s}(\Omega) \rightarrow (W_D^{1,s}(\Omega))^*$ défini par :

$$\langle \mathcal{T}(u), \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)} = \int_{\Omega} b(u) \xi dx - \int_{\Omega} b(u) V \cdot \nabla \xi dx, \text{ pour tout } \xi \in W_D^{1,s}(\Omega).$$

est un opérateur pseudo-monotone.

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite dans $W_D^{1,s}(\Omega)$ telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } (W_D^{1,s}(\Omega))^*,$$

avec $u \in W_D^{1,s}(\Omega)$. Montrons que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{T}(u_n), u_n - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)} \geq \langle \mathcal{T}(u), u - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)}, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{K}. \quad (4.6)$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\langle \mathcal{T}(u_n), u_n - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)} = \int_{\Omega} b(u_n) (u_n - \xi) dx - \int_{\Omega} b(u_n) V \cdot \nabla(u_n - \xi) dx. \quad (4.7)$$

Puisque $s > N$, $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,s}(\Omega)$ et $W^{1,s}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ avec injection compacte, alors le théorème de Rellich-Kondrachov nous affirme la convergence uniforme dans $C(\bar{\Omega})$ i.e.,

$$u_n \rightarrow u \text{ uniformément dans } C(\bar{\Omega}).$$

Puisque la fonction b est continue et bornée alors par le théorème de la convergence dominée, on a

$$b(u_n) \rightarrow b(u) \text{ dans } L^s(\Omega).$$

Maintenant par passage à la limite dans l'équation (4.7), on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}(u_n), u_n - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(u_n) (u_n - \xi) dx - \int_{\Omega} b(u_n) V \cdot \nabla(u_n - \xi) dx \\ &= \int_{\Omega} b(u) (u - \xi) dx - \int_{\Omega} b(u) V \cdot \nabla(u - \xi) dx \\ &= \langle \mathcal{T}(u), u - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En plus, l'opérateur \mathcal{T} est borné. D'où la pseudo-monotonie de l'opérateur \mathcal{T} . \square

Corollaire 4.1.1. *Pour tout $f \in (W_D^{1,s}(\Omega))^*$, le problème (S_f) admet une solution variationnelle $(\rho, p) \in L^1(\Omega) \times \mathcal{K}$.*

Démonstration. Afin d'appliquer le théorème 1.4.1 nous prenons $\mathcal{V} = W_D^{1,s}(\Omega)$ et $\mathcal{W} = \mathcal{K}$. Ce qui nous permet de déduire qu'il existe $p \in \mathcal{K}$ tel que

$$\langle \mathcal{T}(p), p - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)} \leq \langle f, p - \xi \rangle_{W_D^{1,s}(\Omega)^*, W_D^{1,s}(\Omega)}, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{K},$$

i.e.,

$$\int_{\Omega} \rho(p - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla(p - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f(p - \xi) dx, \quad (4.9)$$

avec $\rho = b(p)$. D'où le résultat. \square

Remarque 4.1.1. *L'ensemble \mathcal{K} convexe, fermé, borné et non vide. En effet ;*

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, u et v dans \mathcal{K} on a $\alpha u + (1 - \alpha)v \in \mathcal{K}$ car $\alpha u + (1 - \alpha)v \in W_{\Gamma_D}^{1,s}(\Omega)$ et $|\nabla(\alpha u + (1 - \alpha)v)| \leq 1$. D'où la convexité de \mathcal{K} .*
2. *Pour montrer que l'ensemble \mathcal{K} est fermé, on considère une suite $u_n \in \mathcal{K}$. Puisque $u_n \in W_{\Gamma_D}^{1,s}(\Omega)$ et $|\nabla u_n| \leq 1$ alors u_n est bornée dans $W^{1,s}(\Omega)$ et il existe donc une sous suite $u_{n_k} \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,s}(\Omega)$. Par suite $1 \geq \liminf |\nabla u_{n_k}| \geq |\nabla u|$. D'où $u \in \mathcal{K}$ et par suite \mathcal{K} est fermé.*

3. Pour tout $u \in \mathcal{K}$, puisque $|\nabla u| \leq 1$ il existe donc $c > 0$ tel que $\|u\|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq c$. Par suite, \mathcal{K} est bornée.

Lemme 4.1.2. Soient (ρ_1, p_1) et (ρ_2, p_2) deux solutions variationnelles de (\mathcal{S}_{f_1}) et (\mathcal{S}_{f_2}) respectivement. Alors, on a

$$\|(\rho_1 - \rho_2)^+\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.10)$$

Démonstration. Puisque (ρ_1, p_1) et (ρ_2, p_2) deux solutions variationnelles de (\mathcal{S}_{f_1}) et (\mathcal{S}_{f_2}) respectivement, alors on a :

$$\int_{\Omega} \rho_1(p_1 - \xi_1) dx - \int_{\Omega} \rho_1 V \cdot \nabla(p_1 - \xi_1) dx \leq \int_{\Omega} f_1(p_1 - \xi_1) dx, \text{ pour tout } \xi_1 \in \mathcal{K} \quad (4.11)$$

et

$$\int_{\Omega} \rho_2(p_2 - \xi_2) dx - \int_{\Omega} \rho_2 V \cdot \nabla(p_2 - \xi_2) dx \leq \int_{\Omega} f_2(p_2 - \xi_2) dx, \text{ pour tout } \xi_2 \in \mathcal{K}. \quad (4.12)$$

Soit T_k^+ la fonction troncature définie pour tout $r \in \mathbb{R}$ par :

$$T_k^+(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ r & \text{si } 0 \leq r \leq k, \\ k & \text{si } r > k. \end{cases}$$

En considérant la fonction test $\xi_1 = p_1 - T_k^+(p_1 - p_2)$ dans l'inégalité (4.11), et la fonction test $\xi_2 = p_2 + T_k^+(p_1 - p_2)$ dans l'inégalité (4.12) on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho_1 T_k^+(p_1 - p_2) dx - \int_{\Omega} \rho_1 V \cdot \nabla T_k^+(p_1 - p_2) dx \leq \int_{\Omega} f_1 T_k^+(p_1 - p_2) dx, \quad (4.13)$$

et

$$- \int_{\Omega} \rho_2 T_k^+(p_1 - p_2) dx + \int_{\Omega} \rho_2 V \cdot \nabla T_k^+(p_1 - p_2) dx \leq - \int_{\Omega} f_2 T_k^+(p_1 - p_2) dx. \quad (4.14)$$

Additionnons les deux inégalités (4.13) et (4.14) et divisons par $k > 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega} (\rho_1 - \rho_2) \frac{T_k^+(p_1 - p_2)}{k} dx + \int_{\Omega} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{k} V \cdot \nabla T_k^+(p_1 - p_2) dx \leq \int_{\Omega} (f_1 - f_2) \frac{T_k^+(p_1 - p_2)}{k} dx. \quad (4.15)$$

Les deux termes $\int_{\Omega} (\rho_1 - \rho_2) \frac{T_k^+(p_1 - p_2)}{k} dx$ et $\int_{\Omega} (f_1 - f_2) \frac{T_k^+(p_1 - p_2)}{k} dx$ convergent respectivement vers $\int_{\Omega} (\rho_1 - \rho_2)^+ dx$ et $\int_{\Omega} (f_1 - f_2)^+ dx$, avec $k \rightarrow 0$.

D'autre part, la fonction b est lipschitzienne, donc il existe une constante $C_b \in \mathbb{R}$ telle que :

$$|\rho_2 - \rho_1| \leq C_b |p_2 - p_1|,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{k} V \cdot \nabla T_k^+(p_1 - p_2) \, dx \right| &\leq C_b \int_{\Omega} \left| \frac{(p_2 - p_1)}{k} V \cdot \nabla T_k^+(p_1 - p_2) \, dx \right| \\
&\leq C_b \int_{\Omega \cap \{0 \leq p_1 - p_2 \leq k\}} \left| \frac{(p_2 - p_1)}{k} T_k^{+'}(p_1 - p_2) V \cdot \nabla(p_1 - p_2) \, dx \right| \\
&\leq C_b \int_{\Omega \cap \{0 \leq p_1 - p_2 \leq k\}} \left| V \cdot \nabla(p_1 - p_2) \, dx \right|.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Par passage à la limite dans l'inégalité (4.16) lorsque $k \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{k} V \cdot \nabla T_k^+(p_1 - p_2) \, dx \right| = 0.$$

Par conséquent, le passage à la limite dans l'inégalité (4.15) avec $k \rightarrow 0$ implique

$$\int_{\Omega} (\rho_1 - \rho_2)^+ \, dx \leq \int_{\Omega} (f_1 - f_2)^+ \, dx$$

i.e.,

$$\|(\rho_1 - \rho_2)^+\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\Omega)}.$$

□

Preuve du théorème 4.1.1. La preuve du théorème est le résultat du corollaire 4.1.1 et le lemme 4.1.2. □

4.2 Problème de Cauchy et bonne solution

Dans cette sous-section, nous montrons l'existence d'une solution de problème de Cauchy (\mathcal{CP}) associé au problème d'évolution (\mathcal{PE}) au sens de bonne solution, en s'appuyant sur la théorie des semigroupes non linéaires.

Nous commençons cette sous-section par la définition de la notion des bonnes solutions introduite par Philippe Bénilan [5]. Par la suite, nous vérifions que l'opérateur \mathcal{A} définie dans le problème de Cauchy (\mathcal{CP}) satisfait les conditions nécessaires assurant l'existence d'une bonne solution par la théorie des semigroupes non linéaires.

4.2.1 Définition des bonnes solutions

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{CP}(\rho_0, f)) \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \mathcal{A}\rho = f \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

où \mathcal{A} est un opérateur multivoque définie sur l'espace de Banach X , $\rho_0 \in X$ et $f \in L^1([0, T], X)$. Pour $\epsilon > 0$, on considère la discrétisation suivante de l'intervalle $[0, T]$:

$$\begin{cases} 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T, \\ t_{i+1} - t_i = \epsilon, \text{ pour tout } i \in 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

On approche la fonction f par la fonction f_ϵ constante par morceaux, définie par

$$\begin{cases} f_\epsilon(t) = f_i & \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ f_i \in X & \forall i \in 0, \dots, n-1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(t) - f_i\|_X < \epsilon, \end{cases}$$

Discrétisons la première équation de problème $(CP(\rho_0, f))$ par un schéma Euler implicite en temps, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{t_{i+1} - t_i} + \mathcal{A}\rho_{i+1} = f_{i+1} & \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \quad (4.17)$$

La fonction constante par morceaux ρ^ϵ définie par :

$$\rho^\epsilon(t) = \begin{cases} \rho^{i+1} & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ \rho^0 & \text{si } t \in [0, t_1[, \end{cases}$$

est appelée solution ϵ - approché du problème de Cauchy discrétisé (4.17). L'ensemble des éléments de la discrétisation noté par $D_{\mathcal{A}}^\epsilon(t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n; \rho_0)$ est appelé ϵ - discrétisation.

Définition 4.2.1. Une fonction $\rho \in C([0, T], X)$ est appelée une bonne solution du problème de Cauchy $(CP(\rho_0, f))$ s'il existe une ϵ - discrétisation, une solution ϵ - approchée ρ^ϵ telle que

$$\rho^\epsilon \rightarrow \rho \text{ dans } C([0, T], X),$$

avec $\rho(0) = \rho_0$.

4.2.2 Existence d'une bonne solution

Dans ce travail, l'opérateur \mathcal{A} est défini dans $X = L^1(\Omega)$ par : $\gamma \in \mathcal{A}\rho$ si, et seulement si $\rho \in L^1(\Omega)$, $\gamma \in L^1(\Omega)$, $\exists p \in \mathcal{K}$ tel que $\rho = b(p)$, et pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ on a :

$$\int_{\Omega} \gamma(p - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla(p - \xi) dx \geq 0.$$

Lemme 4.2.1. L'opérateur \mathcal{A} satisfait les propriétés suivantes :

— \mathcal{A} est m - T -accrétif.

— $\overline{D(\mathcal{A})} = D$ où $D := \{\rho \in L^1(\Omega) ; \exists p \in \mathcal{K} \text{ et } \rho = b(p) p.p\}$

Démonstration. D'après le théorème 4.1.1, on a :

$$\|(\rho_1 - \rho_2)^+\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(f_1 - f_2)^+\|_{L^1(\Omega)},$$

pour tout $f_1 \in \rho_1 + \mathcal{A}\rho_1$ et pour tout $f_2 \in \rho_2 + \mathcal{A}\rho_2$, donc l'opérateur \mathcal{A} est T -accrétif dans $L^1(\Omega)$. De plus, $L^1(\Omega) = \overline{R(I + \alpha\mathcal{A})}$ pour tout $\alpha > 0$, donc \mathcal{A} est m - T -accrétif dans $L^1(\Omega)$.

Pour la deuxième propriété, d'après la définition de l'opérateur \mathcal{A} on a $D(\mathcal{A}) \subseteq D$, et puisque le domaine D est fermé alors on déduit que $\overline{D(\mathcal{A})} \subseteq D$. Pour montrer que $D \subseteq \overline{D(\mathcal{A})}$, on prend une fonction $\rho \in D$ et pour tout $\epsilon \geq 0$ on considère le couple $(\rho_\epsilon, p_\epsilon) \in L^1(\Omega) \times \mathcal{K}$ tel que

$$\int_{\Omega} \rho_\epsilon(p_\epsilon - \xi) dx - \epsilon \int_{\Omega} \rho_\epsilon V \cdot \nabla(p_\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} \rho(p_\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{K}. \quad (4.18)$$

Puisque $p_\epsilon \in \mathcal{K}$, alors la suite $(p_\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ est bornée dans $W^{1,s}(\Omega)$. Il existe donc une sous-suite de $(p_\epsilon)_\epsilon$ notée $(p_{\epsilon_k})_{\epsilon_k}$, et une fonction $\bar{p} \in W^{1,s}(\Omega)$ telles que :

$$p_{\epsilon_k} \rightharpoonup \bar{p} \text{ faiblement dans } W^{1,s}(\Omega).$$

Puisque $W^{1,s}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ avec injection compacte $\forall s > N$, alors le théorème de Rellich-Kondrachov nous affirme la convergence uniforme dans $C(\bar{\Omega})$ i.e.,

$$p_{\epsilon_k} \rightarrow \bar{p} \text{ uniformément dans } C(\bar{\Omega}).$$

Grâce à la continuité de la fonction b , on peut déduire que $b(p_{\epsilon_k}(x)) \rightarrow b(\bar{p}(x))$ p.p. x . Ainsi, puisque la fonction b est bornée, alors $b(p_{\epsilon_k})$ est intégrable de Ω sur \mathbb{R} . D'où, par le théorème de la convergence dominée

$$b(p_{\epsilon_k}) \rightarrow b(\bar{p}) := \bar{\rho} \text{ dans } L^s(\Omega).$$

En passant à la limite dans l'équation (4.18) on obtient :

$$\int_{\Omega} \bar{\rho}(\bar{p} - \xi) dx \leq \int_{\Omega} \rho(\bar{p} - \xi) dx, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{K}. \quad (4.19)$$

En testant par $\xi = p$ dans l'équation (4.19) on obtient :

$$\int_{\Omega} (\bar{\rho} - \rho)(\bar{p} - p) dx \leq 0, \quad (4.20)$$

i.e.,

$$\int_{\Omega} (b(\bar{p}) - b(p))(\bar{p} - p) dx \leq 0. \quad (4.21)$$

Grâce à la monotonie de la fonction b on déduit que $(b(\bar{p}) - b(p))(\bar{p} - p) = 0$, d'où $\bar{p} = p$. Puisque $\rho \in D(\mathcal{A})$ donc $\bar{\rho} \in D(\mathcal{A})$, et par suite la deuxième inclusion $D \subseteq \overline{D(\mathcal{A})}$ est prouvée. \square

L'opérateur \mathcal{A} est m - T -accrétif, donc par la théorie des semigroupes nonlinéaires, on peut affirmer le résultat suivant :

Corollaire 4.2.1. *Le problème de Cauchy $(\mathcal{CP}(\rho_0, f))$ admet une bonne solution $\rho \in C([0, T], L^1(\Omega))$.*

4.3 Solution Variationnelle

Dans cette sous-section, nous montrons que si $\rho \in C([0, T], L^1(\Omega))$ est une bonne solution du problème de Cauchy $(\mathcal{CP}(\rho_0, f))$, alors (ρ, p) est une solution variationnelle du problème d'évolution (\mathcal{PE}) , avec $\rho = b(p)$.

4.3.1 Existence d'une solution variationnelle

Définition 4.3.1. On appelle solution variationnelle du problème (\mathcal{PE}) tout couple (ρ, p) tel que $\rho \in C([0, T], L^1(\Omega))$, $\rho(0) = \rho_0$, $p(t) \in \mathcal{K}$ sachant que $\rho = b(p)$, et pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$, on a :

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \sigma(t) \int_0^p T_k(s-\xi) db(s) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla T_k(p-\xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(p-\xi) \sigma(t) dx dt \quad (4.22)$$

Théorème 4.3.1. Soient $f \in L^1(0, T, L^1(\Omega))$ et $\rho_0 \in \overline{D(A)}$, telle que $\rho \in C([0, T], L^1(\Omega))$ est une bonne solution du problème $(\mathcal{CP}(\rho_0, f))$. Alors, il existe $p \in L^\infty([0, T], \mathcal{K})$ avec $\rho = b(p)$ tel que (ρ, p) est une solution variationnelle du (\mathcal{PE}) .

Lemme 4.3.1. Soit ρ^ϵ une solution ϵ -approchée du problème $(\mathcal{CP}(\rho_0, f))$, alors $p^\epsilon = b^{-1}(\rho^\epsilon)$ est bornée dans $L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega))$.

Démonstration. En appliquant la définition de l'opérateur \mathcal{A} , on trouve que

$$p^\epsilon(t) = \begin{cases} p^{i+1} & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ p^0 & \text{si } t \in [0, t_1[, \end{cases}$$

avec $p^i = b^{-1}(\rho^i) \in \mathcal{K}$, pour tout $i = 0, \dots, a$. Puisque $p^i \in \mathcal{K}$, donc on a $|\nabla p^\epsilon(t)| \leq 1$. Ce qui implique que la suite $(p^\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega))$, et par suite il existe $p \in L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega))$ tel que

$$p^\epsilon \rightarrow p \text{ faiblement dans } L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega)).$$

□

Preuve du théorème 4.3.1. Soit ρ une bonne solution du problème $(\mathcal{CP}(\rho_0, f))$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on a $f^{i+1} \in \frac{\rho^{i+1} - \rho^i}{\epsilon} + \mathcal{A}\rho^{i+1}$ i.e., $f^{i+1} - \frac{\rho^{i+1} - \rho^i}{\epsilon} \in \mathcal{A}\rho^{i+1}$.

En appliquant la définition de l'opérateur \mathcal{A} , on obtient pour tout $\xi \in \mathcal{K}$:

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^{i+1} - \rho^i}{\epsilon} (p^{i+1} - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho^{i+1} V \cdot \nabla (p^{i+1} - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^{i+1} (p^{i+1} - \xi) dx,$$

avec $p^i = b^{-1}(\rho^i)$. Définissons la fonction $\tilde{\rho}^\epsilon$ comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^\epsilon(t_i) = \rho^i, \\ \tilde{\rho}^\epsilon \text{ est linéaire sur chaque intervalle } [t_i, t_{i+1}[. \end{cases}$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\tilde{\rho}^\epsilon(t_{i+1}) - \tilde{\rho}^\epsilon(t_i)}{\epsilon} (p^{i+1} - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho^{i+1} V \cdot \nabla (p^{i+1} - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^{i+1} (p^{i+1} - \xi) dx.$$

Ce qui implique que :

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (b^{-1}(\rho^\epsilon) - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho^\epsilon V \cdot \nabla (p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (4.23)$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{K}$, en considérant la fonction test $p^\epsilon - T_k(p^\epsilon - \xi) \in \mathcal{K}$ dans l'inégalité (4.23) on obtient

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(b^{-1}(\rho^\epsilon) - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho^\epsilon V \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

En utilisons le fait que les deux fonctions T_k et b^{-1} sont croissantes sur \mathbb{R} , on peut déduire que le terme $\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (T_k(b^{-1}(\rho^\epsilon) - \xi) - T_k(b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi))$ a le même signe que $\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (\rho^\epsilon - \tilde{\rho}^\epsilon)$ qui est positive. Ce qui nous affirme que

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(b^{-1}(\rho^\epsilon) - \xi) dx \geq \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi) dx.$$

Par suite on a

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho^\epsilon V \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$ on a donc

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \sigma(t) \int_0^{\tilde{\rho}^\epsilon} T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho^\epsilon V \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) \sigma(t) dx dt. \quad (4.24)$$

On sait que $\rho^\epsilon \rightarrow \rho$ dans $C([0, T], L^1(\Omega))$, et $p^\epsilon \rightarrow p$ faiblement dans $L^\infty(0, T, W^{1, \infty}(\Omega))$. On déduit alors, par passage à la limite dans l'inégalité (4.24) que

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \sigma(t) \int_0^\rho T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt.$$

Faisons le changement de variable $r = b^{-1}(s)$, on obtient

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \sigma(t) dx dt \int_0^p T_k(s - \xi) db(s) - \int_0^T \int_{\Omega} \rho V \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt.$$

□

4.3.2 Unicité de la solution variationnelle

Soient (ρ_1, p_1) et (ρ_2, p_2) deux solutions variationnelles du problème (\mathcal{PE}) . Pour tout $\xi_i \in \mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$, avec $i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \sigma \int_0^{p_i} T_k(s - \xi_i) db(s) dt dx - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_i V \cdot \nabla T_k(p_i - \xi_i) \sigma dt dx \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(p_i - \xi_i) \sigma dt dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour doubler les variables, on considère $p_1 = p_1(t_1)$ et $p_2 = p_2(t_2)$, $\sigma \in \mathcal{D}([0, T]^2)$, ξ_1 et $\xi_2 \in \mathcal{K}$. Pour $i = 1$, en testant par $\xi_1 = p_1(t_1, x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) \int_0^{p_1(t_1, x)} T_k(s - p_2(t_2, x)) db(s) dt_1 dx \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_1(t_1, x) V \cdot \nabla T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_1 dx \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f(t_1, x) T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_1 dx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ensuite, pour $i = 2$, en testant par $\xi_2 = p_2(t_2, x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2) \int_0^{p_2(t_2, x)} T_k(s - p_1(t_1, x)) db(s) dt_2 dx \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_2(t_2, x) V \cdot \nabla T_k(p_2(t_2, x) - p_1(t_1, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_2 dx \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} f(t_2, x) T_k(p_2(t_2, x) - p_1(t_1, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_2 dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Intégrons l'inégalité (4.26) par rapport à t_2 , et l'inégalité (4.27) par rapport à t_1 . Additionnons les deux nouvelles inégalités obtenues, et divisons le résultat par $k > 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) \int_0^{p_1(t_1, x)} T_k(s - p_2(t_2, x)) db(s) dt_1 dt_2 dx \\ & - \frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2) \int_0^{p_2(t_2, x)} T_k(s - p_1(t_1, x)) db(s) dt_1 dt_2 dx \\ & + \frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)) V \cdot \nabla T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_1 dt_2 dx \\ & \leq \frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} (f(t_1, x) - f(t_2, x)) T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_1 dt_2 dx \end{aligned} \quad (4.28)$$

Lorsque $k \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^{p_1(t_1, x)} T_k(s - p_2(t_2, x)) db(s) &= \int_0^{u_1(t_1, x)} \text{Sign}(s - p_2(t_2, x)) db(s) \\ &= |\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)| - |\rho_2(t_2, x)|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^{p_2(t_2, x)} T_k(s - p_1(t_1, x)) db(s) &= \int_0^{p_2(t_2, x)} \text{Sign}(s - p_1(t_1, x)) db(s) \\ &= |\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)| - |\rho_1(t_1, x)|. \end{aligned}$$

Par le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow 0} -\frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) \int_0^{p_1(t_1, x)} T_k(s - p_2(t_2, x)) db(s) dt_1 dt_2 dx \\ &= -\int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) (|\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)| - |\rho_2(t_2, x)|) dt_1 dt_2 dx \\ &= -\int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) |\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)| dt_1 dt_2 dx + \underbrace{\int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(t_1, t_2) \partial_{t_1} |\rho_2(t_2, x)| dt_1 dt_2 dx}_{=0} \\ &= -\int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) |\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)| dt_1 dt_2 dx. \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow 0} -\frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2) \int_0^{p_2(t_2, x)} T_k(s - p_1(t_1, x)) db(s) dt_1 dt_2 dx \\ &= -\int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2) |\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)| dt_1 dt_2 dx. \end{aligned}$$

Grâce à la condition de Lipshitz sur la fonction b , il existe une constante $C_b \in \mathbb{R}$ tel que

$$|\rho_1(t_1, x) - \rho_2(t_2, x)| \leq C_b |p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)|,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{(\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x))}{k} V \cdot \nabla T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \right| &\leq C_b \int_{\Omega} \left| \frac{(p_2(t_2, x) - p_1(t_1, x))}{k} V \cdot \nabla T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \right| \\ &\leq C_b \int_{\Omega \cap 0 \leq [p_1 - p_2] \leq k} \left| \frac{(p_2 - p_1)}{k} T_k^{+'}(p_1 - p_2) V \cdot \nabla (p_1 - p_2) \right| \\ &\leq C_b \int_{\Omega \cap 0 \leq [p_1 - p_2] \leq k} \left| V \cdot \nabla (p_1 - p_2) \right|. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Donc pour $k \rightarrow 0$ dans l'inégalité (4.29) il vient

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \frac{(\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x))}{k} V \cdot \nabla T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) dt_1 dt_2 dx \right| = 0,$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} (\rho_2(t_2, x) - \rho_1(t_1, x)) V \cdot \nabla T_k(p_1(t_1, x) - p_2(t_2, x)) \sigma(t_1, t_2) dt_1 dt_2 dx = 0.$$

Finalement, par passage à la limite dans l'inégalité (4.28), on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) + \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2)) |\rho_1(t_1, x) - \rho_2(t_2, x)| dt_1 dt_2 dx \\ & \leq \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} |f(t_1, x) - f(t_2, x)| \sigma(t_1, t_2) dt_1 dt_2 dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour le dédoublement, prenons $\sigma(t_1, t_2) = \frac{\phi(t_1)}{\epsilon} \varrho(\frac{t_2-t_1}{\epsilon})$. Avec $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$, $\varrho \in \mathcal{D}(0, T)$, $\varrho \geq 0$ avec $\int_{\mathbb{R}} \varrho(r) dr = 1$. Pour ces choix de σ on a $\partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) + \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2) = \frac{\dot{\phi}(t_1)}{\epsilon} \varrho(\frac{t_2-t_1}{\epsilon})$. Remplaçons $\sigma(t_1, t_2)$ et $\partial_{t_1} \sigma(t_1, t_2) + \partial_{t_2} \sigma(t_1, t_2)$ par ses valeurs dans l'inégalité (4.30) on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\dot{\phi}(t_1)}{\epsilon} \varrho(\frac{t_2-t_1}{\epsilon}) |\rho_1(t_1, x) - \rho_2(t_2, x)| dt_1 dt_2 dx \\ & \leq \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} |f(t_1, x) - f(t_2, x)| \frac{\phi(t_1)}{\epsilon} \varrho(\frac{t_2-t_1}{\epsilon}) dt_1 dt_2 dx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Faisons le changement de variables $(t_1, t_2) \rightarrow (t_1, \frac{t_2-t_1}{\epsilon})$, on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} |\rho_1(t_1, x) - \rho_2(t_1 + \epsilon\tau, x)| \varrho(\tau) \dot{\phi}(t_1) dt_1 d\tau dx \\ & \leq \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} |f(t_1, x) - f(t_1 + \epsilon\tau, x)| \varrho(\tau) \phi(t_1) dt_1 d\tau dx. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Or d'après [7], pour tout $v \in L^1((0, T) \times \Omega)$ la norme $\|v(t+h, \cdot) - v(\cdot, \cdot)\|_{L^1((0, T) \times \Omega)}$ converge uniformément vers 0 lorsque $|h| \rightarrow 0$. En particulier, pour $v = \varrho$, nous obtenons après passage à la limite dans l'inégalité (4.32) avec $\epsilon \rightarrow 0$

$$- \int_0^T \int_{\Omega} |\rho_1(t_1, x) - \rho_2(t_1, x)| \dot{\phi}(t_1) dx dt_1 \leq 0 \quad (4.33)$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} \|\rho_1(t, x) - \rho_2(t, x)\|_{L^1(\Omega)} \leq 0. \quad (4.34)$$

Pour tout $t \in]0, T]$, intégrons (4.34) sur $[0, t]$, on obtient

$$\|\rho_1(t, x) - \rho_2(t, x)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\rho_1(0, x) - \rho_2(0, x)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Puisque ρ_1 et ρ_2 sont deux solutions du problème (\mathcal{PE}) , alors on a $\rho_1(0, x) = \rho_2(0, x) = \rho_0$. Par suite $\|\rho_1(t, x) - \rho_2(t, x)\|_{L^1(\Omega)} \leq 0$, ce qui implique que $\rho_1(t, x) = \rho_2(t, x)$. D'où l'unicité de la solution variationnelle.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'existence et l'unicité de solution pour la version régularisé (\mathcal{PE}) du problème (4.1), où le graphe Sign^+ est remplacé par une fonction Lipschitzienne b . L'existence d'une solution variationnelle est prouvé en utilisant la méthode des semigroupes. Dans la section 4.2, nous avons montré l'existence d'une bonne solution du problème de Cauchy $(\mathcal{CP}(\rho_0, f))$ associé à (\mathcal{PE}) . Puis, nous avons montré dans la section 4.3 par passage à la limite, que la solution ϵ -approchée du problème de Cauchy discrétisé converge vers une solution variationnelle du problème (\mathcal{PE}) . Dans la suite, en utilisant les techniques de doublement et dédoublement de variables, nous avons montré l'unicité de la solution variationnelle.

Chapitre 5

Une version modifiée du modèle de Hughes

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle version modifiée du modèle macroscopique proposé dans le chapitre 3. Nous nous basons sur le modèle proposé par Hughes dans [22, 23]. La section 5.1 de ce chapitre sera consacrée à la présentation du modèle introduit par Hughes et les travaux effectués en relation avec ce modèle. Puis, nous présentons dans la section 5.2 notre nouvelle version modifiée. La section 5.3 se focalise sur l'étude théorique du modèle proposé précédemment où un résultat d'existence d'une solution variationnelle sera démontré. Dans la section 5.4, nous présentons l'algorithme de type splitting utilisé pour approcher la solution du modèle proposé. Ensuite, dans la section 5.5, nous expliquons comment nous discrétisons le domaine de calcul et nous détaillons les schémas utilisés. Enfin, nous finirons ce chapitre par la section 5.6, où nous montrons quelques tests que nous réalisons pour comparer le nouveau modèle proposé avec le modèle du chapitre 3 d'une part, et pour le comparer avec le modèle de Hughes [22, 23] d'autre part.

5.1 Modèle de Hughes

En 2002, Roger L. Hughes a proposé un modèle de la mécanique des fluides pour modéliser le mouvement de foule [22, 23]. C'est un modèle macroscopique où la foule est représentée par sa densité. Pour expliquer ce modèle d'une manière plus détaillée, nous considérons Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, où Γ_D représente la sortie et Γ_N représente les murs que les piétons ne peuvent pas les traverser. L'évolution de la densité ρ dans le domaine Ω est gouvernée par une loi de conservation de masse :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho U(\rho)) = 0, \quad (5.1)$$

où $U(\rho)$ est la vitesse de transport de la foule. Pour gérer les problèmes de congestion, R.Hughes a proposé de définir un champ de vitesse $U(\rho) = f(\rho)^2 \nabla \mathbf{D}$, où \mathbf{D} est un potentiel qui correspond

à la distance la plus courte de la sortie et qui permet d'éviter les zones les plus denses. Il est calculé en résolvant l'équation Eikonale suivante :

$$\begin{cases} \|\nabla \mathbf{D}\| = \frac{1}{f(\rho)} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.2)$$

où f est une fonction continue et décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(\rho_{max}) = 0$. Ce choix de la fonction f signifie que la vitesse $U(\rho) \rightarrow 0$ lorsque $\rho \rightarrow \rho_{max}$. La forme la plus simple et la plus utilisée de f est $f(\rho) = \rho_{max} - \rho$, avec $\rho_{max} = 1$. Ce couplage entre l'équation de continuité (5.1) et l'équation Eikonale (5.2) permet de représenter le modèle de Hughes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\rho f(\rho)^2 \nabla \mathbf{D}) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \|\nabla \mathbf{D}\| = \frac{1}{f(\rho)} & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_D, \\ \rho_0 = \rho(0, \cdot) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

Ce modèle a pris l'attention de nombreux chercheurs vu sa description réelle pour le comportement des foules. Par exemple, dans le cas d'évacuation d'une salle, chaque piéton se dirige vers la sortie en choisissant le chemin le plus rapide en essayant d'éviter les endroits à forte densité. Cependant, l'étude de ce modèle est complexe puisqu'il s'agit d'une couplage d'une équation de transport non-linéaire avec une équation Eikonale. La principale difficulté provient de la non-régularité du potentiel \mathbf{D} . En effet, lorsque la densité ρ s'approche de la densité maximale ($\rho_{max} = 1$), le terme $\frac{1}{f(\rho)} \rightarrow +\infty$. À cause de cette difficulté, les travaux consacrés à l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution pour ce modèle sont rares et se limitent à la dimension 1 [1, 14, 2]. Un premier résultat analytique lié à ce modèle a été réalisé par Di Francesco et al. dans [11]. Les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution du modèle en considérant une version régularisée de l'équation (5.2). Ils ont proposé donc dans [11] une version modifiée du modèle de Hughes (5.3) définie par :

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\rho f(\rho)^2 \nabla \mathbf{D}) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ -\epsilon \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{D}\|^2 = \frac{1}{(f(\rho) + \epsilon)^2} & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma_D, \\ \rho_0 = \rho(0, \cdot) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

Les résultats théoriques du modèle (5.4) sont limités encore à la dimension 1. Dans [8], les auteurs ont réalisé des simulations numériques en dimension 2, dans le but d'étudier l'effet du terme de la diffusion dans la modèle (5.4) sur le temps d'évacuation de la foule. Ils ont remarqué que la constante de diffusion ϵ et le temps d'évacuation sont inversement proportionnelles.

Une autre version modifiée du modèle de Hughes a été proposée dans [9]. L'idée de cette modification provient du fait que dans certains domaines la densité globale dans tout le domaine pourrait ne pas être visible ou connu pour un piéton en position x . Pour cela, les auteurs ont proposé l'approche suivante : pour chaque $x \in \Omega$, le domaine Ω sera divisé en deux parties :

1. La partie V_x représente les régions visibles du domaine Ω pour un piéton en position x . Cette partie du domaine est considérée dans [9] comme un cône de vision local de diamètre $L > 0$. Par exemple, en dimension 1, $V_x = [x - \frac{L}{2}, x + \frac{L}{2}] \cap \Omega$. Dans le cas où $L = +\infty$, nous avons $V_x = \Omega$. Cela signifie qu'un piéton en position x est capable de visualiser toutes les régions du domaine et déterminer la densité globale.
2. La partie $H_x := \Omega \setminus V_x$ représente les régions invisible du domaine Ω pour un piéton en position x .

En conséquence, le potentiel \mathbf{D} est calculé à partir de l'équation Eikonal suivante :

$$\|\nabla_y \mathbf{D}\| = \begin{cases} \frac{1}{f(\rho(y,t))} & \text{si } y \in V_x, \\ \frac{1}{f(\rho_H)} & \text{si } y \in H_x, \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\rho_H \in \mathbb{R}_0^+$ une densité fixé pour tous les piétons.

5.2 Version modifiée du modèle de Hughes

Dans le chapitre 3, nous avons proposé un nouveau modèle macroscopique pour modéliser le mouvement de foule. La congestion est gérée par un terme de seconde ordre non-linéaire de diffusion. Ce terme est uniquement active sur les régions où la densité coïncide avec 1. Rappelons que le modèle proposé s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \operatorname{div}(\Phi) + \operatorname{div}(\rho V) = f \\ \Phi = m \nabla p, \quad m \geq 0, \quad |\nabla p| \leq 1, \quad m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \operatorname{Sign}^+(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T] \times \Omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho V + \Phi) \cdot \nu = 0 \\ p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T] \times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T] \times \Gamma_D, \end{array}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec ν est le vecteur normal unitaire extérieure à Ω . L'évolution de la densité est définie sur $[0, T]$. La vitesse V est un champ constant au cours du temps.

Dans le chapitre 3, nous avons réalisé des simulations numériques pour visualiser le comportement de la foule décrit par le modèle (5.2). Nous avons remarqué qu'en se déplaçant vers

la sortie du domaine, les piétons privilégient le chemin le plus court vers la sortie mais sans éviter les endroits à densité maximale. En fait, nous avons trouvé que dans certains endroits du domaine la densité est maximale ($\rho = 1$). Par contre, dans d'autres endroits la densité est nulle.

Dans le but d'améliorer le modèle (5.2), nous proposons d'introduire un nouveau champ de vitesse à la fois orienté vers les sorties les plus proches et qui évite les régions à densité maximale. Pour ce faire, en s'inspirant du modèle de Hughes, nous définissons un champ vitesse qui dépend de la densité ρ mais d'une manière implicite. C'est-à-dire, au lieu de définir un champ de vitesse V qui dépend directement de la densité ρ , nous définissons V qui dépend de p , où $p \in (\text{Sign}^+)^{-1}(\rho)$. Nous proposons donc le champ vitesse $V = -\nabla \mathbf{D}$, où \mathbf{D} est la solution de l'Eikonal suivante :

$$(E_p) \begin{cases} \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.6)$$

où $\mathbf{H} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue et croissante. De plus, nous choisissons \mathbf{H} de la façon suivante :

- Pour une densité $\rho < 1$, la fonction $\mathbf{H}(p) \simeq 1$,
- Pour une densité $\rho = 1$, la fonction $\mathbf{H}(p) \gg 1$.

Ce choix de la fonction \mathbf{H} signifie que : le champ vitesse V calculé à l'aide de (E_p) privilégie les endroits à densité $\rho < 1$. Pour les simulations numériques dans la section 5.6, nous travaillons avec $\mathbf{H}(p) = \exp(\lambda p)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Finalement, le nouveau modèle proposé s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \text{div}(\Phi) - \text{div}(\rho \nabla \mathbf{D}) = f \\ \Phi = m \nabla p, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \text{Sign}^+(p), \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega, \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = 0 \\ p = 0, \mathbf{D} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D, \end{array}$$

5.3 Existence d'une solution variationnelle

Après la présentation du nouveau modèle (5.7), il est important de voir si ce dernier est bien posé. Pour cela, nous nous intéressons à la démonstration de l'existence d'une solution du problème. Or, des difficultés liées à la compacité de la fonction ρ nous ont empêché de prouver l'existence d'une solution du problème dans le cas où $\rho \in \text{Sign}^+(p)$. Pour cette difficulté, comme on a fait au chapitre 4, nous travaillons avec une approximation lipschitzienne du graphe Sign^+ . Cette section est donc consacrée à la démonstration d'existence d'une solution du modèle

régularisé de (5.7), où le graphe Sign^+ a été approximé par une fonction b lipschitzienne, i.e., nous démontrons l'existence d'une solution variationnelle du problème suivant :

$$(P_H) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \text{div}(\Phi) - \text{div}(\rho \nabla \mathbf{D}) = f \\ \Phi = m \nabla p, m \geq 0, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho = b(p), \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = 0 \\ p = 0, \mathbf{D} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D. \end{array}$$

avec les hypothèses suivantes :

- Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.
- $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne, croissante avec $b(0) = 0$.
- $\mathbf{H} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue et croissante.

On note par $\text{Lip}_D(\Omega) = \{z \in \text{Lip}(\Omega) \text{ tel que } z = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ et par $\text{Lip}_D^*(\Omega)$ son espace dual. Nous supposons dans la suite que la fonction $f \in L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$.

Avant de préciser en quel sens nous définissons la solution du problème (P_H) , nous présentons le théorème suivant :

Théorème 5.3.1. [16] *Soit $k \in C(\bar{\Omega})$ tel que $k \geq 0$, alors l'équation Eikonal définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\nabla \mathbf{D}\| = k & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{array} \right.$$

admet une unique solution $\mathbf{D} \in W_D^{1,\infty}(\Omega)$. De plus, \mathbf{D} est donné par le problème d'optimisation suivant

$$\max_{z \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} z \, dx : |\nabla z| \leq k \text{ et } z = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}. \quad (5.8)$$

Dans cette section, nous démontrons l'existence d'une solution variationnelle du problème d'évolution (P_H) . L'idée de la preuve est de discrétiser le problème d'évolution (P_H) par un schéma Euler-implicite en temps. Pour $\epsilon > 0$, on considère la discrétisation suivante de l'intervalle $[0, T]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = T, \\ t_{i+1} - t_i = \epsilon, \text{ pour tout } i \in 0, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Discretisons la première équation de problème (P_H) par un schéma Euler implicite en temps, on obtient :

$$(DP_H) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^{i+1} - \rho^i}{\epsilon} - \operatorname{div}(\Phi^{i+1}) - \operatorname{div}(\rho^{i+1} \nabla \mathbf{D}^{i+1}) = f^{i+1} \\ \Phi^{i+1} = m \nabla p^{i+1}, m \geq 0, |\nabla p^{i+1}| \leq 1, m(1 - |\nabla p^{i+1}|) = 0 \\ \rho^{i+1} = b(p^{i+1}), \|\nabla \mathbf{D}^{i+1}\| = \mathbf{H}(p^i) \\ \Phi^{i+1} \cdot \nu = 0 \\ p^i = 0, \mathbf{D}^{i+1} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma_N, \\ \text{sur } \Gamma_D, \end{array}$$

où $f^1, f^2, \dots, f^n \in \operatorname{Lip}_D^*(\Omega)$ tels que $\sum_0^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(t) - f^i\|_{\operatorname{Lip}_D^*} dt \leq \epsilon$.

Grâce au théorème 4.1.1 on peut déduire que le problème discrétisé (DP_H) admet une solution qu'on note $(\rho^{i+1}, p^{i+1}, \mathbf{D}^{i+1}) \in L^\infty(\Omega) \times \mathcal{K} \times W^{1,\infty}(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\rho^{i+1} - \rho^i}{\epsilon} \right) T_k(p^{i+1} - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^{i+1} \nabla \mathbf{D}^{i+1} \cdot \nabla T_k(p^{i+1} - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^{i+1} T_k(p^{i+1} - \xi) dx, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{K}. \quad (5.9)$$

Considérons les suites $\rho_\epsilon, p_\epsilon$ et \mathbf{D}^ϵ définies par :

$$\rho^\epsilon = \begin{cases} \rho^{i+1} & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ \rho^0 & \text{si } t \in [0, t_1], \end{cases}$$

$$p^\epsilon = \begin{cases} p^{i+1} & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ p^0 & \text{si } t \in [0, t_1], \end{cases}$$

et

$$\mathbf{D}^\epsilon = \begin{cases} \mathbf{D}^{i+1} & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ \mathbf{D}^0 & \text{si } t \in [0, t_1]. \end{cases}$$

De plus, en définissant la fonction

$$\tilde{\rho}^\epsilon(t) = \frac{(t - t_i)\rho^{i+1} - (t - t_{i+1})\rho^i}{\epsilon},$$

d'après l'inégalité (5.9), on obtient pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{K}. \quad (5.10)$$

Pour k très grand, l'inégalité (5.10) est équivalente à

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (b^{-1}(\rho^\epsilon) - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.11)$$

Or, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$ on a $(\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon)(\rho^\epsilon - \tilde{\rho}^\epsilon) = \frac{(\rho^{i+1} - \rho^i)^2}{\epsilon^2} (t_{i+1} - t) \geq 0$. Grâce à la monotonie de la fonction b , on conclut que $\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (b^{-1}(\rho^\epsilon) - b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon)) dx \geq 0$. Par conséquent, on obtient

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.12)$$

En prenant $\xi = p - T_k(p - \xi)$, on trouve que

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.13)$$

Dans la suite, nous montrons que les suites ρ_ϵ , p_ϵ et \mathbf{D}^ϵ convergent respectivement vers ρ , p et \mathbf{D} tels que (ρ, p, \mathbf{D}) est une solution du problème (P_H) au sens du théorème suivant :

Théorème 5.3.2. *Pour tout $f \in L^1(0, T, Lip_D^*(\Omega))$, le problème (P_H) admet une solution variationnelle (ρ, p, \mathbf{D}) au sens suivant : $\rho \in L^1(0, T, L^1(\Omega))$, $p \in L^\infty(0, T, H_D^1(\Omega))$ avec $\rho = b(p)$, et $\mathbf{D} \in L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega))$ où \mathbf{D} est la solution maximale de l'équation Eikonal suivante*

$$(E) \begin{cases} \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

tels que pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$ on a :

$$- \int_0^T \partial_t \sigma(t) \int_{\Omega} \int_0^\rho T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho \nabla \mathbf{D} \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt. \quad (5.14)$$

La preuve du théorème 5.3.2 est divisée en différents lemmes.

Lemme 5.3.1. *Les deux suites $(p^\epsilon)_\epsilon$ et $(\tilde{\rho}^\epsilon)_\epsilon$ sont bornées dans $L^\infty(0, T, Lip_D(\Omega))$ et la suite $(\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $L^1(0, T, Lip_D^*(\Omega))$.*

Démonstration.

1. Pour tout $t \in [0, T]$, on sait que $p^\epsilon(t) \in \mathcal{K}$. Donc, p^ϵ est bornée dans $L^\infty(0, T, Lip_D(\Omega))$.
2. On sait que $\rho^\epsilon = b(p^\epsilon)$, de plus, la fonction b est continue et lipschitzienne, alors on peut déduire d'après la première partie de la preuve que ρ^ϵ est bornée dans $L^\infty(0, T, Lip_D(\Omega))$. D'après la définition de la suite $\tilde{\rho}^\epsilon$, on peut aussi déduire qu'elle même est bornée dans $L^\infty(0, T, Lip_D(\Omega))$.

3. Rappelons que pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ on a :

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.15)$$

Or, pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ on a aussi $-\xi \in \mathcal{K}$. En testant donc par la fonction $-\xi$ dans l'inégalité (5.15) on obtient :

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon (b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) + \xi) dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon + \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon + \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.16)$$

i.e.,

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon \xi dx + \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon + \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon + \xi) dx - \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.17)$$

On a $\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) = \frac{d}{dt} \int_0^{\tilde{\rho}^\epsilon} b^{-1}(s) ds$, ce qui implique que

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon \xi dx \leq - \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon + \xi) dx + \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon + \xi) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{\tilde{\rho}^\epsilon} b^{-1}(s) ds dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.18)$$

En intégrant l'inégalité (5.18) sur l'intervalle $[0, T]$ on trouve que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon \xi dt dx &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla (p^\epsilon + \xi) dt dx + \int_0^T \int_{\Omega} f^\epsilon (p^\epsilon + \xi) dt dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_0^{\rho_0} b^{-1}(s) ds dx - \int_{\Omega} \int_0^{\tilde{\rho}^\epsilon} b^{-1}(s) ds dx. \end{aligned}$$

Or, ρ^ϵ et p^ϵ sont bornées dans $L^\infty(Q)$. De plus, grâce à la continuité de la fonction \mathbf{H} on a $|\nabla \mathbf{D}^\epsilon|$ est bornée et alors $\nabla \mathbf{D}^\epsilon$ est bornée dans $L^\infty(Q)$. On en déduit que

$$\max_{\xi \in \text{Lip}_D(\Omega), |\nabla \xi| \leq 1} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon \xi dt dx < \infty,$$

ce qui implique que $\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon$ est bornée dans $L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$. □

Lemme 5.3.2. (Lemme d'Aubin-Lions-Simon) [27]

Soient X_0, X_1 , et X_2 trois espaces de Banach, tels que $X_0 \subset X_1$ avec injection compacte, et $X_1 \subset X_2$ avec injection continue. Pour tout $T > 0$ et $1 \leq s, r \leq +\infty$ on définit l'espace

$$W_{s,r} := \{u \in L^s(0, T, X_0) : \partial_t u \in L^r(0, T, X_2)\}.$$

Alors,

- si $s = +\infty$ et $r > 1$, on a $W_{s,r} \subset C^0(0, T, X_1)$ avec injection compacte.
- si $s < +\infty$, on a $W_{s,r} \subset L^s(0, T, X_1)$ avec injection compacte.

Lemme 5.3.3. Ils existent deux sous-suites de $(\tilde{\rho}^\epsilon)$ et (ρ^ϵ) , notées respectivement $(\tilde{\rho}^{\epsilon_k})$ et (ρ^{ϵ_k}) , telles que

$$\tilde{\rho}^{\epsilon_k} \rightarrow \rho \text{ dans } L^1(0, T, C(\Omega)),$$

et

$$\rho^{\epsilon_k} \rightarrow \rho \text{ dans } L^1(0, T, C(\Omega)).$$

Démonstration.

D'après le lemme 5.3.1, on sait que la suite $\tilde{\rho}^\epsilon$ est bornée dans $L^\infty(0, T, \text{Lip}_D(\Omega))$, et la suite $\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon$ est bornée dans $L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$. De plus, on a

$$\text{Lip}_D(\Omega) \subset C(\Omega) \subset \text{Lip}_D^*(\Omega),$$

avec injection compacte de $\text{Lip}_D(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, et injection continue de $C(\Omega)$ dans $\text{Lip}_D^*(\Omega)$. Donc, en appliquant le lemme d'Aubin-Lions-Simon on déduit qu'il existe une sous-suite de $\tilde{\rho}^\epsilon$ notée $\tilde{\rho}^{\epsilon_k}$ telle que

$$\tilde{\rho}^{\epsilon_k} \rightarrow \rho \text{ dans } L^s(0, T, C(\Omega)), \text{ pour tout } 1 \leq s < +\infty. \quad (5.19)$$

Or, d'après la définition de la fonction $\tilde{\rho}^\epsilon$ on a

$$\tilde{\rho}^\epsilon(t) - \rho^\epsilon(t) = (t - t_i) \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon(t), \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.20)$$

Ce qui donne en intégrant sur Ω et $[0, T]$

$$\|\tilde{\rho}^\epsilon - \rho^\epsilon\|_{L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))} \leq \epsilon \|\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon\|_{L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))}. \quad (5.21)$$

Puisque $\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon$ est bornée dans $L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$, donc en passant à la limite dans l'inégalité (5.21) lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ on conclut que $\tilde{\rho}^\epsilon$ converge vers ρ^ϵ dans $L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$. Maintenant, en combinant l'inégalité suivante :

$$\|\rho^{\epsilon_k} - \rho\|_{L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))} \leq \|\rho^{\epsilon_k} - \tilde{\rho}^{\epsilon_k}\|_{L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))} + \|\tilde{\rho}^{\epsilon_k} - \rho\|_{L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))}, \quad (5.22)$$

avec l'injection continue $C(\Omega) \subset \text{Lip}_D^*(\Omega)$, on déduit la convergence de $\tilde{\rho}^{\epsilon_k}$ vers ρ dans $L^s(0, T, C(\Omega))$ et dans $L^s(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$. Donc, par passage à la limite dans l'inégalité (5.22) on déduit que

$$\rho^{\epsilon_k} \rightarrow \rho \text{ dans } L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega)), \quad (5.23)$$

et

$$\rho^{\epsilon_k} \rightarrow \rho \text{ dans } L^1(0, T, C(\Omega)).$$

□

Lemme 5.3.4. *Il existe une sous-suite (p^{ϵ_k}) de (p^ϵ) et une fonction $p \in L^1(0, T, C(\Omega))$, avec $\rho = b(p)$, telles que*

$$p^{\epsilon_k} \rightarrow p \text{ dans } L^1(0, T, C(\Omega)).$$

De plus, pour tout $t > 0$ on a $p(t) \in \mathcal{K}$.

Démonstration. D'après le lemme 5.3.3, on a

$$\rho^{\epsilon_k} \rightarrow \rho \text{ dans } L^1(0, T, C(\Omega)) \quad (5.24)$$

Pour $p = b^{-1}(\rho)$, puisque la fonction b^{-1} est lipschitzienne, alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|p^{\epsilon_k} - p| = |b^{-1}(\rho^{\epsilon_k}) - b^{-1}(\rho)| \leq M |\rho^{\epsilon_k} - \rho|. \quad (5.25)$$

Par passage à la limite dans l'équation (5.25), et en utilisant l'équation (5.24) on peut déduire que

$$p^{\epsilon_k} \rightarrow p \text{ dans } L^1(0, T, C(\Omega)).$$

De plus, $p(t, \cdot) \in \mathcal{K}$. En effet, tout $\epsilon_k > 0$ et $t \in [0, T]$ la fonction $p^{\epsilon_k}(t, \cdot)$ est lipschitz telle que $|\nabla p^{\epsilon_k}(t, \cdot)| \leq 1$, donc

$$|p^{\epsilon_k}(t, x) - p^{\epsilon_k}(t, y)| \leq |x - y| \text{ pour tout } x, y \in \Omega. \quad (5.26)$$

Par passage à la limite dans l'inégalité (5.26) lorsque $\epsilon_k \rightarrow 0$ on obtient

$$|p(t, x) - p(t, y)| \leq |x - y| \text{ pour tout } x, y \in \Omega,$$

donc $p(t, \cdot)$ est lipschitzienne.

Par semi-continuité de la norme on obtient que $|\nabla p(t, \cdot)| \leq 1$, et par suite $p(t, \cdot) \in \mathcal{K}$. \square

Lemme 5.3.5. *Soit ξ une fonction dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ telle que $|\nabla \xi| \leq c(x)$, et c_n une suite de fonctions dans $C(\bar{\Omega})$ telle que $c_n > 0$ et $c_n \rightarrow c$ dans $C(\bar{\Omega})$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ il existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\alpha$ on a : $|\nabla \xi| \leq \frac{c_n}{1-\alpha}$.*

Démonstration. On a c_n est strictement positive, donc, en divisant l'inégalité $|\nabla \xi| \leq c(x)$ par c_n on obtient $|\nabla \xi| \leq \frac{c}{c_n}$.

On sait que $c_n \rightarrow c$ dans $C(\bar{\Omega})$, en appliquant la définition de la convergence d'une suite on obtient

$$\text{pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que pour tout } n \geq n_0 \text{ on a : } \frac{c}{c_n} < 1 + \epsilon.$$

Ce qui implique que $|\nabla \xi| \leq (1 + \epsilon)c_n$, pour tout $n \geq n_0$.

Pour $\alpha > 0$, prenons $\epsilon > 0$ tel que $1 + \epsilon \leq \frac{1}{1-\alpha}$, on trouve que $|\nabla \xi| \leq \frac{c_n}{1-\alpha}$. \square

Lemme 5.3.6. *Il existe une sous-suite de \mathbf{D}^ϵ notée $(\mathbf{D}^{\epsilon_k})$ et $\mathbf{D} \in L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega))$ telles que*

$$\mathbf{D}^{\epsilon_k} \rightarrow \mathbf{D} \text{ dans } L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega)).$$

De plus, pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{D}(t)$ est la solution maximale de l'équation Eikonal

$$(E) \begin{cases} \|\nabla \mathbf{D}(t)\| = \mathbf{H}(p(t)) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{D}(t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

Démonstration. On sait que p^ϵ est bornée dans $L^\infty(Q)$ et que la fonction $\mathbf{D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\mathbf{H}(p^\epsilon)$ est bornée dans $L^\infty(Q)$, cela implique que \mathbf{D}^ϵ est bornée dans $L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega))$ et il existe une sous-suite de \mathbf{D}^ϵ notée \mathbf{D}^{ϵ_k} telle que

$$\mathbf{D}^\epsilon \rightharpoonup \mathbf{D} \text{ faiblement dans } L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega)).$$

Pour montrer que $\mathbf{D}(t, \cdot)$ est la solution maximale de l'équation Eikonal (E) on pose $\mathbf{k}^\epsilon = \mathbf{H}(p^\epsilon)$ et $\mathbf{k} = \mathbf{H}(p)$. Pour tout $\xi \in W_D^{1,\infty}(\Omega)$ tel que $\|\nabla \xi\| \leq \mathbf{k}$, on considère la suite définie par

$\xi_\delta = (1 - \delta)\xi$ avec $\delta \in]0, 1[$. Puisque $p^\epsilon \rightarrow p$ dans $L^1(0, T, C(\Omega))$ et \mathbf{H} est une fonction continue, alors $k_\epsilon \rightarrow k$ dans $L^1(0, T, C(\Omega))$. D'après le lemme 5.3.5, il existe $\epsilon_0 \geq 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ on a $\|\nabla \xi\| \leq \frac{k^\epsilon}{1-\delta}$ et $\|\nabla \xi_\delta\| \leq k^\epsilon$. On sait que $\mathbf{D}^\epsilon(t, \cdot)$ est la solution maximale de l'équation Eikonal

$$(E_\epsilon) \begin{cases} \|\nabla \mathbf{D}^\epsilon(t, \cdot)\| = k^\epsilon(t, \cdot) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D}^\epsilon(t, \cdot) = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

et $\|\nabla \xi_\delta\| \leq k^\epsilon$, donc

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}^\epsilon(t, x) dx \geq \int_{\Omega} \xi_\delta(x) dx. \quad (5.27)$$

Ce qui implique que

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}^\epsilon(t, x) dx \geq (1 - \delta) \int_{\Omega} \xi(x) dx, \text{ pour tout } 0 < \epsilon < \epsilon_0. \quad (5.28)$$

En multipliant l'inégalité (5.28) par $\sigma \geq 0$ dans $D(0, T)$, puis en intégrant sur $[0, T]$ on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}^\epsilon(t, x) \sigma(t) dx dt \geq (1 - \delta) \int_{\Omega} \xi(x) \int_0^T \sigma(t) dx dt. \quad (5.29)$$

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente pour $\epsilon \rightarrow 0$, on trouve

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(t, x) \sigma(t) dx dt \geq (1 - \delta) \int_{\Omega} \xi(x) \int_0^T \sigma(t) dx dt. \quad (5.30)$$

En passant maintenant à la limite dans l'inégalité (5.30), lorsque $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{D}(t, x) \sigma(t) dx dt \geq \int_{\Omega} \xi(x) \int_0^T \sigma(t) dx dt. \quad (5.31)$$

Alors, pour presque partout $t \in [0, T]$ on a

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(t, x) dx \geq \int_{\Omega} \xi(x) dx. \quad (5.32)$$

Donc on peut déduire que $\mathbf{D}(t, \cdot)$ est la solution maximale de (E), et par suite $\|\nabla \mathbf{D}(t)\| = \mathbf{H}(p(t))$ p.p. dans Ω . Puisque $\mathbf{H}(p^\epsilon) \rightarrow \mathbf{H}(p)$ dans $L^s(0, T, C(\Omega))$, alors $\|\nabla \mathbf{D}^\epsilon(t, \cdot)\| \rightarrow \|\nabla \mathbf{D}(t, \cdot)\|$ dans $C(\Omega)$. D'où, $\mathbf{D}^\epsilon \rightarrow \mathbf{D}$ dans $L^s(0, T, W^{1,s}(\Omega))$. \square

Preuve du théorème 5.3.2. Rappelons que pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ on a :

$$\int_{\Omega} \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon T_k(b^{-1}(\tilde{\rho}^\epsilon) - \xi) dx - \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) dx \leq \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) dx, \text{ pour tout } t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.33)$$

En multipliant l'inégalité (5.33) par $\sigma(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, puis en intégrant sur $[0, T]$ on obtient

$$- \int_0^T \partial_t \sigma(t) \int_{\Omega} \int_0^{\tilde{\rho}^\epsilon} T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_{\Omega} f^\epsilon T_k(p^\epsilon - \xi) \sigma(t) dx dt. \quad (5.34)$$

D'après le lemme 5.3.3 il existe une sous-suite notée (ρ^ϵ) et une fonction $\rho \in L^1(0, T, C(\overline{\Omega}))$ telle que $\tilde{\rho}^\epsilon \rightarrow \rho \in L^s(0, T, C(\overline{\Omega}))$, donc on déduit que le premier terme de l'inégalité (5.34) converge vers $\int_0^T \partial_t \sigma \int_\Omega \int_0^\rho T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Traisons le deuxième terme de l'inégalité (5.34). Grâce aux lemmes 5.3.3, 5.3.4 et 5.3.6 ils existent trois sous-suites notées (ρ^ϵ) , (p^ϵ) et (\mathbf{D}^ϵ) telles que $\rho^\epsilon \rightarrow \rho$ dans $L^s(0, T, C(\overline{\Omega}))$, $p^\epsilon \rightarrow p$ dans $L^s(0, T, C(\overline{\Omega}))$ et $\nabla \mathbf{D}^\epsilon \rightarrow \nabla \mathbf{D}$ dans $L^s(Q)^N$ avec $\rho = b(p)$. Puisque la fonction T_k est continue alors $T_k(p^\epsilon - \xi) \rightarrow T_k(p - \xi)$ dans $L^s(0, T, C(\overline{\Omega}))$ et $\nabla T_k(p^\epsilon - \xi) \rightharpoonup \nabla T_k(p - \xi)$ faiblement dans $L^s(Q)^N$. Grâce à ces limites on déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \rho^\epsilon \nabla \mathbf{D}^\epsilon \cdot \nabla T_k(p^\epsilon - \xi) \sigma(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla \mathbf{D} \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt.$$

Pour le troisième terme de l'inégalité (5.34). Grâce aux deux limites $T_k(p^\epsilon - \xi) \rightarrow T_k(p - \xi)$ dans $L^s(0, T, C(\overline{\Omega}))$ et $f^\epsilon \rightarrow f$ dans $L^1(0, T, \text{Lip}_D^*(\Omega))$ on déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f^\epsilon T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt = \int_\Omega f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt.$$

Finalement par passage à la limite dans l'inégalité (5.34) pour $\epsilon \rightarrow 0$ on obtient pour tout $\xi \in \mathcal{K}$ et $\sigma \in \mathcal{D}(0, T)$

$$-\int_0^T \partial_t \sigma(t) \int_\Omega \int_0^\rho T_k(b^{-1}(s) - \xi) ds dx dt - \int_0^T \int_\Omega \rho \nabla \mathbf{D} \cdot \nabla T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega f T_k(p - \xi) \sigma(t) dx dt, \quad (5.35)$$

où $\mathbf{D}(t, \cdot)$ est la solution de l'Eikonal (E). D'où l'existence d'une solution au sens du théorème 5.3.2. □

5.4 Aspect numérique

5.4.1 Méthode de splitting

Dans cette sous-section, on cherche à approcher numériquement la solution de notre nouveau modèle proposé défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho - \text{div}(\Phi) + \text{div}(\rho \nabla \mathbf{D}) = 0 \\ \Phi = m \nabla p, m \geq 0, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \rho \in \text{Sign}^+(p), \|\nabla \mathbf{D}\| = \mathbf{H}(p) \end{array} \right\} \quad \text{dans } Q := [0, T[\times \Omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \cdot \nu = 0 \\ \mathbf{D} = 0, p = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{sur } [0, T[\times \Gamma_N, \\ \text{sur } [0, T[\times \Gamma_D, \end{array}$$

En utilisant le schéma de splitting proposé dans le chapitre 3, nous considérons la discrétisation suivante :

Pour $\tau > 0$ un pas de temps, nous discrétisons $[0, T]$ en sous intervalles de la forme $[t_k, t_{k+1}]$ où $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, n-1$. Pour une densité initiale ρ_0 , à chaque instant du temps t_{k+1} la densité ρ_{k+1} est calculée en deux étapes : étape de transport (prédiction) et étape de correction. Pour ce faire, comme au chapitre 3 chaque intervalle du temps $[t_k, t_{k+1}]$ sera divisée en deux sous-intervalles $[t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[$ et $[t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[$ où chaque intervalle correspond à une étape de l'algorithme.

- **Étape de Prédiction :** À l'instant $t_{k+\frac{1}{2}}$, nous calculons la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ en transportant la densité ρ_k par le champ de vitesse V . Comme dans le chapitre 3, la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}} = \tilde{\rho}(t_{k+\frac{1}{2}})$ est la solution de l'équation de continuité

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} V) = 0 & \text{dans } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}[\times\Omega, \\ \tilde{\rho}(t_k) = \rho_k. \end{cases} \quad (5.36)$$

La vitesse $V = -\nabla D$, où D est la solution maximale de l'Eikonal suivante :

$$\begin{cases} |\nabla D(t_k)| = H(p(t_k)) & \text{dans } \Omega \\ D(t_k) = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

avec $\bar{\rho}_k \in \operatorname{Sign}^+(p(t_k))$.

- **Étape de Correction :** Afin d'obtenir une densité admissible à l'instant t_{k+1} , nous corrigeons la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}}$ obtenue par le transport (ou prédiction) en introduisant le terme de seconde ordre - $\operatorname{div}(\Phi)$. En fait, la densité solution $\rho_{k+1} = \bar{\rho}(t_{k+1})$ est la solution de l'EDP

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \bar{\rho} - \operatorname{div}(\Phi) = 0, \\ \Phi = m \nabla p, m \geq 0, |\nabla p| \leq 1, m(1 - |\nabla p|) = 0 \\ \bar{\rho} \in \operatorname{Sign}^+(p) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\times\Omega, \\ \text{sur } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\times\Gamma_N, \\ \text{sur } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\times\Gamma_D, \\ \bar{\rho}(t_{k+\frac{1}{2}}) = \rho_{k+\frac{1}{2}}. \end{array} \quad (5.37)$$

Discrétisons $\partial_t \bar{\rho}$ sur l'intervalle $[t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}(t_{k+1}) - \tau \operatorname{div}(\Phi_{k+1}) = \rho_{k+\frac{1}{2}}, \\ \Phi = m \nabla p_{k+1}, \quad m \geq 0, \quad |\nabla p_{k+1}| \leq 1, \quad m(1 - |\nabla p_{k+1}|) = 0 \\ \bar{\rho}(t_{k+1}) \in \operatorname{Sign}^+(p_{k+1}) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{dans } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\times \Omega, \\ \\ \text{sur } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\times \Gamma_N, \\ \\ \text{sur } [t_{k+\frac{1}{2}}, t_{k+1}[\times \Gamma_D. \end{array} \quad (5.38)$$

D'après le chapitre 3, les solutions $\rho_{k+1} := \bar{\rho}(t_{k+1})$ et p_{k+1} du (5.37) sont respectivement les solutions du problème de Beckmann :

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} |\Phi(x)| \, dx : \rho \in L^\infty(\Omega), 0 \leq \rho \leq 1, \right. \\ \left. \Phi \in (L^1(\Omega))^N, \Phi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_N, -\operatorname{div}(\Phi) = \rho_{k+\frac{1}{2}} - \rho \text{ dans } \Omega \right\}, \quad (5.39)$$

et de son dual

$$\min_z \left\{ \int z^+ \, dx - \int z \rho_{k+\frac{1}{2}} \, dx : z \in W_D^{1,s}(\Omega) \text{ et } |\nabla z| \leq 1 \right\}. \quad (5.40)$$

5.5 Implémentation

Dans cette section, nous présentons l'implémentation du schéma de splitting proposé pour calculer la densité ρ solution du problème (5.7).

5.5.1 Discrétisation du domaine

Considérons un domaine Ω qui représente une salle de frontière $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ où Γ_D représente la sortie de la salle et Γ_N représente les murs de la salle. Nous reprenons la même discrétisation proposée dans le chapitre 3 : nous discrétisons Ω en $m \times n$ cellules de surface $dx \times dy$, où dx et dy représentent les pas en espaces.

Pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, la valeur de $r_{i,j}$ est une approximation de la valeur moyenne sur la cellule de r dans la cellule (i, j) , alors que $F_{i-\frac{1}{2},j}$ et $F_{i+\frac{1}{2},j}$ calculés sur les arrêts de la cellule (i, j) représentent respectivement les flux entrants et sortants de chaque cellule.

- Dans l'étape de transport $r_{i,j}$ représente la densité de population, alors que $F_{i-\frac{1}{2},j}$ et $F_{i+\frac{1}{2},j}$ représentent le flux ρV .
- Dans l'étape de correction : pour l'étape primal $r_{i,j}$ représente la densité corrigée et les flux $F_{i-\frac{1}{2},j}$ et $F_{i+\frac{1}{2},j}$ correspondent au terme Φ ajouté pour la décongestion. Dans l'étape dual, $r_{i,j}$ représente le paramètre dual p et les flux $F_{i-\frac{1}{2},j}$ et $F_{i+\frac{1}{2},j}$ correspondent au gradient de p .

5.5.2 Étape de transport

Dans l'étape de prédiction, nous calculons à l'instant $t_{k+\frac{1}{2}}$ la densité $\rho_{k+\frac{1}{2}} = \tilde{\rho}(t_{k+\frac{1}{2}})$ transport de ρ_k grâce à l'équation de continuité suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} - \operatorname{div}(\tilde{\rho} \nabla \mathbf{D}) = 0 & \text{dans } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}] \times \Omega, \\ \tilde{\rho}(t_k) = \rho_k \end{cases} \quad (5.41)$$

qu'on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho}(t, x, y) + \partial_x \tilde{F}(t, x, y) + \partial_y \tilde{G}(t, x, y) = 0 & \text{dans } [t_k, t_{k+\frac{1}{2}}] \times \Omega, \\ \tilde{\rho}(t_k) = \rho_k, \end{cases} \quad (5.42)$$

avec $\tilde{F}(t, x, y) = -\tilde{\rho}(t, x, y) \partial_x \mathbf{D}(t, x, y)$ et $\tilde{G}(t, x, y) = -\tilde{\rho}(t, x, y) \partial_y \mathbf{D}(t, x, y)$.

Pour implémenter l'étape de prédiction (ou transport), nous discrétisons l'équation (5.42) en utilisant un schéma volume finis en espace et Euler explicite en temps [17]. Ce qui nous donne :

$$\frac{\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \rho_{i,j}^k}{dt} + \frac{1}{dx} [\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^k - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^k] + \frac{1}{dy} [\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^k] = 0,$$

où $\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j}^k$, $\tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}^k$, $\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^k$ et $\tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^k$ sont les valeurs des flux sur les interfaces de chaque cellule (i, j) . Vu que dans notre cas le transport est non-linéaire, nous avons besoin d'approximer les flux sur les interfaces. Différentes approximations existent pour ce type d'équations non-linéaires, comme le schéma de Godunov, le schéma de Lax-Wendrof et le schéma de Rusanov [17, 33]. Dans ce travail, nous utilisons l'approximation de Rusanov donnée par :

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^{k,Rus} = \frac{1}{2} (\tilde{F}^k(\rho_{i,j}) + \tilde{F}^k(\rho_{i+1,j})) - \frac{\max(|(\tilde{F}^k(\rho_{i,j}))'|, |(\tilde{F}^k(\rho_{i+1,j}))'|)}{2} (\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}).$$

L'étape de prédiction se discrétise comme :

$$\frac{\rho_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \rho_{i,j}^k}{dt} + \frac{1}{dx} [F_{i+\frac{1}{2},j}^{k,Rus} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{k,Rus}] + \frac{1}{dy} [G_{i,j+\frac{1}{2}}^{k,Rus} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{k,Rus}] = 0 \quad (5.43)$$

5.5.3 Étape de correction

Dans le modèle de Hughes original [22, 23], la contrainte de congestion ($0 \leq \rho \leq 1$) a été prise en compte dans le terme du transport $\operatorname{div}(\rho(1-\rho)V)$. Or, dans notre modèle proposé (5.7), le champ vitesse défini pour le transport ne garantit pas une densité admissible ($0 \leq \rho \leq 1$). Pour cela, la densité $\rho^{k+\frac{1}{2}}$ obtenue dans l'étape de prédiction sera corrigée à l'aide de problème de Beckmann

$$\inf_{\rho, \Phi} \left\{ \int_{\Omega} |\Phi(x)| dx : \rho \in L^\infty(\Omega), 0 \leq \rho \leq 1, \right. \\ \left. \Phi \in (L^1(\Omega))^N, \Phi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_N, -\operatorname{div}(\Phi) = \rho_{k+\frac{1}{2}} - \rho \text{ dans } \Omega \right\}. \quad (5.44)$$

Pour calculer la densité corrigée ρ^{k+1} , comme au chapitre 1, nous appliquons l'algorithme Primal-Dual (Chambolle-Pock) suivant

Algorithm 2 Algorithme primal-dual (Chambolle-Pock)

Initialisation : Soit $l = 0$, on choisit $\alpha, \sigma > 0$ tel que $\alpha\tau\|\Lambda_h\|^2 < 1$. Pour ρ^0, Φ^0 et $p^0 = \bar{p}^0 = p_0$.

Étape primal :

$$(\rho_{i,j}^{l+1}, \Phi_{i,j}^{l+1}) = \left(\max(0, \min(1, \rho_{i,j}^l - \sigma \bar{p}_{i,j}^l)), \max(0, 1 - \frac{1}{|\Phi_{i,j}^l - \sigma \nabla_h \bar{p}_{i,j}^l|}) (\Phi_{i,j}^l - \sigma \nabla_h \bar{p}_{i,j}^l) \right). \quad (5.45)$$

Étape dual :

$$\begin{aligned} v^{l+1} &= p^l + \alpha \rho^{l+1} - \alpha \operatorname{div}_h(\Phi^{l+1}). \\ p_{i,j}^{l+1} &= v_{i,j}^{l+1} - \alpha \mathbf{Proj}_{C_{i,j}}(v_{i,j}^{l+1}/\alpha), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Extragradient :

$$\bar{p}^{l+1} = 2p^{l+1} - p^l.$$

L'avantage de l'algorithme 2 c'est qu'il nous permet de calculer la densité corrigée ρ^{k+1} solution du problème (5.44) dans l'étape primal, et le paramètre p^{k+1} solution du problème (5.40) dans l'étape dual qui sera utilisé pour la mise à jour de la vitesse dans l'étape suivante.

5.5.4 Mise à jour de la vitesse

Vu que dans notre modèle (5.7) la densité $\rho^{k+\frac{1}{2}}$ est calculée à l'aide de l'équation (5.43), qui nécessite forcément la connaissance de la valeur de $V(t_k, \cdot) = -\nabla \mathbf{D}(t_k, \cdot)$, il est donc indispensable de calculer la valeur de \mathbf{D} à chaque instant t_k . Pour ce faire, à chaque instant t_k , nous cherchons la solution $\mathbf{D}(t_k, \cdot)$ de l'Eikonal

$$\begin{cases} \|\nabla \mathbf{D}(t_k, \cdot)\| = \mathbf{H}(p(t_k, \cdot)) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D}(t_k, \cdot) = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.47)$$

où $p(t_k, \cdot) = p^k$ est la solution du problème dual (5.40).

Rappelons que la solution de (5.47) c'est l'unique solution du problème de maximisation

$$\max_{z \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} z \, dx : \|\nabla z\| \leq \mathbf{H}(p^k) \text{ et } z = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}. \quad (5.48)$$

Pour la résolution du problème (5.48), nous utilisons l'algorithme de Chambolle-Pock. En effet, il est possible de reformuler le problème (5.48) pour l'écrire sous la forme suivante

$$\inf_{z \in W^{1,\infty}(\Omega)} \mathcal{F}(z) + \mathcal{G}(\Lambda z), \quad (5.49)$$

où $\mathcal{F}(z) = \int_{\Omega} z \, dx$, $\mathcal{G}(z) = \mathbb{I}_W(z)$ avec $W = \{z \in W^{1,\infty}(\Omega) : \|\nabla z\| \leq \mathbf{H}(p^k)\}$ et $\Lambda(z) = \nabla z$.

5.6 Simulations numériques

Afin de voir l'impacte du changement de la vitesse dans le modèle (5.2) sur le comportement de la foule, nous présentons dans cette section des simulations numériques permettant de comparer le mouvement de la foule entre les deux modèles (5.2) et (5.7). Puis, nous présentons d'autres simulations pour faire la comparaison entre le modèle de Hughes original et notre modèle (5.7).

5.6.1 Effet de la vitesse

Pour le modèle (5.7), les simulations ci-dessous sont réalisées pour $\mathbf{H}(p) = \exp(7p)$.

5.6.1.1 Test 1 : Évacuation d'une salle avec une sortie

Un premier test a été réalisé dans le but de faire la comparaison entre le modèle (5.2) où la vitesse est constante au cours du temps et le modèle (5.7), où la vitesse dépend du paramètre p . Nous supposons que la foule se déplace dans une salle représentée par un domaine $\Omega = [0, 1]^2$ discrétisé avec des mailles rectangulaires de taille $dx \times dy$ tel que $dx = dy = h = 0.02$. Pour un temps de simulation $T > 0$, nous discrétisons l'intervalle $[0, T]$ en des intervalles de pas $\tau = 8 \cdot 10^{-3}$. Étant donné une densité initiale $\rho_0 = 0.9 \times \mathbf{1}_S$, avec $S = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}] \cup [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{2}{3}, 1]$, la foule est évacuée de la salle via une sortie à droite de la salle définie par $\Gamma_D = \{1\} \times [0.4, 0.6]$.

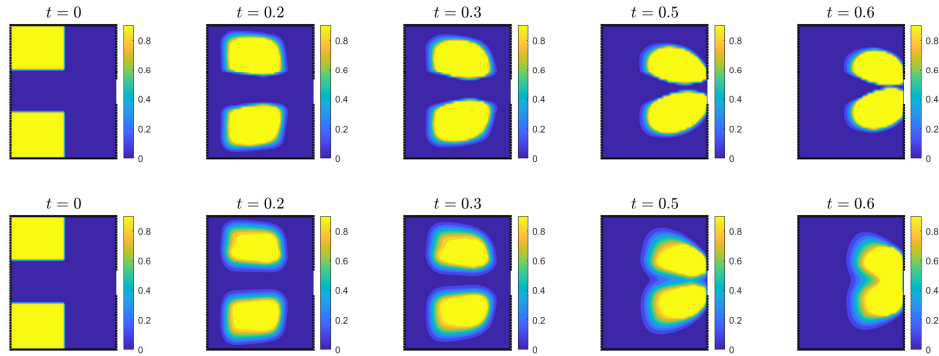


FIGURE 5.1 – Évolution de la densité ρ dans un domaine Ω avec une sortie. Au dessus, la densité correspond à notre premier modèle (5.2). Au dessous, la densité correspond au nouveau modèle (5.7) où la vitesse V dépend du paramètre p .

On remarque d'après la figure 5.1 ci-dessus, que dans le nouveau modèle modifié (5.7) (au dessous) où la vitesse V dépend du paramètre p , certains piétons se déplacent vers les endroits qui étaient vides dans les simulations faites pour le modèle (5.2) (au dessus). Cela se voit clairement aux instants $t = 0.5$ et $t = 0.6$. On peut remarquer aussi que dans des régions où la densité a été maximale dans le cas de modèle (5.2), la densité a diminué dans ces régions dans le deuxième modèle (5.7).

5.6.1.2 Test 2 : Évacuation d'une salle avec deux sorties

Un deuxième test a été réalisé aussi dans le but d'étudier l'effet du changement de la vitesse. Comme dans le Test 1, on considère un domaine $\Omega = [0, 1]^2$ discrétisé avec des mailles rectangulaires où $h = 10^{-2}$. Pour le pas du temps on prend $\tau = 4 \cdot 10^{-3}$. Étant donné une densité initiale $\rho_0 = \mathbf{1}_S$, avec $S = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$, la foule est évacuée de la salle via deux sorties à droite définie par $\Gamma_D = \{1\} \times [0, 0.4] \cup \{1\} \times [0.9, 1]$.

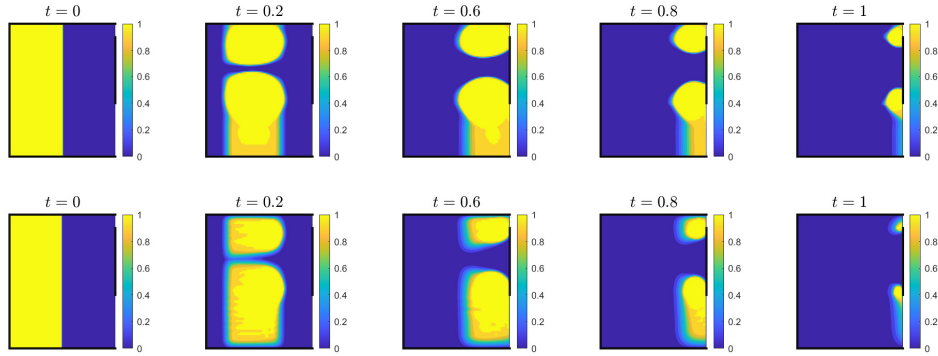


FIGURE 5.2 – Évolution de la densité ρ dans un domaine Ω avec deux sorties. Au dessus, la densité correspond à notre premier modèle (5.2). Au dessous, la densité correspond au nouveau modèle (5.7) où la vitesse V dépend du paramètre p .

On remarque d'après la figure 5.2 ci-dessus, que dans le modèle(5.2) il ya avait des endroits du domaine avant la grande sortie $\{1\} \times [0, 0.4]$ où la densité n'était pas maximale ($= 0.9$). Par contre, avec les simulations réalisés pour le modèle (5.7) (au dessous), on voit qu'une partie de la population s'est déplacée vers le bas où la densité est devenue maximale ($\rho = 1$).

5.6.2 Comparaison avec le modèle de Hughes

5.6.2.1 Test 1 : Évacuation d'une salle avec une sortie

Pour faire la comparaison avec le modèle de Hughes, nous réalisons un test pour les memes paramètres utilisés dans la sous-section 5.6.1.1.

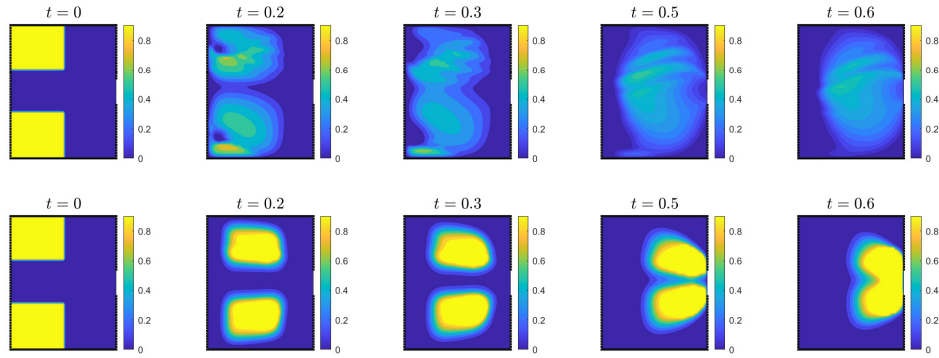


FIGURE 5.3 – Évolution de la densité ρ dans un domaine Ω avec une sortie. Au dessus, la densité correspond modèle de Hughes (5.3). Au dessous, la densité correspond au nouveau modèle (5.7)

La figure 5.3 ci-dessus illustre le comportement de la foule dans les deux modèles (5.3) et (5.7). Pour $t = 0$, nous partons de la même densité initiale $\rho_0 = 0.9 \times \mathbf{1}_S$, avec $S = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}] \cup [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{2}{3}, 1]$. À $t = 0.2$, nous pouvons remarquer comment la foule dans le modèle de Hughes (5.3) se déplace vers les endroits vides du domaine. Alors que, dans le modèle (5.7), la foule se déplace en laissant des endroits vides au milieu. Nous remarquons qu’au cours du temps, dans le modèle de Hughes (5.3), la foule se distribue d’une façon plus uniforme dans le domaine Ω . Par exemple, à l’instant $t = 0.5$, nous pouvons voir comment la foule est répartie dans toutes les régions du domaine avec une densité maximale égale à 0.6. Alors que, dans notre modèle (5.2), malgré l’amélioration effectuée nous trouvons toujours un écart entre les valeurs de la densité dans le domaine.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modification du modèle proposé dans le chapitre 3. Un résultat d’existence pour le modèle régularisé a été établi en s’appuyant sur le lemme de compacité d’Aubin-Lions-Simon. L’approximation numérique de la solution est faite en utilisant l’algorithme de splitting proposé dans le chapitre 3. Les simulations numériques réalisées ont montré que la modification portée sur le modèle a permis aux piétons de se diffuser vers des endroits qui étaient vides dans le premier modèle. L’amélioration obtenue n’est pas parfaite par rapport au modèle de Hughes original, mais intéressante. En effet, nous observons toujours des endroits à densité nulle contrairement au modèle de Hughes, où la population est distribuée dans tout le domaine. Un inconvénient de ce modèle apparaît au niveau du temps de calcul. En effet, à chaque instant du temps on résout deux problèmes d’optimisation : problème de Beckmann pour l’étape de correction et problème de maximisation pour chercher la solution de l’Eikonale.

Bibliographie

- [1] Debora AMADORI et MARCO DI FRANCESCO. « The one-dimensional hughes model for pedestrian flow : Riemann—type solutions ». In : *Acta Mathematica Scientia* 32.1 (2012), p. 259-280.
- [2] Debora AMADORI, Paola GOATIN et Massimiliano D ROSINI. « Existence results for Hughes' model for pedestrian flows ». In : *Journal of Mathematical Analysis and applications* 420.1 (2014), p. 387-406.
- [3] Heinz H BAUSCHKE, Patrick L COMBETTES et al. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. T. 408. Springer, 2011.
- [4] Nicola BELLOMO et Christian DOGBE. « On the modelling crowd dynamics from scaling to hyperbolic macroscopic models ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 18.suppl01 (2008), p. 1317-1345.
- [5] Ph BÉNILAN. « Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications ». In : *These, Publications Math. Orsay, Univ. Paris-Sud* (1972).
- [6] Felicien BOURDIN. « Splitting scheme for a macroscopic crowd motion model with congestion for a two-typed population ». In : *Networks and Heterogeneous Media* 17.5 (2022), p. 783-801.
- [7] Haïm BREZIS. « Analyse fonctionnelle ». In : *Théorie et applications* (1983).
- [8] Elisabetta CARLINI, Adriano FESTA, Francisco J SILVA et Marie-Therese WOLFRAM. « A semi-Lagrangian scheme for a modified version of the Hughes' model for pedestrian flow ». In : *Dynamic Games and Applications* 7.4 (2017), p. 683-705.
- [9] Jose A CARRILLO, Stephan MARTIN et Marie-Therese WOLFRAM. « An improved version of the Hughes model for pedestrian flow ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 26.04 (2016), p. 671-697.
- [10] Antonin CHAMBOLLE et Thomas POCK. « A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging ». In : *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), p. 120-145.
- [11] Marco DI FRANCESCO, Peter A MARKOWICH, Jan-Frederik PIETSCHMANN et Marie-Therese WOLFRAM. « On the Hughes' model for pedestrian flow : The one-dimensional case ». In : *Journal of Differential Equations* 250.3 (2011), p. 1334-1362.

- [12] Christian DOGBÉ. « On the numerical solutions of second order macroscopic models of pedestrian flows ». In : *Computers & Mathematics with Applications* 56.7 (2008), p. 1884-1898.
- [13] Ivar EKELAND et Roger TEMAM. *Convex analysis and variational problems*. SIAM, 1999.
- [14] Nader EL-KHATIB, Paola GOATIN et Massimiliano D ROSINI. « On entropy weak solutions of Hughes' model for pedestrian motion ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 64.2 (2013), p. 223-251.
- [15] Hamza ENNAJI, Nouredine IGBIDA et Ghadir JRADI. « Prediction-Correction Pedestrian Flow by Means of Minimum Flow Problem ». In : *arXiv preprint arXiv :2302.11315* (2023).
- [16] Hamza ENNAJI, Nouredine IGBIDA et Van Thanh NGUYEN. « Augmented Lagrangian methods for degenerate Hamilton–Jacobi equations ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 60.6 (2021), p. 1-28.
- [17] Robert EYMARD, Thierry GALLOUËT et Raphaële HERBIN. « Finite volume methods ». In : *Handbook of numerical analysis* 7 (2000), p. 713-1018.
- [18] Dirk HELBING, Illés FARKAS et Tamas VICSEK. « Simulating dynamical features of escape panic ». In : *Nature* 407.6803 (2000), p. 487-490.
- [19] Dirk HELBING, Illes J FARKAS, Peter MOLNAR et Tamás VICSEK. « Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations ». In : *Pedestrian and evacuation dynamics* 21.2 (2002), p. 21-58.
- [20] Dirk HELBING et Peter MOLNAR. « Social force model for pedestrian dynamics ». In : *Physical review E* 51.5 (1995), p. 4282.
- [21] LF HENDERSON. « The statistics of crowd fluids ». In : *nature* 229.5284 (1971), p. 381-383.
- [22] Roger L HUGHES. « A continuum theory for the flow of pedestrians ». In : *Transportation Research Part B : Methodological* 36.6 (2002), p. 507-535.
- [23] Roger L HUGHES. « The flow of human crowds ». In : *Annual review of fluid mechanics* 35.1 (2003), p. 169-182.
- [24] Andreas KESSEL, Hubert KLÜPFEL, Joachim WAHLE et Micael SCHRECKENBERG. « Microscopic simulation of pedestrian crowd motion ». In : *Pedestrian and evacuation dynamics* (2002), p. 193-200.
- [25] Ansgar KIRCHNER, Hubert KLÜPFEL, Katsuhiko NISHINARI, Andreas SCHADSCHNEIDER et al. « Simulation of competitive egress behavior : comparison with aircraft evacuation data ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 324.3-4 (2003), p. 689-697.
- [26] Ansgar KIRCHNER, Katsuhiko NISHINARI et Andreas SCHADSCHNEIDER. « Friction effects and clogging in a cellular automaton model for pedestrian dynamics ». In : *Physical review E* 67.5 (2003), p. 056122.
- [27] Jacques-Louis LIONS. « Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires ». In : (1969).

- [28] Bertrand MAURY, Aude ROUDNEFF-CHUPIN et Filippo SANTAMBROGIO. « A macroscopic crowd motion model of gradient flow type ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.10 (2010), p. 1787-1821.
- [29] Kai NAGEL. « From particle hopping models to traffic flow theory ». In : *Transportation Research Record* 1644.1 (1998), p. 1-9.
- [30] Daniel Ricardo PARISI et Claudio Oscar DORSO. « Microscopic dynamics of pedestrian evacuation ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 354 (2005), p. 606-618.
- [31] Nuria PELECHANO, Jan M ALLBECK et Norman I BADLER. « Controlling individual agents in high-density crowd simulation ». In : (2007).
- [32] Aude ROUDNEFF-CHUPIN et Bertrand MAURY. « Modélisation macroscopique de mouvements de foule ». In : *Phdthesis, PhD thesis, Université Paris-Sud XI* (2011).
- [33] Nicolas SEGUIN. « Méthodes de volumes finis pour les fluides compressibles ». In : *Université Pierre et Marrie Curie-Paris 6* (2010), p. 15.
- [34] Juliette VENEL. « Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule ». Thèse de doct. Université Paris Sud-Paris XI, 2008.