École doctorale Euclide
LABORATOIRE MIA

Thèse présentée et soutenue publiquement par
Jordan Michelet
le 16 décembre 2022

pour obtenir le grade de
Docteur de l'université de La Rochelle
Spécialité : Mathématiques et applications

Extraction du fouillis de mer dans des images radar marin cohérent : modèles de champ de phases, méthodes de Boltzmann sur réseau, apprentissage.

Sea clutter extraction from coherent marine radar images : phase field models, lattice Boltzmann method, machine learning.

– **Jury** –

Rapporteurs –	
Antonin Chambolle	DR CNRS, Université Paris Dauphine
Benjamin Graille	MCF HDR, Université Paris-Saclay
Examinateurs –	
Frédéric Barbaresco	*Sensing Segment Leader*, Thales Land & Air Systems
Stéphanie Bidon	PR, ISAE-SUPAERO, Toulouse
Catherine Choquet	PR, Université de La Rochelle
Pierre Sagaut	PR, Université d'Aix-Marseille
Directeurs de Thèse –	
Michel Berthier	PR, Université de La Rochelle
Laurent Mascarilla	MCF HDR, Université de La Rochelle
Invités –	
Henry Chandran	Consultant scientifique, Bowen, Les Ulis
Philippe Pouliguen	Ingénieur HDR, Responsable scientifique DGA/AID Paris
Mohamed Mahdi Tekitek	MCF HDR, Université de La Rochelle

Remerciements

Les résultats présentés dans ce manuscrit de thèse résultent d'une recherche menée au sein du laboratoire Mathématiques, Images et Applications (MIA, EA 3165) à l'université de La Rochelle et au sein de l'entreprise ERTE-ETSA du groupe Bowen aux Ulis. Cette thèse s'est déroulée de décembre 2019 à novembre 2022. Cette période fût enrichissante d'un point de vue scientifique et partagée avec de nombreuses personnes que je souhaite remercier.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mes deux directeurs de thèse, Laurent Mascarilla et Michel Berthier de l'université de La Rochelle, qui m'ont beaucoup aidé dans mes travaux de recherche. Parmi les compétences transmises durant cette thèse, je retiens surtout la rigueur dans la rédaction d'un article et celle afin de mener des recherches originales, pertinentes et de qualité. Enfin, la qualité de nos échanges m'a permis d'approfondir ma compréhension des outils mathématiques utilisés pour le traitement d'image.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Antonin Chambolle et Benjamin Graille pour avoir rapporté sur ce manuscrit. Mes remerciements vont également à Frédéric Barbaresco, Stéphanie Bidon, Philippe Pouliguen et Pierre Sagaut qui ont accepté d'être membres du jury de soutenance.

Je remercie tout particulièrement Mohamed Mahdi Tekitek de l'université de La Rochelle, pour sa disponibilité, la qualité des échanges et ses conseils avisés. Enfin, je souhaite remercier Catherine Choquet de l'université de La Rochelle pour ses conseils avisés.

Durant ces trois années, j'ai bénéficié d'un contrat doctoral DGA-CIFRE. Il a été en partie financé par l'entreprise ERTE-ETSA du groupe Bowen et par la direction générale des armements, plus particulièrement l'agence innovation défense. Au sein de l'entreprise ERTE-ETSA, je tiens surtout à remercier Henry Chandran, Joël Willebois et Olivier Fourt pour avoir participé à l'avancée de mes travaux de recherche. Je les remercie profondément pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Au sein de l'agence innovation défense, je tiens sincèrement à remercier Philippe Pouliguen pour nos nombreux échanges qui m'ont aidé à approfondir mes connaissances dans le domaine du radar.

Je finis par remercier chaleureusement ma petite famille qui fut d'un soutien permanent.

Table des matières

Remerciement **iii**

Acronymes **xv**

1 Introduction **1**
1.1 Plan du manuscrit . . . 2
1.2 Publications issues de la thèse . . . 4
1.2.1 Journaux internationaux avec comité de lecture . . . 4
1.2.2 Acte de conférence . . . 4
1.2.3 Interventions . . . 5

2 Le signal radar pulse-Doppler **7**
2.1 Configuration d'émission et de réception . . . 7
2.2 Le signal émis . . . 7
2.2.1 Forme d'onde émise . . . 8
2.2.2 Mode de fréquence . . . 8
2.2.3 Résolution du signal . . . 9
2.3 Le signal reçu . . . 9
2.3.1 Vitesse radiale et effet Doppler . . . 9
2.4 Traitement du signal radar classique . . . 10
2.4.1 Le traitement pulse-Doppler . . . 10
2.4.2 Intégration du signal . . . 11
2.4.3 Espace de Fourier . . . 11
2.5 Acquisitions utilisées . . . 12

3 Modèle de champs à k phases à interface diffuse **17**
3.1 La formulation variationnelle . . . 18
3.1.1 Le terme de régularisation . . . 18
3.1.2 Le terme d'attache aux données . . . 19
3.1.3 L'équation de diffusion du CV-kP . . . 20
3.2 La résolution par splitting de Strang . . . 21
3.2.1 Solution exacte de l'équation de diffusion . . . 22
3.2.2 Solution exacte de l'équation de réaction . . . 22
3.2.3 Solution approchée du terme d'attache aux données . . . 22
3.3 Conclusion . . . 23

4 Évaluation de l'algorithme CV-kP **25**
4.1 Les algorithmes LS et LL-2P . . . 26
4.1.1 La méthode LS . . . 26
4.1.2 La méthode LL-2P . . . 27
4.2 Segmentation et extraction du fouillis de mer . . . 29
4.2.1 Traitement des images de cartes distance-Doppler . . . 30
4.2.2 Traitement des images obtenues par intégration non cohérente . . . 32
4.3 Conclusion . . . 34

5 Les schémas LB pour le traitement d'image radar **37**
5.1 L'équation de Boltzmann . . . 38
5.1.1 Discrétisation du schéma . . . 39
5.1.2 Espace des moments . . . 40
5.2 Consistance – les EDPs équivalentes . . . 41
5.3 Stabilité du schéma – Analyse de von Neumann . . . 44
5.4 Validation numérique . . . 47
5.5 Application – Traitement d'image radar marin . . . 49
5.6 Compléments . . . 53
5.7 Conclusion . . . 54

6 Extraction sans paramètres du fouillis de mer par apprentissage profond **57**
6.1 Base de données étiquetée . . . 58
6.2 Algorithmes d'extraction du fouillis de mer . . . 58
6.2.1 Algorithme CV-kP . . . 58
6.2.2 Algorithme pulse-Doppler . . . 59
6.3 Architecture du réseau de neurones . . . 60
6.4 Phase d'apprentissage . . . 62
6.5 Expérimentations . . . 65
6.6 Conclusion . . . 65

7 Conclusion et perspectives **67**
7.1 Résumé des résultats présentés . . . 67
7.2 Perspectives . . . 68
7.2.1 Exploitation d'une analyse multi-résolution . . . 68
7.2.2 Obtention d'un schéma de Boltzmann sur réseau d'ordre deux pour des équations de convection-diffusion . . . 69

A Les EDPs équivalentes du schéma LB D2Q9 **71**

B Compléments de résultats **79**
B.1 Traitement utilisant l'algorithme CV-kP . . . 81
B.2 Traitement utilisant les schémas LB MRT . . . 83
B.2.1 Équation du CV-kP . . . 83
B.2.2 Équation de convection-diffusion . . . 86
B.3 Traitement utilisant l'algorithme pulse-Doppler . . . 88
B.4 Traitement utilisant le réseau de neurones . . . 89

C Programme Python de l'auto-encodeur utilisé **91**

Bibliographie **97**

Table des figures

2.1 Spectre électromagnétique des bandes radar. 7

2.2 Les vitesses dans le domaine radar. 10

2.3 Intégration non cohérente des acquisitions présentées dans les tableaux 2.1 et 2.2. 13

2.4 Carte distance-Doppler des acquisitions présentées dans les tableaux 2.1 et 2.2. 15

3.1 Double puits de potentiel défini par (3.5) et sa version périodique. 19

3.2 La fonction $\mathrm{sinc}^2(x)$ peut être vu comme une version très lissée d'une fonction indicatrice. 20

4.1 Segmentation du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en fonction de l'algorithme appliqué sur la carte distance-Doppler. La ligne jaune représente la segmentation obtenue et la ligne rouge est la vérité terrain. La figure 4.1d correspond au meilleur contour sélectionné pour $k = 5$ et $U = 1/2$ (voir texte ci-dessous). 30

4.2 Segmentation du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP avec $k = 5$ appliqué sur la carte distance-Doppler – ligne jaune pour $U = 1/2$, ligne rouge pour $U = 3/2$ et ligne noire pour $U = 5/2$ (voir le texte ci-dessous). 32

4.3 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en fonction de l'algorithme appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente. 33

4.4 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en fonction de l'algorithme appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 34

4.5 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 35

5.1 Réseau $D2Q9$ 41

5.2 Région de stabilité numérique en fonction des nombres de Courant et de Péclet. Chaque courbe représente la limite supérieure permettant d'avoir un schéma stable pour $\lambda = 1$, $\theta = 45°$, $s_6 = s_7 = s_8 = 1.1$ et différentes valeurs de Δt. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est discrétisé de la façon suivante : $\vec{\omega}_{a,b} = \frac{\pi a}{30}\left(\cos\left(\pi b/30\right), \sin\left(\pi b/30\right)\right)$ avec $a, b = 0,\ 1,\ \ldots,\ 30$. 45

5.3 Région de stabilité numérique en fonction des nombres de Courant et de Péclet. Chaque courbe représente la limite supérieure permettant d'avoir un schéma stable pour $\lambda = 1,\ \Delta t = 1,\ s_6 = s_7 = s_8 = 1.1$ et différentes valeurs de θ (données en degrés). Le vecteur d'onde $\vec{\omega}$ est discrétisé de la façon suivante : $\vec{\omega}_{a,b} = \frac{\pi a}{30}\left(\cos\left(\pi b/30\right), \sin\left(\pi b/30\right)\right)$ avec $a, b = 0,\ 1,\ \ldots,\ 30$. . . . 46

5.4 Région de stabilité numérique en fonction des nombres de Courant et de Péclet. Chaque courbe représente la limite supérieure permettant d'avoir un schéma stable pour $\lambda = 1,\ \theta = 45°,\ \Delta t = 1$ et différentes valeurs de $s_6 = s_7 = s_8$. Le vecteur d'onde $\vec{\omega}$ est discrétisé de la façon suivante : $\vec{\omega}_{a,b} = \frac{\pi a}{30}\left(\cos\left(\pi b/30\right), \sin\left(\pi b/30\right)\right)$ avec $a, b = 0,\ 1,\ \ldots,\ 30$. 46

5.5 Courbe de convergence de la solution simulée en utilisant le schéma LB MRT D2Q9 d'ordre trois. La limite inférieure de Δt est donnée par (5.44). 48

5.6 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler. 50

5.7 Influence des paramètres $\mathfrak{c}_R$ et ε pour l'extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme CV-kP sur l'image obtenue par intégration non cohérente puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) sur la carte distance-Doppler. Chaque ligne correspond à une valeur donnée de ε tandis que chaque colonne correspond à une valeur donnée de $\mathfrak{c}_R$. 51

5.8 Influence des termes de l'EDP équivalente (5.49) du schéma LB MRT D2Q9 (sans terme source et avec advection non constante). 52

5.9 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` utilisant l'intégration non cohérente : comparaison de deux implémentations de l'algorithme CV-kP, (b) par schéma LB, (c) par splitting de Strang. 54

6.1 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler. 59

6.2 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler. 60

6.3 Architecture simplifiée du double auto-encodeur proposé pour l'extraction du fouillis de mer et l'obtention du signal d'intérêt. 61

6.4 Architecture de chaque auto-encodeur. Les blocs jaunes sont des blocs de couches convolutives et résiduelles, les blocs violets sont des couches denses permettant d'obtenir une version variationnelle d'un auto-encodeur, et le bloc gris représente la sortie de l'encodeur et l'entrée du décodeur. Les blocs rouges sont des couches de *maxpooling* tandis que les blocs verts sont des couches de *unpooling*. Les flèches grises représentent les liaisons entre les couches de *maxpooling* et de *unpooling*. 61

6.5 Évolution de l'hyper-paramètre β durant un cycle de mille époques. 63

6.6 Évolution de la fonction de coût $\mathcal{J}$ pendant l'entraînement du double auto-encodeur. La ligne noire, respectivement la ligne verte, représente la fonction de coût $\mathcal{J}$ pour la version résiduelle sans *dropout*, respectivement avec *dropout*. La ligne rouge, respectivement la ligne bleue, représente la fonction de coût $\mathcal{J}$ pour la version non résiduelle sans *dropout*, respectivement avec *dropout*. 63
6.7 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler. 64
6.8 Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler. 65

7.1 Extraction du fouillis de mer de `08_059_CStFA` en fonction de l'algorithme et visualisé sur l'intégration non cohérente. 69

B.1 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 81
B.2 Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 82
B.3 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 82
B.4 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP implémenté par schéma LB et appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 83
B.5 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` en utilisant l'algorithme CV-kP implémenté par schéma LB et appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 84
B.6 Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP implémenté par schéma LB et appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler. 85
B.7 Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler. 86
B.8 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant le double auto-encodeur puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler. 86
B.9 Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler. 87
B.10 Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler. 88
B.11 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler. 88

B.12 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler. 89
B.13 Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler. 90

Liste des tableaux

2.1 Descriptif des acquisitions présentées dans ce manuscrit ayant pour paramètres communs $f_0 = 8.8$GHz et $f^{FRI} = 2$kHz. 11
2.2 Descriptif de la région $\boldsymbol{A}^{\#}$ pour chaque acquisition du tableau 2.1. 12

5.1 Les moments non conservés d'un réseau $D2Q9$ comme fonction linéaire de l'unique moment conservé ρ. 42

Acronymes

CSIR Council for Scientific and Industrial Research.

CV-kP Modèle de champs à k phases à interface diffuse (EN – k-phase diffuse interface model).

EDP Équation aux Dérivées Partielles.

FRI Fréquence de Répétition des Impulsions.

LB Méthode de Boltzmann sur réseau (EN – Lattice Boltzmann method).

LL-2P Modèle d'interface diffuse à deux phases contraint par un rapport de log-vraisemblance (EN – Log-likelihood driven two-phase diffuse interface model).

LS Méthode des surfaces de niveau (EN – Level-Set method).

MRT Temps de relaxation multiple (EN – Multiple Relaxation Time).

SCR Rapport signal sur fouillis (EN – Signal-to-Clutter Ratio).

SRT Temps de relaxation unique (EN – Single Relaxation Time).

TRI Temps de Répétition des Impulsions.

Nomenclature

χ Carré de l'énergie cinétique ;

Δt Pas de temps ;

Δx Pas d'espace ;

η Valeur propre de la matrice d'amplification $\boldsymbol{G}$;

Γ_t Interface entre les phases ;

κ Coefficient de diffusion ;

λ Vitesse numérique du réseau ;

$\mathcal{I}$ Image à traiter ;

$\mathcal{J}$ Fonction de coût du réseau de neurones présenté au chapitre 6 ;

$\mathcal{L}$ Grille discrète relative au domaine Ω ;

$\mathcal{P}_E$ Densité obtenu par un estimateur de Parzen définie en (4.13) ;

$\mathcal{Q}$ Opérateur de collision ;

$\mathfrak{c}$ Constante ;

Cr Nombre de Courant défini par (5.31) ;

Pe Nombre de Péclet défini par (5.32) ;

$\boldsymbol{A}$ Matrice tridimensionnelle relative au signal reçu (à valeurs dans $\mathbb{C}$) ;

$\boldsymbol{A}^{\#}$ Région de l'acquisition $\boldsymbol{A}$ de taille $[20; 10; 64]$;

$\boldsymbol{A}_{(SC)}$ Fouillis de mer obtenu après extraction en utilisant l'algorithme CV-kP ou le traitement pulse-Doppler ;

$\boldsymbol{A}_{(SOI)}$ Signal d'intérêt obtenu après extraction en utilisant l'algorithme CV-kP ou le traitement pulse-Doppler ;

$\boldsymbol{C}$ Matrice de collision exprimée dans l'espace des moments ;

$\boldsymbol{G}$ Matrice d'amplification dans l'analyse de Von Neumann ;

$\boldsymbol{M}$ Matrice des moments ;

Ω Domaine occupé par une image ;

$\omega_c(x)$ Fréquence de coupure à x dB, définie en (2.13) ;

ϕ_0 Phase du signal émis en début d'impulsion ;

ρ Densité ;

σ_k Coefficient de Hénon défini par $\sigma_k = \frac{1}{s_k} - \frac{1}{2}$;

τ^p Longueur de l'impulsion (en seconde) ;

τ^{TRI} Temps de répétition des impulsions (en seconde) ;

E Énergie cinétique ;

$\mathtt{p}_{xx}$ Termes diagonaux du tenseur des contraintes bi-dimensionnel ;

$\mathtt{p}_{xy}$ Termes hors diagonaux du tenseur des contraintes bi-dimensionnel ;

$\mathtt{x}$ Longueur caractéristique ;

θ Direction du vecteur d'advection $\vec{w} = \|\vec{w}\|(\cos\theta, \sin\theta)$;

θ^{az} Azimut par rapport à la direction de référence 90° N (en degrés) ;

θ^{el} Angle de site, d'incidence ou encore d'élévation (en degrés) ;

ε Épaisseur du contour entre les phases ;

$\vec{\mathbb{F}}$ Champ de force externe macroscopique exprimé dans l'espace des moments ;

$\vec{\omega}$ Vecteur d'onde dans l'analyse de Von Neumann ;

$\vec{F}$ Champ de force externe macroscopique exprimé dans l'espace des distributions ;

$\vec{m}$ Vecteur des moments ;

$\vec{q}$ Flux de chaleur ;

$\vec{v}_i$ et $\vec{e}_i$ Vitesses et directions obtenues après discrétisation de l'espace des vitesses ;

$\vec{w}$ Vitesse d'advection intervenant dans l'EDP de convection-diffusion (5.25) ;

$\vec{z} = (r, \theta^{az})$ Position de la cellule en coordonnées polaires ;

$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{C}}$ Intégration cohérente de l'acquisition $\boldsymbol{A}$, définie en (2.14) ;

$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{NC}}$ Intégration non cohérente de l'acquisition $\boldsymbol{A}$, définie en (2.12) ;

a_E Amplitude du signal émis ;

B Bande de fréquence occupé par le radar ;

c Vitesse de la lumière dans le vide, soit $c = 299\ 792\ 458$ m/sec ;

$C(k)$ Valeur moyenne de l'image sur le domaine occupé par la $k^{\text{iéme}}$ phase (défini en (3.9)) ;

D Opérateur différentiel ;

d distance signée à l'interface Γ_t ;

$D_{\mathbf{r}}$ Diamètre de l'antenne radar (en mètre) ;

f Fonction de distribution dans la méthode LB. À l'équilibre, elle est notée f^{eq} et après collision, elle est notée f^* ;

f^{FRI} Fréquence de répétition des impulsions (en Hertz) ;

f_0 Fréquence émise par le radar (en Hertz) ;

f_D Fréquence Doppler (en Hertz) ;

g Fonction indicatrice de fort gradient, définie en (4.3b) ;

h Fonction défini en (3.23) et utilisé au sein de l'algorithme CV-kP ;

H_ε Approximation de la fonction Heaviside, défini en (4.3c) ;

$k(x)$ Fonction de poids associé à l'estimateur de Parzen ;

K_σ Noyau gaussien d'écart-type σ, défini en (4.3b) ;

p Indice de l'impulsion ;

p_k Suite de polynôme utilisé par la construction de l'espace des moments dans la méthode LB ;

$p_{\max}$ Nombre d'impulsions par train d'ondes ;

q Profil défini en (4.4) associé au potentiel W défini en (3.5) ;

r Distance relative au radar (en mètre) ;

$r_{\max}$ Distance non ambigüe du radar (en mètre) ;

S Terme source d'une EDP ;

s_k Temps de relaxation ;

t_f Temps final ;

T_{IN} et T_{OUT} Fonction utilisée pour simplifier l'équation itérative relative à la minimisation du log-vraisemblance dans l'algorithme LL-2P ;

U Fonction espace-temps dans les méthodes d'interfaces diffuse des chapitres 3 et 4 ;

u Vitesse macroscopique ;

v^r Vitesse radiale (en mètre par seconde) ;

$v^r_{\max}$ Vitesse radiale non ambigüe (en mètre par seconde) ;

W Puits de potentiel (défini en (3.5) pour l'algorithme CV-kP et en (4.3a) pour l'algorithme LS ;

Chapitre 1

Introduction

L'invention du radar (*RAdio Detecting And Ranging*, c'est-à-dire détection et télémétrie radioélectrique) est le résultat d'une accumulation de nombreuses recherches menées parallèlement dans plusieurs pays. Nous pouvons citer James Clerk Maxwell (physicien anglais), Heinrich Rudolf Hertz (physicien allemand) ou encore Christian Hulsmeyer (technicien allemand). C'est ce dernier qui inventa en 1904 le *telemobiloskop* afin de prévenir des collisions en mer [1]. Après de nombreuses années et découvertes, le radar est plus largement qualifié de capteur électromagnétique utilisé principalement pour la détection, la localisation et l'estimation de la vitesse d'objets tels que les bateaux, les voitures, les avions ... Suivant sa localisation, un radar peut être qualifié de radar terrestre, aéroporté ou marin. Dans le cas d'un radar marin, les images acquises sont composées de fouillis de mer et d'un signal d'intérêt. Le fouillis de mer correspond au bruit induit par le phénomène de rétrodiffusion multiple du signal émis par le radar sur la surface illuminée. Il provient par exemple de la surface marine, de la pluie ou de la côte et induit dans les images radar marin la présence de speckles tant en amplitude qu'en phase : il a les mêmes caractéristiques qu'un bruit d'interférence. Visualisé sur la carte distance-Doppler, c'est-à-dire la transformée de Fourier du signal reçu en fonction de la distance, le fouillis de mer apparaît comme une large bande de fréquence proche de la composante continue (fréquence nulle) dont les contours sont très irréguliers. En pratique, cette information est cruciale pour déduire, par exemple, les paramètres océanographiques de la zone ayant été illuminée par le radar marin [2]. Le signal d'intérêt est le signal rétrodiffusé par tout objet sur la zone illuminée par le radar marin : un bateau, une île, un animal ... Cette information, une fois identifiée, permet d'aborder plus facilement l'étape de détection de cibles.

Au cours des quarante dernières années, divers laboratoires de recherche ont travaillé sur la modélisation du fouillis de mer présent dans le signal radar marin [3, 4]. Par exemple, dans le cas d'un radar à basse résolution, le fouillis de mer peut être modélisé comme un modèle gaussien pour les composantes en phase et en quadrature, et comme une distribution de Rayleigh pour l'amplitude. Dans le cas d'un radar à haute résolution et à angle d'incidence faible, le signal rétrodiffusé contient des pics d'énergie semblables à des cibles qui donnent lieu à des observations non gaussiennes. Dans ces conditions, des études empiriques montrent que le fouillis de mer semble suivre plusieurs distributions : une distribution de Weibull, une K-distribution, une distribution log-normale ... Cependant, ces distributions ne sont valables que pour certains états de mer [3]. C'est la raison pour laquelle aucune hypothèse de nature statistique concernant le fouillis de mer n'est utilisée dans ce manuscrit.

Le Conseil pour la recherche scientifique et industrielle (EN – Council for Scientific and Industrial Research : CSIR) d'Afrique du Sud a fourni une base de données réelles [5]. Les acquisitions réelles (non simulées) de cette dernière permettent d'illustrer la grande diversité de fouillis de mer et de signaux d'intérêt et, de fait, les difficultés inhérentes au traitement du fouillis de mer.

Le bruit d'interférence dominant n'est pas le bruit thermique (du récepteur) car l'amplitude du fouillis de mer est beaucoup plus élevée que celle du bruit thermique. Néanmoins, ces deux types de bruit présentent des caractéristiques semblables : par exemple leur phase et leur amplitude sont aléatoires. De plus, le récepteur provoque un bruit plus ou moins constant sur toutes les distances tandis que le fouillis de mer peut varier en amplitude sur une même distance. Ainsi, le rapport signal sur fouillis (EN – Signal-to-Clutter Ratio : SCR) sera souvent inférieur au rapport signal sur bruit. C'est pourquoi la possibilité de détecter des cibles en présence d'un fouillis de mer élevé dépend plus du SCR que du rapport signal sur bruit. Dans la pratique, cette détection se fait à l'aide d'une probabilité. De manière simplifiée, si l'amplitude du signal reçu dépasse un certain seuil de détection, on considère qu'il y a présence d'une cible. Cette méthode classique est dénommée "taux constant de fausse alarme". Cependant, lorsque le SCR est faible, l'amplitude du signal reçu relatif à du bruit peut facilement dépasser le seuil de détection alors qu'il n'est constitué que de bruit : c'est ce que l'on appelle une fausse alarme. Le seuil de détection est donc choisi afin de détecter toutes les cibles avec un minimum de fausses alarmes. En condition de mer agitée, des fausses alarmes peuvent être relatives à des pics d'énergie provoqués par l'embrun. De plus, les ondes de gravité (en présence de crêtes et creux de vagues) peuvent induire des zones d'ombre qui sont impossibles à illuminer par le radar marin. Détecter une cible dans ces zones d'ombre revient à détecter les vagues de sillage provoquées par la cible. Enfin, certains bateaux sont construits de manière à minimiser le phénomène de rétrodiffusion du signal émis par le radar et l'énergie qu'il rétrodiffuse est parfois inférieure à celle du fouillis de mer. Dans ces deux derniers cas, la détection est une question particulièrement complexe.

Beaucoup de variantes ont été proposées à la méthode "taux constant de fausse alarme". Certaines prennent en compte l'information au voisinage de la cellule [6–9] et d'autres l'associent à des méthodes de traitement d'image [10] ou de traitement du signal [11]. Citons [12–14] pour l'utilisation de la transformée de Fourier (fractionnaire ou non) et [15–20] pour l'utilisation de la transformée en ondelettes afin d'extraire ou de supprimer le fouillis de mer. Une autre méthode classique de détection, exploitant l'information de phase et de quadrature, repose sur l'estimation de la fréquence Doppler à partir de la fréquence instantanée. Cette méthode, appelée traitement pulse-Doppler dans ce manuscrit, ne permet de détecter les cibles que si elles sont hors du fouillis de mer, c'est-à-dire exo-clutter.

Le parti pris dans ces travaux correspondant aux besoins de l'entreprise ERTE-ETSA (Bowen) est de développer des méthodes de traitement d'image visant à extraire le fouillis de mer et donc à augmenter le SCR du signal reçu afin de réduire la quantité de fausses alarmes lors de l'étape de détection.

1.1 Plan du manuscrit

Le chapitre 2 est consacré à l'introduction des notions concernant le signal radar utilisées dans les méthodes de traitements d'image présentées dans ce manuscrit. Le signal radar est décrit de son émission à sa réception. Ce chapitre se termine par une description

des acquisitions sélectionnées afin d'illustrer les résultats obtenus concernant l'extraction du fouillis de mer.

Le chapitre 3 est consacré à la description du modèle de champs à k phases à interface diffuse (EN – k-phase diffuse interface model : CV-kP) ainsi qu'à son implémentation. Cette méthode de traitement d'image utilise une approche variationnelle, c'est-à-dire qu'elle se base sur la minimisation d'une énergie composée d'un terme d'attache aux données et d'un terme de régularisation. Le terme de régularisation, introduit par Li et Kim dans [21], est une généralisation de l'énergie de Cahn-Hilliard [22,23] avec un potentiel ayant une infinité de puits périodiques. Le terme d'attache aux données est une adaptation de celui introduit par Chan et Vese dans [24]. La descente de gradient associée à cette énergie donne une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) de diffusion non linéaire. Nous proposons, pour implémenter cette EDP, d'utiliser un splitting de Strang. Hormis le terme provenant de l'attache aux données, les termes de la décomposition sont résolus avec des solutions exactes ne nécessitant aucune discrétisation en espace. Le schéma obtenu est donc relativement stable numériquement et simple à implémenter.

Le chapitre 4 est consacré à l'évaluation de l'algorithme CV-kP pour extraire le fouillis de mer. Nous comparons ses performances à deux autres modèles d'interface couramment utilisés pour des images présentant les mêmes caractéristiques que les nôtres. Le premier est le bien connu Level-Set (LS) [25–27] à interface nette et le second est un modèle d'interface diffuse à deux phases contraint par un rapport de log-vraisemblance (EN – log-likelihood driven two-phase diffuse interface motion : LL-2P) [28]. Dans les deux cas, il s'agit essentiellement de variantes du flot de courbure moyenne [29]. Les performances de ces trois algorithmes sont comparées en utilisant deux approches différentes afin d'extraire le fouillis de mer. La première approche utilise l'information fournit par la carte distance-Doppler tandis que la seconde utilise l'information fournit par l'intégration non cohérente, c'est-à-dire la moyenne de l'énergie rétro-diffusée sur toutes les impulsions et à position fixée. Des tests sur les acquisitions radar (non simulées) de la base CSIR montrent la nécessité d'avoir recours à $k > 2$ phases. Au terme de cette étude, il s'avère que les meilleures performances sont obtenues en utilisant l'algorithme CV-kP sur l'image obtenue par intégration non cohérente et une fonction de transfert obtenue par un estimateur de Parzen, c'est-à-dire un estimateur de densité non paramétrique [30]. Du fait de l'approche retenue, utilisant l'intégration non cohérente et reposant implicitement sur l'hypothèse qu'une acquisition est principalement composée de fouillis de mer, les résultats obtenus par l'ensemble de ces méthodes en présence de cibles sont conditionnés par le fait que le signal d'intérêt doit avoir un SCR suffisamment grand.

Dans le chapitre 5, nous présentons une utilisation originale de la méthode de Boltzmann sur réseau (EN – Lattice Boltzmann method : LB method) pour le traitement d'images dans le cas particulier des images associées à des cartes distance-Doppler. Nous commençons par quelques rappels sur la méthode LB en détaillant en particulier les schémas LB D2Q9 à 2 dimensions et 9 vitesses discrètes de transport de particules. Ces schémas sont utilisés dans la suite du travail pour simuler des solutions d'une EDP de convection-diffusion non linéaire à advection non constante. Contenu des caractéristiques des images utilisées, obtenir de tels schémas LB stables requiert l'utilisation d'opérateurs de collision à temps de relaxation multiple (EN – Multiple Relaxation Time : MRT). Nous nous intéressons dans un premier temps à l'obtention par une analyse asymptotique des EDPs équivalentes données par ces schémas LB MRT D2Q9 pour une EDP de convection-diffusion non linéaire à advection non constante. Contrairement au cas où l'advection est constante

et le terme source est nul, pour lequel on obtient une EDP équivalente à l'ordre trois, une advection non constante et un terme source non nul induisent la présence d'un terme parasite d'ordre deux dans l'EDP équivalente. C'est précisément ce dernier cas qui nous intéresse dans nos applications ; l'estimation de ce terme parasite montre qu'il peut être négligé et on utilise alors les paramètres du schéma donnés par le cas où l'advection est constante. La stabilité de ce même schéma est étudiée numériquement par analyse de Von Neumann et est discutée en fonction du nombre de Courant (rapport entre la vitesse d'advection et la vitesse discrète du réseau) et du nombre de Péclet (rapport entre le transport par convection et le transport par diffusion). Cette analyse met clairement en évidence le manque de stabilité qu'induit l'utilisation d'opérateurs de collision à temps de relaxation unique (EN – Single Relaxation Time : SRT) par rapport aux opérateurs de collision de type MRT.

Nous avons vu qu'un des défauts de l'approche utilisant l'algorithme CV-kP est qu'elle ne se révèle pertinente que dans le cas d'un SCR suffisamment grand et que cet algorithme ne permet donc pas d'extraire correctement le fouillis de mer en présence de cibles à SCR faible ou négatif. En revanche, dans le cas où le signal d'intérêt est exo-clutter et a un SCR faible, le traitement pulse-Doppler donne de bons résultats. On dispose donc de deux algorithmes : l'un efficace pour un signal d'intérêt à SCR suffisamment grand et l'autre pour un signal d'intérêt exo-clutter et à faible SCR. L'approche par apprentissage développée dans le chapitre 6 a pour objectif de s'affranchir du choix de l'algorithme le plus adapté en fonction du SCR. Pour ce faire, nous proposons de mettre en œuvre un double auto-encodeur convolutif, résiduel et variationnel, supervisé par les deux algorithmes CV-kP et pulse-Doppler. L'architecture du double auto-encodeur est discutée en détails à partir de tests d'ablation. Les expérimentations sur la base du CSIR confirment que le double auto-encodeur proposé supervisé par les deux algorithmes CV-kP et pulse-Doppler permet de pallier le manque d'information exploitable fournie par la base du CSIR.

Enfin, après une conclusion, nous exposons dans le chapitre 7 quelques perspectives de notre travail au vu des résultats obtenus par les méthodes de ce manuscrit sur un cas donné.

1.2 Publications issues de la thèse

L'ensemble de ces travaux a fait l'objet des publications suivantes :

1.2.1 Journaux internationaux avec comité de lecture

— J. Michelet, L. Mascarilla, H. Chandran, and M. Berthier, "*Geometric segmentation of sea clutter in coherent radar images : Range-Doppler Map versus Range-Time Intensity Map*," **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, vol. 57, pp. 2278–2287, aug 2021.

— J. Michelet, M. M. Tekitek, and M. Berthier, "*Multiple relaxation time lattice Boltzmann model for advection-diffusion equations with application to radar image processing*," **Journal of Computational Physics**, sept 2022.

1.2.2 Acte de conférence

— J. Michelet, L. Mascarilla, H. Chandran, and M. Berthier, "*Extraction du fouillis de mer par approche variationnelle et par réseau de neurones*," pour **ENVIREM**, oct 2022.

1.2.3 Interventions

L'ensemble de ces travaux a fait aussi l'objet des interventions suivantes :

— J. Michelet, M. M. Tekitek, and M. Berthier, "*Multiple relaxation time lattice Boltzmann model for advection-diffusion equations with application to radar image processing*," pour **ICMMES 2021**, july 2021.

— J. Michelet, M. M. Tekitek, L. Mascarilla, and M. Berthier, "*Équation aux dérivées partielles et traitement d'image radar marin*, pour l'**association Lambda** (association des doctorants de l'université de Bordeaux), oct 2021.

— J. Michelet, M. M. Tekitek, and M. Berthier, "*Lattice Boltzmann convection-diffusion model with non-constant advection velocity*," pour **ICMMES 2022**, july 2022.

Chapitre 2

Le signal radar pulse-Doppler

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notions concernant le signal radar qui seront utilisées dans les méthodes implémentées dans les chapitres suivants. Cela concerne le signal émis puis reçu ainsi que les traitements classiques appliqués sur le signal reçu. Enfin, nous terminons ce chapitre par une présentation et une description du jeu de données réelles utilisé dans la suite de ce manuscrit.

2.1 Configuration d'émission et de réception

Pour l'émission et la réception du signal radar, il existe plusieurs configurations, chacune ayant des avantages et inconvénients :

monostatique – Un seul radar est utilisé pour l'émission et la réception du signal. C'est la configuration la plus utilisée puisque le bruit renvoyé par l'environnement est très peu capté ;

bistatique – Un premier radar est utilisé pour l'émission et un second pour la réception du signal. Cette configuration réduit l'influence des dispositifs de contre-mesure et implique une géométrie d'acquisition moins triviale ;

multistatique – Plusieurs radars sont utilisés soit en tant que récepteur, soit en tant qu'émetteur. Ce genre de configuration nécessite donc un minimum de trois radars : un émetteur et deux récepteurs ou *vice-versa*.

Remarque 2.1: Dans cette thèse, les acquisitions utilisées proviennent d'une configuration monostatique.

2.2 Le signal émis

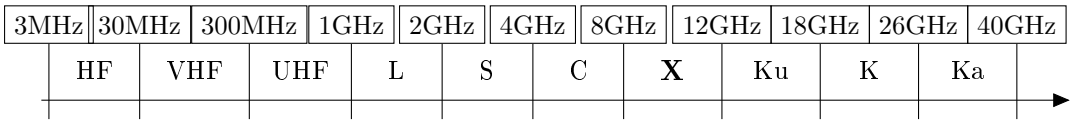


FIGURE 2.1 – Spectre électromagnétique des bandes radar.

Les paramètres concernant le signal émis par le radar sont nombreux et sont choisis en fonction du domaine d'application. Par exemple, le choix de la fréquence transmise f_0 (en Hertz) détermine ce qui est visible ou non par le radar. En effet, tout élément sera perçu par le radar si la longueur d'onde associée est significativement plus petite que la

taille de l'élément en question. Dans le cas inverse, d'après le mécanisme de diffusion de Rayleigh, l'énergie rétrodiffusée de l'élément tend rapidement vers zéro.

Remarque 2.2: Dans cette thèse, nous nous focalisons sur la bande X, une bande de fréquence très utilisée en surveillance maritime.

2.2.1 Forme d'onde émise

Il existe deux grandes classes de radar concernant l'émission : les radars à onde **continue** et les radars à **impulsion**.

— La première classe émet une onde continue soit à fréquence fixe, soit à fréquence modulée sur une bande de fréquence B (par exemple modulée suivant (2.2)). La distance radar-cible est obtenue à partir de l'écart temporel entre le signal reçu et émis. La fréquence Doppler f^D est l'écart entre la fréquence transmise f_0 et celle retournée.

— La seconde classe (la plus courante) émet un signal pendant une durée τ^p (correspondant à l'impulsion, en seconde) puis s'ensuit une période d'écoute d'une durée $\tau^{TRI} - \tau^p$ où τ^{TRI} est appelé Temps de Répétition des Impulsions (TRI) [1]. La forme la plus simple de ce genre de signal, au temps t et à l'impulsion p, est de la forme [31]

$$a_E \cos\left(2\pi f_0 t - \phi_0\right) \mathbb{1}_{[p\tau^{TRI};p\tau^{TRI}+\tau^p]}(t), \tag{2.1}$$

où a_E est l'amplitude du signal émis, ϕ_0 la phase au début de l'impulsion. Un radar est dit cohérent si les impulsions émises sont en phase. Cela signifie que ϕ_0 reste constant. Un radar est dit non cohérent si les impulsions émises ont une phase aléatoire. Cela signifie que ϕ_0 dépend d'une loi de probabilité.

Remarque 2.3: Dans cette thèse, nous considérons uniquement des signaux provenant de radar pulse-Doppler cohérent.

2.2.2 Mode de fréquence

Pour un signal émis défini par (2.1), la valeur de la fréquence transmise f_0 peut être choisie de plusieurs manières :

— constante pendant toute la durée de l'acquisition ;

— différente d'une impulsion à l'autre tout en restant constante au sein de chaque impulsion. Dans ce cas, on parle de radar à agilité de fréquence [2] ou à fréquence échelonnée ;

— non constante au sein de l'impulsion mais de la même manière pour chaque impulsion. Dans ce cas, la forme la plus simple est

$$f_0(t) = f_0 + \frac{B}{2\tau^p}t - \frac{B}{2\tau^p}, \quad \forall t \in [0;\tau^p]\,. \tag{2.2}$$

Un signal émis dont la fréquence transmise est définie par (2.2), est appelé *chirp*.

Remarque 2.4: Dans cette thèse, nous considérons uniquement des signaux émis dont la fréquence transmise est constante durant toute l'acquisition, soit le premier cas.

1. Ces impulsions sont donc répétées à une Fréquence de Répétition des Impulsions (FRI), notée f^{FRI}, qui est l'inverse de τ^{TRI}.

2. De manière générale, un radar à agilité de fréquence sera moins sensible aux dispositifs de contre-mesure électromagnétique adverse, par exemple aux effets de brouillage.

2.2.3 Résolution du signal

À partir des paramètres du signal émis, c'est-à-dire des impulsions de durée τ^p et un angle de site ou d'élévation θ^{el} [3], on obtient des résolutions en les variables "spatiales", c'est-à-dire la distance r et l'azimut θ^{az} vers lequel pointe le radar. La résolution en distance (qui est égale à la distance minimale perceptible par le radar) est définie par [32]

$$\frac{c\tau^p}{2\cos\left(\theta^{el}\right)}, \tag{2.3}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, soit $c = 299\ 792\ 458$ m/sec. La résolution azimutale, à une distance r du radar, est définie en degré par

$$r\frac{f_0}{cD_{\mathbf{r}}}\frac{180}{\pi}, \tag{2.4}$$

où $D_{\mathbf{r}}$ est le diamètre de l'antenne radar (en mètre).

La distance maximale, ou non ambigüe, $r_{\max}$ accessible par le radar est conditionnée par le temps d'écoute $\tau^{TRI} - \tau^p$. Pour un objet à une distance r, la distance $r_{\max}$ détermine la distance de l'objet perçue par le radar, soit r modulo $r_{\max}$ où

$$r_{\max} = \frac{c\tau^{TRI}}{2\cos\left(\theta^{el}\right)}. \tag{2.5}$$

2.3 Le signal reçu

Étant donné un objet à une distance r provoquant un effet Doppler de fréquence f^D, le signal reçu théorique au temps t et à l'impulsion p, est de la forme [31]

$$\begin{aligned} &a_R \cos\left(2\pi\left(f_0 + f^D\right)\left(t - \frac{2\left(r \bmod r_{\max}\right)}{c} - f^D p\tau^{TRI}\right) - \phi_0\right) \\ &\times \mathbb{1}_{[p\tau^{TRI};p\tau^{TRI}+\tau^p]}\left(t - \frac{2\left(r \bmod r_{\max}\right)}{c} - f^D p\tau^{TRI}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où a_R est l'amplitude du signal reçu après interaction avec la surface illuminée par le radar. Entre la première impulsion et la $p^{\text{iéme}}$ impulsion, la phase du signal reçu est modifiée par le terme $2\pi f^D p\tau^{TRI}$ dû au déplacement de l'objet.

On appelle signal d'intérêt le signal reçu ne contenant aucun bruit, c'est-à-dire sans fouillis de mer. Suivant les applications, il peut correspondre au signal réfléchi par des cibles ou par la côte.

Le signal reçu est décrit par une matrice tridimensionnelle $\boldsymbol{A}$ dont la première dimension encode la distance r, la seconde l'azimut θ^{az} et la troisième l'impulsion p. Dans la suite, nous adoptons la notation $\vec{z} = (r, \theta^{az})$. Ce choix de représentation du signal reçu est cohérent avec les données de la base du CSIR utilisées pour les expérimentations.

2.3.1 Vitesse radiale et effet Doppler

3. Dans les acquisitions considérées, l'angle θ^{el} étant souvent faible, c'est-à-dire $\cos\left(\theta^{el}\right) \simeq 1$, ce terme est rarement considéré dans les définitions relatives à la distance.

Étant donné un objet se déplaçant selon un vecteur vitesse donnée, seule la projection de ce dernier sur la droite $x \longmapsto \tan(\theta^{az})\, x$ sera perçue par le radar (voir figure 2.2). Le résultat de cette projection est appelé vitesse radiale v^r et correspond à un effet Doppler f^D défini par [33, Sec. 1.5]

$$f^D = \frac{2v^r}{c - v^r} f_0 \simeq \frac{2v^r}{c} f_0, \tag{2.7}$$

l'approximation provenant de $v^r \lll c$. L'effet Doppler est tout simplement la différence entre la fréquence retournée et émise.

Comme pour la distance non ambigüe $r_{\max}$, il existe aussi une vitesse radiale maximale $v^r_{\max}$ perceptible par le radar et qui correspond à v^r modulo $v^r_{\max}$ où

$$v^r_{\max} = \frac{cf^{FRI}}{f^{FRI} + 2f_0} \simeq \frac{cf^{FRI}}{2f_0}, \tag{2.8}$$

l'approximation provenant de $f^{FRI} \lll f_0$. Quand on ne sait pas si l'objet s'éloigne ou se rapproche du radar, la vitesse radiale non ambigüe $v^r_{\max}$ est réduite de moitié.

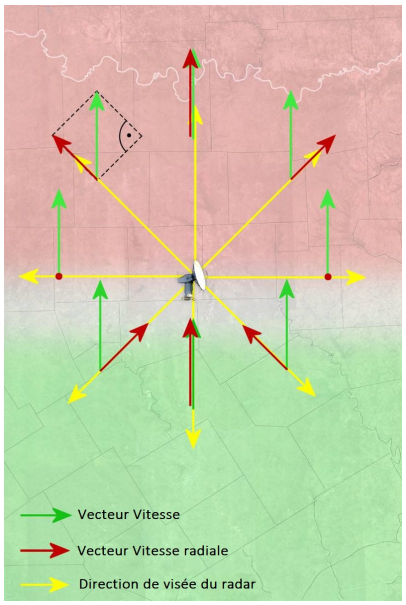


FIGURE 2.2 – Les vitesses dans le domaine radar.
Source : Radar Tutorial

2.4 Traitement du signal radar classique

2.4.1 Le traitement pulse-Doppler

D'après [34], les composantes en phase et en quadrature permettent de calculer la phase instantanée $\arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\}$ du signal reçu $\boldsymbol{A}$ [4]. La variation de la phase instantanée au cours du temps, c'est-à-dire entre deux retours d'impulsions consécutifs, est définie par

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\} \simeq \frac{\arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p+1)\}}{\arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\}}. \tag{2.9}$$

Pour son interprétation, la variation de la phase instantanée doit être dans $[-\pi;\pi]$. Cela permet d'avoir une variation de phase cohérente tant négativement que positivement. Enfin,

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\} = 2\pi f^D(\vec{z},p)\, \tau^{TRI}, \quad \text{d'après (2.6)}, \tag{2.10}$$

$$f^D(\vec{z},p) = \frac{1}{2\pi\tau^{TRI}} \frac{\arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p+1)\}}{\arg\{\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\}}. \tag{2.11}$$

Cette dernière équation, appelée dans ce manuscrit le traitement pulse-Doppler, permet d'obtenir numériquement l'effet Doppler [5] à la position $\vec{z}$ et pour une impulsion p.

4. Ce signal est bien analytique grâce à la démodulation qui lui est appliquée, c'est-à-dire grâce à la multiplication par la fréquence transmise qui est suffisamment haute pour considérer le signal obtenu analytique.

5. La vitesse radiale se déduit de la fréquence Doppler grâce à (2.7).

2.4.2 Intégration du signal

Il existe deux grandes manières d'intégrer le signal radar. La première s'applique pour des signaux radar tant cohérents que non cohérents. Elle est appelée intégration non cohérente et est définie par

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{NC}}(\vec{z}) = \frac{1}{p_{\max}} \sum_{i=1}^{p_{\max}} |\boldsymbol{A}(\vec{z}, i)|, \tag{2.12}$$

où $\boldsymbol{A}$ est le signal radar pulse-Doppler discret et $p_{\max}$ le nombre d'impulsions par train d'ondes.

La seconde est restreinte aux signaux radar cohérents dont il faut connaitre la durée maximale pendant laquelle le signal reste cohérent. Cette durée est l'inverse de la largeur spectrale qui représente l'intervalle de fréquence englobant l'information principale du signal et où le module du signal est supérieur à un niveau de puissance donné. Elle s'exprime à partir de la fréquence de coupure, notée $\omega_c(x)$. Pour un signal $s(t)$, la fréquence de coupure vérifie

$$|\widehat{s}(\omega_c(x))| = \sqrt{10^{-\frac{x}{10}}} \left| \max_{\omega \in \mathbb{R}} \widehat{s}(\omega) \right|. \tag{2.13}$$

où x est le niveau de puissance en dB déterminant la largeur spectrale. L'intégration cohérente du signal radar pulse-Doppler discret $\boldsymbol{A}$ à xdB est définie par

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{C}}(\vec{z}) = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}(\vec{z}, i) \right|, \tag{2.14}$$

où $n = \left\lfloor (\tau^p \omega_c(x))^{-1} \right\rfloor$ [6] est le nombre d'impulsions qui permet de garder la cohérence du signal à x dB.

Nom	État de mer	hauteur de vague	Type	Ouverture azimutale	Dimension de $\boldsymbol{A}$
`06_053_TTrFA`	5	3.16m	suivi de cible	5.2°	$61 \times 833 \times 64$
`06_068_NScFA`	5	3.22m	balayage ($2^{\text{iéme}}$)	14.3°	$401 \times 80 \times 64$
`08_059_CStFA`	4.1	2.14m	Azimut fixe	0°	$101 \times 950 \times 64$
`10_097_TTrFA`	4.5	3.16m	suivi de cible	1.2°	$126 \times 1372 \times 64$

TABLE 2.1 – Descriptif des acquisitions présentées dans ce manuscrit ayant pour paramètres communs $f_0 = 8.8$GHz et $f^{FRI} = 2$kHz.

2.4.3 Espace de Fourier

L'espace de Fourier le plus utilisé, pour étudier les images radar, est appelé la carte distance-Doppler. À distance r fixée, elle est la transformée de Fourier d'une fenêtre temporelle du signal reçu. Elle permet donc de visualiser la répartition des fréquences Doppler f^D. Une fenêtre temporelle est le regroupement d'un nombre fini d'azimuts (c'est-à-dire de trains d'impulsions). On note $\widehat{\boldsymbol{A}}(r, \omega)$ la carte distance-Doppler de $\boldsymbol{A}(r, \theta^{az}, p)$.

6. La fonction $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

Nom	intervalle de distance	intervalle de temps / azimut	Commentaire
`06_053_TTrFA`	[2 439m ; 2 739m]	[1.95 sec ; 2.275 sec]	Cible (RIB [7]) à SCR égal à 10dB et à très faible vitesse radiale et fouillis de côte.
`06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone)	[11 058m ; 11 358m]	[374.6° ; 372.9°]	Cible (petit bateau) à SCR égal à 3.5dB et à vitesse radiale égale à 13kts.
`06_068_NScFA` (2nd zone)	[10 098m ; 10 398m]	[370° ; 368.3°]	Cible (petit bateau) à SCR égal à 10dB et à vitesse radiale égale à 10kts.
`08_059_CStFA`	[5 137m ; 5 437m]	[0.325 sec ; 0.65 sec]	Cible à SCR négatif et vitesse radiale égale à 28kts.
`10_097_TTrFA`	[12 677m ; 12 977m]	[11.2 sec ; 11.52 sec]	Cible (RIB) à SCR égal à 6dB et à vitesse radiale égale à 25kts et état de mer avec harmonique de vagues.

TABLE 2.2 – Descriptif de la région $\boldsymbol{A}^{\#}$ pour chaque acquisition du tableau 2.1.

2.5 Acquisitions utilisées

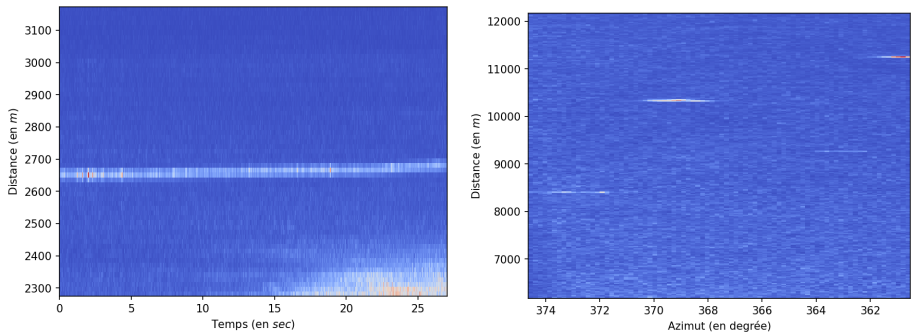
Les quatre acquisitions présentées dans le tableau 2.1 proviennent de la base de données réelles (non simulées) du CSIR [5]. Elles permettent d'illustrer les résultats obtenus par les méthodes développées dans la suite de ce manuscrit. Les résultats sont présentés soit sur l'intégralité d'une acquisition $\boldsymbol{A}$, soit sur une zone de $\boldsymbol{A}$, noté $\boldsymbol{A}^{\#}$ de taille $[20; 10; p_{\max}]$. Pour une distance r, et un temps t ou un azimut θ^{az} suivant le cas considéré, les coordonnées des zones $\boldsymbol{A}^{\#}$ sont précisées dans le tableau 2.2 pour les quatre acquisitions. Enfin, l'intégralité des figures du manuscrit respectent l'intervalle de valeurs du signal brut.

Ces quatre acquisitions ont été sélectionnées car elles sont représentatives de la diversité des configurations observées en situation réelle. Pour ces acquisitions, la visualisation sur la carte distance-Doppler fait apparaître le fouillis de mer comme une bande verticale à fréquence Doppler très faible proche de la composante continue (voir figure 2.4).

Les informations correspondant aux acquisitions sont les suivantes :

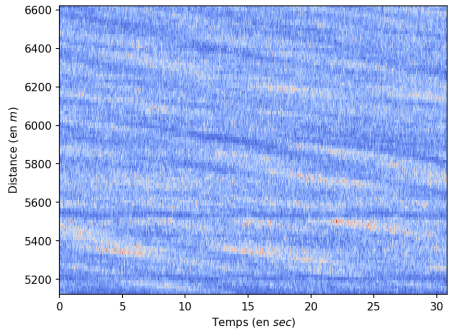
`06_053_TTrFA`– Présence d'une cible à vitesse tangentielle située plus ou moins à 2 650m (voir figures 2.3a et 2.4a). Cette cible se trouve au sein du fouillis de mer et est donc endo-clutter. Présence de fouillis de sol provoqué par la plage à proximité du radar. Une telle configuration rend difficile la détection de la cible endo-clutter à partir de l'information Doppler.

7. RIB signifie *Rigid Inflatable Boat*.

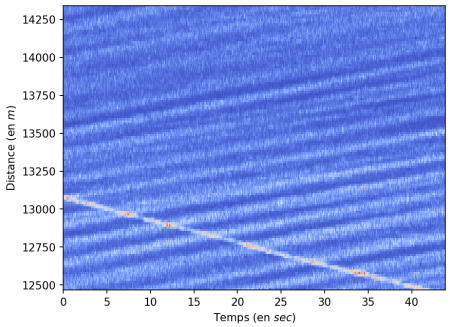


(a) `06_053_TTrFA`.

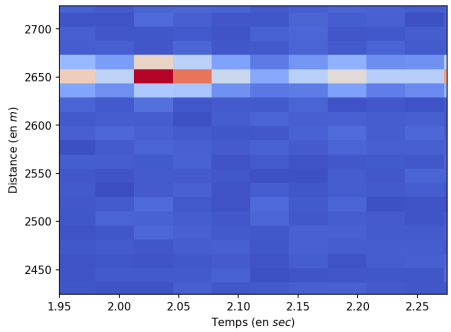
(b) `06_068_NScFA`.



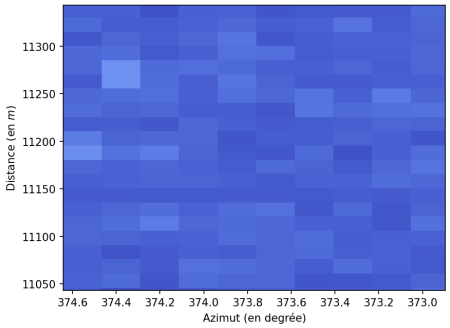
(c) `08_059_CStFA`.



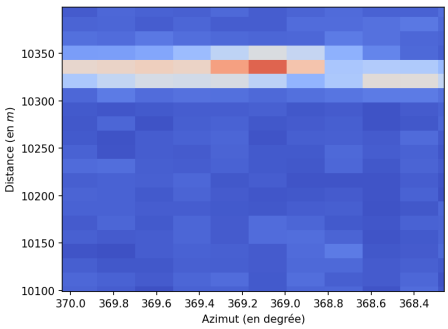
(d) `10_097_TTrFA`.



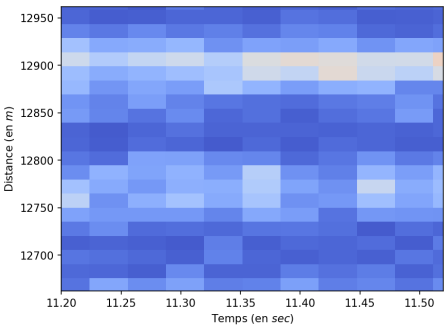
(e) Zone de `06_053_TTrFA`.



(f) 1^{ére} zone de `06_068_NScFA`.



(g) 2nd zone de `06_068_NScFA`.



(h) Zone de `10_097_TTrFA`.

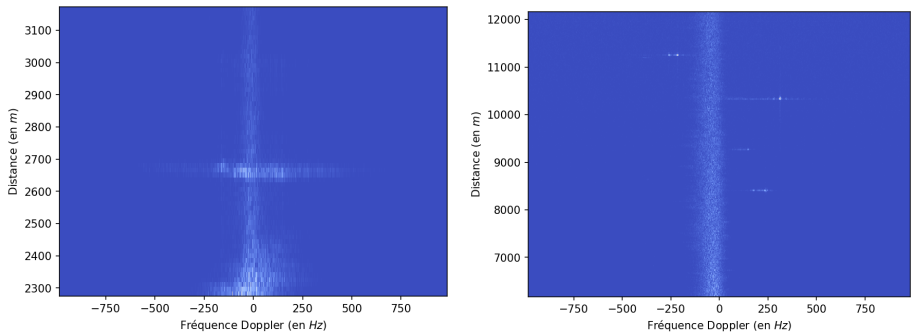
FIGURE 2.3 – Intégration non cohérente des acquisitions présentées dans les tableaux 2.1 et 2.2.

`06_068_NScFA`– Présence de six cibles à vitesse radiale positive et négative (voir fi-

gure 2.4b) situées respectivement à 11 250m (une en azimut 374°, une autre en azimut 361°), à 10 300m, à 9 300m et à 8 400m (deux cibles proches situées en azimut 374°). Ces cibles se trouvent toutes hors du fouillis de mer et sont donc exo-clutter. Dans la zone $\boldsymbol{A}^{\#}$ en figure 2.3f, la cible située à distance 11 200m et azimut 374.6° a un SCR proche de 3.5dB. Ce type de cible peut être difficile à séparer du fouillis de mer à partir de l'intégration non cohérente.

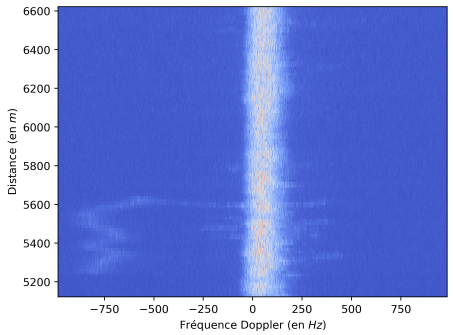
`08_059_CStFA`– Présence d'une cible exo-clutter à forte vitesse radiale négative (voir figure 2.4c) se déplaçant de 5 200m à 5 600m. La cible a un SCR négatif et est donc indiscernable à partir de l'intégration non cohérente (voir figure 2.3c). Cependant, elle est légèrement visible sur la carte distance-Doppler à 5 250m et −800Hz (voir figure 2.4c). Ce type de cible est difficile à séparer du fouillis de mer, quelque soit l'information utilisée ;

`10_097_TTrFA`– Présence d'une cible exo-clutter à forte vitesse radiale positive (voir figure 2.4d) se déplaçant de 13 100m à 12 500m. Présence également d'une harmonique de vagues assimilée à du fouillis de mer à effet Doppler positif (les lignes sur la figure 2.3d correspondent aux creux et crêtes de vagues). À partir de l'intégration non cohérente, le fouillis de mer extrait peut être incomplet dans ce cas puisque les crêtes de vagues peuvent être confondues avec des cibles.

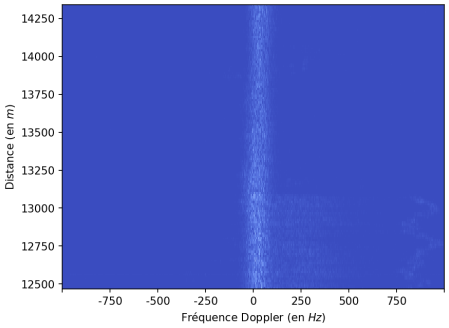


(a) `06_053_TTrFA`.

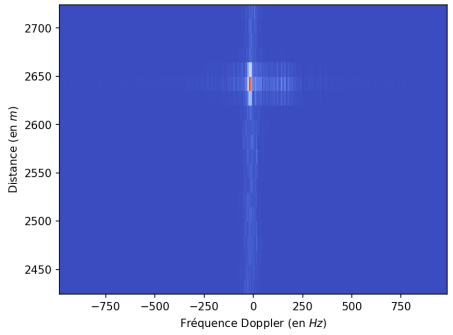
(b) `06_068_NScFA`.



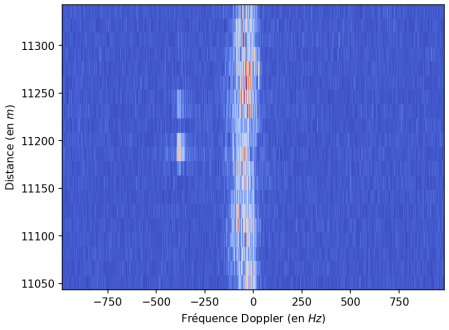
(c) `08_059_CStFA`.



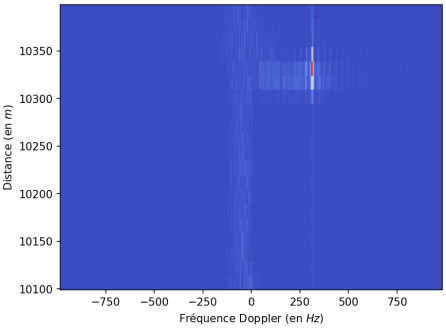
(d) `10_097_TTrFA`.



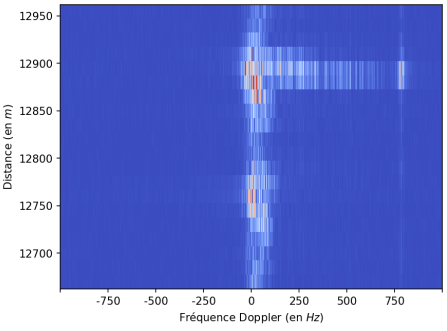
(e) Zone de `06_053_TTrFA`.



(f) 1^{ére} zone de `06_068_NScFA`.



(g) 2nd zone de `06_068_NScFA`.



(h) Zone de `10_097_TTrFA`.

FIGURE 2.4 – Carte distance-Doppler des acquisitions présentées dans les tableaux 2.1 et 2.2.

Chapitre 3

Modèle de champs à k phases à interface diffuse

L'objectif de ce chapitre est de décrire la principale méthode que nous avons développée afin de segmenter puis d'extraire le fouillis de mer avec un minimum d'hypothèse sur ce dernier. Rappelons que le parti pris ici, qui correspond aux besoins de l'entreprise ERTE-ETSA (Bowen), est d'aborder ce problème à partir de méthodes de traitement d'image appliquées soit à l'image associée à une carte distance-Doppler, soit à l'image obtenue par intégration non cohérente.

L'algorithme proposé, faisant intervenir un modèle à interface diffuse multiphasique, découle de la minimisation d'une énergie. C'est donc un algorithme par approche variationnelle.

L'énergie considérée est composée classiquement d'un terme de régularisation et d'un terme d'attache aux données qui sont déterminés par le fait que l'algorithme va être appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente. Le terme d'attache aux données est une variante du terme d'attache aux données utilisé dans l'algorithme proposé par Chan et Vese dans [24]. Le terme de régularisation est une généralisation de l'énergie de Cahn-Hilliard avec un potentiel présentant une infinité de puits périodiques. Ce choix de potentiel est crucial pour la suite puisqu'il permet de faire évoluer vers des équilibres un nombre arbitraire k supérieur ou égal à deux de phases. Il s'avère en effet que, compte tenu de la complexité de la répartition du fouillis de mer dans les images obtenues par intégration non cohérente, le fouillis de mer ne peut pas être assimilé qu'à une seule phase.

La minimisation, par descente de gradient L^2, de cette énergie donne une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) de diffusion fortement non linéaire qui peut être vue comme une généralisation de l'EDP de réaction-diffusion d'Allen-Cahn [23] avec une infinité de puits.

Pour simuler numériquement les solutions de cette EDP, nous proposons un schéma obtenu par splitting de Strang ramenant l'implémentation au calcul de trois opérateurs élémentaires, le premier pour la diffusion, le deuxième pour la réaction, le troisième pour l'attache aux données. Les solutions des deux premiers sont obtenues par résolution explicite ne faisant pas intervenir de discrétisation en espace. Pour la résolution du troisième opérateur, contenant un terme intégral, nous utilisons un schéma d'Euler explicite. Le schéma obtenu, même s'il n'est pas inconditionnellement stable, est tout de même relativement stable et simple à implémenter.

La segmentation obtenue par cet algorithme dans l'image obtenue par intégration

non cohérente sera utilisée dans le chapitre suivant pour visualiser le résultat d'extraction du fouillis de mer dans la carte distance-Doppler à l'aide d'une fonction de transfert.

Les points importants de ce chapitre sont les suivants :

— Nous proposons un algorithme, appelé CV-kP, obtenu par approche variationnelle à partir d'une énergie composée d'une variante du terme d'attache aux données utilisé dans l'algorithme proposé par Chan et Vese dans [24] et d'une généralisation de l'énergie de Cahn-Hilliard avec un potentiel présentant une infinité de puits périodiques.

— La simulation des solutions de l'EDP de diffusion fortement non linéaire obtenue par descente de gradient L^2 de cette énergie est implémentée par un splitting de Strang. Le schéma obtenu est très simple à implémenter.

— Cet algorithme de traitement d'image ne requiert aucune hypothèse sur l'identification d'une éventuelle distribution statistique caractérisant le fouillis de mer.

3.1 La formulation variationnelle

Traditionnellement, une méthode de traitement d'image utilisant une approche variationnelle repose sur la minimisation d'une énergie de la forme

$$E(U) = \mathfrak{c}_R E^R(U) + \mathfrak{c}_{AD} E^{AD}(U), \tag{3.1}$$

où $U = U(x,t)$ est une fonction spatio-temporelle de x la variable d'espace et du temps t. Le terme E^R est appelé terme de régularisation auquel est associé le coefficient $\mathfrak{c}_R$ et le terme E^{AD} est appelé terme d'attache aux données auquel est associé le coefficient $\mathfrak{c}_{AD}$.

3.1.1 Le terme de régularisation

Dans le cas diphasique, l'énergie de régularisation est donnée par l'énergie de Cahn-Hilliard :

$$E^{CH} = \int_\Omega \left(\varepsilon \frac{\left|\vec{\nabla} U(x,t)\right|^2}{2} + \frac{1}{\varepsilon} W(U(x,t)) \right) \mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

où ε est l'épaisseur de l'interface, Ω le domaine spatial et W un potentiel à double puits. Une descente de gradient L^2 donne l'EDP de réaction-diffusion d'Allen-Cahn [23] :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - \varepsilon \Delta U(x,t) = -\frac{1}{\varepsilon} W'(U(x,t)), \tag{3.3}$$

où W' est la dérivée de W. La solution de cette EDP peut être vue comme une indicatrice lissée dont les variations se trouvent sur l'interface diffuse de taille ε définie par

$$\{x \in \Omega \ : \ 0 < U(x,t) < 1, \ t \geq 0\}. \tag{3.4}$$

Dans ce qui suit, le potentiel W est défini par

$$W(x) = \frac{x^2 (1-x)^2}{2}, \tag{3.5}$$

où les deux minima globaux en 0 et 1 correspondent aux équilibres des deux phases (voir figure 3.1).

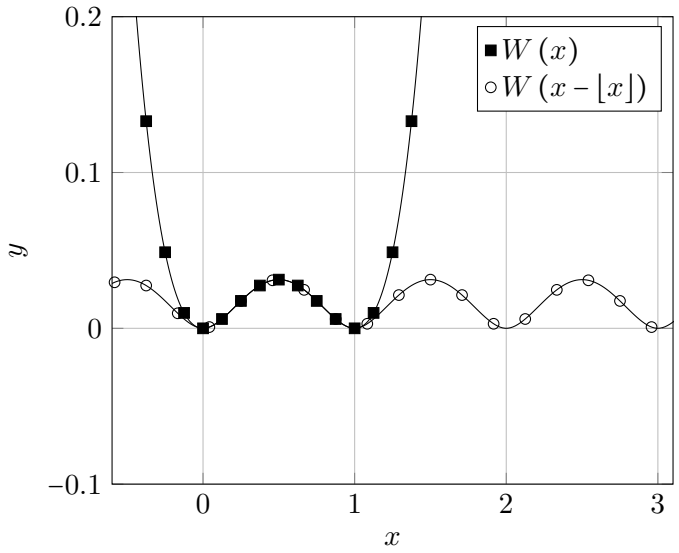


FIGURE 3.1 – Double puits de potentiel défini par (3.5) et sa version périodique.

Suivant Li et Kim [21], l'utilisation d'un potentiel périodique permet de généraliser l'énergie de Cahn-Hilliard au cas multiphasique (voir figure 3.1),

$$E^R = \int_\Omega \left(\varepsilon \frac{\left|\vec{\nabla} U(x,t)\right|^2}{2} + \frac{1}{\varepsilon} W\left(U(x,t) - \lfloor U(x,t) \rfloor\right) \right) \mathrm{d}x, \tag{3.6}$$

où $\lfloor U \rfloor$ est la partie entière de U. Le terme de régularisation (3.6) peut être considéré comme l'aire de la surface du contour entre chaque phase. La descente de gradient de (3.6) donne une EDP de réaction-diffusion non linéaire définie par

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - \varepsilon \Delta U(x,t) = -\frac{1}{\varepsilon} W'\left(U(x,t) - \lfloor U(x,t) \rfloor\right). \tag{3.7}$$

Dans la pratique, cette EDP permet de travailler avec un nombre arbitraire k supérieur ou égal à deux de phases. Nous verrons dans le chapitre suivant que pour les applications considérées, k est compris entre 5 et 15. La fonction de champ de phase U évolue au cours du temps pour prendre les valeurs proches de $0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$ associées à chacune des phases.

3.1.2 Le terme d'attache aux données

Le terme d'attache aux données utilisé est celui introduit par Li et Kim dans [21] :

$$E^{AD}(U) = \int_\Omega \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \left(C(k) - \mathcal{I}^N(x)\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(U(x,t) - i\right)\ \mathrm{d}x, \tag{3.8}$$

où $\mathcal{I}^N$ est l'image à traiter (normalisée sur $[0;1]$), $\operatorname{sinc}^2(x)$ désigne le carré du sinus cardinal (voir figure 3.2) et $C(k)$ est la valeur moyenne de l'image sur le domaine occupé par la $k^{\text{iéme}}$ phase :

$$C(k) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \mathcal{I}^N(x) \operatorname{sinc}^2\left(U(x,t) - k\right)\ \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega \operatorname{sinc}^2\left(U(x,t) - k\right)\ \mathrm{d}x}. \tag{3.9}$$

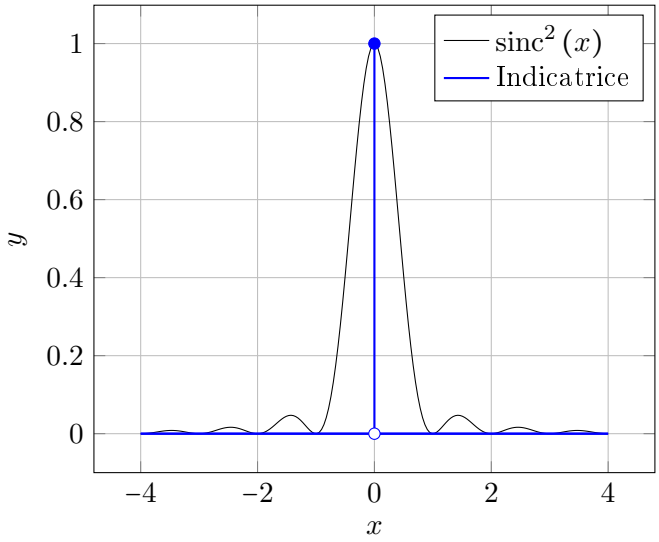


FIGURE 3.2 – La fonction $\mathrm{sinc}^2(x)$ peut être vu comme une version très lissée d'une fonction indicatrice.

Ce terme d'attaches aux données est une variante du terme d'attache aux données utilisé dans l'algorithme proposé par Chan et Vese dans [24] dans le cas diphasique. La descente de gradient de (3.8) donne l'équation intégro-différentielle [21]

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = -2\sum_{i=0}^{k}\left(C(k) - \mathcal{I}^N(x)\right)^2 \frac{\left(\mathrm{sinc}\left(2\left(U-i\right)\right) - \mathrm{sinc}^2\left(U-i\right)\right)}{U-i}. \tag{3.10}$$

3.1.3 L'équation de diffusion du CV-kP

L'équation de diffusion obtenue après descente de gradient de l'énergie (3.1) s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - \kappa\Delta U(x,t) = S\left(U(x,t)\right), \tag{3.11}$$

où le coefficient de diffusion κ est égal à $\varepsilon\mathfrak{c}_R$ et le terme source S est défini par

$$\begin{aligned} S\left(U(x,t)\right) = &-\frac{\mathfrak{c}_R}{\varepsilon}W'\left(U(x,t) - \lfloor U(x,t)\rfloor\right) \\ &- \mathfrak{c}_{AD}2\sum_{i=0}^{k}\left(C(k) - \mathcal{I}^N(x)\right)^2 \frac{\left(\mathrm{sinc}\left(2\left(U-i\right)\right) - \mathrm{sinc}^2\left(U-i\right)\right)}{U-i}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Suivant Lim est Kim [21], l'initialisation de la fonctionnelle U, cohérente avec le processus d'évolution décrit précédemment, est définie par

$$U(x,t=0) = i + \frac{\mathcal{I}^N(x) - b_i}{b_{i+1} - b_i} \quad \text{si } \mathcal{I}^N(x) \in [b_i; b_{i+1}],\ \forall i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1, \tag{3.13}$$

où les b_i sont compris entre 0 et 1. Ces b_i peuvent être choisis soit répartis uniformément entre 0 et 1, c'est-à-dire $b_i = i/k$, soit à partir de l'étude de la fonction de répartition de l'image $\mathcal{I}^N$. Pour obtenir les résultats des expérimentations présentées dans le chapitre suivant, nous avons utilisé la seconde solution. Les contours de la segmentation sont donnés par $U = i + \frac{1}{2}$, pour $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$. Compte tenu de la nature du terme d'attache aux

données, la segmentation tend à produire des régions dans lesquelles l'image est constante par morceaux. Les transitions entre les régions sont lissées par la dynamique du flot de courbure moyenne.

3.2 La résolution par splitting de Strang

L'équation (3.11) fait intervenir trois termes : un terme de diffusion notée D_1, un terme de réaction non linéaire noté D_2 et un terme d'attache aux données noté D_3. Ainsi, (3.11) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x,t) = (D_1 + D_2 + D_3)\,U(x,t) = D_{\text{CV-}k\text{P}}\left(U(x,t)\right), \tag{3.14}$$

où

$$\begin{aligned} D_1(U) &= \varepsilon \mathfrak{c}_R \Delta U, \quad D_2(U) = -\frac{\mathfrak{c}_R}{\varepsilon} W'\left(U - \lfloor U \rfloor\right), \\ D_3(U) &= -\mathfrak{c}_{AD} 2 \sum_{i=0}^{k} \left(C(k) - U_0\right)^2 \frac{\left(\operatorname{sinc}\left(2\left(U-i\right)\right) - \operatorname{sinc}^2\left(U-i\right)\right)}{\left(U-i\right)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour résoudre (3.14), nous utilisons la méthode de splitting d'opérateur qui se base sur la formule de Baker-Campbell-Hausdorff [35]. Dans notre cas, le splitting de Strang s'écrit

$$\exp\left(\frac{t}{2}D_1\right)\exp\left(\frac{t}{2}D_2\right)\exp\left(tD_3\right)\exp\left(\frac{t}{2}D_2\right)\exp\left(\frac{t}{2}D_1\right). \tag{3.16}$$

La composition des exponentielles de (3.16) est une approximation de $\exp\left(tD_{\text{CV-}k\text{P}}\right)$ d'ordre deux en temps puisque les opérateurs D_1, D_2 et D_3 ne commutent pas. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{t}{2}D_1\right)\exp\left(\frac{t}{2}D_2\right)\exp\left(tD_3\right)\exp\left(\frac{t}{2}D_2\right)\exp\left(\frac{t}{2}D_1\right) - \exp\left(tD_{\text{CV-}k\text{P}}\right) &= \mathcal{O}\left(t^3\right) \\ = \frac{t^3}{6}\left(\left[-\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{4} + \frac{D_3}{2}, \left[D_3, D_2\right]\right] + \left[\frac{D_1}{4} + D_2 + \frac{D_3}{2}, \left[D_3, D_1\right]\right]\right. \\ \left. + \left[\frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{2}, \left[D_2, D_1\right]\right]\right) + \mathcal{O}\left(t^4\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Algorithm 1 Schéma numérique de l'algorithme CV-kP par splitting de Strang.

$U(x,0)$ d'après (3.13)
k le nombre de phases
while $U(x,n\Delta t) - U(x,(n-1)\Delta t) \geq tol$ **do**
  $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x, n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (3.19) avec $\mathfrak{c}_{D_1} = \varepsilon \mathfrak{c}_R$ ▷ Diffusion
  $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x, n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (3.24) avec $\mathfrak{c}_{D_2} = \frac{\mathfrak{c}_R}{\varepsilon}$ ▷ Réaction
  $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x, n\Delta t + \Delta t\right)$ à partir de (3.26) ▷ Attache aux données
  $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x, n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (3.24) avec $\mathfrak{c}_{D_2} = \frac{\mathfrak{c}_R}{\varepsilon}$ ▷ Réaction
  $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x, n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (3.19) avec $\mathfrak{c}_{D_1} = \varepsilon \mathfrak{c}_R$ ▷ Diffusion
  $n \leftarrow n+1$
end while

où $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ est le crochet de Lie entre D_1 et D_2. Les opérateurs D_1 et D_2 sont résolus de manière exacte (voir les paragraphes suivant) ce qui permet de diminuer la propagation d'erreurs au fur et à mesure des itérations. L'algorithme 1 présente le schéma numérique obtenu à partir des équations itératives décrites ci-après où le pas de temps est noté Δt.

3.2.1 Solution exacte de l'équation de diffusion

En considérant l'EDP

$$\frac{\partial}{\partial t}U = \mathfrak{c}_{D_1}\Delta U, \tag{3.18}$$

avec des conditions aux limites périodiques où $\mathfrak{c}_{D_1}$ est une constante, on obtient l'équation itérative associée à l'opérateur D_1 du splitting de Strang :

$$U(x, t+\Delta t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{U(x,t)\}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathfrak{c}_{D_1}\|\omega\|^2\Delta t}\right\}(x). \tag{3.19}$$

3.2.2 Solution exacte de l'équation de réaction

On considère l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}U = -\mathfrak{c}_{D_2}W'(U - \lfloor U\rfloor), \tag{3.20}$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\partial}{\partial t}y = -\mathfrak{c}_{D_2}y(1-y)(1-2y), \quad y \in [0;1], \tag{3.21}$$

où $y(x,t) = U(x,t) - \lfloor U(x,t)\rfloor$ et $W'(x) = x(1-x)(1-2x)$. Cette équation différentielle admet trois solutions stationnaires $y = 0,\ \frac{1}{2}$ et 1, et des solutions de la forme

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{y_0=\frac{1}{2}}(x) + \frac{\sqrt{1+4h(y,t)}+1}{2\sqrt{1+4h(y,t)}}\mathbb{1}_{y_0>\frac{1}{2}}(x) + \frac{\sqrt{1+4h(y,t)}-1}{2\sqrt{1+4h(y,t)}}\mathbb{1}_{y_0<\frac{1}{2}}(x), \tag{3.22}$$

avec $y_0 = y(x, t=0)$ et

$$h(y,t) = \frac{y(1-y)}{(1-2y)^2}\mathrm{e}^{-\mathfrak{c}_{D_2}t}. \tag{3.23}$$

L'équation itérative associée à l'opérateur D_2 du splitting de Strang est

$$\begin{aligned} U(x,t+\Delta t) = \lfloor U(x,t)\rfloor + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{U-\lfloor U\rfloor=\frac{1}{2}}(x) \\ + \frac{\sqrt{1+4h(U-\lfloor U\rfloor,\Delta t)}+1}{2\sqrt{1+4h(U-\lfloor U\rfloor,\Delta t)}}\mathbb{1}_{U-\lfloor U\rfloor>\frac{1}{2}}(x) + \frac{\sqrt{1+4h(U-\lfloor U\rfloor,\Delta t)}-1}{2\sqrt{1+4h(U-\lfloor U\rfloor,\Delta t)}}\mathbb{1}_{U-\lfloor U\rfloor<\frac{1}{2}}(x). \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.2.3 Solution approchée du terme d'attache aux données

Pour résoudre l'équation intégro-différentielle

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = -2\sum_{i=0}^{k}\left(C(k) - \mathcal{I}^N(x)\right)^2\frac{\left(\mathrm{sinc}(2(U-i)) - \mathrm{sinc}^2(U-i)\right)}{U-i}, \tag{3.25}$$

nous utilisons un schéma d'Euler explicite en temps. L'équation itérative associée à l'opérateur D_3 du splitting de Strang est

$$U(x,t+\Delta t) = U(x,t) - \Delta t \mathfrak{c}_{AD} \sum_{i=0}^{k} \left(C(k) - \mathcal{I}^N\right)^2 \frac{2\left(\operatorname{sinc}(2(U-i)) - \operatorname{sinc}^2(U-i)\right)}{U-i}. \quad (3.26)$$

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit en détails les principales étapes de la mise en œuvre de l'algorithme CV-kP. Cet algorithme, basé sur une approche variationnelle, fait intervenir un terme de régularisation qui est une généralisation de l'énergie de Cahn-Hilliard avec un potentiel d'une infinité de puits périodiques. Le terme d'attache aux données est une version adaptée à $k \geq 2$ phases du terme d'attache aux données utilisé par Chan et Vese. L'implémentation de l'algorithme se fait par le biais d'un splitting de Strang permettant d'avoir une implémentation simple et rapide. L'algorithme final est présenté dans algorithme 1.

Dans le chapitre suivant, nous utilisons cet algorithme sur des images obtenues par intégration non cohérente à partir des données réelles fournies par la base CSIR. La visualisation des segmentations obtenues se fera sur des images de carte distance-Doppler à partir d'une fonction de transfert.

Chapitre 4

Évaluation de l'algorithme CV-kP

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les performances de l'algorithme CV-kP présenté dans le chapitre précédent. Une première partie est consacrée à la description mathématique des deux modèles de mouvement d'interface utilisés pour les comparaisons. Le premier de ces deux modèles est le bien connu Level-Set (LS) à interface nette [27], le second est un modèle d'interface diffuse à deux phases contraint par un rapport de log-vraisemblance (EN – Log-likelihood driven two-phase diffuse interface motion : LL-2P) [28]. Le choix de ces deux modèles de comparaison repose sur le fait que les images radar marin cohérent ont des caractéristiques proches des images pour lesquelles ces deux algorithmes donnent de bonnes performances (présence de speckles, contours peu marqués et faible contraste).

La seconde partie est consacrée à la comparaison des résultats de segmentation et d'extraction du fouillis de mer. Nous commençons par appliquer ces trois algorithmes sur les images obtenues par transformée de Fourier, c'est-à-dire les images de carte distance-Doppler, puis nous appliquons ces trois algorithmes sur les images obtenues par intégration non cohérente.

Les résultats obtenus dans le premier cas (carte distance-Doppler) montrent qu'aucun des trois algorithmes ne permet d'obtenir de segmentation exploitable pour l'extraction du fouillis de mer. Dans le second cas (intégration non cohérente), l'algorithme CV-kP montre de meilleures performances par rapport aux deux autres algorithmes. Afin de mettre en évidence les performances des algorithmes pour l'extraction du fouillis de mer, nous proposons d'utiliser une fonction de transfert. Cette dernière est construite à partir d'un estimateur de Parzen, c'est-à-dire un estimateur de densité non paramétrique [30], appliqué à la distribution des valeurs de la fonction de phase U obtenue après application de l'algorithme CV-kP.

Pour les expérimentations, nous utilisons les quatre acquisitions décrites dans le chapitre 2. Ces acquisitions contiennent toutes un signal d'intérêt résultant en particulier de la présence de cibles. De manière générale, les performances d'un algorithme d'extraction de fouillis de mer peuvent dépendre du SCR de ce signal d'intérêt. Les résultats que nous obtenons par la démarche décrite précédemment sont très satisfaisants lorsque le SCR est suffisamment grand, c'est-à-dire supérieur à environ 5dB. Dans le cas contraire et compte tenu du fait que l'algorithme CV-kP se base uniquement sur l'information donnée par l'intégration non cohérente, les résultats ne sont pas directement exploitables. Nous verrons plus loin que nous pouvons pallier ce dernier problème, au moins dans le cas d'un signal d'intérêt exo-clutter, par un traitement pulse-Doppler.

Les points importants de ce chapitre sont les suivants :

— L'algorithme CV-kP, en utilisant un nombre de phases suffisamment grand, permet de gérer la complexité du fouillis de mer qui apparaît dans des données réelles.

— Ses performances, en termes de segmentation et d'extraction du fouillis de mer, sont bien meilleures s'il est appliqué sur les images obtenues par intégration non cohérente plutôt que sur les images de carte distance-Doppler.

— La mise en œuvre de la fonction de transfert repose sur l'hypothèse : (H.1) une acquisition est principalement composée de fouillis de mer.

4.1 Les algorithmes LS et LL-2P

Nous commençons par décrire du point de vue mathématique les deux algorithmes LS et LL-2P qui seront utilisés dans le paragraphe suivant pour comparer les résultats d'extraction du fouillis de mer qu'on obtient à l'aide de ces deux algorithmes et de l'algorithme CV-kP.

4.1.1 La méthode LS

La méthode LS a été introduite pour la première fois par Osher et Sethian [25]. Depuis, c'est devenu une méthode de référence dans le domaine de la segmentation d'image. L'idée de base consiste à gérer une interface nette en faisant évoluer l'ensemble de niveau zéro d'une fonction selon le flot de courbure moyenne [29] défini par

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left|\vec{\nabla} U\right| \nabla \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} U}{\left|\vec{\nabla} U\right|}\right). \tag{4.1}$$

En ajoutant diverses contraintes de régularisation et d'attache aux données, la discrétisation de l'EDP obtenue décrivant l'évolution de U peut être implémentée par le schéma itératif suivant [26, 27]

$$\begin{aligned} U(x, t+\Delta t) = U(x,t) + \Delta t \Bigg[& \mathfrak{c}_1 \nabla \cdot \left(W'\left(\left|\vec{\nabla} U(x,t)\right|\right) \frac{\vec{\nabla} U(x,t)}{\left|\vec{\nabla} U(x,t)\right|} \right) \\ & + H_\varepsilon'(U) \left(\mathfrak{c}_2 \nabla \cdot \left(g(\mathcal{I}) \frac{\vec{\nabla} U}{\left|\vec{\nabla} U\right|} \right) - \mathfrak{c}_3 g(\mathcal{I}) \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{4.2}$$

où les fonctions W, g et H_ε sont définies par

$$W(x) = \mathbb{1}_{]-\infty;1]}(x) \frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos(2\pi x)) + \mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x) \frac{(x-1)^2}{2}, \tag{4.3a}$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + \left|\nabla \left(K(x;\vartheta) * x\right)\right|^2}, \quad K(x;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\vartheta^2}} \tag{4.3b}$$

$$H_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{[-\varepsilon;\varepsilon]}(x) \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right) \right) + \mathbb{1}_{]\varepsilon;+\infty[}(x). \tag{4.3c}$$

Le flot de courbure moyenne est pondéré par g. La fonction dérivée H_ε' tend à restreindre la dynamique de ce flot dans un voisinage ε de l'interface libre. Pour initialiser l'algorithme

LS, on choisit généralement un contour entourant la région à segmenter. Dans ce cas, $\mathfrak{c}_3$ est négatif. Si l'initialisation est à l'intérieur de la région à segmenter, $\mathfrak{c}_3$ est positif. Le contour obtenu est donné par $U(x,t) = 0$.

Des variantes de l'algorithme LS existent et peuvent prendre en compte un nombre k supérieur ou égal à deux de phases. Étant donné les spécificités des images radar marin (fort bruit d'interférence et faible contraste), ces variantes nécessiteraient des réinitialisations *ad hoc* au cours des itérations afin de stabiliser l'algorithme. C'est pourquoi leur mise en œuvre serait très délicate et dans tous les cas plus compliquées que la mise en œuvre de l'algorithme CV-kP proposé. Rappelons que notre objectif est d'obtenir un algorithme facile à implémenter et le moins de supervision possible.

4.1.2 La méthode LL-2P

Contrairement à la méthode LS, l'interface produite par la méthode LL-2P est une interface diffuse de largeur ε dans laquelle la fonction U varie de façon régulière entre 0 et 1. Le terme de régularisation est celui de l'EDP de réaction-diffusion d'Allen-Cahn défini en (3.3) au chapitre 3.

Cette EDP peut être également considérée comme une variante du flot de courbure moyenne. En effet, si on considère le profil

$$q(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{4.4}$$

associé au potentiel W défini en (3.5) et d la fonction distance signée à l'interface Γ_t satisfaisant l'équation eikonale

$$\|\nabla d\| = 1, \tag{4.5}$$

l'application du flot de courbure moyenne défini en (4.1) à d implique que la fonction

$$U_\varepsilon = \left(\frac{d(x,\Gamma_t)}{\varepsilon}\right) \tag{4.6}$$

satisfait (3.3) [36, sec. 1.4.1].

Le terme d'attache aux données du modèle LL-2P correspond à la minimisation d'un rapport de log-vraisemblance, noté $LL(\cdot)$, entre deux distributions P_{IN}, respectivement P_{OUT}, de valeurs de pixels de la région

$$\Omega_{\text{IN}} = \left\{\vec{x} \in \Omega,\ U(x,t) \geq \frac{1}{2}\right\}, \tag{4.7}$$

respectivement

$$\Omega_{\text{OUT}} = \Omega \setminus \Omega_{\text{IN}}. \tag{4.8}$$

Ainsi, les deux hypothèses de la vraisemblance sont :

— H_0 : toutes les intensités d'image dans Ω_{IN} et Ω_{OUT} sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une distribution unique $P_{\text{IN}\cup\text{OUT}}$;

— H_1 : les intensités d'image dans les deux régions Ω_{IN} et Ω_{OUT} sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec des distributions distinctes : P_{IN} dans Ω_{IN} et P_{OUT} dans Ω_{OUT}.

Le rapport de log-vraisemblance $LL(\cdot)$ est défini par

$$LL\left(P_{\text{IN}}, P_{\text{OUT}}\right) = -\log\left(\frac{\prod\limits_{x\in\text{IN}} P_{\text{IN}}\left(\mathcal{I}(x)\right) \prod\limits_{x\in\text{OUT}} P_{\text{OUT}}\left(\mathcal{I}(x)\right)}{\prod\limits_{x\in\text{IN}\cup\text{OUT}} P_{\text{IN}\cup\text{OUT}}\left(\mathcal{I}(x)\right)}\right), \tag{4.9}$$

où

$$P_{\text{IN}} = \mathcal{P}_{\Omega_{\text{IN}}}\left(x;\ \varpi, k = U^2\right) \tag{4.10}$$

et

$$P_{\text{OUT}} = \mathcal{P}_{\Omega_{\text{OUT}}}\left(x;\ \varpi, k = (1-U)^2\right) \tag{4.11}$$

sont obtenues à partir de l'estimateur de Parzen (4.13), c'est-à-dire d'un estimateur de densité non paramétrique [30]. Pour un échantillon E, il est défini par [30]

$$\mathcal{P}_E\left(x;\ \vartheta\right) = \frac{1}{|E|}\sum_{x_i\in E} K\left(x - x_i;\ \vartheta\right), \tag{4.12}$$

où ϑ est le paramètre de lissage, x_i l'ensemble des valeurs de E et K le noyau gaussien défini par (4.3b). On peut aussi définir une version pondérée par des poids $k(x)$:

$$\mathcal{P}_E\left(x;\ \vartheta, k\right) = \frac{1}{\sum\limits_{x_i\in E} k(x_i)}\sum_{x_i\in E} k\left(x_i\right) K\left(x - x_i;\ \vartheta\right). \tag{4.13}$$

Afin de réduire le temps de calcul, nous utilisons une approche multi-grille. L'image $\mathcal{I}$ est décomposée en cellules de taille a dont les coordonnées sont notées $\overline{x}$ et le domaine occupé est noté $\Omega_{\overline{x}} = \{x \in \overline{x}\}$ (pour plus de détails, voir [28]). Le schéma permettant d'implémenter la méthode LL-2P utilise un splitting de Strang analogue à celui décrit dans l'algorithme CV-kP. L'algorithme 2 présente le schéma numérique. Concernant le terme de régularisation, l'équation itérative pour l'opérateur de diffusion est identique à celle de l'algorithme CV-kP (voir (3.19) où $\mathfrak{c}_{D_1} = \varepsilon\mathfrak{c}_R$). L'équation itérative pour le terme de réaction se déduit de (3.22) :

$$U\left(x, t+\Delta t\right) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{U=\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{1+4h\left(U,\Delta t\right)}+1}{2\sqrt{1+4h\left(U,\Delta t\right)}}\mathbb{1}_{U>\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{1+4h\left(U,\Delta t\right)}-1}{2\sqrt{1+4h\left(U,\Delta t\right)}}\mathbb{1}_{U<\frac{1}{2}}, \tag{4.14}$$

où h est donné en (3.23) et

$$\mathfrak{c}_{D_2} = \frac{a^2\mathfrak{c}_R}{\varepsilon}. \tag{4.15}$$

Enfin, la minimisation du rapport de log-vraisemblance (4.9) donne lieu à l'équation itérative suivante (voir [28] pour le détail des calculs) :

$$U\left(\overline{x}, t+\Delta t\right) = \left(U\left(\overline{x}, t\right) - \frac{T_{\text{IN}}}{T_{\text{OUT}}}\left(\overline{x}\right)\right)\mathrm{e}^{T_{\text{OUT}}(\overline{x})\Delta t} + \frac{T_{\text{IN}}}{T_{\text{OUT}}}\left(\overline{x}\right), \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned} T_{\text{IN}}\left(\overline{x}\right) =& 2a^2\sum_{\mathcal{I}}\mathcal{P}_{\overline{x}}\left(\mathcal{I};\ \vartheta\right)\ln\left(\mathcal{P}_{\text{IN}}\left(\mathcal{I};\ \vartheta, k = U^2\right)\mathcal{P}_{\text{OUT}}\left(\mathcal{I};\ \vartheta, k = (1-U)^2\right)\right), \\ T_{\text{OUT}}\left(\overline{x}\right) =& 2a^2\sum_{\mathcal{I}}\mathcal{P}_{\overline{x}}\left(\mathcal{I};\ \vartheta\right)\ln\left(\mathcal{P}_{\text{OUT}}\left(\mathcal{I};\ \vartheta, k = (1-U)^2\right)\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Le contour obtenu est donné par $U(x,t) = 1/2$. L'utilisation d'une approche statistique dans un contexte multiphasique est plus compliquée que dans le contexte diphasique présenté ci-dessus. Cela nécessiterait de calculer k supérieur à deux d'estimations de densité par noyau mais aussi d'introduire une mesure de dissimilarité pertinente entre ces k estimations. La considération d'un nombre k supérieur à deux de phases introduirait des difficultés mathématiques pour obtenir la descente de gradient de l'énergie considérée et augmenterait le coût de calcul.

Algorithm 2 Schéma numérique de l'algorithme LL-2P par splitting de Strang.

$U(x,0)$ choisi par l'utilisateur [1]
a la taille de la grille initiale
while $a > 1$ **do**
  while $U(x,n\Delta t) - U(x,(n-1)\Delta t) \geq tol$ **do**
    $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x,n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (3.19) avec $\mathfrak{c}_{D_1} = \varepsilon \mathfrak{c}_R$ ▷ Diffusion
    $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x,n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (4.14) avec $\mathfrak{c}_{D_2} = \frac{a^2 \mathfrak{c}_R}{\varepsilon}$ ▷ Réaction
    $U(x,n\Delta t) \leftarrow U(x,n\Delta t + \Delta t)$ à partir de (4.16) ▷ Attache aux données
    $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x,n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (4.14) avec $\mathfrak{c}_{D_2} = \frac{a^2 \mathfrak{c}_R}{\varepsilon}$ ▷ Réaction
    $U(x,n\Delta t) \leftarrow U\left(x,n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ à partir de (3.19) avec $\mathfrak{c}_{D_1} = \varepsilon \mathfrak{c}_R$ ▷ Diffusion
    $n \leftarrow n+1$
  end while
  $a \leftarrow a - 1$
end while

4.2 Segmentation et extraction du fouillis de mer

Le traitement du fouillis de mer est généralement considéré comme un problème formulé dans la carte distance-Doppler. Dans cet espace, le fouillis de mer correspond à une bande de fréquences centrée en zéro avec des contours très irréguliers en fonction des conditions météorologiques [37,38]. Pour la modélisation, on utilise souvent des distributions statistiques dans le but de décrire, d'un point de vue fréquentiel, la superposition de différents types d'ondes. Cependant, ces modèles statistiques ne sont pertinents que dans des cas très spécifiques [4,39].

Nous abordons dans un premier temps le problème de la segmentation et de l'extraction du fouillis de mer au moyen des trois algorithmes LS, LL-2P et CV-kP dans la carte distance-Doppler, à l'instar de [9,18,40]. Le but est d'extraire deux régions, une région exo-clutter et une région endo-clutter.

Dans un second temps, nous appliquons ces trois mêmes algorithmes sur l'image obtenue par intégration non cohérente. Le but est d'extraire le fouillis de mer et le signal d'intérêt. Comme mentionné plus haut, une fonction de transfert est utilisée pour améliorer les résultats de l'application des trois algorithmes.

1. Des expériences menées sur des images médicales échographiques 3D à haute fréquence ont montré que cette méthode est particulièrement robuste aux changements d'initialisation [28].

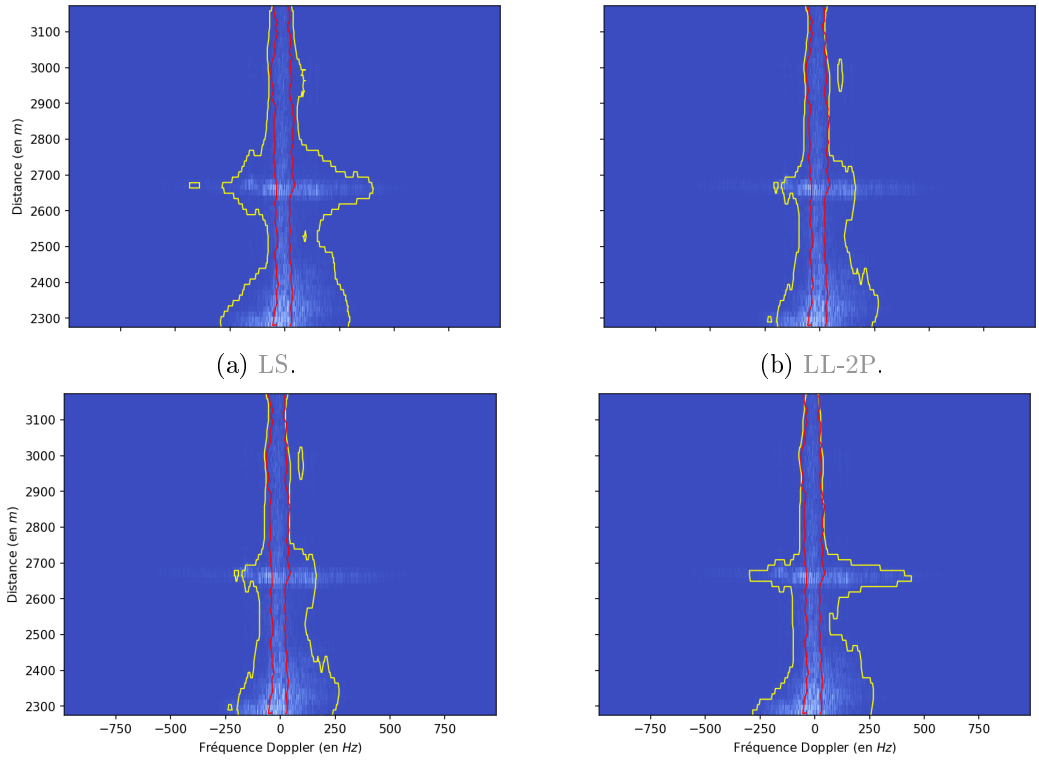
4.2.1 Traitement des images de cartes distance-Doppler

D'une manière générale, tous les contours obtenus à partir des algorithmes LS, LL-2P et CV-kP appliqués sur l'image de carte distance-Doppler englobent une région beaucoup plus large que le fouillis de mer réel.

Rappelons que l'image $\mathcal{I}$ correspondant à une carte distance-Doppler est l'image $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$ (voir section 2.4.3), où $\boldsymbol{A}$ désigne une acquisition réelle de la base du CSIR. Dans ce paragraphe, nous utilisons l'acquisition `06_053_TTrFA` décrite dans le tableau 2.1, voir l'annexe B pour des résultats similaires sur les trois autres acquisitions présentées dans le tableau 2.1.

Pour ce type de traitement, utilisant une image de carte distance-Doppler, la principale difficulté provient de la présence de cibles à SCR élevé ou de la présence de fouillis de sol. Les images qui suivent illustrent les résultats de la mise en œuvre des trois algorithmes avec leur initialisation et les jeux de paramètres choisis.

LS – L'initialisation de l'algorithme LS est choisie étant égale à -1 sur le bord de l'image et égale à 1 partout ailleurs. Des expériences avec différentes fonctions g donnent



(a) LS. (b) LL-2P.

(c) LS + LL-2P. (d) CV-kP.

FIGURE 4.1 – Segmentation du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en fonction de l'algorithme appliqué sur la carte distance-Doppler. La ligne jaune représente la segmentation obtenue et la ligne rouge est la vérité terrain. La figure 4.1d correspond au meilleur contour sélectionné pour $k = 5$ et $U = 1/2$ (voir texte ci-dessous).

des résultats assez similaires. Les paramètres sont fixés à [2]

$$(\Delta t,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{c}_3,\ \sigma,\ \varepsilon) = \left(1,\ \frac{0.2}{\Delta t},\ 5,\ 1.5,\ 1.5,\ 1.5\right). \tag{4.18}$$

La figure 4.1a montre le résultat de la segmentation du fouillis de mer pour l'acquisition `06_053_TTrFA` ;

LL-2P – L'initialisation est plus délicate pour l'algorithme LL-2P. Ceci est dû à la nécessité d'avoir des estimations non paramétriques initiales assez bonnes. Par conséquent, U est fixée à 1 dans une bande verticale englobant le fouillis de mer et égale à 0 partout ailleurs. Les paramètres sont fixés à

$$(\Delta t,\ a,\ \varepsilon,\ h,\ \mathfrak{c}_R) = \left(10^{-1},\ 5,\ \frac{1}{2},\ 10^{-2},\ 1\right). \tag{4.19}$$

La figure 4.1b montre le résultat de la segmentation du fouillis de mer pour l'acquisition `06_053_TTrFA` ;

LS + LL-2P – Une autre approche, permettant d'éviter cette initialisation supervisée, consiste à initialiser l'algorithme LL-2P en appliquant l'algorithme LS (noté LS+LL-2P). Les paramètres des algorithmes LS et LL-2P sont ceux donnés en (4.18) et (4.19) respectivement. La figure 4.1c montre le résultat de la segmentation du fouillis de mer pour l'acquisition `06_053_TTrFA` ;

CV-kP – L'initialisation de l'algorithme CV-kP est effectuée à l'aide de (3.13), c'est-à-dire

$$U(x, t=0) = i + \frac{\mathcal{I}^N(x) - b_i}{b_{i+1} - b_i} \quad \text{si } \mathcal{I}^N(x) \in [b_i; b_{i+1}],\ \forall i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

où $b_i = i/k$. Le nombre de phases est fixé par l'utilisateur [3], en général inférieur ou égal à 10 et exceptionnellement compris entre 10 et 20 en présence de fouillis de sol, et les autres paramètres sont fixés à

$$(\Delta t,\ \varepsilon,\ \mathfrak{c}_{AD},\ \mathfrak{c}_R) = \left(10^{-3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 10^{-1}\right). \tag{4.20}$$

La figure 4.1d montre le résultat de la segmentation pour l'acquisition `06_053_TTrFA`.

Le contour obtenu dans la figure 4.1d en appliquant l'algorithme CV-kP correspond à la valeur $U = 1/2$. Plusieurs contours sont donnés dans la figure 4.2 correspondant aux valeurs $U = 1/2$, $U = 3/2$ et $U = 5/2$. En raison de la dynamique du terme de régularisation, certaines phases peuvent être rassemblées. Afin de comparer la segmentation du fouillis de mer par l'algorithme CV-kP à celle obtenue par les autres algorithmes, nous sélectionnons le contour (c'est-à-dire la ligne délimitant deux phases différentes) le plus proche du fouillis de mer en ajustant la valeur de U.

Les résultats de la figure 4.1 montrent clairement que les algorithmes de segmentation géométrique LS, LL-2P et CV-kP sont incapables de discriminer l'information fréquentielle dans la carte distance-Doppler pour fournir une segmentation pertinente du fouillis de mer. Ceci s'explique par le fait qu'il y a une forte similitude entre les valeurs et les gradients des pixels du signal d'intérêt et du fouillis de mer. On peut constater qu'il y a toujours des contours englobant des régions contenant des cibles à SCR positif.

2. La valeur de $\mathfrak{c}_1$ est choisie afin de satisfaire la condition Courant-Friedrich-Levy $\Delta t \mathfrak{c}_1 < \frac{1}{4}$ (voir [27] pour plus de détails).

3. Plus la valeur de k est grande, moins l'algorithme a de sens car on tend à obtenir autant de régions qu'en a l'image d'origine.

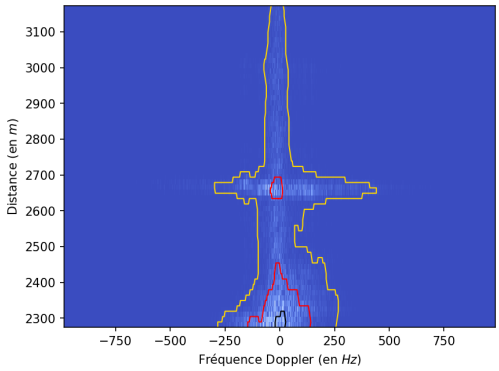


FIGURE 4.2 – Segmentation du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP avec $k = 5$ appliqué sur la carte distance-Doppler – ligne jaune pour $U = 1/2$, ligne rouge pour $U = 3/2$ et ligne noire pour $U = 5/2$ (voir le texte ci-dessous).

4.2.2 Traitement des images obtenues par intégration non cohérente

Afin de comparer les résultats de segmentation puis d'extraction du fouillis de mer sur l'intégration non cohérente avec ceux obtenus sur la carte distance-Doppler, on utilise une fonction de transfert calculé à partir de la solution de l'algorithme après convergence du schéma. Cette fonction de transfert renvoie la probabilité que la cellule, ici un pixel, soit relative à du fouillis de mer. On fait donc l'hypothèse suivante [4] :

(H.1) Une acquisition est principalement composée de fouillis de mer.

Comme précédemment, l'acquisition utilisée pour comparer les résultats des trois algorithmes est l'acquisition `06_053_TTrFA` de la base du CSIR. Nous illustrons également des résultats complémentaires de l'algorithme CV-kP sur l'acquisition `06_068_NScFA`.

La fonction de transfert choisie est calculée par un estimateur de Parzen suivant (4.12). L'algorithme complet pour LS, LL-2P et CV-kP est composé des quatre étapes suivantes :

Étape 1 – Calcul de l'image $\mathcal{I}(\vec{z}) = \|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{NC}}(\vec{z})$ à partir de (2.12) ;

Étape 2 – Calcul de la solution $U\left(\vec{z}, t_f\right)$ de l'algorithme choisi, où t_f est le temps final du schéma itératif correspondant ;

Étape 3 – Calcul de la densité $\mathcal{P}^N_{U(\#,t_f)}(\vec{z};\ \vartheta)$ défini en (4.12). Le fouillis de mer extrait, noté $\boldsymbol{A}_{(SC)}$, et le signal d'intérêt obtenu, noté $\boldsymbol{A}_{(SOI)}$, correspondent à

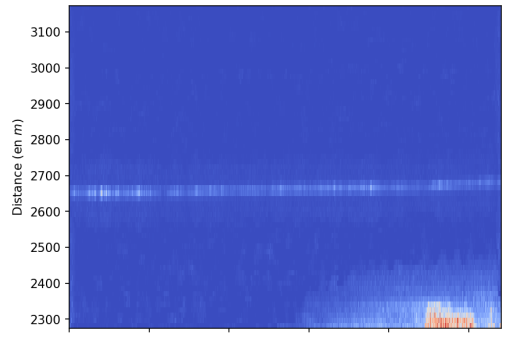
$$\boldsymbol{A}_{(SC)}(\vec{z},p) = \mathcal{P}^N_{U(\#,t_f)}(U;\ \vartheta)\,\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\,,\ \ \boldsymbol{A}_{(SOI)}(\vec{z},p) = \left(1 - \mathcal{P}^N_{U(\#,t_f)}(U;\ \vartheta)\right)\boldsymbol{A}(\vec{z},p)\,; \quad (4.21)$$

Étape 4 – Calcul de l'image de la carte distance-Doppler de $\boldsymbol{A}_{(SC)}$ ou de $\boldsymbol{A}_{(SOI)}$.

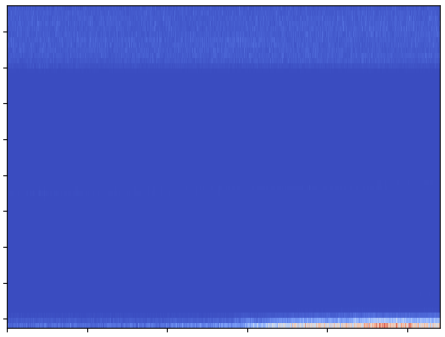
Les images qui suivent illustrent les résultats de la mise en œuvre des trois algorithmes avec leur initialisation et les jeux de paramètres choisis.

LS – Les paramètres d'initialisation de l'algorithme LS sont ceux donnés en (4.18). En raison de l'absence de contours prononcés, les diverses fonctions g utilisées ont été incapables de guider l'évolution de l'interface afin de produire une segmentation pertinente. Il n'y a pas de bords significatifs qui pourraient être exploités pour isoler le fouillis de

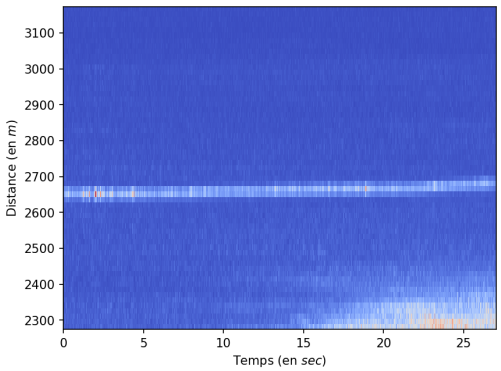
4. C'est une hypothèse non restrictive dans le cas d'acquisition par radar marin.



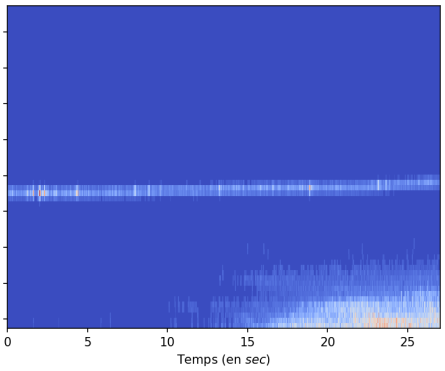
(a) $\left\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\right\|_{\text{NC}}$ en utilisant l'algorithme LS.



(b) $\left\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\right\|_{\text{NC}}$ en utilisant l'algorithme LL-2P.



(c) $\|\boldsymbol{A}\|_{\text{NC}}$.



(d) $\left\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\right\|_{\text{NC}}$ en utilisant l'algorithme CV-kP.

FIGURE 4.3 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en fonction de l'algorithme appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente.

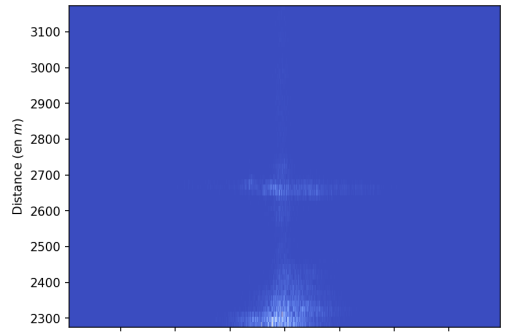
mer. Les figures 4.3a et 4.4a montrent le résultat de l'extraction du fouillis de mer pour `06_053_TTrFA` ;

LL-2P – Comme dans le paragraphe précédent, l'initialisation de l'algorithme LL-2P requiert plus d'attention que celle de l'algorithme LS. Un contour initial englobant une région supposée ne contenir que du fouillis de mer est choisi. Les paramètres sont ceux donnés en (4.19). Cet algorithme ne permet pas d'obtenir une visualisation pertinente du fouillis de mer dans la carte distance-Doppler. On ne peut pas distinguer le fouillis de mer du signal d'intérêt si on ne considère que deux phases, c'est-à-dire deux classes. Les figures 4.3b et 4.4b montrent le résultat de l'extraction du fouillis de mer pour `06_053_TTrFA` ;

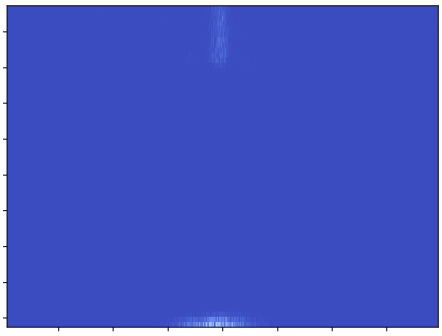
CV-kP – Avec les paramètres donnés en (4.20) (à part le nombre de phases $k = 8$), l'algorithme CV-kP est appliqué pour obtenir $U\left(\vec{z}, T_f\right)$. Les valeurs de $U\left(\vec{z}, T_f\right)$ varient entre 0 et $k-1$. Les valeurs les plus faibles correspondent au fouillis de mer, tandis que les valeurs les plus élevées correspondent à des éléments rétrodiffusant beaucoup d'énergie (par exemple du fouillis de sol ou des cibles à SCR élevé). Contrairement à l'algorithme LL-2P, la considération d'un nombre supérieur ou égal à deux phases permet de mieux séparer le fouillis de mer du signal d'intérêt. Les figures 4.3d et 4.4d montrent le résultat de l'extraction du fouillis de mer pour `06_053_TTrFA`.

Les algorithmes LS et LL-2P donnent des résultats comparables mais loin d'être satisfaisants. Comme dans le cas des images des cartes distance-Doppler, ils ne parviennent toujours pas à discriminer le fouillis de mer.

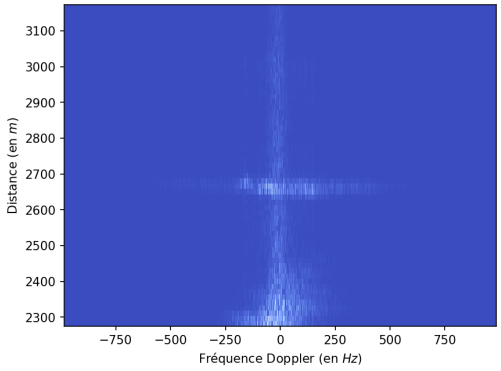
L'algorithme CV-kP extrait correctement le fouillis de mer lorsque le signal d'inté-



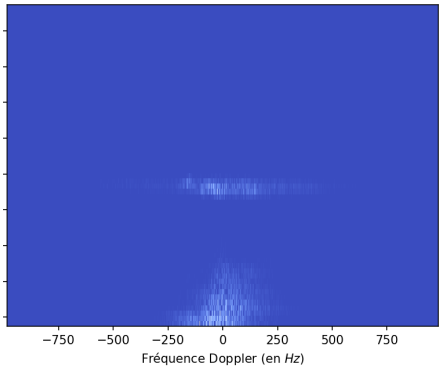
(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$ en utilisant l'algorithme LS.



(b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$ en utilisant l'algorithme LL-2P.



(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$.



(d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$ en utilisant l'algorithme CV-kP.

FIGURE 4.4 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en fonction de l'algorithme appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

rêt à un SCR suffisamment grand. Les résultats illustrés par la figure 4.5 montrent qu'en présence de cibles à faible SCR (éventuellement parmi d'autres cibles à SCR élevé), l'algorithme peut assimiler le signal d'intérêt à faible SCR à du fouillis de mer.

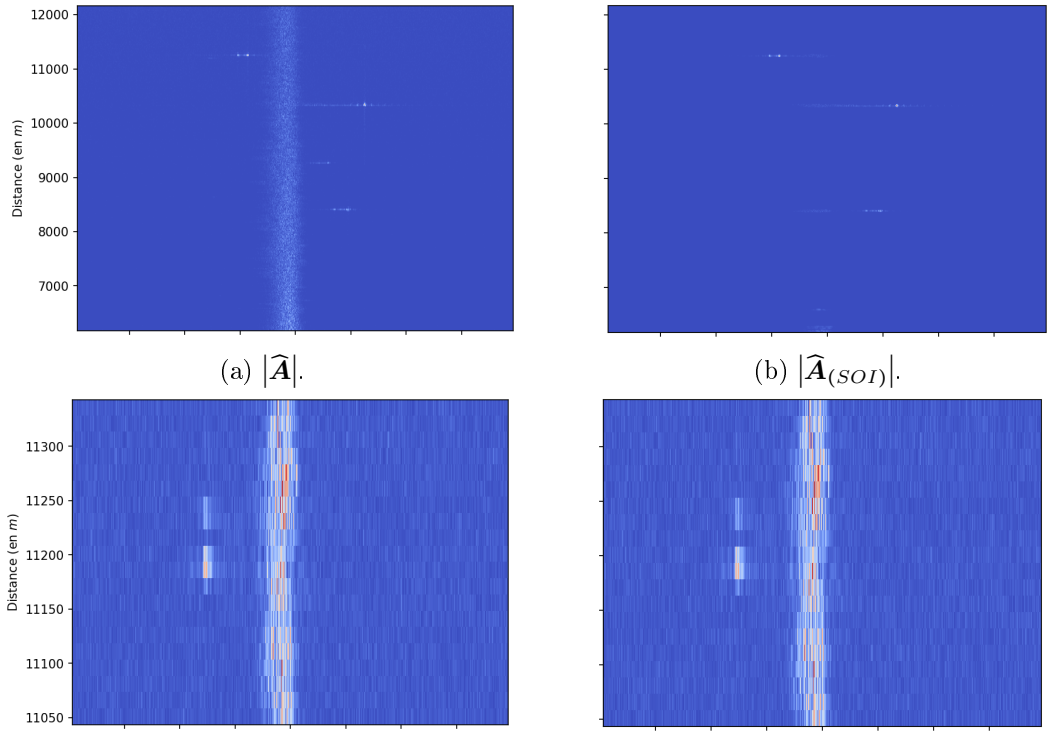
— Sur la figure 4.5b pour l'acquisition `06_068_NScFA`, la cible localisée à environ 9 000m et avec un SCR proche de 4dB est considérée par l'algorithme CV-kP comme faisant partie du fouillis de mer ;

— Sur la figure 4.5d pour l'acquisition `06_068_NScFA`, la cible localisée à environ 11 200m et avec un SCR proche de 3dB est considérée par l'algorithme CV-kP comme faisant partie du fouillis de mer.

4.3 Conclusion

Les résultats de la section 4.2.1 illustrés sur l'acquisition `06_053_TTrFA` montrent clairement la difficulté des algorithmes à segmenter le fouillis de mer à partir de la carte distance-Doppler sans utiliser d'hypothèses concernant l'existence ou la position d'éléments ne faisant pas partie du fouillis de mer (cible, fouillis de sol...).

Les résultats de la section 4.2.2 illustrés sur l'acquisition `06_053_TTrFA` montrent que pour obtenir une bonne extraction du fouillis de mer à partir des images obtenues par intégration non cohérente, il est nécessaire de considérer un nombre de phases strictement supérieur à 2, et dans la pratique inférieur ou égal à 10, exceptionnellement compris entre 10



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SC)}\right|$.

FIGURE 4.5 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

et 20 en présence de fouillis de sol. L'algorithme CV-kP répond à cette contrainte et permet d'obtenir des résultats pertinents lorsque le SCR du signal d'intérêt est suffisamment grand. Par contre, lorsque le signal d'intérêt à un SCR faible, cet algorithme peut assimiler ce signal d'intérêt à du fouillis de mer. Nous verrons plus loin comment pallier ce dernier problème, au moins dans le cas d'un signal d'intérêt exo-clutter, par un traitement pulse-Doppler.

Chapitre 5

Les schémas de Boltzmann sur réseau pour le traitement d'image radar

Les schémas de Boltzmann sur réseau (EN – Lattice Boltzmann scheme : LB) sont obtenus en considérant l'équation de Boltzmann avec un espace de phase discrétisé. Il existe essentiellement deux façons de traiter l'opérateur de collision de Boltzmann lors de la conception de tels schémas : la première consiste à utiliser l'opérateur de collision Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) défini à partir d'une distribution d'équilibre [41]. Alternativement, la collision peut être effectuée dans un espace de moments en introduisant plusieurs temps de relaxation. Cette deuxième approche conduit aux schémas à temps de relaxation multiple (EN – Multiple Relaxation Time : MRT) [42]. Les schémas à collision de type BGK peuvent être considérés comme un cas particulier des schémas LB MRT avec un temps de relaxation unique (EN – Single Relaxation Time : SRT).

Les méthodes LB sont largement utilisées pour les simulations, par exemple en dynamique des fluides numérique, en acoustique, en thermique ou en magnétohydrodynamique. Dans ce qui suit, l'accent est mis sur le problème plus spécifique et moins fréquemment traité de la simulation d'EDPs de convection-diffusion, éventuellement avec une vitesse d'advection non constante et un terme de réaction non linéaire [43–50]. Afin d'étudier la cohérence des schémas LB correspondants, il est nécessaire de calculer les développements asymptotiques de l'équation de Boltzmann discrétisée pour obtenir ce que l'on appelle l'EDP équivalente qui approxime l'EDP initiale jusqu'à un ordre donné. Les développements asymptotiques les plus utilisés sont les développements de Chapman-Enskog [51] qui nécessitent d'introduire diverses échelles de temps et d'espace. Pour éviter d'avoir à manipuler ces dernières, nous utilisons les développements de Taylor habituelles à l'échelle acoustique dans l'espace des moments [52]. Dans ce qui suit, cette deuxième stratégie est adoptée.

Bien qu'ils semblent plus complexes, les schémas LB MRT présentent des avantages significatifs par rapport aux schémas LB SRT, ce qui explique leur popularité croissante. Ils englobent par exemple les schémas cumulants [53] et entropiques [54]. Ils permettent également une meilleure gestion des conditions aux limites [55] et des quantités physiques [42]. Leur principale caractéristique utilisée dans ce travail est qu'ils sont beaucoup plus stables que les schémas LB SRT, comme l'illustre notre application spécifique au traitement d'images radar marines, voir également [56].

En fait, la conception de schémas LB pour le traitement d'images reste un problème largement ouvert. Il est clair que leur mise en œuvre parallèle facile pour le traitement

en temps réel pourrait améliorer de nombreux algorithmes existants basés sur les EDPs. Citons à [57–61] pour des contributions utilisant les schémas LB SRT, et à [56] pour la seule contribution, à notre connaissance, utilisant un schéma LB MRT dans ce contexte.

Expliquons brièvement comment nous allons utiliser les EDPs de convection-diffusion pour le traitement des images radar marin. Les images à traiter sont associées à des cartes distance-Doppler qui, comme nous l'avons vu, permettent de visualiser les signaux radar dans le domaine fréquentiel. Comme illustré précédemment, elles sont fortement corrompues par un bruit d'interférence, ont un faible contraste, et les objets à détecter n'ont pas de contours apparents. Un premier traitement est appliqué au moyen de l'algorithme CV-kP décrit dans le chapitre 3. La vitesse d'advection de l'EDP de convection-diffusion est alors choisie comme étant le gradient de la fonction $U\left(\vec{x}, t_f\right)$ obtenue à l'issue de l'algorithme 1. La diffusion et la réaction sont données par l'équation d'Allen-Cahn [23]. L'EDP ainsi obtenue est utilisée pour améliorer le débruitage avec la diffusion et le signal d'intérêt avec l'advection.

Les points importants de ce chapitre sont les suivants :

— Nous donnons une dérivation explicite jusqu'au second ordre de l'EDP équivalente d'une EDP de convection-diffusion avec une vitesse d'advection non constante et un terme source non nul. Cette dérivation est effectuée en utilisant des développements de Taylor dans l'espace des moments d'un schéma LB MRT D2Q9.

— Nous donnons une dérivation explicite de l'EDP équivalente jusqu'au troisième ordre pour une vitesse d'advection constante et un terme source nul. D'un point de vue théorique, un choix approprié des temps de relaxation augmente la précision du schéma jusqu'à l'ordre trois.

— En utilisant ce choix de temps de relaxation, nous effectuons une analyse de von Neumann pour identifier la région de stabilité en fonction du nombre de Péclet Pe et du nombre de Courant Cr pour différents pas de temps Δt, différentes directions d'advection θ et différents temps de relaxation s_6.

— Dans la région de stabilité, une convergence numérique d'ordre trois est obtenue et validée grâce à un choix approprié des paramètres LB à partir d'un cas test pour lequel la solution analytique est connue.

— Nous proposons un algorithme de traitement d'images radar marin mis en œuvre au moyen d'un schéma LB MRT D2Q9 qui simule une EDP de convection-diffusion pour débruiter l'image associée à une carte distance-Doppler et améliorer le signal d'intérêt. Des résultats expérimentaux sur une image de la base du CSIR sont présentés et valident la pertinence de l'algorithme.

— Nous montrons également que ce type de traitement d'image nécessite l'utilisation d'opérateur de collision de type MRT plutôt que SRT, car ces derniers manquent de stabilité.

5.1 L'équation de Boltzmann

Le lecteur peut consulter par exemple [62, 63] pour une introduction aux schémas LB et pour les définitions énoncées ci-dessous. Dans la suite, nous adoptons la convention de sommation d'Einstein : les indices grecs sont relatifs aux composantes spatiales des vecteurs et les indices romains aux vecteurs discrets du réseau (ou équivalent).

L'équation de Boltzmann décrit le comportement d'une distribution $f(\vec{x},\vec{v},t)$ de particules d'un gaz dilué.Elle s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x},\vec{v},t) + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(\vec{x},\vec{v},t) + F_\alpha(\vec{x},t)\frac{\partial f}{\partial v_\alpha}(\vec{x},\vec{v},t) = \mathcal{Q}(f(\vec{x},\vec{v},t)), \tag{5.1}$$

où $(\vec{x},\vec{v},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{Q}$ est l'opérateur de collision à une échelle microscopique et $\vec{F}$ un champ de force externe macroscopique. Le second terme de gauche de (5.1) correspond au transport des particules. Concernant le terme de droite, l'approximation classique de $\mathcal{Q}$, appelée opérateur de collision de type SRT [64], est définie par

$$\mathcal{Q} : f(\vec{x},t) \longmapsto \frac{1}{\tau}\left(f^{eq}(\vec{x},t) - f(\vec{x},t)\right) \tag{5.2}$$

où τ représente le temps de relaxation et f^{eq} la fonction d'équilibre, typiquement la distribution de Maxwell-Boltzmann.

5.1.1 Discrétisation du schéma

Pour un réseau DnQd, on se place sur une grille discrète $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ de pas en espace [1] Δx et de pas en temps Δt. L'espace des vitesses est discrétisé en se restreignant à d vitesses $v_{i,\alpha} = \lambda e_{i,\alpha}$, pour tous $i = 0, 1, \ldots, d-1$ où $\lambda = \Delta x/\Delta t$ est la vitesse numérique du réseau [2]. La distribution $f(x_\alpha, v_{i,\alpha}, t)$ est la probabilité d'avoir des particules à l'instant t, à la position x_α et de vitesse $v_{i,\alpha}$. Dans la suite de ce chapitre, nous adoptons les notations suivantes.

— La distribution $f(\vec{x},\vec{v}_i,t)$ est notée $f_i(\vec{x},t)$. De même, le terme de force $F(\vec{x},\vec{v}_i,t)$ est noté $F_i(\vec{x},t)$.

— Le vecteur de distribution est le vecteur $\vec{f} := (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})^T$ et le vecteur de force est le vecteur $\vec{F} := (F_0, F_1, \ldots, F_{d-1})^T$;

— Le vecteur de distribution après collision est noté

$$\vec{f}^*(\vec{x},t) := \vec{f}(\vec{x},t) + \mathcal{Q}\left(\vec{f}(\vec{x},t)\right). \tag{5.3}$$

Après discrétisation de (5.1), on obtient le schéma numérique

$$f_i(\vec{x}, t+\Delta t) = f_i^*(\vec{x} - \vec{v}_i\Delta t, t) + \Delta t F_i(\vec{x} - \vec{v}_i\Delta t, t). \tag{5.4}$$

Ce schéma est composé d'une étape d'advection, résolue par la méthode des caractéristiques, et d'une étape de collision. On introduit les quantités physiques suivantes : la densité

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i(\vec{x},\vec{v},t), \tag{5.5}$$

la vitesse macroscopique

$$\rho u_\alpha(\vec{x},t) = v_{i,\alpha} f_i(\vec{x},\vec{v},t), \tag{5.6}$$

et l'énergie

$$\mathrm{E}(\vec{x},t) = \frac{v_{i,\alpha}v_{i,\alpha}}{2} f_i(\vec{x},\vec{v},t). \tag{5.7}$$

1. On suppose, quitte à redimensionner l'espace d'origine, que le pas en espace est le même pour toutes les dimensions.

2. La valeur de λ permet à (5.1) d'être exacte pour le terme de transport puisqu'elle correspond au nombre de Courant-Friedrichs-Lewy d'une équation de transport.

5.1.2 Espace des moments

L'idée d'effectuer la collision dans l'espace des moments a été introduite pour la première fois par d'Humières dans [42]. La transformation permettant de passer de l'espace des distributions dans l'espace des moments est une transformation linéaire de matrice $\boldsymbol{M}$:

$$m_k = M_{k,i} f_i \Longleftrightarrow f_i = M_{i,k}^{-1} m_k, \tag{5.8}$$

où $\vec{m} = (m_0,\ m_1, \ldots,\ m_{d-1})^T$ est le vecteur des moments. Dans la pratique, pour déterminer $\boldsymbol{M}$, on utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir d'une base arbitraire de l'espace des moments. Étant donné une suite $(p_k)_{0\leq k<d}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$, on écrit chaque moment m_k sous la forme

$$m_k = p_k(\vec{v}_i)\, f_i(\vec{x},t) \Longrightarrow M_{k,i} = p_k(\vec{v}_i). \tag{5.9}$$

Nous appliquons ce procédé plus loin dans le cas particulier d'un réseau D2Q9. Dans la suite, on note $\mathbb{F}_k := M_{k,i} F_i$ la $k^{\text{iéme}}$ composante du vecteur de force dans l'espace des moments.

L'intérêt d'effectuer la collision dans l'espace des moments est que cette dernière utilise plusieurs temps de relaxation. Plus précisément, on a :

$$m_k^*(\vec{x},t) = m_k(\vec{x},t) + s_k\left(m_k^{eq}(\vec{x},t) - m_k(\vec{x},t)\right) = C_{k,\ell} m_\ell(\vec{x},t), \tag{5.10}$$

où $s_k = \Delta t/\tau_k$ est le temps de relaxation du $k^{\text{iéme}}$ moment et la matrice $\boldsymbol{C}$ permet de garantir l'invariance des moments conservés après la collision. Dans (5.10), m_k^{eq} désigne la $k^{\text{iéme}}$ composante du vecteur des moments à l'équilibre. Lorsque tous les temps de relaxation s_k sont identiques, cette collision correspond à une collision de type SRT. En supposant que $s_k \neq 0$, on notera suivant Hénon [65]

$$\sigma_k = \frac{1}{s_k} - \frac{1}{2}. \tag{5.11}$$

Afin d'effectuer les développements asymptotiques permettant d'obtenir les EDPs équivalentes, nous adoptons la démarche proposée par Dubois dans [52]. Elle consiste à utiliser des développements de Taylor à l'échelle acoustique plutôt que des développements de Chapman-Enskog. L'échelle acoustique est caractérisée par le fait que

$$\mathcal{O}\left((\lambda\Delta t)^4\right) = \mathcal{O}\left(\Delta x^4\right) = \mathcal{O}\left(\Delta t^4\right). \tag{5.12}$$

où la vitesse numérique $\lambda = \Delta x/\Delta t$ est considérée comme constant.

Le développement de Taylor à l'ordre quatre de l'équation de Boltzmann discrète (5.4) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&f_i(\vec{x},t) + \Delta t \frac{\partial f_i}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}(\vec{x},t) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 f_i}{\partial t^3}(\vec{x},t) + \mathcal{O}\left(\Delta t^4\right) = f_i^*(\vec{x},t) \\
&- \Delta t v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^*}{\partial x_\alpha}(\vec{x},t) + \frac{\Delta t^2}{2} v_{i,\alpha} v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\vec{x},t) - \frac{\Delta t^3}{6} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}(\vec{x},t) \\
&+ \Delta t F_i(\vec{x},t) - \Delta t^2 v_{i,\alpha}\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}(\vec{x},t) + \frac{\Delta t^3}{2} v_{i,\alpha} v_{i,\beta}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\vec{x},t) + \mathcal{O}\left((\lambda\Delta t)^4\right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.2 Consistance – les EDPs équivalentes d'un schéma LB D2Q9 à une seule loi de conservation

Nous expliquons maintenant comment obtenir les EDPs équivalentes pour un schéma LB MRT D2Q9 lorsqu'un seul moment, la densité ρ, est conservé, c'est-à-dire à une seule loi de conservation. Pour un réseau $D2Q9$, les vitesses $\vec{v}_i$ sont définies par

$$\vec{v}_i = \lambda \begin{cases} (0,0) & \text{si } i = 0\ , \\ (1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1) & \text{si } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ , \\ (1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1) & \text{si } i = 5,\ 6,\ 7,\ 8. \end{cases} \tag{5.14}$$

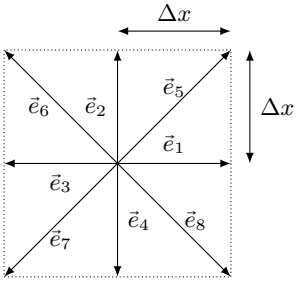


FIGURE 5.1 – Réseau $D2Q9$

On considère les sept moments suivants.
– La densité :

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_{i=0}^{8} f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,. \tag{5.15a}$$

– La quantité de mouvement :

$$j_\alpha(\vec{x},t) = \rho u_\alpha(\vec{x},t) = v_{i,\alpha} f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,, \tag{5.15b}$$

où u_α est la vitesse macroscopique.
– L'énergie :

$$\mathrm{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{2} v_{i,\alpha} v_{i,\alpha} f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,. \tag{5.15c}$$

– La déformation :

$$\mathtt{p}_{xx}(\vec{x},t) = \left(v_{i,x}^2 - v_{i,y}^2\right) f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,. \tag{5.15d}$$

– Le cisaillement :

$$\mathtt{p}_{xy}(\vec{x},t) = v_{i,x} v_{i,y} f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,. \tag{5.15e}$$

– Le flux de chaleur :

$$q_\alpha(\vec{x},t) = v_{i,\beta} \frac{1}{2} v_{i,\alpha} v_{i,\alpha} f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,. \tag{5.15f}$$

– Le carré de l'énergie cinétique :

$$\chi(\vec{x},t) = \frac{\left(v_{i,\alpha} v_{i,\alpha}\right)^2}{4} f_i(\vec{x},\vec{v},t)\,. \tag{5.15g}$$

Les moments d'équilibre m_k^{eq} que nous choisissons d'utiliser dans la suite sont fonction de l'unique moment conservé ρ (voir tableau 5.1). Précisons également que pour simplifier l'analyse asymptotique, ces moments sont dimensionnés en fonction de λ.

moments	j_x	j_y	E	p_{xx}	p_{xy}	q_x	q_y	χ
moments d'équilibre	$\lambda \mathfrak{c}_{j_x}$	$\lambda \mathfrak{c}_{j_y}$	$\lambda^2 \mathfrak{c}_{\mathrm{E}}$	$\lambda^2 \mathfrak{c}_{\mathrm{p}_{xx}}$	$\lambda^2 \mathfrak{c}_{\mathrm{p}_{xy}}$	$\lambda^3 \mathfrak{c}_{j_x} \mathfrak{c}_{q_x}$	$\lambda^3 \mathfrak{c}_{j_y} \mathfrak{c}_{q_y}$	$\lambda^4 \mathfrak{c}_{\chi}$

TABLE 5.1 – Les moments non conservés d'un réseau $D2Q9$ comme fonction linéaire de l'unique moment conservé ρ.

Après orthogonalisation de Gram-Schmidt, la matrice $\boldsymbol{M}$ associée à la transformation linéaire de l'espace des distributions dans l'espace des moments s'écrit à partir de la suite de polynômes orthogonaux

$$p_0 = 1, \tag{5.16a}$$
$$p_1 = x, \tag{5.16b}$$
$$p_2 = y, \tag{5.16c}$$
$$p_3 = 3x_\alpha x_\alpha - 4\lambda^2, \tag{5.16d}$$
$$p_4 = x^2 - y^2, \tag{5.16e}$$
$$p_5 = xy, \tag{5.16f}$$
$$p_6 = x\left(3x_\alpha x_\alpha - 5\lambda^2\right), \tag{5.16g}$$
$$p_7 = y\left(3x_\alpha x_\alpha - 5\lambda^2\right), \tag{5.16h}$$
$$p_8 = \frac{9}{2}\left(x_\alpha x_\alpha\right)^2 - \frac{21}{2}\lambda^2 x_\alpha x_\alpha + 4\lambda^4. \tag{5.16i}$$

Le vecteur des moments $\vec{m}$ s'exprime en fonction des moments physiques. On a

$$\vec{m} = \left(\rho,\ j_x,\ j_y,\ 6\mathrm{E} - 4\lambda^2\rho,\ \mathrm{p}_{xx},\ \mathrm{p}_{xy},\ 6q_x - 5\lambda^2 j_x,\ 6q_y - 5\lambda^2 j_y,\ 18\chi - 21\lambda^2\mathrm{E} + 4\lambda^4\rho\right)^T. \tag{5.17}$$

En utilisant les données du tableau 5.1, l'équation de collision (5.10) et l'expression du vecteur des moments (5.17), on vérifie que la matrice de collision $\boldsymbol{C}$ s'écrit

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1\lambda\mathfrak{c}_{j_x} & 1-s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_2\lambda\mathfrak{c}_{j_y} & 0 & 1-s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3\lambda^2\left(6\mathfrak{c}_{\mathrm{E}} - 4\right) & 0 & 0 & 1-s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_4\lambda^2\mathfrak{c}_{\mathrm{p}_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 1-s_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_5\lambda^2\mathfrak{c}_{\mathrm{p}_{xy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_5 & 0 & 0 & 0 \\ s_6\lambda^3\left(6\mathfrak{c}_{q_x} - 5\right)\mathfrak{c}_{j_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_6 & 0 & 0 \\ s_7\lambda^3\left(6\mathfrak{c}_{q_y} - 5\right)\mathfrak{c}_{j_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_7 & 0 \\ s_8\lambda^4\left(18\mathfrak{c}_{\chi} - 21\mathfrak{c}_{\mathrm{E}} + 4\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_8 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

À partir de l'équation de Boltzmann discrète (5.4) et des choix que nous venons de décrire, un développement asymptotique de Taylor à l'échelle acoustique permet d'obtenir l'EDP équivalente du schéma à l'ordre deux en temps, c'est-à-dire une EDP de convection-diffusion qui sera utilisée par la suite pour le traitement des images associées à des cartes distance-Doppler. Comme expliqué dans l'introduction, le cadre d'application nécessite d'avoir recours à des vitesses d'advection non constantes. Ceci implique que, contrairement à la plupart des schémas LB de ce type, les coefficients d'équilibre $\mathfrak{c}_{j_x}$ et $\mathfrak{c}_{j_y}$ ne sont pas supposés être des constantes. Par ailleurs, pour assurer l'isotropie de la diffusion, il est nécessaire d'ajouter l'hypothèse

(H2) le temps de relaxation s_1 est égal au temps de relaxation s_2.

Plus précisément, on a la proposition suivante (voir la preuve A.4 en annexe A).

Proposition 5.1: *Sous l'hypothèse (H2), la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)+\mathbb{F}_0(\vec{x},t)=&\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x},t)+\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\rho(\vec{x},t)\right)\\ -\Delta t\lambda^2\sigma_1\Bigg(&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathfrak{c}_{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xx}}-\mathfrak{c}_{j_x}^2(\vec{x})\right)\rho(\vec{x},t)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\mathfrak{c}_{\mathrm{E}}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xx}}-\mathfrak{c}_{j_x}^2(\vec{x})\right)\rho(\vec{x},t)\\ &+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xy}}-\mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x}))\rho(\vec{x},t)\Bigg)+A_1(\vec{x},t)+A_2(\vec{x},t),\end{aligned}\tag{5.19}$$

où

$$A_1(\vec{x},t)=-\Delta t\lambda^2\sigma_1\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\rho(\vec{x},t)\,\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\frac{\partial\mathfrak{c}_{j_\beta}}{\partial x_\alpha}(\vec{x})\right),\tag{5.20a}$$

$$A_2(\vec{x},t)=\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}(\vec{x},t)-\Delta t\lambda\sigma_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\mathbb{F}_0(\vec{x},t)\right)+\frac{\Delta t}{s_1}\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{F}_1(\vec{x},t)\\ \mathbb{F}_2(\vec{x},t)\end{pmatrix}.\tag{5.20b}$$

Les termes $A_1(\vec{x},t)$ et $A_2(\vec{x},t)$ de (5.19) proviennent du fait que la vitesse d'advection est non constante et que le terme source est non nul. Dans (5.19), la vitesse d'advection est donnée par $\lambda\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})$, la matrice de diffusion par

$$\Delta t\lambda^2\sigma_1\begin{pmatrix}\mathfrak{c}_{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xx}}-\mathfrak{c}_{j_x}^2(\vec{x}) & \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xy}}-\mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x})\\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xy}}-\mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x}) & \mathfrak{c}_{\mathrm{E}}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xx}}-\mathfrak{c}_{j_y}^2(\vec{x})\end{pmatrix},\tag{5.21}$$

et le terme source par $\mathbb{F}_0(\vec{x},t)$.

En choisissant convenablement les équilibres des moments d'ordre deux et les deuxième et troisième composantes du vecteur de force, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.1: *Sous l'hypothèse (H2) et en posant*

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{E}}=\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}+\frac{\mathfrak{c}_{j_x}^2(\vec{x})+\mathfrak{c}_{j_y}^2(\vec{x})}{2},\tag{5.22a}$$

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xy}}=\mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x}),\tag{5.22b}$$

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}_{xx}}=\mathfrak{c}_{j_x}^2(\vec{x})-\mathfrak{c}_{j_y}^2(\vec{x}),\tag{5.22c}$$

$$\mathbb{F}_1(\vec{x},t)=\left(1-\frac{s_1}{2}\right)\lambda\mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathbb{F}_0(\vec{x},t),\tag{5.23a}$$

$$\mathbb{F}_2(\vec{x},t)=\left(1-\frac{s_1}{2}\right)\lambda\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x})\,\mathbb{F}_0(\vec{x},t),\tag{5.23b}$$

la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)+\mathbb{F}_0(\vec{x},t)=&\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x},t)+\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\rho(\vec{x},t)\right)-\Delta t\lambda^2\sigma_1\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\Delta\rho(\vec{x},t)\\ &+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}(\vec{x},t)-\Delta t\lambda^2\sigma_1\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\rho(\vec{x},t)\,\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{c}_{j_\beta}(\vec{x})\right).\end{aligned}\tag{5.24}$$

Le corollaire 5.1 dit précisément qu'avec les choix décrits ci-dessus, l'EDP équivalente à l'ordre deux du schéma LB MRT D2Q9 est une EDP de convection-diffusion à advection non-constante et diffusion isotrope. La vitesse d'advection est donnée par $\lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})$ et le coefficient de diffusion, qui ne dépend pas de cette vitesse d'advection d'après (5.22), par $\Delta t \lambda^2 \sigma_1 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}$. La condition (5.23) permet de supprimer le terme additionnel induit par le terme source à l'instar de [66, 67]. Nous verrons dans la section 5.5 que dans le cadre de nos applications, le terme additionnel induit par la non-constance de la vitesse d'advection n'influe pas sur les résultats obtenus.

5.3 Stabilité du schéma – Analyse de von Neumann

Dans cette section, nous étudions la stabilité du schéma LB MRT D2Q9 qui permet de simuler les solutions d'une EDP de convection-diffusion de la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) + w_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}(\vec{x},t) - \kappa \Delta \rho(\vec{x},t) = 0, \tag{5.25}$$

où la vitesse d'advection w_α est constante et le terme source nul. Dans ce cas particulier, on peut obtenir une EDP équivalente à l'ordre trois donnée par la proposition suivante (voir la preuve A.6 en annexe A).

Proposition 5.2: *Sous l'hypothèse (H2), avec (5.22) et (5.23), la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right) =& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} - \Delta t \lambda^2 \sigma_1 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \Delta \rho - \Delta t^2 \lambda^3 2 \left(\sigma_1^2 - \frac{1}{12}\right) \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta \rho) \\
&+ \Delta t^2 \lambda^3 \left(\sigma_1 \sigma_3 - \frac{1}{12}\right) \mathfrak{c}_{j_\alpha} \left(\mathfrak{c}_{q_\alpha} - \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} - \frac{\mathfrak{c}_{j_x}^2 + \mathfrak{c}_{j_y}^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta \rho) \\
&+ \Delta t^2 \lambda^3 \left(\sigma_1 \sigma_7 - \frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{j_x} \left(\frac{1}{2}\left(\mathfrak{c}_{j_y}^2 - \mathfrak{c}_{j_x}^2\right) + 1 - \mathfrak{c}_{q_x}\right) \\ \mathfrak{c}_{j_y} \left(\frac{1}{2}\left(\mathfrak{c}_{j_y}^2 - \mathfrak{c}_{j_x}^2\right) - 1 + \mathfrak{c}_{q_y}\right) \end{pmatrix}^T \cdot \vec{\nabla} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho\right) \\
&+ 2\Delta t^2 \lambda^3 \left(\sigma_1 \sigma_8 - \frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{j_y} \left(2\mathfrak{c}_{q_y} - 1 - \mathfrak{c}_{j_x}^2\right) \\ \mathfrak{c}_{j_x} \left(2\mathfrak{c}_{q_x} - 1 - \mathfrak{c}_{j_y}^2\right) \end{pmatrix}^T \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \rho\right).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

On constate donc, en posant

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \frac{1}{\sqrt{12}}, \tag{5.27}$$

que dans le cas d'une advection constante et d'un terme source nul, on obtient une EDP équivalente à l'ordre trois qui s'écrit

$$\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) + \lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}(\vec{x},t) - \frac{\Delta t \lambda^2 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}}{\sqrt{12}} \Delta \rho(\vec{x},t). \tag{5.28}$$

La vitesse d'advection est donnée par $\lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha}$ et le coefficient de diffusion par $\Delta t \lambda^2 \sigma_1 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}$. Comme le terme source est nul, les vecteurs de force $\vec{F}$ et $\vec{\mathbb{F}}$ sont nuls.

Il est à noter que (5.27) fixe les cinq premiers temps de relaxation du schéma et que les trois derniers temps de relaxation (s_6, s_7 et s_8) restent libres. Les simulations présentées ci-dessous montrent l'influence de ces paramètres sur la stabilité du schéma.

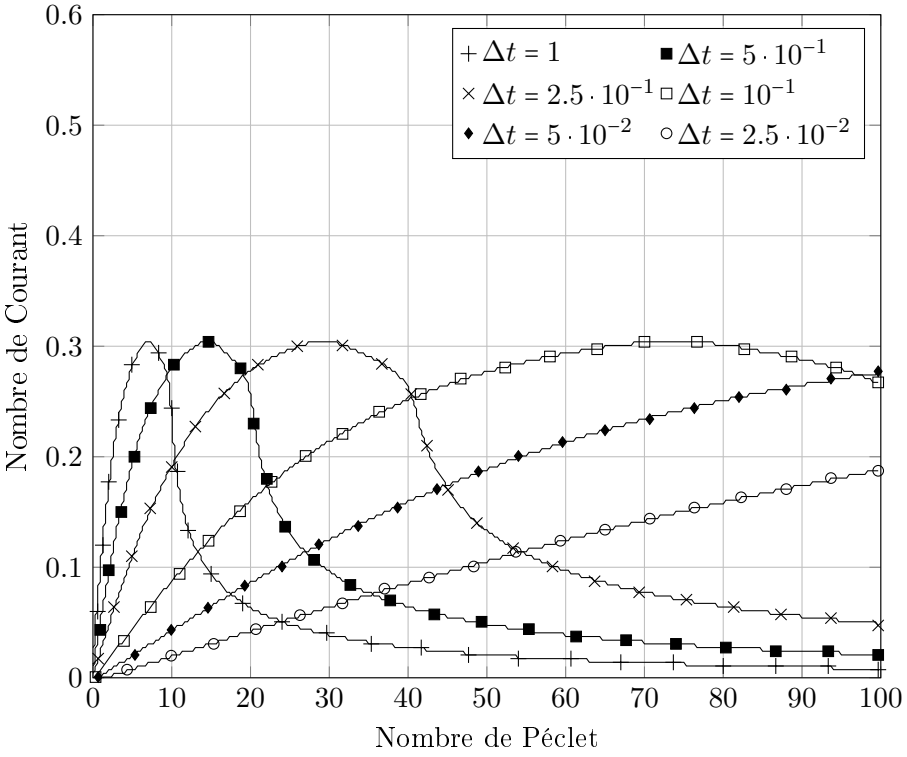


FIGURE 5.2 – Région de stabilité numérique en fonction des nombres de Courant et de Péclet. Chaque courbe représente la limite supérieure permettant d'avoir un schéma stable pour $\lambda = 1,\ \theta = 45°,\ s_6 = s_7 = s_8 = 1.1$ et différentes valeurs de Δt. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est discrétisé de la façon suivante : $\vec{\omega}_{a,b} = \frac{\pi a}{30}\left(\cos\left(\pi b/30\right), \sin\left(\pi b/30\right)\right)$ avec $a, b = 0,\ 1,\ \ldots,\ 30$.

Cette dernière est étudiée par une analyse de von Neumann comme proposé par Lallemand et Luo dans [55] ou Servan-Camas et Tsai dans [43]. En considérant la perturbation

$$f_i\left(\vec{x}, t\right) = f_i^{eq}\left(\vec{x}, t\right) + \delta f_i\left(\vec{x}, t\right), \tag{5.29}$$

où f_i^{eq} est l'état d'équilibre uniforme spécifié par l'unique moment conservé ρ, on obtient dans le domaine de Fourier

$$\delta f_i(\vec{x}, t + \Delta t) = \exp\left(\imath \Delta t \omega_\alpha v_{i,\alpha}\right) M^{-1}_{i,j} C_{j,\ell} M_{\ell,n} \delta f_n\left(\vec{x}, t\right) = G_{i,n} \delta f_n\left(\vec{x}, t\right), \tag{5.30}$$

où ω_α est un vecteur d'onde, $\boldsymbol{G}$ est la matrice d'amplification et $\boldsymbol{C}$ la matrice de collision définie en (5.18). La stabilité du schéma se ramène à l'étude des valeurs propres de la matrice d'amplification $\boldsymbol{G}$: le schéma est stable si, pour tout vecteur d'onde ω_α, toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à un.

Pour les simulations, nous écrivons le vecteur $\vec{w}$ sous la forme $\|\vec{w}\|\left(\cos\theta, \sin\theta\right)$. La stabilité du schéma est discutée en fonction de deux nombres sans dimension : le nombre de Courant (rapport entre la vitesse d'advection et la vitesse discrète du réseau) défini par

$$\mathrm{Cr} = \frac{\|\vec{w}\|}{\lambda}, \tag{5.31}$$

et du nombre de Péclet (rapport entre le transport par convection et le transport par diffusion) défini par

$$\mathrm{Pe} = \frac{\|\vec{w}\|\,\mathtt{x}}{\kappa}, \tag{5.32}$$

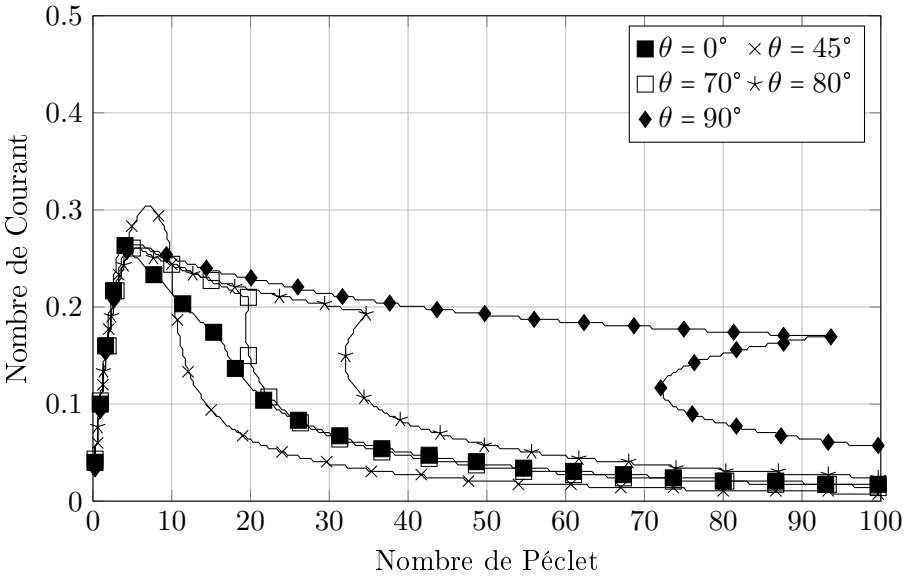


FIGURE 5.3 – Région de stabilité numérique en fonction des nombres de Courant et de Péclet. Chaque courbe représente la limite supérieure permettant d'avoir un schéma stable pour $\lambda = 1,\ \Delta t = 1,\ s_6 = s_7 = s_8 = 1.1$ et différentes valeurs de θ (données en degrés). Le vecteur d'onde $\vec{\omega}$ est discrétisé de la façon suivante : $\vec{\omega}_{a,b} = \frac{\pi a}{30}\left(\cos\left(\pi b/30\right), \sin\left(\pi b/30\right)\right)$ avec $a, b = 0,\ 1,\ \ldots,\ 30$.

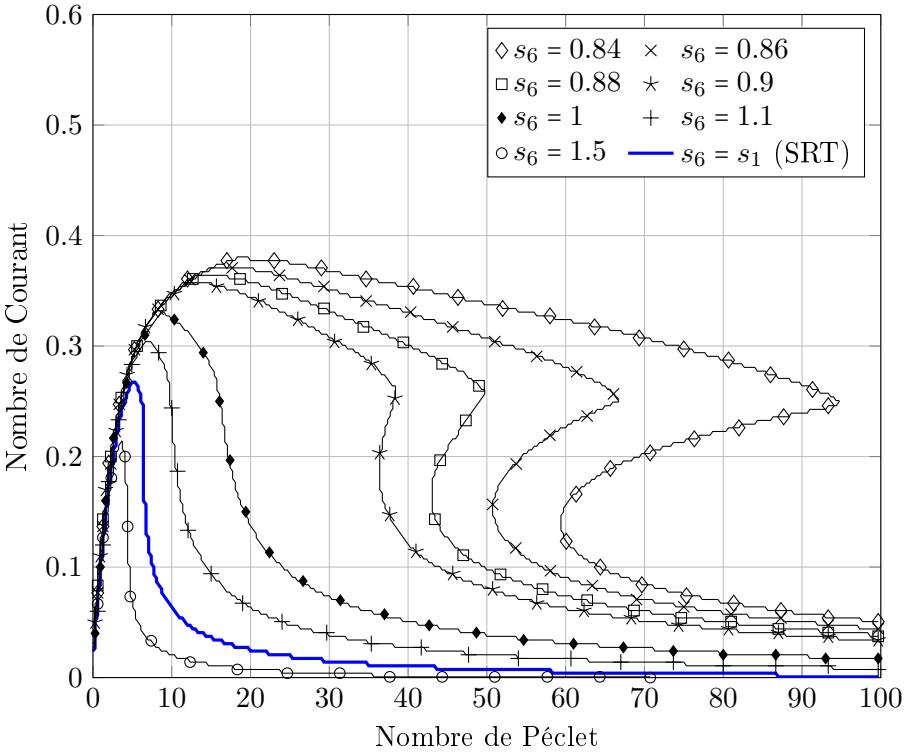


FIGURE 5.4 – Région de stabilité numérique en fonction des nombres de Courant et de Péclet. Chaque courbe représente la limite supérieure permettant d'avoir un schéma stable pour $\lambda = 1,\ \theta = 45°,\ \Delta t = 1$ et différentes valeurs de $s_6 = s_7 = s_8$. Le vecteur d'onde $\vec{\omega}$ est discrétisé de la façon suivante : $\vec{\omega}_{a,b} = \frac{\pi a}{30}\left(\cos\left(\pi b/30\right), \sin\left(\pi b/30\right)\right)$ avec $a, b = 0,\ 1,\ \ldots,\ 30$.

où $\mathtt{x}$ est la longueur caractéristique, ici égale à 1.

On pose, sans modifier l'EDP équivalente à l'ordre trois, $\mathfrak{c}_{q_\alpha} = \mathfrak{c}_\chi = 0$, $s_6 = s_7 = s_8$. La matrice de collision $\boldsymbol{C}$ s'écrit alors sous la forme

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\left(3-\sqrt{3}\right)\mathrm{Cr}\cos\theta & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\left(3-\sqrt{3}\right)\mathrm{Cr}\sin\theta & 0 & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2\left(3-\sqrt{3}\right)\left(6\mathrm{Cr}\left(\frac{\sqrt{12}}{\mathrm{Pe}\lambda\Delta t}+\frac{\mathrm{Cr}}{2}\right)-4\right) & 0 & 0 & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2\left(3-\sqrt{3}\right)\mathrm{Cr}^2\cos(2\theta) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2\left(3-\sqrt{3}\right)\mathrm{Cr}^2\frac{1}{2}\sin(2\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^3 s_6\left(-5\mathrm{Cr}\cos\theta\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_6 & 0 & 0 \\ \lambda^3 s_6\left(-5\mathrm{Cr}\sin\theta\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_6 & 0 \\ \lambda^4 s_6\left(4-21\mathrm{Cr}\left(\frac{\sqrt{12}}{\mathrm{Pe}\lambda\Delta t}+\frac{\mathrm{Cr}}{2}\right)\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s_6 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres intervenant dans les simulations sont donc la vitesse numérique du réseau λ, le nombre de Courant Cr, la direction de l'advection θ, le nombre de Péclet Pe, le pas de temps Δt et les trois temps de relaxation libres s_6, s_7 et s_8, ces derniers étant choisis égaux.

Les figures 5.2 à 5.4 montrent la région de stabilité pour différentes valeurs de Δt, s_6 et θ avec Cr variant dans $[0;1]$ et Pe variant dans $[0;100]$. La figure 5.4 illustre également la région de stabilité pour un opérateur de collision de type SRT (courbe bleue). On constate que cette dernière région est nettement plus petite que la région correspondante pour un opérateur de collision de type MRT (courbe noire, pour $s_6 < 3-\sqrt{3} \simeq 1.26$). Comme souligné par Nguyen et al. dans [56], l'utilisation des méthodes LB pour le traitement d'images nécessite de recourir à des opérateurs de collision de type MRT plutôt que SRT. C'est notamment le cas des images associées à des cartes distance-Doppler. Ces images sont fortement corrompues par du bruit d'interférence et les contours sont peu visibles.

5.4 Validation numérique

Nous avons vu dans la section 5.3 comment obtenir à partir d'un schéma LB MRT D2Q9 une EDP équivalente à l'ordre trois pour une EDP de convection-diffusion à advection constante et terme source nul. Rappelons que dans ce cas, les coefficients d'équilibres des moments d'ordre deux sont donnés par

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{E}} = \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} + \frac{\mathfrak{c}^2_{j_x}(\vec{x}) + \mathfrak{c}^2_{j_y}(\vec{x})}{2}, \tag{5.33a}$$

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{p}_{xy}} = \mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x}), \tag{5.33b}$$

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{p}_{xx}} = \mathfrak{c}^2_{j_x}(\vec{x}) - \mathfrak{c}^2_{j_y}(\vec{x}), \tag{5.33c}$$

et les coefficients de Hénon par

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \frac{1}{\sqrt{12}}. \tag{5.34}$$

Nous nous proposons ici de valider les solutions numériques de l'EDP équivalente

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x},t) + \lambda\mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}(\vec{x},t) - \frac{\Delta t\lambda^2\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}}{\sqrt{12}}\Delta\rho(\vec{x},t) = 0, \tag{5.35}$$

à partir des solutions exactes de l'EDP

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) + w_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}(\vec{x},t) - \kappa \Delta \rho(\vec{x},t) = 0. \tag{5.36}$$

Pour ce faire, nous considérons des valeurs de Pe et Cr appartenant à la région de stabilité illustrée par les figures 5.2 et 5.4. Le domaine spatial de l'EDP (5.36) est $\Omega = [0;1]^2$. On impose des conditions périodiques aux bords et une condition initiale donnée par

$$\rho_0(\vec{x}) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{2\varpi^2} \right), \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \tag{5.37}$$

où $\varpi = 3 \cdot 10^{-2}$. La solution analytique de ce problème est la fonction

$$\rho^{\text{TH}}(\vec{x},t) = \frac{\varpi^2 \sqrt{2\pi}}{2\kappa t + \varpi^2} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{1}{4} - w_x t\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4} - w_y t\right)^2}{4\kappa t + 2\varpi^2} \right), \quad \forall (\vec{x},t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{5.38}$$

Pour la validation, nous choisissons

$$\begin{gathered} \lambda = 1, \ \mathfrak{c}_{q_x} = \mathfrak{c}_{q_y} = \mathfrak{c}_\chi = 0, \ \text{et} \ s_6 = s_7 = s_8 = \frac{1}{2}, \\ \vec{w} = 2.5 \cdot 10^{-3} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ \kappa = 6.25 \cdot 10^{-4}. \end{gathered} \tag{5.39}$$

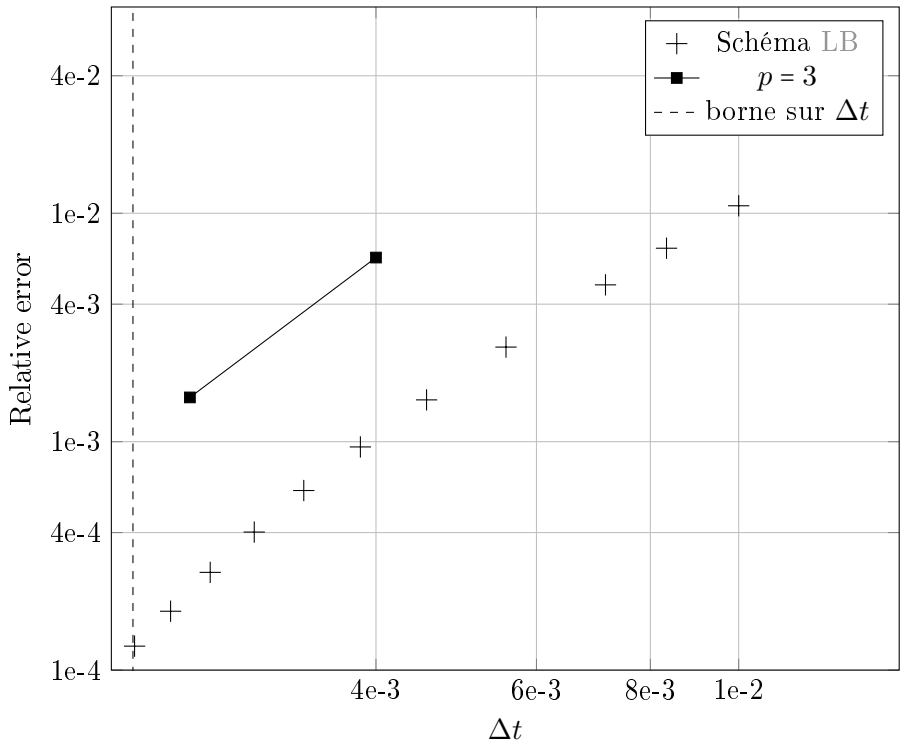


FIGURE 5.5 – Courbe de convergence de la solution simulée en utilisant le schéma LB MRT D2Q9 d'ordre trois. La limite inférieure de Δt est donnée par (5.44).

On a alors

$$\mathrm{Cr} = 2.5 \cdot 10^{-3},\ \mathrm{Pe} = 4. \tag{5.40}$$

La convergence est étudiée en faisant varier Δt comme suit

$$\Delta t = \frac{1}{\ell \cdot 20}, \ell = 5,\ 6,\ \ldots,\ 23. \tag{5.41}$$

Il est important de souligner que le coefficient de diffusion de l'EDP équivalente est maintenu constant lorsque Δt varie en fixant

$$\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} = \frac{\kappa\sqrt{12}}{\Delta t \lambda^2}. \tag{5.42}$$

L'erreur relative

$$Err\left(U^{\mathrm{LB}} - U^{\mathrm{TH}}; t_f\right) = \frac{\sqrt{\sum_{\vec{x}\in\mathcal{L}} \left(U^{\mathrm{LB}}\left(\vec{x}, t_f\right) - U^{\mathrm{TH}}\left(\vec{x}, t_f\right)\right)^2}}{\sqrt{\sum_{\vec{x}\in\mathcal{L}} U^{\mathrm{TH}}\left(\vec{x}\right)^2}}, \tag{5.43}$$

entre la solution simulée ρ^{LB} et la solution analytique ρ^{TH} est calculée pour chaque pas de temps après $t_f/\Delta t$ itérations temporelles où $t_f = 5 \cdot 10^{-2}$ est le temps final.

D'après Lallemand et Luo dans [55] et Boghosian et al. dans [68], la condition $\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \in]0;1[$ doit être satisfaite pour éviter l'instabilité. Cette condition donne le domaine de validité du développement (5.35) car

$$\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} < 1 \Longleftrightarrow \Delta t > \frac{\kappa\sqrt{12}}{\lambda^2}. \tag{5.44}$$

Comme le coefficient de diffusion κ est fixé à $6.25 \cdot 10^{-4}$ et $\lambda = 1$, la borne inférieure de Δt est égale à $2.165 \cdot 10^{-3}$. La courbe de convergence obtenue est une droite de pente $p \simeq 3$ (voir Figure 5.5).

5.5 Application – Traitement d'image radar marin

Le but de ce paragraphe est d'utiliser les schémas LB MRT décrits précédemment pour améliorer les résultats obtenus par l'algorithme CV-kP. Plus précisément, on considère l'EDP

$$\frac{\partial U}{\partial t}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(w_\alpha\left(\vec{x}\right) U\left(\vec{x}, t\right)\right) - \mathfrak{c}_R \varepsilon \Delta U\left(\vec{x}, t\right) = S\left(\vec{x}, t\right), \tag{5.45}$$

où

— la condition initiale $U\left(\vec{x}, 0\right)$ est l'image $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|^N(\vec{x})$ normalisée entre 0 et 1 de la carte distance-Doppler de l'information restante, c'est-à-dire l'image obtenue après application de la fonction de transfert sur la sortie de l'algorithme itératif CV-kP [3] ;

— la vitesse d'advection $\vec{w}$ est le gradient de la condition initiale $U\left(\vec{x}, 0\right)$;

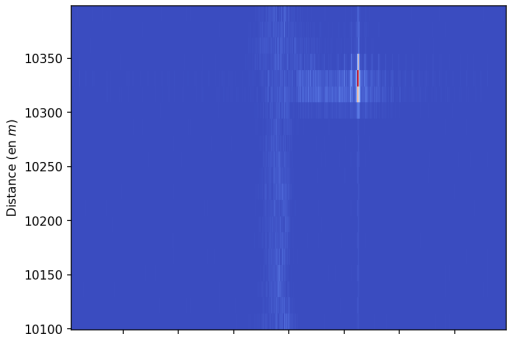
— le terme source $S\left(\vec{x}, t\right)$ est égal à $-\mathfrak{c}_R W'\left(U\left(\vec{x}, t\right)\right)/\varepsilon$;

— $\mathfrak{c}_R$ et ε sont des paramètres.

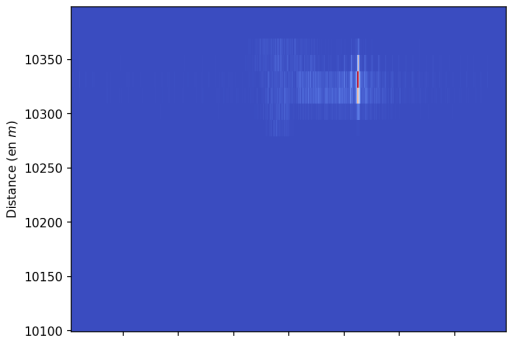
3. Dans toute cette partie, la variable $\vec{x}$ désigne la variable $\vec{z}$ utilisée dans les chapitres précédents.

Il s'agit d'une EDP de réaction-diffusion d'Allen-Cahn visant à éliminer le bruit restant, couplé avec un terme d'advection visant à renforcer le signal d'intérêt.

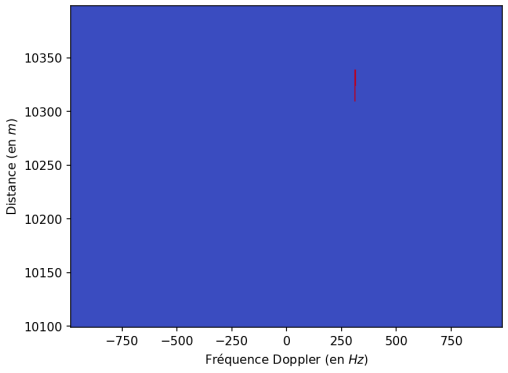
En raison de la nature fréquentielle de l'axe des X, on impose des conditions aux bords périodiques sur les bords gauche et droit. On impose par ailleurs des conditions aux bords de Neumann homogène sur les bords supérieur et inférieur.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$.

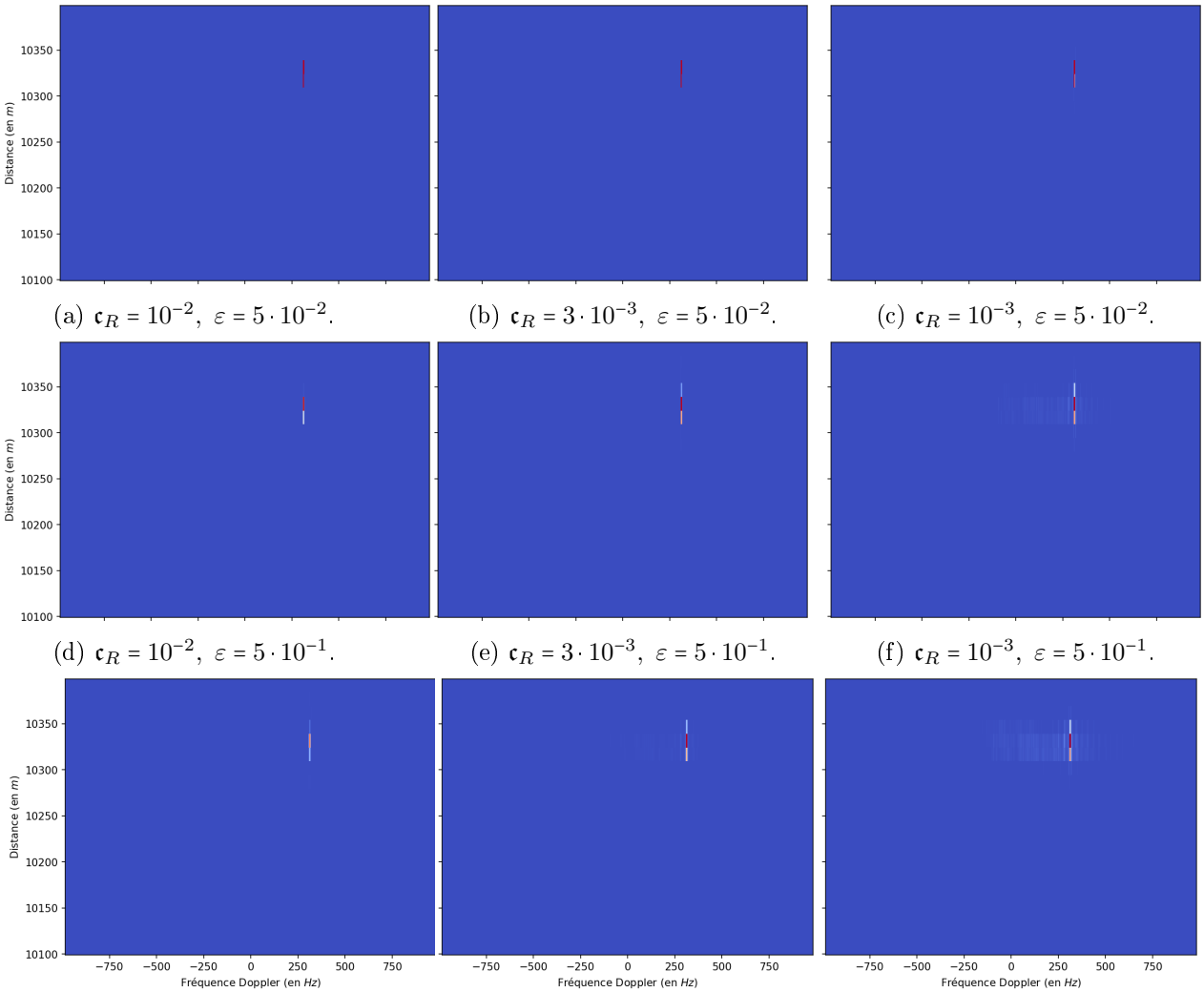


(b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ en utilisant l'algorithme CV-kP.



(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ après application du schéma LB MRT D2Q9.

FIGURE 5.6 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler.



(a) $\mathfrak{c}_R = 10^{-2},\ \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$. (b) $\mathfrak{c}_R = 3 \cdot 10^{-3},\ \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$. (c) $\mathfrak{c}_R = 10^{-3},\ \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$.

(d) $\mathfrak{c}_R = 10^{-2},\ \varepsilon = 5 \cdot 10^{-1}$. (e) $\mathfrak{c}_R = 3 \cdot 10^{-3},\ \varepsilon = 5 \cdot 10^{-1}$. (f) $\mathfrak{c}_R = 10^{-3},\ \varepsilon = 5 \cdot 10^{-1}$.

(g) $\mathfrak{c}_R = 10^{-2},\ \varepsilon = 1$. (h) $\mathfrak{c}_R = 3 \cdot 10^{-3},\ \varepsilon = 1$. (i) $\mathfrak{c}_R = 10^{-3},\ \varepsilon = 1$.

FIGURE 5.7 – Influence des paramètres $\mathfrak{c}_R$ et ε pour l'extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme CV-kP sur l'image obtenue par intégration non cohérente puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) sur la carte distance-Doppler. Chaque ligne correspond à une valeur donnée de ε tandis que chaque colonne correspond à une valeur donnée de $\mathfrak{c}_R$.

L'EDP (5.45) est simulée à l'aide du schéma LB MRT D2Q9 (5.4) avec les paramètres (5.27) et (5.33). Pour un seuil `tol` donné, le critère d'arrêt de l'algorithme est

$$\frac{\|U(\vec{x}, t+\Delta t) - U(\vec{x}, t)\|_{L^2}}{\|U(\vec{x}, t+\Delta t)\|_{L^2}} \leq \texttt{tol}. \tag{5.46}$$

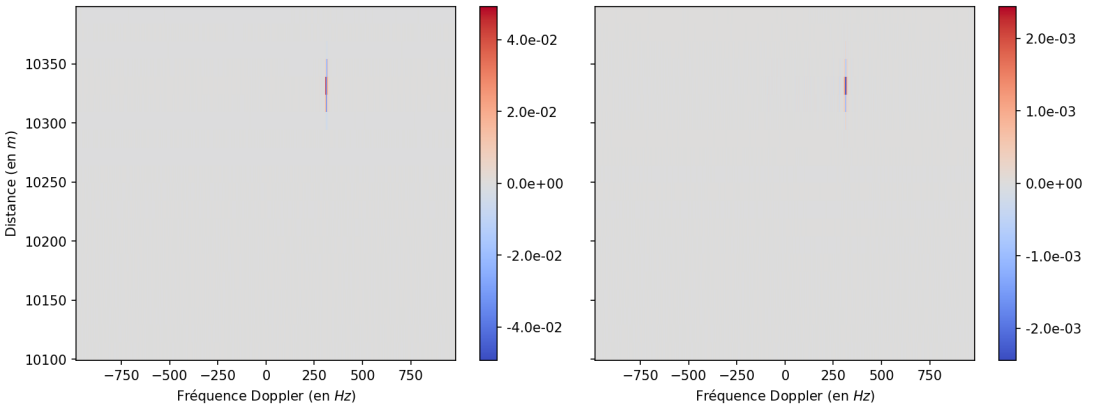
Les paramètres restants du schéma sont fixés comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda = 10,\ \Delta x = 1,\ \texttt{tol} = 10^{-4}, \\ \alpha_{q_x} = \alpha_{q_y} = \alpha_\chi = 0,\ s_6 = s_7 = s_8 = 1. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Afin de s'affranchir des unités physiques du problème, on effectue un adimensionnement

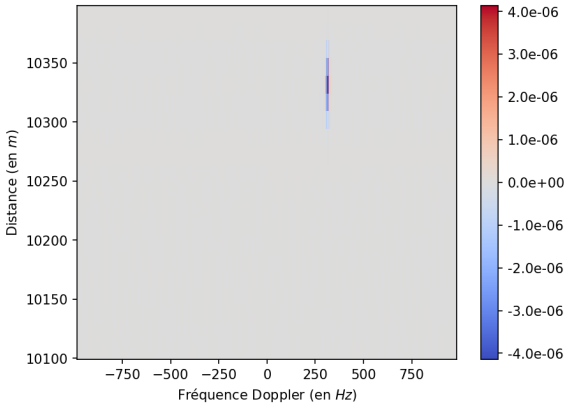
$$x_\alpha \longleftarrow \frac{x_\alpha}{\mathtt{x}_\alpha}, \tag{5.48}$$

où $\mathtt{x}_\alpha$ sont les grandeurs caractéristiques de l'image $\mathcal{I}(\vec{x})$. Cet adimensionnement a des répercussions sur la diffusion. Afin de conserver une diffusion isotrope, on modifie les coef-



(a) Terme d'advection.

(b) Terme de diffusion.



(c) Terme additionnel induit par l'advection non constante[4].

FIGURE 5.8 – Influence des termes de l'EDP équivalente (5.49) du schéma LB MRT D2Q9 (sans terme source et avec advection non constante).

ficients des moments d'équilibre comme suit.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_{j_\alpha} &\longleftarrow \frac{\mathfrak{c}_{j_\alpha}}{\mathtt{x}_\alpha},\\
\mathfrak{c}_{\mathrm{E}} &= \frac{\lambda^2}{2}\left(\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\mathtt{x}_1^2}+\frac{1}{\mathtt{x}_2^2}\right)+\mathfrak{c}_{j_x}^2+\mathfrak{c}_{j_y}^2\right),\\
\mathfrak{c}_{\mathtt{p}_{xx}} &= \lambda^2\left(\left(\mathfrak{c}_{j_x}^2-\mathfrak{c}_{j_y}^2\right)+\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\mathtt{x}_1^2}-\frac{1}{\mathtt{x}_2^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

L'EDP équivalente à l'ordre deux en temps s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)+\mathbb{F}_0\left(\vec{x},t\right) &= \frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\vec{x},t\right)+\frac{\lambda}{\mathtt{x}_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\rho\left(\vec{x},t\right)\right)-\frac{\Delta t\lambda^2\sigma_1\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}}{\mathtt{x}_\alpha^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_\alpha^2}\left(\vec{x},t\right)\\
&+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}\left(\vec{x},t\right)-\frac{\Delta t\lambda^2\sigma_1}{\mathtt{x}_\alpha\mathtt{x}_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\rho\left(\vec{x},t\right)\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathfrak{c}_{j_\beta}\left(\vec{x}\right)\right).
\end{aligned}\tag{5.49}$$

Les temps de relaxation choisis sont ceux assurant une consistance d'ordre trois lorsque la vitesse d'advection est constante et sans terme source. Ce choix est motivé par l'observation suivante : comme le montre la figure 5.8, le terme supplémentaire dû à la non-constance de la vitesse d'advection [4] devient négligeable au cours des itérations par rapport aux termes d'advection et de diffusion.

Les résultats obtenus, à partir de l'acquisition `06_068_NScFA` (2nd zone) de la base CSIR sont représentés pour différentes valeurs de ε et $\mathfrak{c}_R$ sur la figure 5.7. Pour $\mathfrak{c}_R = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 5\cdot10^{-2}$, tout le bruit restant est éliminé et le signal d'intérêt, c'est-à-dire la cible, est maintenant clairement isolé (voir figure 5.6c).

5.6 Compléments

Nous venons de présenter le schéma LB MRT D2Q9 permettant de simuler les solutions d'une EDP de convection-diffusion. Ce type de schéma peut être également utilisé pour simuler les solutions d'une EDP de diffusion non linéaire. En particulier, l'implémentation d'un tel schéma permet d'avoir une alternative efficace au splitting de Strang utilisé pour simuler les solutions de la descente de gradient du CV-kP.

Dans le cas d'une EDP de diffusion sans terme source, nous donnons dans la proposition suivante l'EDP équivalente à l'ordre quatre faisant appel aux paramètres quartiques proposés par Dubois et Lallemand dans [69] (voir la preuve A.7 en annexe A).

Proposition 5.3: *Sous les hypothèses (H2) et*

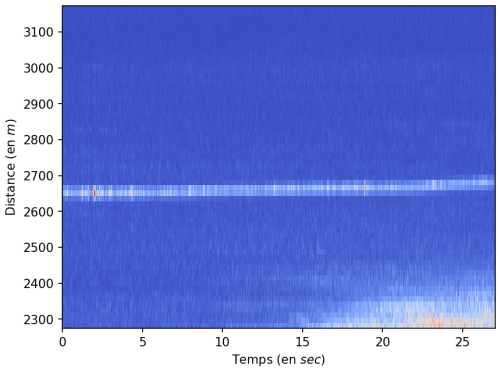
(H3) le terme source est nul, c'est-à-dire $F_i = 0$, pour tout $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 8$ dans (5.4),

Avec (5.22) et

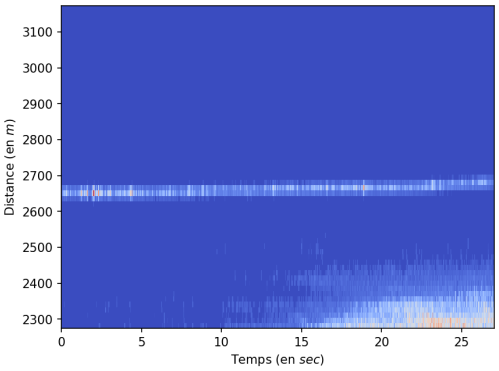
$$\mathfrak{c}_{j_\alpha} = 0,\ \sigma_1 = \sigma_6 = \sigma_7 = \frac{1}{\sqrt{12}},\ \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_8 = \frac{1}{\sqrt{3}},\tag{5.50}$$

la densité $\rho\left(\vec{x},t\right)$ vérifie

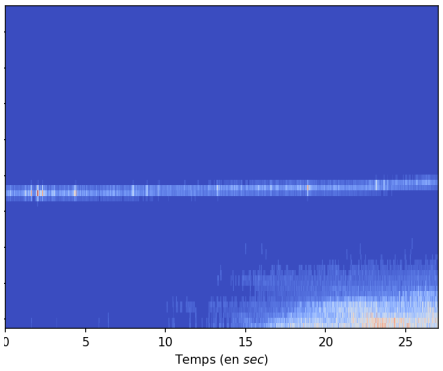
$$\mathcal{O}\left(\Delta t^4\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t}\left(\vec{x},t\right)-\frac{\Delta t\lambda^2\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}}{\sqrt{12}}\Delta\rho\left(\vec{x},t\right).\tag{5.51}$$



(a) $\|\boldsymbol{A}\|_{\text{NC}}$.



(b) $\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\|_{\text{NC}}$ par schéma LB.



(c) $\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\|_{\text{NC}}$ par Strang splitting.

FIGURE 5.9 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` utilisant l'intégration non cohérente : comparaison de deux implémentations de l'algorithme CV-kP, (b) par schéma LB, (c) par splitting de Strang.

La figure 5.9 illustre les résultats d'extraction du fouillis de mer sur l'acquisition `06_053_TTrFA` obtenus à partir deux implémentations du modèle CV-kP, c'est-à-dire à partir du splitting de Strang de l'algorithme 1 et à partir du schéma LB MRT D2Q9 décrit dans la proposition 5.3. Si les deux méthodes d'implémentation fournissent des résultats très similaires, il est important de souligner qu'une implémentation par schéma LB est très facilement parallélisable et permet donc de répondre aux contraintes de temps réel d'une utilisation dans le cadre des activités de l'entreprise ERTE-ETSA (Bowen).

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment utiliser les schémas LB MRT D2Q9 pour simuler des solutions d'une EDP de convection-diffusion. Nous avons, en particulier, présenté l'étude théorique permettant d'obtenir des schémas d'ordre deux dans le cas général d'une advection non constante et d'un terme source non nul et des schémas d'ordre trois lorsque l'advection est constante et le terme source nul.

Nous avons également étudié la stabilité des schémas dans ce dernier cas au travers d'une analyse de von Neumann et validé la solution numérique à partir d'un cas test

4. Le second terme de la seconde ligne de (5.49).

pour lequel la solution analytique est connue. Les résultats obtenus pour le traitement d'image radar marin ont été illustrés sur l'acquisition `06_068_NScFA` (2nd zone). Ces résultats montrent clairement que l'application d'un tel schéma LB MRT D2Q9 sur l'image $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|^{N}(\vec{x})$ permet de réduire très significativement le bruit et de renforcer le signal d'intérêt.

Par ailleurs, compte tenu de la nature des images à traiter (présence de bruit d'interférence, peu de contraste et contour peu marqué), un schéma LB SRT D2Q9 (à simple temps de relaxation) ne peut être utilisé en raison d'un manque de stabilité. Ce fait justifie le bien fondé d'aborder ce type de problème avec des schémas à collision de type MRT.

Chapitre 6

Extraction sans paramètres du fouillis de mer par apprentissage profond

Nous avons vu dans les chapitres précédents que l'algorithme CV-kP est efficace en présence d'un signal d'intérêt à SCR suffisamment grand. Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme basé sur le traitement pulse-Doppler pour l'extraction du fouillis de mer en présence d'un signal d'intérêt exo-clutter et à faible SCR. Afin de s'affranchir du choix de l'algorithme à appliquer sur les acquisitions pour lesquelles le SCR n'est pas connu, nous proposons une méthode d'apprentissage profond, un double auto-encodeur convolutif, résiduel et variationnel, qui ne nécessite aucun paramétrage une fois l'apprentissage effectué. Pour mener celui-ci à bien, l'absence de vérité terrain fiable de la base du CSIR nous a conduits à sélectionner un ensemble d'acquisitions représentatives puis à choisir la stratégie suivante : en fonction de l'acquisition à traiter, un expert humain choisit l'un des deux algorithmes d'extraction du fouillis de mer (l'algorithme CV-kP ou l'algorithme pulse-Doppler) et le résultat obtenu est utilisé comme vérité terrain. L'avis de l'expert humain se substitue ainsi aux métadonnées qui ne sont pas présentes dans la base du CSIR, et la seule indication fournie est la présence ou non de cibles endo- ou exo-clutter, le traitement étant effectué par l'algorithme sélectionné. Nous insistons sur le fait que cette expertise intervient uniquement lors de la phase d'apprentissage du réseau de neurones et non lors de son utilisation.

Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons la base de données utilisée pour entrainer le réseau et qui est constituée à partir de celle du CSIR, ainsi que les deux algorithmes proposés. Nous poursuivons en détaillant l'architecture de notre réseau de neurones qui est constitué par la combinaison de deux auto-encodeurs basés sur un modèle préexistant (Segnet [70]). Nous justifions les différentes modifications que nous y apportons en testant leur impact sur les performances du réseau (tests dits "d'ablation"). Nous détaillons également la procédure d'entraînement du réseau qui est rendue compliquée par la présence des deux auto-encodeurs et les modifications apportées au modèle initial. En particulier, nous mettons en œuvre une procédure de type recuit-simulé pour assurer la convergence. Finalement, les résultats du réseau sont comparés à ceux des deux algorithmes d'extraction du fouillis de mer utilisés individuellement.

Les points importants de ce chapitre sont les suivants :

— Un double auto-encodeur convolutif, résiduel et variationnel, ainsi que sa procédure d'apprentissage sont détaillés.

— Les tests d'ablation valident l'architecture proposée.

— Les algorithmes CV-kP et pulse-Doppler ainsi que l'expertise humaine sont utilisés uniquement lors de la phase d'apprentissage.

— Les expérimentations sur la base du CSIR confirment que le double auto-encodeur proposé permet de pallier le manque d'information exploitable fournie par la base.

— Les résultats obtenus par ce réseau ne sont pas conditionnés par des hypothèses sur la nature du fouillis de mer ou du signal d'intérêt.

6.1 Base de données étiquetée

La base de données utilisée lors de la phase d'apprentissage a été générée à partir d'acquisitions de la base du CSIR de la façon suivante. Pour chaque acquisition $\boldsymbol{A}$, une fenêtre glissante sans recouvrement en distance et avec un demi-recouvrement en azimut est appliquée pour obtenir les régions $\boldsymbol{A}^{\#}$. Elles sont ensuite étiquetées "avec signal d'intérêt" ou "sans signal d'intérêt" par l'expert humain. La carte distance-Doppler de chaque région, notée $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$, est ensuite calculée, conduisant à une image bidimensionnelle de taille $(20, 640)$. La base de données ainsi constituée est déséquilibrée car moins de régions $\boldsymbol{A}^{\#}$ sont étiquetées "avec signal d'intérêt" que "sans signal d'intérêt". C'est pourquoi nous utilisons le procédé d'augmentation de données. Dans notre cas, il consiste à appliquer un miroir horizontal et vertical uniquement aux régions étiquetées "avec signal d'intérêt" afin d'obtenir autant de régions étiquetées "avec signal d'intérêt" que "sans signal d'intérêt".

Notre base de données d'apprentissage finale est composée de 17 000 régions $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$ où 60% des régions sont assignées aléatoirement à l'ensemble d'apprentissage, 20% à l'ensemble de validation et 20% à l'ensemble de test.

6.2 Algorithmes d'extraction du fouillis de mer

Les deux algorithmes utilisés pour la supervision du réseau de neurones sont l'algorithme CV-kP et un nouvel algorithme basé sur le traitement pulse-Doppler. Ils sont complémentaires pour l'extraction du fouillis de mer. Rappelons que le premier est efficace en présence d'un signal d'intérêt à SCR suffisamment grand et nous montrerons que le second est efficace en présence d'un signal d'intérêt exo-clutter et à faible SCR.

6.2.1 Algorithme CV-kP

Comme présenté au chapitre 3, l'algorithme CV-kP est utilisé de la manière suivante :

Étape 1 – Calcul de l'image $\mathcal{I}(\vec{z}) = \|\boldsymbol{A}\|_{\text{NC}}(\vec{z})$ à partir de (2.12) ;

Étape 2 – Calcul de la solution $U\left(\vec{z}, t_f\right)$ à partir de l' algorithme 1 ;

Étape 3 – Calcul de la densité $\mathcal{P}^{N}_{U(\#,t_f)}(\vec{z};\ \vartheta)$ défini en (4.12). Le fouillis de mer extrait, noté $\boldsymbol{A}_{(SC)}$, et le signal d'intérêt obtenu, noté $\boldsymbol{A}_{(SOI)}$, correspondent à

$$\boldsymbol{A}_{(SC)}(\vec{z}, p) = \mathcal{P}^{N}_{U(\#,t_f)}(U;\ \vartheta)\,\boldsymbol{A}(\vec{z}, p),\ \ \boldsymbol{A}_{(SOI)}(\vec{z}, p) = \left(1 - \mathcal{P}^{N}_{U(\#,t_f)}(U;\ \vartheta)\right)\boldsymbol{A}(\vec{z}, p); \quad (6.1)$$

Étape 4 – Calcul de l'image de la carte distance-Doppler de $\boldsymbol{A}_{(SC)}$ ou de $\boldsymbol{A}_{(SOI)}$.

6.2.2 Algorithme pulse-Doppler

Nous proposons un algorithme basé sur le traitement pulse-Doppler. Ce dernier a été présenté en section 2.4.1. L'algorithme est composé des étapes suivantes :

Étape 1 – Calcul de la moyenne de la fréquence Doppler f^D définie en (2.11) :

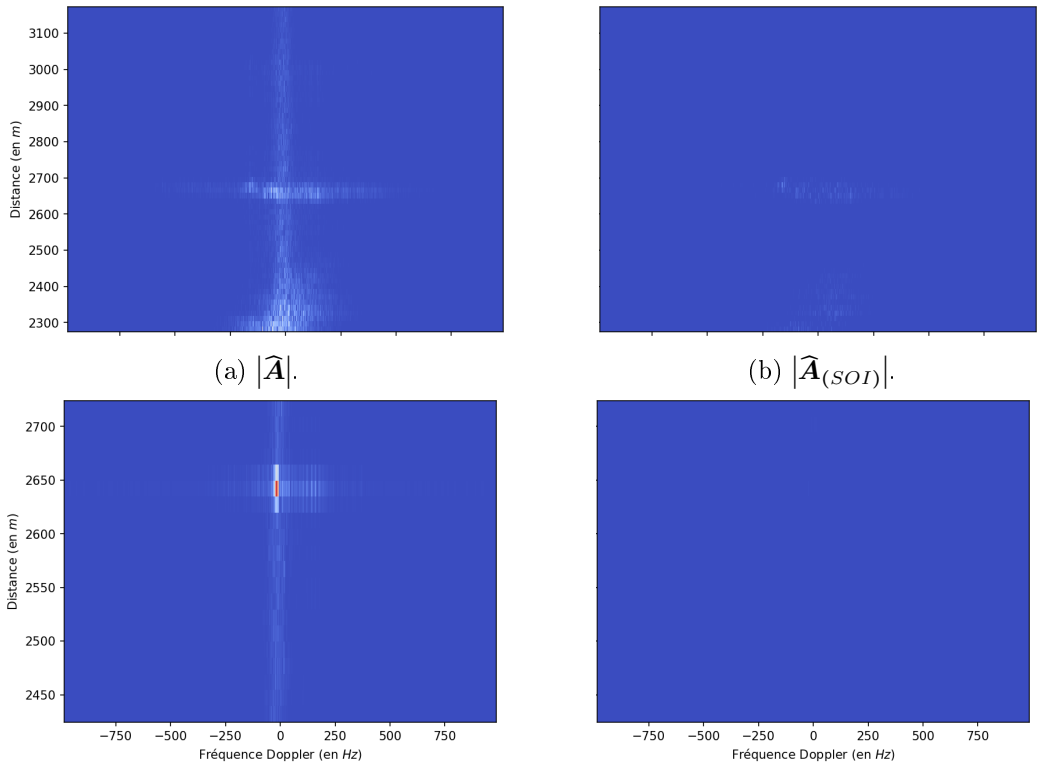
$$f_m^D(\vec{z}) = \sum_{p=0}^{p_{\max}} \frac{1}{2\pi\tau^{TRI}} \frac{\arg\left\{\boldsymbol{A}^{\#}(\vec{z}, p+1)\right\}}{\arg\left\{\boldsymbol{A}^{\#}(\vec{z}, p)\right\}}. \tag{6.2}$$

Étape 2 – Calcul de la densité $\mathcal{P}_{f_m^D}^N(\vec{z};\ \vartheta)$ défini en (4.12). Le fouillis de mer extrait, noté $\boldsymbol{A}_{(SC)}$, et le signal d'intérêt obtenu, noté $\boldsymbol{A}_{(SOI)}$, correspondent à

$$\boldsymbol{A}_{(SC)}(\vec{z}, p) = \mathcal{P}_{f_m^D}^N\left(f_m^D;\ \vartheta\right)\boldsymbol{A}(\vec{z}, p),\ \ \boldsymbol{A}_{(SOI)}(\vec{z}, p) = \left(1 - \mathcal{P}_{f_m^D}^N\left(f_m^D;\ \vartheta\right)\right)\boldsymbol{A}(\vec{z}, p); \tag{6.3}$$

Étape 3 – Calcul de l'image de la carte distance-Doppler de $\boldsymbol{A}_{(SC)}$ ou de $\boldsymbol{A}_{(SOI)}$.

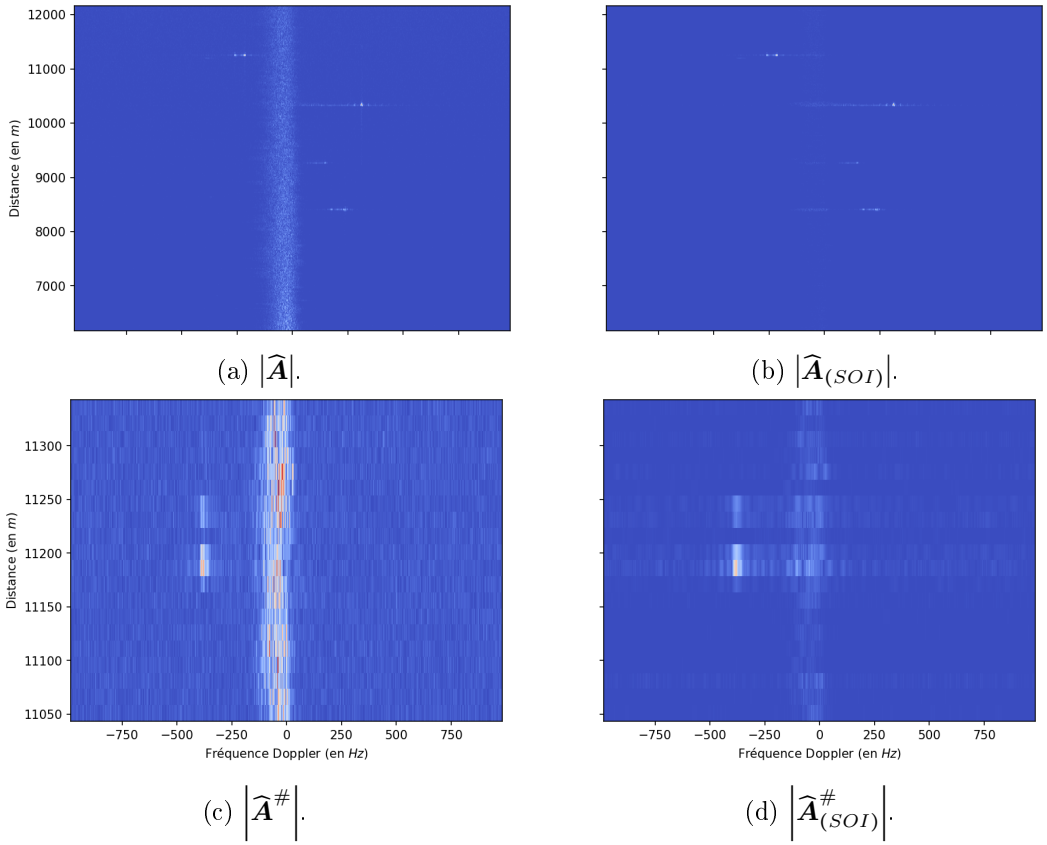
Comme l'illustrent les figures 6.1 et 6.2, l'algorithme pulse-Doppler échoue à isoler le signal d'intérêt lorsqu'il est composé de cibles endo-clutter. Cependant, et contrairement à l'algorithme CV-kP, l'algorithme pulse-Doppler réussit à isoler la cible localisée à environ 9 000m et avec un SCR proche de 4dB (voirfigure 6.2).



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}^{\#}\right|$.

FIGURE 6.1 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

FIGURE 6.2 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler.

6.3 Architecture du réseau de neurones

Le réseau de neurones proposé est composé de deux auto-encodeurs convolutifs. Un auto-encodeur est un réseau de neurones qui apprend à reproduire sur sa sortie une copie, le plus souvent modifiée, de son entrée [71]. La particularité des auto-encodeurs est que ceci est réalisé en deux étapes : l'étape d'encodage Enc qui calcule une représentation latente R de l'entrée X et l'étape de décodage Dec qui calcule la sortie $\tilde{X}$ à partir de R :

$$\tilde{X} = \mathrm{Dec}\left(R\right) = \mathrm{Dec}\left(\mathrm{Enc}\left(X\right)\right). \tag{6.4}$$

La dimension de R est en général significativement inférieure à celle de X. L'étape d'encodage est une version généralisée et non linéaire des méthodes classiques de réduction de dimensions comme par exemple l'analyse en composante principale. Ceci conduit à une architecture du réseau en forme de diabolo.

Dans l'architecture que nous proposons, deux auto-encodeurs sont utilisés. Le premier, noté AE_{SOI}, est entrainé pour renforcer le signal d'intérêt et le second, noté AE_{SC}, pour fournir le fouillis de mer. La sortie de AE_{SC}, respectivement AE_{SOI}, est notée $\tilde{X}_{(SC)}$, respectivement $\tilde{X}_{(SOI)}$.

Comme illustré sur la figure 6.3, le double auto-encodeur proposé est l'association de AE_{SOI} et AE_{SC} et fonctionne comme un auto-encodeur qui apprend à dupliquer l'entrée

X sur sa sortie $\tilde{X}$. Celle-ci peut être vue comme une approximation de X et est définie par

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{(SC)} + \tilde{X}_{(SOI)}.$$

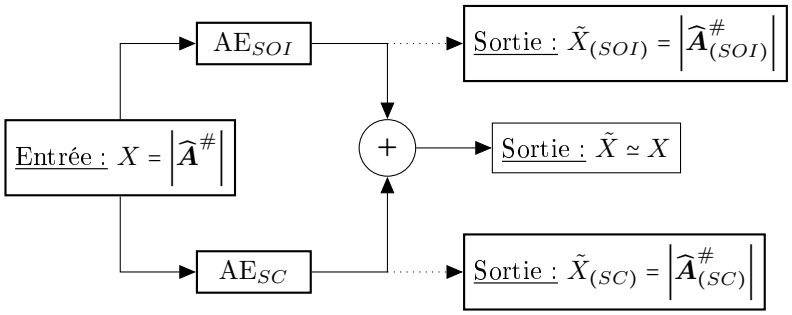


FIGURE 6.3 – Architecture simplifiée du double auto-encodeur proposé pour l'extraction du fouillis de mer et l'obtention du signal d'intérêt.

L'architecture proposée permet de préserver la totalité de l'information présente dans l'image d'entrée tout en fournissant des images du fouillis de mer et du signal d'intérêt en supposant que

(H4) le fouillis de mer est une information qui s'ajoute au signal d'intérêt.

Notons que l'obtention simultanée des deux images du signal d'intérêt et du fouillis de mer est une demande de l'entreprise ERTE-ETSA (Bowen). Comme nous l'avons vu en introduction, la première est utilisée pour la détection de cibles et la seconde pour obtenir des paramètres océanographiques.

L'architecture utilisée pour chaque auto-encodeur est inspirée de celle du réseau SegNet [70, 71] (voir figure 6.4). Comme la majorité des réseaux de neurones dédiés au traitement d'image, cet auto-encodeur utilise des couches convolutives et non des couches

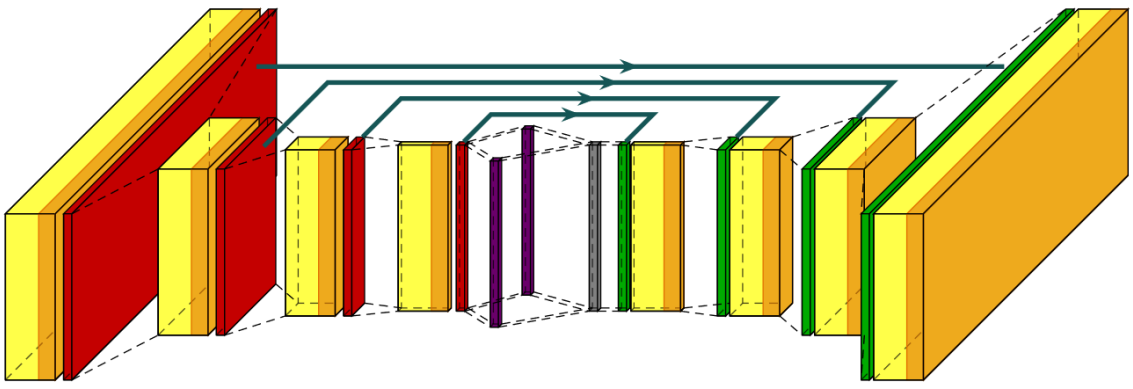


FIGURE 6.4 – Architecture de chaque auto-encodeur. Les blocs jaunes sont des blocs de couches convolutives et résiduelles, les blocs violets sont des couches denses permettant d'obtenir une version variationnelle d'un auto-encodeur, et le bloc gris représente la sortie de l'encodeur et l'entrée du décodeur. Les blocs rouges sont des couches de *maxpooling* tandis que les blocs verts sont des couches de *unpooling*. Les flèches grises représentent les liaisons entre les couches de *maxpooling* et de *unpooling*.

denses telles que celles utiliser par les perceptrons multi-couches [71]. Dans la suite, nous détaillons l'architecture que nous proposons en justifiant les modifications que nous avons apportées à l'architecture du réseau SegNet.

Comme le montre la figure 6.4, l'encodeur et le décodeur sont tous les deux constitués de quatre blocs. Chacun comprend des couches convolutives (blocs jaunes), une couche d'activation (blocs oranges) et une couche de *maxpooling* pour l'encodeur (blocs rouges) qui est remplacée par une couche de *unpooling* pour le décodeur (blocs verts).

Nous avons remplacé les blocs de couches convolutives utilisées dans le réseau SegNet par des blocs de couches convolutives et résiduelles [72]. Ceci signifie que, dans un bloc, l'entrée des couches intermédiaires est la combinaison linéaire de la sortie des couches précédentes. Les couches résiduelles permettent d'éviter le problème de l'annulation du gradient (*vanishing gradient*) pouvant conduire à un arrêt précoce de la phase d'apprentissage des réseaux profonds [73].

La fonction d'activation que nous avons sélectionnée pour la sortie du réseau et après chaque bloc de couches convolutives est la fonction *Rectified Linear Unit* (ReLU) définie par

$$ReLU(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui remplace la fonction Softmax du réseau SegNet. Ce choix est justifié car nos données, issues de cartes distance-Doppler, prennent des valeurs positives ou nulles.

Dans l'encodeur, chaque bloc se termine par une couche de *maxpooling* et dans le décodeur, chaque bloc débute par une couche de *unpooling*. Une couche de *maxpooling* est une couche de sous-échantillonnage utilisée lors de l'encodage. De façon symétrique, une couche de *unpooling* est une couche de sur-échantillonnage utilisée lors du décodage. Les liaisons entre ces deux types de couches sont représentées par les flèches grises dans la figure 6.4.

Dans l'objectif d'éviter le sur-apprentissage, nous utilisons une version variationnelle des auto-encodeurs, communément appelée auto-encodeur variationnel (VAE), et décrite par exemple dans **??**. Le réseau ainsi obtenu est une version améliorée du réseau SegNet (voir l' annexe C pour le programme Python correspond). Les divers hyper-paramètres ont été optimisés par la bibliothèque Optuna à l'aide de l'échantillonneur *Tree-structured Parzen Estimator* [74].

6.4 Phase d'apprentissage

La phase d'apprentissage fait appel à l'optimiseur Adadelta avec un taux d'apprentissage égal à 0.1. La fonction de coût, c'est-à-dire le *loss*, utilisée $\mathcal{J}$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = &\sum_{r,\omega} \left(X_{(SOI)}(r,\omega) - \left| \widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)} \right| (r,\omega) \right)^2 + \beta \mathrm{Div}_{\mathrm{KL}} \left(\mathcal{N}\left(\mu_{(SOI)}, \sigma_{(SOI)}\right) \| \mathcal{N}(0,1) \right) \\ &+ \sum_{r,\omega} \left(X_{(SC)}(r,\omega) - \left| \widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SC)} \right| (r,\omega) \right)^2 + \beta \mathrm{Div}_{\mathrm{KL}} \left(\mathcal{N}\left(\mu_{(SC)}, \sigma_{(SC)}\right) \| \mathcal{N}(0,1) \right) \\ &+ \gamma\beta \sum_{r,\omega} \left(X_{(SOI)}(r,\omega) + X_{(SC)}(r,\omega) - \left| \widehat{\boldsymbol{A}}^{\#} \right| (r,\omega) \right)^2 . \end{aligned} \tag{6.5}$$

Cette fonction est composée d'une somme de trois erreurs quadratiques moyennes, correspondant aux trois sorties du réseau global (voir figure 6.3), et de deux divergences de Kullback-Leibler, notée $\mathrm{Div}_{\mathrm{KL}}$, correspondant à chacun des deux auto-encodeurs.

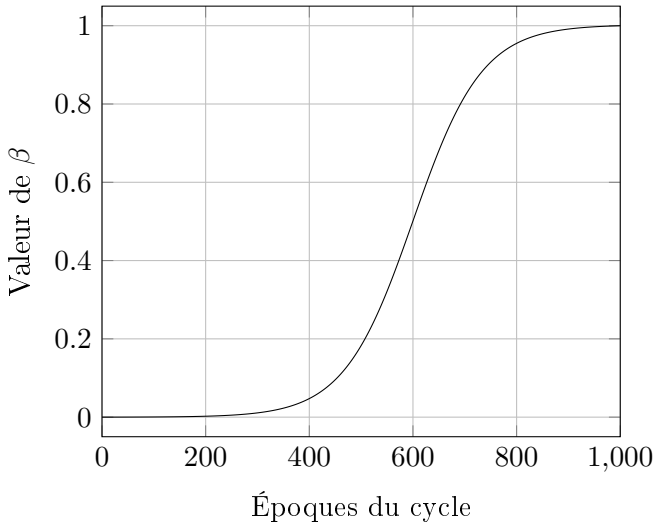


FIGURE 6.5 – Évolution de l'hyper-paramètre β durant un cycle de mille époques.

Pour pallier le problème de l'annulation du gradient de la divergence de Kullback-Leibler [75], nous appliquons un schéma de type recuit simulé en suivant l'approche de Bowman et al. [76]. Ainsi, nous faisons varier l'hyper-paramètre β de (6.5) sur huit cycles de mille époques (*Epoch*) comme illustré dans la figure 6.5. Au début de chaque cycle, β est initialisé à zéro afin de minimiser uniquement l'erreur de reconstruction de chaque auto-encodeur. Au fur et à mesure que les époques du cycle augmentent, β augmente

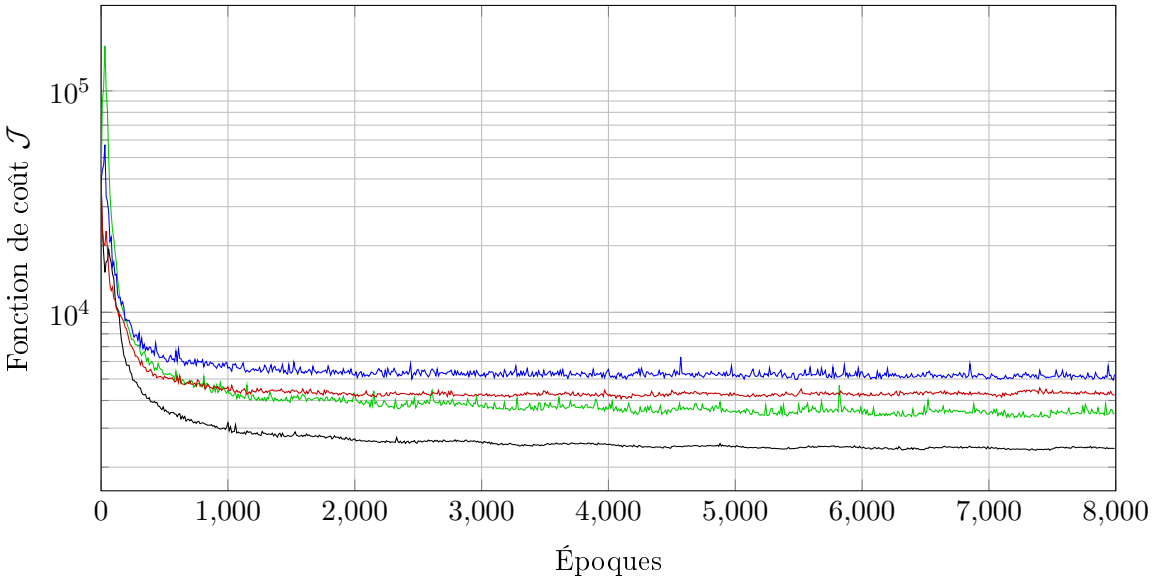
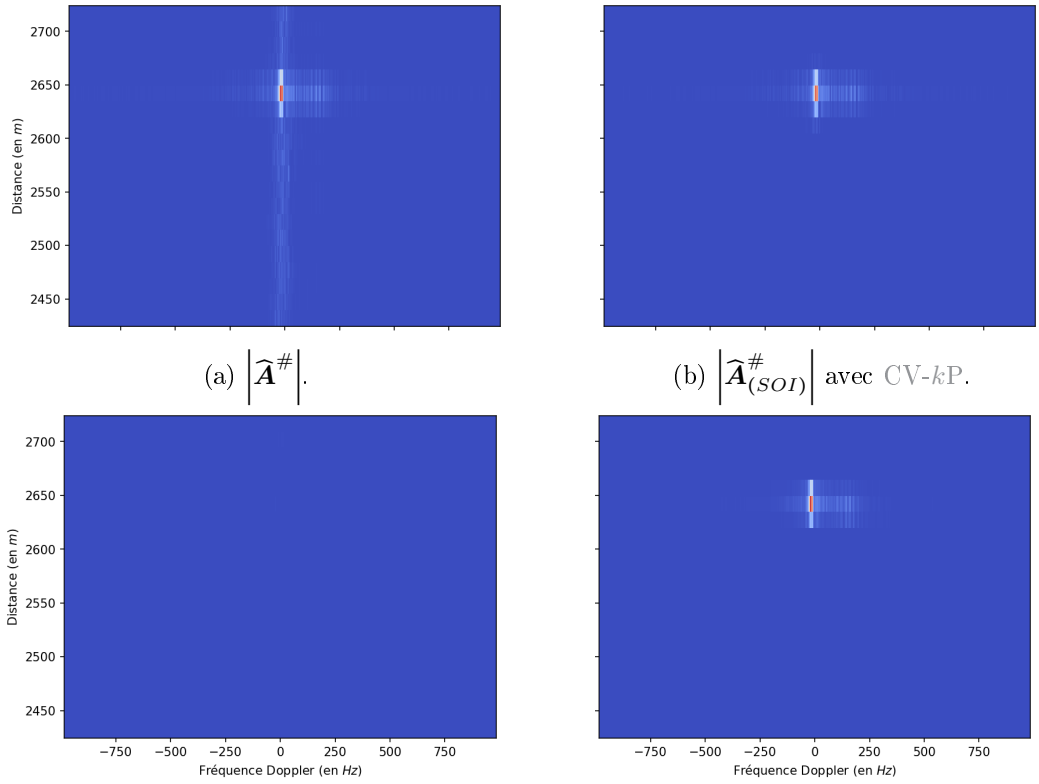


FIGURE 6.6 – Évolution de la fonction de coût $\mathcal{J}$ pendant l'entraînement du double auto-encodeur. La ligne noire, respectivement la ligne verte, représente la fonction de coût $\mathcal{J}$ pour la version résiduelle sans *dropout*, respectivement avec *dropout*. La ligne rouge, respectivement la ligne bleue, représente la fonction de coût $\mathcal{J}$ pour la version non résiduelle sans *dropout*, respectivement avec *dropout*.

progressivement jusqu'à atteindre un afin de minimiser simultanément les trois termes d'erreurs quadratiques moyennes et les deux divergences de Kullback-Leibler. Enfin, le deuxième paramètre γ est fixé à zéro pour le premier cycle et à un ensuite. Quand γ est égal à zéro, l'apprentissage porte sur chacun des auto-encodeurs. Quand γ est égal à un, l'apprentissage porte sur la reconstruction de l'image d'entrée en additionnant les deux sorties des auto-encodeurs. La figure 6.6 montre l'évolution de la fonction de coût pendant l'apprentissage (la ligne noire est la fonction de coût $\mathcal{J}$ du double auto-encodeur).

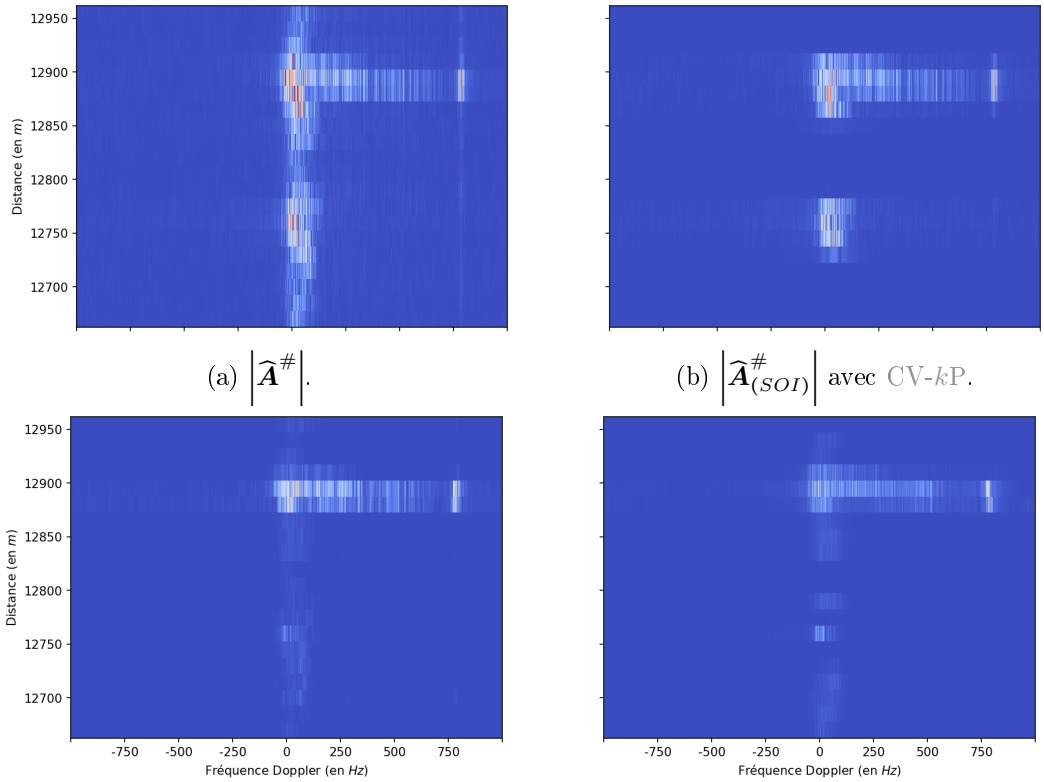


(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec CV-kP.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec traitement pulse-Doppler. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur.

FIGURE 6.7 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler.

Nous justifions par des tests d'ablations le bien fondé de l'utilisation de blocs de couches convolutives et résiduelles. Le premier test d'ablation consiste à remplacer les blocs de couches résiduels par des blocs de convolution standard. Le second consiste à ajouter des couches de *dropout* après chaque couche de convolution. La figure 6.6 montre l'évolution de la fonction de coût $\mathcal{J}$ pendant l'apprentissage dans les différents cas. Nous pouvons en conclure qu'il est pertinent d'utiliser des blocs de couches convolutives et résiduelles alors que l'ajout de couches de *dropout* ne modifie pas la décroissance de la fonction de coût. Rappelons pour mémoire qu'une couche de *dropout* a essentiellement pour objectif de régulariser le gradient.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$.

(b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec CV-kP.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec traitement pulse-Doppler.

(d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur.

FIGURE 6.8 – Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler.

6.5 Expérimentations

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus suivant cette approche par apprentissage profond. Ces résultats valident le fait que les performances du réseau proposé, qui rappelons-le ne sont pas conditionnées par des connaissances *a priori* sur la nature du signal d'intérêt et en particulier sur le SCR, sont tout à fait comparables à celles de chacun des algorithmes CV-kP et pulse-Doppler appliqués à des données adaptées à leurs spécificités respectives (voir figure 6.8).

6.6 Conclusion

Au terme de ce chapitre, il apparaît clairement que la solution que nous proposons avec la mise en œuvre d'un double auto-encodeur convolutif, résiduel et variationnel pour s'affranchir d'une connaissance *a priori* sur la nature du signal d'intérêt et en particulier sur le SCR, donne des résultats tout à fait satisfaisants. L'apprentissage est supervisé par l'algorithme CV-kP et le traitement pulse-Doppler, et à partir d'une annotation experte des acquisitions utilisées pour cet apprentissage. Une fois ce dernier réalisé, la mise en œuvre du réseau ne nécessite plus aucune expertise ni aucun paramétrage.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

7.1 Résumé des résultats présentés

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème d'extraction du fouillis de mer dans des images radar marin cohérent en bande X. Le parti pris, celui préconisé par l'entreprise ERTE-ETSA (Bowen), pour attaquer ce problème, est de développer des méthodes et des outils de traitement d'image qui permettent de s'affranchir au mieux de connaissances *a priori* sur la nature du fouillis de mer et du signal d'intérêt.

Il est important de souligner que pour illustrer les résultats obtenus dans cette thèse, nous avons utilisé des données réelles (non simulées) provenant de la base CSIR. Les quatre acquisitions que nous avons sélectionnées illustrent la diversité des configurations de fouillis de mer et de signaux d'intérêt qui peuvent apparaître en conditions réelles. Dans ces acquisitions, les états de mer sont proches de 5 sur l'échelle de Douglas et correspondent à des états de mer agitée. Les images associées aux cartes distance-Doppler et obtenues par intégration non cohérente présentent peu de contraste, des contours peu marqués et sont très bruitées par un bruit qui peut être assimilé à du speckle.

Dans un premier temps, nous avons proposé un algorithme d'extraction du fouillis de mer basé sur une approche variationnelle originale car se basant sur un modèle de transition de phase à interface diffuse utilisant un nombre arbitraire de phases. Les résultats des expérimentations effectuées avec cet algorithme ont montré son efficacité lorsqu'il est appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente sous réserve que le signal d'intérêt ait un rapport signal-sur-fouillis suffisamment grand. Nous avons également proposé deux implémentations simples de cet algorithme, l'une par splitting de Strang, l'autre avec un schéma de Boltzmann sur réseau, cette dernière étant facilement parallélisable pour une exécution proche du temps réel.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'implémentation de schémas de Boltzmann sur réseau pour la simulation de solutions d'équation de convection-diffusion avec une vitesse d'advection éventuellement non constante et un terme source éventuellement non nul. Nous avons décrit en détail comment obtenir des équations équivalentes à partir de développement asymptotiques de Taylor à l'échelle acoustique dans l'espace des moments et avec une collision à temps de relaxation multiples. Nous avons également étudié la stabilité de ces schémas quand l'advection est constante et le terme source nul et validé la solution numérique obtenue à partir d'un cas test pour lequel une solution analytique est connue. Des expérimentations ont été réalisées en utilisant comme condition initiale l'image associée à la carte distance-Doppler du signal d'intérêt obtenu à

partir de la méthode par approche variationnelle. Les résultats obtenus montrent que ces schémas de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation multiples permettent de supprimer efficacement le bruit résiduel et de renforcer le signal d'intérêt.

Enfin, dans un troisième temps, nous avons proposé une méthode d'apprentissage permettant de s'affranchir de connaissances *a priori* sur la nature du signal d'intérêt. L'algorithme par approche variationnelle ne se révèle pertinent que lorsque le signal d'intérêt a un rapport signal-sur-fouillis suffisamment grand. Dans le cas contraire, il est possible d'extraire le fouillis de mer en présence d'un signal d'intérêt exo-clutter à partir du traitement pulse-Doppler. Nous n'avons pas considéré dans ce travail le problème très difficile de l'extraction du fouillis de mer en présence d'un signal d'intérêt ayant un rapport signal-sur-fouillis faible. Les expérimentations réalisées à partir du double auto-encodeur que nous avons proposé permettent de valider cette approche, les résultats obtenus, ne requérant aucune connaissances *a priori* sur la nature du signal d'intérêt, étant comparables aux résultats fournis par chacune des deux méthodes.

7.2 Perspectives

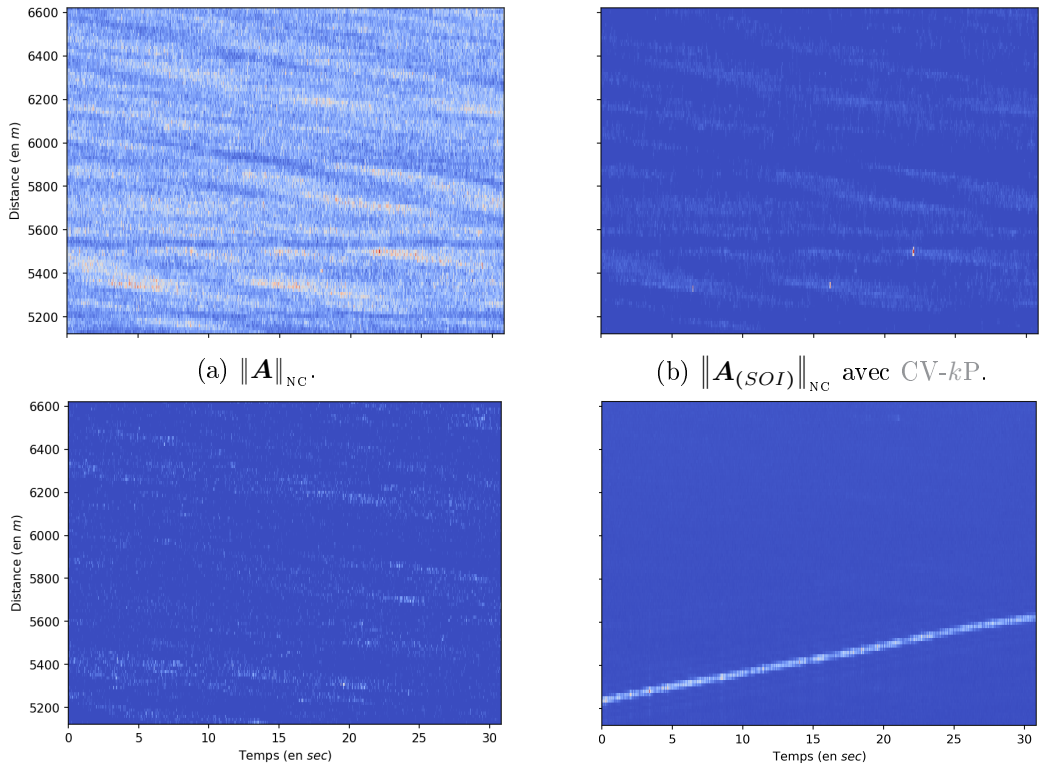
Les travaux réalisés et décrits dans les précédents chapitres permettent de dégager un certain nombre de questions et de problèmes non résolus. Dans ce qui suit, nous nous concentrons principalement sur deux questions et sur les éléments de réponse que nous avons déjà apportés.

7.2.1 Exploitation d'une analyse multi-résolution

Rappelons que dans le cas d'un signal d'intérêt exo-clutter, nous avons proposé une méthode d'extraction de fouillis de mer à partir du traitement pulse-Doppler. Cette méthode n'est efficace que pour un rapport signal-sur-fouillis faible restant néanmoins supérieur à environ 0dB. Afin de pouvoir traiter des signaux d'intérêt exo-clutter à rapport signal-sur-fouillis plus petit, il nous a paru pertinent d'aborder cette question à partir de transformées en ondelettes à l'instar de [15–20], ce dernier choix étant cohérent avec le cahier des charges fourni par l'entreprise ERTE-ETSA (Bowen).

Un traitement par ondelettes est appliqué sur les données brutes, c'est-à-dire sans intégration. L'analyse multi-résolution permet d'obtenir le fouillis de mer à partir de l'approximation à l'échelle la plus fine et le signal d'intérêt à partir des détails de toutes les échelles. La figure 7.1d illustre les premiers résultats obtenus, après intégration non cohérente, et ces derniers sont comparés avec les résultats qu'on obtiendrait par les méthodes des chapitres précédents en figure 7.1. L'acquisition `08_059_CStFA` utilisée pour ces expérimentations est celle décrite dans le tableau 2.2. Le rapport signal-sur-fouillis du signal d'intérêt est de l'ordre de −10dB.

L'exploitation des images associées à l'intégration non cohérente des signaux obtenus par l'analyse multi-résolution pour renforcer l'apprentissage du double auto-encodeur proposé nécessite un travail supplémentaire de reformatage des données. Il s'agit essentiellement de remplacer les données d'apprentissage issues de cartes distance-Doppler par des données d'apprentissage issues de l'intégration non cohérente. Compte tenu des résultats du traitement par l'analyse multi-résolution présentée dans la figure 7.1d, il nous semble pertinent d'intégrer cette information dans une version adaptée du réseau proposé.



(a) $\|\boldsymbol{A}\|_{\text{NC}}$.

(b) $\left\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\right\|_{\text{NC}}$ avec CV-kP.

(c) $\left\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\right\|_{\text{NC}}$ avec traitement pulse-Doppler.

(d) $\left\|\boldsymbol{A}_{(SOI)}\right\|_{\text{NC}}$ avec les ondelettes.

FIGURE 7.1 – Extraction du fouillis de mer de `08_059_CStFA` en fonction de l'algorithme et visualisé sur l'intégration non cohérente.

7.2.2 Obtention d'un schéma de Boltzmann sur réseau d'ordre deux pour des équations de convection-diffusion

La seconde perspective concerne la possibilité d'obtenir des schémas de Boltzmann sur réseau d'ordre deux pour des équation de convection-diffusion avec une vitesse d'advection non constante et un terme source non nul ne dépendant pas du temps. Nous avons montré comment la non-constance de la vitesse d'advection et le terme source non nul font apparaître des termes parasites dans les développements asymptotiques d'ordre deux effectués à l'aide de développement de Taylor à l'échelle acoustique pour obtenir les équations équivalentes.

Pour supprimer ces termes parasites, nous proposons de modifier la collision des moments d'ordre un et plus précisément de modifier leur fonction d'équilibre ou la composante du vecteur de force qui leur est appliquée. Les calculs théoriques que nous avons déjà réalisés sont actuellement confrontés à des expérimentations numériques à partir des cas tests "rotation d'une gaussienne" et "flot de Taylor-Green".

Par la suite, nous envisageons de traiter le cas encore plus général d'une vitesse d'advection non constante en espace mais également non constante en temps. Ceci nécessite de refaire une analyse asymptotique complète à l'aide des développements de Taylor à l'échelle acoustique.

Annexe A

Les EDPs équivalentes du schéma LB D2Q9

Cet appendice regroupe les résultats conduisant aux propositions énoncées au chapitre 5 ainsi que leur preuve. On considère le schéma itératif obtenu après discrétisation de l'équation de Boltzmann

$$f_i\left(\vec{x}, t+\Delta t\right) = f_i^*\left(\vec{x}-\vec{v}_i\Delta t, t\right) + \Delta t F_i\left(\vec{x}-\vec{v}_i\Delta t, t\right), \tag{A.1}$$

utilisé pour simuler les solutions de l'EDP de convection-diffusion

$$\frac{\partial U}{\partial t}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(w_\alpha\left(\vec{x}\right) U\left(\vec{x}, t\right)\right) - \mathfrak{c}_R \varepsilon \Delta U\left(\vec{x}, t\right) = S\left(\vec{x}, t\right). \tag{A.2}$$

Rappelons que

$$m_k = M_{k,i} f_i \Longleftrightarrow f_i = M_{i,k}^{-1} m_k, \tag{A.3}$$

et que

$$m_k^*\left(\vec{x}, t\right) = m_k\left(\vec{x}, t\right) + s_k\left(m_k^{eq}\left(\vec{x}, t\right) - m_k\left(\vec{x}, t\right)\right) = C_{k,\ell} m_\ell\left(\vec{x}, t\right). \tag{A.4}$$

Rappelons également que tous les développements asymptotiques sont des développements asymptotiques de Taylor à l'échelle acoustique. On a, avec les notations de la section 5.1,

$$\begin{aligned} & f_i\left(\vec{x}, t\right) + \Delta t \frac{\partial f_i}{\partial t}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 f_i}{\partial t^3}\left(\vec{x}, t\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^4\right) = f_i^*\left(\vec{x}, t\right) \\ & - \Delta t v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^*}{\partial x_\alpha}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\Delta t^2}{2} v_{i,\alpha} v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\vec{x}, t\right) - \frac{\Delta t^3}{6} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\left(\vec{x}, t\right) \\ & + \Delta t F_i\left(\vec{x}, t\right) - \Delta t^2 v_{i,\alpha}\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha}\left(\vec{x}, t\right) + \frac{\Delta t^3}{2} v_{i,\alpha} v_{i,\beta}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\vec{x}, t\right) + \mathcal{O}\left((\lambda\Delta t)^4\right). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Rappelons que nous traitons ici le cas général d'une vitesse d'advection non constante. En particulier, les coefficients d'équilibre $\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)$ des moments d'ordre un non conservés ne sont pas supposés constants. Les calculs suivants sont donc originaux par rapport à la littérature existante consacrée le plus souvent au cas d'une advection constante et donc au cas de coefficients d'équilibre $\mathfrak{c}_{j_\alpha}$ constants.

Proposition A.1 (Ordre un): *À l'ordre un en temps, la distribution f_i et le moment m_k vérifient*

$$m_k = m_k^* + \mathcal{O}\left(\Delta t\right) = m_k^{eq} + \mathcal{O}\left(\Delta t\right), \tag{A.6a}$$

$$f_i = f_i^* + \mathcal{O}(\Delta t) = f_i^{eq} + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{A.6b}$$

Preuve A.1: *À l'ordre un en temps, en multipliant le développement de Taylor (A.5) par $M_{k,i}$, on obtient*

$$m_k^* = m_k + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{A.7}$$

D'après (A.4), cela implique (A.6a) mais aussi (A.6b) en multipliant (A.6a) par $M_{i,k}^{-1}$. ∎

Proposition A.2 (Ordre un pour le moment conservé): *À l'ordre un en temps, la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\rho(\vec{x},t)\right) = \mathbb{F}_0(\vec{x},t) + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{A.8}$$

Preuve A.2: *À l'ordre deux en temps, en multipliant le développement de Taylor (A.5) par $M_{k,i}$, on obtient*

$$m_k + \Delta t \frac{\partial m_k}{\partial t} = m_k^* - \Delta t M_{k,i} v_{i,\alpha} \frac{\partial f_i^*}{\partial x_\alpha} + \Delta t \mathbb{F}_k + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right). \tag{A.9}$$

De plus, d'après (A.6),

$$m_k^* - m_k = \Delta t \frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} + \Delta t M_{k,i} v_{i,\alpha} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} - \Delta t \mathbb{F}_k + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right). \tag{A.10}$$

Le moment d'ordre zéro étant conservé, on a

$$m_0 = m_0^* = \rho. \tag{A.11}$$

D'où

$$\mathcal{O}(\Delta t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{i,\alpha} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} - \mathbb{F}_0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_\alpha^{eq}}{\partial x_\alpha} - \mathbb{F}_0. \tag{A.12}$$

En utilisant les données du tableau 5.1, on obtient (A.8). ∎

Proposition A.3 (Ordre deux pour les moments non conservés): *À l'ordre deux en temps, les moments non conservés $m_k(\vec{x},t)$ et $m_k^*(\vec{x},t)$, pour tout $k>0$, vérifient*

$$m_k = m_k^{eq} - \frac{\Delta t}{s_k}\left(M_{k,i} v_{i,\alpha} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} - \mathbb{F}_k\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right), \tag{A.13a}$$

$$m_k^* = m_k^{eq} + \Delta t\left(1 - \frac{1}{s_k}\right)\left(M_{k,i} v_{i,\alpha} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} - \mathbb{F}_k\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right). \tag{A.13b}$$

Preuve A.3: *Pour $k>0$, d'après (A.4) et (A.10), on a*

$$m_k^{eq} - m_k = \frac{\Delta t}{s_k}\left(M_{k,i} v_{i,\alpha} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} - \mathbb{F}_k\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right), \tag{A.14}$$

et par suite (A.13a). En remplaçant m_k par (A.13a) dans le membre de droite de (A.10), on obtient (A.13b) après simplification. ∎

Proposition A.4 (Ordre deux pour le moment conservé): *À l'ordre deux en temps et sous l'hypothèse (H2)*[1]*, la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie*

$$\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right) + \mathbb{F}_0(\vec{x},t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}(\vec{x})\,\rho(\vec{x},t)\right)$$

1. (H2)le temps de relaxation s_1 est égal au temps de relaxation s_2.

$$-\Delta t\lambda^2\sigma_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathfrak{c}_{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}\mathfrak{c}_{\boldsymbol{p}_{xx}}-\mathfrak{c}_{j_x}^2\left(\vec{x}\right)\right)\rho\left(\vec{x},t\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\mathfrak{c}_{\mathrm{E}}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}_{\boldsymbol{p}_{xx}}-\mathfrak{c}_{j_x}^2\left(\vec{x}\right)\right)\rho\left(\vec{x},t\right)\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mathfrak{c}_{\boldsymbol{p}_{xy}}-\mathfrak{c}_{j_x}\left(\vec{x}\right)\mathfrak{c}_{j_y}\left(\vec{x}\right))\rho\left(\vec{x},t\right)\right)+A_1\left(\vec{x},t\right)+A_2\left(\vec{x},t\right), \tag{A.15}$$

où

$$A_1\left(\vec{x},t\right)=-\Delta t\lambda^2\sigma_1\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\rho\left(\vec{x},t\right)\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial\mathfrak{c}_{j_\beta}}{\partial x_\alpha}\left(\vec{x}\right)\right), \tag{A.16}$$

$$A_2\left(\vec{x},t\right)=\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}\left(\vec{x},t\right)-\Delta t\lambda\sigma_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\mathbb{F}_0\left(\vec{x},t\right)\right)+\frac{\Delta t}{s_1}\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{F}_1\left(\vec{x},t\right)\\ \mathbb{F}_2\left(\vec{x},t\right)\end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Preuve A.4: *À l'ordre trois en temps, compte tenu de (A.6b), en multipliant (A.5) par $M_{k,i}$, on obtient*

$$m_k+\Delta t\frac{\partial m_k}{\partial t}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 m_k^{eq}}{\partial t^2}=m_k^*-\Delta tM_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}M_{i,\ell}^{-1}\left(m_\ell^*+\Delta t\mathbb{F}_\ell\right)+\Delta t\mathbb{F}_k$$
$$+\frac{\Delta t^2}{2}M_{k,i}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right). \tag{A.18}$$

Pour le moment d'ordre zéro conservé, on a

$$\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right)+\Delta t\mathbb{F}_0=\Delta t\frac{\partial\rho}{\partial t}+\Delta t\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}-\frac{\Delta t^2}{2}\left(v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M_{i,\ell}^{-1}\frac{\partial^2 m_\ell^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right)$$
$$+\Delta t^2\nabla\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{F}_1\\ \mathbb{F}_2\end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

D'après (A.13b), (A.8) et sous l'hypothèse (H2), on a

$$\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}=\nabla\cdot\begin{pmatrix}m_1^*\\ m_2^*\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\partial j_\alpha^{eq}}{\partial x_\alpha}+\Delta t\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\left(v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M_{i,\ell}^{-1}\frac{\partial^2 m_\ell^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}-\nabla\cdot\begin{pmatrix}\mathbb{F}_1\\ \mathbb{F}_2\end{pmatrix}\right)+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right). \tag{A.20}$$

D'après (A.8), on a

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}+\mathcal{O}\left(\Delta t\right) \tag{A.21}$$
$$=\lambda^2\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\mathfrak{c}_{j_\beta}\left(\vec{x}\right)\rho\right)\right)+\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}-\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}\right)+\mathcal{O}\left(\Delta t\right) \tag{A.22}$$
$$=\lambda^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\mathfrak{c}_{j_\beta}\left(\vec{x}\right)\rho\right)-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho\mathfrak{c}_{j_\beta}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\right)\right)+\frac{\partial\mathbb{F}_0}{\partial t}$$
$$-\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\vec{x}\right)\mathbb{F}_0\right)+\mathcal{O}\left(\Delta t\right). \tag{A.23}$$

En insérant (A.20) et (A.23) dans (A.19), et en utilisant

$$M_{1,i}^2M_{i,\ell}^{-1}m_\ell^{eq}=\mathrm{E}^{eq}+\frac{\boldsymbol{p}_{xx}^{eq}}{2},\quad M_{1,i}M_{2,i}M_{i,\ell}^{-1}m_\ell^{eq}=\boldsymbol{p}_{xy}^{eq},\quad M_{2,i}^2M_{i,\ell}^{-1}m_\ell^{eq}=\mathrm{E}^{eq}-\frac{\boldsymbol{p}_{xx}^{eq}}{2}, \tag{A.24}$$

on obtient (5.19). ∎

Corollaire A.1 (Advection constante et terme source nulle): *À l'ordre deux en temps, sous les hypothèses (H2), (H3) et*

(H5) les coefficients d'équilibre $\mathfrak{c}_{j_x}$ et $\mathfrak{c}_{j_y}$ sont des constantes,
Et en posant

$$\mathfrak{c}_{\mathrm{E}} = \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} + \frac{\mathfrak{c}^2_{j_x}(\vec{x}) + \mathfrak{c}^2_{j_y}(\vec{x})}{2}, \tag{A.25a}$$

$$\mathfrak{c}_{p_{xy}} = \mathfrak{c}_{j_x}(\vec{x})\,\mathfrak{c}_{j_y}(\vec{x}), \tag{A.25b}$$

$$\mathfrak{c}_{p_{xx}} = \mathfrak{c}^2_{j_x}(\vec{x}) - \mathfrak{c}^2_{j_y}(\vec{x}), \tag{A.25c}$$

la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie

$$\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{j_\alpha}\rho(\vec{x},t)\right) - \Delta t \lambda^2 \sigma_1 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \Delta \rho(\vec{x},t). \tag{A.26}$$

Proposition A.5 (Ordre trois pour les moments non conservés): *À l'ordre trois en temps, les moments non conservés $m_k(\vec{x},t)$ et $m^*_k(\vec{x},t)$, pour tout $k>0$, vérifient*

$$\begin{aligned} m_k =& m_k^{eq} - \frac{\Delta t}{s_k}\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} + M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} - \Delta t \sigma_k \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} + M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right)\right) \\ &+ \sum_{\ell>0}\frac{\Delta t^2}{s_k}\sigma_\ell M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial m_\ell^{eq}}{\partial t} + M_{\ell,j}v_{j,\beta}\frac{\partial f_j^{eq}}{\partial x_\beta}\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right), \end{aligned} \tag{A.27a}$$

$$\begin{aligned} m^*_k =& m_k^{eq} + \Delta t\left(1-\frac{1}{s_k}\right)\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} + M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha} - \Delta t \sigma_k \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} + M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right)\right) \\ &- \sum_{\ell>0}\Delta t^2\sigma_\ell\left(1-\frac{1}{s_k}\right)M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial m_\ell^{eq}}{\partial t} + M_{\ell,j}v_{j,\beta}\frac{\partial f_j^{eq}}{\partial x_\beta}\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right). \end{aligned} \tag{A.27b}$$

Preuve A.5: *En dérivant en temps (A.13a) et en insérant dans (A.18) la dérivée en temps de m_k obtenue, on a, pour $k>0$,*

$$\begin{aligned} m^*_k - m_k =& \Delta t\frac{\partial m_k}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 m_k^{eq}}{\partial t^2} + \Delta t M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial m^*_\ell}{\partial x_\alpha} \\ &- \frac{\Delta t^2}{2}M_{k,i}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^2 m_\ell^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right). \end{aligned} \tag{A.28}$$

De plus, d'après (A.13b), on a

$$\begin{aligned} M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial m^*_\ell}{\partial x_\alpha} &= \sum_{\ell>0} M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial m^*_\ell}{\partial x_\alpha} + M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,0}\frac{\partial m^*_0}{\partial x_\alpha} \\ &= \sum_{\ell>0}\Delta t\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(M_{\ell,j}v_{j,\beta}\frac{\partial f_j^{eq}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial m_\ell^{eq}}{\partial t}\right) \\ &\quad + M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial m_\ell^{eq}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \tag{A.29}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} m^*_k - m_k =& \Delta t\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t} + M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right) - \Delta t^2\sigma_k\frac{\partial^2 m_k^{eq}}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{s_k}M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial^2 f_i^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha} \\ &- \frac{\Delta t^2}{2}M_{k,i}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Delta t^2\sum_{\ell>0}\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^2 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha} \end{aligned}$$

$$+\Delta t^2\sum_{\ell>0}\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)M_{k,i}M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^2 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right) \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}=&\Delta t\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t}+M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right)-\Delta t^2\sigma_k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial m_k^{eq}}{\partial t}+M_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right)\\&-\sum_{\ell>0}\Delta t^2\sigma_\ell M_{k,i}v_{i,\alpha}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial m_\ell^{eq}}{\partial t}+M_{\ell,j}v_{j,\beta}\frac{\partial f_j^{eq}}{\partial x_\beta}\right)+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right).\end{aligned} \tag{A.31}$$

En procédant comme pour la preuve de la proposition A.3, on obtient les équations (A.27). ∎

Proposition A.6 (Ordre trois pour le moment conservé): *À l'ordre trois en temps, sous les hypothèses (H2) à (H5) et en posant (A.25), la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right)=&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\lambda\mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}-\Delta t\lambda^2\sigma_1\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\Delta\rho-\Delta t^2\lambda^3 2\left(\sigma_1^2-\frac{1}{12}\right)\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)\\&+\Delta t^2\lambda^3\left(\sigma_1\sigma_3-\frac{1}{12}\right)\mathfrak{c}_{j_\alpha}\left(\mathfrak{c}_{q_\alpha}-\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}-\frac{\mathfrak{c}_{j_x}^2+\mathfrak{c}_{j_y}^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)\\&+\Delta t^2\lambda^3\left(\sigma_1\sigma_7-\frac{1}{12}\right)\begin{pmatrix}\mathfrak{c}_{j_x}\left(\frac{1}{2}\left(\mathfrak{c}_{j_y}^2-\mathfrak{c}_{j_x}^2\right)+1-\mathfrak{c}_{q_x}\right)\\\mathfrak{c}_{j_y}\left(\frac{1}{2}\left(\mathfrak{c}_{j_y}^2-\mathfrak{c}_{j_x}^2\right)-1+\mathfrak{c}_{q_y}\right)\end{pmatrix}^T\cdot\vec{\nabla}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho\right)\\&+2\Delta t^2\lambda^3\left(\sigma_1\sigma_8-\frac{1}{12}\right)\begin{pmatrix}\mathfrak{c}_{j_y}\left(2\mathfrak{c}_{q_y}-1-\mathfrak{c}_{j_x}^2\right)\\\mathfrak{c}_{j_x}\left(2\mathfrak{c}_{q_x}-1-\mathfrak{c}_{j_y}^2\right)\end{pmatrix}^T\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\rho\right).\end{aligned} \tag{A.32}$$

Preuve A.6: *À l'ordre quatre en temps, sachant (A.6), en multipliant (A.5) par $M_{k,i}$, on obtient*

$$\begin{aligned}\left(1+\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)m_k+\frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 m_k^{eq}}{\partial t^3}=&m_k^*-\Delta tM_{k,i}v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^*}{\partial x_\alpha}+\frac{\Delta t^2}{2}M_{k,i}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^*}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\\&-\frac{\Delta t^3}{6}M_{k,i}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}+\mathcal{O}\left(\Delta t^4\right).\end{aligned} \tag{A.33}$$

Pour $k=0$, on a

$$\begin{aligned}\left(\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right)\rho=&-\Delta t\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}+\frac{\Delta t^2}{2}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^*}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\\&-\frac{\Delta t^3}{6}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}+\mathcal{O}\left(\Delta t^4\right),\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^*}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)+\frac{\Delta t^2}{6}\left(\frac{\partial^3\rho}{\partial t^3}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}\right). \tag{A.35}$$

En dérivant (A.26) par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=&-\lambda\mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_\alpha\partial t}+\Delta t\lambda^2\sigma_1\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\Delta\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)\\=&\lambda^2\mathfrak{c}_{j_\alpha}\mathfrak{c}_{j_\beta}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\Delta t\lambda^3\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}2\sigma_1\mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right),\end{aligned} \tag{A.36}$$

d'après (A.26) à l'ordre un en temps. Enfin, on a

$$v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^*}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=\sum_{\ell>0}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^2 m_\ell^*}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,0}\frac{\partial^2 m_0^*}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} \tag{A.37}$$

$$
\begin{aligned}
=&\Delta t \sum_{\ell>0}\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)\left(M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}+\frac{\partial}{\partial t}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^2 m_\ell^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\\
&+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right), \qquad \text{(A.38)}
\end{aligned}
$$

d'après (A.13b). Étant donné (A.24) et en insérant (A.36) et (A.38) dans (A.35), cette dernière devient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right)=&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}+\frac{\Delta t}{2}\left(\cancel{\lambda^2 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\mathfrak{c}_{j_\beta}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}}-2\Delta t\lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\sigma_1 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)-\cancel{\lambda^2 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\mathfrak{c}_{j_\beta}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}}\right)\\
&-\frac{\Delta t}{2}\lambda^2 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\Delta\rho+\frac{\Delta t^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\right)\\
&-\frac{\Delta t^2}{2}\sum_{\ell>0}\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)\left(M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) \qquad \text{(A.39)}\\
=&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}-\Delta t^2\lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\sigma_1 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)-\frac{\Delta t}{2}\lambda^2 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\Delta\rho+\frac{\Delta t^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\right)\\
&-\frac{\Delta t^2}{2}\sum_{\ell>0}\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)\left(M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) \qquad \text{(A.40)}
\end{aligned}
$$

D'après (A.27b), (A.8) et sous l'hypothèse (H2), on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial j_\alpha^*}{\partial x_\alpha}=&\frac{\partial j_\alpha^{eq}}{\partial x_\alpha}+\Delta t\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial j_\alpha^{eq}}{\partial x_\alpha}+\left(M_{1,i}\frac{\partial}{\partial x}+M_{2,i}\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right)\right.\\
&-\Delta t\sigma_1\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial j_\alpha^{eq}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}\left(M_{1,i}\frac{\partial}{\partial x}+M_{2,i}\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{i,\alpha}\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial x_\alpha}\right)\\
&-\sum_{\ell>0}\Delta t\sigma_\ell\left(M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial}{\partial t}\left(M_{1,i}\frac{\partial}{\partial x}+M_{2,i}\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{i,\alpha}\frac{\partial m_\ell^{eq}}{\partial x_\alpha}\right.\\
&\left.\left.+M^{-1}_{i,\ell}M_{\ell,j}\left(M_{1,i}\frac{\partial}{\partial x}+M_{2,i}\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{i,\alpha}v_{i,\beta}\frac{\partial^2 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\right]+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right) \qquad \text{(A.41)}
\end{aligned}
$$

D'après (A.26) et (A.36),

$$
\begin{aligned}
=&-\sum_{\ell>0}\Delta t^2\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\sigma_\ell\left(M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\\
&+\lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}+\Delta t\lambda^2 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\Delta\rho+\Delta t^2\lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}2\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\sigma_1 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)+\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right) \qquad \text{(A.42)}
\end{aligned}
$$

En insérant (A.42) dans (A.40), on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\Delta t^4\right)=&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}+\Delta t\lambda^2 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\Delta\rho+\Delta t^2\lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}2\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\sigma_1 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)\\
&-\sum_{\ell>0}\Delta t^2\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\sigma_\ell\left(M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\\
&-\Delta t^2\lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\sigma_1 \mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\Delta\rho)-\frac{\Delta t}{2}\lambda^2 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\Delta\rho+\frac{\Delta t^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{i,\gamma}\frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\right)\\
&-\frac{\Delta t^2}{2}\sum_{\ell>0}\left(1-\frac{1}{s_\ell}\right)\left(M_{\ell,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M^{-1}_{i,\ell}\frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) \qquad \text{(A.43)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} - \Delta t \lambda^2 \sigma_1 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \Delta \rho + \Delta t^2 \lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} 2\sigma_1^2 \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Delta \rho) \\
&+ \Delta t^2 \sum_{\ell > 0} \left(\sigma_1 \sigma_\ell - \frac{1}{4} \right) \left(M_{\ell,j} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{j,\gamma} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + v_{i,\alpha} v_{i,\beta} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3} + v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma} \frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \right)
\end{aligned} \tag{A.44}
$$

On remarque que

$$
\begin{aligned}
v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma} \frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} &= M_{\ell,j} v_{j,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \\
\text{et } v_{i,\alpha} v_{i,\beta} \frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta} &= v_{i,\alpha} v_{i,\beta} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta},
\end{aligned} \tag{A.45}
$$

ce qui implique d'après (A.26) que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3} =& - \frac{\partial^3 j_\alpha^{eq}}{\partial t^2 \partial x_\alpha} + \mathcal{O}(\Delta t) = -v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{i,\gamma} \frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + \lambda^3 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Delta \rho) \\
&+ \sum_{\ell > 0} \left(M_{\ell,j} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{j,\gamma} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 f_i^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + v_{i,\alpha} v_{i,\beta} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) + \mathcal{O}(\Delta t).
\end{aligned} \tag{A.46}
$$

Ainsi, après simplification de (A.44), on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(\Delta t^3) =& \Delta t^2 \sum_{\ell > 0} \left(\sigma_1 \sigma_\ell - \frac{1}{12} \right) \left(M_{\ell,j} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{j,\gamma} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + v_{i,\alpha} v_{i,\beta} M^{-1}_{i,\ell} \frac{\partial^3 m_\ell^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \\
&+ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} - \Delta t \lambda^2 \sigma_1 \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \Delta \rho - \Delta t^2 \lambda^3 2 \left(\sigma_1^2 - \frac{1}{12} \right) \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} \mathfrak{c}_{j_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Delta \rho)
\end{aligned} \tag{A.47}
$$

De plus, la première ligne de (A.47) contient une somme sur les i qui peut être simplifiée car

$$
\begin{aligned}
M^{-1}_{i,\ell} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} =& \frac{1}{6} \delta_3^\ell \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{2}{3} \lambda^2 \delta_0^\ell \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \delta_4^\ell \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2\delta_5^\ell \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
=& \frac{1}{6} \delta_3^\ell \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \delta_4^\ell \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 2\delta_5^\ell \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{A.48}
$$

car $\ell \geq 1$.

Ainsi, dans (A.47), il suffit de calculer les termes de la somme globale sur ℓ pour $\ell = \{3, 4, 5\}$.

— *Pour $\ell = 3$:*

$$
\begin{aligned}
&\Delta t^2 \left(\sigma_1 \sigma_3 - \frac{1}{12} \right) \left(M_{3,j} v_{i,\alpha} v_{i,\beta} v_{j,\gamma} M^{-1}_{i,3} \frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + v_{i,\alpha} v_{i,\beta} M^{-1}_{i,3} \frac{\partial^3 m_3^{eq}}{\partial t \partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \\
=& \Delta t^2 \left(\sigma_1 \sigma_3 - \frac{1}{12} \right) \left(\left(\frac{1}{2} \|\vec{v}_j\|^2 - \frac{2\lambda^2}{3} \right) v_{j,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Delta f_j^{eq} + \lambda^2 \left(\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} + \frac{\mathfrak{c}_{j_x}^2 + \mathfrak{c}_{j_y}^2}{2} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \rho \right)
\end{aligned} \tag{A.49}
$$

$$
= \Delta t^2 \lambda^3 \left(\sigma_1 \sigma_3 - \frac{1}{12} \right) \mathfrak{c}_{j_\alpha} \left(\mathfrak{c}_{q_\alpha} - \mathfrak{c}'_{\mathrm{E}} - \frac{\mathfrak{c}_{j_x}^2 + \mathfrak{c}_{j_y}^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\Delta \rho). \tag{A.50}
$$

Cette dernière égalité étant obtenue à partir de (A.26) et de

$$
\left(\frac{1}{2} \|\vec{v}_j\|^2 - \frac{2\lambda^2}{3} \right) v_{j,\alpha} f_j = q_\alpha - \frac{2\lambda^2}{3} j_\alpha. \tag{A.51}
$$

— *Pour $\ell = 4$:*

$$\begin{aligned}
&\Delta t^2\left(\sigma_1\sigma_4-\frac{1}{12}\right)\left(M_{4,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M_{i,4}^{-1}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M_{i,4}^{-1}\frac{\partial^3 m_4^{eq}}{\partial t\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\\
=&\Delta t^2\left(\sigma_1\sigma_4-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\left(v_{j,x}^2-v_{j,y}^2\right)v_{j,\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f_j^{eq}+\frac{\mathfrak{c}_{\boldsymbol{p}_{xx}}}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho\right) \qquad (A.52)\\
=&\Delta t^2\lambda^3\left(\sigma_1\sigma_4-\frac{1}{12}\right)\mathfrak{c}_{j_\alpha}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(-\mathfrak{c}_{j_x}^2+\mathfrak{c}_{j_y}^2\right)+1-\mathfrak{c}_{q_x}\\ \frac{1}{2}\left(-\mathfrak{c}_{j_x}^2+\mathfrak{c}_{j_y}^2\right)-1+\mathfrak{c}_{q_y}\end{pmatrix}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\rho\right). \qquad (A.53)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant obtenue à partir de

$$\frac{1}{2}\left(v_{j,x}^2-v_{j,y}^2\right)\vec{v}_j f_j=\begin{pmatrix}\lambda^2 j_x-q_x\\ q_y-\lambda^2 j_y\end{pmatrix}. \qquad (A.54)$$

— *Pour $\ell = 5$:*

$$\begin{aligned}
&\Delta t^2\left(\sigma_1\sigma_5-\frac{1}{12}\right)\left(M_{5,j}v_{i,\alpha}v_{i,\beta}v_{j,\gamma}M_{i,5}^{-1}\frac{\partial^3 f_j^{eq}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}+v_{i,\alpha}v_{i,\beta}M_{i,5}^{-1}\frac{\partial^3 m_5^{eq}}{\partial t\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\\
=&\Delta t^2\left(\sigma_1\sigma_5-\frac{1}{12}\right)\left(2v_{j,x}v_{j,y}v_{j,\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f_j^{eq}\right)-2\lambda\mathfrak{c}_{\boldsymbol{p}_{xy}}\mathfrak{c}_{j_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\rho\right)\right) \qquad (A.55)\\
=&\Delta t^2\lambda^3\left(\sigma_1\sigma_5-\frac{1}{12}\right)\begin{pmatrix}4\mathfrak{c}_{q_y}\mathfrak{c}_{j_y}-2\mathfrak{c}_{j_y}\left(1+\mathfrak{c}_{j_x}^2\right)\\ 4\mathfrak{c}_{q_x}\mathfrak{c}_{j_x}-2\mathfrak{c}_{j_x}\left(1+\mathfrak{c}_{j_y}^2\right)\end{pmatrix}^T\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\rho\right). \qquad (A.56)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant obtenue à partir de

$$2v_{j,x}v_{j,y}\vec{v}_j f_j=2\begin{pmatrix}2q_y-\lambda^2 j_y\\ 2q_x-\lambda^2 j_x\end{pmatrix}. \qquad (A.57)$$

En remplaçant la première ligne de (A.47) par (A.50), (A.53) et (A.56), on obtient l'EDP équivalente (A.32). ∎

Proposition A.7 (Ordre quatre pour le moment conservé): *À l'ordre quatre en temps, sous les hypothèses (H2) et (H3), et avec (5.22) et*

$$\mathfrak{c}_{j_\alpha}=0,\ \sigma_1=\sigma_6=\sigma_7=\frac{1}{\sqrt{12}},\ \sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=\sigma_8=\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad (A.58)$$

la densité $\rho(\vec{x},t)$ vérifie

$$\mathcal{O}\left(\Delta t^4\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x},t)-\frac{\Delta t\lambda^2\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}}{\sqrt{12}}\Delta\rho(\vec{x},t). \qquad (A.59)$$

Preuve A.7: *Nous renvoyons le lecteur à [69, p. 12–13] pour plus détails et ne présentons que les principaux éléments de la preuve. À partir du développement de Taylor (A.5) exprimé dans l'espace des moments, on peut montrer que*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{x},t)-\Delta t\lambda^2\mathfrak{c}'_{\mathrm{E}}\sigma_1\Delta\rho(\vec{x},t)+\Delta t^2A_3+\Delta t^3A_4=\mathcal{O}\left(\Delta t^4\right). \qquad (A.60)$$

où $\mathfrak{c}_{j_\alpha}=0$. En choisissant les paramètres quartiques

$$s_1=s_6=s_7=3-\sqrt{3},\ s_3=s_4=s_5=s_8=2\left(2\sqrt{3}-3\right)\iff(A.58), \qquad (A.61)$$

on obtient $A_3=A_4=0$ dans (A.60). ∎

Annexe B

Compléments sur les résultats obtenus par les divers traitements appliqués à des images de la base CSIR

Rappelons pour mémoire les caractéristiques des quatre acquisitions de la base CSIR que nous utilisons pour les expérimentations. Rappelons également qu'elles ont été choisi pour illustrer la diversité des acquisitions réelles possibles.

Nom	État de mer	hauteur de vague	Type	Ouverture azimutale	Dimension de $\boldsymbol{A}$
`06_053_TTrFA`	5	3.16m	suivi de cible	5.2°	$61 \times 833 \times 64$
`06_068_NScFA`	5	3.22m	balayage ($2^{\text{iéme}}$)	14.3°	$401 \times 80 \times 64$
`08_059_CStFA`	4.1	2.14m	Azimut fixe	0°	$101 \times 950 \times 64$
`10_097_TTrFA`	4.5	3.16m	suivi de cible	1.2°	$126 \times 1372 \times 64$

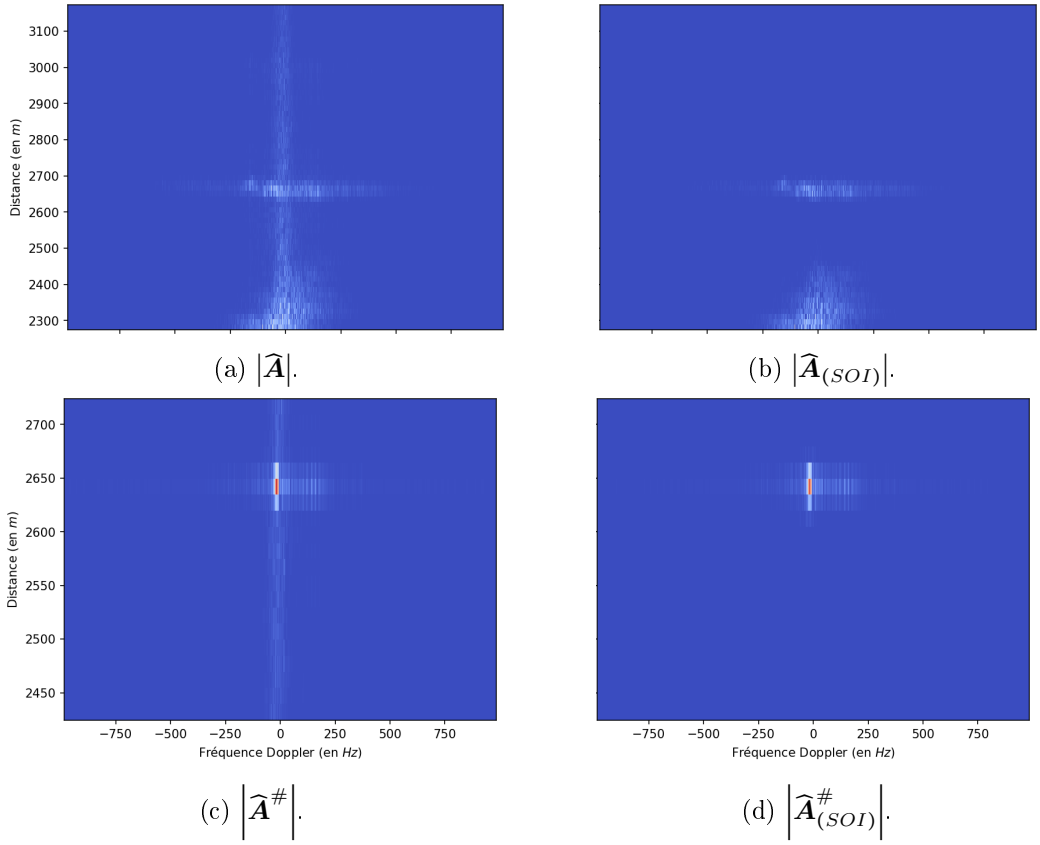
TABLE B.1 – Descriptif des acquisitions présentées dans ce manuscrit ayant pour paramètres communs $f_0 = 8.8$GHz et $f^{FRI} = 2$kHz.

Dans la suite, les divers algorithmes sont appliqués sur des régions sélectionnées dans ces acquisitions. Ces régions sont décrites dans le tableau ci-dessous.

Nom	intervalle de distance	intervalle de temps / azimut	Commentaire
`06_053_TTrFA`	[2 439m ; 2 739m]	[1.95 sec ; 2.275 sec]	Cible (RIB) à SCR égal à 10dB et à très faible vitesse radiale et fouillis de côte.
`06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone)	[11 058m ; 11 358m]	[374.6° ; 372.9°]	Cible (petit bateau) à SCR égal à 3.5dB et à vitesse radiale égale à 13kts.
`06_068_NScFA` (2nd zone)	[10 098m ; 10 398m]	[370° ; 368.3°]	Cible (petit bateau) à SCR égal à 10dB et à vitesse radiale égale à 10kts.
`08_059_CStFA`	[5 137m ; 5 437m]	[0.325 sec ; 0.65 sec]	Cible à SCR négatif et vitesse radiale égale à 28kts.
`10_097_TTrFA`	[12 677m ; 12 977m]	[11.2 sec ; 11.52 sec]	Cible (RIB) à SCR égal à 6dB et à vitesse radiale égale à 25kts et état de mer avec harmonique de vagues.

TABLE B.2 – Descriptif de la région $\boldsymbol{A}^{\#}$ pour chaque acquisition du tableau 2.1.

B.1 Traitement utilisant l'algorithme CV-kP



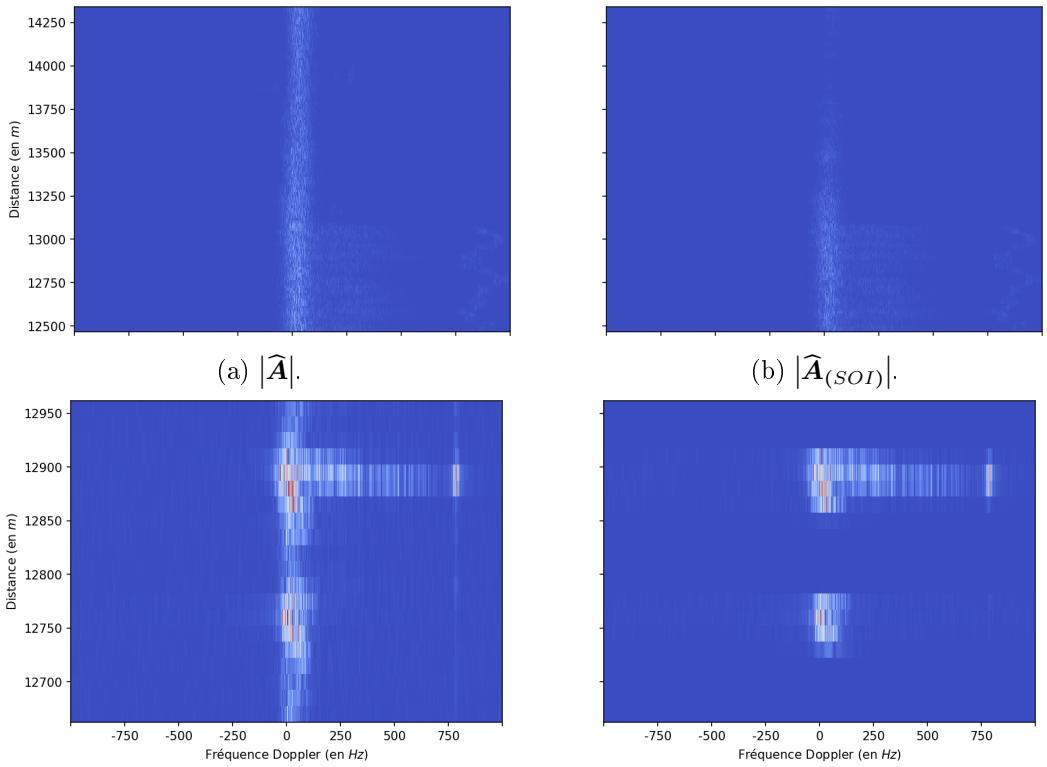
(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$.

(b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$.

(d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

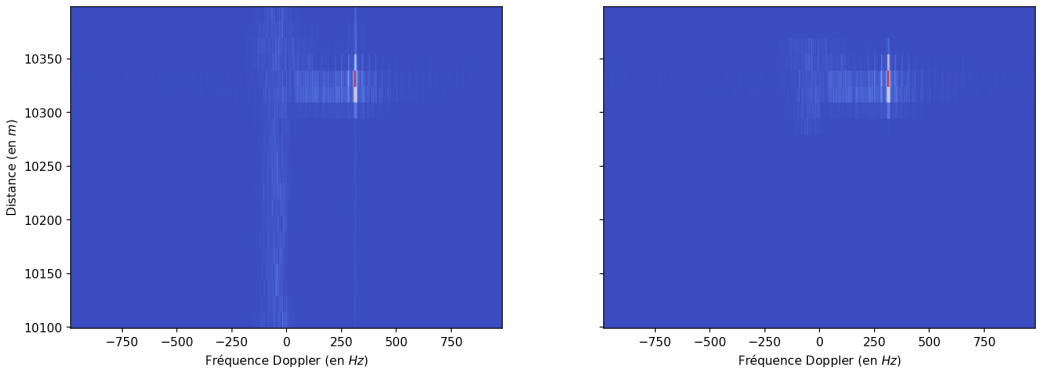
FIGURE B.1 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

FIGURE B.2 – Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

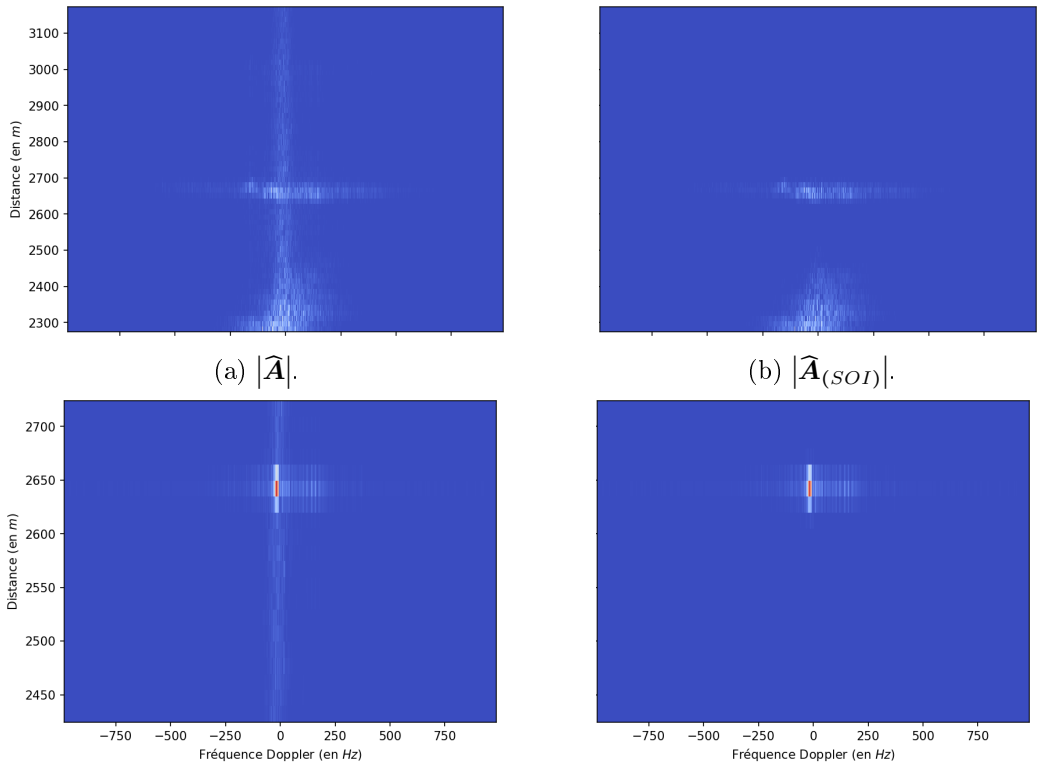


(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

FIGURE B.3 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme CV-kP appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

B.2 Traitement utilisant les schémas LB MRT

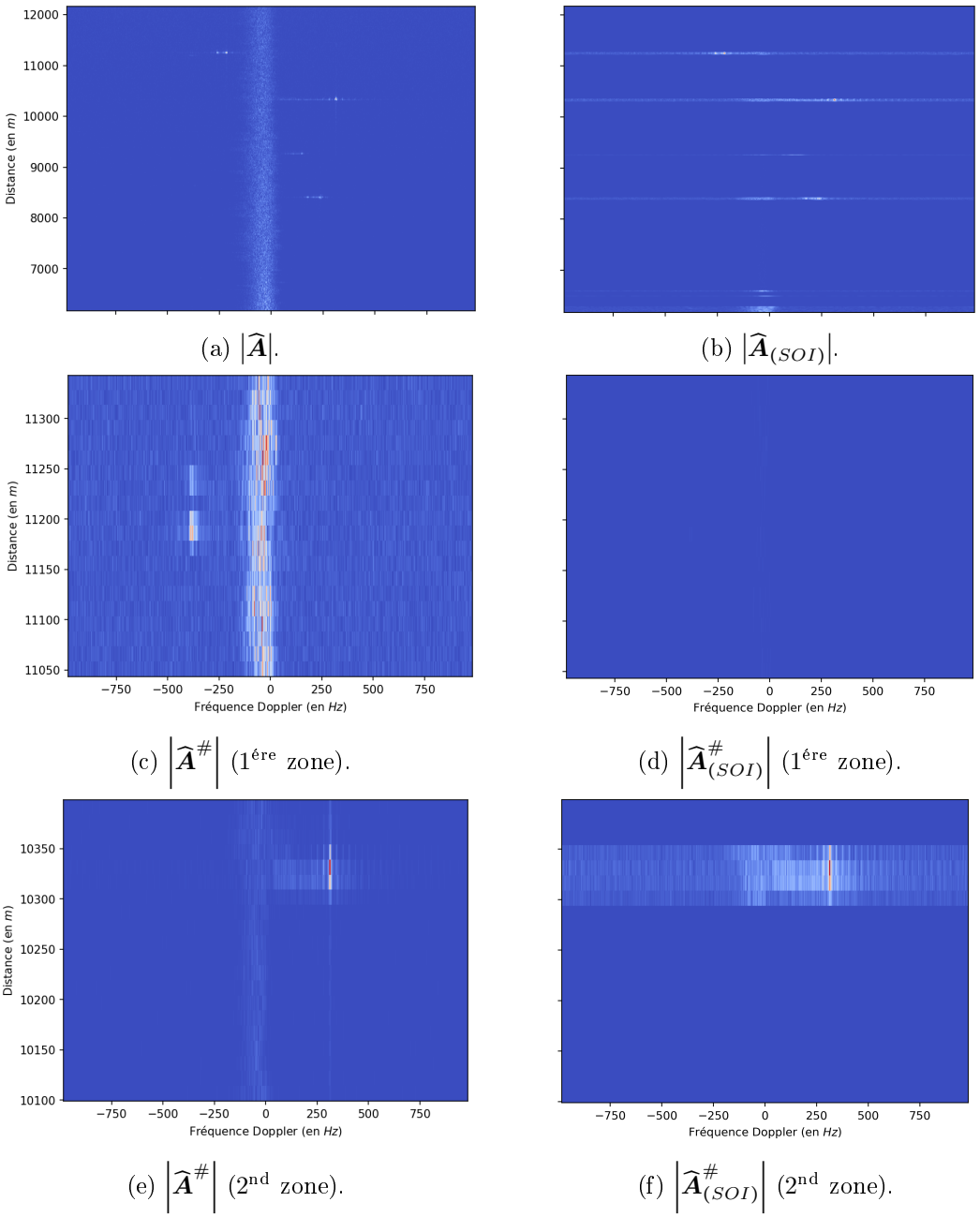
B.2.1 Équation du CV-kP



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

FIGURE B.4 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP implémenté par schéma LB et appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

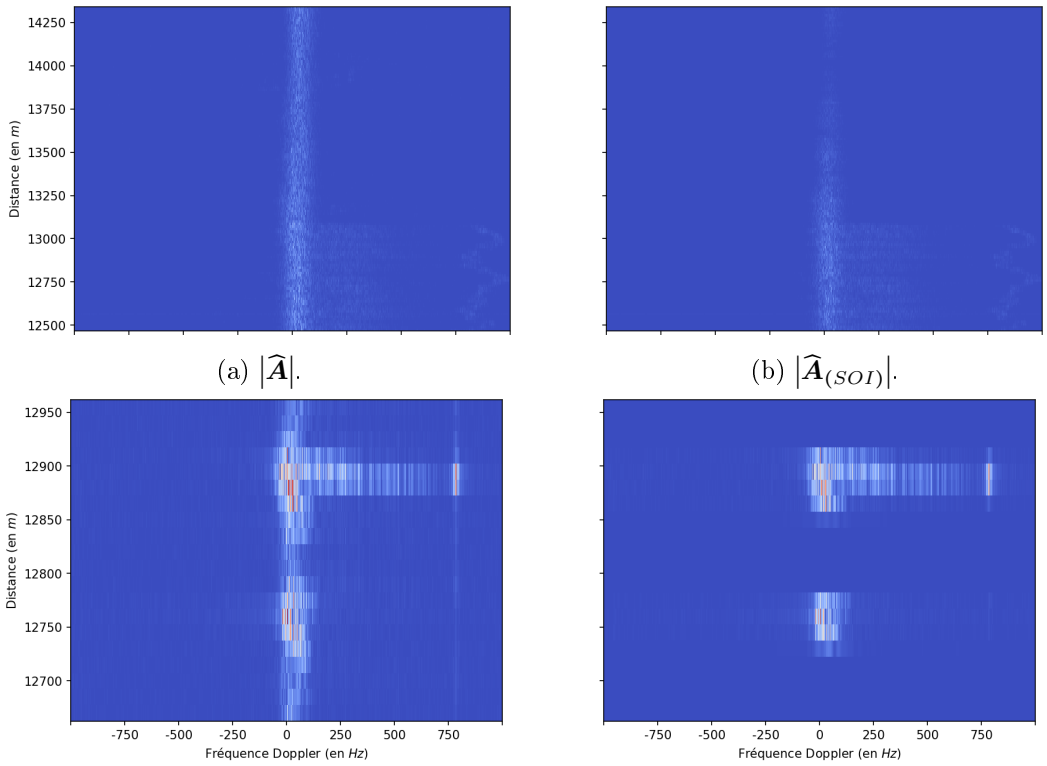


(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$ ($1^{\text{ére}}$ zone). (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ ($1^{\text{ére}}$ zone).

(e) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$ (2nd zone). (f) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ (2nd zone).

FIGURE B.5 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` en utilisant l'algorithme CV-kP implémenté par schéma LB et appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

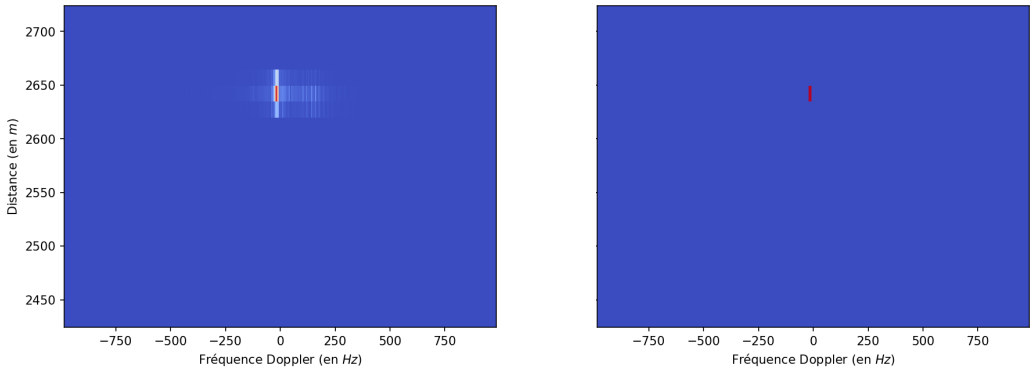


(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

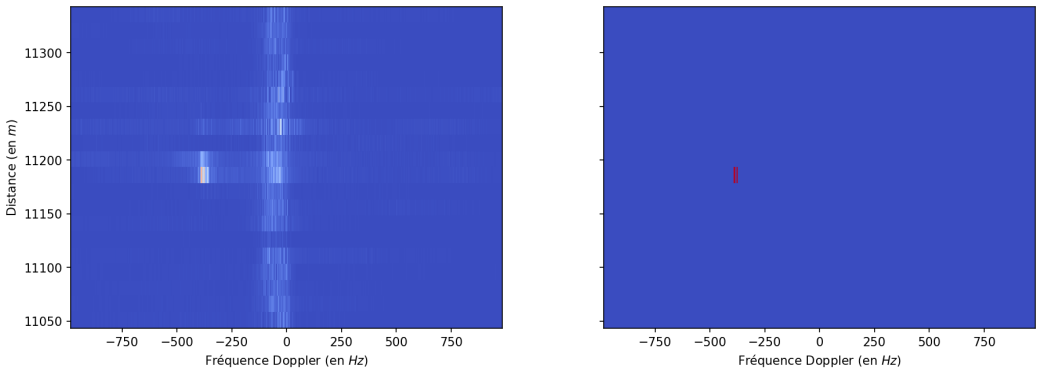
FIGURE B.6 – Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant l'algorithme CV-kP implémenté par schéma LB et appliqué sur l'image obtenue par intégration non cohérente et visualisé sur la carte distance-Doppler.

B.2.2 Équation de convection-diffusion



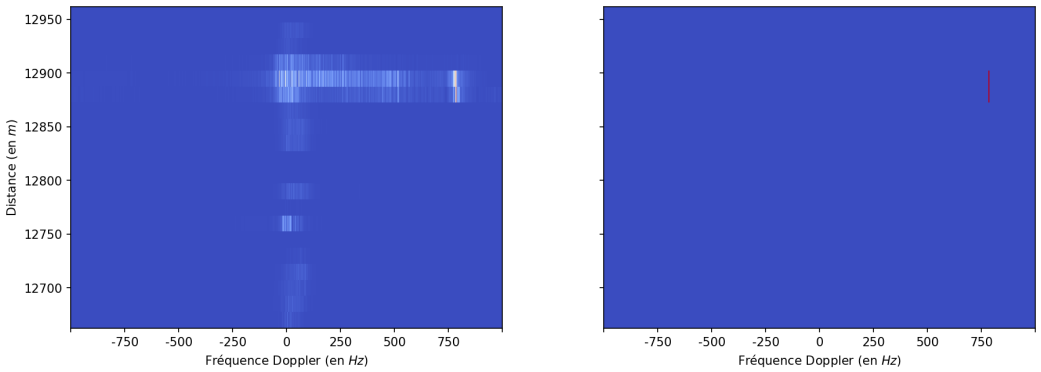
(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ après application du schéma LB.

FIGURE B.7 – Extraction du fouillis de mer de `06_053_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ après application du schéma LB.

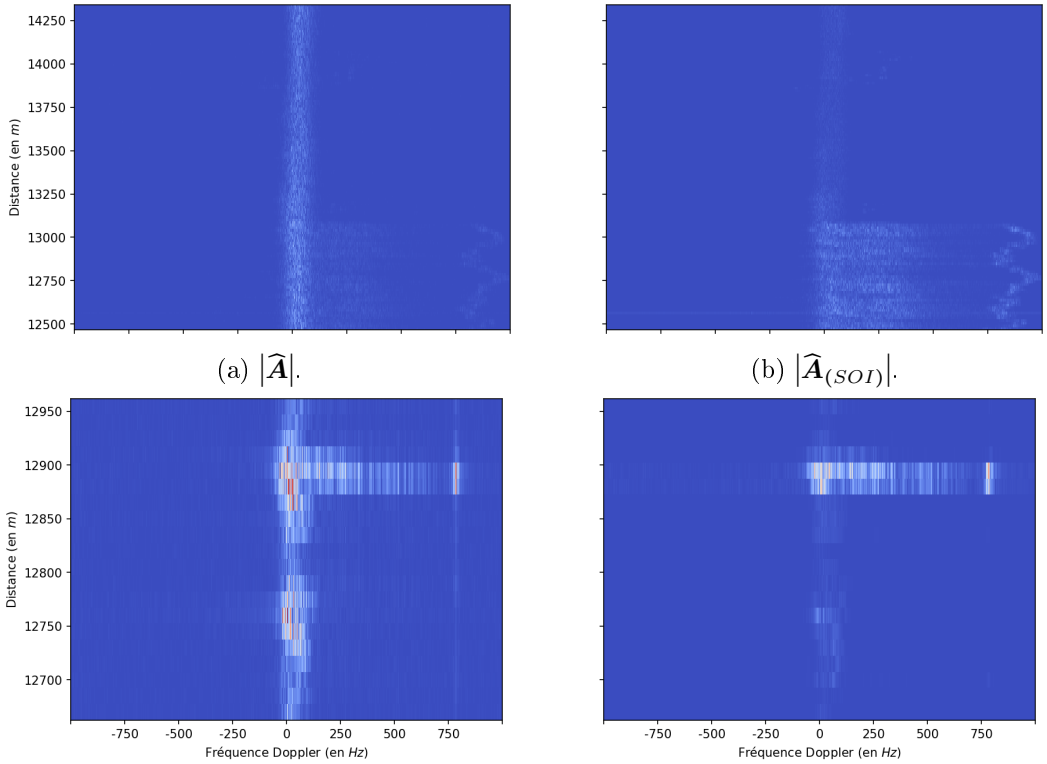
FIGURE B.8 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` ($1^{\text{ére}}$ zone) en utilisant le double auto-encodeur puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ après application du schéma LB.

FIGURE B.9 – Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant le double auto-encodeur puis le schéma LB MRT D2Q9 simulant les solutions de l'EDP de convection-diffusion (5.45) appliqué sur la carte distance-Doppler.

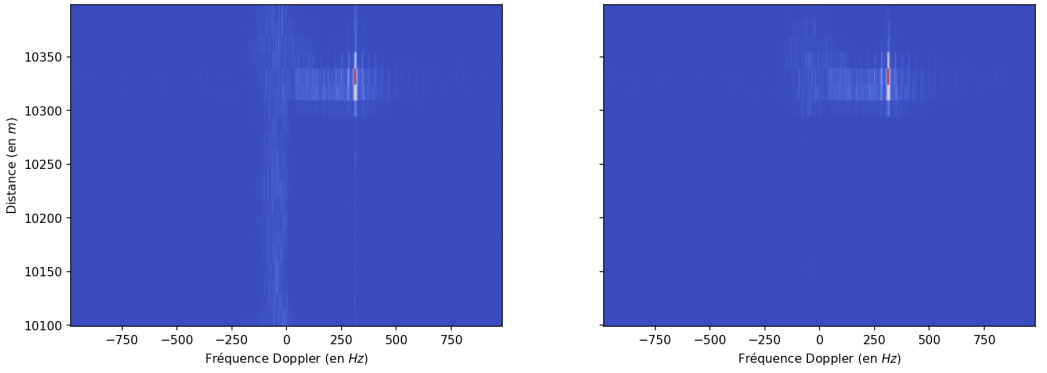
B.3 Traitement utilisant l'algorithme pulse-Doppler



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}_{(SOI)}\right|$.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

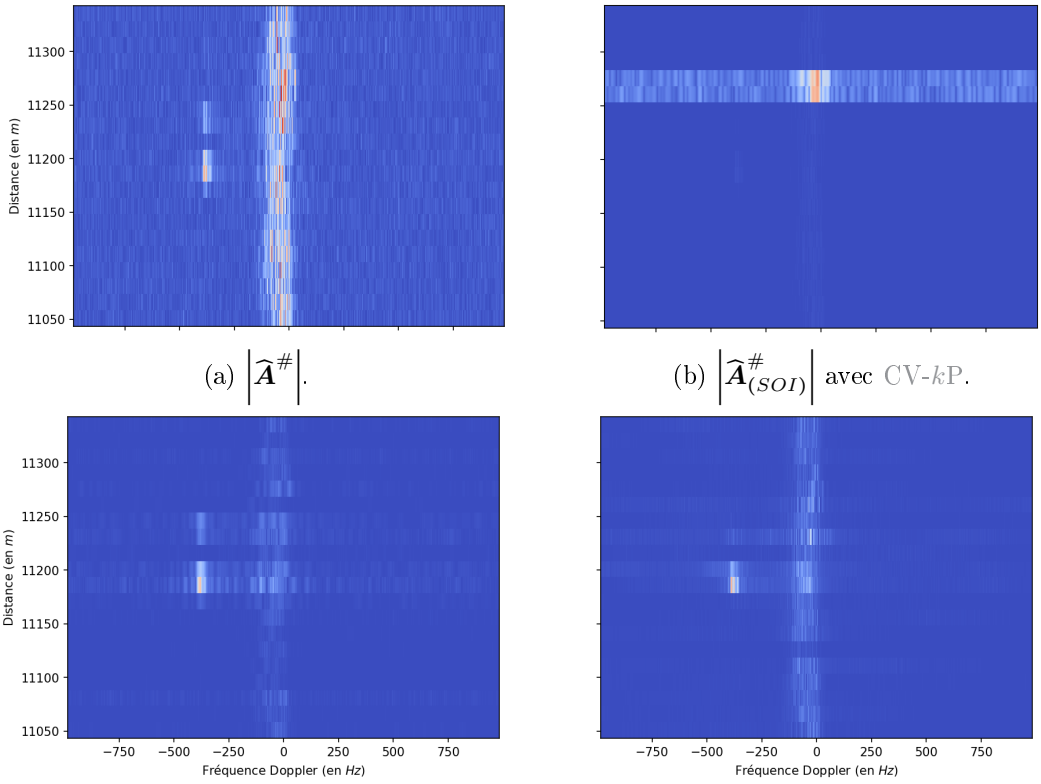
FIGURE B.10 – Extraction du fouillis de mer de `10_097_TTrFA` en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$. (b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$.

FIGURE B.11 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant l'algorithme pulse-Doppler appliqué sur l'image des données brutes et visualisé sur la carte distance-Doppler.

B.4 Traitement utilisant le réseau de neurones



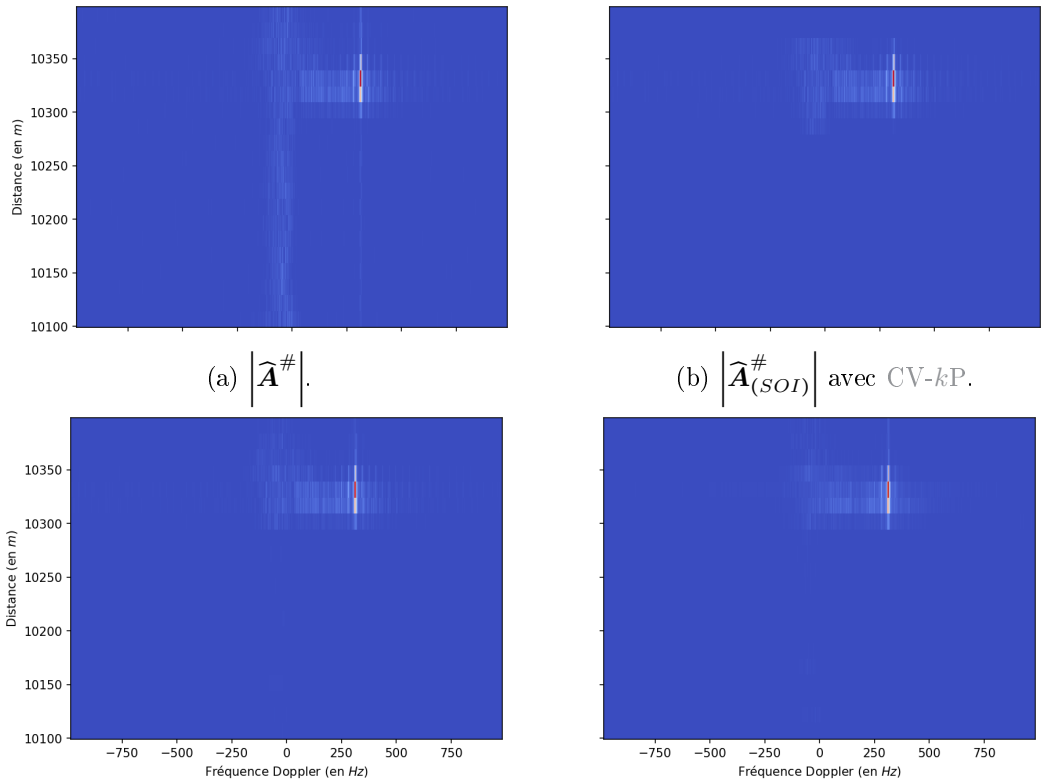
(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$.

(b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec CV-kP.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec traitement pulse-Doppler.

(d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur.

FIGURE B.12 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (1^{ére} zone) en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler.



(a) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}\right|$.

(b) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec CV-kP.

(c) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec traitement pulse-Doppler.

(d) $\left|\widehat{\boldsymbol{A}}^{\#}_{(SOI)}\right|$ avec double auto-encodeur.

FIGURE B.13 – Extraction du fouillis de mer de `06_068_NScFA` (2nd zone) en utilisant le double auto-encodeur appliqué sur la carte distance-Doppler.

Annexe C

Programme Python de l'auto-encodeur utilisé

On trouvera dans les pages qui suivent le programme python de l'auto-encodeur variationnel utilisé dans le réseau proposé.

```python
import torch

class reseau_res(torch.nn.Module):
    """Auto-encodeur variationnel"""

    def __init__(self, device="cpu", nb_filter=2 ** 3, nb_layer=2 ** 3):
        super(reseau_res, self).__init__()

        # Encoder
        self.Conv_input = torch.nn.Conv2d(
            in_channels=1, out_channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 5 + 1),
            padding=(int((1 - 1) / 2), 2 ** 4), padding_mode='replicate', device=
device, dtype=dtype)
        self.Conv1 = neural_network.block_conv_res(
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 5 + 1), nb_layer=nb_layer - 1,
            sampling_layer=torch.nn.MaxPool2d(kernel_size=(1, 2 ** 2), stride=(1, 2
 ** 2), return_indices=True),
            sampling_type="down", dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=
device)

        self.Conv2 = neural_network.block_conv_res(
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 4 + 1), nb_layer=nb_layer,
            sampling_layer=torch.nn.MaxPool2d(kernel_size=(1, 2 ** 2), stride=(1, 2
 ** 2), return_indices=True),
            sampling_type="down", dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=
device)

        self.Conv3 = neural_network.block_conv_res(
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 3 + 1), nb_layer=nb_layer,
            sampling_layer=torch.nn.MaxPool2d(kernel_size=(1, 2 ** 2), stride=(1, 2
 ** 2), return_indices=True),
            sampling_type="down", dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=
device)

        self.Conv4 = neural_network.block_conv_res(
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 2 + 1), nb_layer=nb_layer - 1,
            dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=device)
        self.Conv_output = torch.nn.Conv2d(
            in_channels=nb_filter, out_channels=1, kernel_size=(1, 2 ** 2 + 1),
            padding=(int((1 - 1) / 2), 2), padding_mode='replicate', device=device,
dtype=dtype)
        self.MaxPool = torch.nn.MaxPool2d(kernel_size=(1, 10), stride=(1, 10),
return_indices=True)

        # Partie 'variationnelle' de l'auto-encodeur
        self.fct_mu = torch.nn.Linear(20, 20, dtype=dtype).to(device, non_blocking=
True)
        self.fct_sigma = torch.nn.Linear(20, 20, dtype=dtype).to(device, non_blocking
=True)

        # Decodeur
        self.UnPool = torch.nn.MaxUnpool2d(kernel_size=(1, 10), stride=(1, 10))
        self.Conv_input_bis = torch.nn.Conv2d(
            in_channels=1, out_channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 2 + 1),
            padding=(int((1 - 1) / 2), 2), padding_mode='replicate', device=device,
```

```
dtype=dtype)

        self.Conv4_bis = neural_network.block_conv_res(
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 2 + 1), nb_layer=nb_layer - 1,
            dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=device)

        self.Conv3_bis = neural_network.block_conv_res(
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 3 + 1), nb_layer=nb_layer,
            sampling_layer=torch.nn.MaxUnpool2d(kernel_size=(1, 2 ** 2), stride=(1, 2
 ** 2)),
            dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=device)

        self.Conv2_bis = neural_network.block_conv_res(
            residual_block=residual, dropout=True, p=p_dropout,
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 4 + 1), nb_layer=nb_layer,
            sampling_layer=torch.nn.MaxUnpool2d(kernel_size=(1, 2 ** 2), stride=(1, 2
 ** 2)),
            dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=device)

        self.Conv1_bis = neural_network.block_conv_res(
            residual_block=residual, dropout=True, p=p_dropout,
            channels=nb_filter, kernel_size=(1, 2 ** 5 + 1), nb_layer=nb_layer - 1,
            sampling_layer=torch.nn.MaxUnpool2d(kernel_size=(1, 2 ** 2), stride=(1, 2
 ** 2)),
            dtype=dtype, activation=torch.nn.ReLU(), device=device)
        self.Conv_output_bis = torch.nn.Conv2d(
            in_channels=nb_filter, out_channels=1, kernel_size=(1, 2 ** 5 + 1),
            padding=(0, 2 ** 4), padding_mode='replicate', device=device, dtype=dtype
)

        self.apply(neural_network.initialize_weights)  # Pour initialier les poids de
 manière uniforme
```

```
    def encoder(self, xb):
        """Encoding function of the neural network.

        Parameters
        ----------
        xb : torch.Tensor
        The batch of input data.

        Returns
        -------
        code, idx_1, idx_2, idx_3, idx_4: torch.Tensor
        The code obtained and the indices of the maxima for each blocks of
convolution layer.
        """
        xb = torch.nn.ReLU()(self.Conv_input(xb))
        xb, idx_1 = self.Conv1(xb)
        xb, idx_2 = self.Conv2(xb)
        xb, idx_3 = self.Conv3(xb)
        xb = self.Conv4(xb)
        code, idx_4 = self.MaxPool(torch.nn.ReLU()(self.Conv_output(xb)))
        return code, idx_1, idx_2, idx_3, idx_4
```

```
    def decoder(self, code, idx_1, idx_2, idx_3, idx_4):
        """Decoding function of the neural network.

        Parameters
        ----------
        code : torch.Tensor
        The code obtained from `encoder()`.
        idx_1, idx_2, idx_3, idx_4 : torch.Tensor
        The indices of the maxima for each blocks of convolution layer.

        Returns
        -------
        _: torch.Tensor
        Information obtained after decoding procedure.
        """
        xb = torch.nn.ReLU()(self.Conv_input_bis(self.UnPool(code, indices=idx_4)))
        xb = self.Conv4_bis(xb)
        xb = self.Conv3_bis(xb, indices=idx_3)
        xb = self.Conv2_bis(xb, indices=idx_2)
        xb = self.Conv1_bis(xb, indices=idx_1)
        return torch.nn.ReLU()(self.Conv_output_bis(xb))
```

```
    def reparametrization(self, code):
        """Random draw according to a normal distribution in the latent space.

        Parameters
        ----------
        code : torch.Tensor
        Information obtained after encoding procedure.

        Returns
        -------
        _: torch.Tensor
        Code after random draw according to a normal distribution of mean `code` and
        standard deviation :math:`1`.
        """
        mu = torch.nn.Identity()(self.fct_mu(code))
        sigma = torch.nn.Threshold(threshold=1e-15, value=1e-15)(self.fct_sigma(code
))
        q = torch.distributions.Normal(mu, sigma)

        code = q.rsample()
        return code, mu, sigma
```

```
    def forward(self, xb):
        """Forward function of the neural network.

        Parameters
        ----------
        xb : torch.Tensor
        The batch of input data.

        Returns
        -------
        output : torch.Tensor
```

```
        The batch of output data.
        """
        code, idx_1, idx_2, idx_3, idx_4 = self.encoder(xb)
        code = torch.flatten(code, start_dim=1)

        code, mu, sigma = self.reparametrization(code)
        code = code

        x_tilde = self.decoder(code.view(-1, 1, 20, 1), idx_1, idx_2, idx_3, idx_4)
        return x_tilde, mu, sigma, code
```

Bibliographie

[1] T. K. Sarkar and M. S. Palma, "A history of the evolution of radar," in *2014 44th European Microwave Conference*, pp. 734–737, IEEE, 2014.

[2] M. Parenthoën, T. Jourdan, and J. Tisseau, "IPAS : Interactive Phenomenological Animation of the Sea," in *ISOPE 2004*, 2004.

[3] D. Walker, "Doppler modelling of radar sea clutter," *IEE Proceedings - Radar, Sonar & Navigation*, vol. 148, no. 2, pp. 73–80, 2001.

[4] F. Totir, E. Radoi, L. Anton, C. Ioana, A. Serbanescu, and S. Stankovic, "Advanced sea clutter models and their usefulness for target detection," *MTA Review*, vol. 18, no. 3, pp. 257–272, 2008.

[5] P. L. Herselman, C. J. Baker, and H. J. de Wind, "An analysis of X-band calibrated sea clutter and small boat reflectivity at medium-to-low grazing angles," *International Journal of Navigation and Observation*, vol. 2008, pp. 1–14, 2008.

[6] Z. Messali, F. Soltani, and M. Sahmoudi, "Robust radar detection of CA, GO and SO-CFAR in Pearson measurements based on a non linear compression procedure for clutter reduction," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 2, pp. 169–176, dec 2007.

[7] P. Liu and C. Duan, "Distributed GOSCA-CFAR detection based on automatic censoring technique," in *2010 Second International Conference on Information Technology and Computer Science*, pp. 154–157, IEEE, jul 2010.

[8] Y.-L. Shi and P.-L. Shui, "Target detection in high-resolution sea clutter via block-adaptive clutter suppression," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 5, no. 1, pp. 48–57, 2011.

[9] S. Kemkemian and V. Corretja, "A new adaptive CA-CFAR based on local topology of sea clutter for coherent detection in high sea state," in *20th International Radar Symposium (IRS)*, pp. 1–9, IEEE, jun 2019.

[10] D. Tao, A. P. Doulgeris, and C. Brekke, "A segmentation-based CFAR detection algorithm using truncated statistics," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 54, pp. 2887–2898, may 2016.

[11] S. Panagopoulos and J. J. Soraghan, "Small-target detection in sea clutter," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, pp. 1355–1361, jul 2004.

[12] X. Chen, Y. Huang, J. Guan, and Y. He, "Sea clutter suppression and moving target detection method based on clutter map cancellation in FRFT domain," in *Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on Radar*, vol. 1, pp. 438–441, IEEE, oct 2011.

[13] J. Guan, N.-B. Liu, Y. Huang, and Y. He, "Fractal characteristic in frequency domain for target detection within sea clutter," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 6, no. 5, pp. 293–306, 2012.

[14] X. Chen, J. Guan, J. Zhang, and Y. He, "Detection of low observable moving target in sea clutter via fractal characteristics in fractional Fourier transform domain," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 7, pp. 635–651, jul 2013.

[15] J. Torres, A. Marcano, and D. Andina, "Radar detection through wavelet transform," in *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, IEEE, jun 2007.

[16] S. Zhang, J. Fan, L. Shou, and J. Dong, "A detection method of radar signal by wavelet transforms," in *Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD)*, IEEE, 2007.

[17] J. E. Ball and A. Tolley, "Low SNR radar signal detection using the continuous wavelet transform (CWT) and a Morlet wavelet," in *2008 IEEE Radar Conference*, IEEE, may 2008.

[18] Y. Li, W. Zeng, N. Zhang, and W. Tang, "Gabor feature based ionospheric clutter region extraction in Range-Doppler Map," in *2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*, pp. 269–270, IEEE, 2014.

[19] V. Duk, L. Rosenberg, and B. W.-H. Ng, "The potential of 2D wavelet transforms for target detection in sea-clutter," in *IEEE Radar Conference (RadarCon)*, (Arlington, VA, USA), pp. 0901–0906, IEEE, may 2015.

[20] V. Duk, L. Rosenberg, and B. W.-H. Ng, "Target detection in sea clutter using stationary wavelet transforms," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 53, pp. 1136–1146, jun 2017.

[21] Y. Li and J. Kim, "Multiphase image segmentation using a phase-field model," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 2, pp. 737–745, 2011.

[22] Y. Sun and C. Beckermann, "Sharp interface tracking using the phase-field equation," *Journal of Computational Physics*, vol. 220, no. 2, pp. 626–653, 2007.

[23] S. M. Allen and J. W. Cahn, "A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening," *Acta metallurgica*, vol. 27, no. 6, pp. 1085–1095, 1979.

[24] T. F. Chan and L. A. Vese, "Active contours without edges," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, no. 2, pp. 266–277, 2001.

[25] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations," *Journal of computational physics*, vol. 79, no. 1, pp. 12–49, 1988.

[26] G. Avinash and B. Deepashree M., "Image segmentation using distance regularized level set method," *International Journal of Advanced Research in Electronics and Communication Engineering*, vol. 5, no. 2, pp. 262–267, 2016.

[27] C. Li, C. Xu, C. Gui, and M. D. Fox, "Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19, no. 12, pp. 3243–3254, 2010.

[28] K. L. Nguyen, P. Delachartre, and M. Berthier, "Multi-grid phase field skin tumor segmentation in 3D ultrasound images," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 28, no. 8, pp. 3678–3687, 2019.

[29] C. Mantegazza, *Lecture notes on mean curvature flow*, vol. 290. Springer Science & Business Media, 2011.

[30] E. Parzen, "On estimation of a probability density function and mode," *The annals of mathematical statistics*, vol. 33, no. 3, pp. 1065–1076, 1962.

[31] R. Cariou, *Le traitement du signal radar*. Dunod, 2012.

[32] M. I. Skolnik, "Radar handbook, third edition," *Mc Graw-Hill Companies*, 2008.

[33] B. R. Mahafza, *Radar systems analysis and design using MATLAB third edition*. CRC press, 2013.

[34] J. Ville, "Théorie et application de la notion de signal analytique," *Câbles et transmissions*, vol. 2, no. 1, pp. 61–74, 1948.

[35] R. Zhang, "The Baker-Campbell-Hausdorff formula," *Columbia University : New York, NY, USA*, 2017.

[36] E. Bretin, *Mouvements par courbure moyenne et méthode de champs de phase*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2009.

[37] A. M. Raynal and A. W. Doerry, "Doppler characteristics of sea clutter," *New Mexico : Sandia National Laboratories*, jun 2010.

[38] V. C. Chen, F. Li, S.-S. Ho, and H. Wechsler, "Micro-Doppler effect in radar : phenomenon, model, and simulation study," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 1, pp. 2–21, 2006.

[39] S. Watts, "Modeling and simulation of coherent sea clutter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 48, no. 4, pp. 3303–3317, 2012.

[40] T. Wu, Z. Luo, Z. He, W. Zhaoyi, and X. Chen, "Sea-clutter region extraction based on image segmentation methods for over-the-horizon radar," in *2018 IEEE Radar Conference (RadarConf18)*, pp. 0389–0393, IEEE, apr 2018.

[41] R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola, "The lattice Boltzmann equation : theory and applications," *Physics Reports*, vol. 222, no. 3, pp. 145–197, 1992.

[42] D. d'Humières, "Generalized lattice-Boltzmann equations," in *Rarefied Gas Dynamics : Theory and Simulations*, vol. 159, pp. 450–458, AIAA Progress in Aeronautics and Astronautics, 1992.

[43] B. Servan-Camas and F. T.-C. Tsai, "Lattice boltzmann method with two relaxation times for advection–diffusion equation : Third order analysis and stability analysis," *Advances in Water Resources*, vol. 31, p. 1113–1126, aug 2008.

[44] Z. Chai and T. S. Zhao, "Lattice Boltzmann model for the convection-diffusion equation," *Physical Review E*, vol. 87, no. 6, p. 063309, 2013.

[45] B. Chopard, J. L. Falcone, and J. Latt, "The lattice Boltzmann advection-diffusion model revisited," *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 171, no. 1, pp. 245–249, 2009.

[46] T. Gebäck and A. Heintz, "A lattice Boltzmann method for the advection-diffusion equation with Neumann boundary conditions," *Communications in Computational Physics*, vol. 15, no. 2, pp. 487–505, 2014.

[47] Q. Li, Z. Chai, and B. Shi, "Lattice Boltzmann model for a class of convection–diffusion equations with variable coefficients," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 70, no. 4, pp. 548–561, 2015.

[48] L. Li, R. Mei, and J. F. Klausner, "Lattice boltzmann models for the convection-diffusion equation : D2Q5 vs D2Q9," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 108, pp. 41–62, 2017.

[49] B. Shi and Z. Guo, "Lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations," *Physical Review E*, vol. 79, no. 1, p. 016701, 2009.

[50] X. Xiang, Z. Wang, and B. Shi, "Modified lattice Boltzmann scheme for nonlinear convection diffusion equations," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 6, pp. 2415–2425, 2012.

[51] S. Chapman, T. G. Cowling, and D. Park, "The mathematical theory of non-uniform gases," *American Journal of Physics*, vol. 30, no. 5, pp. 389–389, 1962.

[52] F. Dubois, "Third order equivalent equation of lattice Boltzmann scheme," *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, vol. 23, no. 1&2, p. 221, 2009.

[53] M. Geier, M. Schönherr, A. Pasquali, and M. Krafczyk, "The cumulant lattice boltzmann equation in three dimensions : Theory and validation," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 70, no. 4, pp. 507–547, 2015.

[54] I. V. Karlin, A. Ferrante, and H. C. Öttinger, "Perfect entropy functions of the lattice boltzmann method," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 47, no. 2, p. 182, 1999.

[55] P. Lallemand and L.-S. Luo, "Theory of the lattice Boltzmann method : dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability," *Physical Review E*, vol. 61, pp. 6546–6562, jun 2000.

[56] K. L. Nguyen, M. M. Tekitek, P. Delachartre, and M. Berthier, "Multiple relaxation time lattice Boltzmann models for multigrid phase-field segmentation of tumors in 3D ultrasound images," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 12, pp. 1324–1346, jan 2019.

[57] J. Chen, Z. Chai, B. Shi, and W. Zhang, "Lattice Boltzmann method for filtering and contour detection of the natural images," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 68, no. 3, pp. 257–268, 2014.

[58] A. Hagan and Y. Zhao, "Parallel 3D image segmentation of large data sets on a GPU cluster," in *Advances in Visual Computing*, pp. 960–969, Springer, 2009.

[59] Z. Wang, Z. Yan, Y. Qian, and G. Chen, "Lattice Boltzmann model of anisotropic diffusion for image denoising," in *IEEE Youth Conference on Information, Computing and Telecommunications*, pp. 21–24, IEEE, nov 2010.

[60] Z. Wang, Z. Yan, and G. Chen, "Lattice Boltzmann method of active contour for image segmentation," in *Sixth International Conference on Image and Graphics*, pp. 338–343, IEEE, 2011.

[61] Y. Zhao, "GPU-accelerated surface denoising and morphing with lattice Boltzmann scheme," in *IEEE International Conference on Shape Modelling and Applications*, pp. 19–28, IEEE, 2008.

[62] F. Dubois, "Une introduction au schéma de Boltzmann sur réseau," in *ESAIM : proceedings*, vol. 18, pp. 181–215, EDP Sciences, 2007.

[63] D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice gas cellular automata and lattice boltzmann models*, vol. 1725 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

[64] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, "A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems," *Physical Review*, vol. 94, pp. 511–525, may 1954.

[65] M. Hénon, "Viscosity of a lattice gas," *Complex Systems*, vol. 1, no. 4, pp. 763–789, 1987.

[66] A. Kuzmin, Z. L. Guo, and A. A. Mohamad, "Simultaneous incorporation of mass and force terms in the multi-relaxation-time framework for lattice Boltzmann schemes," *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 369, pp. 2219–2227, jun 2011.

[67] Z. Guo, C. Zheng, and B. Shi, "Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method," *Physical Review E*, vol. 65, apr 2002.

[68] B. M. Boghosian, F. Dubois, B. Graille, P. Lallemand, and M. M. Tekitek, "Unexpected convergence of lattice boltzmann schemes," *Computers & Fluids*, vol. 172, pp. 301–311, 2018.

[69] F. Dubois and P. Lallemand, "Towards higher order lattice Boltzmann schemes," *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2009, pp. 1–40, jun 2009.

[70] V. Badrinarayanan, A. Kendall, and R. Cipolla, "SegNet : A deep convolutional encoder-decoder architecture for image segmentation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 39, pp. 2481–2495, dec 2017.

[71] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep learning*. MIT press, 2016.

[72] K. He, X. Zhang, S. Ren, and J. Sun, "Deep residual learning for image recognition," in *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pp. 770–778, 2016.

[73] S. Hochreiter, Y. Bengio, P. Frasconi, J. Schmidhuber, *et al.*, "Gradient flow in recurrent nets : the difficulty of learning long-term dependencies," 2001.

[74] T. Akiba, S. Sano, T. Yanase, T. Ohta, and M. Koyama, "Optuna : A next-generation hyperparameter optimization framework," in *Proceedings of the 25rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 2019.

[75] H. Fu, C. Li, X. Liu, J. Gao, A. Celikyilmaz, and L. Carin, "Cyclical annealing schedule : A simple approach to mitigating kl vanishing," *arXiv preprint arXiv :1903.10145*, 2019.

[76] S. Bowman, L. Vilnis, O. Vinyals, A. Dai, R. Jozefowicz, and S. Bengio, "Generating sentences from a continuous space," *arXiv preprint arXiv :1511.06349*, 2015.