THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

Discipline ou spécialité :

Electromagnétisme et Systèmes Haute Fréquence

Présentée et soutenue par :

M. AYOUB BELLOUCH

le mardi 4 juillet 2023

Titre :

Caractérisation et optimisation de structures guidées micro-onde à paroi métamatériau par une méthode de raccordement modal semi-analytique

---

Ecole doctorale :

Génie Electrique, Electronique, Télécommunications (GEETS)

Unité de recherche :

Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie (LAPLACE)

Directrice de Thèse :

MME NATHALIE RAVEU

Rapporteurs :

M. RENAUD LOISON, INSA DE RENNES

Membres du jury :

M. TÂN-PHU VUONG, INP DE GRENOBLE, Président
M. ERIC LHEURETTE, Université de Lille, Membre
M. FREDERIC MESSINE, TOULOUSE INP, Membre
M. GUIDO VALERIO, UNIVERSITE SORBONNE, Membre
M. JULIEN HILLAIRET, CEA CADARACHE, Membre
MME PRISCILLIA DAQUIN, CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES CNES, Membre

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ma thèse, une aventure scientifique passionnante et enrichissante. Ces travaux de thèse, fruit d'une collaboration entre le laboratoire LAPLACE et le Centre National d'Études Spatiales (CNES), ont été menés au sein du LAPLACE, sur le site de l'ENSEEIHT, au sein du Groupe de Recherche en Électromagnétisme (GRE).

Dans un premier temps, je tiens à exprimer ma chaleureuse gratitude envers M. Renaud Loison, Professeur des universités à l'INSA Rennes, ainsi que M. Tân-Phu VUONG, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter mes travaux de thèse. Je les remercie sincèrement pour le temps qu'ils ont consacré à cette tâche ainsi que pour leurs remarques précieuses. J'adresse également mes remerciements aux autres membres du jury pour avoir évalué mes travaux et pour leurs commentaires constructifs lors de la soutenance.

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à ma directrice de thèse, Mme Nathalie Raveu, professeure à l'INP de Toulouse, qui m'a proposé ce sujet de thèse passionnant. Ses compétences scientifiques exceptionnelles, sa disponibilité sans faille, et ses qualités humaines remarquables font d'elle la directrice de thèse idéale. Je lui suis infiniment reconnaissant pour le soutien inestimable qu'elle m'a apporté tout au long de ma thèse, et mes remerciements ne seront jamais à la hauteur de ma gratitude sincère. Il me tient également à cœur de remercier ma co-directrice de thèse, Mme Anne-Laure Franc, maitre de conférences à l'INP de Toulouse, pour ses remarques très pertinentes, ses encouragements constants, son esprit d'organisation et l'aide précieux qu'elle m'a apporté tout au long de la thèse. Ce fût un réel plaisir de travailler avec vous.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers les autres chercheurs avec lesquels j'ai eu le privilège de collaborer. Je remercie sincèrement M. Frédéric Messine, professeure à l'INP de Toulouse, pour son expertise dans le domaine de l'optimisation. Ses conseils judicieux et son engagement constant ont considérablement renforcé mes compétences en optimisation. Un grand merci également à M. Ronan Perrussel, chargé de recherches CNRS, pour sa contribution significative à une partie de mes travaux de thèse. Son expertise technique remarquable en Analyse Numérique a été une source d'enrichissement inestimable pour moi. Par la suite, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Mme Pricillia Daquin, ingénieure au CNES, pour son suivi attentif de l'avancement de la thèse et ses encouragements constants. Enfin, un chaleureux merci à M. Olivier Pigaglio, ingénieur de recherche du GRE, pour son aide précieuse pour la réalisation des mesures expérimentales, qui se sont avérées essentielles

pour la réussite de mes travaux. Je tiens à souligner que l'aide et les conseils éclairés de chacun d'entre vous ont été cruciaux dans l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes que j'ai eu la chance de côtoyer au LAPLACE durant ma thèse. Un immense merci à mes deux amis de thèse, Zakaria (cherche quelqu'un d'autre pour te payer les cafés par Lydia) et Sophie (prends soin de ma plante s'il te plaît). Votre compagnie a rendu mes journées de travail bien plus agréables. Je remercie également mes collègues du bureau E334 : Jeudy (merci pour ta gentillesse), Pierre, Amine, Hugo, et tout particulièrement Mohammed (merci pour les pâtisseries algériennes, mais s'il te plaît arrête de prendre tous les écrans du bureau). Un grand merci également à tous les doctorants et post-docs avec qui j'ai partagé ces années de thèse : André, Leonard, Marion, Marc, Arnaud, Maxime, Grégoire, et bien d'autres. Merci aussi à tous les stagiaires : Bastien, Audrey, Oumaima, Bruno, Erwan. Sans oublier tous les membres de l'équipe GRE et également l'équipe GREM3 (mon équipe adoptive). Je vous remercie tous d'avoir fait partie de cette aventure.

Un immense merci à tous mes amis. En particulier, mes deux amis proches, Mohamed (je t'attends encore pour écrire notre livre de vie) et Yassir (quelle est notre prochaine destination ?). Malgré la distance, votre soutien indéfectible et votre amitié ont été une source de réconfort tout au long de cette aventure (mais approchez-vous un peu du sud, ça m'évitera les longs voyages à Paris). Un grand merci à Nizar pour les moments agréables passés ensemble et pour les matchs de tennis (que j'ai tous gagné d'ailleurs) et à Nasr le copain et le binôme de l'N7, merci d'être venu de l'autre côté de la France pour assister à ma soutenance (et surtout merci d'être arrivé à la salle un jour avant haha). Je remercie également tous mes autres amis Sara, André, Najib, Omar, Amine, Ilyass ... (désolé pour ceux que j'ai oublié). Puis, un remerciement très spécial à toi Léa, pour ton soutien inestimable, tes encouragements et ta patience, qui ont été les piliers de ma réussite. Mes mots ne pourront jamais exprimer suffisamment ma gratitude envers toi. Enfin, une pensée particulière pour Majda.

Avec une gratitude profonde, je tiens à exprimer mes remerciements sincères envers ma famille et mes proches pour leur soutien inébranlable tout au long de mon parcours. À mon frère et à mes sœurs, mes complices de vie, je vous remercie du plus profond de mon cœur pour votre présence constante à mes côtés et pour l'admiration que vous portez à votre grand frère (moi). Je réserve une pensée spéciale à ma grand-mère, cette douce étoile qui a toujours illuminé mon chemin de son amour inconditionnel. Je garde également une pensée pour mes autres grands-parents, désormais décédés, j'espère sincèrement qu'ils sont fiers de moi. Le plus grand remerciement de tous revient à mes parents, Abderrahim et Naïma, pour leur sacrifice, leur amour incommensurable et leur confiance en moi. Ce doctorat est le fruit de vos rêves autant que des miens, et je vous le dédie de tout cœur.

Résumé

Les structures guidées sont souvent utilisées comme des dispositifs de communication à hautes-fréquences dans les applications spatiales, notamment dans les satellites. L'enjeu est de concevoir des systèmes embarqués performants mais de taille optimale afin de réduire le coût du lancement et libérer de l'espace pour intégrer de la charge utile supplémentaire. Un moyen efficace pour optimiser les performances est d'intégrer des métamatériaux, considérés comme des surfaces anisotropes, dans les parois du guide d'ondes. Ceci permet de modifier les propriétés du champ électromagnétique à l'intérieur de la structure afin de pouvoir contrôler la propagation d'onde, de générer des modes de nature plus complexe et d'ajuster la bande de fréquence utile.

Pendant la thèse, le premier objectif était d'identifier le comportement des ondes dans un guide circulaire 3D à parois périodiques anisotropes. Pour cela, une approche itérative basée sur la Théorie Modale Elargie (TME) a été explorée. Elle permet la caractérisation des bords anisotropes par des impédances équivalentes. Des améliorations sur certains aspects de la TME ont été proposées. Ensuite, une méthodologie directe basée sur la méthode des éléments finis (FEM) a été adoptée pour donner des diagrammes de dispersions des modes propagatifs plus précis, garantir un calcul considérablement plus rapide et éviter les problèmes de convergence et de détection des modes. Une procédure plus approfondie a été réalisée afin de réadapter le problème aux valeurs propres pour inclure les modes évanescents. Puis, une approche hybride combinant les deux méthodes, la FEM et la TME, a été utilisée pour tracer les cartographies des composantes du champ à l'intérieur de la structure. Ceci a ouvert la possibilité pour faire une optimisation de forme sur les dimensions du motif périodique de la paroi afin de trouver les cartographies d'un champ prédéfini. Les résultats atteints par les algorithmes d'optimisation testés sont très satisfaisants.

Par la suite, l'objectif était de modéliser une transition entre un guide d'ondes classique et un guide d'ondes périodique à paroi anisotrope. Par conséquent, un modèle semi-analytique basé sur la méthode du Mode-Matching (MM) a été développé pour caractériser cette jonction et déterminer les paramètres S de la discontinuité en remplaçant la structure par un circuit équivalent. Le modèle a été validé pour plusieurs cas de guides d'onde en comparaison avec une approche volumique FEM via le logiciel commercial Ansys-HFSS. Pour confirmer expérimentalement les résultats, un prototype d'une transition d'un guide d'ondes métallique à un guide d'ondes à paroi périodique anisotrope a été réalisé. Les paramètres S mesurés rejoignent les résultats numériques pour affirmer le modèle MM développé.

Abstract

Waveguides are used as communication devices in space applications, particularly on-board satellites. The challenge is to design high-performance systems with small size in order to both reduce launch costs and release space which could benefit to the payload. Metamaterials placed on the waveguide's walls offer the possibility to reduce the dimensions, modify the single-mode bandwidth but also to generate specific modes that can be useful for the radiation.

Firstly, the wave propagation in a circular guide having anisotropic periodic walls is analyzed. Based on the existing Modal Expansion Theory (MET), an iterative approach was explored. It enables the characterization of anisotropic regions by equivalent surfaces impedances. Then, a direct methodology based on the Finite Element Method (FEM) was developed to increase the accuracy of the dispersion diagrams for the propagative modes and to considerably decrease the calculation time. This technique has been extended to take the evanescent modes into account. Next, a hybrid approach FEM/TME was employed to find the electromagnetic field maps inside the waveguide. The achieved computation time is low enough to allow testing algorithms for optimizing purposes: The shape of the periodic pattern is then optimized in order to obtain specific predefined field maps.

Secondly, a junction between a metallic waveguide and a periodic waveguide with anisotropic walls was modeled using a Mode-Matching method (MM). The technique proposed here is based on a semi-analytical model which consists in replacing the structure by an equivalent circuit to get the general scattering matrix of the discontinuity. This model has been validated for different waveguide topology by comparison with a FEM approach using the commercial software Ansys-HFSS^{TM}. To experimentally confirm the results, a junction from a metallic waveguide to an anisotropic periodic wall waveguide has been realized. The measured S-parameters agree with the numerical results, thus validating the model.

Sommaire

Introduction générale 10
Chapitre 1 : État de l'art sur les structures guidées à parois métamatériaux 22
Introduction 22
1.1 Structures guidées à parois anisotropes 22
1.1.1 Propagation dans les guides d'ondes classiques 22
1.1.2 Insertion des parois à métamatériaux 27
1.2 Discontinuités dans les structures guidées 33
1.2.1 Résolution par circuits équivalents 33
1.2.2 Technique de Mode Matching 36
Conclusion 45
Bibliographie 46
Chapitre 2 : Modélisation des guides d'ondes circulaires à parois métamatériaux 51
Introduction 51
2.1 Caractérisation des guides d'ondes circulaires 51
2.1.1 Dispersion de l'onde 51
2.1.2 Champ EM dans un guide d'ondes circulaire 55
2.1.3 Matrice impédance de mode 58
2.2 Modélisation de la paroi à métamatériau avec la TME 60
2.2.1 Equation de dispersion 60
2.2.2 Nouvel algorithme itératif de calcul des modes 63
2.2.3 Amélioration sur le calcul des impédances de surface 69
2.3 Nouvelle méthodologie de calcul des modes dans les structures périodiques et/ou à parois métamatériaux basée sur la FEM 73
2.3.1 Calcul des propriétés dispersives des modes avec une approche FEM 73
2.3.2 Détermination des cartographies des modes par un calcul hybride de la FEM et la TME 86
Conclusion 89
Bibliographie 90
Chapitre 3 : Optimisation du design d'un guide d'onde à parois métamatériaux 91
Introduction 91
3.1 Formulation du problème d'optimisation 91

3.1.1. Algorithmes d'optimisation locale utilisés 92
3.1.2 Modélisation du problème inverse par structure 95
3.1.3 Implémentation des codes pour l'optimisation 100
3.2 Résultats d'optimisation de design à partir d'un champ objectif imposé ... 102
3.2.1 Problème inverse pour un mode hybride connu 102
3.2.2 Problème inverse pour un champ constant 110
3.2.3 Bilan comparatif des méthodes 113
Conclusion 114
Bibliographie 115
Chapitre 4 : Mode-Matching pour une double transition entre un guide métallique et un guide à parois métamatériaux 116
Introduction 116
4.1 Modélisation de la transition au niveau de la discontinuité 116
4.1.1 Résolution par schéma équivalent 116
4.1.2 Application de la méthode de Galerkin 119
4.2 Résolution MM simplifié (guide PEC/guide PEC) 121
4.2.1 Formulation analytique du problème MM : 121
4.2.2 Algorithme MM simplifié 124
4.2.3 Résultats numériques 128
4.3 Résolution MM généralisée 132
4.3.1 Formulation analytique du problème MM 133
4.3.2 Calcul numérique des amplitudes des champs 136
4.3.3 Orthogonalité de la base modale 144
4.3.4 Algorithme MM généralisé 151
Conclusion 152
Bibliographie 154
Chapitre 5 : Simulations numériques et prototype pour valider la résolution Mode-Matching généralisée 155
Introduction 155
5.1 Résultats numériques pour double transition avec l'algorithme MM généralisé 155
5.1.1 Double transition guide PEC1/guide PEC2/guide PEC1 155
5.1.2 Double transition guide PEC/guide à paroi corruguée/ guide PEC 159

5.1.3 Double transition guide PEC/guide à paroi de type 'PIC'/ guide PEC164
5.2 Conception de la double transition entre guides métalliques et guide à paroi métamatériau PIC 168
5.2.1 Modélisation des structures 169
5.2.2 Prototypes de mesure 175
5.2.3 Résultats des prototypes 179
Conclusion 182
Bibliographie 184
Conclusions et perspectives 185
Annexe A 191
Annexe B 194
Annexe C 198

Liste des figures

Figure 0.1 - Antenne cornet à parois métamatériaux inhomogènes [4]. 18

Figure 1.1 - Différentes formes de guides d'ondes [7]. 23

Figure 1.2 - Guide d'ondes circulaire en les coordonnées cylindriques [1]..... 24

Figure 1.3 - Représentation de l'impédance de mode [12]. 25

Figure 1.4 - Impédances caractéristiques d'un guide d'ondes circulaire pour le mode fondamental TE11 en fonction de la fréquence pour a) a=35mm b) a=25mm [13]. ... 27

Figure 1.5 -Diagramme des matériaux en fonction du signe de μ et ε, [14]. 28

Figure 1.6 - a) Cellules périodiques à métamatériaux 3D b) Modèle anisotrope équivalent [17]..... 29

Figure 1.7 – a) Coupe transversale d'un guide circulaire à paroi diélectrique b) La fréquence de coupure du mode HE11 en fonction de la permittivité relative $\varepsilon r2$ (courbe rouge), permittivité relative effective par le modèle de Drude (courbe cyan) [19]. 29

Figure 1.8 - Diagramme des réactances $(Xz, X\xi)$. L'échelle est linéaire dans l'intervalle [-1,1] et de la forme $\pm 2 - 1/X$ pour $X > 1$. Les surfaces duales sont notées respectivement D et D'[22]..... 31

Figure 1.9 - Les coupures des modes hybrides en fonction de la réaction de la surface longitudinale χz. la coupure $X2$ et ------ la coupure $X3$ [28]..... 32

Figure 1.10 - Opérateur admittance d'un quadripôle [34]. 34

Figure 1.11 – La fonction d'essai en fonction de la représentation [12]. 34

Figure 1.12 – Représentation du système S par un schéma équivalent [33]..... 35

Figure 1.13 - Discontinuités transversales proposées dans [35] : a) changement de section, b) changement de section dans un milieu diélectrique, c) combinaison des jonctions a et b, d) double jonction dans un milieu homogène et e) double jonction dans un milieu inhomogène. 36

Figure 1.14 – a) Coefficient de phase normalisé β en fonction de la fréquence b) coefficient R et le ratio pb/pf en fonction de la fréquence normalisée [35]. 37

Figure 1.15 - Convertisseur du mode TE11 au mode HE11 [28]. 38

Figure 1.16 - Les pertes théoriques d'un convertisseur placé entre un guide d'onde à paroi lisse et un guide d'onde corrugué pour 4 cas différents [28]. 39

Figure 1.17 - Les résultats expérimentaux du convertisseur optimisé a) coupe transversale du guide d'onde complet, b) pertes de réflexion : mesurés avec le guide d'onde (a). - - théoriques avec le guide d'onde (a). mesurés sans les convertisseurs II et IV. - × théoriques sans les convertisseurs II et IV. ------ mesurés sans les sections corruguées II III et IV [25]..... 40

Figure 1.18 - Modélisation de la discontinuité entre les régions I et II, [45]. 41

Figure 1.19 - Filtre bi-mode avec un guide d'ondes circulaire [45] 42

Figure 1.20 - Rayonnement de l'antenne cornet calculé avec la BCMM et comparaison avec les mesures à la fréquence 15.1GHz [43]. 43

Figure 1.21 - Cycle d'optimisation de conception de dispositifs micro-ondes proposé dans [54]. 43

Figure 1.22 – a) Filtre passe-bande composé des guides d'ondes rectangulaires, b) modèle avec la condition de Leontovich, c) modèle avec des régions diélectriques, d) paramètres S du MM idéal sans pertes, MM avec pertes et mesures, e) détails des pertes d'insertion : 1- modèle diélectrique, 2- modèle Leontovich, 3- Modèle circuit, 4- FEM (HFSS) 5- Mesures [54]. 44

Figure 2.1 - Guide d'onde circulaire et système de coordonnées cylindriques. 52

Figure 2.2 –Exemple d'un mode TE d'ordre 1 [4]. 54

Figure 2.3- Exemple d'un mode TM d'ordre 0 [4]. 54

Figure 2.4- Le mode TEM dans un guide d'ondes à deux plaques parallèles [5]. 54

Figure 2.5 - Exemple de diagramme de dispersion des modes [6]. 55

Figure 2.6- Guide d'ondes cylindrique à paroi métamatériau a) vue 3D b) coupe transversale. 61

Figure 2.7 - Cellule élémentaire d'un guide d'onde 3D à paroi anisotrope. 63

Figure 2.8 - Organigramme du code 3D dans [2], ... 64

Figure 2.9 - Cellule élémentaire du guide corrugué. 65

Figure 2.10 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs obtenus avec l'algorithme de la figure 2.8 : a) modes m=0 et b) modes m=1 65

Figure 2.11 - Organigramme du nouvel algorithme itératif. 67

Figure 2.12 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs avec le nouvel algorithme TME+FEM : a) modes m=0, b) modes m=1. 68

Figure 2.13 - Diagrammes de dispersion avec des décrochements entourés par des tirets noirs : a) m=0, b) m=1. 70

Figure 2.14 - Tracé du RSD pour l'impédance $Z\theta'$ *des modes TM (les zones où le RSD est élevé sont entourées par des tirets noirs) a) m=0, b) m=1.* 70

Figure 2.15 - Nouvelle procédure intégrée à l'algorithme de calcul. 71

Figure 2.16 – Détail des étapes de la nouvelle procédure. 72

Figure 2.17 - Diagrammes de dispersion avant et après la procédure RSD pour les modes m=0. 72

Figure 2.18 - Diagrammes de dispersion avant et après la procédure RSD pour les modes m=1. 72

Figure 2.19 - Cellule élémentaire d'un guide d'onde 3D à paroi métamatériau 74

Figure 2.20 - Modélisation du problème sous GetDP 78

Figure 2.21 - Diagrammes de dispersion avec la résolution GetDP : a) m=0, b) m=1. 78

Figure 2.22 - Les résultats des modes évanescents avec la procédure directe sur GetDP. 79

Figure 2.23 - Organigramme du code des modes évanescents. 83

Figure 2.24 - Cellule élémentaire du guide à paroi PEC. 84

Figure 2.25 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs et évanescents (m=0) avec la résolution Python. 84

Figure 2.26 - Cellule élémentaire du guide corrugué 85

Figure 2.27 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs et évanescents (m=0) avec la résolution Python. 86

Figure 2.28 - Cartographies du champ électrique du mode EH11 à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS 87

Figure 2.29 - Cartographies du champ magnétique du mode EH11 à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS 88

Figure 2.30 - Cartographies du champ électrique du mode EH21 à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS 88

Figure 2.31 - Cartographies du champ magnétique du mode EH21 à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS 88

Figure 3.1 - Trois exemples de raffinement du maillage pour n=2. 95

Figure 3.2 - Les dimensions de la cellule élémentaire d'un guide d'onde à paroi corruguée périodique à optimiser 97

Figure 3.3 - La cellule élémentaire d'un guide d'onde à paroi PIC périodique à optimiser a) vue 3D b) vue dans le plan transverse de l'axe du guide 98

Figure 3.4 - La cellule élémentaire d'un guide d'onde à paroi 'mushroom' périodique à optimiser a) vue 3D b) vue dans l'axe du guide c) vue dans le plan transverse du guide 99

Figure 3.5 - Organigramme du code de calcul de la bande monomode du guide d'onde 101

Figure 3.6 - Pénalisation de la fonction objectif 102

Figure 3.7 - a) Cellule élémentaire du guide d'onde corrugué donnant le champ objectif b) son diagramme de dispersion. 103

Figure 3.8 - Cartographies normalisés et structures du champ objectif, du champ de départ et du champ résultat de l'optimisation à la fréquence $1.1GHz$. 104

Figure 3.9 - Cartographies du champ objectif normalisé calculées à $2GHz$ 106

Figure 3.10 - Cartographies du champ normalisés du point de départ $X_{0,6}$ calculées à $2GHz$ 106

Figure 3.11 - Cartographies du champ normalisés de la meilleure solution calculées à $2GHz$ 107

Figure 3.12 - Structures du champ objectif, du champ de départ et du champ résultat avec NOMAD à la fréquence $2GHz$. 107

Figure 3.13 - Structures du champ objectif, du champ de départ et du champ résultat avec NLOPT à la fréquence $2GHz$. 109

Figure 3.14 - Structures du champ objectif, du champ de départ et du champ résultat avec IPOPT à la fréquence $2GHz$. 110

Figure 3.15 - Cartographies du champ objectif normalisé calculées à la fréquence $3.5GHz$ 112

Figure 3.16 - Cartographies du champ normalisés du point de départ $X_{0,7}$ calculées à la fréquence $3.5GHz$ 112

Figure 3.17 – Cartographies du champ normalisés de la meilleure solution calculées à la fréquence $3.5GHz$ 112

Figure 3.18 - Structures du point de départ et de la meilleure solution avec NOMAD à la fréquence $3.5GHz$ 113

Figure 4.1 - Structure de la double transition étudiée 117

Figure 4.2 - Symétries pair et impair 117

Figure 4.3 - Schéma électrique équivalent de la double transition 118

Figure 4.4 – Double transition entre deux guides cylindriques métalliques 121

Figure 4.5 - L'organigramme du code MM simplifié 125

Figure 4.6 - Schéma de la transition sur Ansys HFSS 126

Figure 4.7 - Le plan Π de symétrie a) électrique b) magnétique 126

Figure 4.8 - Mode TE_{11} et plans de symétrie 127

Figure 4.9 - Symétries de la transition PEC/PEC : a) Symétrie magnétique et b) Symétrie électrique 127

Figure 4.10 - Les vecteurs d'excitation de la structure et leur de-embedding 128

Figure 4.11 - Double transition 128

Figure 4.12 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre (m=1) dans les deux guides métalliques PEC1 et PEC2. 129

Figure 4.13 - Paramètres [S] de la double transition PEC1/PEC2/PEC1 : a) |S11| et b) |S21| 130

Figure 4.14 - Paramètres [S] de la double transition PEC1/PEC2/PEC1 pour différentes longueurs L_p des guides PEC1 : a) |S11| et b) |S21|. 131

Figure 4.15 - Comparaison entre HFSS et MMs pour le paramètre [S] de la double transition PEC1/PEC2/PEC1 : a) |S11| et b) |S21| 132

Figure 4.16 - Transition entre un guide PEC/ un guide à paroi métamatériau/ guide PEC 133

Figure 4.17 - Structure PEC1/PEC2/PEC1 137

Figure 4.18 - a) Diagramme de dispersion analytique du guide d'entrée PEC1 et b) diagrammes de dispersion analytiques et numériques du guide central PEC2 137

Figure 4.19- Les courbes des produits scalaires a) 3GHz b) 4GHz 147

Figure 4.20 - Rayon $a\Omega, min$ (courbe rouge +), rayon A (courbe grise ---) et erreur moyenne des produits scalaire $g(a\Omega, min)$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence. 148

Figure 4.21 - Structure de la transition entre le guide métallique et le guide à paroi périodique corruguée. 149

Figure 4.22 – Calcul des produits scalaires à a) $3GHz$ et b) $4GHz$. 149

Figure 4.23 - Rayon $a\Omega, min$ (courbe rouge +), rayon A (courbe grise ---) et erreur moyenne des produits scalaires $g(a\Omega, min)$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence. 150

Figure 4.24 - L'organigramme du code MM généralisé 152

Figure 5.1 – Structure de la double transition entre des guides circulaires métalliques PEC a) vue 3D b) vue longitudinale. 156

Figure 5.2 - Cellule élémentaire du guide d'ondes métallique PEC2 a) Vue 3D b) Coupe axiale c) Coupe longitudinale. 157

Figure 5.3 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 a) Guide PEC1 b) Guide PEC2. 157

Figure 5.4 - Comparaison des paramètres S issus de l'algorithme MMg avec ceux de l'algorithme MMs et ceux de la simulation HFSS a) |S11| b) |S21|. 159

Figure 5.5 - Structure de la double transition entre deux guides métalliques PEC et un guide Corrugué a) vue 3D b) vue longitudinale. 160

Figure 5.6 - Cellule élémentaire du guide d'ondes central à paroi corruguée périodique a) Vue 3D b) Coupe axiale c) Coupe longitudinale. 161

Figure 5.7 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 a) Guide PEC b) Guide à paroi périodique corruguée 161

Figure 5.8 - Le rayon $a_{\Omega,min}$ (courbe rouge +), les rayons limites A et a_p (courbe grise ---) et l'erreur moyenne des produits scalaires $g(a_{\Omega,min})$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence pour le guide d'ondes à paroi corruguée périodique. 162

Figure 5.9 - Comparaison des paramètres S issus de l'algorithme MMg et de HFSS a) |S11| b) |S21| 163

Figure 5.10 - Structure de la double transition entre deux guides métalliques PEC et un guide à paroi PIC périodique a) vue 3D b) vue longitudinale c) vue axiale. 164

Figure 5.11 - Cellule élémentaire du guide d'ondes central à paroi PIC périodique a) Vue 3D b) Coupe axiale c) Coupe longitudinale. 165

Figure 5.12 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 a) Guide PEC b) Guide à paroi PIC périodique. 166

Figure 5.13 - Le rayon $a_{\Omega,min}$ (courbe rouge +), les rayons limites A et a_p (courbe grise ---) et l'erreur moyenne des produits scalaires $g(a_{\Omega,min})$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence pour le guide d'ondes à paroi PIC périodique. 167

Figure 5.14 - Comparaison des paramètres S issus de l'algorithme MMg et de HFSS a) |S11| b) |S21| 168

Figure 5.15 – Structure de la double transition et diagrammes de dispersion pour les modes d'ordre m=1 a) le quart du guide d'ondes en tenant en compte les symétries électrique et magnétique pour le mode TE11 b) Diagrammes de dispersion du petit guide PEC1 c) Diagrammes de dispersion du guide PEC2. 170

Figure 5.16 – Paramètres S de la double transition PEC1-PEC2-PEC1 171

Figure 5.17 – Coupe transversale du champ électrique total à l'intérieur du quart du guide d'ondes, en prenant en considération les symétrique magnétique et électrique imposées par l'excitation. 171

Figure 5.18 - les cartographies du champ électrique dans les trois plans de coupe mentionnés sur la figure 5.17 172

Figure 5.19 – Structure étudiée et diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 de la double transition a) le quart de la structure en tenant compte des symétries électrique et magnétique du champ TE11 b) Diagrammes de dispersion du guide PEC1 c) Diagrammes de dispersion du guide PIC 173

Figure 5.20 - Comparaison des paramètres S entre la structure à paroi Métamatériaux PIC et la structure de référence à paroi métallique a) |S11| b) |S21|. 174

Figure 5.21 - a) Tronçon en entrée et sortie b) Galette avec des parois PIC c) Galette simple 175

Figure 5.22 - Vue 3D des schémas CAO des structures a) cas métallique b) cas de paroi PIC 176

Figure 5.23 - Schéma de la TGC et la cartographie électrique du mode TE_{11} à 4.2GHz 177
Figure 5.24 - la TGC métallique conçue pour générer le mode TE_{11}. 177
Figure 5.25 - Coupleurs utilisées pour les mesures 178
Figure 5.26 - Circuit complet pour mesurer la double transition 178
Figure 5.27 - Analyseur du réseau vectoriel utilisé pour les mesures 179
Figure 5.28 - Circuit de simulation de la double transition a) cas métallique b) cas PIC 180
Figure 5.29 - Schéma général du circuit sur ADS 180
Figure 5.30 - Paramètres [S] du circuit de la double transition métallique 181
Figure 5.31 - Paramètres [S] du circuit de la double transition avec une paroi PIC 181
Figure 5.32 - Module du coefficient |S11| mesuré pour les deux structures : métallique et PIC 182
Figure 5.33 - Module du coefficient |S11| mesuré pour les deux structures : métallique et PIC 182

Liste des tableaux

Tableau 3.1 - Paramètres géométriques du problème inverse pour le monde fondamental EH11 avec $a = 80mm$ et $\alpha = \pi 20\, rad$. 103
Tableau 3.2 - Résultats d'optimisation de la corrugation avec NOMAD. 105
Tableau 3.3 - Dimensions des solutions obtenues avec NOMAD en fonction des points de départ 106
Tableau 3.4 - Résultats d'optimisation de la corrugation avec NLOPT. 108
Tableau 3.5 - Résultats d'optimisation de la corrugation avec IPOPT. 109
Tableau 3.6 - Résultats de l'optimisation pour les différentes méthodes et les différents types de structures. 111
Tableau 3.7 -Comparaison des méthodes d'optimisation testées 114
Tableau 4.1 - Résultats des procédures du calcul des amplitudes EM par intermédiaire de la matrice TME 140
Tableau 4.2 - Résultats des procédures du calcul des amplitudes EM avec utilisation du coefficient de couplage. 143

Introduction générale

Contexte

Les métamatériaux sont des matériaux artificiels structurés de manière périodique (avec une période très faible devant la longueur d'onde λ) qui permettent d'obtenir des propriétés électromagnétiques qui n'existent pas dans la nature. Le comportement artificiel des métamatériaux a été abordé la première fois par Veselago [1], qui les définit comme des milieux à permittivité et perméabilité simultanément négatives, dits matériaux gauchers LHM (Left Handed Metamaterials). Ce phénomène engendre le renversement de la loi de Snell et ainsi des vitesses de phase et de groupe de l'onde électromagnétique. Grâce à des propriétés adéquates, les métamatériaux présentent un intérêt croissant dans le domaine des communications aux hautes-fréquences, notamment dans les applications spatiales. En effet, l'introduction de parois à métamatériaux [1]-[3] permet de contrôler les propriétés du champ électromagnétique dans les structures guidées. Les métamatériaux se comportent comme des parois anisotropes dont les performances originales peuvent se révéler meilleures que celles des structures métalliques classiques. Ceci ouvre la possibilité de modifier la nature et la vitesse de propagation des modes et d'ajuster leur fréquence de coupure. Des travaux sur la modélisation des métamatériaux sont explorés dans le chapitre de l'état de l'art de ce manuscrit.

Dans un contexte spatial, les propriétés distinctives des métamatériaux peuvent se montrer intéressantes, notamment lorsqu'ils sont intégrés sur les parois des guides d'ondes et des antennes de type cornet embarquées sur satellites. En effet, l'inconvénient majeur des cornets classiques (avec des parois métalliques), utilisés comme sources de réflecteurs sur les satellites, est leur taille proportionnelle à leur performance. De surcroît, plus le satellite est grand et lourd, plus le coût du lancement sera élevé. Ainsi, l'insertion de métamatériaux serait une solution pour contribue à réduire la taille de l'antenne tout en maintenant ses performances. Des travaux récents ont démontré l'importance de ce type de paroi pour améliorer et optimiser les caractéristiques des cornets. A titre d'exemple, l'optimisation des dimensions de la métasurface du cornet dans [4], présentée dans la figure 0.1, permet d'améliorer l'adaptation de l'antenne, d'obtenir une polarisation croisée faible et de réduire les lobes secondaires du gain en rayonnement.

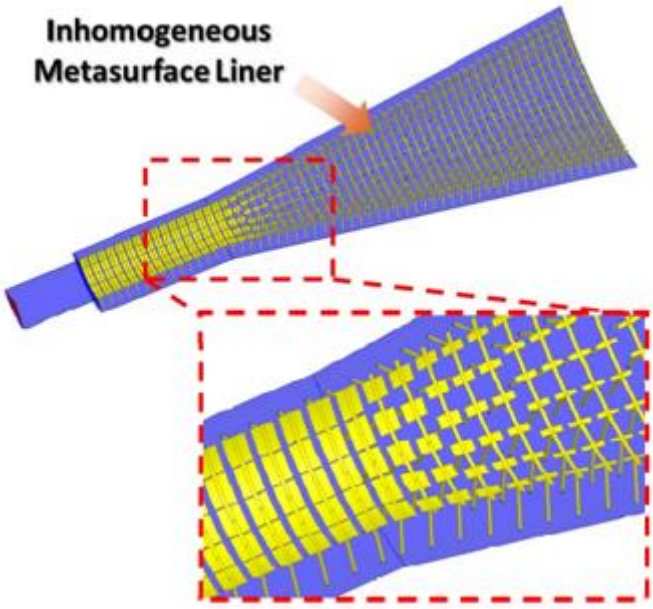


Figure 0.1 - Antenne cornet à parois métamatériaux inhomogènes [4].

Ainsi, en ayant recours à des méthodes d'optimisation, il est possible de trouver des géométries de métamatériaux permettant d'améliorer les performances en respectant un cahier des charges donné pour une application souhaitée.

Motivations de l'étude

De nombreux travaux ont récemment démontré l'importance d'introduire des surfaces métamatériaux sur les parois de cornets pour optimiser leurs performances. Cependant, il y a encore des aspects de conception à améliorer, notamment des analyses rigoureuses pour maîtriser les champs électromagnétiques à l'intérieur de la structure et à l'ouverture rayonnante et également pour choisir le type de paroi à introduire. Afin d'y parvenir, une antenne cornet peut être abordée comme un alignement de guides d'ondes dont la section augmente progressivement. Le premier objectif est donc de caractériser chaque portion de guide individuellement et le deuxième objectif est d'analyser l'adaptation au niveau des transitions. Ceci permet d'assembler les blocs de la structure afin de modéliser l'antenne, considérée comme un circuit multi-ports, maîtriser les cartographies du champ à l'ouverture et optimiser le gain en rayonnement.

Dans cet objectif, une nouvelle méthodologie, basée sur la Théorie Modale Elargie (TME), a été développée ces dernières années pour caractériser les guides d'ondes rectangulaires à parois métamatériaux 2D [5] et les guides d'ondes circulaires à paroi métamatériau 3D [6]. Dans ces travaux, seuls les modes propagatifs ont été traités. Dans le cas circulaire, qui correspond davantage aux systèmes embarqués sur satellites, une démarche de calcul itératif TME a été développée [6], mais des problèmes de convergence rendent les temps de simulation très importants et ils sont également très gourmands en ressources informatiques. Une autre difficulté rencontrée est l'optimisation manuelle des dimensions du motif périodique. Ainsi, des améliorations

peuvent être apportées à cette méthodologie, notamment sur les aspects liés à l'identification des modes et l'optimisation des parois. Par la suite, la modélisation des transitions entre les portions de guides d'ondes à parois métamatériaux à partir de leurs bases modales va permettre d'adapter progressivement l'onde jusqu'à l'ouverture afin d'optimiser les performances en rayonnement.

Objectifs de la thèse

Dans l'optique de concevoir des structures guidées à paroi métamatériau performantes, cette thèse vise à poursuivre le développement des calculs TME effectués précédemment et permettre de caractériser les guides d'ondes à parois anisotropes, tout en améliorant les aspects computationnels, notamment en termes de précision sur les modes et de temps de calcul. La résolution est étendue pour inclure les modes évanescents afin de déterminer la base modale complète, importante pour le raccordement modal entre les guides d'ondes. Pour cela, une méthodologie de calcul rapide basée sur la FEM est mise en place pour identifier les propriétés de dispersion des modes. Ensuite, une optimisation de la forme de la paroi métamatériau est envisagée afin d'obtenir des cartographies du champ électromagnétique avec des spécificités prédéfinies en résolvant un problème d'optimisation inverse. Dans un second temps, l'objectif est de modéliser les transitions entre les guides d'ondes à parois métamatériaux par une méthode de raccordement modal. Dans ce but, une résolution semi-analytique basée sur le Mode-Matching est développée pour analyser le comportement de l'onde électromagnétique (EM) au niveau des discontinuités des guides. Un autre objectif est de réaliser un prototype de double transition de guides d'ondes pour valider les méthodologies de calcul adoptées et surtout montrer l'intérêt d'introduire des parois anisotropes en comparant les performances avec un cas métallique classique. Enfin, l'intérêt final est de pouvoir maîtriser le comportement de l'onde électromagnétique dans la structure guidée à parois métamatériaux.

Plan du manuscrit

Pour aborder les différents objectifs de cette thèse, le manuscrit comporte quatre chapitres et s'achève par des conclusions et perspectives.

Dans le premier chapitre, un état de l'art général sur les structures guidées micro-onde est effectué. La littérature sur l'insertion des parois métamatériaux est explorées. Dans un deuxième temps, une approche pour modéliser la structure complète par un circuit équivalent est exposée permettant ainsi de simplifier la résolution. Enfin, des travaux sur la technique Mode-Matching sont analysés afin de résoudre les problèmes de discontinuités dans les guides d'ondes.

Dans le deuxième chapitre, la théorie modale élargie permettant la caractérisation des guides à paroi anisotrope, représentée par des impédances équivalentes, est explicitée. Des modifications sont réalisées sur l'algorithme de la TME

afin d'améliorer ses performances. Les temps de calcul restant relativement conséquents pour un usage dans des solveurs d'optimisation, une méthodologie directe basée sur les éléments finis (FEM) 3D est développée. Elle permet un calcul rapide des propriétés de dispersion des modes. En hybridant la résolution FEM avec la TME, les cartographies des champs sont tracées.

Dans le troisième chapitre, une optimisation de la forme du motif périodique est proposée afin de maîtriser les cartographies du champ dans les structures guidées à paroi en métamatériau. En effet, en imposant comme objectif une cartographie du champ électromagnétique prédéfinie, le calcul d'optimisation permet de déterminer les structures capables de la réaliser. Pour ce faire, une optimisation locale est appliquée à deux problèmes inverses non linéaires. Par conséquent, trois algorithmes d'optimisation sont utilisés et leurs performances sont comparées.

Dans le quatrième chapitre, la méthode du Mode-Matching (MM) est utilisée pour caractériser les discontinuités dans les guides d'ondes à paroi métamatériau. Dans un premier temps, une résolution MM simplifiée complètement analytique est proposée pour étudier les transitions dans les structures métalliques classiques. Par la suite, une résolution MM généralisée semi-analytique est développée pour étudier les doubles transitions entre les guides métalliques et les guides à paroi métamatériau périodique.

Cette méthodologie de calcul est validée dans le cinquième chapitre par des comparaisons avec des résultats d'autres méthodes numériques. Puis, un prototype expérimental de double transition est réalisé et vient confirmer les résultats obtenus en simulation. Ce prototype met également en lumière l'intérêt d'introduire des parois métamatériaux comme par exemple l'extension de la bande passante à dimensions identiques.

Bibliographie

[1] Viktor, G. V., "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ", *Soviet Physics Uspekhi*, Vol. 10 No. 4, pp. 509-514, Apr 1968.

[2] Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D. C., Nemat-Nasser, S. C., & Schultz, S. "Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity", *Phys. Rev.* Lett., vol. 84, no. 18, pp. 4184-4187, 2000.

[3] Ziolkowski, R. W., & Heyman, E., "Wave Propagation in Media Having Negative Permittivity and Permeability", Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top., vol. 64, n. 5, Art. no. 056625. Dec 2001.

[4] Wu, Q., Scarborough, C. P., Werner, D. H., Lier, E., & Shaw, R. K., "A broadband soft horn antenna with inhomogeneous metasurface coatings", In : *Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*. IEEE, p. 1-2. 2012.

[5] Byrne, B., "Etude et Conception de Guides d'Onde et d'Antennes Cornets à Métamatériaux", Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Novembre 2016.

[6] Kuhler, L., "Etude et Conception de Guides d'Onde Cylindriques à Métamatériaux, Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Octobre 2019.

Chapitre 1 : État de l'art sur les structures guidées à parois métamatériaux

Introduction

Les structures guidées sont très souvent utilisées comme dispositifs de communication à hautes-fréquences dans plusieurs domaines, notamment le domaine spatial et les radars. Une structure guidée est composée d'un ou plusieurs guides d'ondes de même nature ou de natures différentes. La modélisation de la structure complète commence tout d'abord en étudiant chaque guide d'ondes individuellement (établir les propriétés des parois, identifier les modes...). L'étape suivante est de décrire les discontinuités entre les guides et d'analyser la transmission des ondes, généralement en imposant des relations de passage sur le champ électromagnétique. Enfin, les différents blocs peuvent être représentés par des multipôles mis en cascade, avec comme objectif de caractériser le dispositif global.

L'état de l'art sur les structures guidées micro-ondes est réalisé dans cette partie en suivant cet ordre. Dans un premier temps, les guides d'ondes classiques à parois isotropes sont présentés. Ensuite, des travaux modélisant les parois métamatériaux d'un guide d'ondes par des milieux anisotropes sont analysés. Enfin, la mise en cascade des guides est analysée par une modélisation avec des circuits équivalents, qui permet de qualifier l'ensemble par leurs propriétés de réflexion/transmission : c'est la méthode du Mode-Matching. Elle est détaillée dans la partie 1.2.2 et plusieurs exemples d'applications sont proposés.

1.1 Structures guidées à parois anisotropes

1.1.1 Propagation dans les guides d'ondes classiques

Les guides d'ondes sont des lignes de propagation permettant la transmission des ondes électromagnétiques (EM) dans des directions bien définies [1]-[9]. Ils sont utilisés dans plusieurs applications industrielles importantes, notamment dans la télécommunication spatiale [10]-[11], les radars et l'optique. Ils se démarquent des autres systèmes de transmission par leur capacité à transporter des puissances élevées aux hautes fréquences, d'éviter les pertes d'énergie par rayonnement parasite et de minimiser les pertes ohmiques.

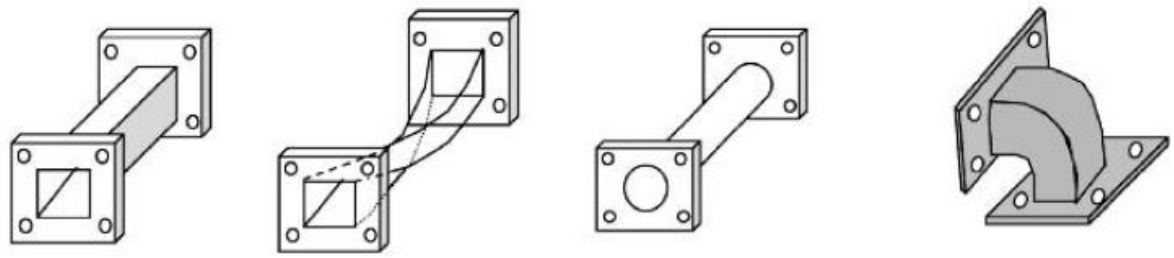


Figure 1.1 - Différentes formes de guides d'ondes [7].

Les guides à parois métalliques sont les plus couramment utilisés dans les dispositifs électromagnétiques. Les propriétés conductrices du métal engendrent des réflexions successives de l'onde électromagnétique permettant sa transmission dans la direction de la propagation [5]. Il existe différentes formes de guide, parmi lesquelles, les plus fréquentes sont les guides circulaires [1]-[7] et les guides rectangulaires [4]-[9] (cf. figure 1.1). Dans un contexte spatial, les guides d'ondes circulaires sont préférables car ils présentent plusieurs avantages. En effet, la section circulaire permet de réduire les pertes par réflexion, causées par les coins présents dans les guides d'ondes rectangulaires [3]. De plus, la symétrie par rapport à l'axe de révolution garantit une meilleure distribution de la puissance à l'intérieur du guide d'ondes. Pour finir, la flexibilité de la structure facilite la conception et réduit l'encombrement. Elle est ainsi mieux adaptée aux systèmes embarqués sur les satellites [10]-[11].

- **Décomposition modale (cas d'un guide circulaire)**

Un guide d'ondes circulaire à paroi métallique, représenté sur la figure 1.2, supporte la propagation des modes transverses électriques TE ($E_z = 0$) et les modes transverses magnétiques TM ($H_z = 0$). Les composantes longitudinales du champ électromagnétique satisfont l'équation de Helmholtz, qui s'écrit, dans les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), sous la forme suivante [1] :

$$\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_z}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z} + k_0^2 \epsilon_r \mu_r\right) U_z = 0 \qquad (1.1)$$

avec U_z le champ électrique/ magnétique longitudinal, ϵ_r la permittivité relative du milieu, μ_r la perméabilité relative et k_0 le nombre d'onde dans le vide.

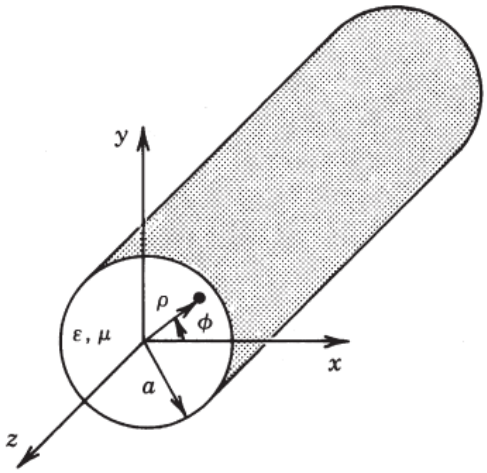


Figure 1.2 - Guide d'ondes circulaire en coordonnées cylindriques [1].

Considérant les ondes qui se propagent dans la direction (Oz), les solutions U_z de l'équation de Helmholtz (1.1), dans le cas représenté sur la figure 1.2, s'écrivent sous la forme :

$$U_z(\rho,\phi,z) = \left[A\,J_m\left(k_{c,mn}\,\rho\right) + B\,Y_m\left(k_{c,mn}\,\rho\right)\right]\left[C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\right]\,e^{-\gamma_{z,mn}z} \tag{1.2}$$

avec J_m et Y_m les fonctions de Bessel d'ordre m de 1ère et 2ème espèce respectivement, $k_{c,mn}$ est la constante de coupure du mode. La constante de propagation du mode suivant l'axe z est notée $\gamma_{z,mn} = \alpha_{z,mn} + j\beta_{z,mn}$ avec $\alpha_{z,mn}$ l'atténuation linéique et $\beta_{z,mn}$ le déphasage linéique. Sachant que $Y_m(\rho = 0) = \infty$ et que le champ électromagnétique doit être fini, cela impose de choisir $B = 0$. L'expression (1.2) se simplifie en :

$$U_z(\rho,\phi,z) = A\,J_m\left(k_{c,mn}\,\rho\right)\left[C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\right]\,e^{-\gamma_{z,mn}z} \tag{1.3}$$

Les conditions aux limites, imposées par la paroi métallique, permettent d'identifier dans un premier temps les constantes de coupure $k_{c,mn}^{TM} = \frac{\chi_{mn}}{a}$ et $k_{c,mn}^{TE} = \frac{\chi'_{mn}}{a}$ pour les modes de type TE et TM respectivement, tel que χ_{mn} et χ'_{mn} sont les zéros de la fonction de Bessel J_m et de sa dérivée J'_m. Et dans un second temps, les constantes de propagation $\gamma_{z,mn}^{TE}$ et $\gamma_{z,mn}^{TM}$ dans le cas propagatif ($k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \geq k_c$) et le cas évanescent ($k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \leq k_c$) par :

$$\gamma_{z,mn}^{TM} = \begin{cases} j\beta_{z,mn}^{TM} = j\sqrt{k_0^2\epsilon_r\mu_r - \left(k_{c,mn}^{TM}\right)^2} & si\ \ k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \geq k_{c,mn}^{TM} \\ \alpha_{z,mn}^{TM} = \sqrt{\left(k_{c,mn}^{TM}\right)^2 - k_0^2\epsilon_r\mu_r} & si\ \ k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \leq k_{c,mn}^{TM} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\gamma_{z,mn}^{TE} = \begin{cases} j\beta_{z,mn}^{TE} = j\sqrt{k_0^2\epsilon_r\mu_r - \left(k_{c,mn}^{TE}\right)^2} & si\ \ k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \geq k_{c,mn}^{TE} \\ \alpha_{z,mn}^{TE} = \sqrt{\left(k_{c,mn}^{TE}\right)^2 - k_0^2\epsilon_r\mu_r} & si\ \ k_0\sqrt{\epsilon_r\mu_r} \leq k_{c,mn}^{TE} \end{cases} \tag{1.5}$$

Par la suite, la base modale du guide d'ondes peut être identifiée à l'aide des champs électromagnétiques transverses $(\vec{E}_{T,mn}, \vec{H}_{T,mn})$. Ces derniers sont déterminés à partir des composantes longitudinales $E_{z,mn}$ et $H_{z,mn}$, selon [12] :

$$\left(\gamma_{z,mn}^2 + k_0^2\epsilon_r\mu_r\right)\vec{E}_{T,mn} = -\gamma_{z,mn}\nabla_T E_{z,mn} - jk_0 Z_0\mu_r\left(\nabla_T H_{z,mn}\right)\times\vec{z} \tag{1.6}$$

$$\left(\gamma_{z,mn}^2 + k_0^2\epsilon_r\mu_r\right)\vec{H}_{T,mn} = j\frac{k_0}{Z_0}\epsilon_r\left(\nabla_T E_{z,mn}\right)\times\vec{z} - \gamma_{z,mn}\nabla_T H_{z,mn} \tag{1.7}$$

avec Z_0 l'impédance caractéristique du vide.

Les fonctions de la base modale $(\overrightarrow{f_{mn}^{TM}}, \overrightarrow{f_{mn}^{TE}})$ sont décrites à l'aide des relations (1.6) et (1.7). Pour un choix de décomposition en champ électrique transverse, ils s'écrivent sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{f_{mn}^{TM}} = E_0\nabla_T E_{Z,mn} \tag{1.8}$$

$$\overrightarrow{f_{mn}^{TE}} = E_0'\nabla_T H_{Z,mn}\times\vec{z} \tag{1.9}$$

avec E_0 et E_0' les amplitudes des modes permettant de normaliser la base. Ainsi, la détermination des champs $E_{z,mn}$ et $H_{z,mn}$, dites génératrices des modes, conduit à l'identification de la base modale dans le guide d'ondes.

- **Impédances caractéristiques dans un guide d'ondes**

Dans un guide d'ondes, les composantes transverses du champ électromagnétique d'un mode donné sont liées par une impédance caractéristique de mode Z^M définie par :

$$\vec{E}_T = Z^M\,\vec{H}_T\times\vec{z} = Z^M\vec{J}_T \tag{1.10}$$

avec $\vec{J}_T$ le courant de surface. Cette relation est illustrée par le schéma équivalent représenté sur la figure 1.3.

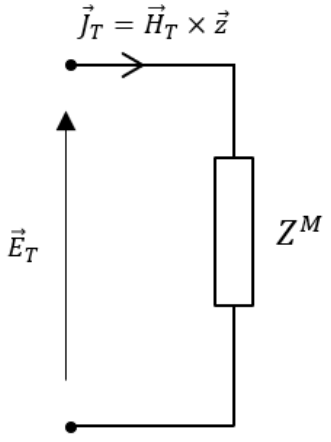


Figure 1.3 - Représentation de l'impédance de mode [12].

En simplifiant les relations (1.6) et (1.7) dans le cas TE ($E_z = 0$), le cas TM ($H_z = 0$) et le cas TEM ($E_z = 0$ et $H_z = 0$), les impédances des modes s'expriment avec les relations suivantes :

$$Z_{TE}^{M} = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{\gamma_{z,mn}} \ , \tag{1.11}$$

$$Z_{TM}^{M} = \frac{\gamma_{z,mn}}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \tag{1.12}$$

$$Z_{TEM}^{M} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}. \tag{1.13}$$

L'impédance caractéristique Z_C du guide d'ondes, quant à elle, est définie par le rapport de la tension U sur le courant I. Dans le cas où le mode fondamental est un mode TEM, le guide contient au moins deux conducteurs disjoints (pour avoir existence de ce mode TEM), ce qui garantit une définition rigoureuse de la tension et du courant dans la bande monomode. L'expression de l'impédance caractéristique sera donc toujours la même et proportionnelle à celle du mode Z_{TEM}^{M}. Cependant, dans les structures où le mode TEM ne se propage pas, il n'existe pas une écriture unique de la tension et du courant [4]. De ce fait, d'autres formulations de l'impédance caractéristique sont adoptées, quand le mode fondamental du guide est un mode TE ou TM. L'approche la plus adéquate est de considérer une proportionnalité entre la tension et le champ électrique transverse du mode, ainsi qu'entre le courant et le champ magnétique transverse [4]. Par conséquent, il est possible d'écrire la tension maximale U_m et le courant maximum I_m pour un mode donné par les relations :

$$U_m = \int_L \left|\vec{E}_T\right| dl \ , \tag{1.14}$$

$$I_m = \int_C \left|\vec{H}_T\right| ds \ , \tag{1.15}$$

avec L le contour qui passe par la ligne maximale du champ et C le contour qui passe par la surface métallique. D'un autre côté, la définition générale de la puissance moyenne durant une période est donnée par :

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\int_S Re(\vec{E}_T \times \vec{H}_T^*)\, d\vec{S} \ , \tag{1.16}$$

où S est la section transversale du guide d'ondes.

Ainsi, en se basant sur les définitions (1.14), (1.15) et (1.16) proposées ci-dessus, une équipe Ukrainienne a listé, dans son article [12] publié en 2021, trois approches alternatives les plus utilisées pour définir l'impédance caractéristique dans la bande monomode du guide. Elles sont données par les relations :

$$Z_{P,I} = \frac{2\langle P\rangle}{I_m^2} = \frac{\int_S Re\left(\vec{E}_T \times \vec{H}_T^*\right) d\vec{S}}{\left(\int_C \left|\vec{H}_T\right| ds\right)^2} \ , \tag{1.17}$$

$$Z_{U,I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\int_L \left|\vec{E}_T\right| dl}{\int_C \left|\vec{H}_T\right| ds} \ , \tag{1.18}$$

$$Z_{P,U} = \frac{U_m^2}{2\langle P \rangle} = \frac{\left(\int_L |\vec{E}_T|\, dl\right)^2}{\int_S Re(\vec{E}_T \times \vec{H}_T^*) d\vec{S}} \quad , \tag{1.19}$$

Par la suite, des estimations théoriques des impédances $Z_{P,I}$, $Z_{U,I}$ et $Z_{P,U}$ sont calculées dans [13] pour les modes fondamentaux des guides d'onde rectangulaires et circulaires. Dans le cas circulaire où le mode fondamental est le mode TE_{11}, les impédances caractéristiques s'écrivent en fonction de l'impédance caractéristique du mode :

$$Z_{P,I} = \frac{\pi}{8}(\chi'_{11} - 1) Z^M_{TE11} \tag{1.20}$$

$$Z_{U,I} = \frac{0{,}801}{J_1(\chi'_{11})} Z^M_{TE11} \tag{1.21}$$

$$Z_{P,U} = \frac{5.133}{\pi(\chi^2_{11} - 1) J_1^2(\chi'_{11})} Z^M_{TE11} \tag{1.22}$$

Les trois impédances estimées sont tracées, sur la figure 1.4, en fonction de la fréquence pour deux exemples de guides d'ondes circulaires de rayon a=35mm et a=25mm.

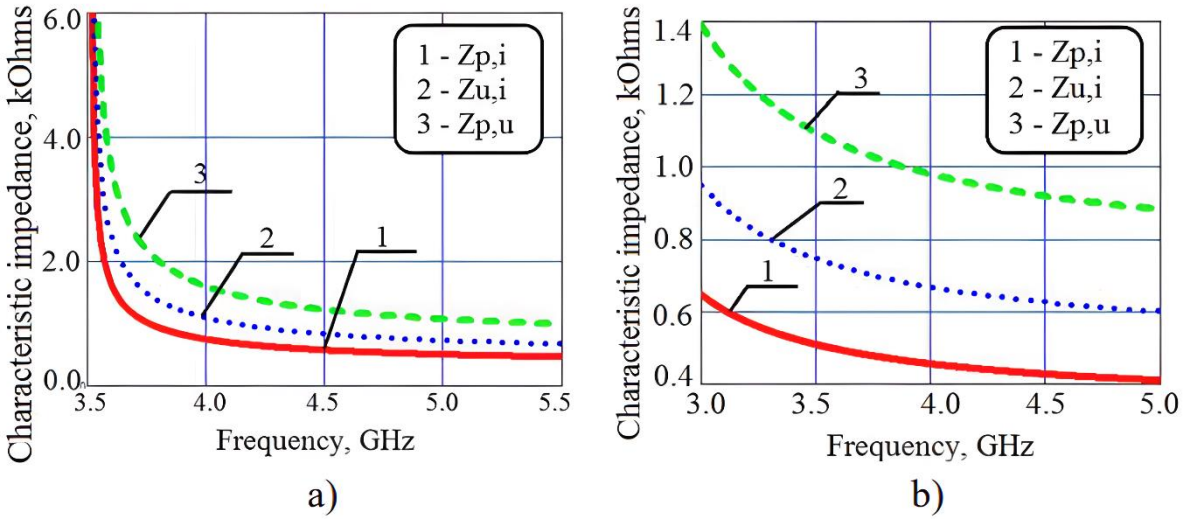


Figure 1.4 - Impédances caractéristiques d'un guide d'ondes circulaire pour le mode fondamental TE_{11} en fonction de la fréquence pour a) a=35mm b) a=25mm [13].

Ces approximations théoriques permettent de décrire les impédances caractéristiques des lignes de transmission dans le cas circulaire. Elles sont importantes pour définir les ports d'entrée d'une structure et pour normaliser les paramètres S d'une structure multiports.

1.1.2 Insertion des parois à métamatériaux

Les propriétés du champ électromagnétique dans un guide d'ondes sont définies par la forme du guide d'ondes et le type de la paroi. Elles sont généralement classées à

partir des permittivité et perméabilité du milieu. Une représentation conventionnelle est celle de la Figure 1.5 qui distingue 4 quadrants : les matériaux des quadrants I, II et IV existent dans la nature, contrairement aux métamatériaux dits gauchers (Left Handed Metamaterials), qui n'ont pas été découverts à ce jour.

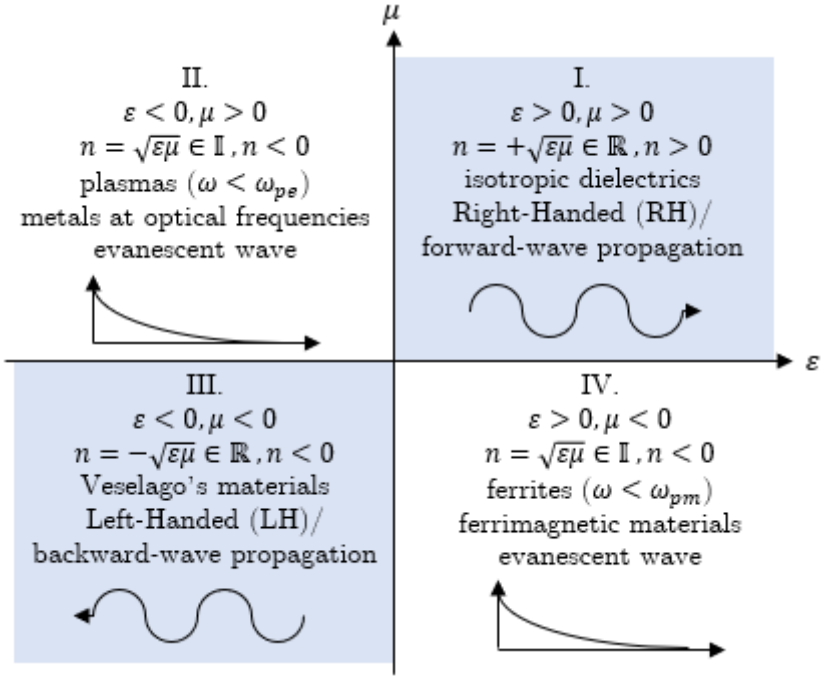


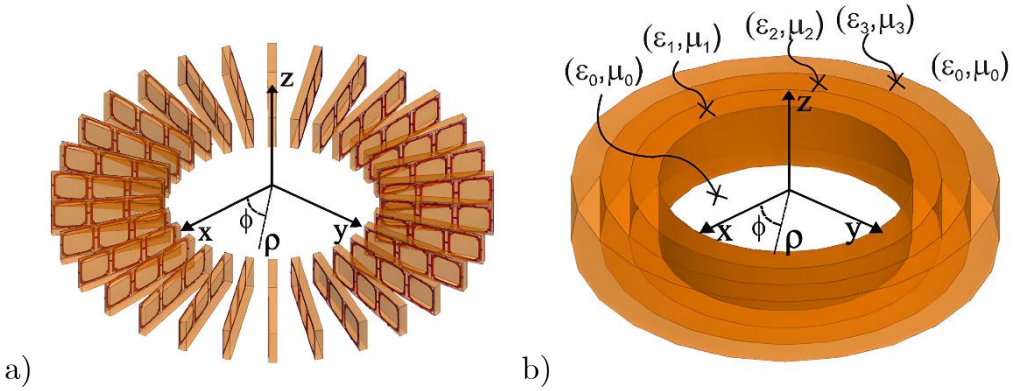
Figure 1.5 -Diagramme des matériaux en fonction du signe de μ et ε, [14].

Après la caractérisation du comportement des matériaux doublement négatifs LHM par V. Veselago [15] en 1967, l'équipe de D. R. Smith est la première à proposer un matériau composite artificiel, vérifiant les propriétés LHM [16]. Ce matériau est composé en arrangeant périodiquement des résonateurs (Split-Ring Resonators) avec des fils minces.

Considérés comme structures inhomogènes, les métamatériaux génèrent des effets spéciaux sur les parois. A cause de leur nature complexe et de leurs propriétés dispersives non linéaires, la description de leurs effets s'avère compliquée et coûteuse en termes de ressources informatiques. Néanmoins, les cellules métamatériaux étant périodiques, de période négligeable devant la longueur d'onde du guide, une homogénéisation de la cellule est possible. Deux approches de modélisation sont possibles : une modélisation soit par un milieu équivalent soit par une surface équivalente.

- **Modélisation par un milieu anisotrope équivalent**

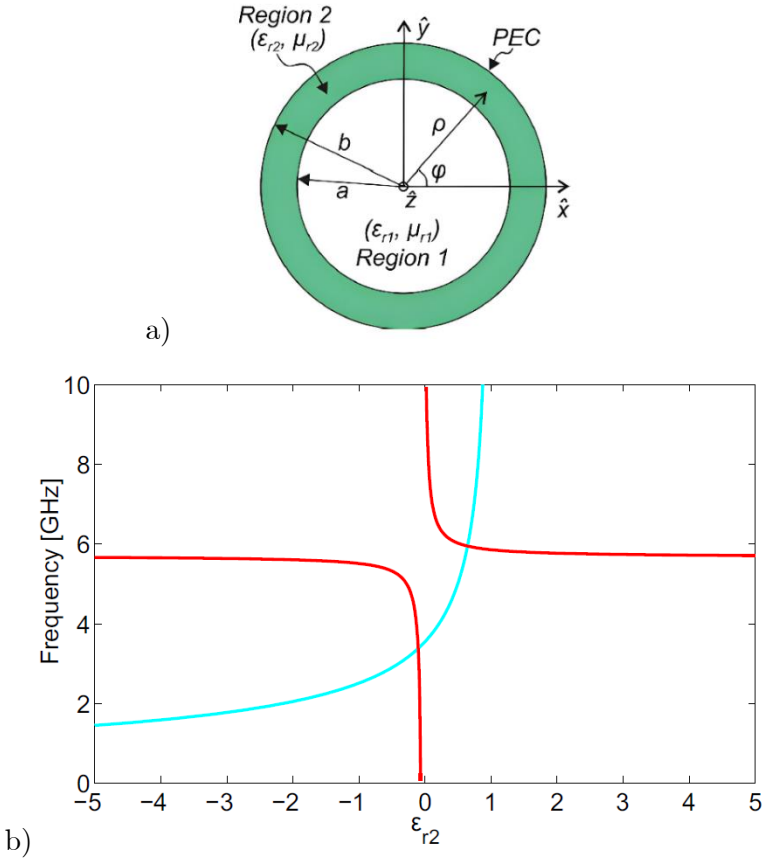
Une approche proposée pour décrire le comportement des parois en métamatériaux est de les remplacer par des milieux anisotropes équivalents décrits par des permittivités et perméabilités effectives, comme illustré dans la figure 1.6.



a) b)

Figure 1.6 - a) Cellules périodiques à métamatériaux 3D b) Modèle anisotrope équivalent [17].

J. G. Pollock et son équipe ont démontré dans leurs travaux [17]-[20] que le comportement des cellules métamatériaux, présentes sur la paroi d'un guide, peut être approché par des tenseurs de permittivités $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et de perméabilités $\bar{\bar{\mu}}$. Ils ont étudié, dans les articles [18] et [19], la propagation du mode fondamental hybride HE_{11} dans un guide circulaire en fonction du type de diélectrique inséré dans la paroi (cf. figure 1.7-a). Le guide d'ondes proposé est de dimensions *b=15mm* et *a=14mm* avec une région intérieure vide ($\varepsilon_{r1} = \mu_{r1} = 1$) et une paroi dispersive de permittivité uniaxiale ε_{r2} et sans réponse magnétique ($\mu_{r2} = 1$).



a)

b)

Figure 1.7 – a) Coupe transversale d'un guide circulaire à paroi diélectrique b) La fréquence de coupure du mode HE_{11} en fonction de la permittivité relative (courbe rouge), permittivité relative effective par le modèle de Drude (courbe cyan) [19].

Une analyse de la fréquence de coupure du mode HE_{11} en fonction de la permittivité ε_{r2} a été effectuée (cf. figure 1.7-b). La courbe (rouge) montre que la fréquence ne varie que légèrement pour des valeurs de permittivités élevées, mais quand ε_{r2} tend vers 0 la variation devient très significative. Ainsi, l'utilisation des métamatériaux de permittivité $\varepsilon_{r2} \to 0^{-}$, appelés ENNZ (*Epsilon-Negative-Near-Zero*), permettent d'exciter le mode HE_{11} à des fréquences bien plus basses sans être contraint à augmenter la taille du guide d'ondes. Le choix de la valeur de ε_{r2} doit respecter le comportement dispersif décrit par le modèle de Drude (la courbe cyan). Le choix adéquat est la première intersection des deux courbes ($\varepsilon_{r2} = -0.09$) qui caractérise un matériau ENNZ. Dans ce cas, la fréquence de coupure du mode HE_{11} est réduite à $f_c = 3.381\ GHz$ comparé à la seconde intersection qui correspond un guide classique à paroi diélectrique ($\varepsilon_{r2} = 0.6438$) de fréquence de coupure $f_c = 5.958 GHz$.

- **Modélisation par des impédances de surface équivalentes**

Considérés comme des parois anisotropes, les métamatériaux peuvent être modélisés par des impédances de surface équivalentes. Ainsi le comportement du champ électromagnétique sur la paroi à métamatériaux est pris en compte dans les conditions aux limites imposées par ces impédances. Dans le cas d'une géométrie cylindrique, une impédance de surface équivalente est positionnée au niveau d'un rayon noté *a*. Dans l'un des premiers travaux sur les guides d'ondes à parois anisotropes [21] publié en 1955, une perturbation générée sur la paroi a été décrite par deux impédances de surface : une axiale Z_Z et une circonférentielle Z_ϕ, définies en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) par :

$$Z_z = Z_s(\phi, \bar{z}) = -\left.\frac{E_z}{H_\phi}\right|_{r=a} \tag{1.23}$$

$$Z_\phi = Z_s(\bar{\phi}, z) = \left.\frac{E_\phi}{H_z}\right|_{r=a} \tag{1.24}$$

Par la suite, H. C. Minnett et al. [22] ont caractérisé les guides d'ondes circulaires à paroi anisotrope idéale par une équation de dispersion (1.25). Les conditions limites sont traduites par les impédances équivalentes définies précédemment.

$$\left(\frac{u_a J_m(u_a)}{ka}\right)^2 \frac{X_z}{X_\xi} - \frac{u_a J_m(u_a) J'_m(u_a)}{ka}\left(X_\xi - \frac{1}{X_z}\right) + \left(\frac{m J_m(u_a)}{u_a}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{u_a}{ka}\right)^2\right) - \left(J'_m(u_a)\right)^2 = 0 \tag{1.25}$$

avec X_z et X_ξ des réactances normalisées définies par $(X_z, X_\xi) = \left(-jZ_z/Z_0\,, -jZ_\xi/Z_0\right)$ où $(Z_z,\ Z_\xi = Z_\phi)$ sont données par (1.23) et (1.24), a le rayon de la paroi et $u_a = k_c a$ avec k_c la constante de coupure, m l'ordre du mode et k la constante de propagation dans le vide.

En résolvant l'équation de dispersion, le comportement des modes d'ordre $m = 1$, qui sont solutions de (1.25), est analysé en fonction du choix des réactances normalisées (X_z, X_ξ) dans la figure 1.8. Les cas limites $(X_z = X_\xi = 0)$ et $(X_z = X_\xi = \infty)$ caractérisent les modes classiques TE, TM dans un guide PEC (Perfect Electric Conductor) et un guide PMC (Perfect Magnetic Conductor). Pour les autres cas, les modes qui se propagent peuvent être hybrides. Pour chaque combinaison (X_z, X_ξ), il y a une combinaison duale $(-1/X_z, -1/X_\xi)$ avec des caractéristiques dispersives identiques. D'autre part, les modes qui respectent la condition des modes hybrides équilibrés $(X_z X_\xi = -1)$ se trouvent sur les lignes pointillées en gras. Cette condition, élaborée la 1ère fois dans [23], est importante pour optimiser les surfaces à métamatériaux [24]-[25]. Elle s'est montrée très efficace pour améliorer les performances en rayonnement [26]-[27].

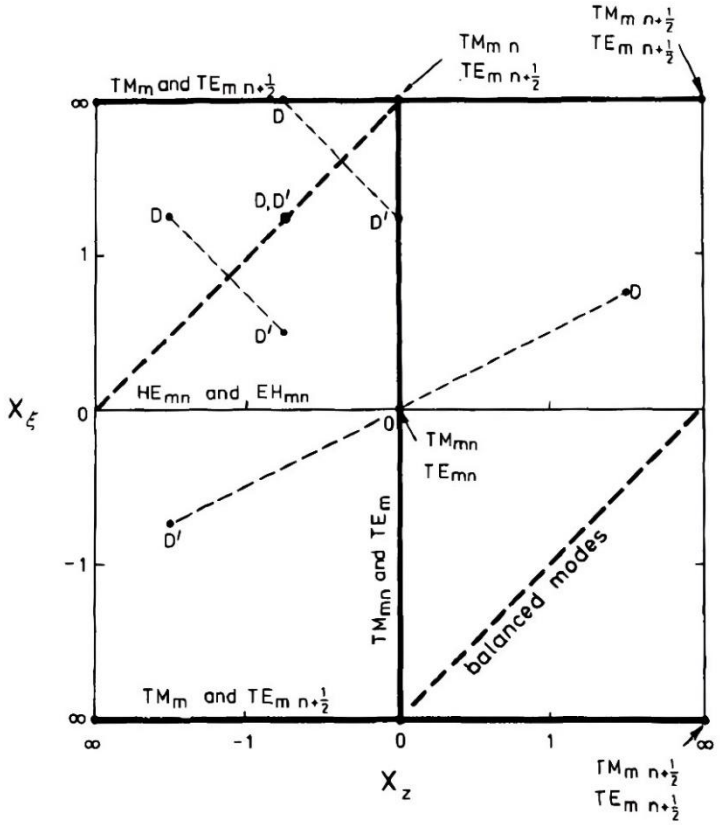


Figure 1.8 - Diagramme des réactances (X_z, X_ξ). L'échelle est linéaire dans [-1,1] et de la forme $\pm 2 - 1/X$ pour $|X| > 1$. Les surfaces duales sont notées respectivement D et D' [22].

Par la suite, L. James a réalisé un convertisseur du mode TE_{11} au mode hybride HE_{11} grâce à des transitions de guides d'ondes circulaires corrugués [28]-[29]. Il s'est servi de l'équation de dispersion développée dans [22] pour analyser le comportement des modes hybrides dans les régions à parois corruguées. Dans ce cas, la paroi est invariante par rapport à l'axe de révolution, elle est donc caractérisée seulement par une impédance axiale. Une démarche a été établie dans [28] pour évaluer la nature des modes et leurs coupures $X = k_c a$ en fonction de la variation de la réactance χ_z. Ainsi, les coupures X_2 et X_3 des deux premiers modes solutions de l'équation de dispersion

(1.25) sont tracées sur la figure 1.9. Au début, à $\chi_z = 0^-$, les deux modes dominants sont respectivement les modes TM_{11} et TE_{12}. La diminution de χ_z engendre une variation rapide de X_2 dans le sens réel positif et une variation lente de X_3 dans l'autre sens. A partir de la valeur $\chi_z = -3$, les coupures des modes deviennent complexes jusqu'à atteindre les points où les modes EH_{12} et HE_{12} vérifient la condition hybride équilibrée (quand $\chi_z \to -\infty$). Ensuite, quand χ_z diminue à partir de $+\infty$, les deux modes se comportent à l'opposé, de telle sorte que le mode de coupure X_2 tend vers le mode TE_{12} et le mode de coupure X_3 tend vers le TM_{12}. Seuls les deux premiers modes sont analysés dans cet article mais les autres modes d'ordres plus élevés se comportent de la même manière. Par ailleurs, la structure complète utilisée pour convertir le TE_{11} en HE_{11} [28] contient plusieurs transitions de guides d'ondes. Les discontinuités seront donc étudiées en détail dans la partie 1.2.2.

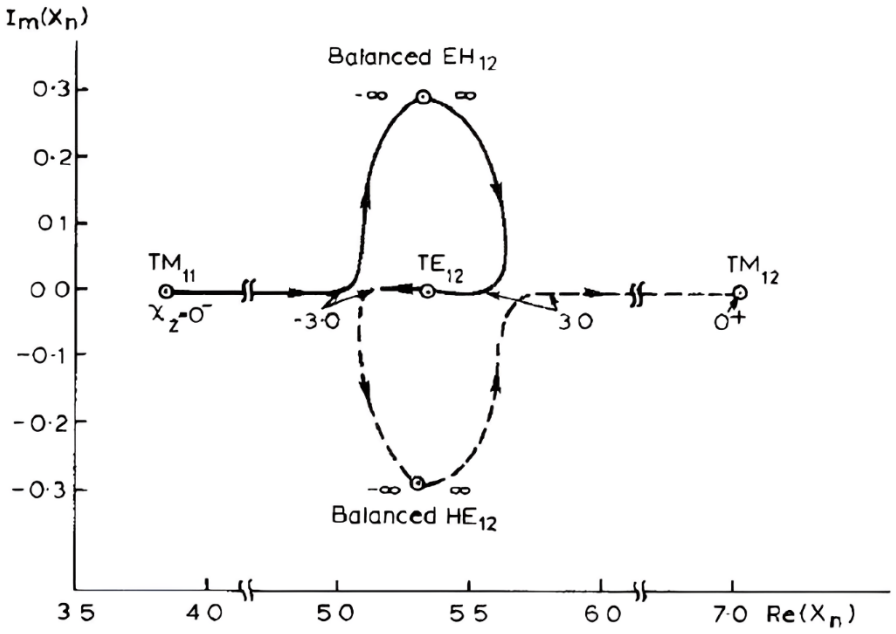


Figure 1.9 - Les coupures des modes hybrides en fonction de la réaction de la surface longitudinale χ_z. ——— la coupure X_2 et ------ la coupure X_3 [28].

Plus récemment, en s'inspirant du travail de Minnett et al [22], la Théorie Modale élargie (TME) a été développée dans la thèse de B. Byrne [30]. Elle a comme objectif de caractériser les guides d'ondes rectangulaires et circulaires à parois métamatériaux. B. Byrne a mis en place une résolution modale analytique pour identifier les modes propagatifs dans le guide d'ondes en représentant la paroi par des impédances de surface. Pour valider cette méthodologie, un algorithme a été réalisé pour tracer les diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=0, dans le cas d'un guide rectangulaire à paroi anisotrope réelle 2D. Par la suite, L. Kuhler, dans sa thèse [31], a associé la TME à la méthode FEM pour étudier les guides d'ondes circulaires à paroi anisotrope réelle périodique. Dans un premier temps, un outil numérique a été développé pour tracer les diagrammes de dispersion des modes propagatifs d'ordre (m=0) pour le cas 2D (invariance par rapport à l'axe de révolution). La démarche a

été généralisée à des structures périodiques 3D pour inclure les modes propagatifs d'ordres plus élevés $m \geq 1$. La méthode TME sera détaillée dans le chapitre 2.

1.2 Discontinuités dans les structures guidées

Les problèmes de discontinuités dans les structures guidées apparaissent quand plusieurs guides à géométries différentes sont connectés. Pour faciliter la description et la résolution du système, une modélisation par un circuit équivalent est possible. Ensuite, la méthode de raccordement modal (Mode-Matching) est utilisée pour exprimer les composants du circuit et les relations de passage en fonction des modes dans la structure. En effet, elle permet de décrire le problème à la discontinuité par projection sur les modes des différents guides. Ensuite, dès que les discontinuités sont caractérisées, les blocs de la structure peuvent se mettre en cascade pour déterminer les paramètre S globaux du problème.

1.2.1 Résolution par circuits équivalents

Les dispositifs micro-ondes passifs contenant des guides d'ondes (par exemple des coupleurs, filtres ou résonateurs) peuvent être modélisés par des circuits équivalents pour simplifier la résolution [12] et [32]-[34]. Les composants du circuit sont représentés par des sources (de tension ou de courant) ou des opérateurs (admittances ou impédances) afin de caractériser les différentes parties de la structure.

- **Représentation des composants du circuit**

Dans un circuit équivalent, une excitation électrique est représentée par une source de tension $\vec{E}$ associée à un opérateur impédance sous forme d'un modèle de Thévenin et une excitation magnétique est représentée par une source de courant $\vec{J} = \vec{H} \times \vec{n}$ associée à un opérateur admittance sous la forme d'un modèle de Norton. En outre, dans un milieu homogène où le champ électrique et le champ magnétique sont liés, ce milieu peut être considéré comme un dipôle et représenté par un opérateur admittance $\hat{Y}$ ou impédance $\hat{Z}$. Cette notion d'opérateur peut être généralisée pour représenter un espace délimité par plusieurs surfaces (opérateur multi-ports). Soit l'exemple d'un milieu délimité par deux surface S_1 et S_2, les champs électromagnétiques vus au niveau des deux surfaces respectives, $(\vec{E}_1, \vec{J}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{J}_2)$, sont liés par la relation de passage :

$$\begin{pmatrix} \vec{J}_1 \\ \vec{J}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

cet opérateur quadripôle est illustré dans la figure 1.10 :

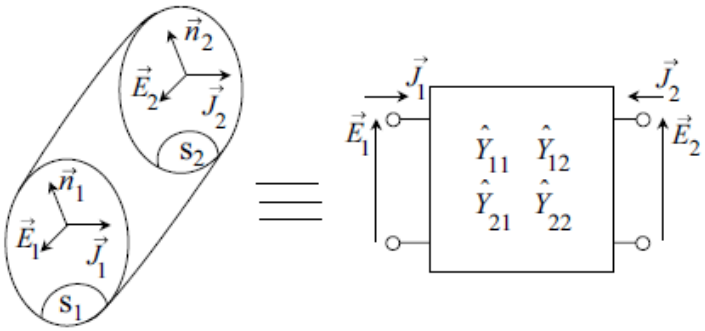


Figure 1.10 - Opérateur admittance d'un quadripôle [34].

De même, les relations de passage imposées au champ électromagnétique à travers une surface D, sont représentées par un quadripôle, qui est constitué d'un nouveau type de source, appelée source virtuelle. Celle-ci joue le rôle d'un interrupteur commandé et ne fournit aucune puissance $\langle \vec{E} | \vec{J} \rangle = 0$. En général, cette source est représentée par le mode fondamental du guide de la même section à mur électrique (m.e.) si la résolution est en champ électrique et à mur magnétique (m.m.) si la résolution se fait en courant électrique (cf. figure 1.11).

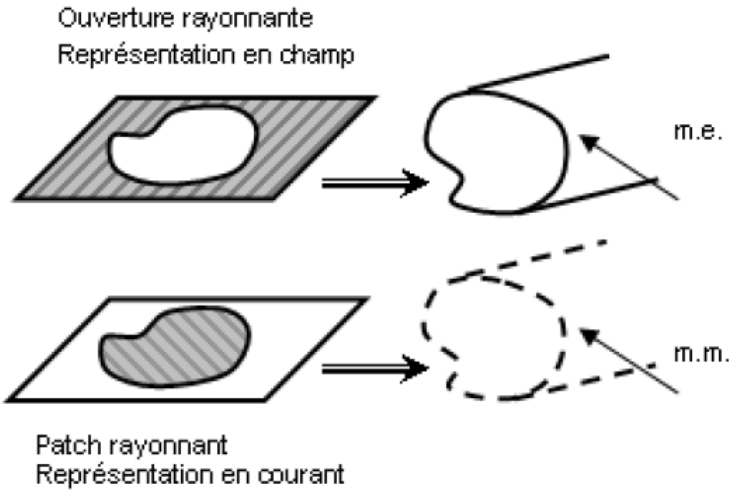


Figure 1.11 – La fonction d'essai en fonction de la représentation [12].

Pour illustrer cette approche de circuit équivalent, prenons l'exemple d'un système S = « Région 1 ∪ Surface D ∪ Région 2 » [33]. Les deux régions sont homogènes et caractérisées par les opérateurs $\hat{Z}_1$ et $\hat{Z}_2$. Supposons que la surface D, séparant les deux régions, contienne deux domaines complémentaires : un domaine D_I, diélectrique et sans perte, donc représenté par une source virtuelle de tension et un domaine D_s décrit par une relation de passage $\vec{E} = -Z_s \vec{J}$. Le schéma équivalent du système S est représenté dans la figure 1.12 :

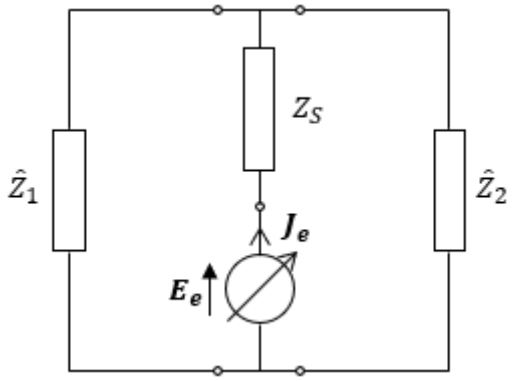


Figure 1.12 – Représentation du système S par un schéma équivalent [33].

- **Résolution par la méthode de Galerkin**

Pour résoudre le circuit équivalent, les lois de Kirchhoff d'un circuit électrique conventionnel sont appliquées. La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique se traduit par une loi des nœuds et la continuité du champ électrique par une loi des mailles. Par conséquent, l'application de ces lois permet de trouver une équation décrivant la relation entre les sources réelles et virtuelles et leurs grandeurs duales [12], [32]-[33] :

$$\begin{pmatrix} grandeurs\ duales \\ des\ sources\ réelles \\ et\ virtuelles \end{pmatrix} = [\widehat{H}] \begin{pmatrix} sources \\ réelles \\ et\ virtuelles \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Ensuite, pour exprimer les conditions limites à la discontinuité, la méthode de Galerkin est utilisée. En effet, après une décomposition modale des sources réelles et des sources virtuelles, une projection de l'équation (1.27) est faite sur les modes fondamentaux des sources réelles et sur les fonctions d'essai des sources virtuelles. Ainsi, en connaissant les bases modales des sources, le calcul des produits scalaires engendrés dans l'opérateur $\widehat{H}$ permet la résolution du problème.

Considérons l'exemple d'une discontinuité non épaisse dans un guide d'ondes excité à l'entrée et à la sortie par deux sources réelles $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ [12]. La discontinuité est modélisée par une source virtuelle $\vec{g}_e$. Ainsi, l'application de la méthode Galerkin sur l'équation (1.27) donne la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{f}_1 | \widehat{H}_{11} \vec{f}_1 \rangle & \langle \vec{f}_1 | \widehat{H}_{12} \vec{f}_2 \rangle & \langle \vec{f}_1 | \widehat{H}_{13} \vec{g}_e \rangle \\ \langle \vec{f}_2 | \widehat{H}_{21} \vec{f}_1 \rangle & \langle \vec{f}_2 | \widehat{H}_{22} \vec{f}_2 \rangle & \langle \vec{f}_2 | \widehat{H}_{23} \vec{g}_e \rangle \\ \langle \vec{g}_e | \widehat{H}_{31} \vec{f}_1 \rangle & \langle \vec{g}_e | \widehat{H}_{32} \vec{f}_2 \rangle & \langle \vec{g}_e | \widehat{H}_{33} \vec{g}_e \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ v_e \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

La 3ème équation du système permet d'écrire v_e directement en fonction de I_1 et I_2 , ce qui permet de réduire (1.28) en :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{f}_1 | \hat{H}_{11} \vec{f}_1 \rangle - \dfrac{\langle \vec{f}_1 | \hat{H}_{13} \vec{g}_e \rangle \langle \vec{g}_e | \hat{H}_{31} \vec{f}_1 \rangle}{\langle \vec{g}_e | \hat{H}_{33} \vec{g}_e \rangle} & \langle \vec{f}_1 | \hat{H}_{12} \vec{f}_2 \rangle - \dfrac{\langle \vec{f}_1 | \hat{H}_{13} \vec{g}_e \rangle \langle \vec{g}_e | \hat{H}_{32} \vec{f}_2 \rangle}{\langle \vec{g}_e | \hat{H}_{33} \vec{g}_e \rangle} \\ \langle \vec{f}_2 | \hat{H}_{21} \vec{f}_1 \rangle - \dfrac{\langle \vec{f}_2 | \hat{H}_{23} \vec{g}_e \rangle \langle \vec{g}_e | \hat{H}_{31} \vec{f}_1 \rangle}{\langle \vec{g}_e | \hat{H}_{33} \vec{g}_e \rangle} & \langle \vec{f}_2 | \hat{H}_{22} \vec{f}_2 \rangle - \dfrac{\langle \vec{f}_2 | \hat{H}_{23} \vec{g}_e \rangle \langle \vec{g}_e | \hat{H}_{32} \vec{f}_2 \rangle}{\langle \vec{g}_e | \hat{H}_{33} \vec{g}_e \rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Les produits scalaires de la matrice réduite traduisent les raccordements modaux engendrés par les relations de passage entre les régions. Ils sont calculés à l'aide de la technique de Mode-Matching présentée dans le paragraphe suivant.

1.2.2 Technique de Mode-Matching

Les premiers travaux sur la technique du Mode-Matching (MM) ont été menés par P. J. Clarricoats dans les années 60. Dans son article [35] publié en 1967, il a proposé une solution numérique aux problèmes de discontinuité dans des guides d'ondes. Il a accordé une attention particulaire aux discontinuités dans le plan transverse à la direction de propagation (cf. figure 1.13).

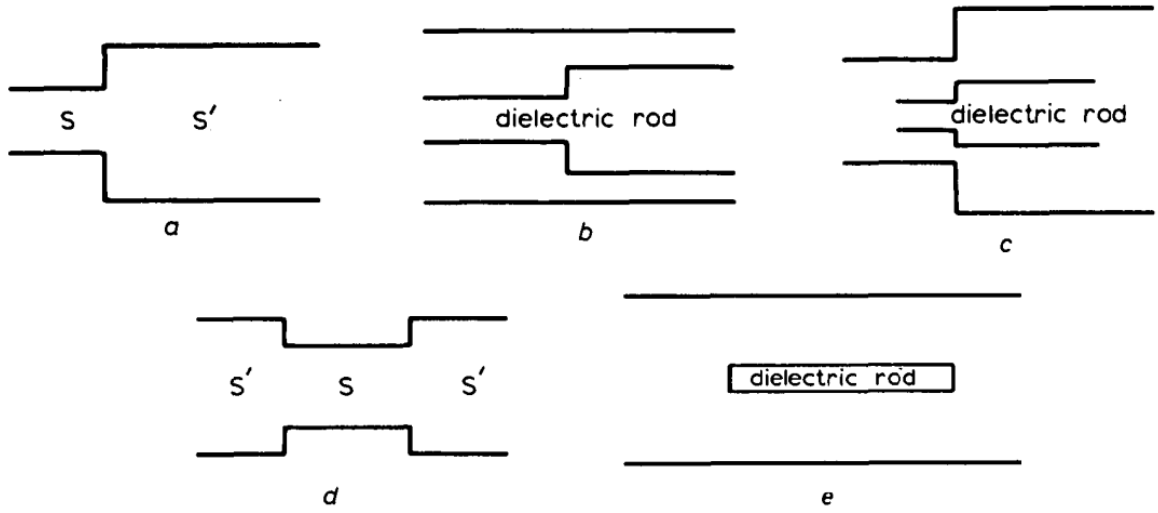
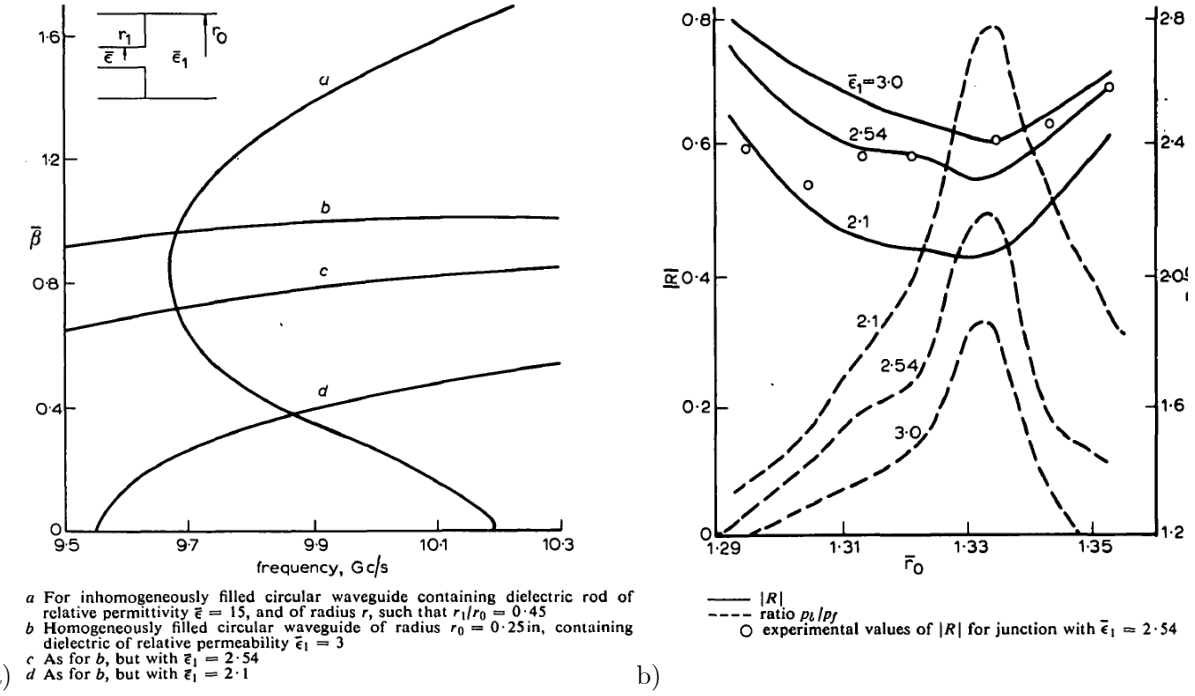


Figure 1.13 - Discontinuités transversales proposées dans [35] : a) changement de section, b) changement de section dans un milieu diélectrique, c) combinaison des jonctions a et b, d) double jonction dans un milieu homogène et e) double jonction dans un milieu inhomogène.

L'idée principale est d'exprimer les champs électriques et magnétiques transverses en fonction des modes existants dans les deux guides. La condition de continuité des composantes transverses à l'ouverture de la discontinuité donne lieu à deux équations permettant ainsi de retrouver les coefficients de réflexion et de transmission des modes. L'un des exemples étudiés dans l'article [33] est le cas d'un guide d'ondes circulaire contenant une tige diélectrique. La transition se fait entre un milieu homogène de permittivité $\bar{\varepsilon_1}$ contenant des modes TE_{11} et un milieu inhomogène de permittivité $\bar{\varepsilon}$ supportant la propagation des modes gauchers BW (*Backward-Waves*). Le schéma de la structure, les diagrammes de propagation et les résultats de cet exemple sont présentés sur la figure 1.14. Les coefficients β, $|R|$ et p_b/p_f sont tracés pour trois valeurs différentes de $\bar{\varepsilon_1}$, avec β la phase normalisée, R le coefficient de

réflexion du mode TE_{11} et p_b/p_f le rapport de puissance entre les modes gauchers BW et les modes droitiers classiques FW (*Forward-Waves*). Les résultats montrent que la diminution de la valeur de la permittivité $\bar{\varepsilon_1}$ permet de réduire le niveau de la réflexion et de maximiser le couplage avec les modes de type BW (figure 1.14.b). Néanmoins, cela a pour conséquence une augmentation de la fréquence de coupure dans la région homogène, ce qui peut entrainer un dépassement de la fréquence limite de propagation des modes BW (figure 1.14.a). Il convient de trouver une permittivité optimale qui garantit une meilleure adaptation tout en respectant la fréquence limite du milieu inhomogène.



a For inhomogeneously filled circular waveguide containing dielectric rod of relative permittivity $\bar{\varepsilon}$ = 15, and of radius r, such that r_1/r_0 = 0·45
b Homogeneously filled circular waveguide of radius r_0 = 0·25in, containing dielectric of relative permeability $\bar{\varepsilon}_1$ = 3
c As for b, but with $\bar{\varepsilon}_1$ = 2·54
d As for b, but with $\bar{\varepsilon}_1$ = 2·1

a) b)

Figure 1.14 – a) Coefficient de phase normalisé β en fonction de la fréquence b) coefficient $|R|$ et le ratio p_b/p_f en fonction de la fréquence normalisée [35].

Depuis lors, de nombreux articles ont suivi [28]-[29],[36]-[41]. G. L. James et B. M. Thomas ont travaillé, dans leurs articles [28] et [29], sur des convertisseurs du mode TE_{11} au mode hybride HE_{11} effectués grâce à des transitions des guides d'ondes circulaires corrugués. L'objectif principal est d'optimiser la structure afin de réaliser une conversion maximale du mode (Réflexion minimale du mode TE_{11}). La procédure adoptée consiste d'abord à calculer individuellement les paramètres S de chaque changement de section et de chaque court-circuit qui les sépare. Ensuite, il est nécessaire de mettre les sections progressivement en cascade pour calculer les paramètres S permettant de déterminer les propriétés de propagation du mode converti. Le schéma du convertisseur de mode analysé est présenté dans la figure 1.15. Pour une transition entre deux régions I et II de section respectives s_I et s_{II}, les conditions de continuité du champ transverse à la discontinuité et les conditions limites à chaque région permettent de déterminer la matrice des paramètres S en fonction des composantes transverses des modes dans I et II par la relation (1.30) :

$$S_{11} = [R + P^T Q^{-1} P]^{-1}[R - P^T Q^{-1} P]$$
$$S_{12} = 2[R + P^T Q^{-1} P]^{-1} P^T$$
$$S_{21} = 2[Q + P^T R^{-1} P]^{-1} P$$
$$S_{22} = -[Q + P R^{-1} P^T]^{-1}[R - P R^{-1} P^T] \quad (1.30)$$

avec P une matrice de taille $N \times M$, Q une matrice diagonale de taille $N \times N$ et R une matrice diagonale de taille $M \times M$. Les coefficients de ces matrices sont donnés par :

$$P_{mn} = \int_{S_I} e_{m,I} \times h_{n,II}\, ds$$
$$Q_{mn} = \int_{S_{II}} e_{n,II} \times h_{n,II}\, ds$$
$$R_{mn} = \int_{S_I} e_{m,I} \times h_{m,I}\, ds \quad (1.31)$$

où $e_{m,I}$, $h_{m,I}$, $e_{n,II}$ et $h_{n,II}$ sont respectivement les champs transverses modaux dans les régions I et II.

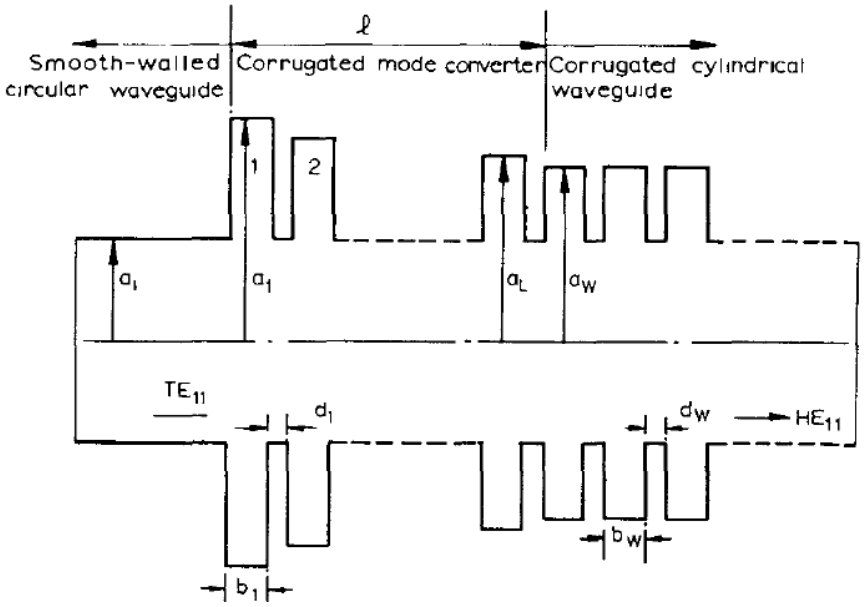


Figure 1.15 - Convertisseur du mode TE_{11} au mode HE_{11} [28].

La caractérisation des modes hybrides des régions corruguées est effectuée dans l'article [23] et la démarche précédente est explicitée dans la partie 1.1.2 du manuscrit. Les pertes du mode TE_{11} dans le convertisseur sont calculées et analysées dans la figure 1.16 pour quatre cas d'étude différents : i) sans la région de la conversion, ii) augmentation progressive de la profondeur des corrugations de la région de la conversion, iii) diminution progressive de la profondeur et iv) variation du ratio $\delta = \frac{b_W}{b_W + d_W}$ en gardant la profondeur constante. Les résultats montrent qu'il est nécessaire d'adopter la démarche de type iii) basée sur la diminution des profondeurs des corrugations pour réaliser une conversion efficace.

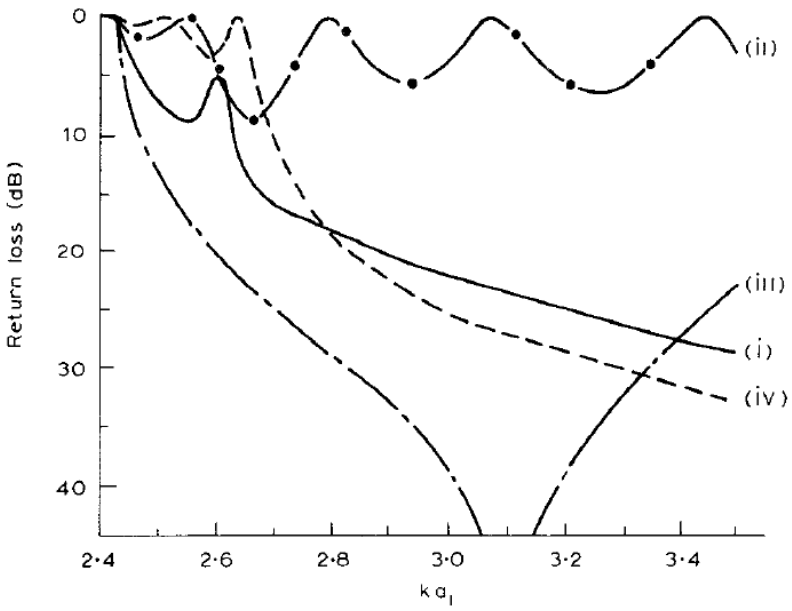


Figure 1.16 - Les pertes théoriques d'un convertisseur de mode placé entre un guide d'onde à paroi lisse et un guide d'ondes corrugué pour 4 cas différents [28].

Pour valider les résultats théoriques et qualifier la réflexion, un prototype a été réalisé. La structure mesurée est présentée sur la figure 1.17 ainsi que les résultats des pertes en dB. Une étude d'optimisation a été faite sur les dimensions et le nombre de corrugations de la partie de conversion du mode (II et IV) pour atteindre le meilleur niveau de conversion possible sur une large bande. L'analyse des résultats (cf. figure 1.17-b) montre la nécessité d'utiliser des convertisseurs de modes (II et IV) entre les guides d'ondes à paroi lisse (I et V) et le guide corrugué (III) afin d'adapter au mieux la transmission du mode car, sans les convertisseurs, les pertes sont élevées.

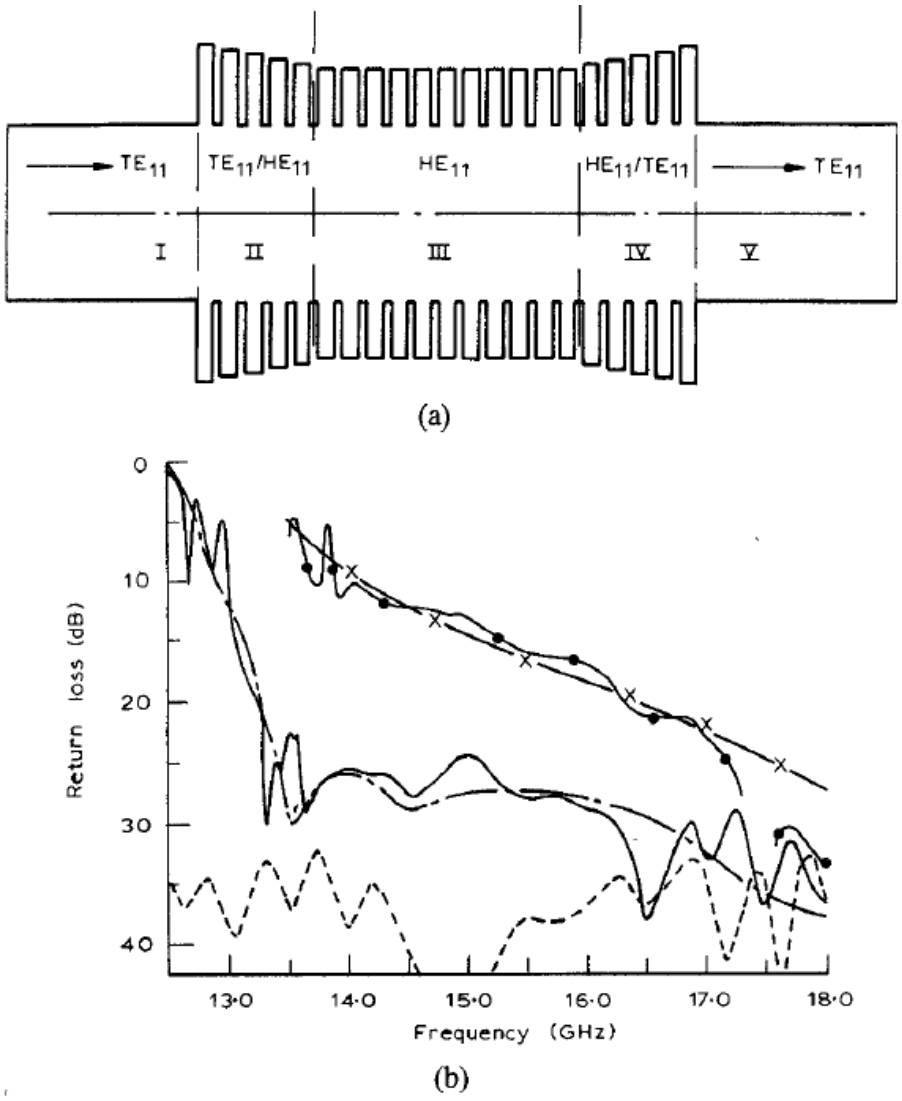


Figure 1.17 - Les résultats expérimentaux du convertisseur optimisé a) coupe transversale du guide d'ondes complet, b) pertes de réflexion : ——— mesurées avec le guide d'ondes (a). — -— théoriques avec le guide d'ondes (a). —●— mesurées sans les convertisseurs II et IV. —×— théoriques sans les convertisseurs II et IV. ------ mesurées sans les sections corruguées II III et IV [25].

Dans des structures de nature plus complexe, l'identification des modes devient plus difficile, un recours aux méthodes numériques est envisageable pour caractériser les modes. Dans ce contexte, des techniques hybrides Mode-Matching/Eléments finis (MM/FEM) [42] sont utilisées pour concevoir des guides d'ondes à plusieurs blocs. Ce sont des techniques adaptées à une utilisation orientée vers l'optimisation de la structure. Dans ce but, des outils de conception assistés par ordinateur (CAO) sont explorés afin d'automatiser le processus de conception des composantes souhaitées. Des exemples applicatifs ont démontré l'efficacité et la flexibilité de ce type de méthode, comme des transitions de guides d'ondes circulaires à rectangulaires, des filtres à résonateurs [42] ou encore des filtres bi-modes [43], [45].

L'efficacité de cette méthode hybride est illustrée par un exemple de conception d'un filtre à cavités bi-mode [45]. Le filtre présenté, dans cet article, est sous la forme d'un guide d'ondes circulaire excité par deux guides d'ondes rectangulaires. Les deux parties sont couplées par des iris rectangulaires avec des coins arrondis (figure 1.18). Dans ce cas, le calcul de la solution modale sur la surface transversale est fait par une résolution eigenmode 2D avec la FEM quand la solution analytique n'existe pas. D'un autre côté, la technique du Mode-Matching permet de calculer la matrice des paramètres S (General Scattering Matrix GSM) à la discontinuité [46-47]. En conséquence, le couplage des composantes transverses du champ électromagnétique à l'interface de la discontinué, représentée dans la figure 1.18, donne un système d'équations à résoudre pour trouver les coefficients de transmission et de réflexion liant les ondes de puissance incidentes $a_{I,II}$ à l'accès I ou II et réfléchies $\mathrm{b_{I,II}}$ à l'accès I ou II en fonction des modes numériques calculés avec la FEM.

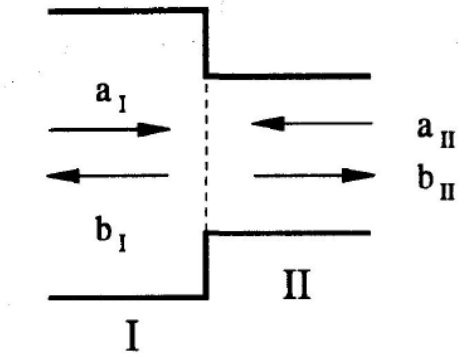


Figure 1.18 - Modélisation de la discontinuité entre les régions I et II [45].

Ainsi, le calcul à l'interface donne un système matriciel (1.32) à résoudre. Une explication plus détaillée de la méthode est proposée dans la partie théorique de l'article [45].

$$\begin{aligned} D_I(a_I + b_I) &= CD_{II}(a_{II} + b_{II}) \\ C^T {D_I}^{-1}(a_I + b_I) &= C{D_{II}}^{-1}(a_{II} + b_{II}) \end{aligned} \tag{1.32}$$

avec

$$C_{mn} = \begin{cases} \iint_{\Omega_{II}} \nabla_t \psi_m^{HI} \, \nabla_t \psi_m^{HII} d\Omega \\ \iint_{\Omega_{II}} \nabla_t \psi_m^{HI} (\vec{u}_z \times \nabla_t \psi_m^{EII}) \, d\Omega \, (=0) \\ \iint_{\Omega_{II}} (\vec{u}_z \times \nabla_t \psi_m^{EI}) \nabla_t \psi_m^{HII} \, d\Omega \\ \iint_{\Omega_{II}} \nabla_t \psi_m^{EI} \, \nabla_t \psi_m^{EII} d\Omega \end{cases}, \quad D_{I,II} = diag \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega \mu_{I,II}}{\beta_{I,II}^H}} \\ \sqrt{\frac{\omega \mu_{I,II}}{\beta_{I,II}^H}} \end{pmatrix}$$

où H et E représentent des modes TE et TM respectivement, Ω_{II} est le volume de la région II, $\mu_{I,II}$ est la perméabilité à la discontinuité, $\beta_{I,II}^{H,E}$ sont les constantes de propagations et $\psi_m^{H,E}$ sont les potentielles scalaires. Les intégrales modales C_{mn} sont calculées avec la FEM.

Le couplage souhaité entre les modes est obtenu en plaçant des iris de manière asymétrique (figure 1.19). Dans l'exemple choisi, le résonateur circulaire de dimensions (diamètre 20mm, longueur 25.5mm) est couplé à deux guides rectangulaires WR75, tournés de 90° l'un par rapport à l'autre, par des iris de dimensions (largeur 5.3mm×5mm, épaisseur 0.15mm). L'excitation est positionnée au centre du résonateur et tournée de 45°, elle permet de générer les deux modes TE_{11}.

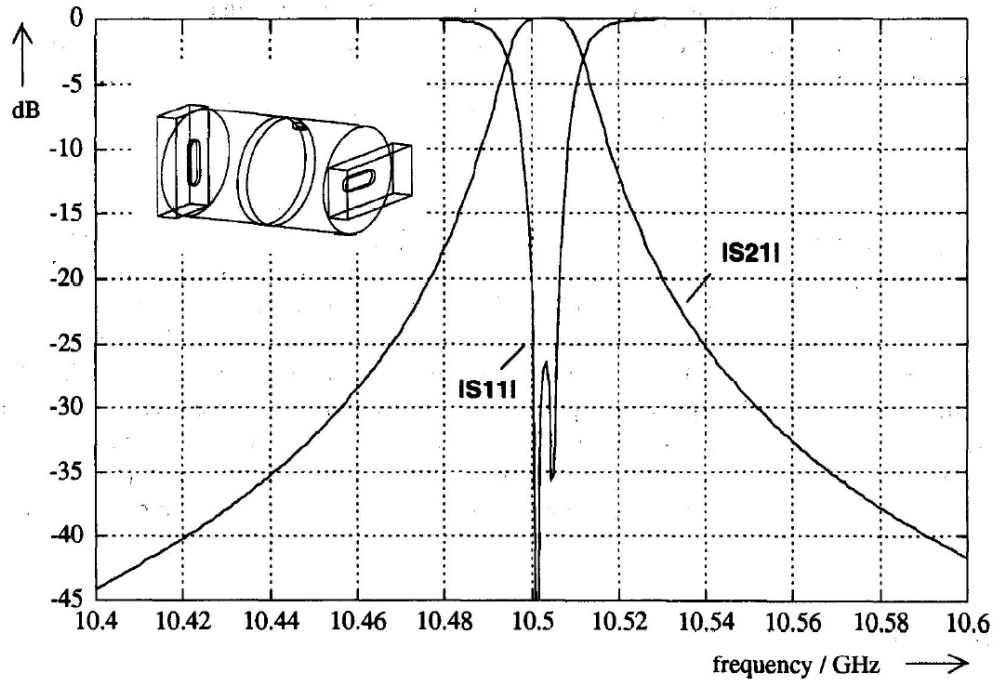


Figure 1.19 - Filtre bi-mode avec un guide d'ondes circulaire [45]

Le couplage est fait avec des modes ayant des fréquences de coupure proches de la fréquence centrale du filtre. Les résultats des paramètres S (cf. figure 1.19) montrent que la bande de transmission est très étroite permettant la réalisation d'un filtre bi-mode. La méthode hybride MM/FEM a montré son efficacité pour d'autres cas d'application, permettant de résoudre des problèmes de discontinuité avec des interfaces arbitraires [48]-[50]. Elle combine la flexibilité de la méthode FEM pour identifier la propagation dans des structures complexes et l'efficacité de la MM pour caractériser le couplage des modes à la discontinuité.

De même, la technique du Mode-Matching peut être couplée à la BCM (Boundary Contour Method) pour étudier les discontinuités aux ouvertures rayonnantes [43],[51]-[53]. Dans l'article [43], la méthode est testée pour calculer le rayonnement d'une antenne cornet (cf. figure 1.20). Les résultats du rayonnement dans le plan E, dans le plan H et pour la polarisation croisée montrent un bon accord avec les mesures.

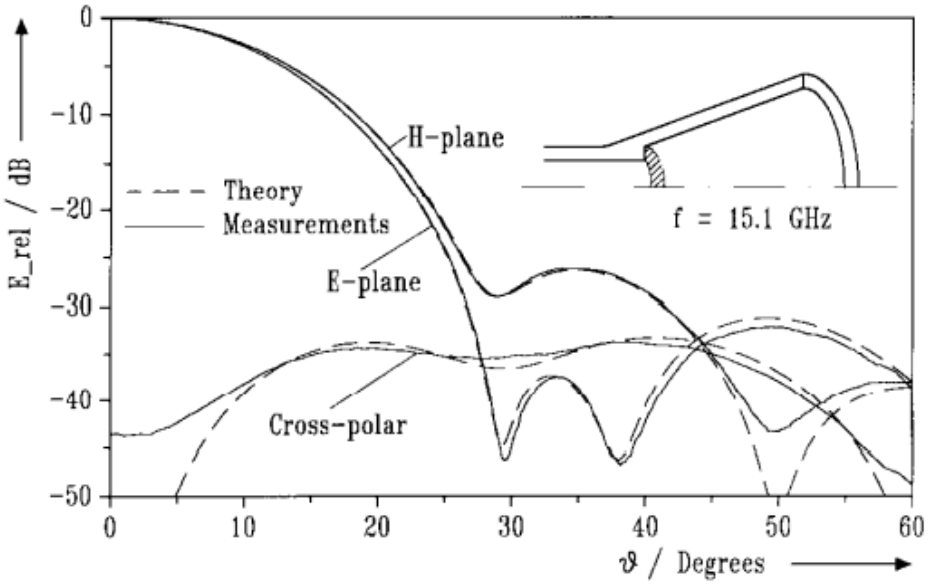


Figure 1.20 - Rayonnement de l'antenne cornet calculé avec la BCM et comparaison avec les mesures à la fréquence 15.1GHz [43].

Par la suite, d'autres travaux d'optimisation CAO basés sur la technique du MM ont été publiés, notamment l'article du Ruiz-Cruz et Rebollar [54] publié en 2010. Ce dernier présente une approche d'optimisation du design des composantes micro-ondes. L'organigramme de la figure 1.21 illustre le cycle d'optimisation utilisé afin de réaliser un modèle qui respecte certaines spécifications. A partir d'un modèle initial de la structure, une optimisation de forme sur les dimensions est faite. A chaque itération, la réponse est comparée au modèle idéal donné par le cahier des charges, les dimensions sont ensuite ajustées pour minimiser une fonction coût. Ainsi, le processus est répété jusqu'à obtenir la réponse souhaitée.

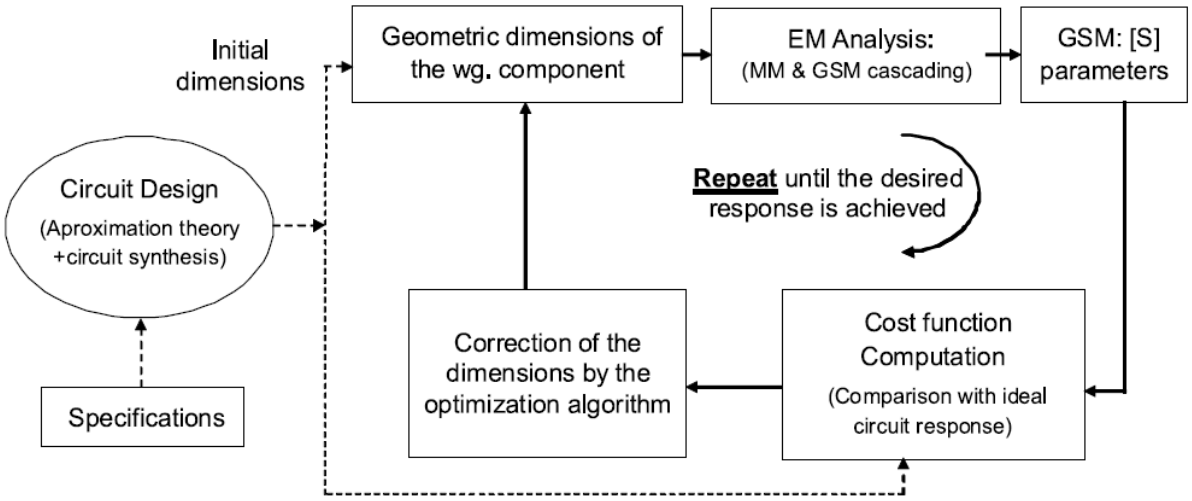


Figure 1.21 - Cycle d'optimisation de conception de dispositifs micro-ondes proposé dans [54].

Cette approche d'optimisation est appliquée sur un exemple de filtre (cf. figure 22-a) avec des parois conductrices réelles pour évaluer les pertes d'insertion [55]. L'analyse de ces pertes est importante, particulièrement dans les dispositifs utilisés dans

les systèmes de communication par satellites. Deux modèles pour caractériser la discontinuité ont été proposés : soit i) décrire les conditions limites par une impédance de surface incluant les pertes (condition de Leontovich) [56] (cf. figure 1.22-b) soit ii) modéliser les pertes par un milieu diélectrique de permittivité $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ (cf. fig 22-c). La figure 1.22-d montre que la méthode MM (cas idéal sans pertes et cas avec pertes) concorde avec les mesures. Le zoom sur les pertes d'insertion dans la figure 1.22-e a révélé des différences entre les modèles. En effet, l'approche diélectrique donne des valeurs légèrement inférieures à celles prédites par le modèle de Leontovich. Néanmoins, dans la globalité, les résultats sont en accord avec les mesures.

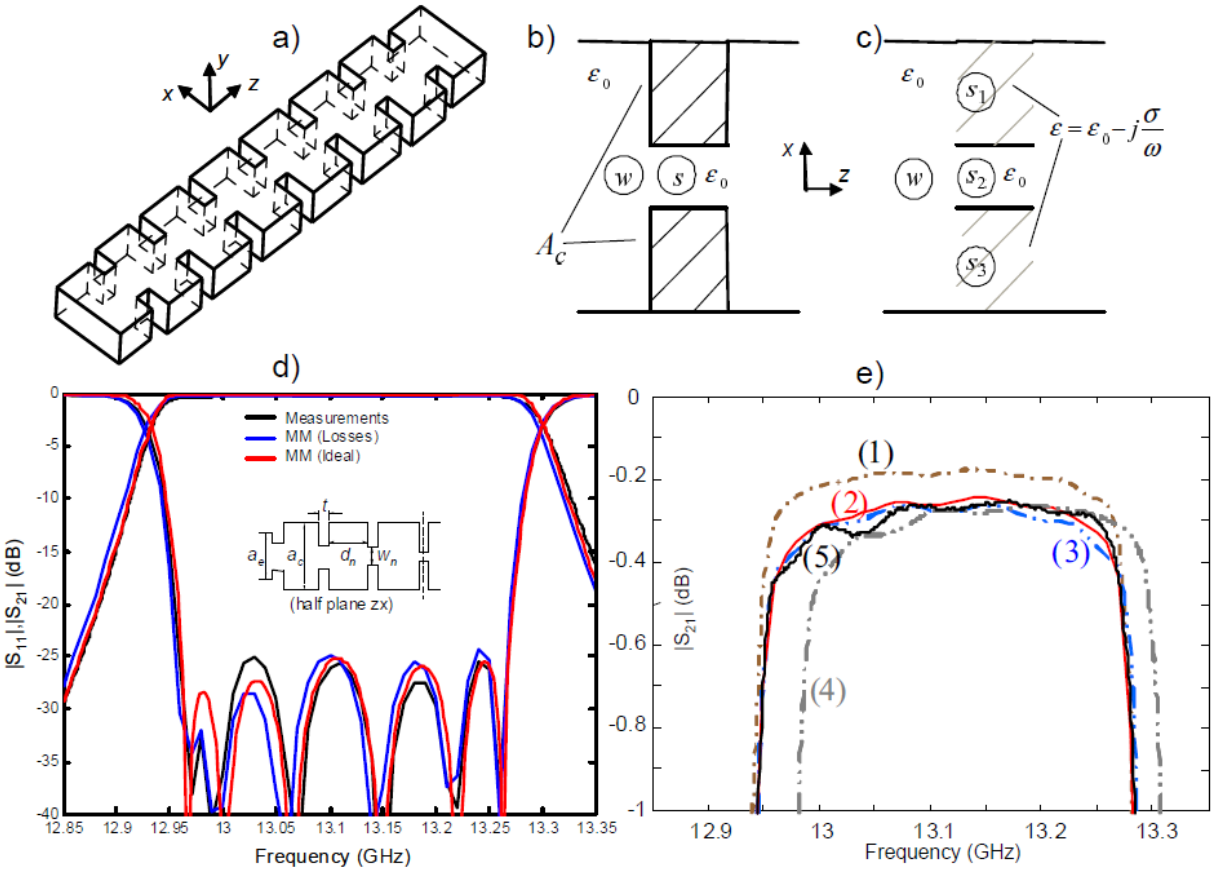


Figure 1.22 – a) Filtre passe-bande composé des guides d'ondes rectangulaires, b) modèle avec la condition de Leontovich, c) modèle avec des régions diélectriques, d) paramètres S du MM idéal sans pertes, MM avec pertes et mesures, e) détails des pertes d'insertion : 1- modèle diélectrique, 2- modèle Leontovich, 3- Modèle circuit, 4- FEM (HFSS) 5- Mesures [54].

Ainsi, l'efficacité de la méthode Mode-Matching permet de l'étendre à d'autres types de structures avec des discontinuités ou des parois de nature plus complexe comme dans [57] et [58]. Sans oublier l'utilité du concept de construction par blocs pour étudier les dispositifs à composantes multiples, car il autorise une modélisation individuelle simple de chaque bloc et une résolution plus facile du problème complet.

Conclusion

Dans ce chapitre, des propriétés des guides d'ondes classiques ont été rappelées. Ensuite, des travaux de recherche pour caractériser les métamatériaux ont été présentés. Considérées comme parois anisotropes, deux approches pour modéliser le comportement des parois métamatériaux ont été explicitées : une approche basée sur l'utilisation des impédances de surface équivalentes pour remplacer la paroi et une autre approche basée sur des tenseurs de permittivité et perméabilité relatives pour décrire le milieu anisotrope.

Par la suite, un état de l'art sur des méthodes de résolution des problèmes à discontinuités a été exposé. D'abord, la modélisation de la structure par un circuit équivalent permet de réduire la complexité du problème et simplifier la résolution. Ensuite, l'utilisation de la technique du raccordement modal ou Mode-Matching (MM) permet de décrire les conditions limites aux discontinuités et conduit ainsi à la résolution du problème global. Des exemples applicatifs, notamment des filtres passe-bande et un convertisseur de mode, ont été présentés dans la partie 1.2.2.

Bibliographie

[1] Balanis, C.A., "Circular waveguides". *Int. J. Electron*, vol. 1996, no 5, p. 551-564, 1996.

[2] Karbowiak, A.E., "Theory of imperfect waveguides: the effect of wall impedance", *Proceedings of the IEE-Part B: Radio and Electronic Engineering*, vol. 102, no 5, p. 698-708, 1955.

[3] Bunch, K.J., Grow, R.W., "The helically wrapped circular waveguide", *IEEE transactions on electron devices*, vol. 34, no 8, p. 1873-1884, 1987.

[4] Pozar, D.M., "Microwave engineering", *John wiley & sons*, 2011.

[5] R. Bansal, "Handbook of engineering electromagnetics", *CRC Press*, 2004.

[6] Lee, C.S., Lee, S.W., et Chuang, S.L., "Plot of modal field distribution in rectangular and circular waveguides", *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 33, no 3, p. 271-274, 1985.

[7] Karmakar, N.C., Padhi, S.K., "Coaxial lines and waveguides", *Encyclopedia of RF and Microwave Engineering*, 2005.

[8] Dybdal, R. B., Peters, L., Peake, W.H., "Rectangular waveguides with impedance walls", *Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 19, no 1, p. 2-8, 1971.

[9] Oliner, A., "The impedance properties of narrow radiating slots in the broad face of rectangular waveguide: Part I—Theory", *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 5, no 1, p. 4-11, 1957.

[10] Targonski, S. D., "A multiband antenna for satellite communications on the move". *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 54, no 10, p. 2862-2868, 2006.

[11] Adam, J.P., Romier, M., "Design approach for multiband horn antennas mixing multimode and hybrid mode operation", *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 65, no 1, p. 358-364, 2016.

[12] Raveu, N. ; Pigaglio, O., "Résolution de problémes hautes fréquences par les schémas équivalents", Toulouse, France : Cépadués édition, 2012.

[13] Herhil, Y., Piltyay, S., Bulashenko, A., & Bulashenko, O., "Characteristic impedances of rectangular and circular waveguides for fundamental modes", dans *IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*. IEEE, p. 46-51, 2021.

[14] Elsheakh, D. M., Elsadek, H. A., & Abdallah, E. A., "Antenna designs with electromagnetic band gap structures". dans: *Metamaterial*. Rijeka, Croatia: InTech, p. 403-473, 2012.

[15] Viktor, G. V., "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ", *Soviet Physics Uspekhi*, Vol. 10 No. 4, pp. 509-514, Apr 1968.

[16] Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D. C., Nemat-Nasser, S. C., & Schultz, S. "Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity", *Phys. Rev.* Lett., vol. 84, no. 18, pp. 4184-4187, 2000.

[17] Pollock, J. G., & Iyer, A. K., "Effective-medium properties of cylindrical transmission-line metamaterials", *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 10, p. 1491-1494, 2011.

[18] Pollock, J. G., & Iyer, A. K., "Below-cutoff propagation in metamaterial-lined circular waveguides", *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 61, no 9, p. 3169-3178, 2013.

[19] Pollock, J. G., & Iyer, A. K., "Analysis of propagation in metamaterial-lined circular waveguides", In: *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI). IEEE,* p. 1180-1181, 2013.

[20] Pollock, J. G., & Iyer, A. K., "Experimental verification of below-cutoff propagation in miniaturized circular waveguides using anisotropic ENNZ metamaterial liners", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 64, no 4, p. 1297-1305, 2016.

[21] Karbowiak, A. E., "Theory of imperfect waveguides: the effect of wall impedance", *Proceedings of the IEE-Part B: Radio and Electronic Engineering*, vol. 102, no 5, p. 698-708, 1955.

[22] Thomas, B. M., & Minnett, H. C., "Modes of propagation in cylindrical waveguides with anisotropic walls", dans *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. IET Digital Library, p. 929-932, 1978.

[23] Minnett, H., & Thomas, B., "A method of synthesizing radiation patterns with axial symmetry". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, no 5, p. 654-656, 1966.

[24] Wu, Q., Gregory, M. D., Werner, D. H., Werner, P. L., & Lier, E., Nature-inspired design of soft, hard and hybrid métasurfaces", dans *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. IEEE, p. 1-4, 2010.

[25] Wu, Q., Werner, D. H., Werner, P. L., & Lier, E., "Thin magneto-dielectric coatings for hybrid-mode horn antennas", dans *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. IEEE, p. 1-4, 2010.

[26] Wu, Q., Scarborough, C. P., Gregory, M. D., Werner, D. H., Shaw, R. K., & Lier, E, "Broadband metamaterial-enabled hybrid-mode horn antennas" dans *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. IEEE, Toronto, ON, Canada, p. 1-4, juillet 2010.

[27] Wu, Q., Scarborough, C. P., Martin, B. G., Shaw, R. K., Werner, D. H., Lier, E., & Wang, X., "AK u-Band Dual Polarization Hybrid-Mode Horn Antenna Enabled by Printed-Circuit-Board Metasurfaces", *Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no 3, p. 1089-1098, 2012.

[28] James, G. L., "Analysis and Design of TE/sub 11/-to-HE/sub 11/Corrugated Cylindrical Waveguide Mode Converters", *IEEE Transactions on Microwave Theory and techniques*, vol. 29, no 10, p. 1059-1066, 1981.

[29] James, G. L., & Thomas, B. M., "TE/sub 11/to HE/sub11/Cylindrical Waveguide Mode Converters Using Ring-Loaded Slots", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 30, no 3, p. 278-285, 1982.

[30] Byrne, B., "Etude et Conception de Guides d'Onde et d'Antennes Cornets à Métamatériaux", Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Novembre 2016.

[31] Kuhler, L., "Etude et Conception de Guides d'Onde Cylindriques à Métamatériaux, Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Octobre 2019.

[32] Baudrand, H., "Introduction au calcul des éléments de circuits passifs en hyperfréquences", Toulouse, France: Cépadués édition, 2001.

[33] Aubert, H., Baudrand, H., "L'Électromagnétisme par les schémas équivalents : Résumé de cours et Exercices corrigés", Toulouse, France: Cépadués édition, 2003.

[34] Baudrand, H., & Bajon, D, "Equivalent circuit representation for integral formulations of electromagnetic problems", *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 15, no 1, p. 23-57, 2002.

[35] Clarricoats, P. J. B., Slinn, K. R., "Numerical solution of waveguide-discontinuity problems", In: *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, IET Digital Library, p. 878-886, 1967.

[36] Wexler, A., "Solution of waveguide discontinuities by modal analysis", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 15, no 9, p, 508-517, 1967.

[37] Clarricoats, P. J. B., "Analysis of spherical hybrid modes in a corrugated conical horn", *Electronics Letters*, vol. 5, no 9, p. 189-190,1969.

[38] Clarricoats, P. J. B., "Radiation from wide-flare-angle scalar horns", *Electronics Letters*, vol. 16, no 5, p. 376-378, 1969.

[39] Lewin, L., "On the inadequacy of discrete mode-matching techniques in some waveguide discontinuity problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 18, no 7, p. 364-369, 1970.

[40] Masterman, P. H., & Clarricoats, P. J. B., "Computer field-matching solution of waveguide transverse discontinuities", dans: *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, IET Digital Library, p. 51-63, 1971.

[41] English, W. J. "The circular waveguide step-discontinuity mode transducer (short papers)", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 21, no 10, p. 633-636, 1973.

[42] Arndt, F., Beyer, R., Reiter, J. M., Sieverding, T., & Wolf, T. "Automated design of waveguide components using hybrid mode-matching/numerical EM building-blocks in optimization-oriented CAD frameworks-state of the art and recent advances", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no 5, p. 747-760, 1997.

[43] Reiter, J. M., & Arndt, F., "Efficient hybrid boundary contour mode-matching technique for the accurate full-wave analysis of circular horn antennas including the outer wall geometry", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no 3, p. 568-570, 1997.

[44] Montejo-Garai, J. R., & Zapata, J., "Full-wave design and realization of multicoupled dual-mode circular waveguide filters", *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 43, no 6, p. 1290-1297, 1995.

[45] Beyer, R., & Arndt, F., "Field-theory design of circular waveguide dual-mode filters by a combined mode-matching finite element method", dans: *24th European Microwave Conference*. IEEE, p. 294-303, 1994.

[46] Patzelt, H., & Arndt, F., "Double-plane steps in rectangular waveguides and their application for transformers, irises, and filters" *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 30, no 5, p. 771-776, 1982.

[47] Papziner, U., & Arndt, F., "Field theoretical computer-aided design of rectangular and circular iris coupled rectangular or circular waveguide cavity filters", *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 41, no 3, p. 462-471, 1993.

[48] Rong, Y., Zaki, K. A., Hageman, M., Stevens, D., & Gipprich, J. "Low-temperature cofired ceramic (LTCC) ridge waveguide bandpass chip filters", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no 12, p. 2317-2324, 1999.

[49] El Sabbagh, M. A., Hsu, H. T., Zaki, K. A., Pramanick, P., & Dolan, T., "Full wave optimization of stripline tapped-in ridge waveguide bandpass filters" dans: *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (Cat. No. 02CH37278)*. IEEE, p. 1805-1808, 2002.

[50] Ruiz-Cruz, J. A., Sabbagh, M. E., Zaki, K. A., Rebollar, J. M., & Zhang, Y., "Canonical ridge waveguide filters in LTCC or metallic resonators. IEEE transactions on microwave theory and techniques, vol. 53, no 1, p. 174-182, 2005.

[51] Reiter, J. M., & Arndt, F., "Analysis of circular waveguide antennas including the outer wall geometry with a spherical-wave formulation of the boundary contour-mode-matching method", In: *Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium and URSI National Radio Science Meeting*. IEEE, p. 1070-1073, 1994.

[52] Reiter, J. M., & Arndt, F., "Rigorous analysis of arbitrarily shaped H-and E-plane discontinuities in rectangular waveguides by a full-wave boundary contour mode-matching method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, no 4, p. 796-801", 1995.

[53] Bunger, R., Beyer, R., & Arndt, F., "Rigorous combined mode-matching integral equation analysis of horn antennas with arbitrary cross section", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, no 11, p. 1641-1648, 1999.

[54] Ruiz-Cruz, J. A., Montejo-Garai, J. R., & Rebollar, J. M. "Computer aided design of waveguide devices by mode-matching methods", dans: *Passive Microwave Components and Antennas*, London, UK: InTech. p. 117-140, 2010.

[55] Ruiz-Cruz, J. A., Montejo-Garai, J. R., & Rebollar, J. M., "Characterisation of waveguide discontinuities with finite wall conductivity. dans: *IEEE Antennas*

and Propagation Society International Symposium (IEEE Cat. No. 02CH37313). IEEE, p. 428-431, 2002.

[56] Senior, T. B. A. "Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces. Applied Scientific Research, Section B, vol. 8, no 1, p. 418-436, 1960.

[57] Belenguer, A., Esteban, H., Diaz, E., Bachiller, C., Cascon, J., & Boria, V. E., "Hybrid technique plus fast frequency sweep for the efficient and accurate analysis of substrate integrated waveguide devices", *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 59, no 3, p. 552-560, 2011.

[58] Bachiller, C., Esteban, H., Mata, H., et al., "Hybrid mode matching method for the efficient analysis of metal and dielectric rods in H plane rectangular waveguide devices", *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 58, no 12, p. 3634-3644, 2010.

Chapitre 2 : Modélisation des guides d'ondes circulaires à parois métamatériaux

Introduction

Dans ce chapitre, les propriétés dispersives du champ électromagnétique sont étudiées et caractérisées dans les guides d'ondes à paroi métamatériau considérée comme anisotrope. Dans un premier temps, la Théorie Modale Elargie (TME) permettant la caractérisation des guides à paroi anisotrope est explicitée. Des améliorations de la TME sont ensuite proposées. Dans ce contexte, un code itératif, basé sur l'équation de dispersion de la TME est développé permettant le tracé des diagrammes de dispersion. Dans ce code, les impédances de surface équivalentes, nécessaires à la résolution, sont calculées avec la méthode des éléments finis (FEM). Néanmoins, les résultats montrent que cette approche ne donne que les propriétés des modes propagatifs. Par conséquent, une méthodologie de calcul direct basée sur la FEM est développée dans un deuxième temps, celle-ci permet un calcul rapide des diagrammes de dispersion pour les modes propagatifs et aussi pour les modes évanescents.

Les méthodes développées dans ce chapitre ont été analysées sur plusieurs types de parois anisotropes. Néanmoins, la méthodologie n'est présentée ici que pour l'exemple d'une paroi corruguée afin de mettre en lumière les améliorations apportées.

2.1 Caractérisation des guides d'ondes circulaires

2.1.1 Dispersion de l'onde

Les guides d'ondes circulaires sont utilisés dans les dispositifs de communication spatiale [1]-[2] grâce à leurs caractéristiques géométriques pertinentes. Dans cette partie, une étude complète de la propagation du champ électromagnétique dans les structures circulaires guidées est proposée. Soit un guide d'ondes circulaire invariant selon l'axe Oz comme représenté sur la figure 2.1. Les champs électromagnétiques subissent alors une variation en $e^{-\gamma_z z}$ avec γ_z la constante de propagation suivant l'axe z. γ_z est imaginaire si l'onde est propagative et γ_z réel si l'onde est évanescente.

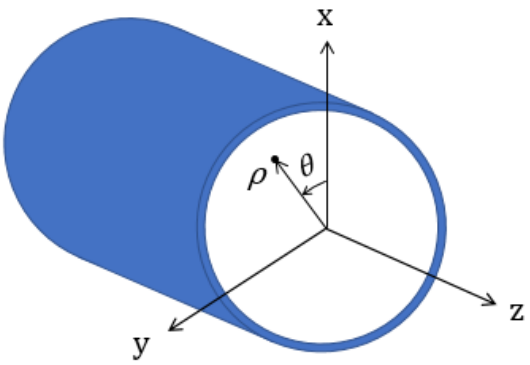


Figure 2.1 - Guide d'ondes circulaire et système de coordonnées cylindriques.

Equations de Maxwell

Le comportement d'une onde Electromagnétique (EM) est décrit par des équations fondatrices développées par le physicien écossais James Clark Maxwell [5]. Ici, la formulation différentielle est présentée.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e \tag{2.2}$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho_C \tag{2.3}$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

où $\vec{E}$ désigne le champ électrique, $\vec{H}$ le champ magnétique, $\vec{D}$ l'induction électrique, $\vec{B}$ l'induction magnétique, ρ_C la densité de charges et $\vec{J}_e$ la densité de courant électrique.

Dans un milieu homogène et isotrope (la permittivité et la perméabilité sont constantes et ne dépendent pas de la direction), l'induction électrique $\vec{D}$ est proportionnelle au champ électrique $\vec{E}$ et l'induction magnétique $\vec{B}$ est proportionnelle au champ magnétique $\vec{H}$ selon :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{2.6}$$

où ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité dans le vide, ϵ_r et μ_r sont respectivement la permittivité et la perméabilité relatives du milieu.

En régime harmonique, pour un milieu non magnétisé $(\mu_r = 1)$ et en l'absence de sources ($\vec{J}_e = \vec{0}$ et $\rho_C = 0$), les équations peuvent se simplifier en :

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{2.8}$$

$$\nabla . \vec{E} = 0 \tag{2.8}$$

$$\nabla . \vec{H} = 0 \tag{2.9}$$

avec ω la pulsation de l'onde. Les ondes se propageant dans la structure sont solutions de ce système d'équations différentielles sans source.

Equation de propagation de l'onde

Les champs électrique et magnétique sont mathématiquement découplés pour avoir une unique équation permettant de les définir, c'est l'équation de propagation. Cette équation est obtenue en partant des équations de Maxwell (2.7) et (2.8). Pour le champ électrique, l'équation peut s'écrire sous cette forme :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(-j\omega\mu_0 \vec{H}\right) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \tag{2.10}$$

D'un autre côté, grâce à la formule mathématique suivante : $\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\nabla \,.\, \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$, l'expression peut se simplifier en utilisant également l'équation (2.8) :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla\nabla \,.\, \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \tag{2.11}$$

L'équation de propagation appelée équation de Helmholtz peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = \vec{0} \tag{2.12}$$

avec $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ le nombre d'onde dans le vide. Un raisonnement similaire permet de démontrer que le champ magnétique $\vec{H}$ vérifie aussi l'équation de Helmoltz. En considérant l'invariance du guide suivant la direction de propagation (les composantes du champ variant en $e^{-\gamma_z z}$), l'équation de propagation peut s'écrire pour chaque composante du champ U sous la forme :

$$(\nabla_T^2 + \gamma_z^2 + k_0^2 \epsilon_r) U = 0 \tag{2.13}$$

avec ∇_T le laplacien dans le plan transverse. La constante de coupure k_c est définie par la relation de dispersion : $k_c^2 = \left(\frac{2\pi f_c}{c}\right)^2 = \gamma_z^{\,2} + k_0^2 \epsilon_r$ où f_c est la fréquence de coupure. Ainsi, la constante de propagation à une fréquence donnée (f_0) peut être calculée si la fréquence de coupure du mode considéré est connue :

$$\gamma_z^2 = \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 \left({f_c}^2 - {f_0}^2 \epsilon_r\right) \tag{2.14}$$

Ainsi, pour des fréquences inférieures à $\frac{f_c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, $\gamma_z = \alpha_z \in \mathbb{R}$ donc le mode est évanescent ; au-dessus de $\frac{f_c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, $\gamma_z = j\beta_z \in j\mathbb{R}$ donc le mode devient propagatif.

Nature des modes

Les modes constituent une base de la décomposition du champ électromagnétique. Les guides d'ondes circulaires à paroi métallique classique permettent seulement la propagation des ondes guidées de nature Transverse Magnétique, notées TM ($H_z = 0$), ou Transverse Electrique, notées TE ($E_z = 0$). Les guides d'ondes à paroi anisotrope, quant à eux, permettent de propager également des modes dits hybrides [3] (pour

lesquels H_z et E_z sont conjointement non nuls). En général, les modes sont classés selon quatre catégories :

- **Modes TE (Transverses Electriques), $E_Z = 0$ et $H_Z \neq 0$**

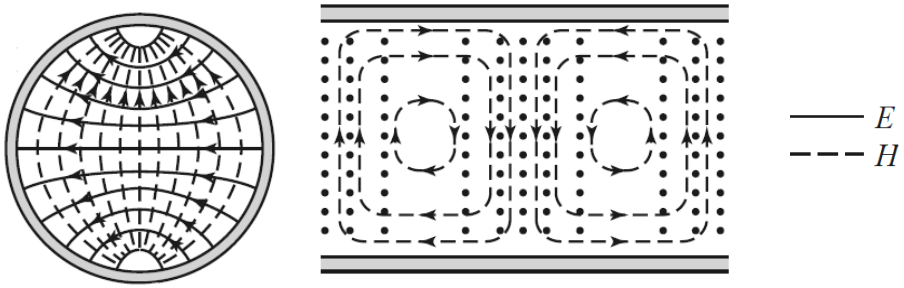


Figure 2.2 –Exemple d'un mode TE d'ordre 1 [4].

- **Modes TM (Transverses Magnétiques), $E_Z \neq 0$ et $H_Z = 0$**

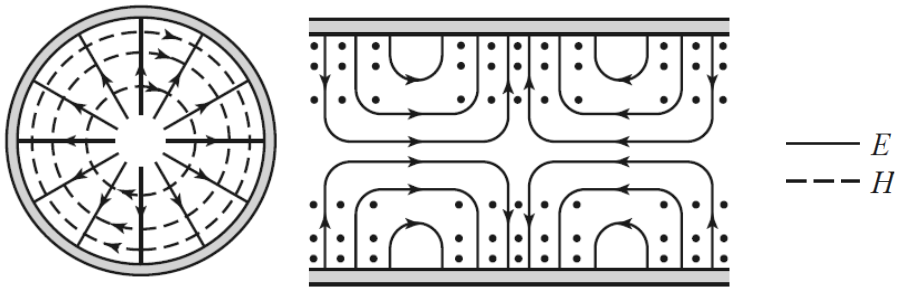


Figure 2.3- Exemple d'un mode TM d'ordre 0 [4].

- **Modes TEM (Transverses Electro-Magnétiques), $E_Z = 0$ et $H_Z = 0$**

Les modes TEM se propagent dans les lignes de transmission présentant deux conducteurs distincts comme un câble coaxial par exemple. Par conséquent, ils n'existent pas dans les guides d'ondes circulaires ne présentant qu'un seul conducteur.

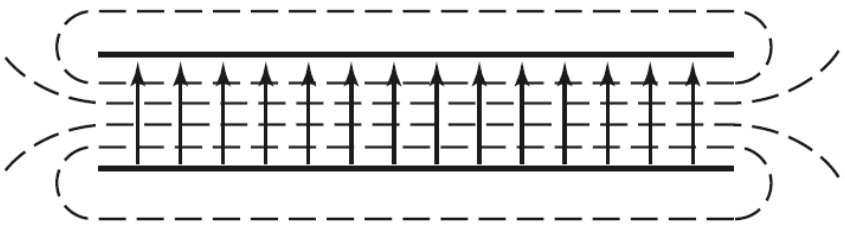


Figure 2.4- Le mode TEM dans un guide d'ondes à deux plaques parallèles [5].

- **Modes Hybrides EH et HE, $E_Z \neq 0$ et $H_Z \neq 0$**

Les modes hybrides (H) n'existent pas dans les guides métalliques classiques. Pour les obtenir, il faut introduire des parois anisotropes dans la structure guidée [3]. Si la propagation des champ E_Z et H_Z se fait dans la même direction, le mode est considéré HE et s'ils se propagent dans des directions opposées, le mode est EH.

- **Diagramme de dispersion**

Pour étudier un guide d'ondes, une analyse des propriétés dispersives se fait grâce au diagramme de dispersion sur les premiers modes généralement. Le diagramme de dispersion est la représentation graphique de l'équation (2.14) pour l'ensemble des modes. En effet, les courbes du diagramme permettent de donner des informations sur la propagation des modes en fonction de la fréquence, leurs bandes d'évanescence et de propagation, la bande monomode du mode fondamental (le premier mode à se propager) et les vitesses de propagation de groupe et de phase des modes. Un exemple de diagramme de dispersion est présenté sur la figure 2.5.

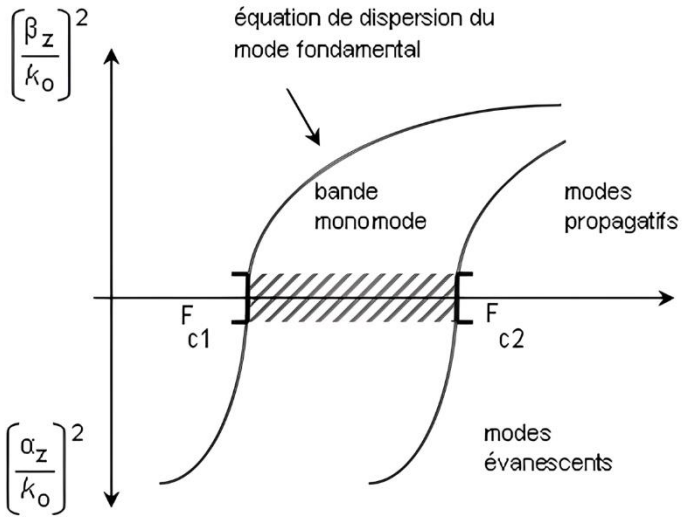


Figure 2.5 - Exemple de diagramme de dispersion des modes [6].

2.1.2 Champ EM dans un guide d'ondes circulaire

Formulation sinusoïdale du champ EM

Les composantes longitudinales du champ ElectroMagnétique sont solutions de l'équation de Helmoltz (2.12). La résolution de cette équation [6] permet de trouver l'expression des champs longitudinaux E_Z et H_Z pour un mode (m,n). En imposant le déphasage entre les deux composantes longitudinales, deux types de modes peuvent exister : des modes Sinusoïdaux Impairs (SI), $(E_{z,mn} \sim sin(m\theta)\ et\ H_{z,mn} \sim cos(m\theta))$, dont les champs longitudinaux sont donnés par les équations (2.14), et des modes Sinusoïdaux Pairs (SP), $(E_{z,mn} \sim cos(m\theta)\ et\ H_{z,mn} \sim sin(m\theta))$, dont les champs longitudinaux sont donnés par les équations (2.15),

$$\begin{cases} E_{z,mn}^{impair} = \Gamma_{mn}^{impair} J_m(k_{c,mn}\rho) sin(m\theta) \\ H_{z,mn}^{impair} = \Psi_{mn}^{impair} J_m(k_{c,mn}\rho) cos(m\theta) \end{cases} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{cases} E_{z,mn}^{pair} = \Gamma_{mn}^{pair} J_m(k_{c,mn}\rho) cos(m\theta) \\ H_{z,mn}^{pair} = \Psi_{mn}^{pair} J_m(k_{c,mn}\rho) sin(m\theta) \end{cases} \tag{2.15}$$

avec $k_{c,mn}$ la constante de coupure du mode, Γ_{mn}^{impair}, Ψ_{mn}^{impair}, Γ_{mn}^{pair} et Ψ_{mn}^{pair} respectivement les amplitudes des champs électrique et magnétique longitudinaux dans les cas impair et pair et J_m la fonction de Bessel d'ordre m.

Le champ électromagnétique transverse s'exprime à partir des composantes longitudinales E_Z et H_Z selon (2.16) et (2.17). Les fonctions E_Z et H_Z sont dites génératrices des modes.

$$\left(\gamma_{z,mn}^2 + k_0^2\epsilon_r\right)\vec{E}_{T,mn}^s = -\gamma_{z,mn}\nabla_T E_{z,mn}^s - j\omega\mu_0\left(\nabla_T H_{z,mn}^s\right)\times\vec{z} \tag{2.16}$$

$$\left(\gamma_{z,mn}^2 + k_0^2\epsilon_r\right)\vec{H}_{T,mn}^s = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\left(\nabla_T E_{z,mn}^s\right)\times\vec{z} - \gamma_{z,mn}\nabla_T H_{z,mn}^s \tag{2.17}$$

avec s pour pair et impair.

Ainsi, en réinjectant les expressions des champs longitudinaux dans les équations (2.16) et (2.17), les composantes transverses impaires et paires du champ électromagnétique sont déterminées (le détail de calcul est dans l'annexe A) :

$$\begin{cases} E_{r,mn}^{impair} = \left(-\dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\Gamma_{mn}^{impair}J_m'(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{jZ_0k_0m}{k_{c,mn}^2 r}\Psi_{mn}^{impair}J_m(k_{c,mn}\rho)\right)sin(m\theta) \\ E_{\theta,mn}^{impair} = \left(-\dfrac{\gamma_{z,mn}m}{k_{c,mn}^2 r}\Gamma_{mn}^{impair}J_m(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{jZ_0k_0}{k_{c,mn}}\Psi_{mn}^{impair}J_m'(k_{c,mn}\rho)\right)cos(m\theta) \\ H_{r,mn}^{impair} = \left(\dfrac{jk_0m}{Z_0k_{c,mn}^2 r}\Gamma_{mn}^{impair}J_m(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\Psi_{mn}^{impair}J_m'(k_{c,mn}\rho)\right)cos(m\theta) \\ H_{\theta,mn}^{impair} = \left(-\dfrac{jk_0}{Z_0k_{c,mn}}\Gamma_{mn}^{impair}J_m'(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{\gamma_{z,mn}m}{k_{c,mn}^2 r}\Psi_{mn}^{impair}J_m(k_{c,mn}\rho)\right)sin(m\theta) \end{cases} \tag{2.18}$$

et

$$\begin{cases} E_{r,mn}^{pair} = \left(-\dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\Gamma_{mn}^{pair}J_m'(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{jZ_0k_0m}{k_{c,mn}^2 r}\Psi_{mn}^{pair}J_m(k_{c,mn}\rho)\right)cos(m\theta) \\ E_{\theta,mn}^{pair} = \left(\dfrac{\gamma_{z,mn}m}{k_{c,mn}^2 r}\Gamma_{mn}^{pair}J_m(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{jZ_0k_0}{k_{c,mn}}\Psi_{mn}^{pair}J_m'(k_{c,mn}\rho)\right)sin(m\theta) \\ H_{r,mn}^{pair} = \left(-\dfrac{jk_0m}{Z_0k_{c,mn}^2 r}\Gamma_{mn}^{pair}J_m(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\Psi_{mn}^{pair}J_m'(k_{c,mn}\rho)\right)sin(m\theta) \\ H_{\theta,mn}^{pair} = \left(-\dfrac{jk_0}{Z_0k_{c,mn}}\Gamma_{mn}^{pair}J_m'(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{\gamma_{z,mn}m}{k_{c,mn}^2 r}\Psi_{mn}^{pair}J_m(k_{c,mn}\rho)\right)cos(m\theta) \end{cases} \tag{2.19}$$

avec $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ l'impédance du vide, J_m' la dérivée de la fonction de Bessel et $\gamma_{z,mn}$ la constante de propagation calculée pour ce mode d'indice (m,n).

Formulation exponentielle du champ EM

Une écriture exponentielle des composantes du champ électromagnétique est introduite ici. Elle est équivalente à la précédente et elle permet de séparer les modes

en deux types : des modes Exponentiels Négatifs (EN) et des modes Exponentiels Positifs (EP). Ainsi, les composantes longitudinales sont données par,

$$\begin{cases} E_{z,mn}^{-} = \tilde{\Gamma}_{mn}^{-} J_m(k_c\rho) e^{-jm\theta} \\ H_{z,mn}^{-} = \tilde{\Psi}_{mn}^{-} J_m(k_c\rho) e^{-jm\theta} \end{cases} \tag{2.20}$$

et

$$\begin{cases} E_{z,mn}^{+} = \tilde{\Gamma}_{mn}^{+} J_m(k_c\rho) e^{jm\theta} \\ H_{z,mn}^{+} = \tilde{\Psi}_{mn}^{+} J_m(k_c\rho) e^{jm\theta} \end{cases} \tag{2.21}$$

Les composantes transverses des champs électromagnétiques, quant à elles, s'expriment à partir des composantes longitudinales, selon (2.16) et (2.17),

$$\begin{cases} E_{\rho,mn}^{-} = \left(-\dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}} \tilde{\Gamma}_{mn}^{-} J_m'(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{Z_0 k_0 m}{k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Psi}_{mn}^{-} J_m(k_{c,mn}\rho) \right) e^{-jm\theta} \\ E_{\theta,mn}^{-} = \left(\dfrac{j\gamma_{z,mn} m}{k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Gamma}_{mn}^{-} J_m(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{jZ_0 k_0}{k_{c,mn}} \tilde{\Psi}_{mn}^{-} J_m'(k_{c,mn}\rho) \right) e^{-jm\theta} \\ H_{\rho,mn}^{-} = \left(\dfrac{k_0 m}{Z_0 k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Gamma}_{mn}^{-} J_m(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}} \tilde{\Psi}_{mn}^{-} J_m'(k_{c,mn}\rho) \right) e^{-jm\theta} \\ H_{\theta,mn}^{-} = \left(-\dfrac{jk_0}{Z_0 k_{c,mn}} \tilde{\Gamma}_{mn}^{-} J_m'(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{j\gamma_{z,mn} m}{k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Psi}_{mn}^{-} J_m(k_{c,mn}\rho) \right) e^{-jm\theta} \end{cases} \tag{2.22}$$

et

$$\begin{cases} E_{\rho,mn}^{+} = \left(-\dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}} \tilde{\Gamma}_{mn}^{+} J_m'(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{Z_0 k_0 m}{k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Psi}_{mn}^{+} J_m(k_{c,mn}\rho) \right) e^{jm\theta} \\ E_{\theta,mn}^{+} = \left(-\dfrac{j\gamma_{z,mn} m}{k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Gamma}_{mn}^{+} J_m(k_{c,mn}\rho) + \dfrac{jZ_0 k_0}{k_{c,mn}} \tilde{\Psi}_{mn}^{+} J_m'(k_{c,mn}\rho) \right) e^{jm\theta} \\ H_{\rho,mn}^{+} = \left(-\dfrac{k_0 m}{Z_0 k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Gamma}_{mn}^{+} J_m(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}} \tilde{\Psi}_{mn}^{+} J_m'(k_{c,mn}\rho) \right) e^{jm\theta} \\ H_{\theta,mn}^{+} = \left(-\dfrac{jk_0}{Z_0 k_{c,mn}} \tilde{\Gamma}_{mn}^{+} J_m'(k_{c,mn}\rho) - \dfrac{j\gamma_{z,mn} m}{k_{c,mn}^2 \rho} \tilde{\Psi}_{mn}^{+} J_m(k_{c,mn}\rho) \right) e^{jm\theta} \end{cases} \tag{2.23}$$

L'avantage de l'écriture exponentielle, comparée à une écriture sinusoïdale, est d'avoir un couplage constant et indépendant de la variation angulaire θ, entre les composantes longitudinales du champ EM, et aussi, de garder un déphasage libre entre les deux composantes, qui est finalement inclus implicitement dans le coefficient de couplage complexe. Par ailleurs, cette formulation est plus conforme aux conditions de périodicité angulaire imposées sur une cellule périodique dans la FEM. Néanmoins, les deux écritures sont liées et elles seront utilisées par la suite en fonction du contexte (dans un souci de simplification des écritures).

2.1.3 Matrice impédance de mode

Les composantes transverses $\vec{E}_{Tmn}$ et $\vec{H}_{Tmn}$ d'un mode sont liées par une impédance de mode $[Z'^{\alpha}_{mn}]$ [7] définie par :

$$\vec{E}^{\alpha}_{Tmn} = [Z'^{\alpha}_{mn}]\, \vec{H}^{\alpha}_{Tmn} \times \vec{z} \tag{2.23}$$

Avec $\alpha = +$ ou $-$.

Considérons le cas d'un mode exponentiel positif ($\alpha = +$), les expressions des composantes transversales, données par (2.23), sont injectées dans la définition (2.23) :

$$\begin{pmatrix} \left[-\frac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}J'_m(k_{c,mn}\rho) + \frac{Z_0 k_0 m}{k^2_{c,mn}\rho}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}J_m(k_{c,mn}\rho)\right]e^{jm\theta} \\ \left[-\frac{j\gamma_{z,mn}m}{k^2_{c,mn}\rho}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}J_m(k_{c,mn}\rho) + \frac{jZ_0 k_0}{k_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}J'_m(k_{c,mn}\rho)\right]e^{jm\theta} \end{pmatrix}$$
$$= [Z'^{+}_{mn}]\begin{pmatrix} \left[-\frac{jk_0}{Z_0 k_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}J'_m(k_{c,mn}\rho) - \frac{j\gamma_{z,mn}m}{k^2_{c,mn}\rho}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}J_m(k_{c,mn}\rho)\right]e^{jm\theta} \\ \left[\frac{k_0 m}{Z_0 k^2_{c,mn}\rho}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}J_m(k_{c,mn}\rho) + \frac{\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}J'_m(k_{c,mn}\rho)\right]e^{jm\theta} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Après simplifications, la réécriture de (2.24) sous format matriciel est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -\gamma_{z,mn}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} & \frac{Z_0 k_0}{k_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn} \\ jZ_0 k_0 \tilde{\Psi}^{+}_{mn} & -\frac{j\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J'_m(k_{c,mn}\rho) \\ \frac{m}{r}J_m(k_{c,mn}\rho) \end{pmatrix}$$
$$= [Z'^{+}_{mn}]\begin{pmatrix} -\frac{jk_0}{Z_0 k_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} & -\frac{j\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn} \\ \gamma_{z,mn}\tilde{\Psi}^{+}_{mn} & \frac{k_0}{k_{c,mn}Z_0}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J'_m(k_{c,mn}\rho) \\ \frac{m}{r}J_m(k_{c,mn}\rho) \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Soit :

$$[Z'^{+}_{mn}] = \begin{pmatrix} -\gamma_{z,mn}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} & \frac{Z_0 k_0}{k_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn} \\ jZ_0 k_0 \tilde{\Psi}^{+}_{mn} & -\frac{j\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{jk_0}{k_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} & -\frac{j\gamma_{z,mn}}{k_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn} \\ \gamma_{z,mn}\tilde{\Psi}^{+}_{mn} & \frac{k_0}{k_{c,mn}Z_0}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.26}$$

En développant le calcul ci-dessus, l'impédance $[Z'^{+}_{mn}]$ peut s'écrire sous la forme :

$$[Z'^{+}_{mn}] = Z_0\begin{pmatrix} \frac{k_0\gamma_{z,mn}\left(Z_0^2\left(\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right)^2 + \left(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right)^2\right)}{j\left(\left(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right)^2 k_0^2 - \gamma^2_{z,mn}Z_0^2\left(\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right)^2\right)} & \frac{k^2_{c,mn}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}}{\left(\left(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right)^2 k_0^2 - \gamma^2_{z,mn}Z_0^2\left(\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right)^2\right)} \\ \frac{-k^2_{c,mn}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}}{\left(\left(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right)^2 k_0^2 - \gamma^2_{z,mn}Z_0^2\left(\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right)^2\right)} & \frac{k_0\gamma_{z,mn}\left(Z_0^2\left(\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right)^2 + \left(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right)^2\right)}{j\left(\left(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right)^2 k_0^2 - \gamma^2_{z,mn}Z_0^2\left(\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right)^2\right)} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Dans ce contexte, le coefficient de couplage TE/TM, entre les composantes longitudinales du champ EM, est introduit pour les modes exponentiels négatifs et positifs :

$$\Pi_{mn}^{-} = \frac{Z_0 H_{z,mn}^{-}}{E_{z,mn}^{-}} = \frac{Z_0 \widetilde{\Psi}_{mn}^{-}}{\tilde{\Gamma}_{mn}^{-}} \tag{2.28}$$

$$\Pi_{mn}^{+} = \frac{Z_0 H_{z,mn}^{+}}{E_{z,mn}^{-}} = \frac{Z_0 \widetilde{\Psi}_{mn}^{+}}{\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}} \tag{2.29}$$

Les deux coefficients sont complexes et indépendants de la variation angulaire θ. Par ailleurs, si $|\Pi_{mn}^{-}| = |\Pi_{mn}^{+}| = 0$: le mode est TM ; si $|\Pi_{mn}^{-}| = |\Pi_{mn}^{+}| \to +\infty$: le mode est TE ; sinon le mode est hybride.

Ainsi, en remplaçant par le coefficient du couplage Π_{mn}^{+} dans la formule (2.27), la matrice d'impédance du mode $[Z_{mn}^{\prime +}]$ s'écrit sous la forme :

$$[Z_{mn}^{\prime +}] = \frac{Z_0}{\Pi_{mn}^{+\,2}\gamma_{z,mn}^2 - k_0^2} \begin{pmatrix} jk_0\gamma_{z,mn}\left(1+\Pi_{mn}^{+\,2}\right) & -\Pi_{mn}^{+}k_{c,mn}^2 \\ \Pi_{mn}^{+}k_{c,mn}^2 & jk_0\gamma_{z,mn}\left(1+\Pi_{mn}^{+\,2}\right) \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

En adoptant une démarche de calcul similaire pour les modes exponentiels négatifs, l'impédance $[Z_{mn}^{\prime -}]$ est déterminée et son expression est donnée par :

$$[Z_{mn}^{\prime -}] = \frac{Z_0}{\Pi_{\mathrm{mn}}^{-\,2}\gamma_{z,mn}^2 - k_0^2} \begin{pmatrix} jk_0\gamma_{z,mn}\left(1+\Pi_{\mathrm{mn}}^{-\,2}\right) & -\Pi_{\mathrm{mn}}^{-}k_{c,mn}^2 \\ \Pi_{\mathrm{mn}}^{-}k_{c,mn}^2 & jk_0\gamma_{z,mn}\left(1+\Pi_{\mathrm{mn}}^{-\,2}\right) \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Nous constatons que les deux formules (2.30) et (2.31) sont semblables aux valeurs de Π_{mn}^{+} et Π_{mn}^{-} près. Cette formulation des modes en exponentielle est donc nécessaire pour avoir une impédance de mode indépendante de l'angle θ, contrairement à la formule développée précédemment dans [9], donnée par (2.32).

$$Z_M = \frac{\frac{1}{jk_0\gamma_{z,mn}} Z_0}{\left(\frac{mJ_m\left(k_{c,mn}\rho\right)}{k_{c,mn}\rho}\right)^2 - \left(J_m'\left(k_{c,mn}\rho\right)\right)^2} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

avec
$$\begin{cases} Z_{11} = -\left(\frac{mk_0J_m\left(k_{c,mn}\rho\right)}{k_{c,mn}\rho}\right)^2 - \left(\gamma_{z,mn}J_m'\left(k_{c,mn}\rho\right)\right)^2 \\ Z_{12} = \frac{mk_{c,mn}\,tan(m\theta)}{\rho} J_m\left(k_{c,mn}\rho\right)J_m'\left(k_{c,mn}\rho\right) \\ Z_{21} = \frac{1}{(\tan\,(m\theta))^2} Z_{12} \\ Z_{12} = \left(\frac{m\gamma_{z,mn}J_m\left(k_{c,mn}\rho\right)}{k_{c,mn}\rho}\right)^2 + \left(k_0J_m'\left(k_{c,mn}\rho\right)\right)^2 \end{cases}$$

La nouvelle formulation de la matrice impédance de mode, basée sur l'écriture exponentielle, donnée par (2.30) et (2.31), est indépendante de l'angle θ, elle est intrinsèque au mode.

Vérification sur des impédances TM/TE connues [6] :

Pour les modes TM, $|\Pi_{mn}^{-}| = |\Pi_{mn}^{+}| = 0$, l'impédance de mode déduite de (2.31) est :

$$[Z_{mn}^{TM}] = \frac{Z_0}{-(k_0)^2}\begin{pmatrix} jk_0\gamma_{z,mn} & 0 \\ 0 & jk_0\gamma_{z,mn} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

$$[Z_{mn}^{TM}] = \frac{\gamma_{z,mn}}{jk_0} Z_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{z,mn}}{j\omega\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{z,mn}}{j\omega\varepsilon_0} = Z_{mn}^{TM}$$

Pour les modes TE, $|\Pi_{mn}^{-}| = |\Pi_{mn}^{+}| = \infty$, l'impédance déduite est :

$$[Z_{mn}^{TE}] = \frac{Z_0}{\gamma_{z,mn}^2}\begin{pmatrix} jk_0\gamma_{z,mn} & 0 \\ 0 & jk_0\gamma_{z,mn} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

$$[Z_{mn}^{TE}] = \frac{jk_0}{\gamma_{z,mn}} Z_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_{z,mn}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_{z,mn}} = Z_{mn}^{TE}$$

Sachant que, $\frac{k_0}{Z_0} = \omega\varepsilon_0$ et $Z_0 k_0 = \omega\mu_0$, les expressions des matrices impédances deviennent scalaires pour les modes TE et TM, elles sont données par $Z_{mn}^{TM} = \frac{\gamma_{z,mn}}{j\omega\varepsilon_0}$ et $Z_{mn}^{TE} = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_{z,mn}}$, comme attendu. Ce sont ici des cas particuliers des impédances matricielles (2.30) et (2.31) génériques qui s'appliquent à tous types de mode. Elles seront utilisées par la suite comme outil pour modéliser le guide d'ondes à paroi périodique anisotrope dans le calcul Mode-Matching proposé dans le chapitre 4.

2.2 Modélisation de la paroi à métamatériau avec la TME

La théorie modale élargie (TME) a été développée dans [7],[8] et [9] pour étudier la propagation des modes dans des structures guidées. Les motifs périodiques à métamatériaux ont été considérés comme des parois anisotropes homogènes, car la périodicité est très petite devant la longueur d'onde de travail. Ainsi, cette paroi anisotrope a pu être modélisée par des impédances de surface équivalentes. Par ailleurs, la TME a été formulée en s'appuyant sur une écriture sinusoïdale du champ EM (que l'on pourrait retrouver avec les expressions en exponentielles puisqu'elles sont équivalentes). Ainsi, à moins d'indication contraire, cette écriture sera employée dans le reste de ce chapitre.

2.2.1 Equation de dispersion

Impédances de surface équivalentes

Les milieux anisotropes réels sont généralement volumiques. Ils montrent des propriétés dispersives et donc dépendantes de la fréquence. L'approche utilisée par la TME permet de caractériser le métamatériau par des impédances de surface équivalentes définies à chaque fréquence à l'aide des champs tangents à cette surface.

Dans notre contexte, ces impédances de surface sont utilisées comme des conditions aux limites et traduisent le comportement de la paroi métamatériau. Elles

sont calculées sur un plan fictif $\partial\Omega'$ (de rayon a') placé à l'intérieur du guide en dehors du métamatériau (cf. figure 2.6).

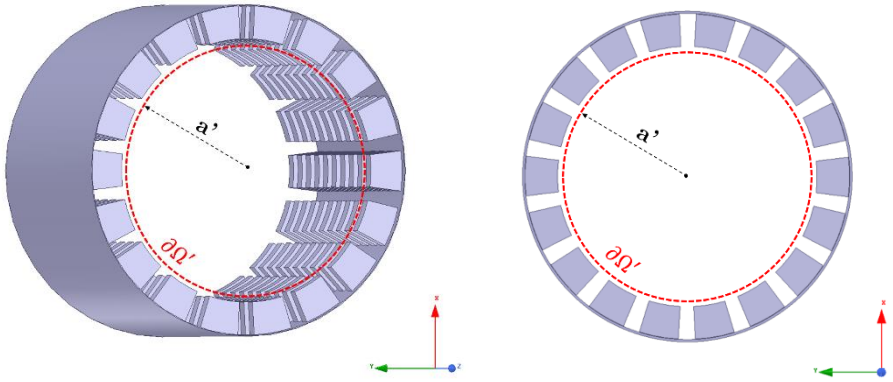


Figure 2.6- Guide d'ondes circulaire à paroi métamatériau a) vue 3D b) coupe transversale.

Le tenseur d'impédance $\bar{Z}_{s,mn}$ est défini sur les coordonnées cylindriques par la relation suivante :

$$\bar{Z}_{s,mn} = \begin{pmatrix} Z_r & 0 & 0 \\ 0 & Z_\theta & 0 \\ 0 & 0 & Z_z \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

La surface de calcul est perpendiculaire à $\vec{e}_r$, donc l'impédance $Z_r = 0$.

Le tenseur $\bar{Z}_{s,mn}$ permet de lier les composantes tangentielles du champ à la surface de calcul. Par définition :

$$\vec{e}_n \times \vec{E}_{mn} \times \vec{e}_n = \bar{Z}_{s,mn}(\vec{e}_n \times \vec{H}_{mn}) \tag{2.36}$$

avec $\vec{e}_n$ le vecteur normal à la surface de calcul. Dans le cas du guide d'ondes circulaire, présenté dans la figure 2.6, la normale à la paroi est le vecteur $\vec{e}_n = \vec{e}_r$. Ainsi, l'expression de l'équation peut se simplifier en :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_\theta & 0 \\ 0 & 0 & Z_z \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_r \\ H_\theta \\ H_z \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -Z_\theta H_z \\ Z_z H_\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.37}$$

A l'aide de l'équation (2.37), les impédances Z'_θ et Z'_z en $(r = a')$ peuvent alors s'exprimer en fonction des composantes du champ EM :

$$Z'_\theta = \frac{-E_\theta}{H_z}\bigg|_{r=a'}, Z'_z = \frac{E_z}{H_\theta}\bigg|_{r=a'} \tag{2.38}$$

où l'impédance Z'_θ caractérise les modes TE et l'impédance Z'_z caractérise les modes TM. Les modes hybrides sont caractérisés, quant à eux, par les deux impédances simultanément. Le calcul des équations de dispersion des modes passe par

l'identification des impédances de surface qui décrivent les conditions aux limites de la paroi du guide d'ondes à chaque fréquence.

Matrice et équation de dispersion TME

La caractérisation d'un mode se fait en deux étapes : d'abord, le calcul de sa constante de propagation β_z ou d'atténuation α_z en fonction de la fréquence ; ensuite, les amplitudes électrique et magnétique Γ_{mn}^{s} et Ψ_{mn}^{s}, avec $s = pair$ ou $s = impair$, sont calculées. Ces dernières permettent de donner les cartographies du champ électromagnétique. Pour déterminer l'ensemble de ces paramètres, les impédances de surface sont utilisées afin d'obtenir un système linéaire, dont la résolution donne la constante de propagation et les amplitudes Γ_{mn}^{s} et Ψ_{mn}^{s}.

Considérons le cas pair, les composantes des champs $E_{z,mn}^{pair}$, $H_{z,mn}^{pair}$, $E_{\theta,mn}^{pair}$ et $H_{\theta,mn}^{pair}$ sont remplacées par leurs expressions, données par (2.19), dans l'équation (2.38) des impédances de surfaces Z'_θ et Z'_z, ce qui donne :

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\gamma_{z,mn} m}{k_{c,mn}^2 a'}\Gamma_{mn}^{pair} J_m(k_{c,mn}a') + \dfrac{jZ_0 k_0}{k_{c,mn}}\Psi_{mn}^{pair} J'_m(k_{c,mn}a')\right) = Z'_\theta \Psi_{mn}^{pair} J_m(k_{c,mn}a') \\ \Gamma_{mn}^{pair} J_m(k_{c,mn}a') = Z'_z\left(-\dfrac{jk_0}{Z_0 k_{c,mn}}\Gamma_{mn}^{pair} J'_m(k_{c,mn}a') - \dfrac{\gamma_{z,mn} m}{k_{c,mn}^2 a'}\Psi_{mn}^{pair} J_m(k_{c,mn}a')\right) \end{cases} \quad (2.39)$$

Le système linéaire (2.39) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_{z,mn} m J_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}^2 a'} & \dfrac{jZ_0 k_0 J'_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}} + Z'_\theta J_m(k_{c,mn}a') \\ J_m(k_c a) + \dfrac{jZ'_z k_0 J'_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}} & \dfrac{Z'_z \gamma_{z,mn} m J_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}^2 a'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{mn}^{pair} \\ \\ \Psi_{mn}^{pair} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

De même, avec un raisonnement similaire, le système matriciel suivant est obtenu pour le cas impair :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma_{z,mn} m J_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}^2 a'} & \dfrac{jZ_0 k_0 J'_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}} + Z'_\theta J_m(k_{c,mn}a') \\ J_m(k_c a) + \dfrac{jZ'_z k_0 J'_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}} & -\dfrac{Z'_z \gamma_{z,mn} m J_m(k_{c,mn}a')}{k_{c,mn}^2 a'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{mn}^{impair} \\ \\ \Psi_{mn}^{impair} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Les systèmes matriciels (2.40) et (2.41) représentent un problème aux valeurs propres. Le vecteur propre $(\Gamma_{mn}^{s} \quad \Psi_{mn}^{s})^t$ solution de ce problème est associé à une valeur propre $\lambda = 0$, ce qui permet de déterminer les amplitudes du champ électromagnétique si la matrice est connue.

De plus, le déterminant des matrices TME doit être nul. Cette condition sur le déterminant conduit à l'équation de dispersion obtenue dans [1], [2] et [3] :

$$F(k_{c,mn}, Z'_z, Z'_\theta, k_0, m, a') = 0 \quad (2.42)$$

avec,

$$F\left(k_{c,mn}, Z'_z, Z'_\theta, k_0, m, a'\right) = \frac{Z'_Z}{Z_0}\left[J'_m\left(k_{c,mn}a'\right)\right]^2 + \left(\frac{Z'_Z Z'_\theta}{Z_0^2} + 1\right)\frac{k_{c,mn}J_m\left(k_{c,mn}a'\right)J'_m\left(k_{c,mn}a'\right)}{jk_0}$$
$$-\frac{Z'_\theta}{Z_0}\left[\frac{k_{c,mn}J_m\left(k_{c,mn}a'\right)}{k_0}\right]^2 + \frac{Z'_Z}{Z_0}\left[\left(\frac{k_{c,mn}}{k_0}\right)^2 - 1\right]\left[\frac{mJ_m\left(k_{c,mn}a'\right)}{k_{c,mn}a'}\right]^2$$

Sachant que $\gamma_{z,mn}^2 = k_{c,mn}^2 - k_0^2$ et en connaissant les impédances de surface Z'_z et Z'_θ, la résolution de l'équation de dispersion permet de calculer la constante de propagation du mode $\gamma_{z,mn}$ en fonction de la fréquence f_0. Ainsi, le diagramme de dispersion peut être tracé. Les matrices (2.40) et (2.41) étant complètement définies, une recherche de vecteur propre permet par la suite d'accéder aux cartographies du champ EM.

2.2.2 Nouvel algorithme itératif de calcul des modes

Le calcul des constantes de propagation peut se faire par un calcul itératif basé sur la résolution de l'équation de dispersion (2.42). Pour résoudre cette équation, il faut connaître les impédances de surface équivalentes. Elles sont définies à partir des conditions de périodicité données par l'ordre du mode m et la constante de propagation $\gamma_{z,mn}$. Etant donné que la constante de propagation $\gamma_{z,mn}$ est inconnue, un calcul itératif est effectué pour la déterminer.

Les impédances de surface Z'_z et Z'_θ, modélisant la paroi réelle du guide d'ondes, sont calculées par la méthode des éléments finis FEM sur une surface virtuelle de rayon intermédiaire ($\rho = a'$). Le motif de la paroi est périodique selon l'axe z (période p) et selon l'angle θ (période α). L'étude peut donc se restreindre à une cellule élémentaire (figure 2.7) en imposant des conditions limites sur les parois périodiques

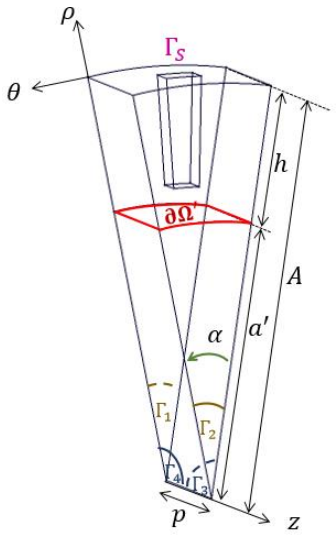


Figure 2.7 - Cellule élémentaire d'un guide d'ondes 3D à paroi anisotrope.

Ainsi, des conditions de périodicité sont données par un déphasage angulaire (2.43) et un déphasage selon l'axe de propagation z (2.44) :

$$U(\rho,\theta,z+p)|_{\Gamma_2} = U(\rho,\theta,z)|_{\Gamma_1}\, e^{-\gamma_{z,mn}p} \tag{2.43}$$

$$U(\rho,\theta+\alpha,z)|_{\Gamma_4} = U(\rho,\theta,z)|_{\Gamma_3}\, e^{-jm\alpha} \tag{2.44}$$

Les impédances de surface sont déterminées sur la surface **∂Ω'** par une résolution eigenmode (et donc sans port d'accès) par la FEM à l'aide du logiciel open-source Gmsh [10] & GetDP [11].

Procédure initiale de calcul

Pour tracer les diagrammes de dispersion pour les modes propagatifs, un code itératif basé sur la TME a été proposé dans [8]. Le code permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde défini par (2.45) :

$$\varphi = arcsin\left(\frac{-j\gamma_z}{k_0}\right) \tag{2.45}$$

Connaissant cet angle d'incidence φ, la constante de coupure k_c et la constante de phase β_z sont définies à une fréquence donnée f_0 en utilisant la définition du vecteur d'onde $\overrightarrow{k_0}$ dans le cas propagatif :

$$\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} k_c \\ k_\theta \\ \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 cos\,\varphi \\ 0 \\ k_0\, sin\,\varphi \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

L'organigramme de cet algorithme TME-FEM est présenté sur la figure 2.8. Les équations de référence (2.19) ou (2.21) mentionnées dans [8] (et dans cet organigramme) correspondent à l'équation de dispersion donnée par (2.42) dans le cas $m \neq 0$ et $m = 0$.

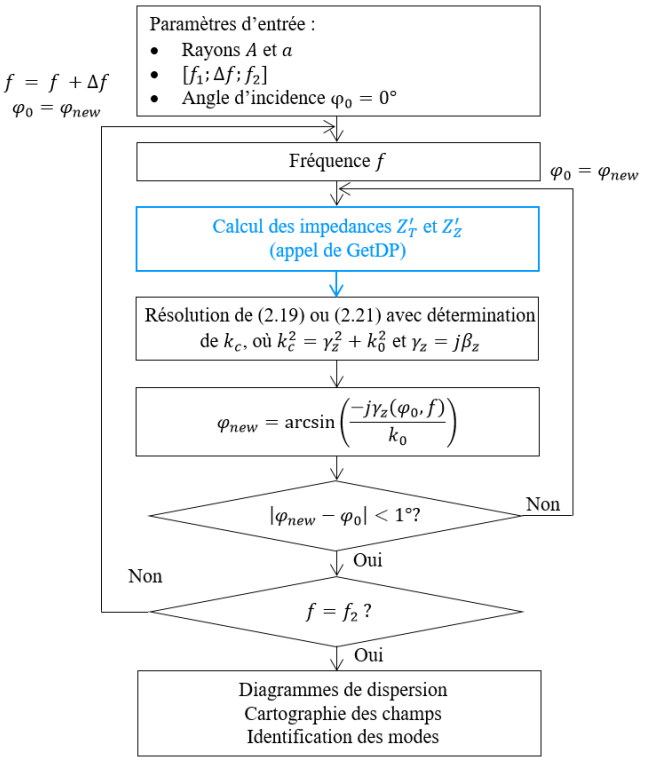


Figure 2.8 - Organigramme du code 3D dans [2],

Le calcul se fait sur une bande de fréquence $[f_1, f_2]$ avec un pas Δf. Le critère d'arrêt du calcul itératif est un critère d'incrément minimal φ tel que $|\varphi_{new} - \varphi_0| < 1°$.

Exemple : guide d'ondes à paroi métamatériaux de type 'corrugation'

La procédure de calcul proposée va être appliquée au cas d'un guide d'ondes à corrugations axiales. La cellule élémentaire du guide est présentée dans la figure 2.9. Les dimensions de la cellule sont sélectionnées identiques à celles de l'exemple de validation proposé en [2]. Pour la résolution FEM, un maillage standard est choisi, il est raffiné autour de la surface de calcul de rayon ($\rho = a'$). Le maillage est généré par le logiciel Gmsh, et ensuite, pour des conditions de périodicité données, la résolution permettant de calculer les impédances s'effectue par le solveur GetDP.

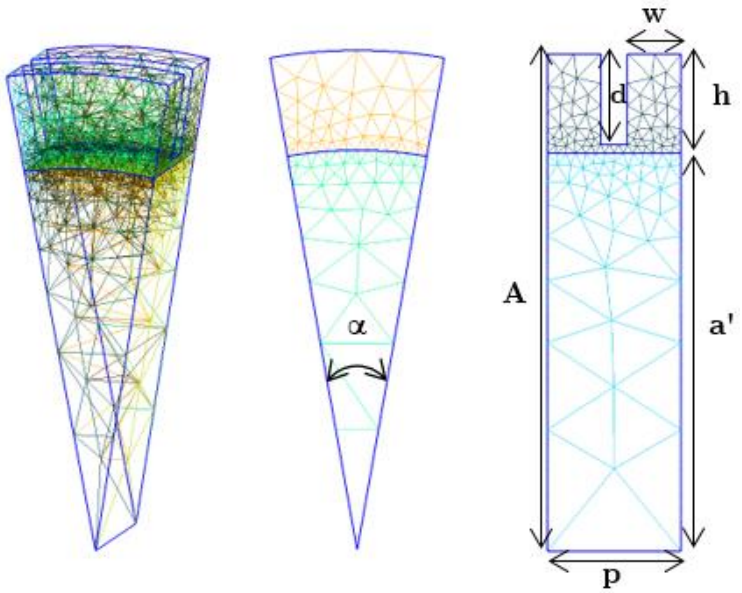


Figure 2.9 - Cellule élémentaire du guide corrugué.

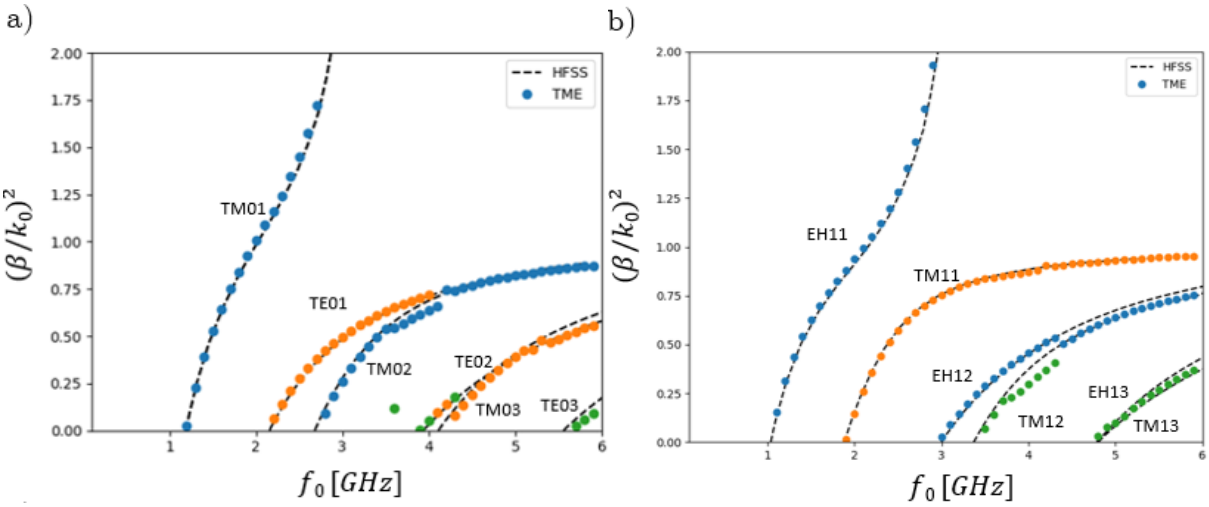


Figure 2.10 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs obtenus avec l'algorithme de la figure 2.8 : a) modes m=0 et b) modes m=1

Pour cet exemple, les diagrammes de dispersion sont tracés sur une bande de fréquences [0.1GHz, 6GHz] pour les modes d'ordre $m = 0$ et $m = 1$. Ils sont représentés sur la figure 2.10. Les allures des modes $m = 0$ sont correctes dans la globalité, mais il y a des décrochements pour les modes TM_{02}, TE_{02} et TE_{03}, des chevauchements entre certains modes (TE_{01} et TM_{02} par exemple) et des sauts d'un mode à un autre (identifiés par les sauts de couleurs). De même, des décalages entre les résultats de la TME et ceux d'Ansys HFSS ont été remarqués pour les modes d'ordre plus élevé $m = 1$. Notamment, l'apparition de modes hybrides EH_{12} et EH_{13}. Les imprécisions des résultats sont liées à la difficulté de convergence pour certains des modes. Ces soucis de convergence sont liés potentiellement à la non détection des solutions de l'équation de dispersion et au critère de convergence $|\varphi_{new} - \varphi_0| < 1°$. De ce fait, le nombre total d'itérations est élevé pour chacun des cas présentés ; le calcul est fait en **2725 itérations** pour les modes $m = 0$ et en **2576 itérations** pour les modes $m = 1$. Le temps de calcul qui en découle est de **31min29s** pour le cas $m = 0$ et **31min04s** pour m=1 sur un ordinateur avec les caractéristiques suivantes : Intel Core i7-7500U CPU @2.70GHz-2.90GHZ, Mémoire installée (RAM) de 16Go.

Après une analyse des diagrammes de dispersion de plusieurs cas de structure, les décalages observés entre les résultats obtenus avec la TME-FEM et ceux d'Ansys HFSS, peuvent être imputés à plusieurs facteurs comme le choix de la surface (définie par *a'*) sur laquelle sont calculées les impédances de surface et la structuration de l'algorithme qui peut entrainer l'élimination de modes ou l'imprécision sur certains modes à cause des chevauchements ou du critère de convergence. De ce fait, des améliorations de cette approche TME-FEM sont envisagées dans la suite afin de résoudre les problèmes de convergence et de chevauchements.

Nouvel algorithme de calcul TME-FEM

Dans notre contexte, la précision et la rapidité des résultats sont primordiales pour envisager leur exploitation dans un calcul de Mode-Matching à l'interface d'une transition guide métallique/guide à métamatériaux (chapitre 3) et pour ensuite l'utiliser dans un calcul d'optimisation de la forme du métamatériau (chapitre 5). Pour cela, un nouvel algorithme a été développé sur Python, figure 2.11, afin de mieux approcher les modes.

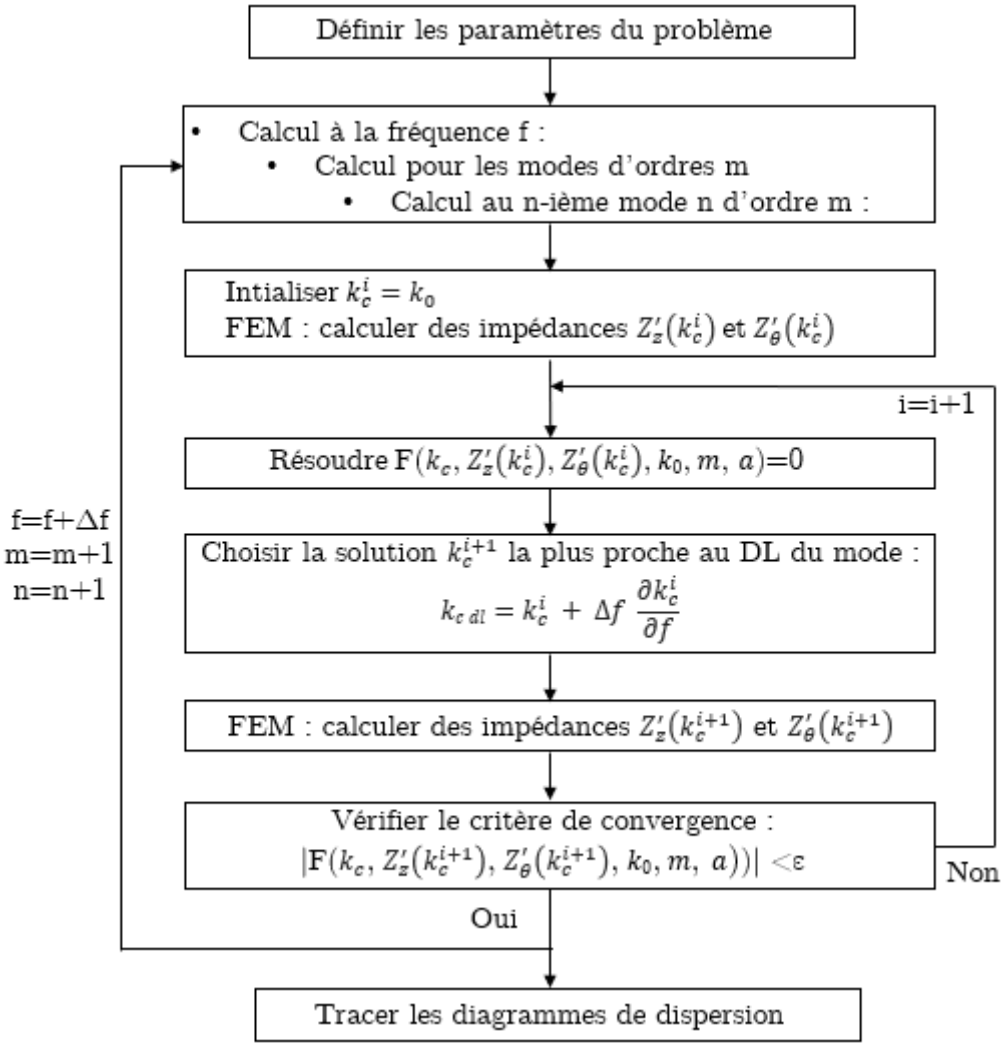


Figure 2.11 - Organigramme du nouvel algorithme itératif.

Plusieurs démarches sont mises en place pour améliorer la procédure initiale de calcul :

(1) Le calcul itératif de la constante de coupure $\{\boldsymbol{k_c^i}\}_{\boldsymbol{i\geq 0}}$ se fait désormais explicitement sans besoin de passer par l'angle d'incidence φ_i.

(2) Le critère d'arrêt de 1° sur l'angle φ_i est remplacé par un critère d'arrêt du résidu plus sévère basé sur l'équation de dispersion $\left|F\left(\boldsymbol{k_c}, Z_z^{'}, Z_\theta^{'}, k_0, m, a'\right)\right| < \varepsilon$.

(3) La convergence est vérifiée avec les impédances de surface $Z'_z(k_c^{i+1})$ et $Z'_\theta(k_c^{i+1})$ recalculées pour la nouvelle solution k_c^{i+1}.

(4) La vérification de la convergence ne se fait pas sur tous les modes de même ordre m simultanément, mais mode par mode pour ne pas pénaliser les modes convergents si un des modes diverge.

(5) Le chevauchement des modes est évité en choisissant la solution $k_{c,i+1}$ de l'équation de dispersion, la plus proche avec l'interpolation d'ordre 1 du mode considéré.

Ces améliorations permettent un calcul itératif avec un paramétrage plus simple (1), une augmentation de la précision des solutions avec un critère de convergence plus sévère (2,3), une diminution de temps de calcul en évitant des itérations inutiles (4), une récupération des modes perdus à cause des chevauchements (5).

Application sur l'exemple précédent : le guide d'ondes à paroi métamatériau de type 'corrugation axiale'

Le nouvel algorithme est appliqué sur l'exemple du guide d'ondes corrugué proposé dans la figure 2.9, avec les mêmes dimensions et le même maillage que précédemment. Les résultats obtenus avec le code TME+FEM modifié sont présentés sur la figure 2.12.

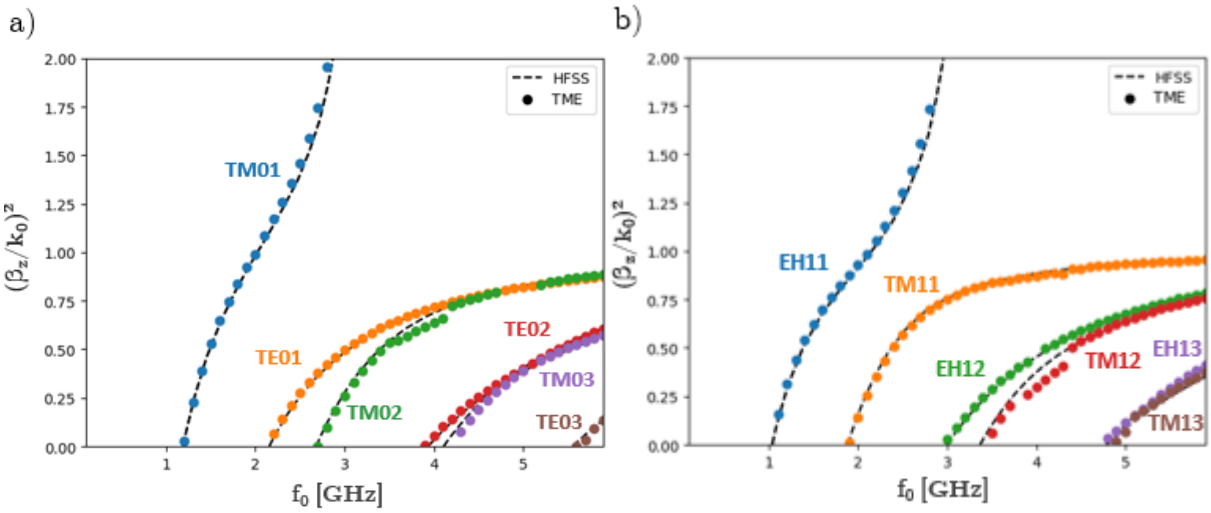


Figure 2.12 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs avec le nouvel algorithme TME+FEM : a) modes m=0, b) modes m=1.

En comparant les résultats avec ceux de la procédure initiale (cf. figure 2.10), les modes sont mieux approchés. Des modes perdus par chevauchement ont été retrouvés, notamment les modes TE_{02}, EH_{12}, TE_{12} et aussi le mode TE_{01} en hautes fréquences. Par ailleurs, la précision des diagrammes de dispersion semble meilleure. Des décrochements similaires à la procédure initiale restent présents et seront améliorés dans les paragraphes qui suivent. Quant au nombre d'itérations total, il est considérablement réduit, il est passé de **2752** à **136 itérations** pour les modes $m = 0$ et de **2576** à **367 itérations** pour les modes $m = 1$. Ce qui permet de gagner un temps de calcul important, en passant de **1h2min (pour le total des modes** $m = 0$ **et** $m = 1$ **simulés)** à **16min**. Ce gain de temps présage également d'une possibilité de coupler cette résolution à un code d'optimisation puisqu'il faut en moyenne 1.3s/mode/fréquence.

Par ailleurs, les points de décrochement des modes TM_{02} et TM_{12} autour de 4GHz persistent, même en effectuant un maillage plus dense ou en imposant un critère de convergence plus sévère pour accroître la précision. Ils doivent donc s'expliquer par

un autre phénomène, potentiellement le choix arbitraire du plan de calcul des impédances.

2.2.3 Amélioration sur le calcul des impédances de surface

Le choix de la surface fictive de calcul $\partial\Omega'$ est important car il peut affecter les résultats des impédances de surface, comme nous allons le voir dans cette partie. Initialement, la surface est placée proche du motif pour décrire finement l'effet du métamatériau sur le champ EM, mais pas strictement sur le métamatériau où le champ est fortement perturbé par la paroi.

Pour étudier l'effet du choix de cette surface sur le diagramme de dispersion, une technique basée sur une approche statistique est proposée et intégrée à la TME. En effet, les impédances de surface équivalentes sont représentées par leurs valeurs moyennes car une hypothèse d'homogénéité a été faite. Néanmoins, si le champ n'est pas uniforme sur la surface de calcul, la valeur moyenne n'est pas significative. Par conséquent, une mesure de la dispersion des valeurs des impédances par l'écart-type est proposée. C'est un moyen pour évaluer l'homogénéité de l'impédance sur une surface donnée. Si l'écart-type est élevé, cela signifie que l'échantillon est hétérogène sur la surface choisie et qu'il faut alors opter pour une autre surface fictive plus éloignée du métamatériau.

L'écart type d'une impédance $\sigma(Z)$ est défini par la relation suivante :

$$\sigma(Z) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Z_i - Z_{moyenne}\right|^2} \tag{2.47}$$

avec $Z_{moyenne}$ la valeur moyenne de l'impédance et $n = 20 \times 20$ le nombre d'échantillon sur la surface de calcul. Toutefois, afin de mieux juger de la dispersion des valeurs autour de la moyenne, un coefficient de variation est défini, il représente l'écart-type relatif à la moyenne.

$$c_v(Z) = \frac{\sigma(Z)}{Z_{moyenne}} = \frac{1}{Z_{moyenne}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|Z_i - Z_{moyenne}\right|^2} \tag{2.48}$$

De même, le coefficient Relative Standard Deviation (RSD) est défini comme la valeur absolue du coefficient de variation :

$$RSD(Z) = |c_v(Z)| = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{Z_i - Z_{moyenne}}{Z_{moyenne}}\right|^2} \tag{2.49}$$

Ainsi, le RSD est utilisé pour étudier le comportement des impédances de surface, notamment dans les zones de décrochement des modes. Pour les modes TM conditionnés par Z'_θ, le $RSD(Z'_\theta)$ est analysé. Pour les modes TE conditionnés par Z'_z, le

$RSD(Z'_z)$ est analysé. Par ailleurs, quand le mode est hybride, les deux $RSD(Z'_\theta)$ et $RSD(Z'_z)$ sont analysés.

Reprenons les diagrammes de dispersion de l'exemple précédent. Des décrochements ont été remarqués pour les modes TM_{02}, TM_{11} et TM_{12} (figure 2.13) au niveau des zones encerclées ci-dessous.

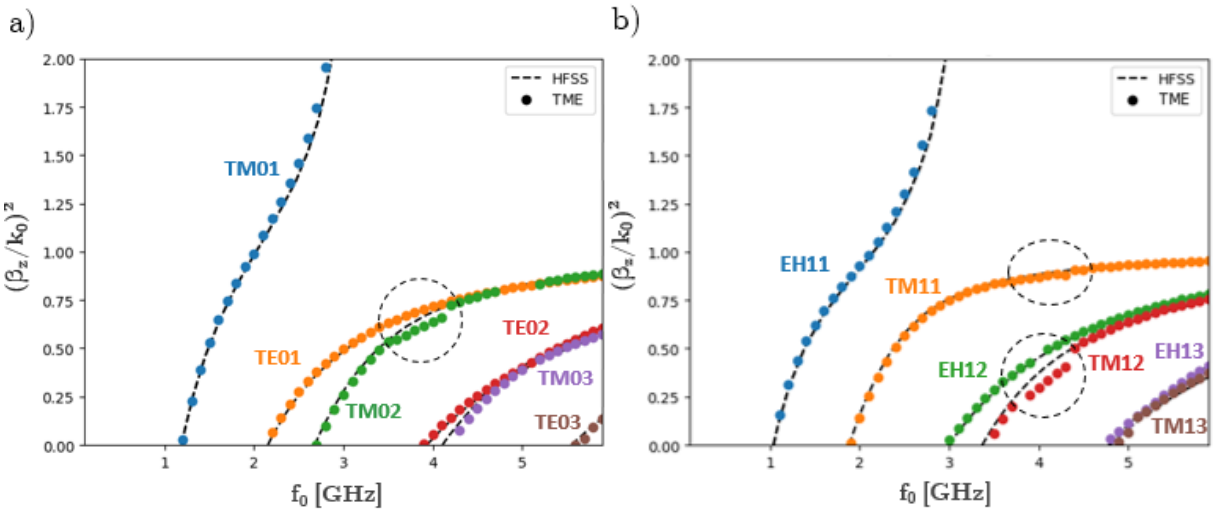


Figure 2.13 - Diagrammes de dispersion avec des décrochements entourés par des tirets noirs : a) m=0, b) m=1.

Pour analyser le décrochage des modes TM, le $RSD(Z'_\theta)$ est tracé sur la même bande de fréquences comme représenté sur la figure 2.14.

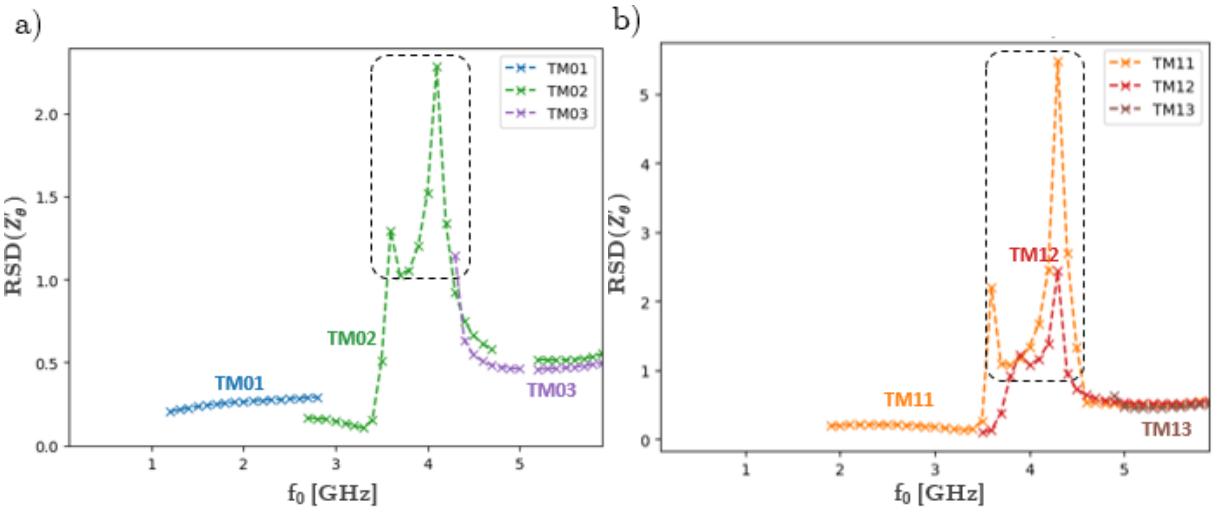


Figure 2.14 - Tracé du RSD pour l'impédance Z'_θ des modes TM (les zones où le RSD est élevé sont entourées par des tirets noirs) a) m=0, b) m=1.

Le RSD est très élevé dans les zones de décrochement des modes, il dépasse un écart relatif de 100% à la moyenne (au-delà de 1 sur les courbes de la figure 2.14), l'hypothèse d'homogénéisation est donc contestable et une autre surface de calcul doit être envisagée.

Nouvelle approche du choix de la surface de calcul :

Cette approche, basée sur le RSD, permet de valider le choix de la surface de calcul. En effet, lorsque le niveau du RSD est élevé pour un mode, l'impédance équivalente n'est plus considérée comme homogène sur la surface. Dans ce cas, la surface de calcul est modifiée et éloignée de la paroi métamatériau. La nouvelle procédure est intégrée dans l'algorithme de calcul à l'étape de « FEM : calculer les impédances Z'_z et Z'_θ » sur la figure 2.15 et les étapes sont détaillées dans la figure 2.16.

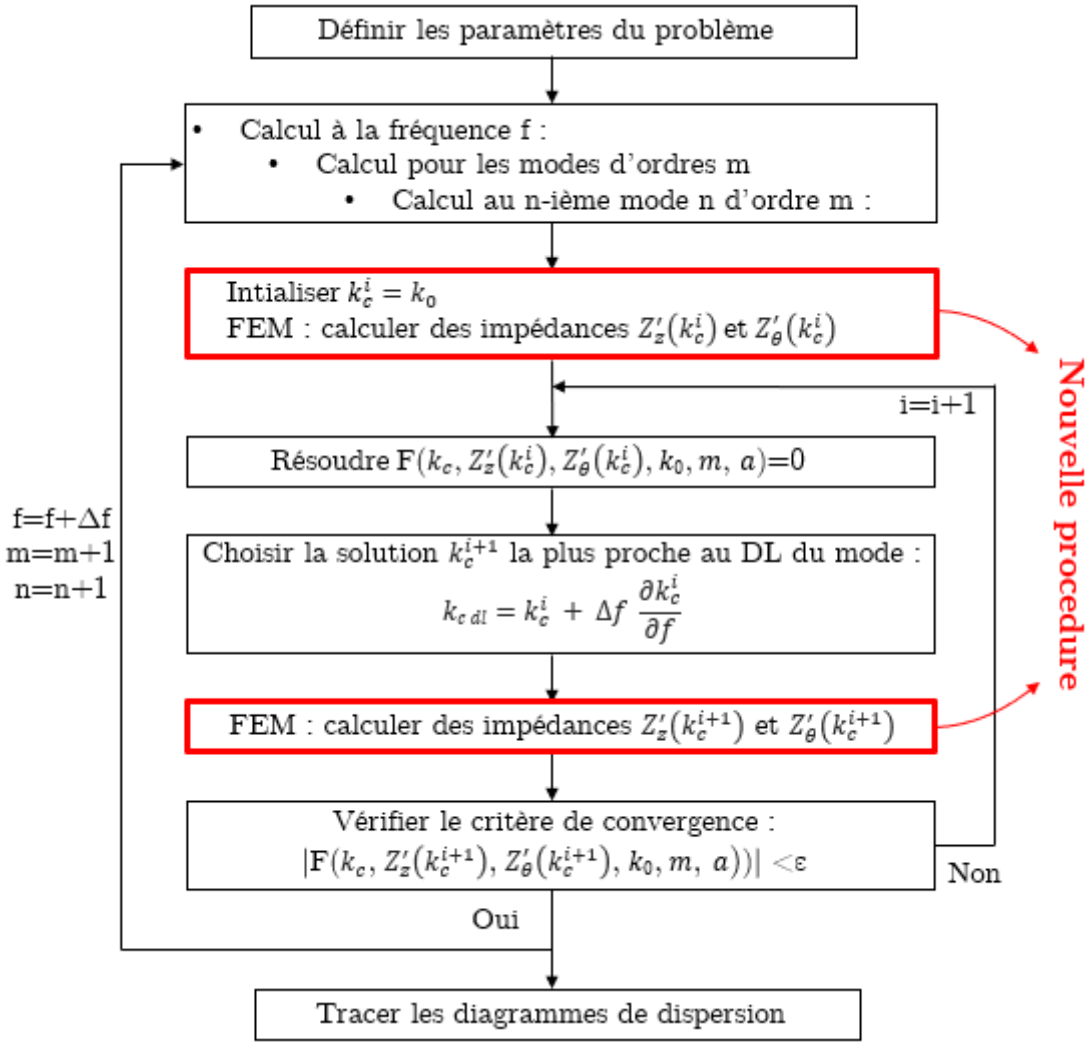


Figure 2.15 - Nouvelle procédure intégrée à l'algorithme de calcul.

D'abord, les impédances sont calculées sur une surface de rayon a'. Ensuite, le RSD est analysé en fonction de la nature du mode : soit pour Z'_z si le TE est dominant, soit pour Z'_θ si le TM est dominant, soit pour les deux impédances si le mode est hybride. Si la valeur du RSD ne dépasse pas le seuil, les impédances moyennes calculées sont utilisées dans l'algorithme ; sinon, le rayon de calcul est diminué jusqu'à ce que l'hypothèse d'homogénéisation soit respectée, mais sans dépasser un rayon minimal car, en s'éloignant du métamatériaux, la représentation de la paroi par les impédances de surfaces devient moins rigoureuse.

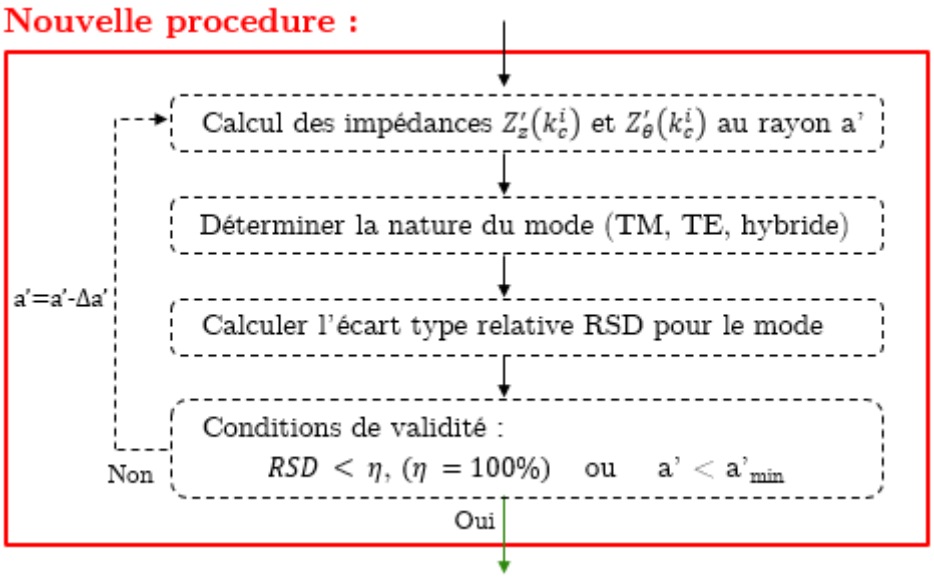


Figure 2.16 – Détail des étapes de la nouvelle procédure.

La nouvelle procédure permet un choix de surface plus approprié. L'algorithme est appliqué dans le cas de l'exemple précédent où il y avait des décrochements sur les modes TM_{02}, TM_{11} et TM_{12}. Les diagrammes de dispersion avant et après la nouvelle approche sont comparés pour les modes $m = 0$ et $m = 1$ respectivement dans les figures 2.17 et 2.18.

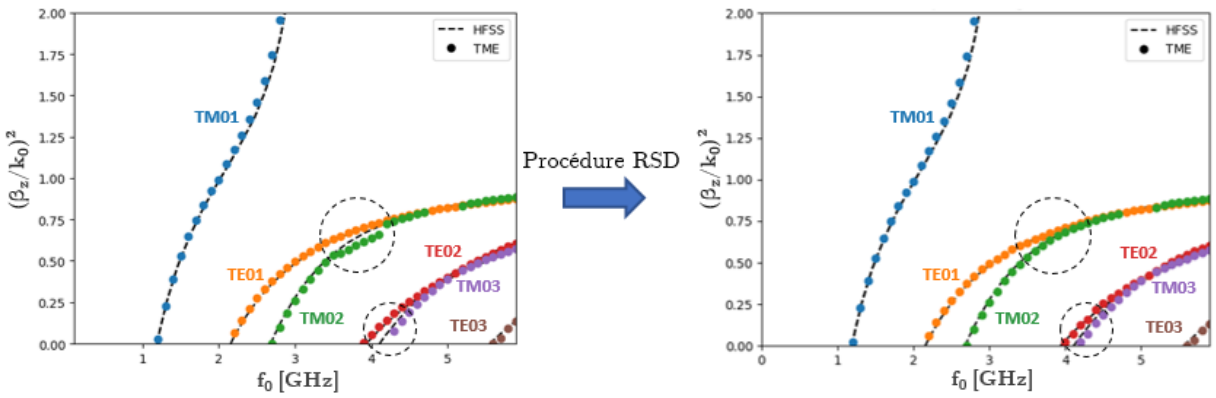


Figure 2.17 - Diagrammes de dispersion avant et après la procédure RSD pour les modes m=0.

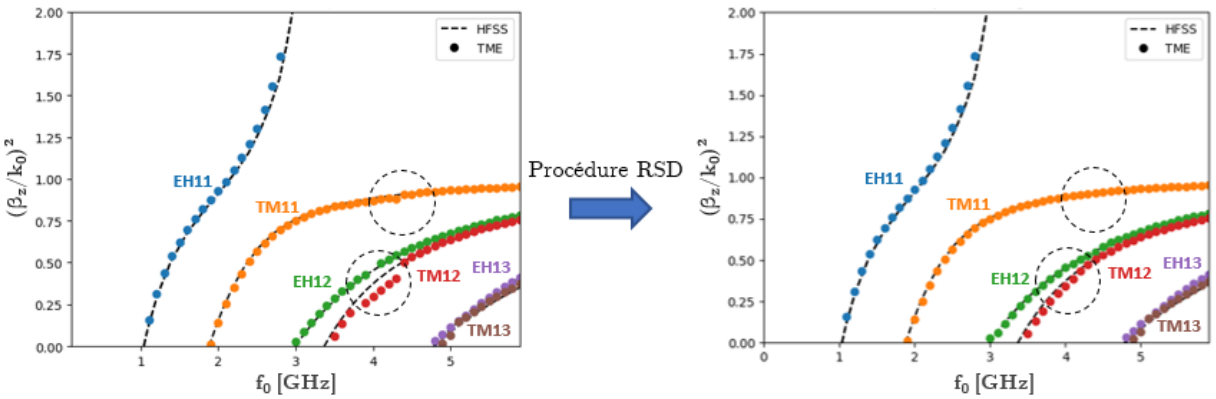


Figure 2.18 - Diagrammes de dispersion avant et après la procédure RSD pour les modes m=1.

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de cette démarche pour résoudre les problèmes de décrochement et donc l'imprécision sur les modes. Cette approche statistique permet non seulement la vérification de l'homogénéité des impédances, mais aussi d'identifier la surface appropriée pour appliquer la TME. Néanmoins, le temps de calcul augmente à cause de l'introduction d'étapes supplémentaires. Le temps total passe de 16min à 45min, ce qui peut être pénalisant pour un calcul d'optimisation où les diagrammes sont tracés pour chaque fréquence indépendamment. De plus, la TME est restreinte aux modes propagatifs et ne permet pas de calculer les modes évanescents qui sont indispensables pour la construction de la base modale du Mode-Matching sur l'ensemble de la bande de fréquences.

2.3 Nouvelle méthodologie de calcul des modes dans les structures périodiques et/ou à parois métamatériaux basée sur la FEM

Une méthodologie de calcul direct et rapide est envisagée pour analyser les propriétés dispersives des modes afin de pallier les défauts de la méthode précédente à savoir : accéder aux modes évanescents et déterminer les constantes de propagation le plus rapidement possible. Elle est basée sur la méthode des éléments finis avec une résolution d'un problème aux valeurs propres. La modélisation du problème est faite à l'aide du logiciel open source GMSH & GetDP.

2.3.1 Calcul des propriétés dispersives des modes avec une approche FEM

Trouver les équations de dispersion des guides d'ondes à paroi métamatériau peut se faire avec une approche directe FEM sans utiliser la TME. Il faut pour cela balayer l'ensemble des conditions de périodicité de la cellule élémentaire du guide d'ondes et résoudre un problème aux valeurs propres, puis extraire les fréquences de résonance de ces modes.

Formulation variationnelle généralisée du problème

Pour caractériser un guide à paroi périodique, comme dans la TME, l'étude peut être restreinte à une cellule élémentaire en imposant des conditions de périodicité [12], un exemple de cellule élémentaire de volume Ω est représenté sur la figure 2.19. Des conditions de déphasage angulaire (2.43) sont alors imposées sur les faces Γ_3 et Γ_4 alors que des conditions de déphasages selon l'axe de propagation (Oz) (2.44) sont appliquées entre Γ_1 et Γ_2.

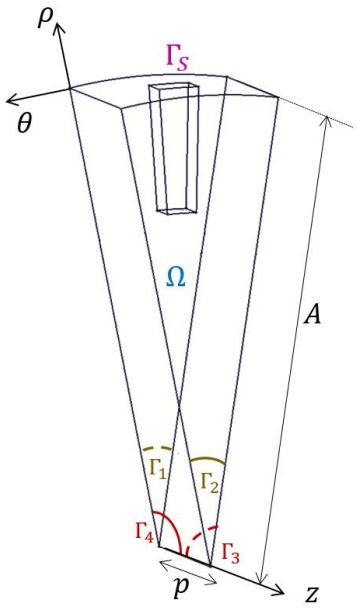


Figure 2.19 - Cellule élémentaire d'un guide d'onde 3D à paroi métamatériau.

Dans un guide d'ondes circulaire, l'équation de Helmholtz du champ $\vec{u}$ s'écrit sous la forme :

$$\Delta\vec{u} + k_0^2\vec{u} = \vec{0} \tag{2.50}$$

avec $\vec{u}$, le vecteur du champ électromagnétique (électrique ou magnétique). La formule du rotationnel d'un rotationnel permet d'écrire : $\nabla \times \nabla \times \vec{u} = \nabla(\nabla.\vec{u}) - \Delta\vec{u}$. A partir des équations de Maxwell sans source (2.8) et (2.9), $\nabla.\vec{u} = 0$. Cela permet de réécrire l'équation de Helmholtz sous la forme suivante :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u} - k_0^2\vec{u} = \vec{0} \tag{2.51}$$

Soit une fonction test $\vec{v}$ définie sur l'espace vectoriel $H(curl, \Omega)$, avec $H(curl, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega)^3 \mid curl\ \varphi \in L^2(\Omega)^3\}$. Pour établir la formulation faible, l'équation (2.51) est multipliée par le conjugué de la fonction test $\vec{v}^*$ et est intégrée sur le volume Ω.

$$\int_\Omega \vec{v}^*.(\nabla \times \nabla \times \vec{u})\, d\Omega - k_0^2 \int_\Omega \vec{v}^*.\vec{u}\, d\Omega = 0 \tag{2.52}$$

La formule d'identité vectorielle permet d'écrire :

$$\vec{A}.(\nabla \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}).\vec{B} - \nabla.(\vec{A} \times \vec{B}) \tag{2.53}$$

En utilisant l'identité (2.53), l'équation (2.52) peut se réécrire sous la forme :

$$\int_\Omega (\nabla \times \vec{v}^*).(\nabla \times \vec{u})\, d\Omega - k_0^2 \int_\Omega \vec{v}^*.\vec{u}\, d\Omega - \int_\Omega \nabla.(\vec{v}^* \times \nabla \times \vec{u})\, d\Omega = 0 \tag{2.54}$$

Le théorème de la divergence [13] est appliqué au terme de l'intégrale de la divergence, ce qui permet d'écrire :

$$\int_\Omega (\nabla \times \vec{v}^*).(\nabla \times \vec{u}) d\Omega - k_0^2 \int_\Omega \vec{v}^*.\vec{u}\, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \vec{n}.(\vec{v}^* \times \nabla \times \vec{u}) dS = 0 \tag{2.55}$$

avec $\partial\Omega$ la surface délimitant le volume Ω et $\vec{n}$ la normale à la surface $\partial\Omega$, dirigée vers l'extérieur.

D'après la propriété vectorielle suivante :

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}), \tag{2.56}$$

l'expression de la formulation variationnelle peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{\Omega}(\nabla\times\vec{v}^{*}).(\nabla\times\vec{u})d\Omega-k_0^2\int_{\Omega}\vec{v}^{*}.\vec{u}\,d\Omega+\oint_{\partial\Omega}\vec{v}^{*}.(\vec{n}\times\nabla\times\vec{u})\,dS=0 \tag{2.57}$$

L'intégrale sur les bords de la formulation variationnelle (2.57) peut se décomposer sur les surfaces $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4\cup\Gamma_s$:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega}\vec{v}^{*}.(\vec{n}\times\nabla\times\vec{u})\,dS=&-\int_{\Gamma_1}\vec{v}^{*}.(\vec{e}_z\times\nabla\times\vec{u})\,d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\vec{v}^{*}.(\vec{e}_z\times\nabla\times\vec{u})\,d\Gamma\\&-\int_{\Gamma_3}\vec{v}^{*}.(\vec{e}_\theta\times\nabla\times\vec{u})\,d\Gamma+\int_{\Gamma_4}\vec{v}^{*}.(\vec{e}_\theta\times\nabla\times\vec{u})\,d\Gamma\\&+\int_{\Gamma_s}\vec{v}^{*}.\left(\vec{n}_{\Gamma_s}\times\nabla\times\vec{u}\right)d\Gamma\end{aligned} \tag{2.60}$$

avec $\vec{n}_{\Gamma_s}$ la normale à la surface Γ_s, dirigée vers l'extérieur.

Dans le modèle étudié, la paroi périodique est considérée avec des frontières métalliques. De ce fait, des conditions aux limites de type conducteur parfait sont imposées aux bords extérieurs de la paroi représentés par la surface Γ_s. Ils sont traduits par une condition de Dirichlet sur le champ électrique $\vec{n}\times\vec{E}=\vec{0}$ [12] et une condition de Neumann sur le champ magnétique $\vec{n}\times(\nabla\times\vec{H})=\vec{0}$ [12], ce qui donne dans les deux cas $\vec{u}=\vec{E}$ ou $\vec{u}=\vec{H}$, une intégrale nulle sur Γ_s :

$$\int_{\Gamma_s}\vec{v}^{*}.\,\vec{n}_{\Gamma_s}\times(\nabla\times\vec{u})\,d\Gamma=0 \tag{2.61}$$

D'un autre côté, la condition de périodicité (2.44) permet de simplifier les intégrales des bords des surfaces angulaires Γ_3 et Γ_4 :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4}\vec{v}^{*}|_{\Gamma_4}.\vec{e}_\theta\times\left(\nabla\times\vec{u}|_{\Gamma_4}\right)d\Gamma&=\int_{\Gamma_4}\vec{v}^{*}|_{\Gamma_3}\,e^{jm\alpha p}.\,\vec{e}_\theta\times\left(\nabla\times\vec{u}|_{\Gamma_3}\,e^{-jm\alpha p}\right)d\Gamma\\&=\int_{\Gamma_3}\vec{v}^{*}|_{\Gamma_3}.\,\vec{e}_r\times\left(\nabla\times\vec{u}|_{\Gamma_3}\right)d\Gamma\end{aligned} \tag{2.63}$$

Après les simplifications, l'expression de la formulation variationnelle peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\int_{\Omega}(\nabla\times\vec{v}^{*}).(\nabla\times\vec{u})d\Omega-k_0^2\int_{\Omega}\vec{v}^{*}.\vec{u}\,d\Omega+\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\vec{v}^{*}.(\vec{n}\times\nabla\times\vec{u})\,d\Gamma=0 \tag{2.64}$$

Modes propagatifs

Formulation variationnelle simplifiée :

Pour un mode propagatif, la constante de propagation γ_z est imaginaire pure $\gamma_z = j\beta_z$. Dans ce cas, le champ électromagnétique est déphasé entre deux parois périodiques suivant z de distance p par un angle $\varphi = \beta_z p$. Ainsi, la condition de périodicité (2.43) peut s'écrire dans le cas propagatif, pour les parois définies sur la figure 2.19, sous la forme :

$$\vec{u}(\rho,\theta,z+p)|_{\Gamma_2} = \vec{u}(\rho,\theta,z)|_{\Gamma_1}\, e^{-j\beta_z p} \tag{2.65}$$

La condition de périodicité (2.65) permet de simplifier les intégrales des bords des surfaces parallèles S_1et S_2, donc :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \vec{v}^*|_{\Gamma_2}.\vec{e}_r \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_2}\right) d\Gamma \;&= \int_{\Gamma_2} \vec{v}^*|_{\Gamma_1}\, e^{j\beta_z p}.\vec{e}_r \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_1}\, e^{-j\beta_z p}\right) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} \vec{v}^*|_{\Gamma_1}.\vec{e}_r \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_1}\right) d\Gamma \end{aligned} \tag{2.66}$$

Ainsi, à partir de (2.66), l'expression de la formulation variationnelle faible (2.64) peut se simplifier en :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{v}^*).(\nabla \times \vec{u}) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \vec{v}^*.\vec{u}\, d\Omega = 0 \tag{2.67}$$

Soit $\{\vec{\phi}_i\}_{1\le i\le n}$ la base de l'espace vectoriel discret $H_h(curl,\Omega)$ de dimension n associé à l'espace $H(curl,\Omega)$. La décomposition du champ électromagnétique dans cette base : $\vec{u} = \sum_{i=0}^{n} u_i \vec{\phi}_i$, avec u_i les coefficients de la décomposition de $\vec{u}$. La fonction test choisie est $\vec{v} = \vec{\phi}_j$. Les expressions de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont remplacées dans la formulation (2.67), donc :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i \left(\int_{\Omega} \left(\nabla \times \vec{\phi}_j^{\,*}\right).\left(\nabla \times \vec{\phi}_i\right) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \vec{\phi}_j^{\,*}.\vec{\phi}_i\, d\Omega \right) = 0 \tag{2.68}$$

La formulation variationnelle peut s'écrire ainsi sous format matriciel :

$$AU = \omega^2 BU \tag{2.69}$$

où $A_{i,j} = \int_{\Omega} \left(\nabla \times \vec{\phi}_j^{\,*}\right).\left(\nabla \times \vec{\phi}_i\right) d\Omega$ les coefficients de la matrice A, $B_{i,j} = \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} \vec{\phi}_j^{\,*}.\vec{\phi}_i\, d\Omega$ les coefficients de la matrice B et $U = \{u_i\}_{1\le i\le n}$ le vecteur des inconnues. Ce qui donne un problème aux valeurs propres « *Eigenmode Problem* », la résolution de ce problème permet de trouver les pulsations ω et ainsi les fréquences de résonance, à chaque condition de périodicité.

Modélisation du problème en GetDP :

Pour trouver les fréquences de résonance des modes propagatifs, deux démarches équivalentes sont possibles pour la résolution. Soit modéliser le problème entièrement sur GetDP avec un calcul interne des valeurs propres. Soit définir la structure maillée et créer ses matrices des coefficients A et B sans imposer de conditions aux limites. L'inclusion des conditions aux limites et la résolution du problème se font alors ultérieurement par un post-traitement sur Python. Cette dernière démarche est plus complexe, elle sera détaillée et appliquée dans le cas des modes évanescents où les conditions aux limites ne permettent pas de simplifier la formulation variationnelle.

Dans le cas propagatif, la modélisation peut se faire entièrement avec le solveur GetDP. La définition du problème s'effectue dans un fichier data de type ('.pro') à l'aide des 10 objets suivants :

'Group' : Définir les différentes régions de la structure ; le volume Ω et les surfaces $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_s$.

'Function' : Insérer la valeur de la constante de propagation, l'ordre du mode et des constantes globales

'Constraint' : Imposer des conditions de Neumann ou Dirichlet sur la surface Γ_s et des conditions de périodicité sur les surfaces Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4.

'FunctionSpace' : Définir l'espace discret de travail $H_h(curl, \Omega)$, l'ordre des fonctions test 'P1' et les contraintes sur l'espace.

'Jacobienne' : Transformations géométriques

'Intégration' : Méthode d'intégration utilisée de type Gauss

'Formulation' : Ecrire les deux termes de la formulation variationnelle (2.67)

'Résolution' : Résoudre le problème à valeur propre (2.69)

'PostProcessing' : Calculer le champ électromagnétique correspondant au vecteur U

'PostOperation' : Exporter les valeurs propres ω^2

Les étapes de calcul GetDP et les relations entre les objets sont présentées dans la figure 2.20. Les flèches vertes décrivent les étapes de calcul dans l'ordre et les flèches en pointillés décrivent les relations entre les différents objets.

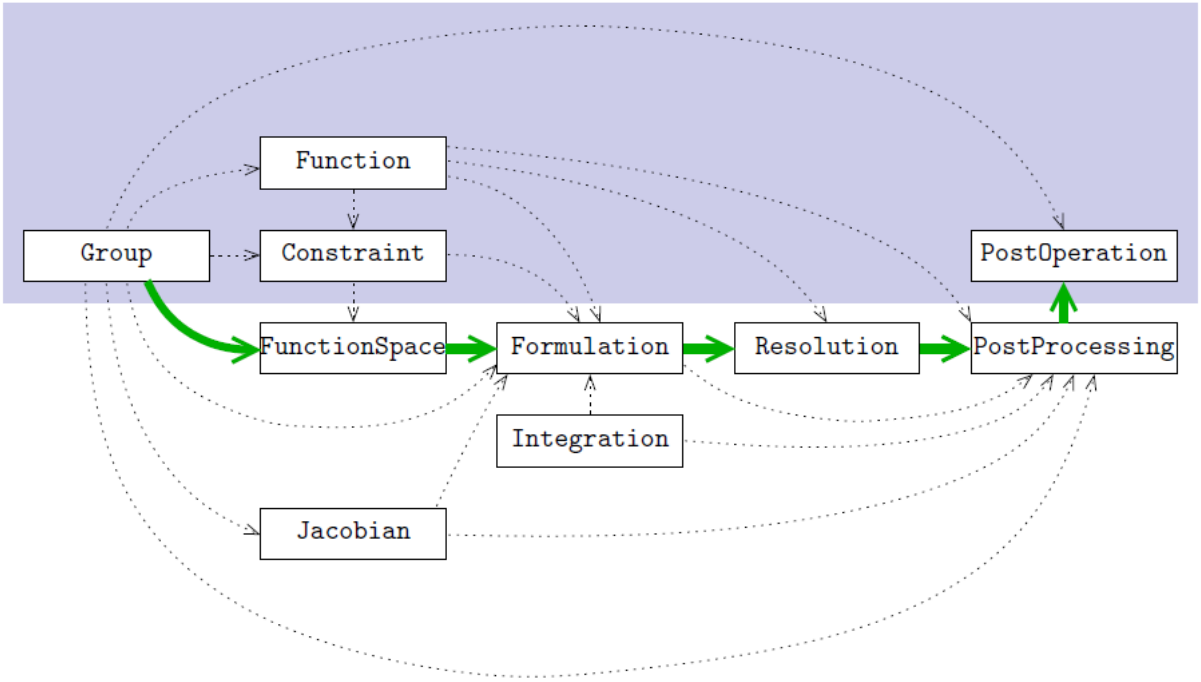


Figure 2.20 - Modélisation du problème sous GetDP.

Validation des résultats :

La détermination des fréquences de résonance de la cellule élémentaire se fait en imposant les conditions de périodicité en GetDP. Il suffit pour cela de balayer l'ensemble des conditions en m et en $\gamma_z = j\beta$ (ce qui revient à balayer l'angle $\varphi = \beta_z p$) et extraire les résultats en f_0 sur la structure.

- **Exemple du guide d'ondes à corrugations axiales**

La résolution est faite pour l'exemple de la corrugation traitée précédemment (figure 2.9). Dans ce cas, l'angle φ est balayé entre 0 et 180° pour les modes d'ordre $m = 0$ et $m = 1$. Les diagrammes de dispersion sont tracés sur la figure 2.21.

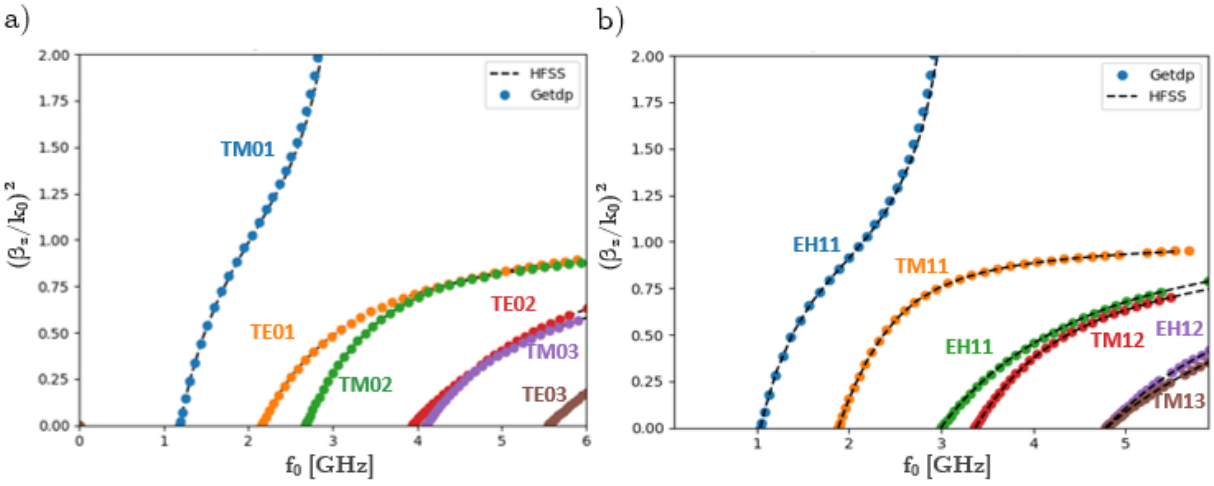


Figure 2.21 - Diagrammes de dispersion avec la résolution GetDP : a) m=0, b) m=1.

Les temps de calcul sont drastiquement réduits (44s pour $m = 0$ au lieu de 16min50 ; 42s pour $m = 1$ au lieu de 29min). Les diagrammes des modes sont précis pour un maillage standard. Ils permettent donc de définir très rapidement les constantes de propagation des modes.

Modes évanescents

Une extension aux modes évanescents de la démarche précédente a été testée en remplaçant la constante de propagation $\gamma_z = \alpha$ dans les conditions de périodicité. Les résultats obtenus pour l'exemple de corrugation pour les modes d'ordre $m = 0$ sont représentés sur la figure 2.22.

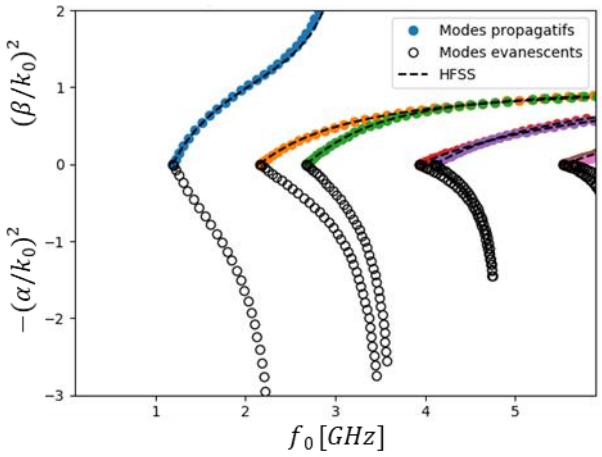


Figure 2.22 - Les résultats des modes évanescents avec la procédure directe sur GetDP.

Les résultats trouvés avec GetDP sont erronés car les modes droitiers devraient être évanescents avant la fréquence de coupure du mode et pas après. Cela est dû au fait que le terme de bord de la formulation variationnelle ne se simplifie pas dans le cas des modes évanescents. Quant à Ansys HFSS, il ne trace pas les modes évanescents car les conditions de périodicité sont seulement des déphasages. Ainsi, une nouvelle démarche a été développée pour trouver tous les modes qu'ils soient propagatifs ou évanescents. Elle est détaillée par la suite.

<u>Formulation variationnelle pour les modes évanescents :</u>

Dans le cas des modes évanescents, les termes d'intégrale de bord des surfaces périodiques Γ_1 et Γ_2 suivant l'axe z ne s'annulent pas. Dans ce cas, la constante de propagation est réelle $\gamma_z = \alpha$, ce qui donne :

$$\int_{\Gamma_2} \vec{v}^*|_{\Gamma_2}.\vec{e}_z \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_2}\right) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \vec{v}^*|_{\Gamma_1} e^{-\alpha p}.\vec{e}_z \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_1} e^{-\alpha p}\right) d\Gamma$$

$$= e^{-2\alpha p} \int_{\Gamma_1} \vec{v}^*|_{\Gamma_1}.\vec{e}_z \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_1}\right) d\Gamma \qquad (2.70)$$

D'un autre côté, les autres termes des bords Γ_3, Γ_4 et Γ_s s'annulent toujours, car les mêmes conditions aux limites ou de périodicité sont imposées. La formulation variationnelle du problème (2.64) s'écrit dans le cas évanescent sous la forme :

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{v}^*).(\nabla \times \vec{u}) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \vec{v}^*.\vec{u}\, d\Omega + (e^{-2\alpha p} - 1) \int_{\Gamma_1} \vec{v}^*|_{\Gamma_1}.\vec{e}_z \times \left(\nabla \times \vec{u}|_{\Gamma_1}\right) d\Gamma = 0 \quad (2.71)$$

En reprenant la décomposition du champ électromagnétique $\vec{u} = \sum_{i=0}^{n} u_i \vec{\phi}_i$ dans la base $\{\vec{\phi}_i\}_{1 \le i \le n}$. Pour toute fonction test $\vec{v} = \vec{\phi}_j$ avec $1 \le j \le n$, la formulation (2.71) devient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i \left(\int_{\Omega} \left(\nabla \times \vec{\phi}_j^{\,*}\right).(\nabla \times \vec{\phi}_i) d\Omega + (e^{-2\alpha p} - 1) \int_{\Gamma 1} \vec{\phi}_j^{\,*}.\left(\vec{e}_z \times \nabla \times \vec{\phi}_i\right) d\Gamma \right) = k_0^2 \sum_{i=0}^{n} u_i \int_{\Omega} \vec{\phi}_j^{\,*}.\vec{\phi}_i\, d\Omega \quad (2.72)$$

Cette formulation variationnelle peut s'écrire ainsi sous format matriciel :

$$(A + M)U = \omega^2 BU \quad (2.73)$$

où A et B sont les matrices initiales données par GetDP et M la matrice de bord avec $M_{i,j} = (e^{-2\alpha p} - 1) \int_{s_1} \vec{\phi}_j^{\,*}.\left(\vec{e}_z \times \nabla \times \vec{\phi}_i\right) d\Gamma$.

A cause de la discontinuité de la normale au rotationnel $\left(\vec{e}_z \times \nabla \times \vec{\phi}_i\right)$ à travers la surface Γ_1, le terme correspondant à la matrice M n'est pas intégrable numériquement. Ce qui ne permet pas l'introduction de ce terme dans la formulation du fichier (.pro) et ainsi la modélisation du problème dans le cas évanescent n'est pas possible exclusivement dans GetDP.

Assemblage des matrices et problème réduit :

De ce fait, une résolution du cas évanescent en dehors de GetDP est proposée. Le problème est réordonné afin de rassembler les degrés de libertés de chaque région. Les régions concernées sont Ω, Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4, elles sont présentées sur la figure 2.19. En effet, une procédure d'identification des degrés de liberté de chaque région est faite à l'aide des données sur les nœuds, les triangles et les tétraèdres du maillage proposées dans le fichier du maillage (.msh) et de la répartition des arêtes de chaque tétraèdre détaillée dans le fichier de la pré-résolution (.pre). L'arrangement des arêtes des bords doit se faire dans le même ordre de classement entre chaque Master et Slave.

Après avoir réordonné les degrés de liberté, les matrices de masse A et de rigidité B s'écrivent sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A^{\Gamma_1\Gamma_1} & A^{\Gamma_1\Omega} & 0 & A^{\Gamma_1\Gamma_3} & A^{\Gamma_1\Gamma_4} \\ A^{\Omega\Gamma_1} & A^{\Omega\Omega} & A^{\Omega\Gamma_2} & A^{\Omega\Gamma_3} & A^{\Omega\Gamma_4} \\ 0 & A^{\Gamma_2\Omega} & A^{\Gamma_2\Gamma_2} & A^{\Gamma_2\Gamma_3} & A^{\Gamma_2\Gamma_4} \\ A^{\Gamma_3\Gamma_1} & A^{\Gamma_3\Omega} & A^{\Gamma_3\Gamma_2} & A^{\Gamma_3\Gamma_3} & A^{\Gamma_3\Gamma_4} \\ A^{\Gamma_4\Gamma_1} & A^{\Gamma_4\Omega} & A^{\Gamma_4\Gamma_2} & A^{\Gamma_4\Gamma_3} & A^{\Gamma_4\Gamma_4} \end{pmatrix} et\ B = \begin{pmatrix} B^{\Gamma_1\Gamma_1} & B^{\Gamma_1\Omega} & 0 & B^{\Gamma_1\Gamma_3} & B^{\Gamma_1\Gamma_4} \\ B^{\Omega\Gamma_1} & B^{\Omega\Omega} & B^{\Omega\Gamma_2} & B^{\Omega\Gamma_3} & B^{\Omega\Gamma_4} \\ 0 & B^{\Gamma_2\Omega} & B^{\Gamma_2\Gamma_2} & B^{\Gamma_2\Gamma_3} & B^{\Gamma_2\Gamma_4} \\ B^{\Gamma_3\Gamma_1} & B^{\Gamma_3\Omega} & B^{\Gamma_3\Gamma_2} & B^{\Gamma_3\Gamma_3} & B^{\Gamma_3\Gamma_4} \\ B^{\Gamma_4\Gamma_1} & B^{\Gamma_4\Omega} & B^{\Gamma_4\Gamma_2} & B^{\Gamma_4\Gamma_3} & B^{\Gamma_4\Gamma_4} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Pour les matrices A et B, les termes $A^{\Gamma_2\Gamma_1}$, $A^{\Gamma_1\Gamma_2}$, $B^{\Gamma_2\Gamma_1}$ et $B^{\Gamma_1\Gamma_2}$ sont nuls, car les régions Γ_1 et Γ_2 n'intersectent pas ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$). Pour la matrice des bords M, tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients $(M^{\Gamma_j\Gamma_j})_{j\in\{1,2,3,4\}}$ car les intégrales se font exclusivement sur chaque bord Γ_j. Ainsi, la matrice M peut se simplifier :

$$M = \begin{pmatrix} M^{\Gamma_1\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^{\Gamma_2\Gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{\Gamma_3\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^{\Gamma_4\Gamma_4} \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

Le format matriciel (2.73) de la formulation variationnelle devient :

$$\left[\begin{pmatrix} A^{\Gamma_1\Gamma_1} & A^{\Gamma_1\Omega} & 0 & A^{\Gamma_1\Gamma_3} & A^{\Gamma_1\Gamma_4} \\ A^{\Omega\Gamma_1} & A^{\Omega\Omega} & A^{\Omega\Gamma_2} & A^{\Omega\Gamma_3} & A^{\Omega\Gamma_4} \\ 0 & A^{\Gamma_2\Omega} & A^{\Gamma_2\Gamma_2} & A^{\Gamma_2\Gamma_3} & A^{\Gamma_2\Gamma_4} \\ A^{\Gamma_3\Gamma_1} & A^{\Gamma_3\Omega} & A^{\Gamma_3\Gamma_2} & A^{\Gamma_3\Gamma_3} & A^{\Gamma_3\Gamma_4} \\ A^{\Gamma_4\Gamma_1} & A^{\Gamma_4\Omega} & A^{\Gamma_4\Gamma_2} & A^{\Gamma_4\Gamma_3} & A^{\Gamma_4\Gamma_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M^{\Gamma_1\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^{\Gamma_2\Gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{\Gamma_3\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^{\Gamma_4\Gamma_4} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_2} \\ u^{\Gamma_3} \\ u^{\Gamma_4} \end{pmatrix}$$

$$= \omega^2 \begin{pmatrix} B^{\Gamma_1\Gamma_1} & B^{\Gamma_1\Omega} & 0 & B^{\Gamma_1\Gamma_3} & B^{\Gamma_1\Gamma_4} \\ B^{\Omega\Gamma_1} & B^{\Omega\Omega} & B^{\Omega\Gamma_2} & B^{\Omega\Gamma_3} & B^{\Omega\Gamma_4} \\ 0 & B^{\Gamma_2\Omega} & B^{\Gamma_2\Gamma_2} & B^{\Gamma_2\Gamma_3} & B^{\Gamma_2\Gamma_4} \\ B^{\Gamma_3\Gamma_1} & B^{\Gamma_3\Omega} & B^{\Gamma_3\Gamma_2} & B^{\Gamma_3\Gamma_3} & B^{\Gamma_3\Gamma_4} \\ B^{\Gamma_4\Gamma_1} & B^{\Gamma_4\Omega} & B^{\Gamma_4\Gamma_2} & B^{\Gamma_4\Gamma_3} & B^{\Gamma_4\Gamma_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_2} \\ u^{\Gamma_3} \\ u^{\Gamma_4} \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

Afin d'imposer la périodicité entre les régions Master-Slave de la cellule, les matrices de périodicité P et T sont introduites. Elles traduisent les conditions de périodicité définies en (2.43) et (2.44).

$$P = \begin{pmatrix} I_{N_{\Gamma_1}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{N_\Omega} & 0 \\ I_{N_{\Gamma_2}} e^{-\gamma d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{N_{\Gamma_3}} \\ 0 & 0 & I_{N_{\Gamma_4}} e^{-jm\theta} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} I_{N_{\Gamma_1}} & 0 & I_{N_{\Gamma_2}} e^{\gamma d} & 0 & 0 \\ 0 & I_{N_\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{N_{\Gamma_3}} & I_{N_{\Gamma_4}} e^{jm\theta} \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

avec N_r le nombre de degrés de liberté de la région $r \in \{\Gamma_1, \Omega, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$ et I_{N_r} la matrice identité de dimension N_r. Ainsi, l'utilisation des matrices de périodicité permet de réduire le problème, selon :

$$\begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_2} \\ u^{\Gamma_3} \\ u^{\Gamma_4} \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

L'application des conditions de périodicité sur la formulation initiale (2.71) permet de déduire la formulation matricielle réduite selon :

$$TAP \begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} = \omega^2 TBP \begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} + TMP \begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

La matrice T est choisie pour annuler le terme de bord du problème réduit. En effet, en remplaçant M, P et T par leurs expressions, on obtient :

$$TMP\begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{\Gamma_1\Gamma_1}u^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2\Gamma_2}u^{\Gamma_1} \\ 0 \\ M^{\Gamma_3\Gamma_3}u^{\Gamma_3} + M^{\Gamma_4\Gamma_4}u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} M^{\Gamma_1\Gamma_1}u^{\Gamma_1} &= \sum_{i=1}^{N} u_i \int_{\Gamma_1} -\vec{\phi}_j^{\,*}.\left(\vec{e}_z \times \nabla \times \vec{\phi}_i\right) d\Gamma_1 \\ &= -\int_{\Gamma_1} \vec{\phi}_j^{\,*}.\left(\vec{e}_z \times \nabla \times \vec{U}\right) d\Gamma_1 = -e^{\gamma d}\int_{\Gamma_2} \vec{\phi}_j^{\,*}.\left(\vec{e}_z \times \nabla \times \vec{U}\right) d\Gamma_2 = -e^{\gamma d}\, M^{\Gamma_2\Gamma_2}u^{\Gamma_2} \\ &= -M^{\Gamma_2\Gamma_2}u^{\Gamma_1} \end{aligned} \tag{2.81}$$

Et,

$$\begin{aligned} M^{\Gamma_3\Gamma_3}u^{\Gamma_3} &= \sum_{i=1}^{N} u_i \int_{\Gamma_3} -\vec{\phi}_j^{\,*}.\ \vec{e}_\theta \times \left(\nabla \times \vec{\phi}_i\right) d\Gamma_3 \\ &= -\int_{\Gamma_3} \vec{\phi}_j^{\,*}.\ \vec{e}_\theta \times \left(\nabla \times \vec{U}\right) d\Gamma_3 = -e^{-jm\theta}\int_{\Gamma_4} \vec{\phi}_j^{\,*}.\ \vec{e}_\theta \times \left(\nabla \times \vec{U}\right) d\Gamma_4 = -e^{-jm\theta}\, M^{\Gamma_4\Gamma_4}u^{\Gamma_4} \\ &= -M^{\Gamma_4\Gamma_4}u^{\Gamma_3} \end{aligned} \tag{2.82}$$

Ainsi,

$$TMP\begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

Cette approche permet d'éliminer la matrice M, cet avantage nous évite de passer par des approches d'approximation pour modéliser l'intégrale de bord avec la FEM. En outre, la matrice T dans ce cas est différente de la matrice $P^* = {}^t(\bar{P})$, la matrice adjointe de P, choisie dans la littérature pour les problèmes de périodicité. En effet, la matrice P^* permet d'annuler le terme du bord mais seulement dans le cas propagatif où γ est imaginaire.

Après l'élimination du terme du bord, le problème aux valeurs propres à résoudre (2.79) se simplifie sous la forme suivante :

$$A_r\begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{S} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} = \omega^2 B_r\begin{pmatrix} u^{\Gamma_1} \\ u^{\Omega} \\ u^{\Gamma_3} \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

avec $A_r = TAP$ la matrice de masse réduite et $B_r = TBP$ la matrice de rigidité réduite.

Algorithme de calcul Python :

Un code, basé sur la procédure expliquée dans le paragraphe précédent, a été développé sur Python. Il permet de tracer les diagrammes de dispersion pour les deux types de modes : les propagatifs et les évanescents. L'organigramme du code est détaillé dans la figure 2.23.

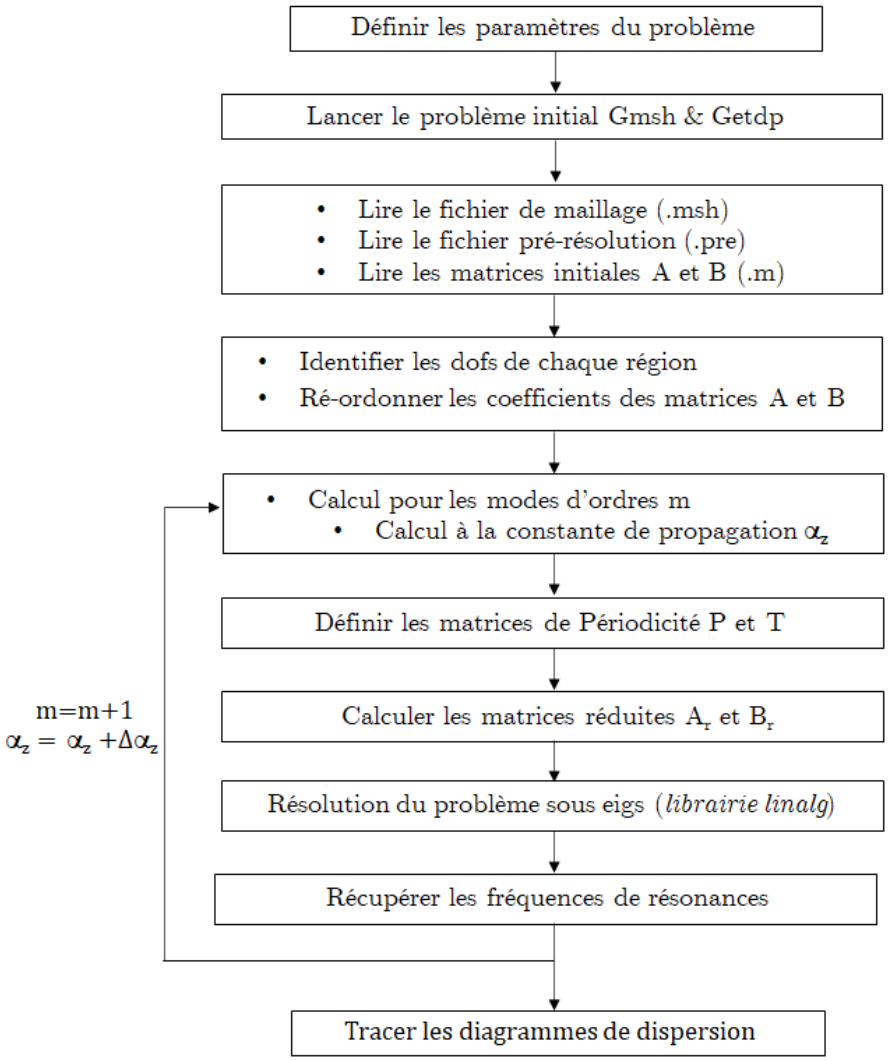


Figure 2.23 - Organigramme du code des modes évanescents.

Ce code est utilisé pour calculer les fréquences de résonance des modes en fonction des conditions périodiques imposées. Le code a été testé sur plusieurs exemples d'études : la cellule à paroi PEC sans motif, puis avec des motifs plus complexes. Deux exemples de validation sont proposés dans le paragraphe suivant.

Résultats

- **Exemple du guide à paroi PEC**

La procédure proposée est tout d'abord appliquée au cas d'un guide d'ondes à paroi PEC. La cellule élémentaire proposée est représentée sur la figure 2.24. Les dimensions de la structure sont $A = 34mm$, $p = 8.9mm$ et $\alpha = 20°$. Le maillage choisi est standard, vu la simplicité de la cellule.

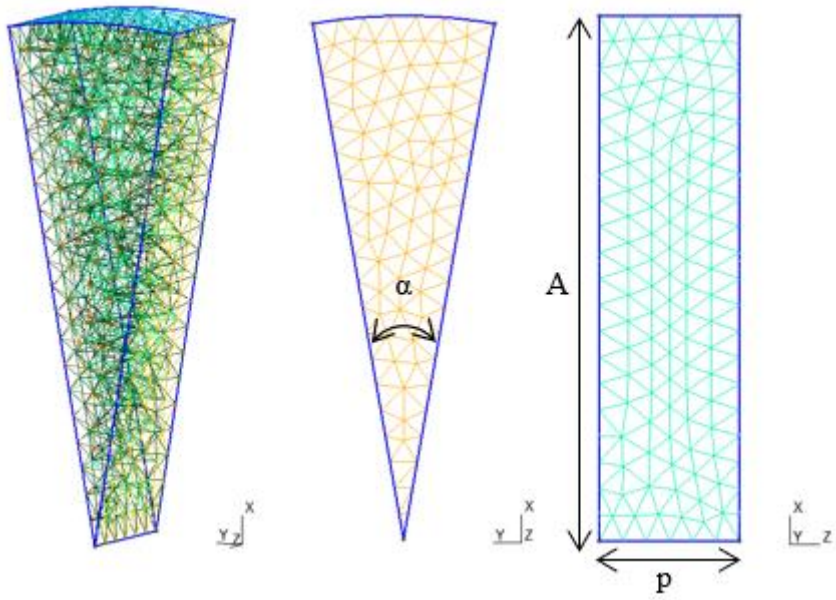


Figure 2.24 - Cellule élémentaire du guide à paroi PEC.

Les coupures des modes pour les guides à paroi PEC peuvent être calculées analytiquement, ce sont les zéros de la fonction Bessel ou de sa dérivée, ce qui permet de tracer ses diagrammes de dispersions analytiques. Ils seront utilisés ainsi comme outil pour valider notre méthodologie. Les diagrammes de dispersion d'ordre $m = 0$ et $m = 1$ calculés par le code sont tracés pour les modes propagatifs et les modes évanescents sur la figure 2.25 et ils sont comparés aux résultats analytiques.

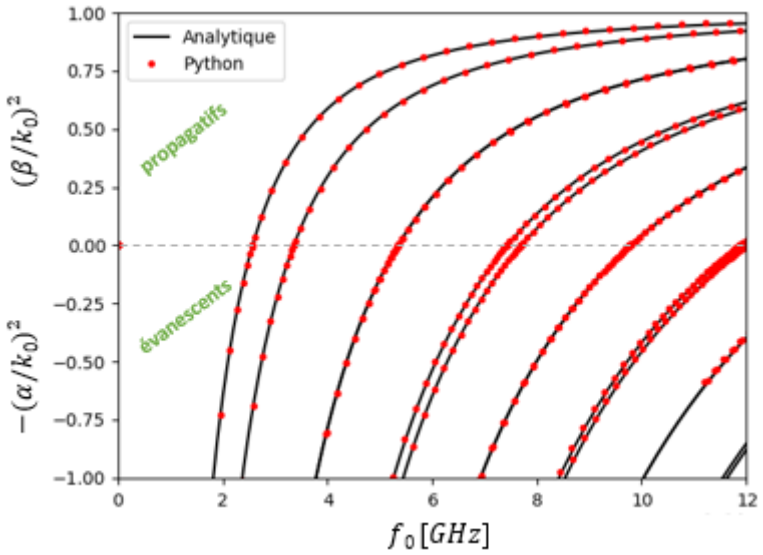


Figure 2.25 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs et évanescents (m=0 et m=1) avec la résolution Python.

Les diagrammes de la résolution FEM modifiée collent parfaitement avec ceux de la résolution analytique. Le temps de calcul, de 50s pour les modes propagatifs et 53s pour les modes évanescents, est similaire à celui de la résolution directe GetDP

pour les modes propagatifs vue précédemment car la résolution du problème se fait avec la même fonction eigs de la librairie 'linalg'.

- **Exemple du guide à paroi corruguée**

Dans un second temps, la résolution va être appliquée à un guide d'ondes à paroi corruguée (cf. figure 2.26) de mêmes dimensions que l'exemple de la figure 2.9. Les dimensions de la cellule sont $A = 100mm$, $p = 26.225mm$, $\alpha = 20°$, $d = 18.2mm$ et $w = 10.49mm$. Le maillage est le même que précédemment. C'est un maillage standard, car la modification de la densité du maillage impacte peu la précision des résultats dans ce cas d'exemple. Cela permet d'alléger le maillage et de gagner en temps de calcul, ce qui rend cette méthodologie avantageuse.

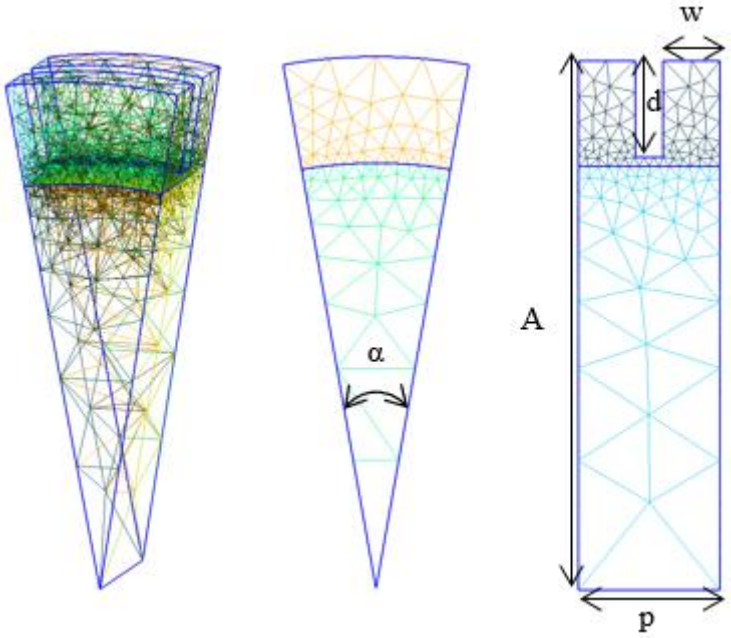


Figure 2.26 - Cellule élémentaire du guide corrugué

Les diagrammes de dispersion calculés sont présentés sur la figure 2.27. La comparaison aux résultats de la résolution avec Ansys HFSS est disponible seulement dans le cas propagatif car ce dernier ne trouve que les fréquences de résonance pour des parois périodiques déphasées (γ_z imaginaire pur). Quant à la résolution GetDP, les résultats sont erronés, comme cela a été vu précédemment sur la figure 2.22.

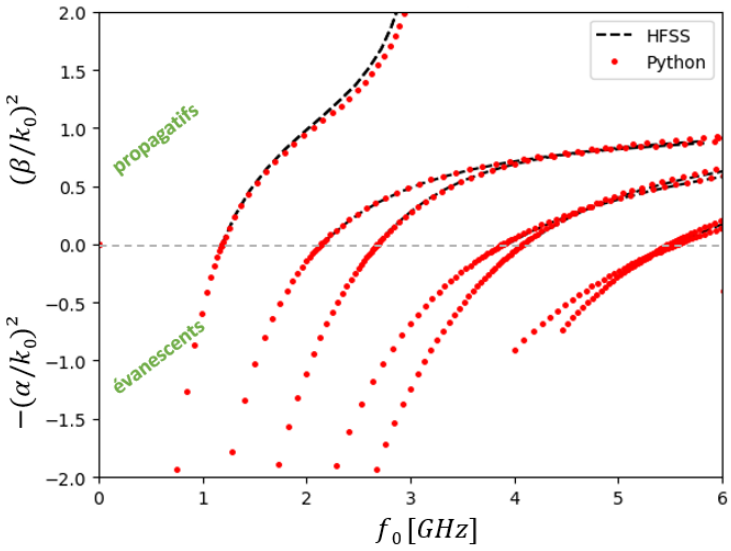


Figure 2.27 - Diagrammes de dispersion des modes propagatifs et évanescents (m=0) avec la résolution Python

Les modes propagatifs donnent les mêmes résonances que ceux de la résolution GetDP et leurs tracés concordent bien avec les résultats issus de HFSS. En outre, les diagrammes des modes sont continus entre les domaines évanescents et propagatifs. Le temps de calcul est de l'ordre de 1min, donc équivalent à celui de la résolution GetDP qui ne permet pas d'avoir les modes évanescents.

Dans cette partie, une nouvelle méthodologie de calcul FEM pour trouver les modes évanescents a été validée. Elle est utilisée aussi pour calculer les modes propagatifs. La totalité du diagramme de dispersion est ainsi obtenue dans un temps de calcul très rapide.

2.3.2 Détermination des cartographies des modes par un calcul hybride de la FEM et la TME

Les expressions des champs électriques et magnétiques sont données dans le cas sinusoïdal par les équations (2.14), (2.15), (2.18) et (2.19). De ce fait, afin de déterminer la cartographie du champ électromagnétique correspondant à un mode et en déduire sa nature, un calcul hybride de la FEM et la TME est utilisé.

D'abord, la résonance du mode est calculée en fonction de son ordre m et de sa constante de propagation β_z ou d'atténuation α_z. Ce calcul se fait à l'aide de la résolution FEM modifiée vue dans le paragraphe précédent. Ensuite, les impédances de surface Z'_z et Z'_θ modélisant la paroi anisotrope sont calculées. Pour cela, le vecteur propre, associé à la valeur propre de la résonance ω, calculé par (2.82) est injecté dans un fichier de résolution GetDP sous format (.res). Un appel *PostProcessing* sur GetDP permet d'interpoler le champ électromagnétique sur le plan de calcul fictif $\partial\Omega'$ (figure 2.7) à partir du vecteur propre donné et ainsi de déterminer les valeurs des impédances. En conséquence, les termes inconnus de la matrice TME sont identifiés.

Par la suite, la résolution du système linéaire de la TME, donné par (2.40) dans le cas pair ou (2.41) dans le cas impair, permet de trouver le vecteur propre des amplitudes du champ $(\Gamma_{mn}\ \Psi_{mn})^t$ associé à la valeur propre $\lambda = 0$. Enfin, en s'appuyant sur les expressions analytiques des champs, les cartographies sont déterminées dans le guide pour tout rayon inférieur au rayon a' du plan fictif.

Application sur l'exemple du guide corrugué : cartographies des modes hybrides EH11 et EH21.

A titre d'exemple, les cartographies des champs électrique et magnétique des modes hybrides EH11 et EH21 ont été calculées pour le guide d'ondes corrugué (présenté dans la figure 2.9). Après avoir identifié les constantes de propagation des deux modes à la fréquence de calcul et les impédances de surface leurs correspondant selon (2.38), les cartographies du champ électrique et magnétique sont déterminées pour chacun des modes grâce à la résolution du système linéaire (2.41) et les expressions analytiques des composantes des champs. Ainsi, les cartographies normalisées des champs sont calculées à chaque point (ρ, θ) selon (2.85) et (2.86) :

$$\left\|\vec{E}_{mn}\right\|_2 = \frac{\sqrt{\left|E_{\rho,mn}\right|^2 + \left|E_{\theta,mn}\right|^2 + \left|E_{z,mn}\right|^2}}{\max_{(\rho,\theta,z)} \left(\sqrt{\left|E_{\rho,mn}\right|^2 + \left|E_{\theta,mn}\right|^2 + \left|E_{z,mn}\right|^2}\right)} \tag{2.85}$$

$$\left\|\vec{H}_{mn}\right\|_2 = \frac{\sqrt{\left|H_{\rho,mn}\right|^2 + \left|H_{\theta,mn}\right|^2 + \left|H_{z,mn}\right|^2}}{\max_{(\rho,\theta,z)} \left(\sqrt{\left|H_{\rho,mn}\right|^2 + \left|H_{\theta,mn}\right|^2 + \left|H_{z,mn}\right|^2}\right)} \tag{2.86}$$

Les cartographies du champ électrique et magnétique sont alors tracées pour le mode hybride EH_{11} dans la région $(\rho < a')$. Elles sont comparées aux cartographies des champs obtenus par HFSS. Etant donné que ces derniers sont volumiques (calcul full-wave), ils sont modélisés par la norme du champ moyenné sur la période p pour chaque point (ρ, θ).

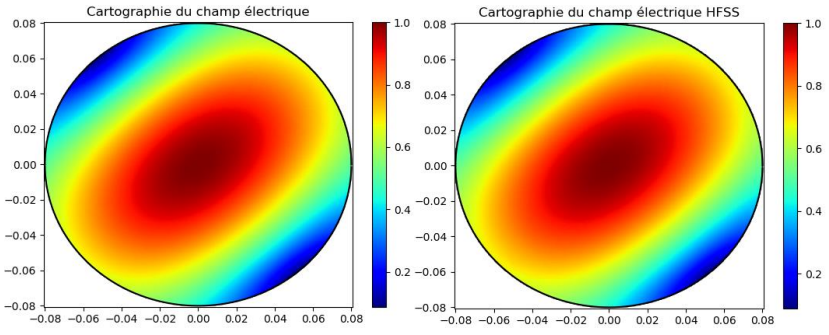


Figure 2.28 - Cartographies du champ électrique du mode EH_{11} à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS.

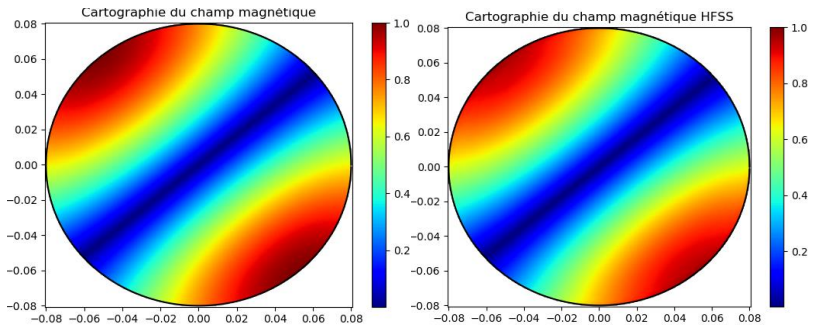


Figure 2.29 - Cartographies du champ magnétique du mode EH_{11} à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS.

De même, les cartographies des champs sont tracées pour le mode hybride EH_{21} et comparées à celles obtenues avec HFSS Ansys sur les figures 2.30 et 2.31.

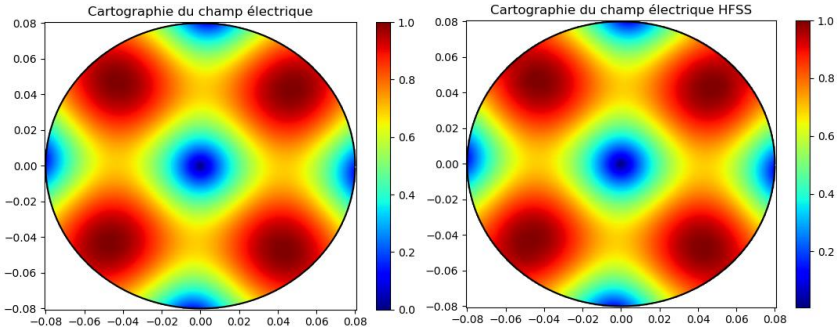


Figure 2.30 - Cartographies du champ électrique du mode EH_{21} à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS.

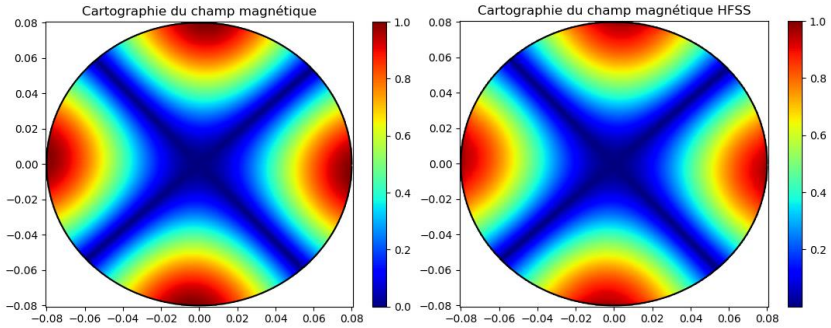


Figure 2.31 - Cartographies du champ magnétique du mode EH_{21} à $1GHz$: a) FEM+TME et b) Ansys HFSS.

Les résultats sont convaincants puisque l'erreur relative quadratique globale entre les deux cartographies du champ électrique du mode EH_{11} est de 0.08% et de 0.17% pour le champ magnétique. De même, pour le mode EH_{21}, l'erreur relative est de 0.1% entre les cartographies du champ électrique et de 0.4% pour le champ magnétique.

L'avantage amené par la FEM+TME réside dans la possibilité de tracer instantanément les champs, directement à partir des expressions analytiques contrairement à HFSS qui nécessite d'abord la résolution du problème complet sur un

cylindre d'épaisseur p suivant (Oz) et qui contient toutes les périodes angulaires. Dans ce cas, il est nécessaire de calculer les champs électrique et magnétique en chaque point du volume en faisant des interpolations polynomiales entre les points de maillage.

Ainsi, cette approche semi-analytique pour déterminer le champ EM, à l'intérieur de la structure, va nous permettre par la suite de faire du Mode-Matching pour étudier une transition entre deux guides ainsi que son optimisation pour trouver le motif permettant de donner une cartographie prédéfinie.

Conclusion

La méthodologie proposée permet de déterminer très rapidement les constantes de propagation de guides d'ondes circulaires avec des parois métamatériaux pour les modes propagatifs et évanescents. Couplée à la TME, elle permet également un calcul rapide du champ complet dans la structure. Par comparaison avec la TME seule, les temps de calcul sont drastiquement réduits et les champs obtenus pour une paroi anisotrope réelle sont en cohérence avec les résultats de référence d'Ansys HFSS. La rapidité et la précision des résultats obtenus sont primordiales pour envisager leur exploitation dans des calculs d'optimisation de la forme du métamatériau et dans l'analyse du comportement du champ dans une transition entre un guide métallique et un guide à paroi métamatériau avec la méthode du Mode-Matching.

Bibliographie

[1] Targonski, S. D., "A multiband antenna for satellite communications on the move". *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 54, no 10, p. 2862-2868, 2006.

[2] Adam, J.P., Romier, M., "Design approach for multiband horn antennas mixing multimode and hybrid mode operation", *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 65, no 1, p. 358-364, 2016.

[3] Thomas, B. M., & Minnett, H. C., "Modes of propagation in cylindrical waveguides with anisotropic walls", dans *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. IET Digital Library, p. 929-932, 1978.

[4] Ramo, S., Whinnery, J. R., & Van Duzer, T, "Fields and waves in communication electronics", John Wiley & Sons, 1994.

[5] POZAR, D.M., "Microwave engineering", *John wiley & sons*, 2011.

[6] Raveu, N. ; Pigaglio, O., "Résolution de problémes hautes fréquences par les schémas équivalents", Toulouse, France : Cépadués édition, 2012.

[7] Byrne, B., "Etude et Conception de Guides d'Onde et d'Antennes Cornets à Métamatériaux", Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Novembre 2016.

[8] Kuhler, L., "Etude et Conception de Guides d'Onde Cylindriques à Métamatériaux, Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Octobre 2019.

[9] Claudepierre, L., Raveu, N., & Capet, N, "Modal analysis of anisotropic cylindrical waveguides", In: *2012 Asia Pacific Microwave Conference Proceedings*, *IEEE*, p. 1289-1291, Décembre 2012.

[10] Geuzaine, C., Remacle, J. F, "Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities", *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 79, no 11, p. 1309-1331, 2009.

[11] Dular, P., Geuzaine, C., "GetDP reference manual: the documentation for GetDP, a general environment for the treatment of discrete problems", 2019.

[12] Jin, J. M, "The finite element method in electromagnetics", John Wiley & Sons, 2015.

[13] Arfken, G. B., & Weber, H. J., "Mathematical methods for physicists", 1999.

Chapitre 3 : Optimisation du design d'un guide d'ondes à parois métamatériaux

Introduction

La maîtrise des cartographies de champs est fondamentale pour assurer un rayonnement performant des antennes en structures guidées dans la bande de fréquences utile. Le choix du motif métamatériau de la paroi a un impact important sur les cartographies du champ électromagnétique. Une approche hybride TME+FEM, détaillée dans le chapitre 2, a montré son efficacité pour tracer les cartographies du champ pour tout type de motifs. Néanmoins, il est difficile de déterminer la structure correspondant à une cartographie prédéfinie puisqu'il n'existe pas de méthode analytique pour qualifier de tels guides d'ondes métamatériaux. Ainsi, pour concevoir des métamatériaux avec des performances adéquates, plusieurs formulations d'optimisation sont proposées et trois solveurs d'optimisation sont utilisés : NLOPT, IPOPT et NOMAD. Le choix des algorithmes est basé sur des critères de robustesse d'une part, et de rapidité d'autre part.

Ainsi, étant donnée une cartographie d'un champ électromagnétique dans un guide à paroi métamatériau périodique, les algorithmes d'optimisation sont testés en s'appuyant sur l'approche TME+FEM de façon à obtenir le motif permettant d'obtenir cette cartographie. Notre méthodologie est validée sur deux problèmes inverses de conception. Les performances des trois solveurs d'optimisation sont comparées en termes de temps et de nature de solutions obtenues pour différents types de designs.

3.1 Formulation du problème d'optimisation

Dans cette étude, la fonction objective à minimiser dépend directement du calcul du champ électromagnétique via l'utilisation de la TME+FEM. Ainsi, ce type de problème d'optimisation est dit de type *boîte-noire*, où la boîte noire représente le code de calcul de la fonction objectif et des contraintes imposées. Ce problème de type boîte noire est en plus non-linéaire et non-convexe. Ainsi, afin d'éviter des temps de calcul relativement long dus à la complexité du problème, nous avons choisi de travailler avec des méthodes de descentes locales qui permettent en quelques dizaines d'itérations de converger vers un optimum local. L'idée est d'utiliser plusieurs points de départ afin de balayer plus largement le domaine de recherche et d'essayer d'obtenir le meilleur minimum possible. Cette approche de descente locale est certainement la plus efficace dans notre cas, car les problèmes de type boite-noire sont, en général, trop difficiles pour être résolus par des approches d'optimisation globale.

3.1.1. Algorithmes d'optimisation locale utilisés

Les algorithmes d'optimisation locale sont basés sur le même principe de calcul. D'abord, l'algorithme est initialisé par un point de départ $x^{[0]}$ fourni par l'utilisateur. Notons que la convergence d'un tel algorithme dépendra de $x^{[0]}$. Ensuite, l'algorithme construit une suite de points qui converge itération par itération vers une solution correspondant à un minimum local qui satisfait les contraintes imposées. Pour cela, un pas de descente $d^{[k]}$ sera calculé à chaque itération et permet de donner le prochain point de calcul par la relation :

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} + d^{[k]} \tag{3.1}$$

La différence entre les algorithmes provient généralement de la méthode de calcul du pas de descende $d^{[k]}$ et de la gestion des contraintes du problème. En général, les problèmes d'optimisation peuvent être formulés sous la forme suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(x) \\ h_i(x) = 0, \ \ \forall i \in \{1, \dots, q\} \\ g_j(x) \leq 0, \ \ \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \tag{3.2}$$

avec x le vecteur des variables à trouver, $f(x)$ la fonction objectif à minimiser, tandis que les contraintes peuvent être de deux types : contraintes d'inégalité $g_j(x) \leq 0$, et contraintes d'égalité $h_i(x) = 0$. Pour résoudre ce problème d'optimisation $(\mathcal{P})$, deux types d'algorithmes d'optimisation locale sont privilégiés : des algorithmes basés sur le calcul du gradient et des algorithmes sans dérivée.

Algorithmes avec calcul du gradient

Les méthodes actuelles d'optimisation locale avec calcul de gradient se basent sur la résolution d'un problème min-max équivalent au problème $(\mathcal{P})$, qui est donné par :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \ \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \, g_j(x) \tag{3.3}$$

où $\mathcal{L}$ est appelé la fonction de Lagrange. Une approche courante pour résoudre ce problème est d'utiliser les conditions nécessaires de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [1] pour qu'un point (x, λ, μ) soit un minimum local et satisfasse toutes les contraintes du problème, ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0 \\ h_i(x) = 0, \ \ \forall i \in \{1, \dots, q\} \\ \mu_j g_j(x) = 0, \ \ \forall j \in \{1, \dots, p\} \\ \mu_j \geq 0, \ \ \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \tag{3.4}$$

A partir ces conditions de KTT, des pas de descente $d^{[k]}$ différents sont calculés, fournissant ainsi des algorithmes différents détaillées ci-dessous :

Algorithme Active-Set : l'idée de l'algorithme Active Set [2] est de gérer l'ensemble actif, dénoté (AS). Cet ensemble AS n'est en fait que l'ensemble des indices des contraintes inégalités actives, c'est-à-dire les contraintes inégalités (<=0) qui peuvent être considérées comme des contraintes égalités (=0). Les autres contraintes inégalités dont l'indice n'est pas dans AS ne seront pas prises en compte à cette itération de l'algorithme Active-Set. Au fil des itérations, l'ensemble AS va évoluer pour ne considérer au final que les contraintes inégalités importantes (i.e., correspondant à un multiplicateur de Lagrange μ_j strictement positif). Ainsi, pour trouver le pas de $\boldsymbol{d^{[k]}}$, l'algorithme va résoudre le problème (plus précisément, l'algorithme va résoudre le problème suivant en le linéarisant) :

$$\begin{cases} \nabla_x \boldsymbol{\mathcal{L}_{AS}}(x, \lambda, \mu_{\boldsymbol{AS}}) = 0 \\ h_i(x) = 0, \ \ \forall i \in \{1, \dots, q\} \\ g_j(x) = 0, \ \ \forall j \in \boldsymbol{AS} \subseteq \{1, \dots, p\} \end{cases} \tag{3.5}$$

Après la résolution, il faut mettre à jour l'AS. Ainsi, il est nécessaire de distinguer les contraintes influençant le résultat final de l'optimisation.

Algorithme SQP : l'algorithme SQP [3] (Sequential Quadratic Programming) effectue le calcul de pas $\boldsymbol{d^{[k]}}$ à partir du problème d'optimisation (3.6), vérifiant les conditions de KKT, décrit par une fonction objectif approchée par un développement de Taylor de 2ème ordre pour la fonction objectif (en prenant plutôt la matrice Hessienne de la fonction de Lagrange) et en linéarisant les contraintes par rapport à un déplacement $\boldsymbol{d^{[k]}}$:

$$d^{[k]} = \begin{cases} \arg\ \min_{d \epsilon \mathbb{R}^n} \ f\left(x^{[k]}\right) + \left\langle \nabla_x f\left(x^{[k]}\right) \middle| d \right\rangle + \frac{1}{2} d^T . H_{\mathcal{L}_x}\left(x^{[k]}, \lambda^{[k]}, \mu^{[k]}\right). d \\ h_i\left(x^{[k]}\right) + \left\langle \nabla_x h_i\left(x^{[k]}\right) \middle| d \right\rangle = 0, \ \ \forall i \in \{1, \dots, q\} \\ g_j\left(x^{[k]}\right) + \left\langle \nabla_x g_j\left(x^{[k]}\right) \middle| d \right\rangle \leq 0, \ \ \forall i \in \{1, \dots, q\} \end{cases} \tag{3.6}$$

Notons, que le problème d'optimisation (3.6) sera résolu à chaque itération pour trouver le pas de descente $\boldsymbol{d^{[k]}}$. Ce problème (3.6) est quadratique strictement convexe sous contraintes linéaires et ainsi, le minimum peut être obtenu de manière très efficace (quasiment en une seule itération, cela dépend des contraintes inégalités).

Algorithme des points intérieurs : l'algorithme **des points intérieurs** [4]-[6] est basé sur une méthode de pénalisation et cela permet en général de résoudre des problèmes d'optimisation non linéaires dans de grandes dimensions. Pour cela, une fonction barrière logarithmique est introduite pour pénaliser les contraintes. Dans un exemple où seules les contraintes d'inégalités sont considérées, la fonction barrière est définie par :

$$B(x, \beta) = f(\mathrm{x}) - \beta \sum_{i=1}^{n} \log\left(g_i(\mathrm{x})\right) \tag{3.7}$$

où β est petit (en général, β est fixé à 1 en début de l'algorithme et décroit vers 0). Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit ainsi sous la forme :

$$\min_{x\epsilon\mathbb{R}^n} B(x,\beta) \tag{3.8}$$

Le problème de minimisation (3.4) est résolu itérativement en s'appuyant sur les conditions de KKT. La solution de ce problème $x(\beta)$ converge vers la solution x^* du problème $(\mathcal{P})$ quand β tend vers 0.

Des combinaisons entre ces trois algorithmes sont possibles, notamment l'utilisation de l'algorithme Active-Set ou de la méthode des points intérieurs avec un pas de descente SQP ou un algorithme SQP avec une gestion AS. Néanmoins, parmi ces algorithmes basés sur la descente du gradient, seule la méthode des points intérieurs développée dans le solveur IPOPT est utilisée pour résoudre problèmes inverses étudiés dans ce chapitre.

Algorithmes sans calcul de dérivée

Solveur NLOPT : l'algorithme d'optimisation non-linéaire NLOPT [7] est basé sur une méthode de Lagrangien augmentée, qui est une méthode de pénalisation où les contraintes pénalisées sont directement prises en compte (sans l'utilisation de la fonction logarithme comme pour les méthodes de point intérieur). A titre d'exemple, dans le cas où seules les contraintes égalités sont prises en compte, le problème peut être résolu en utilisant une série de problèmes de minimisation sans contrainte à chaque itération $[k]$:

$$\min_{x\epsilon\mathbb{R}^n} f_k(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, h_i(x) + \frac{\upsilon_k}{2}\sum_{i=1}^{q} h_i^2(x) \tag{3.9}$$

A l'itération suivante, la valeur de $\upsilon_k(>0)$ est augmentée et une mise à jour des λ_i est effectué : $\lambda_{i+1} \leftarrow \lambda_i + \upsilon_k h_i(x_k)$ où x_k est la solution du problème pénalisé ci-dessus à la k-ème itération. La méthode est étendue dans [8] pour prendre en compte les contraintes d'inégalité. En général, pour cette méthode d'optimisation, les calculs de dérivées sont nécessaires. Cependant, dans cette version de code [7], les dérivées peuvent être estimées en utilisant des pas aléatoires à l'aide de tests statistiques. Nous verrons par la suite que l'option sans dérivées s'est révélée être la plus performante pour résoudre des problèmes de conception de notre type.

Solveur NOMAD : le logiciel NOMAD [9]-[12] est un code d'optimisation locale basé sur des maillages adaptatifs avec des recherches directes (Mesh Adaptative Direct Search, MADS). C'est une méthode itérative où les fonctions de type boite-noire sont évaluées en plusieurs points générés aléatoirement sur un maillage adaptatif crée autour du point de référence x[k]. Cet ensemble de points est défini par :

$$M_k = \bigcup_{x\in V_k} \{x + \Delta_k^m Dz\,, z \in \mathbb{N}^n\} \tag{3.10}$$

avec V_k l'ensemble des points où la fonction objectif a été évaluée à l'itération k, Δ_k^m le pas de maillage, D l'ensemble des directions du maillage. Une itération de calcul contient trois étapes de calcul [12]. D'abord, une étape de recherche (*Search*) où un nombre fini de points de maillage sont choisis et évalués de manière adaptée aux besoins de l'utilisation. Ensuite, à l'étape *Poll*, la région du maillage est explorée pour chercher de nouvelles directions plus prometteuses qui sont données par l'ensemble de sondage P_k :

$$P_k(x) = \{x_k + \Delta_k^m d\} \subset M_k \tag{3.11}$$

avec d la direction aléatoire qui permet d'obtenir les nouveaux points. Le point x_k est ainsi délimité par un paramètre de sondage, appelé Δ_k^p, supérieur au paramètre de maillage Δ_k^m car ce dernier est réduit après chaque échec et ce, afin de raffiner le maillage. Enfin, l'étape de la mise à jour de la région de recherche consiste en la prise en compte les résultats de l'évaluation des points effectuée lors de l'étape de poll, de sorte que les points évalués avec succès soient ajoutés au maillage, tandis que les points qui ont échoués sont exclus. Un exemple de différentes configurations de maillage est proposé en figure 3.1. Les mailles du maillage de taille Δ_k^m sont représentées par des lignes fines, l'ensemble de sondage P_k de taille Δ_k^p par des lignes épaisses et les points d'essai sont donnés par des directions aléatoires et se situent à l'intersection des deux types de lignes. En effet, plus le maillage est raffiné plus le nombre d'emplacement augmente, ce qui a pour conséquence un plus large choix de points d'essai.

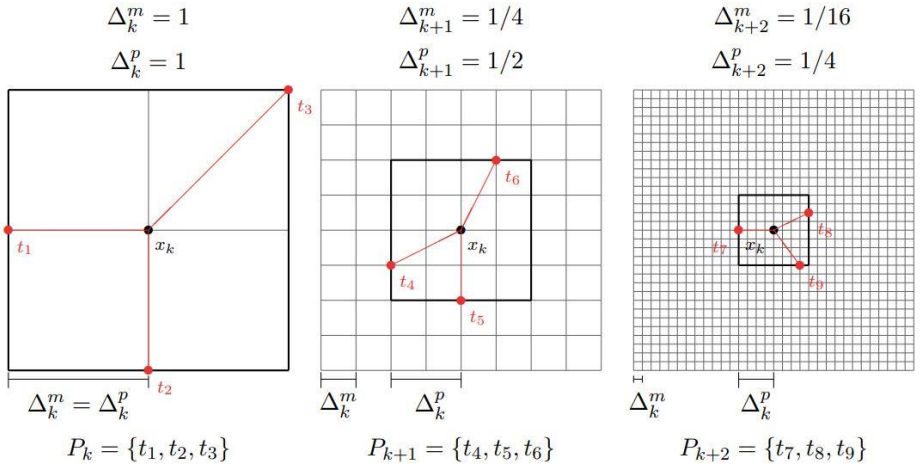


Figure 3.1 - Trois exemples de raffinement du maillage pour n=2.

3.1.2 Modélisation du problème inverse par structure

Dans cette partie, une formulation mathématique de notre problème d'optimisation est proposée. Le problème inverse défini va permettre de chercher le motif de la paroi métamatériau du guide d'ondes, permettant de retrouver une cartographie du champ électrique prédéfinie, à l'aide de la FEM+TME sur une section fixée de rayon a' et à une fréquence donnée f_0.

Fonction objectif à minimiser

Soit un champ électrique prédéfini $\vec{E}_{obj}$ dit « objectif » donné sur une région $\Omega' = [0, a] \times [0,2\pi]$ à l'intérieur du guide d'ondes circulaires. Pour retrouver ce champ, les amplitudes du champ électrique $\vec{E}$ calculé par les algorithmes d'optimisation sont comparées à celle du champ objectif. Il convient donc de définir une fonction objectif qui évalue l'erreur/écart entre ces valeurs sur un maillage régulier de section Ω'.

Pour évaluer l'erreur relative du champ optimisé par rapport au champ objectif, plusieurs normes, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$, sont possibles, donnant des interprétations différentes de l'erreur. Ainsi, les deux formulations les plus pertinentes basées sur la norme $\|.\|_2$ sont proposées : la somme quadratique des erreurs relatives locales (3.12) et l'erreur relative quadratique globale (3.13).

$$\left\| \frac{\vec{E} - \vec{E}_{obj}}{\vec{E}_{obj}} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\left| \vec{E}_i - \vec{E}_{obj,i} \right|}{\left| \vec{E}_{obj,i} \right|} \right)^2} \tag{3.12}$$

$$\frac{\left\| \vec{E} - \vec{E}_{obj} \right\|_2}{\left\| \vec{E}_{obj} \right\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \vec{E}_i - \vec{E}_{obj,i} \right|^2}{\sum_{i=1}^{n} \left| \vec{E}_{obj,i} \right|^2}} \tag{3.13}$$

La formulation (3.12) permet d'obtenir une indication sur la répartition locale de l'erreur à chaque point, mais n'est pas significative pour une évaluation globale de l'erreur sur la section, car elle accumule les erreurs locales, contrairement à l'équation (3.13), où l'erreur est évaluée globalement sur la section. Ainsi, cette formulation est choisie par la suite pour le calcul de la fonction objectif.

Il est également nécessaire de prendre en considération les différentes composantes du champ électrique lors de l'évaluation de l'erreur, afin de garantir que le comportement du champ optimisé est conforme à celui du champ cible dans toutes les directions et non seulement un champ de même amplitude. Pour cela, une écriture matricielle du champ électrique est proposée,

$$[E] = \begin{pmatrix} E_x^1 & E_y^1 & E_z^1 \\ E_x^2 & E_y^2 & E_z^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_x^N & E_y^N & E_z^N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,3}(\mathbb{C}) \tag{3.14}$$

La matrice $[E]$ représente les composantes (E_x, E_y, E_z) discrétisées sur un nombre de points de calcul $N = 201 \times 201 = 20401$ permettant de décrire les cartographies sur la section Ω'. Par conséquent, en utilisant cette écriture matricielle, la fonction objectif f_{obj} peut s'écrire sous la forme :

$$f_{obj} = \frac{\left\| [\mathrm{E}] - [\mathrm{E}_{obj}] \right\|_2^2}{\left\| [\mathrm{E}_{obj}] \right\|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left| E_x^i - E_{x,obj}^i \right|^2 + \left| E_y^i - E_{y,obj}^i \right|^2 + \left| E_z^i - E_{z,obj}^i \right|^2 \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\left| E_{obj,x}^i \right|^2 + \left| E_{y,obj}^i \right|^2 + \left| E_{z,obj}^i \right|^2 \right)} \tag{3.15}$$

avec $E^i_{p,obj}$ la valeur complexe du champ électrique objectif polarisé suivant la direction $p = (x, y\ ou\ z)$ au point de maillage i et E^i_p la valeur complexe du champ électrique obtenue par l'algorithme d'optimisation suivant la direction p au point de maillage i. Ainsi, après la définition de la fonction objectif, le problème d'optimisation va être décrit en fonction du type de structure.

Problème inverse par structure

Pour formuler le problème d'optimisation à résoudre, il faut identifier les variables géométriques et les contraintes dépendant de la nature de la structure. Ainsi, plusieurs problèmes d'optimisation sont proposés en fonction de la forme de la géométrie envisagée : 'corrugation', '*Pic*' ou '*Mushroom'*. Ces problèmes sont explicités dans les sous-parties suivantes. Les trois structures géométriques sont de plus en plus complexes en rajoutant à chaque fois des degrés de liberté qui vont complexifier les problèmes d'optimisation associés.

Cas de paroi périodique 'corruguée' :

Lorsque la paroi de la cellule élémentaire est de type corrugation, voir la figure 3.2, le problème d'optimisation possède quatre variables : h, p, d, w avec deux contraintes d'inégalité linéaires pour la faisabilité géométrique et deux autres contraintes d'inégalité non linéaires sur la fréquence f_0 pour que cette fréquence appartienne à la bande monomode du guide d'ondes $[f_1, f_2]$. Ces deux dernières contraintes ne sont pas explicites, elles sont de type boîte noire et doivent être calculées par un code numérique que nous détaillons dans la sous-section suivante.

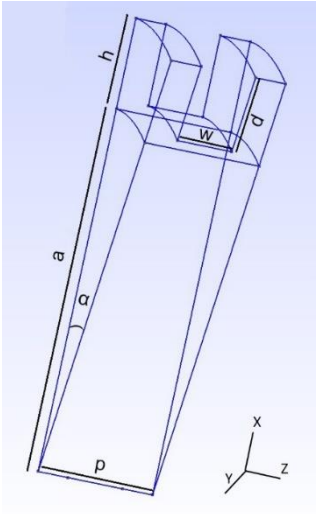


Figure 3.2 - Les dimensions de la cellule élémentaire d'un guide d'ondes à paroi corruguée périodique à optimiser.

La corrugation choisie est axiale, donc la structure est invariante par rapport à l'axe de rotation permettant de fixer l'angle α de la cellule élémentaire, une valeur de $\alpha = \frac{\pi}{20}$ est fixée arbitrairement, ce qui permet d'étudier le problème sur une cellule

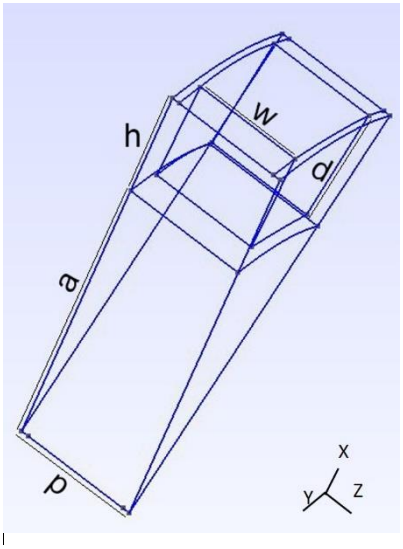
élémentaire et donc de gagner en temps de calcul lors de la résolution FEM permettant de caractériser le guide d'ondes complet. D'un autre côté, le champ objectif est prédéfini sur un rayon $a = 80mm$, donc cette longueur est fixée aussi. Ainsi, le problème d'optimisation s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}_{corr}) \begin{cases} \min_{X \in D_{corr}} f_{obj}(X) \\ h - d \geq 0{,}001, \quad p - w \geq 0.001 \\ f_1 \leq f_0 \leq f_2 \end{cases} \tag{3.16}$$

avec $X = (h, p, d, w)$ le vecteur des variables d'optimisation, $D_{corr} = [3mm, 80mm] \times \left[4mm, \frac{\lambda}{4}\right] \times [1mm, 79mm] \times \left[1mm, \frac{\lambda}{4} - 1mm\right]$ le domaine de recherche des dimensions d'optimisation.

<u>Cas de paroi périodique 'PIC' :</u>

Dans le cas d'un guide d'ondes avec une paroi périodique 'PIC', le problème d'optimisation non-linéaire à résoudre possède six variables h, p, d, w, α et α_H. En effet, contrairement au cas précédent, la structure n'est pas invariante par rapport à l'axe de rotation, donc les variables α et α_H sont rajoutées pour caractériser respectivement la période angulaire de la cellule et l'angle de la paroi 'PIC'. Le problème d'optimisation va comporter deux contraintes d'inégalité linéaires pour la faisabilité géométrique. La cellule élémentaire et ses dimensions géométriques sont représentées en figure 3.3.

a) 

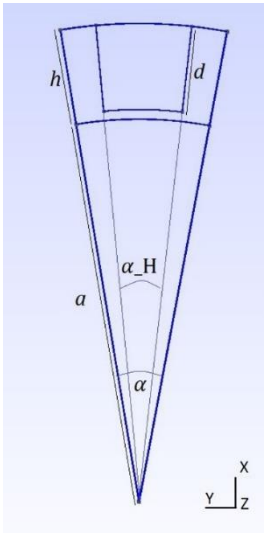
b) 

Figure 3.3 - La cellule élémentaire d'un guide d'ondes à paroi PIC périodique à optimiser a) vue 3D b) vue dans le plan transverse de l'axe du guide.

Pour les contraintes géométriques, trois contraintes d'inégalité linéaires sont imposées pour assurer la faisabilité géométrique. D'un autre côté, deux autres contraintes d'inégalité non linéaires (de type boîte noire) sont imposées sur la fréquence f_0 pour garantir de se trouver dans la bande monomode du guide d'ondes. Ce problème d'optimisation s'écrit ainsi sous la forme suivante :

$$(\mathcal{P}_{pic}) \begin{cases} \min_{X \in D_{pic}} f_{obj}(X) \\ h - d \geq 0{,}001,\ \ p - w \geq 0.001,\ \ \alpha - \alpha_H \geq \dfrac{\pi}{300} \\ f_1 \leq f_0 \leq f_2 \end{cases} \tag{3.17}$$

avec $X = (h, p, d, w, \alpha, \alpha_H)$ le vecteur des variables d'optimisation, $D_{pic} = [3mm, 80mm] \times \left[4mm, \frac{\lambda}{4}\right] \times [1mm, 79mm] \times \left[1mm, \frac{\lambda}{4} - 1mm\right] \times \left[\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[\frac{\pi}{300}, \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{300}\right]$ le domaine de recherche des dimensions d'optimisation.

Cas de paroi périodique 'Mushroom' :

Pour la troisième et dernière structure étudiée dans cette thèse, l'objectif est d'ajouter davantage de degrés de liberté pour couvrir un espace de recherche plus large. Ainsi, Nous avons opté pour une structure basée sur un motif de forme champignon '*mushroom*' obtenue en superposant verticalement deux motifs 'PIC' (cf. figure 3.4). Bien que la nouvelle structure soit complexe et plus difficile à fabriquer, elle présente un potentiel intéressant pour l'optimisation du design de notre guide. De plus, sous certaines conditions, elle converge vers les structures précédemment définies. La structure '*mushroom*' est représentée en figure 3.4, ainsi que les variables géométriques à optimiser.

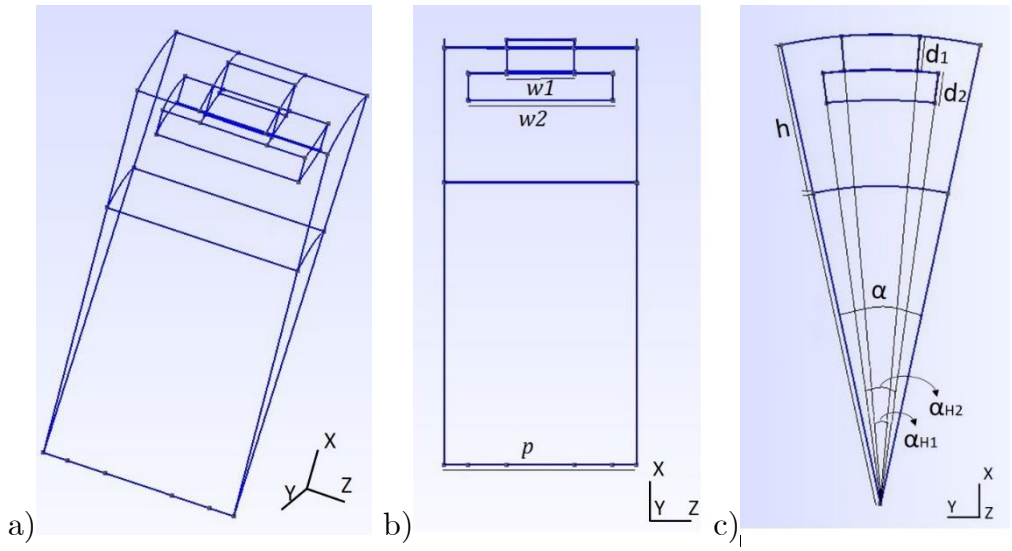


Figure 3.4 - La cellule élémentaire d'un guide d'ondes à paroi 'mushroom' périodique à optimiser : a) vue 3D, b) vue dans l'axe du guide, c) vue dans le plan transverse du guide.

Le problème d'optimisation non-linéaire possède dans ce cas huit paramètres géométriques : h, p, d_1, d_2, w_1, w_2, α, α_{H1} et α_{H2}. Dans ce cas généralisé, les contraintes géométriques sont données par cinq contraintes d'inégalité linéaires pour assurer la faisabilité géométrique. D'un autre côté, deux autres contraintes d'inégalité non linéaires (de type boîte noire) sont imposées sur la fréquence f_0 et celles-ci sont identiques aux deux cas précédents. Le problème d'optimisation s'écrit ainsi sous la forme suivante :

$$(\mathcal{P}_{mush}) \begin{cases} \min_{X \in D_{mush}} f_{obj}(X) \\ h - d_1 - d_2 \geq 0{,}001, \;\; p - w_2 \geq 0.001, \;\; \alpha - \alpha_{H2} \geq \dfrac{\pi}{300} \\ w_2 - w_1 \geq 0, \;\; \alpha_{H2} - \alpha_{H1} \geq 0 \\ f_1 \leq f_0 \leq f_2 \end{cases} \tag{3.18}$$

avec $X = (h, p, d_1, d_2, w_1, w_1, \alpha, \alpha_{H1}, \alpha_{H2})$ le vecteur d'optimisation, $D_{mush} = [3mm, 80mm] \times \left[4mm, \frac{\lambda}{4}\right] \times [1mm, 79mm] \times [1mm, 79mm] \times \left[1mm, \frac{\lambda}{4} - 1mm\right] \times \left[1mm, \frac{\lambda}{4} - 1mm\right] \times \left[\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[\frac{\pi}{300}, \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{300}\right] \times \left[\frac{\pi}{300}, \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{300}\right]$ le domaine de recherche des dimensions d'optimisation.

3.1.3 Implémentation des codes pour l'optimisation

Les algorithmes pour l'optimisation du design de ces 3 structures sont implémentés sous Matlab, alors que les fonctions de la résolution FEM+TME permettant la caractérisation du guide d'ondes et de la détermination du champ électromagnétique sont implémentés sous Python. Le recours à Matlab pour la partie d'optimisation a été décidé en raison des problèmes techniques liés à la mise en place des interfaces pour les algorithmes d'optimisation, qui sont généralement programmés en C++ ou en Fortran. En effet, l'intégration et la compilation des solveurs d'optimisation est plus simple sur Matlab, contrairement à Python qui renvoie des erreurs liées au problème d'installation des bibliothèque externes d'optimisation et de la configuration des solveurs.

Evaluation de la fonction objectif

Les algorithmes d'optimisation sous Matlab effectuent des appels récurrents aux fonctions Python pour déterminer le champ EM et ainsi la fonction objectif (et son gradient, si la méthode de calcul est avec gradient). La communication s'effectue à travers des fichiers d'extension '.mat' lisibles sur Matlab, qui peuvent être générés aussi sur Python à l'aide de la bibliothèque Scipy. En effet, le code d'optimisation communique le point de calcul X contenant les dimensions de la structure du guide d'ondes au code Python à travers un fichier 'X.mat'. A l'aide de la résolution FEM+TME, la fonction objectif est calculée sur Python et sauvegardée dans un fichier 'ObjGrad.mat'. Ce fichier est appelé ensuite sur Matlab pour évaluer la convergence du point de calcul. L'exécution de la partie codée sous Python s'effectue directement sur Matlab via une commande système. Le nombre d'échanges effectués entre Matlab et Python correspond ainsi au nombre d'évaluations de la fonction objectif par l'algorithme d'optimisation. Quant au temps d'échange, il est négligeable devant le temps de calcul du champ EM. C'est pour cette raison que nous avons adopté cette démarche. Une autre possibilité a aussi été envisagée. Elle était basée sur la reconstruction de tous les codes Python directement en Matlab, mais cela aurait demandé un investissement important en termes de temps de développement logiciel.

Contraintes type boîte-noire

Les contraintes de type boîte noire de ce problème d'optimisation sont les contraintes non linéaires imposées sur la fréquence de calcul f_0. En effet, l'optimisation de la cartographie du champ électrique s'effectue sur le mode fondamental propagatif du guide d'ondes dans la bande monomode $[f_1, f_2]$. Cette bande de fréquences est déterminée numériquement pour les guides d'ondes à paroi anisotropes. L'aspect numérique du calcul fait de cette contrainte une contrainte de type boîte noire. Dans ce contexte, un code Python basé sur la méthodologie FEM proposée dans le chapitre 2 est développé pour déterminer la bande monomode du guide d'ondes, l'ordre m du mode fondamental et vérifier si les contraintes sur la fréquence de calcul f_0 sont satisfaites par un paramètre FLAG. L'organigramme du code est représenté en figure 3.5.

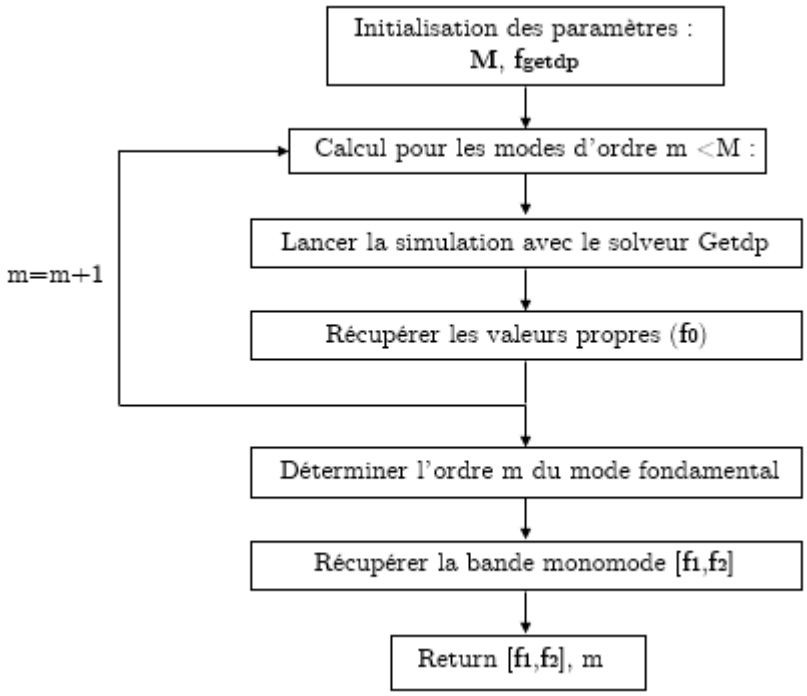


Figure 3.5 - Organigramme du code de calcul de la bande monomode du guide d'ondes.

Après avoir effectué quelques tests, les contraintes de type boîte noire sur la fréquence de calcul f_0 ne semblent pas facilement satisfaites la plupart du temps. Par conséquent, un terme de pénalisation est rajouté à la fonction objectif lorsque la fréquence f_0 n'appartient pas à la bande monomode du guide d'ondes. La démarche de pénalisation est détaillée en figure 3.6. Le choix d'une pénalisation dépendante des bornes de la bande monomode permet d'orienter la recherche vers des zones où la fréquence de calcul est proche de ces bornes.

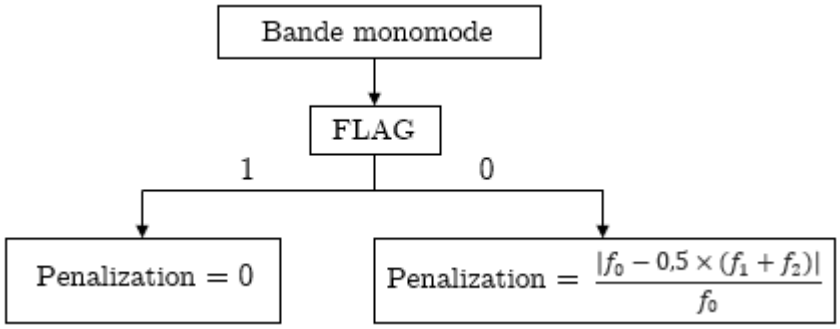


Figure 3.6 - Pénalisation de la fonction objectif.

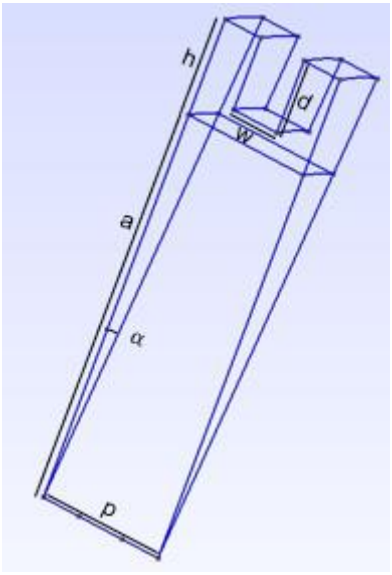
Ainsi, le problème d'optimisation est défini avec une fonction objectif de type boîte noire basée sur un calcul FEM. Les contraintes linéaires peuvent être définies directement dans les algorithmes d'optimisation, contrairement aux contraintes non-linéaires qui sont incluses implicitement dans la fonction objectif par pénalisation de cette dernière. Après une formulation complète du problème inverse, des exemples d'optimisation pour des cartographies prédéfinies sont présentés dans la partie suivante.

3.2 Résultats d'optimisation de design à partir d'un champ objectif imposé

Grace à la formulation complète du problème inverse pour différents types de structures effectuée dans la partie précédente et à l'aide des algorithmes d'optimisation explorés, une optimisation de forme sur la paroi métamatériau périodique est faite pour deux cas d'étude. Dans le premier cas, la cartographie recherchée est définie à partir d'une configuration géométrique connue, un guide d'ondes à paroi métamatériau de type corrugation préalablement simulé. Les algorithmes sont testés pour retrouver cette cartographie à partir d'un tirage aléatoire de 10 points de départ. Toutes les simulations d'optimisation ont été effectuées avec un ordinateur avec les caractéristiques suivantes : processeur Intel(R) Core(TM) i7-8565U CPU @ 1,80 GHz (8 processeurs), 2,0 GHz.

3.2.1 Problème inverse pour un mode hybride connu

Le premier type de problèmes inverses étudié est défini à partir d'un champ objectif que l'on se donne pour un guide d'ondes avec une paroi préalablement connue, cela garantit l'existence d'au moins une solution pour ce problème inverse. L'analyse des résultats va permettre de voir si les algorithmes d'optimisation suggèrent cette même solution ou convergent vers d'autres solutions plus ou moins différentes. A titre d'exemple, un guide d'ondes à paroi corruguée est choisi pour générer le champ objectif de ce problème inverse. La cellule élémentaire et le diagramme de dispersion de la structure sont présentés en figure 3.7. Les dimensions du guide d'ondes proposé sont : $a = 80\,mm$, $h = 20\,mm$, $p = 26.5\,mm$, $d = 15\,mm$, $w = 10\,mm$, $\alpha = \pi/20\,rad$.

a) 

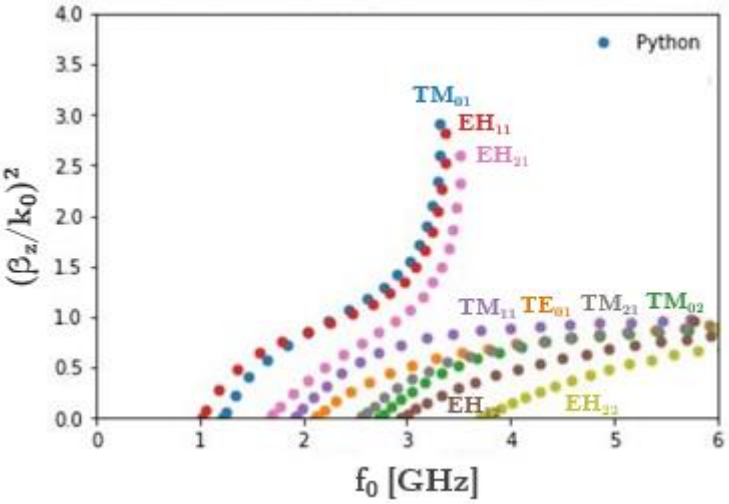
b) 

Figure 3.7 - a) Cellule élémentaire du guide d'onde corrugué donnant le champ objectif b) son diagramme de dispersion.

Champ objectif : le mode fondamental EH_{11} (premiers tests)

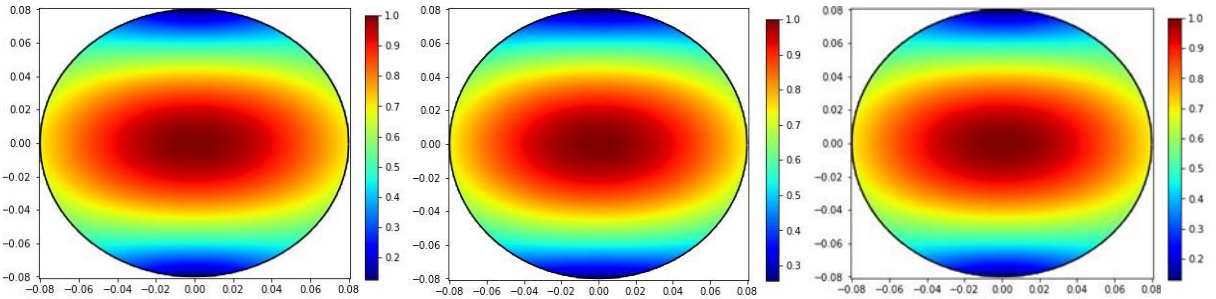
Le mode fondamental du guide d'ondes proposé en figure 3.7 est le EH_{11}. Il est utilisé pour générer le champ objectif à retrouver par l'optimisation. Ces cartographies sont calculées sur une section de rayon $a = 80mm$ à une fréquence $f_0 = 1.1\,GHz$ dans la bande monomode. Le solveur d'optimisation IPOPT, basé sur la méthode des points intérieurs, est utilisé pour chercher des solutions de problème inverse ($\mathcal{P}_{corr}$) donné par l'équation (3.16) et permettant de reproduire le champ objectif donné. Le point de départ est défini aléatoirement par une loi normale et la structure lui correspondant est représentée en figure 3.8. Le nombre maximal d'itérations est fixé à $N = 30$. Après la configuration des paramètres d'optimisation, le code de calcul est exécuté pour résoudre ce problème inverse. Sachant que le champ électrique donné par la structure de départ a une erreur relative globale de 6.81%, IPOPT converge vers une structure donnant une solution avec une erreur relative de 0.13% dans un temps de calcul de 18min35s. Les dimensions géométriques de la structure du champ objectif, la structure de départ et la structure du résultat obtenu sont regroupés dans le tableau 3.1.

Structure	Paramètres géométriques			
	$h(mm)$	$p(mm)$	$d(mm)$	$w(mm)$
Objectif	20	26.5	15	10
Départ	45	30.5	34.2	2.1
Résultat	23.5	21.1	17.5	11

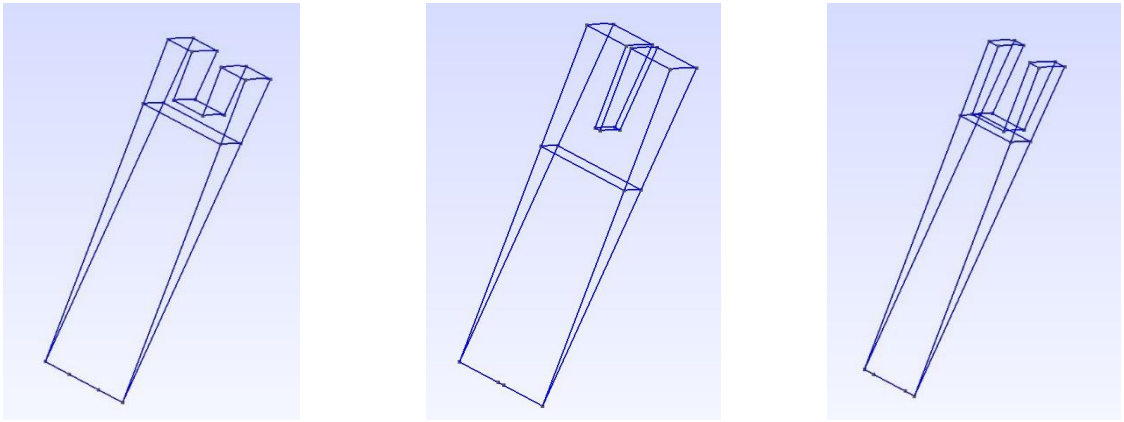
Tableau 3.1 - Paramètres géométriques du problème inverse pour le monde fondamental EH11 avec $a = 80mm$ et $\alpha = \pi/20\ rad$.

Afin d'analyser le résultat de l'optimisation, les cartographies du champ objectif, du champ de départ, du champ obtenu et les géométries leur correspondant sont

représentés en figure 3.8. Nous constatons que le motif corrugué obtenu par l'optimisation est différent de celui du point de départ et du champ objectif. Cet écart confirme que IPOPT a exploré efficacement le domaine de recherche. Par contre, les cartographies du champ se ressemblent et ne peuvent pas être distinguées visuellement, car le mode fondamental du guide de départ est aussi un HE_{11} avec des propriétés similaires.



a) Champ objectif *b) champ au point de départ* *c) champ résultat*



d) Structure objectif *e) Structure de départ* *f) Structure résultat*

Figure 3.8 - Cartographies normalisées et structures du champ objectif, du champ de départ et du champ résultat de l'optimisation à la fréquence $1.1GHz$.

Dans ce cas d'exemple, l'optimisation fournit une solution satisfaisante dans un temps de calcul raisonnable. Ainsi, ce premier résultat permet de valider l'efficacité du modèle mathématique proposé pour résoudre notre problème d'optimisation du design d'une paroi métamatériau. Néanmoins, ce problème inverse était simple à résoudre car les modes fondamentaux des guides corrugués ont des cartographies similaires et même le point de départ a fourni une solution adéquate, avec une erreur relativement faible de 6.81%. Pour ajouter de la complexité à nos problèmes de design, le champ objectif est considéré à l'ordre $m = 2$.

Champ objectif : le mode EH_{21}

Considérons le guide d'ondes corrugué présenté en figure 3.7, le champ électrique objectif est désormais celui du premier mode propagatif d'ordre $m = 2$, le EH_{21} qui est calculé à la fréquence $f_0 = 2GHz$ inclue dans la bande monomode pour les modes d'ordre $m \geq 2$. Les cartographies des composantes du champ électrique objectif calculées à la

section Ω', sont illustrées en figure 3.9. Plusieurs solveurs d'optimisation sont testés pour résoudre ce problème inverse, parmi lesquels les plus performants et adaptés à notre problème de type boîte noire : IPOPT, le plus efficace parmi ceux basés sur le calcul du gradient, NLOPT et NOMAD. Un bilan est effectué par la suite pour comparer les performances de ces trois solveurs en termes de temps calcul et de robustesse. Par ailleurs, le calcul de la fonction objectif par l'intermédiaire de la FEM prend quelques secondes (3 à 5 secondes par évaluation), ce qui rend l'optimisation coûteuse, car elle requiert un grand nombre d'évaluations de la fonction objectif. Ainsi, il est nécessaire de lancer la simulation pour différents points de départ (10 points) répartis sur les différentes régions afin de converger vers plusieurs minima locaux. Ces points de départ sont les mêmes pour les trois solveurs.

Résultats avec NOMAD :

Le calcul d'optimisation s'effectue sur le problème inverse ($\mathcal{P}_{corr}$) donné par le système (3.16). En utilisant l'outil OPTI Toolbox, le solveur NOMAD est sélectionné avec un nombre maximum d'évaluations de la fonction objectif fixé à $N_{itermax} = 504$. Les résultats obtenus pour les différents points de départ sont reportés dans le tableau 3.2.

Point de départ	Erreur relative globale (%)				Temps de calcul	Nombre d'évaluations
	$\left\|\frac{[E_x]-[E_{x,obj}]}{[E_{x,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E_y]-[E_{y,obj}]}{[E_{y,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E_z]-[E_{z,obj}]}{[E_{z,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E]-[E_{obj}]}{[E_{obj}]}\right\|_2$		
$X_{0,1}$	0.07	0.07	0.003	9×10^{-4}	30min5s	72
$X_{0,2}$	0.05	0.05	7×10^{-4}	1×10^{-3}	29min15s	79
$X_{0,3}$	0.06	0.06	0.01	5×10^{-3}	27min43s	68
$X_{0,4}$	0.02	0.02	0.03	2×10^{-3}	27min42s	71
$X_{0,5}$	0.06	0.06	0.01	5×10^{-4}	29min38s	76
$X_{0,6}$	0.01	0.01	5×10^{-4}	5×10^{-4}	30min33s	71
$X_{0,7}$	8.83	8.83	101.2	102.2	24min56s	110
$X_{0,8}$	0.03	0.03	0.04	9×10^{-3}	29min10s	76
$X_{0,9}$	0.06	0.06	0.008	3×10^{-3}	26min06s	77
$X_{0,10}$	0.05	0.05	0.007	3×10^{-3}	28min48s	76

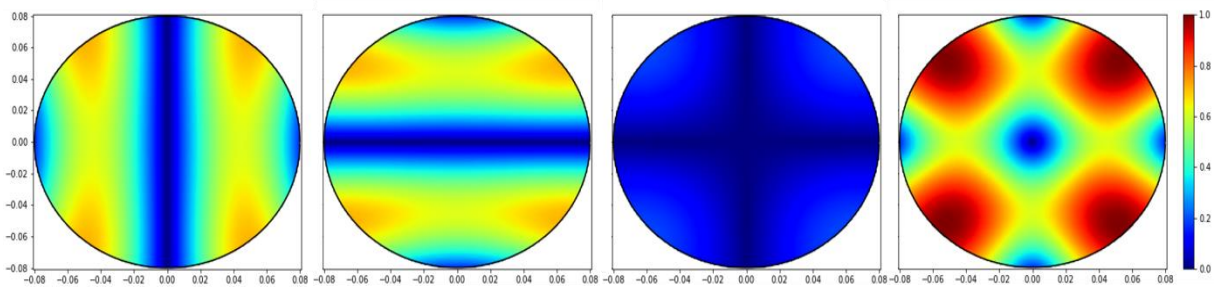
Tableau 3.2 - Résultats d'optimisation de la corrugation avec NOMAD.

Les simulations s'effectuent dans un temps de calcul raisonnable d'environ 30 minutes avec NOMAD. Par ailleurs, d'après le tableau 3.2, ce solveur donne des résultats très satisfaisants pour tous les points de départ, sauf pour le point $X_{0,7}$. Dans ce cas, l'algorithme n'a pas convergé, car il est resté piégé dans une zone où le minimum local donne une erreur élevée sur les contraintes. En dehors de ce point, l'erreur relative globale de l'amplitude du champ électrique ne dépasse pas 0.01%. La meilleure solution correspond au point de départ $X_{0,6}$, elle est surlignée en vert. Les dimensions géométriques des différentes solutions obtenues sont détaillées dans le tableau 3.3.

Structure	Paramètres géométriques			
	$h(mm)$	$p(mm)$	$d(mm)$	$w(mm)$
Objectif	20	26.5	15	10
$X_{0,1}$	34.8	37.5	28.6	29.9
$X_{0,2}$	33.8	37.4	27.5	29.3
$X_{0,3}$	30.3	28.9	24.1	20.5
$X_{0,4}$	18.2	23.9	13.8	6.1
$X_{0,5}$	31.2	32.6	25	23.9
$X_{0,6}$	22.1	35.2	17.2	16.2
$X_{0,7}$	57.3	27.8	47.2	26.7
$X_{0,8}$	22.2	27.9	16.9	13
$X_{0,9}$	17.5	5.2	11.4	1.1
$X_{0,10}$	39.8	19	33.3	16.4

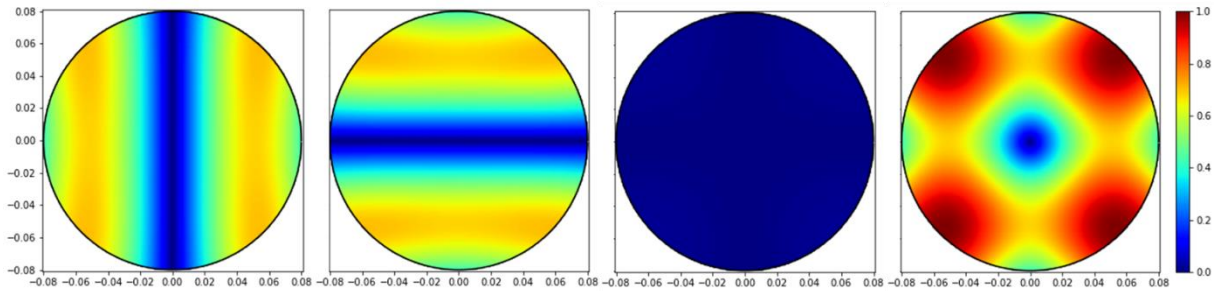
Tableau 3.3 - Dimensions des solutions obtenues avec NOMAD en fonction des points de départ.

La plupart des résultats diffèrent de la structure de référence, mais les erreurs relatives de leurs cartographies sont très faibles. Cette variation dans les résultats offre de nombreuses options qui peuvent être triées en fonction d'autres critères tels que le volume, la masse ou la faisabilité mécanique. Les cartographies correspondant au champ objectif, au meilleur point de départ $X_{0,6}$ et à la solution d'optimisation qui lui est associée, sont tracées respectivement en figure 3.9, 3.10 et 3.11.



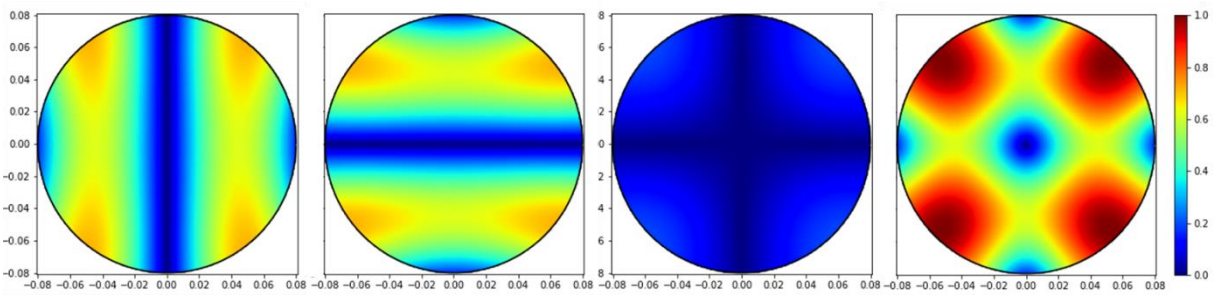
a) $|\vec{E}_{obj,x}|$ *b)* $|\vec{E}_{obj,y}|$ *c)* $|\vec{E}_{obj,z}|$ *d)* $|\vec{E}_{obj}|$

Figure 3.9 - Cartographies du champ objectif normalisé calculées à $2GHz$.



a) $|\vec{E}_x|$ *b)* $|\vec{E}_y|$ *c)* $|\vec{E}_z|$ *d)* $|\vec{E}|$

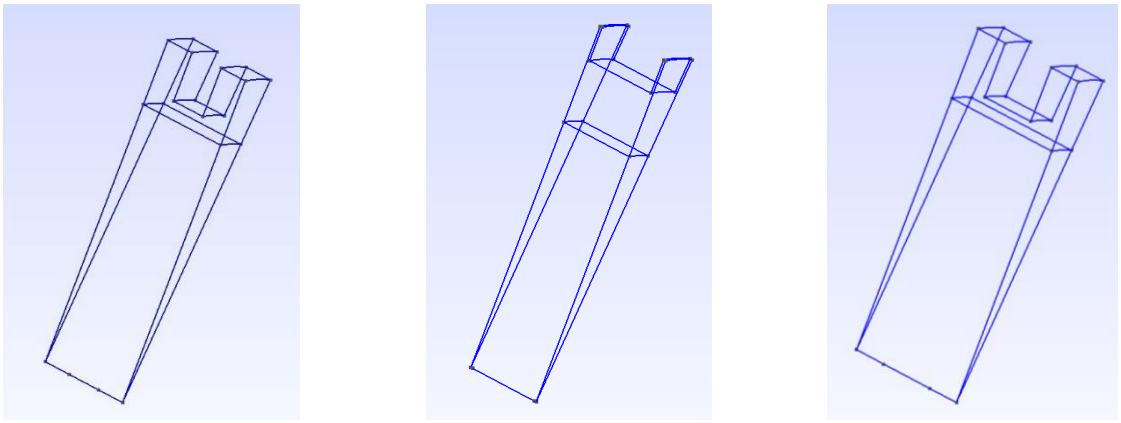
Figure 3.10 - Cartographies du champ normalisés du point de départ $X_{0,6}$ *calculées à* $2GHz$.



a) $|\vec{E}_x|$ *b)* $|\vec{E}_y|$ *c)* $|\vec{E}_z|$ *d)* $|\vec{E}|$

Figure 3.11 - Cartographies du champ normalisées de la meilleure solution calculées à $2GHz$.

A titre d'illustration, les géométries associées à la structure du champ objectif, du point de départ et de la meilleure solution avec NOMAD sont présentées sur la figure 3.12.



d) Structure objectif e) Structure de départ f) Structure résultat

Figure 3.12 - Structures géométriques générant le champ objectif, le champ de départ et le champ résultat avec NOMAD à la fréquence $2GHz$.

Résultats avec NLOPT :

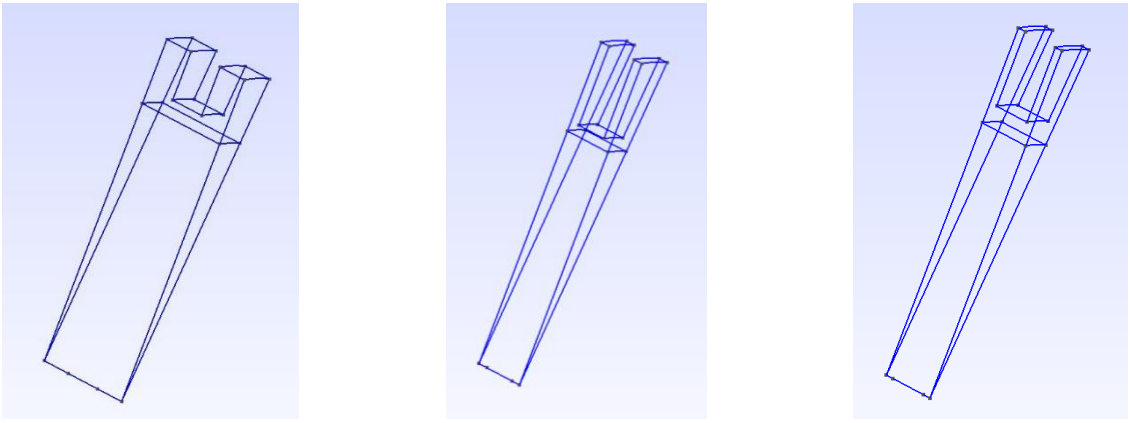
Le script Matlab est exécuté pour résoudre le problème ($\mathcal{P}_{corr}$) en utilisant l'outil OPTI Toolbox, mais en sélectionnant cette-fois le solveur NLOPT. Le nombre maximum d'évaluations de la fonction objectif est toujours fixé à 500. Les solutions sont reportées dans le tableau 3.4, la meilleure solution est surlignée en vert et correspond cette fois au point de départ $X_{0,4}$.

Point de départ	Erreur relative globale (%)				Temps de calcul	Nombre d'évaluations
	$\left\|\frac{[E_x]-[E_{x,obj}]}{[E_{x,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E_y]-[E_{y,obj}]}{[E_{y,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E_z]-[E_{z,obj}]}{[E_{z,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E]-[E_{obj}]}{[E_{obj}]}\right\|_2$		
$X_{0,1}$	2.71	2.71	6.01	2.19	6min12s	112
$X_{0,2}$	7.09	7.09	14.17	5.23	16min52s	313
$X_{0,3}$	10.67	10.67	13.71	8.26	38min28s	504
$X_{0,4}$	0.07	0.07	0.15	0.04	16min52s	304
$X_{0,5}$	10.88	10.88	22.17	9.60	10min47s	165
$X_{0,6}$	2.36	2.36	22.45	1.88	7min19s	123
$X_{0,7}$	104.56	104.56	150.59	69.34	1h15min	502
$X_{0,8}$	1.58	1.58	11.31	1.04	16min46s	135
$X_{0,9}$	110.62	110.62	191.00	91.43	17min15s	116
$X_{0,10}$	6.29	6.29	87.30	4.20	11min27s	100

Tableau 3.4 - Résultats d'optimisation de la corrugation avec NLOPT.

Les résultats issus de NLOPT s'avèrent moins satisfaisants que ceux obtenus avec NOMAD. Un seul résultat présente une erreur relative inférieure à 1%, contre 9 résultats sur les 10 points de départ pour NOMAD. Cependant, ces résultats demeurent satisfaisants dans l'ensemble car la moitié des solutions ont une erreur relative qui ne dépasse pas 5% sur l'amplitude. Puis, l'erreur sur la composante du champ E_z est tolérable, car le champ est faible, voire nul, ce qui explique les erreurs élevées trouvées pour ces solutions. Le nombre d'évaluations de la fonction objectif dépend fortement du point de départ, donc le temps de calcul est variable. L'algorithme converge pour tous les points à l'exception de $X_{0,3}$ et $X_{0,7}$ où l'arrêt est dû au dépassement du nombre maximum d'évaluations de la fonction objectif.

Le meilleur résultat associé au point de départ $X_{0,4}$ présente une structure considérablement différente de celle du champ objectif. Toutefois, l'objectif est de trouver une structure capable de reproduire les cartographies de ce champ avec des performances équivalentes. Il n'est donc pas nécessaire de trouver la même structure, mais plutôt une solution offrant des performances équivalentes. Les géométries associées à la structure du champ objectif, du point de départ $X_{0,4}$ et de la meilleure solution obtenue avec NLOPT sont présentées en figure 3.13.



a) Structure objectif b) Structure de départ c) Structure résultat

Figure 3.13 - Structures géométriques générant le champ objectif, le champ de départ et le champ résultat avec NLOPT à la fréquence $2GHz$.

Résultats avec IPOPT :

Le script Matlab est exécuté pour résoudre le problème ($\mathcal{P}_{corr}$) en utilisant l'outil OPTI Toolbox et le solveur IPOPT. Le nombre maximum d'itérations de la fonction objectif est toujours fixé à 504. D'un autre côté, il est possible d'effectuer plusieurs évaluations au cours d'une seule itération, liées à la fonction objectif ou le calcul du gradient dans ce cas de solveur. Après quelques tests préliminaires, il a été couramment constaté que si cet algorithme converge, ceci se fait aux alentours de la 10ème itération, sinon IPOPT peut s'éloigner parfois de la solution à cause d'un manque de précision dans le calcul numérique du gradient. Ainsi, le nombre maximal d'itérations est fixé ici à 15 pour éviter des itérations inutiles. Les solutions sont reportées dans le tableau 3.5, la meilleure solution est surlignée en vert et correspond au point de départ $X_{0,1}$.

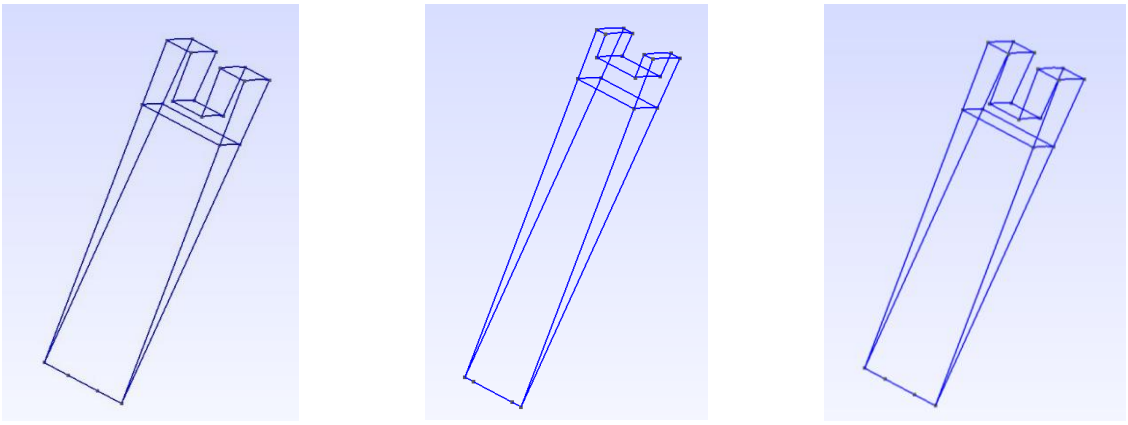
Point de départ	Erreur relative globale (%)				Temps de calcul	Nombre d'évaluations
	$\left\|\frac{[E_x]-[E_{x,obj}]}{[E_{x,obj}]}\right\|$	$\left\|\frac{[E_y]-[E_{y,obj}]}{[E_{y,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E_z]-[E_{z,obj}]}{[E_{z,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E]-[E_{obj}]}{[E_{obj}]}\right\|_2$		
$X_{0,1}$	0.04	0.04	0.05	0.03	1h23min56s	210
$X_{0,2}$	0.12	0.12	0.70	0.11	20min11s	42
$X_{0,3}$	0.33	0.33	2.63	0.22	13min34s	26
$X_{0,4}$	2.25	2.25	0.92	1.70	9min3s	27
$X_{0,5}$	0.09	0.09	0.08	0.05	10min22s	37
$X_{0,6}$	189.5	189.5	97.71	12.25	1h55min33s	366
$X_{0,7}$	Nan	Nan	Nan	Nan	52min21s	624
$X_{0,8}$	Nan	Nan	Nan	Nan	15min26s	158
$X_{0,9}$	Nan	Nan	Nan	Nan	40min10s	523
$X_{0,10}$	80.00	80.00	97.88	80.36	1h05min14s	107

Tableau 3.5 - Résultats d'optimisation de la corrugation avec IPOPT.

Les simulations avec le solveur IPOPT fournissent des résultats variés. Les solutions associées à la première moitié des points de départ sont satisfaisantes avec

une erreur relative sur l'amplitude inférieure à 2%. La deuxième moitié des solutions ont soit une erreur relative élevée, soit elles ne respectent pas les contraintes. Ce qui confirme à la fois la sensibilité de la solution au point de départ et l'impact du calcul du gradient sur le calcul des pas de descente pour atteindre un minimum local. Quant au temps de calcul, il dépend fortement de nombre d'itérations et il varie entre 9 minutes et 1h55min.

A part la solution du 1er point de départ qui est proche à la structure du champ objectif, les autres solutions (avec une erreur inférieure à 2%) présentent des structures distinctes. Les géométries associées à la génération du champ objectif, du point de départ $X_{0,1}$ et de la meilleure solution obtenue avec IPOPT sont présentées en figure 3.13.



a) Structure objectif b) Structure de départ c) Structure résultat

Figure 3.14 - Structures géométriques générant le champ objectif, le champ de départ et le champ résultat avec IPOPT à la fréquence $2GHz$.

3.2.2 Problème inverse pour un champ constant

Après avoir confirmé l'efficacité du modèle en résolvant un problème inverse d'un champ objectif connu, notre intention est de rajouter un niveau de complexité supplémentaire en tentant de retrouver un champ dont nous ignorons l'existence. Pour cela, un champ objectif constant polarisé suivant $\vec{y}$, avec des composantes E_x et E_z nulles, est choisi à une fréquence de calcul $f_0 = 3.5\,GHz$ et à une section de rayon $a = 30\,mm$. Par ailleurs, les trois types de guides d'ondes avec des parois corruguées, *PIC* et *Mushroom*, détaillés dans la section 3.1.2, sont optimisés pour retrouver ce champ objectif constant. L'utilisation des géométries différentes impose la définition de nouveaux points de départ (10 points) pour chacune des formulations envisagées. Les résultats sont directement comparés à partir des différentes formulations du problème inverse $(\mathcal{P}_{corr})$, $(\mathcal{P}_{pic})$ et $(\mathcal{P}_{mush})$ et des différents algorithmes d'optimisation (NOMAD, IPOPT, NLOPT) vus dans la partie 3.1.

Comparaison des résultats

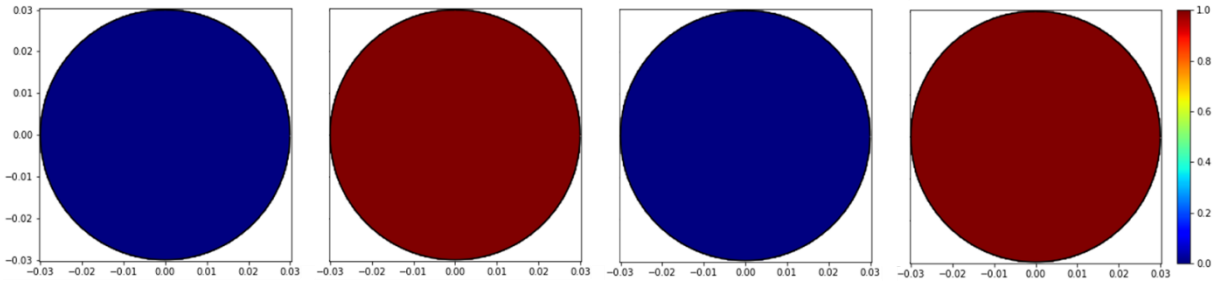
Pour chaque structure, seuls les points de départ donnant les meilleurs résultats avec chacune des trois méthodes d'optimisation sont recensés dans le tableau 3.6. Les points de départ sont spécifiques aux formulations même s'ils sont notés de façon identique dans le tableau 3.6 où sont présentés les meilleurs résultats. Étant donné que les composantes E_x et E_z de la référence sont nulles, les erreurs relatives associées ne sont pas calculées car elles n'ont pas de valeurs significatives dans ce cas.

	Point de départ	Erreur relative globale (%)		Temps de calcul	Nombre itérations	Meilleure solution
		$\left\|\frac{[E_y]-[E_{y,obj}]}{[E_{y,obj}]}\right\|_2$	$\left\|\frac{[E]-[E_{obj}]}{[E_{obj}]}\right\|_2$			
Corrugation	NOMAD	38.01	36.11	19min36s	334	$X_{0,3}$
	NLOPT	38.66	36.58	28min52s	501	$X_{0,7}$
	IPOPT	38.74	36.66	20min58s	95	$X_{0,5}$
PIC	NOMAD	20.54	19.93	33min3s	498	$X_{0,8}$
	NLOPT	27.11	25.98	36min33s	502	$X_{0,5}$
	IPOPT	32.65	31.35	49min30s	135	$X_{0,3}$
Mushroom	NOMAD	15.06	14.43	28min20s	368	$X_{0,7}$
	NLOPT	34.47	32.86	54min54s	501	$X_{0,4}$
	IPOPT	34.43	32.75	2h28min35s	194	$X_{0,1}$

Tableau 3.6 - Résultats de l'optimisation pour les différentes méthodes et les différents types de structures.

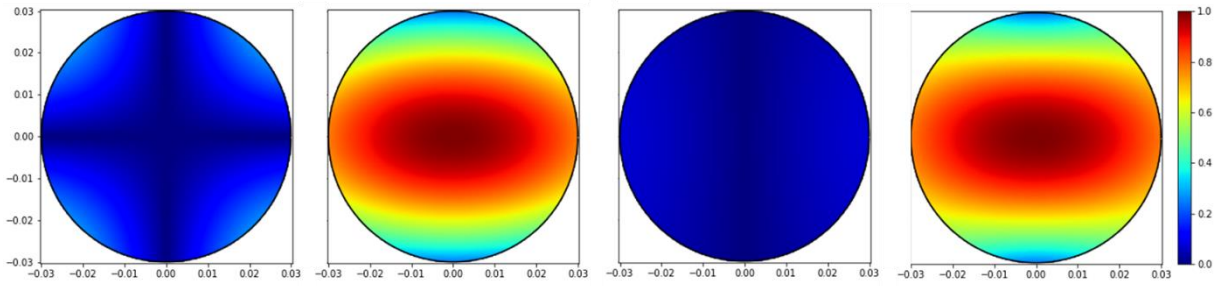
En analysant les résultats, NOMAD se montre toujours le plus rapide, quelle que soit la formulation utilisée. Par ailleurs, il est constaté, comme attendu, qu'à mesure que la structure se complexifie (et donc le nombre de degrés de liberté sur les dimensions augmente), l'erreur relative sur la composante E_y comme sur l'amplitude du champ diminue. Sachant que l'erreur relative est de 154% sur la composante E_y et 40% sur l'amplitude pour un guide d'ondes métallique classique de taille égale à la section du calcul du champ, le meilleur résultat d'optimisation obtenu par NOMAD est avec la formulation mushroom ce qui réduit l'erreur à 15% sur la composante du champ E_y comme sur l'amplitude. En termes de comparaison, nous avons constaté que IPOPT présente systématiquement plus de difficultés pour fournir des résultats satisfaisants par rapport aux deux autres solveurs. A noter que le nombre de points de départ, fixé à 10, demeure insuffisant pour couvrir plusieurs régions d'un domaine de recherche surtout quand le nombre de variable est élevé. Cela peut être une raison pour ne pas avoir obtenu des solutions encore plus abouties (erreur $<15\%$).

Les cartographies du champ objectif, le meilleur point de départ, la solution d'optimisation lui correspondant sont tracés en figures 3.15, 3.16 et 3.17 respectivement. Les géométries du point de départ et de la solution d'optimisation, quant à elles, sont représentées en figure 3.18.



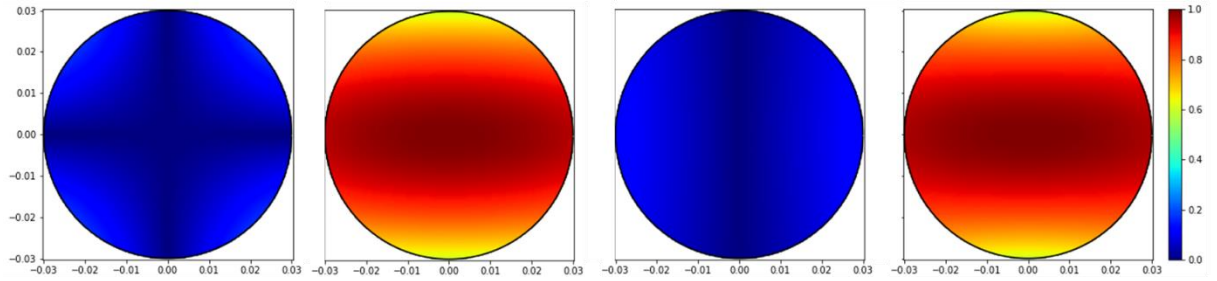
a) $|\vec{E}_{obj,x}|$ b) $|\vec{E}_{obj,y}|$ c) $|\vec{E}_{obj,z}|$ d) $|\vec{E}_{obj}|$

Figure 3.15 - Cartographies du champ objectif normalisé à la fréquence $3.5GHz$.



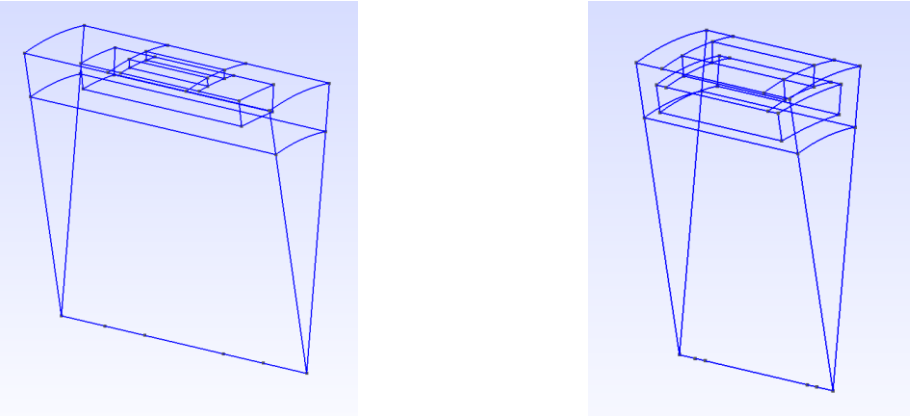
a) $|\vec{E}_x|$ b) $|\vec{E}_y|$ c) $|\vec{E}_z|$ d) $|\vec{E}|$

Figure 3.16 - Cartographies du champ normalisé du point de départ $X_{0,7}$ *à la fréquence* $3.5GHz$.



a) $|\vec{E}_x|$ b) $|\vec{E}_y|$ c) $|\vec{E}_z|$ d) $|\vec{E}|$

Figure 3.17 – Cartographies du champ normalisé de la meilleure solution à la fréquence $3.5GHz$.



a) Structure de départ b) Structure résultat

Figure 3.18 - Structures du point de départ et de la meilleure solution avec NOMAD à la fréquence $3.5GHz$.

Même si une erreur relative de 15% demeure élevée, les cartographies de la meilleure solution se rapprochent bien de celles du champ objectif, ce qui est satisfaisant pour valider ce cas de problème inverse, surtout que nous ignorons l'existence d'un guide d'ondes à parois anisotropes capable de fournir un champ constant et complètement polarisé suivant une composante à l'intérieur de la structure.

3.2.3 Bilan comparatif des méthodes

Avant d'effectué un bilan comparatif des trois solveurs employés : NOMAD, NLOPT et IPOPT, il convient de mentionner que d'autres codes, notamment SQP et Active-Set présentés dans la section 3.1.1, ont été testés sur les problèmes inverses étudiés. Néanmoins, les résultats obtenus n'ont pas été satisfaisants en raison des difficultés numériques rencontrées lors du calcul de gradient. La sensibilité de ces méthodes au gradient (calculé numériquement par la méthode des différences finies) a impacté la précision des calculs, rendant ainsi difficile l'obtention de performances satisfaisantes.

Par ailleurs, pour comparer les performances des trois méthodes d'optimisation utilisées, il est nécessaire de prendre en compte trois critères importants : la robustesse, qui fait référence à la capacité d'adaptation aux propriétés de nos problèmes inverses de design permettant ainsi de fournir des solutions adéquates, la rapidité du calcul et la pertinence des solutions obtenues. Commençons d'abord par la robustesse. Les trois solveurs fournissent des résultats qui vérifient les contraintes pour les différents problèmes inverses traités. En ce qui concerne la rapidité, l'algorithme IPOPT est le plus lent, car il nécessite des calculs supplémentaires du gradient et ce, à chaque itération. Ces calculs sont excessivement coûteux en termes de temps. En revanche, NLOPT et NOMAD parviennent à résoudre les problèmes dans des temps raisonnables et de manière relativement similaires. Pour la pertinence des résultats, NOMAD se démarque des autres en fournissant les meilleures solutions pour tous les types de structures considérées et à partir de plus nombreux points de départ. Les avantages et

les inconvénients de ces trois solveurs sont déclinés selon les trois critères d'évaluation dans le tableau 3.7. Le signe '+' indique que le critère est largement satisfait, tandis que le signe '–' indique le contraire.

	Robustesse	Rapidité	Résultats
NOMAD	+	+	+
NLOPT	+	+	–
IPOPT	+	–	–

Tableau 3.7 -Comparaison des méthodes d'optimisation testées

L'analyse des résultats montre l'efficacité du solveur NOMAD pour résoudre ce type de problèmes inverses d'optimisation non-linéaire, tout en respectant les contraintes imposées et ce, pour les trois critères évaluant la performance. Ainsi, il est envisagé d'utiliser NOMAD, par la suite, afin d'optimiser les cartographies des champs électromagnétiques générés à l'intérieur ou à l'ouverture des transitions de guides d'ondes à parois anisotropes.

Conclusion

La résolution FEM+TME explorée dans le chapitre 2 a permis le développement d'une méthodologie de conception de guide d'ondes à paroi en métamatériau par détermination des diagrammes de dispersion et des cartographies des champs électromagnétiques. La rapidité des calculs permet son utilisation dans un code d'optimisation afin de dimensionner le métamatériau qui doit générer une cartographie de champ souhaitée. Pour se faire, des modèles mathématiques pour différents types de structures ont été développés. Afin de valider la performance des différents algorithmes sur ces modèles, un premier test sur un problème inverse connu a été fait. De nombreuses géométries produisent des valeurs pour la fonction objectif avec des erreurs inférieures à 1%. Quant aux différents solveurs utilisés, NOMAD s'est avéré être le plus adapté. En effet, NOMAD est robuste, stable et est le plus rapide. NOMAD est aussi le plus efficace permettant de trouver des structures optimales beaucoup plus indépendantes du point de départ. Ceci peut-être notamment observé si le nombre maximal d'évaluations est augmenté. Dans un second temps, une fonction objectif ne correspondant à aucune structure connue a été définie, c'est à nouveau le solveur NOMAD avec la formulation comportant le plus de degrés de liberté qui a fourni le meilleur résultat.

Bibliographie

[1] Gordon, G., & Tibshirani, R. "Karush-kuhn-tucker conditions", Optimization, vol. 10, no 725/36, p. 725, 2012.

[2] Fukushima, M., & Tseng, P., "An implementable active-set algorithm for computing a B-stationary point of a mathematical program with linear complementarity constraints", *SIAM Journal on Optimization*, vol. 12, no 3, p. 724-739, 2002.

[3] Zhu, Z., "A simple feasible SQP algorithm for inequality constrained optimization", *Applied mathematics and computatio*n, vol. 182, no 2, p. 987-998, 2006.

[4] Wächter, A., & Biegler, L. T., "On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming", Mathematical programming, vol. 106, p. 25-57, 2006.

[5] A. Wachter and L. T. Biegler., "Ipopt on coin-or", programme disponible sur https://coin-or.github.io/Ipopt.

[6] Wright, S. J, "Primal-dual interior-point methods", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1997.

[7] S. G. Johnson. "The nlopt nonlinear-optimization package Software", à télécharger sur : http://github.com/stevengj/nlopt.

[8] J. Nocedal, S.J. Wright, "Numerical Optimization", Second Edition, Springer, New York, 2006.

[9] M. Abramson, C. Audet, G. Couture, J. Dennis, Jr., S. Le Digabel, &C. Tribes. "The NOMAD project, Software", disponible sur https://www.gerad.ca/nomad/.

[10] Audet, C., & Dennis Jr, J. E., "Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization", SIAM Journal on optimization, vol. 17, no 1, p. 188-217, 2006.

[11] Le Digabel, S. "Algorithm 909: NOMAD: Nonlinear optimization with the MADS algorithm", *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 2011, vol. 37, no 4, p. 1-15.

[12] Le Digabel, S, "Blackbox optimization with the MADS algorithm and the NOMAD software", 2021.

Chapitre 4 : Mode-Matching pour une double transition entre un guide métallique et un guide à parois métamatériaux

Introduction

La méthode du Mode-Matching (MM) est utilisée pour analyser la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes présentant des discontinuités, comme un changement de diamètre. Le type de structure étudiée correspond à une double transition : passage d'un guide métallique à un guide à métamatériaux puis à un guide métallique, qui constitue l'élément de base d'une antenne cornet, aperçue comme une série alignée de guides d'ondes dont la section augmente de manière progressive. Dans un premier temps, la transition est modélisée par un circuit équivalent résolu avec les lois de Kirchhoff. Les composants de ce circuit sont décomposés sur une base modale définie préalablement, ce qui permet de calculer les opérateurs admittances [Y] de la structure au niveau de la discontinuité, et d'en déduire ensuite les paramètres [S].

Pour appliquer le MM à une double transition de guide, une résolution numérique a été développée afin d'étudier le comportement des ondes à la discontinuité. Elle exploite le code FEM et la TME, proposés dans le chapitre 2, pour identifier les modes dans chaque guide et effectuer les calculs analytiques issus de la résolution du circuit équivalent de la discontinuité. Dans un premier temps, un cas analytique de changement de diamètre d'un guide métallique est testé avec un code MM simplifié. Ensuite, un code généralisé est appliqué sur le cas d'une double transition entre un guide métallique et un guide à paroi métamatériau de diamètres différents.

Toutes les simulations de ce chapitre ont été effectuées avec un ordinateur présentant les caractéristiques suivantes : Intel Core i7-7500U CPU @2.70GHz-2.90GHZ, Mémoire installée (RAM) de 16Go.

4.1 Modélisation de la transition au niveau de la discontinuité

4.1.1 Résolution par schéma équivalent

La double transition entre deux guides de natures différentes peut être modélisée par un circuit équivalent. La structure proposée est une géométrie cylindrique : guide métallique / guide à paroi métamatériau /guide métallique, elle est représentée sur la figure 4.1.

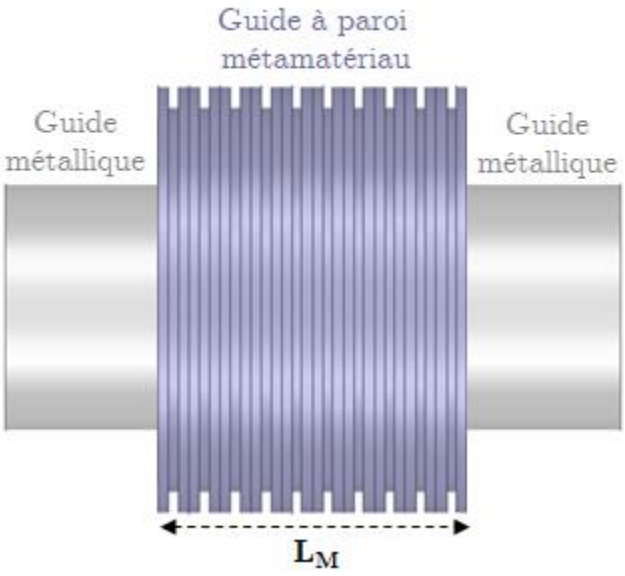


Figure 4.1 - Structure de la double transition étudiée.

La structure admet un plan de symétrie au milieu du guide à paroi métamatériau. Elle peut donc être analysée comme la superposition de deux sous-problèmes en remplaçant ce plan par un mur électrique, puis par un mur magnétique successivement [1], comme représenté sur la figure 4.2.

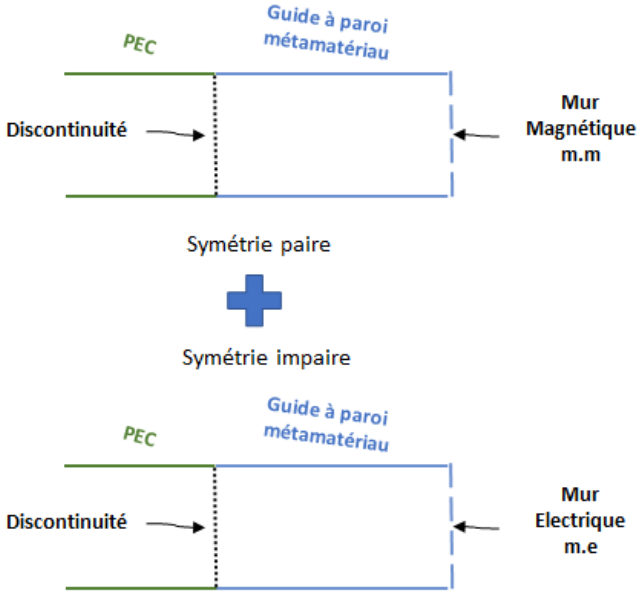


Figure 4.2 - Symétries paire et impaire.

Ainsi, en se basant sur la nature de la structure, les conditions limites et la symétrie de la géométrie, le circuit équivalent peut être déterminé. Dans le cas de la double transition simplifiée sur la figure 4.2, le schéma équivalent est représenté par le circuit suivant :

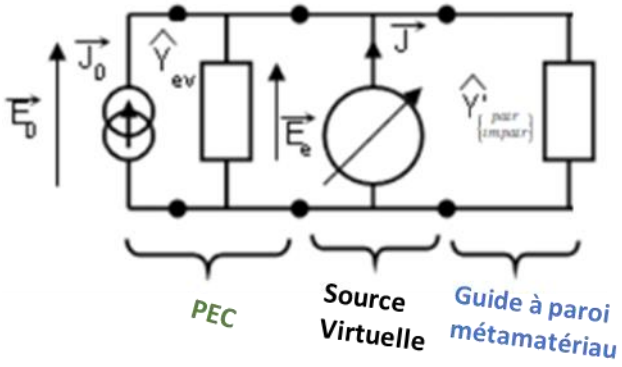


Figure 4.3 - Schéma électrique équivalent de la double transition simplifiée.

A partir de la décomposition du champ électrique dans les bases modales des guides d'ondes et des expressions généralisées des opérateurs admittances, les relations permettant de formuler le problème aux limites sont définies dans les trois régions comme détaillé par la suite.

Le guide métallique (noté PEC) :

L'excitation électromagnétique est modélisée par une source réelle, elle est représentée par le mode fondamental du guide d'entrée. Dans ce cas, la source de Norton $\vec{J}_0$ correspond au mode fondamental $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ du guide métallique circulaire. La bande de fréquences de travail est la bande monomode du mode TE_{11}, les autres modes d'ordre supérieur de ce guide sont donc tous évanescents, ils sont modélisés par l'opérateur admittance $\hat{Y}_{ev}$.

$$\vec{J}_0 = I_{11}^{TE}\overrightarrow{f_{11}^{TE}}, \tag{4.1}$$

$$\vec{E}_0 = \sum_{\substack{m,n=0,1 \\ \alpha=TE,TM}}^{\infty} V_{mn}^{\alpha}\overrightarrow{f_{mn}^{\alpha}}, \tag{4.2}$$

$$\hat{Y}_{ev} = \sum_{\substack{m,n=0,1 \\ \alpha=TE,TM \\ sauf\ TE_{11}}}^{\infty} \left|\overrightarrow{f_{mn}^{\alpha}}\right\rangle Y_{mn}^{\alpha} \left\langle\overrightarrow{f_{mn}^{\alpha}}\right|, \tag{4.3}$$

avec $\overrightarrow{f_{mn}^{\alpha}}$ la base modale dans le guide circulaire métallique, I_{11}^{TE} l'amplitude du courant du mode fondamental TE_{11}, V_{mn}^{α} les amplitudes électriques des modes α =TE/TM, $Y_{mn}^{TE} = \frac{\gamma_{mn}^{TE}}{j\omega\mu_0}$ / $Y_{mn}^{TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma_{mn}^{TM}}$ les impédances caractéristiques des modes TE/TM où γ_{mn}^{α} désigne la constante de propagation du mode (m,n) suivant l'axe z.

La source virtuelle :

A la discontinuité, la source virtuelle $\vec{E}_e$ représente les conditions de transmission au niveau de la jonction entre les deux guides. Généralement elle correspond au mode fondamental du guide de même section donc ici le mode TE_{11} du guide circulaire.

$$\vec{E}_e = v_e \overrightarrow{f_{11}^{TE}}, \tag{4.4}$$

$$\vec{J} = I_e \overrightarrow{f_{11}^{TE}}, \tag{4.5}$$

avec v_e l'amplitude électrique et I_e l'amplitude magnétique de la source virtuelle.

Le guide d'ondes à paroi métamatériau :

L'impédance caractéristique ramenée $[Y_{mn}^{\prime\alpha,r}]$ d'un mode, de la demi région du guide à métamatériau délimitée par un mur magnétique (cas pair) ou un mur électrique (cas impair), vue depuis la discontinuité est définie par :

$$[Y_{mn}^{\prime\alpha,r}]_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}} = [Y_{mn}^{\prime\alpha}] \begin{cases} th\left(\frac{\gamma_{mn}^{\alpha\prime} L_M}{2}\right) & \text{cas pair} \\ \coth\left(\frac{\gamma_{mn}^{\alpha\prime} L_M}{2}\right) & \text{car impair} \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $[Y_{mn}^{\prime\alpha}]$ la matrice admittance de mode du guide à paroi métamatériau, soit l'inverse de l'impédance caractéristique $[Z_{mn}^{\prime\alpha}]$ déterminée dans le chapitre 2 par les relations (2.30) et (2.31), $\gamma_{mn}^{\alpha\prime}$ la constante de propagation du mode suivant la direction z.

Par conséquent, l'opérateur admittance $\hat{Y}'_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}}$, qui représente la demi-région du guide à paroi métamatériau vue depuis la discontinuité, s'écrit en fonction des modes et leurs impédances ramenées données en (4.6), par :

$$\hat{Y}'_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}} = \sum_{\substack{m,n=0,1 \\ \alpha=TE,TM,EH,HE}}^{\infty} \left| [Y_{mn}^{\prime\alpha,r}]_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}} \overrightarrow{f_{mn}^{\prime\alpha}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f_{mn}^{\prime\alpha}} \right| \tag{4.7}$$

avec $\overrightarrow{f_{mn}^{\prime\alpha}}$ la base modale dans le guide à métamatériaux. Contrairement au guide métallique où seulement les modes TE et TM se propagent dans la structure, dans le guide à paroi métamatériau, les modes hybrides EH et HE sont aussi pris en compte s'ils existent.

4.1.2 Application de la méthode de Galerkin

Pour résoudre ce schéma électrique équivalent, et ainsi déterminer les paramètres [S] de la discontinuité, les relations de Kirchhoff sont utilisées. Elles permettent d'exprimer les inconnues en fonction des données du problème selon l'équation (4.8) :

$$\begin{pmatrix} grandeurs\ duales \\ des\ sources\ réelles \\ et\ virtuelles \end{pmatrix} = [\hat{H}] \begin{pmatrix} sources \\ réelles \\ et\ virtuelles \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Ensuite, la méthode de Galerkin, détaillée dans la partie 1.2.1 du chapitre 1, est appliquée. En effet, la source réelle est projetée sur son mode fondamental et la source virtuelle sur sa fonction d'essai. Il en est de même pour les sources duales. Ces projections sont répercutées sur l'opérateur $[\hat{H}]$ qui devient une matrice, ce qui conduit à la résolution du problème matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} V_{11}^{TE} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle \\ -\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \left(\hat{Y}_{ev} + \hat{Y}'_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} \right) \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^{TE} \\ v_e \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

La résolution du système permet de trouver l'admittance à l'entrée de la transition $Y_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}}$, représentée par le rapport $\frac{I_{11}^{TE}}{V_{11}^{TE}}$, par la relation :

$$\frac{I_{11}^{TE}}{V_{11}^{TE}} = Y_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} = \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \left(\hat{Y}_{ev} + \hat{Y}'_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} \right) \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle \tag{4.10}$$

Comme $\hat{Y}_{ev}$ est défini sur les modes du guide d'ondes métallique, en dehors du mode fondamental $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ et que la base modale est orthogonale,

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \hat{Y}_{ev} \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle = 0 \tag{4.11}$$

Cela permet de simplifier l'expression de l'admittance à :

$$Y_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} = \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \hat{Y}'_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle \tag{4.12}$$

Puis, $\hat{Y}'_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}}$ est remplacée par son expression (4.7), donc :

$$Y_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} = \sum_{\substack{m,n=0,1 \\ \alpha=TE,TM,EH,HE}}^{\infty} \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| [Y_{mn}'^{\alpha,r}]_{\left\{ \begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix} \right\}} \overrightarrow{f_{mn}'^{\alpha}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f_{mn}'^{\alpha}} \middle| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle \tag{4.13}$$

Ainsi, les impédances Y_{pair} et Y_{impair} sont déterminées séparément à l'aide de (4.6),

$$Y_{pair} = \sum_{\substack{m,n=0,1 \\ \alpha=TE,TM,EH,HE}}^{\infty} \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| [Y_{mn}'^{\alpha}] \overrightarrow{f_{mn}'^{\alpha}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f_{mn}'^{\alpha}} \middle| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle th\left(\frac{\gamma_{mn}^{\alpha'} L_M}{2}\right) \tag{4.14}$$

$$Y_{impair} = \sum_{\substack{m,n=0,1 \\ \alpha=TE,TM,EH,HE}}^{\infty} \left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| [Y_{mn}'^{\alpha}] \overrightarrow{f_{mn}'^{\alpha}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f_{mn}'^{\alpha}} \middle| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle coth\left(\frac{\gamma_{mn}^{\alpha'} L_M}{2}\right) \tag{4.15}$$

Par la suite, les deux admittances permettent d'identifier la matrice admittance [Y] correspondant à la discontinuité [1]:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{Y_{pair} + Y_{impair}}{2} & \frac{Y_{pair} - Y_{impair}}{2} \\ \frac{Y_{pair} - Y_{impair}}{2} & \frac{Y_{pair} + Y_{impair}}{2} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Puis, les paramètres [S] de la structure sont déduits par :

$$[S] = (I - Z_{11}^{TE}[Y])\,(I + Z_{11}^{TE}[Y])^{-1} \tag{4.17}$$

avec Z_{11}^{TE} l'impédance du mode TE_{11} dans le guide circulaire métallique, I la matrice identité de rang 2.

4.2 Résolution MM simplifié (guide PEC/guide PEC)

Dans un premier temps, un cas analytique est développé, c'est celui d'une double transition entre deux guides d'ondes circulaires métalliques de rayons différents (a et A). La structure étudiée est représentée sur la figure 4.4.

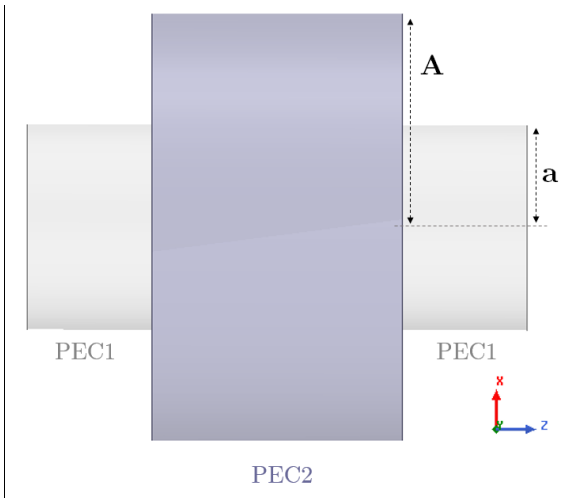


Figure 4.4 – Double transition entre deux guides circulaires métalliques.

Dans ce cas, le Mode-Matching peut être simplifié, il a été développé de façon complètement analytique dans l'annexe B.

4.2.1 Formulation analytique du problème MM :

Base modale d'un guide PEC :

Le mode fondamental du guide PEC1 est le TE_{11}. Dans ce cas, l'excitation paire est choisie, donc sa fonction génératrice s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{f_{11}^{TE}} = K_{11}\frac{jZ_0k_0}{k_{c11}^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho}J_1(k_{c11}\rho)\cos(\theta) \\ k_{c\,11}J_1'(k_{c11}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \text{avec } \rho \in [0,a], \theta \in [0,2\pi] \tag{4.18}$$

avec K_{11} sa constante de normalisation, et a le rayon du premier guide PEC1.

Considérons le produit scalaire défini sur l'espace $L^2(\Omega = [0,a] \times [0,2\pi], \mathbb{C})$, par :

$$\langle \vec{f}'_{mn} | \vec{g}'_{mn} \rangle = \int_{\Omega} \vec{f}'^{\,*}_{mn} \cdot \vec{g}'_{mn}\, d\Omega \tag{4.19}$$

Basé sur cette définition, la constante de normalisation $|K_{11}|$ est calculée dans l'annexe B et elle est donnée par :

$$|K_{11}| = \frac{k_{c,11}^2}{Z_0 k_0 \sqrt{\pi \int_0^a \left[\rho k_{c,11}^2 J_1'(k_{c,11}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c,11}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \tag{4.20}$$

Ainsi, en faisant un choix de K_{11} vérifiant l'équation (4.20), la fonction $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ du mode fondamental se simplifie sous la forme :

$$\overrightarrow{f_{11}^{TE}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^a \left[\rho k_{c,11}^2 J_1'(k_{c,11}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c,11}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} J_1(k_{c11}\rho)\cos(\theta) \\ k_{c\,11} J_1'(k_{c11}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Dans le guide du milieu PEC2, seuls les modes $m = 1$ pairs sont excités du fait de l'invariance angulaire de la structure. Ainsi, seuls ces modes sont conservés dans la base modale notée $\overrightarrow{f_{1n}^{'\alpha}}$. En effet, les autres modes ne se couplent pas avec le mode en excitation, TE_{11} pair. Autrement dit, $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \left(\overrightarrow{f_{mn}^{'\alpha}}\right)_{m\neq 1} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \left(\overrightarrow{f_{1n}^{'\alpha}}\right)_{impair} \right\rangle$=0.

La base modale du PEC2 contient deux types de modes : les TE et les TM. Ces modes sont d'ordre $m = 1$:

$$\overrightarrow{f_{1n}^{'TE}} = K'^{TE}_{1n} \frac{jZ_0 k_0 \Psi'_{1n}}{k_{c1n}^{'TE\,2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} J_1(k_{c1n}^{'TE}\rho)\cos(\theta) \\ k_{c1n}^{'TE} J_1'(k_{c1n}^{'TE}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } \rho \in [0, A], \theta \in [0,2\pi] \tag{4.22}$$

$$\overrightarrow{f_{1n}^{'TM}} = K'^{TM}_{1n} \frac{\gamma_{1n}^{'TM} \Gamma'_{1n}}{k_{c1n}^{'TM\,2}} \begin{pmatrix} -k_{c1n}^{'TM} J_1'(k_{c1n}^{'TM}\rho)\cos(\theta) \\ \frac{1}{\rho} J_1(k_{c1n}^{'TM}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } \rho \in [0, A], \theta \in [0,2\pi] \tag{4.23}$$

avec K'^{TM}_{1n} et K'^{TE}_{1n} les constantes de normalisation des modes TE et les modes TM respectivement. Ils s'écrivent sous la forme suivante (Annexe B) :

$$\left|K'^{TE}_{1n}\right| = \frac{k_{c1n}^{'TE\,2}}{Z_0 k_0 \Psi'_{1n} \sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k_{c1n}^{'TE\,2} J_1'(k_{c1n}^{'TE}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c1n}^{'TE}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \tag{4.24}$$

$$\left|K'^{TM}_{1n}\right| = \frac{k_{c1n}^{'TM\,2}}{|\gamma_{1n}^{'TM}| \Gamma'_{mn} \sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k_{c1n}^{'TM\,2} J_1'(k_{c1n}^{'TM}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c1n}^{'TM}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \tag{4.25}$$

En remplaçant K'^{TE}_{1n} et K'^{TM}_{1n} par leurs expressions et après simplifications, les modes $\overrightarrow{f_{1n}^{'TE}}$ et $\overrightarrow{f_{1n}^{'TM}}$ deviennent :

$$\overrightarrow{f_{1n}^{'TE}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k_{c1n}^{'TE\,2} J_1'(k_{c1n}^{'TE}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c1n}^{'TE}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} J_1(k_{c1n}^{'TE}\rho)\cos(\theta) \\ k_{c1n}^{'TE} J_1'(k_{c1n}^{'TE}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

$$\overrightarrow{f_{1n}^{\prime TM}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k_{c1n}^{\prime TM\,2} J_1'(k_{c1n}^{\prime TM}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c1n}^{\prime TM}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \begin{pmatrix} -k_{c1n}^{\prime TM} J_1'(k_{c1n}^{\prime TM}\rho)\cos(\theta) \\ \frac{1}{\rho} J_1(k_{c1n}^{\prime TM}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Calcul de l'opérateur d'admittance du guide PEC2 :

Soit la matrice admittance caractéristique d'un mode $[Y_{mn}^{\prime M}]$, correspondant au guide PEC2, décrite par les formules (2.30) et (2.31). Dans ce cas particulier, seuls les modes TE et TM existent (car le guide est métallique), ce qui permet de simplifier l'expression de $[Y_{mn}^{\prime M}]$ pour les deux types de mode ($|\Pi_{mn}^{+}| = |\Pi_{mn}^{-}| \to 0$, cas TM) et ($|\Pi_{mn}^{+}| = |\Pi_{mn}^{-}| \to +\infty$, cas TE), ce qui donne :

$$[Y_{mn}^{\prime TM}] = Y_{mn}^{\prime TM} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$[Y_{mn}^{\prime TE}] = Y_{mn}^{\prime TE} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

avec $Y_{mn}^{\prime TM} = \frac{jk_0}{Z_0 \gamma_{mn}^{\alpha\prime}}$ et $Y_{mn}^{\prime TE} = \frac{\gamma_{mn}^{\alpha\prime}}{jZ_0 k_0}$. Ainsi, la matrice $[Y_{mn}^{\prime\alpha}]$ peut se réduire à un scalaire $Y_{mn}^{\prime\alpha}$ et correspond bien aux impédances classiques des modes TM et TE.

Par ailleurs, l'opérateur d'admittance $\hat{Y}'_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}}$ modélise le demi-espace du guide du milieu PEC2 considéré comme un milieu homogène, délimité par un mur magnétique, noté m.m (cas pair), et un mur électrique, noté m.e. (cas impair). L'expression de cet opérateur est donnée par la formule (4.7). Elle dépend de la longueur L_M du guide PEC2, de la base modale et de l'admittance caractéristique des modes $[Y_{mn}^{\prime\alpha}]$. Après simplification de la matrice $[Y_{mn}^{\prime\alpha}]$ en scalaire $Y_{mn}^{\prime\alpha}$, l'opérateur d'admittance est donné par :

$$\hat{Y}'_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}} = \sum_{\substack{n=1 \\ \alpha=TE,TM}}^{\infty} \left|\overrightarrow{f_{1n}^{\prime\alpha}}\right\rangle Y_{mn}^{\prime\alpha} \left\langle\overrightarrow{f_{1n}^{\prime\alpha}}\right| \begin{cases} th\left(\frac{\gamma_{1n}^{\prime\alpha} L_M}{2}\right) \\ coth\left(\frac{\gamma_{1n}^{\prime\alpha} L_M}{2}\right) \end{cases} \quad (4.30)$$

avec $Y_{mn}^{\prime TE} = \frac{\gamma_{1n}^{TE\prime}}{j\omega\mu_0}$ / $Y_{mn}^{\prime TM} = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma_{1n}^{TM\prime}}$.

Calcul de la matrice admittance [Y] de la discontinuité :

L'admittance de la structure $[Y]$ est définie à partir des admittances scalaires Y_{pair} et Y_{impair}, décrites par (4.14) et (4.15). Elles modélisent la discontinuité en prenant en considération le guide PEC2 fermé par un mur magnétique et un mur électrique respectivement. Elles s'écrivent en fonction du mode fondamental $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ et de l'opérateur admittance $\hat{Y}'_{\left\{\begin{smallmatrix} pair \\ impair \end{smallmatrix}\right\}}$. Ainsi, en remplaçant ce dernier par la formule (4.30), les admittances d'entrée peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$Y_{pair} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{1n}^{\prime TE}}{j\omega\mu_0} th\left(\frac{\gamma_{1n}^{\prime TE} L_M}{2}\right) \left|\left\langle\overrightarrow{f_{11}^{TE}}\middle|\overrightarrow{f_{1n}^{\prime TE}}\right\rangle\right|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma'^{\,TM}_{1n}} th\left(\frac{\gamma_{1n}^{\prime TM} L_M}{2}\right) \left|\left\langle\overrightarrow{f_{11}^{TE}}\middle|\overrightarrow{f_{1n}^{\prime TM}}\right\rangle\right|^2 \quad (4.31)$$

$$Y_{impair} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma'^{TE}_{1n}}{j\omega\mu_0} \coth\left(\frac{\gamma'^{TE}_{1n} L_M}{2}\right) \left|\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma'^{TM}_{1n}} \coth\left(\frac{\gamma'^{TM}_{1n} L_M}{2}\right) \left|\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle\right|^2 \quad (4.32)$$

Les produits scalaires $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle$ et $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle$ traduisent le couplage entre l'excitation $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ et les modes TE/TM ($\overrightarrow{f'^{TE}_{1n}}$ ou $\overrightarrow{f'^{TM}_{1n}}$) dans le guide PEC2. Ils s'expriment, dans ce cas simplifié, par les formules (4.33), (4.34) :

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle = A_{11}^{TE}\, A'^{TM}_{1n} J_1(k_{c11}^{TE} a) J_1(k'^{TM}_{c1n} a) \quad (4.33)$$

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle = A_{11}^{TE} A'^{TE}_{1n} \frac{a k_{c11}^{TE} k'^{TE}_{c1n}}{2(k'^{TE\,2}_{c1n} - k^{TE\,2}_{c11})} \Big[k_{c11}^{TE} \left(J'_2(k_{c11}^{TE} a) J_2(k'^{TE}_{c1n} a) + J'_0(k_{c11}^{TE} a) J_0(k'^{TE}_{c1n} a) \right)$$

$$- k'^{TE}_{c1n} \left(J_2(k_{c11}^{TE} a) J'_2(k'^{TE}_{c1n} a) + J_0(k_{c11}^{TE} a) J'_0(k'^{TE}_{c1n} a) \right) \Big] \quad (4.34)$$

avec $A_{11}^{TE} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^a \left[\rho k_{c11}^{TE\,2} J'_1(k_{c11}^{TE}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c11}^{TE}\rho)^2}{\rho} \right] d\rho}}$, $A'^{TE}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^a \left[\rho k'^{TE\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2}{\rho} \right] d\rho}}$

et $A'^{TM}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^a \left[\rho k'^{TM\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2}{\rho} \right] d\rho}}$.

Le détail du calcul des produits scalaires est proposé dans l'annexe B.

4.2.2 Algorithme MM simplifié

Après la modélisation analytique complète de la transition entre deux guides métalliques de rayons différents, un algorithme basé sur le MM simplifié a été développé sur Python avec pour but de simuler la double transition.

Organigramme de l'algorithme :

L'algorithme permet, à partir des données géométriques des guides, de calculer les paramètres $[S]$ d'une double discontinuité entre deux guides circulaires métalliques sur une bande de fréquences prédéfinie.

En effet, les données sur les rayons des guides permettent de donner analytiquement les coupures des modes. Dans le cas d'un guide circulaire à paroi métallique (étudié dans la partie 1.1.1 du chapitre 1), les coupures sont données par $k_{mn}^{TE} = \frac{\chi'_{m,n}}{A}$ et $k_{mn}^{TM} = \frac{\chi_{m,n}}{A}$, où $\chi_{m,n}$et $\chi'_{m,n}$ sont respectivement les n^{ièmes} zéros de la fonction Bessel J_m d'ordre m et de sa dérivée J'_m avec A le rayon du guide. Ceci permet d'identifier les modes et calculer leur constante de propagation $\gamma_{mn}^{\alpha\prime}$ à une fréquence donnée. Par la suite, les produits scalaires entre l'excitation et les modes du guide du milieu sont calculés, afin de déterminer les admittances Y_{pair} et Y_{impair}. Ainsi, la matrice admittance de la discontinuité $[Y]$ et les paramètres $[S]$ de la double transition sont calculés à chaque fréquence dans la bande monomode.

Les paramètres de simulation à définir sont : le rayon 'a' du petit guide PEC1, le rayon 'A' du grande guide PEC2, la longueur 'L_M' du grand guide PEC2, les bornes f_1 et f_2 de la bande de fréquence, le nombre de fréquences de la discrétisation N_f et le nombre de mode N_m du guide PEC2. Les détails de l'organigramme du code sont illustrés dans la figure 4.5.

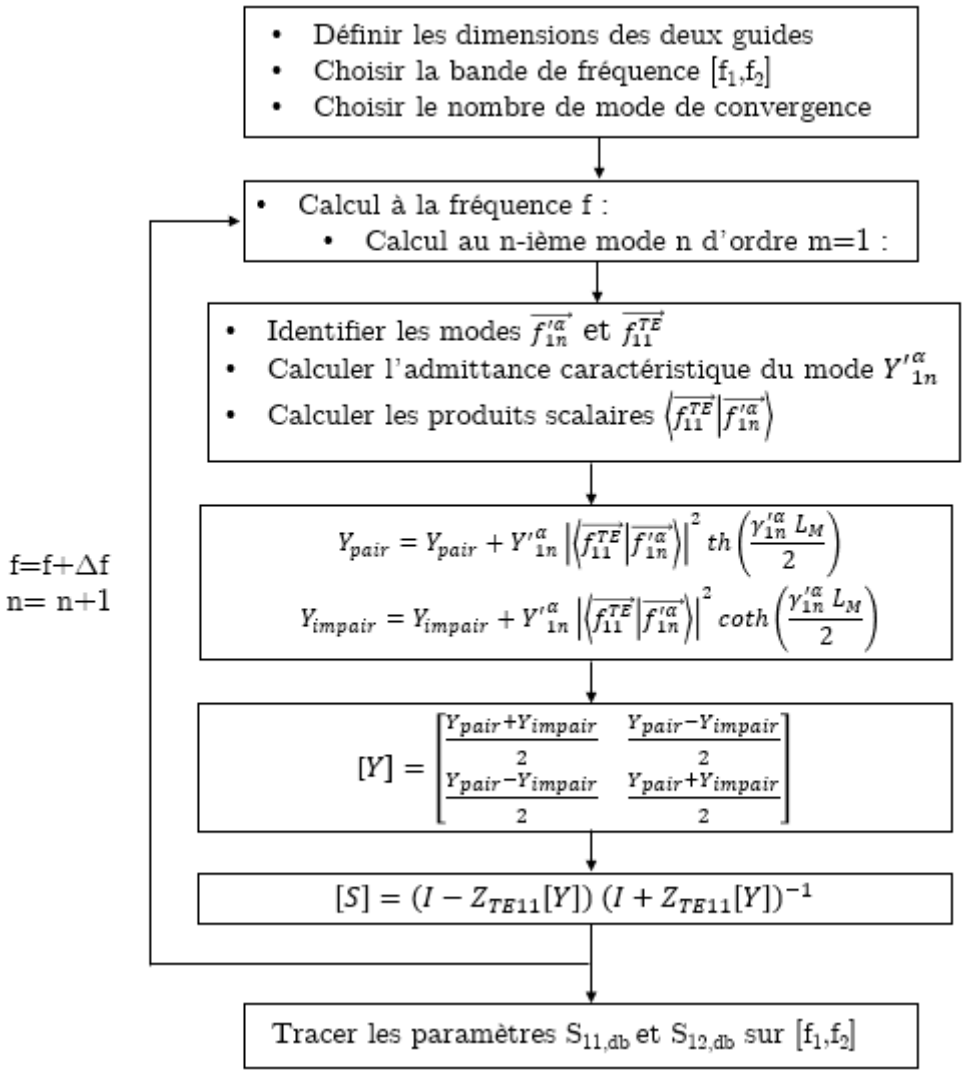


Figure 4.5 - L'organigramme du code MM simplifié.

Comparaison à une simulation full-wave avec Ansys HFSS :

La structure étudiée est modélisée et simulée avec le logiciel commercial Ansys HFSS [2] qui est basé sur une approche FEM. Le schéma initial de la transition avant la simplification de la structure est illustré sur la figure 4.6.

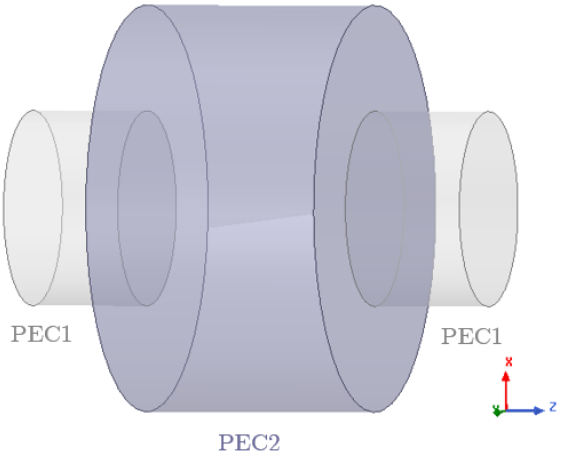


Figure 4.6 - Schéma de la transition sur Ansys HFSS.

Le champ électrique excité dans le petit guide correspond au mode fondamental soit le TE_{11}. Pour le générer dans Ansys HFSS, deux symétries de structure sont imposées : une symétrie électrique sur le plan vertical (axe x sur la figure 4.6), où la composante tangentielle au plan s'annule et où la composante normale se conserve et une symétrie magnétique sur le plan horizontal, où la composante tangentielle au plan est conservée alors que la composante normale s'annule. Les deux cas de symétrie sont illustrés sur la figure 4.7 (axe y sur la figure 4.6).

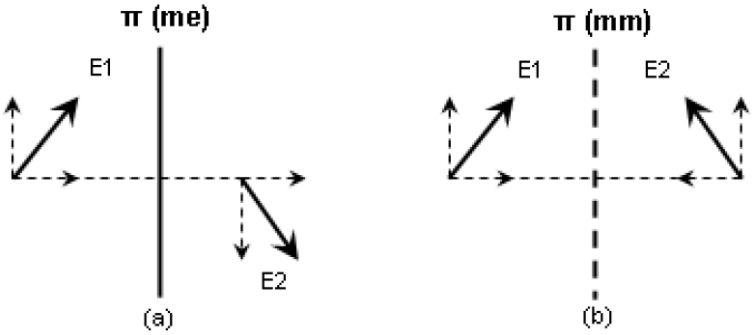


Figure 4.7 - Le plan Π de symétrie a) électrique, b) magnétique.

Pour apercevoir les symétries présentes dans l'excitation TE_{11}, la cartographie du champ électrique est tracée à la surface du guide avec le logiciel HFSS. Pour cela, une excitation *wave-port* est définie sur cette surface et sa ligne d'intégration est choisie selon une direction arbitraire ($\vec{y}$ par défaut). Ainsi, les caractéristiques des deux symétries, m.m. (selon $\vec{y}$) et m.e. (selon $\vec{x}$), sont identifiées sur la cartographie du champ représentée dans la figure 4.8.

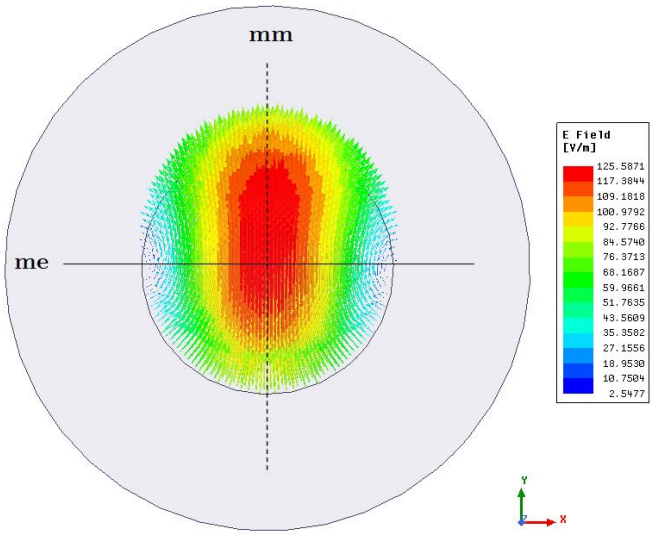


Figure 4.8 - Mode TE_{11} et plans de symétrie.

Par conséquent, les deux symétries proposées vont permettre de simplifier l'étude du problème et de réduire le volume de calcul. La structure étudiée est désormais composée du quart de la structure initiale de la figure 4.6. Elle est représentée sur la figure 4.9 avec les deux symétries définies avec l'option *Boundaries* de HFSS.

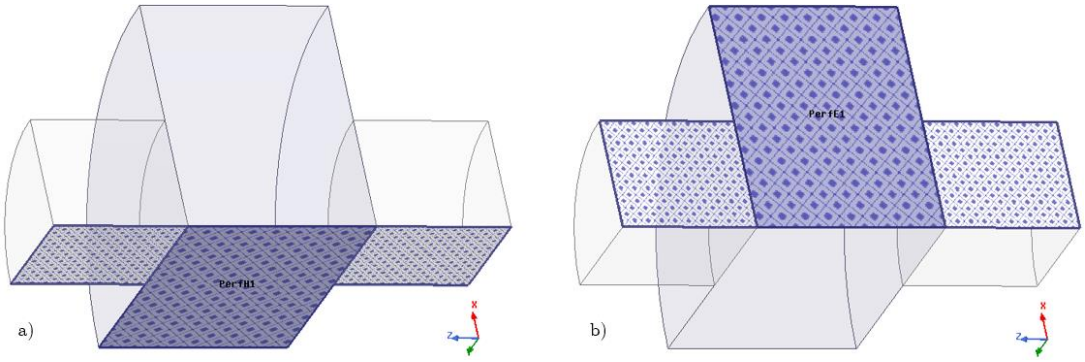


Figure 4.9 - Symétries de la transition PEC/PEC : a) Symétrie magnétique et b) Symétrie électrique.

Les vecteurs de ligne d'intégration correspondeant à l'excitation de la source sont définis sur les deux surfaces d'entrée des petits guides. Ils sont représentés par des vecteurs rouges sur la figure 4.10. En effet, ils doivent être orientés parallèlement au plan de symétrie H, car le champ TE_{11} est maximum dans cette direction et alignés entre eux. Un *De-embedding* a été appliqué aux excitations pour injecter le mode TE_{11} directement en entrée des discontinuités, comme représenté avec des vecteurs bleus sur la figure 4.10. Ainsi, on ne prend pas en compte la longueur du petit guide (comme dans notre modélisation avec le MM). Quant au maillage, il est adaptatif en fonction de la précision requise. Compte tenu de la complexité et de la géométrie curviligne de la structure, l'option du maillage choisie est *Curvilinear-Meshing.*

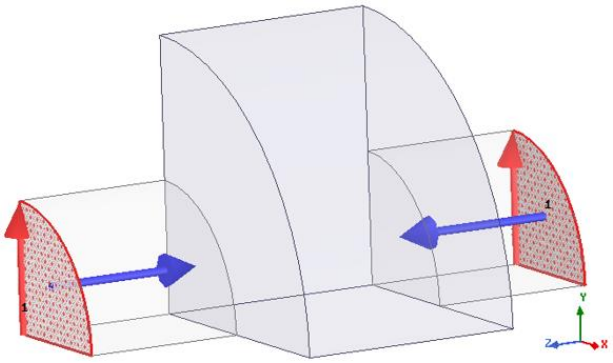


Figure 4.10 – Excitation de la structure : vecteurs d'excitation et leur de-embedding.

4.2.3 Résultats numériques

Cette partie expose les résultats numériques des deux approches après modélisation du problème. La comparaison est faite entre le calcul analytique de MM simplifié (MMs) et la résolution numérique avec Ansys HFSS.

Exemple d'une double transition PEC1/PEC2/PEC1

Soit l'exemple d'une double transition PEC1/PEC2/PEC1 proposée dans la figure 4.11. Les dimensions de la structure sont les suivantes : $a = 40\,mm$, $A = 70\,mm$, $L_p = 40\,mm$ et $L_M = 73\,mm$.

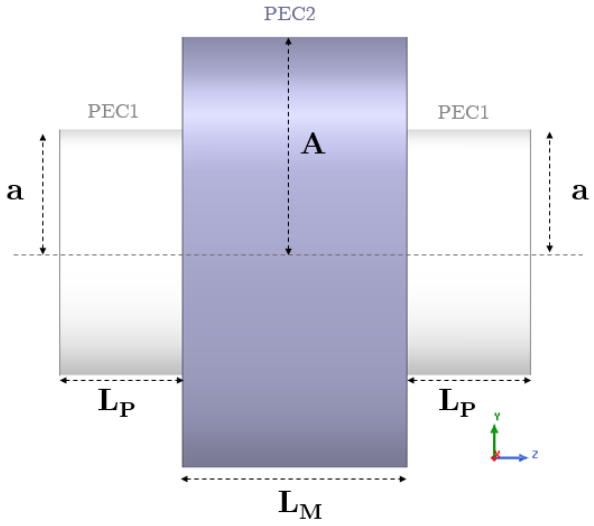


Figure 4.11 - Double transition métallique PEC1/PEC2/PEC1.

Avant de calculer les paramètres $[S]$ de la transition, les diagrammes de dispersion analytiques des deux guides PEC1 et PEC2 sont présentés simultanément sur la figure 4.12. Seuls les modes d'ordre $m = 1$ sont générés et seront comptabilisés dans le nombre de modes pour l'étude de convergence du MM simplifié. La Bande de Fréquences Utile (BFU), est choisie de telle sorte qu'elle coïncide avec la bande monomode du petit guide où seul le mode TE_{11} se propage. Dans ce cas-là, la BFU correspond à l'intervalle de fréquence $[2.2GHz\,;\,4.57GHz]$. Dans cet intervalle, les trois

modes (TE'$_{11}$, TM'$_{11}$ et TE'$_{12}$) sont propagatifs dans le grand guide PEC2, les autres modes sont évanescents.

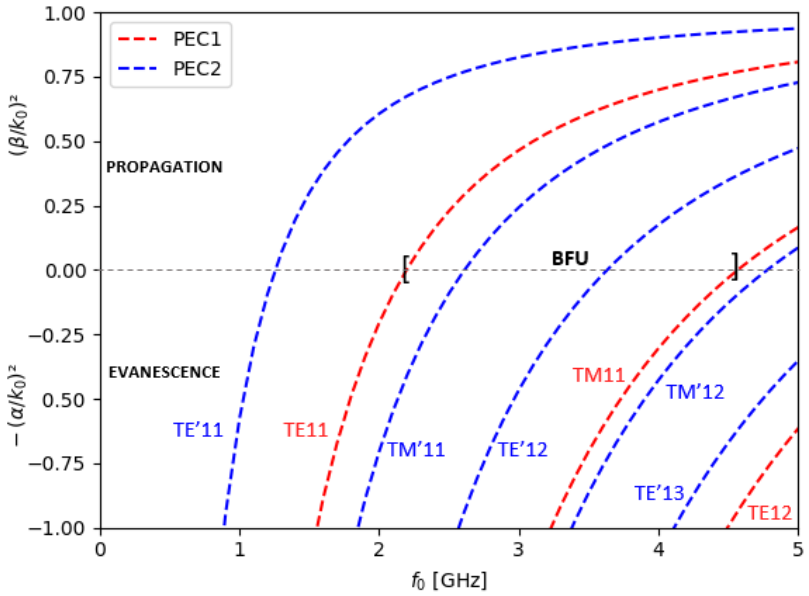


Figure 4.12 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre (m=1) dans les deux guides métalliques PEC1 et PEC2.

La double transition est simulée sur la BFU. Le nombre de modes du grand guide utilisés est $N = 8$. Les paramètres de la simulation HFSS sont $\Delta S = 0.001$ avec un nombre maximum d'itérations de 30 (qui n'est pas atteint dans les résultats présentés). Les allures des paramètres $[S]$, tracés sur la figure 4.13, concordent bien dans leur globalité entre le Mode-Matching simplifié et la simulation FEM HFSS. Les comportements en transmission et en réflexion sont similaires mais présentent un léger décalage fréquentiel. La démarche pour analyser ce décalage est décrite dans le paragraphe suivant. Quant au temps de calcul, les simulations sont rapides dans cas de structure simple : le MM simplifié a un temps de calcul de **7s** et la simulation HFSS a un temps de calcul de **1min**, elle converge en 5 itérations.

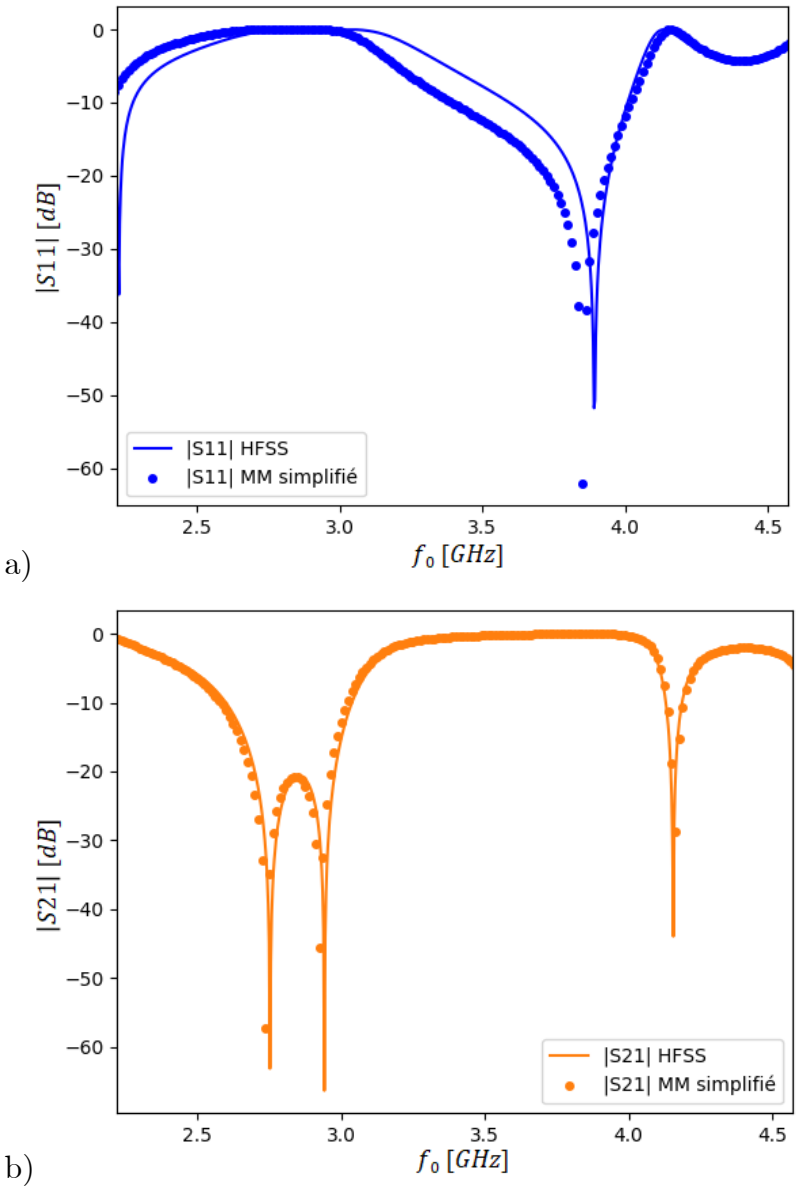
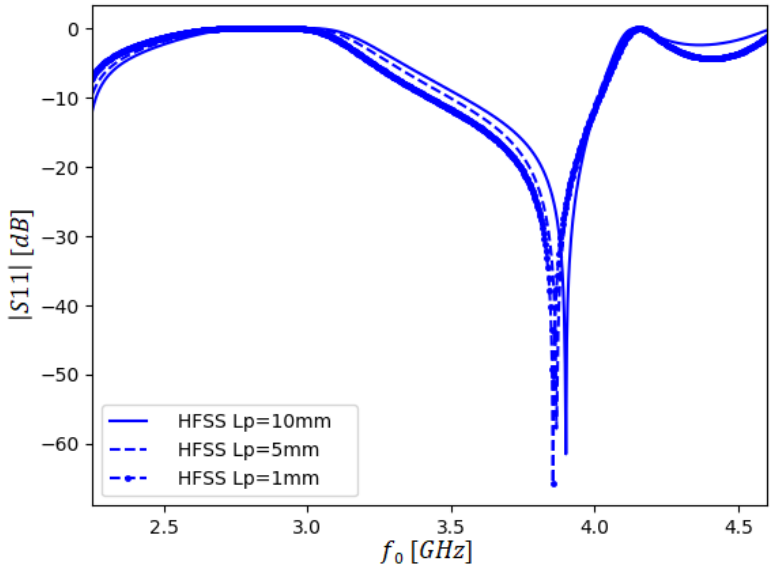


Figure 4.13 - Paramètres [S] de la double transition PEC1/PEC2/PEC1 : a) |S11| et b) |S21|.

Réduire le décalage fréquentiel

Pour comprendre le décalage fréquentiel, plusieurs analyses sur les facteurs qui peuvent impacter les paramètres [S] de la simulation HFSS sont effectuées. Une étude paramétrique sur la longueur du petit guide L_p a montré que les paramètres [S] changent si L_p varie, ce qui n'est pas censé être le cas, car un de-embedding est fait au niveau des transitions et donc la longueur du petit guide ne devrait pas intervenir dans le résultat. Afin d'observer les décalages fréquentiels, les paramètres [S] sont tracés pour différentes longueurs L_p (10mm, 5mm et 1mm) de *de-embedding*.

a)



b)

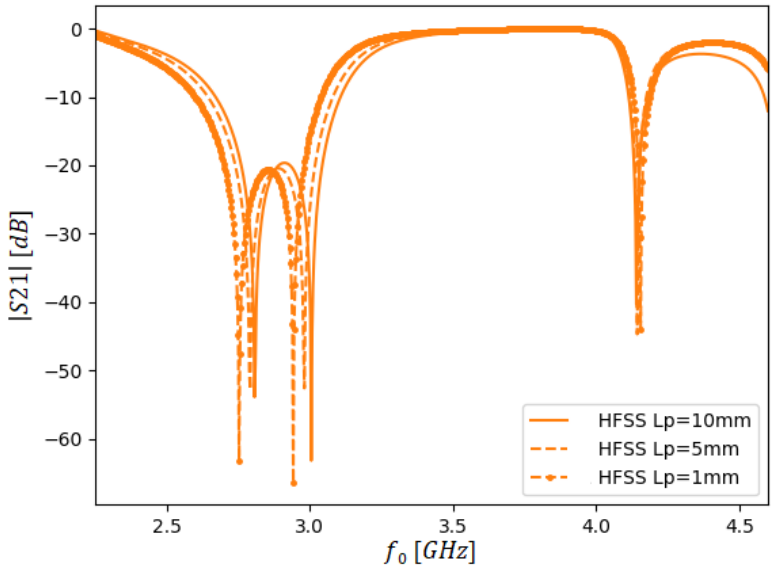


Figure 4.14 - Paramètres [S] HFSS de la double transition PEC1/PEC2/PEC1 pour différentes longueurs L_p des guides PEC1 : a) |S11| et b) |S21|.

En analysant les courbes des paramètres [S], le fait de réduire la longueur du petit guide PEC1 dans la simulation permet de s'approcher petit à petit des résultats du MM simplifié. Ce problème du de-embedding dans HFSS n'a pas pu être expliqué. Une interprétation possible est que le de-embedding ne permet pas d'éliminer les réflexions liées aux autres modes (hors fondamental). De sorte que, quand la distance entre le *wave-port* et la discontinuité n'est pas négligeable, les niveaux de la réflexion des autres modes du guide d'entrée deviennent importants et ils participent, par conséquent, au couplage au niveau de la discontinuité avec les modes du guide central PEC2. Ce qui ne correspond pas au modèle considéré (ni au prototype qui sera fabriqué) où la source n'est composée que du mode fondamental TE_{11}. Ainsi, pour éviter ces défauts dans la modélisation avec le code FEM, l'excitation est injectée directement à l'interface de la discontinuité dans HFSS.

Ainsi, la simulation HFSS présente une longueur négligeable $Lp = 0.1mm$. Sous ces conditions, les résultats obtenus avec HFSS sont à nouveau comparés aux résultats du MM simplifié. Les paramètres $[S]$ sont tracés sur la figure 4.15.

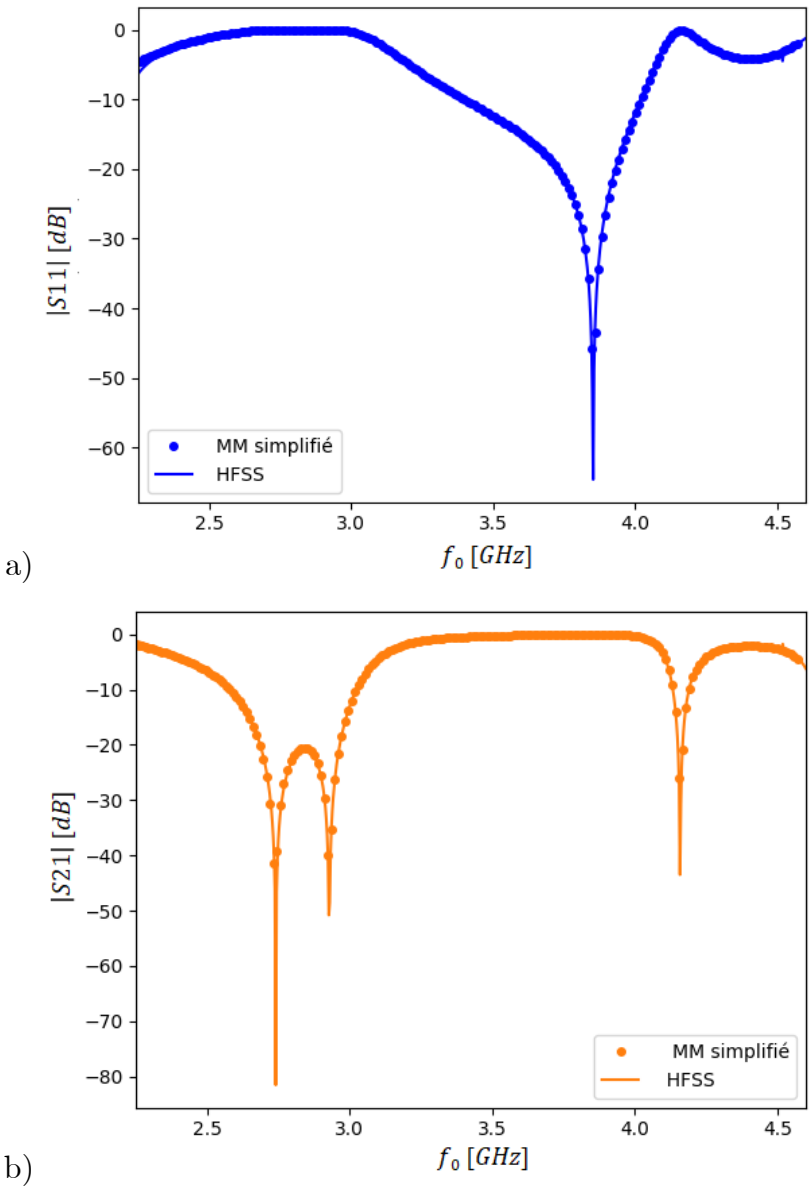


Figure 4.15 - Comparaison entre HFSS et MM simplifié pour le paramètre [S] de la double transition PEC1/PEC2/PEC1 : a) |S11| et b) |S21|.

Les résultats des deux simulations sont confondus sur toute la bande de fréquences, ce qui permet de valider la démarche analytique du MM dans un cas simplifié (MMs) pour la double transition (PEC1/PEC2/PEC1) par comparaison des résultats avec une approche FEM.

4.3 Résolution MM généralisée

Le cas généralisé du Mode-Matching est modélisé dans cette partie. La structure étudiée est une double transition entre deux guides métalliques séparés par un guide à

paroi métamatériau. Le schéma de la structure est représenté sur la figure 4.16. La discontinué correspond, dans ce cas, à un changement de diamètre et un changement de nature des parois du guide. L'excitation du guide métallique en entrée est la même que celle du MM simplifié. Par contre, le guide central doit être étudié dans le cas généralisé, en modélisant la paroi métamatériau par une paroi périodique anisotrope réelle. En conséquence, la méthodologie de calcul dispersif évoquée dans le chapitre 2 va être appliquée pour modéliser et identifier les modes du guide central.

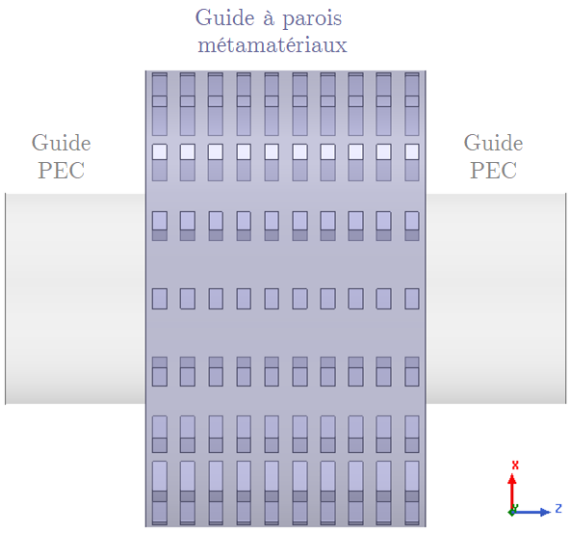


Figure 4.16 - Transition entre un guide PEC/ un guide à paroi métamatériau/ guide PEC.

Le calcul du Mode-Matching généralisé est développé de façon analytique dans l'annexe C.

4.3.1 Formulation analytique du problème MM

Base modale pour les modes hybrides

L'excitation du guide d'entrée est représentée par le mode fondamental TE_{11}, comme dans la partie précédente. Le mode pair est défini par $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ comme dans le cas MM simplifié, donné par la relation (4.21).

Quant au guide central à paroi métamatériau périodique (cf. figure 4.16), la base modale est décrite par une formule exponentielle généralisée. Elle est basée sur l'expression du champ électrique transverse, donnée par les équations (2.22) et (2.23) du chapitre 2. Les modes sont séparés en deux types : Exponentiels Positifs (EP), notés $\overrightarrow{f'}^{+}_{mn}$, et Exponentiels Négatifs (EN), notés $\overrightarrow{f'}^{-}_{mn}$.

Etant donnée la nature anisotrope de la paroi, les modes EP et EN sont hybrides et ils s'écrivent en combinant deux composantes, une de nature TM et l'autre de nature TE :

$$\vec{f}'^{+}_{mn} = K'^{+}_{mn}\left[\frac{\gamma'_{mn}}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\vec{f}'^{TM+}_{mn} + \frac{jZ_0k_0}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\vec{f}'^{TE+}_{mn}\right] \tag{4.35}$$

avec $\vec{f}'^{TM+}_{mn} = \begin{pmatrix} -k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \\ -\frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \end{pmatrix}$ la composante TM, $\overrightarrow{f'^{TE+}_{mn}} = \begin{pmatrix} -\frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \\ k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \end{pmatrix}$

la composante TE, K'^{+}_{mn} la constante de normalisation du mode EP, γ'_{mn} la constante de propagation du mode et $k'_{c,mn}$ la constante de coupure du mode.

$$\vec{f}'^{-}_{mn} = K'^{-}_{mn}\left[\frac{\gamma'_{mn}}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Gamma}^{-}_{mn}\,\vec{f}^{TM-}_{mn} + \frac{jZ_0k_0}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{-}_{mn}\,\vec{f}'^{TE-}_{mn}\right] \tag{4.36}$$

avec $\vec{f}^{TM-}_{mn} = \begin{pmatrix} -k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \\ \frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \end{pmatrix}$ la composante TM, $\vec{f}^{TE-}_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \\ k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \end{pmatrix}$

la composante TE, K'^{-}_{mn} la constante de normalisation du mode EN, γ'_{mn} la constante de propagation du mode et $k'_{c,mn}$ la constante de coupure du mode. Les constantes γ'_{mn} et $k'_{c,mn}$ sont les mêmes pour les modes EP et EN, d'où la même notation.

Les expressions générales des constantes de normalisation K^{+}_{mn} et K^{-}_{mn} sont calculées sur n'importe quel morceau de surface $S = \{\rho \in [a_1, a_2]\ et\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$ dans l'annexe C. Considérons une base modale définie par un produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega = [0, a_\Omega] \times [0,2\pi], \mathbb{C})$ avec a_Ω le rayon de l'orthogonalité de la base qui sera déterminé ultérieurement dans la partie 4.3.3. Ainsi, le produit scalaire est donné par :

$$\langle \vec{f}'_{mn} | \vec{g}'_{mn} \rangle = \int_{\Omega} \vec{f}'^{\,*}_{mn} \cdot \vec{g}'_{mn}\, d\Omega \tag{4.37}$$

D'après l'annexe C, en prenant $[a_1, a_2] \times [\theta_1, \theta_2] = [0, a_\Omega] \times [0,2\pi]$, les constantes de normalisation s'écrivent pour $m \neq 0$ sous la forme :

$$|K^{+}_{mn}| = \frac{\left|k'_{c,mn}\right|^2}{\sqrt{2\pi\left[\left(\left|\gamma'_{mn}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\right|^2 + {Z_0}^2{k_0}^2\left|\tilde{\Psi}^{+}_{mn}\right|^2\right) D_{mn} - 2mZ_0k_0Re\left(\gamma'_{mn}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}\tilde{\Psi}^{+*}_{mn}\right)\left(\left|J_m\left(k'_{c,mn}a_\Omega\right)\right|^2\right)\right]}} \tag{4.38}$$

$$|K^{-}_{mn}| = \frac{\left|k'_{c,mn}\right|^2}{\sqrt{2\pi\left[\left(\left|\gamma'_{mn}\tilde{\Gamma}^{-}_{mn}\right|^2 + {Z_0}^2{k_0}^2\left|\tilde{\Psi}^{-}_{mn}\right|^2\right) D_{mn} + 2mZ_0k_0Re\left(\gamma'_{mn}\tilde{\Gamma}^{-}_{mn}\tilde{\Psi}^{-*}_{mn}\right)\left(\left|J_m\left(k'_{c,mn}a_\Omega\right)\right|^2\right)\right]}} \tag{4.39}$$

avec

$$D_{mn} = \int_{a_1}^{a_2}\left(\left|k'_{c,mn}\right|^2\left|J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\left|J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2\right)\rho d\rho$$

Par la suite, pour simplifier l'écriture, les modes EP et EN peuvent s'écrire selon (4.40) et (4.41) :

$$\vec{f}'^{+}_{mn} = A'^{TM+}_{mn}\ \vec{f}'^{TM+}_{mn} + A'^{TE+}_{mn}\ \vec{f}'^{TE+}_{mn} \tag{4.40}$$

avec $A'^{TM+}_{mn} = K'^{+}_{mn}\frac{\gamma'_{mn}}{\left(k'_{c,mn}\right)^2}\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}$ et $A'^{TE+}_{mn} = K'^{+}_{mn}\frac{jZ_0k_0}{\left(k'_{c,mn}\right)^2}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}$.

$$\vec{f}'^{-}_{mn} = A'^{TM-}_{mn}\ \vec{f}'^{TM-}_{mn} + A'^{TE-}_{mn}\ \vec{f}'^{TE-}_{mn} \tag{4.41}$$

avec $A'^{TM-}_{mn} = K'^{-}_{mn}\frac{\gamma'_{mn}}{(k'_{c,mn})^2}\widetilde{\Gamma}'^{-}_{mn}$ et $A'^{TE-}_{mn} = K'^{-}_{mn}\frac{jZ_0k_0}{(k'_{c,mn})^2}\widetilde{\Psi}'^{-}_{mn}$.

Calcul de la matrice admittance [*Y*] de la discontinuité :

Contrairement au cas MM simplifié, l'expression de la matrice admittance caractéristique d'un mode $[Y'^{\alpha}_{mn}]$, avec α remplaçant les indices + et –, l'inverse de l'impédance caractéristique $[Z'^{\alpha}_{mn}]$, ne se simplifie pas dans le cas généralisé, car les modes sont hybrides. A partir de l'expression de $[Z'^{\alpha}_{mn}]$ donnée par (2.30) et (2.31), la matrice $[Y'^{\alpha}_{mn}]$ est déterminée par :

$$[Y'^{\alpha}_{mn}] = [Z'^{\alpha}_{mn}]^{-1} = \frac{1}{Z_0\left(\gamma'^{\,2}_{mn} - (\Pi^{\alpha}_{mn}k_0)^2\right)}\begin{pmatrix} jk_0\gamma'_{mn}(1+(\Pi^{\alpha}_{mn})^2) & \Pi^{\alpha}_{mn}\left(k'_{c,mn}\right)^2 \\ -\Pi^{\alpha}_{mn}\left(k'_{c,mn}\right)^2 & jk_0\gamma'_{mn}(1+(\Pi^{\alpha}_{mn})^2) \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

Les opérateurs admittances $\hat{Y}'_{\left\{\substack{pair\\impair}\right\}}$ de la demi-région du guide à paroi métamatériau, fermée sur un m.m. ou un m.e, vue depuis la discontinuité, sont donnés par la formule (4.7). Etant donné que la matrice de l'admittance caractéristique du mode ne se réduit pas à un scalaire, la formule (4.6) ne se simplifie pas. De ce fait, les impédances Y_{pair} et Y_{impair} de la discontinuité sont calculées par les formules (4.43) et (4.44). Elles sont décomposées dans le cas généralisé sur les modes EP et EN :

$$Y_{pair} = \sum_{m,n=0,1}^{\infty}\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{+}_{mn}]\ \vec{f}'^{+}_{mn}\right\rangle\left\langle\vec{f}'^{+}_{mn}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle th\left(\frac{\gamma'_{mn}L_M}{2}\right) + \sum_{m,n=0,1}^{\infty}\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{-}_{mn}]\ \vec{f}'^{-}_{mn}\right\rangle\left\langle\vec{f}'^{-}_{mn}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle th\left(\frac{\gamma'_{mn}L_M}{2}\right) \tag{4.43}$$

$$Y_{impair} = \sum_{m,n=0,1}^{\infty}\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{+}_{mn}]\ \vec{f}'^{+}_{mn}\right\rangle\left\langle\vec{f}'^{+}_{mn}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle coth\left(\frac{\gamma'_{mn}L_M}{2}\right) + \sum_{m,n=0,1}^{\infty}\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{-}_{mn}]\ \vec{f}'^{-}_{mn}\right\rangle\left\langle\vec{f}'^{-}_{mn}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle coth\left(\frac{\gamma'_{mn}L_M}{2}\right) \tag{4.44}$$

Afin de déterminer les expressions des impédances Y_{pair} et Y_{impair}, les produits scalaires : $\left\langle\vec{f}'^{+}_{mn}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle$, $\left\langle\vec{f}'^{-}_{mn}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle$, $\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{+}_{mn}]\ \vec{f}'^{+}_{mn}\right\rangle$ et $\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{-}_{mn}]\ \vec{f}'^{-}_{mn}\right\rangle$ sont calculés analytiquement dans l'annexe C et ils sont donnés par (4.45), (4.46), (4.47) et (4.38). Le mode en excitation est le TE_{11}, donc seuls les modes d'ordre $m = 1$ sont excités (le couplage de l'excitation avec des modes d'ordre $m \neq 1$ est nul) :

$$\left\langle\overrightarrow{f'^{+}_{1n}}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle = 2\pi A^{TE+}_{11}\left(jA'^{TM+\,*}_{1n}I_1 + A'^{TE+\,*}_{1n}I_2\right) \tag{4.45}$$

$$\left\langle\overrightarrow{f'^{-}_{1n}}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle = 2\pi A^{TE-}_{11}\left(-jA'^{TM-\,*}_{1n}I_1 + A'^{TE-\,*}_{1n}I_2\right) \tag{4.46}$$

$$\left\langle\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\middle|[Y'^{+}_{1n}]\ \overrightarrow{f'^{+}_{1n}}\right\rangle = 2\pi A^{TE+\,*}_{11}\left(-j\left[A'^{TM+}_{1n}Y'^{11+}_{1n} + A'^{TE+}_{1n}Y'^{21+}_{1n}\right]I_1^*\right.$$

$$+\left[A'^{TM+}_{1n}\, Y'^{12+}_{1n} + A'^{TE+}_{1n}\, Y'^{22+}_{1n}\right] I_2^*) \tag{4.47}$$

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| [Y'^{-}_{1n}]\, \overrightarrow{f'}^{-}_{1n} \right\rangle = 2\pi A_{11}^{TE-\,*} \left(j\left[A'^{TM-}_{1n}\, Y'^{11-}_{1n} + A'^{TE-}_{1n}\, Y'^{21-}_{1n}\right] I_1^* \right.$$

$$\left. +\left[A'^{TM-}_{1n}\, Y'^{12-}_{1n} + A'^{TE-}_{1n}\, Y'^{22-}_{1n}\right] I_2^* \right) \tag{4.48}$$

avec

$$I_1 = J_1(k_{c11}^{TE} a) J_1\left(k'^{\,*}_{c1n} a\right)$$

$$I_2 = \frac{a k_{c11}^{TE} k'^{\,*}_{c1n}}{2\left((k'^{\,*}_{c1n})^2 - k_{c11}^{TE\,2}\right)} \left[k_{c11}^{TE} \left(J_2'(k_{c11}^{TE} a) J_2\left(k'^{\,*}_{c1n} a\right) + J_0'(k_{c11}^{TE} a) J_0\left(k'^{\,*}_{c1n} a\right) \right) \right.$$

$$\left. - k'^{\,*}_{c1n} \left(J_2(k_{c11}^{TE} a) J_2'\left(k'^{\,*}_{c1n} a\right) + J_0(k_{c11}^{TE} \rho) J_0'\left(k'^{\,*}_{c1n} a\right) \right) \right]$$

Le calcul détaillé des produits scalaires est proposé dans l'annexe C. Par ailleurs, déterminer les admittances paire et impaire permet de donner la matrice admittance $[Y]$ de la structure et par la suite les paramètres $[S]$ dans le cas généralisé.

4.3.2 Calcul numérique des amplitudes des champs

Avant de se plonger au cœur du calcul du MM, il est nécessaire au préalable de déterminer les amplitudes complexes $\tilde{\Gamma}_{mn}$ et $\widetilde{\Psi}_{mn}$ du champ EM longitudinal générateur des modes hybrides, tels que :

$$\begin{cases} E_z^- = \tilde{\Gamma}_{mn}^- J_m(k_c \rho) e^{-jm\theta} \\ H_z^- = \widetilde{\Psi}_{mn}^- J_m(k_c \rho) e^{-jm\theta} \end{cases} \tag{4.49}$$

et

$$\begin{cases} E_z^+ = \tilde{\Gamma}_{mn}^+ J_m(k_c \rho) e^{jm\theta} \\ H_z^+ = \widetilde{\Psi}_{mn}^+ J_m(k_c \rho) e^{jm\theta} \end{cases} \tag{4.50}$$

Dans le cas général, contrairement au cas métallique où les modes sont TE ($\tilde{\Gamma}_{mn}^- = \tilde{\Gamma}_{mn}^+ = 0$) ou TM ($\widetilde{\Psi}_{mn}^- = \widetilde{\Psi}_{mn}^+ = 0$), les deux constantes coexistent et sont liées. L'identification se fait numériquement cette fois-ci étant donnée la nature complexe de la paroi. Pour cela, deux démarches de calcul distinctes sont étudiées : une démarche par l'intermédiaire de la matrice TME présentée dans le chapitre 2 et une nouvelle démarche directe.

Afin de quantifier la précision des résultats numériques et leur impact sur le calcul MM, un cas analytique, pour lequel les résultats théoriques sont connus, a été testé. Il s'agit d'une double transition entre deux guides circulaires métalliques de rayons différents ($a = 32.83mm$ et $A = 68.4mm$). La structure étudiée, en tenant en compte les symétries, est représentée sur la figure 4.17 :

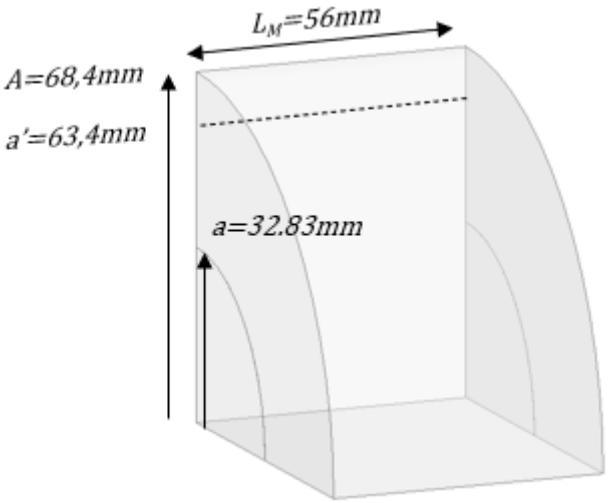
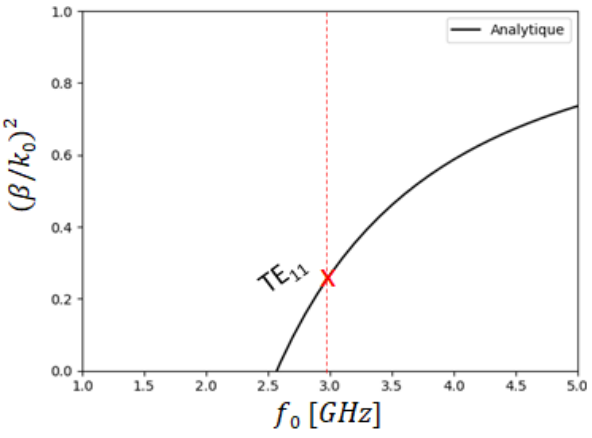


Figure 4.17 - Structure PEC1/PEC2/PEC1.

Les diagrammes de dispersion des modes des deux guides sont tracés, analytiquement pour le guide d'entrée PEC1 (figure 4.18-a) et numériquement pour le guide central, avec la méthodologie de calcul des modes proposée dans la section 2.3 (figure 4.18-b). Nous nous intéressons aux modes numériques, qui sont dans ce cas TE'$_{11}$ et TM'$_{11,}$ pour lesquels la réponse analytique est connue. Les tests sont effectués à la fréquence de 3GHz où ces deux modes sont propagatifs.

a)



b)

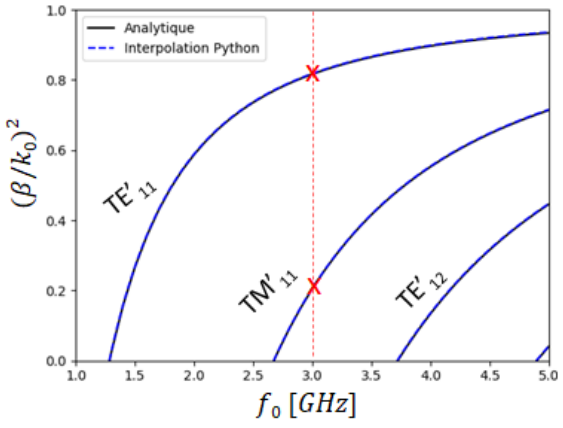


Figure 4.18 - a) Diagramme de dispersion analytique du guide d'entrée PEC1 et b) diagrammes de dispersion analytiques et numériques du guide central PEC2.

Pour tester l'efficacité de chaque approche vis-à-vis du calcul MM, les amplitudes EM ($\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}$ et $\tilde{\Psi}^{+}_{mn}$), la constante de normalisation K'^{+}_{mn} et le couplage du mode avec l'excitation du petit guide $\left\langle \overrightarrow{f'}^{+}_{mn} \middle| \overrightarrow{f^{TE}_{11}} \right\rangle$ sont déterminés numériquement et comparés aux valeurs théoriques issues du paragraphe 4.2.1. La surface virtuelle de calcul, de rayon ($a' = 63.4mm$), est choisie. Elle est éloignée à $5mm$ de la paroi métallique réelle ($A = 68.4mm$). Ce choix permet de traiter un cas où la modélisation de la paroi se fait sur une surface assez loin, afin de voir les limites de validité des approches. Les calculs sont effectués pour les modes EP $\overrightarrow{f'}^{+}_{1n}$, mais les résultats sont analogues pour les modes EN $\overrightarrow{f'}^{-}_{1n}$.

Calcul par l'intermédiaire des impédances de surface

Le calcul des amplitudes EM par la TME, permettant de tracer les cartographies des champs, a été détaillé dans la section 2.1 du chapitre 2. Afin d'améliorer les calculs pour une résolution MM, la procédure initiale et trois autres procédures de calcul sont proposées. Les résultats numériques pour les modes TE'$_{11}$ et TM'$_{11}$ sont donnés dans le **tableau 4.1** et comparés aux valeurs analytiques. Les impédances de surface théoriques à la surface ($\rho = a'$), données dans le tableau 3.1, sont calculées par les équations (4.51) et (4.52). La démarche pour déterminer $Z'_{z,th}$ et $Z'_{T,th}$ est similaire à celle proposée dans [2].

$$Z'_{z,th} = \frac{-1}{\dfrac{j\gamma'_{z,mn} m}{\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} \dfrac{\tilde{\Psi}^{+}_{mn}}{\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}} + \dfrac{jk_0}{Z_0 k'_{c,mn}} \dfrac{J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{J_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}} \tag{4.51}$$

$$Z'_{T,th} = -\frac{jZ_0 k_0}{k'_{c,mn}} \frac{J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{J_m\left(k'_{c,mn}a'\right)} - \frac{j\gamma'_{mn} m}{\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} \frac{\tilde{\Gamma}^{+}_{mn}}{\tilde{\Psi}^{+}_{mn}} \tag{4.52}$$

Procédure initiale de la TME

Reprenons l'écriture matricielle initiale du problème pour les modes EP :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{j\gamma'_{z,mn} m J_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} & \dfrac{jZ_0 k_0 J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{k'_{c,mn}} + Z'_T J_m\left(k'_{c,mn}a'\right) \\ J_m\left(k'_{c,mn}a\right) + \dfrac{Z'_z k_0 J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{jZ_0 k'_{c,mn}} & -\dfrac{jZ'_z \gamma'_{z,mn}\, m J_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{+}_{mn} \\ \\ \tilde{\Psi}^{+}_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

La résolution du système linéaire (4.53) permet de trouver le vecteur propre normalisé $(\tilde{\Gamma}^{+}_{mn} \quad \tilde{\Psi}^{+}_{mn})^t$ associé à la valeur propre $\lambda = 0$. Pour cela, il est nécessaire de déterminer les termes de la matrice TME, éventuellement les impédances de surface Z'_z et Z'_T. En effet, elles sont obtenues numériquement par les moyennes des ratios des champs (4.54), calculés par la FEM, en chaque point de la surface de calcul :

$$Z'_{z,num} = < -\frac{E_\theta}{H_z} > \Big|_{\rho=a'}, \qquad Z'_{T,num} = < \frac{E_z}{H_\theta} > \Big|_{\rho=a'} \tag{4.54}$$

D'après le tableau 4.1, nous constatons une assez bonne évaluation des impédances de surface avec une erreur relative de 2.1% sur Z'_T pour le mode TE'$_{11}$ et de 2.68% sur Z'_z pour le mode TM'$_{11}$, mais ce n'est pas suffisant pour obtenir une bonne résolution du vecteur propre (erreur de 37.6% sur $\widetilde{\Psi}^+_{1n}$ dans le cas TE). Néanmoins, dans ce cas, l'amplitude magnétique est dominante ($Z_0\widetilde{\Psi}^+_{1n} \gg \tilde{\Gamma}^+_{1n}$), ce qui permet d'obtenir une erreur faible de 0.16% sur le produit scalaire. Par contre, dans le cas TM, où $\widetilde{\Psi}^+_{mn}$ devrait tendre vers zéro, la constante de normalisation et le produit scalaire sont très sensibles à sa variation. Une valeur de $\widetilde{\Psi}^+_{mn} = -0.001j$ n'est pas suffisante, car elle engendre une erreur relative très élevée sur le produit scalaire (55.7%).

Procédure TME1

Une première étape consiste donc à améliorer la résolution du système linéaire pour avoir autant de précision sur $\widetilde{\Psi}^+_{mn}$ que sur $\tilde{\Gamma}^+_{mn}$. En comparant les coefficients du système linéaire, nous constatons que le coefficient $\tilde{\Gamma}^+_{mn}$ est sans unité (et donc les coefficients qui lui sont associés dans la matrice sont également sans unité), alors que les termes correspondant à $\widetilde{\Psi}^+_{mn}$ ne sont pas normalisés et sont homogènes à des admittances. Afin d'équilibrer l'écriture et rendre la matrice sans unité, le système linéaire est modifié pour déterminer le vecteur $(\tilde{\Gamma}^+_{mn} \quad Z_0\widetilde{\Psi}^+_{mn})^t$ pour lequel la matrice est homogène et tous les termes sans unité :

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{j\gamma'_{mn}m}{\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'}J_m\left(k'_{c,mn}a'\right) & \dfrac{jk_0}{k'_{c,mn}}J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right) + \dfrac{Z'_T J_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{Z_0} \\ J_m\left(k'_{c,mn}a\right) + \dfrac{Z'_z k_0 J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{jZ_0 k'_{c,mn}} & -\dfrac{jZ'_z\gamma'_{mn}mJ_m\left(k'_{c,mn}a\right)}{Z_0\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^+_{mn} \\ \\ Z_0\widetilde{\Psi}^+_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

En évaluant les résultats de cette procédure, tableau 4.1, nous constatons une amélioration pour les deux modes recherchés. L'erreur sur le produit scalaire est passée de 0.16% à 0.033% dans le cas TE et de 55.7% à 27% dans le cas TM, même si elle reste significative dans ce cas. A mentionner que, la valeur de constante K'^+_{1n} n'est pas équivalente à celle du cas initial, car le vecteur propre est normalisé par rapport à $Z_0\widetilde{\Psi}^+_{mn}$ cette fois-ci.

Procédure TME2 :

Un autre problème numérique à éviter, dans le cas TM, est la valeur de l'impédance Z'_T qui tend théoriquement vers l'infini. Pour cela, l'admittance équivalente Y'_T ($Y'_T \to 0$ pour un mode TM) est utilisée à la place de Z'_T dans la résolution TME. Le système linéaire se réécrit ainsi sous la forme (4.56), il est tel que la matrice est normalisée et donc toujours sans unité, mais avec des coefficients du même ordre.

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{jY'_T\gamma'_{mn}mJ_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{Y_0\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} & \dfrac{jY'_T k_0 J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{Y_0 k'_{c,mn}} + J_m\left(k'_{c,mn}a'\right) \\ J_m\left(k'_{c,mn}a\right) + \dfrac{Z'_z k_0 J'_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{jZ_0 k'_{c,mn}} & -\dfrac{jZ'_z\gamma'_{mn}mJ_m\left(k'_{c,mn}a'\right)}{Z_0\left(k'_{c,mn}\right)^2 a'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^+_{mn} \\ \\ Z_0\widetilde{\Psi}^+_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Les résultats de cette résolution donnent également des erreurs relatives plus faibles comparées à la procédure initiale, mais n'améliorent pas particulièrement la précision du produit scalaire sur le mode TM, dont l'erreur reste très importante.

Comparaison : Plusieurs écritures équivalentes de la matrice TME sont donc possibles, les mieux adaptées pour la résolution numérique du problème ont été explorées. Le récapitulatif des résultats des trois procédures est donné dans le tableau ci-dessous pour les cas TE et TM :

Mode TE'$_{11}$ (n=1)						
Démarche	Impédances		Amplitudes EM		Constante de normalisation $K_{1n}^{\prime+}$	Produit scalaire $\left\langle \vec{f}_{1n}^{\prime+} \middle\| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle$
	Z_z'	Z_T'	$\tilde{\Gamma}_{1n}^{+}$	$Z_0\tilde{\Psi}_{1n}^{+}$		
Théorique	0	-84,39j	0	1j	7.22	0,422j
TME initiale	-0,88j (ND)	-82,62j (2,1%)	0,5-0,47j (ND)	$\tilde{\Psi}_{mn}^{+}$=0,72j (37.6%)	0,026 (NE)	6×10^{-4}+0,421j (0,16%)
TME1			-0,005+10^{-5}j (ND)	0,9999j (0,001%)	7,19 (0,5%)	-10^{-5}+0,422j (0,033%)
TME2			0,0007 (ND)	0,9999j (0,002%)	7,26 (0,47%)	0,421j (0,12%)

(ND : erreur relative Non Définie)

Mode TM'$_{11}$ (n=2)						
Démarche	Impédances		Amplitudes EM		Constante de normalisation $K_{1n}^{\prime+}$	Produit scalaire $\left\langle \vec{f}_{1n}^{\prime+} \middle\| \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \right\rangle$
	Z_z'	Z_T'	$\tilde{\Gamma}_{1n}^{+}$	$Z_0\tilde{\Psi}_{1n}^{+}$		
Théorique	-92,72j	∞	1	0j	40,18	-0,345j
TME initiale	-90.23j (2.68%)	229.68j (ND)	0,9999 (10^{-4} %)	$\tilde{\Psi}_{mn}^{+}$=-10^{-3}j (ND)	21,72 (NE)	0.058-0.528j (55,7%)
TME1			0,995 (0,47%)	0,05+0,08j (ND)	39,49 (1,7%)	-0,047-0,264j (27%)
TME2			0,987 (1,25%)	-0,15-0,01j (ND)	38,4 (4,42%)	0,13-0,34j (39%)

(ND : erreur relative Non Définie)

Tableau 4.1 - Résultats des procédures du calcul des amplitudes EM par intermédiaire de la matrice TME.

La précision des amplitudes est très satisfaisante pour tracer les cartographies des champs (l'erreur ne dépasse pas 1.25%). Par contre, pour un calcul MM où les amplitudes se retrouvent dans toutes les étapes de calcul (de la constante de normalisation aux produits scalaires des modes avec l'excitation), l'accumulation de l'erreur peut devenir significative, de plus, le choix de la surface de rayon a' où sont fait les calculs est arbitraire et relativement loin de la paroi métamatériau. Dans ce sens, une autre solution possible serait d'adopter une approche itérative sur le rayon a' pour déterminer les impédances Z_Z' et Z_T' avec un critère d'arrêt sévère sur la valeur propre $\lambda = 0$, permettant de trouver le vecteur propre de la matrice TME avec une

précision élevée. Cette solution peut être très coûteuse en termes de temps de calcul, surtout que la paroi est anisotrope (les amplitudes EM varient en fréquence) et le nombre de modes utilisés dans le MM est élevé. En conséquence, pour éviter les erreurs commises sur l'évaluation des impédances de surface, une approche de calcul directe plus efficace, basée sur le coefficient de couplage, a été envisagée.

Calcul par l'intermédiaire du coefficient de couplage

Pour trouver le vecteur $(\tilde{\Gamma}_{mn}^{+} \quad \tilde{\Psi}_{mn}^{+})^t$, nous pouvons repartir de l'évaluation des champs longitudinaux (4.49) et (4.50) sans passer par les impédances de surface. Pour cela, considérons le coefficient Π_{mn}^{α} de couplage TE/TM, défini précédemment dans la section 2.2 pour le calcul de la matrice d'impédance du mode (avec $\alpha = + ou -$). Pour les modes EP, il est donné par :

$$\Pi_{mn}^{+} = \frac{Z_0 H_z^{+}}{E_z^{+}} = \frac{Z_0 \Psi_{mn}^{+} J_m(k_c\rho) e^{jm\theta}}{\Gamma_{mn}^{+} J_m(k_c\rho) e^{jm\theta}} = \frac{Z_0 \Psi_{mn}^{+}}{\Gamma_{mn}^{+}} \tag{4.57}$$

avec Ψ_{mn}^{+} et Γ_{mn}^{+} les amplitudes EM non-normalisées.

Il quantifie la proportion entre la composante TE et la composante TM. Si $\Pi_{mn}^{+} \gg 1$ le mode TE est dominant, si $\Pi_{mn}^{+} \ll 1$ le mode TM est dominant. Ainsi, le coefficient de couplage est exploré pour décrire les amplitudes EM normalisées $(\tilde{\Gamma}_{mn}^{+} \quad \tilde{\Psi}_{mn}^{+})^t$:

$$\tilde{\Gamma}_{mn}^{+} = \frac{\Gamma_{mn}^{+}}{\sqrt{|\Gamma_{mn}^{+}|^2 + |Z_0 \tilde{\Psi}_{mn}^{+}|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Pi_{mn}^{+}|^2}} \tag{4.58}$$

$$\tilde{\Psi}_{mn}^{+} = \frac{\Psi_{mn}^{+}}{\sqrt{|\Gamma_{mn}^{+}|^2 + |Z_0 \Psi_{mn}^{+}|^2}} = \frac{\Pi_{mn}^{+}}{Z_0 \sqrt{1 + |\Pi_{mn}^{+}|^2}} \tag{4.59}$$

où la phase de $\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}$ est considérée comme la phase à l'origine par défaut et le déphasage entre $\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}$ et $\tilde{\Psi}_{mn}^{+}$ est donné par la phase du coefficient Π_{mn}^{+}.

Ainsi, trois procédures de calcul dépendant du coefficient de couplage sont proposées ici. Les résultats numériques pour les modes TE'$_{11}$ et TM'$_{11}$ sont donnés dans le tableau 4.2 et comparés aux valeurs analytiques.

Procédure Mean/Mean :

La procédure la plus intuitive pour calculer le coefficient de couplage numérique, est de le définir par le rapport de la Moyenne du champ électrique longitudinal sur la Moyenne du champ magnétique (noté Mean/Mean) à la surface du rayon a' :

$$\Pi_{mn,num}^{+} = \frac{< Z_0 H_{z,mn}^{+} >}{< E_{z,mn}^{+} >} \tag{4.60}$$

A partir des résultats du tableau 4.2, nous constatons que l'obtention des coefficients numériques est bien meilleure avec cette démarche directe. Les résultats numériques montrent un bon accord avec les valeurs théoriques. Pour le mode TM'$_{11}$,

l'erreur numérique sur le produit scalaire passe de 27% dans le meilleur cas de la TME, présentée précédemment, à seulement 0.45% dans ce cas. Pour le mode TE11, l'erreur sur le produit scalaire à passer de 0.033% dans le meilleur cas de la TME à 6.56% dans ce cas mais reste relativement petite. Cette démarche montre donc son efficacité pour les deux modes, mais elle peut-être moins performante si la variation du champ EM est très importante d'un point à l'autre de la surface de calcul, ce qui rend la représentation par la moyenne du champ moins significative que celle d'une moyenne par point sur le coefficient du couplage. Rappelons que ce coefficient devrait être constant sur la surface, même si les champs électrique et magnétique varient d'un point à l'autre, d'où l'intérêt de la prochaine procédure de calcul.

Procédure MeanPP :

La procédure MeanPP (Moyenne Point par Point) se base sur la représentation la plus conforme à la définition théorique du coefficient de couplage, considéré constant et indépendant du point de calcul. Ainsi, il est donné par la moyenne des valeurs calculées sur tous les points de la surface de calcul :

$$\Pi^{+}_{mn,num} = < \frac{Z_0 H^{+}_{z,mn}}{E^{+}_{z,mn}} > \tag{4.61}$$

Les résultats numériques confirment un très bon accord avec les valeurs théoriques dans le cas du TM'$_{11}$ avec une erreur de (0.44%) sur le produit scalaire. Néanmoins, dans le cas TE'$_{11}$, le problème est mal conditionné car $\Pi^{+}_{mn} \to \infty$. Et même avec une forte domination de la composante TE ($\left|\Pi^{+}_{mn,num}\right| = 11.33$), l'erreur est de 6.65% sur la constante de normalisation, ce qui engendre une erreur très élevée sur le produit scalaire.

Procédure MeanPP adaptée :

Afin d'éviter de modéliser le cas TE'$_{11}$ par un coefficient de couplage infini ($\Pi^{+}_{mn} \to \infty$) qui engendre des imprécisions numériques, nous avons introduit le coefficient du couplage inverse utilisé quand la composante TE dominante. Il est défini numériquement par :

$$\Lambda^{+}_{mn,num} = < \frac{E^{+}_{z,mn}}{Z_0 H^{+}_{z,mn}} > \tag{4.62}$$

avec $\Lambda^{+}_{mn,num} \neq \frac{1}{\Pi^{+}_{mn,num}}$ puisque qu'il s'agit de calcul de moyenne point à point.

Par conséquent, lorsque la composante TM est dominante, les amplitudes sont décrites en fonction de $\Pi^{+}_{mn,num}$ comme défini précédemment, mais dès que la composante TE devient dominante ($\Pi^{+}_{mn,num} > 1$), les amplitudes seront calculées à partir du coefficient $\Lambda^{+}_{mn,num}$. Ainsi, en fonction des deux cas, les amplitudes $\tilde{\Gamma}^{+}_{mn,num}$ et $\tilde{\Psi}^{+}_{mn,num}$ numériques sont données par les relations (4.63) et (4.64) :

$$\tilde{\Gamma}^{+}_{mn,num} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\left|\Pi^{+}_{mn,num}\right|^2}} & si \quad \Pi^{+}_{mn,num} \leq 1 \\ \dfrac{\Lambda^{+}_{mn,num}}{\sqrt{1+\left|\Lambda^{+}_{mn,num}\right|^2}} & si \quad \Pi^{+}_{mn,num} > 1 \end{cases} \tag{4.63}$$

$$\tilde{\Psi}^{+}_{mn,num} = \begin{cases} \dfrac{\Pi^{+}_{mn,num}}{Z_0\sqrt{1+\left|\Pi^{+}_{mn,num}\right|^2}} & si \quad \Pi^{+}_{mn,num} \leq 1 \\ \dfrac{1}{Z_0\sqrt{1+\left|\Lambda^{+}_{mn,num}\right|^2}} & si \quad \Pi^{+}_{mn,num} > 1 \end{cases} \tag{4.64}$$

Grâce à cette procédure adaptée, l'erreur en produit scalaire est réduite à seulement 4.51% dans le cas TE'$_{11}$, tout en gardant une erreur très faible de 0.44% dans le cas TM'$_{11}$.

Comparaison : Le récapitulatif des résultats des trois procédures est donné dans le tableau 4.2 ci-dessous pour les cas TE'$_{11}$ et TM'$_{11}$:

Mode TE'$_{11}$ (n=1)				
Démarche	Coefficients EM		Constante de normalisation K'^{+}_{1n}	Produit scalaire $\left\langle \vec{f}'^{+}_{1n} \middle\| \overrightarrow{f^{TE}_{11}} \right\rangle$
	$\tilde{\Gamma}^{+}_{1n}$	$Z_0\tilde{\Psi}^{+}_{1n}$		
Théorique	0	1j	7.23	0,422j
Mean/Mean	2×10^{-3} (ND)	0,065+0,9978j (6,54%)	7,23 (0,11%)	-0,027+0,420j (6,56%)
MeanPP	0,087 (ND)	0,38+0,91j (39,6%)	7,70 (6,65%)	-0,174+0,37j (42,6%)
MeanPP adaptée	2×10^{-3} (ND)	0,045+0,998j (4,5%)	7,23 (0,11%)	-0,019+0,421j (4,51%)

(ND : erreur relative Non Définie)

Mode TM'$_{11}$				
Démarche	Coefficients EM		Constante de normalisation K'^{+}_{1n}	Produit scalaire $\left\langle \vec{f}'^{+}_{1n} \middle\| \overrightarrow{f^{TE}_{11}} \right\rangle$
	$\tilde{\Gamma}^{+}_{1n}$	$Z_0\tilde{\Psi}^{+}_{1n}$		
Théorique	1	0j	40,18	$7,1\times10^{-4}$j
Mean/Mean	0,9999 (10^{-4}%)	10^{-4}+0,0016j (ND)	40,21 (0,07%)	$-2,2\times10^{-4}$-0,343j (0,45%)
MeanPP	0,9999 (10^{-4}%)	-10^{-5}-0,0016j (ND)	40,21 (0,07%)	$-3,6\times10^{-5}$-0,343j (0,44%)
MeanPP adaptée	0,9999 (10^{-4}%)	-10^{-5}-0,0016j (ND)	40,21 (0,07%)	$-3,6\times10^{-5}$-0,343j (0,44%)

(ND : erreur relative Non Définie)

Tableau 4.2 - Résultats des procédures du calcul des amplitudes EM avec utilisation du coefficient de couplage.

Ainsi, la démarche par l'intermédiaire du coefficient du couplage donne de meilleurs résultats que le calcul à partir de la résolution du problème à valeur propre avec la TME. D'après le tableau 3.2, les deux procédures Mean/Mean et MeanPP adaptée donnent des résultats satisfaisants. Afin de valider les calculs, les procédures des deux démarches (par l'intermédiaire des impédances équivalentes ou par l'intermédiaire du coefficient de couplage) ont été testées pour d'autres fréquences, d'autres modes et d'autres cas de transition. La procédure MeanPP adaptée s'est montrée la plus performante en termes de rigueur de l'approche et de précision. Elle est adoptée, par la suite, pour déterminer les amplitudes EM des modes dans l'algorithme du MM généralisé.

4.3.3 Orthogonalité de la base modale

Dans le circuit équivalent de la structure, représenté sur la figure 4.3, dans la section 4.1.1, les modes hybrides du guide d'ondes à paroi anisotrope sont représentés par un opérateur d'admittance $\widehat{\boldsymbol{Y}}'_{\boldsymbol{mn}}$. C'est un outil permettant d'associer chaque mode $\overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn}$ à sa matrice admittance du mode $[Y'^{\alpha}_{mn}]$. Il se comporte ainsi comme un projecteur :

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}'_{\boldsymbol{mn}} = \sum_{\substack{m=0,n=1 \\ \alpha=+,-}}^{\infty} \left| [Y'^{\alpha}_{mn}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right| \tag{4.65}$$

L'application de l'opérateur sur un mode donné $\overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0}$ conduit au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{Y}}'_{\boldsymbol{mn}} \left| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle &= \left(\sum_{\substack{m=0,n=1 \\ \alpha=+,-}}^{\infty} \left| [Y'^{\alpha}_{mn}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right| \right) \left| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle \\ &= \left(\sum_{\substack{m=0,n=1 \\ \alpha=+,-}}^{\infty} \left| [Y'^{\alpha}_{mn}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \middle| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle \right) \\ &= \left| [Y'^{\alpha}_{m_0n_0}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \middle| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle + \sum_{\substack{m=0,n=1 \\ (m,n)\neq(m_0,n_0) \\ \alpha=+,-}}^{\infty} \left| [Y'^{\alpha}_{mn}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \middle| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle \end{aligned} \tag{4.66}$$

Afin de faciliter l'écriture par la suite, les produits scalaires seront notés par :

$$\sigma_{\alpha}{}^{m_2,n_2}_{m_1,n_1} = \left\langle \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_1n_1} \middle| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_2n_2} \right\rangle \tag{4.67}$$

La base modale $\overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn}$ du guide est normalisée, ce qui donne $\sigma_{\alpha}{}^{m,n}_{m,n} = 1$. L'équation (4.66) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}'_{\boldsymbol{mn}} \left| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle = \left| [Y'^{\alpha}_{m_0n_0}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0n_0} \right\rangle + \sum_{\substack{m,n=0 \\ (m,n)\neq(m_0,n_0) \\ \alpha=+,-}}^{\infty} \sigma_{\alpha}{}^{m_0,n_0}_{m,n} \left| [Y'^{\alpha}_{mn}] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{mn} \right\rangle \tag{4.68}$$

Dans un cas idéal, comme un guide métallique avec des conditions Dirichlet/Neumann sur la paroi. La base est analytiquement orthogonale ($\sigma_\alpha{}_{m,n}^{m_0,n_0} = 0$ pour $(m,n) \neq (m_0 n_0)$), car seuls les modes TE et TM existent. Ainsi, la formule (4.68) se simplifie pour donner la formule classique pour une base orthogonale :

$$\widehat{\boldsymbol{Y}'}_{\boldsymbol{mn}} \left| \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0 n_0} \right\rangle = \left| \left[Y'^{\alpha}_{m_0 n_0} \right] \overrightarrow{f'}^{\alpha}_{m_0 n_0} \right\rangle \tag{4.69}$$

Dans le cas généralisé, les fréquences de résonance $f_{0,mn}$ (valeurs propres) des modes sont déterminées numériquement grâce à une résolution FEM, effectuée dans la section 2.2.3 du chapitre 2. La base des modes propres associés aux résonances $f_{0,mn}$ est orthogonale. Néanmoins, la détermination semi-analytique de la base modale, proposée par la suite, basée sur les formulations analytiques (4.40), (4.41) et les amplitudes EM numériques ($\tilde{I}^{\alpha}_{mn}, \tilde{\Psi}^{\alpha}_{mn}$) ne garantit pas strictement l'orthogonalité.

Néanmoins, l'orthogonalité est nécessaire dans la résolution par la méthode des circuits équivalents, car elle permet de définir l'opérateur $\hat{Y}'_{mn}$ comme un projecteur par (4.65) et ainsi de lier chaque mode à sa matrice caractéristique ('sa matrice propre') à travers cet opérateur. Afin d'y parvenir numériquement, il est nécessaire d'utiliser une approche de minimisation des produits scalaires entre les modes pour pouvoir négliger le terme du couplage s'il existe du fait des erreurs numériques.

Approche de minimisation des produits scalaires

Afin de minimiser le terme du couplage entre les modes, une analyse sur les produits scalaires entre les modes est faite. L'approche permet de choisir un domaine Ω où la base modale est quasi-orthogonale. Le produit scalaire $\langle . | . \rangle$ associé à la base modale est défini dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, mais avec un domaine Ω de rayon a_Ω variable,

$$\langle \vec{f}'_{mn} | \vec{g}'_{mn} \rangle = \int_{\Omega} \vec{f}'^{\,*}_{mn} \cdot \vec{g}'_{mn} \, d\Omega \;\; avec \;\; \Omega = [0, a_\Omega] \times [0, 2\pi] \tag{4.70}$$

Pour deux modes hybrides différents, le produit scalaire est calculé dans l'annexe C.4. Seuls les modes de même ordre m nous intéressent ici, car le produit scalaire entre deux modes d'ordre différent est analytiquement nul ($\sigma_\alpha{}_{m_1,n_1}^{m_2,n_2} = 0$ si $m_1 \neq m_2$). L'expression du produit scalaire entre deux modes $\vec{f}'^{\alpha}_{mn_1}$ et $\vec{f}'^{\alpha}_{mn_2}$ de même ordre m est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha{}_{m,n_1}^{m,n_2} = 2\pi \Big(& \left(A'^{TM\alpha}_{mn_1} A'^{TM\alpha^*}_{mn_2} + A'^{TE\alpha}_{mn_1} A'^{TE\alpha^*}_{mn_2} \right) D^{mn_2}_{mn_1} \\ & + j\alpha m \left(A'^{TM\alpha}_{mn_1} A'^{TE\alpha^*}_{mn_2} - A'^{TE\alpha}_{mn_1} A'^{TM\alpha^*}_{mn_2} \right) C^{mn_2}_{mn_1} \Big) \end{aligned} \tag{4.71}$$

Pour les modes $m \neq 0$:

$$C^{mn_2}_{mn_1} = J_m(\upsilon^{\Omega^*}_{mn_1}) J_m(\upsilon^{\Omega}_{mn_2})$$

$$D_{mn_1}^{mn_2} = \frac{a_\Omega k'_{c,mn_2} k'^{*}_{c,mn_1}}{2\left(k'^{*2}_{c,mn_1} - k'^{2}_{c,mn_2}\right)}\Big(k'_{c,mn_2}\left(J'_{m+1}(v^{\Omega}_{mn_2})J_{m+1}(v^{\Omega^*}_{mn_1}) + J'_{m-1}(v^{\Omega}_{mn_2})J_{m-1}(v^{\Omega^*}_{mn_1})\right) - k'^{*}_{c,mn_1}\left(J_{m+1}(v^{\Omega}_{mn_2})J'_{m+1}(v^{\Omega^*}_{mn_1}) + J_{m-1}(v^{\Omega}_{mn_2})J'_{m-1}(v^{\Omega^*}_{mn_1})\right)\Big)$$

avec $v^{\Omega}_{mn} = k'_{c,mn} a_\Omega$.

Soit la matrice du produit scalaire $\mathrm{Mat}_{\vec{f}'^{\alpha}_{mn}}(\langle . | . \rangle)$ de la famille $(\vec{f}'^{\alpha}_{mn})_{1\leq n\leq N}$ des modes d'ordre m, définie par :

$$M = \mathrm{Mat}_{\vec{f}'^{\alpha}_{mn}}(\langle . | . \rangle) = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha{}^{m,1}_{m,1} & \cdots & \sigma_\alpha{}^{m,N}_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha{}^{m,1}_{m,N} & \cdots & \sigma_\alpha{}^{m,N}_{m,N} \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

La matrice M est symétrique et les termes diagonaux sont égaux à 1. Ainsi, minimiser les termes non-diagonaux équivaut à faire converger la matrice M vers la matrice identité I_N. La fonction objectif g à minimiser peut s'écrire via la norme quadratique moyenne, définie par :

$$Min_{a_\Omega} g(a_\Omega) = Min_{a_\Omega} \frac{1}{N}\|M - I_N\|_F = Min_{a_\Omega} \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{\substack{n_2=1 \\ n_2\neq n_1}}^{N} \left|\sigma_\alpha{}^{m,n_2}_{m,n_1}\right|^2} \tag{4.73}$$

avec $\|M\|_F$ la norme de Frobenius d'une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Ainsi, le rayon fictif a_Ω du produit scalaire est ajusté pour minimiser la formule (4.73).

Applications numériques :

Une étude paramétrique sur ce rayon a_Ω est effectuée pour plusieurs cas de paroi. Les courbes des valeurs absolues des produits scalaires sont tracées et analysées en fonction du rayon a_Ω. Par la suite, le rayon minimal a_Ω est déterminé en fonction de la fréquence pour des plusieurs exemples de transitions. Par ailleurs, les modes EN et EP sont orthogonaux entre eux, donc nous nous focaliserons sur les modes EP.

Transition Guide métallique PEC1/ Guide métallique PEC2

Considérons le guide d'ondes circulaires, de rayon ($A = 68.4mm$), étudié dans la section précédente 4.3.2. Le schéma de la structure est représenté sur la figure 4.17. Les fonctions $\left|\sigma_+{}^{m,n_2}_{m,n_1}(a_\Omega)\right|$ sont calculées en fonction de a_Ω pour $n_1 \neq n_2$ sur un intervalle $]20mm, 80mm[$. Les courbes des couplages entre les six premiers modes (N=6) sont tracées sur la figure 4.19 à deux fréquences ($f_0 = 3GHz$ et $f_0 = 4GHz$) appartenant à la bande monomode du guide PEC1.

Dans le cas métallique, les tracés des produits scalaires varient peu en fonction de la fréquence. Les résultats montrent que $\left|\sigma_+{}^{m,n_2}_{m,n_1}(a_\Omega)\right| \to 0$ quand a_Ω tend vers le rayon du guide d'ondes $A = 68.4mm$. En effet, les conditions aux limites imposées sur la paroi métallique ($\rho = A$) sont des conditions de Dirichlet ou Neumann, donc les coupures

$(k'_{c,mn_1}A)$ sont les zéros la fonction de Bessel J_m ou de sa dérivée J'_m. De ce fait, la formulation (4.71) du produit scalaire entre deux modes s'annule aussi numériquement quand $a_{\Omega,min} \to A$.

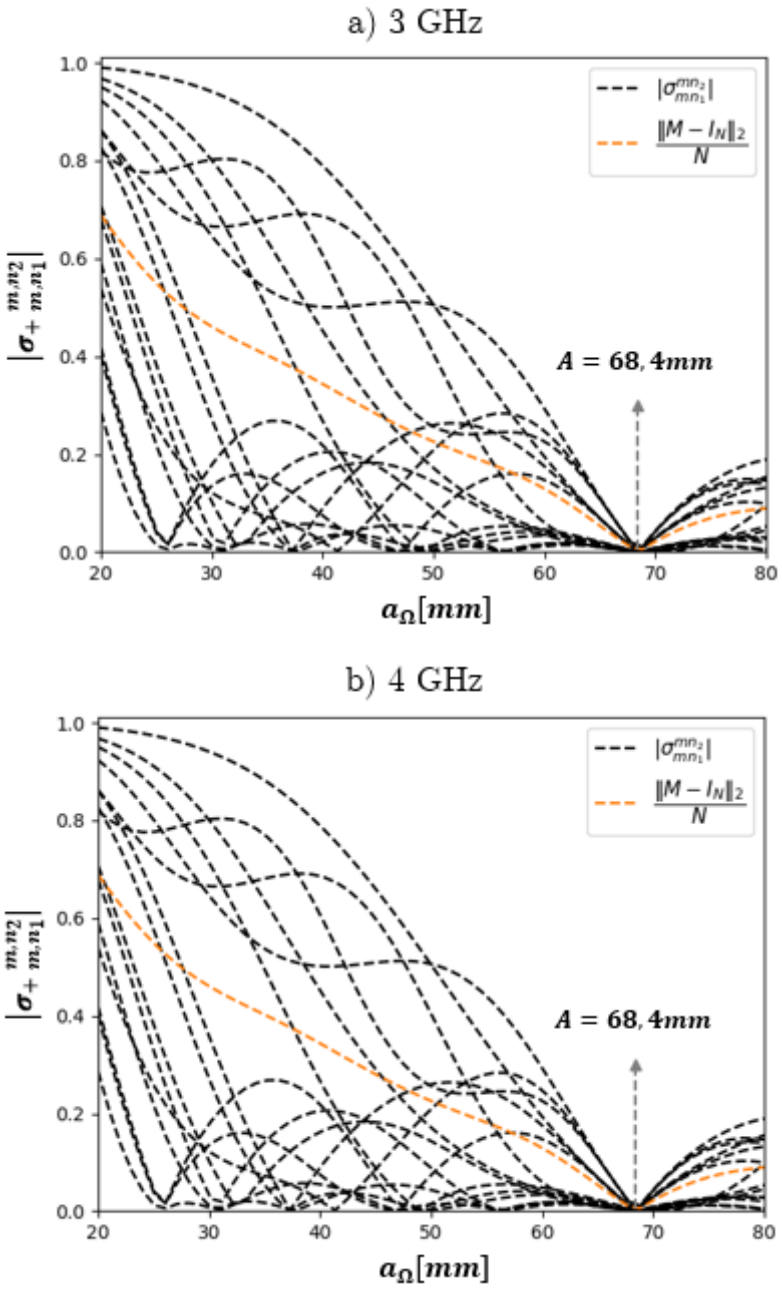


Figure 4.19- Les courbes des produits scalaires a) 3GHz b) 4GHz pour une double transition PEC1/PEC2/PEC1.

L'objectif est maintenant de déterminer le rayon $a_{\Omega,min}$ par fréquence et de calculer l'erreur quadratique moyenne lui correspondant. Dans cet exemple, la recherche de ce rayon est faite sur un intervalle autour de la paroi $]A-h_1, A+h_1[$ avec $h_1 = A - a' = 5mm$, où $a' = 63.5mm$ est le rayon de la surface du calcul des coefficients EM (cf. figure 4.17). Le nombre de modes assurant la convergence est $N = 8$. Les résultats du

rayon $a_{\Omega,min}$ et de l'erreur absolue moyenne qui lui est associée $g(a_\Omega)$ sont donnés en fonction de la fréquence sur la figure 4.20.

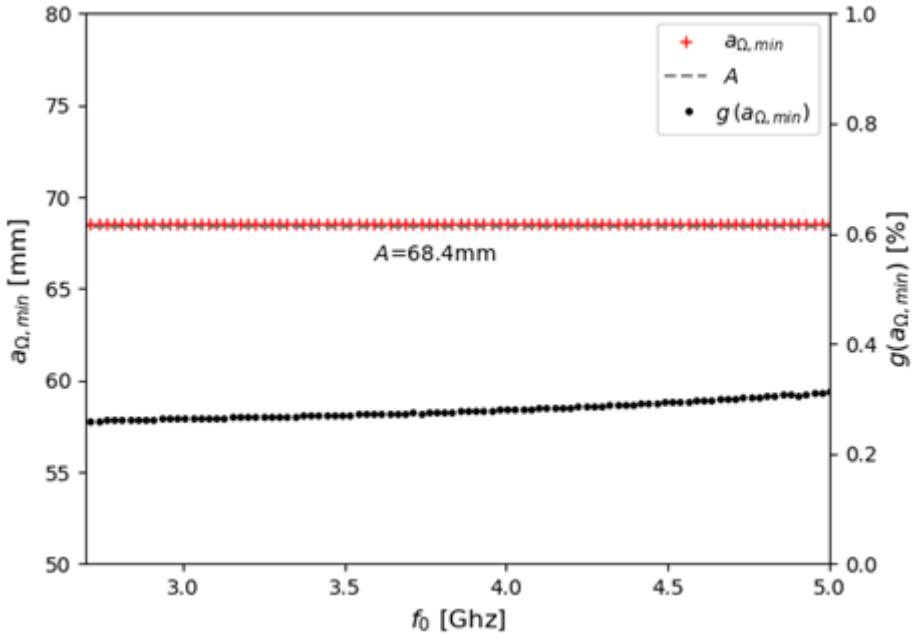


Figure 4.20 - Rayon $a_{\Omega,min}$ (courbe rouge +), rayon A (courbe grise ---) et erreur moyenne des produits scalaire $g(a_{\Omega,min})$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence.

La valeur théorique attendue correspondant au rayon A de la paroi métallique, est bien retrouvée numériquement par a_Ω avec une erreur relative de 0.25%. Les courbes rouge et grise sont donc superposées. Quant à la fonction $g(a_\Omega)$, représentant l'erreur absolue moyenne des produits scalaires (non-diagonaux) par rapport à zéro, sa courbe (points noirs), elle ne dépasse pas 0.32%.

Cas d'un guide à paroi corruguée

Soit le cas d'une transition entre un guide métallique et un guide à paroi périodique corruguée. La structure et les dimensions sont représentées sur la figure 4.21, avec $A = 68{,}4mm$ le rayon extérieur de la paroi, $a_p = 58{,}4mm$ le rayon intérieur de la paroi, $p = 4mm$ la période de la cellule périodique, $h = 2mm$ et $w = 2mm$ la profondeur et la largeur de la corrugation. Dans cet exemple, après l'identification des amplitudes EM sur une surface virtuelle de rayon $a' = 56{,}4mm$, l'orthogonalité de la base modale semi-analytique est évaluée.

Pour cela, les fonctions $\sigma_\alpha{}^{m,n_2}_{m,n_1}(a_\Omega)$ sont calculées pour les modes (EP) en fonction de a_Ω pour $n_1 \neq n_2$ sur un intervalle $]20mm, 80mm[$. Les courbes sont tracées sur la figure 4.22 pour les six premiers modes $(N = 6)$, à deux fréquences ($f_0 = 3GHz$ et $f_0 = 4GHz$) de la bande monomode du guide d'entrée PEC1.

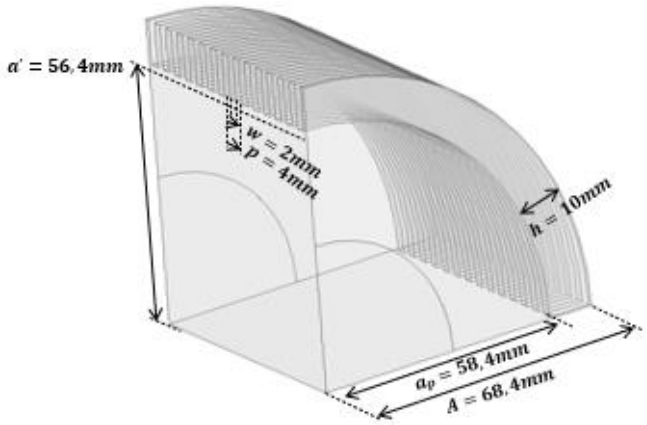


Figure 4.21 - Transition entre le guide métallique et le guide à paroi périodique corruguée.

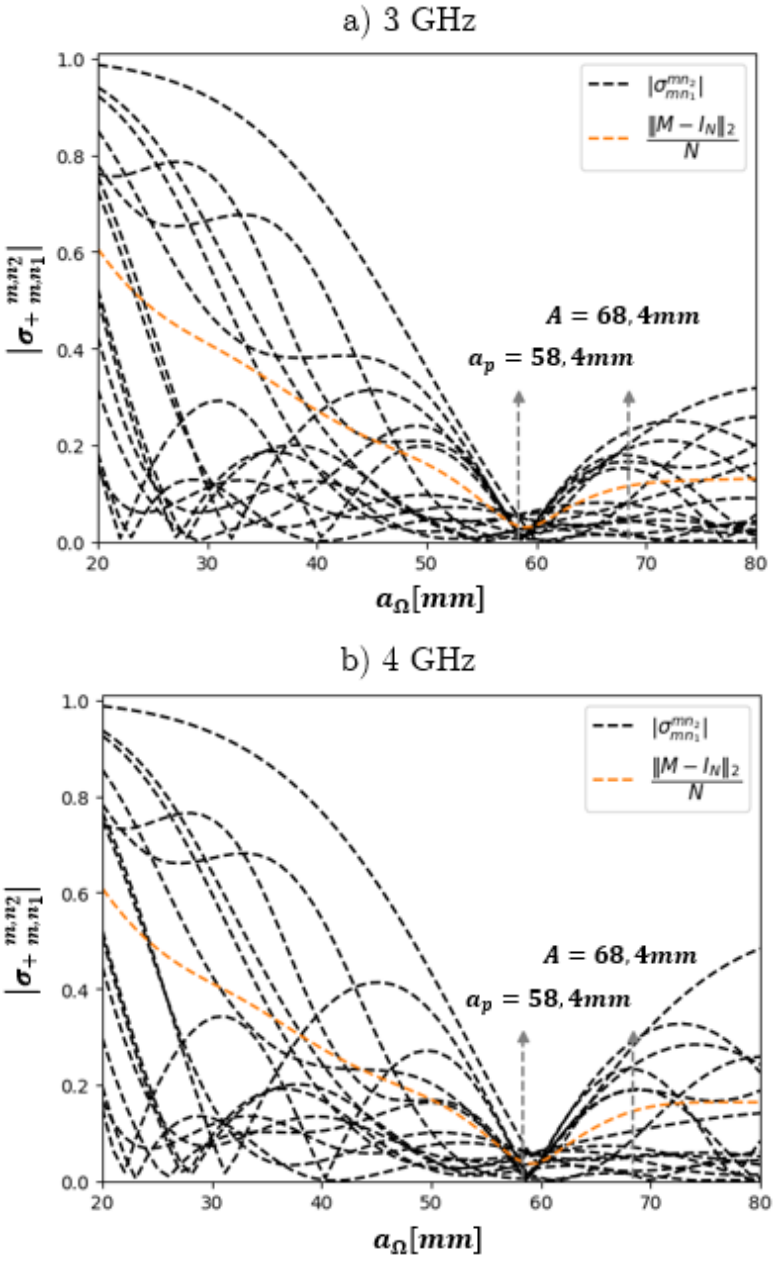


Figure 4.22 – Calcul des produits scalaires à a) 3GHz et b) 4GHz pour une transition PEC1/guide corrugué/PEC1.

Dans ce cas de paroi corruguée, la variation des produits scalaires par rapport à la fréquence est plus significative que dans le cas métallique, même si elle reste limitée. Les résultats montrent que $\sigma^{m,n_2}_{m,n_1}(a_\Omega) \to 0$ quand a_Ω tend vers un rayon proche du rayon intérieur de la paroi $a_p = 58{,}4mm$.

Ainsi, le rayon minimal est déterminé par fréquence et l'erreur quadratique moyenne qui lui correspond est calculée. Dans cet exemple, la recherche de ce rayon est faite sur un intervalle autour de la paroi corruguée $]a', A + \varepsilon[$, où $a' = 56.4mm$ est le rayon de la surface du calcul des coefficients EM et $\varepsilon = 1mm$ est choisi afin de ne pas exclure les solutions numériques $a_{\Omega,min}$ si elles convergent vers A^+. Les résultats sont donnés sur la figure 20 pour 8 modes ($N = 8$).

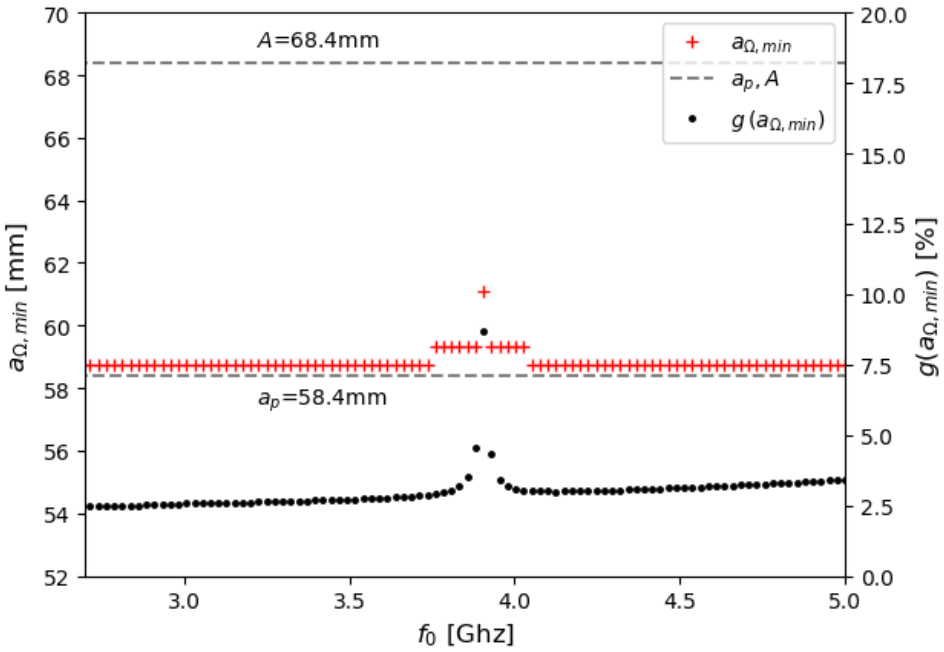


Figure 4.23 - Rayon $a_{\Omega,min}$ (courbe rouge +), rayon A (courbe grise ---) et erreur moyenne des produits scalaires $g(a_{\Omega,min})$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence.

La courbe du rayon $a_{\Omega,min}$ est stable sur la globalité de la bande de fréquences sauf autour de la fréquence 3.8 GHz où une résonance créée par le mode TE_{21} fait varier le rayon. Par ailleurs, la fonction $g(a_{\Omega,min})$ ne dépasse pas 3.5% en dehors de cette résonance où elle atteint 5%, cette valeur correspond à un produit scalaire d'un mode avec lui-même ($\sigma^{m,n_1}_{m,n_1} = 1$) et un couplage avec les autres modes de ($\sigma^{m,n_2}_{m,n_1} \simeq 0.035$), donnant un rapport de $\sigma^{m,n_1}_{m,n_1}/\sigma^{m,n_2}_{m,n_1} \simeq 28$ entre la norme du mode et le couplage, ce qui reste suffisant pour négliger ce dernier.

Ainsi, cette approche est appliquée automatiquement pour tout type de paroi pour déterminer le rayon qui définit les produits scalaires de la base modale, ce qui permet de déterminer les constantes de normalisation des modes dépendantes de a_Ω.

4.3.4 Algorithme MM généralisé

Après avoir déterminé la base modale, s'être assurés de conditions d'orthogonalité avec le choix du rayon a_Ω, avoir calculé les produits scalaires et modélisé la discontinuité, la prochaine étape est d'implémenter ces différentes formules dans un code MM pour obtenir les paramètres $[S]$ de la double transition.

Procédure de calcul

De ce fait, en se basant sur la nouvelle méthodologie de calcul FEM proposée dans le chapitre 2, les diagrammes de dispersion des modes sont déterminés qu'ils soient évanescents ou propagatifs. Cette analyse dispersive s'effectue sur une cellule élémentaire car la paroi est périodique. Etant donné que le calcul MM s'effectue par fréquence, une interpolation des diagrammes est indispensable pour déterminer les constantes de propagation à une fréquence précise issue de la discrétisation. Une interpolation 1D, importée de la bibliothèque *scipy* sur Python, est utilisée. Ainsi, les étapes précédemment détaillées dans le chapitre 2 sont regroupées dans la partie gauche de l'organigramme proposé dans la figure 4.24.

Ensuite, à chaque fréquence et pour chaque mode, les amplitudes EM ($\tilde{\Gamma}_{mn}$ et $\tilde{\Psi}_{mn}$) sont calculées sur une surface fictive $\partial\Omega$' de rayon a' en-dessous du motif du métamatériau avec la méthode MeanPP adaptée (détaillée dans la section 4.3.2) pour modéliser le comportement de la paroi et déterminer les modes EN et EP semi-analytiques de la base modale. Ensuite, le rayon $a_{\Omega,min}$ permettant de définir de façon la plus orthogonale possible les produits scalaires de la région du guide à paroi anisotrope périodique est déterminé. Cela permet d'identifier la constante de normalisation du mode associé, de déterminer sa matrice d'admittance caractéristique et de calculer les produits scalaires avec l'excitation du petit guide d'entrée. Ils sont finalement injectés dans les impédances d'entrée Y_{pair} et Y_{impair} pour calculer l'admittance $[Y]$ et en déduire ainsi les paramètres $[S]$.

Organigramme de l'algorithme

Les différentes étapes exposées précédemment sont explicitées dans l'organigramme représenté sur la figure 4.24 ci-dessous, qui résume les détails du code de calcul MM dans le cas généralisé.

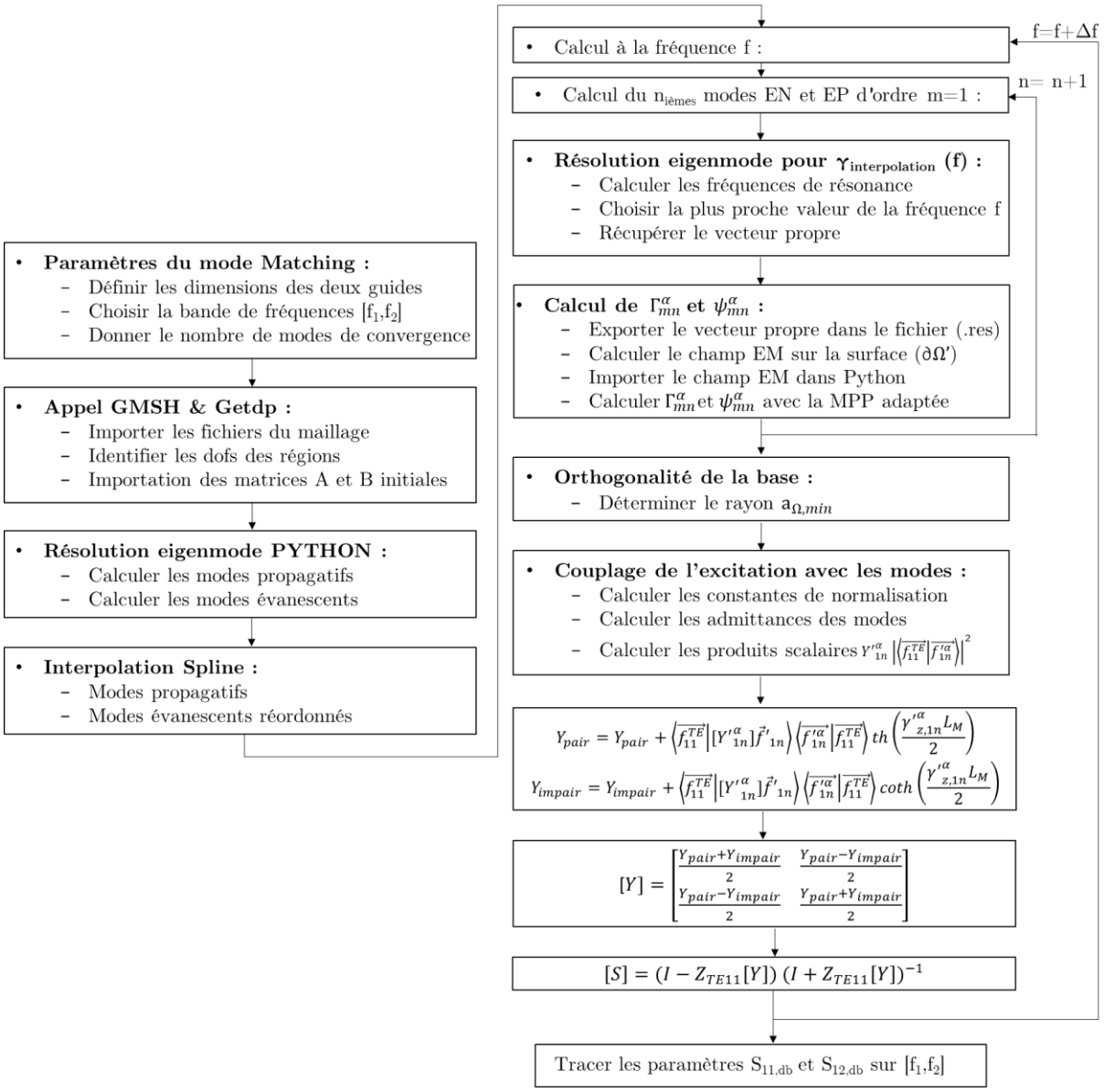


Figure 4.24 - L'organigramme du code MM généralisé.

Les différentes étapes sont classifiées dans des fonctions Python. La résolution s'effectue dans un code principal (main.py) permettant de calculer les paramètres $[S]$ d'une double transition, comme présenté initialement, à partir des données du problème.

Conclusion

Dans ce chapitre, deux résolutions basées sur la méthode du Mode-Matching sont proposées. D'abord, un cas de transition entre deux guides circulaires métalliques a été modélisé par un modèle MM complètement analytique, appelé MM simplifié. Ce modèle et son code sont validés par comparaison à une méthode full-wave obtenue par Ansys HFSS. Dans un second temps, une résolution MM généralisé est proposée pour étudier les transitions d'un guide métallique à un guide à paroi métamatériau, paroi

périodique et anisotrope. Dans ce cas, l'expression de la base modale est donnée analytiquement, mais les amplitudes EM de ces modes sont déterminés numériquement. La formulation complète du problème MM a été explicitée analytiquement, en passant par les calculs des produits scalaires couplant les modes avec l'excitation. Enfin, un algorithme basé sur ce modèle MM généralisé, a été développé pour déterminer les paramètres $[S]$ de la structure.

Cet algorithme va être testé et validé numériquement pour plusieurs exemples de paroi dans le chapitre 5. Un prototype va également être réalisé pour confirmer les résultats obtenus numériquement. Ces validations font l'objet du prochain chapitre.

Bibliographie

[1] Raveu, N. ; Pigaglio, O., “Résolution de problémes hautes fréquences par les schémas équivalents”, Toulouse, France : Cépadués édition, 2012.

[2] Kuhler, L., “Etude et Conception de Guides d'Onde Cylindriques à Métamatériaux, Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Octobre 2019.

Chapitre 5 : Simulations numériques et prototype pour valider la résolution Mode-Matching généralisée

Introduction

L'algorithme du Mode-Matching généralisé (MMg), développé dans la section 4.3 du chapitre 4, est dédié à la résolution des problèmes de discontinuité pour double transition : un guide central à paroi métamatériau inséré entre deux guides métalliques PEC. Afin de valider le modèle, l'algorithme MMg est testé, d'abord, sur un cas où le guide central présente également une paroi métallique. Puis, l'algorithme MMg est testé sur trois cas où le guide central présente une paroi anisotrope périodique : une paroi corruguée, puis une paroi PIC et enfin une paroi mushroom, dans le but de rehausser progressivement le niveau de complexité de la paroi. Par la suite, deux prototypes de double transition, métallique et à paroi métamatériau, sont réalisés pour valider expérimentalement la résolution MMg. La comparaison des résultats permet de mettre en lumière l'efficacité d'introduire des parois métamatériaux dans les structures guidées.

Toutes les simulations de ce chapitre ont été effectuées avec un ordinateur présentant les caractéristiques suivantes : Intel Core i7-7500U CPU @2.70GHz-2.90GHZ, Mémoire installée (RAM) de 16Go.

5.1 Résultats numériques pour double transition avec l'algorithme MM généralisé

Dans tous les exemples proposés, les guides d'ondes PEC en entrée et en sortie sont identiques et supposés connus. Leur excitation dans la bande monomode est définie analytiquement sur leur mode fondamental.

5.1.1 Double transition guide PEC1/guide PEC2/guide PEC1

Dans un premier temps, l'algorithme MMg est utilisé pour étudier un cas simple de double transition d'un guide d'ondes métallique (PEC1) à un guide d'ondes métallique (PEC2) de rayon supérieur. Cette structure a été résolue analytiquement avec l'algorithme MM simplifié (MMs) développé dans la partie 4.2 du chapitre précédent. La structure étudiée est présentée sur la figure 5.1 :

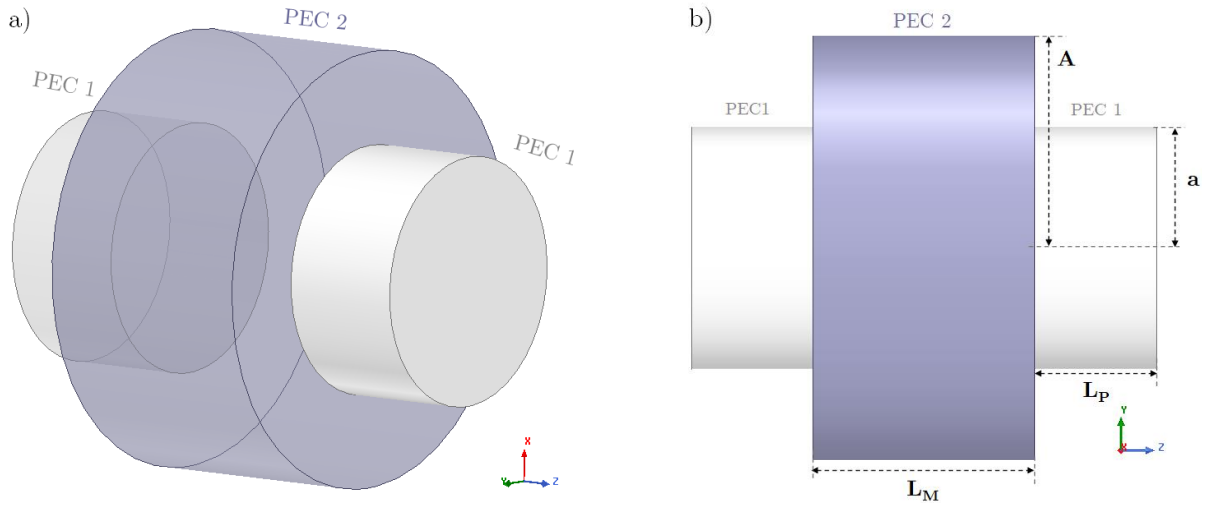


Figure 5.1 – Structure de la double transition entre des guides circulaires métalliques PEC a) vue 3D b) vue longitudinale.

Les dimensions de cette double transition sont : $a = 40mm$, $A = 70mm$ et $L_M = 73mm$. La longueur du guide PEC1 est fixée à $L_p = 0.1mm$ pour la simulation HFSS afin de ramener l'excitation au niveau de la discontinuité. Cette procédure a été discutée dans la partie 4.2.3 du chapitre 4. Pour la résolution basée sur le Mode-Matching, cette longueur n'est pas prise en compte dans les calculs. Les résultats numériques calculés avec le MMg seront comparés à ceux de la résolution analytique MMs et à ceux issus du logiciel Ansys HFSS.

Caractérisation des guides d'ondes métalliques de la structure

La caractérisation du guide d'ondes métallique PEC1 se fait analytiquement, car les formules pour déterminer les constantes de propagation et identifier ses modes sont connues. Par contre, pour le guide métallique central PEC2, nous supposons que les résultats analytiques ne sont pas connus, les calculs se font numériquement dans l'algorithme MMg. De ce fait, l'identification des modes du guide PEC2 s'effectue avec la méthodologie FEM modifiée de calcul des modes pour les structures périodiques, proposée dans la partie 2.3 du chapitre 2.

Le guide métallique PEC2 est invariant suivant l'axe de propagation z et angulairement (en θ), donc la période p et l'angle α peuvent être choisis arbitrairement. La cellule élémentaire utilisée dans le calcul des modes est présentée sur la figure 5.2, un maillage standard uniforme a été appliqué. Les dimensions géométriques de la cellule sont $A = 70mm$, $a' = 68mm$, $p = 8mm$ et $\alpha = 20°$.

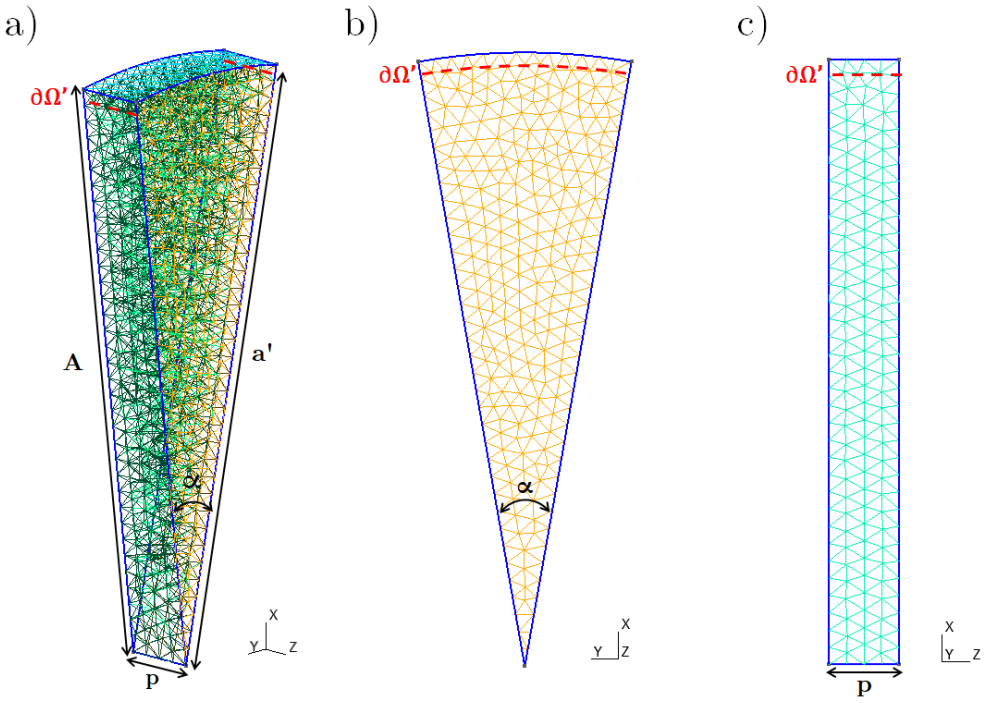


Figure 5.2 - Cellule élémentaire du guide d'ondes métallique PEC2 : a) Vue 3D b) Coupe axiale c) Coupe longitudinale.

Les diagrammes de dispersion des modes d'ordre $m = 1$ sont tracés sur la figure 5.3 notamment pour identifier les modes des deux guides d'ondes utilisés dans le MMg. Pour rappel, compte tenu de l'invariance angulaire seuls les modes de même ordre que le mode fondamental du guide PEC1 (le mode TE_{11}) seront générés dans la double transition.

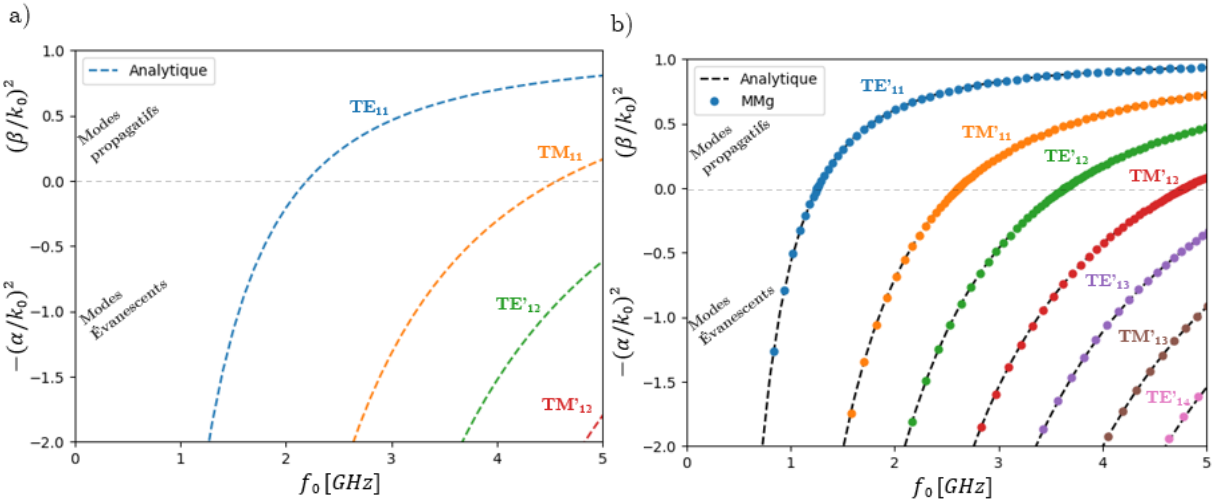


Figure 5.3 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 a) Guide d'onde PEC1 b) Guide d'onde PEC2.

A partir des diagrammes de dispersion du guide PEC1, la bande monomode, où seul le mode fondamental TE_{11} se propage, est déterminée : elle correspond à la bande de fréquence [2.2GHz,4.57GHz]. Dans cet intervalle, trois modes peuvent se

propager dans le guide PEC2 : les modes TE'$_{11}$, TM'$_{11}$ et TE'$_{12}$, les autres modes sont évanescents.

Calcul des paramètres [S] :

La double transition est simulée dans la bande monomode [2.2GHz,4.57GHz]. Le nombre de modes utilisés dans la résolution MMg pour le guide PEC2 est de 12 modes. Le calcul des paramètres [S] se fait fréquence par fréquence. Cependant, les diagrammes de dispersion de la figure 5.3 sont obtenus en imposant la condition de périodicité (en α ou β) et en calculant les fréquences de résonance (f_0). De ce fait, une interpolation des courbes de dispersion est nécessaire à l'aide de la méthode *Akima1D* donnée par la bibliothèque *scipy* [1], afin d'associer chaque fréquence de calcul imposée à sa constante de propagation interpolée. L'erreur relative de l'interpolation sur la fréquence de calcul ne dépasse pas 0.001% sur les constantes de propagation. Par ailleurs, les amplitudes EM sont calculées sur la surface $\partial\Omega'$ de rayon $a' = 68mm$ par les équations (4.63) et (4.64) de la procédure MeanPP, détaillée dans la partie 4.3.2. Le rayon correspondant au critère d'orthogonalité de la base modale, quant à lui, est égal au rayon du guide $a_{\Omega,min} = A$ dans le cas d'un guide métallique avec une erreur relative qui ne dépasse pas 0.32% sur les produits scalaires.

Les paramètres [S] calculés par l'algorithme MMg sont comparés aux résultats de l'algorithme simplifié MMs et à ceux issus du logiciel Ansys HFSS présentés précédemment dans la section 4.2. Les paramètres de la simulation HFSS sont $\Delta S = 0.001$ avec un nombre maximum d'itérations de 25. Pour la résolution MMs, le nombre de modes utilisé est de 8 modes car la résolution est analytique, alors qu'il est de 12 pour l'algorithme MMg afin d'assurer la convergence et surtout une précision élevée. Ainsi, les paramètres S_{11} et S_{21} sont tracés pour les trois résolutions sur la figure 5.4.

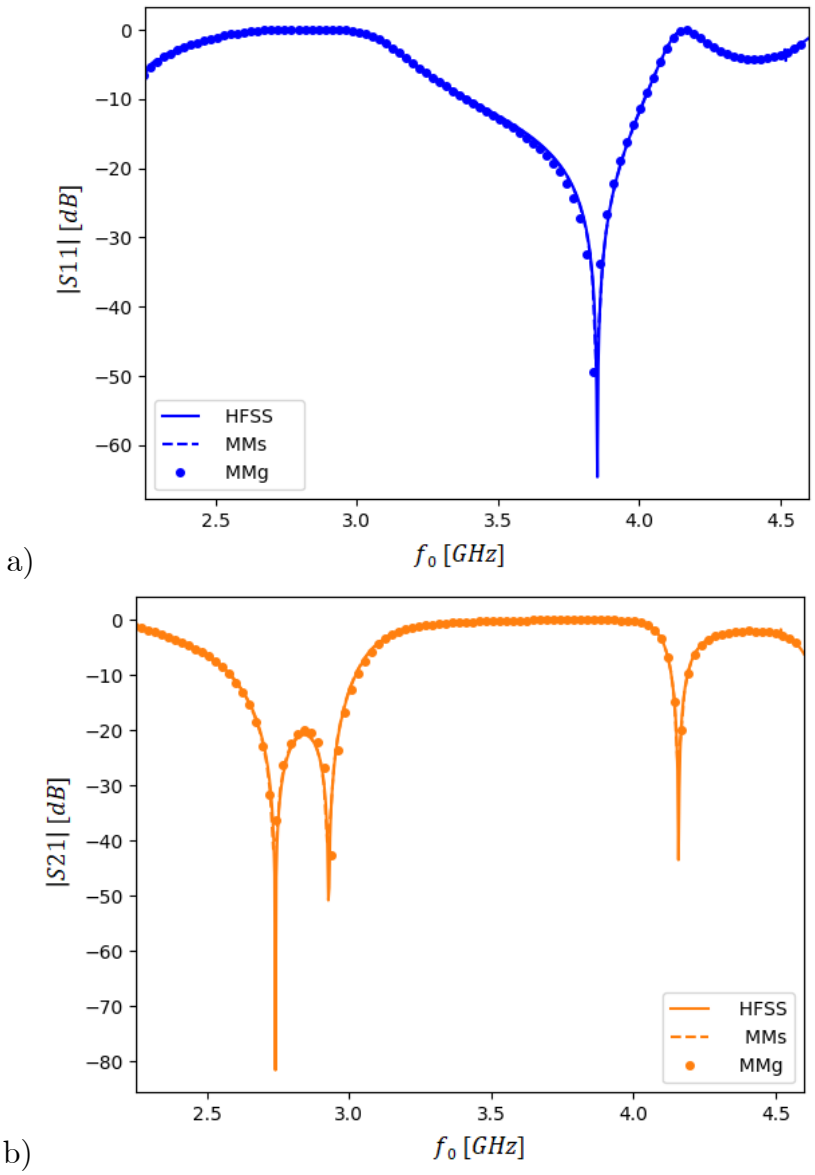


Figure 5.4 - Comparaison des paramètres S issus de l'algorithme MMg avec ceux de l'algorithme MMs et ceux de la simulation HFSS : a) $|S_{11}|$, b) $|S_{21}|$.

Les résultats des trois simulations sont confondus sur toute la bande de fréquence : on observe les mêmes bandes de transmission sur le coefficient S21 et la même fréquence d'adaptation sur le coefficient de réflexion S_{11}. Cet exemple permet de valider les calculs analytiques et les démarches numériques adoptés pour la résolution Mode-Matching généralisé dans le cas d'une double transition entre des guides métalliques, où seuls les modes TE et TM existent.

5.1.2 Double transition guide PEC/guide à paroi corruguée/ guide PEC

Dans un deuxième temps, l'algorithme MMg est testé pour un cas de paroi anisotrope périodique. La structure étudiée, représentée dans la figure 5.5, est une double transition entre un guide d'ondes métallique (PEC) et un guide d'ondes à paroi

anisotrope comportant un motif périodique de type corrugation. La corrugation choisie est axiale, donc le guide est toujours invariant angulairement en θ.

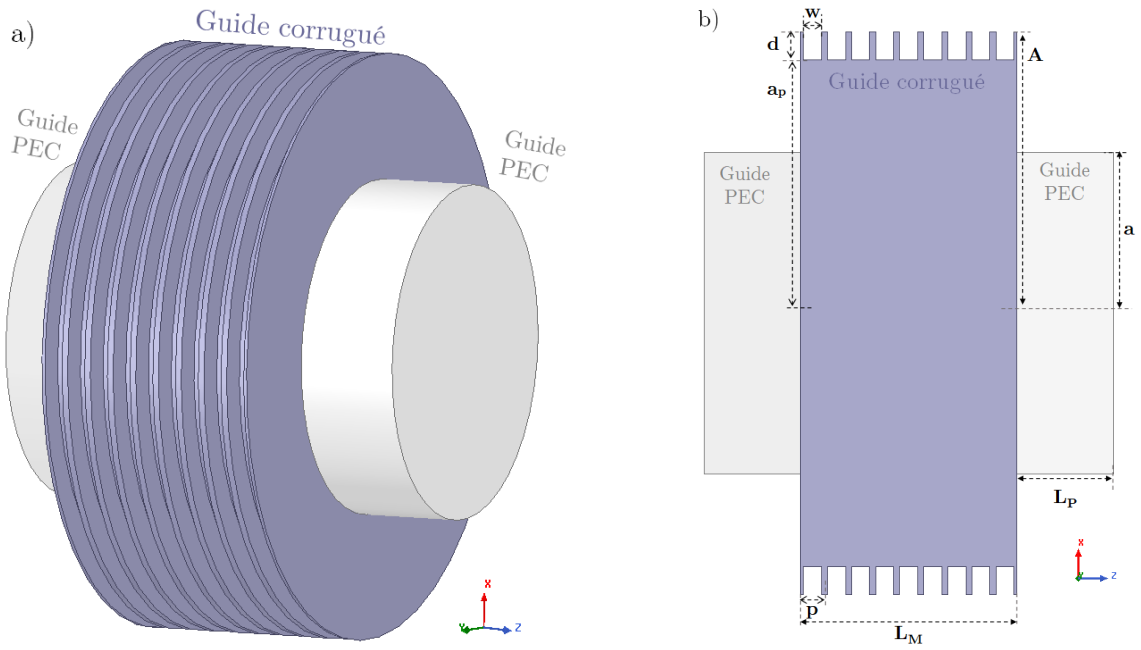


Figure 5.5 - Structure de la double transition entre deux guides métalliques PEC et un guide corrugué : a) vue 3D, b) vue longitudinale.

Les dimensions de la structure de la figure 5.5 sont : $A = 65mm$, $a = 38mm$, $a_p = 58mm$, $p = 6mm$, $d = 7mm$, $w = 4{,}5mm$ et $L_M = 54mm$. La longueur du guide PEC est fixée à L_p=0.1mm pour la simulation HFSS comme dans le cas précédent, afin de ramener l'excitation au niveau de la discontinuité. Après la caractérisation des guides d'ondes, les résultats du calcul semi-analytique des paramètres S avec le MMg seront comparés à ceux de la résolution *full-wave* avec le logiciel Ansys HFSS.

Caractérisation des guides d'ondes de la structure

La caractérisation du guide d'ondes métallique PEC se fait analytiquement, car les formules pour déterminer les constantes de propagation et identifier ses modes sont connues, comme dans le cas précédent. En revanche, pour le guide d'ondes central à paroi corruguée périodique, les calculs se font numériquement par la méthodologie FEM modifiée de calcul des modes qui est intégrée dans l'algorithme MMg.

Comme le guide corrugué est invariant angulairement (en θ), l'angle α peut être choisi arbitrairement, il est fixé à $\alpha = 20°$. La surface de calcul $\partial\Omega'$ a un rayon $a' = 55mm$, choisi à 3mm en-dessous de la paroi corruguée. Ainsi, la cellule élémentaire utilisée dans le calcul des modes et son maillage sont présentés sur la figure 5.6. Le maillage est raffiné autour du motif corrugué et de la surface de calcul, afin de bien modéliser l'effet de la paroi sur le champ électromagnétique dans cette région.

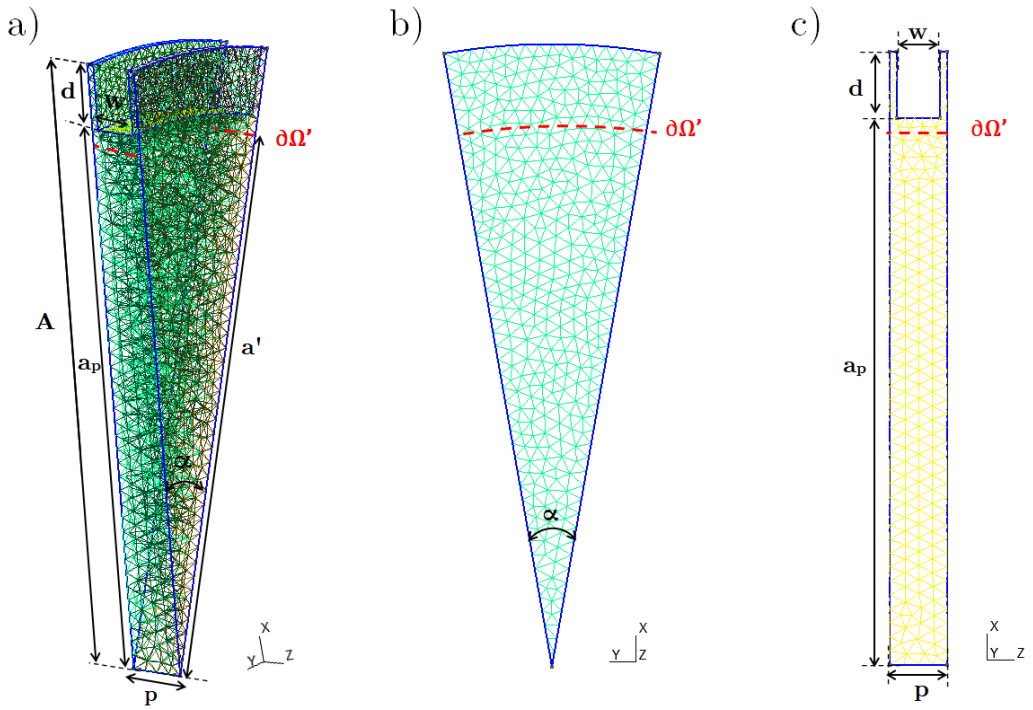


Figure 5.6 - Cellule élémentaire du guide d'ondes central à paroi corruguée périodique a) Vue 3D b) Coupe axiale c) Coupe longitudinale.

Les diagrammes de dispersion des modes d'ordre $m = 1$ sont tracés sur la figure 5.7 notamment pour identifier les modes des deux guides d'ondes utilisés dans le calcul MMg.

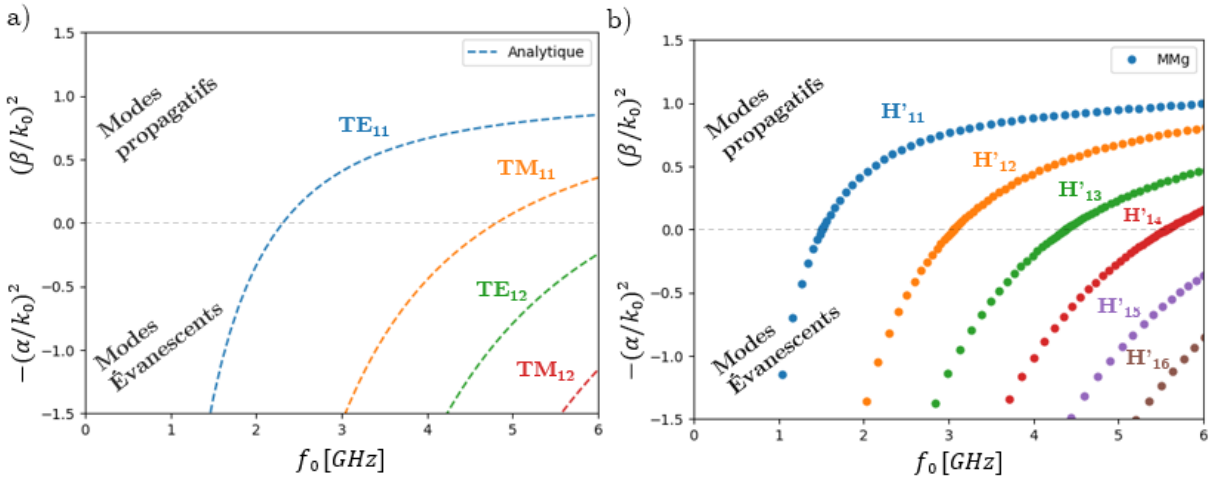


Figure 5.7 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 a) Guide PEC b) Guide à paroi périodique corruguée.

A partir des diagrammes de dispersion, la bande monomode du mode fondamental TE_{11} du guide PEC correspond à la bande de fréquence [2.31GHz,4.81GHz]. Dans cet intervalle, trois modes d'ordre m=1 sont propagatifs dans le guide corrugué : les modes H'_{11}, H'_{12} et H'_{13}, et les autres modes sont évanescents. L'analyse des amplitudes EM permet de déterminer la nature hybride des modes. En revanche, l'écriture expérientielle ne permet pas une distinction facile entre les modes

EH et HE. Par conséquent, nous allons simplement les désigner comme les modes H. Dans ce cas, les modes hybrides ont une tendance forte TE (composante TE dominante) ou une tendance forte TM (composante TM dominante).

Calcul des paramètres [S]

La double transition est simulée dans la bande monomode [2.31GHz,4.81GHz]. Etant donné que le calcul des paramètres [S] se fait fréquence par fréquence, une interpolation des courbes de dispersion est faite, afin d'associer à chaque fréquence de calcul sa constante de propagation interpolée. L'erreur relative de l'interpolation sur la fréquence de calcul ne dépasse pas 0.001% dans ce cas. Par ailleurs, les amplitudes EM numériques sont calculées sur la surface de calcul $\partial\Omega'$ de rayon $a' = 55mm$. Le rayon correspondant au critère de l'orthogonalité de la base modale, quant à lui, est éloigné de 0.1mm du rayon de la paroi corruguée, soit $a_{\Omega,min} = 58.1mm$. Ce rayon et l'erreur relative sur les produits scalaires, notée $g(a_{\Omega,\min})$, qui lui est associée, sont tracés en fonction de la fréquence sur la figure 5.8, cette erreur ne dépasse pas 2%.

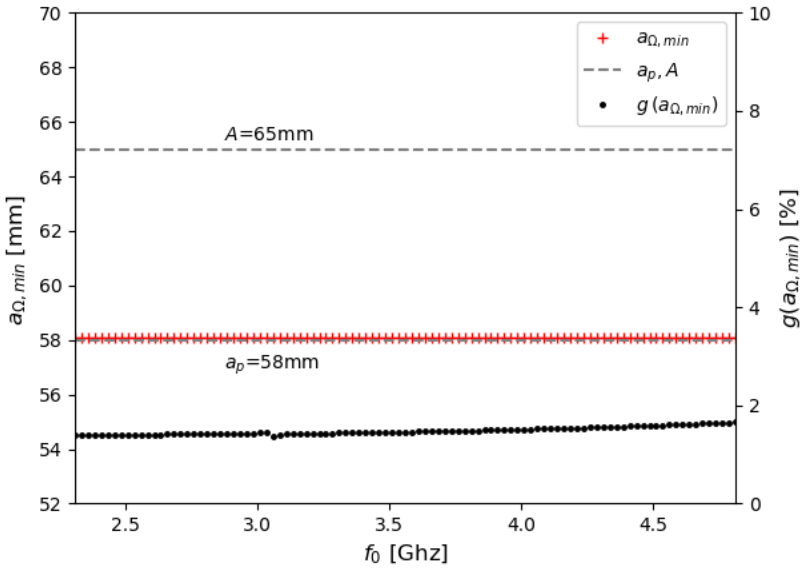


Figure 5.8 - Le rayon $a_{\Omega,min}$ (courbe rouge +), les rayons limites A et a_p (courbe grise ---) et l'erreur moyenne des produits scalaires $g(a_{\Omega,min})$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence pour le guide d'ondes à paroi corruguée périodique.

Les résultats des paramètres [S] sont calculés par l'algorithme MMg et comparés aux résultats du logiciel Ansys HFSS. Les paramètres de la simulation HFSS sont $\Delta S = 0.001$ avec un nombre maximum d'itérations de 25. Pour la résolution MMg, le nombre de modes du guide d'ondes corrugué utilisé dans le calcul est de 12 modes. Ainsi, les paramètres S_{11} et S21 en module sont tracés pour les deux résolutions sur la figure 5.9.

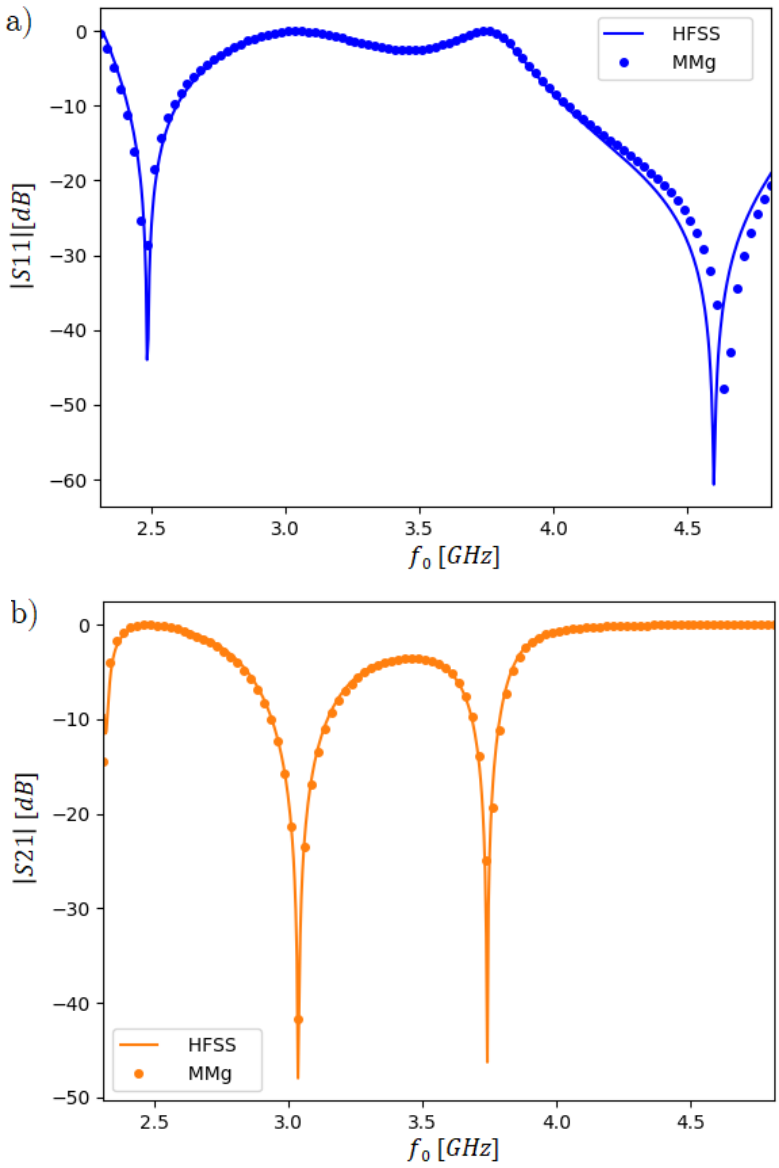


Figure 5.9 - Comparaison des paramètres S issus de l'algorithme MMg et de HFSS a) |S11| b) |S21|.

Les courbes de transmission S_{21} des deux simulations correspondent parfaitement. De même, les courbes de réflexion S_{11} concordent bien, malgré une légère différence autour de la fréquence 4.6GHz. Cette région est particulièrement sensible aux erreurs numériques pour les deux approches, en raison des valeurs extrêmement faibles du coefficient de réflexion. En effet, pour la simulation HFSS, le calcul est itératif avec un critère d'arrêt (sur l'erreur relative ΔS) et une fréquence de maillage définis manuellement, ces choix impactent la précision. Pour l'algorithme MMg, des erreurs numériques apparaissent lors du calcul des amplitudes du champ EM, supposées homogènes sur la cellule, mais aussi lors de la détermination du rayon correspondant au critère d'orthogonalité de la base semi-analytique. Ainsi, en tolérant les erreurs numériques à la résonance pour ces deux méthodes, la précision des résultats permet de valider la résolution MMg pour cette structure de double transition avec une paroi de type 'corrugation'.

5.1.3 Double transition guide PEC/guide à paroi de type 'PIC'/ guide PEC

Dans d'un troisième temps, l'algorithme MMg est testé pour un autre cas de paroi anisotrope périodique. Dans ce cas, la structure étudiée, représentée sur la figure 5.10, est une double transition entre un guide d'ondes métallique (PEC) et un guide d'ondes à paroi anisotrope réelle à motif périodique de type 'PIC'.

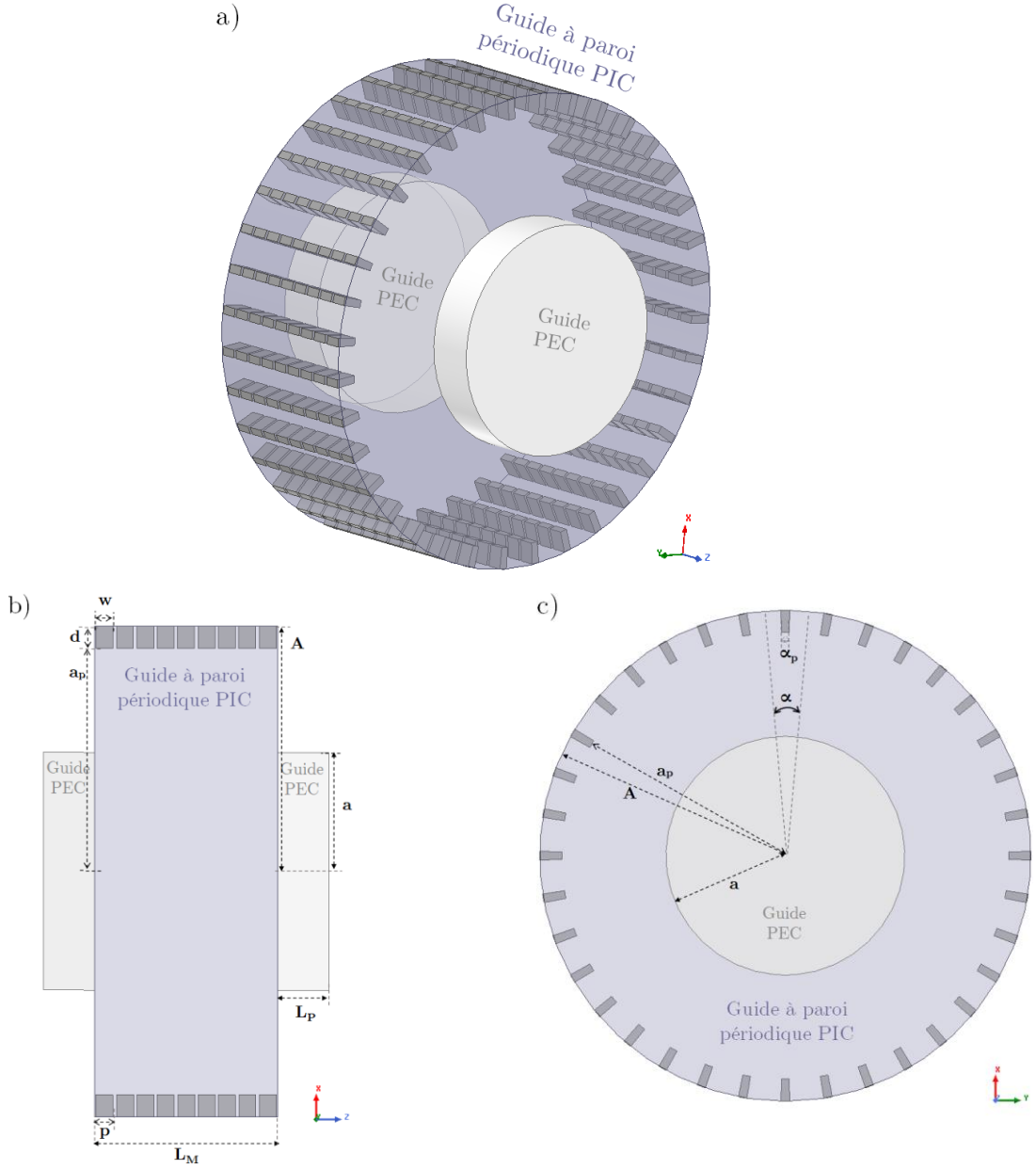


Figure 5.10 - Structure de la double transition entre deux guides métalliques PEC et un guide à paroi PIC périodique : a) vue 3D, b) vue longitudinale, c) vue axiale.

Les dimensions de la structure de la figure 5.10 sont : $A = 72mm$, $a = 35mm$, $a_p = 65.5mm$, $p = 6mm$, $d = 6.5mm$, $w = 5mm$, $\alpha_p = 2°$, $\alpha = 10°$ et $L_M = 54mm$. La longueur du guide PEC est fixée à $L_p = 0.1mm$ pour la simulation HFSS, comme dans

les cas précédents, afin de ramener l'excitation au niveau de la discontinuité. Après la caractérisation des guides d'ondes, les résultats du calcul semi-analytique des paramètres [S] avec le MMg sont comparés à ceux de la résolution *full-wave* avec le logiciel Ansys HFSS.

Caractérisation des guides d'ondes de la structure

La caractérisation du guide d'ondes métallique PEC se fait analytiquement comme dans les cas précédents. En revanche, pour le guide d'ondes central à paroi PIC périodique, les propriétés de dispersion sont déterminées par la méthodologie de calcul des modes FEM modifiée, adaptée aux guides d'ondes périodiques à parois anisotropes, la méthode est intégrée dans l'algorithme MMg.

Dans ce cas de paroi PIC, le guide n'a pas d'invariance ni angulairement (en θ), ni suivant l'axe de propagation (Oz), donc les valeurs de la période p et de l'angle α peuvent impacter les résultats. La surface de calcul $\partial\Omega'$ choisie est de rayon $a' = 63mm$. La cellule élémentaire utilisée dans le calcul des modes et son maillage sont présentés sur la figure 5.11. Le maillage est raffiné autour du motif PIC et de la surface de calcul, afin de bien modéliser l'effet de la paroi sur le champ EM dans cette région.

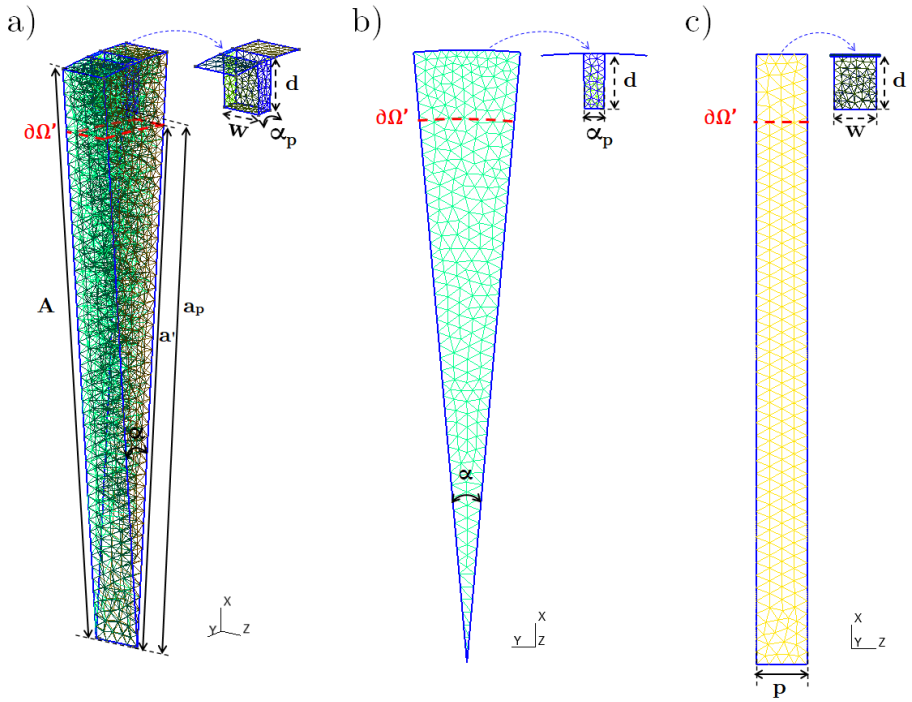


Figure 5.11 - Cellule élémentaire du guide d'ondes central à paroi PIC périodique : a) Vue 3D, b) Coupe axiale, c) Coupe longitudinale.

Les diagrammes de dispersion pour les modes d'ordre $m = 1$ sont tracés sur la figure 5.12 notamment pour identifier les modes des deux guides d'ondes utilisés dans le calcul MMg.

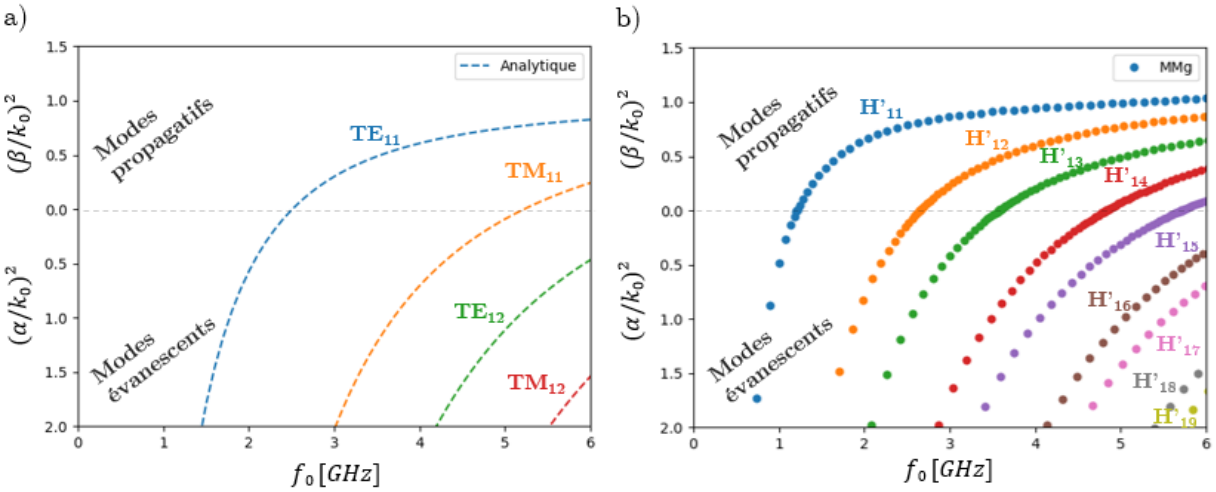


Figure 5.12 - Diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 a) Guide PEC b) Guide à paroi PIC périodique.

A partir des diagrammes de dispersion, la bande monomode du mode fondamental TE_{11} du guide PEC correspond à la bande de fréquence [2.5GHz,5.22GHz]. Dans cet intervalle, quatre modes d'ordre $m = 1$ sont propagatifs dans le guide à paroi PIC : les modes H'_{11}, H'_{12}, H'_{13}, et H'_{14}, les autres modes sont évanescents. A part le mode H'_{11} où les deux composantes TM et TE sont importantes, les autres modes hybrides ont une tendance forte TE (composante TE dominante) pour certains et une tendance forte TM (composante TM dominante) pour d'autres.

Calcul des paramètres [S]

La double transition est simulée dans la bande monomode [2.5GHz,5.22GHz]. Etant donné que le calcul des paramètres [S] se fait fréquence par fréquence, une interpolation des courbes de dispersion est réalisée, afin d'associer chaque fréquence de calcul à sa constante de propagation interpolée. L'erreur relative de l'interpolation ne dépasse pas 0.0005% dans ce cas. Par ailleurs, les amplitudes EM numériques sont calculées sur la surface de calcul $\partial\Omega'$ de rayon $a' = 63mm$. Le rayon $a_{\Omega,min}$ correspondant au critère de l'orthogonalité de la base modale, quant à lui, il est peu variable et se situe entre le rayon de la paroi 'a_p' et le rayon extérieur du guide 'A'. Ce rayon et l'erreur relative sur les produits scalaires qui lui associée sont tracés en fonction de la fréquence sur la figure 5.13. Cette erreur est autour de 1% sur l'ensemble des fréquences, sauf pour les fréquences les plus hautes où elle augmente légèrement, mais demeure en-dessous de 4.2%.

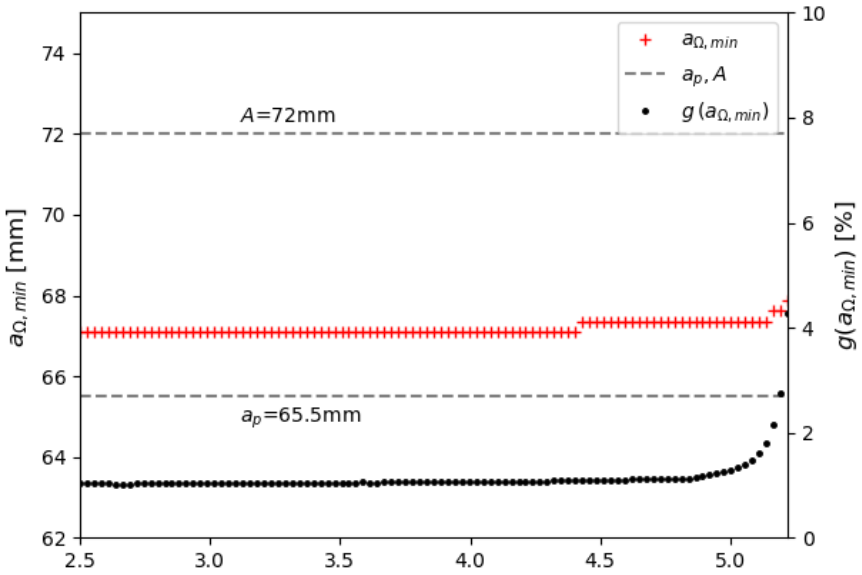


Figure 5.13 - Le rayon $a_{\Omega,min}$ (courbe rouge +), les rayons limites A et a_p (courbe grise ---) et l'erreur moyenne des produits scalaires $g(a_{\Omega,min})$ (courbe noire ...) en fonction de la fréquence pour le guide d'ondes à paroi PIC périodique.

Les résultats des paramètres $[S]$ sont calculés par l'algorithme MMg et comparés aux résultats du logiciel Ansys HFSS. Le critère d'arrêt de la simulation HFSS est réduit à $\Delta S = 0.01$ dans ce cas, car avec une valeur de $\Delta S = 0.001$ la simulation atteint le nombre maximal d'itérations sans converger. Pour la résolution MMg, le nombre de modes du guide PIC utilisé pour le calcul est de 12 modes. Ainsi, les paramètres S_{11} et S_{21} sont tracés en module pour les deux résolutions sur la figure 5.14. Les courbes des paramètres $[S]$ sont en très bonne adéquation entre les deux simulations. Ainsi, les mêmes résonances et comportements en transmission et en réflexion sont observés pour cette double transition. La légère disparité des niveaux de réflexion constatée après 5GHz est dûe probablement aux configurations complètement différentes des deux résolutions et aux erreurs numériques des deux approches qui deviennent plus apparentes en hautes-fréquences (surtout pour des faibles valeurs en dB). Enfin, la concordance des résultats pour ce cas de double transition avec une paroi de type 'PIC' confirme la validité de la résolution MMg.

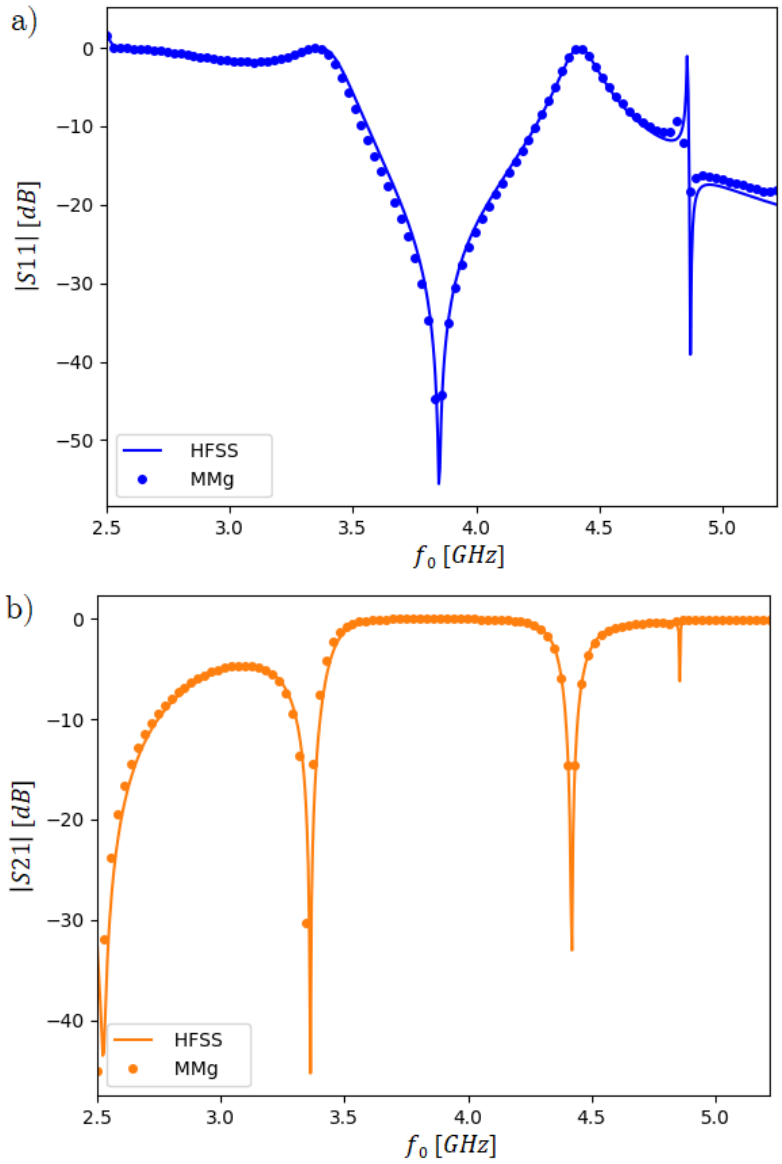


Figure 5.14 - Comparaison des paramètres S issus de l'algorithme MMg et de HFSS : a) |S11|, b) |S21|.

5.2 Conception de la double transition entre guides métalliques et guide à paroi métamatériau PIC

Pour valider la méthodologie de calcul basée sur le Mode-Matching, un prototype de double transition entre des guides métalliques et un guide à paroi métamatériau PIC est proposé. Cette structure est comparée à une double transition entre des guides métalliques et un guide métallique de section plus large. Les guides d'accès métalliques ont les mêmes dimensions dans les deux cas d'étude. Ces deux structures ont été fabriquées et mesurées.

5.2.1 Modélisation des structures

L'objectif du prototype est de valider la résolution MMg adoptée pour analyser le raccordement modal entre deux guides d'ondes liés par un autre guide. Pour cela, nous allons étudier le couplage crée entre l'excitation des guides d'ondes métalliques, notés PEC1, et les modes existants dans le guide d'ondes central. En effet, un couplage fort est identifié par une faible réflexion au niveau de la discontinuité. De ce fait, plus le couplage est important, plus le creux en adaptation est marqué sur le coefficient S_{11}.

Ainsi, nous nous intéressons ici aux jonctions capables de générer des couplages forts et donc d'engendrer des creux en adaptation significatifs. Le but est de pouvoir créer ces creux d'adaptation en fréquence dans la bande d'intérêt et ainsi de maximiser le couplage. Pour cela, il faut déterminer cette fréquence du creux, qui correspond dans ce cas à la fréquence de résonance du guide central qui agit comme un résonateur de longueur $\lambda_g/2$. La formule d'Ortusi est utilisée [2], elle permet de calculer les fréquences de résonance des modes $f_{0,mn}$ à partir de la longueur d'ondes guidée λ_g. La formule est donnée par :

$$f_{0,mn} = \sqrt{(\frac{c}{\lambda_g})^2 + {f_{c,mn}}^2} \tag{5.1}$$

avec c la vitesse de la lumière et $f_{c,mn}$ la fréquence de coupure du mode.

Structure de référence : Double transition guide PEC1/guide PEC2/guide PEC1

Pour la structure de référence, la jonction s'effectue entre deux guides d'ondes métalliques classiques notés PEC1. Ces guides ont un rayon $a = 32.83mm$, permettant d'avoir la bande monomode [2.57GHz, 5GHz], où l'excitation est un mode TE_{11}. En choisissant un guide central de rayon $A = 68.4mm$, trois modes sont propagatifs dans cette bande de fréquence (cf. figure 5.15-c)). La longueur du guide central, considéré comme un résonateur, est fixée à $L = 56mm$ afin d'avoir potentiellement plusieurs résonances dans la bande monomode. Cette longueur correspond néanmoins à $\lambda_g/2$ pour le mode TM_{11} à fréquence centrale de la bande monomode. La structure de la double transition et les diagrammes de dispersion des deux guides sont présentés sur la figure 5.15.

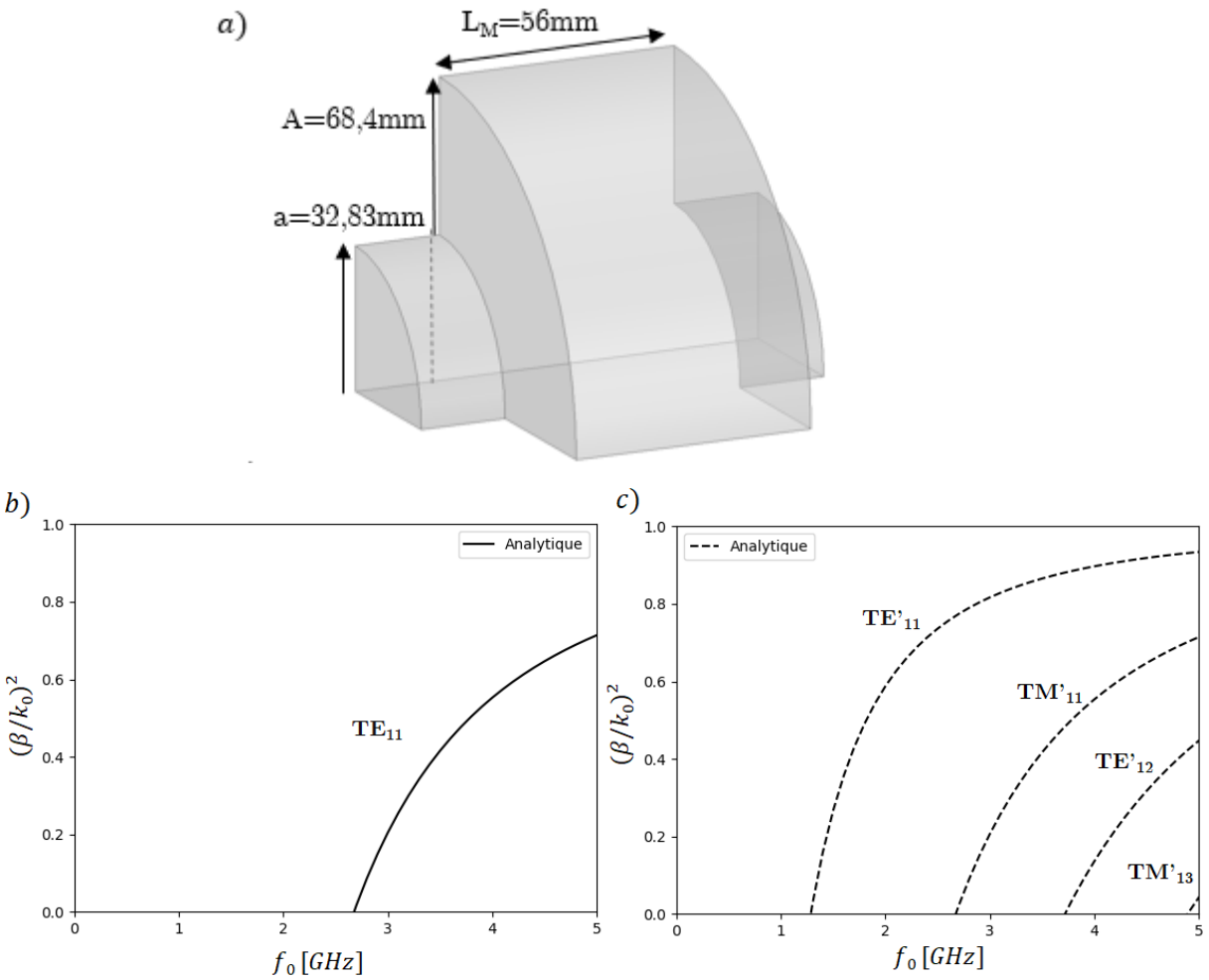


Figure 5.15 – Structure de la double transition et diagrammes de dispersion pour les modes d'ordre m=1 a) Le quart du guide d'ondes en tenant en compte les symétries électrique et magnétique pour le mode TE11, b) Diagrammes de dispersion du petit guide PEC1, c) Diagrammes de dispersion du guide PEC2.

La formule d'Ortusi (5.1) est utilisée pour calculer analytiquement les fréquences de résonance correspondant à la longueur guidée du résonateur λ_g, ce qui donne pour les trois modes propagatifs : $f_{0,TE'11} = 2.97GHz$, $f_{0,TM'11} = 3.78GHz$ et $f_{0,TE'12} = 4{,}58GHz$. Comme les deux guides sont métalliques, le calcul se fait par la résolution analytique MMs proposée dans la partie 3.2. Ainsi, les coefficients S_{11} et S_{21} sont tracés en dB dans la bande monomode sur la figure 5.16 ci-dessous.

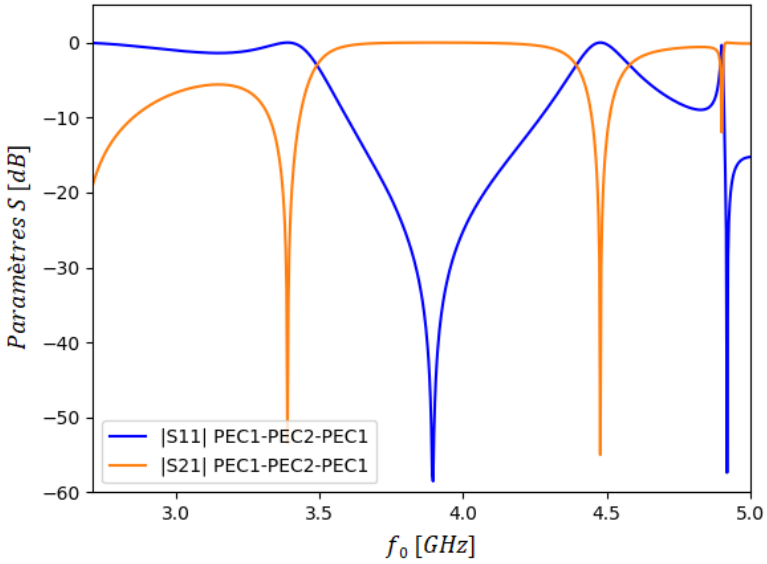


Figure 5.16 – Paramètres S de la double transition PEC1-PEC2-PEC1.

D'après les résultats, une résonance est constatée à la fréquence $f_0 = 3.9GHz$, qui pourrait correspondre à celle calculée avec la formule d'Ortusi pour le mode TM'$_{11}$ ($3.78\,GHz$). Pour le confirmer, les cartographies du champ électrique sont tracées à l'intérieur de la structure sous HFSS à la fréquence 3.9GHz. En prenant en compte les symétries électrique et magnétique du champ, le module du champ électrique total est tracé suivant l'axe du guide sur la figure 5.17.

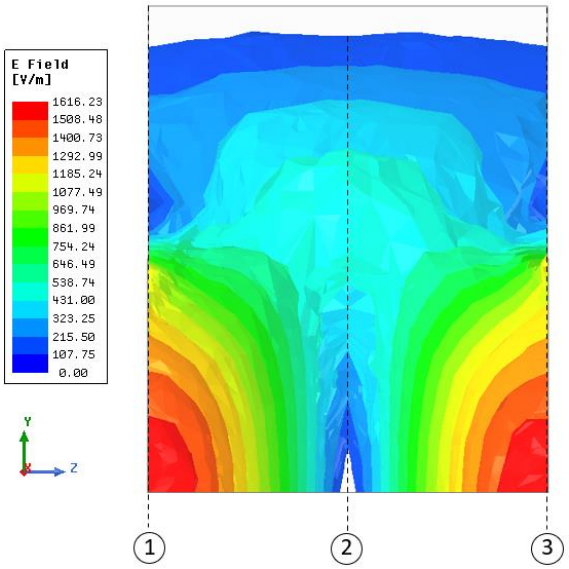


Figure 5.17 – Coupe transversale du champ électrique total à l'intérieur du quart du guide d'ondes, en prenant en considération les symétrique magnétique et électrique imposées par l'excitation.

Les cartographies du champ électrique total sont reconstruites sur les trois plans de la figure 5.17 à l'aide des symétries. Les coupes, notées 1 et 3, correspondent à l'accès des petits guides et elles sont représentées respectivement sur les figures 5.18-1) et 5.18-

3) et la coupe, notée 2, correspond à la section transverse au milieu du grand guide et elle est représentée sur la figure 5.18-2).

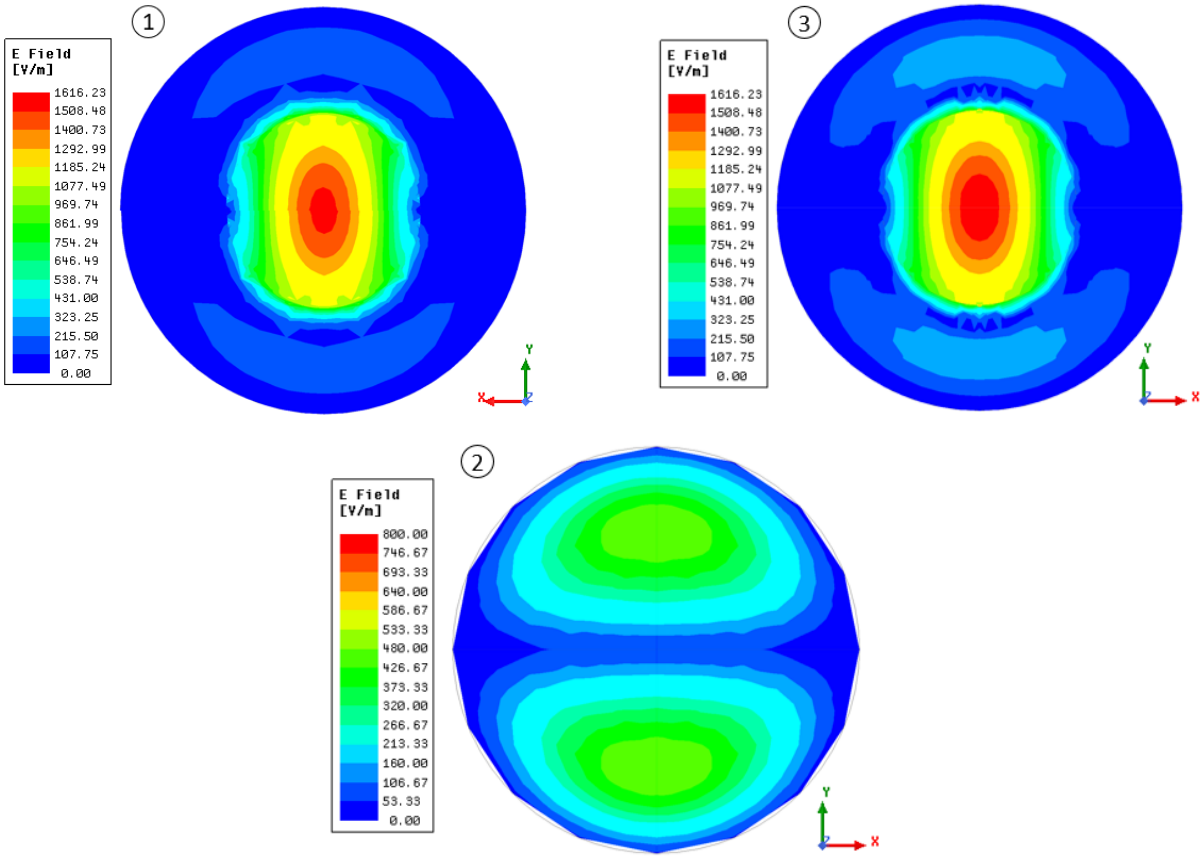


Figure 5.18 - Cartographies du champ électrique dans les trois plans de coupe mentionnés sur la figure 5.17.

A la fréquence de résonance 3.9GHz, le mode TE_{11} correspondant aux excitations des guides en accès est bien observé sur les plans notés 1 et 3. Dans le plan 2, la cartographie identifiée caractérise le mode TM'_{11}, ce qui confirme l'analyse précédente.

Structure étudiée : Double transition guide PEC1/guide à paroi périodique PIC/guide PEC1

Pour cette structure, la jonction s'effectue entre un guide métallique (PEC1) et un guide à paroi périodique PIC. Le guide PEC1 est identique à celui de la structure de référence (rayon $a = 32.83mm$), permettant d'avoir la même excitation dans la même bande monomode $[2.57GHz, 5GHz]$. De même, le guide central a le même rayon extérieur $A = 68.4mm$ et la même longueur $L = 56mm$, seules les parois sont modifiées. Ainsi, trois modes sont propagatifs dans la bande monomode dans ce cas également, mais ils sont de nature hybride (cf. figure 5.19-c)), car le motif périodique PIC considéré comme paroi anisotrope, crée des modes hybrides. Cette même configuration des deux structures permet de se mettre dans les mêmes conditions et de comparer seulement l'effet de la paroi.

Par ailleurs, la paroi métamatériau PIC choisie permet de générer des modes hybrides, avec les mêmes fréquences de coupure mais une constante de propagation supérieure à celle du guide métallique PEC2 à 3.75GHz pour les deux premiers modes H'$_{11}$ et H'$_{12}$, comme constaté sur les diagrammes de dispersion de la figure 5.19-c). La structure de la double transition guide PEC1/guide à paroi PIC/guide PEC1, représentée sur un quart de section en prenant en compte les symétries, et les diagrammes de dispersion des guides PEC1 et PIC sont présentés sur la figure 5.19.

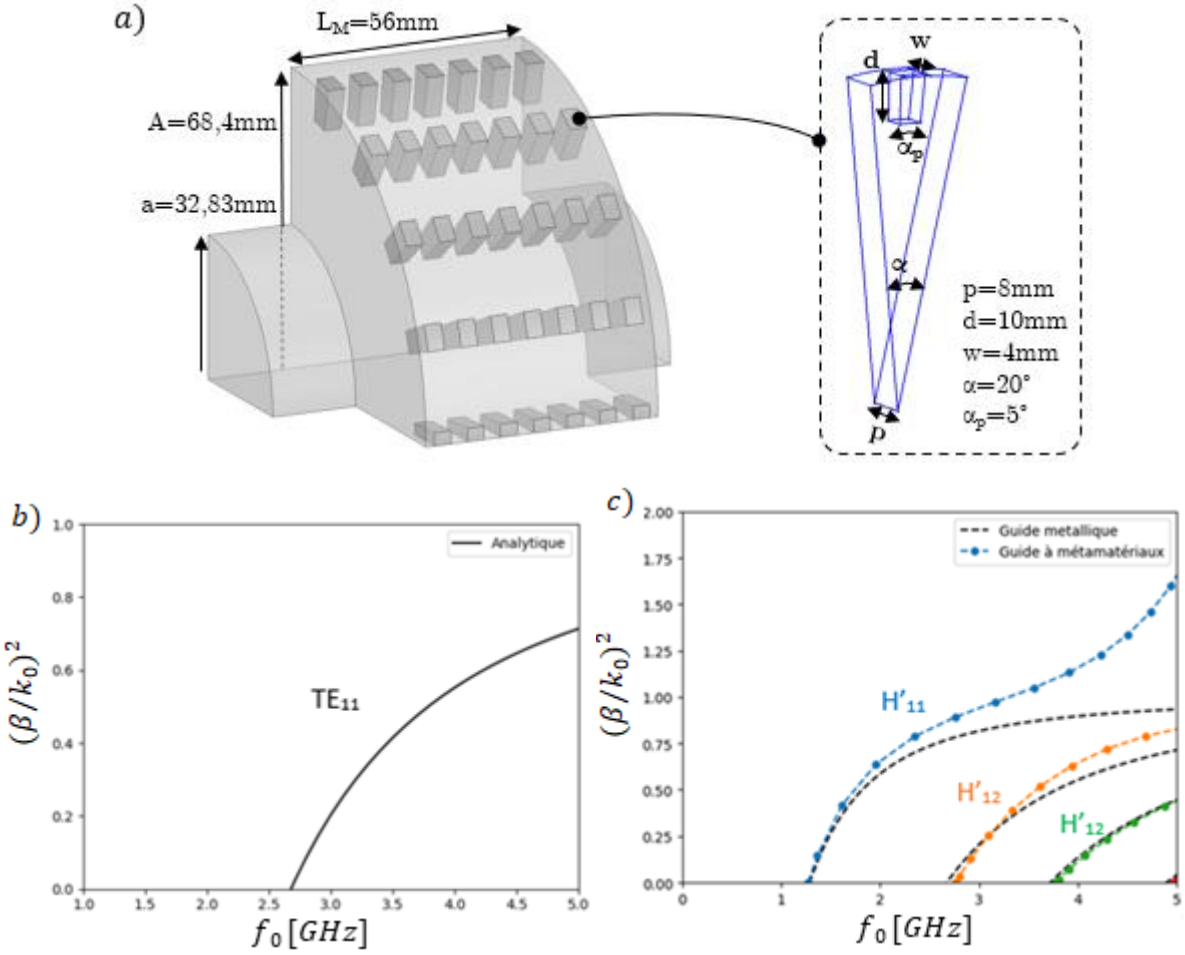


Figure 5.19 – Structure étudiée et diagrammes de dispersion des modes d'ordre m=1 de la double transition a) le quart de la structure en tenant compte des symétries électrique et magnétique du champ TE11 b) Diagrammes de dispersion du guide PEC1 c) Diagrammes de dispersion du guide PIC.

Ainsi, en utilisant la formule d'Ortusi et en imposant la longueur guidée λ_g (avec $\lambda_g = 2L$), les fréquences de résonance des deux premiers modes sont bien réduites avec une valeur de $f_{0,EH'11} = 2.81GHz$ (contre $f_{0,TE'11} = 2.97GHz$ auparavant) pour le mode H'$_{11}$ et une valeur de $f_{0,EH'12} = 3.66GHz$ (contre $f_{0,TM'12} = 3.78GHz$ auparavant) pour le mode H'$_{12}$. Concernant le mode H'$_{13}$, la fréquence a peu varié, $f_{0,EH'13} = 4{,}6GHz$ (contre $f_{0,TE'12} = 4{,}58GHz$ auparavant). Les paramètres [S] sont tracés pour cette structure dans la bande monomode avec les deux résolutions (MMg et HFSS) et ils sont comparés à ceux de la structure métallique référence, afin de voir l'effet de la paroi. Il

convient de mentionner qu'un passage de la valeur de $(\beta_z/k_0)^2$ par 1 pour le mode H'$_{11}$ (cf. figure 5.19-c) implique une constante de coupure nulle $k'_{c,11} = 0$. Ce cas n'est pas traitable analytiquement par le Mode-Matching (étant donné que $k'_{c,11}$ apparaît dans le terme du dénominateur de la base modale), donc les paramètres $[S]$ du MMg ne sont pas calculés aux points autour de 1 avec un critère ($\left|1 - \left(\frac{\beta_{11}}{k0}\right)^2\right| < 0.01$).

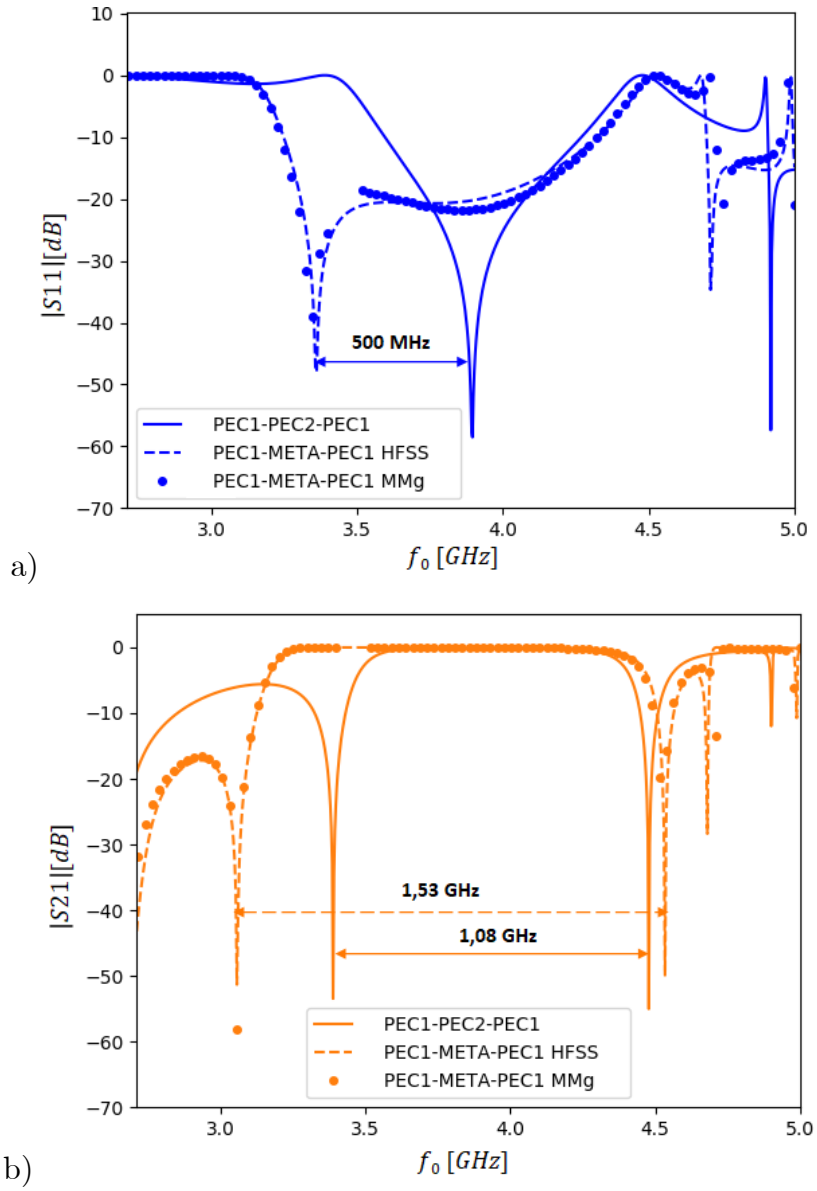


Figure 5.20 - Comparaison des paramètres S entre la structure à paroi métamatériau PIC et la structure de référence à paroi métallique : a) |S11| b) |S21|.

L'analyse des résultats des paramètres $[S]$ permet de tirer plusieurs conclusions. D'abord, une résonance est constatée à la fréquence $f_0 = 3.4GHz$ pour la structure avec une paroi PIC, ce qui est proche de la résonance du mode H'$_{12}$, confirmant le fort couplage de l'excitation avec ce mode hybride à composante TM dominante. Ensuite, en comparant le coefficient S_{11} de ces deux cas, nous observons un écart de 500MHz sur le creux en adaptation (soit une réduction de 12.8% par rapport à la structure de

référence). En parallèle, nous constatons aussi un élargissement de 450MHz de la bande de transmission correspondant aux zéros de transmission entre le cas métamatériau et le cas métallique :

- Pour le cas PEC : [3.39 GHz ,4.48 GHz] soit 1.08 GHz
- Pour le cas PIC : [3.08 GHz ,4.61 GHz] soit 1.53 GHz

Ainsi, en introduisant des parois métamatériaux PIC, nous avons modifié la nature des modes couplés dans le résonateur (guide d'ondes central) ce qui a permis de réduire la fréquence d'adaptation du mode couplé majoritairement et d'élargir la bande de transmission. Ces écarts sont suffisamment significatifs et marqués pour être discriminants sur la mesure.

5.2.2 Prototypes de mesure

Fabrication des guides d'ondes résonateurs

Les structures guidées souhaitées sont réalisées grâce à l'assemblage de galettes en aluminium fabriquées avec la technique de découpe laser, le guide du milieu est fermé par des tronçons usinés en interne par le service mécanique du laboratoire. Les schémas CAO de ces éléments sont présentés sur la figure 5.21.

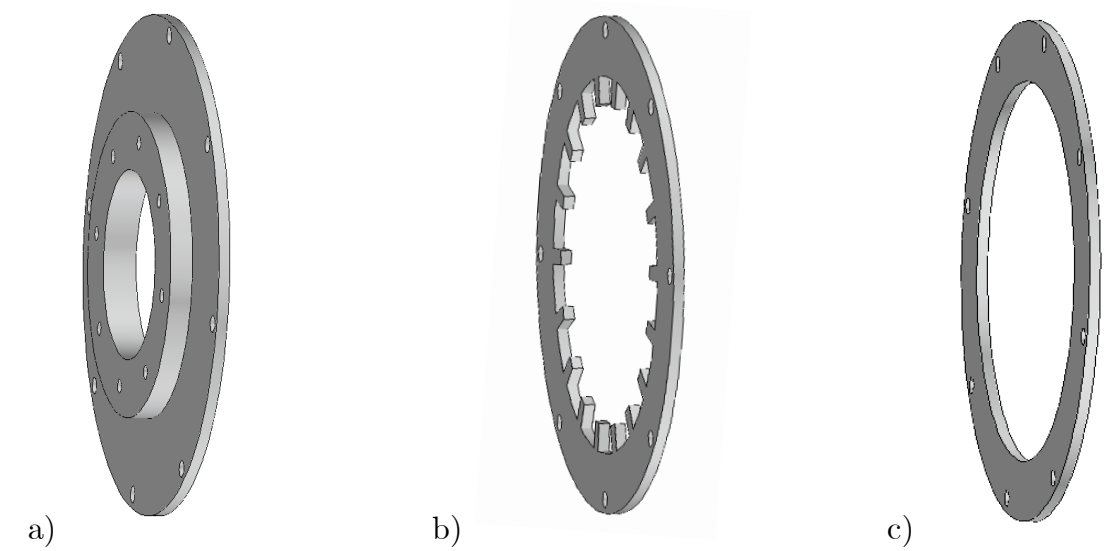
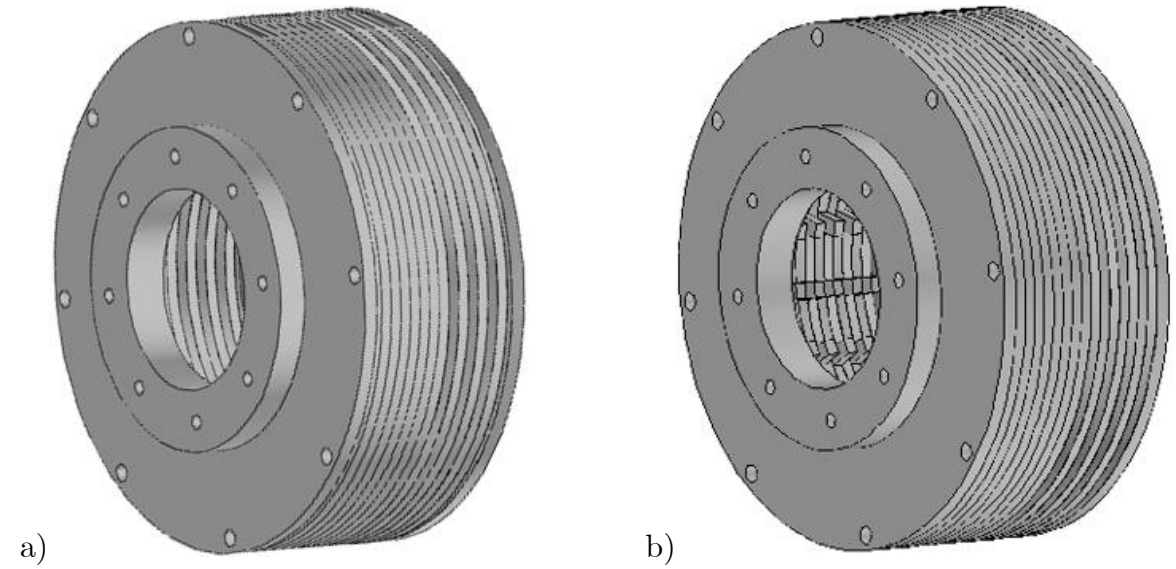


Figure 5.21 - a) Tronçon en entrée et sortie b) Galette à parois PIC c) Galette simple.

L'empilement de galettes simples assemblées par des tiges filetées à l'extérieur permet de créer la structure du guide métallique comme représenté sur la figure 5.22-a). L'empilement en alternance de galettes à paroi en métamatériau PIC et de galettes simples assemblées par des tiges filetées à l'extérieur permet de créer la structure du guide à paroi PIC périodique comme représenté sur la figure 5.22-b). Les guides conçus sont liés aux excitations TE par les tronçons d'entrée et de sortie. Les schémas CAO complets des deux prototypes sont présentés sur la figure 5.22.



a) b)

Figure 5.22 - Vue 3D des schémas CAO des structures : a) cas métallique, b) cas de paroi PIC

L'avantage de cette technique d'assemblage est d'ouvrir la possibilité d'explorer des configurations de structures variées en bénéficiant de plusieurs choix de combinaisons possibles.

Excitation du mode TE_{11}

Pour générer le mode TE_{11} dans les guides métalliques d'accès, une excitation différentielle est proposée avec deux câbles coaxiaux *SMA*. Des sondes électriques en vis à vis plongent dans le guide, qui est fermé par un court-circuit à une extrémité. Cette transition est considérée comme une Transition de Guide d'ondes à Câble coaxial (TGC). Deux signaux TEM au niveau de chacun des câbles coaxiaux sont générés de façon équi-amplitude mais déphasés de 180°, ce qui permet de créer les lignes de champs du mode TE_{11} dans le guide. Le modèle équivalent de la TCG simulé sur HFSS et la cartographie du champ électrique du mode TE_{11} généré sont proposés sur la figure 5.23.

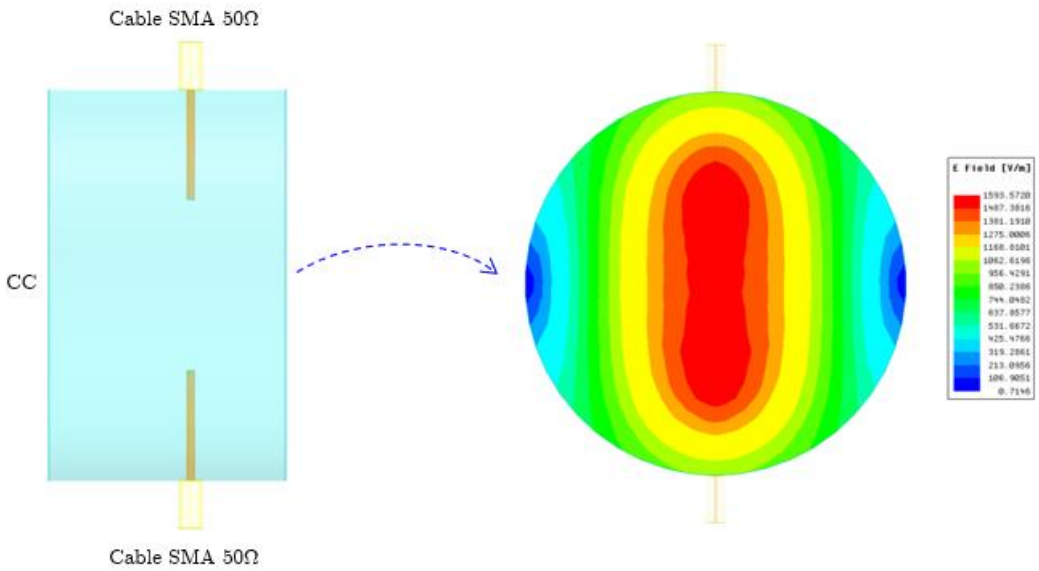


Figure 5.23 - Schéma de la TGC et la cartographie électrique du mode TE_{11} à 4.2GHz.

Une photo de la TCG conçue pour générer le mode TE_{11} est présentée sur la figure 5.24. Les sondes dépassent de 1.8cm dans la TCG.

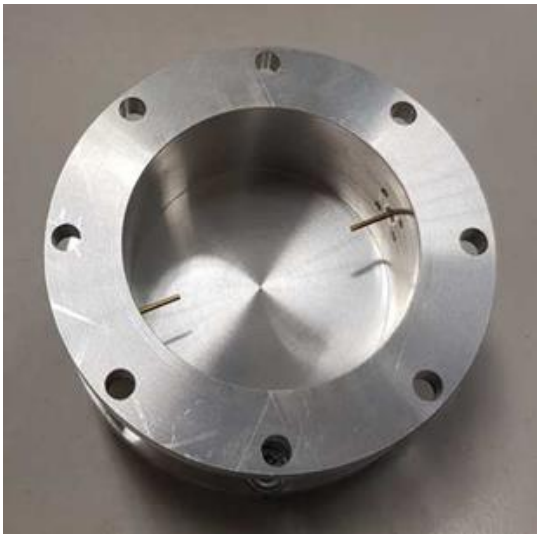


Figure 5.24 - la TGC métallique conçue pour générer le mode TE_{11}.

Pour réaliser cette excitation différentielle, des coupleurs hybrides 3dB et de déphasage 180° ont été utilisés. Il s'agit ici du modèle HS506 du fabricant *TRM Microwave*. Ainsi, le coupleur sépare le signal en deux signaux de même amplitude, soit 3dB sur chaque accès. La totalité de la puissance injectée en entrée du déphaseur est donc retrouvée à l'intérieur du guide circulaire, aux pertes d'insertion subies près (dans ce cas 0,5dB de pertes dans la bande 2GHz-4GHz). Les coupleurs utilisés pour les mesures sont illustrés sur la figure 5.25 :



Fabricant : TRM_Microwave
Modèle : HS506
2-4GHz
3dB +-1dB / 180° +-5°
Pertes d'insertion : 0,5dB max
Isolation : 20dB min

PHASE DIAGRAM

OUT / IN	Σ	Δ	A	B
Σ		ISO	0°	0°
Δ	ISO		0°	180°
A	0°	-90°		ISO
B	-90°	0°	ISO	

Figure 5.25 - Coupleurs utilisées pour les mesures.

Circuit complet des prototypes

Une fois les différentes parties du circuit réalisées, les structures à mesurer sont assemblées. Chaque TGC sera liée à un tronçon d'entrée ou de sortie du guide d'ondes central, le tout est maintenu par des tiges filetées. Les coupleurs sont branchés à chaque TGC par des câbles SMA d'impédance caractéristique 50Ω. Une photo de la configuration du circuit mesuré est présentée sur la figure 5.26.

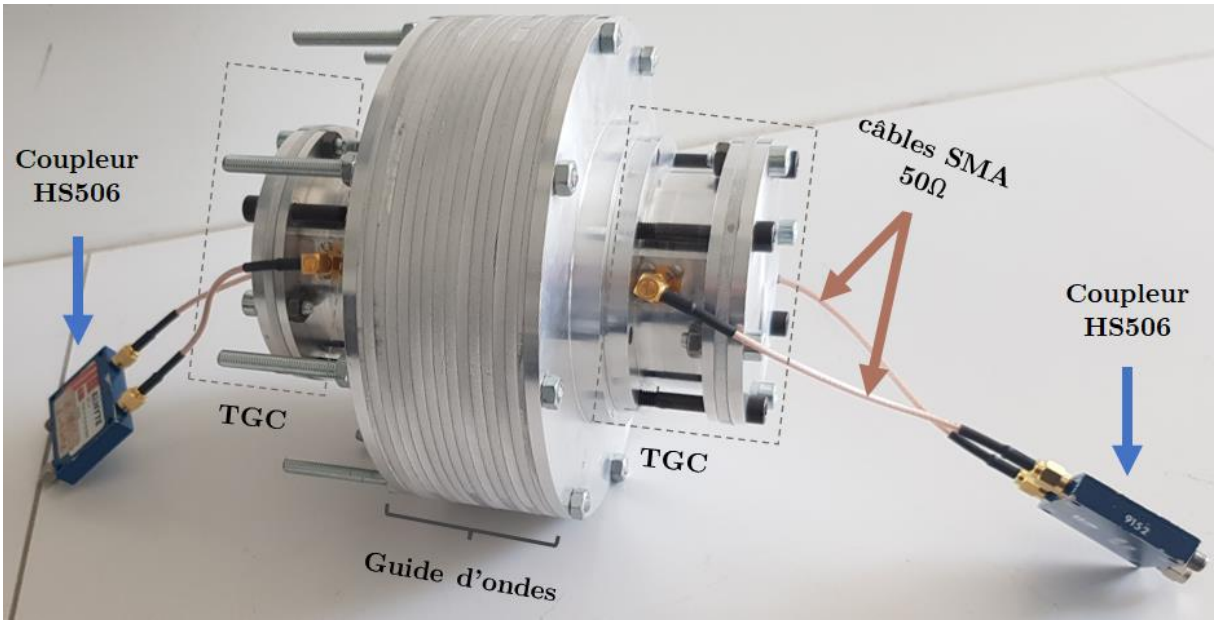


Figure 5.26 - Circuit complet pour mesurer la double transition.

Les paramètres $[S]$ ont été mesurés avec un Analyseur de Réseau Vectoriel. Le modèle utilisé est un 37369C du fabricant Anritsu (cf. figure 5.27), pouvant mesurer la bande 40MHz-40GHz. L'analyseur n'a que deux accès donc on ne peut mesurer que des dipôles ou des quadripôles. Un calibrage SOLT (Short, Open, Load & Thru) est fait au

bout des câbles coaxiaux, le circuit mesuré commence ainsi à l'entrée du premier coupleur et finit à la sortie du 2° coupleur.

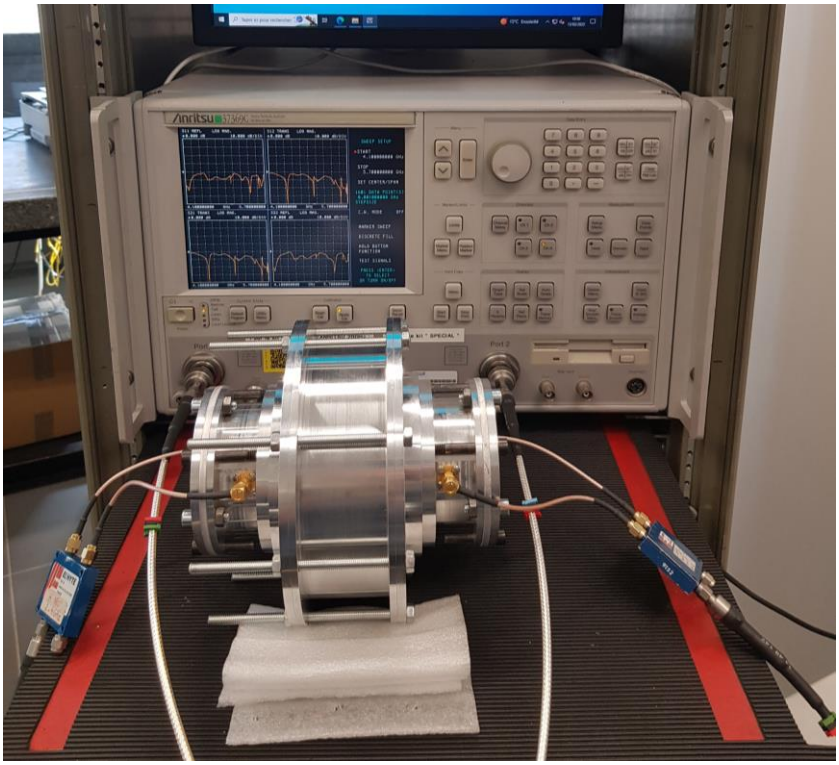


Figure 5.27 - Banc de mesure.

5.2.3 Résultats des prototypes

Simulation ADS

Pour procéder à une comparaison juste entre les paramètres S simulés et ceux mesurés, il est indispensable d'inclure toutes les parties du circuit mesuré dans la simulation des doubles transitions. Il est important de se mettre dans les mêmes conditions que la mesure et ainsi prendre en compte les pertes, présentes notamment dans les coupleurs et les câbles. Pour ce faire, le logiciel de simulation Keysight ADS™ (logiciel Advanced Design System) est utilisé. Dans un premier temps, les simulations des doubles transitions avec les TCG sont effectuées sur HFSS en vue d'être insérées dans la simulation ADS et comparées à la mesure. Les schémas de simulation pour les deux cas de structures sont illustrés sur la figure 5.28.

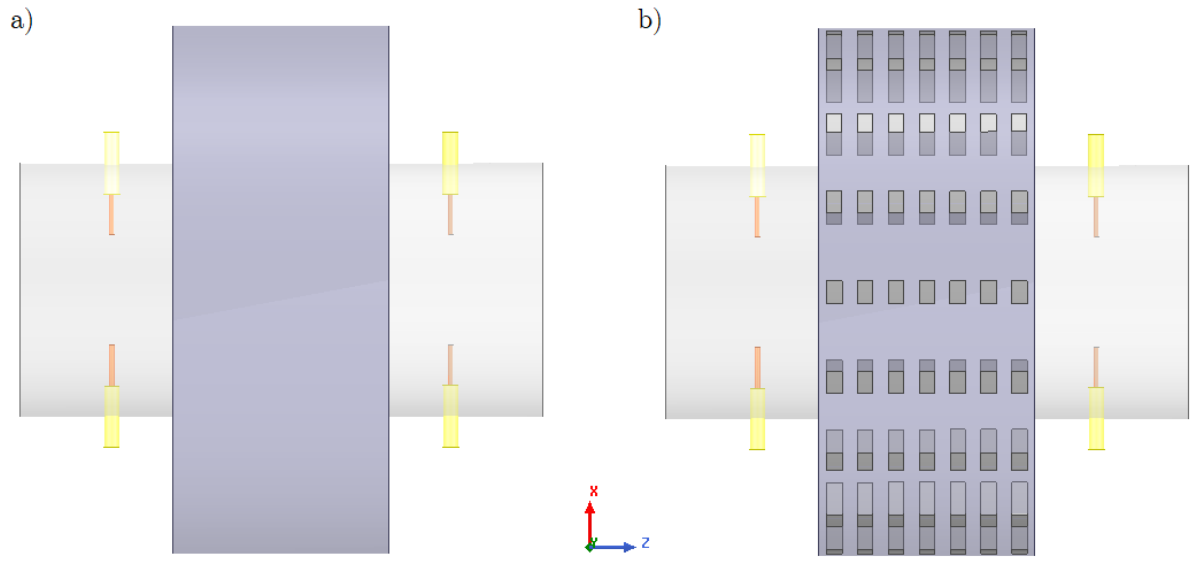


Figure 5.28 - Circuit de simulation de la double transition : a) cas métallique, b) cas PIC.

Les résultats des simulations sont exportés par la suite et utilisés comme boîte noire dans ADS. Les coupleurs et les câbles sont mesurés séparément et ils sont intégrés dans les blocs coupleurs dans la simulation ADS afin de prendre en considération leurs pertes dans le circuit global. Ainsi, les différents blocs du circuit complet mis en cascade sur ADS sont représentés sur la figure 5.29.

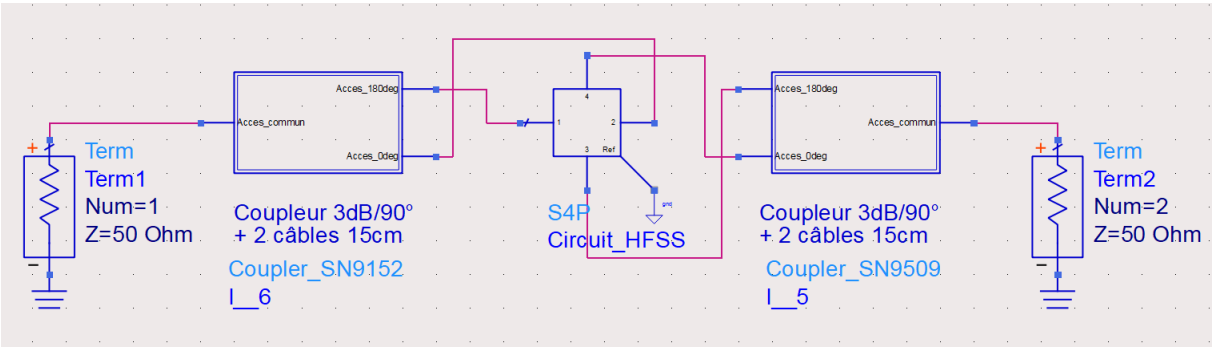


Figure 5.29 - Schéma général du circuit sur ADS.

Résultats des paramètres [*S*]

Grâce à la simulation ADS, une comparaison des paramètres [*S*] a été effectuée pour les deux structures. Les coefficients S_{11} et S_{21} sont calculés sur l'intervalle de fréquence [2.67 GHz, 4.65GHz] inclus dans la bande monomode. En effet, à partir de 4.65GHz les pertes des coupleurs deviennent importantes, car ils sont adaptés pour une utilisation sur la bande 2GHz-4GHz. Les résultats obtenus sont tracés pour la double transition métallique et la double transition avec une paroi en PIC respectivement sur les figures 5.30 et 5.31.

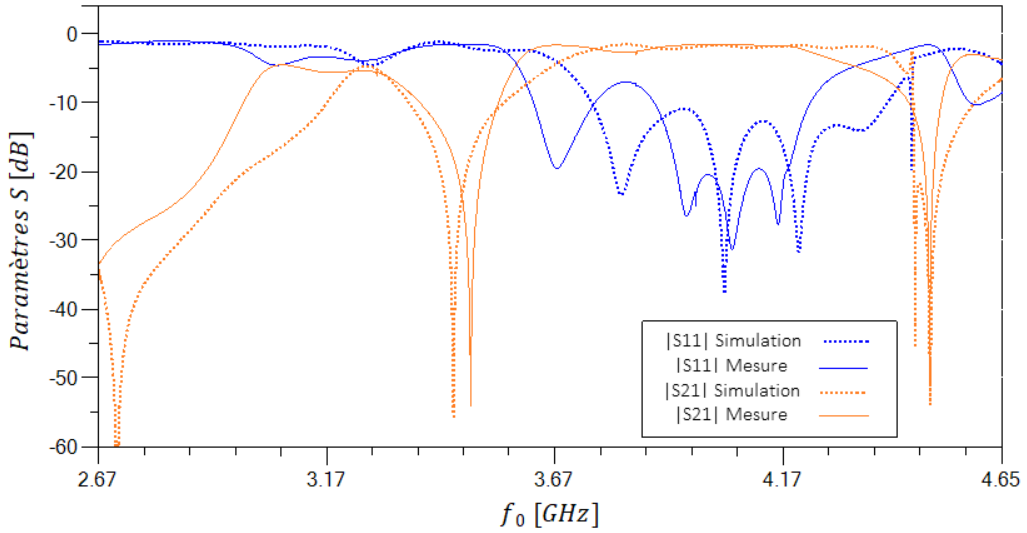


Figure 5.30 - Paramètres [S] du circuit de la double transition métallique.

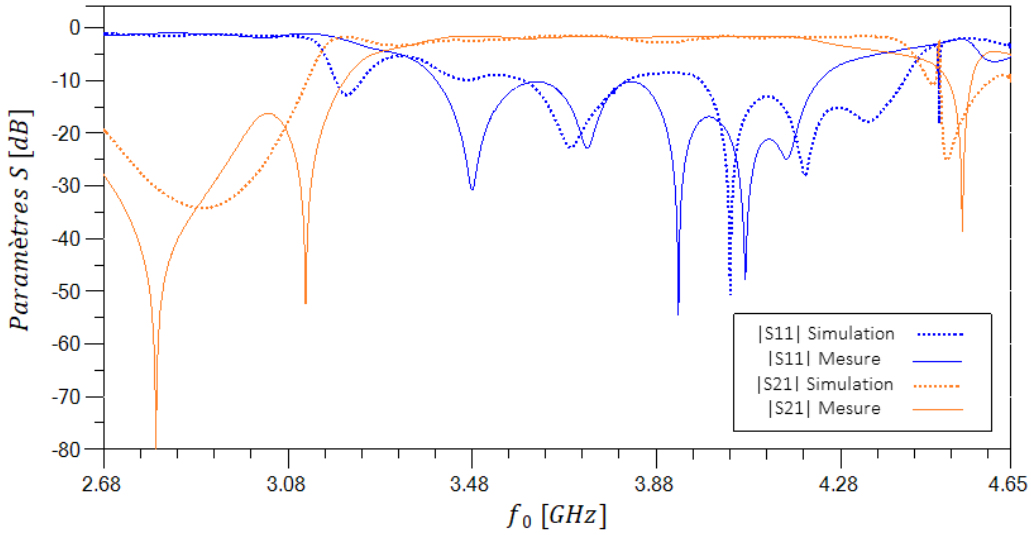


Figure 5.31 - Paramètres [S] du circuit de la double transition avec une paroi PIC.

Les résultats correspondent bien dans l'ensemble, avec des comportements similaires qui se manifestent, entre mesures et simulations. En analysant la transmission, les niveaux sont semblables entre la mesure et la simulation pour les deux cas de structure. Pour la réflexion, quelques différences sont constatées notamment lorsque les niveaux en décibels sont faibles. Dans ces zones, les valeurs sont très sensibles aux pertes du côté mesure et aux erreurs numériques du côté simulation. D'un autre côté, des petits décalages en fréquence sont observés à certaines résonances. Ce phénomène a été expliqué auparavant dans [3], une étude paramétrique a démontré que les paramètres [S] sont très sensibles à la précision des dimensions de la structure et que des petites variations de l'ordre de quelques μm peuvent engendrer des décalages en fréquence.

Par ailleurs, la comparaison des coefficients de transmission mesurés entre les deux structures (cf. figure 5.33) permet de constater un élargissement de 340MHz de la bande, correspondant aux zéros de transmission, avec l'introduction des parois en PIC.

Cette valeur est relativement proche du résultat attendu en simulation (450MHz calculé numériquement auparavant). En parallèle, nous constatons que la structure à paroi PIC donne des niveaux d'adaptation meilleure que la structure classique sur une large bande de fréquences (cf. figure 5.32).

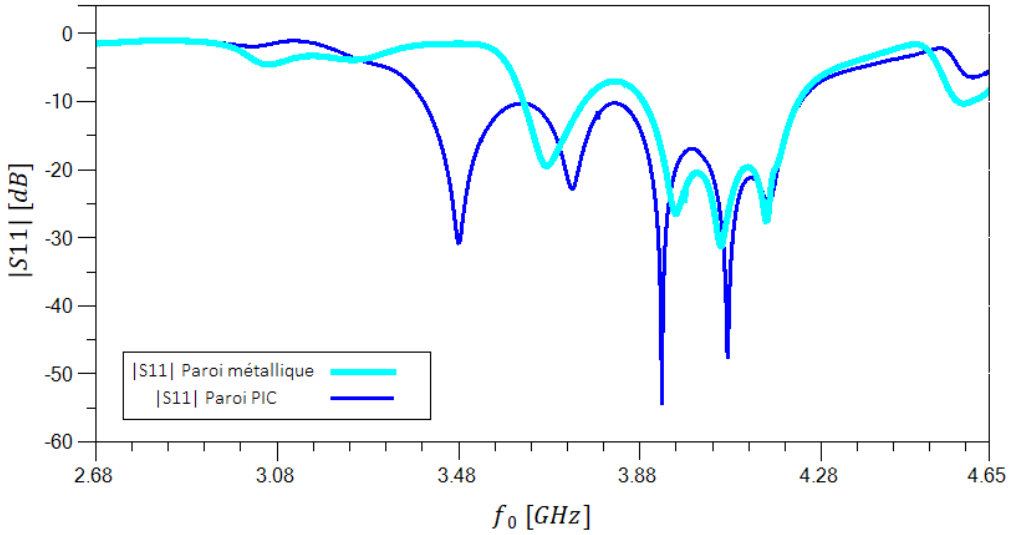


Figure 5.32 - Module du coefficient $|S_{11}|$ mesuré pour les deux structures : métallique et PIC.

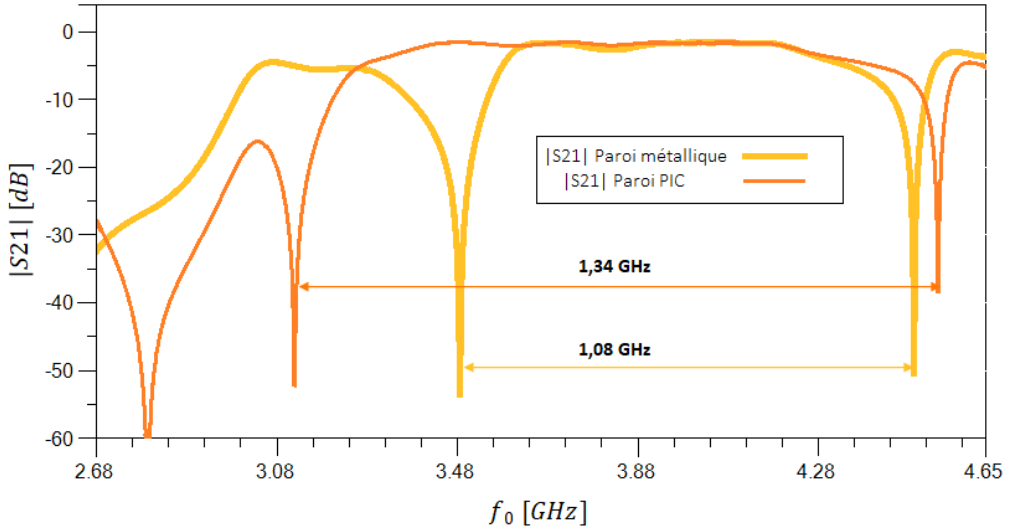


Figure 5.33 - Module du coefficient $|S_{21}|$ mesuré pour les deux structures : métallique et PIC.

Ainsi, les résultats obtenus permettent de valider le prototype réalisé et la méthode développée. En effet, les paramètres $[S]$ de l'algorithme MMg sont équivalents à ceux issus de HFSS (cf. figure 5.20). Les simulations des doubles transitions ont été faites ici directement sur HFSS, car il permet de prendre en compte les TGC, contrairement à l'algorithme MMg.

Conclusion

Le prototype réalisé dans la partie 5.2.2 de ce chapitre rejoint les simulations numériques de la partie 5.1 et valide ainsi la démarche semi-analytique basée sur le

raccordement modal. Cette méthode permet la caractérisation les doubles transitions aves des guides d'ondes à parois métamatériaux. L'avantage de cette méthodologie, contrairement à une approche *full wave* (où le calcul se fait à chaque point de la structure), est de pouvoir identifier les modes du guide en caractérisant la paroi anisotrope périodique seulement sur une cellule élémentaire.

Bibliographie

[1] Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., "SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python", *Nature methods*, 2020, vol. 17, no 3, p. 261-272.

[2] Balanis, C.A., "Circular waveguides". *Int. J. Electron*, vol. 1996, no 5, p. 551-564, 1996.

[3] Byrne, B., "Etude et Conception de Guides d'Onde et d'Antennes Cornets à Métamatériaux", Toulouse : Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, Novembre 2016.

Conclusions et perspectives

Contribution générale

D'un point de vue général, les travaux développés dans cette thèse ont permis la caractérisation des structures guidées à paroi métamatériau périodique considérée comme une paroi anisotrope. Pour ce faire, des démarches de calcul analytiques ont été développées, notamment la détermination de l'impédance de mode pour les modes hybrides, et les calculs analytiques basés sur le Mode-Matching pour traduire le couplage au niveau des transitions des guides. En outre, des approches numériques ont été adoptées, notamment le modèle statistique pour déterminer les impédances de surface modélisant la paroi, la démarche de calcul des amplitudes des modes et l'orthogonalisation numérique de la base modale. En parallèle, une stratégie d'optimisation a été mise en place pour déterminer quelle paroi génère une cartographie de champ demandée. Enfin, l'objectif final de ces travaux était de bien maîtriser le comportement de l'onde électromagnétique dans les structures guidées à parois métamatériaux, ce qui est chose faite sur les prototypes développés.

Bilan de thèse

Les travaux menés dans cette thèse ont traité divers aspects clés de la conception des structures guidées circulaires à parois métamatériaux : de la modélisation de la paroi métamatériau périodique à la caractérisation de la structure complète contenant des discontinuités, en passant par une optimisation de la forme du motif périodique pour obtenir les cartographies voulues pour le champ EM. Dans ce sens, un état de l'art a été réalisé dans le chapitre 1 pour explorer les travaux portant sur les structures guidées, notamment sur les transitions des guides d'ondes et la modélisation des parois.

Dans le chapitre 2, les propriétés du champ EM sont caractérisées dans les guides d'ondes à paroi métamatériau périodique considérée comme anisotrope. Dans un premier temps, l'impédance de mode est généralisée pour les modes hybrides qui peuvent apparaître avec des guides à paroi anisotrope. Ensuite, la théorie modale élargie est explorée et certains de ses aspects sont améliorés, notamment la démarche de calcul des modes propagatifs et le développement d'une approche statistique pour trouver les impédances de surface équivalentes modélisant la paroi anisotrope du guide d'ondes circulaire. Dans un second temps, une méthodologie basée sur les éléments finis 3D a été développée donnant un calcul direct et très rapide des modes propagatifs. Des modifications des conditions de périodicité permettent de simplifier la formulation variationnelle FEM dans le cas évanescent pour obtenir tous les modes de la base modale. Enfin, la combinaison du calcul FEM avec la TME permet d'obtenir les cartographies des modes à l'intérieur de la structure.

Afin de maîtriser les cartographies du champ électromagnétique dans ces structures à paroi métamatériau, une optimisation de la forme de paroi est effectuée dans le chapitre 3. Pour cela, des formulations du problème inverse non linéaire ont été proposées pour plusieurs types de paroi. Trois algorithmes d'optimisation locale (NOMAD, NLOPT et IPOPT) sont utilisés. Les résultats obtenus sont prometteurs et les performances d'une méthode à l'autre sont comparées en terme de temps et de qualité de solutions proposées. Concernant le temps de calcul, les simulations convergent dans des temps très raisonnables. Le solveur NOMAD est retenu comme le plus approprié.

Dans le chapitre 4, les structures guidées à double transition sont modélisées par des circuits équivalents contenant des composantes qui traduisent les différents milieux, les discontinuités ainsi que les symétries de la structure. La méthode du Mode-Matching est explorée pour un raccordement modal aux discontinuités des doubles transitions des guides. Dans un premier temps, une résolution MM simplifié analytique est développée pour étudier une double transition de structure métallique classique. Dans un second temps, une résolution MM généralisé (MMg) semi-analytique est développée pour traiter les doubles transitions entre les guides métalliques et les guides à parois métamatériaux contenant des modes hybrides. Finalement, un outil numérique a été développé permettant de déterminer les paramètres $[S]$ de cette double transition. Cet outil inclut les calculs pour définir les matrices impédances de mode (notamment hybrides) et les produits scalaires caractérisant le couplage de ces modes avec l'excitation, qui sont déterminés analytiquement. Deux approches numériques sont adoptées pour déterminer l'impact de la paroi anisotrope sur les amplitudes des modes et pour trouver le rayon de calcul permettant d'orthogonaliser la base modale numériquement.

Dans le chapitre 5, différents cas sont simulés pour valider la résolution semi analytique (MMg) avec plusieurs types de parois. Les résultats sont comparés avec ceux d'une approche éléments finis volumique pour validation. Par la suite, deux prototypes de double transition ont été réalisés pour confirmer expérimentalement les résultats numériques. Ils mettent surtout en évidence les atouts liés à l'introduction des métamatériaux dans les structures guidées et les multiples perspectives d'applications qui en découlent.

Originalités

- Détermination d'une nouvelle matrice d'impédance de mode pour tous les modes dont les hybrides, elle est intrinsèque et indépendante des variables géométriques, elle s'appuie sur une écriture exponentielle des modes.
- Un modèle statistique pour choisir la surface d'homogénéisation des impédances de surfaces équivalentes caractérisant l'effet de la paroi anisotrope réelle.

- Une nouvelle démarche pour simplifier le terme de bord dans la formulation variationnelle des éléments finis afin d'identifier les modes évanescents tout comme les modes propagatifs.
- Formulation d'un problème inverse non linéaire avec contraintes de type 'boite noire' pour optimiser la paroi métamatériau périodique.
- Démarche numérique directe pour calculer les amplitudes du champ électrique et magnétique pour tous les modes dont les hybrides afin de modéliser la base modale utilisée dans le Mode-Matching.
- Le développement analytique des produits scalaires représentant les couplages des modes avec la source en excitation.
- Approche numérique pour choisir le domaine minimisant les produits scalaires entre les modes d'un même guide et ainsi orthogonaliser la base modale hybride numériquement.

Perspectives

Perspectives à court terme

Caractérisation et optimisation de plusieurs transitions de guides d'ondes :

L'optimisation du design de la paroi métamatériau s'est révélée très efficace pour obtenir des cartographies prédéfinies dans des guides d'ondes. Il est envisagé d'étendre cette démarche d'optimisation appliquée à une seule portion de guide d'ondes infini aux structures guidées à double transition. Pour cela, les algorithmes d'optimisation locale proposés seront utilisés avec le Mode-Matching afin d'obtenir des cartographies d'un champ requis avec des propriétés inhabituelles. Ce champ sera généré à une distance donnée de la discontinuité.

De plus, dans le but d'explorer davantage les possibilités offertes par l'optimisation, il est également prévu d'élargir la structure guidée étudiée en assemblant plusieurs portions de guides avec des parois de natures différentes. En optimisant ces parois, les couplages créés aux discontinuités de la structure ouvrent la possibilité à la création de cartographies avec de nouvelles propriétés.

Caractérisation et l'optimisation des structures guidées rayonnantes :

En parallèle, il est envisageable d'analyser les transitions de guides d'ondes à ouvertures rayonnantes en se basant sur les calculs du raccordement modal pour maîtriser les cartographies du champ à l'ouverture et optimiser les performances du rayonnement. Cela prépare également le terrain à long terme à la conception d'une antenne cornet à paroi métamatériau avec des performances prometteuses.

Perspectives à moyen terme

Modélisation complète des propriétés des parois métamatériaux :

La caractérisation des métamatériaux a été effectuée en se concentrant sur les aspects anisotropes, dispersifs et périodiques, afin de simplifier la modélisation. Comme perspective, il serait donc intéressant de pousser l'exploration jusqu'à créer et analyser les effets de résonance possibles grâce aux matériaux LHM (Left Handed Metamaterials) à permittivité et perméabilité simultanément négatives. Ensuite, il serait pertinent d'utiliser les démarches développées dans cette thèse afin de modéliser des structures guidées avec parois LHM en contrôlant les variations locales.

En outre, l'hypothèse d'homogénéisation appliquée à la cellule périodique a permis la modélisation de la paroi métamatériau par des impédances de surface équivalentes uniformes (et donc des amplitudes du champ EM de modes également uniformes). Pour cela, deux approches ont été adoptées dans cette thèse : une statistique pour valider le choix des impédances équivalentes et une directe en caractérisant les amplitudes EM des modes hybrides sans recourir au calcul des impédances. Même si ces deux approches numériques se sont révélées efficaces, elles ne reposent pas sur un modèle mathématique rigoureux qui permet de limiter précisément les erreurs de modélisation. Ainsi, l'une des perspectives est d'analyser davantage les travaux sur la théorie d'homogénéisation et de les appliquer aux parois métamatériaux, afin de modéliser leurs propriétés locales par des modèles aux caractéristiques effectives plus rigoureuses mathématiquement. Ces travaux seront le sujet de futures recherches au sein de l'équipe GRE du Laplace.

Perspectives de moyen à long terme

Conception d'une antenne cornet à parois métamatériaux :

Les antennes cornets sont très souvent utilisées comme source de rayonnement dans les télécommunications spatiales et les radars. En abordant le cornet comme un assemblage de portions de guides d'ondes dont la section augmente progressivement, il serait possible d'analyser et concevoir ce type d'antenne avec des parois métamatériaux avec des performances spécifiques. Pour cela, les résolutions avec le Mode-Matching adoptées seront appliquées aux transitions et combinées avec la méthode des éléments finis de frontière (BEM) pour maîtriser les cartographies du champ EM à l'ouverture et contrôler le rayonnement de l'onde.

L'optimisation de l'antenne :

Pour répondre à un cahier des charges spécifiques et maximiser les performances de l'antenne pour les applications visées, l'optimisation des parois de l'antenne cornet serait envisagée en insérant des métamatériaux. Pour ce faire, une généralisation de la formulation du problème inverse d'optimisation serait envisagée en proposant des parois différentes tout au long du cornet afin d'inclure les possibilités données par des motifs inhomogènes et de structuration complexe.

Extension aux dispositifs passifs guidés :

En parallèle, l'optimisation et la maîtrise des cartographies dans les structures guidées aux parois métamatériaux ouvrent également la possibilité à la conception d'autres types de composants et dispositifs passifs, comme des filtres, des déphaseurs et des résonateurs, avec des performances optimisées pour diverses applications.

Liste des publications et communications

Revue

- Bellouch, A., El Alami, A., Messine, F., & Raveu, N. "An optimization-based methodology to design waveguides with metamaterial walls", *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, Vol. 41 No. 6, 2022.

Conférence nationale

- Bellouch, A., Raveu, N., Franc, A-L., "Caractérisation des guides d'onde cylindriques 3D à parois métamatériaux", *XXIIèmes Journées Nationales Microondes, P203*-207, https://box.xlim.fr/f/16374abcbf86497195ae/?dl=1, 2022.

Conférences internationales

- Bellouch, A., El Alami, A., Messine, F., & Raveu, N, "Optimization of a 3D-Cylindrical Metamaterial Waveguides", *16th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism, Szczecin-Poland, 2021.*

- Bellouch, A., Larrouy, A., Raveu, N, Franc, A-L., & Poirier, J-R., "Statistical Approach to choose the impedance calculation surface in the Modal Expansion Theory for 3D- cylindrical metamaterial waveguides", *The 11th International Symposium on Electric and Magnetic Fields,* 2021.

Webinaire

- Bellouch, A., Raveu, N. & PERRUSSEL, R., "Modélisation des modes évanescents dans les guides d'ondes à parois métamatériaux", *Groupement de Recherche SEEDS (Systèmes d'Energie Electrique dans leurs Dimensions Sociétales) du CNRS*, 2021.

Revues en cours de rédaction

- Bellouch, A., Raveu, N., Perrussel, R., & Franc A-L, "Finite element analysis of evanescent modes in waves guides with metamaterials walls".

- Bellouch, A., Raveu, N., & Franc A-L. "Analysis of double transition from PEC wave-guide excited by TE11 to periodic metamaterial wave-guide using mode matching technique".

Annexe A

Opérations sur les fonctions de Bessel

Les fonctions Bessel $J_m(x)$ sont solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial x}+\left(1-\left(\frac{n}{x}\right)\right)F=0 \qquad (A.1)$$

A.1 Propriétés de calcul

La fonction de Bessel est définie par une série entière de rayon de convergence infini, donnée par :

$$J_m(k_c\,\rho)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(m+p)!}\left(\frac{k_c\,\rho}{2}\right)^{2p+m} \qquad (A.2)$$

– Si $k_c \in \mathbb{R}$:

$$J_m(k_c\,\rho)\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\in\mathbb{R}$$

– Si $k_c \in j\mathbb{R}$: on pose $k_c\,\rho = jX$

- Si m est pair (m=2k) :

$$J_m(jX)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(2k+p)!}\left(\frac{jX}{2}\right)^{2p+2k}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(2k+p)!}\left(\frac{X}{2}\right)^{2(p+k)}\in\mathbb{R} \qquad (A.3)$$

$$J'_m(jX)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p+2k)(-1)^p}{p!\,(2k+p)!}\left(\frac{jX}{2}\right)^{2p+2k-1}=-j\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p+2k)(-1)^p}{p!\,(2k+p)!}\left(\frac{X}{2}\right)^{2(p+k)-1}\in j\mathbb{R} \qquad (A.4)$$

- Si m est impair (m=2k+1) :

$$J_m(jX)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(2k+1+p)!}\left(\frac{jX}{2}\right)^{2(p+k)+1}=\sum_{p=0}^{\infty}j\frac{(-1)^p}{p!\,(2k+1+p)!}\left(\frac{X}{2}\right)^{2(p+k)+1}\in j\mathbb{R} \qquad (A.5)$$

$$J'_m(jX)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p+2k+1)(-1)^p}{p!\,(2k+1+p)!}\left(\frac{jX}{2}\right)^{2p+2k}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p+2k+1)(-1)^p}{p!\,(2k+1+p)!}\left(\frac{X}{2}\right)^{2(p+k)}\in\mathbb{R} \qquad (A.6)$$

A.2 Intégrales avec des fonctions de Bessel

- Calcul de l'intégrale B_0, donnée par :

$$B_0=\int_0^a\left(k_c\;J'_m(k_c\rho)\,J^*_m(k_c\rho)+k_c^*\,J'^*_m(k_c\rho)J_m(k_c\rho)\right)d\rho \qquad (A.7)$$

– Si $k_c \in \mathbb{R}$:

$$B_0=2\int_0^a k_c\;J'_m(k_c\rho)J_m(k_c\rho)\,d\rho=\;{J_m}^2(k_c a)-{J_m}^2(0) \qquad (A.8)$$

– Si $k_c \in j\mathbb{R}$:

- Si m est pair (m=2k) :

$$B_0 = 2\int_0^a k_c\, J'_m(k_c\rho)J_m(k_c\rho)\,d\rho = {J_m}^2(k_c a) - {J_m}^2(0) \qquad (A.9)$$

- Si m est impair (m=2k+1) :

$$B_0 = -2\int_0^a k_c\, J'_m(k_c\rho)J_m(k_c\rho)\,d\rho = -{J_m}^2(k_c a) + {J_m}^2(0) \qquad (A.10)$$

Ainsi, la formule est généralisée donc pour tout $k_c \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ et $m \neq 0$:

$$B_0 = \left|{J_m}^2(k_c a)\right| \qquad (A.11)$$

- Calcul de l'intégrale B_1, donnée par :

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^a \left(k_{c,1}J^*_m(k_{c,2}\rho)J'_1(k_{c,1}\rho) + {k_{c,2}}^* J'_m({k_{c,2}}^*\rho)J_m(k_{c,1}\rho)\right)d\rho \\ &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial\rho}\left(J_m(k_{c,1}\rho)J_m({k_{c,2}}^*\rho)\right)d\rho \\ &= J_m(k_{c,1}a)J_m({k_{c,2}}^*a) - {J_m}^2(0) \end{aligned} \qquad (A.12)$$

- Calcul de l'intégrale B_2, pour $m \neq 0$, donnée par :

$$B_2 = \int_0^a \left(\frac{m^2}{\rho^2}J_m(k_{c,1}\rho)J_m(k^*_{c,2}\rho) + k_{c,1}k^*_{c,2}J'_m(k_{c,1}\rho)\,J'_m(k^*_{c,2}\rho)\right)\rho d\rho \qquad (A.13)$$

<u>1ère étape :</u> Reformulation de l'intégrale

Le 1er terme est reformulé par :

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{\rho^2}J_m(k_{c,1}\rho)J_m(k^*_{c,2}\rho) &= \frac{k_{c,1}k^*_{c,2}}{4}\frac{2mJ_m(k_{c,1}\rho)}{k_{c,1}\rho}\frac{2mJ_m(k^*_{c,2}\rho)}{k^*_{c,2}\rho} \\ &= \frac{k_{c,1}k^*_{c,2}}{4}\left(J_{m+1}(k_{c,1}\rho) + J_{m-1}(k_{c,1}\rho)\right)\left(J_{m+1}(k^*_{c,2}\rho) + J_{m-1}(k^*_{c,2}\rho)\right) \end{aligned}$$

$$\left(\text{car}\quad J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2mJ_m(x)}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k_{c,1}k^*_{c,2}}{4}\big(J_{m+1}(k_{c,1}\rho)J_{m+1}(k^*_{c,2}\rho) + J_{m-1}(k_{c,1}\rho)J_{m-1}(k^*_{c,2}\rho) \\ &\quad + J_{m+1}(k_{c,1}\rho)J_{m-1}(k^*_{c,2}\rho) + J_{m-1}(k_{c,1}\rho)J_{m+1}(k^*_{c,2}\rho)\big) \end{aligned} \qquad (A.14)$$

Le 2ème terme est reformulé par :

$$\begin{aligned} k_{c,1}k^*_{c,2}J'_m(k_{c,1}\rho)\,J'_m(k^*_{c,2}\rho) &= \frac{k_{c,1}k^*_{c,2}}{4}\left(2\,J'_m(k_{c,1}\rho)\right)\left(2\,J'_m(k^*_{c,2}\rho)\right) \\ &= \frac{k_{c,1}k^*_{c,2}}{4}\left(J_{m+1}(k_{c,1}\rho) - J_{m-1}(k_{c,1}\rho)\right)\left(J_{m+1}(k^*_{c,2}\rho) - J_{m-1}(k^*_{c,2}\rho)\right) \end{aligned}$$

$$(\text{car}\quad J_{m+1}(x) - J_{m-1}(x) = -\,2\,J'_m(x)\,)$$

$$= \frac{k_{c,1}k_{c,2}^*}{4}\left(J_{m+1}(k_{c,1}\rho)J_{m+1}(k_{c,2}^*\rho) + J_{m-1}(k_{c,1}\rho)J_{m-1}(k_{c,2}^*\rho)\right.$$
$$\left. -J_{m+1}(k_{c,1}\rho)J_{m-1}(k_{c,2}^*\rho) - J_{m-1}(k_{c,1}\rho)J_{m+1}(k_{c,2}^*\rho)\right) \qquad (A.15)$$

En sommant les expressions $(A.14)$ et $(A.15)$, l'intégrale B_2 peut être remplacée par :

$$B_2 = \frac{k_{c,1}k_{c,2}^*}{2}\int_0^a \left(J_{m+1}(k_{c,1}\rho)J_{m+1}(k_{c,2}^*\rho) + J_{m-1}(k_{c,1}\rho)J_{m-1}(k_{c,2}^*\rho)\right)\rho d\rho \qquad (A.16)$$

<u>2ème étape :</u> Calcul de $\int_0^a \rho J_m(k_{c,1}\rho)J_m(k_{c,2}^*\rho)\,d\rho$

La fonction Bessel est solution de A.1, ce qui donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}J_m(k_{c,1}\rho) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}J_m(k_{c,1}\rho) + \left(k_{c,1}^2 - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)J_m(k_{c,1}\rho) = 0 & (A.17) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}J_m(k_{c,2}^*\rho) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}J_m(k_{c,2}^*\rho) + \left(k_{c,2}^{*2} - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)J_m(k_{c,2}^*\rho) = 0 & (A.18) \end{cases}$$

L'opération $(A.17)\times\rho\,J_m(k_{c,2}^*\rho) - (A.18)\times\rho\,J_m(k_{c,1}\rho)$ permet de donner :

$$\left(k_{c,2}^{*2} - k_{c,1}^2\right)\rho\,J_m(k_{c,1}\rho)J_m(k_{c,2}^*\rho)$$
$$= \rho\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}J_m(k_{c,1}\rho)\right)J_m(k_{c,2}^*\rho) - J_m(k_{c,1}\rho)\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}J_m(k_{c,2}^*\rho)\right)\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}J_m(k_{c,1}\rho)\right)J_m(k_{c,2}^*\rho) - J_m(k_{c,1}\rho)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}J_m(k_{c,2}^*\rho)\right)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho}J_m(k_{c,1}\rho)\right)J_m(k_{c,2}^*\rho) - J_m(k_{c,1}\rho)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}J_m(k_{c,2}^*\rho)\right)\right)\right]$$

Ainsi,

$$\int_0^a \rho J_m(k_{c,1}\rho)J_m(k_{c,2}^*\rho)\,d\rho$$
$$= \frac{\mathrm{a}}{\left(k_{c,2}^{*2} - k_{c,1}^2\right)}\left[k_{c,1}\left(J'_m(k_{c,1}a)J_m(k_{c,2}^*a)\right) - k_{c,2}^*\left(J_m(k_{c,1}a)J'_m(k_{c,2}^*a)\right)\right] \qquad (A.19)$$

En remplaçant l'ordre m dans l'intégrale (A.19) par (m+1) et (m-1), l'intégrale B_2 donnée par (A.16) est calculée :

$$B_2 = \frac{ak_{c,1}k_{c,2}^*}{2\left(k_{c,2}^{*2} - k_{c,1}^2\right)}\left[k_{c,1}\left(J'_{m+1}(k_{c,1}a)J_{m+1}(k_{c,2}^*a) + J'_{m-1}(k_{c,1}a)J_{m-1}(k_{c,2}^*a)\right)\right. \qquad (A.20)$$
$$\left. -k_{c,2}^*\left(J_{m+1}(k_{c,1}a)J'_{m+1}(k_{c,2}^*a) + J_{m-1}(k_{c,1}a)J'_{m-1}(k_{c,2}^*a)\right)\right.$$

Annexe B

Base modale cas métallique

A partir des composantes du champ électrique transverse données dans le chapitre 2 par les équations (2.18) et (2.19), les fonctions de la base modale TE/TM sont définies pour les modes pairs et impairs. Le choix d'une excitation $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ paire implique que $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'_{11\ impair}} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{f_{m_1n_1}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{m_2n_2}} \right\rangle = 0$ si $m_1 \neq m_2$, nous allons donc nous focaliser sur les modes pairs d'ordre m=1 :

$$\overrightarrow{f'^{TE}_{1n}}_{pair} = K'^{TE}_{1n} \frac{jZ_0k_0}{k'^{TE\,2}_{c1n}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)\cos(\theta) \\ k'^{TE}_{c1n} J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

$$\overrightarrow{f'^{TM}_{1n}}_{pair} = K'^{TM}_{1n} \frac{\gamma'^{TM}_{z,1n}}{k'^{TM\,2}_{c1n}} \begin{pmatrix} -k'^{TM}_{c1n} J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)\cos(\theta) \\ \frac{1}{\rho} J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

où $\gamma'^{\alpha}_{z,mn}$ est la constante de propagation du mode suivant l'axe z, $k'^{\alpha}_{c,mn}$ est la constante de coupure du mode, K'^{TM}_{1n} et K'^{TE}_{1n} les constantes de normalisation des modes TE et les modes TM respectivement. Pour simplifier l'écriture, ils seront notés $\overrightarrow{f'^{TE}_{1n}}$ et $\overrightarrow{f'^{TM}_{1n}}$.

B.1 Produits scalaires d'un mode TE/TM

Considérons une base modale définie par un produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega = [0, A] \times [0,2\pi], \mathbb{C})$, donné par :

$$\langle \vec{f}'_{mn} | \vec{g}'_{mn} \rangle = \int_{\Omega} \vec{f}'^{\,*}_{mn} \cdot \vec{g}'_{mn}\, d\Omega \tag{B.3}$$

- **Calcul de $\left\langle \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle$**

$$\left\langle \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle = \frac{\left(|K'^{TE}_{1n}| Z_0k_0\right)^2}{k'^{TE\,4}_{c1n}} \int_0^{2\pi} \int_0^{A} (k'^{TE}_{c1n} k'^{TE}_{c1n} J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)\, J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)\, sin^{\,2}(\theta) + \frac{1}{\rho^2} J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho) J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)\, cos^{\,2}(\theta))\rho d\theta d\rho \tag{B.4}$$

Sachant que :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{\,2}(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^{\,2}(\theta)\, d\theta = \pi \tag{B.5}$$

Le produit scalaire (B.4) se simplifie :

$$\left\langle \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle = \frac{\pi\left(|K'^{TE}_{1n}| Z_0k_0\right)^2}{k'^{TE\,4}_{c1n}} \int_0^{A} \left[\rho k'^{TE\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2}{\rho} \right] d\rho \tag{B.6}$$

- **Calcul de $\left\langle \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle$**

$$\left\langle \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle = \frac{\left(\left|K'^{TM}_{1n}\gamma'^{TM}_{z,1n}\right|\right)^2}{k'^{TM\,4}_{c1n}} \int_0^{2\pi}\int_0^{A} (k'^{TM}_{c1n} k'^{TM}_{c1n} J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)\, J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)\cos^2(\theta) + \frac{1}{\rho^2} J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho) J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)\sin^2(\theta))\rho d\theta d\rho \qquad (B.7)$$

En utilisant (B.5), le produit scalaire (B.7) se simplifie en :

$$\left\langle \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle = \frac{\pi\left(\left|K'^{TM}_{1n}\gamma'^{TM}_{z,1n}\right|\right)^2}{k'^{TM\,4}_{c1n}} \int_0^{A} \left[\rho k'^{TM\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho \qquad (B.8)$$

B.2 Constantes de normalisation TE/TM

Les constantes de normalisation K'^{TE}_{1n} et K'^{TM}_{1n} de la base modale TE/TM sont choisies afin que les produits scalaires vérifient $\left\langle \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TE}_{1n}} \right\rangle = 1$ et $\left\langle \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle = 1$. Pour ce faire, les expressions des produits scalaires sont remplacées respectivement par les formules (B.6) et (B.8), ce qui permet de donner :

$$\frac{\pi\left(\left|K'^{TE}_{1n}\right|Z_0 k_0\right)^2}{k'^{TE\,4}_{c1n}} \int_0^{A} \left[\rho k'^{TE\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho = 1 \qquad (B.9)$$

$$\frac{\pi\left(\left|K'^{TM}_{1n}\gamma'^{TM}_{z,1n}\right|\right)^2}{k'^{TM\,4}_{c1n}} \int_0^{A} \left[\rho k'^{TM\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho = 1 \qquad (B.10)$$

Ainsi, les constantes permettant la normalisation de la base modale TE/TM doivent vérifier les relations suivantes :

$$\left|K'^{TE}_{1n}\right| = \frac{k'^{TE\,2}_{c1n}}{Z_0 k_0 \sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k'^{TE\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TE}_{c1n}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \qquad (B.11)$$

$$\left|K'^{TM}_{1n}\right| = \frac{k'^{TM\,2}_{c1n}}{\left|\gamma'^{TM}_{1n}\right| \sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k'^{TM\,2}_{c1n} J'_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2 + \frac{J_1(k'^{TM}_{c1n}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \qquad (B.12)$$

B.3 Produits scalaires avec l'excitation

Le couplage entre l'excitation TE_{11} et les modes TE/TM se fait à la discontinuité ayant la même section que le petit guide de rayon 'a'. Le produit scalaire est défini dans ce cas sur l'espace $L^2(\Omega = [0,a]\times[0,2\pi],\mathbb{C})$, il est donné par :

$$\left\langle \vec{f}'_{mn} \middle| \vec{g}'_{mn} \right\rangle = \int_{\Omega} \vec{f}'^{\,*}_{mn} \cdot \vec{g}'_{mn}\, d\Omega \qquad (B.13)$$

Des amplitudes sont définies pour simplifier l'écriture des modes, elles sont données par les relations suivantes :

$$A_{11}^{TE} = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^a \left[\rho k_{c11}^{TE\,2} J_1'(k_{c11}^{TE}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c11}^{TE}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \qquad (B.14)$$

$$A'^{TE}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k_{c1n}'^{TE\,2} J_1'(k_{c1n}'^{TE}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c1n}'^{TE}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \qquad (B.15)$$

$$A'^{TM}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^A \left[\rho k_{c1n}'^{TM\,2} J_1'(k_{c1n}'^{TM}\rho)^2 + \frac{J_1(k_{c1n}'^{TM}\rho)^2}{\rho}\right] d\rho}} \qquad (B.16)$$

A partir de ces amplitudes, l'excitation TE_{11} et les modes TE/TM peuvent s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{f_{11}^{TE}} = A_{11}^{TE} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} J_1(k_{c11}^{TE}\rho)\cos(\theta) \\ k_{c11}^{TE} J_1'(k_{c11}^{TE}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad (B.17)$$

$$\overrightarrow{f_{1n}'^{TE}} = A'^{TE}_{1n} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} J_1(k_{c1n}'^{TE}\rho)\cos(\theta) \\ k_{c1n}'^{TE} J_1'(k_{c1n}'^{TE}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad (B.18)$$

$$\overrightarrow{f_{1n}'^{TM}} = A'^{TM}_{1n} \begin{pmatrix} -k_{c1n}'^{TM} J_1'(k_{c1n}'^{TM}\rho)\cos(\theta) \\ \frac{1}{\rho} J_1(k_{c1n}'^{TM}\rho)\sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad (B.19)$$

- **Calcul de $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f_{1n}'^{TE}} \right\rangle$:**

Les expressions (B.17) et (B.18) sont projetées dans le produit scalaire (B.13) pour exprimer le couplage de l'excitation avec les modes TE, donné par :

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}'^{TE}} \middle| \overrightarrow{f_{1n}'^{TE}} \right\rangle = A_{11}^{TE} A'^{TE}_{1n} \int_0^{2\pi} \int_0^A (k_{c11}^{TE} k_{c1n}'^{TE} J_1'(k_{c11}^{TE}\rho)\, J_1'(k_{c1n}'^{TE}\rho)\, sin^2(\theta) + \frac{1}{\rho^2} J_1(k_{c11}^{TE}\rho) J_1(k_{c1n}'^{TE}\rho)\, cos^2(\theta))\rho d\theta d\rho \qquad (B.20)$$

D'un autre côté, la formule (A.20), de l'annexe A, permet de calculer analytiquement l'intégrale de l'expression (B.20) :

$$\int_0^a \left(\frac{J_1(k_{c11}^{TE}\rho) J_1(k_{c1n}'^{TE}\rho)}{\rho^2} + k_{c11}^{TE} k_{c1n}'^{TE} J_1'(k_{c11}^{TE}\rho)\; J_1{}'(k_{c1n}'^{TE}\rho) \right) \rho d\rho$$
$$= \frac{a k_{c11}^{TE} k_{c1n}'^{TE} \left[k_{c11}^{TE} \left(J_2'(k_{c11}^{TE}\rho) J_2(k_{c1n}'^{TE}\rho) + J_0'(k_{c11}^{TE}\rho) J_0(k_{c1n}'^{TE}\rho) \right) - k_{c1n}' \left(J_2(k_{c11}^{TE}\rho) J_2'(k_{c1n}'^{TE}\rho) + J_0(k_{c11}^{TE}\rho) J_0'(k_{c1n}'^{TE}\rho) \right) \right]}{2(k_{c1n}'^{TE\,2} - k_{c11}^{TE\,2})}$$

Ainsi, le produit scalaire (B.20) pour s'exprimer sous la forme suivante :

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f_{1n}^{'TE}} \right\rangle = A_{11}^{TE} A'^{TE}_{1n} \frac{a\pi k_{c11}^{TE} k_{c1n}^{'TE}}{2(k_{c1n}^{'TE\,2} - k_{c11}^{TE\,2})} \Big[k_{c11}^{TE} \left(J_2'(k_{c11}^{TE} a) J_2(k_{c1n}^{'TE} a) + J_0'(k_{c11}^{TE} a) J_0(k_{c1n}^{'TE} a) \right) - k_{c1n}^{'TE} \left(J_2(k_{c11}^{TE} a) J_2'(k_{c1n}^{'TE} a) + J_0(k_{c11}^{TE} a) J_0'(k_{c1n}^{'TE} a) \right) \Big] \quad (B.21)$$

- **Calcul de $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle$:**

Les expressions (B.17) et (B.19) sont projetées dans le produit scalaire (B.13) pour exprimer le couplage de l'excitation avec les modes TM, donné par :

$$\left\langle \overrightarrow{f'^{TE}_{11}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle = A_{11}^{TE} A'^{TM}_{1n} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \left(\frac{k_{c1n}^{'TM}}{\rho} J_1(k_{c11}^{TE}\rho) J_1'(k_{c1n}^{'TM}\rho) \cos^2(\theta) + \frac{k_{c11}^{TE}}{\rho} J_1'(k_{c11}^{TE}\rho) J_1(k_{c1n}^{'TM}\rho) \sin^2(\theta) \right) \rho d\theta d\rho \quad (B.22)$$

D'un autre côté, la formule (A.12), de l'annexe A, permet de calculer analytiquement l'intégrale de l'expression (B.22). Ainsi, la formulation du produit scalaire peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| \overrightarrow{f'^{TM}_{1n}} \right\rangle = \pi A_{11}^{TE} A'^{TM}_{1n} J_1(k_{c11}^{TE} a) J_1(k_{c1n}^{'TM} a) \quad (B.23)$$

Annexe C

Base modale généralisée (cas hybride)

A partir des composantes du champ électrique transverse données dans le chapitre 2, les fonctions de la base modale généralisée (cas hybride) est définie pour les modes EP (+) et les modes EN (−) :

$$\vec{f}_{mn}^{-} = K_{mn}'^{-}\left[\frac{\gamma'_{z,mn}}{\left(k'_{c,mn}\right)^2}\tilde{\Gamma}_{mn}^{-}\,\vec{f}_{mn}^{TM-} + \frac{jZ_0k_0}{\left(k'_{c,mn}\right)^2}\tilde{\Psi}_{mn}^{-}\,\vec{f}_{mn}^{TE-}\right]$$

avec $\vec{f}_{mn}^{TM-} = \begin{pmatrix} -k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \\ \frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \end{pmatrix}$ et $\vec{f}_{mn}^{TE-} = \begin{pmatrix} \frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \\ k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta} \end{pmatrix}$,

où $\gamma'_{z,mn}$ est la constante de propagation du mode suivant l'axe z, $k'_{c,mn}$ est la constante de coupure du mode, $(\tilde{\Gamma}_{mn}^{-}, \tilde{\Psi}_{mn}^{-})$ sont les amplitudes EM du mode EN et $K_{mn}'^{-}$ est sa constante de normalisation.

$$\vec{f}_{mn}^{+} = K_{mn}'^{+}\left[\frac{\gamma'_{z,mn}}{\left(k'_{c,mn}\right)^2}\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}\vec{f}_{mn}^{TM+} + \frac{jZ_0k_0}{\left(k'_{c,mn}\right)^2}\tilde{\Psi}_{mn}^{+}\vec{f}_{mn}^{TE+}\right],$$

avec $\vec{f}_{mn}^{TM+} = \begin{pmatrix} -k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \\ -\frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \end{pmatrix}$ et $\vec{f}_{mn}^{TE+} = \begin{pmatrix} -\frac{jm}{\rho}J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \\ k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{jm\theta} \end{pmatrix}$,

où $(\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}, \tilde{\Psi}_{mn}^{+})$ sont les amplitudes EM du mode EP et $K_{mn}'^{+}$ sa constante de normalisation. Dans le cas du mode EN et du mode EP, les constantes de coupure $(k'_{c,mn})$ et les constantes de propagation en z $(\gamma'_{z,mn})$ sont identiques. C'est pourquoi nous optons pour la même notation dans les deux cas.

C.1 Produits scalaires TE/TM d'un mode

Considérons une base modale définie par un produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega = [a_1, a_2] \times [\theta_1, \theta_2], \mathbb{C})$, donné par :

$$\langle \vec{f}'_{mn} | \vec{g}'_{mn} \rangle = \int_{\Omega} \vec{f}'^{\,*}_{mn} \cdot \vec{g}'_{mn}\, d\Omega$$

- **Calcul de $\left\langle \vec{f}'^{TE-}_{mn} \middle| \vec{f}'^{TM-}_{mn} \right\rangle$ et $\left\langle \vec{f}'^{TE-}_{mn} \middle| \vec{f}'^{TM-}_{mn} \right\rangle$:**

$$\langle \vec{f}'^{TE-}_{mn} | \vec{f}'^{TM-}_{mn} \rangle = jm \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{a_1}^{a_2} \left(k'_{c,mn}J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)J_m{}^{*}\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta}e^{+jm\theta}\right. \quad (C.1)$$
$$\left. +\left(k'_{c,mn}\right)^{*}J'_m{}^{*}\left(k'_{c,mn}\rho\right)J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)e^{-jm\theta}e^{+jm\theta}\right) d\theta d\rho$$

$$= jm\,(\theta_2 - \theta_1)\left[\int_{a_1}^{a_2} k'_{c,mn} J'_m(k'_{c,mn}\rho) J_m{}^*(k'_{c,mn}\rho)\,d\rho \right.$$
$$\left. + \int_{a_1}^{a_2} (k'_{c,mn})^* J'_m{}^*(k'_{c,mn}\rho) J_m(k'_{c,mn}\rho) d\rho\right]$$

D'après l'annexe A :

- Si $k'_{c,mn} \in \mathbb{R}$: $J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) \in \mathbb{R}$ et $J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) \in \mathbb{R}$
- Si $k'_{c,mn} \in i\mathbb{R}$:
  - Si m est pair : $J_m(k'_{c,mn}\rho) \in \mathbb{R}$ et $J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) \in i\mathbb{R}$
  - Si m est impair : $J_m(k'_{c,mn}\rho) \in i\mathbb{R}$ et $J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) \in \mathbb{R}$

Soit $k'_{c,mn} \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, donc :

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(k'_{c,mn} J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) J^*_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) + \left(k'_{c,mn}\right)^* J'^*_m\left(k'_{c,mn}\rho\right) J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right) d\rho$$
$$= \left|J_m\left(k'_{c,mn}a_2\right)\right|^2 - \left|J_m\left(k'_{c,mn}a_1\right)\right|^2 \qquad (C.2)$$

Ainsi,

$$\left\langle \vec{f}^{TE-}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM-}_{mn} \right\rangle = jm\,(\theta_2 - \theta_1)\left(\left|J_m\left(k'_{c,mn}a_2\right)\right|^2 - \left|J_m\left(k'_{c,mn}a_1\right)\right|^2\right) \qquad (C.3)$$

De la même manière,

$$\left\langle \vec{f}^{TM-}_{mn} \middle| \vec{f}^{TE-}_{mn} \right\rangle = -jm\,(\theta_2 - \theta_1)\left(\left|J_m\left(k'_{c,mn}a_2\right)\right|^2 - \left|J_m\left(k'_{c,mn}a_1\right)\right|^2\right) \qquad (C.4)$$

- **Calcul de $\left\langle \vec{f}^{TE+}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM+}_{mn} \right\rangle$ et $\left\langle \vec{f}^{TE+}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM+}_{mn} \right\rangle$:**

$$\left\langle \vec{f}^{TE+}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM+}_{mn} \right\rangle = jm \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{a_1}^{a_2}\left(-k'_{c,mn}\, J'_m(k'_{c,mn}\rho) J_m{}^*(k'_{c,mn}\rho) e^{-jm\theta} e^{+jm\theta}\right.$$
$$\left. -\left(k'_{c,mn}\right)^* J'_m{}^*(k'_{c,mn}\rho) J_m(k'_{c,mn}\rho) e^{-jm\theta} e^{+jm\theta}\right) d\theta d\rho$$
$$= -jm\,(\theta_2 - \theta_1)\left[\int_{a_1}^{a_2} k'_{c,mn} J'_m(k'_{c,mn}\rho) J_m{}^*(k'_{c,mn}\rho)\,d\rho \right.$$
$$\left. + \int_{a_1}^{a_2} (k'_{c,mn})^* J'_m{}^*(k'_{c,mn}\rho) J_m(k'_{c,mn}\rho) d\rho\right]$$

L'équation (C.2) est utilisée pour calculer l'intégrale, ce qui donne :

$$\left\langle \vec{f}^{TE+}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM+}_{mn} \right\rangle = -jm\,(\theta_2 - \theta_1)\left(\left|J_m\left(k'_{c,mn}a_2\right)\right|^2 - \left|J_m\left(k'_{c,mn}a_1\right)\right|^2\right) \qquad (C.5)$$

De la même manière,

$$\left\langle \vec{f}^{TM+}_{mn} \middle| \vec{f}^{TE+}_{mn} \right\rangle = jm\,(\theta_2 - \theta_1)\left(\left|J_m\left(k'_{c,mn}a_2\right)\right|^2 - \left|J_m\left(k'_{c,mn}a_1\right)\right|^2\right) \qquad (C.6)$$

- **Calcul de $\left\langle \vec{f}^{TM-}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM-}_{mn} \right\rangle$ et $\left\langle \vec{f}^{TE-}_{mn} \middle| \vec{f}^{TE-}_{mn} \right\rangle$:**

$$\left\langle \vec{f}^{TM-}_{mn} \middle| \vec{f}^{TM-}_{mn} \right\rangle = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{a_1}^{a_2}\left(\left|k'_{c,mn}\right|^2 \left|J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\left|J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2\right) e^{+jm\theta} e^{-jm\theta} \rho d\theta d\rho$$

On pose :

$$D_{mn} = \int_{a_1}^{a_2} \left(\left|k'_{c,mn}\right|^2 \left|J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \left|J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2 \right) \rho d\rho \qquad (C.7)$$

Ainsi,

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM-} \right\rangle = (\theta_2 - \theta_1) D_{mn} \qquad (C.8)$$

De la même manière,

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle = (\theta_2 - \theta_1) D_{mn} \qquad (C.9)$$

- **Calcul de $\left\langle \vec{f}_{mn}^{TM+} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM+} \right\rangle$ et $\left\langle \vec{f}_{mn}^{TE+} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE+} \right\rangle$:**

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TM+} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM+} \right\rangle = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{a_1}^{a_2} \left(\left|k'_{c,mn}\right|^2 \left|J'_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \left|J_m\left(k'_{c,mn}\rho\right)\right|^2 \right) e^{+jm\theta} e^{-jm\theta} \rho d\theta d\rho$$

Ainsi,

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TM+} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM+} \right\rangle = (\theta_2 - \theta_1) D_{mn} \qquad (C.10)$$

De même manière,

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TE+} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE+} \right\rangle = (\theta_2 - \theta_1) D_{mn} \qquad (C.11)$$

C.2 Constantes de normalisation :

Les constantes de normalisation K'^{+}_{mn} et K'^{-}_{mn} permettent de normaliser la base modale généralisée définie pour les modes EP $(+)$ et les modes EN $(-)$.

- **Calcul de la constante K'^{-}_{mn} :**

$$\left\langle \overrightarrow{f'}^{-}_{mn} \middle| \overrightarrow{f'}^{-}_{mn} \right\rangle = 1$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{K'^{-}_{mn}}{k'^{2}_{c,mn}} \left[\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}^{-}_{mn} \vec{f}'^{TM-}_{mn} + jZ_0 k_0 \tilde{\Psi}^{-}_{mn} \vec{f}'^{TE-}_{mn} \right] \middle| \frac{K^{-}_{mn}}{k'^{2}_{c,mn}} \left[\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}^{-}_{mn} \vec{f}'^{TM-}_{mn} + jZ_0 k_0 \tilde{\Psi}^{-}_{mn} \vec{f}'^{TE-}_{mn} \right] \right\rangle = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|K^{-}_{mn}|^2}{\left|k'_{c,mn}\right|^4} \left(\left|\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}^{-}_{mn}\right|^2 \left\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM-} \right\rangle + {Z_0}^2 {k_0}^2 \left|\tilde{\Psi}^{-}_{mn}\right|^2 \left\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle \right.$$
$$\left. + jZ_0 k_0 \gamma'^{*}_{z,mn} \tilde{\Gamma}^{-*}_{mn} \tilde{\Psi}^{-}_{mn} \left\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle - jZ_0 k_0 \gamma'_{mn} \tilde{\Gamma}^{-}_{mn} \tilde{\Psi}^{-*}_{mn} \left\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM-} \right\rangle \right) = 1$$

D'un autre côté, d'après les formulations (C.3), (C.4), (C.8) et (C.9), on a :

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle = -\left\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM-} \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TM-} \right\rangle = \left\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle$$

Ce qui permet de simplifier le calcul :

$$\frac{|K^{-}_{mn}|^2 \left(\left[\left|\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}^{-}_{mn}\right|^2 + {Z_0}^2 {k_0}^2 \left|\tilde{\Psi}^{-}_{mn}\right|^2 \right] \left\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle + 2jZ_0 k_0 Re\left(\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}^{-}_{mn} \tilde{\Psi}^{-*}_{mn}\right) \left\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} \middle| \vec{f}_{mn}^{TE-} \right\rangle \right)}{\left|k'_{c,mn}\right|^4} = 1 (C.12)$$

- Si m = 0 :

D'après (C.4), on a : $\langle \vec{f}_{0n}^{TM-} | \vec{f}_{0n}^{TE-} \rangle = 0$

Et d'après (C.9), on a : $\langle \vec{f}_{0n}^{TE-} | \vec{f}_{0n}^{TE-} \rangle = (\theta_2 - \theta_1) D_{0n}$

Les produits scalaires sont remplacés dans l'expression (C.12) pour m=0, ce qui donne :

$$\frac{|K'_{0n}|^2}{|k'_{c,0n}|^4} \left[|\gamma'_{0n} \tilde{\Gamma}_{0n}^-|^2 + {Z_0}^2 {k_0}^2 |\tilde{\Psi}_{0n}^-|^2 \right] (\theta_2 - \theta_1) D_{0n} = 1 \qquad (C.13)$$

Ainsi,

$$K_{0n}^- = \frac{|k'_{c,0n}|^2}{\sqrt{(\theta_2 - \theta_1)\left(|\gamma'_{z,0n} \tilde{\Gamma}_{0n}^-|^2 + {Z_0}^2 {k_0}^2 |\tilde{\Psi}_{0n}^-|^2 \right) D_{0n}}} \qquad (C.14)$$

- Si m ≠ 0 :

D'après (C.4), on a : $\langle \vec{f}_{mn}^{TM-} | \vec{f}_{mn}^{TE-} \rangle = -jm\,(\theta_2 - \theta_1)(|J_m(k_{c,mn} a_2)|^2 - |J_m(k_{c,mn} a_1)|^2$

D'autre part, d'après (C.9) : $\langle \vec{f}_{mn}^{TE-} | \vec{f}_{mn}^{TE-} \rangle = \langle \vec{f}_{mn}^{TM-} | \vec{f}_{mn}^{TM-} \rangle = (\theta_2 - \theta_1) D_{mn}$

Ainsi,

$$|K_{mn}^-| = \frac{|k'_{c,mn}|^2}{\sqrt{R_{mn}^{M-}}} \qquad (C.15)$$

avec $R_{mn}^-(\theta_1, \theta_2, a_1, a_2) = \left[\left(|\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^-|^2 + {Z_0}^2 {k_0}^2 |\tilde{\Psi}_{mn}^-|^2 \right) (\theta_2 - \theta_1) D_{mn} \right.$

$$\left. + 2 Z_0 k_0 Re(\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^- \tilde{\Psi}_{mn}^{-*}) m\,(\theta_2 - \theta_1) \left(|J_m(k'_{c,mn} a_2)|^2 - |J_m(k'_{c,mn} a_1)|^2 \right) \right]$$

- **Calcul de la constante $K_{mn}^{\prime +}$:**

$$\left\langle \overrightarrow{f'}_{mn}^{+} \middle| \overrightarrow{f'}_{mn}^{+} \right\rangle = 1$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{K'^{+}_{mn}}{k'^2_{c,mn}} \left[\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^+ \vec{f}_{mn}^{\prime TM+} + jZ_0 k_0 \tilde{\Psi}_{mn}^+ \vec{f}_{mn}^{\prime TE+} \right] \middle| \frac{K_{mn}^+}{k'^2_{c,mn}} \left[\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^+ \vec{f}_{mn}^{\prime TM+} + jZ_0 k_0 \tilde{\Psi}_{mn}^+ \vec{f}_{mn}^{\prime TE+} \right] \right\rangle = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|K_{mn}^+|^2}{|k'_{c,mn}|^4} \left(|\gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^+|^2 \langle \vec{f}_{mn}^{TM+} | \vec{f}_{mn}^{TM+} \rangle + {Z_0}^2 {k_0}^2 |\tilde{\Psi}_{mn}^+|^2 \langle \vec{f}_{mn}^{TE+} | \vec{f}_{mn}^{TE+} \rangle \right.$$

$$\left. + jZ_0 k_0 \gamma'^{*}_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^{+*} \tilde{\Psi}_{mn}^+ \langle \vec{f}_{mn}^{\prime TM+} | \vec{f}_{mn}^{\prime TE+} \rangle - jZ_0 k_0 \gamma'_{z,mn} \tilde{\Gamma}_{mn}^+ \tilde{\Psi}_{mn}^{+*} \langle \vec{f}_{mn}^{\prime TE+} | \vec{f}_{mn}^{\prime TM+} \rangle \right) = 1$$

D'un autre côté, d'après les formulations (C.5), (C.6), (C.10) et (C.11), on a :

$$\langle \vec{f}_{mn}^{TM+} | \vec{f}_{mn}^{TE+} \rangle = -\langle \vec{f}_{mn}^{TE+} | \vec{f}_{mn}^{TM+} \rangle$$

$$\langle \vec{f}_{mn}^{TM+} | \vec{f}_{mn}^{TM+} \rangle = \langle \vec{f}_{mn}^{TE+} | \vec{f}_{mn}^{TE+} \rangle$$

Ce qui permet de simplifier le calcul :

$$\frac{|K_{mn}^{+}|^2}{|k'_{c,mn}|^4}\Big(\Big[|\gamma'_{z,mn}\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}|^2 + {Z_0}^2{k_0}^2|\tilde{\Psi}_{mn}^{+}|^2\Big]\langle\vec{f}_{mn}^{TE+}|\vec{f}_{mn}^{TE+}\rangle \qquad (C.16)$$
$$+2jZ_0k_0Re\big(\gamma'_{z,mn}\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}\tilde{\Psi}_{mn}^{+*}\big)\langle\vec{f}_{mn}^{TM+}|\vec{f}_{mn}^{TE+}\rangle\Big) = 1$$

- Si m = 0 :

D'après (C.6), on a : $\langle\vec{f}_{0n}^{TM+}|\vec{f}_{0n}^{TE+}\rangle = 0$

Et d'après (C.10), on a : $\langle\vec{f}_{0n}^{TE+}|\vec{f}_{0n}^{TE+}\rangle = (\theta_2 - \theta_1)D_{0n}$

Les produits scalaires sont remplacés dans l'expression (C.16) pour m=0, ce qui donne :

$$\frac{|K_{0n}^{+\prime}|^2}{|k'_{c,0n}|^4}\Big[|\gamma'_{z,0n}\tilde{\Gamma}_{0n}^{+}|^2 + {Z_0}^2{k_0}^2|\tilde{\Psi}_{0n}^{+}|^2\Big](\theta_2 - \theta_1)D_{0n} = 1 \qquad (C.17)$$

Ainsi,

$$K_{0n}^{+} = \frac{|k\prime_{c,0n}|^2}{\sqrt{(\theta_2-\theta_1)\Big[|\gamma'_{z,0n}\tilde{\Gamma}_{0n}^{+}|^2+{Z_0}^2{k_0}^2|\tilde{\Psi}_{0n}^{+}|^2\Big]D_{0n}}} \qquad (C.18)$$

- Si m ≠ 0 :

D'après (C.6), on a : $\langle\vec{f}_{mn}^{TM+}|\vec{f}_{mn}^{TE+}\rangle = jm\,(\theta_2 - \theta_1)(|J_m(k_{c,mn}a_2)|^2 - |J_m(k_{c,mn}a_1)|^2$

D'autre part, d'après (C.11) : $\langle\vec{f}_{mn}^{TE+}|\vec{f}_{mn}^{TE+}\rangle = \langle\vec{f}_{mn}^{TM+}|\vec{f}_{mn}^{TM+}\rangle = (\theta_2 - \theta_1)D_{mn}$

Ainsi,

$$|K_{mn}^{+}| = \frac{|k'_{c,mn}|^2}{\sqrt{R_{mn}^{M+}}} \qquad (C.19)$$

avec $R_{mn}^{+}(\theta_1,\theta_2,a_1,a_2) = \big[\big(|\gamma'_{z,mn}\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}|^2 + {Z_0}^2{k_0}^2|\tilde{\Psi}_{mn}^{+}|^2\big)(\theta_2 - \theta_1)D_{mn}$

$$-2Z_0k_0Re(\gamma'_{z,mn}\tilde{\Gamma}_{mn}^{+}\tilde{\Psi}_{mn}^{+*})m\,(\theta_2 - \theta_1)\Big(|J_m(k'_{c,mn}a_2)|^2 - |J_m(k'_{c,mn}a_1)|^2\Big)\big]$$

C.3 Produits scalaires avec l'excitation :

L'excitation est donnée par le mode fondamentale $\overrightarrow{f_{11}^{TE}}$ qui correspond à la base modale sinusoïdale. Par équivalence, il sera décrit par deux modes en exponentielles : un mode (EN) et un mode (EP) :

$$\overrightarrow{f_{11}^{TE}}_{pair} = A_{11}^{TE-}\vec{f}_{11}^{TE-} + A_{11}^{TE+}\vec{f}_{11}^{TE+} \qquad (C.20)$$

avec $A_{11}^{TE-} = K_{11}^{TE-}\frac{jZ_0k_0}{k_{c11}^{TE\,2}}$ et $A_{11}^{TE+} = K_{11}^{TE+}\frac{jZ_0k_0}{k_{c11}^{TE\,2}}$

D'un autre côté, les modes $\overrightarrow{f'}^{-}_{mn}$ et $\overrightarrow{f'}^{+}_{mn}$ du guide à paroi anisotrope sont excités :

$$\overrightarrow{f'}^{-}_{mn} = A'^{TM-}_{mn}\ \vec{f}'^{TM-}_{mn} + A'^{TE-}_{mn}\ \vec{f}'^{TE-}_{mn} \qquad (C.21)$$

avec $A'^{TM-}_{mn} = K'^{-}_{mn}\frac{\gamma'_{z,mn}}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Gamma}'^{-}_{mn}$ et $A'^{TE-}_{mn} = K'^{-}_{mn}\frac{jZ_0k_0}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Psi}'^{-}_{mn}$.

$$\overrightarrow{f'}^{+}_{mn} = A'^{TM+}_{mn}\ \vec{f}'^{TM+}_{mn} + A'^{TE+}_{mn}\ \vec{f}'^{TE+}_{mn} \qquad (C.22)$$

avec $A'^{TM+}_{mn} = K'^{+}_{mn}\frac{\gamma'_{z,mn}}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{I}^{+}_{mn}$ et $A'^{TE+}_{mn} = K'^{+}_{mn}\frac{jZ_0k_0}{k'^{2}_{c,mn}}\tilde{\Psi}^{+}_{mn}$.

Le mode en excitation est le mode TE_{11}, donc seuls les modes d'ordre m=1 sont excités (le couplage de l'excitation avec des modes d'ordre m≠1 est nul).

- **Calcul de $\left\langle \vec{f}'^{-}_{1n}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle$ et $\left\langle \vec{f}'^{+}_{1n}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle$:**

$$\left\langle \vec{f}'^{-}_{1n}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}\right\rangle = A^{TE-}_{11}\left\langle \vec{f}'^{-}_{1n}\middle|\vec{f}^{TE-}_{11}\right\rangle + A^{TE+}_{11}\left\langle \vec{f}'^{-}_{1n}\middle|\vec{f}^{TE+}_{11}\right\rangle$$

$$= A^{TE-}_{11}\left[(A'^{TM-}_{1n})^{*}\left\langle \vec{f}'^{TM-}_{1n}\middle|\vec{f}^{TE-}_{11}\right\rangle + (A'^{TE-}_{1n})^{*}\left\langle \vec{f}'^{TE-}_{1n}\middle|\vec{f}^{TE-}_{11}\right\rangle\right] + A^{TE+}_{11}\left[(A'^{TM-}_{1n})^{*}\left\langle \vec{f}'^{TM-}_{1n}\middle|\vec{f}^{TE+}_{11}\right\rangle + (A'^{TE-}_{1n})^{*}\left\langle \vec{f}'^{TE-}_{1n}\middle|\vec{f}^{TE+}_{11}\right\rangle\right]$$

$$= A^{TE-}_{11}\left[A'^{TM-*}_{1n}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(-\frac{jk'^{\ *}_{c1n}}{\rho}J_1(k^{TE}_{c,11}\rho)J'^{\ *}_1(k'_{c,1n}\rho) - \frac{jk^{TE}_{c11}}{\rho}J'_1(k^{TE}_{c,11}\rho)\ J_1^{\ *}(k'_{c,1n}\rho)\right)\rho d\rho d\theta\right]$$

$$+A^{TE-}_{11}\left[A'^{TE-*}_{1n}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\frac{J_1(k^{TE}_{c,11}\rho)J^{*}_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho^2} + k'^{\ *}_{c,1n}k^{TE}_{c,11}J'^{*}_{1}(k'_{c,1n}\rho)J'_1(k^{TE}_{c,11}\rho)\right)\rho d\rho d\theta\right] \qquad (C.23)$$

En utilisant les intégrales B_1 et B_2 de l'annexe A, on a :

$$I_1 = \int_0^{a}\left(\frac{k'^{\ *}_{c1n}}{\rho}J_1(k^{TE}_{c11}\rho)J'_1(k'^{\ *}_{c1n}\rho) + \frac{k^{TE}_{c11}}{\rho}J'_1(k^{TE}_{c11}\rho)J_1(k'^{\ *}_{c1n}\rho)\right)\rho d\rho \qquad (C.24)$$

$$= J_1(k^{TE}_{c11}a)J_1(k'^{\ *}_{c1n}a)$$

$$I_2 = \int_0^{a}\left(\frac{J_1(k^{TE}_{c11}\rho)J_1(k'^{\ *}_{c1n}\rho)}{\rho^2} + k^{TE}_{c11}k'^{\ *}_{c1n}J'_1(k^{TE}_{c11}\rho)\ J_1{}'(k'^{\ *}_{c1n}\rho)\right)\rho d\rho \qquad (C.25)$$

$$= \frac{ak^{TE}_{c11}k'^{\ *}_{c1n}}{2((k'^{\ *}_{c,1n})^2 - k^{TE\,2}_{c,11})}\Big[k^{TE}_{c,11}\left(J'_2(k^{TE}_{c,11}a)J_2(k'^{\ *}_{c,1n}a) + J'_0(k^{TE}_{c,11}a)J_0(k'^{\ *}_{c,1n}a)\right) - k'^{\ *}_{c,1n}\left(J_2(k^{TE}_{c,11}a)J'_2(k'^{\ *}_{c,1n}a) + J_0(k^{TE}_{c,11}\rho)J'_0(k'^{\ *}_{c,1n}a)\right)\Big]$$

Ainsi :

$$\left\langle \vec{f}'^{-}_{1n}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}_{pair}\right\rangle = 2\pi A^{TE-}_{11}\left(-j(A'^{TM-}_{1n})^{*}\ I_1 + (A'^{TE-}_{1n})^{*}\ I_2\right) \qquad (C.26)$$

Par un raisonnement similaire :

$$\left\langle \vec{f}'^{+}_{1n}\middle|\overrightarrow{f^{TE}_{11}}_{pair}\right\rangle = 2\pi A^{TE+}_{11}\left(+j(A'^{TM+}_{1n})^{*}\ I_1 + (A'^{TE+}_{1n})^{*}\ I_2\right) \qquad (C.27)$$

- **Calcul de $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| [Y'^{-}_{mn}]\vec{f}'^{-}_{1n} \right\rangle$ et $\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}} \middle| [Y'^{+}_{mn}]\vec{f}'^{+}_{1n} \right\rangle$:**

Soit $[Y'^{-}_{mn}] = \begin{bmatrix} Y'^{11-}_{mn} & Y'^{12-}_{mn} \\ Y'^{21-}_{mn} & Y'^{22-}_{mn} \end{bmatrix}$

L'opérateur d'admittance appliqué au mode :

$$[Y'^{-}_{mn}]\vec{f}'^{-}_{mn} = \begin{bmatrix} Y'^{11-}_{mn} & Y'^{12-}_{mn} \\ Y'^{21-}_{mn} & Y'^{22-}_{mn} \end{bmatrix} \left(A'^{TM-}_{mn}\, \vec{f}'^{TM-}_{mn} + A'^{TE-}_{mn}\, \vec{f}'^{TE-}_{mn} \right)$$

$$= A'^{TM-}_{mn} \begin{bmatrix} -Y'^{11-}_{mn} k'_{cmn} J'_m(k'_{c,mn}\rho) e^{-jm\theta} + Y'^{12-}_{mn} \dfrac{jm}{\rho}\, J_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} \\ -Y'^{21-}_{mn} k'_{cmn} J'_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} + Y'^{22-}_{mn} \dfrac{jm}{\rho}\, J_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} \end{bmatrix}$$

$$+ A'^{TE-}_{mn} \begin{bmatrix} Y'^{11-}_{mn} \dfrac{jm}{\rho}\, J_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} + Y'^{12-}_{mn} k'_{cmn} J'_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} \\ Y'^{21-}_{mn} \dfrac{jm}{\rho}\, J_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} + Y'^{22-}_{mn} k'_{cmn} J'_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} \end{bmatrix}$$

$$= A'^{TM-}_{mn} \begin{bmatrix} -Y'^{11-}_{mn} \\ -Y'^{21-}_{mn} \end{bmatrix} k'_{cmn} J'_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} + A'^{TM-}_{mn} \begin{bmatrix} Y'^{12-}_{mn} \\ Y'^{22-}_{mn} \end{bmatrix} \frac{jm}{\rho} J_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta}$$
$$+ A'^{TE-}_{mn} \begin{bmatrix} Y'^{11-}_{mn} \\ Y'^{21-}_{mn} \end{bmatrix} \frac{jm}{\rho} J_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} + A'^{TE-}_{mn} \begin{bmatrix} Y'^{12-}_{mn} \\ Y'^{22-}_{mn} \end{bmatrix} k'_{cmn} J'_m(k'_{cmn}\rho) e^{-jm\theta} \qquad (C.28)$$

Ensuite, on a :

$$\left\langle \overrightarrow{f_{11}^{TE}}_{\,pair} \middle| [Y'^{-}_{mn}]\vec{f}'^{-}_{mn} \right\rangle = \left\langle A_{11}^{TE-}\, \vec{f}_{11}^{TE-} \middle| [Y'^{-}_{mn}]\vec{f}'^{-}_{mn} \right\rangle \qquad (C.29)$$

En effet, $\left\langle A_{11}^{TE+}\, \vec{f}_{11}^{TE+} \middle| [Y'^{-}_{mn}]\vec{f}'^{-}_{mn} \right\rangle = 0$ (car $\int_0^{2\pi} e^{-j\theta} e^{-j\theta} d\theta = 0$)

Calculons le produit scalaire :

$$\left\langle A_{11}^{TE-}\, \vec{f}_{11}^{TE-} \middle| [Y'^{-}_{mn}]\vec{f}'^{-}_{mn} \right\rangle = \qquad (C.30)$$

$$A_{11}^{TE-*} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \Bigg(A'^{TM-}_{mn}\, Y'^{11-}_{mn} \frac{jJ_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho} k'_{cmn} J'_m(k'_{c,mn}\rho) - A'^{TM-}_{mn}\, Y'^{21-}_{mn} k_{c,11}^{TE*} J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho) k'_{c,mn} J'_m(k'_{c,mn}\rho)$$
$$+ A'^{TM-}_{mn}\, Y'^{12-}_{mn} \frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho} \frac{mJ_m(k'_{c,mn}\rho)}{\rho} + A'^{TM-}_{mn}\, Y'^{22-}_{mn} k_{c,11}^{TE*} J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho) \frac{jmJ_m(k'_{c,mn}\rho)}{\rho}$$
$$+ A'^{TE-}_{mn}\, Y'^{11-}_{mn} \frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho} \frac{mJ_m(k'_{c,mn}\rho)}{\rho} + A'^{TE-}_{mn}\, Y'^{21-}_{mn} k_{c,11}^{TE*} J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho) \frac{jmJ_m(k'_{c,mn}\rho)}{\rho}$$
$$- A'^{TE-}_{mn}\, Y'^{12-}_{mn} \frac{jJ_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho} k'_{c,mn} J'_m(k'_{c,mn}\rho)$$
$$+ A'^{TE-}_{mn}\, Y'^{22-}_{mn} k_{c,11}^{TE*} J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho) k'_{cmn} J'_m(k'_{c,mn}\rho) \Bigg) e^{+j\theta} e^{-jm\theta} \rho d\rho d\theta$$

Les coefficients de l'admittance du mode sont liés : $Y'^{11-}_{mn} = Y'^{22-}_{mn}$ et $Y'^{21-}_{mn} = -Y'^{12-}_{mn}$, ce qui permet de simplifier la formule en :

$$\langle A_{11}^{TE-}\,\vec{f}_{11}^{TE-}\big|[Y'^{-}_{1n}]\vec{f}'^{-}_{1n}\rangle = \tag{C.31}$$

$$2\pi A_{11}^{TE-*}\Bigg(A'^{TM-}_{1n}\,jY'^{11-}_{1n}\int_0^a\left(\frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho}k'_{c1n}J'_1(k'_{c,1n}\rho)+k_{c,11}^{TE*}J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)\frac{J_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho}\right)\rho d\rho$$

$$+A'^{TM-}_{1n}\,Y'^{12-}_{1n}\int_0^a\left(k_{c,11}^{TE*}J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)k'_{c,1n}J'_1(k'_{c,1n}\rho)+\frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho}\frac{J_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho}\right)\rho d\rho$$

$$+A'^{TE-}_{1n}\,Y'^{22-}_{1n}\int_0^a\left(\frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho}\frac{J_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho}+k_{c,11}^{TE*}J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)k'_{c,1n}J'_1(k'_{c,1n}\rho)\right)\rho d\rho$$

$$+jA'^{TE-}_{1n}\,Y'^{21-}_{1n}\int_0^a\left(k_{c,11}^{TE*}J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)\frac{J_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho}+\frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho}k'_{c,1n}J'_1(k'_{c,1n}\rho)\right)\rho d\rho\Bigg)$$

$$\langle A_{11}^{TE-}\,\vec{f}_{11}^{TE-}\big|[Y'^{-}_{1n}]\vec{f}'^{-}_{1n}\rangle =$$

$$2\pi A_{11}^{TE-*}\Bigg(j\left[A'^{TM-}_{1n}\,Y'^{11-}_{1n}+A'^{TE-}_{1n}\,Y'^{21-}_{1n}\right]\int_0^a\left(\frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho}k'_{c1n}J'_1(k'_{c,1n}\rho)+k_{c,11}^{TE*}J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)\frac{J_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho}\right)\rho d\rho$$

$$+\left[A'^{TM-}_{1n}\,Y'^{12-}_{1n}+A'^{TE-}_{1n}\,Y'^{22-}_{1n}\right]\int_0^a\left(k_{c,11}^{TE*}J'_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)k'_{c,1n}J'_1(k'_{c,1n}\rho)+\frac{J_1(k_{c,11}^{TE*}\rho)}{\rho}\frac{J_1(k'_{c,1n}\rho)}{\rho}\right)\rho d\rho\Bigg)$$

Les intégrales sont remplacées par leurs expressions (C.24) et (C.25), d'où :

$$\left\langle\overrightarrow{f_{11}^{TE}}_{pair}\middle|[Y'^{-}_{Mn}]\vec{f}'^{-}_{1n}\right\rangle = \langle A_{11}^{TE-}\,\vec{f}_{11}^{TE-}\big|[Y'^{-}_{1n}]\vec{f}'^{-}_{1n}\rangle \tag{C.32}$$

$$= 2\pi A_{11}^{TE-*}\left(j\left[A'^{TM-}_{1n}\,Y'^{11-}_{1n}+A'^{TE-}_{1n}\,Y'^{21-}_{1n}\right]{I_1}^*+\left[A'^{TM-}_{1n}\,Y'^{12-}_{1n}+A'^{TE-}_{1n}\,Y'^{22-}_{1n}\right]{I_2}^*\right)$$

Par un raisonnement similaire :

$$\left\langle\overrightarrow{f_{11}^{TE}}_{pair}\middle|[Y'^{+}_{mn}]\vec{f}'^{+}_{1n}\right\rangle = \langle A_{11}^{TE+}\,\vec{f}_{11}^{TE+}\big|[Y'^{+}_{1n}]\vec{f}'^{+}_{1n}\rangle \tag{C.33}$$

$$= 2\pi A_{11}^{TE+*}\left(-j\left[A'^{TM+}_{1n}\,Y'^{11+}_{1n}+A'^{TE+}_{1n}\,Y'^{21+}_{1n}\right]{I_1}^*+\left[A'^{TM+}_{1n}\,Y'^{12+}_{1n}+A'^{TE+}_{1n}\,Y'^{22+}_{1n}\right]{I_2}^*\right)$$

C.4 Produits scalaires entre les modes hybrides :

Le produit scalaire entre un mode (EP) et un mode (EN) est nul, car ils sont analytiquement orthogonaux. Il reste à déterminer les expressions des produits scalaires des modes du même type. Considérons une base modale définie par un produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega = [0, a_\Omega] \times [0,2\pi], \mathbb{C})$.

- **Calcul de $\langle\vec{f}'^{+}_{mn}|\vec{f}'^{+}_{mp}\rangle$ et $\langle\vec{f}'^{-}_{mn}|\vec{f}'^{-}_{mp}\rangle$:**

$$\left\langle\overrightarrow{f'^{+}}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'^{+}}_{mp}\right\rangle = \left\langle A'^{TM+}_{mn}\,\overrightarrow{f'^{TM+}}_{mn}+A'^{TE+}_{mn}\,\overrightarrow{f'^{TE+}}_{mn}\middle|A'^{TM+}_{mp}\,\overrightarrow{f'^{TM+}}_{mp}+A'^{TE+}_{mp}\,\overrightarrow{f'^{TE+}}_{mp}\right\rangle$$

$$= (A'^{TM+}_{mn})^*A'^{TM+}_{mp}\left\langle\overrightarrow{f'^{TM+}}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'^{TM+}}_{mp}\right\rangle+(A'^{TE+}_{mn})^*A'^{TE+}_{mp}\left\langle\overrightarrow{f'^{TE+}}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'^{TE+}}_{mp}\right\rangle$$

$$+(A'^{TM+}_{mn})^*A'^{TE+}_{mp}\left\langle\overrightarrow{f'^{TM+}}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'^{TE+}}_{mp}\right\rangle+(A'^{TE+}_{mn})^*A'^{TM+}_{mp}\left\langle\overrightarrow{f'^{TE+}}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'^{TM+}}_{mp}\right\rangle$$

$$= 2\pi\left(A'^{TM+}_{mp}\,(A'^{TM+}_{mn})^{*}\left[\int_0^{a_\Omega}\left(k'_{c,mn}{}^{*}k'_{c,mp}J'_m{}^{*}(k'_{c,mn}\rho)J'_m(k'_{c,mp}\rho)+\frac{m^2}{\rho^2}J^{*}_m(k'_{c,mn}\rho)J_m(k'_{c,mp}\rho)\right)\rho d\rho\right]\right.$$

$$+ A'^{TE+}_{mp}\,(A'^{TE+}_{mn})^{*}\left[\int_0^{a_\Omega}\left(\frac{m^2}{\rho^2}J^{*}_m(k'_{c,mn}\rho)J_m(k'_{c,mp}\rho)+k'_{c,mn}{}^{*}k'_{c,mp}J'_m{}^{*}(k'_{c,mn}\rho)J'_m(k'_{c,mp}\rho)\right)\rho d\rho\right]$$

$$+A'^{TE+}_{mp}\,(A'^{TM+}_{mn})^{*}\left[\int_0^{a_\Omega}\left(k'_{c,mn}{}^{*}\frac{jm}{\rho}J'_m{}^{*}(k'_{c,mn}\rho)J_m(k'_{c,mp}\rho)+\frac{jm}{\rho}k'_{c,mp}J^{*}_m(k'_{c,mn}\rho)J'_m(k'_{c,mp}\rho)\right)\rho d\rho\right]$$

$$\left.-A'^{TM+}_{mp}\,(A'^{TE+}_{mn})^{*}\left[\int_0^{a_\Omega}\left(\frac{jm}{\rho}k'_{c,mp}J^{*}_m(k'_{c,mn}\rho)J'_m(k'_{c,mp}\rho)+k'_{c,mn}{}^{*}\frac{jm}{\rho}J'_m{}^{*}(k'_{c,mn}\rho)J_m(k'_{c,mp}\rho)\right)\rho d\rho\right]\right)$$

On pose :

$$C^{mp}_{mn}=\int_0^{a_\Omega}\left(k'_{c,mp}J^{*}_m(k'_{c,mn}\rho)J'_m(k'_{c,mp}\rho)+k'_{c,mn}{}^{*}J'_m{}^{*}(k'_{c,mn}\rho)J_m(k'_{c,mp}\rho)\right)d\rho$$

$$D^{mp}_{mn}=\int_0^{a_\Omega}\left(\frac{m^2}{\rho^2}J^{*}_m(k'_{c,mn}\rho)J_m(k'_{c,mp}\rho)+k'_{c,mn}{}^{*}k'_{c,mp}J'_m{}^{*}(k'_{c,mn}\rho)J'_m(k'_{c,mp}\rho)\right)\rho d\rho$$

En utilisant les intégrales B_1 et B_2 de l'annexe A, on a pour $m \neq 0$:

$$C^{mp}_{mn}=J_m(k'^{*}_{c,mn}a)J_m(k'_{c,mp}a) \qquad (C.34)$$

$$D^{mp}_{mn}=\frac{a_\Omega k'_{c,mp}k'^{*}_{c,mn}}{2\left(k^{*\prime 2}_{c,mn}-k'^{2}_{c,mp}\right)}\left(k'_{c,mp}\left(J'_{m+1}(k'_{c,mp}a_\Omega)J_{m+1}(k'^{*}_{c,mn}a_\Omega)+J'_{m-1}(k'_{c,mp}a_\Omega)J_{m-1}(k'^{*}_{c,mn}a_\Omega)\right)\right.$$
$$\left.-k'^{*}_{c,mn}\left(J_{m+1}(k'_{c,mp}a_\Omega)J'_{m+1}(k'^{*}_{c,mn}a_\Omega)+J_{m-1}(k'_{c,mp}a_\Omega)J'_{m-1}(k'^{*}_{c,mn}a_\Omega)\right)\right) \qquad (C.35)$$

Ainsi, le produit scalaire entre les modes EP s'écrit sous la forme suivante pour :

$$\left\langle \overrightarrow{f'}^{+}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'}^{+}_{mp}\right\rangle = 2\pi\left(\left(A'^{TM+}_{mp}\,(A'^{TM+}_{mn})^{*}+A'^{TE+}_{mp}\,(A'^{TE+}_{mn})^{*}\right)D^{mp}_{mn}\right. \qquad (C.36)$$
$$\left.+jm\left(A'^{TE+}_{mp}\,(A'^{TM+}_{mn})^{*}-A'^{TM+}_{mp}\,(A'^{TE+}_{mn})^{*}\right)C^{mp}_{mn}\right)$$

Par un raisonnement similaire, le produit scalaire entre les modes EN s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\langle \overrightarrow{f'}^{-}_{mn}\middle|\overrightarrow{f'}^{-}_{mp}\right\rangle = 2\pi\left(\left(A'^{TM-}_{mp}\,(A'^{TM-}_{mn})^{*}+A'^{TE-}_{mp}\,(A'^{TE-}_{mn})^{*}\right)D^{mp}_{mn}\right. \qquad (C.37)$$
$$\left.-jm\left(A'^{TE-}_{mp}\,(A'^{TM-}_{mn})^{*}-A'^{TM+}_{mp}\,(A'^{TE-}_{mn})^{*}\right)C^{mp}_{mn}\right)$$