

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 15 décembre 2022 par

Amélia Durbec

Dynamiques causales de graphes réversibles et quantiques

Discipline

Informatique

École doctorale

184 - Mathématiques et Informatique

Laboratoire/Partenaires de recherche

Laboratoire d'Informatique et Systèmes



Composition du jury

Pablo Arrighi Université Paris-Saclay, LMF	Directeur de thèse
Nathalie Aubrun Université Paris-Saclay, LISN	Rapporteuse
Jérémie Chalopin Université d'Aix-Marseille, LIS	Président du jury
Enrico Formenti Université Côte d'Azur, I3S	Rapporteur
Pierre Guillon Université d'Aix-Marseille, I2M	Examineur
Jean Krivine Université de Paris, IRIF	Examineur
Luidnel Maignan Université Paris-Est Créteil, LACL	Examineur
Simon Perdrix INRIA, Université de Lorraine, LORIA	Examineur

Affidavit

Je soussignée, Amélia Durbec, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Pablo Arrighi, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille le 25 septembre 2022



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Résumé

Les dynamiques causales de graphes sont une double extension des automates cellulaires : la grille sous-jacente est étendue à un graphe arbitraire de degré borné et le graphe lui-même peut évoluer dans le temps.

Du point de vue de la physique théorique, de telles dynamiques fournissent des modèles jouets pertinents notamment lorsqu'elles sont portées aux régimes réversible et quantique. Nous nous intéressons en particulier à l'émergence de propriétés physiques complexes à partir d'un modèle simple, comme la flèche du temps ou l'expansion de l'Univers.

Du point de vue de l'informatique, nos motivations sont liées à la forme physique de la thèse de Church-Turing : les dynamiques causales de graphes quantiques aspirent à être un modèle de calcul capturant les principales ressources de calcul connues (parallélisme spatial et parallélisme quantique) permettant d'effectuer efficacement un calcul dans un cadre cohérent.

Dans le régime réversible, nous prouvons qu'une dynamique causale de graphes peut être réversible tout en créant/détruisant des sommets, à travers trois différents modèles, que nous prouvons équivalents.

En s'appuyant sur ces résultats, nous exhibons des dynamiques causales à la fois réversibles et croissantes en espace, ce qui apporte un nouveau regard sur la compatibilité entre la flèche du temps et la réversibilité.

Nous définissons une notion de sous-décalage de graphes, qui peut être utilisée pour étudier les dynamiques causales de graphes en unifiant les dimensions temporelles et spatiales, de la même manière que les automates cellulaires $1D$ peuvent être étudiés par des sous-décalages de type fini $2D$.

Dans le régime quantique, notre première contribution est de fournir une définition rigoureuse de l'espace d'état. Une question notable était de savoir si les noms des sommets sont nécessaires ; nous prouvons que c'est le cas afin d'empêcher une propagation de l'information plus rapide que la lumière. Nous soulignons également que les renommages sur les graphes sont l'analogie nativement discret des changements de coordonnées.

Mots clés : Dynamiques de graphes, Quantique, Réversibilité, Sous-décalages, Flèche du temps

Abstract

Causal graph dynamics are a twofold extension of cellular automata : the underlying grid is extended to an arbitrary graph of bounded degree and the graph itself can evolve in time.

From the point of view of theoretical physics, such dynamics provide relevant toy models, especially when they are brought to the reversible and quantum regimes. We are particularly interested in the emergence of complex physical properties from a simple model, such as the time arrow or the expansion of the Universe.

From a computational point of view, our motivations are related to the physical Church-Turing thesis : quantum causal dynamics of graphs aspire to be a computational model capturing the known computational resources (spatial parallelism and quantum parallelism) allowing to efficiently perform a computation, in a unified framework.

In the reversible regime, we prove that causal graph dynamics can be reversible while creating/destroying vertices, through three different models that we prove to be equivalent.

Based on these results, we exhibit causal dynamics that are both reversible and increasing in space, which brings new insights into the compatibility between the time arrow and reversibility.

We define a notion of graph subshifts, which can be used to study causal dynamics of graphs by unifying temporal and spatial dimensions, in the same way that $1D$ cellular automata can be studied with $2D$ subshifts of finite type.

In the quantum regime, our first contribution is to provide a rigorous definition of state space. A notable question was whether vertex names are necessary ; we prove they are indeed necessary in order to prevent faster-than-light signaling. We also point out that renaming on graphs is the natively discrete analog of coordinate changes.

Keywords : Graph dynamics, Quantum, Reversibility, Subshifts, Time Arrow

Remerciements

Je souhaite avant tout exprimer ma gratitude envers Pablo Arrighi, pour avoir encadré ma thèse dans une période aussi difficile, aussi bien d'un point de vue personnel que professionnel. Je suis également reconnaissante envers Pierre Guillon, pour ses conseils et son support constant sur ces deux dernières années de thèse. Je remercie Nathalie Aubrun et Enrico Formenti pour leur précieux retours en tant que rapporteur.e.s de thèse, ainsi qu'à Jérémie Chalopin, Jean Krivine, Luidnel Maignan et Simon Perdrix pour avoir accepté d'être membres du Jury.

Aux Marseillais m'ayant accueilli pour mes dernières années d'étude et mes débuts en recherche, je vous remercie et vous souhaite de continuer à nourrir les aspirations des jeunes doctorant.e.s. En particulier, merci aux CaNAilles (y compris celles de cœur) pour leur aide.

Enfin, je remercie l'équipe GALaC et l'IUT d'Orsay pour leur soutien et leur aide dans la période difficile post-2020.

Sur un plan plus personnel, j'aimerais remercier et exprimer mon affection à toutes les personnes qui m'ont aidée à découvrir qui j'étais réellement et à avancer malgré les tempêtes.

À Auja, qui était la première à me tenir la main sur mon exploration. To the friends of the Gay Skull, providing me a place to cry, vent, love and support each other.

To the Headless of Vavash for the adventures that we shared together.

Aux esprits de l'île pour m'avoir adopté et pour avoir affronté avec moi les innombrables de vagues de colons.

Aux adopteurs de gobelins, pour avoir partagé mes premières créations en Abeir-Toril et m'avoir soutenue dans ma recherche. Au Démonagon, pour son aide constante et de passionnantes discussions.

À ma famille, pour m'avoir acceptée malgré ma différence. À l'ingénieur aéronautique, pour avoir été le premier à me montrer le chemin de la science. À mon protecteur fasse à l'adversité.

Aux 6 petits monstres, pour m'avoir fait rire et pleurer par votre extravagance.

Au marchombre, pour m'avoir fait découvrir de nouveaux horizons.

À celle à qui je dois mon nom.

Au Jedi, pour avoir exploré de nombreuses galaxies très lointaines avec moi.

À la tueuse de dragons, pour m'avoir défendue et soutenue sans relâche.

À celui qui gèle le temps, pour une infinité de petites et grandes choses qui dépassent de loin le cadre de cette thèse.

Merci, du fond du cœur.

Publications et pré-publications

- [8] Pablo ARRIGHI, Marios CHRISTODOULOU et Amélia DURBEC. « On quantum superpositions of graphs, no-signalling and covariance ». In : *CoRR* abs/2010.13579 (2020). arXiv : [2010.13579](https://arxiv.org/abs/2010.13579). URL : <https://arxiv.org/abs/2010.13579> (cf. p. 6).
- [10] Pablo ARRIGHI, Amélia DURBEC et Aurélien EMMANUEL. « Reversibility vs Local Creation/Destruction ». In : *Reversible Computation - 11th International Conference, RC 2019, Lausanne, Switzerland, June 24-25, 2019, Proceedings*. Sous la dir. de Michael Kirkedal THOMSEN et Mathias SOEKEN. T. 11497. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2019, p. 51-66. DOI : [10.1007/978-3-030-21500-2_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21500-2_4). URL : https://doi.org/10.1007/978-3-030-21500-2_4 (cf. p. 6, 26).
- [11] Pablo ARRIGHI, Amélia DURBEC et Matt WILSON. « Quantum networks theory ». In : *CoRR* abs/2110.10587 (2021). arXiv : [2110.10587](https://arxiv.org/abs/2110.10587). URL : <https://arxiv.org/abs/2110.10587> (cf. p. 6, 106).
- [34] Florian BRIDOUX, Amélia DURBEC, Kévin PERROT et al. « Complexity of Maximum Fixed Point Problem in Boolean Networks ». In : *Computing with Foresight and Industry - 15th Conference on Computability in Europe, CiE 2019, Durham, UK, July 15-19, 2019, Proceedings*. Sous la dir. de Florin MANEA, Barnaby MARTIN, Daniël PAULUSMA et al. T. 11558. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2019, p. 132-143. DOI : [10.1007/978-3-030-22996-2_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22996-2_12). URL : https://doi.org/10.1007/978-3-030-22996-2_12 (cf. p. 6).
- [52] Amélia DURBEC. « Graph Subshifts ». In : *27th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. Exploratory paper. 2021 (cf. p. 6).

Ci-dessus, l'ensemble des travaux publiés et pré-publié durant la période de thèse. Celle-ci couvre les publications [10, 52, 8] dans les chapitres 235 respectivement. Le chapitre 4 est entièrement original à cette thèse, et devrait faire l'objet d'une publication prochaine. La prépublication [11] est un développement qui n'a été finalisé que récemment et n'est donc pas couvert par la thèse. Un 'draft' sur la simulation de dynamiques de graphes quantiques intitulé "Large-Scale Distributed Framework for Quantum Irregular Dynamics Simulations" fera l'objet d'une prochaine soumission. La publication [34] sur les réseaux d'automates booléens ne s'intègre pas dans le cadre de cette thèse.

Table des matières

Affidavit	2
Résumé	3
Abstract	4
Remerciements	5
Publications	5
Table des matières	7
1 Préliminaires	12
1.1 Calculabilité et complexité	12
1.2 Automates cellulaires	13
1.2.1 Définition	13
1.2.2 Universalité	14
1.2.3 Réversibilité	15
1.3 Sous-décalages	16
1.3.1 Sous-décalage sur la grille	16
1.3.2 Généralisation sur des groupes	17
1.4 Automates cellulaires quantiques	19
1.4.1 Éléments de théorie quantique	19
1.4.2 Formalisme	20
1.5 Dynamiques causales de graphes	21
1.5.1 Graphes pointés modulo isomorphisme	21
1.5.2 Dynamiques de graphes	23
2 Dynamiques causales de graphes réversibles	26
2.1 Création/destruction de nœud	27
2.1.1 Incompatibilité apparente entre causalité et réversibilité	27
2.1.2 Hasslacher-Meyer	28
2.1.3 Dynamique de graphe à matière invisible	29
2.1.4 ACGD	33
2.1.5 Dynamique de graphes avec algèbre de noms	43
2.1.6 Simulation des IMCGD par les NCGD	45
2.1.7 Simulation des NCGD par les IMCGD	46
2.2 Conclusion	50

3	Sous-décalage de graphe	52
3.1	Introduction	52
3.2	Sous-décalages	54
3.3	Exemples	56
3.4	Quotient et périodicité	59
3.4.1	Périodicité forte	61
3.4.2	Quotients dans les SFT de graphes de Cayley	63
3.4.3	Indécidabilité	64
3.5	Conclusion	65
4	Flèche du temps	66
4.1	Entropie et flèche du temps	66
4.1.1	Historique de l'entropie	67
4.1.2	Entropie et classes d'équivalences	68
4.1.3	Périodicité de l'entropie d'un système dynamique fini et discret	69
4.1.4	Entropie globale	70
4.1.5	Explications avancées dans la littérature récente	70
4.2	L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion	72
4.2.1	Généralités sur le modèle	72
4.2.2	Dynamique $\sqrt{\phi}I$	74
4.2.3	Évolution de l'entropie sous une dynamique croissante	80
4.2.4	Croissance exponentielle	86
4.3	Entropie locale	88
4.3.1	Entropies moyennes	88
4.3.2	Entropie à rayon variable	90
4.4	Poches de faible entropie	92
4.4.1	Somme des entropies locales	92
4.4.2	Cas de $\sqrt{\phi}I$, $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$ et $\sqrt{\phi}I_2$	93
4.4.3	Choc inélastique	94
4.4.4	Loi de conservation du choc inélastique	96
4.4.5	Résultats expérimentaux	99
4.5	Conclusion	102
5	Dynamiques de graphes quantiques	104
5.1	Introduction	104
5.2	L'importance des noms	106
5.3	Graphe anonyme et transmission instantanée de l'information	107
5.4	Superpositions de graphes : noms et coloriage	111
5.5	Renommages, observables et évolution	112
5.6	Lien avec la gravité quantique	113
5.7	Conclusion	114
	Bibliographie	119
A	Annexe	128

Introduction

Bien que les ordinateurs soient omniprésents dans notre quotidien, il serait vain de tenter de définir ce qui fait un ordinateur par des caractéristiques physiques, celles-ci étant diverses et variées. Il nous faut plutôt définir un ordinateur par sa fonction : un ordinateur est une machine qui calcule. Mais alors, qu'est-ce qu'un calcul ?

Une première réponse à cette question a été donnée indépendamment par Alonzo Church et Alan Turing dans les années 30 lors de la définition du lambda-calcul et des machines de Turing. Ces deux modèles s'avèrent être équivalents, et peuvent exécuter tout algorithme conçu par l'humain sur le papier. Cette observation donna naissance à la thèse de Church-Turing, que l'on peut résumer par : "*Toute fonction effectivement calculable peut être calculée par une machine de Turing*".

Plus tard, une forme physique de la thèse de Church-Turing a été avancée, suggérant que toute fonction *physiquement* calculable est calculable par une machine de Turing. Cette variation semble à priori résister à l'épreuve du temps, en effet les phénomènes physiques qui permettraient de dépasser la machine de Turing semblent très spéculatifs [48].

Cette universalité physique de la machine de Turing est cependant remise en cause dès lors que l'on s'intéresse à une caractérisation plus fine des algorithmes, c'est-à-dire en termes de complexité. Diverses ressources accessibles dans notre univers, comme l'aléatoire ou le parallélisme spatial [92], mènent à des modèles de calculs à priori plus efficaces du point de vue de la complexité. Parmi ces modèles, on peut notamment citer les machines de Turing probabilistes, les réseaux d'automates, ou les circuits quantiques uniformes.

Ainsi, il semble qu'un ordinateur universellement efficace devrait prendre en compte l'ensemble des ressources physiques à sa disposition. Parmi les exemples les plus récents, l'idée d'un 'internet quantique' [35, 69] associant parallélisme spatial et parallélisme quantique a été avancée, ainsi que le 'quantum switch' [42, 57, 84, 86] qui propose une superposition de l'ordre des opérations afin de diminuer le nombre de portes quantiques nécessaires.

Dans cette thèse, nous définissons et étudions différents modèles généralisant les automates cellulaires pour permettre à la dynamique de faire évoluer la géométrie sur laquelle elle opère : les dynamiques causales de graphes. Nous proposons dans le chapitre 2 trois modèles de dynamiques causales de graphes réversibles permettant la création et la destruction de sommets, que nous prouvons équivalents. Dans le chapitre 3, nous posons une définition de sous-décalages de graphes, comme généralisation des sous-décalages de groupes. Ces objets sont une piste pour des résultats de complexité sur les dynamiques causales de graphes, analogues à ceux obtenus sur les automates cellulaires via l'étude des sous-décalages de groupes. Enfin, dans le

chapitre 5 nous formalisons la notion de superposition de graphes, pavant la voie à un modèle de dynamiques de graphes quantiques. L'ensemble de ces modèles sont fortement inspirés de la physique théorique, et en particulier de la gravité quantique.

L'intérêt d'approcher la physique théorique par des modèles de calculs ne se limite pas à l'exploitation des ressources de cette dernière, puisqu'il existe un vaste champs d'application pour la simulation des phénomènes physiques. On peut notamment citer la méthode des gaz sur réseaux, développée à partir des automates cellulaires, et dont la version stochastique permet de faire des simulations précises du comportement d'un gaz [59]. Il existe également des résultats plus théoriques de simulations de particules fermioniques par des marches quantiques (qui sont un cas particulier des automates cellulaires quantiques), qui peuvent être vues comme un analogue discret de l'équation de Dirac [17].

En considérant les dynamiques de graphes réversibles comme un modèle jouet de la physique de l'Univers, nous apportons une interprétation nouvelle de l'orientation de la flèche du temps. Cette interprétation amène à une flèche du temps qui est non pas le résultat d'une configuration originelle atypique et de faible entropie, mais la conséquence directe de l'existence d'un minimum, lui-même impliqué par la règle d'évolution. Poursuivant dans cette lancée, le chapitre 4 souligne le fait que les isomorphismes de graphes peuvent être vus comme un équivalent discret de l'invariance par changement de coordonnées (covariance générale [53]).

Nous montrons par une expérience de pensée que l'invariance par changement de système de coordonnées doit être imposée simultanément sur l'ensemble des branches de la superposition afin de prévenir la transmission instantanée d'informations. De manière plus générale, les dynamiques causales de graphes quantiques amènent un formalisme qui pourrait s'avérer bénéfique pour de nombreux modèles de gravité quantique, comme les réseaux de spins [96].

1. Préliminaires

Sommaire

1.1	Calculabilité et complexité	12
1.2	Automates cellulaires	13
1.2.1	Définition	13
1.2.2	Universalité	14
1.2.3	Réversibilité	15
1.3	Sous-décalages	16
1.3.1	Sous-décalage sur la grille	16
1.3.2	Généralisation sur des groupes	17
1.4	Automates cellulaires quantiques	19
1.4.1	Éléments de théorie quantique	19
1.4.2	Formalisme	20
1.5	Dynamiques causales de graphes	21
1.5.1	Graphes pointés modulo isomorphisme	21
1.5.2	Dynamiques de graphes	23

1.1. Calculabilité et complexité

La calculabilité et la complexité des modèles de calculs sont au coeur des travaux présentés dans cette thèse. Ici, nous les introduisons en quelques mots.

Définition 1.1.1 (Machine de Turing [106]). Une machine de Turing est définie par un quintuplet $T = (\Sigma, A, q_0, \delta, F)$ travaillant via une tête de lecture sur un ruban bi-infini où :

- Σ est un ensemble fini d'états.
- A est l'alphabet fini de symboles du ruban.
- q_0 est l'état initial.
- $\delta : \Sigma \times A \rightarrow \Sigma \times A \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ est la fonction de mise à jour. Celle-ci prend en entrée l'état de machine, le symbole présent sur le ruban sous la tête de lecture, et met à jour ces deux derniers puis déplace la tête de lecture à droite ou à gauche sur le ruban.
- $F \subseteq \Sigma$ un sous ensemble d'états finaux, qui une fois atteint arrête la machine.

Cette définition va de paire avec la thèse de Church-Turing [106], que l'on peut résumer comme suit.

Toute fonction effectivement calculable peut être calculée par une machine de Turing.

Dans le reste de cette thèse, on dit qu'une fonction f est calculable si et seulement si elle est encodable dans une machine de Turing à deux rubans.

Définition 1.1.2 (Indécidabilité). Un problème de décision est dit décidable si et seulement si il existe une machine de Turing à deux états finaux \top et \perp et renvoyant \top (resp. \perp) à une instance positive (resp. négative).

Les machines de Turing permettent d'établir une classification plus fine des problèmes de décision, en fonction des ressources temporelles et spatiales nécessaires pour résoudre ces derniers [49, 67, 105].

Certaines classes de complexité sont définies à partir d'autres modèles de calcul, ou permettent de catégoriser des problèmes différents, comme les problèmes de d'énumération ou d'approximation [85, 107].

1.2. Automates cellulaires

1.2.1. Définition

Les automates cellulaires constituent un modèle de calcul partant d'un principe simple : à partir d'une grille régulière de cellules et d'un alphabet donné, chaque cellule ayant un état correspondant à un élément de cet alphabet, on met à jour simultanément l'état de chaque cellule en fonction de l'état de ses voisines.

Définition 1.2.1 (Automate cellulaire). Soit une grille de dimension d , un ensemble d'état Σ et une configuration $x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \Sigma$ associant à chaque cellule de la grille un état. Le voisinage V de rayon r d'une cellule c est l'ensemble des cellules à distance (de Manhattan) au plus r . On peut alors définir une fonction locale $f : \Sigma^{|V|} \rightarrow \Sigma$, mettant à jour l'état d'une cellule en fonction de l'état des voisines. On définit un automate cellulaire par un quadruplet (d, r, Σ, f) .

Introduits dans les années 40 par Von Neuman [109] ils ont été popularisés par John Conway au court des années 70, notamment via le célèbre "jeu de la vie" [55].

L'espace des configurations peut être muni d'une métrique $d(x, x') = 2^{\min\{i | x_{|V_i} \neq x'_{|V_i}\}}$ où les V_i sont les voisinages de rayon i autour de l'origine et $x_{|V_i}, x'_{|V_i}$ sont les configurations partielles associées à ces voisinages.

Théorème 1.2.1 (Curtis-Hedlund [62]). Un automate cellulaire peut-être formulé sous la forme d'une fonction globale $F : \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ possédant deux propriétés :

- F est continue.
- F est invariante par translation, c'est-à-dire que pour tout vecteur $v \in \mathbb{Z}^d$, $F(x)_v = F(x_\nu)$ où x_ν est la configuration obtenue en translatant x par ν .

Il est à noter que dans la littérature, la notation x_v est généralement utilisée pour désigner l'état de la cellule en v , qui sera ici désignée par $x_{\{v\}}$. Nous nous écartons de ce standard afin d'homogénéiser les notations avec celles pré-établies dans les dynamiques de graphes.

Une technique assez classique pour se représenter le comportement dynamique d'un automate cellulaire 1D consiste à représenter son diagramme espace-temps.

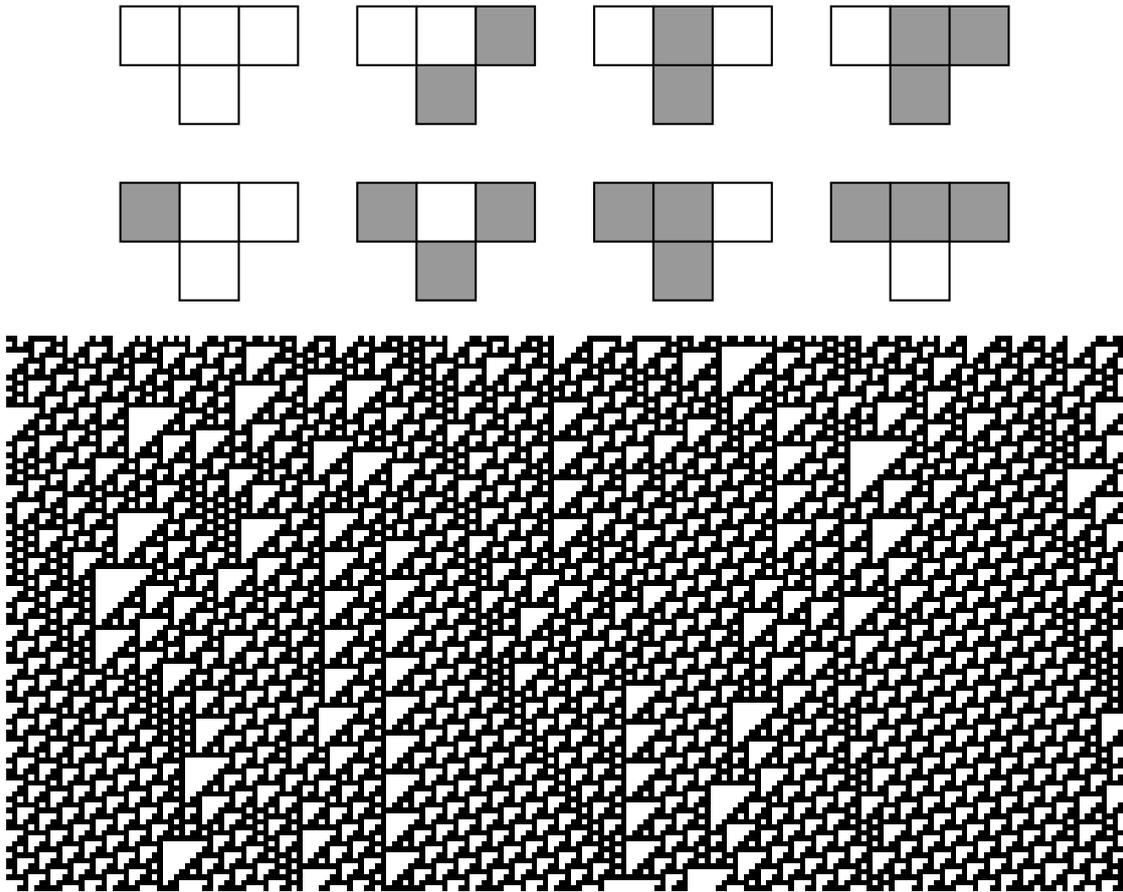


FIGURE 1.1. – *Exemple d'un automate cellulaire et de son diagramme espace-temps. Le temps s'écoule vers le bas.*

De manière plus générale, il existe des définitions d'automates cellulaires sur des objets plus complexes qu'une simple grille, en particulier sur des groupes [3, 73].

1.2.2. Universalité

En dépit de l'apparente simplicité des automates cellulaires, ceux-ci s'avèrent avoir un comportement global riche et complexe. Cette richesse est en particulier caractérisée par deux théorèmes d'universalité : l'universalité Turing et l'universalité intrinsèque.

L'universalité Turing des automates était déjà connue et prouvée par Von Neuman dès 1940.

Théorème 1.2.2 (Turing-Universalité [109]). Pour toute machine de Turing T , il existe un automate cellulaire F de dimension 1 *simulant* T .

Informellement, cette simulation se fait en encodant l'état du ruban de calcul de la machine de Turing, ainsi que l'état de la machine de Turing et la position de sa tête de lecture dans une configuration de l'automate cellulaire. La fonction locale de l'automate cellulaire consiste alors à faire respecter l'évolution de la configuration en fonction de la fonction de mise à jour de la machine de Turing.

Il existe également une autre notion d'universalité des automates cellulaires, l'universalité intrinsèque :

Théorème 1.2.3 (Universalité intrinsèque [21]). Il existe des automates cellulaires intrinsèquement universels, c'est-à-dire qui simulent pas à pas tout automate cellulaire de même dimension grâce une *mise à l'échelle* et potentiellement en plusieurs étapes.

Cette universalité a fait l'objet de nombreuses études [83, 32, 82, 6], celle-ci permettant de généraliser des propriétés à l'ensembles des automates cellulaires.

1.2.3. Réversibilité

Une caractéristique importante systèmes dynamiques est leur potentielle réversibilité :

Définition 1.2.2 (Automates cellulaires réversibles). Un automate cellulaire F est dit réversible si et seulement si il existe un automate cellulaire F' tel que $F \circ F' = F' \circ F$ est l'identité.

La première source d'intérêt pour ces objets est que les lois de la physique telles que nous les connaissons sont réversibles à l'échelle microscopique. Étudier les automates cellulaires sous cet angle nous permet donc de nous rapprocher de la physique théorique, et constitue une première approche aux dynamiques de graphes quantiques.

Une seconde raison souvent citée en faveur de l'étude des automates cellulaires réversibles est la promesse d'une méthode de calcul réversible, qui pourrait amener à du calcul à très basse consommation d'énergie selon le principe de Landauer [70]. Cette promesse est appuyée par le fait que les automates cellulaires réversibles restent Turing-universels [77] :

Théorème 1.2.4 (Universalité des automates cellulaires réversibles). Il existe des automates cellulaires réversibles Turing-universels.

Il s'avère de plus qu'il existe une caractérisation simple des automates cellulaires réversibles.

Théorème 1.2.5 (Corrolaire du theoreme de Hedlund). Un automate cellulaire est réversible si et seulement si sa fonction globale est une bijection.

Ceci est équivalent à dire que la fonction inverse d'un automate cellulaire bijectif est toujours un automate cellulaire.

Malheureusement, sous leur formulation standard, il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si oui ou non un automate cellulaire est réversible.

Théorème 1.2.6 (Indécidabilité de la réversibilité des automates cellulaires). Le problème suivant est indécidable pour $d \geq 2$:

Reversibilité locale
Entrée : Un automate cellulaire $A = (d, r, \Sigma, f)$
Sortie : A est-il réversible?

Cela signifie qu'il n'existe pas de borne sur le rayon de l'automate cellulaire inverse pour $d \geq 2$, car sinon il suffirait de tester tous les automates cellulaires de rayon inférieur à cette borne. Il existe cependant un algorithme lorsque l'on se restreint aux automates cellulaires de dimension 1.

Il existe en revanche un moyen d'énumérer et de construire des automates cellulaires réversibles sous la forme d'automates cellulaires partitionnés. Cela consiste à répéter une permutation des motifs selon différentes partitions de la grille [64, 78, 104].

1.3. Sous-décalages

1.3.1. Sous-décalage sur la grille

Un autre modèle de calcul très lié aux automates cellulaires sont les sous-décalage [79], et en particulier ceux de type fini. Etant donné un alphabet Σ , une configuration $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ d'un sous-décalage de dimension d est une coloration de la grille de dimension d .

Définition 1.3.1 (Motif). On définit un motif comme une fonction $m : w \rightarrow \Sigma$, où $w \subset \mathbb{Z}^d$ est un ensemble fini.

Définition 1.3.2 (Sous-décalage). Un sous-décalage est défini comme l'ensemble des configurations de $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ ne contenant aucun élément d'une famille \mathcal{F} de motifs interdits :

$$\mathcal{X} = \{c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \mid \forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall m \in \mathcal{F}, c|_{z,P} \neq m\}$$

où $c|_{z,P}$ désigne le motif de fenêtre P en z . Une catégorie particulièrement étudiée [20, 114] des sous-décalages sont les sous-décalage dit de type fini, c'est-à-dire pouvant être décrits par une famille finie de motifs interdits.

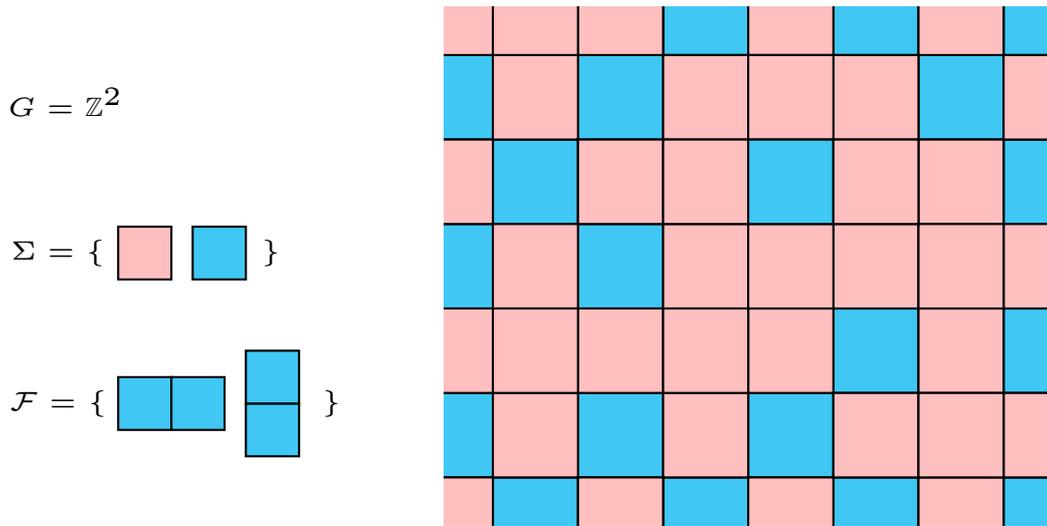


FIGURE 1.2. – Exemple de configuration d'un sous-décalage de type fini de dimension 2.

Intuitivement, cette condition impose une certaine notion de localité car il existe une borne sur le rayon des motifs interdits.

Il s'avère que l'ensemble des diagrammes espace-temps d'un automate cellulaire réversible constituent un sous-décalage de type fini de dimension supérieur. Cette approche a notamment permis d'établir des résultats sur différentes propriétés des automates cellulaires. Nous aborderons ce point plus en détail en introduction du chapitre 3.

1.3.2. Généralisation sur des groupes

La notion de sous-décalage n'est pas restreinte aux grilles, mais peut être appliquée sur des structures complexes comme les groupes [19, 66, 63]. Rappelons quelques notions sur les groupes qui s'avèrent utiles lors de la généralisation de la notion de sous-décalage de groupe aux sous-décalages de graphes.

Définition 1.3.3 (Groupe). Un groupe est un couple (G, \cdot) où G est un ensemble et \cdot est une opération binaire tel que :

- Pour tout $a, b \in G$, $a \cdot b \in G$ (Composition interne)
- Pour tout $a, b, c \in G$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Associativité)
- Il existe $\varepsilon \in G$ tel que pour tout $a \in G$, $a \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a = a$ (Élément neutre)
- Pour tout $a \in G$ il existe $a^{-1} \in G$ tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \varepsilon$ (Symétrie)

Définition 1.3.4 (Groupe de type fini). On dit qu'un groupe (G, \cdot) est de *type fini* si et seulement si il est engendré par une partie finie $S \subseteq G$, c'est-à-dire que tout élément $x \in G$ peut être écrit comme un produit d'éléments de S . Soit R un sous ensemble de G vu comme des relations, et F_S le groupe libre sur l'ensemble S . On note $\langle S | R \rangle$, le groupe obtenu en quotientant le groupe libre sur S par le plus petit sous-groupe

distingué de F_S contenant R . On peut supposer sans perte de généralité que S est symétrique, c'est-à-dire pour tout $a \in S$, $a^{-1} \in S$.

Un sous-groupe H de G est dit *distingué* (ou *normal*) si pour tout $g \in G$ et pour tout $h \in H$ on a $g.h.g^{-1} \in H$. Un groupe G est finiment présenté si il admet une présentation $\langle S|R \rangle$ telle que S et R sont tous deux des ensembles finis.

Soit un sous-groupe $H \in G$, on note gH le sous-groupe de G tel que $gH = \{g.h \in G | g \in G, h \in H\}$. L'indice de H dans G est défini par $|\{gH \subseteq G | g \in G\}|$. Ces notions nous permettent en particulier d'étudier les groupes quotients, ce qui dans le cadre de cette thèse sera utile pour étudier et utiliser la périodicité des graphes.

Définition 1.3.5 (Groupe résiduellement fini). Un groupe G est dit résiduellement fini si pour tout $g \in G$, avec $g \neq \varepsilon$, il existe un sous-groupe distingué d'indice fini $H \neq G$ tel que g n'appartient pas à H .

Alternativement, un groupe G est résiduellement fini, si et seulement si pour tout $g \neq \varepsilon$, il existe un morphisme $\phi : G \rightarrow K$ tel que $\phi(g) \neq \varepsilon$.

La structure d'un groupe peut être encodée dans un graphe, appelé graphe de Cayley :

Définition 1.3.6 (Graphe de Cayley [38]). Soit une partie génératrice symétrique S de G , on note $\text{CAY}(G, S)$ le graphe dont :

- Les sommets V sont les éléments de G
- Les arêtes de E sont les paires $g, h \in G$ telles qu'il existe $s \in S$ tel que $g.s = h$.

On peut enfin voir la généralisation des sous-décalages de groupes :

Définition 1.3.7 (Motif). On définit un motif comme une fonction $m : w \rightarrow \Sigma$, où w est un sous ensemble fini de G .

Définition 1.3.8 (Sous-décalage de groupe). Soit G un groupe et Σ un alphabet, pour une certaine famille \mathcal{F} de motifs interdits, on définit un sous-décalage \mathcal{Z} de G par :

$$\mathcal{Z} = \{c \in \Sigma^G | \forall g \in G, \forall m \in \mathcal{F}, \exists p \in w \text{ tel que } c(g.p) \neq m(p)\}$$

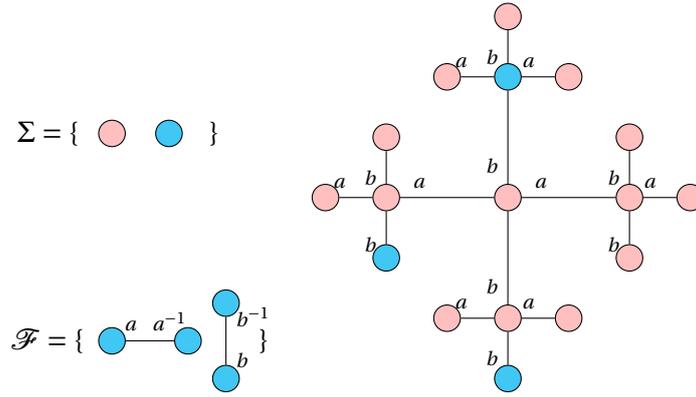


FIGURE 1.3. – Sous-décalage sur le groupe libre à deux générateurs, et une représentation partielle d'une de ses configurations.

Il est à noter que le terme de sous-décalage de graphes a déjà été employé pour décrire les sous-décalage sur des graphes quelconques [18]. Il s'agit d'objets différents de ceux définis dans cette thèse, car ils sont définis sur un graphe support fixé.

1.4. Automates cellulaires quantiques

1.4.1. Éléments de théorie quantique

Un qubit est une combinaison linéaire des états d'un bit appelée *superposition* :

$$|\phi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Définition 1.4.1 (Espace engendré). Pour tout ensemble S , l'espace de Hilbert engendré par S et noté \mathcal{H}_S . Les états quantiques sont les éléments $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_S$ de norme un, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme :

$$|\phi\rangle = \sum_{s \in S} \alpha_s |s\rangle$$

avec $\alpha_s \in \mathbb{C}$ et $\sum_s |\alpha_s|^2 = 1$.

Définition 1.4.2 (Produit interne). Soit $|\phi_1\rangle = \sum_{g \in G} \alpha_g |g\rangle$ et $|\phi_2\rangle = \sum_{g \in G} \beta_g |g\rangle$, deux éléments de \mathcal{H}_g . On note $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$ le produit interne défini par :

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \sum_{g \in G} \alpha_g^* \beta_g$$

où α_g^* est le conjugué complexe de α_g .

Deux vecteurs sont dis orthogonaux si leur produit interne est 0.

1. Préliminaires – 1.4. Automates cellulaires quantiques

Définition 1.4.3 (Norme). La norme de $|\phi\rangle$ est définie par $\| |\phi\rangle \| = \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle}$. La plupart du temps, nous considérerons des états normalisés, c'est-à-dire de norme 1.

Définition 1.4.4 (Opérateur). Soit H et H' deux espaces de Hilbert, on définit un opérateur linéaire comme une fonction $A: H \rightarrow H'$ telle que :

$$A \left(\sum_{g \in G} \alpha_i |g\rangle \right) = \sum_{g \in G} \alpha_i A(|g\rangle)$$

On note A^\dagger l'adjoint de A , c'est à dire l'unique opérateur linéaire tel que pour tout $|h_1\rangle \in H$ et $|h_2\rangle \in H'$ on a que $\langle h_2 | Ah_1 \rangle = \langle A^\dagger h_2 | h_1 \rangle$.

On dit qu'un opérateur est *normal* si $AA^\dagger = A^\dagger A$ et *unitaire* si $AA^\dagger = I$, ou I est l'identité.

Définition 1.4.5 (Produit tensoriel). Soit H et H' deux espaces de Hilbert, engendrés respectivement par les bases orthonormés B_v et S . On définit $H \otimes H'$ l'espace de Hilbert engendré par $S \times S$. Un élément de $H \otimes H'$ peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire d'éléments $|vw\rangle$ ou $|v\rangle \otimes |w\rangle$.

Pour une introduction détaillée à l'informatique quantique, voir l'ouvrage de Nielsen et Chuang [80].

1.4.2. Formalisme

Les automates cellulaires quantiques sont un modèle de calcul proposé initialement en 1982 par Richard Feynman [54] puis formalisé par Watrous en 95 [111]. Ils ont été plus tard redéfinis afin de préserver la localité [4, 5, 100].

Définition 1.4.6 (Configurations finies). Soit Σ un alphabet contenant un élément particulier dit *quiescent*. Une configuration $c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ est dite finie si elle contient un nombre fini d'états non-quiescents. On note \mathcal{C} l'ensemble des configurations finies.

Définition 1.4.7 (Espace d'état). L'espace d'état $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ est l'espace de Hilbert engendré par \mathcal{C} .

Définition 1.4.8 (Invariance par translation). Soit $z \in \mathbb{Z}^d$, on définit l'opérateur de translation τ_z comme l'unique opérateur linéaire tel que pour tout $|c\rangle$, on a $\tau_z |c\rangle = |c'\rangle$ où c' est la configuration obtenue en translatant c par z . Un opérateur A est dit invariant par translation si pour tout z , on a $\tau_z A = A \tau_z$.

Définition 1.4.9 (Automate cellulaire quantique). Un automate cellulaire quantique est un opérateur linéaire, unitaire, invariant par translation et causal.

La définition d'un opérateur causal est loin d'être triviale, et requiert le passage au formalisme des matrices de densités. Essentiellement, il s'agit des opérateurs ne permettant pas la transmission instantanée d'information au-delà d'un certain rayon de localité et laissant inchangé l'état quiescent, voir [7] pour plus de détails.

1.5. Dynamiques causales de graphes

Cette section reprend le formalisme proposé par Arrighi et Dowek dans [9] et sur lequel cette thèse s'appuie.

1.5.1. Graphes pointés modulo isomorphisme

Pour un ensemble de noms \mathcal{V} , on définit un graphe de la manière suivante.

Définition 1.5.1 (Graphes). Un *graphe* G est défini par

- Un sous-ensemble dénombrable de *sommets* $V(G) \subseteq \mathcal{V}$.
- Un ensemble fini de ports, noté π .
- Un ensemble d'arêtes non-intersectantes $E(G) \subseteq (V(G) : \pi)^2$. Formellement, une arête e est de la forme $\{u : a, v : b\}$, et $\forall e, e' \in E(G), e \cap e' \neq \emptyset \Rightarrow e = e'$.
- Une fonction partielle σ de $V(G)$ vers un ensemble fini Σ ;

Dans l'ensemble de cette thèse, les graphes seront supposés *connexes*, c'est-à-dire que pour tout $u, v \in V(G)$, il existe un *chemin* fini $c = a_0 b_0 \dots a_{n-1} b_{n-1}$ entre u et v . Formellement, il existe $v_0, \dots, v_n \in V(G)$, et $a_0, b_0, \dots, a_{n-1}, b_{n-1} \in \pi$ tel que $\{v_i : a_i, v_{i+1} : b_i\} \in E(G)$, pour $i \in \{0 \dots n-1\}$ avec $v_0 = u$ et $v_n = v$. On note $u^{-1} = b_{n-1} a_{n-1} \dots b_0, a_0$ le chemin inverse de u . L'ensemble des graphes avec états dans Σ et ports dans π est noté $\mathcal{G}_{\Sigma, \pi}$.

Nous verrons plus tard qu'il est souvent utile de munir notre graphe d'un pointeur, c'est à dire d'un sommet particulier servant d'origine. En ce sens, on définit un graphe pointé comme une paire (G, p) avec $p \in V(G)$.

On veut définir une dynamique invariante par translation, c'est à dire indépendante du nom donné aux sommets. Une manière de statuer cette indépendance est via les isomorphismes de graphes [9].

Définition 1.5.2 (Isomorphisme). Un *isomorphisme* R est une fonction de \mathcal{G}_{π} vers \mathcal{G}_{π} spécifiée par une bijection R de V vers V , conservant la structure du graphe. L'image d'un graphe G par un isomorphisme R est le graphe noté RG dont l'ensemble des sommets est $R(V(G))$, et ayant l'ensemble d'arêtes suivant $E(RG) = \{\{R(u) : a, R(v) : b\} \mid \{u : a, v : b\} \in E(G)\}$. Similairement, l'image d'un graphe pointé $P = (G, p)$ par R est le graphe pointé $RP = (RG, R(p))$. Deux graphes G et G' sont dit isomorphes (on note $G \approx G'$) si et seulement si il existe un isomorphisme R tel que $RG = G'$. Cette définition s'étend naturellement aux graphes pointés.

On note que les isomorphismes changent simultanément les noms de $V(G)$ et celui du pointeur. On peut maintenant définir les graphes pointés modulo isomorphisme.

Définition 1.5.3 (Graphes (pointés) modulo isomorphisme). Soit un graphe pointé $P = (G, p)$. Le *graphe pointé modulo* $X(P)$ est la classe d'équivalence de P induite par la relation d'équivalence \approx . L'ensemble des graphes pointés modulo avec états dans Σ et ports dans π est noté $\mathcal{X}_{\Sigma, \pi}$ ou \mathcal{X} pour faire court. De manière similaire, on appelle *graphe anonyme* $X(G)$ la classe d'équivalence de G induite par \approx . L'ensemble

des graphes anonymes avec états dans Σ et ports dans π est noté $\mathcal{X}_{\Sigma,\pi}^\circ$ ou \mathcal{X}° pour faire court.

Dans les graphes pointés modulo, comme chaque port est utilisé au plus une fois, un sommet est uniquement déterminé par un de ses chemin depuis le pointeur. Cependant, dans les graphes anonymes, il peut arriver que deux sommets soit indistinguables l'un de l'autre, notamment lorsque le graphe est sommet-transitif. Intuitivement, considérer les graphes pointés modulo revient à se restreindre à la quantité minimale d'information nécessaire pour identifier de manière unique chaque sommet en "oubliant" les noms.

Cependant, l'intérêt principal de considérer les graphes pointés modulo est que ceux-ci forment un espace compact, comme prouvé dans [13]. Cette condition est cruciale pour prouver l'équivalence des deux définitions classiques des automates cellulaires (par concaténation de fonctions locales et par fonction globale continue et invariante par translation) [62].

Définition 1.5.4 (Graphe support). On définit le *support* d'un graphe (potentiellement pointé et/ou modulo isomorphisme) comme le graphe obtenu en oubliant les états des sommets, c'est à dire la fonction partielle σ . On notera $\text{sup}(X)$ le support de X .

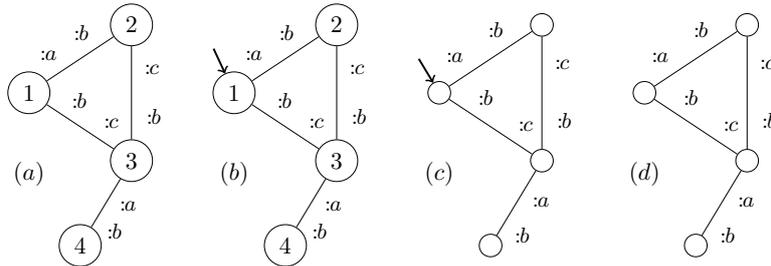


FIGURE 1.4. – *Les différents types de graphes monochromes* (a) Un graphe G . (b) le graphe pointé $(G, 1)$. (c) Le graphe pointé modulo isomorphisme X . (d) Un graphe anonyme (modulo isomorphisme et sans pointeur) X° .

On définit maintenant différentes opérations sur les graphes qui nous permettront de les manipuler plus facilement :

Définition 1.5.5 (Translation du pointeur). Le pointeur de $X \in \mathcal{X}$ peut être déplacé le long d'un chemin u , menant au graphe $Y = X_u$. On peut également déplacer le pointeur en sens inverse via le chemin u^{-1} , ce qui nous mène à l'égalité : $X = Y_{u^{-1}}$.

Définition 1.5.6 (Disques). Les voisins de rayons r sont les sommets pouvant être atteints en parcourant au plus r arêtes en partant du pointeur p . Pour tout sommet u , le disque de rayon r , écrit G_u^r , est le sous-graphe induit par les sommets à rayon $r + 1$, en se restreignant aux états des voisins à r et aux états des arêtes entre eux, et pointé en p .

Fondamentalement, le disque est élargi à un rayon $r + 1$ de façon à inclure toute l'information des voisins de rayon r , y compris leurs arêtes avec des voisins à rayon $r + 1$ mais rien de plus. Cette notion peut être également définie pour les graphes pointés modulo isomorphisme :

Définition 1.5.7 (Disque de graphes modulo isomorphisme). Soit $X \in \mathcal{X}_{\Sigma, \pi}$ un graphe pointé modulo et G son graphe associé. On définit X^r comme $X(G_\varepsilon^r)$. Le graphe modulo isomorphisme $X^r \in \mathcal{X}_{\Sigma, \pi}$ est appelé le *disque de rayon r* de X . L'ensemble des disques de rayon r avec états dans Σ et ports dans π est noté $\mathcal{X}_{\Sigma, \pi}^r$.

On utilise la notation raccourcie X_u^r pour le graphe $(X_u)^r$, c'est à dire le graphe obtenu en déplaçant dans un premier temps le pointeur le long du chemin u , puis en prenant le disque de rayon r .

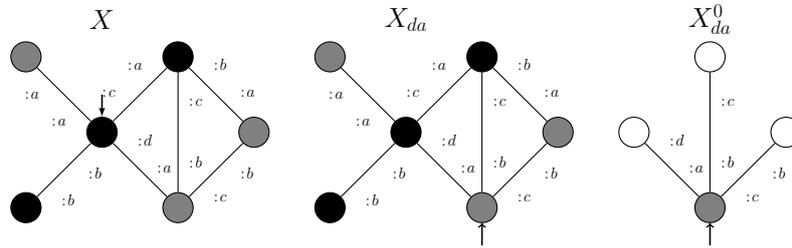


FIGURE 1.5. – Opérations sur les graphes pointés modulo isomorphisme. Le pointeur de X est déplacé le long de l'arête da , ce qui nous donne X_{da} , et on prend ensuite le disque de rayon 0 autour du pointeur et ce qui nous donne X_{da}^0 .

1.5.2. Dynamiques de graphes

Nous pouvons maintenant définir les dynamiques de graphes, sous la forme de fonction globales, de manière analogues aux automates cellulaires.

Définition 1.5.8 (Dynamique [13]). Une dynamique (F, R_\bullet) est définie par :

- une fonction $F: \mathcal{X}_{\Sigma, \pi} \rightarrow \mathcal{X}_{\Sigma, \pi}$;
- un ensemble de fonctions $R_\bullet = \{R_X | X \in \mathcal{X}\}$, avec $R_X: V(X) \rightarrow V(F(X))$ pour tout X .

Le rôle de R_\bullet est de permettre de traquer l'évolution d'un sommet et de son voisinage lors de l'application de la dynamique.

Définition 1.5.9 (Continuité [13]). Une dynamique (F, R_\bullet) est dite *continue* si et seulement si pour tout X et m , il existe n , tel que

$$\bullet F(X)^m = F(X^n)^m \quad \bullet \text{dom } R_X^m \subseteq V(X^n) \text{ et } R_X^m = R_{X^n}^m$$

où R_X^m est la fonction partielle obtenue en restreignant R_X au co-domaine $F(X)^m$, et en utilisant l'inclusion naturelle de $F(X)^m$ dans $F(X)$.

1. Préliminaires – 1.5. Dynamiques causales de graphes

On peut remarquer que la seconde condition impose la continuité de R_X pour tout $X \in \mathcal{X}$. Un point important est que par compacité, la continuité implique la continuité uniforme, ce qui veut dire que n ne dépend pas de X et il existe donc une borne sur la vitesse de propagation de l'information.

On peut maintenant exprimer l'invariance par translation d'une dynamique :

Définition 1.5.10 (Invariance par translation). Une dynamique (F, R_\bullet) est dite *invariante par translation* si pour tous X , $u \in V(X)$, et $v \in V(X_u)$ on a :

$$\bullet F(X_u) = F(X)_{R_X(u)} \quad \bullet R_X(u, v) = R_X(u).R_{X_u}(v)$$

Finalement, on exige que les graphes ne croissent pas à une vitesse non-bornée :

Définition 1.5.11 (Borne de croissance). Une dynamique (F, R_\bullet) est dite *bornée* si il existe une borne b telle que pour tout X et pour tout $w \in V(F(X))$, il existe $u \in \text{Im}(R_X)$ et $v \in V(F(X)_u^b)$ tel que $w = uv$.

Définition 1.5.12 (Dynamique causale de graphes [13]). Une *dynamique causale de graphes* (CGD) est une dynamique continue, bornée et invariante par translation.

Un exemple simple que l'on peut considérer est le déplacement réversible de particules dans un graphe arbitraire.

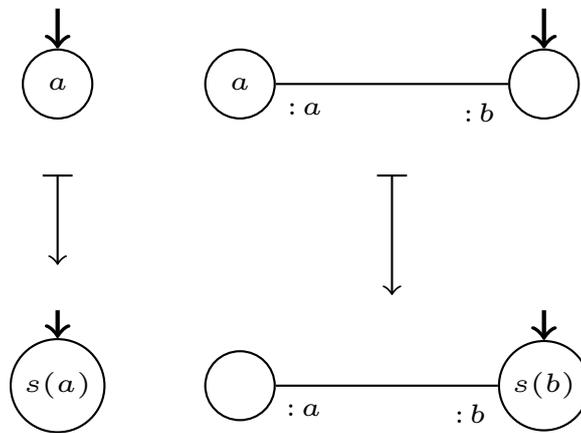


FIGURE 1.6. – *Advection généralisée*. Schéma représentant les deux évolutions possibles d'une particule a , soit le sommet ne contient pas de port a , auquel cas la particule reste immobile, soit elle se déplace le long du port a . Dans les deux cas la particule change d'état.

Exemple 1.5.1 (Advection réversible généralisée). Soit $\pi = \{a, b, \dots\}$ un ensemble fini de ports, et $\Sigma = \mathcal{P}(\pi)$ l'ensemble des états internes, tel que \emptyset signifie 'il n'y a aucune

1. Préliminaires – 1.5. Dynamiques causales de graphes

particule sur ce sommet'; $\{a\}$ signifie 'il y a au moins une particule se propageant en suivant le port a '; $\{a, b\}$ signifie 'il y a au moins une particule se propageant en suivant le port a et une autre en suivant le port b '... Soit $s : \pi \rightarrow \pi$ une permutation de l'ensemble des ports, spécifiant la direction successeur. La figure 1.6(a) spécifie comment une particule individuelle se déplace. En arrivant à sa destination, la particule se met dans un état indiquant sa nouvelle direction. Les arêtes manquantes sont traitées comme des boucles. La dynamique consiste alors simplement à appliquer cette opération à toutes les particules simultanément.

On peut noter que l'advection est non seulement réversible mais également temporellement symétrique. En effet si on note T la dynamique qui replace, pour chaque cellule, la particule p par $s^{-1}(p)$, on obtient $A^{-1} = TAT$. L'interprétation physique de T serait de changer l'orientation de la particule en multipliant la vitesse par -1 .

2. Dynamiques causales de graphes réversibles

La réversibilité est une propriété de fort intérêt, à la fois en tant que propriété isolée et en tant qu'étape nécessaire vers un modèle quantique. Il est donc tout naturel de s'intéresser aux dynamiques causales de graphes réversibles en tant que généralisation des automates cellulaires réversibles.

Une question cruciale est la suivante : *Une telle dynamique peut-elle créer ou détruire des sommets ?* D'une part, les sommets étant les principaux porteurs d'information, ceux-ci ne semblent pas pouvoir être détruits ou créés sans compromettre la réversibilité. D'un autre côté, il est facile de définir des permutations de graphes ne préservant pas les sommets. On doit donc savoir si la localité de la dynamique empêche la création ou destruction de sommets, ce qui est le cas pour les modèles de précédents travaux [9, 14].

Ce chapitre peut être vu comme un version longue de [10], dans lequel nous obtenons pour la première fois la création/destruction réversible et locale des sommets via trois modèles différents, sur lesquels nous prouvons divers résultats de simulation.

Sommaire

2.1	Création/destruction de nœud	27
2.1.1	Incompatibilité apparente entre causalité et réversibilité	27
2.1.2	Hasslacher-Meyer	28
2.1.3	Dynamique de graphe à matière invisible	29
2.1.3.1	Définition	30
2.1.3.2	Compacité	30
2.1.3.3	Réversibilité	32
2.1.4	ACGD	33
2.1.4.1	Définition	33
2.1.4.2	Simulation de l'invisible par l'anonyme	34
2.1.4.3	Simulation de l'anonyme par l'invisible	38
2.1.5	Dynamique de graphes avec algèbre de noms	43
2.1.5.1	Définition	43
2.1.6	Simulation des IMCGD par les NCGD	45
2.1.7	Simulation des NCGD par les IMCGD	46
2.2	Conclusion	50

2.1. Création/destruction de nœud

2.1.1. Incompatibilité apparente entre causalité et réversibilité

Premièrement, fixons les définitions de l'inversibilité et de la réversibilité :

Définition 2.1.1 (Inversibilité). Une CGD (F, R) est dite *inversible* si et seulement si F est une bijection.

Définition 2.1.2 (Réversibilité). Une CGD (F, R) est dite *réversible* (RCGD) si et seulement si F est inversible et il existe S tel que (F^{-1}, S) est une CGD .

De manière similaire aux automates cellulaires réversibles, ces deux propriétés s'avèrent équivalentes grâce à une généralisation du théorème de Hedlund sur les RCGD :

Théorème 2.1.1 ([15]). Une CGD (F, R) est inversible si et seulement si (F, R) est réversible.

Malheureusement, sans modification du modèle, il s'avère que la réversibilité se paye au prix de l'impossibilité de créer ou de détruire des sommets pour presque tout graphe pointé modulo isomorphisme.

Théorème 2.1.2 (Inversible implique la quasi-préservation des sommets [16]). Pour toute CGD inversible (F, R) , il existe une borne b tel que pour tout graphe X , si $|V(X)| > b$ alors R_X est bijective.

Intuitivement, la source de cette impossibilité est le fait que si deux sommets u et v fusionnent en sommet w contenant le pointeur, il y a ambiguïté sur l'origine du pointeur. Le seul cas où cette ambiguïté n'est pas présente est lorsque u et v sont symétriques comme on peut le voir dans la figure 2.1.

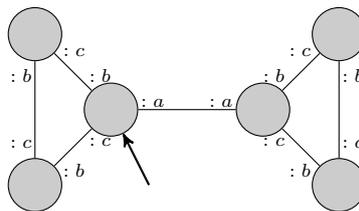


FIGURE 2.1. – *Exemple de graphe pointé symétrique.* Ce graphe est symétrique car les sommets ϵ sont des sommets différents et $X = X_a$.

Nous verrons plus loin que deux sommets symétriques ne peuvent fusionner que dans un nombre borné de cas.

Cette incompatibilité s'avère être un problème fondamental, qui avait été également constaté dans le cas des dynamiques de graphes nommés :

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Difficulté dans les graphes nommés : Comme le graphe évolue en fonction des interactions entre plus proche voisins, les mêmes causes locales mènent aux mêmes effets. C'est à dire que si le voisinage d'un sommet u et le même que celui du sommet v , alors u et v évoluent de la même façon. Les noms ne doivent donc avoir aucun impact sur la dynamique. La manière la plus naturelle d'imposer cette condition est encore une fois via l'invariance par isomorphisme : Soit F une dynamique nommée, on demande que pour tout renommage R , $F \circ R = R \circ F$. Il s'avère que cette condition interdit la création et destruction de sommet, même en l'absence de toute condition de réversibilité [9]. Intuitivement, si un sommet $u \in V(G)$ crée un sommet $u' \in V(F(G))$ via F , et qu'on considère le renommage R échangeant simplement le nom u' pour un nouveau nom v' . On a $F(RG) = F(G)$, qui ne contient pas v' , contrairement à $RF(G)$.

Difficulté avec une condition relaxée : Le problème ci-dessus peut-être partiellement corrigé en :1) exigeant que les noms soit créés à partir des noms environnants 2) relaxant la condition d'invariance par translation en demandant que pour tout renommage R , il existe un renommage R' , tel que $F \circ R = R' \circ F$. Malheureusement cette condition s'avère également trop restrictive, et une fois combinée à la réversibilité, il est toujours impossible de créer des sommets [9]. Pour donner une idée des difficultés rencontrées, supposons qu'il existe un sommet u créant deux sommets $u.l$ et $u.r$. Alors F^{-1} doit fusionner les deux sommets en u . Cependant, on attend de F^{-1} d'avoir la même propriété que pour tout renommage S , il existe S' , tel que $F^{-1} \circ S = S' \circ F^{-1}$. Considérons un S laissant $u.l$ inchangé, mais renommant $u.r$ en un nouveau nom v' . Que pourrait être le nom du sommet obtenu de la fusion de $u.l$ et v' par F^{-1} ? Quel changement devrait opérer S' sur u de façon à obtenir ce nom? De manière générale, la création de sommet entre G et $F(G)$ augmente l'espace des noms, ce qui compromet la bijectivité qui devrait être maintenue entre $\{RG\}$ l'ensemble des renommages possible de G et $\{RF(G)\}$ l'ensemble des renommages de $F(G)$.

Difficulté sur les graphes non pointés modulo isomorphisme : Les deux théorèmes d'impossibilité cités ci-dessus proviennent des noms. De manière à contourner ce problème, il serait naturel de tenter d'oublier les noms et de travailler avec des graphes non pointés modulo isomorphisme. Cette solution présente cependant un inconvénient : de simples énoncés comme "le voisinage de u détermine ce qui arrive à u ", nécessaire pour exprimer la causalité, deviennent impossible car on ne peut plus parler de u , mais seulement de l'ensemble des sommets appartenant à la classe d'équivalence de u .

2.1.2. Hasslacher-Meyer

Malgré ces théorèmes d'impossibilité, il existe un exemple informel de dynamique de graphe réversible créant et détruisant des sommets. Il s'agit de la dynamique Hasslacher-Meyer, décrite dans la première figure de [61], à l'origine de manière à simuler la dispersion de gaz dans un milieu.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

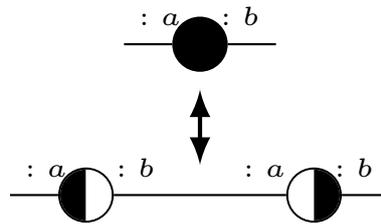


FIGURE 2.2. – *Étape de collision d'Hasslacher-Meyer*

Exemple 2.1.1 (Hasslacher-Meyer). La dynamique d'Hasslacher Meyer consiste à alterner deux étapes : 1) Une étape d'advection comme dans l'exemple 1.5.1, qui translate des particules en fonction de l'orientation 2) Une étape de collision comme montrée dans la figure 2.2, créant ou détruisant des sommets en fonction de la parité de la distance entre les deux particules.

Cette dynamique semble fondamentalement réversible, il s'agit en effet simplement de déplacer des particules et d'interchanger deux motifs non intersectant. Pour être exact, deux particule allant dans des directions opposées diviseront un sommet en deux si elles sont à distance paire, et en fusionneront deux si elles sont à distance impaire.

Le comportement à long terme de cette dynamique la rend particulièrement intéressante. Pour un graphe circulaire et une répartition de particules choisis aléatoirement, on pourrait s'attendre à ce que le cycle grandisse et rétrécisse de manière erratique, mais périodique sur un espace de temps suffisamment long. Ce raisonnement est assez intuitif, puisque la croissance et le rétrécissement dépendent de la parité, en plus du fait que le nombre de cycles croissant et décroissant doit être équilibré. Cependant, le comportement typique d'un cycle est de croître en taille vers l'infini, en suivant une croissance en racine carrée, comme ce serait le cas si les particules ne pouvaient que créer des sommets.

2.1.3. Dynamique de graphe à matière invisible

Les CGD réversibles préservent les sommets. Une idée simple pour 'créer/détruire' des sommets serait de simuler une dynamique ne préservant pas les sommets en distinguant deux types de sommets, ceux 'visibles' et ceux 'invisibles'. On dote alors chaque sommet visible d'un réservoir de matière invisible dans lequel celui-ci piochera lors de la création d'un sommet. De manière symétrique, la fusion de deux sommets sera simulée par l'envoi de l'un d'eux dans le réservoir de matière invisible de l'autre. De façon à itérer ce schéma, et pour permettre aux sommets de créer eux-mêmes des sommets, il est pratique de stocker la matière invisible sous la forme d'arbres binaires infinis.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

2.1.3.1. Définition

Pour définir les graphes de matière invisible, nous nous appuyerons sur la définition de graphe pointé modulo isomorphisme 1.5.3 précédemment établie.

Définition 2.1.3 (Graphes à matière invisible). Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\Sigma, \pi}$, $\mathcal{T} = \mathcal{X}_{\{m\}, \{m, l, r\}}$ et $\mathcal{X}' = \mathcal{X}_{\Sigma \cup \{m\}, \pi \cup \{m, l, r\}}$, tel que $\{m\} \cap \Sigma = \emptyset$ et $\{m, l, r\} \cap \pi = \emptyset$. Soit $T \in \mathcal{T}$ l'arbre binaire infini dont l'origine ε a une copie de T au sommet lm , et une autre au sommet rm . Chaque $X \in \mathcal{X}$ peut être identifié à l'élément $X \in \mathcal{X}'$ obtenu en attachant T à chaque sommet via une arête labellisée mm . L'ensemble des graphes ainsi obtenus est noté \mathcal{Y} et sont dénommés *graphes à matière invisible*.

Des exemples de graphes à matière invisible sont donnés en Fig 2.3.

Comme on souhaite que les sommets de la matière invisibles ne servent qu'à simuler la création et la destruction de sommets, on demande à ce que la dynamique soit triviale sur tout sommet suffisamment profond dans la matière invisible :

Définition 2.1.4 (Quiescence sur l'invisible). Une dynamique sur \mathcal{Y} est dite quiescente sur la matière invisible si il existe une borne b tel que, pour tout graphe $Y \in \mathcal{Y}$ et $s, t \in \{lm, rm\}^*$, alors $|s| > b \implies R_{Y_{mms}}(t) = t$ et $\sigma(t) = m$ dans Y .

Essentiellement, si le pointeur est suffisamment profond dans la matière invisible, alors tout arbre de matière invisible au dessus de celui-ci est préservé (les sommets préservent leurs chemins et leurs états). Comme la création et la destruction de sommet ne doit se faire que par la matière invisible, on se restreint aux dynamiques préservant l'ensemble des sommets.

Définition 2.1.5 (Préservation de sommets). On dit qu'une dynamique (F, R_\bullet) sur \mathcal{Y} *préserve les sommets* si pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, R_Y est bijective.

Définition 2.1.6 (Dynamique causale de graphes à matière invisible). On dit qu'une CGD sur \mathcal{Y} est une dynamique causale de graphes à matière invisible (IMCGD) si et seulement si elle préserve les sommets et est quiescente sur la matière invisible.

Heureusement, la réversibilité est bien compatible avec la création et la destruction de sommets, ce qui nous permet de réaliser formellement la dynamique d'Hasslacher-Meyer dans l'exemple suivant.

Exemple 2.1.2 (HM avec matière invisible). On alterne 1) l'étape d'advection comme dans l'exemple 1.5.1 2) l'étape de collision comme montré dans la figure précédente 2.3. La composition de ces deux étapes constituent une IMCGD inversible.

2.1.3.2. Compacité

De façon à prouver que $(F^{-1}, R_{F^{-1}(\bullet)}^{-1})$ est une IMCGD, nous avons besoin de prouver que c'est une dynamique continue, invariante par translation, préservant les sommets et quiescente sur la matière invisible. Parmi ces propriétés, seule la continuité s'avère

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

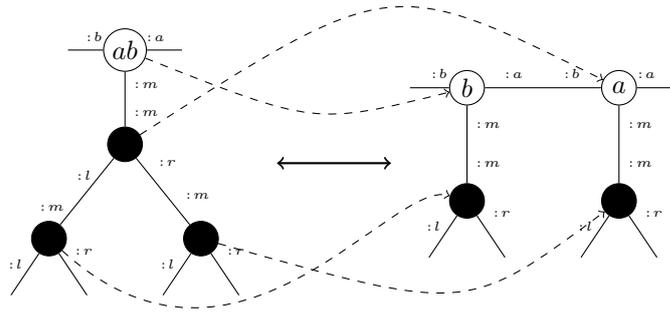


FIGURE 2.3. – *Exemple de l'étape de collision de Hasslacher-Meyer via des graphes pointés avec matière invisible.* Les sommets en noir sont invisibles. Les lignes en pointillés montrent comment les sommets se déplacent lors de l'opération.

réellement difficile à prouver. Intuitivement on peut espérer que cette propriété sur \mathcal{Y} peut être obtenue de la même façon que pour les CGD sur $\mathcal{X} \supset \mathcal{Y}$. Malheureusement, le théorème 2.1.1, s'appuie sur la compacité de \mathcal{X} , et il s'avère que \mathcal{Y} n'est pas compact. Cependant, il admet une clôture compacte $\overline{\mathcal{Y}}$, sur laquelle les IMCGD admettent une extension naturelle continue.

Définition 2.1.7 (Clôture). La *clôture compacte* de \mathcal{Y} dans \mathcal{X}' , notée $\overline{\mathcal{Y}}$, est l'ensemble des éléments Y' de \mathcal{X}' tels que, pour tout r , il existe un $Y(r)$ dans \mathcal{Y} satisfaisant $Y(r)^r = Y'^r$.

Afin d'établir une caractérisation exacte de cette clôture, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires :

Proposition 2.1.1 (Clôture du visible). Soit Y' dans $\overline{\mathcal{Y}}$ avec ε visible. Alors Y' appartient à \mathcal{Y} .

Démonstration. Soit v un sommet visible de Y' . Par la première partie du lemme A.1, le plus court chemin depuis ε à v est de la forme $u \cdot t$ avec u appartenant à Π^* et t appartenant à $\{lm, rm\}^*$. Or t doit être un mot vide, sinon v serait invisible. On a donc que les sommets visibles forment une composante connexe connectée par Π^* , que l'on nomme X . Par la deuxième partie du lemme A.1 chaque sommet de X a, dans Y' , un arbre de matière invisible qui lui est attaché et aucune autre matière invisible, grâce au lemme A.1. Enfin on obtient que Y' a son pointeur dans la matière visible, car Y' est connexe. \square

On obtient donc la caractérisation :

Proposition 2.1.2 (Caractérisation de la clôture).

$$\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} \cup \{T_u : u \in \{lm, rm\}^{-\mathbb{N}}\}$$

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Démonstration. Ceci est une conséquence directe des lemmes A.1, A.2, A.3 et de la proposition 2.1.1. Ces preuves étant simples mais relativement longues, elles sont reléguées à l'annexe A. \square

Maintenant que nous savons à quoi ressemble la clôture compacte de \mathcal{Y} nous pouvons étendre les IMCGD à cette clôture :

Théorème 2.1.3 (Extension compacte d'une IMCGD). Soit (F, R_\bullet) une dynamique continue et invariante par translation sur \mathcal{Y} . (F, R_\bullet) est quiescente sur la matière invisible si et seulement si (F, R_\bullet) peut être étendue continuellement sur $\overline{\mathcal{Y}}$ en préservant le fait que $F(T_u) = T_u$ et $R_{T_u} = Id$ pour tout u dans $\{lm, rm\}^{-\mathbb{N}}$.

Démonstration. La preuve formelle est assez technique, les détails ont donc été laissés en annexe, voir A.1. L'implication de la gauche vers la droite est simplement obtenue en combinant la shift-invariance et la continuité de F sur la matière invisible. En effet, un graphe ne peut être différencié localement de T_u si son pointeur est suffisamment éloigné dans la matière invisible. T_u partage donc la même image qu'un arbre de matière invisible. F étant quiescente sur la matière invisible, on obtient donc que $F(T_u) = T_u$ et $R_{T_u} = Id$. L'implication de la droite vers la gauche utilise le fait que comme $\overline{\mathcal{Y}}$ est compact, (F, R_\bullet) est uniformément continue par le théorème de Heine-Cantor. Utilisant le même raisonnement que précédemment, tout graphe est similaire localement à T_u si son pointeur est suffisamment profond dans la matière invisible. Combiné à la continuité uniforme, on obtient que (F, R_\bullet) est quiescente sur la matière invisible. \square

2.1.3.3. Réversibilité

Nous sommes enfin capable d'étendre le théorème de réversibilité aux IMCGD :

Théorème 2.1.4 (Réversibilité des IMCGD). Si (F, R_\bullet) est une IMCGD inversible, alors $(F^{-1}, R_{F^{-1}(\bullet)}^{-1})$ est une IMCGD.

Ici $R_{F^{-1}(\bullet)}^{-1}$ est une notation raccourcie pour la famille de fonctions S telle que pour tout X , $S_X = R_{F^{-1}(X)}^{-1}$.

Démonstration. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD inversible. On peut étendre celle-ci à $\overline{\mathcal{Y}}$ de la même manière que dans la proposition 2.1.3, et on note que l'extension ainsi obtenue est également inversible. [Préservation des sommets] La bijectivité de S_Y pour tout graphe Y est directement obtenue par la bijectivité de R_Y pour tout Y , $(F^{-1}, R_{F^{-1}(\bullet)}^{-1})$ préserve donc les sommets.

Soit S_Y la fonction telle que pour tout $Y \in \overline{\mathcal{Y}}$, et $v' \in V(Y)$, $S_Y(v') = R_{F^{-1}(Y)}^{-1}(v')$.

[Invariance par translation] Soit un graphe $Y \in \mathcal{Y}$ et un sommet $u \in V(Y)$. L'invariance par translation de F nous donne les égalités suivantes :

$$F(F^{-1}(Y)_{S_Y(u)}) = F(F^{-1}(Y))_{R_{F^{-1}(Y)}(S_Y(u))} = Y_{R_{F^{-1}(Y)} \circ R_{F^{-1}(Y)}^{-1}(u)} = Y_u$$

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

En appliquant F^{-1} sur les deux cotés de l'équation, on obtient $F^{-1}(Y)_{S_Y(u)} = F^{-1}(Y_u)$. Vérifions maintenant que S satisfait bien l'invariance par translation. Soit $v \in V(Y)$, alors nous avons :

$$R_{F^{-1}(Y)}(S_Y(uv)) = R_{F^{-1}(Y)}(R_{F^{-1}(Y)}^{-1}(uv)) = uv$$

Maintenant, en appliquant l'invariance par translation de F :

$$\begin{aligned} R_{F^{-1}(Y)}(S_Y(u)S_{Y_u}(v)) &= R_{F^{-1}(Y)}(S_Y(u))R_{F^{-1}(Y)_{S_Y(u)}}(S_{Y_u}(v)) \\ &= R_{F^{-1}(Y)} \circ R_{F^{-1}(Y)}^{-1}(u) R_{F^{-1}(Y_u)} \circ R_{F^{-1}(Y_u)}^{-1}(v) = uv \end{aligned}$$

On a donc $R_{F^{-1}(Y)}(S_Y(uv)) = R_{F^{-1}(Y)}(S_Y(u)S_{Y_u}(v))$. En simplifiant $R_{F^{-1}(Y)}^{-1}$, on obtient $S_Y(uv) = S_Y(u)S_{Y_u}(v)$. Cela nous permet de conclure que (F^{-1}, S_\bullet) est invariante par translation.

[Continuité] F est une fonction inversible et continue sur un espace compact, sa fonction inverse F^{-1} est donc également compacte.

[Quiescence de la matière invisible] Nous avons étendu F à $\overline{\mathcal{Y}}$, tel que $F_{|\overline{\mathcal{Y}} \setminus \mathcal{Y}} = Id$ et $R_{|\overline{\mathcal{Y}} \setminus \mathcal{Y}} = Id$, et donc nous avons que $F_{|\overline{\mathcal{Y}} \setminus \mathcal{Y}}^{-1} = Id$ et $S_{|\overline{\mathcal{Y}} \setminus \mathcal{Y}} = Id$. En appliquant la réciproque de la proposition 2.1.3, nous obtenons que $F_{|\mathcal{Y}}^{-1}$ est quiescente sur la matière invisible.

En combinant le tout, on obtient bien que l'inverse de (F, R_\bullet) est une IMCGD. \square

2.1.4. ACGD

2.1.4.1. Définition

Une manière directe d'obtenir la réversibilité est de considérer la dynamique obtenue en oubliant le pointeur, c'est à dire en projetant $\mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}$ sur l'espace des graphes anonymes $\mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}^\circ$. Pour rappel, étant donné un graphe pointé modulo isomorphisme X , on note X° le graphe non-pointé modulo isomorphisme obtenu en enlevant le pointeur.

Définition 2.1.8 (Dynamique causale de graphe anonyme). Soit F° une fonction sur $\mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}^\circ$. On dit que F° est une dynamique causale de graphe anonyme (ACGD) si et seulement si il existe une CGD (F, R_\bullet) sur $\mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}$ qui induit naturellement F° sur $\mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}^\circ$. Plus formellement, F° est la dynamique telle que pour tout $X \in \mathcal{X}$, $F(X)^\circ = F^\circ(X^\circ)$.

Démonstration. L'invariance par translation, et même plus précisément $F(X_u) = F(X)_{R_X(u)}$, implique que si deux graphes ne diffèrent que par leur pointeur, alors c'est également le cas de leurs images. Retirer le pointeur ne provoque donc pas d'ambiguïté dans la définition de F° . \square

La composabilité est une propriété évidente dans le cas des CGD, et n'a donc pas été citée jusque là. La question ne s'avère guère plus difficile dans les cas des ACGD.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Proposition 2.1.3. Pour toute paire de CGD F et G , on a :

$$(F \circ G)^\circ = F^\circ \circ G^\circ$$

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{X}$. Par définition des dynamiques induites, on a :

$$F \circ G^\circ(X^\circ) = F(G(X)^\circ) = F^\circ(G(X)^\circ) = F^\circ \circ G^\circ(X^\circ)$$

□

Enfin, on peut enfin s'intéresser à l'inversibilité :

Définition 2.1.9 (Inversibilité). Une ACGD F° est dite *inversible* si et seulement si F° est bijective.

Heureusement, cette condition s'avère moins contraignante dans le cas des ACGD, et il est possible d'implémenter Hasslacher-Meyer généralisé. En effet, la fusion de deux sommets ne remet plus en question l'injectivité de F en l'absence de pointeur :

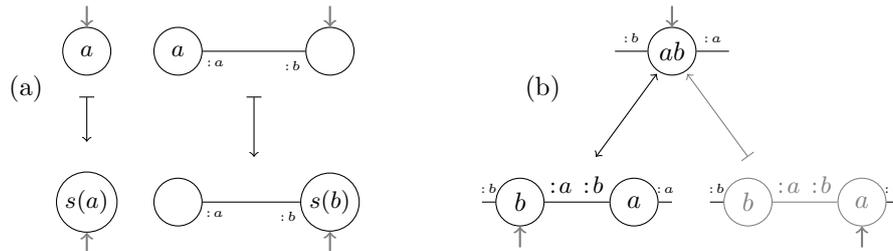


FIGURE 2.4. – (a) Étape d'advection. (b) Étape de collision.

Exemple 2.1.3 (Hasslacher-Meyer anonyme). On alterne encore une fois une étape d'advection, et une étape de collision comme on peut le voir dans la figure précédente 2.4. La dynamique anonyme est représentée en noir, en gris on peut voir la dynamique pointée sous-jacente.

Maintenant que nous avons deux types de dynamiques causales dans lesquelles la création de sommets et la réversibilité sont compatibles, il est naturel de se demander si celles-ci sont fondamentalement différentes, ce qui est l'objet des deux sections suivantes.

2.1.4.2. Simulation de l'invisible par l'anonyme

Pour tout chemin $s = p_0 p_1 \dots p_{n-2} p_{n-1} \in \pi^n$, on note s^{-1} le chemin parcourant les ports $p_{n-1} p_{n-2} \dots p_1 p_0$. Pour tout graphe X , on note $u^\perp \in \pi$ la racine visible de u dans G , c'est à dire l'unique sommet de la matière visible tel qu'il existe $s, t \in (\varepsilon | mm).\{lm, rm\}^*$ avec $u = s^{-1} u^\perp t$. Ce sommet est unique car tout arbre de matière invisible n'admet

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

qu'une seule racine dans la matière visible. On note X^\perp la *projection* de X c'est à dire le graphe obtenu en projetant le pointeur dans la matière visible. Pour éviter une surcharge des notations, nous utiliserons dans cette section le même nom X comme notation pour un graphe quelconque $X \in \mathcal{X}$ et $X \in \mathcal{Y}$ le graphe obtenu en ajoutant un arbre de matière invisible à chaque sommet.

Remarque 2.1.1. Pour tout $X \in \mathcal{Y}$ et $u \in V(X)$, u^\perp est un chemin valide de X^\perp et de $X \in \mathcal{Y}$ si et seulement si $X = X^\perp$. De plus, pour tout graphe $X \in \mathcal{X}$, on a que $X^\perp = X$ dans \mathcal{Y} .

Lemme 2.1.1. Soit $Y \in \mathcal{Y}$. Pour tout $u, v \in (\pi \cap \{m, l, r\})^*$ tels que $uv \in V(Y)$, on a que $(uv)^\perp = u^\perp v^\perp$.

Démonstration. Soit $Y \in \mathcal{Y}$. Pour tout $u, v \in (\pi \cap \{m, l, r\})^*$ tel que $uv \in V(Y)$. Soit $s, r, r', t \in (\varepsilon \setminus mm).\{lm, rm\}^*$ tel que $u = s^{-1}u^\perp r'$ et $v = r^{-1}v^\perp t$. Comme uv est un chemin valide de Y et que v par unicité du projeté, on a que $r = r'$. Ceci nous permet de conclure avec les égalités suivantes :

$$uv = s^{-1}u^\perp r r^{-1}v^\perp t = s^{-1}u^\perp v^\perp t = s^{-1}uv^\perp t$$

□

Définition 2.1.10 (Projection). Soit (F, R_\bullet) une dynamique sur \mathcal{Y} . On définit la dynamique $(F^\perp, R_\bullet^\perp)$ sur \mathcal{X} par :

- $F^\perp(X) = (F(X))^\perp$
- $R_X^\perp(u) = (R_X(u))^\perp$.

pour tout $X \in \mathcal{X}$ et pour tout $u \in \Pi^*$. On se réfère à $(F^\perp, R_\bullet^\perp)$ comme la *projection* de (F, R_\bullet) .

Proposition 2.1.4. La projection d'une dynamique invariante par translation est invariante par translation.

Démonstration. Soit (F, R_\bullet) une dynamique invariante par translation sur \mathcal{Y} . Soit $X \in \mathcal{X}$ et u un sommet de X . Par définition de $F^\perp(X)$ et par l'invariance par translation de (F, R_\bullet) on a :

$$F^\perp(X_u) = F(X_u)^\perp = (F(X)_{R_X(u)})^\perp = F^\perp(X)_{(R_X(u))^\perp} = F^\perp(X)_{R_X^\perp(u)}$$

Comme (F, R_\bullet) est invariante par translation, et que $(uv)^\perp = u^\perp v^\perp$ on a les égalités suivantes :

$$R_X^\perp(uv) = (R_X(uv))^\perp = (R_X(u)R_{X_u}(v))^\perp = R_X(u)^\perp R_{X_u}^\perp(v) = R_X^\perp(u)R_{X_u}^\perp(v)$$

$(F^\perp, R_\bullet^\perp)$ est donc invariante par translation. □

Avant de prouver la continuité de la projection, on a besoin de prouver que le pointeur ne plonge pas trop profondément dans la matière invisible en une seule étape de temps. Cela nous permettra de prouver que la dynamique projetée fusionne un nombre borné de sommet, ce qui nous sera utile pour prouver la continuité.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Lemme 2.1.2. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD. Il existe une borne $b \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, pour tout $S \in \mathcal{X}$, pour tout $s \in \{lm, rm\}^*$, $F(X) = S_{mms}$ implique $|s| \leq b$.

Démonstration. Par contradiction, soit (F, R_\bullet) une IMCGD, et supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $X_k \in \mathcal{X}$, $S_k \in \mathcal{X}$, et $s_k \in \{lm, rm\}^*$ tel que $F(X_k) = S_{mms_k}$ avec $|s_k| > k$. Par compacité, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\overline{\mathcal{Y}}$. Soit $(X'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'une de ces sous-suites et X' sa limite. Pour tout k , $(X'_k)^0$ est dans la matière visible, c'est donc également le cas de $(X')^0$, et donc $X' \in \mathcal{Y}$ par la proposition 2.1.1. Soit $S \in \mathcal{X}$ et $s \in \{lm, rm\}^*$ tel que $F(X') = S_{mms}$. Pour tout $k > |s|$, $F(X_k)^{|s|}$ n'a pas de matière visible car $|s_k| > |s|$, c'est donc nécessairement le cas de $F(X')^{|s|}$, ce qui contredit $F(X') = S_{mms}$. \square

Proposition 2.1.5. La projection d'une IMCGD est continue.

Démonstration. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD. Soit b la borne fournie par le lemme 2.1.2.

Soit $X \in \mathcal{X}$ et $m \in \mathbb{N}$. Par continuité de (F, R_\bullet) , il existe $n \geq 0$ telle que pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, $X^n = Y^n$ implique :

- $F(X)^{m+2b} = F(Y)^{m+2b}$.
- $\text{dom } R_X^{m+2b} \subseteq V(X^n)$, $\text{dom } R_Y^{m+2b} \subseteq V(Y^n)$, et $R_X^{m+2b} = R_Y^{m+2b}$.

En particulier, pour $Y \in \mathcal{X}$, si on note $F(X) = F^\perp(X)_s$ avec $s \in \{lm, rm\}^*$, on obtient en translatant s^{-1} par s des deux cotés et en appliquant 2.1.2 :

$$F^\perp(X)^{m+b} = F^\perp(Y)^{m+b}$$

a fortiori

$$F^\perp(X)^m = F^\perp(Y)^m$$

Soit $v \in F^\perp(X)^m$. Soit u un antécédent de v par R_X^\perp . Il existe $s, t \in (\varepsilon|mm).\{lm, rm\}^*$ tel que $R_X(u) = svt \in F(X)^{m+2b}$. On a donc $u \in \text{dom } R_X^{m+2b} \subseteq V(X^n)$ et

$$\text{dom } R_X^\perp{}^m \subseteq \text{dom } R_X^{m+2b} \subseteq V(X^n)$$

Similairement,

$$\text{dom } R_Y^\perp{}^m \subseteq \text{dom } R_Y^{m+2b} \subseteq V(Y^n)$$

Soit $u \in \text{dom } R_X^\perp{}^m$. u appartient également à $\text{dom } R_X^{m+2b}$, et donc

$$s^{-1}.R_X^\perp(u).t = R_X(u) = R_X^{m+2b}(u) = R_Y^{m+2b}(u) = s^{-1}.R_Y^\perp(u).t$$

On a donc finalement

$$R_X^\perp{}^m = R_Y^\perp{}^m$$

ce qui conclue la continuité de (F^\perp, R_\bullet) . \square

Nous allons maintenant nous consacrer à prouver que la projection est bornée.

Lemme 2.1.3 (Borne d'éclatement). Pour tout CGD (F, R_\bullet) , il existe une borne c telle que pour tout $u \in V(X)$ $|u| = 2 \implies |R_X(u)| \leq c$.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Intuitivement, par continuité il suffit de regarder l'ensemble des disques de rayons 2 et prendre c comme le maximum des rayons produits par la dynamique sur ces derniers.

Démonstration. Par contradiction, soit (F, R_\bullet) une dynamique et supposons que pour tout c , il existe un graphe X_c et un sommet $u_c \in V(X)$ tel que $|u_c| = 2$ (sommet adjacent, à une distance de 2 ports), et $R_X(u_c) > c$. Comme l'ensemble des ports π est fini et en utilisant le principe des tiroirs, on peut extraire une séquence (X_c) de manière à avoir u constant. Par compacité de \mathcal{X} , on peut également exiger que cette séquence soit convergente et on note sa limite X (a fortiori, $(X_c)_{c \in \mathbb{N}}$ satisfait toujours $\forall c \geq 0, |R_{X_c}(u)| > c$).

En utilisant la continuité de (F, R_\bullet) , il existe un n tel que, pour tout graphe S , $X^n = S^n$ implique $R_X^{|R_X(u)|} = R_S^{|R_X(u)|}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $X_p^n = X^n$ et tel que $|R_{X_p}(u)| > |R_X(u)|$ (c-a-d $p > |R_X(u)|$). Ceci mène à une contradiction car $R_X(u) = R_X^{|R_X(u)|}(u) = R_{X_p}^{|R_X(u)|}(u) = R_{X_p}(u)$. \square

Comme nous avons utilisé la compacité de $\overline{\mathcal{X}}$, ce lemme ne s'applique pas à toutes les dynamiques causales de graphes partielles. Cependant, il s'applique aux IMCGD, via l'application du théorème 2.1.2.

Corollaire 2.1.1. Pour toute CGD (F, R_\bullet) , il existe une borne s telle que $|R_X(u)| \leq s \times |u|$.

Proposition 2.1.6. La projection d'une IMCGD est bornée.

Cette borne est la directe conséquence de la quiescence de la matière invisible, puisqu'elle impose une borne sur l'entrée de la matière invisible dans la matière visible.

Démonstration. On doit prouver qu'il existe une borne b telle que pour tout X et pour tout $w' \in F^\perp(X)$, il existe $u' \in \text{Im}(R_X^\perp)$ et $v' \in F^\perp(X)_{u'}^b$ tel que $w' = u'.v'$. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD. Soit $X \in \mathcal{X}$ et $y \in F^\perp(X)$ tel que y n'est pas une image de R_X^\perp . y appartient également à $V(F(X))$, et par préservation des sommets, il admet un antécédent us tel que $R_X(us) = y$. Par quiescence de la matière invisible, s est bornée. Et par le corollaire 2.1.1, cela implique que la distance entre $R_X(u)$ et $R_X(us) = y$ est bornée. Comme $R_X(u) = t^{-1}R_X^\perp(u)t'$ pour certains t et t' bornés par le lemme 2.1.2, la distance entre y et un élément de $R_X^\perp(u)$ dans $\text{Im}(R_X^\perp)$ est bornée. \square

En combinant les trois propriétés précédente, on obtient enfin le théorème de simulation :

Théorème 2.1.5. Pour toute IMCGD (F, R_\bullet) , sa projection $(F^\perp, R_\bullet^\perp)$ est une CGD.

Cette CGD peut être facilement transformée en dynamique anonyme en oubliant le pointeur.

Théorème 2.1.6. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD. (F, R_\bullet) est inversible si et seulement si $(F^\perp)^\circ$ est inversible.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Démonstration. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD inversible et donc réversible. On a pour tout $X \in \mathcal{X}$:

$$F^\perp(X) \sim F(X)$$

et donc

$$(F^\perp)^\circ = F^\circ$$

Et finalement

$$F^\circ \circ (F^{-1\perp})^\circ = F^\circ \circ (F^{-1})^\circ = (F \circ F^{-1})^\circ = Id$$

Similairement, on a $(F^{-1\perp})^\circ \circ F^\circ = Id$, F° est donc réversible.

Supposons maintenant que F° est inversible. On veut construire une IMCGD (H, S_\bullet) inverse de (F, R_\bullet) . Soit $Y \in \mathcal{Y}$, tel que $Y = X_{mms}$ ou $Y = X$. Soit u un sommet du graphe anonyme $(F^\circ)^{-1}(X)$, considérons le graphe pointé $(F^\circ)^{-1}(X)_u$. On a :

$$F((F^\circ)^{-1}(X)_u) \sim F^\perp((F^\circ)^{-1}(X)_u) \sim X$$

$F((F^\circ)^{-1}(X)_u)$ est donc égal à X_{vt} pour un certain $t \in (\varepsilon|mm).\{lm, rm\}^*$. Par bijectivité de $R_{(F^\circ)^{-1}(X)_u}$, il existe w tel que $F((F^\circ)^{-1}(X)_{uw}) = X$ (plus précisément, w est l'antécédent de vt). On peut définir $H(Y)$ la fonction tel que $(F^\circ)^{-1}(X)_{uw}$, et S_Y tel que $(R_{(F^\circ)^{-1}(X)_{uw}})^{-1}$, ce qui prouve que (F, R_\bullet) est inversible. \square

2.1.4.3. Simulation de l'anonyme par l'invisible

Comme énoncé en introduction, la création et la destruction de sommets peuvent-être simulées en déplaçant les sommets depuis ou vers la matière invisible. Cependant lorsqu'on simule une ACGD, déplacer un sommet dans la matière invisible peut briser le déterminisme ou l'invariance par translation, comme le montre l'exemple 2.5. Dans cette section, nous verrons que ceci ne peut se produire qu'un nombre fini de fois. Plus exactement, cela se produit lorsqu'un graphe possède une symétrie par translation pouvant être détectée par le rayon de continuité.

On définit formellement la un graphe symétrique de la manière suivante :

Définition 2.1.11 (Graphe symétrique). Étant donné un graphe X , on dit qu'un graphe est symétrique si et seulement si il existe $u \in V(X)$ tel que $u \neq \varepsilon$ et $X = X_u$.

Nous nous appuyons sur ce lemme déjà connu :

Lemme 2.1.4 (Structure des graphes symétriques). [15] Soit $X \in \mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}$ un graphe symétrique. Alors on a : $X = \bigcup_{u \in T} u.G$ où

- T est un graphe sommet-transitif.
- $V \subseteq V(X)$ tel que $\varepsilon \in V$ et $\{u.V\}_{u \in T}$ forme une partition de $V(X)$.
- $G = G(X_V^0)$.
- $w \sim w'$ si et seulement si $w = u.v$, $w' = u'.v$, $u, u' \in T$, et $v \in V(G)$.

À partir de ce résultat, nous pouvons prouver l'existence d'une borne sur la taille des graphes réalisant une fusion symétrique.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

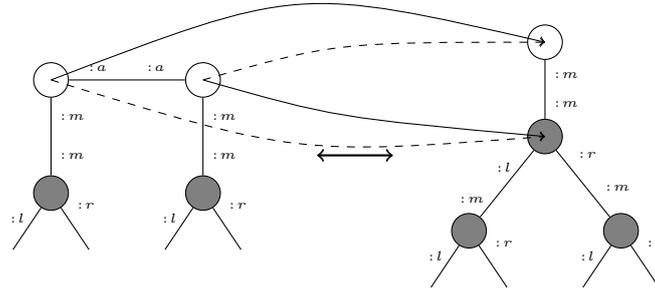


FIGURE 2.5. – *La tortue et les dynamiques de graphes à matière invisible. Dans la dynamique tortue, rien ne se passe à part une permutation entre le graphe à un sommet et le graphe à deux sommets connectés par une arête étiquetée $\{a, a\}$. Ceci constitue une CGD parfaitement valide, mais ce n'est pas une IMCGD. En effet comme les deux sommets sont symétriques, on ne peut pas décider lequel doit être envoyé dans la matière invisible sans briser l'invariance par translation. Les flèches pleines et pointillées montrent les deux choix possibles pour l'évolution des sommets.*

Lemme 2.1.5 (Borne sur les fusions symétriques). Soit (F, R_*) une dynamique de graphe causale. Il existe une borne d telle que, pour tout $X \in \mathcal{X}$, et $u \in V(X)$ tel que $u \neq \epsilon$, $(R_X(u) = R_X(\epsilon) \text{ et } X_u = X) \implies X = X^d$.

L'idée de cette preuve est que si deux sommets sont symétriques, alors leurs voisinages partagent cette symétrie. En les fusionnant, par invariance par translation, leurs voisinages devront également fusionner. En raisonnant par induction, cette fusion se propage à tout le reste du graphe et, si ce dernier est suffisamment grand, en dehors du rayon de causalité. On peut alors modifier le graphe de manière à s'assurer que deux sommets très éloignés fusionnent, ce qui brise la continuité.

Démonstration. Soit (F, R_*) une dynamique causale de graphe sur $\mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}$. Soit n_0 la borne d'uniforme continuité de F pour $m = 0$, c'est à dire que pour tout $X \in \mathcal{X}$, on a $F(X)^0 = F(X^{n_0})^0$, $\text{dom } R_X^0 \subseteq V(X^{n_0})$ et $R_X^0 = R_{X^{n_0}}^0$. Par contradiction, supposons qu'il existe un graphe X et un sommet $u \in V(X)$ tel que $R_X(u) = R_X(\epsilon)$, $X_u = X$ et $X^{2 \times n_0} \neq X$.

Comme $X^{2 \times n_0} \neq X$, il existe un sommet v tel que $v \notin V(X_{2 \times n_0})$ et v est un chemin simple (sans boucle) depuis ϵ . Soit v' le plus court préfixe de v tel que $v' \notin V(X^{n_0})$. On a que $|v| > 2 \times n_0$ et $|v'| = |n_0|$, donc $|v'^{-1}v| > n_0$. Il existe un sommet $w \in V(X)$ qui est un préfixe v , tel que $w \notin V(X^{n_0})$ et $u.w \notin V(X^{n_0})$.

Soit Y le graphe obtenu en réalisant les opérations suivants : 1) Couper toutes les arêtes xy telles que $x \in V(X^{n_0})$ où $y \notin V(X^{n_0})$ mais préservant les chemins w et $u.w$. 2) Supprimer tout les sommets n'appartenant pas à la même composante connexe que le pointeur 3) w et uw n'ont donc qu'un seul port connecté, ici nommé p_1 , ils ont

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

donc au moins un port p_2 libre. On étend w et uw de sorte que $w(p_2p_1)^{n_0} \in V(Y)$ et $uw(p_2p_1)^{n_0} \in V(Y)$. 4) On complète toutes les demi-arêtes via des sommets isolés.

On a que $X^{n_0} = Y^{n_0}$, et $R_Y(u) = R_Y^{n_0}(u) = R_X^{n_0}(u) = R_X^{n_0}(\varepsilon) = R_Y^{n_0}(\varepsilon) = R_Y(\varepsilon)$. En utilisant l'invariance par translation, on obtient que $R(w(p_2p_1)^{n_0}) = R(uw(p_2p_1)^{n_0}) \in V(Y)$ ce qui contredit la continuité de (F, R_\bullet) car $w(p_2p_1)^{n_0}$ et $uw(p_2p_1)^{n_0}$ sont à une distance supérieure à n_0 . \square

Encore une fois, nous reprendrons une construction de [15] permettant de briser la symétrie d'un graphe.

Définition 2.1.12 (Extension asymétrique). [15] Étant donné un graphe fini et symétrique $X \in \mathcal{X}_{\Sigma, \pi}$, on obtient une *Extension asymétrique* X^\square en réalisant l'une des opérations suivantes :

- Choisir un sommet $w \in V(X)$ ayant un port libre p_1 et lui connecter un nouveau sommet $w.p_1p_2$.
- Choisir $w \in V(X)$ faisant partie d'un cycle, supprimer une arête e de ce cycle w connectant w et w' , puis ajouter deux sommets $w.e$ et $w'.e^{-1}$.

Lemme 2.1.6 (Asymétrie de l'extension asymétrique). [15] Étant donné un graphe symétrique fini $X \in \mathcal{X}_{\Sigma, \Delta, \pi}$, son extension asymétrique X^\square est asymétrique, et $|X^\square| \leq |X| + 2$.

Nous avons prouvé que seuls des graphes symétriques de rayon inférieur au rayon de causalité peuvent réaliser une fusion symétrique. Cette impossibilité s'étend naturellement aux graphes asymétriques, lorsque cette asymétrie n'est pas détectable localement.

Lemme 2.1.7 (Asymétrie locale). Étant donnée une CGD (F, R_\bullet) , on a que pour presque tout graphe, les sommets fusionnant entre eux en appliquant F sont asymétriques. Plus formellement, il existe une borne d , tel que pour tout graphe X de rayon supérieur à d ($X \neq X^d$), et pour toute paire de sommet $u, v \in V(X)$, $R_X(u) = R_X(v)$ et $u \neq v$ implique $X_u \neq X_v$.

Démonstration. Par contradiction, supposons que pour tout d , il existe $X \in \mathcal{X}$ un graphe de rayon supérieur à d , et $u, v \in X$ tel que $R_X(u) = R_X(v)$, $u \neq v$ et $X_u = X_v$.

Supposons sans perte de généralité que $v = \varepsilon$. Soit n la borne d'uniforme continuité de (F, R_\bullet) , pour $m = 0$. En particulier on a que pour tout $Y \in \mathcal{X}$ et pour tout $u \in V(Y)$ tel que $|u| \leq n$, $Y^n = X^n \implies R_Y(u) = \varepsilon$. Soit X^\square une extension asymétrique de X obtenue en considérant un des sommets les plus éloigné de ε . X^\square est donc asymétrique et vérifie également $(X^\square)^d = X^d$. Comme $d \geq n$, on a $R_Y(u) = \varepsilon$. Par asymétrie de X^\square , $X^\square \neq X_u^\square$, ainsi que les trois assertions précédentes contredisent le lemme 2.1.5. \square

Maintenant que nous avons prouvé que les CGD, et donc les ACGD ne réalisent qu'un nombre fini de fusions symétriques nous pouvons enfin énoncer le théorème de simulation :

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Théorème 2.1.7 (Extension d'une CGD en une IMCGD). Pour toute CGD (F, R_\bullet) , il existe une IMCGD (F', S_\bullet) dont la projection $(F'^\downarrow, S_\bullet^\downarrow)$ est égale à (F, R_\bullet) pour tout graphe dans $X \setminus S$, ou S est un ensemble fini de graphes symétriques.

Démonstration. Soit (F, R_\bullet) une CGD. Pour l'étendre en une IMCGD, nous avons besoin pour tout graphe $X \in \mathcal{Y}$ d'expliciter ses sommets visibles, ainsi que la provenance des sommets visibles $F(X)$, de façon à rétablir l'injectivité et la surjectivité de R respectivement. Naturellement, nous pouvons réaliser cela en utilisant les arbres de matières invisible, nous devons cependant être prudent à ne pas briser les autres propriétés de F .

Par continuité de R , seulement un nombre fini de sommets peuvent fusionner simultanément en un même point ($\text{dom}(R_X^0) \subseteq V(X^n)$, pour un certain n). Comme F est bornée, nous sommes assurés de trouver assez de matière invisible pour chacun des sommets sans antécédent par R_X . En combinant ces deux propriétés, il est donc possible de rétablir la préservation des sommets par la IMCGD en ne déplaçant qu'un nombre borné de sommets depuis ou vers la matière invisible, c'est à dire sans briser la quiescence de la matière invisible.

Rétablir l'injectivité : Premièrement, nous rétablirons l'injectivité en définissant une fonction S_{1X} , tel que pour tout $x_1, x_2 \in V(X)$, $S_{1X}(x_1)$ et $S_{1X}(x_2)$ partage la même racine dans la matière invisible si et seulement si $R(x_1) = R(x_2)$. Soit y un sommet de $\text{Im}(R_X)$, c'est à dire une racine dans la matière visible ayant un antécédent dans R_X . Il nous suffit de définir un ordre total, local, invariant par translation $R_X^{-1}(y)$. On pourra ainsi poser $R_X^{-1}(y) = \{x_0, x_1, \dots\}$, et en utilisant la continuité de R montrer que $R_X^{-1}(y)$ est fini. On pourra facilement conclure en définissant $S_{1X}(x_0) = y$, $S_{1X}(x_{1+i}) = y.m.l^i$, $S_{1X}(x_{1+i}.m) = y.m.l^i.r$ et $S_{1X}(x_0.m) = y.m.l^{|R_X^{-1}(y)|-1}$.

Pour ordonner $R_X^{-1}(y)$, il nous suffit de définir un ordre sur $\{X_x | R_X(x) = y\}$, c'est à dire les ordonner en fonction de leur classe de symétrie par translation (en fait, rien de plus fin ne peut être fait sans violer l'invariance par translation). Le lemme d'asymétrie locale (2.1.5) établit exactement que cet ordre est local. Le second lemme d'asymétrie (2.1.7) indique que $x \mapsto X_x$ est injectif, prouvant qu'un ordre sur $\{X_x | R_X(x) = y\}$ fournit en réalité un ordre sur $R_X^{-1}(y)$. Les deux lemmes ne s'appliquent que pour X assez grand.

Rétablir la surjectivité : Soit u un sommet de $V(F(X)) \setminus \text{Im}(R_X)$. Soit u' le sommet le plus proche de u dans $\text{Im}(R_X)$, en prenant l'ordre lexicographique des chemins pour briser les égalités. Ce choix est relatif à u , donc indépendant de l'endroit où X est pointé, ou pour le dire brièvement, invariant par translation. Il est nécessaire que u provienne de la matière invisible de l'antécédent de u' par S_{1X} . Pour x dans $S_{1X}^{-1}(\text{Im}(R_X))$, on définit $C_x = \{u | u' = R_X(x)\}$ l'ensemble des nouveaux sommets qui veulent provenir de la matière invisible de x . Il est possible d'ordonner C_x par distances par rapport à $R_X(x)$, en brisant une fois de plus les égalités via l'ordre lexicographique. Cet ordre est invariant par translation, et comme (F, R_\bullet) est bornée, C_x est fini. En

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

écrivait $C_x = \{u_0, u_1, \dots\}$, on peut donner la provenance des sommets qui la composent en fixant, pour $i < |C_x|$: $S_{2X}(x.(lm)^i) = u_i$ et en leur pourvoyant un arbre de matière invisible : $S_{2X}(x.(lm)^i r m) = u_i m m$ et en redonnant à x un arbre intact avec : $S_{2X}(x.(lm)^{|C_x|}) = R_X(x) m m$.

On a donc défini $S_{2X}(x.(lm)^{|C_x|}) = R_X(x) m m$. Pour terminer la définition de S_{2X} , on pose $S_{2X}(u.v) = S_{2X}(u).v$ si u est le plus long préfixe de $u.v$ tel que $S_{2X}(u)$ a été défini précédemment. \square

Malheureusement, il s'avère que cette simulation ne permet pas de préserver la réversibilité, celle-ci ne pouvant simuler un ensemble fini de graphe symétriques. Il existe donc un nombre fini d'orbites de (F, R_\bullet) , qui ne sont pas préservées par la simulation. Au premier abord, on pourrait espérer rétablir la réversibilité en changeant l'image d'un nombre fini de petit graphes à matière invisible finie. Nous argumentons qu'une telle réparation est impossible, à travers l'exemple suivant :

Exemple 2.1.4 (Contraction-expansion). Soit $\mathcal{X}_{\pi, \Sigma}^\circ$ un espace de graphes et F une dynamique réversible sur \mathcal{X} telle qu'il existe X fini avec :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |V(F^n(X))| = \lim_{n \rightarrow \infty} |V(F^{-n}(X))| = +\infty$$

L'existence d'une telle dynamique est non-triviale et un point central du chapitre 4, prouvé par le théorème 4.2.1. Soit $s \notin \pi$, et $\text{sym} : \mathcal{X}_{\pi, \Sigma}^\circ \rightarrow \mathcal{X}_{\pi \cup \{s\}, \Sigma}^\circ$ l'opération consistant à dupliquer chaque sommet et relier chaque paire de sommet ainsi obtenue par une arête $\{u : s, u' : s\}$.

Soit F' la dynamique sur $\mathcal{X}^\circ \cup \text{sym}(\mathcal{X}^\circ)$ telle que pour tout Y :

- $F'(Y) = F(Y)$ et $\text{sym}(F'(Y)) = F(\text{sym}(Y))$ pour tout $Y \in \mathcal{X}^\circ \setminus \{X\}$.
- $F'(X) = \text{sym}(F(X))$ et $F'(\text{sym}(X)) = F(X)$.

Une telle dynamique est réversible, mais elle admet au moins deux orbites disjointe sur lesquelles elle ne préserve pas la symétrie/asymétrie du graphe. Une simulation par projection d'une IMCGD ne simulerait pas la dynamique sur les graphes X et $\text{sym} X$.

Nous conjecturons cependant qu'il est possible de réparer une telle simulation en encodant la symétrie des graphes dans les états des sommets l'IMCGD associée. Ainsi pour un nombre fini de petit graphe anonyme, chaque fusion/division de sommets symétrique ne sera pas réalisée dans le graphe de matière invisible, mais sera encodé dans l'état de chaque sommet. Définir formellement un telle simulation requiert cependant plus de travaux.

Conjecture 2.1.1.1. Pour toute CGD (F, R_\bullet) , il existe une IMCGD (F', S_\bullet) dont la projection *symétrisée* $(F'^\perp, S_\bullet^\perp)$ est égale à (F, R_\bullet) pour tout graphe dans \mathcal{X} . De plus (F', S_\bullet) est réversible si et seulement si (F, R_\bullet) est réversible.

Une telle simulation nous permettrait d'obtenir la réversibilité des dynamiques de graphe anonymes :

Conjecture 2.1.1.2. Si une ACGD est inversible, alors sa fonction inverse est une ACGD.

2.1.5. Dynamique de graphes avec algèbre de noms

2.1.5.1. Définition

Jusque-là nous avons travaillé avec des graphes (pointés) modulo isomorphisme, cependant les graphes nommés s'avèrent plus facilement manipulable lors d'une implémentation et même nécessaires dans le régime quantique comme on le verra dans le chapitre 5. Dans ce contexte, être capable de créer un nouveau sommet sans briser la localité implique d'être capable de générer un nouveau nom à partir de ceux disponibles localement. Par exemple, si une dynamique F sépare un sommet u en deux nouveaux sommets, le choix naturel est d'appeler ces sommets $u.l$ et $u.r$. Maintenant, supposons que l'on applique un renommage R transformant $u.l$ en v et $u.r$ en w , puis F^{-1} . Cette fois-ci les sommets v et w ont fusionné en un seul; et de façon à maintenir l'inversibilité, celui-ci devrait être nommé $(v \vee w)$ où \vee est une opération de fusion des noms. Cependant, en choisissant R trivial, le sommet obtenu aurait été $(u.l \vee u.r)$, or $F^{-1} \circ F = Id$ demande à ce que ce sommet soit nommé u . Ceci nous amène vers une algèbre de noms telle que $u = (u.l \vee u.r)$.

Définition 2.1.13 (Algèbre de noms). Soit \mathcal{N} un ensemble dénombrable. On considère les termes produits par la grammaire $V := \mathcal{N} \mid V.\{l, r\}^* \mid V \vee V$ avec l'équivalence induite par les réécritures suivantes :

- $u.\varepsilon \longrightarrow u$ (N)
- $(u \vee v).l \longrightarrow u$ et $(u \vee v).r \longrightarrow v$ (S)
- $(u.l \vee u.r) \longrightarrow u$ (M)

C'est à dire que deux noms u et v sont égaux si et seulement si leurs formes normales $u \downarrow_{SUM}$ et $v \downarrow_{SUM}$ sont égales.

Ceci est l'algèbre correspondant à des arbres binaires infinis. En effet, chaque élément x de \mathcal{N} peut être pensé comme une variable représentant un arbre binaire infini. Les opérations de projection $.l$ (resp. $.r$) permettent de récupérer le sous-arbre gauche (resp. droit). L'opération de jointure \vee crée une racine puis lui associe les sous-arbres gauche et droit — cette opération n'est donc ni commutative ni associative. Cette structure en arbre binaire infini est réminiscence des IMCGD, nous verrons plus tard que cette algèbre de noms peut être vue comme une abstraction de la matière invisible.

De façon à distinguer les sommets de manière unique, un graphe ne doit pas avoir deux sommets différents avec le même nom. De plus, nous devons également interdire l'existence d'un sommet x et de deux autres nommés $x.r$ et $x.l$, car-ceux ci peuvent plus tard fusionner et provoquer une collision des noms.

Définition 2.1.14 (Intersectant). Deux termes v, v' dans \mathcal{V} sont dits *intersectant* si et seulement si il existe t, t' dans $\{l, r\}^*$ tels que $v.t = v'.t'$. On utilise $v \wedge v'$ comme une notation pour $\{v.t \mid t \in \{l, r\}^*\} \cap \{v'.t \mid t \in \{l, r\}^*\}$. On écrit également $v \wedge V$ pour $\bigcup_{v' \in V} v \wedge v'$.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Définition 2.1.15 (Graphes bien nommés). On dit qu'un graphe G est *bien nommé* si et seulement si pour tout v, v' dans $V(G) \subseteq \mathcal{V}$, $v \wedge v' \neq \emptyset$ implique $v = v'$. Nous désignons par $\mathcal{W}_{\pi, \Sigma}$ ou \mathcal{W} le sous-ensemble des graphes bien nommés.

Une fois notre espace de graphe bien défini, on peut formuler la continuité et la borne d'expansivité pour les dynamiques de graphes nommés.

Définition 2.1.16 (Continuité). Une fonction F sur \mathcal{W} est dite *continue* si et seulement si pour tout G et tout $n \geq 0$, il existe $m \geq 0$, tel que pour tout $v, v' \in V$, $v \wedge v' = \emptyset$ implique $F(G)_{v'}^n = F(G_v^m)_{v'}^n$.

Définition 2.1.17 (Dynamique bornée). Une fonction F sur \mathcal{W} est dite *bornée* si et seulement si il existe une borne b telle que pour tout G , pour tous $v \in V(G)$, $v' \in V(F(G))$ et $t, t' \in \{l, r\}^*$ tels que $v.t = v'.t'$, $|t| \leq b$ et $|t'| \leq b$.

On veut encore une fois que notre dynamique soit indépendante du nommage, on demande donc à ce qu'elle commute avec les renommages ne créant pas d'intersection entre les noms :

Définition 2.1.18 (Renommage). Soit R une fonction injective de \mathcal{N} à V telle que pour tout $x \neq y \in \mathcal{N}$, $R(x)$ et $R(y)$ ne s'intersectent pas. L'extension naturelle de R à l'ensemble de V , selon

$$R(u.l) = R(u).l \quad R(u.r) = R(u).r \quad R(u \vee v) = R(u) \vee R(v)$$

est appelée un "renommage".

Définition 2.1.19 (Invariance par translation). Une fonction F sur \mathcal{W} est dite *invariante par translation* si et seulement si pour tout $G \in \mathcal{W}$ et pour tout renommage R , $F(RG) = RF(G)$.

Enfin, on souhaite que notre dynamique préserve l'espace des noms de façon à pouvoir traquer l'évolution des sommets.

Définition 2.1.20 (Préservation des noms). Soit F une fonction sur \mathcal{W} . On dit que la fonction F *préserve les noms* si et seulement si pour tous u dans V et G dans \mathcal{W} on a que $u \wedge V(G) = u \wedge V(F(G))$.

On peut enfin énoncer ce que sont les dynamiques causales de graphes nommés.

Définition 2.1.21 (Dynamique causale de graphe nommés). On dit d'une fonction F sur \mathcal{W} qu'elle est une *Dynamique causale de graphes nommés (NCGD)* si et seulement si elle est invariante par translation, continue et préserve les noms.

Encore une fois, on s'assure que la création et destruction de sommets est compatible avec l'inversibilité (nous verrons plus tard qu'elle correspond à la réversibilité) :

Exemple 2.1.5 (Hasslacher-Meyer nommée). Soit W avec ports et états comme dans l'exemple anonyme 1.5.1. On alterne encore une fois l'étape d'advection avec l'étape de collision explicitée en figure 2.6.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud



FIGURE 2.6. – L'étape de collision d'Haslacher-Meyer réalisée par une NCGD.

2.1.6. Simulation des IMCGD par les NCGD

La simulation des IMCGD par les NCGD s'avère être relativement simple. En effet, les IMCGD sont uniquement une restriction des CGD à un certain type de graphe. Les NCGD étant une généralisation directe des CGD permettant la création et la destruction de sommets, la simulation se fait naturellement.

Définition 2.1.22. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD sur \mathcal{Y} . Soit $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ l'ensemble des graphes bien nommés tel que $G \in \mathcal{W}'$ si et seulement si $G^\circ \in \mathcal{Y}$. La dynamique induite sur les graphes nommés $F^\#$ est définie telle que pour tout $G \in \mathcal{W}'$:

- Pour tout sommet $u \in V(G)$, $(F^\#(G), u)^\circ = F((G, u)^\circ)$
- Pour tous sommets $u, v \in V(G)$, si $p(v)$ est un chemin depuis u vers v , alors le sommet obtenu en suivant $R_{(G, u)^\circ}(p(v))$ dans $F((G, u)^\circ)$ est nommé v .

Intuitivement, une IMCGD (F, R) est donc simulée en nommant l'ensemble du graphe de façon à obtenir un graphe bien nommé, et en maintenant le nommage cohérent avec R . R étant une bijection, il n'est donc même pas nécessaire de créer/détruire de nouveaux nœuds.

Théorème 2.1.8. La dynamique induite par une IMCGD sur les graphes nommés est une NCGD.

Démonstration. Nous devons prouver que la dynamique nommée induite préserve les noms, est invariante par translation et continue. La préservation des noms par la dynamique induite est facilement déduite du fait qu'un IMCGD préserve les noms de manière encore plus stricte : aucun nom n'est créé ni détruit.

Soit un renommage S . Premièrement on peut constater que $(G, u)^\circ = (SG, S(u))^\circ$. Pour tout $v \in V(G)$, l'image de v dans $F(G)$ est le sommet obtenu en suivant le chemin $R(v)$ depuis u . Comme les chemins sont invariants sous les renommages, il s'agit du même sommet que celui que l'on obtient en suivant $R(v)$ à partir d'un $S(u)$, donc nous avons que $SF^\#(G) = F^\#(SG)$. Ceci conclut à la shift-invariance.

Par continuité de (F, R_\bullet) on a que pour tout m , il existe n tel que :

$$(F^\#(G), u)^{m^\circ} = F(Y)^m = F(Y^n)^m = (F^\#(G_u^n), u)^{m^\circ}.$$

Maintenant si nous nous concentrons sur les noms, par continuité nous avons également $\text{dom } R_Y^m \in V(Y^n)$ donc pour tout $v \in (F^\#(G), u)^{m^\circ}$, on a $v \in V(G_u^n)$. Ceci conclut la continuité de $F^\#$ car $F^\#(G)_u^m = F^\#(G_u^n)_u^m$. \square

Théorème 2.1.9. Soit (F, R_\bullet) une IMCGD et $F^\#$ sa dynamique induite sur les graphes nommés. (F, R_\bullet) est inversible si et seulement si $F^\#$ est inversible.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Démonstration. Supposons que $F^\#$ est inversible, et notons $F^{\#-1}$ sa fonction inverse. Soit F^{-1} la fonction tel que $Y = (G, u)^\circ$, $F^{-1}(Y) = (F^{\#-1}(G), u)^\circ$. Nous avons les égalités suivantes :

$$F \circ F^{-1}(Y) = (F^\# \circ F^{\#-1}((G), u))^\circ = (G, u)^\circ = Y$$

$F \circ F^{-1} = \text{Id}$ donc F est bijective, et donc inversible.

Supposons que (F, R_\bullet) est inversible, et notons F^{-1} la fonction inverse de F . Soit $F^{\#-1}$ (la dynamique de graphes nommés induite par (F^{-1}, R_\bullet^{-1})).

$$(G, u)^\circ = Y = F \circ F^{-1}(Y) = (F^\# \circ F^{\#-1}(G), u)^\circ$$

Il existe donc un renommage S tel que $F^\# \circ F^{\#-1} = S$. Mais comme prouvé précédemment, $F^\#$ est une NCGD et donc invariante par translation, ce qui nous permet de conclure $F^\# \circ F^{\#-1} = \text{Id}$. \square

2.1.7. Simulation des NCGD par les IMCGD

Nous allons maintenant montrer que les NCGD peuvent être simulées par les IMCGD. Le but est donc d'induire, à partir d'une NCGD, une CGD sur les graphes avec matière invisible telle que R_\bullet est une bijection. L'idée principale est donc d'utiliser les noms afin d'établir R_\bullet . Il se pose alors la question de comment gérer la matière invisible, vu que celle-ci n'est pas présente dans les graphes nommés? La première étape consiste donc à attacher un arbre de matière invisible à chaque sommet de G , puis de nommer les nouveaux sommets en fonction de la racine. On peut remarquer que le graphe obtenu G^Δ n'est pas bien-nommé, mais celui-ci n'est qu'une étape intermédiaire nécessaire à la construction de R_\bullet . Une fois cette construction obtenue, il nous suffira "d'oublier" les noms en considérant les graphes modulo isomorphismes.

Définition 2.1.23 (Graphes à matière invisible nommés). Soit $G \in \mathcal{W}$. On construit son *graphe associé* G^Δ en attachant un arbre de matière invisible à chaque sommet, et en nommant chaque sommet de la matière invisible en suivant la convention de la figure 2.7. Plus précisément, si u est un sommet visible et $t \in mm.\{lm, rm\}^*$ dans la matière invisible, le sommet obtenu en parcourant t à partir de u est nommé $u.\eta(t)$, où $\eta: mm.\{lm, rm\}^* \rightarrow \{l, r\}^*$ est la fonction tel que :

- $\eta(mms) = r^{n+1}$ si $s = (rm)^n$,
- $\eta(mms) = s'$, où s' est le mot obtenu en retirant les ports m de s , sinon.

Le comportement d'une NCGD F^Δ sur un graphe à matière invisible nommé induit naturellement une IMCGD (F, R_\bullet) dans le cas particulier où $V(G) = V(F^\Delta(G))$. En revanche, la question devient peu claire lorsque F^Δ réalise des fusions et des séparations. De manière à traquer les noms à travers les séparations et les fusions, on utilisera les fonctions suivantes :

Définition 2.1.24 (Séparation des noms). Soit $u \in V$. On définit $\sigma_u: V \rightarrow V$ la fonction telle que :

- $\sigma_u(u) = u.l$

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

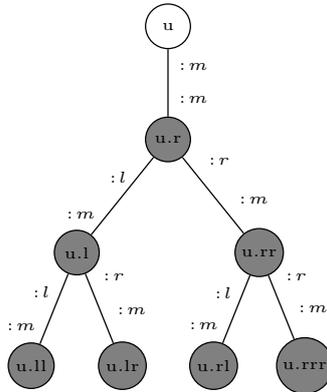


FIGURE 2.7. – Schéma de nommage de la matière invisible.

- $\sigma_u(u.lr^n) = u.lr^{n+1}$
- $\sigma_u(v.t) = v.t$, sinon.

Si A est un ensemble de noms, on écrit $\sigma_u(A) = \{\sigma_u(a) \mid a \in A\}$. On peut voir en figure 2.8 comment cette fonction nous permet de traquer les noms lors de la division en deux d'un arbre de matière noire.

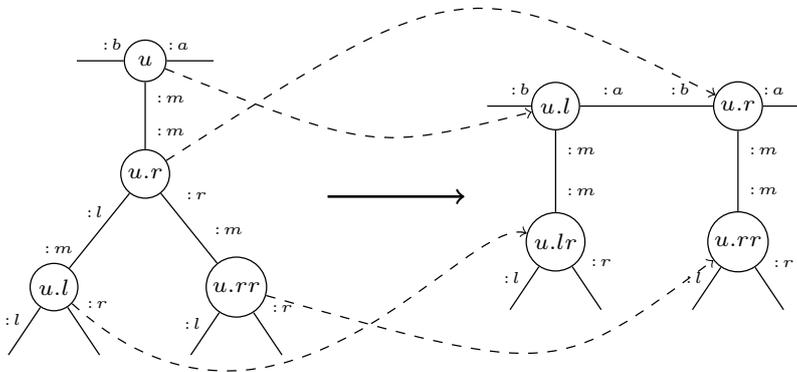


FIGURE 2.8. – Séparation d'un arbre $u.\{l, r\}^*$ par σ_u .

Cette opération peut être interprétée comme changer le nom u en $u.l$ et, de façon à préserver l'injectivité, translater la branche lr^n . Typiquement cela se produit quand un arbre de racine u se fait couper en deux arbres de racines $u.l$ et $u.r$, as in Fig. 2.8. Le lemme suivant montre que les noms de G et de $F(G)$ peuvent toujours être alignés en utilisant de telles fonctions σ_u .

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Lemme 2.1.8. Soit $U \subseteq V(G)$ et $U' \subseteq V(F^\Delta(G))$. Il existe $S = \sigma_{u_1} \circ \dots \circ \sigma_{u_n}$ et $S' = \sigma_{u'_1} \circ \dots \circ \sigma_{u'_m}$, tel que pour tout $v \in S(U)$, $v' \in S'(U')$, $v \wedge v' = \emptyset$ ou $v = v'$.

Démonstration. On décompose les noms de U et U' en utilisant σ jusqu'à ce qu'il deviennent égaux, en suivant l'algorithme suivant :

```

S := I
S' := I
while  $\exists u \in S(U)$ ,  $\exists u' \in S'(U')$ ,  $t, t' = \{l, r\}^*$  tel que  $u.t = u'.t'$  est le plus long suffixe
commun de  $t$  et  $t'$  est  $\varepsilon$  do
  if  $|t| > |t'|$  then
     $S := \sigma_u \circ S$ 
  else
     $S' := \sigma_{u'} \circ S'$ 
  end if
end while

```

Cet algorithme termine car pour tout u, u' , $\max(|t|, |t'|)$ ne peut que décroître. \square

On peut donc maintenant déduire une notion 'successeur' d'un sommet d'un graphe à matière invisible nommé évoluant à travers une NCGD.

Définition 2.1.25 (Nommage induit). Soit F^Δ une NCGD. Pour tout G , on définit son *nommage induit* R_G^Δ de la manière suivante. Pour tout $u.t \in V(G).\{l, r\}^*$, pour tout $u'.t' \in V(F^\Delta(G)).\{l, r\}^*$, on a $R_G^\Delta(u.t) = u'.t'$ si et seulement si $S(u.t) = S'(u'.t')$, où S et S' sont les résultats de l'application du lemme précédent 2.1.8 sur $\{u\}$ et $\{u'\}$.

Remarque 2.1.2. Cette définition est bien fondée, c'est à dire pour tout $u \in V(G)$ et $t \in \{l, r\}^*$, il y a au plus un v et s tels que $S(u.t) = S'(v.s)$ où S et S' sont les résultats de l'application du lemme 2.1.8, voir A.1 pour la preuve formelle.

Maintenant que la NCGD a été étendue pour agir sur les arbres de matière invisible, et qu'il est possible de traquer l'évolution de chacun des sommets, il nous suffit d'oublier les noms afin d'obtenir une IMCGD.

Définition 2.1.26 (Dynamique induite). Soit F^Δ une NCGD. Sa dynamique induite sur les graphes de matière invisible (F, R_\bullet) est telle que pour tout G et $u.t \in V(G).\{l, r\}^*$:

- $F((G^\Delta, u.t)^\circ) = (F^\Delta(G)^\Delta, R_G^\Delta(u.t))^\circ$.
- $R_{(G^\Delta, u.t)^\circ}(p)$ est le chemin entre $R_G^\Delta(u.t)$ et $R_G^\Delta(v.s)$ dans $F^\Delta(G)^\Delta$, où $v.s$ est obtenu en suivant le chemin p depuis $u.t$ dans G^Δ .

Théorème 2.1.10. La dynamique induite par une NCGD est une IMCGD.

Démonstration. Nous devons prouver que la dynamique induite est invariante par translation, continue, quiescente sur la matière invisible et préserve les sommets.

Concentrons nous dans un premier temps sur l'invariance par translation. Soit $Y \in \mathcal{Y}$ un graphe de matière invisible, $G \in \mathcal{W}$ et $a \in V(G).\{l, r\}^*$ tel que $Y = (G^\Delta, a)^\circ$.

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.1. Création/destruction de nœud

Soit u le chemin de a , et b le sommet obtenu en suivant u depuis a . Par définition de (F, R_\bullet) on a les égalités suivantes :

$$F(Y_u) = F((G^\Delta, b)^\circ) = (F^\Delta(G)^\Delta, R^\Delta(b))^\circ = (F^\Delta(G)^\Delta, R^\Delta(a))^\circ_{R_Y(u)} = F(Y)_{R_Y(u)}$$

L'équivalence entre les chemins nous donne $R_Y(u.v) = R_Y(u)R_{Y_u}(v)$, ce qui conclut l'invariance par translation de (F, R) .

Considérons maintenant la préservation des sommets, c'est à dire la bijectivité de R^Δ . Les graphes G et $F^\Delta(G)$ ont tous deux un rôle symétrique dans la construction de R^Δ . Comme R^Δ a été prouvée déterministe dans le lemme A.1, R^Δ est également injective. Soit $u'.t' \in V(F^\Delta(G))$. Comme F^Δ préserve le nom $u'.t'$, il existe $u \in V(G)$ tel que $u \wedge u'.t' \neq \emptyset$. On peut également remarque que $S'(u'.t') \in u'.t'\{l, r\}^*$. Il existe donc $t \in \{l, r\}^*$ tel que $u.t = S'(u'.t')$. Mais comme nous l'avons précédemment remarqué, $u.t$ est un préfixe de $S(u.t)$ et donc $u \wedge u'.t' \neq \emptyset$. Par le lemme 2.1.8 on a que $S'(u'.t')$ appartient à $S(u.\{l, r\}^*)$ ce qui conclut la surjectivité de R^Δ .

La quiescence de la matière invisible provient du fait que pour tout u , les sommets de matière invisible $u.l$ et $u.r$ peuvent être déplacés uniquement via l'application de σ_u . Comme F est continue et invariante par translation, on peut prouver que S et S' sont composées d'un nombre borné de σ , ce qui prouve la quiescence de la matière invisible. Voir le lemme A.4 pour la preuve formelle.

La continuité est relativement technique à prouver, la preuve formelle a donc été laissée en annexe voir le lemme A.5. Intuitivement, la quiescence sur la matière invisible de F^Δ ainsi que la borne sur le nombre de σ dans S et S' nous assure que les sommets ne sont pas déplacés trop loin vers ou depuis la matière invisible, ce qui nous permet de nous concentrer sur la matière visible. Pour celle-ci, la continuité de F est une conséquence directe de la continuité de F^Δ , car l'algorithme de décomposition des noms peut être réalisé localement. \square

Théorème 2.1.11. Une NCGD est inversible si et seulement si sa dynamique de matière invisible induite est inversible.

Démonstration. Premièrement, prouvons que la dynamique induite d'une NCGD inversible est inversible. Soit F^Δ une NCGD. Comme prouvé dans le lemme 2.1.10, R^Δ est bijective. Soit $F^{\Delta^{-1}}$ la dynamique telle que $F^{-1}((G^\Delta, a)^\circ) = (F^{\Delta^{-1}}(G)^\Delta, R^{\Delta^{-1}}(a))^\circ$. Nous avons les égalités :

$$\begin{aligned} F(F^{-1}((G^\Delta, a)^\circ)) &= F((F^{\Delta^{-1}}(G)^\Delta, R^{\Delta^{-1}}(a))^\circ) \\ &= (F \circ F^{\Delta^{-1}}(G)^\Delta, R \circ R^{\Delta^{-1}}(a))^\circ \\ &= (G^\Delta, a)^\circ \end{aligned}$$

Et donc F est bijective et (F, R_\bullet) inversible.

Supposons maintenant que F est bijective. Soit $G \neq H$ tel que $F^\Delta(G) = F^\Delta(H)$. On a pour tout $y \in V(G)$ les égalités suivantes :

$$F((G^\Delta, R_G^{\Delta^{-1}}(y))^\circ) = (F^\Delta(G)^\Delta, y)^\circ = (F^\Delta(H)^\Delta, y)^\circ = F((H^\Delta, R_H^{\Delta^{-1}}(y))^\circ)$$

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.2. Conclusion

Par injectivité de F on a $(G^\Delta, R_G^{\Delta^{-1}}(y))^\circ = (H^\Delta, R_H^{\Delta^{-1}}(y))^\circ$, il existe donc un renommage S tel que $G = SH$. Ensuite, en utilisant l'invariance par translation on obtient $F^\Delta(H) = F^\Delta(G) = F^\Delta(SH) = SF^\Delta(H)$, et donc pour tout $u \in V(F(H)) = V(H)$, $S(u) = u$ et $G = SH = H$.

Soit $H \in \mathcal{W}$, et $a \in V(H)$. Comme F est surjective, il existe $G \in \mathcal{W}$ et $b \in V(G)$ tel que :

$$(F^\Delta(G)^\Delta, R_G^\Delta(b))^\circ = F((G^\Delta, b)^\circ) = (H^\Delta, a)^\circ$$

Il existe donc un renommage S tel que $SF^\Delta(G) = H$. Par invariance par translation, on a $F^\Delta(SG) = H$ et la surjectivité de F^Δ . Ceci conclut la bijectivité de F^Δ . \square

Malheureusement, à cause de la perte d'information lors de la simulation par une IMCGD, il n'est pas possible, en l'état de conclure directement par la réversibilité des NCGD. Nous pensons qu'il est cependant possible d'enrichir notre simulation par des fonctions de nommage et ainsi préserver la réversibilité. Le rôle d'une fonction de nommage serait de bien nommer la matière visible des graphes à matière invisible. Cela nous permettrait de prouver que processus de simulation est inversible, et que pour toute NCGD F^Δ et dynamique induite (F, R_\bullet) , $(F^{-1})^\Delta = (F^\Delta)^{-1}$. Pour cette raison, nous conjecturons qu'il existe une généralisation du théorème de réversibilité applicable aux NCGD.

Conjecture 2.1.3. Si une NCGD est inversible, alors sa fonction inverse est une NCGD.

2.2. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi trois modèles différents de dynamiques causales de graphes permettant une création/destruction de sommets compatible avec la réversibilité :

- Les dynamiques de graphes à matière invisible,
- Les dynamiques de graphes anonymes,
- Les dynamiques de graphes nommés.

Nous avons de plus prouvé que ces modèles se simulent intrinsèquement. Malheureusement, en l'état actuel, ces simulations ne préservent pas la réversibilité, mais nous conjecturons que cela est possible en enrichissant nos simulations. De telles simulations permettrait directement de conclure par l'équivalence entre réversibilité et inversibilité dans le cas anonyme et nommé, celui-ci étant déjà acquis dans le cas des graphes à matière invisible. Nous avons également implémenté la dynamique d'Hasslacher-Meyer dans chacun de ces modèles, donnant un cadre à la réversibilité de cette dernière.

De tels modèles ouvrent des perspectives intéressantes dont certaines sont abordées dans les chapitres suivants. D'un point de vue informatique, on peut se demander dans quelle mesure de tels modèles s'intègrent ou s'opposent à d'autres modèles de dynamiques de graphes, comme les réécritures de graphes [74]. Une autre piste de recherche est de s'intéresser à des questions de complexité sur ces modèles et

2. Dynamiques causales de graphes réversibles – 2.2. Conclusion

de voir quelles sont les différences sur ce point avec les automates cellulaires. Le chapitre 3 définit les sous-décalages de graphes, qui sont une piste à l'élaboration de tels résultats de complexités. Enfin, l'établissement d'un modèle analogue aux automates cellulaires partitionnés permettrait l'énumération des dynamiques de graphes réversibles.

D'un point de vue physique, la possibilité d'expliquer la flèche du temps par une croissance réversible est abordée dans le chapitre 4. Cette étude se réserve pour l'instant à des graphes de dimension 1, et la question de l'émergence naturelle de graphes de dimensions supérieures ou de faible courbure (similaires à notre Univers) reste ouverte.

Enfin, un modèle de dynamiques de graphes quantiques est abordé dans le chapitre 5. Ce modèle de calcul a un intérêt pour 'l'internet quantique' ainsi que pour la gravité quantique.

3. Sous-décalage de graphe

Sommaire

3.1	Introduction	52
3.2	Sous-décalages	54
3.3	Exemples	56
3.4	Quotient et périodicité	59
3.4.1	Périodicité forte	61
3.4.2	Quotients dans les SFT de graphes de Cayley	63
3.4.3	Indécidabilité	64
3.5	Conclusion	65

3.1. Introduction

Les sous-décalages de type fini (SFT) sont des objets bien étudiés en dynamique symbolique [72] et en théorie ergodique. En dépit de leur définition relativement bénigne et locale, les SFT se sont avérés avoir des comportements globaux complexes. Un exemple de tels résultats est l'existence de SFT apériodiques en dimension 2, mais pas en dimension 1. Même certains problèmes naturels, tels que déterminer si une SFT contient une configuration périodique, se révèlent indécidables [25]. Cette complexité locale-globale est en fait partagée par de nombreux systèmes dynamiques et plus particulièrement par les automates cellulaires (AC) [71]. Cependant, les deux modèles sont profondément liés car l'AC de dimension d peut être vu comme un sous-décalage de dimension $d + 1$. Cette connexion a été utilisée pour prouver de nombreux théorèmes sur différentes sous-classes de CA [65]. Ce résultat est également l'une des motivations originales de cet article : Les sous-décalages de graphes devraient être un moyen d'étudier les dynamiques causales des graphes. Les sous-décalages de graphes visent à englober les diagrammes espace-temps CGD en tant que sous-classe.

Les sous-décalages ont déjà été généralisés aux configurations sur les graphes de Cayley de groupes finiment présentés. Cependant, cela n'est pas suffisant pour simuler le CGD car toutes les configurations partagent le même graphe de support comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 3.1.1 (Dynamique de graphe non-simulable par un sous-décalage sur graphe). On peut voir en figure 3.1 un exemple de dynamique de graphe non 'simulable' par un sous-décalage sur graphe Celle-ci opère sur des graphes à deux ports, laisse intacte les sommets blancs et duplique les sommets noirs. Les ports ne sont pas représenté

3. Sous-décalage de graphe – 3.1. Introduction

car la dynamique opère indépendamment de ceux-ci. Deux configurations peuvent avoir le même graphe support (c-à-d qu'elle ne diffèrent que par l'état des sommets), sans pour autant que leurs images partagent le même graphe support. Ainsi, les deux orbites ne peuvent pas être représentée par un même graphe support, comme c'est le cas sur les sous-décalages précédemment définis dans la littérature.

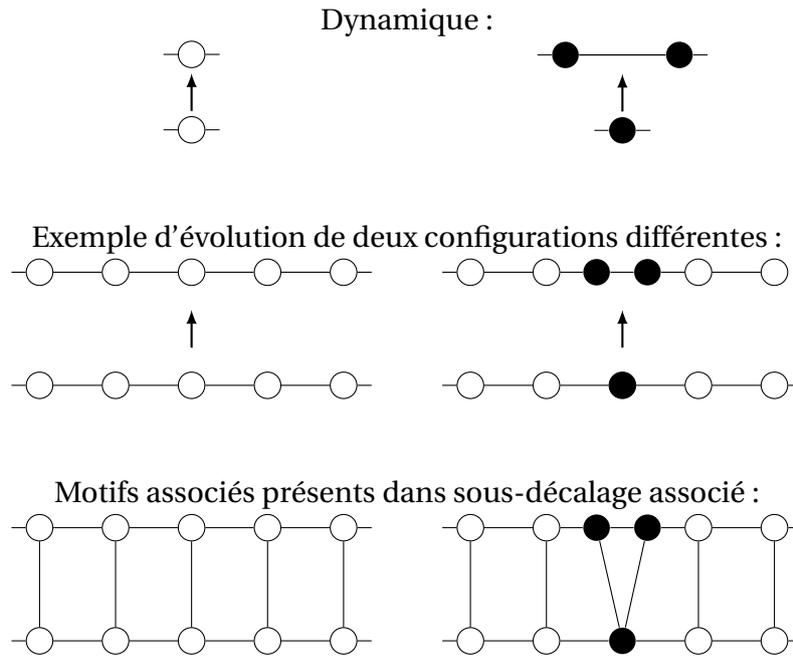


FIGURE 3.1. – Exemple d'une dynamique et de deux configurations partageant le même graphe support, mais dont les orbites ne peuvent pas être représentée sur un unique graphe support dans le sous-décalage associé.

Dans cette section, nous fournissons un formalisme qui relâche cette contrainte, permettant au support lui-même d'être également prescrit par un ensemble de motifs interdits. Les *sous-décalages de graphes* constituent donc une généralisation des sous-décalages précédemment définis, en premier lieu dans l'espoir de simuler les dynamiques de graphes. Bien que la formalisation exacte de cette simulation reste à clarifier, les *sous-décalages de graphes* constituent un modèle riche d'un intérêt propre.

Une question naturelle, mais servant également de préliminaire à la simulation de CGD, est la suivante : peut-on forcer, par des contraintes locales, le graphe à avoir une forme particulière? Dans ce contexte, nous établissons une notion de périodicité de ces objets, ainsi que le lien que celle-ci entretient avec l'existence de configurations finies. En s'appuyant sur ces résultats, nous prouvons l'indécidabilité de l'existence d'une configuration finie, ainsi que l'indécidabilité de l'unicité du graphe support.

3.2. Sous-décalages

Afin d'établir une notion formelle de sous-décalage de graphe, en premier établir quel seront les configuration d'un tel sous-décalage. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il existe de multiples notions de graphes utilisée dans les CGD. Dans l'intérêt de cette section, nous opérerons seulement sur des graphes pointés modulo isomorphisme 1.5.1. Nous aurons également besoin d'outils supplémentaires afin de manipuler ces derniers.

Chemins et sommets. Contrairement au chapitre précédent, nous aurons besoin de régulièrement alterner entre la notion de chemin depuis le pointeur et de sommet associé. Ainsi, tout sommet \hat{u} peut toujours être désigné par une séquence de ports u qui y mène, en partant de l'origine. Étant donné un graphe pointé modulo X , son ensemble de chemins, en partant de l'origine, forme un sous-ensemble $L(X)$ de Π^* avec $\Pi = \pi^2$. Lorsque deux chemins u et v mènent au même sommet, on écrit $u \equiv_X v$. Ainsi le sommet \hat{u} est en réalité la classe d' \equiv_X -équivalence de u , d'où la notation en chapeau. L'ensemble de ces classes d'équivalence, alias sommets, est noté $V(X)$. Remarquez que, en partant de l'origine, en suivant le chemin $v = (ab) \cdots (cd)$ puis le chemin $\bar{v} = (dc) \cdots (ba)$, on revient au sommet à l'origine, à savoir \hat{e} .

Remarque 3.2.1. Remarquez que deux chemins u, u' désignent le même sommet $\hat{u} = \hat{u}'$ si et seulement si pour chaque $v \in L(X)$, $\widehat{uv} = \widehat{u'v}$.

Remarque 3.2.2. Un **chemin réduit** est un chemin qui ne passe pas deux fois consécutivement par la même arête dans des directions opposées, *c.à.d* $u.abba.v$ n'est pas réduit car il est équivalent à $u.v$. Le langage jusqu'à cette équivalence de réduction est un groupoïde pour la concaténation (et l'inversion), *c.à.d* ressemble à un groupe mais sa loi est partiellement définie.

L'ensemble des **cycles**, *c.à.d* chemins réduits du pointeur vers lui-même, est un sous-groupe de celui-ci (la concaténation et l'inversion sont toujours définies parmi eux). L'ensemble des sommets est le quotient de l'ensemble des chemins réduits par la relation d'équivalence suivante : $u \equiv_X v$ si et seulement s'il existe un cycle c tel que $u = c.v$. En effet, chaque fois qu'ils désignent le même sommet $\hat{u} = \hat{v}$, on a $u = (u\bar{v})v$, où $u\bar{v}$ est un cycle.

Néanmoins, la concaténation, n'induit pas un semigroupe au niveau des sommets, puisque nous pouvons avoir $\hat{u} = \hat{v}$ et pourtant $\widehat{w\bar{u}} \neq \widehat{w\bar{v}}$.

Étant donné un graphe pointé modulo X , un mot dans Π^* désigne un sommet, et un langage $\mathcal{L} \subseteq \Pi^*$ désigne un ensemble fini de sommets. Si, de plus, \mathcal{L} est stable en prenant le préfixe, alors les sommets désignés induisent un sous-graphe connexe de X que nous appelons "coupe". Par exemple, une coupe pourrait représenter une surface spatiale dans un diagramme espace-temps, mais également des objets plus complexes. Étant donné un ensemble \mathcal{Z} de graphes, on peut être intéressé par la sélection de ceux dont la coupe selon \mathcal{L} est égale à un certain graphe Z , que nous appelons "cylindre". Cela peut être, par exemple, parce que \mathcal{Z} représente l'ensemble de tous les diagrammes possibles de l'espace-temps, et Z une condition initiale particulière.

3. Sous-décalage de graphe – 3.2. Sous-décalages

Définition 3.2.1 (Coupes et cylindres). . Considérons $\mathcal{L} \subseteq \Pi^*$ un langage préfixe-stable, c.à.d tel que $uv \in \mathcal{L}$ implique $u \in \mathcal{L}$. La \mathcal{L} -**coupe** d'un graphe $X \in \mathcal{X}$ est le sous-graphe induit par les sommets $\{\hat{u} \mid u \in \mathcal{L} \cap L(X)\}$. Il est noté $X_{|\mathcal{L}}$. Considérons $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$, on écrit $\mathcal{Z}_{|\mathcal{L}}$ pour $\{X_{|\mathcal{L}} \mid X \in \mathcal{Z}\}$. Considérons $Z \in \mathcal{Z}_{|\mathcal{L}}$, le **cylindre** de Z dans \mathcal{Z} est $\{X \in \mathcal{Z} \mid X_{|\mathcal{L}} = Z\}$ et est noté $[Z]_{\mathcal{Z}}$.

Ces coupes, associées aux langages selon lesquelles elles ont été obtenues, nous permettent de définir des "motifs", analogue à ceux définis dans les sous-décalages sur les graphes de Cayley. À partir de ceux-ci, il est facile de généraliser la notion de sous-décalage :

Définition 3.2.2 (Sous-décalage). Soit \mathcal{F} un ensemble de tuples (F, L) , où chaque F est un graphe fini et chaque L un langage fini préfixable stable. Le **sous-décalage** interdisant \mathcal{F} est

$$\mathcal{Z} = \{X \in \mathcal{G}_{\Sigma, \pi} \mid \forall v \in L(X), \forall (F, L) \in \mathcal{F}, (X_v)_{|L} \neq F\}.$$

Il est de type fini si \mathcal{F} peut être choisi fini.

Tout comme dans les sous-décalages sur les graphes de Cayley, les sous-décalages admettent plusieurs définition équivalentes :

Remarque 3.2.3. Les éléments suivants sont équivalents.

1. \mathcal{Z} est un sous-décalage de type fini.
2. \mathcal{Z} est le sous-décalage interdisant certains $\mathcal{F}' \times \{M\}$ où \mathcal{F}' est un ensemble fini de graphes finis et M un seul langage fini préfixe-stable.
3. \mathcal{Z} est l'ensemble des graphes autorisant un ensemble fini \mathcal{A} de tuples (A, L) , où A est un graphe fini et L un langage préfixe-stable fini, au sens où :

$$\mathcal{Z} = \{X \in \mathcal{G}_{\Sigma, \pi} \mid \forall v \in L(X), \exists (A, L) \in \mathcal{A}, (X_v)_{|L} = A\}.$$

4. \mathcal{Z} est l'ensemble des graphes permettant $\mathcal{A}' \times \{M\}$ où \mathcal{A}' est un ensemble fini de graphes finis et M un seul langage préfixe-stable fini.

Démonstration.

1 \Rightarrow 2 Pour chaque \mathcal{F} , on pose $M = \bigcup_{(F, L) \in \mathcal{F}} L$ et $\mathcal{F}' = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Z})_{|M}$. $\mathcal{F}' \times \{M\}$ définit le même sous-décalage que \mathcal{F} .

3 \Leftrightarrow 4 De même, pour chaque \mathcal{A} , on pose $M = \bigcup_{(F, L) \in \mathcal{F}} L$ et $\mathcal{A}' = \mathcal{Z}_{|M}$. $\mathcal{A}' \times \{M\}$ définit le même sous-décalage que \mathcal{A} .

2 \Leftrightarrow 4 Le sous-décalage \mathcal{Z} obtenu en interdisant $\mathcal{F}' \times M$ est le même que celui obtenu en autorisant $\mathcal{A}' \times M = (\mathcal{X}_{|M} \setminus \mathcal{F}') \times M$. On note que $\mathcal{X}_{|M}$ est fini.

2 \Rightarrow 1; 4 \Rightarrow 3 sont évidents.

□

Tout comme dans les sous-décalages de graphes de Cayley on peut également définir la notion d'ordre d'un sous-décalage, et l'équivalence entre les définitions par motifs autorisés et par motifs interdit n'est valide que pour les décalages de type finis.

Définition 3.2.3 (Ordre d'un SFT). Le langage préfixe-stable M est le même dans les conditions 2 et 4 de la remarque 3.2.3. On l'appelle une **fenêtre de définition** pour \mathcal{Z} . On assumera souvent supposer que celle-ci est minimale. On définit l'**ordre** de \mathcal{Z} comme le rayon de l'arbre lexicographique associé à m .

Remarque 3.2.4. L'équivalence entre les définitions par motifs autorisés et motifs interdits n'est pas vraie pour les sous-décalage en général, on peut par exemple penser à l'ensemble des graphes obtenu en autorisant exactement les graphes contenant un seul sommet avec un certain label, ce qui n'est pas un ensemble clos topologiquement (alors que c'est forcément le cas d'un ensemble obtenu par interdiction).

Les définitions équivalentes capturent toutes le concept de contrainte locale, et dans les sections suivantes nous définissons souvent nos SFTs en décrivant certaines conditions que les graphes doivent localement satisfaire. Parmi ces conditions, les **contraintes de plus proche voisin** sont celles définies avec une seule arête entre deux sommets, c'est-à-dire $L \in \Pi$.

L'addition du langage de coupe au motif est nécessaire pour capturer certains phénomènes locaux représentant un certain intérêt :

Remarque 3.2.5. Dans les paires (F, L) , L n'est pas forcément le langage des chemins du graphe F . Par exemple, demander que chaque sommet possède une arête avec un port $a \in \Sigma$ est une condition de *type fini*, mais le sous-décalage correspondant ne peut pas être écrit sous la forme $\{X \in \mathcal{G}_{\Sigma, \pi} \mid \forall v \in X, \forall F \in \mathcal{F}, (X_v)_{|\mathcal{L}_F} \neq F\}$ pour toute collection finie \mathcal{F} . Le dual est également vrai pour la définition via une collection finie de motifs autorisés : on peut penser au SFT étant l'ensemble des graphes interdisant le port $a \in \Sigma$.

3.3. Exemples

Avant d'établir des résultats sur les sous-décalages de graphes, voyons quelques exemples intéressants :

Exemple 3.3.1. Un **SFT orienté 2-régulier** est un SFT avec des ports $\pi = \{a, a', b, b'\}$ obtenu en imposant des contraintes : 1/ imposant que les arêtes soient de la forme $aa', a'a, bb'$ ou $b'b$; 2/ imposant que tous les ports soient occupés. Il contient, parmi beaucoup d'autres, le graphe de Cayley du groupe libre sur deux générateurs (un arbre), ainsi que ceux de tous ses quotients.

Exemple 3.3.2 (SFT localement similaire à la grille). Nous pouvons définir un SFT de graphe avec $\pi = \{a, a', b, b'\}$ correspondant au décalage monochromatique sur $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = \varepsilon \rangle$, en imposant trois familles de contraintes :

1. imposant que les arêtes soient de la forme $aa', a'a, bb'$ ou $b'b$;
2. exigeant que tous les ports soient occupés;
3. qui impose que le sous-graphe induit par $\{\varepsilon, aa', bb', aa'bb', bb'aa'\}$ obéisse à la relation *c.à.d* formant un carré comme dans la figure 3.2).

3. Sous-décalage de graphe – 3.3. Exemples

Ce graphe SFT contient évidemment le graphe de Cayley de $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = \varepsilon \rangle$, mais aussi les graphes de Cayley de la plupart des sous-groupes quotients (à l'exclusion des groupes vraiment petits comme le groupe trivial).

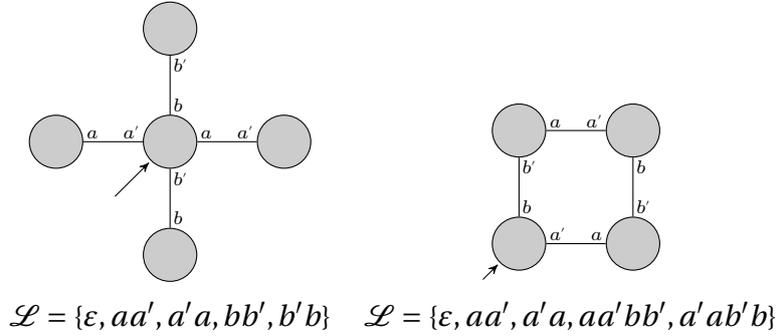


FIGURE 3.2. – Condition d'un SFT localement similaire à la grille, alias la SFT monochromatique étendant $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Chaque famille de conditions est vérifiée indépendamment, l'une forçant la présence des générateurs et de leurs conditions, l'autre renforçant leurs relations.

Une construction similaire peut être effectuée pour tout groupe finiment présenté, et via une troisième contrainte plus précise, inclure tous les quotients.

Exemple 3.3.3. Considérons un groupe finiment présenté $\Gamma = \langle \mathcal{J} \mid \mathcal{R} \rangle$.

Pour tout alphabet Σ , il existe une manière canonique d'associer un **Cayley SFT** $\mathcal{Z}_\Sigma^\Gamma$ à ce groupe. Définissez $\pi = J \sqcup J^{-1}$ et les contraintes suivantes :

1. chaque arête implique deux ports inverses;
2. chaque sommet doit avoir tous les ports possibles;
3. pour tout mot $u \in \mathcal{R}$ et L son langage de préfixes, on interdit le couple (Y, L) pour tout graphe Y supporté par L dans lequel le chemin u n'est pas un cycle de retour à l'origine.

Cette SFT contient évidemment le graphe de Cayley de Γ , mais aussi tous les graphes de Cayley de ses sous-groupes quotients, comme on le verra dans la section suivante. Par exemple, $\mathcal{Z}_\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$ contient la grille infinie ainsi que les tores et les cylindres, et $\mathcal{Z}_\Sigma^{\mathbb{F}_2^2}$ contient en fait tous les graphes de Cayley de tous les groupes à deux générateurs.

Soit Γ un groupe finiment présenté. Un SFT est défini par contraintes Γ -NN s'il inclut précisément les motifs interdits définissant \mathcal{Z}^Γ et quelques motifs interdits supplémentaires plus proches du voisin.

Exemple 3.3.4 (Modèle 'hard-square'). Le modèle 'hard-square' SFT est défini par les contraintes \mathbb{Z}^2 -NN : $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}_{\{0,1\}, a, a', b, b'}$ telles que pour chaque configuration X et arête $\{u : a, v : b\} \in E(X)$, on a $\sigma_x(u) = 0$ ou $\sigma_x(v) = 0$. Ceci peut être exprimé comme un SFT en interdisant les versions colorées noir/blanc de la figure 3.2 qui ont deux

3. Sous-décalage de graphe – 3.3. Exemples

sommets noirs adjacents. Il s'agit d'une généralisation directe d'un SFT bien connu sur \mathbb{Z}^2 et d'autres sous-groupes. En tant que SFT de graphe, il ne contient pas seulement toutes les configurations déjà présentes sur \mathbb{Z}^2 comme dans la Fig. 3.3, mais aussi de nouvelles configurations infinies comme le cylindre de la Fig. 3.4, et même des configurations finies comme les tores contenant seulement 0.

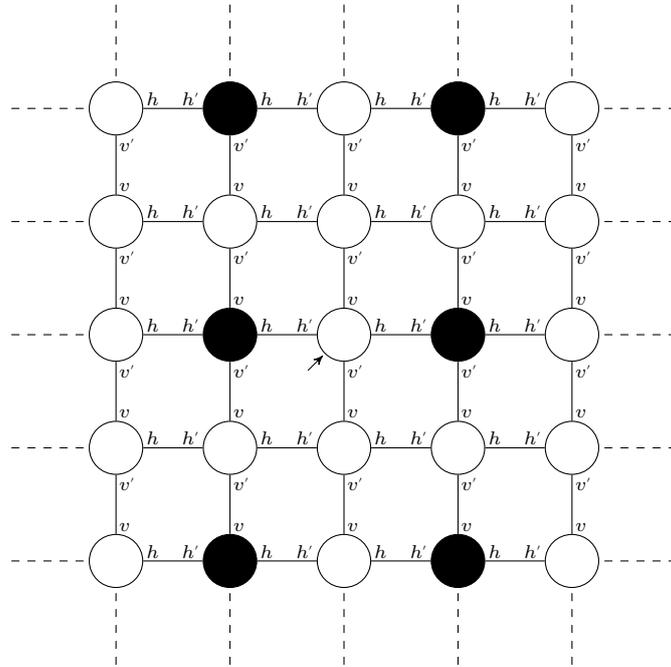


FIGURE 3.3. – Configuration présente du 'hard-square' présente dans \mathbb{Z}^2 . Les couleurs représentent les états internes 0/1 des sommets

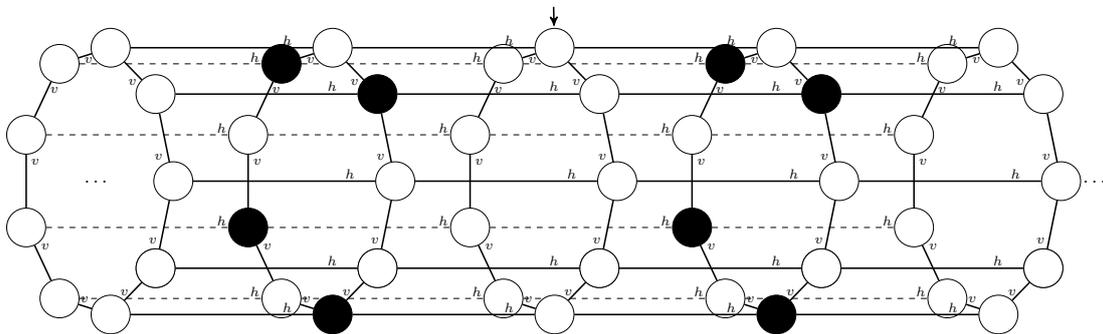


FIGURE 3.4. – Configuration du modèle 'hard-square' n'étant pas présente dans \mathbb{Z}^2 . A des fins de visibilité, seule la moitié des ports est représentée et certaines arêtes ont été représentées en pointillés.

Outre les groupes finiment présentés, la notion de quotient d'un groupe peut être étendue aux graphes périodiques, ce qui fait l'objet de la section suivante.

Exemple 3.3.5. Étant donné tout sous-décalage \mathcal{X} , on peut définir le sous-décalage de ses graphes infinis, en interdisant $(F, L\pi^2)$ pour tout langage préfixe-stable $L \in \Pi^*$ et tout graphe F tel que $F|_L = F$. En effet, cette condition signifie exactement que L décrivait déjà tous les sommets possibles dans F , et que les chemins plus longs n'en ajoutent aucun. Néanmoins, ce sous-décalage est très rarement de type fini, comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.4. Quotient et périodicité

Dans cette section nous supposons que tous les graphes ne contiennent pas d'arêtes symétriques, c'est-à-dire des arêtes ayant les mêmes ports des deux cotés.

Définition 3.4.1 (Période). Tout mot $u \in L(X)$ tel que $X = X_u$ est appelé une **période-chemin**. Le sommet correspondant \hat{u} est appelé une **période**. Le **stabilisateur** de X est son ensemble de périodes; il est noté $\text{STAB}(X)$. X est dit **faiblement périodique** si $\text{STAB}(X) \supsetneq \{\hat{e}\}$, **fortement aperiodique** sinon.

On peut remarquer que si X est faiblement périodique, alors soit $\text{STAB}(X)$ est infini, soit chaque période de \hat{u} est de **torsion**, c.à.d. $\widehat{u}^n = \hat{e}$ pour un certain $n \geq 2$.

Remarque 3.4.1. L'ensemble des chemins-périodes réduits est un sous-groupe du groupoïde des chemins réduits défini dans la remarque 3.2.2. L'ensemble des cycles est un sous-groupe normal du groupe des chemins-périodes (puisque si u est une période et v un cycle, alors $\bar{u}v u$ est encore un cycle). Comme dans la remarque 3.2.2, le stabilisateur est le quotient du groupe des chemins-périodes réduits par le sous-groupe normal des cycles (puisque si u et v sont des chemins vers le même sommet, alors $u = (u\bar{v})v$, où $u\bar{v}$ est un cycle).

Toutes les propositions de la Remarque 3.4.1 sont faciles à prouver, mais nous nous concentrons sur la preuve de la proposition suivante, qui sera la proposition utile dans le reste de cette section.

Proposition 3.4.1. Soit X un graphe. Pour \hat{u}, \hat{v} dans $\text{STAB}(X)$, l'opération de concaténation $\hat{u}\hat{v} \mapsto \widehat{u\bar{v}}$, et l'opération inverse $\widehat{\bar{u}} \mapsto \widehat{u}$ sont bien définies, et dotent $\text{STAB}(X)$ d'une structure de groupe.

Démonstration.

- Soit $u \equiv_X u'$ et $v \equiv_X v'$. Remarque 3.2.1 donne déjà que $uv \equiv_X u'v$. Or de $X_{u'} = X$, on peut déduire que $v \equiv_{X_{u'}} v'$, ce qui signifie que $u'v \equiv_X u'v'$. Nous avons prouvé que $uv \equiv_X u'v'$, de sorte que l'opération de concaténation est bien définie sur les sommets.
- La Remarque 3.2.1 donne que $u'\bar{u}' = \varepsilon = u\bar{u} \equiv_X u'\bar{u}$. Cela signifie que $\bar{u}' \equiv_{X_{u'}} \bar{u}$, et depuis $X = X_{u'}$, $\bar{u}' \equiv_X \bar{u}$. Nous avons prouvé que l'inversion est bien définie sur les sommets.

3. Sous-décalage de graphe – 3.4. Quotient et périodicité

- *Élément neutre* : l'origine $\hat{\varepsilon}$ est une période, car $X_{\varepsilon} = X$.
- *Associativité* : Si $\hat{u}, \hat{v} \in \text{STAB}(X)$, alors $(X_{u\hat{v}}) = (X_u)_{\hat{v}} = X_{\hat{v}} = X$. Il s'ensuit que $\widehat{u\hat{v}}$ est une période.
- *Inversion* : Si $\hat{u} \in \text{STAB}(X)$, alors on a $X = X_{u\hat{u}} = (X_u)_{\hat{u}} = X_{\hat{u}}$. Il s'ensuit que $\widehat{\hat{u}}$ est une période. Cette période fournit un inverse droit et gauche pour \hat{u} , puisque $\widehat{\hat{u}\hat{u}} = \hat{\varepsilon} = \widehat{\hat{u}\hat{u}} = \widehat{\hat{u}\hat{u}}$.

□

Remarque 3.4.2. Si H est un sous-groupe stabilisateur de X , alors pour tout sommet $\hat{u} \in V(X)$, $\widehat{u}H\hat{u}$ est un sous-groupe stabilisateur de X_u . $(X_u)/\widehat{u}H\hat{u}$ est bien défini et s'avère être égal à $(X/H)_u$.

On peut noter que les graphes de Cayley monochromatiques sont exactement les graphes dont tous les sommets sont des périodes. Comme nous l'avons vu dans nos exemples de SFT de Cayley, les graphes périodiques peuvent typiquement être "pliés en graphes plus petits" qui appartiennent également au SFT de graphes. Ce qui suit formalise l'idée du repliement d'un graphe dans un autre.

Définition 3.4.2 (Homomorphisme). Un **homomorphisme** du graphe $X \in \mathcal{X}$ au graphe $X' \in \mathcal{X}$ est une fonction φ de $V(X)$ à $V(X')$ telle que pour tout $u \in L(X)$,

$$\varphi(\hat{u}) = \hat{u} \text{ (in particular } L(X) = L(X')) \quad \text{and} \quad \sigma_X(u) = \sigma_{X'}(u).$$

Lorsqu'elle est surjective, on dit que X **recouvre** X' .

Remarque 3.4.3. Un homomorphisme envoie les cycles vers des cycles et préserve exactement l'ensemble des chemins-périodes et donc l'ensemble des périodes.

Considérons $X \in \mathcal{X}$ et un sous-groupe stabilisateur H . Nous pouvons définir un graphe quotient X/H comme étant $X((G, p))$ où :

- $V(G) = \{H\hat{u} \mid \hat{u} \in V(X)\}$, c.à.d chaque sommet est étiqueté par un ensemble $H\hat{u}$.
- $p = H$, c.à.d le pointeur est le sommet étiqueté par H .
- $E(G) = \left\{ (H\hat{u} : a, H\widehat{uab} : b) \mid uab \in L(X) \right\}$.
- $\sigma_G(H\hat{u}) = \sigma_X(u)$.

Proposition 3.4.2 (Graphe quotient). X/H est un graphe bien défini, et $\hat{u} \mapsto H\hat{u}$ est un homomorphisme.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que $H\hat{u} = H\hat{u}'$ implique que il existe $\hat{h} \in H$ tel que $\hat{u}' = \hat{h}\hat{u}$, de sorte que $X_{u'} = (X_{\hat{h}})_u = X_u$.

Prouvons que $\sigma_{X/H}$ est bien défini. Soit $\hat{u}, \hat{u}' \in V(X)$ telle que $H\hat{u} = H\hat{u}'$. De la remarque ci-dessus, $X_u = X_{u'}$, et donc $\sigma_X(u) = \sigma_X(u')$.

Prouvons maintenant que s'il existe une arête $\{H\hat{u} : a, H\hat{v} : b\}$ dans $G(X/H)$, alors il existe une arête $\{\hat{u} : a, \widehat{\hat{h}'\hat{v}} : b\}$ dans $G(X)$. En effet, par définition et par la remarque ci-dessus, il existe une arête $\{\hat{h}\hat{u} : a, \hat{h}'\hat{v} : b\}$ dans $G(X)$ pour une certaine $\hat{h}, \hat{h}' \in H$. Puisque $X_u = X_{\hat{h}u}$, il existe aussi une arête $\{\hat{u} : a, \widehat{\hat{h}\hat{h}'\hat{v}} : b\}$. Ainsi $H\hat{u}$ hérite de \hat{u} l'absence de conflit de port. La fonction φ satisfait trivialement les deux conditions d'homomorphisme. □

3. Sous-décalage de graphe – 3.4. Quotient et périodicité

Nous disons qu'un ensemble de sommets H est M -séparé dans le graphe X si pour chaque $u \in V(X)$, $H \cap (X_u)|_M = \{\varepsilon\}$.

Si $U, V \subset \Sigma^*$, alors nous notons $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$.

Proposition 3.4.3. Soit X un graphe et $H \leq \text{STAB}(X)$ un sous-groupe stabilisateur. Si H est M -séparé dans X , alors le quotient préserve le langage de support M dans le sens où pour tout $u \in L(X)$, $(X_u)|_M = (X/H_u)|_M$ (modulo le renommage des sommets). En particulier, si X appartient à un SFT \mathcal{X} avec une fenêtre de définition M , alors X/H appartient aussi à \mathcal{X} .

Démonstration. Par définition, si u est un chemin valide dans X , alors il est aussi un chemin valide dans X/H , et l'état interne $\sigma_X(u) = \sigma_{X/H}(u)$ est le même. Il reste à prouver que si \hat{v}, \hat{w} désigne des sommets distincts dans $(X_u)|_M$, alors ils désignent encore des sommets distincts dans $(X/H_u)|_M$. Supposons au contraire que $v \equiv_{(X/H_u)|_M} w$. Par le fait que la concaténation est bien définie (Proposition 3.4.2), il existe h telle que $\hat{h} \in H$ et $hv \equiv_{X_u} w$, c.à.d. $h \equiv_{X_u} w\bar{v}$. Puisque $w\bar{v} \in (X_u)|_{M(-M)}$ et $\hat{h} \in H$, la séparation donne que $w\bar{v} \equiv_{X_u} h \equiv_{X_u} \varepsilon$. Cela signifie que $w \equiv_{X_u} v$. Ceci prouve que l'homomorphisme induit un isomorphisme sur $(X_u)|_M$. Par définition, cet isomorphisme ne change pas l'alphabet d'étiquetage, donc (modulo le renommage des sommets) $(X_u)|_M = (X/H_u)|_M$. Si \mathcal{X} a une fenêtre de définition M , alors par définition $X \in \mathcal{X} \iff X/H \in \mathcal{X}$. \square

3.4.1. Périodicité forte

Définition 3.4.3 (Périodicité forte). . On dit qu'un langage $L \in \Pi^*$ est **dense** dans X s'il existe un langage préfixe-stable fini $M \subseteq \Sigma^*$ (on dit que L est **M -dense**) tel que pour tout $\hat{u} \in V(X)$, $\hat{u}M \cap L \neq \emptyset$. Un graphe X est dit **fortement périodique** si son stabilisateur $\text{STAB}(X)$ est dense dans X .

Notons que les graphes finis sont fortement périodiques, mais pas faiblement périodiques. En dehors de ce cas dégénéré, les graphes fortement périodiques sont faiblement périodiques.

Remarquez également que la périodicité forte est presque équivalente à un graphe de Cayley, à remplacement près de chaque sommet par un graphe fini fixe (avec de possibles arêtes entre eux). Ce remplacement correspond en quelque sorte à l'application d'une dynamique de graphe causale [13] au graphe de Cayley.

Corollaire 3.4.1. Un graphe X est fortement périodique si et seulement si X/H est fini pour un sous-groupe stabilisateur H .

Démonstration. Premièrement, supposons que $H = \text{STAB}(X)$ est M -dense pour un certain $M \subseteq \Sigma^*$: Pour tout $u \in L(X)$, il existe $\hat{h} \in \text{STAB}(X)$ et $v \in -M$ tels que \hat{u} peut être écrit $\hat{h}\hat{v}$. Or pour tout $\hat{h}' \in H$, $\hat{h}'\hat{u} = \hat{h}'\hat{h}\hat{v} \in H\hat{v}$, donc $H\hat{u} \subseteq H\hat{v}$ et $\hat{h}'\hat{v} = \hat{h}'\hat{h}\hat{h}\hat{v} = \hat{h}'\hat{h}\hat{u} \in H\hat{u}$, donc $H\hat{v} \subseteq H\hat{u}$. Donc $H\hat{u} = H\hat{v}$. Donc, l'ensemble $\{H\hat{u} \mid \hat{u} \in V(X)\} = \{H\hat{v} \mid v \in M \cap L(X)\}$ des sommets de X/H est fini. Nous concluons par la proposition 3.4.2. Inversement, si X admet un quotient fini X/H , il existe M tel que

3. Sous-décalage de graphe – 3.4. Quotient et périodicité

$\{H\hat{u} \mid u \in L(X)\} = \{H\hat{v} \mid v \in M \cap L(X)\}$. Pour tout $\hat{u} \in V(X)$, puisque $\hat{u} \in H\hat{u}$, on obtient que $\hat{u} \in H\hat{v}$ pour un certain $v \in M$. Donc, $\hat{u} = \hat{h}\hat{v}$ avec $\hat{h} \in \text{STAB}(X)$ et $v \in M$, de sorte que H est $(-M)$ -dense. \square

Le résultat suivant établit une connexion surprenante entre les SFT qui admettent des graphes finis, et la notion bien établie (voir par exemple [39, Chap. 2]) de finitude résiduelle en théorie des groupes :

Définition 3.4.4 (Groupe résiduellement fini). Un groupe \mathcal{S} est résiduellement fini si et seulement si pour tout élément non-trivial $\hat{u} \in \mathcal{S}$, il existe un sous-groupe normal $H(\hat{u}) \subseteq \mathcal{S}$ d'indice fini tel que $\hat{u} \notin H(\hat{u})$.

Cette notion est très robuste. En particulier, la propriété s'étend aux ensembles finis d'éléments non-identiques $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n \in \mathcal{S}$, c.à.d tel qu'il existe un sous-groupe normal $H(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) \subseteq \mathcal{S}$ d'indice fini tel que $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n \notin H(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$, simplement grâce au fait que toute intersection finie de sous-groupes d'indice fini est un sous-groupe d'indice fini.

Relions la finitude résiduelle aux graphes quotients, d'abord au niveau intuitif. Soit X appartenant à un certain SFT \mathcal{Y} tel que $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$ sont des éléments distincts de $V(X)$. Nous savons que $H(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n) \subseteq \mathcal{S}(X)$ est un sous-groupe de son groupe stabilisateur, et donc que $X/H(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ est un graphe quotient possible, qui maintient que $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$ est distinct. Bien choisir $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$ nous permet de nous assurer que $X/H(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$ appartient toujours au SFT \mathcal{Y} .

Théorème 3.4.1. Soit \mathcal{Y} un SFT. \mathcal{Y} contient un graphe fini si et seulement si \mathcal{Y} contient une configuration fortement périodique X telle que $\text{STAB}(X)$ est résiduellement fini.

Démonstration. L'implication de droite à gauche vient directement du fait que les graphes finis sont fortement périodiques et que les groupes finis sont résiduellement finis.

Maintenant, supposons que \mathcal{Y} a une fenêtre de définition M et admet une configuration fortement périodique X telle que $\text{STAB}(X)$ est résiduellement fini. Puisque $\text{STAB}(X)$ est résiduellement fini, il existe un sous-groupe $H \leq \text{STAB}(X)$ d'indice fini qui ne coupe pas l'ensemble fini $\text{STAB}(X) \cap \bigcup_{\hat{u} \in V(X)} (X_{\hat{u}})_{|M(-M)} \setminus \{\varepsilon\}$. Par conséquent, H est $M(-M)$ -séparé, de sorte que nous pouvons utiliser la Proposition 3.4.3 : pour tout $\hat{u} \in V(X)$ nous avons que $(X/H_{\hat{u}})_{|M} = (X_{\hat{u}})_{|M}$. Étant donné que \mathcal{Y} a une fenêtre de définition M , nous obtenons que $X/H \in \mathcal{Y}$. \square

Il y a donc deux façons complémentaires pour qu'un SFT non-vide ne puisse avoir que des configurations infinies : soit en prévenant les configurations fortement périodiques, soit en les forçant les stabilisateurs à être non résiduellement finis.

Dans le cas non résiduellement fini (comme les groupes monstres de Tarski, voir par exemple [81]), cette preuve s'effondre et on peut construire des SFT avec des configurations fortement périodiques qui ne se replient pas uniformément sur des graphes finis.

Remarque 3.4.4. Γ n'est pas résiduellement fini si $\mathcal{Z}_{\{0\}}^\Gamma$ inclut un SFT contenant le graphe de Cayley de Γ mais aucun quotient fini de celui-ci. En effet, on peut considérer le SFT \mathcal{Z} inclus dans $\mathcal{Z}_{\{0\}}^\Gamma$ défini par la contrainte supplémentaire que u n'est jamais un cycle, où u est un chemin non cyclique qui témoigne du fait que Γ n'est pas résiduellement fini, dans le sens que tous les quotients finis de Γ envoient u sur ε .

3.4.2. Quotients dans les SFT de graphes de Cayley

Nous avons vu que les notions de quotients et de SFT sont liées, car les contraintes de type fini ne permettent pas de distinguer facilement un graphe de certains de ses quotients. D'un point de vue opposé, on remarque que certains SFT admettent un graphe support maximal par rapport au quotient.

Proposition 3.4.4. Soit Γ un groupe finiment présenté, X un graphe, et \mathcal{Z} un SFT défini par des contraintes Γ -NN. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \in \mathcal{Z}$.
2. X est couvert par un graphe de Cayley coloré Y de Γ qui est dans \mathcal{Z} .

Démonstration.

\Rightarrow Supposons que le support de X soit dans \mathcal{Z} . On remarque que les chemins désignant le sommet \hat{u} dans Y désignent tous le même sommet dans X : en effet, si \hat{v} désigne aussi \hat{u} dans Y , alors on peut les obtenir les uns des autres en appliquant itérativement les règles de réduction de la présentation. Puis, grâce à la troisième condition de la définition de $\mathcal{Z}_\Sigma^\Gamma$, \hat{v} désigne aussi le même sommet que \hat{u} dans X . Par conséquent, on peut simplement définir $\phi(\hat{u}) = \hat{u} \in V(X)$ pour chaque $\hat{u} \in V(Y)$, et $\sigma_Y(\hat{u}) = \sigma_X(\hat{u})$. Ceci satisfait clairement les conditions de la définition 3.4.2.

\Leftarrow Inversement, considérons un graphe X couvert par un certain graphe de Cayley Y de Γ qui est dans \mathcal{Z} . Considérons une contrainte de cycle de \mathcal{Z} , c'est-à-dire : chaque chemin étiqueté par un certain u (dans la présentation du groupe de Γ) doit être un cycle. Cette contrainte est satisfaite dans X car les boucles sont préservées par homomorphisme. Considérons maintenant une contrainte de bord de \mathcal{Z} . Celles-ci sont également préservées par homomorphisme, par définition. Nous avons prouvé que X satisfait toutes les contraintes définissant \mathcal{Z} . □

Dans les graphes de $\mathcal{Z}_\Sigma^{\mathbb{Z}^2}$, tous les stabilisateurs sont des sous-groupes de la grille générée par $\{hh', vv'\}$ ce qui facilite de nombreuses propriétés.

Proposition 3.4.5. Soit \mathcal{Z} un SFT de graphe défini par des contraintes \mathbb{Z}^2 -NN. Alors exactement l'une des situations suivantes se produit :

1. Chaque graphe de \mathcal{Z} est supporté par la grille infinie, et est fortement apériodique.
2. \mathcal{Z} contient un graphe fini et une grille infinie fortement périodique.

3. Sous-décalage de graphe – 3.4. Quotient et périodicité

Démonstration. Supposons que la condition 1 ne soit pas satisfaite. Il est bien connu que par un argument classique de pompage, que \mathcal{Z} contient alors une configuration fortement périodique. Dans ce cas, son stabilisateur, en tant que sous-groupe de \mathbb{Z}^2 , est résiduellement fini (voir par exemple [39, Prop.2.2.1]). Le théorème 3.4.1 implique donc que \mathcal{Z} contient un graphe fini.

D'autre part, il est clair que les deux conditions ne peuvent être satisfaites simultanément, et forment donc effectivement une dichotomie. \square

3.4.3. Indécidabilité

Au vu de nos précédents résultats, il nous est maintenant possible d'obtenir des résultats d'indécidabilité, qui sont le sujet de cette section.

Théorème 3.4.2. Étant donné une liste de contraintes \mathbb{Z}^2 -NN. La dichotomie de la Proposition 3.4.5 est indécidable.

Démonstration. Chaque ensemble \mathcal{F} de contraintes \mathbb{Z}^2 -NN définit à la fois un SFT de graphes \mathcal{Z} et un SFT classique \mathcal{Z}' sur la grille infinie (qui est inclus dans \mathcal{Z}). Si \mathcal{Z}' est fortement apériodique, alors \mathcal{Z} est dans la classe 1, alors que si elle contient une configuration faiblement périodique, alors \mathcal{Z} est dans la classe 2. La dichotomie est alors directement équivalente à l'apériodicité forte de \mathcal{Z}' , qui est connue pour être indécidable [58]. \square

Par conséquent, la classe des SFT de graphes avec support unique et infini est inséparable de la classe des SFT de graphes contenant à la fois des graphes finis et infinis.

Cela signifie que toute propriété qui est impliquée par l'une des deux classes, et implique la négation de l'autre, est indécidable.

Corollaire 3.4.2. Le problème de savoir si un SFT de graphes contient un graphe fini, et le problème de savoir si un SFT de graphes a un support unique, sont tous deux indécidables.

Le codage des graphes de Cayley en SFT de graphes implique aussi, plus directement, le résultat d'indécidabilité suivant.

Théorème 3.4.3. Il existe un SFT de graphes de Cayley \mathcal{Z}_Γ tel que le problème de savoir si, étant donné un mot $u \in \Pi^*$, u représente un cycle de l'origine à lui-même dans chaque graphe de \mathcal{Z}_Γ , est indécidable.

Ce problème est en fait Σ_1^0 -complet.

Démonstration. D'après la Proposition 3.4.4, u représente un cycle de l'origine vers lui-même dans tout graphe de \mathcal{Z}_Γ si et seulement si elle représente l'élément d'identité dans Γ , ce qui signifie qu'elle est dans le langage de *word problem*. On sait qu'il existe un groupe finiment présenté Γ dont le problème des mots est indécidable. \square

3.5. Conclusion

En résumé, nous avons fourni un formalisme généralisant les SFT sur les graphes de Cayley en permettant au graphe support d'être déterminé par le SFT en section 3.2. Cette généralisation permet également aux SFT d'avoir une configuration finie et nous avons fourni des exemples de tels SFT.

En définissant les graphes quotients, nous avons montré que la seule façon pour un SFT de ne pas avoir de configuration finie est de n'avoir que des configurations qui sont soit apériodiques, soit avec un stabilisateur qui n'est pas résiduellement fini. De même, nous avons montré que le fait de n'avoir qu'un seul graphe de support oblige les configurations à avoir des stabilisateurs finis, et nous avons utilisé ces deux résultats pour prouver que le problème d'existence des configurations finies et le problème de l'unicité du graphe support sont indécidables.

Dans le futur, nous souhaitons étudier le déterminisme et la relation entre les dynamiques causales de graphes et les sous-décalages de graphes, ainsi qu'utiliser cette connexion pour prouver des résultats de structure et de complexité sur les dynamiques causales des graphes. De plus, les sous-décalages de graphes pourraient fournir un nouveau point de vue pour étudier les sous-décalages de groupes. De nombreuses notions et résultats connus dans les sous-décalages de groupes, comme les sous-décalages sofiques [40], l'expansivité [102] ou l'entropie [1], seraient intéressants à adapter aux sous-décalages de graphes.

Enfin, les SFT de graphes peuvent potentiellement fournir un cadre général à l'étude des sous-décalages sur des topologies multiples.

4. Flèche du temps

Sommaire

4.1	Entropie et flèche du temps	66
4.1.1	Historique de l'entropie	67
4.1.2	Entropie et classes d'équivalences	68
4.1.3	Périodicité de l'entropie d'un système dynamique fini et discret	69
4.1.4	Entropie globale	70
4.1.5	Explications avancées dans la littérature récente	70
4.2	L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion	72
4.2.1	Généralités sur le modèle	72
4.2.2	Dynamique $\sqrt{\phi}I$	74
4.2.2.1	Étape $\sqrt{\phi}$	74
4.2.2.2	Étape I	75
4.2.2.3	Croissance de $\sqrt{\phi}I$	76
4.2.3	Évolution de l'entropie sous une dynamique croissante	80
4.2.3.1	Temps de Janus	82
4.2.4	Croissance exponentielle	86
4.3	Entropie locale	88
4.3.1	Entropies moyennes	88
4.3.2	Entropie à rayon variable	90
4.4	Poches de faible entropie	92
4.4.1	Somme des entropies locales	92
4.4.2	Cas de $\sqrt{\phi}I$, $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$ et $\sqrt{\phi}I_2$	93
4.4.3	Choc inélastique	94
4.4.4	Loi de conservation du choc inélastique	96
4.4.5	Résultats expérimentaux	99
4.5	Conclusion	102

4.1. Entropie et flèche du temps

Selon nos connaissances actuelles, nous vivons dans un univers à 3 + 1 dimensions. Plus exactement, trois dimensions dites spatiales qui dites non-orientées, et une dimension temporelle qui est dite orientée. La différence entre ces deux types de dimensions est très intuitive : nous sommes parfaitement capable de nous déplacer à gauche ou à droite, en avant ou en arrière, en haut ou en bas, mais nous ne pouvons aller que vers le futur et pas vers le passé. Pourtant nombre de théories, comme la

physique newtonienne et la mécanique quantique sont connues pour être réversibles, et sont même symétriques temporellement : une dynamique F est symétrique temporellement si il existe une involution locale T telle que $F^{-1} = TFT$. Comprendre exactement ce que fait T sur une configuration est au-delà du propos de cette thèse, mais intuitivement celle-ci pourrait notamment inverser la vitesse de chaque particule, leur spin, ou même leur champ magnétique. Cette symétrie est généralement abrégée symétrie-T dans la littérature, et réconcilier celle-ci avec la relativité générale est une question très étudiée ces dernières décennies en physique théorique [24, 29].

4.1.1. Historique de l'entropie

Dans un tel contexte, il est naturel de s'interroger sur la compatibilité et l'articulation des notions de réversibilité et de flèche du temps. Avant d'aborder plus en détail cette question, il nous faut définir plus précisément en quoi la dimension temporelle est orientée. Historiquement, il nous faut remonter au début du 18ème siècle pour avoir un premier début de réponse avec le deuxième principe de la thermodynamique. Celui-ci a été esquissé par Sadi Carnot en 1824 lors de l'étude de l'efficacité des moteurs à vapeur, puis généralisé en 1854 par Rudolf Clausius :

Principe 4.1.1 ([46]). "Heat can never pass from a colder to a warmer body without some other change, connected therewith, occurring at the same time", ce qui peut être traduit par "La chaleur ne peut jamais passer d'un corps plus froid à un corps plus chaud sans un autre changement connecté et simultané".

En 1862, il énonça une version plus complète, dite l'inégalité de Clausius :

Loi 4.1.1 ([47]). Pour tout système clos et homogène, on a :

$$\int_0^t \frac{dQ}{T} \geq 0$$

où dQ est le transfert de chaleur du système et T est la température absolue du système. De plus, l'égalité n'est respectée que si l'évolution du système est réversible.

Bien que celle-ci n'était pas encore nommée, cette loi est l'une des premières introductions du concept d'entropie d'un système physique. L'entropie fut formalisée quelques années plus tard en tant que la fonction S telle que $dS = \frac{dQ}{T}$. C'est à cette époque que fut théorisé pour la première fois que pour qu'une dynamique soit réversible, son entropie doit rester constante; l'augmentation de l'entropie constitue une première notion de flèche du temps.

L'entropie resta définie par sa dérivée jusqu'à l'introduction de la physique statistique par Ludwig Boltzmann dans les années 1870 : [28]

Définition 4.1.1. L'entropie S d'un état macroscopique est définie par :

$$S = k_B \cdot \ln \Omega$$

où $k_B = 1,381.10^{-23} J.K^{-1}$ est la constante de Boltzmann et Ω est le nombre de configurations microscopiques correspondant à l'état macroscopique.

Intuitivement, un état macroscopique se réfère aux propriétés macroscopiques d'un système, telles que la température, la pression, le volume ou la densité. Cette définition reste cependant à formaliser, ce qui est l'objet de la section suivante.

4.1.2. Entropie et classes d'équivalences

Pour formaliser ce qu'est un état macroscopique, il nous faut nous poser la question suivante : comment déterminer si des états microscopiques partagent le même état macroscopique? Dans un premier temps, imaginons donc un état microscopique que l'on ne modifie que par un minuscule changement, comme changer le spin d'une particule par exemple. Sommes-nous toujours dans le même état macroscopique? On pourrait penser qu'un état macroscopique regrouperait tout un ensemble d'états microscopiques ne différant que par de petites variations, négligeables à l'échelle macroscopique, et donc que nos deux états microscopiques partagent le même état macroscopique. Cependant, si l'on continue à itérer des changements à notre état microscopique, nous pourrions à terme obtenir un état microscopique complètement différent. Peut-t-on alors toujours dire qu'ils appartiennent au même état macroscopique?

En physique statistique, un état macroscopique est défini par une distribution de probabilité sur un ensemble d'états microscopiques. Cette définition est très générale, mais il est souvent raisonnable de supposer que tout les micros-états partagent la même probabilité. On exprime ainsi la probabilité p_i d'un état microscopique x_i par :

$$p_i = \frac{1}{\Omega}$$

On obtient alors le lien avec l'entropie de Shannon [101] (à une constante près) en posant :

$$S = -k \sum_{i=0}^{\Omega-1} p_i \ln(p_i) = -k \sum_{i=0}^{\Omega-1} \frac{1}{\Omega} \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) = k \cdot \ln \Omega$$

Dans le reste de cette section, pour un système dynamique d'espace X , les états microscopiques seront des configurations $x_i \in X$ de notre système, et les états macroscopiques seront des classes d'équivalence sur X . On note $[x]$ la classe d'équivalence de x .

Définition 4.1.2. Soit un ensemble X et une relation d'équivalence \equiv sur X . On définit la fonction d'entropie $S_{\equiv} : X \rightarrow \mathbb{R}$ associée à \equiv de la façon suivante :

$$S_{\equiv}(x) = \ln(|[x]|)$$

Par la suite on notera S au lieu de S_{\equiv} en l'absence d'ambiguïté.

4.1.3. Périodicité de l'entropie d'un système dynamique fini et discret

Cette interprétation statistique va nous permettre d'exhiber le lien entre la préservation de l'entropie et la réversibilité. Cependant, cette définition entre potentiellement en conflit avec le second principe de la thermodynamique, car il est possible d'observer des variations négatives d'entropies dans un système clos. C'est même forcément le cas pour une dynamique réversible sur un espace d'état fini où l'entropie n'est pas constante :

Remarque 4.1.1. Soit X un espace d'états fini et $f : X \rightarrow X$ une bijection. Pour toute fonction d'entropie S , et pour toute configuration $x \in X$, la suite $(S(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique car la suite $f^n(x)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle même périodique. Cela implique que la suite des variations d'entropies $(S(f^{n+1}(x)) - S(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même périodique. Si $(S(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante, alors ces variations d'entropies peuvent être négatives.

Comment peut-t-on alors justifier le fait que, dans la vie courante, nous observons une croissance de l'entropie, comme par exemple la dilution d'une goutte de colorant dans un verre d'eau ?

La réponse réside dans le fait que bien que la dilution d'une goutte de colorant dans un verre d'eau scellé réponde aux critères d'application de la remarque précédente, cette expérience ne transmet qu'une vision partielle de la réalité. Il s'avère que deux conditions, implicites dans cette expérience de pensée, sont nécessaires pour observer un tel phénomène.

Premièrement, on peut constater que la durée d'une telle expérience est bien trop courte pour observer une périodicité, tout en restant non négligeable. Pour donner un ordre de grandeur, pour un volume molaire de 22.4L de gaz parfait, on obtient pour Ω une valeur de $10^{5 \times 10^{24}}$. Or, on estime qu'il s'est écoulé seulement 10^{60} durées de Planck (durée minimale observable) [89] depuis le Big Bang.

Deuxièmement, lors du début de l'expérience, le système n'est pas dans une configuration typique, mais dans une configuration de faible entropie. En effet, si l'on part d'une configuration choisie aléatoirement, la variation d'entropie sera nulle en moyenne, indépendamment du nombre d'étapes entre les deux observations. En effet, pour k étape de temps, on a :

$$\sum_{x \in \Sigma} (S(f^k(x)) - S(x)) = \sum_{x \in \Sigma} S(x) - \sum_{x \in \Sigma} S(x) = 0$$

À ce constat vient enfin s'ajouter un argument statistique : en pratique, la relation d'équivalence et donc la fonction d'entropie sont choisies de manière à ce qu'il y ait peu d'états de faible entropie. De cette manière, en partant d'un état de faible entropie et en laissant s'écouler suffisamment de temps pour permettre à la dynamique de mélanger la configuration, il est bien plus probable d'obtenir un état de plus forte entropie.

4.1.4. Entropie globale

Cette explication étant satisfaisante pour expliquer la croissance de l'entropie à notre échelle, elle a également été avancée pour expliquer la présence de la flèche du temps à l'échelle de l'Univers. Cependant, cette approche "système dynamique fini et discret" échoue sur trois points différents : l'apériodicité temporelle apparente de l'Univers, incompatibilité avec la dynamique inverse et l'atypicité de la configuration initiale.

Le premier point est que nos observations ne semblent, a priori, pas corroborer une périodicité de l'Univers et donc de l'entropie [41, 87]. En effet, un tel phénomène ne serait compatible qu'avec une cosmologie intégrant un effondrement terminal (Big Crunch) comme destin de l'Univers. Depuis la découverte dans les années 1990 de l'accélération de l'expansion de l'Univers, cette hypothèse semble est défavorisée au profit de l'hypothèse de la mort thermique de l'Univers.

Le second point, plus important, est le fait que cette explication ne fait, au final, que reporter la question de la présence d'une flèche du temps. La question "Pourquoi observe-t-on une flèche du temps?" devient "Pourquoi l'Univers était à son origine de faible entropie?". En effet, pour un système donné, une configuration typique sera de forte entropie. Or, l'entropie à l'origine de l'Univers était suffisamment faible pour qu'une flèche du temps soit toujours observable environ 13,7 milliards d'années après le Big Bang. Ceci en fait donc une configuration très fortement atypique. L'explication de la flèche du temps par une configuration initiale de faible entropie en devient insatisfaisante car elle nécessite une hypothèse forte : l'atypicité de l'Univers à son origine.

Enfin, en partant d'un état initial de faible entropie et en itérant la dynamique vers l'avant, l'entropie augmente généralement (la flèche de l'"horloge entropique" correspond à celle de l'"horloge dynamique" externe). Cependant, si nous appliquons la dynamique inversée à la place, en itérant la dynamique vers l'arrière, l'entropie augmente aussi typiquement (la flèche de l'horloge entropique ne correspond pas à celle de l'horloge dynamique). Cette remarque est faite dans [56] par exemple, et est souvent négligée.

Ces trois points constituent une motivation suffisante pour tenter de trouver une explication différente à la flèche du temps. Dans ce chapitre nous proposons une alternative, où cette augmentation de l'entropie ne serait pas due à une configuration initiale de faible entropie, mais à l'expansion de l'Univers, elle-même induite par les lois de la physique.

4.1.5. Explications avancées dans la littérature récente

Dans l'argument conventionnel dû à Boltzmann [28], la flèche du temps est la conséquence de l'atypicité de la configuration initiale combinée à une dynamique réversible. Cet argument fonctionne même pour des systèmes de taille limitée (par exemple dans le cas de la goutte de colorant dans une verre d'eau), mais il souffre de trois critiques importantes que nous avons abordé plus haut.

4. Flèche du temps – 4.1. Entropie et flèche du temps

Dans [36, 37], Carroll et Chen répondent à la troisième critique et fournissent la première explication plausible par laquelle la "loi dynamique réversible implique la flèche du temps". Leur nouvel ingrédient clé est le Big Bounce (Big Crunch puis Big Bang) puis l'expansion éternelle (telle que décrite par plusieurs des premières tentatives de restauration de la symétrie temporelle de la physique des particules à l'échelle de l'univers [98, 33]). Leur modèle est laissé informel, ce qui laisse beaucoup de place pour discuter s'il parvient vraiment à éliminer l'hypothèse du passé [110, 108, 112]. Les auteurs soulèvent eux-mêmes la question de savoir si l'expansion est réellement compatible avec la réversibilité.

De manière informelle, dans un univers en expansion, la matière est comprimée par le Big Crunch, et libérée par le Big Bang. L'expansion est si rapide que la matière se retrouve hors d'équilibre, dans un état de faible entropie. La matière se diffuse alors et l'entropie augmente sans jamais atteindre un maximum, car l'expansion est éternelle. La flèche de l'horloge entropique correspond donc à celle de l'"horloge de la taille de l'univers", qui correspond à son tour à celle de l'horloge dynamique après le Big Bounce. Cette explication est convaincante. La conséquence logique de cet argument est quelque peu déroutante : avant que le Big Bounce ne se produise, l'horloge de la taille de l'univers, et donc l'horloge entropique, a sa flèche opposée à celle de l'horloge dynamique. Dans le temps de l'horloge dynamique, nous sommes peut-être assis ici en train de lire cet article ~ 13.7 milliards d'années après le Big Bounce, tandis que d'autres font peut-être de même ~ 27.4 milliards d'années auparavant, dans la direction opposée - ces temps entropiques jumeaux qui se font face ont en fait été popularisés sous le nom de "temps de Janus" par Barbour [22]. Pourtant, ce argument souffre de la même critique que l'argument conventionnel de Boltzmann, comme souligné dans [56]. De plus, la relativité générale nous apprend à nous méfier de la signification physique que nous attachons aux coordonnées : il se peut que les coordonnées de l'horloge dynamique soient de simples coordonnées temporelles - par exemple, dans les solutions dites sans frontières, il n'y a "pas de temps" au Big Bounce [60].

Barbour et al. [22, 23] utilisent le problème à n -corps, avec la gravité classique newtonienne (non locale) activée, comme une éclairante analogie au Big Bounce suivi d'une expansion éternelle. Aussi simple soit-il, la question de savoir si ce modèle permet vraiment de se débarrasser de l'hypothèse d'un passé atypique a de nouveau été débattue dans [115]. De plus, l'horloge entropique (mesure de l'augmentation du désordre microscopique) est remplacée par une "horloge de complexité de forme" (mesure de l'augmentation de l'agglutination macroscopique). Cette solution n'est pas standard et sujette aux critiques car, dans de nombreuses situations, il n'est pas nécessaire d'avoir une agglutination gravitationnelle pour observer une flèche du temps, par exemple à l'échelle cosmologique ou à l'échelle microscopique.

En thermodynamique, l'entropie augmente globalement, mais peut très bien diminuer localement et se stabiliser près de zéro, atteignant la "mort thermique". À ce stade, il devient impossible d'observer localement une flèche du temps. Ce phénomène se produit dans le modèle jouet développé dans cette section. En effet, à mesure que l'univers s'étend, l'entropie globale augmente sans limite, car "il y a plus de façons

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

de positionner la matière", mais en même temps, la matière se dilue. Dans toute fenêtre de taille fixe, la matière se raréfie, il y a moins de façons de la positionner, et donc l'entropie locale diminue. La somme des entropies locales augmente encore comme il se doit, mais elle se stabilise bientôt autour d'une borne supérieure, caractéristique de la mort thermique. En d'autres termes, il n'y a plus assez de matière pour que l'entropie locale augmente. Trop rapidement, il n'y a plus aucun endroit du graphique où nous sommes incapables d'observer une flèche du temps au niveau local. Cette situation est quelque peu irréaliste. Bien que notre univers, ~ 13.7 milliards d'années après le Big Bang, soit en effet largement vide, il comporte des régions où la matière est suffisamment concentrée pour que l'entropie locale puisse continuer à augmenter, ce qui nous permet d'observer des horloges entropiques locales. Il est probable que cela soit dû principalement à l'agglutination de la matière et à l'émission de rayonnement par une interaction délicate entre la nucléosynthèse et la gravité, comme l'expliquent Reichenbach et Rovelli [95, 94]. La modélisation de tels processus dépasse le cadre de cette thèse. Néanmoins, nous fournissons des preuves numériques qu'il suffit d'ajouter des collisions inélastiques de matière au modèle (et de déclencher l'émission de rayonnement dans l'espace libre pour que les choses restent réversibles) pour que la somme des entropies locales augmente beaucoup plus lentement. Localement, nous sommes capables d'observer une flèche du temps durant une plus grande période.

4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

4.2.1. Généralités sur le modèle

Dans les sections qui suivent, nous argumentons via différents modèles jouets que la flèche du temps pourrait provenir de l'expansion de l'Univers et que cette expansion peut tout à fait avoir lieu de façon réversible. Dans ces modèles, la remarque 4.1.1 ne s'applique pas à cause du fait que, bien que chaque configuration soit finie, l'espace d'états en lui-même est infini, car les configurations peuvent croître. Cela n'a absolument rien de surprenant en soit, l'ensemble des entiers \mathbb{N} est infini, et il est facile de définir une bijection non-périodique sur ces derniers :

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ n + 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n - 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

En revanche, ce qui est beaucoup moins évident, c'est l'existence d'une dynamique causale, réversible, et ultimement croissante (en terme de taille) sur l'ensemble de ses configurations. Nous verrons ensuite que la croissance de certaines fonctions d'entropies est quasiment systématique pour ce type de dynamique.

Avant de décrire précisément une telle dynamique, il est important de considérer les différentes options qui s'offrent à nous lors du choix du modèle. Dans ce chapitre, nous

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

considérons des dynamiques de graphes nommées 2.1.5, mais également facilement transposables en tant que dynamique de graphe anonyme 2.1.4. Par simplicité, nous nous restreindrons à l'étude de graphes circulaires à 1 dimension, formés par un ensemble de sommets ayant deux ports a, b en alternance, comme on peut le voir dans la figure 4.1. Toutes ces dynamiques peuvent être généralisées sur les graphes arbitraires à 2 ports, cependant cette restriction nous permet d'éviter les cas limites (sommets à un seul port, sommets isolés). Dans un premier temps, chaque nœuds pourront être dans 4 états différents : ne contenant aucune particule, contenant une particule se déplaçant en suivant le port a , contenant une particule suivant le port b , contenant une particule de chaque. Cet ensemble d'état est le même que celui utilisé dans les marches quantiques pour représenter le spin d'une particule fermionique comme l'électron [2, 51]. Il est également utilisé dans les méthodes de gaz sur réseaux [59]. Ces dynamiques sont inspirées de la dynamique d'Haslacher-Meyer, déjà abordée dans le chapitre précédent 2.

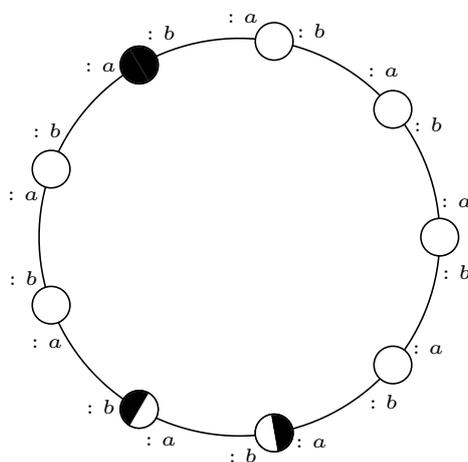


FIGURE 4.1. – *Exemple de configuration.* La présence d'une particule est représentée par le demi sommet coloré en noir orienté le long du port correspondant.

On peut généraliser ces graphes en associant à chaque port non pas un bit d'information, mais un nombre arbitraire de bit d'information. On note \mathcal{C}_n l'ensemble des graphes circulaires à $2n$ bits d'informations (n par port). Pour tout sommet x , on note $p_i(x)$ la valeur du i -ième bit du port p du sommet x . On notera que cet ensemble n'est pas compact, celui-ci ne contenant pas la ligne infinie.

Concernant les dynamiques en elle même, nous utiliserons la définition suivante pour la symétrie temporelle :

Définition 4.2.1. Pour toute CGD F , on dit qu'elle est *symétrique temporellement* si et seulement si il existe une CGD T telle que $T^2 = \text{Id}$ et $TFT = F^{-1}$.

4.2.2. Dynamique $\sqrt{\phi}I$

Notre premier modèle agit sur l'ensemble \mathcal{C}_1 et peut être décrit comme la composée de deux sous-dynamiques : une étape de translation que l'on notera $\sqrt{\phi}$ qui déplace les particules, et une étape d'interaction notée I .

4.2.2.1. Étape $\sqrt{\phi}$

La première étape $\sqrt{\phi}$, consiste à inverser la position des arêtes et des nœuds, comme on peut le voir schématisé dans la figure 4.2.

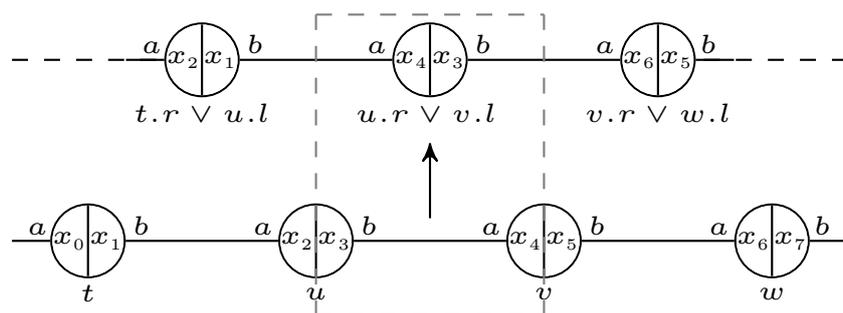


FIGURE 4.2. – *Dynamique $\sqrt{\phi}$* . La position des arêtes et des sommets est inversée, les particules gardant leur orientation et se déplaçant d'une demi-arête.

Le graphe ainsi obtenu peut être considéré comme le graphe dual.

Définition 4.2.2 ($\sqrt{\phi}$). Formellement, $\sqrt{\phi}$ est définie pour tout graphe $X \in \mathcal{C}_n$ de la manière suivante :

- $V(\sqrt{\phi}(X)) = \{u.r \vee v.l \mid \{u : b, v : a\} \in E(X)\}$
- $E(\sqrt{\phi}(X)) = \{\{x' : b, y' : a\} \mid u, x, y \in V(X) \text{ et } x' = u.r \vee x.l \text{ et } y' = y.r \vee u.l\}$
- $\forall x' \in V(\sqrt{\phi}(X))$, et pour tout $i \in [1, n]$, $a_i(x) = a_i(u)$ et $b_i(x) = b_i(v)$, où u et v sont les sommets de X tels que $x'.l = u.r$ et $x'.r = v.l$ respectivement.

Cette dynamique est réversible et symétrique temporellement, ce qui est facilement visible par l'égalité suivante :

$$\sqrt{\phi}^{-1} = F \circ \sqrt{\phi} \circ F$$

où F est la fonction échangeant les bits d'informations gauches et droites de chaque sommet.

Si on note ϕ l'opération consistant à déplacer les particules le long de leur port associé, on obtient que $\sqrt{\phi} \circ \sqrt{\phi} = \phi$, ce qui justifie notre notation pour cette dynamique. Essentiellement, chaque particule se déplace d'une demi-arête.

4.2.2.2. Étape I

L'étape *I* est la même que pour la dynamique d'Hasslacher-Meyer [61], décrite dans la section 2.1.2. Elle consiste à diviser un sommet en deux lors de la collision de deux particules, ou à l'inverse à fusionner deux sommets. Ainsi, un sommet u tel que $a_1(u) = b_1(u) = 1$ produira deux sommets $u.l$ et $u.r$ avec $a_1(u.l) = b_1(u.r) = 1$ et $b_1(u.l) = a_1(u.r) = 0$. Réciproquement, deux sommets u et v , avec $a_1(u) = b_1(v) = 1$ et $b_1(u) = a_1(v) = 0$ fusionneront en un sommet $u \vee v$ tel que $a_1(u \vee v) = b_1(u \vee v) = 1$.

Une représentation schématique est disponible dans la figure 4.3.

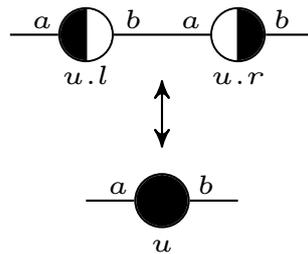


FIGURE 4.3. – *Dynamique I*. La présence d'une particule est signalée par un demi-sommet noir, et son absence par un demi-sommet blanc.

Cette dynamique est évidemment réversible, celle-ci étant une involution ($I^2 = Id$) s'appliquant sur des motifs sans chevauchement.

L'évolution d'une configuration sous dynamique de graphes circulaires peut être représentée sous la forme de diagrammes espace-temps, par exemple la figure 4.4 est un diagramme espace temps de la dynamique $\sqrt{\phi}I$. Dans ces diagrammes, la dimension spatiale est représentée horizontalement, et la dimension temporelle est représentée verticalement. Chaque nœud est représenté par une cellule, séparée de ses voisins par un trait noir vertical, et son état est représenté par sa couleur. La taille des nœuds est variable, permettant à chaque fusion/division de se faire "sur place".

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

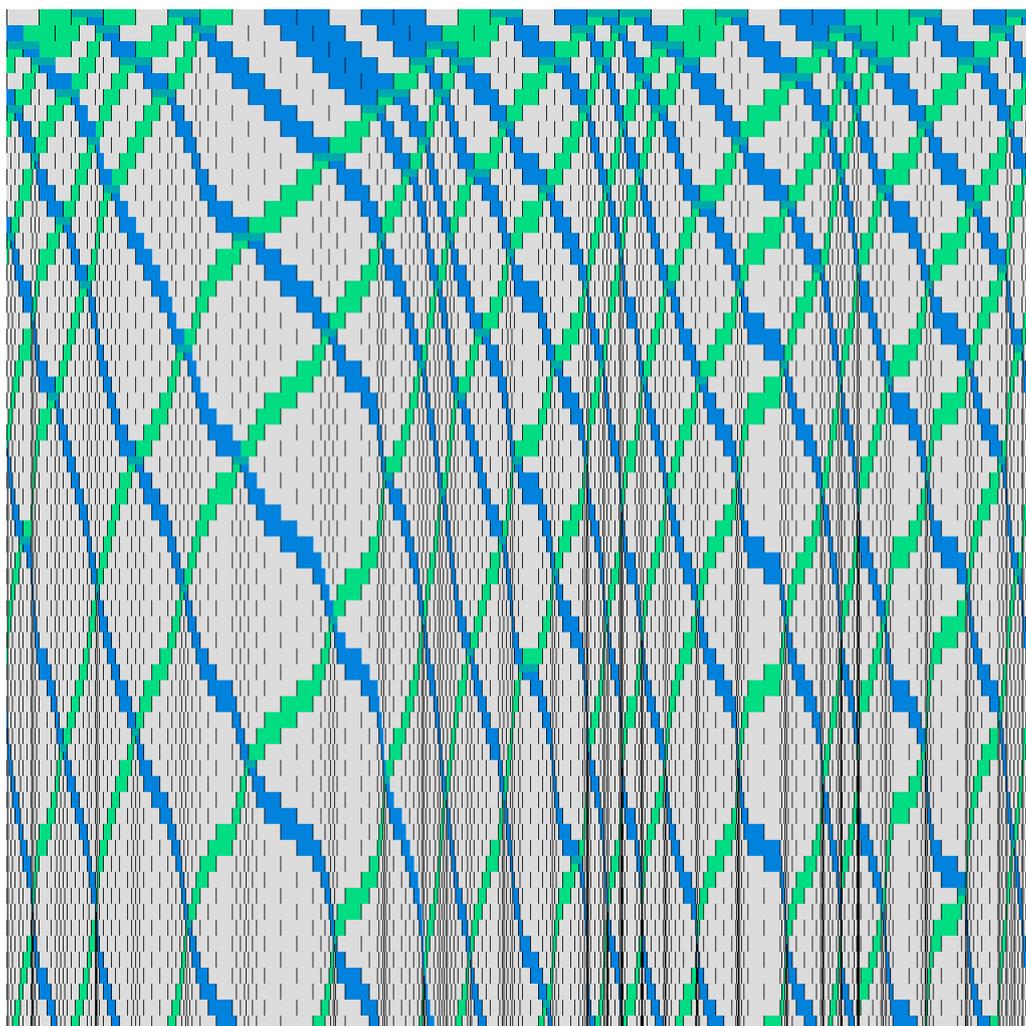


FIGURE 4.4. – *Diagramme espace temps de la dynamique $\sqrt{\phi}I$. Le temps s'écoule vers le bas, les particules sur le port a (resp. b) sont représentées en vert (resp. bleu). Les étapes intermédiaires I sont également représentées.*

4.2.2.3. Croissance de $\sqrt{\phi}I$

Le premier constat que l'on peut faire à partir du diagramme précédent, c'est que la dynamique $\sqrt{\phi}I$, bien que réversible, semble pouvoir faire croître la taille des graphes circulaires. Il s'avère que cette croissance est observée pour tout graphe circulaire, et est stricte pour tout graphe possédant au moins une particule de chaque type.

Cette croissance est due au fait que la fusion de sommet ne se produit qu'en présence d'un motif pouvant être vu comme instable :

Lemme 4.2.1 (Instabilité de la fusion). *Soit un graphe circulaire $X \in \mathcal{C}_1$. Soit une paire u et v de sommets adjacents de X , on dit que ceux-ci appartiennent à un motif de fusion si et seulement si $a_1(u) = b_1(v) = 1$ et $b_1(u) = a_1(v) = 0$. Pour tout u, v formant un*

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

motif de fusion dans X , il existe deux sommets $u.r, v.l \in V((\sqrt{\phi}I)^{-1}(X))$ tels que $u.r$ et $v.l$ forme un motif de fusion.

Démonstration. On peut prouver facilement ce lemme via un simple diagramme 4.5 représentant la pré-image d'un motif de fusion :

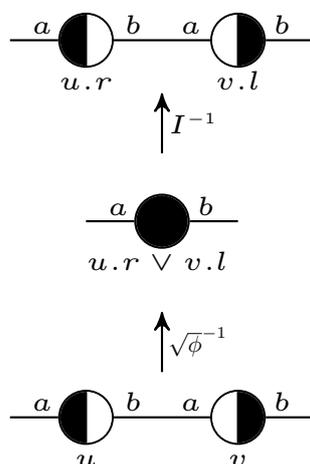


FIGURE 4.5. – Instabilité du motif de fusion par $\sqrt{\phi}I$.

□

La dynamique $\sqrt{\phi}I$ ne peut donc pas créer de motif de fusion, et celui-ci détruit à la moindre collision.

Cela nous permet de prouver le théorème de croissance suivant :

Définition 4.2.3. Soit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de l'ordre de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \Theta((v_n)_{n \in \mathbb{N}})$ si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $a.v_n \leq u_n \leq b.v_n$.

Afin d'alléger les notations, on écrira (u_n) afin de désigner la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en l'absence d'ambiguïté.

Théorème 4.2.1. Pour tout $X \in \mathcal{C}_1$ contenant au moins une particule de chaque type, la suite $(|V((\sqrt{\phi}I)^n(X))|)_{n \in \mathbb{N}}$ est de l'ordre de $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Premièrement, on argumente qu'il existe une étape de temps m à partir de laquelle il ne se produira plus de fusion de sommets. On note $n_f(X)$ le nombre de motifs de fusion de X , et $d_f(X)$ la distance minimale entre un motif de fusion et une particule se déplaçant vers celui-ci (cela inclut une particule présente dans un motif de fusion, et lui-même si il n'y a pas d'autres particules). Nous allons montrer que la paire $(n_f(\sqrt{\phi}I)^n(X), d_f(\sqrt{\phi}I)^n(X))$ décroît strictement dans l'ordre lexicographique.

Comme nous l'avons vu dans le lemme 4.2.1, un motif de fusion ne peut pas être créé, et est détruit en cas de collision. Il nous reste seulement à prouver que $d_{fu}((\sqrt{\phi}I)^n X)$

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

décroît strictement lorsque $p(\sqrt{\phi}I)^n X$ reste constant. Soient u, v deux sommets d'un motif de fusion et p une particule tel que u, v et p réalisent la distance $d_f(X)$. Deux cas peuvent se produire, soit p fait elle-même partie d'un motif de fusion, auquel cas il n'y a aucune particule entre les deux motifs de fusion, soit p se déplace librement, auquel cas il n'y a que des particules allant dans la direction opposée entre p et u, v . Dans le premier cas, les deux réalisent une fusion et il n'y a aucune particule entre les deux motifs de fusion (il n'y a donc pas de division) ; la distance entre les deux motifs diminue donc de 1. Dans le deuxième cas, la particule p va se déplacer vers le motif de fusion, diminuant $d_{fu}((\sqrt{\phi}I)^n X)$.

De manière à préserver la lisibilité des notations, on notera $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(|V((\sqrt{\phi}I)^n(X))|)_{n \in \mathbb{N}}$. Grâce au point précédent, on sait donc qu'il existe une étape de temps $m \in \mathbb{N}$ à partir de laquelle chaque collision de particules provoquera la création d'un sommet supplémentaire, la suite u_n est donc nécessairement croissante pour tout $n > m$. Comme X contient au moins une particule de chaque type, on a que pour tout $n \geq m$, l'évolution de $(\sqrt{\phi}I)^n X$ pendant u_n étapes de temps provoque au moins une collision. De manière similaire, on sait qu'il se produit au plus $c = 2n_a n_b$ collisions dans le même laps de temps où n_a (resp n_b) est le nombre de particules sur le port a (resp b). Ceci nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$u_n + 1 \leq u_{n+u_n} \leq u_n + c \quad (4.1)$$

Notons $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la sous suite telle que $v_0 = u_m$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} = u_{\text{ind}(k)+v_k}$, où $\text{ind}(k)$ est la fonction telle que $\text{ind}(0) = m$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{ind}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i$. Par récurrence, on prouve que $u_{\text{ind}(k)} = v_k$:

$$u_{\text{ind}(k+1)} = u_{\sum_{i=0}^k v_i} = u_{v_k + \sum_{i=0}^{k-1} v_i} = u_{\text{ind}(k)+v_k} = v_{k+1} \quad (4.2)$$

Ceci nous permet d'appliquer l'inégalité (4.1) sur $v_{k+1} = u_{\text{ind}(k)+v_k}$. En combinant (4.1) et (4.2), on obtient la croissance linéaire de $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$v_k + 1 \leq v_{k+1} = u_{\text{ind}(k)+v_k} \leq v_k + c \quad (4.3)$$

Concentrons nous maintenant sur la croissance de l'indice de $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par application des inégalités de (4.3) à la définition de $\text{ind}(k)$ on obtient :

$$\sum_{i=0}^k (v_0 + i) \leq \sum_{i=0}^k (v_i) \leq \sum_{i=0}^k (v_0 + ci) \quad (4.4)$$

$$ku_m + \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{i=0}^k (v_0 + i) \leq \text{ind}(k) \leq \sum_{i=0}^k (v_0 + ci) = ku_m + c \frac{k(k-1)}{2} \quad (4.5)$$

Pour conclure, revenons sur la suite principale $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour un n suffisamment grand, il existe $k \geq 4u_m + c$ tel que :

$$\text{ind}(k) \leq n \leq \text{ind}(k+1)$$

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

Ce qui nous donne, en considérant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, l'équation précédente(4.5) et que $k \geq 4u_m + c$ les inégalités suivantes :

$$\text{ind}(k) \leq n \leq \text{ind}(k+1) \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow ku_m + \frac{k(k-1)}{2} \leq n \leq (k+1)u_m + c \frac{k(k+1)}{2} \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow k(2u_m + k - 1) \leq 2n \leq k(4u_m + c + ck) \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow 2k^2 \leq 2n \leq (c+1)k^2 \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow k \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{\frac{(c+1)}{2}} k \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{c+1}} \sqrt{n} \leq k \leq \sqrt{n} \quad (4.11)$$

La suite u_n étant croissante, et en utilisant les inégalités (4.11) et (4.3), on peut conclure par les inégalités suivantes :

$$u_m + \sqrt{\frac{2}{c+1}} \sqrt{n} \leq u_m + k \leq v_k \leq u_n \leq v_{k+1} \leq u_m + c(k+1) \leq u_m + c + c\sqrt{n}$$

On a donc bien que u_n est de l'ordre de $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$. □

Comme on peut le voir dans la figure 4.6, pour une configuration choisie aléatoirement, le régime asymptotique est atteint rapidement et la taille du graphe n'a qu'une très faible variation autour de celui-ci.

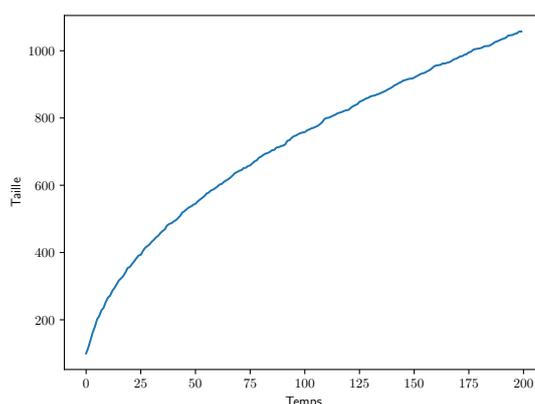


FIGURE 4.6. – Évolution typique de la taille du graphe sous la dynamique $\sqrt{\phi}I$. La configuration initiale a été tirée de manière uniformément aléatoire parmi l'ensemble des graphes circulaires de taille 100.

4.2.3. Évolution de l'entropie sous une dynamique croissante

Il s'avère que cette croissance de la taille du graphe implique une croissance de certaines fonctions d'entropies.

A partir de ce point, nous nous concentrerons sur la fonction d'entropie associée à la classe d'équivalence suivante : deux configurations sont considérées comme équivalentes si et seulement si elles ont la même taille et le même nombre de particules. Cette fonction d'entropie peut être vue comme analogue à celle utilisée dans l'étude des gaz parfaits.

En effet, l'entropie d'une configuration d'un gaz parfait est généralement associée aux conditions de pression, de volume, de température et au nombre de particules. Ces quatre variables étant liées entre elles par la loi des gaz parfaits, seules trois de ces variables sont nécessaires à représenter complètement ces caractéristiques. De plus, dans le cas de notre modélisation la vitesse des particules est constante, ce qui rend inutile de considérer la température. Il nous reste donc à considérer deux variables parmi le nombre de particules, la taille du graphe (analogue au volume), et la densité de particules (analogue à la pression).

Cependant, à cause de la présence de l'algèbre de noms, toutes les classes d'équivalences seraient de cardinal infini si l'on se restreignait seulement à ces deux paramètres. Il nous faut donc un moyen de nous affranchir de l'algèbre de noms lors du calcul de l'entropie. Pour ceci, nous avons deux moyens à notre disposition : considérer les graphes modulo isomorphismes, ou quotienter l'équivalence \equiv par l'algèbre de noms. Nous opterons pour cette dernière option, pour deux raisons : celle-ci amène à des classes d'équivalences plus simples et efficaces à calculer, et permet de traiter une notion d'entropie *locale* que nous développerons dans la prochaine section.

On note C_n^p le coefficient binomial p parmi n , c'est à dire $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Définition 4.2.4. On définit la fonction d'entropie S' par $S'(X) = \log\left(C_{|V(X)|}^p\right)$ où p est le nombre de particules de X .

Il est évident que dans le cas de $\sqrt{\phi}I$, qui fait croître $V(X)$ en racine carré, on obtient automatiquement une croissance de l'entropie en l'absence de croissance du nombre de particules. En fait, par le théorème 4.2.1, on peut caractériser précisément le comportement asymptotique de l'entropie :

Corollaire 4.2.1. Pour tout $X \in \mathcal{C}_1$ contenant au moins une particule de chaque type, la suite $(S'(\sqrt{\phi}I)^n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est de l'ordre de $\log(n)$.

Démonstration. Grâce au théorème 4.2.1, on a que $(S'(\sqrt{\phi}I)^n(X))_{n \in \mathbb{N}} = \Theta\left(\log\left(C_{\Theta(\sqrt{n})}^p\right)\right)$. En utilisant l'encadrement $\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq C_a^b \leq e^b \left(\frac{a}{b}\right)^b$ [50], et en constatant que p est constant, on obtient :

$$(S'(\sqrt{\phi}I)^n(X))_{n \in \mathbb{N}} = \Theta\left(p \log\left(\frac{\Theta(\sqrt{n})}{p}\right)\right) = \Theta(\log(n^{1/2})) = \Theta(\log(n))$$

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

□

On peut noter que ce corollaire s'applique également à toute dynamique dont le nombre de particules reste constant et faisant croître la taille du graphe polynomialement.

Comme le régime asymptotique de la fonction taille est atteint dès que tous les motifs de fusion sont détruits, c'est également le cas pour l'entropie globale du système (cf figure 4.7).

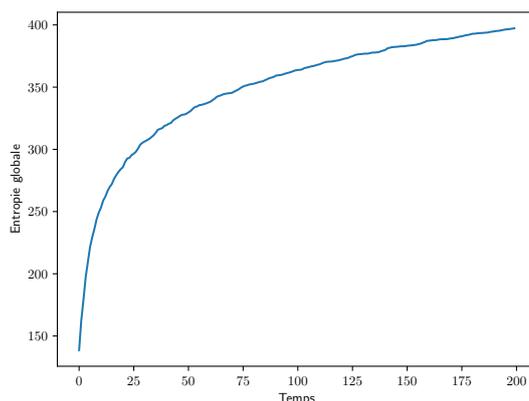


FIGURE 4.7. – Évolution typique de l'entropie globale sous la dynamique $\sqrt{\phi}I$. La configuration initiale a été tirée de manière uniformément aléatoire parmi l'ensemble des graphes circulaires de taille 100.

En fait, si l'on ne s'intéresse qu'à la croissance de l'entropie et non à caractériser son comportement asymptotique, on peut facilement généraliser ce résultat. Sous l'hypothèse que les particules ne remplissent pas tout l'espace, ni ne disparaissent complètement, alors toute dynamique faisant croître la taille du graphe fera également croître l'entropie :

Théorème 4.2.2. Pour tout $X \in \mathcal{C}_u$ et $f : \mathcal{C}_u \rightarrow \mathcal{C}_u$ tels que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |V(f^n(X))| = +\infty$
- $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m, 1 \leq p_n \leq 2u \times |V(f^n(X))| - 1$ où p_n est le nombre de particules à l'étape dans $f^n(X)$.

On a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'(f^n(X)) = +\infty$.

Démonstration. Grace à la deuxième condition, on a pour tout $n \geq m$:

$$S'(f^n(X)) = \log\left(C_{|V(f^n(X))|}^{p_n}\right) \geq \log\left(C_{|V(f^n(X))|}^1\right) = \log(|V(f^n(X))|)$$

Comme $\log(|V(f^n(X))|)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, c'est également le cas de $S'(f^n(X))$. □

4.2.3.1. Temps de Janus

Le système $\sqrt{\phi}I$ étant réversible, on peut naturellement se demander ce qui se passe si l'on essaye de "remonter le temps", c'est-à-dire comment évolue le graphe lorsqu'on applique la dynamique $(\sqrt{\phi}I)^{-1} = I^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$. Le premier constat que l'on peut faire en observant la dynamique inverse, est qu'elle fait également croître la taille du graphe, mais à une vitesse différente :

Théorème 4.2.3. Pour tout $X \in \mathcal{C}_1$ contenant au moins une particule de chaque type, la suite $(|V((\sqrt{\phi}I)^{-n}(X))|)_{n \in \mathbb{N}}$ est de l'ordre de n .

Démonstration. En l'absence de motifs $\bullet\text{---}\bullet$, la taille du graphe diminue strictement à chaque fois que deux particules se rencontrent. Par conservation du moment, les particules continueront de se croiser. Comme le graphe ne peut pas sans cesse diminuer un motif $\bullet\text{---}\bullet$ va inévitablement se former. Comme on peut le voir dans la preuve du Lemme 4.2.1, le motif $\bullet\text{---}\bullet$ est stable par $I^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$, et ne peut pas être traversé par d'autres particules. Cela implique qu'une fois qu'un tel motif est présent, toute paire de particules n'appartenant pas à un tel motif ne peuvent se croiser qu'au plus une fois. Lorsque toutes ces collisions se sont réalisées, chaque application de $I^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$ fait croître la taille du graphe par le nombre de motifs présents. On peut borner par $\min(n_a, n_b)$ le nombre de ces motifs dans X et ses successeurs par $I^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$ on a :

$$|V((\sqrt{\phi}I)^{-m}(X))| + n \leq |V((\sqrt{\phi}I)^{-n}(X))| \leq |V((\sqrt{\phi}I)^{-m}(X))| + n \times \min(n_a, n_b)$$

□

Ce constat est corroboré par les expérimentations, comme on peut le voir dans la figure 4.8.

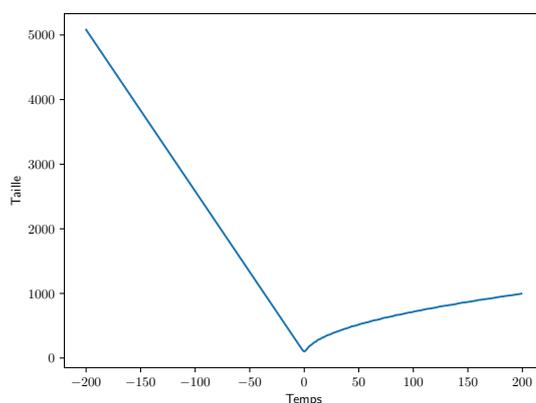


FIGURE 4.8. – Évolution de la taille d'une même configuration sous les dynamiques $(\sqrt{\phi}H)^{-1}$ et $\sqrt{\phi}H$.

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

Par le même schéma de preuve que pour le corollaire 4.2.1, on obtient la croissance de l'entropie pour $I^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$:

Corollaire 4.2.2. Pour tout $X \in \mathcal{C}_1$ contenant au moins une particule de chaque type, la suite $(S'(\sqrt{\phi}I)^{-n}(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est de l'ordre de $\log(n)$.

Cela veut également dire que l'entropie augmente dans les deux directions à partir d'une "source", une hypothèse qui est parfois discutée en physique théorique sous le nom de "temps de Janus" [45]. Autrement dit, la flèche du temps s'expliquerait non pas par la croissance monotone de l'entropie, mais par l'existence d'un unique minimum. Dès lors s'éloigner de ce temps d'entropie minimale, que cela soit par la dynamique sous-jacente de la physique ou son inverse, signifierait "aller vers le futur". Le point important est que cette interprétation résout la question de la "typicité" : il n'est plus nécessaire de faire l'hypothèse que l'Univers a "démarré" dans un état atypique de faible entropie ; la flèche du temps découle de l'existence d'un minimum, lui même découlant de la dynamique.

Malheureusement, on peut voir une critique évidente : bien que réversible, cette dynamique n'est pas symétrique temporellement. Or, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, celle-ci est une symétrie hypothétisée de la physique de notre Univers.

Remarque 4.2.1. Si F est symétrique temporellement par T alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $TF^nT = F^{-n}$. En conséquence, $\sqrt{\phi}I$ et $I^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$ n'ayant pas le même comportement asymptotique, celles-ci ne sont pas symétriques temporellement.

Cependant, il existe un moyen de symétriser cette dynamique, en l'étendant l'espace d'état à 4 bits d'information, c'est à dire en travaillant sur \mathcal{C}_2 . $\sqrt{\phi}$ étant déjà définie pour un n arbitraire, il nous suffit d'étendre I . Pour comprendre comment cette extension doit se faire, il nous faut nous intéresser à l'origine de cette asymétrie. Bien que $I = I^{-1}$, l'orientation des particules influe sur le comportement de la dynamique : par application de T les collisions provoquent des divisions de sommets, et dans le sens opposé celles-ci vont provoquer des fusions.

On peut donc symétriser I en une dynamique I_2 , en ajoutant 2 bits d'informations sur lesquels I_2 n'agira pas sur $\bullet\text{---}\bullet$ mais sur $\bullet\text{---}\bullet$, comme on peut le voir dans la figure 4.9. Cela revient à dire que, sur le deuxième bit, I agit comme TIT sur le premier bit.

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

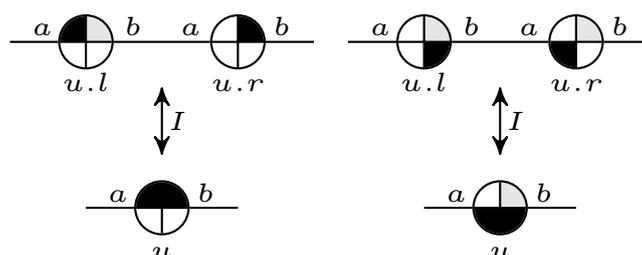


FIGURE 4.9. – *Dynamique I_2* . La présence d'une particule est représentée en noir, et son absence en blanc. Les bits d'informations correspondant au port a (resp. b) sont représentés à gauche (resp. à droite) du sommet.

Théorème 4.2.4. Les dynamiques $\sqrt{\phi}I_2$ et $I_2^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$ sont symétriques temporellement.

Démonstration. On définit la dynamique $R : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_2$ qui pour tout sommet u , échange les valeurs de $a_1(u)$ et de $b_2(u)$, ainsi que les valeurs de $a_2(u)$ et de $b_1(u)$. On peut facilement vérifier qu'une telle dynamique commute avec I_2 , c'est à dire que $I_2R = RI_2$. De plus, comme R échange les particules sur les ports a et b , on a que $R\sqrt{\phi}R = \sqrt{\phi}^{-1}$. En posant $T = I_2R$, on obtient les égalités :

$$T^2 = I_2RI_2R = I_2I_2RR = \text{Id}$$

Et également :

$$T\sqrt{\phi}I_2T = I_2R\sqrt{\phi}I_2I_2R = I_2R\sqrt{\phi}R = I_2\sqrt{\phi}^{-1} = I_2^{-1}\sqrt{\phi}^{-1}$$

□

Cette nouvelle symétrie a cependant un prix : la présence de 4 types de particules par nœud pouvant empêcher les interactions par I_2 , il devient difficile d'obtenir une réponse analytique sur la croissance de la taille du graphe, bien que l'expérimentation semble suggérer une croissance en $\Theta(n)$ (voir Figure 4.10).

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

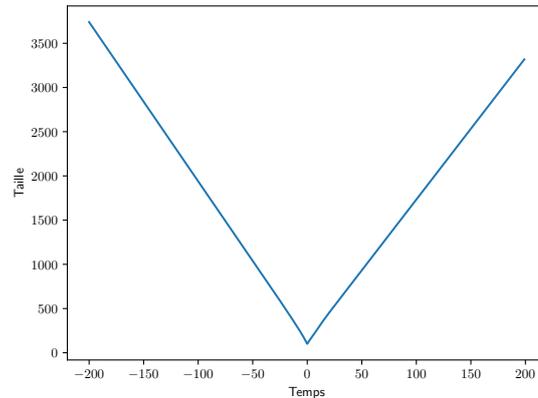


FIGURE 4.10. – *Évolution typique de la taille d'une configuration de forte densité sous la dynamique $\sqrt{\phi}I_2$. La configuration est choisie de manière uniformément aléatoire parmi l'ensemble des configurations de taille 100.*

Comme discuté précédemment, le système n'a donc pas de configuration initiale atypique, provoquant l'émergence d'une flèche du temps, mais sa dynamique possède une configuration minimale à partir de laquelle découlent deux flèches du temps orientées dans des directions opposées. Le fait que, dans notre expérimentation, cette configuration est souvent la configuration initiale est simplement un artefact de la manière dont elle est choisie. En tirant de manière uniformément aléatoire une configuration parmi l'ensemble des graphes d'une certaine taille, on obtient avec forte probabilité une densité proche de 2 particules par nœud. En revanche, en tirant aléatoirement une configuration X parmi l'ensemble des configurations d'une orbite, alors pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ la densité de X sera inférieure à ϵ avec probabilité 1, sous l'hypothèse que la taille du graphe croît en $\Theta(n)$.

On peut facilement vérifier ce fait en abaissant fortement la densité de particules de la configuration initiale (voir Figure 4.11).

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

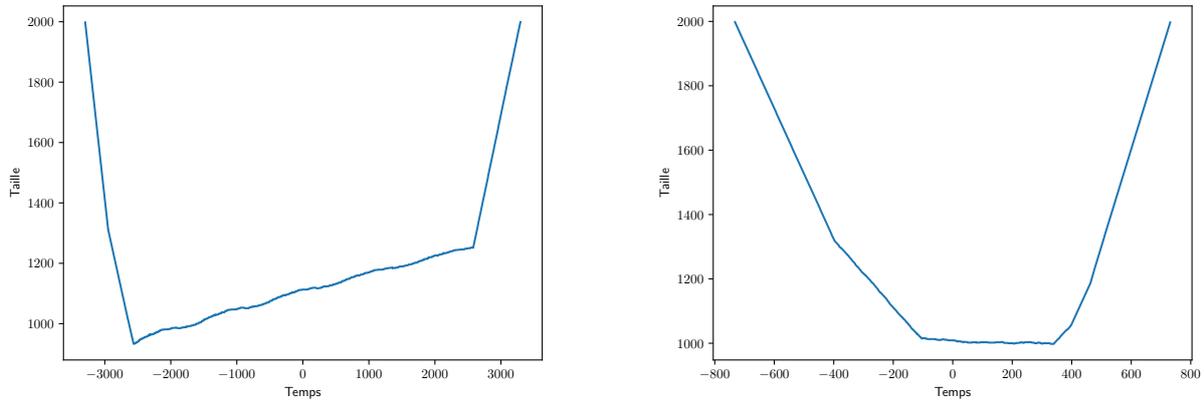


FIGURE 4.11. – Évolutions typiques de la taille de configuration de faible densité sous la dynamique $\sqrt{\phi}I_2$. La configuration initiale est de taille 1000 et est choisie de manière à ce que chaque bit de chaque particule ait une probabilité de présence de 0.01. Le temps 0 est choisi de façon à ce que le graphe atteigne une taille 2000. Une phase chaotique est encadrée par des phases de croissances linéaires.

4.2.4. Croissance exponentielle

Il existe également des dynamiques réversibles permettant d'obtenir une loi de croissance exponentielle, plus proche de celle observée lors de la période d'inflation de l'Univers. Intuitivement, il suffit que la croissance de la configuration soit proportionnelle à la taille de celui-ci, et donc de modifier la dynamique $\sqrt{\phi}I$ afin de maintenir la densité de particule au dessus d'une certaine borne.

Pour cela, deux possibilité s'offrent à nous, la première consiste à créer de nouvelles particules à chaque division de nœud, par exemple en remplaçant I par la dynamique I_3 illustrée en figure 4.12.

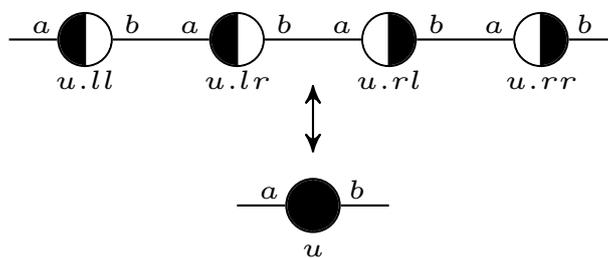


FIGURE 4.12. – Dynamique I_3 . Chaque croisement de particule divise un sommet en 4 et crée 2 nouvelles particules.

Sous cette dynamique, la densité de particules tend vers 1/2, ce qui naturellement pousse à une croissance exponentielle.

4. Flèche du temps – 4.2. L'augmentation de l'entropie globale comme conséquence de l'expansion

L'autre possibilité consiste à inverser à chaque étape tous les bits d'informations de chaque sommet via une dynamique B , illustrée en figure 4.13.

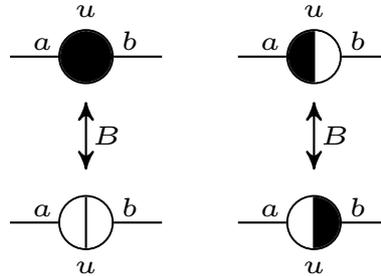


FIGURE 4.13. – *Dynamique B.*

Une telle dynamique ne maintient pas réellement la densité de particule au dessus d'une borne, mais celle-ci oscille entre plus ou moins de 1 particule par sommet. Ceci nous assure donc qu'au moins une étape d'interaction sur deux se déroule à une densité supérieure à $\frac{1}{2}$.

Ces deux dynamiques mènent à une croissance exponentielle, comme on peut le voir ci-dessous en figures 4.14 et 4.15.

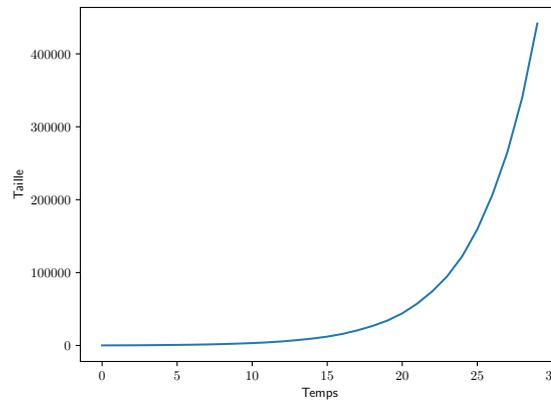


FIGURE 4.14. – *Évolution typique de la taille d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}I_3$. La configuration initiale a une densité approximative de 0.1.*

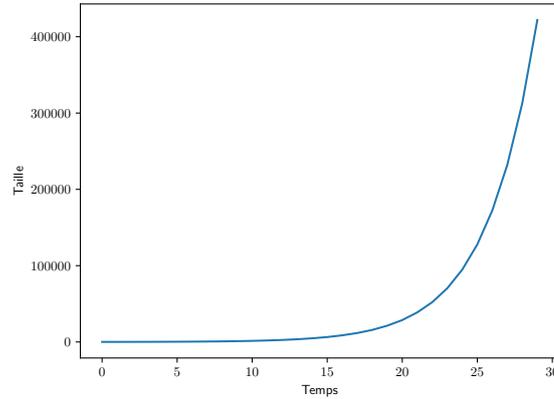


FIGURE 4.15. – *Évolution typique de la taille d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}IB$.*

4.3. Entropie locale

La section précédente fournit une explication à l'orientation de la flèche du temps dans une physique symétrique temporellement mais aux échelles cosmiques uniquement. Cependant, elle ne suffit pas à expliquer la flèche du temps à notre échelle, celle du verre d'eau avec un peu de colorant, comme nous l'avons vu dans la section 4.1.3. En réalité, il nous est même impossible de connaître l'entropie exacte de l'Univers, notamment à cause de la borne sur la vitesse de propagation de l'information.

4.3.1. Entropies moyennes

Il nous faut donc définir une notion locale de l'entropie. Pour cela, il suffit d'appliquer la précédente notion d'entropie aux sous graphes de la configuration. Ceci nous permet de définir une notion d'entropie moyenne d'une configuration :

Définition 4.3.1. Soit S une fonction d'entropie sur \mathcal{X} , et $r \in \mathbb{N}^+$. On définit la fonction d'entropie moyenne de rayon r par :

$$S_r(X) := \frac{1}{|V(X)|} \sum_{u \in V(X)} S(X_u^r)$$

Cette définition peut être facilement interprétée comme l'entropie moyenne observée pour un certain rayon de localité.

Remarque 4.3.1. Pour $r \geq |V(X)|$ on a :

$$S_r(X) = \frac{1}{|V(X)|} \sum_{u \in V(X)} S(X) = S(X)$$

Voyons maintenant comment évolue l'entropie moyenne définie par la fonction d'entropie 4.2.4 $S(X) := \log\left(C_{|V(X)|}^{p(X)}\right)$. Il s'avère que celle-ci est bornée par la densité du graphe :

Théorème 4.3.1. Pour tout graphe X et pour tout $r \in \mathbb{N}$: $S_r(X) \leq r \frac{p(X)}{|V(X)|}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S_r(X) &= \frac{1}{|V(X)|} \sum_{u \in V(X)} S(X_u^r) \\ &= \frac{1}{|V(X)|} \left(\sum_{\substack{u \in V(X) \\ p(X_u^r) > 0}} S(X_u^r) + \sum_{\substack{u \in V(X) \\ p(X_u^r) = 0}} S(X_u^r) \right) \\ &= \frac{1}{|V(X)|} \sum_{\substack{u \in V(X) \\ p(X_u^r) > 0}} S(X_u^r) \\ &\leq \frac{1}{|V(X)|} \times r p(X) \end{aligned}$$

□

Cela nous donne la limite de l'entropie moyenne de toute dynamique faisant croître la taille du graphe tout en conservant le nombre de particules :

Corollaire 4.3.1. Pour toute dynamique F conservant le nombre de particules et faisant croître la taille du graphe, pour tout $r \in \mathbb{N}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_r(F^n(X)) = 0$

Ceci semble en complète contradiction avec la croissance apparente de l'entropie locale dans nos observations de la vie courante. Comment expliquer cette décroissance de la moyenne des entropies locales? En fait, ce phénomène est normal, et même attendu : il s'agit de la *mort thermique* de l'Univers, parfois appelé Grand Gel. Celui-ci est un des destins envisagés pour l'Univers. Intuitivement, l'idée est que l'Univers atteindra un jour un état pour lequel la distance entre les différentes particules sera trop grande pour effectuer un quelconque travail. La croissance de l'entropie globale est donc dominée par la croissance du graphe. Si l'on prend une portion aléatoire de l'espace d'une certaine taille, plus le temps passe, plus avec une forte probabilité cet espace sera vide, ce qui nous donne une entropie nulle.

Ce constat est vérifié expérimentalement pour $\sqrt{\phi}I$ comme on peut le voir dans la figure 4.16 ainsi que pour le cas symétrisé et leurs inverses. Dans le cas de $\sqrt{\phi}I$ le nombre d'interactions étant inversement proportionnel à la taille du graphe, celles-ci deviennent de plus en plus rares. Pour $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$, on sait qu'il se forme au bout d'un certain temps des motifs infranchissable par les autres particules, ce qui interdit rapidement toute possibilité d'interaction en dehors de ces motifs. $\sqrt{\phi}I_2$ semble également former de tels motifs pour la plupart de ces configurations.

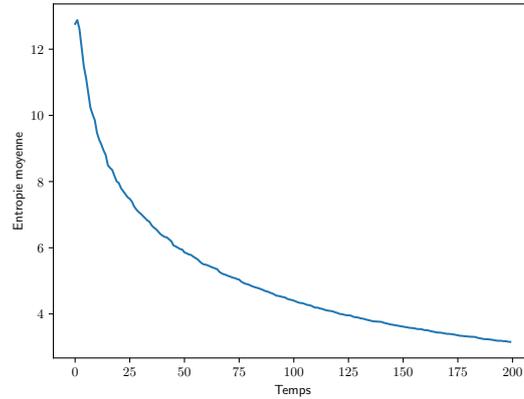


FIGURE 4.16. – Évolution de l'entropie moyenne d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}I$.

4.3.2. Entropie à rayon variable

Pour voir une croissance de l'entropie locale, il nous faut compenser la perte de densité de particules, et il existe deux moyens pour cela. Le premier consiste à directement augmenter le rayon d'observation proportionnellement à la taille du graphe, de sorte que chaque disque représente toujours la même proportion du graphe, ce qui conservera la densité de particules. L'autre moyen consiste à se servir des noms comme repères afin de découper les configurations en différents sous-graphes induits.

Pour le premier cas, il suffit de poser pour $r \in [0, 1]$:

$$S'_r(X) := \frac{1}{|V(X)|} \sum_{u \in V(X)} S(X_u^{[r \times |V(X)|]})$$

Ce qui nous donne bien une entropie croissante dans le cas de $\sqrt{\phi}I$, $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$ et $\sqrt{\phi}I_2$ comme on peut le voir dans la figure 4.17.

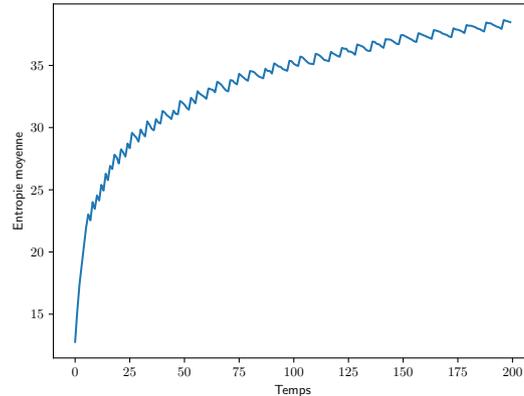


FIGURE 4.17. – Évolution de la moyenne de l'entropie locale d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}I$ pour $r = 0.05$.

Bien que compensant l'expansion du graphe, cette entropie a cependant peu de sens physique : une création de nœud à l'opposé du graphe peut augmenter la taille d'une fenêtre locale. Pour s'affranchir de ce problème, il suffit d'utiliser l'algèbre de noms comme système de coordonnées, et les utiliser pour déterminer si deux sommets appartiennent à la même fenêtre. Comme les noms des sommets sont dans l'algèbre \mathcal{V} , ceux-ci peuvent être vus comme des arbres binaires fini étiquetés par $\mathbb{N}, \{l, r\}^*$. Il nous suffit donc de poser qu'une fenêtre est constituée de l'ensemble des sommets dont le fils le plus à gauche intersecte le même entier. Plus formellement, on pose pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$V_i(X) = \{u \mid u \in V(X) \text{ et } \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } u.l^m \wedge i = u.l^m\}$$

On peut alors définir la moyenne de l'entropie locale comme :

$$S_{\mathcal{N}}(X) := \frac{1}{|V(X)|} \sum_{i \in \mathbb{N}} S(X_{V_i}^0)$$

où n est le nombre d'entier composant les noms de X et $X_{V_i}^0$ est le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets dans $V_i(X)$.

Cette définition paraît au premier abord très restrictive, mais il est important de se rappeler que les dynamiques de graphes nommés commutent avec tout renommage. Ainsi, pour observer comment évolue l'entropie locale selon un découpage différent, il nous suffit de renommer le graphe de manière appropriée, et d'observer l'entropie du graphe ainsi obtenu.

Notons que, dans cette définition de l'entropie, les fenêtres locales ne s'intersectent pas. De plus, une fenêtre n'augmente de taille que lorsque l'espace grandit à l'intérieur de celle-ci. Ceci également un sens physique définir l'entropie de cette manière : cela revient à placer un système de coordonnées dans l'espace et laisser la dynamique

distordre celui-ci.

Comme pour la définition précédente de l'entropie, nous observons toujours une croissance locale de l'entropie pour les trois dynamiques précédemment citées, illustrée en figure 4.18.

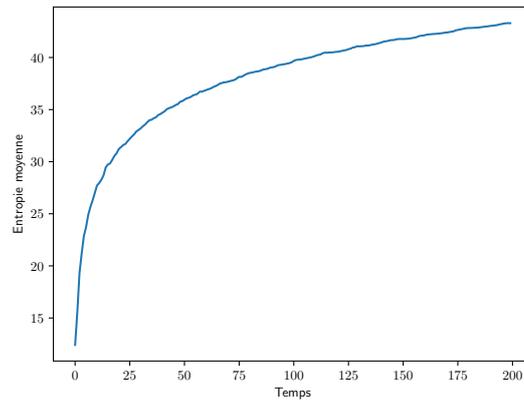


FIGURE 4.18. – *Évolution de l'entropie moyenne d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}I$ pour des fenêtres ayant 5 sommets dans la configuration d'origine.*

4.4. Poches de faible entropie

4.4.1. Somme des entropies locales

Bien que la section précédente compense la perte de densité, elle semble tout de même en contradiction avec ce que nous expérimentons dans la vie de tous les jours, lorsque qu'un colorant se dilue dans un fluide par exemple. En effet, pour des expériences d'une durée aussi courte, sur des espaces aussi petits, il est raisonnable d'assumer que l'expansion de l'espace est négligeable. Pour cela, nous justifierons que bien que l'entropie moyenne décroît, les fenêtres locales peuvent croître en entropie.

Cependant un problème persiste avec notre définition actuelle de l'entropie : l'entropie est directement liée à la densité de particules. Ainsi, l'entropie d'une fenêtre locale ne peut augmenter qu'en gagnant des particules par les fenêtres voisines. Observer seulement une faible entropie, n'est donc pas signe que l'entropie peut augmenter localement. De plus, il faut distinguer un gain réel d'entropie, et un simple déplacement de particules.

Une métrique permet d'étudier de tels gains locaux : la somme des entropies locales. Celle-ci est définie par :

$$\bar{S}_r(X) = \sum_{u \in V(X)} S(X'_u)$$

La somme des entropies nous permet de tout simplement ignorer la décroissance de

l'entropie due à la création de fenêtre d'espace vide, ainsi que les variations d'entropies due simplement au déplacement des particules. Ainsi, son augmentation indique la préservations de poche 'néguentropie', subsistantes du temps de Janus.

4.4.2. Cas de $\sqrt{\phi}I$, $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$ et $\sqrt{\phi}I_2$

Malheureusement, la somme des entropies ne croît que très brièvement pour nos dynamiques précédentes, comme on peut le voir dans la figure 4.19.

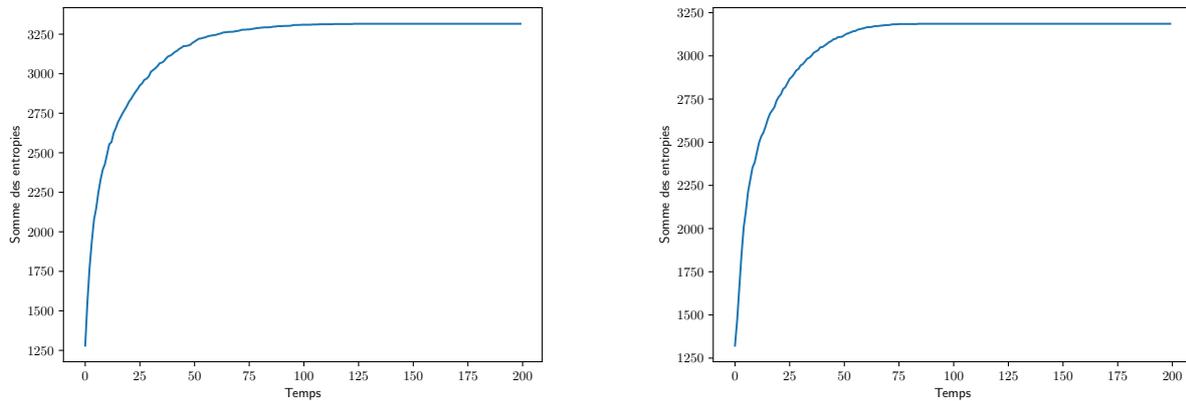


FIGURE 4.19. – Évolution de la somme des entropies pour les dynamiques $\sqrt{\phi}I$ et $\sqrt{\phi}I_2$.

Dans les deux cas les fenêtres sont de taille 5 et les configurations sont choisies de manière uniformément aléatoire parmi l'ensemble des configurations de taille 100. La dynamique $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$ se comporte de manière similaire à $\sqrt{\phi}I_2$.

Dans le cas $\sqrt{\phi}I_2$ et $(\sqrt{\phi}I)^{-1}$, ces résultats sont facilement explicables : la croissance autour du temps 0 est la conséquence de la croissance du graphe. Puis, des motifs de division fragmentent l'espace entre les particules, et empêchent toute interaction. On obtient donc essentiellement des motifs s'éloignant à vitesse constante, entre lesquels des motifs inactifs se déplacent.

On peut voir facilement ce phénomène sur un diagramme espace temps sur lequel on superpose les particules et l'entropie locale (voir figure 4.20).

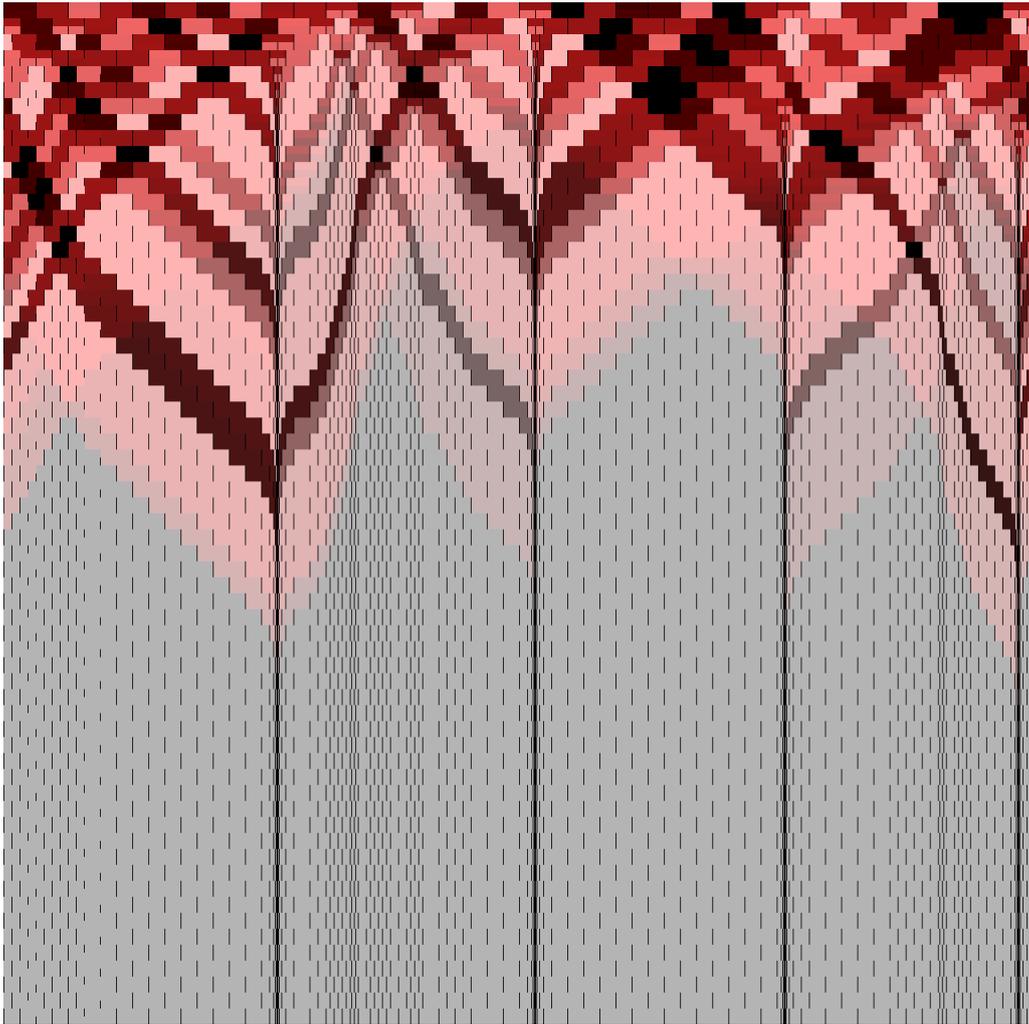


FIGURE 4.20. – *Diagramme espace temps de l'entropie de la dynamique $\sqrt{\phi}I_2$. Le temps s'écoule vers le bas, les particules sont représentées en niveau de gris, et l'entropie est superposée en niveau de rouge.*

La dynamique $\sqrt{\phi}I$ demande un point de vue légèrement différent. On sait que l'entropie maximale est atteinte lorsque chaque fenêtre locale contient au plus une particule dans chaque direction. Or, à chaque fois qu'une particule en collisionne une autre, la distance entre celle-ci et les autres particules ayant la même orientation augmente. Pour des fenêtres locales de rayon r , celles-ci atteignent donc leur entropie maximale lorsque chaque particule a réalisé $2r$ révolutions. Ceci explique donc pourquoi la somme des entropies locales n'augmente plus.

4.4.3. Choc inélastique

Pour observer des poches de néguentropie et donc la possibilité d'une croissance locale de l'entropie, il nous faut donc une dynamique plus complexe, permettant une

véritable interaction entre les différentes fenêtres locales, et non pas un simple déplacement. Il existe de nombreuses solutions à ce problème, nous proposons d'ajouter 2 bits d'information pour chaque état, sur lesquels opérera une dynamique de *choc inélastique*.

Cette dynamique est la composée de plusieurs autres dynamiques : $\sqrt{\phi}$ que nous avons déjà définie précédemment, ainsi que D_l et D_r . D_r est définie par la permutation de 4 motifs différents comme représenté dans la figure suivante 4.21 et l'identité sur tout autres motifs.

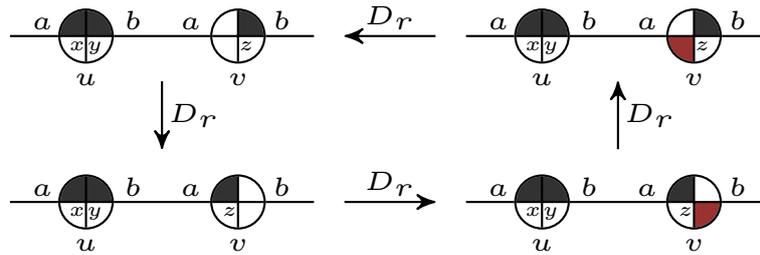


FIGURE 4.21. – *Dynamique D_r* . En noir sont représentées les particules du premier bit d'information (matière), en rouge les particules du deuxième bit d'information (chaleur). x y et z représentent des variables, permettant à la règle de s'appliquer peu importe la présence ou l'absence de particules.

D_l est le symétrique de D_r obtenu en : - inversant la position des nœuds u et v , - échangeant les particules des ports a et b .

Intuitivement, D_l et D_r permettent aux particules du premier bit d'information de s'agglutiner ("choc inélastique") en émettant des particules ("radiation", "chaleur") sur le second bit d'information. À l'inverse, lorsqu'une agglomération de particules du premier type rencontre une particule du second type, celle-ci est absorbée, et une particule se sépare de l'agglomérat. Ce comportement est bien analogue à un choc inélastique, où la collision de deux objets provoque la dissipation en chaleur de l'énergie potentielle due à leur vitesse relative. De même, les radiations pourront éroder un objet. Dans l'esprit de cette analogie, nous nommerons les particules encodées sur les premiers bits d'information *matière* et celles sur les deuxièmes bits *chaleur*. Par souci de lisibilité, on notera $D := D_l D_r$.

On peut voir en figure 4.22 l'évolution d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}D$.

Bien évidemment, cette dynamique ne suffit pas à observer une croissance de l'entropie sur le long terme, puisqu'elle est facilement encodable dans un automate cellulaire et conserve donc la taille du graphe. Pour obtenir notre dynamique finale, on ajoute simplement un 3-ième bit d'information, sur lequel opère la dynamique $\sqrt{\phi}I$. Pour ne pas interférer avec d'autres particules, I s'applique si et seulement si le voisinage ne contient aucune particule. On peut voir en figure 4.23 un diagramme espace temps d'une configuration ne contenant pas de particule de chaleur, et de densité $\frac{1}{4}$ pour les autres particules.

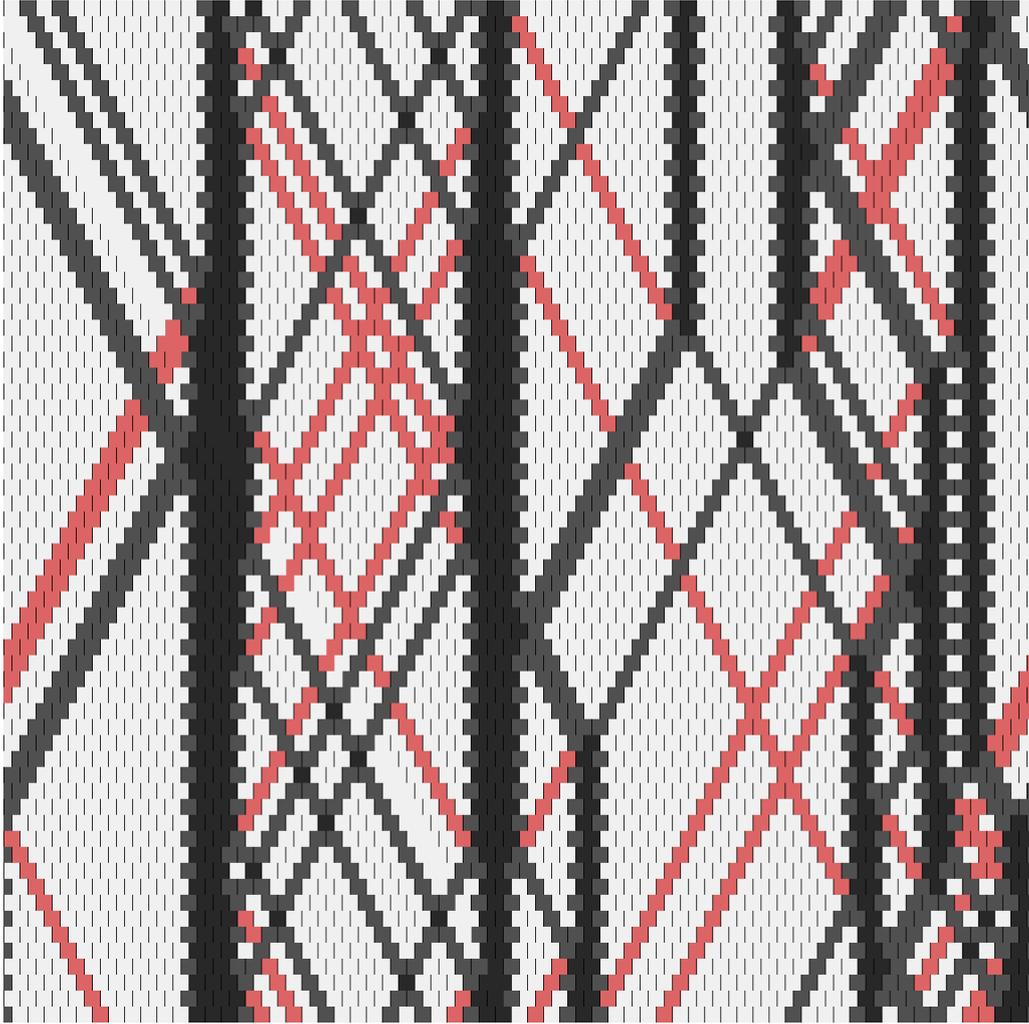


FIGURE 4.22. – *Diagramme espace-temps de l'entropie de la dynamique $\sqrt{\phi}D$. Le temps s'écoule vers le bas, les particules de matière sont représentées en niveaux de gris, et les particules de chaleur en rouge. Pour des raisons de lisibilité, la configuration initiale a été choisie sans particule de chaleur.*

4.4.4. Loi de conservation du choc inélastique

Le lien entre l'agglomération de la matière et l'émission de radiation nous permet d'établir la loi de conservation.

Théorème 4.4.1. Pour tout $X \in \mathcal{C}_2$, $E(\sqrt{\phi}D(X)) = E(X)$ où E est définie par :

$$E(X) := \sum_{u \in V(X)} (a_1(u) a_1(u.b) b_1(u.b) + b_1(u) a_1(u.a) b_1(u.a)) - \sum_{u \in V(X)} (a_2(u) + b_2(u))$$

Informellement, cela revient à compter le nombre de particules de matière telles

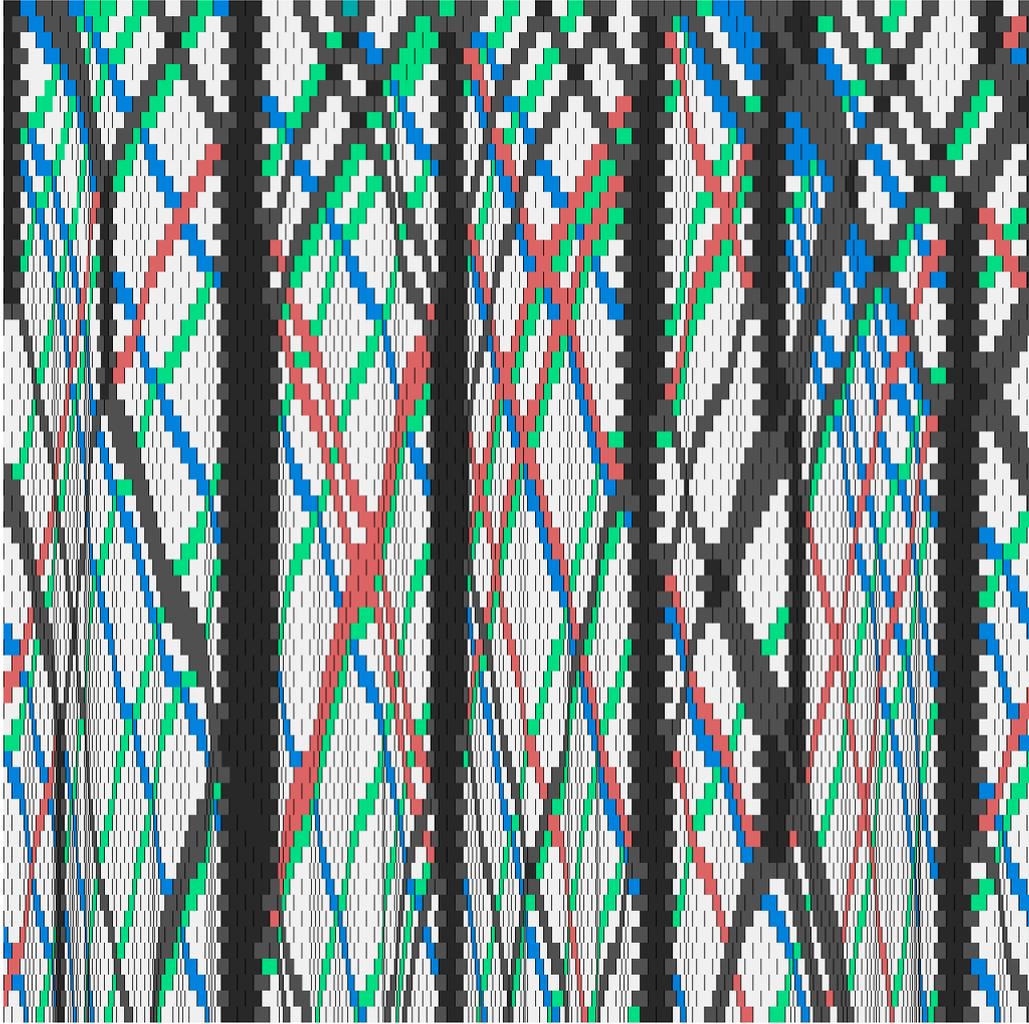


FIGURE 4.23. – *Diagramme espace temps de l'entropie de la dynamique $\sqrt{\phi}ID$. Le temps s'écoule vers le bas, les particules de matières sont représentées en niveaux de gris, les particules de chaleur en rouge et les particules créant de l'espace en vert et bleu.*

que le voisin sur le port opposé contient deux particules de matière et en soustraire le nombre de particules de chaleur.

Démonstration. On définit la fonction E' par :

$$E'(X) := \sum_{u \in V(X)} a_1(u)a_1(u.a)b_1(u.a) + b_1(u)a_1(u.b)b_1(u.b) - \sum_{u \in V(X)} (a_2(u) + b_2(u))$$

Celle-ci revient cette fois à compter le nombre de particules de matière telles que le voisin sur le même port contient deux particules de matières et en déduire le nombre de particules de chaleurs. Suivant cette intuition, on introduit les fonctions d'énergie

4. Flèche du temps – 4.4. Poches de faible entropie

localisées E et E' telles que pour tout $X \in \mathcal{C}_2$ et pour tout $u \in X$:

$$E(X, u) = a_1(u)a_1(u.b)b_1(u.b) + b_1(u)b_1(u.a)a_1(u.a) - a_2(u) - b_2(u)$$

et

$$E'(X, u) = a_1(u)a_1(u.a)b_1(u.a) + b_1(u)b_1(u.b)a_1(u.b) - a_2(u) - b_2(u)$$

Cette notation est justifiée par les égalités :

$$E(X) := \sum_{u \in V(X)} E(X, u)$$

et

$$E'(X) := \sum_{u \in V(X)} E'(X, u)$$

Prouvons que pour tout X , on a $E(X) = E'(D(X)) = E(\sqrt{\phi}I_3D(X))$.

Dans un premier temps, prouvons que $E(X, u) = E'(DX, u)$. Par définition, D n'agit qu'au voisinage de sommet u tels que $a_1(u) = b_1(u) = 1$. De plus, lorsque D_l et D_r agissent sur le même sommet v , on a par symétrie des ports a et b que le sommet i est laissé inchangé par D . Par cette même symétrie, on peut sans perte de généralité supposer que seule D_l influe sur le sommet u , ce qui nous donne les calculs suivants :

$$\begin{aligned} E \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) &= 1 - (x + y + z) = E' \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) \\ E \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) &= -(x + y + z) = E' \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) \\ E \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) &= -(x + y + z + 1) = E' \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) \\ E \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) &= -(x + y + z) = E' \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{x|y} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{z} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) \end{aligned}$$

En résumé, on a que $E(X) = E'(D(X))$. Similairement, pour $\sqrt{\phi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} E' \left(\begin{array}{c} \textcircled{m_1} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{c_2|c_3} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{m_2} \\ \text{---} \end{array} \right) &= m_1 + m_2 - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \\ &= E \left(\begin{array}{c} a \text{---} \textcircled{m_1} \text{---} b \quad a \text{---} \textcircled{m_2} \text{---} b \\ \text{---} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Et donc obtient que $E'(X) = E(\sqrt{\phi}(X))$. Combinant le tout, on obtient que $E(X) = E'(D(X)) = E(\sqrt{\phi}D(X))$

□

Cette loi de conservation globale fournit une intuition sur le comportement d'entropie locale : en s'agglomérant, la matière fait localement diminuer l'entropie, mais au prix d'émettre de la chaleur, qui fera augmenter l'entropie d'autres fenêtres locales. Ceci nous fournit également une borne sur le nombre de particules de chaleur parmi

les successeurs d'une configuration, ainsi que sur la somme des entropies locales.

Corollaire 4.4.1. Comme les seules particules pouvant être créées par $\sqrt{\phi}I_3D$ sont les particules de chaleurs, et que celles-ci suivent la loi de conservation précédente, on a que pour tout $X \in \mathcal{C}_3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p((\sqrt{\phi}I_3D)^n(X)) \leq 2 \times p(X)$. En conséquence, $\bar{S}_r((\sqrt{\phi}I_3D)^n(X)) \leq \sum_{i=0}^{2 \times p(X)} \log(C_{2r+1}^i) = 2 \times p(X) \times \log(2r+1)$.

Cela indique également que pour tout graphe X tel que $(V((\sqrt{\phi}I_3D)^n(X)))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, l'entropie moyenne tend vers 0 et l'entropie globale tend vers $+\infty$.

La présence ou non de particules de chaleur a donc un impact notable sur la dynamique. Pour cette raison, nous étudierons l'évolution à la fois des configurations contenant à l'origine des particules de chaleur et celles n'en contenant pas. On peut voir dans la figure 4.24 que bien que présentant des similarités, une configuration saturée en particules de chaleur forme moins d'agglomérats de particules.

4.4.5. Résultats expérimentaux

À cause de la complexité d'une telle règle, son comportement asymptotique est difficile à prédire. En revanche, nos expérimentations semblent indiquer que le comportement typique d'une configuration est bien de croître en espace, comme on peut le voir dans la figure 4.25.

On voit que cette croissance semble elle aussi être en $\Theta(\sqrt{n})$. Ce comportement est intuitif puisque essentiellement, c'est la dynamique sous-jacente $\sqrt{\phi}I$ qui est le moteur de la croissance de $(V((\sqrt{\phi}I_3D)^n(X)))_{n \in \mathbb{N}}$. Les autres particules interfèrent cependant avec cette croissance, ce qui ralentit et peut même empêcher la croissance du graphe.

Du fait de cette croissance, nous obtenons naturellement la croissance de l'entropie globale ainsi que la décroissance de l'entropie moyenne, illustrées en figures 4.26 et 4.27.

Enfin, nous pouvons terminer en analysant la somme des entropies. Nous avons pu voir dans le corollaire 4.4.1 que celle-ci était bornée par le nombre de particules. Cependant, contrairement aux précédentes dynamiques, celle-ci atteint son maximum bien plus lentement que dans les dynamiques que nous avons étudiées précédemment, ce qui est illustré en figure 4.28.

On peut comprendre l'origine de cette croissance plus lente grâce à la loi de conservation 4.4.1. L'agglutination des particules de matière crée des fenêtres de faible entropie, au prix de l'émission de particules de chaleur qui font croître l'entropie ailleurs dans le graphe. Intuitivement, l'émission d'une particule de chaleur transfère l'entropie d'une fenêtre vers une autre, même si l'entropie globale ne fait qu'augmenter. Ce phénomène est communément appelé "démon de Maxwell" [113]. Pour résumer brièvement, ce nom vient d'une expérience de pensée imaginée par Maxwell dans lequel un "démon" contrôlerait parfaitement la perméabilité d'une membrane entre deux réservoirs remplis de gaz parfait. Ce démon aurait la possibilité de faire

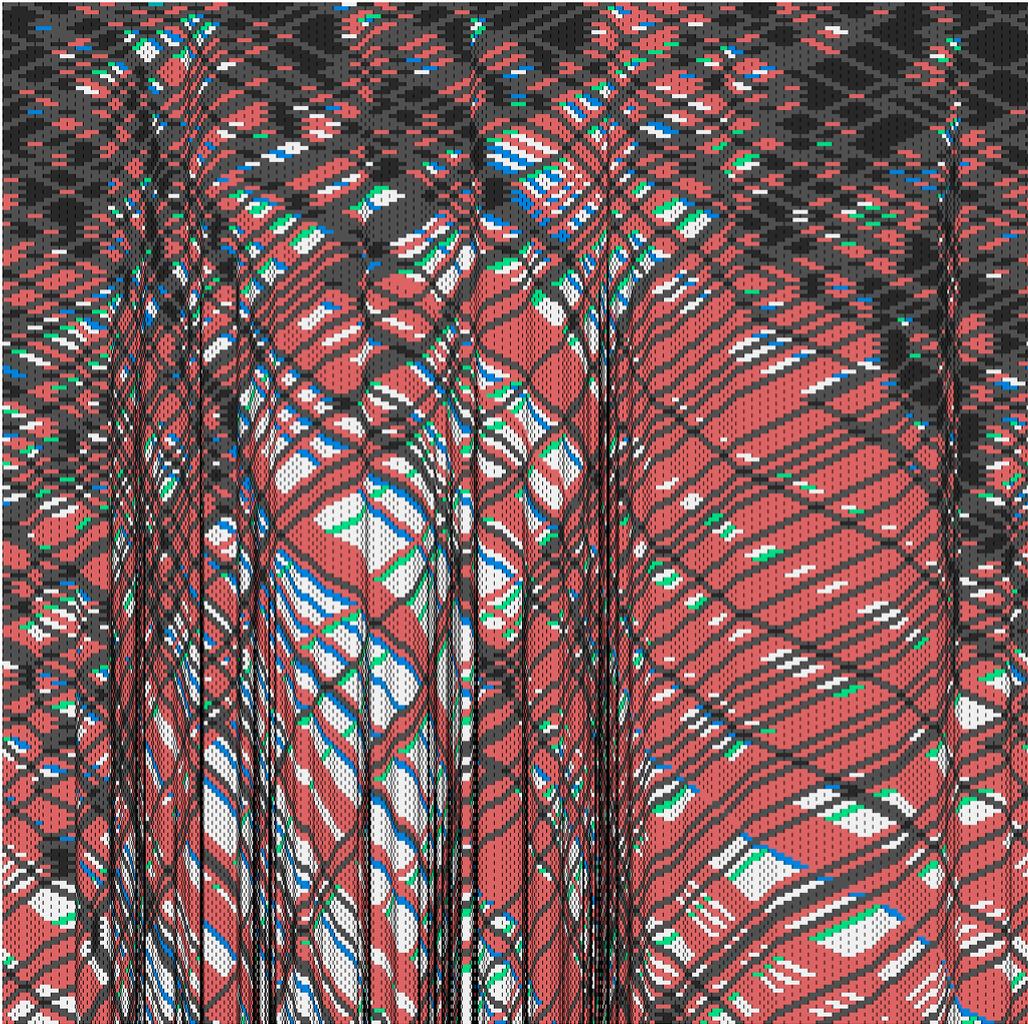


FIGURE 4.24. – *Diagramme espace-temps de l'entropie de la dynamique $\sqrt{\phi}D$. Le temps s'écoule vers le bas, les particules de matière sont représentées en niveaux de gris, les particules de chaleur en rouge et les particules créant de l'espace en vert et bleu.*

diminuer l'entropie des deux réservoirs en ne rendant la membrane perméable que lorsque qu'une particule du réservoir gauche va la percuter. Au bout d'un certain temps, on obtient qu'il y a peu de particules à gauche, et beaucoup à droite, et donc l'entropie globale du système a diminué. Cet apparent paradoxe se résout dès lors que l'on considère l'entropie du démon lui même : celui-ci n'aurait pu réaliser cette opération qu'au prix de faire augmenter sa propre entropie. Essentiellement, une partie de l'entropie du réservoir a été transférée au démon, tout comme l'entropie de la matière est transférée sous forme de chaleur dans notre dynamique.

Cette perte d'entropie d'une fenêtre locale n'est que temporaire, et ne dure que tant que l'agglomérat de particules de matière n'est pas collisionné par une particule de

4. Flèche du temps – 4.4. Poches de faible entropie

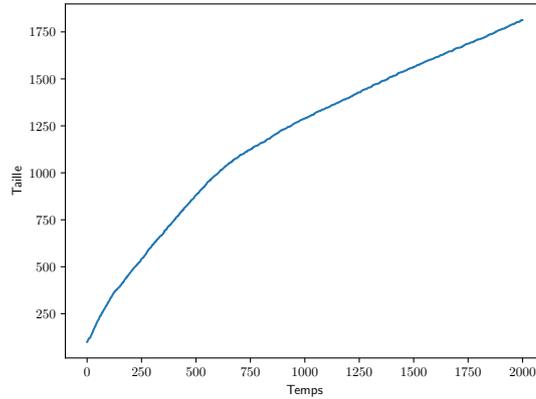


FIGURE 4.25. – *Évolution typique de la taille du graphe sous la dynamique $\sqrt{\phi}ID$. La configuration a été tirée de manière uniformément aléatoire parmi l'ensemble des graphes circulaires de taille 100.*

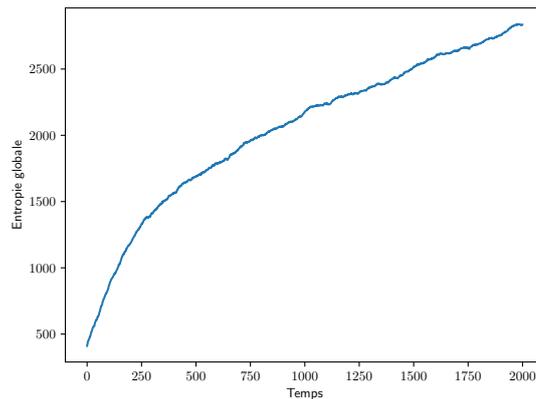


FIGURE 4.26. – *Évolution typique de l'entropie globale sous la dynamique $\sqrt{\phi}ID$. La configuration a été tirée de manière uniformément aléatoire parmi l'ensemble des graphes circulaires de taille 100.*

chaleur. Ainsi, la présence de fenêtres de faible entropie est fortement liée à la densité de particules de chaleur, comme on a pu le voir dans la figure précédente. La durée des pertes d'entropie locale est proportionnelle au temps de trajet des particules de chaleur, et donc à taille du graphe. Moins le graphe sera dense et aura une croissance lente, plus les agglomérats de particules seront stable et se désagrégeront lentement.

Ce phénomène est flagrant lorsque l'on remplace la dynamique de croissance sous-jacente $\sqrt{\phi}I$ par une variation de $\sqrt{\phi}^{-1}I^{-1}$, ou par une dynamique à croissance exponentielle comme $\sqrt{\phi}I_3$ et $\sqrt{\phi}I_3B$. Pour de telles dynamiques, la croissance at-

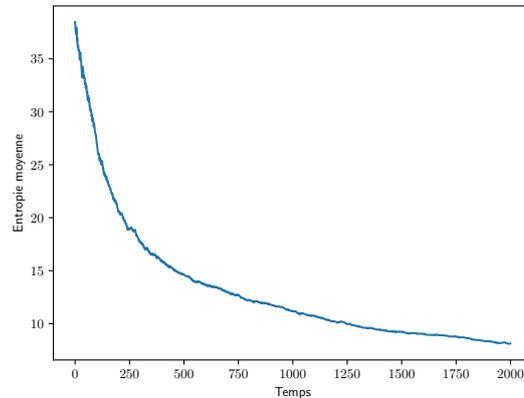


FIGURE 4.27. – *Évolution de l'entropie moyenne d'une configuration sous la dynamique $\sqrt{\phi}ID$.*

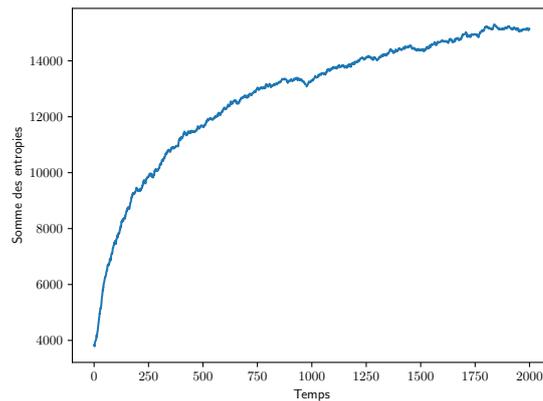


FIGURE 4.28. – *Évolution de la somme des entropies pour les dynamiques $\sqrt{\phi}ID$.*

teint rapidement un stade critique, à partir duquel le graphe devient fragmenté en différentes fenêtres ne pouvant plus communiquer entre elles.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous implémentons plusieurs dynamiques causales de graphes réversibles faisant croître la taille de leurs configurations, ce que nous prouvons analytiquement lorsque c'est possible, ou expérimentalement lorsque celles-ci s'avèrent trop complexes. Nous adaptons la notion d'entropie aux graphes, permettant de fournir une mesure précise à ce que nous appelons communément la flèche du temps. Selon notre modèle, celle-ci découle naturellement de la croissance des configurations,

et est donc parfaitement compatible avec la réversibilité.

Renforçant cette idée, nous établissons qu'une telle croissance se produit également pour des dynamiques symétriques temporellement. Sous ce point de vue, la flèche du temps n'est donc pas due à l'existence d'une configuration originelle atypique, mais à une configuration d'entropie minimale de laquelle s'écoulent deux flèches du temps orientées dans des directions opposées. Cette idée est abordée dans certains modèles cosmologiques sous le nom de 'temps de Janus'.

Afin de prouver qu'une telle croissance de l'entropie est observable localement, nous développons une dernière dynamique permettant d'observer la conservation de poche de 'néguentropie'. Ceci explique l'augmentation de l'entropie à une échelle où l'inflation de l'Univers est négligeable.

En perspective, il existe de nombreuses propriétés physiques pouvant potentiellement être simulées par les dynamiques causales de graphes réversibles. On peut notamment s'intéresser à des graphes de dimensions supérieures, et étudier la possibilité de l'émergence d'un espace de faible courbure à partir de telles dynamiques. Il serait également intéressant de savoir si de tels résultats sont préservés pour d'autres notions d'entropies, comme l'entropie métrique ou l'entropie topologique.

5. Dynamiques de graphes quantiques

Sommaire

5.1	Introduction	104
5.2	L'importance des noms	106
5.3	Graphe anonyme et transmission instantanée de l'information	107
5.4	Superpositions de graphes : noms et coloriage	111
5.5	Renommages, observables et évolution	112
5.6	Lien avec la gravité quantique	113
5.7	Conclusion	114

5.1. Introduction

Motivations de la physique théorique. Une caractéristique frappante de la plupart des approches de la gravité quantique est que l'espace-temps peut se trouver dans une superposition de géométries. Une telle superposition se produirait par exemple si un objet de masse non-nulle, était en superposition à deux positions relatives différentes. Il s'agit d'un véritable effet gravitationnel quantique, qui peut se produire avec des vitesses non relativistes sous une gravité newtonienne. Un certain nombre d'expériences sont à portée de main [30, 31, 75] qui devraient confirmer ou infirmer cette caractéristique [43, 44] dans un avenir proche, par la détection de l'intrication induite par la gravité. La superposition de géométries a également récemment été envisagée comme une ressource en calcul quantique dans le contexte des ordres causaux indéfinis des opérations [42, 116, 86]. Les lignes de recherche ci-dessus apportent une perspective pour la gravitation quantique en informatique quantique. Une motivation principale de cette section est d'apporter un point de vue informatique à ces idées : ici, une superposition de géométries peut être comprise comme une superposition de graphes.

Motivations tirées de l'informatique. Comme abordé dans les préliminaires, la thèse forte de Church-Turing est un point central d'intérêt pour les dynamiques de graphe quantiques. En particulier, il est intéressant de se poser la question "quelle efficacité (en terme de complexité en temps et en espace) peut être atteinte par un modèle de calcul *physiquement réalisable*?". La machine de Turing a été un des modèles de calculs les plus utilisés dans la première moitié du siècle dernier. Puis, dans les années 1960, le parallélisme spatial a été reconnu comme une ressource supplémentaire

majeure, capturée dans des modèles de calcul distribués : des réseaux dynamiques d'automates en interaction. Durant la même période, les machines RAM ont également été introduite comme modèle de calcul plus proche des contraintes physiques. Dans les années 1990, il est devenu évident que le parallélisme quantique était une autre ressource puissante de l'informatique théorique. Cette ressource a été intégrée dans des modèles de calcul quantiques, comme la machine de Turing quantique. Dans l'état actuel de nos connaissances, la réponse à la question ci-dessus pourrait donc résider dans un modèle de calcul quantique distribué, un réseau dynamique d'automates quantiques en interaction. L'intuition d'un réseau d'ordinateurs quantiques a été baptisée "réseau quantique", ce qui a poussé l'idée d'un futur "internet quantique" [69, 88, 27]. Cependant, une question qui se pose est la suivante : la dynamique du réseau lui-même doit-elle être quantique? Si tel est le cas, le réseau lui-même devrait pouvoir être placé en superposition, une ressource potentiellement puissante. En effet, si l'espace-temps peut être trouvé dans une superposition quantique dans la nature, cette situation devrait en principe se présenter naturellement au sein de notre modèle.

Terrain commun. Nous nous inspirons ici de la gravité quantique à boucle (LQG) [93], dont l'espace de Hilbert est engendré par des graphes colorés, appelés des états de réseaux de spin. Bien que les superpositions de graphes soient une caractéristique clé de l'espace d'états de la théorie, en raison de la nature intimidante des calculs, la LQG travaille généralement au niveau d'un graphe fixe par praticité, une approximation dont la validité n'est pas claire. À ce sujet, certains paradigmes de l'informatique quantique qui ont prouvé leur succès : les marches quantiques et leur régime multiparticulaire d'automates cellulaires quantiques [7], ainsi que leur récente extension aux graphes dynamiques, à savoir la dynamique des graphes causaux quantiques [12].

Contributions. Nous fournissons une notion robuste de superposition quantique de graphes, pour servir d'espace d'état aux théories susnommées. La principale subtilité réside dans le traitement d'une symétrie apportée par l'invariance par renommage. Les noms donnés aux nœuds des graphes, et le fait de les renommer, peuvent sembler inoffensifs à première vue. Ceux-ci sont cependant d'une importance capitale dès que l'on pose la question : comment aligner une superposition de deux espaces-temps? En effet, nous montrons que l'absence de nom mène à une transmission instantanée de l'information. Cependant, en la présence des noms, il est crucial de se poser la question suivante : comment s'assurer que les observables de la théorie ne contiennent pas d'information superflue apportée par la présence des noms? Pour cela, nous devons nous assurer que les noms ne sont pas observables et, par conséquent, nous devons imposer l'invariance du renommage aux observables.

Nous verrons que les noms des nœuds servent donc un objectif similaire à l'étiquetage des points d'une surface via un choix de coordonnées. Nous concluons que l'invariance de renommage pour les théories construites sur des graphes est un analogue discret à l'invariance par difféomorphisme.

5.2. L'importance des noms

Les théories quantiques que nous considérons ont un espace d'état engendré par une base orthonormée constituée de graphes.

La dynamique est alors définie comme un opérateur (unitaire) sur cet espace d'état. Les définitions précises sont reportées à la section 5.4.

Considérons un état de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ défini comme celui engendré par une base orthonormale dénombrable \mathcal{G} , où les éléments de \mathcal{G} sont des *graphes*, notés $|G\rangle, |G'\rangle, \dots \in \mathcal{G}$. Autrement dit, chaque graphe correspond à un vecteur unitaire différent $|G\rangle$, et un état générique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ est une superposition de ceux-ci :

$$|\psi\rangle = \alpha_G |G\rangle + \alpha_{G'} |G'\rangle + \dots$$

avec $\alpha_G, \alpha_{G'}, \dots$ dans \mathbb{C} . Le produit interne sur $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ est défini par extension linéaire de l'égalité :

$$\langle G|G'\rangle = \delta_{GG'}. \quad (5.1)$$

où $\delta_{GG'} = 1$ si $G = G'$ et $\delta_{GG'} = 0$ sinon. Munir $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ d'un produit vectoriel requiert des travaux complémentaires qui ont été adressés dans [11].

Or, il peut arriver que deux graphes $|G\rangle$ et $|G'\rangle$ ne diffèrent que par certains noms donnés à leurs sommets. En anticipant la notation, nous désignons ceux-ci par $|G'\rangle = R|G\rangle$ où R est un renommage. Une question se pose alors : ne devrions-nous pas prendre $\langle G|G'\rangle = 1$ chaque fois que deux graphes ne diffèrent que par un renommage ? Nous argumentons qu'au contraire, il est impératif que nous les prenions comme orthogonaux, c-à-d $\langle G|G'\rangle = 0$ pour tout renommage non trivial sur G .

Prenons une analogie avec les ondes planes en mécanique quantique. Considérons les états d'onde $|p, 0\rangle = \int e^{ipx} dx$ et une copie décalée en position $|p, \Delta\rangle = \int e^{ip(x+\Delta)} dx$, avec p le momentum de l'onde et x la variable de position. Dans l'espace vide, il n'y a aucun sens physique dans lequel les deux ondes planes sont différentes : le décalage de position est immatériel, car l'onde plane se propage de manière homogène dans l'espace. Et pourtant, le produit interne $\langle p, 0|p, \Delta\rangle$ ne doit pas être de norme 1. En fait, il est impératif de faire une distinction mathématique entre $|p, 0\rangle$ et $|p, \Delta\rangle$ si l'on souhaite modéliser la mécanique quantique. Par exemple, lorsqu'une particule se propage, les composantes de ses ondes évoluent généralement entre $|p, 0\rangle$ et $|p, \Delta\rangle$. Ainsi, alors que $|p, 0\rangle$ et $|p, \Delta\rangle$ seuls ne détiennent aucune information de position physiquement pertinente, leur différence en détient une : elle porte en effet une information sur la position relative de l'onde selon les branches de la superposition.

Le cœur du problème réside dans le fait qu'en ayant pris $\langle G|G'\rangle = 0$ pour des graphes ne différant que par leur dénomination, les noms seront en principe observables si nous ne restreignons pas davantage la théorie. Ceci est évidemment insatisfaisant. Par analogie, dans le continu, les observables qui lisent les coordonnées d'un point dans la variété sont exclus par l'exigence d'invariance du difféomorphisme, également connue sous le nom de covariance générale. Il s'agit d'un concept central de la relativité générale, qui garantit qu'aucune prédiction de la théorie ne dépend du système de coordonnées utilisé. L'invariance des graphes sous les renommages devrait donc être

d'importance similaire.

5.3. Graphe anonyme et transmission instantanée de l'information

Dans cette section, nous montrons que lorsque l'on considère des superpositions de graphes, tenter de travailler au niveau des "graphes anonymes" conduit à une théorie compatible avec une transmission instantanée de l'information. Pour démontrer ce point, nous utiliserons un modèle jouet pouvant être interprété comme un analogue quantique de ceux considérés dans les chapitres précédents. Nous considérons que l'espace d'état est généré par des graphes circulaires ayant un nombre n de nœuds et d'arêtes. Chacun des nœuds possède un nom unique (par exemple, w, x, y, z) et peut se trouver dans l'un des états internes suivants : vide, occupé par une particule en mouvement dans la direction a , occupé par une particule en mouvement dans la direction b , ou occupé par les deux. Comme précédemment, les nœuds ont des ports $:a$ et $:b$, sur lesquels les nœuds voisins sont connectés par des arêtes ab . Ainsi, l'état quantique de chaque nœud peut être représenté par quatre nombre complexe, un pour chaque bit d'information, et possède l'espace d'état \mathbb{C}^4 . L'espace de Hilbert global est alors isomorphe à $\mathcal{H} = \otimes_{n \in V(G)} \mathbb{C}^4$, où $\otimes_{n \in V(G)}$ désigne le produit tensoriel sur les nœuds du graphe G .

Nous prenons une dynamique très simple, la marche quantique Hadamard [68]. Une marche quantique est un opérateur unitaire déplaçant une particule sur un treillis par étapes de temps discrets. De nombreux algorithmes quantiques peuvent être exprimés de cette manière, la marche quantique Hadamard en particulier a été implémentée physiquement sur une variété de substrats comme un réseau de séparateurs de faisceaux traversé par des photons [99]. Mathématiquement, l'évolution est mise en œuvre en appliquant un opérateur $U = \phi H$ sur l'état du graphe.

L'étape H est l'application de la porte de Hadamard à l'état interne de chaque nœud. Formellement, $H = \otimes_{n \in V(G)} H_n$ avec

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dorénavant, nous adoptons la notation imagée suivante :

$$\begin{aligned}
 H \left| \begin{array}{c} :a \\ \circ \\ :b \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} :a \\ \circ \\ :b \end{array} \right\rangle \\
 H \left| \begin{array}{c} :a \\ \bullet \\ :b \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \begin{array}{c} :a \\ \bullet \\ :b \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} :a \\ \circ \\ :b \end{array} \right\rangle \right) \\
 H \left| \begin{array}{c} :a \\ \circ \\ :b \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \begin{array}{c} :a \\ \bullet \\ :b \end{array} \right\rangle - \left| \begin{array}{c} :a \\ \circ \\ :b \end{array} \right\rangle \right) \\
 H \left| \begin{array}{c} :a \\ \bullet \\ :b \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} :a \\ \bullet \\ :b \end{array} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Une fois que H est appliquée, l'étape ϕ déplace les 'particules' par le port a ou b vers le nœud adjacent en fonction de leur type, de façon synchrone. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 \phi \left| \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \\ u \quad v \quad w \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ u \quad v \quad w \end{array} \right\rangle \\
 \phi \left| \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \\ u \quad v \quad w \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \\ u \quad v \quad w \end{array} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Rien de particulier ne se produit si les particules se croisent ou atterrissent sur le même nœud (pas de collisions).

Maintenant, appliquons $U = \phi H$ deux fois sur un état initial comportant une seule particule se déplaçant vers la droite. Le calcul peut être suivi de manière imagée dans la figure 5.1.

Dans l'état final, la position des 'particules' (c'est à dire les noms des nœuds) et leurs couleurs sont *enchevêtrées*. Notez que les deux premières branches de la superposition et les deux dernières branches de la superposition ne diffèrent que par un renommage des nœuds ($u \leftrightarrow w, x \leftrightarrow v$). Nous verrons que, si les noms n'étaient pas présents, nous nous retrouverions avec une physique radicalement différente : l'état de la particule est à présent non-enchevêtré.

Pour vraiment comprendre le problème, passons à un autre espace de Hilbert \mathcal{H}' , engendré par des graphes anonymes. Comme abordé dans les chapitres précédents, les graphes anonymes peuvent être définis comme des classes d'équivalence des graphes nommés à renommages arbitraires près. Ci-dessous, on peut voir l'application du quotient par cette relation d'équivalence \sim sur une configuration infinie :

$$\begin{array}{ccc}
 \dots \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \\ u \quad v \quad w \quad x \end{array} \dots & \neq & \dots \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \\ u \quad v \quad w \quad x \end{array} \dots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \dots \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \end{array} \dots & \sim & \dots \begin{array}{c} :a \quad :b \quad :a \quad :b \\ \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \end{array} \dots
 \end{array}$$

5. Dynamiques de graphes quantiques – 5.3. Graphe anonyme et transmission instantanée de l'information

$$\begin{aligned}
 H \left(\begin{array}{c} \text{graph with nodes } u, x, v, w \text{ and edges } (u,x), (x,v), (v,w), (w,u) \\ \text{with labels } :a, :b \text{ on edges} \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \text{graph with } w \text{ shaded} \\ + \text{graph with } x \text{ shaded} \end{array} \right) \\
 \phi H \left(\begin{array}{c} \text{graph with nodes } u, x, v, w \text{ and edges } (u,x), (x,v), (v,w), (w,u) \\ \text{with labels } :a, :b \text{ on edges} \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \text{graph with } v \text{ shaded} \\ + \text{graph with } x \text{ shaded} \end{array} \right) \\
 \phi H \phi H \left(\begin{array}{c} \text{graph with nodes } u, x, v, w \text{ and edges } (u,x), (x,v), (v,w), (w,u) \\ \text{with labels } :a, :b \text{ on edges} \end{array} \right) &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \text{graph with } u \text{ shaded} \\ + \text{graph with } w \text{ shaded} \\ - \text{graph with } u \text{ shaded} \\ - \text{graph with } w \text{ shaded} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

FIGURE 5.1. – La marche quantique Hadamard répétée deux fois sur les graphes circulaires

En raison de l'identification ci-dessus, ϕ agit comme l'identité dans le cas d'une particule seule. Puisque H^2 est l'identité, U^2 se réduit également à l'identité dans le cas à une particule. De manière imagée, en oubliant les noms w, x, y, z dans la figure 5.1, on obtient la figure 5.2. Les deux derniers termes *s'annulent* et les deux premiers termes *s'additionnent*. Deux étapes de la dynamique nous ramènent donc au point de départ. Par conséquent, avec les graphes anonymes et l'espace de Hilbert engendré \mathcal{H}^l , nous sommes incapables d'exprimer l'une des marches quantiques les plus simples.

Pour permettre une richesse dynamique sans introduire de noms, une autre possibi-

5. Dynamiques de graphes quantiques – 5.3. Graphe anonyme et transmission instantanée de l'information

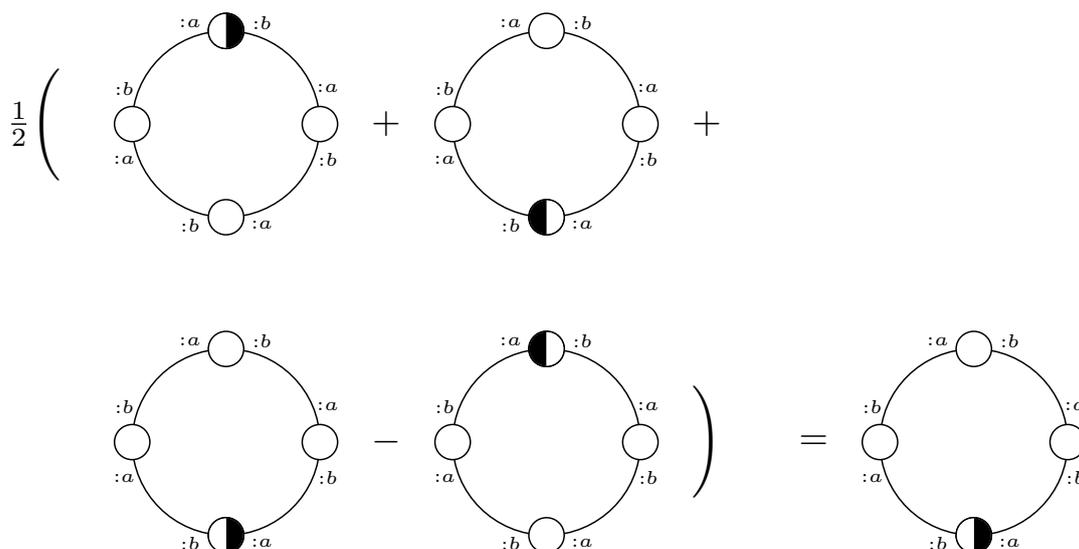


FIGURE 5.2. – La marche quantique Hadamard répétée deux fois sur les graphes circulaires abstraits

lité consisterait fournir des informations sur la position relative dans les graphes. Un "repère" est parfois disponible dans les situations pratiques, qu'il s'agisse des murs du laboratoire ou des "étoiles fixes". Cependant, un moment de réflexion montre que cette solution ad hoc dévoile un problème encore plus grave. En effet, en fonction de la présence ou non d'un quelconque 'repère' arbitrairement éloigné, la physique de l'état final est amenée à changer de manière instantanée.

Illustrons ce point. Nous pouvons modéliser le repère en introduisant une nouvelle couleur, qui n'est pas affectée par la dynamique. Nous modifions l'exemple ci-dessus en plaçant cette nouvelle couleur au nœud x . Le point de repère interdit alors les identifications non souhaitées entre les états - le comportement original de la dynamique est retrouvé. De manière inquiétante cependant, ce changement de comportement est parfaitement observable localement. En effet, l'état de la particule noire originale sera soit superposé, soit défini, en fonction de la présence ou non d'un point de repère à x . On constate également que ce repère aurait pu être placé arbitrairement loin de la particule. De plus, on peut remarquer que cette mesure du spin ne nécessite pas d'informations sur la position. Par exemple, chaque nœud pourrait être équipé d'un dispositif de mesure local, qui est déclenché juste après que U^2 se soit produit. Si l'un de ces observateurs locaux voit une particule de spin b , il sait avec certitude qu'un repère est présent, et ce quelle que soit la distance à laquelle le repère est placé. En effet, les graphes circulaires auraient pu être pris arbitrairement grands dans l'exemple ci-dessus. Un moment de réflexion montre que le même problème se poserait si, au lieu de graphes circulaires, nous avions pris une chaîne (ou une grille) infinie.

Ce type de signalisation instantanée est en contradiction avec l'exigence de localité des interactions issue de la physique telle que nous la connaissons. De plus, si l'on

insiste à toujours utiliser un repère jouant quelque part le rôle d'un pointeur, nous retombons dans le cas de l'incompatibilité création/destruction de nœud décrite dans le chapitre 2.

Ainsi un choix s'offre à nous lorsqu'on veut définir une théorie quantique des dynamiques de graphes : accepter une transmission instantanée de l'information, ou recourir aux noms et y ajouter une certaine symétrie.

Bien qu'a priori farfelue, la première option n'est pas forcément incompatible avec un modèle cohérent de la physique fondamentale. En effet, l'information transmise par ce biais est très faible, et toujours la même : "l'univers ne possède pas de symétrie spatiale". Il est également possible que de tels phénomènes disparaissent lorsque la dimension temporelle est ajoutée au modèle. Ce dernier point reste à éclaircir, mais pour cela nous avons besoin de "sous-décalages quantique de graphes", qui n'existent pas encore à ce jour.

En revanche, la deuxième option possède de nombreux avantages. Premièrement, elle est plus puissante, car la dynamique anonyme peut être toujours obtenue en "oubliant" les noms (formellement, il s'agit d'une trace partielle). Deuxièmement, elle permet de plus facilement statuer sur la causalité et l'invariance par translation, sous la forme de l'invariance par renommage, ce qui est l'objet de la section suivante.

5.4. Superpositions de graphes : noms et coloriage

Dans cette section, nous posons une définition rigoureuse de l'espace des états engendrés par les graphes. Les graphes utilisés ici sont les mêmes que ceux définis dans le chapitre 2, mais nous parlerons plus en détails des conséquences d'un tel espace d'état pour une théorie physique.

Nous avons soutenu dans la section précédente que les superpositions quantiques de graphes peuvent et doivent être définies comme l'ensemble des graphes nommés. Par conséquent, nous construisons l'espace d'état à partir de la définition 1.5.1 établi dans le chapitre 1 :

Définition 5.4.1 (Superpositions de graphes). Nous définissons \mathcal{H} l'espace de Hilbert des graphes comme celui ayant $\{|G\rangle\}_{G \in \mathcal{G}}$ pour base orthonormale canonique.

Cet espace d'état doit être la base d'une théorie qui manipule les superpositions de graphes. Nous posons donc :

Postulat 5.4.1. Les superpositions quantiques de graphes physiquement pertinentes sont des éléments de \mathcal{H} .

Comme d'habitude dans la théorie quantique, les états peuvent être soit des 'vecteurs d'état' (états purs), c'est-à-dire des vecteurs unitaires $|\psi\rangle$ dans \mathcal{H} , soit des 'matrices de densité' (états éventuellement mixtes), c'est-à-dire des opérateurs strictement positifs de trace 1, généralement notés ρ . Les évolutions peuvent être opérées

par les opérateurs unitaires U sur \mathcal{H} , prenant $|\psi\rangle$ dans $U|\psi\rangle$, ou alternativement ρ dans $U\rho U^\dagger$.

5.5. Renommages, observables et évolution

Nous considérons maintenant les renommages comme un groupe de symétrie de notre espace d'état quantique. Dans la section précédente, la définition des 'renommages' (isomorphisme de graphe) a été employée à l'intérieur de la définition 1.5.1 des graphes anonymes. Ayant établi que l'on ne doit pas travailler au niveau des graphes anonymes, mais au niveau des graphes (nommés), il nous reste à faire respecter l'invariance par renommages. Tout d'abord, nous définissons les renommages comme une notion autonome agissant sur l'espace d'état \mathcal{H} des graphes :

Définition 5.5.1 (Renommage). Un renommage R est une fonction injective de \mathbb{N} vers \mathcal{V} (l'algèbre des noms), telle que pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$ implique $R(x) \wedge R(y) = \emptyset$. Les renommages agissent sur les éléments de \mathcal{G} en renommant chaque sommet, et sont étendus pour agir sur \mathcal{H} par linéarité, c'est-à-dire que $R|G\rangle = |RG\rangle$ et $\langle G|R^\dagger = \langle RG|$.

Observables. Les observables physiquement pertinentes doivent être invariantes par rapport aux noms, de sorte que les probabilités ou les valeurs attendues données par la règle de Born ne soient pas modifiées en cas de changement de nom. Ainsi, nous devons exiger que les observables satisfassent

$$\text{tr}\left(OR|G\rangle\langle G|R^\dagger\right) = \text{tr}\left(R^\dagger OR|G\rangle\langle G|\right) = \text{tr}\left(O|G\rangle\langle G|\right)$$

ce qui est vrai pour tout G si et seulement si $[R, O] = 0$. Cependant, une observable *locale* physiquement pertinente $O(u)$ peut être définie à un 'endroit' u , auquel cas sa règle de Born dépend effectivement de u . Par exemple, nous pouvons être intéressés par la connaissance de 'la température en u '. Cependant, renommer l'emplacement u en emplacement v ne devrait pas avoir d'importance. Ainsi, nous exigeons en outre que

$$\text{tr}\left(O(u)|G\rangle\langle G|\right) = \text{tr}\left(O(R(u))R|G\rangle\langle G|R^\dagger\right)$$

Nous sommes alors amenés à la définition suivante.

Définition 5.5.2 (Invariance de renommage). Un opérateur $O(u)$ est dit invariant par renommage si et seulement si pour tout $G \in \mathcal{G}$ et pour tout renommage R , $O(R(u))R = RO(u)$.

Ceci se généralise aux observables à n points, u pouvant être considérée comme une liste de nœuds u_1, \dots, u_n dans la définition ci-dessus.

Avec cette définition, nous interdisons effectivement d'"observer" les coordonnées (noms). Par exemple, disons que les nœuds ont été numérotés par des entiers i . En mesurant $O(i) = i\mathbf{I}$ à i , avec \mathbf{I} l'opération d'identité, on lirait la coordonnée i . Ce n'est

5. Dynamiques de graphes quantiques – 5.6. Lien avec la gravité quantique

pas une observable car elle n'est pas invariante par rapport aux noms, ce qui se voit en prenant $j = R(i) \neq i$:

$$RO(i)R^\dagger = Ri\mathbf{I}R^\dagger = i\mathbf{I} \neq j\mathbf{I} = O(j) = O(R(i)).$$

Un exemple d'observable locale valide est celui qui lit le ratio entre le nombre de voisins de second degré et le nombre de voisins de premier degré d'un nœud u — quantité souvent considéré comme un analogue discret de la courbure scalaire de Ricci pour les graphes. Un exemple d'observable globale valide est le diamètre du graphe.

Évolutions. Les évolutions physiquement pertinentes doivent être indépendantes des noms des sommets. Ainsi, nous devons exiger que toute évolution globale U soit invariante par renommage dans le sens suivant : pour tout renommage R , on exige que $UR = RU$. De même, une évolution locale vérifiera que $U(R(u))R = RU(u)$. Des exemples d'évolutions valides ont été donnés dans la section 5.3 (sur des graphes nommés). Nous posons donc :

Postulat 5.5.1. Les observables physiquement pertinents sur les superpositions quantiques de graphes sont des opérateurs invariants par renommage sur \mathcal{H} .

5.6. Lien avec la gravité quantique

L'invariance du difféomorphisme, ou covariance générale, est la symétrie centrale sur laquelle est fondée la relativité générale. Son rôle consiste à garantir que les prédictions de la théorie ne dépendent pas du choix d'un système de coordonnées, car un changement de coordonnées correspond à un difféomorphisme. De même, les renommages de graphes correspondent à des isomorphismes de graphes.

Les difféomorphismes sont un concept primitif défini déjà au niveau pré-géométrique. C'est-à-dire avant que le tenseur métrique qui décrit l'espace-temps, ou les champs de matière évoluant à l'intérieur de cet espace-temps, ne soient introduits. Les renommages de graphes sont un analogue discret des changements de coordonnées dans une variété, et ce déjà à ce niveau pré-géométrique. L'espace pré-géométrique, maintenant discret, est le graphe. L'attribution de noms aux nœuds est l'attribution de 'coordonnées' à l'ensemble des points de cet espace, les nœuds du graphe. Les liens peuvent être compris comme une relation d'adjacence au sens topologique, pré-géométrique. Une analogie avec le continu consiste à considérer les ouverts d'une variété, à réduire chaque ensemble ouvert à un nœud et à ajouter un lien entre deux nœuds si les ensembles ouverts s'intersectent.

Discutons maintenant de l'analogie entre les difféomorphismes et les renommages dans le contexte de la gravité quantique à boucles (LQG). Dans cette approche provisoire quoique bien développée de la gravité quantique, un résultat central est que l'espace d'état se décompose en espaces de Hilbert correspondant chacun à un graphe coloré. Ce graphe peut être compris comme dual à une 'triangulation' de l'espace tri-dimensionnel avec des tétraèdres quantiques (voir par exemple[26]). Les paramètres

géométriques de cette triangulation quantique sont sous-déterminés, les observables géométriques (aires, angles, volume, etc.) satisfaisant des relations d'incertitude. Dans la littérature, nous trouvons deux façons d'appliquer l'invariance par difféomorphisme (spatial) au niveau quantique dans ce domaine. Une première façon [97] est de plonger les graphes dans une variété, interprétés comme un ensemble de courbes dans cette variété, puis de prendre la classe d'équivalence résultant de l'action avec les difféomorphismes spatiaux sur le graphe plongé. Il s'agit d'une procédure fastidieuse conduisant à un certain nombre de complications, telles que la création de nœuds. Une autre stratégie [103], qui est en désaccord avec la première approche, consiste à travailler directement au niveau des graphes non-plongés, également appelés 'graphes abstraits'. Cette dernière méthode est censée supprimer complètement la nécessité d'imposer la contrainte d'invariance par difféomorphisme (spatiale) de manière explicite au niveau quantique, puisqu'il n'y a pas de variété de plongement. Ce point de vue minimaliste est donc beaucoup plus simple.

Notre analyse suggère que les deux points de vue sont en partie corrects et en partie erronés. En ce qui concerne la première approche, qui emploie un plongement du graphe dans une variété continue, il semble superflu de considérer un espace de plongement continu supplémentaire si la théorie doit être basée sur les graphes. Les graphes jouent déjà le rôle d'un espace topologique nativement discret sur lequel les champs peuvent ensuite être définis.

Pour la seconde approche, qui utilise des graphes "abstraites" (non plongés), il semble exagéré de prétendre que l'invariance par changements de coordonnées, une symétrie centrale de la théorie classique, ait complètement disparu, en raison de l'absence d'une variété d'incorporation. Alors que l'espace topologique continu de plongement est abandonné, une structure topologique discrète subsiste - le graphe - sur laquelle subsiste également une trace d'invariance spatiale par difféomorphisme. Au niveau classique, ce qui survit d'un difféomorphisme spatial lorsque la géométrie d'une surface spatiale est échantillonnée sur un graphe est le renommage des nœuds des graphes. Ainsi, dans le contexte du LQG, nous pouvons penser que l'invariance par renommage met en œuvre l'invariance par difféomorphisme spatial au niveau quantique lorsque l'on travaille dans le contexte de graphes "abstraites" (non intégrés). Il s'agit encore d'une invariance beaucoup plus simple et directe que celle définie dans [103] car elle se concentre sur les nœuds et n'implique pas de 'déplacer' les liens du graphe sur une variété de plongement.

5.7. Conclusion

Résumé des contributions. Nous avons fourni une notion robuste de superposition quantique de graphes, pour servir d'espace d'état à diverses applications, allant des modèles distribués d'informatique quantique, à l'"internet quantique" et à la gravité quantique. Par exemple, le formalisme développé ici serait d'une utilité immédiate dans les applications de la gravité quantique où les superpositions de géométries tridimensionnelles sont étudiées.

5. Dynamiques de graphes quantiques – 5.7. Conclusion

La principale difficulté réside dans le traitement des noms. Bien que les noms des nœuds fassent partie de la définition des graphes, ils permettent des mesures trop fortes et doivent donc être supprimés au niveau des observables. Nous avons montré que le fait de s'en débarrasser trop tôt, en travaillant au niveau des graphes anonymes c'est à dire classes d'équivalence par renommage, conduit à une signalisation instantanée. Nous avons souligné que la raison sous-jacente à cela est que les noms jouent un rôle essentiel dans le maintien des superpositions quantiques de graphes 'alignés' les uns par rapport aux autres.

Nous avons ensuite associé la définition des renommages comme une symétrie de l'espace d'état quantique et avons postulé que les observables et les évolutions doivent satisfaire l'invariance des renommages, c'est-à-dire qu'ils doivent commuter avec les renommages. Nous avons fait remarquer que les renommages sur les graphes sont l'analogie discret natif des difféomorphismes sur une variété — les deux renommant les points d'un espace topologique. En ce sens, nous avons suivi ici la prescription standard de la relativité générale : utiliser des coordonnées pour définir la situation physique étudiée, puis exiger que les déclarations de pertinence physique soient invariantes par changement de coordonnées. Les renommages de graphes ont en outre été directement étendus au niveau quantique, ce qui en fait un candidat pour mettre en œuvre l'invariance par difféomorphisme au niveau quantique.

Conclusion

Par leur géométrie évolutive, les dynamiques causales de graphes et les sous-décalages de graphes ouvrent un éventail de questions dans les domaines de l'informatique et de la physique théorique. Nous proposons, pour conclure, d'aborder quelques perspectives sur les problématiques qui nous paraissent les plus prometteuses.

Dynamiques de graphes partitionnées Dans le chapitre 2, nous développons des modèles de calculs rendant compatibles création/destruction de sommets et réversibilité. Cependant, les dynamiques causales de graphes restent complexes à décrire, et l'énumération des dynamiques de graphes réversibles est impossible sous cette forme. Pour répondre à cette contrainte, nous proposons d'explorer le concept de dynamique de graphes partitionnée, comme généralisation des automates cellulaires partitionnés. Ainsi, les dynamiques causales de graphes partitionnées pourrait être formulées par des permutations synchrones de motifs non-intersectant.

Simulation intrinsèque des dynamiques causales de graphes et des automates cellulaires Une notion très étudiée sur les automates cellulaires est la notion de simulation intrinsèque. Premièrement, il serait intéressant de généraliser certaines de ces notions aux dynamiques de graphes réversible, étendant des travaux précédemment établis [76]. Dans un second temps, une telle notion pourrait être directement appliquées aux automates cellulaires. Sous cette idée, un automate cellulaire en simulerait un autre si et seulement si la généralisation en dynamique causale de graphes du premier simule celle du second. Il est probable qu'une telle notion coïncide avec des modèles de simulation déjà existant, et apporterait une nouvelle perspective à ces derniers.

Complexités des dynamiques causales de graphes Comme nous l'avons précédemment cité, les dynamiques causales de graphes présentent un intérêt fort du point de vue de la complexité. Ceux-ci ont le potentiel d'étendre leur espace de calcul à vitesse exponentielle, menant potentiellement à des classes de complexités différentes de celles des automates cellulaires. Ceci pourrait rappeler le calcul par membranes ou les machines à signaux [90].

Sous-décalages déterministes Un moyen d'étude des classes de complexités des dynamiques causales de graphes est la simulation par des sous-décalages de graphes. Or, bien que nous établissons une définition des sous-décalages de graphes et des résultats d'indécidabilité de ces derniers, nous ne fournissons pas de notion de

simulation des dynamiques causales de graphes par des sous-décalages *déterministes*. Cette notion, présente dans les sous-décalages de groupes, devient difficile à étudier dans les sous-décalages de graphes du fait de leur géométrie variable.

Généralisation d'autres sous-décalages Dans ces travaux, nous nous sommes principalement attardés sur des sous-décalages de graphes de type fini. Il existe d'autres catégories de sous-décalages qu'il serait possible de généraliser aux sous-décalages de graphes. On peut notamment citer les sous-décalages isométriques, pouvant avoir un intérêt du point de vue des symétries de la physique théorique, ou les sous-décalages sofiques.

Croissance d'un espace de faible courbure et dimensions supérieures Comme nous l'avons prouvé dans le chapitre 4, il existe des dynamiques de graphes faisant croître les configurations sur lesquelles elles opèrent. Cependant, lors de notre étude, nous nous sommes restreints à des dynamiques sur des graphes que nous pourrions considérer de dimension 1 (seulement 2 ports). Il existe déjà différentes notions permettant de généraliser la notion de dimension d'un graphe, il reste donc à savoir si certaines dynamiques croissantes font converger leurs configurations vers des graphes de dimensions supérieures. Similairement, il existe des définitions de courbure discrète, et il serait intéressant d'observer la croissances d'espaces de faible courbure (similaire à celle de notre Univers).

Entropie topologique Lors du chapitre 4, nous nous sommes restreints à l'étude d'une certaine notion d'entropie, adaptée de la physique théorique. Il existe également d'autres notions d'entropies en dynamiques symboliques : l'entropie métrique et l'entropie topologique. Bien qu'ayant un fort sens physique, l'entropie que nous étudions reste quelque peu arbitraire du point de vue de la dynamique symbolique. La croissance de l'entropie topologique renforcerait l'argument de l'orientation de la flèche du temps par l'existence d'une configuration d'entropie minimale.

Dynamiques causales de graphes quantiques Dans le chapitre 5, nous fournissons un cadre formel aux dynamiques causales de graphes quantiques, en posant une définition d'une superposition de graphes. La définition formelle d'une dynamique causale de graphes quantique permettant la création/destruction de sommets reste à établir, les précédents travaux [12] se limitant aux déplacements d'arêtes. En particulier, la notion de localité devient complexe à définir dans le cadre d'une superposition. Si deux sommets sont en superposition d'être proches et éloignés dans le graphe, qu'est-ce qu'un rayon de localité autour d'un de ces sommets? Une approche serait de définir une notion de localité s'adaptant au contexte, et donc partiellement indépendante entre les différentes branches de la superposition. Une autre perspective serait d'établir un modèle de dynamiques de graphes partitionnées comme abordé plus haut, et d'étendre celles-ci au régime quantique.

Simulation en gravité quantique Il existe de nombreux succès de la simulation de la physique théorique par des modèles de calculs discrets. On peut noter la simulation des fermions par les marches quantiques ou la simulation des flux des gaz par les méthodes de gaz sur réseaux. Une approche intéressante pour les dynamiques de graphes serait de simuler certaines théories de la physique comme la relativité, ou la gravité quantique avec le Regge calcul [91].

Bibliographie

- [1] R. L. ADLER, A. G. KONHEIM et M. H. MCANDREW. « Topological Entropy ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 114.2 (1965), p. 309-319. ISSN : 0002-9947. DOI : [10.2307/1994177](https://doi.org/10.2307/1994177) (cf. p. 65).
- [2] Pablo ARNAULT, Armando PÉREZ, Pablo ARRIGHI et al. « Discrete-Time Quantum Walks as Fermions of Lattice Gauge Theory ». In : *Phys. Rev. A* 99.3 (mar. 2019), p. 032110. DOI : [10.1103/PhysRevA.99.032110](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.032110) (cf. p. 73).
- [3] P. ARRIGHI et S. MARTIEL. « Generalized Cayley Graphs and Cellular Automata over Them ». In : *Proceedings of GCM 2012, Bremen, September 2012. Pre-print arXiv :1212.0027*. 2012, p. 129-143. arXiv : [1212.0027](https://arxiv.org/abs/1212.0027) (cf. p. 14).
- [4] P. ARRIGHI, V. NESME et R. F. WERNER. « Quantum Cellular Automata over Finite, Unbounded Configurations ». In : *Proceedings of LATA, Lecture Notes in Computer Science*. T. 5196. Springer, 2008, p. 64-75 (cf. p. 20).
- [5] P. ARRIGHI, V. NESME et R. F. WERNER. « One-Dimensional Quantum Cellular Automata ». In : *IJUC* 7.4 (2011), p. 223-244 (cf. p. 20).
- [6] P. ARRIGHI, N. SCHABANEL et G. THEYSSIER. « Intrinsic Simulations between Stochastic Cellular Automata ». In : *Proceedings of AUTOMATA & JAC 2012, La Marana, Corsica, September 2012. EPTCS*. T. 90. 2012, p. 208-224 (cf. p. 15).
- [7] Pablo ARRIGHI. « An Overview of Quantum Cellular Automata ». In : *Natural Computing* 18 (2019), p. 885 (cf. p. 20, 105).
- [9] Pablo ARRIGHI et Gilles DOWEK. « Causal Graph Dynamics (Long Version) ». In : *Information and Computation* 223 (2013), p. 78-93 (cf. p. 21, 26, 28).
- [12] Pablo ARRIGHI et Simon MARTIEL. « Quantum causal graph dynamics ». In : *Phys. Rev. D* 96 (2 2017), p. 024026. DOI : [10.1103/PhysRevD.96.024026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.024026). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.024026> (cf. p. 105, 117).
- [13] Pablo ARRIGHI, Simon MARTIEL et Vincent NESME. « Cellular automata over generalized Cayley graphs ». In : *Mathematical Structures in Computer Science* 28.3 (2018), p. 340-383. DOI : [10.1017/S0960129517000044](https://doi.org/10.1017/S0960129517000044). URL : <https://doi.org/10.1017/S0960129517000044> (cf. p. 22-24, 61, 129).
- [14] Pablo ARRIGHI, Simon MARTIEL et Simon PERDRIX. « Reversible Causal Graph Dynamics ». In : *Proceedings of International Conference on Reversible Computation, RC 2016, Bologna, Italy, July 2016*. T. 9720. Springer, 2016, p. 73-88 (cf. p. 26).

- [15] Pablo ARRIGHI, Simon MARTIEL et Simon PERDRIX. « Reversible causal graph dynamics ». In : *Proceedings of International Conference on Reversible Computation, RC 2016, Bologna, Italy, July 2016*. T. 9720. Springer. 2016, p. 73-88 (cf. p. 27, 38, 40).
- [16] Pablo ARRIGHI, Simon MARTIEL et Simon PERDRIX. « Reversible Causal Graph Dynamics : Invertibility, Block Representation, Vertex-Preservation ». In : *Natural Computing* 19.1 (2020), p. 157-178 (cf. p. 27).
- [17] Pablo ARRIGHI, Vincent NESME et Marcelo FORETS. « The Dirac Equation as a Quantum Walk : Higher Dimensions, Observational Convergence ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 47.46 (2014), p. 465302 (cf. p. 11).
- [18] Nathalie AUBRUN. « Dynamique Symbolique Sur Des Groupes : Une Approche Informatique ». Habilitation à Diriger Des Recherches. Université Paris-Saclay, avr. 2021 (cf. p. 19).
- [19] Nathalie AUBRUN et Jarkko KARI. « Tiling Problems on Baumslag-Solitar Groups ». In : *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 128 (sept. 2013). DOI : [10.4204/EPTCS.128.12](https://doi.org/10.4204/EPTCS.128.12) (cf. p. 17).
- [20] Nathalie AUBRUN et Mathieu SABLİK. « Simulation of Effective Subshifts by Two-dimensional Subshifts of Finite Type ». In : *Acta Applicandae Mathematicae* (2013). DOI : [10.1007/s10440-013-9808-5](https://doi.org/10.1007/s10440-013-9808-5) (cf. p. 16).
- [21] E. R. BANKS. « Universality in Cellular Automata ». In : *SWAT'70 : Proceedings of the 11th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT 1970)*. Washington, DC, USA : IEEE Computer Society, 1970, p. 194-215. DOI : [10.1109/SWAT.1970.27](https://doi.org/10.1109/SWAT.1970.27) (cf. p. 15).
- [22] Julian BARBOUR, Tim KOSLOWSKI et Flavio MERCATI. « Identification of a Gravitational Arrow of Time ». In : *Phys. Rev. Lett.* 113 (18 oct. 2014), p. 181101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.113.181101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.181101). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.181101> (cf. p. 71).
- [23] Julian BARBOUR, Tim KOSLOWSKI et Flavio MERCATI. « Janus points and arrows of time ». In : *arXiv preprint arXiv:1604.03956* (2016) (cf. p. 71).
- [24] A. BEDNORZ, K. FRANKE et W. BELZIG. « Noninvasiveness and Time Symmetry of Weak Measurements ». In : (2011). DOI : [10.1088/1367-2630/15/2/023043](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/2/023043) (cf. p. 67).
- [25] Robert BERGER. « The undecidability of the domino problem ». en. 00000. PhD. Harvard University, juil. 1964 (cf. p. 52).
- [26] Eugenio BIANCHI, Pietro DONÁ et Simone SPEZIALE. « Polyhedra in loop quantum gravity ». In : *Phys. Rev. D* 83 (4 2011), p. 044035. DOI : [10.1103/PhysRevD.83.044035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.044035). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.044035> (cf. p. 113).

- [27] Ginestra BIANCONI et Christoph RAHMEDE. « Network geometry with flavor : From complexity to quantum geometry ». In : *Phys. Rev. E* 93 (3 2016), p. 032315. DOI : [10.1103/PhysRevE.93.032315](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.032315). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.032315> (cf. p. 105).
- [28] Ludwig BOLTZMANN. *Vorlesungen Über Gastheorie*. 1. Auflage. Leipzig : Barth, 1896 (cf. p. 67, 70).
- [29] S. BONELLA, G. CICCOTTI et L. RONDONI. « Time Reversal Symmetry in Time-Dependent Correlation Functions for Systems in a Constant Magnetic Field ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 108.6 (déc. 2014), p. 60004. ISSN : 0295-5075. DOI : [10.1209/0295-5075/108/60004](https://doi.org/10.1209/0295-5075/108/60004) (cf. p. 67).
- [30] Sougato BOSE, Anupam MAZUMDAR, Gavin W. MORLEY et al. « A Spin Entanglement Witness for Quantum Gravity ». en. In : *Physical Review Letters* 119.24 (déc. 2017). ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.119.240401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.240401). arXiv : [1707.06050](https://arxiv.org/abs/1707.06050) (cf. p. 104).
- [31] Sougato BOSE et Gavin W MORLEY. « Matter and spin superposition in vacuum experiment (MASSIVE) ». In : (oct. 2018). arXiv : [1810.07045](https://arxiv.org/abs/1810.07045) (cf. p. 104).
- [32] L. BOYER et G. THEYSSIER. « On Local Symmetries and Universality in Cellular Automata ». In : *26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2009)*. Sous la dir. de Susanne ALBERS et Jean-Yves MARION. Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany, 2009 (cf. p. 15).
- [33] Latham BOYLE, Kieran FINN et Neil TUROK. « CPT-symmetric universe ». In : *Physical review letters* 121.25 (2018), p. 251301 (cf. p. 71).
- [35] Marcello CALEFFI, Angela Sara CACCIAPUOTI et Giuseppe BIANCHI. « Quantum Internet : From Communication to Distributed Computing! » In : *Proceedings of the 5th ACM International Conference on Nanoscale Computing and Communication*. Sept. 2018, p. 1-4. DOI : [10.1145/3233188.3233224](https://doi.org/10.1145/3233188.3233224). arXiv : [1805.04360](https://arxiv.org/abs/1805.04360) [quant-ph] (cf. p. 10).
- [36] Sean M CARROLL et Jennifer CHEN. « Spontaneous Inflation and the Origin of the Arrow of Time ». In : *arXiv preprint hep-th/0410270* (2004) (cf. p. 71).
- [37] Sean M CARROLL et Jennifer CHEN. « Does inflation provide natural initial conditions for the universe? » In : *International Journal of Modern Physics D* 14.12 (2005), p. 2335-2339 (cf. p. 71).
- [38] Arthur CAYLEY. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. The University Press, 1894 (cf. p. 18).
- [39] Tullio CECCHERINI-SILBERSTEIN et Michel COORNAERT. *Cellular Automata and Groups*. Springer, 2009 (cf. p. 62, 64).
- [40] Julien CERVELLE, Enrico FORMENTI et Pierre GUILLON. « Sofic Trace Subshift of a Cellular Automaton ». In : t. 4497. Juin 2007, p. 152-161. DOI : [10.1007/978-3-540-73001-9_16](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73001-9_16) (cf. p. 65).

- [41] G. CHANG, W.-T. KE, D. KUO et al. « On $L(d, 1)$ -Labelings of Graphs ». In : *Discrete Mathematics* 220 (2000), p. 57-66 (cf. p. 70).
- [42] G. CHIRIBELLA, G. M. D'ARIANO, P. PERINOTTI et al. « Quantum Computations without Definite Causal Structure ». In : *Physical Review A* 88.2 (août 2013), p. 022318. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.88.022318](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.022318). arXiv : [0912.0195](https://arxiv.org/abs/0912.0195) (cf. p. 10, 104).
- [43] Marios CHRISTODOULOU et Carlo ROVELLI. « On the Possibility of Laboratory Evidence for Quantum Superposition of Geometries ». In : *Physics Letters B* 792 (mai 2019), p. 64-68. ISSN : 03702693. DOI : [10.1016/j.physletb.2019.03.015](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.015). arXiv : [1808.05842](https://arxiv.org/abs/1808.05842) [gr-qc] (cf. p. 104).
- [44] Marios CHRISTODOULOU et Carlo ROVELLI. « On the possibility of experimental detection of the discreteness of time ». In : *Front. in Phys.* 8 (déc. 2020), p. 207. DOI : [10.3389/fphy.2020.00207](https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00207). arXiv : [1812.01542](https://arxiv.org/abs/1812.01542) [gr-qc] (cf. p. 104).
- [45] Milan M. ĆIRKOVIĆ. « Janus Point : A New Theory of Time ». In : *American Journal of Physics* 89.8 (août 2021), p. 818-820. ISSN : 0002-9505. DOI : [10.1119/10.0005309](https://doi.org/10.1119/10.0005309) (cf. p. 83).
- [46] R. CLAUDIUS. « Ueber Eine Veränderte Form Des Zweiten Hauptsatzes Der Mechanischen Wärmetheorie ». In : *Annalen der Physik* 169.12 (1854), p. 481-506. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.18541691202](https://doi.org/10.1002/andp.18541691202) (cf. p. 67).
- [47] R. CLAUDIUS. « Ueber Die Wärmeleitung Gasförmiger Körper ». In : *Annalen der Physik* 191.1 (1862), p. 1-56. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.18621910102](https://doi.org/10.1002/andp.18621910102) (cf. p. 67).
- [48] Wales) CONFERENCE ON COMPUTABILITY IN EUROPE (2ND : 2006 : SWANSEA. *Logical Approaches to Computational Barriers : Second Conference on Computability in Europe, CiE 2006, Swansea, UK, June 30-July 5, 2006 : Proceedings*. Berlin; New York : Springer, 2006. ISBN : 9783540354666 9783540354680 9786611407650 (cf. p. 10).
- [49] Stephen A. COOK. « The Complexity of Theorem-Proving Procedures ». In : *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '71. New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, mai 1971, p. 151-158. ISBN : 978-1-4503-7464-4. DOI : [10.1145/800157.805047](https://doi.org/10.1145/800157.805047) (cf. p. 13).
- [50] Shagnik DAS. *A Brief Note on Estimates of Binomial Coefficients*. 2015. URL : <https://www.semanticscholar.org/paper/A-brief-note-on-estimates-of-binomial-coefficients-Das> (cf. p. 80).
- [51] G DI MOLFETTA et F DEBBASCH. « Discrete-Time Quantum Walks : Continuous Limit and Symmetries ». In : *Journal of Mathematical Physics* 53.12 (2012), p. 123302-123302 (cf. p. 73).
- [53] A. EINSTEIN. « Zur Elektrodynamik Bewegter Körper ». In : *Annalen der Physik* 322.10 (1905), p. 891-921. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.19053221004](https://doi.org/10.1002/andp.19053221004) (cf. p. 11).

- [54] R. P. FEYNMAN. « Simulating Physics with Computers ». In : *International Journal of Theoretical Physics* 21.6 (1982), p. 467-488 (cf. p. 20).
- [55] Martin GARDNER. « MATHEMATICAL GAMES ». In : *Scientific American* 223.4 (1970), p. 120-123. ISSN : 0036-8733 (cf. p. 13).
- [56] Sheldon GOLDSTEIN, Roderich TUMULKA et Nino ZANGHÌ. « Is the hypothesis about a low entropy initial state of the Universe necessary for explaining the arrow of time? » In : *Phys. Rev. D* 94 (2 juil. 2016), p. 023520. DOI : [10.1103/PhysRevD.94.023520](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.023520). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.023520> (cf. p. 70, 71).
- [57] K. GOSWAMI, C. GIARMATZI, M. KEWMING et al. « Indefinite Causal Order in a Quantum Switch ». In : *Phys. Rev. Lett.* 121.9 (août 2018), p. 090503. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.121.090503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.090503) (cf. p. 10).
- [58] Yuri GUREVICH et I. KORYAKOV. « A remark on Berger's paper on the domino problem ». In : *Siberian Journal of Mathematics* 13 (1972), p. 459-463 (cf. p. 64).
- [59] J. HARDY, Y. POMEAU et O. DE PAZZIS. « Time Evolution of a Two-Dimensional Classical Lattice System ». In : *Physical Review Letters* 31.5 (juil. 1973), p. 276-279. DOI : [10.1103/PhysRevLett.31.276](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.31.276) (cf. p. 11, 73).
- [60] J. B. HARTLE et S. W. HAWKING. « Wave function of the Universe ». In : *Phys. Rev. D* 28 (12 déc. 1983), p. 2960-2975. DOI : [10.1103/PhysRevD.28.2960](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.28.2960). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.28.2960> (cf. p. 71).
- [61] Brosl HASSLACHER et David A. MEYER. « Modelling Dynamical Geometry With Lattice Gas Automata ». Juin 1998 (cf. p. 28, 75).
- [62] G. A. HEDLUND. « Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System ». In : *Mathematical systems theory* 3.4 (déc. 1969), p. 320-375. ISSN : 1433-0490. DOI : [10.1007/BF01691062](https://doi.org/10.1007/BF01691062) (cf. p. 13, 22).
- [63] Emmanuel JEANDEL. « Aperiodic Subshifts of Finite Type on Groups ». Jan. 2015 (cf. p. 17).
- [64] J. KARI. « On the Circuit Depth of Structurally Reversible Cellular Automata ». In : *Fundamenta Informaticae* 38.1-2 (1999), p. 93-107 (cf. p. 16).
- [65] Jarkko KARI. « The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata ». In : *siam Journal on Computing* 21.3 (1992), p. 571-586 (cf. p. 52).
- [66] Jarkko KARI. « The Tiling Problem Revisited ». In : sept. 2007, p. 72-79 (cf. p. 17).
- [67] Richard M. KARP. « Reducibility among Combinatorial Problems ». In : *Complexity of Computer Computations : Proceedings of a Symposium on the Complexity of Computer Computations, Held March 20-22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and Sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*. Sous la dir. de Raymond E. MILLER, James W. THATCHER et Jean D. BOHLINGER. The IBM

- Research Symposia Series. Boston, MA : Springer US, 1972, p. 85-103. ISBN : 978-1-4684-2001-2. DOI : [10.1007/978-1-4684-2001-2_9](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9) (cf. p. 13).
- [68] J. KEMPE. « Quantum random walks : an introductory overview ». In : *Contemporary Physics* 44.4 (2003), p. 307-327 (cf. p. 107).
- [69] H. J. KIMBLE. « The Quantum Internet ». In : *Nature* 453.7198 (juin 2008), p. 1023-1030. ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : [10.1038/nature07127](https://doi.org/10.1038/nature07127). arXiv : [0806.4195](https://arxiv.org/abs/0806.4195) [quant-ph] (cf. p. 10, 105).
- [70] R. LANDAUER. « Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process ». In : *IBM Journal of Research and Development* 5.3 (1961), p. 183-191 (cf. p. 15).
- [71] C. G. LANGTON. « Self-reproduction in cellular automata ». In : *Physica D* 10.1-2 (1984), p. 135-144 (cf. p. 52).
- [72] Douglas A. LIND et Brian MARCUS. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. 03085. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1995. ISBN : 978-0-521-55900-3 978-0-521-55124-3 (cf. p. 52).
- [73] Antonio MACHÌ et Filippo MIGNOSI. « Garden of Eden Configurations for Cellular Automata on Cayley Graphs of Groups ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 6.1 (fév. 1993), p. 44-56. ISSN : 0895-4801. DOI : [10.1137/0406004](https://doi.org/10.1137/0406004) (cf. p. 14).
- [74] Luidnel MAIGNAN et Antoine SPICHER. « Global Graph Transformations ». In : *Proceedings of the 6th International Workshop on Graph Computation Models, L'Aquila, Italy, July 20, 2015*. 2015, p. 34-49 (cf. p. 50).
- [75] Ryan J. MARSHMAN, Anupam MAZUMDAR et Sougato BOSE. « Locality & Entanglement in Table-Top Testing of the Quantum Nature of Linearized Gravity ». In : *arXiv :1907.01568 [gr-qc, physics:quant-ph]* (juil. 2019). arXiv : [1907.01568](https://arxiv.org/abs/1907.01568) [gr-qc, physics:quant-ph] (cf. p. 104).
- [76] Simon MARTIEL et Bruno MARTIN. « Intrinsic Universality of Causal Graph Dynamics ». In : *Proceedings, Machines, Computations and Universality 2013, Zürich, Switzerland, 9/09/2013 - 11/09/2013*. Sous la dir. de Turlough NEARY et Matthew COOK. T. 128. Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. Open Publishing Association, 2013, p. 137-149. DOI : [10.4204/EPTCS.128.19](https://doi.org/10.4204/EPTCS.128.19) (cf. p. 116).
- [77] K. MORITA. « Computation-Universality of One-Dimensional One-Way Reversible Cellular Automata ». In : *Inf. Process. Lett.* 42.6 (1992), p. 325-329. ISSN : 0020-0190. DOI : [10.1016/0020-0190\(92\)90231-J](https://doi.org/10.1016/0020-0190(92)90231-J) (cf. p. 15).
- [78] K. MORITA et M. HARAO. « Computation Universality of One-Dimensional Reversible (Injective) Cellular Automata ». In : *IEICE Trans. Inf. & Syst., E* 72 (1989), p. 758-762 (cf. p. 16).
- [79] Marston MORSE et Gustav A. HEDLUND. « Symbolic Dynamics ». In : *American Journal of Mathematics* 60.4 (1938), p. 815-866. ISSN : 0002-9327. DOI : [10.2307/2371264](https://doi.org/10.2307/2371264) (cf. p. 16).

- [80] M. A. NIELSEN et I. L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, oct. 2000. ISBN : 521635039 (cf. p. 20).
- [81] A Yu OL'SHANSKII. *Geometry of defining relations in groups*. T. 70. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 62).
- [82] N. OLLINGER. « The Quest for Small Universal Cellular Automata ». In : *Proceedings of ICALP'02, Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2002, p. 318-329. ISBN : 3-540-43864-5 (cf. p. 15).
- [83] N. OLLINGER. « Intrinsically Universal Cellular Automata. » In : *CSP*. Sous la dir. de Turlough NEARY, Damien WOODS, Anthony Karel SEDA et al. Cork University Press, 2008, p. 259-266. ISBN : 978-1-906642-00-6 (cf. p. 15).
- [84] Ognyan ORESHKOV. « Time-Delocalized Quantum Subsystems and Operations : On the Existence of Processes with Indefinite Causal Structure in Quantum Mechanics ». In : *arXiv :1801.07594 [quant-ph]* (jan. 2018). arXiv : [1801.07594](https://arxiv.org/abs/1801.07594) [[quant-ph](https://arxiv.org/abs/1801.07594)] (cf. p. 10).
- [85] Christos H. PAPADIMITRIOU et Mihalis YANNAKAKIS. « Optimization, Approximation, and Complexity Classes ». In : *Journal of Computer and System Sciences* 43.3 (déc. 1991), p. 425-440. ISSN : 0022-0000. DOI : [10.1016/0022-0000\(91\)90023-X](https://doi.org/10.1016/0022-0000(91)90023-X) (cf. p. 13).
- [86] Nikola PAUNKOVIC et Marko VOJINOVIC. « Causal Orders, Quantum Circuits and Spacetime : Distinguishing between Definite and Superposed Causal Orders ». In : *arXiv :1905.09682 [gr-qc, physics:hep-th, physics:quant-ph]* (mai 2019). arXiv : [1905.09682](https://arxiv.org/abs/1905.09682) [[gr-qc](https://arxiv.org/abs/1905.09682), [physics:hep-th](https://arxiv.org/abs/1905.09682), [physics:quant-ph](https://arxiv.org/abs/1905.09682)] (cf. p. 10, 104).
- [87] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, G. GOLDHABER et al. « Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae ». In : *The Astrophysical Journal* 517 (1999), p. 565. DOI : [10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221) (cf. p. 70).
- [88] Sébastien PERSEGUERS, Maciej LEWENSTEIN, A ACÍN et al. « Quantum random networks ». In : *Nature Physics* 6.7 (2010), p. 539-543 (cf. p. 105).
- [89] Max PLANCK. « Ueber Irreversible Strahlungsvorgänge ». In : *Annalen der Physik* 306.1 (1900), p. 69-122. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.19003060105](https://doi.org/10.1002/andp.19003060105) (cf. p. 69).
- [90] A. PORRECA. « The Time-Space Trade-off in Membrane Computing ». In : *undefined* (2012) (cf. p. 116).
- [91] Tullio REGGE. « General Relativity without Coordinates ». In : *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* 19.3 (1961), p. 558-571 (cf. p. 118).
- [92] Seyed H. ROOSTA. *Parallel Processing and Parallel Algorithms : Theory and Computation*. Springer Science & Business Media, déc. 1999. ISBN : 978-0-387-98716-3 (cf. p. 10).
- [93] Carlo ROVELLI. *Quantum Gravity*. en. Cambridge University Press, nov. 2004. ISBN : 978-0-521-83733-0 (cf. p. 105).

- [94] Carlo ROVELLI. « Where Was Past Low-Entropy? » In : *Entropy* 21.5 (2019). ISSN : 1099-4300. DOI : [10.3390/e21050466](https://doi.org/10.3390/e21050466). URL : <https://www.mdpi.com/1099-4300/21/5/466> (cf. p. 72).
- [95] Carlo ROVELLI. « Back to Reichenbach ». In : (2022) (cf. p. 72).
- [96] Carlo ROVELLI et Lee SMOLIN. « Spin Networks and Quantum Gravity ». In : *Physical Review D* 52.10 (nov. 1995), p. 5743-5759. DOI : [10.1103/PhysRevD.52.5743](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5743) (cf. p. 11).
- [97] Carlo ROVELLI et Francesca VIDOTTO. *Covariant Loop Quantum Gravity : An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge University Press, 2014. DOI : [10.1017/CB09781107706910](https://doi.org/10.1017/CB09781107706910) (cf. p. 114).
- [98] AD SAKHAROV. « Cosmological models of the Universe with reversal of time's arrow ». In : *JETP* 52 (1980), p. 349-351 (cf. p. 71).
- [99] Linda SANSONI, Fabio SCIARRINO, Giuseppe VALLONE et al. « Two-Particle Bosonic-Fermionic Quantum Walk via Integrated Photonics ». In : *Phys. Rev. Lett.* 108 (1 2012), p. 010502. DOI : [10.1103/PhysRevLett.108.010502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.010502). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.010502> (cf. p. 107).
- [100] B. SCHUMACHER et R. WERNER. « Reversible Quantum Cellular Automata. » In : (2004) (cf. p. 20).
- [101] C. E. SHANNON. « A Mathematical Theory of Communication ». In : *The Bell System Technical Journal* 27.3 (juil. 1948), p. 379-423. ISSN : 0005-8580. DOI : [10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x) (cf. p. 68).
- [102] Guillaume THEYSSIER. « Automates Cellulaires : Un Modèle de Complexités ». Theses. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, déc. 2005 (cf. p. 65).
- [103] Thomas THIEMANN. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007. DOI : [10.1017/CB09780511755682](https://doi.org/10.1017/CB09780511755682) (cf. p. 114).
- [104] T. TOFFOLI et N. MARGOLUS. « Invertible Cellular Automata : A Review ». In : *Physica D* 45 (1990), p. 229-253 (cf. p. 16).
- [105] B.A. TRAKHTENBROT. « A Survey of Russian Approaches to Perebor (Brute-Force Searches) Algorithms ». In : *Annals of the History of Computing* 6.4 (oct. 1984), p. 384-400. ISSN : 0164-1239. DOI : [10.1109/MAHC.1984.10036](https://doi.org/10.1109/MAHC.1984.10036) (cf. p. 13).
- [106] Alan M. TURING. « Computing Machinery and Intelligence ». In : *Parsing the Turing Test : Philosophical and Methodological Issues in the Quest for the Thinking Computer*. Sous la dir. de Robert EPSTEIN, Gary ROBERTS et Grace BEBER. Dordrecht : Springer Netherlands, 2009, p. 23-65. ISBN : 978-1-4020-6710-5. DOI : [10.1007/978-1-4020-6710-5_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6710-5_3) (cf. p. 12).
- [107] Leslie G. VALIANT. « The Complexity of Enumeration and Reliability Problems ». In : *SIAM Journal on Computing* 8.3 (août 1979), p. 410-421. ISSN : 0097-5397. DOI : [10.1137/0208032](https://doi.org/10.1137/0208032) (cf. p. 13).

- [108] Alexander VILENKIN. « Arrows of time and the beginning of the universe ». In : *Physical Review D* 88.4 (2013), p. 043516 (cf. p. 71).
- [109] J. VON NEUMANN. *Theory of Self-Reproducing Automata*. Champaign, IL, USA : University of Illinois Press, 1966 (cf. p. 13, 15).
- [110] Robert M. WALD. « The arrow of time and the initial conditions of the universe ». In : *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 37.3 (2006). The arrows of time, 2006, p. 394-398. ISSN : 1355-2198. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2006.03.005>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219806000396> (cf. p. 71).
- [111] J. WATROUS. « On One-Dimensional Quantum Cellular Automata ». In : *Foundations of Computer Science, Annual IEEE Symposium on* 528537 (1995), p. 528-537. ISSN : 0272-5428. DOI : [10.1109/SFCS.1995.492583](https://doi.org/10.1109/SFCS.1995.492583) (cf. p. 20).
- [112] Christopher Gregory WEAVER. « On the Carroll–Chen Model ». In : *Journal for General Philosophy of Science* 48.1 (2017), p. 97-124 (cf. p. 71).
- [113] A. S. WEBER. *Nineteenth Century Science : A Selection of Original Texts*. Peterborough, Ont : Broadview Press, 2000. ISBN : 978-1-55111-165-0 (cf. p. 99).
- [114] R. F. WILLIAMS. « Classification of Subshifts of Finite Type ». In : *Recent Advances in Topological Dynamics*. Sous la dir. d'Anatole BECK. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, 1973, p. 281-285. ISBN : 978-3-540-38414-4. DOI : [10.1007/BFb0061747](https://doi.org/10.1007/BFb0061747) (cf. p. 16).
- [115] H Dieter ZEH. « Comment on the "Janus Point" explanation of the arrow of time ». In : *arXiv preprint arXiv:1601.02790* (2016) (cf. p. 71).
- [116] Magdalena ZYCH, Fabio COSTA, Igor PIKOVSKI et al. « Bell's Theorem for Temporal Order ». en. In : (août 2017) (cf. p. 104).

A. Annexe

Réversibilité et création/destruction de sommets

Lemme A.1 (Chemins depuis la matière visible). Soit $Y' \in \overline{\mathcal{Y}}$ avec ε visible, et $v \in V(Y')$. Alors v peut être décomposé en $u \cdot t$, avec $u \in \Pi^*$, et $t \in \{lm, rm\}^*$ si et seulement si v est invisible. De plus, pour tout $s, t \in \{lm, rm\}^*$, on a que $\cdot s \cdot t$ sont dans Y' , et $\cdot s \equiv_{Y'} \cdot t$ si et seulement si $s = t$.

Démonstration. Premièrement on considère $Y \in \mathcal{Y}$ avec ε visible. $\cdot s$ appartient Y et est donc le chemin minimal de $\cdot s$, car la matière invisible forme un arbre. Si v est invisible alors v admet seulement un sommet u connectant son arbre de matière invisible à la matière visible, v peut être décomposé minimalement en $u \cdot t$ avec t dans $\{lm, rm\}^*$.

Cette propriété reste vrai pour la clôture. Soit $Y' \in \overline{\mathcal{Y}}$ avec ε visible. Soit $n = \max(|v|, |s| + 1, |t|)$ et choisissons $Y \in \mathcal{Y}$ tel que $Y'^n = Y^n$. Par définition de $|v|$ on a que p est le plus court chemin depuis ε vers v dans Y si et seulement si c'est le plus court chemin dans Y' . On a donc que la décomposition de v , et son invisibilité quand t n'est pas vide, est conservée dans Y' . C'est également le cas de l'existence de $\cdot s$. Enfin, on a que $\cdot s \equiv_{Y'} \cdot t$ implique $\cdot s \equiv_Y \cdot t$, et donc $s = t$, grâce à la structure en arbre de la matière invisible dans Y . \square

Lemme A.2 (Chemins depuis la matière invisible). Soit $Y' \in \overline{\mathcal{Y}}$ avec ε invisible, et $v \in V(Y')$. Alors v peut être décomposé en $s^{-1} \cdot u$, auquel cas v est visible, ou $s^{-1} \cdot u \cdot t$, auquel cas v est invisible avec $u \in \Pi^*$, et $s, t \in \{lm, rm\}^*$. De plus, tout s, t appartenant $\{lm, rm\}^*$, appartiennent également Y' , et on a donc que $s \equiv_{Y'} t$ si et seulement si $s = t$.

Démonstration. Même schéma de preuve que dans le lemme précédent A.1. \square

Lemme A.3 (Racine invisible finie). Soit $Y' \in \overline{\mathcal{Y}}$. Si Y' ne contient pas de matière visible, alors, pour tout n , il existe un mot u_n dans $\{lm, rm\}^n$ tel que $Y^n = T_{u_n}^n$. En conséquence, u_n^{-1} est l'unique mot appartenant à $\{ml, mr\}^n$ tel que u_n^{-1} appartient à Y' . De plus, si $p \leq n$, alors u_p est le suffixe de u_n .

Démonstration. Considérons Y' dans $\overline{\mathcal{Y}}$. Soit $Y \in \mathcal{Y}$ tel que $Y^n = Y'^n$. Comme Y' ne contient pas de matière visible, $Y' = Y_{\cdot s}$ avec $|s| > n$, et on peut choisir u le suffixe de longueur n de s , et t le préfixe complémentaire, tel que $s = tu$. Y'^n est incluse dans l'arbre de matière invisible enraciné en $Y_{\cdot t}$, on a donc que $Y^n = Y'^n = (Y_{\cdot t})_u^n = T_u^n$. Pour l'unicité, il nous suffit de remarque que pour deux mots u, v de longueur n , $T_u^n = T_v^n$ implique $u = v$.

Comme u_n^{-1} est l'unique mot de longueur n en $\{ml, mr\}^n$ représentant un chemin valide de Y' , son préfixe de longueur p est l'unique mot de longueur p appartenant à $\{ml, mr\}^p$ représentant un chemin valide de Y' , que l'on connaît être u_p^{-1} . \square

Proposition A.1 (Extension à la matière invisible). Soit (F, R_{\cdot}) une dynamique continue et invariante par translation sur \mathcal{Y} . On a que (F, R_{\cdot}) est quiescent sur l'invisible

si et seulement si (F, R_\bullet) peut être étendue continûment à $\overline{\mathcal{Y}}$ en posant $F(T_u) = T_u$ et $R_{T_u} = Id$ pour tout u dans $\{l, r\}^{-\mathbb{N}}$.

Démonstration. On remarque que pour tout Y et $u_{k+1} \in \{lm, rm\}^{k+1} \cap V(Y)$, on a $Y_{u_{k+1}}^k = T_u^k$.

[\Rightarrow]. Soit (F, R_\bullet) une dynamique continue, invariante pas translation et quiescente sur l'invisible. Soit u un mot infini à gauche de $\{lm, rm\}^{-\mathbb{N}}$. La continuité de F sûr \mathcal{Y} dit que pour tout m il existe $n \geq m$ tel que $F(Y)^m = F(Y^n)^m$. Par quiescence de la matière invisible, il existe une borne b telle que pour tout $X, p \in \{lm, rm\}^b, v \in \{lm, rm\}^*$, $R_X(\cdot pv) = R_X(\cdot p)R_{X,p}(v) = R_X(\cdot p)v$. En combinant ces deux propriétés, on obtient que $F(T_u^n)^m = F(X_{u_{b+n+1}}^n)^m = F(X_{u_{b+n+1}})^m = F(X)_{R_X(\cdot u_b)u_{n+1}}^m = T_u^m$. Donc, si on étend F à $\overline{\mathcal{Y}}$ en posant $F(T_u) = T_u$, on obtient que $F(T_u)^m = F(T_u^n)^m$, et donc F reste continue. De manière similaire, la continuité de R_\bullet sur \mathcal{Y} , nous dit que pour tout m il existe $n \geq m$ tel que $R_X^m = R_{X^n}^m$. En combinant une nouvelle fois avec la quiescence sur la matière invisible on a que, $R_{T_u^n}^m = R_{X_{u_{b+n+1}}^n}^m = Id$. Donc, si on étend R à $\overline{\mathcal{Y}}$ en posant $R_{T_u} = Id$, on obtient $R_{T_u}^m = R_{T_u^n}^m$, et donc R reste continue. Cela conclut l'implication de la gauche vers la droite.

[\Leftarrow]. Réciproquement, si on ne suppose plus la quiescence sur l'invisible de (F, R_\bullet) , mais qu'elle peut être étendue continûment sur $\overline{\mathcal{Y}}$ en posant $F(T_u) = T_u$ et $R_{T_u} = Id$. Comme $\overline{\mathcal{Y}}$ est compact, (F, R_\bullet) est uniformément continue par le théorème de Heine-Cantor. Soit c tel que pour tout $Y, a \in Y$, et $|a|=1$, on a $|R_Y(a)| \leq c$. Un tel c existe via l'application du Lemma 3 de [13]. Soit b tel que, pour tout Y , on a :

$$\bullet F(Y)^c = F(Y^b)^c \quad \bullet \text{dom } R_Y^c \subseteq V(Y^b) \quad \bullet R_Y^c = R_{Y^b}^c$$

Prouvons par récurrence que $b+1$ est la borne de la quiescence de la matière invisible. Notre hypothèse de récurrence est donc que pour tout p dans $\{lm, rm\}^{b+1}$ et w dans $\{lm, rm\}^n$, on a $R_{X,p}(w) = w$. L'hypothèse est vraie pour $n=0$, car $R_Y(\varepsilon) = \varepsilon$ pour tout Y par invariance par translation. Supposons maintenant l'hypothèse vraie pour un certain n . Soit $a \in \{lm, rm\}$. On a que $R_{X,p}(wa) = R_{X,p}(w)R_{X,pw}(a)$. Comme $|p|=b+1$ et que $X_{pw}^b = T_{upw}^b$ pour tout mot u infini à gauche appartenant à $\{lm, rm\}^{-\mathbb{N}}$. Par choix de c et b , on a $R_{X,pw}(a) = R_{X_{pw}}^c(a) = R_{X_{pw}^b}^c(a) = R_{T_{upw}^b}^c(a) = R_{T_{upw}}^c(a) = Id^c(a) = a$. En combinant tout cela ensemble, on obtient bien que $R_{X,p}(wa) = wa$. \square

Définition A.1 (fonction de nommage). Soit \overline{F} un NCGD. Pour tout G , nous définissons la fonction de nommage \overline{R}_G comme suit : pour tout $u.t \in V(G).\{l, r\}^*$, pour tout $u'.t' \in V(\overline{F}(G)).\{l, r\}^*$, $\overline{R}_G(u.t) = u'.t'$ si et seulement si $S(u.t) = S'(u'.t')$, où S et S' résultent de l'application du lemme 2.1.8 sur u et u' .

Démonstration. Nous devons prouver que cette définition est solide, c'est-à-dire que pour tout $u.t \in V(G).\{l, r\}^*$, il existe au moins un v et s tel que $S(u.t) = S'(v.s)$ où S et S' résultent de l'application du lemme 2.1.8. Supposons qu'il existe $v_1.s_1$ et $v_2.t_2$ tels que $S_1(u.t) = S'_1(v_1.s_1)$ et $S_2(u.t) = S'_2(v_2.t_2)$. Par construction de S_1 et S_2 , on a qu'il existe $t' \in \{l, r\}^*$ tel que $S_1(u.t)t' = S_2(u.t)$ ou $S_1(u.t) = S_1(u.t)t'$. Sans perte de

généralité, supposons que $S_1(u.t)t' = S_2(u.t)$, donc nous avons les égalités suivantes :

$$S'_1(v_1.s_1)t' = S_1(u.t)t' = S_2(u.t) = S'_2(v_2.s_2)$$

Ensuite, remarquons que pour tout u , pour tout S , $u.t$ est un préfixe de $S(u.t)$, donc nous pouvons réécrire l'égalité précédente comme $v_1.s_1 s'_1 t' = v_2.s_2 s'_2$ avec certains $s'_1, s'_2 \in \{l, r\}^*$. Comme $F(G)$ est un graphe bien nommé, cela implique $v_1 = v_2$. $S_1 = S_2$ et $S'_1 = S'_2$, ce qui nous donne $S'_1(v_1.s_1) = S'_1(v_1.s_2)$. Pour tout u , σ_u est injectif, donc S_1 est injectif et nous avons $v_1.s_1 = v_1.s_2$. Encore une fois, $F(G)$ est un graphe bien nommé, donc $s_1 = s_2$. \square

Lemme A.4. La dynamique induite d'un NCGD est la matière invisible quiescente.

Démonstration. Nous voulons prouver qu'il existe une borne b telle que, pour tout $Y.s$, et pour tout t dans $\{lm, rm\}^*$, nous avons $|s| \geq b \implies R_{Y.s}(t) = t$. Pour R induite par \bar{R} , ceci est impliqué par : pour tout G , pour tout $v \in V(G)$ et s, t dans $\{l, r\}^*$ alors $|s| \geq b$ implique $\bar{R}(v.st) = \bar{R}(v.s)t$.

Tout d'abord, prouvons qu'il existe une borne $b \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $v \in V(G)$ et $v' \in V(F(G))$, $v \wedge v' = \emptyset$ implique qu'il existe $r, r' \in \{l, r\}^*$ telle que $|r| \leq b$, $|r'| \leq b$ et $S(v.r) = S'(v'.r')$. Cela vient du fait que \bar{R} est $S'^{-1} \circ S$ avec S et S' compositions finies de sigmas, dont la longueur totale peut être bornée par b . En effet, S et S' sont calculés à partir de disques de rayon r , et nous avons prouvé dans en posant la définition 2.1.26 que la longueur de S et S' est invariante sous les renommages. Puisqu'il existe un nombre limité de disques de rayon r , nous prenons b comme étant le maximum de ces longueurs.

Par définition de S et S' , on a aussi que pour tout $t \in \{l, r\}^*$, $S(v.r t) = S'(v'.r' t)$ et donc $\bar{R}(v.r t) = v'.r' t$.

Soit $v \in V(G)$, et $s \in \{l, r\}^*$ tels que $|s| \geq b$. Comme F est conservateur de nom, il existe v' tel que $v.s \wedge v' \neq \emptyset$. Comme dit plus haut, il existe $r, r' \in \{l, r\}^*$ tel que $s = r s_2$, $|r| \leq b$, $|r'| \leq b$, $S(v.r) = S'(v'.r')$ et donc $\bar{R}(v.r) = v'.r'$. Mais on a aussi que $S(v.r s_2 t) = S'(v'.r' s_2 t)$, donc $\bar{R}(v.st) = \bar{R}(v.r s_2 t) = v'.r' s_2 t = \bar{R}(v.r) s_2 t$. Pour $t = \varepsilon$, on a que $\bar{R}(v.s) = \bar{R}(v.r) s_2$, ce qui nous donne $\bar{R}(v.st) = \bar{R}(v.r) s_2 t = \bar{R}(v.s) t$. \square

Lemme A.5. La dynamique induite d'un NCGD est continue.

Démonstration. Prouvons d'abord que pour tout $Y \in \mathcal{Y}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F(Y)^m = F(Y^n)^m$. Soit $Y \in \mathcal{Y}$, $G \in \mathcal{W}$ et $v \in V(G)$ tels que $Y = (G^\Delta, v)^\circ$. Remarquons les égalités suivantes :

$$\overline{(G^\Delta, v)^m} = \overline{((G^\Delta)_v^m, v)} = \overline{(G_v^{m\Delta})_v^m, v}$$

On a par définition F que $F(Y)^m = F(\overline{(G^\Delta, v)^m}) = F(\overline{(G^\Delta)_v^m}, \bar{R}(v))^m$. En utilisant la remarque précédente, on a que $F(Y)^m = \overline{(F(G)_v^{m\Delta})_v^m, v}$. Par continuité de \bar{F} , pour $v' = v$ on a qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$F(Y)^m = \overline{(F(G_v^n)_v^{m\Delta})_v^m, \bar{R}_G(v)} = \overline{(F(G_v^n)^\Delta), \bar{R}_G(v))^m} = F(Y^n)^m$$

Concentrons-nous maintenant sur la preuve que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\text{dom } \overline{R}_{(G^\Delta, v)^\circ}^m \subseteq V(\overline{(G^\Delta, v)^n})$ et $\overline{R}_{(G^\Delta, v)^\circ}^m = \overline{R}_{(G^\Delta, v)^n}^m$.

Soit $u.s \in V(G).\{l, r\}^*$ et $u'.s' \in V(G)$ tels que $R(u.s) = u'.s'$. $S(u.s) = S'(u.s')$ donc il existe $t, t' \in \{l, r\}^*$ tel que $u.st = u'.s't'$. Comme $u \wedge u' \neq \emptyset$ et par continuité de \overline{F} on a que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $u' \in \overline{F}(G)_{v'}^m$ alors $u \in V(G_v^n)$.

Soit b la borne de quiescence de la matière invisible. Comme indiqué dans le lemme A.4, S et S' sont une composition bornée de sigmas, donc pour tout $b \in \mathbb{N}$ il existe $b' \in \mathbb{N}$ tel que $|s| \leq b$ implique $|s'| \leq b'$. Si $|s| > b$, alors il existe $s_1, s_2 \in \{l, r\}^*$ tel que $s = s_1 s_2$, $|s_1| \leq b$ et $R(u.s_1 s_2) = R(u.s_1) s_2$. Soit s'_1 tel que $u.s_1 = u'.s'_1$, puis $s'_1 \leq b'$. On a :

$$u'.s' = R(u.s) = R(u.s_1 s_2) = R(u.s_1) s_2 = u'.s'_1 s_2$$

$|s'_1| \leq b'$ et $s_2 \leq |s|$ donc $|s'| \leq b' + |s|$. En résumé, on a que pour tout d , il existe un d' tel que $|s| \leq d$ implique $|s'| \leq d'$. Mais la construction de R est symétrique, on a donc que pour tout d' , il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $|s'| \leq d'$ implique $|s| \leq d$.

Soit $u.s \in V(G)$ et $u'.s' \in V(G)$ tels que $R(u.s) = u'.s'$. Si $u.s \in V(G_v^n)$ alors $u \in V(G_v^n)$ car v est dans la matière visible et $|s| \leq n$. Comme indiqué ci-dessus, il existe une borne m telle que $u \in V(\overline{(G^\Delta, v)^m})$ et il existe une borne d telle que $|s| \leq d$ donc $u.s \in V(\overline{(G^\Delta, v)^{m+d}})$. Puisque $u \in V(\overline{(G^\Delta, v)^{m+d}})$ et $\overline{R}(u.s)$ ne sont calculés qu'à partir de u , nous avons aussi $\overline{R}_{(G^\Delta, v)^\circ}(u.s) = \overline{R}_{(G^\Delta, v)^n}(u.s)$. \square