Université Paris Nanterre
200 av. de la République
92001 Nanterre Cedex
www.parisnanterre.fr

Membre de l'université Paris Lumières
École doctorale 139 : Connaissance, langage, modélisation
LEME - Laboratoire Énergétique Mécanique Électromagnétisme

Ali MEZHER

Amélioration des performances pour le calcul des structures à comportement non linéaire de grandes dimensions

Thèse présentée et soutenue publiquement le 1er décembre 2022
en vue de l'obtention du doctorat de Génie informatique, mécanique, génie civil de l'Université Paris Nanterre
sous la direction de Luc DAVENNE (Université Paris Nanterre)
et de Ludovic JASON

Jury :

Président du jury :	Pierre GOSSELET	Directeur de Recherche CNRS, Université de Lille
Rapporteur :	Frédéric DUFOUR	Professeur des Universités, Grenoble INP
Rapporteur :	Alain SELLIER	Professeur des Universités, Université Paul Sabatier Toulouse III
Membre du jury :	Cédric GIRY	Maitre de conférences HDR, ENS Paris Saclay
Membre du jury :	Eric LORENTZ	Ingénieur Chercheur, EDF R&D
Membre du jury :	Luc DAVENNE	Professeur des Universités, Université Paris Nanterre, Co-directeur de thèse
Membre du jury :	Ludovic JASON	Directeur de Recherche CEA, CEA Saclay Co-directeur de thèse
Membre du jury :	Gauthier FOLZAN	Ingénieur Chercheur, CEA Saclay Encadrant de thèse
Invitée :	Mme Sylvie MICHEL-PONNELLE	Ingénieur Chercheur, EDF R&D

RESUME

Afin d'évaluer le phénomène de fissuration dans les grandes structures en béton armé et précontraint, une simulation prédictive de l'endommagement du béton avec un maillage fin et une loi de comportement non linéaire est nécessaire. Du fait de la charge de calcul, une telle modélisation n'est pas applicable directement sur des structures de grande dimensions dont les dimensions caractéristiques sont supérieures à plusieurs dizaines de mètres. Pour traiter ce type de structure, une méthode de condensation statique adaptative (ASC), qui concentre l'effort de calcul sur la zone endommagée (domaine d'intérêt) uniquement, qui peut évoluer en raison de l'initiation ou de la propagation de la fissure, a été développée.

Une attention particulière est portée aux développements nécessaires pour étendre le domaine d'application de la méthode ASC aux structures en béton précontraint en tenant compte des effets de vieillissement du béton, appelés retrait et fluage. La méthode est ensuite appliquée à une poutre précontrainte en flexion et validée par comparaison avec un calcul complet (calcul classique élément finis). L'efficacité numérique de l'approche proposée est évaluée avec, sur cette application, un facteur de gain de temps de l'ordre de 8.

Une méthode de partitionnement automatique du maillage est ensuite développée pour rendre la méthode encore plus efficace. Basé sur des considérations physiques, elle prend en compte la forme attendue et l'évolution de l'endommagement lors du chargement. Elle est appliquée à trois cas de test avec des géométries et des chargements différents pour discuter du processus d'étalonnage à travers une analyse de sensibilité. Un ensemble unique de paramètres est finalement proposé et l'efficacité de la méthode est démontrée. Comme conclusion; une méthode automatique complète est mise à disposition pour la simulation de structures en béton armé et précontraint à grande échelle.

En plus de l'ASC, les approches de Raffinement de Maillage (MR), qui consistent à augmenter localement la finesse du maillage dans les zones où il est indispensable de calculer la solution avec une plus grande précision, peuvent également apporter des bénéfices. Afin de tirer avantage de ces deux méthodes et d'atteindre des niveaux de représentativité plus élevés, ces deux méthodes (ASC et MR) sont associées dans ce manuscrit. L'idée principale est d'utiliser un maillage fin, en utilisant MR, uniquement sur le domaine d'intérêt activé de la méthode ASC, limitant ainsi les opérations spécifiques à l'ASC. Après une brève présentation du couplage ASC/MR, une application sur une poutre en flexion entaillée est réalisée. Elle montre que la précision de la méthode ASC est maintenue, lorsqu'on considère le MR tout en apportant un gain supplémentaire sur le temps de calcul. Une enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne est ensuite considérée. Elle démontre une amélioration significative du temps de calcul, jusqu'à 14 (contre 5 sans le couplage). Cette application montre également qu'il devient possible d'atteindre une finesse de maillage qui reste inaccessible en utilisant soit un calcul complet, soit la méthode ASC seule.

L'efficacité de la méthode ASC est enfin montrée sur la maquette à l'échelle 1/3 d'une enceinte de confinement (Vercors) qui est une structure réelle de grandes dimensions à comportement non linéaire. Un gain de temps allant jusqu'à 10 est obtenu et la méthode ASC permet d'atteindre des niveaux de simulations inaccessibles en utilisant le calcul complet tout en utilisant un modèle d'endommagement non local.

Mots-clés :

Fissure, structures de grandes dimensions, endommagement, comportement non linéaire, Condensation Statique Adaptative, domaine d'intérêt, retrait, fluage, partitionnement du maillage, raffinement du maillage

ABSTRACT

In order to evaluate the cracking process in large reinforced and pre-stressed concrete structures, a predictive simulation of concrete damage with a refined mesh and a nonlinear law is required. Because of the computational load, such modelling is not applicable directly on large-scale structures whose characteristic dimensions are over several tens of meters. To deal with this type of structure, an adaptive static condensation method (ASC), which concentrates the computational effort on the damaged area (domain of interest) only, which can evolve due to crack initiation or propagation.

Particular attention is paid to the developments necessary to extend the field of application of the ASC method to prestressed concrete structures taking into account the ageing effects in concrete, which are known as shrinkage and creep. The method is then applied to a bending prestressed beam and validated by comparison to a complete computation (classical finite element computation). The numerical efficiency of the proposed approach is evaluated with, on this application, a time saving factor of about 8.

An automatic mesh partitioning method is then implemented to make the method even more efficient. Based on physical considerations, it takes into account the expected shape and the evolution of the damaged regions during the loading. It is applied to three test cases with different geometries and loading to discuss the calibration process through a sensitivity analysis. A unique set of parameters is finally proposed and the efficiency of the method is demonstrated. As a conclusion; a complete automatic method is made available for the simulation of large scale reinforced and prestressed concrete structures.

In addition to the ASC, Mesh Refinement (MR) approaches, which consist in locally increasing the fineness of the mesh in the areas where it is essential to calculate the solution with a greater precision, can also bring benefits. In order to take advantage of these two methods and to achieve higher levels of representativeness, these two methods (ASC and MR) are associated this manuscript. The main idea is to use a fine mesh, using MR, only on the activated domain of interest of the ASC method, thus limiting the specific ASC operations. After a brief presentation of the ASC/MR coupling, an application on a notched bending beam is carried out. It shows that the accuracy of the ASC method is maintained, when considering MR while providing an additional gain on the calculation time. A simplified reinforced concrete vessel subjected to internal pressure is then considered. It demonstrates a significant improvement in calculation time, up to 14 (against 5 without the coupling). This application also shows that it becomes possible to reach a fineness of mesh which remains inaccessible when using either a standard finite element calculation or the ASC method alone.

The efficiency of the ASC method is finally shown on the 1/3 scale model of a containment building (Vercors) which is a real structure of large dimensions with non-linear behavior. A time saving factor of up to 10 is obtained and it allows to reach levels of simulations inaccessible in full calculation while using a non-local damage model.

Keywords:

Crack, large-scale structures, damage, nonlinear behavior, Adaptive Static Condensation, domain of interest, shrinkage, creep, mesh partitioning, mesh refinement

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mes deux rapporteurs, Frédéric Dufour et Alain Sellier, pour avoir pris le temps de rapporter ma thèse et pour les commentaires qui ont amenés à des riches discussions. Je tiens également à remercier tous les membres de mon Jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail de thèse, ainsi que pour les échanges passionnants que nous avons pu avoir lors de la soutenance : Pierre Gosselet, que je remercie particulièrement pour avoir présidé ce jury, Cédric Giry, Eric Lorentz et Mme Sylvie Michel-Ponnelle.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'équipe d'encadrement : Ludovic Jason, Luc Davenne et Gauthier Folzan, pour m'avoir accompagné et soutenu tout au long de ces 3 années. Vos qualités humaines et scientifiques m'ont assuré une formation de haut niveau. Merci pour votre gentillesse, pour toutes les connaissances que vous m'avez transmises, pour votre confiance et pour vos conseils pertinents.

J'adresse de sincères remerciements à tous les membres du laboratoire LM2S du CEA de Saclay avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant ces 3 années. Merci à Séverine, Sabine, Caroline, Robine, Jean-Charles, Nicolas, Fabrice, Antoine, David, Quentin, Ali, Mathieu, Christopher, Mathieu, Francis, Paul, Olivier, Pierre, Joël, et j'en oublie encore beaucoup, pour les bons moments et pour votre gentillesse.

Je tiens encore une fois à remercier Ludovic et Jean-Charles pour leur confiance et pour les efforts qu'ils ont fournis et qui m'ont permis d'avoir la belle opportunité de rester au LM2S en tant qu'ingénieur chercheur suite à la thèse.

Et pour finir, un merci spécial à ma chérie Nour et à ma famille (Hanaa, Bassam, Alaa, Salim et Samih) pour leur amour et leur soutien qui m'ont motivé tout au long de cette thèse.

SOMMAIRE

RESUME **1**

ABSTRACT **2**

REMERCIEMENTS **3**

CHAPITRE 1. ETAT DE L'ART **16**

1.1 METHODES D'AMELIORATION DES PERFORMANCES DE CALCUL DES STRUCTURES DE GRANDES DIMENSIONS 17

1.1.1 Réduction des modèles 17

1.1.2 Calcul parallèle 26

1.1.3 Raffinement Adaptatif de Maillage (AMR) 29

1.1.4 Condensation statique (Guyan 1965) 32

CHAPITRE 2. METHODE DE CONDENSATION STATIQUE ADAPTATIVE AMELIOREE (MEZHER ET AL. 2022B) **40**

2.1 INTRODUCTION 41

2.2 NOUVEL ALGORITHME DETAILLE DE LA METHODE ASC 41

2.2.1 Présentation de l'algorithme 41

2.2.2 Traitement du cas de chargement variable 47

2.2.3 Validation de la méthode ASC et discussion 48

2.3 EXTENSION DU DOMAINE D'APPLICATION : PRECONTRAINTE AVEC PRISE EN COMPTE DES DEFORMATIONS INSTANTANEES ET DIFFEREES 55

2.3.1 Principe de la précontrainte 55

2.3.2 Pertes de tension ("BPEL99" 1999) 55

2.3.3 Méthodes de simulation de précontrainte 59

2.3.4 Procédure Phasage de cast3m : mise en précontrainte avec prise en compte du fluage et du retrait 59

2.3.5 Phasage condensé 61

2.3.6 Application : poutre précontrainte 63

2.3.7 Conclusion 68

CHAPITRE 3. PARTITIONNEMENT AUTOMATIQUE DE MAILLAGE ADAPTE A LA METHODE ASC (MEZHER ET AL. 2022B) **69**

3.1 INTRODUCTION 70

3.2 TRAITEMENT DU MAILLAGE DANS LE CAS DU BETON ARME ET/OU PRECONTRAINT 70

3.2.1 Partitionnement de maillage en zones dans le cas de structure en Béton Armé (BA) – première proposition 70

3.2.2 Évaluation de la première proposition sur une enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne 72

3.2.3 Seconde proposition pour le traitement du béton armé 74

3.2.4 Application de la seconde proposition du traitement du béton armé à l'enceinte simplifiée 76
3.3 PARTITIONNEMENT AUTOMATIQUE DE MAILLAGE ADAPTE A LA METHODE ASC (MEZHER ET AL. 2022B) 78
3.3.1 Effet du partitionnement du maillage sur le temps de calcul de la méthode ASC 78
3.3.2 Méthode de partitionnement automatique du maillage 80
3.3.3 Analyse de sensibilité 83
3.3.4 Conclusion 92
CHAPITRE 4. COUPLAGE DE LA METHODE ASC AU PRINCIPE DU RAFFINEMENT DE MAILLAGE (MEZHER ET AL. 2022A) 94
4.1 INTRODUCTION 95
4.2 CONDENSATION STATIQUE ADAPTATIVE COUPLEE AU RAFFINEMENT DU MAILLAGE 95
4.2.1 Phase de préparation 96
4.2.2 Raffinement du maillage à l'intérieur du domaine d'intérêt 97
4.2.3 Phase de calcul 98
4.3 VALIDATION SUR UNE POUTRE ENTAILLEE EN FLEXION 99
4.4 ENCEINTE DE CONFINEMENT SIMPLIFIEE SOUS PRESSION (STRUCTURE EN BETON ARME) 102
4.4.1 Présentation des résultats 105
4.4.2 Analyse des résultats obtenus 109
4.5 CONCLUSION 113
CHAPITRE 5. APPLICATION DE LA METHODE ASC SUR LA MAQUETTE VERCORS 114
5.1 INTRODUCTION ET DESCRIPTION DE LA MAQUETTE 115
5.2 PRECONTRAINTE 117
5.3 DESCRIPTION DE LA MODELISATION 118
5.3.1 Maillage 118
5.3.2 Modèles et matériaux 119
5.3.3 Conditions aux limites et chargements considérés 120
5.3.4 Partitionnement initial du maillage 121
5.3.5 Configuration de calcul 122
5.4 VALIDATION DE LA METHODE SUR LE MAILLAGE GROSSIER 122
5.4.1 Calcul VO1 122
5.4.2 Calcul VD6 127
5.5 APPLICATION DU RAFFINEMENT DE MAILLAGE A LA MAQUETTE VERCORS 131
5.5.1 Conclusion 137
CHAPITRE 6. CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES 138
6.1 CONCLUSION 139
6.2 PERSPECTIVES 141
RÉFÉRENCES 143

LISTE DES FIGURES

Figure 1: Composition du parc nucléaire en France (Sources : EDF, RTE) 13

Figure 2: Enceinte de confinement de type double paroi: à gauche : principales dimensions, à droite : tracé schématique de la précontrainte (en bleu) (Costaz 1997) 14

Figure 3: Positionnement des différentes approches de modélisation par rapport à leur précision, leur facilité d'intégration et leur coût de calcul (Da Silva 2015) 18

Figure 4 : Méta modélisation sur un problème thermo aérodynamique couplée au rayonnement (Ansys® 2022) 18

Figure 5 : Analyse des incertitudes assistée par la méta modélisation 20

Figure 6 : post-traitement de la réponse aléatoire du PCE (Sudret 2007) 21

Figure 7 : Pont sous une charge sismique (Ni et al. 2019) 22

Figure 8 : Principe de la POD (issu de (Leturcq 2022)) 24

Figure 9 : Le supercalculateur IBM Blue Gene - laboratoire national d'Argonne - Etats Unis [source : Wikipédia] 27

Figure 10 : Représentation graphique de la loi d'Amdahl [source : Wikipédia] 27

Figure 11 : Description schématique de la méthode FETI (Farhat and Mandel 1998). 28

Figure 12 : Principe de l'AMR (S Delage Santacreu 2006) 29

Figure 13 : Adaptation de maillage par déplacement de nœuds (issu de (Tenchev and MacKenzie 2005)) 30

Figure 14 : H-raffinement (issue de (Hay 2004)) 30

Figure 15 : Concentration massique montré sur un maillage AMR (S Delage Santacreu 2006) 31

Figure 16 : évolution du maillage dans l'espace et dans le temps en fonction de la fissure (Gibert 2019) 32

Figure 17 : Modèle mécanique réduit de muscles basé sur la condensation statique (Essahbi 2013) (en jaune : partie condensée, en bleu : domaine d'intérêt) 32

Figure 18 :principe de la méthode de condensation statique adaptative 35

Figure 19 : Squelette du domaine élastique (première condensation) 35

Figure 20 : Poutre entaillée en flexion 3 points partitionnée en 16 zones équivalentes (Llau 2016) 38

Figure 21 : Calcul ASC - Evolution du domaine d'intérêt et de l'endommagement en début de calcul (point 1), en pic de chargement et en fin de calcul (Llau 2016). 38

Figure 22: Courbe force - flèche - poutre en flexion 3 points (Llau 2016) 38

Figure 23: La poutre en flexion trois points 41

Figure 24 : Algorithme détaillé de la méthode ASC (en jaune : Phase de préparation, en gris : phase de calcul) 42

Figure 25 : Maillage de la poutre partitionné en 16 zones équivalentes 43

Figure 26 : Première Condensation 43

Figure 27 : Résultats du pré-calcul linéaire sur la poutre simple en flexion 44

Figure 28: Construction du système à résoudre 44

Figure 29 : Vérification du critère de propagation – Poutre simple en flexion 45

Figure 30 : Configuration particulière de propagation de l'endommagement 45
Figure 31 : Vérification du critère d'amorçage - Poutre simple en flexion.....47
Figure 32: à gauche : Evolution de chargement, à droite : Zoom sur l'évolution ponctuelle de chargement 47
Figure 33 : Champ d'endommagement de Mazars D - Calcul complet sans la méthode de condensation.....48
Figure 34 : Champ d'endommagement de Mazars D - Calcul ASC 48
Figure 35 : Champ d'endommagement de Mazars D - Calcul avec la méthode de condensation adaptative modifiée 48
Figure 36 : Détails de la poutre (maillage, dimensions et chargements) 50
Figure 37 : Maillage de la poutre partitionné en 32 zones.....51
Figure 38 : Comparaison courbe force - flèche entre calcul complet et calcul ASC 51
Figure 39 : Endommagement à la fin de calcul - Poutre entaillée 2D.....51
Figure 40 : Résultats de l'analyse du temps de calcul avec la méthode ASC ($i0, i1, i2$ et $ifin$ sont des pas de temps remarquables du calcul).....52
Figure 41 : Détails du calcul - Poutre entaillée (Sont reportés ici les même pas de temps remarquables que sur la Figure 40).....53
Figure 42 : Détails par pas de calcul – Poutre entaillée (Sont reportés ici les même pas de temps remarquables que dans la Figure 40) 54
Figure 43 : Différence entre béton armé et précontraint (issue de (Techniques de l'Ingénieur 2005)).....55
Figure 44 : séparation conventionnelle des déformations différées 58
Figure 45 : Calcul à t1 : poids propre du béton 60
Figure 46 : Calcul à t2 : mise en précontrainte 60
Figure 47 : Calcul à t3 : temps final 61
Figure 48 : algorithme de la méthode ASC pour le calcul de précontrainte (DI : domaine d'intérêt, en jaune : Phase de préparation, en gris : phase de calcul).....62
Figure 49 : Condensation de déformations différées 63
Figure 50: Poutre précontrainte.....64
Figure 51 : Dispositif d'ancrage (issue de (Siline 2017)) 65
Figure 52: Partitionnement du maillage et domaine d'intérêt 65
Figure 53 : résultats des calculs sur la poutre de précontrainte 66
Figure 54 : Champs d'erreur $\epsilon UzDI$ et ϵDDI 66
Figure 55 : force longitudinale le long du câble à la fin de la mise en précontrainte.....66
Figure 56 : Profil de tension de câble à la fin de la mise en précontrainte avec prise en compte de l'effet des déformations différées à 2000 jours.....68
Figure 57 : Champ de contrainte horizontale dans le béton suite à la mise en précontrainte à $t2$ de la poutre ($\sigma xx(t2)$). 68
Figure 58 : Partitionnement en zones en cas du BA - Cas classique.....71
Figure 59 : Partitionnement en zones en cas du BA - Cas particulier 1 71
Figure 60 : Partitionnement en zones en cas du BA - Cas particulier 2 72
Figure 61 : Enceinte simplifiée en béton armé.....73

Figure 62 : Maillage d'une zone du fût 73
Figure 63 : Maillage d'une zone du dôme 74
Figure 64 : Ajout de nœud d'acier sur la frontière des deux zones – Cas classique 75
Figure 65 : Ajout de nœud d'acier sur la frontière des deux zones - Cas particulier 75
Figure 66 : Eléments d'acier à traiter - Enceinte simplifiée 75
Figure 67 : Calcul ASC - évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt 76
Figure 68 : Courbe déplacement radial - Calcul complet vs Calcul ASC 76
Figure 69 : Profils d'endommagement à la fin du calcul - Complet vs ASC 77
Figure 70 : Poutre entaillée en flexion : maillage, dimensions et chargements 78
Figure 71 : décomposition initiale du maillage en 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ou 512 zones de tailles équivalentes 78
Figure 72 : profils d'endommagement en fin de calcul pour différentes décompositions initiales du maillage (les zones grises représentent les zones qui restent condensées) 79
Figure 73 : temps de calcul en fonction du nombre de zones de partitionnement (sont reportés ici les cas présentés dans la Table 7) 80
Figure 74 : répartition de la déformation équivalente de Mazars sur la poutre entaillée en flexion pour un déplacement imposé de 250 μm 81
Figure 75 : approche itérative pour l'identification des zones à risque 81
Figure 76 : Application de la méthode itérative pour la détermination de la zone à risque sur la poutre en flexion entaillée (pour une valeur de $TmaxZR = 3\%$) 82
Figure 77: les zones de propagation obtenues sur la poutre entaillée pour une valeur de $TZpr = 4$ 82
Figure 78 : les zones de propagation obtenues sur la poutre entaillée après partitionnement en $NPartpr = 4$ 82
Figure 79 : Partition finale de la poutre entaillée pour une valeur de $Tzrest = 1$ 83
Figure 80 : Schématisation de l'analyse de sensibilité 84
Figure 81 : plan d'expériences des six variables d'entrée 85
Figure 82 : partitionnement de maillage du calcul obtenu pour $X = 7{,}13 \times 10 - 2; 2{,}07 \times 10 - 3; 1\ ; 3{,}14\ ; 1{,}76\ ; 7$ 86
Figure 83 : évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt (la partie grise est condensée) 86
Figure 84 : partitionnement de maillage du calcul le plus lent parmi les 500 calculs – obtenu pour $X = 1{,}10 \times 10 - 1; 2{,}88 \times 10 - 3; 2\ ; 3{,}11\ ; 1{,}33\ ; 7$ 87
Figure 85 : Indices de sensibilité - Poutre entaillée en flexion 87
Figure 86: détails de la poutre précontrainte 87
Figure 87 : Poutre précontrainte en flexion 88
Figure 88 : Indices de sensibilité - Poutre précontrainte en flexion 88
Figure 89 : a- Enceinte simplifiée en béton armé ; b – renforts d'acier ; c – Exemple de partitionnement de maillage obtenue avec la méthode de partitionnement automatique développée 89
Figure 90 : évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt 89
Figure 91 : Indices de sensibilité - Enceinte simplifiée 90

Figure 92 : Evolution du temps de calcul avec le jeu de paramètres pour les trois cas test. Analyse de sensibilité et jeu de paramètres optimal 91

Figure 93: temps de calcul en fonction du nombre de zones de partitionnement pour la poutre en flexion 2D 92

Figure 94 : Algorithme de la méthode ASC après intégration du partitionnement automatique de maillage en zones (en jaune : Phase de préparation ; en gris : phase de calcul) 93

Figure 95 : Algorithme de la méthode ASC couplée au raffinement de maillage (en jaune : la phase de préparation, en gris : les étapes de calcul non linéaire, en vert : les étapes nécessaires au couplage de la méthode ASC avec le raffinement du maillage) 96

Figure 96 : Phase de préparation de la méthode ASC.....96

Figure 97 : Maillage du domaine d'intérêt : avant et après raffinement 97

Figure 98 : différence entre maillage conforme et non conforme 97

Figure 99 : illustration du transfert d'un champ défini aux points de Gauss.....99

Figure 100 : Poutre 2D entaillée en flexion 99

Figure 101: Évolution de l'endommagement, du domaine d'intérêt et de son maillage (ASC/MR) (le point rouge dans la première figure sera post-traité dans la suite).....100

Figure 102 : profil d'endommagement à la fin de la simulation - calcul complet 101

Figure 103 : Evolution du déplacement vertical et de l'ouverture de fissure en fonction du chargement - Poutre entaillée en flexion 101

Figure 104 : Evolution du domaine d'intérêt et de l'endommagement sans condensation du domaine élastique 102

Figure 105 : enceinte simplifiée - ASC/MR 103

Figure 106 : raffinement de maillage d'une poutre en béton armé 103

Figure 107 : Les différents maillages utilisés 104

Figure 108 : Partitionnement de maillage utilisé pour les calculs ASC.....105

Figure 109 : résultats de calcul du 1er test - Maillage grossier (20 cm) 105

Figure 110 : résultats de calcul du 2ème test - Maillage moyen (10 cm).....106

Figure 111 : résultats de calcul du 3ème test - Maillage fin (5 cm) 107

Figure 112 : évolution d'endommagement – Maillage extra fin (1,25 cm) 108

Figure 113 : point de post-traitement.....108

Figure 114 : Comparaison des comportements dans le domaine condensé.....109

Figure 115 : déformées obtenues, par le calcul complet, à 1 bar, en utilisant différentes finesses de maille.....110

Figure 116 : Les 3 points de post-traitement.....110

Figure 117 : Déplacements radiaux sur les 3 points de post-traitement et pour 3 finesses de maillage – Modèle de Mazars pour le béton 111

Figure 118 : Déplacements radiaux sur les 3 points de post-traitement et pour 3 finesses de maillage – Modèle élastique pour le béton.....112

Figure 119 : déplacements radiaux le long de la ligne z = 1,8 m – calcul élastique 112

Figure 120 : déplacements radiaux le long de la ligne rouge (z = 1,8 m) – Structure sans ouverture.....113

Figure 121 : La maquette Vercors sur le site EDF Lab. Les Renardières (Mazars, Labbe, and Masson 2016)(Bouhjiti 2018).....115

Figure 122 : ferraillage et câbles de précontrainte en zones déviées d'une enceinte de confinement (Grotto 2011)....116
Figure 123 : Géométrie et dimensions de la structure en béton....116
Figure 124 : Câbles précontraints – Vercors....118
Figure 125 : les différents maillages de Vercors....119
Figure 126 : Partitionnement de maillage pour la maquette VERCORS....122
Figure 127 : Contrainte orthoradiale et verticale à 191 jours avant mise en pression - calcul complet et calcul ASC....123
Figure 128 : Résultats (endommagement et déformée) à 191 jours, avant mise en pression, issus du calcul complet et du calcul ASC....123
Figure 129 : câble vertical – Vercors – 191 jours, avant mise en pression....124
Figure 130 : câble horizontal – Vercors – 191 jours, avant mise en pression....124
Figure 131 : câble gamma – Vercors – 191 jours, avant mise en pression....125
Figure 132 : câble dôme – Vercors – 191 jours, avant mise en pression....125
Figure 133 : évolution du déplacement radial au cours du temps - VO1....126
Figure 134 : évolution des contraintes avec le temps - calcul complet et calcul ASC – VO1....126
Figure 135 : Endommagement à 191,5 jours, fin de mise en pression - calcul complet et calcul ASC....127
Figure 136 : câble vertical - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression....128
Figure 137 : câble horizontal - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression....128
Figure 138 : câble gamma - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression....129
Figure 139 : câble dôme - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression....129
Figure 140 : Évolution du déplacement radial au cours du temps – VD6....130
Figure 141 : évolution des contraintes avec le temps - calcul complet et calcul ASC – VD6....130
Figure 142 : Endommagement à 2528,5 jours après mise en pression de 5,2 bars - calcul complet et calcul ASC....131
Figure 143 : densité et endommagement du premier test – Vercors....132
Figure 144 : densité et d'endommagement du 2ème test – Vercors....133
Figure 145 : densité et endommagement du 3ème test – Vercors....134
Figure 146: densité et endommagement du 4ème test – Vercors....135
Figure 147 : Profils d'endommagement à 6 bars - grossier et extra fin....136

LISTE DES TABLES

Table 1 : Paramètres Mazars - Poutre entaillée en flexion.....50
Table 2 : paramètres de perte de précontrainte (instantanées et relaxation) 64
Table 3: Résultats d'efficacité numérique sur la poutre de précontrainte 67
Table 4 : paramètres pour le modèle de retrait et de fluage (BPEL 99) 67
Table 5 : Paramètre de Mazars - Enceinte simplifiée en béton armé.....73
Table 6 : Résultats d'efficacité numérique - Enceinte simplifiée.....77
Table 7 : détails de calcul pour différents partitionnements de maillages (1, 8, 64 et 512 zones) 79
Table 8 : Intervalle de variation des six paramètres de l'analyse de sensibilité (distribution uniforme).....85
Table 9 : Résultat d'efficacité numérique - Poutre entaillée en flexion - ASC/MR 101
Table 10 : résumé des tests effectués (DE : Domaine Elastique, DI : Domaine d'Intérêt)...104
Table 11 : résultats des performances de calcul – 1er test.....105
Table 12 : résultats des performances de calcul – 2ème test 106
Table 13 : résultats des performances de calcul – 3ème test 107
Table 14 : résultats des performances de calcul – 4ème test 108
Table 15 : Principales dimensions de l'enceinte interne de Vercors.....117
Table 16 : Paramètres de Mazars - béton de Vercors.....119
Table 17 : Caractéristiques mécaniques des câbles précontraints 120
Table 18 : paramètres de retrait et fluage (BPEL 99) - Vercors 121
Table 19 : Résultats de performance de calcul - Vercors - Calcul VO1.....127
Table 20 : Résultats de performance de calcul - Vercors - Calcul VD6.....131
Table 21 : résumé des tests effectués – Vercors (DE : Domaine Elastique, DI : Domaine d'Intérêt).....132
Table 22 : performance de calcul - 1er test - Vercors 133
Table 23 : performance de calcul – 2ème test - Vercors 134
Table 24 : performance de calcul – 3ème test - Vercors 134
Table 25 : performance de calcul – 4ème test - Vercors 135

INTRODUCTION

Le nucléaire est la 3ème source de production d'électricité dans le monde avec 10,1% de la production mondiale. Après les États-Unis, la France est le 2ème producteur mondial d'électricité nucléaire. En France, le nucléaire est la première source de production et de consommation d'électricité. La production est issue d'un parc de 56 réacteurs répartis sur le territoire, comme montré sur la Figure 1, tous exploités par EDF, et de puissances différentes.

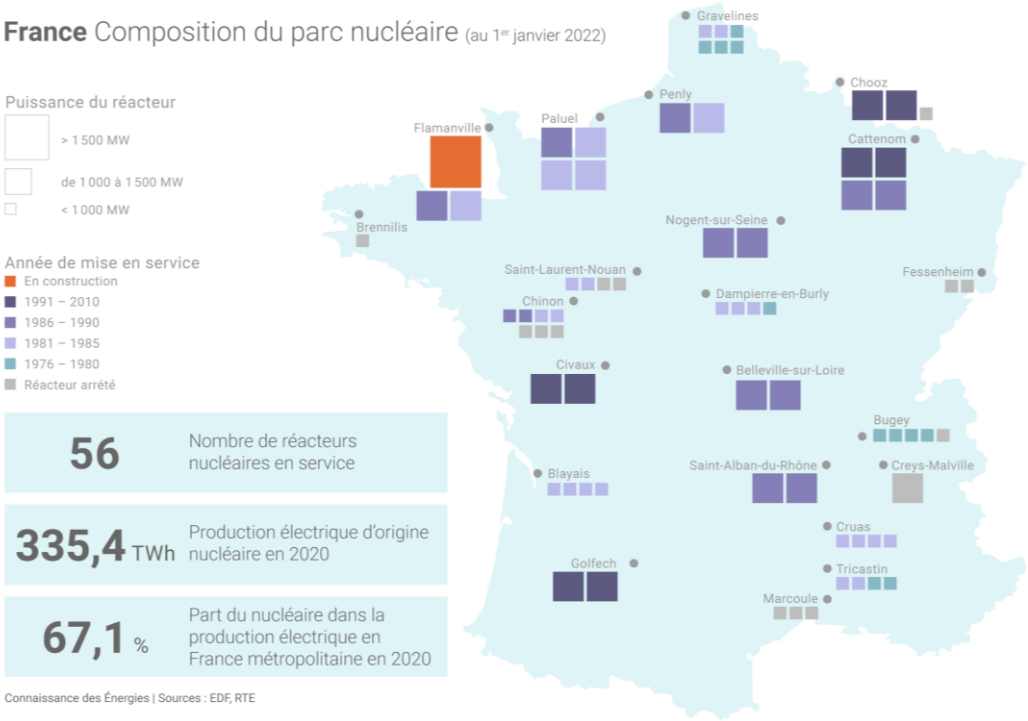

Figure 1: Composition du parc nucléaire en France (Sources : EDF, RTE)

En cas d'accident nucléaire, des substances radioactives peuvent être libérées. Ces substances doivent être confinées afin de limiter leur diffusion et de protéger la population et l'environnement. Cette fonction est assurée par les barrières de confinement, dont fait partie le bâtiment réacteur appelé aussi l'enceinte de confinement et qui représente la dernière barrière de protection de l'environnement. Ce bâtiment doit assurer tout au long de la vie de la centrale une double fonction d'étanchéité et de résistance mécanique. Selon le type de réacteur, deux types d'enceintes existent : les enceintes de type paroi unique en béton précontraint avec revêtement métallique interne appelé peau d'étanchéité qui équipent les Réacteurs à Eau Pressurisée « REP » 900 MWe et les enceintes en béton armé précontraint de type double paroi qui équipent les autres types de réacteurs (REP 1300 MWe et REP 1450 MWe) (voir Figure 2). Ce deuxième système, qui est l'objet principal de ces travaux de thèse, est constitué d'une enceinte interne en béton armé précontraint qui assure le rôle d'étanchéité et d'une enceinte externe construite en béton armé qui a pour rôle de protéger le réacteur et l'enceinte interne contre les agressions externes (chute d'avion par exemple). L'espace libre entre enceintes joue également un rôle important dans l'étanchéité grâce à un système de dépression permanente qui permet de récolter et filtrer les fuites avant toute libération dans l'environnement en cas d'accident.

L'un des enjeux majeurs, dans le cadre de l'amélioration continue de la sureté et le prolongement de la durée de vie des réacteurs, est d'améliorer la connaissance du vieillissement des enceintes à double paroi et de maitriser leurs fuites. Parallèlement à la construction des maquettes d'enceintes et aux essais expérimentaux nécessaires pour relever ce défi, les calculs prédictifs du comportement mécanique et d'étanchéité sont également fondamentaux (Galenne et al. 2013). Une bonne connaissance de l'état de l'ouvrage à partir de simulations numériques peut également faciliter les opérations de maintenance qui visent à garantir le niveau de sûreté des enceintes et qui sont réalisées régulièrement lors des visites décennales.

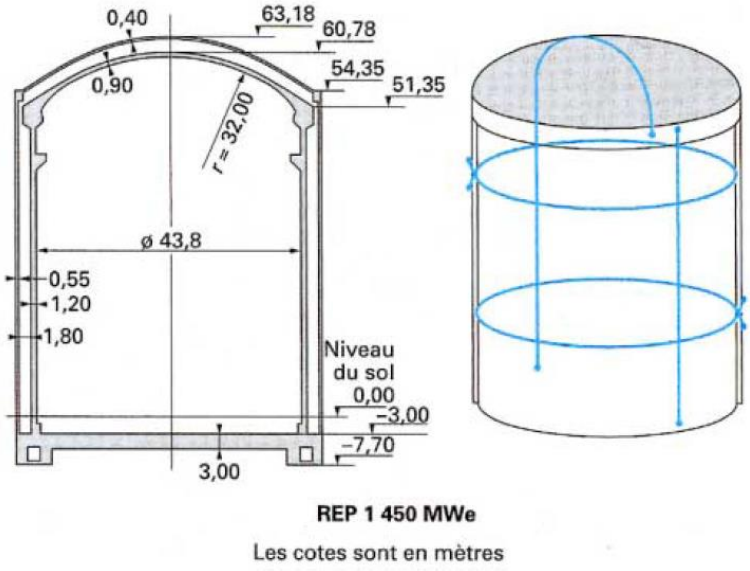

Figure 2: Enceinte de confinement de type double paroi: à gauche : principales dimensions, à droite : tracé schématique de la précontrainte (en bleu) (Costaz 1997)

La présente thèse s'inscrit dans le contexte de la simulation de structures en béton armé et précontraint de grandes dimensions et notamment les enceintes de confinement. La nécessité toujours croissante de considérer des phénomènes de plus en plus complexes afin de prédire au plus juste le comportement d'une structure dans toutes les situations conduit très rapidement à des modèles très complexes. Sur de grandes structures, malgré la forte croissance du potentiel de calcul à disposition des utilisateurs, ces approches sont d'un coût prohibitif et donc généralement inapplicables à la modélisation de la réponse structurelle. Concernant le phénomène qui intéresse cette thèse, la fissuration dans le béton des enceintes de confinement en béton précontraint à double paroi, celle-ci se produit à une échelle relativement locale et sa modélisation nécessite l'emploi d'un maillage fin et d'une loi de comportement non linéaire régularisée pour obtenir des résultats représentatifs. Or, réaliser ce type de simulation est un défi industriel en raison du coût de calcul. A titre illustratif, la simulation du comportement mécanique d'une enceinte de confinement (37 m de diamètre et environ 60 m de haut) à l'aide d'un maillage compatible avec la description de la fissure (taille requise de l'élément de l'ordre du centimètre pour permettre d'utiliser des techniques de régularisation) conduirait à plus de 10^{10} degrés de liberté. Pour donner un ordre de grandeur, le nombre de degrés de liberté accessibles sur un ordinateur de bureau est d'environ 10^5 degrés de liberté. Du fait de ce grand nombre de degrés de liberté, ajouté à la non-linéarité du comportement, une telle simulation est quasiment impossible à atteindre sur les machines actuelles. Pour cela, l'objectif de cette thèse est l'« amélioration des performances pour le calcul des structures à comportement non linéaire de grandes dimensions » afin de pouvoir simuler le plus finement possible le comportement d'enceintes de confinement de type double paroi.

Après cette introduction, la suite du manuscrit est organisée de la façon suivante :

1. Le 1er chapitre présente un état de l'art des méthodes existantes afin de pouvoir choisir la méthode la plus appropriée pour répondre à notre problématique.
2. Le 2ème chapitre présente l'algorithme de la méthode choisie puis développée avec les solutions proposées pour dépasser les limites de la méthode existante. Il présente ensuite l'extension du domaine d'application de la méthode sur le calcul de la mise en précontrainte avec prise en compte des pertes dues aux déformations différées (fluage et retrait).
3. Afin d'automatiser la méthode, de réduire l'intervention de l'utilisateur et d'optimiser son temps de calcul, une méthode de partitionnement automatique de maillage est développée dans le 3ème chapitre.

4. Le 4ème chapitre présente le couplage de la méthode choisie avec le principe de raffinement du maillage afin de tirer avantage des deux approches et d'atteindre des niveaux de finesse de simulation plus élevés.
5. Le 5ème chapitre présente l'application de la méthode développée couplée au raffinement de maillage sur la structure cible de la thèse : la maquette VeRCoRs (Vérification Réaliste du Confinement des Réacteurs) qui est une maquette à l'échelle 1/3 d'enceinte de confinement à double paroi.
6. Le 6ème chapitre tire des conclusions sur les différents résultats obtenus dans le cadre de la thèse et propose des perspectives de recherche dans le but d'améliorer encore la méthode développée.

CHAPITRE 1. ETAT DE L’ART

1.1 METHODES D'AMELIORATION DES PERFORMANCES DE CALCUL DES STRUCTURES DE GRANDES DIMENSIONS

Malgré l'augmentation de la précision des représentations et la puissance des ordinateurs, les modèles et les simulations ne pourront jamais saisir pleinement la complexité du monde réel (Sudret 2007). La méthode des éléments finis est la plus couramment utilisée pour le type de simulation qui intéresse cette thèse en raison de sa précision et de sa capacité à prendre en compte des phénomènes physiques complexes. Afin de viser un niveau de complexité et de représentativité de plus en plus élevé avec la méthode d'éléments finis pour se rapprocher de la réalité, les solutions alternatives se sont fortement développées ces dernières années.

Pour reproduire finement la réponse structurale de tels phénomènes physiques sur une structure de grandes dimensions (fissuration, endommagement, plasticité…), un grand nombre de degrés de liberté est nécessaire, associé à une augmentation forte du coût de calcul. La simulation des structures de grande dimension intervient dans de nombreux secteurs industriels comme dans le secteur aéronautique (M. A. Lee 2018) (Dowell et al. 2008), dans lequel le développement de nouveaux avions de transport civil nécessite un modèle aéroélastique précis. L'utilisation d'un calcul de dynamique des fluides CFD (incluant la prise en compte de l'interaction fluide-structure) nécessite un très grand nombre de degrés de liberté (des millions) avec un grand nombre de paramètres de simulations, limitant l'utilisation de telles méthodologies à l'analyse de quelques configurations. Pour cette raison, les approches qui consistent à réduire le temps de calcul sont aujourd'hui en fort développement et sont largement utilisées dans les procédés industriels. Dans ce chapitre, nous présenterons un état de l'art des méthodes les plus répandues, utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis, pour lever à ce verrou scientifique, notamment :

- les méthodes de réduction de modèle
- la méthode de calcul parallèle
- les méthodes de Raffinement Adaptatif du Maillage (AMR)
- les méthodes d'élimination de degrés de liberté

1.1.1 Réduction des modèles

La méthode des éléments finis est parmi celles permettant de reproduire le plus précisément les comportements structurels complexes contrairement aux modèles analytiques par nature simplifiés. En revanche, l'approche analytique a l'avantage d'être beaucoup plus rapide et moins coûteuse en mémoire que la méthode des éléments finis. Afin de tirer avantage des deux approches (précision et coût de calcul réduit), les techniques de réduction de modèles ont été développées. Ces dernières années, ces techniques sont devenues de plus en plus nombreuses et sont en fort développement. Leur objectif est de diminuer le temps de simulation en construisant des modèles équivalents aux modèles d'origine afin de limiter les appels à des modèles très couteux en temps de calculs. Elles permettent de garantir un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats produits par les modèles éléments finis classiques (voir Figure 3) et offrent la possibilité d'atteindre des niveaux de simulation hors de portée des codes industriels actuels.

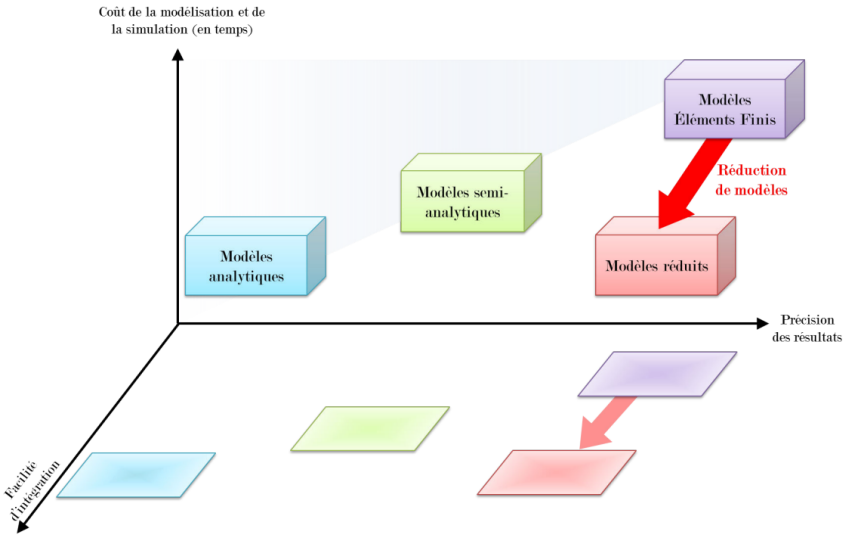

Figure 3: Positionnement des différentes approches de modélisation par rapport à leur précision, leur facilité d'intégration et leur coût de calcul (Da Silva 2015)

Du fait de la complexité des phénomènes physiques considérés, du grand nombre de degrés de liberté et de la non-linéarité, ces méthodes sont largement utilisées dans l'aéronautique ((Feliot et al. 2016), (Feng, Lu, and Wanying Yun 2019)), dans le secteur automobile pour la simulation de crash ((Le Guennec et al. 2018), (Moustapha et al. 2018)) et en fabrication et robotique (Han and Kopacek 1995). Un exemple d'application en thermo aérodynamique (en trois dimensions) couplée au rayonnement est présenté dans la Figure 4 ((Ansys® 2022),(Duysens and Rochette 2016)). Dans cet exemple, un modèle réduit est construit en quelques secondes et permet d'obtenir un modèle prédictif robuste selon la comparaison illustrée dans la Figure 4–b. Ce modèle contient 2 paramètres d'entrées et a été construit en effectuant 50 simulations avec le modèle d'origine En termes de gain de temps de calcul, 3 secondes seulement ont été nécessaires pour reproduire, avec le modèle réduit, les mêmes résultats produits avec le modèle original en 2 heures.

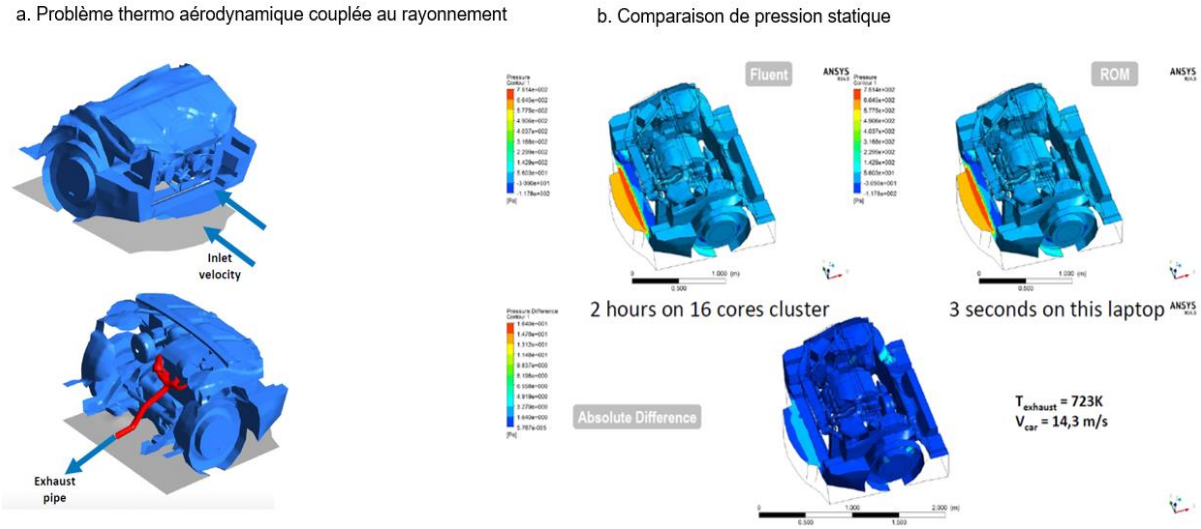

Figure 4 : Méta modélisation sur un problème thermo aérodynamique couplée au rayonnement (Ansys® 2022)

Deux grandes familles de techniques de réduction de modèles seront présentées ici : les méta modèles (ou modèles de substitution ou surrogate models) et les modèles d'ordre réduit (ROM). La première technique est basée sur des approches statistiques/probabilistes pour

l'analyse des données et la seconde est basée sur la projection des équations physiques sur un espace de dimension inférieure. Certains auteurs incluent les méta modèles dans la famille des modèles d'ordre réduit. Dans ce chapitre, ces deux techniques sont distinguées.

1.1.1.1 Méta modèles (ou Surrogate Models)

À partir des années 90 avec le développement de la simulation numérique et de la conception automatisée (optimisation de l'ingénierie), l'apprentissage statistique a permis le développement de stratégies pour réduire la charge de calcul grâce à l'utilisation des méta modèles ((Ghanem and Spanos 1991), (Xiu and Karniadakis 2002) et (Wan and Karniadakis 2005)). Ils permettent de remplacer l'appel direct à des codes numériquement coûteux. Leur utilisation a été favorisée par l'intégration progressive de la simulation CFD (Computational Fluid Dynamics) dans le processus de conception. Les méta modèles découlent des statistiques et de la théorie des probabilités et sont aujourd'hui des outils très répandus qui permettent de remplacer une simulation numérique couteuse par une équation fermée non basée sur la physique. Ces méthodes utilisent des évaluations limitées de modèles couteux (éléments finis par exemple) pour construire des surfaces de réponse statistique (méta modèles), qui permettent de reproduire plus rapidement, au plus près possible, les comportements du modèle d'origine. Deux catégories d'approches de méta modélisation existent: les méthodes intrusives ((Le Matre et al. 2001), (Xiu and Karniadakis 2002), (Gerritsma et al. 2010)) et non intrusives ((Fajraoui et al. 2017), (Blatman and Sudret 2010), (Blatman and Sudret 2011)). Les méthodes intrusives nécessitent des solveurs spécifiques pour les équations déterministes couplées résultantes, ce qui peut être très compliqué si la forme des équations est non triviale et/ou non linéaire. Dans la seconde catégorie, les solveurs existants sont considérés comme des "boîtes noires" sans aucune modification des codes informatiques sous-jacents (Sun, Pan, and Choi 2021). L'avantage de ce deuxième type d'approches est qu'il ne nécessite pas d'appeler un solveur spécifique et qu'il peut donc être facilement adapté à divers types de physique (Le Guennec et al. 2018).

Dans les méthodes non intrusives, le modèle de calcul d'origine peut être considéré comme une fonction « boîte noire » $y = g(x)$ qui relie les variables d'entrée x à la quantité d'intérêt y. Le méta modèle est une technique populaire pour approximer la fonction "boîte noire" avec un méta-modèle explicite $y = \tilde{g}(x)$ (voir Figure 5). En général, le méta modèle est intégré à l'analyse des incertitudes. Comme le montre la Figure 5, l'analyse des incertitudes à l'aide d'un méta modèle comprend quatre parties. Tout d'abord, il faut générer le plan d'expérience qui est composé de N échantillons $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_N\}$. Ce plan est généré selon la fonction de distribution de probabilité conjointe $f_X(x)$ des variables d'entrées et doit capturer autant d'informations que possible sur le modèle de calcul d'origine. Deuxièmement, le modèle de calcul d'origine est évalué en chaque point de ce plan d'expérience. Troisièmement, le méta modèle est construit sur la base de l'ensemble d'échantillons d'entrée-sortie obtenu $\{X, Y\}$ à l'aide d'une des techniques existantes de méta modélisation. Enfin, l'exactitude du méta-modèle construit sera vérifiée sur un ensemble d'échantillons de test supplémentaires diffèrent de l'ensemble $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_N\}$. Pour améliorer l'efficacité de calcul, l'ensemble du processus est généralement accompagné d'une stratégie d'échantillonnage adaptatif ou d'un algorithme d'apprentissage actif pour générer plus de points dans les régions d'intérêt en apprenant les informations des modèles de substitution précédents et de l'ensemble d'échantillons d'apprentissage. En raison du coût de calcul presque négligeable avec le méta-modèle construit, il est souvent utilisé pour l'évaluation de la fiabilité structurelle et l'analyse de sensibilité qui nécessite des millions d'appels au modèle original avec la méthode classique de Monte Carlo.

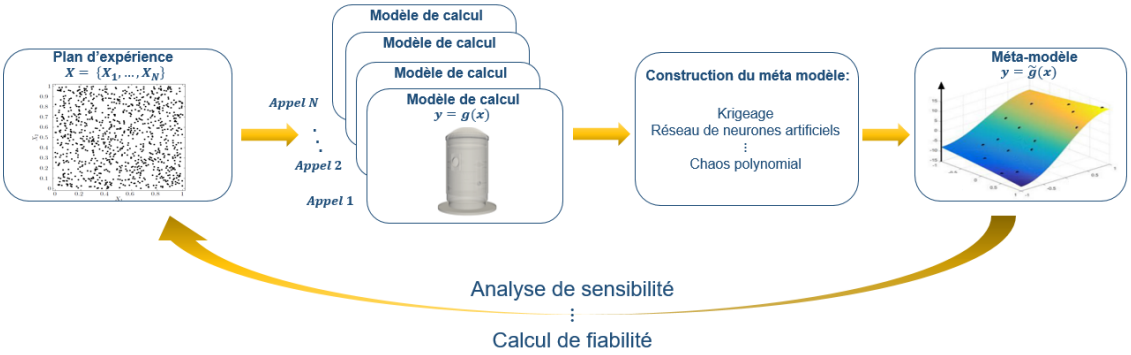

Figure 5 : Analyse des incertitudes assistée par la méta modélisation

Dans la littérature, diverses techniques de méta modélisation ont été bien établies, notamment: le réseau de neurones artificiels ((Hosni Elhewy, Mesbahi, and Pu 2006),(Tripathy and Bilionis 2018)), des modèles d'interpolations comme le Krigeage (ou processus Gaussien) ((Couckuyt, Slawomi, and Dhaene 2013),(Stein 2000),(Feng, Lu, and Wanying Yun 2019)), des modèles de régression comme l'expansion par Chaos Polynomial (PCE) ((Poles and Lovison 2009),(Blatman and Sudret 2010),(Blatman and Sudret 2008),(Savin and Faverjon 2017)), les fonctions de base radiale (Dyn, Levin, and Rippa 1986), le déplacement des moindres carrés (Zhou et al. 2020) et la régression SVR (Support Vector Regression)(Pan, Zhu, and Zhang 2010). Un aperçu de toutes les techniques de méta-modélisation peut être trouvé dans (Cheng et al. 2020).

Parmi tous les modèles de substitution, PCE et Krigeage ont été largement utilisés pour le développement d'un méta modèles approprié pour les systèmes mécaniques. Pour cela, ces deux approches seront présentées brièvement dans la suite.

On considère un système physique dont le comportement est représenté par un modèle de calcul $\mathcal{M}$. On considère aussi un vecteur aléatoire $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^M$ à composantes indépendantes décrit par la fonction de densité de probabilité jointe f_{X}. Pour simplifier, le cas d'une réponse scalaire Y d'intérêt est considéré ci-après :

$$\mathrm{X} \in \mathbb{R}^M \rightarrow Y = \mathcal{M}(X) \in \mathbb{R}^1 \tag{1}$$

L'expansion de chaos polynomial (PCE) (Ghanem and Spanos 1991) est l'une des techniques de méta modélisation les plus populaires et les plus puissantes. Elle vise à fournir une approximation fonctionnelle $\mathcal{M}^{PCE}$ du modèle $\mathcal{M}$ à travers sa représentation spectrale sur une base convenablement construite de fonctions polynomiales (Marelli and Sudret 2014) comme suit :

$$Y = \mathcal{M}(X) \approx \mathcal{M}^{PCE}(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} y_\alpha \Psi_\alpha(X) \tag{2}$$

où les $\Psi_\alpha(X)$ sont des polynômes multivariés orthonormés par rapport à f_X, $\alpha \in \mathbb{N}^M$ est un multi-indice qui identifie les composantes des polynômes multivariés et les $y_\alpha \in \mathbb{R}^1$ sont les coordonnées correspondantes. Plusieurs familles de polynômes existent selon la loi de distribution des paramètres d'entrée et sont données dans (Sudret 2007). Par exemple, un polynôme de type Legendre est souvent utilisé pour une entrée qui suit la distribution uniforme et un polynôme de type Hermite pour celle qui suit la distribution normale ou log-normale. Les coefficients de ces polynômes sont estimés sur la base de N simulations utilisant le modèle d'origine $\mathcal{M}$. Il faut noter que le nombre N dépend du nombre de paramètres d'entrée et c'est en fonction de cela que la précision du méta modèle est donnée. Une fois le méta modèle construit, sa précision et sa qualité prédictive doivent être quantifiées en estimant l'erreur de

généralisation, par rapport au modèle d'origine $\mathcal{M}$. Cette erreur est estimée sur un nouvel ensemble d'entrées indépendant de celui d'apprentissage, appelé ensemble de validation $[X_{Val}, Y_{Val} = M(X_{Val})]$. L'erreur est définie comme la différence entre la prédiction obtenue à l'aide du méta modèle construit $\mathcal{M}^{PCE}$ et le résultat du modèle d'origine $\mathcal{M}$. Sur le méta-modèle construit, une analyse de sensibilité globale pour quantifier l'effet de l'incertitude de chaque paramètre d'entrée sur la réponse du système stochastique, peut être obtenue directement à partir des coefficients du PCE (Fajraoui et al. 2017) (voir Figure 6). Cette technique est très largement utilisée pour le calcul de la fiabilité des structure (Probability of failure ; Figure 6). Ce calcul de fiabilité nécessite, avec la méthode classique de Monte Carlo, des millions d'appels au modèle éléments finis. Ce grand nombre d'appels au modèle coûteux, qui peut être impossible ou très long, peut se faire en quelques secondes seulement avec le polynôme construit (Sudret 2008). Le polynôme construit peut également être utilisé pour calculer des grandeurs probabilistes importantes comme montré sur la Figure 6 (indices de sensibilité, moments statistiques, etc.).

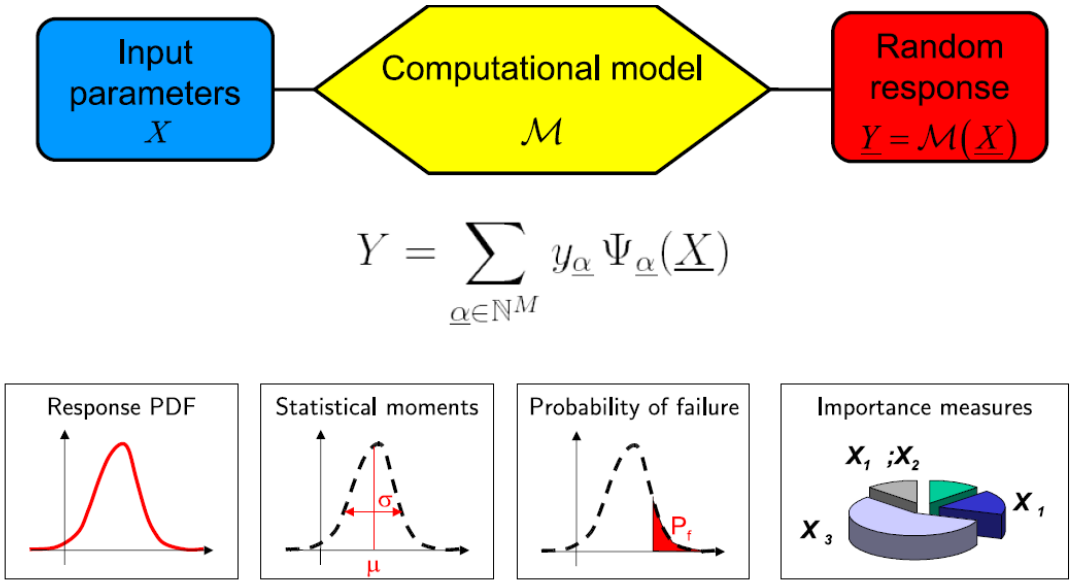

Figure 6 : post-traitement de la réponse aléatoire du PCE (Sudret 2007)

Le PCE a été introduit initialement en 1938 par Wiener dans (Wiener 1938) pour résoudre une équation différentielle partielle stochastique ayant une variable aléatoire d'entrée gaussienne. Elle a été ensuite mise en œuvre pour la première fois en mécanique des structures par éléments finis par Ghanem et Spanos dans (Ghanem and Spanos 1991), également connue sous le nom d'approche spectrale. En outre, elle a été modifiée en 2002 dans (Xiu and Karniadakis 2002) pour tenir compte des autres types de distributions statistiques (par exemple, uniforme et gamma). Le PCE a été beaucoup utilisé dans différents domaines depuis près de deux décennies. Par exemple, en génie civil , le PCE a été utilisé dans (Ni et al. 2019) pour représenter les réponses vibratoires non linéaires d'une structure de pont présentée dans la Figure 7 sous une charge sismique. La Figure 7-c montre une correspondance parfaite entre la réponse obtenue avec le PCE et celle obtenue par une simulation Monte-Carlo classique à différents instants. La construction de la réponse avec la simulation de Monte-Carlo a pris 16 heures, tandis que le PCE n'a pris que 30 minutes. Ces résultats montrent que l'expansion du PCE peut être un outil puissant et efficace pour la méta modélisation et l'analyse de sensibilité dans l'analyse de structure linéaire et non linéaire.

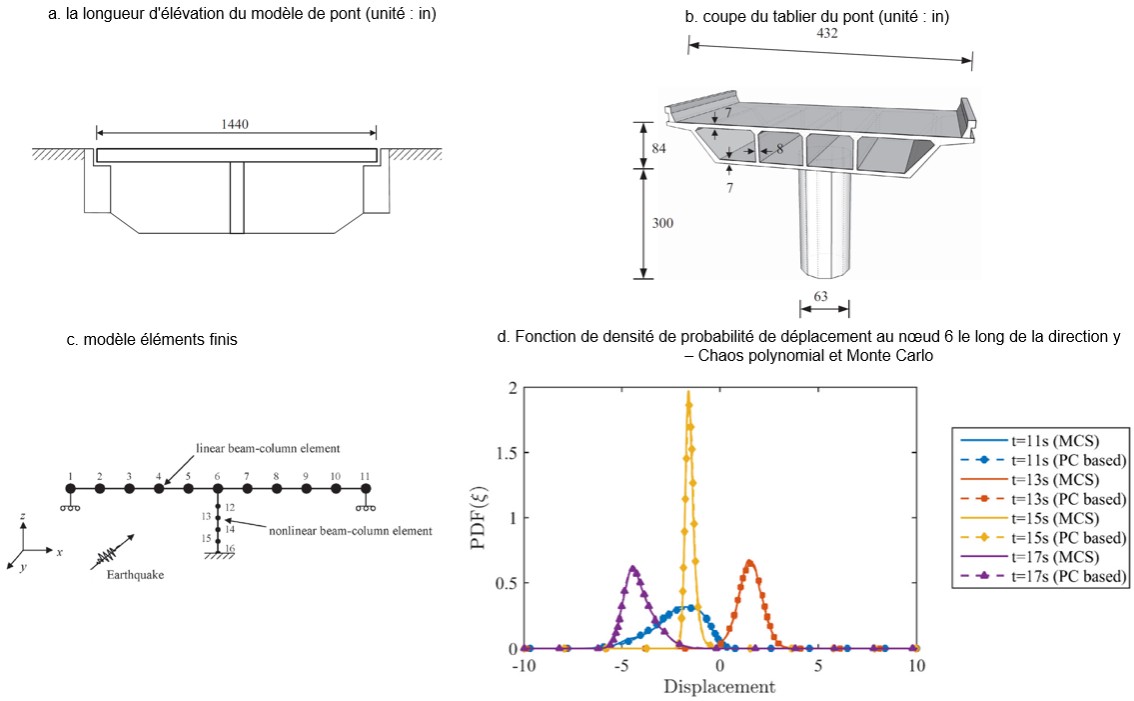

Figure 7 : Pont sous une charge sismique (Ni et al. 2019)

Le Krigeage (également connu sous le nom de processus Gaussien) est une autre méthode puissante et répandue de méta modélisation. Il s'agit d'une méthode d'interpolation statistique qui capitalise sur les processus Gaussiens pour interpoler un large éventail de fonctions complexes. Elle a d'abord été développée comme outil d'interpolation spatiale en géostatistique par Krige dès les années 1950 (Krige 1951) et formalisée par Matheron dans les années 60 (Matheron G. 1963). Le Krigeage a ensuite été introduit dans le contexte de la méta modélisation et des expériences informatiques dans les travaux de Sacks et al en 1989 (Sacks et al. 1989) dans lequel le Krigeage a été utilisé pour représenter une cartographie entrée/sortie d'un modèle de calcul coûteux. Au milieu des années 2000, les processus Gaussiens ont connu un regain d'intérêt en raison de leurs applications dans la régression et la classification de l'apprentissage automatique. Le Krigeage suppose que la sortie du modèle $Y = \mathcal{M}(X)$ est une réalisation d'un processus gaussien. Un modèle de Krigeage est décrit par l'équation suivante (Santner, William, and Notz 2004) (Marelli and Sudret 2014) :

$$Y = \mathcal{M}(X) \approx \mathcal{M}^K(X) = \beta^T f(x) + \sigma^2 Z(x, w) \quad (3)$$

où $\beta^T f(x)$ est la valeur moyenne du processus gaussien, σ^2 est la variance du processus gaussien et $Z(x, w)$ est un processus Gaussien stationnaire à moyenne nulle, variance unitaire, caractérisé par une fonction de corrélation R et ses hyper paramètres θ. Le Krigeage interpole les variations locales de Y en fonction des points de plan d'expérience voisins, alors que le PCE se rapproche bien du comportement global de Y. En combinant l'approximation globale et locale de ces deux techniques, un méta modèle Polynomial-Chaos-Kriging (PCK) plus précis est proposé dans (Schöbi, Sudret, and Marelli 2017). Cette approche a été appliquée dans le domaine de la fabrication pour une prédiction probabiliste efficace du broutage en fraisage dans (Totis and Sortino 2020). En effet, les vibrations de broutage dans la coupe des métaux sont toujours une cause majeure de mauvais état de surface et d'endommagement des machines-outils. Pour cela, des algorithmes de prédiction de broutage, qui sont couteux, doivent être utilisés pour permettre une identification préalable des zones de sécurité. Dans cette application, le PCK a montré une excellente précision avec un temps d'élaboration significativement plus court que celui requis par la technique Monte Carlo de référence (qui est basée sur des appels au modèle d'origine seulement).

Cependant, une limitation inhérente aux méthodes de méta modélisation est leur perte de performance dans le cas de problèmes de grandes dimensions. Le coût de calcul devient

intraitable pour les problèmes impliquant un nombre élevé des paramètres d'entrée. Par exemple, lorsqu'un modèle de Krigeage est construit à l'aide des fonctions de corrélation, la taille de la matrice de covariance augmente considérablement par rapport à la dimension du problème. En conséquence, l'inversion de la matrice de covariance pour optimiser les hyper paramètres est coûteuse en calcul. Plusieurs stratégies ont été explorées dans la littérature pour traiter les problèmes avec un grand nombre d'entrées. Une approche courante est l'analyse de sensibilité ((Sobol' 1993),(Deman et al. 2016)), qui consiste à identifier les entrées les plus importantes sur la réponse du modèle afin d'ignorer et d'éliminer les autres pour réduire le nombre de paramètres d'entrée. L'élimination de certains paramètres d'entrée permet de réduire le nombre d'appels au modèle d'origine. Cependant, les techniques d'analyse de sensibilité ne peuvent pas gérer les problèmes où les variables d'entrée aléatoires ont des impacts à peu près égaux sur la réponse du modèle et les problèmes impliquant des incertitudes fonctionnelles, telles que les équations aux dérivées partielles stochastiques. De plus, dans certains cas, comme celui de grandes structures à comportement non linéaire avec des maillages fins, une seule simulation peut ne pas être accessible.

1.1.1.2 Modèle d'Ordre Réduit (ROM)

Un modèle d'ordre réduit (Reduced Order Model, ROM) est un modèle de substitution construit à partir d'un modèle d'ordre complet (haute-fidélité) qui conserve la physique et la dynamique essentielle du modèle d'origine, mais a un coût de calcul beaucoup plus réduit. Il existe de nombreuses approches pour construire des ROM, comme la simple exécution d'une simulation numérique sur un maillage plus grossier ou la projection des équations physiques sur un espace de dimension inférieure. Plus communément, le terme « modèle d'ordre réduit » fait référence à un modèle d'ordre réduit basé sur des projections, objet du présent paragraphe.

Ces méthodes exploitent le fait que la réponse de modèles complexes peut souvent être approximée avec une précision raisonnable par le biais de la réponse d'un modèle de substitution, qui est la projection du modèle initial sur une base réduite de plus faible dimension. La dimension des bases réduites peut être de plusieurs ordres de grandeur inférieure à la dimension des modèles numériques classiquement utilisés. Les méthodes de réduction de modèles se distinguent par la manière de définir et de construire les bases réduites des fonctions. Trois des méthodes les plus connues de techniques de ROM sont la Décomposition Orthogonale Propre (Proper Orthogonal Decomposition, POD), la Décomposition Générale en modes Propres (Proper Generalized Decomposition, PGD) et la troncature équilibrée (Balanced Truncation). Ces trois méthodes seront discutées dans la suite.

1.1.1.2.1 Décomposition Orthogonale Propre (POD)

C'est une méthode d'analyse de données visant à obtenir des descriptions approximatives en basse dimension de processus en haute dimension (Chatterjee 2000). La POD a été proposée indépendamment par plusieurs scientifiques dont Karhunen (Karhunen 1946), Kosambi (D D Kosambi 1943), Loéve (Lévy 1948), Obukhov (Obukhov 1954) et Pougachev (Pougachev 1953) et a été initialement conçue dans le cadre de processus continus du second ordre (Kerschen et al. 2005). La POD est également connue sous le nom d'analyse en composantes principales, de décomposition de Karhunen-Loéve (Lévy 1948) et de décomposition en valeur unique. Son principe est simple et est illustré dans la Figure 8. Sur cette figure, le repère (ϕ_1, ϕ_2) est la base orthonormée qui représente les données (points noirs sur la figure) avec le moins de composantes. Elle permet de fournir essentiellement une base orthonormée pour représenter les données dans un sens optimal des moindres carrés (Rathinam and Petzold 2004). La troncature de la base optimale fournit un moyen de trouver des approximations de dimension inférieure des données. Basée sur des solutions pré calculées (méthode *a posteriori*) utilisant le code numérique d'origine ou des résultats expérimentaux, appelés « snapshots », la POD consiste à résoudre un problème d'optimisation pour fournir une base pour la décomposition modale. Elle construit les modes spatiaux qui représentent la base optimale de tous les « snapshots » au sens de l'optimisation des moindres carrés.

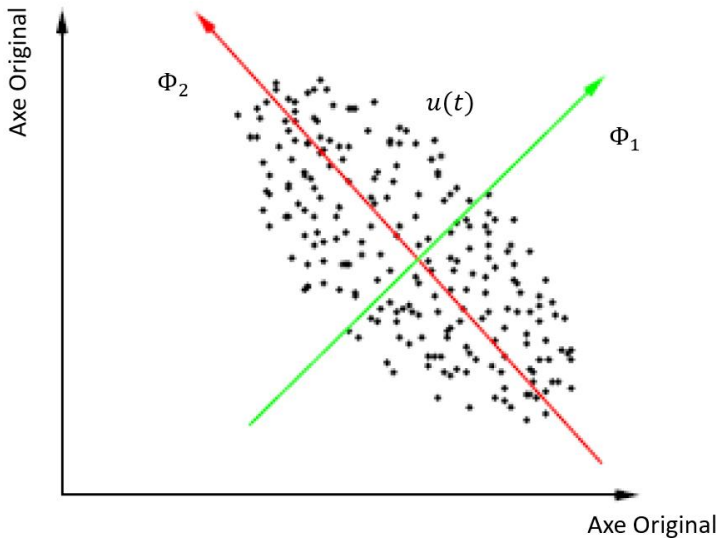

Figure 8 : Principe de la POD (issu de (Leturcq 2022)*)*

Combinée avec la procédure de projection de Galerkin (Leturcq et al. 2022), la POD fournit une méthode pour générer des modèles de dimensions inférieures de systèmes dynamiques qui ont un espace de phase dimensionnel très grand, voire infini. En plus d'être optimale au sens des moindres carrés, la POD a la propriété d'utiliser une décomposition modale entièrement dépendante des données (expérimental ou simulation à l'aide du code éléments finis) et ne suppose aucune connaissance préalable du processus qui génère les données. Cette propriété est avantageuse dans les situations où la connaissance a priori du processus sous-jacent est insuffisante pour justifier un certain choix de base (Rathinam and Petzold 2004). Essentiellement, cette méthode est une procédure linéaire, qui consiste à rechercher les vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale ou temporelle (Lumley 1967). Le fait que cette approche recherche toujours des sous-espaces linéaires (ou affines) au lieu de sous-variétés courbes la rend calculable. Dans la plupart de ses applications, la POD est utilisée pour analyser des données expérimentales dans le but d'extraire des caractéristiques dominantes.

Les propriétés avantageuses de POD sont la raison de sa large application dans l'analyse de données, la compression de données et la réduction de modèles dans divers domaines de l'ingénierie et des sciences. Elle a été utilisée pour obtenir des descriptions approximatives et de faible dimension des écoulements de fluides turbulents dans (Holmes et al. 1996), des vibrations structurelles et des systèmes dynamiques chaotiques dans ((Feeny and Kappagantu 1999), (Cusumano, Sharkady, and Kimble 1994)), et des systèmes micro électromécaniques (MEMS) ((Hung and Senturia 1999), (Liang et al. 2001)). Elle a également été largement utilisée dans le traitement d'images (Rosenfeld and Kak 2019), l'analyse de signaux (Algazi and Sakrison 1969), la compression de données (Liang et al. 2002), la modélisation et le contrôle des systèmes réactionnels chimiques ((Graham and Kevrekidis 1996), (Shvartsman and Kevrekidis 1998), (Shvartsman et al. 2000)), les modèles de turbulence (Holmes et al. 1996), les structures cohérentes dans les fluides (Holmes et al. 1996), le contrôle des fluides (Glavaski, Marsden, and Murray 1998), les problèmes aéroélastiques ((Benguedouar 1995), (Epureanu, Tang, and Païdoussis 2004)), la détection de l'endommagement ((De Boe and Golinval 2003), (Tumer, Wood, and Busch-Vishniac 200AD)), la caractérisation dynamique ((Georgiou and Schwartz 1999)) et les réseaux électriques ((Rathinam and Petzold 2002), (Parrilo et al. 1999)).

La propriété la plus avantageuse du POD est son optimalité dans le sens où il minimise la distance quadratique moyenne entre le signal d'origine et sa représentation linéaire réduite. Cela fait que la POD cible principalement les problèmes linéaires, avec une excellente accélération. Cependant, dans certains problèmes qui présentent une grande non-linéarité, la

méthode trouve sa limite car une linéarisation du modèle complet à chaque pas de temps serait trop coûteuse.

1.1.1.2.2 Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD)

C'est une méthode de construction d'une base orthonormée ou non orthonormée pour la décomposition d'une solution sous forme séparée d'espace-temps ou d'espace-temps-paramètre (Leturcq et al. 2022). Contrairement à la POD, la PGD est une méthode a priori. C'est-à-dire qu'on n'a pas de « snapshots » au préalable (résultats expérimentaux ou numériques) mais la base réduite se construit au fur et à mesure du calcul (Nouy 2010). Cette construction progressive de la base réduite signifie que l'on utilisera le modèle initial de grandes dimensions chaque fois qu'il faudra enrichir la base, ce qui est autant une garantie de la précision de la solution qu'un prix à payer pour l'obtenir. La PGD peut être considérée comme une généralisation de la POD pour la construction a priori de représentations séparées.

Cette méthode a été introduite pour la première fois par Pierre Ladevèze dans le cadre de la méthode LATIN (méthode LArge Time INcrement) (P Ladevèze 1999). L'objectif était de réduire les coûts de calcul (besoins en mémoire et temps) associés à la résolution de multiples problèmes d'évolution linéaire issus d'une stratégie itérative non linéaire globale en temps. Dans la littérature, deux variantes de la PGD ont été proposées pour la construction progressive du modèle réduit, respectivement basées sur une formulation Galerkin ((P Ladevèze 1999), (Pierre Ladevèze and Nouy 2003), (D. Dureisseix et al. 2004)) ou une formulation de minimisation de résidu (P. Ladevèze, Passieux, and Néron 2010) du problème d'évolution. La PGD est une méthode récente qui a été utilisée dans de nombreuses disciplines (Chinesta, Ladeveze, and Cueto 2011) : pour des problèmes d'homogénéisation (Metoui et al. 2014), pour des calculs structuraux à comportement viscoélastique (Hammoud, Beringhier, and Grandidier 2011), en mécanique des fluides (Dumon, Allery, and Ammar 2011) et pour résoudre l'équation de Schrödinger (Griebel and Schweitzer 2008). Elle permet la résolution efficace de modèles définis dans des espaces multidimensionnels, comme ceux rencontrés en chimie quantique, théorie cinétique décrivant des fluides complexes, génétique, mathématiques financières (Chinesta, Ammar, and Cueto 2010). Néanmoins, les gains en temps de calculs avec cette méthode $a\ priori$ ne sont pas significatifs car elle nécessite le calcul de comportement en tous les points d'intégration du système (Leturcq 2022). De plus, comme elle utilise des appels au modèle initial, la PGD trouve donc sa limite dans le cas où un seul appel au modèle initial n'est pas accessible comme c'est le cas pour des structures de grandes dimensions avec un maillage de finesse représentatif.

1.1.1.2.3 Troncature équilibrée (Balanced Truncation BT)

La réduction du modèle par troncature équilibrée (BT) est une méthode populaire pour dériver des modèles d'ordre réduit pour les systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (LTI) (Heinkenschloss, Reis, and Antoulas 2011). Elle a été proposée en 1981 par Moore (Moore 1981) dans le contexte de la théorie de la réalisation et est maintenant une méthode bien développée de réduction de modèles qui apparaît dans les manuels standards (Dullerud and Paganini 2000). Pour les systèmes linéaires, l'approche ne nécessite que des calculs matriciels et a été utilisée avec beaucoup de succès dans la conception de contrôle (Lall, Marsden, and Glavaški 2002). Considérons des systèmes LTI :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = 0 \tag{4}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{5}$$

avec $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ et $C \in R^{p\times n}$. Typiquement, les fonctions vectorielles $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$ sont respectivement le vecteur d'état, de contrôle et de sortie. La réduction de modèle basée sur la projection construit des matrices $W, V \in R^{n\times r}$ satisfaisant $W^T V = I_r$ pour un certain $r \ll n$ et génère un modèle d'ordre réduit :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \qquad \hat{x}(0) = 0 \tag{6}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \tag{7}$$

avec $\hat{A} = W^T A\, V \in R^{r\times r}$, $\hat{B} = W^T B \in R^{r\times m}$, $\hat{C} = CV \in R^{p\times r}$, $\hat{x}(t) = W^T x(t) \in R^r$et une dimension d'état $r \ll n$ considérablement réduite. Le système réduit donné par les équations (6) et (7) se rapproche bien du comportement d'entrée-sortie du système d'origine donné par les équations (4) et (5). La base de BT est la contrôlabilité Gramian P et l'observabilité Gramian Q, qui sont définies comme suit (Heinkenschloss, Reis, and Antoulas 2011):

$$P = \int_0^\infty e^{AT} B B^T e^{A^T t} dt\,, \qquad Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C\, e^{AT} dt \tag{8}$$

Les matrices P et Q sont connues pour être les solutions uniques des équations de Lyapunov $AP + PA^T + BB^T = 0$ et $A^T Q + QA + C^T C = 0$, respectivement.

La méthode de troncature équilibrée a été largement développée pour les systèmes non linéaires par Scherpen ((J. M.A. Scherpen 1993), (Jacquelien M.A. Scherpen 1996)), basée sur les fonctions énergétiques. Les approches informatiques de ces méthodes ont été étudiées dans la référence (Andrew J. Newman and Krishnaprasad 1998) et ont été comparées à la méthode de Karhunen Loève dans la références (Andrew J. Newman and Krishnaprasad 1998)(A J Newman and Krishnaprasad 2002). Même avec l'extension de la méthode pour certaines applications non linéaires, BT reste difficile à appliquer aux grands systèmes complexes non linéaires.

1.1.2 Calcul parallèle

La solution la plus populaire aujourd'hui pour résoudre des problèmes de grandes dimensions est le calcul parallèle. C'est un type de calcul dans lequel de nombreux opérations ou processus sont effectués simultanément. Les grands problèmes peuvent souvent être divisés en plus petits, qui peuvent ensuite être résolus simultanément. Dans le calcul parallèle, ces petits problèmes sont résolus séparément et simultanément à l'aide de plusieurs processeurs informatiques qui communiquent entre eux si nécessaire. Les machines les plus rapides de ces dernières décennies, les supercalculateurs (comme celui montré sur la Figure 9), doivent leur avantage en termes de performance au parallélisme. En 1991, G. C. Fox (Fox 1991) indique que le calcul parallèle fonctionne pour pratiquement tous les problèmes de calcul intensif et que ce calcul prendra de l'importance grâce à des ordinateurs parallèles hautes performances et "changera le monde" dans les universités, l'industrie, la vie quotidienne et le gouvernement. C'est le cas aujourd'hui avec les progrès de l'informatique en matière de calcul parallèle et des clusters de PC. Ces progrès permettent d'atteindre et de réaliser des simulations de taille plus élevée et plus complexes et de réduire considérablement le temps de calcul en permettant l'utilisation de plus de puissance de calcul. Du fait de ses résultats prometteurs, le calcul parallèle a été largement utilisé pour le calcul haute performance en finance (Zenios 1999), en mécanique des fluides (Bartels et al. 2002) ou en dynamique des structures (Abdel-Jabbar, Kravaris, and Carnahan 1998).



Figure 9 : Le supercalculateur IBM Blue Gene - laboratoire national d'Argonne - Etats Unis [source : Wikipédia]

En 1967, Gene Amdahl a introduit la loi d'Amdahl qui stipule qu'en parallélisation, si P est la proportion d'un système ou d'un programme qui peut être parallélisée, alors l'accélération maximale $S(N)$ qui peut être obtenue en utilisant N processeurs est :

$$S(N) = \frac{1}{(1-P) + \frac{P}{N}} \tag{9}$$

Une représentation graphique de la loi d'Amdahl est donnée dans la Figure 10. Cette représentation montre que l'accélération du parallélisme est limitée par le temps total nécessaire à la partie séquentielle (série) du programme. Pour 10 heures de calcul, si nous pouvons paralléliser 9 heures de calcul et 1 heure ne peut pas être parallélisée, alors notre accélération maximale est limitée à 10. Si la partie séquentielle représente une grande portion du calcul et que sa résolution est inaccessible, la parallélisation ne résout pas le problème.

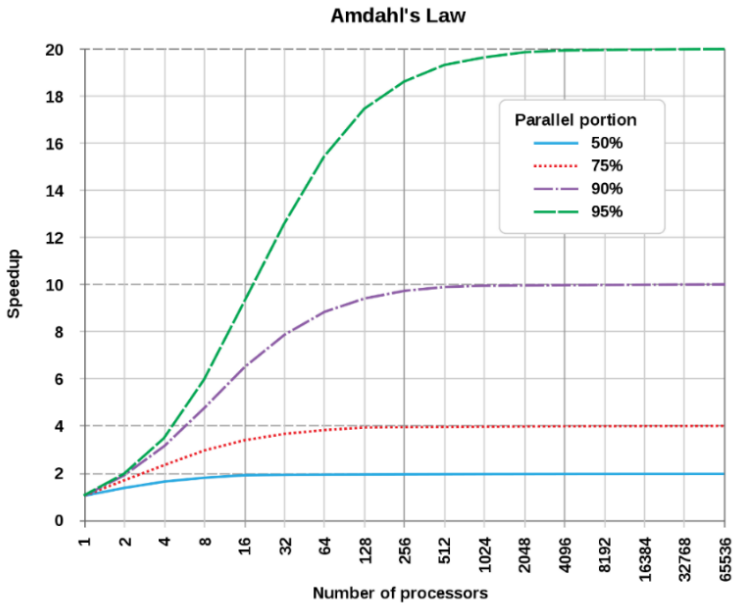

Figure 10 : Représentation graphique de la loi d'Amdahl [source : Wikipédia]

Les méthodes de décomposition de domaine sont des techniques de résolution matures permettant de calculer la solution de grands systèmes (généralement issus de modèles d'éléments finis) sur des ordinateurs parallèles (Gosselet and Rey 2006). En 1991, Farhat (Farhat and Roux 1991) a proposé une méthode de décomposition de domaine pour la

résolution de problèmes statiques qui s'écarte de la technique classique de sous-structuration. C'est la méthode "Finite Element Tearing and Interconnecting » (FETI). La particularité de cette méthode est qu'elle nécessite moins de communications entre processeurs que les algorithmes de décomposition de domaine traditionnels, tout en offrant le même degré de parallélisme. Dans FETI, un domaine spatial donné est partitionné en sous-structures non superposées où une solution incomplète du champ primal est évaluée à l'aide d'un solveur direct, et la continuité du champ inter-sous-structure est appliquée via des multiplicateurs de Lagrange appliqués aux interfaces de la sous-structure. Supposons que le problème à résoudre est donné par :

$$K\,u = f \tag{10}$$

avec K est la matrice de rigidité de la structure, f le vecteur force et u le vecteur déplacement d'un problème d'élasticité défini sur une structure Ω. Si Ω est partitionné en un ensemble de N sous-structures non imbriquées, la méthode FETI consiste à remplacer les équations globales d'équilibre (10) par le système équivalent suivant composé des équations d'équilibre et de compatibilité des sous-structures :

$$\begin{cases} K^s\,u^s = f^s - B^{(s)^T}\lambda & s = 1, \dots, N_S \\ \sum_{s=1}^{s=N_s} B^{(s)} u^{(s)} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

où K^s et f^s sont la matrice de rigidité et le vecteur de force de la sous-structure $\Omega^{(s)}$, λ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange représentant les forces (dérivées normales du déplacement) à la frontière de l'interface de la sous-structure $\Omega^{(s)}$, et $B^{(s)}$ est une matrice booléenne signée qui localise les degrés de liberté d'interface de la sous-structure $\Omega^{(s)}$. La résolution de la première équation du système (11) pour chaque sous-structure est attribuée à un processeur individuel. Après récupération de chaque solution partielle, une résolution directe permet de reconstruire la solution globale. Une description schématique de la méthode FETI, dans laquelle la structure est décomposée en 4 domaines, est donnée sur la Figure 11.

Cette méthode permet de bien répartir le temps de calcul sur plusieurs processeurs ou machines de calcul. Cela induit ensuite un gain important en temps de calcul et en mémoire pour la résolution de problèmes mécaniques en éléments finis. Néanmoins, pour les problèmes d'ingénierie où la structure est composée de pièces aux formes complexes et/ou constituées de matériaux aux propriétés très différentes, les techniques de décomposition de domaine ne fonctionnent pas bien généralement (Gosselet et al. 2015). En plus, avec le calcul parallèle en générale, le nombre d'opérations total est le même mais il est réparti entre plusieurs processeurs. Cela signifie que pour une puissance de calcul donnée, le calcul parallèle n'améliore pas le calcul.

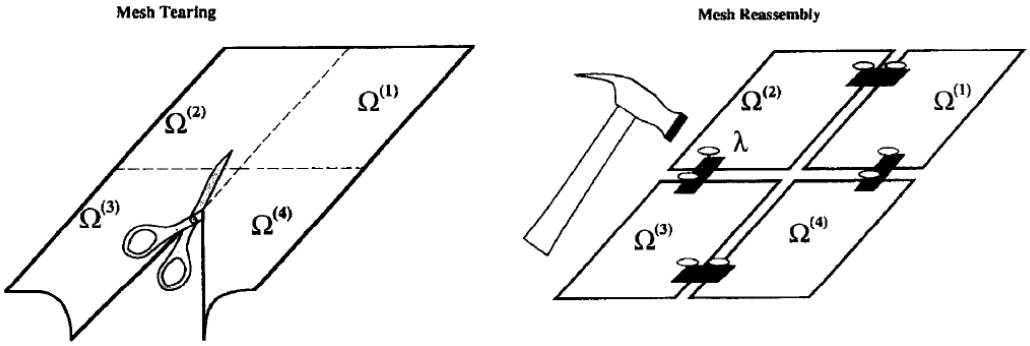

Figure 11 : Description schématique de la méthode FETI (Farhat and Mandel 1998).

1.1.3 Raffinement Adaptatif de Maillage (AMR)

Dans certains cas, l'utilisation d'un maillage fin n'est nécessaire que dans une partie donnée de la structure. Dans ce cas, l'utilisation d'un maillage fin sur la totalité de la structure pénalise le calcul. C'est pour ce type de calculs que le raffinement adaptatif de maillage a été développé. L'AMR est une technique fréquemment utilisée pour résoudre efficacement les équations aux dérivées partielles : un maillage plus fin est utilisé dans les régions qui nécessitent une finesse plus élevée (par exemple, à cause de la non-linéarité), et un maillage grossier est utilisé pour couvrir les zones moins sensibles (par exemple, les zones à comportement élastiques). Cela réduit à la fois le temps de calcul et la quantité de mémoire, par rapport à un maillage à résolution uniforme. Les régions nécessitant un maillage fin peuvent varier au cours d'une simulation, le maillage est raffiné ou dé-raffiné de manière adaptative dans l'espace et le temps. Le principe de l'AMR est illustré dans l'exemple d'écoulement turbulent de la Figure 12 tiré de (Stéphanie Delage Santacreu 2006). Une modélisation avec un maillage fin du petit tourbillon est nécessaire pour le décrire de manière précise. D'autre part, un maillage grossier peut être suffisant pour décrire avec précision le grand tourbillon. Dans les maillages classiques, l'utilisation d'un maillage fin (Figure 12 – I), nécessaire sur la totalité de la structure pour bien modéliser le petit tourbillon, est très couteuse. Cependant, les maillages adaptatifs en espace et en temps de la Figure 12 – II, font un compromis entre le coût de calcul et la précision du résultat.

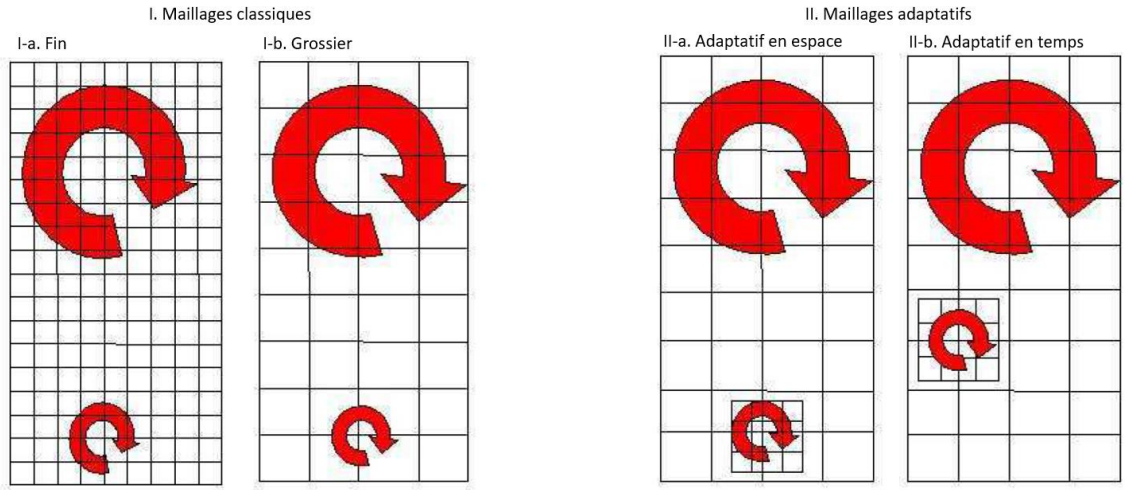

Figure 12 : Principe de l'AMR (S Delage Santacreu 2006)

Pour adapter un maillage, au moins deux solutions existent : les techniques de remaillage et les techniques de raffinement :

a. Techniques de remaillage : une première solution de remaillage consiste à reconstruire complètement le maillage initial avec une densité cible ((Zhang et al. 2018), (Yue et al. 2006), (N. S. Lee and Bathe 1994)). Cette technique permet d'avoir un maillage adapté à chaque pas de temps mais peut devenir trop couteuse en temps de calcul sur les grandes structures. La deuxième solution consiste à adapter le maillage en déplaçant ses nœuds en fonction d'une carte d'erreur obtenue sur le maillage initial (voir Figure 13) ((Bono and Awruch 2008), (Wood and Kleb 1999)). Cette solution peut générer des maillages qui optimisent la carte d'erreur à chaque pas de temps. Elle est performante pour le problème d'écoulements compressibles non visqueux sur des maillages non structurés (Palmerio 1988)(Palmerio 1994). Comme le nombre de nœuds reste fixé par celui du maillage initial, la finesse maximale que l'on peut atteindre est limitée.

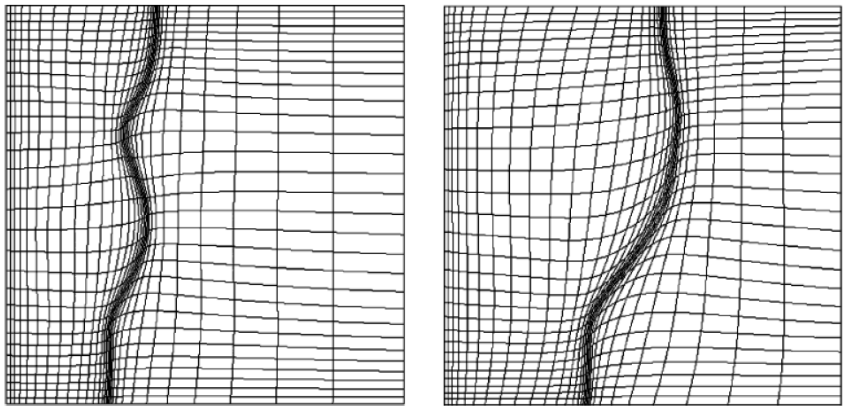

Figure 13 : Adaptation de maillage par déplacement de nœuds (issu de (Tenchev and MacKenzie 2005)*)*

b. Techniques de raffinement : ce sont les techniques les plus répandues pour l'adaptation de maillage. En principe, ils utilisent les éléments du maillage initial pour en générer un nouveau plus fin en enrichissant localement la discrétisation spatiale (Gibert 2019). Plusieurs techniques de raffinement de maillage existent dont chacune trouve son efficacité dans un problème spécifique :

    a. P-raffinement : cette technique a été développée dans (Basu and Peano 1983) pour les solutions continues dans les écoulements. Elle consiste à utiliser le maillage initial sans aucune modification, et à utiliser des fonctions de forme d'ordre supérieur dans les zones d'erreurs élevées. Cette méthode est utilisée dans les calculs éléments finis mais sa mise en œuvre peut être difficile et notamment dans le cas de fonctions de formes particulières.

    b. H-raffinement : Elle consiste à enrichir le maillage pour obtenir des éléments plus petits dans les zones d'intérêt. Cette technique est hiérarchique et ce qui simplifie sa mise en œuvre. Le maillage final est obtenu en subdivisant les éléments du maillage initial (éléments parents) en éléments plus petits (éléments enfants) jusqu'à atteindre un niveau de finesse supérieur à celui souhaité. Un exemple de maillage raffiné à l'aide de cette technique est montré dans la Figure 14. La zone à raffiner est détectée sur la figure de gauche et une marge est ajoutée sur cette zone. La figure de droite montre le maillage hiérarchiquement raffiné dans cette zone.

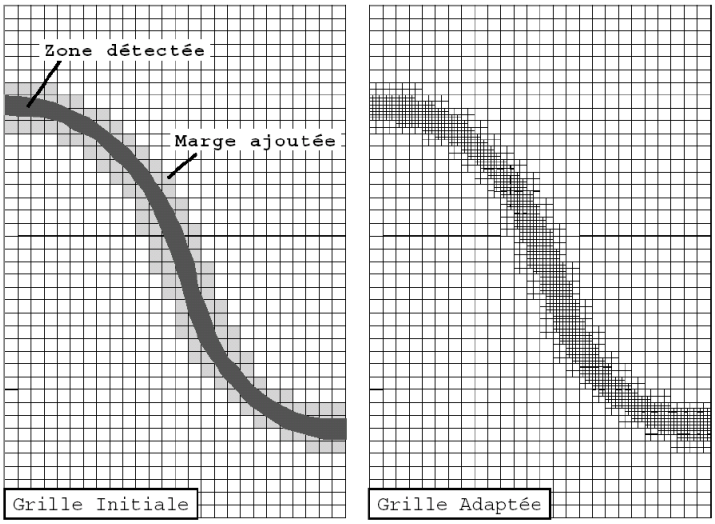

Figure 14 : H-raffinement (issue de (Hay 2004)*)*

Le concept d'AMR a été introduit pour la première fois dans (M. J. Berger and Oliger 1984) pour résoudre des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Une version adaptative du raffinement de maillage 2D pour les lois de conservation a ensuite été proposée dans (M.J. Berger and Colella 1989). Plusieurs travaux dans (Pewa, Linde, and Weirs 2003) étendent le concept d'AMR à des applications qui n'impliquent pas de régimes hyperboliques et nécessitent des méthodes pour les équations elliptiques et paraboliques. Pour un certain nombre d'applications scientifiques, les techniques AMR sont devenues une nécessité et pas simplement un choix en raison de leurs avantages en termes d'optimisation de maillage et donc en performance de calcul. Plus récemment, l'AMR a été appliquée sur plusieurs domaines de la physique comme en simulation de la dynamique des fluides géophysiques (Fournier 2019), pour les simulations d'écoulements astrophysiques relativistes (Falle 2003), à l'élasto dynamique non linéaire (Bergmans et al. 2003), pour la dynamique des fluides compressibles et incompressibles ou mécanique des solides et combustion (Babuska et al. 1991)]. Dans (MacNeice et al. 2000), l'AMR a été couplé au calcul parallèle et un gain significatif en performances a été obtenu.

Dans les travaux de (S Delage Santacreu 2006), l'AMR a été appliqué pour le suivi de fronts dans les écoulements incompressibles. Une tache cisaillée par un tourbillon dans une cavité 2D en monophasique est étudiée. Les résultats de concentrations massiques de cette application sont montrés sur la Figure 15. Ces résultats montrent bien que le maillage AMR recouvre parfaitement la zone de diffusion (en rouge). Ce maillage optimisé a permis d'atteindre des gains très importants en temps de calcul et en mémoire par rapport à un calcul fin sur tout le domaine et ce gain augmente avec l'augmentation de niveau de raffinement.

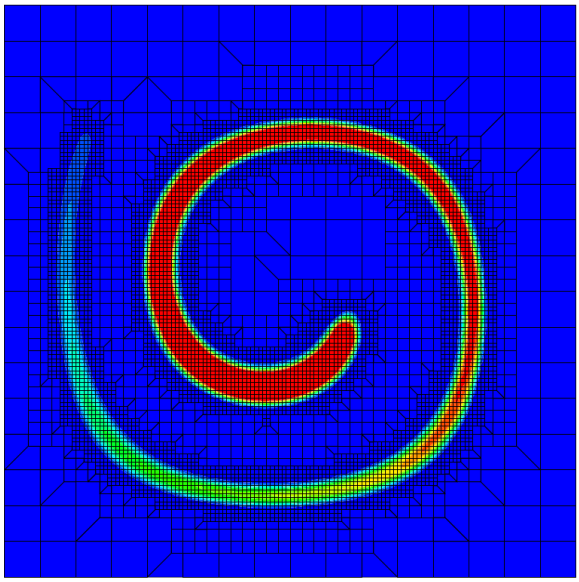

Figure 15 : Concentration massique montré sur un maillage AMR (S Delage Santacreu 2006)

Dans (Gibert 2019), l'AMR a été couplé à la méthode X-FEM pour capter la propagation de fissure. L'une des applications de ce couplage sur une plaque trouée en 2D est présentée dans la Figure 16. Ces résultats montrent le critère évolutif du maillage AMR dans l'espace et dans le temps en fonction de l'évolution de la fissure. Ce maillage optimisé permet de réduire la taille du système à résoudre à chaque instant par rapport à un maillage fin sur toute la structure. Cependant, avec l'approche AMR, la structure entière est toujours modélisée, ce qui peut ne pas être totalement optimal en termes de coût de calcul, en particulier dans le cas où une grande partie de la structure est en dehors de la zone d'intérêt.

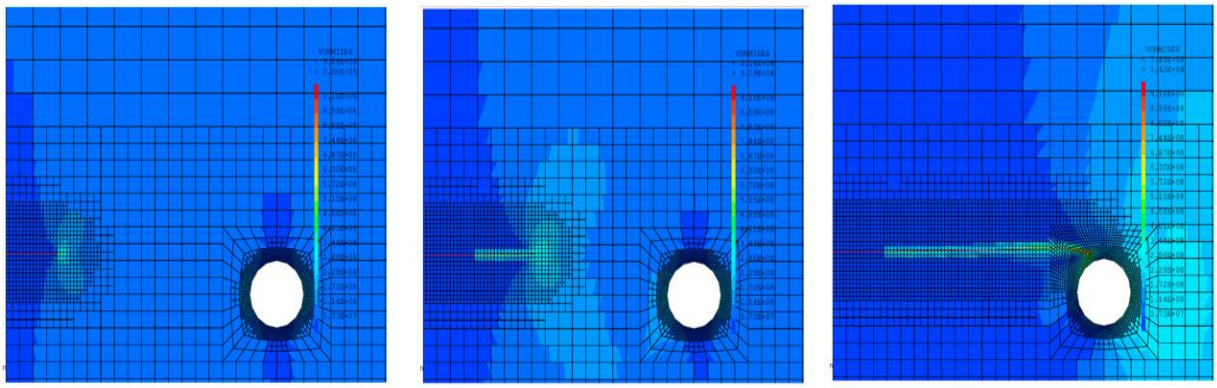

Figure 16 : évolution du maillage dans l'espace et dans le temps en fonction de la fissure (Gibert 2019)

1.1.4 **Condensation statique** (Guyan 1965)

En mécanique numérique, la réduction de Guyan (Guyan 1965), également connue sous le nom de condensation statique, est une méthode d'élimination de degrés de libertés qui permet d'éliminer des inconnues du système linéaire au niveau de la matrice de rigidité. Cette méthode peut également se trouver sous le nom de super-élément. L'idée principale de cette approche, est qu'elle permet dans le cas de l'élasticité linéaire, de trouver la solution exacte du système sur seulement une partie choisie de la structure en éliminant le reste. Ceci permet de simplifier la résolution sur seulement une partie d'intérêt et de réduire le temps de calcul. La condensation offre également la possibilité, à partir des résultats obtenus sur la partie d'intérêt, de reconstruire la solution globale sur toute la structure. Cette méthode d'élimination de degrés de liberté a été introduite par Guyan en 1965 et a été très largement utilisée dans le cadre de la mécanique et notamment dans le calcul dynamique de structure. La méthode est appelée "condensation statique" car elle n'est exacte que pour les problèmes statiques, même si elle a été largement appliquée en dynamique des structures. Dans ce cas, la condensation de masse est approchée. La formulation initiale a été progressivement améliorée dans les calculs dynamiques ((Ong 1987), (Leung 1978)) et/ou associée à la sous-structuration (M. A. Lee 2018) dans l'analyse des structures à non-linéarités localisées. Dans (M. A. Lee 2018), la condensation statique a été utilisée pour une conception structurelle aérospatiale efficace au niveau conceptuel. En statique, une application de la condensation a été utilisée dans un procédé de robotisation de la séparation des muscles pour des pièces de viande bovine (Essahbi 2013). Un modèle mécanique permettant de donner des instructions en temps réel au robot a été développé. Ce modèle est basé sur la condensation statique et permet d'éliminer une très grande partie des ddl du système (voir Figure 17) et de réduire significativement le temps de calcul.

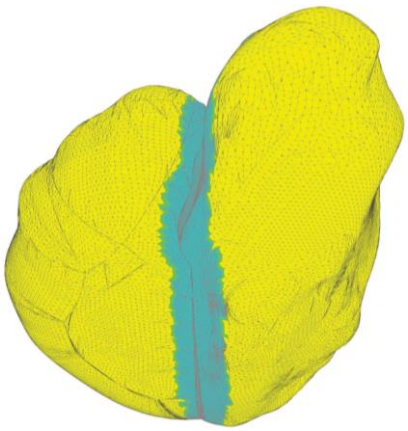

Figure 17 : Modèle mécanique réduit de muscles basé sur la condensation statique (Essahbi 2013) *(en jaune : partie condensée, en bleu : domaine d'intérêt)*

Le premier paragraphe de cette partie explique le principe de la méthode de condensation statique. Le second présente une méthode appelée condensation statique adaptative, basée sur le principe de la condensation statique et développée pour les grandes structures à comportement non linéaire (Llau et al. 2015).

1.1.4.1 Principe de la condensation statique

Pour un problème mécanique donné, l'équilibre statique peut être exprimé sous forme matricielle par l'équation :

$$K\,u = F \tag{12}$$

avec K la matrice de rigidité de la structure, f le vecteur force et u le vecteur déplacement. Le nombre de degrés de liberté du problème d'équilibre statique est la dimension du vecteur de déplacement u. L'approche de Guyan consiste à décomposer la structure en deux domaines qu'on appelle : le domaine d'intérêt (DI) et le domaine élastique (DE). Ces domaines possèdent des degrés de libertés que l'on note N^I (pour le DI) et N^E (pour le DE). Les ensembles N^I et N^E se croisent, et certains ddl, notés N^Γ, appartiennent aux deux domaines. On note N_v^I et N_v^E, les ddl strictement internes au domaine d'intérêt, et au domaine élastique respectivement. Le système de l'équation (12) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} K_{vv}^E & K_{v\Gamma}^E & 0 \\ K_{\Gamma v}^E & K_{\Gamma\Gamma}^E + K_{\Gamma\Gamma}^I & K_{\Gamma v}^I \\ 0 & K_{v\Gamma}^I & K_{vv}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_v^E \\ U_\Gamma \\ U_v^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v^E \\ F_\Gamma \\ F_v^I \end{pmatrix} \tag{13}$$

L'indice « v » désigne les lignes ou colonnes correspondants aux degrés de liberté du « volume » interne et l'indice « Γ » désigne les lignes ou colonnes correspondants aux degrés de libertés situés sur l'interface. Les paramètres du système (13) sont donc :

- K_{vv}^E : la matrice de rigidité relative aux degrés de libertés internes du DE
- $K_{v\Gamma}^E$: les termes de rigidité relative aux liaisons intérieur-frontière du DE
- $K_{\Gamma v}^E$: les termes de rigidité relative aux liaisons frontière- intérieur du DE
- $K_{\Gamma\Gamma}^E$: les termes de rigidité relative aux liaisons frontière-frontière du DE
- K_{vv}^I : la matrice de rigidité relative aux degrés de libertés internes du DI
- $K_{v\Gamma}^I$: les termes de rigidité relative aux liaisons intérieur-frontière du DI
- $K_{\Gamma v}^I$: les termes de rigidité relative aux liaisons frontière- intérieur du DI
- $K_{\Gamma\Gamma}^I$: les termes de rigidité relative aux liaisons frontière-frontière du DI
- U_v^E, F_v^E : sont respectivement le vecteur des déplacements et le vecteur des forces internes du DE.
- U_Γ, F_Γ : sont respectivement le vecteur des déplacements et le vecteur des forces de l'interface Γ.
- U_v^I, F_v^I : sont respectivement le vecteur des déplacements et le vecteur des forces internes du DI.

Le développement du système (13) donne le système suivant :

$$\begin{cases} K_{vv}^E U_v^E + K_{v\Gamma}^E U_\Gamma = F_v^E & (a) \\ K_{\Gamma v}^E U_v^E + \left(K_{\Gamma\Gamma}^E + K_{\Gamma\Gamma}^I\right) U_\Gamma + K_{\Gamma v}^I U_v^I = F_\Gamma & (b) \\ K_{\Gamma v}^I U_\Gamma + K_{vv}^I U_v^I = F_v^I & (c) \end{cases} \tag{14}$$

L'équation (14) - (a) donne :

$$U_v^E = {K_{vv}^E}^{-1}(F_v^E - K_{v\Gamma}^E U_\Gamma) \tag{15}$$

La condensation statique de Guyan consiste à remplacer l'équation (15) dans les deux dernières équations du système (14) et permet d'écrire :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^{E} + K_{\Gamma\Gamma}^{I} & K_{\Gamma v}^{I} \\ K_{v\Gamma}^{I} & K_{vv}^{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\Gamma} \\ U_{v}^{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{F}_{\Gamma} \\ F_{v}^{I} \end{pmatrix} & (a) \\ U_{v}^{E} = {K_{vv}^{E}}^{-1} \left(F_{v}^{E} - K_{v\Gamma}^{E} \, U_{\Gamma} \right) & (b) \end{cases} \tag{16}$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^{E} = K_{\Gamma\Gamma}^{E} - K_{\Gamma v}^{E} {K_{vv}^{E}}^{-1} K_{v\Gamma}^{E} \\ \widehat{F}_{\Gamma} = f_{\Gamma} - K_{\Gamma v}^{E} {K_{vv}^{E}}^{-1} F_{v}^{E} \end{cases} \tag{17}$$

La résolution de l'équation (16) se fait :

1. en calculant d'abord ${K_{vv}^{E}}^{-1}$,
2. en résolvant (16)-(a),
3. puis en utilisant, si nécessaire (16)-(b) « décondensation », pour calculer U_{v}^{E}

L'approche de Guyan permet donc d'écrire le système d'une manière à trouver la solution du problème associé au domaine d'intérêt (système (16)-(a)) en « condensant » le domaine élastique. On note que si le domaine élastique est grand, la dimension du terme K_{vv}^{E} est grande et le calcul de son inverse peut devenir coûteux. Il faut noter ici que la matrice $\widehat{K}$ peut-être dense et ce qui peut ajouter des difficultés pour résoudre ce système réduit. Le stockage de la matrice condensée pleine peut être plus couteux que la matrice creuse complète. Même avec ces facteurs, la résolution de ce système réduit reste plus rapide que celle du système global et en particulier lorsque la partie condensée est grande par rapport à la partie non condensée.

1.1.4.2 Méthode de condensation statique adaptative : Condensation statique à deux niveaux (Llau et al. 2015)

Concernant la fissuration non linéaire dans les structures en béton armé, une méthode dite de « Condensation Statique Adaptative (ASC) » a été développée dans (Llau et al. 2015). Cette méthode a été conçue principalement pour répondre aux problèmes suivants :

- pouvoir traiter des problèmes de mécanique non linéaire
- réduire la taille et le temps du calcul du problème pour pouvoir simuler des structures de grandes dimensions
- conserver des résultats exacts : équivalent à un calcul complet sans réduction
- sans connaissance préalable des zones non linéaires ou de forme de l'endommagement en fin de calcul

L'ASC est donc une méthode de résolution de structures de grandes dimensions à comportement non linéaire et avec des zones d'endommagement localisées, qui peuvent évoluer. Basée sur le principe de la méthode de condensation statique initiale, l'idée globale consiste à :

- partitionner le problème en zones (Figure 18-a),
- simuler classiquement les zones à comportement non-linéaire attendu (domaine d'intérêt),
- condenser les zones à comportement élastique linéaire (Figure 18-b),
- s'assurer lors du calcul que les zones condensées restent élastiques.

Si la dernière étape n'est pas remplie, de nouvelles zones d'intérêt doivent être incluses et entièrement représentées dans le calcul (voir Figure 18-c). Certaines étapes sont alors recalculées pour conserver l'exactitude du calcul. La méthode ASC est conçue pour fonctionner de manière optimale lorsque le comportement non linéaire est localisé sur une zone de petites dimensions par rapport à l'ensemble de la structure et que le reste de la structure a un comportement élastique linéaire. En revanche, la méthode ASC peut trouver sa limite dans certaines configurations, notamment lorsque l'endommagement se produit en

début de calcul et sur la majeure partie de la structure. Cela peut conduire à l'activation de toute la structure dès le début du calcul et rend la méthode moins efficace et même peut-être moins efficace qu'un calcul complet classique.

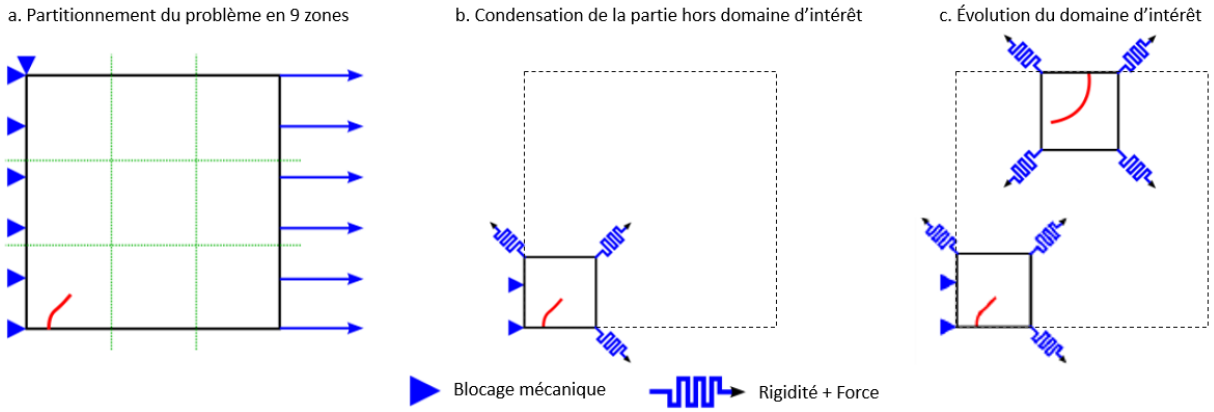

Figure 18 :principe de la méthode de condensation statique adaptative

1.1.4.2.1 Principe de la double condensation

Cette partie suit les équations présentées dans 1.1.4.1. L'ASC est une méthode évolutive. Le DI peut évoluer plusieurs fois. À chaque évolution, il faut recalculer $K_{vv}^{E\ -1}$ (voir l'équation (15)) ce qui peut coûter très cher. Afin d'optimiser cette opération, une condensation à double niveau est utilisée. Il est à noter que le formalisme initial de la méthode a été revu pour introduire une formulation mathématique plus rigoureuse de la double condensation.

On suppose que le domaine élastique est composé de j zones Z_j. On sépare les ddl de chaque zone en 3 :

- N_v^j : ddl strictement internes à Z_j
- N_γ^j : ddl sur la frontière γ_j de Z_j mais pas sur la frontière Γ du DI
- N_Γ^j : ddl de Z_j qui sont sur Γ

Potentiellement N_Γ^j ou N_γ^j peuvent être vides s'il n'y a pas d'intersection entre Z_j et Γ ou bien si toute la frontière de Z_j est dans Γ. L'union de toutes les frontières des zones forme un « squelette » du domaine élastique $\gamma = \cup_j \gamma_j$ (voir Figure 19).

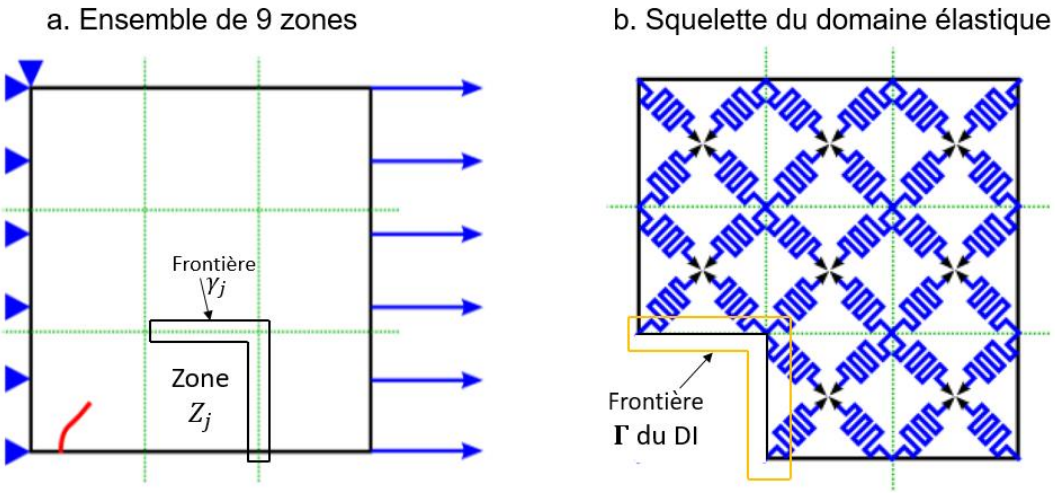

Figure 19 : Squelette du domaine élastique (première condensation)

Le système global (12) s'écrit avec cette décomposition comme suit :

$$\begin{pmatrix} K_{vv}^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & K_{v\gamma}^1 & K_{v\Gamma}^1 & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & K_{vv}^j & & \vdots & K_{v\gamma}^j & K_{v\Gamma}^j & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & K_{vv}^J & K_{v\gamma}^J & K_{v\Gamma}^J & \vdots \\ K_{\gamma v}^1 & \cdots & K_{\gamma v}^j & \cdots & K_{\gamma v}^J & \sum_j K_{\gamma\gamma}^j & \sum_j K_{\gamma\gamma}^j & 0 \\ K_{\Gamma v}^1 & \cdots & K_{\Gamma v}^j & \cdots & K_{\Gamma v}^J & \sum_j K_{\gamma\gamma}^j & \sum_j K_{\Gamma\Gamma}^j + K_{\Gamma\Gamma}^I & K_{\Gamma v}^I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & K_{v\Gamma}^I & K_{vv}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_v^1 \\ \vdots \\ U_v^j \\ \vdots \\ U_v^J \\ U_\gamma \\ U_\Gamma \\ U_v^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v^1 \\ \vdots \\ F_v^j \\ \vdots \\ F_v^J \\ F_\gamma \\ F_\Gamma \\ F_v^I \end{pmatrix} \tag{18}$$

On peut donc condenser chaque zone sur sa frontière en écrivant :

$$U_v^j = {K_{vv}^j}^{-1}(F_v^j - K_{v\gamma}^j\, U_\gamma - K_{v\Gamma}^j\, U_\Gamma) \qquad \forall j \tag{19}$$

En utilisant l'équation (19), on peut réécrire (18) comme suit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \sum_j \widehat{K}_{\gamma\gamma}^j & \sum_j \widehat{K}_{\gamma\Gamma}^j & 0 \\ \sum_j \widehat{K}_{\Gamma\gamma}^j & \sum_j \widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^j + K_{\Gamma\Gamma}^I & K_{\Gamma v}^I \\ 0 & K_{v\Gamma}^I & K_{vv}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\gamma \\ U_\Gamma \\ U_v^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{F}_\gamma \\ \widehat{F}_\Gamma \\ F_v^I \end{pmatrix} & (a) \\ U_v^j = {K_{vv}^j}^{-1}(F_v^j - K_{v\gamma}^j\, U_\gamma - K_{v\Gamma}^j\, U_\Gamma) \quad \forall j & (b) \end{cases} \tag{20}$$

avec :

$$\widehat{K}_{\gamma\gamma}^j = K_{\gamma\gamma}^j - K_{\gamma v}^j\ {K_{vv}^j}^{-1} K_{v\gamma}^j$$

$$\widehat{K}_{\gamma\Gamma}^j = K_{\gamma\Gamma}^j - K_{\gamma v}^j\ {K_{vv}^j}^{-1} K_{v\Gamma}^j$$

$$\widehat{K}_{\Gamma\gamma}^j = K_{\Gamma\gamma}^j - K_{\Gamma v}^j\ {K_{vv}^j}^{-1} K_{v\gamma}^j$$

$$\widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^j = K_{\Gamma\Gamma}^j - K_{\Gamma v}^j\ {K_{vv}^j}^{-1} K_{v\Gamma}^j$$

$$\widehat{F}_\gamma = F_\gamma - \sum_j K_{\gamma v}^j\ {K_{vv}^j}^{-1} F_v^j$$

$$\widehat{F}_\Gamma = F_\Gamma - \sum_j K_{\Gamma v}^j\ {K_{vv}^j}^{-1} F_v^j$$

Le système (20) représente le système où chaque zone serait condensée sur sa frontière. Pour simplifier la notation, notons $\widehat{K}_{\gamma\gamma}^E = \sum_j \widehat{K}_{\gamma\gamma}^j$; $\widehat{K}_{\gamma\Gamma}^E = \sum_j \widehat{K}_{\gamma\Gamma}^j$; $\widehat{K}_{\Gamma\gamma}^E = \sum_j \widehat{K}_{\Gamma\gamma}^j$; $\widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^E = \sum_j \widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^j$. Nous procédons maintenant à une seconde condensation sur Γ, frontière du DI. Pour cela, on exprime U_γ en fonction de U_Γ et U_v^I :

$$U_\gamma = \widehat{K}_{\gamma\gamma}^{E\ -1}(\hat{F}_\gamma - \widehat{K}_{\gamma\Gamma}^{E}\, U_\Gamma) \tag{21}$$

En utilisant cette relation, le système (20) se réécrit.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \widehat{\widehat{K_{\Gamma\Gamma}^{E}}} + K_{\Gamma\Gamma}^{I} & K_{\Gamma v}^{I} \\ K_{v\Gamma}^{I} & K_{vv}^{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\Gamma \\ U_v^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\widehat{F_\Gamma}} \\ F_v^I \end{pmatrix} & (a) \\ U_\gamma = \widehat{K}_{\gamma\gamma}^{E\ -1}\left(\hat{F}_\gamma - \widehat{K}_{\gamma\Gamma}^{E}\, U_\Gamma\right) & (b) \\ U_v^j = K_{vv}^{j\ -1}\left(F_v^j - K_{v\gamma}^{j}\, U_\gamma - K_{v\Gamma}^{j}\, U_\Gamma\right) \quad \forall j & (c) \end{cases} \tag{22}$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{\widehat{K_{\Gamma\Gamma}^{E}}} = \widehat{K}_{\Gamma\Gamma}^{E} - \widehat{K}_{\Gamma\gamma}^{E}\widehat{K}_{\gamma\gamma}^{E\ -1}\widehat{K}_{\gamma\Gamma}^{E} \\ \widehat{\widehat{F_\Gamma}} = \hat{F}_\Gamma^E - \widehat{K}_{\Gamma\gamma}^{E}\widehat{K}_{\gamma\gamma}^{E\ -1}\hat{F}_\gamma \end{cases}$$

La résolution de (22) se déroule alors selon les étapes suivantes :

a) calcul de $\widehat{K}_{\gamma\gamma}^{j}$, la matrice de rigidité d'une zone condensée sur sa frontière, pour chaque zone j (première condensation)
b) calcul de $\widehat{\widehat{K_{\Gamma\Gamma}^{E}}}$, la matrice de rigidité des frontières des zones construisant le domaine élastique condensé sur le bord du domaine d'intérêt (deuxième condensation)
c) assemblage et résolution de l'équation (a) du système (22) qui permet d'obtenir U_v^I et U_Γ qui sont la solution sur le DI.
d) calcul, si nécessaire, du champ de déplacements aux frontières des zones élastiques, à l'aide de l'équation (b) du système (22) (décondensation de niveau 2).
e) calcul, si nécessaire, du champ de déplacement à l'intérieur de toutes les zones condensées, à l'aide de l'équation (c) du système (22) (décondensation de niveau 1). Ceci permet de reconstruire la solution sur la totalité de la structure.

Contrairement au système (16) (condensation à 1 seul niveau), un changement du DE conduit à recalculer $\widehat{K}_{\gamma\gamma}^{E\ -1}$ et non pas $K_{vv}^{E\ -1}$. La taille de la matrice à inverser passe donc du nombre de ddl de l'ensemble du domaine élastique au nombre de ddl des frontières des zones construisant le DE seulement. Il est à noter qu'avec la méthode ASC, c'est uniquement l'équation (a) du système (22) qui est résolue à chaque pas de temps. Ce système est réduit sur les uniques ddl du DI et donc plus rapide à calculer. Les étapes d) et e) ne sont pas effectuées à chaque pas de temps mais périodiquement tous les p pas de calcul. Ceci sera détaillé dans le chapitre suivant.

1.1.4.2.2 Application de l'ASC

Dans (Llau 2016), la méthode a été appliquée sur l'exemple d'une poutre entaillée en flexion (Figure 20-a) découpée en 16 zones (Figure 20-b). La Figure 21 montre l'évolution du domaine d'intérêt et le profil d'endommagement de ce domaine à 3 instants différents : début de calcul (point 1), au pic du chargement (point 2) et à la fin du chargement (point 3). Ces profils montrent le caractère évolutif de la méthode ASC et ils sont similaires à ceux obtenus à partir du calcul complet (comparaison effectuée dans (Llau 2016)). Des résultats identiques au calcul complet ont été obtenus à tout moment du calcul, comme le montre la correspondance sur la Figure 22 entre la courbe force-flèche résultant du calcul complet (sans condensation) et celle obtenue avec la méthode ASC. Pour ce calcul avec les paramètres utilisés, la méthode ASC a permis une accélération de 35% (soit un facteur d'environ 1,4) par rapport au calcul complet. La méthode a également été validée sur un exemple d'enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne. Dans cette application, la méthode ASC a permis de fournir des résultats similaires au calcul complet dans le domaine d'intérêt deux fois plus rapidement.

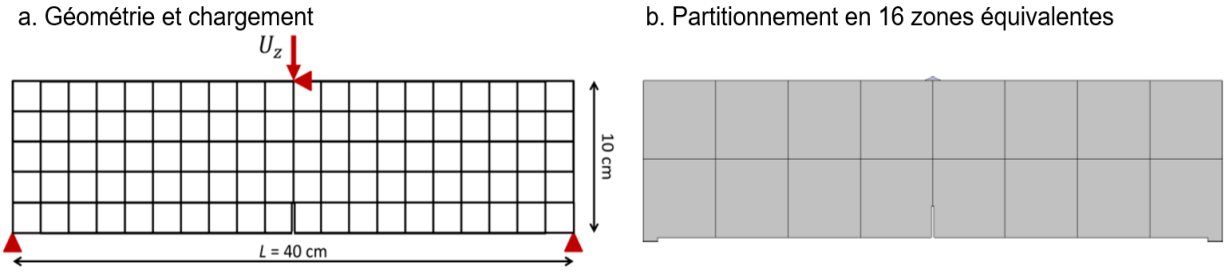

Figure 20 : Poutre entaillée en flexion 3 points partitionnée en 16 zones équivalentes (Llau 2016)

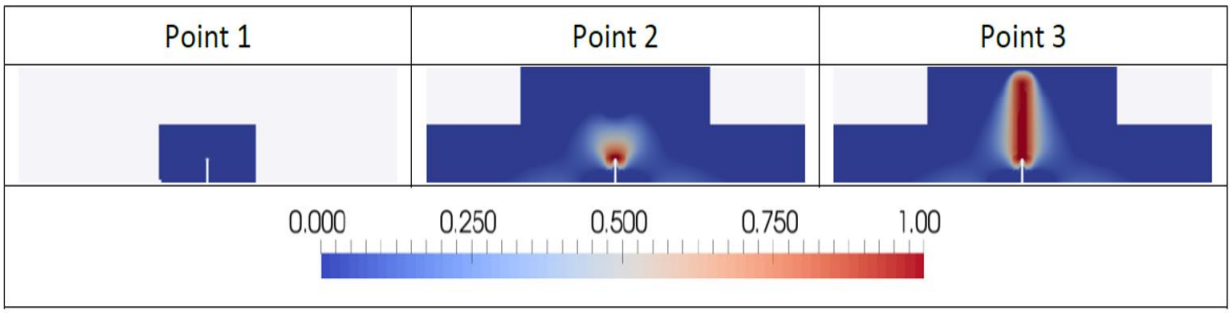

Figure 21 : Calcul ASC - Evolution du domaine d'intérêt et de l'endommagement en début de calcul (point 1), en pic de chargement et en fin de calcul (Llau 2016).

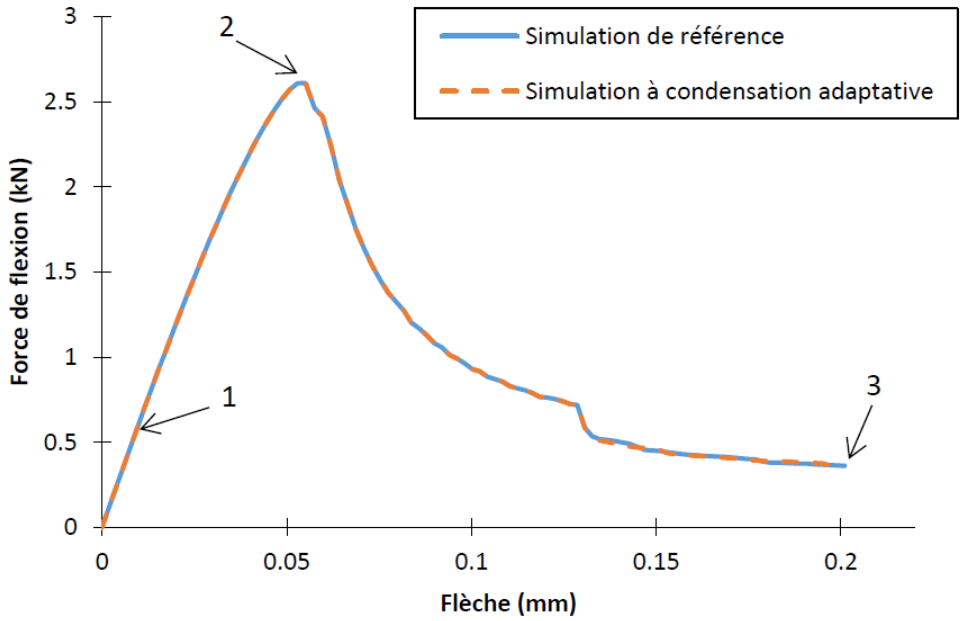

Figure 22: Courbe force - flèche - poutre en flexion 3 points (Llau 2016)

Ces résultats prometteurs, que ce soit en termes de précision de calcul, en termes de gain de temps de calcul, ou en termes d'application de la méthode à des calculs non linéaires, font de la méthode ASC, celle la plus adaptée pour répondre à notre problématique. Pour cela, le choix a été fait de partir de la méthode ASC et de la faire évoluer afin de répondre au mieux à notre problématique associée à la simulation avec comportement endommageable régularisé, des enceintes de confinement de type double paroi en béton précontraint, avec prise en compte de la perte de précontrainte liée aux déformations différées (fluage et retrait). Cette thèse a donc les objectifs suivants :

- Améliorer le plus possible les performances de la méthode ASC pour pouvoir l'appliquer à une enceinte de confinement complète (ou à sa maquette représentative) ;
- étendre le domaine d'application de la méthode pour pouvoir traiter autant que possible les types de chargements pouvant être rencontrés dans la simulation réaliste d'une enceinte de confinement ;
- automatiser et réduire l'intervention de l'utilisateur dans l'application de la méthode ASC afin de simplifier son utilisation et optimiser son temps de calcul.
- assurer la compatibilité de la méthode avec les techniques avancées de modélisation du comportement du béton armé (techniques de régularisation ou de raffinement de maillage par exemple)

Ces objectifs nous ont conduits à une nouvelle implémentation de la méthode ASC dans le code éléments finis Cast3m (“Cast3m” 2022). Cette nouvelle implémentation est basée sur le principe de base de la méthode ASC avec modification de l'algorithme initial afin de s'affranchir de certaines limites identifiées de la méthode. La nouvelle implémentation, quelques limites identifiées de l'algorithme initial ainsi que les solutions pour remédier à ces limites seront détaillées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 2. METHODE DE CONDENSATION STATIQUE ADAPTATIVE AMELIOREE (MEZHER ET AL. 2022B)

2.1 INTRODUCTION

Les objectifs de la thèse, qu'il s'agisse de l'amélioration des performances de la méthode, de l'automatisation de son utilisation ou de l'extension de son domaine d'application, en plus des limites identifiées de l'algorithme initial, ont conduit à une nouvelle implémentation de la méthode ASC. Le choix a été fait de réfléchir à un algorithme le plus général possible qui permette d'intégrer, à tout moment, de nouvelles options visant à améliorer la méthode comme le raffinement de maillage par exemple. Dans la première partie de ce chapitre, les différentes étapes de la nouvelle implémentation seront détaillées. La différence entre l'ancien et le nouvel algorithme est également discutée. Ensuite, certaines limites de la méthode initiale sont présentées avec les solutions proposées dans le nouvel algorithme pour les dépasser.

L'un des objectifs de cette thèse est d'améliorer la méthode ASC en termes de domaine d'applicabilité. Le béton, constitutif des enceintes de confinement, est en effet un matériau qui résiste bien à la compression mais peu en traction. C'est pourquoi, dans plusieurs applications de génie civil, notamment dans les enceintes de type double paroi, le béton est précontraint au moyen de câbles en acier. Ces câbles maintiennent le béton en compression même en cas de chargement induisant un incrément de contraintes de traction (Mazars, Hamon, and Grange 2015). La simulation numérique de ce processus peut être une tâche difficile pour atteindre un état de contrainte représentatif. Il faut en effet traiter les premières étapes d'application de la tension, la perte instantanée de la précontrainte, le comportement sous charges extérieures et, dans le cas d'une analyse à long terme, la perte de précontrainte due à des phénomènes tels que le retrait et le fluage du béton et la relaxation des câbles (Moreira, Sousa, and Parente 2018). À l'état initial de la méthode, ce type de chargement n'était pas pris en compte et la mise en précontrainte nécessitait la simulation complète de la structure (Llau 2016). Cela pouvait représenter une limite de la méthode lorsqu'une simulation sur la totalité de la structure était inaccessible. Pour cela, une extension de la méthode ASC sur la mise précontrainte avec la prise en compte des effets du fluage et du retrait sur la perte de précontrainte est présentée dans la deuxième partie de ce chapitre.

2.2 NOUVEL ALGORITHME DETAILLE DE LA METHODE ASC

2.2.1 Présentation de l'algorithme

Les différentes étapes de l'algorithme de la méthode ASC sont présentées sur la Figure 24. Sur cette figure, N représente le numéro du pas courant de calcul, i est un entier naturel et p est un paramètre de la méthode qui détermine le nombre de pas après lequel le résultat sur l'ensemble de la structure est reconstruit pour vérifier l'évolution potentielle du domaine d'intérêt. Cet algorithme a été implémenté dans le logiciel de calcul par éléments finis Cast3m ("Cast3m" 2022). Pour plus de clarté, les différentes étapes de la méthode sont illustrées sur la poutre simple en flexion de la Figure 23.

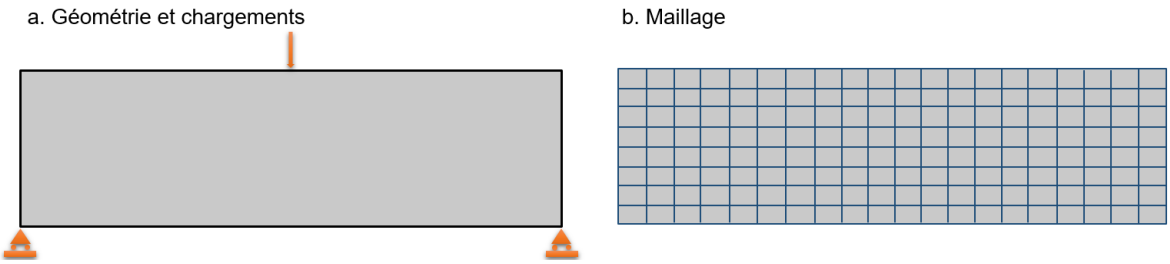

Figure 23: La poutre en flexion trois points

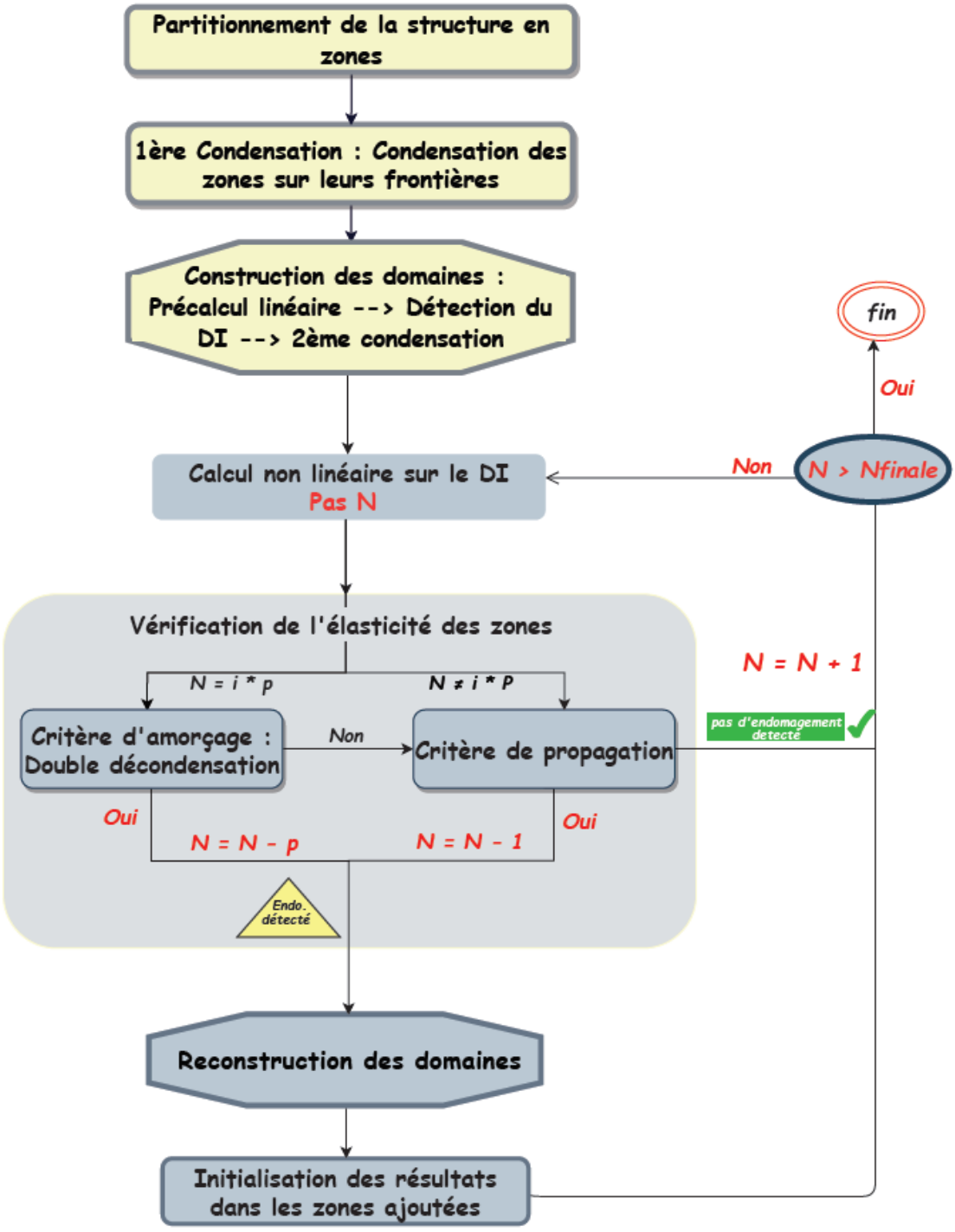

Figure 24 : Algorithme détaillé de la méthode ASC (en jaune : Phase de préparation, en gris : phase de calcul)

2.2.1.1 Partitionnement de la structure en zones

La première étape de la méthode ASC consiste à partitionner le maillage de la structure en N zones (N choisi arbitrairement par l'utilisateur). Ces zones peuvent être de tailles équivalentes ou de tailles différentes. Il est à noter que ce partitionnement n'affecte pas l'exactitude des résultats de calcul, mais a un effet significatif sur les performances de la méthode car il définit la taille du problème non linéaire à résoudre à chaque instant, et le nombre des évolutions du domaine d'intérêt. Un découpage optimal est celui qui prend en compte l'évolution de la non-linéarité au cours du calcul. Dans cet exemple illustré sur la Figure 25, la poutre est partitionnée manuellement en 16 zones équivalentes.

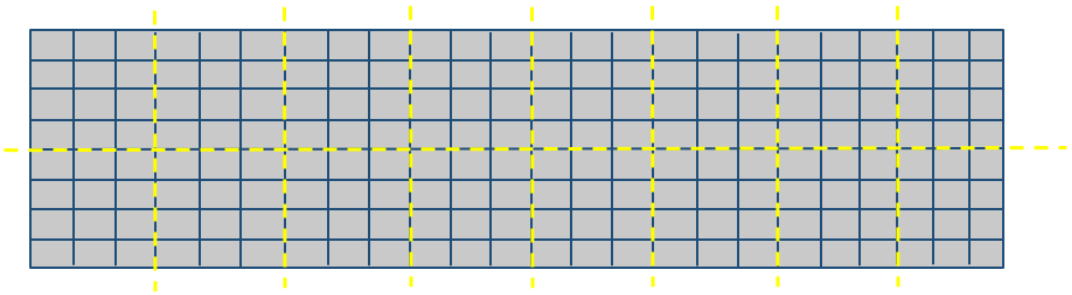

Figure 25 : Maillage de la poutre partitionné en 16 zones équivalentes

2.2.1.2 Première condensation

Cette étape consiste à remplacer la rigidité élastique, les conditions aux limites et les chargements correspondant à chaque zone par des conditions aux limites sur ses frontières (voir Figure 26). Ceci est fait en utilisant la condensation statique de Guyan comme présenté dans 1.1.4.2. Il est à noter que le partitionnement de maillage est effectué dans la phase de préparation et ce partitionnement n'évolue pas au cours du calcul. Ce qui permet de conserver les matrices condensées obtenues et de n'effectuer la première condensation qu'une seule fois dans la méthode ASC.

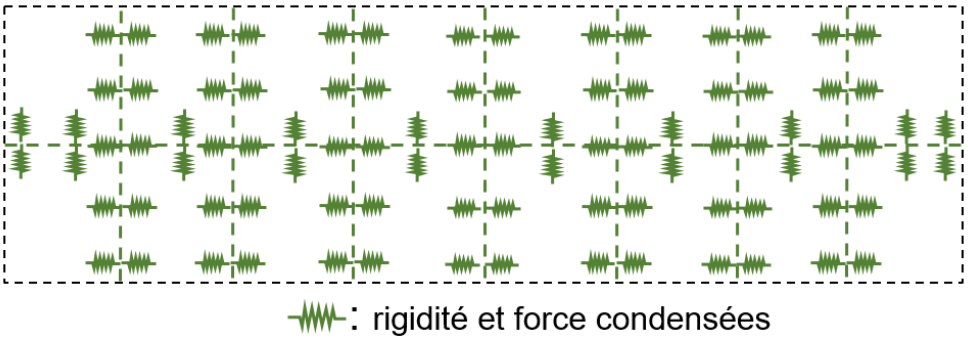

Figure 26 : Première Condensation

2.2.1.3 Construction des domaines

2.2.1.3.1 Pré-calcul linéaire

Cette étape consiste à effectuer un pré-calcul linéaire sur l'ensemble de la structure. Une distribution de la déformation élastique est obtenue et utilisée pour détecter l'élément le plus à risque (Figure 27). Lorsqu'il s'agit d'endommagement dans le béton, la déformation équivalente de Mazars ε_{eq}, est choisie et calculée à l'aide de l'équation suivante (Mazars, Hamon, and Grange 2015) :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \tag{23}$$

$\langle \varepsilon_i \rangle_+$ représentent les valeurs principales positives de la déformation. Cette distribution de déformation équivalente élastique est utilisée pour détecter le domaine d'intérêt de départ qui est construit à partir des zones les plus à risque, c'est-à-dire les zones qui incluent les éléments qui ont le maximum de ε_{eq}. Dans cet exemple , l'élément qui présente le maximum de ε_{eq} est celui en bas au milieu. Les deux zones en bas au milieu (voir partitionnement en zones donné sur la Figure 25) construisent donc le domaine d'intérêt de départ.

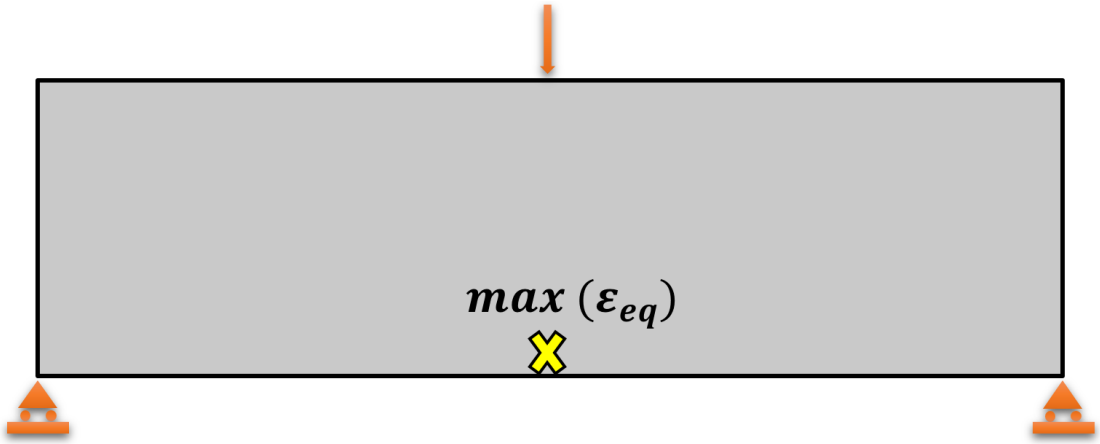

Figure 27 : Résultats du pré-calcul linéaire sur la poutre simple en flexion

2.2.1.3.2 2ème Condensation

Cette étape permet de construire le système réduit initial à partir du domaine d'intérêt initial, détecté à l'étape 2.2.1.3.1, qui sera activé et entièrement modélisé, et du Domaine Elastique (DE) qui sera condensé et remplacé par des conditions aux limites sur le bord du DI. La seconde condensation (Figure 28-b) permet ici de remplacer les zones du domaine élastique, déjà condensées sur leurs frontières, par des conditions aux limites sur le bord du DI comme présenté dans 1.1.4.2. Toutes les étapes jusqu'à présent constituent ce qu'on appelle la phase de préparation (en jaune sur la Figure 24).

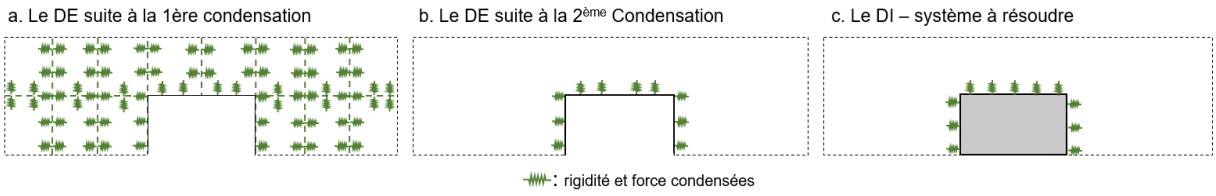

Figure 28: Construction du système à résoudre

2.2.1.4 Calcul non linéaire

Une fois la phase de préparation achevée, on passe au calcul non linéaire sur le système réduit donné par l'équation (a) du système (22). Ce calcul est effectué à l'aide de la procédure PASAPAS de CAST3M ("Cast3m" 2022) qui permet d'effectuer un calcul non linéaire incrémental utilisant un schéma de point fixe pour la minimisation du résidu. Cette procédure utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour traiter les conditions aux limites. Cette résolution donne les résultats sur le DI uniquement et est plus rapide que la résolution du système global pour deux raisons :

1. Le système est réduit à une dimension inférieure à celle du système global et donc sa résolution, à chaque itération, est plus rapide.
2. La vérification du comportement dans le domaine élastique à chaque itération n'est pas réalisée dans le calcul condensé.

En cas d'itérations multiples, ce facteur de gain de temps « unitaire » est multiplié par le nombre d'itérations.

Ce calcul reste représentatif et équivalent au calcul éléments finis standard (sans condensation) tant que le domaine condensé reste élastique. En cas d'évolution d'endommagement (propagation d'une zone existante ou amorçage dans une nouvelle zone), le DI peut évoluer au cours du calcul.

2.2.1.5 Vérification de l'élasticité des zones

Pour évaluer l'évolution potentielle du DI, une procédure de vérification de l'élasticité des zones condensées basée sur deux critères est utilisée.

1. **Le critère de propagation** : il évalue la potentielle propagation de l'endommagement du DI aux zones condensées voisines. Des bandes de propagation sont définies sur une largeur L autour de la frontière du DI (en orange sur la Figure 29-a). Si l'endommagement atteint ces bandes, la zone voisine est promue comme nouvelle zone d'intérêt et est ajoutée au DI. Comme les résultats existent dans le DI (et donc dans les bandes), le coût de vérification de ce critère est négligeable. Ce critère est donc vérifié à la fin de chaque pas de calcul. Dans l'exemple de la Figure 29-a, l'endommagement est présent dans la bande, ce qui provoque l'activation de la zone concernée (en haut à gauche du DI) dans la Figure 29-b.

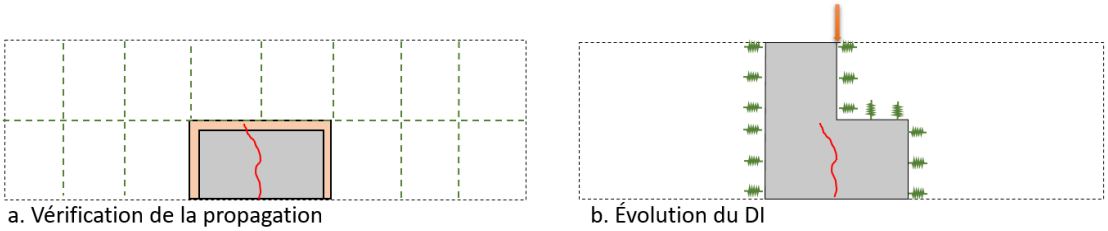

Figure 29 : Vérification du critère de propagation – Poutre simple en flexion

Dans l'algorithme initial de la méthode ASC, si une propagation était détectée, la nouvelle zone était ajoutée et le calcul se poursuivait sur le nouveau DI. Cela supposait donc que la nouvelle zone ajoutée avait un comportement élastique lors du pas de calcul courant. Cependant, en prenant la configuration particulière présentée sur la Figure 30, cette hypothèse pouvait se révéler fausse. Dans cette configuration, au pas N – 1, l'endommagement n'est pas présent dans la bande et au pas N (en configuration réelle), l'endommagement s'est rapidement propagé et a dépassé le bord du DI, l'hypothèse d'élasticité de la zone n'est plus valable. L'algorithme initial conduisait à une non-détection de l'endommagement hors du DI et donc à une perte de représentativité de la méthode. Dans la nouvelle implémentation, le pas courant est recalculé en cas de propagation avec initialisation des grandeurs en effectuant une décondensation dans la nouvelle zone activée en début de pas de calcul courant. Cela permet d'assurer que le calcul donne exactement le même résultat que le calcul complet.

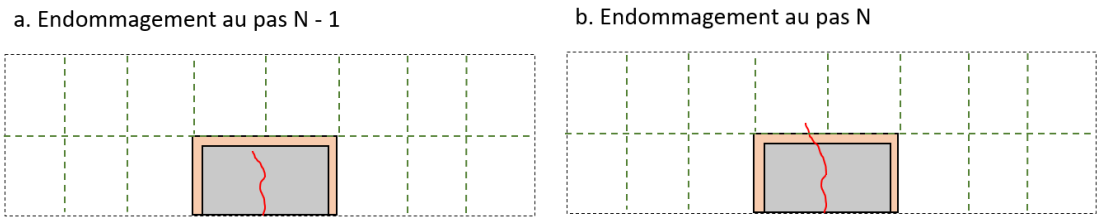

Figure 30 : Configuration particulière de propagation de l'endommagement

Une seconde modification apportée dans le critère de propagation concerne la largeur L de la bande de propagation. Ce paramètre, qui est un choix de l'utilisateur dans l'algorithme initial, a un effet significatif sur les performances de la méthode ASC. En effet, une grande valeur de L provoque l'activation précoce des zones voisines qui peuvent ne pas être endommagées en fin de calcul et donc pénaliser les performances.

De plus, dans le cas de l'utilisation d'une technique de régularisation de l'endommagement qui fait intervenir en chaque point d'intégration, la moyenne spatiale pondérée sur leur voisinage (longueur caractéristique L_C (Pijaudier-Cabot and Bazant

1987)), la largeur de la bande de propagation doit être soigneusement choisie, a minima égale à la longueur caractéristique. Pour cela, dans la nouvelle implémentation, le choix du paramètre devient imposé, égal à la longueur caractéristique L_C dans le cas d'un calcul non local et à une seule rangée d'éléments de la frontière du DI dans le cas d'un calcul local. Cette solution permet d'optimiser au maximum la valeur de la largeur de la bande tout en gardant la précision et en réduisant l'intervention de l'utilisateur dans la méthode ASC.

2. **Le critère d'amorçage** (Figure 31): il évalue la potentielle apparition de nouvelles zones d'intérêt correspondant à l'apparition de nouvelles zones endommagées. Cette étape suppose de vérifier l'élasticité des zones condensées. Pour cela, une décondensation est effectuée pour obtenir les valeurs des déplacements sur l'ensemble de la structure. La Figure 31 illustre la vérification de ce critère dans le domaine élastique de la poutre en flexion. L'amorçage est détecté sur les deux zones d'appui (Figure 31- a) induit l'activation de ces deux zones sur la Figure 31 - b.
Dans l'algorithme initial, le critère utilisé pour tester l'amorçage est la déformation équivalente de Mazars ε_{eq} (déformation non locale dans le cas d'un modèle non local) calculée par l'équation (23). Cependant, la déformation équivalente de Mazars n'a pas de portée générale et sa pertinence reste spécifique à certains modèles (notamment ceux liés à l'endommagement). Pour généraliser la représentativité de la méthode, l'hypothèse d'élasticité est vérifiée dans la nouvelle implémentation à partir du calcul de la déformation inélastique calculée comme suit :

$$\overline{\overline{\varepsilon_{inel}}} = \overline{\overline{\varepsilon_{méca}}} - \overline{\overline{\varepsilon_{el}}} \tag{24}$$

La décondensation permet d'obtenir le champ de déplacement $\bar{u}$ dans le domaine élastique. $\bar{u}$ est utilisé ensuite pour calculer le champ de déformation totale $\overline{\overline{\varepsilon_{tot}}}$ en utilisant l'équation suivante (sous l'hypothèse des petites déformations):

$$\overline{\overline{\varepsilon_{tot}}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T) \tag{25}$$

avec $\bar{\bar{H}} = Grad(\bar{u})$. Le champ de déformation mécanique est ensuite obtenu comme suit :

$$\overline{\overline{\varepsilon_{méca}}} = \overline{\overline{\varepsilon_{tot}}} - \overline{\overline{\varepsilon_{thermique}}} \tag{26}$$

L'application de la loi de comportement non linéaire permet d'obtenir le champ de contrainte $\bar{\bar{\sigma}}$:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \mathcal{F}(variables\ internes, \overline{\overline{\varepsilon_{méca}}}) \tag{27}$$

L'application de la loi de Hooke permet de calculer $\overline{\overline{\varepsilon^{el}}} = \bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}^{-1} \bar{\bar{\sigma}}$ avec $\bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}$ le tenseur de Hooke. Si au moins une composante de $\overline{\overline{\varepsilon_{inel}}}$ n'est pas nulle dans une zone donnée, cette zone doit être promue comme zone d'intérêt. Il est à noter que cette étape est couteuse car son calcul nécessite l'inverse de grandes matrices pour la double-décondensation (équations b et c du système (22)). C'est pour cette raison que ce critère n'est vérifié qu'après p pas de chargement, où p est un entier choisi par l'utilisateur. Par ailleurs, comme dans le cas de la propagation, l'endommagement « aurait dû » apparaître dans une zone élastique entre la dernière vérification $(N - p)$ et le pas de calcul courant (N). Pour garantir la représentativité du calcul, on revient donc au pas correspondant à la vérification précédente et les pas de calcul depuis la dernière vérification sont recalculés en ajoutant les nouvelles zones d'intérêt. Cela correspond à un retour p pas en arrière en cas d'amorçage. Dans la nouvelle implémentation, afin d'optimiser les opérations d'initialisation pour le retour en arrière, les résultats de la dernière vérification $(N - p)$ seront conservés. Cela permet, en cas de détection de

l'amorçage dans une nouvelle zone, de ne pas décondenser pour reconstruire les champs au pas $(N - p)$ dans la nouvelle zone promue, mais de reprendre les résultats sauvegardés.

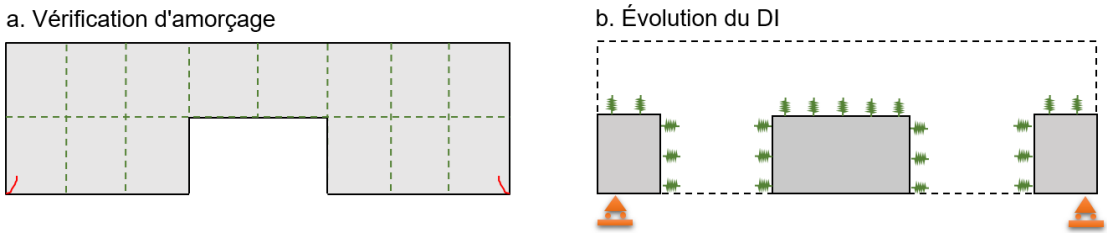

Figure 31 : Vérification du critère d'amorçage - Poutre simple en flexion

2.2.2 Traitement du cas de chargement variable

En dehors des différences évoquées dans la partie précédente entre ancien et nouvel algorithmes de la méthode, d'autres corrections ont été apportées dans le nouvel algorithme pour à la fois corriger certaines limites de l'approche initiale et optimiser certains points de développement. Pour des raisons de concision et d'intérêt, l'ensemble de ces corrections ne seront pas détaillées ici. Néanmoins, on propose d'illustrer ce travail sur un cas particulier. Comme déjà présenté, le critère d'amorçage n'est pas vérifié à l'issue de chaque pas de calcul mais tous les p pas. Dans l'algorithme initial de la méthode ASC, ce choix de vérification périodique de l'amorçage pouvait ne pas être suffisant pour des chargements particuliers, notamment ceux présentant des variations significatives dans leur évolution. Prenons par exemple l'évolution du chargement présentée dans la Figure 32, appliquée à la poutre en flexion trois points entaillée présentée dans la partie 1.1.4.2.2.

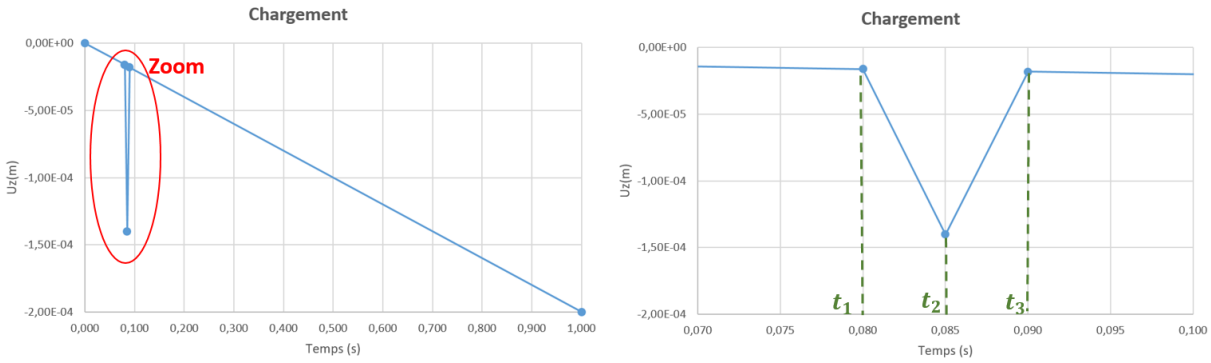

Figure 32: à gauche : Evolution de chargement, à droite : Zoom sur l'évolution ponctuelle de chargement

La particularité de ce chargement est évidemment la variation particulière observée entre les temps t_1 et t_3. L'application de ce chargement sur la poutre entaillée donne à la fin de calcul, le profil d'endommagement de référence de la Figure 33 pour le calcul éléments finis classique (sans condensation). Dans l'implémentation initiale de la méthode ASC, avec le paramètre p choisi ($p = 4$), les deux pas de chargements t_1 et t_3 sont deux instants successifs dans la liste de vérification de l'amorçage. L'application de la méthode donne à la fin de calcul le profil d'endommagement de la Figure 34. La comparaison de ces deux profils montre que les résultats ne sont pas identiques et qu'une partie de l'endommagement présent dans le calcul complet n'est pas détecté dans le calcul ASC. Cela est dû à la non prise en compte de l'endommagement propagé pendant le pic du chargement (instant t_2) dans les zones condensées. La vérification au seul instant t_3 ne permet pas de détecter l'endommagement qui s'est produit à l'instant t_2 dans les zones condensées car cet instant n'est pas un instant de vérification du critère d'amorçage.

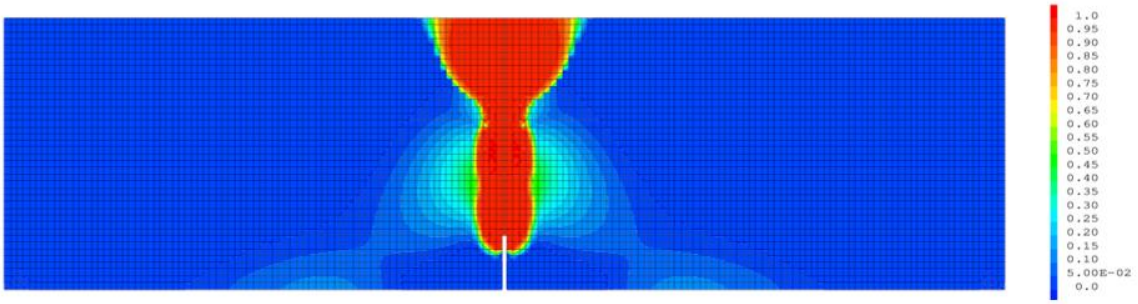

Figure 33 : Champ d'endommagement de Mazars D - Calcul complet sans la méthode de condensation

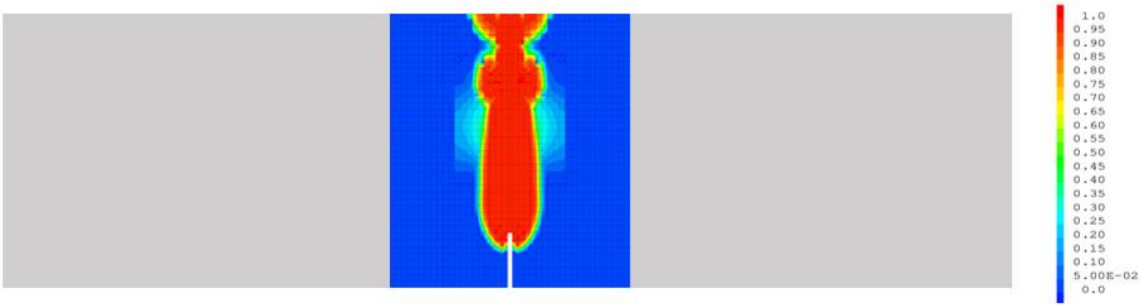

Figure 34 : Champ d'endommagement de Mazars D - Calcul ASC

La solution proposée pour résoudre ce problème dans le nouvel algorithme est la suivante :

- Création d'une procédure qui recherche automatiquement les pas de calcul où il y a variation dans l'évolution du chargement (t_2 dans cet exemple).
- Insertion de ces pas de calcul dans la liste des temps de vérification du critère d'amorçage.

Cette modification a été apportée à l'algorithme et la méthode ASC a été testée sur le même exemple. Le profil d'endommagement à la fin de calcul avec la nouvelle implémentation est présenté dans la Figure 35. Elle montre qu'on retrouve bien le même profil d'endommagement que le calcul de référence. Ainsi, cette modification, qui peut être considérée comme mineure dans l'implémentation, a un impact majeur sur la représentativité du calcul. Elle illustre l'ensemble des efforts apportés à la nouvelle implémentation pour la rendre la plus efficace et robuste possible.

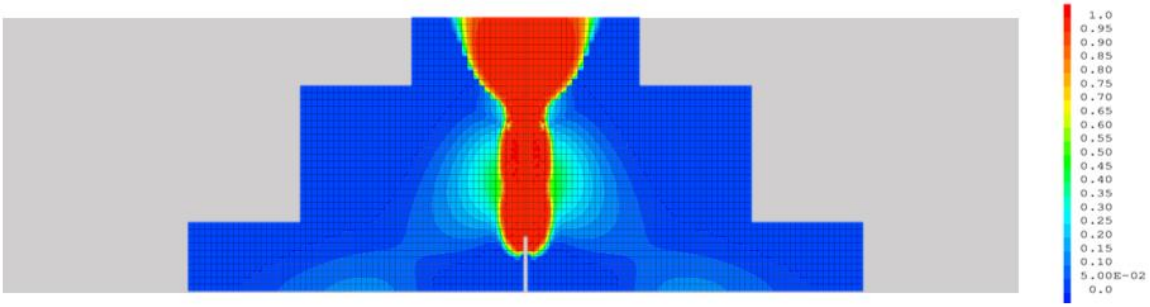

Figure 35 : Champ d'endommagement de Mazars D - Calcul avec la méthode de condensation adaptative modifiée

2.2.3 Validation de la méthode ASC et discussion

L'objectif de cette partie est dans un premier temps la validation de la méthode en la comparant à un calcul complet (sans condensation). Ensuite, une discussion sera menée sur le gain en temps de calcul qu'apporte la méthode selon plusieurs paramètres considérés dans le but

d'identifier quand il est le plus avantageux de l'utiliser. Pour ce faire, une poutre en béton entaillée en flexion est considérée. La simulation est réalisée en 2D et permet d'utiliser des maillages compatibles avec l'utilisation d'une technique de régularisation (ordre de 1 cm). La poutre a une longueur de 160 cm et une hauteur de 40 cm et comporte une entaille à mi-portée qui mesure 80 mm de hauteur et 8 mm de largeur. Elle est modélisée en contraintes planes avec une épaisseur équivalente de 20 cm. Le maillage est constitué de 6440 éléments quadrilatéraux de 1 cm de longueur (Figure 36). Le béton est modélisé à l'aide du modèle d'endommagement de Mazars (Mazars, Hamon, and Grange 2015) en utilisant les mêmes paramètres que dans (Dufour et al. 2017) donnés dans la Table 1. Ces paramètres correspondent à une résistance à la compression de 41,4 MPa et une résistance à la traction de 3 MPa. Le modèle de Mazars est un modèle d'endommagement isotrope qui évalue la réponse du matériau à l'aide d'un critère d'endommagement scalaire « D » basée sur les déformations. Il a été élaboré dans le cadre de la mécanique d'endommagement et il est habituellement utilisé pour modéliser le béton car il permet de reproduire correctement son comportement. La diminution de rigidité résultant de la création de microfissure dans le béton est décrite comme suit :

$$\sigma = (1 - D)E : \varepsilon^e \tag{28}$$

avec E la matrice de Hooke et ε^e la déformation élastique. La variable d'endommagement D est comprise entre 0 (matériaux sain) et 1 (matériau totalement endommagé). Pour calculer cette variable, Mazars introduit la notion de déformation équivalente ε_{eq}, calculée à l'aide de l'équation (23), qui traduit l'état triaxial par équivalence d'états uni axiaux. D est défini comme une combinaison de l''endommagement en traction D_T et en compression D_C tel que :

$$D = \alpha_T^{\beta} D_T + \alpha_C^{\beta} D_C \tag{29}$$

D_t et D_C s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} D_T = 1 - \dfrac{(1 - A_t)\varepsilon_{d_0}}{\varepsilon_{eq}} - A_t \exp(-B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \\ D_C = 1 - \dfrac{(1 - A_c)\varepsilon_{d_0}}{\varepsilon_{eq}} - A_c \exp(-B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \end{cases} \tag{30}$$

avec A_t, A_c, B_t et B_c sont des paramètres matériaux. β est un coefficient introduit pour améliorer le comportement en cisaillement et sa valeur est fixée à $1{,}06$. Les coefficients α_T^{β} et α_C^{β} réalisent un lien entre l'endommagement et l'état de compression ou de traction :

$$\begin{cases} \alpha_T^{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{3} \dfrac{< \varepsilon_i^t >< \varepsilon_i >_+}{(\varepsilon_{eq})^2} \right)^{\beta} \\ \alpha_C^{\beta} = 1 - \alpha_T^{\beta} \end{cases} \tag{31}$$

où $< \varepsilon_i^t >$ est la valeur principale de déformation positive et $< \varepsilon_i >_+$ est la valeur positive principale de déformation.

Physiquement, du fait de l'hétérogénéité de la microstructure du béton, il existe une interaction entre les fissures formées à une distance donnée. Pour cela, l'état de contrainte en un point donné doit tenir compte de son environnement. Cela ne se considère pas dans un modèle local et aboutit à une dépendance de la solution au maillage. Afin de limiter cette dépendance du maillage, des méthodes de régularisation non locales existent ((Lorentz and Andrieux 1999), (Giry, Dufour, and Mazars 2011)). La méthode utilisée dans cette application est la méthode moyenne (intégrale) (Pijaudier-Cabot and Bazant 1987) qui consiste à moyenner la déformation équivalente local ε_{eq} sur un volume V défini à l'aide d'un paramètre appelé la

longueur caractéristique L_C. La déformation équivalente non local $\bar{\varepsilon}$ qui remplace ε_{eq} est donnée comme suit :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\int_\Omega \psi(x-s)\varepsilon_{eq}(s)\,ds}{\int_\Omega \psi(x-s)} \tag{32}$$

avec Ω le volume de la structure, x la position du point local, s la position du point distant et $\psi(x-s)$ est la fonction de pondération :

$$\psi(x-s) = \exp\left(-\frac{4\|x-s\|^2}{L_c^2}\right) \tag{33}$$

La longueur caractéristique est un paramètre matériau lié à la taille du plus gros agrégat dans le béton (Hamon 2013).

Une longueur caractéristique $L_c = 3\,cm$ est utilisée dans cette application. Le chargement (déplacement vertical imposé vers le bas augmentant de 0 à 500 μm) est appliqué sur une longueur de 10 cm au sommet de la poutre. Le déplacement vertical est bloqué aux points d'appui et le déplacement horizontal est bloqué au point médian supérieur uniquement et libre ailleurs.

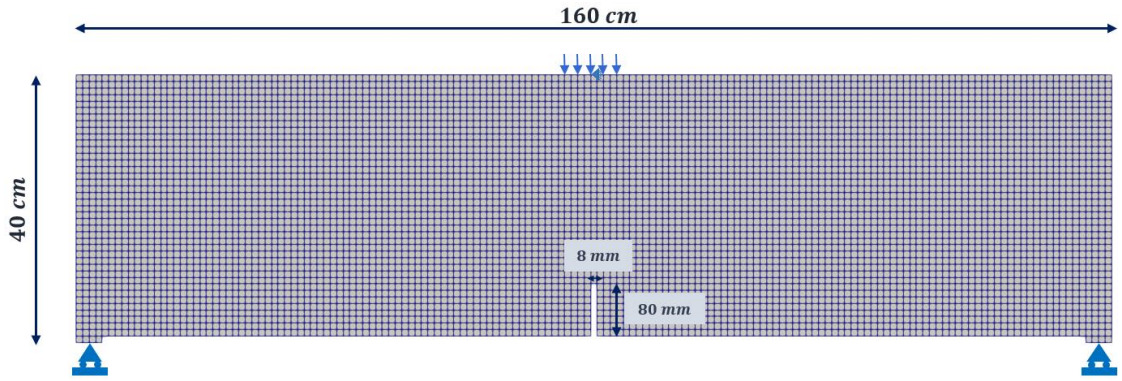

Figure 36 : Détails de la poutre (maillage, dimensions et chargements)

Table 1 : Paramètres Mazars - Poutre entaillée en flexion

Module d'Young (E)	Coefficient de Poisson (ν)	Limite élastique (ε_0)	Paramètre 1 Compression (A_C)	Paramètre 2 Compression (B_C)	Paramètre 1 Traction (A_T)	Paramètre 2 Traction (B_T)
$30\,GPa$	0,24	4×10^{-5}	1,25	1000	0,90	4×10^3

Pour l'application de la méthode ASC, le maillage de la poutre est partitionné en 32 zones de tailles équivalentes en minimisant le nombre de points sur les bords à l'aide de l'algorithme de « nested dissection » (Gilbert and Tarjan 1986) (voir Figure 37). Il est à noter que le nombre et la forme de ce partitionnement, ainsi que le paramètre p de vérification d'amorçage ($p = 8$) sont ici choisis arbitrairement. Une étude de sensibilité à ces deux paramètres sera discutée dans le chapitre suivant du manuscrit. Afin de comparer les résultats avec un calcul de référence, un calcul complet de la poutre (sans condensation) a été effectué. Les deux calculs sont effectués sur la même machine pour comparer les performances de calcul. Une comparaison entre la courbe force-flèche au niveau de l'entaille obtenue à partir du calcul complet et celle obtenue à partir du calcul ASC est montrée sur la Figure 38. La correspondance parfaite entre les courbes issues des deux calculs permet de valider l'utilisation de la méthode ASC sur cet exemple.

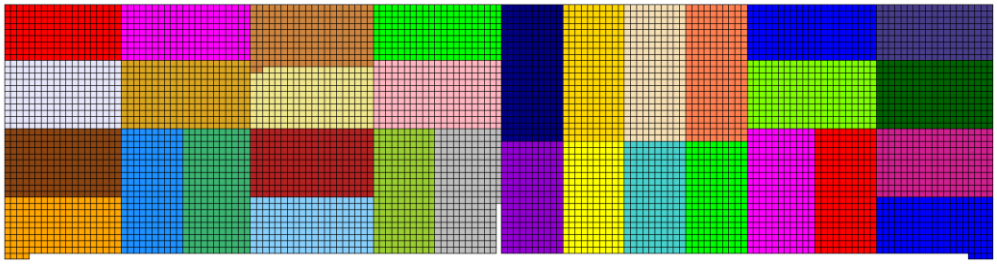

Figure 37 : Maillage de la poutre partitionné en 32 zones

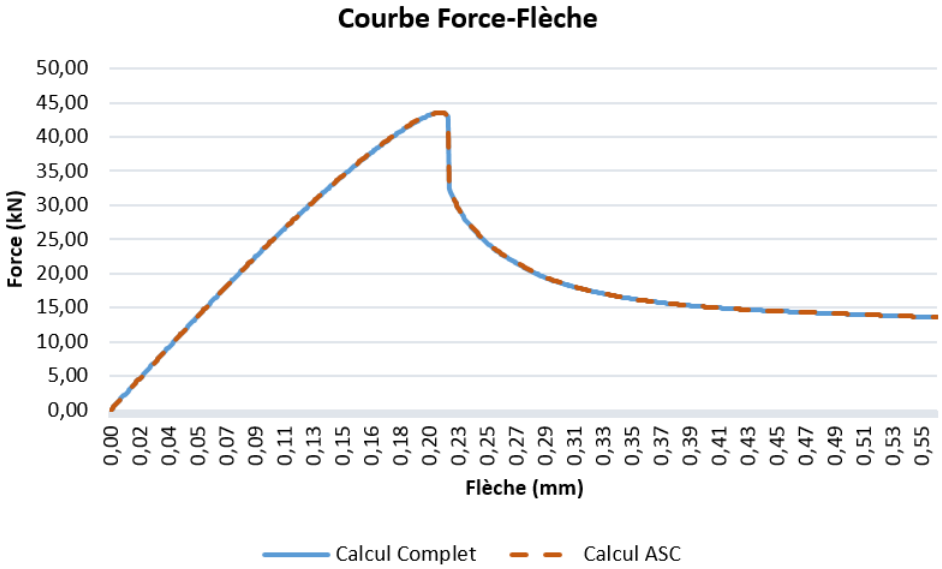

Figure 38 : Comparaison courbe force - flèche entre calcul complet et calcul ASC

Le profil d'endommagement en fin de calcul issu du calcul de référence ainsi que celui obtenu par la méthode ASC, qui sont présentés sur la Figure 39, sont aussi similaires. Au début du calcul, l'endommagement apparaît autour de l'entaille puis se propage verticalement vers les points d'application du chargement. De très légers endommagements sont également détectés au niveau des appuis, ce qui entrainte l'activation des zones correspondantes avec la méthode ASC. A la fin du calcul, et avec ce partitionnement de maillage, environ 2/3 de la structure est activée.

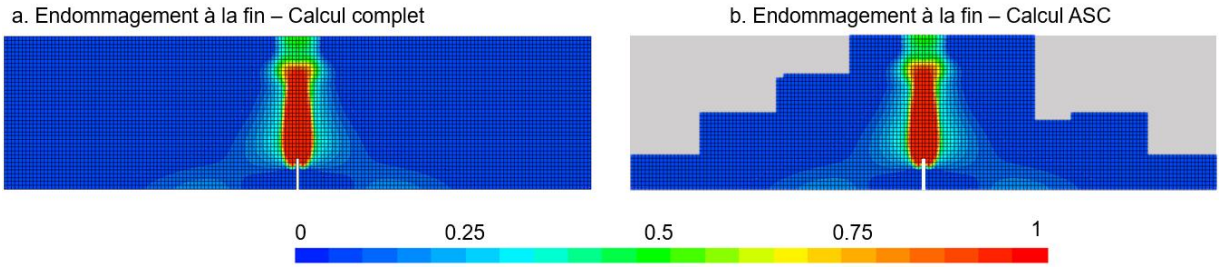

Figure 39 : Endommagement à la fin de calcul - Poutre entaillée 2D

Pour évaluer l'impact de certains des paramètres de la méthode, la Figure 40 trace l'évolution du temps de calcul total en fonction de numéro de pas de calcul pour le calcul complet et le calcul ASC. Cette figure comporte 4 courbes :

1. Tps_ASC : Chaque point $X_i(i, Tps_ASC(i))$ de cette courbe représente le temps total de calcul cumulé (en ms) nécessaire pour effectuer le calcul avec la méthode ASC jusqu'au pas numéro i.

2. Tps_Complet : Chaque point $X_i(i, Tps_Complet(i))$ de cette courbe représente le temps de calcul total cumulé (en ms) nécessaire pour effectuer le calcul complet jusqu'au pas numéro i.
3. Tps (Complet) - Tps(ASC) : cette courbe illustre la différence des deux courbes ci-dessus
4. Tps (Complet) / Tps(ASC) : cette courbe montre le facteur de gain de temps qui est défini comme le rapport entre le temps nécessaire pour effectuer le calcul complet et celui nécessaire pour le calcul ASC.

En regardant la courbe jaune sur la Figure 40, on remarque que la différence entre le temps de calcul complet et le calcul ASC augmente continument : plus le calcul se poursuit et, plus on gagne en temps absolu. En raisonnant en facteur de gain de temps, on remarque que le gain augmente pour atteindre le pic (≈ 15 au pas $i = 120$) puis diminue pour atteindre environ 2,5 en fin de calcul. Plusieurs pas de calcul remarquables ont été observées sur ces courbes et seront discutées plus loin dans la section :

- $i_0 = 0$: le premier pas de calcul
- $i_1 = 49$: le pas de calcul dans lequel la pente de la courbe gain de temps a subi une première augmentation
- $i_2 = 120$: le pas de calcul qui correspond au pic du gain de temps
- $i_3 = 334$: un pas de temps qui représente un saut dans le temps de calcul complet et dans le facteur de gain
- $i_{fin} = 800$: le dernier pas de calcul

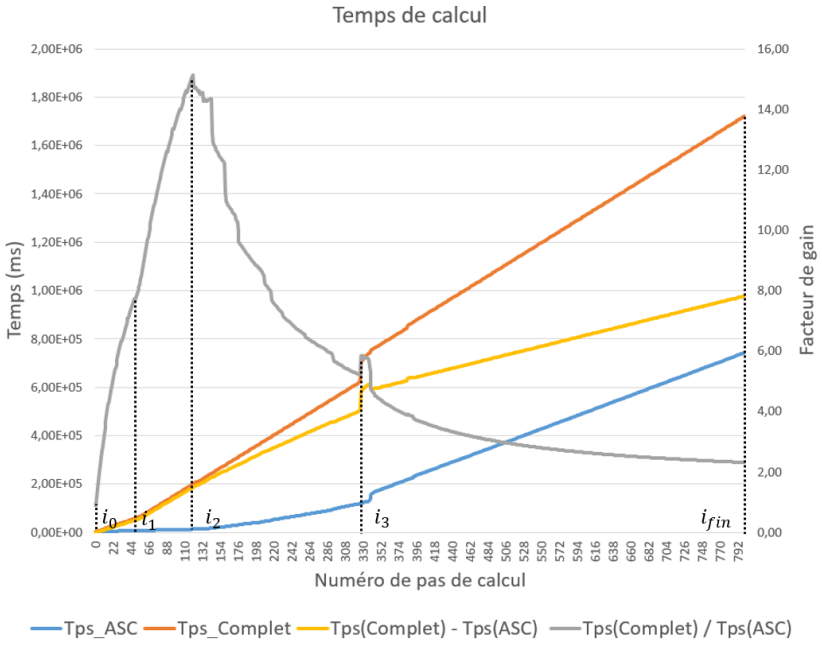

Figure 40 : Résultats de l'analyse du temps de calcul avec la méthode ASC (i_0, i_1, i_2 et i_{fin} sont des pas de temps remarquables du calcul)

Afin de mieux comprendre les comportements des courbes de la Figure 40, la Figure 41 illustre :

1. Nbr_Elts_Endommagés : nombre d'éléments endommagés à chaque pas de calcul afin de voir l'effet de la non-linéarité, qui peut nécessiter plus d'itérations, sur le temps de calcul.
2. Ddls (Complet) / ddls (ASC) : représente le nombre de degrés de liberté du système complet divisé par le nombre de degrés de liberté du calcul ASC. Cette quantité représente le gain en termes de réduction de degrés de liberté du système qui diminue à chaque fois qu'une nouvelle zone est activée. Chaque chute sur cette courbe représente donc l'activation d'une nouvelle zone dans la méthode ASC.
3. Tps (Complet) / Tps (ASC) : Le facteur de gain déjà tracé dans la Figure 40.

Une conclusion qu'on peut tirer en analysant ces courbes est que le pic de gain de temps correspond à l'instant de la première évolution du domaine d'intérêt (chute de la courbe des ddl). Avant le pic, la courbe de gain de temps à une pente très grande. Cela montre que quand le domaine d'intérêt n'évolue pas, le gain de temps de la méthode ASC augmente d'un pas à l'autre. Une fois que le domaine évolue, les opérations nécessaires telles que la reconstruction des domaines et le recalcul du pas courant, abaissent le gain après le pic.

En regardant la courbe de l'évolution de l'endommagement lors du calcul, on remarque qu'elle est composée de 3 parties principales :

1. Une première entre i_0 et i_2 durant laquelle l'endommagement augmente lentement. Dans cette partie, le DI n'évolue pas et le gain augmente fortement pour atteindre le pic à i_2.
2. Une seconde entre i_2 et i_3 pendant laquelle l'endommagement augmente fortement. Cela conduit à l'évolution du DI à plusieurs reprises. Les opérations nécessaires aux évolutions du DI réduisent fortement le gain comme le montre la courbe du gain de temps.
3. Une dernière partie, quelques pas après i_3 et jusqu'à i_{fin} durant laquelle l'endommagement continue d'augmenter, mais faiblement. Dans cette partie, le DI n'évolue pas, le gain de temps se stabilise et tend asymptotiquement vers 2,5.

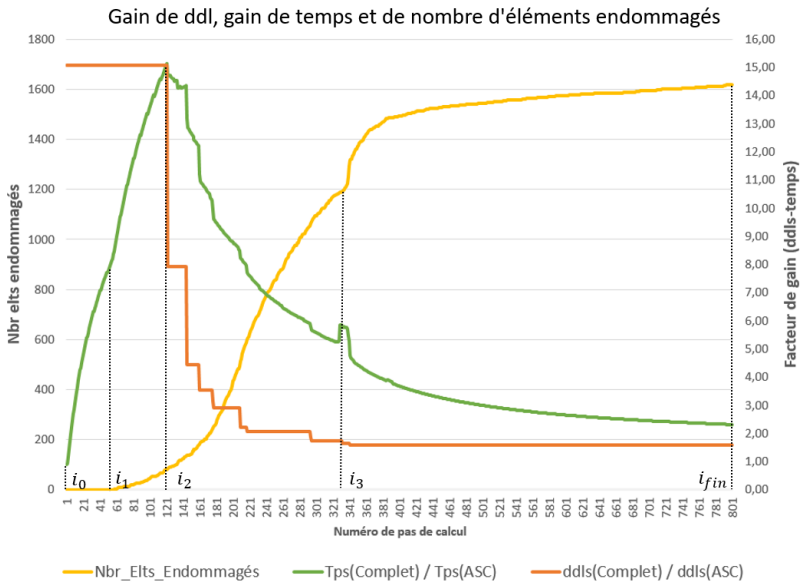

Figure 41 : Détails du calcul - Poutre entaillée (Sont reportés ici les même pas de temps remarquables que sur la Figure 40)

Les courbes de la Figure 41 ne fournissent pas suffisamment d'informations pour comprendre le comportement du gain de temps aux pas i_1 et i_3. Concernant le pas i_1, la seule information donnée est que ce pas représente le point de départ de l'endommagement. En ce qui concerne le pas i_3, il représente le point de départ d'une forte augmentation du nombre d'éléments endommagés. Afin de mieux comprendre le comportement de la courbe de gain de temps en ces points, quelques détails supplémentaires par pas de calcul ont été tracés sur la Figure 42. Deux informations supplémentaires sont présentées sur cette figure :

- Nbr itérations : le nombre d'itérations de la méthode de point fixe qui ont été nécessaires pour chaque pas de calcul i
- Gain_pas_calcul : représente le gain apporté par la méthode ASC par pas de calcul. C'est-à-dire le rapport entre le temps nécessaire pour effectuer le pas i en calcul complet et le temps nécessaire pour effectuer ce même pas par la méthode ASC.

La courbe de gain par pas de temps montre que le gain est très variable d'un pas à l'autre. Les chutes successives du gain correspondent aux pas de vérifications du critère d'amorçage (reconstruction de la solution sur la totalité de la structure).

Dans cette partie de la courbe entre i_0 et i_2, le même domaine d'intérêt est activé (nombre de ddl constant, voir la courbe orange sur la Figure 41), donc le gain de temps par pas de calcul peut être comparé. On constate que le gain par itération (courbe bleue de la Figure 42) double à partir du pas $i_1 = 49$, en même temps que la courbe verte passe de 1 à 2 itérations. Cela confirme que le gain de temps apporté à la résolution du système global par la méthode ASC est multiplié par le nombre d'itérations. Ceci explique également le saut de la courbe de gain de temps au pas i_3 qui a nécessité 11 itérations.

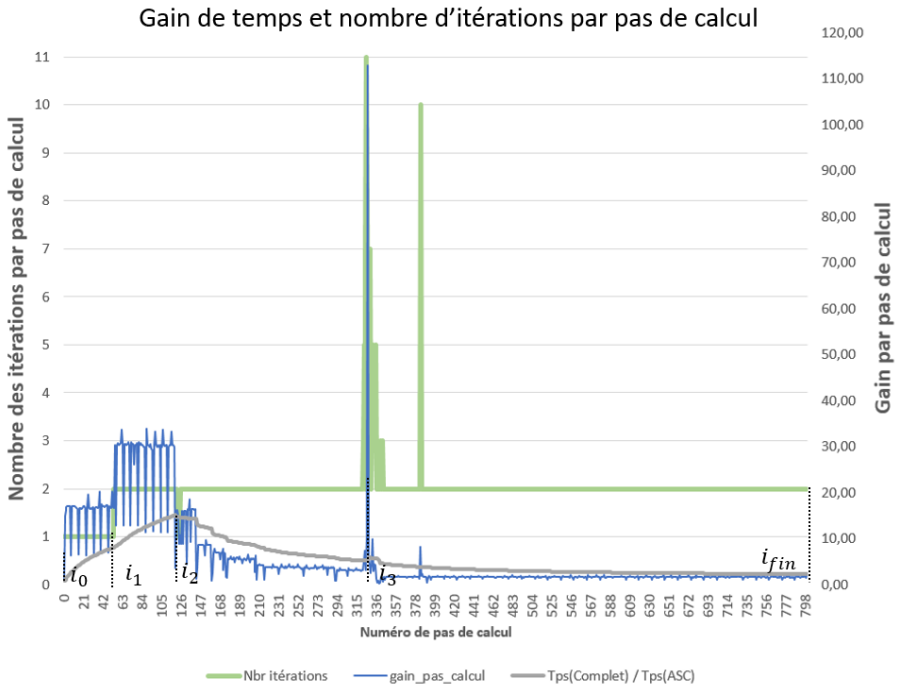

Figure 42 : Détails par pas de calcul – Poutre entaillée (Sont reportés ici les même pas de temps remarquables que dans la Figure 40)

La première conclusion que l'on peut en tirer de cette analyse est que l'efficacité de la méthode dépend de plusieurs paramètres. La plupart de ses paramètres sont donnés par le chemin de chargement appliqué (valeur de la force, nombre de pas de calcul, discrétisation, ...). Si, par exemple, le calcul était effectué jusqu'à i_1, un facteur de gain de temps de 15 aurait été obtenu au lieu de 2,5 à i_{fin}. En plus, une augmentation brutale du chargement peut entraîner une augmentation de l'endommagement et nécessite plus d'itérations et affecte donc le gain en temps. Une augmentation successive et continue du chargement peut entraîner des activations des nouvelles zones à plusieurs reprises, ce qui nécessite plus d'opérations avec la méthode ASC et des pas à recalculer, et donc affecte également le facteur gain de temps.

Cette discussion affirme également que le gain de la méthode ASC par pas de calcul, hors pas de vérification d'amorçage, peut être défini comme le gain de la méthode de condensation statique classique par le nombre d'itérations nécessaires.

Le gain obtenu avec la méthode en effectuant le calcul jusqu'à i_1 (instant d'apparition du premier élément endommagé) prouve que la méthode est efficace même si la structure reste dans le domaine élastique.

Un autre facteur qui peut grandement influencer le gain de temps de la méthode ASC et qui n'est pas évoqué dans cette discussion est le partitionnement du maillage en zones. En effet, c'est ce partitionnement qui décide du nombre d'activations de zone et de la taille du domaine à résoudre à chaque instant avec la méthode ASC. La Figure 39-b montre qu'une grande partie de la structure est activée mais pas endommagée en fin de calcul. Ce facteur sera abordé en détail plus loin dans le manuscrit.

2.3 EXTENSION DU DOMAINE D'APPLICATION : PRECONTRAINTE AVEC PRISE EN COMPTE DES DEFORMATIONS INSTANTANEES ET DIFFEREES

2.3.1 Principe de la précontrainte

Il est indispensable de compenser la faiblesse de résistance du béton à la traction afin de pouvoir l'utiliser dans la construction. La première solution consiste à faire supporter les efforts des tractions à l'acier, c'est le cas du béton armé. Une solution complémentaire existe, qui consiste à installer une contrainte permanente de compression dans le béton, pour permettre au béton de rester comprimé ou très peu tendu pour éviter sa fissuration, c'est le principe de la précontrainte. La Figure 43 illustre la comparaison entre le fonctionnement du béton armé et du béton précontraint. Avec du béton précontraint (Figure 43-b), après l'application des charges, un effort de compression est maintenu au lieu d'un effort de traction pour le béton armé. Cette deuxième technique de construction, qui est devenue très courante de nos jours, est ancienne. Elle a été appliquée pour la première fois au début du XXe siècle par Freyssinet. C'est notamment cette technique qui permet la réalisation de très longues portées de ponts pouvant atteindre plusieurs centaines de mètres (Techniques de l'Ingénieur 2005).

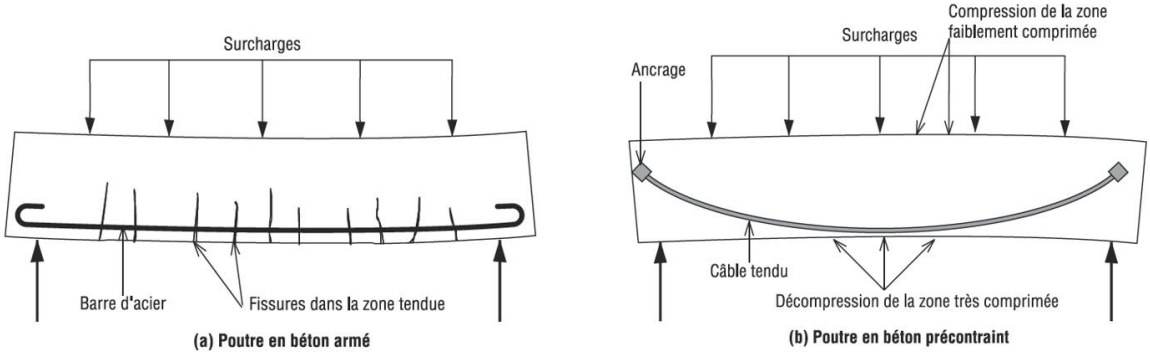

Figure 43 : Différence entre béton armé et précontraint (issue de (Techniques de l'Ingénieur 2005)*)*

Une première technique de précontrainte, appelée pré-tension, consiste à mettre les câbles en place et à les tendre, avant de couler le béton puis à les relâcher après le durcissement du béton. La déformation de l'acier est empêchée par l'adhérence entre l'acier et le béton et ce qui assure une force de précontrainte permanente. La deuxième technique est appelée post-tension. Les câbles sont insérés à l'aide de gaines placées dans le béton. Après coulage et durcissement du béton, les câbles sont tendus au moyen d'un vérin hydraulique et bloqués à l'aide des ancrages. C'est sur cette deuxième technique que nous focaliserons notre étude dans ce qui suit car c'est celle utilisée dans la construction des grandes structures et notamment des enceintes de confinement de type double paroi.

2.3.2 Pertes de tension ("BPEL99" 1999)

La structure précontrainte subit des pertes de tension d'origines diverses qui peuvent être classées en deux familles :

2.3.2.1 Pertes instantanées :

- **Frottement linéaire et angulaire** : cette perte résulte du frottement des câbles dans leurs gaines. L'évaluation de tension de câbles en prenant en compte les pertes par frottement (F_c), selon la réglementation BPEL 99, peut être estimée en connaissant les caractéristiques géométriques du câble (abscisse curviligne et déviation angulaire) comme suit :

$$F_c(s) = F_0 \times \exp^{(-f\alpha - \phi s)} \quad (34)$$

avec :

- F_0 : tension initiale
- s : abscisse curviligne le long du câble
- α : écart angulaire cumulé
- f : coefficient de frottement angulaire du câble sur le béton et sur la partie courbe (exprimé en rad^{-1})
- ϕ : coefficient de frottement par unité de longueur (exprimé en m^{-1})

- **Recul d'ancrage** : en post tension, le glissement au blocage des câbles après mise en tension provoque une perte de tension. La valeur de ce recul dépend du procédé de mise en œuvre et varie de 1 à 12 mm. La tension le long du câble est affectée par le recul de l'ancrage sur une distance d qui se calcule en résolvant l'équation suivante à deux inconnues : la fonction $\tilde{F}(s)$ qui représente la tension après recul de l'ancrage et la distance d (Michel-ponnelle 2014):

$$\Delta = \frac{1}{E_a S_a} \int_0^d [F_c(s) - \tilde{F}(s)] ds \qquad (35)$$

avec :

- Δ : la valeur du recul d'ancrage (c'est une donnée par la réglementation)
- E_a : module d'Young du câble
- S_a : la section du câble
- $\tilde{F}(s)$ est déterminé par la formule : $[F_c(s).\tilde{F}(s)] = [F_c(d)]^2$
- La longueur d est déterminée itérativement à l'aide de l'intégrale de l'équation (35).

Comme le montrent les équations ci-dessus, l'évaluation des pertes instantanées ne nécessite pas de modéliser l'interaction dans le temps avec le béton et peut se faire indépendamment.

2.3.2.2 Pertes différées :

Ces pertes sont également appelées pertes à long terme. Elles incluent :

- **La perte par relaxation de l'acier des câbles** : elle est associée au relâchement de tension dans les câbles à longueur constante. La tension $F(s)$ après perte par relaxation de l'acier, s'exprime selon le BPEL 99, comme suit :

$$F(s) = \tilde{F}(s) - \left\{ r(j) \times \frac{5}{100} \times \rho_{1000} \left[\frac{\tilde{F}(s)}{S_a \times \sigma_y} - \mu_0 \right] \times \tilde{F}(s) \right\} \qquad (36)$$

avec :

- $\tilde{F}(s)$: la tension, calculé ci-dessus, après prise en compte des pertes par recul d'ancrage et par frottement.
- ρ_{1000} : le pourcentage de relaxation de l'acier à 1000 heures
- σ_y : la contrainte limite élastique de l'acier
- μ_0 : le coefficient de relaxation de l'acier précontraint
- $r(j) = \frac{j}{j+9.r_m^0}$: j indique l'âge de la structure en jours et r_m^0 est le rayon caractéristique qui est le rapport entre la section du béton et le périmètre de cette même section.

- **Déformations différées : le retrait et le fluage** (Zdenek P. Bažant and Baweja 2000) (Zdeněk P. Bažant 2001):

- **la déformation de retrait ε_{ret}** (39) dans le béton est d'origine physico-chimique (départ de l'eau libre influencé par le taux d'hygrométrie) et se produit en l'absence de tout chargement extérieur. Cette déformation continue d'augmenter avec le temps et se décompose en retrait endogène ε_{as} (37) (ou auto-dessiccation, ou hydratation) et retrait de dessiccation ε_{ds} (38) (ou retrait de séchage) qui existe lorsque le matériau sèche. Dans le BPEL 99, le retrait à l'instant t est calculé comme suit :

$$\varepsilon_{as} = (f_{c28} - 20)\left[2{,}8 - 1{,}1e^{-t/96}\right].10^{-6} \quad (37)$$

$$\varepsilon_{ds} = \frac{K(f_{c28})\left[72e^{-0.046f_{c28}} + 75 - \rho_h\right]}{1 + 8{,}4\dfrac{r_m^2}{(t - t_0)}}.10^{-6} \quad (38)$$

$$\varepsilon_{ret} = \frac{\varepsilon_{as} + \varepsilon_{ds}}{1 + n\rho_s} \quad (39)$$

avec :

- f_{c28} : la résistance à la compression du béton à 28 jours
- ρ_h : l'humidité relative
- ρ_s : le pourcentage d'acier
- t_0 : l'âge du béton au début du séchage
- r_m : le rayon de séchage,
- K et n : deux coefficients fonctions de la résistance à la compression du béton(Marsha J. Berger and Oliger 1984).

Cette déformation provoque le raccourcissement du béton et en même temps du câble. Ce qui entraîne une perte de tension dans le câble qui évolue dans le temps. La tension $F(t)$ à l'instant t après perte par déformation de retrait s'écrit :

$$F(t) = F(t) - E_a\,.\varepsilon_{ret}(t) \quad (40)$$

- **Le fluage** est la part supplémentaire de déformation différée du béton lorsqu'il est soumis à des contraintes permanente. Cette déformation, comme celle du retrait, provoque un raccourcissement des câbles qui conduit à une perte de tension dans les câbles. Pour calculer cette perte, dont l'évaluation est essentielle pour la sécurité des ouvrages précontraints, il faut calculer le fluage dans le béton. Le fluage est composé du fluage propre ε_{bc} qui représente la partie de déformation lorsque le béton n'échange pas d'eau avec l'extérieur et le fluage de dessiccation ε_{dc} qui existe lorsque le matériau sèche sous contrainte. Selon le BPEL 99, le fluage est calculé comme suit :

$$\varepsilon_{bc} = 1{,}4\frac{\sigma}{E_{i28}}\frac{\sqrt{t - t_1}}{\left[\sqrt{t - t_1} + 0{,}4e^{3{,}1f_c(t_1)/f_{c28}}\right]} \quad (41)$$

$$\varepsilon_{dc} = 3{,}2\,[\varepsilon_{ds}(t) - \varepsilon_{ds}(t_1)].10^3\frac{\sigma}{E_{i28}} \quad (42)$$

$$\varepsilon_{flu} = \frac{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{dc}}{1 + n\rho_s} \quad (43)$$

avec :

- t_1 : est l'âge du béton au moment de l'application de la contrainte σ
- t : est l'âge du béton
- ε_{ds} : est le retrait de dessiccation calculé à l'aide de l'équation (38)
- E_{i28} : est le module d'Young du béton à 28 jours

La tension $F(t)$ à l'instant t après perte par déformation de fluage s'écrit :

$$F(t) = F(t) - E_a \,.\, \varepsilon_{flu}(t) \tag{44}$$

La Figure 44 montre l'évolution des déformations de fluage et de retrait au cours du temps. La courbe bleue représente la déformation de retrait qui résulte si aucune contrainte n'est appliquée à la structure. Cette courbe montre que la déformation de retrait commence après le coulage du béton, continue à augmenter et ne dépend pas de la contrainte appliquée à la structure. En appliquant une contrainte σ_C à la structure à l'instant t_1, une déformation instantanée $\varepsilon_{inst}(\sigma_C)$ se produise. Dès l'instant t_1, le béton est sous contrainte et donc subit une déformation complémentaire due au fluage $\varepsilon_{flu}(t_i)$ (à l'instant t_i) qui augmente avec le temps. La courbe verte donne donc la déformation totale à chaque instant t_i qui est la somme de la déformation instantanée, de la déformation de retrait et de la déformation de fluage. La courbe orange en pointillé représente la déformation totale si la déformation de fluage n'est pas prise en compte. la différence entre cette courbe et la courbe verte montre l'importance de la déformation de fluage sur la déformation totale.

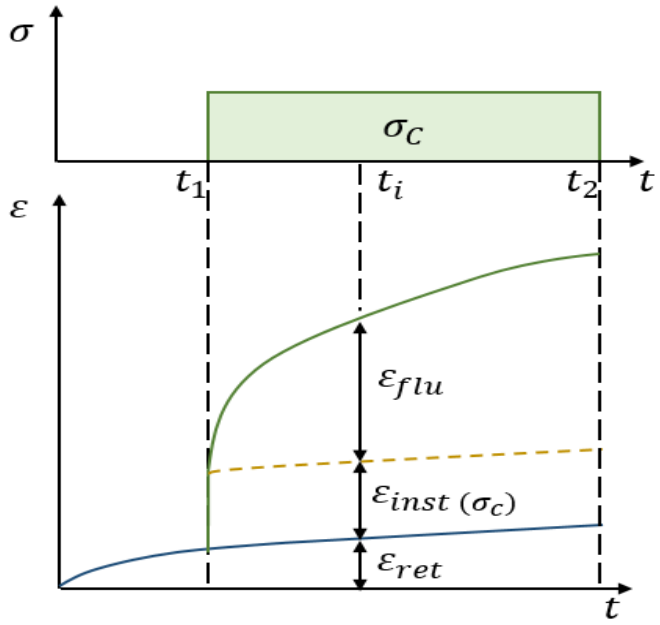

Figure 44 : séparation conventionnelle des déformations différées

Plusieurs approches existent pour calculer la perte liée au fluage et au retrait du béton : les approches réglementaires qui consistent, en utilisant par exemple le BPEL 99, à calculer la déformation de retrait et de fluage en fonction de la contrainte initiale, puis à calculer la perte correspondante. Le principal avantage de cette approche est la simplicité de mise en œuvre dans le calcul. Il existe néanmoins des modèles plus représentatifs pour modéliser le fluage, comme le modèle rhéologique de (Sellier et al. 2016), ou le modèle BETON_BURGER (Foucault 2012). Ces modèles prennent en compte l'évolution des contraintes et de nombreux autres paramètres lors du calcul. En revanche, ils nécessitent l'introduction des équations de fluage et de retrait dans l'équilibre mécanique. L'objectif de cette partie est d'étendre le domaine d'application de la méthode ASC pour la précontrainte en prenant en compte les phénomènes de

fluage et de retrait. Les modèles les plus représentatifs de fluage et de retrait, avec les non-linéarités qu'ils présentent, nécessitent beaucoup de développement pour être inclus dans la méthode ASC et dépassent le cadre initial de la thèse. Pour cela, le choix a été fait dans la suite d'utiliser des approches réglementaires.

2.3.3 Méthodes de simulation de précontrainte

Après évaluation du profil de tension dans les câbles et des pertes de précontrainte, il faut simuler le comportement et la réponse de la structure suite à la mise en tension. Il existe plusieurs méthodes s'appuyant sur la méthode des éléments finis. Les deux principales sont les suivantes :

- **La méthode implicite** (Gerard and ULM 1997) **:** aussi nommée la méthode des forces équivalentes. Elle consiste à remplacer l'effet de la précontrainte par une force nodale équivalente sur le béton. Cette méthode simplifiée est souvent utilisée pour l'étude de la stabilité globale de la structure. Elle ne permet pas de prendre en compte l'interaction entre le béton et les câbles ainsi que le couplage de plusieurs phénomènes variables dans le temps comme le fluage du béton et son effet sur la précontrainte. Pour les grands ouvrages tels que les enceintes de confinement et les ponts, il est essentiel de déterminer au plus juste les efforts de précontrainte, et la réponse de la structure, car ils influencent fortement le comportement structurel et la sécurité de l'ouvrage.
- **La méthode explicite :** cette méthode consiste à représenter l'équilibre mécanique entre les câbles et le béton pendant la mise en précontrainte. Cette approche plus représentative permet de prendre en compte l'évolution de la précontrainte dans le temps et notamment la perte liée au retrait et au fluage du béton. Elle est plus difficile à mettre en œuvre et apporte une charge de calcul supplémentaire. Néanmoins, par souci de représentativité, c'est cette méthode qui a été choisie dans Cast3m pour la simulation de la précontrainte. C'est égal celle qui sera utilisée dans la suite.

Dans un premier temps, nous présenterons brièvement la méthode explicite existant dans Cast3m (procédure PHASAGE). Dans la deuxième partie, l'intégration de la méthode ASC à la procédure de mise en précontrainte sera discutée. L'objectif est ici de pouvoir simuler la mise en précontrainte d'une structure sans avoir à effectuer un calcul complet sur la totalité de la structure comme c'est le cas dans la méthode initiale (Llau 2016). PHASAGE comporte plusieurs étapes de calcul qui sont présentées dans la suite.

2.3.4 Procédure Phasage de cast3m : mise en précontrainte avec prise en compte du fluage et du retrait

La procédure « PHASAGE » de Cast3M permet de calculer les états de contrainte, dans le béton et dans les câbles, durant les séquences de construction et de mise en tension des câbles de précontrainte. Les câbles sont modélisés par des éléments barres à 2 nœuds « SEG2 » de Cast3m (éléments barres linéaires au sens des éléments finis) et le béton peut être modélisé par tout type d'élément. La liaison entre le câble et le béton est assurée par des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et ceux des éléments de béton associés assurant une égalité des déplacements (adhésion parfaite).

2.3.4.1 Evaluation du profil de tension des câbles

La première étape consiste à évaluer la distribution des efforts le long des câbles en fonction de la tension initiale appliquée aux extrémités en considérant les pertes de précontraintes quasi-instantanées (perte par frottement, recul d'ancrage et relaxation de l'acier, comme décrit dans le paragraphe 2.3.2). Cette étape permet donc le calcul du champ de contraintes de tension $\sigma_{tension}$ dans l'acier.

2.3.4.2 Transformation du profil de tension en force nodale

Les profils de contraintes de traction le long du câble sont ensuite transformés en forces nodales équivalentes (chargement extérieur). Les forces nodales équivalentes sont calculées, en intégrant le profil de contrainte comme suit :

$$F_{preco} = -S_a \cdot \int_{L_i} \sigma_{tension_i} \nabla N_i dl \tag{45}$$

où S_a est la section d'acier, L_i est la longueur de l'élément i, N_i est la fonction de forme de l'élément i et $\sigma_{tension_i}$ est la contrainte de tension dans l'élément i du câble calculé dans 2.3.4.1. Ces forces nodales élémentaires sont ensuite assemblées pour tous les éléments le long du câble.

2.3.4.3 Calcul 1 à t_1 : temps du coulage du béton

Un premier calcul au moment t_1 du coulage du béton est effectué. Dans ce calcul, seul le poids propre du béton ($F_{pp\ béton}$) est considéré comme chargement. Afin d'éviter la perte de tension dans le câble, sa raideur n'est pas prise en compte dans ce calcul ($K_{ac} = 0$). La Figure 45 illustre ce calcul. Il en résulte un champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma(t_1)}}$ sur la structure. Ce champ est composé d'une contrainte dans le béton, calculée en fonction du champ de déformation obtenu, et d'une contrainte nulle dans l'acier du fait de la raideur nulle.

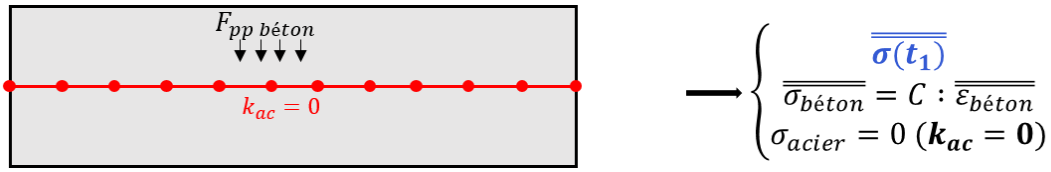

Figure 45 : Calcul à t1 : poids propre du béton

2.3.4.4 Calcul 2 à t_2 : instant de mise en précontrainte

Partant de l'état à t_1 comme état initial, un deuxième calcul est effectué au moment t_2 de la mise en précontrainte du câble (voir Figure 46). Comme précédemment, la raideur du câble n'est pas prise en compte dans le calcul. En plus du poids propre, la force de précontrainte équivalente ($F_{préco}$) calculée à l'aide de l'équation (45) est appliquée. Les champs de déformation de retrait et de fluage (en fonction de $\overline{\overline{\sigma(t_1)}}$) sont calculés à t_2 et appliqués à la structure. Cela signifie que le retrait et le fluage dû au chargement de poids propre sont pris en compte dans la simulation à ce stade.

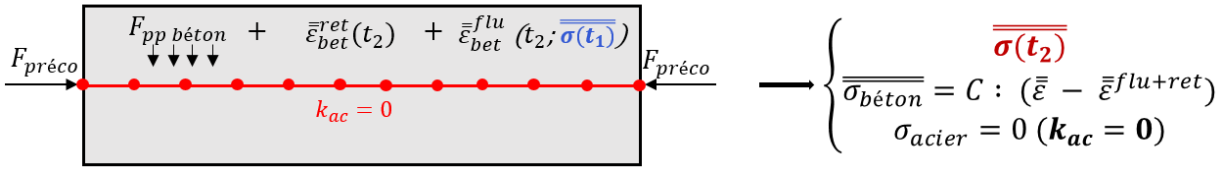

Figure 46 : Calcul à t2 : mise en précontrainte

L'effet du fluage et du retrait sont représentés par un tenseur de déformation isotrope transverse. Pour le retrait, $\bar{\bar{\varepsilon}}^{ret}_{bet}(t_2)$ est calculée comme suit :

$$\overline{\overline{\varepsilon_{ret}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ret} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ret} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ret} \end{pmatrix} \tag{46}$$

avec ε_{ret} calculée à l'aide des équations (37), (38) et (39).

Pour le fluage, calculé en fonction du champ de contrainte $\overline{\overline{\sigma(t_1)}}$ lié au poids propre, il est calculé comme suit :

$$\overline{\overline{\varepsilon_{flu}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 2 \times \sigma_{xy} & 2 \times \sigma_{xz} \\ 2 \times \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 2 \times \sigma_{yz} \\ 2 \times \sigma_{zx} & 2 \times \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \times \varepsilon_{flu} \quad (47)$$

avec ε_{flu} la déformation de fluage par unité de contrainte calculée à l'aide des équations (41), (42) et (43) et σ_{ij} sont les composantes du tenseur $\overline{\overline{\sigma(t_1)}}$.

Un champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma(t_2)}}$ résulte du calcul à t_2. Il est composé d'un champ sur le béton calculé en fonction de la déformation mécanique ($\bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}^{flu+ret}$) et d'un champ nul sur le câble du fait de la raideur nulle.

2.3.4.5 Calcul 3 à t_3 : temps final de prise en compte de retrait et fluage

Un dernier calcul non linéaire est effectué à l'instant t_3, instant final auquel on souhaite estimer le fluage et le retrait dans le béton et son effet sur la précontrainte. Ce temps peut être significativement plus grand que le temps d'application de la précontrainte. Dans ce calcul, la rigidité des câbles redevient égale à sa valeur réelle et la contrainte dans les câbles est prise égale à la distribution de contrainte initiale $\sigma_{tension}$. En plus du poids propre et de la précontrainte, le retrait et le fluage à t_3 sont calculés à partir de la contrainte dans le béton résultant du calcul t_2 ($\overline{\overline{\sigma(t_2)}}$). A la fin du calcul, la contrainte dans l'acier est affectée par le raccourcissement des câbles lié à la déformation différée et imposé par la relation cinématique entre l'acier et le béton. Cela caractérise la perte de précontrainte liée au fluage et au retrait.

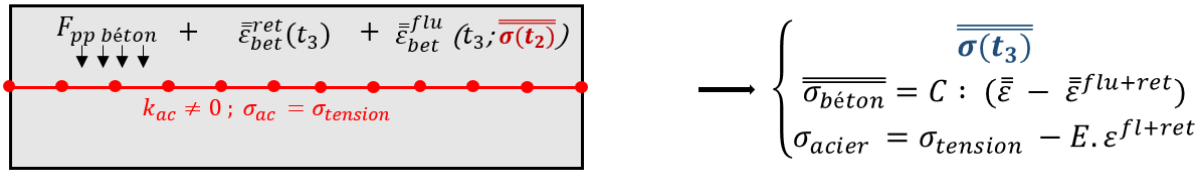

Figure 47 : Calcul à t3 : temps final

On notera que la principale simplification de cette approche est de supposer que la contrainte $\overline{\overline{\sigma(t_2)}}$, utilisée pour le calcul de fluage, reste constante entre t_2 à t_3. En réalité, cette contrainte de fluage évolue avec le temps. Néanmoins, compte tenu de la simplicité de l'approche, c'est celle qui sera retenue ici.

2.3.5 Phasage condensé

Dans cette partie, l'application de la méthode ASC à la procédure PHASAGE est proposée. La phase de prétraitement de la méthode ASC, comprenant le partitionnement du maillage, le pré-calcul linéaire, la première condensation et la construction des domaines (Figure 24 page 42), est effectuée de la même manière que pour les autres types de chargement. Le profil de tension du câble est également calculé de la même manière que dans 2.3.4.1 (sur l'ensemble du câble) et est ensuite transféré en force nodale équivalente comme dans 2.3.4.2. La force nodale F_{preco} est finalement utilisée pour le pré-calcul linéaire qui permet de détecter le domaine d'intérêt activé au départ du calcul de mise en précontrainte (calcul linéaire équivalent à celui effectué à l'instant t_2 montré sur la Figure 46). Ces étapes de calcul sont simples et rapides et n'impactent pas significativement les temps de calcul.

Une fois le domaine d'intérêt détecté, l'idée est de réaliser exactement les mêmes étapes de calcul que la procédure PHASAGE mais sur le domaine d'intérêt uniquement pour obtenir les mêmes résultats que le calcul complet. L'algorithme de la méthode ASC pour le calcul de la

précontrainte est présenté sur la Figure 48. Cette approche présente plusieurs particularités pour l'application de la méthode ASC qui nécessitent un traitement particulier et qui seront détaillées dans la suite.

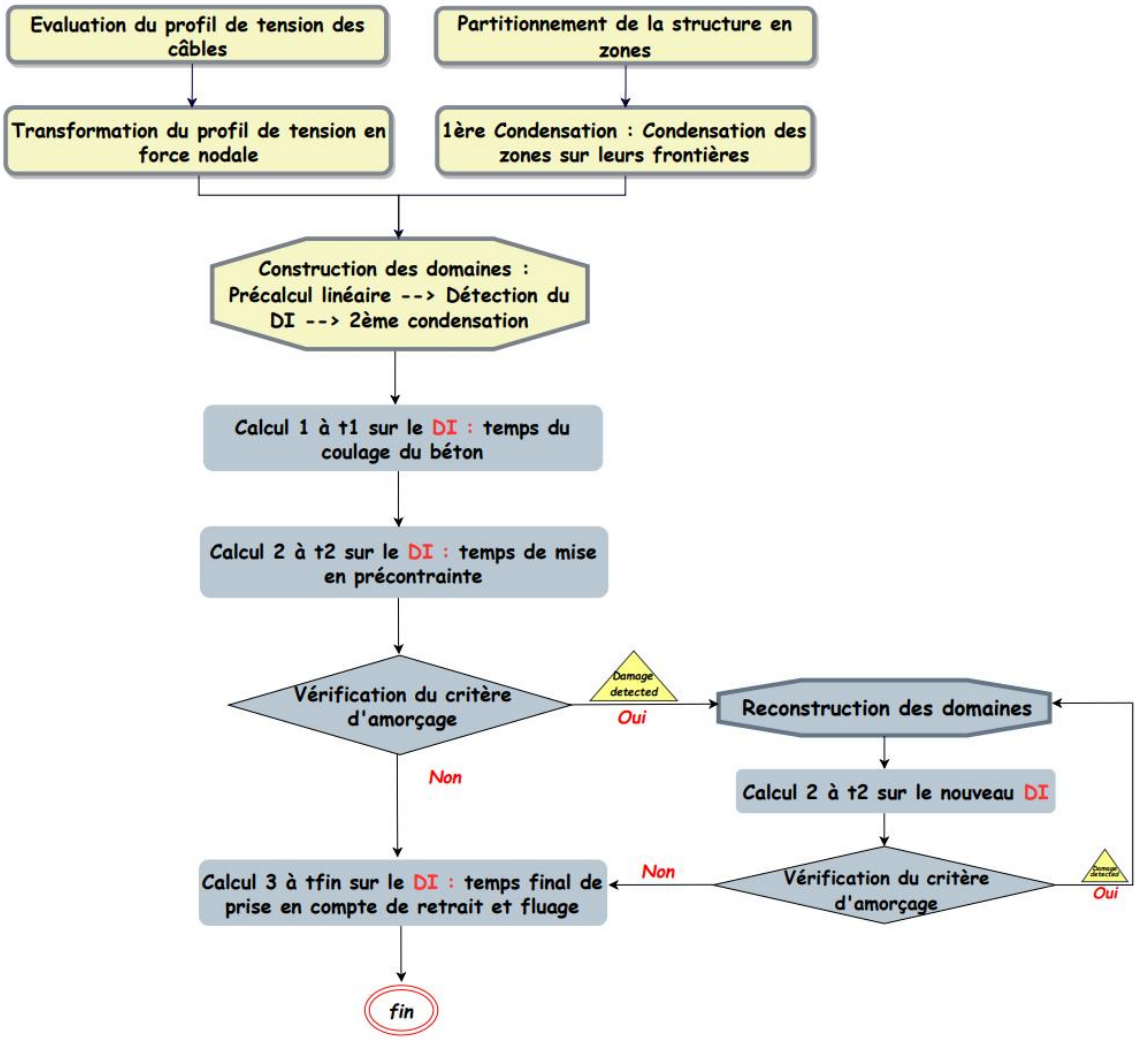

Figure 48 : algorithme de la méthode ASC pour le calcul de précontrainte (DI : domaine d'intérêt, en jaune : Phase de préparation, en gris : phase de calcul)

2.3.5.1 Annulation de la rigidité du câble dans le domaine condensé

La première particularité rencontrée pour effectuer le calcul à $t_1$est celle de l'annulation de la raideur du câble dans le domaine condensé. En effet, comme évoqué dans la partie 2.2, la première condensation, qui permet de remplacer la rigidité des zones n'est effectuée qu'une seule fois et ses résultats sont sauvegardés pour les utiliser tout au long du calcul. Dans cette condensation, la rigidité du câble est prise en compte. Afin d'éviter de réaliser cette étape une fois de plus sans prendre en compte la rigidité des câbles, puisque c'est l'une des étapes les plus coûteuses de la méthode ASC, une solution a été proposée. Elle consiste à annuler artificiellement la raideur du câble de la partie condensée. Pour cela, un câble équivalent à celui de la partie condensée, mais avec un module d'Young $E = -E_{ac}$, est modélisé puis condensé sur le bord du DI. L'ajout de cette matrice condensée au système global entraîne une rigidité nulle du câble dans le domaine condensé, sans nécessiter de recalculer complètement la première condensation.

2.3.5.2 Condensation des champs de déformation de fluage et de retrait

Pour l'application de la deuxième étape de calcul à t_2 (mise en précontrainte du câble), la force nodale $F_{préco}$ est traitée comme tous les autres chargements externes (déplacement imposé, pression interne,…) dans la méthode ASC, c'est-à-dire qu'elle est condensée sur le bord du domaine d'intérêt. Mais l'application des champs de déformation de fluage et de retrait pose une difficulté supplémentaire

En effet, ce type de chargement en déformation imposée doit être traité différemment des autres types de chargement, puisqu'il ne « crée » pas de contrainte mécanique, les déformations de fluage et de retrait étant soustraites de la déformation totale pour calculer la déformation mécanique. La condensation statique ne permet de condenser qu'une force nodale. Un chargement de type déformations imposées, avec ses particularités, ne peut pas être simplement remplacé par une force nodale dans le domaine condensé pour pouvoir le condenser. Pour cela, la méthode proposée pour condenser ce type de chargement, présentée sur la Figure 49, est la suivante :

1. Application du champ $\overline{\overline{\varepsilon_{imp}^{DI}}}$, qui est la partie de $\overline{\overline{\varepsilon_{imp}}}$ qui correspond au DI, tel quel. Le domaine d'intérêt est activé et donc son chargement ne nécessite pas d'être condensé.
2. Transformation de $\overline{\overline{\varepsilon_{imp}^{DE}}}$, qui est la partie de $\overline{\overline{\varepsilon_{imp}}}$ qui correspond au DE, en un champ de contrainte puis en force nodale F_{DE} qui sera ensuite condensée.
3. Lors de la décondensation, les déformations de fluage et de retrait sont soustraites de la déformation totale pour calculer la bonne déformation mécanique du domaine condensé.

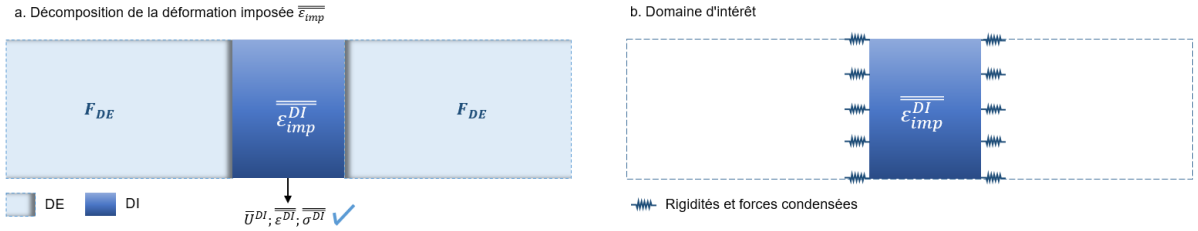

Figure 49 : Condensation de déformations différées

2.3.5.3 Vérification de l'amorçage

Après l'étape de calcul à t_2, le critère d'amorçage est vérifié afin de s'assurer que le domaine élastique n'a pas évolué. Si de l'endommagement est détecté dans une zone condensée, cette zone sera promue comme zone d'intérêt et le pas courant sera recalculé sur le nouveau domaine d'intérêt.

2.3.5.4 Condensation des champs de contrainte de précontrainte

Pour effectuer le calcul à t_3, la rigidité de l'acier doit être restituée à sa juste valeur et la contrainte dans l'acier doit être imposée à sa valeur calculée conformément à la réglementation ($\sigma_{tension}$). Cependant, imposer une contrainte dans le domaine élastique n'est pas possible car il n'est pas possible de la condenser. Pour cela, la partie de $\sigma_{tension}$ correspondant au domaine élastique est transformée en force nodale équivalente et condensée sur le bord de domaine d'intérêt.

2.3.6 Application : poutre précontrainte

Afin de valider la méthode développée, une application sur une poutre précontrainte est présentée. Une poutre de 1 m de long est considérée. Un calcul ASC est effectué et comparé à un calcul complet (procédure PHASAGE). Les deux calculs sont effectués en utilisant le code Cast3m ("Cast3m" 2022) sur le même nœud de calcul à 24 cœurs. Cette poutre, dont les dimensions sont données sur la Figure 50, est modélisée en trois dimensions (3D). Concernant le maillage, le béton est maillé avec 23400 éléments linéaires hexaédriques (1 cm

de côté) et le câble est maillé à l'aide de 100 éléments de barre (1 cm de longueur). Ces éléments de barre ont une section équivalente $S = 7{,}0\ cm^2$ (diamètre 3 cm). Le béton est modélisé à l'aide du modèle de l'endommagement de Mazars (Mazars, Hamon, and Grange 2015) avec les paramètres de la Table 1. Les paramètres utilisés donnent une résistance à la compression de 41,4 MPa à 28 jours et une résistance à la traction de 3,03 MPa. Une méthode de régularisation non locale en moyenne (Pijaudier-Cabot and Bazant 1987) est utilisée pour limiter la dépendance au maillage de l''endommagement dans le béton avec une longueur caractéristique $L_c = 3\ cm$. Un modèle élastique linéaire est considéré pour le câble, car un comportement plastique n'est pas attendu lors du chargement. Le câble est tendu par ses deux extrémités avec une force P = 20 kN. Les coefficients de perte de précontrainte quasi-instantanés utilisés pour le calcul sont donnés dans la Table 2. Pour l'application ASC, le maillage de la poutre est partitionné en 32 zones de taille sensiblement équivalente (Figure 52-a). Selon le pré-calcul linéaire, les zones d'extrémité construisent le domaine d'intérêt activé (en bleu sur la Figure 52-b). Dans un premier temps, le calcul est effectué sans prendre en compte l'effet des déformations différées afin de quantifier leurs effets sur les résultats de calculs dans un second temps.

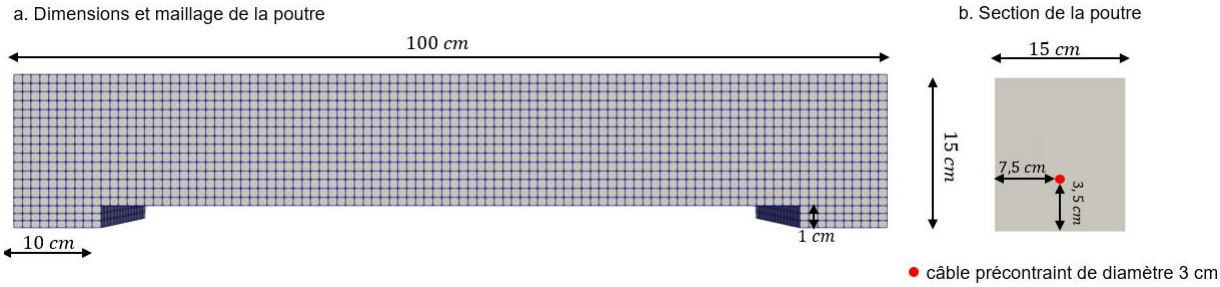

Figure 50: Poutre précontrainte

Table 2 : paramètres de perte de précontrainte (instantanées et relaxation)

Frottement angulaire $\boldsymbol{\phi}\ (\boldsymbol{rad^{-1}})$	**Frottement linéaire** $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{m^{-1}})$	**Recul d'ancrage** $\boldsymbol{\Delta}\ (\boldsymbol{m})$	**Relaxation à 1000 heures** $\boldsymbol{\rho_{1000}}(\%)$	**Contrainte de rupture garantie** $\boldsymbol{\sigma_y(GPa)}$	**Relaxation d'armature:** $\boldsymbol{\mu_0}$
$\mathbf{0,18}$	0,002	0	2,5	1,7	0,43

La Figure 53 montre les résultats des deux calculs. L'endommagement apparait dans les deux cas autour des extrémités du câble. Il était attendu que cet endommagement résulte de la singularité des contraintes dues à l'application de la tension sur un seul nœud du câble (1D sur 3D). Ces mêmes comportement aux niveau des ancrages ont été obtenus dans (ULM 1994), (Ouezdou 2004) et (Llau et al. 2016). Cet aspect numérique est une limite bien connue du procédé de précontrainte numérique proposé. Dans la réalité, ce problème est évité grâce à l'utilisation d'un dispositif d'ancrage comme celui représenté sur la Figure 51. C'est sur ce dispositif que reposent les vérins de tension des câbles. Il permet également, grâce à la plaque d'appui et à la plaque d'ancrage (appelée aussi le cône), la bonne répartition de l'effort de précontrainte sur le béton pour éviter son endommagement. Numériquement, ce problème peut être évité comme dans (Michel-ponnelle 2014), en répartissant l'effort de précontrainte sur un volume équivalent à celui de la plaque et non pas sur un seul nœud.

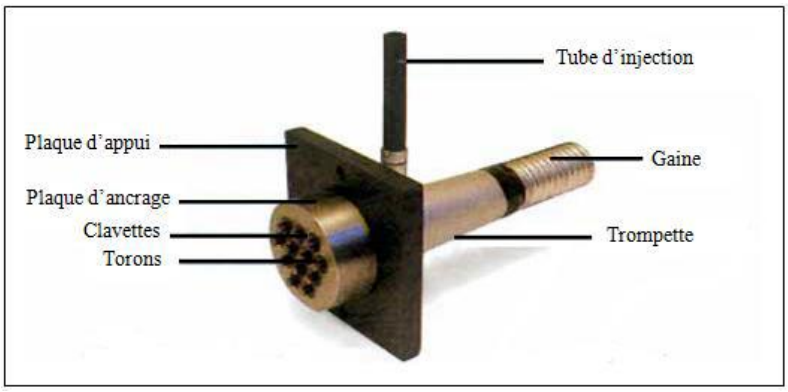

Figure 51 : Dispositif d'ancrage (issue de (Siline 2017)*)*

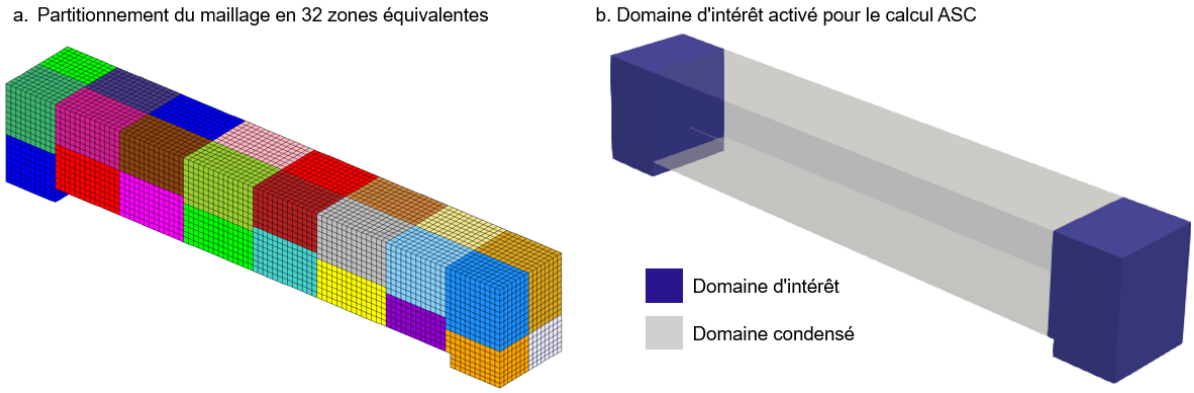

Figure 52: Partitionnement du maillage et domaine d'intérêt

Afin de comparer les résultats des deux calculs au niveau du domaine d'intérêt, l'erreur de la flèche et d'endommagement à la fin du calcul est calculé comme suit :

$$\epsilon_{U_z^{DI}} = \left| \frac{U^{DI}_{z_{complet}} - U^{DI}_{z_{ASC}}}{Max\,(U^{DI}_{z_{complet}})} \right| \times 100 \tag{48}$$

$$\epsilon_{D^{DI}} = \left| \frac{D^{DI}_{Complet} - D^{DI}_{ASC}}{Max\,(D^{DI}_{Complet})} \right| \times 100 \tag{49}$$

Avec $U^{DI}_{z_{complet}}$ et $U^{DI}_{z_{ASC}}$ les champs de déplacement vertical réduits sur le domaine d'intérêt et obtenus respectivement à partir du calcul complet et à partir du calcul ASC. $D^{DI}_{Complet}$ et D^{DI}_{ASC} sont les champs d'endommagement réduits sur le DI et obtenus respectivement à partir du calcul complet et à partir du calcul condensé. Les champs d'erreur $\epsilon_{U_z^{DI}}$ et $\epsilon_{D^{DI}}$ sont tracés sur la Figure 54. Les résultats montrent une correspondance quasiment parfaite entre les deux calculs car pour les deux champs testés, l'erreur ne dépasse pas 0,2%. Concernant la distribution des efforts sur le câble, la Figure 55 montre que sur le DI, les mêmes efforts ont été obtenus le long du câble dans le calcul condensé et dans le calcul de référence complet. Ceci valide l'application de la méthode ASC pour le calcul des effets de la précontrainte.

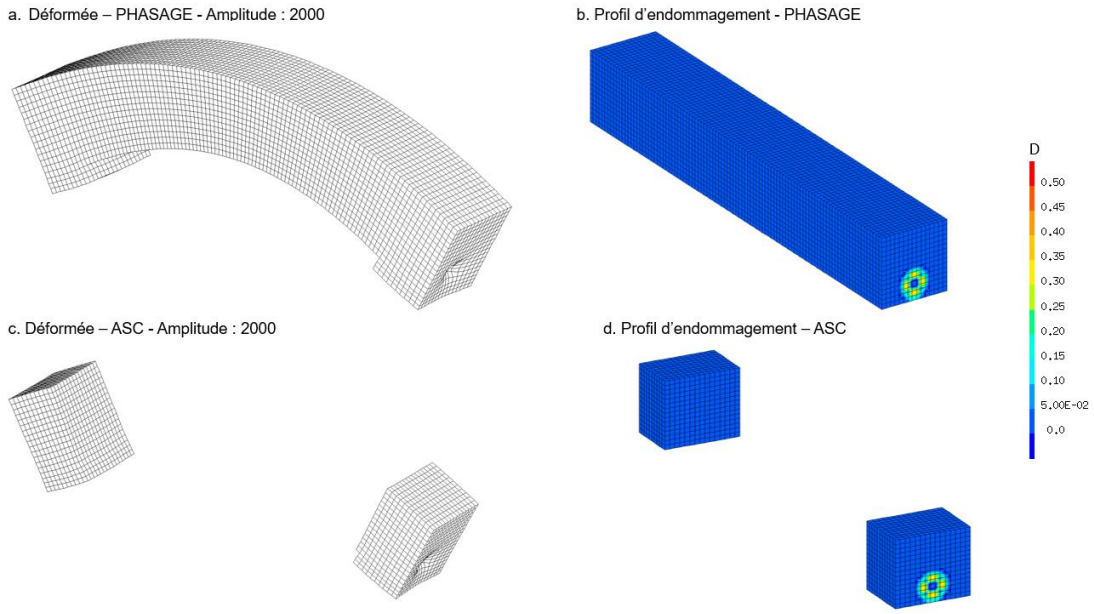

Figure 53 : résultats des calculs sur la poutre de précontrainte

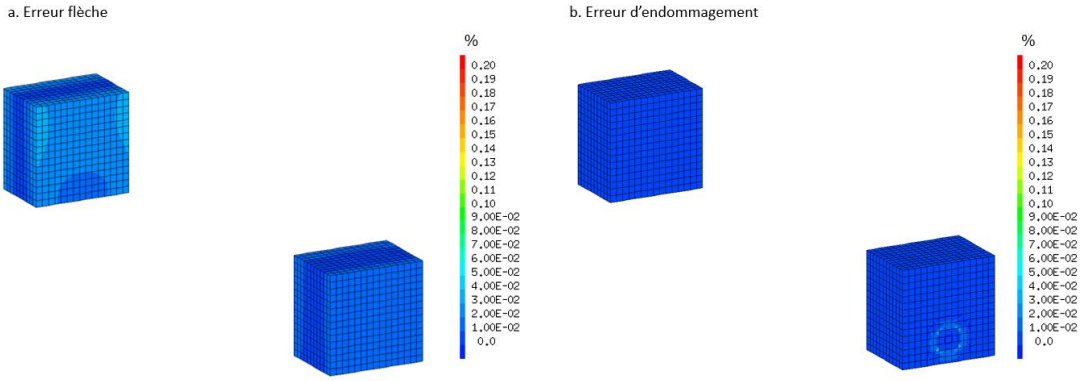

Figure 54 : Champs d'erreur $\epsilon_{U_z^{DI}}$ et $\epsilon_{D^{DI}}$

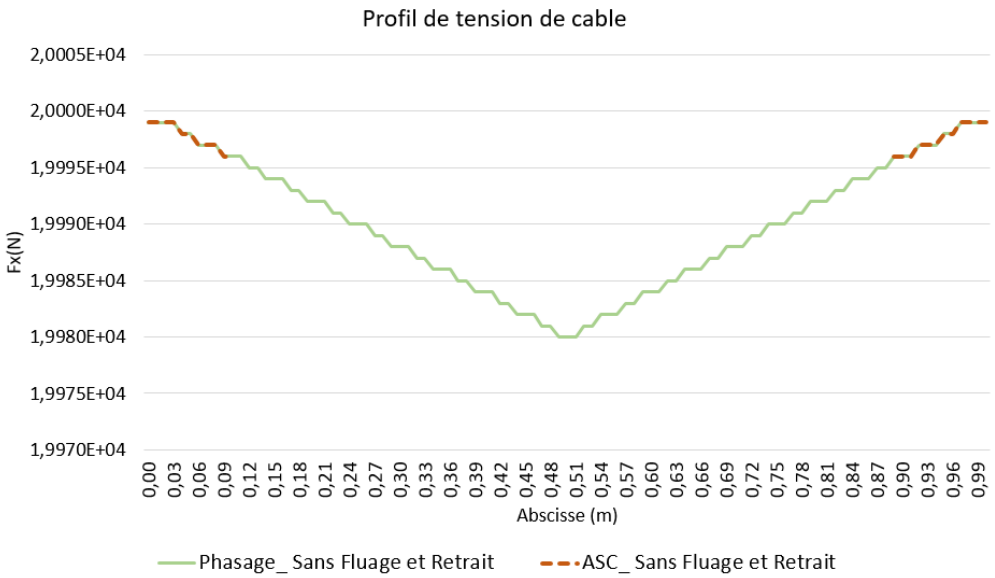

Figure 55 : force longitudinale le long du câble à la fin de la mise en précontrainte

Les résultats d'efficacité numérique de la méthode ASC sont donnés dans la Table 3. Un facteur de gain de temps égal à 8 est observé dans ce cas. Cette efficacité numérique est essentiellement liée au nombre de degrés de liberté (21034 degrés de liberté avec la méthode ASC contre 81407 dans le calcul complet). Il est également à noter qu'en regardant le profil d'endommagement, seule une petite partie du DI est endommagée (environ 5% du DI). Une optimisation du partitionnement de maillage est donc très certainement possible et sera discutée dans la suite du manuscrit.

Table 3: Résultats d'efficacité numérique sur la poutre de précontrainte

	Calcul complet : Phasage	Calcul condensé : ASC
Temps processeur	$1685\ s$	$210\ s$
Facteur de gain	-	8,02
Nombre de degrés de liberté	81 407	21034

Un deuxième test est ensuite effectué en tenant compte des déformations de fluage et de retrait à $t_3 = 2000$ jours en utilisant les paramètres de la Table 4. Le calcul condensé est comparé au calcul de référence complet. Les profils de tension le long du câble sont présentés dans la Figure 56. Au niveau du DI, les profils obtenus à partir des deux calculs sont similaires. Mais une forme d'efforts inhabituelle est obtenue aux extrémités du câble. Une très forte perte de précontrainte est observée dans les éléments d'extrémité. Ceci est dû à la concentration de contraintes obtenue lors de la mise en tension du câble (voir étape : calcul 2 à t_2 dans 2.3.4.4). Le champ de contrainte résultant de cette étape ($\overline{\overline{\sigma(t_2)}}$), présenté sur la Figure 57, est celui utilisé pour calculer le champ de déformation de fluage $\bar{\bar{\varepsilon}}_{bet}^{flu}\ (t_3; \overline{\overline{\sigma(t_2)}})$. Les valeurs de contraintes $\overline{\overline{\sigma(t_2)}}$ très élevées aux extrémités comme montré sur la Figure 57 conduisent à des valeurs de déformation de fluage très élevées et donc à une forte perte de précontrainte. En comparant les profils de tension dans le câble avec et sans prise en compte du fluage et du retrait, on constate l'importance de la prise en compte de ces déformations sur la perte de précontrainte. À 2000 jours (environ 5 ans et demi), avec les paramètres utilisés, on observe ainsi une perte d'environ 60% de précontrainte. Ce profil provient de la modélisation de la précontrainte mais la méthode ASC reproduit le même profil que le calcul complet ce qui permet de valider la prise en compte des déformations de fluage et de retrait lors de la précontrainte dans la méthode ASC.

Table 4 : paramètres pour le modèle de retrait et de fluage (BPEL 99)

Rayon de séchage *:* $\boldsymbol{r_m(cm)}$	Taux d'humidité : $\boldsymbol{\rho_h}$ (%)	Taux d'armature passive: $\boldsymbol{\rho_s}$ (%)	Temps final : $\boldsymbol{t_3}$(jours)
30	70	0	2000

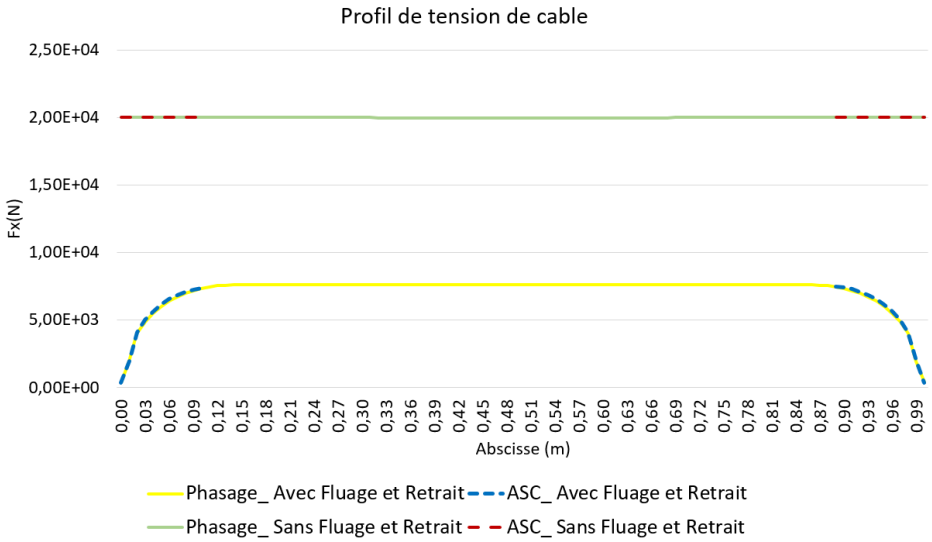

Figure 56 : Profil de tension de câble à la fin de la mise en précontrainte avec prise en compte de l'effet des déformations différées à 2000 jours

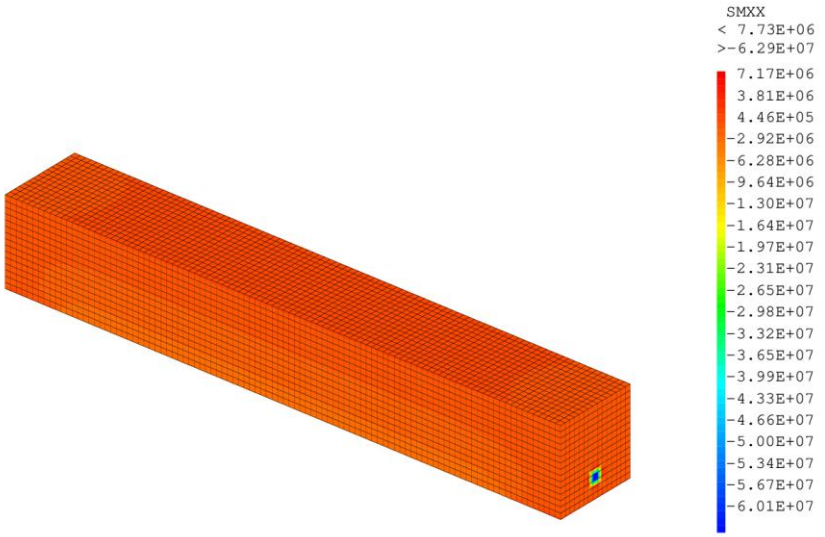

Figure 57 : Champ de contrainte horizontale dans le béton suite à la mise en précontrainte à t_2 de la poutre ($\overline{\overline{\sigma_{xx}(t_2)}}$).

2.3.7 Conclusion

Dans la méthode ASC classique ou le calcul complet, la prise en compte de précontrainte nécessite des calculs non linéaires en plusieurs pas de chargement sur la structure totale, ce qui peut être très coûteux voire inaccessible.

Dans cette partie, le domaine d'application de la méthode de condensation statique adaptative (ASC) a été étendu pour prendre en compte la précontrainte y compris avec l'effet des déformations différées (fluage et retrait).

Dans un premier temps, une présentation détaillée de la simulation de précontrainte classique dans Cast3m a été faite. Ensuite, Nous avons proposé des solutions pour pouvoir modéliser les chargements particuliers de la précontrainte dans la cadre de la méthode ASC. Enfin, la méthode ASC a été appliquée avec succès à la simulation d'une poutre précontrainte. Par rapport à une simulation classique, les mêmes résultats ont été obtenus avec un facteur de gain de temps de l'ordre de 8. L'efficacité de la méthode a ainsi été démontrée.

CHAPITRE 3. PARTITIONNEMENT AUTOMATIQUE DE MAILLAGE ADAPTE A LA METHODE ASC (MEZHER ET AL. 2022B)

3.1 INTRODUCTION

On rappelle ici que la méthode ASC suppose un découpage initial du maillage en zones. Dans la méthode initialement développée, les frontières de ces zones devaient coïncider avec les éléments du béton et avec les nœuds d'acier en cas du béton armé ou précontraint) (voir Figure 58). Cette condition imposait des contraintes fortes sur la définition des zones initiales mais également sur la construction du maillage initial notamment par rapport à la position des nœuds d'acier. Cela pouvait rendre la méthode inutilisable, notamment dans le cas où un maillage externe sur une géométrie complexe était utilisé. Afin de répondre à cette limite, un traitement particulier du maillage dans le cas d'une structure en béton avec acier (béton armé et/ou précontraint) est intégré à la méthode ASC dans la première partie de ce chapitre.

De plus, le choix des zones dans l'ASC peut avoir des conséquences importantes sur l'efficacité de la méthode. Ce choix était laissé à l'utilisateur. Pour optimiser ce choix, une méthode de partitionnement automatique du maillage adaptée à la méthode ASC est développée dans la deuxième partie de ce chapitre.

3.2 TRAITEMENT DU MAILLAGE DANS LE CAS DU BETON ARME ET/OU PRECONTRAINT

L'objectif de cette partie est de généraliser l'utilisation de la méthode ASC notamment en présence d'armatures et en s'affranchissant des contraintes de maillage imposées par la version initiale de la méthode. Pour cela, dans un premier temps, le partitionnement de maillage dans le cas du béton armé avec tous les cas particuliers pouvant être rencontrés est expliqué à partir des illustrations sur une poutre simple.

3.2.1 Partitionnement de maillage en zones dans le cas de structure en Béton Armé (BA) – première proposition

A titre d'illustration, une poutre traversée par une armature d'acier est considérée sur la Figure 58 pour montrer le partitionnement du maillage en cas de présence d'armatures. Le béton de cette poutre (en gris sur la figure) est maillé avec 4 quadrangles. L'acier (en rouge) est maillé avec 4 éléments « barre » (1D). Une adhérence parfaite est supposée entre l'acier et le béton. Elle est représentée par les liaisons d'accrochage en pointillés bleu. Chaque nœud d'acier est accroché aux nœuds de l'élément du béton dans lequel il se trouve, via les fonctions de forme (N_j) de l'élément du béton comme suit :

$$u_{noeud\ acier} = \sum_{n_j \in e_{béton}} N_j\ (noeud\ acier)\ u_j \tag{50}$$

avec $u_{noeud\ acier}$ le déplacement du nœud d'acier, $e_{béton}$ est l'élément du béton dans lequel se situe le nœud d'acier et les points n_j représentent les nœuds de l'élément $e_{béton}$.

Pour partitionner le maillage de la structure, le maillage du béton est tout d'abord découpé en zones. La Figure 58 illustre le partitionnement du maillage de la structure en 2 zones de tailles équivalentes, composées chacune de deux éléments. Le découpage du maillage de l'acier est ensuite réalisé. Dans le cas considéré ici, aucune difficulté n'est rencontrée car chaque élément d'acier peut être placé dans la zone où ses deux nœuds se trouvent géométriquement. Les liaisons d'accrochage béton-acier sont traitées de la même manière que les nœuds, c'est-à-dire qu'elles sont ajoutés à la zone qui contient tous les nœuds de la liaison. Si une liaison appartient à deux zones, comme celle du nœud 3, elle peut être ajoutée à l'une des deux zones arbitrairement.

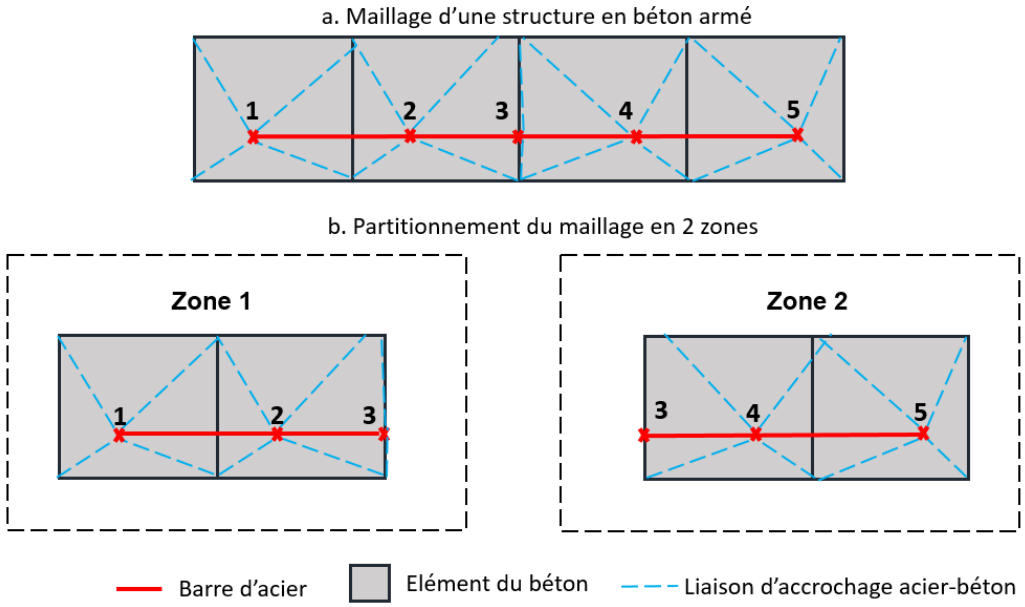

Figure 58 : Partitionnement en zones en cas du BA - Cas classique

Considérons à présent la configuration de la Figure 59. La géométrie reste identique, avec le même maillage pour le béton mais avec un maillage d'acier différent. Dans cet exemple, le maillage d'acier comporte 3 éléments. Le maillage du béton est toujours partitionné en deux zones. Pour l'acier, l'élément entre les nœuds 2 et 3 pose une difficulté puisqu'il n'y a pas de nœud qui appartient à la frontière des deux zones. Cet élément est à cheval sur deux zones de béton et il n'appartient pas strictement à une unique zone. Pour cela, on propose de rattacher l'élément à la zone dans laquelle se situe son centre de gravité. Ceci se traduit par le partitionnement présenté dans la Figure 59-b. Les liaisons d'accrochage sont partitionnées de la même manière que dans le cas précédent.

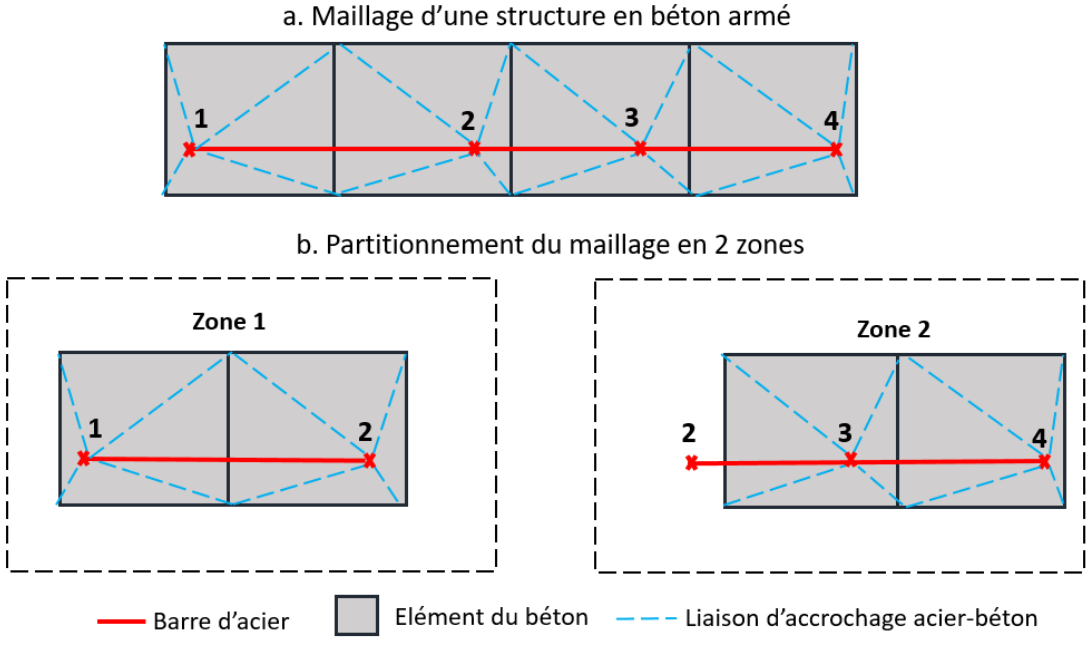

Figure 59 : Partitionnement en zones en cas du BA - Cas particulier 1

La généralisation de la méthode qui vient d'être décrite précédemment peut néanmoins conduire à des cas très particuliers. Prenons l'exemple de la Figure 60. Le maillage du béton est ici composé de 3 quadrangles et celui de l'acier de 3 éléments barre. La structure est divisée en deux zones, la première incluant deux éléments de béton, la seconde un seul. L'application de la méthode de partitionnement aboutit à la répartition de la Figure 60-b. Les

liaisons d'accrochage du nœud 3 d'acier n'appartiennent pas à une unique zone, car le nœud 3 n'appartient pas à la zone 2. Pour cela, il est proposé de les rattacher à la zone incluant l'élément de béton contenant géométriquement le nœud d'acer.

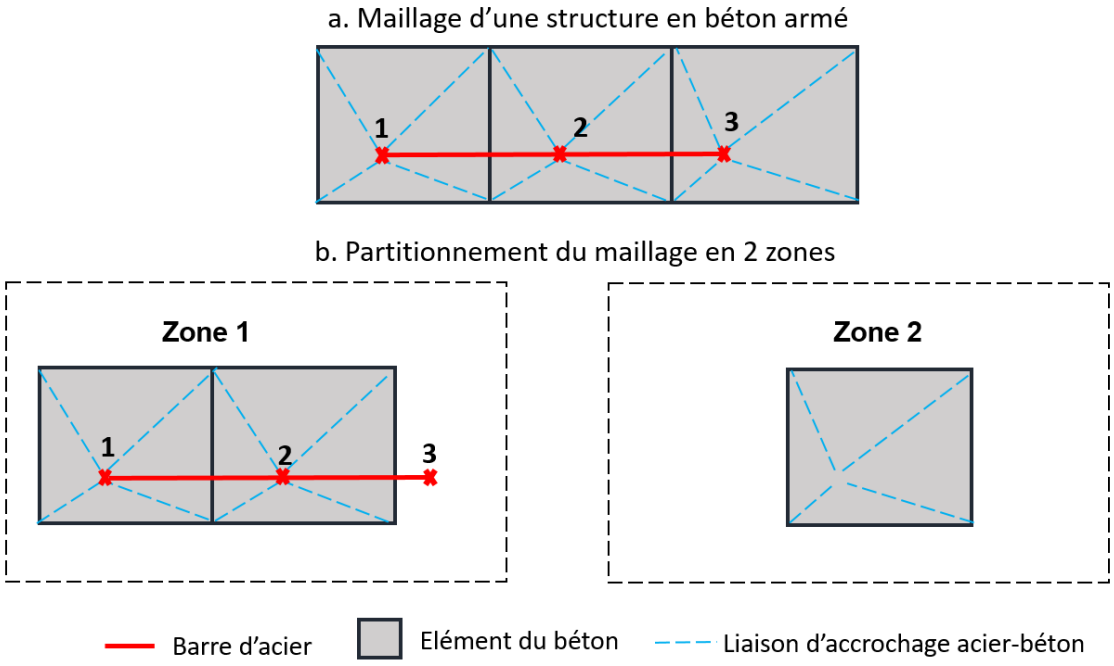

Figure 60 : Partitionnement en zones en cas du BA - Cas particulier 2

3.2.2 Évaluation de la première proposition sur une enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne

La méthode de traitement du béton armé proposé dans le paragraphe précèdent a été testée sur des cas tests élémentaires en 2D et 3D avec succès. La phase de validation finale est réalisée sur une maquette simplifiée d'enceinte de confinement. La structure considérée est une enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne qui ressemble par sa géométrie et ses dimensions à une maquette d'enceinte de confinement. La structure mesure 13,3 m de haut. Elle a un rayon extérieur de 7,3 m et 20 cm d'épaisseur. Ces dimensions sont proches de celles d'une enceinte de confinement à l'échelle 1/3. Le béton est maillé avec des éléments finis hexaédriques linéaires (taille caractéristique de 20 cm). La structure comprend deux ouvertures rectangulaires dont les dimensions sont respectivement $80 \times 60\ cm$ et $100 \times 60\ cm$ (voir Figure 61-a). L'acier est modélisé avec des barres 1D (longueur 20 cm) de section $S = 8{,}04\ cm^2$ ($3{,}2\ cm$ de diamètre). La structure comprend 60 cerces horizontales et 40 barres verticales dans le fût dont 10 barres en U traversant le mur et le dôme (Figure 61- b). Des relations cinématiques d'adhérence « parfaite » sont appliquées entre l'acier et le béton. La loi d'endommagement de Mazars est utilisée pour le béton avec les paramètres de la Table 5. Ces paramètres correspondent à une résistance en traction pour le béton $f_t = 3\ MPa$ et une resistance en compression $f_c = 26{,}9\ MPa$. Une loi élastique linéaire est choisie pour l'acier ($E = 200\ GPa\ ; \nu = 0{,}2$). Le chargement est une pression appliquée sur la surface interne croissante jusqu'à $1 \times 10^5\ Pa$ et les déplacements sur la face inférieure du cylindre sont bloqués dans les trois directions. Pour l'application de la méthode ASC, le maillage de la structure est partitionné en 32 zones de taille équivalentes (voir Figure 61-c). Finalement, le paramètre p de la méthode ASC est choisi arbitraitement égal à 8.

Cette simulation a été choisie car elle est représentative de la complexité du maillage qui peut être rencontré sur une structure réelle. Il est à noter qu'aucune contrainte de maillage n'a été

appliquée sur l'acier (croisement de nœuds acier/béton par exemple), hors la dimension caractéristique des éléments (de l'ordre de celle des éléments de béton).

Table 5 : Paramètre de Mazars - Enceinte simplifiée en béton armé

Module d'Young (E)	Coef. de Poisson (ν)	Limite élastique (ε_0)	Paramètre 1 Compression (A_C)	Paramètre 2 Compression (B_C)	Paramètre 1 Traction (A_T)	Paramètre 2 Traction (B_T)
$30\ GPa$	0,2	1×10^{-4}	1,15	$1{,}9 \times 10^{3}$	0,95	12×10^{3}

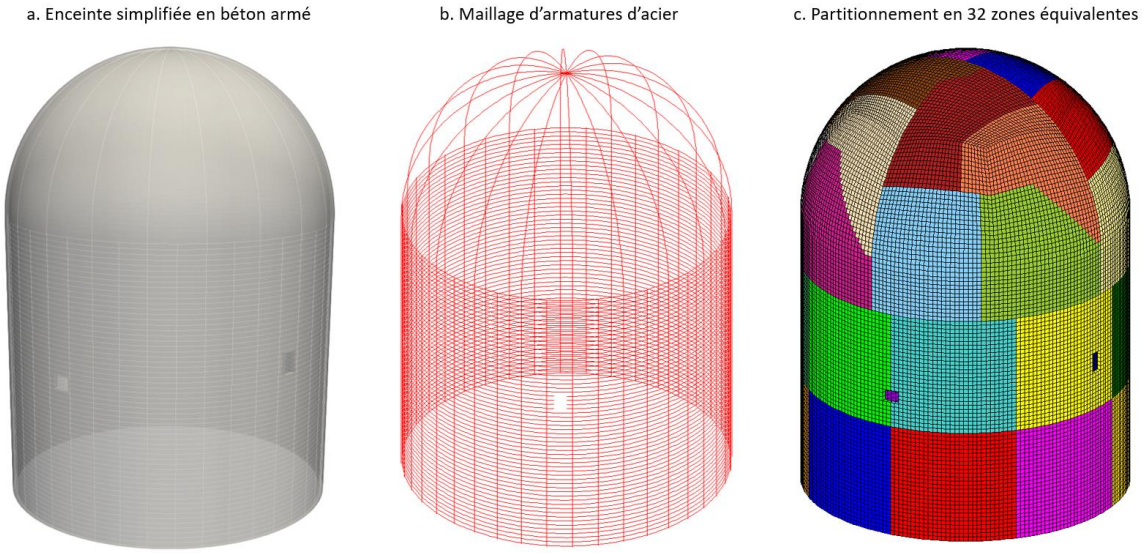

Figure 61 : Enceinte simplifiée en béton armé

Pour en témoigner, deux zones (une zone du fût et une du dôme) sont présentées sur la Figure 62 et la Figure 63 avec un zoom sur les éléments frontières des zones. Ces figures montrent des éléments d'acier qui dépassent les éléments de béton sur les frontières des deux zones.

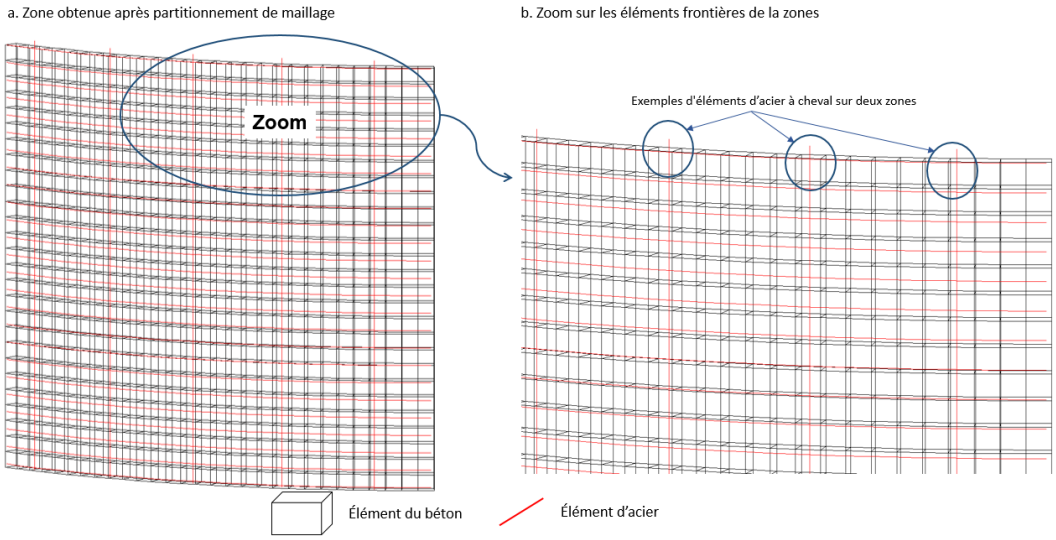

Figure 62 : Maillage d'une zone du fût

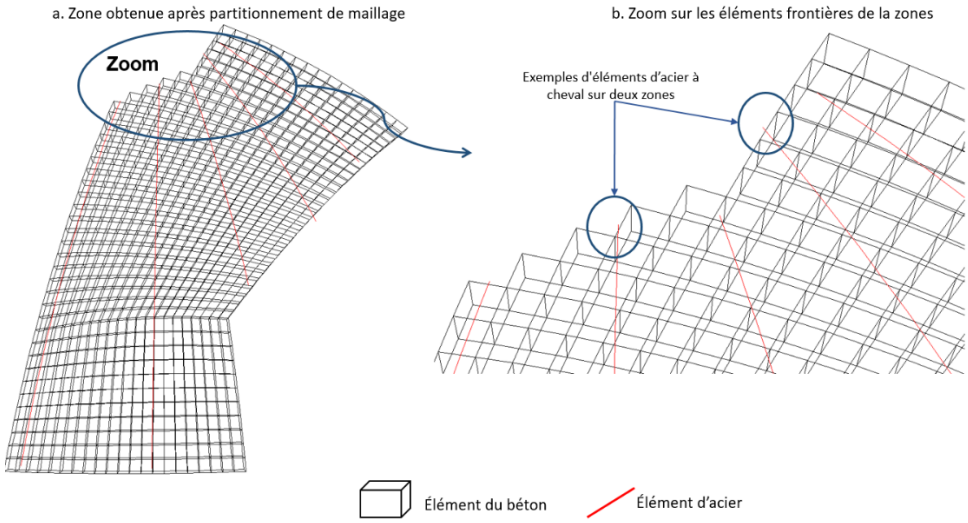

Figure 63 : Maillage d'une zone du dôme

En utilisant la méthode de traitement des nœuds d'acier présentée précédemment, un problème d'indétermination apparait lors de la résolution du système linéaire. Celui-ci est lié à un mauvais conditionnement du système à résoudre à la fois lors de la résolution du problème mécanique mais également lors de la décondensation pour calculer le critère d'amorçage. En l'absence d'aciers (structure en béton), le calcul a été mené avec succès, montrant que la présence des armatures est bien la source des difficultés.

3.2.3 Seconde proposition pour le traitement du béton armé

Lorsque le maillage de l'acier est construit en imposant une coïncidence des nœuds de l'acier avec ceux du béton, le calcul sur l'enceinte simplifiée est mené à son terme. La difficulté est donc liée aux éléments d'aciers, situés de part et d'autre de la frontière des zones. Pour pallier à ce problème, une solution a été proposée, consistant à modifier le maillage d'acier, après partitionnement des zones du béton, en ajoutant automatiquement des nœuds d'acier aux éléments frontières.

Une procédure de modification du maillage des éléments de l'acier aux frontières des zones du béton a été développée. Le but de cette procédure est d'ajouter des nœuds d'acier sur les éléments qui se situent à cheval sur deux zones du béton. La première étape de cette procédure consiste donc à rechercher les éléments d'acier à cheval sur deux zones. Pour chacun de ces éléments, les deux éléments du maillage du béton dans lesquels chaque élément d'acier est inclus sont identifiés géométriquement. Le problème se ramène dans la majorité des cas alors à celui présenté sur la Figure 64. Sur cette figure, le nœud à rajouter « N_3 », est la projection de la droite (N_1N_2) sur le plan $\wp = ABCD$:

$$N_3 = \wp \cap N_1N_2 \tag{51}$$

Certains cas, plus rares (Figure 65) nécessitent de traiter des éléments de béton « disjoints ». Dans ce cas, plusieurs nœuds d'acier sont ajoutés (N_3 et N_4 dans le cas illustré) :

$$\begin{cases} N_3 = \wp_1 \cap N_1N_2 \\ N_4 = \wp_2 \cap N_1N_2 \end{cases} \tag{52}$$

Avec $\wp_1 = (A_1B_1C_1D_1) = E_{B1} \cap E_{B3}$ et $\wp_2 = (A_2B_2C_2D_2) = E_{B2} \cap E_{B3}$.

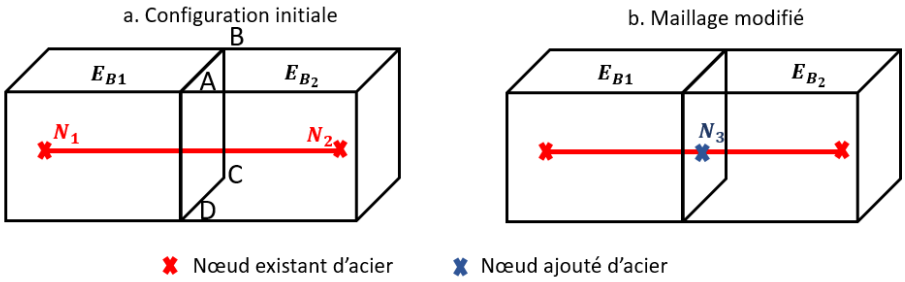

Figure 64 : Ajout de nœud d'acier sur la frontière des deux zones – Cas classique

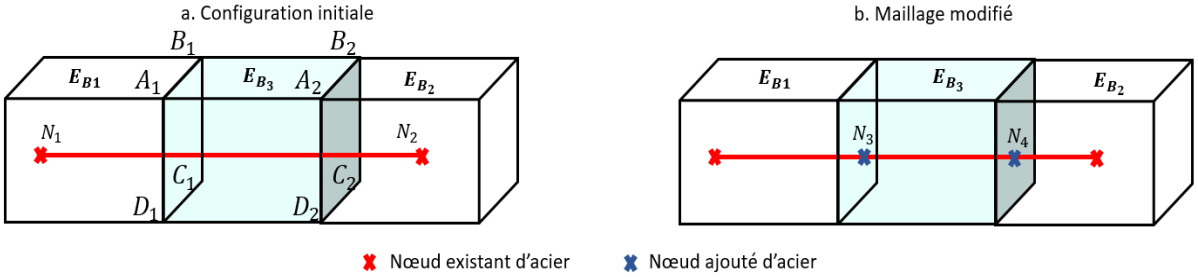

Figure 65 : Ajout de nœud d'acier sur la frontière des deux zones - Cas particulier

Un soin particulier est apporté pour limiter ces ajouts aux seules positions nécessaires, afin de ne pas pénaliser les performances de la méthode. A titre d'illustration, les éléments concernés sur l'enceinte simplifiée sont indiqués sur la Figure 66.

En conclusion, un ensemble d'opérations géométriques ont été mises en œuvre au sein d'une procédure de traitement des éléments d'acier aux frontières des zones du maillage. Une démonstration de son efficacité sur la simulation de l'enceinte simplifiée est proposée dans la partie suivante.



Figure 66 : Eléments d'acier à traiter - Enceinte simplifiée

3.2.4 Application de la seconde proposition du traitement du béton armé à l'enceinte simplifiée

En appliquant la méthode consolidée à l'enceinte de confinement simplifiée, l'évolution de l'endommagement au cours du calcul ainsi que celle du domaine d'intérêt sont données sur la Figure 67. Sur cette figure, la partie en bleu représente le domaine d'intérêt activé à chaque instant et la partie en blanc représente le domaine condensé. Au début du calcul, la zone qui contient l'ouverture (à droite) est activée. L'endommagement apparaît autour de cette ouverture, se propage puis s'amorce autour de la seconde ouverture. Cela active la zone qui contient la deuxième ouverture. L'endommagement continue de se propager en haut et en bas des ouvertures. Cela entraîne, avec le partitionnement de maillage utilisé, l'activation d'une partie significative (25%) des zones en fin de calcul. Pour poursuivre l'analyse, le point noté en rouge sur la Figure 67 est choisi pour post-traiter les résultats.

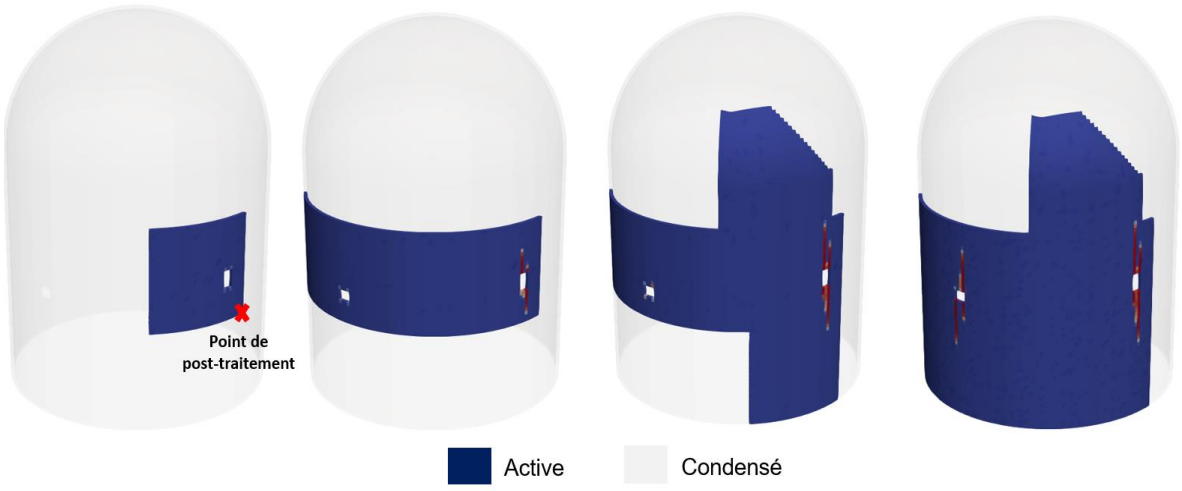

Figure 67 : Calcul ASC - évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt

Afin de comparer les résultats obtenus avec la méthode ASC à un calcul de référence, un calcul complet, avec le même jeu de données et sur la même machine, a été réalisé. La Figure 68 donne l'évolution de la pression en fonction du déplacement radial résultant des deux calculs. La Figure 69 donne le champ d'endommagement en fin de calcul (à 1 bar) issu du calcul complet ainsi que celui issu du calcul ASC. Ces résultats montrent une correspondance parfaite entre les résultats obtenus à partir des deux calculs. Cela permet de valider l'application de la méthode sur une structure cylindrique de grande dimensions, en béton armé et avec un chargement réparti.

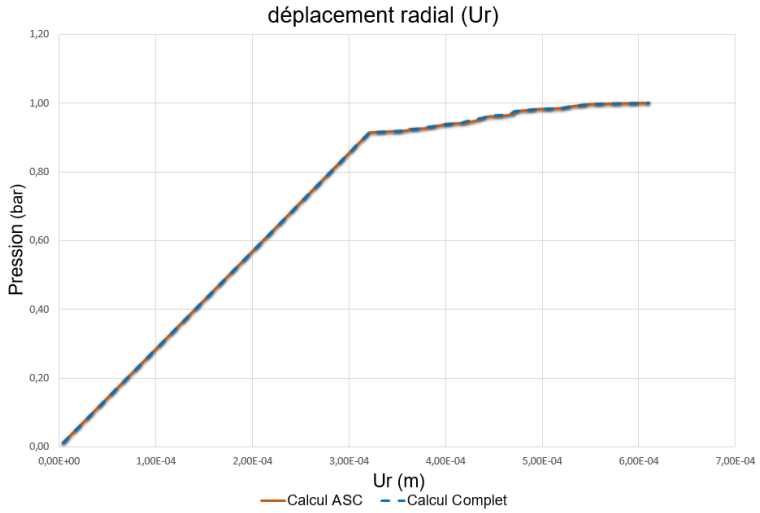

Figure 68 : Courbe déplacement radial - Calcul complet vs Calcul ASC

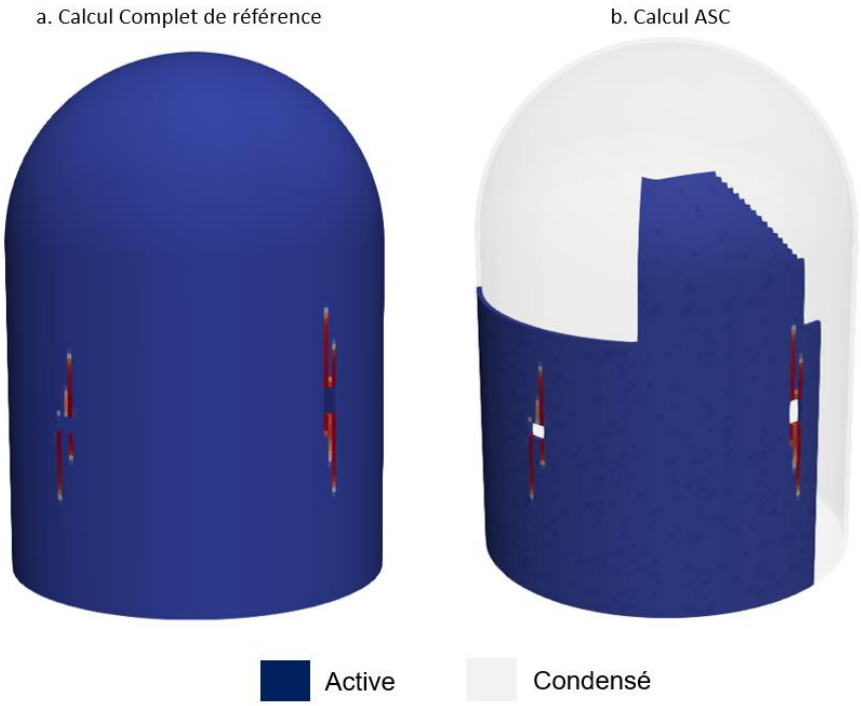

Figure 69 : Profils d'endommagement à la fin du calcul - Complet vs ASC

Table 6 : Résultats d'efficacité numérique - Enceinte simplifiée

	Calcul complet : Phasage	Calcul condensé : ASC
Temps processeur	1 411 s	468 s
Facteur de gain	-	3
Nb. de ddl à la fin du calcul	260 778	68 676
Nb. des pas de calcul	176	188

La Table 6 donne les résultats en termes de performance de calcul. Ce tableau montre que le calcul ASC est 3 fois plus rapide que le calcul complet. Environ 25% de la structure est activée à la fin du calcul avec la méthode ASC. Néanmoins, une marge de progression est identifiée dans la mesure où seulement 3% du domaine d'intérêt activé est endommagé. La majeure partie du domaine d'intérêt reste donc élastique et pourrait donc théoriquement rester condensé. Le partitionnement ici est arbitraire et nous voyons qu'il n'est pas optimal. La partie suivante s'attachera à rendre plus efficace et à automatiser le partitionnement initial de maillage.

3.3 PARTITIONNEMENT AUTOMATIQUE DE MAILLAGE ADAPTE A LA METHODE ASC (Mezher et al. 2022b)

3.3.1 Effet du partitionnement du maillage sur le temps de calcul de la méthode ASC

La méthode ASC nécessite une décomposition initiale du maillage en zones. Dans sa forme originale, cette décomposition est fournie par l'utilisateur. Cependant, cette étape peut profondément affecter les performances de calcul de la méthode. Pour illustrer cet impact, la poutre en flexion entaillée du Chapitre 2 (paragraphe 2.2.3) est considérée (voir Figure 70). Plusieurs calculs ont été effectués avec la méthode ASC, en utilisant différentes partitions initiales en 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ou 512 zones de tailles équivalentes (voir Figure 71). Les calculs sont effectués sur le même nœud de calcul à 24 cœurs pour comparer les temps de calcul.

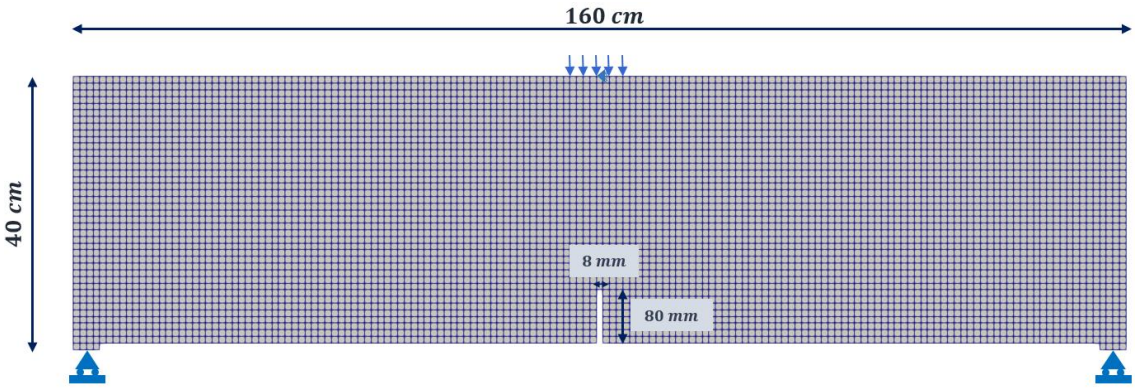

Figure 70 : Poutre entaillée en flexion : maillage, dimensions et chargements

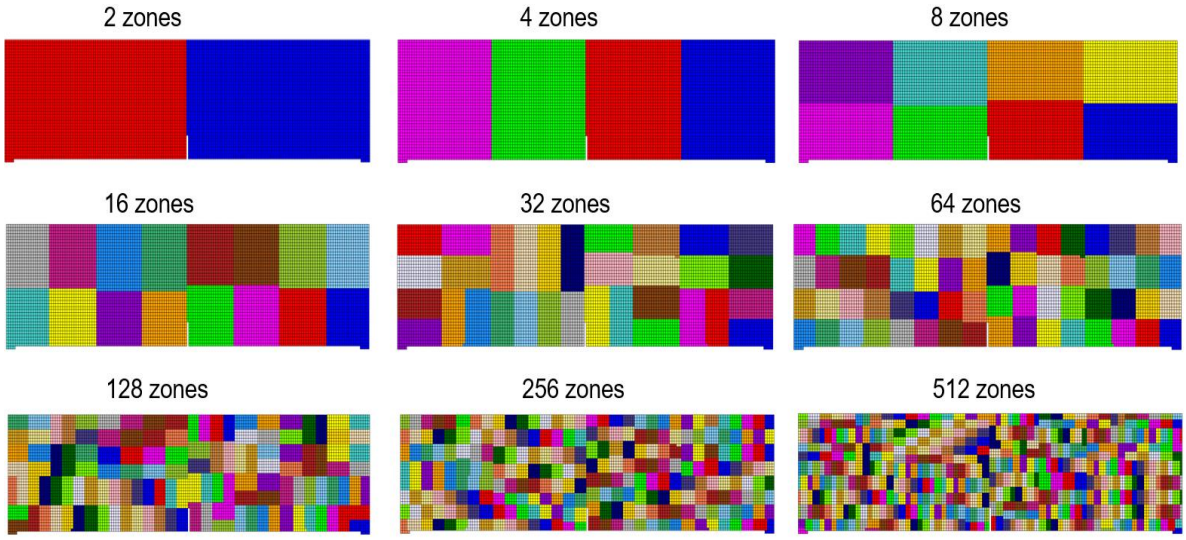

Figure 71 : décomposition initiale du maillage en 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ou 512 zones de tailles équivalentes

Les résultats des 10 calculs sont d'abord comparés en termes de répartition de l'endommagement. Des résultats identiques sont obtenus. La Figure 72 illustre le profil d'endommagement en fin de calcul pour une zone (calcul complet), 8, 64 et 512 zones. Ces 4 valeurs ont été choisies afin de voir l'effet sur l'efficacité de la méthode ASC de découpage en

très petites zones (512), en très grandes zones (8) ou en zones de tailles moyennes entre les deux (64 zones) par rapport au calcul complet (1 zone). La Table 7 détaille les performances des calculs pour ces quatre partitions. Chaque calcul est associé à un nombre différent de pas de chargement effectivement calculé témoignant d'un nombre de propagation et d'apparition de nouvelles zones différent. Un partitionnement en très petites zones (cas de 512 zones) optimise la taille du domaine d'intérêt mais nécessite des pas de calcul et des opérations supplémentaires comme la propagation de l'endommagement, la reconstruction des domaines et les recalculs de certaines étapes. Une partition en grandes zones (cas de 8 zones) réduit le nombre de pas de calcul mais augmente la taille du domaine d'intérêt. Il existe donc un « optimum » correspondant ici au partitionnement en 64 zones qui fait un compromis entre la taille du domaine activé (44%) et le nombre de pas de calcul (342).

Table 7 : détails de calcul pour différents partitionnements de maillages (1, 8, 64 et 512 zones)

Nombre de zones	**1**	**8**	**64**	**512**
Taille du DI % taille totale	100%	74%	44%	32%
Nombre de pas de calcul	321	327	342	412
Temps de calcul (ms)	$8{,}39 \times 10^5$	$4{,}07 \times 10^5$	$1{,}73 \times 10^5$	$18{,}4 \times 10^5$

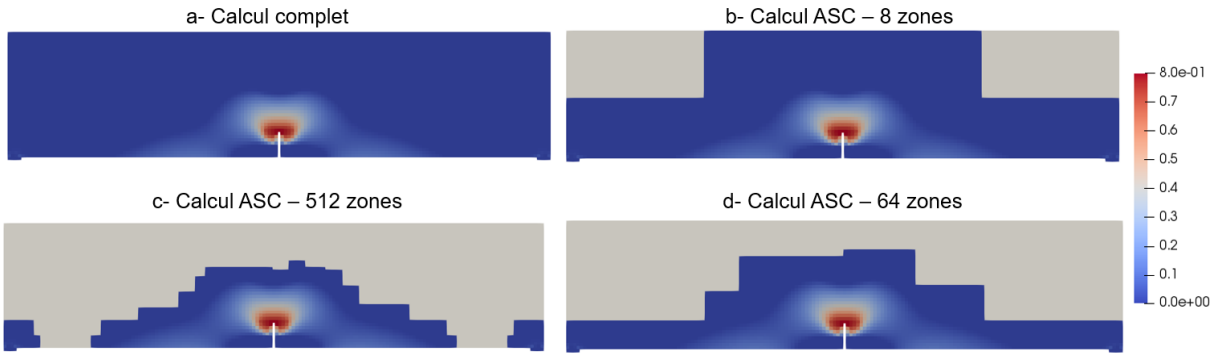

Figure 72 : profils d'endommagement en fin de calcul pour différentes décompositions initiales du maillage (les zones grises représentent les zones qui restent condensées)

La Figure 73 donne l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de zones du partitionnement de maillage. Ce graphique montre que le partitionnement du maillage affecte significativement le temps de calcul. Par exemple, pour le cas de 512 zones, le calcul est environ 2 fois plus lent que le calcul complet alors que pour le cas optimal (64 zones), le calcul est environ 5 fois plus rapide, confirmant les tendances observées précédemment.

Cette étude indique donc clairement que le partitionnement initial a une influence significative sur l'efficacité de calcul. De plus, il semble difficile pour l'utilisateur de connaître a priori la décomposition optimale. C'est pourquoi une nouvelle méthode de partitionnement de maillage a été développée.

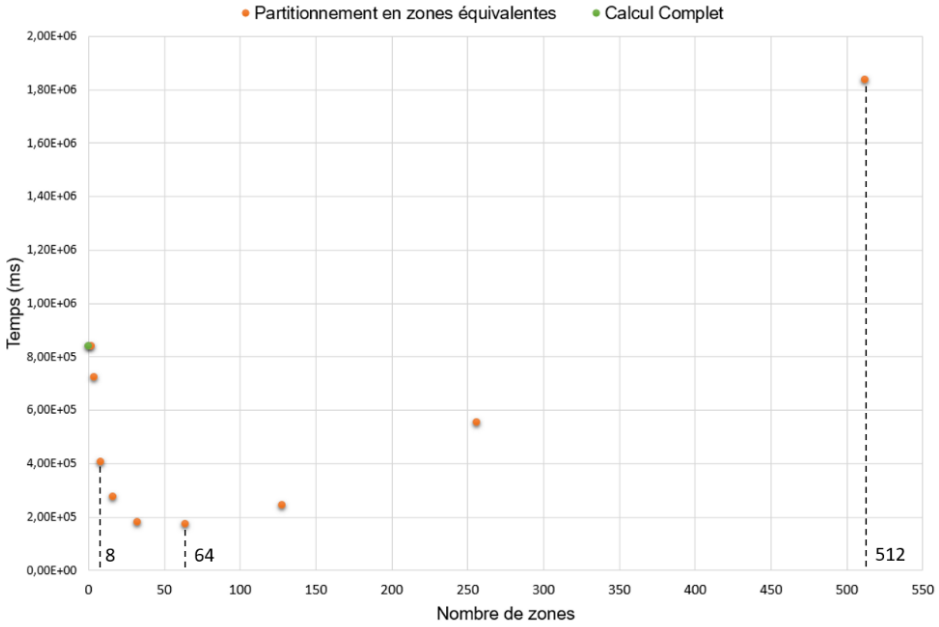

Figure 73 : temps de calcul en fonction du nombre de zones de partitionnement (sont reportés ici les cas présentés dans la Table 7)

3.3.2 Méthode de partitionnement automatique du maillage

Les méthodes existantes de partitionnement de maillage ne sont pas totalement adaptées au problème rencontré ici. Elles sont plutôt adaptées à des méthodes comme le calcul parallèle et visent à répartir la difficulté numérique (donc la non-linéarité) entre les zones pour aboutir à un temps d'exécution équilibré sur les processeurs (Chen and Taylor 1999) (Chen and Taylor 2002) (Korošec, Šilc, and Robič 2004). Pour la méthode ASC, le but est plutôt de concentrer l'effort de calcul dans les seules zones d'intérêt. On propose donc de développer une nouvelle méthode de partitionnement automatique adaptée.

La méthode de partitionnement automatique est basée sur des considérations physiques liées à l'apparition et à la propagation de l'endommagement. Elle est développée pour être totalement automatique et applicable à différents types de structures et de chargements. Elle est illustrée sur la poutre de flexion entaillée utilisée dans la section précédente. La méthode se décompose en cinq étapes :

1. La première étape consiste à effectuer un précalcul linéaire sur l'ensemble de la structure pour obtenir une distribution de la déformation élastique. Une quantité d'intérêt est ensuite calculée. Dans cet exemple lié à la mécanique de l'endommagement, cette quantité est la déformation équivalente de Mazars, ε_{eq} :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle_+^2 + \langle\varepsilon_2\rangle_+^2 + \langle\varepsilon_3\rangle_+^2} \tag{53}$$

   où $\langle\varepsilon_i\rangle_+$ représente la valeur positive de la déformation principale. La Figure 74 montre la déformation équivalente élastique ε_{eq} obtenue sur la poutre pour un déplacement imposé vers le bas égal à 250 μm. D'autres grandeurs d'intérêt pourraient également être considérées, comme les contraintes de Von Mises ou de Tresca, selon la loi de comportement utilisée.

   Il est à noter que le chargement appliqué pour ce précalcul est choisi comme étant le maximum du chargement de référence. Dans le cas où un seul type de chargement est appliqué à la structure, ce choix n'affecte pas les résultats car les étapes de la méthode sont réalisées en grandeurs relatives (% de la déformation équivalente maximale obtenue). Dans le cas de plusieurs chargements distincts (précontrainte suivie d'une pression interne par exemple), la force utilisée pour le précalcul est la combinaison des valeurs maximales de chaque chargement. Ce choix peut ne pas être

optimal, la somme des deux chargements maximaux ne correspondant pas forcément au cas le plus préjudiciable. Cependant, il est à noter que cela impacte uniquement le partitionnement initial de maillage et ne remet pas en cause le résultat de la simulation mécanique.

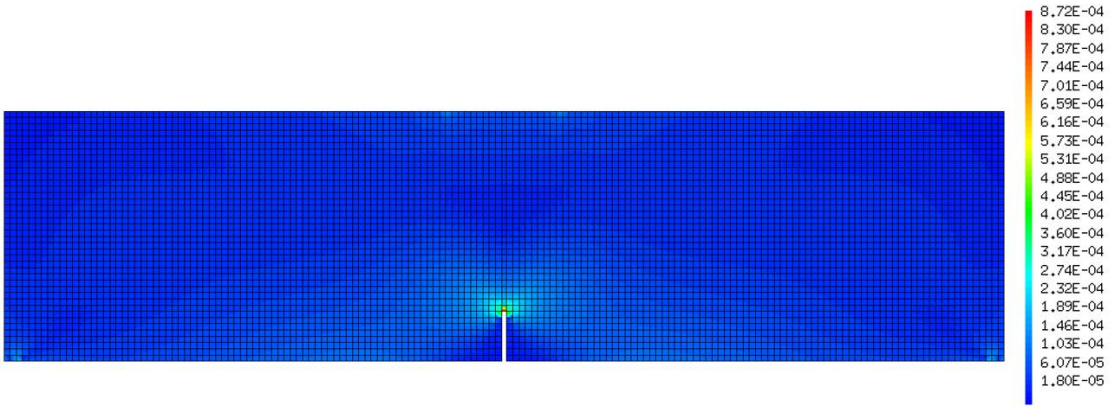

Figure 74 : répartition de la déformation équivalente de Mazars sur la poutre entaillée en flexion pour un déplacement imposé de 250 μm

2. La deuxième étape vise à identifier les zones les plus susceptibles d'être endommagées (« zones à risque ») à partir du pré-calcul linéaire. Ces zones sont obtenues selon une approche itérative, qui est illustrée sur la Figure 75. Sur cette figure, S_{total} est la surface (ou volume en 3D) totale de la structure et S_{ZR_i} est la surface de la zone ZR_i, l'une des zones à risque. T_{maxZR} est le premier paramètre de la méthode. C'est un pourcentage qui quantifie la taille cible maximale d'une zone à risque par rapport à la taille totale de la structure. Le processus d'itération démarre en créant les zones à risque à partir de tous les éléments connexes dans lesquels au moins un point de Gauss a une déformation équivalente (ε_{eq}) supérieure à 1% de la déformation équivalente maximale ($\max(\varepsilon_{eq})$). Ce pourcentage est ensuite progressivement augmenté, jusqu'à ce que le critère sur la taille des zones à risque soit respecté. La zone à risque initiale obtenue dans le cas de la poutre entaillée est illustrée sur la Figure 76.

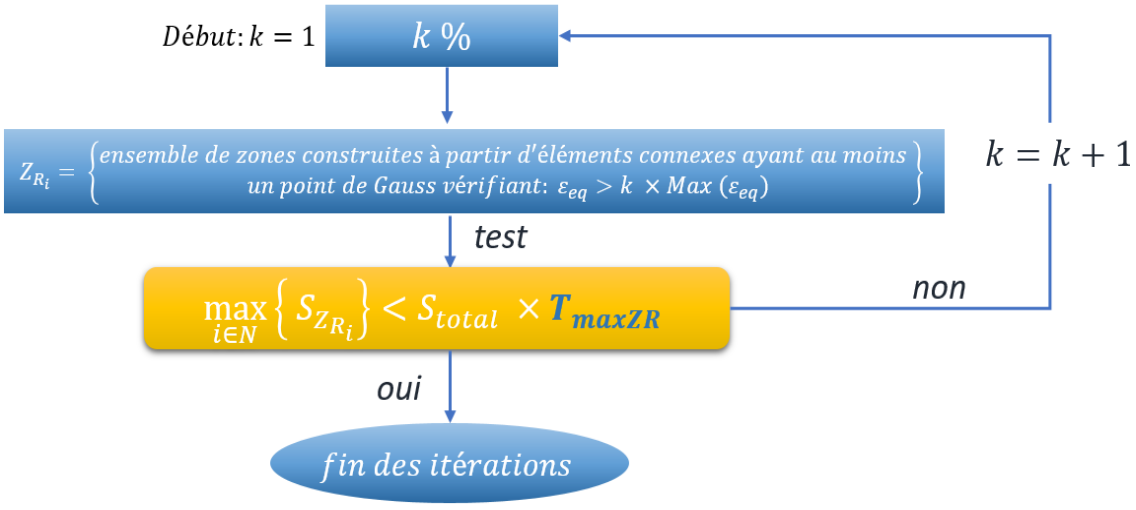

Figure 75 : approche itérative pour l'identification des zones à risque

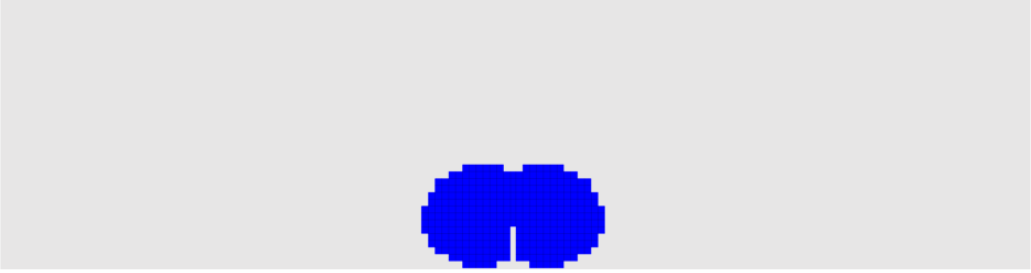

Figure 76 : Application de la méthode itérative pour la détermination de la zone à risque sur la poutre en flexion entaillée (pour une valeur de $T_{maxZR} = 3\%$)

3. Les zones entourant chaque « zone à risque » sont ensuite considérées comme des potentielles zones de propagation. Cela introduit le second paramètre de la méthode, T_{Zpr}. Ce paramètre détermine la taille S_{Zpr_i} de la potentielle zone à risque « Zpr_i » en fonction de la taille de la zone à risque correspondante « ZR_i » :

$$S_{Zpr_i} = \frac{S_{ZR_i}}{T_{Zpr}} \tag{54}$$

Une fois le paramètre S_{Zpr_i} déterminé, la zone de propagation Zpr_i est définie comme étant le premier ensemble de rangées d'éléments entourant la zone à risque ZR_i ayant une taille $S \geq S_{Zpr_i}$. La zone de propagation correspondant à la zone à risque bleue est donnée en rouge dans la Figure 77.

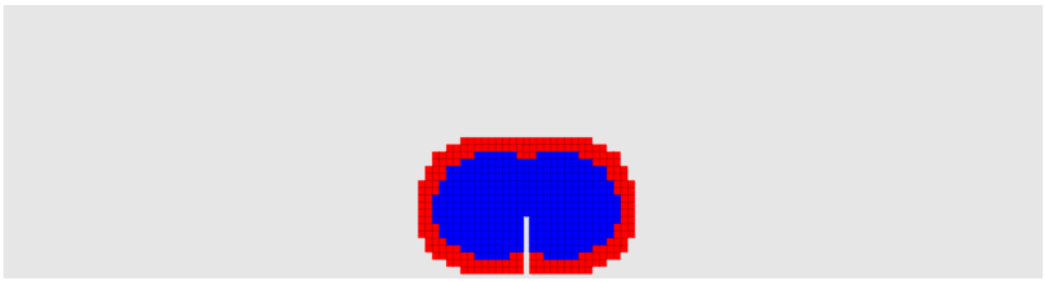

Figure 77: les zones de propagation obtenues sur la poutre entaillée pour une valeur de $T_{Zpr} = 4$

La forme des zones de propagation est obtenue en étendant la zone à risque uniformément dans toutes les directions. Afin de limiter l'activation des zones en cas de propagation de l'endommagement, chaque zone de propagation initiale est ensuite découpée en N_{Partpr} zones (avec N_{Partpr} le troisième paramètre de la méthode). Chaque zone est divisée géométriquement selon N_{Partpr} directions. Cette étape est illustrée pour la poutre entaillée en flexion sur la Figure 78.

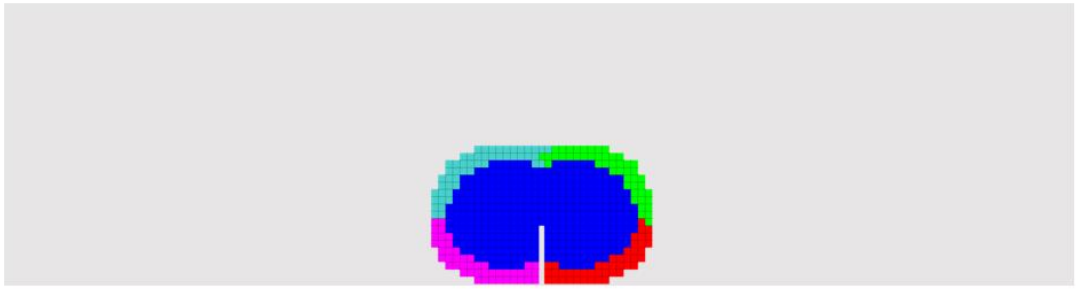

Figure 78 : les zones de propagation obtenues sur la poutre entaillée après partitionnement en $N_{Partpr} = 4$

4. Le reste de la structure est finalement partitionné en zones équivalentes en minimisant le nombre de points sur les frontières grâce à l'algorithme de « nested dissection » (Gilbert and Tarjan 1986). L'algorithme de « nested dissection » permet de diviser la structure en 2^n zones de taille équivalente. On cherche ici la valeur de n qui donne une taille d'une zone restante la plus proche de S_{Zrest}, avec S_{Zrest} donné comme suit :

$$S_{Zrest} = T_{zrest} \times S_{Mean} \tag{55}$$

où S_{Mean} est la taille moyenne des zones déjà créées (à risque et de propagation) et $Tzrest$ est le quatrième paramètre de la méthode. Étant donné S_{Zrest}, la valeur de n (entier naturel) est obtenue, telle que la taille de chaque zone restante soit aussi proche que possible de S_{Zrest} commet suit :

$$n = \frac{\log\ (\mathrm{S_{Zret}})}{\log\ (2)} \tag{56}$$

La décomposition résultante du maillage sur la poutre de flexion entaillée est illustrée sur la Figure 79.

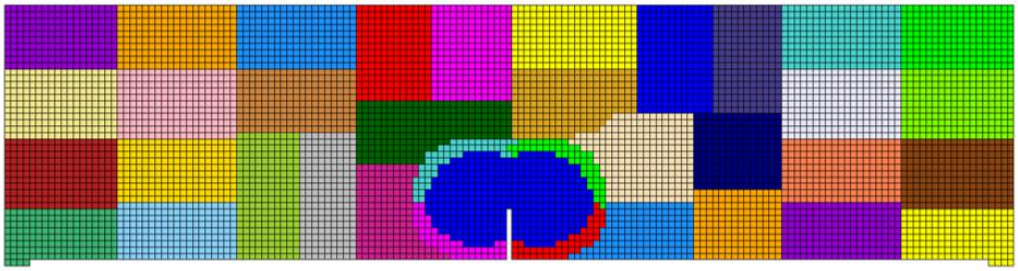

Figure 79 : Partition finale de la poutre entaillée pour une valeur de $T_{zrest} = 1$

5. A l'issue de chacune des quatre étapes ci-dessus, une procédure est utilisée pour éliminer les zones dont la taille (S_{zone}) est très petite par rapport à la taille de la structure (S_{total}). Si $S_{zone} < S_{total} \times T_{minZ}$ (avec T_{minZ} le cinquième paramètre de la méthode), la zone est fusionnée avec une zone voisine (la première trouvée). Dans l'exemple illustré, aucune zone ne répond à ce critère. Ce choix est fait pour ne pas pénaliser le temps de calcul par la condensation des zones trop petites. La valeur utilisée pour l'exemple ci-dessus pour T_{minZ} est de 0,1 %.

En conclusion, cette méthode de partitionnement, basée sur le processus d'amorçage et de propagation de l'endommagement et sur un ensemble d'opérations géométriques dépend de cinq paramètres. Le choix de ces paramètres détermine la taille et le nombre des zones et affecte le temps de calcul.

3.3.3 Analyse de sensibilité

Dans cette partie, une analyse de sensibilité est effectuée sur trois cas test pour évaluer l'influence de chaque paramètre et leur interaction sur l'efficacité la méthode ASC. Dans cette étude, le paramètre p qui donne le nombre de pas de calcul entre chaque vérification du critère d'amorçage, est également considéré. Ce paramètre est étroitement lié au partitionnement initial du maillage, puisqu'il intervient sur l'apparition des nouvelles zones d'intérêt. L'analyse de sensibilité est donc effectuée dans la suite sur les 6 paramètres :

- T_{maxZR} : pourcentage définissant la taille maximale d'une zone à risque par rapport à la taille totale de la structure
- T_{Zpr} : diviseur pour définir la taille d'une zone de propagation par rapport à la taille de la zone à risque

- N_{partpr} : nombre de partition de la zone de propagation
- T_{zrest} : multiplicateur pour définir la taille des zones restantes par rapport à la taille moyenne des zones à risque et de propagation
- p : nombre de pas de calcul entre chaque vérification du critère d'amorçage
- T_{minZ} : pourcentage définissant la taille minimale d'une zone par rapport à la taille totale de la structure

Cette analyse de sensibilité est réalisée à l'aide du logiciel Uranie (URANIE 2020), qui est un logiciel d'optimisation, de méta modélisation et d'analyse d'incertitude. L'objectif principal de cette étude est dans un premier temps d'évaluer les effets individuels et croisés des six paramètres d'entrée. Une schématisation de l'analyse de sensibilité effectuée est donnée sur la Figure 80. Tous les paramètres suivent la loi uniforme sur les intervalles donnés dans la Table 8. Cet intervalle a été défini à partir d'une première analyse effectuée sur la poutre entaillée pour définir des valeurs « réalistes ».

Cette analyse de sensibilité devra permettre dans un second temps de proposer un ensemble unique de paramètres « optimaux ». On entend par « optimal » un jeu de paramètres conduisant à un découpage de maillage aboutissant à un temps de calcul le plus favorable possible, quel que soit le cas test considéré. Nous choisissons de faire l'étude sur 3 cas test représentatifs des cas finaux d'utilisation de la méthode ASC pour faire l'étude et trouver un optimal qui pourrait s'appliquer dans la plupart des cas.

Seront donc choisies la poutre en flexion entaillée 2D de la partie 3.3.1, la poutre précontrainte 3D de la partie 2.3.6 soumise à une flexion après précontrainte, et l'enceinte de confinement simplifiée sous pression interne de la partie 3.2.2.

La méthode Latin Hypercube Sampling (LHS) (URANIE 2020) est utilisée pour générer un plan d'expérience de 500 jeux de paramètres. Une illustration des 500 ensembles de paramètres est fournie sur la Figure 81. Chacun des 6 graphiques présentés sur la Figure 81 correspond à l'un des 6 paramètres et montre la répartition uniforme des paramètres sur les intervalles donnés dans la Table 8. Chaque réalisation, correspondant à 1 jeu de paramètres, est ensuite testée sur les 3 cas tests en appliquant la méthode ASC avec le partitionnement du maillage obtenu à l'aide de ce jeu de paramètres. Au total, 1500 calculs sont donc effectués. La quantité de sortie d'intérêt est le temps de calcul.

Il est à noter, qu'au-delà de l'analyse de sensibilité aux paramètres d'entrée, ce travail met également en évidence la robustesse de la méthode ASC développée, puisqu'il a été possible de lancer 1500 calculs dans des configurations géométriques et de chargement différentes sans rencontrer de difficultés numériques particulières.

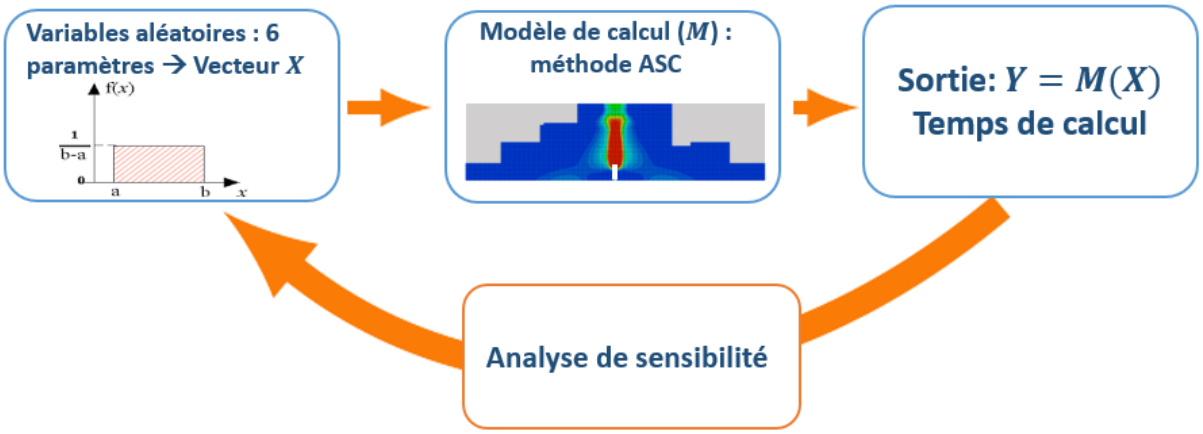

Figure 80 : Schématisation de l'analyse de sensibilité

Soit $Y = M(\boldsymbol{X})$ le temps de calcul en fonction d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$, défini par six variables d'entrée $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{T_{maxZR}}, \boldsymbol{T_{minZ}}, \boldsymbol{T_{Zpr}}, \boldsymbol{N_{partpr}}, \boldsymbol{T_{zrest}}, \boldsymbol{p}\}$. Le but de cette analyse de sensibilité est de quantifier l'impact de chaque variable d'entrée ou des combinaisons de celles-ci sur $\boldsymbol{Y}$. Pour cela, deux indices de sensibilité sont calculés : l'indice de sensibilité du premier ordre qui représente l'effet du paramètre X_i seul et l'indice de sensibilité total qui représente l'effet de X_i, en tenant compte de l'interaction possible avec d'autres paramètres.

Table 8 : Intervalle de variation des six paramètres de l'analyse de sensibilité (distribution uniforme)

Variable	Description [min, max]
$\boldsymbol{T_{maxzr}}$	Taille max. d'une zone à risque $[2\% ; 15\%]$
$\boldsymbol{T_{minz}}$	Taille min. d'une zone $[0{,}2\% ; 0{,}5\%]$
$\boldsymbol{T_{Zpr}}$	Taille d'une zone de propagation $[1{,}0 ; 4{,}0]$
$\boldsymbol{N_{partpr}}$	Nb. de partitions d'une zone de propagation $[1 ; 8]$
$\boldsymbol{T_{zrest}}$	Taille d'une zone restante $[1{,}0 ; 4{,}0]$
$\boldsymbol{p}$	Nb. de pas pour vérification d'amorçage $[1 ; 10]$

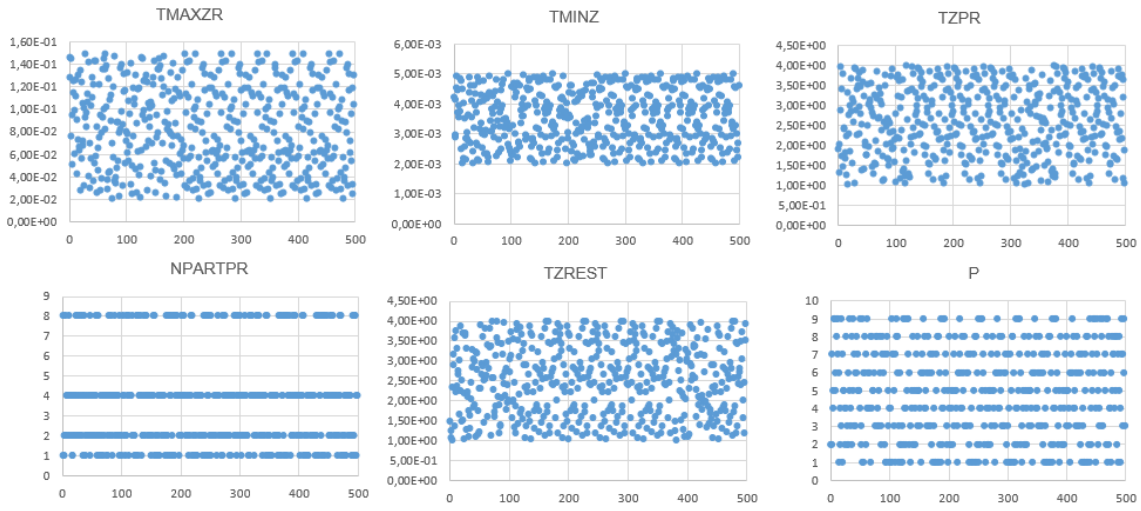

Figure 81 : plan d'expériences des six variables d'entrée

L'indice de sensibilité du premier ordre est donné par (URANIE 2020) :

$$S_i = \frac{Var\,(E\,(Y|X_i))}{Var(Y)} \tag{57}$$

avec $Var\,(E\,(Y|X_i)$ l'espérance de la variance conditionnelle sur toutes les valeurs X_i possibles. Cet indice ne tient pas compte de l'interaction possible entre les entrées.

L'indice de sensibilité d'ordre total S_{T_i} est la somme de tous les indices de sensibilité impliquant les variables d'entrée :

$$S_{T_i} = \sum_{k \epsilon \# i} S_k = 1 - S_{\bar{\imath}} \quad (58)$$

où $\#i$ et $\bar{\imath}$ représentent respectivement le groupe d'indices qui contient et ne contient pas l'indice i.

La méthode choisie pour calculer les indices de sensibilité est la décomposition de Sobol (Sobol' 1993). Elle a été choisie parmi les autres disponibles dans Uranie car elle permet de calculer à la fois les indices de sensibilité de premier ordre et les indices de sensibilité totale. De plus, aucune hypothèse n'est nécessaire entre les entrées et la sortie comme c'est le cas en régression linéaire par exemple.

3.3.3.1 Cas test 1 : Poutre entaillée en flexion

L'analyse de sensibilité est d'abord effectuée sur la poutre entaillée en flexion de la partie 3.3.1. La Figure 82 illustre le partitionnement ayant donné l'un des meilleurs résultats. La distribution de l'endommagement sur ce partitionnement et les zones activées sont illustrées sur la Figure 83. L'évolution du domaine d'intérêt suit strictement celle de l'endommagement.

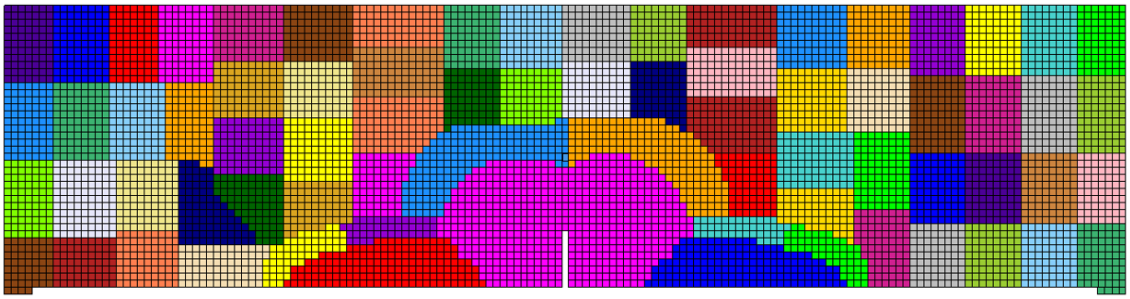

Figure 82 : partitionnement de maillage du calcul obtenu pour $X = \{7{,}13 \times 10^{-2}; 2{,}07 \times 10^{-3}; 1\ ;\ 3{,}14\ ;\ 1{,}76\ ;\ 7\}$

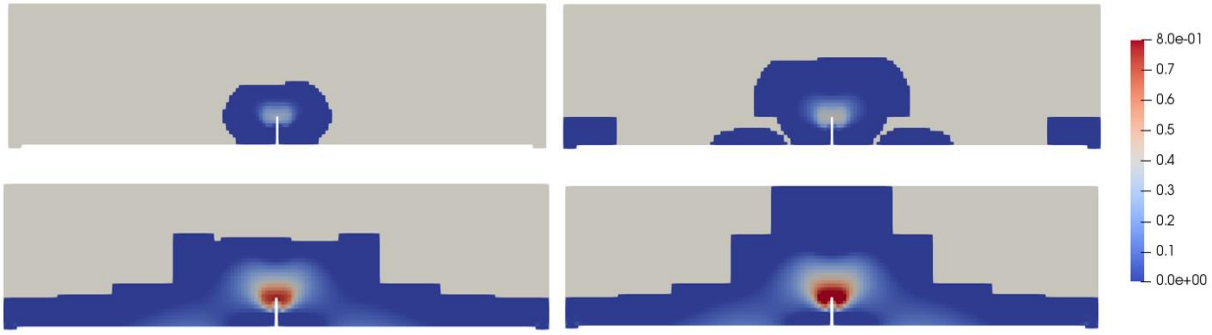

Figure 83 : évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt (la partie grise est condensée)

La Figure 84 montre le partitionnement du maillage du calcul avec le plus grand temps de calcul. Ce partitionnement tient effectivement compte de la forme de l'endommagement mais la taille de la zone à risque est très importante. Cela induit l'activation d'une grande partie de la structure dès le début du calcul, expliquant la moindre performance en temps de calcul.

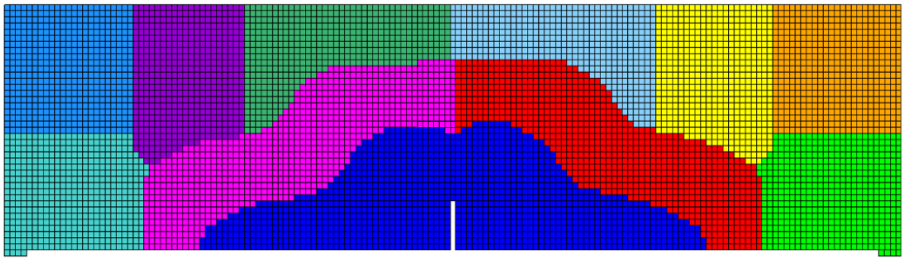

Figure 84 : partitionnement de maillage du calcul le plus lent parmi les 500 calculs – obtenu pour $X = \{1{,}10 \times 10^{-1}; 2{,}88 \times 10^{-3}; 2\ ; 3{,}11\ ; 1{,}33\ ; 7\}$

Les résultats de l'analyse de sensibilité sont présentés sur la Figure 85. Selon l'indice de sensibilité totale, les deux paramètres les plus impactant sont les paramètres qui définissent la taille des zones à risque initiales T_{MaxZR} et la taille des zones de propagation T_{Zpr} . L'effet du paramètre T_{minZ} (taille minimale d'une zone) est négligeable dans ce cas test. A titre d'illustration, le temps de calcul varie de 156 s à 513 s. Le temps du calcul complet est de 899 s. Le facteur de gain pour le temps de calcul varie donc entre 5,76 et 1,8 pour les 500 calculs. Il est donc supérieur à 1 dans toutes les configurations de découpage initial. Cela montre que quel que soit le jeu de paramètres, la méthode ASC est plus rapide que le calcul complet dans cette application.

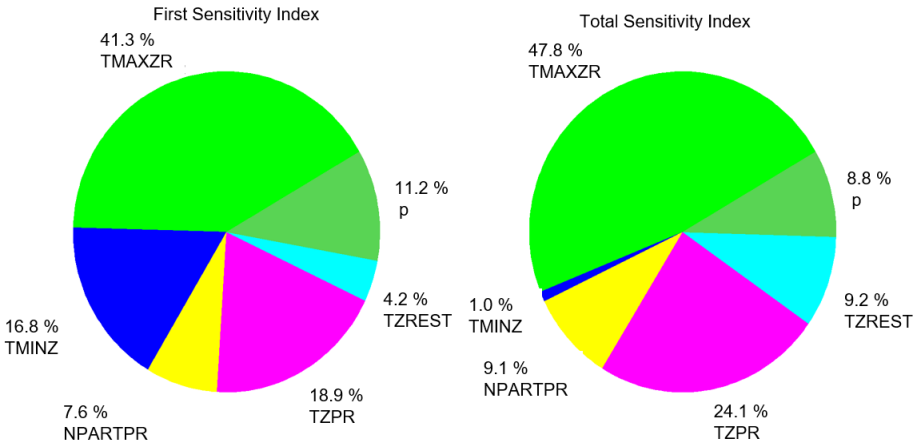

Figure 85 : Indices de sensibilité - Poutre entaillée en flexion

3.3.3.2 Cas test 2 : Poutre en béton précontraint mise en flexion

Le deuxième cas test est une poutre précontrainte modélisée en trois dimensions (voir Figure 86). Après la mise en précontrainte, un chargement en flexion est imposé. Cette poutre est la même que celle utilisée au paragraphe 2.3.6 du Chapitre 2. Les paramètres matériaux, les dimensions, le maillage, la technique de régularisation et les lois de comportement restent inchangés dans cette partie.

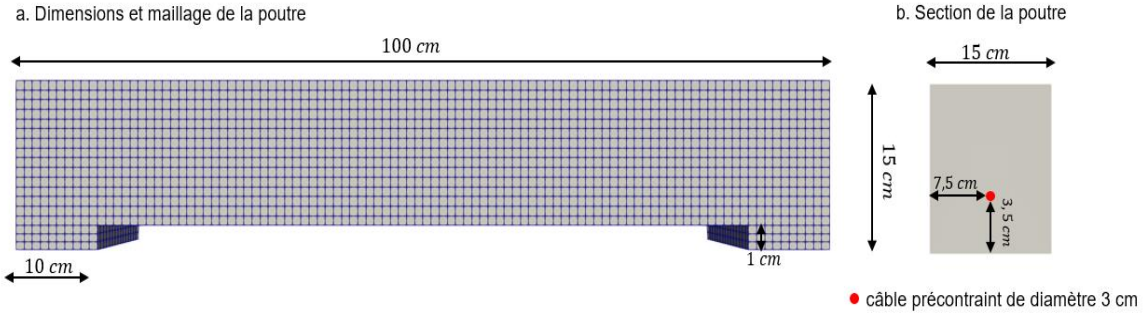

Figure 86: détails de la poutre précontrainte

Concernant le chargement, après l'application de l'effort de précontrainte aux deux extrémités ($P = 20\,kN$), un effort de flexion est imposé sur une bande de 5 cm de largeur en tête au milieu de la poutre, jusqu'à un effort de 15 kN à la fin du calcul (Figure 87-a). La Figure 87 présente un exemple de partitionnement automatique du maillage et les distributions d'endommagement qui en résultent, après précontrainte et après mise en flexion. Il est à noter que dans le partitionnement de maillage, des zones à risque apparaissent aux extrémités des câbles (liée à la précontrainte), en bas au milieu (lié à la flexion) et en haut au milieu de la poutre au niveau de la zone d'application de la force.

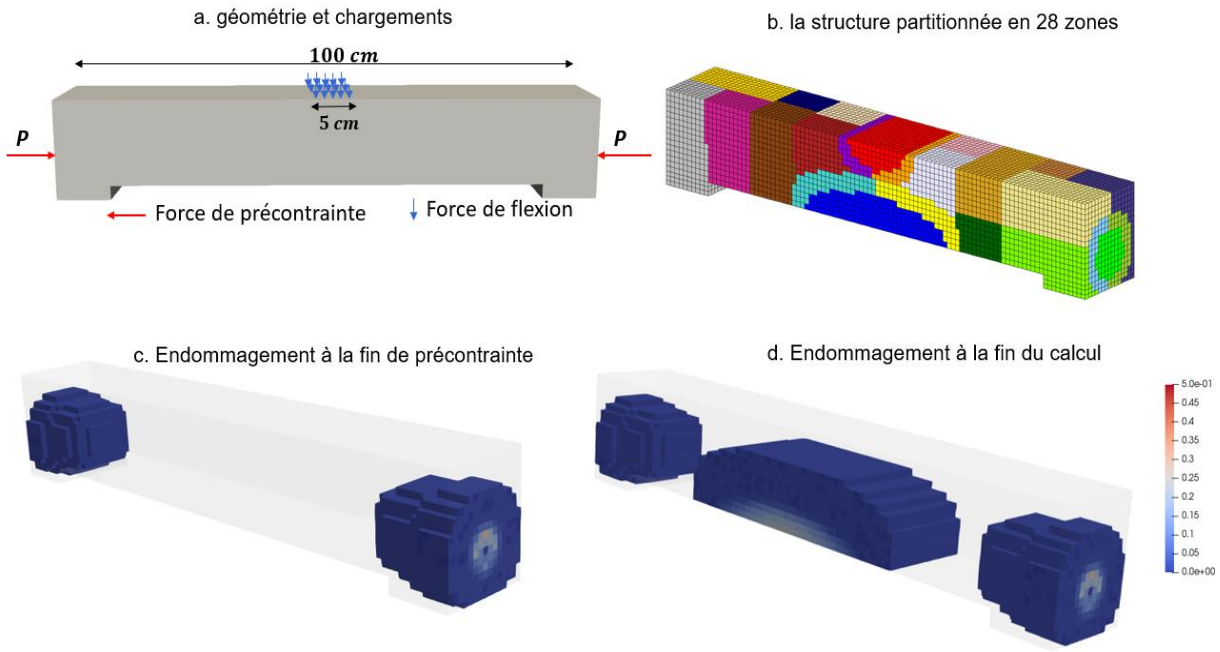

Figure 87 : Poutre précontrainte en flexion

La Figure 88 présente les résultats de l'analyse de sensibilité pour ce cas test. Ces résultats montrent que les deux paramètres les plus impactant sont toujours T_{MaxZr} et T_{Zpr}. Concernant le paramètre p, la variation entre l'indice du premier ordre et l'indice de sensibilité total indique une interaction significative entre ce paramètre et tous les autres. L'indice de sensibilité total du paramètre T_{minZ} qui était négligeable pour la poutre en flexion ne l'est plus dans ce cas test. Pour ce cas test, le temps de calcul varie de 2730 s à 7280 s. Le temps de calcul associé au calcul complet est de 9210 s. Comme pour la poutre en 2D, la méthode ASC reste plus efficace que le calcul complet quel que soit le jeu de paramètres utilisé.

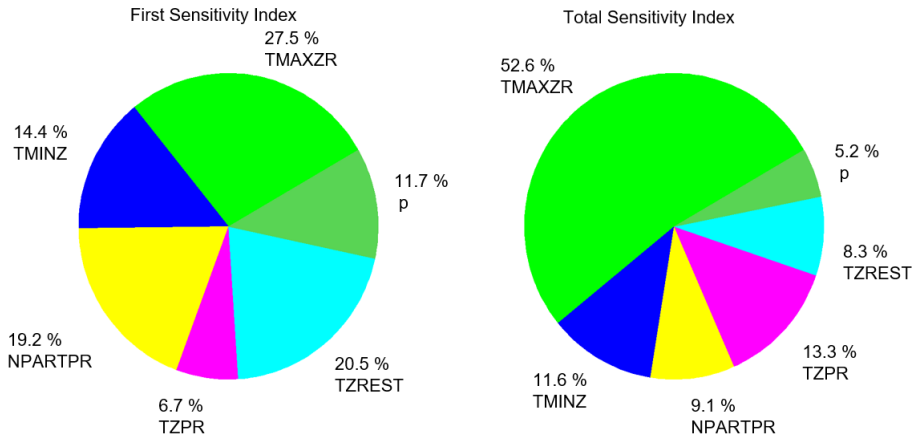

Figure 88 : Indices de sensibilité - Poutre précontrainte en flexion

3.3.3.3 Cas test 3 : enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne

Le dernier cas test est l'enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne (Figure 89). La même structure avec le même jeu de données que la partie 3.2.2 a été utilisée. Un exemple de partitionnement de maillage obtenu avec la méthode développée est illustré sur la Figure 89-c. Ce partitionnement montre que les zones à risque sont les zones en bas et en haut des ouvertures. La méthode ASC a été appliquée avec ce partitionnement du maillage et les résultats de l'évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt sont présentés sur la Figure 90.

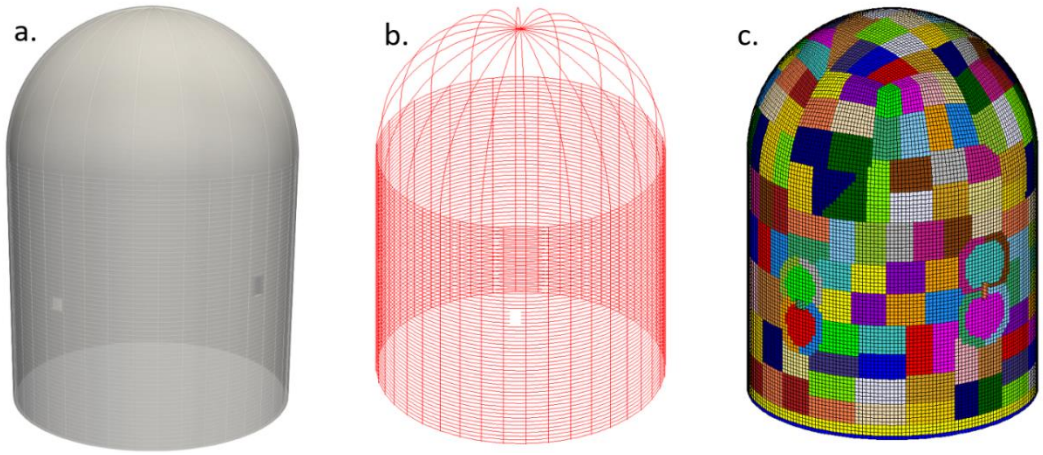

Figure 89 : a- Enceinte simplifiée en béton armé ; b – renforts d'acier ; c – Exemple de partitionnement de maillage obtenue avec la méthode de partitionnement automatique développée

Cet exemple illustre l'intérêt de la méthode de partitionnement de maillage proposée car elle permet au domaine d'intérêt d'inclure le maximum d'endommagement possible dans un plus petit nombre de zones, par rapport à une décomposition arbitraire en zones équivalentes. Ceci peut être très facilement confirmé en comparant cette évolution à celle montrée sur la Figure 67 en partitionnant en 32 zones équivalentes dans laquelle, la plupart du domaine d'intérêt activé n'a montré aucun endommagement.

Les résultats de l'analyse de sensibilité présentés sur la Figure 91 montrent que le paramètre le plus impactant ici est le paramètre p. Le paramètre T_{maxZR} reste un paramètre influant. Les paramètres N_{partpr} et T_{zrest} ont également un impact significatif sur le temps de calcul. Pour ce cas test, seules quelques partitions de maillage (3 %) conduisent à un temps de calcul supérieur au calcul complet.



Figure 90 : évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt

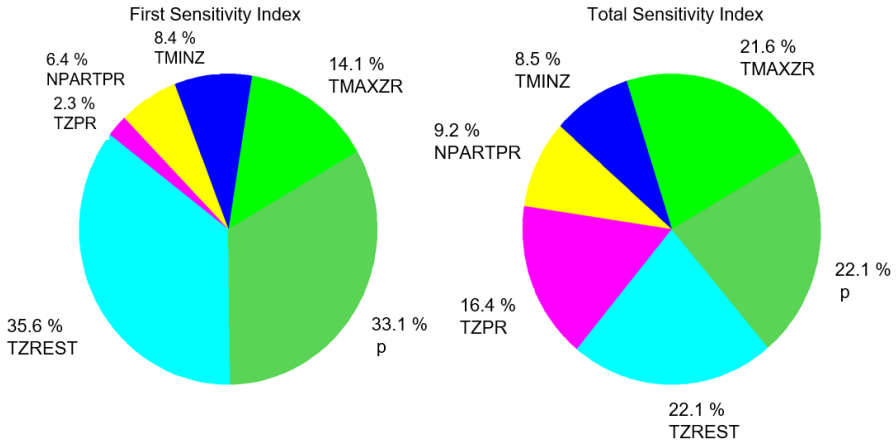

Figure 91 : Indices de sensibilité - Enceinte simplifiée

3.3.3.4 Synthèse de l'analyse de sensibilité et proposition d'un jeu de paramètres « optimal »

Les résultats de l'analyse de sensibilité sur trois cas tests montrent tout d'abord que chaque paramètre d'entrée a un impact sur le temps de calcul de la méthode ASC. Sur l'ensemble des cas tests choisis, aucun des paramètres ne peut donc être ignoré. Cet impact dépend du cas test, du type de chargements et de la propagation de l'endommagement résultante. Ensuite, une interaction entre les paramètres est identifiée, notamment entre le paramètre p et la décomposition initiale du maillage.

A partir de cette étude de sensibilité, un jeu de paramètre unique est proposé pour construire le partitionnement de maillage. Pour cela, les résultats des 3 x 500 simulations précédentes sont utilisés. Un vecteur de 500 entrées est défini :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_{500} \end{Bmatrix} \tag{59}$$

Chaque vecteur d'entrée X_i est associé à une sortie par cas de test j (temps de calcul : $t_{i,j}$) ; exprimée comme suit :

$$t_{i,j} = M_j(X_i)\,, avec\ i : 1 \rightarrow 500\ et\ j : 1 \rightarrow 3 \tag{60}$$

$t_{i,j}$ représente donc le temps de calcul obtenu avec la méthode ASC, sur le cas test numéro j (poutre 2D - $j = 1$, poutre précontrainte mise en flexion - $j = 2$ ou enceinte simplifiée - $j = 3$), en utilisant le partitionnement de maillage obtenu avec le jeu de paramètres X_i.

Afin de comparer les résultats sur une échelle commune, chaque temps de calcul est divisé par le temps du calcul complet pour chaque cas de test. La quantité résultante $R_{i,j}$ indique en pourcentage le temps d'un calcul ASC donné par rapport au temps de calcul complet.

$$R_{i,j} = \frac{t_{i,j}}{t_{complete_j}} \times 100 \tag{61}$$

Par exemple, une valeur $R_{i,j} = 20\%$ signifie que le calcul utilisant la décomposition automatique du maillage avec le jeu de paramètre X_i, sur le cas test j, est 5 fois plus rapide que le calcul complet.

Finalement, pour choisir le jeu de paramètres « optimal », pour chaque vecteur X_i, la valeur moyenne de $R_{i,j}$ sur les 3 cas test ($j = 1$ à 3) est calculée ($\bar{R}$).

$$\bar{R}_i = \frac{1}{3}\sum_{j:1\to 3} R_{i,j} \tag{62}$$

Le jeu de paramètres « optimal » X_k est celui correspondant à la valeur minimale de $\bar{R}$.

$$\overline{R_k} = \min_{i:1\to 500} \bar{R}_i \tag{63}$$

L'application de cette stratégie basée sur les 3x500 simulations donne les résultats suivants :

$$X_k = \{2{,}87\ \%\ ;\ 0{,}38\%\ ;\ 3{,}42\ \ ;\ 2\ ;\ 1{,}54\ ;\ 6\} \tag{64}$$

$$\overline{R_k} = \frac{19{,}61 + 18{,}97 + 34{,}49}{3} = 24\% \tag{65}$$

Le résultat est illustré sur la Figure 92 sur laquelle les 500 calculs de chaque cas test sont triés par ordre croissant de temps de calcul (du plus rapide au plus lent). Les résultats obtenus pour chaque cas test en utilisant le jeu de paramètres "optimal" proposé (équation (63)) sont ensuite positionnés sur chaque courbe. Les résultats sont proches de la valeur minimale du temps de calcul. Le choix d'un jeu de paramètres unique conduit donc à des résultats en termes de temps de calcul non optimal pour chaque cas test pris individuellement mais « garantissant » un résultat efficace quelle que soit la configuration considérée.

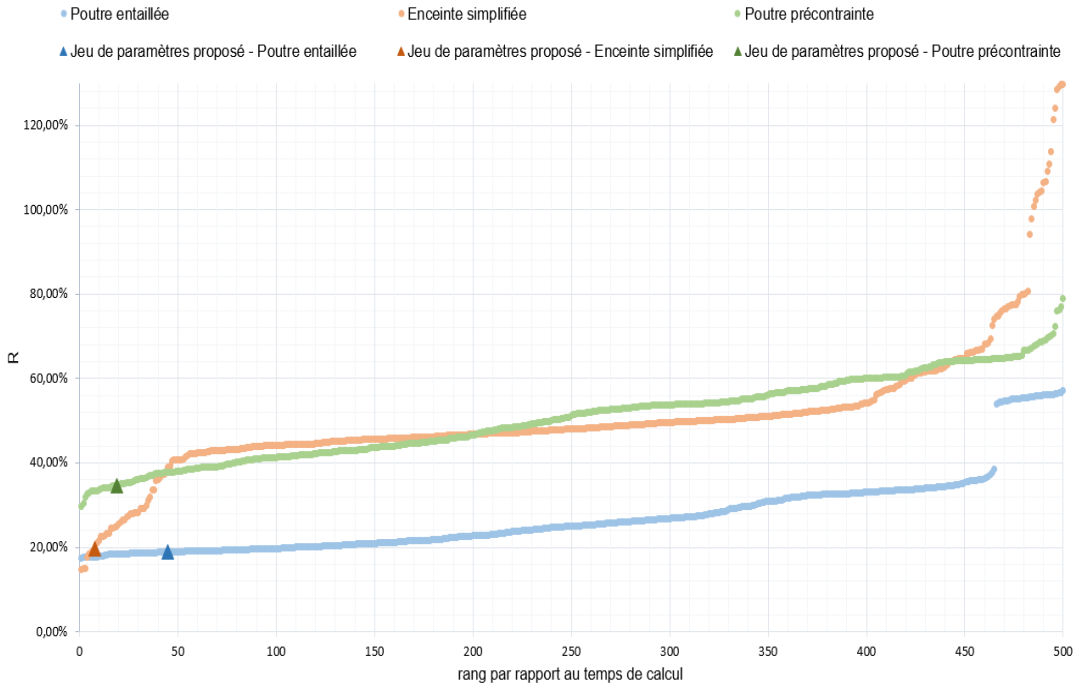

Figure 92 : Evolution du temps de calcul avec le jeu de paramètres pour les trois cas test.

Analyse de sensibilité et jeu de paramètres optimal

Sur la Figure 93, le temps de calcul obtenu en utilisant le partitionnement automatique du maillage est comparé aux résultats obtenus avec un partitionnement initial en zones équivalentes sur la poutre de flexion 2D (étude effectuée dans la partie 3.3.1 ; Figure 73). Une comparaison avec le calcul complet y est également incluse. La partition automatique, représenté par le point en noir sur la Figure 93, est plus rapide que la partition en zones équivalentes, quel que soit le nombre de zones. Cela témoigne donc de l'efficacité de la méthode de partitionnement développée sur ce cas particulier.

Il convient enfin de noter que même si les trois cas test ont été choisis pour être représentatifs du cas d'utilisation final (enceinte de confinement en béton précontraint), le jeu de paramètre

"optimal" aurait été certainement différent si d'autres cas tests avaient été envisagés. L'objectif est donc bien ici de proposer un jeu de paramètre optimal pour un domaine d'application visé. La pertinence du choix pourrait être enrichie en ajoutant des cas pour des applications supplémentaires.

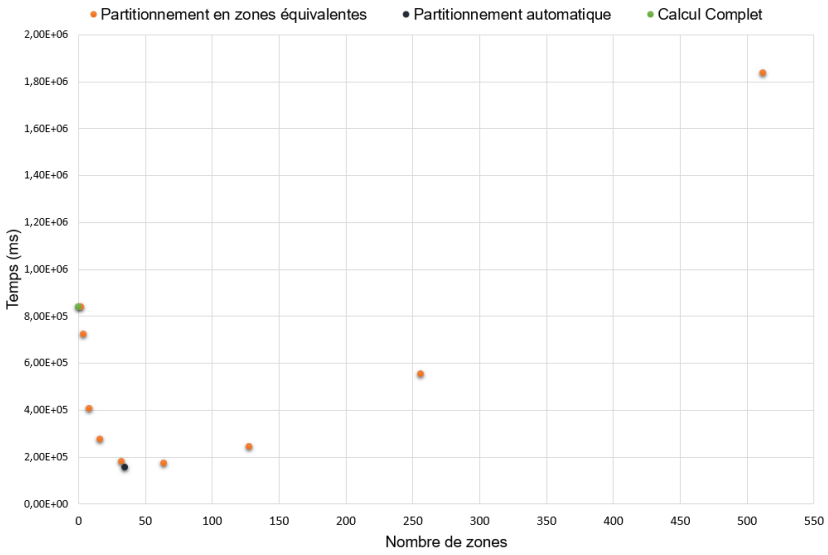

Figure 93: temps de calcul en fonction du nombre de zones de partitionnement pour la poutre en flexion 2D

3.3.4 Conclusion

Comme la méthode ASC nécessite un partitionnement du maillage en zones, l'effet de ce partitionnement a été étudié. Il a été montré qu'il a un impact significatif sur le temps de calcul et l'efficacité de la méthode ASC. Une méthode de décomposition automatique du maillage a donc été développée. La méthode a été décrite sur la base de l'interprétation physique de l'apparition et de la propagation de l'endommagement. Elle repose sur cinq paramètres géométriques dont la calibration a été discutée à travers une analyse sensibilité s'appuyant sur 1500 calculs. Un jeu optimal de paramètres a finalement été proposé, dont les résultats ont été discutés. La méthode développée s'est avérée plus efficace qu'un partitionnement en zones de taille équivalente quel que soit leur nombre, sur la poutre en flexion. Il est à noter que cette méthode s'applique à tout maillage et dimensions d'ouvrage et peut donc être utilisée quels que soient la nature ou le format du maillage en entrée. Elle peut également être appliquée quel que soit le modèle de comportement utilisé. En y ajoutant le partitionnement optimisé, le nouvel algorithme de la méthode est donné par la Figure 94.

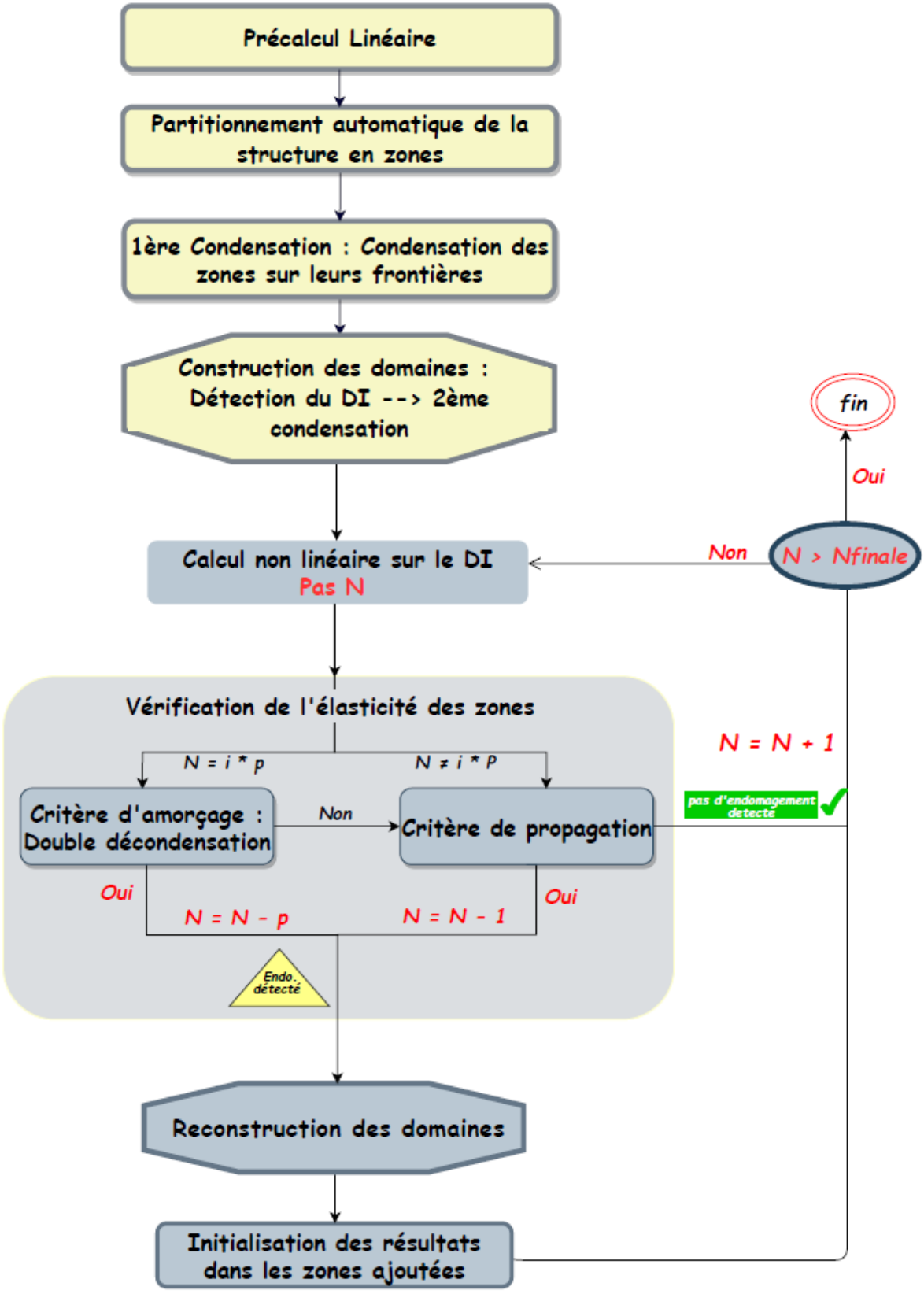

Figure 94 : Algorithme de la méthode ASC après intégration du partitionnement automatique de maillage en zones (en jaune : Phase de préparation ; en gris : phase de calcul)

CHAPITRE 4. COUPLAGE DE LA METHODE ASC AU PRINCIPE DU RAFFINEMENT DE MAILLAGE (MEZHER ET AL. 2022A)

4.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, la méthode ASC a été améliorée, aboutissant à la proposition d'un nouvel algorithme. Son champ d'application a été étendu (précontrainte, fluage et retrait, chargements variables). Ses performances ont également été améliorées (analyse de sensibilité, partitionnement automatique du maillage, ...). Cependant, la méthode s'appuie sur un maillage initial qui n'évolue pas. Ainsi, si des finesses importantes doivent être atteintes (pour plus de représentativité ou utilisation de modèles non locaux par exemple), l'utilisation d'un maillage très fin sur la totalité de la structure est nécessaire. Ce choix peut altérer la performance du calcul, voire rendre impossible sa réalisation, y compris en utilisant la méthode ASC.

Une solution pour accéder à des maillages suffisamment fins en conservant une performance de calcul acceptable est de combiner la méthode ASC avec une technique de raffinement de maillage. Le raffinement de maillage consiste à utiliser une discrétisation adaptée localement au problème étudié : un maillage fin est utilisé dans les zones où la solution est complexe alors que le maillage reste grossier dans les autres zones. Cela permet une amélioration importante dans les performances en termes de taille mémoire et de temps CPU.

En appliquant ce principe à la méthode ASC, l'idée principale revient à raffiner uniquement le domaine d'intérêt jusqu'à la densité souhaitée et à garder le maillage initial pour le reste de la structure (domaine élastique). La première section présente les étapes supplémentaires de l'algorithme ASC nécessaires pour coupler la méthode ASC avec le raffinement du maillage. La méthode est ensuite appliquée et validée sur une poutre entaillée en deux dimensions. Une application sur une enceinte de confinement simplifiée en béton armé soumise à une pression interne en 3D est enfin présentée et une analyse de l'impact du maillage sur les résultats du calcul est réalisée.

4.2 CONDENSATION STATIQUE ADAPTATIVE COUPLEE AU RAFFINEMENT DU MAILLAGE

L'augmentation de la finesse de maillage sur la totalité de la structure entraîne une augmentation importante des degrés de liberté du système. À partir d'un certain nombre de degrés de liberté, résoudre un pas de calcul ou même effectuer une seule opération sur la structure (comme le précalcul linéaire par exemple) devient impossible en raison de la limitation de la mémoire. On cherche donc ici à ne réaliser aucune opération avec la méthode ASC, comme le pré-calcul linéaire ou la 1ère condensation par exemple, sur un maillage fin sur la totalité de la structure, mais à limiter l'usage d'un maillage fin au seul domaine d'intérêt. L'idée générale est de fixer d'abord une densité de maillage cible choisie en fonction de considérations de modèles ou de représentativité. Si le maillage initial ne satisfait pas à ce critère de densité, on parle de maillage initial "grossier" et dans ce cas le maillage du domaine d'intérêt est raffiné jusqu'à atteindre la densité cible fixée.

L'algorithme de la méthode ASC couplée au raffinement de maillage est présenté sur la Figure 95. Sur cet algorithme, les étapes en jaune représentent la phase de préparation, celles en gris représentent la phase de calcul et celles en vert sont les étapes supplémentaires nécessaires au couplage de la méthode ASC avec le raffinement du maillage. Les étapes de la méthode ASC sont rappelées sur la poutre simple en flexion de la Figure 96-a.

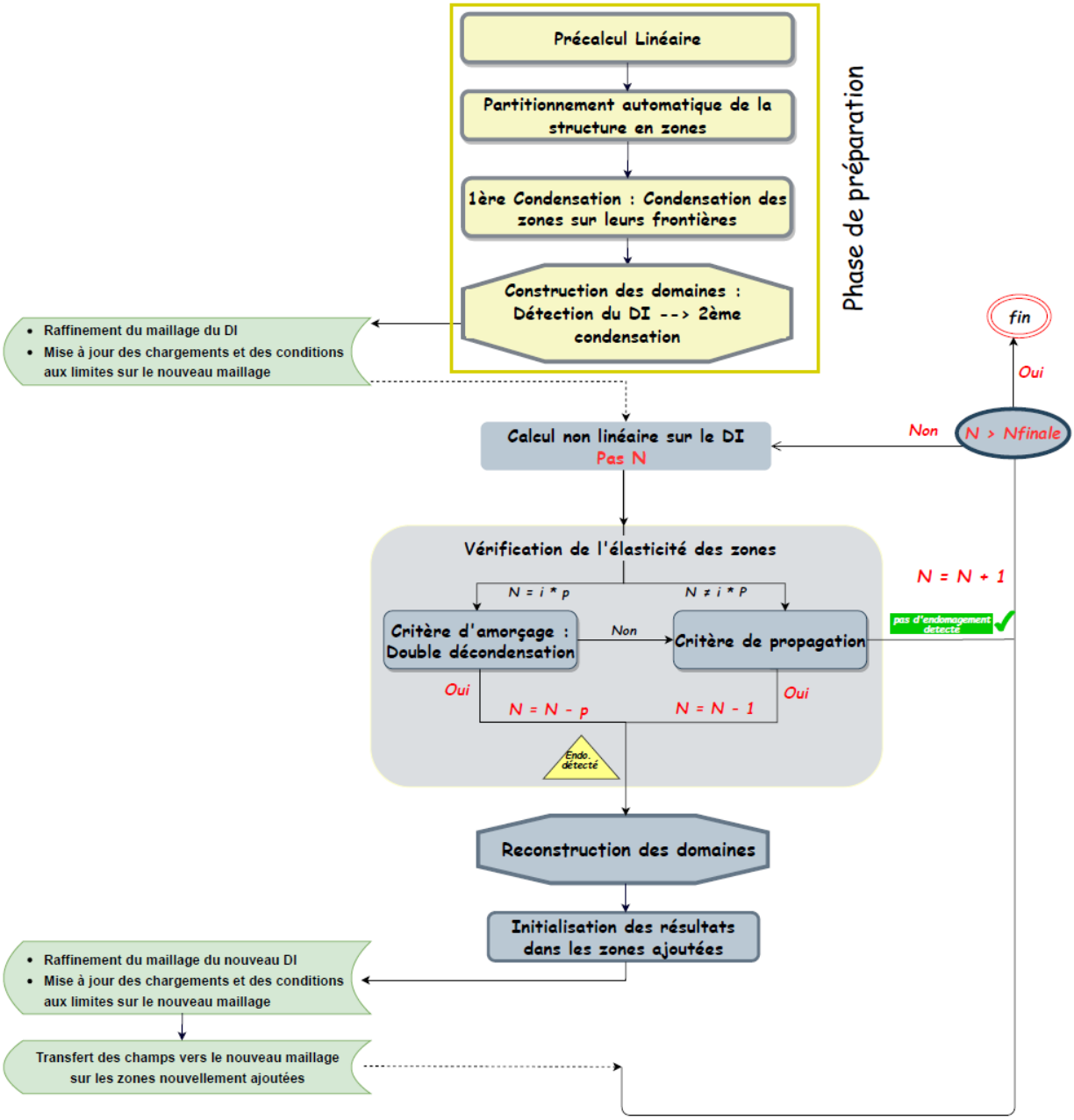

Figure 95 : Algorithme de la méthode ASC couplée au raffinement de maillage (en jaune : la phase de préparation, en gris : les étapes de calcul non linéaire, en vert : les étapes nécessaires au couplage de la méthode ASC avec le raffinement du maillage)

4.2.1 Phase de préparation

Dans ce couplage, la phase de préparation du calcul avec la méthode ASC est complétement réalisée sur le maillage initial (précalcul linéaire, partitionnement, définition du domaine d'intérêt de départ et double condensation). La Figure 96 illustre, sur une poutre simple en flexion, le maillage initial et le domaine d'intérêt de départ suite à la phase de préparation.

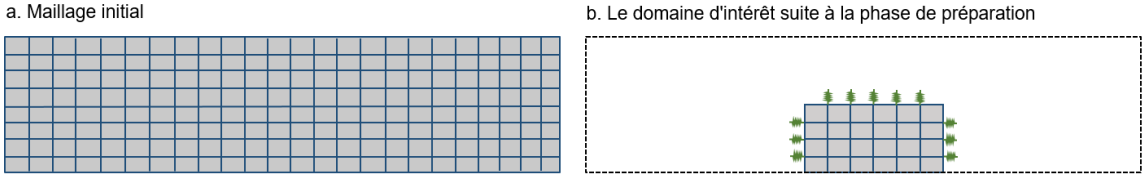

Figure 96 : Phase de préparation de la méthode ASC

4.2.2 Raffinement du maillage à l'intérieur du domaine d'intérêt

Une fois le domaine d'intérêt initial identifié, il est raffiné jusqu'à atteindre la densité appropriée. On choisit ici un « h-raffinement » (Zienkiewicz, Taylor, and Zhu 1983) qui consiste à modifier la taille des éléments (au lieu de modifier les fonctions de forme par exemple) pour obtenir des éléments plus petits dans les zones d'intérêt. Le maillage final est obtenu en subdivisant les éléments du maillage initial jusqu'à atteindre un niveau de finesse souhaité. Cette approche a été choisie parmi l'ensemble des approches possibles (voir l'état de l'art présenté dans 1.1.3) car elle est hiérarchique, simple à mettre en œuvre et facilite le transfert de champ du maillage grossier au maillage fin.

Afin de conserver la performance liée à la double condensation, la discrétisation de la frontière du domaine d'intérêt reste identique : le raffinement n'est effectué qu'à l'intérieur du domaine d'intérêt (voir Figure 97-b).

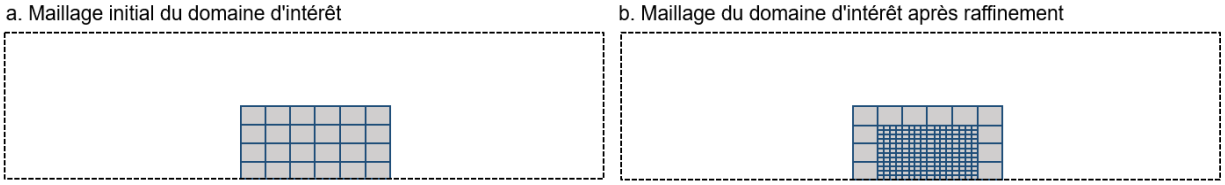

Figure 97 : Maillage du domaine d'intérêt : avant et après raffinement

Cette contrainte crée des « hanging nodes », introduisant des non-conformités : certains nœuds des éléments raffinés ne sont pas des sommets de l'élément grossier voisin. La Figure 98 montre un exemple sur une configuration simplifiée. La « continuité » du déplacement est assurée pour chaque « hanging node » n_i de l'interface $\mathrm{I}_{G,F}$ entre un élément grossier E_G et les éléments fins correspondants E_F à l'aide de relations cinématiques utilisant les fonctions de forme de l'élément grossier (N_j^G) (Gibert 2019):

$$u_i = \sum_{n_j \in E_G \cap \mathrm{I}_{G,F}} N_j^G(n_i)\, u_j \tag{66}$$

A titre d'illustration, pour le « hanging point » de la Figure 98 la relation de conformité suivante est ajoutée :

$$U_C = \frac{1}{2}(U_A + U_B) \tag{67}$$

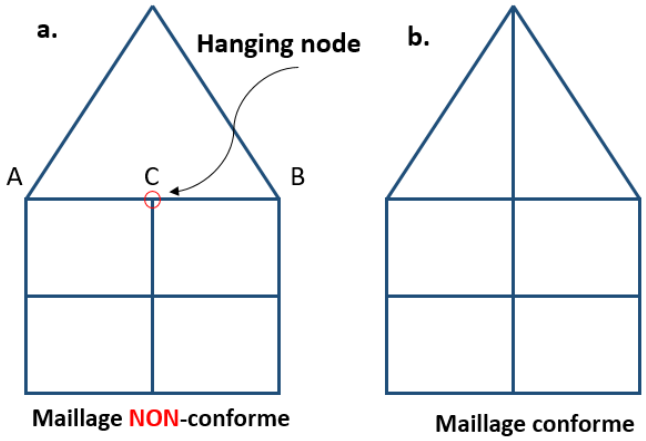

Figure 98 : différence entre maillage conforme et non conforme

Ces relations sont imposées via des multiplicateurs de Lagrange de la même manière que les conditions aux limites de Dirichlet (Verpeaux and Charras 2011). Il est à noter que d'autres solutions étaient disponibles comme la création de nouveaux éléments (Figure 98.b). Cependant, pour y parvenir sur un maillage qui ne contient que des quadrangles comme celui de la Figure 98.b, il faut introduire des triangles. Ce qui peut être considéré comme une limite de la méthode car dans certaines situations, il est nécessaire d'avoir un maillage ne contenant qu'un seul type d'élément. En 3D, plusieurs situations sont possibles et conduisent à l'introduction de plusieurs nouveaux types d'éléments finis (pyramides, tetraédres, etc.) .

Enfin, après raffinement, les chargements et conditions aux limites sont mis à jour sur le nouveau maillage si nécessaire. Par exemple le chargement de poids propre, réparti sur tous les nœuds de la structure, est redistribué sur les nouveaux nœuds après raffinement. La même étape est appliquée pour un chargement de pression interne qui doit également être redistribuer sur le nouveau maillage après raffinement.

4.2.3 Phase de calcul

Le calcul non linéaire est effectué sur le domaine d'intérêt raffiné uniquement, en utilisant la rigidité des zones condensées comme conditions aux limites supplémentaires. Lorsque le domaine d'intérêt évolue, par propagation ou apparition de nouvelles zones, le maillage du nouveau domaine d'intérêt est raffiné de la même manière qu'en 4.2.2 et les conditions aux limites et chargements sont mis à jour si nécessaire.

Lors du raffinement du nouveau domaine d'intérêt qui s'effectue donc en cours de calcul, les champs de déplacement, variables internes, déformations et contraintes doivent être « initialisés » sur le nouveau maillage. Ils incluent des champs nodaux (par exemple le champ de déplacement) et des champs aux points de Gauss (contraintes, variables internes…). En plus de la « décondensation » classique permettant d'obtenir ces champs sur le maillage initial, une étape supplémentaire est ici nécessaire pour transférer les champs du maillage initial vers celui raffiné. Plusieurs méthodes existent dans la littérature pour réaliser ce transfert : méthode de minimisation (Bérard 2011) ou méthodes d'interpolation (David Dureisseix and Néron 2008) par exemple.

Pour les champs nodaux, la méthode d'interpolation utilisant les fonctions de forme du maillage initial est choisie. Cette méthode est détaillée dans (Bérard 2011). Pour un nœud donné du maillage raffiné, on identifie l'élément du maillage initial dans lequel il est inclus. Ensuite, en utilisant la fonction de forme de cet élément et la position du nouveau nœud, la valeur du champ est interpolée.

Pour transférer les champs définis aux points de Gauss ($\underline{x}$), la difficulté réside dans le fait que seules des valeurs en des points discrets sont disponibles. Il n'y a pas d'approximation continue du champ sur tout le domaine. Pour projeter les champs d'un maillage initial Ω^n vers celui raffiné Ω^{n+1}, la méthode issue de (Bérard 2011) est utilisée. Pour transférer le champ F^n défini aux points de Gauss de Ω^n, la première étape consiste à le transformer en un champ nodal $\tilde{F}^n$ à l'aide des fonctions de forme N^n associées aux éléments du maillage Ω^n (Figure 99.b). Cela est fait en résolvant l'équation suivante :

$$\int_{\Omega^n} N^n(\underline{x}).N^{n^T}(\underline{x}).\tilde{F}^n \, d\Omega = \int_{\Omega^n} N^n(\underline{x}).F^n(\underline{x}) d\Omega \tag{68}$$

La deuxième étape consiste à trouver pour chaque point de Gauss $\underline{x}_i^{n+1}$ de Ω^{n+1}, l'élément de Ω^n dans lequel il se situe et de calculer ses coordonnées locales. Le champ nodal calculé $\tilde{F}^n$, est interpolé sur le nouveau maillage comme les autres champs nodaux (Figure 99.c) et donne le champ final F^{n+1} comme suit :

$$F^{n+1}(\underline{x}_i^{n+1}) = N^{n^T}(\underline{x}_i^{n+1}).\tilde{F}^n \tag{69}$$

Cette méthode est illustrée sur la Figure 99. Il est à noter que dans la méthode ASC, ces transferts ne sont nécessaires que dans les nouvelles zones du domaine d'intérêt, qui ont par définition un comportement élastique au moment du transfert. Ainsi, le risque d'imprécisions liées à la projection est limité puisque par exemple l'endommagement n'est pas concerné (endommagement uniformément nul sur ces zones).

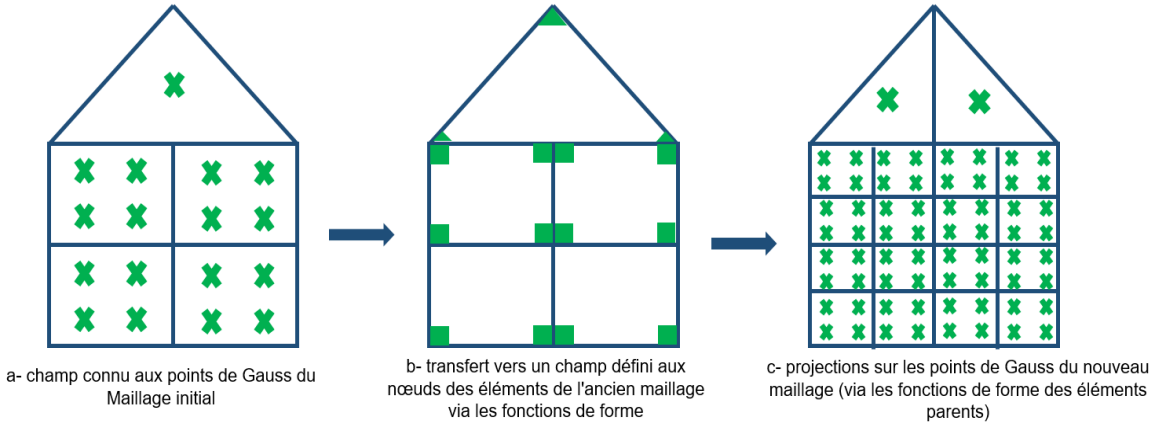

Figure 99 : illustration du transfert d'un champ défini aux points de Gauss

4.3 VALIDATION SUR UNE POUTRE ENTAILLEE EN FLEXION

Pour tester l'applicabilité de la méthode ASC/MR, une poutre entaillée en flexion est considérée. Nous reprenons la poutre qui a été utilisée pour valider la méthode ASC dans le Chapitre 2 (2.2.3) puis dans l'analyse de sensibilité dans le Chapitre 3 (3.3.3.1). Elle mesure 160 cm de long, 40 cm de haut et 20 cm d'épaisseur. Le maillage initial (grossier) utilisé dans cette application est composé de 610 éléments quadrilatéraux (4 cm de longueur de coté) (Figure 100.a). Le béton est modélisé à l'aide du modèle d'endommagement de Mazars avec les mêmes paramètres que dans 2.2.3. Ces paramètres simulent une résistance à la compression de 41,4 MPa et une résistance à la traction de 3 MPa. Un déplacement vertical imposé vers le bas jusqu'à 200 µm est appliqué sur une longueur de 8 cm au sommet de la poutre. Le déplacement vertical est bloqué aux points d'appui et le déplacement horizontal est bloqué au point médian supérieur. La structure est initialement partitionnée en 35 zones en utilisant la procédure de partitionnement automatique de maillage développée dans le Chapitre 3 (Figure 100.b). Dans le domaine d'intérêt, un raffinement de 1 cm est ciblé. Cette finesse permet d'éviter une dépendance des résultats au maillage en appliquant une méthode intégrale non locale (Pijaudier-Cabot and Bazant 1987) avec une longueur caractéristique $L_C = 3cm$. Tous les calculs sont effectués sur le même nœud de calcul à 24 cœurs afin de pouvoir comparer les temps de calculs à matériel identique.

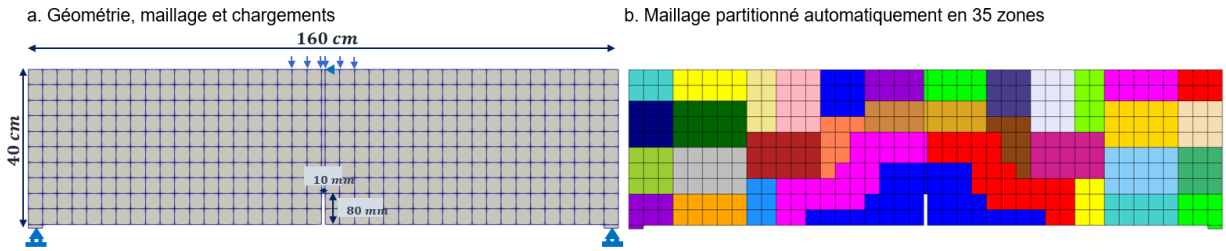

Figure 100 : Poutre 2D entaillée en flexion

Les résultats de calcul condensé sont présentés sur la Figure 101. Cette figure montre l'évolution de l'endommagement et du domaine d'intérêt au cours du chargement. L'endommagement commence autour de l'entaille, puis se propage. Il apparaît également (faiblement) au niveau des zones d'appui. Les figures illustrent le raffinement progressif du maillage avec la propagation de l'endommagement.

La comparaison avec le calcul complet utilisant un maillage fin (1 cm sur toute la structure) est ensuite effectuée. La Figure 102 présente la distribution de l'endommagement à l'issue du calcul complet. Ce profil et celui résultant du calcul ASC/MR donné dans la Figure 101, sont identiques là où ils peuvent être comparés (dans le domaine d'intérêt lors de l'utilisation de l'ASC). Un troisième calcul avec la méthode ASC est effectué, sans raffinement de maillage. Ce calcul est réalisé avec un maillage initial de densité égale à 1 cm sur toute la structure. La Figure 103 présente l'évolution de l'ouverture de l'entaille et du déplacement vertical en un point bas médian (point rouge sur la Figure 101) de la poutre pour les trois calculs. Ces trois courbes montrent une correspondance parfaite entre les résultats du calcul complet et le calcul ASC sans raffinement et des résultats très proches pour le calcul ASC avec raffinement. Cette légère différence est due à la légère différence de finesse du maillage par rapport au maillage du calcul complet (voir mailles au-dessus de l'entaille dans les deux calculs). Les calculs sont comparés en termes de performances dans la Table 9. Ces résultats montrent une amélioration du facteur de gain de 6,2 à 9,6 lors de l'utilisation de la méthode ASC avec raffinement.

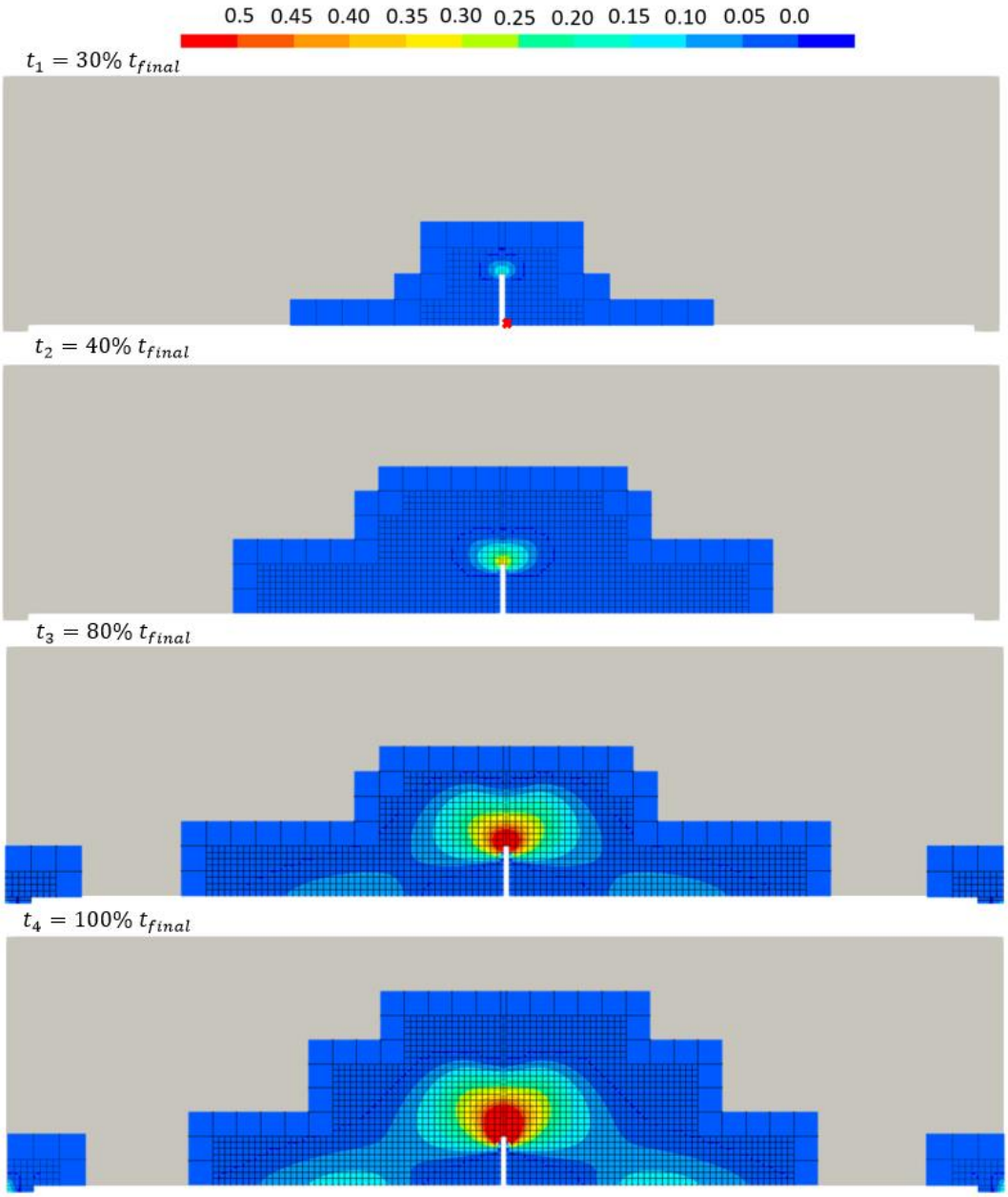

Figure 101: Évolution de l'endommagement, du domaine d'intérêt et de son maillage (ASC/MR) (le point rouge dans la première figure sera post-traité dans la suite)

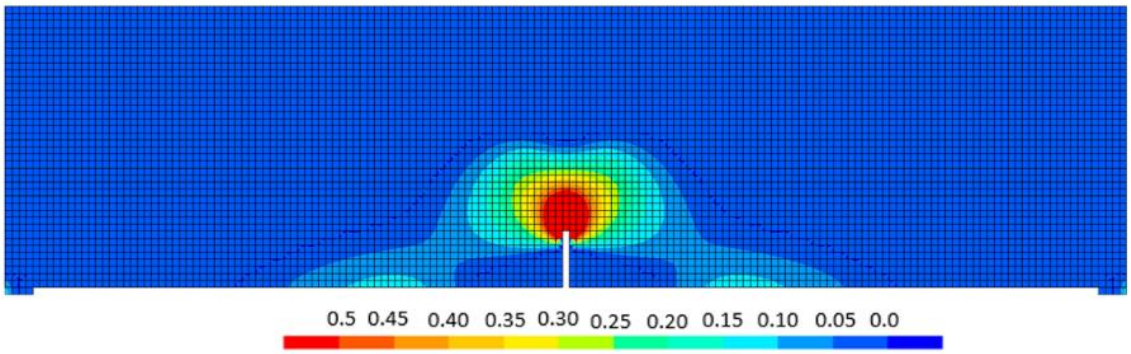

Figure 102 : profil d'endommagement à la fin de la simulation - calcul complet

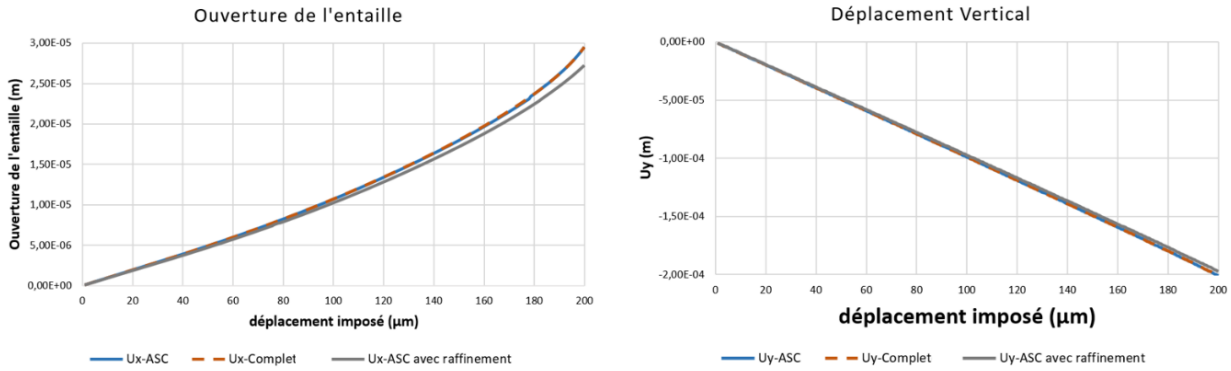

Figure 103 : Evolution du déplacement vertical et de l'ouverture de fissure en fonction du chargement - Poutre entaillée en flexion

Table 9 : Résultat d'efficacité numérique - Poutre entaillée en flexion - ASC/MR

	Calcul complet	**Calcul ASC (1 cm)**	**Calcul ASC/MR (4 cm – 1cm)**
Temps	$550s$	$88\ s$	$58\ s$
Facteur de gain	1	$\mathbf{6,2}$	$\mathbf{9,6}$

Pour évaluer l'intérêt du couplage développé par rapport à une méthode n'incluant que le raffinement de maillage (sans condensation statique), un test complémentaire est réalisé. Il consiste à utiliser la technique de raffinement de maillage dans les zones où l'endommagement est détecté, mais sans condenser le domaine élastique. Afin de pouvoir comparer les deux calculs (avec et sans condensation du domaine élastique), la partie raffinée évolue en même temps que dans le calcul ASC avec raffinement de maillage présenté sur la Figure 101. L'évolution de l'endommagement est présentée sur la Figure 104. A l'intérieur des zones endommagées, des distributions identiques à celles de la Figure 101 sont obtenues. Le temps de calcul est ici d'environ 117 secondes, ce qui est 2 fois plus long que le calcul utilisant la méthode ASC/MR, pour la même qualité de résultats. Cela montre l'efficacité du couplage proposé, associé à une réduction du nombre de degrés de liberté lorsque la condensation est considérée.

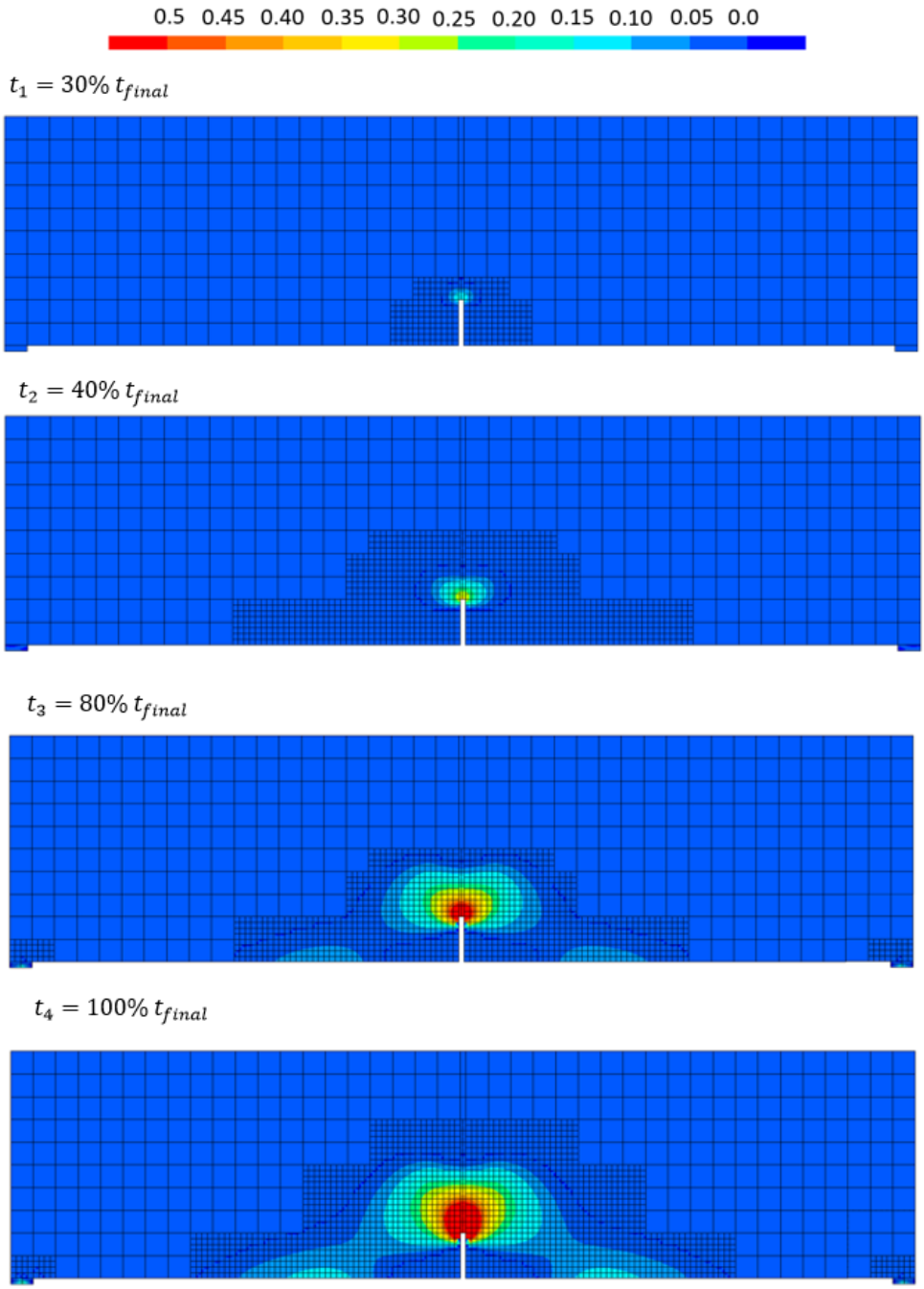

Figure 104 : Evolution du domaine d'intérêt et de l'endommagement sans condensation du domaine élastique

4.4 ENCEINTE DE CONFINEMENT SIMPLIFIÉE SOUS PRESSION (STRUCTURE EN BÉTON ARMÉ)

Un cas test plus représentatif est maintenant étudié. La structure considérée est un cylindre en béton armé surmonté d'un dôme hémisphérique (Figure 105). La structure est soumise à une pression interne. Les principales différences avec l'enceinte simplifiée utilisée dans l'analyse de sensibilité du Chapitre 3 (voir Figure 89) est qu'elle ne comporte qu'une seule ouverture et qu'elle est de dimensions inférieures (3,5 m de haut et 5 cm d'épaisseur avec un rayon externe de 1,75 m). Des relations cinématiques d'adhérence parfaite assurent les mêmes déplacements entre l'acier et le béton. La loi d'endommagement de Mazars est utilisée pour le béton avec les mêmes paramètres utilisés dans 3.2.2. Une loi élastique linéaire est

choisie pour l'acier ($E = 200\,GPa\,; \nu = 0{,}2$). Les déplacements en bas de la structure sont bloqués et la structure est sollicitée par une pression interne croissante jusqu'à $1\,bar$.

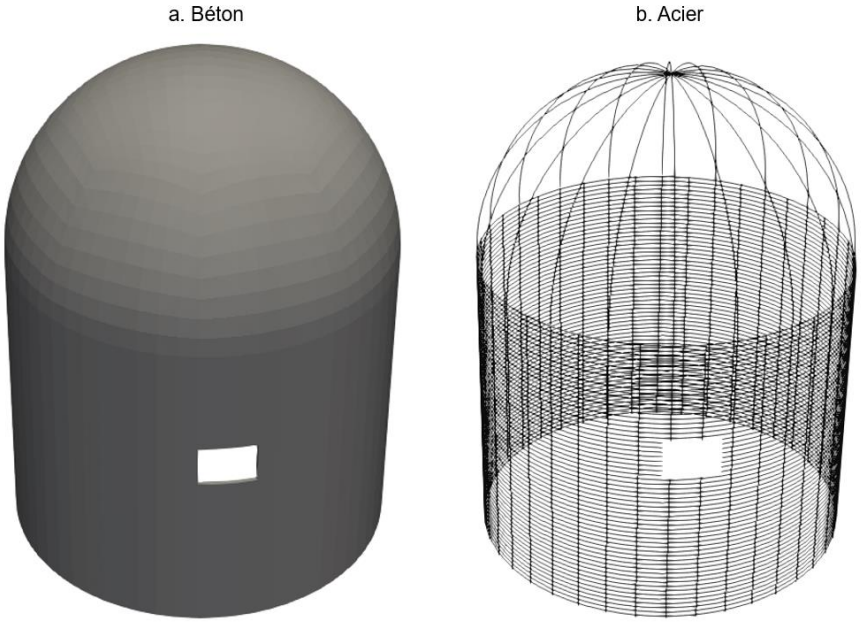

Figure 105 : enceinte simplifiée - ASC/MR

Il est à noter que la présence des renforts en acier nécessite un soin particulier pour le raffinement. Il est d'usage d'inclure au moins un nœud d'acier à l'intérieur de chaque élément du béton traversé par l'armature. Cela suppose donc que les éléments en acier soient également raffinés lors de du raffinement des éléments du béton, jusqu'à ce que chaque élément en béton contienne au moins un nœud d'acier après raffinement. La Figure 106 donne une illustration du raffinement d'une structure en béton armé. Cette étape suppose également de mettre à jour les relations cinématiques (en bleu), y compris pour les nouveaux nœuds acier et béton.

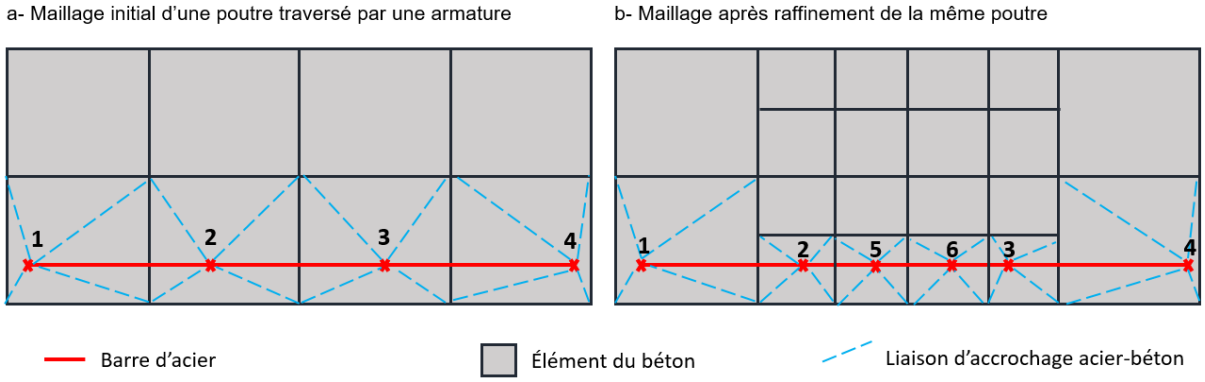

Figure 106 : raffinement de maillage d'une poutre en béton armé

Le béton est maillé avec des éléments finis hexaédriques linéaires (à 8 nœuds) et les armatures sont modélisées avec des éléments barres 1D (diamètre $\phi = 3.2\,cm$). Afin de quantifier l'effet de la densité du maillage, différents maillages ont été utilisés pour cette application (voir Figure 107). Le premier, appelé maillage grossier, contient 1 722 éléments de 20 cm de côté. Le second, appelé maillage moyen est un raffinement d'un facteur 2 du maillage grossier et contient 13 776 hexaèdres de 10 cm de côté. Le troisième (maillage fin) est un raffinement d'un facteur 2 du maillage moyen et contient 110 208 éléments de 5 cm de côté. Le dernier, appelé maillage extra fin, est un raffinement d'un facteur 4 du maillage fin et contient 1 721 600 hexaèdres de côté 1,25 cm. Le maillage extra-fin permet d'appliquer un modèle d'endommagement régularisé pour le béton. Pour chaque maillage, deux calculs sont réalisés : un calcul complet partant d'une finesse de maillage donnée (du maillage grossier au

maillage extra fin) et un calcul ASC partant du maillage grossier avec une de densité cible pour le raffinement correspondant à la densité du maillage du calcul complet. Les trois premiers tests utilisent un modèle d'endommagement local tandis que le quatrième utilise un modèle non local en moyenne. Les détails des quatre tests sont résumés dans la Table 10. Tous les calculs sont effectués sur un nœud de calcul à 24 cœurs et 128 Go de RAM. Il est à noter qu'avec la procédure de raffinement hiérarchique utilisée, lorsqu'on raffine le maillage avec une densité cible, on arrive à une densité très proche (inférieure) mais pas exactement la même que le maillage complet. Avec un modèle d'endommagement local, cette différence peut induire une légère différence dans les résultats.

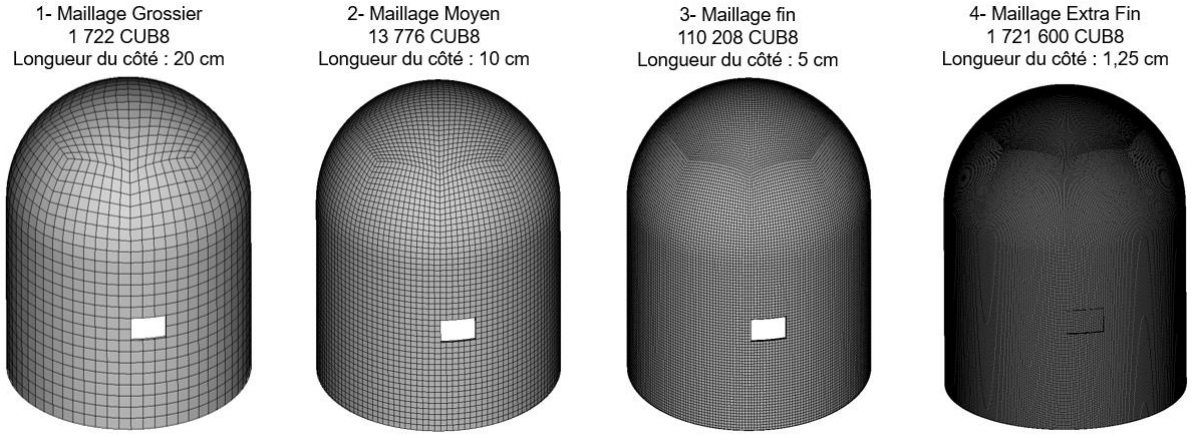

Figure 107 : Les différents maillages utilisés

Table 10 : résumé des tests effectués (DE : Domaine Elastique, DI : Domaine d'Intérêt)

Num. de test	Densité de maillage cible	Maillage du calcul complet	Maillage du calcul ASC/MR	Modèle d'endommagement
1	$20\ cm$	grossier	grossier dans le DE grossier dans le DI	Local
2	$10\ cm$	moyen	grossier dans le DE moyen dans le DI	Local
3	$5\ cm$	fin	grossier dans le DE fin dans le DI	Local
4	$1{,}25\ cm$	extra-fin	grossier dans le DE extra-fin dans le DI	Non-Local $(L_C = 4\ cm)$

La Figure 108 présente le partitionnement du maillage utilisé pour les calculs ASC. Ce maillage est obtenu en utilisant la méthode de partitionnement automatique développée au Chapitre 3. Ce partitionnement est effectué sur le maillage grossier et c'est le même pour tous les calculs ASC car la phase de préparation est toujours effectuée sur le maillage grossier.

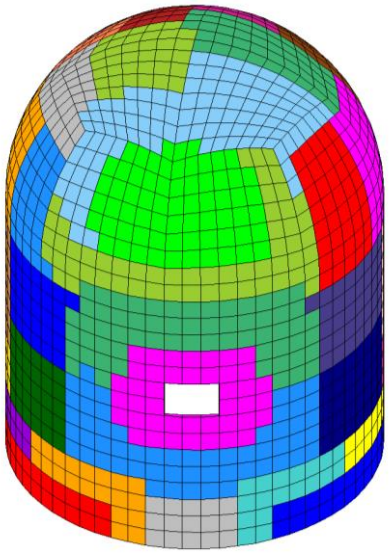

Figure 108 : Partitionnement de maillage utilisé pour les calculs ASC

4.4.1 Présentation des résultats

L'endommagement pour une pression égale à 1 bar lors du premier test est présenté sur la Figure 109. A la fin du calcul, l'endommagement se concentre autour de l'ouverture dans une zone relativement limitée. Cela se traduit par l'activation de la zone entourant l'ouverture lorsque la condensation est utilisée. La même répartition d'endommagement est obtenue dans les deux calculs (Figure 109). Les performances de calcul sont présentées dans la Table 11 et montrent un gain de temps d'un facteur 5,3.

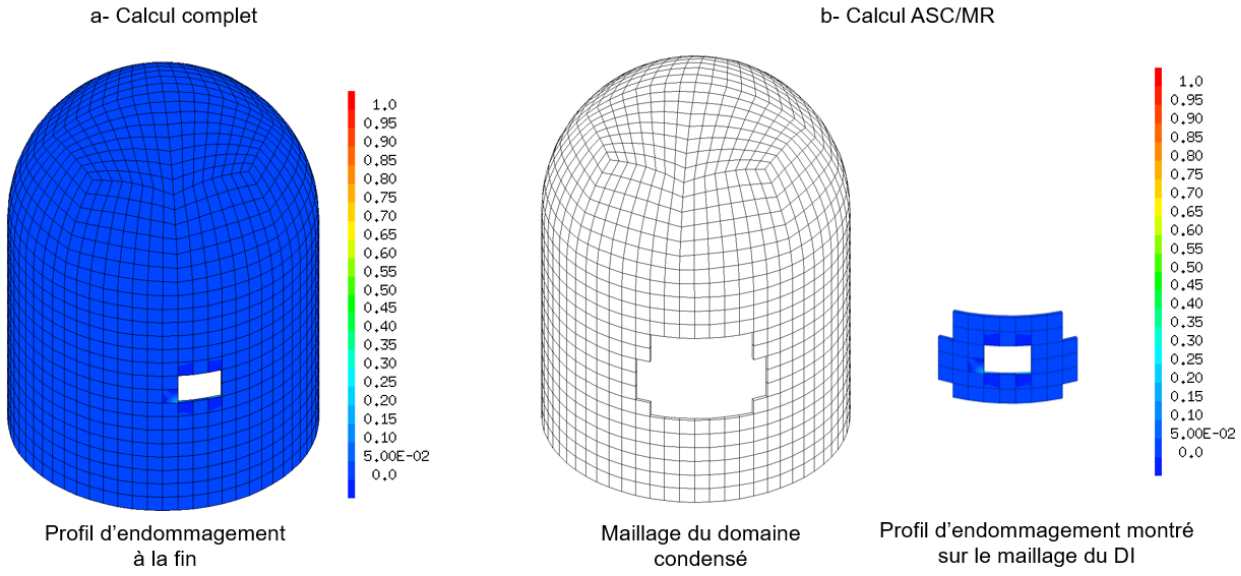

Figure 109 : résultats de calcul du 1er test - Maillage grossier (20 cm)

Table 11 : résultats des performances de calcul – 1er test

	Calcul complet	ASC
Degrés de liberté	39 516	1776
Temps de calcul	96 s	18
Facteur de gain	1	**5. 3**

La Figure 110 montre l'endommagement en fin de calcul avec une pression de 1 bar lors du second test avec le maillage moyen. Les distributions d'endommagement résultant du calcul complet et du calcul ASC/MR sont très proches. Par rapport aux résultats obtenus sur le maillage grossier, la dégradation mécanique est ici plus prononcée. Cela s'est traduit par l'activation des zones de propagation entourant le domaine d'intérêt initial. En ce qui concerne les performances de calcul présentées dans la Table 12, le calcul ASC/MR est environ 13 fois plus rapide que le calcul complet.

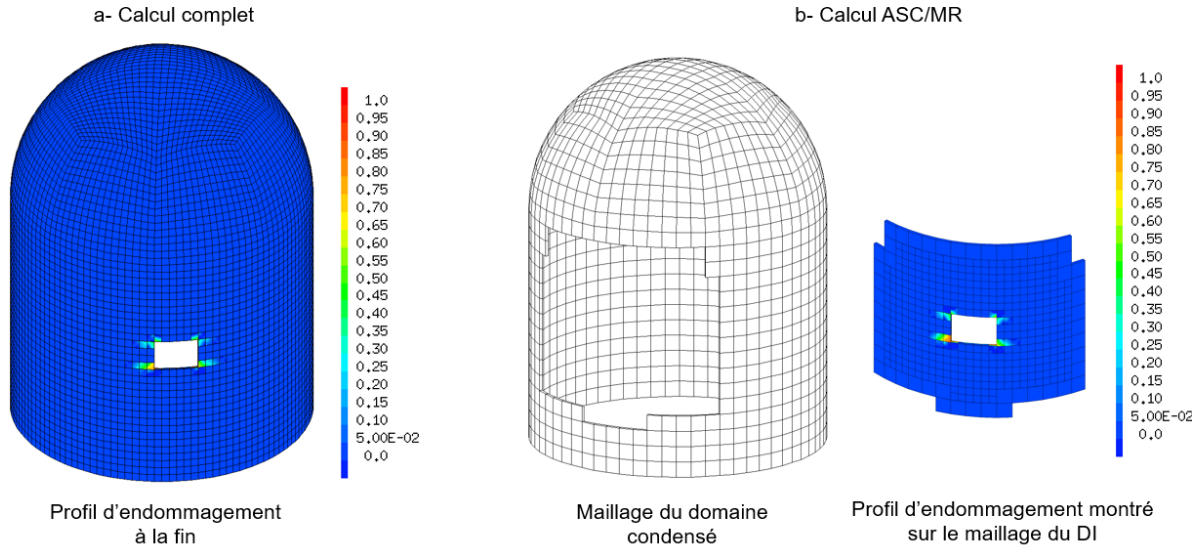

Figure 110 : résultats de calcul du 2ème test - Maillage moyen (10 cm)

Table 12 : résultats des performances de calcul – 2ème test

	Calcul complet	**ASC/MR**
Degrés de liberté	120,780	13,206
Temps de calcul	546 s	40 s
Facteur de gain	1	13.6

L'endommagement à 1 bar de pression dans la troisième configuration est présenté sur la Figure 111. L'endommagement se propage encore plus, avec une zone endommagée importante autour de l'ouverture. Une analyse est effectuée dans la partie suivante (paragraphe 4.4.2) pour comprendre la différence des profils d'endommagement en utilisant ce maillage plus fin. Les performances de calcul présentées dans la Table 13 indiquent un gain d'environ 14 sur le temps de calcul dans ce cas.

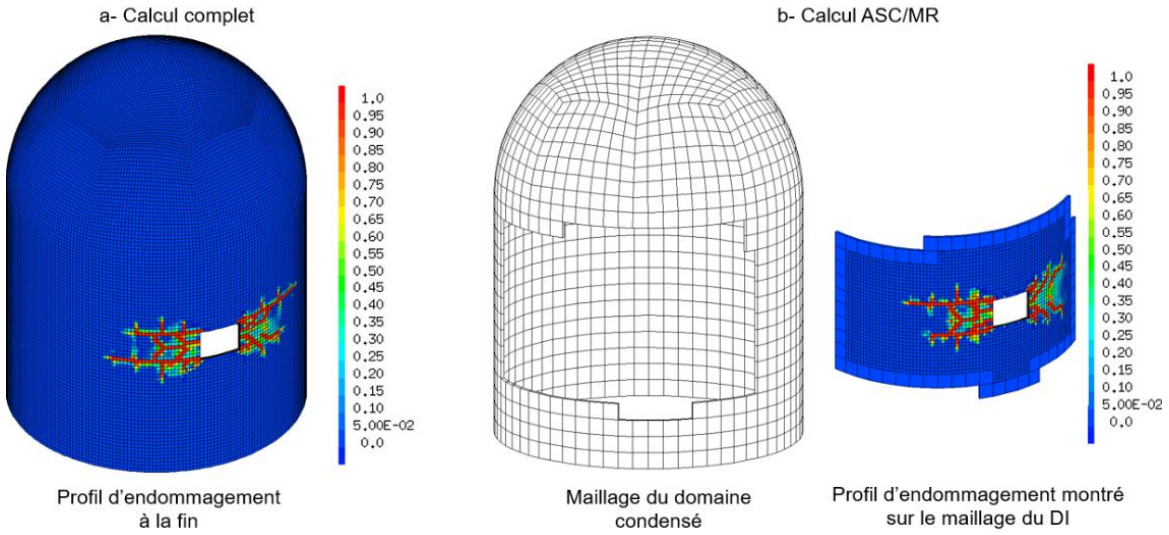

Figure 111 : résultats de calcul du 3ème test - Maillage fin (5 cm)

Table 13 : résultats des performances de calcul – 3ème test

	Calcul complet	**ASC/MR**
Degrés de liberté	533,094	63,540
Temps de calcul	8824 s	631 s
Facteur de gain	1	**13.98**

Le 4ème et dernier test est un calcul avec une taille de maille cible de 1,25 cm, pour permettre l'utilisation d'un modèle d'endommagement non local dans le béton. Un modèle intégral non local est choisi avec une longueur caractéristique $L_C = 4\ cm$. Le calcul complet utilisant le maillage extra fin à environ 6 millions de degrés de libertés.

Le modèle d'endommagement non local est très coûteux. Il consiste, pour chaque élément fini, à rechercher les éléments situés dans un rayon L_C puis à moyenner la déformation équivalente (qui est ensuite utilisée pour calculer l'endommagement) sur les éléments trouvés. Compte tenu du coût numérique de l'utilisation d'un modèle non local et de la finesse du maillage associée, le calcul complet n'a pas pu être mené à son terme car il atteint les limites de mémoire du nœud de calcul. Le calcul utilisant la méthode ASC/MR et partant d'un maillage initial de 20 cm de côté a pu être effectué car il a 18 fois moins de degrés de liberté que le maillage complet (voir Table 14). L'évolution du domaine d'intérêt lors du calcul et les distributions d'endommagement sont présentées sur la Figure 112. Ces profils montrent clairement l'effet du modèle non local avec un endommagement distribué sur une distance liée à la longueur caractéristique. Ce calcul a été effectué en 306 489 secondes (environ 3,5 jours).

La simulation utilisant la méthode ASC sans raffinement de maillage et à partir d'un maillage extra-fin n'a pas pu être mené à son terme pour la même limitation de la mémoire que le calcul complet. Cela témoigne de l'intérêt du couplage ASC/MR.

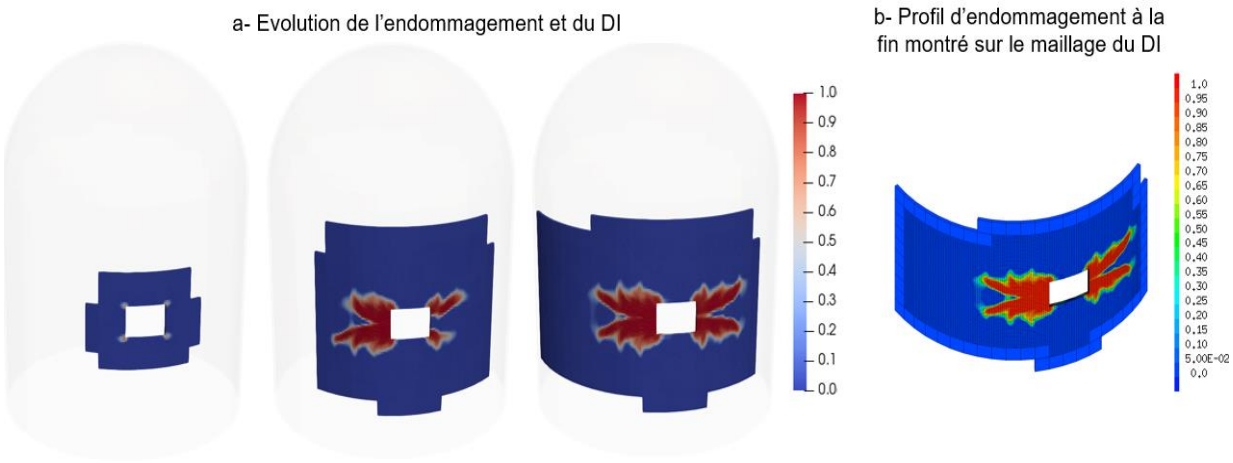

Figure 112 : évolution d'endommagement – Maillage extra fin (1,25 cm)

Table 14 : résultats des performances de calcul – 4ème test

	Calcul complet	ASC/MR
Degrés de liberté	5,998,686	337,200
Temps de calcul	×	306 489 s

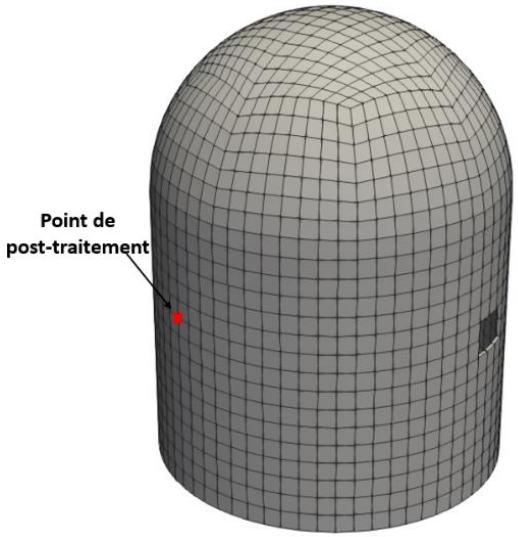

Figure 113 : point de post-traitement

Le déplacement radial d'un point donné (point rouge Figure 113) est tracé en fonction de la pression pour évaluer l'effet du maillage grossier dans le domaine condensé pour les 3 premiers tests. Ces déplacements sont tracés pour les trois premières finesses de maille (grossier, moyen et fin) et comparé avec le calcul complet.

Il est à noter qu'un post-traitement supplémentaire (décondensation) est nécessaire pour obtenir l'évolution du déplacement au point identifié car il n'appartient pas au domaine d'intérêt. Pour le maillage grossier et le maillage moyen, le calcul complet et celui utilisant la méthode ASC donnent des résultats très proches à chaque instant (voir Figure 114-a). Il y a une évolution linéaire entre la pression et les déplacements radiaux. Pour le maillage fin (voir Figure 114-b), une linéarité est observée entre la pression et le déplacement radial avant l'apparition d'un régime non linéaire. Les résultats entre la méthode utilisant l'ASC et le calcul

complet dans la partie linéaire sont identiques. Dans la partie non linéaire, les résultats sont très proches. Cette différence est liée à la légère différence de densité de maillage des deux calculs. Malgré l'absence d'endommagement dans la zone post traitée, la non-linéarité du comportement s'explique par la non-linéarité du comportement global de la structure liée à l'endommagement qui se développe autour de l'ouverture (voir Figure 111). Ce comportement non linéaire global est reproduit par la méthode ASC même en utilisant un maillage grossier dans le domaine condensé, car l'endommagement dans la zone d'intérêt est correctement reproduit.

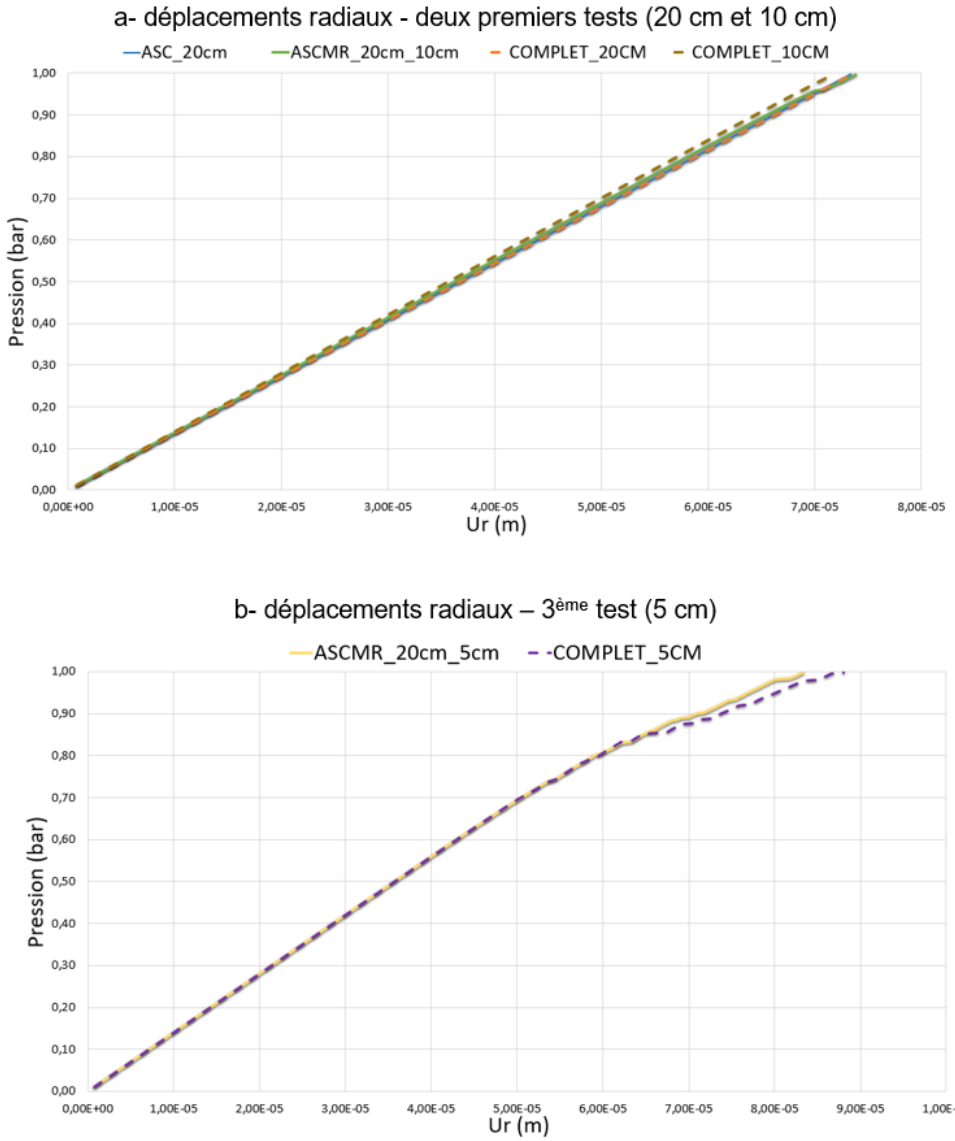

Figure 114 : Comparaison des comportements dans le domaine condensé

4.4.2 Analyse des résultats obtenus

L'objectif de cette partie est de comprendre les différences obtenues dans les profils d'endommagement, à niveau de chargement égal, en utilisant différentes finesses de maillage (Figure 109, Figure 110 et Figure 111). Les déformées à 1 bar, résultant des 3 calculs complets (20, 10 et 5 cm), sont donnés dans la Figure 115. Ces profils montrent que la partie autour de l'ouverture est beaucoup plus déformée dans le calcul de 5 cm que dans les deux autres calculs. Il est à noter que la pression interne est appliquée sur la surface interne de la structure (ouverte) et sans traitement particulier pour remplacer la fenêtre.

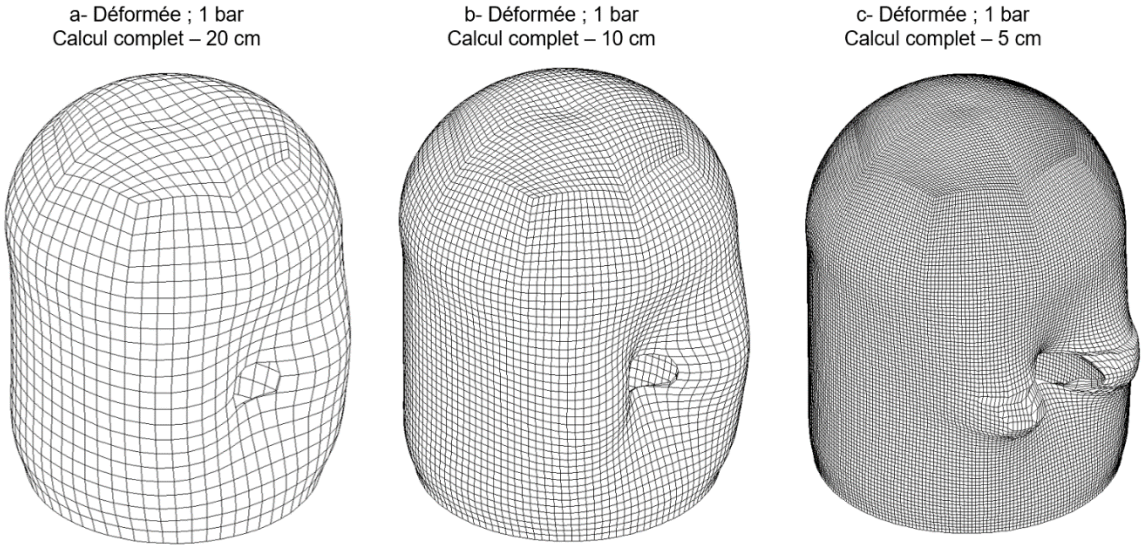

Figure 115 : déformées obtenues, par le calcul complet, à 1 bar, en utilisant différentes finesses de maille

Au-delà de la simple comparaison qualitative de ces déformées, les évolutions des déplacements en trois points de la structure sont également étudiées (voir Figure 116) :

- P_P : un point proche de l'ouverture (un coin de l'ouverture)
- P_M: un point moyennement éloigné de l'ouverture (distante de 1,20 m de l'ouverture)
- P_L : un point loin de l'ouverture (à environ 3,6 m) et qui se trouve dans une zone non endommagée à la fin de tous les calculs.

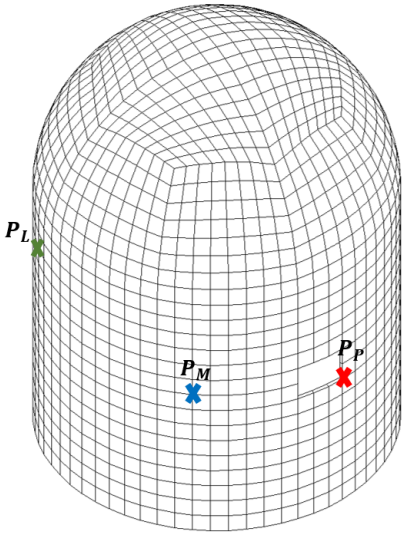

Figure 116 : Les 3 points de post-traitement

La Figure 117 comporte 3 graphiques correspondant à l'évolution des déplacements radiaux des 3 points P_P, P_M et P_L en fonction de la pression pour les trois finesses de maillage. Les résultats obtenus sur le point P_P (Figure 117-a) montrent une grande différence même dans la partie élastique de la courbe. Cette différence est moins importante pour le point P_M. Concernant le point P_L (point le plus éloigné de l'ouverture), les résultats des 3 maillages sont quasiment identiques dans la partie élastique.

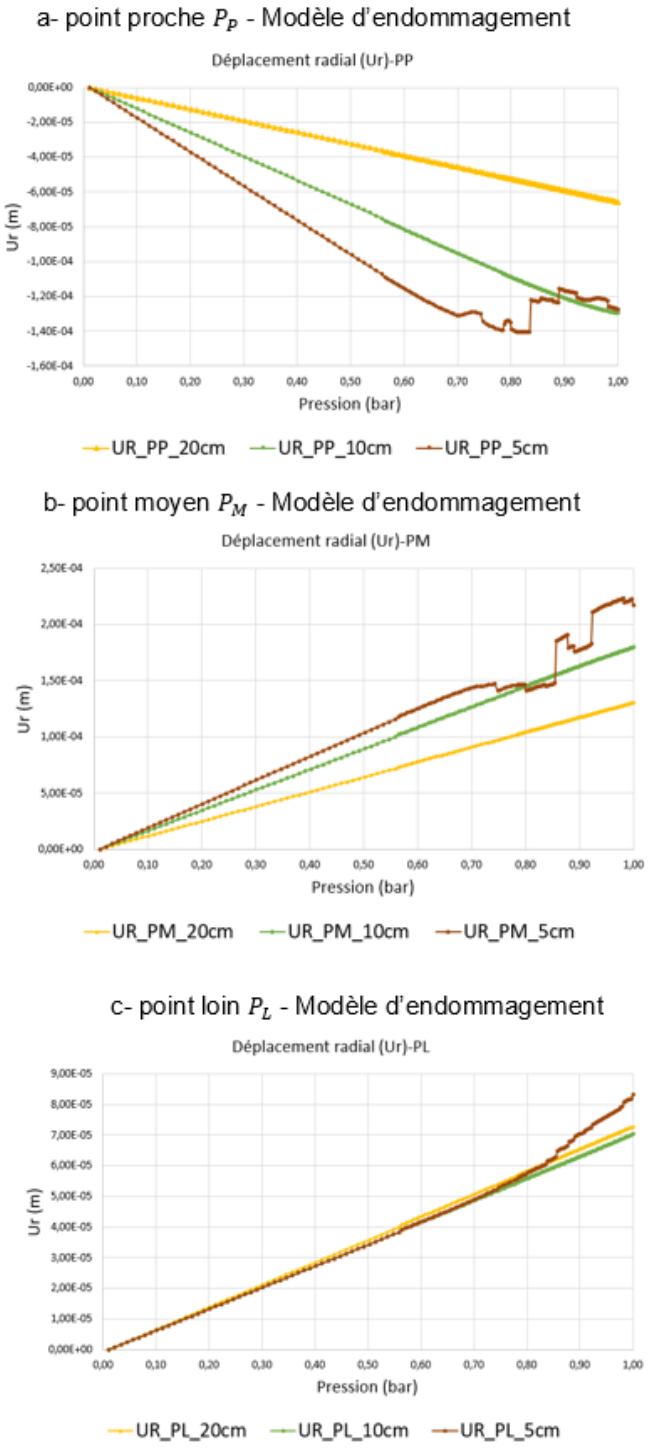

Figure 117 : Déplacements radiaux sur les 3 points de post-traitement et pour 3 finesses de maillage – Modèle de Mazars pour le béton

Afin de s'affranchir de l'effet potentiel de l'endommagement, le même test a été réalisé en utilisant un modèle élastique pour le béton. Les résultats sont donnés dans la Figure 118. Une différence significative dans les résultats est toujours présente en fonction de la finesse de maillage au point P_P, moins importante au point P_M et presque nulle au point P_L. Les déplacements radiaux à 1 bar de pression en fonction de l'angle θ, qui mesure la distance d'un point à l'ouverture, sont tracés pour les différents maillages sur la Figure 119. On retrouve les résultats précédents : la différence des résultats sur les 3 finesses de maillage diminue en s'éloignant de l'ouverture pour avoir la même solution à partir de 100°. Un effet de singularité est donc observé probablement lié à la présence de l'ouverture.

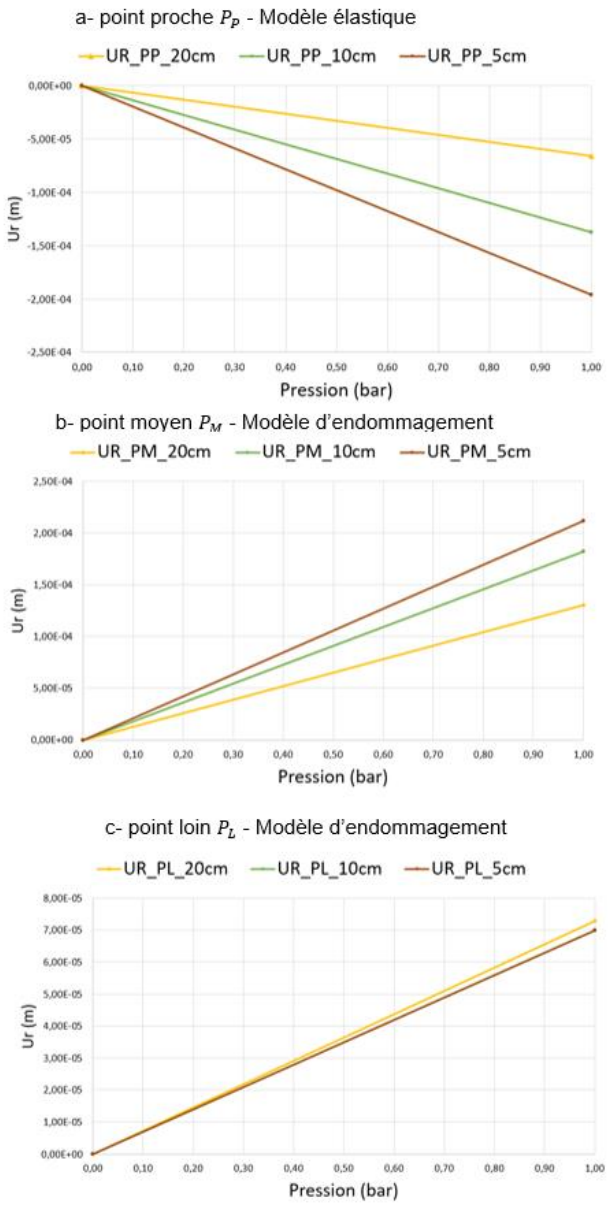

Figure 118 : Déplacements radiaux sur les 3 points de post-traitement et pour 3 finesses de maillage – Modèle élastique pour le béton

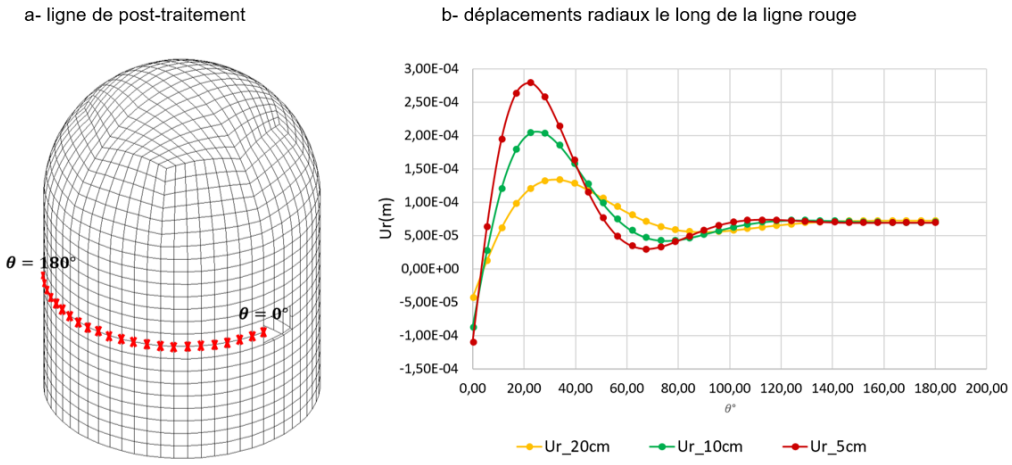

Figure 119 : déplacements radiaux le long de la ligne z = 1,8 m – calcul élastique

Afin de tester cette hypothèse, un autre calcul est effectué, sur la même structure mais sans ouverture (voir Figure 120), toujours en utilisant un modèle élastique pour le béton. Les déplacements radiaux tracés le long de la ligne rouge montrent que sur cette structure, les déplacements issus des 3 maillages sont identiques. Ceci prouve que la différence est liée à l'ouverture présente dans l'enceinte simplifiée. En effet, la géométrie de l'ouverture crée des singularités élastiques. Cet effet permet d'expliquer les fortes différences de distribution d'endommagement observées dans les calculs en fonction du maillage, en plus de la dépendance habituelle au maillage associée à l'utilisation d'un modèle local.

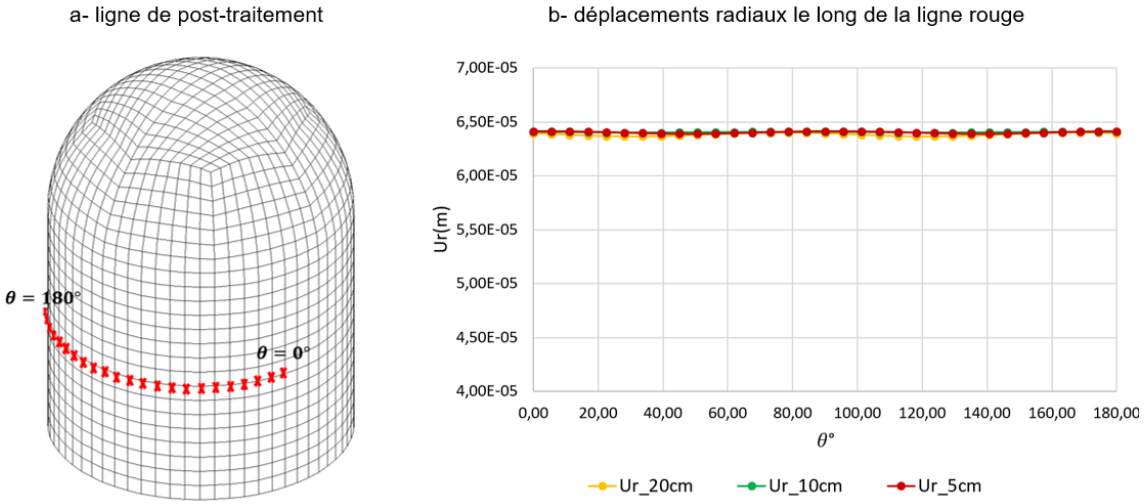

Figure 120 : déplacements radiaux le long de la ligne rouge (z = 1,8 m) – Structure sans ouverture

4.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, la méthode de condensation statique adaptative (ASC) a été couplée à l'approche de raffinement de maillage (MR) pour tirer avantage des deux méthodes. Après une description de l'algorithme de la méthode couplée ASC/MR, une application a été présentée sur une poutre en flexion entaillée. Des résultats identiques sont obtenus entre un calcul complet, un calcul ASC et un calcul ASC/MR partant d'un premier maillage grossier et en raffinant le maillage de l'intérieur du domaine d'intérêt. Un facteur de gain de temps de 9 a été obtenu en utilisant le couplage ASC/MR par rapport au calcul complet contre 6 sans le couplage.

Afin d'évaluer l'efficacité de la nouvelle méthode, une enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne a été étudiée. Plusieurs maillages ont été utilisés et les résultats obtenus avec la méthode ASC/MR ont été comparés à un calcul complet. La méthode ASC/MR permet de réaliser les calculs avec des finesses inaccessibles avec un calcul complet ou ASC. Il permet ainsi l'utilisation de méthode non-locale. Des facteurs de gain jusqu'à 14 par rapport aux calculs complets (lorsqu'ils sont possibles) ont été obtenus.

CHAPITRE 5. APPLICATION DE LA METHODE ASC SUR LA MAQUETTE VERCORS

5.1 INTRODUCTION ET DESCRIPTION DE LA MAQUETTE

L'enceinte de confinement représente la troisième barrière de confinement des réacteurs nucléaires. Elle assure le confinement de substances radioactives en cas de défaillance des deux premières barrières. 24 des 58 réacteurs exploités par EDF disposent d'enceintes de confinement en béton précontraint de type « double paroi » (Bouhjiti 2018). Ce type d'enceinte est composé de deux parois : une paroi externe en béton armé qui a pour rôle d'assurer la protection contre les agressions extérieures et une enceinte interne en béton précontraint qui assure le rôle d'étanchéité. Cette dernière doit résister à une pression accidentelle de 0,5 MPa tout en conservant une étanchéité satisfaisante (taux de fuite inférieur à une valeur seuil réglementaire). Dans le cadre du prolongement de la durée de vie des centrales nucléaires actuelles (1300 MWe et 1450 MWe), EDF a lancé la construction d'une maquette à échelle 1/3 d'un bâtiment réacteur en 2013 : Vercors (VErification Réaliste du COnfinement des RéacteurS) (Figure 121).

a- La maquette Vercos en cours de construction



b- La maquette Vercos à la fin de construction



Figure 121 : La maquette Vercors sur le site EDF Lab. Les Renardières (Mazars, Labbe, and Masson 2016)(Bouhjiti 2018)

La maquette présente, à l'échelle 1/3, la même géométrie qu'une enceinte réelle avec toutes les complexités géométriques : traversées principales, radier, ceinture torique, gousset, câbles avec leurs déviations, etc. (Figure *122* par exemple pour la déviation des câbles). Le rapport d'échelle a été choisi pour étudier expérimentalement les phénomènes de vieillissement de manière accélérée, avec un facteur 9 pour le séchage par exemple. La maquette est très fortement instrumentée avec plus de 700 capteurs et 2 km de fibres optiques pour permettre un suivi détaillé de l'ouvrage. Compte tenu de l'intérêt de la structure (description fine et dimensions géométriques significatives), cette structure a été choisie comme structure cible de la thèse. La méthode ASC, avec les développements apportés dans les chapitres précédents, est donc appliquée à la simulation de la maquette du Vercors. L'étude sera limitée à l'enceinte interne de la maquette. Tous les paramètres matériaux, les maillages, les détails du modèle utilisés dans la suite du chapitre ont été fournis par EDF (Niepceron et al. 2021).



Figure 122 *: ferraillage et câbles de précontrainte en zones déviées d'une enceinte de confinement* (Grotto 2011)

Les différents éléments géométriques de l'enceinte interne de la maquette Vercors ainsi que les dimensions principales sont donnés dans la Figure 123 et dans la Table 15. Cette structure comporte différentes parties :

- le radier a une hauteur de 2m et surmonte un piédestal qui assure la liaison entre le sol et l'enceinte,
- le gousset est l'élément structurel qui assure la liaison entre la jupe et le radier et a une hauteur de 0,68 m,
- la jupe a un rayon interne de 7,30 m, une hauteur de 14,68 m et une épaisseur de 40 cm. La jupe présente quatre traversées mécaniques et qui sont, de la plus grande à la plus petite :
  - ❖ le TAM : tampon d'accès matériel. Au niveau de TAM, le cylindre est renforcé, de l'intérieur et de l'extérieur, par une surépaisseur du béton d'environ 20 cm,
  - ❖ le sas personnel,
  - ❖ la traversée VVP,
  - ❖ la traversée ARE,
- les nervures sont des éléments structurels situés des deux côtés de la jupe, prévus pour l'ancrage des câbles précontraints horizontaux
- la ceinture torique est l'élément structurel qui assure la liaison entre la jupe et le dôme et a une hauteur de 1,65 m.
- le dôme est la structure qui surmonte la jupe. Son centre de courbure est situé à une hauteur de 8,82 m et a un rayon interne de 10,67 m.

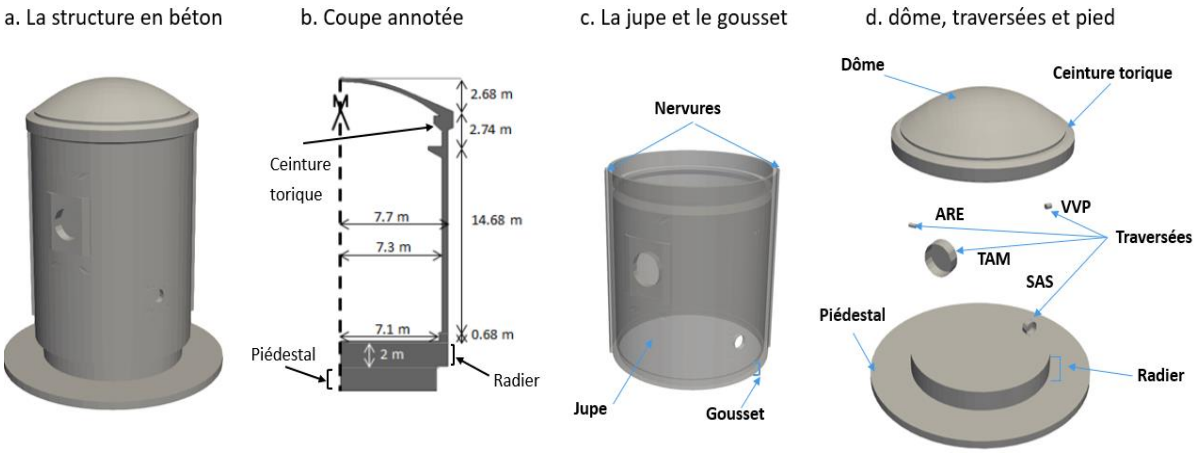

Figure 123 : Géométrie et dimensions de la structure en béton

Table 15 : Principales dimensions de l'enceinte interne de Vercors

Description	**Valeur (en m)**
Hauteur totale (à partir de la base du gousset)	20,79
Rayon interne du cylindre	7,30
Epaisseur du cylindre	0,40
Hauteur du centre de courbure du dôme	8,82
Rayon interne du dôme	10,67
Epaisseur du dôme	0,30
Hauteur du radier	2,00
Rayon du radier	7,70
Hauteur de la ceinture torique	1,65
Epaisseur de la ceinture torique [Bas ; Haut]	[0,70 ; 1,00]
Rayon interne de la ceinture torique [Bas ; Haut]	[7,30 ; 7,00]
Rayon interne du gousset	7,10
Epaisseur du gousset	0,67

5.2 PRECONTRAINTE

Pour éviter des contraintes de traction liées à la mise en pression de l'enceinte interne et préjudiciables en cas d'accident, l'enceinte de confinement interne est mise en précontrainte. Pour représenter cet effet, sur la maquette VERCORS, la précontrainte est assurée à l'aide de 295 câbles qui sont répartis sur l'ensemble de la structure comme suit (Figure 124) :

- 122 câbles horizontaux assurent la précontrainte horizontale dans la jupe et sont ancrés dans les deux nervures verticales. Ils sont espacés de 40 cm en zone courante et de 30 cm dans la ceinture torique (Figure 124 - b),
- 57 câbles verticaux purs assurent la précontrainte verticale dans la jupe et sont ancrés d'une part dans le radier et d'autre part dans la ceinture torique (Figure 124 - c),
- 97 câbles gamma assurent une partie de la précontrainte verticale et une partie de la précontrainte du dôme. Ces câbles sont ancrés en bas dans le radier et en haut dans la ceinture torique (Figure 124 - d),
- 18 câbles du dôme assurent la précontrainte dans le dôme et sont ancrés dans la ceinture torique (Figure 124 - e).

Ces câbles sont groupés puis tendus de manière séquentielle par post-tension aux deux extrémités de chaque câble. L'ensemble de ces câbles doit assurer une contrainte ortho radiale de compression d'une valeur autour 12 MPa dans le béton et d'une contrainte verticale d'environ 8 Mpa (Granger 1995) (Bouhjiti 2018).

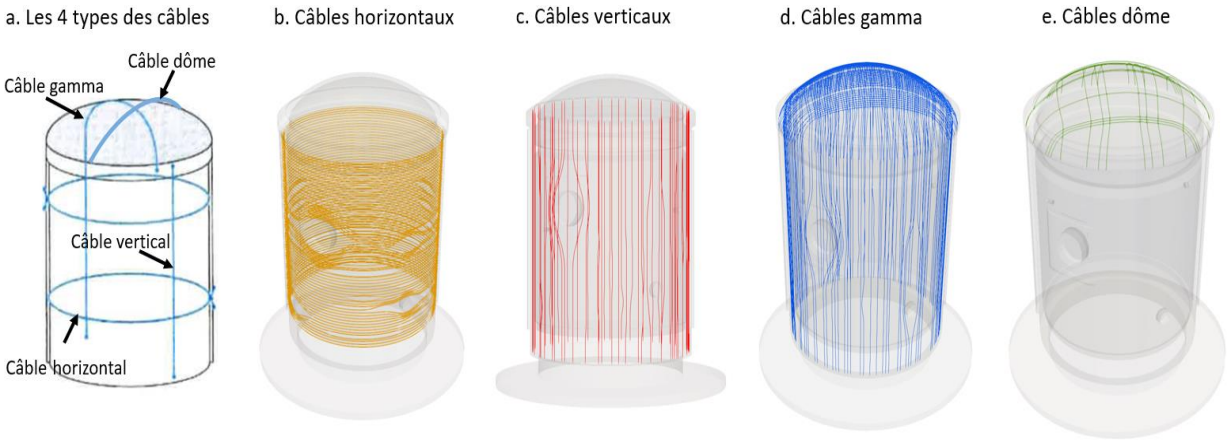

Figure 124 : Câbles précontraints – Vercors

5.3 DESCRIPTION DE LA MODELISATION

5.3.1 Maillage

Les maillages utilisés dans ce chapitre sont réalisés et fournis par EDF. Ces maillages ont été réalisés sur la plateforme Salomé (Ribes and Caremoli 2007) et intègrent toutes les complexités géométriques. Il est à noter que l'utilisation d'un maillage d'étude industrielle permet également de tester l'applicabilité et la robustesse de la méthode ASC.

Dans ce maillage, les éléments de béton sont des éléments volumiques hexaédriques linéaires à 8 nœuds et les câbles de précontrainte sont représentés par des éléments barres linéaires 1D à 2 nœuds. Les renforts passifs ne sont pas représentés. Cette hypothèse est conservée dans nos calculs, même s'il aurait été possible, moyennant un certain nombre de manipulations géométriques, de les intégrer, par exemple avec des coques équivalentes ou par représentation explicite avec des éléments barres. Différentes finesses sont disponibles : un maillage grossier, un maillage fin, un maillage extra fin et un maillage ultra fin. Les différents maillages ainsi que leurs champs de densité[1] sont donnés sur la Figure 125. Les champs de densité montrent que les quatre maillages ont la même distribution spatiale de finesse de maille mais avec des ordres de grandeur différents. Le maillage grossier (champ de densité d_0) contient 40 000 éléments hexaédriques avec des densités comprises entre 100 et 7,5 cm. Les éléments les plus petits sont utilisés dans les zones sensibles, autour des traversées et dans l'épaisseur au niveau du TAM. Le maillage fin (champ de densité d_1) est un raffinement d'un facteur 1,5 du maillage grossier (soit $d_1 = \frac{d_0}{1{,}5}$) . Il contient 170 000 éléments hexaédriques de taille caractéristique variant entre 60 et 5 cm. Le maillage extra fin (champ de densité d_2) est un raffinement d'un facteur 3,5 du maillage grossier (soit $d_2 = \frac{d_0}{3{,}5}$) . Il contient 1 760 000 éléments hexaédriques de finesse variant entre 30 et 2 cm. Le maillage ultra fin (densité d_3) est un raffinement d'un facteur 6 du maillage grossier ($d_3 = \frac{d_0}{6}$) et comprend 17 500 000 éléments hexaédriques de finesse variant entre 13 et 1 cm.

[1] Dans Cast3M la valeur de la densité sur un nœud représente la valeur moyenne des longueurs des côtés qui le traversent

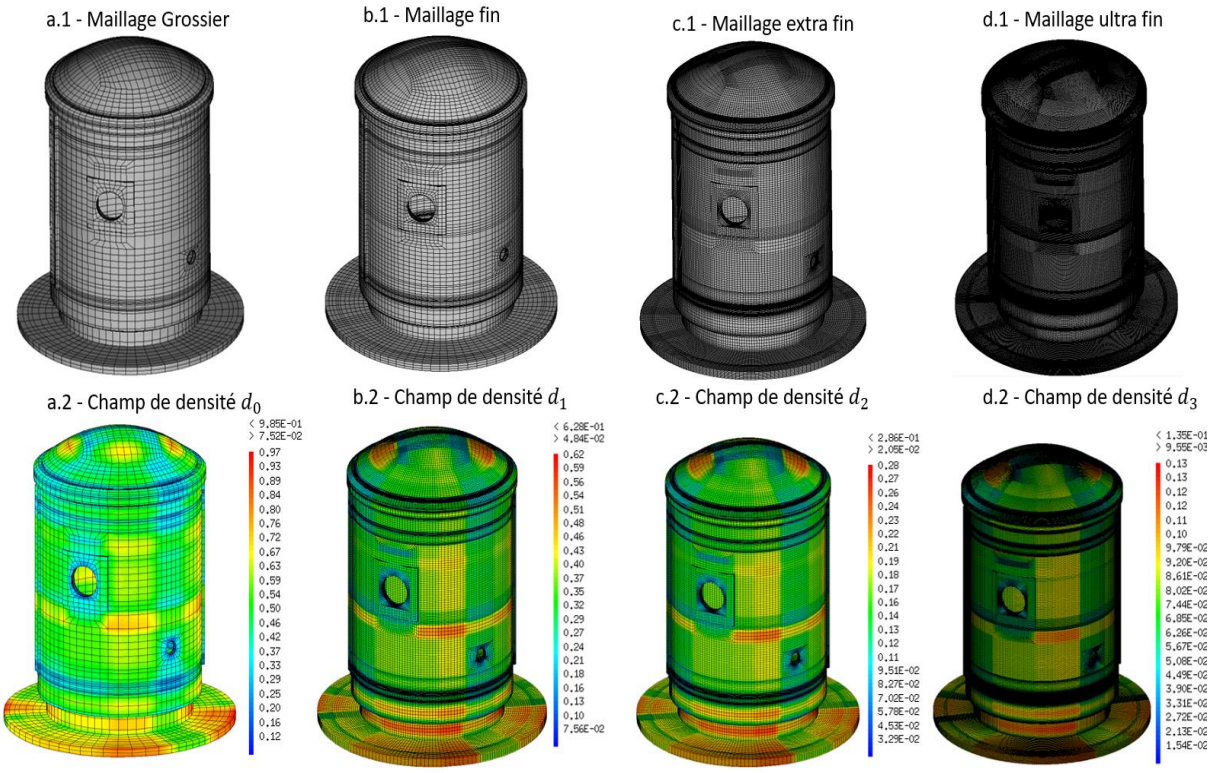

Figure 125 : les différents maillages de Vercors

5.3.2 Modèles et matériaux

Pour éviter une localisation forte de la dégradation mécanique dans les nervures, dans le gousset et dans la ceinture torique, lieux d'ancrage des câbles de précontrainte, les éléments correspondants restent élastiques. Le béton du dôme est également considéré élastique dans cette application car pour la démonstration du calcul, nous ne nous intéressons qu'à la jupe, le radier et le piédestal qui sont modélisés à l'aide du modèle d'endommagement de Mazars (Mazars, Hamon, and Grange 2015). Les paramètres utilisés, présentés dans la Table 16 donnent une résistance à la compression de 48 MPa à 28 jours et une résistance à la traction de 4,4 MPa. Compte tenu de la taille des éléments et de la valeur classiquement retenue pour la longueur caractéristique, qui est liée à la taille de l'agrégat dans le béton et ne dépasse pas quelques centimètres, les calculs sur les 3 premiers maillages (grossier, fin et extra fin) utiliseront un modèle local, tandis qu'un modèle non local en moyenne pourra être utilisé sur le maillage ultra fin avec une longueur caractéristique $L_c = 8\ cm$. Pour les câbles, on considère une loi élastique linéaire avec un module de Young $E = 190\ GPa$ une masse volumique $\rho = 7850\ Kg.m^{-3}$ et de diamètre $\emptyset = 26{,}6\ mm$ (Table 17). Les coefficients associés aux pertes quasi-instantanées de précontrainte sont donnés dans la Table 17 (Niepceron et al. 2021).

Table 16 : Paramètres de Mazars - béton de Vercors

E	ν	A_T	B_T	A_C	B_C	ε_0
38 GPa	0,2	0,9	10^4	1,10	1300	$1{,}16 \times 10^{-4}$

Table 17 : Caractéristiques mécaniques des câbles précontraints

	Symbole	Câbles Gamma	Câbles Dôme	Câbles Verticaux	Câbles Horizontaux
Module d'Young (GPa)	E	190	190	190	190
Section (mm^2)	A_s	556	556	556	556
Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	ρ_s	7850	7850	7850	7850
Coef. de frottement angulaire (rad^{-1})	μ	0,16	0,16	0,16	0,17
Coef. de frottement linéaire (m^{-1})	k	8×10^{-4}	$1{,}5 \times 10^{-3}$	8×10^{-4}	$1{,}5 \times 10^{-3}$
Relaxation à 1000 heures (%)	ρ_{1000}	2,5	2,5	2,5	2,5
Glissement à l'ancrage (mm)	-	8 mm	8 mm	8 mm	8 mm
Force de Tension (kN)	F_0	826	826	826	826

5.3.3 Conditions aux limites et chargements considérés

La condition aux limites principale correspond à l'encastrement de la surface inférieure du radier (déplacements nuls dans les trois directions). Une adhérence parfaite est considérée entre le béton et les câbles précontraints. L'effet du jeune âge n'est pas pris en compte, c'est-à-dire que les contraintes et déformations initiales (avant précontrainte) sont nulles. Ce type de chargement n'est pas encore prévu dans la méthode ASC et constitue une des voies d'amélioration de la méthode. Par souci de simplicité, l'ensemble des câbles sont tendus simultanément. Ce choix n'a que peu d'impact sur les résultats de la simulation selon (Niepceron et al. 2021).

Après la phase de précontrainte, une pression interne, égale à 5,2 bars, est imposée sur la surface interne de la structure en différents instants. Ces différents instants sont choisis pour correspondre au planning expérimental des essais de mise en pression : de la première visite VO1 (effectuée à 191 jours après la fin du coulage du béton) juqu'à la dernière visite VD6 (effectuée à 2528 jours après la fin du coulage du béton). Dans ce qui suit, $t_0 = 0$ est considéré comme l'instant de fin du coulage du béton. Il est à noter que la valeur de pression appliquée numériquemet (5,2 bars) est supérieure à la pression expérimentale (4,2 bars), afin de pouvoir observer numériquement de l'endommagement pendant la phase de mise en pression. En effet, en l'absence des fissures initiales liées au jeune âge, une pression de 4,2 bars ne modifierait pas significativement l'état d'endommagement de la structure. Plusieurs scénarii de simulation sont considérés :

- Calcul VO1 :
  - Etape 1 : mise en précontrainte de tous les câbles à $t_1 = 85$ jours
  - Etape 2 : prise en compte du fluage et du retrait entre t_0 et $t_2 = 191$ jours. Les paramètres utilisés pour le calcul du fluage et du retrait à t_2 sont donnés dans la Table 18.
  - Etape 3 : pressurisation de la surface interne de l'enceinte jusqu'à 5,2 bars pendant 12 heures. Le fluage et le retrait ne sont pas pris en compte pendant cette phase car leur effet est négligeable en raison de la courte durée.

- Calcul VD6 :
  - Etape 1 : mise en précontrainte de tous les câbles à $t_1 = 85$ jours
  - Etape 2 : prise en compte du fluage et du retrait entre t_0 et $t_3 = 2528$ jours. Les paramètres utilisés pour le calcul du fluage et du retrait à t_3 sont donnés sur la Table 18.
  - Etape 3 : pressurisation de la surface interne de l'enceinte jusqu'à 5,2 bars pendant 12 heures. Le fluage et le retrait ne sont pas pris en compte pendant cette phase car leur effet est négligeable en raison de la courte durée.

Table 18 : paramètres de retrait et fluage (BPEL 99) - Vercors

	Rayon de séchage : $\boldsymbol{r_m(cm)}$	Taux d'humidité : $\boldsymbol{\rho_h}$ (%)	Taux d'armature passive : $\boldsymbol{\rho_s}$ (%)
A $\boldsymbol{t_2 = 191}$ jours	20	70	5,94
A $\boldsymbol{t_3 = 2528}$ jours	20	30	5,94

5.3.4 Partitionnement initial du maillage

Le partitionnement du maillage de la maquette Vercors obtenu avec la procédure de partitionnement automatique développée au Chapitre 3 est donné sur la Figure 126-a. Comme attendu, ce partitionnement donne des zones à risques initiales autour des traversées. Néanmoins, l'utilisation de cette discrétisation initiale avec la technique de raffinement de maillage a conduit à des difficultés numériques, notamment liées à l'implémentation de la méthode de raffinement dans Cast3M. Son amélioration, qui n'est pas en lien direct avec les objectifs de la thèse, n'a pu être menée à son terme. Ainsi, il a été choisi d'utiliser un partitionnement de maillage réalisé manuellement, reprenant les tendances du découpage automatique et limitant les zones de forme trop complexe. Il contient 53 zones : une zone autour de chaque traversée, une zone pour les éléments de béton conservant un comportement élastique (en jaune sur la Figure 126-b) et 48 zones de taille équivalente pour le reste de la structure.

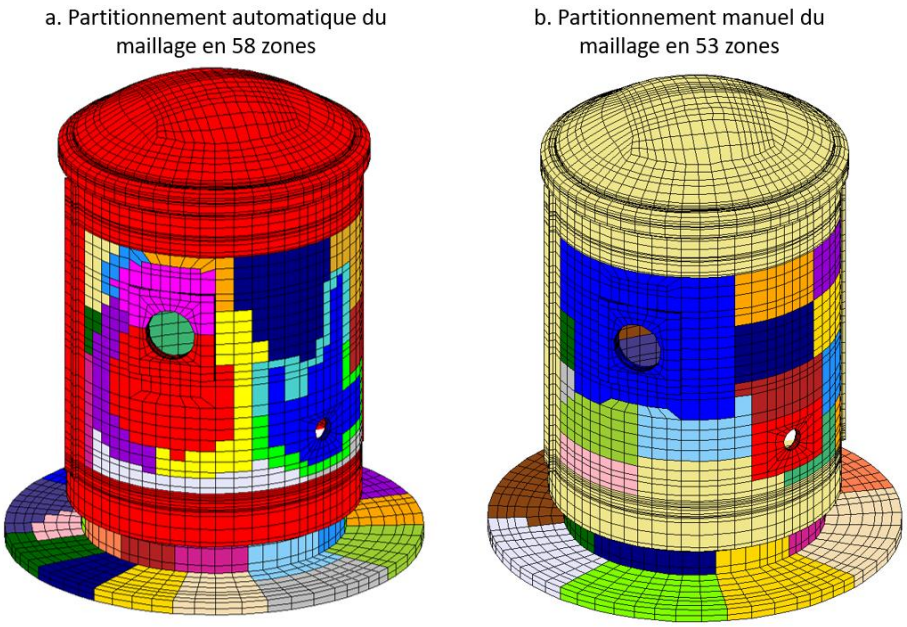

Figure 126 : Partitionnement de maillage pour la maquette VERCORS

5.3.5 Configuration de calcul

Tous les calculs sont effectués sur des nœud de calcul identiques, disposant de 48 cœurs avec une mémoire de 256 Go.

5.4 VALIDATION DE LA METHODE SUR LE MAILLAGE GROSSIER

5.4.1 Calcul VO1

Pour ce scénario, un calcul complet et un calcul ASC sont effectués sur le maillage grossier et sans utiliser le raffinement de maillage. Les distributions des contraintes orthoradiales et des contraintes verticales à $t_2 = 191$ jours (temps de début de pressurisation lors de la première visite) résultant du calcul complet et du calcul ASC sont présentées sur la Figure 127. La contrainte de compression orthoradiale dans la majeure partie de la jupe varie entre 10 et 12 MPa. Une répartition particulière est constatée autour des traversées. La contrainte orthoradiale en haut et en bas du TAM atteint 20 MPa alors qu'à gauche et à droite elle est inférieure à 2 MPa. Ceci est lié à la concentration des câbles horizontaux en haut et en bas des traversées (voir Figure 124) qui suivent les formes des traversées et qui conduit à des valeurs de contraintes élevées à ces endroits. La contrainte verticale varie entre 6 et 9 MPa sur la majeure partie de la jupe et atteint environ 10 MPa de part et d'autre du sas. Les profils d'endommagement et les déformées à $t_2 = 191$ jours issus des deux calculs, sont présentés sur la Figure 128. Ils montrent de faibles endommagements répartis en haut et en bas des traversées. Ceci est probablement lié à la concentration de contrainte orthoradiale obtenue en ces endroits sur la Figure 127. En réalité, cet endommagement est évité grâce à un renforcement supplémentaire des armatures passives autour des zones sensibles telles que la TAM. Les déformées illustrées sur la Figure 128 montrent la mise en compression liée à la précontrainte. Les profils issus du calcul complet sont similaires à ceux issus du calcul ASC au niveau du domaine d'intérêt.

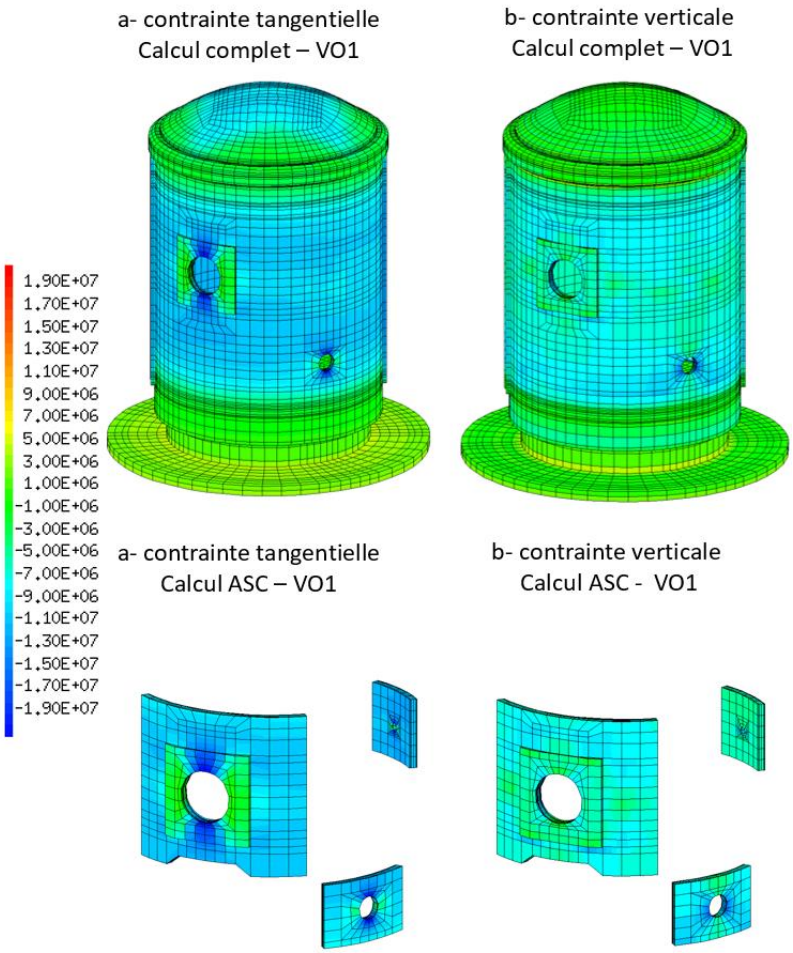

Figure 127 : Contrainte orthoradiale et verticale à 191 jours avant mise en pression - calcul complet et calcul ASC

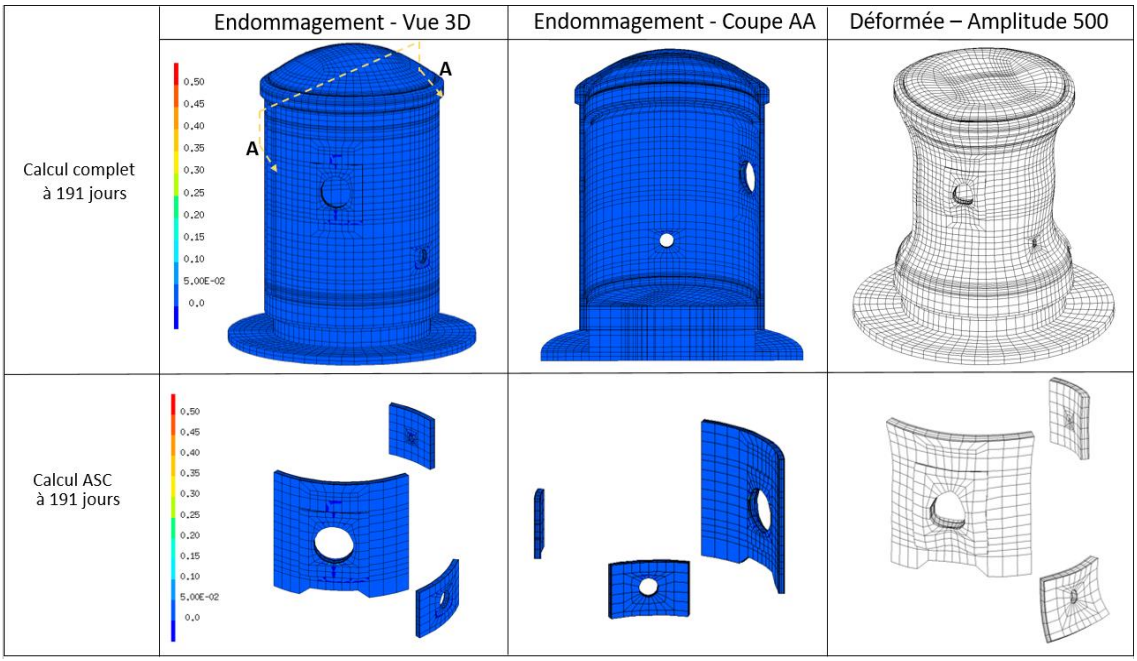

Figure 128 : Résultats (endommagement et déformée) à 191 jours, avant mise en pression, issus du calcul complet et du calcul ASC

Afin de voir l'effet du fluage et du retrait lors de la visite VO1 ($t_2 = 191$ jours) et de comparer les résultats obtenus dans les deux calculs, les profils de tension le long de 4 câbles (un câble de chaque type) sont tracés. A part le câble du dôme, les câbles sont choisis de manière à traverser le domaine d'intérêt afin de pouvoir comparer directement les résultats des deux calculs sans avoir recours à la décondensation. Le câble vertical choisi est celui représenté en rouge sur la Figure 129-a et traverse le domaine d'intérêt comme montré sur la Figure 129-b. Son profil de tension à 191 jours est donné dans la Figure 129-c en prenant ou non en compte l'effet des déformations différées. Dans les deux cas, une baisse de la tension est observée en s'éloignant de l'ancrage avec diminution significative au niveau de la déviation du câble. Ceci est dû aux pertes de frottement linéaire (pour la partie strictement vertical) et angulaire (pour la partie déviée). Une perte de précontrainte d'environ 3 % résulte de la prise en compte des déformations différées. A configuration identique, une correspondance parfaite est trouvée entre le profil de tension obtenu par calcul complet et celui issu de l'application de la méthode ASC.

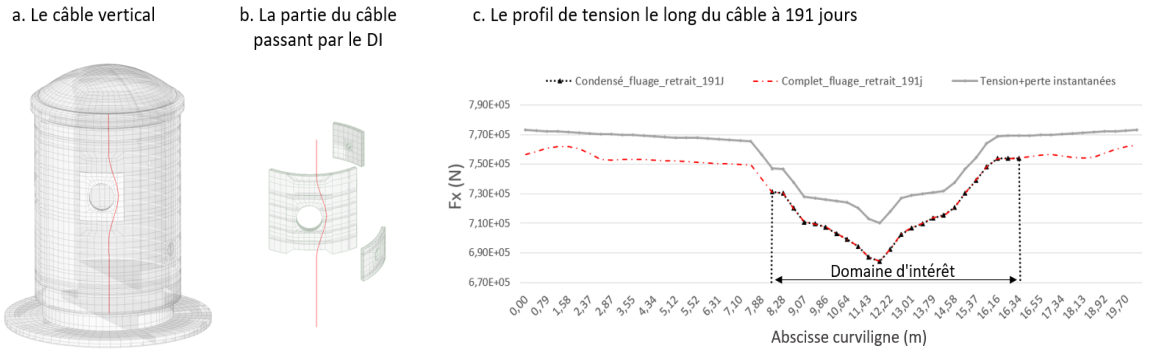

Figure 129 : câble vertical – Vercors – 191 jours, avant mise en pression

Le câble horizontal étudié est celui présenté en orange sur la Figure 130-a. Il traverse deux zones distinctes du domaine d'intérêt (Figure 130-b). Les profils de tension sont donnés sur la Figure 130-c à 191 jours. Des tendances identiques à celles du câble vertical son observées. Une perte de précontrainte d'environ 5 % résulte de l'application des déformations différées. Le profil de tension des deux parties du câble traversant le domaine d'intérêt montre une correspondance parfaite avec les résultats du calcul complet, à configuration de calcul identique.

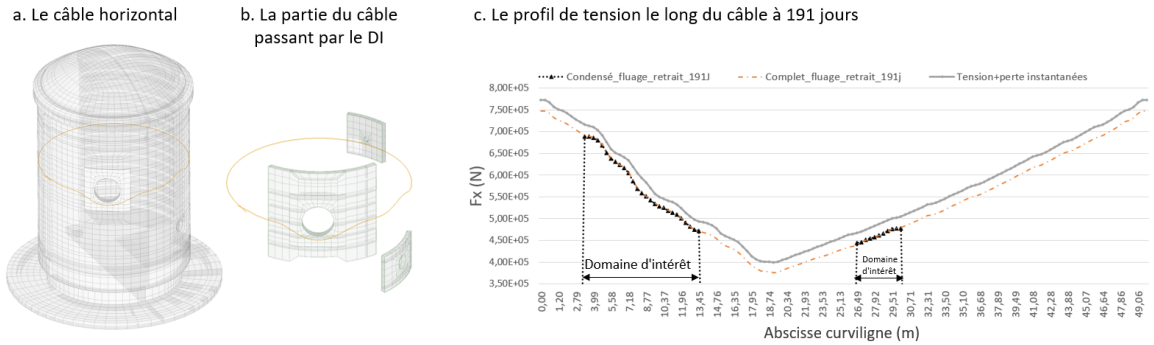

Figure 130 : câble horizontal – Vercors – 191 jours, avant mise en pression

Le câble gamma étudié est celui présenté en bleu sur la Figure 131-a et traverse une zone du domaine d'intérêt (Figure 131-b). Les profils de tension à 191 jours sont donnés sur la Figure 131-c. La perte de précontrainte liée aux déformations différées est estimée à environ 3 %. Ces profils montrent une chute importante de la tension des câbles au niveau de la liaison fut/dôme. Ceci est lié à la forte déviation du câble qui induit une perte significative par frottement angulaire. Pour ce câble également, les résultats du calcul ASC sont identiques à ceux du calcul complet.

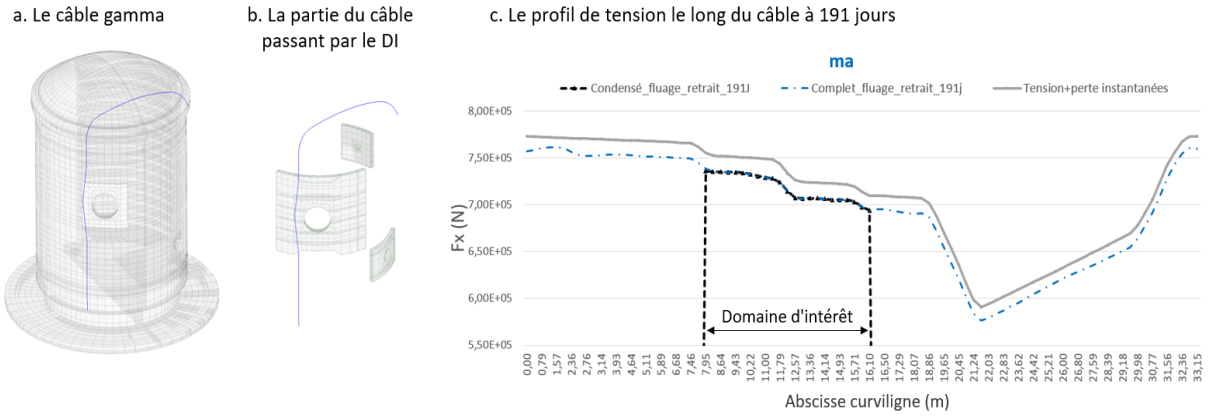

Figure 131 : câble gamma – Vercors – 191 jours, avant mise en pression

Comme aucun câble du dôme ne traverse le domaine d'intérêt, le câble a été choisi arbitrairement (Figure 129 a). Les profils de tension à 191 jours sont illustrés dans la Figure 132-b. Pour ce câble également, les pertes instantanées sont d'autant plus importantes que l'on s'éloigne de l'ancrage. Une perte de précontrainte liée à la déformation différée de l'ordre de 1,5% est observée.

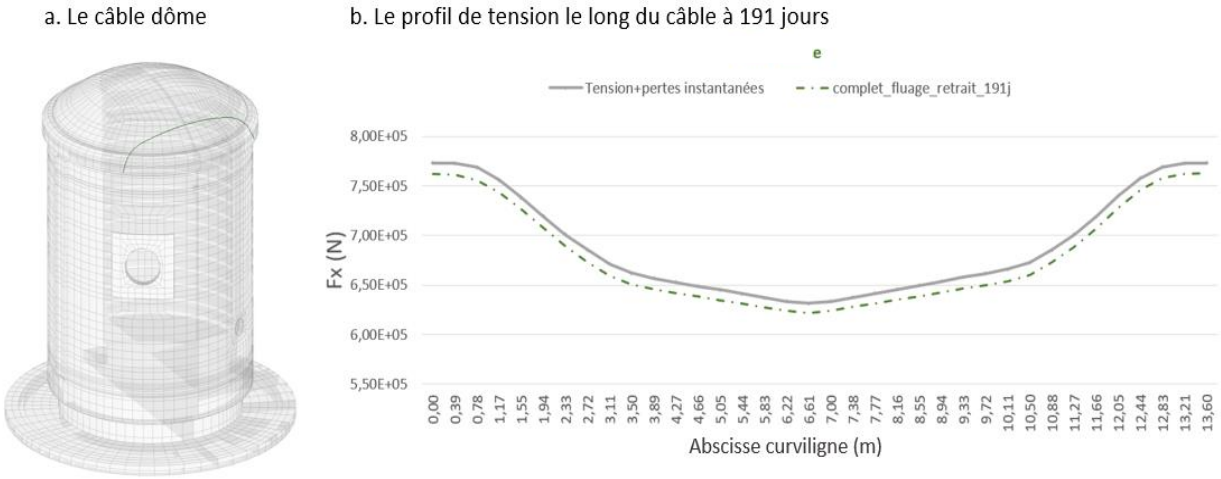

Figure 132 : câble dôme – Vercors – 191 jours, avant mise en pression

A 191 jours, la structure est pressurisée pendant 12 heures pour atteindre 5,2 bars à 191,5 jours. Les évolutions du déplacement radial d'un point situé à la surface de la jupe en fonction du temps sont données sur la Figure 133. Les deux simulations ASC et calcul complet donnent des résultats identiques. Entre 0 et 85 jours, l'augmentation du déplacement centripète est due au retrait et au fluage du béton lié au poids propre de la structure. Après la brusque augmentation liée à la mise en précontrainte à 85 jours, le déplacement continue d'augmenter significativement d'environ -2,2 mm à -3,50 mm à 191 jours, toujours en direction de l'axe de l'enceinte, en raison du fluage et du retrait. La mise en pression « regonfle » l'enceinte et le déplacement radial au point post-traité redescend à environ -1,6 mm en fin de mise en pression.

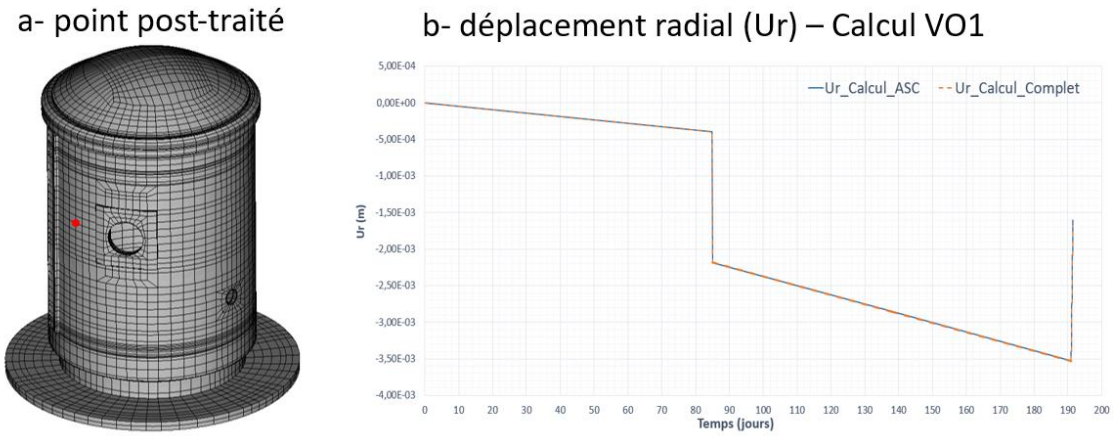

Figure 133 : évolution du déplacement radial au cours du temps - VO1

La Figure 134 donne l'évolution dans le temps de la contrainte orthoradiale et verticale dans le béton au niveau du point post-traité de la Figure 133. Ces évolutions montrent une baisse de la contrainte de compression dans le béton entre 85 et 191 jours liée au fluage et au retrait. Néanmoins, en fin de pressurisation, le béton reste à cet endroit comprimé. Les profils de l'endommagement en fin de mise en pression sont donnés sur la Figure 135. L'endommagement est présent sur la face intérieure de la jupe proche du TAM. Il y a également un léger endommagement sur la face extérieure de la jupe proche du TAM et des autres traversées.

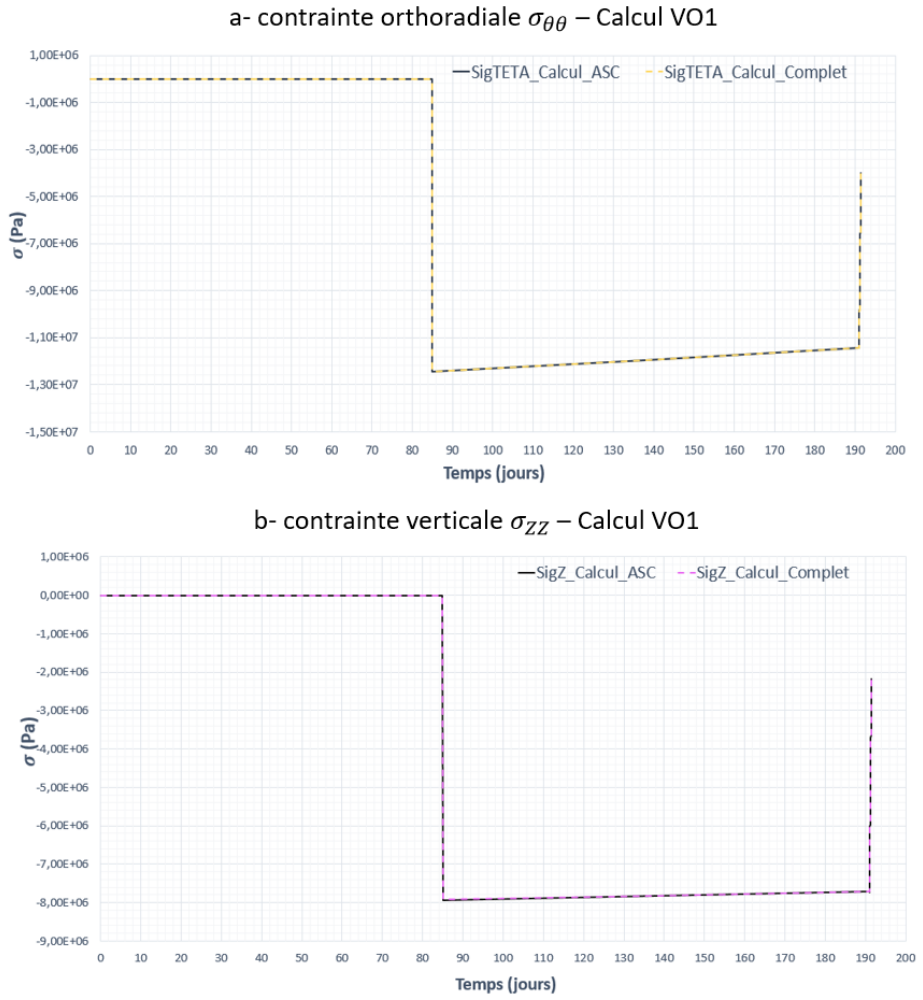

Figure 134 : évolution des contraintes avec le temps - calcul complet et calcul ASC – VO1

Les performances numériques de ce calcul sont données dans la Table 19. Aucune évolution du domaine d'intérêt n'a été nécessaire dans ce calcul. Le nombre de pas de calcul avec la méthode ASC est donc le même que celui du calcul complet. Le calcul ASC contient environ 10 fois moins de degrés de libertés que le calcul complet et il est environ 5 fois plus rapide.

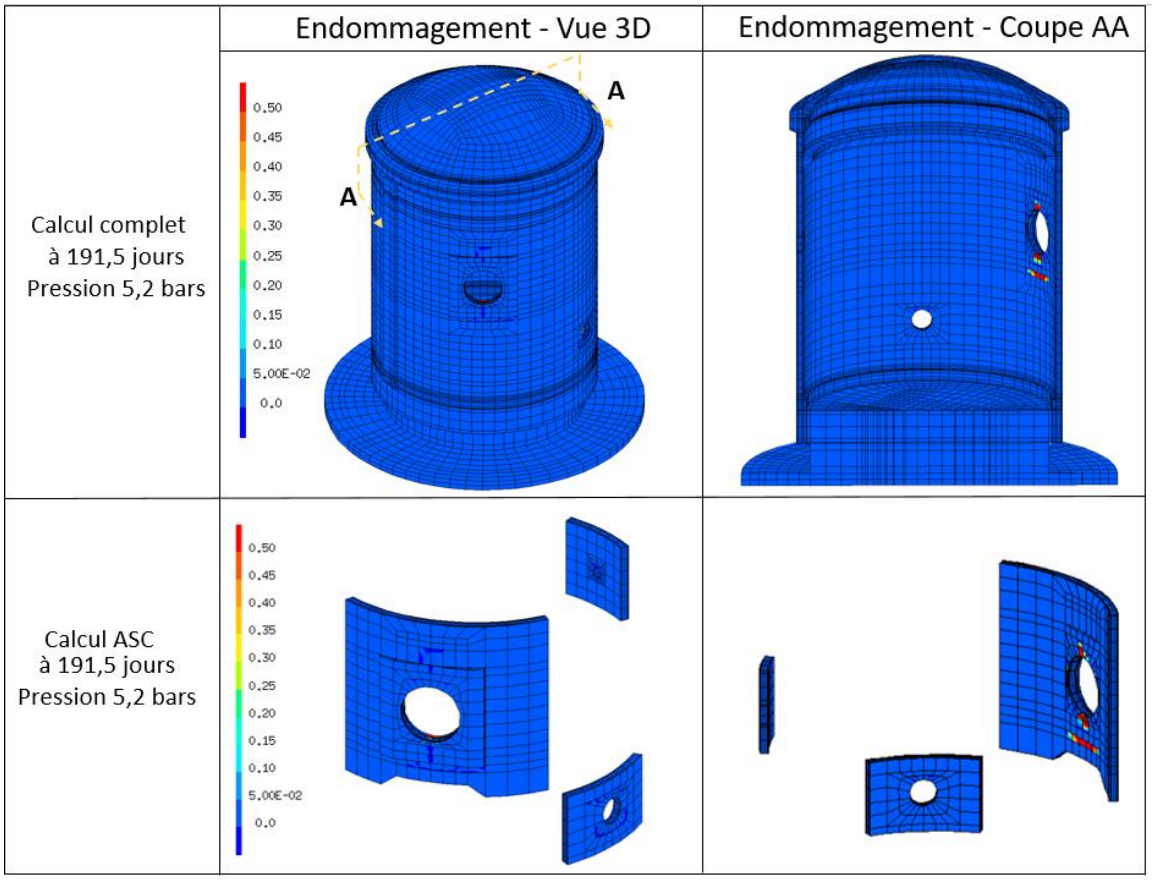

Figure 135 : Endommagement à 191,5 jours, fin de mise en pression - calcul complet et calcul ASC

Table 19 : Résultats de performance de calcul - Vercors - Calcul VO1

	Calcul complet	**ASC**
ddl	321 837	29 370
Nombre de pas	107	107
Temps de calcul	2020 s	399 s
Facteur de gain	1	5,06

5.4.2 Calcul VD6

Les profils de tension le long des 4 câbles identifiés dans la partie précédente sont présentés sur les Figure 136 à Figure 139. Le temps de post-traitement correspond au temps avant application de la pression interne, soit 2528 jours pour le calcul VD6. Les profils obtenus à la mise en tension et à 191 jours sont également reportés sur les figures. La perte correspondant

au fluage et au retrait à 2528 jours pour le câble vertical (Figure 136) est d'environ 14% (contre 3% à 191 jours), pour le câble horizontal (Figure 137) d'environ 20% (contre 5% à 191 jours), pour le câble gamma (Figure 138) d'environ 12 % (contre 3 % à 191 jours) et pour le câble du dôme (Figure 139) d'environ 9 % (contre 1,5 % à 191 jours). Les résultats du calcul ASC sont similaires à ceux du calcul complet pour les câbles traversant le domaine d'intérêt.

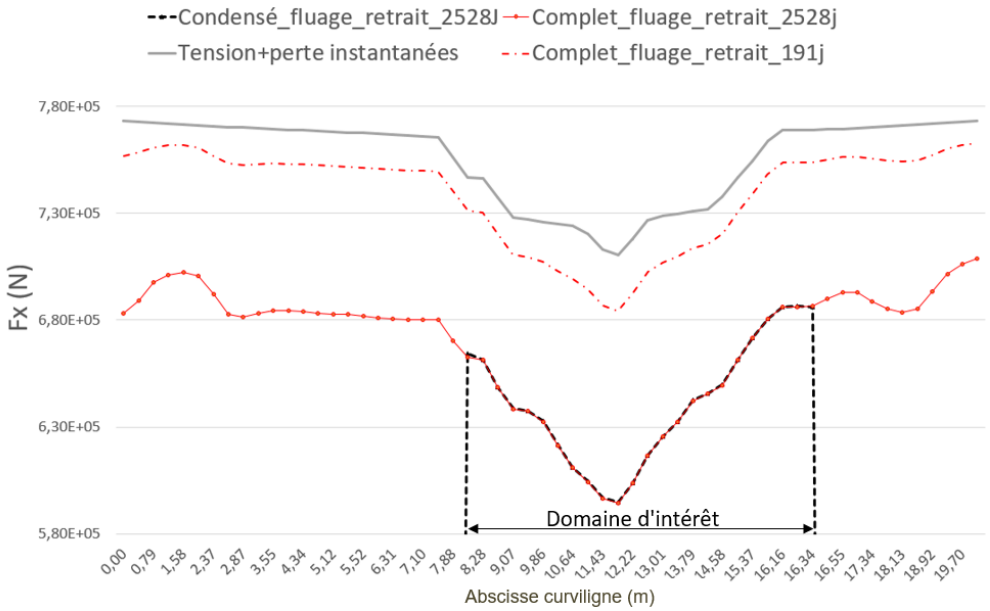

Figure 136 : câble vertical - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression

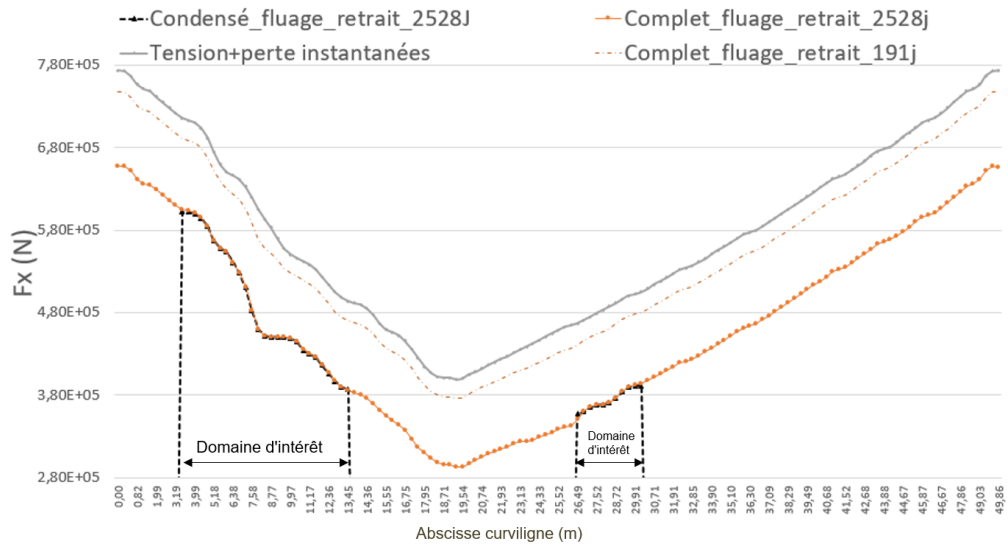

Figure 137 : câble horizontal - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression

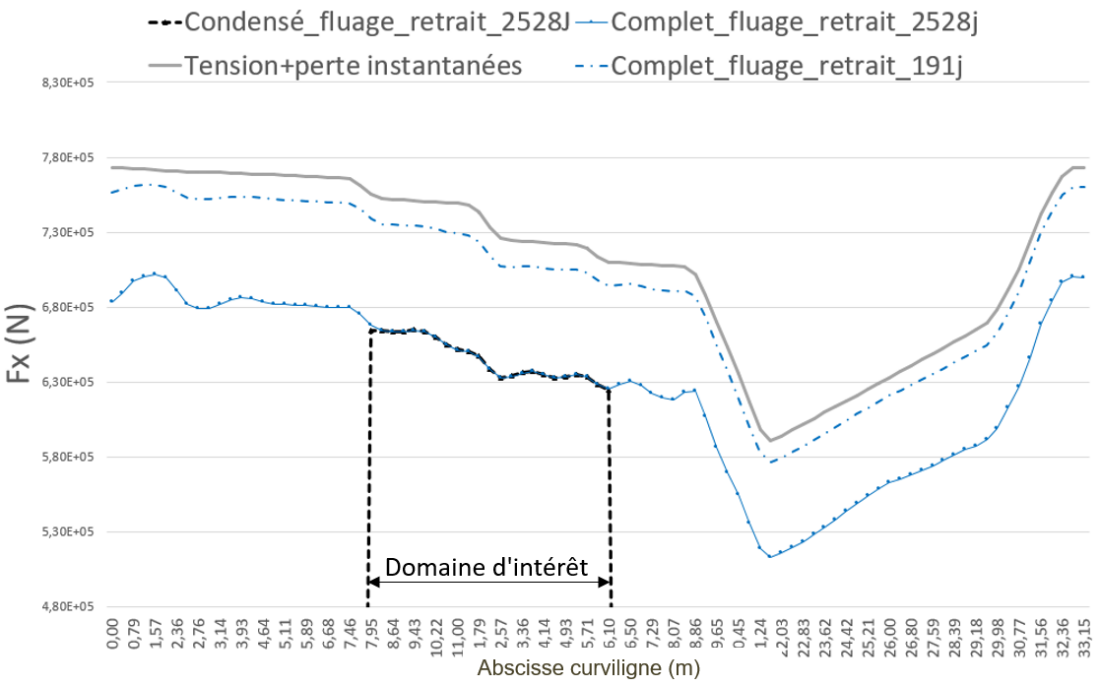

Figure 138 : câble gamma - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression

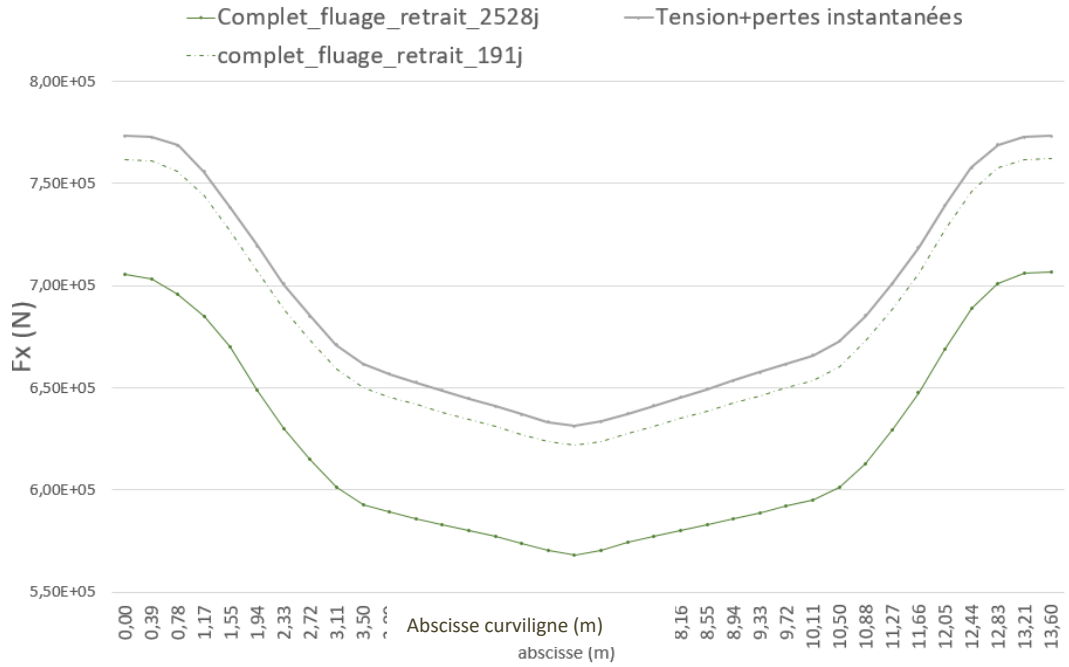

Figure 139 : câble dôme - Vercors - 2528 jours, avant mise en pression

Les évolutions du déplacement radial au point précédemment identifié résultant du calcul complet et du calcul ASC sont tracées sur la Figure 140. Celles des contraintes sont tracées sur la Figure 141. Les déplacements obtenus après mise en pression sont plus élevés (facteur 4) que ceux observés dans le calcul VO1. La perte de précontrainte liée aux déformations différées entre $t_1 = 85$ jours et $t_3 = 2528$ jours se traduit par des valeurs de contraintes positives dans le béton en fin de pressurisation comme le montre la Figure 141.

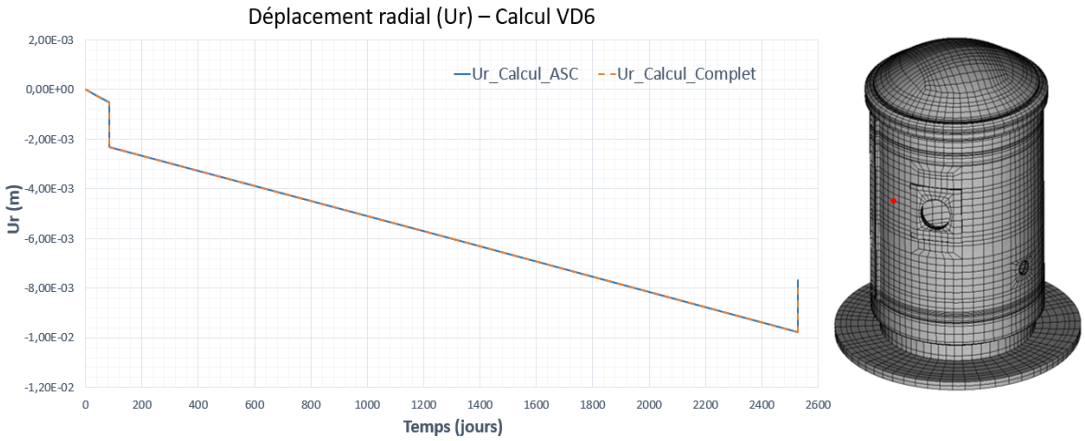

Figure 140 : Évolution du déplacement radial au cours du temps – VD6

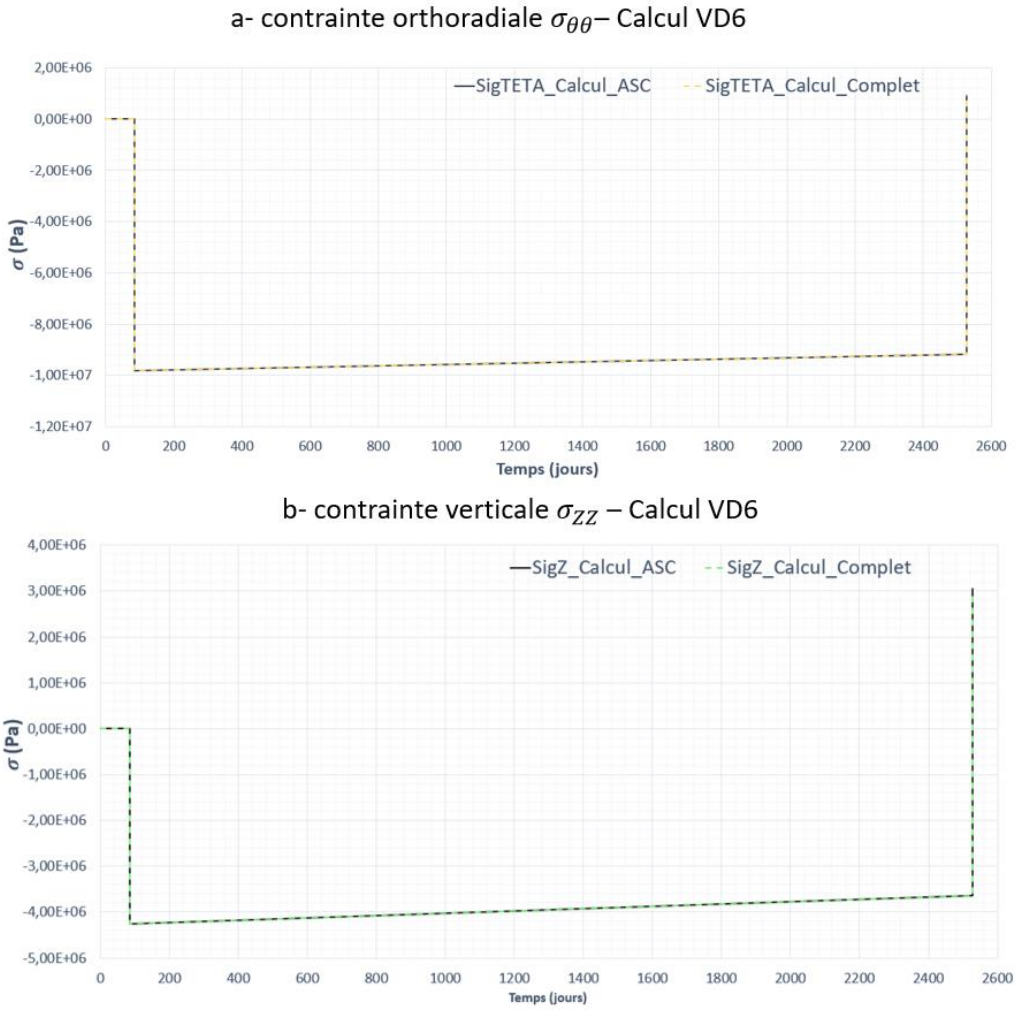

Figure 141 : évolution des contraintes avec le temps - calcul complet et calcul ASC – VD6

Les profils d'endommagements en fin de mise en pression sont présentés sur la Figure 142. L'endommagement est plus prononcé par rapport au premier scénario de calcul notamment autour du TAM. De nouvelles zones apparaissent également, notamment en dessous des nervures. Cela conduit à l'activation de nouvelles zones dans la méthode ASC. Les performances des calculs sont données dans la Table 20. Ces résultats montrent un gain de 2,66 (contre 5 dans le calcul VO1) lié à l'activation des nouvelles zones (associée à l'augmentation du nombre de pas et de degrés de liberté).

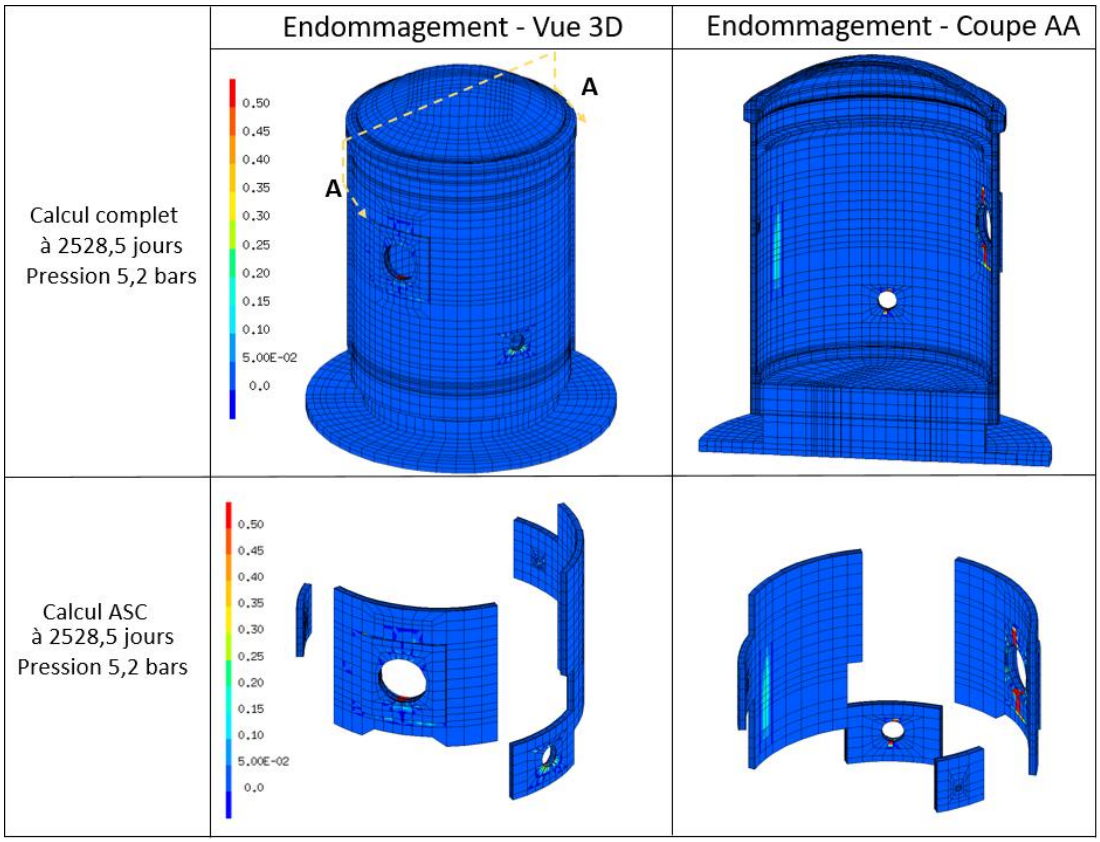

Figure 142 : Endommagement à 2528,5 jours après mise en pression de 5,2 bars - calcul complet et calcul ASC

Table 20 : Résultats de performance de calcul - Vercors - Calcul VD6

	Calcul complet	**ASC**
ddl	321 837	49 509
Nombre de pas	107	115
Temps de calcul	1555 s	586 s
Facteur de gain	1	2,66

5.5 APPLICATION DU RAFFINEMENT DE MAILLAGE A LA MAQUETTE VERCORS

L'objectif de cette partie est d'appliquer la méthode ASC couplée au raffinement de maillage sur la maquette Vercors en utilisant les différents maillages fournis. Pour chaque maillage, deux calculs sont réalisés : un calcul complet utilisant l'un des maillages fournis et un calcul ASC partant systématiquement du maillage grossier pour aller vers une densité cible dans les zones d'intérêt égale à la densité du maillage du calcul complet. Les détails des quatre tests sont résumés dans la Table 21. Le chargement utilisé dans cette application consiste en la précontrainte suivie directement de la pressurisation de la structure jusqu'à 5,2 bars. Le fluage et le retrait ne sont pas pris en compte dans cette application car leur prise en compte avec le raffinement du maillage nécessite des développements supplémentaires qui n'ont pas encore été finalisés.

Table 21 : résumé des tests effectués – Vercors (DE : Domaine Elastique, DI : Domaine d'Intérêt)

Numéro du test	Maillage du calcul complet	Maillage du calcul ASC/MR	Modèle d'endommagement
1	grossier (densité d_0)	grossier dans le DE grossier dans le DI	Local
2	fin (densité $\frac{d_0}{1,5}$)	grossier dans le DE fin dans le DI	Local
3	extra-fin (densité $\frac{d_0}{3,5}$)	grossier dans le DE extra-fin dans le DI	Local
4	ultra-fin (densité $\frac{d_0}{7,5}$)	grossier dans le DE ultra-fin dans le DI	Non-Local ($L_C = 8\ cm$)

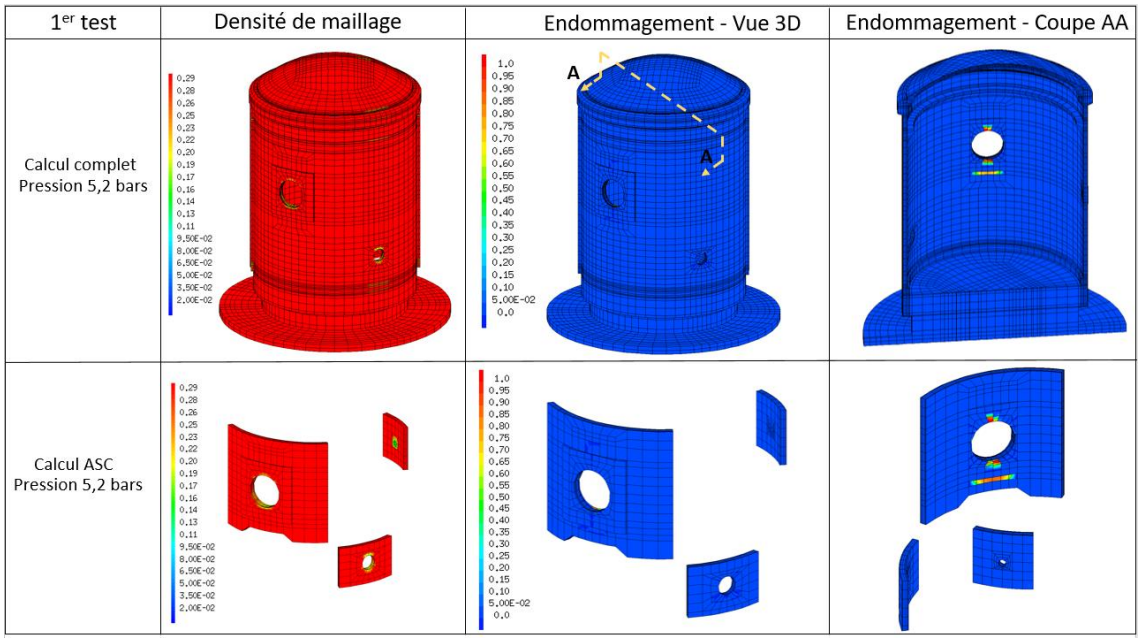

Figure 143 : densité et endommagement du premier test – Vercors

Les résultats du premier test sont présentés sur la Figure 143. Sur cette figure ainsi que pour les autres tests, le champ de densité du maillage complet et du maillage du calcul ASC sont présentés en conservant la même échelle, entre 0 et 30 cm. Sur ce premier test, ce champ montre que tous les éléments, hormis les éléments dans l'épaisseur des ouvertures, ont une densité supérieure à 30 cm. A la fin du calcul, l'endommagement est concentré autour des traversées dans des zones relativement limitées. Il en résulte l'activation des zones entourant les trois traversées (TAM, sas et VVP) pour le calcul ASC. La même répartition d'endommagement est obtenue dans les deux calculs. Une coupe montrant la partie intérieure de l'enceinte est réalisée et montre que l'endommagement à l'intérieur est plus prononcé autour de la grande ouverture. L'endommagement obtenu est légèrement inférieur à celui obtenu en considérant le fluage et le retrait à 191,5 jours donnés à la Figure 135. Cette "petite" différence est due à la faible perte de précontrainte (inférieure à 5%) résultant du fluage et du retrait à 191 jours. Les performances de calcul sont présentées dans la Table 22 et montrent un gain de temps d'un facteur 4,68.

Table 22 : performance de calcul - 1er test - Vercors

	Calcul complet	**ASC**
Degrés de liberté	321 837	29 370
Temps de calcul	1 408 s	301 s
Facteur de gain	1	4,68

La Figure 144 présente les champs de densité ainsi que les résultats d'endommagement du second test. Le maillage fin complet (densité = $\frac{d0}{1.5}$) comprend des éléments d'environ 20 cm autour des traversées ainsi que dans la ceinture torique et dans le dôme. Avec la méthode ASC, compte tenu de la méthode de raffinement choisie (raffinement hiérarchique pour lequel chaque côté est divisé par un multiple de 2), le maillage obtenu ne peut pas être exactement celui du calcul complet. Ainsi le maillage du domaine d'intérêt est plus fin que celui du calcul complet. Les distributions d'endommagement résultants du calcul complet et du calcul ASC/MR (Figure 144) sont très proches. Les différences observées sont dues aux différences de maillage. Par rapport aux résultats obtenus sur le maillage grossier, la dégradation mécanique est ici plus prononcée, notamment dans la partie intérieure de l'enceinte. L'utilisation d'un maillage plus fin entraîne d'endommagement plus important autour de l'ouverture. Cette même observation a été constatée dans l'application du raffinement de maillage à l'enceinte simplifiée dans le Chapitre 4. En ce qui concerne les performances de calcul présentées dans la Table 23, le système complet contient environ 8 fois plus de degrés de liberté que le système de calcul ASC/MR. Cela se traduit par un facteur 10 de gain de temps pour le calcul ASC/MR.

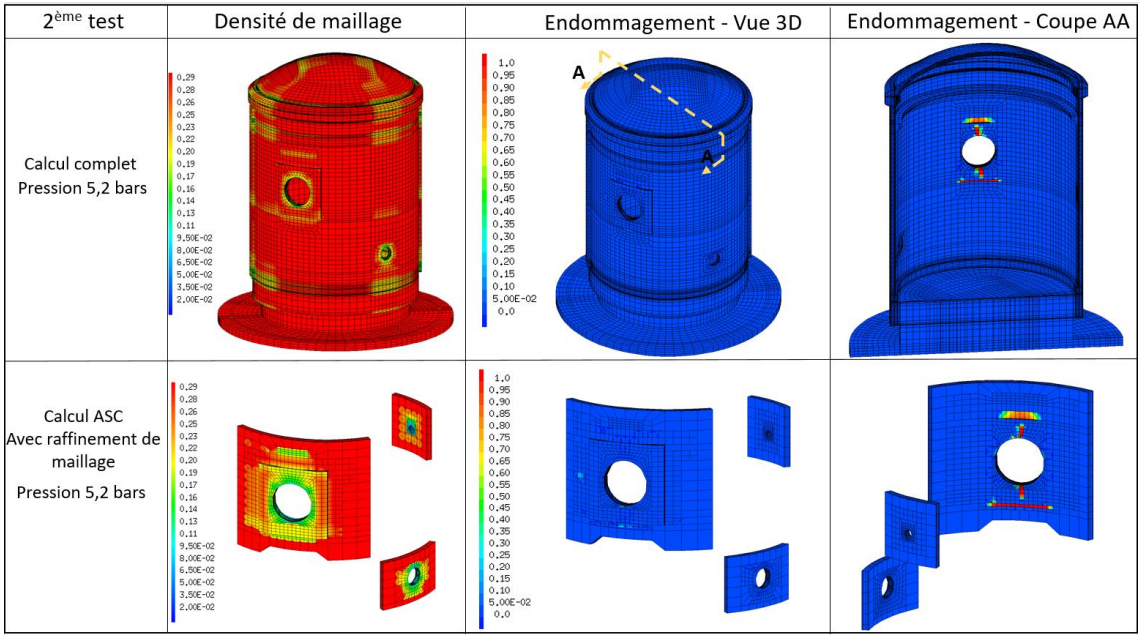

Figure 144 : densité et d'endommagement du 2ème test – Vercors

Table 23 : performance de calcul – 2ème test - Vercors

	Calcul complet	ASC/MR
Degrés de liberté	817 812	98 562
Temps de calcul	11 735 s	1 176 s
Facteur de gain	1	10

Le troisième test est illustré sur la Figure 145. La densité du maillage extra fin complet (densité = $\frac{d0}{3,5}$) montre que la plupart des éléments de ce maillage ont une densité inférieure à 20 cm et que les éléments entourant les traversées sont de l'ordre de 10 cm. Le calcul complet utilisant ce maillage comporte environ 6 millions de degrés de liberté. Ce calcul n'a pas pu être mené à son terme car il atteint les limites de mémoire du nœud de calcul. Le calcul utilisant la méthode ASC/MR a pu être effectué car il a 8 fois moins de degrés de liberté que le calcul complet. Ce calcul a duré environ 7 heures. La répartition de l'endommagement montre que la dégradation mécanique est plus prononcée par rapport au calcul sur le maillage fin et notamment en haut du TAM.

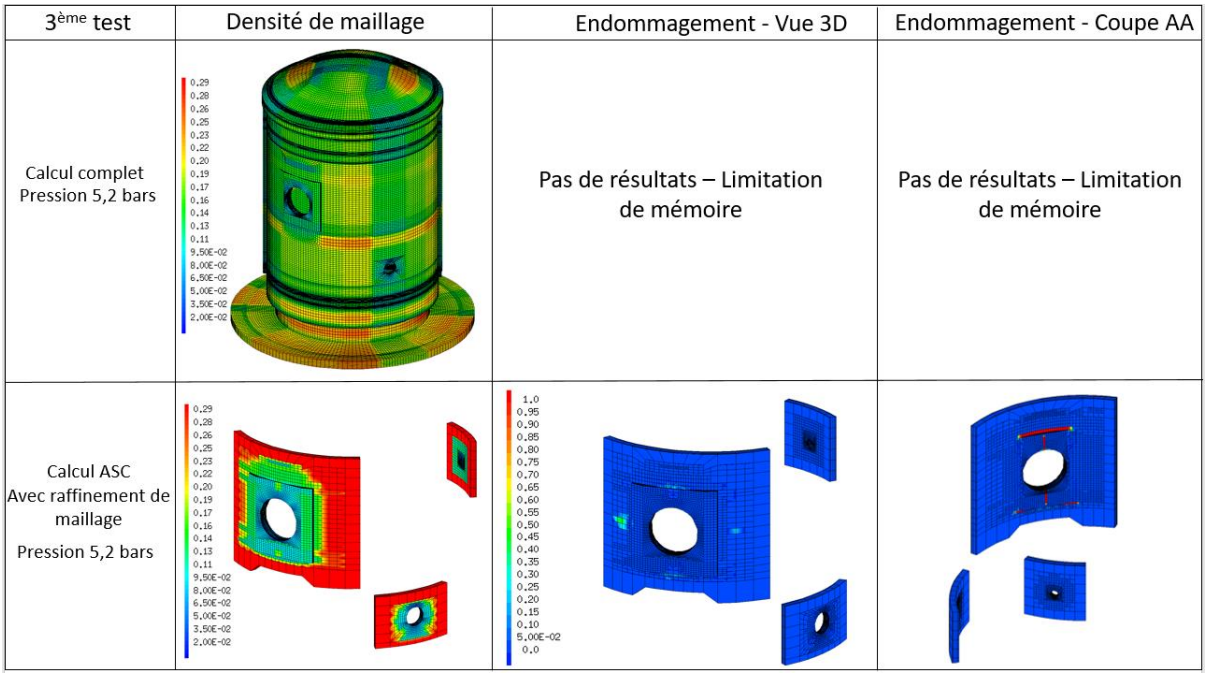

Figure 145 : densité et endommagement du 3ème test – Vercors

Table 24 : performance de calcul – 3ème test - Vercors

	Calcul complet	ASC/MR
Degrés de liberté	6 075 987	713 625
Temps de calcul	X	24 815 s
Facteur de gain	–	–

Pour le dernier test, seul le calcul utilisant la méthode ASC/MR a été étudié puisque le calcul complet n'a pu aboutir avec un maillage moins fin. Dans cette configuration, le maillage du domaine d'intérêt est raffiné jusqu'à une densité inférieure ou égale à celle du maillage ultra fin ($\frac{d0}{6}$). Les éléments entourant la grande ouverture sont de l'ordre d'un centimètre. Les éléments de la surépaisseur qui s'endommageaient dans les calculs précédents sont tous inférieurs à 8 cm et une grande partie du maillage a une densité inférieure à 3 cm. Avec cette discrétisation, l'application d'un modèle non local avec une longueur caractéristique de 8 cm est envisageable car la taille des éléments est adaptée. Les répartitions d'endommagement sont présentées sur la Figure 146. Ces profils montrent qualitativement la même répartition de l'endommagement que pour le 3ème test, en y intégrant l'effet de régularisation associé à l'utilisation d'un modèle non local. Ce calcul a été effectué en 608 914 secondes (environ 7 jours) (voir Table 25). Un calcul plus fin, avec un champ de densité cible $\frac{d0}{7,5}$ a été testé mais il n'a pas pu être finalisé en raison de la non-convergence du calcul. Seules quelques pas de calcul ont pu être finalisés.

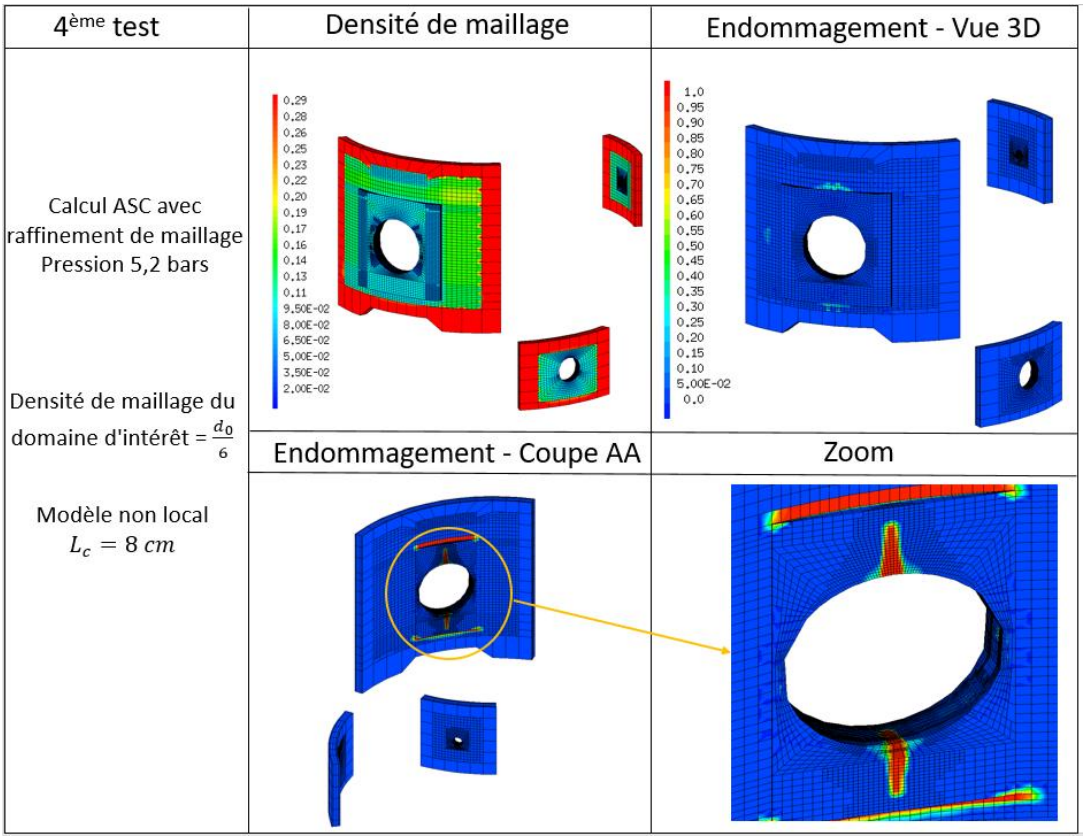

Figure 146: densité et endommagement du 4ème test – Vercors

Table 25 : performance de calcul – 4ème test - Vercors

	Calcul complet	**ASC/MR**
Degrés de liberté	18 111 620	1 060 254
Temps de calcul	X	608 914 s
Facteur de gain	–	–

A titre de complément et afin d'observer des niveaux d'endommagements plus importants, nous avons poussé le calcul jusqu'à 6 bars de pression. La valeur de 6 bars correspond à la valeur maximale de la pression qui a pu être appliquée sur le maillage extra fin. Les profils d'endommagement résultant du calcul utilisant le maillage grossier ainsi que celui utilisant le maillage extra fin sont présentés sur la Figure 147. En comparant les deux profils, on remarque que le calcul extra fin présente beaucoup plus d'endommagement que le calcul grossier à niveau de chargement égal. Ces tendances sont similaires à celles obtenues au Chapitre 4 sur l'enceinte simplifiée.

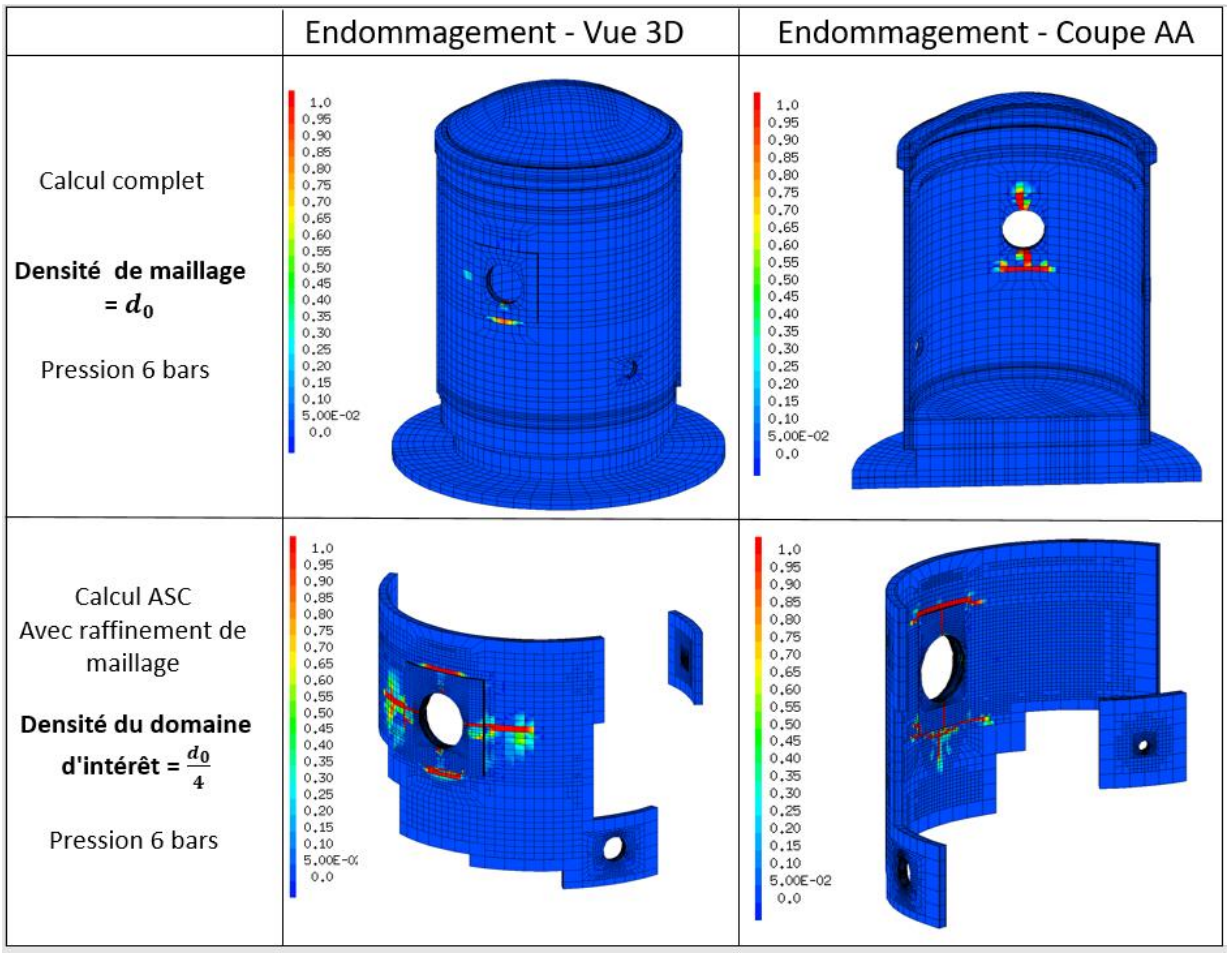

Figure 147 : Profils d'endommagement à 6 bars - grossier et extra fin

5.5.1 Conclusion

Vercors est une maquette à l'échelle 1/3 d'une enceinte de confinement en béton précontraint à double paroi. Elle représente la structure cible de la thèse. Dans ce chapitre, la méthode ASC, avec tous les développements apportés dans les chapitres précédents, a été appliquée et testée sur Vercors.

Après une description détaillée de la maquette, des calculs prenant en compte l'effet des déformations différées (fluage et retrait à 191 jours puis à 2528 jours) sous précontrainte et après mise en pression ont été effectués. Des résultats similaires entre le calcul ASC et le calcul complet ont été obtenus sur un maillage grossier. Ceci permet de valider la méthode ASC sur une structure réelle telle que la maquette Vercors.

Afin d'évaluer l'efficacité de la méthode ASC/MR sur Vercors, plusieurs maillages ont été utilisés. Calculs complets et méthode ASC/MR ont été comparées en simulant la mise en précontrainte et la mise en pression (sans fluage ni retrait). Pour les calculs réalisables avec le calcul complet, des facteurs de gain jusqu'à 10 ont été obtenus avec la méthode ASC. Dans certaines configurations (maillage extra et ultra fin), seule la méthode ASC permet d’obtenir des résultats. En particulier, la méthode ASC couplée au raffinement du maillage a permis d'atteindre des niveaux de finesse inaccessibles avec une méthode classique, rendant possible l'utilisation d'un modèle d'endommagement non local sur cette structure de taille importante.

CHAPITRE 6. CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Le présent manuscrit présente l'ensemble des travaux réalisés durant la thèse intitulée « Amélioration des performances pour le calcul des structures à comportement non linéaire de grandes dimensions ». Elle s'inscrit dans le cadre de la simulation d'ouvrages en béton armé et précontraint de grandes dimensions dans l'objectif de pouvoir simuler le plus finement possible le comportement d'enceintes de confinement de type double paroi. Dans un premier temps, ce chapitre tire une conclusion générale et résume les résultats obtenus dans ce travail. Il propose ensuite des pistes d'amélioration et de développement pour les travaux futurs.

6.1 CONCLUSION

Dans ces travaux, le phénomène de la fissuration du béton dans les grandes structures en béton armé et précontraint est particulièrement étudié. Il est considéré comme un phénomène localisé dont la modélisation nécessite une loi de comportement non linéaire avec l'emploi d'un maillage fin pour permettre une bonne représentativité par l'utilisation de modèles non locaux par exemple. Cependant, simuler un tel phénomène sur une grande structure comme des enceintes de confinement peut être difficile voire impossible avec les puissances de calcul actuelles du fait des temps de calcul prohibitifs et de l'occupation mémoire.

Un état de l'art des méthodes existantes qui permettent de répondre au problème est réalisé dans le Chapitre 1. De nombreuses méthodes existent pour résoudre ce problème telles que le calcul parallèle, les méthodes de réduction de modèle, les méthodes de raffinement adaptatif du maillage (AMR) et les méthodes d'élimination des degrés de liberté. Ce chapitre a permis de choisir la méthode la plus adaptée à notre problème qui est la méthode de condensation statique adaptative (ASC) proposée dans (Llau et al. 2015) et qui s'inscrit dans les méthodes d'élimination de degrés de liberté. L'ASC est une méthode de simulation du comportement de grandes structures à comportement non linéaire et à endommagement non étendu pouvant évoluer. C'est une méthode basée sur le principe de la condensation statique de Guyan (Guyan 1965) et qui garde exactement les mêmes résultats qu'un calcul complet sur toute la structure. Son idée principale consiste à partitionner la structure en zones, à bien représenter les domaines à comportement non linéaire attendu, à condenser les zones à comportement élastique linéaire et à vérifier lors du calcul que les zones condensées restent élastiques. Lorsque ce n'est plus le cas, de nouvelles zones d'intérêt sont incluses et pleinement représentées dans le calcul. Certaines étapes de chargement doivent alors être recalculées pour maintenir la précision de la simulation. La méthode ASC est conçue pour fonctionner de manière optimale lorsque la fissuration est localisée sur une zone de petites dimensions par rapport à l'ensemble de la structure. Moins l'endommagement est étendu, plus la méthode est efficace.

Les objectifs de la thèse, qu'il s'agisse de l'amélioration des performances du calcul, de l'automatisation du calcul, de l'extension du domaine d'application et les limites identifiées dans l'algorithme initial ont conduit à une nouvelle implémentation de la méthode l'ASC. Un nouvel algorithme a été proposé dans le Chapitre 2 et vise à être le plus général possible (critère de promotion de nouvelles zones communes à toutes les lois de comportement par exemple). Il permet également l'intégration de nouvelles options visant à améliorer la méthode (partitionnement en zones, raffinement du maillage) et dépasse les limites existantes de l'algorithme initial (cas de chargements variable par exemple). Une analyse a été effectuée sur les facteurs affectant l'efficacité de la méthode ASC. Cette analyse conclut que le gain avec la méthode est très variable et dépend de plusieurs facteurs tels que le nombre d'itérations de la méthode du point fixe nécessaires à la recherche de l'équilibre mécanique, le nombre d'éléments endommagés et l'évolution de cet endommagement au cours du temps. Elle conclut également que le gain de performance associée à la méthode ASC sur chaque pas de calcul peut être défini comme le gain de la condensation statique multiplié par le nombre d'itérations nécessaires à la recherche de l'équilibre mécanique. Dans la deuxième partie de ce chapitre, le domaine d'application de la méthode ASC a été étendu pour prendre en compte la précontrainte, en y incluant également l'effet des déformations différées (fluage et retrait). Après une brève présentation des développements nécessaires, la méthode ASC a

été appliquée avec succès à la simulation d'une poutre précontrainte. Par rapport à une simulation classique, les mêmes résultats ont été obtenus avec un facteur de gain de temps de l'ordre de 8. L'efficacité de la méthode a ainsi été démontrée.

La méthode ASC suppose un partitionnement initial du maillage en zones. Dans la méthode ASC originale, en cas de présence d'armatures d'acier (béton armé ou précontraint), les frontières de ces zones doivent coïncider avec les éléments du béton et avec les nœuds des renforts. Autrement dit, pour appliquer la méthode ASC originale, il faut reconstruire le maillage en tenant compte de cette contrainte et ce qui peut limiter son utilisation, notamment dans le cas de géométries complexes. Une amélioration a donc été introduite qui consiste à modifier les maillages en ajoutant automatiquement des nœuds d'acier sur les frontières des zones. Les développements associés ont été décrits dans le Chapitre 3. Cette méthode a été appliquée à une enceinte simplifiée en béton armé. L'effet du partitionnement de maillage en zones a été ensuite étudié dans la deuxième partie du Chapitre 3. Il a été montré qu'il peut avoir un impact significatif sur le temps de calcul. Une méthode de partitionnement automatique du maillage a donc été développée en remplacement de l'utilisation d'un partitionnement manuel produit par l'utilisateur. La méthode a été décrite sur la base de l'interprétation physique de l'initiation et de la propagation d'endommagement. Elle repose sur cinq paramètres géométriques dont la calibration a été discutée à travers une analyse sensibilité sur 1500 calculs. Un ensemble optimal de paramètres a finalement été proposé, dont les résultats ont été discutés. La méthode s'est avérée plus efficace qu'un partitionnement en zones de taille équivalente, quel que soit leur nombre, sur une poutre en flexion. Il est à noter que cette méthode est indépendante du maillage et des dimensions de l'ouvrage et s'applique donc à tout maillage et toutes dimensions d'ouvrage. Elle peut donc être utilisée quel que soit la nature ou le format du maillage en entrée.

La méthode ASC s'appuie sur un maillage initial donné une fois lors de la préparation du calcul. Ainsi, si des finesses importantes souhaitent être atteintes (pour plus de représentativité ou pour l'utilisation de modèles non locaux par exemple), un maillage fin reste nécessaire sur la totalité de la structure. Cette contrainte peut limiter l'efficacité de la méthode, voir rendre impossible son utilisation. La solution proposée dans le Chapitre 4 consiste à coupler la méthode ASC avec le principe de raffinement de maillage (MR) afin de tirer avantage des deux approches. L'idée principale est de raffiner uniquement le domaine d'intérêt jusqu'à atteindre une densité cible choisie et de conserver le maillage initial dans le reste de la structure. Après une description de l'algorithme de la méthode couplée ASC/MR, une application a été présentée sur une poutre en flexion entaillée. Des résultats identiques sont obtenus entre un calcul complet, un calcul ASC et un calcul ASC/MR partant d'un premier maillage grossier et en raffinant le maillage de l'intérieur du domaine d'intérêt. Un facteur de gain de temps de 9 a été obtenu en utilisant le couplage ASC/MR par rapport au calcul complet, contre 6 sans le couplage. Afin d'évaluer l'efficacité de la nouvelle méthode, une enceinte simplifiée en béton armé soumise à une pression interne a été étudiée. Plusieurs maillages ont été utilisés et les résultats obtenus avec la méthode ASC/MR ont été comparés à un calcul complet. La méthode ASC/MR permet de réaliser les calculs avec des finesses inaccessibles avec un calcul complet ou ASC seule. Elle permet ainsi l'utilisation de méthode non-locale. Des facteurs de gain jusqu'à 14 par rapport aux calculs complets (lorsqu'ils sont possibles) ont été obtenus.

Le Chapitre 5 décrit l'application de la méthode ASC, avec les développements effectués, sur la structure cible de la thèse : Vercors. Vercors (VErification Réaliste du COnfinement des RéacteurS) est une maquette à l'échelle 1/3 d'une enceinte de confinement à double paroi (environ 20 m de hauteur) et présente exactement la même géométrie qu'une enceinte réelle. Après une description détaillée de la maquette, des calculs de mise en précontrainte prenant en compte l'effet des déformations différées (fluage et retrait à 191 jours puis à 2528 jours) suivies d'une mise en pression ont été effectués. Des résultats similaires entre le calcul ASC et le calcul complet ont été obtenus. Ceci permet de valider la méthode ASC sur une structure réelle combinés à ses chargements caractéristiques (précontrainte avec fluage et retrait et pression). Afin d'évaluer l'efficacité de la méthode ASC couplée au raffinement de maillage sur Vercors, plusieurs maillages ont été utilisés, dont certains inaccessibles en calcul complet. Des facteurs de gain jusqu'à 14 par rapport aux calculs complets ont été obtenus. La méthode

ASC couplée au raffinement du maillage a permis la réalisation, sur VERCORS, d'un calcul non linéaire avec un modèle d'endommagement non local. Cette application montre également la capacité des développements proposés à traiter automatiquement un maillage fourni de l'extérieur.

6.2 PERSPECTIVES

Les travaux de cette thèse ont mis en évidence les capacités et les limites de la méthode ASC. Des axes d'amélioration pour les futurs travaux ont ainsi été identifiés.

La première piste concerne l'algorithme de la méthode et notamment le paramètre p qui détermine le nombre de pas de calcul entre deux vérifications du critère d'amorçage. Ce paramètre, choisi arbitrairement dans la méthode d'origine, a été inclus dans l'analyse de sensibilité réalisée au Chapitre 3 car il semblait avoir une interaction avec les paramètres de partitionnement de maillage. Il a été fixé en fonction des 3 cas test choisis. Cependant, une valeur fixe de p tout au long du calcul peut ne pas être optimale car ce paramètre joue non seulement sur le temps nécessaire à la "double-décondensation" nécessaire pour la vérification de l'amorçage mais aussi sur le nombre de retours en arrière (recalcul de p pas en cas d'amorçage). Une proposition est de faire évoluer le paramètre p en fonction du rapport entre le nombre de degrés de liberté du domaine élastique et le nombre de degrés de liberté du domaine d'intérêt. Une grande valeur de ce rapport indique que le domaine élastique est grand et donc la vérification de l'amorçage est coûteuse par conséquent une grande valeur de p doit être considérée. Une petite valeur de ce rapport indique que le calcul dans le domaine d'intérêt est celui qui coûte cher et donc le nombre de retours en arrière doit être minimisé et par conséquent une petite valeur de p doit être considérée.

Le couplage de la méthode ASC avec le raffinement du maillage a été testé et validé sur plusieurs structures représentatives. Ce couplage a donné des résultats encourageants et permet d'atteindre des niveaux de simulation inaccessibles en calcul complet. Cependant, le raffinement de maillage utilisé est classique et n'est pas un Raffinement de Maillage Adaptatif (AMR) dans l'espace et dans le temps. C'est-à-dire que tout l'intérieur du domaine d'intérêt est raffiné de manière constante et évolue seulement avec l'évolution du domaine d'intérêt. Si le domaine d'intérêt n'évolue pas mais que l'endommagement à l'intérieur de celui-ci évolue, le maillage reste le même. Pour cela, l'utilisation d'une technique plus adaptative est l'une des pistes proposées et pourrait améliorer les performances ainsi que la représentativité de la méthode. Cette nouvelle méthode doit également rendre possible la prise en compte de l'effet du fluage et du retrait, ce qui nécessite encore quelques développements pour son intégration dans la méthode actuelle.

Dans certains cas, tout ou une partie de la structure peut récupérer un comportement linéaire. Dans la méthode actuelle, cette partie doit rester activée car la condensation ne s'applique pas à une partie à comportement non linéaire. Cela peut limiter l'efficacité de la méthode ou même constituer une limite. En prenant l'exemple de Vercors, en considérant un modèle d'endommagement sur l'ensemble de la structure, de faibles endommagements apparaissent sur les nervures, sur le dôme et sur le gousset. Cela entraînerait avec la méthode ASC, l'activation d'une grande partie de la structure, la rendant ainsi inefficace pour ce calcul. C'est ce qui a conduit à considérer ces trois zones (nervures, dôme, gousset) élastiques dans l'application de la méthode à la maquette VERCORS. La 3ème piste d'amélioration consiste donc à permettre de ré-condenser des zones activées après s'être assuré que leur endommagement n'évolue plus. Cela nécessite dans un premier temps de définir un critère de recondensation. Dans un second temps, la rigidité de ces zones doit être réduite en fonction du taux d'endommagement. Il pourrait être envisagé de considérer la matrice de rigidité sécante à la place de la rigidité initiale pour la condensation.

Afin d'améliorer la prédiction de l'étanchéité des ouvrages de génie civil et notamment des enceintes de confinement, il est nécessaire de prendre en compte l'effet du jeune âge dans le béton. Pour les enceintes de confinement, le jeune âge dans le béton est en effet responsable

de la formation et de la propagation de fissures initiales (Meng et al. 2022), en particulier sur les éléments massifs en béton tels que le gousset de l'enceinte. Pour ce type de simulation, un couplage thermo-hydro-mécanique est nécessaire et son application à la méthode ASC nécessite des développements supplémentaires. De plus, la prise en compte du jeune âge se traduit par des fissures qui peuvent ensuite se refermer. Il est donc préférable d'intégrer cette approche en lien avec la recondensation des zones activées pour ne pas pénaliser l'efficacité de la méthode.

Après toutes ces propositions, une simulation représentative d'un accident sur une enceinte nécessite la prise en compte de températures qui peuvent atteindre 140°C. Cette température élevée affecte le comportement mécanique de la structure et doit être prise en compte pour une simulation plus représentative de l'accident. En pratique, un chargement thermique est proche des chargements de type déformations différées (fluage et retrait) déjà pris en compte dans la méthode. Des développements mineurs sont donc nécessaires afin de prendre en compte ce type de chargement dans la méthode ASC.

Références

Abdel-Jabbar, Nabil, Costas Kravaris, and Brice Carnahan. 1998. “Structural Analysis and Partitioning of Dynamic Process Models for Parallel State Estimation.” *Proceedings of the American Control Conference* 5 (June): 3170–76. https://doi.org/10.1109/ACC.1998.688447.

Algazi, V, and D Sakrison. 1969. “On the Optimality of Karhunen-Loève Expansion.” *IEEE Transactions on Information Theory* 15: 319–21.

Ansys®. 2022. “Ansys® Academic Research Mechanical, Version 18.1, Système d’aide, Guide d’analyse de Champ Couplé, ANSYS, Inc.”

Babuska, I., A. Craig, J. Mandel, and J. Pitkaranta. 1991. “Efficient Preconditioning for the P-Version Finite Element Method in Two Dimensions.” *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28 (3): 624–61.

Bartels, C., M. Breuer, K. Wechsler, and F. Durst. 2002. “Computational Fluid Dynamics Applications on Parallel-Vector Computers: Computations of Stirred Vessel Flows.” *Computers and Fluids* 31 (1): 69–97. https://doi.org/10.1016/S0045-7930(01)00016-0.

Basu, P, and A Peano. 1983. “Adaptivity in P-Version Finite Element Analysis.” *Journal of Structural Engineering-Asce* 109: 2310–24.

Bažant, Zdeněk P. 2001. “Prediction of Concrete Creep and Shrinkage: Past, Present and Future.” *Nuclear Engineering and Design* 203 (1): 27–38. https://doi.org/10.1016/S0029-5493(00)00299-5.

Bažant, Zdenek P., and Sandeep Baweja. 2000. “Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model 83.” *American Concrete Institute, ACI Special Publication* SP-194: 1–83.

Benguedouar, A. 1995. “Proper Orthogonal Decomposition in Dynamical Modeling: A Qualitative Dynamic Approach.” Boston University.

Bérard, Alexandre. 2011. “Transferts De Champs Entre Maillages De Type Éléments Finis Et Applications Numériques En Mécanique Non Linéaire Des Structures.” Université de FRANCHE-COMTÉ.

Berger, M. J., and Joseph Oliger. 1984. “Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations.” *Journal of Computational Physics* 53 (3): 484–512. https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90073-1.

Berger, M.J., and P Colella. 1989. “Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics.” *Journal of Computational Physics* 82: 184. https://doi.org/10.2307/3323192.

Berger, Marsha J., and Joseph Oliger. 1984. “Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations.” *Journal of Computational Physics* 53 (3): 484–512. https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90073-1.

Bergmans, J, R Keppens, D E A Van Odyck, and A Achterberg. 2003. “Simulations of Relativistic Astrophysical Flows.” In *Chicago Workshop on Adaptive Mesh Refinement Methods*.

Blatman, Géraud, and Bruno Sudret. 2008. “Sparse Polynomial Chaos Expansions and Adaptive Stochastic Finite Elements Using a Regression Approach.” *Comptes Rendus - Mecanique* 336 (6): 518–23. https://doi.org/10.1016/j.crme.2008.02.013.

———. 2010. “Efficient Computation of Global Sensitivity Indices Using Sparse Polynomial Chaos Expansions.” *Reliability Engineering and System Safety* 95 (11): 1216–29. https://doi.org/10.1016/j.ress.2010.06.015.

———. 2011. “Adaptive Sparse Polynomial Chaos Expansion Based on Least Angle Regression.” *Journal of Computational Physics* 230 (6): 2345–67. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.12.021.

Boe, Pascal De, and Jean Claude Golinval. 2003. “Principal Component Analysis of a Piezosensor Array for Damage Localization.” *Structural Health Monitoring* 2 (2): 137–44. https://doi.org/10.1177/1475921703002002005.

Bono, Gustave, and Armando Miguel Awruch. 2008. “An Adaptive Mesh Strategy for High Compressible Flows Based on Nodal Re-Allocation.” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 30 (3): 189–96. https://doi.org/10.1590/S1678-58782008000300003.

Bouhjiti, David El Mahdi. 2018. “Analyse Probabiliste de La Fissuration et Du Confinement Des Grands Ouvrages En Béton Armé et Précontraint : Application Aux Enceintes de Confinement Des Réacteurs Nucléaires : Cas VeRCoRs Thèse.” Université Grenoble Alpes.

“BPEL99.” 1999. In *Règles Techniques de Conception et de Calcul Des Ouvrages En Béton Précontraint Sélon Les Méthodes Des États Limites*.

“Cast3m.” 2022. http://www-cast3m.cea.fr/.

Chatterjee, Anindya. 2000. “An Introduction to the Proper Orthogonal Decomposition.” *Current Science* 78 (7): 808–17.

Chen, Jian, and Valerie E. Taylor. 1999. “ParaPART: Parallel Mesh Partitioning Tool for Distributed Systems.” *Concurrency: Practice and Experience* 1586 (September 1999): 996–1005. https://doi.org/10.1007/BFb0097984.

———. 2002. “Mesh Partitioning for Efficient Use of Distributed Systems.” *IEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 13 (1): 335–56. https://doi.org/10.1002/9780470558027.ch16.

Cheng, Kai, Zhenzhou Lu, Chunyan Ling, and Suting Zhou. 2020. “Surrogate-Assisted Global Sensitivity Analysis: An Overview.” *Structural and Multidisciplinary Optimization* 61 (3): 1187–1213. https://doi.org/10.1007/s00158-019-02413-5.

Chinesta, Francisco, Amine Ammar, and Elías Cueto. 2010. “Recent Advances and New Challenges in the Use of the Proper Generalized Decomposition for Solving Multidimensional Models.” *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (4): 327–50. https://doi.org/10.1007/s11831-010-9049-y.

Chinesta, Francisco, Pierre Ladeveze, and Elías Cueto. 2011. “A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition.” *Archives of Computational Methods in Engineering* 18 (4): 395–404. https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7.

Costaz, Jean Louis. 1997. “Confinement. Enceintes.” *Technique de l’Ingénieur*.

Couckuyt, Ivo, Koziel Slawomi, and Tom Dhaene. 2013. “Surrogate Modeling of Microwave Structures Using Kriging, Co-Kriging, and Space Mapping.” *International Journal of Numerical Modelling* 26 (April 2011): 493–505. https://doi.org/10.1002/jnm.

Cusumano, J, M Sharkady, and B Kimble. 1994. “Spatial Coherence Measurements of a Chaotic Flexible-Beam Impact Oscillator.” *Physical Sciences and Engineering* 347: 421–38.

D D Kosambi, Poona. 1943. “Statistics in Function Space.” *Current Science*. https://doi.org/10.1007/978-81-322-3676-4_15.

Delage Santacreu, S. 2006. “Méthode de Raffinement de Maillage Adaptatif Hybride Pour Le Suivi de Fronts Dans Les Écoulements Incompressibles.”

Delage Santacreu, Stéphanie. 2006. “Méthode de Raffinement de Maillage Adaptatif Hybride Pour Le Suivi de Fronts Dans Les Écoulements Incompressibles.” Université Bordeaux I.

Deman, G., K. Konakli, B. Sudret, J. Kerrou, P. Perrochet, and H. Benabderrahmane. 2016. “Using Sparse Polynomial Chaos Expansions for the Global Sensitivity Analysis of Groundwater Lifetime Expectancy in a Multi-Layered Hydrogeological Model.” *Reliability*

Engineering and System Safety 147: 156–69. https://doi.org/10.1016/j.ress.2015.11.005.

Dowell, Earl H., Kenneth C. Hall, Jeffrey P. Thomas, Robert E. Kielb, Meredith A. Spiker, Aiqin Li, and Charles M. Denegri. 2008. “Reduced Order Models in Unsteady Aerodynamic Models, Aeroelasticity and Molecular Dynamics.” *ICAS Secretariat - 26th Congress of International Council of the Aeronautical Sciences 2008, ICAS 2008* 1: 4002–14. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4979-8_14.

Dufour, Frédéric, Grégory Legrain, Gilles Pijaudier-cabot, and Antonio Huerta. 2017. “Estimation of Crack Opening from a Two-Dimensional Continuum-Based Finite Element Computation,” 0–18.

Dullerud, GE, and FA Paganini. 2000. “A Course in Robust Control Theory : A Convex Approach.” In *Texts in Applied Mathematics*, 1–379. Springer Berlin Heidelberg.

Dumon, A, Cyrille Allery, and Amine Ammar. 2011. “Proper General Decomposition (PGD) for the Resolution of Navier–Stokes Equations.” *Journal of Computational Physics* 230 (4): 1387–1407.

Dureisseix, D., D. Néron, P. Ladevèze, and B. A. Schrefler. 2004. “A Computational Strategy for Multiphysics Problems Involving Nonlinear Aspects.” *ECCOMAS 2004 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 0–17.

Dureisseix, David, and David Néron. 2008. “A Multiscale Computational Approach with Field Transfer Dedicated to Coupled Problems.” *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 6 (3): 233–50. https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.v6.i3.40.

Duysens, Jacques, and Michel Rochette. 2016. “Reduced Order Modelling for Steady and Transient Simulations.” *Ansys*.

Dyn, Nira, David Levin, and Samuel Rippa. 1986. “Numerical Procedures for Surface Fitting of Scattered Data by Radial Functions.” *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7: 639–659.

Epureanu, Bogdan I., Liaosha S. Tang, and Michael P. Païdoussis. 2004. “Coherent Structures and Their Influence on the Dynamics of Aeroelastic Panels.” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 39 (6): 977–91. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(03)00090-8.

Essahbi, Nabil. 2013. “Modélisation de Corps Mous Appliquée à La Commande de Procédé Robotisé de Découpe Anatomique de Muscles.” Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.

Fajraoui, Noura, Marwan Fahs, Anis Younes, and Bruno Sudret. 2017. “Global Sensitivity Analysis of Natural Convection in Porous Enclosure : Effect of Thermal Dispersion , Anisotropic Permeability and Heterogeneity.”

Falle, S.A.E.G. 2003. “AMR Applied to Non-Linear Elastodynamics.” In *Chicago Workshop on Adaptive Mesh Refinement Methods*.

Farhat, Charbel, and Jan Mandel. 1998. “The Two-Level FETI Method for Static and Dynamic Plate Problems Part I: An Optimal Iterative Solver for Biharmonic Systems.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 155 (1–2): 129–51. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00146-1.

Farhat, Charbel, and Francois-Xavier Roux. 1991. “A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and Its Parallel Solution Algorithm.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (6): 1205–27. https://doi.org/10.1002/nme.1620320604.

Feeny, B F, and R Kappagantu. 1999. “On the Physical Interpretation of Proper Orthogonal Modes in Vibrations.” *Journal of Sound and Vibration* 219 (1): 189–92. https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1895.

Feliot, Paul, Yves Le Guennec, Julien Bect, and Emmanuel Vazquez. 2016. “Design of a Commercial Aircraft Environment Control System Using Bayesian Optimization

Techniques.” In *5th International Conference on Engineering Optimization*, 400–409. Iguassu Falls, Brazil. http://arxiv.org/abs/1610.02271.

Feng, Kaixuan, Zhenzhou Lu, and Wanying Yun. 2019. “Aircraft Icing Severity Analysis Considering Three Uncertainty Types.” *AIAA Journal* 57 (4). https://doi.org/https://doi.org/10.2514/1.J057529.

Foucault, A. 2012. “[R7.01.35], ‘Relation de Comportement BETON_BURGER_FP Pour Le Fluage Propre Du Béton’, Code Aster, Http://Www.Code-Aster.Org.”

Fournier, Jean-yves. 2019. “Réunion de Service.”

Fox, Geoffrey C. 1991. “Achievements and Prospects for Parallel Computing.” *Concurrency: Practice and Experience* 3 (6): 725–39. https://doi.org/10.1002/cpe.4330030615.

Galenne, E, F Hamon, P Sémété, N C Tran, J Haelewyn, S Michel-ponnelle, and Thibaut Thenint. 2013. “Maquette d’enceinte VERCORS : Panorama Des Études En Support à La Conception.”

Georgiou, Ioannis T, and IRA B Schwartz. 1999. “Dynamics of Large Scale Coupled Structural-Mechanical Systems: A Singular Perturbation Proper Orthogonal Decomposition Approach.” *SIAM Journal of Applied Mathematics* 59 (4): 1178–1207. http://www.jstor.org/stable/118448.

Gerard, Bruno, and Franz ULM. 1997. “Génie Civil : Calcul Des Ouvrages En Béton Précontraint Avec Le Code ASTER.”

Gerritsma, Marc, Jan Bart van der Steen, Peter Vos, and George Karniadakis. 2010. “Time-Dependent Generalized Polynomial Chaos.” *Journal of Computational Physics* 229 (22): 8333–63. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.07.020.

Ghanem, Roger G., and Pol D. Spanos. 1991. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag.

Gibert, G. 2019. “Propagation de Fissures En Fatigue Par Une Approche X-FEM Avec Raffinement Automatique de Maillage.” Université de Lyon.

Gilbert, John R., and Robert Endre Tarjan. 1986. “The Analysis of a Nested Dissection Algorithm.” *Numerische Mathematik* 50 (4): 377–404. https://doi.org/10.1007/BF01396660.

Giry, Cédric, Frédéric Dufour, and Jacky Mazars. 2011. “Stress-Based Nonlocal Damage Model.” *International Journal of Solids and Structures* 48: 3431–43. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.08.012.

Glavaski, S, J Marsden, and R Murray. 1998. “Model Reduction, Centering, and the Karhunen-Loève Expansion.” In *IEE Conference on Decision and Control*, 2071–76. Tampa, FL.

Gosselet, Pierre, and Christian Rey. 2006. “Non-Overlapping Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics.” *Archives of Computational Methods in Engineering* 13 (4): 515–72. https://doi.org/10.1007/BF02905857.

Gosselet, Pierre, Daniel Rixen, Francois-Xavier Roux, and Nicole Spillane. 2015. “Simultaneous FETI and Block FETI: Robust Domain Decomposition with Multiple Search Directions.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 104 (February): 905–27. https://doi.org/10.1002/nme.4946 Simultaneous.

Graham, Michael D., and Ioannis G. Kevrekidis. 1996. “Alternative Approaches to the Karhunen-Loeve Decomposition for Model Reduction and Data Analysis.” *Computers and Chemical Engineering* 20 (5): 495–506. https://doi.org/10.1016/0098-1354(95)00040-2.

Granger, Laurent. 1995. “Comportement Différé Du Béton Dans Les Enceintes de Centrales Nucléaires : Analyse et Modélisation.” Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Griebel, M, and M A Schweitzer. 2008. “Meshfree Methods for Partial Differential Equations IV.” In *Fourth International Workshop on Meshfree Methods for Partial Differential*

Equations. Bonn, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg This.

Grotto, Nicolas. 2011. “Etude Du Comportement Ultime Du Béton Précontraint Par Toron Gainé Graissé.” INSA Strasbourg.

Guennec, Y. Le, J. P. Brunet, F. Z. Daim, M. Chau, and Y. Tourbier. 2018. “A Parametric and Non-Intrusive Reduced Order Model of Car Crash Simulation.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 338: 186–207. https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.03.005.

Guyan, R.J. 1965. “Reduction of Stiffness and Mass Matrices.” *AIAA Journal*.

Hammoud, Mohammad, Marianne Beringhier, and Jean-claude Grandidier. 2011. “Application de La PGD à Un Problème Viscoélastique Avec Un Grand Nombre de Variables Internes et Un Large Spectre de Temps de Relaxation.” In *10e Colloque National En Calcul Des Structures*. Giens, France.

Hamon, François. 2013. “[R7.01.08], ‘Modélisations Pour Le Génie Civil et Les Géomatériaux’, Code Aster,Http://Www.Code-Aster.Org,” 1–15.

Han, Man-Wook, and Peter Kopacek. 1995. “Optimization Using Artificial Neural Networks.” *IFAC Proceedings Volumes* 28 (24): 357–60. https://doi.org/10.1016/s1474-6670(17)46576-1.

Hay, Alexander. 2004. “Etude Des Stratégies d’estimation d’erreur Numérique et d’adaptation Locale de Maillages Non-Structurés Pour Les Équations de Navier-Stokes En Moyenne de Reynolds.” Université de Nantes. http://www.theses.fr/2004NANT2002.

Heinkenschloss, M., T. Reis, and A. C. Antoulas. 2011. “Balanced Truncation Model Reduction for Systems with Inhomogeneous Initial Conditions.” *Automatica* 47 (3): 559–64. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.12.002.

Holmes, Philip, John Lumley, Gahl Berkooz, and Clarence Rowley. 1996. “Turbulence , Coherent Structures , Dynamical Systems and Symmetry.” *Cambridge: Cambridge University Press*, 978–1. www.cambridge.org.

Hosni Elhewy, A., E. Mesbahi, and Y. Pu. 2006. “Reliability Analysis of Structures Using Neural Network Method.” *Probabilistic Engineering Mechanics* 21 (1): 44–53. https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2005.07.002.

Hung, Elmer S., and Stephen D. Senturia. 1999. “Generating Efficient Dynamical Models for Microelectromechanical Systems from a Few Finite-Element Simulation Runs.” *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems* 8 (3): 280–89. https://doi.org/10.1109/84.788632.

Karhunen, K. 1946. “Uber Lineare Methoden in Der Wahrscheinlichkeitsrechnung.” *Annals of Academic Science Fennicae,Series A1 Mathematics and Physics 37* 3–79.

Kerschen, Gaetan, Jean Claude Golinval, Alexander F. Vakakis, and Lawrence A. Bergman. 2005. “The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems: An Overview.” *Nonlinear Dynamics* 41: 147–69.

Korošec, Peter, Jurij Šilc, and Borut Robič. 2004. “Solving the Mesh-Partitioning Problem with an Ant-Colony Algorithm.” *Parallel Computing* 30 (5–6): 785–801. https://doi.org/10.1016/j.parco.2003.12.016.

Krige, D.G. 1951. “A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems on the Witwatersrand.” University of the Witwatersrand, South Africa.

Ladevèze, P., J. C. Passieux, and D. Néron. 2010. “The LATIN Multiscale Computational Method and the Proper Generalized Decomposition.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (21–22): 1287–96. https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.06.023.

Ladevèze, P. 1999. *Nonlinear Computation Structural Mechanics - New Approaches and Non-*

Incremental Methods of Calculation. Springer-Verlag.

Ladevèze, Pierre, and Anthony Nouy. 2003. “On a Multiscale Computational Strategy with Time and Space Homogenization for Structural Mechanics.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (28–30): 3061–87. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00341-4.

Lall, Sanjay, Jerrold E. Marsden, and Sonja Glavaški. 2002. “A Subspace Approach to Balanced Truncation for Model Reduction of Nonlinear Control Systems.” *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12 (6): 519–35. https://doi.org/10.1002/rnc.657.

Lee, Mario A. 2018. “An Approach for Efficient , Conceptual-Level Aerospace Structural Design Using the Static Condensation Reduced Basis Element Method an Approach for Efficient , Conceptual-Level Aerospace Structural Design Using the Static Condensation.” School of Aerospace Engineering - Georgia Institute of Technology.

Lee, Nam Sua, and Klaus Jürgen Bathe. 1994. “Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis.” *Finite Elements in Analysis and Design* 16 (2): 99–139. https://doi.org/10.1016/0168-874X(94)90044-2.

Leturcq, Bertrand. 2022. “Réduction de Modèles Thermomécaniques Non Linéaires d’assemblages Combustibles En Vue d’un Calcul de Coeur REP.” Institut Polytechnique de Paris.

Leturcq, Bertrand, Patrick Le Tallec, Serge Pascal, Olivier Fandeur, and Nicolas Lamorte. 2022. “A New Reduced Order Model to Represent the Creep Induced Fuel Assembly Bow in PWR Cores.” *Nuclear Engineering and Design* 394 (May): 111828. https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2022.111828.

Leung, Andrew Yee-Tak. 1978. “An Accurate Method of Dynamic Condensation in Structural Analysis.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12 (11): 1705–15. https://doi.org/10.1002/nme.1620121108.

Lévy, Paul. 1948. “Fonctions Aléatoires Du Second Ordre.” In *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, edited by Paris Gauthier-Villars. Paris.

Liang, Y. C., H. P. Lee, S. P. Lim, W. Z. Lin, K. H. Lee, and C. G. Wu. 2002. “Proper Orthogonal Decomposition and Its Applications - Part I: Theory.” *Journal of Sound and Vibration* 252 (3): 527–44. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4041.

Liang, Y C, W Z Lin, H P Lee, S P Lim, K H Lee, and D P Feng. 2001. “A Neural-Network-Based Method of Model Reduction for the Dynamic Simulation of MEMS.” *Journal of Micromechanics and Microengineering* 11: 226–33.

Llau, Antoine. 2016. “Méthodes de Simulation Du Comportement Mécanique Non Linéaire Des Grandes Structures En Béton Armé et Précontraint : Condensation Adaptative En Contexte Aléatoire et Représentation Des Hétérogénéités.” Université Grenoble Alpes.

Llau, Antoine, Ludovic Jason, Frédéric Dufour, and Julien Baroth. 2015. “Adaptive Zooming Method for the Analysis of Large Structures with Localized Nonlinearities.” *Finite Elements in Analysis and Design* 106: 73–84. https://doi.org/10.1016/j.finel.2015.07.011.

———. 2016. “Finite Element Modelling of 1D Steel Components in Reinforced and Prestressed Concrete Structures.” *Engineering Structures* 127: 769–83. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.09.023.

Lorentz, E., and S. Andrieux. 1999. “Variational Formulation for Nonlocal Damage Models.” *International Journal of Plasticity* 15: 119–38. https://doi.org/10.1016/S0749-6419(98)00057-6.

Lumley, J L. 1967. “The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows.” *Yaglom, A.M. and Tartarsky, V.I., Eds., Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, 166–77.

MacNeice, Peter, Kevin M. Olson, Clark Mobarry, Rosalinda De Fainchtein, and Charles Packer. 2000. “PARAMESH: A Parallel Adaptive Mesh Refinement Community Toolkit.”

Computer Physics Communications 126 (3): 330–54. https://doi.org/10.1016/S0010-4655(99)00501-9.

Marelli, S., and Bruno Sudret. 2014. “UQLab: A Framework for Uncertainty Quantification in Matlab.” In *The 2nd International Conference on Vulnerability and Risk Analysis and Management (ICVRAM 2014)*, 2554–63. University of Liverpool, United Kingdom. https://doi.org/10.1061/9780784413609.257.

Matheron G. 1963. “Principles of Geostatistics.” *Economic Geology* 58 (2): 1246–66. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246.

Matre, Olivier P. Le, Omar M. Knio, Habib N. Najm, and Roger G. Ghanem. 2001. “A Stochastic Projection Method for Fluid Flow. I. Basic Formulation.” *Journal of Computational Physics* 173 (2): 481–511. https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6889.

Mazars, Jacky, François Hamon, and Stéphane Grange. 2015. “A New 3D Damage Model for Concrete under Monotonic, Cyclic and Dynamic Loadings.” *Materials and Structures/Materiaux et Constructions* 48 (11): 3779–93. https://doi.org/10.1617/s11527-014-0439-8.

Mazars, Jacky, Pierre Labbe, and Benoit Masson. 2016. “Behavior and Assessment of Massive Structures: An Overview of the French Research Programs CEOS.Fr and VeRCoRs.” In *9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures FraMCoS-9*. https://doi.org/10.21012/fc9.310.

Meng, Try, Ludovic Jason, Thomas Heitz, and Benjamin Richard. 2022. “Prestressed Concrete Containment Building: Creep, Ageing and Leakage. Application to VERCORS Mockup.” In *SMiRT-26*. Berlin, Germany.

Metoui, S, E Pruliere, A Ammar, F Dau, and I Iordanoff. 2014. “The Proper Generalized Decomposition for the Simulation of Delamination Using Cohesive Zone Model.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 99 (13): 1000–1022.

Mezher, A., L. Jason, G. Folzan, and L. Davenne. 2022a. “Integration of the Principle of Mesh Refinement in the Adaptive Static Condensation (ASC) Method.” *Computational Modelling of Concrete and Concrete Structures*, 424–31. https://doi.org/10.1201/9781003316404-50.

———. 2022b. “Simulation of Large Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Structures Using a New Adaptive Static Condensation Method Including Automatic Mesh Partitioning.” *Finite Elements in Analysis and Design* 202: 103718. https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103718.

Michel-ponnelle, Sylvie. 2014. “[R7.01.02], ‘Modélisation Des Câbles de Précontrainte’, Code Aster,Http://Www.Code-Aster.Org.”

Moore, Bruce C. 1981. “Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction.” *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1): 17–32. https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102568.

Moreira, Leandro S., João Batista M. Sousa, and Evandro Parente. 2018. “Nonlinear Finite Element Simulation of Unbonded Prestressed Concrete Beams.” *Engineering Structures* 170 (May 2017): 167–77. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.05.077.

Moustapha, Maliki, Jean-Marc Bourinet, Benoît Guillaume, and Bruno Sudret. 2018. “Comparative Study of Kriging and Support Vector Regression for Structural Engineering Applications.” *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering (ASCE)* 4 (2). https://doi.org/10.1061/ajrua6.0000950.

Newman, A J, and P S Krishnaprasad. 2002. “Nonlinear Model Reduction for RTCVD.” *Internal Report*.

Newman, Andrew J., and P. S. Krishnaprasad. 1998. “Computation for Nonlinear Balancing.” In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 4:4103–4. Tampa, Florida USA. https://doi.org/10.1109/cdc.1998.761942.

Ni, Pinghe, Yong Xia, Jun Li, and Hong Hao. 2019. “Using Polynomial Chaos Expansion for Uncertainty and Sensitivity Analysis of Bridge Structures.” *Mechanical Systems and Signal Processing* 119: 293–311. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.09.029.

Niepceron, Julien, Laurent Charpin, Manuel Corbin, Benoit Masson, Jean-Philippe Mathieu, Jessica Haelewyn, François Hamon, Magnus Ahs, Sofia Aparicio, and Mehdi Asali. 2021. “Ageing and Air Leakage Assessment of a Nuclear Reactor Containment Mock-up: VERCORS 2nd Benchmark.” *Nuclear Engineering and Design* 377. https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2021.111136.

Nouy, Anthony. 2010. “A Priori Model Reduction through Proper Generalized Decomposition for Solving Time-Dependent Partial Differential Equations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (23–24): 1603–26. https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.01.009.

Obukhov, M. 1954. “Statistical Description of Continuous Fields.” *Transactions of the Geophysical International Academy Nauk USSR* 24 (24): 3–42.

Ong, JH. 1987. “Improved Automatic Masters for Eigenvalue Economization.” *Finite Elements in Analysis and Design* 3 (2): 149–60. https://doi.org/10.1016/0168-874X(87)90006-0.

Ouezdou, Mongi Ben. 2004. “Analyse de La Diffusion de La Précontrainte Par La Méthode Des Éléments Finis.” In *Colloque « Matériaux, Sols et Structures » MS2 2004*.

Palmerio, B. 1988. “A Two-Dimensional Fem Adaptive Moving-Node Method for Steady Euler Flow Simulations.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71 (3): 315–40. https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90038-2.

———. 1994. “An Attraction-Repulsion Mesh Adaption Model for Flow Solution on Unstructured Grids.” *Computers and Fluids* 23 (3): 487–506. https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)90015-9.

Pan, Feng, Ping Zhu, and Yu Zhang. 2010. “Metamodel-Based Lightweight Design of B-Pillar with TWB Structure via Support Vector Regression.” *Computers and Structures* 88: 36–44. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.07.008.

Parrilo, Pablo A, Sanjay Lall, Fernando Paganini, Bernard C Lesieutre, Jerrold E Marsdenl, and George C Verghese. 1999. “Modell Reduction for Analysis of Cascading Failures in Power Systems.” In *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, California.

Pewa, Tomasz, Timur Linde, and v. Gregory Weirs. 2003. *Adaptive Mesh Refinement – Theory and Applications*. *Proceedings of the Chicago Workshop on Adaptive Mesh Refinement Methods*. Chicago: Springer.

Pijaudier-Cabot, Giles, and Zdenek P. Bazant. 1987. “Non Local Damage Theory.” *Engineering Mechanics* 113: 1512–1533. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512).

Poles, Silvia, and Alberto Lovison. 2009. “A Polynomial Chaos Approach to Robust Multiobjective Optimization.” *Dagstuhl Seminar on Hybrid and Robust Approaches to Multiobjective Optimization* 1 (1): 1–15. http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2009/2000.

Pougachev, V.S. 1953. “General Theory of the Correlations of Random Functions.” *Izvestiya Akademii Nauk USSR 17* 17: 1401–2.

Rathinam, Muruhan, and Linda R. Petzold. 2002. “Dynamic Iteration Using Reduced Order Models: A Method for Simulation of Large Scale Modular Systems.” *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40 (4): 1446–74. https://doi.org/10.1137/S0036142901390494.

———. 2004. “A New Look at Proper Orthogonal Decomposition.” *SIAM Journal on Numerical Analysis* 41 (5): 1893–1925.

Ribes, André, and Christian Caremoli. 2007. “Salomé Platform Component Model for

Numerical Simulation." *31st Annual International Computer Software and Applications Conference (COMPSAC 2007)* 2 (Compsac): 553–64. https://doi.org/10.1109/COMPSAC.2007.185.

Rosenfeld, Azriel, and Avinash C. Kak. 2019. *Digital Picture Processing 2nd Eddition*. Vol. 1. Academic Press, INC. (LONDON) LTD.

Sacks, J, W.J. Welch, T.J. Mitchell, and H. P. Wynn. 1989. "Design and Analysis of Computer Experiments." *Statistical Science* 4: 409–35.

Santner, Thomas J., Brian J. William, and William I. Notz. 2004. *The Design and Analysis of Computer Experiments*. Vol. 46. Springer. https://doi.org/10.1198/tech.2004.s230.

Savin, and B. Faverjon. 2017. "Computation of Higher-Order Moments of Generalized Polynomial Chaos Expansions." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 111 (12): 1192–1200. https://doi.org/10.1002/nme.5505.

Scherpen, J. M.A. 1993. "Balancing for Nonlinear Systems." *Systems and Control Letters* 21 (2): 143–53. https://doi.org/10.1016/0167-6911(93)90117-O.

Scherpen, Jacquelien M.A. 1996. "$\mathcal{H}\infty$ Balancing for Nonlinear Systems." *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 6 (7): 645–68. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1239(199608)6:7<645::AID-RNC179>3.0.CO;2-X.

Schöbi, R., B. Sudret, and S. Marelli. 2017. "Rare Event Estimation Using Polynomial-Chaos Kriging." *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering* 3 (2). https://doi.org/10.1061/ajrua6.0000870.

Sellier, Alain, Stéphane Multon, Laurie Buffo-Lacarrière, Thierry Vidal, Xavier Bourbon, and Guillaume Camps. 2016. "Concrete Creep Modelling for Structural Applications: Non-Linearity, Multi-Axiality, Hydration, Temperature and Drying Effects." *Cement and Concrete Research* 79: 301–15. https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2015.10.001.

Shvartsman, S. Y., and I. G. Kevrekidis. 1998. "Low-Dimensional Approximation and Control of Periodic Solutions in Spatially Extended Systems." *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 58 (1): 361–68. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.361.

Shvartsman, S. Y., C. Theodoropoulos, R. Rico-Martínez, I. G. Kevrekidis, E. S. Titi, and T. J. Mountziaris. 2000. "Order Reduction for Nonlinear Dynamic Models of Distributed Reacting Systems." *Journal of Process Control* 10 (2): 177–84. https://doi.org/10.1016/S0959-1524(99)00029-3.

Siline, Mohammed. 2017. "Notes de Cours : Béton Précontraint, Cours et Applications." In *Université Mohamed Boudiaf, Département de Génie Civil*.

Silva, Fréderic Da. 2015. "Méthodologies de Réduction de Modèles Multiphysiques Pour La Conception et La Commande d'une Chaîne de Traction Électrique." Université Paris Saclay.

Sobol'. 1993. "Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models." *Mathematical and Computer Modelling 1, 407–414*.

Stein, Michael L. 2000. *Interpolation of Spatial Data: Some Theory for Kriging*. *Springer Series in Statistics*. Vol. 95. Springer Series in Statistic. https://doi.org/10.2307/2669494.

Sudret, Bruno. 2007. "Uncertainty Propagation and Sensitivity Analysis in Mechanical Models." HDR, Université BLAISE PASCAL - Clermont II.

———. 2008. "Global Sensitivity Analysis Using Polynomial Chaos Expansions." *Reliability Engineering and System Safety* 93 (2000): 964–79. https://doi.org/10.1016/j.ress.2007.04.002.

Sun, Xiang, Xiaomin Pan, and Jung Il Choi. 2021. "Non-Intrusive Framework of Reduced-Order Modeling Based on Proper Orthogonal Decomposition and Polynomial Chaos Expansion." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 390: 113–372.

https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113372.

Techniques de l'Ingénieur. 2005. "Le Béton Précontraint, Tba1034." https://doi.org/10.51257/a-v1-tba1034.

Tenchev, R T, and J A MacKenzie. 2005. "Finite Element Moving Mesh Analysis of Phase Change Problems with Natural Convection." *International Journal of Heat and Fluid Flow* 26: 597–612.

Totis, G., and M. Sortino. 2020. "Polynomial Chaos-Kriging Approaches for an Efficient Probabilistic Chatter Prediction in Milling." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 157: 103–610. https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2020.103610.

Tripathy, Rohit K., and Ilias Bilionis. 2018. "Deep UQ: Learning Deep Neural Network Surrogate Models for High Dimensional Uncertainty Quantification." *Journal of Computational Physics* 375: 565–88. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.08.036.

Tumer, I, K Wood, and I Busch-Vishniac. 200AD. "Monitoring of Signals from Manufacturing Processes Using the Karhunen_Loèeve Transform." *Mechanical Systems and Signal Processing* 14 (6): 1011–26.

ULM, Josef-Franz. 1994. "Modelisation Elastqplastique Avec Endommagement Du Beton de Structures. Application Aux Calculs Statiques et Dynamiques de Structures En Beton Arme et Beton Precontraint." Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

URANIE. 2020. "Uranie Team, 'Methodological Reference Guide for Uranie v4.4.0', 2020."

Verpeaux, Pierre, and T Charras. 2011. "Multiplicateur de Lagrange, Condensation Statique et Conditions Unilatérales." In *10e Colloque National En Calcul Des Structures (CSMA)*. Giens, France.

Wan, Xiaoliang, and George Em Karniadakis. 2005. "An Adaptive Multi-Element Generalized Polynomial Chaos Method for Stochastic Differential Equations." *Journal of Computational Physics* 209 (2): 617–42. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.023.

Wiener, Norbert. 1938. "The Homogeneous Chaos." *American Journal of Mathematics* 60: 897–936.

Wood, William A, and William L Kleb. 1999. "On Multi-Dimensional Unstructured Mesh Adaption." In *14th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference On Multi-Dimensional Unstructured Mesh Adaption*. Norfolk,VA.

Xiu, Dongbin, and George E M Karniadakis. 2002. "The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations." *SIAM Journal on Scientific Computing* 24 (2): 619–44.

Yue, Pengtao, Chunfeng Zhou, James J. Feng, Carl F. Ollivier-Gooch, and Howard H. Hu. 2006. "Phase-Field Simulations of Interfacial Dynamics in Viscoelastic Fluids Using Finite Elements with Adaptive Meshing." *Journal of Computational Physics* 219 (1): 47–67. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.03.016.

Zenios, Stavros A. 1999. "High-Performance Computing in Finance: The Last 10 Years and the Next." *Parallel Computing* 25 (13): 2149–75. https://doi.org/10.1016/S0167-8191(99)00083-6.

Zhang, Rui, Liang Li, Lianheng Zhao, and Gaopeng Tang. 2018. "An Adaptive Remeshing Procedure for Discontinuous Finite Element Limit Analysis." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 116: 287–307. https://doi.org/10.1002/nme.5925.

Zhou, Yicheng, Zhenzhou Lu, Jinghan Hu, and Yingshi Hu. 2020. "Surrogate Modeling of High-Dimensional Problems via Data-Driven Polynomial Chaos Expansions and Sparse Partial Least Square." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 364: 112906. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112906.

Zienkiewicz, O., R Taylor, and J Zhu. 1983. "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis." *Computers & Struct'ures* 16: 53–65.