

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 13 décembre 2022 par

Laurine Bénéteau

Médians de graphes :
algorithmes, connexité et axiomatique

Discipline

Informatique

École doctorale

ED 184 Mathématiques et Informatique

Laboratoire/Partenaires de recherche

Laboratoire d'Informatique et Systèmes, CNRS

Composition du jury

Mourad BAÏOU LIMOS, CNRS	Rapporteur
Christophe PAUL LIRMM, CNRS	Rapporteur
Cristina BAZGAN LAMSADE	Présidente du jury
Nadia CREIGNOU LIS	Examinatrice
Guillaume DUCOFFE ICI	Examinateur
Victor CHEPOI LIS	Directeur de thèse
Jérémie CHALOPIN LIS, CNRS	Co-directeur de thèse
Yann VAXÈS LIS	Co-encadrant de thèse

Mise en page avec thesul, page de garde par amu_these.

Résumé

Le problème du médian est un des problèmes les plus étudiés en théorie des espaces métriques. Nous commençons par étudier ce problème d'un point de vue algorithmique dans les graphes médians qui ont une structure géométrique et combinatoire très riche. Nous présentons un algorithme linéaire basé sur la règle de majorité caractérisant les médians des graphes médians et sur un calcul rapide des classes de parallélisme des arêtes (les Θ -classes) via un parcours en largeur particulier (LexBFS). Nous donnons également un algorithme linéaire pour calculer le médian dans les ℓ_1 -complexes cubiques associés aux graphes médians et dans les structures d'évènements. Par la suite, nous présentons une caractérisation des graphes aux médians connexes dans la $p^{\text{ième}}$ puissance G^p du graphe et donnons une méthode polynomiale pour vérifier si un graphe est un graphe aux médians G^p -connexes, étendant un résultat de Bandelt et Chepoi (cas $p = 1$). Nous utilisons cette caractérisation pour montrer que certaines classes de graphes étudiées en théorie métrique des graphes sont G^2 -connexes, comme les graphes de Helly bipartis et les graphes pontés. Nous travaillons également sur l'aspect axiomatique de la fonction médian en étudiant l'ABC-problème, qui consiste à déterminer les graphes (nommés ABC-graphes) dans lesquels la fonction médian est l'unique fonction consensus respectant trois axiomes simples (A) Anonymat, (B) Intervalle (Betweenness) et (C) Cohérence. Nous montrons que les graphes modulaires aux médians G^2 -connexes sont des ABC-graphes et définissons des nouveaux axiomes nous permettant de caractériser la fonction médian dans d'autres classes de graphes. Nous caractérisons en particulier la fonction médian sur les graphes aux médians connexes (incluant les graphes médians et les graphes de Helly). Nous prouvons également qu'une classe connue d'ABC-graphes (les graphes respectant la propriété d'appariement) est une sous-classe propre des graphes de Helly bipartis et étudions la complexité de la reconnaissance de ces graphes.

Résumé

Abstract

The median problem is one of the most investigated problem in metric graph theory. We will start by studying this problem in median graphs whose have a lot of nice geometric properties. We will present a linear time algorithm based on the majority rule which characterize the median in median graphs and on a fast computation of the parallelism classes of the edges (the Θ -classes) via LexBFS which is a particular breadth first search algorithm. We will also provide linear time algorithms to compute the median set in the ℓ_1 -cube complexes of median graphs and in event structures. Then, we provide a characterization of the graphs with connected medians in the p^{th} power of the graph and provide a polynomial method to check if a graph is a G^p -connected median graph, extending a result of Bandelt and Chepoi (case $p = 1$). We use this characterization to prove that some important graph classes in metric graph theory have G^2 -connected medians, such as bipartite Helly graphs and bridged graphs. We will also studied the axiomatic aspect of the median function by investigating the ABC-problem, which determine the graphs (named ABC-graphs) in which the median function is the only consensus function verifying three simples axioms (A) Anonymat, (B) Betweenness and (C) Consistency. We show that modular graphs with G^2 -connected medians are ABC-graphs and define new axioms allowing us to characterize the median function on some graph classes. For example the graphs with connected medians (including Helly graphs). We also show that a known class of ABC-graphs (graphs satisfying the pairing property) is a proper subclass of bipartite Helly graphs and we investigate their recognition.

Abstract

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes trois directeurs de thèse, Jérémie Chalopin, Victor Chepoi et Yann Vaxès qui m'ont donné l'opportunité de travailler presque 4 ans sur un sujet aussi riche. Merci de m'avoir encadrée lors des deux stages de master et de la thèse, merci pour votre exigence, votre pédagogie et votre patience.

Je voudrais également adresser mes remerciements à Mourad Baïou et Christophe Paul pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je suis très honorée de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et tiens à les remercier pour le temps qu'ils ont passé à le lire et pour leurs remarques détaillées.

Je tiens également à remercier Cristina Bazgan, Nadia Creignou et Guillaume Ducoffe d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Merci aux permanents du LIS et d'ailleurs qui ont su éveiller ma curiosité pour l'informatique fondamentale et l'algorithmique avant la thèse et qui m'ont accompagnée durant. Merci notamment à Alexis, Arnaud, Basile, Corentin, Emmanuel, Guylain, Kevin, Marthe, Nadia, Pierre-Alain, Séverine et Shantanu. Merci également aux doctorants et camarades de stage qui ont animés avec brillance mes pauses café, merci notamment à Amélia, Cindy, Eloi, Franck, François, Jeremy, Manon, Nathanaël, Pacôme, Raphael, Sébastien et Théodore.

Merci au personnel logistique et technique du LIS et de l'école doctorale notamment Corine, Kai, Manuel, Nadine, Sonia et Sylvie qui ont su me guider à travers les méandres administratives.

Je tiens également à remercier mes proches, merci à ma famille sans qui rien n'aurait été possible, notamment mes parents et Clara. Merci à Marion, Btiste et au reste de l'équipe du dimanche soir qui a animé avec une pertinence certaine mes weekends de confinement et merci à Cédric pour n'avoir jamais renoncé à me faire sortir de ma grotte quand celui-ci a pris fin. Merci évidemment à mon chat qui a su animer avec charme et douceur la totalité de mon télétravail.

Merci enfin Célia pour ton soutien indéfectible de la première à la dernière minute de cette thèse, merci pour tout ce que tu m'apporte depuis toutes ces années.

Remerciements

Table des matières

Introduction	1
I Préliminaires	7
1 Notions de théorie des graphes et de théorie métrique des graphes	9
1.1 Graphes usuels	9
1.2 Notions de théorie des espaces métriques	10
1.3 Opération sur les graphes	13
1.4 Quelques classes de graphes classiques de théorie métrique des graphes	13
2 Fonctions et ensemble médian	16
2.1 L'ensemble médian d'un graphe	17
2.2 L'ensemble médian d'un segment	19
3 Quelques propriétés des graphes médians	19
II Problème du médian dans les graphes médians et autres structures apparentées	27
1 Calcul des Θ -classes	31
1.1 Calcul des Θ -classes via BFS	32
1.2 Calcul des Θ -classes via LexBFS	33
1.2.1 Propriété des parents	35
1.2.2 Algorithme	40
1.3 Borne supérieure serrée sur le nombre de Θ -classes d'un graphe médian	42
2 Calcul de l'ensemble médian dans les graphes médians	45
2.1 Épluchage périphérique	46
2.2 Calcul du poids des demi-espaces de G	47
2.3 Calcul de l'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$	48

Table des matières

2.4	Calcul d'une paire diamétrale de $\text{Med}(\pi)$	50
2.5	Graphes médians et règle de majorité	52
2.6	L'indice de Wiener $W(\pi)$ et la matrice des distances $D(G)$	53
3	Calcul des p-moments	57
3.1	Lemmes préliminaires	58
3.2	Contractions et décontractions : un aperçu	61
3.3	L'algorithme	61
4	Calcul du médian dans les ℓ_1-complexes cubiques des graphes médians.	67
4.1	Description du problème	68
4.1.1	Le problème	68
4.1.2	L'entrée	68
4.1.3	La sortie	69
4.2	Demi-espace géométrique et hyperplans	69
4.3	Règle de majorité dans \mathcal{G} .	70
4.3.1	Le complexe de boîtes $\widehat{\mathcal{G}}$.	70
4.3.2	Les problèmes des E_i -médians	71
4.4	Algorithme	72
4.4.1	Prétraitement de l'entrée	72
4.4.2	Calcul des E_i -médians	73
4.4.3	Calcul de \widehat{M}	74
4.5	Indice de Wiener	77
5	Le problème du médian dans les structures d'évènements	79
5.1	Définitions et bijections	79
5.1.1	Structure d'évènements	79
5.1.2	Le problème du médian dans les structures d'évènements	80
5.1.3	Formules 2-SAT	81
5.2	Une relation directe entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT	81
5.3	Le problème du médian dans les structures d'évènements	83
5.3.1	Algorithme calculant l'ensemble médian des structures d'évènements	83
5.3.2	Calcul d'une paire diamétrale des configurations médianes	84
5.3.3	Le problème du médian compact est $\#P$ -difficile	87
	Conclusion	89

III	Aspect structurel et axiomatique de la fonction médian	91
6	Caractérisation des graphes dont l'ensemble médian est G^p-connexe	93
6.1	Fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic	94
6.1.1	Fonctions convexes et sans-pic sur les chaînes géodésiques	94
6.1.2	Fonctions faiblement-convexes et faiblement-sans-pic	96
6.1.3	Graphes aux médians connexes	97
6.1.4	Fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic	99
6.2	Graphes aux médians G^p -connexes	105
6.2.1	Caractérisation des graphes aux médians G^p -connexes	106
6.2.2	Reconnaissance des graphes aux médians G^p -connexes	110
6.2.3	Produits cartésiens, amalgames portés et rétractés	110
6.3	Conclusion	114
7	Classes de graphes aux médians G^2- et G^p-connexes	115
7.1	Résultats auxiliaires	115
7.2	Graphes maillés, faiblement modulaires et modulaires	119
7.3	Graphes pontés et faiblement pontés	122
7.4	Graphes aux boules convexes	124
7.5	Graphes bucoliques et hypercellulaires	126
7.6	Graphes de Helly bipartis	128
7.7	Graphes de bases	129
7.7.1	Graphes de bases de matroïdes et Δ -matroïdes paires	129
7.7.2	Sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et des demi-cubes dont l'ensemble médian est connexe	130
7.8	Systèmes de benzénoïdes	137
7.9	Conclusion	140
8	ABC(T)-graphes	141
8.1	ABC(T)-graphes	143
8.1.1	Quelques propriétés des ABC-fonctions	143
8.1.2	Les graphes aux médians connexes sont des ABCT-graphes	144
8.1.3	Les graphes modulaires dont l'ensemble médian est G^2 -connexe sont des ABC-graphes	147
8.2	Graphes respectant la propriété d'appariement	150
8.2.1	Propriétés d'appariement et de double appariement	150

Table des matières

8.2.2	Les graphes respectant la propriété de (double-)appariement sont des graphes de Helly bipartis	153
8.2.3	Graphes de Helly bipartis ne respectant pas la propriété d'appariement	155
8.2.4	Une caractérisation locale vers globale de graphes respectant la propriété d'appariement	159
8.2.5	Reconnaissance des graphes vérifiant la propriété de double appariement	162
8.3	Systèmes de benzénoïdes	164
8.3.1	Axiomes dans les triangles métriques équilatéraux	164
8.3.2	C_6 admet une seconde ABC-fonction	164
8.3.3	Les systèmes de benzénoïdes sont des $ABCT_2$ - et $ABCE_2$ -graphes . . .	168
8.4	Conclusion	172
	Conclusion	173
	Principales définitions	177
	Bibliographie	179

Introduction

Le problème du médian (également appelé problème de Fermat-Torricelli ou problème de Weber) est un des problèmes de géométrie euclidienne les plus anciens et les plus étudiés [80]. Le *problème du médian* peut être défini pour tout espace métrique (X, d) : étant donné un ensemble de points fini de poids positif $P \subseteq X$, calculer les points x de X minimisant la *somme totale des distances*, c'est-à-dire la somme des distances entre x et tous les points de P multipliés par leur poids. Il sera le sujet d'étude principal de cette thèse, en particulier dans les graphes. On commence par donner quelques exemples d'ensembles médians dans les espaces métriques.

Dans le cas du plan euclidien, chaque point a deux coordonnées et la distance considérée est la distance euclidienne, c'est-à-dire la racine carrée de la somme des différences des coordonnées au carré. Ainsi, le médian d'un ensemble de points P est le point minimisant le carré des distances vers tous les éléments de P . Dans le cas où P est composé de trois points de poids unitaire non colinéaires, si un des angles formés par les trois points est de 120° ($2\pi/3$ radians), alors le médian est le sommet de cet angle (cf Figure 1a). Et si tous les angles formés par les trois points sont inférieurs à 120° , alors le médian est le point du plan formant un angle de 120° avec chaque paire de points de P (cf Figure 1b). Fermat a défini ce problème au XVII^{ème} siècle, il peut être considéré comme le tout premier problème de localisation. Weber généralisera ce problème en 1909 au cas pondéré [111]. Dans le cas où P contient un nombre quelconque de points non colinéaires de poids unitaire, Weiszfeld montre en 1937 un algorithme calculant une suite de points convergeant vers le médian (qu'il appelle alors point-minimum)[112]. L'idée est de choisir arbitrairement un point x_0 du plan et de pondérer chaque point de P par l'inverse de sa distance à x_0 , on obtient ainsi un point x_1 qui est le centre de gravité des points pondérés (cf Figure 1c). On recommence en choisissant x_1 à la place de x_0 et on obtient ainsi le point x_2 . En continuant ce procédé, on obtient une suite de points x_1, x_2, \dots, x_n convergeant vers le médian de P .

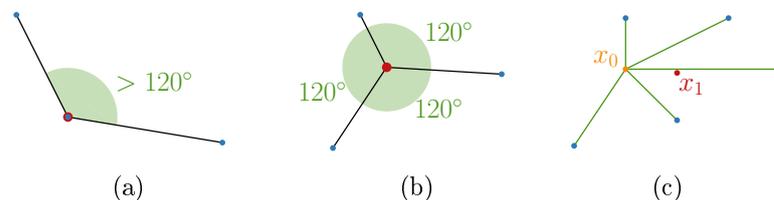


FIGURE 1 – En (a) et (b) le médian (en rouge) d'un ensemble de 3 points (en bleu) et en (c) une itération de l'algorithme de Weiszfeld sur un ensemble de points (en bleu).

Si on munit le plan de la norme ℓ_1 , la distance entre deux points est égale à la somme des valeurs absolues des différences entre les deux coordonnées, on donne en Figure 2a deux plus courts chemins entre deux points en vert et violet. Le médian est l'ensemble des points dont les

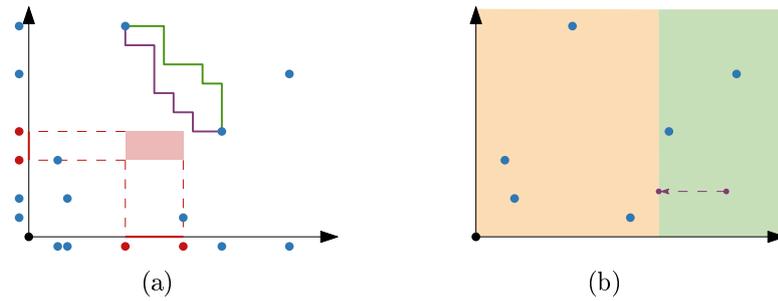


FIGURE 2 – (a) Médian (en rouge) d’un ensemble de 6 points (en bleu) dans le plan muni de la distance ℓ_1 et (b) séparation du plan en deux demi-plans

deux coordonnées sont dans le médian des coordonnées de P . Le médian des coordonnées étant égal au médian classique d’une suite de nombres : si il y a un nombre impair de coordonnées, alors le médian est la coordonnée ayant autant de coordonnées qui sont inférieures que supérieures à elle. Et dans le cas pair, ce sont les deux coordonnées consécutives tels qu’il y a autant de coordonnées supérieures qu’inférieures à elles. On donne en Figure 2a l’ensemble médian (en rouge) de l’ensemble d’éléments bleu. L’idée derrière cette solution est que si on sépare le plan en 2 demi-plans complémentaires tels que l’un contient tous les points de $i^{\text{ème}}$ coordonnée supérieure à un nombre, et que l’autre contient tous les points de $i^{\text{ème}}$ coordonnée inférieure à ce nombre, alors le médian est forcément dans le demi-plan contenant le plus de points (qu’on appelle alors le demi-plan majoritaire). On peut le voir facilement en voyant que si on passe d’un point qui n’est pas dans le demi-plan majoritaire au point le plus proche de lui sur le demi-plan majoritaire, alors on va se rapprocher de plus d’éléments de P qu’on ne s’en éloigne, et on va donc faire baisser la somme totale des distances (cf Figure 2b). Le médian est donc dans l’intersection de tous les demi-plans majoritaires.

On peut généraliser cette notion de majorité, en effet Goldman et Witzgall montrent dans [63] qu’un sous-ensemble S d’un espace métrique (X, d) contiendra toujours au moins un médian d’un ensemble d’éléments P de X ssi il contient au moins la moitié du poids des éléments de P et que c’est un sous-espace porté (pour tout point x à l’extérieur de S il existe un point de S appartenant à un plus court chemin entre x et tout point de S) alors il contient au moins un médian. Goldman se sert de cette règle de majorité dans [62] pour calculer le médian dans les arbres en temps $O(n)$ (et Hua Lo-Keng et al. [71] donnent indépendamment un autre algorithme linéaire utilisant un méthode de type élagage) : comme il n’existe qu’un seul plus court chemin entre chaque paire de sommets, chaque sous-arbre est porté, si un sous-arbre possède plus de la moitié du poids des éléments de P alors il contient le médian. Le médian dans les arbres coïncide avec les centroïdes [63, 107]. Si on supprime un centroïde d’un arbre, alors on obtient une forêt d’arbres ne contenant pas plus de la moitié des poids des éléments de P . Ainsi, pour trouver le médian d’un arbre, il suffit de faire un parcours en profondeur, de tester à chaque étape si la condition du centroïde est remplie et si ce n’est pas le cas, de continuer dans la branche avec le plus de poids. On donne en Figure 3 un exemple d’exécution de l’algorithme sur un arbre T démarrant en u_1 . L’exactitude de cet algorithme est due en partie au fait que la somme totale des distances est strictement décroissante le long de chaque chemin entre un sommet du graphe et le médian le plus proche. Cette condition implique que la somme totale des distances est convexe dans les arbres.

Le médian apparaît également dans la théorie du choix social, où des ordonnancements indi-

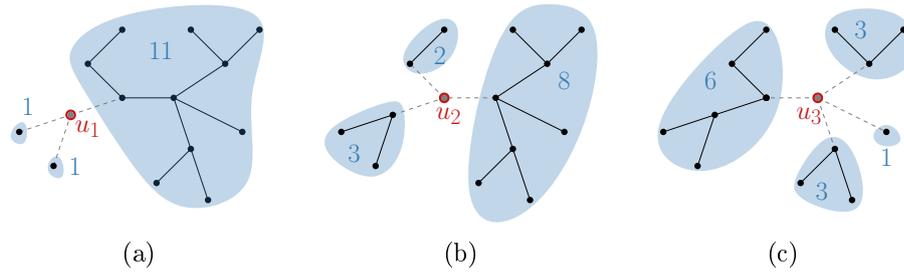


FIGURE 3 – En (a) et (b), deux sommets u_1 et u_2 d'un arbre de 14 sommets de poids unitaires ne respectant pas la condition du centroïde et le sommet u_3 en (c) la respectant

viduels doivent être fusionnés en une décision consensuelle. Pour définir la distance entre deux ordonnancements A et B , Kemeny [72, Modèle 4] somme les valeurs associées à chaque paire d'éléments : si A et B les ordonnent de la même façon alors la valeur est 0, si les ordonnancements sont contraires alors elle est de 2, et elle est de 1 si un seul des deux indique une préférence. On donne en Figure 4 une représentation du permutahédre de 3 éléments qui permet de représenter les distances entre chaque paire d'ordonnancements via un graphe. On choisit alors le médian de cet espace métrique (appelé médian de Kemeny) comme ordonnancement consensuel. En théorie du choix social une fonction consensus respecte la règle de majorité si la décision appartient au groupe ayant le plus de représentants. D'après May, une règle de majorité est juste si elle respecte trois critères : équité (chaque votant et chaque ordonnancement est traité de la même manière), décision (un seul ordonnancement est choisi) et monotonie (si un votant change de vote, la décision finale ne peut pas lui être moins favorable). Le médian de Kemeny respecte l'équité et la monotonie mais pas la décision : l'ensemble des trois ordonnancements $a > b > c$, $b > c > a$ et $c > a > b$ par exemple coïncide avec son médian (cf Figure 4).

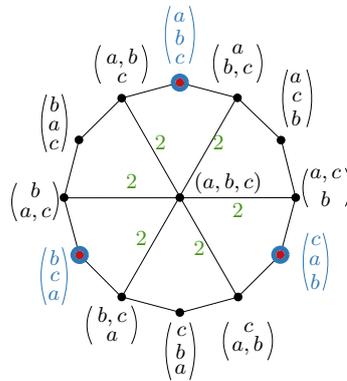


FIGURE 4 – Représentation des distances de tous les ordonnancements de $\{a, b, c\}$ et du médian de Kemeny (en rouge) de l'ensemble des trois ordonnancements $a > b > c$, $b > c > a$ et $c > a > b$ [72, Figure 4]; seules les arêtes de avec les distances 1 et 2 sont représentées, les poids des arêtes non unitaires sont donné en vert.

La convergence de ces algorithmes est basée sur la convexité de la somme totale des distances, impliquant que les médians locaux (sommets minimisant la fonction médian dans son voisinage) sont globaux et que les ensembles médians sont convexes. En réalité, la somme totale des distance est convexe dans tous les espaces métriques dont la distance est convexe, c'est le cas par exemple des espaces métriques géodésiques CAT(0) [35] et de tous les espaces normés. On peut généraliser

Introduction

les fonctions convexes aux fonctions faiblement convexes, qui sont les fonctions pour lesquelles il existe au moins une géodésique pour chaque paire de sommets des graphes sur lequel la fonction est convexe. Une autre généralisation des fonctions convexes sont les fonctions sans-pic qui ont été introduites par Busemann [36] et étudiées dans [37]. Les fonctions faiblement-sans-pic peuvent être définies de manière similaire aux fonctions faiblement-convexes.

Tout graphe connexe et non pondéré $G = (V, E)$ plongé dans la distance standard des graphes peut être considéré comme un espace métrique (discret). Le problème du médian dans les graphes découle d'un des problèmes principaux de théorie de localisation dans les réseaux [66, 107], du problème de consensus majoritaire dans la classification et l'analyse de données [12, 21-23, 85], et de la centralité de proximité dans l'analyse des réseaux [24, 25, 99]. Pour un graphe avec n sommets et m arêtes muni de la distance standard dans les graphes, si la matrice des distances est donnée, il suffit d'additionner les distances dans chaque colonne et de retourner le sommet associé à celle ayant la plus petite somme, ce qui prend un temps $O(n^2)$. Le problème du médian peut donc être résolu en temps $O(mn)$ en résolvant le problème du plus court chemin entre chaque paire de sommets du graphe APSP (All Pairs Shortest Path Problem) [66]. On pourrait se demander si la résolution de ce problème est toujours nécessaire pour résoudre le problème du médian. L'article [1] montre que APSP et le problème du médian peuvent être réduits l'un à l'autre en utilisant des réductions sous-cubiques, et l'article [2] montre que calculer l'ensemble médian des graphes peu denses en temps sous-quadratique réfute la conjecture de l'ensemble intersectant HS (Hitting Set).

Nous nous placerons notamment dans le cadre des graphes médians, originellement définis dans le contexte de l'algèbre universelle par [8, 32], leurs propriétés ont été étudiées pour la première fois dans [86, 88, 93]. Il a été montré dans [46, 96] que les complexes cubiques des graphes médians sont exactement les complexes cubiques $CAT(0)$, i.e., les complexes cubiques de courbure non-positive. Les complexes cubiques $CAT(0)$, introduits et élégamment caractérisés dans [64] avec une approche de type local vers global, sont actuellement un des principaux objets d'étude en théorie géométrique des groupes [101]. Les graphes médians apparaissent également en informatique : d'après [5, 20] ils sont exactement les domaines des structures d'évènements (un des principaux modèles de la théorie de la concurrence) [95] et les sous-ensembles fermés par médian des hypercubes sont exactement les solutions des formules 2-SAT [91, 102]. Les bijections entre les graphes médians, les complexes cubiques $CAT(0)$ et les structures d'évènements ont été utilisées dans [38, 39, 48] pour réfuter trois conjectures en théorie de la concurrence [98, 108, 109]. Enfin, les graphes médians vu comme la fermeture par médian des sommets des hypercubes contiennent la plupart des arbres de parcimonie [17] qui ont beaucoup d'applications en phylogénie. Les graphes médians ont de nombreuses propriétés métriques élégantes. Par exemple, les arêtes des graphes médians peuvent être partitionnées en classes d'équivalences appelées Θ -classes. Ces classes d'équivalences correspondent aux hyperplans des complexes cubiques $CAT(0)$ [100] et des évènements des structures d'évènements [95]. Supprimer les arêtes d'une Θ -classe sépare le graphe en deux composantes connexes convexes et portées appelées demi-espaces (également appelées splits dans [89]). La convexité des demi-espaces implique via [55] que tout graphe médian est isométriquement plongeable dans un hypercube de dimension égale au nombre de Θ -classes du graphe médian [87, 88]. Pour une étude plus approfondie des graphes médians et leurs connexions avec d'autres structures discrètes ou géométriques, le lecteur pourra se référer aux livres [67, 77], aux études [15, 76], et au papier [41].

Nous utiliserons dans nos preuves concernant les graphes médians le fait que la somme totale des distances est unimodale, c'est-à-dire que ses minimums locaux sont globaux. En fait c'est le

cas de toutes les classes de graphes pour lesquelles il existe actuellement un algorithme résolvant le problème du médian en temps inférieur à $O(nm)$ [14, 50, 56]. Bandelt et Chepoi montrent dans [14] l'équivalence entre les graphes aux médians connexes, les graphes dans lesquels la somme totale des distances est unimodale, ceux dans lesquels elle est convexe et ceux dans lesquels elle est sans-pic. Le résultat principal de [14] est une caractérisation de type local vers global des graphes aux médians connexes qui leur permettra de montrer que les graphes de Helly et les graphes de base des matroïdes sont des graphes aux médians connexes. Ils montrent également qu'ils sont maillés et reconnaissables en temps polynomial.

Cette caractérisation des graphes aux médians connexes est importante pour l'étude du problème du médian mais également dans la théorie du consensus, plus particulièrement la branche étudiant la fonction médians Med prenant en entrée une fonction de poids entière (i.e., un *profil*) et donnant en sortie l'ensemble médian. Le problème du consensus dans la théorie du choix social prend en entrée des préférences individuelles et calcule une décision de groupe consensuelle qui reflète au mieux ces préférences. Il est généralement requis que le consensus respecte quelques axiomes simples afin qu'il reste cohérent et rationnel. Cependant, d'après le théorème d'impossibilité d'Arrow [7], il n'existe pas de fonction consensus respectant des axiomes naturels d'équité. Le médian de Kemeny [72, 73] est donc une fonction de consensus importante car elle respecte la plupart des axiomes d'équité. De l'approche axiomatique des fonctions consensus d'Arrow découle plusieurs tentatives de caractérisation axiomatique de fonction consensus M parmi plusieurs fonctions consensus. L'objectif est alors soit de caractériser M par un ensemble d'axiomes ou de caractériser les instances pour lesquelles M est l'unique fonction consensus satisfaisant un ensemble d'axiomes naturels. À la place de considérer les opinions individuelles comme des ordonnancements, Balinski et Laraki [9, 10] ont décrit une règle de majorité à plusieurs critères qu'ils ont appelé jugement majoritaire. Dans ce modèle, les votants notent les candidats en fonction de leurs préférences; un votant pouvant attribuer la même note à plusieurs candidats. Le candidat élu est celui qui a obtenu la meilleure note moyenne. Nehring et Pivato [94] ont montré que le jugement majoritaire est équivalent à la règle du médian pondéré. Holzman [70] a été le premier à étudier axiomatiquement une fonction de localisation en tant que fonction consensus. Il a plus précisément caractérisé la fonction barycentre des arbres, associant à tout profil sur un arbre l'ensemble des sommets minimisant le carré de la distance vers les sommets du profil. La caractérisation axiomatique de la fonction barycentre sur la ligne ou dans \mathbb{R}^d est un problème classique [3], défini pour la première fois par Kolmogorov dans le papier [78]. Foster et Vohra [60] ont caractérisé axiomatiquement la fonction médian Med dans les arbres continus (où on peut se placer sur les arêtes), et McMorris, Mulder et Roberts [84] ont caractérisé Med dans le cas discret. Ils ont également montré que trois axiomes basiques ((A) Anonymat, (B) Intervalle (Betweeness) et (C) Cohérence) sont suffisants pour caractériser la fonction médian des graphes médians sans cubes, et l'article [90] étends ce résultat à tous les graphes médians. Les articles [90] et [83] définissent le ABC-problème comme la caractérisation des graphes avec une unique fonction respectant les axiomes (A), (B) et (C) (qui est donc nécessairement la fonction médian).

Résultats

Dans cette thèse, nous nous intéresserons principalement aux différents aspects de la fonction médian. D'un point de vue algorithmique, nous chercherons à la calculer rapidement dans différentes structures géométriques; d'un point de vue plus structurel, nous chercherons à étudier la connexité de l'ensemble médian; et d'un point de vue axiomatique, nous regarderons quels

Introduction

axiomes suffisent à caractériser la fonction médian dans certains graphes.

Dans le Chapitre 1, nous montrerons comment calculer les Θ -classes des graphes médians en temps linéaire quand la dimension est fixée, puis lorsqu'elle est quelconque. Le dernier algorithme utilise l'algorithme de parcours en largeur LexBFS, et nous montrerons que l'ordonnement via LexBFS des arêtes d'un graphe médian respecte la propriété des parents que nous définirons.

Nous présentons dans le Chapitre 2 un algorithme permettant d'obtenir à l'aide du calcul rapide des Θ -classes du Chapitre 1 les médians des graphes médians en temps linéaire, puis comment calculer une paire diamétrale de l'ensemble médian tel que l'intervalle entre cette paire de sommets est égal à Med , puis nous montrerons que les graphes médians sont précisément les graphes bipartis respectant la règle de majorité. Enfin, nous utiliserons les mêmes techniques afin de calculer l'indice de Wiener et la matrice des distances des graphes médians.

Dans le Chapitre 3, nous montrons comment utiliser les techniques du Chapitre 2 pour calculer en chaque sommet v du graphe son p -moment, c'est-à-dire la somme pondérée des distances puissance p entre v et chaque sommet du graphe.

Le Chapitre 4 s'intéresse au problème du médian dans les ℓ_1 -complexes cubiques des graphes médians. Il montre comment généraliser certaines notions relatives aux graphes médians à leur ℓ_1 -complexe cubique, notamment leurs demi-espaces et la règle de majorité et présente un algorithme calculant l'ensemble médian en temps linéaire.

Le Chapitre 5 commence par montrer comment relier les structures d'évènements aux formules 2-SAT et en déduit que si le problème du médian prend en entrée une structure d'évènements sous forme compacte, alors il est $\#P$ -difficile. En revanche, si il prend en entrée l'ensemble des configurations d'une structure d'évènements, le calcul devient linéaire.

Nous nous intéressons à présent plus à l'aspect structurel. Le Chapitre 6 définit une généralisation des fonctions faiblement-convexes et faiblement-sans-pic en fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic respectivement. Ces fonctions servent à caractériser les graphes dont l'ensemble médian est connexe dans G^p , on montre que cette caractérisation permet de tester en temps polynomial si un graphe est G^p -connexe et que la G^p -connexité est fermée par produit cartésien, amalgames portés et rétractés. Ce résultat est une généralisation de la caractérisation de Bandelt et Chepoi [14] des graphes aux médians connexes (cas $p = 1$).

Le Chapitre 7 déduit de cette précédente caractérisation que certains graphes sont des graphes aux médians G^2 -connexes, notamment les graphes (faiblement) pontés, les graphes aux boules convexes, les graphes bucoliques et hypercellulaires, les graphes de Helly bipartis et les systèmes de benzénoïdes. Nous caractérisons également à l'aide de la caractérisation combinatoire de Bandelt et Chepoi [14] les graphes de Johnson partiels, et les demi-cubes partiels dont l'ensemble médian est connexe.

Enfin, le Chapitre 8 s'intéresse à l'aspect axiomatique de la fonction médian et montre que les axiomes (A), (B) et (C) sont suffisants pour caractériser la fonction médians dans les graphes modulaires aux médians G^2 -connexes, et qu'en ajoutant un axiome simple (T), on peut la caractériser dans les graphes aux médians connexes. On montre également que les graphes respectant la propriété d'appariement (définie dans [83] sous le nom de propriété d'intersection d'intervalles) forment une sous-classe propre des graphes de Helly bipartis. Nous donnons une caractérisation des graphes vérifiant la propriété d'appariement et montrons que sa reconnaissance est dans co-NP . Enfin, nous montrerons que les axiomes (A), (B) et (C) sont insuffisants pour caractériser la fonction médian sur le cycle de taille 6 et définirons de nouveaux axiomes pour y parvenir dans les systèmes de benzénoïdes.

Première partie

Préliminaires

1 Notions de théorie des graphes et de théorie métrique des graphes

Un *graphe* G est constitué d'un ensemble de *sommets* dans lequel certaines paires peuvent être en relation. Si il existe au moins une paire de sommets u, v qui sont en relation non symétrique, nous dirons que G est un graphe *orienté*. Dans la plupart des graphes étudiés toutes les relations seront symétriques, et nous dirons alors que la relation $(u, v) \Leftrightarrow (v, u)$ est une *arête* dont u et v sont les *extrémités* qui sont dites *incidentes* à (u, v) . Dans le cas orienté, nous dirons que la relation (u, v) est une *arête orientée* (ou un *arc*) dont u est la *source* et v la *cible*. Dans les deux cas la relation (u, v) sera notée uv . Si aucun sommet de G n'est en relation avec lui même, le graphe est dit *sans boucle*. Si le nombre de sommets de G est fini, alors G est dit *fini* et *infini* sinon. Dans ce travail, la plupart des graphes étudiés seront finis, sans boucle et sans arêtes multiples. Pour tout graphe G non orienté on notera $V(G)$ son ensemble de sommets et $E(G)$ son ensemble d'arêtes.

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe, si deux sommets u, v appartiennent à la même arête, on dira que u et v sont *adjacents* et on notera $u \sim v$, nous pourrions parfois noter $u \approx v$ le fait que u et v ne sont pas adjacents. De manière analogue, deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles ont une extrémité en commun. Si u est adjacent à v , on dira également que u est un *voisin* de v . Le nombre de voisins de v est appelé *degré* de v ,

On appellera *sous-graphe* de $G = (V(G), E(G))$, toute restriction $H = (V(H), E(H))$ de G à un ensemble de sommets, c'est à dire que H est un sous-graphe de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Lorsque H est un sous-graphe de G tel que deux sommets sont adjacents dans H ssi ils sont adjacents dans G , on dit que H est un sous-graphe *induit* de G .

1.1 Graphes usuels

Nous rappelons dans cette sous-section quelques graphes courants qui seront utilisés dans le manuscrit, une illustration de ces graphes est proposée en Figure 5.

Un *chemin* P_n est un graphe de n sommets $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dont les arêtes sont de la forme $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-1}u_n$. Nous pourrions alors noter P_n par (u_1, u_2, \dots, u_n) et dire que P_n est un chemin de u_1 à u_n ou un (u_1, u_n) -chemin, u_1 et u_n sont alors appelés les *extrémités* de P_n . La *taille* d'un chemin est égale à son nombre d'arêtes (i.e., à son nombre de sommets moins 1). Un ensemble de sommets X de G est *connexe* s'il existe un chemin dans G entre chaque paire de sommets de X . Si X est maximal (i.e., si on ajoute un sommet à X , il n'est plus connexe), on dit alors que X est une *composante connexe* de G . Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si il n'a qu'une seule composante connexe. On considèrera par défaut que les graphes étudiés sont connexes. Un chemin P_n ($n \geq 3$) auquel on a ajouté une arête u_1u_n contenant ses deux extrémités est un *cycle* C_n . La taille d'un cycle est égale à son nombre d'arêtes (i.e., à son nombre de sommets). On pourra parfois noter n -cycle un cycle de taille n . Nous pourrions appeler C_3 un *triangle*, C_4 un *carré* et C_6 un *hexagone*. On appelle un *arbre* un graphe connexe sans cycle.

Un *graphe complet* (ou une *clique*) est un graphe G dont tous les sommets sont deux à deux adjacents. Un graphe complet avec n sommets sera noté K_n . On remarque que K_3 est équivalent au triangle C_3 . À l'inverse, si tous les éléments d'un ensemble de sommets A sont deux à deux non adjacents alors on dira que A est un *stable* de G . Un graphe G est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux ensembles stables A et B , ce sont également les

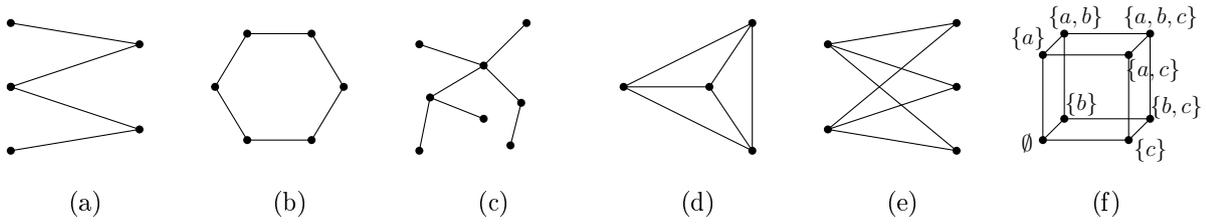


FIGURE 5 – (a) P_5 ; (b) un hexagone C_6 ; (c) un arbre; (d) K_4 ; (e) $K_{2,3}$; et (f) un cube Q_3 sur l'ensemble $\{a, b, c\}$

graphes dont tous les cycles sont pairs. Si chaque sommet de A est adjacent à tous les sommets de B alors G est dit *biparti complet* noté $K_{|A|,|B|}$ (avec $|X|$ le nombre d'éléments d'un ensemble X).

Pour toute paire d'ensemble A, B , on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la *différence symétrique* entre A et B . Un hypercube noté Q_k est un graphe ayant pour sommets tous les sous-ensembles d'un ensemble X quelconque de taille k . Et deux ensembles A et B sont adjacents dans Q_k ssi $|A\Delta B| = 1$. On observe que Q_k possède 2^k sommets et on dira que k est la *dimension* de Q_k . On pourra également l'appeler k -cube, et on pourra appeler Q_3 un *cube*. On remarque que Q_2 est équivalent au carré C_4 .

1.2 Notions de théorie des espaces métriques

Une *distance* sur un ensemble X est une application d qui, à toute paire d'éléments de X associe un nombre réel positif, telle que (1) deux éléments sont à distance nulle seulement si ils coïncident, (2) pour toute paire d'éléments u, v , $d(u, v) = d(v, u)$ et (3) d vérifie l'*inégalité triangulaire* $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ pour tout triplet u, v, w . Cette définition généralise la distance euclidienne qui est la distance la plus fréquemment utilisée, de nombreuses distances différentes sont cependant étudiées. Nous verrons essentiellement dans ce travail la distance dans les graphes et la distance associée à la norme ℓ_1 . Un *espace métrique* noté (X, d) est un ensemble X muni d'une distance $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Pour tout sous-ensemble de points Y d'un espace métrique (X, d) , on notera $d(x, Y) = \min_{y \in Y} \{d(x, y)\}$ la distance entre un point x de X et l'ensemble Y .

Définition 0.1.1. Une *géodésique* entre deux éléments p_1, p_2 d'un espace métrique X est un plus court chemin entre p_1 et p_2 .

Soit un sous-ensemble A d'un espace métrique X , A est dit *convexe* si il contient toutes les *géodésiques* de chaque paire d'éléments de A . Et A est dit *porté* si tout élément $x \notin A$ possède une *porte* x' dans A , c'est-à-dire un élément x' tel que pour tout sommet $z \in A$, il existe un plus court chemin entre x et z passant par x' .

Distance ℓ_1

Soient deux points u et v d'un espace métrique de dimension n ayant pour coordonnées $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, on définit la *distance* ℓ_1 (également appelée la distance

1. Notions de théorie des graphes et de théorie métrique des graphes

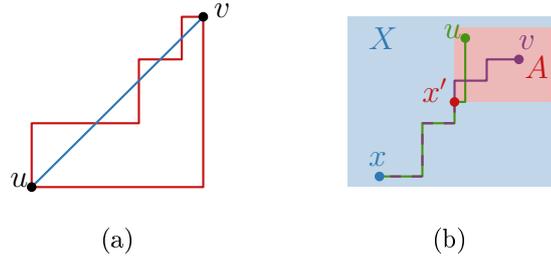


FIGURE 6 – (a) Trois géodésiques : deux en rouges dans la métrique ℓ_1 et un en bleu dans la métrique euclidienne ; (b) sous-ensemble A porté dans (X, d_1) et deux plus courts chemins entre x et deux sommets u et v de A passant par la porte x' de x sur A

de Manhattan) de la manière suivante :

$$d_1(u, v) = \sum_{i=1}^n |u_i - v_i|$$

(la distance euclidienne est définie par $d_2(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i - v_i|^2}$). On donne en Figure 6a deux plus courts chemins entre u et v dans la métrique ℓ_1 et en bleu l'unique plus court chemin dans la distance euclidienne entre u et v . La Figure 6b représente un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d_1) , x' est la porte de x sur A , on donne en vert un plus court chemin entre $u \in A$ et x et en violet entre $v \in A$ et x passant par x' .

Théorie métrique des graphes

Si un chemin P dans un graphe G entre deux sommets u et v est de taille minimale, on dit que P est un *plus court chemin* (ou *géodésique*) entre u et v . La *distance* $d_G(u, v)$ entre u et v est égale au nombre d'arêtes dans un plus court chemin de G entre u et v . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la distance d_G sera notée d . L'*intervalle* $I(u, v)$ entre deux sommets u et v est égal à l'ensemble des sommets appartenant à un plus court chemin entre u et v . De manière équivalente, on a :

$$I(u, v) = \{x : d(u, v) = d(u, x) + d(v, x)\}$$

Si $d(u, v) = k$, on dit que $I(u, v)$ est un *k-intervalle*. On remarque que la définition d'un intervalle est directement issu de l'inégalité triangulaire. On dit que u et v sont les *extrémités* de $I(u, v)$, et l'intervalle ouvert $I^\circ(u, v) = I(u, v) \setminus \{u, v\}$ désigne l'intervalle entre u et v auquel on a retiré les extrémités.

L'ensemble des voisins de v est noté $N(v)$ et dit *voisinage* de v . La *boule* de rayon p et de centre v $B_p(v)$ est l'ensemble des sommets x avec $d(v, x) \leq p$, on note que $B_1(v) = N(v)$. De manière similaire, le *p-voisinage* $B_p(A)$ d'un ensemble A de sommets est l'ensemble de sommets à distance au plus p de A .

Un sous-graphe induit H d'un graphe G est *isométrique* si pour toute paire de sommets u, v de H $d_H(u, v) = d_G(u, v)$. Trivialement, cette relation d'isométrie est transitive :

Lemme 0.1.1. *Si G'' est un sous-graphe isométrique de G' , et G' est un sous-graphe isométrique de G , alors G'' est également un sous-graphe isométrique de G .*

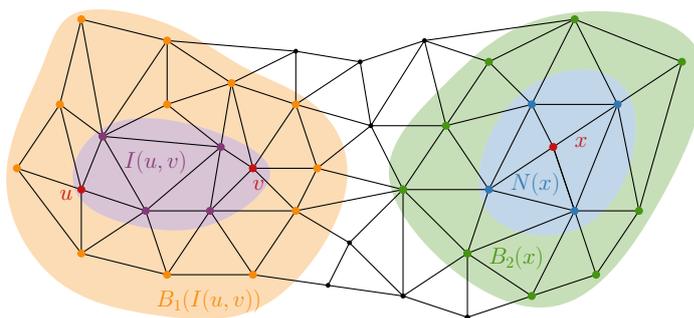


FIGURE 7 – En bleu, le voisinage de x ; en vert la boule de rayon 2 centrée sur x ; en violet le 3-intervalle $I(u, v)$; et en orange le 1-voisinage de $I(u, v)$

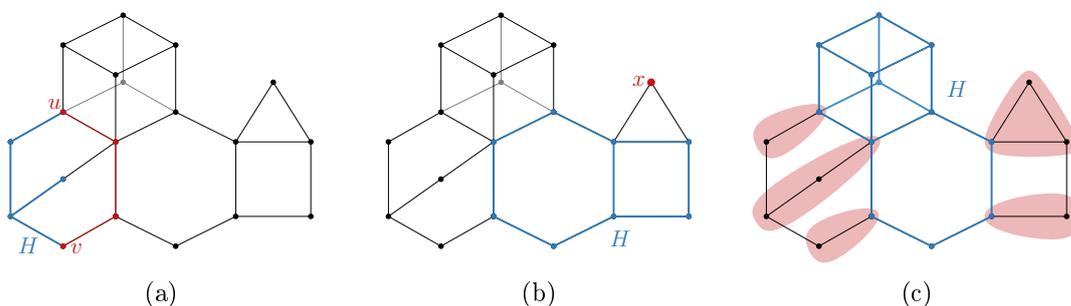


FIGURE 8 – (a) sous-graphe isométrique non convexe; (b) sous-graphe convexe non porté; (c) sous-graphe porté

Un *sous-graphe convexe* H d'un graphe G contient l'intervalle $I(u, v)$ dans le graphe initial de toute paire de sommets $u, v \in V(H)$. Par exemple le sous-graphe H de la Figure 8a n'est pas convexe car il existe un chemin entre u et v n'appartenant pas à H . En revanche, le sous-graphe H de la Figure 8b est convexe. Un *sous-graphe porté* H d'un graphe G est tel que tout sommet u appartenant à G possède une porte, i.e. un sommet de H appartenant à tous les intervalles entre u et chaque sommet de H (si u est dans H alors il est sa propre porte sur H). Par exemple dans la Figure 8b, le sommet x n'a pas de porte sur le sous-graphe H de G et H n'est donc pas porté. En revanche, le sous-graphe H de la Figure 8c est porté. Si H est un sous-graphe porté de G , alors l'ensemble des sommets de G qui ont $x \in H$ comme porte sur H est appelé la *fibres* de x sur H . On donne en rouge dans la Figure 8c les fibres de certains sommets de H .

Définition 0.1.2. On dit d'un sous-graphe H de G que c'est un *demi-espace* si H et $G \setminus H$ sont tous les deux convexes.

Il est connu que les sous-graphes portés sont convexes, que les sous-graphes convexes et les sous-graphes portés sont clos par intersection et que l'intersection d'un sous-graphe isométrique et d'un sous-graphe convexe de G est un sous-graphe isométrique de G .

Pour toute paire de sommets adjacents u, v d'un graphe G , on note W_{uv} l'ensemble des sommets de G qui sont plus proches de u que de v , W_{vu} l'ensemble des sommets de G qui sont plus proches de v que de u et W_{uv}^- l'ensemble des sommets de G à égale distance de u et de v .

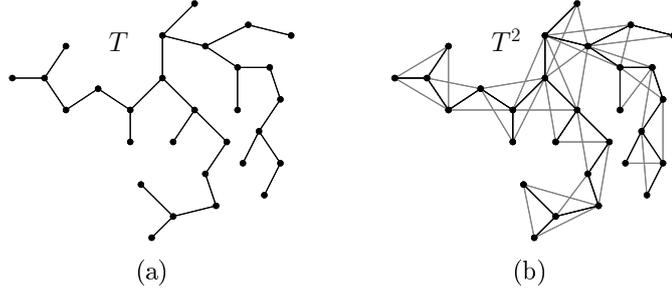


FIGURE 9 – La 2^{ème} puissance T^2 d'un arbre T .

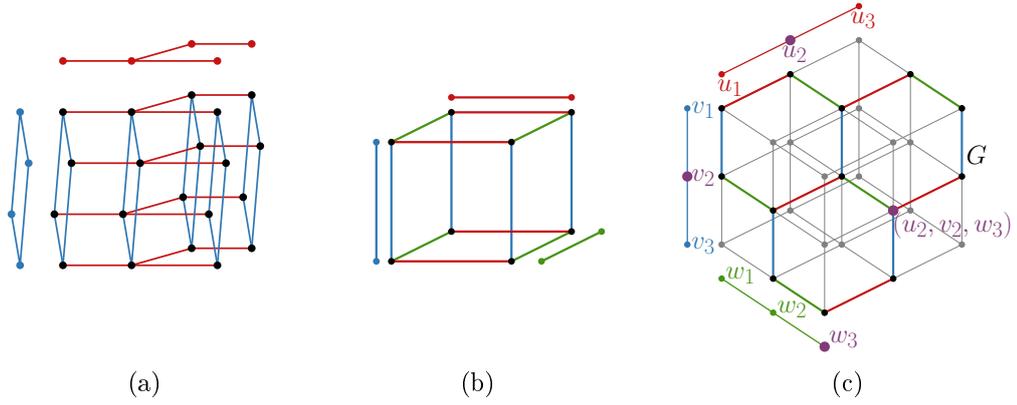


FIGURE 10 – (a) **Produit cartésien**; (b) $K_2 \square K_2 \square K_2$; (c) Plongement isométrique d'un graphe G dans le **produit cartésien** de trois P_3

1.3 Opération sur les graphes

On commence par donner la définition des **produits cartésiens** :

Définition 0.1.3. Étant donné une famille de graphes $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_n = (V_n, E_n)$ on définit le **produit cartésien** $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$ tel que $V(G) = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, \dots, u_n \in V_n\}$ et deux sommets de G (u_1, u_2, \dots, u_n) et (v_1, v_2, \dots, v_n) sont adjacents ssi il existe un indice j pour lequel u_j et v_j sont adjacents dans G_j et pour tout $i \neq j$, $u_i = v_i$ dans G_j (cf Figure 10a).

Une autre définition de l'hypercube Q_k est le **produit cartésien** de k graphes K_2 (cf Figure 10b).

On appelle la $p^{\text{ème}}$ **puissance** du graphe G , le graphe G^p tel que $V(G^p) = V(G)$, et $uv \in E(G^p)$ ssi $d_G(u, v) \leq p$.

On appelle un **plongement isométrique** d'un graphe $G = (V, E)$ dans $G' = (V', E')$, l'opération $\phi : G \rightarrow G'$ telle que pour tout $u, v \in V$, $d_G(u, v) = d_{G'}(\phi(u), \phi(v))$. On donne en Figure 10c le plongement d'un graphe G dans le **produit cartésien** de trois P_3 . Si il existe un plongement isométrique de G vers G' , on dira que G est **plongeable isométriquement** dans G' .

1.4 Quelques classes de graphes classiques de théorie métrique des graphes

Nous définissons ici les principales classes de graphes qui seront étudiées dans ce manuscrit.

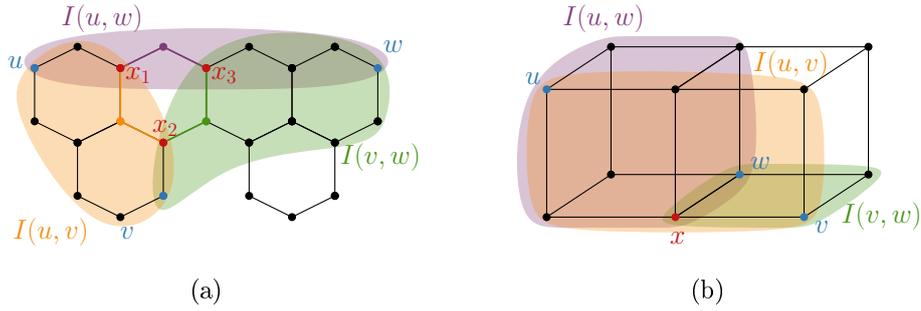


FIGURE 11 – (a) quasi-médian $x_1x_2x_3$ de u, v, w ; (b) médian x de u, v, w

Graphes faiblement modulaires

On commence par donner une définition des **triangles métriques** :

Définition 0.1.4. Un triplet de sommets x_1, x_2, x_3 d'un graphe forme un *triangle métrique* si les trois intervalles $I(x_1, x_2)$, $I(x_2, x_3)$ et $I(x_1, x_3)$ ne s'intersectent deux à deux que sur leur extrémité commune

Autrement dit $I(x_i, x_j) \cap I(x_i, x_\ell) = \{x_i\}$ pour $1 \leq i, j, \ell \leq 3$. Si $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_1, x_3) = k$, alors ce **triangle métrique** est *équilatéral de taille k* . Si pour tout sommet y dans l'intervalle entre x_i et x_j , $d(x_\ell, y) = k$, avec $1 \leq i, j, \ell \leq 3$, alors x_1, x_2, x_3 est dit *fortement équilatéral de taille k* . Un **triangle métrique** $x_1x_2x_3$ de G est un *quasi-médian* du triplet u, v, w si il respecte les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(u, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, v), \\ d(v, w) &= d(v, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, w), \\ d(w, u) &= d(w, x_3) + d(x_3, x_1) + d(x_1, u). \end{aligned}$$

On donne en Figure 11a un exemple de quasi-médian $x_1x_2x_3$ qui est également un **triangle métrique** équilatéral (mais pas fortement équilatéral) de taille 2. Si un quasi-médian est de taille zéro, c'est à dire si $x_1 = x_2 = x_3 = x$, alors on dit que x est le *médian* de u, v, w (cf Figure 11b). Tout triplet de sommets peut admettre plusieurs médians ou aucun.

Définition 0.1.5. Un graphe G est un *graphe faiblement modulaire* si pour chacun de ses sommets u sa fonction de distance d respecte les conditions du triangle et du quadrangle suivantes (cf Figure 12).

- (TC) *Condition du triangle* : Pour toute paire de sommets adjacents u, v à même distance k d'un sommet x , u et v ont un voisin commun y à distance $k - 1$ de x .
- (QC) *Condition du quadrangle* : Pour toute paire de sommets u, v à distance 2 l'un de l'autre et à même distance k d'un sommet x , u et v ont un voisin commun y à distance $k - 1$ de x .

Une autre définition des **graphes faiblement modulaires** est que leurs **triangles métriques** sont fortement équilatéraux. On dit qu'un graphe G est *maillé* si pour tout triplet de sommets u, v, w

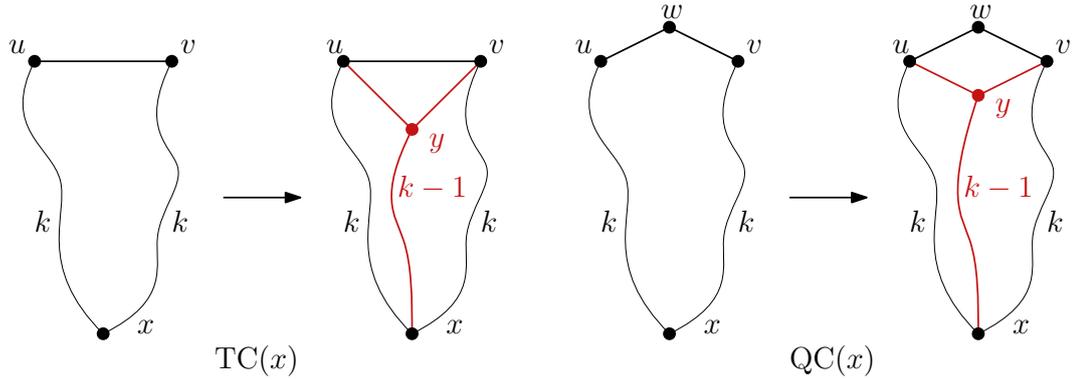


FIGURE 12 – Conditions du triangle (TC) et du quadrangle (QC)

avec $d(v, w) = 2$, v et w ont un voisin commun x tel que $2d(u, x) \leq d(u, v) + d(u, w)$. Les graphes maillés possèdent de nombreuses propriétés métriques intéressantes, nous en détaillerons quelques-unes plus tard dans ce manuscrit.

Définition 0.1.6. Un graphe G est un *graphe modulaire* si l'intersection des intervalles de tout triplet de ses sommets est non vide, i.e., $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w) \neq \emptyset$ pour tout $u, v, w \in V(G)$.

Les graphes modulaires sont exactement les graphes faiblement modulaires dont la taille des triangle métrique est 0.

Définition 0.1.7. Un graphe G est un *graphe médian* si pour tout triplet de sommets de G , $|I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)| = 1$ i.e., chaque triplet de sommets a un et un seul médian.

Trivialement les graphes médians sont modulaires. Les graphes médians peuvent être caractérisés de beaucoup de manières différentes et sont très étudiés en théorie métrique des graphes, théorie géométrique des groupes et théorie de la concurrence. Cette classe de graphe joue un rôle important dans ce travail, nous donnerons quelques-unes de ses propriétés en Section 3.

Les graphes pontés, faiblement pontés, triangulés, les graphes aux boules convexes, les graphes bucoliques, hypercellulaires, les graphes de Helly (bipartis), les graphes de bases des Δ -matroïdes seront également étudiés dans ce manuscrit, nous les définirons au moment opportun.

Systèmes de benzénoïdes

La grille hexagonale est une grille formée par un pavage du plan \mathbb{R}^2 en hexagones réguliers. Soit un cycle Z de la grille hexagonale, un système de benzénoïdes est un sous-graphe de la grille hexagonale induit par les sommets situés dans la région délimitée par Z . De manière équivalente, un système de benzénoïde est un graphe planaire fini connexe dans lequel chaque face interne est un hexagone de côté 1. Les systèmes de benzénoïdes jouent un rôle important en théorie des graphes moléculaires [65].

Lemme 0.1.2 ([44]). *Tout système de benzénoïdes peut être plongé isométriquement dans le produit cartésien de trois arbres $T_1 \square T_2 \square T_3$.*

On peut construire ces arbres de la manière suivante. On remarque que les côtés de la grille hexagonale n'ont que 3 directions possibles et on peut donc partitionner E en trois ensembles

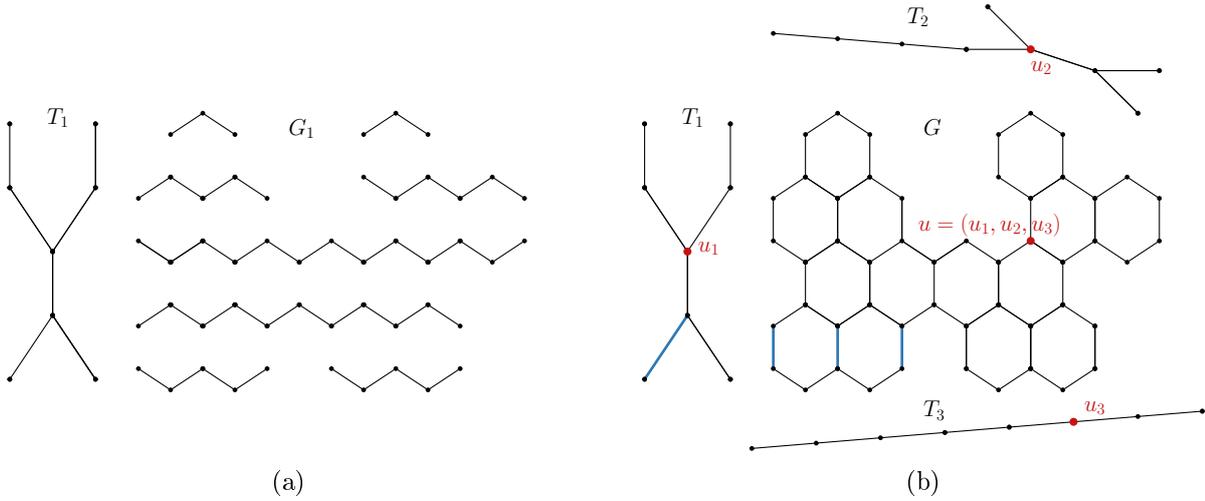


FIGURE 13 – (a) $G_1 = G \setminus E_1$; (b) Benzénoïde G plongeable isométriquement dans $T_1 \square T_2 \square T_3$

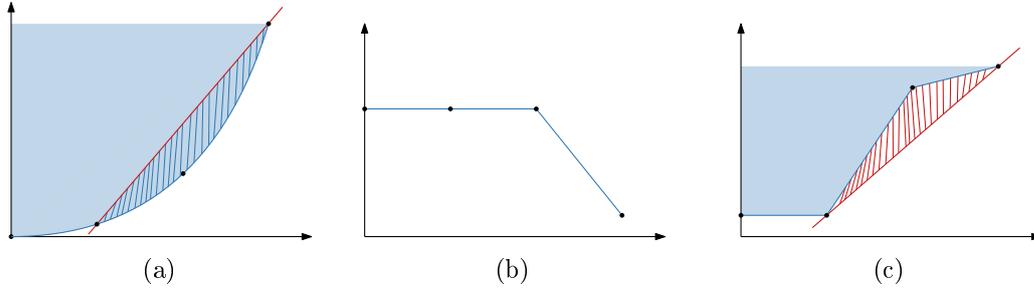


FIGURE 14 – ; (a) Fonction convexe (b) Fonction non sans-pic ; (c) Fonction sans-pic non convexe

E_1, E_2 et E_3 correspondant à leurs directions. Soit $G_i = (V, E \setminus E_i)$, le graphe obtenu en supprimant les arêtes E_i , pour $i = 1, 2, 3$. L'arbre T_i a pour sommets les composantes connexes de G_i et deux composantes connexes X et X' sont adjacentes dans T_i ssi il existe une arête uv de E_i ayant une extrémité dans X et l'autre dans X' (cf Figure 13a). Le plongement isométrique $\phi : V \rightarrow T_1 \square T_2 \square T_3$ associe tout sommet v de G à un triplet (v_1, v_2, v_3) avec v_i la composante connexe de G_i contenant v ($i = 1, 2, 3$) [44] (cf Figure 13b). La Figure 10c montre le plongement d'un système de benzénoïdes dans le produit de 3 P_3 .

2 Fonctions et ensemble médian

Nous considérerons dans ce manuscrit plusieurs types de fonction, essentiellement des fonctions réelles à une variable, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions réelles définies sur l'ensemble de sommets d'un graphe $G = (V, E)$, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, nous les appellerons alors *fonctions définies sur un graphe*. Et des fonctions qui à une séquence de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ associent un sous ensemble de V , $L : V^* \rightarrow 2^V$, nous les appellerons alors les *fonctions de consensus dans les graphes*. L'ensemble *minimisant* (ou l'ensemble des *minimums*) d'une fonction réelle f définie sur un ensemble X est l'ensemble $\arg \min(f)$ de tous les éléments de X minimisant f . On appelle un *minimum local*, un sommet v tel que $f(v) \leq f(w)$ pour tout w appartenant à $N(v)$. Une fonction f est appelée *unimodale* sur G si tous ses minimums locaux sont globaux.

Une description informelle des fonction convexes $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ avec X un ensemble ordonné, est la suivante : pour toute paire de points $a, b \in X$, le segment $[f(a), f(b)]$ est situé "au dessus" de la courbe (cf Figure 14a). Et donc pour tout $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{a-b}(x-a) + f(a)$ (le terme à droite de l'inégalité définissant l'équation de la droite passant par $f(a)$ et $f(b)$). Cette inégalité peut être réécrite en : $f(x) \leq (1 - \frac{x-a}{a-b})f(a) + \frac{x-a}{a-b}f(b)$. Nous nous intéresserons uniquement aux fonctions convexes dans les graphes. On définit la *condition de convexité* pour une paire de sommets u, v et une fonction $V \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante : Pour tout $x \in I(u, v)$,

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{d(u, x)}{d(u, v)}\right) f(u) + \frac{d(u, x)}{d(u, v)} f(v)$$

Une fonction définie sur un graphe G est dite *faiblement convexe* si pour toute paire de sommets u, v , il existe une (u, v) -*géodésique* dont chaque paire de sommets respecte la condition de convexité. Nous dirons qu'une fonction définie sur un graphe $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est *faiblement sans-pic* si pour toute paire de sommets u, v , il existe une (u, v) -*géodésique* $P = (w_0, w_1, \dots, w_p)$ telle que pour tout triplet de sommets w_i, w_j, w_k avec $0 \leq i < j < k \leq p$, $f(w_j) \leq \max\{f(w_i), f(w_k)\}$ et l'égalité est atteinte seulement si $f(w_i) = f(w_k)$. On donne en Figure 14b une fonction qui n'est pas sans-pic. Une fonction faiblement convexe est toujours faiblement sans-pic mais la réciproque n'est pas vraie (cf Figure 14c).

Un *profil* (ou une *fonction de poids*) π sur un ensemble X est une fonction $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ de support fini $\text{supp}(\pi) = \{x \in X : \pi(x) > 0\}$, $\pi(v)$ est noté le *poids* de v . Si $\pi(x) \in \mathbb{N}$ pour tous les éléments $x \in X$, alors on dit que le profil π est un profil *entier* et on pourra le représenter sous forme d'une séquence d'éléments (x_1, x_2, \dots, x_n) telle que le nombre d'occurrences de chaque $x \in \text{supp}(\pi)$ est de $\pi(x)$. Dans ce cas, pour deux profils π et ρ , nous pourrions noter $\pi\rho$ la concaténation des profils π et ρ et pour tout entier $k > 0$, π^k la $k^{\text{ème}}$ concaténation de π avec lui même. Si Y est un sous-ensemble de X muni d'une fonction de poids π , le *poids* $\pi(Y)$ de Y est égal à la somme des poids des sommets de Y , i.e., $\pi(Y) = \sum_{y \in Y} \pi(y)$.

Sur un espace métrique (X, d) muni d'une fonction de poids $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}$, la *somme totale des distances* pondérée par π d'un élément $u \in X$ est définie par :

$$F_\pi(u) = \sum_{x \in \text{supp}(\pi)} \pi(x)d(u, x)$$

Si un élément x minimise la somme totale des distances, on dira que x est un *médian* de X et l'ensemble $\text{Med}(\pi)$ de tous les médians est appelé *ensemble médian*. On appelle *problème du médian* le problème prenant en entrée un espace métrique (X, d) et un profil π et donnant en sortie l'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$.

2.1 L'ensemble médian d'un graphe

Nous définissons ici quelques notions qui nous seront utiles dans le cadre des graphes. Dans ce cas, la somme totale des distances est calculée en un sommet et on prend la distance usuelle dans les graphes. On appelle *fonction médian* notée $\text{Med}(\pi)$ la fonction prenant en entrée un profil π et donnant en sortie l'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$. On dit d'un sommet u que c'est un *médian local* pour un profil π si u est un minimum local de F_π , i.e., $F_\pi(u) \leq F_\pi(v)$ pour tout sommet $v \in N(u)$. On note qu'un médian local ne fait pas forcément partie de $\text{Med}(\pi)$.

Si pour tout profil π de G , le sous-graphe induit par $\text{Med}(\pi)$ est connexe dans G , alors on dira que G est un *graphe aux médians connexes*, et si il est connexe dans G^p , $p \geq 1$, que G est

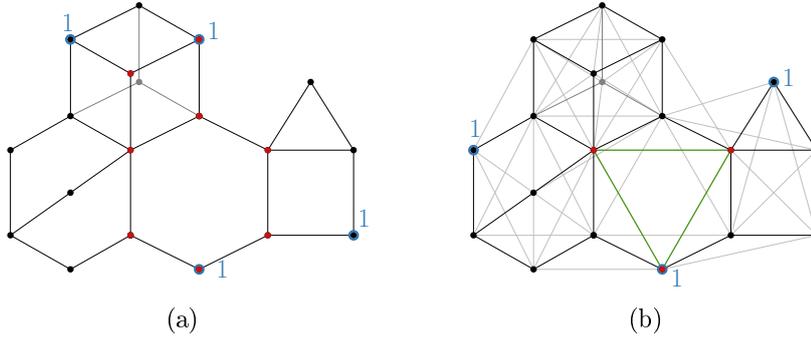


FIGURE 15 – En rouge, ensemble médian connexe en (a) et G^2 -connexe en (b) des profils indiqués en bleus

un *graphe aux médians G^p -connexes*. On donne en Figure 15a un profil pour lequel l'ensemble médian est connexe et un autre en Figure 15b pour lequel il est non-connexe mais connexe dans G^2 . Les poids non nuls sur les sommets sont indiqués en bleu et l'ensemble médian en rouge. Il en sera de même pour la plupart des figures représentant l'ensemble médian d'un profil.

Nous donnons maintenant quelques propriétés vérifiées par l'ensemble médian sur tous les graphes. Le lemme suivant se déduit de l'inégalité triangulaire :

Lemme 0.2.1. *Pour tout profil $\pi = (u, v)$ d'un graphe G , avec $u, v \in V(G)$, $\text{Med}(\pi) = I(u, v)$*

Le lemme suivant permet d'étudier les médians de concaténation de profils :

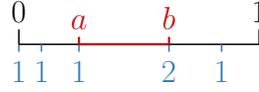
Lemme 0.2.2. *Pour toute paire de profils π et ρ , si $\text{Med}(\pi)$ intersecte $\text{Med}(\rho)$ alors $\text{Med}(\pi\rho) = \text{Med}(\pi) \cap \text{Med}(\rho)$.*

Démonstration. Soit un sommet u dans l'ensemble médian de π et dans l'ensemble médian de ρ . On a donc pour tout sommet v de G n'appartenant pas à au moins un des ensembles médians de π et ρ : $F_\pi(u) + F_\rho(u) < F_\pi(v) + F_\rho(v)$. Cette inégalité peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{supp}(\pi)} \pi(x)d(u, x) + \sum_{x \in \text{supp}(\rho)} \rho(x)d(u, x) &< \sum_{x \in \text{supp}(\pi)} \pi(x)d(v, x) + \sum_{x \in \text{supp}(\rho)} \rho(x)d(v, x) \\ \sum_{x \in \text{supp}(\pi) \cup \text{supp}(\rho)} (\pi(x) + \rho(x))d(u, x) &< \sum_{x \in \text{supp}(\pi) \cup \text{supp}(\rho)} (\pi(x) + \rho(x))d(v, x) \end{aligned}$$

Et nous obtenons donc bien $F_{\pi\rho}(u) < F_{\pi\rho}(v)$ si $u \in \text{Med}(\pi) \cap \text{Med}(\rho)$ et $v \notin \text{Med}(\pi) \cap \text{Med}(\rho)$. De manière similaire, si u et v appartiennent tous les deux à $\text{Med}(\pi) \cap \text{Med}(\rho)$ alors $F_{\pi\rho}(u) = F_{\pi\rho}(v)$ et donc $\text{Med}(\pi\rho) = \text{Med}(\pi) \cap \text{Med}(\rho)$. \square

Ces deux lemmes montrent que la fonction médian respecte les axiomes (B) et (C) que nous présenterons dans le Chapitre 8. Ils permettent également de montrer que pour tout $\pi = (u, v, w)$, avec $u, v, w \in V(G)$, si $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)$ est non vide alors cette intersection coïncide avec $\text{Med}(\pi)$ (on peut le voir facilement en étudiant le profil π^2), ce qui justifie d'appeler médian l'intersection des intervalles entre chaque paire de sommets d'un triplet.


 FIGURE 16 – Médian $[a, b]$ du segment $[0, 1]$ pour le profil indiqué en bleu

2.2 L'ensemble médian d'un segment

Nous montrons ici comment calculer le médian d'un ensemble pondéré de n points p_1, p_2, \dots, p_n du segment $S = [0, 1]$ plongé dans la métrique ℓ_1 . Ce résultat sera peu utilisé dans ce manuscrit mais les intuitions sont très similaires à celles présentées dans la suite du texte.

On peut déjà observer que tout segment de $[0, 1]$ est convexe et porté. Nous avons donc le lemme suivant :

Lemme 0.2.3. *Pour toute paire de points x, y de $[0, 1]$ telle que $]x, y[$ ne contient aucun point de poids positif, $F_\pi(y) - F_\pi(x) = d(x, y)(\pi([0, x]) - \pi([y, 1]))$.*

Démonstration. Comme $]x, y[$ ne contient aucun point de poids positif, on peut réécrire la somme totale des distances $F_\pi(y) = \sum_{q \in [0, x]} \pi(q)d(q, y) + \sum_{q \in [y, 1]} \pi(q)d(q, y)$. Pour tout point q de $[0, x]$, x est la porte de q sur $[x, 1]$, donc x est sur le plus court chemin entre q et y et $d(y, q) = d(y, x) + d(x, q)$. De même, pour tout point q de $[y, 1]$, $d(x, q) = d(x, y) + d(y, q)$. Donc $F_\pi(y) = \sum_{q \in [0, x]} \pi(q)(d(y, x) + d(x, q)) + \sum_{q \in [y, 1]} \pi(q)(d(x, q) - d(x, y)) = F_\pi(x) + d(x, y)(\pi([0, x]) - \pi([y, 1]))$. \square

Nous pouvons donc montrer le résultat suivant :

Proposition 0.2.4. *Soit un ensemble de points positifs P sur le segment $[0, 1]$, et soient $a \leq b$, les deux points de P (pas forcément distincts) tels que $\pi([0, a]) = \pi([b, 1]) \geq \frac{1}{2}\pi([0, 1])$. Alors $\text{Med}(\pi) = [a, b]$.*

Démonstration. Soient $x \leq y$, deux points de $[0, 1]$ tels que $[x, y]$ ne contient aucun point de poids positif. On suppose par l'absurde que $x < y \leq a$ et que x est médian. D'après le Lemme 0.2.3 $F_\pi(y) - F_\pi(x) = d(x, y)(\pi([0, x]) - \pi([y, 1]))$ et comme x, y à gauche de a , $\pi([0, x]) - \pi([y, 1]) < 0$ donc $F_\pi(x) > F_\pi(y)$ et donc x ne peut pas être médian. Le seul point de $[0, a]$ pouvant être médian est donc a . De manière similaire, le seul point de $[b, 1]$ pouvant être médian est b . Et d'après le Lemme 0.2.3 et la définition de $[a, b]$, si $a \leq x \leq y \leq b$, $F_\pi(y) - F_\pi(x) = 0$, donc la somme totale des distances est uniforme sur $[a, b]$ et ainsi $\text{Med}(\pi) = [a, b]$. \square

On donne en Figure 16 le médian $[a, b]$ en rouge d'un profil en bleu sur le segment $[0, 1]$. Cormen, Leiserson, Rivest et Stein donnent dans [54, Problem 9.2] un algorithme pour calculer le médian sur un segment en temps linéaire.

3 Quelques propriétés des graphes médians

Les graphes médians constituent une des classes de graphes les plus étudiée en théorie métrique des graphes, on rappelle une de leur définition : pour tout triplet de sommets u, v, w , l'intersection des intervalles de chaque paire de sommets du triplet est un singleton. Ils constituent ainsi une généralisation des arbres et des hypercubes.

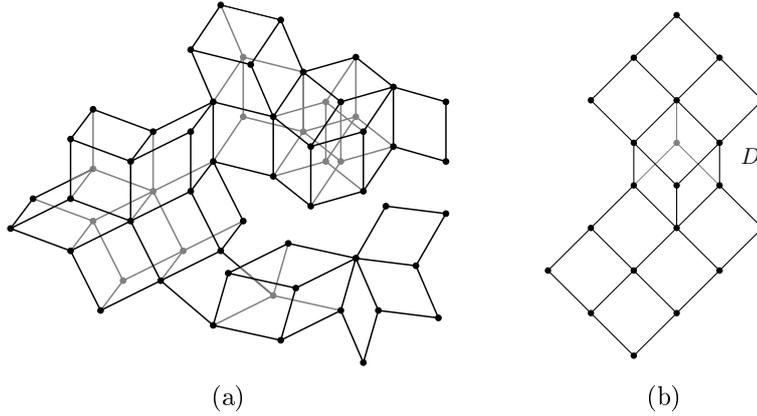


FIGURE 17 – Deux exemples de graphes médians

On donne deux exemples de graphes médians en Figure 17, on utilisera souvent le graphe D (Figure 17b) pour illustrer des notions ou des preuves, notamment dans le Chapitre 4.

Nous donnons dans ce chapitre quelques propriétés des graphes médians, certains de ces résultats font partie du folklore pour les chercheurs travaillant en théorie métrique des graphes, d'autres peuvent être trouvés dans les papiers [86, 88, 89] de Mulder.

Lemme 0.3.1. *Les graphes médians sont bipartis.*

Démonstration. Supposons qu'un graphe G possède un cycle impair C de taille $2k + 1$, $k \geq 1$ et prenons un triplet de sommets u, v, w de C tel que $v \sim w$ et $d(v, u) = d(w, u) = k$. On a donc $I(v, w) = \{v, w\}$ et comme $d(u, v) = d(u, w) = k$, v n'est pas dans $I(u, w)$ et w n'est pas dans $I(u, v)$ et donc $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w) = \emptyset$ et G n'est pas un graphe médian. \square

Le second lemme découle directement du fait que les graphes médians sont des graphes faiblement modulaires :

Lemme 0.3.2. *Les graphes médians respectent la propriété du quadrangle.*

Les graphes médians sont même exactement les graphes bipartis satisfaisant la condition du quadrangle et ne contenant pas de $K_{2,3}$ (en effet, les deux sommets de la partition de taille deux sont tous les deux dans l'intersection des trois intervalles entre les paires de sommets de la partition de taille 3).

On dit qu'un graphe G vérifie la condition du cube, si tout triplet de carrés de G s'intersectant deux à deux sur trois arêtes qui s'intersectent sur un sommet appartient à un unique cube (cf Figure 18).

Lemme 0.3.3. *Les graphes médians respectent la condition du cube.*

Démonstration. On prend trois carrés $xutv$, $utwy$, et $vtwz$ de G s'intersectant deux à deux sur 3 arêtes qui partagent un sommet (cf Figure 19a). On cherche le médian m de (x, y, z) . Les sommets x et y ne peuvent pas être adjacents car sinon on aurait un triangle uxy , ce qui est impossible car G est biparti (cf Figure 19b). Par symétrie, les sommets x, y, z sont donc deux à deux non-adjacents, on a alors $d(x, y) = d(x, z) = d(y, z) = 2$ et donc aucun sommet du triplet

3. Quelques propriétés des graphes médians

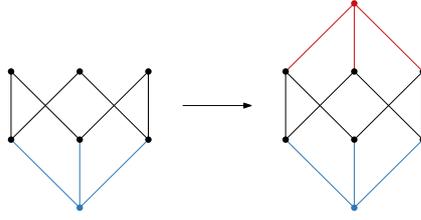


FIGURE 18 – Condition du cube

ne peut être dans l'intervalle entre les deux autres et ainsi $m \neq x, y, z$. De plus, x ne peut pas être adjacent à w car sinon les sommets t, u, x, w, y induisent un $K_{2,3}$ (cf Figure 19c), donc $w \notin I(x, y)$ et donc $w \neq m$. Par symétrie, $u, v, w \neq m$. Le médian r est donc un sommet adjacent à x, y, z , et m ne peut être à distance 2 de t car G est biparti, ni adjacent à t sinon le graphe contiendrait des $K_{2,3}$ (par exemple le graphe induit par les sommets t, u, v, x, m , cf Figure 19d). Le sommet m est donc à distance 3 de t et les sommets t, u, v, w, x, y, z, m induisent un cube, ce qui conclut la preuve. \square

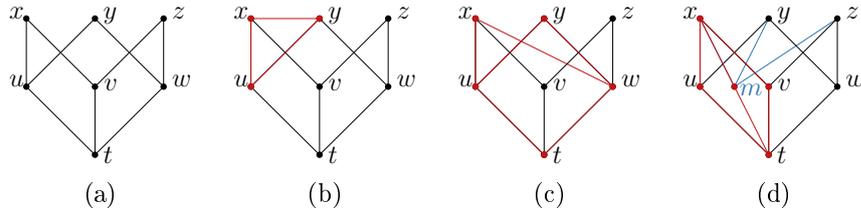


FIGURE 19 – Illustration de la preuve du Lemme 0.3.3

On rappelle le lemme suivant sur la convexité des sous-graphes des graphes médians :

Lemme 0.3.4 ([43]). *Un sous-graphe connexe H d'un **graphe médian** G est convexe ssi $I(u, v) \subseteq H$ pour toute paire de sommets u, v telle que $d_H(u, v) = 2$.*

Démonstration. On notera pour cette preuve $I_G(u, v)$ l'intervalle entre u et v dans un graphe G . Un sens est trivial. On prouve le second par récurrence sur $k = d_H(u, v)$, par hypothèse c'est vrai pour $k = 2$. On suppose maintenant que $I_H(u, v) = I_G(u, v)$ pour toutes les paires de sommets u, v telles que $d_H(u, v) \leq k$. Soient u, v tels que $d_H(u, v) = k + 1$ et $I_H(u, v) \neq I_G(u, v)$ et soit $x \sim u$ appartenant à un des plus courts chemins de H entre u et v . Si x n'appartient pas à $I_G(u, v)$, alors comme G et H sont bipartis, $d_G(x, v) = d_G(u, v) + 1$ et $I_G(u, v) \subseteq I_G(x, v)$. Puisque $I_G(u, v) \subseteq I_G(x, v) \subseteq I_H(x, v) \subseteq V(H)$, on a $d_G(u, v) = d_H(u, v)$. Par conséquent, $k = d_H(x, v) = d_G(x, v) = d_G(u, v) + 1 = d_H(u, v) + 1 = k + 2$, ce qui est une contradiction.

Par conséquent, on a $d_G(u, v) = d_H(u, v) = k + 1$ et $x \in I_H(u, v) \subseteq I_G(u, v)$. Soit un voisin y de u tel que $y \in I_G(u, v) \setminus I_H(u, v)$. Si $y \in H$, alors comme $d_G(y, v) = k$, $I_H(y, v) = I_G(y, v)$ et donc $y \in I_H(u, v)$. Le sommet y n'appartient donc pas à H . On a $d_G(y, v) = k = d_G(x, v)$ donc d'après la condition du quadrangle, il existe un sommet z adjacent à x et y à distance $k - 1$ de v dans G . comme $z \in I_G(x, v)$, z est dans H (cf Figure 20), nous avons donc deux sommets u, z à distance 2 dans G tels que $I_G(u, z)$ n'est pas inclus dans H , ce qui conclut la preuve. \square

Le lemme qui suit montre l'équivalence entre le fait qu'un sous-graphe est porté et sa convexité.

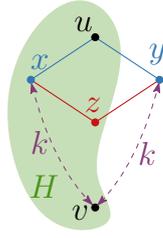


FIGURE 20 – Illustration de la seconde partie de la preuve du Lemme 0.3.4

Lemme 0.3.5. *Un sous-graphe H d'un **graphe médian** G est convexe ssi il est porté.*

Démonstration. Un sens est couvert par le fait que tout sous-ensemble porté d'un espace métrique est convexe. On montre donc la réciproque, soit un sous-graphe convexe H d'un **graphe médian** G . Soit un sommet $x \notin H$ et x' , un des sommets de H minimisant la distance à x . Soit y un sommet quelconque de H et m le médian du triplet x, x', y . Comme $m \in I(y, x')$ et H est convexe, $m \in H$. Et comme $m \in I(x, x')$, d'après le choix de x' , $m = x'$. Et donc $x' \in I(x, y)$ pour tout y de H , i.e., x' est la porte de x sur H . \square

Deux arêtes uv et $u'v'$ de G sont en relation Θ_0 si $uvv'u'$ est un carré dont uv et $u'v'$ sont deux arêtes opposées, on notera alors $uv\Theta_0u'v'$. On appelle Θ la fermeture réflexive ($e\Theta e$ pour toute arête e) et transitive (si $e_1\Theta e_2$ et $e_2\Theta e_3$ alors $e_1\Theta e_3$) de Θ_0 et on note E_1, E_2, \dots, E_q les classes d'équivalence de Θ que nous appellerons les Θ -classes (cf Figure 21a). Si on supprime toutes les arêtes de la Θ -class E_i , on obtient le graphe $G_i = (V, E \setminus E_i)$ constitué de deux composantes connexes, H'_i et H''_i (cf Figure 21b).

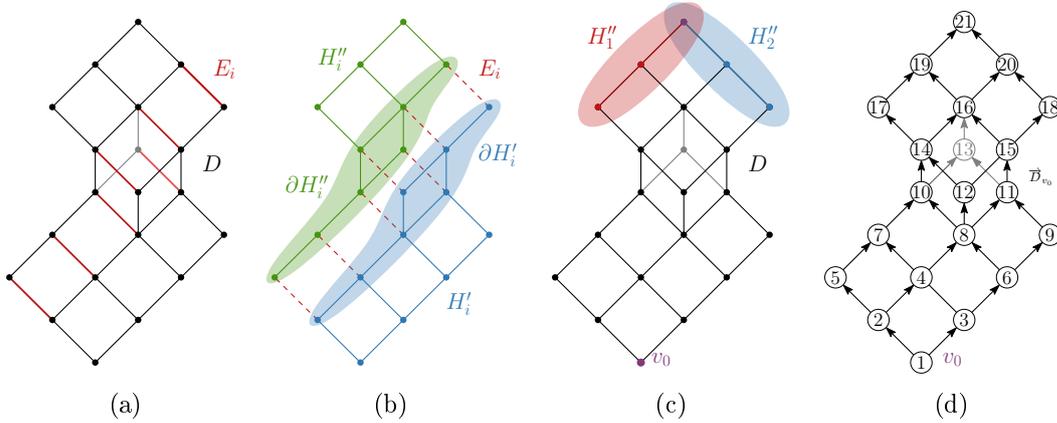


FIGURE 21 – (a) La Θ -class E_i en rouge ; (b) Demi-espaces H''_i et H'_i et leur frontière respectives $\partial H''_i$ et $\partial H'_i$; (c) Les deux demi-espaces périphériques H''_1 et H''_2 maximisant la distance à v_0 ; (d) Orientation selon v_0

Lemme 0.3.6. [88] *Pour toute Θ -class E_i d'un **graphe médian** G , les deux composantes H'_i et H''_i du graphe $G_i = (V, E \setminus E_i)$ sont des **demi-espaces** de G . Et pour toute arête uv telle que $u \in H'_i$, $v \in H''_i$, $W_{uv} = H'_i$ et $W_{vu} = H''_i$.*

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que les sous-graphes induits par W_{uv} sont convexas :

3. Quelques propriétés des graphes médians

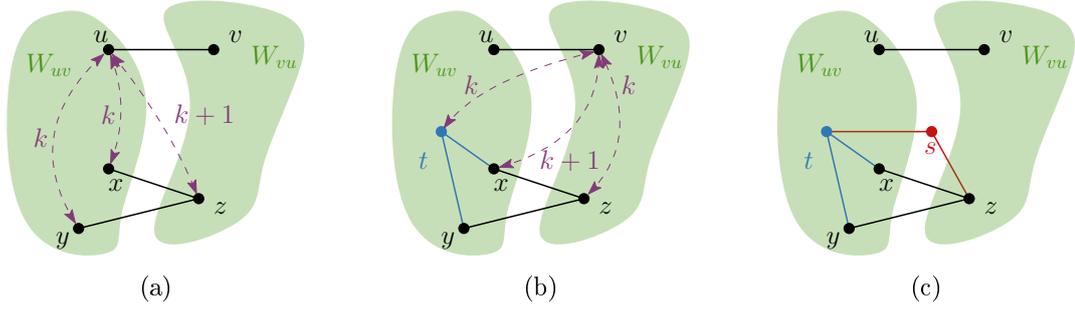


FIGURE 22 – Illustration de la preuve de l’Affirmation 0.3.7

Affirmation 0.3.7. *Pour toute arête uv d’un **graphe médian** G , l’ensemble W_{uv} est convexe.*

Démonstration. Comme W_{uv} est un sous-graphe connexe, nous utilisons le Lemme 0.3.4. Soient deux sommets $x, y \in W_{uv}$ ayant un voisin commun z n’appartenant pas à W_{uv} . Comme $u \sim v$, $d(x, u) = k = d(x, v) - 1$ et $d(y, u) = k = d(y, v) - 1$. Comme G est biparti, $z \in W_{vu}$ et donc comme $z \sim x$, $d(z, u) = d(x, u) + 1 = k + 1$. On applique (QC) à x, y, z, u (cf Figure 22a) et on obtient un sommet $t \sim x, y$ à distance $k - 1$ de u . Comme $t \sim x$ et G est biparti, $d(t, v) = k$ et on applique (QC) à t, x, z, v (cf Figure 22b) pour obtenir un sommet $s \sim t, z$ et t, s, x, y, z induisent alors un $K_{2,3}$ (cf Figure 22c). \square

Nous lions maintenant W_{uv} avec les Θ -classes. Soit Ψ la relation binaire sur les arêtes d’un **graphe médian** G : pour deux arêtes uv et xy , on note $uv\Psi xy$ ssi $x \in W_{uv}$ et $y \in W_{vu}$.

Affirmation 0.3.8. *La relation binaire Ψ est sur les arêtes d’un **graphe médian** G une relation d’équivalence coïncidant avec Θ .*

Démonstration. Trivialement, la relation Ψ est réflexive et symétrique, il reste à prouver que Ψ est transitive, pour cela il nous suffit de montrer que si $uv\Psi xy$, alors $W(u, v) = W(x, y)$. On procède par l’absurde et on suppose qu’il existe un sommet $z \in W(u, v) \setminus W(x, y)$. Ceci implique que $z \in W(y, x)$, i.e., $y \in I(x, z)$. Comme $x, z \in W(u, v)$ et $y \in W(v, u)$, ceci contredit la convexité de $W(u, v)$. Par conséquent, Ψ est une relation d’équivalence.

Il nous reste à montrer que $\Theta = \Psi$. Trivialement, $\Theta_0 \subseteq \Psi$, et comme Θ est la fermeture transitive de Θ_0 , on en déduit que $\Theta \subseteq \Psi$. Pour montrer l’inclusion réciproque $\Psi \subseteq \Theta$, on prend deux arêtes uv et xy telles que $uv\Psi xy$. Nous procédons par récurrence sur $k = d(u, x) = d(v, y)$. Soit x' un voisin de x dans $I(x, u) \subseteq W(u, v)$. Alors $d(x', v) = d(y, v) = k$ et $d(x, v) = k + 1$. D’après (QC), il existe un sommet $y' \sim x', y$ à distance $k - 1$ de v . Comme $y' \in I(y, v) \subseteq W(v, u)$, nous en concluons que $uv\Psi x'y'$. Comme $d(u, x') = d(v, y') = k - 1$, par hypothèse de récurrence $uv\Theta x'y'$. Comme $x'y'$ et xy sont les arêtes opposées d’un carré, $x'y'\Theta_0 xy$, et ainsi $uv\Theta xy$. \square

Ceci conclut la preuve du Lemme 0.3.6. \square

On rappelle que comme les **demi-espaces** sont convexes, d’après le Lemme 0.3.5 ils sont également portés.

D’après [55], G est un *cube partiel* (i.e., peut être plongé isométriquement dans un hypercube) ssi G est biparti et W_{uv} est convexe pour toute arête uv de G . Nous obtenons par conséquent le corollaire suivant :

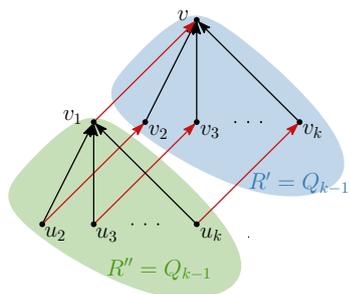


FIGURE 23 – Illustration de la preuve du Lemme 0.3.11

Corollaire 0.3.9. *Tout **graphe médian** G peut être plongé isométriquement dans un hypercube de dimension égale au nombre de Θ -classes de G noté q .*

Lemme 0.3.10. *Tout sous-graphe convexe S de G est l'intersection de tous les **demi-espaces** contenant S .*

Démonstration. Soit un ensemble convexe S de G et soit l'intersection S' de tous les **demi-espaces** contenant S . Si S est un sous-ensemble propre de S' , comme S' est convexe (et donc connexe), on peut trouver deux sommets adjacents $u \in S$ et $v \in S' \setminus S$. On suppose que $uv \in E_i$, disons $u \in H'_i$ et $v \in H''_i$. D'après le Lemme 0.3.6, $H'_i = W_{uv}$ et $H''_i = W_{vu}$. Comme G est biparti et S est convexe, tous les sommets de S sont plus proches de u que de v . Par conséquent, $S \subset W_{uv} = H'_i$. Comme $v \notin H'_i$, ceci contredit la définition de S' . \square

Deux Θ -classes E_i et E_j se croisent ssi il existe un carré $uvv'u'$ tel que $uv, u'v' \in E_i$ et $uu', vv' \in E_j$, ce qui est équivalent à dire que chaque **demi-espace** de la paire $\{H'_i, H''_i\}$ intersecte chaque **demi-espace** de la paire $\{H'_j, H''_j\}$. Dans le cas contraire, on dit que E_i et E_j sont des classes *laminaires*.

Lemme 0.3.11. *Pour tout sommet v d'un **graphe médian** G , toutes Θ -classes E_1, E_2, \dots, E_k de G , les arêtes incidentes à v , $vv_1 \in E_1, vv_2 \in E_2, \dots, vv_k \in E_k$ appartiennent à un cube de G ssi pour tout i, j , les Θ -classes E_i et E_j se croisent. Si un tel cube existe, il est unique.*

Démonstration. Une direction est triviale, on considère maintenant un sommet v et ses voisins v_1, v_2, \dots, v_k tels que pour tous les $1 \leq i, j \leq k$, les Θ -classes respectives E_i et E_j de vv_i et vv_j se croisent. Comme tous les cubes de G sont localement convexes, ils sont convexes et portés, si on prouve que v et tout sous-ensemble de k' voisins de v appartient à un cube de dimension k' , alors ce k' -cube est unique.

On montre par récurrence sur k qu'il existe un cube Q contenant v, v_1, v_2, \dots, v_k . Si $k = 2$, on suppose sans perte de généralité que $v \in H''_1 \cap H''_2$. Comme E_1 et E_2 se croisent, il existe $u \in H'_1 \cap H'_2$. On observe que v_1 et v_2 sont les portes respectives de v sur H'_1 et H'_2 . Par conséquent, $d(u, v_1) = d(u, v_2) = d(u, v) - 1$ et d'après (QC), il existe $v' \sim v_1, v_2$. Ainsi, il existe bien un carré $vv_1v'v_2$.

On suppose maintenant que l'affirmation est vraie pour tout $k' < k$. En appliquant le lemme pour $k = 2$ à v_1, v_i , pour tout $1 < i \leq k$, nous savons qu'il existe $u_i \sim v_1, v_i$. Par hypothèse de récurrence, il existe un $(k-1)$ -cube R' contenant v, v_2, \dots, v_k et un $(k-1)$ -cube R'' contenant v_1, u_2, \dots, u_k (cf Figure 23). Nous affirmons que $R' \cup R''$ est un k -cube de G . Pour tout sommet v_i ,

3. Quelques propriétés des graphes médians

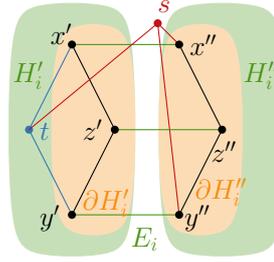


FIGURE 24 – Illustration de la preuve du Lemme 0.3.12

$i = 2, \dots, k$, comme u_i est un voisin de v_i , par hypothèse de récurrence, il existe un cube contenant u_i et les $k - 2$ voisins de v_i dans R' distincts de v . Ceci implique qu'il existe un isomorphisme entre les faces de R'' contenant u_i et ne contenant pas v_1 et les faces de R' contenant v_i et ne contenant pas v . Comme R' et R'' sont convexes, ceci définit un isomorphisme entre R' et R'' qui associe chaque sommet de R' à leur voisin dans R'' . Donc $R' \cup R''$ définit un k -cube de G , ce qui conclut la preuve. \square

La frontière $\partial H'_i$ d'un demi-espace H'_i est le sous-graphe induit par tous les sommets v' de H'_i ayant un voisin v'' dans H''_i (cf Figure 21b). Un demi-espace H'_i de G est *périphérique* si $\partial H'_i = H'_i$ (cf Figure 21c).

Lemme 0.3.12. [88] *Pour toute Θ -classes E_i d'un graphe médian G , $\partial H'_i$ et $\partial H''_i$ sont isomorphes et portées.*

Démonstration. L'Affirmation 0.3.8 implique que les frontières $\partial H'_i$ et $\partial H''_i$ sont des sous-graphes connexes de G . D'après le Lemme 0.3.4, il suffit donc de montrer qu'elles sont convexes pour toute paire de sommets $x', y' \in \partial H'_i$ ayant un voisin commun $z' \in \partial H'_i$. Soient les voisins respectifs x'', y'', z'' des sommets x', y', z' dans $\partial H''_i$ (ils sont uniques car H''_i est porté), d'après l'Affirmation 0.3.7, $z'' \sim x'', y''$. On choisit arbitrairement un voisin commun t de x', y' différent de z' . Comme H'_i est convexe, t appartient à H'_i . D'après la condition du cube, il existe un sommet s adjacent à t, x'', y'' (cf Figure 24). Mais alors puisque $x'', y'' \in H''_i$ et H''_i est convexe, $s \in H''_i$, et donc $t \in \partial H'_i$, ce qui prouve que les frontières sont convexes et donc portées.

Comme $\partial H'_i$ et $\partial H''_i$ sont convexes, tout sommet de $\partial H'_i$ est adjacent à exactement un sommet de $\partial H''_i$ et vice-versa. Ceci montre une bijection entre $\partial H'_i$ et $\partial H''_i$. Si $u', v' \in \partial H'_i$ sont respectivement adjacents à $u'', v'' \in \partial H''_i$, et si u' et v' sont adjacents, alors u'' et v'' doivent également être adjacents. En effet, comme G est biparti, si $u'' \approx v''$, alors $d(u'', v'') = 3$ et donc u', v' appartiennent à $I(u'', v'')$, ce qui contredit la convexité de $\partial H''_i$. Ceci montre que $\partial H'_i$ et $\partial H''_i$ sont des sous-graphes isomorphes de G . \square

On suppose à partir de maintenant que G est enraciné en un sommet arbitrairement choisi v_0 que l'on appellera la *racine*. Pour toute Θ -classes E_i , on suppose que v_0 appartient au demi-espace H'_i . Comme H''_i est porté, la porte de v_0 dans H''_i est le seul sommet de H''_i à distance $d(v_0, H''_i)$ de v_0 . Comme les graphes médians sont bipartis, le choix de v_0 définit une orientation des arêtes de G : $uv \in E$ est orientée de u à v (notation \vec{uv}) si $d(v_0, u) < d(v_0, v)$. Soit \vec{G}_{v_0} l'orientation du graphe enraciné en v_0 (cf Figure 21d).

Lemme 0.3.13 ([89]). *Tout demi-espace H''_i d'un graphe médian maximisant la distance $d(v_0, H''_i)$ est périphérique.*

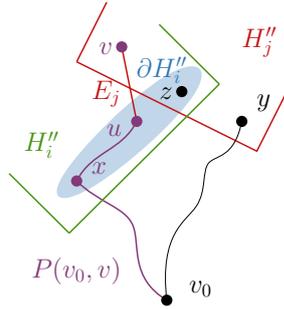


FIGURE 25 – Illustration de la preuve du Lemme 0.3.13

Démonstration. Soit la porte x de v_0 dans un **demi-espace** H_i'' maximisant $d(v_0, H_i'')$. Alors $x \in \partial H_i''$ et $d(v_0, x) = d(v_0, H_i'')$. On suppose par l'absurde que $\partial H_i''$ est un sous-graphe propre de H_i'' . On choisit arbitrairement un sommet v dans $H_i'' \setminus \partial H_i''$ adjacent à un sommet u de $\partial H_i''$ et minimisant la distance à v_0 dans $H_i'' \setminus \partial H_i''$ (un tel sommet existe car H_i'' est connexe). Soit E_j la Θ -classe de l'arête uv . Comme u est la porte de v dans $\partial H_i''$, $u \in I(x, v)$. Comme $x \in I(v_0, v)$, on en déduit qu'il existe un plus court (v_0, v) -chemin $P(v_0, v)$ passant par x et u . Par conséquent, $v_0, u \in H_j'$ et $v \in H_j''$.

Soit y la porte de v_0 dans H_j'' . Trivialement, $y \in \partial H_j''$ et $d(v_0, y) = d(v_0, H_j'')$. H_i'' étant le **demi-espace** le plus éloigné de v_0 , $d(v_0, y) \leq d(v_0, x)$. Comme x est la porte de v_0 dans H_i'' , on en déduit que y n'appartient pas à H_i'' , y appartient donc à H_i' . Soit la porte z de y dans H_i'' (et $\partial H_i''$), on observe que $z \in I(y, v)$ (cf Figure 25). Comme u est la porte de v dans $\partial H_i''$, $u \in I(v, z)$. Par conséquent, $u \in I(v, y)$ et appartient à H_j'' car H_j'' est convexe, ce qui est impossible et conclut la preuve. \square

Pour tout sommet v , on appelle *prédécesseurs* de v les sommets u tels que \vec{uv} est un arc de \vec{G}_{v_0} , i.e., l'ensemble des voisins de v dans l'intervalle $I(v_0, v)$. Un graphe G vérifie la *propriété du cube descendant* si l'ensemble des prédécesseurs de tout sommet v appartient à un unique cube de G .

Lemme 0.3.14 ([88]). *Tout **graphe médian** satisfait la propriété du cube descendant.*

Démonstration. Soit un sommet v et u_1, u_2, \dots, u_d les parents de v , i.e., les voisins de v dans $I(v_0, v)$. D'après la condition du quadrangle, cela implique que pour toute paire de sommets distincts u_i, u_j , $1 \leq i, j \leq d$, il existe un sommet $u_{i,j}$ adjacent à u_i et u_j . Ce qui implique que les Θ -classes de vu_i et vu_j se croisent et donc d'après le Lemme 0.3.11, que v, u_1, u_2, \dots, u_d appartiennent à un même cube. \square

On note $\dim(G)$ la *dimension* d'un **graphe médian** G , qui est égale à celle de son plus grand hypercube induit. Le corollaire suivant découle directement du Lemme 0.3.14 et nous donne une borne supérieure sur le nombre d'arêtes des **graphes médians** :

Corollaire 0.3.15. *Si un **graphe médian** G a pour dimension d alors $m \leq dn \leq n \log n$.*

Nous nous servons de ces propriétés des **graphes médians** par la suite, notamment dans le Chapitre 1 pour calculer les Θ -classes et dans le Chapitre 2 pour calculer l'ensemble médian.

Deuxième partie

Problème du médian dans les graphes
médiants et autres structures
apparentées

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'aspect algorithmique de la fonction médian. L'apport principal de cette partie est le calcul en temps linéaire de l'ensemble médian dans les graphes médians. Les graphes médians sont une des classes de graphes les plus étudiées en théorie métrique des graphes et possèdent de nombreuses propriétés structurelles. L'une des plus fondamentales est que leurs arêtes sont organisées en classes d'équivalences que nous appelons Θ -classes [55]. Nous montrerons comment calculer ces Θ -classes en temps linéaire, ce résultat nous sera utile dans le calcul de l'ensemble médian et a d'autres applications algorithmiques dans les graphes médians. Nous présenterons également des résultats calculant l'ensemble médian dans des structures apparentées aux graphes médians. L'ensemble des résultats de cette partie, à l'exception du Chapitre 3, ont été présentés dans [28].

Dans le Chapitre 1, nous montrons comment calculer les Θ -classes en temps linéaire par rapport au nombre d'arêtes des graphes médians. Nous présentons tout d'abord un algorithme utilisant le parcours en largeur (BFS) pour calculer les Θ -classes des graphes médians de dimension fixée en temps linéaire. Ensuite, nous utiliserons un raffinement du BFS, le LexBFS qui nous permet d'étendre ce résultat aux graphes médians de dimension quelconque. Cette généralisation est permise par le fait que tous les ordonnancements par LexBFS des graphes médians respectent une propriété structurelle appelée la propriété des parents qui nous permet de prouver le résultat suivant :

Théorème (1.2.5). Les Θ -classes d'un graphe médian G avec m arêtes peuvent être calculées en temps $O(m)$.

Nous donnons également une borne supérieure sur le nombre des Θ -classes en fonction de la dimension et du nombre de sommets du graphe.

Dans le Chapitre 2, nous utilisons le calcul efficace des Θ -classes associé à une règle de majorité trouvée par Bandelt et Barthélémy [12] et à l'unimodalité de la somme totale des distances dans les graphes médians prouvée par Soltan et Chepoi [105]. Ces résultats précédents et une séquence de sous graphes particuliers appelée épluchage périphérique nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème (2.3.4). L'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ d'un graphe médian G avec m arêtes peut être calculé en temps $O(m)$.

Bandelt et Barthelemy [12] ont également montré que l'ensemble médian d'un graphe médian coïncide avec l'intervalle entre une de ses paires diamétrales, ce qui permet de réduire la taille de la description de l'ensemble médian. Nous présentons un algorithme qui permet de calculer une telle paire diamétrale. Ensuite, nous montrons comment l'épluchage périphérique et le calcul des Θ -classes peut nous permettre de calculer l'indice de Wiener en temps linéaire ainsi que la matrice des distances en temps quadratique.

Le Chapitre 3 utilise le calcul rapide des Θ -classes du Chapitre 1 et l'épluchage périphérique du Chapitre 2 pour calculer le p moments en chaque sommet u d'un graphe médian, c'est à dire la somme totale pondérée des distances à la puissance p entre u et tous les sommets du graphe.

Nous avons déjà vu qu'en plongeant dans la métrique ℓ_1 les complexes cubiques associés aux graphes médians, nous obtenons les complexes cubiques ℓ_1 des graphes médians. Dans le Chapitre 4 nous montrons comment exploiter le résultat précédent pour en déduire l'ensemble médian d'un ensemble de terminaux (i.e., des points du complexe avec un poids non nul) dans

les ℓ_1 -complexes cubiques des graphes médians \mathcal{G} . Une des difficulté de ce problème est lié à l'encodage de l'entrée et de la sortie. Le complexe cubique sera représenté par son 1-squelette, soit le graphe médian correspondant et nous montrerons comment encoder les terminaux. Pour la sortie, d'après Van de Vel [110] l'ensemble médian est un sous-complexe dont le 1-squelette est également un graphe médian, nous donnerons en sortie ce 1-squelette et les coordonnées d'une de ses paires diamétrales. L'algorithme combine le calcul de l'ensemble médian dans les graphes médians et sur le segment $[0, 1]$ déjà vu dans les préliminaires. Nous en déduisons ensuite le résultat qui suit :

Théorème (4.1.1). Soit un graphe médian G avec m arêtes et soit P un ensemble fini de terminaux de \mathcal{G} décrits par une entrée de taille δ . Le 1-squelette \widehat{M} de $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ peut être calculé en temps linéaire $O(m + \delta)$.

Le Chapitre 5 s'intéresse au problème du médian dans les structures d'évènements. Il existe une correspondance directe entre les graphes médians pointés et les formules 2-SAT sans variables triviales ou équivalentes ainsi qu'avec les structures d'évènements. Nous commençons par établir une correspondance entre les formules 2-SAT sans variables triviales ou équivalentes et les structures d'évènements. Ensuite, nous montrons comment calculer une paire diamétrale de l'ensemble des configurations médianes des configurations d'une structure d'évènements. Nous montrons également que si les configurations sont données de manière implicite, c'est à dire uniquement par la description de la structure d'évènements, alors calculer l'ensemble médian devient #P-difficile.

Chapitre 1

Calcul des Θ -classes

Une des propriétés fondamentales des [graphes médians](#) est que leurs arêtes sont organisées sous forme de classes d'équivalence que l'on appelle Θ -classes. Les Θ -classes sont les classes d'équivalences de la relation Θ , qui est la fermeture réflexive et transitive de la relation Θ_0 . Deux arêtes e et e' sont en relation Θ_0 si ce sont les arêtes opposées d'un carré du graphe. Dans cette section nous présentons un algorithme calculant les Θ -classes des [graphes médians](#) en temps linéaire. Dans un but pédagogique nous commencerons par présenter un algorithme moins efficace mais plus simple et dans lequel on retrouve la majorité des idées de l'algorithme linéaire. La différence principale est que l'ordonnement par LexBFS respecte la propriété des parents, c'est à dire que pour toute arête uv , si u n'est pas le parent (i.e., le plus petit prédécesseur) de v , alors les parents de u et v sont adjacents. Et donc, l'arête contenant les parents de u et v est dans la même Θ -classe que uv .

Nous commencerons donc par un algorithme utilisant le parcours en largeur BFS s'exécutant en temps $O(dm)$. Pour cela, nous parcourons les arêtes dans l'ordre du BFS et distinguons deux cas, le cas où uv est la plus petite arête de sa Θ -classe et nous créons donc une nouvelle Θ -classe. Dans le second cas, nous cherchons un prédécesseur commun à deux prédécesseurs de u , c'est cette recherche qui mène au facteur $O(d)$ de la complexité de l'algorithme.

Proposition (1.1.3). Les Θ -classes d'un [graphe médian](#) de dimension d avec n sommets et m arêtes peuvent être calculées en temps $O(dm) = O(d \cdot n \log n)$.

Le second algorithme utilise un raffinement du BFS, le LexBFS défini par Rose, Tarjan et Lucker [97]. Nous commençons par le définir, puis par montrer un moyen de l'implémenter dans les [graphes médians](#) de manière plus simple que dans le cas général. Ensuite, pour le calcul des Θ -classes, nous procédons de manière similaire au cas du BFS, nous avons juste une méthode plus efficace dans le cas où uv n'est pas la première arête de sa Θ -classe, nous utiliserons le théorème suivant :

Théorème (1.2.2). Tout [graphe médian](#) G satisfait la propriété des parents.

Ce théorème et la propriété des parents sont simples à énoncer mais la preuve que nous présentons est assez technique, nous présenterons donc les grandes étapes de la preuve avant de la faire dans le détail. Nous montrerons ensuite comment utiliser la propriété des parents pour prouver le résultat suivant :

Théorème (1.2.5). Les Θ -classes d'un [graphe médian](#) G avec m arêtes peuvent être calculées en temps $O(m)$.

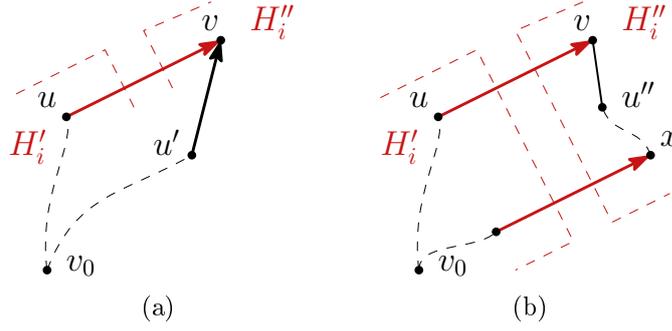


FIGURE 1.1 – Illustration de la preuve du Lemme 1.1.1

1.1 Calcul des Θ -classes via BFS

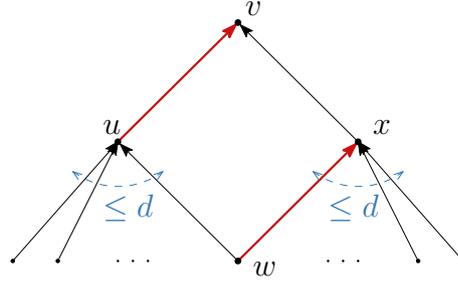
Le parcours en largeur BFS (Breadth First Search), permet d'explorer un graphe à partir d'un sommet source de la manière suivante : tout d'abord, nous partons du sommet source, que l'on notera v_0 , puis nous explorons tous ses voisins. Ensuite on repart du sommet suivant dans l'ordre d'exploration puis on regarde tous ses voisins encore non explorés et ainsi de suite. BFS utilise une file de priorité, au départ v_0 est le seul sommet inséré, puis tant que la file n'est pas vide, l'algorithme retire le premier élément u de la file, puis marque et insère à la fin de la file tous ses voisins v non marqués, u est alors le *parent* $f(v)$ de v . L'ordre d'insertion dans la file définit un ordre total $<$ sur les sommets de G : $x < y$ ssi x a été inséré avant y . Si u et v sont voisins et $d(v_0, u) < d(v_0, v)$, on dit que u est un *prédécesseur* de v (notons que dans le cas d'un graphe biparti, on peut remplacer la seconde condition par $u < v$), et pour tout sommet $v \neq v_0$, $f(v)$ est le plus petit prédécesseur de v . D'après le Lemme 0.3.14, G satisfait la propriété du cube descendant et donc tout sommet du graphe possède au plus $d = \dim(G)$ prédécesseurs. On observe que l'ordre total $<$ sur les sommets de G définit également un ordre total sur les arêtes de G : pour toute paire d'arêtes uv et $u'v'$, $uv < u'v'$ ssi $u < u'$ ou $u = u'$ et $v < v'$.

Nous montrons maintenant comment calculer pour chaque arête uv l'unique Θ -class auquel elle appartient. On suppose que chaque arête uv est orientée via BFS de u vers v , i.e., $d(v_0, u) < d(v_0, v)$. Nous distinguons deux cas : le cas où u est le seul prédécesseur de v et le cas où v a d'autres prédécesseurs. Le lemme suivant permet de traiter le premier cas :

Lemme 1.1.1. *L'arête $uv \in E_i$ telle que $d(v_0, u) < d(v_0, v)$ est la première arête de E_i ssi u est l'unique prédécesseur de v .*

Démonstration. Soit uv la première arête de E_i dans le BFS, étant donné que H''_i est porté, v est la porte de v_0 dans H''_i et u est l'unique voisin de v dans H'_i . On affirme que u est l'unique voisin de v dans $I(v_0, v)$, supposons que v a un second voisin $u' \in I(v_0, v)$ (cf Figure 1.1a). Étant donné que v est la porte de v_0 dans H''_i , et que v_0 est plus proche de u' que de v , u' appartient à H'_i , ce qui contredit l'unicité de u .

Réciproquement, on suppose que u est l'unique voisin de v dans $I(v_0, v)$ mais que uv n'est pas la première arête de E_i dans le BFS. Ceci implique que v n'est pas la porte de v_0 dans H''_i , on notera x cette porte. Soit u'' un voisin de v dans $I(x, v)$, comme x est la porte de v_0 dans H''_i , $I(x, v) \subseteq I(v_0, v)$. Étant donné que v et x appartiennent à H''_i qui est convexe, u'' appartient également à H''_i (cf Figure 1.1.2). Or, u appartient à H'_i , u et u'' sont donc deux voisins distincts de v dans $I(v_0, v)$, une contradiction. \square

FIGURE 1.2 – Recherche du prédécesseur w commun à u et x pour le calcul de la Θ -classe de wv

Si à l'inverse, wv n'est pas la première arête de sa Θ -classe, le lemme suivant montre comment trouver à quelle Θ -classe elle appartient :

Lemme 1.1.2. *Soit wv une arête d'un [graphe médian](#) telle que u est un prédécesseur de v . Si v a un second prédécesseur x , alors il existe un carré $wvux$ avec wx comme arête opposée à wv telle que w est un prédécesseur commun de u et x .*

Démonstration. D'après la condition du quadrangle (QC), u et x ont un voisin commun w plus proche de v_0 que u et x tel que $wvux$ est un carré de G . Par conséquent, w est un prédécesseur commun de u et x et wv et wx sont des arêtes opposées de $wvux$ (cf Figure 1.2). \square

On déduit l'algorithme suivant des Lemmes 1.1.1 et 1.1.2, son pseudo-code est présenté dans l'Algorithme 1. Pour commencer, on exécute un BFS sur G renvoyant un ordonnancement par BFS des arêtes et des sommets de G , ainsi qu'une liste ordonnée des prédécesseurs de chaque sommet du graphe. Pour chaque arête uv du graphe prise dans l'ordre du BFS telle que $u < v$, si u est l'unique prédécesseur de v , d'après le Lemme 1.1.1, wv est la première arête de sa Θ -classe, on crée donc une nouvelle Θ -classe E_i et on insère wv dans E_i . Sinon, si v a un second prédécesseur x , on parcourt alors la liste ordonnée des prédécesseurs de u et des prédécesseurs de x pour trouver un prédécesseur commun w (qui existe d'après le Lemme 1.1.2), nous verrons dans le Lemme 1.2.1 qu'il est unique. On insère ensuite l'arête wv dans la Θ -classe de wx . Comme les prédécesseurs de u et x sont stockés sous la forme d'une liste triée d'au plus d éléments, leur intersection (qui contient uniquement w) peut être calculée en temps $O(d)$, et donc la Θ -classe de chaque arête uv peut être calculée en temps $O(d)$ (cf Figure 1.2). Par conséquent :

Proposition 1.1.3. *Les Θ -classes d'un [graphe médian](#) de dimension d avec n sommets et m arêtes peuvent être calculées en temps $O(dm) = O(d \cdot n \log n)$.*

1.2 Calcul des Θ -classes via LexBFS

Le but de cette partie est de supprimer le facteur $O(d)$ de la complexité de l'algorithme précédent. On a vu que ce facteur était dû à la recherche pour chaque arête uv qui n'est pas la première arête de sa Θ -classe dans le BFS, d'une arête plus petite et sur le côté opposé à wv d'un carré du graphe. Pour cela, nous utiliserons le parcours en largeur Lexicographic Breadth First Search (LexBFS) défini dans [97] qui est un raffinement du BFS, et qui respecte la propriété des parents que nous définirons et qui permet de trouver une arête du LexBFS dans la même Θ -classe que wv en temps constant.

Algorithme 1 : Calcul Θ -classes BFS(G, v_0)

Entrées : Un **graphe médian** $G = (V, E)$, $v_0 \in V$

Sorties : Les Θ -classes Θ de G triées par distance croissantes à v_0

```

1 début
2    $\Theta \leftarrow \emptyset$ 
3    $(E, \Lambda) \leftarrow \text{BFS}(G, v_0)$ 
   //  $E$  : liste des arêtes ordonnées par BFS
   //  $\Lambda : V \rightarrow 2^V$  tel que  $\Lambda(v)$  est l'ensemble des prédécesseurs de  $v$ 
4   pour tous les  $uv \in E$  faire
5     si  $|\Lambda(v)| = 1$  alors
6       ajouter une nouvelle  $\Theta$ -classe  $\{uv\}$  à  $\Theta$            // Première arête de la
        $\Theta$ -classe
7     sinon
8       Prendre  $x \neq u$  dans  $\Lambda(v)$ 
9        $w \leftarrow$  l'unique élément de  $\Lambda(u) \cap \Lambda(x)$ 
10      ajouter  $uv$  à la  $\Theta$ -classe de  $wx$ 
11  retourner  $\Theta$ 

```

Nous commençons par présenter l'algorithme du LexBFS, dans BFS, si u et v ont le même parent, alors l'algorithme les ordonne de manière arbitraire. Dans LexBFS en revanche, u et v sont ordonnés par rapport à l'ordre de leur second prédécesseur. Si seulement l'un des deux a un second prédécesseur, alors c'est celui-ci qui est choisit. Si u et v ont le même second prédécesseur, alors on choisit le troisième etc. LexBFS utilise un raffinement de partition, ce qui permet de l'implémenter en temps linéaire [97]. Dans les **graphes médians**, le lemme suivant montre qu'il suffit de regarder les deux plus petits prédécesseurs pour ordonner deux sommets, et il n'est donc pas nécessaire d'utiliser le raffinement de partition :

Lemme 1.2.1. *Si u et v sont deux sommets d'un graphe médian, alors ils ont au plus un prédécesseur en commun.*

Démonstration. Soient x et x' deux prédécesseurs distincts communs de u et v , ce qui implique que $d(v_0, u) = d(v_0, v) = d(v_0, x) + 1 = d(v_0, x') + 1 = k + 1$. D'après (QC), il existe un sommet w adjacent à x et x' à distance $k - 1$ de v_0 (cf Figure 1.3). Ceci implique l'existence d'un $K_{2,3}$ induit, ce qui est impossible. \square

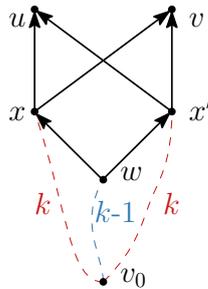
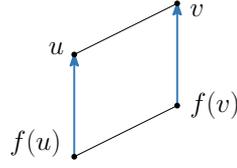


FIGURE 1.3 – Illustration de la preuve du Lemme 1.2.1

FIGURE 1.4 – Arrête uv respectant la propriété des parents

1.2.1 Propriété des parents

Dans cette sous-section, nous montrons que les arêtes des **graphes médians** vérifient la *propriété des parents*. On dit qu'une arête uv d'un graphe G vérifie la propriété des parents si les parents de u et v sont adjacents ou coïncident pour tout ordonnancement via LexBFS de G tel que $u, v \neq v_0$ le sommet source du LexBFS (cf Figure 1.4).

Théorème 1.2.2. *Toute arête d'un **graphe médian** G satisfait la propriété des parents.*

La démonstration de ce théorème étant un peu longue, nous commençons par présenter les principales étapes. Nous procédons par l'absurde : soit u_1v_3 la première arête du LexBFS qui ne vérifie pas la propriété des parents, c'est à dire que $f(u_1) = v_1$ et $f(v_3) = w_3$ ne sont pas adjacents. En utilisant des propriétés des **graphes médians**, de BFS et de LexBFS, nous montrons que cela implique l'existence d'un sous-graphe induit H (cf Figure 1.5a). Nous allons ensuite montrer un résultat intermédiaire décrit dans le Lemme 1.2.4, qui dit que pour tout graphe contenant le sous-graphe H et vérifiant la propriété des parents au moins jusqu'à la distance entre v_0 et chaque sommet de H , il existe un sommet x_0 adjacent à certains sommets de H et avec des contraintes sur l'ordre dans lequel LexBFS découvre ces sommets. Pour cela, nous procédons à nouveau par récurrence sur la distance entre v_0 et H , et étudierons le sous-graphe H le plus proche v_0 où un tel sommet x_0 n'existe pas (cf Figure 1.5b), nous montrons que cela implique qu'il y a un autre sous-graphe H plus proche de v_0 , et donc avec le sommet x_0 désiré (cf Figure 1.5c), nous montrons que cela implique que pour la copie de H précédemment mentionnée, il y a également le sommet x_0 (cf Figure 1.5d), ce qui contredit notre hypothèse et finit de prouver le lemme. Pour conclure, nous montrons que cela implique que v_1 n'est pas le parent de u_1 , ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Démonstration du Théorème 1.2.2. Soit $<$ un ordonnancement par LexBFS des sommets de G , étant donné que LexBFS est un BFS, $<$ et f respectent les propriétés suivantes :

- (BFS 1) Si $u < v$, alors $f(u) \leq f(v)$;
- (BFS 2) Si $f(u) < f(v)$ alors $u < v$;
- (BFS 3) Si $v \neq v_0$, alors $f(v) = \min_{<} \{u : u \sim v\}$;
- (BFS 4) Si $u < v$ et $v \sim f(u)$ alors $f(v) = f(u)$.

On observe également le lemme suivant qui nous sera utile par la suite :

Lemme 1.2.3. *Si $uvwx$ est un carré de G , avec $d(v_0, w) = k$, $d(v_0, v) = d(v_0, x) = k + 1$, $d(v_0, u) = k + 2$ et $f(u) = v$, si ux vérifie la propriété des parents, alors $f(x) = w$.*

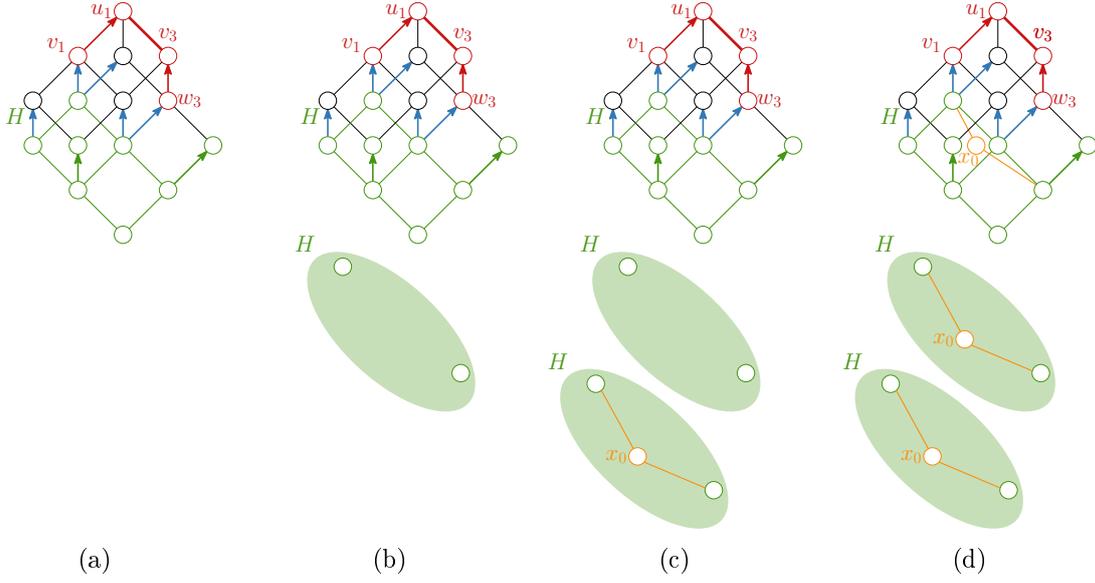


FIGURE 1.5 – Schéma de la preuve du Théorème 1.2.2

Démonstration. Par la propriété des parents, $f(x) \sim f(u) = v$. Si $f(x) \neq w$, alors $u, v, w, x, f(x)$ induisent un $K_{2,3}$ (cf Figure 1.6), ce qui est une contradiction. \square

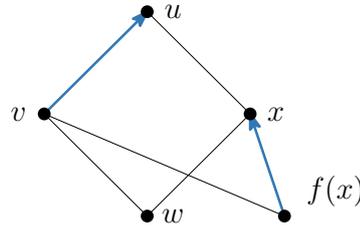


FIGURE 1.6 – Illustration de la preuve du Lemme 1.2.3

Nous montrons la propriété des parents par récurrence sur l'ordre des arêtes $<$. Nous illustrons la preuve par différents dessins, l'arête orientée $f(u)u$ sera représentée en gras. Pour clarifier la preuve, tous les sommets situés à la même distance de v_0 seront étiquetés par la même lettre mais seront indexés différemment, par exemple w_1 et w_2 sont situés à même distance de v_0 .

Supposons par l'absurde que $e = u_1v_3$ telle que $v_3 < u_1$ est la première arête de l'ordre $<$ telle que les parents $f(u_1)$ et $f(v_3)$ de u_1 et v_3 ne soient pas adjacents, ceci implique que $f(u_1) \neq v_3$. Soient $v_1 = f(u_1)$ et $w_3 = f(v_3)$ (cf Figure 1.7a). Étant donné que $d(v_0, v_1) = d(v_0, v_3)$ et $u_1 \sim v_1, v_3$, d'après (QC) v_1 et v_3 ont un voisin commun à distance $d(v_0, v_1) - 1$ de v_0 . Ce sommet ne peut être w_3 sinon $f(v_1)$ et $f(w_3)$ seraient adjacents, par conséquent il existe un sommet w_4 adjacent à v_1 et v_3 à distance $d(v_0, v_1) - 1$ de v_0 (cf Figure 1.7b). Par hypothèse de récurrence, le parent $x_3 = f(w_4)$ de w_4 est adjacent à $w_3 = f(v_3)$. Comme $u_1 \sim v_1 = f(u_1), v_3$ et $v_3 \sim w_3 = f(v_3), w_4$, nous pouvons déduire de (BFS 3) que $v_1 < v_3$ et $w_3 < w_4$. Par (BFS 2), $f(v_1) \leq f(v_3)$, d'où $f(v_1) \leq w_3$ et comme $f(v_1) \neq f(v_3)$ (sinon, $f(u_1) \sim f(v_3)$), nous pouvons déduire que $f(v_1) < w_3 < w_4$, et donc $f(v_1) \neq w_4$. Soit $w_1 = f(v_1)$, par hypothèse de récurrence $f(v_1) = w_1$ est adjacent à $f(w_4) = x_3$ et $x_3 \sim w_3$. En appliquant la condition du cube aux carrés $w_4v_1w_1x_3$, $w_4v_1u_1v_3$ et $w_4v_3w_3x_3$, il existe un sommet v_2 adjacent à u_1, w_1 et w_3 . Comme

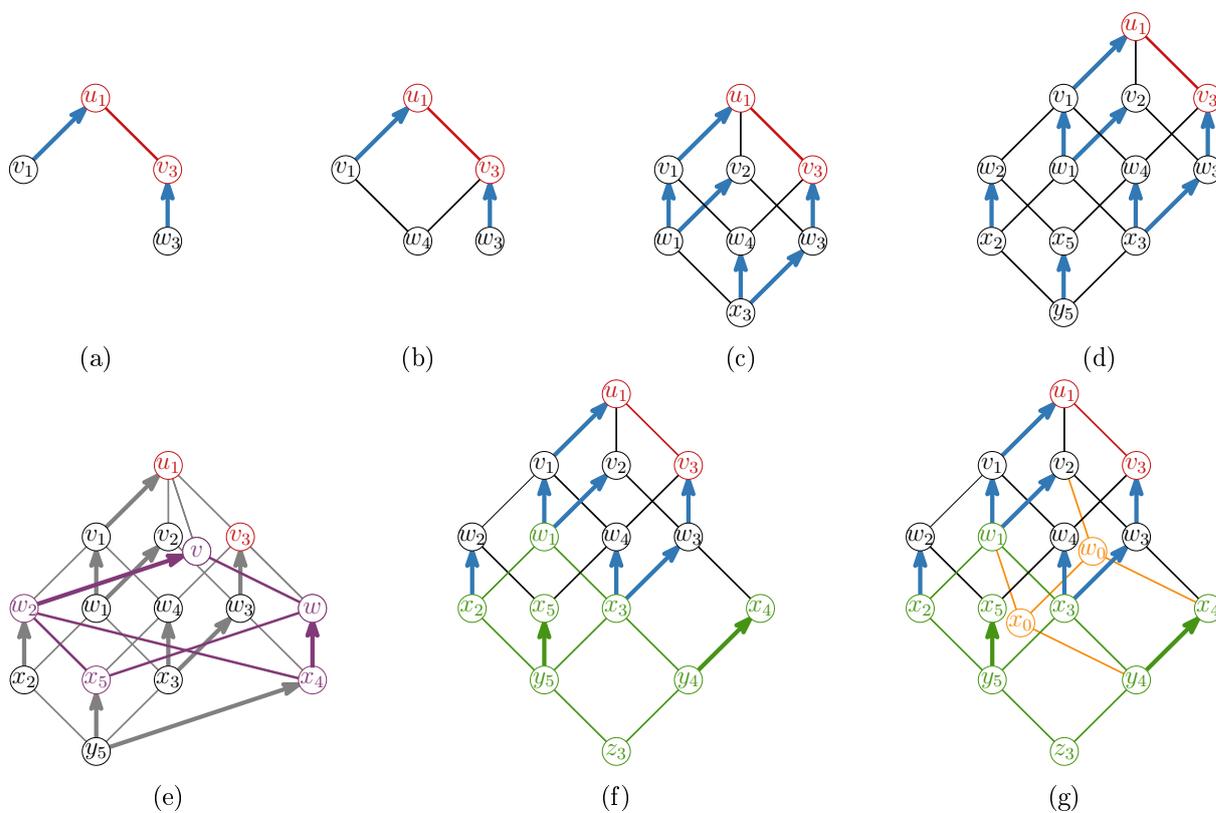
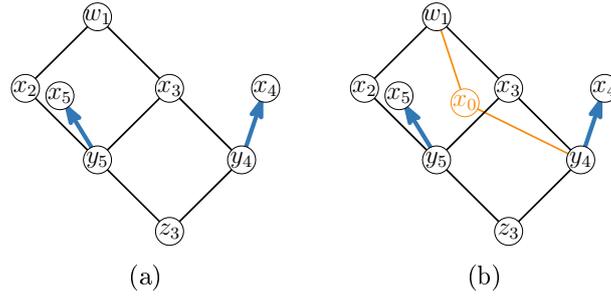


FIGURE 1.7 – Preuve animée du Théorème 1.2.2


 FIGURE 1.8 – Le sous-graphe induit H du Lemme 1.2.4

$u_1 \sim v_2$ et $f(u_1) = v_1$, d'après (BFS 3), $v_1 < v_2$. Comme v_2 est adjacent à $w_1 = f(v_1)$, d'après (BFS 4) $f(v_2) = f(v_1) = w_1$ et d'après (BFS 2), $v_2 < v_3$. Comme $f(v_2) = w_1$, d'après le Lemme 1.2.3 appliqué au carré $v_2w_1x_3w_3$, on obtient que $f(w_3) = x_3$ (cf Figure 1.7c). Comme $v_1 < v_2$, $f(v_1) = f(v_2) = w_1$, et $v_2 \sim w_1, w_3$, par la définition de LexBFS, v_1 a un second prédécesseur w_2 qui est plus petit que w_3 . Étant donné que w_4 est plus grand que w_3 , ce prédécesseur ne peut être w_4 , on appellera w_2 le second plus petit prédécesseur de v_1 , on remarque que $w_1 < w_2 < w_3 < w_4$.

D'après (QC), w_2 et w_4 sont adjacents à un sommet x_5 , qui n'est pas x_3 car sinon il y aurait un $K_{2,3}$. Par hypothèse de récurrence, $f(w_2)$ et $f(v_1) = w_1$ sont adjacents, ce qui implique que $f(w_2) \neq x_3, x_5$ car sinon il y aurait un $K_{2,3}$, on pose $f(w_2) = x_2$. Par analogie, $f(x_5) = y_5$ et $f(w_2) = x_2$ sont adjacents, ainsi que $f(x_5) = y_5$ et $f(w_4) = x_3$ (cf Figure 1.7d). D'après (BFS 1), $x_2 = f(w_2) < f(w_3) = x_3$, et d'après (BFS 3), $x_3 = f(w_4) < x_5$. Étant donné que $w_3 < w_4$, $f(w_3) = f(w_4)$ et w_4 est adjacent à x_5 , d'après LexBFS, w_3 doit avoir un second prédécesseur qui est plus petit que x_5 . Comme $f(w_3) = x_3$, d'après (BFS 3), ce second prédécesseur ne peut être x_2 , on le notera x_4 . On observe que $x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, par hypothèse de récurrence, le parent de x_4 que l'on notera y_4 est adjacent à $f(w_3) = x_3$.

Si $y_4 = y_5$, en appliquant la condition du cube aux carrés $x_3w_3x_4y_5$, $x_3w_4x_5y_5$ et $x_3w_4v_3w_3$, on trouve un sommet w adjacent adjacent à x_4 , v_3 et x_5 . En appliquant la condition du cube aux carrés $w_4v_3w_3x_5$, $w_4v_1w_2x_5$, et $w_4v_1u_1v_3$, on obtient un sommet v adjacent à u_1 , w_2 et w . Étant donné que $v \sim w_2$, d'après (BFS 3), $f(v) \leq w_2 < w_3 = f(v_3)$, donc d'après (BFS 2), on obtient $v < v_3$. Par conséquent, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence et d'après le Lemme 1.2.3 appliqué au carré $u_1v_1w_2v$, on en déduit que $f(v) = w_2$. En appliquant le Lemme 1.2.3 à $v_3w_3x_4w$, on en déduit que $f(w) = x_4$ (cf Figure 1.7e). D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à l'arête vw , on obtient que $f(v) = w_2$ est adjacent à $f(w) = x_4$, ce qui implique un $K_{2,3}$ induit par v, x_5, x_4, w, w_2 (cf Figure 1.7e). Tout ceci montre que $y_4 \neq y_5$, et par la condition du quadrangle, y_4 et y_5 ont un voisin commun que l'on notera z_3 (cf Figures 1.7f et 1.5a).

On rappelle que $x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, et d'après (BFS 1), $y_4 = f(x_4) < f(x_5) = y_5$. On notera $H = (V_H, E_H)$ le sous-graphe de G induit par les sommets $V_H = \{w_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_4, y_5, z_3\}$, son ensemble d'arêtes est $E_H = \{z_3y_4, z_3y_5, y_4x_3, y_4x_4, y_5x_2, y_5x_3, y_5x_5, x_2w_1, x_3w_1\}$. Pour conclure la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.2.4. *Soit $H = (V_H, E_H)$ (cf Figure 1.8a), un graphe induit de G avec $d(v_0, w_1) = d(v_0, x_2) + 1 = \dots = d(v_0, x_5) + 1 = d(v_0, y_4) + 2 = d(v_0, y_5) + 2 = d(v_0, z_3) + 3$, $f(x_5) = y_5$ et $f(x_4) = y_4$ tel que $x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ et $y_4 < y_5$. Si G satisfait la propriété des parents jusqu'à la distance $d(v_0, w_1)$, alors il existe un sommet x_0 tel que $x_0 < x_2$ et $x_0 \sim w_1, y_4$ (cf Figure 1.8b).*

Démonstration. Soit G un **graphe médian** tel que le Lemme 1.2.4 est faux. Parmi tous les sous-

graphe induits de G qui satisfont les conditions du lemme et tel qu'il n'existe pas de sommet $x_0 \neq x_3 \sim w_1, y_4$ tel que $x_0 < x_2$, on choisit le sous-graphe H qui minimise la distance $d(v_0, w_1)$. Pour commencer, on suppose que $f(w_1) = x_2$. D'après le Lemme 1.2.3 appliqué au carré $w_1x_2y_5x_3$, on déduit que $f(x_3) = y_5$. Par conséquent, d'après (BFS 1), on obtient que $y_5 = f(x_3) \leq f(x_4) \leq f(x_5) = y_5$, donc que $f(x_4) = y_5$, une contradiction. On en déduit que $f(w_1) \neq x_2$. Étant donné que G satisfait la propriété des parents jusqu'à la distance $d(v_0, w_1)$, on obtient que $f(x_2) \sim f(w_1)$. Soit x_1 le parent de w_1 (cf Figure 1.9a) et soit $y_2 = f(x_2)$ le parent de x_2 . Pour ne pas avoir de $K_{2,3}$ induit, y_2 doit être différent de y_5 . De plus, y_2 doit être différent de y_4 , sinon x_1 serait le sommet commun de w_1 et y_4 , qui satisfait les conditions du Lemme 1.2.4. Soit z_5 le parent de y_5 , par la propriété des parents, $z_5 = f(y_5)$ est adjacent à $y_2 = f(x_2)$. En appliquant la condition du cube appliquée aux carrés $x_2w_1x_1y_2$, $x_2w_1x_3y_5$ et $x_2y_2z_5y_5$, on obtient un voisin y_3 de x_3 , x_1 et z_5 . Si $z_5 = z_3$, alors $y_3 = y_4$ (sinon on obtient un $K_{2,3}$), et x_1 est le voisin de w_1 et y_4 qui satisfait les conditions du Lemme 1.2.4. Par conséquent, $y_3 \neq y_4$ et $z_5 \neq z_3$. De plus, d'après le Lemme 1.2.3 appliqué au carré $w_1x_1y_3x_3$, $y_3 = f(x_3)$ (cf Figure 1.9b). Soit t le parent de z_3 , d'après la propriété des parents, $z_5 = f(y_5) \sim t = f(z_3)$. En appliquant la condition du cube aux carrés $y_5z_3tz_5$, $y_5x_3y_3z_5$ et $y_5x_3y_4z_3$, on obtient un sommet z_4 voisin de t , y_3 et y_4 . En appliquant le Lemme 1.2.3 au carré $x_3y_3z_4y_4$, on obtient que $f(y_4) = z_4$ (cf Figure 1.9c) et d'après (BFS 1), $x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ implique $y_2 = f(x_2) < y_3 = f(x_3) < y_4 = f(x_4) < y_5 = f(x_5)$. Étant donné que $d(x_1, v_0) < d(w_1, v_0)$, le choix de H implique l'existence d'un voisin y_0 de x_1 et z_4 tel que $y_0 < y_2$. En appliquant la condition du cube aux carrés $y_3x_1y_0z_4$, $y_3x_1w_1x_3$ et $y_3x_3y_4z_4$, on obtient un voisin x_0 de w_1 , y_4 et y_0 . D'après (BFS 3), $f(x_0) \leq y_0 < y_2 = f(x_2)$ et donc, d'après (BFS 2), $x_0 < x_2$ (cf Figure 1.9d), ce qui contredit le choix de H . \square

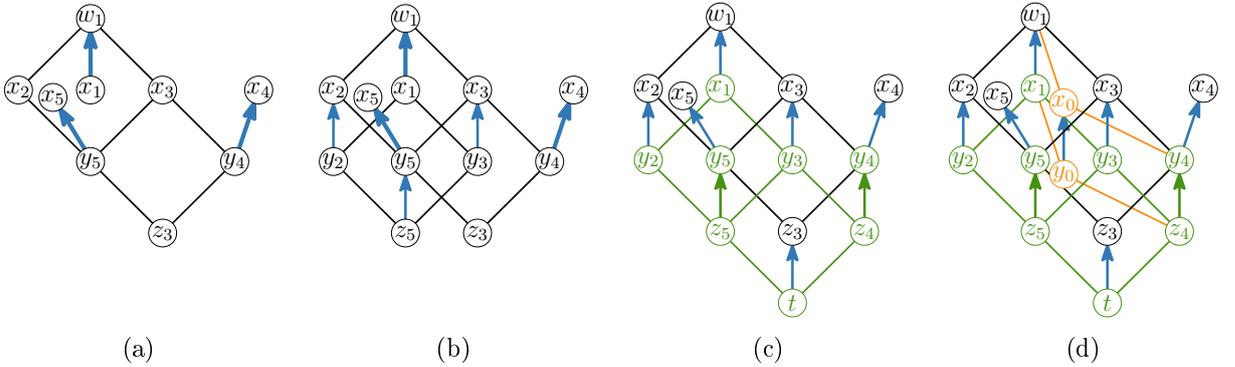


FIGURE 1.9 – Illustration de la preuve du Lemme 1.2.4

Étant donné que G contient un sous-graphe H satisfaisant les conditions du Lemme 1.2.4, il existe un sommet x_0 adjacent à w_1 et y_4 tel que $x_0 < x_2$ (cf Figure 1.7g). En appliquant la condition du cube aux carrés $x_3w_1x_0y_4$, $x_3w_1v_2w_3$ et $x_3w_3x_4y_4$, on obtient un voisin w_0 de x_0 , v_2 et x_4 (cf Figure 1.7g). Comme x_0 est adjacent à w_0 , d'après (BFS 3), $f(w_0) \leq x_0 < x_2 = f(w_2)$. D'après (BFS 2), $w_0 < w_2$ et w_0 est un prédécesseur v_2 , on déduit de LexBFS que $v_2 < v_1$. Ceci avec le fait que v_1 et v_2 sont tous les deux adjacents à u_1 contredit le fait que $f(u_1) = v_1$. Cette contradiction montre que tout **graphe médian** satisfait la propriété des parents et conclut la preuve du Théorème 1.2.2. \square

Algorithme 2 : LexBFSGrapheMédian(G, v_0)**Entrées** : $G = (V, E)$ un graphe médian, $v_0 \in V$

```

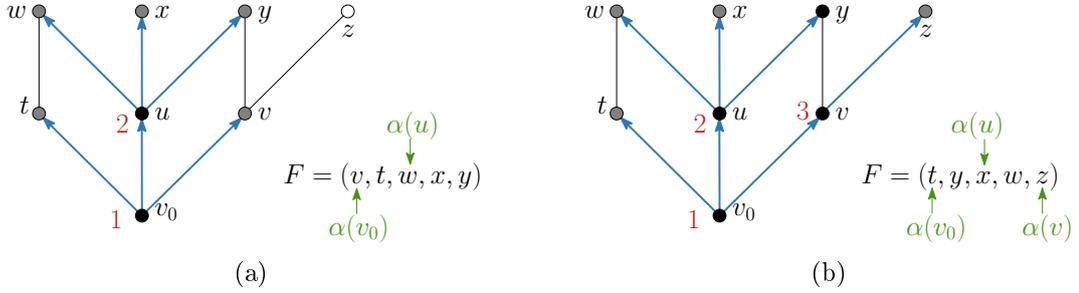
1 début
2    $F \leftarrow (v_0)$  //  $F$  : File de priorité
3   tant que  $F$  n'est pas vide faire
4     Défiler le premier sommet  $u$  de  $F$  et le marquer en noir si ce n'est pas déjà fait
5      $\alpha(u) \leftarrow \emptyset$  //  $\alpha(u)$  : position du premier sommet de  $F$  dont  $u$  est
      l'unique prédécesseur
6     pour tous les  $v \in N(u)$  faire
7       si  $v$  n'est pas marqué alors
8         Enfiler  $v$  dans  $F$ 
9         Marquer  $v$  en gris
10      si  $\alpha(u) = \emptyset$  alors
11        Initialiser  $\alpha(u)$  à la position de  $v$  dans  $F$ 
12      sinon
13        si  $v$  marqué en gris alors
14          Échanger  $v$  avec le sommet à la position  $\alpha(t)$  où  $t$  est le premier
            prédécesseur de  $v$ .
15          Décaler  $\alpha(t)$ 
16          Marquer  $v$  en noir

```

1.2.2 Algorithme

Dans cette sous-section, nous présentons un algorithme permettant de calculer en temps linéaire les Θ -classes d'un graphe médian. Pour commencer, nous montrons comment implémenter un LexBFS sur un graphe médian d'une manière plus simple que dans le cas général. D'après le Lemme 1.2.1, il suffit pour chaque sommet de stocker ses deux plus petits prédécesseurs. Autrement dit, si v et w ont le même plus petit prédécesseur, alors le LexBFS ordonnera v devant w ssi soit le second prédécesseur de v est plus petit que celui de w , soit w n'a pas de second prédécesseur. De manière similaire à BFS, LexBFS peut être implémenté en utilisant une file F . Mais à la différence de BFS, chaque sommet u déjà étiqueté doit stocker la position $\alpha(u)$ dans F du plus petit sommet de F qui a u comme unique prédécesseur. Dans F , tous les sommets qui ont u comme prédécesseur apparaissent consécutivement, d'abord les sommets ayant deux prédécesseurs ordonnés selon leur second prédécesseur, puis ceux n'en ayant qu'un. Pour avoir cette propriété, nous utilisons la règle suivante : si on découvre un second prédécesseur v à y , qui avait pour l'instant u comme unique prédécesseur, alors on échange dans F le sommet y et le sommet à la position $\alpha(u)$, puis on met $\alpha(u)$ à jour. On donne un exemple de mise à jour de la file de priorité F d'un LexBFS en lorsque l'on défile le sommet v en Figure 1.10. L'ordre des sommets est indiqué en rouge. On observe que l'algorithme s'exécute en temps $O(m)$, nous présentons son pseudo-code dans l'Algorithme 2.

Nous utilisons maintenant le Théorème 1.2.2 pour calculer les Θ -classes de G . Premièrement nous calculons un ordre sur les arêtes et les sommets du graphe en exécutant un LexBFS à partir de v_0 . Nous explorons ensuite les arêtes du graphes dans l'ordre du LexBFS. Nous prenons la première arête non explorée uv et on suppose que u est un prédécesseur de v . Si u est l'unique

FIGURE 1.10 – Mise à jour de la file de priorité F d'un LexBFS lors du défilement du sommet v **Algorithme 3** : Calcul Θ ClassesLexBFS(G, v_0)**Entrées** : $G = (V, E)$, $v_0 \in V$ **Sorties** : Les Θ -classes Θ de G ordonnées par distance croissante à v_0

```

1 begin
2    $\Theta \leftarrow \emptyset$ 
3    $(E, \Lambda, f) \leftarrow \text{LexBFS}(G, v_0)$ 
   //  $E$  : la liste des arêtes ordonnées via LexBFS
   //  $\Lambda: V \mapsto 2^V$  tel que  $\Lambda(v)$  est l'ensemble des prédécesseur de  $v$ 
   //  $f: V \mapsto V$  tel que  $f(v)$  est le parent de  $v$ 
4   pour tous les  $uv \in E$  faire
5     si  $|\Lambda(v)| = 1$  alors
6       | ajouter une nouvelle  $\Theta$ -classe  $\{uv\}$  à  $\Theta$  // Première arête
7     sinon si  $f(v) \neq u$  alors
8       | ajouter l'arête  $uv$  à la  $\Theta$ -classe de l'arête  $f(u)f(v)$ 
9     sinon
10      | Choisir arbitrairement  $x$  dans  $\Lambda(v) \setminus \{u\}$ 
11      | ajouter l'arête  $uv$  à la  $\Theta$ -classe de l'arête  $f(x)x$ 
12  retourner  $\Theta$ 

```

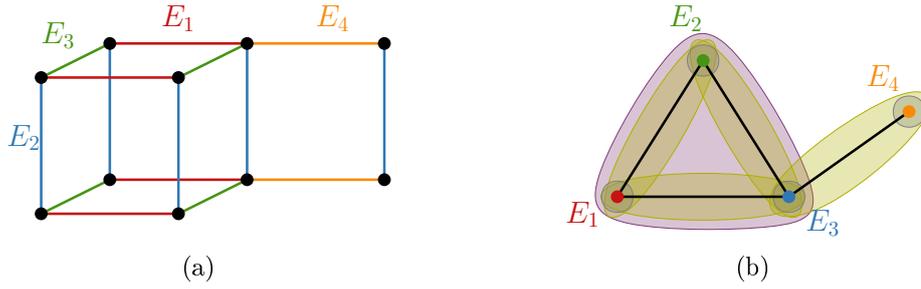


FIGURE 1.11 – (a) Les Θ -classes d'un **graphe médian** G ; (b) son **graphe de croisement** $\Gamma(G)$

prédécesseur de v , alors d'après le Lemme 1.1.1, uv est la première arête de sa Θ -classe, nous créons donc une nouvelle Θ -classe E_i et y insérons uv . On suppose maintenant que u a plusieurs prédécesseurs et distinguons deux cas : Si u n'est pas le parent de v , d'après le Théorème 1.2.2, uv et $f(u)f(v)$ sont deux arêtes opposées d'un carré, par conséquent uv est dans la même Θ -classe que $f(u)f(v)$ (qui a déjà été calculée car $f(u)f(v) < uv$). Pour retrouver la Θ -classe de l'arête $f(u)f(v)$ en temps constant, on utilise une matrice A non initialisée, telle que les lignes et les colonnes correspondent aux sommets de G et $A[x, y]$ contient la Θ -classe de l'arête xy si x et y sont adjacents et qu'elle a déjà été calculée, et $A[x, y]$ est non défini sinon. Dans le second cas, si u est le père de v , on prend x , un autre prédécesseur de v . D'après le Théorème 1.2.2, $uv = f(v)v$ et $f(x)x$ sont les arêtes opposées d'un carré. Comme $f(x)x$ apparaît avant uv dans l'ordonnancement par LexBFS, la Θ -classe de $f(x)x$ a déjà été calculée et l'algorithme insère u dans la Θ -classe de $f(x)x$. On observe que les Θ -classes sont triées dans l'ordre dans lequel leur première arête est insérée. Le pseudo-code de cet algorithme est présenté dans l'Algorithme 3.

Par conséquent, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. *Les Θ -classes d'un **graphe médian** G avec m arêtes peuvent être calculées en temps $O(m)$.*

1.3 Borne supérieure serrée sur le nombre de Θ -classes d'un **graphe médian**

On donne dans cette section une borne supérieure sur le nombre de Θ -classes d'un **graphe médian** en fonction de la dimension d du graphe et du nombre n de sommets. On appelle le **graphe de croisement** noté $\Gamma(G)$ d'un **graphe médian** G le graphe ayant pour sommets l'ensemble des Θ -classes de G et deux Θ -classes appartiennent à la même arête ssi elle se croise dans G .

On peut facilement voir que chaque sous-graphe induit par les sommets d'une clique est également une clique, toute famille d'ensembles de sommets de cliques est donc fermée par sous-ensemble et on peut donc étudier l'ensemble de toutes les cliques d'un graphe comme un *complexe simplicial*, que l'on appellera *complexe de cliques* $X(G)$. Une clique sera alors appelée une *face* de $X(G)$.

On donne en Figure 1.11 le **graphe de croisement** d'un **graphe médian** G dont on a représenté les cliques. Le complexe de cliques $X(\Gamma(G))$ est donc $\{\emptyset, \{E_1\}, \{E_2\}, \{E_3\}, \{E_4\}, \{E_1, E_2\}, \{E_1, E_3\}, \{E_2, E_3\}, \{E_3, E_4\}, \{E_1, E_2, E_3\}\}$.

Proposition 1.3.1. *Si un **graphe** G a q Θ -classes et une dimension d , alors $q \leq d(\sqrt[d]{n} - 1)$.*

1.3. Borne supérieure serrée sur le nombre de Θ -classes d'un graphe médian

Cette borne supérieure est réalisée par les produits de d chemins de taille $\sqrt[d]{n} - 1$.

Démonstration. Soit $\Gamma(G)$ le graphe de croisement de G . On observe que $|V(\Gamma(G))| = q$. Soit $X(\Gamma(G))$ le complexe de cliques $\Gamma(G)$. D'après la caractérisation des graphes médians parmi les classes amples [16, Proposition 4], le nombre de sommets de G est égal au nombre $|X(\Gamma(G))|$ de faces de $X(\Gamma(G))$. Comme G est de dimension d , d'après le Lemme 0.3.11, $\Gamma(G)$ ne contient pas de cliques de taille $d+1$. D'après le théorème de Zykov [116] (voir aussi [115]), le nombre de k -faces dans $X(\Gamma(G))$ est d'au plus $\binom{d}{k} \left(\frac{q}{d}\right)^k$. Ainsi $n = |V(G)| = |X(\Gamma(G))| \leq \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} \left(\frac{q}{d}\right)^k = \left(1 + \frac{q}{d}\right)^d$ et donc $q \geq d(\sqrt[d]{n} - 1)$.

Et soit G le produit cartésien de d chemins de taille $(\sqrt[d]{n} - 1)$. Alors G contient $(\sqrt[d]{n} - 1 + 1)^d = n$ sommets et $d(\sqrt[d]{n} - 1)$ Θ -classes (chaque Θ -classe de G correspond à une arête d'un facteur). \square

Chapitre 2

Calcul de l'ensemble médian dans les graphes médians

Dans ce chapitre, nous étudierons le résultat principal de cette partie qui est le calcul du médian dans les [graphes médians](#) en temps linéaire, ainsi que le calcul de l'indice de Wiener et de la matrice des distances dans les graphes médians.

Nous commençons par expliquer comment obtenir un épluchage périphérique, i.e., une séquence de graphes $G_q = G, G_{q-1}, \dots, G_0$ tel que G_{i-1} est obtenu à partir de G_i en supprimant un [demi-espace](#) périphérique de G_i .

Par la suite, on montre comment calculer en temps linéaire le poids des [demi-espaces](#) de G , pour cela on utilise l'épluchage périphérique ainsi que le fait que les [demi-espaces](#) sont portés : on reporte le poids de chaque sommet d'un [demi-espace](#) périphérique supprimé sur son voisin (qui est également sa porte) dans l'autre [demi-espace](#).

Une fois que nous avons calculé le poids de tous les [demi-espaces](#), on utilise la règle de majorité établie indépendamment par Bandelt et Barthelemy [12] et par Soltan et Chepoi [105]. Cette règle indique que l'ensemble médian intersecte tous les [demi-espaces](#) contenant au moins la moitié du poids du graphe et que les médians locaux sont globaux, c'est à dire que la somme totale des distances pondérées sur un sommet est plus petite que celle de tous ses voisins ssi elle est plus petite que celle de tout les sommets du graphe et ce sommet est donc dans l'ensemble médian. Ainsi, si pour toute paire de [demi-espaces](#) complémentaires on oriente toutes les arêtes du graphe du [demi-espace](#) minoritaire vers le [demi-espace](#) majoritaire, les puits sont les sommets de l'ensemble médian, ce qui nous donne donc le résultat suivant :

Théorème (2.3.4). L'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ d'un [graphes médians](#) G avec m arêtes peut être calculé en temps $O(m)$.

Bandelt et Barthelemy ont montré dans [12] que l'ensemble médian des [graphes médians](#) coïncide avec l'intervalle entre une paire diamétrale de sommets de l'ensemble médian. Nous montrons une preuve de cette affirmation n'utilisant pas les treillis et un moyen de calculer une paire diamétrale de l'ensemble médian. On montre également que les [graphes médians](#) sont les seuls graphes bipartis respectant la règle de majorité.

Par la suite, en utilisant le fait que les **demi-espaces** sont convexes et portés, on montrera que le calcul en temps linéaire des poids des **demi-espaces** permet de calculer aussi l'indice de Wiener en temps linéaire. Pour calculer la matrice des distances, on utilisera un épluchage périphérique en sens inverse et à chaque fois que l'on ajoutera un **demi-espace** périphérique à G_i pour obtenir G_{i+1} , on déduira pour chaque sommet du **demi-espace** périphérique ajouté sa distance à un autre sommet du **demi-espace** de l'isomorphisme des frontières et sa distance à un sommet de G_i du fait que les **demi-espace** sont portés.

2.1 Épluchage périphérique

L'ordre E_1, E_2, \dots, E_q dans lequel les Θ -classes de G sont retournées par l'Algorithme 3 correspond à l'ordre décroissant des distances de v_0 à H_i'' : si $i < j$, alors $d(v_0, H_i'') \leq d(v_0, H_j'')$ (on rappelle que $v_0 \in H_i'$). D'après le Lemme 0.3.13, le **demi-espace** H_q'' de E_q est périphérique. Si l'on contracte toutes les arêtes de E_q (i.e., on identifie les sommets de $H_q'' = \partial H_q''$ avec leur voisin dans $\partial H_q''$), on obtient un plus petit **graphes médians** $\tilde{G} = H_q'$ avec $q - 1$ Θ -classes $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_{q-1}$ telles que \tilde{E}_i correspond aux arêtes de E_i dans \tilde{G} . Les **demi-espaces** de \tilde{G} ont la forme $\tilde{H}_i' = H_i' \cap H_q'$ et $\tilde{H}_i'' = H_i'' \cap H_q'$. Nous avons donc une liste de Θ -classes $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_{q-1}$ qui correspond à l'ordonnancement des demis-espaces $\tilde{H}_1'', \tilde{H}_2'', \dots, \tilde{H}_{q-1}''$ de \tilde{G} en fonction de leur distance à v_0 . Ainsi, le dernier **demi-espace** \tilde{H}_{q-1}'' est périphérique dans \tilde{G} . Par conséquent, l'ordonnancement E_q, E_{q-1}, \dots, E_1 des Θ -classes de G permet de construire un ensemble $G_q = G, G_{q-1} = \tilde{G}, \dots, G_0 = (\{v_0\}, \emptyset)$ de **graphes médians** tels que G_0 est le graphe composé uniquement de v_0 et pour tout $i \geq 1$, la Θ -classe E_i définit un **demi-espace** périphérique du graphe G_i obtenu après les contractions successives des **demi-espaces** périphériques de $G_q, G_{q-1}, \dots, G_{i+1}$ définis par $E_q, E_{q-1}, \dots, E_{i+1}$. On appelle G_q, G_{q-1}, \dots, G_0 un *épluchage périphérique* de G . Un exemple d'épluchage périphérique d'un **graphes médians** est donné en Figure 2.1, les arêtes contractées sont indiquées en rouge.

Étant donné que chaque sommet de G et chaque Θ -classe est contractée une seule fois, nous n'avons pas besoin de calculer explicitement la restriction de chaque Θ -classe de G à chaque G_i . Il suffit en effet de conserver pour chaque sommet v une variable indiquant si ce sommet appartient à un **demi-espace** déjà contracté ou non. Ainsi, lorsque la $i^{\text{ème}}$ Θ -classe est contractée, nous parcourons toutes les arêtes de E_i et sélectionnons les arêtes dont les extrémités n'ont pas encore été contractées.

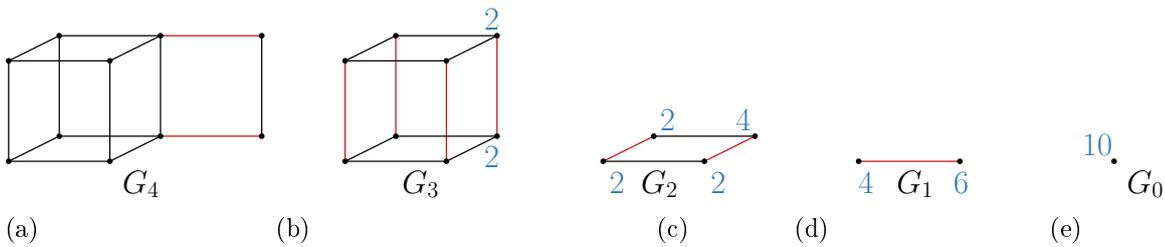


FIGURE 2.1 – Exemple d'épluchage périphérique d'un graphe médian

Algorithme 4 : CalculPoidsDesDemiEspaces(G, π, Θ)

Entrées : Un graphe médian $G = (V, E)$, une fonction de poids $\pi : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$, les Θ -classes $\Theta = (E_1, E_2, \dots, E_q)$ de G triées par distance croissante à v_0 .

Sorties : La liste des paires de poids $((\pi(H'_q), \pi(H''_q)), \dots, (\pi(H'_1), \pi(H''_1)))$

```

1 begin
2   si  $|V| = 1$  alors
3     retourner la liste vide
4   sinon
5     Soient  $H'$  et  $H''$  deux demi-espaces complémentaires définis par  $E_q$  ( $v_0 \in H'$ )
6      $\pi(H'') \leftarrow \sum_{v \in \partial H''} \pi(v)$ 
7      $\pi(H') \leftarrow \pi(V) - \pi(H'')$ 
8     pour tous les  $v'v'' \in E_q$  avec  $v' \in H'$  et  $v'' \in H''$  faire
9        $\pi(v') \leftarrow \pi(v') + \pi(v'')$ 
10     $L \leftarrow$  CalculPoidsDesDemiEspaces ( $H', \pi, \Theta \setminus \{E_q\}$ )
11    ajouter  $(\pi(H'), \pi(H''))$  à  $L$ 
12    retourner  $L$ 

```

2.2 Calcul du poids des demi-espaces de G

Nous utilisons un épluchage périphérique G_q, G_{q-1}, \dots, G_0 de G pour calculer les poids $\pi(H'_i)$ et $\pi(H''_i)$, $i = 1, 2, \dots, q$ de tous les demi-espaces de G . Comme dans la section précédente, nous appelons \tilde{G} le graphe obtenu à partir de G en contractant les arêtes de la Θ -classe E_q . On considère la fonction de poids $\tilde{\pi}$ sur $\tilde{G} = H'_q$ définie ci-dessous :

$$\tilde{\pi}(v') = \begin{cases} \pi(v') + \pi(v'') & \text{si } v' \in \partial H'_q, v'' \in H''_q, \text{ et } v' \sim v'', \\ \pi(v') & \text{si } v' \in H'_q \setminus \partial H'_q. \end{cases} \quad (2.1)$$

Lemme 2.2.1. *Pour toute Θ -classe \tilde{E}_i de \tilde{G} , $\tilde{\pi}(\tilde{H}'_i) = \pi(H'_i)$ et $\tilde{\pi}(\tilde{H}''_i) = \pi(H''_i)$.*

D'après le Lemme 2.2.1, pour calculer tous les $\pi(H'_i)$ et $\pi(H''_i)$, il suffit de calculer le poids $\pi(H''_i)$ du demi-espace périphérique de E_i dans le graphe G_i et d'en déduire le poids de H'_i : $\pi(H'_i) = \pi(G) - \pi(H''_i)$.

Soit G le graphes médians courant, et soient H''_q un demi-espace périphérique de G et $\tilde{G} = H'_q$ le graphe obtenu en contractant les arêtes de la Θ -classe E_q . Pour calculer $\pi(H''_q)$, nous parcourons les extrémités des arêtes de E_q qui appartiennent à H''_q , puis nous déduisons $\pi(H'_q) = \pi(G) - \pi(H''_q)$. Soit $\tilde{\pi}$ la fonction de poids en \tilde{G} définie par l'Équation 2.1. Immédiatement, $\tilde{\pi}$ peut être calculée en temps $O(|V(H'_q)|) = O(|E_q|)$. Ainsi, d'après le Lemme 2.2.1, il suffit d'appliquer récursivement l'algorithme au graphe \tilde{G} et à la fonction de poids $\tilde{\pi}$. Un exemple de la mise à jour des poids des sommets est donné dans la Figure 2.1, les sommets ont initialement un poids de 1 et leur mise à jour est donnée en bleu. Comme chaque arête de G n'est parcourue que quand sa Θ -classe est contractée, l'algorithme a une complexité en $O(m)$.

2.3 Calcul de l'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$

Nous débutons avec une propriété de F_π qui découle du Lemme 0.3.6 :

Lemme 2.3.1. *Si $uv \in E_i$ avec $u \in H_i'$ et $v \in H_i''$, alors $F_\pi(u) - F_\pi(v) = \pi(H_i'') - \pi(H_i')$.*

Démonstration. On a $F_\pi(u) = \sum_{x \in H_i''} \pi(x)d(u, x) + \sum_{x \in H_i'} \pi(x)d(u, x)$. Comme u est la porte de v sur H_i' et v est la porte de u sur H_i'' , $F_\pi(u) = \sum_{x \in H_i''} \pi(x)(d(v, x) + 1) + \sum_{x \in H_i'} \pi(x)(d(v, x) - 1)$. Donc $F_\pi(u) = F_\pi(v) + \pi(H_i'') - \pi(H_i')$, ce qui conclut la preuve. \square

Nous dirons qu'un **demi-espace** est *majoritaire* si $\pi(H) > \frac{1}{2}\pi(G)$, *minoritaire* si $\pi(H) < \frac{1}{2}\pi(G)$ et *égalitaire* si $\pi(H) = \frac{1}{2}\pi(G)$. Soit $\text{Med}^{loc}(\pi) = \{v \in V : F_\pi(v) \leq F_\pi(u), \forall u \sim v\}$ l'ensemble des médians locaux de G . Nous poursuivons avec la règle de majorité suivante :

Proposition 2.3.2 ([12, 105]). *L'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ d'un graphes médians G respecte les propriétés suivantes :*

- (i) $\text{Med}(\pi)$ est l'intersection de tous les **demi-espaces majoritaires**
- (ii) $\text{Med}(\pi)$ intersecte tous les **demi-espaces égalitaires**
- (iii) $\text{Med}(\pi) = \text{Med}^{loc}(\pi)$

Démonstration. Nous allons commencer par montrer une généralisation du Lemme 2.3.1 dont découlent plusieurs affirmations de la Proposition 2.3.2.

Lemme 2.3.3. *Soient E_i une Θ -classe d'un graphes médians G , et deux demi-espaces H_i' et H_i'' définis par E_i . Si $x'' \in H_i''$ et x' est la porte de x'' dans H_i' , alors $F_\pi(x'') \geq F_\pi(x') + d(x', x'')(\pi(H_i') - \pi(H_i''))$.*

Démonstration. Par définition de la somme totale des distances :

$$F_\pi(x'') - F_\pi(x') = \sum_{u \in V} \pi(u)d(x'', u) - \sum_{u \in V} \pi(u)d(x', u) = \sum_{u \in V} \pi(u)(d(x'', u) - d(x', u))$$

On sépare la somme entre les deux **demi-espaces** complémentaires H_i' et H_i'' :

$$F_\pi(x'') - F_\pi(x') = \sum_{u' \in H_i'} \pi(u')(d(x'', u') - d(x', u')) + \sum_{u'' \in H_i''} \pi(u'')(d(x'', u'') - d(x', u''))$$

Comme x' est la porte de x'' sur H_i' , pour tout $u' \in H_i'$, $d(x'', u') - d(x', u') = d(x'', x')$. D'après l'inégalité triangulaire, $d(x'', u'') - d(x', u'') \geq -d(x'', x')$ pour tout $u'' \in H_i''$. On obtient donc

$$F_\pi(x'') - F_\pi(x') \geq \sum_{u' \in H_i'} \pi(u')d(x'', x') - \sum_{u'' \in H_i''} d(x'', x')\pi(u'')$$

et nous pouvons donc conclure que $F_\pi(x'') \geq F_\pi(x') + d(x'', x')(\pi(H_i') - \pi(H_i''))$. \square

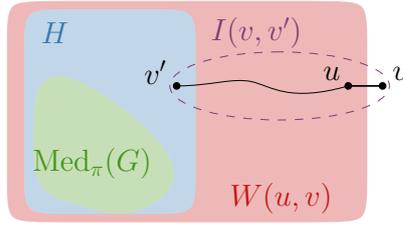


FIGURE 2.2 – Illustration de la preuve de la Proposition 2.3.2(iii)

Soient H'_i et H''_i , deux **demi-espaces** complémentaires de G tels que $\pi(H'_i) < \pi(H''_i)$. On choisit arbitrairement un sommet x'' de H''_i et sa porte x' sur H'_i . D'après le Lemme 2.3.3, $F_\pi(x'') > F_\pi(x')$ et par conséquent, x'' ne peut pas être un médian. Ceci montre que le complémentaire d'un **demi-espace** majoritaire ne contient aucun sommet médian, ce qui implique que $\text{Med}(\pi)$ est inclus dans l'intersection M des **demi-espaces** majoritaires.

Si $\text{Med}(\pi)$ n'est pas égal à M , étant donné que M est convexe, nous pouvons trouver deux sommets adjacents $x \in \text{Med}(\pi)$ et $y \in M \setminus \text{Med}(\pi)$. Soit E_i la Θ -classe de xy avec $x \in H'_i$ et $y \in H''_i$. Comme y appartient à M , H'_i n'est pas un **demi-espace** majoritaire, et comme $x \in \text{Med}(\pi)$, H'_i n'est pas un **demi-espace** minoritaire. H'_i et H''_i sont donc des **demi-espaces** égalitaires. Comme $F_\pi(x) - F_\pi(y) = \pi(H''_i) - \pi(H'_i) = 0$, on en déduit que y est un médian, et donc que $\text{Med}(\pi) = M$, ce qui conclut (i).

Soient deux **demi-espaces** égalitaires complémentaires H'_i et H''_i , comme ils sont complémentaires, $\text{Med}(\pi)$ intersecte au moins un des deux. On suppose sans perte de généralité qu'un sommet médian x'' appartient à H''_i et soit x' sa porte sur H'_i . D'après le Lemme 2.3.3, $F_\pi(x') \leq F_\pi(x'')$. Par conséquent, x' est également médian, et par symétrie on en conclut que H'_i et H''_i contiennent tous les deux un sommet médian, ce qui montre (ii).

On montre à présent que tout médian local est un médian. Soit $v \notin \text{Med}(\pi)$. Comme $\text{Med}(\pi)$ est l'intersection de tous les **demi-espaces** majoritaires de G , il existe un **demi-espace** majoritaire H incluant $\text{Med}(\pi)$ et ne contenant pas v . Soit v' la porte de v sur H , et soit u un voisin de v dans $I(v, v')$. On a donc $H \subseteq W(u, v)$ (cf Figure 2.2), donc $W(u, v)$ est un **demi-espace** majoritaire. Ceci implique que $F_\pi(u) < F_\pi(v)$, et donc que v n'est pas un médian local, ce qui finit de montrer (iii) et conclut la preuve. \square

Nous utilisons la Proposition 2.3.2 et les poids des demi-espaces calculés plus haut pour trouver $\text{Med}(\pi)$. Pour cela, nous orientons les arêtes $v'v''$ de chaque Θ -classe E_i de G de la façon suivante : Si $v' \in H'_i$, et $v'' \in H''_i$, alors on dirige $v'v''$ de v' vers v'' si $\pi(H''_i) > \pi(H'_i)$, de v'' vers v' si $\pi(H'_i) > \pi(H''_i)$, et si $\pi(H'_i) = \pi(H''_i)$, alors l'arête reste non orientée. On appellera \vec{G} ce graphe partiellement orienté, et un sommet u de \vec{G} est un *puits* si il n'existe pas d'arête uv orientée de u vers v . D'après le Lemme 2.3.1, u est un puits de \vec{G} ssi u est un médian local de G . D'après la Proposition 2.3.2(iii), $\text{Med}_\pi^{\text{loc}}(G) = \text{Med}(\pi)$ et donc $\text{Med}(\pi)$ correspond à l'ensemble des puits de \vec{G} . On observe que dans le graphe induit par $\text{Med}(\pi)$, toutes les arêtes sont non-orientées dans \vec{G} . Une fois que tous les poids des **demi-espaces** $\pi(H'_i)$ et $\pi(H''_i)$ ont été calculés, il suffit de traverser chaque Θ -classe de G pour orienter les arêtes, puis de parcourir tous les sommets et retourner les puits. Le pseudo-code est donné dans l'Algorithme 5, et la Figure 2.3 donne deux exemples d'orientation des arêtes, en (a) tous les sommets ont un poids de 1 et en (b) les poids non nuls sont indiqués en bleu.

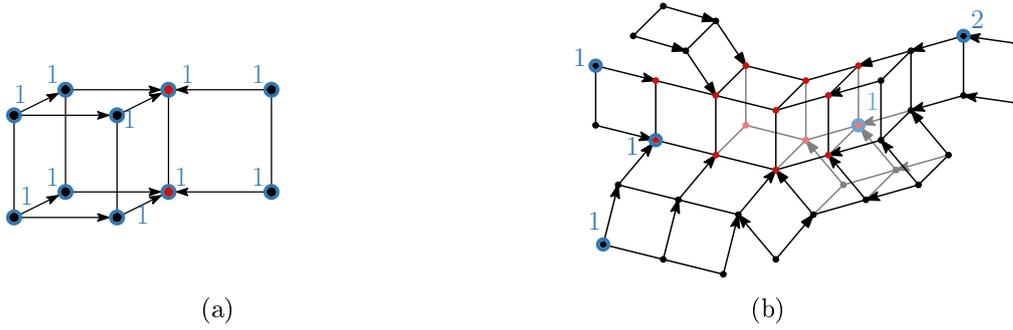


FIGURE 2.3 – Orientation des arêtes vers deux exemples d'ensembles médians (en rouge)

Le graphe induit par les puits de \vec{G} peut être calculé en temps $O(m)$, ce qui nous donne le résultat suivant :

Théorème 2.3.4. *L'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ d'un graphes médians G avec m arêtes peut être calculé en temps $O(m)$.*

Algorithme 5 : CalculMedianGrapheMedian(G, π)

Entrées : Un graphe médian $G = (V, E)$, une fonction de poids $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Sorties : L'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ de G

```

1 begin
2    $\Theta \leftarrow \text{Calcul}\Theta\text{-ClassesLexBFS}(G, v_0)$  //  $v_0$  un sommet choisi arbitrairement
3    $L \leftarrow \text{CalculPoidsDesDemiEspaces}(G, \pi, \Theta)$ 
4   pour tous les  $E_i \in \Theta$  faire
5     si  $\pi(H'_i) \neq \pi(H''_i)$  //  $H'_i$  et  $H''_i$  étant les deux demi-espaces
      complémentaires définis par  $E_i$  et dont les poids  $(\pi(H'_i), \pi(H''_i))$  sont
      enregistrés dans  $L$ 
6     alors
7       Orienter dans  $\vec{G}$  les arêtes de  $E_i$  du demi-espace minoritaire vers le
      demi-espace majoritaire
8    $\text{Med}(\pi) \leftarrow \emptyset$ 
9   pour tous les  $v \in V$  faire
10    si  $v$  est un puits alors
11    | ajouter  $v$  à  $\text{Med}(\pi)$ 
12  retourner  $\text{Med}(\pi)$ 

```

2.4 Calcul d'une paire diamétrale de $\text{Med}(\pi)$

Dans [12], Bandelt et Barthélémy ont montré que dans un graphes médians G , l'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ coïncide avec l'intervalle entre une paire diamétrale de $\text{Med}(\pi)$. Nous montrons comment trouver cette paire en temps $O(m)$ en utilisant un corollaire de la Proposition 2.3.2 :

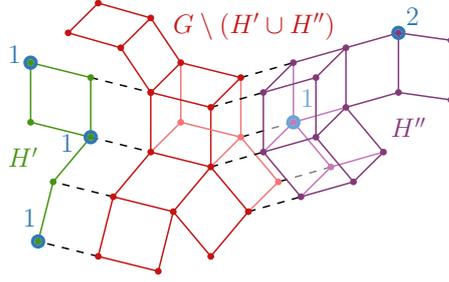


FIGURE 2.4 – Une illustration du Corollaire 2.4.1.

Corollaire 2.4.1. *Si deux demi-espaces disjoints H' et H'' définis par deux Θ -classes laminaires de G intersectent toute les deux $\text{Med}(\pi)$ (cf Figure 2.4), alors $\pi(v) = 0$ pour tout sommet $v \in V \setminus (H' \cup H'')$.*

Démonstration. Étant donné que $\text{Med}(\pi)$ intersecte à la fois H' et H'' , d'après la Proposition 2.3.2(i), H' et H'' ne sont pas minoritaires, et étant donné qu'ils sont disjoints, d'après la Proposition 2.3.2(ii), ils sont donc égalitaires, i.e. $\pi(H') = \pi(H'') = \frac{1}{2}\pi(G)$. Et étant donné qu'ils sont disjoints, $\pi(H') + \pi(H'') = \pi(G)$, et donc $\pi(V \setminus (H' \cup H'')) = 0$. \square

Corollaire 2.4.2. *Si $\pi(G) > 0$, il est possible de trouver en temps $O(m)$ deux sommets u, v tels que $\text{Med}(\pi) = I(u, v)$.*

On rappelle qu'étant donné un ensemble porté H , l'ensemble $P_H(u) = \{v \in V : u \text{ est la porte de } v \text{ sur } H\}$ est appelée la *fibres* de u par rapport à H . On dira qu'une fibre $P_H(u)$ est positive si $\pi(P_H(u)) > 0$. Les fibres $\{P_H(u) : u \in H\}$ définissent une partition de $V(G)$. Nous donnons ci-dessous une preuve de [12, Proposition 6] n'utilisant pas les treillis.

Proposition 2.4.3 ([12]). *Soit $M = \text{Med}(\pi)$ et soit u un sommet de M avec une fibre positive $P_M(u)$. Alors, $M = I(u, v)$ où v est le sommet de M maximisant $d(u, v)$.*

Démonstration. Étant donné que M est convexe et que $u, v \in M$, nous avons $I(u, v) \subseteq M$, nous montrons maintenant l'inclusion inverse. On suppose par l'absurde qu'il existe un sommet z appartenant à M mais pas à $I(u, v)$ et on le choisit tel qu'il minimise $d(v, z)$. Soit z' le médian du profil (u, v, z) (i.e., l'unique sommet dans $I(u, v) \cap I(v, z) \cap I(u, z)$). Par définition, z' appartient à $I(u, v)$, et donc à M . Étant donné que M est convexe et que $z, z' \in M$, par minimalité de $d(v, z)$, nous pouvons conclure que z et z' sont adjacents. Comme v maximise la distance à u dans M et que $z' \in I(u, z)$, $z' \neq v$ car l'inverse impliquerai que $d(u, z) = d(u, v) + 1 > d(u, v)$ ce qui est impossible car z est dans M . Étant donné que $z' \in I(z, u) \cap I(z, v)$, $u, v \in W(z', z)$. Soit y un voisin de z' dans $I(z', v)$ arbitrairement choisi, et soient E_i la Θ -classe de $z'z$ et E_j celle de $z'y$ (cf Figure 2.5a).

On affirme que E_i et E_j sont laminaires. En effet si ce n'était pas le cas, d'après le Lemme 0.3.11, il existerait un sommet x adjacent à z et y . Étant donné que $x \in I(z, y)$ et $z, y \in M$, x appartient également à M et est plus proche de v que z (cf Figure 2.5b). La minimalité de $d(v, z)$ implique que $x \in I(u, v)$. Comme $u \in W(z, x)$, nous avons $z \in I(x, u)$, ce qui implique que $z \in I(u, v)$. Cette contradiction montre que E_i et E_j sont laminaires, i.e., que les demi-espaces

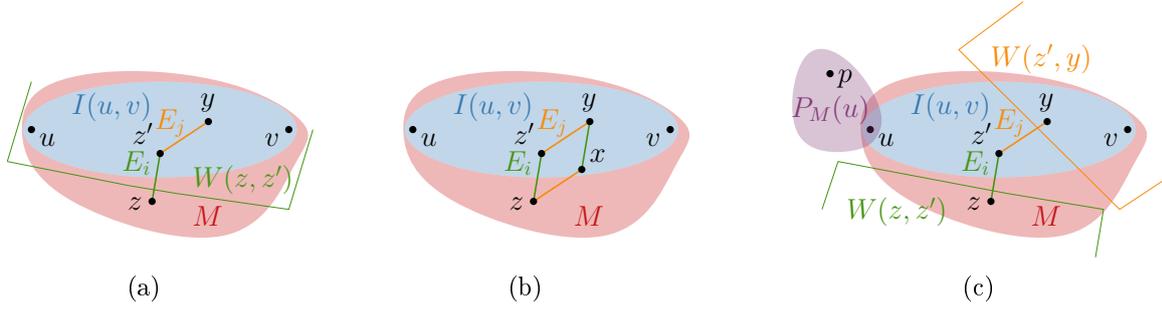


FIGURE 2.5 – Illustration de la preuve de la Proposition 2.4.3

$W(z, z')$ et $W(y, z')$ sont disjoints. Étant donné qu'ils intersectent tous les deux M , d'après le Corollaire 2.4.1, tous les sommets de G n'appartenant pas à $W(z, z') \cup W(y, z')$ ont un poids nul.

On choisit arbitrairement un sommet $p \in P_M(u)$. Comme p appartient à la fibre $P_M(u)$ et z, y à M , obligatoirement $u \in I(y, p) \cap I(z, p)$. Comme y est un voisin de z' dans $I(z', v)$ et $z' \in I(v, u)$, on a $z' \in I(y, u) \subseteq I(y, p)$, et donc $p \in W(z', y)$. De manière analogue, on déduit du choix de z que $z' \in I(z, u) \subseteq I(z, p)$, et donc $p \in W(z', z)$. Ceci établit que $P_M(u) \subseteq W(z', y) \cap W(z', z)$, i.e., $P_M(u)$ est disjoint des demi-espaces $W(y, z')$ et $W(z, z')$ (cf Figure 2.5c), ce qui est une contradiction avec le fait que $P_M(u)$ a un poids positif. \square

Nous pouvons maintenant prouver le corollaire :

Démonstration du Corollaire 2.4.2. Une fois que $M = \text{Med}(\pi)$ est calculé, on choisit arbitrairement un sommet v_1 de poids non nul. On exécute ensuite un BFS à partir de v_1 et trouvons donc en temps linéaire le sommet u de M le plus proche et le sommet v de M le plus éloigné de v_1 . Le sommet u est donc la porte de v_1 sur M , et v est à distance maximale de u dans M . D'après la Proposition 2.4.3, $I(u, v) = \text{Med}(\pi)$. \square

2.5 Graphes médians et règle de majorité

Dans cette section, nous montrons que les graphes médians sont exactement les graphes bipartis vérifiant la règle de majorité. Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. On rappelle qu'un *demi-espace* d'un graphe biparti est le sous-graphe induit par $W(u, v) = \{x \in V : d(x, u) < d(x, v)\}$ pour l'arête uv . On rappelle que les demi-espaces de G sont convexes ssi G est plongeable isométriquement dans un hypercube [55]. Pour une fonction de poids π sur les sommets de G et toute paire de demi-espaces complémentaires $W(u, v)$ et $W(v, u)$, nous avons $\pi(W(u, v)) + \pi(W(v, u)) = \pi(G)$. Un *demi-espace majoritaire* de G est un demi-espace $W(u, v)$ tel que $\pi(W(u, v)) > \pi(W(v, u))$. Un graphe biparti G satisfait la *règle de majorité* si pour toute fonction de poids π sur G , $\text{Med}(\pi)$ est l'intersection de tous les demi-espaces majoritaires de G .

Proposition 2.5.1. *Un graphe biparti G satisfait la règle de majorité ssi G est un graphe médian.*

Démonstration. La Proposition 2.3.2(i) établit que si G est un graphe médian, alors il satisfait la règle de majorité, nous montrons maintenant la réciproque. On donne une illustration de la preuve en Figure 2.6, les poids non nuls sont indiqués en bleu et la somme totale des distances en rouge.

2.6. L'indice de Wiener $W(\pi)$ et la matrice des distances $D(G)$

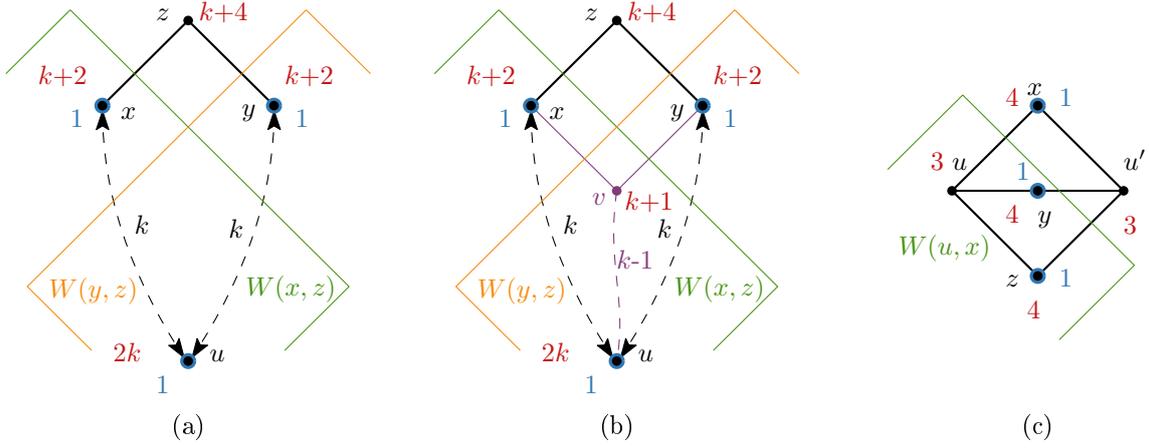


FIGURE 2.6 – Illustration de la preuve de la Proposition 2.5.1

Pour montrer que G est un graphe médian, il suffit de montrer que G satisfait (QC) et ne contient pas de $K_{2,3}$ [88]. Nous commençons par montrer la condition du quadrangle, soit $d(u, z) = k + 1$, $d(u, x) = d(u, y) = k \geq 2$ et $z \sim x, y$. On considère la fonction de poids $\pi(u) = \pi(x) = \pi(y) = 1$ et $\pi(v) = 0$ si $v \neq u, x, y$. On observe que $F_\pi(x) = F_\pi(y) = k + 2$, $F_\pi(z) = k + 4$, $F_\pi(u) = 2k$. Comme $W(x, z)$ et $W(y, z)$ sont des *demi-espaces* majoritaires et $x \notin W(y, z)$, $y \notin W(x, z)$, les sommets x et y ne sont pas médians (cf Figure 2.6a). Ceci implique que si $v \in \text{Med}(\pi)$, alors $F_\pi(v) \leq k + 1$. D'après l'inégalité triangulaire, $d(u, v) + d(v, x) \geq k$ et l'égalité est vérifiée seulement si $v \in I(u, x)$. De plus, si $v \neq y$, $d(v, y) \geq 1$ et $d(v, y) = 1$ seulement si $v \sim y$. On a donc pour tout v $F_\pi(v) = d(v, x) + d(v, y) + d(v, u) \geq k + 1$ et l'égalité est vérifiée seulement si $v \in I(u, x)$ et $v \sim y$. Par symétrie, v médian ssi $v \in I(u, y)$ et $v \sim x$ et donc G satisfait (QC) (cf Figure 2.6b).

On suppose maintenant que G contient un $K_{2,3}$ induit par les sommets x, y, z, u, u' tels que u et u' sont adjacents à x, y, z . On considère la fonction de poids $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 1$ et $\pi(v) = 0$ pour tous les autres sommets v . On a alors $F_\pi(u) = F_\pi(u') = 3$ et $F_\pi(x) = F_\pi(y) = F_\pi(z) = 4$. Comme G est biparti, $F_\pi(v) \geq 6$ pour tout autre sommet v . On a donc $\text{Med}(\pi) = \{u, u'\}$. Comme $u, y, z \in W(u, x)$ et $x, u' \in W(x, u)$, on en déduit que $W(u, x)$ est un *demi-espace* majoritaire, ou $u' \in \text{Med}(\pi) \setminus W(u, x)$ (cf Figure 2.6c), ce qui est une contradiction avec la règle de majorité. \square

2.6 L'indice de Wiener $W(\pi)$ et la matrice des distances $D(G)$

En utilisant le calcul linéaire des Θ -classes et du poids des demi-espaces d'un *graphes médians* G , nous pouvons calculer l'indice de Wiener de G en temps linéaire. On rappelle que l'indice de Wiener est défini comme suit : $W(\pi) = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \pi(u) \cdot \pi(v) \cdot d(u, v)$.

Proposition 2.6.1. *L'indice de Wiener d'un *graphes médians* G avec m arêtes peut être calculé en temps $O(m)$.*

Démonstration. Étant donné les poids $\pi(H'_i)$ et $\pi(H''_i)$ de tous les *demi-espaces* de G , l'indice de Wiener $W(\pi)$ peut être calculé en temps $O(q)$ en utilisant la formule suivante (qui est vraie pour tous les cubes partiels, voir par exemple [75]) :

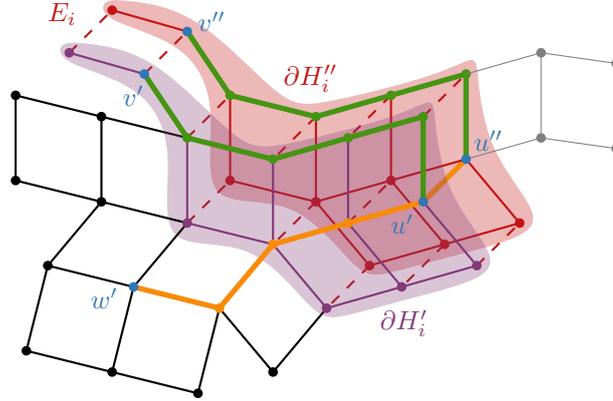


FIGURE 2.7 – Quelques plus courts chemins dans un graphes médians

Lemme 2.6.2. $W(\pi) = \sum_{i=1}^q \pi(H'_i) \cdot \pi(H''_i)$

Démonstration. Si G est un cube partiel, alors pour toute paire de sommets u, v de G , $d(u, v)$ est égal au nombre de Θ -classes E_i séparant u et v . On note $u|_i v$ si E_i sépare u et v . Nous avons donc :

$$\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \pi(u) \cdot \pi(v) \cdot d(u, v) = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \sum_{i: u|_i v} \pi(u) \cdot \pi(v) \cdot 1 = \sum_{i=1}^q \sum_{u \in H'_i} \sum_{v \in H''_i} \pi(u) \pi(v)$$

et donc $W(\pi) = \sum_{i=1}^q \pi(H'_i) \cdot \pi(H''_i)$. □

Comme les poids des demi-espaces peuvent être calculés en temps $O(m)$, et comme $q \leq m$, $W(\pi)$ peut également être calculé en temps $O(m)$. □

La matrice des distances $D(G)$ d'un graphes médians G peut être calculée en temps $O(n^2)$ en parcourant un épluchage périphérique en sens inverse $G_0, G_1, \dots, G_q = G$ de G (on donne le pseudo-code dans l'Algorithme 6). Pour tout i on calcule $D(G_i)$ en supposant que $D(G_{i-1})$ est déjà calculée. Comme G_{i-1} coïncide avec le demi-espace H'_i de G_i , G_{i-1} est porté dans G_i , et donc $D(G_i)$ restreinte à G_{i-1} coïncide avec $D(G_{i-1})$. Ainsi, pour obtenir $D(G_i)$ nous n'avons plus qu'à calculer les distances entre chaque sommet v'' de H''_i et tous les autres sommets de G_i . Pour chaque paire u'', v'' de H''_i , on notera u', v' leur unique voisin dans $G_i = H'_i$. Comme H''_i est périphérique dans G_i , H'_i est isomorphe à la frontière $\partial H'_i$ de H'_i . Comme $\partial H'_i$ est portée (d'après le Lemme 0.3.12), $d(u'', v'') = d(u', v')$ (cf les chemins verts de la Figure 2.7). Comme u' est la porte de u'' sur H'_i , pour tout sommet $w' \in H'_i$, nous avons $d(u'', w') = d(u', w') + 1$ (cf le chemin orange de la Figure 2.7). Ceci montre comment compléter la matrice $D(G_i)$ à partir de $D(G_{i-1})$. La complexité de cette complétion est égale au nombre d'éléments qui sont dans $D(G_i)$ mais pas $D(G_{i-1})$, et donc $D(G)$ peut être calculée en temps $O(n^2)$. Par conséquent, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.6.3. *La matrice des distances $D(G)$ d'un graphes médians G avec n sommets peut être calculée en temps $O(n^2)$.*

Algorithme 6 : MatriceDistances(G, Θ)

Entrées : Un graphe médian $G = (V, E)$, les Θ -classes $\Theta = (E_1, E_2, \dots, E_q)$ de G ordonnées par distance croissante à un sommet v_0

Sorties : La matrice des distances $D : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$

```

1 begin
2   si  $G$  ne contient qu'un sommet  $v$  alors
3      $D(v, v) \leftarrow 0$ 
4     retourner  $D$ 
5   sinon
6     Soient deux demi-espaces complémentaires  $H'$  et  $H''$  définis par  $E_q$  ( $v_0 \in H'$ )
7      $D \leftarrow \text{MatriceDistances}(H', \Theta \setminus \{E_q\})$ 
8     pour tous les  $u'u'' \in E_q$  avec  $u' \in H'$  et  $u'' \in H''$  faire
9        $D(u'', u') = 1$ 
10      pour tous les  $v'' \in H''$  avec  $v'$  la porte de  $v''$  sur  $H'$  faire
11         $D(u'', v'') = D(u', v')$ 
12      pour tous les  $w' \in H'$  faire
13         $D(u'', w') = D(u', w') + 1$ 
14  retourner  $D$ 

```

Chapitre 3

Calcul des p -moments

Il peut être intéressant de regarder d'autres distances que la distance classique dans les graphes. Pour reprendre le quatrième exemple de l'introduction, si on cherche à calculer le médian de Kemeny des ordonnancements $a < b < c$, $b < c < a$ et $c < a < b$ alors on obtient 3 sommets dans l'ensemble médian. Mais si on considère l'ensemble des sommets minimisant la somme des carrés des distances aux sommets du profil alors on obtient $a = b = c$ comme unique solution.

D'une manière plus générale, si on considère des problèmes de localisation où on veut donner un poids plus important aux grandes distances entre la localisation choisie et les points donnés, il peut-être intéressant de minimiser la somme des distances au carré plutôt que la somme des distances. La notion de barycentre (ou centre de masse), qui joue un rôle important en mécanique et en mathématiques, correspond à une localisation qui minimise cette somme. Plus généralement, lorsque l'on minimise la somme des distances à la puissance p , plus la valeur de p est grande plus les grandes distances ont du poids par rapport aux petites dans le choix de la localisation. A la limite lorsque p vaut $+\infty$, une localisation est optimale si elle minimise la distance au point le plus éloigné de celle-ci, i.e. son excentricité. Le problème de localisation revient alors à calculer le *centre* de l'ensemble des points, i.e. les localisations dont l'excentricité est minimum. Faire varier la valeur de p permet donc de positionner le problème de localisation considéré quelque part entre le problème du médian et le problème du centre. L'article [104] s'intéresse au calcul de l'ensemble minimisant la somme pondérée des distances à la puissance p dans les graphes et [33] dans le cas des arbres. Dans ce chapitre, on s'y intéressera dans le cadre des graphes médians.

Pour un graphe G et une fonction de poids π sur les sommets, on appelle *p -moment* en u la fonction $\rho^p(u, G, \pi) = \sum_{x \in V(G)} \pi(x) d^p(u, x)$ et on cherche l'ensemble de sommets la minimisant. Pour le cas $p = 1$ traité dans le chapitre précédent, nous n'avons pas besoin de calculer la somme totale des distances en chaque sommet pour en déduire l'ensemble médian, ce n'est malheureusement plus le cas. Nous utiliserons un épluchage périphérique $G = G_q, G_{q-1}, \dots, G_0 = (\{v_0\}, \emptyset)$ défini en Section 2.1. Chaque G_i est alors un sous-graphe porté de G . On appellera H_i^* le *demi-espace* périphérique supprimé à l'étape i , $G_{i+1} \setminus G_i$. On rappelle la définition de la fibre associée à un sous-graphe porté H d'un sommet v de H : $F_H(v) = \{x \in V(G) : v \text{ est la porte de } x \text{ sur } H\}$. Et on notera $F_i(u) = \{x \in V(G) : u \text{ est la porte de } x \text{ sur } G_i\}$. La Figure 3.1 présente les différentes notations utilisées dans ce chapitre.

Nous commencerons par présenter quelques résultats qui nous seront utiles par la suite, puis nous présenterons la méthode utilisée avant de passer à l'algorithme nous permettant de prouver le résultat principal de ce chapitre :

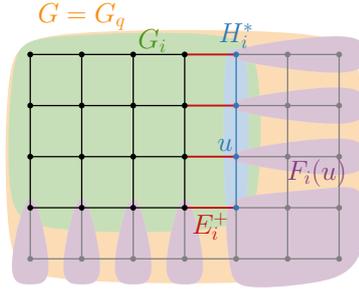


FIGURE 3.1 – Notations utilisées dans le Chapitre 3

Proposition (3.3.1). Pour tout graphes médians G avec n sommets et m arêtes et pour toute fonction de poids π sur $V(G)$, on peut calculer le p -moment $\rho^p(v, G, \pi) = \sum_{x \in V(G)} \pi(x) d^p(v, x)$ pour chaque sommet $v \in V(G)$ en temps $O(pm + p^3 2^p n)$.

Ce chapitre présente un travail toujours en cours.

3.1 Lemmes préliminaires

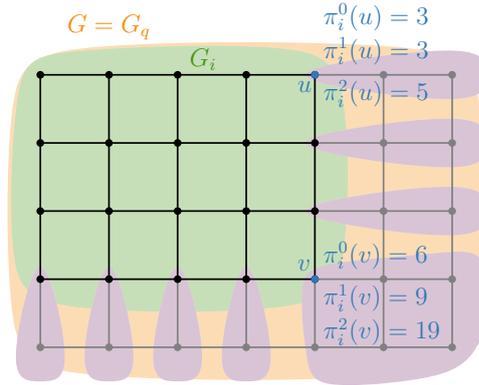
Nous présentons dans cette section quelques lemmes qui nous seront utiles pour notre algorithme. Le premier Lemme lie les p -moments dans G aux p -moments dans un demi-espace de G et le second aux p -moments dans un sous-graphe porté de G .

Soient H' et H'' , deux demi-espaces complémentaires et uv une arête entre H' et H'' , le lemme suivant montre comment calculer le j -moment de v dans G à partir du j -moment du sommet u de G et des k -moments de v dans G et H'' pour tous les k inférieurs à j .

Lemme 3.1.1. Soient H' , H'' deux demi-espaces complémentaires de G et soit u et v deux sommets adjacents tels que u appartient à H' et v à H'' . Alors :

$$\begin{aligned} \rho^j(u, G, \pi) - \rho^j(v, G, \pi) &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \left(\rho^k(v, H'', \pi) + (-1)^{j-k} (\rho^k(v, G, \pi) - \rho^k(v, H'', \pi)) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \rho^k(v, G, \pi) + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \left(1 - (-1)^{j-k} \right) \rho^k(v, H'', \pi). \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la définition des demi-espaces H' et H'' , $\rho^j(u, G, \pi) = \sum_{x \in H''} \pi(x) d^j(u, x) + \sum_{x \in H'} \pi(x) d^j(u, x)$. Comme u est la porte de v sur H' et v est la porte de u dans H'' , $\rho^j(u, G, \pi) = \sum_{x \in H''} \pi(x) (d(v, x) + 1)^j + \sum_{x \in H'} \pi(x) (d(v, x) - 1)^j$. D'après la formule du binôme de Newton, $(d(v, x) + 1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} d^k(v, x)$ et $(d(v, x) - 1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} d^k(v, x)$. Comme


 FIGURE 3.2 – Les poids dans les fibres pour deux sommets u et v

$\rho^k(v, G, \pi) = \rho^k(v, H', \pi) + \rho^k(v, H'', \pi)$ pour tout $0 \leq k \leq j$:

$$\begin{aligned}
 \rho^j(u, G, \pi) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left(\sum_{x \in H''} \pi(x) d^k(v, x) + (-1)^{j-k} \sum_{x \in H'} \pi(x) d^k(v, x) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left(\rho^k(v, H'', \pi) + (-1)^{j-k} \rho^k(v, H', \pi) \right) \\
 &= \binom{j}{j} \left(\rho^j(v, H'', \pi) + (-1)^{j-j} \rho^j(v, H', \pi) \right) + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \left(\rho^k(v, H'', \pi) + (-1)^{j-k} \rho^k(v, H', \pi) \right) \\
 &= \rho^j(v, G, \pi) + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \left(\rho^k(v, H'', \pi) + (-1)^{j-k} \rho^k(v, H', \pi) \right) \\
 &= \rho^j(v, G, \pi) + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} \left(\rho^k(v, H'', \pi) + (-1)^{j-k} \left(\rho^k(v, G, \pi) - \rho^k(v, H'', \pi) \right) \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

Étant donnée une fonction de poids π sur les sommets d'un graphe G et un sous-graphe porté H de G , on définit pour tout entier j , une fonction de poids π_H^k sur les sommets de H : $\pi_H^k(u) = \sum_{x \in F_H(u)} \pi(x) d^k(u, x) = \rho^k(u, H, \pi)$ pour tout $u \in V(H)$. On donne en Figure 3.2 quelques exemples de calcul des poids. Le lemme suivant montre comment calculer $\rho^j(v, G, \pi)$ pour tout sommet $v \in V(H)$ en supposant que nous connaissons la valeur de $\pi_H^k(u)$ pour tout $u \in V(H)$ et $0 \leq k \leq j$.

Lemme 3.1.2. *Si v est un sommet d'un sous-graphe porté H de G , alors pour toute fonction de poids π sur les sommets de G :*

$$\rho^j(v, G, \pi) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \rho^k(v, H, \pi_H^{j-k}).$$

Démonstration. Pour tout $x \in V(G)$, soit la porte x_H de x sur H . En utilisant la formule du binôme de Newton (seconde ligne), et en considérant les sommets de G regroupés par fibre

(troisième ligne), et utilisant la définition de $\pi_H^{j-k}(x_H)$ (cinquième ligne), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \rho^j(v, G, \pi) &= \sum_{x \in V(G)} \pi(x) d^j(v, x) = \sum_{x \in V(G)} \pi(x) (d(v, x_H) + d(x_H, x))^j \\
 &= \sum_{x \in V(G)} \pi(x) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} d^k(v, x_H) d^{j-k}(x_H, x) \\
 &= \sum_{x_H \in V(H)} \sum_{x \in F_H(x_H)} \pi(x) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} d^k(v, x_H) d^{j-k}(x_H, x) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \sum_{x_H \in V(H)} d^k(v, x_H) \sum_{x \in F_H(x_H)} \pi(x) d^{j-k}(x_H, x) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \sum_{x_H \in V(H)} d^k(v, x_H) \pi_H^{j-k}(x_H) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \rho^k(v, H, \pi_H^{j-k}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre quelques propriétés des fibres :

Lemme 3.1.3. *Soient $uv \in E_i \cap E(G_{i-1})$ tels que $u \in H_i'$ et $v \in H_i''$. Alors :*

1. $F_i(u)$ est l'union disjointe de $F_{i+1}(u)$ et $F_{i+1}(v)$,
2. Pour tout x dans $F_{i+1}(u)$, $d(u, x) = d(v, x) - 1$ et pour tout x dans $F_{i+1}(v)$, $d(u, x) = d(v, x) + 1$

Démonstration. Comme u est la porte de v dans H_i' , alors $u \in I(v, x')$ pour tout $x' \in H_i'$, et donc dans $I(x'', x')$ pour tout $x'' \in F_{i+1}(v)$. Ainsi, $F_i(u) = F_{i+1}(u) \cup F_{i+1}(v)$. Comme G_i est un sous-graphe porté de G , d'après la définition des fibres $F_{i+1}(u) \cap F_{i+1}(v) = \emptyset$.

Si x appartient à $F_{i+1}(u)$, alors u est la porte de x dans G_{i+1} et $d(x, v) = d(x, u) + d(u, v) = d(x, u) + 1$. De manière similaire, si x est dans $F_{i+1}(v)$, alors $d(x, u) = d(x, v) + 1$. \square

Pour tout sommet u de G_i , soit $\pi_i^j(u) = \sum_{x \in F_i(u)} \pi(x) d^j(u, x) = \rho^j(u, F_i(u), \pi)$. On observe que si $i = 0$, alors $F_0(u) = \{u\}$, $\pi_0^0(u) = \pi(u)$ et $\pi_0^j(u) = 0$ si $j > 0$. De plus, si $i > 0$ et si u n'a pas de voisin dans H_i'' , alors $F_i(u) = F_{i+1}(u)$ et $\pi_i^j(u) = \pi_{i+1}^j(u)$. Le lemme suivant montre comment calculer $\pi_i^j(u)$ quand u a un voisin v dans H_i'' , en utilisant $\pi_{i+1}^j(u)$ et les valeurs de $\pi_{i+1}^k(v)$ pour $0 \leq k \leq j$:

Lemme 3.1.4. *Pour toute arête $uv \in E_i \cap E(G_{i-1})$ telle que $u \in H_i'$ et $v \in H_i''$:*

$$\pi_i^j(u) = \pi_{i+1}^j(u) + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \pi_{i+1}^k(v)$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.1.3(1), la fibre $F_i(u)$ est l'union disjointe des fibres $F_{i+1}(u)$ et $F_{i+1}(v)$, et donc $\pi_i^j(u) = \sum_{x \in F_{i+1}(u)} \pi(x) d^j(u, x) + \sum_{x \in F_{i+1}(v)} \pi(x) d^j(u, x) = \pi_{i+1}^j(u) +$

3.2. Contractions et décontractions : un aperçu

$\sum_{x \in F_{i+1}(v)} \pi(x) d^j(u, x)$. D'après le Lemme 3.1.3(2), pour tout x appartenant à $F_{i+1}(v)$, $d(u, x) = d(v, x) + 1$ et donc :

$$\begin{aligned} \pi_i^j(u) &= \pi_{i+1}^j(u) + \sum_{x \in F_{i+1}(v)} \pi(x) (d(v, x) + 1)^j = \pi_{i+1}^j(u) + \sum_{x \in F_{i+1}(v)} \pi(x) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} d(v, x)^k \\ &= \pi_{i+1}^j(u) + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \sum_{x \in F_{i+1}(v)} \pi(x) d(v, x)^k = \pi_{i+1}^j(u) + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \pi_{i+1}^k(v). \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Contractions et décontractions : un aperçu

Notre algorithme utilise le calcul rapide des Θ -classes du Chapitre 1 qui ordonne les Θ -classes par distance croissante à v_0 et donne donc un épiluchage périphérique $G = G_q, G_{q-1}, \dots, G_0 = (\{v_0\}, \emptyset)$ de G . Pour tout i , H_i^* est le graphe induit par les sommets de $V(G_{i+1}) \setminus V(G_i)$. Soient $n_i = |V(H_i^*)|$ et $m_i = |E(H_i^*)|$. On note que H_i^* est un **demi-espace** périphérique de G_{i+1} défini par $E_i \cap E(G_{i+1})$. Ainsi, les sommets de H_i^* sont exactement les sommets de G_{i+1} qui sont séparés de v_0 par E_i . Ils sont également les sommets de G séparés de v_0 par E_i n'étant séparés de v_0 par aucun E_k , $i \leq k < q$. On observe également que $V(H_{q-1}^*) \cup \dots \cup V(H_0^*)$ est une partition de $V(G) \setminus \{v_0\}$. On peut calculer cette partition en temps $O(m)$. Pour chaque $1 \leq i \leq q$, soit $E_i^+ = E_i \cap E(G_{i+1})$, on observe que E_i^+ est l'ensemble des arêtes contractées pour aller de G_{i+1} à G_i . On observe que $|E_i^+| = |V(H_i^*)| = n_i$ et par conséquent, $\sum_{i=1}^q |E_i^+| = \sum_{i=1}^q |V(H_i^*)| = \sum_{i=1}^q n_i = n - 1$. On observe que $\bigcup_{i=1}^q E(H_i^*) \cup \bigcup_{i=1}^q E_i^+$ est une partition de $E(G)$. Pour toute arête $uv \in E(G)$ avec $u \in V(H_j^*)$, $v \in V(H_i^*)$, et $j \leq i$, on a $uv \in E(H_i^*)$ si $i = j$ et $uv \in E_i^+$ sinon. par conséquent, on peut calculer la partition des arêtes de $E(G)$ en $\bigcup_{i=1}^q E(H_i^*) \cup \bigcup_{i=1}^q E_i^+$ en temps $O(m)$.

Une fois que nous avons calculé cette partition des sommets et des arêtes de G , notre algorithme va avoir deux phases et des appels récursifs. Dans les phases de contraction, on part de $G_q = G$ et à chaque étape i , on "contracte" E_i^+ pour obtenir G_i à partir de G_{i+1} . Pendant l'exécution, à chaque étape i , on calcule le j -moment $\pi_i^j(u)$ ($0 \leq j \leq p$) de chaque sommet $u \in G_i$ dans sa fibre $F_i(u)$. Pour cela, on utilise le Lemme 3.1.4. À la fin de cette phase, G_0 contient seulement le sommet v_0 et $\pi_0^j(v_0) = \rho^j(v_0, G, \pi)$: nous avons calculé le j -moment $\rho^j(v_0, G, j)$ ($0 \leq j \leq p$) de v_0 dans G .

Nous commençons alors la phase de "décontraction". Pour chaque étape i , en supposant que nous avons calculé le j -moment $\rho^j(u, G, j)$ ($0 \leq j \leq p$) de G pour chaque $u \in V(G_i)$ dans G , en utilisant les Lemmes 3.1.1 et 3.1.2, nous calculons le j -moment $\rho^j(v, G, j)$ ($0 \leq j \leq p$) dans G pour chaque $v \in V(H_i^*) = V(G_{i+1}) \setminus V(G_i)$. Pour calculer ces valeurs, nous avons besoin des valeurs des p' -moments dans H_i'' des sommets de H_i^* pour les fonctions de poids π_{i-1}^j avec $p' + j' \leq p - 1$. Pour calculer ces p' -moments, nous faisons $p - 1$ appels récursifs pour chaque H_i^* .

3.3 L'algorithme

On décrit maintenant un algorithme calculant $\rho^p(u, G, \pi)$ pour tout p . On procède de manière récursive, en calculant $\rho^j(u, G, \pi)$ pour tout $0 \leq j \leq p$. Comme expliqué plus haut, nous calculons un épiluchage périphérique $G = G_q, G_{q-1}, \dots, G_0 = (\{v_0\}, \emptyset)$ de G en temps $O(m)$.

Algorithme 7 : p -moment($G; \pi; p$)

Result : L'algorithme calcule $\rho^j(G, v, \pi)$ pour chaque sommet v de G et chaque $0 \leq j \leq p$,

```

1 begin
2   si  $p = 0$  alors
3      $\pi_G = \sum_{u \in V(G)} \pi(u)$ 
4     pour tous les  $v \in V(G)$  faire  $\rho^0(G, v, \pi) = \pi_G$ 
5   sinon
6     /* Initialisation */
7      $G^* = G$ 
8     Calculer  $\Theta = E_1, E_2, \dots, E_q$  les  $\Theta$ -classes de  $G$  ordonnées par distance croissante
9     à un sommet  $v_0$ 
10    pour tous les  $u \in V(G)$  faire
11       $\pi^0(u) = \pi(u)$ 
12      pour tous les  $j = 1$  à  $p$  faire  $\pi^j(u) = 0$ 
13    /* Phase de contraction */
14    pour tous les  $i = q$  à 1 faire
15      /* On construit le graphe  $H_i^*$  et l'ensemble  $E_i^+$  */
16       $H_i^* = (\emptyset, \emptyset); E_i^+ = \emptyset$ 
17      pour tous les  $uv \in E_i$  faire /*  $u \in H_i'$  et  $v \in H_i''$  */
18        si  $v \in V(G^*)$  alors
19          /* On supprime  $v$  et ses arêtes incidentes à  $G^*$  et on les
20             ajoute à  $H_i^*$  et  $E_i^+$  */
21           $V(G^*) = V(G^*) \setminus \{v\}; V(H_i^*) = V(H_i^*) \cup \{v\}$ 
22           $E(G^*) = E(G^*) \setminus \{uv\}; E_i^+ = E_i^+ \cup \{uv\}$ 
23          pour tous les  $vx \in E(G^*)$  faire
24             $E(G^*) = E(G^*) \setminus \{vx\}; E(H_i^*) = E(H_i^*) \cup \{vx\}$ 
25          /* On met à jour  $\pi^j(u)$  pour tous les  $u \in V(G_i)$  dans les frontières
26             de  $H_i'$  */
27          pour tous les  $uv \in E_i^+$  faire
28            pour  $j = 0$  à  $p$  faire
29               $\pi^j(u) = \pi^j(u) + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \pi^k(v)$ 
30          /* On calcule  $\rho^j(v_0, G, \pi)$  pour tout  $0 \leq j \leq p$  */
31          pour  $j = 0$  à  $p$  faire  $\rho^j(v_0, G, \pi) = \pi^j(v_0)$ 
32          /* Phase de décontraction */
33          pour  $i = 1$  à  $q$  faire
34            /* On calcule récursivement  $\rho^s(v, H_i^*, \pi_{i+1}^r)$  pour tout  $v \in H_i^*$ , tout
35                $0 \leq r \leq p-1$ , et tout  $0 \leq s \leq p-1-r$  */
36            pour  $r = 0$  à  $p-1$  faire
37               $p$ -moment( $H_i^*, \pi^r, p-1-r$ )
38            /* On calcule  $\rho^j(v, G, \pi)$  pour tout  $v \in H_i^*$  pour tout  $0 \leq j \leq p$  */
39            pour tous les  $uv \in E_i^+$  faire /*  $u \in H_i'$  et  $v \in H_i''$  */
40              pour  $j = 0$  à  $p-1$  faire
41                 $\rho^j(v, G, \pi) = \rho^j(u, G, \pi) - \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \rho^k(v, G, \pi) -$ 
42                 $\sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (1 - (-1)^{j-k}) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \rho^l(v, H_i^*, \pi^{k-l})$ 
62

```

Durant la phase de contraction, on calcule $\pi_i^j(u)$ pour chaque sommet $u \in V(G_i)$ et $0 \leq j \leq p$. À chaque étape i , pour chaque $u \in V(G_i)$, on enregistre $\pi_i^j(u)$ dans une variable $\pi^j(u)$. Initialement, pour chaque sommet $u \in V(G_0) = V(G)$, $\pi^0(u) = \pi_0^0(u) = \pi(u)$ et $\pi^j(u) = \pi_0^j(u) = 0$ pour $j > 0$. À l'étape i , pour chaque arête $uv \in E_i^+$ avec $u \in V(G_i)$, d'après le Lemme 3.1.4, nous avons $\pi_i^j(u) = \pi_{i+1}^j(u) + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \pi_{i+1}^k(v)$ et nous pouvons donc mettre à jour $\pi^j(u)$ en temps $O(j)$. Pour chaque $u \in V(G_i)$ qui n'est incident à aucune arête de E_i^+ , $\pi_i^j(u) = \pi_{i+1}^j(u)$ et nous n'avons pas à mettre à jour $\pi^j(u)$. par conséquent, à l'étape i , nous pouvons mettre à jour les valeurs de $\pi^j(u)$ pour tout $0 \leq j \leq p$ et tout $u \in V(G_i)$ en temps $O(p^2 n_i)$. On observe qu'à la fin de la contraction, pour chaque $1 \leq i \leq q$ et chaque $u \in V(H_i^*)$, nous avons $\pi^j(u) = \pi_{i+1}^j(u) = \rho^j(u, F_{i+1}, \pi)$ pour tous $0 \leq j \leq p$. De plus, à la fin du calcul $\pi^j(v_0) = \pi_q^j(v_0) = \rho^j(v_0, G, \pi)$ pour tout $0 \leq j \leq p$. On présente en Figure 3.3 un exemple de la phase de contraction pour $p = 2$. On donne en vert pour chaque sommet u les mises à jour des valeurs $\pi^0(u)$, $\pi^1(u)$ et $\pi^2(u)$ de haut en bas.

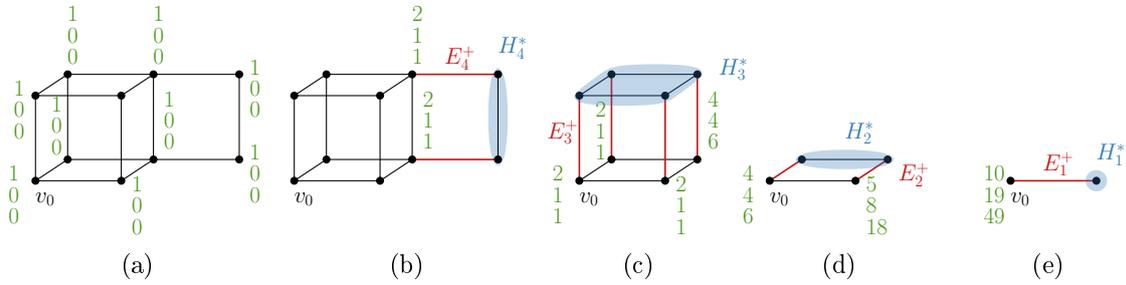


FIGURE 3.3 – Mise à jour des poids dans les fibres pour $p = 2$ lors de la phase de contraction

On suppose pendant la phase de décontraction, que nous avons déjà calculé $\rho^j(u, G, \pi)$ pour tous les $u \in V(G_i)$ et $0 \leq j \leq p$, Notre but est de calculer $\rho^j(v, G, \pi)$ pour tous les $v \in V(H_i^*)$ et $0 \leq j \leq p$.

Comme G_{i+1} et H_i'' sont des sous-graphes portés de G et comme $V(H_i^*) = V(H_i'') \cap V(G_{i+1})$, H_i^* est un sous-graphe porté de G et donc de H_i'' et G_{i+1} . De plus, pour chaque sommet x de G tel que la porte de x dans G_{i+1} est v , nous avons $x \in V(H_i'')$. par conséquent, pour tout $v \in V(H_i^*)$, $F_{i+1}(v) = \{x \in V(H_i'') : v \text{ est la porte de } x \text{ sur } H_i^*\}$ est également la fibre de v dans H_i'' . Comme $\pi_{i+1}^k(v) = \sum_{x \in F_{i+1}(v)} \pi(x) d^k(v, x)$ pour tout $v \in V(H_i^*)$ et tout $0 \leq k \leq p$, d'après le Lemme 3.1.2, nous avons :

$$\rho^k(v, H_i'', \pi) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \rho^l(v, H_i^*, \pi_{i+1}^{k-l}).$$

D'après le Lemme 3.1.1 :

$$\begin{aligned} \rho^j(v, G, \pi) &= \rho^j(u, G, \pi) - \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \rho^k(v, G, \pi) - \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (1 - (-1)^{j-k}) \rho^k(v, H_i'', \pi) \\ &= \rho^j(u, G, \pi) - \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \rho^k(v, G, \pi) - \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} (1 - (-1)^{j-k}) \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \rho^l(v, H_i^*, \pi_{i+1}^{k-l}). \end{aligned}$$

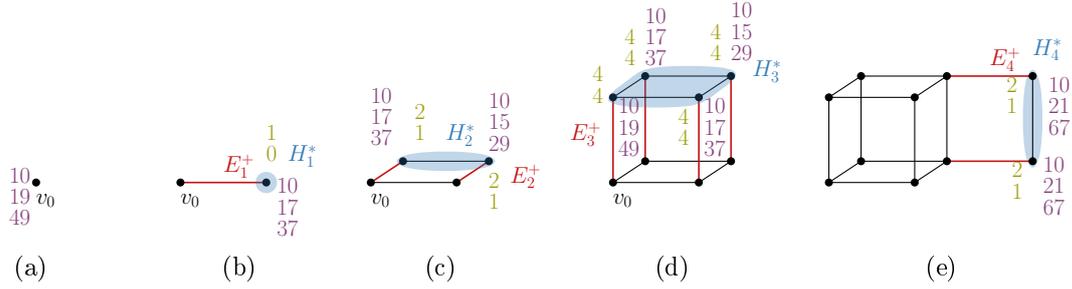


FIGURE 3.4 – Exécution de l’algorithme pour $p = 2$ lors de la phase de décontraction ; en violet $\rho^j(v, G, \pi)$ pour les $j \leq p$ et en jaune $\rho^s(v, H_i^*, \pi_{i+1}^r)$ pour $r \leq p - 1$ et $0 \leq s \leq p - 1 - r$

On calcule les valeurs de $\rho^j(v, G, \pi)$ pour les valeurs croissantes de j en commençant à $j = 0$. par conséquent, lorsque l’on calcule $\rho^j(v, G, \pi)$, on peut supposer que nous avons déjà calculé $\rho^k(v, G, \pi)$ for $k \leq j - 1$.

Pour calculer $\rho^j(v, G, \pi)$ avec cette formule, on a besoin de calculer $\rho^l(v, H_i^*, \pi_{i+1}^{k-l})$ pour tous les $0 \leq l \leq k \leq j - 1$. Comme on veut calculer $\rho^j(v, G, \pi)$ pour tous les $0 \leq j \leq p$, il faut que l’on calcule $\rho^s(v, H_i^*, \pi_{i+1}^t)$ pour tous $s, t \geq 0$ tels que $s + t \leq p - 1$. Ainsi on calcule récursivement $\rho^s(v, H_i^*, \pi^t)$, $0 \leq s \leq p - 1 - t$ sur le graphe H_i^* , pour chaque $0 \leq t \leq p - 1$. En d’autres termes, on procède à $p - 1$ appels récursifs pour les $p - 1$ profils différents π^0, \dots, π^{p-1} .

Une fois que l’on a récursivement calculé ces valeurs, pour chaque $v \in H_i^*$, on calcule $\rho^j(v, G, \pi)$ pour tout $0 \leq j \leq p$ en temps $O(p^3)$. On donne en Figure 3.4 l’exécution de l’algorithme sur un exemple dans le cas $p = 2$ lors de la phase de décontraction. Les mises à jour des $\rho^j(v, G, \pi)$ pour $j = 0, 1, 2$ sont indiqués de haut en bas en violet et les $\rho^j(v, H_i^*, \pi)$ pour $j = 0, 1$ en jaune. On montre maintenant une borne supérieure sur la complexité de notre algorithme :

Proposition 3.3.1. *Pour tout graphes médians G avec n sommets et m arêtes et pour toute fonction de poids π sur $V(G)$, on peut calculer le p -moment $\rho^p(v, G, \pi) = \sum_{x \in V(G)} \pi(x) d^p(v, x)$ pour chaque sommet $v \in V(G)$ en temps $O(pm + p^3 2^p n)$.*

Démonstration. L’algorithme exécuté sur G , s’appelle récursivement sur chaque graphe H_i^* . Pour chacun de ces graphes, il a donc besoin de calculer l’épluchage périphérique de H_i^* et les partitions correspondantes de $V(H_i^*)$ et $E(H_i^*)$. Il fait également $p - 1$ appels récursifs pour calculer le s -moment de π_{i+1}^t pour $0 \leq t \leq p - 1$ et $0 \leq s \leq p - 1 - t$. On observe que le calcul de l’épluchage périphérique de H_i^* est indépendant de la fonction de poids considérée. Par conséquent, l’algorithme n’a besoin de calculer l’épluchage périphérique de H_i^* une seule fois pour chaque H_i^* apparaissant durant son exécution. Nous pouvons donc borner séparément le temps nécessaire au calcul de tous les épluchages périphériques (et les partitions correspondantes) durant l’exécution de l’algorithme et le temps nécessaire pour calculer récursivement les s -moments. On note $C_1(m, p)$ le temps nécessaire au calcul de tous les épluchages périphériques et les partitions correspondantes d’un graphes médians G de m sommets lorsque l’on veut calculer les p -moments sur G . Et on appellera $C_2(n, p)$ le temps nécessaire au calcul de tous les j -moments tels que $0 \leq j \leq p$ d’un graphes médians G de n sommets en supposant que tous les demi-espaces périphériques et les partitions correspondantes ont déjà été calculées. Lorsque $p = 0$, pour chaque $v \in V(G)$, $\rho^0(v, G, \pi) = \sum_{x \in V(G)} \pi(x)$ et on peut donc supposer que $C_1(m, 0) = 0$ et $C_2(n, 0) = O(n)$.

Affirmation 3.3.2. *Il existe une constante K_1 telle que $C_1(m, p) \leq K_1 \cdot p \cdot m$.*

Démonstration. On peut calculer l'épluchage périphérique de G et les sous-graphes H_i^* , $1 \leq i \leq q$ en temps $O(m)$. Ensuite il y a un appel récursif sur chaque H_i^* . On rappelle que $|E(H_i^*)| = m_i$ et que $\sum_{i=1}^q m_i \leq m$. par conséquent, on peut supposer qu'il existe K_1 telle que

$$C_1(m, p) \leq K_1 m + \sum_{i=1}^q C_1(m_i, p-1).$$

Nous pouvons prouver l'affirmation en faisant une récurrence sur p . Lorsque $p = 0$, l'affirmation est trivialement vraie car $C_1(m, 0) = 0$. Et si l'affirmation est vraie pour $0 \leq j \leq p-1$, alors :

$$\begin{aligned} C_1(m, p) &\leq K_1 m + \sum_{i=1}^q C_1(m_i, p-1) \\ &\leq K_1 m + \sum_{i=1}^q K_1 (p-1) m_i = K_1 m + K_1 (p-1) \sum_{i=1}^q m_i \\ &\leq K_1 m + K_1 (p-1) m = K_1 p m. \end{aligned} \quad \square$$

Affirmation 3.3.3. *Il existe une constante K_2 telle que $C_2(n, p) \leq K_2 \cdot (p+1)^3 \cdot 2^p \cdot n$.*

Démonstration. Pendant la phase de contraction de G , on calcule la valeur de $\pi_{i+1}^j(v)$ pour chaque $1 \leq i \leq q$, chaque $u \in V(H_i^*)$ et chaque $0 \leq j \leq p$ en temps $O(p^2 n)$. Durant la décontraction, une fois que nous avons fini tous les appels récursifs, on calcule en temps $O(p^3 n)$ la valeur de $\rho^j(v, G, \pi)$ pour chaque $v \in V(G)$ et chaque $0 \leq j \leq p$.

Pour chaque i , l'algorithme effectue $p-1$ appels récursifs H_i^* et pour chaque $0 \leq j \leq p-1$, on calcule les valeurs des s -moments, $0 \leq s \leq j$ pour le profil π_{i+1}^{p-1-s} . On rappelle que $|V(H_i^*)| = n_i$ et que $\sum_{i=1}^q n_i = n-1$. par conséquent, il existe une constante K_2 telle que

$$C_2(n, p) \leq K_2 p^3 n + \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{p-1} C_2(n_i, j).$$

On prouve maintenant l'affirmation en faisant une récurrence sur p . On suppose sans perte de généralité que $C_2(n, 0) \leq K_2 n$ et l'affirmation est donc vraie pour $p = 0$. Si l'affirmation est vraie pour $0 \leq j \leq p-1$, alors

$$\begin{aligned} C_2(n, p) &\leq K_2 p^3 n + \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{p-1} C_2(n_i, j) \\ &\leq K_2 p^3 n + \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{p-1} K_2 (j+1)^3 2^j n_i = K_2 p^3 n + K_2 \sum_{i=1}^q n_i \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)^3 2^j \\ &\leq K_2 p^3 n + K_2 n \sum_{j=0}^{p-1} p^3 2^j = K_2 p^3 n \left(1 + \sum_{j=0}^{p-1} 2^j \right) = K_2 p^3 n 2^p \\ &\leq K_2 (p+1)^3 2^p n. \end{aligned} \quad \square$$

D'après les Affirmations 3.3.2 et 3.3.3, notre algorithme calcule les j -moments, $0 \leq j \leq p$, pour chaque sommet $v \in V(G)$ en temps $O(pm + p^3 2^p n)$. □

Chapitre 4

Calcul du médian dans les ℓ_1 -complexes cubiques des graphes médians.

Dans ce chapitre, nous décrivons un algorithme linéaire pour calculer les médians des ℓ_1 -complexes cubiques \mathcal{G} . Ils sont obtenus en remplaçant chacun des cubes d'un [graphe médian](#) G par un cube unité solide plongé dans la métrique ℓ_1 et en identifiant isométriquement les sous-cubes en commun, G est alors le 1-squelette de \mathcal{G} .

Nous commençons par présenter le problème du médian dans les ℓ_1 -complexes cubiques des [graphes médians](#). Le complexe cubique \mathcal{G} est représenté par son 1-squelette G avec m arêtes et les terminaux sont donnés par un système de coordonnées de taille δ que nous décrirons, la taille de l'entrée du problème sera donc en $O(m + \delta)$.

Nous montrons comment généraliser la notion de demi-espaces aux complexes cubiques, puis comment généraliser la règle de majorité des [graphes médians](#). Cette nouvelle règle de majorité utilise les problèmes dits des E_i -médians que nous définirons et qui peuvent être vus comme un problème du médian dans le segment pour chaque Θ -classe.

Nous pourrions alors décrire l'algorithme, nécessitant un prétraitement de l'entrée, le calcul du E_i -médian pour chaque Θ -classe, et enfin une généralisation de l'orientation des arêtes pointant vers l'ensemble médian.

Tout ceci nous permet d'obtenir le résultat principal de ce chapitre :

Théorème (4.1.1). Soit G un [graphe médian](#) avec m arêtes et soit P un ensemble fini de terminaux de \mathcal{G} décrits par une entrée de taille δ . Le 1-squelette \widehat{M} de $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ peut être calculé en temps linéaire $O(m + \delta)$.

Pour conclure le chapitre, nous montrerons comment calculer l'indice de Wiener dans les ℓ_1 -complexes cubiques.

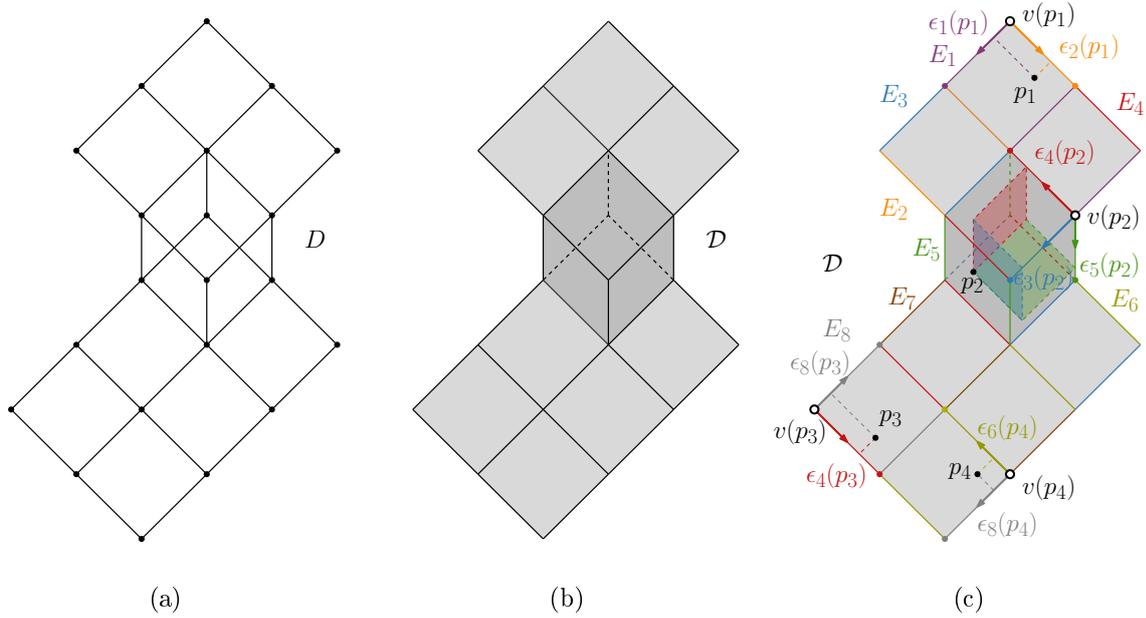


FIGURE 4.1 – (a) Le graphe D ; (b) le complexe cubique \mathcal{D} associé au graphe D ; (c) les entrées de 4 terminaux p_1, p_2, p_3, p_4 sur \mathcal{D}

4.1 Description du problème

4.1.1 Le problème

Soit un **graphe médian** $G = (V, E)$ avec n sommets, m arêtes et q Θ -classes E_1, E_2, \dots, E_q . On appelle \mathcal{G} le complexe cubique obtenu à partir d'un **graphe médian** G en remplaçant chacun de ses cubes par un cube-unité solide et en identifiant de manière isométrique les sous-cubes en commun. On dit que \mathcal{G} est la *réalisation géométrique* de G (cf Figure 4.1b). On suppose que \mathcal{G} est plongé dans la métrique intrinsèque ℓ_1 , et on note d_1 la distance associée. Soit P un ensemble fini de points de (\mathcal{G}, d_1) que nous appelons les *terminaux* et soit π une fonction de poids de \mathcal{G} telle que $\pi(p) > 0$ si $p \in P$ et $\pi(p) = 0$ sinon. L'objectif du *problème du médian* est de calculer l'ensemble $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ des points médians de \mathcal{G} , i.e., l'ensemble de tous les points de \mathcal{G} minimisant $F_\pi(x) = \sum_{p \in \mathcal{G}} \pi(p)d_1(x, p) = \sum_{p \in P} \pi(p)d_1(x, p)$.

4.1.2 L'entrée

Le complexe cubique \mathcal{G} est donné par son 1-squelette G . Chaque terminal $p \in P$ est donné par ses coordonnées dans le cube de plus petite dimension $Q(p)$ de \mathcal{G} contenant p . C'est à dire que chaque terminal est représenté par un sommet $v(p)$ de $Q(p)$ choisit arbitrairement, les voisins de $v(p)$ dans $Q(p)$ et les coordonnées de v selon le plongement de $Q(p)$ dans le cube unité ayant $v(p)$ pour origine (cf Figure 4.1c). Soit δ la somme des tailles des encodages des points de P . L'entrée du problème du médian a donc une taille en $O(m + \delta)$.

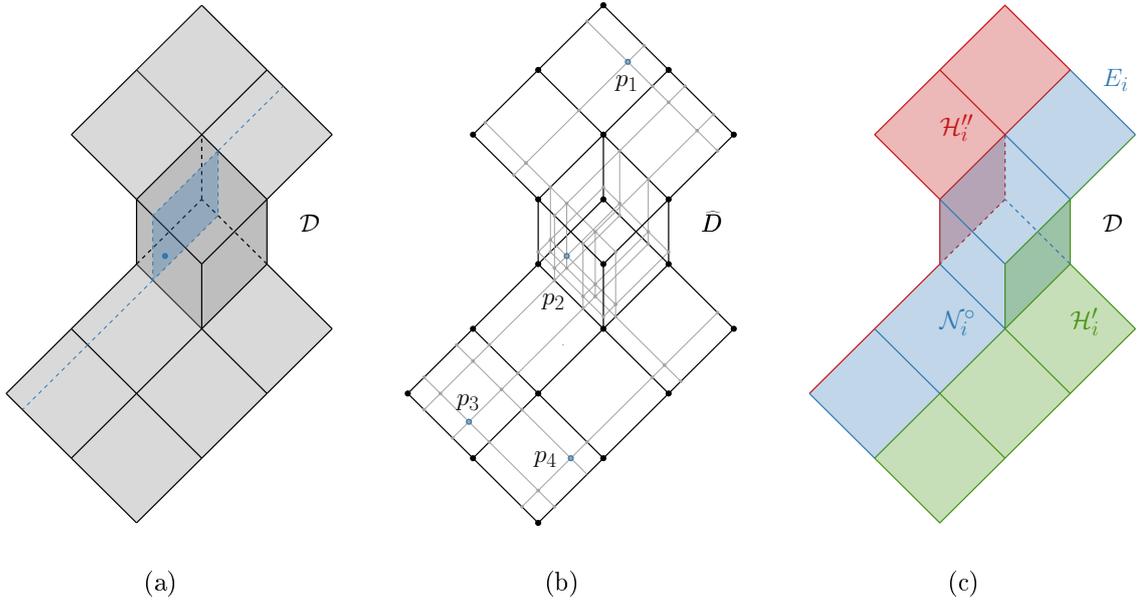


FIGURE 4.2 – (a) un hyperplan de \mathcal{D} ; (b) le complexe de boîtes \widehat{D} de \mathcal{D} associé aux terminaux p_1, p_2, p_3, p_4 et (c) le support ouvert \mathcal{N}_i° et les deux demi-espaces géométriques \mathcal{H}_i' et \mathcal{H}_i'' de E_i .

4.1.3 La sortie

Contrairement à $\text{Med}_\pi(G)$ (qui est un sous-graphe porté de G), $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ n'est pas un sous-complexe de \mathcal{G} . Nous montrons néanmoins que $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ est un sous-complexe du complexe de boîtes $\widehat{\mathcal{G}}$ obtenu en subdivisant \mathcal{G} par chaque hyperplan passant par un terminal de P (cf Figure 4.2b). La sortie est le 1-squelette \widehat{M} de $\text{Med}_\pi(\widehat{\mathcal{G}})$, et les coordonnées locales des sommets de \widehat{M} dans \mathcal{G} . On montre que la sortie a une taille linéaire $O(m)$.

Théorème 4.1.1. *Soit un [graphe médian](#) G avec m arêtes et soit P un ensemble fini de terminaux de \mathcal{G} décrits par une entrée de taille δ . Le 1-squelette \widehat{M} de $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ peut être calculé en temps linéaire $O(m + \delta)$.*

4.2 Demi-espace géométrique et hyperplans

Nous fixons un sommet source v_0 de G . Pour chaque point x de \mathcal{G} , soit $Q(x)$ le plus petit cube de \mathcal{G} contenant x et soit $v(x)$ la porte de v_0 sur $Q(x)$. Pour chaque Θ -classe E_i définissant une dimension de $Q(x)$, on appelle $\epsilon_i(x)$ la coordonnée de x selon E_i dans le plongement de $Q(x)$ dans le cube unité ayant $v(x)$ comme origine. Pour une Θ -classe E_i et un cube Q ayant E_i comme dimension, le i -*semi-cube* de Q est le sous-espace de Q obtenu en restreignant les E_i -coordonnées de Q à $\frac{1}{2}$. Un *semi-hyperplan* \mathfrak{h}_i de \mathcal{G} est l'union de tous les i -semi-cubes. Chaque \mathfrak{h}_i sépare \mathcal{G} en deux composants [100] et l'union de chacun de ces composants avec \mathfrak{h}_i est appelé un *demi-espace géométrique*. Le *support* \mathcal{N}_i de E_i est l'union de tous les cubes de \mathcal{G} intersectant \mathfrak{h}_i ; \mathcal{N}_i est isomorphe à $\mathfrak{h}_i \times [0, 1]$. Pour toute Θ -classe E_i et $0 < \epsilon < 1$, l'*hyperplan* $\mathfrak{h}_i(\epsilon)$ est l'ensemble de tous les points $x \in \mathcal{N}_i$ tels que $\epsilon_i(x) = \epsilon$ (cf Figure 4.2a). Soient $\mathfrak{h}_i(0)$ et $\mathfrak{h}_i(1)$ les réalisations géométriques respectives de $\partial H_i'$ et $\partial H_i''$. On observe que $\mathfrak{h}_i(\epsilon)$ est obtenu à partie de \mathfrak{h}_i via une translation. Le support ouvert \mathcal{N}_i° est $\mathcal{N}_i \setminus (\mathfrak{h}_i(0) \cup \mathfrak{h}_i(1))$. On appelle $\mathcal{H}_i'(\epsilon)$ et

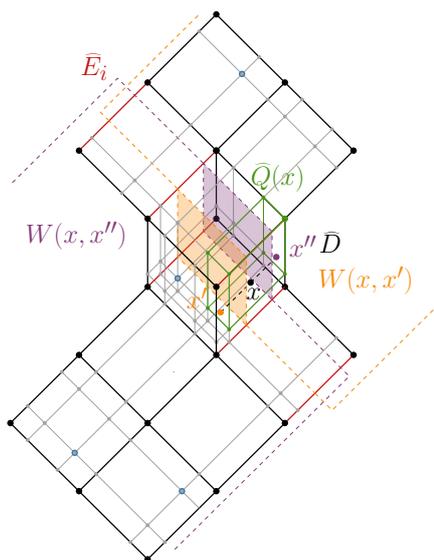


FIGURE 4.3 – Une illustration de la preuve de la Proposition 4.3.1

$\mathcal{H}_i''(\epsilon)$ les demi-espaces géométriques de \mathcal{G} définis par $\mathfrak{h}_i(\epsilon)$. Soient $\mathcal{H}_i' = \mathcal{H}_i'(0)$ et $\mathcal{H}_i'' = \mathcal{H}_i''(1)$. On observe que \mathcal{G} est l'union disjointe de \mathcal{H}_i' , \mathcal{H}_i'' et \mathcal{N}_i° (cf Figure 4.2c).

4.3 Règle de majorité dans \mathcal{G} .

Dans cette sous-section, nous montrons une généralisation de la règle de majorité dans les graphes médians aux ℓ_1 -complexes cubiques.

4.3.1 Le complexe de boîtes $\widehat{\mathcal{G}}$.

D'après [110, Theorem 3.16], (\mathcal{G}, d_1) est un espace métrique médian (i.e., $|I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)| = 1 \forall x, y, z \in \mathcal{G}$) et le graphe G est isométriquement plongeable dans (\mathcal{G}, d_1) . Pour chaque $p \in P$ et chaque coordonnée $\epsilon_i(p)$, on considère l'hyperplan $\mathfrak{h}_i(\epsilon_i(p))$. Tous ces hyperplans subdivisent \mathcal{G} en un complexe de boîtes $\widehat{\mathcal{G}}$ (cf Figure 4.2b), immédiatement $(\widehat{\mathcal{G}}, d_1)$ est un espace médian. On construit le graphe $\widehat{G}_l = (\widehat{V}, \widehat{E})$ de la manière suivante : Soit $P_{\widehat{V}}$, l'ensemble des points de $\widehat{\mathcal{G}}$ correspondant à une intersection d'hyperplans et ceux correspondant aux sommets de G . On ajoute un sommet à \widehat{V} pour chaque élément de $P_{\widehat{V}}$, et pour chaque paire de sommets u_1, u_2 de \widehat{V} associés aux points p_1 et p_2 de $P_{\widehat{V}}$ tels que p_1 et p_2 appartiennent au même hyperplan et $I_{\widehat{\mathcal{G}}}(p_1, p_2) \cap P_{\widehat{V}} = \emptyset$ on ajoute une arête entre u_1 et u_2 de longueur $d_1(p_1, p_2)$. On appelle \widehat{G} le graphe $\widehat{G}_l = (\widehat{V}, \widehat{E})$ tel que chaque arête a une longueur de 1, \widehat{G} correspond alors au 1-squelette de $\widehat{\mathcal{G}}$. D'après [110, Theorem 3.13], le 1-squelette \widehat{G} de $\widehat{\mathcal{G}}$ est un graphe médian. Les Θ -classes de \widehat{G} sont des subdivisions de celles de G . Immédiatement \widehat{G}_l est un espace médian, donc $\text{Med}_\pi(\widehat{G}_l) = \text{Med}_\pi(\widehat{G})$ d'après [105]. D'après la Proposition 2.5.1, $\text{Med}_\pi(\widehat{G}_l)$ est l'intersection des demi-espaces majoritaires de \widehat{G} .

Proposition 4.3.1. $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ est le sous-complexe de $\widehat{\mathcal{G}}$ défini par $\widehat{M} = \text{Med}_\pi(\widehat{G}_l)$

Démonstration. Soient $\widehat{E}_1, \widehat{E}_2, \dots, \widehat{E}_q$, les Θ -classes de \widehat{G} . Pour un point $x \in \mathcal{G}$, on appelle

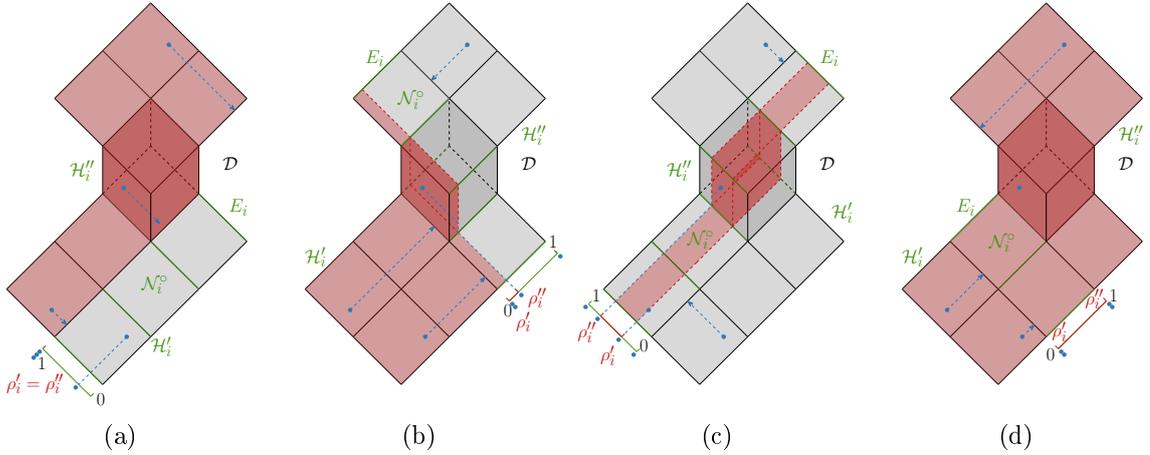


FIGURE 4.4 – Illustration des différents cas de la Proposition 4.3.2, en rouge les ensembles de points susceptibles d'être contenus dans $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$.

$\widehat{Q}(x)$, la plus petite boîte de $\widehat{\mathcal{G}}$ contenant x , et pour toute Θ -classe \widehat{E}_i de $\widehat{Q}(x)$, soit $\widehat{e}_i(x)$ la \widehat{E}_i -coordonnée de x selon le plongement de $\widehat{Q}(x)$ dans le cube unité avec la porte de v_0 dans $\widehat{Q}(x)$ comme origine.

Pour un point $x \in \mathcal{G}$, soit $\widehat{\mathcal{G}}(x)$, la subdivision du complexe $\widehat{\mathcal{G}}$ par les hyperplans passant par x , soit $\widehat{G}(x)$ le 1-squelette de $\widehat{\mathcal{G}}(x)$ et soit $\widehat{G}_l(x)$ le graphe aux arêtes pondérées correspondant. À nouveau, $\widehat{G}(x)$ est un **graphe médian** et $\widehat{G}_l(x)$ est un sous-graphe isométrique de \mathcal{G} et $\widehat{\mathcal{G}}$.

On montre par induction sur la dimension de $\widehat{Q}(x)$ que $x \in \text{Med}_\pi(\mathcal{G}) = \text{Med}_\pi(\widehat{\mathcal{G}}) = \text{Med}_\pi(\widehat{\mathcal{G}}(x))$ ssi pour tout sommet v de $\widehat{Q}(x)$, $v \in \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Si $\widehat{Q}(x) = \{x\}$, alors immédiatement l'hypothèse est vraie. Sinon, on prend une Θ -classe \widehat{E}_i de \widehat{G} telle que $0 < \widehat{e}_i(x) < 1$. Dans $\widehat{G}(x)$, x a exactement deux voisins x', x'' appartenant à deux faces opposées de $\widehat{Q}(x)$ tels que $\widehat{e}_i(x') = 0$ et $\widehat{e}_i(x'') = 1$. On observe que $V(\widehat{Q}(x)) = V(\widehat{Q}(x')) \cup V(\widehat{Q}(x''))$ et $x \in I_{\widehat{G}(x)}(x', x'')$.

Par définition de $\widehat{G}(x)$, il n'y a pas de terminal $p \in P$ avec $0 < \widehat{e}_i(p) < 1$. Par conséquent, dans $\widehat{G}(x)$, $W(x', x) \cap P = W(x, x'') \cap P$ et $W(x'', x) \cap P = W(x, x') \cap P$. Ainsi, dans $\widehat{G}(x)$ (et $\widehat{G}_l(x)$), le demi-espace $W(x'', x)$ est majoritaire (resp. égalitaire, minoritaire) ssi $W(x', x)$ est minoritaire (resp. égalitaire, majoritaire) (cf Figure 4.3).

On suppose que $x \in \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Si $W(x, x')$ (resp. $W(x, x'')$) est minoritaire dans $\widehat{G}(x)$, alors d'après le Lemme 2.3.1 appliqué à $\widehat{G}_l(x)$, $F_\pi(x) > F_\pi(x')$ (resp. $F_\pi(x) > F_\pi(x'')$) et $x \notin \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$, ce qui est une contradiction. Donc $W(x', x)$ et $W(x'', x)$ sont nécessairement égalitaires et d'après le Lemme 2.3.1 appliqué à $\widehat{G}_l(x)$, $F_\pi(x') = F_\pi(x'') = F_\pi(x)$. Comme $\widehat{Q}(x')$ et $\widehat{Q}(x'')$ sont des faces de $\widehat{Q}(x)$, par hypothèse d'induction, tous les sommets de $V(\widehat{Q}(x)) = V(\widehat{Q}(x')) \cup V(\widehat{Q}(x''))$ appartiennent à $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Réciproquement, on suppose que $V(\widehat{Q}(x)) = V(\widehat{Q}(x')) \cup V(\widehat{Q}(x'')) \subseteq \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Alors, par hypothèse d'induction, $x', x'' \in \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Comme $\text{Med}_\pi(\widehat{G}_l(x)) = \text{Med}_\pi(\widehat{G}(x))$ est convexe et $x \in I_{\widehat{G}(x)}(x', x'')$, on a $F_\pi(x) = F_\pi(x') = F_\pi(x'')$ et par conséquent, $x \in \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. \square

4.3.2 Les problèmes des E_i -médians

On adapte maintenant la Proposition 2.3.2 au cas continu. Dans notre algorithme et les résultats suivants, nous ne construisons pas explicitement le complexe de boîtes $\widehat{\mathcal{G}}$ et son 1-

squelette \widehat{G} (car ils ont trop d'éléments), mais nous les utilisons dans les preuves. Pour une Θ -classe E_i de G , le E_i -médian est le médian du multi-ensemble de points du segment $[0, 1]$ pondéré comme suit : $\pi_i(0) = \pi(\mathcal{H}_i')$ et $\pi_i(1) = \pi(\mathcal{H}_i'')$, et pour chaque $p \in P \cap \mathcal{N}_i^\circ$, il existe un point $\epsilon_i(p)$ de $[0, 1]$ de poids $\pi_i(\epsilon_i(p)) = \pi(p)$. D'après la Proposition 0.2.4 ce médian est un segment $[\rho_i', \rho_i'']$ défini par deux points consécutifs $\rho_i' \leq \rho_i''$ de $[0, 1]$ de poids positifs tels que la somme des poids des points de coordonnée inférieure à ρ_i' est égale à la somme des poids des points de coordonnée supérieure à ρ_i'' et pour tout $p \in P$, $\epsilon_i(p) \leq \rho_i'$ ou $\epsilon_i(p) \geq \rho_i''$. Les demi-espaces géométriques majoritaires, minoritaires et égalitaires de \mathcal{G} sont définis de la même manière que les [demi-espaces](#) de G .

Proposition 4.3.2. *Soit une Θ -classe E_i de G , alors :*

- 1 $\text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{H}_i'$ (resp. $\text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{H}_i''$) ssi \mathcal{H}_i' est majoritaire (resp. \mathcal{H}_i'' est majoritaire), i.e., $\rho_i' = \rho_i'' = 0$ (cf Figure 4.4a) (resp. $\rho_i' = \rho_i'' = 1$);
- 2 $\text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{H}_i' \cup \mathcal{N}_i^\circ$ (resp. $\text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{H}_i'' \cup \mathcal{N}_i^\circ$) et $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ intersecte chacun des ensembles \mathcal{H}_i' (resp. \mathcal{H}_i'') et \mathcal{N}_i° ssi \mathcal{H}_i' (resp. \mathcal{H}_i'') est égalitaire et \mathcal{H}_i'' (resp. \mathcal{H}_i') est minoritaire, i.e., $0 = \rho_i' < \rho_i'' < 1$ (resp. $0 < \rho_i' < \rho_i'' = 1$) (cf Figure 4.4b);
- 3 $\text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{N}_i^\circ$ ssi \mathcal{H}_i' et \mathcal{H}_i'' sont minoritaires, i.e., $0 < \rho_i' \leq \rho_i'' < 1$ (cf Figure 4.4c);
- 4 $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ intersecte les trois ensembles \mathcal{H}_i' , \mathcal{H}_i'' et \mathcal{N}_i° ssi \mathcal{H}_i' et \mathcal{H}_i'' sont égalitaires, i.e., $0 = \rho_i' < \rho_i'' = 1$ (et donc $\pi(\mathcal{N}_i^\circ) = 0$) (cf Figure 4.4d).

Démonstration. Soient $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_k < 1$, les valeurs possibles des coordonnées des points de P selon la Θ -classe E_i . Ils définissent les hyperplans parallèles $\mathfrak{h}_i(0), \mathfrak{h}_i(\epsilon_1), \dots, \mathfrak{h}_i(\epsilon_k), \mathfrak{h}_i(1)$. Les parties des arêtes de E_i bornées par deux hyperplans consécutifs définissent une Θ -classe de \widehat{G} et ces Θ -classes sont laminaires. En fait, nous avons la chaîne d'inclusions suivante entre les demi-espaces géométriques de \mathcal{G} (ou $\widehat{\mathcal{G}}$) définies par ces Θ -classes : $\mathcal{H}_i' = \mathcal{H}_i'(0) \subset \mathcal{H}_i'(\epsilon_1) \subset \dots \subset \mathcal{H}_i'(\epsilon_k)$ and $\mathcal{H}_i'' = \mathcal{H}_i''(1) \subset \mathcal{H}_i''(\epsilon_k) \subset \dots \subset \mathcal{H}_i''(\epsilon_1)$. Les [demi-espaces](#) de \widehat{G} vérifient des inclusions similaires. On observe également que d'après les définitions de \widehat{G} et $\widehat{\mathcal{G}}$, les demi-espaces géométriques et les [demi-espaces](#) graphiques correspondants ont le même poids. Ainsi, pour réduire les différents cas de la proposition, il suffit d'appliquer la règle de majorité (Proposition 2.3.2 et Corollaire 2.4.1) aux [demi-espaces](#) de \widehat{G} qui apparaissent dans les deux chaînes d'inclusion et d'utiliser le fait que \widehat{M} est le 1-squelette de $\text{Med}_\pi(\mathcal{G}) = \text{Med}_\pi(\widehat{\mathcal{G}})$ dans \widehat{G} d'après la Proposition 4.3.1. \square

4.4 Algorithmes

4.4.1 Prétraitement de l'entrée

On commence par calculer les Θ -classes E_1, E_2, \dots, E_q de G ordonnées par distance croissante entre v_0 et H_i'' . Ensuite, on modifie l'entrée en temps linéaire $O(m + \delta)$ telle que pour chaque terminal p , $v(p)$ est la porte de v_0 dans $Q(p)$ (cf Figure 4.5a). Une fois que les Θ -classes ont été calculées, chaque terminal p est décrit par sa racine $v(p)$ ainsi qu'une liste de coordonnées $\Delta(p)$ contenant une coordonnée $0 < \epsilon_i(p) < 1$ pour chaque Θ -classe E_i de $Q(p)$ telle que $\epsilon_i(p)$ est la coordonnée de p selon E_i dans le plongement de $Q(p)$ comme cube unité avec $v(p)$ comme origine. Pour mettre à jour $v(p)$ et $\Delta(p)$, on utilise une matrice B (non initialisée) et dont les

Algorithme 8 : ComputeMedianCubeComplex(G, P, π, Θ)

Entrées : Un graphe médian $G = (V, E)$, un ensemble de terminaux P , une fonction de poids $\pi : P \rightarrow \mathbb{R}^+$, les Θ -classes $\Theta = (E_1, \dots, E_q)$ de G , ordonnées par distance croissante au sommet source v_0 .

Sorties : Le graphe \widehat{M} et les coordonnées de chaque sommet de \widehat{M} dans \mathcal{G}

```

1 begin
2   Modifier la racine  $v(p)$  de chaque  $p \in P$  telle que  $v(p)$  est la porte de  $v_0$  sur  $Q(p)$ 
3   Calculer  $\pi(P_i)$  pour chaque  $\Theta$ -classe  $E_i$  en parcourant  $P$ 
4   Calculer  $\pi_*(v) = \sum_{p:v(p)=v} \pi(p)$  pour tout  $v \in V$  en parcourant  $P$ 
5   Appliquer CalculPoidsDesDemiEspaces ( $G, w_*, \Theta$ ) pour calculer les poids  $\pi_*(H'_i)$  et
    $\pi_*(H''_i)$  pour chaque  $\Theta$ -classe  $E_i$ 
6   Calculer  $\pi(\mathcal{H}'_i) = \pi_*(H'_i) - \pi(\mathcal{N}_i^\circ)$  et  $\pi(\mathcal{H}''_i) = \pi_*(H''_i)$  pour chaque  $\Theta$ -classe  $E_i$ 
7   En parcourant  $P$  calculer l'entrée des problèmes des  $E_i$ -médians
8   Calculer le  $E_i$ -médian  $[\rho'_i, \rho''_i]$  pour chaque  $\Theta$ -classe  $E_i$ 
9   Orienter les arêtes de  $G$  et calculer les demi-arêtes autour de chaque  $v \in V$ 
10  Calculer l'ensemble des puits de  $\vec{G}$  en traversant les arêtes de  $G$ 
11   $V(\widehat{M}) \leftarrow$  Ensemble des puits de  $\vec{G}$ 
12   $E(\widehat{M}) \leftarrow$  Arêtes de  $G$  dont chaque extrémité est un puits de  $\vec{G}$ 
13  retourner  $(V(\widehat{M}), E(\widehat{M}))$ 

```

lignes et les colonnes sont respectivement indexées par les sommets et les Θ -classes de G et telle que si un sommet v a un voisin v' tel que vv' appartient à la Θ -classe E_i , alors $B[v, E_i] = v'$ (et $B[v, E_i]$ n'est pas définie si un tel voisin v' de v n'existe pas). On construit B en temps $O(m)$ en parcourant les arêtes de G une fois que les Θ -classes ont été calculées. Une fois que nous avons la matrice B , pour chaque sommet $p \in P$ on considère chacune de ses coordonnées $\epsilon_i(p)$, et si $v' = B[v(p), E_i]$ est plus proche de v_0 que $v(p)$, on remplace $v(p)$ par v' et $\epsilon_i(p)$ par $1 - \epsilon_i(p)$. On observe qu'à chaque fois que $v(p)$ est modifié, il reste un sommet de $Q(p)$ et donc $B[v(p), E_j]$ reste défini pour toute coordonnée $\epsilon_j \in \Delta(p)$. Notons que v_p peut changer au plus $|\Delta(p)|$ fois durant ce processus, ainsi, une fois que B a été calculée, la modification des racines de tous les points $p \in P$ peut être faite en temps $O(\sum_{p \in P} |\Delta(p)|) = O(\delta)$.

4.4.2 Calcul des E_i -médians

Tout d'abord, nous calculons les poids $\pi_i(0) = \pi(\mathcal{H}'_i)$ et $\pi_i(1) = \pi(\mathcal{H}''_i)$ des demi-espaces géométriques \mathcal{H}'_i et \mathcal{H}''_i de G . On utilise la fonction de poids π_* sur V , telle que pour chaque point $p \in P$, on reporte son poids sur $v(p)$, i.e., $\pi_*(v) = \sum_{p:v(p)=v} \pi(p)$ (cf Figure 4.5b). On observe que $\pi_*(V) = \pi(P)$. Comme $v_0 \in H'_i$, $\pi_*(H'_i) = \pi(H'_i) + \pi(\mathcal{N}_i^\circ)$ et $\pi(H''_i) = \pi(\mathcal{H}''_i)$ pour chaque Θ -classe E_i . On applique l'algorithme de la Section 2.2 à G avec la fonction de poids π_* pour calculer les poids $\pi_*(H'_i)$ et $\pi_*(H''_i)$ de chaque **demi-espace** de G . Comme $\pi(\mathcal{N}_i^\circ) = \pi(P_i)$ est connu, on peut calculer $\pi(\mathcal{H}'_i) = \pi_*(H'_i) - \pi(\mathcal{N}_i^\circ)$ et $\pi(\mathcal{H}''_i) = \pi_*(H''_i)$. Ceci nous permet de compléter la définition de chaque problème du E_i -médian. la résolution de la totalité de ces problèmes s'effectue en temps linéaire par rapport de l'entrée [54, Problem 9.2], i.e., en temps $O(\sum_{i=1}^q (|P_i| + 2)) = O(\delta + m)$.

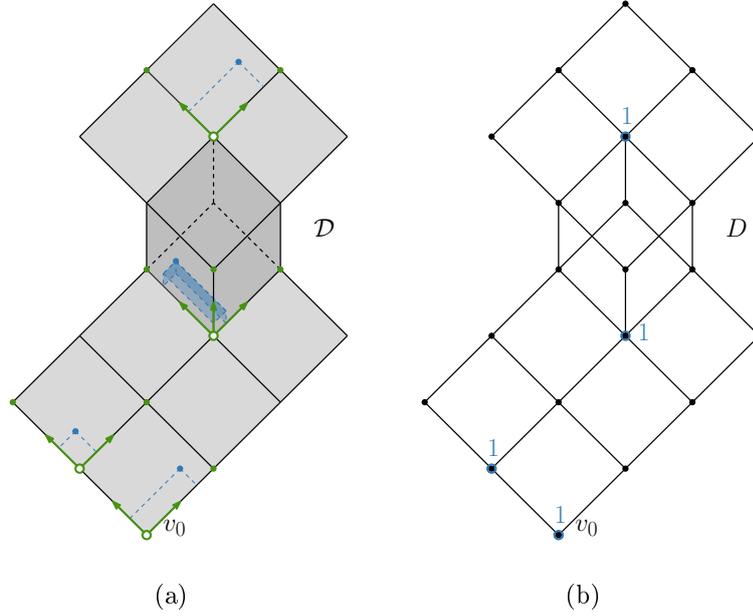


FIGURE 4.5 – Prétraitement de \mathcal{D} et report des poids des terminaux sur les sommets de $\widehat{\mathcal{G}}$

4.4.3 Calcul de \widehat{M}

Pour calculer le 1-squelette \widehat{M} de $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ dans $\widehat{\mathcal{G}}$, on oriente les arêtes de E_i selon les poids de \mathcal{H}'_i et \mathcal{H}''_i : $v'v'' \in E_i$ avec $v' \in \mathcal{H}'_i$ et $v'' \in \mathcal{H}''_i$ est orientée de v' vers v'' si $\rho'_i = \rho''_i = 1$ (\mathcal{H}''_i est majoritaire) et de v'' vers v' si $\rho'_i = \rho''_i = 0$ (\mathcal{H}'_i est majoritaire), sinon les arêtes de E_i ne sont pas orientées. On appelle ce graphe partiellement orienté $\vec{\mathcal{G}}$. Une arête non-orientée $v'v'' \in E_i$ définit une *demi-arête ayant v' comme origine* si $\rho' > 0$ et une *demi-arête ayant v'' comme origine* si $\rho'' < 1$ (une arête $v'v''$ telle que $0 < \rho'_i \leq \rho''_i < 1$ définit deux demi-arêtes) (cf Figure 4.6a).

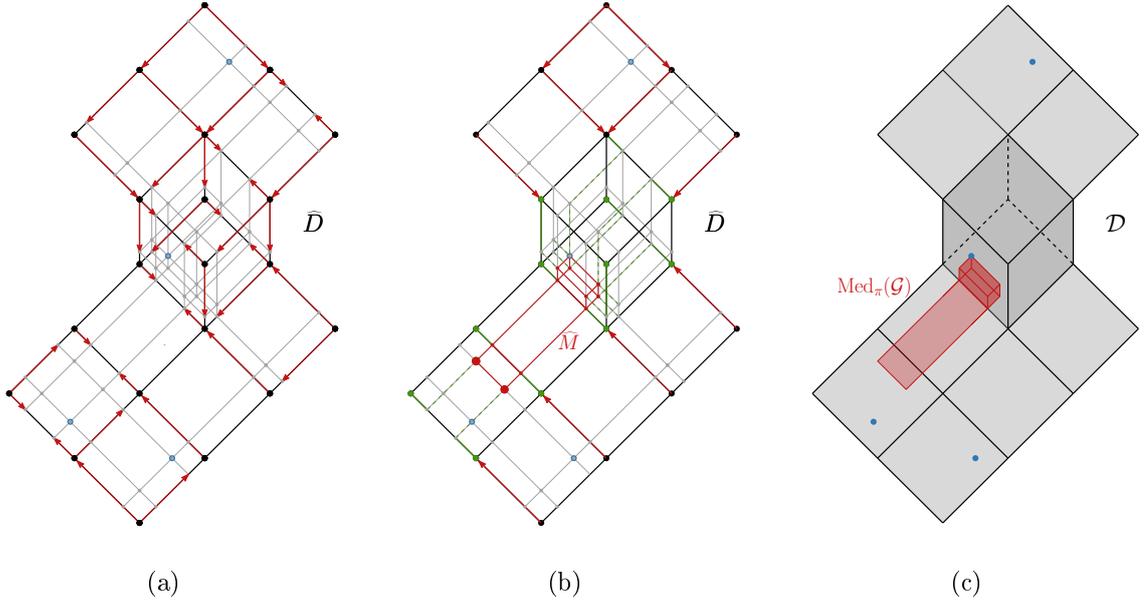
Proposition 4.4.1. *Pour tout sommet v de $\vec{\mathcal{G}}$, l'ensemble des demi-arêtes ayant v comme origine définit un cube Q_v de \mathcal{G} .*

Démonstration. Pour chaque sommet v et paire de Θ -classes E_i, E_j contenant une demi-arête ayant v comme origine, soient v_i et v_j les voisins respectifs de v dans $\widehat{\mathcal{G}}$ selon les directions E_i et E_j . D'après la Proposition 4.3.2, vv_i et vv_j pointent deux *demi-espaces* majoritaires de $\widehat{\mathcal{G}}$ (et \mathcal{G}). Comme ces deux-demi-espaces ne peuvent être distincts, E_i et E_j se croisent. La proposition découle donc du Lemme 0.3.11. \square

Pour tout cube Q de \mathcal{G} , soit $B(Q) \subseteq Q$, le sous-complexe de $\widehat{\mathcal{G}}$ défini par le *produit cartésien* des E_i -médians $[\rho'_i, \rho''_i]$ de toutes les Θ -classes E_i qui définissent les dimensions de Q . Par définition des E_i -médians, $B(Q)$ est une boîte de $\widehat{\mathcal{G}}$ et ses sommets appartiennent à $\widehat{\mathcal{G}}$.

Proposition 4.4.2. *Pour tout cube Q de \mathcal{G} , si $Q \cap \text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \neq \emptyset$, alors $B(Q) = \text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \cap Q$.*

Démonstration. Si un sommet x de $B(Q)$ n'est pas un médian de $\widehat{\mathcal{G}}$, d'après la Proposition 2.3.2(iii), x n'est pas un médian local de $\widehat{\mathcal{G}}$ et donc il existe une arête xy de $\widehat{\mathcal{G}}$ telle que $F_\pi(x) > F_\pi(y)$. On suppose que xy est parallèle aux arêtes de la Θ -class E_i de \mathcal{G} , ce qui implique

FIGURE 4.6 – Une illustration des différentes étapes du calcul de \widehat{M}

que $\epsilon_i(x)$ coïncide avec ρ'_i ou ρ''_i . Comme $F_\pi(x) > F_\pi(y)$, le **demi-espace** $W(y, x)$ de \widehat{G} est majoritaire, ce qui contredit le fait que $\epsilon_i(x)$ appartient au E_i -médian. Donc tous les sommets de $B(Q)$ appartiennent à \widehat{M} et d'après la Proposition 4.3.2, $B(Q) \subseteq \text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Il reste à montrer que tout point appartenant à $Q \setminus B(Q)$ n'est pas médian. On procède par l'absurde, d'après la Proposition 4.3.2, et comme \widehat{M} est convexe, il existe un sommet $y \notin B(Q)$ de $(\widehat{M} \cap Q) \setminus B(Q)$ adjacent à un sommet x de $B(Q)$. Soit xy parallèle à E_i , alors $\epsilon_i(x)$ coïncide avec ρ'_i ou ρ''_i et $\epsilon_i(y)$ n'appartient pas au E_i -médian $[\rho'_i, \rho''_i]$. Donc le **demi-espace** $W(y, x)$ de \widehat{G} est minoritaire, donc $F_\pi(y) > F_\pi(x)$, ce qui contredit le fait que y soit médian. \square

Pour un puits v de \vec{G} , soit $g(v)$ le point de Q_v tel que pour toute Θ -classe E_i de Q_v , $\epsilon_i(g(v)) = \rho'_i$ si $v \in \mathcal{H}'_i$ et $\epsilon_i(g(v)) = \rho''_i$ si $v \in \mathcal{H}''_i$. On observe que $g(v)$ est la porte de v dans $B(Q_v)$ et que $g(v)$ est un sommet de \widehat{M} . Réciproquement, soit $x \in \widehat{M}$, on considère le cube $Q(x)$. Comme $B(Q(x))$ est une cellule de \widehat{G} , pour chaque Θ -classe E_i de $Q(x)$, nous avons $\epsilon_i(x) \in \{\rho'_i, \rho''_i\}$. Soit $f(x)$ le sommet de $Q(x)$ tel que pour chaque Θ -classe E_i définissant $Q(x)$, $f(x) \in \mathcal{H}'_i$ si $\epsilon_i(x) = \rho'_i$, et $f(x) \in \mathcal{H}''_i$ si $\epsilon_i(x) = \rho''_i$ (cf Figure 4.7a).

Proposition 4.4.3. *Pour tout puits v de \vec{G} , $g(v)$ est la porte de v dans \widehat{M} et $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. Pour tout $x \in \widehat{M}$, $x = g(f(x))$ est la porte de $f(x)$ dans \widehat{M} et $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$. De plus, pour toute arête uv de G telle que u et v sont des puits de \vec{G} , soit $g(u) = g(v)$ soit $g(u)g(v)$ est une arête de \widehat{M} . Réciproquement, pour toute arête xy de \widehat{M} , $f(x)f(y)$ est une arête de G .*

Démonstration. D'après la Proposition 4.3.2 appliquée à \mathcal{G} , la Proposition 2.3.2 appliquée à \widehat{G} et la définition des puits de \vec{G} , $g(v)$ est un puits de \vec{G} , donc $g(v)$ est un médian de \widehat{G} et \mathcal{G} . Comme $B(Q_v) = \text{Med}_\pi(\mathcal{G}) \cap Q(v)$ est porté et non-vide, la porte de v dans $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ appartient à $B(Q_v)$ et donc la porte de v dans $\text{Med}_\pi(\mathcal{G})$ est la porte de v sur $B(Q_v)$.

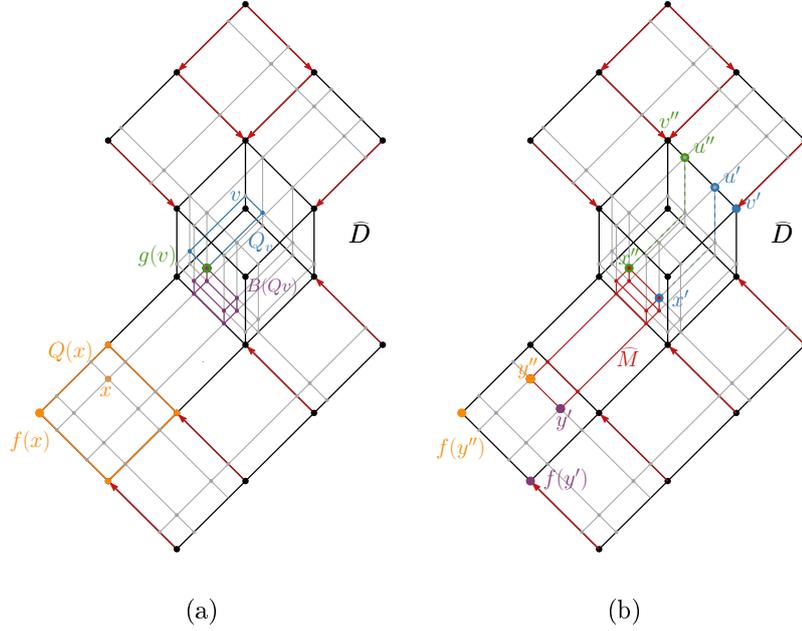


FIGURE 4.7 – En (a), une illustration des notations utilisées dans la Proposition 4.4.3 et en (b), une illustration de sa preuve

Soit $x \in \widehat{M}$ et $y = g(f(x))$. Soit E_i une dimension de \mathcal{G} . Si E_i n'appartient pas à $Q(x)$, on suppose sans perte de généralités que x appartient à \mathcal{H}'_i . D'après la Proposition 4.3.2, \mathcal{H}'_i est soit majoritaire, soit égalitaire et donc $\epsilon_i(y) = \rho'_i = 0 = \epsilon_i(x)$. Et si $E_i \in Q(x)$, alors $\epsilon_i(x) \in \{\rho'_i, \rho''_i\}$. On suppose sans perte de généralités que $\epsilon_i(x) = \rho'_i$, on a donc, $f(x) \in \mathcal{H}'_i$ et donc $\epsilon_i(y) = \rho'_i$. On a donc $x = g(f(x))$.

Soit $v'v''$ une arête de E_i entre deux puits de \vec{G} tels que $v' \in \mathcal{H}'_i$ et $v'' \in \mathcal{H}''_i$. Soit $x' = g(v')$ et $x'' = g(v'')$, on suppose que $x' \neq x''$. Soient u', u'' les points de $v'v''$ tels que $\epsilon_i(u') = \rho'_i$ et $\epsilon_i(u'') = \rho''_i$ (cf Figure 4.7b). $u' \in I_{\widehat{G}}(v', x')$ et $u'' \in I_{\widehat{G}}(v'', x'')$. Dans \widehat{G} , x' est la porte de u' (et x'' est la porte de u'') dans \widehat{M} . Comme $d_{\widehat{G}}(u', x') + d_{\widehat{G}}(x', x'') = d_{\widehat{G}}(u', x'') \leq d_{\widehat{G}}(u'', x'') + 1$ et $d_{\widehat{G}}(u'', x'') + d_{\widehat{G}}(x', x'') = d_{\widehat{G}}(u'', x') \leq d_{\widehat{G}}(u', x') + 1$, on obtient que $d_{\widehat{G}}(x', x'') \leq 1$.

Toute arête $y'y''$ de \widehat{M} est parallèle à une Θ -classe E_i de G . Pour toute Θ -classe E_j de $Q(y')$ (resp. $Q(y'')$) avec $j \neq i$, E_j est une Θ -classe de $Q(y')$ (resp. $Q(y'')$) et $\epsilon_j(y) = \epsilon_j(y'')$. D'après leur définition, $f(y')$ et $f(y'')$ ne peuvent être séparés que par E_i , i.e., $d_G(f(y'), f(y'')) \leq 1$. Comme f est une injection de $V(\widehat{M})$ vers l'ensemble des puits de \vec{G} , $f(y')$ et $f(y'')$ sont obligatoirement adjacents dans G (cf Figure 4.7b). \square

L'algorithme calcule l'ensemble des puits de \vec{G} et pour chaque puits v , il calcule la porte $g(v)$ de v dans \widehat{M} et les coordonnées locales de $g(v)$ dans \mathcal{G} (cf Figure 4.6b) et renvoie $V(\widehat{M})$ l'ensemble des $g(v)$ pour chaque puits v et $E(\widehat{M})$, l'ensemble des arêtes $g(u)g(v)$ telles que u et v sont des puits de \vec{G} . La Proposition 4.4.3 implique que $V(\widehat{M})$ et $E(\widehat{M})$ sont correctement calculés et que \widehat{M} contient au plus n sommets et m arêtes. De plus, chaque sommet x de \widehat{M} est la porte $g(f(x))$ du sommet $f(x)$ de $Q(x)$ ayant une dimension d'au plus le degré de $(f(x))$. Ainsi, la description de \widehat{M} est de taille $O(m)$, ce qui conclut la preuve du Théorème 4.1.1.

4.5 Indice de Wiener

On décrit un algorithme linéaire pour calculer l'indice de Wiener d'un ensemble de sommets dans le ℓ_1 -complexe cubique \mathcal{G} d'un [graphe médian](#) G . De manière analogue aux graphes, l'indice de Wiener dans \mathcal{G} est la somme des distances pondérées entre chaque paire de terminaux.

Proposition 4.5.1. *Soit G un [graphe médian](#) avec m arêtes et soit P un ensemble fini de terminaux de \mathcal{G} décrit par une entrée de taille δ . L'indice de Wiener de P dans \mathcal{G} peut être calculé en temps $O(m + \delta)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.6.3. Soient $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_k < 1$ les E_i -coordonnées des points de P , et soient $\epsilon_0 = 0$ et $\epsilon_{k+1} = 1$. Tout comme la preuve de la Proposition 4.3.2, nous avons la chaîne d'inclusion suivante entre les demi-espaces géométriques définis par les hyperplans $\mathfrak{h}_i(\epsilon_0), \mathfrak{h}_i(\epsilon_1), \dots, \mathfrak{h}_i(\epsilon_k), \mathfrak{h}_i(\epsilon_{k+1})$:

$$\mathcal{H}'_i = \mathcal{H}'_i(\epsilon_0) \subset \mathcal{H}'_i(\epsilon_1) \subset \dots \subset \mathcal{H}'_i(\epsilon_k)$$

et

$$\mathcal{H}''_i = \mathcal{H}''_i(\epsilon_{k+1}) \subset \mathcal{H}''_i(\epsilon_k) \subset \dots \subset \mathcal{H}''_i(\epsilon_1)$$

Nous avons donc, de manière similaire au Lemme 2.6.2 le résultat suivant :

Lemme 4.5.2. $W_\pi(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^k \pi(\mathcal{H}'_i(\epsilon_j)) \cdot \pi(\mathcal{H}''_i(\epsilon_{j+1})) \cdot (\epsilon_{j+1} - \epsilon_j)$

Une fois que les $O(\delta)$ hyperplans sont ordonnés, on peut calculer les poids des demi-espaces en temps $O(m + \delta)$ et calculer l'indice de Wiener de P dans \mathcal{G} en temps $O(m + \delta)$. \square

Chapitre 5

Le problème du médian dans les structures d'évènements

Nous considérons dans cette section le problème du médian tel que le graphe médian est défini implicitement comme le domaine des configurations d'une structure d'évènements.

Bandelt et Barthelemy [12] ont prouvé une équivalence entre les graphes médians pointés et les domaines des structures d'évènements. Plus tard, Feder a montré dans sa thèse [59] une équivalence entre les graphes médians pointés et les formules 2-SAT sans variables équivalentes ou triviales. Nous commençons par montrer une correspondance directe (de taille polynomiale) entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT.

Ensuite, nous étudions le problème du médian dans les structures d'évènements. Nous distinguons le cas où la structure d'évènements est donnée par son ensemble de configurations, dans ce cas nous montrons un algorithme permettant d'obtenir le résultat suivant :

Proposition (5.3.6). Une configuration médiane c^* de tout ensemble de configurations $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ d'une structure d'évènements \mathcal{E} peut être calculée en temps linéaire par rapport à la taille $O(\sum_{i=1}^k |c_i|)$ de l'entrée.

Cependant, si on prend comme entrée la structure d'évènement et que l'on veut calculer le médian de l'ensemble des configurations du domaine, alors ce problème algorithmique est #P-difficile. Pour montrer ceci, nous utilisons la correspondance entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT, puis la #P-difficulté du problème du médian pour 2-SAT présenté dans [59].

5.1 Définitions et bijections

On commence par rappeler la définition des structures d'évènements et des formules 2-SAT et leur bijection avec les graphes médians.

5.1.1 Structure d'évènements

Les structures d'évènements, introduites par Nielsen, Plotkin et Winskel [95, 113], sont un modèle abstrait de calcul concurrent largement reconnu. Une structure d'évènements est un triplet $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$ où

- E est un ensemble d'évènements,
- $\leq \subseteq E \times E$ est un ordre partiel de *dépendance causale*,
- $\# \subseteq E \times E$ est une relation de *conflit* binaire, irréflexive et symétrique,
- $\downarrow e = \{e' \in E : e' \leq e\}$ est fini pour tout $e \in E$,
- $e \# e'$ et $e' \leq e''$ implique $e \# e''$.

Deux évènements e, e' sont concurrents (notation $e \parallel e'$) si ils sont incomparables et ne sont pas en conflit. Une *configuration* d'une structure d'évènements \mathcal{E} est un ensemble fini $c \subseteq E$ d'évènements qui est *sans conflit* ($e, e' \in c$ implique que e et e' ne sont pas en conflit) et *fermé par le bas* ($e \in c$ et $e' \leq e$ implique que $e' \in c$). On observe que \emptyset est toujours une configuration et que $\downarrow e$ et $\downarrow e \setminus \{e\}$ sont des configurations pour tout $e \in E$. Le *domaine* de \mathcal{E} est l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ de toutes les configurations de \mathcal{E} ordonnées par inclusion ; (c', c) est une arête (dirigée) du diagramme de Hasse du poset $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \subseteq)$ ssi $c = c' \cup \{e\}$ pour un évènement $e \in E \setminus c$. On remarque que la distance entre deux configurations c, c' dans le graphe (non dirigé) associé au diagramme de Hasse est égale à la distance de Hamming entre c et c' ($d(c, c') = |c \Delta c'|$). Barthélemy et Constantin [20] ont montrés la bijection suivante entre les structures d'évènements et les graphes médians pointés (i.e., les graphes médians avec un sommet distingué des autres) :

Théorème 5.1.1 ([20]). *Le diagramme de Hasse (non dirigé) du domaine $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \subseteq)$ d'une structure d'évènements $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$ est médian. Réciproquement, pour tout graphe médian G et tout sommet v de G , le graphe médian pointé G_v est le diagramme de Hasse d'une structure d'évènements \mathcal{E}_v .*

On rappelle brièvement la construction de la structure d'évènements \mathcal{E}_v . On considère un graphe médian G et un sommet arbitrairement choisis v . Les évènements de la structure d'évènements \mathcal{E}_v sont les hyperplans du complexe cubique \mathcal{G} (ou les Θ -classes de G). Deux hyperplans H et H' définissent des évènements concurrents ssi ils se croisent (i.e., il existe un carré avec deux arêtes opposées dans une des Θ -classes et les deux autres arêtes dans la seconde Θ -classe). Les hyperplans H et H' sont en relation $H \leq H'$ ssi $H = H'$ ou H sépare H' de v . Pour finir, les évènements définis par H et H' sont en conflit ssi H et H' ne se croisent pas, H ne sépare pas H' de v et H' ne sépare pas H de v .

Exemple 5.1.2. *Le graphe médian pointé G illustré par la Figure 5.1 est le domaine de la structure d'évènements $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$. Les sept évènements e_1, e_2, \dots, e_7 de E correspondent aux sept Θ -classes de G . La dépendance causale est définie par $e_1 \leq e_3, e_5, e_6, e_7$; $e_2 \leq e_4, e_5, e_6, e_7$; $e_3, e_5 \leq e_6$; $e_4, e_5 \leq e_7$. Les évènements e_6 et e_7 sont en conflit et toutes les paires restantes d'évènements sont concurrents.*

Par conséquent, les structures d'évènements permettent d'encoder les graphes médians et cette représentation est beaucoup plus compacte que la représentation standard avec les sommets et les arêtes. Par exemple, l'hypercube de dimension d est le domaine de la structure d'évènements avec d évènements deux à deux concurrents.

5.1.2 Le problème du médian dans les structures d'évènements

Soit $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$, une structure d'évènements finie. L'entrée est un ensemble $C = c_1, c_2, \dots, c_k$ de configurations de \mathcal{E} et leurs poids $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ où chaque c_i est donnée par la liste d'évènements appartenant à c_i . L'objectif du *problème du médian dans les structures d'évènements* \mathcal{E}

5.2. Une relation directe entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT

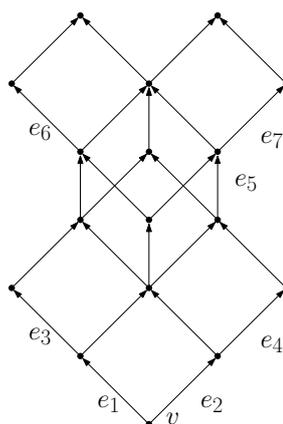


FIGURE 5.1 – Le domaine de la structure d'évènements de l'Exemple 5.1.2

est de calculer une configuration c minimisant la fonction $F_\pi(c) = \sum_{i=1}^k \pi_i d(c, c_i)$, où $d(c, c')$ est la distance de Hamming entre c et c' . On considère également un cas de ce problème du médian où C est l'ensemble de *toutes* les configurations de \mathcal{E} et l'entrée est la structure d'évènement \mathcal{E} , i.e., les graphes (E, \leq) et $(E, \#)$. On appelle ce problème le problème du médian compact.

5.1.3 Formules 2-SAT

Une *formule 2-SAT* sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n est une formule φ en forme normale conjonctive avec deux littéraux par clause, i.e., un ensemble de clauses sous la forme $(u \vee v)$ où chacun des deux littéraux u, v est soit un littéral positif x_i , ou un littéral négatif $\neg x_i$. Une *solution* de φ est une affectation S des variables à 0 ou 1 satisfaisant toutes les clauses. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}(\varphi)$ de φ est l'ensemble de toutes les solutions de φ . On considère chaque ensemble de solutions comme un sous-ensemble de sommets du cube n dimensionnel Q_n . Un sous-ensemble Y de sommets du cube Q_n (vu comme un graphe médian) est appelé *médian-stable* si le médian de chaque triplet $x, y, z \in Y$ appartient également à Y .

Proposition 5.1.3 ([91, 102]). *Les ensembles médian-stables sont exactement les ensembles de solutions des formules 2-SAT.*

Une variable d'une formule 2-SAT φ est dite *triviale* si elle a la même valeur dans chaque solution. Deux variables de φ non triviales x_i et x_j sont équivalentes si $x_i = x_j$ ou $x_i = \neg x_j$ dans toutes les solutions de φ . On donne une caractérisation des formules 2-SAT correspondant aux graphes médians :

Proposition 5.1.4 ([59, Corollaire 3.34]). *L'ensemble des solutions $\mathcal{S}(\varphi)$ d'une formule 2-SAT φ induit un graphe médian ssi φ n'a pas de variables équivalentes.*

5.2 Une relation directe entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT

On donne une correspondance entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT (qui peut être utile pour d'autres applications).

D'après le Théorème 5.1.1 et les Propositions 5.1.3 et 5.1.4, il existe une bijection entre le domaine des structures d'évènements et les graphes médians pointés ainsi qu'une bijection entre les graphes médians (non pointés) et les formules 2-SAT ne contenant pas de variables équivalentes. Comme \emptyset , et $\downarrow e, e \in E$ sont des configurations, leurs vecteurs caractéristiques doivent nécessairement être des solutions de la formule 2-SAT correspondante. Ceci peut être assuré en interdisant les clauses $(x_i \vee x_j)$ dans la formule 2-SAT.

Soit une structure d'évènements $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$ où $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On associe à \mathcal{E} une formule 2-SAT $\varphi_{\mathcal{E}}$ avec n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Pour chaque paire d'évènements $e_i \leq e_j$, on définit la clause $(x_i \vee \neg x_j)$ et pour chaque paire d'évènements $e_i \# e_j$ on définit la clause $(\neg x_i \vee \neg x_j)$. Par la suite, pour chaque sous-ensemble c de E on notera S_c son vecteur caractéristique.

Remarque. La construction ci-dessus appliquée à l'exemple 5.1.2 donne comme formule 2-SAT $\varphi = (e_1 \vee \neg e_3), (e_1 \vee \neg e_5), (e_1 \vee \neg e_6), (e_1 \vee \neg e_7), (e_2 \vee \neg e_4), (e_2 \vee \neg e_5), (e_2 \vee \neg e_6), (e_2 \vee \neg e_7), (e_3 \vee \neg e_6), (e_4 \vee \neg e_7), (e_5 \vee \neg e_6), (e_5 \vee \neg e_7), (\neg e_6 \vee \neg e_7)$.

Proposition 5.2.1. $\mathcal{S}(\varphi_{\mathcal{E}})$ coïncide avec $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Démonstration. Soit $c \subseteq E$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, i.e., soit c n'est pas fermé par le bas, soit c contient un conflit. Dans le premier cas, il existe deux évènements e_i et e_j tels que $e_i \leq e_j$ et c contient e_j mais pas e_i . Ceci implique que $\varphi_{\mathcal{E}}$ contient la clause $(\neg x_j \vee x_i)$. Comme $S_c(x_j) = 1$ et $S_c(x_i) = 0$, S_c n'est pas une solution de $\varphi_{\mathcal{E}}$. Dans le second cas, il existe deux évènements $e_i, e_j \in c$ tels que $e_i \# e_j$. Ceci implique que $\varphi_{\mathcal{E}}$ contient la clause $(\neg x_i \vee \neg x_j)$. Comme $S_c(x_i) = S_c(x_j) = 1$, S_c n'est pas une solution de $\varphi_{\mathcal{E}}$.

Réciproquement, on suppose que S_c n'est pas une solution de $\varphi_{\mathcal{E}}$. On rappelle que $\varphi_{\mathcal{E}}$ contient uniquement des clauses de la forme $(\neg x_i \vee x_j)$ et $(\neg x_i \vee \neg x_j)$. Si une clause de $\varphi_{\mathcal{E}}$ ayant la forme $(\neg x_i \vee x_j)$ est fautive, alors $S_c(x_i) = 1$ et $S_c(x_j) = 0$. Donc $e_j \leq e_i$ et c contient x_i mais ne contient pas x_j , par conséquent c n'est pas une configuration de \mathcal{E} . De manière analogue, si une clause $(\neg x_i \vee \neg x_j)$ est fautive alors $S_c(x_i) = S_c(x_j) = 1$. Donc c contient e_i et e_j avec $e_i \# e_j$, et n'est donc pas une configuration de \mathcal{E} . Ceci montre que $\mathcal{S}(\varphi_{\mathcal{E}})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ coïncident. \square

Soit une formule 2-SAT φ sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n ne contenant aucune variable triviale ou équivalente et aucune clause de la forme $(x_i \vee x_j)$. On associe à φ une structure d'évènements $\mathcal{E}_{\varphi} = (E, \leq, \#)$ tel que $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On définit \leq et $\#$ de la façon suivante. Pour commencer, on définit deux relations binaires \leq_0 et $\#_0$ telle que pour toute paire d'évènements e_i, e_j : on a $e_i \#_0 e_j$ ssi φ contient la clause $(\neg x_i \vee \neg x_j)$ et $e_i \leq_0 e_j$ ssi φ contient la clause $(x_i \vee \neg x_j)$. Soit \leq la fermeture réflexive et transitive de \leq_0 et soit $\#$ telle que $e_j \# e_l$ pour chaque quadruplet $e_i, e_j, e_k, e_l \in E$ où $e_i \leq e_j$, $e_k \leq e_l$ et $e_i \#_0 e_k$. On observe que $\#_0 \subseteq \#$ et que $\#$ satisfait le dernier axiome des structures d'évènements.

Remarque. La construction ci-dessus appliquée à la formule 2-SAT $\varphi = (e_1 \vee \neg e_3) \wedge (e_1 \vee \neg e_5) \wedge (e_2 \vee \neg e_4) \wedge (e_2 \vee \neg e_5) \wedge (e_3 \vee \neg e_6) \wedge (e_4 \vee \neg e_7) \wedge (e_5 \vee \neg e_6) \wedge (e_5 \vee \neg e_7)$ donne la structure d'évènements dont le domaine est représenté dans l'Exemple 5.1.2.

Proposition 5.2.2. $\mathcal{E}_{\varphi} = (E, \leq, \#)$ est une structure d'évènements et $\mathcal{D}(\mathcal{E}_{\varphi})$ coïncide avec $\mathcal{S}(\varphi)$.

Démonstration. Au regard des conclusions précédentes, il suffit de prouver que \leq est antisymétrique pour montrer que \mathcal{E}_{φ} est une structure d'évènements. On suppose par l'absurde qu'il existe $e_i, e_j \in E$ tels que $e_i \leq e_j$ et $e_j \leq e_i$. Par définition de \leq , il existe $e_1, e_2, \dots, e_p \in E$ et $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_q \in E$ tels que $e_i \leq_0 e_1 \leq_0 e_2 \leq_0 \dots \leq_0 e_p \leq_0 e_j$ et $e_j \leq_0 e_{p+1} \leq_0 e_{p+2} \leq_0 \dots \leq_0$

5.3. Le problème du médian dans les structures d'évènements

$e_q \leq_0 e_i$. Par conséquent, la formule φ contient les clauses $(\neg x_i \vee x_1), (\neg x_1 \vee x_2), \dots, (\neg x_p \vee x_j), (\neg x_j \vee x_{p+1}), \dots, (\neg x_q \vee x_i)$. Donc, les variables $x_1, \dots, x_q, x_i, x_j$ sont équivalentes, ce qui est impossible étant donné que φ est une formule 2-SAT sans variables triviales ou équivalentes.

Pour montrer la seconde affirmation, soit $c = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$, un sous-ensemble de E qui n'est pas une configuration de \mathcal{E}_φ , i.e., soit c n'est pas fermé par le bas, soit c contient un conflit. Tout d'abord, on suppose que c contient un évènement e_j tel qu'il existe un évènement $e_i \leq e_j$ n'appartenant pas à c . Comme \leq est la fermeture transitive et réflexive de \leq_0 , il existe une paire d'évènements e_k, e_l tels que $e_l \in c$, $e_k \notin c$ et $e_k \leq_0 e_l$. Donc φ contient la clause $(\neg x_l \vee x_k)$. Comme $S(x_l) = 1$ et $S(x_k) = 0$, la valuation S_c n'est pas une solution de φ . Par conséquent, on suppose maintenant que c est fermée par le bas. Deuxièmement, on suppose que c contient deux évènements e_i et e_j tels que $e_i \# e_j$. Par définition de $\#$ et $\#_0$, il existe deux évènements $e_k \leq e_i$ et $e_l \leq e_j$ tels que $e_k \#_0 e_l$. Comme c est fermée par le bas et contient e_i et e_j , e_k et e_l appartiennent à c . Donc, $S(x_k) = S(x_l) = 1$. Mais comme $e_k \#_0 e_l$, φ contient la clause $(\neg x_k \vee \neg x_l)$, qui n'est pas satisfaite par S_c . Par conséquent, si c n'est pas une configuration de \mathcal{E} , alors S_c n'est pas une solution de φ .

Réciproquement, on suppose que S est une valuation qui n'est pas une solution de φ . Soit $c \subseteq E$ telle que $S_c = S$. Comme φ ne contient pas de clause de la forme $(x_i \vee x_j)$, soit φ contient une clause $(\neg x_i \vee x_j)$ telle que $S_c(x_i) = 1$ et $S_c(x_j) = 0$, soit φ contient une clause $(\neg x_i \vee \neg x_j)$ telle que $S_c(x_i) = S_c(x_j) = 1$. Si φ contient une clause $(\neg x_i \vee x_j)$ telle que $S_c(x_i) = 1$ et $S_c(x_j) = 0$, alors $x_i \in c$ et $x_j \notin c$ alors que $x_j \leq x_i$, et c n'est donc pas une configuration de \mathcal{E}_φ . Si φ contient $(\neg x_i \vee \neg x_j)$ telle que $S_c(x_i) = S_c(x_j) = 1$, alors $e_i \# e_j$ et c n'est pas non plus une configuration de \mathcal{E}_φ étant donné que c contient les deux évènements en conflit e_i et e_j . \square

5.3 Le problème du médian dans les structures d'évènements

Dans cette sous-section, nous montrons que le problème du médian dans les structures peut être résolu en temps linéaire par rapport à la taille de l'entrée. Nous montrons également un algorithme calculant une paire diamétrale des configuration médianes en temps linéaire. D'autre part, nous montrons que le problème du médian compact est $\#$ -difficile.

5.3.1 Algorithme calculant l'ensemble médian des structures d'évènements

Soit $\mathcal{E} = (E, \leq, \#)$ une structure d'évènements avec $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Soient $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ un ensemble de configurations de \mathcal{E} et $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ leurs poids respectifs. Soit c^* un sous-ensemble de E défini par la règle de majorité dans l'hypercube $Q_n = \{0, 1\}^E$. Autrement dit, c^* est l'ensemble des évènements e_i tels que le poids de toutes les configurations de C contenant e_i est strictement plus grand que le poids total des configurations ne contenant pas e_i : $c^* = \{e_i \in E : \sum_{j: e_i \in c_j} \pi_j > \sum_{j: e_i \notin c_j} \pi_j\}$. On affirme que c^* est une configuration de \mathcal{E} et que c^* minimise la somme totale des distances $F_\pi(c) = \sum_{i=1}^k \pi_i d(c, c_i)$.

Comme Q_n est un graphe médian, d'après la règle de majorité de la Proposition 2.5.1, l'ensemble médian de Q_n est l'intersection de tous les **demi-espaces** majoritaires de Q_n . Chaque paire H'_i, H''_i de **demi-espaces** complémentaires de Q_n correspond à un évènement e_i de \mathcal{E} : le **demi-espace** H'_i correspond à tous les $c \subseteq E$ ne contenant pas e_i et sont complément H''_i correspond à tous les **demi-espaces** contenant e_i .

Si $\pi(H_i'') > \pi(H_i')$, alors H_i' est majoritaire, ce qui signifie que le poids de toutes les configurations de C contenant e_i est strictement plus grand que la moitié du poids total de C . Par définition de c^* , e_i appartient à c^* , c'est à dire que c^* (considéré comme un vecteur caractéristique) est un sommet de H_i' . De manière similaire, si $\pi(H_i') > \pi(H_i'')$, alors H_i'' est majoritaire, ce qui signifie que le poids de toutes les configurations de C ne contenant pas e_i est strictement plus grand que la moitié du poids total de C . Par définition de c^* , e_i n'appartient pas à c^* , c'est à dire que c^* est un sommet de H_i'' . Par conséquent, c^* est un sommet de l'hypercube Q_n minimisant $F_\pi(c) = \sum_{i=1}^k \pi_i d(c, c_i)$ sur les $c \subseteq E$.

Comme c^* minimise $F_\pi(c)$ sur Q_n et donc sur $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, pour finir la preuve il reste à montrer que c^* est une configuration de \mathcal{E} . On suppose que $e_i \in c^*$ et que $e_j \leq e_i$. Comme chaque configuration de \mathcal{E} est fermée par le bas, toutes les configurations de C contenant e_i contiennent également e_j . Ainsi, le poids de toutes les configurations de C contenant e_j est strictement plus grand que le poids de toutes les configurations ne contenant pas e_j et donc $e_j \in c^*$. On suppose maintenant par l'absurde que $e_i, e_j \in c^*$ et $e_i \# e_j$. Comme e_i, e_j dans c^* , le poids total des configurations contenant e_i est strictement plus grand que la moitié du poids total de C et que le poids total des configurations contenant e_j est également strictement plus grand que la moitié du poids total de C . Il doit donc y avoir dans C au moins une configuration contenant à la fois e_i et e_j , ce qui est impossible étant donné que $e_i \# e_j$. Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 5.3.1. *Une configuration médiane c^* de tout ensemble de configurations $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ d'une structure d'évènements \mathcal{E} peut être calculée en temps linéaire par rapport à la taille $O(\sum_{i=1}^k |c_i|)$ de l'entrée.*

Remarque. Étant donné la correspondance entre les structures d'évènements et les formules 2-SAT établie dans les Propositions 5.2.1 et 5.2.2, on peut définir un problème du médian similaire pour un ensemble de solutions $S_{c_1}, S_{c_2}, \dots, S_{c_k}$ de la formule 2-SAT $\varphi_{\mathcal{E}}$ et chercher une solution $S_c \in \mathcal{S}(\varphi_{\mathcal{E}})$ minimisant $\sum_{i=1}^k \pi_i d(S_c, S_{c_i})$. Nous pouvons déduire des bijections précédentes que S_{c^*} appartient à $\mathcal{S}(\varphi_{\mathcal{E}})$ et est donc une solution optimale.

5.3.2 Calcul d'une paire diamétrale des configurations médianes

On sait depuis l'article [12] que l'ensemble médian d'un graphe médian coïncide avec l'intervalle entre une de ses paires diamétrales. Dans le Corollaire 2.4.2, nous avons montré comment calculer une paire diamétrale $\{c'_*, c''_*\}$ des configurations médianes en temps linéaire par rapport à la taille de l'entrée (la description de la structure d'évènements et de l'ensemble des configurations).

Remarque. De manière similaire au problème du médian dans les complexes cubiques ℓ_1 associés aux graphes médians, on ne peut pas retourner toutes les configurations médianes car elles peuvent être en nombre exponentiel.

Pour l'instant, on suppose que $\{c', c''\}$ est une paire diamétrale de l'ensemble des configurations médianes (qui existe d'après [12]). On rappelle également que dans la sous-section précédente, on a défini une configuration médiane standard $c^* = \{e_i \in E : \sum_{j:e_i \in c_j} \pi_j > \sum_{j:e_i \notin c_j} \pi_j\}$. De manière similaire aux classifications des Θ -classes d'un graphe médian, on peut partitionner les évènements de \mathcal{E} en trois classes : un évènement $e \in E$ est noté (i) *majoritaire* si e appartient à c^* , (ii) *minoritaire* si le *demi-espace* défini par e et contenant e est un demi-espace minoritaire, et (iii) *égalitaire* si les deux *demi-espaces* définis par e ont le même poids. On notera E_- l'ensemble des évènements égalitaires. Nous commençons par quelques lemmes utiles pour la suite :

Lemme 5.3.2. *La distance $d(c', c'')$ entre c' et c'' dans le graphe médian $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est égal au nombre de *demi-espaces égalitaires*.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.5.1, aucun évènement majoritaire ou minoritaire de \mathcal{E} ne sépare deux configurations médianes. Ainsi, tout évènement correspondant à une Θ -classe séparant c' et c'' est égalitaire ; ceci montre que $d(c', c'')$ n'est pas plus grand que $|E_-|$. Réciproquement, on affirme que tout évènement $e \in E_-$ sépare c' et c'' . D'après la proposition 2.5.1, les deux *demi-espaces* définis par e intersectent chacun l'ensemble médian. Si c', c'' ne sont pas séparés par ces demi-espaces, alors ils appartiennent nécessairement au même *demi-espace* et au moins une configuration médiane appartient au *demi-espace* complémentaire. Comme $c \in I(c', c'')$, nous obtenons une contradiction avec la convexité des demi-espaces. Ceci montre que c' et c'' sont séparés par tous les évènements égalitaires. \square

Lemme 5.3.3. *La configuration médiane c^* est la porte de la configuration vide $c_\emptyset = \emptyset$ dans l'intervalle $I(c', c'')$, en particulier, c^* est le médian du triplet c_\emptyset, c' et c'' .*

Démonstration. On suppose par l'absurde que $c \neq c^*$ est la porte de c_\emptyset dans $I(c', c'')$. Ceci implique que $c \in I(c_\emptyset, c^*)$, i.e., c^* est l'union de c et des évènements séparant c et c^* . Comme $c, c^* \in I(c', c'')$, d'après le Lemme 5.3.2, tout évènement séparant c et c^* est un *demi-espace* égalitaire. Ceci contredit la définition de c^* qui ne peut contenir que des évènements majoritaires. \square

D'après le Lemme 5.3.3, $c^* \in I(c_\emptyset, c') \cap I(c_\emptyset, c'')$ et nous en déduisons que $c' = c^* \cup A$ et $c'' = c^* \cup B$ où A et B sont des ensembles d'évènements égalitaires. D'après le Lemme 5.3.2, $d(c', c'') = |E_-|$, ce qui coïncide avec la distance de Hamming $|c' \Delta c''| = |A \Delta B|$, les ensembles A et B doivent constituer une partition de E_- . Comme $c' = c^* \cup A$ et $c'' = c^* \cup B$ sont des configurations, nous pouvons en déduire que les ensembles $c^* \cup A$ et $c^* \cup B$ sont sans conflit et fermés par le bas. Par conséquent, les évènements de c^* ne sont pas en conflit avec les évènements de $E_- = A \cup B$.

Nous définissons la relation binaire symétrique R_0 sur l'ensemble $E_- : e_1 R_0 e_2$ ssi $e_1 \leq e_2$ ou $e_2 \leq e_1$. Soit R la fermeture transitive de R_0 . On observe que les classes d'équivalence de R sont les composantes connexes du graphe obtenu en ne tenant pas compte de l'orientation du diagramme de Hasse de (E_-, \leq) . On définit maintenant le graphe des conflits Γ : les sommets de Γ sont les classes d'équivalence de R et ces classes C' et C'' sont connectés par une arête ssi il existe un évènement $e' \in C'$ et un évènement $e'' \in C''$ tels que $e' \# e''$.

Lemme 5.3.4. *Toute classe d'équivalence C de la relation R est sans conflit, par conséquent le graphe des conflits Γ est biparti.*

Démonstration. Soient A, B une bipartition de E_- telle que $c' = c^* \cup A, c'' = c^* \cup B$ est une paire diamétrale de l'ensemble des configurations médianes (le fait que l'on puisse représenter c' et c'' de cette manière découle de la discussion après le Lemme 5.3.3). Comme les ensembles A et B sont sans conflit, il suffit de montrer que C est contenu dans A ou B .

On suppose par l'absurde qu'il existe $e \in A \cap C$ et $e' \in B \cap C$. Par définition de R_0 , il existe des évènements $e = e_0, e_1, \dots, e_p, e_{p+1} = e' \in E_-$ tels que $(e_0, e_1), (e_1, e_2), \dots, (e_p, e_{p+1}) \in R_0$. Comme A, B est une partition de E_- , il existe $(e_{j-1}, e_j) \in R_0$ tel que $e_{j-1} \in A \setminus B$ et $e_j \in B \setminus A$. Comme $(e_{j-1}, e_j) \in R_0$, soit $e_{j-1} \leq e_j$, soit $e_j \leq e_{j-1}$. Sans perte de généralité, nous supposons que nous sommes dans le premier cas. Par conséquent, comme $c'' = c^* \cup B$ est fermé par le

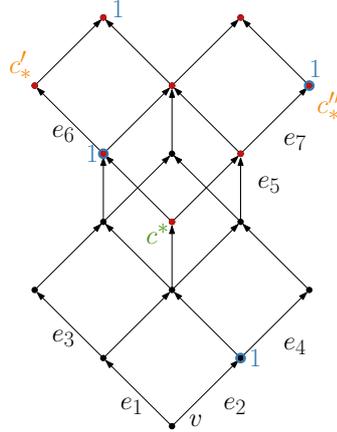


FIGURE 5.2 – Une illustration des notations $c^* = \{e_1, e_2, e_5\}$, $c'_* = \{e_1, e_2, e_5, e_3, e_6\}$ et $c''_* = \{e_1, e_2, e_5, e_4, e_7\}$. Les poids sont indiqués en bleu et les configurations médianes en rouges

bas et contient e_j , e_{j-1} appartient nécessairement à c'' . Comme e_{j-1} est égalitaire et que tous les évènements de c^* sont majoritaires, e_{j-1} appartient nécessairement à B , une contradiction. Ainsi, chaque classe d'équivalence de R est contenue soit dans A , soit dans B . Comme A et B sont sans conflit, toute arête du graphe de conflit Γ possède une extrémité dans A et l'autre dans B . Ainsi, les classes d'équivalences de R incluses dans A et celles incluses dans B définissent une bipartition de Γ en deux ensembles indépendants. \square

Lemme 5.3.5. *Pour la bipartition A_*, B_* de E_* induite par une bipartition Q'_*, Q''_* de Γ en deux ensembles indépendants, $c'_* = c^* \cup A_*$ et $c''_* = c^* \cup B_*$ forment une paire diamétrale de l'ensemble des configurations médianes.*

Démonstration. Soit A_* , l'union de toutes les classes d'équivalence de R contenues dans Q'_* , et soit B_* l'union de toutes les classes d'équivalence de R contenues dans Q''_* . On affirme que $c'_* = c^* \cup A_*$ et $c''_* = c^* \cup B_*$ sont des configurations de \mathcal{E} . Nous prouvons cette assertion pour c'_* . Comme d'après le Lemme 5.3.4, chaque classe d'équivalence de R est sans conflit et comme Q'_* est un ensemble indépendant de Γ , l'ensemble A_* est nécessairement sans conflit. Comme vu plus haut, il n'y a pas d'évènement de c^* et E_* en conflit. Par conséquent, l'ensemble $c'_* = c^* \cup A_*$ est sans conflit.

On montre maintenant que $c'_* = c^* \cup A_*$ est fermé par le bas. On choisit arbitrairement $e \in c'_*$ et $e' \leq e$. Nous avons montré que c^* était une configuration, donc si $e \in c^*$, alors $e' \in c^*$. On suppose maintenant que $e \in A_*$, et on suppose par l'absurde que $e' \notin c'_* = c^* \cup A_*$, i.e., soit e' est minoritaire, soit e' est égalitaire mais appartient à B_* . Comme toute configuration contenant e contient également e' , le poids total des configurations contenant e' est d'au moins le poids total des configurations contenant e . Comme e est égalitaire, e' est soit majoritaire, soit égalitaire. Dans le premier cas, d'après la définition de c^* , $e' \in c^*$ (et donc $e \in c'_*$). Dans le second cas, e et e' appartiennent à la même classe d'équivalence de R et donc soit ils appartiennent tous les deux à A_* , soit ils appartiennent tous les deux à B_* .

Par conséquent, $c'_* = c^* \cup A_*$ et $c''_* = c^* \cup B_*$ sont des configurations de \mathcal{E} . On affirme que c'_* et c''_* sont des configurations médianes. Immédiatement, c'_* et c''_* sont tous les deux contenus dans tout les demi-espace H''_e tels que $e \in c^*$ (i.e., e est un évènement majoritaire). D'autre part, c'_* et c''_* sont tous les deux contenus dans tout les demi-espace H'_e tels que e est un évènement

5.3. Le problème du médian dans les structures d'évènements

minoritaire. Comme dans les deux cas ces **demi-espaces** ont un poids strictement plus grand que la moitié du poids total, c'_* et c''_* appartiennent à chaque **demi-espace** majoritaire et donc d'après la Proposition 2.5.1, ce sont des configurations médianes. Pour finir, étant donné que $d(c'_*, c''_*) = |A_* \cup B_*| = |E_-|$, nous pouvons conclure c'_*, c''_* est une paire diamétrale de l'ensemble des configurations médianes. \square

Nous déduisons des résultats précédents l'algorithme suivant qui calcule une paire diamétrale c'_*, c''_* de l'ensemble des configurations médianes. Tout d'abord, nous calculons l'ensemble des évènements majoritaires et l'ensemble des évènements égalitaires. Ceci peut être fait en un temps $O(\sum_{i=1}^k |c_i|)$ en traversant la liste des évènements décrivant l'ensemble des configurations c_1, \dots, c_k . Ensuite, nous calculons la relation binaire R_0 et sa fermeture réflexive et transitive R . Comme observé plus haut, ceci peut être fait en calculant les composantes connexes du sous-graphe induit par l'ensemble des évènements égalitaires du diagramme de Hasse de \leq en ne tenant pas compte de l'orientation. Ceci peut être en fait en temps linéaire en la taille de (E, \leq) . Pour calculer graphe Γ , il suffit de considérer le graphe des conflits $(E, \#)$ et pour chaque paire d'évènements égalitaires e_1, e_2 en conflit, on ajoute une arête entre les classes d'équivalence de e_1 et e_2 . Ceci peut être fait en temps linéaire en la taille de $(E, \#)$ et la taille du graphe Γ est linéaire par rapport à la taille de \mathcal{E} .

Proposition 5.3.6. *Une paire diamétrale $c'_* = c^* \cup A_*$, $c''_* = c^* \cup B_*$ de l'ensemble des configurations médianes de tout ensemble $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ des configurations d'une structure d'évènements \mathcal{E} peut être calculé en temps $O(|\mathcal{E}| + \sum_{i=1}^k |c_i|)$.*

5.3.3 Le problème du médian compact est #P-difficile

Un problème analogue au problème du médian compact pour les formules 2-SAT a déjà été étudié par Feder [59] qui a montré le résultat suivant :

Proposition 5.3.7. [59, Lemme 3.54] *Pour une formule 2-SAT φ sans variables triviales ou équivalentes, le problème de trouver le médian du graphe médian $\mathcal{S}(\varphi)$ est #P-difficile.*

On montre comment obtenir une formule 2-SAT satisfiable φ_0 sans variables triviales ou équivalentes à partir d'une formule 2-SAT quelconque φ telle que $\mathcal{S}(\varphi)$ soit en bijection avec $\mathcal{S}(\varphi_0)$: Pour commencer, on peut supprimer sans risque toutes les clauses contenant une variable équivalente, pour montrer ça on suppose sans perte de généralité que $S_\varphi(x_i) = 1$ dans toutes les solutions S_φ de $\mathcal{S}(\varphi)$, et que toutes les clauses contenant x_i sont de la forme $(x_i \vee x_j)$ ou $(\neg x_i \vee x_j)$. Dans le premier cas la clause est juste quelle que soit la valeur de x_j et on peut donc la supprimer, et dans le second cas $S_\varphi(x_j)$ doit forcément être vraie, et est donc également une variable triviale. Dans le cas des variables équivalentes, si dans toutes les solutions $S_\varphi(x_i) = S_\varphi(x_j)$ (resp. $S_\varphi(x_i) = \neg S_\varphi(x_j)$), alors on remplace toutes les occurrences de x_j par x_i et $\neg x_j$ par $\neg x_i$ (resp. on remplace toutes les occurrences de x_j par $\neg x_i$ et x_j par $\neg x_i$).

Les littéraux de toute formule 2-SAT satisfiable φ peut être renommée pour transformer φ en une formule équivalente ne contenant pas les clauses $(x_i \vee x_j)$. Pour cela, il suffit de remplacer toutes les occurrences de x_i par $\neg x_i$ et de $\neg x_i$ par x_i et de recommencer si cela crée de nouvelles clauses de cette forme, ceci ne cause pas de problème étant donné que φ est satisfiable. En effet, si on a une boucle de type $(\neg x_i \vee x_{j_1}), (\neg x_{j_1} \vee x_{j_2}), \dots, (\neg x_{j_p} \vee x_i)$ alors la formule n'est pas satisfiable.

La Proposition 5.3.7 est vraie pour les formules 2-SAT sans variables triviales ni équivalentes, ni clauses de la forme $(x_i \vee x_j)$. Comme la taille de la structure d'évènements \mathcal{E}_φ de la Proposition 5.3.7 est quadratique en la taille de la formule 2-SAT φ , on déduit le résultat suivant des Propositions 5.2.2, 5.3.7 et de la Remarque 5.3.1 :

Proposition 5.3.8. *Le problème du médian compact dans une structure d'évènements est #P-difficile.*

Note : Nous tenons à remercier Florent Capelli, Nadia Creignou, et Yann Strozecki qui nous ont donné une preuve de la Proposition 5.3.7 bien avant que nous ne découvrions le résultat de [59].

Conclusion

Dans cette partie, nous avons essentiellement présenté des algorithmes pour calculer efficacement l'ensemble médian dans les [graphes médians](#) et dans d'autres structures proches.

Dans le Chapitre 1, nous avons présenté un algorithme calculant les Θ -classes des [graphes médians](#) en temps linéaire, une ouverture naturelle est de se demander si c'est possible de les calculer efficacement pour d'autres sous-graphes d'hypercubes. Notre algorithme reposant essentiellement sur la preuve du fait que les graphes médians respectent la propriété des parents, qui est une preuve assez technique utilisant des propriétés propres aux [graphes médians](#), on peut cependant supposer qu'il faudra trouver d'autres astuces pour calculer efficacement les Θ -classes dans d'autres classes de graphes.

Le Chapitre 2 présente l'apport principal de cette partie qui est un algorithme permettant de calculer l'ensemble médian des [graphes médians](#) en temps linéaire. Cet algorithme utilise le calcul rapide des Θ -classes, on peut se demander si il est possible de calculer le médian en temps linéaire dans d'autres classes de graphes, et si il y a d'autres problèmes dans les graphes médians pour lesquels on peut se servir du calcul rapide des Θ -classes, comme les problèmes liés aux excentricités étudiés dans [31] et [30].

Nous avons utilisé les techniques du chapitre précédent pour étendre le problème du médian au problème des p -moments dans les [graphes médians](#). Nous obtenons une complexité exponentielle en p , peut être pourrions nous améliorer l'algorithme pour réduire sa complexité.

Nous avons également trouvé une solution linéaire pour le problème du médian dans les ℓ_1 -complexes cubiques dans le Chapitre 4 et pour les structures d'événements si le problème prend en entrée l'ensemble des configurations dans le Chapitre 5, en revanche, si l'entrée est donnée par la structure d'événements, le problème devient $\#P$ -difficile. Il peut être intéressant de regarder si des problèmes qui se comportent bien dans les [graphes médians](#) ont des solutions intéressantes dans les ℓ_1 -complexes cubiques et dans les structures d'événements.

Conclusion

Troisième partie

Aspect structurel et axiomatique de la
fonction médian

Chapitre 6

Caractérisation des graphes dont l'ensemble médian est G^p -connexe

Dans ce chapitre, nous généralisons le résultat de Bandelt et Chepoi [14], caractérisant les graphes aux médians connexes. Les résultats de ce Chapitre sont présentés dans l'article [27].

On rappelle que l'on dit qu'un sous-ensemble de sommets S d'un graphe est connexe si il existe un chemin entre chaque paire de sommets de S . L'article [14] a montré que les graphes aux médians connexes sont également les graphes dans lesquels la somme totale des distances est unimodale, i.e., où les maximums locaux sont globaux. Ainsi, dans les graphes où la somme totale des distances est unimodale, un sommet est soit médian, soit il a un voisin qui fait diminuer cette somme et il n'est donc pas nécessaire de faire le calcul pour tous les sommets, il suffit de "suivre le chemin" jusqu'à trouver un minimum local et donc global. Cette propriété permet de trouver des algorithmes rapides pour le calcul du médian, par exemple l'article [56] présente un algorithme calculant l'ensemble médian des graphes de Helly (dans lesquels l'ensemble médian est connexe) en temps $\tilde{O}(m\sqrt{n})$.

Nous généralisons ce résultat pour caractériser les graphes $G = (V, E)$ aux médians connexes dans la $p^{\text{ième}}$ puissance de G , le graphe G^p avec le même ensemble de sommets que G et où deux sommets sont adjacents si ils sont à distance au plus p dans G . On rappelle la condition de convexité pour une paire de sommets u, v et une fonction $V \rightarrow \mathbb{R}$: pour tout $x \in I(u, v)$,

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{d(u, x)}{d(u, v)}\right) f(u) + \frac{d(u, x)}{d(u, v)} f(v)$$

Et on dit qu'une fonction est faiblement convexe si pour toute paire de sommets u, v , il existe une (u, v) -géodésique P tel que f respecte la condition de convexité pour toute paire $x, y \in P$. De même, une fonction est faiblement sans-pic sur G si pour toute paire de sommets u, v de G , il existe une (u, v) -géodésique $P = (w_0, w_1, \dots, w_p)$ tel que pour tout triplet de sommets w_i, w_j, w_k avec $0 \leq i < j < k \leq p$, $f(w_j) \leq \max\{f(w_i), f(w_k)\}$ et l'égalité est atteinte seulement si $f(w_i) = f(w_k)$.

Nous généralisons les fonctions faiblement-convexes et faiblement-sans-pic dans la Section 6.1 en définissant les fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic, pour lesquelles nous n'avons besoin de regarder que les paires de sommets de la géodésique à distance supérieure à p .

Nous pourrons alors passer au résultat principal de ce chapitre, caractérisant les graphes aux médians G^p -connexes. Ce résultat affirme notamment que les graphes aux médians G^p connexes

sont équivalents aux graphes dont l'ensemble médian est local dans G^p , aux graphes dans lesquels F_π est faiblement- p -convexe et aux graphes dans lesquels F_π est faiblement- p -sans-pic.

6.1 Fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic

Dans cette section, nous commençons par introduire les chaînes géodésiques dans les graphes, ainsi que les fonctions convexes et sans-pic sur les chaînes géodésiques. Ceci nous permet de définir de manière similaire les fonctions faiblement-convexes sur les graphes [14] ainsi que leur généralisation, les fonctions faiblement- p -convexes. Les fonctions *faiblement- p -convexes* sont les fonctions où la condition de convexité est uniquement nécessaire pour les paires de sommets à distance strictement plus grande que p . De manière analogue, on définit les fonctions faiblement- p -sans-pic.

Nous présentons une caractérisation locale vers globale des fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic, qui sont similaires à celles des fonctions faiblement-convexes et faiblement-sans-pic [14, 45], mais plus complexes.

Pour conclure cette section nous montrerons que les fonctions faiblement p -convexes/sans-pic sont unimodales dans la $p^{\text{ième}}$ puissance G^p de G .

6.1.1 Fonctions convexes et sans-pic sur les chaînes géodésiques

Une chaîne géodésique d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ incluse dans une (u, v) -géodésique de G . On note qu'une *géodésique* est une chaîne géodésique avec $d(w_i, w_{i+1}) = 1$. Soit une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ sur G et soit P une chaîne géodésique. On note f_P la fonction linéaire par morceaux sur le segment $[0, d(u, v)]$ obtenu en considérant $(0, f(w_0)), (d(u, w_1), f(w_1)), \dots, (d(u, w_{n-1}), f(w_{n-1})), (d(u, v), f(w_n))$ en tant que points du plan \mathbb{R}^2 et connectant deux points consécutifs par un segment (cf Figure 6.1). On dit qu'une fonction f est *convexe* sur une *géodésique* P si pour tout $i < j < k$,

$$f(w_j) \leq \frac{d(w_k, w_j)}{d(w_i, w_k)} \cdot f(w_i) + \frac{d(w_i, w_j)}{d(w_i, w_k)} \cdot f(w_k).$$

De manière équivalente, f est convexe sur P si f_P est convexe. On dit que f est *sans-pic* sur une chaîne géodésique P si $0 \leq i < j < k \leq p$ implique $f(w_j) \leq \max\{f(w_i), f(w_k)\}$, et on a l'égalité seulement si $f(w_i) = f(w_j) = f(w_k)$. De manière équivalente, f est sans-pic sur P si la fonction linéaire par morceaux f_P est sans-pic. Nous poursuivons avec une caractérisation locale vers globale des fonction convexes et sans-pic sur les chaînes géodésiques qui nous sera utile par la suite .

Lemme 6.1.1. *Une fonction f sur un graphe G est convexe sur une chaîne géodésique $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ si f est localement convexe sur P , i.e., pour tout $i = 1, \dots, n-1$, nous avons :*

$$f(w_i) \leq \frac{d(w_{i+1}, w_i)}{d(w_{i-1}, w_{i+1})} \cdot f(w_{i-1}) + \frac{d(w_{i-1}, w_i)}{d(w_{i-1}, w_{i+1})} \cdot f(w_{i+1}).$$

Si P est une géodésique alors f est convexe sur P ssi $f(w_i) \leq \frac{1}{2}(f(w_{i-1}) + f(w_{i+1}))$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

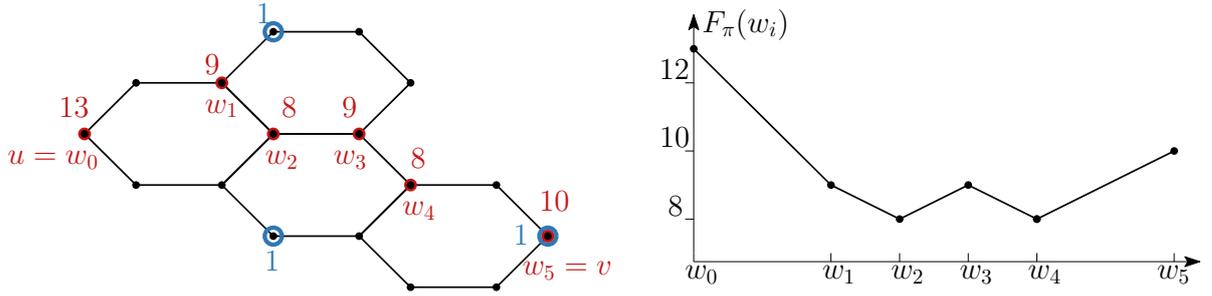


FIGURE 6.1 – Exemple d’une chaîne géodésique sur laquelle la somme totale n’est ni convexe, ni sans-pic. À gauche, les poids non nuls sont indiqués en bleu et la somme totale des distances en rouge. À droite, on notera $d(u, w_i)$ par w_i

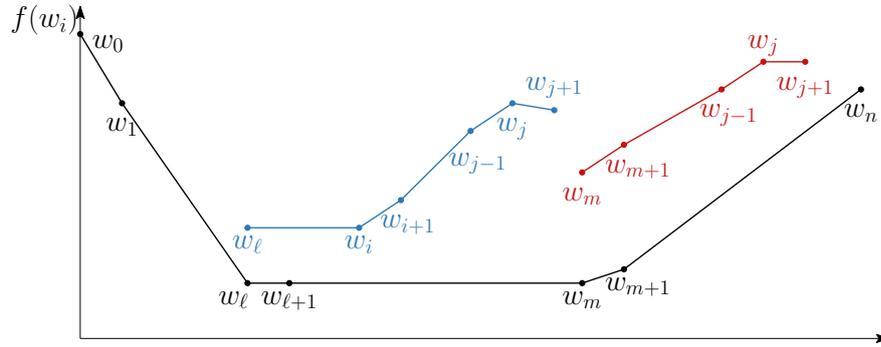


FIGURE 6.2 – Illustration du Lemme 6.1.2 et de sa preuve

Démonstration. Par définition, f est convexe ssi la fonction linéaire par morceaux f_P est convexe, et par conséquent ssi l’épigraphe $\text{epi}(f_P)$ de f_P est convexe. La dernière condition est équivalente à la nécessité que chaque point $(i, f(w_i)), i = 1, \dots, n - 1$ de \mathbb{R}^2 soit un sommet convexe de $\text{epi}(f_P)$, i.e., à la condition que $f(w_i) \leq \frac{d(w_{i+1}, w_i)}{d(w_{i-1}, w_{i+1})} \cdot f(w_{i-1}) + \frac{d(w_{i-1}, w_i)}{d(w_{i-1}, w_{i+1})} \cdot f(w_{i+1})$. Si P est une géodésique de G , alors $d(w_{i-1}, w_{i+1}) = 2$ pour tout $i = 1, \dots, n - 1$ et l’inégalité précédente peut se réduire à $f(w_i) \leq \frac{1}{2}(f(w_{i-1}) + f(w_{i+1}))$. \square

Lemme 6.1.2. *Pour une fonction f sur un graphe G et une chaîne géodésique $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ de G , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est sans-pic sur P ;
- (ii) f est localement-sans-pic sur P , i.e., pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $f(w_i) \leq \max\{f(w_{i-1}), f(w_{i+1})\}$ et on obtient l’égalité si $f(w_{i-1}) = f(w_i) = f(w_{i+1})$;
- (iii) P contient deux sommets (pas forcément distincts) w_ℓ, w_m tels que $f(w_0) > f(w_1) > \dots > f(w_\ell) = f(w_{\ell+1}) = \dots = f(w_m) < f(w_{m+1}) < \dots < f(w_n)$ (en noir sur la Figure 6.2)

Démonstration. Les implications (i) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (i) sont triviales. Pour montrer (ii) \Rightarrow (iii), on suppose que f localement-sans-pic sur P . Soient w_ℓ et w_m les minimums de f sur P les plus proches de u et de v respectivement. Pour commencer, on montre que $f(w_\ell) = f(w_{\ell+1}) = \dots = f(w_m)$. Dans le cas contraire, on peut déduire du choix de w_ℓ et w_m que nous pouvons trouver

deux indices $\ell < i < j < m$ tels que $f(w_\ell) = \dots = f(w_i) < f(w_{i+1}) < \dots < f(w_{j-1}) < f(w_j) \geq f(w_{j+1})$ (en bleu sur la Figure 6.2). Par conséquent, f n'est pas localement-sans-pic sur le triplet (w_{j-1}, w_j, w_{j+1}) . Cette contradiction montre que $f(w_\ell) = f(w_{\ell+1}) = \dots = f(w_m) < f(w_{m+1})$.

On montre maintenant que $f(w_m) < f(w_{m+1}) < \dots < f(w_n)$ (la preuve des inégalités $f(w_0) > f(w_1) > \dots > f(w_\ell)$ est similaire). On suppose que $f(w_m) < f(w_{m+1}) < \dots < f(w_{j-1}) < f(w_j)$ et que $f(w_j) \geq f(w_{j+1})$ (en rouge sur la Figure 6.2). Par conséquent $f(w_j) \geq \max\{f(w_{j-1}), f(w_{j+1})\}$ et comme $f(w_{j-1}) < f(w_j)$ nous n'avons pas $f(w_{j-1}) = f(w_j) = f(w_{j+1})$ et obtenons donc une contradiction avec le fait que f est localement-sans-pic sur P . Cette contradiction montre que f satisfait (iii) et conclut la preuve. \square

6.1.2 Fonctions faiblement-convexes et faiblement-sans-pic

On commence par donner la définition des fonctions [faiblement-convexes](#) et [faiblement-sans-pic](#) :

Définition 6.1.1. Une fonction f sur un graphe $G = (V, E)$ est *faiblement-convexe* si pour tout $u, v \in V$, f est convexe sur au moins une (u, v) -géodésique.

Définition 6.1.2. Une fonction f sur un graphe $G = (V, E)$ est *faiblement-sans-pic* si pour tout $u, v \in V$, f est sans-pic sur au moins une (u, v) -géodésique.

Les fonctions [faiblement-convexe](#) ont été introduites dans le papier [6] sous le nom de fonctions r -convexes via la condition (ii) du Lemme 6.1.3 plus bas ; (voir également [79]).

Les fonctions [faiblement-sans-pic](#) ont été introduites et étudiées dans [14, 45] sous le nom de "fonctions pseudopeakless".

Soit une fonction f sur G et deux sommets non adjacents u, v . On considère les conditions suivantes sur f :

WC(u,v): il existe $w \in I^\circ(u, v)$ tel que $f(w) \leq \frac{d(v,w)}{d(u,v)} \cdot f(u) + \frac{d(u,w)}{d(u,v)} \cdot f(v)$.

WP(u,v): il existe $w \in I^\circ(u, v)$ tel que $f(w) \leq \max\{f(u), f(v)\}$, et l'égalité est atteinte seulement si $f(u) = f(w) = f(v)$.

Loz(u,v): Il existe $w, w' \in I^\circ(u, v)$ (pas forcément distincts) tels que $f(w) + f(w') \leq f(u) + f(v)$.

Remarque. La somme totale des distances de la Figure 6.1 ne respecte pas Loz(w_2, w_4) mais respecte Loz(w_1, w_4).

Une fonction f est une *fonction losange* si f vérifie Loz(u, v) pour toute paire de sommets u, v non adjacents.

Remarque. Les fonctions losange sur les graphes ont été introduites dans [14] afin de mieux étudier la somme totale des distances. Elles représentent une généralisation des fonctions $L^\#$ -convexes [58] et des fonctions N -convexes [69] sur des classes de graphes particulières, toutes deux étudiées en théorie de la convexité discrète [68, 92].

Nous poursuivons en rappelant la caractérisation locale vers globale suivante des fonctions [faiblement-convexes](#) et [faiblement-sans-pic](#) sur les graphes (qui découle essentiellement des Lemmes 6.1.1 et 6.1.2).

Lemme 6.1.3 ([14, Remarque 1]). *Pour toute fonction f sur un graphe G , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est *faiblement-convexe* ;
- (ii) f vérifie $WC(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ non adjacents ;
- (iii) f vérifie $WC(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ avec $d(u, v) = 2$, i.e., toute paire de sommets u, v à distance 2 ont un voisin en commun w avec $2f(w) \leq f(u) + f(v)$.

Lemme 6.1.4 ([14, Remark 1]). *Pour toute fonction f sur un graphe G , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est *faiblement-sans-pic* ;
- (ii) f vérifie $WP(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ non adjacents ;
- (iii) f vérifie $WP(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ avec $d(u, v) = 2$,
- (iv) La composition $\alpha \circ f$ est *faiblement-convexe* pour une transformation α des réels strictement croissante ($\alpha(r) < \alpha(s)$ pour tout réel $r < s$).

Toute fonction *faiblement-sans-pic* est unimodale.

On donne l'idée de la preuve de [14] que (iii) implique (i) du Lemme 6.1.3. Pour deux sommets non adjacents u et v , on considère le plus court chemin entre u et v , $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n = v)$ tel que $\sum_{i=0}^n f(w_i)$ est minimal. D'après le choix de P et la condition (iii), on a $f(w_i) \leq \frac{1}{2}f(w_{i-1}) + \frac{1}{2}f(w_{i+1})$ pour tout $1 < i < n$. Ainsi, f est localement-convexe sur P et d'après le Lemme 6.1.3, f est convexe sur P . De manière analogue, pour montrer que (iii) implique (i) dans le Lemme 6.1.4, il suffit de montrer que f est localement-sans-pic sur P et d'appliquer le Lemme 6.1.2.

Lemme 6.1.5. *Chacune des conditions $WC(u, v)$ et $Loz(u, v)$ impliquent $WP(u, v)$ donc les fonctions *faiblement-convexe* et les fonctions losanges sont *faiblement-sans-pic*.*

Démonstration. Le fait que $WC(u, v)$ implique $WP(u, v)$ est trivial. On suppose que f vérifie $Loz(u, v)$ et que $w, w' \in I^\circ(u, v)$ sont deux sommets tels que $f(w) + f(w') \leq f(u) + f(v)$. On en déduit que $\min\{f(w), f(w')\} \leq \max\{f(u), f(v)\}$. Soit $f(w) \leq f(w')$ et $f(u) \leq f(v)$. Si $f(w) = f(v)$, comme $f(w) + f(w') \leq f(u) + f(v)$, on en conclut que $f(w') \leq f(u)$ et donc $f(w) = f(w') = f(u) = f(v)$. \square

Remarque. On définit les fonctions *faiblement-sans-pic* et losanges car il est souvent plus simple de montrer $WP(u, v)$ ou $Loz(u, v)$ que $WC(u, v)$. La preuve de [14] montrant que la reconnaissance des graphes aux médians connexes est un problème polynomial utilise cependant $WC(u, v)$.

6.1.3 Graphes aux médians connexes

Dans cette sous-section, nous rappelons quelques résultats de [14] que nous généraliserons plus tard. On rappelle pour commencer la caractérisation des graphes aux médians connexes :

Proposition 6.1.6 ([14, Proposition 1]). *Pour tout graphe G les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\text{Med}_G^{\text{loc}}(\pi) = \text{Med}(\pi)$ pour tout profil π ;
- (2) F_π est *faiblement-convexe* pour tout profil π ;
- (3) F_π est *faiblement-sans-pic* pour tout profil π ;
- (4) Tout plateau $L_{\leq}(F_\pi, \alpha) = \{x : F_\pi(x) \leq \alpha\}$ est isométrique ;
- (5) Tout ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ est isométrique ;
- (6) Tout ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ est connexe.

Nous ne prouverons pas cette proposition car le Théorème 6.2.1 couvre toutes les affirmations à l'exception de (4), et le fait que (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) est trivial.

La définition des graphes maillés est équivalente à WC pour $f = d(\cdot, x)$ (i.e., la distance à x). Cette fonction est un cas particulier de la somme totale des distances où le seul sommet de poids non nul est x . Ainsi, les graphes aux médians connexes sont maillés. Nous montrons le lemme suivant avant de passer à la suite :

Lemme 6.1.7 ([14]). *Les triangles métriques des graphes maillés sont équilatéraux.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un triangle métrique uvw dans un graphe maillé G tel que $d(u, w) < d(v, w)$. Une définition alternative de la faible convexité [14] est que pour tout réel λ entre 0 et 1 tel que $\lambda d(u, v)$ et $(1 - \lambda)d(u, v)$ sont des entiers, il existe un sommet x de $I^\circ(u, v)$ tel que $d(u, x) = \lambda d(u, v)$, $d(v, x) = (1 - \lambda)d(u, v)$ et $f(x) \leq (1 - \lambda)f(u) + \lambda f(v)$. Si on prend $\lambda = 1 - \frac{1}{d(u, v)}$, on a $\lambda d(u, v) = d(u, v) - 1$ et $(1 - \lambda)d(u, v) = 1$ qui sont tous les deux des entiers, on en déduit l'existence d'un voisin x de v dans $I^\circ(u, v)$ tel que pour la fonction faiblement-convexe $d(\cdot, w)$, on a :

$$\begin{aligned} d(x, w) &\leq \frac{1}{d(u, v)}d(u, w) + \left(1 - \frac{1}{d(u, v)}\right) d(v, w) \\ &\leq d(v, w) - \frac{d(v, w) - d(u, w)}{d(u, v)} \end{aligned}$$

Comme $d(u, w) < d(v, w)$, on a $d(x, w) < d(v, w)$ et donc $x \in I(u, v) \cap I(v, w)$, ce qui est impossible. \square

Pour énoncer le résultat principal de [14], nous avons besoin des notions suivantes. Pour une paire de sommets u, v on a

$$J(u, v) = \{z' \in V : I(z', u) \cap I(z', v) = \{z'\}\}.$$

Nous définissons également

$$M(u, v) = \{z' \in J(u, v) : d(u, z') = d(v, z')\}$$

et $J^\circ(u, v) = J(u, v) \setminus M(u, v)$.

6.1. Fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic

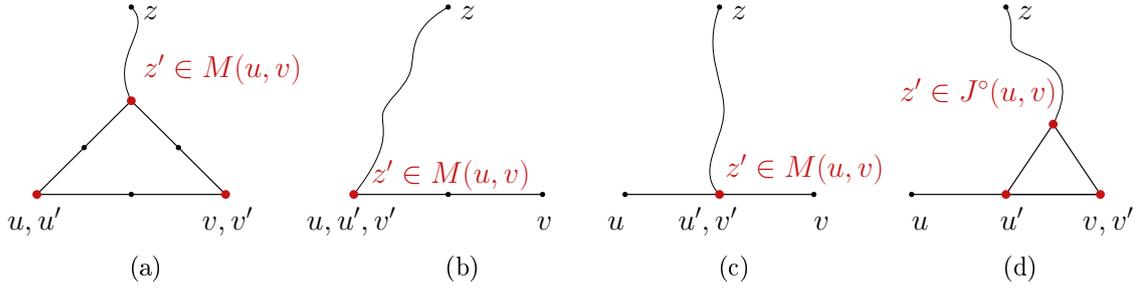


FIGURE 6.3 – Quasi-médians $u'v'z'$ des graphes maillés pour tout triplet de sommets u, v, z avec $d(u, v) = 2$ et aux symétries près.

Intuitivement, l'ensemble $J(u, v)$ peut être interprété de la manière suivante : Pour tout sommet z , tout quasi-médian du triplet z, u, v est un **triangle métrique** $z'u'v'$ où le côté $I(u', v')$ est inclus dans $I(u, v)$ et son sommet opposé z' appartient à $I(z, u) \cap I(z, v)$. Alors l'ensemble $J(u, v)$ est exactement l'ensemble des sommets z' de tous les quasi-médians $z'u'v'$ pour tous les sommets z de G . Si z appartient à $I(u, v)$ alors trivialement $z' = z = u' = v'$, ainsi $I(u, v) \subseteq J(u, v)$. D'après le Lemme 6.1.7, tout quasi-médian $z'u'v'$ d'un graphe maillé est un **triangle métrique** équilatéral. Comme $2 = d(u, v) = d(u, u') + d(u', v') + d(v', v)$, chacun de ces **triangles métriques** $z'u'v'$ a pour taille 0, 1 ou 2. Les ensembles $J(u, v)$ se restreignent alors à une des 4 formes présentées en Figure 6.3 et détaillées ci-dessous. Alors $M(u, v)$ est l'ensemble des z' tels que $z'u'v'$ a une taille de 0 ou 2, i.e., l'ensemble des sommets de $I^\circ(u, v)$ et tous les sommets z' à distance 2 de u et v n'ayant aucun voisin dans $I^\circ(u, v)$. De manière analogue, $J^\circ(u, v) = J(u, v) \setminus M(u, v)$ est l'ensemble de tous les sommets z' tels que $z'u'v'$ a une taille de 1. Comme $d(u, v) = 2$, c'est possible seulement si, soit $v' = v, u' \in I^\circ(u, v)$, et $z' \sim u', v'$, soit $u' = u, v' \in I^\circ(u, v)$, et $z' \sim u, v'$.

Nous concluons cette sous-section en rappelant le résultat principal de [14] :

Théorème 6.1.8 ([14, Théorème]). *Un graphe G est un graphe aux médians connexes ssi G est maillé et pour toute paire de sommets u et v à distance 2, il existe un ensemble non vide S de $I^\circ(u, v)$ et une fonction de poids η avec un support non vide inclus dans S vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- (α) *chaque sommet $s \in S$ a un compagnon $t \in S$ (pas forcément distinct de s) tel que $d(s, x) + d(t, x) \leq d(u, x) + d(v, x)$ pour tout $x \in M(u, v)$, et $\eta(s) = \eta(t)$ si $d(s, t) = 2$;*
- (β) *la somme des poids des voisins de tout sommet $x \in J^\circ(u, v)$ dans S est d'au moins la moitié du poids total de S : $\sum_{s \in S \cap N(x)} \eta(s) \geq \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \eta(s)$ pour tout $x \in J^\circ(u, v)$.*

On remarque que la condition (α) du théorème précédent appliquée au cas de la Figure 6.3c impose que s et t soient adjacents à tout sommet x de $I^\circ(u, v) \setminus \{s, t\}$. On donne en Figure 6.4a un contreexemple à la condition (α) et en Figure 6.4b un contreexemple à la condition (β) du Théorème 6.1.8. On donne également dans les deux cas un exemple de profil (en bleu) ayant les sommets u, v comme seuls sommets médians.

6.1.4 Fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic

Nous considérons une généralisation des fonctions **faiblement-convexes**, **faiblement-sans-pic** et losanges en rendant nécessaire les conditions $WC(u, v)$, $WP(u, v)$ et $Loz(u, v)$ uniquement pour les paires de sommets à distance supérieures à p .

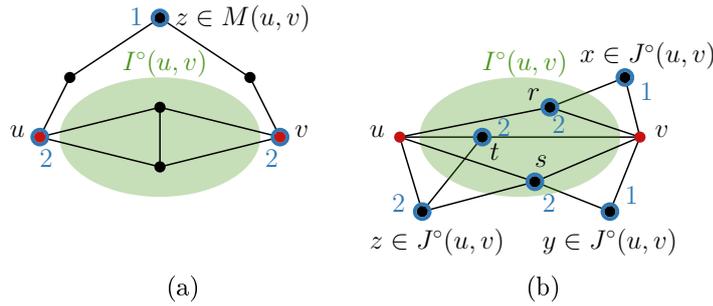


FIGURE 6.4 – Contrexemples des conditions (α) à gauche et (β) à droite du Théorème 6.1.8

Soit $G = (V, E)$ un graphe et p un entier positif. Une p -géodésique entre deux sommets uv est une chaîne géodésique $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n = v)$ sur G tel que $d_G(w_{i-1}, w_{i+1}) \leq p$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Une p -géodésique tendue est une p -géodésique tel que $p+1 < d_G(w_i, w_{i+1}) \leq 2p$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Cette définition implique que toute p -géodésique est un chemin du graphe G^p et que toute p -géodésique est un chemin induit du graphe G^p . On observe cependant qu'une p -géodésique n'est pas forcément une géodésique de G^p . Réciproquement, toutes les (u, v) -géodésique Q de G^p ne sont pas forcément une p -géodésique de G car Q n'est pas forcément contenu dans l'intervalle $I(u, v)$. On dira qu'un sous-ensemble de sommets S de G est p -isométrique si pour toute paire de sommets $u, v \in S$ avec $d(u, v) \geq p+1$, il existe un sommet $w \in I^\circ(u, v) \cap S$. On dit qu'un sous ensemble S de sommets de G est G^p -connexe si pour toute paire de sommets $u, v \in S$, il existe les sommets $u_0 = u, u_1, \dots, u_k, u_{k+1} = v$ de S tels que $d(u_i, u_{i+1}) \leq p$ pour tout $i = 0, \dots, k$, ou, de manière équivalente, si S induit un sous-graphe connexe de G^p . Une illustration de ces notions est donnée en Figure 6.5.

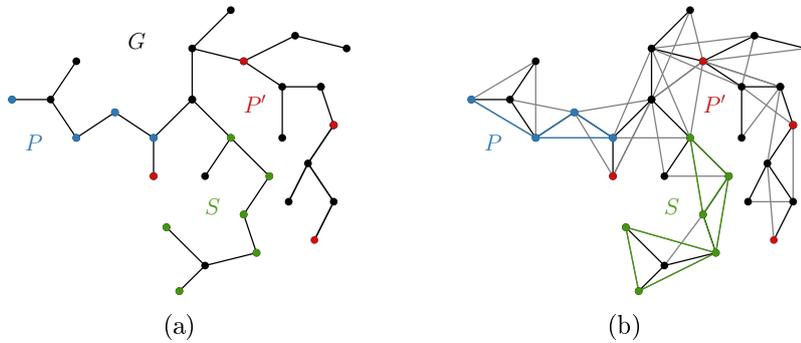


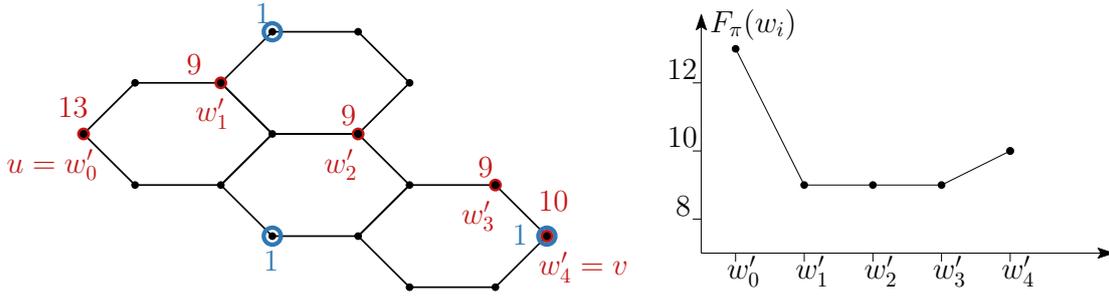
FIGURE 6.5 – Une chaîne 2-géodésique P , une chaîne 2-géodésique tendue P' et un ensemble G^2 -connexe S sur G .

Définition 6.1.3. Une fonction f sur G est *faiblement- p -convexe* si toute paire u, v de G peut être connectée par une p -géodésique le long duquel f est convexe (cf Figure 6.6)

Définition 6.1.4. Une fonction f sur G est *faiblement- p -sans-pic* si toute paire u, v de G peut être connectée par une p -géodésique le long duquel f est sans-pic (cf Figure 6.6).

Au regard des Lemmes 6.1.3 et 6.1.4, les fonctions faiblement-1-sans-pic (resp. faiblement-1-convexes) sont exactement les fonctions faiblement-sans-pic (resp. faiblement-convexes).

Une fonction f est *localement-faiblement- p -sans-pic* (resp. *localement-faiblement- p -convexe*) sur G si elle satisfait $WP(u, v)$ (resp. $WC(u, v)$) pour tout u, v tels que $p+1 \leq d(u, v) \leq 2p$.


 FIGURE 6.6 – Chaîne 2-géodésique le long de laquelle F_π est convexe et sans-pic

Nous établissons maintenant une caractérisation locale vers globale des fonctions **faiblement- p -convexes**, qui est analogue à celle du Lemme 6.1.4. Nous montrons également que les fonctions **faiblement- p -sans-pic** sont unimodales dans G^p .

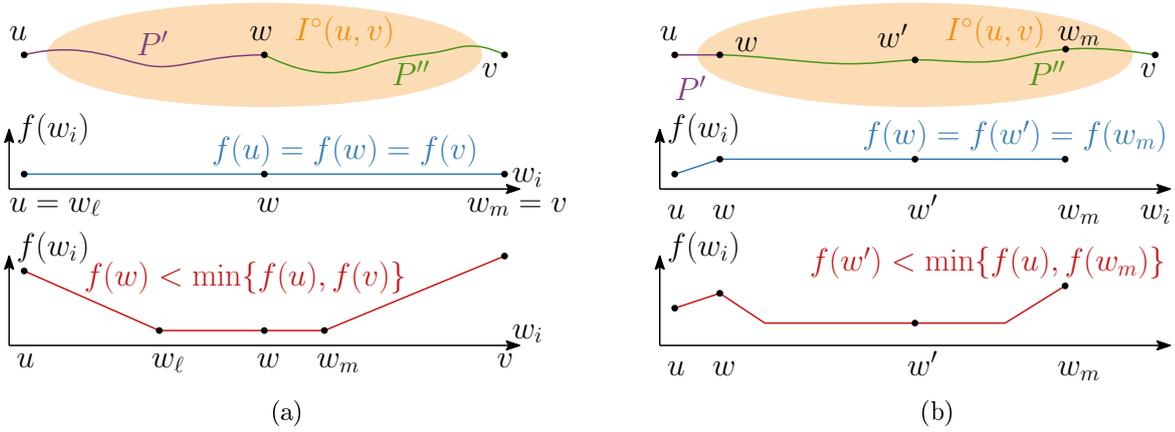
Théorème 6.1.9. *Pour toute fonction f sur un graphe G , les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est **faiblement- p -sans-pic** ;
- (ii) f respecte WP(u, v) pour toute paire de sommets u, v telle que $d(u, v) \geq p + 1$;
- (iii) f est localement faiblement- p -sans-pic.

Toute fonction **faiblement- p -sans-pic** f sur un graphe $G = (V, E)$ est unimodale sur G^p .

Démonstration. Les implications (i) \Rightarrow (ii) et (i) \Rightarrow (iii) sont triviales, nous commençons par montrer (ii) \Rightarrow (i). Soient deux sommets u et v de G , nous procédons par induction sur $d(u, v)$. Si $d(u, v) \leq p$ alors la chaîne (u, v) est une chaîne p -géodésique le long de laquelle f est sans-pic. Maintenant on suppose que $d(u, v) \geq p + 1$. Soit le sommet w minimisant f sur $I^\circ(u, v)$ et soit un sommet w' de $I^\circ(u, v)$ vérifiant la condition WP(u, v). Nous pouvons déduire des choix de w et w' que soit (1) $f(w) \leq f(w') < \max\{f(u), f(v)\}$, soit (2) $f(w) \leq f(w') = f(u) = f(v)$. Ceci implique que soit $f(w) < \max\{f(u), f(v)\}$, soit $f(w) = f(w') = f(u) = f(v)$. Comme $d(u, w) < d(u, v)$ et $d(w, v) < d(u, v)$, par hypothèse d'induction les paires u, w et w, v peuvent être reliées par des p -géodésique $P' = (u = w_0, w_1, \dots, w_k = w)$ et $P'' = (w = w_k, w_{k+1}, \dots, w_{n-1}, w_n = v)$ telles que f est sans-pic le long de P' et P'' . En concaténant P' et P'' , on obtient une p -géodésique $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_k = w, w_{k+1}, \dots, w_{n-1}, w_n = v)$. On montre qu'il existe une p -géodésique P_0 entre u et v inclut dans P tel que f est sans-pic sur P_0 (dans la plupart des cas présentés plus tard, nous avons $P_0 = P$).

On suppose pour commencer que $f(w) = f(u) = f(v)$. Nous pouvons déduire du choix de w et des p -géodésiques P' et P'' que f est constant sur tous les sommets de P , et est donc sans-pic sur P (cf Figure 6.7a). On suppose maintenant que $f(w) < \max\{f(u), f(v)\}$ et soit $f(u) \leq f(v)$. Comme $f(w) < f(v)$, nous pouvons déduire du choix de w , de P'' et du Lemme 6.1.2(iii) que lorsque l'on se déplace de w à v sur P'' , la fonction f est d'abord constante, puis strictement croissante : $f(w_k) = \dots = f(w_m) < f(w_{m+1}) < \dots < f(w_n)$ (il peut arriver que $m = k$). De manière analogue, si $f(w) \leq f(u)$, en se déplaçant de u à w , la fonction f est strictement décroissante puis constante : $f(w_0) > f(w_1) > \dots > f(w_\ell) = f(w_{\ell+1}) = \dots = f(w_k)$ (il peut se produire que $\ell = 0$, $\ell = k$, ou $\ell = 0 = k$). Dans ce cas, on conclut que sur la p -géodésique P , la fonction f satisfait la condition (iii) du Lemme 6.1.2, et donc que f est sans-pic


 FIGURE 6.7 – Illustration de la preuve (ii) \Rightarrow (i) du Théorème 6.1.9

sur P (cf Figure 6.7a). Finalement, on suppose que $f(w) > f(u)$. Comme w est un sommet minimisant f sur $I^\circ(u, v)$, en appliquant le Lemme 6.1.2 à P' , on conclut que $P' = (u, w)$ et donc $w = w_1 = w_\ell$. Si $d(u, w_m) \leq p$, alors $P_0 = (u = w_0, w_m, \dots, w_{n-1}, w_n = v)$ est une p -géodésique entre u et v , inclut dans P et tel que f est strictement croissante sur P_0 en se déplaçant de u vers v . Par conséquent, f est sans-pic sur P_0 . On suppose maintenant que $d(u, w_m) > p$, et donc, $m > \ell = 1$. En appliquant $WP(u, w_m)$, on peut trouver un sommet $w' \in I^\circ(u, w_m) \subset I^\circ(u, v)$ tel que $f(w') < \max\{f(u), f(w_m)\}$ ou $f(w') = f(u) = f(w_m)$. Comme $f(w_m) = f(w_1) = f(w) > f(u)$, la seconde possibilité est impossible (cf Figure 6.7b). Et la première possibilité implique que $f(w') < f(w_m) = f(w)$, ce qui contredit la minimalité du choix de w (cf Figure 6.7b). Ceci montre que le cas $d(u, w_m) > p$ est impossible et nous pouvons donc conclure f est sans-pic sur une p -géodésique $P_0 \subseteq P$.

La preuve de l'implication (iii) \Rightarrow (ii) est basée sur le lemme suivant :

Lemme 6.1.10. *Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement-faiblement- p -sans-pic sur G . Alors, pour tout $u, v \in V$ avec $f(u) < f(v)$ et $d(u, v) > p$, il existe $w \in I^\circ(u, v) \cap B_p(v)$ tel que $f(w) < f(v)$.*

Démonstration. On suppose que la propriété est fausse et on prend deux sommets $u, v \in V$ minimisant $d(u, v) > p$ tels que $f(u) < f(v)$ et $f(w) \geq f(v)$ pour tout $w \in I^\circ(u, v) \cap B_p(v)$. On montre que comme f est localement-faiblement- p -sans-pic, obligatoirement $d(u, v) > 2p$. En effet, si $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$, d'après $WP(u, v)$ il existe un sommet $w_1 \in I^\circ(u, v)$ tel que $f(w_1) < f(v)$. Si $d(w_1, v) > p$, en appliquant $WP(w_1, v)$, on peut trouver un sommet $w_2 \in I^\circ(w_1, v)$ tel que $f(w_2) < f(v)$. En itérant la même méthode, on pourra trouver une séquence de sommets $w_0 = u, w_1, \dots, w_k$ telle que $w_i \in I^\circ(w_{i-1}, v)$, $f(w_i) < f(v)$ pour tout $i = 1, \dots, k$, et $d(w_k, v) \leq p$. Par conséquent, nous pouvons supposer que $d(u, v) > 2p$.

La fin de la preuve est illustrée en Figure 6.8. On considère un sommet w minimisant f dans $I^\circ(u, v) \cap B_p(v)$. On observe que $p < d(u, v) - d(v, w) = d(u, w) < d(u, v)$. Comme $f(w) \geq f(v) > f(u)$, d'après le choix de u, v , il existe un sommet $x' \in I(w, u) \cap B_p(w)$ tel que $f(x') < f(w)$. On a donc $x' \in I(w, u) \subseteq I(v, u)$ et $d(v, x') \leq d(v, w) + d(w, x') \leq 2p$. Soit x le plus proche sommet de v dans $I^\circ(u, v)$ tel que $f(x) < f(w)$. D'après notre choix de w , $x \notin B_p(v)$ et donc $p + 1 \leq d(v, x) \leq 2p$. Comme f est localement-faiblement- p -sans-pic, d'après $WP(v, x)$, il existe un sommet $z \in I^\circ(v, x)$ tel que $f(z) \leq \max\{f(v), f(x)\}$, et l'égalité est atteinte seulement si

6.1. Fonctions faiblement- p -convexes et faiblement- p -sans-pic

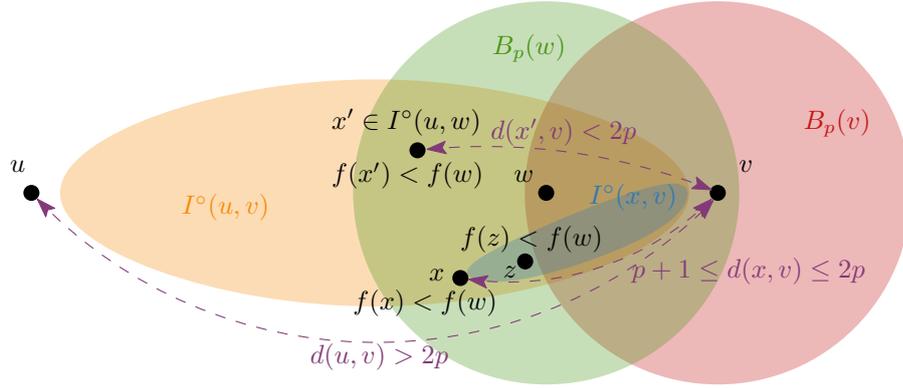


FIGURE 6.8 – Illustration de la preuve du Lemme 6.1.10

$f(v) = f(x)$. Par conséquent, soit $f(z) < \max\{f(v), f(x)\} \leq f(w)$ soit $f(z) = f(v) = f(x) < f(w)$. Dans les deux cas, $f(z) < f(w)$ et $d(v, z) < d(v, x)$, contredisant notre choix de x et concluant la preuve du lemme. \square

Nous pouvons maintenant prouver (iii) \Rightarrow (ii). Soient deux sommets u et v de G avec $d(u, v) \geq p + 1$. Si $d(u, v) \leq 2p$, alors on peut appliquer la condition WP(u, v) car f est localement-faiblement- p -sans-pic. On peut donc supposer que $d(u, v) > 2p$. Si $f(u) < f(v)$, d'après le Lemme 6.1.10, il existe un sommet $w \in I^o(u, v) \cap B_p(v)$ tel que $f(w) < f(v)$ et la condition WP(u, v) est bien respectée. On suppose donc maintenant que $f(u) = f(v)$. Soit un sommet w de $I^o(u, v)$ minimisant f , si $f(w) \leq f(u) = f(v)$, WP(u, v) est respectée, on suppose donc que $f(w) > f(u) = f(v)$. Comme $d(u, v) > 2p$, soit $d(u, w) > p$, soit $d(v, w) > p$, on va supposer $d(u, w) > p$. D'après le Lemme 6.1.10 il existe un sommet $z \in I^o(u, w) \cap B_p(w)$ tel que $f(z) < f(w)$. Comme $z \in I^o(u, w) \subset I^o(u, v)$, ceci contredit le choix du sommet w . Par conséquent, f satisfait WP(u, v) pour toute paire de sommets u, v à distance $d(u, v) \leq p + 1$.

Ce qui précède établit les équivalences entre les conditions (i), (ii) et (iii), il reste à montrer que toute fonction faiblement- p -sans-pic est unimodale sur G^p . Soit u un minimum global et v un minimum local de f sur G . On considère une p -géodésique P entre u et v le long duquel f est sans-pic. Soit w le prédécesseur de v sur P , alors $f(w) \leq \max\{f(u), f(v)\} = f(v)$. Comme v est un minimum local, $f(w) = f(v)$ et on a donc bien $f(u) = f(v) = f(w)$, ce qui conclut la preuve du théorème. \square

Une fonction f est appelée une fonction p -losange si elle satisfait Loz(u, v) pour toute paire de sommets u, v où $d(u, v) \geq p + 1$. Une fonction f est une fonction localement- p -losange si f satisfait Loz(u, v) pour toute paire de sommets u, v où $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$. Comme Loz(u, v) implique WP(u, v) (Lemme 6.1.5), on peut déduire du Théorème 6.1.9 le corollaire suivant :

Corollaire 6.1.11. *Toute fonction p -losange ou localement- p -losange sur un graphe G est faiblement- p -sans-pic.*

Le corollaire suivant est une autre conséquence du Théorème 6.1.9 :

Corollaire 6.1.12. *Tous les plateaux $L_{\leq}(f, \alpha)$ d'une fonction localement-faiblement- p -sans-pic sur un graphe G sont p -isométriques (et donc induisent des sous-graphes connexes dans G^p). En particulier, $\arg \min(f)$ est p -isométrique.*

Nous laissons ouverte la question suivante :

Question. Tous les plateaux des fonctions **faiblement- p -sans-pic** induisent-ils des sous-graphes isométriques de G^p ?

La difficulté de cette question vient du fait que les p -géodésiques le long d'une fonction **faiblement- p -sans-pic** ne sont pas forcément des **géodésiques** (plus courts chemins) de G^p .

Nous continuons avec un théorème analogue au Théorème 6.1.9 pour les fonction **faiblement- p -convexes**. Dans les grandes lignes, sa preuve est similaire à celle du Théorème 6.1.9 mais plus technique.

Théorème 6.1.13. *Pour toute fonction f sur un graphe G , les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est **faiblement- p -convexes** ;
- (ii) f vérifie $WC(u, v)$ pour toute paire de sommets u, v telle que $d(u, v) \geq p + 1$;
- (iii) f est **localement-faiblement- p -convexe**.

Démonstration. Les implications (i) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (iii) sont triviales. Pour prouver (ii) \Rightarrow (i), on définit la fonction $\alpha_{uv} = \frac{f(v)-f(u)}{d(u,v)}$. On a alors $\alpha_{vu} = -\alpha_{uv}$, $f(v) = f(u) + \alpha_{uv}d(u, v)$, et $f(u) = f(v) - \alpha_{uv}d(u, v)$. Pour tout sommet $t \in I^\circ(u, v)$, on note $g_{uv}(t)$ la différence entre $f(t)$ et $f(u) + \alpha_{uv}d(u, t) = f(v) - \alpha_{uv}d(t, v)$. Avec ces notations, nous pouvons reformuler la propriété $WC(u, v)$ de la manière suivante : *il existe $w \in I^\circ(u, v)$ tel que $g_{uv}(w) \leq 0$.*

Le début de la preuve est analogue à la preuve du Théorème 6.1.9. La première différence est que l'on prend un sommet $w \in I^\circ(u, v)$ minimisant $g_{uv}(w)$ au lieu de $f(w)$. De manière analogue au Théorème 6.1.9, on applique l'hypothèse d'induction pour trouver une p -géodésique P' entre u et w et une p -géodésique P'' entre w et v tels que f est convexe le long de P' et de P'' . On affirme que f est également convexe sur la concaténation P de P' et P'' . Pour prouver cette assertion il suffit de montrer que pour toute paire de sommets x, y de P avec $x \in P'$ et $y \in P''$, nous avons $d(x, y)f(w) \leq d(y, w)f(x) + d(x, w)f(y)$.

D'après le choix de w , chaque combinaison convexe de $g_{uv}(x)$ et $g_{uv}(y)$ est supérieure ou égale à $g_{uv}(w)$. Ainsi, $d(y, w)g_{uv}(x) + d(x, w)g_{uv}(y) \geq d(x, y)g_{uv}(w)$. Dans cette expression, on peut remplacer $g_{uv}(x)$ par $f(x) - (f(u) + \alpha_{uv}d(u, x))$, de même pour $g_{uv}(y)$ et $g_{uv}(w)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} d(x, y)g_{uv}(w) &\leq d(w, y)g_{uv}(x) + d(x, w)g_{uv}(y), \\ d(x, y) [f(w) - (f(u) + \alpha_{uv}d(u, w))] &\leq d(w, y) [f(x) - (f(u) + \alpha_{uv}d(u, x))] \\ &\quad + d(x, w) [f(y) - (f(u) + \alpha_{uv}d(u, y))], \\ d(x, y)f(w) - d(x, y)f(u) - d(x, y)d(u, w)\alpha_{uv} &\leq d(w, y)f(x) + d(x, w)f(y) - [d(x, w) + d(w, y)] f(u) \\ &\quad - [d(w, y)d(u, x) + d(x, w)d(u, y)] \alpha_{uv}. \end{aligned}$$

Comme $d(x, y) = d(x, w) + d(w, y)$, les termes ayant $f(u)$ comme facteur s'annulent. On considère maintenant les termes ayant α_{uv} comme facteur. En remplaçant $d(x, y)$ par $d(x, w) + d(w, y)$, $d(u, w)$ par $d(u, x) + d(x, w)$, et $d(u, y) = d(u, x) + d(x, w) + d(w, y)$, on peut facilement vérifier que $d(x, y)d(u, w) = d(w, y)d(u, x) + d(x, w)d(u, y)$, et donc les termes ayant α_{uv} comme facteur s'annulent également. Par conséquent, nous obtenons que $d(x, y)f(w) \leq d(w, y)f(x) + d(x, w)f(y)$,

ce qui montre que f est bien convexe le long de P . Ceci conclut la preuve de l'implication (ii) \Rightarrow (i).

La preuve de l'implication (iii) \Rightarrow (ii) est identique à celle de (iii) \Rightarrow (ii) du Théorème 6.1.9 où le Lemme 6.1.10 est remplacé par le lemme suivant :

Lemme 6.1.14. *Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement-faiblement- p -convexe sur G . Alors, pour tout $u, v \in V$ avec $f(u) \leq f(v)$ et $d(u, v) > p$, il existe $w \in I^\circ(u, v) \cap B_p(w)$ tel que $g_{uv} \leq 0$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 6.1.10 mais demande des calculs supplémentaires. Tout comme dans le Lemme 6.1.10, nous procédons par l'absurde et supposons que $u, v \in V$ sont deux sommets minimisant $d(u, v)$ et tels que $g_{uv}(x) > 0$ pour tout $x \in I^\circ(u, v) \cap B_p(v)$. On considère un sommet w de $I^\circ(u, v) \cap B_p(v)$ minimisant $g_{uv}(w)$ (au lieu de $f(w)$). Pour commencer, on suppose que $f(u) = f(v)$. Alors $\alpha_{uw} = 0$ et par conséquent, $0 < g_{uv}(x) = f(x) - f(u) = f(x) - f(v)$ pour tout sommet $x \in I^\circ(u, v) \cap B_p(v)$. Par minimalité de $d(u, v)$, il existe un sommet $x' \in I^\circ(u, w) \cap B_p(w)$ tel que $f(x') \leq f(u) + \alpha_{uw}d(u, x')$. Ceci implique que $(f(x') - f(u))d(u, v) \leq (f(v) - f(u))d(u, x')$, ce qui est impossible car $f(x') - f(u) \geq f(w) - f(u)$ et $d(u, w) > d(u, x')$.

On suppose maintenant que $f(u) < f(v)$. Comme $g_{uv}(w) > 0$, on a $\alpha_{uw} > \alpha_{uv}$. Par minimalité de $d(u, v)$, il existe un sommet $x' \in I^\circ(u, w) \cap B_p(w)$ tel que $f(x') \leq f(u) + \alpha_{uw}d(u, x')$. Les inégalités qui suivent montrent que $g_{uv}(x') < g_{uv}(w)$:

$$\begin{aligned} g_{uv}(x') &= f(x') - (f(u) + \alpha_{uw}d(u, x')) \\ &\leq f(u) + \alpha_{uw}d(u, x') - (f(u) + \alpha_{uw}d(u, x')) = (\alpha_{uw} - \alpha_{uv})d(u, x') \\ &< (\alpha_{uw} - \alpha_{uv})d(u, w) = (f(u) + \alpha_{uw}d(u, w)) - (f(u) + \alpha_{uv}d(u, w)) \\ &= f(w) - (f(u) + \alpha_{uv}d(u, w)) = g_{uv}(w). \end{aligned}$$

Tout comme dans la preuve du Lemme 6.1.10, on prend un sommet x minimisant la distance à v dans $I^\circ(u, v)$ tel que $g_{uv}(x) < g_{uv}(w)$. Comme $d(x', v) \leq 2p$, d'après notre choix de x et de w , $p + 1 \leq d(x, v) \leq d(x', v) \leq 2p$. Comme f est localement-faiblement- p -convexe, il existe un sommet $z \in I(x, v)$ tel que $f(z) \leq f(v) - \alpha_{xv}d(z, v)$. Comme $\alpha_{xv} \leq \alpha_{zv}$, d'après le choix de z et $\alpha_{zv} \leq \alpha_{uv}$ car $g_{uv}(z) \geq g_{uv}(w) > 0$ d'après le choix de x , nous obtenons :

$$\begin{aligned} g_{uv}(z) &= f(z) - (f(v) - \alpha_{uv}d(z, v)) \\ &= f(v) - \alpha_{zv}d(z, v) - (f(v) - \alpha_{uv}d(z, v)) = (\alpha_{uv} - \alpha_{zv})d(z, v) \\ &\leq (\alpha_{uv} - \alpha_{zv})d(x, v) = (f(v) - \alpha_{zv}d(x, v)) - (f(v) - \alpha_{uv}d(x, v)) \\ &\leq (f(v) - \alpha_{xv}d(x, v)) - (f(v) - \alpha_{uv}d(x, v)) \\ &= f(x) - (f(v) - \alpha_{uv}d(x, v)) = g_{uv}(x) < g_{uv}(w). \end{aligned}$$

L'inégalité $g_{uv}(z) < g_{uv}(w)$ contredit le choix de w si $z \in B_p(v)$ et le choix de x sinon. Cette contradiction prouve le lemme. \square

Ceci établit les équivalences entre (i), (ii) et (iii) et conclut la preuve. \square

6.2 Graphes aux médians G^p -connexes

Dans cette section, on caractérise les graphes $G = (V, E)$ tels que pour tout profil π , l'ensemble médian $\text{Med}_\pi(G)$ induit un sous-graphe connexe dans la $p^{\text{ième}}$ puissance G^p de G , généralisant

[14, Proposition 1] qui caractérise le cas $p = 1$. En utilisant ce résultat, on montre une méthode pour reconnaître les graphes aux médians G^p -connexes en temps polynomial pour tout $p \geq 1$. Nous montrons également que les [produits cartésiens](#), les amalgames portés et les rétractions (définis plus bas) préservent la G^p -connexité.

6.2.1 Caractérisation des graphes aux médians G^p -connexes

Dans cette sous-section, nous caractérisons les graphes aux médians G^p -connexes, généralisant ainsi la Proposition 6.1.6. Nous appellerons $\text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p$ l'ensemble de tous les minimums locaux de la fonction F_π dans le graphe G^p , c'est à dire qu'un sommet x appartient à $\text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p$ ssi pour tout voisin y de x dans G^p (i.e., pour tout sommet y tel que $d_G(x, y) \leq p$), nous avons $F_\pi(x) \leq F_\pi(y)$.

Théorème 6.2.1. *Pour un graphe G et $p \geq 1$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p = \text{Med}_\pi$ pour tout profil entier π ;
- (2) $\text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p = \text{Med}_\pi$ pour tout profil π ;
- (3) F_π est [faiblement- \$p\$ -convexe](#) pour tout profil π ;
- (4) F_π est [faiblement- \$p\$ -sans-pic](#) pour tout profil π ;
- (5) tous les plateaux $L_{\leq}(F_\pi, \alpha) = \{x : F_\pi(x) \leq \alpha\}$ of F_π sont p -isométriques ;
- (6) tous les ensembles médians Med_π sont p -isométriques ;
- (7) tous les ensembles médians Med_π sont connexes dans G^p (i.e., sont p -connexes).

Démonstration. Nous commençons par le lemme suivant, qui peut être vu comme un analogue de [14, Lemme 2] pour $p = 1$.

Lemme 6.2.2. *Si la somme totale des distances F_π n'est pas [faiblement- \$p\$ -convexe](#) pour un profil (respectivement un profil entier) π sur G , alors il existe un profil (respectivement un profil entier) π^+ et des sommets u, v à distance $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$ tels que $\text{Med}_{\pi^+} = \{u, v\}$.*

Démonstration. Si F_π n'est pas [faiblement- \$p\$ -convexe](#), alors d'après le Théorème 6.1.13, F_π n'est pas localement-faiblement p -convexe. Ainsi, il existe deux sommets u, v à distance $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$ tels que pour tout sommet $w \in I^\circ(u, v)$, nous avons $F_\pi(w) > F_\pi(u) + \alpha_{uv}d(u, w)$. On suppose sans perte de généralité que $F_\pi(v) \geq F_\pi(u)$. Soient $k := d(u, v)$, $\epsilon := F_\pi(v) - F_\pi(u)$, et $\mu := kF_\pi(v) + 1$. Trivialement, si π est un profil entier, ϵ est un entier non négatif et μ est un entier positif. On définit un profil (respectivement un profil entier) π^+ par :

$$\pi^+(x) = \begin{cases} k\pi(u) + \mu & \text{si } x = u, \\ k\pi(v) + \mu + \epsilon & \text{si } x = v, \\ k\pi(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, pour tout sommet x , nous avons :

$$F_{\pi^+}(x) = kF_\pi(x) + (d(u, x) + d(v, x))\mu + d(v, x)\epsilon.$$

Par conséquent,

$$F_{\pi^+}(u) = kF_{\pi}(u) + k\mu + k\epsilon = k(F_{\pi}(u) + \epsilon) + k\mu = kF_{\pi}(v) + k\mu = F_{\pi^+}(v).$$

Pour tout sommet $x \notin I(u, v)$, $d(u, x) + d(v, x) \geq k + 1$ et comme $\mu > kF_{\pi}(v)$, we have

$$F_{\pi^+}(x) \geq (k + 1)\mu > k\mu + kF_{\pi}(v) = F_{\pi^+}(v).$$

Pour tout sommet $w \in I^\circ(u, v)$, nous avons $d(u, w) + d(v, w) = k$, et donc

$$F_{\pi^+}(w) = kF_{\pi}(w) + k\mu + \epsilon d(w, v).$$

Comme F_{π} n'est pas **faiblement- p -convexe**, $F_{\pi}(w) > F_{\pi}(v) - \frac{\epsilon}{k}d(v, w)$,

$$F_{\pi^+}(w) = kF_{\pi}(w) + k\mu + d(v, w)\epsilon > k(F_{\pi}(v) - \frac{\epsilon}{k}d(v, w)) + k\mu + \epsilon d(v, w) = F_{\pi^+}(v).$$

Ainsi, les seuls sommets minimisant F_{π^+} sont u et v et donc $\text{Med}_{\pi^+} = \{u, v\}$, ce qui conclut la preuve. \square

Les implications (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) sont triviales.

L'implication (3) \Rightarrow (2) découle du fait que les fonctions **faiblement- p -convexes** sont **faiblement- p -sans-pic** et que les fonction **faiblement- p -sans-pic** sont unimodales dans G^p (Théorème 6.1.9), ainsi l'ensemble $\text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p$ des minimums locaux de F_{π} sur G^p coïncident avec l'ensemble des minimums globaux de F_{π} , et donc $\text{Med}_{\pi} = \text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p$.

L'implication (7) \Rightarrow (3) découle du Lemme 6.2.2.

On prouve que (2) \Rightarrow (3). On suppose par l'absurde qu'il existe une fonction F_{π} qui n'est pas **faiblement- p -convexe**. D'après le Lemme 6.2.2, il existe un profil π^+ et deux sommets u, v à distance $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$ tels que $\text{Med}(\pi^+) = \{u, v\}$, i.e., tels que $F_{\pi^+}(x) \geq F_{\pi^+}(u) + 1 = F_{\pi^+}(v) + 1$ pour tout $x \notin \{u, v\}$. Soit $k = d(u, v)$, on considère le profil π' défini par $\pi'(u) = k\pi^+(u) + 1$ et $\pi'(x) = k\pi^+(x)$ pour tout $x \neq u$. On observe que $F_{\pi'}(u) = kF_{\pi^+}(u) < kF_{\pi^+}(u) + k = kF_{\pi^+}(v) + k = F_{\pi'}(v)$. On observe également que pour tout $x \notin \{u, v\}$, $F_{\pi'}(x) = kF_{\pi^+}(x) + d(x, u) \geq k(F_{\pi^+}(v) + 1) + 1 = F_{\pi'}(v) + 1$. Ainsi, u et v sont des minimums locaux de $F_{\pi'}$ dans G^p , mais $v \notin \text{Med}_{\pi'}$.

Ceci établit l'équivalence entre les conditions (2) et (7). Avec la même preuve, mais en appliquant le Lemme 6.2.2 avec des profils entiers, on conclut que la condition (1) est équivalente à chacune des conditions (3) à (7) pour tous les profils.

L'implication (2) \Rightarrow (1) est triviale.

Pour montrer (1) \Rightarrow (5) pour tous les profils, on suppose par l'absurde que, pour un profil π , et un $\alpha > 0$, le plateau $L_{\leq}(F_{\pi}, \alpha)$ n'est pas p -isométrique. Ceci implique qu'il existe deux sommets u, v avec $d(u, v) > p$ tels que $F_{\pi}(u) \leq \alpha, F_{\pi}(v) \leq \alpha$, et $F_{\pi}(x) > \alpha$ pour tout $x \in I^\circ(u, v)$. Pour tout entier $n > 0$, soit π_n le profil tel $\pi_n(w) = n \cdot \pi(w)$ pour tout $w \in \text{supp}(\pi)$. Comme $F_{\pi_n}(z) = n \cdot F_{\pi}(z)$ pour tout sommet z de G , on conclut que $F_{\pi_n}(u) \leq n\alpha, F_{\pi_n}(v) \leq n\alpha$, et $F_{\pi_n}(x) > n\alpha$ pour tout $x \in I^\circ(u, v)$.

Comme $\text{supp}(\pi)$ est fini et que pour toute paire de sommets $w \in \text{supp}(\pi)$ et $x \in I(u, v)$, la distance $d(x, w)$ est bornée par $\max\{d(u, w), d(v, w)\} + d(u, v)$, dans $I(u, v)$ la somme totale des

distances ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes. Soit Δ la valeur maximale de cette liste de valeurs. On peut alors trouver un entier $n^* > 0$ tel que le profil $\pi^* = \pi_{n^*}$ est tel que si $y, z \in I(u, v)$ et $F_\pi(y) > F_\pi(z)$, alors $F_{\pi^*}(y) > F_{\pi^*}(z) + \Delta$. Soit π' le profil entier obtenu en arrondissant π^* , i.e., $\pi'(w) = \lfloor \pi^*(w) \rfloor$ pour tout $w \in \text{supp}(\pi^*) = \text{supp}(\pi)$. Ainsi, $\pi'(w)d(z, w) \geq (\pi^*(w) - 1)d(z, w)$ pour tout $w \in \text{supp}(\pi') = \text{supp}(\pi^*)$ et $z \in V$. En faisant la somme sur tous les sommets de $\text{supp}(\pi')$, on conclut que $F_{\pi'}(z) \geq F_{\pi^*}(z) - \Delta$. Ainsi, si pour $y, z \in I(u, v)$ on a $F_\pi(y) > F_\pi(z)$, alors $F_{\pi^*}(y) > F_{\pi^*}(z) + \Delta$, et, par conséquent, $F_{\pi'}(y) > F_{\pi'}(z)$. En appliquant ces inégalités aux paires $\{u, x\}$ et $\{x, v\}$ avec $x \in I(u, v)$, on conclut que $F_{\pi'}(x) > F_{\pi'}(u)$ et $F_{\pi'}(x) > F_{\pi'}(v)$ pour tout $x \in I^\circ(u, v)$. En fixant $\alpha' = \max\{F_{\pi'}(u), F_{\pi'}(v)\}$, on conclut que le plateau $L_{\leq}(F_{\pi'}, \alpha')$ n'est pas p -isométrique, ce qui contredit le fait que π' est un profil entier et donc (1) \Rightarrow (5) pour les profils entiers. \square

Il est montré dans l'article [14, Proposition 2] que G est un graphe aux médians p -connexes ($p = 1$) ssi $\text{WC}(u, v)$ est vrai pour toute paire de sommets u, v à distance 2 et pour tout profil π dont le support est inclus dans $J(u, v)$, $\text{Med}_\pi = \text{Med}_{\pi, \text{loc}}^p$. Nous étendons ce résultat pour p quelconque.

Proposition 6.2.3. *Un graphe G est un graphe aux médians G^p -connexes ssi pour toute paire de sommets u, v telle que $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$ et toute fonction de poids π dont le support $\text{supp}(\pi)$ est inclus dans $J(u, v)$, la somme totale des distances F_π satisfait la condition $\text{WP}(u, v)$ (respectivement $\text{WC}(u, v)$).*

Démonstration. La nécessité découle immédiatement du Théorème 6.2.1. Pour prouver que la condition est suffisante, au regard du Théorème 6.2.1, on suppose qu'il existe une fonction de poids π dont le support est fini et tel que la somme totale des distances F_π n'est pas **faiblement- p -sans-pic** (ou n'est pas **faiblement- p -convexe**). D'après les Lemmes 6.1.10 et 6.1.14, il existe deux sommets u, v avec $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$ tels que $\text{WP}(u, v)$ (respectivement, $\text{WC}(u, v)$) n'est pas vérifiée, i.e., pour tout $w \in I^\circ(u, v)$, $F_\pi(w) \geq \max\{F_\pi(u), F_\pi(v)\}$ et l'égalité est atteinte seulement si $F_\pi(u) \neq F_\pi(v)$. On suppose que parmi tous les profils pour lesquels $\text{WP}(u, v)$ (respectivement $\text{WC}(u, v)$) n'est pas vérifié, π est un profil minimisant $|\text{supp}(\pi) \setminus J(u, v)|$. Si $\text{supp}(\pi) \subseteq J(u, v)$, les conditions de la proposition sont respectées, on suppose donc qu'il existe un sommet $x \in \text{supp}(\pi) \setminus J(u, v)$. Soit un sommet $x' \in I(u, x) \cap I(v, x)$ à distance maximale de x . On définit le profil π' suivant :

$$\pi'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \pi(x) + \pi(x') & \text{si } y = x' \\ \pi(y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $x' \in I(u, x) \cap I(v, x)$, on obtient que $F_{\pi'}(u) = F_\pi(u) + \pi(x)(d(u, x') - d(u, x)) = F_\pi(u) - \pi(x)d(x, x')$ et similairement $F_{\pi'}(v) = F_\pi(v) - \pi(x)d(x, x')$. De manière analogue, pour tout $w \in I^\circ(u, v)$, on a $F_\pi(w) - F_{\pi'}(w) = (d(w, x) - d(w, x'))\pi(x)$, et d'après l'inégalité triangulaire $F_{\pi'}(w) \geq F_\pi(w) - d(x, x')\pi(x)$. Par conséquent $F_{\pi'}$ ne respecte pas non plus la condition $\text{WP}(u, v)$. Comme $|\text{supp}(\pi') \setminus J(u, v)| < |\text{supp}(\pi) \setminus J(u, v)|$, on a une contradiction avec le choix de π . Nous montrons à présent que $F_{\pi'}$ ne respecte pas non plus la condition de convexité $\text{WC}(u, v)$. En effet,

$$\begin{aligned} d(v, w)F_{\pi'}(u) + d(u, w)F_{\pi'}(v) &= d(v, w)(F_\pi(u) - \pi(x)d(x, x')) + d(u, w)(F_\pi(v) - \pi(x)d(x, x')) \\ &= d(v, w)F_\pi(u) + d(u, w)F_\pi(v) - d(x, x')\pi(x)(d(v, w) + d(u, w)) \\ &= d(v, w)F_\pi(u) + d(u, w)F_\pi(v) - d(x, x')\pi(x)d(u, v). \end{aligned}$$

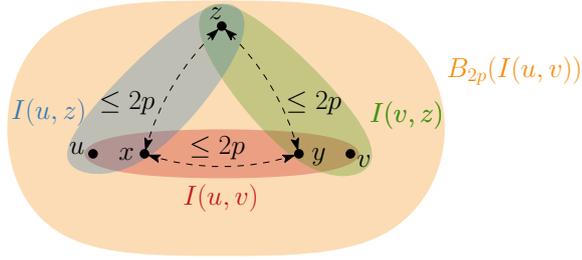


FIGURE 6.9 – Illustration de la preuve du Lemme 6.2.4

Comme $d(u, v)F_{\pi'}(w) = d(u, v)F_{\pi}(w) + d(u, v)\pi(x)(d(x', w) - d(x, w))$ et π ne respecte pas $\text{WC}(u, v)$, pour montrer que $F_{\pi'}$ ne respecte pas non plus $\text{WC}(u, v)$, il suffit de prouver que $d(x', w) - d(x, w) \geq -d(x, x')$, ce qui est vrai d'après l'inégalité triangulaire. \square

Lorsque $p = 1$, la Proposition 6.2.3 peut être vue comme une caractérisation de type local vers global, étant donné que pour toute paire de sommets à distance 2, $J(u, v)$ est inclus dans le 2-voisinage de l'intervalle $I(u, v)$. Ceci est une conséquence du fait que les triangles métriques des graphes aux médians connexes sont équilatéraux [14, Remarque 2]. Sous la condition que G est un graphe aux triangles métriques équilatéraux, la Proposition 6.2.3 peut être vue comme une caractérisation de type local vers global des graphes aux médians G^p -connexes, d'après l'observation suivante :

Lemme 6.2.4. *Si $G = (V, E)$ est un graphe aux triangles métriques équilatéraux, alors pour tout $p \geq 1$ et $u, v \in V$ avec $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$, $J(u, v) \subseteq B_{2p}(I(u, v))$.*

Démonstration. Soit $z \in J(u, v)$ et soit le sommet x de $I(u, z) \cap I(u, v)$ le plus loin de u , et soit le sommet y de $I(v, x) \cap I(v, z)$ le plus loin de v . Alors, on peut facilement vérifier que (xyz) est un triangle métrique et un quasi-médian du triplet u, v, z . Comme x et y appartiennent à un même (u, v) -géodesique, $d(x, y) \leq 2p$. Comme (xyz) est un triangle métrique équilatéral, $d(z, x) = d(z, y) = d(x, y) \leq 2p$, ainsi $z \in B_{2p}(I(u, v))$ (cf Figure 6.9). \square

Pour un graphe G , on appellera $p(G)$ le plus petit entier p tel que G est un graphe aux médians G^p -connexes ($p(G) = \infty$ si un tel entier n'existe pas). Nous concluons cette sous-section en montrant que pour tout entier $m \geq 1$, il existe un graphe G_m tel que $p(G_m) \geq m$.

Proposition 6.2.5. *Soit un cycle C_n de taille $n = 2k + m$, où $k \geq 2$ et $2 \leq m \leq 2k - 1$. Alors $p(C_n) \geq m$.*

Démonstration. Soient deux sommets u, v de C_n à distance m et soit le sommet x de C_n à distance k de u et v . Soit $\alpha > k$. On définit le profil π de la manière suivante : on fixe $\pi(u) = \alpha$, $\pi(v) = \alpha$, $\pi(x) = 1$, et $\pi(y) = 0$ pour tout $y \notin \{u, v, x\}$. Alors $F_{\pi}(u) = F_{\pi}(v) = m\alpha + k$. On affirme que $F_{\pi}(z) > F_{\pi}(v) = F_{\pi}(u)$ pour tout sommet $z \notin \{u, v\}$, établissant ainsi que l'ensemble médian $\text{Med}(\pi) = \{u, v\}$ induit un sous-graphe non-connexe de C_n^{m-1} .

On suppose sans perte de généralité que $d(u, z) \leq d(v, z)$ et soit $d(u, z) = i \geq 1$. On suppose pour commencer que $z \in I^\circ(u, v)$ (comme $m < 2k$, $I(u, v)$ est le chemin de C_n ne passant pas par x). Alors $u \in I(z, x)$ et $F_{\pi}(z) = i\alpha + (m - i)\alpha + k + i = m\alpha + k + i > m\alpha + k = F_{\pi}(v)$. On suppose maintenant que $z \in I(u, x) \setminus \{u\}$ et que $u \in I(z, v)$ (i.e., $d(z, v) = m + i \leq 2k - i$). Alors,

$F_\pi(z) = i\alpha + (m+i)\alpha + k - i = m\alpha + k + i(2\alpha - 1) > m\alpha + k = F_\pi(v)$ comme $i \geq 1$ et $\alpha > k$. Pour conclure, on suppose que $u \in I(u, x) \setminus \{u\}$ et que $x \in I(z, v)$ (i.e., $d(z, v) = 2k - i \leq m + i$). Ainsi, $F_\pi(z) = i\alpha + (2k - i)\alpha + k - i \geq 2k\alpha$. Comme $2k \geq m + 1$ et $\alpha > k$, nous avons $(2k - m)\alpha > k$ et donc $F_\pi(z) \geq 2k\alpha > m\alpha + k = F_\pi(v)$. \square

6.2.2 Reconnaissance des graphes aux médians G^p -connexes

Au regard des Théorèmes 6.1.13 et 6.2.1, l'ensemble médian d'un graphe est G^p -connexe ssi pour chaque paire de sommets u, v tels que $p + 1 \leq d(u, v) \leq 2p$, il n'existe pas de fonction de poids π vérifiant le système d'inégalités suivant :

$$D^{uv}\pi < 0 \text{ et } \pi \geq 0 \text{ avec la matrice}$$

$$D^{uv} = (d(v, w)d(u, x) + d(u, w)d(v, x) - d(u, v)d(w, x))_{w \in I^\circ(u, v), x \in V}.$$

Comme les problèmes de programmation linéaire peuvent être résolus en temps polynomial, on obtient le corollaire suivant, qui étend [14, Corollaire 1] :

Corollaire 6.2.6. *Le problème consistant à décider si un graphe G a des médians G^p -connexes est résoluble en temps polynomial, tout comme calculer $p(G)$.*

Dans le cas de graphes aux [triangle métrique](#) équilatéraux, d'après le Lemme 6.2.4 et la Proposition 6.2.3, la matrice D^{uv} peut être définie localement : au lieu de considérer tous les sommets $x \in V$, il suffit de considérer seulement les sommets $x \in J(u, v) \subseteq B_{2p}(I(u, v))$.

6.2.3 Produits cartésiens, amalgames portés et rétractés

On rappelle qu'un [produit cartésien](#) $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ est un graphe dont les sommets sont tous les k -uplets (v_1, v_2, \dots, v_k) avec $v_i \in V(G_i)$ pour tous $1 \leq i \leq k$ et deux sommets (u_1, u_2, \dots, u_k) et (v_1, v_2, \dots, v_k) de $V(G)$ sont adjacents dans G ssi il existe un indice $1 \leq i \leq k$ tel que $u_i \sim v_i$ dans G_i et $u_j = v_j$ pour tout $j \neq i$ (cf Figure 6.10).

Définition 6.2.1. Un graphe G est un *amalgame porté* de deux graphes G_1 et G_2 si G_1 et G_2 sont isomorphes à deux sous-graphes portés de G s'intersectant et tels que $G_1 \cup G_2 = G$ (cf Figure 6.11).

Définition 6.2.2. Une *rétraction* f d'un graphe G vers un sous-graphe H est une application de $V(G)$ vers $V(H)$ telle que si $u, v \in V(G)$ sont adjacents dans G , alors $f(u), f(v)$ sont adjacents dans H et $f(w) = w$ pour tous sommets de H . On dit alors que H est un *rétracté* de G (cf Figure 6.12).

L'objectif de cette sous-section est de montrer le résultat suivant :

Proposition 6.2.7. *Pour tout entier $p \geq 1$, les [produits cartésiens](#), [amalgamations portées](#) et [rétractions](#) préservent la G^p -connexité.*

Démonstration. Dans cette preuve, étant donné un profil π sur un graphe G , on appelle la somme totale des distances F_π par $F_{G, \pi}$ et l'ensemble médian $\text{Med}_\pi(G)$. Pour tout sous-graphe H de G , on fixe $\pi(H) = \sum_{v \in V(H)} \pi(v)$.

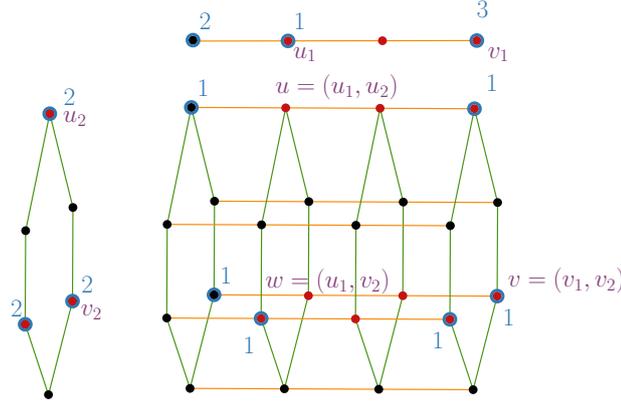


FIGURE 6.10 – Illustration de la première partie de la preuve de la Proposition 6.2.7, les ensembles médians sont indiqués en rouge et les poids non nuls en bleu

Produits cartésiens. Pour montrer la première affirmation, il suffit de montrer que le [produit cartésien](#) $G = G_1 \square G_2$ de deux graphes G_1 et G_2 aux médians G^p -connexe est également un graphe aux médians connexes dans G^p . Soit un profil π de G . Pour tout sommet v_1 de G_1 , on fixe $\pi_1(v_1)$ la somme de tous les $\pi(v)$ tels que $v = (v_1, v_2)$ avec v_2 un sommet de G_2 . On définit le profil π_2 sur les sommets de G_2 de manière analogue. Comme $d_G(u, v) = d_{G_1}(u_1, v_1) + d_{G_2}(u_2, v_2)$ si $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$, nous concluons que $F_{G, \pi}(v) = F_{G_1, \pi_1}(v_1) + F_{G_2, \pi_2}(v_2)$ pour tout sommet $v = (v_1, v_2)$ de G . Par conséquent $\text{Med}_\pi(G) = \text{Med}_{\pi_1}(G_1) \square \text{Med}_{\pi_2}(G_2)$.

On montre que $\text{Med}_\pi(G)$ est connexe dans $G^p = (G_1 \square G_2)^p$. Soient deux sommets $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ de $\text{Med}_\pi(G)$ à distance au moins $p + 1$ dans G . On suppose pour commencer que $u_1 \neq v_1$ et $u_2 \neq v_2$. Alors $w = (u_1, v_2) \in I^\circ(u, v)$ et comme $u_1 \in \text{Med}_{\pi_1}(G_1)$ et $v_2 \in \text{Med}_{\pi_2}(G_2)$, $w = (u_1, v_2) \in \text{Med}_{\pi_1}(G_1) \square \text{Med}_{\pi_2}(G_2) = \text{Med}_\pi(G)$. On suppose maintenant que $u_2 = v_2$ (le cas $u_1 = v_1$ est similaire). Comme $d_G(u, v) \geq p + 1$, nous avons $d_{G_1}(u_1, v_1) \geq p + 1$ et comme $\text{Med}_{\pi_1}(G_1)$ est G^p -connexe, il existe $w_1 \in I^\circ(u, v) \cap \text{Med}_{G_1}(\pi_1)$. Alors, $w = (w_1, u_2) \in I^\circ(u, v)$ et $w = (w_1, u_2) \in \text{Med}_{G_1}(\pi_1) \square \text{Med}_{G_2}(\pi_2) = \text{Med}_G(\pi)$ (cf Figure 6.10). Ce qui conclut la preuve pour les [produits cartésiens](#).

Amalgames portés. Soit un [amalgame porté](#) G de deux graphes G_1 et G_2 aux médians G^p -connexes et soit un profil π de G . Pour tout sommet v de G_1 (respectivement, de G_2) on note v' sa porte dans G_2 (respectivement, dans G_1). On rappelle que v' est l'unique sommet de G_2 tel que $v' \in I(v, x)$ pour tout sommet x de G_2 .

Affirmation 6.2.8. *Pour tout sommet v de $G_2 \setminus G_1$, $F_{G, \pi}(v) - F_{G, \pi}(v') \geq \pi(G_1) - \pi(G_2 \setminus G_1)$. Par conséquent, si $\pi(G_1) > \pi(G_2)$, alors $\text{Med}_\pi(G) \subseteq V(G_1)$ et si $\pi(G_1) = \pi(G_2)$ et $v \in \text{Med}_\pi(G)$, alors $v' \in \text{Med}_\pi(G)$.*

Démonstration. Le profil π est l'union disjointe des profils π' et π'' , où π' coïncide avec π sur G_1 et est nul sinon et π'' coïncide avec π sur $G_2 \setminus G_1$ et est nul sinon. Alors $F_{G, \pi}(u) = F_{G, \pi'}(u) + F_{G, \pi''}(u)$ pour tout u de G . On prend maintenant un sommet v de $G_2 \setminus G_1$. Comme v' est la porte de v dans G_1 , pour tout $x_1 \in G_1$, $d_G(v, x_1) = d_G(v, v') + d_G(v', x_1)$, ainsi

$$F_{G, \pi'}(v) - F_{G, \pi'}(v') = \pi'(G_1)d(v, v') = \pi(G_1)d(v, v').$$

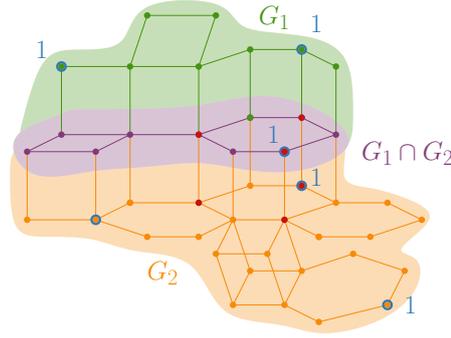


FIGURE 6.11 – Illustration de la seconde partie de la preuve de la Proposition 6.2.7, l'ensemble médian est indiqué en rouge et les poids non nuls en bleu

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x_2 \in G_2 \setminus G_1$, $d(v, x_2) - d(v', x_2) \geq -d(v, v')$, donc

$$F_{G, \pi''}(v) - F_{G, \pi''}(v') \geq -\pi''(G_2 \setminus G_1)d(v, v') = -\pi(G_2 \setminus G_1)d(v, v').$$

Comme $F_{G, \pi}(v) = F_{G, \pi'}(v) + F_{G, \pi''}(v)$ et $F_{G, \pi}(v') = F_{G, \pi'}(v') + F_{G, \pi''}(v')$, nous avons $F_{G, \pi}(v) - F_{G, \pi}(v') \geq (\pi(G_1) - \pi(G_2 \setminus G_1))d(v, v')$. Si $\pi(G_1) > \pi(G_2)$, alors $F_{G, \pi}(v) > F_{G, \pi}(v')$, et donc $v \notin \text{Med}_G(\pi)$. Par conséquent, $\text{Med}_\pi(G) \subseteq V(G_1)$. Si $\pi(G_1) = \pi(G_2)$, alors $F_{G, \pi}(v') \leq F_{G, \pi}(v)$. Ainsi, si $v \in \text{Med}_\pi(G)$, alors $v' \in \text{Med}_\pi(G)$. \square

Pour chaque sommet u de G_1 , soit $P(u) = \{x \in V(G) : u = x' \text{ où } x' \text{ est la porte de } x \text{ dans } G_1\}$ la fibre de u . Comme G_1 est porté et que les portes sont uniques, les fibres $P(u)$, $u \in V(G_1)$ définissent une partition de l'ensemble de sommets de G . Pour chaque sommet u de G_1 , soit $\pi_1(u) = \sum_{v \in P(u)} \pi(v)$. Comme $P(u) = \{u\}$ si $u \in V(G_1) \setminus V(G_2)$, dans ce cas $\pi_1(u) = \pi(u)$.

Affirmation 6.2.9. *Si $\pi(G_1) \geq \pi(G_2)$, alors $\text{Med}_\pi(G) \cap V(G_1) = \text{Med}_{\pi_1}(G_1)$.*

Démonstration. Soit $K = \sum_{x \in V(G_2)} d(x, x')\pi(x)$, où x' est la porte de x dans G_1 . On montre que pour tout sommet v de G_1 , l'égalité suivante est vraie : $F_{G, \pi}(v) = F_{G_1, \pi_1}(v) + K$. En effet, on prend un sommet x du profil π . Si $x \in V(G_1) \setminus V(G_2)$, alors $\pi_1(x) = \pi(x)$ et donc $\pi(x)d(v, x) = \pi_1(x)d(v, x)$. On suppose maintenant que $x \in V(G_2)$. Alors x appartient à la fibre $P(x')$. Ainsi, le sommet x contribue de $\pi(x)$ au poids $\pi_1(x')$ de x' et de $\pi(x)d(x', v)$ à $F_{G_1, \pi_1}(v)$. Et x contribue de $\pi(x)d(x, v)$ à $F_{G, \pi}(v)$. Comme $d(x, v) = d(x, x') + d(x', v)$, la différence des deux contributions est égale à $\pi(x)d(x, x')$. En additionnant sur tous les $x \in V(G_2)$, on obtient que la différence totale $F_{G, \pi}(v) - F_{G_1, \pi_1}(v)$ est égale à K . Par conséquent, tout sommet de G_1 minimisant $F_{G, \pi}$ minimise également F_{G_1, π_1} . D'après l'Affirmation 6.2.8, $\text{Med}_\pi(G) \cap V(G_1)$ n'est pas vide, et donc $\text{Med}_\pi(G) \cap V(G_1) = \text{Med}_{\pi_1}(G_1)$. \square

On considère maintenant deux sommets u, v de $\text{Med}_\pi(G)$ à distance au moins $p + 1$. On montre qu'il existe un sommet w appartenant à $I^\circ(u, v) \cap \text{Med}_\pi(G)$. On suppose d'abord que u et v appartiennent au même graphe G_1 ou G_2 . Si u et v appartiennent tous les deux à l'intersection entre G_1 et G_2 , nous supposons que $\pi(G_1) \geq \pi(G_2)$. Sinon, nous pouvons supposer que u, v appartiennent à G_1 et que u n'appartient pas à G_2 . Comme $u, v \in \text{Med}_\pi(G)$ et u n'appartient pas à G_2 , nous pouvons déduire de l'Affirmation 6.2.8 que $\pi(G_1) \geq \pi(G_2)$. Dans les deux cas, nous pouvons déduire de l'Affirmation 6.2.8 que $\text{Med}_\pi(G) \cap V(G_1) = \text{Med}_{\pi_1}(G_1)$. Comme $\text{Med}_{\pi_1}(G_1)$ est G^p -connexe, il existe un sommet $w \in I^\circ(u, v) \cap \text{Med}_{\pi_1}(G_1)$ appartenant à $\text{Med}_\pi(G)$ d'après

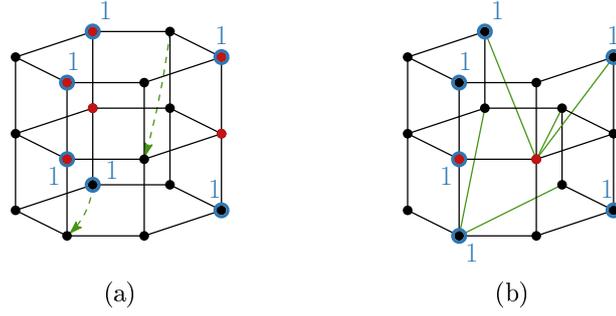


FIGURE 6.12 – Illustration de la troisième partie de la preuve de la Proposition 6.2.7, l'ensemble médian est indiqué en rouge et les poids non nuls en bleu

l’Affirmation 6.2.9. On suppose maintenant que u appartient à $G_1 \setminus G_2$ et que v appartient à $G_2 \setminus G_1$. D’après l’Affirmation 6.2.8, $\pi(G_1) = \pi(G_2)$ et la porte u' de u dans G_2 et la porte v' de v dans G_1 appartiennent toutes les deux à $\text{Med}_\pi(G)$. Comme u' et v' appartiennent tous les deux à $G_1 \cap G_2$ et à $I(u, v)$, nécessairement $u', v' \in I^\circ(u, v)$, ce qui conclut la preuve pour les amalgames portés.

Rétractés. On suppose qu’un graphe G est le rétracté d’un graphe G' aux médians G^p -connexes. Soit $V(G) \subseteq V(G')$ et soit $r : V(G') \rightarrow V(G)$ la rétraction. Alors r est idempotent (i.e., $r(u) = u$ pour tout $u \in V(G)$) et non-expansif (i.e., $d_G(r(u), r(v)) \leq d_{G'}(u, v)$ pour toute paire de sommets u, v de G'). Soit un profil π au support fini sur $V(G)$, on prend deux sommets $u, v \in \text{Med}_\pi(G)$ avec $d_G(u, v) \geq p + 1$. Comme r est non-expansif, pour tout sommet x de G' nous avons $F_{G, \pi}(r(x)) \leq F_{G', \pi}(x)$. Comme r est idempotent et le support de π est contenu dans G , pour tout sommet x de G nous avons $F_{G, \pi}(r(x)) = F_{G', \pi}(x)$. Par conséquent, $\text{Med}_\pi(G) \subseteq \text{Med}_\pi(G')$. Comme G' aux médians G^p -connexes et G est un sous-graphe isométrique de G' , il existe un sommet $w \in I_{G'}^\circ(u, v) \cap \text{Med}_\pi(G')$. Comme $F_{G, \pi}(r(w)) \leq F_{G', \pi}(w)$, nous pouvons conclure que $r(w) \in \text{Med}_\pi(G)$. Comme $w \in I_{G'}^\circ(u, v)$ et $r(u) = u, r(v) = v$, nous obtenons que $r(w) \in I_G^\circ(u, v)$, par conséquent $r(w) \in \text{Med}_\pi(G) \cap I^\circ(u, v)$ dans G . \square

Corollaire 6.2.10. *Si un graphe fini G peut être obtenu à partir des graphes G_1, \dots, G_m via produits cartésiens et amalgamations portées alors $p(G) = \max\{p(G_i) : i = 1, \dots, n\}$.*

Démonstration. L’inégalité $p(G) \leq \max\{p(G_i) : i = 1, \dots, n\}$ découle directement de la Proposition 6.2.7, on montre donc l’inégalité réciproque : $p(G) \geq \max\{p(G_i) : i = 1, \dots, n\}$. On observe que G contient une copie de tout G_i comme sous-graphe porté. En effet, tout G_i apparaît dans G soit comme sous-graphe porté, soit comme un facteur du produit cartésien $H = G_{j_1} \square G_{j_2} \square \dots \square G_{j_k}$, disons $G_i = G_{j_1}$. Alors H est un sous-graphe porté de G . De plus, tout sous-graphe H de la forme $G_i \square \{v_{j_2}\} \square \dots \square \{v_{j_k}\}$, où v_{j_ℓ} est un sommet du facteur G_{j_ℓ} , est un sous-graphe porté de H isomorphe à G_i . Par conséquent, tout G_i apparaît en tant que sous-graphe porté de G , que nous appelons également G_i . Soit $p = p(G_i)$ et soit une fonction de poids π sur G_i telle que l’ensemble médian $\text{Med}_\pi(G_i)$ est G^p -connexe mais pas G^{p-1} -connexe. Soit une fonction de poids π' sur G définie de la façon suivante : $\pi'(v) = \pi(v)$ si v est un sommet de G_i et $\pi'(v) = 0$ sinon. Comme G_i est un sous-graphe porté de G , d’après la définition de π' nous pouvons conclure que $\text{Med}_G(\pi') = \text{Med}_{G_i}(\pi)$. Par conséquent, $\text{Med}_G(\pi')$ est G^p -connexe mais pas G^{p-1} -connexe, et ainsi $p(G) \geq p = p(G_i)$. \square

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons caractérisé les graphes G aux médians G^p -connexes. Nous avons prouvé que ce sont les graphes dans lesquelles les sommes totales des distances sont faiblement p -sans-pic et faiblement- p -convexes (ces fonctions sont unimodales dans G^p).

L'article [14] a montré que les plateaux des fonctions faiblement 1-sans-pic induisent des sous-graphes isométriques de G , nous pouvons donc nous demander si les plateaux des fonctions faiblement p -sans-pic induisent des sous-graphes isométriques de G^p .

Dans la théorie de la convexité discrète [68, 92], les fonctions sous-modulaires sur des cubes booléens, les fonction $L^\#$ -convexes et N -convexes sur Z^d , les produits d'arbres, et les graphes médians sont étudiés. Les fonctions losanges introduites dans [14] et utilisées dans la plupart de nos preuves peuvent être vues comme une généralisation de ces fonctions discrètes convexes aux graphes quelconques.

Chapitre 7

Classes de graphes aux médians G^2 - et G^p -connexes

Dans ce chapitre, nous utilisons les résultats du chapitre précédent pour montrer que les graphes pontés, faiblement pontés (et donc les graphes triangulés), les graphes aux boules convexes, les graphes bucoliques et hypercellulaires, les graphes de Helly bipartis et les systèmes de benzénoïdes sont des graphes G^2 -connexes. Nous étendons également le résultat de [14] montrant que les ensembles médians des graphes de bases de matroïdes sont connexes dans plusieurs directions, montrant que les graphes de bases des Δ -matroïdes pairs sont des graphes aux médians connexes et en caractérisant les sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et des demi-cubes dont l'ensemble médian est connexe. Les résultats de ce Chapitre sont présentés dans l'article [27].

On donne en Figure 7.1 un diagramme d'inclusion des classes de graphes apparaissant dans ce chapitre (à l'exception des systèmes de benzénoïdes qui ne sont inclus dans aucune des classes de graphes présentés dans ce diagramme). Les classes de graphes aux médians connexes ou G^2 -connexes sont représentées en bleu.

7.1 Résultats auxiliaires

Dans cette sous-section, nous présentons des conditions suffisantes pour que les ensembles médians d'un graphe G soit G^p -connexe. Dans les sous-sections suivantes, nous restreignons d'abord ces conditions au cas des graphes faiblement modulaires et modulaires, puis utiliserons ces résultats pour montrer que les graphes pontés, faiblement pontés, les graphes aux boules convexes et les graphes de Helly bipartis sont des graphes aux médians G^2 -connexes.

Pour un 3-intervalle $I(u, v)$, nous considérons la condition suivante :

- (a) Il existe $x, y \in I^\circ(u, v)$, $x \sim u$ et $y \sim v$, tels que x est adjacent à tous les $z \in I(u, v) \cap N(v)$, $z \neq y$ et y est adjacent à tous les $z' \in I(u, v) \cap N(u)$, $z' \neq x$.

Pour un 4-intervalle $I(u, v)$ d'un graphe G , on considère les conditions suivantes :

- (b) Il existe $x, y \in I^\circ(u, v)$ avec $d(u, x) = d(u, y) = 2$ tels que x est adjacent à tous les sommets $z \in I(u, v) \cap N(u)$ et y est adjacent à tous les sommets $z \in I(u, v) \cap N(v)$;

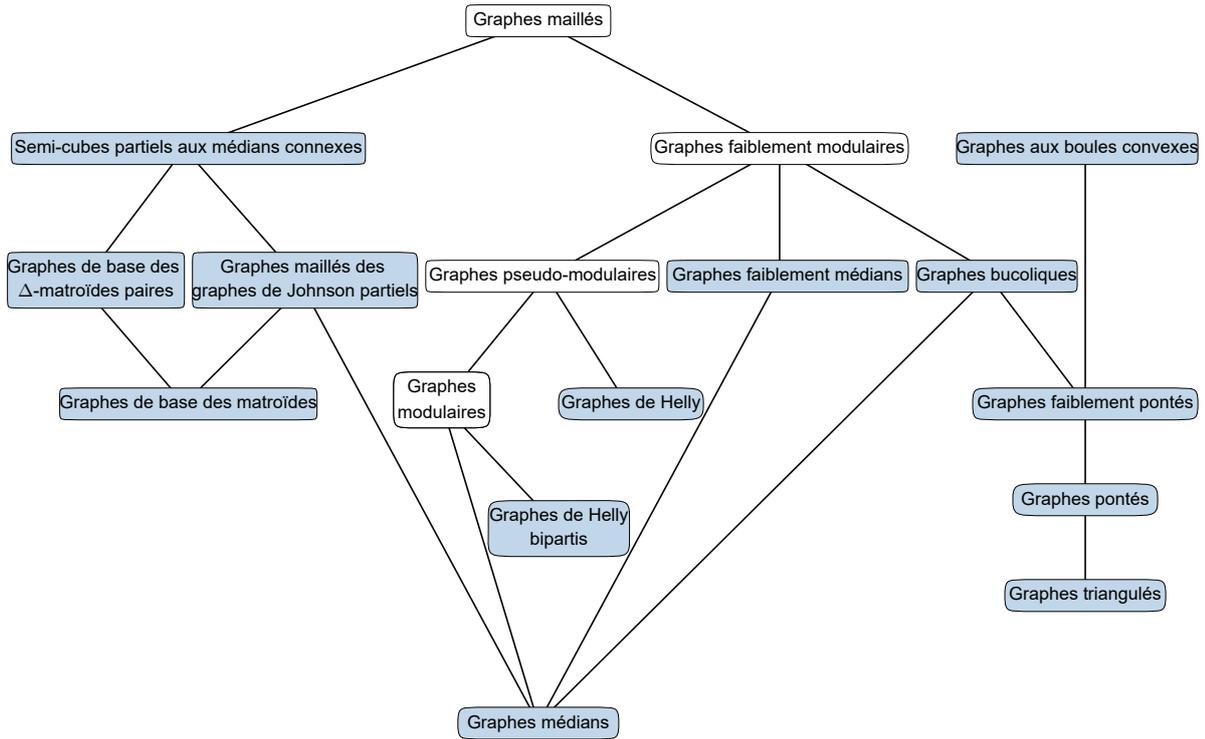


FIGURE 7.1 – Un diagramme d’inclusion des classes de graphes étudiées dans ce chapitre. Les classes de graphes aux médians connexes et G^2 -connexes sont données en bleu

- (c) Il existe $x, y \in I^\circ(u, v)$, $x \sim u$ et $y \sim v$, tels que x et y sont adjacents à tous les $z \in I^\circ(u, v)$ avec $d(u, z) = d(v, z) = 2$;

Dans la condition (a), les sommets x et y peuvent être adjacents ou non. Pour la condition (b), les sommets x et y peuvent coïncider et être adjacents ou non, pour les graphes bipartis cependant ils ne peuvent pas être adjacents.

Lemme 7.1.1. *Soit un 3- ou 4-intervalle $I(u, v)$ d’un graphe G . Si $I(u, v)$ satisfait une des trois conditions (a), (b) ou (c), alors pour toute fonction de poids π dont le support est inclus dans $I(u, v)$, la somme totale des distances satisfait $\text{Loz}(u, v)$.*

Démonstration. Pour montrer $\text{Loz}(u, v)$, nous commençons par prouver que pour tout sommet $z \in I(u, v)$ nous avons $d(x, z) + d(y, z) \leq d(u, z) + d(v, z)$, avec x et y les sommets définis dans les conditions (a), (b) ou (c). Une illustration de la preuve est proposée en Figure 7.2. On suppose d’abord que $d(u, v) = 3$. Alors, comme z appartient à $I(u, v)$, $d(u, z) + d(v, z) = 3$. Si z coïncide avec u ou v , alors trivialement $d(x, z) + d(y, z) = 3$. On suppose donc sans perte de généralité que $z \in I(u, v) \cap N(u)$. Si $z = x$, alors à nouveau $d(x, z) + d(y, z) \leq 3$ car $d(y, u) = 2$ et $u \sim x$. Si $z \neq x$, alors $z \sim y$ et $d(x, z) \leq 2$ étant donné que u est adjacent à x et à z . Ainsi, dans ce cas nous obtenons à nouveau $d(x, z) + d(y, z) \leq 3$.

On suppose à présent que $d(u, v) = 4$, alors $d(u, z) + d(v, z) = 4$. On a $d(x, z) + d(y, z) = 4 = d(u, z) + d(v, z)$ si $z \in \{u, v\}$. On suppose pour commencer que z est à distance 2 de u et de v . Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors $d(x, z) \leq 2$ et $d(y, z) \leq 2$ car x est adjacent à tous les voisins communs à z et u , et y est adjacent à tous les voisins communs à z et v . Donc

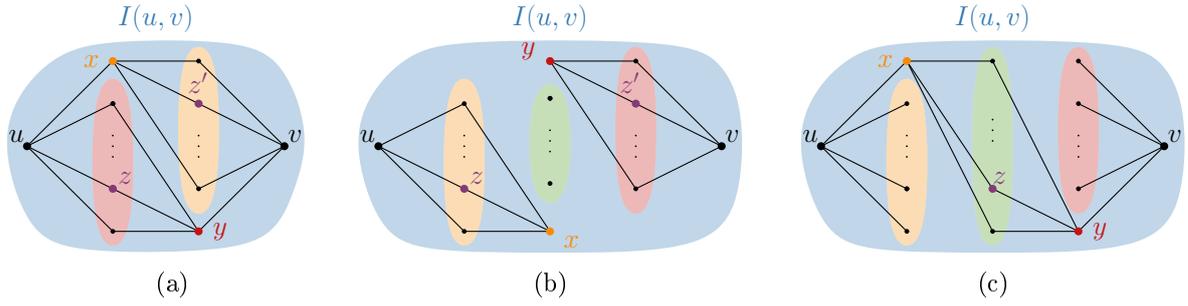


FIGURE 7.2 – Illustration des conditions (a), (b) et (c)

$d(x, z) + d(y, z) \leq 4 = d(u, z) + d(v, z)$ dans ce cas. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors $x \sim z$ et $y \sim z$ et donc $d(x, z) + d(y, z) \leq 2$.

On suppose maintenant que z est adjacent à u ou à v . Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors $d(x, z) + d(y, z) \leq 4$ car z est adjacent à un des sommets x, y est à distance au plus 3 de l'autre. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors $d(x, z) \leq 2$, et $d(y, z) \leq 2$ car x et y sont adjacents à tous les voisins de z à distance 2 de u et v .

Pour finir, soit une fonction de poids π telle que $\text{supp}(\pi) \subseteq I(u, v)$. En appliquant les conditions (a), (b) ou (c) à chaque sommet v de π et en additionnant les inégalités $d(x, z) + d(y, z) \leq d(u, z) + d(v, z)$ multipliées par $\pi(z)$, nous pouvons conclure que $F_\pi(x) + F_\pi(y) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$, montrant $\text{Loz}(u, v)$. \square

La condition suivante apparaît dans la caractérisation des graphes aux boules convexes des articles [40] et [106] :

(INC) *Condition du voisinage d'intervalle* : Pour toute paire de sommets non adjacents u, v , l'ensemble des voisins de u dans $I(u, v)$ induit un sous-graphe complet.

Un **triangle métrique** équilatéral de taille k $v_1 v_2 v_3$ est *fortement équilatéral* si $d(v_1, x) = k$ pour tout $x \in I(v_2, v_3)$. Pour toute paire de sommets non adjacents u, v d'un graphe G , on note $S(u, v)$ l'ensemble de tous les sommets z de G tels que le quasi-médian du triplet z, u, v est un **triangle métrique** fortement équilatéral.

Lemme 7.1.2. *Soit un graphe G vérifiant la condition (INC). Soit $I(u, v)$, un 3-intervalle de G vérifiant la condition (a) ou un 4-intervalle vérifiant une des conditions (b), (c) avec les sommets $x, y \in I^\circ(u, v)$. Alors pour tout sommet $z \in S(u, v)$ nous avons $d(z, x) + d(z, y) \leq d(z, u) + d(z, v)$. De plus, pour toute fonction de poids π avec $\text{supp}(\pi) \subseteq S(u, v)$, la somme totale des distances F_π vérifie la condition du losange $\text{Loz}(u, v)$.*

Démonstration. Pour montrer $\text{Loz}(u, v)$, il suffit de prouver que pour tout sommet $z \in \text{supp}(\pi) \subseteq S(u, v)$ nous avons $d(x, z) + d(y, z) \leq d(u, z) + d(v, z)$. Soit un quasi-médian $z'u'v'$ du triplet z, u, v tel que $z'u'v'$ est un **triangle métrique** fortement équilatéral. Comme $d(z, u) = d(z, z') + d(z', u)$, $d(z, v) = d(z, z') + d(z', v)$ et $d(z, x) \leq d(z, z') + d(z', x)$, $d(z, y) \leq d(z, z') + d(z', y)$, il suffit de montrer que $d(z', x) + d(z', y) \leq d(z', u) + d(z', v)$. Nous distinguons plusieurs cas dépendant, de la taille du **triangle métrique** $u'v'z'$, de la localisation des sommets u' and v' , et de laquelle des conditions (a), (b) ou (c) est vérifiée par $I(u, v)$. Les preuves suivent globalement les mêmes idées, nous n'illustrerons donc que le Sous-cas 1.1.

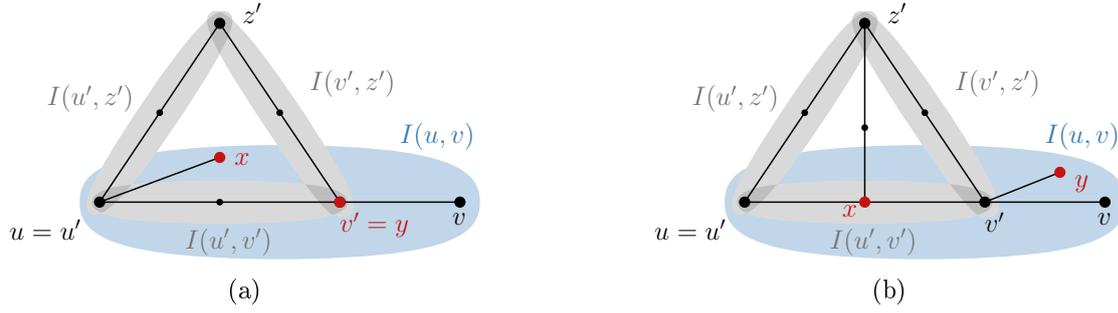


FIGURE 7.3 – Illustration de la preuve du Sous-cas 1.1

Cas 1. $d(u, v) = 3$

Comme G vérifie (INC) et $I(u, v)$ vérifie la condition (a), les sommets x et y sont adjacents à tous les sommets de $I^\circ(u, v) \setminus \{x, y\}$ (x et y peuvent ou non être adjacents). Si $u'v'z'$ est de taille 0, i.e., $u' = v' = z'$, alors $z' \in I(u, v)$ et l'inégalité $d(z', x) + d(z', y) \leq d(z', u) + d(z', v)$ découle du Lemme 7.1.1. Si la taille de $u'v'z'$ est 3, alors $u' = u$ et $v' = v$, donc $d(u, z') + d(v, z') = 3 + 3 = 6$. Comme $z'uv$ est un triangle métrique fortement équilatéral de taille 3 et $x, y \in I(u, v)$, on a donc $d(x, z') = d(y, z') = 3$, ainsi $d(x, z') + d(y, z') = 6$.

Sous-cas 1.1. La taille du triangle métrique $z'u'v'$ est de 2.

Alors $u' = u$ ou $v' = v$, on fixe $u' = u$. Dans ce cas $v' \sim v$ et $d(z', u) + d(z', v) = 2 + 3 = 5$. D'après la condition (a), soit $v' = y$, soit $x \sim v'$. Si $y = v'$, alors $d(z', y) = 2$, comme x est adjacent à u , $d(z', x) \leq 3$ (cf Figure 7.3a) et nous pouvons donc déduire que $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 2 = 5$. Dans le second cas, comme $x \sim u, v'$, on a $x \in I(u, v')$. Comme $z'u'v'$ est fortement équilatéral, on conclut que $d(z', x) = 2$. Comme d'après (INC), si y ne coïncide pas avec v' alors $y \sim v'$ (cf Figure 7.3b), donc $d(z', y) \leq 3$, et ainsi $d(z', x) + d(z', y) \leq 5$.

Sous-cas 1.2. La taille du triangle métrique $z'u'v'$ est de 1.

Dans ce cas $d(z', u) + d(z', v) = 4$, on suppose dans un premier temps que $u' = u$ (le cas $v = v'$ est similaire). D'après (INC) et (a), si $x \neq v'$, alors x et y sont adjacents à v' , d'où $d(z', x) + d(z', y) \leq 2 + 2 = 4$. Si $x = v'$, alors $d(z', x) = 1$. Comme d'après (INC) y coïncide ou est adjacent à tout voisin commun à v' et v , $d(z', y) \leq 3$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 1 + 3 = 4$. Si $u' \neq u$ et $v' \neq v$, alors $u \sim u'$ et $v \sim v'$. D'après (INC), x coïncide ou est adjacent à u' et y coïncide ou est adjacent à v' , d'où $d(z', x) + d(z', y) \leq 2 + 2 = 4$. Ceci conclut la preuve du Cas 1.

Cas 2. $d(u, v) = 4$

Si la taille de $u'v'z'$ est de 0, i.e., $u' = v' = z'$, alors $z' \in I(u, v)$ et l'inégalité $d(z', x) + d(z', y) \leq d(z', u) + d(z', v)$ découle du Lemme 7.1.1. Si sa taille est de 4, alors $u' = u$ et $v' = v$, ainsi $d(u, z') + d(v, z') = 4 + 4 = 8$. Comme $z'uv$ est un triangle métrique fortement équilatéral de taille 4 et que $x, y \in I(u, v)$, nous pouvons conclure que $d(x, z') = d(y, z') = 4$, et donc $d(x, z') + d(y, z') = 8$.

Sous-cas 2.1. La taille du triangle métrique $z'u'v'$ est de 3.

Dans ce cas $u' = u$ ou $v' = v$, disons $u' = u$, et alors $v' \sim v$ et $d(z', u) + d(z', v) = 3 + 4 = 7$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors x est adjacent à tout sommet $w \in I^\circ(u, v')$ adjacent à u et y est adjacent à v' . Par conséquent, $y \in I(u, v')$. Comme $z'uv'$ est fortement équilatéral, nous pouvons déduire que $d(z', y) = 3$ et $d(z', x) \leq d(z', w) + 1 = 4$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 4 = 7$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors x et y sont adjacents à tous les voisins w de v' dans $I(u, v')$. Ceci implique que $d(z', y) \leq d(z', w) + 1 = 4$ et $x \in I(u, v')$. Comme $z'uv'$ est fortement équilatéral, on a $d(x, z') = 3$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 4 = 7$.

Sous-cas 2.2. La taille du *triangle métrique* $z'u'v'$ est de 2.

Pour commencer, nous supposons que $u' = u$ ou $v' = v$, disons $u' = u$. Alors $d(v', v) = 2$ et $d(z', u) + d(z', v) = 2 + 4 = 6$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors x est adjacent à tous les $w \in I^\circ(u, v')$. Comme $z'uv'$ est fortement équilatéral, $d(z', w) = 2$. Par conséquent, $d(z', x) \leq 3$. Nous avons également y qui est adjacent à tous les voisins communs t de v' et v . Donc $v', y \in I(t, u)$ et d'après (INC) nous pouvons conclure que $y \sim v'$. Par conséquent, $d(z', y) \leq 3$ et nous obtenons donc $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 3 = 6$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors x et y sont adjacents à v' et nous avons également $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 3 = 6$.

On suppose maintenant que $u' \neq u$ et $v' \neq v$. Ceci implique que $u' \sim u$ et $v' \sim v$ et que $d(z', u) + d(z', v) = 3 + 3 = 6$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors $x \sim u'$ et $y \sim v'$, et ainsi $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 3 = 6$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors x et y sont adjacents à tous les sommets $w \in I^\circ(u', v')$. Comme $z'u'v'$ est fortement équilatéral, $d(z', w) = 2$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 3 = 6$.

Sous-cas 2.3. La taille du *triangle métrique* $z'u'v'$ est de 1.

On suppose pour commencer que $u' = u$ ou $v' = v$, disons $u' = u$. Alors $d(v', v) = 3$ et $d(z', u) + d(z', v) = 1 + 4 = 5$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors x est adjacent à v' et y est adjacent à tous les voisins t de v dans $I(v, v')$. Par conséquent, si $w \in I^\circ(t, v')$, alors $y, w \in I(t, u)$. D'après (INC), $y \sim w$ et donc $d(z', y) \leq d(z', w) + 1 = 3$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 2 + 3 = 5$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors y est adjacent à tous les voisins t de v' dans $I(v', v)$, d'où $d(z', y) \leq d(z', t) + 1 = 3$. Comme $x, v' \in I(u, v) \cap N(u)$, d'après (INC) $x \sim v'$ ou $x = v'$, et donc $d(z', x) \leq 2$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', v) \leq 2 + 3 = 5$.

On suppose maintenant que $u' \sim u$ et $d(v', v) = 2$ (les cas $v' \sim v$ et $d(u', u) = 2$ sont similaires). Alors $d(u, z') = 2$, $d(v, z') = 3$, donc $d(z', u) + d(z', v) = 5$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (b), alors x est adjacent à u' et y est à tout voisin commun t de v' et v . Par conséquent, $d(z', x) \leq 2$ et $d(z', y) \leq 3$, ainsi $d(z', x) + d(z', y) \leq 2 + 3 = 5$. Si $I(u, v)$ vérifie la condition (c), alors x et y sont adjacents à v' , donc $d(z', x) \leq 2$ et $d(z', y) \leq 2$, ainsi $d(z', x) + d(z', y) \leq 4$. Ceci conclut l'analyse du Cas 2 et la preuve du lemme. \square

7.2 Graphes maillés, faiblement modulaires et modulaires

Dans cette sous-section, nous raffinons les résultats de la sous-section précédente aux graphes maillés et *faiblement modulaires*, nous montrons également que les ensembles médians des *graphes modulaires* ne sont pas G^2 -connexes. On rappelle que les graphes maillés sont les graphes tels que pour tout triplet de sommets u, v, w avec $d(v, w) = 2$, il existe un voisin commun x de v et w tel que $2d(u, x) \leq d(u, v) + d(u, w)$ et que d'après le Lemme 6.1.7, *triangles métriques* des graphes maillés sont équilatéraux. Ceci implique que, pour toute paire de sommets u, v telle que

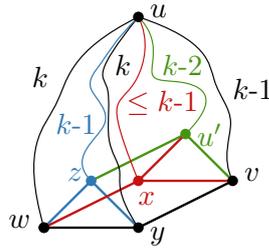


FIGURE 7.4 – Illustration de la preuve du Lemme 7.2.1

$3 \leq d(u, v) \leq 4$, l'ensemble de sommets $J(u, v)$ est un sous-ensemble du 3- ou 4-voisinage de l'intervalle $I(u, v)$. On rappelle le résultat suivant à propos des [graphes faiblement modulaires](#) (i.e., les graphes vérifiant les conditions du triangle (TC) et du quadrangle (QC)) :

Lemme 7.2.1 ([41]). *Les graphes modulaires sont maillés.*

Démonstration. Soient trois sommets u, v, w de G tel que $d(v, w) = 2$. On montre qu'il existe toujours un voisin commun x de v et w tel que $2d(u, x) \leq d(u, v) + d(u, w)$. Si un des deux sommets v, w est dans l'intervalle entre u et l'autre alors n'importe quel sommet de $I^\circ(v, w)$ vérifie l'inégalité. Si $d(u, v) = d(u, w) = k$, alors d'après (QC), il existe un voisin commun x à v et w tel que $d(u, x) = k - 1$ et x vérifie donc l'inégalité. On suppose finalement que $d(u, v) = k - 1$ et $d(u, w) = k$. Si il existe un voisin commun x à v et w tel que $d(u, x) = k - 1$, alors x vérifie l'inégalité. On suppose donc que tous les sommets y dans $I^\circ(v, w)$ sont à distance k de u . D'après la condition du triangle appliquée au triplet y, w, u , il existe un sommet z adjacent à y et w avec $d(u, z) = k - 1$. Si z est dans $I^\circ(v, w)$, la condition du lemme est vraie, on suppose donc que $z \approx v$. D'après (QC) il existe donc $u' \sim v, z$ avec $d(u, u') = k - 2$. On a donc $d(w, u') = d(w, v) = 2$, D'après (TC) il existe $x \sim v, u', w$. Comme x est adjacent à u' , $d(u, x) \leq k - 1$, ce qui conclut la preuve. \square

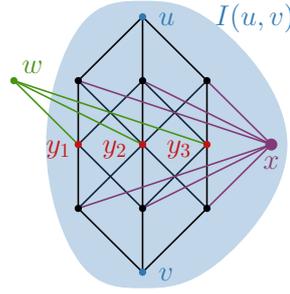
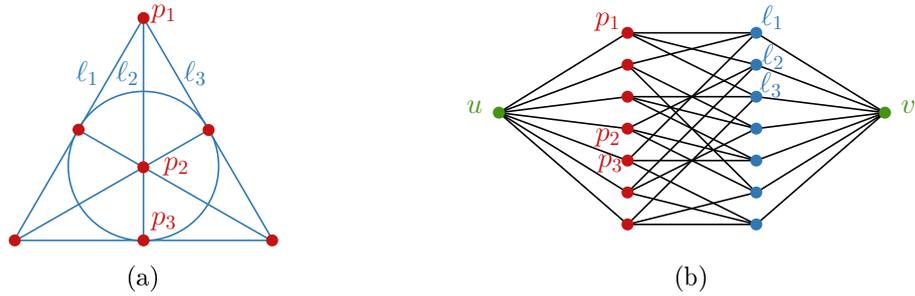
Ainsi, dans le cas de graphes maillés ou [faiblement modulaires](#), la Proposition 6.2.3 peut être reformulée de la manière suivante :

Proposition 7.2.2. *Un graphe maillé G est un graphe aux médians G^2 -connexes ssi toute paire de sommets u, v telle que $d(u, v) = k$ avec $k \in \{3, 4\}$ et toute fonction de poids π avec $\text{supp}(\pi) \subseteq B_k(I(u, v))$, la somme totale des distances F_π vérifie la condition WP(u, v).*

Comme les [graphes faiblement modulaires](#) sont exactement les graphes aux [triangles métriques](#) fortement équilatéraux, nous pouvons déduire du Lemme 6.2.2 et des Théorèmes 6.1.9 et 6.2.1 une condition suffisante pour la G^2 -connexité de l'ensemble médian des [graphes faiblement modulaires](#) :

Proposition 7.2.3. *Si G est un [graphe faiblement modulaire](#) vérifiant (INC) tel que chaque 3-intervalle vérifie la condition (a) et chaque 4-intervalle vérifie une des conditions (b) ou (c), alors G est un graphe aux médians G^2 -connexes.*

Pour la suite de cette sous-section, nous étudions les [graphes modulaires](#), i.e., les graphes tels que pour tout triplet de sommets u, v, w , $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w) \neq \emptyset$. La proposition suivante énonce une condition suffisante pour la G^2 -connexité des ensembles médians des [graphes modulaires](#), cette condition découle de la Proposition 7.2.2 et du Lemme 7.1.1 :


 FIGURE 7.5 – Exemple de 4-intervalle non-modulaire d'un **graphe modulaire** [18, Figure 10]

 FIGURE 7.6 – Plan projectif $\text{PG}(2, 2)$, aussi appelé plan de Fano et le graphe $G_{\text{PG}(2,2)}$ associé

Proposition 7.2.4. *Les ensembles médians d'un **graphe modulaire** G sont G^2 -connexes ssi pour toute paire de sommets u, v avec $3 \leq d(u, v) \leq 4$ et chaque fonction de poids π avec $\text{supp}(\pi) \subseteq I(u, v)$, la somme totale des distances F_π vérifie la condition $\text{WP}(u, v)$.*

Bandelt, van de Vel et Verheul [18, Figure 10] ont montré que les 4-intervalles des **graphes modulaires** ne sont pas nécessairement modulaires. On illustre leur contre-exemple dans la Figure 7.5, où l'intersection des intervalles du triplet y_1, y_2, y_3 du 4-intervalle $I(u, v) = G \setminus \{w\}$ est vide dans $I(u, v)$.

On montre maintenant qu'il existe des **graphes modulaires** dans lesquels les ensembles médians ne sont pas G^2 -connexes. Soit $\text{PG}(2, q)$ le plan projectif d'ordre q (avec $q \geq 2$), qui est un espace géométrique de points et de droites en nombre fini où chaque point appartient à $q + 1$ droites, chaque droite contient à $q + 1$ points, pour chaque paire de points il existe une droite les contenant tous les deux et chaque intersection de droite est un point. Il est bien connu que $\text{PG}(2, q)$ contient exactement $q^2 + q + 1$ points et $q^2 + q + 1$ droites. Soit $G_{\text{PG}(2, q)}$ le graphe dont les sommets sont les points et les droites de $\text{PG}(2, q)$ auxquels on ajoute deux sommets u et v . On ajoute une arête entre u et chaque point et entre v et chaque droite, et une arête entre un point et une droite ssi le point appartient à la droite. Le graphe $\text{PG}(2, q)$ étant le graphe couvrant d'un treillis modulaire, il est modulaire. On donne en Figure 7.6 un représentation en 2 dimensions du plan projectif $\text{PG}(2, 2)$ aussi appelé le plan de Fano et le graphe $G_{\text{PG}(2,2)}$ associé.

Proposition 7.2.5. *Le **graphe modulaire** $G_{\text{PG}(2, q)}$ n'est pas un graphe aux médians G^2 -connexes, i.e., $p(G_{\text{PG}(2, q)}) \geq 3$.*

Démonstration. On considère le profil π sur $V(G_{\text{PG}(2, q)})$ tel que $\pi(x) = 1$ pour tout $x \in V(G_{\text{PG}(2, q)})$. Le sommet u est adjacent à $q^2 + q + 1$ points de $\text{PG}(2, q)$, à distance 2 de toutes les $q^2 + q + 1$ droites de $\text{PG}(2, q)$, et à distance 3 de v . Ainsi, $F_\pi(u) = (q^2 + q + 1) + 2(q^2 + q + 1) + 3 =$

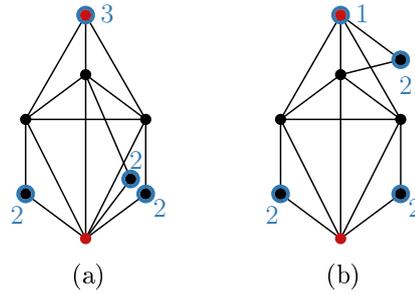


FIGURE 7.7 – Exemples de graphes triangulés dont l’ensemble médian n’est pas connexe [114]

$3q^2 + 3q + 6$. De manière analogue, $F_\pi(v) = 3q^2 + 3q + 6$. Et chaque sommet $z \neq u, v$, disons un point, est adjacent à u , à $q + 1$ droites contenant le point, à distance 2 de tous les autres $q^2 + q$ points (car chaque paire de points appartient à une droite) et de v , et est à distance 3 des q^2 droites ne contenant pas z . Par conséquent, $F_\pi(z) = 1 + (q + 1) + 2(q^2 + q + 1) + 3q^2 = 5q^2 + 3q + 4 > 3q^2 + 3q + 6$ comme $q \geq 2$. Ceci montre que l’ensemble médian de $G_{PG(2,q)}$ pour le profil π est égal à $\{u, v\}$, et comme $d(u, v) = 3$, que $p(G_{PG(2,q)}) \geq 3$. \square

Comme déjà mentionné, le graphe de couverture $G_{d,q}$ du treillis de faces de l’espace projectif fini $PG(d, q)$ de dimension d et d’ordre q est modulaire. Nous conjecturons que $p(G_{d,q}) > d$.

7.3 Graphes pontés et faiblement pontés

Wittenberg a montré dans [114] des exemples de graphes triangulés (et donc pontés) dont les médians ne sont pas connexes (cf Figure 7.7). L’article [14] montre qu’on ne peut pas caractériser les graphes triangulés aux médians connexes en utilisant des ensembles S du Théorème 6.1.8 de taille bornée. Dans cette sous-section, nous montrons que les ensembles médians des graphes triangulés, et de manière plus générale, des graphes faiblement pontés sont G^2 -connexes.

On dit qu’un graphe est *ponté* [57, 106] si il ne contient aucun cycle isométrique de taille supérieure à 3. De manière alternative, un graphe G est ponté ssi les boules $B_r(A) = \{v \in V : d(v, A) \leq r\}$ autour des ensembles convexes A de G sont également convexes. Les graphes pontés sont exactement les *graphes faiblement modulaires* ne contenant pas de 4- ou 5-cycles induits (et donc pas de 4- ou 5-roues) [43]. Les graphes pontés sont une large généralisation des graphes *triangulés* ; qui sont les graphes G tels que tout cycle induit est de taille 3. Les graphes pontés sont universels au sens que tout graphe ne contenant pas de 4- ou 5-roue est un sous-graphe induit d’un graphe ponté. Avec les *graphes médians* et les graphes de Helly, les graphes pontés sont une des classes de graphes les plus étudiées de la théorie métrique des graphes [15]. De nombreuses application des graphes pontés (ou graphes systoliques) dans la théorie géométrique des groupes sont données dans le papier [53]. Un graphe G est *faiblement ponté* [53] si G est un *graphe faiblement modulaire* avec les boules $B_r(x)$ convexes. Le papier [53] a montré qu’un *graphe faiblement modulaire* G est faiblement ponté ssi il ne contient pas de 4-cycles induits. Comme les graphes pontés sont *faiblement modulaires* et que leur boules sont convexes, ils sont faiblement pontés. De plus, comme les graphes faiblement pontés sont *faiblement modulaires*, leurs *triangles métriques* sont fortement équilatéraux. Nous résumons tout ces résultats comme suit :

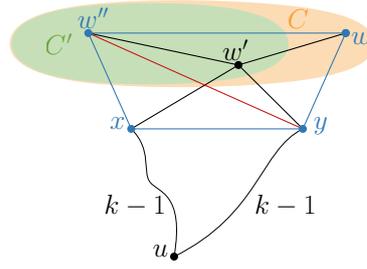


FIGURE 7.8 – Illustration de la preuve du Lemme 7.3.3

Lemme 7.3.1 ([53]). *Les graphes faiblement pontés sont exactement les graphes faiblement modulaires avec des boules convexes.*

Lemme 7.3.2. *Les graphes faiblement pontés vérifient (INC).*

Démonstration. Soient $u, v \in V$ et $k = d(u, v) - 1$. Si deux sommets $x, y \in I(u, v) \cap N(u)$ ne sont pas adjacents, alors $u \in I(x, y)$. Comme $x, y \in B_k(v)$ et $u \notin B_k(v)$, cela contredit le Lemme 7.3.1. \square

Lemme 7.3.3. *Si C est une clique d'un graphe faiblement ponté G et tous les sommets de C sont à distance k d'un même sommet u , alors il existe un sommet x à distance $k - 1$ de u et adjacent à tous les sommets de C .*

Démonstration. Une illustration de cette preuve est donnée en Figure 7.8. Soit C' un sous-ensemble maximal de C tel que tous les sommets de C' ont un voisin commun x à distance $k - 1$ de u . Comme les graphes faiblement pontés vérifient la condition du triangle, $|C'| \geq 2$. On montre que $C' = C$. Soit $w \in C \setminus C'$, alors $w \approx x$. On choisit arbitrairement $w' \in C'$ et soit y un voisin commun à w et w' à distance $k - 1$ de u (l'existence de y découle de la condition du triangle). Comme w' est adjacent à x et y , d'après la convexité de $B_{k-1}(u)$, x et y sont adjacents. Soit un autre sommet w'' de C' . Les sommets w'', x, y, w définissent alors un 4-cycle de G . Comme G est faiblement ponté, ce 4-cycle n'est pas un cycle induit. Comme $w \approx x$, nous pouvons conclure que $w'' \sim y$. Ainsi y est adjacent à $w \in C \setminus C'$ et à tous les sommets de C' , ce qui contredit la condition de minimalité de C' . \square

Nous pouvons maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 7.3.4. *Les ensembles médians des graphes faiblement pontés sont G^2 -connexes.*

Démonstration. Pour montrer ce théorème, nous allons prouver que les graphes faiblement pontés vérifient les conditions de la Proposition 7.2.3. D'après les Lemmes 7.3.1 et 7.3.2, les graphes faiblement pontés sont des graphes faiblement modulaires respectant (INC). Nous montrons que tout 3-intervalle $I(u, v)$ vérifie la condition (a) et que tous les 4-intervalles $I(u, v)$ vérifient la condition (b). Si $d(u, v) = 3$, alors d'après les Lemmes 7.3.2 et 7.3.3 il existe un sommet x à distance $d(u, v) - 2 = 1$ de u et adjacent à tous les sommets de la clique $I(u, v) \cap N(v)$ et un sommet y à distance $d(u, v) - 2 = 1$ de v et adjacent à tous les sommets de la clique $I(u, v) \cap N(u)$. De manière analogue, si $d(u, v) = 4$, alors d'après les Lemmes 7.3.2 et 7.3.3, il existe un sommet x à distance $d(u, v) - 2 = 2$ de u et adjacent à tous les sommets de $I(u, v) \cap N(u)$ et à un sommet y à distance $d(u, v) - 2 = 2$ de v et adjacent à tous les sommets de $I(u, v) \cap N(v)$. Si $d(u, v) = 3$,

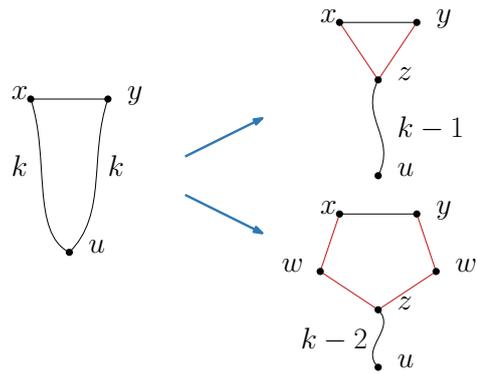


FIGURE 7.9 – Illustration de la condition TPC

alors x est adjacent à u et y est adjacent à v , montrant (a). Si $d(u, v) = 4$, alors x et y sont tous les deux à distance 2 de u et v , montrant (b). \square

Comme les graphes triangulés sont pontés, nous pouvons déduire le résultat suivant :

Corollaire 7.3.5. *Les ensembles médians des graphes triangulés sont G^2 -connexes.*

7.4 Graphes aux boules convexes

Un graphe G est un *graphe aux boules convexes* (par la suite, nous les noterons *CB-graphes*) si toute boule $B_r(v)$ de G est convexe. Les articles [57, 106] montrent que G est un CB-graphe ssi tous les cycles isométriques de G sont de taille 3 ou 5 et G vérifie la condition (INC). Les graphes pontés et faiblement pontés sont des CB-graphes. En revanche les CB-graphes ne sont pas *faiblement modulaires* : le 5-cycle C_5 est un CB-graphe mais n'est pas *faiblement modulaire*. Les CB-graphes ont été étudiés en détail dans le papier [40]. En particulier, de manière similaire au fait que les graphes pontés sont des *graphes faiblement modulaires* sans 4-cycle induit, il a été montré dans [40] que les CB-graphes sont exactement les graphes vérifiant la condition (inc) et la condition suivante, similaire à la condition du triangle (cf Figure 7.9) :

(TPC) *Condition du Triangle-Pentagone* : Pour tout triplet de sommets u, x, y tel que $d(u, x) = d(u, y) = k \geq 2$ et $x \sim y$, soit il existe un sommet $z \sim x, y$ avec $d(v, z) = k - 1$, soit il existe le triplet z, w, w' tel que $xwzw'y$ est un pentagone de G et $d(v, z) = k - 2$.

L'article [40] montre également une caractérisation locale vers globale des CB-graphes, qui indique que les CB-graphes sont exactement les graphes dans lesquels les complexes triangles-pentagones sont simplement connexes et dans lesquels les boules de rayon au plus 3 sont convexes. Le résultat de [40] suivant caractérise la structure des *triangles métriques* des CB-graphes :

Proposition 7.4.1 ([40]). *Tout triangle métrique d'un CB-graphe est soit équilatéral, soit possède deux côtés de taille 2 et un côté de taille 1.*

Soit un *triangle métrique* xyz avec $d(x, y) = d(x, z) = 2$ et $d(y, z) = 1$. Alors pour tout $s \sim x, y$ et $t \sim x, z$, nous obtenons un 5-cycle induit. En effet, s et t ne peuvent coïncider car

xyz est un **triangle métrique**. Pour la même raison, $s \approx z$ et $t \approx y$. Si $s \sim t$, alors d'après (INC), s et z ou t et y doivent également être adjacents, ce qui est impossible. Ainsi (x, t, z, y, s) est un 5-cycle induit et nous appellerons un tel **triangle métrique** xyz un **pentagone**.

Le Lemme suivant est analogue au Lemme 7.3.3 et a été prouvé dans [40].

Lemme 7.4.2 ([40]). *Si G est un CB-graphe et $d(u, v) = k \geq 2$, alors il existe un sommet x à distance $k - 2$ de u et adjacent à tous les sommets de $I(v, u) \cap N(v)$.*

Nous poursuivons avec la généralisation suivante du Théorème 7.3.4 :

Théorème 7.4.3. *Les ensembles médians des CB-graphes sont G^2 -connexes.*

Démonstration. Pour commencer, on montre que tout 3-intervalle $I(u, v)$ vérifie la condition (a) et que tout 4-intervalle $I(u, v)$ vérifie la condition (b). Si $d(u, v) = 3$, alors, d'après le Lemme 7.4.2, il existe un sommet x à distance $d(u, v) - 2 = 1$ de u et adjacent à tous les sommets de la clique $I(u, v) \cap N(v)$ et un sommet y à distance $d(u, v) - 2 = 1$ de v et adjacent à tous les sommets de la clique $I(u, v) \cap N(u)$. Si $d(u, v) = 4$, alors d'après le Lemme 7.4.2 il existe un sommet x à distance $d(u, v) - 2 = 2$ de u et adjacent à tous les sommets de $I(u, v) \cap N(u)$ et à un sommet y à distance $d(u, v) - 2 = 2$ de v et adjacent à tous les sommets de $I(u, v) \cap N(v)$. Si $d(u, v) = 3$, alors x est adjacent à u et y est adjacent à v , ce qui montre (a). Si $d(u, v) = 4$, alors x et y sont tous les deux à distance 2 de u et de v , montrant (b).

Soit π une fonction de poids sur G et soit u, v une paire de sommets avec $3 \leq d(u, v) \leq 4$. On montre que la somme totale des distances F_π vérifie la condition du losange $\text{Loz}(u, v)$ avec les sommets x, y définis plus haut. Pour cela, il suffit de montrer que $d(z, x) + d(z, y) \leq d(z, u) + d(z, v)$ pour tout sommet $z \in \text{supp}(\pi)$. Si $z \in S(u, v)$ (i.e., le triplet z, u, v a pour quasi-médian $z'u'v'$ qui est fortement équilatéral), alors l'inégalité désirée découle du Lemme 7.1.2 (on rappelle que G vérifie (INC)). Il reste donc à considérer le cas où tout quasi-médian $z'u'v'$ de z, u, v est un pentagone. Comme dans la preuve du Lemme 7.1.2, il suffit de montrer que $d(z', x) + d(z', y) \leq d(z', u) + d(z', v)$. Nous distinguons deux cas :

Cas 1. $d(u', v') = 1$.

Dans ce cas, $d(z', u') = d(z', v') = 2$. Indépendamment de la position de l'arête $u'v'$ dans $I(u, v)$, nous avons $d(z', u) + d(z', v) = 6$ si $d(u, v) = 3$ et $d(z', u) + d(z', v) = 7$ si $d(u, v) = 4$.

Sous-cas 1.1. $d(u, v) = 3$.

Si $u' = u$ ou $v' = v$, disons $u' = u$, alors d'après la condition (a), y est adjacent à v' et x est adjacent à u , donc $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 3 = 6$. Sinon, $u' \sim u$ et $v' \sim v$. Alors x est adjacent à v' et y est adjacent à u' et on obtient à nouveau $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 3 = 6$.

Sous-cas 1.2. $d(u, v) = 4$.

On suppose à nouveau que $u' = u$ (le cas $v' = v$ est similaire). D'après la condition (b), x est adjacent à v' et $d(z', x) \leq 3$. Comme $d(z', y) \leq d(z', u) + d(u, y) = 4$, nous avons $d(z', x) + d(z', y) \leq 7$. On suppose maintenant que u' est adjacent à u (le cas $v' \sim v$ est similaire). D'après la condition (b), x est adjacent à u' et $d(z', x) \leq 3$. D'après la condition (b), y est adjacent à tout voisin commun w de v et v' et donc $d(z', y) \leq d(z', v') + 2 = 4$ et $d(z', x) + d(z', y) \leq 7$. Ceci conclut l'analyse du Cas 1.

Cas 2. $d(u', v') = 2$.

On suppose sans perte de généralité que $d(z', u') = 1$ (le cas $d(z', v') = 1$ est similaire). Indépendamment de la position de u' et v' dans $I(u, v)$, nous avons $d(z', u) + d(z', v) = 4$ si $d(u, v) = 3$ et $d(z', u) + d(z', v) = 5$ si $d(u, v) = 4$. On suppose que s est un voisin commun de z' et v' et que t est un voisin commun de u' et v' . Les sommets z', s, v', t, u' induisent un pentagone.

Sous-cas 2.1. $d(u, v) = 3$.

Si $u' = u$, alors y est adjacent à t d'après la condition (a) et à v' d'après (INC). Si $d(z', y) = 3$, alors u et s sont nécessairement des voisins de z' dans $I(z', y)$ et d'après (INC), $u \sim s$, ce qui est impossible. On a donc $d(z', y) \leq 2$. Comme x est adjacent à u , $d(z', x) \leq 2$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 4$. On suppose maintenant que $u' \sim u$. Dans ce cas d'après la condition (a) y est adjacent à u' , d'où $d(z', y) \leq 2$. D'après (INC), x est adjacent ou coïncide avec u' , d'où $d(z', x) \leq 2$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 4$.

Sous-cas 2.2. $d(u, v) = 4$.

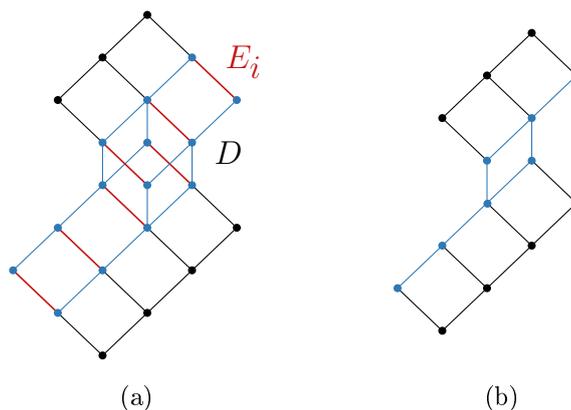
Soit $u' = u$. D'après la condition (b), x est adjacent à t (on rappelle que t est un voisin commun de $u = u'$ et v'). Comme $v', x \in I(t, v)$, d'après (INC) les sommets v' et x sont adjacents. On affirme que $d(z', x) \leq 2$. En effet, si $d(z', x) = 3$, alors $u, s \in I(z', x)$ et d'après (INC) nous pouvons conclure que $u \sim s$, ce qui est impossible car les sommets z', s, v', t, u induisent un pentagone, nous avons donc $d(z', x) \leq 2$. Soit un voisin commun w de v' et v . D'après la condition (b), $y \sim w$. Comme $y, v' \in I(w, u)$, d'après (INC) $y \sim v'$, donc $d(z', y) \leq 3$. Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 2 + 3 = 5$.

Soit $u' \sim u$ et $v' \sim v$, d'après la condition (b), x est adjacent à u' et y est adjacent à v' . Par conséquent, $d(z', x) + d(z', y) \leq 2 + 3 = 5$. Pour finir, on suppose que $v' = v$. D'après la condition (b), $y \sim t$. Comme $u', y \in I(t, u)$, d'après (INC) $u' \sim y$, et donc $d(z', y) \leq 2$. D'après la condition (b), x est adjacent à tout voisin commun w de u et u' . D'où $d(z', x) \leq 3$, et donc $d(z', x) + d(z', y) \leq 3 + 2 = 5$. Ceci conclut l'analyse du cas 2 et la preuve du théorème. \square

7.5 Graphes bucoliques et hypercellulaires

Les graphes bucoliques sont les rétractés des produits (faiblement) cartésiens des graphes faiblement pontés [34]. Un cycle C_n auquel on a ajouté un sommet central adjacent à tous les autres est appelé n -roue, noté W_n . Et on notera W_n^- le graphe W_n auquel on a retiré une arête entre le sommet central et un des sommets du cycle. Les graphes bucoliques ont été caractérisés dans [34] comme les graphes faiblement modulaire ne contenant pas de $K_{2,3}$, W_4 , ni W_4^- induits (cette caractérisation peut également être utilisée comme une définition). L'article [34] présente également de nombreuses propriétés et caractérisations topologiques des graphes bucoliques. Dans ce travail, nous utiliserons le théorème de décomposition des graphes bucoliques en graphes premiers.

On rappelle qu'un produit cartésien $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ est un graphe dont les sommets sont tous les k -uplets (v_1, v_2, \dots, v_k) avec $v_i \in V(G_i)$ pour tous $1 \leq i \leq k$ et deux sommets (u_1, u_2, \dots, u_k) et (v_1, v_2, \dots, v_k) de $V(G)$ sont adjacents dans G ssi il existe un indice $1 \leq i \leq k$ tel que $u_i \sim v_i$ dans G_i et $u_j = v_j$ pour tout $j \neq i$. On rappelle qu'un graphe G est un amalgame porté de deux graphes G_1 et G_2 si G_1 et G_2 sont isomorphes à deux sous-graphes portés de G s'intersectant et tels que $G_1 \cup G_2 = G$. On dit d'un graphe G qu'il est élémentaire si les seuls ensembles portés de G sont des singletons. Un graphe avec au moins deux sommets est

FIGURE 7.10 – Contraction du graphe D selon la Θ -classe E_i

dit *premier* si ce n'est ni un [produit cartésien](#), ni un [amalgame porté](#) de plus petit graphes. Les sous-graphes premiers portés d'un graphe G sont appelés les *sous-graphes premiers* de G . Par exemple, les sous-graphes premiers des [graphes médians](#) sont des K_2 . On peut reformuler des résultats de [34] de la manière suivante :

Théorème 7.5.1 ([34]). *Les graphes bucoliques finis sont exactement les graphes obtenus à partir des graphes faiblement pontés via [amalgamations portées](#) et [produits cartésiens](#).*

On déduit du Théorème 7.5.1, de la Proposition 6.2.7 et du Théorème 7.3.4 que les ensembles médians des graphes bucoliques finis sont G^2 -connexes. Nous étendons ce résultat à tous les graphes bucoliques localement finis (i.e., dont les sommets sont de degré fini) :

Proposition 7.5.2. *Les ensembles médians des graphes bucoliques localement finis G sont G^2 -connexes.*

Démonstration. Soit un profil π dont le support $\text{supp}(\pi)$ est fini et soient deux sommets u, v minimisant F_π avec $d(u, v) \geq 3$. Soit l'enveloppe convexe G' de l'ensemble fini $\text{supp}(\pi) \cup \{u, v\}$. D'après [34, Proposition 2], G' est un graphe bucolique fini. Comme G' est un sous-graphe isométrique de G contenant $\text{supp}(\pi)$, la fonction F_π a les mêmes valeurs sur les sommets de $V(G')$, que l'on utilise la distance de G ou celle de G' . Comme u et v minimisent F_π dans G' , il existe un sommet médian $w \in I^\circ(u, v) \subset V(G') \subseteq V(G)$. On peut donc en déduire que w minimise également F_π dans G , ce qui conclut la preuve. \square

On dit d'un graphe G qu'il est *hypercellulaire* [52] si G peut être isométriquement plongé dans un hypercube et ne contient pas Q_3^- comme cube partiel mineur (Q_3^- est le 3-cube Q_3 auquel on a retiré un sommet). On rappelle qu'un graphe H est appelé *cube partiel mineur* de G si G contient un sous-graphe convexe G' pouvant être transformé en H en contractant successivement les Θ -classes de G' (cf Figure 7.10). Les graphes hypercellulaires généralisent les *graphes cellulaires bipartis* qui sont les graphes dans lesquels tous les cycles isométriques sont portés [13]. Les graphes hypercellulaires ne sont pas [faiblement modulaires](#) mais représentent une généralisation large des [graphes médians](#). De nombreuses propriétés et caractérisations des graphes hypercellulaires sont présentées dans l'article [52]. Nous utiliserons la caractérisation des graphes hypercellulaires finis suivante :

Théorème 7.5.3 ([52]). *Les graphes hypercellulaires finis sont exactement les graphes pouvant être obtenus via [produits cartésiens](#) et [amalgamations portées](#) des cycles pairs.*

Nous pouvons déduire du Théorème 7.5.3 et du Corollaire 6.2.10 que si G est un graphe hypercellulaire fini, alors $p(G)$ est égal au plus grand $p(C)$ parmi tous les cycles pairs portés de G . Comme les graphes hypercellulaires sont isométriquement plongeables dans les hypercubes, les enveloppes convexes d'ensembles finis sont finies [52]. En utilisant les mêmes arguments que la preuve de la Proposition 7.5.2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 7.5.4. *Soit un graphe hypercellulaire $G = (V, E)$ et soit la collection \mathcal{C} de tous les cycles portés de G . Alors $p(G) = \sup\{p(C) : C \in \mathcal{C}\}$.*

7.6 Graphes de Helly bipartis

L'article [105] a montré que les [graphes médians](#) sont exactement les [graphes modulaires](#) aux médians connexes, et l'article [14] que les graphes de Helly sont des [graphes faiblement modulaires](#) aux médians connexes. Dans cette sous-partie, nous montrons que les graphes de Helly bipartis (qui sont [modulaires](#)) sont des graphes aux médians G^2 -connexes. Une *demi-boule* d'un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$ est l'intersection d'une boule de G avec une de ses deux classes de couleurs X ou Y . Les graphes de Helly bipartis sont les graphes bipartis dans lesquels les familles de demi-boules respectent la propriété de Helly, c'est à dire que si toutes les demi-boules de la famille s'intersectent deux à deux alors leur intersection totale est non-vide. Les graphes de Helly bipartis ont été caractérisés par Bandelt, Dählmann et Schütte dans l'article [19] :

Théorème 7.6.1 ([19]). *Un graphe biparti G est un graphe de Helly biparti ssi pour toute paire de sommets u, v avec $d(u, v) \geq 3$, tous les voisins de v dans $I(u, v)$ ont un voisin commun $x \in I(u, v)$.*

Les graphes de Helly bipartis possèdent de nombreuses propriétés intéressante, nous y reviendrons plus en détail dans le Chapitre 8.

Proposition 7.6.2. *Les ensembles médians des graphes de Helly bipartis G sont G^2 -connexes.*

Démonstration. D'après la Proposition 7.2.4, il suffit de montrer que chaque 3-intervalle vérifie la condition (a) et que 4-intervalle vérifie la condition (b). On choisit arbitrairement deux sommets u, v de G avec $3 \leq d(u, v) \leq 4$. D'après le Théorème 7.6.1, il existe un sommet x à distance $d(u, v) - 2$ de v et adjacent à tous les voisins de u dans $I(u, v)$. De manière analogue, il existe un sommet y à distance $d(u, v) - 2$ de u et adjacent à tous les voisins de v dans $I(u, v)$. Si $d(u, v) = 3$, alors x est adjacent à v et y est adjacent à u , montrant que G vérifie une version plus forte de la condition (a) où x et y sont adjacents. Si $d(u, v) = 4$, alors x et y sont tous les deux à distance 2 de u et de v , et donc $I(u, v)$ vérifie la condition (b), ce qui conclut la preuve. \square

La classe des graphes de Helly bipartis est fermée par [amalgamations portées](#) et [rétractions](#) mais pas par [produits cartésiens](#). Nous dirons qu'un graphe G est un graphe *de Helly biparti faible* si G peut être obtenu à partir d'un ensemble de graphes de Helly bipartis via [produits cartésiens](#) et [amalgamations portées](#). Comme les [graphes modulaires](#) sont fermés par [produits cartésiens](#) et [amalgamations portées](#), les graphes de Helly bipartis faibles sont [modulaires](#). Les

graphes médians ne sont pas des graphes de Helly bipartis mais sont des graphes de Helly bipartis faibles. D'après les Propositions 6.2.7 et 7.6.3, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 7.6.3. *Les graphes de Helly bipartis faibles G sont des graphes aux médians G^2 -connexes.*

7.7 Graphes de bases

Bandelt et Chepoi [14, Corollaire 4] ont montré que l'ensemble médian des graphes de base de matroïdes est connexe et ont utilisé ce résultat pour construire un algorithme glouton pour calculer l'ensemble médian sur ces graphes. La preuve découle du fait que les graphes de base des matroïdes sont maillés, vérifient la condition de positionnement (PC) (que nous définissons plus bas), et sont *épais*, c'est à dire que chaque paire de sommets à distance 2 est incluse dans un cycle de taille 4. Dans cette sous-section, nous revisitons le résultat de [14] et l'étendons dans plusieurs directions.

7.7.1 Graphes de bases de matroïdes et Δ -matroïdes paires

Un matroïde sur un ensemble fini I est une collection \mathcal{B} de sous-ensembles de I appelés *bases* vérifiant la propriété d'échange suivante : pour tout $A, B \in \mathcal{B}$ et $a \in A \setminus B$ il existe $b \in B \setminus A$ tel que $A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}$. Il est bien connu que toutes les bases d'un matroïde ont le même nombre d'éléments. Le *graphe de bases* $G = G(\mathcal{B})$ d'un matroïde \mathcal{B} est le graphe dont les sommets sont les bases \mathcal{B} et les arêtes sont les paires de bases A, B différant par la substitution d'un élément (i.e., $|A \Delta B| = 2$).

Un Δ -*matroïde* est une collection \mathcal{B} de sous-ensembles d'un ensemble fini I , appelés *bases* (le nombre d'éléments des bases peut différer) vérifiant la propriété d'échange symétrique : pour tout $A, B \in \mathcal{B}$ et $a \in A \Delta B$, il existe $b \in B \Delta A (= A \Delta B)$ tel que $A \Delta \{a, b\} \in \mathcal{B}$. Un Δ -matroïde dont les bases ont la même parité est appelé un Δ -*matroïde pair*. Le *graphe de base* $G = G(\mathcal{B})$ d'un Δ -matroïde \mathcal{B} est le graphe dont les sommets sont les bases de \mathcal{B} et les arêtes sont les paires de bases A, B différant par une unique substitution, i.e., $|A \Delta B| = 2$ (De la même manière, on peut définir le graphe de bases de collections arbitraires de sous-ensembles de taille paire de I).

Les graphes de bases des matroïdes et des Δ -matroïdes pairs constituent une sous-classe des graphes maillés [47]. Un *demi-cube* $\frac{1}{2}H(X)$ est le graphe ayant l'ensemble de sommets d'un hypercube $H(X)$ correspondant aux sous-ensembles finis de X de cardinalité paire comme sommets, et deux sommets sont adjacents dans $\frac{1}{2}H(X)$ ssi ils sont à distance 2 dans $H(X)$ (on peut définir de manière analogue un demi-cube sur les ensembles finis de cardinalité impaire). Le demi-cube $\frac{1}{2}H_3$ est donné en Figure 7.11a. Pour tout entier positif k , le *graphe de Johnson* $J(X, k)$ a le sous-ensemble de taille k X comme ensemble de sommets et deux de ses sommets sont adjacents dans $J(X, k)$ ssi leur distance dans $H(X)$ est de 2. Le graphe de Johnson $J(4, 2)$ est donné en Figure 7.11b. Tous les graphes de Johnson $J(X, k)$ avec k pair sont des sous-graphes isométriques du demi-cube $\frac{1}{2}H(X)$. Si X est fini et $|X| = n$, alors l'hypercube, le demi-cube et les graphes de Johnson sont usuellement notés $H_n, \frac{1}{2}H_n$, et $J(n, k)$. Les graphes de bases des matroïdes de rang k sur un ensemble de taille n sont des sous-graphes isométriques des graphes de Johnson $J(n, k)$ et les graphes de base de Δ -matroïdes pairs sur un ensemble de taille n sont des sous-graphes isométriques du demi-cube $\frac{1}{2}H_n$. Les graphes de Johnson $J(n, k)$ sont les graphes de bases des matroïdes uniformes de rang k , de manière analogue les demi-cubes $\frac{1}{2}H_n$ sont les graphes de

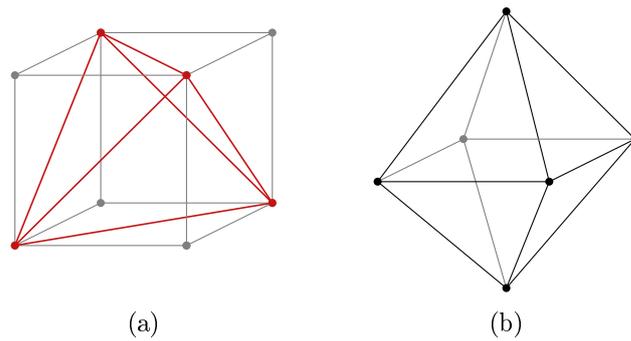


FIGURE 7.11 – Le demi-cube $\frac{1}{2}H_3$ (en rouge) et le graphe de Johnson $J(4, 2)$

base des Δ -matroïdes pairs uniformes. On rappelle maintenant la caractérisation des graphes de bases des matroïdes et des Δ -matroïdes. Pour cela, nous introduisons les conditions suivantes :

- (PC) *Condition de positionnement* : Pour chaque sommet u et chaque carré $v_1v_2v_3v_4$ de G , $d(u, v_1) + d(u, v_3) = d(u, v_2) + d(u, v_4)$.
- (IC m) *Condition du 2-intervalle* : Chaque 2-intervalle $I(u, v)$ est un sous-graphe induit du m -hyperoctaèdre $K_{m \times 2}$.

Il est connu que les graphes de base des matroïdes et des Δ -matroïdes pairs vérifient (PC) [47, 82], et que les 2-intervalles des graphes de bases des matroïdes sont des carrés, des pyramides, ou des 3-octaèdres [82], les graphes de bases des matroïdes sont donc épais et vérifient (IC3) ; de manière analogue, les 2-intervalles des Δ -matroïdes pairs sont épais et vérifient (IC4). On observe également que (PC) associé à (IC3) ou (IC4) implique que les graphes de bases sont maillés. Maurer [82] a présenté une caractérisation complète des graphes de bases des matroïdes pour les graphes finis. Cette caractérisation a été affinée récemment dans l'article [42] en répondant à une question de [82]. En étendant le résultat de Maurer, l'article [47] donne une caractérisation des graphes de bases des Δ -matroïdes pairs. Ces caractérisations peuvent être formulées de la manière suivante :

Théorème 7.7.1 ([42, 47, 82]). *Un graphe fini G est le graphe de base d'un matroïde ssi G est un graphe connexe épais vérifiant (IC3) et (PC). Un graphe fini G est un graphe de bases d'un Δ -matroïde pair ssi G est un graphe connexe épais vérifiant (IC4), (PC), et que aucun voisinage $N(v)$ ne contient une 5-roue W_5 ou une 6-roue W_6 comme sous-graphe induit.*

L'article [55] donne une caractérisation des sous-graphes isométriques des hypercubes et l'article [49] des sous-graphes isométriques des graphes de Johnson. Comme les hypercubes peuvent être isométriquement plongés dans les graphes de Johnson, le second résultat généralise le premier. On rappelle que la question de la caractérisation des sous-graphes isométriques des demi-cubes est toujours ouverte.

7.7.2 Sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et des demi-cubes dont l'ensemble médian est connexe

Dans cette sous-section, nous caractérisons les sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et des demi-cubes dont l'ensemble médian est connexe. En analogie avec les sous-graphes iso-

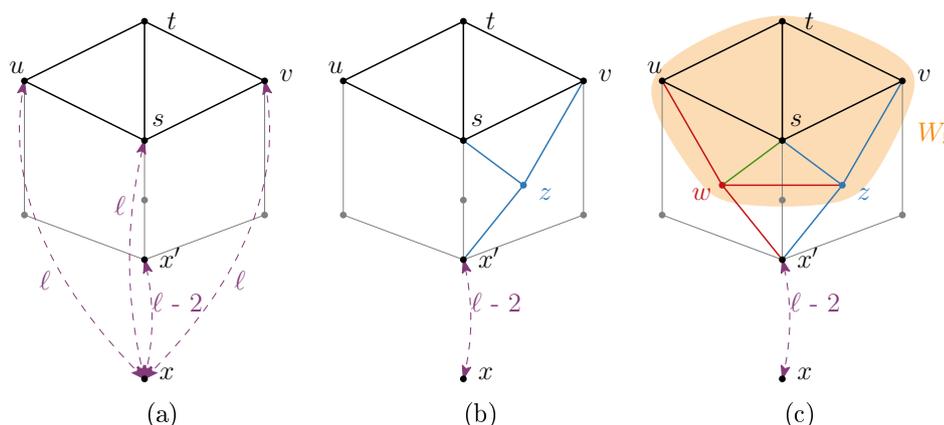


FIGURE 7.12 – Illustration de la preuve du Théorème 7.7.3

métriques des demi-cubes, qui sont usuellement appelés *cubes partiels*, nous appelons les *graphes de Johnson partiels* et les *demi-cubes partiels*, les sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et des demi-cubes respectivement. On commence par étendre la preuve de [14] montrant que l'ensemble médian des graphes de bases des matroïdes est connexe aux graphes de bases des Δ -matroïdes pairs.

Proposition 7.7.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe vérifiant la condition de positionnement (PC) et soit π un profil sur V . Pour toute paire $u, v \in V$ avec $d(u, v) = 2$ incluse dans un carré (u, s, v, t) , on a la version suivante de $\text{Loz}(u, v)$: $F_\pi(s) + F_\pi(t) = F_\pi(u) + F_\pi(v)$. Par conséquent, si G vérifie (PC) et est épais (en particulier, si G est le graphe de bases d'un Δ -matroïde pair), alors l'ensemble médian de G est connexe.*

Démonstration. Soient deux sommets u, v de G avec $d(u, v) = 2$ inclus dans un carré (u, s, v, t) . D'après (PC), $d(s, x) + d(t, x) = d(u, x) + d(v, x)$ pour tout sommet x . En prenant la somme de ces égalités multipliées par les poids des sommets x de $\text{supp}(\pi)$, on obtient l'égalité désirée $F_\pi(s) + F_\pi(t) = F_\pi(u) + F_\pi(v)$. Si G est épais, alors toute paire de sommets u, v avec $d(u, v) = 2$ est incluse dans un carré (u, s, v, t) vérifiant l'égalité précédente, la somme totale des distances F_π est donc *faiblement-convexe*. Et comme les graphes de bases des Δ -matroïdes pairs sont épais et vérifient (PC) [47], on peut en conclure que leurs ensembles médians sont connexes. \square

Les *graphes médians* sont exactement les sous-graphes isométriques d'hypercubes maillés et sont exactement les sous-graphes isométriques d'hypercubes dont l'ensemble médian est connexe.

On montre que ce type de caractérisation peut être étendue aux sous-graphes isométriques des graphes de Johnson.

Théorème 7.7.3. *Les ensembles médians d'un graphe de Johnson partiel G sont connexes ssi G est maillé.*

Démonstration. Une direction découle du fait que les graphes aux médians connexes sont maillés. On suppose donc réciproquement que G est un graphe de Johnson partiel maillé, et soit π un profil sur G . On montre que toute paire de sommets u, v à distance 2 vérifie la condition du losange $\text{Loz}(u, v)$. Les graphes de Johnson sont des graphes de bases des matroïdes, et vérifient donc la condition de positionnement (PC) [82], il vérifient également la condition d'intervalle

(IC3). Comme G est un sous-graphe isométrique d'un graphe de Johnson, G vérifie également (PC) et (IC3). L'intervalle $I(u, v)$ est donc inclus dans un 3-octaèdre (cf Figure 7.11). Si la paire u, v est incluse dans un carré (u, s, v, t) alors, d'après la première affirmation de la Proposition 7.7.2, $F_\pi(s) + F_\pi(t) = F_\pi(u) + F_\pi(v)$. On suppose donc par la suite que la paire u, v n'est pas incluse dans un carré. Comme $I(u, v)$ est un sous-graphe sans carré d'un 3-octaèdre, $I^\circ(u, v)$ est soit un singleton s , soit deux sommets adjacents s, t . On suppose d'abord que $I^\circ(u, v) = \{s\}$. Comme G est maillé, pour tout sommet x , la fonction radiale r_x est faiblement-convexe. Ce qui implique que $d(s, x) \leq \frac{1}{2}(d(u, x) + d(v, x))$ et donc que $F_\pi(s) \leq \frac{1}{2}(F_\pi(u) + F_\pi(v))$.

On suppose maintenant que $I^\circ(u, v) = \{s, t\}$, où $s \sim t$. On choisit arbitrairement un sommet x du profil π . On montre que $d(s, x) + d(t, x) \leq d(u, x) + d(v, x)$. On suppose sans perte de généralité que $d(u, x) \leq d(v, x)$. On observe que l'inégalité est vraie si $d(v, x) = d(u, x) + 2$ et on suppose donc que $d(v, x) = d(u, x) + 1$. Comme G est maillé, on a $\min\{d(s, x), d(t, x)\} \leq d(u, x)$, disons $d(s, x) \leq d(u, x)$. Comme s et t sont adjacents $d(t, x) \leq d(s, x) + 1 \leq d(u, x) + 1 = d(v, x)$, nous avons donc bien l'inégalité $d(s, x) + d(t, x) \leq d(u, x) + d(v, x)$.

Soit $d(u, x) = d(v, x) = \ell$, la fin de la preuve est illustrée en Figure 7.12. Comme G est maillé, $\min\{d(s, x), d(t, x)\} \leq \ell$, disons $d(s, x) \leq \ell$. Comme $s \sim t$, si $d(s, x) < \ell$, alors $d(t, x) \leq \ell$. On suppose donc que $d(s, x) = \ell$ et $d(t, x) = \ell + 1$. Soit $x'u'v'$ un quasi-médian du triplet x, u, v de G . Comme G est maillé, $x'u'v'$ est un triangle métrique équilatéral. Comme $d(x, u) = d(x, v)$ et $d(u, v) = 2$, soit $x' = u' = v'$, soit $u' = u, v' = v$ et $x'uv$ est un triangle métrique de taille 2. Si $x' = u' = v'$ on conclut que $x' \in I^\circ(u, v) = \{s, t\}$, et donc $x' = s$. Comme $d(x, x') = \ell - 1$ et $d(x, s) = \ell$, c'est impossible. Ainsi, $x'uv$ est un triangle métrique de taille 2 et $d(x', x) = \ell - 2$. Comme G est maillé, x' est à distance 2 de s ou de t . Si $d(x', t) = 2$, alors $d(t, x) \leq 2 + d(x', x) = \ell$, ce qui est impossible. On a donc, $d(x', s) = 2$ et $d(x', t) = 3$ (cf Figure 7.12a).

Comme les triangle métrique de G sont équilatéraux, G vérifie la condition (TC). En appliquant (TC) au triplet x', s, v , on conclut qu'il existe un sommet $z \sim x', s, v$ (cf Figure 7.12b). Si $z \sim u$, alors $z \in I^\circ(u, v) = \{s, t\}$, contrairement à l'affirmation que $d(x', s) = 2$ et $d(x', t) = 3$. Comme $d(u, x') = d(u, z) = 2$ et $x' \sim z$, d'après (TC) il existe un sommet $w \sim u, x', z$ et $w \notin \{s, t\}$. Comme $w \sim u$, $d(w, v) \leq 2$ et G est maillé, w est adjacent à un sommet de $I^\circ(u, v) = \{s, t\}$. Comme $d(t, x') = 3$, w est nécessairement adjacent à s et à distance 2 de v . On obtient donc un W_5 induit par les sommets w, z, v, t, u, s et centré sur s (cf Figure 7.12c), ce qui est impossible car G est un sous-graphe isométrique d'un graphe de Johnson (en fait le voisinage de tout sommet est le line graph d'un graphe biparti [49]). \square

Dans le cas des demi-cubes partiels en revanche, le fait que le graphe soit maillé n'est plus une condition suffisante pour assurer la connexité de l'ensemble médian. Nous présentons en Figure 7.13 un graphe faiblement modulaire (plus particulièrement triangulé) R_0 qui est un sous-graphe isométrique du demi-cube $\frac{1}{2}H_7$ et un profil sur R_0 pour lequel l'ensemble médian n'est pas connexe. D'autres demi-cubes partiels dont l'ensemble médian n'est pas connexe peuvent être trouvés à partir de R_0 , par exemple en ajoutant l'arête ac , où en ajoutant les arêtes ac, bc et ab . On présente une méthode générale pour construire ces exemples, soient 5 sommets u, v, s, t, w tels que comme dans R_0 , $d(u, v) = 2$, $I^\circ(u, v) = \{s, t, w\}$ et les sommets s, t, w sont deux à deux adjacents. On ajoute trois nouveaux sommets a, b, c tels que a est adjacent à s, b à t, c à w et chaque sommet a, b, c est adjacent soit à u , soit à v . Il peut également y avoir des arêtes entre les sommets a, b, c . On appelle un tel graphe une β -configuration (car il ne respecte pas la condition β du Théorème 6.1.8).

Proposition 7.7.4. *L'ensemble médian de tout demi-cube partiel faiblement modulaire G est*

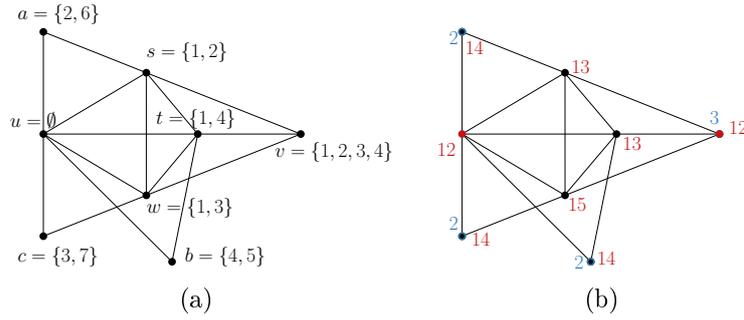


FIGURE 7.13 – À droite, le plongement d'une β -configuration R_0 dans le demi-cube $\frac{1}{2}H_7$, à gauche un profil (en bleu) sur R_0 pour lequel l'ensemble médian (en rouge) n'est pas connexe

connexe ssi pour aucune paire de sommets u, v avec $d(u, v) = 2$ et dont $I^\circ(u, v)$ est égal à trois sommets adjacents deux à deux s, t, w , l'intervalle $I(u, v)$ n'est pas inclus dans une β -configuration.

Démonstration. Soit un demi-cube partiel faiblement modulaire G . On choisit arbitrairement deux sommets u, v de G avec $d(u, v) = 2$. On affirme que la paire u, v vérifie les conditions (α) et (β) du Théorème 6.1.8 ssi $I(u, v)$ n'est pas inclus dans une β -configuration.

On suppose pour commencer que la paire u, v est incluse dans un carré (u, s', v, t') . Alors trivialement, $I(u, v)$ ne peut pas être inclus dans une β -configuration. Réciproquement, on montre que dans ce cas, la paire u, v vérifie les conditions (α) et (β) du Théorème 6.1.8. On prend comme ensemble S $\{s', t'\}$ et on fixe $\eta(s') = \eta(t') = 1$. Comme les demi-cubes sont des graphes de bases des Δ -matroïdes pairs, ils vérifient la condition de positionnement (PC). Comme G est un sous-graphe isométrique d'un demi-cube, G vérifie également (PC). Ainsi, $d(s', x) + d(t', x) = d(u, x) + d(v, x)$ pour tout sommet x de G , impliquant la condition (α) du Théorème 6.1.8. Pour vérifier la condition (β) du même Théorème, on choisit arbitrairement un sommet x de $J^\circ(u, v)$. Comme G respecte la condition du triangle, d'après la condition de $J^\circ(u, v)$ nous pouvons déduire que x est adjacent à un des sommets u, v et est à distance 2 de l'autre, i.e., $d(x, u) + d(x, v) = 3$. D'après (PC), nous obtenons que $d(x, s') + d(x, t') = 3$, x est donc adjacent à un seul des sommets s', t' , montrant (β) .

On suppose maintenant que la paire de sommets u, v n'est pas incluse dans un carré. Comme tout demi-cube vérifie la condition d'intervalle (IC4), G vérifie également (IC4). Ceci implique que $I^\circ(u, v)$ consiste en au plus trois sommets adjacents deux à deux $\{s, t, w\}$. Dans tous les cas suivant, nous fixons $S = I^\circ(u, v)$. On montre que S vérifie la condition (α) du Théorème 6.1.8, où le compagnon de chaque sommet de S est lui-même.

Pour cela, on choisit arbitrairement $x \in M(u, v)$. Si $d(u, x) = d(v, x) = 2$, comme $x \in J(u, v)$, nous pouvons conclure que le triplet xuv est un triangle métrique de taille 2. D'après la caractérisation des triangles métriques des graphes modulaires [43], nous pouvons conclure que $d(z, x) = 2$ et donc $d(z, x) + d(z, x) = d(u, x) + d(v, x)$ pour tout $z \in I^\circ(u, v)$. Si $d(u, x) = d(v, x) = 1$, alors $x \in I^\circ(u, v)$. Comme tous les sommets de $I^\circ(u, v)$ sont deux à deux adjacents, nous obtenons $d(z, x) + d(z, x) \leq d(u, x) + d(v, x)$ pour tout $z \in I^\circ(u, v)$ dans ce cas également.

Soit $x \in J^\circ(u, v) = J(u, v) \setminus M(u, v)$. Alors soit $x \sim u$ et $d(x, v) = 2$ ou $d(x, u) = 2$ et $x \sim v$. Comme les triangles de G sont équilatéraux, tout quasi-médian du triplet x, u, v est de la forme xw' dans le premier cas et $xu'v$ dans le second, avec u' et v' des sommets de $I^\circ(u, v)$. Si

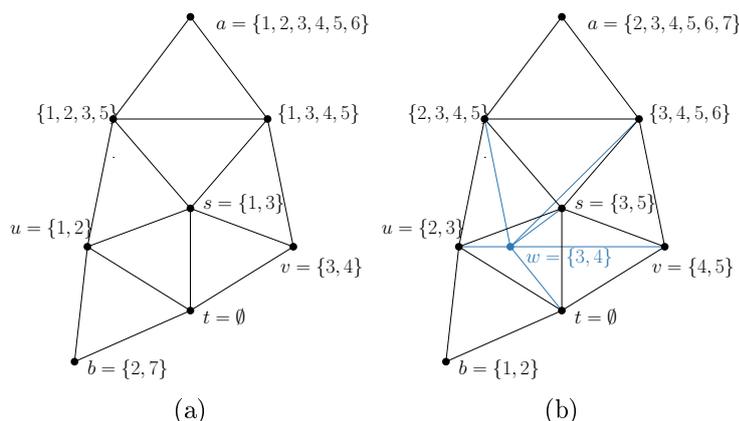


FIGURE 7.14 – Deux α -configurations de Type 1 et leur réalisation en tant que demi-cubes partiels.

$x \in J^\circ(u, v)$ a un voisin unique dans $S = I^\circ(u, v)$, on dit qu'il est un *voisin personnel* de x .

On définit maintenant une fonction de poids η sur S respectant la condition (β) du Théorème 6.1.8 ssi la paire u, v n'est pas incluse dans une β -configuration. Si $S = I^\circ(u, v) = \{s\}$, on fixe $\eta(s) = 1$. Alors s est le voisin personnel de tous les sommets $x \in J^\circ(u, v)$. Si $S = I^\circ(u, v) = \{s, t\}$, on fixe alors $\eta(s) = \eta(t) = 1$ si s et t sont des voisins personnels de certains sommets de $J^\circ(u, v)$ et $\eta(s) = 1, \eta(t) = 0$ si t n'est un voisin personnel d'aucun sommet de $J^\circ(u, v)$. Alors tout sommet $x \in J^\circ(u, v)$ est adjacent à au moins un des sommets s, t dans le premier cas et à s dans le second, la condition (β) est donc respectée. Comme $I(u, v)$ n'est pas inclus dans une β -configuration, on arrive à une contradiction.

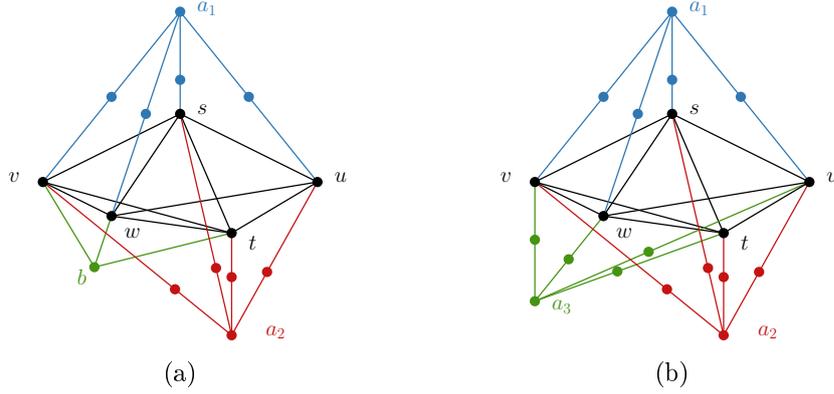
Pour finir, soit $S = I^\circ(u, v) = \{s, t, w\}$. Si chacun des sommets s, t, w est un voisin personnel d'un sommet de $J(u, v) \setminus M(u, v)$, alors u, v, s, t, w associés à a, b, c de $J(u, v) \setminus M(u, v)$ défini une β -configuration interdite. Dans ce cas, aucune fonction η sur S ne respectera la condition (β) . En effet, (β) ne serait pas respectée par le sommet de a, b, c dont le voisin personnel réalise $\min\{\eta(s), \eta(t), \eta(w)\}$. Donc les ensembles médians de G ne sont pas connexes. Réciproquement, si u, v, s, t, w n'est pas inclus dans une β -configuration, alors au moins un des sommets de S , disons w , n'est le voisin personnel d'aucun sommet de $J^\circ(u, v)$. Alors on fixe $\eta(s) = \eta(t) = 1$ et $\eta(w) = 0$. Comme tout sommet x de $J^\circ(u, v)$ est adjacent à au moins un des sommets s, t , nous pouvons conclure que la paire u, v respecte la condition (β) . \square

Dans le cas des demi-cubes partiels maillés, la condition (α) du Théorème 6.1.8 n'est plus respectée. Une α -configuration contenant un 2-intervalle $I(u, v)$ est un des trois types ci-dessous :

Type 1 : deux sommets adjacents s, t ou trois sommets adjacents deux à deux s, t, w de $I^\circ(u, v)$, un sommet a tel que $d(a, u) = d(a, v) = d(a, s) = d(a, w) = 2, d(a, t) = 3$ et un sommet b tel que $b \sim t, b \not\sim s, w$, et b est adjacent à u ou à v .

Type 2 : trois sommets deux à deux adjacents s, t, w de $I^\circ(u, v)$, deux sommets a_1, a_2 tels que $d(a_1, u) = d(a_1, v) = d(a_1, s) = d(a_1, w) = 2, d(a_1, t) = 3, d(a_2, u) = d(a_2, v) = d(a_2, s) = d(a_2, t) = 2, d(a_2, w) = 3$ et un sommet b tels que $b \sim t, w, b \not\sim s$, et b est adjacent à u ou à v .

Type 3 : trois sommets deux à deux adjacents s, t, w de $I^\circ(u, v)$, et trois sommets a_1, a_2, a_3 tels

FIGURE 7.15 – En (a) une α -configuration de Type 2 et en (b) de Type 3

que $d(a_1, u) = d(a_1, v) = d(a_1, s) = d(a_1, w) = 2, d(a_1, t) = 3, d(a_2, u) = d(a_2, v) = d(a_2, s) = d(a_2, t) = 2, d(a_2, w) = 3,$ et $d(a_3, u) = d(a_3, v) = d(a_3, t) = d(a_3, w) = 2, d(a_1, s) = 3.$

On donne en Figure 7.14 deux sous-graphes isométriques de demi-cubes réalisant une α -configuration de Type 1, et en Figure 7.15 une configuration de Type 2 et une de Type 3.

Théorème 7.7.5. *Les ensembles médians des demi-cubes partiels sont connexes ssi G est maillé et lorsque $d(u, v) = 2$ et $I^\circ(u, v)$ est égal à deux ou trois sommets adjacents deux à deux, alors $I(u, v)$ n'est pas inclus dans une α - ou β -configuration.*

Démonstration. Le cas où u, v sont inclus dans un carré est le même que la Proposition 7.7.4. On suppose que $I^\circ(u, v)$ possède au plus trois sommets deux à deux adjacents. La preuve de la condition (β) du Theorem 6.1.8 est à nouveau la même que pour la Proposition 7.7.4. Ainsi, il suffit de montrer que si un demi-cube partiel maillé G respecte les conditions (α) et (β) , alors G ne contient pas d' α -configuration et que si G ne contient ni α -, ni β -configurations, alors G respecte la condition (α) .

Soit $S = I^\circ(u, v)$ et soit la fonction de poids η sur S vérifiant les conditions (α) et (β) du Théorème 6.1.8. On suppose par l'absurde que G contient une α -configuration. Si cette configuration est de Type 3, alors tout sommet de $I^\circ(u, v)$ est à distance 3 d'un sommet de $M(u, v)$ à distance 2 de u, v et de tous les autres sommets de $I^\circ(u, v)$, montrant que la condition (α) n'est pas respectée. Si $I(u, v)$ est inclus dans une configuration de Type 2, alors la condition (α) n'est pas respectée pour les sommets t et w de $I^\circ(u, v)$. Donc S ne peut contenir que le sommet s . Mais le sommet s n'est pas adjacent au sommet b de $J^\circ(u, v)$, donc la condition (β) ne peut être respectée. On suppose finalement que $I(u, v)$ est inclus dans une configuration de Type 1. Alors $a \in M(u, v)$ et $b \in J^\circ(u, v)$. Comme $d(a, t) = 3$ et a est à distance 2 de tous les autres sommets de $I^\circ(u, v)$, le sommet t ne peut pas être inclus dans S (sinon, pour t et chacun de ses compagnons dans S , la condition (α) ne serait pas respectée). Mais t est le voisin personnel dans $I^\circ(u, v)$ du sommet b de $J^\circ(u, v)$ et comme $t \notin S$, la condition (β) n'est pas respectée. Ceci montre que G ne contient pas d' α -configuration.

Réciproquement, on suppose que pour toute paire de sommets u, v à distance 2, l'intervalle $I(u, v)$ n'est pas inclus dans une α -configuration et vérifie la condition (β) . Si tous les sommets de $I^\circ(u, v)$ sont à distance 2 de tous les sommets x de $M(u, v)$ avec $d(u, x) = d(v, x) = 2,$

alors la condition (α) serait respectée avec $S = I^\circ(u, v)$ et la fonction de poids η définie comme dans la preuve de la Proposition 7.7.4. C'est en particulier vrai si $|I^\circ(u, v)| = 1$. On suppose donc que $2 \leq |I^\circ(u, v)| \leq 3$ et qu'il existe un sommet $t \in I^\circ(u, v)$ à distance 3 d'un sommet $a_1 \in M(u, v)$. Comme les intervalles des demi-cubes sont convexes [47, (3.4)] et G est un sous-graphe isométrique d'un demi-cube, les intervalles de G sont convexes. Comme $u, v \in I(t, a_1)$, nous pouvons conclure que tous les sommets de $I^\circ(u, v)$ différant de t appartiennent également à $I(t, a_1)$. Comme ils sont tous adjacents à t , ils sont tous à distance 2 de a_1 . Si t est le voisin personnel d'un sommet $b \in J^\circ(u, v)$, alors l'ensemble $I(u, v) \cup \{a_1, b\}$ définit une α -configuration de Type 1, ce qui est impossible. Ainsi, t n'est le voisin personnel d'aucun sommet de $J^\circ(u, v)$.

On suppose pour commencer que $I^\circ(u, v) = \{s, t\}$. Si $d(s, x) = 2$ pour tout sommet $x \in M(u, v)$ avec $d(x, u) = d(x, v) = 2$, on peut alors fixer $S = \{s\}$ et $\eta(s) = 1$ et la condition (α) serait vérifiée. Comme tout sommet de $J^\circ(u, v)$ est adjacent à s , la condition (β) est également respectée. On suppose donc que $d(s, x) = 3$ pour le sommet $x \in M(u, v)$. Comme G est maillé, $d(x, t) = 2$. D'après (TC), il existe un sommet b adjacent à x, u , et t . Comme $b \in J^\circ(u, v)$ et t n'est pas un voisin personnel de b , b doit être adjacent à s , ce qui contredit l'affirmation $d(s, x) = 3$.

Finalement, soit $I^\circ(u, v) = \{s, t, w\}$. Si $d(s, x) = d(w, x) = 2$ pour tout sommet $x \in M(u, v)$ avec $d(x, u) = d(x, v) = 2$, on peut alors fixer $S = \{s, w\}$ et $\eta(s) = \eta(w) = 1$ et la condition (α) serait respectée. Comme tout sommet de $J^\circ(u, v)$ est adjacent à au moins un des sommets s ou w , la condition (β) est également respectée. On suppose donc que $d(w, a_2) = 3$ pour un sommet $a_2 \in M(u, v)$. Nous pouvons donc déduire de la convexité des intervalles de G que $d(a_2, s) = d(a_2, t) = 2$. Tout comme dans le cas de t , on conclut que w n'est le voisin personnel d'aucun sommet de $J^\circ(u, v)$ (on aurait sinon une α -configuration de Type 1). Si il existe un sommet $b \in J^\circ(u, v)$ adjacent à t et w mais pas à s , on obtiendrait alors une α -configuration de Type 2. Ainsi, tous les sommets de $J^\circ(u, v)$ sont adjacents à s . Si $d(s, x) = 2$ pour tout sommet $x \in M(u, v)$ avec $d(x, u) = d(x, v) = 2$, on peut alors fixer $S = \{s\}$ et $\eta(s) = 1$ et les conditions (α) et (β) du Théorème 6.1.8 seraient respectées. Il existe donc un sommet $a_3 \in M(u, v)$ avec $d(s, a_3) = 3$. Nous pouvons donc à nouveau conclure que $d(t, a_3) = d(w, a_3) = 2$ et nous obtenons une α -configuration of Type 3. Cette contradiction finale montre que si G ne contient pas d' α - ni de β -configuration, alors G respecte la condition (α) et (β) du Théorème 6.1.8, les ensembles médians de G sont donc connexes. \square

Corollaire 7.7.6. *Les ensembles médians d'un demi-cube partiel G sans triangle sont connexes ssi G est un graphe médian.*

Démonstration. Soit un graphe G respectant les conditions du Théorème 7.7.4, en particulier G est maillé. Les graphes modulaires sont exactement les graphes maillés sans triangles et exactement les graphes faiblement modulaires sans triangles [43]. D'autre part, les graphes médians sont exactement les graphes modulaires sans $K_{2,3}$ induits [88]. Or, les demi-cubes ne contiennent pas de $K_{2,3}$ induits. Pour montrer ça, on suppose par l'absurde que $\frac{1}{2}H(X)$ contient un $K_{2,3}$ induit et on suppose sans perte de généralité qu'un sommet u de degré 3 de $K_{2,3}$ est encodé par \emptyset . Comme l'autre sommet v de degré 3 de $K_{2,3}$ est à distance 2 de u , v doit être encodé par un sous-ensemble de taille 4 de $\frac{1}{2}H(X)$, disons pas l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Alors les trois voisins communs de u et v dans $K_{2,3}$ doivent être encodés par des sous-ensembles de taille 2 de $\{1, 2, 3, 4\}$ deux à deux disjoints, ce qui est impossible. \square

7.8 Systèmes de benzénoïdes

Une *grille hexagonale* est une grille formée par un pavage du plan \mathbb{R}^2 par des hexagones réguliers. Soit un cycle Z de la grille hexagonale. Un *système de benzénoïdes* est un sous-graphe de la grille hexagonale induit par les sommets situés dans la région finie délimitée par Z . De manière équivalente, un système de benzénoïdes est un graphe planaire connexe dont toutes les faces intérieures sont des hexagones réguliers de côté 1. Les systèmes de benzénoïdes sont très étudiés dans la théorie des graphes chimique [65].

Comme vu dans les préliminaires, on rappelle que tout système de benzénoïdes $G = (V, E)$ peut être isométriquement plongé dans le **produit cartésien** $T_1 \square T_2 \square T_3$ de trois arbres T_1, T_2, T_3 , on appelle *hexagone incomplet* un chemin de taille 3 dont chaque arête est issu d'un arbre différent. On rappelle également que comme dans les **graphes médians**, les arêtes des systèmes de benzénoïdes peuvent être organisées sous forme de classes de parallélisme, on dira que deux arêtes sont parallèles si elles viennent de la même arête d'un des trois arbres du **produit cartésien**. Les classes de parallélisme d'un système de benzénoïde G correspond aux coordonnées du plongement isométrique de G dans le plus petit hypercube possible [74]. Supprimer les arêtes de toute classe de parallélisme de G le partitionne en deux sous-graphe convexes [55]. Ceci implique les deux propriétés suivantes des classes de parallélisme de G que nous utiliserons plus bas :

- (1) tout plus court chemin P de G contient au plus une arête de chaque classe de parallélisme.
- (2) Si C est un cycle de G et xy une arête de C , alors la classe de parallélisme de l'arête xy contient au moins une autre arête de C .

On a montré plus tôt que $p(G)$ d'un graphe hypercellulaire G est le supremum de $P(C)$ sur tous les cycles portés de G . Les hexagones C_6 de tout système de benzénoïde G sont portés et $p(C_6) = 2$, cependant on ne peut pas obtenir G à partir d'**amalgamations portées** de C_6 . Néanmoins, les ensembles médians des systèmes de benzénoïdes sont G^2 -connexes.

Proposition 7.8.1. *Les ensembles médians des systèmes de benzénoïdes G sont G^2 -connexes.*

Démonstration. D'après les Théorèmes 6.1.9 et 6.2.1, il suffit de montrer que la somme totale des distances F_π est localement-faiblement 2-sans-pic. Soit le plongement isométrique $\varphi : V \rightarrow T_1 \square T_2 \square T_3$ de G dans le **produit cartésien** des trois arbres T_1, T_2, T_3 défini plus haut. Pour tout sommet x de G , soit les coordonnées (x_1, x_2, x_3) de $\varphi(x)$ dans $T_1 \square T_2 \square T_3$. On note la fonction de distance de T_i par d_i au lieu de d_{T_i} , $i = 1, 2, 3$. On note également π_i le profil sur T_i obtenu à partir de π de la même manière que pour les **produits cartésiens**. Les systèmes de benzénoïdes étant bipartis, pour tout triplet de sommets x, y, u de G tel que $x \sim y$, alors $|d(u, x) - d(u, y)| = 1$ et soit $x \in I(u, y)$, soit $y \in I(u, x)$. En effet, supposons l'inverse et considérons un sommet $u' \in I(u, x) \cap I(u, y)$ à distance maximale de u . On a alors la concaténation de l'arête xy avec un plus court chemin entre u' et x et un plus court chemin entre u' et y qui définit un cycle impair.

On poursuit avec la propriété suivante des benzénoïdes :

Affirmation 7.8.2. *Tout hexagone ou hexagone incomplet H de G est porté.*

Démonstration. Soit un sommet $u \in V$ et soit un sommet x de H minimisant $d(u, x)$. Si x n'est pas la porte de u dans H , il existe alors un sommet y dans H tel que $d(u, y) < d(u, x) + d(x, y)$.

Soit le sommet y de H le plus proche de u tel que cette inégalité est vraie. Si $x \sim y$, alors par minimalité de $d(u, x)$, nous avons $d(u, y) = d(u, x)$, ce qui est impossible comme G est biparti. On a donc nécessairement $d(x, y) = 2$ ou $d(x, y) = 3$.

On suppose pour commencer que $d(x, y) = 2$. Soit l'unique voisin commun s de x et y . Comme G est biparti, on peut déduire du choix de x et y que $d(u, x) = d(u, y) = d(u, s) - 1$. On suppose sans perte de généralité que $xs \in E_1$ et $sy \in E_2$. Si x, y appartient à un hexagone H , alors chacun des x, y ont un second voisin dans H . Si x, y appartient à un hexagone incomplet H , alors soit x soit y a un second voisin dans H . On suppose sans perte de généralité que x a un voisin z dans H et on observe que $xz \in E_3$. D'après le choix de x , $d(u, z) = d(u, x) + 1 = d(u, s)$. Soit p le voisin de x dans $I(x, u)$. Comme $xs \in E_1$ et $xz \in E_3$, xp appartient nécessairement à E_2 (cf Figure 7.16a). Par conséquent, il y a deux chemins dans T_2 séparant les sommets $s_2 = x_2 = z_2$ et u_2 : un commence avec l'arête x_2p_2 et l'autre avec l'arête s_2y_2 . Ceci est possible seulement si les arêtes xp et sy sont parallèles. Comme x et s sont adjacents dans G , c'est impossible. Ceci conclut l'analyse du cas $d(x, y) = 2$.

On suppose maintenant que $d(x, y) = 3$ et on considère deux sommets s, t tels que (x, s, t, y) est un chemin de taille 3. Soit $xs \in E_1$, $st \in E_2$, et $ty \in E_3$. Comme G est biparti, d'après le choix de x et y , $d(u, s) = d(u, x) + 1$, $d(u, t) = d(u, y) + 1$, et $|d(u, s) - d(u, t)| = 1$. Comme $d(u, x) \leq d(u, y)$, nous pouvons conclure que $d(u, t) = d(u, s) + 1 = d(u, y) + 1 = d(u, x) + 2$. Soit P_x un plus court chemin entre u et x et P_y entre u et y . La concaténation de P_x , de (x, s, t, y) , et de P_y inclus un C_6 contenant les sommets x, s, t, y . D'après la propriété (2) des classes de parallélisme, les arêtes xs , st , et ty du C_6 sont parallèles aux arêtes e_1, e_2, e_3 , respectivement du C_6 . Comme P_x concaténé à l'arête sx est un plus court chemin entre les sommets s et u de G , d'après la propriété (1) des classes de parallélismes, l'arête e_1 ne peut appartenir à P_x , et donc $e_1 \in P_y$. De manière analogue, comme P_x concaténé au chemin (x, s, t) est un plus court chemin P' entre t et u et P_y concaténé avec l'arête ty est un plus court chemin P'' entre t et u , nous pouvons conclure que $e_2 \notin P_x$ et $e_3 \notin P_y$, donc $e_2 \in P_y$ et $e_3 \in P_x$. Si H est un hexagone et z est le second voisin de x dans H , alors l'arête xz est parallèle à ty et donc à e_3 (cf Figure 7.16b). On peut conclure du choix de x comme plus proche sommet de u dans H et du fait que G biparti, que P_x plus l'arête xz est un plus court chemin entre z et u . Comme les arêtes xz et e_3 sont parallèles et appartiennent tous les deux à ce chemin, nous obtenons une contradiction avec la propriété (1) des classes de parallélisme. On suppose donc que H est un hexagone incomplet. Soit H' l'hexagone de la grille hexagonale contenant H et soit z et z' les voisins de x et y dans H' respectivement. Soit également le voisin p de x dans P_x et q le voisin de y dans P_y . Alors $xz \in E_3$ et $z'y \in E_1$ (cf Figure 7.16c). Comme H est un hexagone incomplet, soit $z \notin V(G)$ et $z \neq p$ ou $z' \notin V(G)$ et $z' \neq q$. Si $z' \neq q$, alors nécessairement $yq \in E_2$. Par conséquent, dans l'arbre T_2 nous avons deux chemins entre $t_2 = y_2$ et u_2 : un commence avec l'arête t_2s_2 et l'autre avec l'arête y_2q_2 . Ceci est possible seulement si les arêtes st et yq sont parallèles. Comme t et y sont adjacents dans G , c'est impossible. Si $z \neq p$, alors dans l'arbre T_2 , nous avons deux chemins entre $s_2 = x_2$ et u_2 : un commence avec l'arête x_2p_2 et l'autre avec l'arête s_2t_2 . Ceci est uniquement possible si les arêtes st et xp sont parallèles. Comme s et x sont adjacents dans G , ce n'est pas possible. Cette contradiction finit l'analyse du cas $d(x, y) = 3$ et conclut la preuve. \square

Tout comme dans les preuves précédentes nous allons montrer que F_π vérifie la propriété du losange $\text{Loz}(u, v)$ pour tous u, v tels que $3 \leq d(u, v) \leq 4$. Plus précisément, $I^\circ(u, v)$ contient deux sommets s et t (pas nécessairement différents) tels que $F_\pi(s) + F_\pi(t) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$. Nous distinguons deux cas : $d(u, v) = 3$ et $d(u, v) = 4$.

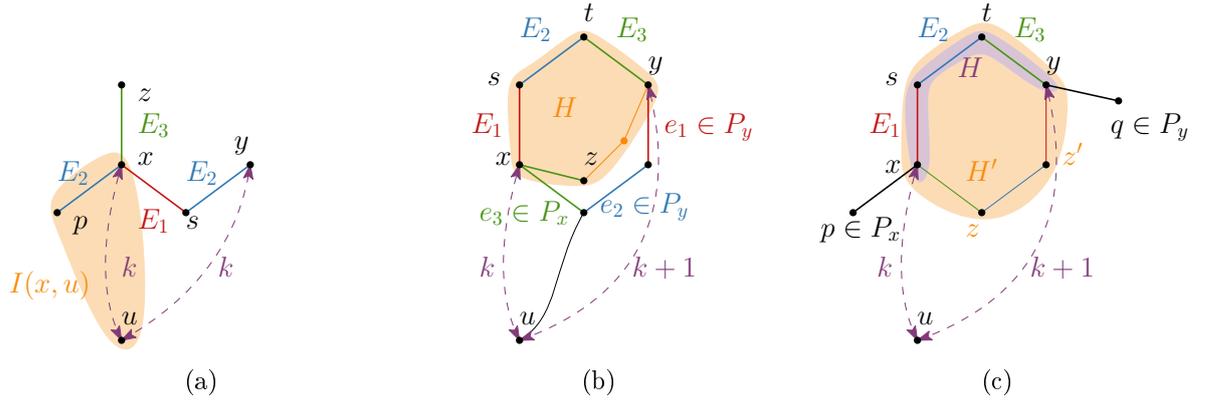


FIGURE 7.16 – Illustration de la preuve de l'Affirmation 7.8.2

Cas 1. $d(u, v) = 3$.

D'après la définition des benzénoïdes, toute paire d'arêtes consécutives sur une (u, v) -géodésique appartiennent à différentes classes du triplet E_1, E_2, E_3 . Alors $I(u, v)$ est soit un hexagone, soit un 3-chemin. Si $I(u, v)$ est un hexagone C , on choisit alors s et t tels que $s \sim u$ et $t \sim v$ sont des sommets opposés de C . Pour tout sommet x du profil π , soit x' sa porte sur C . Alors indépendamment de la localisation de x' sur C , nous avons $d(x', u) + d(x', v) = d(x', s) + d(x', t) = 3$ et donc $d(x, u) + d(x, v) = d(x, s) + d(x, t)$. Par conséquent, $F_\pi(u) + F_\pi(v) = F_\pi(s) + F_\pi(t)$. De manière analogue, si $I(u, v)$ est un hexagone incomplet P , on choisit $s, t \in P$ avec $s \sim u$ et $t \sim v$. Soit la porte x' de x sur P . Alors indépendamment de la localisation de x' sur P , $d(u, x') + d(v, x') = 3$ et $d(s, x') + d(t, x') \leq 3$. Par conséquent, $d(x, s) + d(x, t) \leq d(x, u) + d(x, v)$, et ainsi $F_\pi(s) + F_\pi(t) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$.

On suppose finalement que $I(u, v)$ est un 3-chemin P qui n'est pas inclus dans un hexagone. Alors la première et la troisième arête de P appartiennent à la même classe, disons E_1 , et l'arête du milieu appartient à une autre classe, disons E_2 . Nous fixons à nouveau $s \sim u$ et $t \sim v$. On observe que les coordonnées de u, v, s, t vérifient les égalités $u_3 = s_3 = t_3 = v_3$, $u_2 = s_2$ et $t_2 = v_2$. Comme dans T_1 , $s_1 = t_1 \in I(u_1, v_1)$, pour tout $x \in \text{supp}(\pi)$ et tout $i = 1, 2, 3$, nous avons $d_i(s_i, x_i) + d_i(t_i, x_i) \leq d_i(u_i, x_i) + d_i(v_i, x_i)$ pour tout i , et ainsi $F_\pi(s) + F_\pi(t) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$.

Cas 2. $d(u, v) = 4$.

De manière analogue au cas $d(u, v) = 3$, $I(u, v)$ est soit un 4-chemin P ou un hexagone avec une arête supplémentaire. On suppose pour commencer que $I(u, v)$ est un hexagone C avec une arête supplémentaire $e = zv$. Alors u est le sommet de C à l'opposé de z . On suppose que l'arête e appartient à E_1 et on observe que C contient deux arêtes de E_1 . Soit s, t les deux voisins de z dans C . Alors s, t sont à distance 2 de u et de v . On observe que $s_1 = t_1 \in I(u_1, v_1)$ et que nous pouvons supposer que $s_2 = u_2$, $t_2 = v_2$, $s_3 = v_3$, et $t_3 = u_3$. Par conséquent, pour tout $x \in \text{supp}(\pi)$, nous avons $d_i(s, x) + d_i(t, x) \leq d_i(u, x) + d_i(v, x)$ et donc $F_\pi(s) + F_\pi(t) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$.

On suppose maintenant que $I(u, v)$ est un 4-chemin $P = (u, s, r, t, v)$. Alors les arêtes de P apparaissent dans un de ces ordres : (a) E_1, E_2, E_1, E_2 , (b) E_1, E_2, E_3, E_1 , or (c) E_1, E_2, E_3, E_2 . Dans les deux derniers cas, P consiste en un hexagone incomplet $P' = (u, s, r, t)$ plus une arête tv . Pour un sommet $x \in \text{supp}(\pi)$, on note x' la porte de x dans P' .

Dans le cas (a), soit le sommet r au milieu de P . Alors $d_1(u_1, v_1) = d_1(u_1, r_1) + d_1(r_1, v_1)$,

$d_2(u_2, v_2) = d_2(u_2, r_2) + d_2(r_2, v_2)$, et $u_3 = r_3 = v_3$. Comme la fonction de distance est convexe dans les arbres, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \text{supp}(\pi)$, nous avons $2d_i(r_i, x_i) \leq d_i(u_i, x_i) + d_i(v_i, x_i)$ et donc $2F_\pi(r) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$. Donc dans ce cas nous pouvons supposer que les deux sommets de $\text{Loz}(u, v)$ coïncident avec r .

On considère maintenant le cas (b), i.e., $us, tv \in E_1$, $sr \in E_2$, et $rt \in E_3$. Dans ce cas, le 3-chemin $P'' = (s, r, t, v)$ est un hexagone incomplet. On choisit arbitrairement un sommet $x \in \text{supp}(\pi)$. Si u n'est pas la porte x' de x dans P' , nous avons alors $d(s, x) = d(u, x) - 1$. Comme $d(t, x) \leq d(v, x) + 1$, nous obtenons que $d(s, x) + d(t, x) \leq d(u, x) + d(v, x)$. De manière similaire, si v n'est pas la porte x'' de x dans P'' , on obtient alors $d(s, x) + d(t, x) \leq d(u, x) + d(v, x)$. Finalement, si u est la porte de x dans P' et v est la porte de x dans P'' , alors nous devons avoir $d(x, t) = d(x, s) + 2$ et $d(x, s) = d(x, t) + 2$, ce qui est impossible.

On considère le cas (c), i.e., $us \in E_1$, $sr, tv \in E_2$, et $rt \in E_3$. Comme dans le cas (b), on peut supposer que u est la porte de x dans l'hexagone incomplet P' et que $d(x, v) = d(x, t) - 1$. Comme u est la porte de x dans P' , nous avons $d_2(x_2, u_2) = d_2(x_2, s_2) = d_2(x_2, r_2) - 1 = d_2(x_2, t_2) - 1$. Comme $tv \in E_2$ et $d(x, v) = d(x, t) - 1$, nous avons $d_2(x_2, v_2) = d_2(x_2, t_2) - 1$. Par conséquent, dans T_2 le sommet $r_2 = t_2$ a deux voisins distincts $s_2 = u_2$ et v_2 sur un plus court chemin entre r_2 et x_2 , ce qui est impossible car T_2 est un arbre. \square

7.9 Conclusion

Nous avons montré que les graphes pontés et faiblement pontés (et donc triangulés), les graphes aux boules convexes, les graphes bucoliques, hypercellulaires, les graphes de Helly bipartis, et les systèmes de benzénoïdes, ont leurs ensembles médians qui sont G^2 -connexes. Nous avons donné des conditions locales suffisantes pour qu'un [graphe modulaire](#) soit un graphe aux médians G^2 -connexes. Nous avons également caractérisé les sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et les demi-cubes pour lesquels les ensembles médians sont connexes.

Les demi-cubes sont exactement les carrés d'hypercubes et les graphes de Johnson sont les sous-graphes isométriques des demi-cubes induits par les dimensions d'hypercubes. Il pourrait donc être intéressant d'étudier les domaines d'ordres linéaires (ou d'autres types d'ordonnement partiels) induisant certains demi-cubes partiels ou certains graphes de Johnson partiels. Dans ce cas, ces domaines sont vus non pas comme des sous-graphes de permutahédres (ou d'hypercubes) mais en temps que sous-graphes induits de demi-cubes ou de graphes de Johnson. Notons que ces domaines sont encodés par les sommets de l'hypercube (vus comme des vecteurs $(0, 1)$) ayant un nombre pair de 1 pour le demi-cube (respectivement le même nombre de 1 pour le graphe de Johnson).

Chapitre 8

ABC(T)-graphes : Une caractérisation axiomatique de la procédure du médian dans les graphes aux médians connexes et G^2 -connexes

Dans ce chapitre, nous étudierons la fonction médian dans les graphes, i.e., la fonction qui, à un profil de sommets $\pi = (x_1, \dots, x_n)$, associe l'ensemble des sommets u minimisant la somme totale des distances $F_\pi(u) = \sum_{i=1, \dots, n} d(u, x_i) = \sum_{x \in V} \pi(x)d(u, x)$. Les résultats de ce Chapitre sont présentés dans l'article [26].

On note V^* l'ensemble de tous les profils de taille finie. Une *fonction consensus* sur un graphe $G = (V, E)$ est une fonction de la forme $L : V^* \rightarrow 2^V \setminus \emptyset$. On observe que la fonction Med qui à un profil π associe l'ensemble médian $\text{Med}(\pi)$ est bien une fonction consensus.

Les trois axiomes simples (A), (B), (C) suivants pour les fonctions consensus sur les graphes ont été introduits dans [83, 84, 90] :

- (A) *Anonymat* : pour tout profil $\pi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, $L(\pi) = L(\pi^\sigma)$ avec $\pi^\sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.
- (B) *Intervalle (Betweeness)* : $L(u, v) = I(u, v)$.
- (C) *Cohérence* : pour tout profils π et ρ , si $L(\pi) \cap L(\rho) \neq \emptyset$, alors $L(\pi\rho) = L(\pi) \cap L(\rho)$.

Une illustration de l'axiome (C) est proposée en Figure 8.1, en 8.1a et 8.1b les ensembles médians associés aux profils bleu et rouge respectivement, et en 8.1c l'ensemble médian associé à la concaténation des profils bleus et rouges. Nous considérons également les axiomes triangles suivants, qui n'ont du sens que pour les graphes contenant des triangles :

- (T) *Triangle* : pour tout triplet de sommets u, v, w de G deux à deux adjacents, $L(u, v, w) = \{u, v, w\}$.
- (T⁻) *Triangle faible* : pour tout triplet de sommets u, v, w de G deux à deux adjacents, si $u \in L(u, v, w)$, alors $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$.

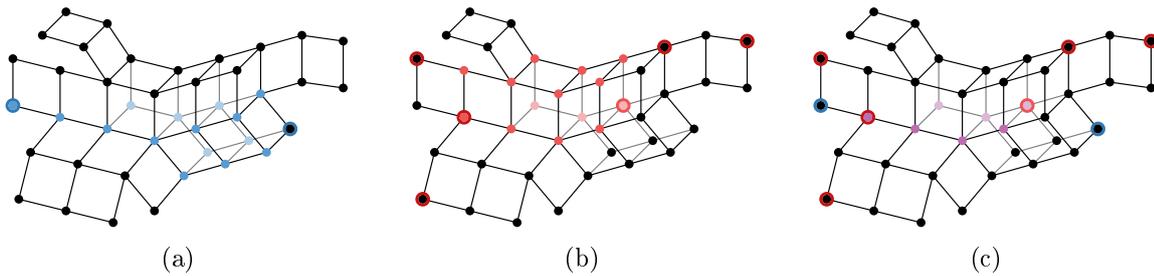


FIGURE 8.1 – Illustration de l'axiome (C)

On peut rapidement vérifier que la fonction médian Med vérifie les axiomes (A), (B), (C), (T) et (T^-) . D'après [83], les fonctions consensus vérifiant les axiomes (A), (B) et (C) sont appelées *ABC-fonctions*. On dit qu'un graphe G est un *ABC-graphe* s'il existe une unique ABC-fonction sur G , i.e., si la fonction médian est l'unique ABC-fonction. Les *ABCT-* et *ABCT⁻*-fonctions et les *ABCT-*, *ABCT⁻*-graphes sont définis de manière similaire. La caractérisation des ABC-graphes (et ABCT-graphes) est un problème ouvert. Le premier est nommé *ABC-problème* dans [83] et nous nommerons le second *ABCT-problème*.

Nous montrons dans la Section 8.1 que dans les graphes dont l'ensemble médian est connexe et dans les *graphes modulaires* dont l'ensemble médian est G^2 -connexe, la fonction médian Med peut être caractérisée en utilisant des axiomes simples. Les deux démonstrations suivent la même idée : soit une paire de sommets u, v telle que u et v sont adjacents (respectivement à distance 2). Pour tout profil π , nous définissons un profil π' tel que pour toute ABC-fonction L , $u, v \in L(\pi')$. Nous utilisons ce profil pour montrer qu'un sommet x appartient à $L(\pi)$ ssi la fonction médian appliquée à x est plus petite qu'appliquée à chacun de ses voisins (resp. à chacun des sommets à distance au plus 2 de x) et utilisons les résultats du Chapitre 6 pour montrer les deux résultats suivants :

Théorème (8.1.9). Tout graphe dont les médians sont connexes est un ABCT-graphe.

Théorème (8.1.18). Tout *graphe modulaire* $G = (V, E)$ dont les médians sont G^2 -connexes est un ABC-graphe.

MacMorris et al. [83] ont montré que les graphes vérifiant la propriété d'appariement (soient les graphes tels que pour tout profil pair de taille $2n$, il existe une partition de π contenant n paires de sommets telle que l'intersection des intervalles de toutes ces paires est non nulle) sont des ABC-graphes. En Section 8.2, nous étendons la propriété d'appariement en définissant la propriété de double appariement, qui se restreint aux profils pairs de la forme $\pi\pi$ et nous montrons que les graphes qui la respectent sont également des ABC-graphes. Certaines de nos démonstrations de cette section utilisent l'équivalence entre les problème d'appariement et de double appariement et un problème de π -couplage et de π -couplage fractionnaire respectivement.

Les graphes de Helly bipartis sont les graphes G où la condition de Helly (une famille d'ensemble \mathcal{F} vérifie la propriété de Helly si pour toute sous-famille \mathcal{F}' de \mathcal{F} telle que les ensembles de \mathcal{F}' s'intersectent deux à deux, l'intersection de tous les ensembles de \mathcal{F}' est non-vide) est respectée par l'intersection des boules et d'une des classes de couleurs de G . Ils ont été caractérisés de plusieurs façons par Bandelt, Dählmann et Schütte [19], nous montrons le résultat suivant :

Proposition. 8.2.7 Si un graphe G respecte la propriété de double-appariement, alors G est un graphe de Helly biparti.

Dans la sous-section suivante, nous construisons deux graphes de Helly bipartis ne respec-

tant respectivement pas la propriété d'appariement et double appariement. Nous utilisons pour cela les liens entre les graphes de Helly et les hypergraphes de Helly, qui sont les hypergraphes dont les hyperarêtes respectent la propriété de Helly. Nous étudions par la suite le problème de la reconnaissance des graphes respectant la propriété d'appariement et de double appariement. Nous montrons une caractérisation locale vers globale des graphes respectant la propriété d'appariement en construisant pour chaque sommet u un graphe dont l'ensemble de sommets est la boule de rayon 2 autour de u . Pour finir cette section, nous montrons un résultat concernant la complexité de la reconnaissance des graphes satisfaisant la propriété de double-appariement :

Proposition (8.2.17). La reconnaissance des graphes vérifiant la propriété de double-appariement appartient à co-NP.

La preuve de ce résultat reformule ce problème en un problème d'inclusion de polytopes.

Pour finir, en Section 8.3, nous étudions les systèmes de benzénoïdes et définissons tout d'abord une fonction L_6 sur les cycles de taille 6 et montrons le résultat suivant :

Proposition (8.3.5). C_6 admet plusieurs ABC-fonctions.

C_6 appartenant aux systèmes de benzénoïdes, nous en déduisons que les systèmes de benzénoïdes ne sont pas des ABC-graphes. Nous définissons donc de nouveaux axiomes simples pour une fonction consensus L , (T_2) forçant que pour tout triangle métrique équilatéral de taille 2, $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$ et (E_k) forçant que pour tout triangle métrique équilatéral de taille k , si $u \in L(u, v, w)$, alors $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$. Nous utilisons ensuite la même structure de démonstration que dans la Section 8.3 pour montrer le résultat suivant :

Théorème (8.3.17). Les systèmes de benzenoïdes sont des ABCT₂-graphes et ABCE₂-graphes.

8.1 ABC(T)-graphes

Dans cette section, nous prouvons deux résultats : (1) que les graphes dont l'ensemble médian est connexe sont des ABCT-graphes et (2) que les graphes modulaires aux médians G^2 -connexes sont des ABC-graphes.

8.1.1 Quelques propriétés des ABC-fonctions

Nous montrons deux lemmes à propos des ABC-fonctions qui nous seront utiles par la suite :

Lemme 8.1.1. Soit une ABC-fonction L sur un graphe G . Alors pour tout profil π , tout sommet $x \in V$, et tout $x' \in L(\pi, x)$, on a $x' \in L(\pi, x') \subseteq L(\pi, x)$.

Démonstration. On choisit arbitrairement $x'' \in L(\pi, x')$ et on considère le profil $\pi'' = \pi, x, x', x''$. Comme $x' \in L(\pi, x)$ et $x' \in L(x', x'') = I(x', x'')$, nous avons $x' \in L(\pi'') = L(\pi, x) \cap L(x', x'')$ (cf Figure 8.2a). Comme $x'' \in L(\pi, x')$ et $x'' \in L(x, x'') = I(x, x'')$, nous avons $x'' \in L(\pi'') = L(\pi, x') \cap L(x, x'') \subseteq L(\pi, x)$ (cf Figure 8.2b). \square

Lemme 8.1.2. Soit L une ABC-fonction sur un graphe G . Alors pour tout profil π avec $|\pi| \geq 2$ et tout sommet $x \in V$ tel que $x \in L(\pi, x)$, on a $\bigcap_{y \in \pi} I(x, y) = \{x\}$.

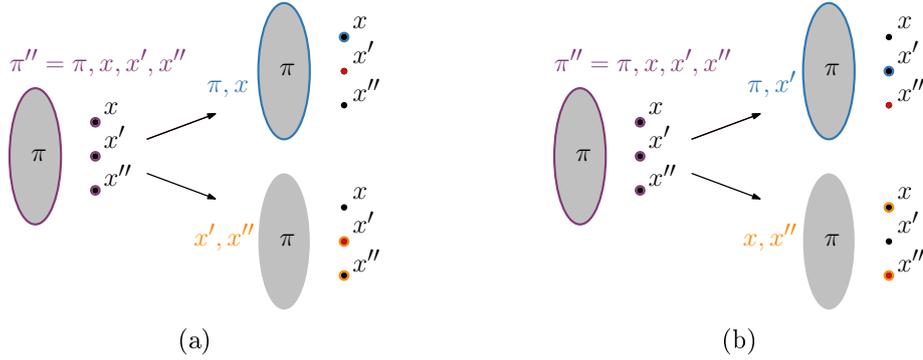


FIGURE 8.2 – Illustration de la preuve du Lemme 8.1.1 : la preuve en (a) que $x' \in L(\pi'')$ et en (b) que $x'' \in L(\pi'')$; dans les deux cas on décompose π'' (en violet) en deux autres profils (en bleu et orange)

Démonstration. On choisit arbitrairement $z \in \bigcap_{y \in \pi} I(x, y)$ (qui contient au moins x), soit $k = |\pi|$, on considère le profil $\pi' = \pi, x^k, z^{k-1}$. Comme $x \in L(\pi, x)$ et $x \in L(x^{k-1}, z^{k-1}) = L(x, z) = I(x, z)$, $x \in L(\pi') = L(\pi, x) \cap I(x, z)$. Comme $z \in \bigcap_{y \in \pi} L(y, x) = \bigcap_{y \in \pi} I(y, x)$ et $z \in L(z^{k-1}) = L(z) = \{z\}$, $L(\pi') = \bigcap_{y \in \pi} I(y, x) \cap \{z\} = \{z\}$ et par conséquent $x = z$. \square

Le Lemme 8.1.2 implique que si $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$, alors u, v, w forme un **triangle métrique**, i.e., les intervalles $I(u, v)$, $I(u, w)$ et $I(v, w)$ ne s'intersectent deux à deux que sur l'extrémité qu'ils ont en commun.

8.1.2 Les graphes aux médians connexes sont des ABCT-graphes

Dans cette section, on montre que Med est la seule ABCT-fonction dans les graphes aux médians connexes. Ceci généralise le résultat de [90] dans les graphes médians qui sont exactement les graphes bipartis (et donc sans triangle) dans lesquels l'ensemble médian est connexe pour tous les profils. Le lemme suivant montre que pour les ABC-fonctions dans les graphes aux médians connexes, (T^-) est équivalent à (T) :

Lemme 8.1.3. *Si G est un graphe vérifiant la condition du triangle (TC) et L est une $ABCT^-$ -fonction, alors L vérifie également l'axiome (T).*

Démonstration. On considère trois sommets deux à deux adjacents u, v, w et on suppose qu'il existe $x \in L(u, v, w) \setminus \{u, v, w\}$. Comme $x \in L(u, v, w)$, d'après le Lemme 8.1.1, on a $x \in L(u, v, x)$ et par conséquent, d'après le Lemme 8.1.2, $I(u, x) \cap I(v, x) = \{x\}$. Comme G vérifie la condition du triangle, x est nécessairement adjacent à u et v . Comme $x \in L(u, v, x)$, d'après (T^-) , on a $u, v, x \in L(u, v, x)$. Par conséquent, $u \in L(u, v, x) \cap L(u, w) = L(u, v, w, x, u)$ et comme $L(u, w) = \{u, w\}$, on a donc $L(u, v, w, x, u) \subseteq \{u, w\}$. Mais on a $x \in L(u, v, w) \cap L(u, x) = L(u, v, w, x, u)$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $L(u, v, w) \subseteq \{u, v, w\}$ et d'après (T^-) , on a $L(u, v, w) = \{u, v, w\}$. \square

On considèrera pour la suite de cette section que les fonctions consensus L sont des ABCT-fonctions et que les graphes respectent la condition (TC). Nous généralisons quelques idées de Mulder et Novick [90] pour montrer que si l'ensemble médian de G est connexe, alors L est la

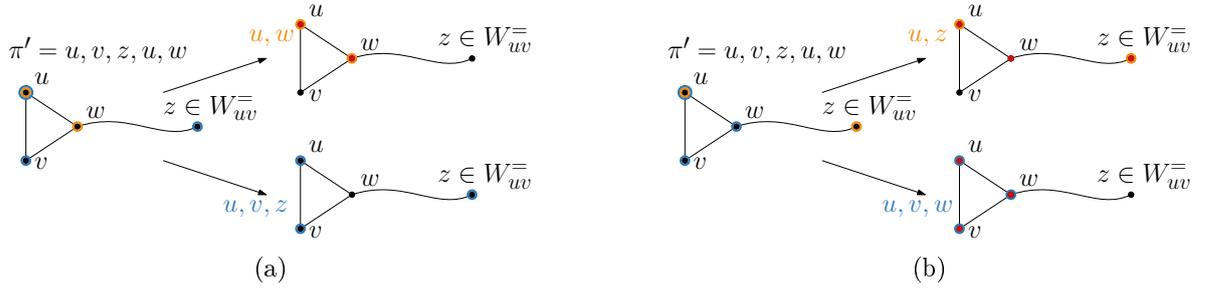


FIGURE 8.3 – Illustration de l'Affirmation 8.1.6

fonction médian sur G . Comme les graphes médians sont des graphes aux médians connexes et ne contiennent pas de triangles, nous obtenons une nouvelle preuve du résultat principal de [90] n'utilisant pas d'autre propriété des graphes médians que la connexité de leur ensemble médian.

On rappelle que pour toute arête uv de G , $W_{uv} = \{x \in V : d(u, x) < d(v, x)\}$, $W_{vu} = \{x \in V : d(v, x) < d(u, x)\}$, et $W_{uv}^= = \{x \in V : d(u, x) = d(v, x)\}$. On observe que si G est biparti, alors $W_{uv}^= = \emptyset$. Étant donné un profil π , on note π_{uv} (respectivement, $\pi_{vu}, \pi_{uv}^=$) la restriction de π à W_{uv} (respectivement, $W_{vu}, W_{uv}^=$). L'observation suivante est immédiate :

Lemme 8.1.4. *Pour toute arête uv d'un graphe G et toute paire de sommets x, y telle que $x \in W_{uv}$ et $y \in W_{vu}$, on a $u, v \in L(v, x) = I(v, x)$ et $u, v \in L(u, y) = I(u, y)$.*

Le Lemme suivant sert pour les sommets du profil dans $W_{uv}^=$.

Lemme 8.1.5. *Soit G vérifiant la condition du triangle (TC). Pour toute arête uv de G et tout $z \in W_{uv}^=$, on a $u, v \in L(u, v, z)$.*

Démonstration. En appliquant la condition du triangle à z , on obtient $w \sim u, v$ tel que $d(w, z) = d(u, z) - 1 = d(v, z) - 1$.

Affirmation 8.1.6. *Ou $u, v, w \in L(u, v, z)$, ou bien $u, v, w \notin L(u, v, z)$.*

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que $u \in L(u, v, z)$ ssi $w \in L(u, v, z)$. On suppose que $\{u, w\} \cap L(u, v, z) \neq \emptyset$ et on considère le profil (u, v, z, u, w) . Comme $L(u, w) = \{u, w\}$ et $\{u, w\} \cap L(u, v, z) \neq \emptyset$, on a $L(u, v, z, u, w) = \{u, w\} \cap L(u, v, z)$ (cf Figure 8.3a). D'après (T), $L(u, v, w) = \{u, v, w\}$ et comme $L(u, z) = I(u, z)$, on a $u, w \in L(u, v, w) \cap L(u, z) = L(u, v, z, u, w) = \{u, w\} \cap L(u, v, z)$ (cf Figure 8.3b). Par conséquent, $u \in L(u, v, z)$ ssi $w \in L(u, v, z)$. \square

Si $u \in L(u, v, z)$ ou $v \in L(u, v, z)$, il suffit d'utiliser l'Affirmation 8.1.6 pour finir la preuve. On suppose donc que $u, v \notin L(u, v, z)$ et soit $z' \in L(u, v, z)$. D'après le Lemme 8.1.1, $z' \in L(u, v, z') \subseteq L(u, v, z)$ et d'après le Lemme 8.1.2, $I(u, z') \cap I(v, z') = \{z'\}$. Comme G respecte (TC), nécessairement, $z' \sim u, v$. Ainsi, d'après (T), $L(u, v, z') = \{u, v, z'\}$ et par conséquent, $u, v \in L(u, v, z') \subseteq L(u, v, z)$. \square

Lemme 8.1.7. *Soit un graphe $G = (V, E)$ vérifiant la condition du triangle (TC) et soit un profil $\pi \in V^*$. Pour toute arête uv de G , on a $u, v \in L(\pi')$, où $\pi' = \pi, u^{\ell+p}, v^{k+p}$ avec $\ell = |\pi_{vu}|$, $k = |\pi_{uv}|$, et $p = |\pi_{uv}^=|$.*

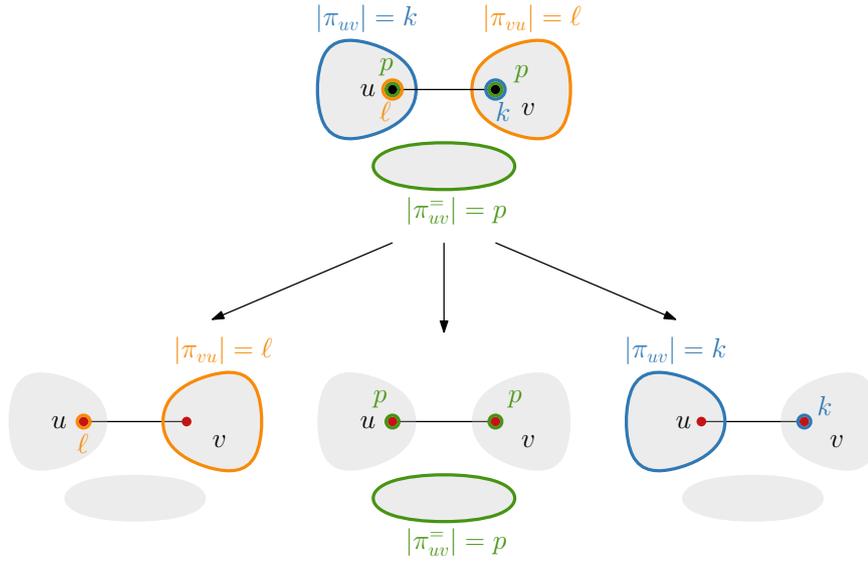


FIGURE 8.4 – Illustration du Lemme 8.1.7

Démonstration. Une illustration de cette preuve est donnée en Figure 8.4. Soit $\pi_{uv} = (x_1, \dots, x_k)$, $\pi_{vu} = (y_1, \dots, y_l)$, et $\pi_{uv}^- = (z_1, \dots, z_p)$. Considérons le profil $\pi' = \pi, u^{\ell+p}, v^{k+p}$. On observe que d'après le Lemme 8.1.4, $u, v \in \bigcap_{i=1}^k L(v, x_i) = \bigcap_{i=1}^k I(v, x_i)$ et que $u, v \in \bigcap_{i=1}^l L(u, y_i) = \bigcap_{i=1}^l I(u, y_i)$. On observe également que d'après le Lemme 8.1.5 $u, v \in \bigcap_{i=1}^p L(u, v, z_i)$. Et nous avons donc par conséquent, $u, v \in L(v, x_1, \dots, v, x_k, u, y_1, \dots, u, y_l, u, v, z_1, \dots, u, v, z_p) = L(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_p, u^{\ell+p}, v^{k+p}) = L(\pi')$. \square

Lemme 8.1.8. *Soit un graphe $G = (V, E)$ vérifiant la condition du triangle (TC) et un profil $\pi \in V^*$. Pour toute arête uv de G on a :*

- (1) *Si $F_\pi(u) = F_\pi(v)$, alors $u \in L(\pi)$ ssi $v \in L(\pi)$.*
- (2) *Si $F_\pi(u) > F_\pi(v)$, alors $u \notin L(\pi)$.*

Démonstration. Soit $\ell = |\pi_{vu}|$, $k = |\pi_{uv}|$, et $p = |\pi_{uv}^-|$. Supposons que $F_\pi(u) \geq F_\pi(v)$. On observe que $F_\pi(u) - F_\pi(v) = |\pi_{vu}| - |\pi_{uv}| = \ell - k \geq 0$. Comme dans le Lemme 8.1.7, on considère le profil $\pi' = \pi, u^{\ell+p}, v^{k+p}$. Observons que $\pi' = \pi, u^{\ell-k}, u^{k+p}, v^{k+p}$.

On suppose pour commencer que $\ell = k$ (i.e., $F_\pi(u) = F_\pi(v)$) et que $u \in L(\pi)$. Comme $u \in L(u^{k+p}, v^{k+p}) = L(u, v) = \{u, v\}$, nous avons $L(\pi') = L(\pi) \cap \{u, v\}$. D'après le Lemme 8.1.7, $u, v \in L(\pi')$ et donc $u, v \in L(\pi)$.

Supposons maintenant que $\ell > k$ (i.e., $F_\pi(u) > F_\pi(v)$) et que $u \in L(\pi)$. Comme $u \in L(u^{k+p}, v^{k+p}) = \{u, v\}$ et $u \in L(u^{\ell-k}) = L(u) = \{u\}$, nous avons $L(\pi') = L(\pi) \cap \{u, v\} \cap \{u\} = \{u\}$, ce qui contredit le Lemme 8.1.7. \square

Théorème 8.1.9. *Tout graphe dont les médians sont connexes est un $ABC(T)$ -graphe et un $ABC(T)^-$ -graphe.*

Démonstration. Étant donné que les graphes aux médians connexes vérifient la condition du triangle, nous pouvons appliquer le Lemme 8.1.8. On considère une $ABC(T)$ -fonction L et un profil

π sur V . On montre pour commencer que $L(\pi) \subseteq \text{Med}(\pi)$. On choisit arbitrairement $u \in L(\pi)$. D'après la Proposition 6.1.6(1), si $u \notin \text{Med}(\pi)$, il existe alors $v \in N(u)$ tel que $F_\pi(v) < F_\pi(u)$. Donc d'après le Lemme 8.1.8(2), $u \notin L(\pi)$, et on arrive à une contradiction.

On montre maintenant que $\text{Med}(\pi) \subseteq L(\pi)$. D'après la Proposition 6.1.6(6), $\text{Med}(\pi)$ est connexe dans G . Par conséquent, si $L(\pi) \subsetneq \text{Med}(\pi)$, il existe $u \in L(\pi)$ et $v \in \text{Med}(\pi) \setminus L(\pi)$ tel que $u \sim v$. Comme $u, v \in \text{Med}(\pi)$, $F_\pi(u) = F_\pi(v)$ et on arrive à une contradiction avec le Lemme 8.1.8(1). Ainsi, les graphes aux médians connexes sont des ABC(T)-graphes. Et comme ils vérifient également la condition du triangle, d'après le Lemme 8.1.3, ce sont des ABC(T⁻)-graphes. \square

Remarque. Comme le graphe complet K_3 a plusieurs ABC-fonctions [83] et d'après le Théorème 8.1.9 une seule ABC(T⁻-fonction), les axiomes (A), (B), et (C) n'impliquent ni (T), ni (T⁻).

8.1.3 Les graphes modulaires dont l'ensemble médian est G^2 -connexe sont des ABC-graphes

Dans cette sous-section, nous montrons que tous les graphes modulaires aux médians G^2 -connexes admettent Med comme unique ABC-fonction. Ce résultat généralise les résultats de [90] et [83] qui montrent que les graphes médians et les graphes vérifiant la propriété d'appariement sont des ABC-graphes. En effet, dans la Section 8.2, nous montrons que les graphes avec la propriété d'appariement sont des graphes de Helly bipartis, et sont donc des graphes modulaires aux médians G^2 -connexes.

Une paire de sommets u, v à distance 2 est dite une 2-paire. Pour tout graphe biparti $G = (V, E)$ et toute 2-paire (u, v) de G , soient $X_{uv} = \{x \in V : d(u, x) < d(v, x)\}$, $X_{vu} = \{x \in V : d(v, x) < d(u, x)\}$, et $X_{uv}^- = \{x \in V : d(u, x) = d(v, x)\}$. Comme G est biparti, pour tout $x \in X_{uv}$, $d(v, x) = d(u, x) + 2$ et $u \in I(v, x)$. L'observation suivante est triviale :

Lemme 8.1.10. *Pour tout graphe biparti G , toute 2-paire (u, v) de G , tout $x \in X_{uv}$ et $y \in X_{vu}$, pour toute ABC-fonction L , nous avons $u, v \in L(v, x) = I(v, x)$ et $u, v \in L(u, y) = I(u, y)$.*

Le lemme suivant est très similaire au Théorème 5 de [83]. La différence est que nous considérons ici un sous-graphe $K_{2,n}$ d'un graphe biparti quelconque G et non le graphe $K_{2,n}$.

Lemme 8.1.11. *Pour tout graphe biparti G , toute 2-paire (u, v) et tout ensemble de sommets distincts $w_1, w_2, \dots, w_n \in I^\circ(u, v)$, avec $n \geq 2$, pour toute ABC-fonction L , nous avons $u, v \in L(w_1, w_2, \dots, w_n)$ et $u, v \in L(u, v, w_1, w_2, \dots, w_n)$.*

Démonstration. Soit le profil $\pi = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $u, v \in L(w_i, w_{i+1}) = I(w_i, w_{i+1})$ (avec la convention que $w_{n+1} = w_1$). Par conséquent, $u, v \in L(w_1, w_2) \cap L(w_2, w_3) \cap \dots \cap L(w_{n-1}, w_n) \cap L(w_n, w_1) = L(w_1, w_2, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}, w_n, w_n, w_1) = L(\pi\pi) = L(\pi)$. Comme $u, v \in L(u, v) = I(u, v)$, $u, v \in L(u, v) \cap L(\pi) = L(u, v, w_1, w_2, \dots, w_n)$. \square

Lemme 8.1.12. *Pour tout graphe modulaire G et toute 2-paire (u, v) , s'il existe un profil π tel que F_π n'est pas faiblement-sans-pic sur (u, v) , alors $I^\circ(u, v)$ contient au moins trois sommets w_1, w_2, w_3 .*

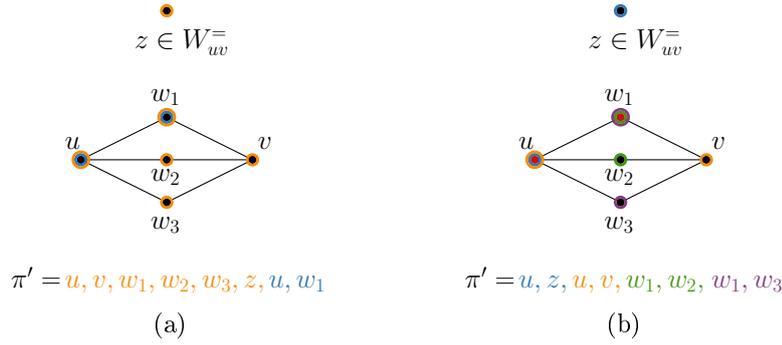


FIGURE 8.5 – Illustration de l’Affirmation 8.1.15

Démonstration. On suppose que $I^\circ(u, v)$ contient au plus deux sommets w_1, w_2 (où w_1 et w_2 peuvent coïncider). Soit un sommet x de π , si $d(u, x) < d(v, x)$, alors $d(w_1, x) + d(w_2, x) = d(u, x) + d(v, x)$. Et comme G est modulaire, si $d(u, x) = d(v, x)$ soit w_1 , soit w_2 appartient à $I(x, u) \cap I(x, v) \cap I(u, v)$, et ainsi $d(x, w_1) + d(x, w_2) \leq d(x, u) + d(x, v)$. Donc, $F_\pi(w_1) + F_\pi(w_2) \leq F_\pi(u) + F_\pi(v)$, ce qui contredit le fait que F_π n’est pas faiblement-sans-pic sur (u, v) . \square

Nous n’étudions donc par la suite que les propriétés des ABC-fonctions L sur les 2-paires (u, v) de G pour lesquelles $I^\circ(u, v)$ possède au moins trois sommets.

Lemme 8.1.13. *Soit un graphe biparti G , une 2-paire (u, v) avec $w_1, w_2, w_3 \in I^\circ(u, v)$, et $z \in X_{uv}^-$. Alors $u, v \in L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$.*

Démonstration. Soit $k = d(u, z) = d(v, z)$. Nous considérons pour commencer le cas où u, v appartient à un des intervalles $I(w_1, z), I(w_2, z), I(w_3, z)$. On observe que ceci couvre le cas où $z \in \{w_1, w_2, w_3\}$.

Affirmation 8.1.14. *Si $\max\{d(z, w_1), d(z, w_2), d(z, w_3)\} = k+1$, alors $u, v \in L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$.*

Démonstration. Soit $d(z, w_1) = k + 1$. Comme $u, v \in L(w_1, z) = I(w_1, z)$, $u, v \in L(u, v) = I(u, v)$, et $u, v \in L(w_2, w_3) = I(w_2, w_3)$, nécessairement $u, v \in L(w_1, z) \cap L(u, v) \cap L(w_2, w_3) = L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$. \square

D’après l’Affirmation 8.1.14 et comme G est biparti, nous pouvons supposer que $d(w_1, z) = d(w_2, z) = d(w_3, z) = k - 1$.

Affirmation 8.1.15. *Nous avons soit $u, v, w_1, w_2, w_3 \in L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$, soit $u, v, w_1, w_2, w_3 \notin L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$.*

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que u appartient à $L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$ ssi w_1 appartient à $L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$. On suppose que $L(u, v, w_1, w_2, w_3, z) \cap \{u, w_1\} \neq \emptyset$ et on considère le profil $\pi' = (u, v, w_1, w_2, w_3, z, u, w_1)$. On note que $L(u, w_1) = I(u, w_1) = \{u, w_1\}$ et donc $L(\pi') = L(u, v, w_1, w_2, w_3, z) \cap L(u, w_1) = L(u, v, w_1, w_2, w_3, z) \cap \{u, w_1\}$ (cf Figure 8.5a). On observe également que $u, w_1 \in L(u, z) = I(u, z)$, $u, w_1 \in L(u, v) = I(u, v)$, $u, w_1 \in L(w_1, w_2) = I(w_1, w_2)$, et $u, w_1 \in L(w_1, w_3) = I(w_1, w_3)$ (cf Figure 8.5b). Par conséquent, $u, w_1 \in L(u, z) \cap L(u, v) \cap L(w_1, w_2) \cap L(w_1, w_3) = L(u, z, u, v, w_1, w_2, w_1, w_3) = L(\pi') = L(u, v, w_1, w_2, w_3, z) \cap \{u, w_1\}$. Ainsi, $u, w_1 \in L(u, v, w_1, w_2, w_3, z)$, ce qui conclut la preuve. \square

(2) Si $F_\pi(u) > F_\pi(v)$, alors $u \notin L(\pi)$.

Démonstration. Soient $\ell = |\pi_{vu}|$, $k = |\pi_{uv}|$, et $p = |\pi_{\bar{u}v}|$. On suppose sans perte de généralité que $F_\pi(u) \geq F_\pi(v)$. Alors $F_\pi(u) - F_\pi(v) = |\pi_{vu}| - |\pi_{uv}| = \ell - k \geq 0$. Comme dans le Lemme 8.1.16, nous considérons le profil $\pi' = \pi, u^{\ell+p}, v^{k+p}, w_1^p, w_2^p, w_3^p$. On observe que $\pi' = \pi, u^{\ell-k}, u^k, v^k, u^p, v^p, w_1^p, w_2^p, w_3^p$.

On suppose pour commencer que $F_\pi(u) = F_\pi(v)$ (i.e., $\ell = k$) et que $u \in L(\pi)$. Comme $u \in L(u^k, v^k) = L(u, v) = I(u, v)$ et $u \in L(u^p, v^p, w_1^p, w_2^p, w_3^p) = L(u, v, w_1, w_2, w_3)$ d'après le Lemme 8.1.11, nous avons $L(\pi') = L(\pi) \cap L(u, v, w_1, w_2, w_3) \cap I(u, v)$. D'après le Lemme 8.1.16, $u, v \in L(\pi')$ et donc $u, v \in L(\pi)$.

On suppose maintenant que $F_\pi(u) > F_\pi(v)$ (i.e., $\ell > k$) et que $u \in L(\pi)$. Comme $u \in L(u^k, v^k) \cap L(u^p, v^p, w_1^p, w_2^p, w_3^p) = I(u, v) \cap L(u, v, w_1, w_2, w_3)$ et $u \in L(u^{\ell-k}) = L(u) = \{u\}$, nous avons $L(\pi') = L(\pi) \cap I(u, v) \cap L(u, v, w_1, w_2, w_3) \cap \{u\} = \{u\}$, une contradiction avec le Lemme 8.1.16. \square

Théorème 8.1.18. *Tout graphe modulaire $G = (V, E)$ dont les médians sont G^2 -connexes est un ABC-graphe. En particulier, tout graphe de Helly biparti est un ABC-graphe.*

Démonstration. On considère une ABC-fonction L sur V et un profil $\pi \in V^*$. Nous montrons pour commencer que $L(\pi) \subseteq \text{Med}(\pi)$. On fixe un sommet $u \in L(\pi)$. Si $u \notin \text{Med}(\pi)$, alors d'après le Théorème 6.2.1(1) pour $p = 2$ il existe un sommet v tel que $1 \leq d(u, v) \leq 2$ et $F_\pi(v) < F_\pi(u)$. Comme G est biparti, G vérifie la condition du triangle. Ainsi, si $d(u, v) = 1$ nous arrivons à une contradiction avec le Lemme 8.1.8(2). Nous pouvons donc supposer que $d(u, v) = 2$ et que $F_\pi(w) \geq F_\pi(u)$ pour tout voisin w de u . D'après le Lemme 8.1.12 appliqué à la 2-paire (u, v) , il existe trois sommets distincts $w_1, w_2, w_3 \in I^\circ(u, v)$. Par conséquent, d'après le Lemme 8.1.17(2), $u \notin L(\pi)$, ce qui est impossible, ce qui montre que $L(\pi) \subseteq \text{Med}(\pi)$. \square

8.2 Graphes respectant la propriété d'appariement

Dans cette section, nous étudions les graphes avec les propriétés d'appariement et de double appariement. MacMorris et al. [83] ont montré que les graphes avec la propriété d'appariement sont des ABC-graphes, nous montrons que c'est aussi le cas pour les graphes avec la propriété de double appariement. Nous montrons également que ces deux classes de graphes sont des sous-classes propres des graphes de Helly bipartis, ce qui implique que le Théorème 8.1.18 est une généralisation stricte de [83, Théorème 4]. Ensuite, nous présentons une caractérisation de type local vers global des graphes respectant la propriété d'appariement. À la fin de cette section, nous montrons que le problème décidant si un graphe vérifie la propriété de double appariement est dans co-NP, la question de son appartenance à NP reste ouverte.

8.2.1 Propriétés d'appariement et de double appariement

Pour tout profil π pair de taille $k = 2n$ de G , un *appariement* P de π est une partition de π en n paires disjointes. Pour tout appariement P on définit $D_\pi(P) = \sum_{\{a,b\} \in P} d(a, b)$. Un appariement P de π maximisant la fonction D_π est appelé un *appariement maximum*. La notion d'appariement a été définie par Gerstel et Zaks [61]; ils ont également montré la dualité faible suivante entre les fonctions F_π et D_π :

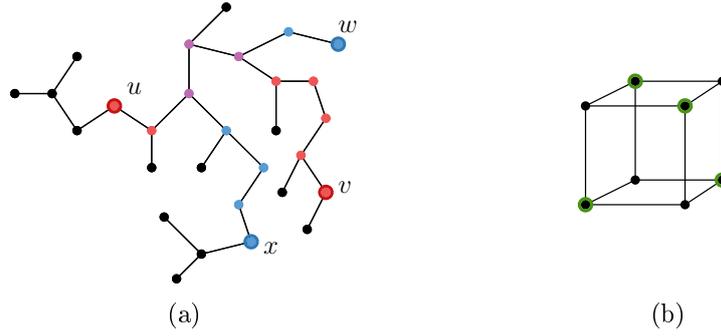


FIGURE 8.7 – Un appariement maximal $P = \{\{u, v\}, \{x, w\}\}$ dans un arbre à gauche, et un exemple de profil pour lequel il n'en existe pas à droite

Lemme 8.2.1. *Pour tout profil π de taille $k = 2n$ de G , pour tout appariement P de π et tout sommet v de G , $D_\pi(P) \leq F_\pi(v)$ et l'égalité est atteinte ssi $v \in \bigcap_{\{a,b\} \in P} I(a,b)$.*

Démonstration. Soit $P = \{\{a_i, b_i\} : i = 1, \dots, n\}$. D'après l'inégalité triangulaire, $D_\pi(P) = \sum_{i=1}^n d(a_i, b_i) \leq \sum_{i=1}^n (d(a_i, v) + d(v, b_i)) = \sum_{x \in \pi} d(v, x) = F_\pi(v)$. On observe que $D_\pi(P) = F_\pi(v)$ ssi $d(a_i, b_i) = d(a_i, v) + d(v, b_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, i.e., ssi $v \in I(a_i, b_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. \square

On dit qu'un graphe G vérifie la *propriété d'appariement* si pour tout profil π de taille paire il existe un appariement P de π et un sommet v de G tel que $D_\pi(P) = F_\pi(v)$, i.e., les fonctions F_π et D_π vérifient la dualité forte. Un tel appariement est appelé *appariement parfait*. On dit qu'un graphe G respecte la *propriété de double appariement* si pour tout profil π , le profil π^2 admet un appariement parfait. Trivialement, un graphe satisfaisant la propriété d'appariement vérifie également la propriété de double appariement.

Nous donnons un exemple de profil $\pi = (u, v, w, x)$ en Figure 8.7a où l'appariement $P = \{\{u, v\}, \{x, w\}\}$ est maximal et parfait, on a alors $D_\pi(P) = d(u, v) + d(w, x) = 17$, et pour tout sommet z dans l'intersection des intervalles $I(u, v)$ et $I(w, x)$ on a bien $F_\pi(z) = 17$. Comme il n'existe qu'un seul chemin entre chaque paire de sommets d'un arbre, on peut facilement voir que les arbres admettent toujours un appariement parfait. On présente également en Figure 8.7b un profil dans le cube n'admettant pas d'appariement parfait : tous les sommets v du cube sont médians avec $F_\pi(v) = 6$ et pour tous les appariements P , $D_\pi(P) = 4$.

D'après le Lemme 8.2.1, la propriété d'appariement de [61] coïncide avec la *propriété d'intersection d'intervalles* de [83]. D'après [83, Theorem 4] les graphes vérifiant la propriété d'appariement sont des ABC-graphes. L'article [61] montre que les arbres vérifient la propriété d'appariement. Plus généralement, il a été montré indépendamment dans [84] et dans [51] que c'est également le cas des graphes médians sans-cubes et dans [83] du graphe biparti complet $K_{2,n}$. Comme observé dans [83], le 3-cube est un exemple simple de graphe ne vérifiant pas la propriété d'appariement. L'étude des graphes respectant la propriété d'appariement a été formulé comme un problème ouvert dans [61].

Nous utilisons le lemme suivant, dont la première assertion correspond à [83, Théorème 4]. Ce lemme montre que tout graphe vérifiant la propriété d'appariement ou de double appariement est un ABC-graphe.

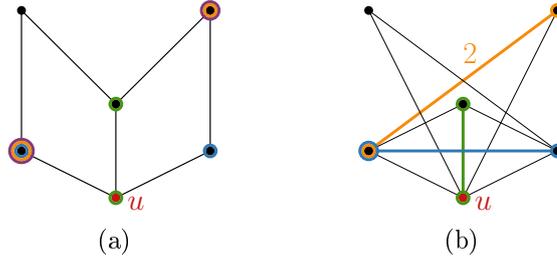


FIGURE 8.8 – Exemple de profil π (et d'appariement parfait de π) pour lequel le sommet $u \in \text{Med}(\pi)$ est tel que A_u admet un π -couplage entier parfait

Lemme 8.2.2. *Soit une ABC -fonction L sur un graphe G . Alors pour tout profil pair π dans G admettant un appariement parfait, nous avons $L(\pi) = \text{Med}(\pi)$. De plus, pour tout profil π où il existe un $k \geq 1$ tel que π^{2k} admet un appariement parfait, on a $L(\pi) = \text{Med}(\pi)$.*

Démonstration. On considère un appariement parfait P sur un profil pair π . Soit $v \in V$ tel que $D_\pi(P) = F_\pi(v)$. D'après le Lemme 8.2.1, v est un médian de π et $v \in \bigcap_{\{a,b\} \in P} I(a,b)$. Par conséquent, $\text{Med}(\pi) = \bigcap_{\{a,b\} \in P} I(a,b)$. D'après (B) et (C), $L(\pi) = \bigcap_{\{a,b\} \in P} L(a,b) = \bigcap_{\{a,b\} \in P} I(a,b)$, et donc $L(\pi) = \text{Med}(\pi)$.

On considère maintenant un profil π et un appariement parfait P de π^{2k} . D'après la première assertion, on a $L(\pi^{2k}) = \text{Med}(\pi^{2k})$. Et d'après (C), on a $L(\pi^{2k}) = \bigcap_{i=1}^{2k} L(\pi) = L(\pi)$ et $\text{Med}(\pi^{2k}) = \text{Med}(\pi)$. \square

Étant donné un profil π sur un graphe $G = (V, E)$, décider si π (ou π^2) admet un appariement parfait peut être réduit à un problème de π -couplage parfait comme suit. Considérons un sommet $u \in \text{Med}(\pi)$ et le graphe auxiliaire $A_u = (V, E_u)$ où $vw \in E_u$ ssi $u \in I(v,w)$ dans G , i.e., $d(v,w) = d(v,u) + d(u,w)$. Alors π admet un appariement parfait ssi le graphe A_u admet un π -couplage parfait, i.e., il existe un multi-ensemble P d'arêtes de E_u tel que chaque sommet $v \in V$ appartient à exactement $\pi(v)$ arêtes de P .

On rappelle qu'étant donné une fonction de poids $b : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, un b -couplage fractionnaire parfait de $A_u = (V, E_u)$ est une fonction de poids $x : E_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ sur les arêtes de A_u telle que pour chaque $v \in V$, $\sum_{e \in E_u : v \in e} x(e) = b(v)$.

Lemme 8.2.3. *Pour toute fonction de poids $b : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que A_u admet un b -couplage fractionnaire parfait, $u \in \text{Med}(b)$.*

Démonstration. On considère un b -couplage fractionnaire parfait $x : E_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ de A_u et on observe que d'après l'inégalité triangulaire, $v \in V$,

$$F_b(v) = \sum_{z \in V} b(z)d(v,z) = \sum_{z \in V} \left(\sum_{e : z \in e} x(e) \right) d(v,z) = \sum_{e = zz' \in E_u} x(e)(d(v,z) + d(v,z')) \geq \sum_{e = zz' \in E_u} x(e)d(z,z').$$

Dans l'inégalité précédente, l'égalité est atteinte ssi $v \in I(z, z')$ pour toutes les arêtes $e = zz'$ telles que $x(e) > 0$. D'après la définition des arêtes de A_u , nous concluons donc que $F_b(u) = \sum_{e = zz' \in E_u} x(e)d(z, z')$ et par conséquent, que $u \in \text{Med}(b)$. \square

Étant donné que décider si un graphe G admet un b -couplage parfait fractionnaire peut être fait en temps (fortement) polynomial [4, 81], le problème consistant à décider si un profil π d'un graphe G a un appariement parfait est donc polynomial.

Pour une fonction de poids donnée b , l'ensemble de tous les b -couplages fractionnaires de A_u est décrit par le polytope suivant $M(b, u)$ (cf [103]) :

$$M(b, u) \quad \begin{cases} \sum_{e:v \in e} x(e) = b(v) & \text{pour tout } v \in V \\ x(e) \geq 0 & \text{pour tout } e \in E_u \end{cases}$$

Si b est un profil π , i.e., $b(v) \in \mathbb{N}$ pour tout $v \in V$, alors soit le polytope $M(b, u)$ est vide (et A_u n'admet pas de b -couplage fractionnaire parfait), soit chaque sommet $\mathbf{x} = (x(e))_{e \in E_u}$ de $M(b, u)$ est demi-entier [11] (voir aussi [103, Theorem 30.2]), i.e., pour chaque $e \in E_u$, $x(e) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Par conséquent :

Lemme 8.2.4. *Étant donné un graphe G , une fonction de poids entière $b : V \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $b(v)$ est pair pour tout $v \in V$, et un sommet $u \in V$, alors soit le graphe auxiliaire A_u admet un b -couplage entier parfait, soit A_u n'admet pas de b -couplage parfait fractionnaire.*

Le Lemme 8.2.2 suggère que les graphes respectant la propriété du $2k$ -appariement (i.e., les graphes tels que pour tout profil π , le profil π^{2k} admet un appariement parfait) peuvent être une généralisation intéressante des graphes avec la propriété d'appariement ou de double appariement. Le résultat suivant montre cependant qu'il coïncident avec les graphes respectant la propriété de double appariement.

Lemme 8.2.5. *Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sommet $u \in V$, et un profil π sur G , si $M(\pi, u)$ est non vide, alors π^2 admet un appariement parfait. Par conséquent, si G admet un π^{2k} -appariement parfait pour un entier $k \geq 1$, alors G admet un π^2 -appariement parfait.*

Démonstration. On observe que si $M(\pi, u)$ est non vide, alors $M(\pi^2, u)$ est également non vide. D'après le Lemme 8.2.4, A_u admet un π^2 -couplage entier parfait et par conséquent, π^2 admet un appariement parfait.

Pour montrer la seconde assertion, on considère un profil π sur $G = (V, E)$ tel que π^{2k} admet un appariement parfait et on fixe $u \in \text{Med}(\pi^{2k}) = \text{Med}(\pi)$. On observe que si π^{2k} admet un appariement parfait, alors A_u admet un π -couplage fractionnaire parfait (où $x(e)$ est un multiple de $\frac{1}{2k}$ pour chaque $e \in E_u$). Par conséquent, le polytope $M(\pi, u)$ est non vide et donc π^2 admet un appariement parfait. \square

8.2.2 Les graphes respectant la propriété de (double-)appariement sont des graphes de Helly bipartis

Nous montrons maintenant que si un graphe G respecte la propriété de double appariement (et donc d'appariement) alors G est un graphe de Helly biparti.

On rappelle qu'une *demi-boule* d'un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$ est l'intersection d'une boule de G avec une de ses deux classes de couleur X ou Y et que les graphes de Helly bipartis sont des graphes G dans lesquels la collection des demi-boules de G respectent la propriété de Helly. Les graphes de Helly bipartis ont été caractérisés de plusieurs façons par by Bandelt, Dählmann, et Schütte [19] :

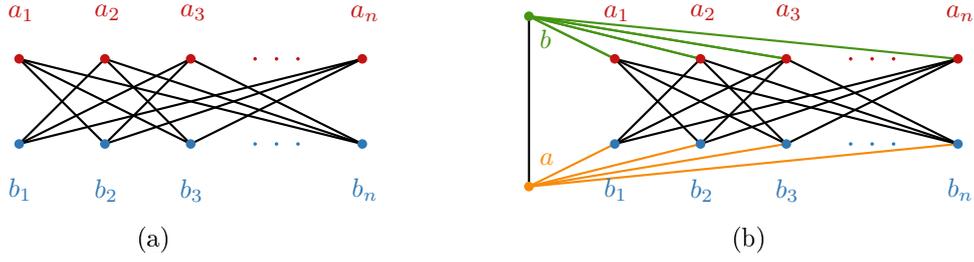


FIGURE 8.9 – À gauche le graphe B_n , et à droite \widehat{B}_n

Théorème 8.2.6 ([19]). *Pour un graphe biparti G , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) G est un graphe de Helly biparti ;
- (2) G est un **graphe modulaire** de largeur au plus 2 ;
- (3) G est un **graphe modulaire** tel que tout B_n ($n \geq 4$) est inclut dans un \widehat{B}_n dans G ;
- (4) G vérifie la condition d'intervalle suivante : pour toute paire de sommets u et v avec $d(u, v) \geq 3$, les voisins de v dans $I(u, v)$ sont tous adjacents à un unique sommet $x \neq v$ dans $I(u, v)$.

La condition (4) est la même que dans le Théorème 7.6.1 du Chapitre précédent. Le graphe B_n est le graphe biparti complet $K_{n,n}$ moins un couplage parfait, i.e., la bipartition de B_n est définie par a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n et a_i est adjacent à b_j ssi $i \neq j$ (cf Figure 8.9a). Le graphe \widehat{B}_n est obtenu à partir de B_n en ajoutant deux nouveaux sommets adjacents a et b tels que a est adjacent à tous les sommets b_1, \dots, b_n et b est adjacent à tous les sommets a_1, \dots, a_n (cf Figure 8.9a). On rappelle qu'un graphe G est de *largeur au plus 2* [19] si pour tout sommet u et tout ensemble de sommets W de G , $\bigcap_{v \in W} I(u, v) = \{u\}$ implique qu'il existe deux sommets $w', w'' \in W$ tels que $I(u, w') \cap I(u, w'') = \{u\}$.

Proposition 8.2.7. *Si un graphe G respecte la propriété de double appariement, alors G est un graphe de Helly biparti.*

Démonstration. On commence par montrer par l'absurde que G est biparti. Soit C un cycle impair de taille minimale sur G , alors C est un cycle isométrique de G . Soient une arête uv de C et le sommet w de C opposé uv . Soit $d(u, w) = d(v, w) = k \geq 1$. On considère le profil $\tau = (u, v, w)$ et soit $\pi = \tau^2 = (u, u, v, v, w, w)$. Alors $F_\pi(u) = F_\pi(v) = 2k + 2$. Pour tout autre sommet x de G , soit $k_1 = d(x, u) \geq 1$, $k_2 = d(x, v) \geq 1$, et $k_3 = d(x, w)$, où $k_1 + k_3 \geq k$ et $k_2 + k_3 \geq k$ (cf Figure 8.10a). On observe que $F_\pi(x) = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 \geq 2k + 2k_2 \geq 2k + 2$. Donc $u, v \in \text{Med}(\pi)$. Aux symétries près, π admet trois appariements non triviaux : $P_1 = \{\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}\}$, $P_2 = \{\{u, w\}, \{u, w\}, \{v, v\}\}$, $P_3 = \{\{u, v\}, \{u, v\}, \{w, w\}\}$. On observe que $D_\pi(P_1) = 2k + 1$, $D_\pi(P_2) = 2k$, et $D_\pi(P_3) = 2$, i.e., $D_\pi(P_i) < F_\pi(u)$ pour $i = 1, 2, 3$, et donc $\pi = \tau^2$ n'admet pas d'appariement parfait.

D'après le Théorème 8.2.6, G est un graphe de Helly biparti ssi G est un **graphe modulaire** et tout B_n ($n \geq 4$) peut être étendu à \widehat{B}_n . Pour montrer que G est **modulaire**, comme G est biparti, il suffit de montrer que G vérifie la condition du quadrangle (QC). Supposons par l'absurde que G contienne quatre sommets u, v, w, y tels que $y \sim u, v$ et $d(u, w) = d(v, w) = d(y, w) - 1 = k \geq 2$

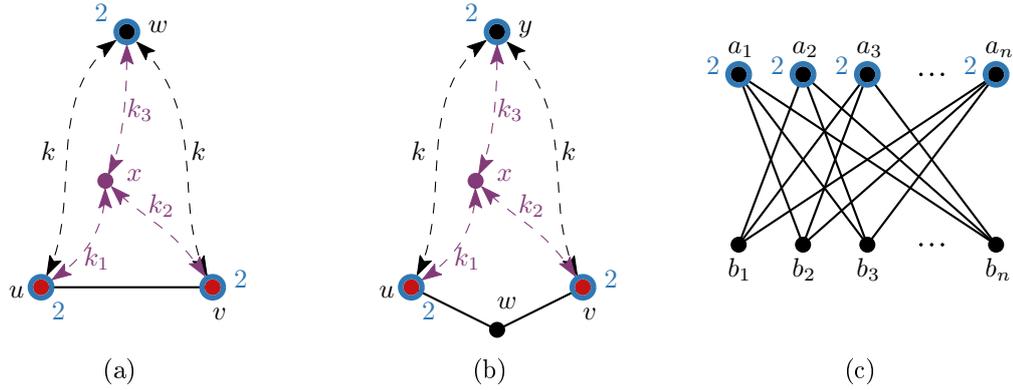


FIGURE 8.10 – Illustration des différents contreexemples de la preuve de la Proposition 8.2.7

et $I(u, w) \cap I(v, w) = \{w\}$. Considérons le profil $\tau = (u, v, w)$ et soit $\pi = \tau^2 = (u, u, v, v, w, w)$. Alors $F_\pi(u) = F_\pi(v) = 2k + 4$. On fixe un autre sommet x de G et soit $d(x, u) = k_1 \geq 1$, $d(x, v) = k_2 \geq 1$, et $d(x, w) = k_3 \geq 0$ (cf Figure 8.10b). Alors $k_1 + k_3 \geq k$ et $k_2 + k_3 \geq k$. On observe que $F_\pi(x) = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3$. Supposons que $F_\pi(x) < F_\pi(u)$, i.e., $2k_1 + 2k_2 + 2k_3 < 2k + 4$. Comme $k_1 + k_3 \geq k$ (respectivement $k_2 + k_3 \geq k$) ce n'est possible que si $k_2 = 1$ (respectivement $k_1 = 1$). Donc x est un voisin commun de u et v . Comme $I(u, w) \cap I(v, w) = \{w\}$ et G est biparti, nous devons avoir $k_3 = k + 1$, i.e., $F_\pi(x) = 2k + 6 > 2k + 4$, ce qui est impossible. Ceci montre que $u, v \in \text{Med}(\pi)$. À nouveau, aux symétries près, π admet trois appariements non triviaux : $P_1 = \{\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}\}$, $P_2 = \{\{u, w\}, \{u, v\}, \{v, v\}\}$, et $P_3 = \{\{u, v\}, \{u, v\}, \{w, w\}\}$. On observe que $D_\pi(P_1) = 2k + 2$, $D_\pi(P_2) = 2k$, et $D_\pi(P_3) = 4$, i.e., $D_\pi(P_i) < F_\pi(u)$ pour $i = 1, 2, 3$, est donc $\pi = \tau^2$ n'admet pas d'appariement parfait. Par conséquent, tout graphe G vérifiant la propriété de double appariement est **modulaire**.

Il reste à prouver que tout B_n ($n \geq 4$) induit peut être étendu à \widehat{B}_n . On suppose par l'absurde que G contient un sous-graphe B_n , $n \geq 3$ induit qui n'est pas inclus dans un \widehat{B}_n et on prend un tel B_n avec un nombre maximum de sommets (ce maximum existe car G est fini). On suppose que l'ensemble de sommets de B_n est défini par la bipartition $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$. Considérons le profil $\tau = \{a_1, \dots, a_n\}$ et soit $\pi = \tau^2 = \{a_1, a_1, \dots, a_n, a_n\}$ (cf Figure 8.10a). On observe que si P est un appariement maximal de π , alors $D_\pi(P) = 2n$. On note que $F_\pi(b_i) = 2(n - 1) + 6 = 2n + 4$ et $F_\pi(a_i) = 4n - 4$. Ainsi, si π admet un appariement parfait, alors il existe un sommet $x \neq a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tel que $F_\pi(x) = D_\pi(P) = 2n$. Si dans l'unique bipartition des sommets de G , x appartient à la même partie que a_1, \dots, a_n , alors $d(x, a_i) \geq 2$ et donc $F_\pi(x) \geq 4n$. Ainsi, x appartient à la même partie que b_1, \dots, b_n et pour obtenir $F_\pi(x) = D_\pi(P) = 2n$, x doit nécessairement être adjacent à tous les sommets a_1, \dots, a_n . De manière similaire, il existe $y \neq a_1, \dots, a_n$ adjacent à tous les sommets b_1, \dots, b_n . Si les sommets x et y ne sont pas adjacents dans G , alors x, y ajouté à $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ défini un B_{n+1} , contrairement à la maximalité de B_n . Donc, tout graphe G vérifiant la propriété de double appariement est un graphe de Helly biparti. \square

8.2.3 Graphes de Helly bipartis ne respectant pas la propriété d'appariement

Il existe malheureusement des graphes de Helly ne respectant pas la propriété de double appariement, ni donc d'appariement. Pour les construire, nous relierons les graphes de Helly bipartis

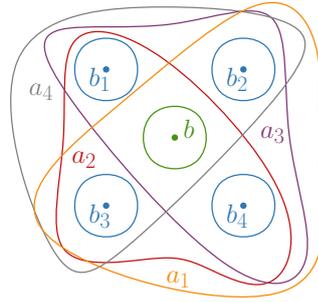


FIGURE 8.11 – Hypergraphe \mathcal{H}_a de \widehat{B}_4

aux hypergraphes de Helly. Un hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ consiste en un ensemble X et une famille \mathcal{E} de sous-ensembles de X . Un hypergraphe \mathcal{H} est appelé *hypergraphe de Helly* [29] si pour toute sous-famille \mathcal{E}' de \mathcal{E} d'ensembles s'intersectant deux à deux, l'intersection $\bigcap \mathcal{E}'$ est non vide. Étant donné un graphe G , pour tout sommet u de G , nous pouvons définir un hypergraphe \mathcal{H}_u de la manière suivante : l'ensemble des éléments de \mathcal{H}_u est l'ensemble $N(u)$ des voisins du sommet u et pour tout sommet v de G , l'ensemble $R_v := N(u) \cap I(u, v)$ est une hyperarête de \mathcal{H}_u (cf Figure 8.11). Alors la condition (2) du Théorème 8.2.6 peut être reformulée de la manière suivante :

Lemme 8.2.8. *Un graphe G est un graphe de Helly biparti ssi G est modulaire et pour tout sommet u , \mathcal{H}_u est un hypergraphe de Helly.*

Le lemme suivant nous permet de construire des graphes de Helly bipartis à partir d'hypergraphes de Helly. Nous associons à tout hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ le graphe $R(\mathcal{H})$ suivant, que nous appelons le *graphe d'incidence* de \mathcal{H} . L'ensemble de sommets $R(\mathcal{H})$ consiste en l'ensemble X , un sommet u adjacent à tous les sommets de X , et un sommet v_H pour chaque hyperarête $H \in \mathcal{E}$ qui est adjacent à exactement tous les sommets de X appartenant à H (cf Figure 8.12). Nous appelons les sommets $x \in X$ *v-sommets* et les sommets $v_H, H \in \mathcal{H}$ *h-sommets*. On observe que $R(\mathcal{H})$ est un graphe biparti dont la distance entre deux sommets ne peut être supérieure à 4.

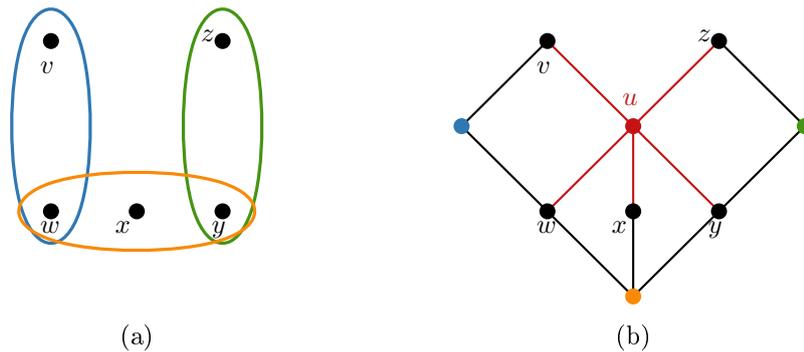


FIGURE 8.12 – À gauche un hypergraphe de Helly \mathcal{H} , et à droite le graphe $R(\mathcal{H})$ associé

Lemme 8.2.9. *Un hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ est Helly ssi son graphe d'incidence $R(\mathcal{H})$ est un graphe de Helly biparti.*

Démonstration. Une direction découle du Lemme 8.2.8. Réciproquement, on suppose que \mathcal{H} est Helly. On observe que pour toute paire d'hyperarêtes H, H' , $d(v_H, v_{H'}) = 4$ si $H \cap H' = \emptyset$ et

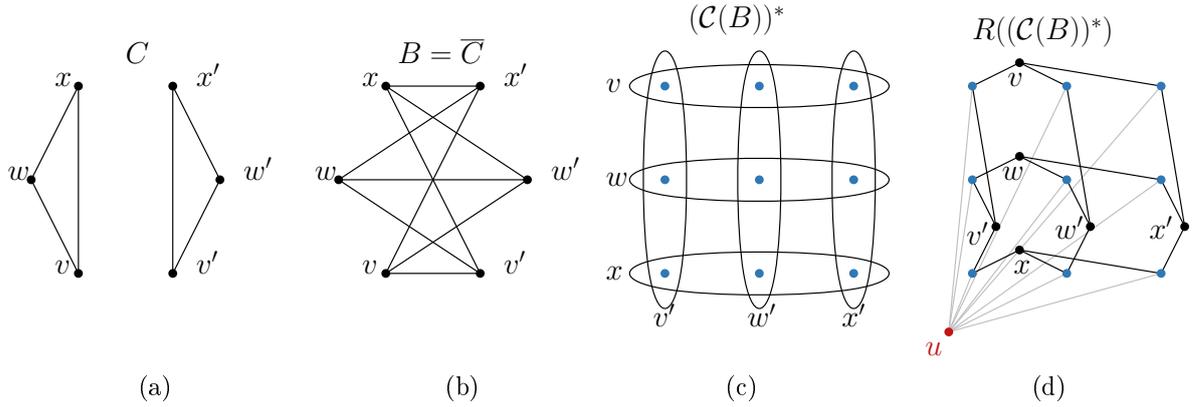


FIGURE 8.13 – Construction selon la Proposition 8.2.11 d'un exemple de graphe de Helly biparti $R((\mathcal{C}(B))^*)$ ne respectant pas la propriété d'appariement

$d(v_H, v_{H'}) = 2$ si $H \cap H' \neq \emptyset$. On observe également que $d(x, x') = 2$ pour tout $x, x' \in X$, $d(u, v_H) = 2$ et $d(x, v_H) \leq 3$ pour tout $H \in \mathcal{E}$ et $x \in X$. On montre que $R(\mathcal{H})$ respecte la condition (4) du Théorème 8.2.6. Nous devons considérer deux cas. On considère pour commencer deux sommets $v_H, v_{H'}$ avec $d(v_H, v_{H'}) = 4$. Alors H et H' sont disjoints et les sommets de v_H dans $I(v_H, v_{H'})$ sont exactement les sommets de H . Le sommet u est un de leur second voisin en commun dans $I(v_H, v_{H'})$.

Ensuite, nous considérons deux sommets $x \in X$ et v_H avec $d(x, v_H) = 3$. Ceci implique que $x \notin H$. Alors à nouveau, les voisins de v_H dans $I(v_H, x)$ ont u comme second voisin commun dans $I(v_H, x)$. Et les voisins de x dans $I(x, v_H)$ sont le sommet u et tout les sommets $v_{H'}$ tels que $H' \cap H \neq \emptyset$. Comme $x \in H' \cap H''$ pour toute paire de ces sommets $v_{H'}, v_{H''}$, en appliquant la propriété de Helly à H et à toutes les hyperarêtes H' telles que $v_{H'} \in I(x, v_H)$ nous trouvons un élément en commun $y \in X$. Dans $R(\mathcal{H})$, y est adjacent à tous les $v_{H'} \in I(x, v_H)$, et à u . Ceci montre que $R(\mathcal{H})$ est un graphe de Helly biparti. \square

Il existe un moyen simple de construire des hypergraphes de Helly à partir de graphes via la dualité des hypergraphes. Le *dual* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ est l'hypergraphe $\mathcal{H}^* = (X^*, \mathcal{E}^*)$ dont l'ensemble de sommets X^* est en bijection avec l'ensemble d'arêtes \mathcal{E} de \mathcal{H} et l'ensemble d'arêtes \mathcal{E}^* avec l'ensemble de sommets X , plus précisément \mathcal{E}^* consiste en tous les $S_x = \{H_j \in \mathcal{E} : x \in H_j\}$, $x \in X$. Par définition, $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$. L'*hypergraphe de clique* d'un graphe $B = (V, E)$ est l'hypergraphe $\mathcal{C}(B)$ dont l'ensemble de sommets est le même que B est dont les hyperarêtes sont les cliques maximales de B . Le lemme suivant fait partie du folklore de la théorie des hypergraphes :

Lemme 8.2.10 ([29]). *Le dual $(\mathcal{C}(B))^*$ de l'hypergraphe de clique de tout graphe B est un hypergraphe de Helly.*

Proposition 8.2.11. *Il existe des graphes de Helly bipartis ne vérifiant pas la propriété d'appariement (respectivement, la propriété de double appariement).*

Démonstration. On construit un graphe de Helly biparti ne vérifiant pas la propriété d'appariement et ayant la forme $R := R((\mathcal{C}(B))^*)$ pour un graphe spécialement choisit B . Le fait que R soit un graphe de Helly biparti découle des Lemmes 8.2.9 et 8.2.10. Par définition de l'hypergraphe dual, les sommets de $(\mathcal{C}(B))^*$ sont les cliques maximales de B et les hyperarêtes de

$(\mathcal{C}(B))^*$ sont en bijection avec les sommets de B . Pour chaque sommet b de B nous notons par $H(b)$ l'hyperarête de $(\mathcal{C}(B))^*$ correspondante ; $H(b)$ est constitué de toutes les cliques maximales de B contenant b . Ainsi les h -sommets de R sont en bijection avec les sommets de $B : v_{H(b)} \leftrightarrow b$. On observe également que pour tous sommets $b, b' \in V(B)$ distincts, $d(v_{H(b)}, v_{H(b')}) = 2$ ssi $b \sim b'$.

On fixe B comme étant un graphe avec $2m$ sommets et on considère les profils de taille $2m$ $\pi = (v_{H(b)} : b \in V(B))$, et le double profil $\tau = \pi^2$. On cherche à assurer que le sommet central u de R est dans $\text{Med}(\pi) = \text{Med}(\tau)$. On observe que $F_\pi(u) = 4m$. De plus, pour tout v -sommet x dans R , x correspond à une clique maximale K dans B et l'ensemble de voisins de x dans R est exactement $K \cup \{u\}$. Par conséquent, $F_\pi(x) = |K| + 3(2m - |K|)$ et donc $F_\pi(u) \leq F_\pi(x)$ ssi $|K| \leq m$. Toutes les cliques maximales de B sont donc taille au plus m ; de manière équivalente, tous les ensembles stables maximaux du complémentaire \overline{B} de B doivent être de taille au plus m . Pour tout h -sommet $v_{H(b)}$, $F_\pi(v_{H(b)}) = 2k + 4(2m - 1 - k) = 8m - 2k - 4$ où $k = |N_B(b)| \leq 2m - 1$. Étant donné que nous voulons avoir $4m = F_\pi(u) \leq F_\pi(v_{H(b)}) = 8m - 2k - 4$, i.e., $k \leq 2m - 2$, aucun sommet de B n'est donc adjacent à tous les sommets ; de manière équivalente, tous les sommets de \overline{B} doivent avoir au moins un voisin.

Si le profil π (respectivement, τ) de R respecte la propriété d'appariement, alors nous pouvons trouver un appariement P de π (respectivement, de τ) tel que pour toute paire $\{v_{H(b)}, v_{H(b')}\} \in P$ nous avons $u \in I(v_{H(b)}, v_{H(b')})$. Comme mentionné précédemment, ceci est équivalent au fait que l'on doit avoir $H(b) \cap H(b') = \emptyset$, qui est trivialement équivalent au fait que les sommets b et b' ne soient pas adjacents dans B . Ainsi, le profil π (respectivement, τ) de R admet un appariement parfait ssi le complémentaire \overline{B} de B admet un couplage parfait (respectivement, un τ -couplage parfait). Comme $\tau = \pi^2$, le poids de chaque nœud de B dans τ est 2, et donc d'après le Lemme 8.2.4 B admet un τ -couplage parfait ssi B admet un couplage fractionnaire parfait.

Nous devons donc construire un graphe C avec 6 sommets, sans sommet isolé, dans lequel l'ensemble stable maximal a une taille d'au plus 3 et n'admettant pas de couplage parfait (respectivement, de couplage fractionnaire parfait). Nous pouvons donc choisir $B = \overline{C}$ et dans ce cas $R((\mathcal{C}(B))^*)$ serait un graphe de Helly biparti ne respectant pas la propriété d'appariement (respectivement, la double propriété d'appariement). Pour la propriété d'appariement, nous pouvons prendre l'union disjointe de triangles C (et on a donc $B = K_{3,3}$). Dans ce graphe, il n'y a pas de sommet isolé, tout ensemble stable maximal est de taille 2, et il ne contient clairement pas de couplage parfait. On montre une illustration des différentes étapes de construction du contreexemple en Figure 8.13, l'hypergraphe de cliques $\mathcal{C}(B)$ n'est pas représenté étant donné que chacune de ses hyperarête est de taille 2. Pour la propriété de double appariement, nous choisissons C comme étant le graphe de 6 sommets obtenu en considérant un graphe complet de 4 sommets a, b, c, d auquel nous ajoutons deux nœuds x, y qui sont uniquement adjacents à a (cf Figure 8.14). Dans ce graphe il n'y a pas de sommet isolé, tout stable maximal est de taille au plus 3, et il ne contient pas de couplage fractionnaire parfait. En effet, le stable $S = \{x, y\}$ est de taille 2, mais $N(S) = \{a\}$ est de taille 1, empêchant tout couplage fractionnaire sur C d'être parfait. \square

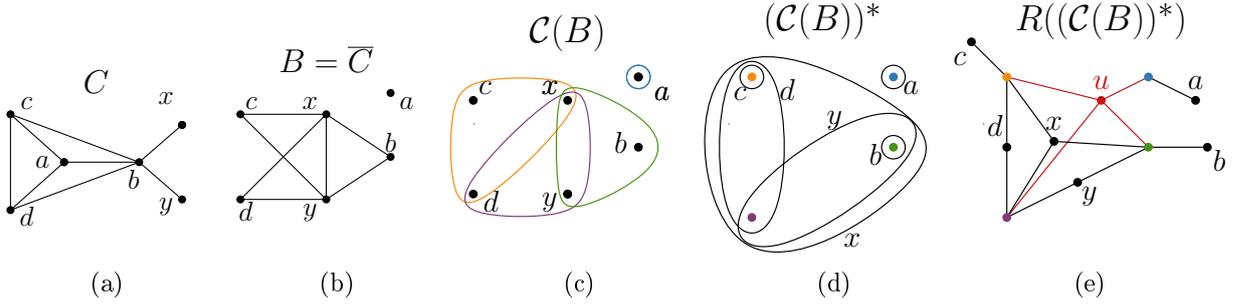


FIGURE 8.14 – Construction selon la Proposition 8.2.11 d'un exemple de graphe de Helly biparti $R((\mathcal{C}(B))^*)$ ne respectant pas la double propriété d'appariement

8.2.4 Une caractérisation locale vers globale de graphes respectant la propriété d'appariement

Nous présentons dans cette sous-section une caractérisation locale vers globale des graphes de Helly bipartis respectant la propriété d'appariement. Notons que les boules dans les graphes de Helly bipartis induisent des graphes qui sont également Helly bipartis.

Lemme 8.2.12. *Si G est un graphe de Helly biparti, alors pour tout sommet u et tout entier k , le sous-graphe de G induit par la boule $B_k(u)$ est un sous-graphe isométrique de G , et donc un graphe de Helly biparti.*

Démonstration. Soit le sous-graphe H de G induit par les sommets de $B_k(u)$. On montre pour commencer que H est un sous-graphe isométrique de G . On fixe deux sommets $x, y \in B_k(u)$. Comme G est modulaire, le triplet x, y, u admet un sommet médian z . Comme $x, y \in B_k(u)$ et $z \in I(u, x) \cap I(u, y)$, le sommet z et les intervalles $I(x, z)$ et $I(z, y)$ appartiennent à la boule $B_k(u)$. Comme $z \in I(x, y)$ et $I(x, z) \cup I(z, y) \subset B_k(u)$, x et y peuvent être connectés dans H par un plus court chemin de G , H est donc un sous-graphe isométrique de G .

On montre maintenant que H est un graphe de Helly biparti. Soit une collection de demi-boules de H s'intersectant deux à deux. On note $\frac{1}{2}B_{r_i}(x_i), i = 1, \dots, n$ et $\frac{1}{2}B'_{r'_i}(x_i), i = 1, \dots, n$ les demi-boules respectives de G . On suppose sans perte de généralité que $\frac{1}{2}B_{r_i}(x_i) = B_{r_i}(x_i) \cap X$, où X et Y sont les classes de couleur de G . Soit $\frac{1}{2}B_r(u) = B_r(u) \cap X$. On montre que pour tout $i = 1, \dots, n$, $\frac{1}{2}B_{r_i}(x_i) \cap \frac{1}{2}B_r(u) \neq \emptyset$. En effet, si x_i appartient à X , alors $x_i \in \frac{1}{2}B_{r_i}(x_i)$ et comme $x_i \in B_r(u)$ nous avons également $x_i \in \frac{1}{2}B_r(u)$. Sinon, si $x_i \in Y$, alors $r_i \geq 1$ et tout voisin z de x_i dans $I(x_i, u)$ appartiendrait à $\frac{1}{2}B_{r_i}(x_i)$ et à $B_r(u)$ et donc à $\frac{1}{2}B_r(u)$. Par conséquent, $\frac{1}{2}B_r(u), \frac{1}{2}B_{r_1}(x_1), \dots, \frac{1}{2}B_{r_n}(x_n)$ est une collection de demi-boules de G s'intersectant deux à deux. D'après la propriété de Helly, ces demi-boules contiennent un sommet commun que nous appellerons y . Comme $y \in \frac{1}{2}B_r(u) \subset B_r(u)$, y est un voisin en commun aux demi-boules $\frac{1}{2}B'_{r'_1}(x_1), \dots, \frac{1}{2}B'_{r'_n}(x_n)$ de H . \square

Pour tout sommet u d'un graphe de Helly biparti, on définit le graphe B_u de la manière suivante : l'ensemble des sommets de B_u est égal à l'ensemble $B_2(u)$ de tous les sommets à distance au plus 2 de u et deux de ces dits sommets v, v' sont adjacents dans B_u ssi $u \in I(v, v')$. On appellera B_u le *graphe local* du sommet u . On donne un exemple de graphe B_u en Figure 8.15.

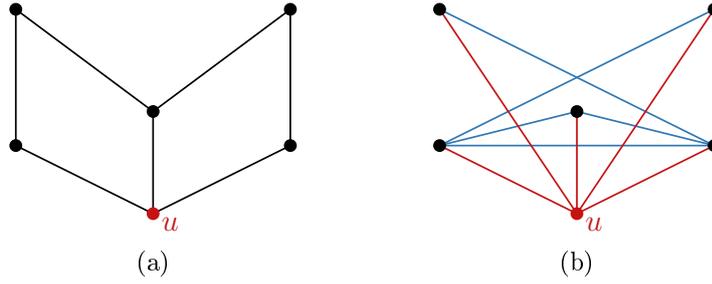


FIGURE 8.15 – Un graphe de Helly biparti à gauche et le graphe B_u correspondant à droite

On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ respecte la *propriété du couplage-stable* (respectivement, la *propriété du double-couplage-stable*) si pour tout profil pair π (respectivement, tout double profil $\pi = \tau^2$) sur G ,

- (1) soit il existe un sommet z de G tel que $\pi(z) > \pi(N_G(z))$,
- (2) soit il existe un stable maximal S tel que $\pi(S) > \pi(N_G(S))$,
- (3) soit il existe un π -couplage parfait dans G .

On observe que pour un stable maximal S , nous avons $S \cup N_G(S) = V$, et donc la condition (2) peut être reformulée en : il existe un stable (maximal) S tel que $\pi(S) > \frac{1}{2}\pi(V)$.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un double profil π sur V , d'après la condition de Hall fractionnaire [11, 103], le graphe G admet un π -couplage parfait ssi pour tout ensemble stable S de G , nous avons $\pi(N_G(S)) \geq \pi(S)$. D'après cette condition, pour tout double profil π tel que G n'admet pas de π -couplage parfait, il existe un stable S tel que $\pi(N_G(S)) < \pi(S)$. Un tel ensemble est appelé *stable invalidant* pour π . Une famille \mathcal{D} de stables de G est appelé *invalidante* pour G si pour tout double profil π , soit G admet un π -couplage parfait, soit il existe $S \in \mathcal{D}$ invalidant π . Alors, tout graphe G respecte la propriété de double-couplage-stable ssi la famille de tous les stables maximaux et minimaux (i.e., les sommets) de G est une famille invalidante.

Proposition 8.2.13. *Un graphe de Helly biparti G respecte la propriété d'appariement (respectivement, la double propriété d'appariement) ssi tous les graphes locaux $B_u, u \in V$ vérifient la propriété du couplage-stable (respectivement, la propriété du double-couplage-stable).*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe de Helly biparti vérifiant la propriété d'appariement (respectivement, la double propriété d'appariement). Considérons un sommet $u \in V$ et le graphe local correspondant $B_u = (V_u, E_u)$ ainsi qu'un profil pair (respectivement, un double profil) π sur $V_u \subseteq V$. On note que V_u est l'ensemble de sommets à distance au plus 2 de u dans G . Soit $X = N_G(u)$ et $Z = \{z \in V_u : d_G(u, z) = 2\}$.

On suppose pour commencer qu'il existe un sommet $z \in Z$ tel que $F_\pi(z) < F_\pi(u)$. Soit $X_1 = X \cap N_G(z)$ et $X_2 = X \setminus X_1$. Soit $Z_1 = \{z' \in Z : d_G(z, z') \leq 2\}$ et $Z = Z \setminus Z_2$. On observe que comme G est biparti, pour tout $x \in X$, $xz \in E_u$ ssi $x \in X_2$ et pour tout $z' \in Z$, $zz' \in E_u$ ssi $z' \in Z_2$. Notons également que $F_\pi(z) - F_\pi(u) = 2\pi(u) + 2\pi(X_2) + 2\pi(Z_2) - 2\pi(z)$. Comme $F_\pi(z) < F_\pi(u)$ et comme $N_{B_u}(z) = \{u\} \cup X_2 \cup Z_2$, nous avons $\pi(N_{B_u}(z)) < \pi(z)$ et la condition (1) est donc respectée.

8.2. Graphes respectant la propriété d'appariement

On suppose à présent qu'il existe $x \in X$ tel que $F_\pi(x) < F_\pi(u)$. Soit $Z_1 = Z \cap N_G(x)$ et $Z_2 = Z \setminus Z_1$. On observe que dans B_u , $S = Z_1 \cup \{x\}$ est un stable. Notons que $F_\pi(x) - F_\pi(u) = \pi(u) - \pi(x) + \sum_{x' \in X \setminus \{x\}} \pi(x') - \sum_{z \in Z_1} \pi(z) + \sum_{z \in Z_2} \pi(z) = \pi(\{u\} \cup (X \setminus \{x\}) \cup Z_2) - \pi(\{x\} \cup Z_1)$. Comme $F_\pi(x) < F_\pi(u)$, nous avons $\pi(S) > \pi(V_u \setminus S) = \pi(N_{B_u}(S))$ et donc la condition (2) est vérifiée. Nous supposons donc que u est un médian local de π dans G^2 . D'après le Théorème 6.2.1(2), $u \in \text{Med}(\pi)$. Comme G respecte la propriété d'appariement (respectivement, la propriété de double appariement), il existe un appariement P de π tel que $\text{Med}(\pi) = \bigcap_{\{a,b\} \in P} I(a,b)$. Donc pour tout $\{a,b\} \in P$, nous avons $u \in I(a,b)$ et donc $ab \in E_u$. Par conséquent, dans ce cas, l'appariement P définit un π -couplage parfait dans B_u et la condition (3) est vérifiée.

On suppose réciproquement que pour tout $u \in V$, le graphe local $B_u = (V_u, E_u)$ vérifie la propriété de couplage-stable (respectivement, de double-couplage-stable), et on considère un profil pair (respectivement, un double profil) π sur G . On considère un sommet $u \in \text{Med}(\pi)$. Pour chaque sommet $v \in \pi$ tel que $d_G(u,v) \geq 2$, d'après le Théorème 8.2.6(4), il existe un sommet $z_v \in I(u,v)$ tel que $d_G(u, z_v) = 2$ et $z_v \sim I(u,v) \cap N_G(u)$. Nous construisons le profil π' sur $V_u = B_2(u, G)$ en remplaçant chaque occurrence de v dans π avec $d_G(u,v) \geq 2$ par un tel z_v (chaque occurrence de u et de $x \in N_G(u)$ dans π est conservée dans π'). On observe que π' est un profil pair et que nous pouvons supposer que π' est un double profil lorsque π en est un. Notons que si $u \in I(v, v')$, alors $u \in I(z_v, z'_v)$. Réciproquement, si $u \in I(z_v, z'_v)$, alors $u \in I(v, v')$. En effet, si G est biparti, soit $d_G(v, v') = d_G(v, u) + d_G(u, v')$, soit $d_G(v, v') \leq d_G(v, u) + d_G(u, v') - 2$. Dans le second cas, on considère les boules $B_1(u)$ de G et les boules de rayon $d_G(u, v) - 1$ et $d_G(u, v') - 1$ respectivement centrées en v et en v' . Comme ces trois boules s'intersectent deux à deux, il existe un voisin x de u tel que $x \in I(u, v) \cap I(u, v')$. Ceci implique que $x \sim z_v, z'_v$ d'après la définition de z_v et de z'_v , et donc $u \notin I(z_v, z'_v)$.

Étant donné que u est un médian de π dans G , u est également un médian de π' dans G . Si $\pi'(u) \geq \pi'(V_u \setminus \{u\})$, alors $\pi(u) \geq \pi(V \setminus \{u\})$ et dans ce cas, il existe un appariement P de π tel que pour chaque $\{a,b\} \in P$, $a = u$ ou $b = u$. Dans ce cas, $u \in I(a,b)$ pour chaque $\{a,b\} \in P$, et donc $\text{Med}(\pi) = \bigcap_{\{a,b\} \in P} I(a,b)$. On suppose maintenant que $\pi'(u) < \pi'(V \setminus \{u\})$.

On suppose pour commencer qu'il existe un stable S de B_u tel que $\pi'(S) > \pi'(V_u \setminus S)$. Comme u est un sommet universel (adjacent à tous les sommets) dans B_u et comme $\pi'(u) < \pi'(V \setminus \{u\})$, on a nécessairement $u \notin S$. Soit $X = N_G(u)$ et $Z = \{z : d_G(u, z) = 2\}$. Comme pour toute paire de sommets distincts $x, x' \in X$, nous avons $xx' \in E_u$, $|X \cap S| \leq 1$. Si $X \cap S = \{x\}$ et $\pi'(x) > \pi'(V_u \setminus \{x\})$, alors $\pi(x) > \pi(V \setminus \{x\})$, et dans ce cas, $\text{Med}(\pi) = \{x\}$, ce qui est impossible étant donné le choix de u . Par conséquent, s'il existe $x \in X \cap S$, alors $S \setminus \{x\} \neq \emptyset$ et $S \setminus \{x\} \subseteq Z$. De plus, s'il existe $x \in X \cap S$, pour chaque $z \in Z \cap S$, $d_G(x, z) = 1$ et donc $Z \cap X \subseteq N_G(x)$. Comme S est un stable dans B_u , pour toute paire de sommets distincts $z, z' \in S \cap Z$, nous avons $d_G(z, z') = 2$. Par conséquent, en considérant toutes les boules de rayon 1 centrés sur les sommets de Z , on obtient qu'il existe $x \in X$ tel que $S \subseteq N_G(x)$. Ainsi, pour tout cas, il existe x tel que $S \subseteq \{x\} \cup N_G(x)$ et comme $\{x\} \cup N_G(x)$ est un stable de B_u , nous pouvons supposer que $S = \{x\} \cup N_G(x)$. Dans ce cas, $F_{\pi'}(x) - F_{\pi'}(u) = \pi'(V_u \setminus S) - \pi'(S) < 0$, contredisant le fait que $u \in \text{Med}(\pi')$.

On suppose à présent qu'il existe $z \in V_u$ tel que $\pi'(z) > \pi'(N_{B_u}(z))$. Si $z \in X$, soit $S = \{z\} \cup (N_G(z) \cap Z)$. On observe que S est un stable de B_u et que $N_{B_u}(z) = V_u \setminus S$. Par conséquent, il existe un stable S de B_u tel que $\pi'(S) > \pi'(V_u \setminus S)$, ce qui est impossible. Nous pouvons donc supposer que $z \in Z$. On observe que pour chaque $y \in V_u \setminus \{z\}$, soit $d_G(u, y) = d_G(z, y)$, soit $y \in N_{B_u}(z)$ and $d_G(z, y) = d_G(u, y) + 2$. Par conséquent, $F_{\pi'}(z) - F_{\pi'}(u) = 2\pi'(N_{B_u}(z)) - 2\pi'(z) < 0$,

une contradiction avec le fait que $u \in \text{Med}_G(\pi')$.

Par conséquent, nous pouvons supposer qu'il existe un π -couplage M dans B_u . À partir d'un tel couplage M , on peut obtenir un pairing P de π tel que si $\{v, v'\} \in P$, alors $z_v z_{v'} \in M$. Par conséquent, pour tout $\{v, v'\} \in P$, nous avons $u \in I(z_v, z_{v'})$ et $u \in I(v, v')$. Ainsi, nous avons $u \in \bigcap_{\{v, v'\} \in P} I(v, v') = \text{Med}(\pi)$. Ce qui montre que G respecte la propriété d'appariement (respectivement, la propriété de double appariement). \square

Le résultat suivant découle du Lemme 8.2.12 et de la preuve de la Proposition 8.2.13 :

Corollaire 8.2.14. *Un graphe de Helly biparti G respecte la propriété d'appariement (respectivement, de double appariement) ssi tous les graphes de Helly bipartis induits par les boules de rayon 2 de G respectent la propriété d'appariement (respectivement, de double appariement).*

8.2.5 Reconnaissance des graphes vérifiant la propriété de double appariement

Nous n'avons pas pu établir la complexité du problème décidant si un graphe respecte la propriété de double appariement. Nous pouvons cependant montrer que ce problème est dans co-NP. Comme détaillé plus tôt, étant donné un profil π , on peut vérifier si π admet un appariement parfait en temps polynomial par rapport aux tailles de G et de π . Pour montrer que la reconnaissance des graphes vérifiant la propriété d'appariement (respectivement, de double appariement) est dans co-NP, il est donc suffisant de montrer que lorsqu'un graphe ne vérifie pas la propriété d'appariement (respectivement, de double appariement), il existe un profil pair π (respectivement un double profil π) n'admettant pas d'appariement parfait et dont la taille est polynomiale en celle de G . Nous n'avons malheureusement pas pu prouver que ces profils pairs de taille polynomiale existent toujours. Pour la propriété de double appariement, nous montrons notre résultat en reformulant notre problème en un problème d'inclusion de polytopes.

Pour tout graphe $G = (V, E)$ et tout sommet $u \in V$, on définit deux polytopes $\text{Ma}(u)$ et $\text{Me}(u)$ comme suit. Le polytope $\text{Me}(u)$ consiste en toutes les fonctions de poids $b : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que u appartient à l'ensemble médian $\text{Med}(b)$. En particulier, pour chaque profil π sur G tel que $u \in \text{Med}(\pi)$, la fonction de poids définie par π appartient à $\text{Me}(u)$.

$$\text{Me}(u) \quad \begin{cases} \sum_{w \in V} b(w)(d(v, w) - d(u, w)) \geq 0 & \text{pour tout } v \in V, \\ b(v) \geq 0 & \text{pour tout } v \in V. \end{cases}$$

Notons que $\text{Me}(u)$ est un polytope non vide défini par un nombre linéaire d'inégalités.

Le second polytope $\text{Ma}(u)$ consiste en toutes les fonctions de poids $b : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que le graphe auxiliaire A_u admet un b -couplage fractionnaire parfait. La description du polytope est donnée en utilisant les inégalités des conditions fractionnaires de Hall.

$$\text{Ma}(u) \quad \begin{cases} \sum_{v \in N(S)} b(v) - \sum_{v \in S} b(v) \geq 0 & \text{pour tout stable } S \text{ de } A_u = (V, E_u), \\ b(v) \geq 0 & \text{pour tout } v \in V. \end{cases}$$

Le nombre d'inégalités définissant $\text{Me}(u)$ est potentiellement exponentiel en la taille de G . Notons cependant que le problème de séparation sur $\text{Ma}(u)$ peut être résolu en temps polynomial en résolvant un problème de b -couplage fractionnaire. Un tel algorithme ou bien donne un b -couplage où b est un point de $\text{Ma}(u)$, ou bien permet de calculer un ensemble S tel que b ne respecte pas la contrainte correspondant à S .

8.2. Graphes respectant la propriété d'appariement

On observe que les deux polytopes $\text{Me}(u)$ et $\text{Ma}(u)$ contiennent l'origine $\mathbf{0}$ et qu'ils sont stables par multiplication d'un scalaire positif, c'est à dire que si $\text{Me}(u)$ contient x , alors il contient également αx .

Lemme 8.2.15. *Pour tout graphe $G = (V, E)$, et tout sommet $u \in V$, $\text{Ma}(u) \subseteq \text{Me}(u)$.*

Démonstration. Pour toute fonction de poids $b : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, si b est un point de $\text{Ma}(u)$, alors d'après la condition fractionnaire de Hall, il existe un b -couplage parfait dans A_u et donc, d'après le Lemme 8.2.3, $u \in \text{Med}(b)$. Ce qui montre que $b \in \text{Me}(u)$. \square

Proposition 8.2.16. *Un graphe $G = (V, E)$ vérifie la propriété de double appariement ssi $\text{Ma}(u) = \text{Me}(u)$ pour tout $u \in V$.*

Démonstration. On suppose pour commencer que G respecte la propriété de double appariement. Comme les deux polytopes sont définis avec des contraintes aux coefficients entiers, leurs points extrémaux et leurs demi-droites sont définis par des coordonnées rationnelles. Comme les deux polytopes sont stables par multiplication avec un scalaire positif, il suffit de prouver que tout point de $\text{Me}(u)$ correspondant à un double profil π appartient à $\text{Ma}(u)$. Comme G respecte la propriété de double appariement, pour tous ces doubles-profils π , il existe un π -couplage parfait dans A_u , et donc $\pi \in \text{Ma}(u)$.

Réciproquement, on suppose que $\text{Me}(u) \subseteq \text{Ma}(u)$ pour tout $u \in V$ et on considère un double profil $\tau = \pi^2$ sur G . On fixe $u \in \text{Med}(\tau) = \text{Med}(\pi)$ et nous avons alors $\pi \in \text{Me}(u) \subseteq \text{Ma}(u)$, et donc, $\text{M}(\pi, u)$ est non vide. D'après le Lemme 8.2.5, $\tau = \pi^2$ admet un couplage parfait. Ceci montre que G vérifie la propriété de double appariement. \square

Nous expliquons à présent comment décider si un graphe G ne vérifie pas la propriété de double-appariement en temps polynomial non déterministe. Pour cela, nous commençons par trouver un sommet u tel que $\text{Ma}(u) \subsetneq \text{Me}(u)$. Nous construisons le graphe auxiliaire A_u et trouvons un stable S de A_u telle que la contrainte correspondante de $\text{Ma}(u)$ sépare un point de $\text{Me}(u)$ de $\text{Ma}(u)$. Pour vérifier que cette contrainte sépare bien un point de $\text{Me}(u)$ de $\text{Ma}(u)$, nous minimisons la fonction $(b(v))_{v \in V} \mapsto \sum_{v \in N(S)} b(v) - \sum_{v \in S} b(v)$ sur le polytope $\text{Me}(u)$. Ce qui peut être fait en temps polynomial étant donné que c'est un programme linéaire avec un nombre linéaire de contraintes. Si le minimum est négatif, alors $\text{Me}(u)$ n'est pas contenu dans $\text{Ma}(u)$ et d'après la Proposition 8.2.16 G ne respecte pas la propriété de double appariement. Nous obtenons donc le résultat suivant :

Proposition 8.2.17. *La reconnaissance des graphes vérifiant la propriété de double appariement appartient à co-NP.*

Remarque. Nous ne savons pas si nous pouvons étendre cette méthode à la reconnaissance des graphes vérifiant la propriété d'appariement. Ceci est dû au fait que l'ensemble des profils admettant un appariement parfait n'est pas stable par combinaison convexe. En effet, si on considère le graphe C de la Figure 8.13a qui est constituée de deux triangles disjoints u, v, w et u', v', w' . Soit B le complément de C et on considère le graphe de Helly biparti $R((C(B))^*)$ défini en Sous-section 8.2.3. Alors, comme B n'admet pas de couplage parfait, le profil pair $\pi = (u, v, w, u', v', w')$ n'admet pas de couplage parfait dans $R((C(B))^*)$. Cependant, le profil vide et le double profil π^2 admettent tous les deux un appariement parfait dans $R((C(B))^*)$.

Nous laissons les questions suivantes ouvertes :

Question. Peut on reconnaître les graphes vérifiant la propriété de double appariement (respectivement, d'appariement) en temps polynomial? La reconnaissance des graphes vérifiant la propriété d'appariement est elle dans co-NP ?

8.3 Systèmes de benzénoïdes

Les outils principaux de ce chapitre sont les axiomes (A), (B), (C) et (T), vérifiés par la fonction médian Med dans tous les graphes. Cependant, ces axiomes sont difficiles à manipuler et ne nous permettent pas d'établir de propriété structurelles, même simples, des ABC- et ABCT-graphes. Dans cette section, nous formulons deux autres axiomes (T₂) et (E_k) qui sont respectés par Med. Nous montrons également que C_6 admet une seconde ABC-fonction. Et pour finir cette section, nous montrons que les benzénoïdes (pouvant être obtenus à partir des 6-cycles par amalgamations) sont des ABCT₂- et ABCE₂-graphes.

8.3.1 Axiomes dans les triangles métriques équilatéraux

Tout comme pour l'axiome (T), les axiomes que nous étudions considèrent les triplets de sommets. Nous commençons par une généralisation des axiomes (T) et (T⁻) :

(T₂) pour tout **triangle métrique** équilatéral uvw de taille 2, $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$.

Malheureusement, il n'existe pas de manière directe de généraliser (T) et (T₂) aux triplets de sommets à distance k de façon à ce que la fonction médian satisfasse ces axiomes. Nous pouvons cependant définir l'axiome (E_k), coïncidant avec (T⁻) lorsque $k = 1$:

(E_k) *Équilatéral* : pour tout **triangle métrique** équilatéral uvw de taille k , si $u \in L(u, v, w)$, alors $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$.

Lemme 8.3.1. *La fonction médian Med vérifie les axiomes (T₂) et (E_k).*

Démonstration. Pour montrer (T₂), nous choisissons arbitrairement un **triangle métrique** équilatéral uvw de taille 2. Alors $F_\pi(u) = F_\pi(v) = F_\pi(w) = 4$. Tout sommet z de G n'est pas adjacent à au moins un des sommets de u, v, w , donc $F_\pi(z) \geq 4$, montrant que $\{u, v, w\} \subseteq \text{Med}(u, v, w)$. Pour prouver (E_k), on choisit un **triangle métrique** équilatéral uvw de taille k et on suppose que $u \in \text{Med}(u, v, w)$. Comme $F_\pi(u) = 2k = F_\pi(v) = F_\pi(w)$, on conclut que $v, w \in \text{Med}(u, v, w)$. \square

8.3.2 C_6 admet une seconde ABC-fonction

Dans cette sous-section, nous définissons une ABC-fonction L_6 différente de Med sur C_6 . Notons $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ l'ensemble ordonné des sommets de C_6 tel que v_i est un voisin de v_{i-1} et v_{i+1} (toutes les additions sont modulo 6). Pour un profil π sur C_6 , soit le nombre d'occurrences $\pi_i = \pi(v_i)$ de v_i dans π .

Comme $I(v_i, v_{i+3}) = V$, pour chaque ABC-fonction L sur C_6 , $L(v_i, v_{i+3}) = I(v_i, v_{i+3}) = V$ et $L(\pi, v_i, v_{i+3}) = L(\pi)$. Pour tout profil π , nous notons π° le profil tel que $\pi_i^\circ = \pi_i - \min\{\pi_i, \pi_{i+3}\}$

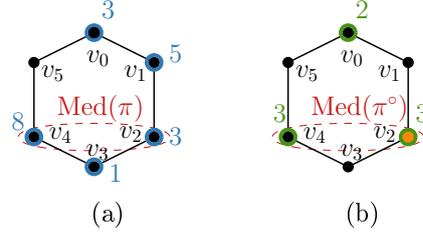


FIGURE 8.16 – À gauche un profil π et à droite le profil π° (alterné) correspondant, $L_6(\pi^\circ) = L_6(\pi)$ est indiqué en orange et $\text{Med}_\pi = \text{Med}_{\pi^\circ}$ en rouge.

pour chaque $i \in \{0, \dots, 5\}$. Notons que soit π_i° , soit π_{i+3}° est nul et $L(\pi^\circ) = L(\pi)$. Si $\pi_i^\circ, \pi_{i+2}^\circ, \pi_{i+4}^\circ$ ne sont pas nuls alors nous appelons π° un profil *alterné* (cf Figure 8.16).

On considère la fonction consensus suivante L_6 :

$$L_6(\pi) = \begin{cases} \{v_i\} & \text{si } \pi_i^\circ, \pi_{i+2}^\circ, \pi_{i+4}^\circ > 0 \text{ et } i = \min\{j : \pi_j^\circ = \max\{\pi_i^\circ, \pi_{i+2}^\circ, \pi_{i+4}^\circ\}\} \\ \text{Med}(\pi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La Figure 8.16 donne $L_6(\pi)$ avec π° alterné, notons que le nombre d'occurrences des 3 sommets d'un profil alterné n'est pas forcément identique.

On observe que par définition de L_6 , si π° n'est pas un profil alterné, alors $L_6(\pi) = \text{Med}(\pi) = \text{Med}(\pi^\circ) = L_6(\pi^\circ)$. Trivialement, $L_6 \neq \text{Med}$ car pour le profil $\pi = (v_0, v_2, v_4)$ nous avons $\text{Med}(\pi) = \{v_0, v_2, v_4\}$ et $L_6(\pi) = \{v_0\}$. Pour montrer que L_6 est une ABC-fonction, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 8.3.2. *Pour tout $\pi, \rho \in V^*$, si $\sigma = \pi\rho$ et $\tau = \pi^\circ\rho^\circ$, alors $\sigma^\circ = \tau^\circ$.*

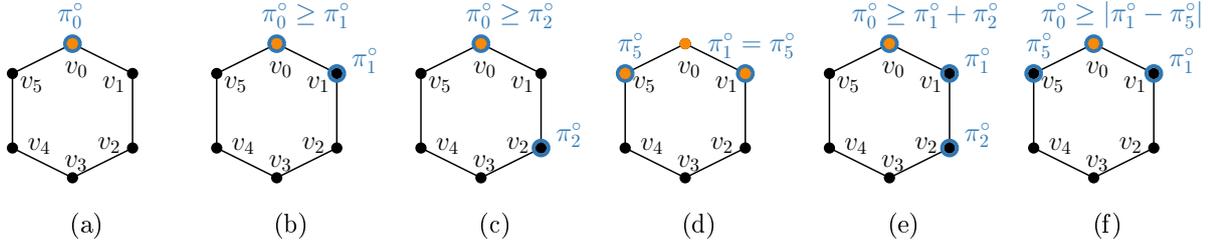
Démonstration. Pour tout $i \in \{0, \dots, 5\}$:

$$\begin{aligned} \tau_i^\circ &= \tau_i - \min\{\tau_i, \tau_{i+3}\} = \pi_i^\circ + \rho_i^\circ - \min\{\pi_i^\circ + \rho_i^\circ, \pi_{i+3}^\circ + \rho_{i+3}^\circ\} \\ &= \pi_i^\circ + \rho_i^\circ - (\min\{\pi_i + \rho_i, \pi_{i+3} + \rho_{i+3}\} - \min\{\pi_i, \pi_{i+3}\} - \min\{\rho_i, \rho_{i+3}\}) \\ &= \pi_i + \rho_i - \min\{\pi_i + \rho_i, \pi_{i+3} + \rho_{i+3}\} = \sigma_i - \min\{\sigma_i, \sigma_{i+3}\} = \sigma_i^\circ, \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Lemme 8.3.3. *Soit une ABC-fonction L sur C_6 et π un profil tel que π° est non vide et non alterné. Un sommet v_i appartient à $L(\pi) = L(\pi^\circ)$ ssi nous sommes dans un des cas suivants de π° et $L(\pi)$ (aux symétries près) qui sont illustrés dans la Figure 8.17*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \text{si } \pi^\circ = (v_i^{\pi_i^\circ}), & L(\pi) &= \{v_i\} \\ (ii) \quad & \text{si } \pi^\circ = (v_i^{\pi_i^\circ}, v_{i+1}^{\pi_{i+1}^\circ}) & \text{et } \pi_i^\circ \geq \pi_{i+1}^\circ, & L(\pi) = \begin{cases} I(v_i, v_{i+1}) & \text{si } \pi_i^\circ = \pi_{i+1}^\circ, \\ \{v_i\} & \text{sinon} \end{cases} \\ (iii) \quad & \text{si } \pi^\circ = (v_i^{\pi_i^\circ}, v_{i+2}^{\pi_{i+2}^\circ}) & \text{et } \pi_i^\circ \geq \pi_{i+2}^\circ, & L(\pi) = \begin{cases} I(v_i, v_{i+2}) & \text{si } \pi_i^\circ = \pi_{i+2}^\circ, \\ \{v_i\} & \text{sinon} \end{cases} \\ (iv) \quad & \text{si } \pi^\circ = (v_{i-1}^{\pi_{i-1}^\circ}, v_{i+1}^{\pi_{i+1}^\circ}) & \text{et } \pi_{i+1}^\circ = \pi_{i-1}^\circ, & L(\pi) = I(v_{i+1}, v_{i-1}) \end{aligned}$$


 FIGURE 8.17 – Les 6 profils π° du Lemme 8.3.3 pour $i = 0$.

$$\begin{aligned}
 (v) \quad & \text{si } \pi^\circ = (v_i^{\pi_i^\circ}, v_{i+1}^{\pi_{i+1}^\circ}, v_{i+2}^{\pi_{i+2}^\circ}) \quad \text{et } \pi_i^\circ \geq \pi_{i+1}^\circ + \pi_{i+2}^\circ, \quad L(\pi) = \begin{cases} I(v_i, v_{i+1}) & \text{si } \pi_i^\circ = \pi_{i+1}^\circ + \pi_{i+2}^\circ, \\ \{v_i\} & \text{sinon} \end{cases} \\
 (vi) \quad & \text{si } \pi^\circ = (v_{i-1}^{\pi_{i-1}^\circ}, v_i^{\pi_i^\circ}, v_{i+1}^{\pi_{i+1}^\circ}) \quad \text{et } \pi_i^\circ \geq |\pi_{i+1}^\circ - \pi_{i-1}^\circ|, \quad L(\pi) = \begin{cases} I(v_i, v_{i+1}) & \text{si } \pi_i^\circ + \pi_{i-1}^\circ = \pi_{i+1}^\circ, \\ I(v_i, v_{i-1}) & \text{si } \pi_i^\circ + \pi_{i+1}^\circ = \pi_{i-1}^\circ, \\ \{v_i\} & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Démonstration. Comme π° n'est pas alterné, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\pi_3^\circ = \pi_4^\circ = \pi_5^\circ = 0$. Soit $a = \pi_0^\circ$, $b = \pi_1^\circ$, $c = \pi_2^\circ$ et nous pouvons supposer aux symétries près que $a \geq c$. On observe que comme π° est non vide, $a + b + c \geq 1$. Si $a = c$ et $b = 0$ (dans ce cas, $a = c \geq 1$), alors $L(\pi) = L(\pi^\circ) = L(v_0, v_2) = I(v_0, v_2)$, et pour v_0, v_2 , nous sommes dans le Cas (iii) alors que pour v_1 , nous sommes dans le Cas (iv). Si $a = c$ et $b > 0$, alors comme $b \in L(v_0^a, v_2^c) = I(v_0, v_2)$, soit $L(\pi^\circ) = L(v_1^b) = \{v_1\}$ si $a = c = 0$, soit $L(\pi^\circ) = L(v_0^a, v_2^c) \cap L(v_1^b) = \{v_1\}$ si $a = c > 1$. Dans le premier cas, nous sommes dans le Cas (i), tandis que dans le second, nous sommes dans le Cas (vi). Supposons maintenant que $a > c$ et soit $a' = a - c = |a - c|$. Si $c = 0$, alors $L(\pi^\circ) = L(v_0^{a'}, v_1^b)$. Si $c > 0$, alors $L(\pi^\circ) = L(v_0^c, v_2^c) \cap L(v_0^{a'}, v_1^b) = L(v_0^{a'}, v_1^b)$ comme $L(v_0^c, v_2^c) = I(v_0, v_2)$ et comme $L(v_0^{a'}, v_1^b) \subseteq \{v_0, v_1\} \subseteq I(v_0, v_2)$. Si $a' = b$ (i.e., if $a = b + c$), alors $L(\pi^\circ) = L(v_0^{a'}, v_1^b) = \{v_0, v_1\}$. Dans ce cas, si $c = 0$, alors nous sommes dans le Cas (ii) pour v_0 et v_1 , et si $c > 0$, alors nous sommes dans le Cas (v) pour v_0 et dans le Cas (vi) pour v_1 . Si $a' < b$ (i.e., si $b > |a - c|$), alors $L(\pi^\circ) = L(v_0^{a'}, v_1^b) = \{v_1\}$ et nous sommes dans le Cas (ii) si $c = 0$ et dans le Cas (vi) si $c > 0$. Si $a' > b$ (i.e., si $a > c$), alors $L(\pi^\circ) = L(v_0^{a'}) = \{v_0\}$. Nous sommes donc dans le Cas (i) si $b = c = 0$, dans le Cas (ii) si $b > c = 0$, dans le Cas (iii) si $c > b = 0$, et dans le Cas (v) si $b > 0$ et $c > 0$. \square

Le corollaire suivant découle du lemme précédent et sera utilisé plus tard :

Corollaire 8.3.4. *Si π° est un profil non alterné, alors pour toute ABC -fonction L , $L(\pi)$ coïncide avec la fonction médian $\text{Med}(\pi)$.*

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal de cette sous-section :

Proposition 8.3.5. *L_6 est une ABC -fonction sur C_6 .*

Démonstration. Trivialement, L_6 respecte les axiomes (A) et (B). Il nous reste à montrer que L_6 respecte également (C). Soit $\pi = \rho\sigma$ pour deux profils $\rho, \sigma \in V^*$. Nous montrons que si $L_6(\rho) \cap L_6(\sigma) \neq \emptyset$, alors $L_6(\rho\sigma) = L_6(\rho) \cap L_6(\sigma)$.

Supposons que $v_i \in L_6(\rho) \cap L_6(\sigma) = L_6(\rho^\circ) \cap L_6(\sigma^\circ)$. D'après la définition de L_6 et le Lemme 8.3.3, ceci implique que $\sigma_{i+3}^\circ = \rho_{i+3}^\circ = 0$. Par conséquent, soit σ° (respectivement, ρ°) n'est pas un profil alterné, soit $\sigma_i^\circ, \sigma_{i+2}^\circ, \sigma_{i+4}^\circ > 0$ (respectivement, $\rho_i^\circ, \rho_{i+2}^\circ, \rho_{i+4}^\circ > 0$). D'après le Lemme 8.3.2, nous avons $\pi_{i+3}^\circ = 0$ et par conséquent, soit π° n'est pas un profil alterné, soit $\pi_i^\circ, \pi_{i+2}^\circ, \pi_{i+4}^\circ > 0$.

Si ρ° et σ° sont tous les deux des profils alternés, alors π° est également un profil alterné et pour $j \in \{i+2, i+4\}$, nous obtenons $\pi_i^\circ = \rho_i^\circ + \sigma_i^\circ \geq \rho_j^\circ + \sigma_j^\circ$ et l'égalité est atteinte seulement si $\rho_i^\circ = \rho_j^\circ$ et $\sigma_i^\circ = \sigma_j^\circ$. Notons que si l'égalité est atteinte, alors $0 \leq i < j \leq 5$, comme $L_6(\rho) = \{v_i\}$. Par conséquent, soit $\pi_i^\circ > \pi_j^\circ$, soit $\pi_i^\circ = \pi_j^\circ$ et $0 \leq i < j \leq 5$. Et nous obtenons bien $L_6(\pi) = \{v_i\} = L_6(\rho) \cap L_6(\sigma)$.

Si ni ρ° , ni σ° n'est un profil alterné, alors $L_6(\rho) = L_6(\rho^\circ) = \text{Med}(\rho)$ et $L_6(\sigma) = L_6(\sigma^\circ) = \text{Med}(\sigma)$. Dans ce cas, $L_6(\rho) \cap L_6(\sigma) = \text{Med}(\rho) \cap \text{Med}(\sigma) = \text{Med}(\rho\sigma) = \text{Med}(\pi)$. Si π° n'est pas un profil alterné alors on a bien $L_6(\pi) = L_6(\pi^\circ) = \text{Med}(\pi^\circ) = \text{Med}(\pi)$. En revanche, si π° est un profil alterné, alors $\pi_i^\circ, \pi_{i+2}^\circ, \pi_{i+4}^\circ > 0$. Comme ρ° n'est pas un profil alterné et comme $v_i \in L_6(\rho^\circ)$, d'après le Lemme 8.3.2, soit $\rho_{i+2}^\circ = 0$, soit $\rho_{i+4}^\circ = 0$. De manière similaire, soit $\sigma_{i+2}^\circ = 0$, soit $\sigma_{i+4}^\circ = 0$. Comme $\rho_{i+2}^\circ + \sigma_{i+2}^\circ \geq \pi_{i+2}^\circ > 0$ et $\rho_{i+4}^\circ + \sigma_{i+4}^\circ \geq \pi_{i+4}^\circ > 0$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\rho_{i+2}^\circ > 0$, $\rho_{i+4}^\circ = 0$, $\sigma_{i+2}^\circ = 0$, et $\sigma_{i+4}^\circ > 0$. D'après le Lemme 8.3.3, nous pouvons supposer que $\rho^\circ = (v_i^a, v_{i+1}^b, v_{i+2}^c)$ où $a > 0, c > 0, b \geq 0$, et $a \geq b+c$, et que $\sigma^\circ = (v_{i+4}^{d'}, v_{i+5}^{e'}, v_{i+6}^{a'})$ où $a' > 0, d' > 0, e' \geq 0$, and $a' \geq d' + e'$. Par conséquent, comme π° est un profil alterné, $\pi^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+2}^{c-e'}, v_{i+4}^{d'-b})$. Comme $a \geq c > 0$ et $a' \geq d' > 0$, nous avons $a + a' > c - e'$ et $a + a' > d' - b$, et nous avons donc bien $L_6(\pi) = L_6(\pi^\circ) = \{v_i\} = \text{Med}(\pi)$.

Supposons maintenant que ρ° est un profil alterné et que σ° ne l'est pas. Alors $\rho^\circ = (v_i^a, v_{i+2}^c, v_{i+4}^d)$ avec $a \geq c > 0$ et $a \geq d > 0$. De plus, si $a = c$ (respectivement, $a = d$), alors $0 \leq i < i+2 \leq 5$ (respectivement, $0 \leq i < i+4 \leq 5$). Pour σ° , on considère les différents cas donnés par le Lemme 8.3.3. Dans tous les cas nous montrons que $L_6(\pi) = L_6(\pi^\circ) = \{v_i\} = L_6(\rho^\circ) \cap L_6(\sigma^\circ)$.

Dans les Cas (i) et (iii), $\sigma^\circ = (v_i^{a'}, v_{i+2}^{c'})$ avec $a' > 0$ et $a' \geq c' \geq 0$, et $\pi^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+2}^{c+c'}, v_{i+4}^d)$ est un profil alterné. Notons que $a+a' > d$, que $a+a' \geq c+c'$ et que quand $a+a' = c+c'$, $a = c$ et donc $0 \leq i < i+2 \leq 5$ comme $L_6(\rho^\circ) = \{v_i\}$. Dans tous les cas nous avons $L_6(\pi^\circ) = \{v_i\}$.

Dans les Cas (ii) et (v), $\sigma^\circ = (v_i^{b'}, v_{i+1}^{c'}, v_{i+2}^{d'})$ avec $b' > 0, c' \geq 0$, et $a' \geq b' + c'$. Dans ce cas, $\rho^\circ \sigma^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+1}^{b'+c'}, v_{i+2}^{c+c'}, v_{i+4}^d)$. Si $b' \geq d$, alors $\pi^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+1}^{b'-d}, v_{i+2}^{c+c'})$ et $L_6(\pi^\circ) = \{v_i\}$ comme $a+a' \geq c+b'+c' > b'-d+c+c'$. Si $b' < d$, alors $\pi^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+2}^{c+c'}, v_{i+4}^{d-b'})$ est un profil alterné. Comme $a+a' \geq c+c'+b' > c+c'$ et $a+a' > d > d-b'$, nous avons également $L_6(\pi^\circ) = \{v_i\}$ dans ce cas.

Dans les Cas (iv) et (vi), $\sigma^\circ = (v_{i-1}^{e'}, v_i^{a'}, v_{i+1}^{b'})$ avec $a' \geq 0, b' > 0, e' > 0$, $a' \geq e' - b'$, et $a' \geq b' - e'$. Dans ce cas, $\rho^\circ \sigma^\circ = (v_{i-1}^{e'}, v_i^{a+a'}, v_{i+1}^{b'}, v_{i+2}^c, v_{i+4}^d)$. Si $d > b'$ et $c > e'$, alors $\pi^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+2}^{c-e'}, v_{i+4}^{d-b'})$ est un profil alterné et $L_6(\pi^\circ) = \{v_i\}$ comme $a+a' > c-e'$ et $a+a' > d-b'$. Si $d \leq b'$ et $c > e'$, alors $\pi^\circ = (v_i^{a+a'}, v_{i+1}^{b'-d}, v_{i+2}^{c-e'})$ et $L_6(\pi) = \{v_i\}$ comme $a+a' \geq c+b'-e' > b'-d+c-e'$. Pour des raisons similaires, nous avons $L_6(\pi) = \{v_i\}$ si $d > b'$ et $c \leq e'$. Si $d \leq b'$ et $c \leq e'$, alors $\pi^\circ = (v_{i-1}^{e'-c}, v_i^{a+a'}, v_{i+1}^{b'-d})$. On suppose sans perte de généralité que $e' - c \leq b' - d$. Soit $\tau_1 = (v_{i-1}^{e'-c}, v_{i+1}^{e'-c})$ et $\tau_2 = (v_i^{a+a'}, v_{i+1}^{b'-d-e'+c})$ et on observe que $\pi^\circ = \tau_1 \tau_2$ si $e' > c$ et $\pi^\circ = \tau_2$ si $e' = c$. Si $e' > c$, alors $L_6(\tau_1) = I(v_{i-1}, v_{i+1})$. Comme $a+a' \geq c+b'-e' > c+b'-e'-d$, nous avons $L_6(\tau_2) = \{v_i\}$. Donc, dans tous les cas

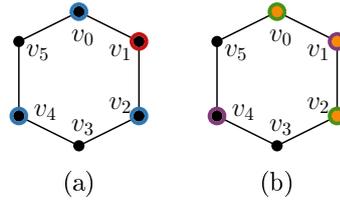


FIGURE 8.18 – Illustration du Lemme 8.18.

$$L_6(\pi^\circ) = L(\tau_2) = \{v_i\}. \quad \square$$

8.3.3 Les systèmes de benzénoïdes sont des $ABCT_2$ - et $ABCE_2$ -graphes

D'après la Proposition 7.8.1, les ensembles médians des systèmes de benzénoïdes sont G^2 -connexes. Ils ne sont cependant pas *modulaires* (les triplets de sommets à distance 2 dans chaque 6-cycle n'ont pas de médian). Comme d'après la Proposition 8.3.5, C_6 n'est pas un ABC-graphe, les systèmes de benzénoïdes (en tant que famille de graphes) ne le sont pas non plus. Dans cette sous-section, nous montrons que ce sont des $ABCT_2$ - et $ABCE_2$ -graphes.

On rappelle que tout système de benzénoïdes $G = (V, E)$ peut être plongé isométriquement dans le *produit cartésien* $T_1 \square T_2 \square T_3$ de trois arbres T_1, T_2, T_3 . On appellera E_1, E_2 , et E_3 les arêtes de G dans les trois directions de la grille hexagonale et soit le graphe $G_i = (V, E \setminus E_i)$ obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de $E_i, i = 1, 2, 3$. On rappelle également que le plongement isométrique $\varphi : V \rightarrow T_1 \square T_2 \square T_3$ associe chaque sommet v de G à un triplet (v_1, v_2, v_3) , où v_i est la composante connexe de G_i contenant $v, i = 1, 2, 3$ [44]. En on dira à nouveau qu'un chemin P est un *hexagone incomplet* si P est un chemin de taille 3 contenant une arête de chaque classe E_i et P n'est pas inclus dans un C_6 .

On montrera par la suite que les systèmes de benzénoïdes sont des $ABCT_2$ -graphes. Pour commencer, montrons que C_6 est un $ABCE_2$ -graphe. D'après le Corollaire 8.3.4, nous devons seulement traiter les profils π tels que π° est un profil alterné. Nous utiliserons donc le Lemme suivant :

Lemme 8.3.6. *Si L est une $ABCE_2$ -fonction sur C_6 , alors $L(v_i, v_{i+2}, v_{i+4}) = \{v_i, v_{i+2}, v_{i+4}\}$.*

Démonstration. Soit $\pi = (v_i, v_{i+2}, v_{i+4})$. On suppose pour commencer que $L(\pi)$ contient v_{i+1} . Soit $\pi' = \pi v_{i+1}$ (cf Figure 8.18a). Alors $L(\pi') = L(\pi) \cap \{v_{i+1}\} = \{v_{i+1}\}$. Comme $L(v_i, v_{i+2}) \cap L(v_{i+1}, v_{i+4})$ contient v_i et v_{i+2} , nous avons $L(\pi') = L(v_i, v_{i+2}, v_{i+1}, v_{i+4}) = L(v_i, v_{i+2}) \cap L(v_{i+1}, v_{i+4})$ et donc $v_i, v_{i+2} \in L(\pi')$ (cf Figure 8.18b), ce qui est impossible. Pour des raisons similaires, $v_{i+3}, v_{i+5} \notin L(\pi)$. Par conséquent, $L(v_i, v_{i+2}, v_{i+4}) \subseteq \{v_i, v_{i+2}, v_{i+4}\}$ et donc d'après (E₂), nous avons $L(v_i, v_{i+2}, v_{i+4}) = \{v_i, v_{i+2}, v_{i+4}\}$. \square

D'après le Corollaire 8.3.4 Et le Lemme 8.3.6, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 8.3.7. *Le 6-cycle C_6 est un $ABCE_2$ -graphe.*

Démonstration. Soit π un profil sur C_6 . D'après le Corollaire 8.3.4, nous avons uniquement à considérer les cas où π° est un profil alterné. Supposons sans perte de généralité que $\pi^\circ = (u^a, v^b, w^c)$, où u, v, w sont à distance 2 deux à deux et $1 \leq a \leq b \leq c$. Dans ce cas, $\pi^\circ = (u^a, v^a, w^a, v^{b-a}, w^{b-a}, u^{c-b})$. D'après le Lemme 8.3.6, $L(u^a, v^a, w^a) = \{u, v, w\}$. Si $b > a$, alors

$L(v^{b-a}, w^{b-a}) = I(v, w)$, et si $c > b$, alors $L(w^{c-b}) = \{w\}$. Donc $L(\pi^\circ) = \{u, v, w\}$ si $a = b = c$, $L(\pi^\circ) = \{v, w\}$ si $a < b = c$, et $L(\pi^\circ) = \{w\}$ si $a \leq b < c$. Par conséquent, pour toute $ABCE_2$ -fonction et tout profil π , nous avons $L(\pi) = L(\pi^\circ) = \text{Med}(\pi^\circ) = \text{Med}(\pi)$ et Med est l'unique $ABCE_2$ fonction sur C_6 . \square

Nous montrons à présent qu'il suffit de montrer que les benzénoïdes sont des $ABCT_2$ -graphes. Nous rappelons l'Affirmation 7.8.2 du chapitre précédent :

Affirmation 8.3.8. *Tout hexagone ou hexagone incomplet H de G est porté.*

Lemme 8.3.9. *Dans les systèmes de benzénoïdes, les $ABCE_2$ -fonctions sont des $ABCT_2$ -fonctions.*

Démonstration. Soit un triplet de sommets u, v, w de G tel que $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$, $I(u, v) \cap I(u, w) = \{u\}$, $I(u, v) \cap I(v, w) = \{v\}$, et $I(v, w) \cap I(w, u) = \{w\}$. Notons que u, v , et w sont des sommets non adjacents d'un C_6 , C . On montre que $L(u, v, w) \subseteq \{u, v, w\}$. Soit $x \in L(u, v, w)$ et $\pi' = (x, u, v, w)$. Alors $L(u, v, w, x) = L(u, v, w) \cap L(x) = \{x\}$. D'après l'Affirmation 8.3.8, C est porté et nous appellerons x' la porte de x dans C . On suppose pour commencer que $x' \neq u, v, w$, disons $x \sim u, v$. Alors w est le sommet opposé à x' dans C et $I(u, v) \subseteq L(x, w)$. Donc, $I(u, v) \subseteq L(u, v) \cap L(x, w) = L(\pi')$, ce qui est impossible. Par conséquent, $x' \in \{u, v, w\}$, disons $x' = u$. Ainsi u appartient à $L(x, v)$. Comme u appartient à $L(u, w)$, nous concluons que $u \in L(u, v, w, x) = \{x\}$, donc $u = x \in L(u, v, w)$. D'après (E₂), $\{u, v, w\} = L(u, v, w)$. \square

Lemme 8.3.10. *Soit une 2-paire (u, v) d'un système de benzénoïdes G . Si il existe un profil π tel que F_π n'est pas faiblement-sans-pic sur (u, v) , alors u et v appartiennent au même hexagone de G .*

Démonstration. Soit un voisin commun w à u et v et soit un sommet x tel que $2d(w, x) > d(u, x) + d(v, x)$. Comme les benzénoïdes sont bipartis, $d(u, x) = d(v, x) = d(w, x) - 1$ et comme les arêtes incidentes de G sont dans des classes différentes, alors nous pouvons supposer que $wu \in E_1$ et $wv \in E_2$. Soit y un voisin de u dans $I(u, x)$. Alors uy ne peut appartenir à E_2 , sinon le sommet w_2 dans T_2 aurait deux voisins y_2 et v_2 appartenant à $I(w_2, x_2)$, ce qui contredit le fait que T_2 est un arbre. Nous avons donc $uy \in E_3$. Notons que (y, u, w, v) n'est pas porté. D'après l'Affirmation 8.3.8, (y, u, w, v) n'est pas un hexagone incomplet, donc u et v appartiennent au même hexagone. \square

Le lemme suivant découle du fait que tout sommet d'un hexagone C appartient à l'intervalle entre deux sommets opposés de C .

Lemme 8.3.11. *Soit un hexagone C d'un système de benzénoïde G et soit \bar{x} le sommet de C opposé à la porte d'un sommet x dans C . Alors tout sommet de C appartient à $L(x, \bar{x})$.*

Le Lemme suivant découle de l'Affirmation 8.3.8 :

Lemme 8.3.12. *Soit un hexagone C d'un système de benzénoïdes G et soit une 2-paire (u, v) de C . Alors pour tout sommet z de G avec v pour porte dans C , $u, v \in L(u, z) = I(u, z)$.*

La preuve du lemme suivant est identique à la preuve du Lemme 8.1.5 :

Lemme 8.3.13. *Soit un hexagone C d'un système de benzénoïdes G et soit trois sommets u, v, w de C à distance 2 deux à deux. Alors pour tout sommet z de G ayant w comme porte dans C , $u, v \in L(u, v, z)$.*

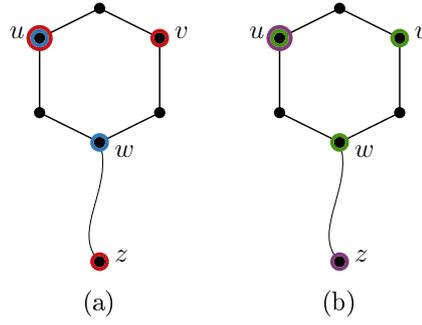


FIGURE 8.19 – Illustration de la preuve de l’Affirmation 8.3.14

Démonstration. On commence avec l’Affirmation suivante :

Affirmation 8.3.14. *Soit $u, v, w \in L(u, v, z)$, soit $u, v, w \notin L(u, v, z)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve de l’Affirmations 8.1.6, en utilisant (T_2) à la place de (T) . Par symétrie, il suffit de montrer que $u \in L(u, v, z)$ ssi $w \in L(u, v, z)$. On suppose que $\{u, w\} \cap L(u, v, z) \neq \emptyset$ et on considère le profil (u, v, z, u, w) . Comme $u, w \in I(u, w) = L(u, w)$ et $\{u, w\} \cap L(u, v, z) \neq \emptyset$, $L(u, v, z, u, w) = I(u, w) \cap L(u, v, z)$. D’après (T_2) , $\{u, v, w\} \subseteq L(u, v, w)$ et comme $L(u, z) = I(u, z)$, $u, w \in L(u, v, w) \cap L(u, z) = L(u, v, z, u, w) = I(u, w) \cap L(u, v, z)$. Par conséquent, $u \in L(u, v, z)$ ssi $w \in L(u, v, z)$. \square

Si $u \in L(u, v, z)$ ou $v \in L(u, v, z)$, d’après l’Affirmation 8.3.14 le Lemme est vrai dans ce cas. Si au contraire $u, v \notin L(u, v, z)$, alors soit $z' \in L(u, v, z)$. D’après le Lemme 8.1.1, $z' \in L(u, v, z')$ et d’après le Lemme 8.1.2, $I(u, z') \cap I(v, z') = \{z'\}$. Comme $d(u, v) = 2$ et G est biparti, ceci implique que $d(u, z') = d(v, z')$. D’après l’Affirmation 8.3.8, chaque hexagone est porté et donc $z' = w$ ou $z' \sim u, v$. Dans le premier cas le Lemme est vrai d’après 8.3.14. Nous montrons que le second cas ne peut arriver, pour cela on considère le profil (u, v, z, z') . Si $z' \sim u, v$, alors $z' = \bar{w}$ et $I(u, v) = L(u, v) \subseteq L(z', w) \subseteq L(z', z)$. Par conséquent, si $z' \sim u, v$, alors $z' \in L(u, v, z) \cap L(z') = \{z'\}$ et $z' \in L(u, v) \cap L(z', z) = L(u, v) = I(u, v)$. Ce qui implique que $\{z'\} = L(u, v, z, z') = I(u, v)$, ce qui est impossible. \square

Soit un hexagone $C = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de G et π_C^i la restriction d’un profil π à l’ensemble de tous les sommets de G ayant v_i comme porte dans C . Nous considérerons chaque indice i de v_i modulo 6.

Lemme 8.3.15. *Pour tout profil π de G , on considère le profil $\pi' = \pi, v_0^{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4}, v_2^{\ell_0+\ell_1+\ell_4+\ell_5}, v_4^{\ell_1}$ où $\ell_i = |\pi_C^i|$. Alors $v_0, v_2 \in L(\pi')$.*

Démonstration. Soit $\pi_C^i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,\ell_i})$ pour $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$. On illustre la décomposition de π' qui suit en Figure 8.20. D’après le Lemme 8.3.11, $v_0, v_2 \in \bigcap_{j=1}^{\ell_1} L(x_{1,j}, v_4)$, $v_0, v_2 \in \bigcap_{j=1}^{\ell_3} L(x_{3,j}, v_0)$ et $v_0, v_2 \in \bigcap_{j=1}^{\ell_5} L(x_{5,j}, v_2)$. D’après le Lemme 8.3.12, $v_0, v_2 \in \bigcap_{j=1}^{\ell_2} L(x_{2,j}, v_0)$, et $v_0, v_2 \in \bigcap_{j=1}^{\ell_0} L(x_{0,j}, v_2)$. D’après le Lemme 8.3.13, $v_0, v_2 \in \bigcap_{j=1}^{\ell_4} L(x_{4,j}, v_2, v_0)$. On observe également que $v_0, v_2 \in L(v_0^{\ell_1}, v_2^{\ell_1})$. Par conséquent, $v_0, v_2 \in L(\pi')$. \square

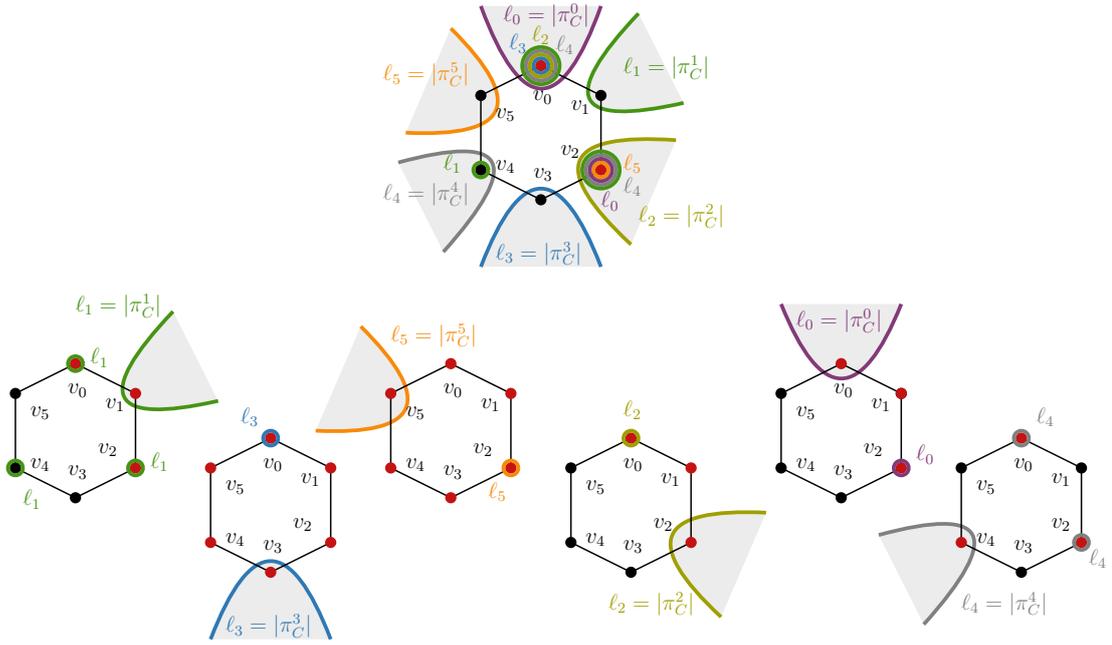


FIGURE 8.20 – Illustration du Lemme 8.3.15

Lemme 8.3.16. Soit une 2-paire (v_0, v_2) d'un hexagone $C = (v_0, v_1, \dots, v_5)$ d'un système de benzénoïdes G . alors pour tout profil π sur G :

- (1) si $F_\pi(v_0) = F_\pi(v_2)$, alors $v_0 \in L(\pi)$ ssi $v_2 \in L(\pi)$.
- (2) si $F_\pi(v_0) > F_\pi(v_2)$, alors $v_0 \notin L(\pi)$.

Démonstration. Pour tout $0 \leq i \leq 5$, let $\ell_i = |\pi_C^i|$. On suppose que $F_\pi(v_0) \geq F_\pi(v_2)$ et on observe que $F_\pi(v_0) - F_\pi(v_2) = 2(\ell_2 + \ell_3) - 2(\ell_0 + \ell_5)$. Tout comme dans le Lemme 8.3.15, on considère le profil $\pi' = (\pi, v_0^{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4}, v_2^{\ell_0 + \ell_1 + \ell_4 + \ell_5}, v_4^{\ell_1})$. Supposons que $F_\pi(v_0) = F_\pi(v_2)$ (alors $\ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \ell_0 + \ell_4 + \ell_5 = p$) et que $v_0 \in L(\pi)$. Comme $v_0 \in L(v_0^p, v_2^p) = L(v_0, v_2)$, $v_0 \in L(v_0^{\ell_1}, v_2^{\ell_1}, v_4^{\ell_1}) = L(v_0, v_2, v_4)$ d'après (T₂), et $v_0 \in L(\pi)$, nous avons $L(\pi') = L(\pi) \cap L(v_0^p, v_2^p) \cap L(v_0^{\ell_1}, v_2^{\ell_1}, v_4^{\ell_1})$. D'après le Lemme 8.3.15, $v_2 \in L(\pi')$, et donc $v_2 \in L(\pi)$. Supposons maintenant que $F_\pi(v_0) > F_\pi(v_2)$ (alors $q = \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 > \ell_0 + \ell_4 + \ell_5 = r$). Comme $v_0 \in L(v_0^r, v_2^r) = L(v_0, v_2)$, $v_0 \in L(v_0^{\ell_1}, v_2^{\ell_1}, v_4^{\ell_1}) = L(v_0, v_2, v_4)$ by (T₂) et $v_0 \in L(v_0^{q-r}) = L(v_0) = \{v_0\}$, alors $L(\pi') = L(\pi) \cap L(v_0^r, v_2^r) \cap L(v_0^{\ell_1}, v_2^{\ell_1}, v_4^{\ell_1}) \cap L(v_0^{q-r}) = \{v_0\}$ si $v_0 \in L(\pi)$, ce qui contredit le Lemme 8.3.15. \square

Théorème 8.3.17. Les systèmes de benzénoïdes sont des $ABCT_2$ -graphes et $ABCE_2$ -graphes.

Démonstration. Soit une $ABCT_2$ -fonction L sur un système de benzénoïdes G et soit $\pi \in V^*$. On montre pour commencer que $L(\pi) \subseteq \text{Med}(\pi)$. On choisit arbitrairement $u \in L(\pi)$. Si $u \notin \text{Med}(\pi)$, comme les ensembles médians des systèmes de benzénoïdes sont G^2 -connexes, d'après le Théorème 6.2.1 il existe un sommet v tel que $1 \leq d(u, v) \leq 2$ et $F_\pi(v) < F_\pi(u)$. Comme G est biparti, G respecte la condition du triangle (TC). Ainsi, si $d(u, v) = 1$, nous obtenons une contradiction avec le Lemme 8.1.8(2). Ainsi, nous pouvons supposer que $d(u, v) = 2$ et que $F_\pi(w) \geq F_\pi(u)$ pour tout voisin w de u . D'après le Lemme 8.3.10 appliqué à la paire (u, v) , u, v

appartient au même hexagone et donc d'après le Lemme 8.3.16(2), u ne peut appartenir à $L(\pi)$, ce qui est impossible.

Nous montrons à présent l'inclusion réciproque $\text{Med}(\pi) \subseteq L(\pi)$. Supposons qu'il existe $u \in L(\pi)$ et $v \in \text{Med}(\pi) \setminus L(\pi)$ minimisant $d(u, v)$. Comme $\text{Med}(\pi)$ est G^2 -connexe, $d(u, v) \leq 2$. Comme $u, v \in \text{Med}(\pi)$, $F_\pi(u) = F_\pi(v)$. Si $d(u, v) = 1$, nous obtenons une contradiction avec le Lemme 8.1.8(1). Si $d(u, v) = 2$, d'après notre choix de u et v , nous devrions avoir $F_\pi(w) > F_\pi(u)$ pour tout $w \in I^\circ(u, v)$. Donc, d'après le Lemme 8.3.10, u et v appartiennent au même hexagone et nous obtenons une contradiction avec le Lemme 8.3.16. Par conséquent, les systèmes de benzénoïdes sont des $ABCT_2$ -graphes et d'après le Lemme 8.3.9, ce sont aussi des $ABCE_2$ -graphes. \square

8.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu les classes de graphes dont la fonction médian peut être caractérisée par un ensemble d'axiomes simples. Plus précisément, nous avons montré que les graphes dont l'ensemble médian est connexe sont des $ABCT$ -graphes, que les systèmes de benzénoïdes sont des $ABCT_2$ -graphes et que les graphes modulaires aux médians G^2 -connexes sont des ABC -graphes. Une sous-classe importante des graphes aux médians G^2 -connexes sont les graphes de Helly bipartis. Nous avons montré que les classes de graphes respectant la propriété d'appariement ou de double-appariement sont des sous-classes propres aux graphes de Helly bipartis. Les graphes médians étant modulaires et leurs médians étant connexes, nos résultats généralisent le fait que les graphes médians sont des ABC -graphes.

La caractérisation des ABC -graphes reste ouverte. Au regard des résultats de ce chapitre, il est peut être plausible (mais dangereux) de conjecturer que les ABC -graphes sont exactement les graphes modulaires aux médians G^2 -connexes. Nous n'avons cependant pas pu montrer que les ABC -graphes sont modulaires, ni bipartis (du fait de la faiblesse des axiomes (A), (B) et (C)). Nous avons également échoué à prouver que G est un ABC - ou $ABCT$ -graphe ssi chaque composante 2-connexe de G l'est également. Nous pouvons également nous demander si le problème consistant à décider si G un graphe est ABC - ou un $ABCT$ -graphe est décidable.

L'article [83] montre que les graphes complets ne sont pas des ABC -graphes, nous avons montré dans ce chapitre que les C_6 ne le sont pas non plus, nous avons cependant échoué à montrer que tout graphe contenant un triangle n'est pas un ABC -graphe.

L'axiome (B) peut être reformulé de la manière suivante : Pour tout profil π de taille 2, $L(\pi) = \text{Med}(\pi)$. Les axiomes que nous avons ajouté dans ce chapitre restreignent uniquement les profils de taille 3, peut être qu'une généralisation de l'axiome (B) aux profils de taille 3 pourrait donc donner des résultats intéressants.

Nous avons montré que le problème consistant à décider si un graphe vérifie la propriété de double-appariement est dans co-NP . Nous ne savons cependant pas si il est possible de décider en temps polynomial (ni même en temps polynomial non déterministe) si un graphe vérifie la propriété d'appariement ou de double-appariement. Une piste pour cela serait de réussir à montrer qu'un profil pair (respectivement un double profil) de taille polynomiale n'admettant pas de couplage parfait existe pour tout graphe ne vérifiant pas la propriété d'appariement (respectivement de double appariement).

Conclusion

Cette thèse s'est intéressée au problème du médian sous différents aspects. En particulier l'aspect algorithmique où nous avons cherché à calculer l'ensemble médian en temps linéaire dans les [graphes médians](#) et certaines structures apparentées, l'aspect structurel où nous avons cherché à caractériser la connexité de l'ensemble médian en général et dans certains graphes en particulier, et enfin à l'aspect axiomatique, qui consiste à caractériser la fonction médian dans certains graphes à l'aide d'axiomes simples. Pour conclure ce manuscrit, nous donnons quelques perspectives qui découlent des résultats présentés.

Algorithmique

Nous avons pu voir dans cette thèse que le calcul linéaire des Θ -classes dans les [graphes médians](#) ouvre à de nombreuses applications algorithmiques dans les [graphes médians](#) et dans des structures proches. Une question naturelle est donc de se demander si il est possible de trouver un calcul rapide des Θ -classes dans d'autres classes de graphes, voire dans tous les sous-graphes d'hypercubes.

Parmi les applications du calcul rapide des Θ -classes il y a le calcul de médian dans les [graphes médians](#) en temps linéaire, mais on a également pu montrer que cela permettait de calculer l'indice de Wiener, la matrice des distances et les p -moments. Des travaux récents [30, 31] l'ont également utilisés pour le calcul du centre et des excentricités. On peut donc supposer que d'autres problèmes métriques soient plus simples à résoudre dans les [graphes médians](#) que dans le cas général, comme par exemple le problème de centralité intermédiaire (betweenness centrality), qui pour un sommet u est égale au nombre d'intervalles entre deux sommets du graphe contenant u .

On peut constater que les classes de graphes dans lesquelles un algorithme rapide existe pour calculer le médian sont toujours des classes de graphes dont l'ensemble médian est connexe. Il serait probablement intéressant d'étudier le problème du médian dans ce type de classes de graphes, à commencer par les triangulations planaires pontées [50]. Il est possible que des classes de graphes G^2 -connexes présentent également des propriétés algorithmiques intéressantes permettant de calculer le médian rapidement.

On a pu calculer le médian des ℓ_1 -complexes cubiques et des structures d'évènements grâce à leur proximité avec les [graphes médians](#). Il pourrait être intéressant de regarder si on peut appliquer des solutions aux problèmes métriques dans les [graphes médians](#) aux ℓ_1 -complexes cubiques et aux structures d'évènements. Le calcul des p -moments dans les ℓ_1 -complexes cubiques pourrait être à étudier, nous n'avons cependant à ce jour pas pu adapter notre algorithme.

La proximité des [graphes médians](#) avec les formules 2-SAT et les structures d'évènements

Conclusion

nous ont permis d'établir que le problème du médian dans les structures d'évènements sous forme compacte était $\#P$ -difficile. Les formules 2-SAT étant très étudiés dans la théorie de la complexité, nous pouvons potentiellement nous appuyer sur des résultats existants pour montrer des bornes inférieures de complexité à certains problèmes dans les graphes médians et les structures d'évènements.

On peut déduire des résultats de [14] et du Chapitre 7 que les graphes de bases de matroïdes, des Δ -matroïdes pairs, et plus généralement, les graphes de Johnson partiels maillés sont des graphes dont les ensembles médians sont connexes. Nous avons également caractérisé les demi-cubes partiels dont les ensembles médians sont connexes. On note que les graphes de Johnson partiels maillés sont une généralisation intéressante des [graphes médians](#) et des graphes de bases de matroïdes. En fait, d'après le Corollaire 7.7.6, les graphes médians sont exactement les demi-cubes partiels ne contenant pas de triangles et dont les ensembles médians sont connexes. Il pourrait être intéressant d'étudier quels demi-cubes partiels et graphes de Johnson partiels dont les ensembles médians sont connexes définissent des En particulier, si les domaines définis par les graphes de bases de matroïdes ou les Δ -matroïdes pairs sont fermés par médian. Tous ces domaines ne sont pas des domaines de Condorcet à moins qu'ils soient médians (car ils contiennent des triangles). On pourrait cependant se demander si l'ensemble médian de ces classes de graphes peut être calculé via une relaxation de la règle de majorité.

Connexité

La caractérisation des graphes G^p -connexes a été l'occasion de définir et étudier les fonctions (faiblement) p -sans-pic et (faiblement) p -connexes, nous n'avons cependant pas réussi à montrer si les plateaux des fonctions faiblement p -sans-pic induisent des sous-graphes isométriques de G^p . Cette question découle du fait que Bandelt et Chepoi [14] avaient montré le cas $p = 1$.

Bandelt et Chepoi ont également montré une manière combinatoire de type local vers global de tester si les médians d'un graphe donné sont connexes [14], on pourrait donc se demander si il est possible d'étendre ce résultat aux graphes G^2 - et G^p -connexes.

Nous avons montré que la G^p -connexité de l'ensemble médian d'un graphe G est préservée via [produits cartésiens](#), [amalgamations portées](#) et [rétractés](#). On pourrait chercher si c'est de cas d'autres opérations dans les graphes.

Nous avons montré que les graphes pontés et faiblement pontés (et donc triangulés), les graphes aux boules convexes, les graphes bucoliques, hypercellulaires, les graphes de Helly bipartis, et les systèmes de benzénoïdes, ont leurs ensembles médians qui sont G^2 -connexes. Nous avons donné des conditions locales suffisantes pour qu'un [graphe modulaire](#) soit un graphe aux médians G^2 -connexes. Une question naturelle est la recherche d'autres graphes aux médians G^2 -connexes, à commencer par des [graphes modulaires](#).

Nous avons également caractérisé les sous-graphes isométriques des graphes de Johnson et les demi-cubes pour lesquels les ensembles médians sont connexes. Il pourrait être intéressant d'étudier les domaines d'ordres linéaires (ou d'autres types d'ordonnement partiels) induisant certains demi-cubes partiels ou certains graphes de Johnson partiels.

La caractérisation d'autres fonctions métriques réelles dans les graphes pourrait être intéressante, par exemple les graphes dont l'ensemble minimisant les p -moments est connexe, à commencer par le barycentre ($p = 2$). On pourrait se demander si ce sont toujours des graphes aux médians connexes, nous n'avons cependant pas réussi à montrer si ils sont maillés. Nous

avons pu noter pour le cas du barycentre durant nos recherches que les arbres et les graphes de Helly sont des graphes dont les barycentres sont connexes, et que les graphes contenant un cycle isométrique plus grand que 3 ne le sont pas. On peut également se demander si il existe des graphes dont le barycentre n'est pas G^2 -connexe.

Axiomatique

Dans cette thèse, nous avons montré que les **graphes modulaires** aux médians G^2 -connexes étaient des ABC-graphes. La caractérisation des ABC-graphes reste cependant largement ouverte, on pourrait commencer par se demander si il existe des ABC-graphes n'étant pas des **graphes modulaires** aux médians G^2 -connexes. La faiblesse des axiomes (A), (B) et (C), nous font nous demander si le problème prenant en entrée un graphe G et indiquant en sortie si c'est ABC-graphe est décidable. Il pourrait être intéressant de chercher si le fait que chaque composante 2-connexe d'un graphe soit un ABC-graphe implique que le graphe est un ABC-graphe.

Il est probablement plus simple dans un premier temps de réfléchir à ces questions en ajoutant de nouveaux axiomes, ajouter l'axiome (T) nous ayant permis de caractériser la fonction médians dans les graphes aux médians connexes et ajouter l'axiome (T₂) de la caractériser dans les systèmes de benzénoïdes. Nous avons montré dans le Chapitre 7 que les graphes pontés (en particulier les graphes triangulés) sont G^2 -connexes, on peut donc se demander si ce sont des ABCT-graphes.

On peut également réfléchir à de nouveaux axiomes à ajouter, l'axiome (B) pouvant être reformulé en : pour tout profil π de taille 2, $L(\pi) = \text{Med}(\pi)$, et tous les axiomes ajoutés dans ce manuscrit ne traitant que les profils de taille 3, on peut peut être chercher des axiomes généralisant l'axiome (B) aux profils de taille 3 ou plus.

Une des directions de l'étude du ABC-problème cherche de nouvelles fonctions respectant les axiomes (A), (B) et (C), à notre connaissance, ceci n'a été fait que pour les graphes complets dans [83], et nous avons montré que c'était également le cas pour C_6 . Nous pouvons noter que dans les deux cas, si on prend le profil π contenant chaque sommet de $V(G)$ une et une seule fois, alors $L(\pi)$ contient tous les sommets du graphe. On peut donc commencer à chercher dans cette direction, en particulier dans les cycles. Nous avons également cherché pour les graphes contenant un triangle, mais sans succès.

L'article [83] montre que les graphes vérifiant la propriété d'appariement sont des ABC-graphes, nous avons étendu cette définition à la propriété de double-appariement et montré que c'était une sous-classe propre des graphes de Helly bipartis. Nous avons montré que décider si un graphe vérifie la propriété de double appariement est dans co-NP. Nous pouvons donc nous demander si il est dans NP, voire dans P. Une direction consisterait à montrer que pour tout graphe ne vérifiant pas la propriété d'appariement (respectivement de double appariement), il existe un profil pair (respectivement, un double profil) de taille polynomial n'admettant pas de couplage parfait.

La fonction barycentre a déjà été caractérisée axiomatiquement dans les arbres par Holtzman [70], on pourrait chercher à la caractériser dans d'autres graphes, peut être par exemple les graphes dont l'ensemble barycentre est connexe.

D'une manière générale, la fonction barycentre et les p -moments nous semblent être un champs de recherche intéressant touchant de nombreux domaines de la théorie métrique des graphes qui mériterait d'être étudié plus en détail.

Conclusion

Principales définitions

Amalgame porté : Graphe G contenant deux sous-graphes portés G_1 et G_2 qui s'intersectent et tels que leur union est isomorphe à G .

Demi-espace : Sous graphe H d'un graphe G tel que H et $G \setminus H$ sont tous les deux convexes.

Fonction-faiblement-convexe (resp. faiblement- p -convexe) : Fonction f sur un graphe $G = (V, E)$ telle que pour tout $u, v \in V$, f est convexe sur au moins une (u, v) -géodésique (resp. p -géodésique) $(u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$, c'est à dire que pour tout $i < j < k$, $f(w_j) \leq \frac{d(w_k, w_j)}{d(w_i, w_k)} \cdot f(w_i) + \frac{d(w_i, w_j)}{d(w_i, w_k)} \cdot f(w_k)$.

Fonction faiblement-sans-pic (resp. faiblement- p -sans-pic) : Fonction f sur un graphe $G = (V, E)$ telle que pour tout $u, v \in V$, f est sans-pic sur au moins une (u, v) -géodésique (resp. p -géodésique) $(u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$, c'est à dire que pour tout $i < j < k$, $f(w_j) \leq \max\{w_i, w_k\}$ et l'égalité est atteinte seulement si $f(w_i) = f(w_j) = f(w_k)$.

G^p -connexité : On dit qu'un sous-ensemble d'un graphe G est G^p connexe si il est connexe dans la $p^{\text{ième}}$ puissance G^p de G .

Géodésiques : Une géodésique entre deux éléments p_1, p_2 d'un espace métrique X est un plus court chemin entre p_1 et p_2 (on pourra alors l'appeler (p_1, p_2) -géodésique). Dans le cas des graphe, les géodésiques sont exactement les plus courts chemins. Une chaîne géodésique d'un graphe G est une séquence finie de sommets incluse dans une géodésique et une p -géodésique est une chaîne géodésique $P = (u = w_0, w_1, \dots, w_n = v)$ telle que $d(w_i, w_{i+1}) \leq p$ pour tout $i = 0, \dots, n - 1$.

Graphe de Helly biparti : Graphe biparti dont les demi-boules respectent la propriété de Helly.

Graphe faiblement modulaire : Graphe respectant les conditions du triangle et du quadrangle en chaque sommet. Une définition équivalente est que leurs triangles métriques sont fortement équilatéraux.

Graphe médian : Graphe $G = (V, E)$ tel que l'intersection des intervalles de tout triplet u, v, w de sommets de V est un singleton, i.e., $|I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)| = 1$.

Graphe modulaire : Graphe dont l'intersection des intervalles de tout triplet de sommets est non vide. Ce sont exactement les graphes faiblement modulaires dont tous les triangles métriques sont des triangles équilatéraux de taille 0.

Intervalle : L'intervalle $I_G(u, v)$ entre deux sommets u et v de G est égal à l'ensemble des sommets appartenant à un plus court chemin entre u et v . De manière équivalente, $I_G(u, v) = \{x : d(u, v) = d(u, x) + d(x, v)\}$. Si il n'y a pas d'ambiguïté, $I_G(u, v)$ pourra être noté $I(u, v)$.

Principales définitions

$p^{\text{ième}}$ puissance d'un graphe : La $p^{\text{ième}}$ puissance du graphe G est le graphe G^p tel que $V(G^p) = V(G)$ et $uv \in E(G^p)$ ssi $d_G(u, v) \leq p$.

Rétracté : Sous-graphe H d'un graphe G obtenu à partir de G via un rétraction : une application f des sommets de G vers les sommets de H telle que si $uv \in E(G)$, alors $f(u)f(v) \in E(H)$.

Produit cartésien : Graphe $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$ avec $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \dots, G_n = (V_n, E_n)$ une famille de graphe. $V(G) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n) : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, \dots, u_n \in V_n\}$ et deux sommets $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sont adjacents dans G ssi il existe un indice j pour lequel u_j et v_j sont adjacents dans G_j et $u_i = v_i$ dans G_i pour tout $i \neq j$.

Sous-graphe convexe : Sous-graphe H d'un graphe G tel que pour tout $u, v \in V(H)$, $I_G(u, v)$ est inclus dans H .

Sous-graphe porté : Sous-graphe H d'un graphe G tel que tout sommet $u \in V(G)$ possède une porte u' dans H telle que $u' \in I(u, v)$ pour tout sommet v de H .

Système de benzénoïdes : Sous-graphe de la grille hexagonale induit par les sommets situés dans la région délimitée par un circuit fermé sur la grille.

Θ -classe : Classe d'équivalence de la relation Θ définie comme la fermeture réflexive et transitive de Θ_0 telle que les arêtes uv et $u'v'$ sont en relation Θ_0 si ce sont les arêtes opposées d'un carré (C_4).

Triangle métrique : Triplet de sommets x_1, x_2, x_3 d'un graphe G tel que les trois intervalles $I(x_1, x_2)$, $I(x_1, x_3)$ et $I(x_2, x_3)$ ne s'intersectent deux à deux que sur leur extrémité commune. Si $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_3) = d(x_2, x_3) = k$ alors le triangle métrique est dit équilatéral de taille k et si pour tout sommet y dans dans $I(x_i, x_j)$ alors $d(y, x_\ell) = k$ pour $1 \leq i, j, \ell \leq 3$ alors ce triangle métrique est dit fortement équilatéral.

Bibliographie

- [1] A. ABBOUD, F. GRANDONI et V. VASSILEVSKA WILLIAMS. “Subcubic Equivalences Between Graph Centrality Problems, APSP and Diameter”. In : *SODA 2015*. SIAM, 2015, p. 1681-1697. DOI : [10.1137/1.9781611973730.112](https://doi.org/10.1137/1.9781611973730.112) (cf. p. 4).
- [2] A. ABBOUD, V. VASSILEVSKA WILLIAMS et J. R. WANG. “Approximation and Fixed Parameter Subquadratic Algorithms for Radius and Diameter in Sparse Graphs”. In : *SODA 2016*. SIAM, 2016, p. 377-391. DOI : [10.1137/1.9781611974331.ch28](https://doi.org/10.1137/1.9781611974331.ch28) (cf. p. 4).
- [3] J. ACZÉL. *Lectures on functional equations and their applications*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19. Academic Press, New York-London, 1966 (cf. p. 5).
- [4] R.P. ANSTEE. “A polynomial algorithm for b -matchings : an alternative approach”. In : *Inform. Process. Lett.* 24.3 (1987), p. 153-157. ISSN : 0020-0190. DOI : [10.1016/0020-0190\(87\)90178-5](https://doi.org/10.1016/0020-0190(87)90178-5) (cf. p. 153).
- [5] F. ARDILA, M. OWEN et S. SULLIVANT. “Geodesics in CAT(0) Cubical Complexes”. In : *Adv. in Appl. Math.* 48.1 (2012), p. 142-163. ISSN : 0196-8858. DOI : [10.1016/j.aam.2011.06.004](https://doi.org/10.1016/j.aam.2011.06.004) (cf. p. 4).
- [6] T.T. ARKHIPOVA et I.V. SERGIENKO. “On conditions of coincidence of local and global extrema in optimization problems”. In : *Kibernetika* 1 (1976), p. 13-15 (cf. p. 96).
- [7] K. L. ARROW. “A difficulty in the concept of social welfare”. In : *J. Polit. Econ.* 58.4 (1950), p. 328-346. DOI : [10.1086/256963](https://doi.org/10.1086/256963) (cf. p. 5).
- [8] S. P. AVANN. “Metric Ternary Distributive Semi-Lattices”. In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 12.3 (1961), p. 407-414 (cf. p. 4).
- [9] M. BALINSKI et R. LARAKI. “A theory of measuring, electing and ranking”. In : *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* () (cf. p. 5).
- [10] M. BALINSKI et R. LARAKI. *Majority Judgement : Measuring, Ranking, and Electing*. MIT, Press, Cambridge, 2011 (cf. p. 5).
- [11] M. L. BALINSKI. “Integer programming : Methods, uses, computation”. In : *Management Sci.* 12 (1965), p. 253-313. ISSN : 0025-1909. DOI : [10.1287/mnsc.12.3.253](https://doi.org/10.1287/mnsc.12.3.253). URL : <https://doi.org/10.1287/mnsc.12.3.253> (cf. p. 153, 160).
- [12] H.-J. BANDELT et J.-P. BARTHÉLÉMY. “Medians in median graphs”. In : *Discrete Appl. Math.* 8.2 (1984), p. 131-142. ISSN : 0166-218X. DOI : [10.1016/0166-218X\(84\)90096-9](https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90096-9) (cf. p. 4, 29, 45, 48, 50, 51, 79, 84).
- [13] H.-J. BANDELT et V. CHEPOI. “Bipartite cellular graphs”. In : *Europ. J. Combin.* 17 (1996), p. 121-134 (cf. p. 127).

BIBLIOGRAPHIE

- [14] H.-J. BANDELT et V. CHEPOI. “Graphs with connected medians”. In : *SIAM J. Discrete Math.* 15.2 (2002), p. 268-282. ISSN : 0895-4801. DOI : [10.1137/S089548019936360X](https://doi.org/10.1137/S089548019936360X) (cf. p. 5, 6, 93, 94, 96-99, 106, 108-110, 114, 115, 122, 128, 129, 131, 174).
- [15] H.-J. BANDELT et V. CHEPOI. “Metric Graph Theory and Geometry : a Survey”. In : *Surveys on Discrete and Computational Geometry : Twenty Years Later*. Sous la dir. de J. E. GOODMAN, J. PACH et R. POLLACK. T. 453. Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2008, p. 49-86. DOI : [10.1090/conm/453/08795](https://doi.org/10.1090/conm/453/08795). URL : <https://doi.org/10.1090/conm/453/08795> (cf. p. 4, 122).
- [16] H.-J. BANDELT, V. CHEPOI, A. W. M. DRESS et J. H. KOOLEN. “Combinatorics of Lop-sided Sets”. In : *European J. Combin.* 27.5 (2006), p. 669-689. DOI : [10.1016/j.ejc.2005.03.001](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2005.03.001) (cf. p. 43).
- [17] H.-J. BANDELT, P. FORSTER et A. RÖHL. “Median-joining networks for inferring intraspecific phylogenies”. In : *Mol. Biol. Evol.* 16.1 (1999), p. 37-48. DOI : [10.1093/oxfordjournals.molbev.a026036](https://doi.org/10.1093/oxfordjournals.molbev.a026036) (cf. p. 4).
- [18] H.-J. BANDELT, M. van de VEL et E. VERHEUL. “Modular Interval Spaces”. In : *Math. Nachr.* 163.1 (1993), p. 177-201. ISSN : 0025-584X. DOI : [10.1002/mana.19931630117](https://doi.org/10.1002/mana.19931630117) (cf. p. 121).
- [19] H.J. BANDELT, A. DÄHLMANN et H. SCHÜTTE. “Absolute retracts of bipartite graphs”. In : *Discrete Appl. Math.* 16 (1987), p. 191-215 (cf. p. 128, 142, 153, 154).
- [20] J.-P. BARTHÉLEMY et J. CONSTANTIN. “Median Graphs, Parallelism and Posets”. In : *Discrete Math.* 111.1-3 (1993). Graph Theory and Combinatorics (Marseille-Luminy, 1990), p. 49-63. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/0012-365X\(93\)90140-0](https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90140-0) (cf. p. 4, 80).
- [21] J. P. BARTHÉLEMY et M.F. JANOWITZ. “A formal theory of consensus”. In : *SIAM J. Discr. Math.* 4 (1991), p. 305-322 (cf. p. 4).
- [22] J.P. BARTHÉLEMY, B. LECLERC et B. MONJARDET. “On the use of ordered sets in problems of comparison and consensus of classifications”. In : *J. Classification* 3 (1986), p. 187-224 (cf. p. 4).
- [23] J.P. BARTHÉLEMY et B. MONJARDET. “The median procedure in cluster analysis and social choice theory”. In : *Math. Social Sci.* 1 (1981), p. 235-268 (cf. p. 4).
- [24] A. BAVELAS. “Communication Patterns in Task-Oriented Groups”. In : *J. Acoust. Soc. Am.* 22.6 (1950), p. 725-730. DOI : [10.1121/1.1906679SMASH](https://doi.org/10.1121/1.1906679SMASH) (cf. p. 4).
- [25] M. A. BEAUCHAMP. “An improved index of centrality”. In : *Behavioral Science* 10 (1965), p. 161-163 (cf. p. 4).
- [26] L. BÉNÉTEAU, J. CHALOPIN, V. CHEPOI et Y. VAXÈS. “ABC(T)-graphs : an axiomatic characterization of the median procedure in graphs with connected and G^2 -connected medians”. In : *CoRR* abs/2206.03587 (2022). URL : <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.03587> (cf. p. 141).
- [27] L. BÉNÉTEAU, J. CHALOPIN, V. CHEPOI et Y. VAXÈS. “Graphs with G^P -connected medians”. In : *CoRR* abs/2201.12248 (2022). URL : <https://arxiv.org/abs/2201.12248> (cf. p. 93, 115).
- [28] L. BÉNÉTEAU, J. CHALOPIN, V. CHEPOI et Y. VAXÈS. “Medians in median graphs and their cube complexes in linear time”. In : *J. Comput. Syst. Sci.* 126 (2022), p. 80-105. DOI : [10.1016/j.jcss.2022.01.001](https://doi.org/10.1016/j.jcss.2022.01.001) (cf. p. 29).

- [29] C. BERGE. *Hypergraphs*. T. 45. North-Holland Mathematical Library. Combinatorics of finite sets, Translated from the French. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. ISBN : 0-444-87489-5 (cf. p. 156, 157).
- [30] P. BERGÉ, G. DUCOFFE et M. HABIB. “Subquadratic-Time Algorithm for the Diameter and All Eccentricities on Median Graphs”. In : *39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2022, March 15-18, 2022, Marseille, France (Virtual Conference)*. T. 219. LIPIcs. 2022, 9 :1-9 :21. DOI : [10.4230/LIPIcs.STACS.2022.9](https://doi.org/10.4230/LIPIcs.STACS.2022.9) (cf. p. 89, 173).
- [31] P. BERGÉ et M. HABIB. “Diameter in linear time for constant-dimension median graphs”. In : *Proceedings of the XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, LAGOS 2021, Online Event / São Paulo, Brazil, May 2021*. T. 195. 2021, p. 97-107. DOI : [10.1016/j.procs.2021.11.015](https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.11.015) (cf. p. 89, 173).
- [32] G. BIRKHOFF et S. A. KISS. “A ternary operation in distributive lattices”. In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), p. 749-752. ISSN : 0002-9904. DOI : [10.1090/S0002-9904-1947-08864-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08864-9) (cf. p. 4).
- [33] M. BRANDEAU et S. CHIU. “Parametric Facility Location on a Tree Network with an L_p -Norm Cost Function”. In : *Transportation Science* 22.1 (1988), p. 59-69. ISSN : 00411655, 15265447. URL : <http://www.jstor.org/stable/25768296> (cf. p. 57).
- [34] B. BREŠAR et al. “Bucolic complexes”. In : *Adv. Math.* 243 (2013), p. 127-167. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1016/j.aim.2013.04.009](https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.04.009). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2013.04.009> (cf. p. 126, 127).
- [35] M. R. BRIDSON et A. HAEFLIGER. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. T. 319. Grundlehren Math. Wiss. Berlin : Springer-Verlag, 1999, p. xxii+643. ISBN : 3-540-64324-9. DOI : [10.1007/978-3-662-12494-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9) (cf. p. 3).
- [36] H. BUSEMANN. *The Geometry of Geodesics*. New-York : Academic Press, 1955 (cf. p. 4).
- [37] H. BUSEMANN et B.B. PHADKE. “Peakless and monotone functions on G -spaces”. In : *Tsukuba J. Math.* 7 (1983), p. 105-135 (cf. p. 4).
- [38] J. CHALOPIN et V. CHEPOI. “A Counterexample to Thiagarajan’s Conjecture on Regular Event Structures”. In : *ICALP 2017*. T. 80. LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2017, 101 :1-101 :14. DOI : [10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.101](https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.101) (cf. p. 4).
- [39] J. CHALOPIN et V. CHEPOI. “1-Safe Petri Nets and Special Cube Complexes : Equivalence and Applications”. In : *ACM Trans. Comput. Log.* 20.3 (2019), 17 :1-17 :49. DOI : [10.1145/3322095](https://doi.org/10.1145/3322095) (cf. p. 4).
- [40] J. CHALOPIN, V. CHEPOI et U. GIOCANTI. “Graphs with convex balls”. In : *arXiv :2201.01599* (2021) (cf. p. 117, 124, 125).
- [41] J. CHALOPIN, V. CHEPOI, H. HIRAI et D. OSAJDA. “Weakly modular graphs and non-positive curvature”. In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 268.1309 (2020), 159 pp. eprint : [arXiv:1409.3892](https://arxiv.org/abs/1409.3892) (cf. p. 4, 120).
- [42] J. CHALOPIN, V. CHEPOI et D. OSAJDA. “On two conjectures of Maurer concerning basis graphs of matroids”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 114 (2015), p. 1-32. ISSN : 0095-8956. DOI : [10.1016/j.jctb.2015.03.004](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.03.004) (cf. p. 130).
- [43] V. CHEPOI. “Classification of graphs by means of metric triangles”. Russian. In : *Metody Diskret. Analiz.* 49 (1989), p. 75-93, 96. ISSN : 0136-1228 (cf. p. 21, 122, 133, 136).

BIBLIOGRAPHIE

- [44] V. CHEPOI. “On distances in benzenoid systems”. In : *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 36 (1996), p. 1169-1172 (cf. p. [15](#), [16](#), [168](#)).
- [45] V. CHEPOI. “On distance-preserving and domination elimination orderings”. In : *SIAM J. Discrete Math.* 11 (1998), p. 414-436 (cf. p. [94](#), [96](#)).
- [46] V. CHEPOI. “Graphs of some CAT(0) Complexes”. In : *Adv. in Appl. Math.* 24.2 (2000), p. 125-179. ISSN : 0196-8858. DOI : [10.1006/aama.1999.0677](#) (cf. p. [4](#)).
- [47] V. CHEPOI. “Basis graphs of even Delta-matroids”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 97.2 (2007), p. 175-192. ISSN : 0095-8956. DOI : [10.1016/j.jctb.2006.05.003](#) (cf. p. [129-131](#), [136](#)).
- [48] V. CHEPOI. “Nice Labeling Problem for Event Structures : a Counterexample”. In : *SIAM J. Comput.* 41.4 (2012), p. 715-727. ISSN : 0097-5397. DOI : [10.1137/110837760](#) (cf. p. [4](#)).
- [49] V. CHEPOI. “Distance-preserving subgraphs of Johnson graphs”. In : *Combinatorica* 37 (2017), p. 1039-1055 (cf. p. [130](#), [132](#)).
- [50] V. CHEPOI, C. FANCIULLINI et Y. VAXÈS. “Median problem in some plane triangulations and quadrangulations”. In : *Comput. Geometry* 27 (2004), p. 193-210 (cf. p. [5](#), [173](#)).
- [51] V. CHEPOI, T. FEVAT, E. GODARD et Y. VAXÈS. “A self-stabilizing algorithm for the median problem in partial rectangular grids and their relatives”. In : *Algorithmica* 62.1-2 (2012), p. 146-168. DOI : [10.1007/s00453-010-9447-4](#) (cf. p. [151](#)).
- [52] V. CHEPOI, K. KNAUER et T. MARC. “Hypercellular graphs : partial cubes without Q_3^- as partial cube minor”. In : *Discrete Math.* 343 (2020), p. 111678. DOI : [10.1016/j.disc.2019.111678](#) (cf. p. [127](#), [128](#)).
- [53] V. CHEPOI et D. OSAJDA. “Dismantlability of weakly systolic complexes and applications”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 367.2 (2015), p. 1247-1272. ISSN : 0002-9947. DOI : [10.1090/S0002-9947-2014-06137-0](#) (cf. p. [122](#), [123](#)).
- [54] T. H. CORMEN, C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST et C. STEIN. *Introduction to Algorithms*. 3rd. MIT Press, 2009. ISBN : 978-0-262-03384-8 (cf. p. [19](#), [73](#)).
- [55] D. Ž. DJOKOVIĆ. “Distance-preserving Subgraphs of Hypercubes”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 14.3 (1973), p. 263-267. DOI : [10.1016/0095-8956\(73\)90010-5](#) (cf. p. [4](#), [23](#), [29](#), [52](#), [130](#), [137](#)).
- [56] G DUCOFFE. “Distance problems within Helly graphs and k-Helly graphs”. In : *CoRR* abs/2011.00001 (2020). URL : <https://arxiv.org/abs/2011.00001> (cf. p. [5](#), [93](#)).
- [57] M. FARBER et R. JAMISON. “On local convexity in graphs”. In : *Discrete Math.* 66.3 (1987), p. 231-247. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/0012-365X\(87\)90099-9](#) (cf. p. [122](#), [124](#)).
- [58] P. FAVATI et F. TARDELLA. “Convexity in nonlinear integer programming”. In : *Ricerca Operativa* 53 (1990), p. 3-44 (cf. p. [96](#)).
- [59] T. FEDER. “Stable networks and product graphs”. In : *Memoirs Amer. Math. Society* 116.3 (1995) (cf. p. [79](#), [81](#), [87](#), [88](#)).
- [60] D. P. FOSTER et R. V. VOHRA. “An axiomatic characterization of a class of locations in tree networks”. In : *Oper. Res.* 46.3 (1998), p. 347-354. ISSN : 0030-364X. DOI : [10.1287/opre.46.3.347](#) (cf. p. [5](#)).

- [61] O. GERSTEL et S. ZAKS. “A new characterization of tree medians with applications to distributed sorting”. In : *Networks* 24.1 (1994), p. 23-29. ISSN : 0028-3045. DOI : [10.1002/net.3230240104](https://doi.org/10.1002/net.3230240104) (cf. p. [150](#), [151](#)).
- [62] A. J. GOLDMAN. “Optimal Center Location in Simple Networks”. In : *Transportation Sci.* 6 (1972), p. 195-201 (cf. p. [2](#)).
- [63] A. J. GOLDMAN et C. J. WITZGALL. “A Localization Theorem for Optimal Facility Placement”. In : *Transp. Sci.* 4.4 (1970), p. 406-409. DOI : [10.1287/trsc.4.4.406](https://doi.org/10.1287/trsc.4.4.406) (cf. p. [2](#)).
- [64] M. GROMOV. “Hyperbolic Groups”. In : *Essays in Group Theory*. Sous la dir. de S. M. GERSTEN. T. 8. Math. Sci. Res. Inst. Publ. New York : Springer, 1987, p. 75-263. DOI : [10.1007/978-1-4613-9586-7_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9586-7_3) (cf. p. [4](#)).
- [65] I. GUTMAN et S.J. CYVIN. *Introduction to the Theory of Benzenoid Hydrocarbons*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1989 (cf. p. [15](#), [137](#)).
- [66] S. L. HAKIMI. “Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph”. In : *Oper. Res.* 12.3 (1964), p. 450-459. ISSN : 0030364X, 15265463. DOI : [10.1287/opre.12.3.450](https://doi.org/10.1287/opre.12.3.450) (cf. p. [4](#)).
- [67] R. HAMMACK, W. IMRICH et S. KLAVŽAR. *Handbook of Product Graphs*. 2nd. Discrete Math. Appl. Boca Raton : CRC press, 2011, p. xviii+518. ISBN : 9781439813058. DOI : [10.1201/b10959](https://doi.org/10.1201/b10959) (cf. p. [4](#)).
- [68] H. HIRAI. “Discrete convex function on graphs and their algorithmic applications”. In : *In : T. Fukunaga and K. Kawarabayashi (eds.) Combinatorial Optimization and Graph Algorithms, Communications of NII Shonan Meetings, Springer Nature, Singapore* (2017), p. 67-101 (cf. p. [96](#), [114](#)).
- [69] H. HIRAI et M. IKEDA. “Node-Connectivity Terminal Backup, Separately-Capacitated Multiflow, and Discrete Convexity”. In : *ICALP* 65 (2020), p. 1-19 (cf. p. [96](#)).
- [70] R. HOLZMAN. “An Axiomatic Approach to Location on Networks”. In : *Mathematics of Operations Research* 15.3 (1990), p. 553-563. DOI : [10.1287/moor.15.3.553](https://doi.org/10.1287/moor.15.3.553) (cf. p. [5](#), [175](#)).
- [71] L. K. HUA et OTHERS. “Applications of Mathematical Methods to Wheat Harvesting”. In : *Chinese Math.* 2 (1962), p. 77-91 (cf. p. [2](#)).
- [72] J. G. KEMENY. “Mathematics without numbers”. In : *Daedalus* 88.4 (1959), p. 577-591 (cf. p. [3](#), [5](#)).
- [73] J. G. KEMENY et J. L. SNELL. *Mathematical models in the social sciences*. Reprint of the 1962 original. MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1978, p. vii+145. ISBN : 0-262-61030-2 (cf. p. [5](#)).
- [74] S. KLAVŽAR, I. GUTMAN et B. MOHAR. “Labeling of benzenoid systems which reflects the vertex-distance relations”. In : *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 35 (1995), p. 590-593 (cf. p. [137](#)).
- [75] S. KLAVŽAR. “Applications of isometric embeddings to chemical graphs”. In : *Discrete Mathematical Chemistry*. T. 51. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. DIMACS/AMS, 1998, p. 249-259. DOI : [10.1090/dimacs/051/18](https://doi.org/10.1090/dimacs/051/18) (cf. p. [53](#)).

BIBLIOGRAPHIE

- [76] S. KLAVŽAR et H. M. MULDER. “Median Graphs : Characterizations, Location Theory and Related Structures”. In : *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 30 (1999), p. 103-127 (cf. p. 4).
- [77] D. E. KNUTH. *The Art of Computer Programming, Volume 4A, Fascicle 0 : Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*. Addison-Wesley, 2008 (cf. p. 4).
- [78] A. KOLMOGOROV. “Sur la notion de la moyenne”. In : *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6)* 12 (1930), p. 388-391 (cf. p. 5).
- [79] T.T. LEBEDEVA, I.V. SERGIENKO et V. LTAN. “On conditions of coincidence of local and global minima in problems of discrete optimization”. In : *Kibernetika* 5 (1984), p. 58-65 (cf. p. 96).
- [80] R. F. LOVE, J. G. MORRIS et G. O. WESOLOWSKY. *Facilities location : Models and methods*. T. 7. Publ. Oper. Res. Ser. Amsterdam : North Holland, 1988 (cf. p. 1).
- [81] A. B. MARSH. “Matching algorithms”. Thèse de doct. John Hopkins University, 1979 (cf. p. 153).
- [82] S. B. MAURER. “Matroid Basis Graphs I”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 14.3 (1973), p. 216-240 (cf. p. 130, 131).
- [83] F. R. McMORRIS, H. M. MULDER, B. NOVICK et R. C. POWERS. “An ABC-Problem for location and consensus functions on graphs”. In : *Discrete Appl. Math.* 207.1 (2016), p. 15-28. ISSN : 0166-218X. DOI : [10.1016/j.dam.2015.12.008](https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.12.008) (cf. p. 5, 6, 141, 142, 147, 150, 151, 172, 175).
- [84] F. R. McMORRIS, H. M. MULDER et F. S. ROBERTS. “The median procedure in median graphs”. In : *Discrete Appl. Math.* 84.1-3 (1998), p. 165-181. DOI : [10.1016/S0166-218X\(98\)00003-1](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00003-1) (cf. p. 5, 141, 151).
- [85] F.R. McMORRIS et R.C. POWERS. “The median procedure in a formal theory of consensus”. In : *SIAM J. Disc. Math.* 8 (1995), p. 507-516 (cf. p. 4).
- [86] H. M. MULDER. “The structure of median graphs”. In : *Discrete Math.* 24.2 (1978), p. 197-204. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/0012-365X\(78\)90199-1](https://doi.org/10.1016/0012-365X(78)90199-1) (cf. p. 4, 20).
- [87] H. M. MULDER. “ n -cubes and median graphs”. In : *J. Graph Theory* 4.1 (1980), p. 107-110. ISSN : 0364-9024. DOI : [10.1002/jgt.3190040112](https://doi.org/10.1002/jgt.3190040112) (cf. p. 4).
- [88] H. M. MULDER. *The Interval Function of a Graph*. T. 132. Mathematical Centre tracts. Amsterdam : Mathematisch Centrum, 1980. ISBN : 9789061962083 (cf. p. 4, 20, 22, 25, 26, 53, 136).
- [89] H. M. MULDER. “The expansion procedure for graphs”. In : *Contemporary methods in graph theory*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1990, p. 459-477 (cf. p. 4, 20, 25).
- [90] H. M. MULDER et B. NOVICK. “A tight axiomatization of the median procedure on median graphs”. In : *Discrete Appl. Math.* 161.6 (2013), p. 838-846. ISSN : 0166-218X. DOI : [10.1016/j.dam.2012.10.027](https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.10.027) (cf. p. 5, 141, 144, 145, 147).
- [91] H. M. MULDER et A. SCHRIJVER. “Median graphs and Helly hypergraphs”. In : *Discrete Math.* 25.1 (1979), p. 41-50. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/0012-365X\(79\)90151-1](https://doi.org/10.1016/0012-365X(79)90151-1) (cf. p. 4, 81).
- [92] K. MUROTA. “Discrete convex analysis.” In : *Mathematical Programming* 83 (1998), p. 313-371 (cf. p. 96, 114).

- [93] Ladislav NEBESKÝ. “Median graphs”. In : *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 012.2 (1971), p. 317-325 (cf. p. 4).
- [94] K. NEHRING et M. PIVATO. “The median rule in judgement aggregation”. In : *Economic Theory* 73 (2022), p. 1051-1100 (cf. p. 5).
- [95] M. NIELSEN, G. D. PLOTKIN et G. WINSKEL. “Petri Nets, Event Structures and Domains, Part I”. In : *Theoret. Comput. Sci.* 13.1 (1981), p. 85-108. DOI : [10.1016/0304-3975\(81\)90112-2](https://doi.org/10.1016/0304-3975(81)90112-2) (cf. p. 4, 79).
- [96] M. ROLLER. *Poc sets, Median Algebras and Group Actions*. Rapp. tech. Univ. of Southampton, 1998 (cf. p. 4).
- [97] D. J. ROSE, R. E. TARJAN et G. S. LUEKER. “Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs”. In : *SIAM J. Comput.* 5.2 (1976), p. 266-283. ISSN : 0097-5397. DOI : [10.1137/0205021](https://doi.org/10.1137/0205021) (cf. p. 31, 33, 34).
- [98] B. ROZOY et P. S. THIAGARAJAN. “Event Structures and Trace Monoids”. In : *Theoret. Comput. Sci.* 91.2 (1991), p. 285-313. DOI : [10.1016/0304-3975\(91\)90087-1](https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90087-1) (cf. p. 4).
- [99] G. SABIDUSSI. “The centrality index of a graph”. In : *Psychometrika* 31.4 (1966), p. 581-603. DOI : [10.1007/BF02289527](https://doi.org/10.1007/BF02289527) (cf. p. 4).
- [100] M. SAGEEV. “Ends of Group Pairs and Non-positively Curved Cube Complexes”. In : *Proc. London Math. Soc.* s3-71.3 (1995), p. 585-617. ISSN : 0024-6115. DOI : [10.1112/plms/s3-71.3.585](https://doi.org/10.1112/plms/s3-71.3.585) (cf. p. 4, 69).
- [101] M. SAGEEV. “CAT(0) Cube Complexes and Groups”. In : *Geometric Group Theory*. Sous la dir. de M. BESTVINA, M. SAGEEV et K. VOGTMANN. T. 21. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Inst. Adv. Study, 2012, p. 6-53. DOI : [10.1090/pcms/021/02](https://doi.org/10.1090/pcms/021/02) (cf. p. 4).
- [102] T. J. SCHAEFER. “The Complexity of Satisfiability Problems”. In : *STOC 1978*. ACM, 1978, p. 216-226. DOI : [10.1145/800133.804350](https://doi.org/10.1145/800133.804350) (cf. p. 4, 81).
- [103] A. SCHRIJVER. *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Vol. A*. T. 24. Algorithms and Combinatorics. Paths, flows, matchings, Chapters 1–38. Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. xxxviii+647. ISBN : 3-540-44389-4 (cf. p. 153, 160).
- [104] D. R. SHIER et P. M. DEARING. “Optimal Locations for a Class of Nonlinear, Single-Facility Location Problems on a Network”. In : *Operations Research* 31.2 (1983), p. 292-303. ISSN : 0030364X, 15265463. URL : <http://www.jstor.org/stable/170801> (cf. p. 57).
- [105] P. S. SOLTAN et V. D. CHEPOÏ. “Solution of the Weber problem for discrete median metric spaces”. In : *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR* 85 (1987), p. 52-76. ISSN : 0234-5838 (cf. p. 29, 45, 48, 70, 128).
- [106] V. P. SOLTAN et V. CHEPOÏ. “Conditions for Invariance of Set Diameters under d -convexification in a Graph”. In : *Cybernetics* 19.6 (1983), p. 750-756. ISSN : 0023-1274 (cf. p. 117, 122, 124).
- [107] B. C. TANSEL, R. L. FRANCIS et T. J. LOWE. “Location on Networks : A Survey, I, II”. In : *Manag. Sci.* 29 (1983), p. 482-511. DOI : [10.1287/mnsc.29.4.482](https://doi.org/10.1287/mnsc.29.4.482) (cf. p. 2, 4).
- [108] P. S. THIAGARAJAN. “Regular Event Structures and Finite Petri Nets : A Conjecture”. In : *Formal and Natural Computing*. T. 2300. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, 2002, p. 244-256. DOI : [10.1007/3-540-45711-9_14](https://doi.org/10.1007/3-540-45711-9_14) (cf. p. 4).

BIBLIOGRAPHIE

- [109] P. S. THIAGARAJAN et S. YANG. “Rabin’s Theorem in the Concurrency Setting : a Conjecture”. In : *Theoret. Comput. Sci.* 546 (2014), p. 225-236. DOI : [10.1016/j.tcs.2014.03.010](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.03.010) (cf. p. 4).
- [110] M. van de VEL. *Theory of Convex Structures*. T. 50. North-Holland Math. Library. North-Holland Publishing Co., 1993. ISBN : 0-444-81505-8 (cf. p. 30, 70).
- [111] A. WEBER (cf. p. 1).
- [112] E. WEISZFELD. “Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum”. In : *Tohoku Math. J.* 43 (1937). (English transl. : *Ann. Oper. Res.*, 167 :7-41, 2009), p. 355-386 (cf. p. 1).
- [113] G. WINSKEL. “Events in Computation”. Thèse de doct. Edinburgh University, 1980 (cf. p. 79).
- [114] H. WITTENBERG. “Local medians in chordal graphs”. In : *Discr. Appl. Math.* 28 (1990), p. 287-296 (cf. p. 122).
- [115] D. R. WOOD. “On the maximum number of cliques in a graph”. In : *Graphs Combin.* 23.3 (2007), p. 337-352. ISSN : 0911-0119. DOI : [10.1007/s00373-007-0738-8](https://doi.org/10.1007/s00373-007-0738-8) (cf. p. 43).
- [116] A. A. ZYKOV. “On some properties of linear complexes”. In : *Mat. Sb. (N.S.)* 24(66).2 (1949). (English transl. : *Amer. Math. Soc. Transl.* 79, 1952), p. 163-188 (cf. p. 43).