Aix*Marseille université
Socialement engagée

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 4 janvier 2023 par

Nicolas GODINAUD

Étude numérique et expérimentale d'un jet de plasma intensifié

Discipline
Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité
Mécanique et Physique des Fluides

École doctorale
École Doctorale Des Sciences pour l'Ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique

Laboratoire/Partenaires de recherche
UMR7340 - Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Procédés Propres (M2P2)
UMR5213 - Laboratoire Plasma et Conversion d'Énergie (LAPLACE)

Composition du jury

Bénédicte CUENOT CERFACS, Toulouse	Rapporteur
Laurent FULCHERI PERSEE, MINES ParisTech, Sophia Antipolis	Rapporteur
Stéphane PELLERIN GREMI, Université d'Orléans, Bourges	Examinateur
Arnaud MURA PPRIME, ENSMA, Poitiers	Examinateur
Pierre BOIVIN M2P2, CNRS, Marseille	Directeur de thèse
Pierre FRETON LAPLACE, UPS, Toulouse	Co-directeur de thèse
Jean-Jacques GONZALEZ LAPLACE, CNRS, Toulouse	Co-encadrant de thèse
Frédéric CAMY-PEYRET AKRYVIA, Nantes	Invité

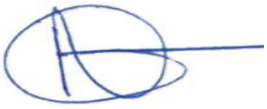
M2P2 Laplace ED 353

Affidavit

Je soussigné, Nicolas Godinaud, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Pierre Boivin et Pierre Freton, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Nantes le 5 Octobre 2022.



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Liste de publications et participation aux conférences

Liste des publications réalisées dans le cadre du projet de thèse :

1. Nicolas Godinaud, Pierre Boivin, Pierre Freton, Jean-Jacques Gonzalez et Frédéric Camy-Peyret. *Development of a new OpenFOAM solver for plasma cutting modeling*. Computers and Fluids 241 (2022), p. 105479

Participation aux conférences au cours de la période de thèse :

1. Nicolas Godinaud, Pierre Boivin, Pierre Freton, Jean-Jacques Gonzalez et Frédéric Camy-Peyret. *Développement d'un Code Hyperbolique pour une Application à la Découpe Plasma*. 15ème Colloque sur les Arcs Électriques (2021), Rouen, France (présentation d'un poster).

Résumé

Ce travail est axé sur la découpe par torche au plasma. Ce procédé industriel permet de couper des plaques de métaux au moyen d'un arc électrique qui est transféré sur les pièces à séparer. Par le gaz injecté à fort débit, ces torches de découpe produisent des jets de plasma supersoniques sous-détendus qui atteignent des températures pouvant dépasser 30 kK. Les zones des pièces métalliques impactées par ces jets chauds entrent ainsi en fusion et les forces inertielles importantes conduisent à l'expulsion du métal liquide vers l'extérieur des pièces, créant alors des saignées de découpe. Les pressions de gaz injectées dans les torches de découpe plasma récentes étant de plus en plus élevées (jusqu'à plus de 10 atmosphères), il est important de caractériser au mieux les effets liés à l'aspect supersonique et aux ondes de choc sur les jets de découpe.

Dans le cadre de cette étude des jets de plasmas supersoniques, un nouveau solveur numérique permettant de capturer les ondes de choc avec précision est présenté. Le solveur développé est basé sur un schéma volumes finis de type Godunov, adapté à la simulation d'écoulements supersoniques. Les résultats numériques ainsi obtenus sont comparés à ceux déterminés à partir des solveurs présentés dans la littérature pour la modélisation des plasmas de découpe. Ces comparaisons sont d'abord un moyen de validation de l'outil développé, mais elles mettent également en avant une bien meilleure capacité du nouveau solveur à capturer les ondes de chocs présentes dans les jets de découpe pour des nombres de Mach élevés. Des mesures expérimentales sur une torche plasma ont également été effectuées au cours de ce travail. Celle-ci sont comparées aux résultats de simulations réalisées avec le nouveau solveur sur une configuration de torche similaire. Outre l'apport de nouveaux éléments de validation du solveur, ces comparaisons entre résultats numériques et expérimentaux permettent aussi de mieux décrire la structure de l'écoulement à l'intérieur de la torche plasma.

Mots clés : Découpe plasma, Simulation numérique, Jets supersoniques, Solveurs de Riemann, Mesures expérimentales

Abstract

This study is focused on plasma arc cutting of metal pieces. This industrial process allows the cutting of electrically conductive materials by means of an electric arc transfered between a plasma torch and a workpiece. Because of the high flow rate gas injection, the plasma torche produces an underexpanded supersonic plasma jet that reaches temperatures over 30 kK. The area of the workpiece impacted by the jet is melted and the high inertial forces cause the expulsion of the liquid metal out of the pieces, creating kerfs. With the increasing pressures of the gas injected in the current plasma cutting torches, a thorough investigation is required regarding the effects of the supersonic aspect and the shock waves on the cutting jets.

For this purpose, a new numerical solver is introduced, allowing an accurate capture of shock waves in plasma cutting jets. This solver is based on a Godunov-type finite volume scheme which is adapted to supersonic flows simulations. The numerical results obtained with this new method are compared to those determined with other solvers presented in the litterature for plasma cutting modelling. These comparisons are used to validate the developed tool and they also show that the new solver is able to improve the capture of shocks for high Mach number plasma flows. Experimental measurments have also been carried out during this study. The experimental results are compared to the numerical results computed on a similar plasma cutting torch configuration. In addition to providing new elements for the validation of the solver, these comparisons between numerical and experimental results allow a better description of the flow's structure inside the plasma torch.

Keywords: Plasma Cutting, Numerical simulation, Supersonic jets, Riemann solvers, Experimental measurments

Remerciements

Mon travail de doctorat arrivant à terme, je souhaite exprimer ma reconnaissance à de nombreuses personnes de mon entourage et rencontrées au sein des laboratoires Laplace à Toulouse, M2P2 à Marseille et dans l'entreprise Akryvia à Nantes.

Tout d'abord, je remercie les différents membres du jury de ma thèse, qui ont accepté d'examiner mon travail.

Je suis particulièrement reconnaissant envers mes encadrants, Pierre Freton et Jean-Jacques Gonzalez au laboratoire Laplace, Pierre Boivin au laboratoire M2P2 et mon encadrant en entreprise Frédéric Camy-Peyret. J'ai pu grâce à eux mener à bien ce travail et acquérir de nombreuses connaissances dans les domaines des plasmas et de la mécanique des fluides. Je les remercie pour leur réactivité, leur disponibilité et le suivi régulier tout au long de ces trois années, que ce soit dans les laboratoires et l'entreprise, ou bien à distance lorsque je n'étais pas dans la même ville qu'eux.

Je souhaite également remercier tous mes collègues à Akryvia pour la bonne humeur, la cohésion dans l'entreprise, les petits déjeuners et les parties de squash. Je tiens spécialement à remercier Marc, Sébastien et Coralie, qui m'ont accompagné et aidé lors des essais expérimentaux.

Je remercie aussi mes parents pour la relecture et les encouragements tout au long de la thèse. J'ai également une pensée pour mon frère Jérémy, qui a effectué sa thèse en même temps que moi et qui sera très bientôt docteur. Je lui souhaite bon courage pour ses derniers mois de thèse.

Je remercie également mes amis de longue date à Bordeaux et toutes les nouvelles personnes avec qui j'ai pu sympathiser à Toulouse, à Marseille et à Nantes. Merci à tous pour leur soutien et tous les bons moments passés ensemble. Enfin, je remercie mon super coloc Louis le Falafel de m'avoir sustenté avec de nombreuses galettes bretonnes, durant cette fin de thèse assez prenante.

Table des matières

Affidavit **3**

Liste de publications et participation aux conférences **5**

Résumé **7**

Abstract **9**

Remerciements **11**

Table des matières **13**

Table des figures **17**

Liste des tableaux **21**

Introduction générale **23**

1. Présentation de la découpe plasma **27**
1.1. Introduction . . . 27
1.2. Introduction à la découpe plasma . . . 28
1.2.1. Notions sur les plasmas thermiques . . . 28
1.2.2. Principe de fonctionnement de la découpe plasma . . . 29
1.2.2.1. Fonctionnement en phase de coupe . . . 29
1.2.2.2. Amorçage de l'arc par haute fréquence . . . 30
1.2.3. Principales évolutions technologiques du procédé, de son invention à aujourd'hui . . . 31
1.2.3.1. Historique des évolutions . . . 31
1.2.3.2. Présentation de l'innovation d'Akryvia . . . 34
1.2.4. Comparaison à d'autres procédés de découpe . . . 35
1.2.4.1. Présentation des principaux procédés de découpe . . . 35
1.2.4.2. Matériaux et épaisseurs de coupe . . . 35
1.2.4.3. Vitesses et qualité de coupe . . . 36
1.2.4.4. Impact environnemental et poids économique . . . 37
1.2.4.5. Comparaison des coûts d'utilisation . . . 38
1.2.4.6. Synthèse sur la comparaison des procédés de découpe . . . 39
1.3. Étude bibliographique sur la découpe plasma . . . 40
1.3.1. État de l'art sur les modélisations et simulations du procédé . . . 40
1.3.1.1. Premières modélisations d'arcs de découpe . . . 40

1.3.1.2. Autres modélisations pertinentes d'arcs de découpe 43
1.3.1.3. Synthèse sur la modélisation de la découpe plasma 46
1.3.2. Études expérimentales du procédé 47
1.3.2.1. Caractérisation des plasmas de découpe 47
1.3.2.2. Interaction arc-matière et endommagement de la cathode 48
1.3.2.3. Conditions opératoires et performances de coupe 49

2. Modélisation d'une torche plasma à froid **51**
2.1. Introduction 52
2.2. Présentation de la configuration étudiée 52
2.3. Modèle mathématique 53
2.3.1. Hypothèses 53
2.3.2. Équations du modèle 53
2.3.3. Équations d'état 54
2.4. Méthode de résolution 55
2.4.1. Méthode des volumes finis 55
2.4.1.1. Volumes finis 1D 55
2.4.1.2. Volumes finis 3D 57
2.4.2. Calcul des flux numériques pour les systèmes hyperboliques 58
2.4.2.1. Problèmes de Riemann et schéma de Godunov 59
2.4.2.2. Solveurs de Riemann approchés pour les équations d'Euler : solveurs HLL et HLLC 60
2.4.3. Schéma du second ordre : reconstruction MUSCL 65
2.4.3.1. Principe de la reconstruction MUSCL en une dimension 65
2.4.3.2. Reconstruction MUSCL en trois dimensions et schéma TVD . . 66
2.4.4. Intégration en temps et condition CFL 67
2.4.5. Algorithme du solveur et outil développé 68
2.5. Validation de la méthode numérique 69
2.5.1. Cas tests pour la validation du schéma HLLC et de la reconstruction MUSCL 69
2.5.1.1. En une dimension : tube à choc 69
2.5.1.2. En deux dimensions : problème de Riemann 2D 71
2.5.2. Comparaison à une méthode pressure-based : configuration de la torche à froid 73
2.5.2.1. Paramètres des calculs et conditions limites 73
2.5.2.2. Comparaison des résultats et discussions 75
2.6. Conclusion 78

3. Modélisation d'une torche de découpe plasma **79**
3.1. Introduction 79
3.2. Présentation de la configuration étudiée 80
3.3. Modèle mathématique 81
3.3.1. Hypothèses 81
3.3.2. Équations du modèle 82

3.3.3. Modèle de fermeture - équations d'état . . . 84
3.3.3.1. Équations d'état . . . 84
3.3.3.2. Calcul de la vitesse du son . . . 87
3.3.3.3. Coefficients de transport . . . 88
3.4. Méthode de résolution . . . 89
3.4.1. Calcul du potentiel électrique et des termes sources . . . 89
3.4.1.1. Discrétisation de l'équation de Laplace . . . 89
3.4.1.2. Calcul des termes sources . . . 92
3.4.2. Intégration temporelle et algorithme du solveur . . . 92
3.5. Validation de la méthode numérique : simulation d'une torche de découpe plasma 93
3.5.1. Conditions limites . . . 94
3.5.2. Analyse de convergence en maillage . . . 95
3.5.2.1. Direction axiale . . . 95
3.5.2.2. Direction radiale . . . 96
3.5.3. Comparaison des résultats . . . 97
3.5.3.1. Description de l'écoulement et comparaison des champs . . . 98
3.5.3.2. Comparaison des profils axiaux . . . 100
3.5.3.3. Comparaison des profils radiaux autour de l'onde de choc . . . 101
3.5.3.4. Comparaison des profils radiaux dans le canal de tuyère . . . 102
3.6. Conclusion . . . 102

4. Mesures expérimentales sur une torche plasma et comparaisons aux simulations numériques 103
4.1. Introduction . . . 104
4.2. Dispositif et démarche expérimentale . . . 104
4.2.1. Présentation de l'installation expérimentale . . . 104
4.2.2. Plan d'essais . . . 106
4.2.3. Difficultés rencontrées et incertitudes sur les mesures . . . 106
4.3. Comparaisons à froid . . . 109
4.3.1. Paramètres des simulations numériques . . . 109
4.3.1.1. Présentation de la configuration . . . 109
4.3.1.2. Modèle et méthode numérique . . . 110
4.3.1.3. Conditions limites et maillages . . . 110
4.3.1.4. Prise en compte de l'injection en vortex . . . 111
4.3.2. Présentation des résultats numériques . . . 114
4.3.2.1. Validation numérique de l'injection en vortex . . . 114
4.3.2.2. Analyse de l'influence de l'injection en vortex . . . 115
4.3.3. Comparaison et analyse des résultats expérimentaux et numériques . . . 121
4.3.3.1. Cas d'une injection axiale . . . 121
4.3.3.2. Cas d'une injection en vortex . . . 122
4.4. Comparaisons à chaud . . . 123
4.4.1. Paramètres des simulations numériques . . . 123
4.4.1.1. Présentation de la configuration . . . 123

4.4.1.2. Modèle et méthode numérique 124
4.4.1.3. Conditions limites et maillage 125
4.4.2. Analyse des résultats expérimentaux et numériques 126
4.4.2.1. Comparaisons des débits expérimentaux et numériques 126
4.4.2.2. Analyses des résultats numériques et hypothèses sur les différences avec les résultats expérimentaux 129
4.5. Conclusion 138

Conclusion générale et perspectives **139**

Bibliographie **143**

Annexes **151**
A. Calculs des opérateurs gradient et divergence dans OpenFOAM 151
A.1. Calcul des gradients avec la méthode des moindres des carrés (least squares) 151
A.2. Calcul de la divergence avec la méthode de Gauss 153
B. Propriétés thermodynamiques et coefficients de transport de l'air et de l'oxygène 155
B.1. Air 155
B.2. Oxygène 156
C. Comparaisons entre conditions de glissement et de non-glissement 157

Table des figures

1.1. Principe de la découpe plasma. . . . 29
1.2. Comparaison entre une injection droite et une injection en vortex. . . . 30
1.3. Amorçage de l'arc par HF. . . . 31
1.4. Comparaison entre une torche mono-injection et une torche double-injection. . . . 32
1.5. Phénomène d'arc double. . . . 33
1.6. Principe de l'adaptation de pression. . . . 34
1.7. Vitesses de découpe sur de l'acier doux en fonction de l'épaisseur (*issu de* [26]). 1 : plasma 65 A ; 2 : plasma 200 A ; 3 : plasma 400 A ; 4 : laser 4—5 kW ; 5 : Oxycoupage. . . . 37

2.1. Détails de la géométrie considérée pour l'étude de la torche à froid. . . . 52
2.2. Exemple de maillage en une dimension d'un domaine fini $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Les valeurs de x avec des indices entiers indiquent la position des centres des cellules et les valeurs avec les indices intermédiaires correspondent aux faces des cellules. . . . 56
2.3. Exemple de deux cellules tétraédriques adjacentes Ω_L et Ω_R. C_L et C_R sont les barycentres des cellules, Γ désigne la face séparant Ω_L et Ω_R, C_Γ est le barycentre de Γ et $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à Γ, sortant de Ω_L. . . . 57
2.4. Exemple de deux mailles triangulaires adjacentes. . . . 59
2.5. Contour d'intégration pour les relations de Rankine-Hugoniot. . . . 60
2.6. Structure dans le plan (x, t) de la solution du problème de Riemann pour les équations d'Euler 1D. . . . 62
2.7. Solveur HLL : structure dans le plan (ξ, t) de la solution du problème de Riemann. 62
2.8. Solveur HLLC : structure de la solution du problème de Riemann. . . . 63
2.9. Principe de la reconstruction MUSCL en une dimension. . . . 65
2.10. Représentation du tube à choc de Sod. . . . 70
2.11. Profils obtenus à $t = 0.25$ s pour le cas test du tube à choc. Comparaison entre solution exacte et solutions numériques. . . . 70
2.12. Profils calculés à $t = 0.25$ s pour le cas test du tube à choc. Comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques obtenues (ordre 2) pour différentes résolutions de maillage. . . . 71
2.13. Représentation du problème de Riemann 2D. . . . 72
2.14. Contours de la densité pour le problème de Riemann 2D à $t = 0.3$ s. . . . 72
2.15. Convergence des débits massiques à l'inlet et au milieu du canal de tuyère - $p_{in} = 6$ bars . . . 74
2.16. Représentations du maillage utilisé pour la simulation de la torche avec OF. . . . 74
2.17. Comparaison des champs calculés avec OF et Fluent - $p_{in} = 6$ bars. . . . 76

2.18. Profils de nombre de Mach suivant l'axe x - Comparaison entre résultats OF, Fluent pressure-based, Fluent density-based et SU2 pour différentes pressions d'entrée p_{in}. 77
2.19. Profils de quantité de mouvement suivant l'axe x - Comparaison entre résultats OF, Fluent pressure-based, Fluent density-based et SU2 pour différentes pressions d'entrée p_{in}. 78

3.1. Détails de la géométrie considérée pour l'étude de la torche de découpe. 80
3.2. Interpolations de l'énergie interne e et de la densité ρ pour de l'air à $p = 5$ bars - Erreur IE entre les valeurs interpolées et les valeurs calculées. 86
3.3. Contours de l'erreur en pression $E_p(T, p)$. 87
3.4. Valeurs de la vitesse du son c et de la capacité thermique c_p pour de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars. 88
3.5. Valeurs de la conductivité thermique calculées pour de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars. 89
3.6. Schémas d'une face orthogonale et d'une face non-orthogonale 91
3.7. Maillage et zones de raffinements. 95
3.8. Profils suivant l'axe x - Comparaison entre différents niveaux de raffinement du maillage dans la direction axiale. 96
3.9. Profils radiaux dans une section au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) - Comparaison des résultats obtenus pour différents raffinements dans la direction radiale. 97
3.10. Comparaison des champs calculés avec OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars. 99
3.11. Profils suivant l'axe x - Comparaison entre résultats OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars. 100
3.12. Profils radiaux en amont ($x = 8.25$ mm) et en aval ($x = 8.55$) mm de l'onde de choc - Comparaison entre résultats OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars. 101
3.13. Profils radiaux dans une section au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) - Comparaison entre résultats OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars. 102

4.1. Schéma du dispositif expérimental 104
4.2. Photo de la torche Akryvia utilisée pour les essais expérimentaux 105
4.3. Changement de la position d'attache de l'arc sur le disque lorsque la torche est déplacée horizontalement. 107
4.4. Schémas de la géométrie considérée pour l'étude à froid 109
4.5. Représentation d'un maillage utilisé pour l'étude de la torche à froid 111
4.6. Présentation de la configuration au niveau de la sortie des canaux 112
4.7. Schéma de la face correspondant à l'entrée du domaine de calcul 112
4.8. Vitesse azimutale calculée à partir de la simulation sur la géométrie complète avec l'injecteur - Représentation dans le plan (z, y) correspondant à l'inlet de la géométrie sans injecteur. 114
4.9. Comparaison des champs de vitesse azimutale et de pression obtenus dans le cas de la géométrie complète avec injecteur et sur le quart de géométrie sans injecteur. 115
4.10. Configuration quasi-1D d'une tuyère convergente-divergente. 116
4.11. Ligne de niveau $Ma = 1$ déterminée numériquement. 117

4.12. Évolutions des coefficients de débit et des nombres de Mach en fonction du maillage. 118
4.13. Comparaison des profils de nombre de Mach entre injection axiale et injection en vortex (maillage 3). 118
4.14. Comparaison des profils de nombres de Mach au col entre injection axiale et injection en vortex. 119
4.15. Profils de vitesse et nombre de Mach azimutaux - Injection vortex. 119
4.16. Coefficient de décharge en fonction du nombre de swirl S_w pour différents profils de vitesse azimutale au niveau du col - Valeurs analytiques (*issu de* [109] et extrapolé pour $S_w > 0.3$). 120
4.17. Comparaison des débits théoriques, expérimentaux et numériques en fonction de la pression - Injection axiale. 121
4.18. Comparaison des débits expérimentaux et numériques en fonction de la pression - Injection vortex. 122
4.19. Schémas de la géométrie considérée pour l'étude à chaud 123
4.20. Comparaison des débits expérimentaux et numériques en fonction de l'intensité du courant I - $p_{in} = 7$ bars. 127
4.21. Comparaison des débits expérimentaux et numériques en fonction de la pression d'injection p_{in} - $I = 50$ A. 128
4.22. Comparaison des coefficients de décharge expérimentaux et numériques en fonction de la pression d'injection p_{in} - $I = 50$ A. 129
4.23. Comparaison des champs de température et de densité calculés pour $I = 30$ A et $I = 110$ A - $p_{in} = 7$ bars. 130
4.24. Comparaison des champs de température et de densité calculés pour $p_{in} = 3$ bars et $p_{in} = 8$ bars - $I = 50$ A. 131
4.25. Profils radiaux déterminés numériquement à la sortie du canal de tuyère en fonction de l'intensité du courant I - $p_{in} = 7$ bars. 132
4.26. Profils radiaux déterminés numériquement à la sortie du canal de tuyère en fonction de la pression d'injection p_{in} - $I = 50$ A. 134
4.27. Puissances en fonction de l'intensité du courant - Résultats numériques. 137
4.28. Puissances en fonction de la pression d'injection - Résultats numériques. 137

1. Exemple d'une cellule entourée de ses quatre voisines - Calcul du gradient 151
2. Exemple d'une cellule entourée de ses quatre voisines - Calcul de la divergence . 153
3. Coefficients de transport de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars. 155
4. Densité de masse et énergie interne de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars. 155
5. Coefficients de transport de l'oxygène à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars. 156
6. Densité de masse et énergie interne de l'oxygène à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars. . . . 156
7. Comparaison des profils de quantité de mouvement et de vitesse au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) entre conditions de glissement et conditions de non-glissement - Maillage le plus grossier ($n_r = 23$) 157
8. Comparaison des profils de quantité de mouvement et de vitesse au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) entre conditions de glissement et conditions de non-glissement - Raffinement intermédiaire ($n_r = 37$) 157

9. Comparaison des profils de quantité de mouvement et de vitesse au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) entre conditions de glissement et conditions de non-glissement - Maillage le plus fin ($n_r = 55$) 158

Liste des tableaux

1.1. Plages d'épaisseur pour les différents procédés de découpe et pour différents métaux (*adapté de* [30]). 36
1.2. Pollutions émises par les quatre procédés de découpe (*adapté de* [30]). 38

2.1. Tableau de Butcher du schéma RK2 de Heun. 68
2.2. Conditions limites pour la simulation de la torche à froid. 73

3.1. Conditions limites pour la simulation de la torche de découpe. 94

4.1. Conditions limites pour la simulation de la torche à froid. 110
4.2. Conditions limites pour la simulation de la torche à chaud. 125

1. Débits massiques calculés en fonction du maillage et de la condition limite en vitesse sur la paroi de tuyère. 158

Introduction générale

Suite à la découverte par Davy de l'arc électrique au carbone, associée à l'invention de la première lampe électrique [1], divers procédés plasma ont pu être développés à partir du XIX^{e} siècle. Parmi les deux grandes familles de plasmas, différenciées en plasmas chauds et plasmas froids [2], la sous-catégorie des plasmas froids à l'équilibre est utilisée pour de nombreuses applications industrielles [3]. Ces derniers types de plasmas, plus généralement nommés plasmas thermiques, sont par exemple employés pour le traitement des déchets [4], le traitement des surfaces par le dépôt de revêtements [5], ainsi que pour différentes applications dans le domaine de la métallurgie [6]. L'utilisation des plasmas thermiques dans l'industrie s'est majoritairement répandue à partir des années 50, avec l'invention des premières torches à plasma industrielles [3]. Cependant, plusieurs procédés plasmas étaient déjà exploités, pour des applications telles que la production d'acétylène ou le soudage à l'arc, dont l'industrie de l'armement a fait usage dès le début de la première guerre mondiale [7]. En fonction des applications, trois types de torches à plasma sont généralement employées [6] : les torches à plasma inductif, les torches à plasma soufflé et les torches à arc transféré.

Le travail présenté dans cette thèse est focalisé sur la découpe de métaux par plasma, qui est un des procédés découpe couramment utilisé dans la métallurgie. Cette technique de découpe, fonctionnant avec des torches à arc transféré, a été inventée par le Dr R. Gage [8] à la fin des années 50 par extension de la méthode de soudure TIG (Tungsten Inert Gas). Le principe de fonctionnement de la découpe plasma est basé sur l'établissement d'un arc électrique entre la cathode d'une torche et une pièce à découper. Dans la torche, une tuyère convergente de faible section permet de constricter l'arc, induisant une forte augmentation de sa température et de la vitesse du gaz. La plaque en métal est alors impactée à très grande vitesse par un jet de plasma très chaud, entraînant la fusion du métal et son expulsion, formant ainsi une saignée de découpe.

De nombreuses améliorations de la découpe plasma ont eu lieu depuis le début de l'utilisation du procédé [9]. Celles-ci ont notamment permis d'augmenter sa précision, sa vitesse, ainsi que son rendement énergétique. Ce procédé plasma est alors devenu une technique de découpe industrielle de plus en plus performante face aux principales méthodes concurrentes, que sont la découpe au laser, l'oxycoupage et la découpe au jet d'eau. Les évolutions de la découpe plasma sont le résultat d'approches empiriques, d'études expérimentales et plus récemment d'études numériques par le biais de la simulation. Les principales méthodes expérimentales utilisées pour la caractérisation des arcs de découpe sont la spectroscopie d'émission et l'imagerie rapide [10-15]. Les études spectroscopiques permettent notamment de déterminer dans le jet de plasma les champs de température, de pression et de densité électronique. Concernant les techniques d'imageries rapides, elles sont principalement utilisées afin d'étudier l'aspect du jet supersonique de plasma et d'observer ainsi la position des ondes de chocs apparaissant en sortie de torche lors de la découpe au plasma. Bien que ces études aient permis de mieux comprendre le comportement

et la physique des jets de découpe plasma, la majorité des travaux expérimentaux récents sont consacrés à l'optimisation du procédé en analysant l'influence des paramètres opératoires sur sa performance [16]. En complément des études expérimentales, des outils de simulation numérique basés sur la CFD (Computational Fluid Dynamics) ont été développés pour affiner l'analyse de la physique liée à la découpe plasma [11, 17]. L'intérêt des simulations numériques est double, permettant à la fois de caractériser les propriétés et le comportement du plasma à l'intérieur et à l'extérieur de la torche, tout en s'affranchissant de mesures expérimentales complexes à réaliser et coûteuses en termes de temps ainsi que financièrement. La voie expérimentale reste tout de même essentielle dans le cadre de la validation des modèles numériques [12, 17, 18] et des essais réels de découpe.

Parmi les évolutions les plus récentes concernant la découpe au plasma, un critère permettant d'améliorer la précision et les performances du procédé est celui de l'intensification du jet de plasma. Il s'agit d'augmenter la pression du gaz plasmagène injecté dans la torche, qui induit un phénomène de constriction du plasma, avec une réduction de son diamètre à l'intérieur de la torche, accompagnée d'une augmentation sa température. Cependant, l'utilisation de pressions d'injections élevées, avec des valeurs pouvant typiquement dépasser les 10 atm, peut engendrer un effet opposé à celui souhaité. En effet, l'aspect supersonique du jet de plasma conduit à son élargissement en sortie de torche lorsque la pression est augmentée, ainsi qu'à une plus grande amplitude des ondes de chocs. Ces phénomènes ont tous deux une influence négative sur la qualité des découpes. Un bon compromis récemment proposé est celui de l'intensification du plasma associée à un meilleur contrôle des phénomènes supersoniques en sortie de torche [19].

Dans la littérature, les différentes études numériques consacrées à la découpe plasma ont permis de calculer avec précision les profils des principales grandeurs caractéristiques du plasma, à l'intérieur et à l'extérieur de la torche, comme par exemple la température, la pression, la vitesse et le potentiel électrique. Toutefois, ces études considèrent toutes des pressions d'injection ne dépassant pas 5 atm, induisant des jets plasmas dont les vitesses sont inférieures à Mach 2. De plus, les outils numériques utilisés sont basés sur des méthodes pressure-based de type SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [20], qui ne sont pas les plus adaptées et les plus robustes pour la simulation d'écoulements supersoniques à nombres de Mach élevés. Dans notre travail, nous proposons alors de développer un nouvel outil de simulation numérique des plasmas de découpe, à la fois robuste et permettant d'améliorer la capture et l'analyse des phénomènes supersoniques dans les jets de découpe. Pour cela, un nouveau solveur a été implémenté dans le code de CFD open source OpenFOAM [21]. Celui-ci est basé sur un schéma volumes finis explicite tri-dimensionnel de type Godunov [22] qui est adapté pour les écoulements supersoniques, couplé à un solveur de Laplace permettant de déterminer le champ de potentiel électrique du plasma. L'intérêt du solveur numérique ainsi développé est de pouvoir simuler le plasma dans la torche et dans le jet pour de larges plages de pressions d'injection, telles que celles amenées à être utilisées dans l'industrie avec les nouveaux procédés utilisant le contrôle de l'intensification du jet.

Au cours de cette étude, le solveur a d'abord été utilisé sur des configurations « à froid », c'est à dire pour des cas où seul l'écoulement de gaz est considéré, sans modélisation du plasma. Ces calculs à froid sont nécessaires, car ils permettent de valider la capacité du solveur à bien simuler le comportement hydrodynamique du fluide. La modélisation du couplage fluide-plasma

a également été validée sur une configuration de torche à plasma, en comparant les résultats obtenus avec le nouveau solveur à ceux déterminés au moyen d'un solveur numérique présenté et validé dans la littérature [11]. Pour compléter ces validations, des mesures expérimentales ont été réalisées sur une torche à plasma industrielle, développée par l'entreprise Akryvia. L'étude expérimentale s'est principalement focalisée sur des mesures de débits massiques de gaz dans la torche, pour différentes pressions d'injection et plusieurs valeurs de l'intensité du courant électrique alimentant la torche. Les résultats obtenus expérimentalement ont alors été comparés aux résultats déterminés avec le nouveau solveur, en réalisant des simulations sur la géométrie industrielle, avec des conditions opératoires similaires.

Cette thèse est organisée en quatre chapitres décrits ci-dessous.

- Le premier chapitre introduit d'abord le principe de fonctionnement de la découpe plasma, ainsi que les évolutions majeures du procédé depuis son invention. Celui-ci est ensuite comparé sur différents critères aux principaux procédés de découpes concurrents : la découpe au laser, l'oxycoupage et la découpe au jet d'eau. La seconde partie de ce chapitre est une synthèse bibliographique axée sur deux types d'études du procédé trouvées dans la littérature scientifique : les études expérimentales et les études via la simulation numérique.
- Le deuxième chapitre est dédié à la simulation d'une torche « à froid ». Le modèle mathématique et la méthode numérique employée pour résoudre les équations sont détaillés, puis le solveur est validé sur des cas tests classiques tels que des tubes à choc et des problèmes de Riemann 2D. Des simulations sur une configuration de torche sont présentées pour évaluer la précision et la robustesse du solveur, en considérant des pressions d'injection de gaz dans la torche allant de 4 à 7 bars. Les mêmes simulations ont été réalisées au moyen d'un solveur numérique de type pressure-based et les résultats obtenus avec les deux méthodes sont alors comparés.
- Le troisième chapitre porte sur la simulation d'une torche à plasma « à chaud », en prenant en compte le couplage entre le fluide et l'aspect électrique du plasma. Après avoir introduit les principales hypothèses et le modèle mathématique, les méthodes d'interpolation utilisées pour déterminer les propriétés thermodynamiques du plasma sont présentées. Les schémas numériques employés pour la discrétisation des équations sont ensuite détaillés, puis la simulation d'une torche à plasma est présentée. Les simulations ont été effectuées avec le solveur développé dans cette étude et également avec un solveur pressure-based, préalablement validé à partir de données expérimentales sur des configurations de découpe plasma.
- Le dernier chapitre de ce travail s'intéresse à l'étude numérique et expérimentale d'une torche à plasma industrielle. Les configurations et démarches expérimentales sont présentées dans un premier temps. Ce travail expérimental a été séparé en deux, avec une étude sur l'écoulement à froid dans la torche, et une étude à chaud avec un arc établi entre une anode et la cathode de la torche. Ces études ont consisté à mesurer les débits de gaz dans la torche, pour différentes pressions d'injection et, dans le cas à chaud, plusieurs valeurs de l'intensité du courant. Le chapitre est ensuite divisé en deux parties, l'une s'intéressant à l'écoulement à froid et la seconde consacrée à l'écoulement à chaud. L'étude à froid a

été réalisée en considérant des pressions d'injection des gaz dans la torche allant de 3 à 10 bars. Pour toutes les valeurs de débits mesurées, des simulations ont été réalisées avec le solveur sur la géométrie de la torche, en considérant les mêmes pressions d'injection. Pour l'écoulement à chaud avec plasma, les mesures expérimentales et les simulations ont été réalisées en considérant des intensités du courant comprises entre 30 et 110 A, et des pression d'injection allant de 3 à 10 bars. Le chapitre se termine par la présentation et la discussion de plusieurs hypothèses pouvant expliquer les écarts de débits obtenus avec le solveur numérique.

1. Présentation de la découpe plasma

Sommaire

1.1. Introduction . . . 27
1.2. Introduction à la découpe plasma . . . 28
1.2.1. Notions sur les plasmas thermiques . . . 28
1.2.2. Principe de fonctionnement de la découpe plasma . . . 29
1.2.2.1. Fonctionnement en phase de coupe . . . 29
1.2.2.2. Amorçage de l'arc par haute fréquence . . . 30
1.2.3. Principales évolutions technologiques du procédé, de son invention à aujourd'hui . . . 31
1.2.3.1. Historique des évolutions . . . 31
1.2.3.2. Présentation de l'innovation d'Akryvia . . . 34
1.2.4. Comparaison à d'autres procédés de découpe . . . 35
1.2.4.1. Présentation des principaux procédés de découpe . . . 35
1.2.4.2. Matériaux et épaisseurs de coupe . . . 35
1.2.4.3. Vitesses et qualité de coupe . . . 36
1.2.4.4. Impact environnemental et poids économique . . . 37
1.2.4.5. Comparaison des coûts d'utilisation . . . 38
1.2.4.6. Synthèse sur la comparaison des procédés de découpe . . . 39
1.3. Étude bibliographique sur la découpe plasma . . . 40
1.3.1. État de l'art sur les modélisations et simulations du procédé . . . 40
1.3.1.1. Premières modélisations d'arcs de découpe . . . 40
1.3.1.2. Autres modélisations pertinentes d'arcs de découpe . . . 43
1.3.1.3. Synthèse sur la modélisation de la découpe plasma . . . 46
1.3.2. Études expérimentales du procédé . . . 47
1.3.2.1. Caractérisation des plasmas de découpe . . . 47
1.3.2.2. Interaction arc-matière et endommagement de la cathode . . . 48
1.3.2.3. Conditions opératoires et performances de coupe . . . 49

1.1. Introduction

Ce chapitre a pour premier objectif de présenter la découpe plasma de manière globale, afin de comprendre les différents aspects techniques et physiques liés à ce procédé industriel. La seconde partie de ce chapitre est portée sur une étude de la littérature scientifique dédiée à la modélisation et la simulation de la découpe plasma, ainsi qu'aux principaux travaux expérimentaux publiés.

1.2. Introduction à la découpe plasma

1.2.1. Notions sur les plasmas thermiques

En amont de la présentation du procédé de découpe, il est judicieux de commencer par introduire la notion de plasma, et notamment de plasmas thermiques. Ces derniers sont par exemple présentés de manière exhaustive dans le *Thermal Plasma* [2]. Un plasma est un gaz totalement ou en partie ionisé, composé d'un mélange d'électrons, d'ions et de particules neutres telles que les atomes et les molécules. Dans la suite, les ions et les particules neutres seront appelés particules « lourdes », étant donné que leur masse est largement supérieure à celle des électrons. Une des caractéristiques principale des plasmas est leur haute densité énergétique : on considère généralement les plasmas comme le quatrième état de la matière, bien plus énergétique que les gaz, solides et liquides. En raison de cette forte densité énergétique, les plasmas contiennent également des particules lourdes excitées. Ces dernières peuvent spontanément revenir à un état non excité en émettant des photons, rendant ainsi les plasmas lumineux. Dans un plasma, les nombres de charges positives et négatives s'équilibrent, induisant ainsi un milieu globalement électriquement neutre : on parle de quasi-neutralité. Cette propriété est due au principe de conservation de la charge électrique au cours des ionisations. Dans un plasma, la présence d'électrons libres rend le milieu conducteur du courant électrique, contrairement aux milieux gazeux qui sont isolants.

En fonction des niveaux d'ionisation, des températures et des pressions, les plasmas sont divisés en deux catégories principales : les plasmas chauds et les plasmas froids. Parmi les plasmas froids, on distingue deux sous-catégories qui sont les plasmas froids hors-équilibre et les plasmas thermiques.

- Les plasmas chauds, ou plasmas de fusion, sont très fortement ionisés, avec des densités d'ions et d'électrons supérieures à 10^{26} particules/m^3. Dans ce type de plasma, les températures sont généralement comprises entre 10^6 et 10^8 K [2].
- Les plasmas froids hors-équilibre correspondent à des gaz faiblement ionisés, au sein desquels la densité électronique est généralement inférieure à 10^{20} particules/m^3. On dit que ces plasmas sont « hors-équilibre » car la température des électrons est largement supérieure à celle des particules lourdes. Bien que la température de ces dernières soit proche de la température ambiante, la pression à laquelle les plasmas hors-équilibre se forment peut être très faible, inférieure à 10 kPa. Les lampes à UV, les ampoules basse consommation ou encore les aurores boréales sont des exemples au sein desquels la lumière est émise au moyen de plasmas froids hors-équilibre.
- On dénomme plasmas thermiques les plasmas froids à l'équilibre thermique et chimique. C'est à ce type de plasma que l'on s'intéressera, car les torches de découpe plasma sont conçues pour générer des plasmas thermiques. Ces derniers sont générés pour des pressions supérieures à 10 kPa et peuvent atteindre des températures allant de 10^4 à 10^5 K, associées à des densités électroniques allant de 10^{21} à 10^{26} particules/m^3 [2]. Au sein d'un plasma thermique, on considère généralement que la température des particules lourdes est égale à la température des électrons libres : il s'agit de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique

local (ETL), qui sera utilisée pour le reste de cette étude. Cette hypothèse est valide si la densité électronique est suffisante pour que les collisions élastiques entre électrons et particules lourdes dominent les processus d'excitation et désexcitation, c'est à dire lorsque l'importance des phénomènes radiatifs est négligeable par rapport aux processus de collisions. L'hypothèse d'ETL suppose également que les gradients de température et de densité ne sont pas trop forts, ce qui favoriserait les flux diffusifs. De plus, l'ETL implique que les phénomènes d'absorption et d'émission de rayonnement se font de manière sélective pour certaines longueurs d'ondes, contrairement au cas du corps noir. Les plasmas thermiques sont régis par les lois de l'ETL [23] : lois de Maxwell, de Boltzmann, de Saha, de Guldberg-Waage, de Planck, de Dalton et principe de neutralité électrique. Celles-ci permettent de calculer la composition du plasma à l'équilibre et ainsi de déterminer ses propriétés thermodynamiques telles que la densité et l'énergie interne, ainsi que ses coefficients de transport, comme par exemple les conductivités électrique et thermique.

1.2.2. Principe de fonctionnement de la découpe plasma

Afin de réaliser une découpe au plasma, un arc électrique est transféré entre la torche et la pièce de métal. Dans cette partie, le principe de fonctionnement en phase de coupe est d'abord présenté, en supposant que l'arc a déjà été établi entre la torche et la pièce. La phase d'amorçage est ensuite détaillée, de la formation de l'arc dans la torche, jusqu'à son transfert vers la pièce en métal.

1.2.2.1. Fonctionnement en phase de coupe

Le principe de fonctionnement de la découpe plasma est schématisé sur la Figure 1.1.

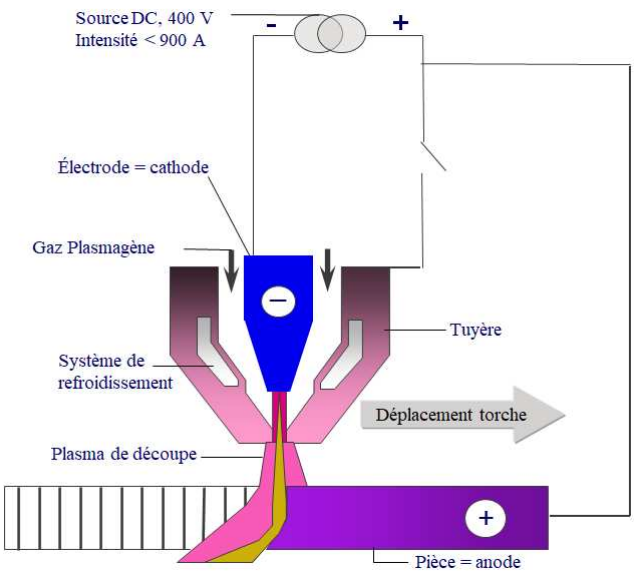


Figure 1.1. – Principe de la découpe plasma.

Lors de la découpe plasma, un arc électrique transféré est établi entre une cathode plate située dans la torche, et une pièce métallique à découper correspondant à l'anode. Cet arc électrique est

entretenu par un gaz plasmagène injecté autour de l'électrode dans une tuyère convergente, avec une pression de plusieurs atmosphères. Le gaz est suffisamment ionisé par l'arc électrique pour obtenir un plasma thermique. Ce plasma étant conducteur du courant, il chauffe par effet Joule jusqu'à atteindre plusieurs milliers de kelvins. De plus, en raison de la forme convergente de la tuyère et des pressions importantes des gaz d'injection, un phénomène de constriction du plasma se produit. Cette constriction conduit à un jet de plasma supersonique de très faible diamètre (de l'ordre du millimètre) en sortie de tuyère, avec une température pouvant atteindre quelques dizaines de milliers de kelvins. La pièce est alors impactée par ce jet très chaud, provoquant la fusion du métal. La vitesse du jet pouvant atteindre plus de 10 000 $m.s^{-1}$, ses forces inertielles importantes permettent d'expulser le métal fondu en dehors de la pièce. En déplaçant la torche ou la pièce, une saignée de découpe est alors obtenue.

Dans la torche, un pion généralement constitué de hafnium est présent au milieu de l'électrode en cuivre. Les avantages du hafnium sont sa température de fusion très élevée (2500 K), ainsi que sa forte résistance aux phénomènes d'oxydation [24]. Son utilisation est donc pertinente lorsque le gaz plasmagène utilisé est de l'oxygène. Afin de stabiliser le pied d'arc cathodique sur l'insert en hafnium au centre de l'électrode, le gaz est généralement injecté en vortex, comme présenté sur la Figure 1.2. Cet effet stabilisateur est dû à la présence du vortex qui produit un gradient de pression radial, avec des pressions qui diminuent en se rapprochant de l'axe de la torche [25]. Sans la présence du vortex, le pied d'arc pourrait facilement se déplacer sur toute la surface inférieure de la cathode en cuivre, induisant un endommagement très rapide de celle-ci.

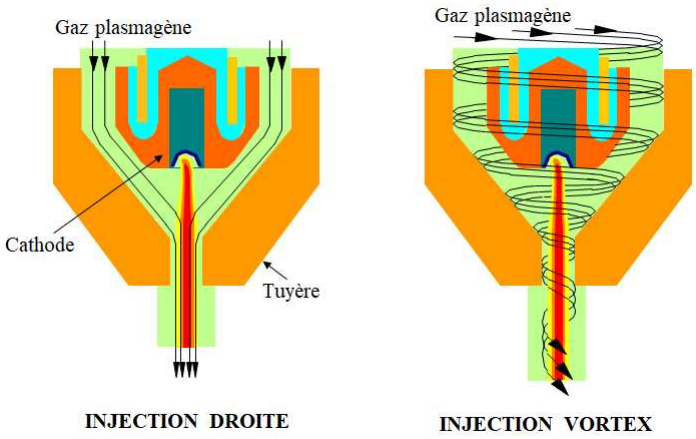


Figure 1.2. – Comparaison entre une injection droite et une injection en vortex.

1.2.2.2. Amorçage de l'arc par haute fréquence

Deux méthodes principales existent pour l'amorçage de l'arc électrique dans les torches de découpe : l'amorçage par court-circuit et l'amorçage haute fréquence (HF). Étant donné que les torches Akryvia sont amorcées par HF, seule cette méthode sera présentée. Les principales étapes de l'amorçage HF sont illustrées sur la Figure 1.3.

1. La première étape de l'amorçage, à froid, consiste à injecter dans la tuyère un premier gaz plasmagène, dit gaz pilote. Celui-ci peut être identique au gaz de coupe, mais la pression d'injection est plus faible que lors de la découpe.

2. Au cours de la deuxième phase de l'amorçage, alors que le gaz pilote continue de s'écouler dans la tuyère, un générateur HF permet de créer des étincelles entre l'électrode et la tuyère, induisant l'apparition d'un arc électrique à l'intérieur de la torche.
3. Cet arc est ensuite déplacé vers l'extérieur de la torche, sous l'effet de la pression du gaz pilote : un arc soufflé, aussi appelé arc pilote, est alors obtenu.
4. L'arc pilote est alors transféré vers la pièce métallique, en utilisant désormais le gaz de coupe et en augmentant la pression d'injection jusqu'à la valeur maximale utilisée pendant la découpe.
5. Une fois l'arc transféré établi entre la cathode et la pièce, l'intensité du courant est augmentée et une saignée est crée dans cette dernière : c'est la phase de découpe, détaillée précédemment.

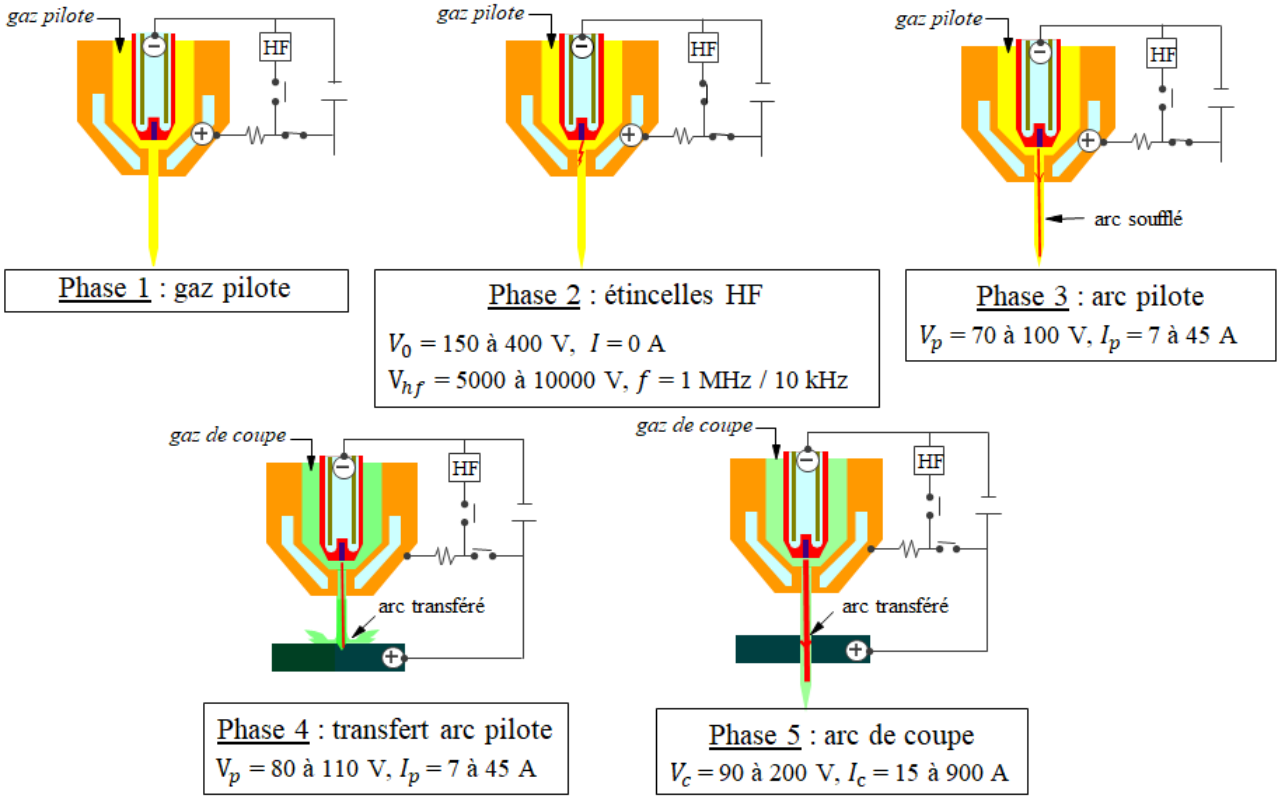


Figure 1.3. – Amorçage de l'arc par HF.

1.2.3. Principales évolutions technologiques du procédé, de son invention à aujourd'hui

1.2.3.1. Historique des évolutions

Dans la littérature, de brefs historiques des évolutions majeures de la découpe plasma sont par exemple présentés dans l'article de revue de Nemchinsky et Severance [26], ou également dans la thèse de Park [27]. Un historique plus détaillé est apporté par Colt dans son article dédié aux évolutions de la découpe plasma de 1957 à 2013 [9]. Les principales étapes de l'évolution de la découpe plasma sont présentées ci-dessous.

- En 1957, le Dr R. Gage de l'Union Carbide obtient un brevet concernant l'invention du premier procédé de découpe plasma [8]. Ce procédé a été créé par extension de la méthode de soudure TIG (Tungsten Inert Gas). En effet, en diminuant la section de sortie de la tuyère d'une torche TIG, un arc constricté est obtenu : le diamètre du jet de plasma diminue, la température à son centre et sa vitesse augmentent. L'augmentation de la température du jet permet de faire fondre le métal de la pièce à couper et la grande vitesse d'éjection du gaz permet de souffler le métal fondu en dehors de la saignée. Le diamètre de l'orifice de la tuyère des premières torches de découpe plasma pouvait atteindre 5 mm [28]. Le gaz plasmagène utilisé dans les premières torches de découpe était de l'argon.

- Au cours des années 60, l'air a commencé à être utilisé comme gaz de découpe, conduisant à des découpes de meilleure qualité et une augmentation de la vitesse de coupe. Cependant, les phénomènes d'oxydation étant trop importants, les électrodes en tungstène ont été remplacées par des électrodes en zirconium, bien plus résistantes à l'oxydation. Dans cette même décennie, les torches à double injection avec la présence d'une seconde tuyère ont été mises au point, permettant une meilleure constriction du jet, et ainsi une amélioration de la qualité de coupe. Le système de double injection a aussi servi à augmenter la durée de vie des consommables, grâce à l'effet refroidissant du gaz secondaire, dit gaz de protection. Enfin, ce dernier permet de diminuer l'aspiration de l'air ambiant vers le centre de l'arc, et d'ainsi limiter la formation de sites azotés dans la pièce découpée. Un schéma permettant de comparer une torche avec une injection simple (mono-injection) et une torche avec une injection double est présenté sur la Figure 1.4

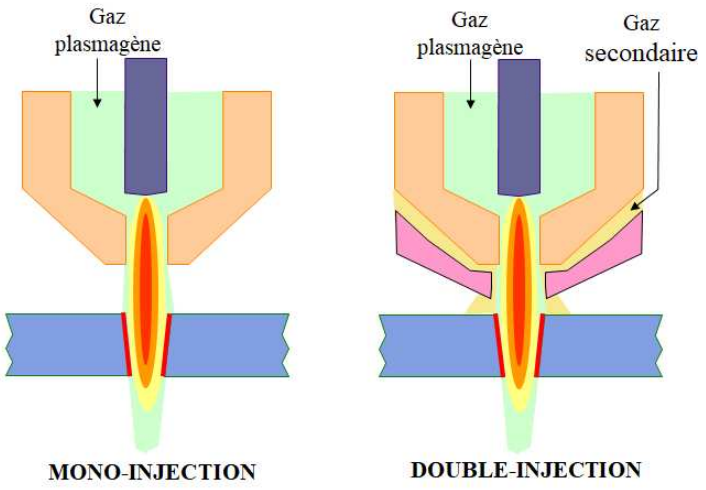


Figure 1.4. – Comparaison entre une torche mono-injection et une torche double-injection.

- Dans les années 70, l'injection d'eau à la place du gaz de protection a été utilisée, permettant un meilleur refroidissement des consommables qu'avec l'utilisation des gaz de protection. De plus, des torches utilisant l'azote comme gaz de coupe ont été mises au point, induisant des coupes plus droites avec peu d'arrondi à l'angle supérieur. Enfin, des technologies de découpe plasma sous l'eau ont été développées, afin de diminuer le bruit, les fumées et les rayonnements UV produits lors de la découpe.

- Pendant les années 80, l'utilisation d'oxygène comme gaz de découpe est devenue de plus en plus commune, augmentant considérablement la vitesse et la qualité de coupe, particulièrement pour l'acier doux. Les réactions d'oxydation étant très importantes lors de la découpe plasma à l'oxygène, la durée de vie des électrodes est alors grandement impactée. Ainsi, ces dernières ont été remplacées par des cathodes en cuivre avec un insert en hafnium, plus résistant à l'oxydation. Au cours des années 80, les premières torches de découpe plasma basse intensité et portatives ont été commercialisées, conduisant à la démocratisation de la découpe plasma.

- La technologie de torche à plasma dite haute densité (ou haute précision) développée dans les années 90 a permis d'augmenter la précision des découpes, avec des saignées plus étroites. Le principe de cette technologie est de concevoir des torches dont le diamètre de sortie de tuyère est d'environ 1 mm, ayant pour effet une augmentation importante de la constriction du jet de plasma. Cette technologie est présentée en détail dans le récent article de Ott [28]. Pour qu'une coupe soit considérée comme haute précision, elle doit satisfaire des critères précis spécifiés par la norme ISO 9013, qui donne une classification des découpes utilisant un procédé thermique.

  Un des risques augmentant, lorsque le diamètre en sortie de tuyère est réduit, est le phénomène d'arc double, au cours duquel un premier arc électrique est établi entre la cathode et la tuyère et un second est établi entre la tuyère et la pièce à couper. Ce phénomène est représenté sur la Figure 1.5. Il doit absolument être évité, car il conduit à un endommagement très important des consommables.

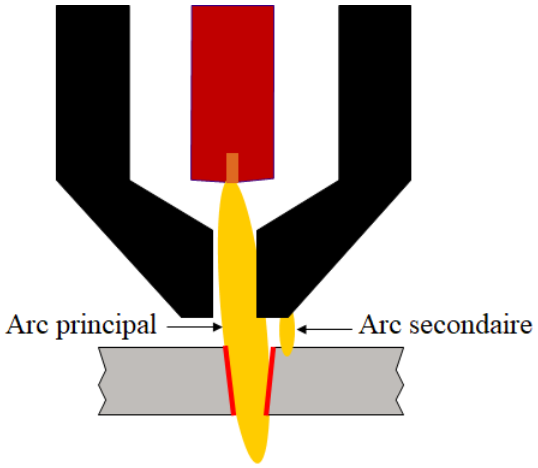


Figure 1.5. – Phénomène d'arc double.

- Depuis le milieu des années 90, les principales avancées de la découpe plasma concernent majoritairement l'automatisation des procédés de découpe, permettant de diminuer les erreurs humaines et ainsi obtenir de meilleures découpes. Cette automatisation de la découpe plasma se fait grâce à l'intégration des torches dans les machines-outils à commandes numériques (MOCN).

1.2.3.2. Présentation de l'innovation d'Akryvia

Akryvia est une start-up industrielle fondée en 2015, lauréate de plusieurs prix de l'innovation. L'objectif d'Akryvia est de développer et de commercialiser des torches plasma qui permettent de réaliser des découpes d'une grande précision. La principale innovation d'Akryvia dans le domaine de la découpe plasma est l'utilisation d'un principe d'adaptation de la pression afin d'améliorer la précision des découpes. Cette innovation fait l'objet d'un brevet [19] et son principe est schématisé sur la Figure 1.6. L'idée principale de cette invention est d'utiliser une seconde injection de gaz à une pression p_2 afin d'adapter la pression entre la sortie de la première tuyère (où $p = p_1$) et l'extérieur de la torche (où $p = p_{atm} = 1$ atm). En choisissant la pression d'injection secondaire p_2 telle que $p_{atm} < p_2 < p_1$, l'adaptation du jet supersonique sortant de la première tuyère est moins raide que dans le cas d'un gaz s'adaptant directement de la pression p_1 à la pression atmosphérique p_{atm}. Cela a pour effet d'amoindrir l'amplitude des ondes de choc présentes dans le jet en sortie de torche, qui provoquent un élargissement de ce dernier. Ainsi, en adaptant la pression au moyen d'une seconde injection, il est possible d'obtenir des jets de plus faible diamètre, permettant d'effectuer des découpes plus fines. Cela permet également de pouvoir augmenter la pression d'injection dans la tuyère principale, conduisant à une plus grande constriction du plasma. Avec une constriction importante, les températures maximales atteintes au centre du jet sont également plus élevées et les vitesses de découpe peuvent ainsi être augmentées. Pour conclure sur cette innovation, elle permet de réaliser des découpes plus fines avec des vitesses de coupe plus élevées.

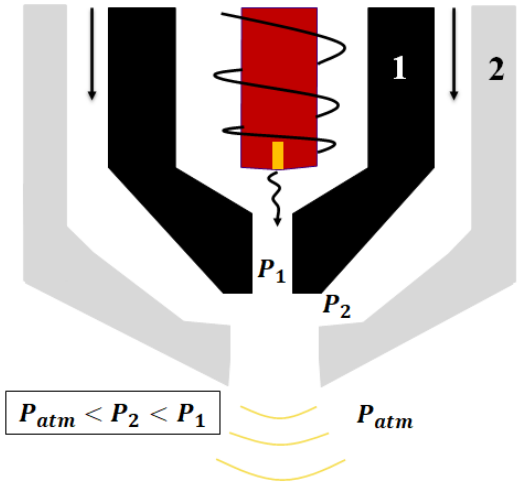


Figure 1.6. – Principe de l'adaptation de pression.

Grâce aux nombreuses améliorations apportées à ce procédé depuis son invention à la fin des années 50, la découpe plasma est désormais largement utilisée dans l'industrie pour la découpe de métaux et s'avère être un concurrent de choix face aux autres procédés de découpe industriels.

1.2.4. Comparaison à d'autres procédés de découpe

1.2.4.1. Présentation des principaux procédés de découpe

La découpe plasma est actuellement concurrencée par trois autres principales méthodes : la découpe laser, l'oxycoupage et la découpe au jet d'eau. Le principe de fonctionnement des quatre technologies est par exemple détaillé dans l'ouvrage de Powell [29] ou dans la publication de Cannet et Delzenne [30]. Voici une présentation des procédés concurrents :

- Lors de la découpe laser, un faisceau infrarouge haute intensité est produit par un laser. Ce faisceau est focalisé grâce à une lentille sur une très petite surface de la pièce à découper, qui est ainsi chauffée jusqu'à atteindre son point de fusion. Le métal fondu est finalement éjecté de la zone de découpe sous l'action d'un jet de gaz coaxial au faisceau, permettant la fusion du matériau dans l'épaisseur de la pièce jusqu'à ce qu'elle soit coupée.
- Concernant l'oxycoupage, une flamme de préchauffage générée par de l'oxygène mélangé à d'autres comburants (souvent de l'acétylène et du propane) chauffe la pièce jusqu'à atteindre sa température d'oxydation. La zone chauffée est alors impactée par un jet d'oxygène pur, produisant une réaction exothermique d'oxydation du fer qui entraîne la fusion du métal. Le métal fondu est également expulsé vers l'extérieur de la saignée sous la force du jet d'oxygène. La flamme de préchauffage est maintenue tout au long du procédé de découpe de manière à entretenir la réaction.
- Pour la découpe de matériaux durs au jet d'eau, des abrasifs en poudre sont mélangés avec le jet sous pression. Ce dernier, pouvant atteindre une pression supérieure à 6000 bar, est concentré par une buse puis éjecté sur la pièce à couper. Les particules abrasives impactent alors la pièce sur une surface restreinte avec des vitesses dépassant de plusieurs fois la vitesse du son, conduisant à l'érosion de la zone impactée sur toute l'épaisseur de la pièce.

En incluant la découpe plasma, ces quatre procédés permettent de découper différents types de matériaux sur différentes gammes d'épaisseurs. Chacun présente des avantages et des inconvénients à l'égard de la qualité de coupe, de la vitesse de coupe, de la pollution engendrée ou encore du coût des équipements et de leur utilisation. Les publications scientifiques récentes consacrées à la comparaison de ces technologies de découpe sont peu nombreuses.

1.2.4.2. Matériaux et épaisseurs de coupe

Les matériaux pouvant être découpés en fonction de la technologie considérée sont par exemple décrits dans le document [30]. Le plasma peut uniquement être utilisé pour découper les différents types de métaux. L'oxycoupage est principalement utilisé pour les aciers doux ou faiblement alliés. Les faisceaux lasers et les jets d'eau peuvent être utilisés sur tout type de matériau. Cependant, la découpe laser n'est pas bien adaptée pour les métaux très réfléchissants tels que l'or ou le cuivre.

Cannet et Delzenne [30] présentent également les plages d'épaisseurs que les différents procédés permettent de découper pour plusieurs types de matériaux. Les gammes d'épaisseurs pour trois types de métaux sont détaillées dans le Tableau 1.1. Les valeurs présentées sont représentatives

des capacités des quatre technologies à la fin des années 90 ; elles ont donc évolué depuis. Toutefois, la tendance reste la même :

- l'oxycoupage est très efficace pour la découpe d'acier doux ou faiblement allié de grande épaisseur, pouvant aller jusqu'à près d'un mètre. Ce procédé n'est pas utilisable pour de trop fines épaisseurs.
- Le procédé plasma permet de couper des épaisseurs plus fines qu'avec l'oxycoupage et peut être utilisé pour des épaisseurs de plus de 100 mm, mais il devient peu rentable par rapport à l'oxycoupage pour des épaisseurs supérieures à 50 mm.
- La découpe laser peut également s'effectuer sur des épaisseurs fines de moins de 1 mm et rarement sur des épaisseurs dépassant 20 mm. Une étude expérimentale récente montre cependant que des découpes au laser de pièces de 100 mm d'épaisseur sont possibles [31].
- Le jet d'eau peut être utilisé pour découper une large gamme d'épaisseurs de matériaux, mais la vitesse de coupe est faible pour les métaux dont l'épaisseur est supérieure à quelques millimètres.

Matériau	Procédé de découpe			
	Plasma	Oxycoupage	Laser	Jet d'eau
Aciers non alliés ou faiblement alliés	0.4 à 50 mm	3 à 600 mm	0.4 à 25 mm	2 à 100 mm
Aciers inoxydables	0.4 à 150 mm	3 à 600 mm	0.4 à 15 mm	2 à 100 mm
Alliages d'aluminium	0.4 à 200 mm	3 à 600 mm	0.4 à 5 mm	2 à 100 mm

Tableau 1.1. – Plages d'épaisseur pour les différents procédés de découpe et pour différents métaux (*adapté de* [30]).

1.2.4.3. Vitesses et qualité de coupe

Le graphique représenté sur la Figure 1.7, issu de l'article de revue de Nemchinsky et Severance [26], permet de comparer les vitesses de découpe des procédés thermiques (plasma, laser et oxycoupage) sur des plaques d'acier doux de différentes épaisseurs. Comme on peut le constater, l'oxycoupage est le procédé de découpe thermique le plus lent, particulièrement pour les faibles épaisseurs. Quant à la découpe au plasma, elle peut être plus ou moins rapide que la découpe laser selon l'intensité de courant utilisée. Bien que le procédé de découpe d'acier au jet d'eau ne soit pas représenté sur la Figure 1.7, celui-ci est bien plus lent que les trois procédés thermiques [30].

Les largeurs de saignées obtenues avec les différentes technologies de découpe dépendent de divers paramètres, tels que la vitesse de découpe ou le type de matériau coupé et son épaisseur. La découpe au laser est la plus précise : des saignées de quelques dixièmes de millimètres de large peuvent être obtenues avec ce procédé [29, 30]. Avec le jet d'eau, des saignées dont la largeur est légèrement inférieure à 1 mm sont généralement obtenues pour les métaux [32]. La

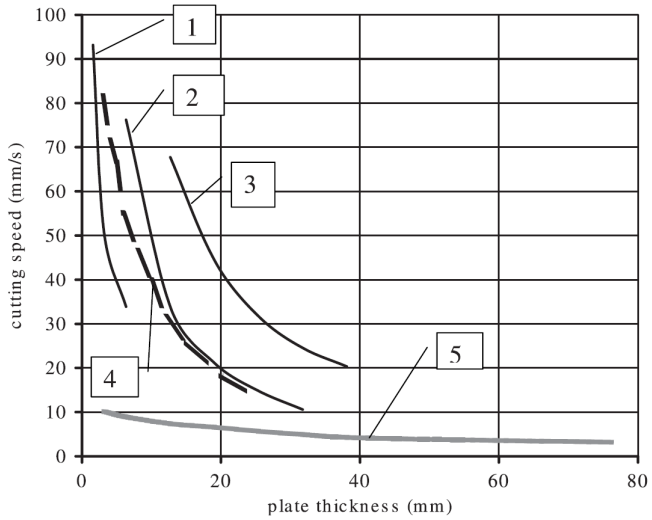


Figure 1.7. – Vitesses de découpe sur de l'acier doux en fonction de l'épaisseur (*issu de* [26]). 1 : plasma 65 A ; 2 : plasma 200 A ; 3 : plasma 400 A ; 4 : laser 4—5 kW ; 5 : Oxycoupage.

découpe au plasma conduit à une largeur de saignée souvent comprise entre 1 et 3 mm [33, 34], tandis que l'oxycoupage est le procédé le moins précis, avec des saignées dont la largeur minimale est supérieure à 2 mm [30].

Relativement à l'aspect de la saignée, l'oxycoupage et la découpe au laser permettent d'obtenir des coupes dont les bords de part et d'autre de la saignée sont bien parallèles entre eux [30]. Pour la découpe au jet d'eau et au plasma, la saignée est plus large au niveau de la partie supérieure de la plaque coupée qu'au niveau de la partie inférieure : des angles de dépouille sont alors présents entre les bords et la verticale [32, 33]. Un désavantage de la découpe plasma face aux autres procédés est la présence de scories qui restent accrochées sous les bords de la saignées. Celles-ci peuvent engendrer des coûts supplémentaires si des traitements post-découpe sont requis afin de les enlever. La présence de scories dépend du gaz de découpe utilisé, l'oxygène étant celui qui en produit le moins.

Un autre point important à prendre en compte concernant la qualité de coupe est la zone affectée thermiquement (ZAT). Il s'agit de la partie de la pièce découpée où le métal a subi des modifications de sa structure cristalline en raison des températures élevées auxquelles il a été exposé durant la coupe. Une ZAT large est alors peu désirable, car le métal situé dans cette zone est fragilisé. La découpe au jet d'eau n'étant pas un procédé thermique, elle n'entraîne pas de ZAT. Avec le procédé laser, la ZAT a une largeur faible, inférieure à 0.4 mm [35]. La découpe plasma implique des déformations plus importantes avec une ZAT dont la largeur peut dépasser 1 mm [36, 37] et l'oxycoupage conduit à une ZAT pouvant avoir une largeur supérieure à 2 mm [37].

1.2.4.4. Impact environnemental et poids économique

L'impact environnemental des différents procédés de découpe peut être évalué en comparant les différents types de pollution engendrées lors de leur utilisation. Celles-ci peuvent être classées

en trois catégories principales : les pollutions atmosphériques, les pollutions optiques et les pollutions phoniques. Le Tableau 1.2 présente les différents types de pollution engendrées selon le procédé de découpe. Tandis que la découpe au jet d'eau ne produit pratiquement aucune pollution, le plasma s'avère être le procédé le plus polluant des quatre. Il faut tout de même préciser que les pollutions optiques et phoniques engendrées par la découpe plasma peuvent être grandement réduites si le procédé est utilisé sous l'eau.

Pollution	Procédé de découpe			
	Plasma	Oxycoupage	Laser	Jet d'eau
Atmosphérique	Production d'oxydes d'azote très polluants et nocifs pour les voies respiratoires	Production de CO_2 peu nocif et d'oxydes d'azote en faible quantité	La vaporisation des matériaux coupés peut libérer des volatils dangereux	Aucune
Optique	Émission d'UV nécessitant le port d'un masque filtrant les rayons	Simple risque d'éblouissement	Rayonnements incidents provenant de réflexions du faisceau laser à la surface des matériaux découpés, port de lunettes spéciales requis	Aucune
Phonique	Sifflement strident obligeant le port d'un casque anti-bruit	Faible bruit de chuintement	Peu de bruit	Faible bruit de chuintement qui peut s'amplifier selon l'épaisseur du matériau coupé

Tableau 1.2. – Pollutions émises par les quatre procédés de découpe (*adapté de* [30]).

D'après la dernière étude de marché réalisée par Akryvia, la découpe plasma et la découpe laser constituent un marché d'environ 4 milliards d'euros. La répartition en termes du nombre d'installations de découpe plasma et laser est équivalente, mais ces dernières étant plus onéreuses, leur impact économique est plus important. Concernant les deux procédés, les principaux acteurs du marché sont localisés aux États-Unis, en Europe et au Japon.

1.2.4.5. Comparaison des coûts d'utilisation

Concernant les coûts des différents procédés de découpe, une comparaison assez détaillée entre les coûts nécessaires à la découpe plasma et ceux requis pour l'oxycoupage est présentée par Rzeźnikiewicz [38]. L'étude est effectuée sur un acier faiblement allié et les coûts pris en compte sont distingués en trois catégories : les coûts dus aux achats des consommables et à l'achat initial de l'équipement de découpe, ceux dus à la consommation d'électricité pendant la découpe et ceux dus aux gaz utilisés. L'analyse conclut que la découpe au plasma est moins coûteuse que

l'oxycoupage pour des épaisseurs inférieures à 15 mm, tandis que l'oxycoupage revient moins cher pour les épaisseurs supérieures. Une estimation de la répartition des différents coûts est également détaillée dans l'étude. Ainsi, dans le cas de l'oxycoupage, environ 97% des coûts seraient liés à l'utilisation de gaz, contre 75% avec la découpe plasma. Avec ce dernier procédé, presque 20% des coûts correspondent à l'investissement initial et à l'achat de consommables.

Une étude évaluant les différents coûts liés à l'oxycoupage et aux découpes laser et plasma a été réalisée par Harnicarova *et al.* [39]. La comparaison des coûts est effectuée pour de la découpe d'acier non allié de 10 mm d'épaisseur. Comme dans le travail décrit précédemment, de nombreux paramètres sont pris en compte, comme le coût des gaz, de l'électricité, des consommables, de l'investissement initial, etc. La durée de vie des machines est supposée être de 10 ans. L'analyse montre que, dans cette configuration, le procédé de découpe plasma revient le moins cher, avec un coût estimé à 0.055€ par mètre découpé. La découpe laser est presque deux fois plus coûteuse avec une valeur de 0.1€ par mètre découpé et l'oxycoupage est le plus cher avec un coût évalué à 0.19€ par mètre découpé. Ce dernier procédé est le plus onéreux dans ce cas car il est très lent pour l'épaisseur d'acier considérée (10 mm). Si l'on s'intéresse uniquement au coût des procédés pour une heure d'utilisation sans tenir compte de la longueur de métal coupé, la découpe plasma et l'oxycoupage sont les plus économiques, avec un coût estimé à environ 7.7€/h, alors que le coût de la découpe laser s'élève à 9.16€/h.

Relativement aux coûts de la découpe au jet d'eau, une comparaison avec ceux de la découpe laser a été proposée par Zheng *et al.* [40]. L'étude est réalisée sur trois matériaux : un alliage d'aluminium, un acier inoxydable et un acier doux. Différentes épaisseurs de matériaux comprises entre 1 et 10 mm sont considérées. Étant donné qu'aucun gaz n'est requis pour la découpe à l'eau, ce sont les prix de l'eau et des abrasifs qui sont pris en compte. L'étude estime alors que la découpe au jet d'eau revient plus cher que celle au laser, principalement en raison de la faible vitesse du premier procédé. Cette étude datant de plus de 20 ans, les deux procédés et les coûts associés ont évolué depuis, mais la découpe au jet d'eau sur des métaux reste certainement plus chère que la découpe au laser, car les vitesses de découpe à l'eau sont toujours les plus faibles.

1.2.4.6. Synthèse sur la comparaison des procédés de découpe

Pour synthétiser cette comparaison des quatre procédés de découpe, le jet d'eau semble être le moins intéressant pour les métaux, car la vitesse de découpe est trop lente par rapport aux autres procédés et les coûts sont ainsi plus élevés. Il faut cependant mettre en avant le fait que ce procédé permet d'obtenir des coupes d'assez bonne qualité (saignée étroite, pas de ZAT), et qu'il est très peu polluant. La découpe au jet d'eau permet également une diversification de l'activité des industriels grâce à la possibilité de découper de nombreux matériaux autres que des métaux. Pour des aciers doux ou faiblement alliés dont l'épaisseur dépasse 25 mm, l'oxycoupage est généralement le procédé le plus intéressant économiquement. En effet, plus le matériau à découper est épais, plus la découpe à l'oxygène est rapide par rapport aux autres procédés. De plus, avec l'oxycoupage, les coûts des consommables et de l'investissement initial sont bien moins élevés que ceux des autres procédés. Pour des épaisseurs de matériaux inférieures à 25 mm, les découpes au laser et au plasma sont généralement plus intéressantes que l'oxycoupage car elles sont bien plus rapides. Pour ces gammes d'épaisseurs, le choix entre la découpe plasma et

laser se fait en fonction de la qualité de coupe souhaitée et des dépenses pouvant être effectuées. Actuellement, la découpe laser permet d'obtenir les coupes de meilleure qualité (ZAT et saignée étroites, pas de dépouille, très peu de scories), mais ce procédé revient plus cher que la découpe plasma.

1.3. Étude bibliographique sur la découpe plasma

Dans la littérature scientifique, bien que l'on trouve de nombreuses études consacrées aux plasmas thermiques depuis les années 50, seules une minorité sont dédiées à la découpe plasma. Les premiers articles qui s'intéressent spécifiquement à ce procédé sont parus à partir des années 60 [41, 42]. L'analyse bibliographique proposée dans cette partie est focalisée sur deux axes principaux : la modélisation de la découpe plasma, ainsi que les études expérimentales du procédé.

1.3.1. État de l'art sur les modélisations et simulations du procédé

Un des principaux objectifs de notre étude étant de mieux caractériser les ondes de chocs présentes dans les jets de découpe plasma, nous avons fait le choix de développer un nouveau solveur permettant de réaliser des simulations numériques du procédé de découpe plasma. Il est donc important d'effectuer un état de l'art de l'ensemble des études de modélisation du procédé ayant été réalisées en amont. La découpe plasma existant depuis la fin des années 50, cette technologie a commencé à être étudiée par le biais de la modélisation à partir de la fin des années 90 seulement [43]. La majorité des modélisations de la découpe plasma disponibles dans la littérature datent des années 2000, avec très peu d'études récentes parues après 2010. Des modélisations de plasmas d'arc avaient déjà été réalisées dans les années 80, notamment avec l'étude théorique et expérimentale d'un arc libre, réalisée par Hsu *et al.* [44]. Cette section présente les principales modélisations d'arcs de découpe rencontrées dans la littérature, avec les hypothèses et les modèles mathématiques utilisés. Les méthodes de résolution employées sont également introduites et les paramètres étudiés grâce aux modélisations sont décrits.

1.3.1.1. Premières modélisations d'arcs de découpe

Après les travaux de Hsu [44] sur la modélisation d'arcs libres, les premières modélisations simplifiées d'arcs de découpe ont été réalisées vers la fin des années 90 [43, 45], puis des modélisations bien plus complètes ont été présentées au début des années 2000 [11, 12, 17, 46, 47].

a) Premiers modèles simplifiés

Les premières modélisations d'arcs de découpe ont été présentées à la fin des années 90 par Ramakrishnan et Rogozinski [43]. Le modèle utilisé a ensuite été amélioré par Nemchinsky [45], mais reste très simplifié. En effet, le plasma est considéré comme un fluide possédant deux zones de températures constantes : une zone de température élevée (plusieurs milliers de Kelvin) au niveau du centre du jet et une zone de température plus faible (autour de 1000 K) proche des bords. De plus, les variations de pression et de vitesses sont supposées être uniquement

axiales et la géométrie utilisée est un cylindre uniforme, très différente d'une géométrie de torche de découpe plasma. Ces modélisations ont tout de même permis d'indiquer la présence de températures élevées valant environ 25000 K au centre du jet de découpe. La présence d'ondes de choc associées à des vitesses supersoniques du jet en sortie de tuyère ont également été mises en avant par ces modélisations.

b) Modèles avancés

La première modélisation « complète » d'un arc de découpe a été présentée par Gonzalez-Aguilar *et al.* [17]. Le modèle utilisé est similaire a celui proposé par Hsu dans son étude d'un arc libre [44]. Les principales hypothèses du modèle sont les suivantes :

- le plasma est considéré comme étant un fluide newtonien visqueux à l'équilibre thermodynamique local (ETL),
- l'écoulement étudié est stationnaire et supposé laminaire, aucun modèle de turbulence n'est utilisé,
- les forces de gravité sont négligées,
- la modélisation est effectuée en 2D-axisymétrique,
- le rayonnement est pris en compte à l'aide de la méthode du coefficient d'émission net ε_N,
- les gaines anodiques et cathodiques ne sont pas modélisées. Ces dernières correspondent aux zones situées dans le voisinage très proche de la cathode et de l'anode, à moins de 0.1 mm.

Le modèle mathématique utilisé est constitué des équations hydrodynamiques classiques (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie), couplées par des termes sources aux équations sur le potentiel électrique et sur potentiel vecteur. Ces termes sources permettent de prendre en compte l'influence sur l'écoulement de l'aspect électromagnétique du plasma :

- Le chauffage du plasma par effet Joule est pris en compte par l'ajout d'un premier terme source dans l'équation de conservation de l'énergie.
- Les pertes radiatives sont modélisées en utilisant la méthode simplificatrice du coefficient d'émission net, consistant en l'ajout d'un second terme source dans l'équation de conservation de l'énergie.
- Un dernier terme source est ajouté aux équations de conservation de la quantité de mouvement, afin de modéliser l'influence sur l'écoulement des forces de Lorentz, créées par le champ magnétique auto-induit par le plasma.

Afin de calculer ces termes sources, les champs électrique $\boldsymbol{E}$ et magnétique $\boldsymbol{B}$ doivent également être déterminés. Le champ électrique est calculé à partir du gradient de potentiel électrique V :

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V, \tag{1.1}$$

où V est obtenu en résolvant l'équation de Laplace

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\sigma \boldsymbol{\nabla} V) = 0. \tag{1.2}$$

Dans l'équation précédente, σ correspond à la conductivité électrique du gaz, qui dépend de la pression et de la température. Cette équation permet de modéliser la conservation du courant électrique. Dans l'étude, le modèle présenté étant 2D-axisymétrique, le champ magnétique ne possède qu'une composante azimutale B_θ, calculée de manière directe à partir de l'expression simplifiée

$$B_\theta(z, r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r j_z(z, r)\ \xi\ \mathrm{d}\xi, \tag{1.3}$$

avec r correspondant à la coordonnée radiale, z à la coordonnée axiale, μ_0 à la perméabilité du vide et j_z à la composante axiale de la densité de courant

$$\boldsymbol{j} = -\sigma \boldsymbol{\nabla} V. \tag{1.4}$$

Pour résoudre les équations du modèle mathématique, la méthode pressure-based itérative SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) introduite par Patankar [20] est utilisée. La principale différence avec les travaux de Hsu est la géométrie étudiée, qui est donc celle d'une torche de découpe, composée d'une cathode plate et d'une tuyère convergente, située au-dessus d'une plaque plane (la pièce à découper). Cependant, la plaque modélisée n'est pas trouée, la configuration est donc peu représentative d'une découpe réelle. En effet, avec cette géométrie, le plasma modélisé ne peut pas passer au travers de la plaque et les résultats obtenus sont altérés, car les profils de température et de vitesse déterminés proches de la plaque ne correspondent pas à ce qui serait obtenu dans le cas d'une configuration réelle. Des recirculations peuvent par exemple apparaître en raison de l'impact du jet à grande vitesse perpendiculairement à la plaque. Enfin, la majorité des résultats numériques de cette étude n'ont pas été validés par manque de données expérimentales.

Après cette modélisation de Gonzalez-Aguilar, une étude numérique et expérimentale avancée d'un jet de découpe plasma a été réalisée dans la thèse de Freton [11]. La démarche et les principaux résultats obtenus sont également présentés dans plusieurs publications [12, 46, 47]. Les travaux réalisés concernent l'étude d'une torche de découpe industrielle Nertajet OCP150, produite par la SAF. Les hypothèses et le modèle mathématique utilisés sont proches de ceux de Hsu et Gonzalez-Aguilar, mais certaines modifications et ajouts ont été apportés :

- L'influence des phénomènes turbulents est analysée en comparant les cas où l'écoulement est considéré laminaire avec les cas où un modèle de turbulence est pris en compte. Le modèle de turbulence utilisé est le modèle de longueur de mélange de Prandtl.
- L'influence de la méthode utilisée pour prendre en compte le rayonnement est également étudiée, avec l'ajout d'un modèle de rayonnement P1 et par comparaison avec le cas où le phénomène est modélisé par la méthode du coefficient d'émission net.
- Le gaz de découpe considéré est de l'oxygène se déchargeant dans de l'air, supposé être un mélange de 21% d'oxygène avec 79% d'azote. Ainsi, une équation supplémentaire est

ajoutée au modèle mathématique, correspondant à la conservation de la fraction massique d'oxygène. Un terme source prenant en compte le transport d'enthalpie dû à la diffusion des espèces est aussi ajouté à l'équation de l'énergie.

- Les simulations ont été réalisées en 2D-axisymétrique et en 3D afin de déterminer si l'hypothèse d'axisymétrie est judicieuse face au coût en temps de calcul requis par une étude numérique 3D.
- Dans le cas de configurations 3D, l'approximation (1.3) n'est plus valide pour calculer la composante azimutale du champ magnétique. L'expression alors utilisée pour calculer le champ magnétique est

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}, \tag{1.5}$$

où le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ est calculé en résolvant l'équation suivante, obtenue à partir du théorème d'Ampère :

$$\boldsymbol{\Delta A} = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{1.6}$$

- Concernant la géométrie, la saignée dans la plaque à découper est modélisée par une anode poreuse dont le diamètre a été choisi à partir de résultats expérimentaux. L'anode poreuse permet de modéliser le pied d'arc anodique. Elle correspond à une zone où un potentiel électrique nul est imposé, au travers de laquelle le fluide peut s'écouler sans perturbation.

Les différentes équations du modèle ont aussi été résolues par la méthode SIMPLE, avec le logiciel commercial de CFD Fluent 4, après adaptation aux plasmas par l'ajout de fonctions utilisateurs. La première configuration modélisée est identique à celle de l'arc libre de Hsu [44]. Les valeurs numériques obtenues par Freton sont en accord avec les résultats expérimentaux et numériques de Hsu, permettant une première validation de la méthode numérique employée.

Une étude spectroscopique expérimentale avancée a également été réalisée par Freton sur le jet de découpe, afin de pouvoir valider les résultats numériques. Ces mesures expérimentales seront présentées plus en détail dans la seconde partie de cette étude bibliographique. Un bon accord entre valeurs numériques et expérimentales a été trouvé pour l'évolution axiale de la température. Concernant l'évolution radiale, le modèle a tendance à surestimer la décroissance de température en raison de l'hypothèse d'ETL. Ces données expérimentales confirment également l'aspect turbulent du plasma après la sortie de la tuyère. En effet, les valeurs numériques calculées en utilisant le modèle de turbulence sont plus proches des valeurs expérimentales que les valeurs numériques obtenues pour le cas laminaire.

Finalement, les hypothèses, les modèles mathématiques et la méthode de résolution (identique à celle de Hsu et Gonzalez-Aguilar) utilisés par Freton sont restés les plus employés dans les publications plus récentes concernant la modélisation d'arcs de découpe.

1.3.1.2. Autres modélisations pertinentes d'arcs de découpe

Comme expliqué dans l'article de revue de Nemchinsky et Severance [26], les principaux travaux de modélisation d'arc de découpe ayant été effectués jusqu'en 2006 sont ceux de

Gonzalez-Aguilar [17] et Freton [11, 12, 46, 47], présentés précédemment.

En 2007, une modélisation de torche de découpe a été réalisée par Ghorui *et al.* [48]. La nouveauté apportée par ce travail est l'utilisation d'un modèle à deux températures (température des électrons et température des particules lourdes) sans faire l'hypothèse d'ETL. Ainsi, deux équations de conservation de l'énergie sont résolues : une associée à la température électronique et la seconde à la température des particules lourdes. Un modèle de turbulence $k-\varepsilon$ est utilisé. La géométrie 2D-axisymétrique considérée est assez restreinte, car la modélisation est uniquement effectuée à l'intérieur de la torche. Les résultats montrent que les températures des électrons et des particules lourdes sont proches près de l'axe du jet. En revanche, ces températures diffèrent en s'éloignant de l'axe. Le même comportement avait par exemple été mis en avant lors de l'étude d'un arc libre avec un modèle à deux températures par Hsu et Pfender [49]. Cette étude semble donc montrer que l'hypothèse d'ETL ne serait pas bien adaptée pour la modélisation du plasma dans les zones éloignées de l'axe du jet.

Un modèle 2D très proche de celui de Freton a été utilisé par Colombo *et al.* afin d'étudier plusieurs technologies brevetées de torches de découpe [50] : plusieurs simulations sont réalisées sur différentes géométries de torches et avec différents mélanges de gaz. La résolution des équations est faite en utilisant l'algorithme SIMPLE de Fluent.

Entre 2009 et 2010, les chercheurs chinois Zhou *et al.* ont publié quatre articles consacrés à la modélisation 2D d'arcs de découpe. La première publication [18] vise à déterminer quel modèle de turbulence semble être le plus adapté pour ce type de modélisation. Le travail suivant [51] étudie l'influence sur le jet plasma de trois paramètres : la longueur de tuyère, l'intensité du courant et le débit massique en entrée. La troisième étude [25] porte sur l'influence de l'injection en vortex et la dernière [52] s'intéresse au procédé de double injection. Le modèle mathématique et les hypothèses utilisés dans ces quatre publications sont proches de ceux employés par Freton. Un seul gaz étant considéré (de l'oxygène), il n'y a donc pas d'équation de conservation de la fraction massique dans le modèle. Les équations sont résolues avec Fluent, au moyen de l'algorithme COUPLED. Les géométries modélisées sont également proches, avec la présence d'un trou cylindrique dans la plaque en haut duquel se trouve une anode poreuse.

Dans l'étude dédiée aux modèles de turbulence [18], cinq modèles sont étudiés : les modèles $k-\varepsilon$ et Realizable $k-\varepsilon$, les modèles RNG (Re-Normalization Group) $k-\varepsilon$ classique et RNG $k-\varepsilon$ adapté aux bas nombres de Reynolds et le modèle RSM (Reynolds Stress Model). Pour chaque modèle, le champ de température et la tension d'arc ont été calculés et comparés avec les résultats de l'étude spectroscopique de Peters *et al.* [53]. Les modèles RSM et RNG $k-\varepsilon$ adapté aux bas nombres de Reynolds permettent d'obtenir des résultats satisfaisants proches des cas expérimentaux. Quant aux trois autres modèles, la température et les vitesses calculées avec ces derniers sont trop faibles, traduisant une surestimation des effets turbulents. Le modèle RSM nécessitant des temps de calculs importants, l'utilisation du modèle RNG $k-\varepsilon$ adapté aux bas nombres de Reynolds est préconisée. C'est donc ce dernier qui a été utilisé dans les trois autres publications. Dans cette étude, on note cependant l'absence de comparaison avec le cas laminaire, sans l'utilisation de modèle de turbulence. Cette comparaison aurait été intéressante pour déterminer s'il y a un réel intérêt à utiliser un modèle de turbulence pour la modélisation de la découpe plasma. Une autre limite de cette étude vient du fait qu'au niveau de l'entrée

de l'injection, le débit de gaz a été imposé a une valeur fixe. Ainsi, de grandes variations des pressions d'injections sont obtenues entre les différents modèles de turbulence, allant de 4 à 8 bars selon le modèle.

Dans la deuxième publication [51], les températures, vitesses et tensions d'arc ont été calculées en considérant plusieurs longueurs du canal de tuyère, intensités du courant et débits massiques de l'oxygène injecté. Les résultats montrent que plus la tuyère est longue et plus l'intensité du courant est élevée, plus le flux de chaleur transporté par l'arc est important, induisant des coupes de meilleure qualité. Il est aussi montré que les augmentations de l'intensité et du débit de gaz en entrée induisent la présence d'ondes de chocs plus importantes en sortie de tuyère, qui peuvent nuire au procédé de découpe. Paradoxalement, l'augmentation du débit de gaz permet d'obtenir une meilleure constriction du jet et donc une augmentation du flux de chaleur près de l'axe. Enfin, les auteurs rappellent que l'augmentation de l'intensité du courant et de la longueur de tuyère conduisent à de plus grandes probabilités d'apparition du phénomène d'arc double, qui peut entraîner une dégradation importante des consommables de la torche.

Concernant l'étude de Zhou *et al.* sur l'influence de l'injection en vortex [25], celle-ci met en évidence le fait que plus le nombre de Swirl de l'injection est élevé, plus la constriction est importante dans la chambre d'arc. Cela permet une meilleure stabilisation de l'arc près de la cathode. Cet effet sur la constriction n'a cependant pas d'impact dans le canal de la tuyère et en aval de sa sortie. Une explication de cette augmentation de la constriction dans la chambre d'arc avec le nombre de Swirl est proposée dans l'article : lorsque le nombre de Swirl est augmenté, la pression dans la chambre augmente et son maximum se déplace vers les bords de la chambre, entraînant un gradient de pression positif du centre de l'arc aux extrémités de la chambre. L'augmentation du nombre de Swirl peut également avoir certains effets négatifs. En effet, les résultats des modélisations montrent que plus le nombre de Swirl est élevé, plus l'onde de choc en sortie de tuyère est forte, et plus le maximum de vitesse se déplace en dehors de l'axe.

Dans leur dernière étude sur l'effet de la double injection [51], les calculs ont été effectués sur des configurations de torche à une seule injection de gaz et sur des configurations avec une deuxième injection en aval de la première tuyère. Les valeurs numériques obtenues dans les deux cas ont alors été comparées. Les résultats mettent en avant une augmentation de la constriction du jet dans la tuyère, au niveau de l'arrivée du gaz secondaire. Ainsi, avec l'injection de gaz supplémentaire, une couche « froide » (de température inférieure à 7000 K) plus épaisse que dans le cas d'une injection simple est formée dans la tuyère. Le champ électrique estimé dans ces couches froides est bien moins intense avec la double injection, ce qui signifie que l'apparition d'un arc double est moins probable dans ce cas.

La modélisation numérique la plus récente concernant les arcs de découpe a été présentée en 2015 dans la thèse de Park [27]. Dans ce travail, une modélisation 3D d'une torche de découpe Hypertherm HPR 260 est effectuée, avec une étude approfondie de la physique au niveau de la saignée. Pour cela, des hypothèses et un modèle mathématique assez similaires à ceux de Freton sont utilisés. Néanmoins, afin de prendre en compte la fusion du métal dans la saignée et la présence de métal liquide dans l'écoulement de plasma, plusieurs modèles mathématiques ont été ajoutés et les calculs réalisés sont instationnaires.

Afin de simuler la fusion du métal, la méthode *enthalpy-porosity* [54] est employée. Trois

phases sont alors considérées dans la modélisation : le métal solide, le métal liquide et le plasma. Cette méthode consiste à modéliser le métal solide de la pièce à couper par un fluide ayant une très forte viscosité. L'intérêt de considérer la phase solide comme un fluide est de pouvoir aussi modéliser le déplacement relatif de la plaque par rapport à la torche lors de la découpe. Au lieu de réaliser une modélisation complexe du déplacement de la torche à une certaine vitesse de coupe, c'est la phase solide qui est déplacée à cette vitesse. Pour suivre l'évolution de l'interface entre le plasma et le métal liquide, la méthode *Volume of Fluid* [55] a été choisie. Les différents modèles utilisés ont été implémentés dans le code de CFD open source OpenFOAM [21]. La résolution des équations est effectuée avec l'algorithme PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [56], qui est une extension de l'algorithme SIMPLE pour les calculs instationnaires.

Les simulations réalisées dans cette étude permettent de prédire l'évolution de la forme de la saignée impactée par l'arc au cours de temps. La géométrie initiale de la plaque est déjà percée avec une saignée régulière, c'est à dire sans dépouille ni scorie, avec un front de coupe cylindrique. La forme de la saignée déterminée numériquement à l'issu du calcul est alors comparée avec une forme de saignée mesurée expérimentalement dans des conditions similaires. Bien qu'une bonne similarité entre résultats expérimentaux et numériques soit constatée pour la partie basse de la saignée, les résultats numériques surestiment la largeur de saignée dans la moitié supérieure de l'épaisseur de la plaque. Sachant qu'aucun modèle d'accrochage n'a été utilisé, cela peut venir du fait que l'arc modélisé présente un comportement assez instable, avec une variation de la position du point d'attache de l'arc à la pièce. Park explique également que cette mauvaise estimation de la forme de la saignée est certainement due au fait que les vapeurs de métal n'ont pas été prises en compte dans la modélisation. Ces explications s'appuient sur les résultats de l'étude de Murphy sur l'influence des vapeurs de métal lors de la soudure à l'arc [57]. Malgré le manque de précision pour le calcul de la forme de la saignée, le travail réalisé par Park est intéressant, car c'est le premier à proposer une modélisation aussi poussée et réaliste des phénomènes au niveau de la zone de découpe.

1.3.1.3. Synthèse sur la modélisation de la découpe plasma

Depuis le début des années 2000, les modèles mathématiques et les méthodes numériques utilisés pour la simulation de la découpe plasma n'ont pas connu d'évolution majeure. En termes de méthodes numériques de résolution des équations, toutes les études ont employé des méthodes pressure-based avec des algorithmes de type SIMPLE ou équivalents. Les outils développés ont ainsi permis de réaliser différentes simulations et analyses pertinentes du procédé de découpe plasma. On note cependant que les pressions génératrices imposées dans ces études ne dépassent pas 5 atmosphères et que les nombres de Mach maxima obtenus sont inférieurs à 2. Avec les récentes améliorations des technologies de découpe plasma et notamment l'innovation proposée par Akryvia (voir Section 1.2.3.2), les pressions d'injections dans les torches plasmas sont amenées à être bien plus élevées que précédemment, pouvant dépasser les 10 atmosphères. Or, les méthodes numériques pressure-based sont connues pour ne pas être les plus adaptées pour la capture des ondes de choc dans le cas d'écoulements à hauts nombres de Mach. Cette limitation des méthodes pressure-based va être mise en avant au cours de notre étude, et elle motivera le choix de développer un nouveau solveur utilisant des méthodes numériques conçues pour la simulation d'écoulements supersoniques avec présence d'ondes de choc.

1.3.2. Études expérimentales du procédé

Dans un objectif de validation du nouveau solveur numérique développé, une campagne de mesures expérimentales a été réalisée au cours de notre étude (voir Chapitre 4). Relativement aux différents travaux expérimentaux dédiés à la découpe plasma que l'on trouve dans la littérature, le protocole expérimental employé et le type de mesures effectuées dans notre campagne n'apportent pas d'avancée majeure en termes de technique de caractérisation des plasmas de découpe. Néanmoins, les résultats expérimentaux obtenus ont pu être comparés aux résultats des simulations numériques effectuées sur la configuration d'une torche Akryvia avec le solveur développé.

Les études expérimentales de plasmas de découpe disponibles dans la littérature depuis l'invention du procédé sont orientées sur quatre axes principaux : l'influence des conditions opératoires sur les performances et la qualité de coupe, l'interaction arc-matière avec l'analyse de la durée de vie des consommables, la caractérisation des plasmas de découpe ainsi que la validation des modèles et simulations numériques. Dans cette partie, une synthèse non exhaustive des principaux travaux expérimentaux présents dans la littérature est proposée.

1.3.2.1. Caractérisation des plasmas de découpe

Quelques analyses des jets de découpe plasma par spectroscopie d'émission ont été réalisées entre la fin des années 90 et 2007. Les études réalisées portent sur la caractérisation du plasma dans le jet supersonique présent entre la sortie de tuyère et la pièce à découper. Les premières analyses spectroscopiques du procédé ont été présentées par un groupe de chercheurs espagnols [10] ayant également travaillé sur la modélisation [17]. Ces deniers sont notamment parvenus à déterminer des profils radiaux de pression, température et densité électronique, à différentes hauteurs en aval de la sortie de tuyère, et pour des intensités de courant allant de 50 à 150 A.

Les résultats expérimentaux obtenus par spectroscopie d'émission par Freton *et al.* [11, 12] ont été utilisés à des fins de validation de leur modèle numérique. Ainsi, dans le jet de plasma en aval de la sortie de torche, des profils axiaux et radiaux ont été obtenus pour différentes variables telles que la température, la densité électronique, ou les fractions massiques des espèces considérées. Une analyse avancée dans la zone de l'onde de choc a également été proposée, avec la comparaison des champs de température déterminés expérimentalement et numériquement.

À la suite des travaux de Freton, une étude spectroscopique a été réalisée par Girard *et al.* [13] sur une configuration similaire. Cependant, dans le cas de cette étude, les mesures ont été effectuées dans des conditions de découpe réelle, c'est à dire en utilisant une torche qui se déplace à une certaine vitesse afin de découper une plaque en métal. Dans l'étude de Freton, la torche était immobile et l'anode était un disque tournant au bord duquel l'arc s'attachait. C'est ce dernier type de configuration qui a été utilisée lors de notre campagne expérimentale. Les résultats obtenus par Girard ont permis de représenter des profils axiaux et radiaux de température, pression et densité électronique. Les mesures ont été effectuées pour différentes pressions d'injection du gaz plasmagène et pour plusieurs vitesses de découpe. Des comparaisons avec des mesures réalisées sur une configuration de torche immobile avec une anode tournante mettent en avant le fait que le déplacement de la torche n'influence pas les propriétés macroscopiques du plasma dans la

zone du choc. Des résultats en accord avec ceux de Freton ont ainsi été obtenus.

Une autre étude expérimentale par spectroscopie visant à caractériser les jets de plasma de découpe a ensuite été présentée par Peters *et al.* [14]. Les mêmes types de profils que dans les études précédentes ayant été obtenus, la principale différence de ce travail vient des plages d'intensité de courant utilisées. En effet les mesures ont été réalisées pour des courants allant de 60 à 200 A, alors que ceux utilisés lors des études de Freton ou de Girard ne dépassaient pas 60 A. Les résultats expérimentaux de Peters ont été utilisés comme moyen de validation du modèle présenté par Zhou *et al.* [18].

Ces études spectroscopiques ont été accompagnées de photos des jets de plasma, obtenues au moyen de caméras rapides. L'analyse de ces images permet notamment de déterminer de manière qualitative la position des ondes chocs en sortie de tuyère, et de pouvoir ainsi choisir judicieusement les différentes hauteurs pour lesquelles les profils radiaux doivent être déterminés. Un article de revue présenté par Colombo *et al.* [15] présente les différents avantages de l'imagerie rapide pour l'étude de la découpe plasma. En plus de l'observation de la position des ondes de choc, cet outil permet d'étudier par exemple la formation de la saignée et des scories, d'observer l'érosion de la cathode lors des différentes phase de coupe, ou encore les phénomènes turbulents d'interactions entre le jet chaud de plasma et l'air ambiant.

1.3.2.2. Interaction arc-matière et endommagement de la cathode

Une autre partie des études expérimentales disponibles dans la littérature s'intéressent à la physique dans les zones d'interactions entre l'arc électrique et la matière, c'est à dire au niveau de la cathode et de l'anode. Concernant cette dernière, un travail expérimental effectué par Teulet *et al.* [58] s'est focalisé sur l'interaction arc-matière et le transfert d'énergie au niveau de la saignée. Cette étude fait suite aux mesures spectroscopiques de caractérisation du plasma présentées par Girard *et al.* [13]. Différentes mesures ont été effectuées dans l'étude de Teulet : des mesures de température par thermomètre infrarouge sur les surfaces de la saignée, des mesures de température à l'intérieur de la plaque en y insérant des thermocouples et de l'imagerie rapide pour visualiser la position du pied d'arc anodique. Un calcul de l'efficacité du procédé de découpe est alors proposé en évaluant la répartition des différentes puissances impliquées lors de la découpe, telles que la puissance perdue dans l'arc avant d'impacter la pièce, la puissance réellement utilisée pour faire fondre le métal, la puissance générée par l'oxydation du métal, la puissance perdue par conduction thermique dans la plaque et également la puissance perdue dans la partie de l'arc en extinction, localisée sous la pièce. Les mesures de températures effectuées dans la plaque ont notamment permis d'estimer la puissance perdue par conduction. Quant aux mesures de la température sur les surfaces de la saignée, elles avaient pour objectif initial de pouvoir déterminer la position du pied d'arc anodique en observant un maximum de température. Cependant, les valeurs obtenues ne présentant pas particulièrement de maximum, seule l'imagerie rapide a pu être utilisée pour étudier la position du pied d'arc. Une analyse de la répartition des puissances mises en jeu lors de la découpe avait également été réalisée par Freton *et al.* [11, 12], mais la puissance perdue par conduction dans la plaque n'avait pas été déterminée expérimentalement. En effet, celle-ci avait été estimée à partir des études de Nemchinsky [59] et Ramakrishnan *et al.* [60]. Une dernière étude expérimentale portant sur les interactions au niveau de la saignée a été réalisée par Colombo *et al.* [61], basée sur l'analyse de

photos obtenues par imagerie rapide. Les positions du pieds d'arc anodique ont par exemple été observées lors de la phase de perçage de la plaque (lorsque la torche est immobile) et également pendant la phase de découpe. Les images obtenues montrent que lorsque les vitesses de coupe sont faibles, plusieurs points d'attache de l'arc peuvent apparaître en simultané, se déplaçant aléatoirement entre le haut et le bas du front de coupe. Pour des vitesses de découpe plus élevées, le pied d'arc anodique semble se stabiliser à l'extrémité supérieure du front de coupe.

Les principaux résultats obtenus relatifs aux phénomènes d'érosions de la cathode lors de la découpe plasma sont synthétisés dans l'article de revue de Nemchinsky [62]. Les différentes études disponibles dans la littérature montrent que lors de la phase de découpe, le phénomène principalement responsable de l'érosion de la cathode est l'évaporation de ses composants. De plus, les cathodes subissent des pertes de matière importantes lors des phases d'amorçage et d'extinction de l'arc. Cependant, les raisons de ces pertes non-négligeables de matières lors des phases transitoires sont encore peu comprises et seules des hypothèses ont été proposées.

1.3.2.3. Conditions opératoires et performances de coupe

Le reste des travaux expérimentaux les plus récents appliqués à la découpe plasma est principalement consacré à l'analyse de l'influence des paramètres opératoires pour l'optimisation des performances et qualité de coupe. Une équipe de chercheurs indiens a présenté un article de revue [16] synthétisant les différentes études expérimentales qui utilisent des méthodes statistiques afin de déterminer les paramètres de coupe optimaux. Les principaux paramètres opératoires pris en compte sont les suivants : l'intensité du courant de coupe, la pression d'injection du gaz de coupe, la vitesse de coupe, la hauteur de coupe (distance plaque-torche) ainsi que le diamètre de tuyère. Les critères pris en compte pour évaluer la qualité de coupe sont généralement l'angle de dépouille, la largeur de saignée, l'état de surface de la zone découpée, la ZAT, ou encore l'apparition de scories. L'optimisation des paramètres de coupe est effectuée en utilisant la méthode statistique des surfaces de réponse (MSR) [63-65] ou la méthode Taguchi [66-69]. Des analyses de variance sont également présentées dans ces études afin d'estimer les influences relatives des paramètres de coupe.

La limitation de ces travaux vient du fait que les résultats obtenus sont très dépendants des matériaux découpés et des torches plasma utilisées. Ainsi, un ensemble de paramètres optimaux déterminé dans une certaine étude sur une configuration spécifique diffère de manière non négligeable du jeu de paramètres optimaux obtenu par une autre étude sur une configuration de coupe différente. De même, ces études ne s'accordent pas quant à l'influence relative des paramètres opératoires sur la qualité de coupe. Des articles concluent que le paramètre ayant le plus d'influence sur la qualité de coupe est la vitesse de coupe [70], certains montrent qu'il s'agit du courant de coupe [71], d'autres études estiment qu'il s'agit de la hauteur de coupe [65] et d'autres encore déterminent que la pression de coupe a la plus grande influence [72].

Pour conclure sur cette synthèse bibliographique des travaux expérimentaux consacrés à la découpe plasma, le nombre d'études disponibles dans la littérature est plus grand que pour le domaine de la modélisation du procédé. Des thématiques variées sont traitées, allant de la caractérisation du plasma dans le jet de découpe à la compréhension de la physique au niveau de l'électrode et de l'anode. Bien que les études les plus récentes soient orientées vers l'optimisation

du procédé, certains aspects de la découpe plasma ont peu été étudiés. On note par exemple le manque de données expérimentales visant à caractériser le plasma à l'intérieur de la chambre d'arc et de la tuyère. Dans l'étude expérimentale présentée dans le Chapitre 4, des mesures effectuées sur une torche à plasma Akryvia sont analysées et comparées aux résultats numériques obtenus avec le nouveau solveur développé.

2. Modélisation d'une torche plasma à froid

Sommaire

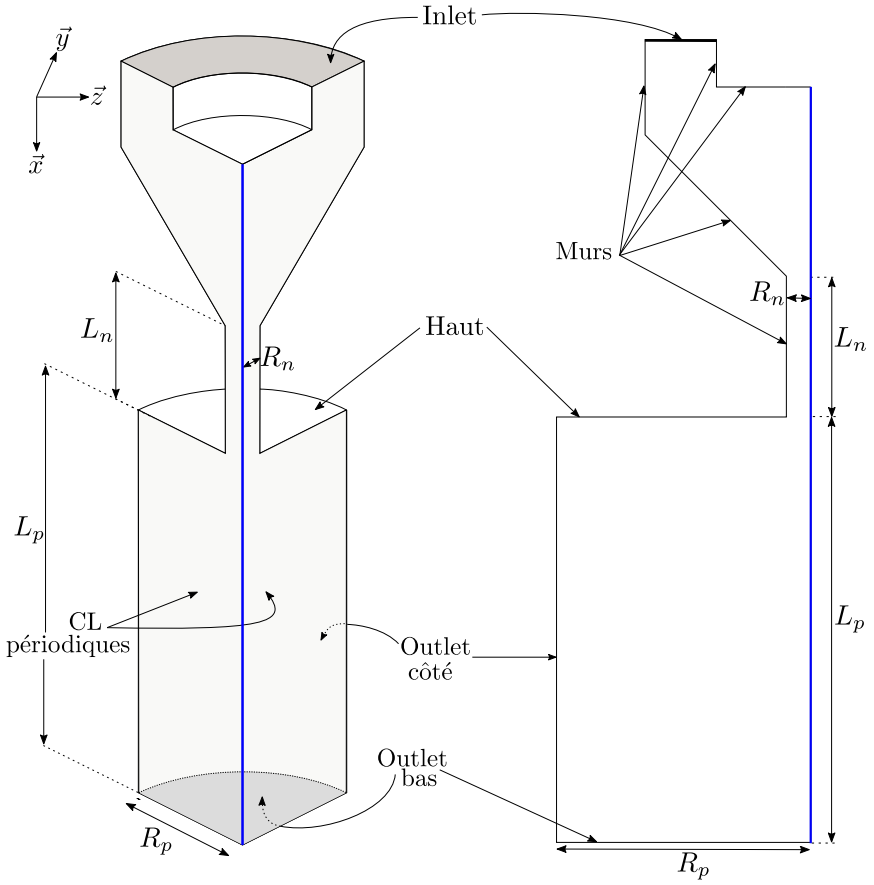
2.1. Introduction . . . 52
2.2. Présentation de la configuration étudiée . . . 52
2.3. Modèle mathématique . . . 53
2.3.1. Hypothèses . . . 53
2.3.2. Équations du modèle . . . 53
2.3.3. Équations d'état . . . 54
2.4. Méthode de résolution . . . 55
2.4.1. Méthode des volumes finis . . . 55
2.4.1.1. Volumes finis 1D . . . 55
2.4.1.2. Volumes finis 3D . . . 57
2.4.2. Calcul des flux numériques pour les systèmes hyperboliques . . . 58
2.4.2.1. Problèmes de Riemann et schéma de Godunov . . . 59
2.4.2.2. Solveurs de Riemann approchés pour les équations d'Euler : solveurs HLL et HLLC . . . 60
2.4.3. Schéma du second ordre : reconstruction MUSCL . . . 65
2.4.3.1. Principe de la reconstruction MUSCL en une dimension . . . 65
2.4.3.2. Reconstruction MUSCL en trois dimensions et schéma TVD . . . 66
2.4.4. Intégration en temps et condition CFL . . . 67
2.4.5. Algorithme du solveur et outil développé . . . 68
2.5. Validation de la méthode numérique . . . 69
2.5.1. Cas tests pour la validation du schéma HLLC et de la reconstruction MUSCL . . . 69
2.5.1.1. En une dimension : tube à choc . . . 69
2.5.1.2. En deux dimensions : problème de Riemann 2D . . . 71
2.5.2. Comparaison à une méthode pressure-based : configuration de la torche à froid . . . 73
2.5.2.1. Paramètres des calculs et conditions limites . . . 73
2.5.2.2. Comparaison des résultats et discussions . . . 75
2.6. Conclusion . . . 78

2.1. Introduction

Ce second chapitre est consacré à la modélisation d'une torche à plasma « à froid ». Cela signifie que le fluide considéré est uniquement à l'état gazeux, à température ambiante, et qu'il n'y a pas de plasma présent. L'écoulement à froid correspond donc au cas où la torche est seulement alimentée en gaz et pas en électricité, c'est à dire que seuls les aspects hydrodynamiques sont pris en compte. L'intérêt de commencer par une modélisation à froid est de pouvoir évaluer la capacité du solveur développé à bien prendre en compte la nature supersonique de l'écoulement établi en aval de la sortie de la torche. De plus, différents cas de référence existent pour la validation à froid, tandis qu'aucun modèle analytique ne permet la validation des simulations avec plasma. Après l'introduction du problème étudié et du modèle mathématique utilisé, la méthode numérique employée afin de résoudre les équations est présentée. La dernière partie de ce chapitre est dédiée à la validation du solveur développé, ainsi qu'à sa comparaison avec un solveur pressure-based sur la configuration de la torche à froid.

2.2. Présentation de la configuration étudiée

Dans ce chapitre, la géométrie de torche simplifiée représentée sur la Figure 2.1 a été utilisée. L'objectif est de simuler l'écoulement d'air à l'intérieur et en sortie de torche, dans l'atmosphère ambiante.



Symbole	Longueur (mm)
L_n	3.00
R_n	0.50
L_p	20.0
R_p	8.00

Figure 2.1. – Détails de la géométrie considérée pour l'étude de la torche à froid.

Le gaz entre dans la torche via l'inlet à une pression de plusieurs bars et à une température ambiante, puis s'écoule au travers d'une tuyère convergente qui se termine par un canal de longueur L_n et de rayon constant R_n. En sortie de canal, le gaz sous pression se détend dans l'air ambiant, engendrant une suite d'ondes de chocs et de détentes, caractéristiques d'un jet supersonique sous-détendu [73]. Comme représenté sur la Figure 2.1, les calculs ont été réalisés avec une géométrie correspondant à un quart de la torche et des simulations 2D-axisymétriques ont également été effectuées. Le solveur présenté dans la suite de ce chapitre a été utilisé pour les simulations dans le quart de torche, tandis qu'un solveur pressure-based a été utilisé pour les calculs en 2D-axisymétrique (voir Section 2.5.2).

2.3. Modèle mathématique

2.3.1. Hypothèses

Dans l'écoulement de gaz à froid étudié, les effets diffusifs (viscosité et diffusion de la chaleur) et gravitationnels sont négligeables par rapport aux effets inertiels. Le gaz considéré étant compressible, un modèle mathématique adapté à la modélisation de ce type d'écoulement est celui des équations d'Euler. Celles-ci correspondent aux équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, détaillées ci-après. Étant donné que les configurations étudiées sont tri-dimensionnelles, un repère cartésien 3D avec la base orthonormée $(\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z})$ est utilisé.

2.3.2. Équations du modèle

Les équations d'Euler correspondent aux équations de conservation dans un fluide en l'absence d'effets dissipatifs tels que les frottements visqueux ou la diffusion thermique. Elles traduisent :

1. Le principe de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.1}$$

avec
- ρ la masse volumique du gaz, appelée densité par abus de langage,
- $\boldsymbol{u}$ le vecteur vitesse, ayant pour composantes u, v et w.

2. L'équilibre entre la variation de quantité de mouvement et les forces de pression, avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \vec{0}, \tag{2.2}$$

avec
- p la pression statique,
- $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ le tenseur identité ($I_{ij} = \delta_{ij}$).

3. La conservation de l'énergie totale, équilibrée par le travail des forces de pression :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot ((\rho E + p)\boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.3}$$

où $E = e + ||\boldsymbol{u}||^2/2$ est l'énergie totale par unité de masse, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne e.

Par soucis de simplicité dans les notations qui suivront, ces trois équations de conservation peuvent être écrites sous la forme d'une unique relation vectorielle :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})}{\partial z} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}). \tag{2.4}$$

Dans cette formulation conservative des équations d'Euler, $\boldsymbol{U}$ est appelé vecteur des variables conservatives et les vecteurs $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})$ et $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})$ sont les vecteurs flux. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho E + p) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Enfin, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$ correspond au vecteur des termes sources diffusifs, dont les composantes sont nulles dans le cas des équations d'Euler :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}) = \vec{0}. \tag{2.6}$$

2.3.3. Équations d'état

Afin de fermer le modèle précédent, il est nécessaire d'utiliser une loi d'état permettant de calculer les expressions de la température T et de la pression p en fonction des variables conservatives. Comme l'écoulement étudié dans ce chapitre est à froid et non-réactif, le gaz modélisé est de l'air considéré comme un gaz parfait diatomique. Une loi d'état plus complexe sera présentée dans le Chapitre 3, lors de l'étude de l'écoulement à chaud avec le plasma. Pour un gaz parfait, la pression et la température se calculent comme suit :

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \rho\frac{||\boldsymbol{u}||^2}{2}\right), \tag{2.7}$$

$$T = \frac{p}{\rho R_s}, \tag{2.8}$$

avec
- $\gamma = c_p/c_v$ le coefficient adiabatique, rapport des capacités thermiques à pression constante c_p et à volume constant c_v,
- R_s la constante spécifique de l'air.

Pour de l'air, la constante spécifique R_s vaut 287 J.kg^{-1}.K^{-1} et pour tous les gaz parfaits diatomiques, le coefficient adiabatique γ vaut 1.4. Le jet présent en sortie de torche étant supersonique, une propriété importante à déterminer est la vitesse du son c. Dans le cas d'un gaz parfait, celle-ci se calcule simplement à partir de l'expression

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R_s T}. \tag{2.9}$$

2.4. Méthode de résolution

Afin de résoudre les équations du modèle venant d'être présenté, la méthode des volumes finis a été utilisée dans le solveur développé. Cette section présente premièrement le principe général de cette méthode, puis les différents schémas numériques implémentés dans le solveur sont ensuite détaillés. Enfin, la dernière partie s'intéresse à l'algorithme global du solveur et à l'environnement dans lequel il a été développé.

2.4.1. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une des méthodes numériques utilisées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. En raison de sa nature conservative, elle est particulièrement adaptée aux lois de conservation hyperboliques [74] comme les équations d'Euler. Afin d'appliquer cette méthode, le domaine de calcul doit être discrétisé en un nombre fini de volumes de contrôle, appelés mailles ou cellules. En une dimension, les mailles sont nécessairement des segments. En deux dimensions, différentes formes de cellules sont possibles, comme par exemple des triangles ou des quadrilatères. Dans le cas tri-dimensionnel, les mailles sont généralement des tétraèdres ou des hexagones. Le domaine discrétisé obtenu après division en un certain nombre de mailles est appelé maillage. Le principe de la méthode des volumes finis est alors de calculer les valeurs des différentes inconnues de manière discrète dans chaque cellule du maillage, en intégrant les équations à résoudre sur les différents volumes de contrôles. Les inconnues peuvent être calculées aux centres des cellules (méthodes cell-centered), aux centres des faces des cellules (méthodes face-centered), ou bien au niveau des sommets (vertex-centered). Dans notre étude, une méthode cell-centered a été utilisée. Cette partie présente d'abord le principe de la méthode des volumes finis pour la résolution d'une équation de conservation en une dimension, puis la méthode est décrite dans le cas de systèmes d'équations de conservation en trois dimensions, tels que celui du modèle (2.4).

2.4.1.1. Volumes finis 1D

Afin d'introduire la méthode des volumes finis, nous considérons d'abord la loi de conservation 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \tag{2.10}$$

où
- $x \in [a, b]$ est la variable d'espace, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$,
- $t \in \mathbb{R}^+$ correspond au temps,
- f est une fonction régulière de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, appelée fonction flux,
- u est l'inconnue à déterminer (ici, u ne correspond pas nécessairement à la composante de la vitesse suivant l'axe $\boldsymbol{e_x}$).

Pour résoudre numériquement cette équation avec la méthode des volumes finis, le domaine de calcul doit être discrétisé. Nous choisissons donc un maillage composé de N cellules ($N \in \mathbb{N}$) tel que celui représenté sur la Figure 2.2.

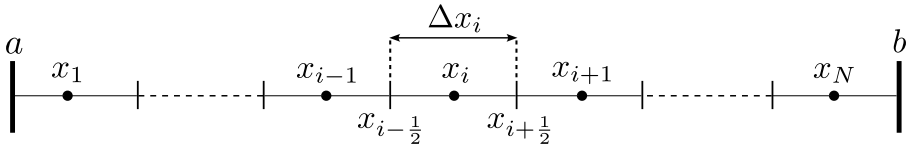


Figure 2.2. – Exemple de maillage en une dimension d'un domaine fini $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Les valeurs de x avec des indices entiers indiquent la position des centres des cellules et les valeurs avec les indices intermédiaires correspondent aux faces des cellules.

Le principe des volumes finis est de calculer une approximation de u dans chaque cellule du domaine, en supposant que sa valeur est constante dans chaque maille et donc que u est constante par morceaux. Ainsi, pour une cellule quelconque $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ $(i = 1, ..., N)$, on note $u_i(t)$ l'approximation de u dans la cellule au temps t. Celle-ci est définie comme la moyenne de u sur la maille C_i :

$$u_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t)\, \mathrm{d}x, \tag{2.11}$$

où $\Delta x_i = |x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}|$ est la longueur de C_i. En intégrant la loi de conservation (2.10) sur la maille C_i, la relation suivante est obtenue :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t}\, \mathrm{d}x + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial f(u)}{\partial x}\, \mathrm{d}x = 0. \tag{2.12}$$

Comme on suppose que u est constante à l'intérieur de C_i, la forme intégrale précédente se simplifie en

$$\Delta x_i \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)\right) - f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)\right) = 0, \tag{2.13}$$

pouvant se réécrire

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x_i}\left[f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)\right) - f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)\right)\right]. \tag{2.14}$$

Après avoir choisi un schéma d'approximation pour la dérivée en temps (voir Section 2.4.4), la méthode des volumes finis consiste à déterminer des approximations $F_{i+\frac{1}{2}}$ et $F_{i-\frac{1}{2}}$ de la fonction flux f aux niveaux des bords de C_i, en $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ et $x = x_{i-\frac{1}{2}}$:

$$F_{i+\frac{1}{2}}(t) \sim f\left(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)\right) \quad \text{et} \quad F_{i-\frac{1}{2}}(t) \sim f\left(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)\right) \tag{2.15}$$

Les approximations $F_{i+\frac{1}{2}}$ et $F_{i-\frac{1}{2}}$ sont appelées flux numériques et le choix des schémas numériques permettant de les calculer est directement lié à la nature de la fonction flux f. Les flux numériques considérés dans notre étude pour le cas de la loi de conservation (2.4) sont présentés en Section 2.4.2. Finalement, en injectant dans la relation (2.14) les expressions données en (2.15), la formulation volumes finis semi-discrète générale pour une loi de conservation 1D de la forme (2.10) est obtenue :

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x_i}\left(F_{i-\frac{1}{2}}(t) - F_{i+\frac{1}{2}}(t)\right). \tag{2.16}$$

2.4.1.2. Volumes finis 3D

Dans cette section, le principe des volumes finis est présenté pour un système d'équations de conservations en trois dimensions de la forme (2.4). En dimension 2 et 3, les maillages permettant de discrétiser l'espace peuvent être structurés ou non-structurés. En raison des géométries considérées, des maillages 3D non-structurés ont été utilisés dans notre étude, composés d'un nombre fini $N_C \in \mathbb{N}$ de cellules hexaédriques et pyramidales. Un exemple de deux cellules tétraédriques voisines est illustré sur la Figure 2.3.

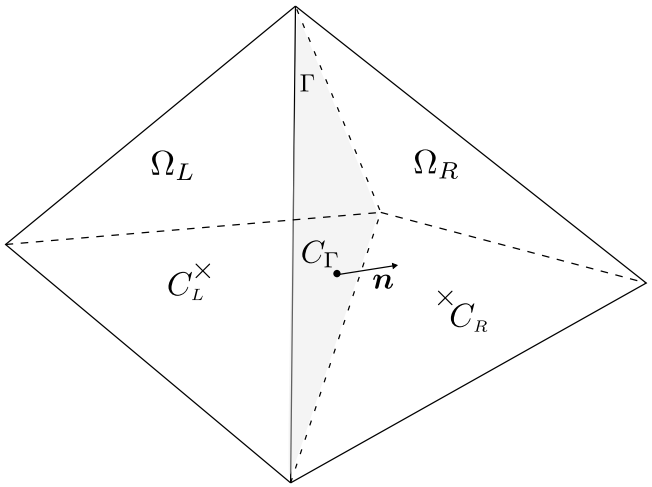


Figure 2.3. – Exemple de deux cellules tétraédriques adjacentes Ω_L et Ω_R. C_L et C_R sont les barycentres des cellules, Γ désigne la face séparant Ω_L et Ω_R, C_Γ est le barycentre de Γ et $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à Γ, sortant de Ω_L.

En trois dimensions, la méthodologie des volumes finis est similaire au cas 1D. On cherche ainsi à calculer des approximations $\boldsymbol{U}_i$ $(i = 1, ..., N_C)$ de $\boldsymbol{U}$, constantes à l'intérieur de chaque maille, telles que

$$\boldsymbol{U}_i(t) \equiv \frac{1}{|\Omega_i|} \iiint_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(x, y, z, t)\, \mathrm{d}\Omega. \tag{2.17}$$

L'intégration de la loi de conservation (2.4) sur le volume d'une cellule quelconque Ω_i donne

$$\iiint_{\Omega_i} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega + \iiint_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})}{\partial z} \right) \mathrm{d}\Omega = \iiint_{\Omega_i} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})\, \mathrm{d}\Omega. \tag{2.18}$$

En notant $\boldsymbol{S}_i$ une approximation du terme source $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$ constante dans la cellule Ω_i, et après application du théorème de la divergence, la relation précédente peut être simplifiée en

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_i|} \oiint_{\partial\Omega_i} \overline{\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}}(\boldsymbol{U}_i) \cdot \boldsymbol{n}_i\, \mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{S}_i, \tag{2.19}$$

où
- $\overline{\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}}(\boldsymbol{U}_i) = (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_i),\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_i),\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}_i))$ est le tenseur des flux,
- $\partial\Omega_i$ désigne le bord le Ω_i,
- $\boldsymbol{n}_i$ est le vecteur normal à $\partial\Omega_i$, orienté vers l'extérieur de la cellule.

L'intégrale surfacique sur le bord de Ω_i peut ensuite être décomposée en la somme des intégrales sur les N_{f_i} faces Γ_k $(k = 1, ..., N_{f_i})$ de la cellule, donnant

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_{f_i}} \iint_{\Gamma_k} \overline{\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}}(\boldsymbol{U}_i) \cdot \boldsymbol{n}_k \, \mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{S}_i, \tag{2.20}$$

où $\boldsymbol{n}_k = (n_k^x,\ n_k^y,\ n_k^z)^\top$ est le vecteur normal à la face Γ_k, sortant de la maille Ω_i. Après introduction de la notation

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \overline{\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}}(\boldsymbol{U}_i) \cdot \boldsymbol{n}_k, \tag{2.21}$$

la relation (2.20) devient

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_{f_i}} \iint_{\Gamma_k} \hat{\mathbf{F}}_k \, \mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{S}_i. \tag{2.22}$$

En définissant le flux $\mathbf{F}_k$ tel que

$$\mathbf{F}_k = \iint_{\Gamma_k} \hat{\mathbf{F}}_k \, \mathrm{d}\Gamma, \tag{2.23}$$

l'équation (2.22) se simplifie alors en

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_{f_i}} \mathbf{F}_k = \boldsymbol{S}_i. \tag{2.24}$$

Une fois un schéma numérique choisi pour calculer une approximation $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k$ de la valeur du flux $\hat{\mathbf{F}}_k$ sur la face Γ_k (voir Section 2.4.2), le flux numérique peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{F}_k = |\Gamma_k| \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k. \tag{2.25}$$

Finalement, la formulation volume finis semi-discrète suivante est obtenue :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_{f_i}} |\Gamma_k| \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k + \boldsymbol{S}_i. \tag{2.26}$$

Après avoir défini un schéma d'approximation pour la dérivée en temps, la méthode des volumes finis consiste à déterminer un schéma numérique adapté au calcul des flux $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k$.

2.4.2. Calcul des flux numériques pour les systèmes hyperboliques

La précision et la robustesse d'un schéma volume finis sont très fortement liées au calcul des flux numériques. En trois dimensions, le flux numérique $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k$ est une approximation de $\hat{\mathbf{F}}_k$, calculée au centre C_{Γ_k} de la face Γ_k. Pour rappel, $\hat{\mathbf{F}}_k$ correspond à la projection du tenseur des flux $\overline{\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}}$ sur la normale à la face $\boldsymbol{n}_k$ (voir (2.21)). En fonction de la nature des fonctions flux $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$, il existe différentes méthodes pour calculer les valeurs des flux numériques au niveau des faces. Dans cette section, nous présentons d'abord les problèmes des Riemann et introduisons le principe du schéma de Godunov, qui permet de calculer les flux numériques dans

le cas d'un système d'équations hyperbolique quelconque. Les schémas HLL et HLLC adaptés aux équations d'Euler sont ensuite détaillés.

2.4.2.1. Problèmes de Riemann et schéma de Godunov

Afin d'introduire le calcul des flux numériques au travers des faces, considérons deux cellules voisines Ω_L et Ω_R telles que représentées sur la Figure 2.4. Le schéma présenté dans cette figure est en deux dimensions afin d'être plus visible, mais la méthode détaillée dans la suite est adaptée au cas tri-dimensionnel. Les deux mailles sont séparées par une face Γ_k, ayant pour centre le point C_{Γ_k}. La normale à Γ_k sortant de Ω_L est notée $\boldsymbol{n}_k$. Pour un point quelconque X de l'espace ($X \in \mathbb{R}^2$ en 2D et $X \in \mathbb{R}^3$ en 3D), définissons $\xi(X) = (X - C_{\Gamma_k}) \cdot \boldsymbol{n}_k$ la projection normale à la face Γ_k.

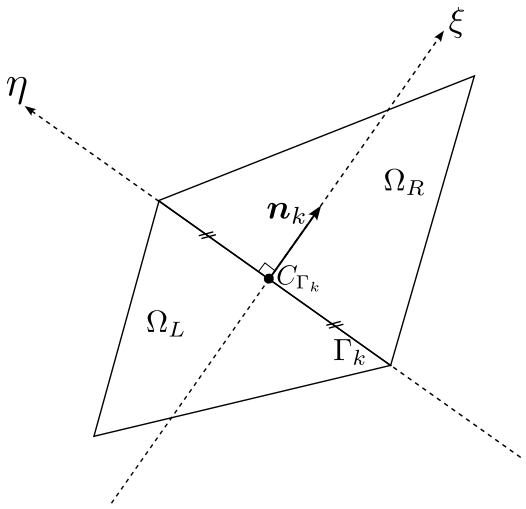


Figure 2.4. – Exemple de deux mailles triangulaires adjacentes.

Soit $\boldsymbol{U}_L^n$ une approximation de $\boldsymbol{U}$ constante dans la maille Ω_L, calculée au temps $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, où Δt correspond au pas de temps, dont le calcul est détaillé en Section 2.4.4. Considérons de manière similaire $\boldsymbol{U}_R^n$ une approximation de $\boldsymbol{U}$ constante dans la maille Ω_R. Une façon pertinente de calculer une approximation du flux $\hat{\mathbf{F}}_k$ au travers de la face Γ_k est de résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{W}(\xi,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{W})}{\partial \xi} = 0, \\ \boldsymbol{W}(\xi, t_n) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_L^n, & \text{si } \xi < 0, \\ \boldsymbol{U}_R^n, & \text{si } \xi > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{2.27}$$

La relation précédente est appelée problème de Riemann. En déterminant une solution $\boldsymbol{W}$ de ce problème de Riemann au niveau de la face, c'est à dire pour $\xi = 0$, une bonne approximation du flux au travers de la face est alors

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k = \hat{\mathbf{F}}_k \left(\boldsymbol{W}(0, t_n) \right). \tag{2.28}$$

Le schéma numérique obtenu en résolvant le problème de Riemann (2.27) de manière exacte, c'est à dire en déterminant la valeur exacte de $\boldsymbol{W}(0, t_n)$, est appelé schéma de Godunov [75]. De

manière générale, la résolution exacte d'un problème de Riemann est complexe et très coûteuse en temps de calcul. Ainsi, dans la pratique, se sont plutôt des solveurs de Riemann approchés qui sont utilisés dans les codes de mécanique des fluides numérique. Ces derniers permettent de de calculer des approximations de $\boldsymbol{W}(0, t_n)$ de manière bien plus efficace que dans le cas d'un solveur de Riemann exact. Pour les équations d'Euler (2.4)-(2.5) étudiées dans ce chapitre, des solveurs de Riemann approchés couramment utilisés sont les solveurs HLL et HLLC.

2.4.2.2. Solveurs de Riemann approchés pour les équations d'Euler : solveurs HLL et HLLC

Cette partie détaille le principe des solveurs de Riemann approchés HLL et HLLC, adaptés aux calculs des flux numériques dans le cas des équations d'Euler. Avant de présenter les formulations de ces deux solveurs, certaines propriétés des équations d'Euler sont d'abord introduites.

a) Quelques propriétés des équations d'Euler

Dans cette partie, plusieurs propriétés des équations d'Euler nécessaires pour la construction des solveurs HLL et HLLC sont introduites. Les démonstrations des différentes propriétés énoncées ne sont pas présentées ici, celles-ci étant par exemple disponibles dans l'ouvrage de Toro [22].

Une première propriété de ces équations est qu'elles admettent des solutions pouvant être discontinues. Plusieurs types d'ondes se propagent à différentes vitesses à partir de ces discontinuités. Dans le cas de ces solutions discontinues, il est possible d'établir des relations entre les valeurs des variables d'un côté de la discontinuité et les valeurs des variables de l'autre côté. Pour cela, considérons une onde se déplaçant à une certaine vitesse $S = X/T$, séparant deux états constant $\boldsymbol{U}_L$ et $\boldsymbol{U}_R$, comme représenté sur la Figure 2.5.

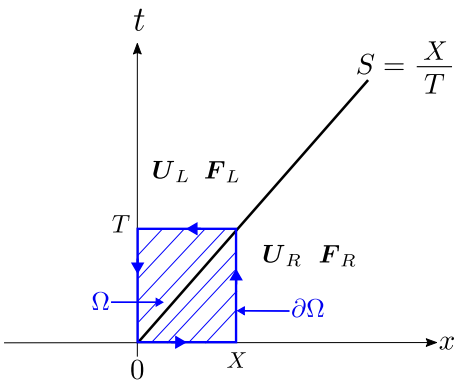


Figure 2.5. – Contour d'intégration pour les relations de Rankine-Hugoniot.

L'intégration de la loi de conservation hyperbolique sur une surface de contrôle $\Omega = [0, X] \times [0, T]$ donne :

$$\int_0^T \int_0^X \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0. \tag{2.29}$$

En appliquant le théorème de Green, cette relation peut se réécrire comme

$$\oint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{U}\mathrm{d}x - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\mathrm{d}t) = 0. \tag{2.30}$$

En considérant des états constants de chaque côté de l'onde et en décomposant l'intégrale sur les quatre segments du bord de Ω, la relation suivante est obtenue :

$$\boldsymbol{U}_R X - \boldsymbol{F}_R T - \boldsymbol{U}_L X + \boldsymbol{F}_L T = 0. \tag{2.31}$$

Enfin, en divisant cette expression par T, l'expression précédente devient :

$$\boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L = S(\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L). \tag{2.32}$$

Cette équation est appelée relation de Rankine-Hugoniot ou également relation de sauts. Plus généralement, celle-ci est donnée sous la forme

$$\Delta\boldsymbol{F} = S\Delta\boldsymbol{U}. \tag{2.33}$$

L'application de la relation de Ranking-Hugoniot au cas des équations d'Euler 1D permet finalement de déterminer les trois expressions suivantes :

$$\rho_L(u_L - S) = \rho_R(u_R - S), \tag{2.34a}$$

$$\rho_L u_L(u_L - S) + p_L = \rho_R u_R(u_R - S) + p_R, \tag{2.34b}$$

$$\rho_L E_L(u_L - S) + p_L u_L = \rho_R E_R(u_R - S) + p_R u_R. \tag{2.34c}$$

La solution du problème de Riemann associé aux équations d'Euler est en fait structurée autour de trois ondes qui se propagent depuis la discontinuité. En d'autres termes, une petite perturbation peut se décomposer en trois modes. Ces derniers sont associés aux trois valeurs propres de la matrice Jacobienne du vecteur flux des équations d'Euler. En considérant les équations d'Euler en une dimension avec une équation d'état de gaz parfaits, les valeurs propres de la Jacobienne $\overline{\overline{\boldsymbol{J}}}(\boldsymbol{U}) = \partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})/\partial\boldsymbol{U}$ sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u \quad \text{et} \quad \lambda_3 = u + c, \tag{2.35}$$

où c correspond à la vitesse du son. La structure de la solution du problème de Riemann peut ainsi être représentée dans le plan des caractéristiques (x, t), comme dans l'exemple montré sur la Figure 2.6. Celle-ci est composée de quatre états séparés par les trois ondes : l'état gauche $\boldsymbol{U}_L$, l'état intermédiaire $\boldsymbol{U}_{*L}$ compris entre la première et la deuxième onde, le second état intermédiaire $\boldsymbol{U}_{*R}$ compris entre la deuxième et la troisième onde, ainsi que l'état droit $\boldsymbol{U}_R$.

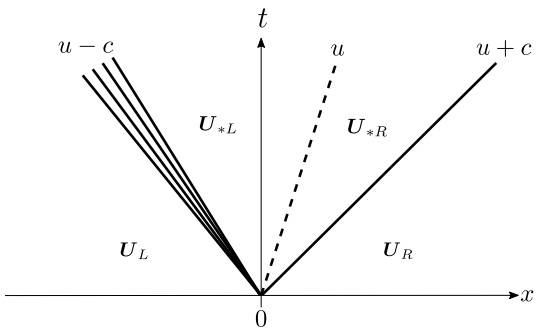


Figure 2.6. – Structure dans le plan (x, t) de la solution du problème de Riemann pour les équations d'Euler 1D.

Les ondes présentes dans la solution du problème de Riemann peuvent être de trois types : des ondes des chocs, des ondes de détente et des discontinuités de contact. Une analyse des modes propres associés aux trois valeurs propres permet de montrer que l'onde du milieu, associée à la valeur propre u, est toujours une discontinuité de contact. Concernant les ondes « extérieures » associées aux valeurs propres $u - c$ et $u + c$, elles peuvent toutes deux être des ondes de chocs ou des détentes. Les ondes de chocs se propagent dans les zones de compression du fluide, tandis que les ondes de détentes apparaissent dans les zones de dilatation. Quant aux discontinuités de contact, elles correspondent aux surfaces séparant deux fluides ayant des densités et des températures différentes, mais des pressions égales de part et d'autre de la discontinuité. C'est par exemple le cas au niveau de l'interface entre l'air ambiant et un jet supersonique sous-détendu. Dans le cas des équations d'Euler, la composante normale de la vitesse et la pression sont constantes de part et d'autre de la discontinuité de contact. Ainsi :

$$p_{*L} = p_{*R} = p_* \quad \text{et} \quad u_{*L} = u_{*R} = u_*. \tag{2.36}$$

Les chocs et discontinuités de contact étant associées à des zones de discontinuités, les relations de saut s'appliquent dans le cas de ces deux types d'ondes.

b) Le solveur de Riemann HLL

Dans le cas du solveur de Riemann HLL (Harten-Lax-van Leer) [76], la discontinuité de contact n'est pas prise en compte. Une structure à deux ondes séparant trois états constants est supposée, telle que celle représentée sur la Figure 2.7.

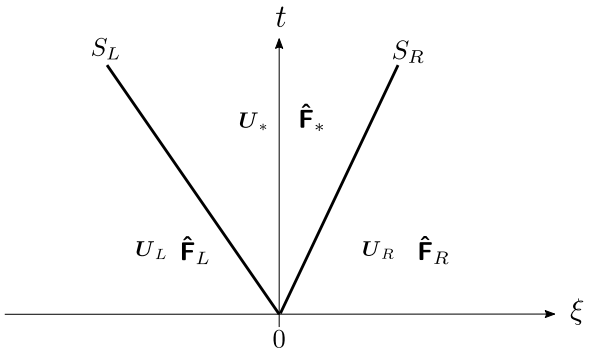


Figure 2.7. – Solveur HLL : structure dans le plan (ξ, t) de la solution du problème de Riemann.

Les deux cas triviaux où $\xi/t \leq S_L$ et $S_R \leq \xi/t$ correspondent aux conditions dans lesquelles l'écoulement est supersonique. Dans ces cas, aucune information ne peut « remonter » vers l'amont de l'écoulement, et les valeurs des flux numériques sont donc directement celles de l'état droit ou gauche. Pour déterminer les valeurs des flux dans la région « étoile » où $S_L < \xi/t < S_R$, le principe du schéma HLL est d'appliquer les relations de saut (2.33) au travers des deux ondes de vitesse S_L et S_R. Ainsi, on obtient :

$$\boldsymbol{U}_* = \frac{S_R\,\boldsymbol{U}_R - S_L\,\boldsymbol{U}_L + \hat{\mathbf{F}}_L - \hat{\mathbf{F}}_R}{S_R - S_L}, \tag{2.37a}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_* = \frac{S_R\,S_L\,(\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L) + S_R\,\hat{\mathbf{F}}_L - S_L\,\hat{\mathbf{F}}_R}{S_R - S_L}. \tag{2.37b}$$

Dans le cas des équations d'Euler en 3D, le vecteur flux $\hat{\mathbf{F}}_K$ ($K = L$ ou $K = R$) est

$$\hat{\mathbf{F}}_K = \overline{\overline{\boldsymbol{\mathcal{W}}}}(\boldsymbol{U}_K)\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \rho_K\ q_K \\ \rho_K\ u_K\ q_K + p_K\ n_x \\ \rho_K\ v_K\ q_K + p_K\ n_y \\ \rho_K\ w_K\ q_K + p_K\ n_z \\ q_K(\rho_K\ E_K + p_K) \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

où $q_K = \boldsymbol{u}_K \cdot \boldsymbol{n}$ est la projection du vecteur vitesse sur la normale à la face $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Le flux numérique HLL au travers de la face (en $\xi/t = 0$) est alors :

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}^{HLL} = \begin{cases} \hat{\mathbf{F}}_L & \text{si}\ \ 0 \leq S_L, \\ \hat{\mathbf{F}}_* & \text{si}\ \ S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \hat{\mathbf{F}}_R & \text{si}\ \ S_R \leq 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Cette méthode ne permettant pas la capture des discontinuités de contact, c'est son extension appelée HLLC qui a été choisie pour le calcul des flux numériques.

c) Restauration de la discontinuité de contact : le solveur HLLC

Le solveur de Riemann HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) [77] est une extension du solveur HLL prenant en compte la discontinuité de contact. Une structure à trois ondes est alors considérée, comme représentée sur la Figure 2.8. La région étoile est ainsi divisée en deux sous régions, respectivement définies par $S_L < \xi/t < S_*$ et $S_* < \xi/t < S_R$, où S_* est la vitesse de la discontinuité de contact.

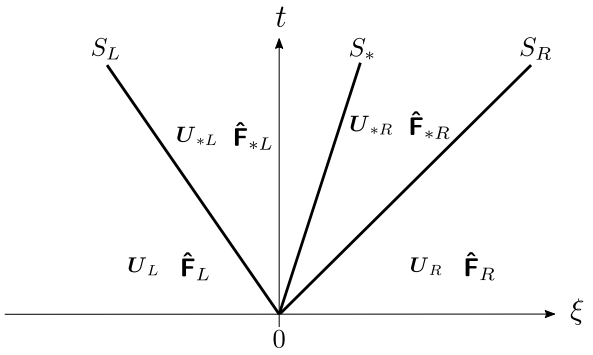


Figure 2.8. – Solveur HLLC : structure de la solution du problème de Riemann.

Comme expliqué précédemment, dans le cas des équations d'Euler, la pression et la vitesse restent constantes au travers des discontinuités de contact :

$$p_{*L} = p_{*R} = p_* \quad \text{et} \quad q_{*L} = q_{*R} = q_*. \tag{2.40}$$

Après quelques manipulations algébriques simples, les relations de saut (2.33) exprimées au travers des trois ondes permettent de déterminer le vecteur des variables conservatives et le vecteur de flux dans les deux régions étoile. Pour $K = L$ ou $K = R$, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\boldsymbol{U}_{*K} = \frac{S_K - q_K}{S_K - S_*} \begin{pmatrix} \rho_K \\ \rho_K \ u_K + \dfrac{p_* - p_K}{S_K - q_K} \ n_x \\ \rho_K \ v_K + \dfrac{p_* - p_K}{S_K - q_K} \ n_y \\ \rho_K \ w_K + \dfrac{p_* - p_K}{S_K - q_K} \ n_z \\ \rho_K \ E_k + \dfrac{p_* \ S_* - p_K \ q_K}{S_K - q_K} \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

et

$$\hat{\mathbf{F}}_{*K} = \hat{\mathbf{F}}_K + S_K \ (\boldsymbol{U}_{*K} - \boldsymbol{U}_K), \tag{2.42}$$

avec

$$p_* = p_L + \rho_L (S_L - q_L)(S_* - q_L) = p_R + \rho_R (S_R - q_R)(S_* - q_R). \tag{2.43}$$

La vitesse étant constante dans toute la région étoile, un choix judicieux pour la vitesse S_* de la discontinuité de contact est $S_* = q_*$, correspondant à la vitesse calculée dans la région étoile avec le schéma HLL. Celle-ci peut alors être exprimée comme suit :

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L \ q_L \ (S_L - q_L) - \rho_R \ q_R \ (S_R - q_R)}{\rho_L (S_L - q_L) - \rho_R (S_R - q_R)}. \tag{2.44}$$

Concernant le calcul des vitesses S_L et S_R des ondes droite et gauche, il existe différents estimateurs possibles [77-79]. Dans cette étude, nous avons choisi l'estimateur simple proposé par Davis [78], qui s'est avéré suffisamment robuste pour notre application :

$$S_L = \min(q_L - c_L, q_R - c_R) \quad \text{et} \quad S_R = \max(q_L + c_L, q_R + c_R), \tag{2.45}$$

où c_L et c_R sont les vitesses du son dans les cellules gauche et droite respectivement.

Finalement, le flux numérique HLLC au niveau de la face est calculé comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_{HLLC} = \begin{cases} \hat{\mathbf{F}}_L & \text{si } 0 \leq S_L, \\ \hat{\mathbf{F}}_{*L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_*, \\ \hat{\mathbf{F}}_{*R} & \text{si } S_* \leq 0 \leq S_R, \\ \hat{\mathbf{F}}_R & \text{si } S_R \leq 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

2.4.3. Schéma du second ordre : reconstruction MUSCL

Les schémas venant d'être présentés étant seulement d'ordre un en espace, la reconstruction MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) [80] est une méthode simple et peu coûteuse en temps de calcul, qui permet d'obtenir des schémas du deuxième ordre en espace. Bien que le solveur ait été développé pour résoudre les équations en 3D, le principe de la reconstruction MUSCL est d'abord expliqué pour le cas unidimensionnel. Cela permettra notamment de simplifier la compréhension de la reconstruction en 3D, détaillée dans la suite.

2.4.3.1. Principe de la reconstruction MUSCL en une dimension

Avec des schémas de type Godunov d'ordre 1, les valeurs des différentes variables discrétisées sont supposées constantes par maille. Pour une méthode cell-centered telle que celle présentée dans cette étude, la valeur constante d'une variable dans une cellule correspond à la valeur de la variable calculée au centre de la cellule. Ainsi, lors de l'évaluation des flux numériques sur les faces des mailles (voir relation (2.46) par exemple), les états gauche $\boldsymbol{U}_L$ et droit $\boldsymbol{U}_R$ sont obtenus à partir des valeurs calculées aux centres des deux cellules voisines. L'idée de la méthode MUSCL est de supposer que les variables ne sont pas constantes par maille et qu'elles suivent une évolution linéaire à l'intérieur de chaque maille. Ce principe est schématisé pour le cas 1D sur la Figure 2.9.

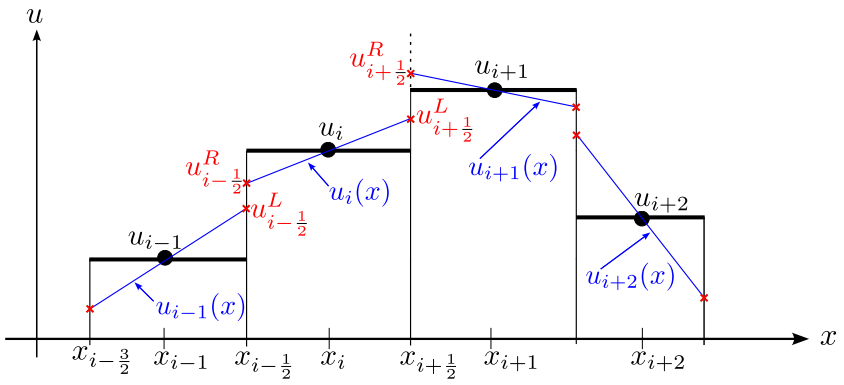


Figure 2.9. – Principe de la reconstruction MUSCL en une dimension.

On définit ainsi dans chaque cellule une fonction affine, déterminée à partir des valeurs aux centres de la cellule et de ses voisines. Par exemple, pour une maille $C_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ de centre x_i, en considérant une approche différence finie centrée, on peut définir une approximation affine $u_i(x)$ comme suit :

$$u_i(x) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} (x - x_i). \tag{2.47}$$

À partir de cette approximation, il est possible d'obtenir les valeurs des variables « reconstruites » au niveau des faces. Ainsi, pour la cellule C_i, on peut calculer les valeurs reconstruites sur les faces gauche ($x = x_{i-\frac{1}{2}}$) et droite ($x = x_{i+\frac{1}{2}}$) de la cellule :

$$u^R_{i-\frac{1}{2}} = u_i\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{et} \quad u^L_{i+\frac{1}{2}} = u_i\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right). \tag{2.48}$$

Étant donné que les faces intérieures du maillage sont communes à deux cellules, il y a deux valeurs reconstruites de part et d'autre de chaque face, calculées à partir des approximations affines définies dans les deux cellules. Par exemple, pour la face localisée en $x = x_{i-\frac{1}{2}}$, la valeur reconstruite du côté droit est $u^R_{i-\frac{1}{2}}$ et la valeur reconstruite du côté gauche est $u^L_{i-\frac{1}{2}}$, déterminée par

$$u^L_{i-\frac{1}{2}} = u_{i-1}\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right), \tag{2.49}$$

où $u_{i-1}(x)$ est l'approximation affine définie dans la cellule $C_{i-1} = \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}\right]$. Lors du calcul du flux numérique au travers de la face séparant les cellules C_{i-1} et C_i, se sont alors les valeurs reconstruites de chaque côté de la face $u^L_{i-\frac{1}{2}}$ et $u^R_{i-\frac{1}{2}}$ qui sont utilisées. Dans les zones de forts gradients dus à la présence de discontinuités telles que des chocs, les pentes des fonctions affines par morceaux peuvent être très importantes, pouvant induire l'apparition d'oscillations dans la solution numérique obtenue. Des fonctions appelées limiteurs de pentes sont ainsi utilisées afin de contraindre les valeurs maximales et minimales des variables reconstruites sur les faces. Par conséquent, les limiteurs permettent d'obtenir des solutions d'ordre 1 proche des zones de forts gradients, tout en restant à l'ordre 2 pour les zones plus éloignées des discontinuités. Un exemple de limiteur est donné dans la section suivante, qui explique le principe de la reconstruction MUSCL dans le cas tri-dimensionnel.

2.4.3.2. Reconstruction MUSCL en trois dimensions et schéma TVD

En trois dimensions, le principe de la méthode MUSCL est équivalent au cas unidimensionnel. Il s'agit ainsi de reconstruire les variables de part et d'autre des faces Γ_k, à partir d'extrapolations des valeurs constantes calculées aux centres des cellules [81]. Ainsi, pour $K = L$ ou $K = R$, les variables sont reconstruites des deux côtés de la face comme suit :

$$\boldsymbol{U}_K(C_{\Gamma_k}) = \boldsymbol{U}_K(C_K) + \Theta_K \, \overrightarrow{C_K C_{\Gamma_k}} \cdot \boldsymbol{\nabla U}(C_K). \tag{2.50}$$

Dans l'extrapolation précédente, Θ_K est un limiteur de pente, défini par

$$\Theta_K = \min_{k \in [\![1, N_{f_K}]\!]} (\theta_{\Gamma_k}). \tag{2.51}$$

Pour éviter l'apparition d'overshoot dans la solution, un limiteur Minmod [82] a été utilisé pour calculer θ_{Γ_k} :

$$\theta_{\Gamma_k} = \max\left[0,\ \min\left(1,\ \phi_{\Gamma_k}\right)\right], \tag{2.52}$$

avec

$$\phi_{\Gamma_k} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{U}^{max} - \boldsymbol{U}_K}{2\delta_k}, & \text{if } \delta_k > 0, \\ \dfrac{\boldsymbol{U}^{min} - \boldsymbol{U}_K}{2\delta_k}, & \text{if } \delta_k < 0, \\ 1, & \text{if } \delta_k = 0, \end{cases} \tag{2.53}$$

où $\delta_k = \overrightarrow{C_K C_{\Gamma_k}} \cdot \boldsymbol{\nabla U}(C_K)$. De plus, les variables $\boldsymbol{U}^{max}$ et $\boldsymbol{U}^{min}$ correspondent respectivement aux valeurs maximales et minimales de $\boldsymbol{U}$ parmi la cellule Ω_K et ses cellules voisines, ayant une face en commun. Les gradients $\boldsymbol{\nabla U}(C_K)$ sont calculés aux centres des cellules en utilisant une méthode des moindres carrés [83], expliquée en Annexe A.

Notons que le limiteur Minmod se trouve à la limite basse de la stabilité TVD (Total Variation Diminishing) [84] et que l'utilisation d'autres limiteurs peut s'avérer moins dissipatif. Un schéma de discrétisation est dit TVD si

$$TV(\boldsymbol{U}^{n+1}) \leq TV(\boldsymbol{U}^n), \tag{2.54}$$

avec $TV(\boldsymbol{U}^n)$ la variation totale de la solution $\boldsymbol{U}$ calculée au temps t_n, définie de la manière suivante [85] :

$$TV(\boldsymbol{U}^n) = \sum_{i=1}^{N_C} |\Omega_i| \boldsymbol{\nabla U_i}^n. \tag{2.55}$$

Un schéma numérique TVD préserve la monotonie et empêche donc l'apparition au cours du temps d'oscillation dans la solution [86].

2.4.4. Intégration en temps et condition CFL

Le but de cette partie est de présenter la méthode d'intégration en temps, en partant de la formulation semi-discrète (2.26). En posant

$$\boldsymbol{\Psi}_i(\boldsymbol{U}_i) = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_{f_i}} |\Gamma_k| \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k(\boldsymbol{U}_i), \tag{2.56}$$

le schéma semi-discret peut être réécrit comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Psi}_i + \boldsymbol{S}_i. \tag{2.57}$$

Afin de calculer l'approximation $\boldsymbol{U}_i^{n+1}$ au temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, en fonction de l'approximation $\boldsymbol{U}_i^n$ au temps t_n, un schéma Runge Kutta d'ordre 2 (RK2) de Heun a été utilisé [87]. Le tableau de Butcher correspondant à ce schéma RK2 est représenté sur le Tableau 2.1.

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tableau 2.1. – Tableau de Butcher du schéma RK2 de Heun.

L'intégration en temps se fait alors en deux étapes :

$$\boldsymbol{U}_i^{(1)} = \boldsymbol{U}_i^n + \Delta t\ \boldsymbol{\Psi}_i\left(\boldsymbol{U}_i^n\right) + \Delta t\ \boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{U}_i^n\right), \tag{2.58a}$$

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{U}_i^n + \boldsymbol{U}_i^{(1)} + \Delta t\ \boldsymbol{\Psi}_i\left(\boldsymbol{U}_i^{(1)}\right) + \Delta t\ \boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{U}_i^{(1)}\right)\right]. \tag{2.58b}$$

Ce schéma est TVD sous la condition CFL (Courant–Friedrichs–Lewy [88])

$$\Delta t \leq \min_{i\in[\![1,N_C]\!]}\left(\frac{d_i}{||\boldsymbol{u}_i||^2 + c_i}\right), \tag{2.59}$$

où

$$d_i = \min_{k\in[\![1,N_{f_i}]\!]} ||\overrightarrow{C_i C_{\Gamma_k}}|| \tag{2.60}$$

est la distance la plus courte entre le centre de la cellule Ω_i et le centre de ses faces. Cette condition CFL assure que les ondes les plus rapides ne puissent pas se déplacer de plus d'une cellule au cours d'un pas de temps. Cette condition est assez restrictive, car dans le cas d'écoulements supersoniques, les ondes se déplacent à des vitesses très importantes et les pas de temps Δt doivent donc être très petits pour que la solution soit stable. En pratique, afin que la condition CFL soit respectée, la valeur pas de temps est calculée ainsi :

$$\Delta t = CFL \min_{i\in[\![1,N_C]\!]}\left(\frac{d_i}{||\boldsymbol{u}_i||^2 + c_i}\right), \tag{2.61}$$

avec $0 < CFL \leq 1$.

2.4.5. Algorithme du solveur et outil développé

Les différentes méthodes numériques venant d'être présentées permettent finalement de résoudre les équations d'Euler (2.4-2.5), en suivant la démarche décrite dans l'Algorithme 1. Dans le cadre de notre étude, cet algorithme a été implémenté en développant un nouveau solveur dans le code OpenFOAM [89]. OpenFOAM (OF dans la suite) est un code de mécanique des fluides numérique open source, programmé en langage C++. Ce code étant orienté objet, le développement de nouveaux solveurs est facilité grâce aux nombreuses classes préexistantes dans le framework.

Algorithme 1 Résolution des équations d'Euler (2.4-2.5)

initialisation :
- Calculer les grandeurs géométriques (volumes des cellules, barycentres, normales)
- Calculer la donnée initiale $\boldsymbol{U}^0$

tant que $t < t_f$ **:**
- Calculer le pas de temps Δt (2.61)

pour toutes les faces **:**
- Reconstruire les variables de part et d'autre de la face à partir de $\boldsymbol{U}^n$ (2.50)
- Calculer les flux HLLC $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\left(\boldsymbol{U}^n\right)$ au travers de la face (2.46)

fin pour

pour toutes les cellules **:**
- Sommer les flux sur les faces de la cellule (2.56)
- Calculer $\boldsymbol{U}_i^{(1)}$ (2.58a)

fin pour

pour toutes les faces **:**
- Reconstruire les variables de part et d'autre de la face à partir de $\boldsymbol{U}^{(1)}$ (2.50)
- Calculer les flux HLLC $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\left(\boldsymbol{U}^{(1)}\right)$ au travers de la face (2.46)

fin pour

pour toutes les cellules **:**
- Sommer les flux sur les faces de la cellule (2.56)
- Calculer $\boldsymbol{U}_i^{n+1}$ (2.58b)

fin pour
- $\boldsymbol{U}^n \leftarrow \boldsymbol{U}^{n+1}$
- $n \leftarrow n+1$
- $t \leftarrow t+\Delta t$

fin tant que

2.5. Validation de la méthode numérique

Afin de valider les schémas numériques venant d'être présentés et ayant été implémentés dans le solveur OpenFOAM développé, deux cas tests classiques ont été utilisés. Un tube à choc de Sod [90] a d'abord permis de valider la méthode en une dimension, puis un problème de Riemann 2D [91] est présenté pour la validation en deux dimensions. La dernière partie concerne la simulation de la torche à froid introduite en début de chapitre.

2.5.1. Cas tests pour la validation du schéma HLLC et de la reconstruction MUSCL

2.5.1.1. En une dimension : tube à choc

Le premier cas test utilisé pour la validation du solveur en une dimension est un tube à choc de Sod. Il s'agit d'un cas où un domaine est initialement divisé en deux compartiments contenant chacun un gaz à une pression différente de celle de l'autre compartiment. À l'instant $t = 0$ s, la cloison séparant les deux compartiments est enlevée et les gaz se mettent en mouvement en raison de la différence de pression de part et d'autre de la cloison. La Figure 2.10 permet de schématiser le principe de ce cas test. Le domaine de calcul utilisé pour la simulation de ce



(a) Temps initial $t = 0$ s

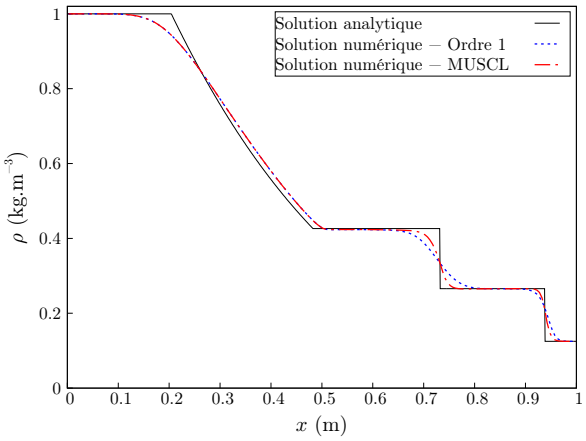
(b) Temps $t > 0$ s

Figure 2.10. – Représentation du tube à choc de Sod.

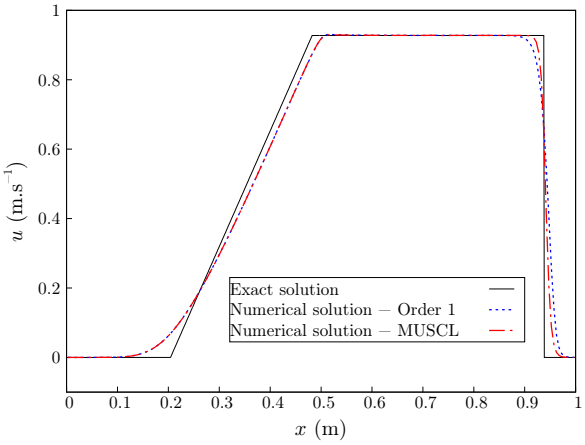
cas est $\Omega = [0, 1] \times [-0.005, 0.005] \times [-0.005, 0.005]$, discrétisé avec un maillage cartésien de dimensions $200 \times 1 \times 1$. Le gaz considéré est de l'air, supposé être un gaz parfait diatomique avec un coefficient adiabatique γ valant 1.4. L'état initial à $t = 0$ s est défini comme suit :

$$[\rho,\ u,\ v,\ w,\ p] = \begin{cases} [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1] & \text{si } \ 0 \leq x \leq 0.5, \\ [0.125,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.1] & \text{si } \ 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{2.62}$$

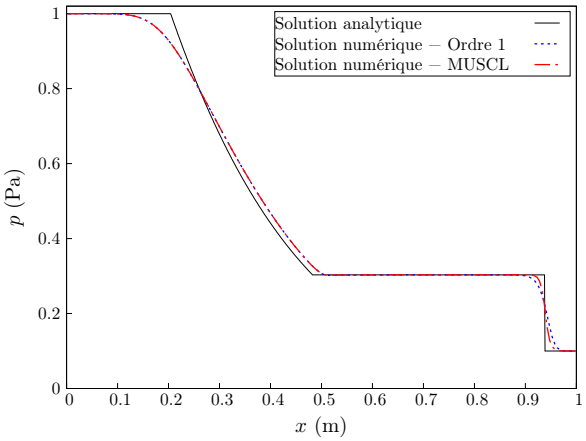
Les résultats déterminés au temps $t = 0.25$ s sont présentés sur la Figure 2.11. La solution numérique obtenue sans reconstruction MUSCL (ordre 1) et la solution avec la reconstruction MUSCL sont comparées à la solution analytique. Que ce soit avec ou sans reconstruction, les deux solveurs permettent de bien capturer les ondes successives : une onde de détente localisée entre $x = 0.2$ m et $x = 0.48$ m, une discontinuité de contact en $x \approx 0.72$ m et une onde de choc en $x \approx 0.93$ m. Le schéma d'ordre 2 permet d'obtenir une meilleure précision, notamment pour la capture de la discontinuité de contact.



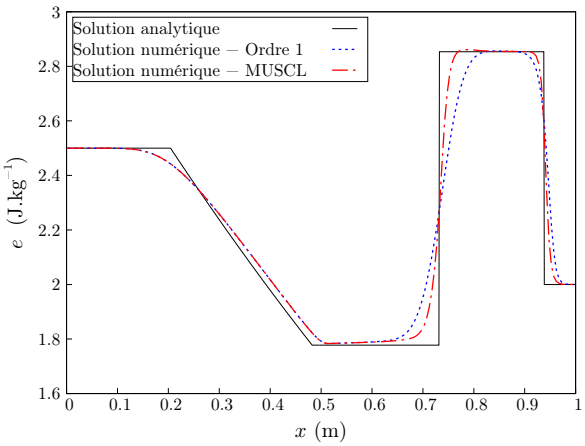
(a) Densité ρ



(b) Vitesse u



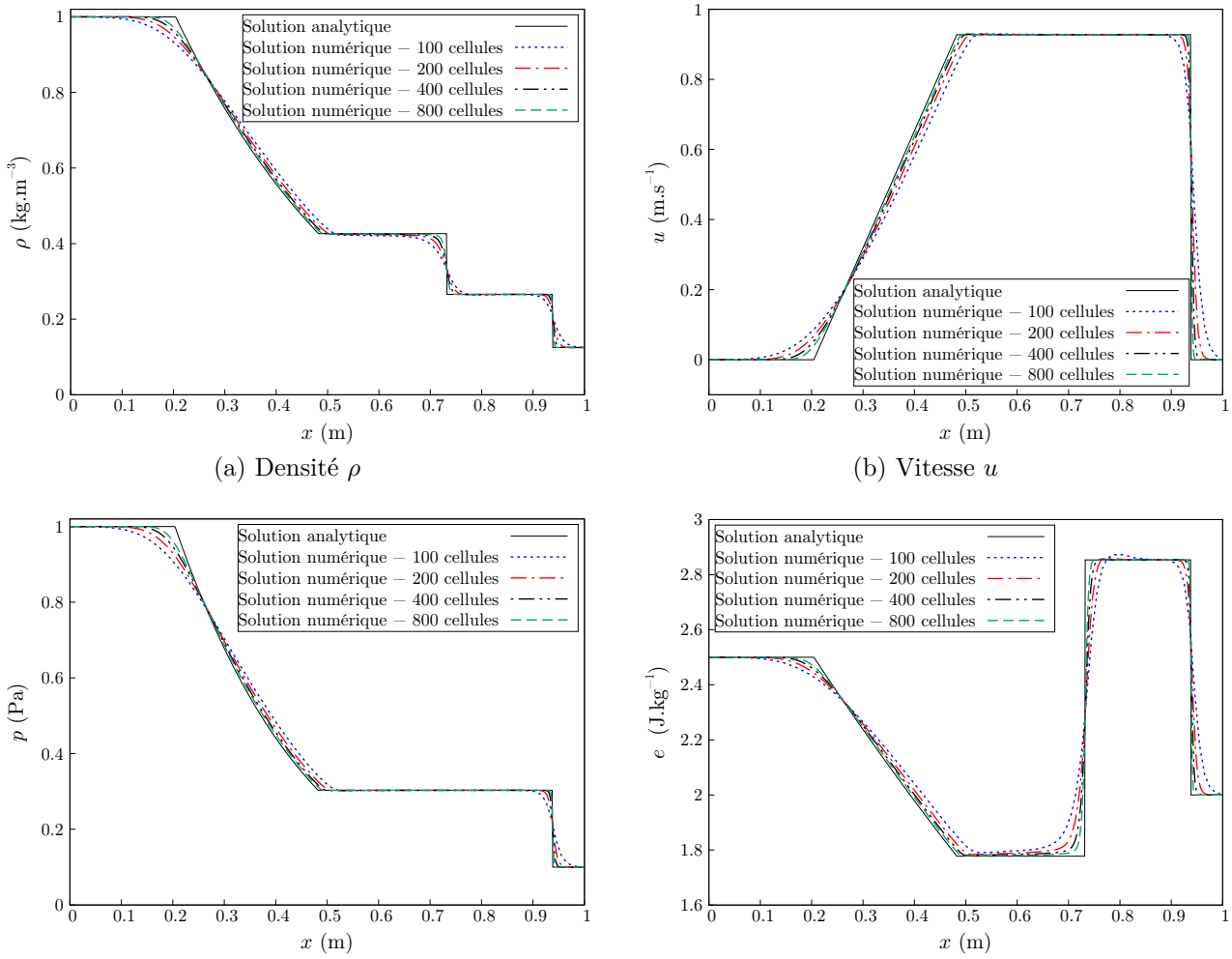
(c) Pression p



(d) Énergie interne e

Figure 2.11. – Profils obtenus à $t = 0.25$ s pour le cas test du tube à choc. Comparaison entre solution exacte et solutions numériques.

Pour vérifier la convergence en maillage du solveur, ce cas test a également été réalisé pour quatre niveaux de raffinements différents. Ainsi, la Figure 2.12 représente les résultats déterminés avec des maillages composés de 100, 200, 400 et 800 cellules. Les profils affichés pour les différentes variables montrent que les résultats numériques convergent bien vers la solution analytique lorsque le maillage est raffiné. Ce cas test permet finalement de valider la capacité du solveur implémenté à capturer les discontinuités dans le cas d'écoulements uni-directionnels.



(a) Densité ρ

(b) Vitesse u

(c) Pression p

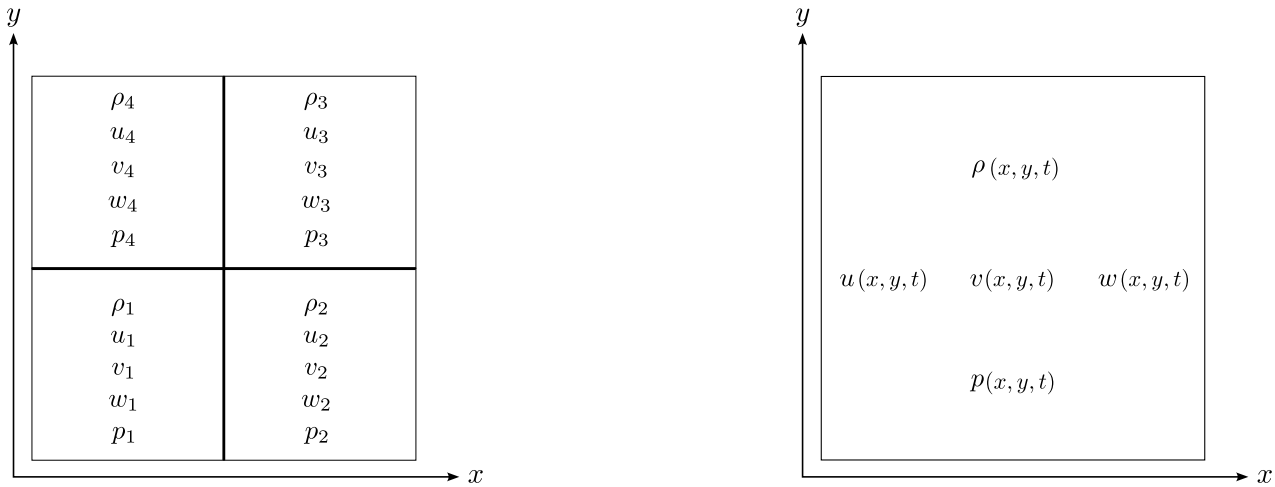
(d) Énergie interne e

Figure 2.12. – Profils calculés à $t = 0.25$ s pour le cas test du tube à choc. Comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques obtenues (ordre 2) pour différentes résolutions de maillage.

2.5.1.2. En deux dimensions : problème de Riemann 2D

Pour valider le solveur en deux dimensions, le cas test d'un problème de Riemann 2D est présenté dans cette partie. De manière similaire au cas 1D du tube à choc, un problème de Riemann 2D correspond à un domaine initialement divisé en quatre compartiments, contenant chacun un gaz dans un état distinct. À l'instant $t = 0$ s, les membranes séparant les compartiments sont supprimées et les quatre gaz commencent à interagir. Le principe de ce cas test est représenté sur la Figure 2.13. Suivant les états initiaux des différents gaz, plusieurs types d'ondes peuvent

se propager. Nous considérons ici l'état initial correspondant à la relation (2.63). Avec cette donnée initiale, seules des discontinuités de contact apparaissent dans le domaine.

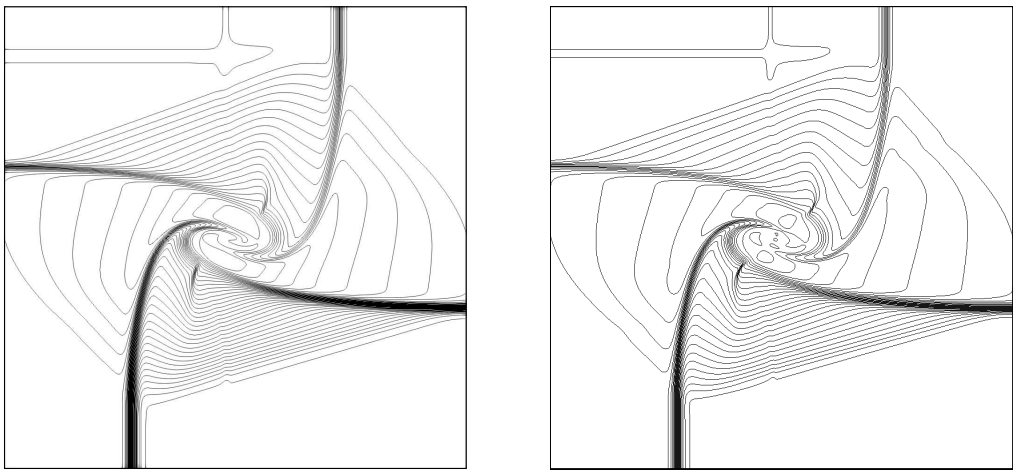


(a) Temps initial $t = 0$ s (b) Temps $t > 0$ s

Figure 2.13. – Représentation du problème de Riemann 2D.

$$[\rho,\ u,\ v,\ w,\ p] = \begin{cases} [1,\ -0.75,\ 0.5,\ 0,\ 1] & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5 \text{ et } 0 \leq y \leq 0.5, \\ [3,\ -0.75,\ -0.5,\ 0,\ 1] & \text{si } 0.5 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 0.5, \\ [2,\ 0.75,\ 0.5,\ 0,\ 1] & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5 \text{ et } 0.5 \leq y \leq 1, \\ [1,\ 0.75,\ -0.5,\ 0,\ 1] & \text{si } 0.5 \leq x \leq 1 \text{ et } 0.5 \leq y \leq 1. \end{cases} \tag{2.63}$$

Afin de déterminer la solution numérique de ce problème, un maillage de dimensions $400 \times 400 \times 1$ a été utilisé, avec un domaine de calcul $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0.01]$. La Figure 2.14a représente ainsi les lignes de niveaux de la densité calculées numériquement au temps $t = 0.3$ s. Aucune solution analytique n'existant pour ce cas, une comparaison est effectuée par rapport au résultat déterminé par Deng *et. al.* [92], représenté sur la Figure 2.14b.



(a) HLLC avec reconstruction MUSCL (b) Référence [92]

Figure 2.14. – Contours de la densité pour le problème de Riemann 2D à $t = 0.3$ s.

Le bon accord obtenu entre les deux figures montre que le solveur développé est efficace pour capturer les discontinuités de contact en deux dimensions. Bien qu'ils ne soient pas présentés dans ce manuscrit, d'autres problèmes de Riemann 2D ont été simulés avec notre solveur, pour des données initiales différentes. Ces dernières ont été choisies de manière à faire apparaître des ondes de détente et des chocs au sein du domaine et ont permis de montrer que le solveur est également en mesure de bien capturer ces autres types d'ondes en deux dimensions.

2.5.2. Comparaison à une méthode pressure-based : configuration de la torche à froid

Le solveur ayant été validé sur des cas tests de référence, cette partie s'intéresse à la simulation de la torche à froid, introduite en Section 2.2. Les calculs ont été effectués avec deux solveurs différents. Le premier solveur utilisé est celui venant d'être présenté et validé, tandis que le second est un solveur stationnaire pressure-based du logiciel Fluent, basé sur l'algorithme SIMPLE. Nous avons choisi de comparer les résultats obtenus à partir du nouveau solveur avec ceux déterminés par le solveur pressure-based, car un solveur de ce type a déjà été validé dans le cadre de différentes modélisations de torches plasmas [12, 46, 47]. Ce solveur pressure-based a également été utilisé comme moyen de comparaison et de validation lors de l'étude de la torche à plasma dans le chapitre suivant. Cette section présente d'abord les différents paramètres et conditions limites des simulations réalisées, et se focalise ensuite sur la comparaison et l'analyse des résultats obtenus avec les deux méthodes.

2.5.2.1. Paramètres des calculs et conditions limites

Les géométries utilisées pour les simulations de la torche à froid sont représentées sur la Figure 2.1. Afin de réduire la durée des calculs, ces derniers ont été effectués avec le nouveau solveur OpenFOAM dans une géométrie tri-dimensionnelle correspondant à un quart de la torche. Quant aux simulations avec le solveur pressure-based, celles-ci ont été réalisées pour une configuration 2D-axisymétrique. Le fluide injecté au niveau de l'inlet est de l'air, considéré comme un gaz parfait diatomique avec un coefficient adiabatique $\gamma = 1.4$. Les conditions limites imposées sur les différents bords du domaine sont précisées dans le Tableau 2.2.

Bords	Variables		
	p	T	$\boldsymbol{u}$
Inlet	$p = p_{in}$	300 K	–
Murs	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	Glissement
Top	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	300 K	Glissement
Outlet côté	1 bar	300 K	–
Outlet bas	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = 0$

Tableau 2.2. – Conditions limites pour la simulation de la torche à froid.

Les effets diffusifs étant négligés dans cette étude à froid, des conditions de vitesses glissantes sont imposées sur les murs de la torche. Quatre simulations différentes ont été effectuées avec

chaque solveur, pour des pressions d'entrée p_{in} allant de 4 à 7 bars, conduisant à des nombres de Mach de plus en plus élevés dans le jet. La température imposée sur l'inlet reste fixée à 300 K pour les quatre cas.

Concernant les critères de convergence des simulations, nous avons considéré que les calculs avec le solveur OpenFOAM étaient convergés lorsque les débits massiques calculés aux niveaux de l'inlet et du canal de tuyère étaient stabilisés et égaux. Un exemple de courbe de convergence des débits est donné sur la Figure 2.15, dans le cas du calcul avec $p_{in} = 6$ bars. Pour les calculs avec le solveur pressure-based de Fluent, ils ont été effectués jusqu'à convergence des résidus.

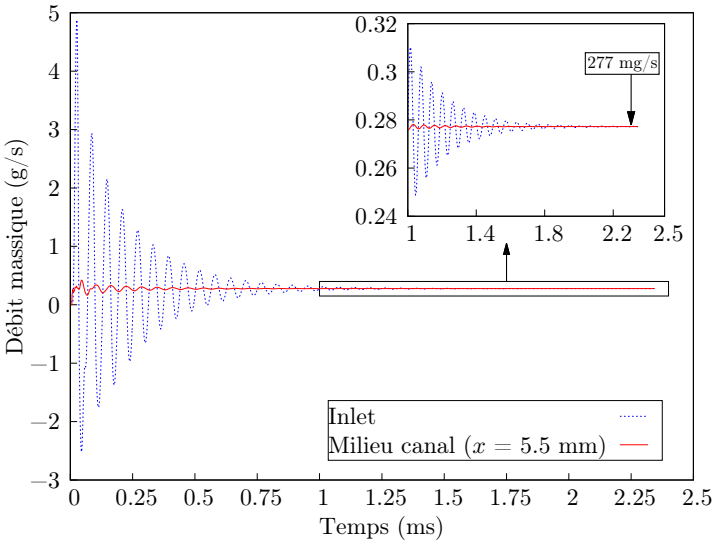


Figure 2.15. – Convergence des débits massiques à l'inlet et au milieu du canal de tuyère - $p_{in} = 6$ bars

Enfin, le maillage utilisé avec le solveur OpenFOAM et généré avec le logiciel Gmsh [93] est représenté sur la Figure 2.16. Celui-ci est composé de 150 000 cellules hexaédriques, avec une structure de type O-grid dans le canal du tuyère et dans les zones proches de l'axe. Pour le cas 2D-axisymétrique avec le solveur pressure-based de Fluent, le maillage est constitué de 18 000 cellules quadrilatérales.

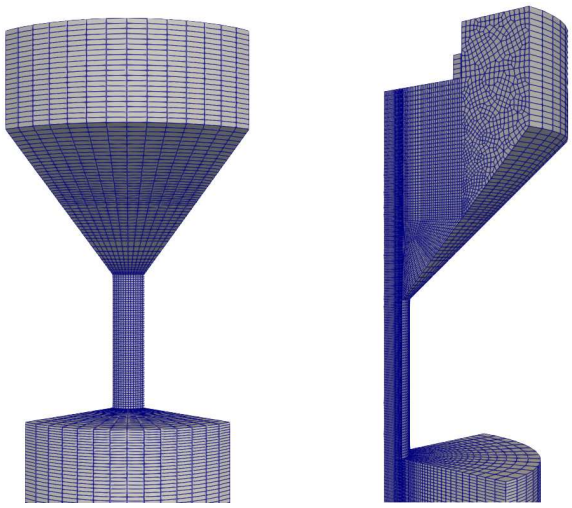


Figure 2.16. – Représentations du maillage utilisé pour la simulation de la torche avec OF.

2.5.2.2. Comparaison des résultats et discussions

a) Analyse des champs et description de l'écoulement

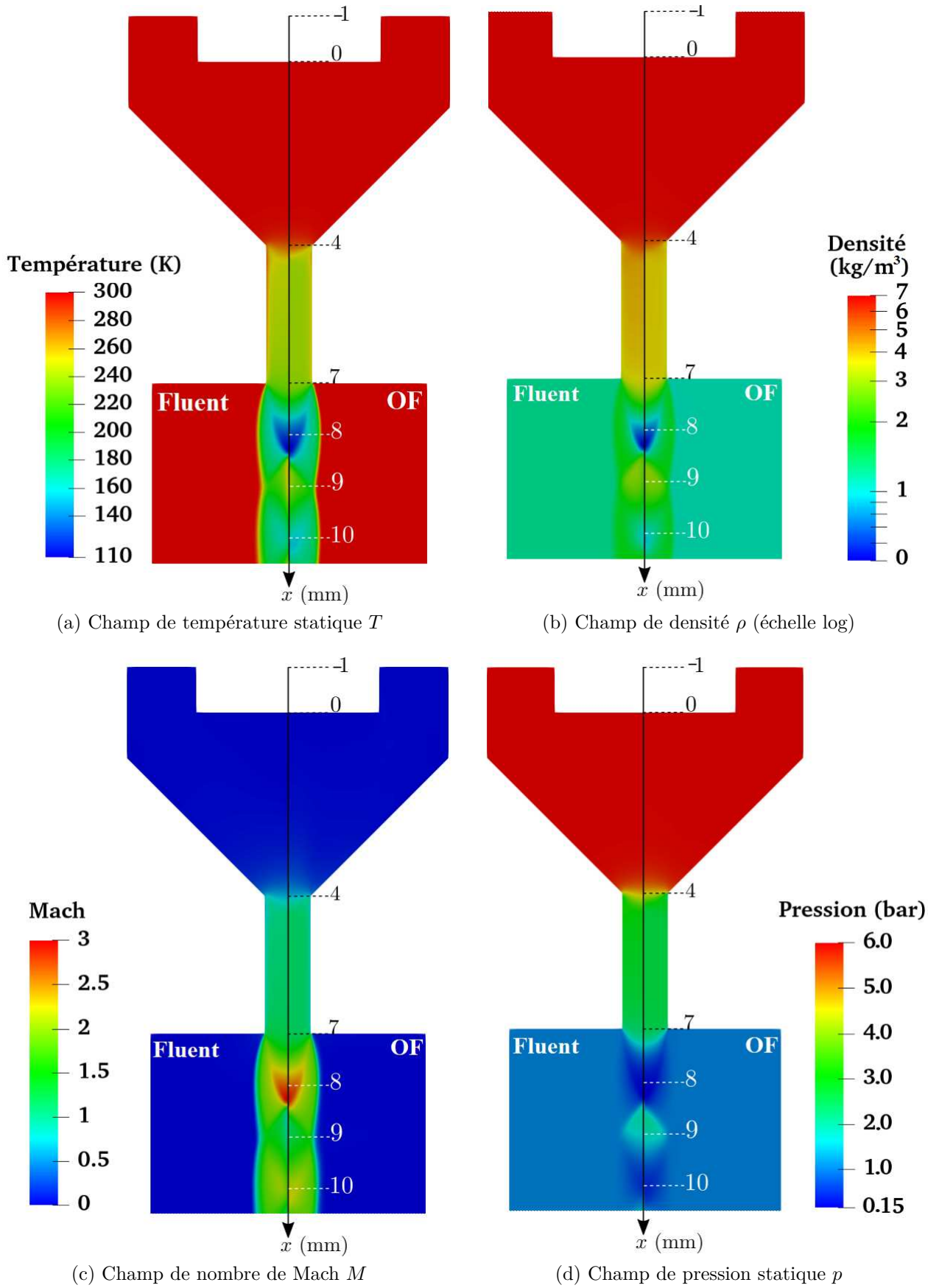
Différents champs calculés avec les deux solveurs pour une pression d'entrée $p_{in} = 6$ bars sont représentés sur la Figure 2.17. Les simulations OpenFOAM ayant été effectuées sur une configuration 3D, les champs représentés correspondent à des coupes dans le plan $z = 0$, au centre de la géométrie. L'homogénéité des résultats par rotation autour de l'axe x a cependant bien été vérifiée en affichant les variables calculées dans différents plans.

La structure de l'écoulement déterminée avec les deux solveurs est similaire. Le gaz est accéléré par la forme convergente de la tuyère jusqu'à atteindre une vitesse constante à l'intérieur du canal de tuyère de diamètre 1 mm, pour $4 < x < 7$ mm. L'accélération du gaz est accompagnée d'une diminution de sa pression, de sa température et de sa densité, qui se stabilisent également à des valeurs constantes dans le canal. En sortie de torche, pour $x > 7$ mm, le gaz est éjecté sous forme d'un jet supersonique sous-détendu, avec une succession d'ondes de détente et de chocs jusqu'à la stabilisation et l'adaptation du jet à la pression ambiante de 1 bar. Pour cette pression d'entrée de 6 bars, les deux solveurs permettent de déterminer un nombre de Mach maximal valant 3 au sein du jet, en $x \approx 8.5$ mm, juste en amont du premier choc. En analysant qualitativement les différents champs représentés, les deux méthodes semblent fournir des résultats très proches à l'intérieur de la torche, et également dans le jet supersonique. On remarque toutefois des valeurs de température légèrement supérieures calculées avec le solveur Fluent proche de l'axe, en aval du premier choc (autour de $x = 9$ mm). Afin de pouvoir étudier et comparer plus précisément le comportement des différentes variables obtenues avec les deux solveurs, une analyse des profils le long de l'axe est proposée dans le paragraphe suivant.

b) Étude des profils axiaux

Pour les quatre valeurs de pressions d'entrée p_{in} considérées, les profils de nombre de Mach M et de quantité de mouvement ρu déterminés le long de l'axe x sont comparés sur les Figures 2.18 et 2.19. Les résultats obtenus aux moyens de deux autres solveurs sont également représentés sur ces deux figures. On y trouve ainsi les profils calculés avec le schéma HLLC du code SU2 [94] et avec le solveur density-based de Fluent. SU2 est un code de mécanique des fluides numérique open source spécialisé pour l'aérodynamique externe et la simulation d'écoulements compressibles. Quant au solveur density-based de Fluent, il est basé sur un schéma numérique Roe [95], qui est un autre type de solveur de Riemann approché. L'analyse des différents profils axiaux est présentée ci-après.

- Pour une pression d'entrée p_{in} de 4 bars, un nombre de Mach maximal d'environ 2.0 est obtenu en amont du premier choc avec les différents solveurs. Le schéma numérique utilisé avec SU2 étant d'ordre 1, les amplitudes des oscillations calculées dans le jet ($x > 7$ mm) avec ce solveur sont moins grandes que celles déterminées avec les trois autres solveurs. Les quatre profils axiaux de nombre de Mach et de quantité de mouvement restent cependant assez proches. On remarque toutefois que dans le jet, la valeur moyenne des oscillations calculées avec le solveur pressure-based de Fluent est légèrement inférieure à celles déterminées avec les autres méthodes.



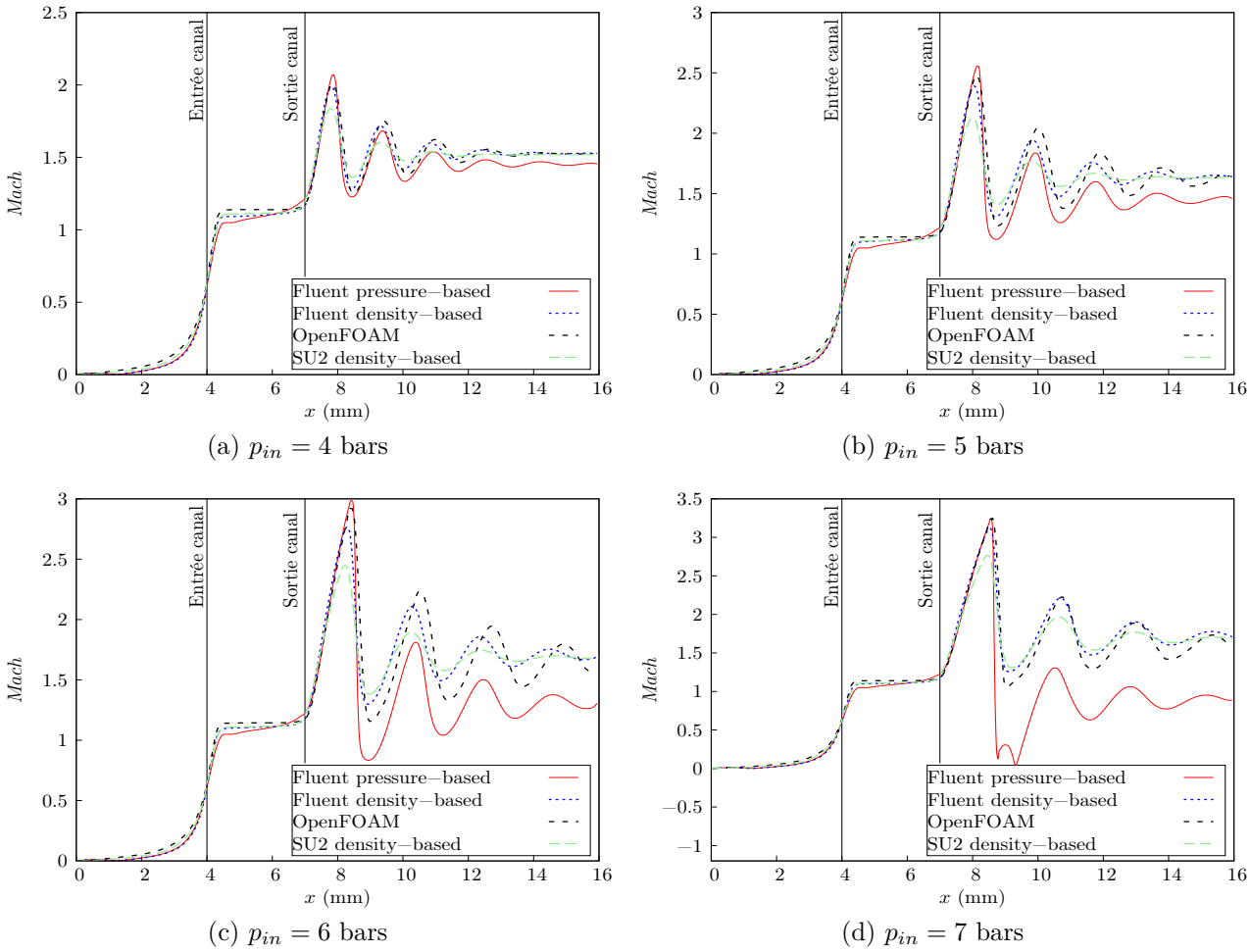
(a) Champ de température statique T

(b) Champ de densité ρ (échelle log)

(c) Champ de nombre de Mach M

(d) Champ de pression statique p

Figure 2.17. – Comparaison des champs calculés avec OF et Fluent - $p_{in} = 6$ bars.



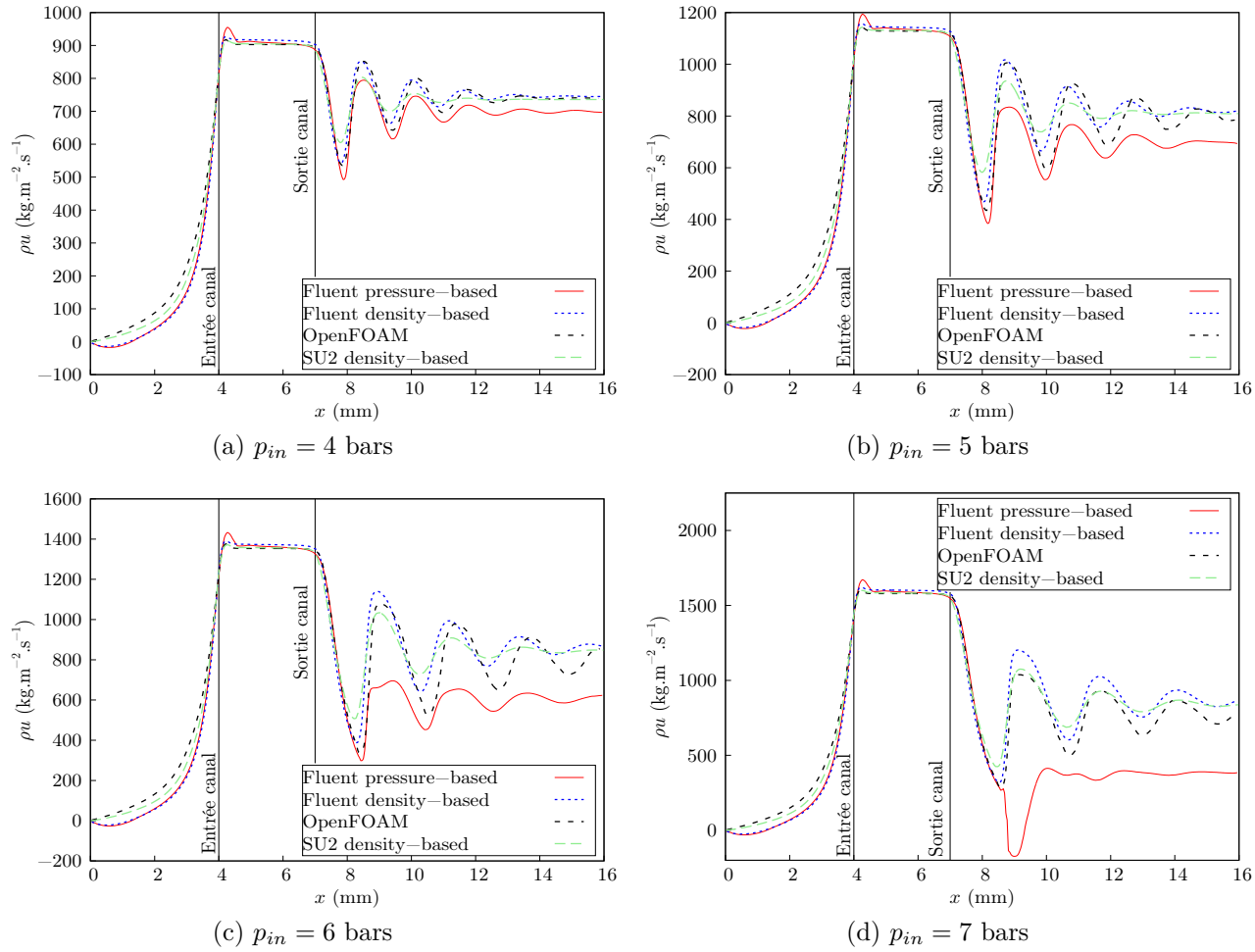
(a) $p_{in} = 4$ bars (b) $p_{in} = 5$ bars

(c) $p_{in} = 6$ bars (d) $p_{in} = 7$ bars

Figure 2.18. – Profils de nombre de Mach suivant l'axe x - Comparaison entre résultats OF, Fluent pressure-based, Fluent density-based et SU2 pour différentes pressions d'entrée p_{in}.

- Avec $p_{in} = 5$ bars, le nombre de Mach maximal obtenu avec les différents solveurs vaut environ 2.5. Dans le jet, de manière similaire au calcul à 4 bars, la valeur moyenne des oscillations calculées avec le solveur pressure-based est inférieure à celles des trois autres solveurs, avec une différence plus marquée.
- Dans le cas où $p_{in} = 6$ bars, un nombre de Mach maximal d'environ 3.0 est déterminé. L'écart dans le jet entre les valeurs obtenues avec le solveur pressure-based et les trois autres solveurs est important, avec une différence de près de 25 % sur la valeur moyenne du nombre de Mach. De plus, comme observé sur la Figure 2.19c, la quantité de mouvement présente un profil atypique dans la zone située juste en aval de la première onde de choc.
- Pour $p_{in} = 7$ bars et $\max(M) \approx 3.25$, les valeurs calculées en aval du premier choc avec le solveur pressure-based ne sont plus physiques. En effet, la composante axiale de la vitesse devient négative et une discontinuité apparaît sur le profil de quantité de mouvement.

Afin de conclure sur cette analyse, la méthode pressure-based ne semble pas adaptée pour la simulation de jets à froid dont la vitesse maximale dépasse Mach 2. Effectivement, bien que les valeurs des variables déterminées aux différentes pressions p_{in} coïncident en amont de la



(a) $p_{in} = 4$ bars

(b) $p_{in} = 5$ bars

(c) $p_{in} = 6$ bars

(d) $p_{in} = 7$ bars

Figure 2.19. – Profils de quantité de mouvement suivant l'axe x - Comparaison entre résultats OF, Fluent pressure-based, Fluent density-based et SU2 pour différentes pressions d'entrée p_{in}.

première onde de choc ($x < 8$ mm), les profils obtenus en aval avec le solveur pressure-based s'écartent progressivement de ceux calculés avec les trois autres solveurs, jusqu'à donner des résultats non-physiques pour une pression d'entrée de 7 bars.

2.6. Conclusion

Dans ce deuxième chapitre consacré à la simulation numérique de l'écoulement à froid dans une géométrie de torche plasma, la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations hydrodynamiques a d'abord été détaillée, puis elle a été validée sur des cas tests de référence. Le solveur numérique développé a alors été utilisé afin de simuler l'écoulement de gaz dans une torche ainsi que dans le jet supersonique présent en sortie dans l'atmosphère ambiante. Ce solveur s'est montré précis et robuste pour la capture des ondes de choc et de détente successives dans les jets supersoniques sous-détendus.

3. Modélisation d'une torche de découpe plasma

Sommaire

3.1. Introduction . . . 79
3.2. Présentation de la configuration étudiée . . . 80
3.3. Modèle mathématique . . . 81
3.3.1. Hypothèses . . . 81
3.3.2. Équations du modèle . . . 82
3.3.3. Modèle de fermeture - équations d'état . . . 84
3.3.3.1. Équations d'état . . . 84
3.3.3.2. Calcul de la vitesse du son . . . 87
3.3.3.3. Coefficients de transport . . . 88
3.4. Méthode de résolution . . . 89
3.4.1. Calcul du potentiel électrique et des termes sources . . . 89
3.4.1.1. Discrétisation de l'équation de Laplace . . . 89
3.4.1.2. Calcul des termes sources . . . 92
3.4.2. Intégration temporelle et algorithme du solveur . . . 92
3.5. Validation de la méthode numérique : simulation d'une torche de découpe plasma 93
3.5.1. Conditions limites . . . 94
3.5.2. Analyse de convergence en maillage . . . 95
3.5.2.1. Direction axiale . . . 95
3.5.2.2. Direction radiale . . . 96
3.5.3. Comparaison des résultats . . . 97
3.5.3.1. Description de l'écoulement et comparaison des champs . . . 98
3.5.3.2. Comparaison des profils axiaux . . . 100
3.5.3.3. Comparaison des profils radiaux autour de l'onde de choc . . . 101
3.5.3.4. Comparaison des profils radiaux dans le canal de tuyère . . . 102
3.6. Conclusion . . . 102

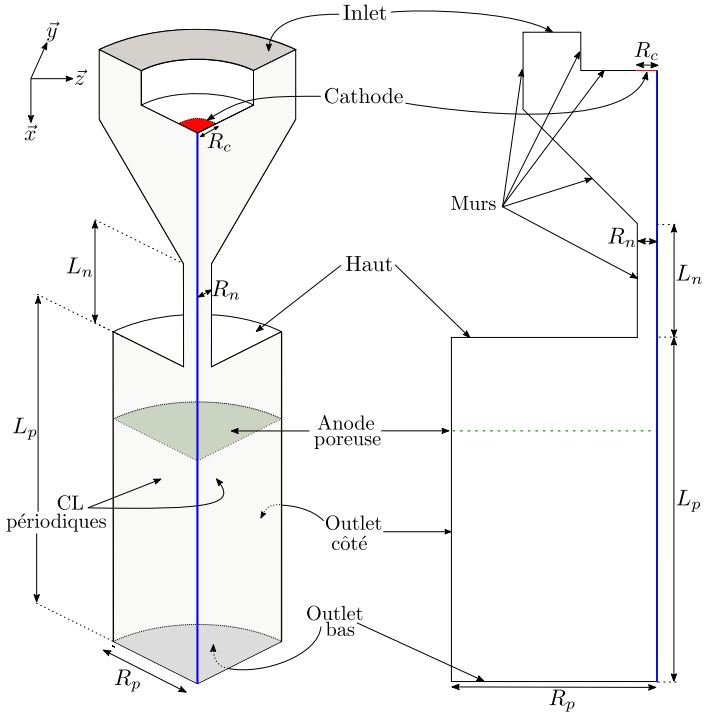
3.1. Introduction

Après avoir présenté dans le chapitre précédent la modélisation à froid d'une torche, ce troisième chapitre porte sur l'étude d'une torche à plasma « à chaud », en présence de l'arc. Cela signifie que les modélisations effectuées prennent en compte le couplage entre les aspects électriques du plasma et hydrodynamiques du gaz. La configuration considérée et le modèle mathématique utilisé sont d'abord introduits, ainsi que la fermeture thermodynamique adaptée

à la physique des plasmas de découpe. La méthode numérique et le solveur employés pour la résolution des équations sont ensuite présentés, suivis de leur validation sur la simulation de la torche de découpe.

3.2. Présentation de la configuration étudiée

La géométrie correspondant à la configuration étudiée dans ce chapitre est présentée sur la Figure 3.1. Celle-ci est similaire à la géométrie de la torche « à froid » présentée dans le chapitre précédent. Cependant, deux éléments associés à la présence de plasma sont ajoutés : une cathode de rayon R_c représentée en rouge, ainsi qu'une anode poreuse représentée en vert.



Symbole	Longueur (mm)
L_n	3.00
R_n	0.50
L_p	20.0
R_p	8.00
R_c	0.44 (voir Section 3.5.1)

Figure 3.1. – Détails de la géométrie considérée pour l'étude de la torche de découpe.

Le fluide entre dans la torche à plasma par le haut (inlet) avec une pression de plusieurs atmosphères. En raison de la densité de courant imposée sur la cathode, le gaz est ionisé et devient un plasma, conduisant le courant au travers d'un arc électrique établi entre la cathode et l'anode. L'effet joule et la constriction du plasma dans la tuyère convergente induisent une augmentation de la température du gaz jusqu'à des valeurs pouvant dépasser les 20000 K proche de l'axe de la torche. Après avoir traversé le canal de tuyère de rayon R_n et de longueur L_n, dont les dimensions sont précisées sur la Figure 3.1, le plasma est éjecté de la torche vers l'air ambiant, formant un jet supersonique sous-détendu de température très élevée. Dans une configuration de découpe réaliste, la pièce de métal à couper sert également d'anode, localisée quelques millimètres en aval de la sortie de torche. Dans le cadre de cette étude, l'interaction entre le jet de plasma et la plaque de métal n'est pas prise en compte. La pièce à couper est alors modélisée par une anode poreuse [12], localisée 5 mm en-dessous de la sortie de torche. Cette anode poreuse n'a pas d'impact sur l'écoulement, le jet passe au travers sans être dévié,

mais le potentiel électrique est fixé à 0 V en aval de celle-ci. Cela permet donc de donner une valeur de référence du potentiel électrique afin de représenter une position d'attache moyenne de l'arc.

3.3. Modèle mathématique

Dans cette section, les hypothèses et le modèle mathématique utilisés pour la simulation d'une torche de découpe plasma sont présentés, ainsi que le modèle de fermeture thermodynamique associé.

3.3.1. Hypothèses

Les différentes hypothèses utilisées afin de modéliser l'écoulement de plasma sont discutées ci-dessous.

- Le plasma est considéré comme un gaz visqueux, newtonien et compressible, supposé être à l'équilibre thermodynamique local (ETL). Cette hypothèse permet de bien modéliser les zones chaudes du plasma où les températures des électrons et des particules lourdes sont égales. Dans les zones plus éloignées du cœur du plasma, l'utilisation d'un modèle à deux températures pourrait permettre de mieux prendre en compte les effets du plasma hors-équilibre [48], mais reste complexe à mettre en œuvre.
- En raison des forces de pression dominantes, les effets liés à la gravité sont négligés.
- L'écoulement est supposé laminaire. Comme montré par exemple dans le travail de thèse de Freton [11], la turbulence a principalement un effet sur la quantité d'air ambiant pompée par le plasma dans le jet supersonique. Le fait de considérer un écoulement laminaire induit alors une sous-estimation de la quantité d'air pompée et conduit également à des vitesses plus importantes au sein du jet plasma. L'hypothèse d'un écoulement laminaire a cependant été conservée, car le sujet principal de cette étude n'est pas le pompage d'air par le plasma, mais plutôt la bonne capture des ondes de choc dans le jet chaud. Concernant la torche, peu de données visant à caractériser les effets turbulents du fluide à l'intérieur de celle-ci sont disponibles dans la littérature.
- Les propriétés électriques du plasma sont prises en compte par le calcul du potentiel électrique et de l'effet joule, dû au passage du courant électrique dans la plasma.
- Le champ magnétique auto-induit par le plasma est négligé. Cette dernière limitation peut engendrer une sous-estimation de la constriction du plasma dans la chambre d'arc, qui correspond à la zone en amont du canal de tuyère. Dans la configuration étudiée, des calculs réalisés avec et sans champ magnétique ont montré que l'influence du champ magnétique n'était pas du premier ordre en comparaison de l'effet joule et des pertes radiatives. Cela a motivé notre choix de se focaliser sur le calcul du potentiel électrique.
- Le terme de rayonnement du plasma dans l'équation de conservation de l'énergie, correspondant à la divergence du flux radiatif, est modélisé avec la méthode du coefficient d'émission nette. La valeur de ce dernier dépend localement de la température et de la pression. Il correspond à l'émission radiative d'une sphère de plasma d'un certain rayon r et de température uniforme. Cette méthode, très souvent utilisée pour la modélisation

des plasmas thermiques, permet d'estimer les pertes par rayonnement au niveau des zones chaudes de l'écoulement de manière simple et relativement précise. Elle est donc suffisante pour décrire les parties chaudes du plasma, mais elle ne permet pas de prendre en compte les phénomènes de réabsorption du rayonnement sur les parois, ni d'estimer les flux radiatifs du plasma. L'étude de la réabsorption du rayonnement nécessiterait l'utilisation d'un modèle de rayonnement complexe afin de résoudre l'équation du transfert radiatif, tel qu'un modèle P1 [96] ou DOM (Méthode des Ordonnées Discrètes) [97]. Dans notre étude, les coefficients d'émission nette fournis ont été calculés en considérant un rayon de plasma de 5 mm. Il faut souligner que cette valeur est largement supérieure au rayon de tuyère, conduisant à une sous-estimation des pertes radiatives. Ce choix a été fait car il s'agissait de données disponibles en début de thèse. Quoiqu'il en soit, cela n'impacte par les conclusions de notre étude, car il s'agit de démontrer la capacité du solveur à capturer les ondes de choc pour des nombres de Mach élevés. Pour l'étude sur la géométrie industrielle dans le chapitre suivant, un choix plus adéquat du rayon a été effectué.

- Au cours de l'utilisation de la torche plasma, des vapeurs métalliques se forment en raison de l'érosion de la cathode. Celles-ci influent sur les propriétés du plasma, en augmentant les conductivités électriques et thermiques, ainsi que les pertes radiatives. Afin de modéliser ces vapeurs, il serait nécessaire de résoudre une équation de conservation supplémentaire par gaz considéré (on ne considère ici que de l'air). Il faudrait également mettre en place un modèle d'interaction qui donnerait le taux d'ablation, dont une composante est celle radiative. Cela nécessiterait d'utiliser un modèle susceptible de calculer le flux et la divergence du flux radiatif, ce qui ne peut pas être fait avec la méthode du coefficient d'émission nette. Nous avons donc choisi de ne pas prendre en compte ces vapeurs métalliques.
- Les zones d'accrochage de l'arc sur les électrodes sont complexes à modéliser. La mise en place d'un modèle hors équilibre prenant en compte les flux des particules est alors nécessaire [98, 99]. Dans le cas des torches à cathode plate avec insert en hafnium, la zone d'accrochage est localisée et maintenue vers le centre de l'électrode par l'injection du gaz en vortex. Ainsi, une méthode usuelle permettant de représenter l'accrochage de l'arc consiste à imposer sur la location de l'insert en hafnium un profil ou une valeur constante de densité de courant (voir Section 3.5.1), sans prendre en compte la physique au niveau des gaines.

3.3.2. Équations du modèle

Cette partie détaille les différentes équations utilisées afin de modéliser le plasma de découpe. L'aspect électrique du plasma est pris en compte par le calcul du potentiel électrique V, déterminé en résolvant l'équation de Laplace suivante :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\sigma \boldsymbol{\nabla} V) = 0, \tag{3.1}$$

où σ est la conductivité électrique, dépendant de la température et de la pression locales. Cette équation de Laplace est dérivée de l'équation de Maxwell-Gauss et permet de modéliser la conservation du courant électrique.

L'écoulement de plasma est modélisé par les équations de Navier-Stokes, couplées au potentiel électrique par des termes sources permettant de prendre en compte l'effet Joule et le rayonnement

du plasma. Si le champ magnétique n'était pas négligé, un terme source correspondant aux forces de Lorentz serait également ajouté à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Sous leur formulation compressible, les équations de conservation prennent la même forme que les équations d'Euler (2.4), mais le vecteur des termes sources $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$ contient différents termes afin de modéliser les effets diffusifs et le couplage avec le champ électrique. L'ensemble des équations de conservation peut ainsi s'écrire sous la forme d'un système conservatif :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})}{\partial z} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}), \tag{3.2}$$

où les trois vecteurs flux $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$ sont identiques à ceux des équations d'Euler (2.5). Concernant le vecteur des termes sources, celui-ci peut s'exprimer comme

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}) \cdot \boldsymbol{e}_x \\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}) \cdot \boldsymbol{e}_y \\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}) \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{u}) + \underbrace{\frac{||\boldsymbol{j}||^2}{\sigma}}_{\text{effet joule}} - \underbrace{4\pi\varepsilon_N}_{\text{pertes radiatives}} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

La première composante dont le terme source est nul correspond à la conservation de la masse. Les trois composantes suivantes sont les termes sources visqueux des équations de conservation de la quantité de mouvement. La dernière composante contient les termes sources de l'équation de conservation de l'énergie, avec la prise en compte de la diffusion thermique, des échauffements visqueux, de l'effet joule et des pertes radiatives. Dans l'expression précédente de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$, $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ correspond au tenseur des contraintes visqueuses, κ est la conductivité thermique du fluide, $\boldsymbol{j}$ est le vecteur densité de courant, et ε_N est le coefficient d'émission nette. Sous l'hypothèse de Stokes, le tenseur des contraintes visqueuses peut être calculé à partir de l'expression suivante :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \mu \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u})^\top \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \right) \overline{\overline{\boldsymbol{I}}}, \tag{3.4}$$

où μ est le viscosité dynamique du fluide et $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ est le tenseur identité. La conductivité thermique κ, la viscosité μ et le coefficient d'émission nette ε_N sont tous trois dépendants de la pression et de la température locales du fluide. Enfin, la densité de courant est déterminée à partir de la conductivité électrique, également dépendante de p et T, et du gradient de potentiel électrique :

$$\boldsymbol{j} = -\sigma \boldsymbol{\nabla} V. \tag{3.5}$$

En raison des grandes plages de températures présentes dans un écoulement de plasma de découpe, une équation d'état de gaz parfait n'est pas adaptée pour prendre en compte les différents processus de dissociations et d'ionisations ayant lieu au sein du plasma. La méthode mise au point afin de faire le lien entre la densité ρ, l'énergie interne e, la pression p et la température T est alors présentée dans la section suivante.

3.3.3. Modèle de fermeture - équations d'état

Afin que l'ensemble du modèle soit bien défini, il est nécessaire de donner la formulation des équations d'état, qui permet de faire le lien entre l'énergie, la densité, la température et la pression. Dans cette section les méthodes de calcul de la vitesse du son c et des différents coefficients de transport sont également présentées.

3.3.3.1. Équations d'état

Durant la découpe au plasma, la température du milieu pouvant dépasser 30000 K, différents types de réactions ont lieu, telles que des dissociations et des ionisations. Ainsi, les propriétés thermodynamiques des plasmas thermiques, comme la densité et l'énergie interne, ne peuvent pas être déterminées à partir d'une équation d'état simple telle que la loi des gaz parfaits . De plus, le calcul direct de ces propriétés pour chaque valeur de pression et de température est trop coûteux en temps de calcul. Des tables thermodynamiques calculées au laboratoire Laplace ont alors été fournies, contenant des valeurs d'énergie interne et de densité, calculées pour différentes pressions et températures. Nous disposions ainsi de valeurs de l'énergie et de la densité calculées à une pression $p_1 = 1$ bar, pour des températures allant de 300 à 30000 K, et également de tables à $p_2 = 8$ bars pour la même plage de température. Les valeurs fournies dans ces quatre tables ont été calculées au moyen d'un logiciel dédié au calcul des compositions et des propriétés thermodynamique des plasmas [100], utilisant les différentes lois de l'ETL énoncées en Section 1.2.1. Pour déterminer les propriétés à des valeurs de pression différentes de p_1 et p_2, des méthodes d'interpolations doivent alors être utilisées.

Une particularité de la méthode numérique employée pour la résolution des équations vient du fait que la densité et l'énergie interne sont des variables directement déterminées par le solveur, alors que la pression et la température sont déduites à partir des valeurs d'énergie et de densité. Sachant que les tables thermodynamiques fournies contiennent des valeurs de la densité et de l'énergie en fonction de la pression et de la température, deux méthodes d'interpolations ont été utilisées afin de calculer les différentes propriétés. La première méthode d'interpolation, appelée interpolation directe, permet de déterminer les valeurs de la densité et de l'énergie interne en fonction de la température et de la pression. Cette interpolation est utilisée lors de l'initialisation, au cours de laquelle la température et la pression sont imposées dans le domaine de calcul. Celle-ci est également employée pour calculer la densité et l'énergie interne au niveau des bords où la température et la pression sont imposées, comme par exemple sur l'inlet. La seconde méthode d'interpolation, appelée interpolation inverse, permet de calculer les valeurs de la température et de la pression en fonction de l'énergie interne et de la densité. Cette interpolation est utilisée à chaque pas de temps dans toutes les cellules du maillages pour déterminer les champs de pression et de température. Ces deux types d'interpolations sont détaillées dans les paragraphes suivants.

a) Interpolations directes : calcul de ρ et e en fonction de T et p

Dans la suite, les notations suivantes sont utilisées : $\rho_1(T) = \rho_1(p = 1 \text{ bar}, T)$ et $e_1(T) = e_1(p = 1 \text{ bar}, T)$ désignent les tables de densité et d'énergie interne fournies pour une pression de 1 bar et des températures allant de 300 à 30000 K, et $\rho_2(T) = \rho_2(p = 8 \text{ bars}, T)$ et

$e_2(T) = e_2(p = 8 \text{ bars}, T)$ désignent les tables de densité et d'énergie interne calculées à une pression de 8 bars pour la même plage de température.

Pour calculer la densité à des pressions comprises entre p_1 et p_2, une interpolation linéaire en pression est suffisante :

$$\rho(p,T) = \left(1 - \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right) \rho_1(T) + \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p_1}\right) \rho_2(T). \tag{3.6}$$

Concernant l'énergie interne, une interpolation quadratique est utilisée :

$$e(p,T) = [1 - \xi(p)]\ e_1(T) + \xi(p)\ e_2(T), \tag{3.7}$$

avec
$$\xi(p) = \begin{cases} \dfrac{|p - p_1|}{p - p_1} \sqrt{\dfrac{|p - p_1|}{p_2 - p_1}} & \text{si } p \neq p_1, \\ 0 & \text{si } p = p_1. \end{cases}$$

L'utilisation d'une interpolation quadratique n'est pas aléatoire. En effet, ce choix vient du fait que les réactions de dissociations (par exemple $O_2 + M \longrightarrow 2\,O + M$) ayant lieu dans le plasma varient plutôt comme le carré de la pression. Ces réactions correspondent alors aux différents points d'inflexion observés sur les courbes de densité et d'énergie interne représentées sur la Figure 3.2. Cette figure présente les valeurs de e et ρ interpolées en considérant de l'air à une pression de 5 bars, pour des températures comprises entre 300 et 30000 K. Sur ces deux figures, les valeurs des tables calculées à 1 et 8 bars sont aussi représentées. Afin de valider les interpolations utilisées, une troisième table de référence à été fournie, avec les valeurs calculées à une pression de 5 bars. Les erreurs relatives entre les valeurs interpolées et les valeurs de référence calculées à 5 bars sont également représentées sur les graphes, montrant que pour e et ρ, la précision des interpolations est très bonne. En effet, les erreurs relatives IE entre les valeurs interpolées et les valeurs calculées atteignent un maximum de 0.03 pour la densité, et un maximum de 0.02 pour l'énergie interne.

b) Interpolations inverses : calcul de p et T en fonction de ρ et e

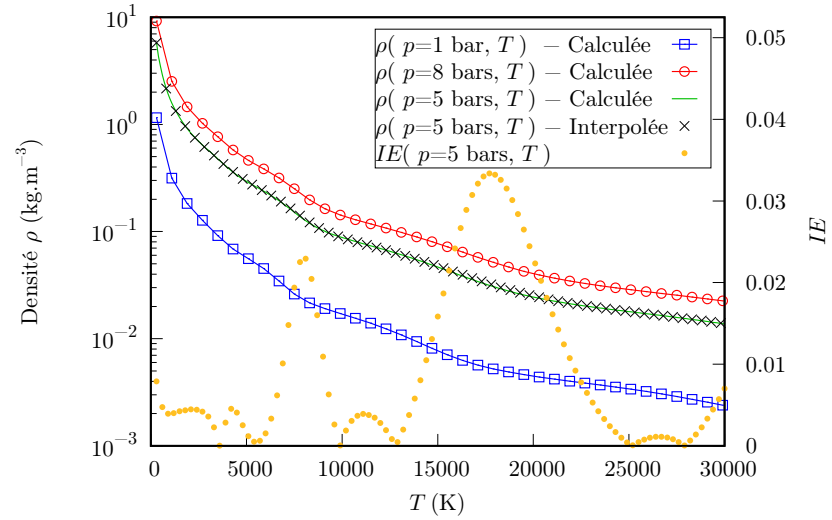
Ces interpolations sont les plus importantes, car elles sont effectuées pour chaque cellule, à chaque pas de temps. La manière la plus simple et la plus efficace qui a été trouvée pour déterminer les valeurs de p et T en fonction de ρ et e a été d'utiliser l'interpolation linéaire sur la densité (3.6) afin d'exprimer la pression de la manière suivante :

$$p(\rho,e) = \left(1 - \frac{\rho - \rho_1(T_1(e))}{\rho_2(T_2(e)) - \rho_1(T_1(e))}\right) p_1 + \left(\frac{\rho - \rho_1(T_1(e))}{\rho_2(T_2(e)) - \rho_1(T_1(e))}\right) p_2, \tag{3.8}$$

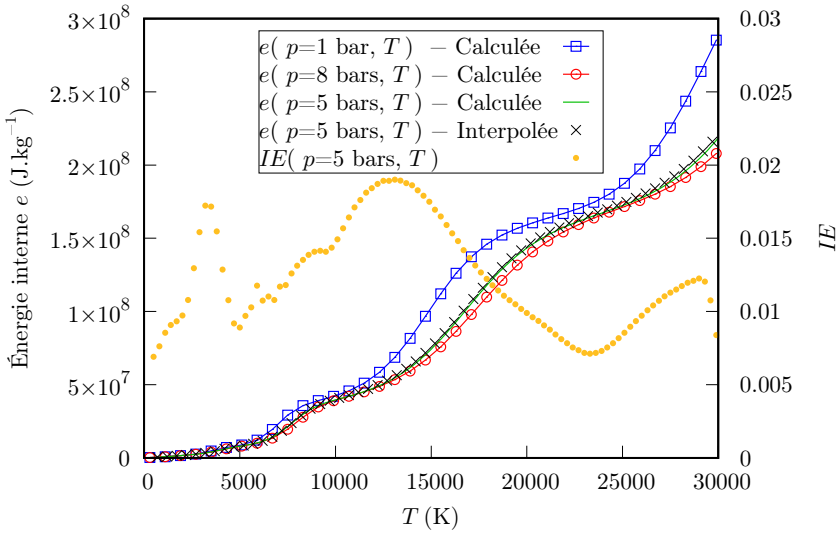
où T_1 et T_2 sont les tables d'énergie interne inverses : $T_1(e) = e_1^{-1}(T)$ et $T_2(e) = e_2^{-1}(T)$. Une fois la pression déterminée en fonction de e et ρ, la valeur de la température correspondante peut facilement être calculée à partir de la relation

$$T(p,e) = [1 - \xi(p)]\ T_1(e) + \xi(p)\ T_2(e). \tag{3.9}$$

Afin d'évaluer l'efficacité de ces interpolations inverses, un test simple a été effectué, en considérant plusieurs valeurs initiales d'un couple pression-température (p,T). Pour chaque valeur du couple (p,T), les interpolations directes (3.6)-(3.7) ont été effectuées, donnant un couple



(a) Densité de masse



(b) Énergie interne

Figure 3.2. – Interpolations de l'énergie interne e et de la densité ρ pour de l'air à $p = 5$ bars - Erreur IE entre les valeurs interpolées et les valeurs calculées.

correspondant (ρ, e). À partir de ce couple (ρ, e) interpolé, les méthodes d'interpolation inverses (3.8)-(3.9) ont été utilisées afin de calculer un couple final pression-température (p_f, T_f). En comparant les couples finaux (p_f, T_f) aux couples initiaux (p, T), les erreurs suivantes peuvent être définies :

$$E_p(p,T) = \frac{|p_f - p|}{p} \quad \text{and} \quad E_T(p,T) = \frac{|T_f - T|}{T}. \tag{3.10}$$

Les lignes de niveaux de l'erreur en pression $E_p(p,T)$ obtenues après application des interpolations directes puis des interpolations inverses sont représentées sur la Figure 3.3. Une erreur maximale de 0.026 est atteinte pour une pression de 3 bars et une température de 18000 K. La même tendance a été obtenue sur les erreurs en température, avec une valeur maximale de 0.016. L'interpolation inverse proposée est donc une méthode précise permettant un calcul rapide de la pression et de la température en fonction de la densité et de l'énergie interne. Notons que, de

part la structure du schéma de type Godunov utilisé, l'évaluation de la pression n'intervient que dans le calcul des flux numériques. Il n'y a donc pas de risque « d'accumulation » d'erreur via la boucle modélisée sur la Figure 3.3.

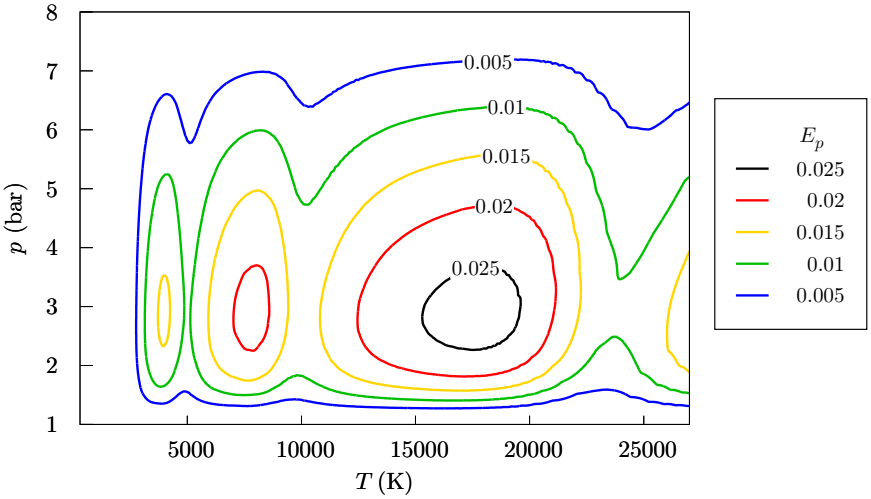


Figure 3.3. – Contours de l'erreur en pression $E_p(T, p)$.

3.3.3.2. Calcul de la vitesse du son

La valeur de la vitesse du son étant requise lors de l'évaluation des flux numériques, celle-ci a été déterminée comme suit :

$$c(p,T) = \sqrt{\frac{\gamma(p,T)\ p}{\rho}}, \tag{3.11}$$

où γ correspond au coefficient adiabatique, dépendant de la pression et de la température, défini par

$$\gamma(p,T) = \frac{c_p(p,T)}{c_v(p,T)}, \tag{3.12}$$

où c_p et c_v sont respectivement la capacité thermique à pression constante et à volume constant. Concernant c_p, ses valeurs ont été obtenues à partir des tables d'enthalpies $h_1(T)$ et $h_2(T)$ calculées à 1 et 8 bars :

$$\begin{cases} c_p(p=p_1,T) = c_{p,1}(T) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_{p=p_1} = \dfrac{\mathrm{d}h_1(T)}{\mathrm{d}T}, \\ c_p(p=p_2,T) = c_{p,2}(T) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_{p=p_2} = \dfrac{\mathrm{d}h_2(T)}{\mathrm{d}T}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Les tables d'enthalpies $h_1(T)$ et $h_2(T)$ ont elles-mêmes été calculées à partir des tables d'énergie interne et de densité de la manière suivante :

$$\begin{cases} h_1(T) = e_1(T) + \dfrac{p_1}{\rho_1(T)}, \\ h_2(T) = e_2(T) + \dfrac{p_2}{\rho_2(T)}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Concernant le calcul de la capacité thermique isochore c_v, elle a été calculée à partir de la relation de Mayer :

$$c_v(p,T) = R_s(p,T) - c_p(p,T), \tag{3.15}$$

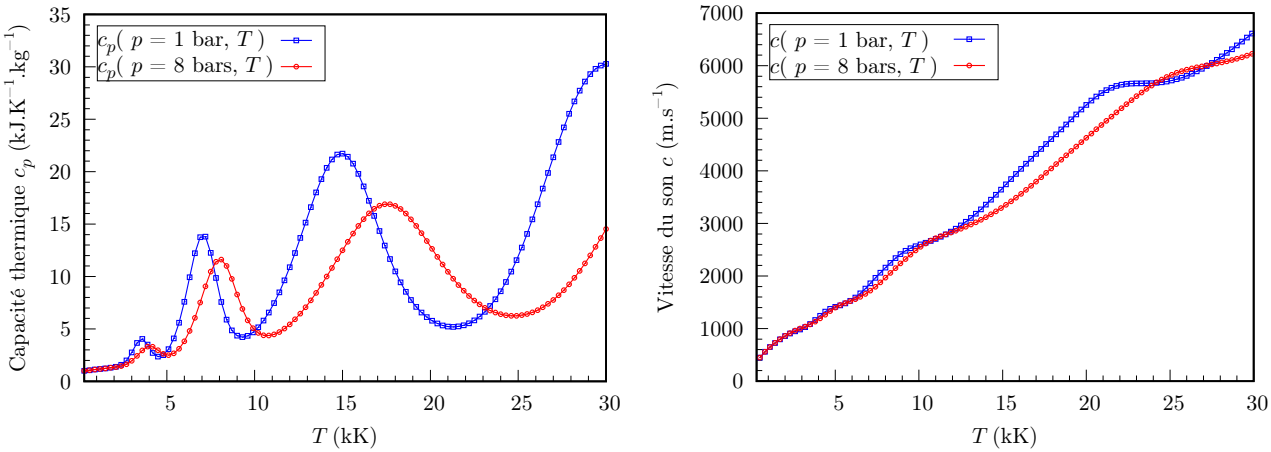
avec $R_s(p,T) = p/(\rho T)$ correspondant à la constante spécifique du gaz. Pour l'équation d'état présentée dans cette partie, contrairement au cas des gaz parfaits, la constante spécifique dépend de la pression et de la température et n'est donc pas constante.
En introduisant la relation de Mayer pour l'expression de c_v, le coefficient adiabatique peut alors être réécrit comme

$$\gamma(p,T) = \frac{c_p(p,T)}{c_p(p,T) - R_s(p,T)}, \tag{3.16}$$

conduisant à l'expression suivante de la vitesse du son :

$$c(p,T) = \sqrt{\frac{p\ c_p(p,T)}{\rho\left[c_p(p,T) - R_s(p,T)\right]}}. \tag{3.17}$$

En pratique, les valeurs de c_p et de c sont déterminées et tabulées pour des pressions de 1 et 8 bars, et des interpolations linéaires sont effectuées à partir des tables afin d'obtenir les valeurs de c pour des pressions intermédiaires. Pour $p = 1$ bar et $p = 8$ bars, les valeurs calculées de c_p et de c pour de l'air sont représentées en Figure 3.4.



(a) Capacité thermique isobare

(b) Vitesse du son

Figure 3.4. – Valeurs de la vitesse du son c et de la capacité thermique c_p pour de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars.

3.3.3.3. Coefficients de transport

Les coefficients de transport considérés dans cette étude sont la conductivité électrique σ, la conductivité thermique κ et la viscosité dynamique μ, qui sont tous les trois dépendants de la température et de la pression. Sur le même principe que pour la densité et l'énergie interne, nous disposons de tables contenant les valeurs de ces coefficients calculées à des pressions de 1 et 8 bars. Ces valeurs ont été déterminées au moyen de calculs de compositions de plasma à l'ETL

et de la méthode de Chapman-Enskog [100]. La Figure 3.5 présente par exemple les valeurs de conductivité thermique calculées dans les tables pour de l'air à 1 et 8 bars. Différents pics de conductivités thermiques peuvent être observés, correspondants aux dissociations de l'azote et du dioxygène, ainsi qu'à leurs ionisations successives. On remarque également que l'influence de la pression est significative principalement pour des températures supérieures à 15000 K, car le plasma est alors composé d'une majorité d'atomes ionisés. Les valeurs calculées pour les tables de conductivité électrique et de viscosité dynamique sont présentées en Annexe B.

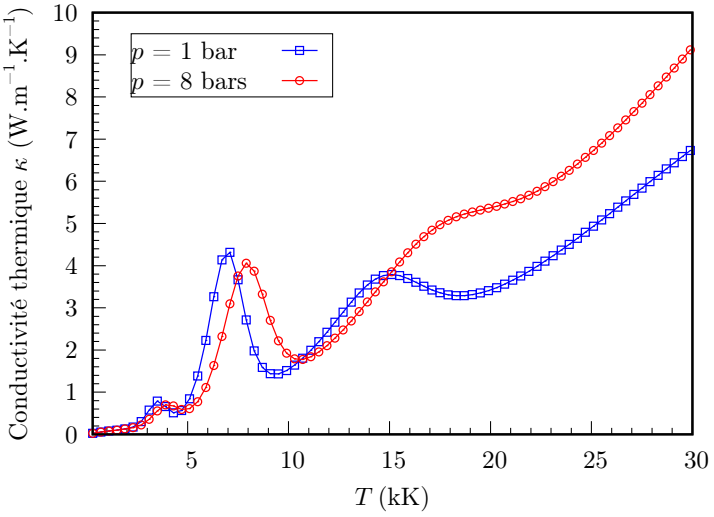


Figure 3.5. – Valeurs de la conductivité thermique calculées pour de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars.

3.4. Méthode de résolution

Le principe de la méthode de résolution utilisée est proche de celui employé pour la modélisation à froid. La partie convective (membres de gauche) du système d'équations (3.2) étant identique à celle des équations d'Euler, un solveur de Riemann HLLC est de nouveau utilisé. Dans le cas du modèle considéré dans ce chapitre, les composantes du vecteur des termes source $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$ (3.3) ne sont pas nulles et doivent alors être calculées pour modéliser les effets diffusifs et le couplage avec le plasma. De plus, afin de calculer le potentiel électrique et ainsi de prendre en compte l'effet joule et le rayonnement du plasma, l'équation de Laplace (3.1) doit être résolue. Le calcul des flux HLLC ayant déjà été présenté dans le chapitre précédent, cette section porte sur la méthode de calcul du potentiel électrique et des différents termes sources.

3.4.1. Calcul du potentiel électrique et des termes sources

Outre la thermodynamique, les principales différences entre le solveur pour l'écoulement à froid et le solveur avec le plasma sont la résolution de l'équation de Laplace (3.1) pour déterminer le champ de potentiel électrique, ainsi que le calcul des différents termes sources.

3.4.1.1. Discrétisation de l'équation de Laplace

Afin de discrétiser l'opérateur Laplacien $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\sigma \boldsymbol{\nabla} V)$, le schéma numérique d'OpenFOAM appelé « Gauss Harmonic Corrected » [101] a été utilisé. La méthode de Gauss est alors employée

afin d'intégrer l'opérateur sur le volume de chaque cellule Ω_i :

$$\iiint_{\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\sigma \boldsymbol{\nabla} V)\, \mathrm{d}\Omega = \oiint_{\partial\Omega_i} (\sigma \boldsymbol{\nabla} V) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma, \tag{3.18}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale unitaire sortante du bord de Ω_i. L'intégrale surfacique peut alors être séparée en la somme des intégrales sur les N_{f_i} faces Γ_k $(k = 1, ..., N_{f_i})$ de la cellule, donnant

$$\oiint_{\partial\Omega_i} (\sigma \boldsymbol{\nabla} V) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma = \sum_{k=1}^{N_{f_i}} \iint_{\Gamma_k} (\sigma \boldsymbol{\nabla} V) \cdot \boldsymbol{n}_k\, \mathrm{d}\Gamma. \tag{3.19}$$

En supposant que la conductivité électrique σ et le gradient de potentiel $\boldsymbol{\nabla} V$ sont constants sur chaque face, les intégrales surfaciques peuvent facilement être calculées comme suit :

$$\sum_{k=1}^{N_{f_i}} \iint_{\Gamma_k} (\sigma \boldsymbol{\nabla} V) \cdot \boldsymbol{n}_k\, \mathrm{d}\Gamma = \sum_{k=1}^{N_{f_i}} |\Gamma_k| \sigma_k \left(\boldsymbol{\nabla} V\right)_k \cdot \boldsymbol{n}_k, \tag{3.20}$$

où
- $|\Gamma_k|$ est la surface de la face Γ_k,
- σ_k est la valeur de la conductivité électrique sur la face Γ_k,
- $\left(\boldsymbol{\nabla} V\right)_k$ correspond au gradient de potentiel électrique sur la face Γ_k.

En supposant que la face Γ_k de centre C_{Γ_k} est localisée entre deux cellules Ω_L et Ω_R de centres C_L et C_R, la valeur de σ sur la face est calculée à partir d'une interpolation harmonique :

$$\sigma_k = \frac{\sigma_L\, \sigma_R}{\alpha_{LR}\, \sigma_L + (1 - \alpha_{LR})\, \sigma_R} \tag{3.21}$$

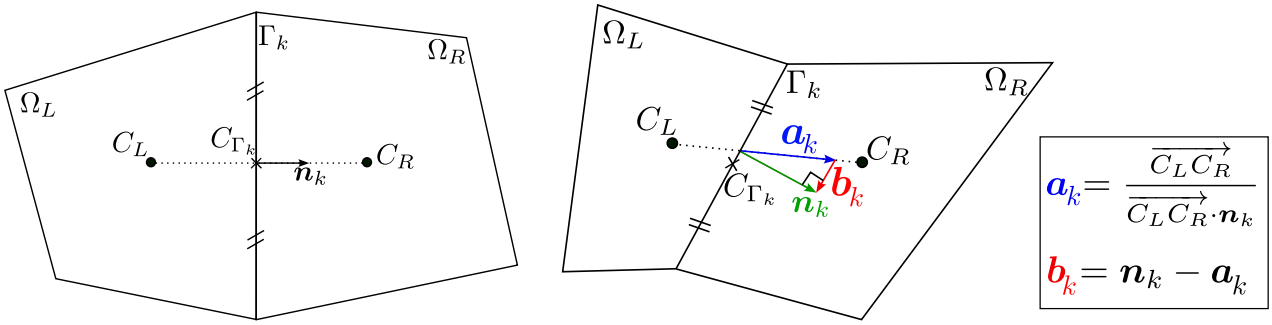
avec
- σ_L et σ_R correspondant respectivement aux conductivités électriques au centre de la cellule Ω_L et Ω_R,
- $\alpha_{LR} = \dfrac{||\overrightarrow{C_{\Gamma_k} C_R}||}{||\overrightarrow{C_L C_R}||}$.

Concernant la valeur de $\left(\boldsymbol{\nabla} V\right)_k \cdot \boldsymbol{n}_k$, que l'on appelle gradient normal à la face Γ_k, celle-ci est discrétisée comme suit :

$$\left(\boldsymbol{\nabla} V\right)_k \cdot \boldsymbol{n}_k = \frac{V_R - V_L}{d_{LR}}, \tag{3.22}$$

où $d_{LR} = ||\overrightarrow{C_L C_R}||$ et les valeurs V_L et V_R correspondent au potentiel électrique calculé au centre des mailles Ω_L et Ω_R. Cette discrétisation du gradient normal est suffisante pour le cas d'une face orthogonale, c'est à dire une face Γ_k dont la normale $\boldsymbol{n}_k$ est colinéaire au vecteur $||\overrightarrow{C_L C_R}||$. Pour une face non-orthogonale telle que celle représentée sur la Figure 3.6b, une correction doit être apportée afin de mieux estimer le gradient normal. En utilisant les différentes notations présentées sur la Figure 3.6b, le schéma de discrétisation corrigé implémenté dans OpenFOAM est :

$$\left(\boldsymbol{\nabla} V\right)_k \cdot \boldsymbol{n}_k = \underbrace{\frac{||\boldsymbol{a_k}||}{d_{LR}}(V_R - V_L)}_{\text{partie orthogonale}} + \underbrace{\boldsymbol{b_k} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} V\right)_k}_{\text{correction non-orthogonale}}. \tag{3.23}$$



(a) Exemple de face orthogonale (b) Exemple de face non-orthogonale

Figure 3.6. – Schémas d'une face orthogonale et d'une face non-orthogonale

Dans l'expression précédente, le gradient de potentiel sur la face est calculé à partir du interpolation linéaire :

$$(\boldsymbol{\nabla} V)_k = \alpha_{LR} \ (\boldsymbol{\nabla} V)_L + (1 - \alpha_{LR}) \, (\boldsymbol{\nabla} V)_R \, , \tag{3.24}$$

où les gradients au centre des cellules $(\boldsymbol{\nabla} V)_K$ ($K = L$ ou $K = R$) sont calculés par une méthode de Gauss [102] :

$$(\boldsymbol{\nabla} V)_K = \frac{1}{|\Omega_K|} \sum_{k=1}^{N_{f_K}} |\Gamma_k| \ V_k \ \boldsymbol{n}_k. \tag{3.25}$$

Enfin, la valeur du potentiel V_k sur une face Γ_k est interpolée linéairement à partir des valeurs aux centres :

$$V_k = \alpha_{LR} \ V_L + (1 - \alpha_{LR}) V_R, \tag{3.26}$$

En appliquant dans toutes les cellules du maillage la méthode de discrétisation du Laplacien venant d'être décrite, un système d'équations linéaires est obtenu, pouvant s'écrire sous la forme matricielle

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}. \tag{3.27}$$

$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ est une matrice carrée de dimensions $(N_C)^2$, où N_C est le nombre total de cellules du maillage. Les coefficients de cette matrice dépendent de la géométrie des cellules et de la conductivité électrique σ. Concernant le vecteur $\boldsymbol{B}$, ses composantes sont liées aux conditions limites. Enfin, le vecteur $\boldsymbol{V}$ contient les valeurs du potentiel électrique à déterminer aux centres des différentes cellules :

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_{N_C} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Finalement, la procédure de résolution de l'équation de Laplace pour déterminer le champ de potentiel électrique est résumée ci-après.

1. Calculer les valeurs de σ aux centres de toutes les cellules du maillage, en fonction de la température et de la pression (voir Section 3.3.3.3).
2. Construire la matrice de discrétisation $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ ainsi que le second membre $\boldsymbol{B}$.
3. Résoudre le système matriciel (3.27).

La résolution du système matriciel est effectuée avec le solveur multi-grilles GAMG (Geometric Agglomerated Algebraic Multigrid) [101], qui s'est avéré être le plus robuste parmi les solveurs disponibles dans OpenFOAM.

3.4.1.2. Calcul des termes sources

Les composantes du vecteur des termes sources $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$ (3.3) sont toutes calculées explicitement à chaque itération.

- Pour la prise en compte de l'effet Joule, la densité de courant $\boldsymbol{j}$ est déterminée à partir du gradient de potentiel électrique :

$$\boldsymbol{j} = -\sigma \boldsymbol{\nabla} V. \tag{3.29}$$

  Ce gradient est calculé avec le schéma « LeastSquares » d'OpenFOAM, basé sur la méthode des moindres carrés [83].
- Le terme source $-4\pi\varepsilon_N$ correspondant au rayonnement du plasma peut directement être calculé après avoir déterminé la valeur du coefficient d'émission nette ε_N en fonction de la température et de la pression.
- Le calcul de la divergence du tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ est effectué avec la méthode « Gauss Linear » d'OpenFOAM. Celle-ci utilise une méthode d'intégration de Gauss avec une interpolation linéaire des valeurs du tenseur sur les faces. Les formulations des schémas LeastSquares et Gauss Linear sont présentées en Annexe A.
- Concernant le terme source $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T)$ correspondant à la diffusion thermique, la même procédure de discrétisation que celle présentée dans la section précédente a été utilisée. Cependant, la discrétisation de cet opérateur Laplacien est effectuée de manière explicite et ne requiert pas la résolution d'un système linéaire.

3.4.2. Intégration temporelle et algorithme du solveur

Comme dans le cas de l'étude à froid, l'intégration temporelle est effectuée avec une méthode Runge-Kutta d'ordre 2 (2.58a)-(2.58b). Les effets convectifs étant les plus rapides, la condition CFL (2.59) pour le calcul du pas de temps Δt est toujours valable. La structure de l'Algorithme 2 du solveur développé dans OpenFOAM est également proche de celle du solveur à froid. Plusieurs ajouts et modifications sont tout de même nécessaires, tels que la résolution de l'équation de Laplace pour calculer le potentiel électrique, la prise en compte de la thermodynamique du plasma avec les méthodes d'interpolations, ainsi que le calcul des différents termes sources liés à l'effet joule, au rayonnement du plasma et aux effets diffusifs.

Algorithme 2 Solveur pour simuler l'écoulement dans la configuration de la torche à plasma

initialisation :
- Calculer les grandeurs géométriques (volumes des cellules, barycentres, normales)
- Calculer la donnée initiale $\boldsymbol{U}^0$: interpolations directes (3.6) et (3.7) pour calculer ρ et e en fonction des valeurs initiales de p et T

tant que $t < t_f$ **:**
- Calculer le pas de temps Δt (2.61)
- Résoudre l'équation de Laplace (3.1) pour déterminer le potentiel électrique V

pour toutes les faces **:**
- Reconstruire les variables de part et d'autre de la face à partir de $\boldsymbol{U}^n$ (2.50)
- Calculer les flux HLLC $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\left(\boldsymbol{U}^n\right)$ au travers de la face (2.46)

fin pour

pour toutes les cellules **:**
- Sommer les flux sur les faces de la cellule (2.56)
- Calculer les différents termes sources
- Calculer $\boldsymbol{U}_i^{(1)}$ (2.58a)
- Calculer $p_i^{(1)}$ et $T_i^{(1)}$ en fonction de $\rho_i^{(1)}$ et $e_i^{(1)}$ avec les interpolations inverses (3.8)-(3.9)

fin pour

pour toutes les faces **:**
- Reconstruire les variables de part et d'autre de la face à partir de $\boldsymbol{U}^{(1)}$ (2.50)
- Calculer les flux HLLC $\hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}}_k\left(\boldsymbol{U}^{(1)}\right)$ au travers de la face (2.46)

fin pour

pour toutes les cellules **:**
- Sommer les flux sur les faces de la cellule (2.56)
- Calculer les différents termes sources
- Calculer $\boldsymbol{U}_i^{n+1}$ (2.58b)
- Calculer p_i^{n+1} et T_i^{n+1} en fonction de ρ_i^{n+1} et e_i^{n+1} avec les interpolations (3.8)-(3.9)

fin pour
- $\boldsymbol{U}^n \leftarrow \boldsymbol{U}^{n+1}$
- $n \leftarrow n+1$
- $t \leftarrow t+\Delta t$

fin tant que

3.5. Validation de la méthode numérique : simulation d'une torche de découpe plasma

Dans le cas d'un écoulement de plasma tel que celui présent dans une torche de découpe, il n'existe pas de cas test avec une solution analytique permettant de valider le solveur numérique développé. Nous proposons alors de valider ce dernier sur la configuration présentée en début de chapitre, en comparant les résultats à ceux obtenus avec un solveur pressure-based. Ce solveur pressure-based a été validé à partir de mesures expérimentales au cours de différentes études réalisées pour des configurations de découpe plasma [12, 46, 47], dans des conditions où le nombre de Mach était inférieur à 2. Cette section détaille d'abord les conditions limites utilisées pour les simulations de la torche de découpe et propose ensuite une étude de convergence en maillage, effectuée avec le nouveau solveur OF. La dernière partie est alors dédiée aux comparaisons entre

les résultats obtenus avec les solveurs OF et pressure-based.

3.5.1. Conditions limites

Le détail des conditions limites utilisées pour la simulation de la torche de découpe est donné dans le Tableau 3.1. La définition des différents bords est donnée sur Figure 3.1.

Bords	Variables			
	p	T	$\boldsymbol{u}$	V
Inlet	$p_{in} = 5$ bars	300 K	–	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Cathode	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	Glissement	$-(\sigma \boldsymbol{\nabla} V) \cdot \boldsymbol{n} = J_c(r)$
Murs	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	Glissement	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Top	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	300 K	Glissement	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Outlet côté	1 bar	300 K	–	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Outlet bas	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = 0$	$V = 0$

Tableau 3.1. – Conditions limites pour la simulation de la torche de découpe.

La cathode de rayon R_c est considérée comme un mur glissant, sur lequel un profil parabolique de densité de courant est imposé :

$$J_c(r) = J_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R_c^2}\right), \tag{3.30}$$

où $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ est la distance radiale par rapport à l'axe x et $J_{\max} = 1.6 \times 10^8$ A.m^{-2} est la densité de courant maximale. Cette valeur de $J_{\max}$ a été choisie à partir des résultats d'une étude expérimentale sur le comportement des cathodes lors de la découpe plasma [103]. La valeur du rayon de la cathode R_c a été déterminée de manière à y imposer un courant I_c de 50 A :

$$I_c = 2\pi \int_0^{R_c} J_c(r)\ r\, \mathrm{d}r = 50 \text{ A}, \tag{3.31}$$

donnant alors un rayon R_c de 0.44 mm. Sur l'inlet, une pression statique p_{in} de 5 bars est imposée, ainsi qu'une température ambiante T de 300 K. Dans les torches de découpe plasma, afin de stabiliser le pied d'arc cathodique au centre de la cathode, l'injection de gaz se fait généralement en vortex. Dans ce chapitre, nous supposons cependant que l'injection est normale à l'inlet. La prise en compte de l'injection en vortex sera présentée dans le chapitre suivant lors de l'étude comparative avec les mesures expérimentales.

Concernant les conditions limites pour la vitesse, les murs sont considérés comme des parois glissantes. Il s'agit d'une hypothèse forte négligeant les effets de la couche limite. Une meilleure approche aurait été de choisir des parois non-glissantes associées à un maillage suffisamment fin près des parois, afin de pouvoir capturer la couche limite. Cependant, le niveau de raffinement requis induisant une forte augmentation du temps de calcul, nous avons préféré négliger la couche limite. Afin d'évaluer l'impact de cette hypothèse, deux calculs avec un maillage suffisamment fin

proche de la paroi du canal de tuyère ont été effectués, en considérant des parois glissantes dans un cas et des parois non-glissantes dans l'autre cas. Les résultats de ces calculs sont présentés et analysés en Annexe C. Une autre option pouvant permettre de capturer la couche limite en conservant un niveau de raffinement raisonnable serait d'utiliser une loi de paroi. Il pourra s'agir de développements futurs visant à améliorer le solveur numérique implémenté.

3.5.2. Analyse de convergence en maillage

Avec le solveur OF, afin d'obtenir des résultats n'étant pas dépendants de la discrétisation spatiale, plusieurs simulations ont été réalisées avec différents maillages. Plusieurs niveaux de raffinements dans deux directions principales ont été testés. Des maillages avec différentes résolutions Δx dans la direction axiale ont été utilisés, ainsi que des maillages avec plus ou moins de cellules n_r dans la direction radiale. Comme représenté sur la Figure 3.7, les raffinements dans la direction axiale ont été étudiés dans la zone localisée en aval de la sortie de torche, où les aspects supersoniques du jet de plasma sont les plus importants. Pour les différentes résolutions dans la direction radiale, la zone d'intérêt correspond au canal de tuyère.

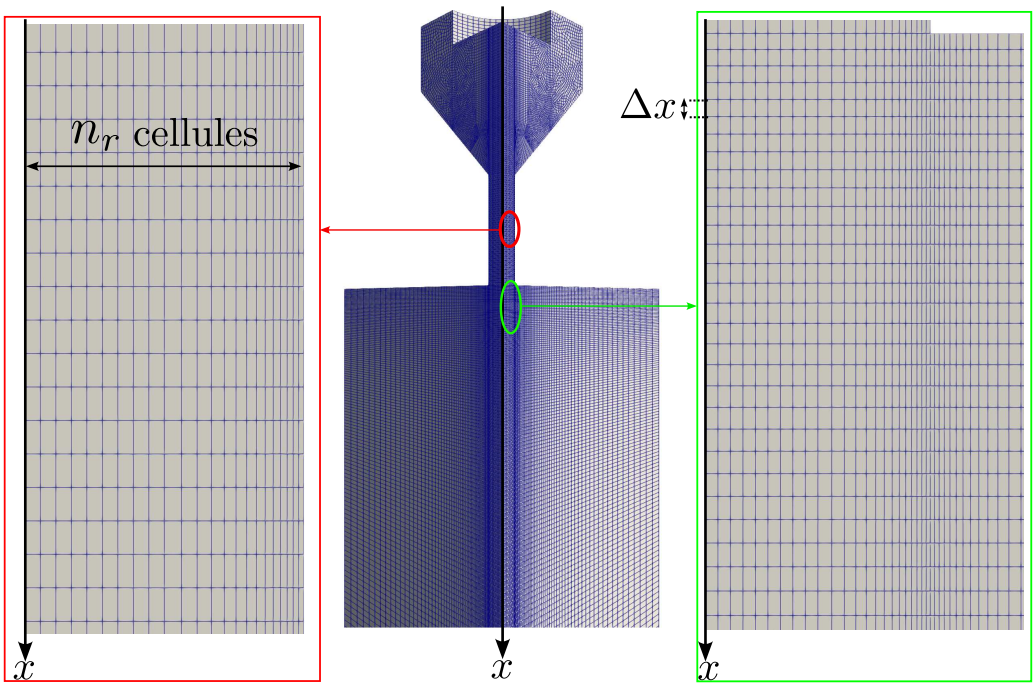
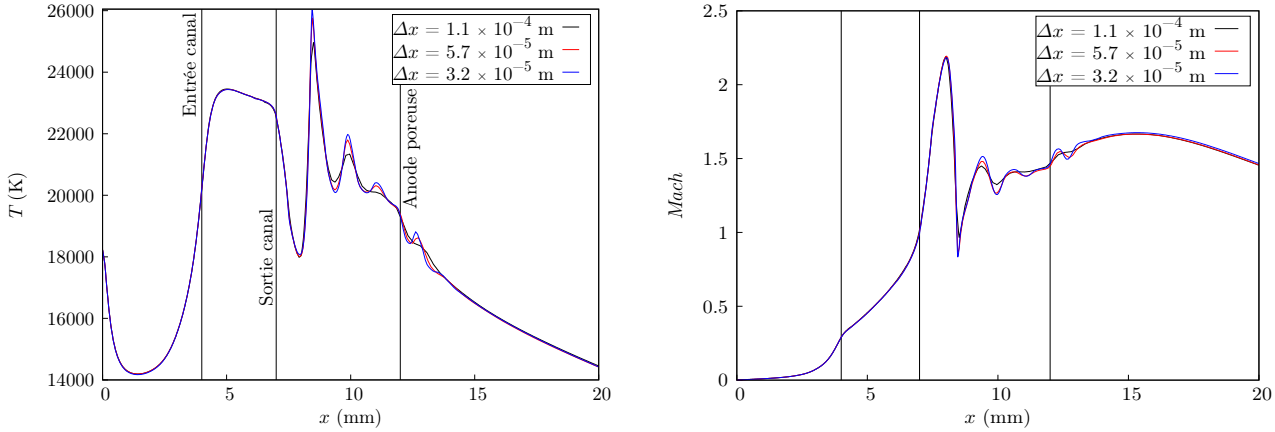


Figure 3.7. – Maillage et zones de raffinements.

3.5.2.1. Direction axiale

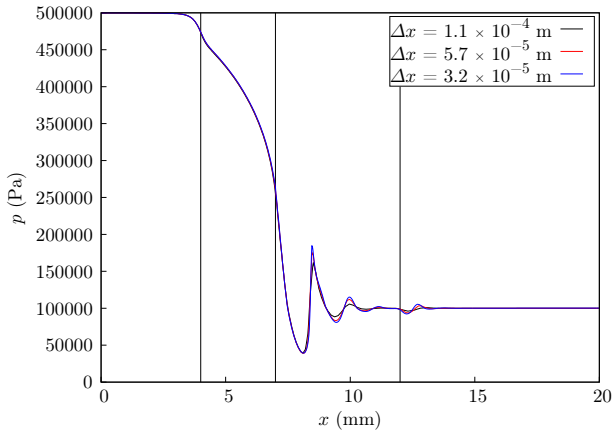
Pour l'étude du raffinement dans la direction axiale, trois simulations ont été effectuées, avec des maillages ayant différentes résolutions Δx en sortie de torche. Un premier maillage assez grossier avec une résolution $\Delta x = 1.1 \times 10^{-4}$ m a été utilisé, ainsi que deux maillages plus fins avec des résolutions respectives $\Delta x = 5.7 \times 10^{-5}$ m et $\Delta x = 3.2 \times 10^{-5}$ m. La différence au niveau des champs calculés avec ces trois maillages n'étant pas suffisamment observable qualitativement, seuls les profils axiaux obtenus sont représentés sur la Figure 3.8. Concernant la description et l'analyse de l'écoulement dans sa globalité, celles-ci sont proposées dans la Section 3.5.3 lors de

la comparaison avec la méthode pressure-based. Les profils axiaux de la Figure 3.8 montrent que les trois maillages permettent de capturer les ondes de chocs présentes en aval de la sortie de canal. On remarque toutefois que l'amplitude des oscillations obtenues avec le maillage le plus grossier ($\Delta x = 1.1 \times 10^{-4}$ m) est légèrement plus faible que celle déterminée avec les deux maillages plus fins. Les solutions obtenues avec ces deux derniers maillages étant très proches, la résolution intermédiaire $\Delta x = 5.7 \times 10^{-5}$ m semble donc suffisante pour ce cas.

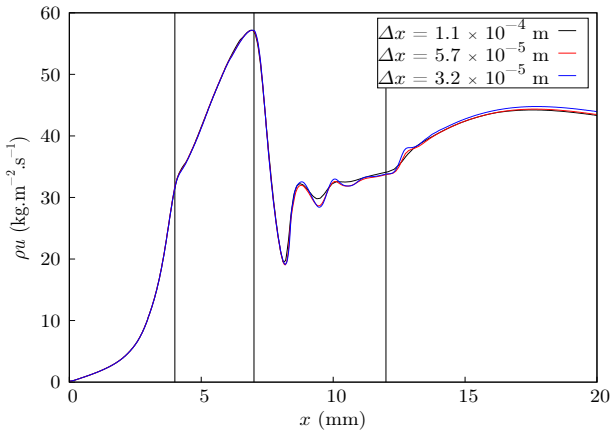


(a) Temperature T

(b) Nombre de Mach M



(c) Pression p

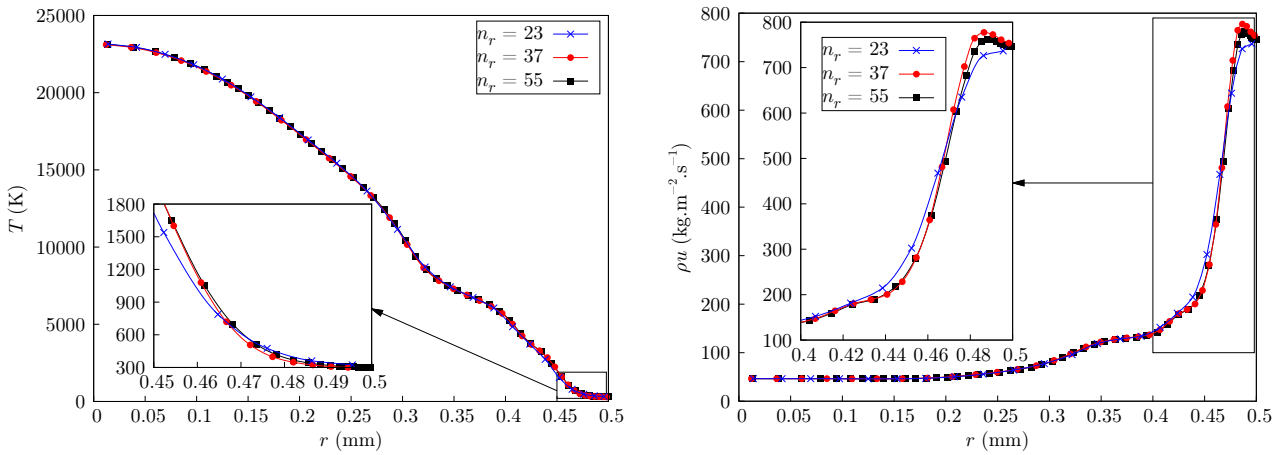


(d) Quantité de mouvement axiale ρu

Figure 3.8. – Profils suivant l'axe x - Comparaison entre différents niveaux de raffinement du maillage dans la direction axiale.

3.5.2.2. Direction radiale

Trois autres simulations ont également été réalisées, avec des maillages constitués de différents nombres n_r de cellules dans le canal de tuyère, suivant la direction radiale. Le maillage le plus grossier dispose de $n_r = 23$ cellules dans le canal de tuyère, tel que présenté sur la partie gauche de la Figure 3.7. Les deux autres maillages correspondent à $n_r = 37$ et $n_r = 55$. Les profils de température T et de quantité de mouvement axiale ρu déterminés au milieu du canal ($x = 5.5$ mm) avec les différents maillages sont comparés sur la Figure 3.9. Les solutions obtenues avec les trois maillages sont très proches sur toute la longueur des profils, de l'axe ($r = 0$ mm) jusqu'à la paroi du canal ($r = 0.5$ mm). On remarque que même le maillage le moins raffiné



(a) Température T (b) Quantité de mouvement axiale ρu

Figure 3.9. – Profils radiaux dans une section au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) - Comparaison des résultats obtenus pour différents raffinements dans la direction radiale.

parvient à bien capturer la « couche froide », qui correspond à la zone proche de la paroi où la température du gaz est proche de la température ambiante de 300 K. C'est également dans cette couche froide de densité plus élevée que le flux de masse est le plus important, comme observé sur la Figure 3.9b. Étant donné que les profils calculés avec les deux maillages les plus raffinés ($n_r = 37$ et $n_r = 55$) se superposent, le deuxième maillage avec $n_r = 37$ est suffisant pour cette étude.

À l'issue de cette analyse de sensibilité au maillage, les simulations pour la comparaison entre le solveur OF et le solveur pressure-based ont été effectuées avec un raffinement dans la direction radiale correspondant à $n_r = 37$ et une résolution axiale $\Delta x = 5.7 \times 10^{-5}$ m en sortie de torche. Le maillage final utilisé était composé d'environ 400 000 cellules.

3.5.3. Comparaison des résultats

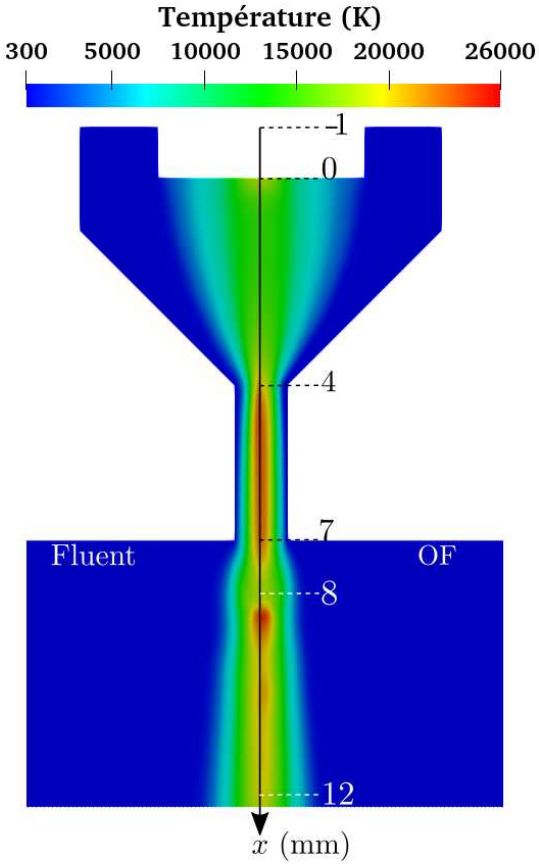
Afin de valider le solveur OF développé, la simulation de la torche à plasma a également été effectuée avec un solveur 2D-axisymétrique pressure-based. Ce dernier est basé sur l'algorithme SIMPLE de Fluent, ainsi que sur l'ajout de fonctions utilisateurs permettant l'adaptation aux plasmas thermiques. Ce solveur a été validé par comparaison a des données expérimentales au cours de précédentes études [12, 46, 47]. Le maillage 2D plan utilisé pour les calculs avec Fluent disposait des mêmes raffinements axiaux et radiaux que ceux du maillage 3D choisi pour la simulation avec le solveur OF. Les calculs avec Fluent ont été réalisés jusqu'à convergence des résidus, tandis que les simulations avec OF étaient considérées convergées lorsque les débits massiques à l'inlet et dans le canal de tuyère étaient stabilisés et égaux. La comparaison des résultats obtenus avec les deux solveurs est organisée en trois partie : une première analyse qualitative en comparant les champs calculés pour différentes variables, une deuxième présentant les profils obtenus le long de l'axe et une dernière dédiée aux profils radiaux au milieu du canal de tuyère, en $x = 5.5$ mm.

3.5.3.1. Description de l'écoulement et comparaison des champs

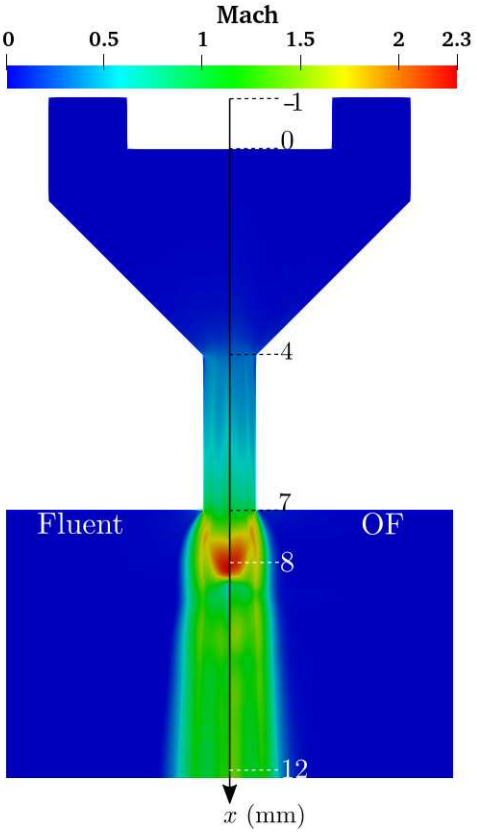
La Figure 3.10 présente plusieurs champs calculés avec les deux solveurs. Les champs de température T, de potentiel électrique V, de nombre de Mach M et de densité de courant axiale j_x sont ainsi représentés. Au centre de la chambre d'arc, qui correspond à la zone en amont du canal de tuyère ($0 \leq x \leq 4$ mm), l'air chauffe par effet joule jusqu'à atteindre des températures d'environ 18 kK proche du centre de la cathode, où le potentiel électrique est maximal.

On remarque également que la zone chaude s'étend sur toute la surface de la cathode, du fait que l'injection de gaz à l'inlet ($x = -1$ mm) n'est pas en vortex. En se rapprochant de l'entrée du canal ($x = 4$ mm), la forme convergente de la tuyère provoque la constriction du plasma : le diamètre de la zone chaude diminue et la température ainsi que la vitesse du fluide augmentent. Au travers du canal de tuyère, tandis que la vitesse continue d'augmenter, la température décroît lentement. On note également la présence de la couche froide étroite proche des parois du canal. À la sortie du canal ($x > 7$ mm), le plasma est éjecté dans l'air ambiant sous forme d'un jet supersonique. Dès la sortie, une onde de détente est observée, avec une diminution marquée de la température et une forte accélération du fluide, jusqu'à atteindre des vitesses supersoniques. Une fois la vitesse maximale atteinte vers $x = 8.4$ mm, une onde de choc apparaît, entraînant en aval une chute de vitesse très prononcée, accompagnée d'une augmentation de la température. Quelques oscillations supplémentaires de moindre amplitudes peuvent être observées en aval du choc, puis le jet commence lentement à s'adapter aux conditions ambiantes.

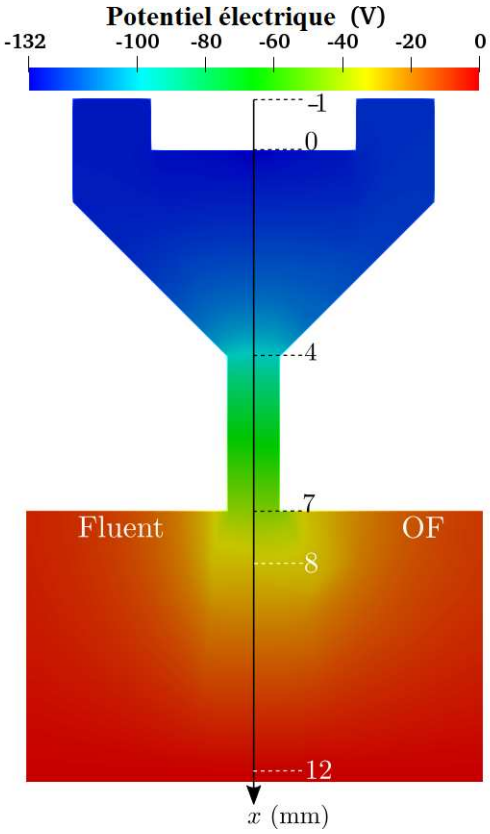
Concernant la comparaison entre les résultats obtenus avec les solveurs de OF et Fluent, pour les quatre champs présentés, un très bon accord est observé. Tout deux permettent de déterminer une différence de potentiel électrique de 132 V entre la cathode et l'anode. Il faut tout de même préciser que comme les positions d'accroche de l'arc et les gaines ne sont pas décrites par notre modèle, la différence de potentiel calculée correspond uniquement à la tension de la colonne plasma. La principale différence en analysant ces champs est observée pour la densité de courant axiale j_x à l'entrée du canal de tuyère ($x \approx 4$ mm), qui atteint une valeur maximale de 3.8×10^8 A.m^{-2} dans le cas du résultat obtenu avec Fluent, alors qu'une valeur maximale de 2.9×10^8 A.m^{-2} est déterminée avec le solveur OF. Dans les deux cas, l'intensité du courant de 50 A est bien conservée. Cette différence est difficilement explicable, mais elle semble être très localisée dans cette zone située près de l'entrée du canal de tuyère. La présentation des profils axiaux dans la section suivante montre également des différences pour les températures calculées dans la même région. En aval de la sortie de torche, les deux solveurs permettent de déterminer un nombre de Mach maximal de 2.3 au centre du jet, juste au-dessus du choc localisé en $x \approx 8.4$ mm. Bien que cette analyse qualitative des champs semble indiquer que les deux solveurs permettent des résultats très similaires, une étude plus avancée des profils déterminés le long de l'axe est nécessaire.



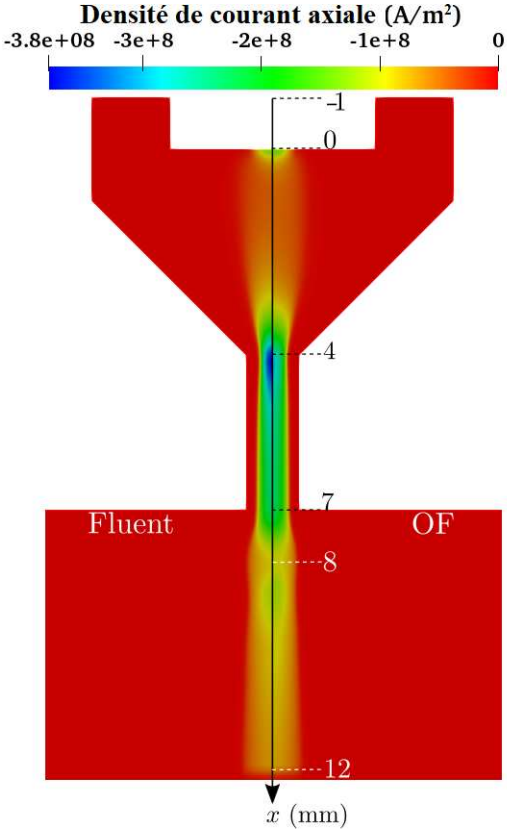
(a) Champ de température T



(b) Champ de nombre de Mach M



(c) Champ de potentiel électrique V

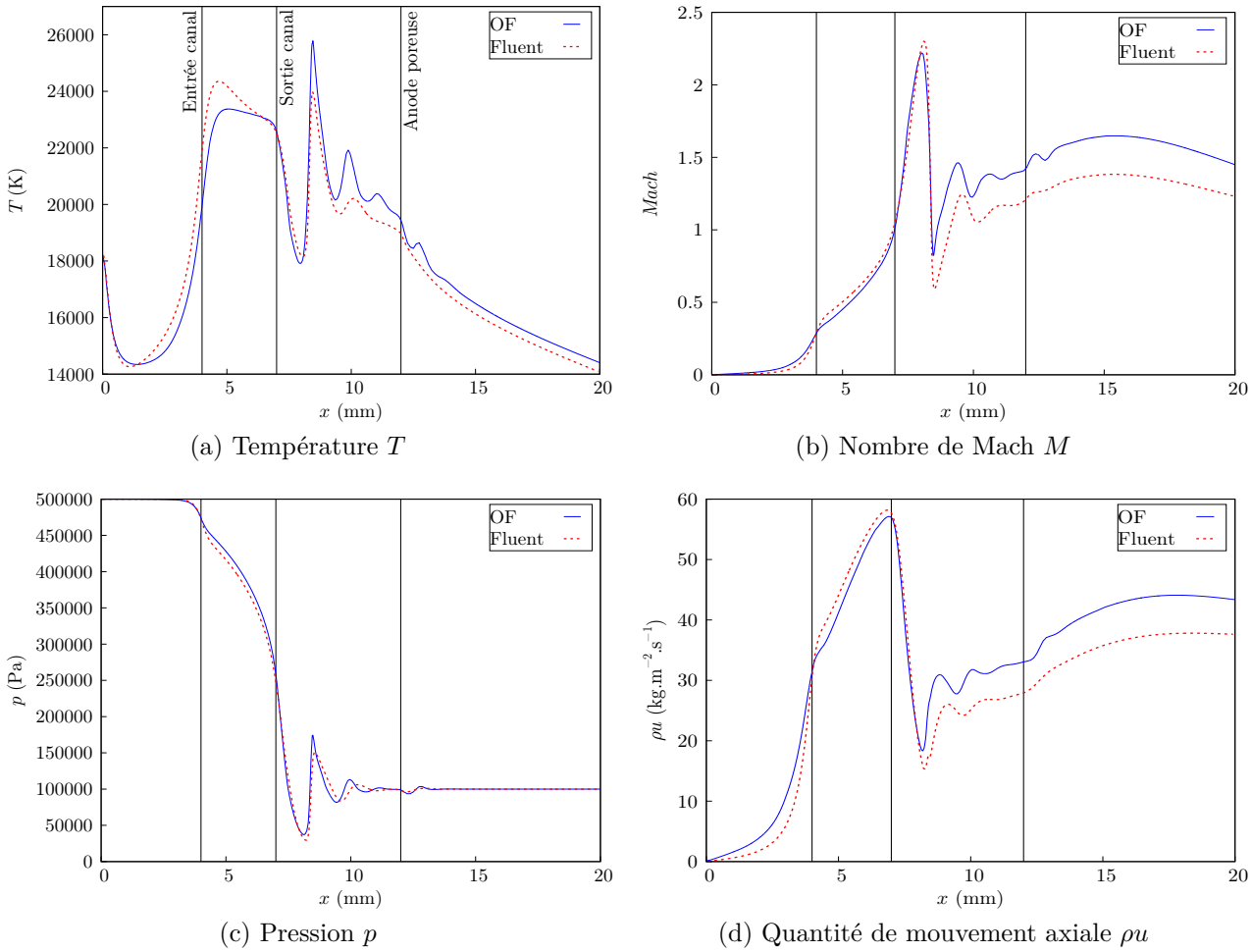


(d) Champ de densité de courant axiale j_x

Figure 3.10. – Comparaison des champs calculés avec OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars.

3.5.3.2. Comparaison des profils axiaux

La Figure 3.11 permet de comparer les profils obtenus le long de l'axe x pour la température T, le nombre de Mach M, la pression p et la quantité de mouvement axiale ρu.



(a) Température T

(b) Nombre de Mach M

(c) Pression p

(d) Quantité de mouvement axiale ρu

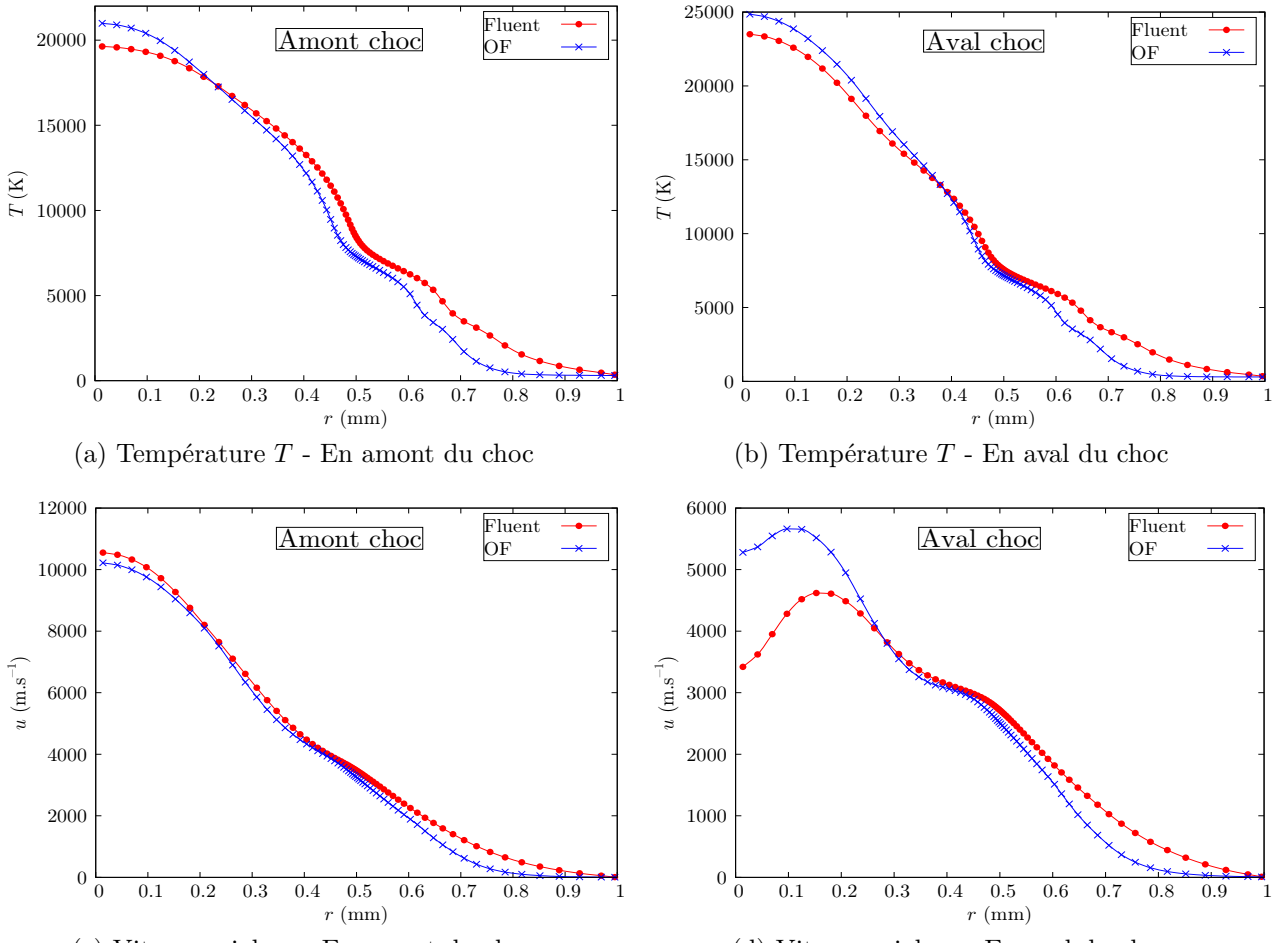
Figure 3.11. – Profils suivant l'axe x - Comparaison entre résultats OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars.

De la cathode jusqu'à l'onde de choc ($0 < x < 8.4$ mm), les profils de p, M et ρu calculés avec les deux solveurs sont proches. Pour le profil de T, les valeurs de température calculées proche de la cathode et à la sortie de la torche sont identiques. Cependant, au niveau de l'entrée du canal, la température déterminée par le solveur Fluent est supérieure à celle obtenue avec OF. Cela est lié à la valeur de la densité de courant j_x maximale dans cette zone, comme évoqué lors de l'analyse des champs. En effet, une densité de courant plus élevée induit un effet joule plus important, conduisant donc à des températures supérieures. En aval du choc ($x > 8.4$ mm), les valeurs de T, M et ρu obtenues avec le solveur Fluent sont significativement inférieures à celles calculées avec le solveur OF. Une petite discontinuité dans le profil de quantité de mouvement axial ρu calculé avec Fluent peut aussi être observée juste en-dessous du choc. Ce type de comportement semble être identique à celui ayant été observé dans le chapitre précédent dédié à la simulation de la torche à froid. En effet, pour des pressions d'injection élevées et des jets supersoniques atteignant des nombres de Mach supérieurs à 2, les valeurs des variables calculées avec le solveur pressure-based de Fluent présentaient des profils anormaux en aval de la première

onde de choc. Bien que le solveur de Fluent ait été validé à partir de résultats expérimentaux, ces validations ont toujours été effectuées en considérant des pressions d'injection inférieures à 5 bars et des nombres de Mach maximaux inférieurs à 2. Dans le cas la comparaison sur la configuration actuelle, les profils obtenus avec OF en aval du choc sont donc certainement plus fiables que ceux déterminés avec le solveur pressure-based de Fluent.

3.5.3.3. Comparaison des profils radiaux autour de l'onde de choc

Afin de comparer le comportement des variables de part et d'autre de l'onde choc, la Figure 3.12 représente les profils de température et de vitesse axiale obtenus avec Fluent et OF en amont ($x = 8.25$ mm) en aval ($x = 8.55$ mm) du choc, sur une longueur de 1 mm.



(a) Température T - En amont du choc

(b) Température T - En aval du choc

(c) Vitesse axiale u - En amont du choc

(d) Vitesse axiale u - En aval du choc

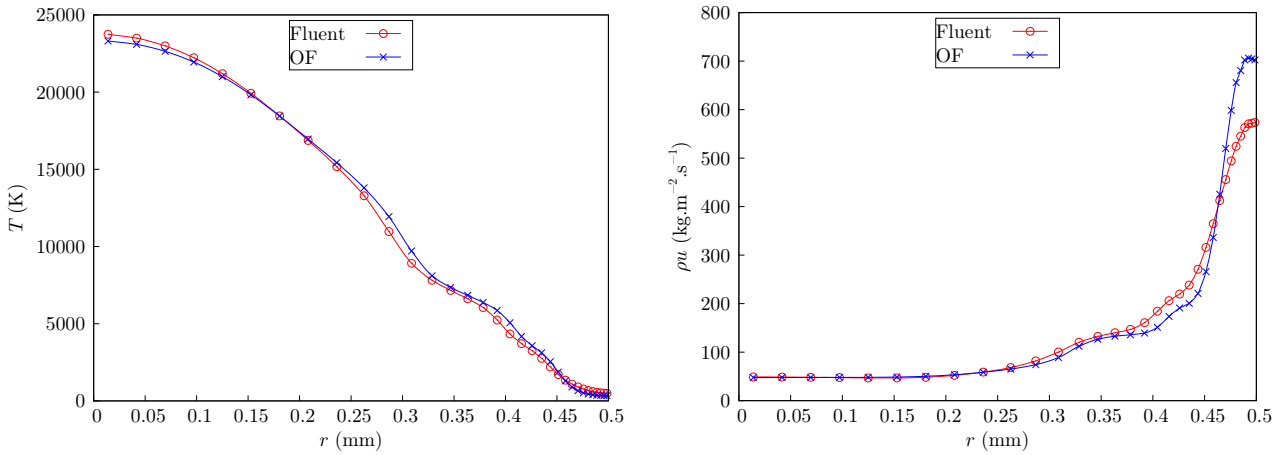
Figure 3.12. – Profils radiaux en amont ($x = 8.25$ mm) et en aval ($x = 8.55$) mm de l'onde de choc - Comparaison entre résultats OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars.

Pour les profils de température, on remarque des tendances similaires de part et d'autre du choc, avec des valeurs proche de l'axe supérieures dans le cas des résultats OF. En s'éloignant de l'axe ($r > 0.35$ mm), les températures calculées avec OF sont légèrement inférieures à celle déterminées à partir du solveur Fluent. Ainsi, une plus grande largeur de la colonne de plasma chaud est obtenue avec Fluent qu'avec OF. Concernant les profils de vitesse axiale, une différence notable est visible entre l'amont et l'aval du choc. En amont du choc, des valeurs de vitesses très similaires sont obtenues avec les deux solveurs. Toutefois, en aval du choc, les vitesses

calculées au niveau de l'axe avec Fluent sont nettement inférieures à celles déterminées à partir d'OpenFOAM. Ces tendances permettent finalement de mettre en avant le fait que les écarts observés en aval du choc sur les profils axiaux (Figure 3.11) sont majoritairement dus à une trop forte baisse de la vitesse calculée avec Fluent.

3.5.3.4. Comparaison des profils radiaux dans le canal de tuyère

Les profils radiaux de température T et de quantité de mouvement axiale ρu obtenus au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) sont comparés sur la Figure 3.13. Près de l'axe ($r \approx 0$ mm), au centre de la zone la plus chaude, la température calculée avec Fluent est légèrement supérieure à celle obtenue par le solveur OF, en raison de la densité de courant qui reste encore légèrement plus importante au milieu du canal. En s'éloignant de l'axe, la température du plasma diminue progressivement jusqu'à arriver dans la couche froide, où des valeurs proches de la température du gaz injecté sont obtenues. Dans cette zone froide proche de la paroi, les températures déterminées avec OF sont inférieures à celle obtenues avec Fluent, conduisant à une densité et une quantité de mouvement plus élevée. Bien que des différences soient observées sur les profils radiaux de quantité de mouvement, les débits massiques obtenus avec les deux méthodes sont identiques, valant tous les deux 1.51×10^{-4} kg.s^{-1}.



(a) Température T (b) Quantité de mouvement axiale ρu

Figure 3.13. – Profils radiaux dans une section au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) - Comparaison entre résultats OF et Fluent - $p_{in} = 5$ bars.

3.6. Conclusion

Après avoir présenté les hypothèses, le modèle mathématique et la fermeture thermodynamique utilisés, la méthode numérique implémentée dans le solveur a été introduite. Ce dernier a ensuite été validé sur une configuration de torche de découpe, en comparant les résultats des simulations à ceux déterminés avec un solveur pressure-based. À l'intérieur de la torche et en amont de la première onde de choc dans le jet, un bon accord a été observé entre les résultats obtenus à partir des deux solveurs. Le nouveau solveur se montre cependant plus précis pour la capture de l'onde de choc et de l'écoulement en aval. Ce chapitre étant appliqué à la simulation sur une géométrie de torche fictive, le chapitre suivant est consacré à l'étude numérique et expérimentale d'une torche de découpe plasma industrielle.

4. Mesures expérimentales sur une torche plasma et comparaisons aux simulations numériques

Sommaire

4.1. Introduction . . . 104
4.2. Dispositif et démarche expérimentale . . . 104
4.2.1. Présentation de l'installation expérimentale . . . 104
4.2.2. Plan d'essais . . . 106
4.2.3. Difficultés rencontrées et incertitudes sur les mesures . . . 106
4.3. Comparaisons à froid . . . 109
4.3.1. Paramètres des simulations numériques . . . 109
4.3.1.1. Présentation de la configuration . . . 109
4.3.1.2. Modèle et méthode numérique . . . 110
4.3.1.3. Conditions limites et maillages . . . 110
4.3.1.4. Prise en compte de l'injection en vortex . . . 111
4.3.2. Présentation des résultats numériques . . . 114
4.3.2.1. Validation numérique de l'injection en vortex . . . 114
4.3.2.2. Analyse de l'influence de l'injection en vortex . . . 115
4.3.3. Comparaison et analyse des résultats expérimentaux et numériques . . . 121
4.3.3.1. Cas d'une injection axiale . . . 121
4.3.3.2. Cas d'une injection en vortex . . . 122
4.4. Comparaisons à chaud . . . 123
4.4.1. Paramètres des simulations numériques . . . 123
4.4.1.1. Présentation de la configuration . . . 123
4.4.1.2. Modèle et méthode numérique . . . 124
4.4.1.3. Conditions limites et maillage . . . 125
4.4.2. Analyse des résultats expérimentaux et numériques . . . 126
4.4.2.1. Comparaisons des débits expérimentaux et numériques . . . 126
4.4.2.2. Analyses des résultats numériques et hypothèses sur les différences avec les résultats expérimentaux . . . 129
4.5. Conclusion . . . 138

4.1. Introduction

Ce dernier chapitre a pour but de confronter à des valeurs expérimentales les résultats obtenus numériquement au moyen des solveurs introduits dans les chapitres précédents. Les mesures expérimentales ont été réalisées sur un banc d'essai disponible dans les locaux de l'entreprise Akryvia. Le banc d'essais utilisé est un outil de recherche et développement en cours d'amélioration. En raison de difficultés rencontrées lors de l'utilisation du banc d'essai, les mesures expérimentales réalisées se sont focalisées sur les valeurs de débits massiques des gaz dans la torche en fonction de deux principaux paramètres opératoires : la pression d'injection du gaz dans la torche et l'intensité du courant imposée à la cathode. Après la présentation de l'installation et du protocole expérimental, ce chapitre se consacre d'abord à des comparaisons entre résultats numériques et expérimentaux dans le cas d'un écoulement à froid dans la torche, puis à des comparaisons à chaud avec la présence de plasma.

4.2. Dispositif et démarche expérimentale

4.2.1. Présentation de l'installation expérimentale

Le banc d'essais présent dans les locaux d'Akryvia et utilisé pour la campagne de mesures expérimentales est schématisé sur la Figure 4.1. Il s'agit d'un banc d'essais d'endurance de la torche plasma Akryvia, dont l'objectif n'est pas de réaliser des découpes, mais de tester le comportement et la résistance dans le temps des différents composants de la torche. L'anode n'est donc pas une plaque de métal à découper. À la place, un disque en cuivre est utilisé, sur le bord duquel s'accroche l'arc électrique produit par la torche. Afin que le disque ne soit pas découpé ni endommagé, celui-ci est en rotation continue tout en étant refroidi par eau depuis l'intérieur du disque.

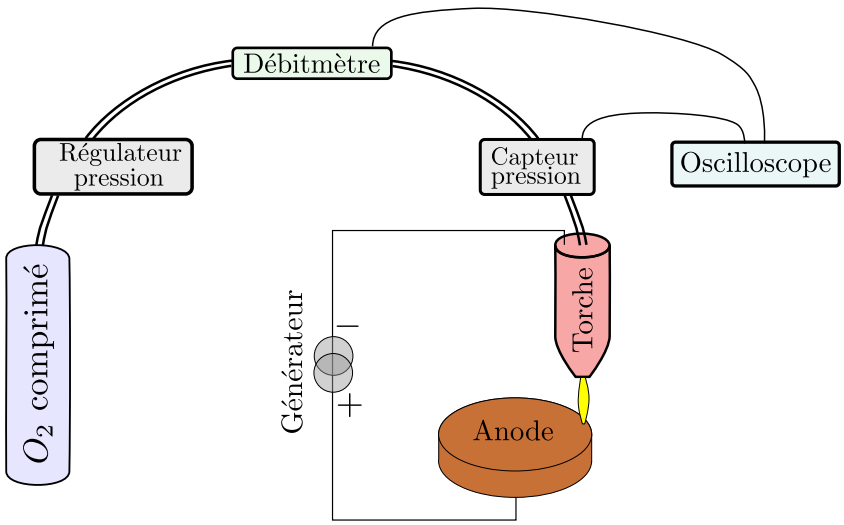


Figure 4.1. – Schéma du dispositif expérimental

La fonctionnement général du dispositif est le suivant : du dioxygène contenu dans une bouteille sous pression est injecté dans la torche en passant par un circuit de gaz, tandis qu'un courant électrique continu produit par un générateur permet d'établir un arc électrique et de

générer un plasma entre la torche (plus particulièrement la cathode) et le disque en cuivre. La pression d'injection dans la torche est contrôlée au moyen d'un régulateur de pression localisé sur le circuit de gaz, en amont de l'entrée de la torche. Dans le circuit de gaz, en aval du régulateur de pression, un débitmètre massique est également présent afin de réaliser les mesures de débits de gaz. L'appareil utilisé est le débitmètre numérique thermique Mass-Stream D-6360 MFM de la marque Bronkhorst®. Enfin, un capteur de pression électronique est positionné juste en amont de l'entrée de la tuyère afin de s'affranchir des différences de pressions dues aux pertes de charge dans le circuit de gaz, entre le régulateur et l'entrée dans la torche. Le modèle du capteur de pression est le PU5403 de la marque IFM. Les outils de mesures sont tous connectés à un oscilloscope digital permettant de réaliser l'acquisition et l'enregistrement des différentes grandeurs mesurées, avec un intervalle d'échantillonnage de 5×10^{-5} s. La référence de l'oscilloscope est le PicoScope® 4824 de la marque Pico® Technology, comportant 8 voies analogiques.

Une photo montrant l'extérieur de la torche utilisée pour la campagne de mesures est disponible sur la Figure 4.2. Les différentes pièces consommables de la torche sont localisées à l'intérieur de la coiffe : l'injecteur de gaz, qui permet d'engendrer un écoulement en vortex, la cathode qui crée le champ électrique et sur laquelle l'arc s'accroche, ainsi que la tuyère convergente dans laquelle le plasma est produit et constricté. Les géométries détaillées de la cathode et de la tuyère utilisées seront présentées lors de l'étude numérique, en Section 4.3.1.1. Les éléments localisés à l'intérieur du corps de torche sont fixés et ne sont pas des consommables. On y trouve notamment les circuits de refroidissement à eau de la torche et des consommables, le circuit électrique permettant de conduire le courant vers la cathode, ainsi que les circuits de gaz conduisant l'oxygène de l'entrée de la torche vers l'injecteur.



Figure 4.2. – Photo de la torche Akryvia utilisée pour les essais expérimentaux

4.2.2. Plan d'essais

La campagne de mesures expérimentales a été divisée en deux parties : des mesures réalisées à froid sans plasma, où seul le circuit de gaz était utilisé et des mesures à chaud avec plasma, au cours desquelles un arc électrique était établi entre la cathode et le disque en cuivre. Dans les deux cas, la grandeur mesurée est le débit massique dans le circuit de gaz, qui est égal au débit massique dans la torche. Les paramètres utilisés dans le cadre de ces deux campagnes sont les suivants :

- Pour l'étude à froid, le débit d'oxygène a été mesuré pour huit valeurs de pression d'injection p_{in} dans la torche, allant de 3 à 10 bars : $p_{in} = 3,\ 4, ...,\ 9,\ 10$ bars. Les mesures ont été effectuées dans un premier temps en utilisant un injecteur axial qui ne produit pas de vortex dans la tuyère. Des mesures aux mêmes valeurs de pression ont ensuite été réalisées avec un injecteur permettant d'engendrer un écoulement en vortex.
- Lors de la campagne de mesures à chaud avec l'arc électrique établi entre la cathode et le disque, les mesures de débits massiques ont été effectuées en faisant varier deux paramètres : la pression d'injection p_{in} et le courant à la cathode I. Une première partie des essais a consisté à faire des mesures pour différentes valeurs de pressions p_{in} en fixant le courant à 50 A. Pour ces essais, les cinq valeurs des pressions d'injections ayant été considérées sont : $p_{in} = 3,\ 5,\ 7,\ 8$ et 10 bars. Au cours de la seconde partie des essais, la pression p_{in} était fixée à 7 bars et des mesures pour cinq valeurs distinctes du courant ont été réalisées : $I = 30,\ 50,\ 70,\ 90$ et 110 A.

Que ce soit pour la campagne d'essais à chaud ou celle à froid, pour chaque valeur de pression et/ou d'intensité, les mesures ont été répétées au minimum 4 fois afin de pouvoir évaluer la répétabilité des mesures et d'estimer un écart-type sur les débits mesurés.

4.2.3. Difficultés rencontrées et incertitudes sur les mesures

Concernant les difficultés rencontrées au cours de cette campagne expérimentale, plusieurs éléments ont ralenti et perturbé son bon déroulement.

- La première difficulté apparue dès le début de la campagne était la présence d'une fuite dans le circuit de gaz, conduisant à des valeurs de débits mesurées beaucoup trop élevées, étant donné que le débitmètre était positionné en amont de la fuite. L'emplacement de la fuite a été complexe à déterminer, car celle-ci était localisée à l'intérieur de l'embase, qui est une zone difficilement accessible. Cette embase correspond à la pièce dans laquelle la torche est fixée pour être connectée au reste du montage.
- Le deuxième élément, qui est celui ayant le plus perturbé les essais, est la régulation de pression. Nous avons perdu beaucoup de temps avant de comprendre que celle-ci avait une influence directe sur les débits mesurés. En effet, un mauvais réglage du régulateur de pression engendrait de légères oscillations de la pression d'oxygène injectée, qui se répercutaient directement sur les valeurs de débit mesurées par le débitmètre. Par conséquent, les mesures étaient erronées et très peu répétables, même dans le cadre d'essais à froid. N'ayant pas trouvé de jeu de paramètres optimal pour améliorer la régulation, la meilleure solution

pour assurer la fiabilité et la répétabilité des mesures fut de rallonger le circuit de gaz, en rajoutant une grande longueur de tuyau entre le régulateur de pression et le débitmètre. De cette façon, les oscillations de pression de faibles amplitudes étaient amorties et ne perturbaient plus les mesures du débitmètre. L'inconvénient de ce rallongement du circuit de gaz est l'augmentation des pertes de charges : une différence de pression non-négligeable est présente entre la sortie du régulateur et l'entrée de la torche. Cette perte de charge importante a justifié le choix de positionner un capteur de pression juste en amont de l'entrée de la torche, afin de pouvoir connaître la valeur réelle de la pression p_{in} injectée en entrée de torche, comme illustré sur la Figure 4.1.

- Un autre élément ayant influencé la campagne d'essais à chaud est la position du pied d'arc anodique. Pour un même jeu de paramètres opératoires, d'un essai à l'autre, la position du point d'accroche de l'arc sur le disque pouvait être modifiée de quelques millimètres. Cela entraînait des mesures de tension d'arc très peu répétables, pouvant varier de plus 20% entre deux essais identiques. Bien que la position verticale de la torche était maintenue fixe entre deux essais, sa position horizontale pouvait quant à elle légèrement différer d'un essai à l'autre. Cela vient du fait que la position horizontale de la torche doit être modifiée au cours d'un essai : pour que le transfert de l'arc entre la torche et le disque se déroule bien, la torche doit être placée au-dessus de l'arête supérieure du disque. Cependant, une fois l'arc accroché sur le disque, il est nécessaire d'écarter la torche vers l'extérieur du disque afin de déplacer la position d'accroche de l'arc sur la face latérale du disque et ainsi de limiter l'endommagement de son arête. Ce déplacement de la torche est schématisé sur la Figure 4.3. Dans la configuration du banc d'essai utilisé lors de la campagne, le déplacement horizontal de la torche était un processus à effectuer manuellement au moyen d'une molette à tourner. Bien qu'un système de butée mécanique ait été mis en place afin de pouvoir toujours écarter la torche jusqu'à la même position finale, celle-ci pouvait tout même légèrement varier d'un essai à l'autre, se répercutant sur les valeurs de tensions d'arc mesurées. Cette limitation importante nous a finalement conduits à ne pas présenter de comparaisons entre les valeurs de tension mesurées expérimentalement et celles calculées numériquement. Le banc d'essai est actuellement en cours de modification afin de motoriser et d'automatiser le déplacement horizontal de la torche. Cela devrait permettre dans le futur de pouvoir réaliser des mesures de tension répétables entre deux essais effectués dans des conditions opératoires similaires.

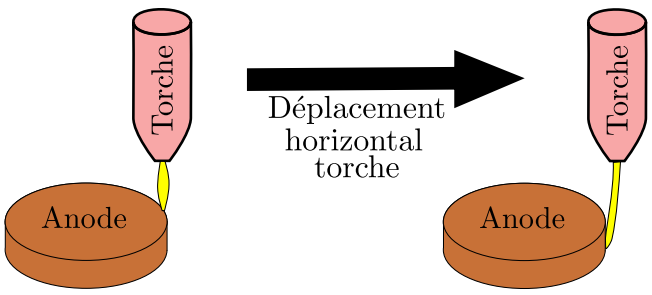


Figure 4.3. – Changement de la position d'attache de l'arc sur le disque lorsque la torche est déplacée horizontalement.

Relativement à la précision des résultats expérimentaux, dans le cas de la campagne effectuée, les variables d'intérêt concernées par des incertitudes de mesures sont les débits massiques Q_m, les intensités du courant I, ainsi que les pressions d'injection du gaz en entrée de torche p_{in}. Selon le « Guide to the expression of uncertainty in measurement » (GUM) [104] proposé par le Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), les incertitudes de mesures peuvent être classées en deux catégories : les incertitudes de type A et les incertitudes de type B, dont les descriptions sont données ci-dessous.

- Les incertitudes de type A sont liées à la répétabilité des mesures effectuées. Lorsqu'une même mesure est répétée plusieurs fois, les différentes valeurs obtenues peuvent varier autour d'une valeur moyenne. Les incertitudes de type A permettent alors de quantifier les erreurs de mesures dues au comportement des valeurs déterminées en répétant une même mesure. Ce type d'incertitude est calculée par des méthodes statistiques utilisant la moyenne et l'écart type de l'ensemble des valeurs obtenues pour une même mesure. Par exemple, dans le cas de n mesures distinctes x_i $(i = 1, ..., n)$ d'une grandeur x effectuées dans des conditions similaires, l'estimation de x est donnée par la moyenne des valeurs mesurées :

$$x = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4.1}$$

  et son incertitude e correspond à l'écart type :

$$e = \sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{4.2}$$

  L'incertitude précédente estimée à partir de l'écart-type est appelée incertitude standard, caractérisant la déviation standard de la distribution de valeurs mesurées. En supposant que l'ensemble des valeurs mesurées suit une loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$, il est possible d'affirmer avec un seuil de confiance de 68% que $x \in [\bar{x} - \sigma(x), \bar{x} + \sigma(x)]$. Afin d'augmenter le seuil de confiance au-delà de 68%, les incertitudes étendues E sont généralement considérées. Celles-ci sont directement proportionnelles aux incertitudes standards : $E = ke$, avec k un réel positif. En considérant une distribution suivant une loi normale, pour $k = 1.96$, un niveau de confiance de 95% est obtenu et pour $k = 3$, le seuil de confiance atteint 99.7%.

  Concernant les mesures expérimentales réalisées au cours de notre campagne d'essais, après avoir contourné les problèmes dus à la régulation de pression, les mesures étaient très répétables et l'écart type des valeurs mesurées était toujours très faible. Nous avons donc négligé ces dernières pour ne prendre en compte que les incertitudes de type B, plus élevées dans notre cas.

- Les incertitudes de type B utilisées dans notre étude correspondent aux erreurs dues à la précision des différents appareils de mesure et sont donc des erreurs systématiques. Celles-ci sont directement fournies dans les fiches techniques des appareils utilisés. Ainsi, les mesures de pressions p_{in} ont été effectuées avec une incertitude fixe de ± 0.125 bars, les mesures de courants I avec une incertitude de ± 4.2 A et les mesures de débits massiques Q_m avec une incertitude fixe de ± 1.0 NLpm (normaux litres par minute).

4.3. Comparaisons à froid

Les premières comparaisons entre résultats expérimentaux et numériques sont dédiées à l'écoulement à froid dans la torche. Cela signifie que le plasma n'est pas pris en compte et que seul le gaz est injecté.

4.3.1. Paramètres des simulations numériques

4.3.1.1. Présentation de la configuration

Pour cette étude à froid, on considère l'écoulement de gaz dans le cas de la torche industrielle, dont la géométrie est schématisée sur la Figure 4.4. Le gaz entre par l'inlet avec une certaine pression d'injection p_{in} de plusieurs atmosphères, ainsi qu'une température T_{in}. Celui-ci est alors accéléré dans une tuyère convergente, puis passe au travers d'un canal de rayon constant $R_{col} = 0.5$ mm. En sortie de canal, le fluide est expulsé dans l'atmosphère ambiante, formant un jet supersonique sous-détendu.

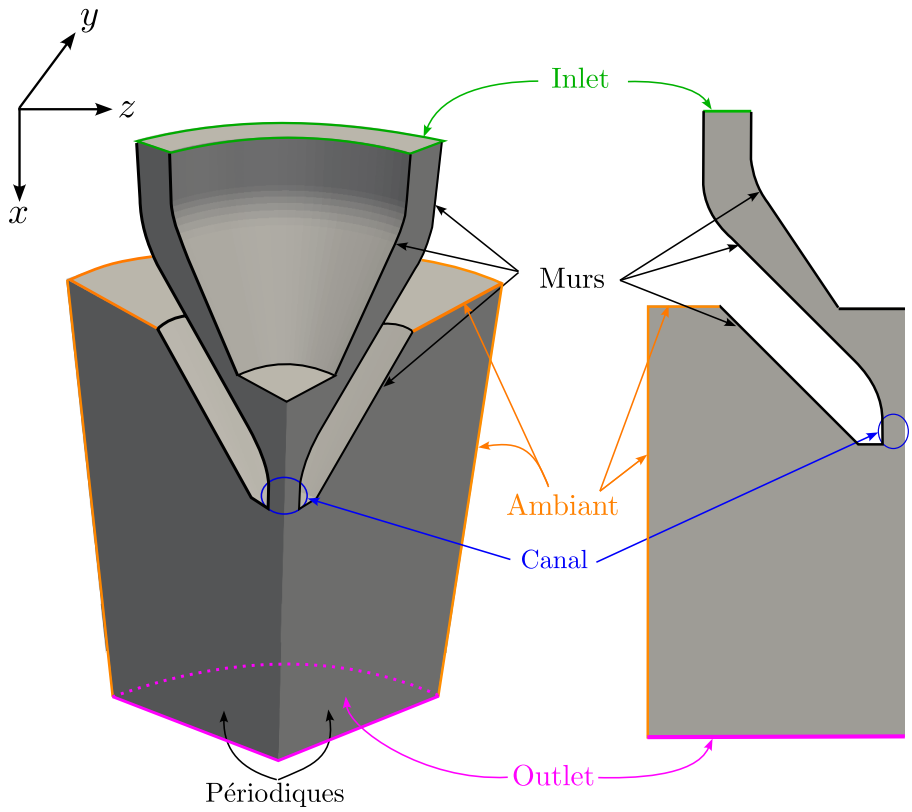


Figure 4.4. – Schémas de la géométrie considérée pour l'étude à froid

Dans la configuration industrielle complète, en amont de l'inlet représentée sur la Figure 4.4, un injecteur est présent pour permettre une entrée de gaz en vortex. La forme de cet injecteur étant complexe, il est nécessaire de considérer la géométrie complète à 360° afin de pouvoir l'inclure dans les simulations. De plus, des maillages comportant un très grand nombre de cellules sont requis afin de discrétiser la géométrie de cet injecteur. Dans la suite, afin de réduire significativement les temps de calculs, nous avons choisi de ne pas inclure l'injecteur dans la géométrie. Une géométrie d'un quart du domaine avec des conditions limites périodiques a

ainsi été considérée et l'injection en vortex a été modélisée au moyen d'une condition limite particulière au niveau de l'inlet. La prise en compte de cet injection vortex est abordée dans la Section 4.3.1.4.

4.3.1.2. Modèle et méthode numérique

De manière similaire à l'étude à froid présentée dans le Chapitre 2, les effets diffusifs (viscosité et diffusion de la chaleur) et gravitationnels sont négligés. Le modèle mathématique considéré est donc celui des équations d'Euler (2.4)-(2.5)-(2.6), associé à une loi d'état de gaz parfait (2.7)-(2.8). Le gaz injecté dans la torche est du dioxygène pur et le gaz ambiant considéré est également du dioxygène. Une approche plus réaliste aurait été de choisir de l'air comme gaz ambiant, mais le solveur développé ne permet pour l'instant pas de considérer plusieurs espèces. Cette simplification ne devrait cependant pas avoir d'impact sur les débits de gaz déterminés dans la torche, car seul du dioxygène s'écoule dans celle-ci. Enfin, concernant la méthode numérique utilisée afin de résoudre les équations, elle est identique à celle présentée pour l'étude à froid dans le Chapitre 2, en Section 2.4 : une méthode volumes finis centrée avec un calcul des flux par le schéma HLLC a été employée, associée à une reconstruction MUSCL au niveau des faces des cellules.

4.3.1.3. Conditions limites et maillages

Les conditions limites utilisées sur les différents bords du domaine sont détaillées dans le Tableau 4.1. Au niveau de l'inlet, la pression et la température sont imposées. Bien que la température du gaz injecté à l'inlet n'ait pas pu être mesurée expérimentalement, nous avons estimé que celle-ci était proche de la température ambiante de 290 K. La composante axiale de la vitesse u_{in} n'est pas fixée, elle est déterminée de manière à ce que la conservation de la masse soit respectée. Dans le cas d'une injection en vortex, les deux autres composantes de la vitesse d'injection v_{in} et w_{in} sont imposées, comme présenté dans la section suivante. Les différents murs sont considérés comme des parois glissantes adiabatiques et une pression ambiante de 1 bar est imposée, associée à une température ambiante de 290 K.

Bords	Variables		
	p	T	$\boldsymbol{u}$
Inlet	$p = p_{in}$	$T = T_{in} = 290$ K	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{in} = (u_{in}, v_{in}, w_{in})$
Murs	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	Glissement
Ambiant	1 bar	290 K	–
Outlet	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = 0$

Tableau 4.1. – Conditions limites pour la simulation de la torche à froid.

Concernant les maillages utilisés, un exemple est présenté sur la Figure 4.5. Trois maillages distincts ont été considérés, avec différents niveaux de raffinements dans les trois directions. Une étude de convergence en maillage est présentée dans la Section 4.3.2.

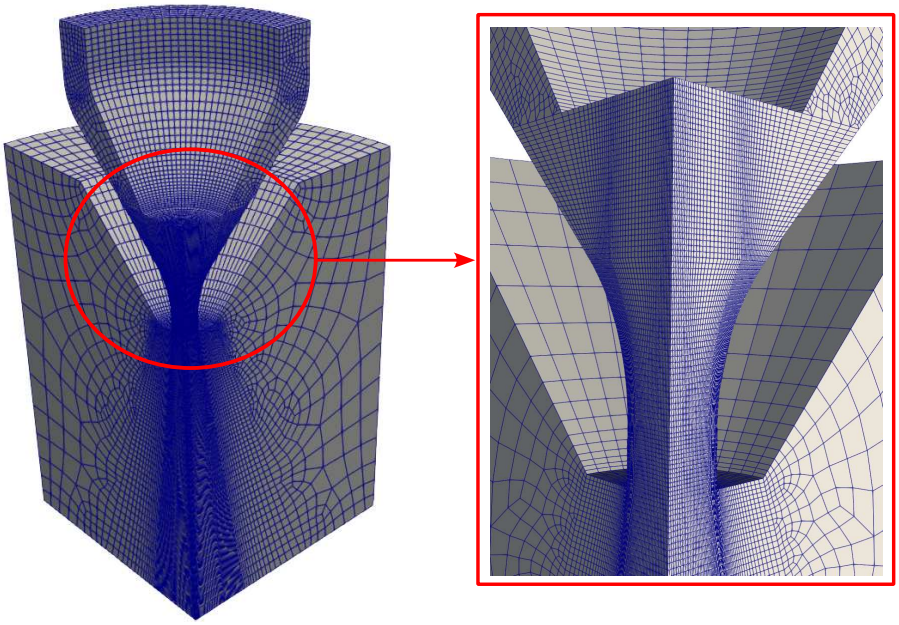


Figure 4.5. – Représentation d'un maillage utilisé pour l'étude de la torche à froid

4.3.1.4. Prise en compte de l'injection en vortex

Afin de modéliser l'injection du gaz en vortex, il est nécessaire d'imposer une composante de vitesse azimutale u_θ sur l'inlet. La vitesse sur l'inlet est donc de la forme :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ -u_\theta \ \sin\theta \\ u_\theta \ \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

où $\theta = \text{atan2}(z, y)$. Le calcul de la vitesse azimutale à imposer sur l'inlet est effectué en considérant la conservation de la quantité de mouvement azimutale entre la sortie des canaux des injecteurs et l'inlet du domaine de calcul. La face de sortie de l'injecteur dans le plan (y, z) est schématisée sur la Figure 4.6a. Celui-ci est constitué de 8 canaux cylindriques, inclinés d'un angle α par rapport à l'axe x, tel que représenté sur la Figure 4.6b. Enfin, la Figure 4.7 schématise la surface de l'inlet, qui correspond à l'entrée du domaine de calcul.

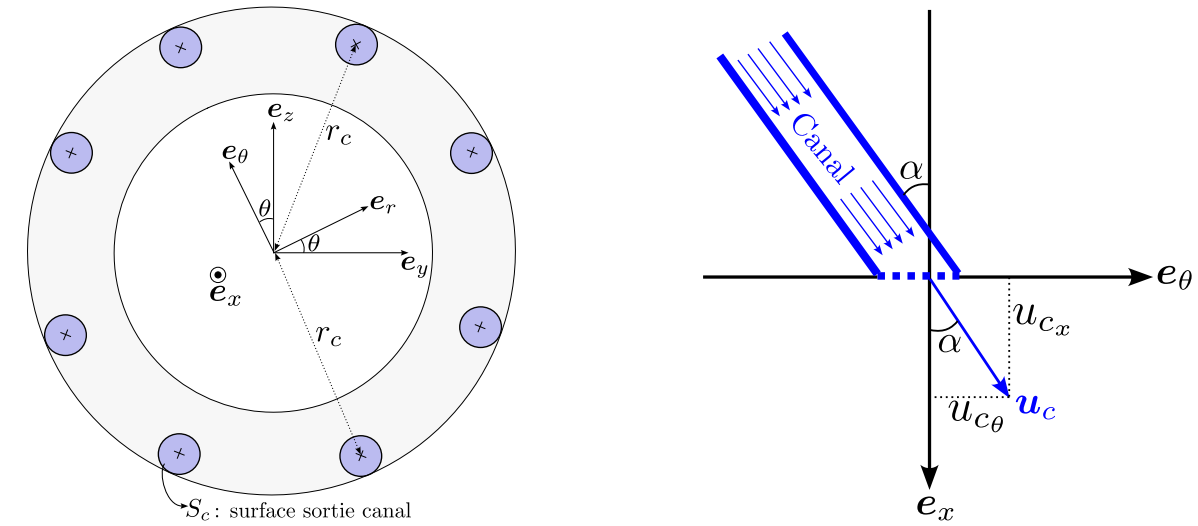
En notant $G_\theta(\text{can})$ la quantité de mouvement azimutale au niveau de la surface de sortie d'un canal de l'injecteur et $G_\theta(\text{in})$ la quantité de mouvement azimutale à l'inlet, la conservation de la quantité de mouvement azimutale donne :

$$G_\theta(\text{in}) = 8 \ G_\theta(\text{can}) \tag{4.4}$$

L'expression de G_θ à la sortie d'un canal est la suivante :

$$G_\theta(\text{can}) = \iint_{S_c} \rho \ u_\theta \ u \ r \ \mathrm{d}S, \tag{4.5}$$

où $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ est la distance radiale.



(a) Coupe dans le plan (y, z) de sortie des canaux

(b) Géométrie en sortie de canal

Figure 4.6. – Présentation de la configuration au niveau de la sortie des canaux

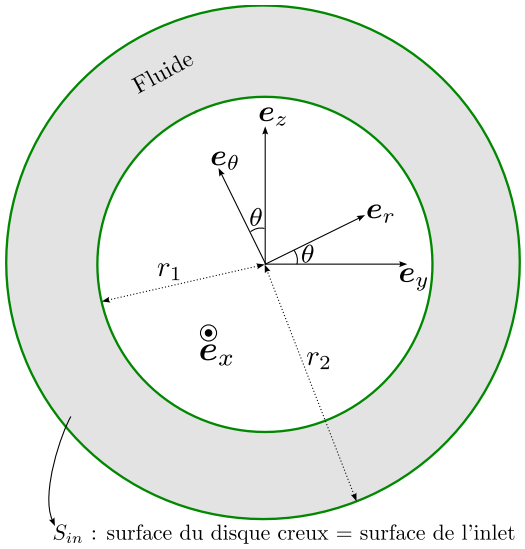


Figure 4.7. – Schéma de la face correspondant à l'entrée du domaine de calcul

En faisant l'hypothèse que la densité et les composantes de la vitesse sont constantes sur toute la surface de sortie d'un canal, l'expression précédente se simplifie en :

$$G_\theta(\text{can}) = \rho_{in}\ u_{c_\theta}\ u_{c_x} \iint_{S_c} r\ \mathrm{d}S, \tag{4.6}$$

avec ρ_{in} la densité du fluide au niveau de la sortie du canal, u_{c_θ} et u_{c_x} les vitesses axiale et azimutale à la sortie du canal. La sortie du canal étant inclinée d'un angle α par rapport à $\boldsymbol{e}_x$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ par rapport à $\boldsymbol{e}_\theta$, la vitesse azimutale au niveau de la sortie d'un canal s'exprime comme :

$$u_{c_\theta} = u_{c_x} \tan(\alpha)\,. \tag{4.7}$$

En introduisant Q_m la valeur du débit massique dans la torche, la vitesse axiale u_{c_x} peut être calculée comme suit :

$$u_{c_x} = \frac{Q_m}{8\ \rho_{in}\ S_c}, \tag{4.8}$$

où S_c est la valeur de la surface de sortie d'un canal. Enfin, en calculant l'intégrale et en injectant les relations précédentes dans l'expression (4.6), la formulation finale de $G_\theta(\text{can})$ est :

$$G_\theta(\text{can}) = \frac{Q_m^2\ r_c\ \tan(\alpha)}{64\ \rho_{in}\ S_c}, \tag{4.9}$$

avec r_c la distance radiale entre l'axe x est le centre du canal.

Au niveau de l'entrée du domaine de calcul, la symétrie axiale de la géométrie permet de calculer la quantité de mouvement azimutale de la manière suivante :

$$G_\theta(\text{in}) = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho\ u_\theta\ u_x\ r^2\ \mathrm{d}r \tag{4.10}$$

En faisant de nouveau l'hypothèse que la densité ρ_{in} ainsi que les composantes de la vitesse u_{in_x} et u_{in_θ} sont constantes sur toute la surface de l'inlet, l'intégrale peut être calculée et la relation précédente se simplifie en :

$$G_\theta(\text{in}) = \frac{2}{3}\pi\ \rho_{in}\ u_{in_\theta}\ u_{in_x} \left(r_2^3 - r_1^3\right) \tag{4.11}$$

En introduisant une nouvelle fois la valeur du débit massique $Q_m = u_{in_x}\ \rho_{in}\ S_{in}$, on obtient l'expression finale de $G_\theta(\Sigma_{in})$ suivante :

$$G_\theta(\text{in}) = \frac{2\pi\ Q_m}{3 S_{in}} \left(r_2^3 - r_1^3\right) u_{in_\theta}. \tag{4.12}$$

Enfin, en utilisant la relation (4.4) de conservation de la quantité de mouvement azimutale, la vitesse azimutale à imposer au niveau de l'inlet peut se calculer comme suit :

$$u_{in_\theta} = \frac{3\tan(\alpha)\, r_c\ S_{in}}{16\pi\,(r_2^3 - r_1^3)\, S_c}\ \frac{Q_m}{\rho_{in}}. \tag{4.13}$$

De plus, au niveau de l'inlet, le ratio entre la vitesse axiale et la vitesse azimutale s'exprime comme :

$$\frac{u_{in_\theta}}{u_{in_x}} = \frac{3\tan(\alpha)\, r_c\ S_{in}^2}{16\pi\,(r_2^3 - r_1^3)\, S_c}. \tag{4.14}$$

Dans le cas de l'injecteur considéré dans ce chapitre et ayant également été utilisé pour les mesures expérimentales, les canaux sont inclinés d'un angle $\alpha = 55°$. Ainsi, une application numérique simple permet d'obtenir un ratio de vitesses u_{in_θ}/u_{in_x} d'environ 3.15. La validation de cette méthode de calcul de la vitesse azimutale à imposer sur l'inlet est présentée dans la section suivante.

4.3.2. Présentation des résultats numériques

4.3.2.1. Validation numérique de l'injection en vortex

La méthode choisie afin de valider la modélisation de l'injection en vortex à l'inlet a été de réaliser un calcul sur la géométrie complète (360°) avec les injecteurs et de comparer les résultats avec ceux obtenus en réalisant un calcul sur le quart de géométrie sans injecteur, en imposant la vitesse azimutale au niveau de l'inlet. Notons que cette validation a été effectuée en considérant une tuyère ayant un canal de rayon $R_{col} = 0.35$ mm. L'intégralité des résultats présentés dans les sections qui suivent ont été obtenus pour un canal de rayon $R_{col} = 0.5$ mm. Une seule simulation sur la géométrie complète avec l'injecteur a été réalisée, car le grand nombre de cellules dans le maillage induit un temps de calcul au moins 5 fois supérieur à celui des simulations sur le quart de la géométrie. Pour cette simulation, le gaz est injecté avec une pression d'entrée $p_{in} = 6$ bars et une température $T_{in} = 290$ K. La Figure 4.8 représente le champ de vitesse azimutale au niveau de l'inlet. Il s'agit du résultat obtenu à partir du calcul sur la géométrie complète avec l'injecteur.

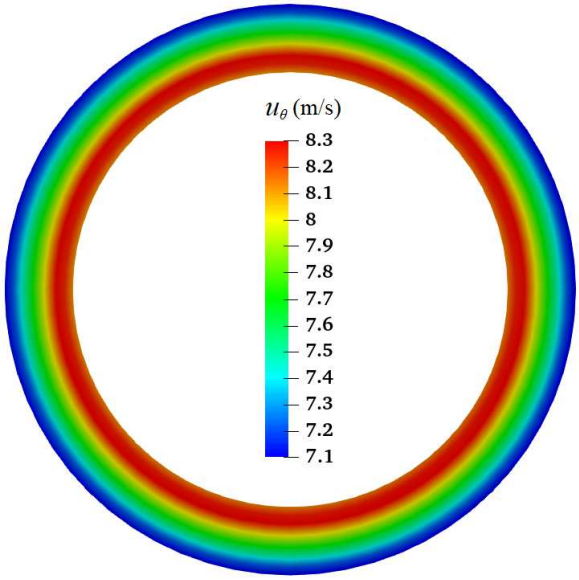
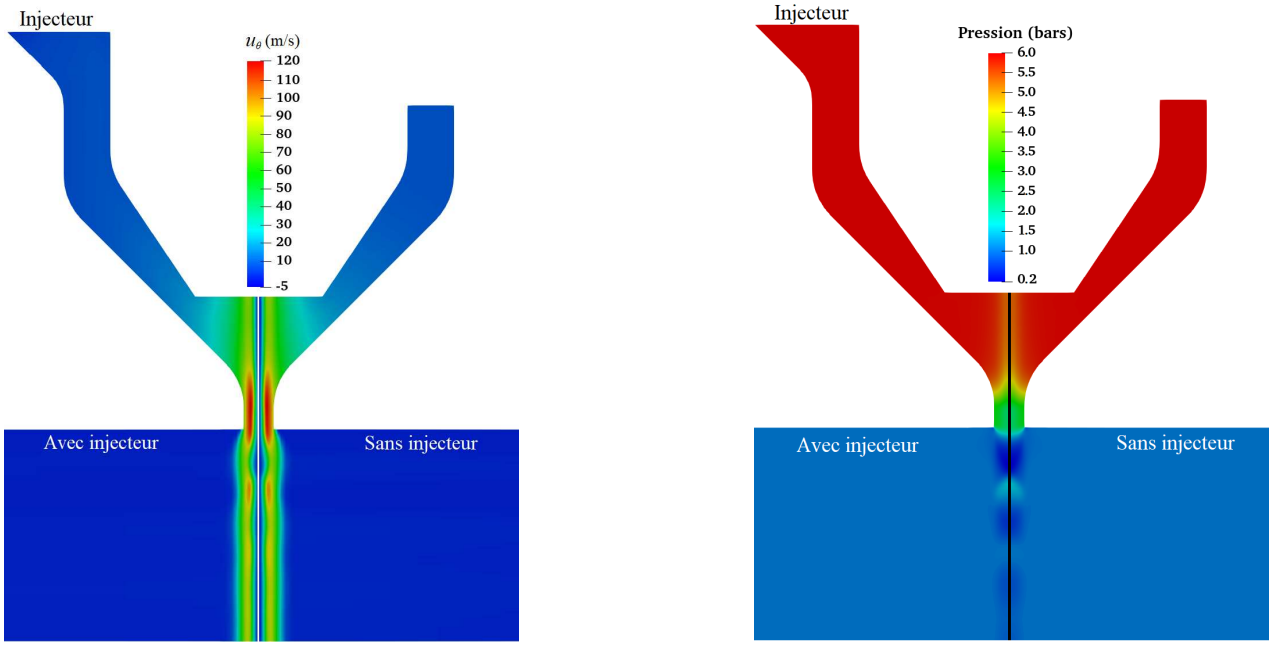


Figure 4.8. – Vitesse azimutale calculée à partir de la simulation sur la géométrie complète avec l'injecteur - Représentation dans le plan (z, y) correspondant à l'inlet de la géométrie sans injecteur.

On remarque premièrement que la vitesse azimutale sur l'inlet varie peu, permettant de constater que l'hypothèse d'une vitesse azimutale constante à imposer sur l'inlet est proche du cas réel. La valeur moyenne de u_θ obtenue sur cette surface est de 7.75 m/s. Dans ce cas de figure, l'application de la formule théorique (4.13) donne quant à elle une valeur $u_\theta = 7.30$ m/s, soit une erreur relative d'environ 0.06 (6%), qui reste acceptable. Nous avons tout de même décidé d'appliquer un coefficient correcteur de 1.06 pour calculer les vitesses azimutales à imposer au niveau de l'inlet. La vitesse azimutale finale imposée au niveau de l'inlet est donc $u_{in_\theta,\text{cor}} = 1.06\ u_{in_\theta}$.

La simulation a alors été réalisée sur le quart de la géométrie sans injecteur, en imposant sur l'inlet cette nouvelle valeur de vitesse azimutale. La Figure 4.9a représente les champs de

vitesse azimutale déterminés dans les deux cas : pour la géométrie complète avec l'injecteur et pour le quart de géométrie sans l'injecteur. Pour des raisons de confidentialité, la géométrie de l'injecteur n'est pas représentée sur la figure. Celui-ci est localisé au niveau de l'inscription « Injecteur » en haut a gauche de la figure. Dans les deux cas, les champs de vitesse azimutale obtenus sont très similaires, avec une vitesse azimutale maximale de 120 m/s dans le canal. L'influence de cette vitesse azimutale sur la structure générale de l'écoulement est étudiée dans la partie suivante. Les champs obtenus dans ces deux cas pour les autres variables sont également tous très proches, comme par exemple pour la pression représentée sur la Figure 4.9b. Ces analyses permettent finalement de valider numériquement la manière dont la vitesse azimutale est calculée et imposée sur l'inlet. Cette façon de modéliser l'injection en vortex sera également validée grâce aux comparaisons avec les données expérimentales, présentées dans la Section 4.3.3.



(a) Vitesse azimutale (b) Pression

Figure 4.9. – Comparaison des champs de vitesse azimutale et de pression obtenus dans le cas de la géométrie complète avec injecteur et sur le quart de géométrie sans injecteur.

4.3.2.2. Analyse de l'influence de l'injection en vortex

Dans cette partie, nous présentons et comparons les résultats obtenus dans le cas d'une injection axiale et d'une injection vortex, pour une pression d'entrée $p_{in} = 5$ bars et une température $T_{in} = 290$ K.

a) Comparaison à la théorie pour une injection axiale

En considérant une injection axiale de gaz dans une tuyère convergente-divergente, une formule théorique basée sur un calcul quasi-1D permet de déterminer le débit massique Q_m dans la tuyère, en fonction de la pression et de la température d'injection, ainsi que de la section de la tuyère au niveau du col [105]. Cette formulation quasi-1D signifie que l'on considère uniquement les variations des différentes grandeurs dans la direction de l'axe x de la tuyère, mais cette

dernière peut avoir une section variable $S(x)$ en fonction de la position axiale. Ce type de configuration quasi-1D est représentée sur la Figure 4.10.

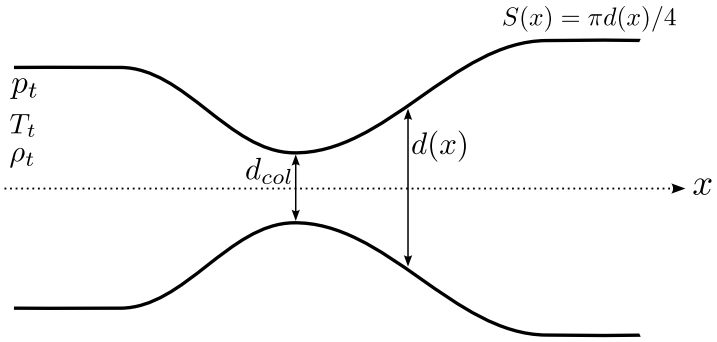


Figure 4.10. – Configuration quasi-1D d'une tuyère convergente-divergente.

La valeur théorique du débit $Q_{m_{th}}$ est obtenue en considérant que l'écoulement est isentropique, adiabatique et que le fluide est un gaz parfait, de viscosité et conductivité thermique nulles. Elle n'est valide que lorsque la tuyère est amorcée, c'est à dire que la pression d'injection dans la tuyère est supérieure à la pression à la sortie de la tuyère d'un facteur 2 au moins. Dans une tuyère amorcée, le nombre de Mach Ma est inférieur à 1 en amont du col, égal à 1 au niveau du col, et supérieur à 1 en aval de celui-ci. La valeur théorique du débit massique est alors la suivante [105] :

$$Q_{m_{th}} = p_t \; S_{col} \; \sqrt{\frac{\gamma}{r \; T_t}} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{4.15}$$

avec
- p_t et T_t les pression et température totales à l'entrée de la tuyère,
- $S_{col} = \pi d_{col}^2/4$ la section du col,
- r la constante spécifique du gaz considéré,
- γ le coefficient adiabatique du gaz ($\gamma = 1.4$ pour un gaz parfait diatomique)

Précisons que dans la configuration étudiée, au niveau de l'inlet, les faibles vitesses d'injections ($Ma < 0.02$) induisent que les pressions et températures totales sont très proches des pressions et températures statiques, avec un écart relatif inférieur à 0.01%. Les valeurs de pression et température d'injections données dans la suite correspondent aux valeurs statiques. Pour la simulation numérique dans la torche, nous avons tout d'abord vérifié que le débit massique correspondait à la valeur théorique. Dans le cas d'une injection axiale de dioxygène à une pression $p_{in} = 5$ bars et une température $T_{in} = 290$ K dans une tuyère ayant un col de rayon 0.5 mm, le calcul du débit théorique donne une valeur $Q_{m_{th}} = 9.796 \times 10^{-4}$ kg/s. La valeur déterminée numériquement à l'issue de la simulation était de $Q_{m_{num}} = 9.403 \times 10^{-4}$ kg/s, soit un coefficient de décharge

$$Cd = \frac{Q_{m_{num}}}{Q_{m_{th}}} = 0.960. \tag{4.16}$$

Dans le cas d'une configuration tri-dimensionnelle, la valeur du coefficient de décharge est normalement légèrement inférieure à 1.0. En effet, plus le rayon de courbure du convergent est faible, plus le coefficient de décharge diminue [106, 107]. Cependant, le rayon de courbure du convergent étudié étant assez élevé, d'après les résultats des études expérimentales [106] et

numériques [107], un coefficient proche de 0.99 devrait être obtenu, ne correspondant pas à la valeur déterminée dans notre cas.

Afin de mieux comprendre les raisons pour lesquelles la valeur du coefficient de décharge déterminée numériquement est plus faible que les valeurs attendues d'après la littérature, la ligne de niveau correspondant à un nombre de Mach $Ma = 1$ a été représentée dans la configuration réelle sur la Figure 4.11.

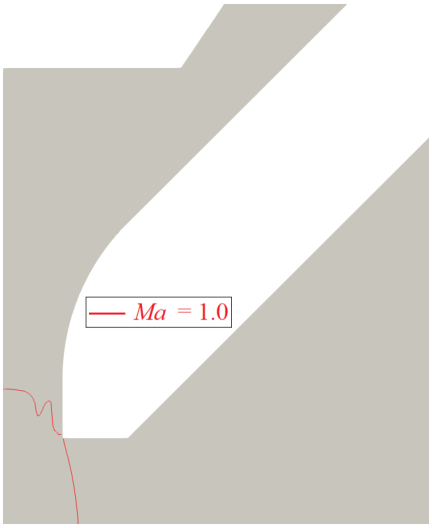
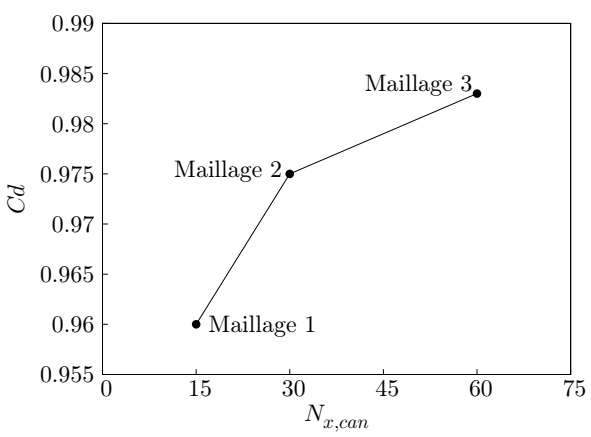
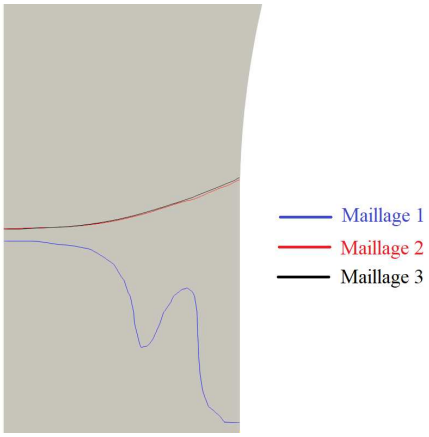


Figure 4.11. – Ligne de niveau $Ma = 1$ déterminée numériquement.

Le profil obtenu est très atypique : au niveau du col, la ligne de niveau devrait normalement être horizontale ou légèrement incurvée. Ce comportement nous a ainsi incité à réaliser la simulation avec des maillages plus raffinés que celui initialement utilisé. Nous avons d'abord vérifié que la discrétisation dans la direction azimutale était suffisante pour avoir une section de canal discrétisée égale à la section réelle du canal de la torche. Avec 16 cellules dans la direction azimutale, un rapport S_d/S_{Col} de 0.998 est obtenu, où S_d correspond à la section discrétisée. Cette dernière étant donc très proche de la section réelle du canal, il est peu probable que la discrétisation dans la direction azimutale soit à l'origine de la valeur de Cd obtenue. Dans la direction axiale, ce premier maillage était composé de $N_{x,can} = 15$ cellules dans le canal de section constante, localisé entre le col et la sortie de tuyère. Un deuxième maillage a alors été considéré, comportant $N_{x,can} = 30$ cellules dans la direction axiale au niveau de la même zone, ainsi qu'un troisième maillage avec $N_{x,can} = 60$. Les débits déterminés numériquement avec les deuxième et troisième maillages sont respectivement $Q_{m_{num}} = 9.551 \times 10^{-4}$ kg/s et $Q_{m_{num}} = 9.629 \times 10^{-4}$ kg/s, correspondant à des coefficients de décharge de 0.975 et 0.983, comme représentés sur la Figure 4.12a. Ainsi, en raffinant le maillage, les valeurs obtenues semblent bien converger vers un coefficient de décharge s'approchant de 0.99. Les lignes de niveaux correspondant à $Ma = 1$ obtenues avec les trois maillages dans le canal de tuyère sont représentées sur la Figure 4.12b. Les profils obtenus dans le cas des maillages 2 et 3 sont bien en accord avec les profils théoriques. Finalement, avec un maillage suffisamment fin, les débits déterminés numériquement se rapprochent des valeurs théoriques, c'est à dire des coefficients de décharge de l'ordre de 0.99 pour des convergents à faible rayon de courbure, comme dans notre cas. Le reste des calculs à froid présentés dans la suite ont alors été effectués avec le troisième maillage, le plus raffiné.



(a) Coefficients de débit

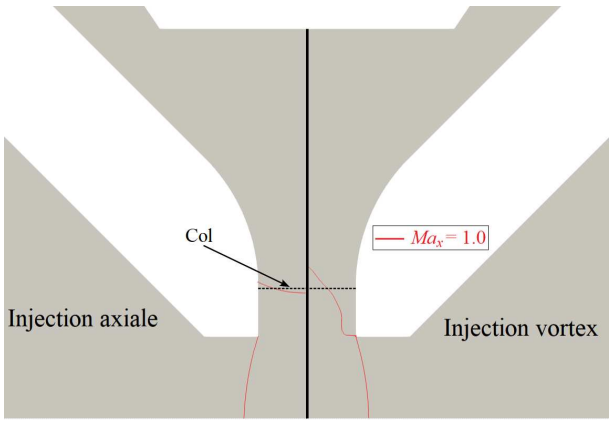


(b) Lignes de niveau $Ma = 1$

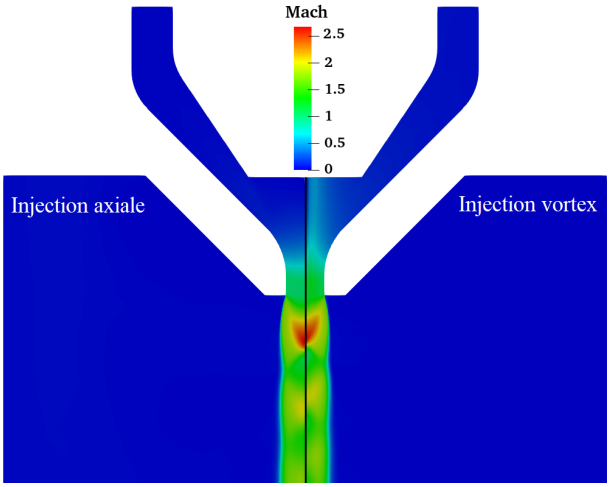
Figure 4.12. – Évolutions des coefficients de débit et des nombres de Mach en fonction du maillage.

b) Influence de l'injection en vortex

Les résultats présentés dans cette partie sont ceux obtenus en considérant une injection axiale sur l'inlet et une injection en vortex, avec une pression d'entrée $p_{in} = 5$ bars et une température $T_{in} = 290$ K. Dans le cas de l'injection axiale, un coefficient de décharge de 0.983 est obtenu, alors qu'un coefficient de 0.823 est déterminé lorsque l'injection est en vortex. La diminution du coefficient de décharge dans les tuyères en présence de vortex a par exemple été étudiée dans [108] et [109]. Cette diminution du débit vient du fait que la présence du vortex au col de la tuyère induit une modification de la ligne de niveau 1.0 du nombre de Mach axial $Ma_x = u/c$, où u est la composante axiale de la vitesse et c est la vitesse du son. Ainsi, tandis que le nombre de Mach azimutal $Ma_\theta = u_\theta/c$ augmente, la valeur moyenne du nombre de Mach au niveau du col diminue lorsque l'écoulement est en vortex. Le déplacement de la ligne de niveau $Ma_x = 1.0$ avec le vortex est clairement visible sur la Figure 4.13a, et la modification du profil global de nombre de Mach est également montrée sur la Figure 4.13b. La Figure 4.14 permet également de comparer différents profils de nombre de Mach au niveau du col entre le cas de l'injection axiale et de l'injection vortex.



(a) Ligne de niveau $Ma_x = 1$



(b) Nombre de Mach Ma

Figure 4.13. – Comparaison des profils de nombre de Mach entre injection axiale et injection en vortex (maillage 3).

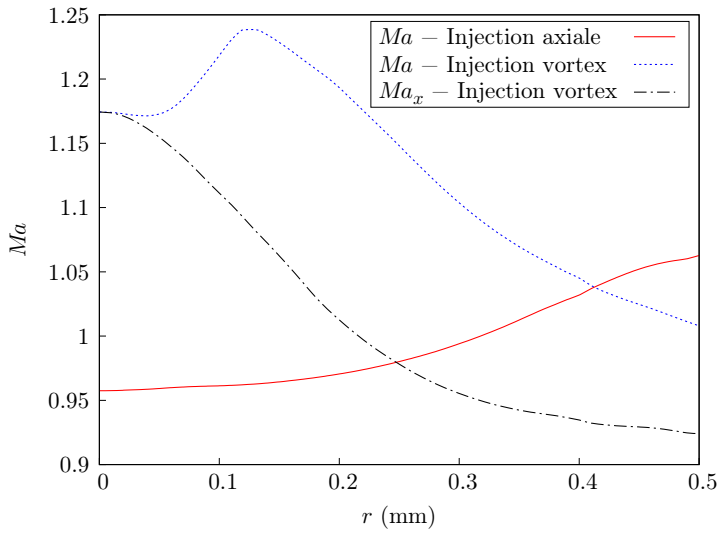
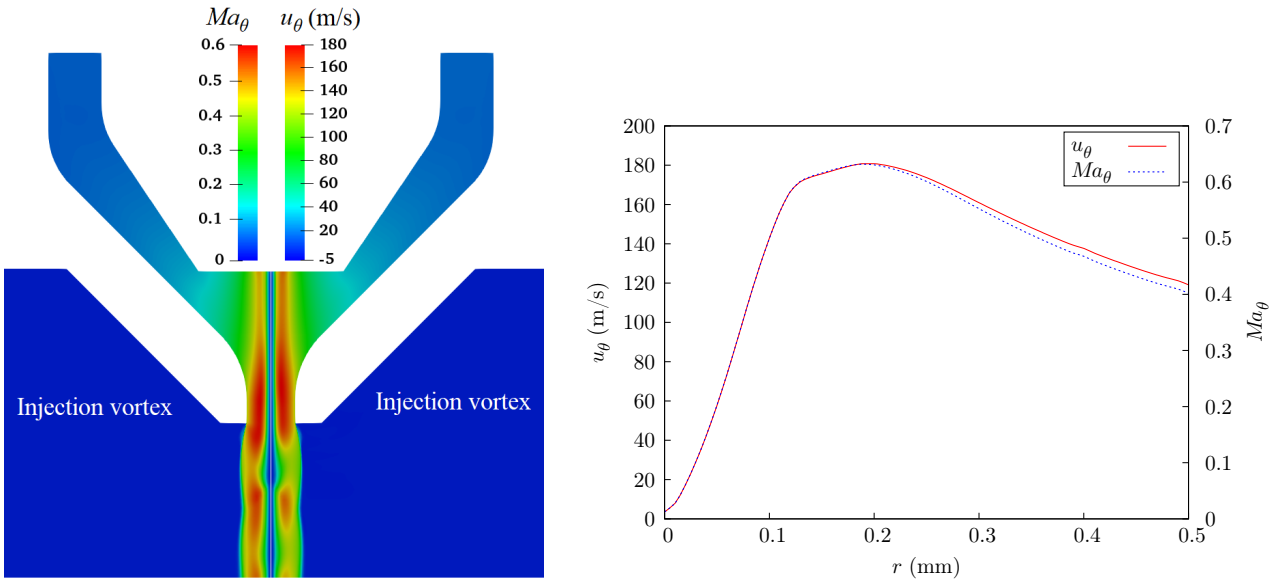


Figure 4.14. – Comparaison des profils de nombres de Mach au col entre injection axiale et injection en vortex.

Contrairement au cas de l'injection axiale, l'injection en vortex induit un nombre de Mach axial plus élevé au centre du col que proche de la paroi. Dans le cas de l'injection axiale, la valeur moyenne du nombre de Mach axial sur la surface du col est exactement égale à 1.0, alors que la valeur moyenne obtenue avec l'injection vortex est de 0.96.

Concernant les profils de vitesse et de nombre de Mach azimutaux déterminés avec l'injection en vortex, ces derniers sont représentés sur la Figure 4.15.



(a) Champ de vitesse et nombre de Mach azimutaux

(b) Profils de vitesse et nombre de Mach azimutaux au col

Figure 4.15. – Profils de vitesse et nombre de Mach azimutaux - Injection vortex.

On remarque bien que la composante azimutale de la vitesse n'est pas négligeable, avec une valeur maximale atteignant 180 m/s dans le canal, ainsi qu'un nombre de Mach azimutal de 0.6 au niveau du col. On note également la forme atypique des profils au niveau du col, avec des

valeurs croissantes en s'éloignant du centre et décroissantes en se rapprochant de la paroi, en passant par un maximum en $r \approx 0.2$ mm. Ces formes particulières des profils sont certainement dues à la forme spéciale de la tuyère en amont du col, avec la présence du corps non profilé au centre.

Dans le cas des écoulements avec vortex, l'étude théorique présentée dans [109] propose une formulation analytique permettant de calculer la valeur du coefficient de décharge en fonction du nombre de swirl S_w au niveau du col, dont l'expression est la suivante :

$$S_w = \frac{\iint_{S_{col}} \rho \; u_\theta \; u \; r \; \mathrm{d}S}{R_{col} \iint_{S_{col}} \rho \; u^2 \; \mathrm{d}S}. \tag{4.17}$$

Sur la surface du col, les résultats numériques permettent alors de calculer un nombre de swirl $S_w = 0.35$. Les valeurs analytiques des coefficients de décharge ont été calculées dans [109] en considérant trois types de profils de vitesses azimutales au col :

1. un profil de vitesse constant : $u_\theta = K$, où K est une constante,
2. un profil de vitesse de type rotation de corps solide : $u_\theta = K(r/R_{col})^n$, avec $n > 0$,
3. un profil exponentiel : $u_\theta = K \; \dfrac{1 - \exp(-(r/r_0)^2)}{1 - \exp(-(R_{col}/r_0)^2)} \; \dfrac{R_{col}}{r}$, où r_0 est une constante.

Les valeurs analytiques ainsi déterminées pour les différents types de profils de vitesse sont représentées sur la Figure 4.16.

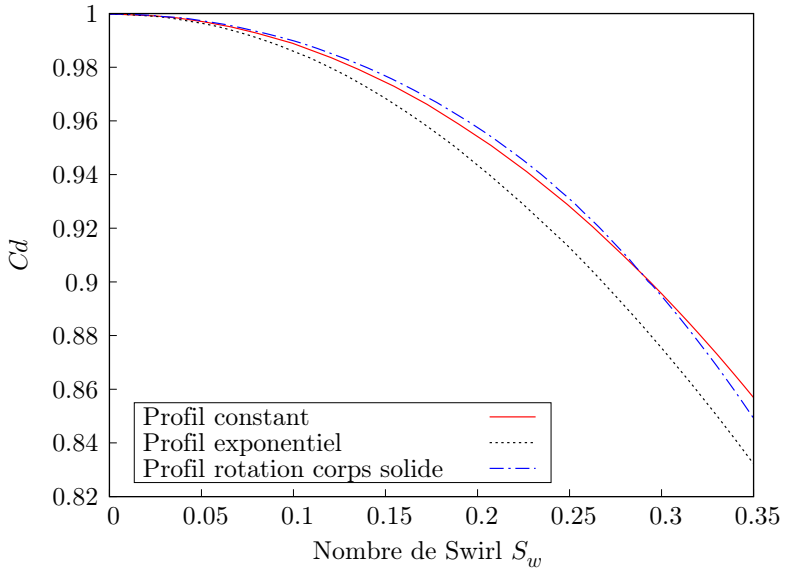


Figure 4.16. – Coefficient de décharge en fonction du nombre de swirl S_w pour différents profils de vitesse azimutale au niveau du col - Valeurs analytiques (*issu de* [109] et extrapolé pour $S_w > 0.3$).

Ces valeurs ayant initialement été présentées pour des nombres de swirl compris entre 0 et 0.3, les valeurs affichées ici pour les nombres de swirl $S_w > 0.3$ sont issues d'une extrapolation effectuée à partir d'une régression polynomiale de degré 3. Bien que dans notre cas, le profil de

vitesse azimutal au col (voir Figure 4.15b) ne corresponde pas aux trois profils considérés dans cette étude analytique, la valeur du coefficient de débit de 0.823 obtenue numériquement semble bien être proche des valeurs analytiques.

4.3.3. Comparaison et analyse des résultats expérimentaux et numériques

Cette partie est dédiée à la comparaison des débits déterminés expérimentalement et numériquement dans le cas de la torche à froid, pour différentes valeurs de pression d'injection et en considérant deux types d'injections : une axiale et une en vortex. Pour l'injection axiale, les mesures expérimentales ont été réalisées en utilisant un injecteur avec un angle $\alpha = 0°$, tandis qu'un injecteur avec $\alpha = 55°$ a été utilisé pour le cas avec le vortex. Les mesures et les calculs ont été effectués pour huit valeurs de pressions p_{in}, réparties de manière uniforme entre $p_{in} = 3$ bars et $p_{in} = 10$ bars. Les conditions des calculs numériques sont identiques à celles présentées dans la Section 4.3.2.2, le seul paramètre ayant été modifié est la pression d'injection p_{in}. Le maillage utilisé est le troisième, c'est à dire le plus raffiné.

4.3.3.1. Cas d'une injection axiale

Pour l'injection axiale, la Figure 4.17 présente les valeurs des débits mesurées expérimentalement et calculées numériquement en fonction de la pression d'injection. La valeur théorique du débit massique $Q_{m_{th}}$ (4.15) pour une configuration quasi-1D est également représentée, ainsi que les coefficients de décharge Cd (4.16) obtenus expérimentalement et numériquement. Les valeurs des débits sont exprimées en normaux litres par minute (NLpm), qui correspondent à une conversion des débits massiques en litres par minute, normalisés par la densité du dioxygène à la pression atmosphérique de 1.01325 bars et pour une température de 273.15 K.

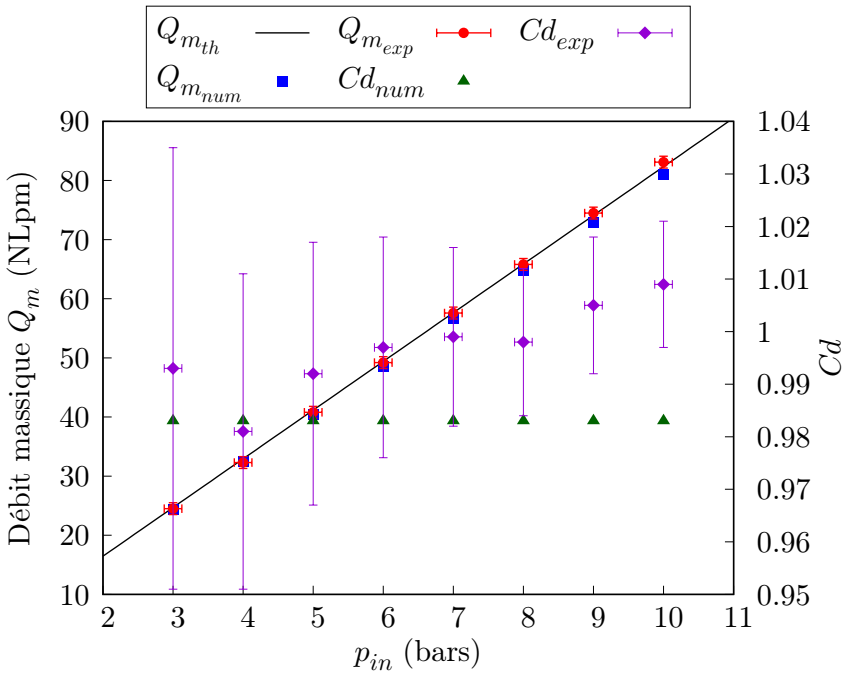


Figure 4.17. – Comparaison des débits théoriques, expérimentaux et numériques en fonction de la pression - Injection axiale.

Dans ce cas d'injection axiale, un bon accord global est obtenu entre les valeurs numériques, expérimentales et théoriques. Un coefficient de décharge constant de 0.983 est déterminé numériquement et des coefficients compris entre 0.981 et 1.009 ont été mesurés expérimentalement. Les coefficients de décharge ne pouvant normalement pas être supérieurs à 1.0, les faibles surestimations de débits déterminés expérimentalement peuvent s'expliquer par les incertitudes de mesures et/ou l'incertitude sur la pression d'injection non mesurée. Ces comparaisons permettent finalement de valider la capacité du solveur numérique à déterminer les bonnes valeurs de débits massiques dans le cas d'une injection axiale et également à bien représenter la structure de l'écoulement au niveau du col, à condition que le maillage soit suffisamment raffiné.

4.3.3.2. Cas d'une injection en vortex

Dans le cas où l'injection de gaz est effectuée en vortex, les débits mesurés expérimentalement et calculés numériquement en fonction de la pression d'injection sont représentés sur la Figure 4.18, ainsi que les coefficients de décharge associés.

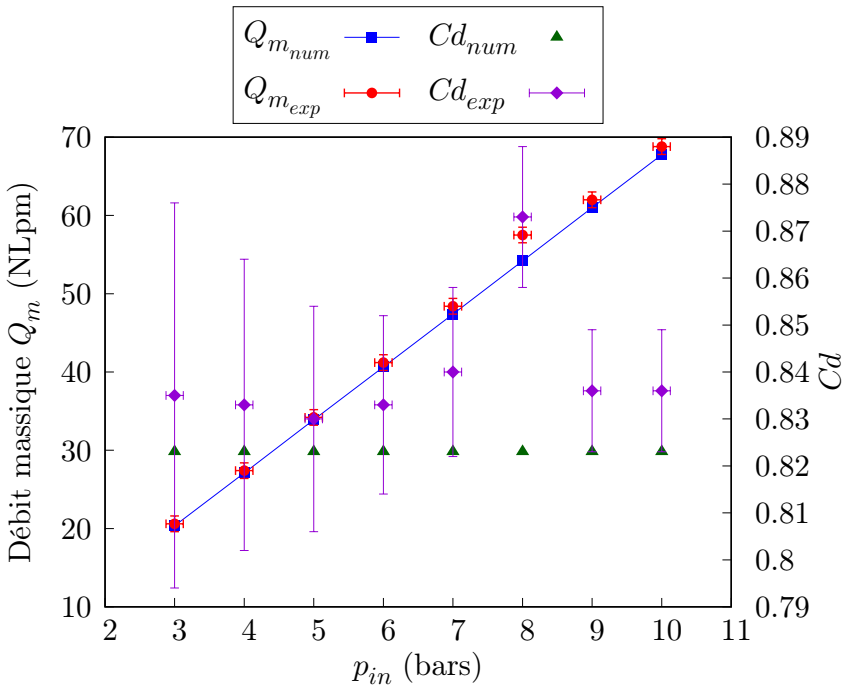


Figure 4.18. – Comparaison des débits expérimentaux et numériques en fonction de la pression - Injection vortex.

De nouveau, on constate un bon accord entre les valeurs numériques et expérimentales, avec un coefficient de décharge constant de 0.823 obtenu numériquement et des coefficients expérimentaux compris entre 0.833 et 0.873. Ces valeurs de coefficients de décharge concordent bien avec la gamme de coefficients déterminés analytiquement et représentés sur la Figure 4.16. La valeur expérimentale mesurée pour $p_{in} = 8$ bars s'éloigne de la tendance obtenue pour les autres valeurs de pression. Bien que cette mesure soit répétable, il peut s'agir d'un cas où le régime de régulation de la pression était instable et influait sur la mesure de débit.

Pour conclure sur ces comparaisons entre données expérimentales, numériques et théoriques, le solveur numérique développé pour la simulation de l'écoulement à froid semble être fiable

pour décrire l'écoulement au niveau du col de la tuyère et permet ainsi de déterminer des valeurs de débits en accord avec l'expérience. Cette conclusion est valable aussi bien pour une injection axiale que pour une injection en vortex, validant donc la manière de calculer et d'imposer la vitesse azimutale au niveau de l'inlet. Cette dernière validation est essentielle en amont des calculs à chaud avec plasma, d'autant plus que l'injection en vortex induit une modification du débit. En effet, les injecteurs utilisés dans les torches de découpe plasma sont toujours en vortex afin de stabiliser le pied d'arc cathodique au centre de l'électrode.

4.4. Comparaisons à chaud

Dans cette partie, les résultats obtenus numériquement et expérimentalement dans le cas de la torche à chaud avec plasma sont présentés et analysés. Les différents paramètres et conditions des simulations numériques sont d'abord introduits, puis les comparaisons et analyses entre les résultats numériques et expérimentaux sont effectuées.

4.4.1. Paramètres des simulations numériques

4.4.1.1. Présentation de la configuration

La géométrie utilisée dans le cadre des simulations à chaud est présentée ci-dessous sur la Figure 4.19.

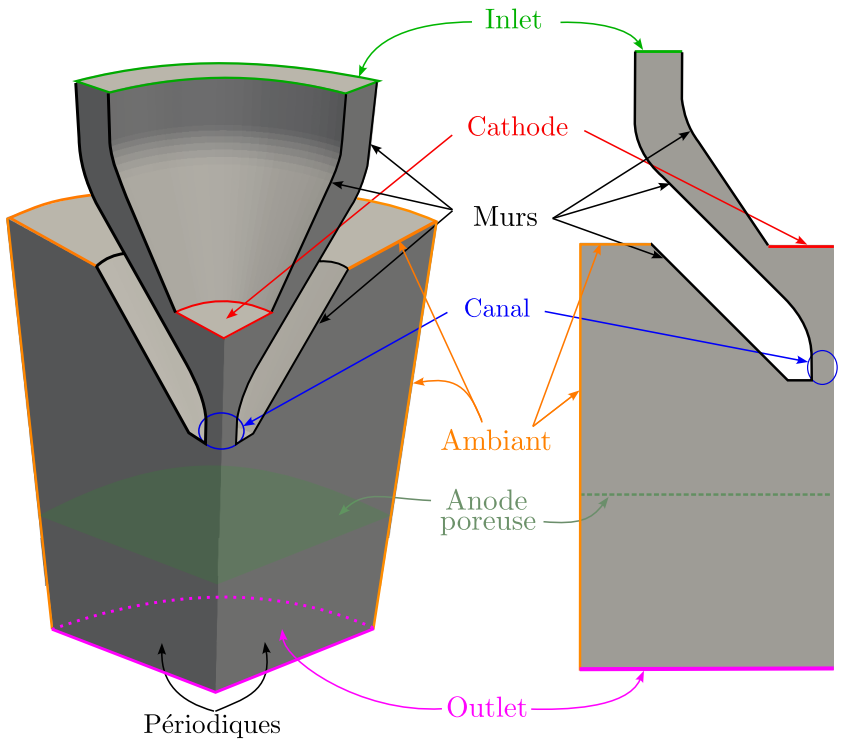


Figure 4.19. – Schémas de la géométrie considérée pour l'étude à chaud

Cette géométrie est équivalente à celle de l'étude à froid, mais la cathode correspond désormais à une paroi sur laquelle un profil de densité de courant est imposé, comme détaillé dans la Section 4.4.1.3. Une anode poreuse localisée 5 mm en aval de la sortie du canal est également

ajoutée, afin de modéliser le pied d'arc anodique par une zone de référence en-dessous de laquelle le potentiel électrique est fixé à 0 V. La description de l'écoulement établi à l'intérieur et à l'extérieur de la torche est similaire à celui de l'étude à chaud présentée dans la Section 3.2 du chapitre précédent. Le fluide entre dans la torche à plasma par l'inlet avec une pression de plusieurs atmosphères. En raison de la densité de courant imposée sur la cathode, le gaz est ionisé et devient un plasma, conduisant le courant au travers d'un arc électrique établi entre la cathode et l'anode. L'effet joule et la constriction du plasma dans la tuyère convergente induisent une augmentation de la température du gaz jusqu'à des valeurs comprises entre 20 et 30 kK proche de l'axe de la torche, en fonction de la pression d'injection du gaz et de l'intensité du courant imposées. Après avoir traversé le canal de tuyère de rayon constant $R_{col} = 0.5$ mm, le plasma est éjecté de la torche vers l'air ambiant, formant un jet supersonique sous-détendu de température très élevée.

4.4.1.2. Modèle et méthode numérique

a) Hypothèses

Les hypothèses utilisées afin de modéliser l'écoulement de plasma dans la torche sont identiques à celles détaillées dans la Section 3.3.1 du chapitre précédent. Celle-ci sont résumées ci-dessous :

- Le plasma est considéré comme un gaz visqueux, newtonien et compressible, supposé être à l'équilibre thermodynamique local (ETL).
- Les effets liés à la gravité sont négligés.
- L'écoulement est supposé laminaire, aucun modèle de turbulence n'a été utilisé.
- Les propriétés électriques du plasma sont prises en compte par le calcul du potentiel électrique ainsi que de l'effet joule et le champ magnétique auto-induit par le plasma est négligé.
- Contrairement à l'étude du chapitre précédent, le gaz considéré est du dioxygène pur. Les propriétés thermodynamiques et les coefficients de transport du dioxygène nous ont été fournis sous forme de tables ayant été calculées à des pressions de 1 et 8 bars, pour des températures comprises entre 300 K et 50 kK. Les différentes propriétés thermodynamiques et les coefficients de transport du dioxygène sont présentés en Annexe B.
- Les pertes par rayonnement du plasma sont modélisées avec la méthode du coefficient d'émission nette, en considérant un rayon de plasma fixé à 0.5 mm pour le calcul des valeurs du coefficient. Ce rayon étant égal à celui du canal de tuyère, il est donc légèrement supérieur au rayon de la colonne de plasma chaud constrictée au centre du canal. Cela peut conduire à une sous estimation des pertes radiatives, mais nous ne disposions que de ces coefficients d'émission nette calculés pour un rayon de 0.5 mm. Étant donné que le diamètre de la colonne plasma est dépendant de la pression d'injection et de l'intensité du courant, une meilleure approche aurait été d'utiliser des coefficients calculés pour différents rayons de plasma. Cependant, en raison des faibles variations du diamètre de la zone émettrice de rayonnement, cette approche aurait été complexe à mettre en place et les écarts obtenus par rapport au cas d'un rayon fixe auraient certainement été négligeables.

b) Modèle mathématique et équations d'état

Comme dans le Chapitre 3 précédent, le modèle mathématique utilisé est celui des équations de Navier-Stokes (3.2) couplées au calcul du potentiel électrique (3.1) par des termes sources (3.3) prenant en compte l'effet joule et les pertes radiatives. Concernant les équations d'état, les méthodes d'interpolations des propriétés thermodynamiques présentées en Section 3.3.3.1 ont été utilisées.

c) Méthode numérique

Le solveur numérique et les méthodes de discrétisation employés pour la résolution des équations du modèle ont été présentés dans la Section 3.4. Il s'agit d'une méthode volumes finis centrée avec un schéma numérique HLLC pour le calcul des flux, associé à une reconstruction MUSCL des variables au niveau des faces. Une méthode de Gauss est également utilisée pour discrétiser l'équation Laplacienne afin de calculer le potentiel électrique. De plus, les différents termes sources diffusifs ainsi que ceux correspondant à l'effet joule et aux pertes radiatives sont calculés de manière explicite. Enfin, une méthode explicite est également utilisée pour l'intégration en temps.

4.4.1.3. Conditions limites et maillage

Le Tableau 4.2 synthétise les conditions limites utilisées pour les différents bords de la géométrie représentée sur la Figure 4.19.

Bords	Variables			
	p	T	$\boldsymbol{u}$	V
Inlet	p_{in}	300 K	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{in} = (u_{in}, v_{in}, w_{in})$	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Cathode	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	Glissement	$-(\sigma \boldsymbol{\nabla} V) \cdot \boldsymbol{n} = J_c(r)$
Murs	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	Glissement	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Ambiant	1 bar	300 K	–	$\boldsymbol{\nabla} V = 0$
Outlet	$\boldsymbol{\nabla} p = 0$	$\boldsymbol{\nabla} T = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = 0$	$V = 0$

Tableau 4.2. – Conditions limites pour la simulation de la torche à chaud.

- Sur l'inlet, la température T_{in} et la pression p_{in} sont imposées. Suivant les conditions opératoires, p_{in} varie de 3 à 10 bars. Contrairement au cas à froid où la température du gaz injecté était de 290 K pour se rapprocher des conditions expérimentales, une valeur de 300 K est choisie pour cette étude à chaud. En effet, les tables thermodynamiques ayant été fournies pour des plages de températures allant de 300 K à 50 kK, des extrapolations pouvant impacter la précision des résultats seraient requises pour des températures d'injections situées en-dehors de ces plages. Concernant le vecteur vitesse à l'inlet, sa composante axiale u_{in} n'est pas imposée, elle est calculée par le solveur de manière à conserver le débit massique. Les deux autres composantes v_{in} et w_{in} sont imposées de manière à obtenir

une injection en vortex, comme détaillé en Section 4.3.1.4 lors de l'étude à froid. L'angle d'injection considéré dans cette étude à chaud est également $\alpha = 55°$.

- Les murs sont considérés comme des parois adiabatiques glissantes. Cette condition de glissement a été discutée dans la Section 3.5.1 du chapitre précédent et sera évoquée lors de l'analyse des résultats.

- La cathode est également une paroi adiabatique glissante, sur laquelle un profil parabolique de densité de courant $J_c(r)$ est imposé :

$$J_c(r) = J_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R_{cath}^2}\right). \tag{4.18}$$

Dans l'expression précédente, $J_{\max}$ correspond à la densité de courant maximale au centre de la cathode, et R_{cath} représente le rayon maximal sur lequel le profil est appliqué. Afin d'imposer un courant I pouvant varier en fonction des conditions opératoires, nous avons fait le choix de fixer l'amplitude maximale $J_{\max}$ à 1.6×10^8 A.m^{-2} et de calculer le rayon R_{cath} de façon à obtenir la bonne valeur du courant :

$$I = 2\pi \int_0^{R_{cath}} J_c(r)\ r\,\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad R_{cath}(I) = \sqrt{\frac{2I}{\pi J_{max}}}. \tag{4.19}$$

- Sur les bords nommés « ambiants », des conditions atmosphériques sont imposées avec une pression de 1 bar et une température de 300 K.

Le maillage utilisé pour les calculs à chaud a une structure similaire à celle présentée sur la Figure 4.5. Dans le canal de tuyère, le maillage comporte 30 cellules dans la direction axiale, 50 cellules dans la direction radiale et 16 cellules dans la direction azimutale.

4.4.2. Analyse des résultats expérimentaux et numériques

L'objectif de cette partie est de présenter et d'analyser les résultats obtenus expérimentalement et numériquement pour des pressions d'injection p_{in} comprises entre 3 et 10 bars et des intensités du courant I allant de 30 à 110 A. Les comparaisons entre les débits mesurés expérimentalement et ceux calculés numériquement sont d'abord présentées, puis une analyse de différents profils obtenus numériquement est effectuée dans le but de proposer et discuter certaines hypothèses pouvant expliquer les différences entre résultats expérimentaux et numériques.

4.4.2.1. Comparaisons des débits expérimentaux et numériques

a) Évolution du débit en fonction de l'intensité du courant

Les résultats présentés dans cette section correspondent aux mesures expérimentales et aux résultats numériques pour cinq valeurs du courant : $I = 30,\ 50,\ 70,\ 90$ et 110 A. Pour toutes ces valeurs du courant, la pression d'injection p_{in} est fixée à 7 bars. Les débits massiques obtenus expérimentalement et numériquement pour ces conditions opératoires sont représentés sur la Figure 4.20. Les valeurs indiquées pour un courant de 0 A correspondent aux mesures/calcul à

froid pour une pression d'injection de 7 bars, présentés dans la Section 4.3.3.2. L'écart relatif E_{rel} entre les valeurs expérimentales et numériques est également représenté. Ce dernier est défini comme suit :

$$E_{rel} = \frac{|Q_{m_{num}} - Q_{m_{exp}}|}{Q_{m_{exp}}} \tag{4.20}$$

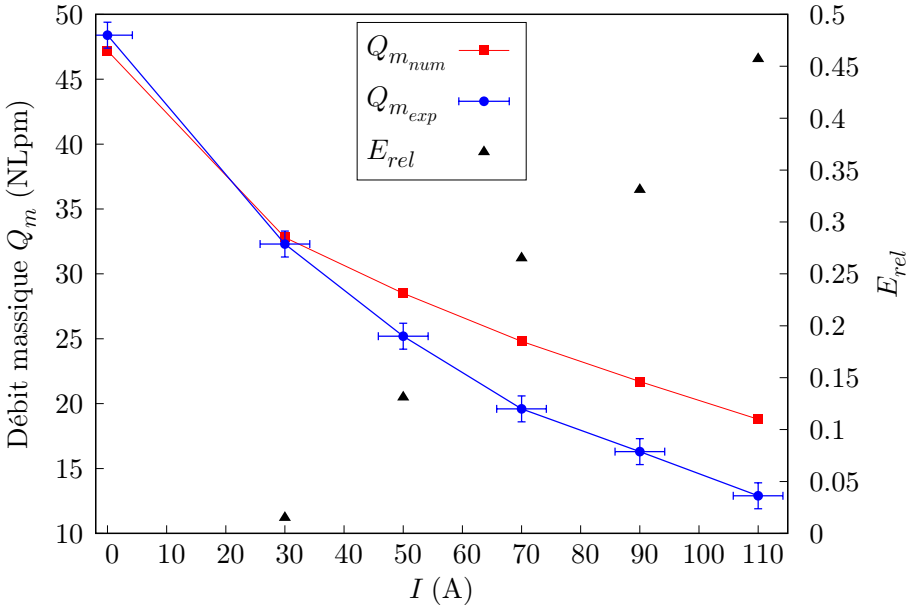


Figure 4.20. – Comparaison des débits expérimentaux et numériques en fonction de l'intensité du courant I - $p_{in} = 7$ bars.

La même tendance est obtenue entre les résultats expérimentaux et numérique, avec une diminution du débit massique lorsque l'intensité du courant augmente. Cela vient du fait que plus l'intensité du courant est élevée, plus le plasma est chaud et plus sa densité de masse diminue. L'augmentation de l'intensité du courant induit également un accroissement de la largeur de la colonne de plasma chaud, entraînant ainsi une réduction de l'épaisseur de la « couche froide » située proche des parois de la tuyère. Cette notion d'épaisseur de couche froide sera présentée plus en détails dans la Section 4.4.2.2.

Bien que les résultats expérimentaux et numériques suivent une même tendance générale, l'écart relatif entre ces derniers augmente avec l'intensité du courant. Ainsi, malgré des valeurs de débits massiques très proches pour un courant de 30 A avec un écart relatif faible inférieur à 0.02, ce dernier augmente de manière constante avec le courant jusqu'à atteindre une valeur de 0.46 pour une intensité de 110 A. Cet écart important entre les valeurs expérimentales et numériques pour les courants élevés montre que les hypothèses, le modèle et/ou le solveur utilisés pour la simulation des plasmas de découpe ne permettent pas de déterminer des valeurs de débits fiables. Dans la Section 4.4.2.2, nous cherchons à déterminer et discuter les origines possibles de ces différences.

b) Évolution du débit en fonction de la pression d'injection

La Figure 4.21 présente les valeurs de débits massiques mesurées expérimentalement et obtenues à partir des simulations pour différentes pressions d'injection p_{in}, avec une intensité du courant fixée à 50 A. Les valeurs déterminées semblant suivre des tendances linéaires en fonction de la pression, les courbes de régressions linéaires associées aux résultats expérimentaux et numériques sont représentées sur la figure. Les écarts relatifs E_{rel} entre les valeurs expérimentales et numériques sont également présentés.

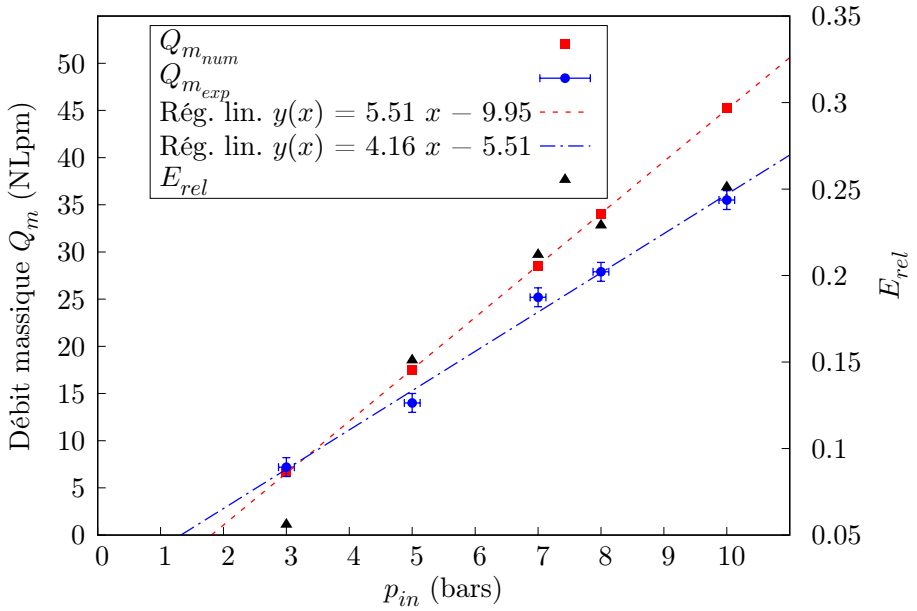


Figure 4.21. – Comparaison des débits expérimentaux et numériques en fonction de la pression d'injection p_{in} - $I = 50$ A.

Expérimentalement et numériquement, les débits massiques obtenus augmentent avec la pression d'injection. Cette tendance peut s'expliquer par deux effets. D'une part, en augmentant la pression d'injection, la densité du gaz froid injecté est également augmentée, induisant des valeurs de débits massiques croissantes. D'autre part, l'augmentation de la pression d'injection engendre un phénomène de constriction de la colonne chaude de plasma, associée à une réduction de son diamètre et donc à une augmentation de l'épaisseur de la couche froide. Le gaz « froid » ayant une densité de masse plus élevée que celle du plasma, l'augmentation de l'épaisseur de la couche froide induit alors une augmentation du débit massique. Afin d'affirmer cette seconde explication, l'évolution des coefficients de décharge $Cd_{c/f}$ en fonction de la pression est représentée sur la Figure 4.22. Ces coefficients de décharge correspondent aux ratios des débits massiques obtenus à chaud par rapport à ceux déterminés à froid, présentés sur la Figure 4.18 de la section précédente. Ainsi :

$$Cd_{c/f}(p) = \frac{Q_{m,chaud}(p)}{Q_{m,froid}(p)} \tag{4.21}$$

Que ce soit expérimentalement ou numériquement, les coefficients de décharge ne sont pas constants et augmentent avec la pression d'injection. Dans le cas d'un écoulement à froid dans une tuyère amorcée, les débits massiques augmentent proportionnellement à la pression d'injection (*cf.* relation (4.15)) et les coefficients de décharge restent constants. Pour l'étude à chaud, le fait

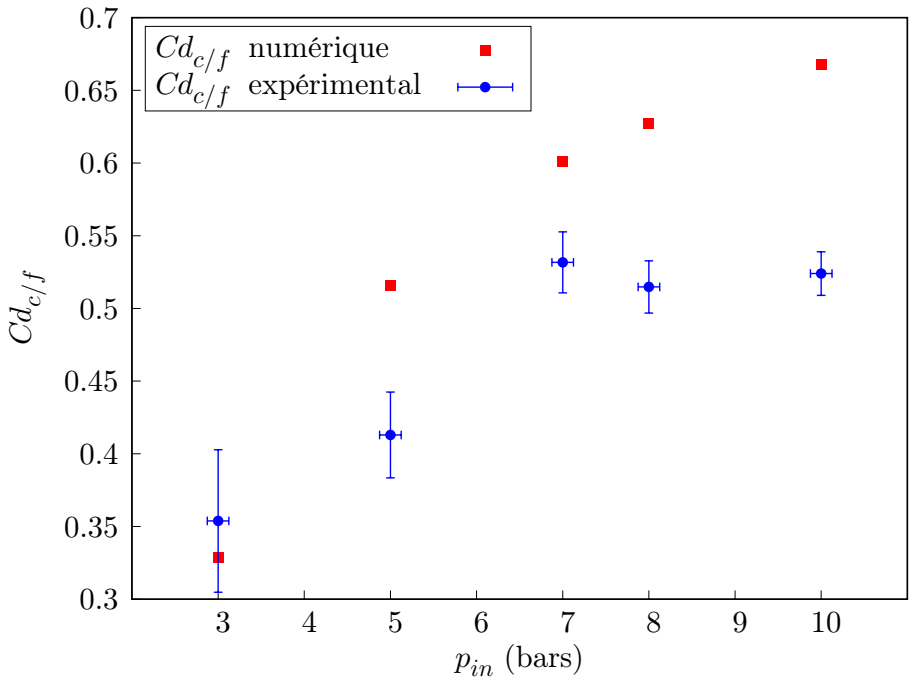


Figure 4.22. – Comparaison des coefficients de décharge expérimentaux et numériques en fonction de la pression d'injection p_{in} - $I = 50$ A.

que les coefficients de décharge sont croissants avec la pression montre alors que l'augmentation de la densité du gaz injecté n'est pas le seul phénomène responsable de l'augmentation du débit massique. En effet, comme analysé dans la section suivante, l'épaississement de la couche froide dû à la constriction du plasma a également un impact non négligeable sur l'évolution du débit.

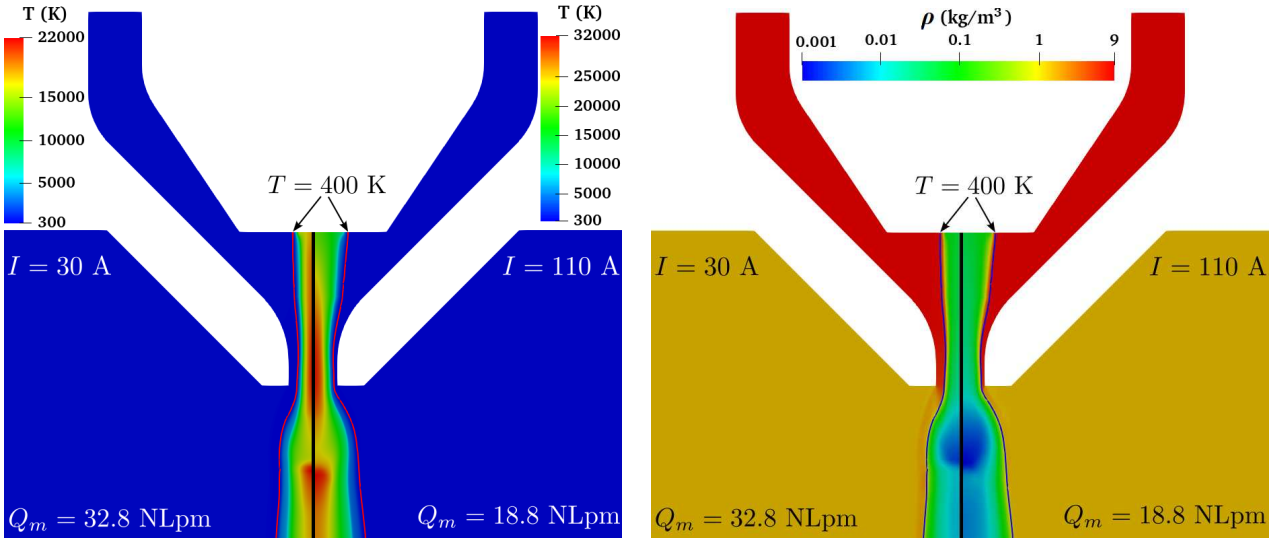
De manière équivalente au cas de l'évolution en fonction du courant, l'écart relatif entre les résultats numériques et expérimentaux (voir Figure 4.21) est négligeable pour les faibles pressions d'injection, mais celui-ci augmente progressivement pour les pressions d'injections élevées, jusqu'à atteindre une valeur de 0.26 pour une pression $p_{in} = 10$ bars. Le but de la section suivante est alors d'analyser les profils des variables déterminées numériquement afin de présenter certaines hypothèses pouvant expliquer les différences avec les résultats expérimentaux.

4.4.2.2. Analyses des résultats numériques et hypothèses sur les différences avec les résultats expérimentaux

Cette section présente différents profils obtenus avec les simulations numériques, afin de caractériser l'influence du courant et de la pression d'injection sur l'écoulement dans la torche. L'analyse des variables déterminées est ensuite utilisée afin d'apporter des explications sur les différences entre les débits mesurés expérimentalement et déterminés numériquement. Dans la suite, nous avons décidé de ne pas exploiter les résultats numériques calculés pour la pression d'injection de 10 bars. Ce choix vient du fait que les tables thermodynamiques ayant été fournies pour des pressions de 1 et 8 bars, les calculs effectués à 10 bars utilisent des extrapolations des différentes propriétés, pouvant induire un biais dans l'analyse des résultats obtenus pour cette pression d'injection.

a) Présentation et analyse des résultats numériques

Les champs de température T et de densité ρ déterminés à partir des simulations pour $I = 30$ A et $I = 110$ A (avec $p_{in} = 7$ bars) sont présentés sur la Figure 4.23.



(a) Température T (b) Densité ρ (échelle log)

Figure 4.23. – Comparaison des champs de température et de densité calculés pour $I = 30$ A et $I = 110$ A - $p_{in} = 7$ bars.

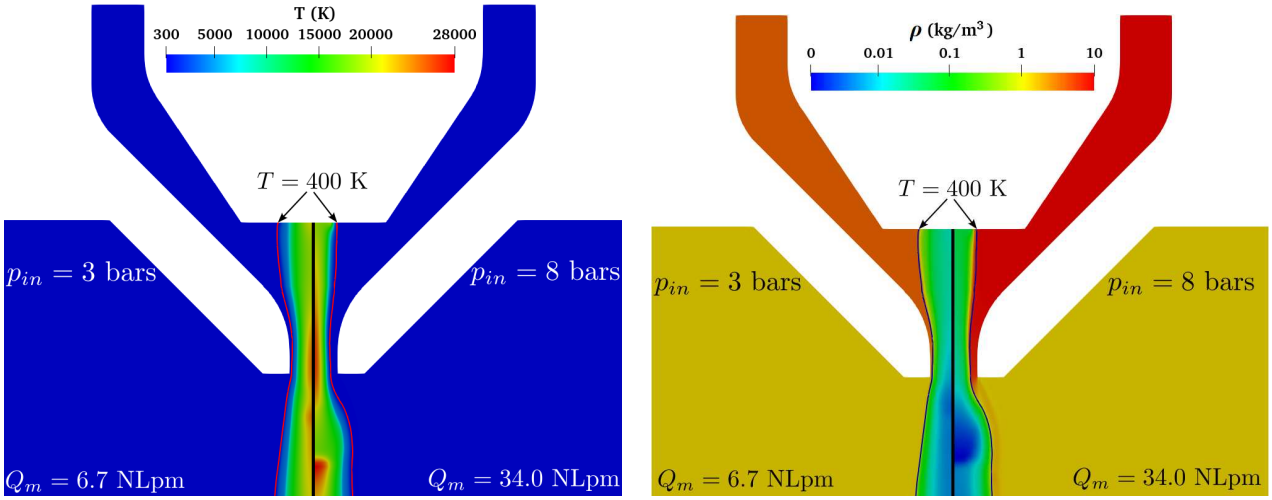
La ligne de niveau correspondant à $T = 400$ K est également tracée, afin de représenter la frontière entre la colonne de plasma chaud et la couche froide. Les champs obtenus permettent alors de confirmer qualitativement les tendances évoquées précédemment :

- Comme observé sur la Figure 4.23a, lorsque l'intensité du courant augmente, la température au centre de la colonne plasma augmente également : pour $I = 30$ A, au centre du canal, la température atteint 21.5 kK, contre 31.5 kK pour $I = 110$ A. En observant les profils de la ligne de niveau $T = 400$ K pour les deux intensités considérées, on constate également l'élargissement du plasma chaud avec l'augmentation du courant. De ce fait, dans le canal de tuyère, la température du fluide augmente globalement avec l'intensité du courant, ayant pour conséquence une diminution du débit massique.
- La Figure 4.23b met en avant le fait que l'élargissement de la colonne plasma diminue la section de passage du gaz froid ayant la densité la plus élevée. En effet, dans le canal, la densité de masse de la couche froide est 10 à 100 fois supérieure à celle du plasma. Ainsi, la valeur du débit massique calculée sera fortement influencée par l'épaisseur de la couche froide, car c'est dans cette dernière que la majorité de la masse de fluide s'écoule. En effet, pour un courant de 30 A, 88% du débit massique passe par la couche froide ayant une épaisseur de 0.16 mm. Pour $I = 110$ A, l'épaisseur de couche froide est de 0.07 mm et 72% du débit passe dans celle-ci.

Une autre grandeur ayant une influence sur la valeur du débit est la composante axiale de la vitesse u. Nous avons cependant choisi de ne pas représenter ici les champs de vitesse axiale, car il est difficile d'observer qualitativement des tendances sur cette variable. Une analyse plus

approfondie sera présentée dans la suite, en représentant les profils radiaux de vitesse axiale au niveau de la sortie du canal de tuyère.

La Figure 4.24 permet de comparer les champs de température T et de densité ρ obtenus numériquement avec des pressions d'injection $p_{in} = 3$ bars et $p_{in} = 8$ bars, pour une intensité du courant fixée à 50 A. Comme précédemment, la ligne de niveau correspondant à $T = 400$ K est également représentée.



(a) Température T (b) Densité ρ (échelle log)

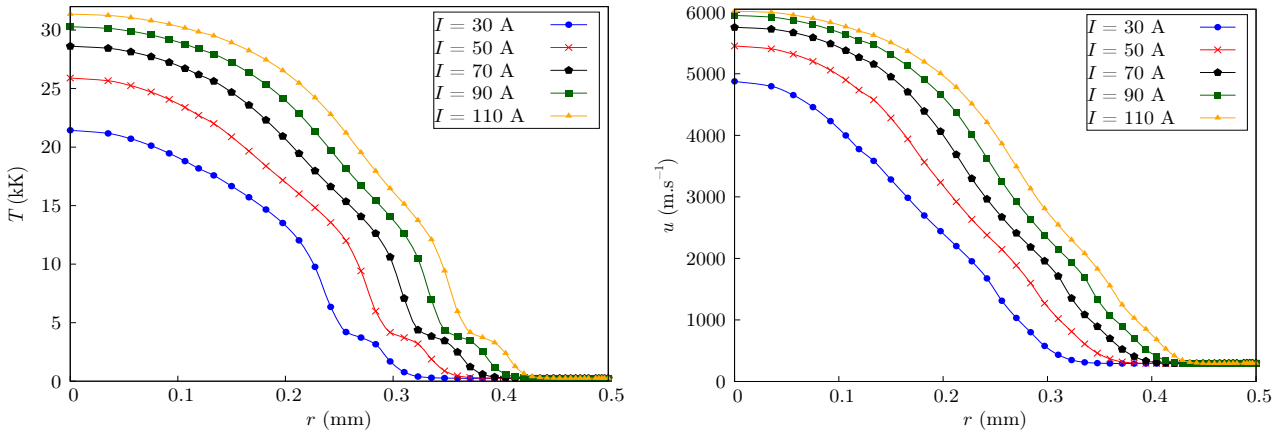
Figure 4.24. – Comparaison des champs de température et de densité calculés pour $p_{in} = 3$ bars et $p_{in} = 8$ bars - $I = 50$ A.

Plusieurs observations peuvent être effectuées en analysant les champs obtenus :

- La Figure 4.24a montre que le phénomène de constriction est accentué lorsque la pression d'injection augmente. En effet, la colonne de plasma chaud est significativement plus étroite lorsque $p_{in} = 8$ bars que dans le cas où $p_{in} = 3$ bars. Cette diminution de la largeur du plasma est accompagnée d'une augmentation de la température à son centre, avec une température maximale de 26.3 kK dans le canal pour $p_{in} = 8$ bars et une valeur maximale de de 24.2 kK lorsque $p_{in} = 3$ bars.
- L'analyse des champs de température ne permet pas à elle seule de définir une tendance d'évolution du débit massique en fonction de la pression d'injection, car deux effets s'opposent : l'élévation de la température au centre du plasma peut entraîner une diminution du débit massique, alors que l'épaississement de la couche froide peut induire une augmentation de ce dernier.
- Les profils de densité représentés sur la Figure 4.24b permettent de conclure quant à l'influence de la pression d'injection sur la valeur du débit massique. Lorsque la pression d'injection augmente, la couche froide s'épaissit et la densité du gaz froid injecté augmente. De plus, dans le canal, on remarque que malgré la température plus élevée du plasma lorsque $p_{in} = 8$ bars, sa densité est également supérieure à celle du cas à 3 bars. Cela s'explique par le fait que dans cette région, la pression du plasma est plus grande quand $p_{in} = 8$ bars. Ainsi cette augmentation de pression contrebalance l'effet sur la densité de l'augmentation de température, induisant finalement une valeur de densité dans le plasma

qui augmente avec la pression d'injection. Par conséquent, que ce soit dans la colonne chaude ou dans la couche froide, la densité du fluide augmente avec la pression d'injection, conduisant un débit massique supérieur.

Comme évoqué précédemment, les tendances d'évolution du débit massique en fonction du courant et de la pression d'injection doivent être confirmées par une analyse des profils de vitesses axiales. La Figure 4.25 représente les profils radiaux de température T, vitesse axiale u, quantité de mouvement axiale ρu et flux thermique $\kappa(\partial T/\partial r)$. Il s'agit des profils déterminés dans le canal de tuyère (juste en amont de sa sortie) pour les différentes valeurs d'intensité I considérées et pour une pression p_{in} de 7 bars.



(a) Température T

(b) Vitesse axiale u

(c) Quantité de mouvement axiale ρu

(d) Flux thermique radial $|\kappa\frac{\partial T}{\partial r}|$

Figure 4.25. – Profils radiaux déterminés numériquement à la sortie du canal de tuyère en fonction de l'intensité du courant I - $p_{in} = 7$ bars.

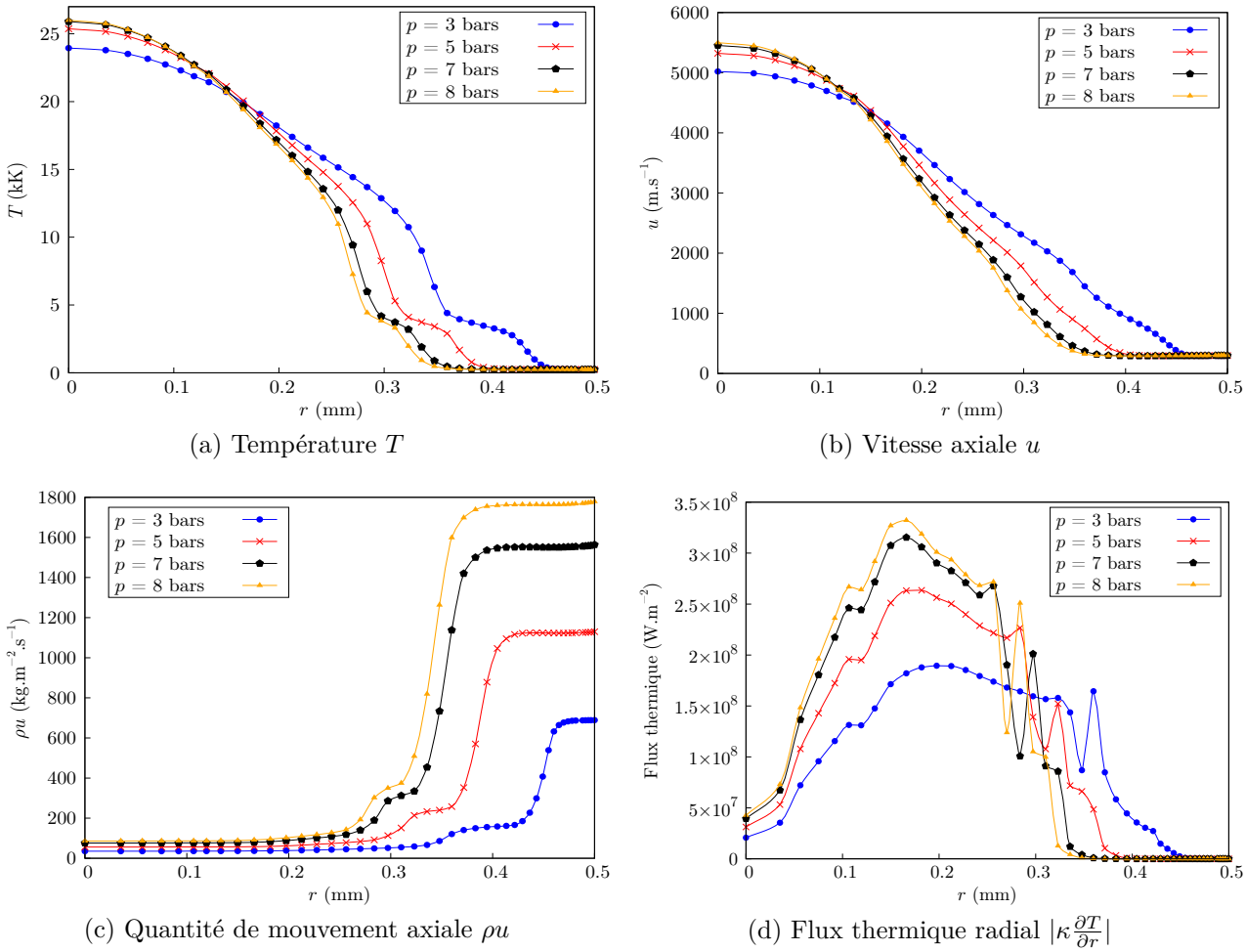
La synthèse des différents résultats présentés sur cette figure est réalisée ci-après.

- Les profils de températures suivant le rayon (Figure 4.25a) montrent bien que dans le canal, plus l'intensité du courant est élevée, plus la température et la largeur de la zone chaude augmentent. On constate également que pour toutes les valeurs de courant considérées, la couche froide représente une proportion non négligeable de l'écoulement, à l'intérieur de laquelle la température est constante et égale à environ 250 K, quelle que soit la valeur du courant. Bien que cette température semble basse, nous avons vérifié que la température totale dans la couche froide était bien constante et égale à 300 K.

- Sur les profils de vitesses axiales représentés en Figure 4.25b, similairement à la température, on remarque que la vitesse du plasma augmente avec l'intensité du courant. Cependant, quelle que soit la valeur du courant, une vitesse constante d'environ 300 m.s^{-1} est obtenue dans la couche froide. Si une condition de paroi non-glissante avait été utilisée sur la tuyère, une décroissance de la vitesse aurait été observée sur une faible épaisseur dans la zone proche de $r = 0.5$ mm.
- Étant donné que les vitesses et températures dans la couche froide sont constantes quelle que soit la valeur de l'intensité du courant et qu'une pression d'injection fixe de 7 bars est considérée, des valeurs très proches de quantité de mouvement axiale sont aussi obtenues dans la couche froide. Cela est bien confirmé par les données représentées sur la Figure 4.25c. Les courbes affichées sur cette dernière permettent également de mettre en avant le fait que l'épaisseur de la couche froide a une influence prépondérante sur la valeur du débit massique calculée. En effet, puisque la quantité de mouvement axiale est quasiment constante dans la couche froide et est largement supérieure à celle de la colonne plasma, l'évolution du débit est fortement dépendante de son épaisseur.
- La Figure 4.25d, qui représente les flux thermiques suivant le rayon, indique que la zone de transition entre la couche froide et la colonne plasma a aussi une influence non négligeable sur l'écoulement. Effectivement, dans cette région, les flux de chaleurs sont élevés et les pics de conductivité thermique engendrent de fortes variations de ces flux. On remarque alors que le maillage utilisé n'est pas suffisamment raffiné dans cette région, car les pics de flux thermiques sont uniquement capturés en une cellule. Nous n'avons cependant pas pu réaliser de simulations avec des maillages plus résolus dans cette zone de transition. Ainsi, une sous-résolution de cette zone comprise entre la colonne chaude et la couche froide peut potentiellement avoir un impact sur les valeurs de débits massiques déterminées.

Les mêmes courbes que précédemment sont présentées sur la Figure 4.26, dans le cadre des simulations avec différentes valeurs de pression d'injection et pour un courant de 50 A.

- Les profils de température représentés sur la Figure 4.26a montrent que plus la pression d'injection est élevée, plus la température au centre de la colonne plasma augmente et plus l'épaisseur de la couche froide est importante. Cela est dû au phénomène de constriction qui amplifie le confinement du plasma vers le centre du canal, tout en augmentant sa température proche de l'axe ($r = 0$ mm). De façon similaire à l'étude en fonction du courant, une température constante de 250 K est obtenue dans la couche froide.
- Comme présenté sur la Figure 4.26b, à l'image de la température, la vitesse axiale au centre du plasma augmente avec la pression d'injection et une valeur constante de 300 m.s^{-1} est déterminée dans la couche froide. Ainsi, dans le canal, pour une position axiale x fixée, la température et la vitesse de la couche froide sont constantes quelle soit la pression d'injection p_{in}. Cela peut s'expliquer par le fait que l'écoulement établi dans cette couche froide se comporte comme un écoulement classique dans une tuyère convergente, tel que décrit dans l'étude à froid de la Section 4.3 précédente. En effet, dans le cas d'un écoulement à froid (isentropique, adiabatique et sans phénomène diffusif) dans une tuyère convergente-divergente, en considérant une température d'injection fixée, la température et la vitesse axiale en amont du col sont indépendants de la pression d'injection.



(a) Température T

(b) Vitesse axiale u

(c) Quantité de mouvement axiale ρu

(d) Flux thermique radial $|\kappa \frac{\partial T}{\partial r}|$

Figure 4.26. – Profils radiaux déterminés numériquement à la sortie du canal de tuyère en fonction de la pression d'injection p_{in} - $I = 50$ A.

- Bien que la température et la vitesse soient constantes dans la couche froide, la valeur de la densité est dépendante de la pression d'injection et la quantité de mouvement axiale est donc également influencée par la pression. Cela peut être observé sur la Figure 4.26c, où on remarque que pour une pression p_{in} donnée, la quantité de mouvement axiale atteint une valeur constante dans la couche froide, mais cette valeur de « plateau » varie de façon croissante en fonction de p_{in}. Il y a donc deux phénomènes différents jouant sur l'augmentation du débit massique avec la pression d'injection : d'une part, l'augmentation de p_{in} induit une plus grande constriction de la colonne plasma et donc une épaisseur de couche froide plus importante ; d'autre part, l'augmentation p_{in} engendre une densité de gaz froid plus élevée, accompagnée d'une augmentation de la quantité de mouvement.

- Les profils radiaux de flux thermiques présentés sur la Figure 4.26d indiquent de nouveau qu'il y a des fortes variations de flux dans la zone de transition, dues aux pics de conductivité thermique. Des simulations avec des maillages plus raffinés seraient nécessaires pour bien caractériser l'écoulement dans cette région où les gradients radiaux sont importants.

b) Hypothèses et discussions sur les différences entre résultats numériques et expérimentaux

Cette dernière partie vise à proposer et détailler plusieurs explications concernant les différences obtenues entre les débits massiques mesurés expérimentalement et ceux déterminés à partir des simulations. Pour cela, nous partons des principales hypothèses du modèle mathématique utilisé pour l'étude numérique et cherchons à évaluer leurs potentielles influences sur les débits calculés.

1. Une première hypothèse pouvant avoir une influence sur le débit massique calculé dans la torche est celle de l'ETL. L'hypothèse d'ETL permet de bien prendre en compte la thermodynamique du plasma dans les zones les plus chaudes [2], mais des déviations à l'ETL existent dans les régions de transitions entre le plasma et la couche froide [48]. Cependant, au vu des écarts relatifs entre les débits expérimentaux et numériques, il est peu probable que les déviations à l'ETL puissent avoir une influence du premier ordre sur les débits massiques calculés.
2. Une deuxième hypothèse est associée au fait que le champ magnétique soit négligé. Des calculs réalisés en modélisant le champ magnétique avec le solveur Fluent introduit dans le chapitre précédent ont néanmoins montré que les forces de Lorentz induites par le champ magnétique ont une influence négligeable sur les débits massiques dans les torches.
3. Un autre facteur impactant le débit massique calculé est la condition de glissement sur la paroi de la tuyère. En utilisant une condition de glissement, la couche limite visqueuse est négligée et les vitesses proche paroi sont surestimées, entraînant de ce fait une surestimation de la quantité de mouvement et donc du débit massique. Les calculs évoqués dans le chapitre précédent et présentés en Annexe C montrent que l'utilisation d'une condition de non glissement peut induire une surestimation du débit de maximum 8% par rapport à un calcul avec une condition de non-glissement. Toutefois, dans la configuration présentée dans l'annexe, l'épaisseur de couche froide était largement inférieure à celles de la configuration actuelle, et la couche limite avait donc un impact relatif plus important sur la valeur du débit calculée. Dans tous les cas, cette hypothèse de paroi glissante ne serait pas suffisante pour expliquer les écarts importants entre les débits numériques et expérimentaux.
4. Le fait que la turbulence n'ait pas été prise en compte dans notre modèle peut également expliquer une part des écarts entre les résultats expérimentaux et numériques. En effet, si un régime d'écoulement turbulent est établi dans le canal, la diffusion radiale de température serait augmentée, impliquant une diminution de l'épaisseur de la couche froide accompagnée d'une réduction du débit massique. Cependant, la méthode numérique utilisée engendre déjà un phénomène de diffusion numérique et l'ajout d'un modèle de turbulence pourrait conduire à une surestimation des effets diffusifs.
5. La principale raison que nous avons retenue afin d'expliquer les écarts entre les débits expérimentaux et numériques est liée au rayonnement du plasma. La méthode du coefficient d'émission nette utilisée afin de modéliser ce phénomène permet uniquement de prendre compte les pertes d'énergie dues au rayonnement. Cependant, une partie de ce rayonnement émis est normalement absorbée par les parois de la tuyère et de la cathode, entraînant une augmentation de leur température. Une autre partie du rayonnement est également réabsorbée au niveau des bords du plasma, en particulier dans la zone intermédiaire entre le

centre la colonne chaude émettrice et la couche froide. Cela a par exemple été mis en avant dans la thèse de Freton [11], où l'utilisation d'un modèle de rayonnement P1 a été comparée à la méthode du coefficient d'émission nette dans une configuration de découpe plasma. L'étude de Freton compare des profils radiaux de conductivité électrique calculés dans le canal d'une tuyère de torche plasma en modélisant respectivement le rayonnement avec la méthode du coefficient d'émission nette et avec le modèle P1. Ces profils montrent qu'avec le modèle P1, qui permet de modéliser les réabsorptions du rayonnement, la largeur de la colonne plasma conductrice est supérieure à celle obtenue avec la méthode du coefficient d'émission nette. L'étude met toutefois en avant le fait que les zones de températures supérieures à 4000 K sont aussi bien décrites en terme de rayonnement avec la méthode du coefficient d'émission nette qu'avec le modèle P1.

Dans la configuration de notre étude, l'utilisation de la méthode du coefficient d'émission nette conduit donc a une sous-estimation de la largeur de la colonne plasma, et ainsi à une surestimation de l'épaisseur de la couche froide. Comme expliqué dans la partie précédente, l'épaisseur de la couche froide ayant une influence du premier ordre sur le débit massique dans la torche, une surestimation de celle-ci conduit à des valeurs de débits trop élevées. De plus, ce phénomène peut être accentué par le fait que les parois de la tuyère sont considérées adiabatiques. En effet, dans des conditions réelles, les parois chauffent en raison du rayonnement du plasma, pouvant entraîner une élévation de la température du gaz localisé proche de la paroi. Cependant, étant donné que la tuyère est refroidie par un circuit d'eau, il est difficile de connaître précisément la température réelle des parois. Une estimation de cette température de paroi pourrait être réalisée expérimentalement par le biais d'une étude calorifique complète, couplée à un modèle de conduction thermique dans la tuyère.

Bien que le fait de ne pas modéliser les réabsorptions du rayonnement puisse avoir une influence sur l'épaisseur de la couche froide et sur la valeur du débit, cela n'est pas suffisant pour expliquer que, lorsque p_{in} et I augmentent, l'écart relatif entre les débits expérimentaux et numériques est croissant. Afin de fournir une explication à ce comportement, nous avons déterminé à partir des résultats numériques les ratios entre la puissance rayonnée par le plasma P_{rad} et la puissance totale P_{tot} de l'arc à l'intérieur de la torche. Cette dernière correspond au produit entre l'intensité du courant I et la tension moyenne de l'arc V_a entre la cathode et la sortie de tuyère :

$$P_{tot} = V_a \; I. \tag{4.22}$$

Quant à la puissance rayonnée par le plasma, elle est calculées à partir de l'intégrale volumique dans la torche du coefficient d'émission nette :

$$P_{rad} = \iiint_{v_{\text{torche}}} 4 \; \pi \; \varepsilon_N \; \mathrm{d}\Omega, \tag{4.23}$$

où v_{torche} est le volume de l'intérieur de la torche, correspondant à la zone localisée entre l'inlet et la sortie du canal. La Figure 4.27 représente les puissances totales et rayonnées dans la torche dans le cas des calculs avec différentes valeurs du courant, pour une pression d'injection fixée à 7 bars. Les ratios P_{rad}/P_{tot} calculés pour les cinq valeurs du courant sont également affichés. Concernant les évolutions en fonction de la pression d'injection,

les mêmes grandeurs sont présentées sur la Figure 4.28 pour quatre valeurs différentes de p_{in}, à une intensité de 50 A.

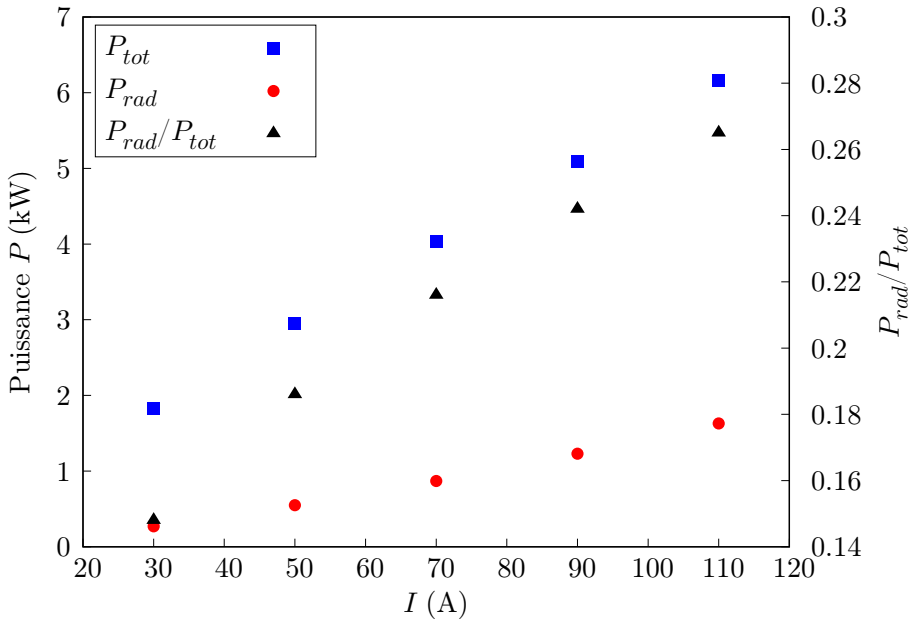


Figure 4.27. – Puissances en fonction de l'intensité du courant - Résultats numériques.

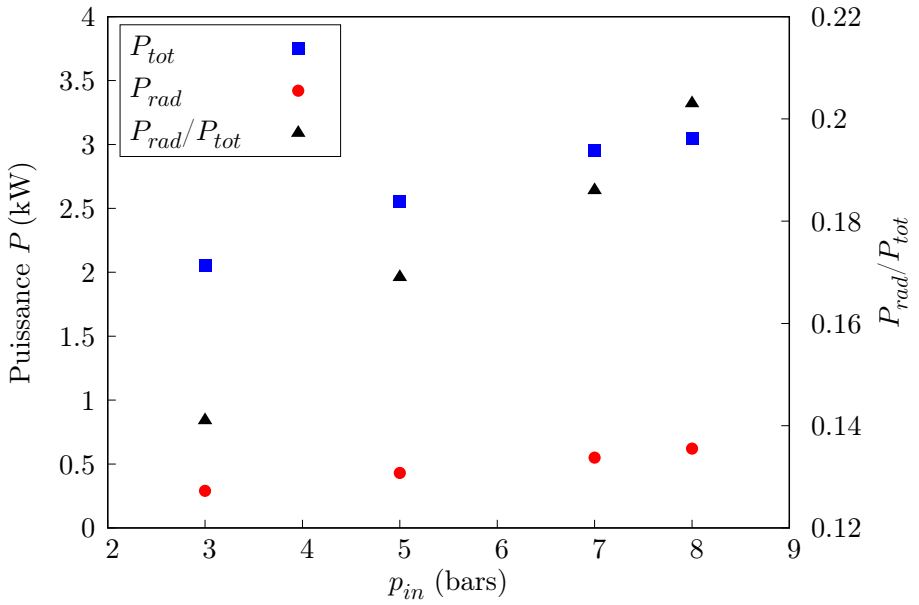


Figure 4.28. – Puissances en fonction de la pression d'injection - Résultats numériques.

Dans les deux cas, la puissance rayonnée augmente avec la pression d'injection et l'intensité du courant. De plus, la proportion de la puissance rayonnée par rapport à la puissance totale de l'arc n'est pas négligeable, avec des ratios P_{rad}/P_{tot} allant de 0.14 à 0.27. Enfin, la croissance de ce ratio démontre que l'influence du rayonnement augmente avec la pression d'injection et l'intensité du courant. Les phénomènes radiatifs ayant un impact accru pour les courants et pressions élevées, nous supposons alors que la proportion de rayonnement réabsorbé sur le bord du plasma est également plus élevée dans le cas des intensités et

pressions importantes. Cela aurait pour conséquence de favoriser l'élargissement de la colonne plasma, entraînant une diminution du débit massique non négligeable.

4.5. Conclusion

Ce dernier chapitre avait pour but de confronter des résultats obtenus expérimentalement et par la simulation numérique sur une configuration de torche plasma industrielle. Une première étude comparative sur l'écoulement à froid dans la torche a permis de montrer que le solveur numérique permettait de calculer des débits massiques en accord avec la théorie et l'expérience. La modélisation de l'injection en vortex a également pu être validée, confirmant la fiabilité du solveur pour simuler l'aspect hydrodynamique de l'écoulement à froid.

Une seconde partie des comparaisons étaient dédiées à l'étude de la torche à chaud, dans une configuration où un arc électrique était établi entre la cathode de la torche et une anode tournante. Les débits massiques ont alors été déterminés expérimentalement et numériquement pour différentes valeurs du courant et de la pression d'injection du gaz en entrée de torche. Les mêmes tendances ont été obtenues entre l'expérience et les simulations, avec une réduction du débit massique dans la torche lorsque le courant augmente et un débit croissant quand la pression d'injection augmente. Bien que les écarts relatifs entre les débits expérimentaux et numériques soient négligeables pour les faibles courants et pressions d'injection, ces différences sont accrues et deviennent importantes quand le courant et la pression augmentent. Une analyse des profils de plusieurs variables obtenus numériquement au niveau du canal de tuyère a mis en avant le fait que le débit massique dans la torche est majoritairement contrôlé par l'épaisseur de la couche froide, qui correspond à la zone proche de la paroi où le gaz n'est pas chauffé par le plasma. Après avoir présenté différentes hypothèses visant à expliquer les différences obtenues par rapport aux mesures expérimentales, le rayonnement du plasma semble être le facteur pouvant avoir l'influence la plus importante sur les débits déterminés avec les simulations. Étant donné que la méthode du coefficient d'émission nette utilisée pour modéliser le rayonnement du plasma ne prend pas en compte les réabsorptions du rayonnement au niveau des bords du plasma, l'épaisseur de la couche froide est surestimée par les calculs numériques, impliquant des valeurs de débits massiques trop élevées. Afin d'expliquer le fait que les différences sur les débits augmentent avec le courant et la pression d'injection, une analyse de la répartition des puissances dans le plasma a montré que la proportion de la puissance rayonnée par rapport à la puissance totale de l'arc augmentait de façon non-négligeable avec le courant et la pression. Le développement d'un modèle de rayonnement complet permettant de prendre en compte les réabsorptions du rayonnement par le plasma et les parois semble donc prioritaire pour permettre au solveur de bien caractériser la structure des écoulements dans les torches à plasma.

Conclusion générale et perspectives

Au cours de ce travail, un nouveau solveur numérique tri-dimensionnel a été développé et validé sur différents critères dans le cadre de la simulation du procédé industriel de découpe au plasma. En termes d'évolution de ce procédé, une des tendances actuelles vise à augmenter la pression d'injection des gaz dans les torches à plasma, afin d'intensifier les jets de découpe et ainsi augmenter la précision et la rapidité des découpes. L'intérêt de l'outil développé est de pouvoir modéliser les écoulements à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur des torches à plasma, en considérant des plages de pressions d'injection des gaz pouvant atteindre au moins 10 bars, tout en permettant de bien capturer les phénomènes supersoniques dans les jets de découpe, tels que les ondes de choc et de détente.

Dans le premier chapitre, après une présentation générale du fonctionnement de la découpe plasma, une étude comparative du procédé par rapport aux procédés concurrents a été effectuée. Ainsi, en comparaison de l'oxycoupage, de la découpe au jet d'eau et de la découpe laser, pour des épaisseurs de tôles inférieures à 25 mm, la découpe au plasma est la plus rentable en termes de coût et de rendement énergétique. La qualité des découpes effectuées avec le plasma pour ces épaisseurs reste cependant moins bonne qu'en utilisant le laser, avec par exemple des saignées et des zones affectées thermiquement plus larges, ainsi qu'une plus grande proportion de scories. La dernière partie du chapitre portait sur un état de l'art relatif aux études numériques et expérimentales du procédé. Concernant la partie expérimentale, les principales méthodes de caractérisation des jets de découpe plasma sont la spectroscopie d'émission et l'imagerie rapide. Pour les études numériques dédiées à la découpe plasma, très peu d'évolutions ont eu lieu depuis les premiers outils de simulations basés sur l'utilisation de méthodes pressure-based avec des logiciels de CFD commerciaux.

Le deuxième chapitre détaille le modèle et le solveur développé dans le code de CFD OpenFOAM, pour la simulation d'écoulements « à froid » dans les torches à plasma, ainsi que dans les jets supersoniques sous-détendus présents en sortie de torche. Le modèle mathématique utilisé est celui des équations d'Euler, avec une fermeture thermodynamique de gaz parfaits. L'algorithme de résolution est basé sur un schéma volumes finis de type Godunov. Un solveur de Riemann HLLC est implémenté, associé à une méthode de reconstruction MUSCL et une intégration explicite en temps. L'outil développé est ensuite validé sur des cas tests de problèmes de Riemann classiques, avec un tube à choc et un problème de Riemann 2D. Celui-ci est alors utilisé pour simuler l'écoulement à froid dans une configuration de torche à plasma. Les calculs ont été effectués pour différentes pressions d'injection du gaz dans la torche, montrant la robustesse du solveur ainsi que sa capacité à bien capturer les ondes de choc dans les jets supersoniques sous-détendus.

Le troisième chapitre s'intéresse à la simulation d'écoulements « à chaud » avec plasma, en considérant une configuration de torche similaire à celle de l'étude à froid. Les hypothèses et le

modèle du couplage fluide-plasma sont d'abord présentés, ainsi que la prise en compte de la thermodynamique complexe des plasmas. Le solveur numérique développé dans OpenFOAM est ensuite détaillé. Celui-ci est basé sur le solveur à froid pour la discrétisation de la partie convective des équations, en ajoutant une discrétisation explicite des termes relatifs à la diffusion thermique et aux frottements visqueux. Un couplage avec le calcul du potentiel électrique est également effectué via des termes sources et la résolution d'une équation de Laplace, permettant de modéliser l'aspect électrique du plasma. De plus, différentes routines d'interpolations ont été implémentées afin de déterminer des approximations des propriétés thermodynamiques du plasma. La fin du chapitre est dédiée à la simulation de l'écoulement à chaud dans une configuration de torche à plasma. Pour valider le nouveau solveur, les calculs ont également été effectués avec un solveur pressure-based présenté dans la littérature et validé sur des données expérimentales. La comparaison des résultats obtenus avec les deux méthodes confirme la capacité de notre solveur à bien modéliser le couplage fluide-plasma et montre une amélioration pour la capture des chocs dans le jet de plasma.

Le dernier chapitre est consacré à une étude comparative entre des mesures expérimentales et les résultats de simulations sur une configuration de torche de découpe plasma industrielle. La torche utilisée est celle développée par l'entreprise Akryvia. En raison de plusieurs difficultés rencontrées et du matériel disponible lors de l'étude expérimentale, seules des mesures de débits de gaz dans la torche ont pu être exploitées. Deux configurations ont été considérées. La première configuration sans plasma, dite « à froid », où les débits ont été mesurés pour des pressions d'injection de gaz dans la torche comprises entre 3 et 10 bars. Dans la deuxième configuration « à chaud », un arc électrique était établi entre la cathode de la torche et une anode tournante en cuivre. Dans ce cas, des mesures de débits ont été réalisées en considérant des intensités de courant électrique allant de 30 à 110 A et des pressions d'injection comprises entre 3 et 10 bars. Pour les deux configurations étudiées, les solveurs numériques présentés dans ce travail ont été utilisés pour réaliser des simulations avec des conditions opératoires similaires à celles de l'expérience, c'est à dire en utilisant la géométrie réelle de la torche et en considérant les mêmes valeurs de pression et de courant. La première partie des comparaisons entre résultats numériques et expérimentaux était dédiée à l'étude à froid. Les débits massiques obtenus dans les deux cas pour les différentes valeurs de pression sont très proches et en accord avec la théorie quasi-1D des écoulements en tuyères amorcées. Cette étude à froid a également mis en avant l'importance de bien modéliser l'injection de gaz en vortex, car la présence d'un écoulement en vortex induit, pour une pression d'entrée donnée, une diminution non-négligeable du débit massique, en comparaison du cas où l'injection est axiale. À faible intensité et pression d'injection, les comparaisons à chaud montrent un très bon accord entre les valeurs de débits mesurées et celles calculées avec le solveur. Cependant, lorsque la pression et l'intensité augmentent, un écart croissant et non négligeable est observé entre les débits expérimentaux et numériques, avec des valeurs numériques supérieures aux valeurs mesurées. Après la présentation et la discussion de différentes hypothèses pouvant expliquer l'origine de ces différences, la principale hypothèse retenue est en lien avec le modèle de rayonnement utilisé. En effet, la méthode du coefficient d'émission nette prend uniquement en compte les pertes radiatives des zones chaudes du plasma, en négligeant les phénomènes de réabsorption du rayonnement au bord du plasma et par les parois. Cela peut ainsi conduire à une sous-estimation de la température globale dans la torche,

et donc à des valeurs de débits massiques trop élevées. Cette hypothèse est soutenue par le fait que les simulations montrent que la part de la puissance rayonnée par rapport à la puissance totale de l'arc augmente avec la pression et l'intensité, pouvant expliquer l'écart croissant entre les résultats expérimentaux et numériques. Malgré les différences obtenues, cette étude a permis de mieux caractériser l'influence du courant et de la pression d'injection sur la structure de l'écoulement de plasma dans la tuyère de la torche.

Finalement, le solveur s'est avéré suffisamment robuste pour réaliser des simulations avec des pressions d'injection largement supérieures à celles employées dans les différentes études présentées dans la littératures. Bien que le modèle utilisé ne soit pas complet et nécessite la prise en compte de phénomènes physiques complémentaires, les résultats obtenus dans ce travail sont encourageants pour de futures analyses sur l'intensification des jets de plasma de découpe, en vue d'améliorer le procédé.

Concernant les perspectives de ce travail, suite aux comparaisons présentées dans le dernier chapitre, l'ajout d'un modèle de rayonnement dans le solveur afin de prendre en compte les phénomènes de réabsorption semble prioritaire. Cela permettra de mieux prendre en compte le comportement radiatif du plasma, qui représente une part croissante des échanges de chaleur lorsque l'intensité du courant et la pression d'injection du gaz dans la torche augmentent. Dans l'objectif de développement d'un outil complet permettant de simuler précisément le processus de découpe au plasma, d'autres modifications devront être apportées au modèle et solveur numérique actuels :

- Le calcul du champ magnétique doit être effectué afin de prendre en compte les forces de Lorentz, qui peuvent notamment avoir une influence sur le comportement du plasma dans la chambre d'arc. Pour déterminer le champ magnétique, trois équations de Laplace supplémentaires doivent être résolues par le solveur. Cela ne devrait pas poser de grande difficulté en terme d'implémentation dans le solveur, mais les temps de calculs seront augmentés de manière non-négligeable.
- Afin de pouvoir simuler la présence de plusieurs gaz dans les calculs, avec par exemple une injection d'oxygène dans la torche et de l'air dans l'atmosphère ambiante, un modèle multi-espèce doit être implémenté dans le solveur. Cela peut se faire par la résolution d'équations de transports sur les fractions massiques des différents gaz, associée à des lois de mélange pour le calcul des propriétés thermodynamiques et des coefficients de transport.
- Afin d'étudier le comportement potentiellement turbulent du plasma dans la torche, le développement d'un modèle de turbulence devrait être effectué. S'il s'avère que la turbulence n'a pas d'influence majeure sur la structure de l'écoulement à l'intérieur de la torche, les études de la littérature ont montré que la modélisation du phénomène est de toute façon nécessaire à l'extérieur de la torche, au niveau de l'interaction entre le jet chaud de plasma et l'air froid ambiant.
- Des études complémentaires de sensibilité au maillage devront être effectuées. En effet, comme montré lors de l'analyse des différents profils dans le canal de tuyère de la torche industrielle, la résolution du maillage n'était pas adaptée pour capturer précisément les forts gradients radiaux présents dans certaines régions.

- Pour étudier des configurations de découpe réelles, il sera nécessaire de modéliser l'anode par des pièces solides correspondant aux plaques à découper. Afin d'analyser la physique au niveau de la saignée de découpe et mieux comprendre l'influence des paramètres opératoires sur la qualité de coupe, plusieurs modèles devront être ajoutés. Il sera par exemple nécessaire de bien simuler l'évolution de la position d'accroche de l'arc sur la plaque, de prendre en compte la fusion du métal et la présence des vapeurs de métal.
- Il est finalement possible d'envisager de nombreuses analyses complémentaires. On peut par exemple évoquer des études dédiées à l'usure des consommables, qui pourraient être réalisées en couplant la modélisation du plasma dans la torche avec des modèles d'ablation et des calculs de thermique dans les parties solides.

Bibliographie

[1] G. Zissis. *"ÉCLAIRAGE DOMESTIQUE"*. Encyclopædia Universalis [en ligne]. URL : https://www.universalis.fr/encyclopedie/eclairage-domestique/ (cf. p. 23).

[2] M.I. Boulos, P. Fauchais et E. Pfender. *Thermal Plasmas*. Boston, MA : Springer US, 1994. ISBN : 978-1-4899-1339-5 (cf. p. 23, 28, 135).

[3] R.N. Szente. *Industrial applications of thermal plasmas. AIP Conference Proceedings*. T. 345. Foz do Iguaçu (Brazil) : AIP, 1995, p. 487-494 (cf. p. 23).

[4] J. Heberlein et A. Murphy. *Thermal plasma waste treatment*. Journal of Physics D : Applied Physics 41 (2008), p. 053001 (cf. p. 23).

[5] P. Fauchais, G. Montavon, M. Vardelle et J. Cedelle. *Developments in direct current plasma spraying*. Surface and Coatings Technology 201 (2006), p. 1908-1921 (cf. p. 23).

[6] M.I. Boulos. *Thermal plasma processing*. IEEE Transactions on Plasma Science 19 (1991), p. 1078-1089 (cf. p. 23).

[7] A.C. Robert-Hauglustaine et G Emptoz. *Les techniques de soudage électrique dans les industries de l'armement, 1914-1939*. Bulletin d'histoire de l'électricité 23 (1994), p. 83-100 (cf. p. 23).

[8] R.M. Gage. *"Arc Torch and Process", U.S. Patent 2 806 124* (1957) (cf. p. 23, 32).

[9] J. Colt. *The evolution of plasma cutting*. The Fabricator January 2014 issue (2014), p. 62-63 (cf. p. 23, 31).

[10] C. Pardo, J. González-Aguilar, A. Rodríguez-Yunta et M. A. G. Calderón. *Spectroscopic analysis of an air plasma cutting torch*. Journal of Physics D : Applied Physics 32 (1999), p. 2181-2189 (cf. p. 23, 47).

[11] P. Freton. *Etude d'un arc de découpe par plasma d'oxygène Modélisation - expérience*. Thèse de doct. Université Paul Sabatier, Toulouse III, France, 2002 (cf. p. 23-25, 40, 42, 44, 47, 48, 81, 136).

[12] P. Freton, J.J. Gonzalez, A. Gleizes, F. Camy-Peyret, G. Caillibotte et M. Delzenne. *Numerical and experimental study of a plasma cutting torch*. Journal of Physics D : Applied Physics 35 (2002), p. 115-131 (cf. p. 23, 24, 40, 42, 44, 47, 48, 73, 80, 93, 97).

[13] L. Girard, Ph. Teulet, M. Razafinimanana, A. Gleizes, F. Camy-Peyret, E. Baillot et F. Richard. *Experimental study of an oxygen plasma cutting torch : I. Spectroscopic analysis of the plasma jet*. Journal of Physics D : Applied Physics 39 (2006), p. 1543-1556 (cf. p. 23, 47, 48).

[14] J. Peters, J. Heberlein et J. Lindsay. *Spectroscopic diagnostics in a highly constricted oxygen arc*. Journal of Physics D : Applied Physics 40 (2007), p. 3960-3971 (cf. p. 23, 48).

[15] V. Colombo, A. Concetti, E. Ghedini, S. Dallavalle et M. Vancini. *High-speed imaging in plasma arc cutting : a review and new developments*. Plasma Sources Science and Technology 18 (2009), p. 023001 (cf. p. 23, 48).

[16] P.K. Agrawal, D.K. Bagal, A.K. Pattanaik, A. Barua, S. Jeet, B. Parida et S.N. Panda. *Experimental Investigation of Cutting Parameters in Plasma Arc Cutting Using Advanced Optimization Approach : A Comprehensive Review*. International Journal of Applied Engineering Research 14 (2019), p. 27-30 (cf. p. 24, 49).

[17] J. Gonzalez-Aguilar, C.P. Sanjurjo, A. Rodriguez-Yunta et M.A.G. Calderon. *A Theoretical Study of a Cutting Air Plasma Torch*. IEEE Transactions on Plasma Science 27 (1999), p. 264-271 (cf. p. 24, 40, 41, 44, 47).

[18] Q. Zhou, H. Li, X. Xu, F. Liu, S. Guo, X. Chang, W. Guo et P. Xu. *Comparative study of turbulence models on highly constricted plasma cutting arc*. Journal of Physics D : Applied Physics 42 (2009), p. 015210 (cf. p. 24, 44, 48).

[19] F. Camy-Peyret. *"Method for cutting plasma and torch for carrying out same", Patent WO 2018/224323 A1* (2018) (cf. p. 24, 34).

[20] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group, New York, 1980. ISBN : 978-1-315-27513-0 (cf. p. 24, 42).

[21] H.G Weller, G. Tabor, H. Jasak et C. Fureby. *A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques*. Computers Physics 12 (1998), p. 620-631 (cf. p. 24, 46).

[22] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN : 978-3-540-25202-3 (cf. p. 24, 60).

[23] S. Vacquié. *L'arc électrique*. Paris : CNRS Editions, Eyrolles, 2000. ISBN : 978-2-212-05822-2 (cf. p. 29).

[24] F. Rotundo, C. Martini, C. Chiavari, L. Ceschini, A. Concetti, E. Ghedini, V. Colombo et S. Dallavalle. *Plasma arc cutting : Microstructural modifications of hafnium cathodes during first cycles*. Materials Chemistry and Physics 134 (2012), p. 858-866 (cf. p. 30).

[25] Q. Zhou, H. Yin, H. Li, X. Xu, F. Liu, S. Guo, X. Chang, W. Guo et P. Xu. *The effect of plasma-gas swirl flow on a highly constricted plasma cutting arc*. Journal of Physics D : Applied Physics 42 (2009), p. 095208 (cf. p. 30, 44, 45).

[26] V.A. Nemchinsky et W.S. Severance. *What we know and what we do not know about plasma arc cutting*. Journal of Physics D : Applied Physics 39 (2006), R423-R438 (cf. p. 31, 36, 37, 43).

[27] H. Park. *Numerical Modeling of the Metal Cutting Process in the Plasma Arc Cutting*. Thèse de doct. University of Minnesota, 2015 (cf. p. 31, 45).

[28] D. Ott. *What is high-precision plasma cutting, exactly ?* The Fabricator May 2018 issue (2018), p. 60-62 (cf. p. 32, 33).

[29] J. Powell. *CO2 laser cutting*. Springer, 1993. ISBN : 978-1-85233-047-7 (cf. p. 35, 36).

[30] G. Cannet et M. Delzenne. *Coupage thermique et coupage au jet d'eau*. Techniques de l'ingénieur, traité Génie mécanique, Ref. BM 7 280 (1998) (cf. p. 35-38).

[31] J.S Shin, S.Y Oh, H. Park, C.M. Chung, S. Seon, T.S. Kim, L. Lee et J. Lee. *Laser cutting of steel plates up to 100 mm in thickness with a 6-kW fiber laser for application to dismantling of nuclear facilities*. Optics and Lasers in Engineering 100 (2018), p. 98-104 (cf. p. 36).

[32] J. Zeng et A. Henning. *Kerf characterization in abrasive waterjet cutting*. Proceedings of the 2009 WJTA American Waterjet Conference, Houston, TX, Paper (2009) (cf. p. 36, 37).

[33] K. Patel et P. Agarwal. *Effect of process parameters on MRR of structural steel using plasma arc cutting*. International Journal of Advance Engineering and Research Development 4 (2017) (cf. p. 37).

[34] D. Begic, M. Kulenovic, A. Cekic et E. Dedic. *Some experimental studies on plasma cutting quality of low alloy steel*. Annals & Proceedings of DAAAM International 23 (2012), p. 183-186 (cf. p. 37).

[35] I. Miraoui, M. Boujelbene et M. Zaied. *High-Power Laser Cutting of Steel Plates : Heat Affected Zone Analysis*. Advances in Materials Science and Engineering Volume 2016 (2016) (cf. p. 37).

[36] D.J. Thomas. *The influence of the laser and plasma traverse cutting speed process parameter on the cut-edge characteristics and durability of Yellow Goods vehicle applications*. Journal of Manufacturing Processes 13 (2011), p. 120-132 (cf. p. 37).

[37] A.K. Tingaev, R.G. Gubaydulin et I.A. Ilin. *Study of the Effect of Thermal Cutting on the Microstructure and Chemical Composition of the Edges of Workpieces Made of Steel Brands S345, S390*. Procedia Engineering 150 (2016), p. 1783-1790 (cf. p. 37).

[38] A. Rzeźnikiewicz. *Cost comparison between oxyfuel and plasma cutting low alloy steel*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering 63 (2014), p. 81-85 (cf. p. 38).

[39] M. Harnicarova, J. Valícek, J. Zajac, S. Hloch, R. Čep, I. Džubáková, S. Tofil, P. Hlaváček, J. Klich et L. Čepová. *Techno-economical comparison of cutting material by laser, plasma and oxygen*. Tehnicki Vjesnik 19 (2012), p. 813-817 (cf. p. 39).

[40] H.Y. Zheng, Z.Z. Han, Z.D. Chen, W.L. Chen et S. Yeo. *Quality and cost comparisons between laser and waterjet cutting*. Journal of Materials Processing Technology 62 (1996), p. 294-298 (cf. p. 39).

[41] J. A. Browing. *Thermal-air cutting process and economics*. Welding Journal 41 (1962), p. 132-140 (cf. p. 40).

[42] J. A. Browing et C. Hazard. *Quality determinants in plasma cutting process*. British Welding Journal (1963), p. 462-469 (cf. p. 40).

[43] S. Ramakrishnan et M.W. Rogozinski. *Properties of electric arc plasma for metal cutting*. Journal of Physics D : Applied Physics 30 (1997), p. 636-644 (cf. p. 40).

[44] K.C. Hsu, K. Etemadi et E. Pfender. *Study of the free-burning high-intensity argon arc*. Journal of applied physics 54 (1983), p. 1293-1301 (cf. p. 40, 41, 43).

[45] V.A. Nemchinsky. *Plasma flow in a nozzle during plasma arc cutting*. Journal of Physics D : Applied Physics 31 (1998), p. 3102 (cf. p. 40).

[46] P. Freton, J.J. Gonzalez et A. Gleizes. *Comparison between a two-and a three-dimensional arc plasma configuration*. Journal of Physics D : Applied Physics 33 (2000), p. 2442 (cf. p. 40, 42, 44, 73, 93, 97).

[47] P. Freton, J.J. Gonzalez, F. Camy-Peyret et A. Gleizes. *Complementary experimental and theoretical approaches to the determination of the plasma characteristics in a cutting plasma torch*. Journal of Physics D : Applied Physics 36 (2003), p. 1269 (cf. p. 40, 42, 44, 73, 93, 97).

[48] S. Ghorui, J.V.R. Heberlein et E. Pfender. *Non-equilibrium modelling of an oxygen-plasma cutting torch*. Journal of Physics D : Applied Physics 40 (2007), p. 1966-1976 (cf. p. 44, 81, 135).

[49] K.C. Hsu et E. Pfender. *Two-temperature modeling of the free-burning, high-intensity arc*. Journal of applied physics 54 (1983), p. 4359-4366 (cf. p. 44).

[50] V. Colombo, A. Concetti, E. Ghedini, S. Dallavalle et M. Vancini. *Understanding Plasma Fluid Dynamics Inside Plasma Torches Through Advanced Modeling*. IEEE Transactions on Plasma Science 36 (2008), p. 389-402 (cf. p. 44).

[51] Q. Zhou, H. Li, F. Liu, S. Guo, W. Guo et P. Xu. *Effects of Nozzle Length and Process Parameters on Highly Constricted Oxygen Plasma Cutting Arc*. Plasma Chemistry and Plasma Processing 28 (2009), p. 729-747 (cf. p. 44, 45).

[52] S. Guo, Q. Zhou, W. Guo et P. Xu. *Computational Analysis of a Double Nozzle Structure Plasma Cutting Torch*. Plasma Chemistry and Plasma Processing 30 (2010), p. 121-140 (cf. p. 44).

[53] J. Peters, J. Heberlein et J. Lindsay. *Spectroscopic diagnostics in a highly constricted oxygen arc*. Journal of Physics D : Applied Physics 40 (2007), p. 3960-3971 (cf. p. 44).

[54] A.D. Brent, V.R. Voller et K.J. Reid. *Enthalpy-Porosity Technique for Modeling Convection-Diffusion Phase Change : Application to the Melting of a Pure Metal*. Numerical Heat Transfer 13 (1988), p. 297-318 (cf. p. 45).

[55] C. Hirt et B. Nichols. *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*. Journal of Computational Physics 39 (1981), p. 201-225 (cf. p. 46).

[56] R. Issa. *Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting*. Journal of Computational Physics 62 (1986), p. 40-65 (cf. p. 46).

[57] A.B. Murphy. *Influence of metal vapour on arc temperatures in gas–metal arc welding : convection versus radiation*. Journal of Physics D : Applied Physics 46 (2013), p. 224004 (cf. p. 46).

[58] Ph Teulet, L Girard, M Razafinimanana, A Gleizes, Ph Bertrand, F Camy-Peyret, E Baillot et F Richard. *Experimental study of an oxygen plasma cutting torch : II. Arc–material interaction, energy transfer and anode attachment*. Journal of Physics D : Applied Physics 39 (2006), p. 1557-1573 (cf. p. 48).

[59] V.A. Nemchinsky. *Dross formation and heat transfer during plasma arc cutting*. Journal of Physics D : Applied Physics 30 (1997), p. 2566-2572 (cf. p. 48).

[60] S Ramakrishnan, V Shrinet, F. B. Polivka, T.N. Kearney et P. Koltun. *Influence of gas composition on plasma arc cutting of mild steel*. Journal of Physics D : Applied Physics 33 (2000), p. 2288-2299 (cf. p. 48).

[61] V. Colombo, A. Concetti, E. Ghedini, F. Rotundo, P. Sanibondi, M. Boselli, S. Dallavalle, M. Gherardi, V. Nemchinsky et M. Vancini. *Advances in Plasma Arc Cutting Technology : The Experimental Part of an Integrated Approach*. Plasma Chemistry and Plasma Processing 32 (2012), p. 411-426 (cf. p. 48).

[62] V. Nemchinsky. *Erosion of Thermionic Cathodes in Welding and Plasma Arc Cutting Systems*. IEEE transactions on plasma science 42 (2014), p. 199-215 (cf. p. 49).

[63] K. Patel et P. Agarwal. *Effect Of Process Parameters on MRR of Structural Steel Using Plasma Arc Cutting*. International Journal of Advance Engineering and Research Development 4 (2017), p. 418-126 (cf. p. 49).

[64] D.K. Naik et K. Maity. *Application of desirability function based response surface methodology (DRSM) for investigating the plasma arc cutting process of sailhard steel*. World Journal of Engineering 15 (2018), p. 505-512 (cf. p. 49).

[65] K. P. Maity et Dilip Kumar Bagal. *Effect of process parameters on cut quality of stainless steel of plasma arc cutting using hybrid approach*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 78 (2015), p. 161-175 (cf. p. 49).

[66] K. Rana, P. Kaushik et S. Chaudhary. *Optimization of plasma arc cutting by applying Taguchi Method*. International Journal of Enhanced Research in Science Technology & Engineering 2 (2013), p. 106-110 (cf. p. 49).

[67] S. Kumar. *Experimental Study On Parameters Optimization in CNC Plasma Arc Cutting (AISI 206 Steel) Using Taguchi Approach*. International Journal of Technical Research & Science 3 (2018), p. 198-205 (cf. p. 49).

[68] D.K. Naik et K.P. Maity. *An optimization and experimental analysis of plasma arc cutting of Hardox-400 using Taguchi based desirability analysis*. Materials Today : Proceedings 5 (2018), p. 13157-13165 (cf. p. 49).

[69] A. Tsiolikas, J. Kechagias, K. Salonitis et N. Mastorakis. *Optimization of cut surface quality during CNC Plasma Arc Cutting process*. International Journal of Systems Applications, Engineering & Development 10 (2016), p. 305-308 (cf. p. 49).

[70] H.R. Kumar et S. Thileepan. *Analysis in plasma arc cutting of 21Cr ferritic stainless steel*. International Journal of ChemTech Research 8 (2015), p. 474-483 (cf. p. 49).

[71] J. Kechagias, M. Billis et S. Maropoulos. *A parameter design of CNC plasma-arc cutting of carbon steel plates using robust design*. International Journal of Experimental Design and Process Optimization 1 (2010), p. 315-326 (cf. p. 49).

[72] M.K. Das, K. Kumar, T.K. Barman et P. Sahoo. *Optimization of Process Parameters in Plasma arc Cutting of EN 31 Steel Based on MRR and Multiple Roughness Characteristics Using Grey Relational Analysis*. Procedia Materials Science 5 (2014), p. 1550-1559 (cf. p. 49).

[73] E. Franquet, V. Perrier, S. Gibout et P. Bruel. *Free underexpanded jets in a quiescent medium : A review*. Progress in Aerospace Sciences 77 (2015), p. 25-53 (cf. p. 53).

[74] R.J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. ISBN : 9780511791253 (cf. p. 55).

[75] S. K. Godunov et I. Bohachevsky. *Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*. Matematičeskij sbornik 47 (1959), p. 271-306 (cf. p. 59).

[76] A. Harten, P.D. Lax et B. van Leer. *On Upstream Differencing and Godunov–Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. SIAM Review 25 (1983), p. 35-61 (cf. p. 62).

[77] E. F. Toro, M. Spruce et W. Speares. *Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver*. Shock Waves 4 (1994), p. 25-34 (cf. p. 63, 64).

[78] S.F. Davis. *Simplified Second-Order Godunov-Type Methods*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 9 (1988), p. 445-473 (cf. p. 64).

[79] B. Einfeldt. *On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics*. SIAM Journal on Numerical Analysis 25 (1988), p. 294-318 (cf. p. 64).

[80] B. van Leer. *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method*. Journal of Computational Physics 32 (1979), p. 101-136 (cf. p. 65).

[81] A. Chiapolino, R. Saurel et B. Nkonga. *Sharpening diffuse interfaces with compressible fluids on unstructured meshes*. Journal of Computational Physics 340 (2017), p. 389-417 (cf. p. 66).

[82] P. L. Roe. *Some contributions to the modeling of discontinuous flows*. Lectures in Applied Mathematics 22 (1985), p. 163-192 (cf. p. 66).

[83] M. Trautmann, E. Spaniol, M. Hertel et U. Füssel. *Modifications to the gradient schemes on unstructured cell centered grids for the accurate determination of gradients near conductivity changes*. Physics of Fluids 31 (2019), p. 047104 (cf. p. 67, 92).

[84] P. K. Sweby. *High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws*. SIAM Journal on Numerical Analysis 21 (1984), p. 995-1011 (cf. p. 67).

[85] F. Denner et B.G.M. van Wachem. *TVD differencing on three-dimensional unstructured meshes with monotonicity-preserving correction of mesh skewness*. Journal of Computational Physics 298 (2015), p. 466-479 (cf. p. 67).

[86] A. Harten. *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*. Journal of Computational Physics 49 (1983), p. 357-393 (cf. p. 67).

[87] C.W. Shu et S. Osher. *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes*. Journal of Computational Physics 77 (1988), p. 439-471 (cf. p. 67).

[88] R. Courant, K. Friedrichs et H. Lewy. *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*. Mathematische Annalen 100 (1928), p. 32-74 (cf. p. 68).

[89] H.G. Weller, G. Tabor, H. Jasak et C. Fureby. *A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques*. Computers in Physics 12 (1998), p. 620-631 (cf. p. 68).

[90] G.A. Sod. *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*. Journal of Computational Physics 27 (1978), p. 1-31 (cf. p. 69).

[91] P.D. Lax et X.D. Liu. *Solutions of Two-Dimensional Riemann Problems of Gas Dynamics by Positive Schemes*. SIAM Journal on Scientific Computing 19 (1998), p. 319-340 (cf. p. 69).

[92] X. Deng, P. Boivin et F. Xiao. *A new formulation for two-wave Riemann solver accurate at contact interfaces*. Physics of Fluids 31 (2019), p. 046102 (cf. p. 72).

[93] C. Geuzaine et J.F. Remacle. *Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79 (2009), p. 1309-1331 (cf. p. 74).

[94] T. D. Economon, F. Palacios, S.R. Copeland, T.W. Lukaczyk et J.J. Alonso. *SU2 : An Open-Source Suite for Multiphysics Simulation and Design*. AIAA Journal 54 (2016), p. 828-846 (cf. p. 75).

[95] P.L. Roe. *Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*. Journal of Computational Physics 43 (1981), p. 357-372 (cf. p. 75).

[96] S.D. Eby, J.Y. Trépanier et X.D. Zhang. *Modelling radiative transfer in SF_6 circuit-breaker arcs with the P-1 approximation*. Journal of Physics D : Applied Physics 31 (1998), p. 1578-1588 (cf. p. 82).

[97] J. Menart, S. Malik et L. Lin. *Coupled radiative, flow and temperature fields analysis of a free burning arc*. Journal of Physics D : Applied Physics 33 (2000), p. 257-269 (cf. p. 82).

[98] M.S. Benilov et A. Marotta. *A model of the cathode region of atmospheric pressure arcs*. Journal of Physics D : Applied Physics 28 (1995), p. 1869 (cf. p. 82).

[99] M.S. Benilov. *Understanding and modelling plasma–electrode interaction in high-pressure arc discharges : a review*. Journal of Physics D : Applied Physics 41 (2008), p. 144001 (cf. p. 82).

[100] A. Harry Solo, M. Benmouffok, P. Freton et J. J. Gonzalez. *Stochiometry Air - CH4 Mixture : Composition, Thermodynamic Propertiess and Transport Coefficients*. Plasma Physics and Technology 7 (2020), p. 21-29 (cf. p. 84, 89).

[101] *OpenFOAM User Guide*. 2022. URL : www.openfoam.com/documentation/user-guide (cf. p. 89, 92).

[102] A. Syrakos, S. Varchanis, Y. Dimakopoulos, A. Goulas et J. Tsamopoulos. *A critical analysis of some popular methods for the discretisation of the gradient operator in finite volume methods*. Physics of Fluids 29 (2016), p. 127103 (cf. p. 91).

[103] F. Yin, J. Schein, C. Hackett et J. Heberlein. *Investigation of the cathode behavior in a plasma cutting torch. ISPC-14 Symposium Proceedings*. T. 1. Prague, Czech Republic, 1999, p. 49-54 (cf. p. 94).

[104] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP et OIML. *Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 101 :2008 (cf. p. 108).

[105] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod université. Paris : Dunod, 1990. ISBN : 978-2-04-018753-8 (cf. p. 115, 116).

[106] R.F. Cuffel et L.H.and Massier P.F. Back. *Transonic flow in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature*. AIAA Journal 7 (1969), p. 1364-1366 (cf. p. 116).

[107] J.R. Kliegel et J.N Levine. *Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles*. AIAA Journal 7 (1969), p. 1375-1378 (cf. p. 116, 117).

[108] A. Abdelhafez et A.K. Gupta. *Swirling Airflow Through a Nozzle : Choking Criteria*. Journal of Propulsion and Power 26 (2010), p. 754-764 (cf. p. 118).

[109] A. Gany, M. Mor et C. Goldman. *Analysis and Characteristics of Choked Swirling Nozzle Flows*. AIAA Journal 43 (2005), p. 2177-2181 (cf. p. 118, 120).

Annexes

A. Calculs des opérateurs gradient et divergence dans OpenFOAM

A.1. Calcul des gradients avec la méthode des moindres des carrés (least squares)

Considérons une cellule Ω entourée de ses quatre cellules voisines Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, telles que représentées sur la Figure 1.

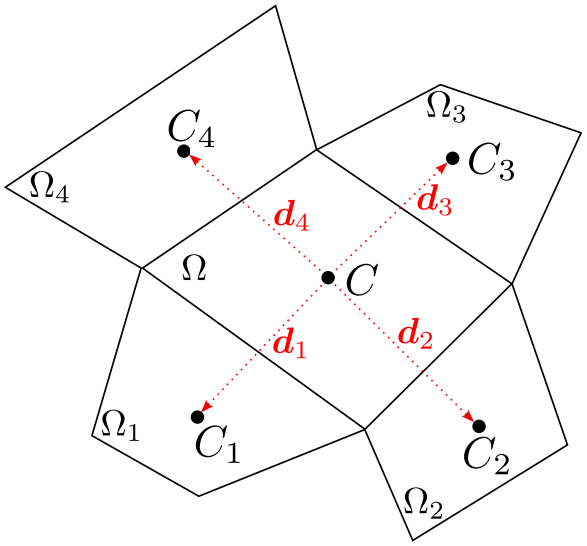


Figure 1. – Exemple d'une cellule entourée de ses quatre voisines - Calcul du gradient

Notons X, Y et Z les coordonnées du centre C de la cellule Ω, et X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées des centres C_i des cellules voisines Ω_i. Définissons alors les vecteurs $\boldsymbol{d}_i$ reliant le centre C aux centres des cellules voisines C_i :

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{pmatrix} X_i - X \\ Y_i - Y \\ Z_i - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}. \tag{.1}$$

En considérant une variable quelconque ϕ, ses valeurs aux centres des cellules voisines peuvent être extrapolées à partir de sa valeur au centre de la cellule Ω :

$$\phi(C_i) = \phi(C) + \boldsymbol{d}_i \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi)_C, \tag{.2}$$

où $(\boldsymbol{\nabla}\phi)_C$ est le gradient de ϕ calculé au centre C, également noté $\boldsymbol{\nabla}\phi_C$:

$$(\boldsymbol{\nabla}\phi)_C = \boldsymbol{\nabla}\phi_C = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_C \\ \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)_C \\ \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)_C \end{pmatrix}. \tag{.3}$$

En écrivant la relation (.2) pour toutes les cellules Ω_i, le système linéaire suivant peut être obtenu :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_C \\ \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)_C \\ \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)_C \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\nabla}\phi_C} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi(C_1) - \phi(C) \\ \phi(C_2) - \phi(C) \\ \phi(C_3) - \phi(C) \\ \phi(C_4) - \phi(C) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}. \tag{.4}$$

Afin de déterminer le gradient $\boldsymbol{\nabla}\phi_C$, ce système surdéterminé est résolu au sens des moindres carrés. Cela signifie que la valeur du gradient choisie est celle permettant de minimiser la norme $\left\|\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{\nabla}\phi_C - \boldsymbol{b}\right\|$. Cette solution est alors déterminée comme suit :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi_C = \underbrace{\left({}^t\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\;\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\right)^{-1}\,{}^t\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}}_{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}}\;\boldsymbol{b} \tag{.5}$$

La matrice $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}}$ étant toujours de dimensions 3×3, elle est facilement inversible. De plus, les composantes de $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ sont uniquement dépendantes du maillage, donc l'inversion n'a besoin d'être effectuée qu'une seule fois par cellule lors de l'initialisation. Si un maillage mobile était considéré, l'inversion devrait être réalisée après chaque déplacement du maillage. Étant donné que seul le vecteur $\boldsymbol{b}$ varie d'une itération à l'autre, le calcul du gradient avec la méthode des moindres carrée se fait simplement au moyen d'un produit matrice-vecteur :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi_C = \overline{\overline{\boldsymbol{H}}}\;\boldsymbol{b}, \tag{.6}$$

où

$$\overline{\overline{\boldsymbol{H}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{G}}}^{-1}\,{}^t\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}. \tag{.7}$$

Dans le cas de cellules ayant un grand *aspect ratio* (rapport hauteur/largeur), c'est à dire des cellules beaucoup plus grandes dans une direction que dans l'autre, la méthode « Weighted Least Squares » permet de calculer les gradients de manière plus précise. Cette méthode consiste à ajouter des matrices de poids $\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}$ dans le système linéaire de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}\;\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\;\boldsymbol{\nabla}\phi_C = \overline{\overline{\boldsymbol{W}}}\;\boldsymbol{b}. \tag{.8}$$

$\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}$ est une matrice diagonale dont les composantes w_i sont définies comme suit :

$$w_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{d}_i\|}. \tag{.9}$$

Dans ce cas, le gradient $\boldsymbol{\nabla}\phi_C$ est obtenu en effectuant les opérations suivantes :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi_C = \overline{\overline{\boldsymbol{J}}}^{-1}\ {}^t\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\ {}^t\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}\ \overline{\overline{\boldsymbol{W}}}\ \boldsymbol{b}, \tag{.10}$$

avec

$$\overline{\overline{\boldsymbol{J}}} = {}^t\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\ {}^t\overline{\overline{\boldsymbol{W}}}\ \overline{\overline{\boldsymbol{W}}}\ \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}. \tag{.11}$$

A.2. Calcul de la divergence avec la méthode de Gauss

Considérons une cellule Ω entourée de ses quatre cellules voisines Ω_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, telles que représentées sur la Figure 2.

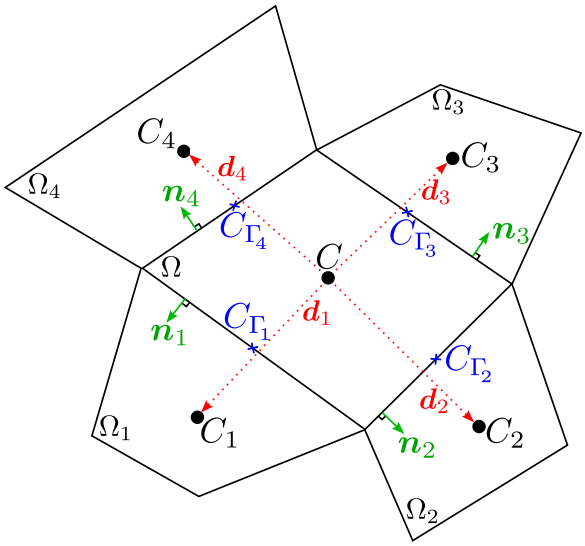


Figure 2. – Exemple d'une cellule entourée de ses quatre voisines - Calcul de la divergence

Soit $\boldsymbol{\phi}$ un champ vectoriel dont les valeurs aux centres des cellules sont connues. En utilisant la méthode de Gauss, la divergence de $\boldsymbol{\phi}$ peut être calculée au centre C de la cellule Ω en intégrant l'opérateur sur le volume de la cellule :

$$\iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\Omega = \oiint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{.12}$$

En supposant que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}$ est constante à l'intérieur de Ω et en séparant l'intégrale surfacique en la somme des intégrales sur les différentes faces Γ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$, la divergence peut alors s'exprimer comme suit :

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi})_C = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{N_f}\iint_{\Gamma_k} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{.13}$$

En considérant que $\boldsymbol{\phi}$ est constante sur chaque face, la divergence peut finalement se calculer de la manière suivante :

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\phi})_C = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=1}^{4} \left[\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{\phi} \left(C_{\Gamma_k} \right) \right] |\Gamma_k|. \tag{.14}$$

Dans l'expression précédente, $\boldsymbol{\phi} \left(C_{\Gamma_k} \right)$ correspond à la valeur de $\boldsymbol{\phi}$ interpolée au centre C_{Γ_k} de la face Γ_k. Dans le cas du schéma « Gauss Linear » utilisé dans OpenFOAM, une interpolation linéaire est effectuée :

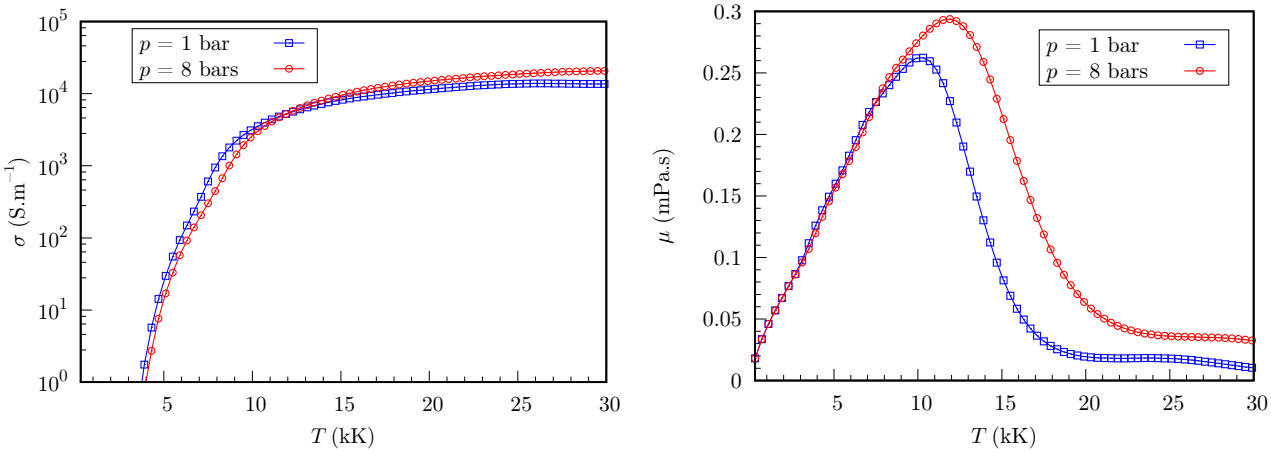
$$\boldsymbol{\phi} \left(C_{\Gamma_k} \right) = \alpha_k \ \boldsymbol{\phi}(C) + (1 - \alpha_k) \ \boldsymbol{\phi}(C_k), \tag{.15}$$

où

$$\alpha_k = \frac{\left\| \overrightarrow{C_{\Gamma_k} C_k'} \right\|}{\| \boldsymbol{d}_k \|}. \tag{.16}$$

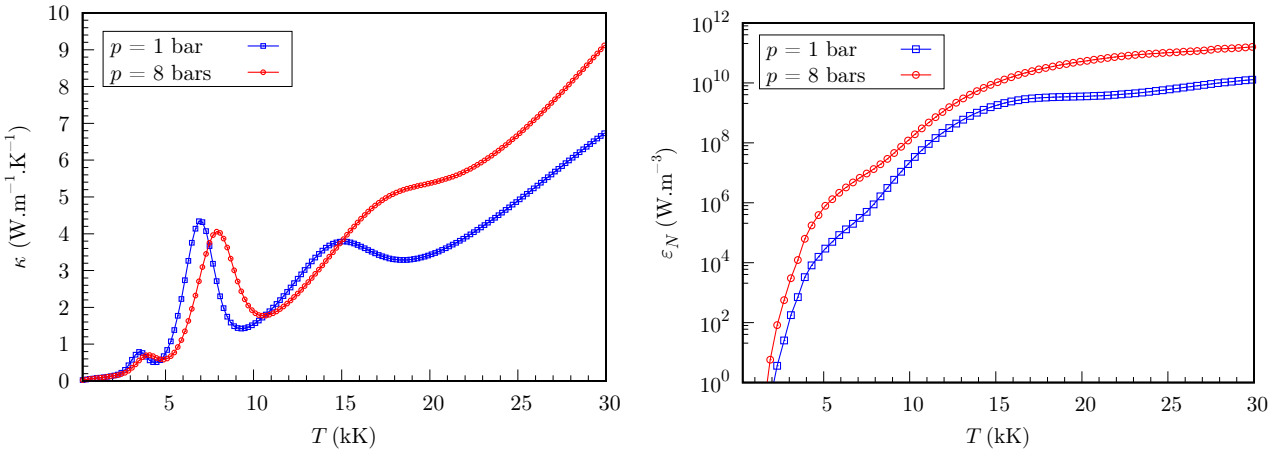
B. Propriétés thermodynamiques et coefficients de transport de l'air et de l'oxygène

B.1. Air



(a) Conductivité électrique

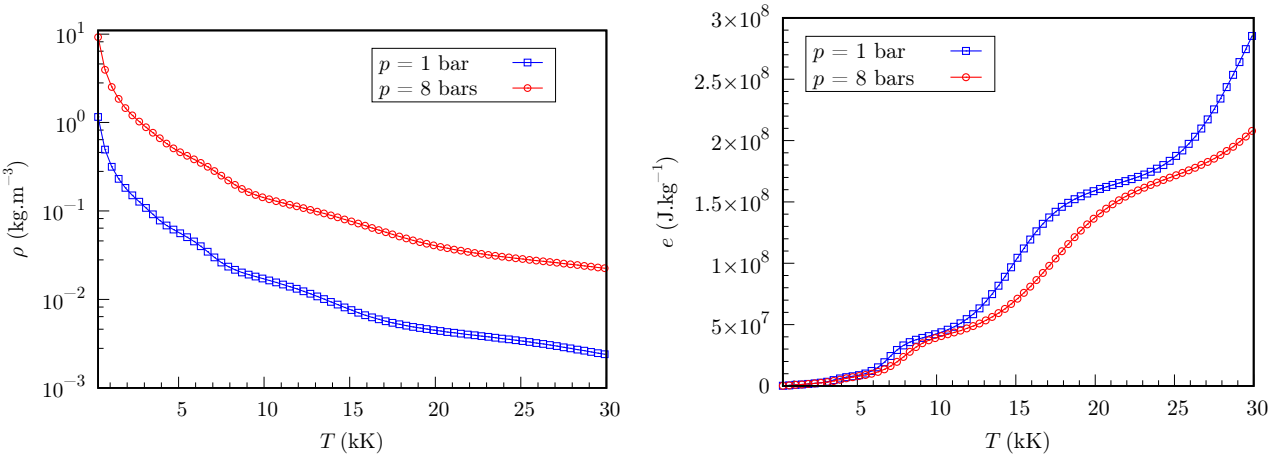
(b) Viscosité dynamique



(c) Conductivité thermique

(d) Coefficients d'émission nette ($r = 5$ mm)

Figure 3. – Coefficients de transport de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars.

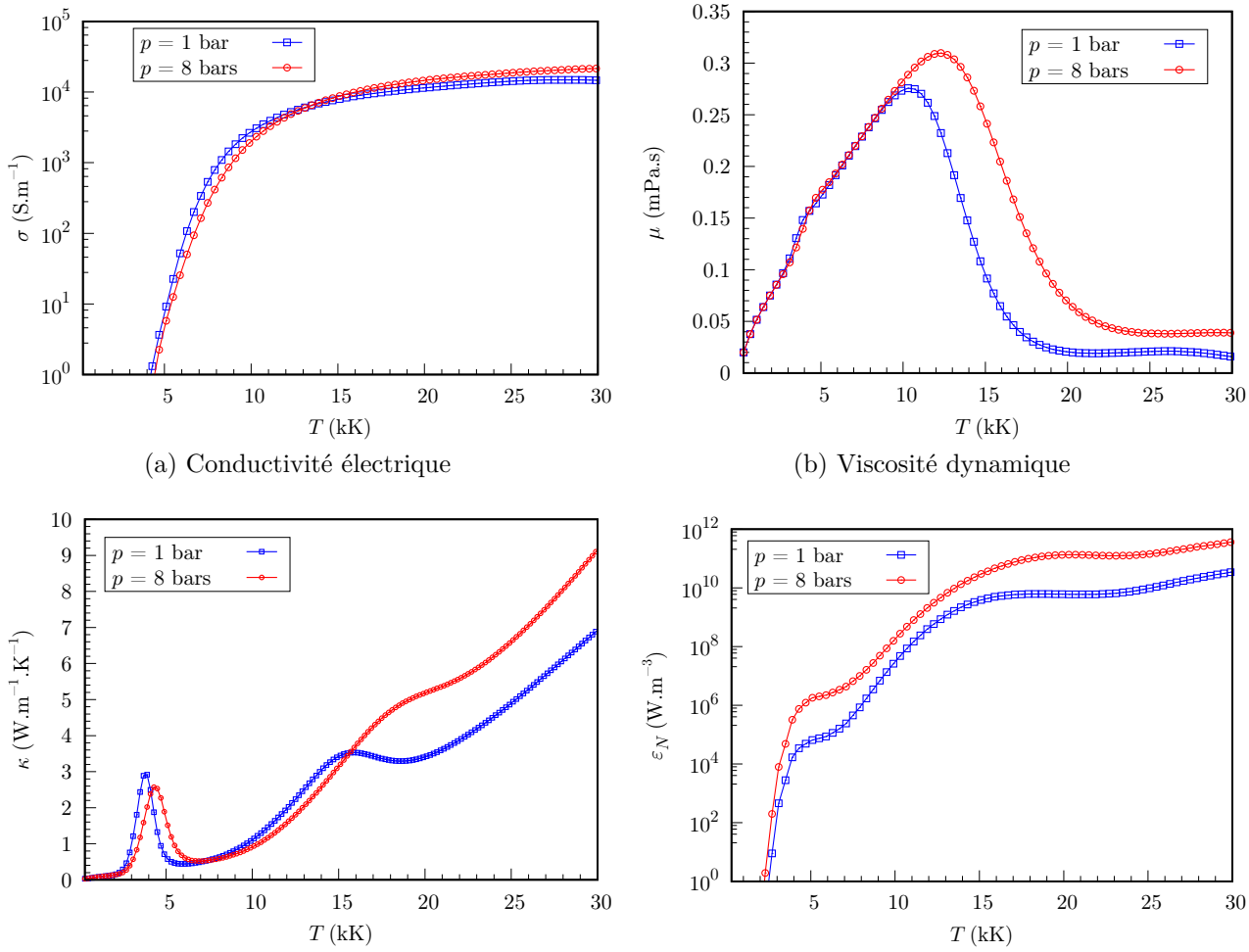


(a) Densité de masse

(b) Énergie interne massique

Figure 4. – Densité de masse et énergie interne de l'air à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars.

B.2. Oxygène



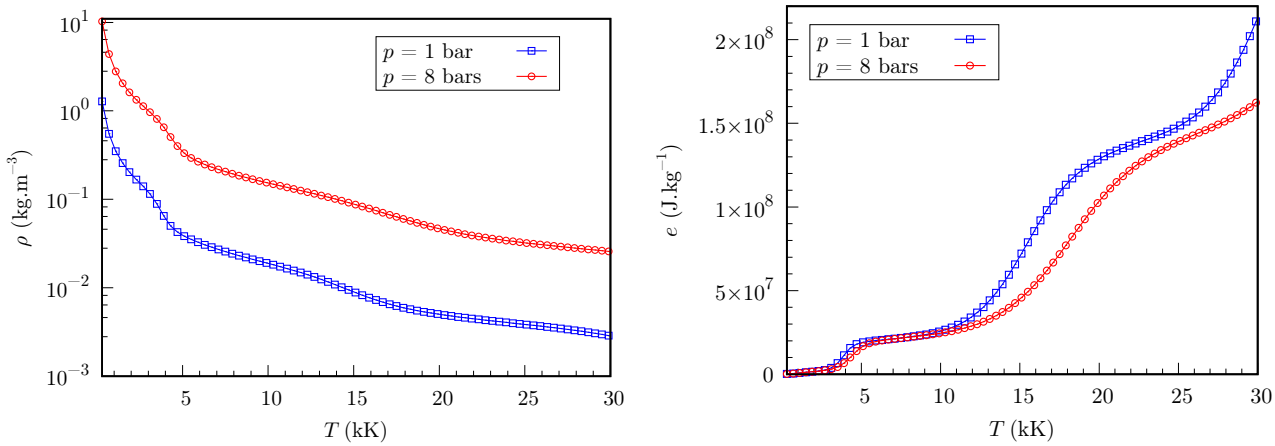
(a) Conductivité électrique

(b) Viscosité dynamique

(c) Conductivité thermique

(d) Coefficients d'émission nette ($r = 0.5$ mm)

Figure 5. – Coefficients de transport de l'oxygène à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars.



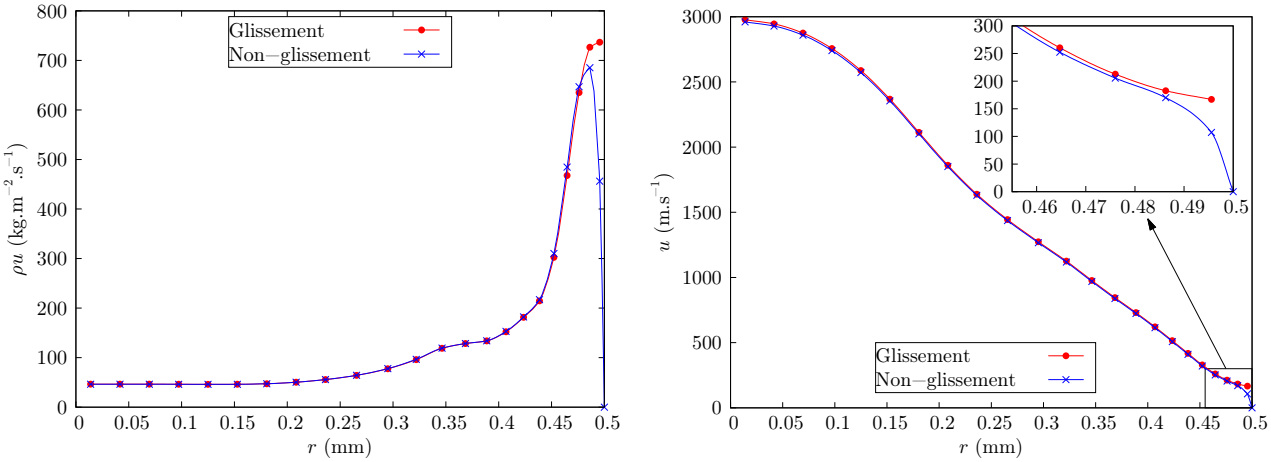
(a) Densité de masse

(b) Énergie interne massique

Figure 6. – Densité de masse et énergie interne de l'oxygène à $p = 1$ bar et $p = 8$ bars.

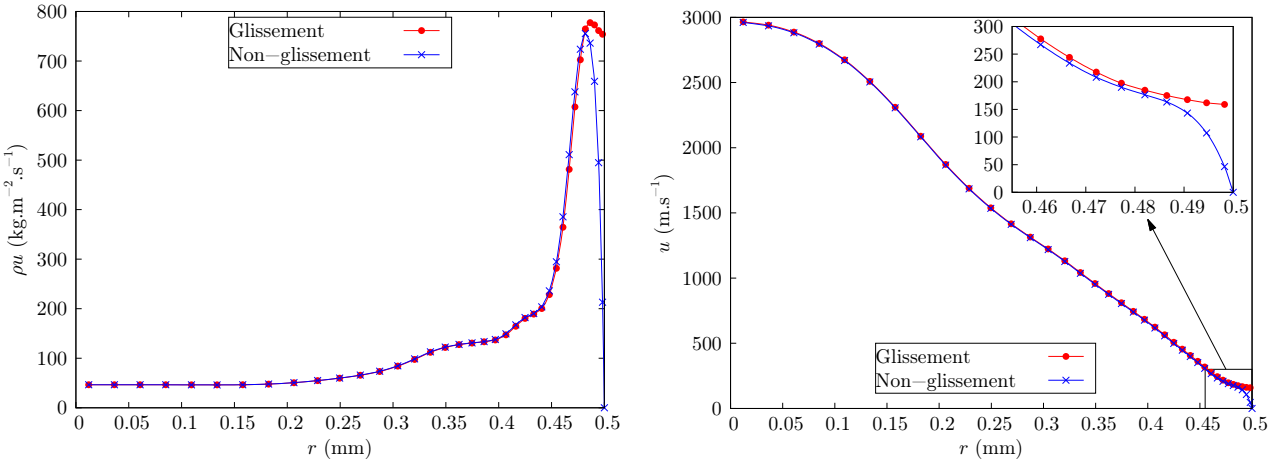
C. Comparaisons entre conditions de glissement et de non-glissement

Dans le cadre de la simulation de la torche à chaud du Chapitre 3, nous avons évalué l'impact sur l'écoulement de la condition limite de glissement imposée sur la paroi de la tuyère. Pour cela, les calculs ont été effectués avec le solveur OpenFOAM en considérant des conditions limites de glissement et de non-glissement avec trois maillages distincts, comprenant différents nombres de cellules n_r dans la direction radiale, au niveau du canal de tuyère. Le maillage le plus grossier comprenait $n_r = 23$ cellules, pour le maillage intermédiaire $n_r = 37$ et dans le maillage le plus raffiné, $n_r = 55$. Les profils radiaux de quantité de mouvement axiale ρu et de vitesse axiale u obtenus au milieu du canal de tuyère avec les trois maillages sont représentés sur les Figures 7 à 9.



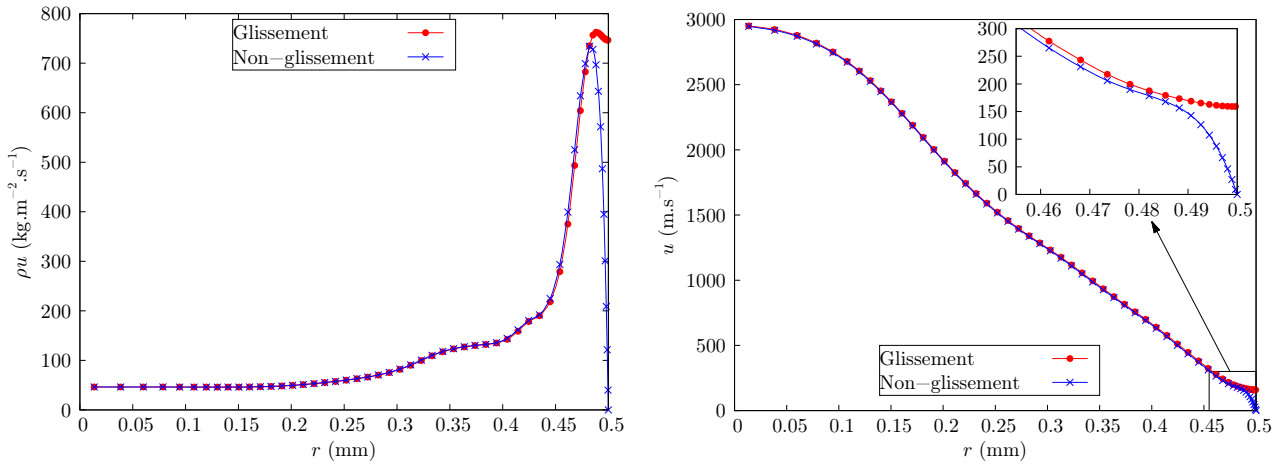
(a) Quantité de mouvement axiale (b) Vitesse axiale

Figure 7. – Comparaison des profils de quantité de mouvement et de vitesse au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) entre conditions de glissement et conditions de non-glissement - Maillage le plus grossier ($n_r = 23$)



(a) Quantité de mouvement axiale (b) Vitesse axiale

Figure 8. – Comparaison des profils de quantité de mouvement et de vitesse au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) entre conditions de glissement et conditions de non-glissement - Raffinement intermédiaire ($n_r = 37$)



(a) Quantité de mouvement axiale

(b) Vitesse axiale

Figure 9. – Comparaison des profils de quantité de mouvement et de vitesse au milieu du canal de tuyère ($x = 5.5$ mm) entre conditions de glissement et conditions de non-glissement - Maillage le plus fin ($n_r = 55$)

Avec les conditions limites de non-glissement, les deux maillages les plus fins permettent de capturer une couche limite fine de 0.01 mm d'épaisseur. Cependant, avec le deuxième maillage ayant un niveau de raffinement intermédiaire ($n_r = 37$), seules 3 cellules sont présentes dans la couche limite, n'assurant pas une bonne description de celle-ci. Avec le maillage le plus grossier ($n_r = 23$), une unique cellule est localisée dans la couche limite. Une meilleure analyse de la couche limite est possible avec le maillage le plus raffiné ($n_r = 55$), où 8 cellules permettent de la capturer. Ce niveau de raffinement nécessite cependant des temps de calcul très importants.

Étant donné que le débit massique est la grandeur principalement étudiée lors des comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques du Chapitre 4, il est important d'évaluer l'influence du maillage et de la condition limite sur les valeurs de débit calculées. Ainsi, le Tableau 1 permet de comparer les valeurs obtenues avec les différents maillages et conditions limites.

n_r	Débits massiques (kg/m^3)	
	Glissement	Non-glissement
23	1.53×10^{-4}	1.45×10^{-4}
37	1.51×10^{-4}	1.43×10^{-4}
55	1.51×10^{-4}	1.42×10^{-4}

Tableau 1. – Débits massiques calculés en fonction du maillage et de la condition limite en vitesse sur la paroi de tuyère.

On constate tout d'abord que la valeur de débit calculée est plus sensible à la résolution du maillage dans le cas de parois non-glissantes. Un écart relatif maximal de 8% est obtenu entre le débit calculé avec la condition de glissement sur le maillage grossier ($n_r = 23$) et celui déterminé avec la condition de non-glissement avec le maillage le plus fin ($n_r = 55$). Avec le maillage utilisé pour l'étude du Chapitre 3 ($n_r = 37$), l'utilisation de parois glissantes donne un écart relatif de 5.5% par rapport à des conditions de non-glissement.