université
PARIS-SACLAY

Modélisation de la localisation des déformations dans les matériaux adoucissants par une approche eikonale

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences Mécaniques et Énergétiques, Matériaux et Géosciences
Spécialité de doctorat: Génie Civil
Unité de recherche: Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT - Laboratoire de Mécanique et Technologie
Référent: : ENS Paris-Saclay

Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay, le 25 novembre 2021, par

Flavien Thierry

Composition du jury:

Rodrigue Desmorat Professeur, ENS Paris-Saclay	Président du jury
Gilles Pijaudier-Cabot Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur
Nicolas Moës Professeur, École Centrale de Nantes	Rapporteur
Milan Jirásek Professeur, Czech Technical University	Examinateur
Cédric Giry Maître de conférence, ENS Paris-Saclay	Co-encadrant
Giuseppe Rastiello Ingénieur chercheur, CEA Paris-Saclay	Co-encadrant
Fabrice Gatuingt Professeur, ENS Paris-Saclay	Directeur de thèse

Thèse de doctorat
NNT: 2021UPAST114

université PARIS-SACLAY
ÉCOLE DOCTORALE
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Titre: Modélisation de la localisation des déformations dans les matériaux adoucissants par une approche eikonale

Mots clés: Endommagement non-local, Localisation, Discontinuité forte, Identification des paramètres

Résumé: La mécanique de l'endommagement est couramment utilisée pour modéliser le comportement adoucissant des matériaux quasi-fragiles. La perte d'ellipticité des équations d'équilibre lors des phases adoucissantes peut conduire à la localisation des déformations dans des zones de tailles infinitésimales et à des dissipations d'énergie fallacieuses. Les méthodes non-locales permettent de régulariser le problème en considérant que le comportement d'un point matériel dépend du comportement des point matériels de son voisinage. Dans ce contexte, la méthode non-locale eikonale pour l'endommagement propose de calculer les interactions non-locales en fonction de l'évolution du champ d'endommagement et ainsi résoudre le problème de diffusion de l'endommagement caractéristique de la méthode intégrale non-locale classique où les interactions restent constantes.

Ce travail présente l'implémentation numérique et l'étude des propriétés de régularisation de la méthode non-locale eikonale. L'étude est d'abord menée dans un contexte unidimensionnel afin de mettre en évidence l'influence de l'endommagement sur le processus de localisation des déformations. Une perte d'objectivité des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale est constatée pour des niveau d'endommagement élevés. La transition du modèle d'endommagement non-local eikonal vers un modèle à discontinuité forte est alors proposée afin de retrouver l'objectivité des résultats. L'étude est poursuivie dans un contexte bidimentionnel à l'aide du solveur aux élément finis Cast3M et la procédure de calcul des interactions non-locales en deux dimensions est présentée. La transition du modèle d'endommagement non-local eikonal vers un modèle à discontinuité forte est développée dans le cadre des éléments finis enrichis. Enfin, une procédure d'identification des paramètres du modèle d'endommagement non-local eikonale est proposée. Un modèle de krigeage est construit à partir des résultats de simulations numériques du modèle d'endommagement. Les paramètres du modèle d'endommagement sont alors identifiés à l'aide d'un algorithme d'optimisation génétique utilisant le modèle de krigeage pour estimer la réponse du modèle d'endommagement.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France

université PARIS-SACLAY

université PARIS-SACLAY
ÉCOLE DOCTORALE
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Title: Modeling the localization of deformations in softening media by an eikonal non-local approach

Keywords: Non-local damage, Localization, Strong discontinuity, Model parameter identification

Abstract: Damage mechanics is commonly used to model the softening behavior of quasi-brittle materials such as concrete. The loss of ellipticity of the equilibrium equations during softening phases can lead to the localization of deformations in areas of infinitesimal size and to spurious energy dissipation. Non-local methods allow to regularize the problem by considering that the behavior of a material point depends on the behavior of material points in its vicinity. In this context, the eikonal non-local method for damage proposes to calculate the non-local interactions according to the evolution of the damage field in order to avoid the pathological damage diffusion observed for the classical integral non-local method where interactions remain constant.

The numerical implementation and the study of the regularization properties of the eikonale non-local method is presented in this work. The study is first conducted in a one-dimensional context in order to highlight the influence of damage on the deformation localization process. A loss of objectivity of results with respect to spatial discretization is observed for high damage levels. The transition from the eikonal non-local damage model to a strong discontinuity model is then proposed in order to recover objectivity. The study is then continued in a two-dimensional context using the finite element solver Cast3M and the procedure for calculating non-local interactions in two dimensions is presented. The transition from the eikonal non-local damage model to a strong discontinuity model is developed in the embedded finite element framework. Finally, a procedure for identifying the parameters of the eikonal non-local damage model is proposed. A Gaussian Process Regression model is constructed from the results of numerical simulations of the damage model. The parameters of the damage model are then identified using a genetic optimization algorithm using the Gaussian Process Regression model to estimate the response of the damage model.

Bien que placée en avant propos, cette partie constitue en réalité une seconde conclusion. Il s'agit ici de reconnaître humblement les personnes qui ont pu me soutenir, m'aider ou m'influencer dans mon travail pendant toutes ces années.

Tout d'abord, il me faut remercier les membres du jury d'avoir accepté d'examiner et de critiquer mon travail. Je remercie les professeurs Gilles Pijaudier-Cabot et Nicolas Moës d'avoir pris le temps de lire ce manuscrit afin de rapporter cette thèse. Je remercie également Rodrigue Desmorat d'avoir pris en charge la présidence de ce jury. Enfin, je souhaite remercier particulièrement Milan Jirásek d'avoir accepté de participer à la soutenance en français.

Je remercie maintenant mes trois encadrants de m'avoir confié ce sujet et pour leur patience cette dernière année. Je les remercie aussi d'avoir partagé leurs connaissances et m'avoir appris autant. Je les remercie de m'avoir réservé une part conséquente de programmation. Ce travail fastidieux, et même fastueux, m'a énormément aidé dans la compréhension de la mécanique numérique. Merci à Fabrice Gatuingt que j'ai beaucoup, beaucoup, sollicité, notamment ces deux dernières années. Merci d'avoir su m'aiguiller quand je me posais trop de question mais aussi de m'avoir laissé un peu de liberté pour explorer différentes choses. Merci à Cédric Giry pour sa disponibilité et d'avoir partager son expérience des modèles non-locaux. Merci également d'avoir toujours réussi à me proposer une solution pragmatique et pertinente à mes problèmes techniques. Je remercie Giuseppe Rastiello d'avoir été aussi exigeant et de m'avoir transmis le soucis du détail. Cela a été un réel plaisir de pouvoir travailler avec cette équipe d'encadrement.

Merci au CEA et à l'équipe Cast3M de fournir les sources de leur code de calcul pour pouvoir ajouter nos propres méthodes. Je remercie particulièrement Olivier Fandeur d'avoir pris le temps de m'aider à résoudre quelques bugs dans le calcul non-local.

Il me faut également remercier l'ensemble des doctorants et des permanents du LMT d'entretenir un environnement aussi agréable. Je les remercie également de m'avoir aidé à préparer la soutenance. Merci à Bruno Soulier, Pierre-Alain Boucard et Amélie Fau pour leurs précieux conseils à propos du krigeage et de la procédure d'identification. Merci à l'équipe du mésocentre d'être aussi réactive et je remercie particulièrement Philippe Sanchez pour son assistance sur le cluster et en fortran. Merci aussi au DGC et à la formation SAPHIRE de m'avoir confié une mission d'enseignement. Merci à l'équipe pédagogique et à Pascale Boutard pour cette expérience instructive.

Je remercie Sebastian, Pascale, Livio, Aya, Ariane, Clotilde, Justin, Thibaud, Pierre, Thomas-David, Philippe, Florian et Florian pour les discussions, scientifiques ou non, et les bons moments passés au LMT ou à la réserve. Il est difficile de trouver les mots justes pour exprimer tout ma reconnaissance envers Bastien, Benoit, Pierre-Jean, Nicolas et Francesco pour leur amitié sans faille.

Enfin, je remercie ma famille et mes parents, condition nécessaire, pour leur soutien inconditionnel, permanent et stationnaire.

Table des matières

Table des matières i

Table des figures v

Liste des tableaux ix

Introduction 1

1 Modélisation des matériaux quasi-fragiles 3

1 Comportement expérimental des matériaux quasi-fragiles 5

1.1 Comportement macroscopique 5

1.2 Processus de fissuration 7

1.3 Résumé 8

2 Définition du problème de mécanique et résolution 9

2.1 Définition du problème mécanique 9

2.2 Résolution numérique 10

2.3 Résumé 12

3 Modélisation des matériaux adoucissants 12

3.1 Principes thermodynamiques 12

3.2 Méthode de l'état local 13

3.3 Élasticité 14

3.4 Modèles de plasticité 15

3.5 Endommagement 17

4 Modélisation de la localisation des déformations 23

4.1 Problème de localisation pour les matériaux adoucissants 23

4.2 Mécanique de la rupture 26

4.3 Enrichissement cinématique 27
4.4 Méthodes non-locales 28
5 Conclusion du chapitre 33

2 Étude de la formulation Eikonale Non-Locale en 1D 35
1 Présentation du problème mécanique unidimensionnel 37
1.1 Formulation du modèle d'endommagement non-local eikonal 37
1.2 Définition du problème 40
1.3 Calcul numérique des distances et des interactions non-locales 44
1.4 Algorithme de résolution aux éléments finis 45
2 Modélisation de la localisation des déformations en 1D par l'approche non-locale eikonale 46
2.1 Présentation de l'étude et considérations numériques 46
2.2 Réponse représentative du comportement de la formulation ENL 47
2.3 Influence du paramètre α de la métrique 53
2.4 Remarques sur l'isolation de l'élément central 54
3 Propriétés de régularisation du modèle d'endommagement non-local eikonal 57
3.1 Influence de la discrétisation spatiale 57
3.2 Identification d'un endommagement critique 58
3.3 Modification de la métrique pour améliorer les propriétés de régularisation . . . 60
4 Transition vers un modèle à discontinuité forte 61
4.1 Présentation de la nouvelle formulation 62
4.2 Identification d'une loi cohésive 64
4.3 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec transition 66
5 Conclusion du chapitre 69

3 Étude de la formulation Eikonale Non-Locale en 2D 73
1 Implémentation de la formulation ENL dans un solveur éléments finis 75
1.1 Méthodes numériques de résolution de l'équation eikonale 75
1.2 Présentation de la méthode Fast Marching 76
1.3 Calcul du champ de distance 80
1.4 Compléments sur la discrétisation de la grille Fast Marching 83
2 Exemple d'application : poutre en flexion trois points 85
2.1 Présentation de l'étude 85

2.2 Traitement des conditions aux limites 89
2.3 Propriétés de régularisation de la méthode ENL en 2D 92
3 Études préliminaires d'une approche de transition endommagement ENL – discontinuité forte 101
3.1 Formulation du modèle ENL-EFEM et validation 101
3.2 Propagation de fissure et comportement non-local 104
4 Conclusion du chapitre 107

4 Identification des paramètres du modèle d'endommagement non-local eikonal 109
1 Méthodes d'identification des paramètres 111
1.1 Liste des paramètres 111
1.2 Identification des paramètres non-locaux dans la littérature 112
1.3 Problème d'optimisation 113
1.4 Algorithmes et méthodes classiques 114
1.5 Algorithmes évolutionnistes 115
2 Méthode d'identification des paramètres du modèle ENL 116
2.1 Procédure de la méthode d'identification 117
2.2 Définition du méta-modèle 118
3 Exemple d'application sur un test de flexion 3 points 119
3.1 Présentation de l'étude 119
3.2 Identification des paramètres 124
4 Conclusion du chapitre 136

Conclusion 139

A Figures complémentaires au chapitre 2 143
1 Propriétés de régularisation du modèle d'endommagement non-local eikonal 143
1.1 Propriétés de régularisation avec limitation de la métrique 143

B Résolution numérique aux éléments finis enrichis 149
1 Description de la discontinuité et notations 149
2 Déformation de l'élément 150
3 Contraintes dans l'élément 151

Bibliographie 155

Table des figures

1.1 Réponses macroscopiques du béton en traction et compression simples 5

1.2 Résistance du béton en chargement biaxial [Lee *et al.*, 2004] 6

1.3 Illustration de l'effet unilatéral du béton [Mazars *et al.*, 1990] 7

1.4 Mesure de la position et de l'énergie d'événements acoustique lors du développement de la fissuration dans une éprouvette en flexion trois points [Alam *et al.*, 2014] 8

1.5 Formation de la fissure par coalescence des micro-fissures et répartition des contraintes selon [Wittmann et Hu, 1991] 9

1.6 Problème de mécanique des milieux continus 10

1.7 Exemple de surfaces de charge en contraintes planes pour la plasticité 17

1.8 Exemple de surfaces de charge en contraintes planes pour l'endommagement 20

1.9 Critère de plasticité du modèle CDPM 22

1.10 Réponses du modèle de [Jason *et al.*, 2006] 23

1.11 Mise en évidence de la localisation des déformations dans une barre 1D 24

1.12 Schématisation de la surface de localisation 25

1.13 Effet de la localisation des déformations en éléments finis ([Lorentz, 2008]) 26

1.14 Modes d'ouverture d'une fissure ([Anderson et Anderson, 2005]) 27

1.15 Définition de la zone cohésive en pointe de fissure ([Elices *et al.*, 2002]) 27

1.16 Présence d'une discontinuité dans un milieu 28

1.17 Mise en évidence de l'initiation incorrecte de la fissuration par la méthode non-locale intégrale ([Simone *et al.*, 2004]) 30

1.18 Mise en évidence du phénomène de diffusion de l'endommagement en 1D de la méthode non-locale intégrale 30

1.19 Introduction d'une zone cohésive dans la bande de localisation pour un modèle à gradient de variables internes ([Cuvilliez *et al.*, 2012]) 31

2.1 Illustration de l'influence de l'endommagement sur le calcul des interactions non-locales 39

2.2 Illustration de l'influence de l'endommagement et du paramètre α sur les valeurs de la fonction métrique définie dans l'équation (2.13) . . . 39
2.3 Géométrie du problème unidimensionnel . . . 40
2.4 Affaiblissement du module d'Young le long de la barre pour un maillage de 81 éléments 47
2.5 Réponse globale représentative du comportement de la formulation ENL (81 éléments) . 48
2.6 Profils d'endommagement le long de la barre pour différents pas de chargement (81 éléments) . . . 49
2.7 Profil de déformation non-locale le long de la barre pour différends pas de chargement (81 éléments) . . . 50
2.8 Évolution de l'endommagement et de la déformation au centre de la barre (81 éléments) 52
2.9 Réponse globale représentative du comportement de la formulation ENL (81 éléments) . 53
2.10 Influence de l'équation de pilotage sur la réponse de la formulation ENL1 . . . 54
2.11 Réponses globales pour différentes valeurs de α – 81 éléments . . . 55
2.12 Profils d'endommagement pour différentes valeurs de α au dernier pas de chargement – 81 éléments . . . 56
2.13 Influence du paramètre α sur l'énergie dissipée – 81 éléments . . . 57
2.14 Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.5$ . . . 58
2.15 Influence de la discrétisation spatiale sur l'énergie dissipée . . . 59
2.16 Détermination de l'endommagement critique . . . 60
2.17 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – Réponses globales . . . 62
2.18 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – Erreurs maximales . . . 63
2.19 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec transition . . . 67
2.20 Évolution de quantités d'intérêts pour le modèle ENL avec transition . . . 68
2.21 Lois cohésives identifiées à partir des solutions de références pour les méthodes ENL1 et ENL2 . . . 69
2.22 Lois cohésives identifiées à partir des solutions avec métrique limitée . . . 70
2.23 Réponses globales du modèle ENL-CZM . . . 71

3.1 Convergence de la méthode Fast Marching pour une métrique uniforme et comparaison de l'ordre d'expression du gradient de distance . . . 79
3.2 Comparaison des temps de calcul de la méthode Fast Marching à l'ordre 1 et à l'ordre 2 . 79
3.3 Schématisation de la méthode de construction de la grille Fast Marching et de récupération des distances (M_0 : point d'intégration de départ) . . . 81
3.4 Illustration de la méthode de projection de la métrique . . . 82

3.5 Erreur d'approximation pour la méthode Fast Marching à l'ordre 2 84
3.6 Erreur d'approximation de la méthode Fast Marching au point d'intégration le plus proche 86
3.7 Géométrie de la poutre en flexion 3 points et exemple de maillage (zone bleue : zone au comportement non-locale) 87
3.8 Champs de déformation équivalente locale et non-locale (INL) en présence d'une entaille 89
3.9 Champs de déformation équivalente non-locale (ENL) en présence d'une entaille – Paramètres : $L_b = \ell_c/2$ et $\nu = 0.2$ 91
3.10 Décalage du maximum de déformation équivalente non-locale en présence d'une entaille – Paramètres : $\nu = 0.2$ 92
3.11 Influence d'un champ d'endommagement fictif sur l'initiation de l'endommagement en pointe d'entaille 93
3.12 Réponse globale en flexion 3 points pour le modèle d'endommagement ENL 95
3.13 Localisation des déformations pour la formulation ENL en 2D – $\alpha = 0.5$ 96
3.14 Isovaleurs d'endommagement en flexion 3 points – $\alpha = 0.5$ 96
3.15 Isovaleurs de déformation équivalente non-locale en flexion 3 points – $\alpha = 0.5$ 97
3.16 Régularisation par limitation de la métrique 98
3.17 Diffusion de l'endommagement pour la formulation ENL à métrique limitée en 2D – $\alpha = 0.5$ 99
3.18 Isovaleurs d'endommagement en flexion 3 points avec métrique limitée – $\alpha = 0.5$ 99
3.19 Isovaleurs de déformation équivalente non-locale en flexion 3 points avec métrique limitée– $\alpha = 0.5$ 100
3.20 Validation du modèle ENL-EFEM sur un tirant en traction-compression 105
3.21 Incompatibilité entre le modèle d'endommagement non-local eikonal et E-FEM en 2D – Zoom sur la pointe d'entaille 106

4.1 Paramètres du modèle ENL à identifier 111
4.2 Exemple de mesure de la taille de la FPZ avec peinture mécano-luminescente ([Kim *et al.*, 2020]) – (a-b) Histogramme – (c–d) mesure de la FPZ 112
4.3 Courbe granulométrique pour la construction du matériau numérique 120
4.4 Réponses globales de l'expérience menée sur les 5 tirages de la mésostructure 122
4.5 Expérience numérique sur un matériau modélisé à l'échelle de la mésostructure 123
4.6 Résultats de simulation sur le premier tirage 127
4.7 Répartition des mesures de pic de résistance pour le tirage initial 127
4.8 Ensemble solution après la première identification 128
4.9 Résultats de simulation sur le second tirage 130

4.10 Répartition des mesures de pic de résistance pour le deuxième tirage 130
4.11 Ensemble solution après la deuxième identification sur le pic de résistance 131
4.12 Répartition des mesures d'énergie dissipée pour le tirage initial 132
4.13 Ensemble solution après la première identification 133
4.14 Ensemble solution de la fonction-objectif $\tilde{f}_2$ après la première identification 134
4.15 Résultats de simulation sur le second tirage après identification sur l'énergie dissipée ($\tilde{f}_2$) 135
4.16 Répartition des mesures d'énergie dissipée pour le second tirage après identification sur une valeur fictive de l'énergie dissipée 135
4.17 Front de Pareto après le premier tirage 136
4.18 Ensemble solution de la fonction-objectif $\tilde{f}_{12}$ après la première identification 138

A.1 Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.1$ 144
A.2 Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.3$ 144
A.3 Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.5$ 145
A.4 Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.8$ 145
A.5 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.1$ . . 146
A.6 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.3$ . . 146
A.7 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.5$ . . 147
A.8 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.8$ . . 147

B.1 Schéma de la formulation E-FEM 150

Liste des tableaux

1.1 Variables thermodynamiques 14

2.1 Valeurs numériques des paramètres pour la résolution aux éléments finis en 1D 47

3.1 Valeurs des paramètres pour l'étude en flexion 3 points 93

4.1 Mesure des paramètres élastiques du matériau numérique 121
4.2 Mesure des quantités à identifier 124
4.3 Plage de variation des paramètres à identifier 126

Introduction

Les matériaux quasi-fragiles comme le béton composent la majeure partie des constructions du Génie Civil en France. La fissuration de ce type de matériau joue un rôle important sur la résistance et la durabilité des structures. Sur certaines structures à risque comme les enceintes de confinement de centrale nucléaire, l'étude de la fissuration du béton afin d'en tirer des informations sur la perméabilité de la structure est particulièrement cruciale. Il convient donc de développer des méthodes et des outils permettant de répondre à ces enjeux.

La méthode des éléments finis et ses extensions sont de plus en plus populaires pour le dimensionnement, la justification et plus largement l'étude de structures complexes. La mise en œuvre de ces méthodes numériques nécessite au préalable l'identification de loi de comportement permettant de modéliser le matériau. Parmi ces lois, la théorie de l'endommagement se distingue pour représenter les dégradations dans les matériaux quasi-fragile. Cependant, cette catégorie de modèles, dits adoucissants, introduit un phénomène de localisation et en conséquence le problème de dépendance pathologique des résultats de simulation numérique au maillage.

Il a été montré expérimentalement que la fissuration dans certains matériaux quasi-fragiles intervient après le développement d'une zone d'élaboration de taille finie. Le développement des micro-fissures dans cette zone d'élaboration mène à la formation d'une macro-fissure par coalescence. L'approche « eikonale » pour l'endommagement s'inscrit dans la catégorie des modèles non-locaux permettant de modéliser ce phénomène. En particulier, les méthodes intégrales non-locales considèrent que l'évolution des dégradations dans le matériau est liée à des interactions non-locales, c'est-à-dire que le comportement d'un point matériel dépend du comportement de son voisinage. Originellement, ce type de méthode donne à une interaction non-locale une magnitude dépendant de la distance euclidienne entre les deux points matériels considérés sans prendre en compte l'état mécanique du matériau ni les caractéristiques géométriques du milieu. Au contraire, l'approche « eikonale », développée récemment, introduit dans le problème de mécanique une équation eikonale sur le champ de distance. La magnitude des interactions est alors calculée en fonction des distances géodésiques dans une variété riemannienne courbée par l'état d'endommagement du matériau.

Les premières études publiées récemment sur la méthode non-locale eikonale appliquée à l'endommagement ont montré la capacité de cette méthode à modéliser la transition entre le développement de la zone d'élaboration de la fissuration et la localisation des dégradations pour former une macro-fissure. Les travaux rapportés dans ce manuscrit s'intéressent à l'étude approfondie de l'approche « eikonale » pour l'endommagement en se concentrant en particulier sur le processus de localisation intervenant à de hauts niveaux d'endommagement.

Pour répondre à l'objectif fixé, ces travaux se divisent en quatre parties. Le premier chapitre pose les cadres théorique et numérique des études présentées dans ce manuscrit. Les principaux résultats

des études expérimentales menées sur le béton permettent de préciser les objectifs de modélisation du modèle étudié. La place du modèle d'endommagement non-local parmi les méthodes et modélisations des matériaux quasi-fragiles est restituée dans la troisième partie de ce premier chapitre.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'étude du modèle dans un contexte unidimensionnel. Les études de ce chapitres sont réalisées à l'aide d'un code aux éléments finis développé sur Matlab dans le cadre de cette thèse. Le comportement du modèle face au phénomène de localisation est analysé grâce à ce code spécialement conçu pour l'étude des modèles non-locaux. Les propriétés de régularisation sont comparées à la méthode non-locale intégrale originale. L'introduction d'une discontinuité forte pour modéliser la localisation est présentée dans la dernière partie de ce chapitre. La transition du modèle non-local eikonal est caractérisée par l'identification d'un endommagement critique. Les propriétés de régularisation du nouveau modèle sont illustrées et des méthodes d'identification du modèle de discontinuité forte sont proposées.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'extension du modèle non-local eikonal dans un contexte 2D. L'ajout d'une nouvelle dimension implique un changement catégorique du calcul des distances effectives en fonction du champ d'endommagement. En effet, il est nécessaire de faire appel à une méthode de résolution numérique de l'équation Eikonale. L'implémentation du modèle est réalisée dans le code de calcul industriel Cast3M. Les détails de l'implémentation numérique sont discutés. En particulier, la relation entre le calcul numérique des distances effectives et le calcul non-local est explicitée. Le cadre fourni par l'équation eikonal et plus précisément la fonction métrique est utilisé pour aborder le traitement des conditions aux limites vis-à-vis du calcul non-local. Enfin, une étude préliminaire sur la transition vers un modèle de discontinuité forte dans le cadre des éléments finis enrichis est présentée.

Bien que la littérature propose de nombreuses méthodes efficaces pour l'identification des paramètres de modèles de comportement, l'identification de la longueur caractéristique spécifique aux modèles non-locaux reste un sujet ouvert. Une procédure d'identification est proposée dans le dernier chapitre. Cette procédure d'identification se base sur un algorithme génétique pour déterminer les paramètres. Le point clé de la procédure réside dans le remplacement des évaluations du modèle dans l'algorithme génétique par un méta-modèle afin d'éviter un coût de calcul prohibitif. Un exemple de matériau numérique est utilisé dans le but de simuler les résultats d'une expérience et fournit un cas d'application pour la procédure d'identification. Cet exemple d'application permet de montrer les capacités de la procédure d'identification proposée à identifier les paramètres du modèle non-local eikonal.

Chapitre 1

Modélisation des matériaux quasi-fragiles

Ce chapitre définit le contexte de modélisation dans lequel s'insère l'approche non-locale eikonale. Le comportement expérimental des matériaux quasi-fragiles est d'abord étudié. Les grands principes de la modélisation en mécanique des milieux continus sont présentés et le cadre de la résolution numérique aux éléments finis est posé. Les lois des comportements classiques telles que l'endommagement sont ensuite présentées. Enfin, la dernière partie positionne l'approche non-locale eikonale dans le contexte des méthodes de modélisation de la localisation des déformations.

Sommaire

1 Comportement expérimental des matériaux quasi-fragiles 5
1.1 Comportement macroscopique 5
1.2 Processus de fissuration 7
1.3 Résumé 8
2 Définition du problème de mécanique et résolution 9
2.1 Définition du problème mécanique 9
2.2 Résolution numérique 10
2.3 Résumé 12
3 Modélisation des matériaux adoucissants 12
3.1 Principes thermodynamiques 12
3.2 Méthode de l'état local 13
3.3 Élasticité 14
3.4 Modèles de plasticité 15

3.5 Endommagement 17
4 Modélisation de la localisation des déformations 23
4.1 Problème de localisation pour les matériaux adoucissants 23
4.2 Mécanique de la rupture 26
4.3 Enrichissement cinématique 27
4.4 Méthodes non-locales 28
5 Conclusion du chapitre 33

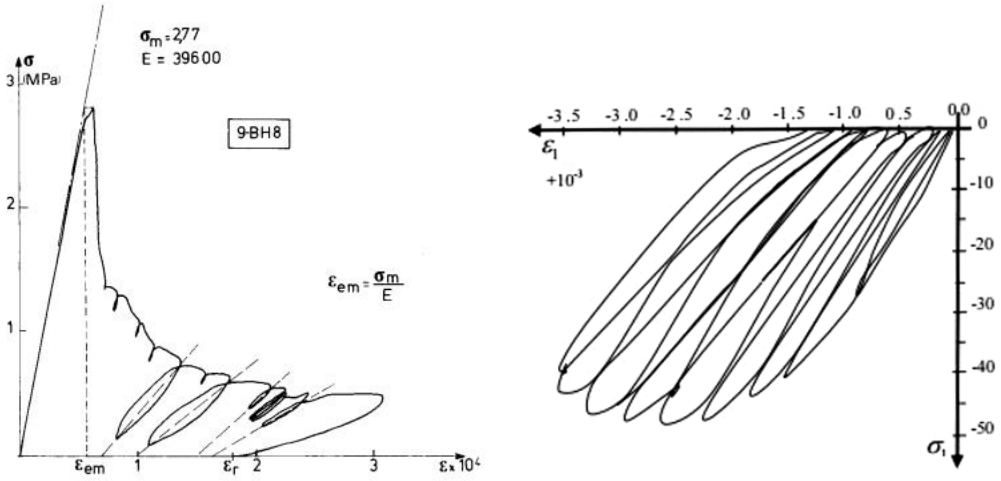
1 Comportement expérimental des matériaux quasi-fragiles

Avant d'essayer de modéliser un matériau, il paraît nécessaire d'étudier son comportement expérimental. Dans cette partie, un matériau à matrice cimentaire est utilisé comme exemple pour montrer les principales caractéristiques comportementales des matériaux quasi-fragiles que ce manuscrit cherchera à modéliser dans la prochaine partie. Cette partie se concentre en premier lieu sur la réponse du matériau béton face à certaines sollicitations mécaniques afin d'observer son comportement macroscopique. À partir de ces résultats, les mécanismes de fissuration expliquant la ruine du matériau seront étudiés.

1.1 Comportement macroscopique

1.1.1 Comportement uniaxial

Les essais entrepris par [Terrien, 1980] ont permis de mettre en évidence le comportement post-pic du béton en traction. La réponse macroscopique du béton est illustrée sur la FIG.1.1a. La courbe de réponse peut-être divisée en trois phases distinctes. La première phase correspond à la phase élastique linéaire du béton. Le développement de micro-fissures diffuses se retranscrit sur la partie non-linéaire de la courbe avant le pic de résistance. Le pic de résistance est atteint lorsque les micro-fissures localisent en une macro-fissure se propageant à travers l'éprouvette faisant chuter brutalement la résistance mécanique. Il faut noter qu'avec l'apparition de la fissuration et des non-linéarités sur la courbe de réponse, une dégradation de la rigidité peut être observée. Ce type de comportement adoucissant en traction est caractéristique des matériaux quasi-fragiles.



(a) Traction d'après [Terrien, 1980] **(b)** Compression d'après [Ramtani, 1990]

FIGURE 1.1: Réponses macroscopiques du béton en traction et compression simples

Les essais expérimentaux menés par [Ramtani, 1990], illustrés sur la FIG.1.1b, montrent une rupture plus ductile du béton en compression simple. Les travaux de [Mazars, 1984] ont permis de mettre en évidence que les extensions ont un rôle majeur dans la formation des micro-fissures qui se développent alors parallèlement au sens du chargement par effet Poisson. Ce comportement particulier est à l'origine de la

dissymétrie du comportement en traction/compression et explique la résistance améliorée en compression par rapport à la traction. Par ailleurs, une augmentation du volume, appelée dilatance, est observée dès l'apparition de micro-fissures.

Ces essais ont aussi permis de mettre en évidence l'apparition de déformations permanentes lors de la décharge d'un matériau ayant subit des dégradations. Ces déformations permanentes s'expliquent différemment selon le matériau considéré. Dans le cas du béton, la rugosité des fissures limite leurs fermetures lors de la décharge, faisant apparaître des déformations permanentes par incompatibilité des lèvres de la fissure. L'effet collatéral de la dilatance, correspondant à une augmentation du volume du matériau s'explique par ce même phénomène.

1.1.2 Comportement multi-axial

Les matériaux quasi-fragiles montrent parfois un comportement multi-axial caractéristique. La campagne expérimentale menée par [Lee *et al.*, 2004] avait pour objectif de fournir des données pertinentes pour la recherche et la calibration de modèles de comportement pour le béton. Dans ces essais, les éprouvettes sont en forme de pavé et soumises à des chargements multi-axiaux.

Les résistances face à ces chargements sont rapportées sur la FIG.1.2. D'autres études plus anciennes comme [Nelissen, 1972] avaient déjà permis de mettre en évidence l'augmentation de résistance du béton en bicompression. Ce résultat s'explique par la fissuration qui se développe perpendiculairement aux extensions. Dans le cas de la bicompression, les extensions suivant le deuxième axe de chargement sont contraintes par la compression, perturbant ainsi le développement des dégradations.

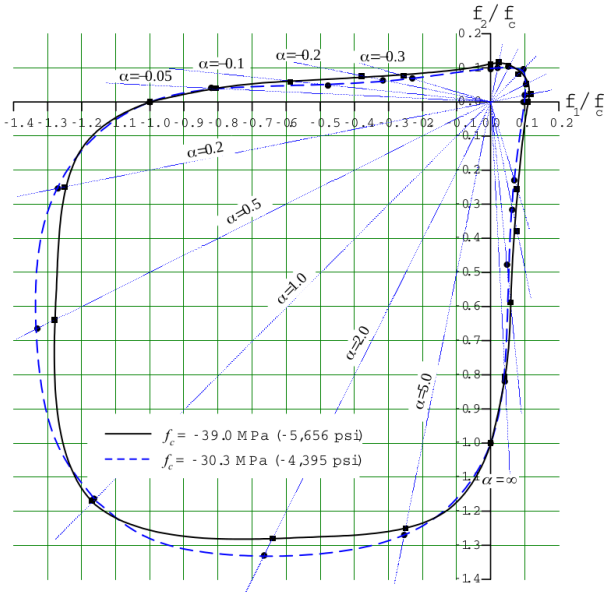


FIGURE 1.2: Résistance du béton en chargement biaxial [Lee *et al.*, 2004]

1.1.3 Effet unilatéral

Dans le béton, l'orientation des fissures a une grande importance sur le comportement cyclique comme l'ont montré les essais expérimentaux menés par [Mazars *et al.*, 1990]. Dans l'essai présenté, dont la courbe de réponse est présentée dans la FIG.1.3, l'éprouvette est d'abord chargée en traction de manière à endommager le matériau. L'éprouvette est ensuite déchargée puis chargée en compression. Les résultats montrent le rétablissement de la rigidité en compression. Ce phénomène s'explique par la fermeture des fissures formées en traction lors du passage en compression. En effet, les fissures formées lors de la traction sont orientées perpendiculairement à la direction de chargement, lors de la décharge, ces fissures se ferment, laissant apparaître des déformations permanentes. Les fissures ainsi formées ont alors peu d'influence sur le comportement élastique en compression.

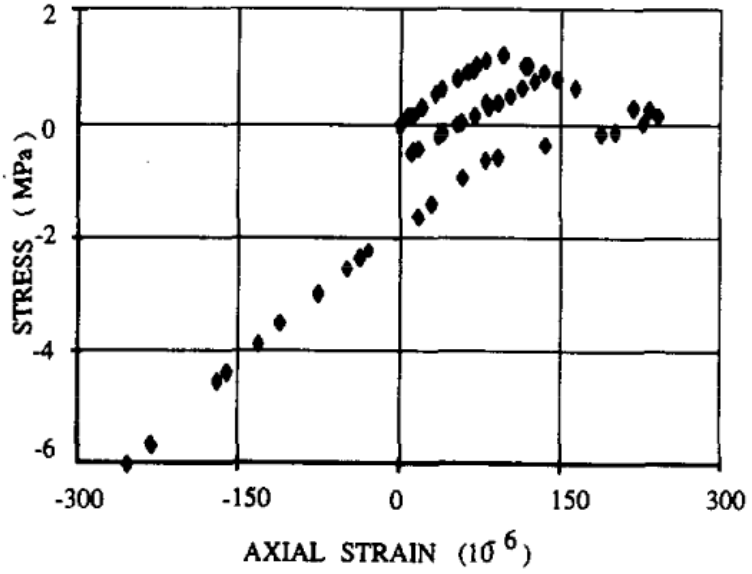
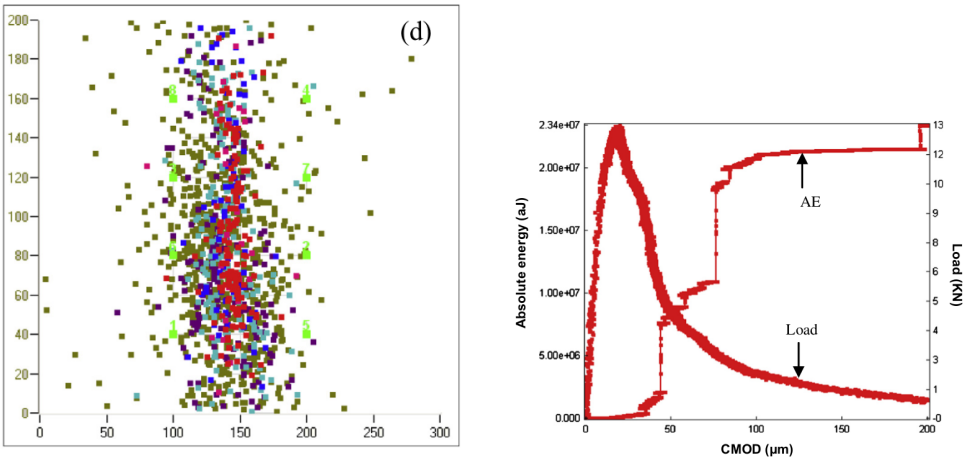


FIGURE 1.3: Illustration de l'effet unilatéral du béton [Mazars *et al.*, 1990]

1.2 Processus de fissuration

L'étude du comportement macroscopique du béton a permis de mettre en évidence l'importance du développement des micro-fissures et de l'orientation des fissures. Le béton étant un matériau hétérogène, les propriétés élastiques des différents composants imposent une incompatibilité des déformations menant à la formation de micro-fissures.

La formation et l'évolution de la zone d'élaboration de la fissure ont pu être observées expérimentalement grâce à la mesure d'événements acoustiques. En mesurant la position et l'énergie libérée des événements acoustiques, il est possible d'observer le développement de la zone d'élaboration de la fissure. Des expériences menées sur des éprouvettes de béton en traction ([Otsuka et Date, 2000]) et en flexion trois points ([Haidar *et al.*, 2005]) ont établi que la taille de la zone d'élaboration de la fissure n'est pas négligeable devant les dimensions des composants granulaires du béton. La FIG.1.4 montre les résultats obtenus par [Alam *et al.*, 2014] en chargeant une éprouvette de béton en flexion trois points.



(a) Relevé cumulé des événements acoustiques **(b)** Corrélation entre les événements acoustiques et le chargement

FIGURE 1.4: Mesure de la position et de l'énergie d'événements acoustique lors du développement de la fissuration dans une éprouvette en flexion trois points [Alam *et al.*, 2014]

[Shah et Ouyang, 1994] et [Wittmann et Hu, 1991] expliquent que ces micro-fissures coalescent pour former une macro-fissure comme illustré sur la FIG.1.5. La présence de granulats moins ductiles que la matrice cimentaire peut faire dévier le front de fissure ou limiter son ouverture en opposant une résistance mécanique.

Pour résumer, la formation d'une fissure ouverte s'effectue en trois phases, une première phase où des micro-fissures se forment, dans un deuxième temps ces micro-fissures se joignent pour former une fissure cohésive capable d'opposer une résistance mécanique à l'ouverture de la fissure, et enfin une dernière phase où la fissure continue de s'ouvrir sans résistance.

La dispersion des événements acoustiques sur l'éprouvette montre que le processus de formation d'une fissure n'est pas un processus localisé en pointe de fissure. L'ouverture de la fissure est dépendante du comportement du matériau dans le voisinage de la pointe de fissure et l'énergie totale libérée pendant la formation d'une fissure correspond à la somme de l'énergie libérée lors de l'ouverture de la fissure mais aussi lors de nucléation des micro-fissures qui n'ont pas participé directement à l'ouverture de la fissure visible.

1.3 Résumé

Ce manuscrit se concentre sur la modélisation de matériaux quasi-fragiles dont le comportement correspond au comportement du béton étudié ci-dessus. Plus précisément, pour un chargement uniaxial, la réponse mascrocopique observe une phase pré-pic linéaire suivie d'une phase non-linéaire et d'un comportement post-pic adoucissant. Ce manuscrit s'intéresse aussi à la modélisation de la zone d'élaboration de la fissure, de son développement dans une zone de taille finie jusqu'à la coalescence des dégradations en une macro-fissure.

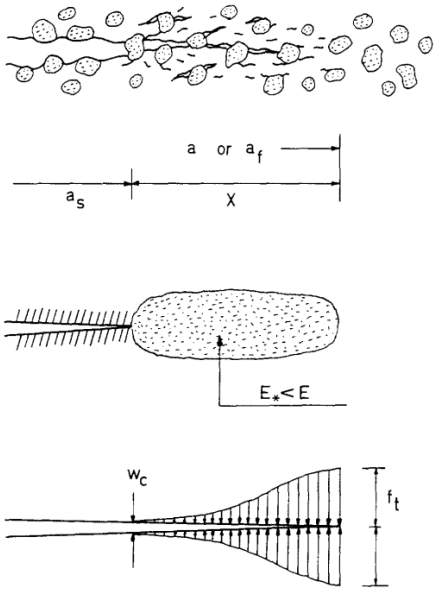


FIGURE 1.5: Formation de la fissure par coalescence des micro-fissures et répartition des contraintes selon [Wittmann et Hu, 1991]

2 Définition du problème de mécanique et résolution

Les grands objectifs de la modélisation pour simuler le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles ont été défini dans la partie précédente. Pour pouvoir étudier le comportement de structures composées de ces matériaux il faut maintenant définir le cadre théorique de la mécanique des milieux continus.

2.1 Définition du problème mécanique

Ce manuscrit se place dans le cadre défini par la mécanique des milieux continus. Des milieux non polarisés, où chaque point matériel est défini par sa position, sont considérés. La vision lagrangienne du mouvement est adoptée et la position d'un point $\vec{x}(\vec{x}_0,t)$, dépendant du temps, est définie en fonction de sa position initiale $\vec{x}_0$. Le déplacement d'un point matériel est alors noté $\vec{u}(\vec{x},t)$, correspondant au vecteur donnant la position d'un point à un instant t en fonction de sa position à l'instant initial :

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{x} - \vec{x}_0 \tag{1.1}$$

En raison du point de vue lagrangien, dans la suite de ce manuscrit, la position initiale du point matériel est notée $\vec{x}$.

Dans ce cadre, connaître l'état mécanique d'un solide Ω (FIG.1.6) à l'instant t revient à connaître le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x},t)$ et le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)$ en tout point $\vec{x}$ du solide. La conservation de la quantité de mouvement donne la relation entre le tenseur des contraintes, les forces volumiques

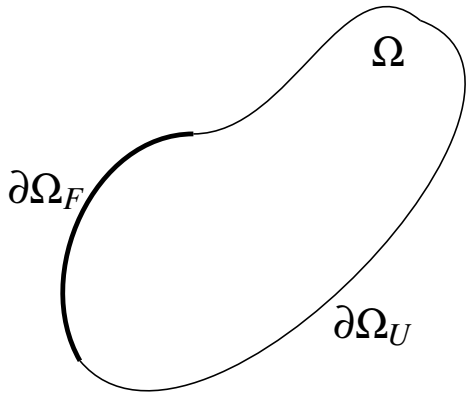


FIGURE 1.6: Problème de mécanique des milieux continus

subies par le milieu et l'accélération :

$$\text{div}\underline{\underline{\sigma}} + \rho\vec{f} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

avec ρ la masse volumique.

L'équation d'équilibre est locale et doit être respectée en tout point du milieu mais ne traduit pas ce qui se passe sur les bords du solide. Elle est donc complétée par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\vec{n} &= \vec{F} \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} &= \vec{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_U \end{aligned} \tag{1.3}$$

Avec $\vec{F}$ les efforts surfaciques s'exerçant sur la surface $\partial\Omega_F$ de normale $\vec{n}$ et les déplacements imposés $\vec{u}_d$ sur la surface $\partial\Omega_U$ ($cf.$ FIG.1.6).

Il faut noter que dans le cadre défini ici, le tenseur des contraintes correspond au tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ symétrique.

L'hypothèse des petites perturbations peut être considérée lorsque les déformations et les déplacements des points matériels sont d'amplitudes relativement faibles par rapport à l'unité, ce qui est généralement le cas pour les matériaux quasi-fragiles. Le tenseur des déformations est alors le gradient symétrique du champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{grad}}\,\vec{u} + \underline{\underline{grad}}^T\vec{u}\right) \tag{1.4}$$

2.2 Résolution numérique

Les solutions analytiques des équations précédentes ne sont pas disponibles pour tous les types de problème mécanique, notamment pour les matériaux adoucissants. Il est alors intéressant de se tourner

vers des méthodes de résolution numériques telles que la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments discrets. Ces méthodes se basent sur une discrétisation spatiale du domaine d'étude permettant le calcul d'une approximation numérique de la solution au problème de mécanique.

2.2.1 Méthode des éléments-finis

L'objectif de la méthode des éléments finis (Finite Element Method, FEM) est de calculer la solution du problème mécanique en un nombre fini de points du volume. L'évaluation numérique de la dérivée des grandeurs est toujours délicate. C'est pourquoi l'équation d'équilibre local faisant intervenir la divergence des contraintes n'est pas vraiment adaptée à une résolution numérique. Il est possible de transformer cette forme locale de l'équation d'équilibre en une forme faible décrivant un équilibre global :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{v}) dV = \int_\Omega \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \int_{\partial\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{w} dS \tag{1.5}$$

avec $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{v})$ le champ de déformation induit par un champ de déplacement virtuel $\vec{v}$ respectant des conditions aux limites nulles et $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{u})$ le champ de contraintes correspondant au comportement du matériau soumis au champ de déplacement réel $\vec{u}$.

Le principe de la méthode des éléments finis est de calculer numériquement l'intégrale de l'équation 1.5 en divisant le volume total par un ensemble d'éléments formant un maillage.

$$\vec{u}_h(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{u}_i \varphi_i(\vec{x}) \tag{1.6}$$

avec N le nombre de nœuds du maillage.

Habituellement, les fonctions de forme φ_i sont à support compact pour simplifier l'intégration. L'intérêt de postuler une forme du champ de déplacement est qu'il devient possible de calculer le champ de déformation grâce au gradient des fonctions de forme.

La finesse de la discrétisation spatiale est un paramètre très important. Il a été démontré (par exemple [Brenner et Scott, 2008]) que l'erreur entre l'approximation numérique $\vec{u}_h$ et la solution exacte $\vec{u}$ tend à s'annuler avec la finesse du maillage ($N \to \infty$). Lors de la résolution du problème mécanique, il convient donc de s'assurer que le maillage est suffisamment fin pour simuler tous les phénomènes pertinents.

Comme le montre l'équation principale EQ.1.5, la méthode des éléments finis se base sur la résolution de champs continus. Elle est très utilisée pour résoudre des problèmes faisant intervenir des matériaux pour lesquels les dégradations ne forment pas de discontinuités fortes comme les fissures. Dans le cas des matériaux quasi-fragiles, il devient apparent que cette méthode de résolution ne peut pas suffire pour décrire l'apparition de fissures. Néanmoins, la simplicité de mise en œuvre pratique fait qu'elle reste une méthode très utilisée pour la simulation de matériaux pour lesquels l'apparition de discontinuité dans les champs mécaniques est un phénomène prédominant à prendre en compte. Pour cela, la littérature propose plusieurs techniques, qui seront détaillées plus tard, pour prendre en compte directement ou indirectement l'apparition des discontinuités et plus généralement la formation de fissures.

2.2.2 Méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets (Discrete Elements Method, DEM) n'est pas issue de la mécanique des milieux continus. Dans cette méthode, le milieu constituant le matériau est divisé en particules

indéformables et indépendantes ([Cundall et Strack, 1979]). Le comportement du matériau est modélisé par la cohésion, le contact et le frottement entre les particules. Le comportement quasi-fragile est pris en compte par des « lattices », c'est-à-dire un treillis de poutres déformables, possiblement dégradables, entre les particules ([Schlangen et van Mier, 1992]). Cette approche permet de modéliser la coalescence des dégradations du matériau en une fissure ([Bolander *et al.*, 1996]). Ce type de méthode permet de très bien modéliser le comportement du béton ([Yip *et al.*, 2006, Vassaux *et al.*, 2016], notamment lors de chargement avec confinement ([Cusatis *et al.*, 2003, Cusatis *et al.*, 2006]). Il est aussi possible de simuler du béton renforcé par des fibres avec l'adaptation proposée par [Schauffert et Cusatis, 2012] ou encore [Shen *et al.*, 2021].

2.3 Résumé

Les simulations basées sur la méthode des éléments discrets permet de naturellement prendre en compte le développement de la zone d'élaboration de la fissure ainsi que la propagation de macro-fissures par désolidarision des particules. Cependant, il est nécessaire de rester à une échelle mésoscopique afin d'observer un développement cohérent de la fissuration. Cette contrainte sur les méthodes *lattices* discrètes prévient leur utilisation dans des calculs de structures aux échelles plus larges. En considérant représenter un volume élémentaire homogène pour chaque élément, la méthode des éléments finis s'affranchit de cette limitation et permet la simulation de grandes structures. La suite de ce manuscrit s'intéresse exclusivement à la méthode des éléments finis. Les développements présentés s'insèrent dans le cadre de la méthode de résolution numérique et de la mécanique des milieux continus présentées dans cette partie.

Il faut noter qu'en étant basée sur la mécanique des milieux continus, la méthode des éléments finis ne permet pas de prendre en compte l'apparition d'une fissure formant une discontinuité dans le milieu. Pour résoudre ce problème, il est possible de faire appel à des extensions de la méthode des éléments finis permettant d'expliciter directement l'apparition et le développement de discontinuités comme par exemple les éléments finis enrichis (E-FEM) ou encore les éléments finis étendus (X-FEM). Les principes de ces méthodes sont détaillés dans la suite de ce chapitre.

3 Modélisation des matériaux adoucissants

Les équations de la mécanique des milieux continus définies précédemment sont incomplètes car elles ne traduisent pas le comportement du matériau. De même, la résolution numérique par la méthode des éléments finis n'est pas complète sans loi de comportement donnant la réponse du matériau face à un chargement. C'est pourquoi, cette section s'attache à modéliser le comportement macroscopique d'un matériau quasi-fragile. Le comportement du matériau est ramené à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) où le matériau peut être considéré comme homogène. L'objectif est alors de donner une relation entre le tenseur des contraintes et le vecteur des déplacements ou le tenseur des déformations.

3.1 Principes thermodynamiques

Les principes thermodynamiques s'écrivent à partir de la notion de conservation de certaines quantités. La première loi de conservation à considérer est la conservation de la masse (EQ.1.7) donnant une rela-

tion entre la dérivée particulaire de la masse volumique et le champ de vitesse :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \, \mathrm{div}\vec{v} = 0 \tag{1.7}$$

La seconde loi de conservation à considérer est la conservation de la quantité de mouvement qui correspond à l'équation d'équilibre 1.2.

Le premier principe de la thermodynamique se traduit par une loi de conservation de l'énergie. Elle prescrit l'équilibre entre l'énergie du milieu et la quantité de chaleur reçue. D'un point de vue local, le premier principe s'écrit sous la forme de l'équation 1.8 sous l'hypothèse des petites perturbations :

$$\rho\dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + r - \mathrm{div}\vec{q} \tag{1.8}$$

avec :

- — ρ la masse volumique
- — e l'énergie interne spécifique
- — r la source volumique de chaleur
- — $\vec{q}$ le vecteur flux de chaleur
- — la notation $\dot{x}$ pour une variable x désigne sa dérivée temporelle
- — : le produit doublement contracté entre deux tenseurs

Le second principe de la thermodynamique contraint l'évolution de l'entropie en fonction de la quantité de chaleur reçue et de la température T. D'un point de vue local, le second principe s'écrit sous la forme de l'inégalité 1.9 avec s l'entropie spécifique :

$$\rho\dot{s} + \mathrm{div}\frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \tag{1.9}$$

Le premier et le second principe de la thermodynamique se traduisent sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem EQ.1.10. La grandeur $\psi = e - Ts$ est l'énergie libre de Helmholtz. L'introduction de cette grandeur est utile dans la conception de modèle avec la méthode de l'état local.

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho\left(\dot{\psi} + s\dot{T}\right) - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\mathrm{grad}}T}{T} \geq 0 \tag{1.10}$$

3.2 Méthode de l'état local

La méthode de l'état local ([Lemaitre *et al.*, 2009]) permet la conception de modèle de comportement dans un cadre thermodynamique clair. L'avantage de cette méthode est sa capacité à modéliser plusieurs phénomènes en un seul modèle grâce aux variables d'états. Le principe de la méthode de l'état local est d'utiliser une unique variable pour modéliser un phénomène. De cette façon, la connaissance de toutes les variables d'état permet de connaître l'état du matériau. Enfin, le modèle est considéré thermodynamiquement admissible si les évolutions des variables d'état respectent l'inégalité de Clausius-Duhem. Il faut alors introduire le concept de potentiel d'état qui définit en une équation le rôle de chaque variable d'état. Le potentiel thermodynamique choisi est généralement le potentiel d'énergie libre spécifique de Helmholtz ψ. Ainsi, l'évolution du potentiel thermodynamique permet aussi de vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem.

Les variables d'état définissent l'état du matériau. Cependant, elles ne sont pas nécessairement toutes observables d'un point de vue extérieur. En fait, les seules variables observables sont les déformations et la température. Les autres variables d'état du modèle sont des variables internes comme le rappelle le tableau 1.1. Elles peuvent être par exemple les déformations plastiques ou l'endommagement. Les variables d'états sont liées aux variables associées grâce aux lois d'état qui dérivent de l'inégalité de Clausius-Duhem. En effet, en écrivant l'inégalité à l'aide du potentiel d'énergie libre $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{V}_k)$, l'inégalité devient :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}\right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho\left(s + \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T}\right) - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{V}_K} \bullet \dot{\underline{V}}_K - \frac{\vec{q}\cdot\vec{\text{grad}}T}{T} \geq 0 \tag{1.11}$$

avec $\bullet$ le produit contracté entre deux tenseurs permettant d'obtenir un résultat scalaire.

Observables	Internes	Associées
$\underline{\underline{\varepsilon}}$		$\underline{\underline{\sigma}}$
T		s
	$\underline{V}_k$	$\underline{A}_k$

TABLE 1.1: Variables thermodynamiques

Par définition, les variables d'état sont indépendantes et modélisent des phénomènes différents. En conséquence, leurs évolutions sont indépendantes et les lois d'état sont déduites immédiatement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}, \quad \underline{A}_K = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{V}_K} \tag{1.12}$$

La notion de dissipation est généralement introduite. Il s'agit de l'énergie dissipée par les phénomènes modélisés au cours d'une évolution et traduit en fait l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\Phi = -\underline{A}_k \bullet \dot{\underline{V}}_k \geq 0 \tag{1.13}$$

Dans la suite de ce manuscrit, les développements présentés et les études menées se placent dans un contexte isotherme. Il n'y a en conséquence aucune dépendance en température et la variable T est omise dans les notations.

3.3 Élasticité

Comme montré au début de ce chapitre, les matériaux quasi-fragiles ont un comportement linéaire réversible dans les premiers instants de chargement. Ce type de comportement peut être modélisé par l'élasticité linéaire et peut s'écrire selon la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{E} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{1.14}$$

La loi élastique est compatible avec la méthode de l'état local avec le potentiel 1.15 :

$$\rho\psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{E} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{1.15}$$

Le tenseur de rigidité élastique $\mathbb{E}$ est un tenseur d'ordre quatre et possède les symétries $E_{ijkl} = E_{klij}$ et $E_{ijkl} = E_{jikl}$ quelles que soient les symétries physiques du matériau. Ainsi dans le cas isotrope, le comportement élastique peut s'écrire en fonction de seulement deux paramètres élastiques, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{I}} \tag{1.16}$$

ou encore, en fonction des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{I}} \tag{1.17}$$

avec $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité d'ordre 2.

3.4 Modèles de plasticité

Les modèles de plasticité permettent de simuler le développement de déformations permanentes. Ce type de modèle conserve généralement un comportement élastique linéaire jusqu'à la vérification d'un critère déclenchant l'apparition du mécanisme irréversible.

3.4.1 Déformations plastiques

La variable représentant ce phénomène est la déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$. La principale hypothèse à ajouter pour utiliser ce type de modèle est de considérer une partition des déformations en une contribution élastique et une contribution plastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_p \tag{1.18}$$

La relation entre les contraintes et les déformations devient alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{E} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_p\right) \tag{1.19}$$

3.4.2 Formulation d'un modèle de plasticité

Pour définir un modèle de plasticité il faut définir son domaine élastique ainsi que les conditions menant à l'apparition des déformations plastiques. Le domaine élastique est défini par une surface seuil s'écrivant dans l'espace des contraintes :

$$f_p\left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{A}_k\right) \leq 0 \tag{1.20}$$

où le domaine élastique correspond aux états de contraintes pour lesquels $f_p < 0$ et le domaine plastique correspond aux états de contraintes pour lesquels $f_p = 0$.

Il reste alors à définir l'évolution des déformations plastiques lorsque le critère $f_p = 0$ est atteint :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \dot{\lambda}\frac{\partial g_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \tag{1.21}$$

avec $\dot{\lambda}$ le multiplicateur plastique et g_p une surface dans l'espace des contraintes donnant la direction d'évolution des déformations plastiques. Pour les matériaux métalliques, le choix $g_p = f_p$ est justifié car

les déformations plastiques évoluent dans la direction normale à la surface seuil. Ce n'est pas le cas pour tous les matériaux et en particulier pour le béton, les roches ou encore les sols.

Les conditions de charge-décharge, appelées aussi les conditions de Kuhn-Tucker, permettent de formaliser le comportement d'un modèle de plasticité :

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f_p\left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{A}_k\right) \leq 0, \quad \dot{\lambda} f_p\left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{A}_k\right) = 0 \tag{1.22}$$

De cette façon, lorsque le critère sur la surface de charge f_p n'est pas atteint, alors $\dot{\lambda} = 0$, il n'y a pas d'écoulement plastique et les déformations plastiques restent inchangées. Dans le cas où la surface seuil est atteinte, alors il peut y avoir un écoulement plastique pouvant éventuellement mener à une évolution des déformations plastiques.

3.4.3 Exemples de surfaces de charge

Les travaux de Tresca (1868) et de Von Mises (1913) ont établis des surfaces de charge basées sur un critère de cisaillement maximum. Ces critères ont été spécialement développés pour modéliser les limites du domaine élastique pour les métaux pour lesquels les états de cisaillement mènent à la ruine du matériau.

Le critère de Tresca s'écrit à partir de l'état de contrainte du cisaillement maximum :

$$f_p = \max_{I,J=1,2,3} \left| \frac{\sigma_I - \sigma_J}{2} \right| - \frac{f_t}{2} \tag{1.23}$$

avec $\sigma_{I=1,2,3}$ les contraintes principales et f_t la résistance à la traction du matériau.

Le critère de Von Mises s'écrit à partir du second invariant du tenseur déviateur des contraintes J_2 qui correspond à une mesure de l'état de cisaillement :

$$f_p = \sqrt{3J_2} - f_t \qquad J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \tag{1.24}$$

avec σ_1, σ_2 et σ_3 les contraintes principales.

L'utilisation des invariants du tenseur des contraintes se justifie car ils constituent une mesure objective de l'état mécanique du matériau. En effet, par définition, les invariants d'un tenseur ne dépendent pas de la base dans lequel est exprimé ce tenseur.

Ces deux critères sont très simples à mettre en œuvre en pratique. Néanmoins, comme le montre la FIG.1.7 où sont illustrées les surfaces de charges, la surface de Tresca possède des points anguleux pouvant poser problème lors de la résolution d'un problème. En effet, il est nécessaire de pouvoir calculer la dérivée de la surface de charge pour évaluer la direction de l'écoulement plastique, ce qui peut être délicat pour le critère de Tresca car la dérivée de la surface n'est pas définie en tout point.

De plus, la symétrie de ces critères ne permet pas de prendre en compte une dissymétrie du comportement traction/compression observée pour certains matériaux quasi-fragiles. Des surfaces de charges prenant en compte la contrainte hydrostatique ont été développées pour répondre à ce besoin. Par exemple le critère de Drucker-Prager modifie le critère de Von Mises en y ajoutant la contribution du premier invariant du tenseur des contraintes $I_1 = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}$:

$$f_p = \alpha I_1 + (1 - \alpha)\sqrt{3J_2} - f_t \tag{1.25}$$

avec α un paramètre permettant de contrôler la forme de la surface de charge. Le critère est ici écrit en fonction de la résistance en traction. La résistance en compression est alors donnée par $f_c = 1/(1-2\alpha)$.

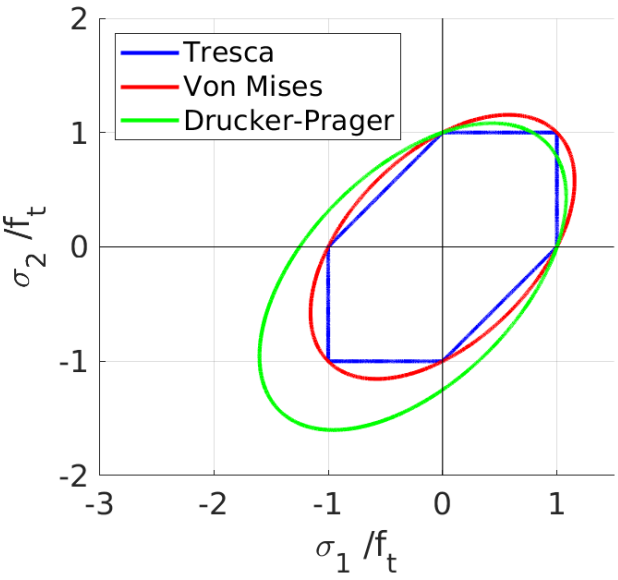


FIGURE 1.7: Exemple de surfaces de charge en contraintes planes pour la plasticité

3.5 Endommagement

Bien que les modèles de plasticités soient capables de représenter le caractère adoucissant des matériaux quasi-fragile par le choix d'une loi d'écrouissage adaptée, ils ne permettent pas de représenter une perte de raideur. Dans ce cas, la mécanique de l'endommagement est plus adaptée en introduisant une variable mesurant directement la perte de raideur.

3.5.1 Variable d'endommagement

La variable d'endommagement pour ce type de modèle est choisie comme une mesure des dégradations du matériau. Généralement, cette variable est définie à partir de l'approche en contrainte effective.

En considérant la section δS, orientée par sa normale $\vec{n}$, d'un volume élémentaire représentatif, la variable d'endommagement peut être définie comme le rapport (EQ.1.26) de l'aire de la surface endommagée et de la section totale :

$$D(\vec{n}) = \frac{\delta S_D}{\delta S} = \frac{\delta S - \delta \tilde{S}}{\delta S} \tag{1.26}$$

L'aire de la surface résistante effective est notée $\delta\tilde{S}$. Ainsi, la variable d'endommagement est nulle quand le matériau n'est pas endommagé et vaut 1 quand le matériau est complètement endommagé dans la direction $\vec{n}$.

Dans l'hypothèse d'un endommagement isotrope, l'orientation des dégradations est supposée uniforme. Dans ce cas, l'endommagement est complètement décrit dans chaque VER par la variable scalaire $D(\vec{n}) = D,\ \forall \vec{n}$.

La variable d'endommagement étant définie, il est alors possible de définir le concept de contrainte effective. Le principe d'équivalence en déformation suppose que la déformation d'un matériau endommagé subissant une contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est équivalente à la déformation d'un matériau sain subissant une contrainte $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$. Dans l'hypothèse d'un endommagement isotrope, la contrainte effective s'écrit :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1-D} \tag{1.27}$$

Dans le cas orthotrope, la contrainte effective est définie à partir d'un tenseur d'endommagement d'ordre 2. De ce point de vue, les effets géométriques des défauts sont considérés. La variable d'endommagement décrit alors la densité surfacique des défauts dans une direction $\vec{n}$.

$$\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}\right) \cdot \vec{n}\delta S = \vec{\tilde{n}}\delta\tilde{S} \tag{1.28}$$

La contrainte effective peut, par exemple, s'écrire ([Desmorat, 2015]) :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \left(\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}\right)^{-1/2} \sigma^D \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}\right)^{-1/2}\right)^D + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}}{1-\eta D_H}\underline{\underline{1}} \tag{1.29}$$

avec $D_H = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\underline{\underline{D}}$ l'endommagement hydrostatique et η un paramètre contrôlant l'influence du confinement.

Dans le cas anisotrope, la contrainte effective est définie à l'aide d'un tenseur d'ordre 4. Cette formulation permet de prendre en compte les effets de l'orientation des défauts, mais aussi leur arrangement et leurs interactions [Lemaitre *et al.*, 2009] :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \mathbb{M} : \underline{\underline{\sigma}} \tag{1.30}$$

3.5.2 Formulation d'un modèle d'endommagement isotrope

Sous l'hypothèse d'un endommagement isotrope, l'endommagement est complètement déterminé par une variable scalaire D. En se limitant à un comportement élastique endommageable, le potentiel d'état en énergie libre s'écrit :

$$\rho\psi = \rho\psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}}, D\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{E}(1-D) : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{1.31}$$

Il est possible de formuler ce potentiel d'énergie libre en introduisant d'autres phénomènes non étudiés ici comme la plasticité et le couplage thermo-mécanique. Il suffit alors d'écrire le potentiel thermodynamique à l'aide des déformations plastiques, de la température et des variables internes d'écrouissage.

La loi d'état donnant l'expression du tenseur des contraintes dans le cas considéré s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathbb{E}(1-D) : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{1.32}$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement forme la seconde loi d'état :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{E} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{1.33}$$

Cette force thermodynamique porte le nom de taux de restitution de l'énergie car cette quantité est proportionnelle à la variation d'énergie élastique engendrée par une variation d'endommagement. La dissipation d'énergie est alors donnée directement par :

$$\Phi = -Y\dot{D} \tag{1.34}$$

Le modèle d'endommagement est complété d'une loi d'évolution pour l'endommagement de la forme $D = g(\kappa)$ avec κ une variable d'histoire dont l'évolution est contrôlée par un critère d'endommagement. Un critère d'endommagement peut par exemple s'écrire à partir du taux de restitution d'énergie Y ou bien à partir d'une déformation équivalente ε_{eq} à définir. Pour l'endommagement des matériaux quasi-fragiles, il est courant de définir le critère d'évolution du processus irréversible en fonction des déformations. Par opposition avec la plasticité, où le critère s'écrit généralement en fonction des contraintes, la surface seuil représentant le critère d'endommagement se trace dans l'espace des déformations. Un exemple habituel de critère d'endommagement s'écrit :

$$f(\varepsilon_{eq}, \kappa) = \varepsilon_{eq}(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \kappa \tag{1.35}$$

avec les conditions de Kuhn-Tucker fixant les conditions de charge et décharge se traduisant par :

$$\kappa = \max\left\{\kappa_0, \varepsilon_{eq}\right\} \tag{1.36}$$

Ce critère définit un écrouissage isotrope pour l'endommagement. En considérant que les dégradations sont dues aux extensions dans le matériau, [Mazars, 1984] définit un critère d'endommagement à partir des déformations positives :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_I \langle \varepsilon_I \rangle_+^2} \tag{1.37}$$

avec $\langle . \rangle$ désignant la partie positive. Ce critère est basé sur le seul paramètre de déformation de première fissuration ε_0 en définissant une valeur initiale à la variable κ : $\kappa_0 = \varepsilon_0$. La surface de charge ramenée dans l'espace des contraintes est donnée sur la FIG.1.8. Le ratio entre la résistance en traction f_t et la résistance en compression f_c n'est pas explicitement donné. Par ailleurs, le critère de Mazars ne permet pas de modéliser correctement la surface de charge dans les cas de compression confinée. Pour répondre à cette exigence, d'autres critères peuvent être utilisés comme le critère de De Vree ([de Vree *et al.*, 1995]). Celui-ci s'inspire du critère de Von Mises pour établir un critère en déformation formant une ellipse dans l'espace des contraintes (FIG.1.8). L'avantage de ce critère est son écriture basée sur le paramètre $\gamma = f_c/f_t$ permettant de calibrer le critère sur le ratio entre les résistances en traction et compression :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\gamma - 1}{1 - 2\nu} \frac{I_1}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma - 1}{1 - 2\nu} I_1^{\varepsilon}\right)^2 + \frac{12\gamma}{(1+\nu)^2} J_2^{\varepsilon}} \tag{1.38}$$

avec J_1^{ε} et J_2^{ε} les invariants du tenseur des déformations :

$$J_1^{\varepsilon} = \mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad J_2^{\varepsilon} = \frac{1}{6}\left(\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) - \left(\mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)^2\right) \tag{1.39}$$

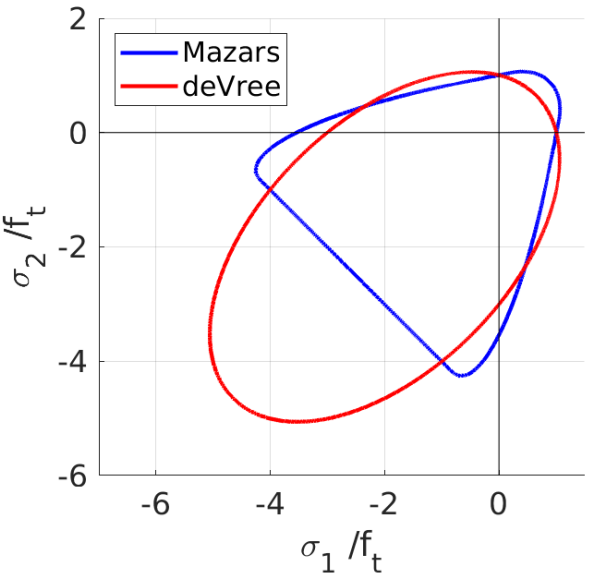


FIGURE 1.8: Exemple de surfaces de charge en contraintes planes pour l'endommagement

Modèle d'endommagement de Mazars Pour prendre en compte le caractère dissymétrique du comportement en traction/compression, [Mazars, 1984] définit deux variables d'endommagement pour mesurer les dégradations selon le sens du chargement. Les variables D_t, pour la mesure des dégradations en traction, et D_c, pour la compression, peuvent être évaluées selon la loi d'évolution :

$$D_{t,c} = 1 - \varepsilon_0 \frac{(1 - A_{t,c})}{\kappa} - A_{t,c} \exp\left(-B_{t,c}\left(\kappa - \varepsilon_0\right)\right) \tag{1.40}$$

avec ε_0 la déformation correspondant à l'apparition des premières dégradations, B_t et B_c des paramètres contrôlant l'adoucissement de la courbe en traction et en compression respectivement, et A_t et A_c des paramètres permettant d'introduire des contraintes résiduelles.

Dans le cadre thermodynamique de la méthode de l'état local, il ne peut pas y avoir deux variables d'endommagement mesurant le même phénomène physique. La variable d'endommagement est alors calculée en pondérant les contributions de l'endommagement en traction et l'endommagement en compression :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \tag{1.41}$$

avec :

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^{3} \frac{\varepsilon_i^t \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\varepsilon_{eq}}, \quad \alpha_c = 1 - \alpha_t \tag{1.42}$$

Ce modèle est très utilisé pour simuler le comportement du béton. Les fonctions d'évolutions pour les variables d'endommagement ont été choisies sous une forme exponentielles dans ce modèle, mais il est envisageable de choisir d'autres formes comme par exemple un adoucissement linéaire ou bilinéaire pour le comportement en traction.

La littérature présente de nombreux modèles d'endommagement adaptés à des types de chargement différents de ceux abordés dans ce manuscrit. Par exemple, [Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002] proposent une formulation pour représenter le comportement du béton en dynamique rapide. Des modèles adaptés au comportement du béton à haute température ont été proposés par [Tenchev et Purnell, 2005] ou encore, par exemple, [Grondin *et al.*, 2007].

3.5.3 Formulation d'un modèle d'endommagement anisotrope

Plusieurs auteurs dans la littérature proposent d'utiliser un tenseur d'endommagement d'ordre 2 comme par exemple [Cordebois et Sidoroff, 1982], [Murakami et Ohno, 1981] ou encore [Lemaitre *et al.*, 2000]. L'intérêt d'un tenseur d'ordre 2 comme variable d'endommagement est de pouvoir prendre en compte l'orientation des fissures dans la modélisation.

Pour modéliser le comportement des matériaux quasi-fragiles, [Desmorat *et al.*, 2007] propose le potentiel d'état (EQ.1.43) écrit en variables de Gibbs. Il s'agit en fait du dual du potentiel Ψ obtenu pas la transformation de Legendre-Fenchel :

$$\rho\Psi^* = \frac{1+\nu}{2E}\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\sigma}}^D\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\sigma}}^D\right) + \frac{1-2\nu}{6E}\left(\frac{\left\langle \mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}\right\rangle^2}{1-\mathrm{tr}\underline{\underline{D}}} + \langle -\mathrm{tr}\sigma\rangle\right) \tag{1.43}$$

Le tenseur $\underline{\underline{H}} = \left(1-\underline{\underline{D}}\right)^{-1/2}$ est une façon alternative de définir une variable d'endommagement. Ses valeurs propres sont comprises entre 1 pour le matériau sain et $+\infty$ pour le matériau complètement endommagé. Le tenseur des contraintes effectives dérivant de ce potentiel est alors :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \left(\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{\sigma}}^D\underline{\underline{H}}\right)^D + \frac{1}{3}\left(\frac{\left\langle \mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}\right\rangle^2}{1-\mathrm{tr}\underline{\underline{D}}} - \langle -\mathrm{tr}\sigma\rangle\right)\underline{\underline{I}} \tag{1.44}$$

et permet de définir l'équation caractéristique du comportement élastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial\rho\Psi^*}{\partial\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \tag{1.45}$$

Le potentiel d'état distingue les contributions hydrostatiques positives et négatives. En conséquence, l'endommagement du matériau n'évolue pas avec les contraintes hydrostatiques négatives.

Le critère d'endommagement choisi est le critère de Mazars et la loi d'évolution pour l'endommagement s'écrit en fonction du taux de la déformation équivalente.

$$\dot{\underline{\underline{D}}} = A\left[1+\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{a}\right)^2\right]^{-1}\frac{\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}\right\rangle^2}{\tilde{\varepsilon}}\dot{\tilde{\varepsilon}} \tag{1.46}$$

Finalement, le modèle de comportement s'appuie sur cinq paramètres matériaux à identifier :

— E, le module d'Young ;
— ν, le coefficient de Poisson ;

— κ_0, la déformation équivalente correspondant au début de l'endommagement en traction ;
— A et a, contrôlant le comportement adoucissant du matériau.

Ce modèle permet de modéliser les dissymétries dans le comportement du béton en traction et compression grâce à l'anisotropie induite de l'endommagement. Une nouvelle version de ce modèle est proposée par [Desmorat, 2015] qui réécrit toutes les équations du modèle seulement à partir du tenseur d'endommagement $\underline{\underline{H}}$ dont la limite supérieure n'est pas bornée. Le couplage entre les contributions hydrostatiques et déviatoriques permet d'améliorer les résultats du premier modèle en compression confinée.

3.5.4 Modèle d'endommagement avec plasticité

La littérature propose des modèles de plasticité pour le comportement du béton. Ce type de modèle permet de prendre en compte l'effet du réarrangement des micro-fissures en introduisant la partition des déformations en une partie élastique et une partie plastique. Néanmoins, la plasticité ne permet pas de modéliser la perte de raideur due aux dégradations dans le matériau. La combinaison de la plasticité et de l'endommagement permet alors de pouvoir modéliser l'apparition de déformation permanente et la perte de raideur due aux dégradations après le pic de résistance.

[Grassl et Jirásek, 2006] montre que le modèle de plasticité d'un modèle combiné doit être écrit à partir du tenseur des contraintes effectives. En effet, l'écriture en contrainte nominale introduit des restrictions thermodynamiques supplémentaires propres à la formulation.

Dans le même article, les auteurs proposent un modèle combiné appelé CDPM basé sur le critère de Willam ([Willam et Warnke, 1974]). La surface seuil et les méridiens sont en coordonnées de Haigh-Westergaard et tracés sur la figure 1.9. Ce modèle de plasticité est combiné avec un modèle d'endommagement isotrope formulé à partir des déformations plastiques. Une version actualisée de ce modèle a été développée par [Grassl *et al.*, 2013]. Cette version prend en compte les effets unilatéraux de l'endommagement grâce à deux variables isotropes de l'endommagement.

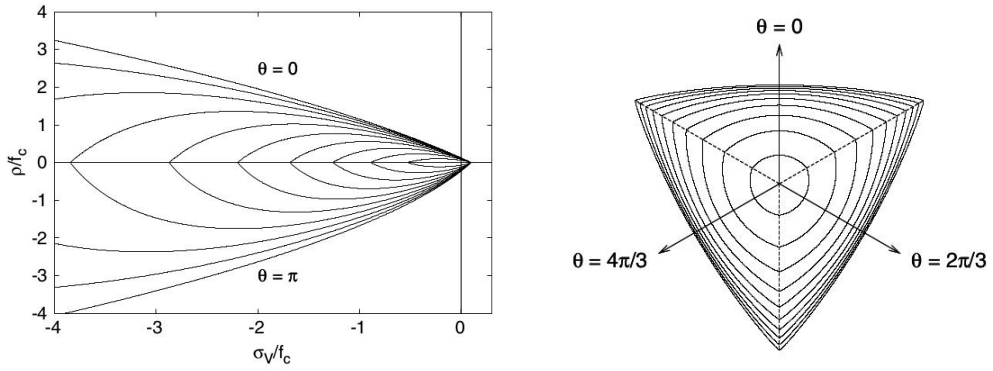


FIGURE 1.9: Critère de plasticité du modèle CDPM

D'autres formulations sont possibles pour l'endommagement. En partant de l'observation que la réponse en traction du béton est fragile et développe peut de déformations permanentes, [Jason *et al.*, 2006] propose d'écrire le modèle d'endommagement à partir des déformations élastiques au lieu des déformations plastiques en utilisant le critère de Mazars. Des exemples de réponse du modèle sont donnés en FIG.1.10 pour des cas de chargement uniaxiaux.

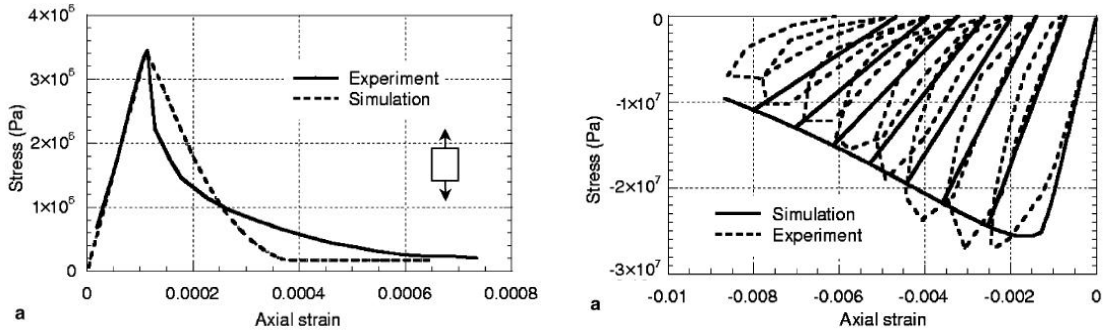


FIGURE 1.10: Réponses du modèle de [Jason *et al.*, 2006]

4 Modélisation de la localisation des déformations

4.1 Problème de localisation pour les matériaux adoucissants

La localisation des déformations est un phénomène observé dans des matériaux de différentes natures comme les métaux ou les matériaux granulaires. La localisation se caractérise physiquement par la concentration des fissures ou des déformations plastiques dans des zones de tailles limitées. En particulier, dans les matériaux quasi-fragiles, les fissures se développent à partir de la coalescence des microfissures. D'un point de vue théorique, il est possible de montrer que ce type de comportement est possible dès que le comportement du matériau est adoucissant. D'un point de vue numérique, ce phénomène pose des problèmes de stabilité et d'objectivité des résultats par rapport à la discrétisation spatiale. Il est donc nécessaire de développer des méthodes de régularisation permettant de limiter ces effets néfastes.

4.1.1 Mise en évidence

La relation entre les contraintes et les déformations n'étant plus bijective, la solution du problème mécanique n'est plus unique quand le comportement du matériau devient adoucissant. Ce phénomène est généralement mis en évidence à l'aide de l'exemple d'une barre chargée en traction ([Jirásek, 2007]).

Une barre constituée d'un matériau adoucissant dont la loi de comportement est représentée par la fonction tracée sur la FIG.1.11 est considérée. Le matériau peut être défini à partir de sa résistance f_t, de son module d'élasticité initial E et de la déformation ε_0 à partir de laquelle le matériau a un comportement adoucissant. Le comportement est élastique jusqu'à l'état de contrainte $\sigma = f_t$. À partir de ce moment, un état de contrainte peut être atteint par un déchargement élastique, ε diminuant, ou alors par un chargement adoucissant, ε augmentant.

Dans un état de contrainte donné, une fois la limite élastique atteinte, la longueur totale de la barre est notée L. La longueur de la barre subissant un déchargement élastique, de déformation ε_u, est notée L_u et la longueur de la barre correspondant à un chargement adoucissant, de déformation ε_s, est notée L_s. L'équation d'équilibre en 1D, $d\sigma/dx = 0$, se traduit par un état de contrainte uniforme dans toute la barre. N'importe quelle distribution de profil de longueur L_u ou L_s sur la barre est solution du problème mécanique puisque chaque distribution respecte l'équation d'équilibre ainsi que la loi de comportement. Il n'y a donc pas l'unicité de la solution.

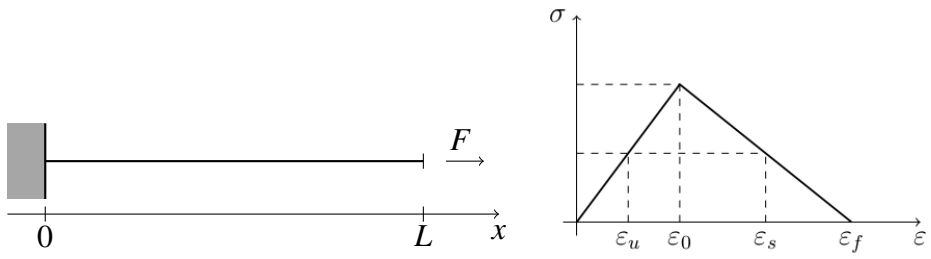


FIGURE 1.11: Mise en évidence de la localisation des déformations dans une barre 1D

En considérant une faiblesse dans la barre, le chargement atteint l'état limite $\sigma = f_t$ au niveau de celle-ci en premier. En continuant le chargement, la contrainte dans la zone de faiblesse diminue et la déformation augmente. Le comportement en dehors de la zone de faiblesse étant toujours élastique, la seule possibilité est donc un déchargement élastique avec la déformation diminuant. Dans ce cas, la déformation dans la zone de faiblesse est beaucoup plus importante que dans le reste de la barre et continue d'augmenter jusqu'à la rupture de la barre. La zone de faiblesse pouvant être infiniment petite, l'énergie dissipée lors de la rupture est possiblement nulle.

4.1.2 Condition nécessaire à la localisation des déformations

L'exemple de la barre montre que la localisation des déformations peut avoir lieu si le comportement du matériau est adoucissant. Dans un contexte 2D ou 3D, la localisation des déformations est souvent caractérisée par le développement de bande de cisaillement dans une zone de taille limitée où les déformations sont discontinues. Il existe alors plusieurs manières de définir les zones de localisation.

Avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur des déformations, [Hill, 1958] montre que la solution reste unique tant que $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} > 0$. La relation caractéristique $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \mathbb{E}_{tan} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$, donnant la relation entre les contraintes et les déformations en fonction du module tangent $\mathbb{E}_{tan}$, permet d'écrire une condition nécessaire à la localisation des déformations :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} : \mathbb{E}_{tan} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = 0 \tag{1.47}$$

4.1.3 Discontinuité du taux de déformation

Le cadre de la mécanique des milieux continus impose la continuité des déplacements dans la zone de localisation. Le saut du taux de déformation peut s'écrire à partir du vecteur normal $\vec{n}$ à la surface de localisation (voir FIG.1.12) et d'un vecteur d'évolution $\vec{m}$ (Hadamard (1903)) :

$$\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right] = \underline{\underline{\varepsilon}}^{+} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{-} = \frac{1}{2}\left(\vec{m} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{m}\right) \tag{1.48}$$

En utilisant la condition de continuité du déplacement et des contraintes normales au niveau de la surface de localisation, il est possible de montrer que la condition de localisation s'écrit en fonction du module tangent de la loi de comportement :

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \vec{m} = 0 \qquad \underline{\underline{Q}} = \vec{n} \cdot \mathbb{E}_{tan} \cdot \vec{n} \tag{1.49}$$

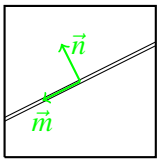


FIGURE 1.12: Schématisation de la surface de localisation

où $\underline{\underline{Q}}$ est le tenseur acoustique d'ordre 2. Le vecteur d'évolution de la surface de localisation $\vec{m}$ correspond au vecteur propre associé à la valeur propre nulle du tenseur acoustique. Ce vecteur donne le mode d'ouverture de la fissure :

- $\vec{m}$ colinéaire à $\vec{n}$: mode I
- $\vec{m}$ orthogonal à $\vec{n}$: mode II

Les analyses du module tangent et du tenseur acoustique permettent d'étudier le comportement de certains modèles vis-à-vis de la localisation des déformations. En particulier, [Rudnicki et Rice, 1975] étudient les conditions de localisation pour les matériaux sensibles au confinement comme le béton et les roches. [Ottosen et Runesson, 1991, Hutchinson et Tvergaard, 1981] présentent des analyses de bifurcation sur des critères de plasticité classiques associés à des lois d'écrouissage. [Rizzi *et al.*, 1995] et plus récemment [Jirásek et Suárez, 2016] mènent des analyses de bifurcations sur des modèles d'endommagement.

4.1.4 Méthodes de régularisation

D'un point de vue numérique la localisation des déformations pose un problème d'objectivité sur les résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. En effet, lors de la localisation, l'endommagement du matériau, se concentre typiquement dans une bande d'un seul élément d'épaisseur. Dans ce cas, l'énergie dissipée dépend de la taille des éléments dans la zone de localisation. De plus, le trajet de fissuration, ou le chemin des dégradations, peuvent dépendre de l'orientation des mailles (FIG.1.13). Il paraît donc nécessaire d'aborder ce problème et de chercher à prévenir la localisation des déformations ou à modéliser la localisation dans le but de réaliser des simulations donnant des résultats ne dépendant pas de la discrétisation spatiale.

Une méthode simple à mettre en œuvre et non intrusive a été proposée par [Hillerborg *et al.*, 1976]. Cette méthode repose sur l'adaptation des paramètres du modèle adoucissant en fonction de la finesse des éléments finis. Plus précisément, il s'agit de recalculer les valeurs des paramètres du modèle pour que l'énergie dissipée soit identique dans chaque élément. Cette méthode est beaucoup utilisée pour régulariser des modèles d'endommagement. Par exemple, les modèles de [Feenstra et De Borst, 1995] ou [Grassl *et al.*, 2013] ajustent le comportement adoucissant de la loi d'endommagement en fonction de la taille des éléments.

Cependant, cette méthode de régularisation possède un inconvénient majeur : le problème de dépendance au maillage en termes d'énergie dissipée est résolu, mais le chemin de fissuration reste dépendant de l'orientation des éléments comme le montre la FIG.1.13. En effet, les dégradations se localisent toujours dans une bande finie d'un élément de largeur.

La littérature propose de nombreuses méthodes afin de modéliser la localisation des déformations. Ces méthodes peuvent se distinguer en deux types : les méthodes se basant sur la description de la fissura-

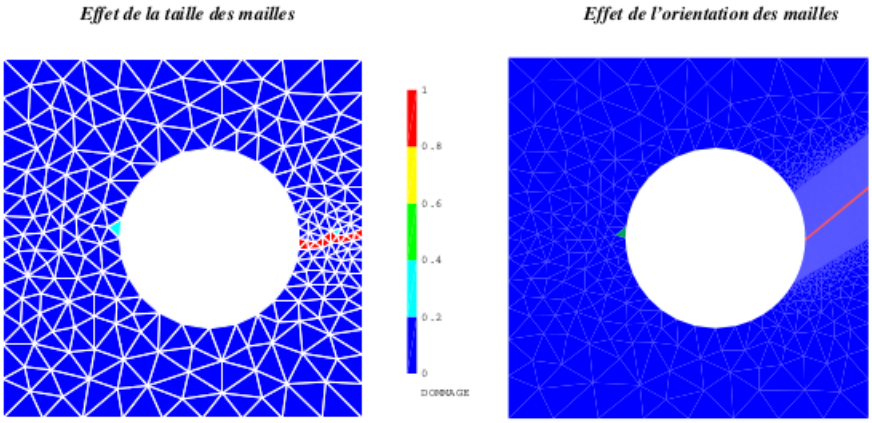


FIGURE 1.13: Effet de la localisation des déformations en éléments finis ([Lorentz, 2008])

tion par enrichissement cinématique ou introduction de zones cohésives, et les méthodes permettant de modéliser la localisation grâce à un comportement non-local. Ces méthodes sont détaillées dans la suite de ce chapitre.

4.2 Mécanique de la rupture

En se basant sur les travaux de [Griffith, 1921], la mécanique de la rupture s'intéresse à la création, au développement et à la propagation de fissures dans les matériaux fragile. Griffith constate que la résistance à la rupture pour les matériaux très fragiles dépend principalement de la taille des défauts préexistant dans le matériau. En considérant que dans le cadre de l'élasticité linéaire, la contrainte en pointe de fissure est infinie, celui-ci propose une approche énergétique basée sur le taux de restitution d'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une unité de surface.

Cependant, [Erdogan, 2000] montre qu'il n'est pas réaliste de considérer une contrainte infinie en pointe de fissure pour des matériaux qui ne sont pas fragiles. Pour les matériaux quasi-fragiles et ductiles, le critère d'Irwin ([Irwin, 1957]) semble alors plus adapté. À partir des travaux de [Williams, 1956] décrivant le champ de contrainte aux abords de la pointe de fissure, Irwin propose un critère basé sur le facteur d'intensité des contraintes, exprimé en fonction des caractéristiques du front de fissure et du mode d'ouverture. La FIG.1.14 montre les trois modes d'ouverture de fissure : un mode d'ouverture normal à la surface de fissure (I), un mode de cisaillement plan (II) et un mode de cisaillement hors plan (III).

Les travaux de [Rice, 1968] résolvent le problème du calcul des contraintes dans le voisinage de la singularité de la pointe de fissure. L'intégrale de contour proposée permet de calculer le taux de restitution d'énergie pour ouvrir une surface unitaire de fissure sans avoir besoin d'exprimer le champ de contraintes au voisinage de la singularité.

Modèle de zone cohésive La mécanique de la rupture ne semble pas être capable de prendre en compte le développement de la zone d'élaboration de la fissure pour les matériaux quasi-fragile. Pour remédier

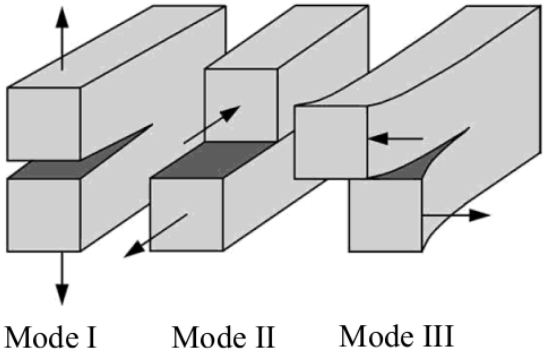


FIGURE 1.14: Modes d'ouverture d'une fissure ([Anderson et Anderson, 2005])

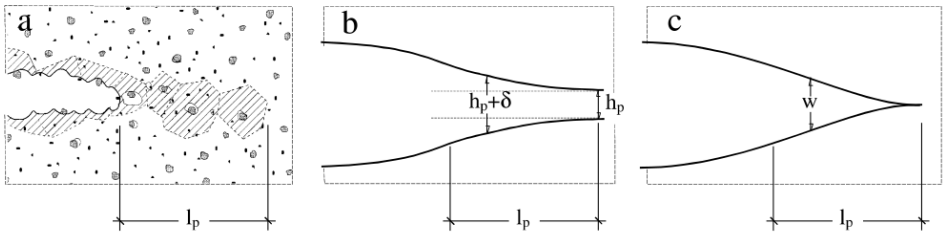


FIGURE 1.15: Définition de la zone cohésive en pointe de fissure ([Elices *et al.*, 2002])

à cette lacune, [Hillerborg, 1991] introduit le concept de bande de fissuration. Dans ce modèle, la fissuration se développe dans une zone de largeur finie. Cette approche consiste à considérer l'existence d'une zone de cohésion en pointe de fissure. Cette zone apparaît suite à la coalescence des micro-fissures formées dans la zone d'élaboration, mais ne constitue pas une fissure ouverte et libre. Les lèvres de la fissure sont liées et opposent une contrainte de résistance à l'ouverture comme illustré sur la FIG.1.15.

4.3 Enrichissement cinématique

Les méthodes d'enrichissement cinématique consistent en l'ajout de degrés de liberté dédiés à la description de la localisation ou de la fissuration. [Ortiz *et al.*, 1987] introduit ainsi une discontinuité sur le champ de déformation à l'intérieur des éléments finis. Cette formulation permet de capturer l'effet de la localisation sur le champ de déformation. D'un point de vue numérique, elle n'apporte pas de degré de liberté supplémentaire à résoudre. Les inconnues introduites avec la discontinuité sont résolues au niveau de la loi de comportement propre à chaque élément. Le concept de discontinuité forte est introduit par [Dvorkin et Assanelli, 1991] et [Simo *et al.*, 1993] en décrivant la fissure à partir d'une discontinuité sur le champ de déplacement.

En considérant un milieu Ω traversé par une courbe Γ modélisant une discontinuité dans le milieu, l'introduction d'une discontinuité forte dans le problème de mécanique se traduit formellement sur le champ de déplacement :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\hat{u}}(\vec{x}) + \vec{\tilde{u}}\ \mathcal{H}_\Gamma(\vec{x}) \tag{1.50}$$

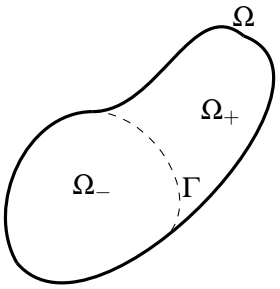


FIGURE 1.16: Présence d'une discontinuité dans un milieu

avec $\vec{u}$ le champ de déplacement total, $\vec{\hat{u}}$ la partie continue du champ de déplacement et $\vec{\tilde{u}}$ le saut de déplacement et enfin, $\mathcal{H}_\Gamma$ la fonction de Heaviside valant 1 sur la partie Ω_+ et 0 sur la partie Ω_- (voir FIG.1.16).

La littérature distingue deux types de méthodes exploitant l'introduction d'une discontinuité dans le champ de déplacement selon l'équation générale 1.50. Les formulations E-FEM, pour *Embedded Finite Element Method* ([Oliver, 1996, Jirásek et Zimmermann, 2001b]), traitent la discontinuité du point de vue des éléments. La détermination du saut de déplacement répond alors à une loi cohésive liant la contrainte et l'ouverture de fissure représentée par le saut de déplacement. L'avantage de ce type de méthode réside dans la simplicité d'implémentation. En effet, l'apport de la discontinuité étant traité au niveau de l'élément, il est possible de réaliser l'implémentation sans modifier le schéma de résolution global. Il faut noter que pour ce type de méthode, le chemin de fissuration n'est pas nécessairement continu, ce qui peut poser des problèmes de blocage. Dans ce cas, il peut être nécessaire de faire appel à des techniques de guidage permettant d'ajuster l'orientation des surfaces de discontinuité afin de limiter le blocage des contraintes.

D'un autre côté, les formulations X-FEM, pour *eXtended Finite Element Method* ([Moës *et al.*, 1999, Moës et Belytschko, 2002]), considèrent le saut de déplacement du point de vue des nœuds et devient alors une inconnue cinématique supplémentaire à résoudre. Le calcul des contraintes lié à l'ajout de ces discontinuités se base sur la mécanique de la rupture. L'avantage de ce type de méthode par rapport aux formulations E-FEM réside dans le chemin continu formé par la fissure.

4.4 Méthodes non-locales

Les méthodes non-locales s'inspirent des observations expérimentales de la zone d'élaboration de la fissure. En effet, cette zone n'étant pas de taille négligeable par rapport aux dimensions des éprouvettes testées, son comportement et son influence paraissent importants à prendre en compte directement dans les équations du modèle. Ainsi, en introduisant une longueur caractéristique l_c liée à la taille de la zone d'élaboration de la fissure, les différentes méthodes disponibles dans la littérature simulent le développement des dégradations de manière non-locale et indépendante de la discrétisation spatiale du problème.

Les modèles de comportement décrits dans la partie précédente ont un caractère local, le comportement

d'un point matériel dépend uniquement de son état mécanique. Les méthodes non-locales enrichissent le comportement de chaque point matériel en fonction de l'état mécanique du voisinage.

4.4.1 Intégrale Non-Locale

Le principe de la méthode intégrale non-locale ([Bažant et Jirásek, 2002]) est de remplacer les variables pilotant le comportement mécanique par des variables non-locales. Une variable non-locale est alors définie comme la moyenne spatiale pondérée de son homologue locale. Ce principe peut s'écrire sous la forme de l'équation suivante :

$$\bar{\gamma}(\vec{x}) = \frac{1}{V(\vec{x})} \int_{\Omega} \phi(\vec{x},\vec{y})\, \gamma(\vec{y}) dV \tag{1.51}$$

avec γ une quantité locale, $\bar{\gamma}$ la quantité non-locale correspondante, ϕ une fonction de pondération et V le volume de normalisation de la moyenne spatiale :

$$V(\vec{x}) = \int_{\Omega} \phi(\vec{x},\vec{y})\, dV \tag{1.52}$$

La fonction de pondération est choisie pour que les points les plus proches du point d'évaluation de la quantité non-locale aient le plus d'influence. Habituellement, la fonction de pondération est choisie parmi les fonctions exponentielles décroissante, la fonction gaussienne, ou les fonctions en forme de cloche tronquée.

À partir des travaux de [Eringen et Edelen, 1972] décrivant la méthode non-locale dans le cadre de l'élasticité, [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] applique la méthode intégrale non-locale à la mécanique de l'endommagement en mettant en avant ses propriétés de limiteur de localisation dont les propriétés sont démontrées dans [Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993].

Le choix des variables non-locales est un point clé de ce type de modélisation. Pour l'endommagement isotrope, plusieurs choix sont possibles : la variable d'endommagement D, le tenseur des déformations ou encore le taux de restitution d'énergie élastique Y. L'analyse de [Jirásek, 1998] montre que le choix d'une variable d'endommagement non-locale peut mener à un blocage conduisant à des contraintes résiduelles non négligeables. [Jirásek, 1998] préconise de choisir la variable pilotant l'endommagement comme variable non-locale. Les modèles d'endommagement plus récents mettant en œuvre la méthode intégrale non-locale utilisent généralement la déformation équivalente en tant que variable non-locale.

Propriétés de la méthode intégrale non-locale En conséquence du caractère non-local, un problème d'initiation de l'endommagement est mis en évidence par [Simone *et al.*, 2004]. Celui-ci remarque que la déformation non-locale équivalente pilotant l'endommagement n'est pas maximale en pointe de fissure comme le montre la FIG.1.17. La littérature propose de traiter les conditions aux limites en imposant un comportement local [Bazant *et al.*, 2010] dans une zone de taille finie autour des bords du problème mécanique ou en redéfinissant la longueur caractéristique en fonction du bord le plus proche ([Krayani *et al.*, 2009]) pour tenter de résoudre ces problèmes.

Un autre inconvénient survient cette fois lors de chargement de grande amplitude. Comme illustré sur une barre en 1D (figure 1.18), les interactions non-locales ne sont jamais limitées dans la méthode classique. Ainsi, il est possible de voir apparaître une diffusion de l'endommagement après avoir atteint la ruine du matériau.

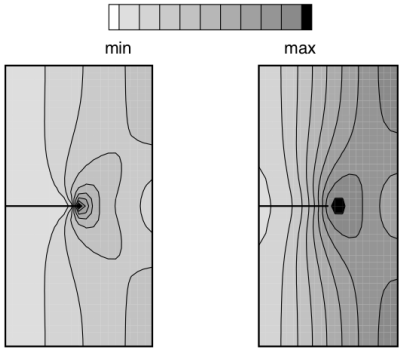
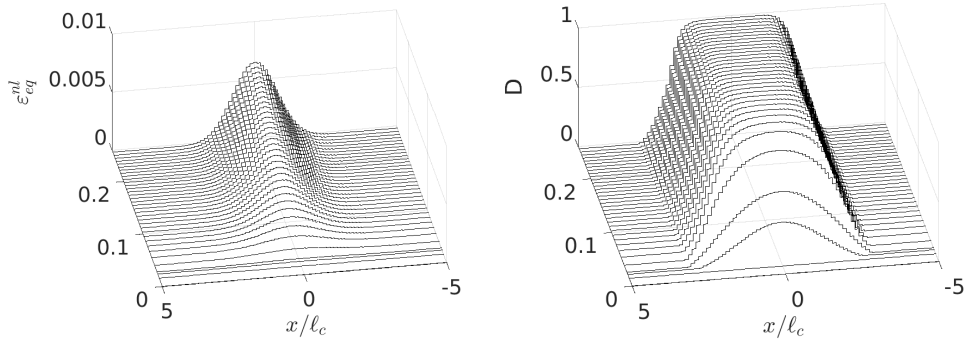


FIGURE 1.17: Mise en évidence de l'initiation incorrecte de la fissuration par la méthode non-locale intégrale ([Simone *et al.*, 2004])



(a) Évolution du profil de déformation **(b)** Évolution du profil d'endommagement

FIGURE 1.18: Mise en évidence du phénomène de diffusion de l'endommagement en 1D de la méthode non-locale intégrale

Différents auteurs se sont penchés sur ce problème. L'idée principale est de limiter les interactions non-locales en fonction de l'évolution de l'état d'endommagement du matériau ([Pijaudier-Cabot *et al.*, 2004, Bazant *et al.*, 2010, Grégoire *et al.*, 2012]). D'autres auteurs proposent de prendre en compte l'état de contrainte du matériau ([Giry *et al.*, 2011], [Desmorat *et al.*, 2015]) pour pondérer les interactions non-locales dans les zones fortement endommagées ou proches de bords.

Ces méthodes où les interactions non-locales tendent à diminuer au cours du processus de dégradation du matériau permettent de mieux représenter le phénomène de localisation des déformations avec l'apparition de la zone d'élaboration de la fissure de taille finie puis en concentrant les dégradations dans des zones de plus en plus petites pour simuler la localisation des déformations. Le principal inconvénient de ce type de méthode, comme il sera montré dans le chapitre suivant, réside dans le fait que la localisation dans les zones fortement dégradées réintroduit un problème de dépendance au maillage.

4.4.2 Méthodes à gradient de variables internes

Originellement introduit pour la plasticité ([Mühlhaus et Alfantis, 1991]), les méthodes non-locales à gradient proposent d'expliciter la déformation non-locale équivalente en fonction de la déformation équivalente locale et de son Laplacien (Δ) :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} + c\Delta\varepsilon_{eq} \tag{1.53}$$

avec c un paramètre de longueur dépendant de la longueur caractéristique ℓ_c. Cependant, cette formulation non-locale impose la régularité $\mathcal{C}_1$ du champ de déplacement. [Peerlings *et al.*, 1996] introduit une nouvelle formulation de la méthode à gradient de variable pour l'endommagement :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} - c\Delta\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} \tag{1.54}$$

Cette formulation implicite a pour conséquence d'ajouter une nouvelle équation à résoudre lors d'une simulation. Il faut alors ajouter des conditions aux limites :

$$\vec{\nabla}\bar{\varepsilon}_{eq} \cdot \vec{n} = 0 \tag{1.55}$$

Ce type de formulation présente l'avantage d'être très simple à mettre en œuvre numériquement. Cependant, elle présente les mêmes défauts que la méthode non-locale intégrale en ce qui concerne l'initiation de l'endommagement ou la diffusion de l'endommagement.

[Simone *et al.*, 2003] propose d'ajouter des degrés de liberté correspondant à des discontinuités dans l'interpolation des champs du problème mécanique. Cela permet d'effectuer la transition entre le comportement non-local modélisant le développement des dégradations et un comportement localisé une fois un critère de transition atteint. En suivant cette idée, [Cuvilliez *et al.*, 2012] ou encore [Cazes *et al.*, 2009] proposent d'ajouter une zone cohésive aux endroits où le critère de transition est atteint et de bloquer le comportement non-local (*cf* FIG.1.19).

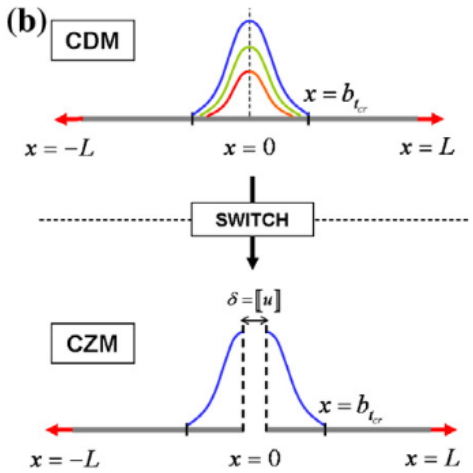


FIGURE 1.19: Introduction d'une zone cohésive dans la bande de localisation pour un modèle à gradient de variables internes ([Cuvilliez *et al.*, 2012])

4.4.3 Méthodes à gradient non-local

Une catégorie de modèles non-locaux repose sur l'intervention de variables d'état supplémentaires dans la description des milieux continus. [Germain *et al.*, 1983] pose le cadre thermodynamique de ce type de méthode en écrivant la forme générale de la puissance des efforts intérieurs en fonction des variables pertinentes :

$$\mathcal{P}_{int} = \int_{\Omega} \psi \left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u}), \xi \right) \tag{1.56}$$

avec ξ représentant l'intervention d'une ou plusieurs variables d'état supplémentaires, par exemple :

- le taux de déformation $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$
- le second gradient des vitesses $\nabla\nabla\vec{v}$
- le gradient d'endommagement ∇D

La régularisation de ce type de méthode intervient par l'enrichissement du milieu afin de modéliser la localisation des déformations. Par exemple, [Triantafyllidis et Aifantis, 1986] utilise ce concept pour les milieux hyperélastiques, [De Borst et Mühlhaus, 1992] l'applique aux modèles de plasticité, ou encore [Frémond et Nedjar, 1996] fait apparaître l'endommagement dans cette formulation. L'inconvénient principal de ce type de modèle pour la modélisation des matériaux quasi-fragile réside dans la difficulté à définir les conditions aux limites des variables d'états supplémentaires.

4.4.4 Régularisation du champ d'endommagement

Une autre catégorie de modèle non-locaux procède à la régularisation du champ d'endommagement afin de modéliser la localisation des déformations. Ce type de modèle introduit un opérateur de régularisation directement sur le champ d'endommagement et fait intervenir une longueur interne. Parmi ces modèles, il est possible de distinguer :

- les modèles à champ de phase, adapté à l'endommagement par [Miehe *et al.*, 2010]. Ce type de modèle considère la fissuration comme un champ de phase. Le champ d'endommagement est écrit comme la solution d'un problème de minimisation faisant intervenir une longueur caractéristique :

  $$D = Arginf \left\{ \frac{1}{2\ell_c} \int_{\Omega} \left(D^2 + \ell_c^2 \left\| \nabla D \right\| \right) \mathrm{d}V \right\} \tag{1.57}$$

  Ce type de modèle montre une grande robustesse numérique et permet de modéliser objectivement la localisation des déformations. Cependant, la description précise du champ d'endommagement requiert une discrétisation spatiale très fine ;
- le modèle « Thick Level Set », initialement développé par [Moës *et al.*, 2011], écrit l'endommagement en fonction d'une fonction de niveau :

  $$D(\phi = 0) = 0 \qquad D(\phi > \ell_c) = 1 \qquad D'(\phi) \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq \ell_c \tag{1.58}$$

  La fonction de niveau ϕ représente une surface de normale $\vec{n}$ se déplaçant à une vitesse v :

  $$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \nabla \phi \cdot \vec{n} = 0 \tag{1.59}$$

  La régularisation du problème de localisation intervient par l'effet non-local appliqué à l'endommagement par l'intermédiaire de la fonction de niveau ϕ ;

— l'approche « Lip-field », développée très récemment par [Moës et Chevaugeon, 2021], permet de régulariser le problème de mécanique en imposant une régularité de Lipschitz sur les variables internes pilotant les dégradations. La régularisation de Lipschitz sur le champ d'endommagement consiste à trouver un champ d'endommagement $D(\vec{x})$ et une constante $M < 1/\ell_c$ telle que :

$$|d(\vec{x}) - d(\vec{y})| \leq M\ell_{xy} \tag{1.60}$$

avec ℓ_{xy} la distance entre les points $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Cette méthode semble prometteuse dans sa capacité à modéliser la localisation des déformations et à régulariser le problème de mécanique pour des matériaux adoucissants. Cependant, cette méthode reste très récente est nécessite encore d'être étendue dans un cadre multi-dimensionnel.

5 Conclusion du chapitre

Le comportement des matériaux quasi-fragiles a été présenté dans ce chapitre pour des chargements mécaniques. Les modèles pertinents pour décrire ce type de comportement ont été explicités. Ce chapitre montre la capacité des modèles d'endommagement et de plasticité à reproduire le comportement macroscopique des matériaux quasi-fragile. Cependant, ce type de modèle est nécessairement confronté à la localisation des déformations lors des phases adoucissantes. Numériquement, la localisation des déformations se traduit par une perte d'objectivité de la solution vis-à-vis de la discrétisation spatiale en termes d'énergie dissipée ou de trajet de fissuration.

La littérature fournit plusieurs méthodes permettant de modéliser la localisation des déformations afin d'éviter ses conséquences néfastes. Parmi ces méthodes, la méthode non-locale intégrale paraît prometteuse en fixant objectivement la taille de la zone d'élaboration de la fissure grâce à l'introduction d'une longueur caractéristique.

C'est dans ce contexte que la méthode non-locale eikonale, développée par [Desmorat *et al.*, 2015], s'insère. En adaptant les interactions non-locales en fonction de l'état d'endommagement du matériau, [Rastiello *et al.*, 2018] observe qu'il est possible de limiter les pathologies courantes des méthodes non-locales. La suite de ce manuscrit s'attache à l'étude de cette méthode pour l'endommagement.

Chapitre 2

Étude de la formulation Eikonale Non-Locale en 1D

Le modèle d'endommagement non-local eikonal (ENL) est étudié dans ce chapitre dans un contexte 1D. Les études sont menées à l'aide d'un code aux éléments finis implémenté dans Matlab. Le modèle ENL est d'abord défini dans le cadre de la résolution numérique puis son comportement en traction est étudié. Les propriétés de régularisation de ce modèle sont discutées en fonction de l'expression de la métrique. Enfin, un modèle de transition ENL - discontinuité forte est proposée afin de modéliser objectivement la localisation des déformations.

Sommaire

1 Présentation du problème mécanique unidimensionnel 37
1.1 Formulation du modèle d'endommagement non-local eikonal 37
1.2 Définition du problème 40
1.3 Calcul numérique des distances et des interactions non-locales 44
1.4 Algorithme de résolution aux éléments finis 45
2 Modélisation de la localisation des déformations en 1D par l'approche non-locale eikonale 46
2.1 Présentation de l'étude et considérations numériques 46
2.2 Réponse représentative du comportement de la formulation ENL 47
2.3 Influence du paramètre α de la métrique 53
2.4 Remarques sur l'isolation de l'élément central 54
3 Propriétés de régularisation du modèle d'endommagement non-local eikonal 57

3.1 Influence de la discrétisation spatiale 57
3.2 Identification d'un endommagement critique 58
3.3 Modification de la métrique pour améliorer les propriétés de régularisation 60
4 Transition vers un modèle à discontinuité forte 61
4.1 Présentation de la nouvelle formulation 62
4.2 Identification d'une loi cohésive 64
4.3 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec transition 66
5 Conclusion du chapitre 69

1 Présentation du problème mécanique unidimensionnel

1.1 Formulation du modèle d'endommagement non-local eikonal

Un milieu unidimensionnel Ω constitué d'un matériau se comportant suivant un modèle d'endommagement est considéré dans ce chapitre. La relation caractéristique entre les contraintes et les déformations en chaque point matériel $x \in \Omega$ s'écrit :

$$\sigma(x) = (1 - D(x))\, E(x)\, \varepsilon(x) \tag{2.1}$$

où le module d'Young E représente la rigidité élastique du matériau et la variable D représente une mesure de la dégradation du matériau. Elle vaut $D = 0$ lorsque le matériau est complètement sain et $D = 1$ lorsque le matériau ne présente plus aucune résistance. La variable d'endommagement suit une loi d'évolution $g(\kappa)$ strictement croissante entre les deux valeurs extrêmes définies. La loi d'évolution est pilotée par une variable d'histoire $\kappa(x)$ gardant en mémoire le pire état vécu par le matériau au point matériel x.

Pour les matériaux quasi-fragiles, il est courant de définir les dégradations du matériau en fonction des extensions du milieu. Dans ce cas, la variable $\kappa(x)$ représente la plus grande déformation positive mesurée dans l'histoire du matériau. Formellement, un critère d'endommagement est défini par :

$$f = \bar{\varepsilon} - \kappa \tag{2.2}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la déformation équivalente non-locale. Dans ce chapitre, seuls des chargements de traction monotone sont considérés. La déformation équivalente, par exemple de Mazars, mesurant les extensions du matériau est donc égale à la déformation totale. Les conditions d'évolution de l'endommagement et de la limite du comportement élastique s'écrivent avec les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\kappa} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad f\dot{\kappa} = 0 \tag{2.3}$$

Dans ce chapitre, la loi d'endommagement est écrite à partir de l'évolution de la variable d'histoire κ qui évolue elle-même en fonction des conditions de Kuhn-Tucker. La forme choisie est une loi d'évolution exponentielle inspirée de la loi d'évolution du modèle de Mazars :

$$D(\kappa) = g(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \exp\left(-\frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa_c - \kappa_0}\right) \tag{2.4}$$

avec κ_0 la déformation de première fissuration et κ_c une valeur de déformation permettant d'ajuster le comportement post-pic de la loi de comportement en termes d'énergie dissipée.

La loi de comportement est qualifiée du terme « non-locale » car la déformation équivalente non-locale utilisée dans le critère d'endommagement est la variable pilotant l'évolution de l'endommagement. La variable d'histoire κ prend alors la valeur de la déformation équivalente non-locale lorsque le matériau s'endommage. La déformation non-locale est calculée comme la moyenne spatiale des déformations « locales » :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{V(x)} \int_\Omega \phi\left(\frac{\ell_{xy}}{\ell_c}\right) \varepsilon(y) dy \tag{2.5}$$

où ϕ est une fonction de pondération décroissante en fonction de la distance ℓ_{xy} entre les points matériels x et y. La longueur caractéristique ℓ_c est un paramètre du modèle fortement lié à la taille de la zone où se

développent les dégradations. Le volume effectif $V(x)$ est une mesure du volume de la zone d'interaction non-locale pour le point x et sert à normaliser le calcul de la moyenne non-locale. De cette façon, le calcul d'une variable non-locale à partir d'une variable locale constante donne un champ non-local constant et égal au champ local, quelle que soit la fonction de pondération. Le volume $V(x)$ est défini par l'intégrale :

$$V(x) = \int_\Omega \phi\left(\frac{\ell_{xy}}{\ell_c}\right) dy \tag{2.6}$$

La fonction ϕ est une fonction de pondération décroissante dont la valeur pour une distance nulle ($\ell_{xy} = 0$) est égale à l'unité et qui tend à annuler les interactions non-locales quand la distance augmente. Formellement, la fonction doit respecter les conditions suivantes :

$$\phi(\xi = 0) = 1 \quad \lim_{\xi \to \infty} \phi(\xi) = 0 \tag{2.7}$$

Le choix de la fonction de pondération est habituellement porté sur une fonction gaussienne (ϕ_1) ou sur une fonction en forme de cloche (ϕ_2) :

$$\phi_1(\xi) = \exp\left(-4\xi^2\right) \qquad \phi_2(\xi) = \left\langle 1 - \xi^2 \right\rangle_+^2 \tag{2.8}$$

La fonction en forme de cloche présente l'avantage d'offrir un support compact, i.e., les interactions sont exactement nulles pour toute distance $\ell_{xy} > \ell_c$ ($\xi > 1$). Néanmoins, la limite de la zone non-locale naturellement formalisée par cette condition mathématique n'est pas progressive, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction ϕ_2 n'est pas définie en $\xi = 1$.

Modèle intégral classique La formulation du modèle d'endommagement intégral non-local classique telle qu'introduite par [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] se base sur le calcul des interactions non-locales à partir des distances euclidiennes. La distance entre deux points est alors la norme du vecteur entre les deux points. En 1D, il s'agit simplement de la valeur absolue entre les deux coordonnées :

$$\ell_{xy} = |x - y| \tag{2.9}$$

Les distances entre les points sont alors constantes au cours du développement des dégradations.

Modèle intégral eikonal Pour prendre en compte une évolution des interactions non-locales, la formulation introduite récemment par [Desmorat *et al.*, 2015] propose de calculer les distances ℓ_{xy} en résolvant une équation eikonale faisant intervenir le champ d'endommagement dans la fonction métrique. Dans le cas unidimensionnel considéré ici, cette équation s'écrit sous la forme générique :

$$m(z) \left| \frac{d\ell_{xy}(z)}{dz} \right| = 1 \tag{2.10}$$

avec $m(z)$ une fonction métrique à valeurs strictement positives. Dans le cadre de la formulation définie ici, on considère que la distance entre un point matériel et lui-même est nulle, se traduisant formellement par :

$$\ell_{xy}(z = 0) = 0 \tag{2.11}$$

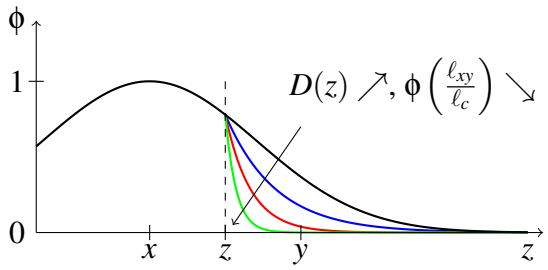


FIGURE 2.1: Illustration de l'influence de l'endommagement sur le calcul des interactions non-locales

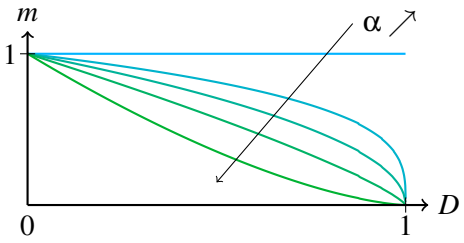


FIGURE 2.2: Illustration de l'influence de l'endommagement et du paramètre α sur les valeurs de la fonction métrique définie dans l'équation (2.13)

L'idée originale proposée par [Desmorat *et al.*, 2015] est de calculer les interactions non-locales en considérant que « l'information non-locale » se transmet par l'intermédiaire d'une onde élastique de compression. Sous l'hypothèse d'une onde haute fréquence, [Desmorat *et al.*, 2015] montrent alors que la distance effective entre deux points est solution de l'équation eikonale (2.10) avec la fonction métrique suivante :

$$m(z) = \sqrt{1 - D(z)} \tag{2.12}$$

où apparaît l'endommagement du milieu traversé par l'onde. L'influence de l'endommagement dans le calcul des distances peut être observée sur la FIG.2.1.

Il est possible de généraliser la définition de la fonction métrique en introduisant un paramètre α :

$$m(z) = (1 - D(z))^{\alpha} \tag{2.13}$$

Ainsi, la fonction métrique originale (EQ.2.12) correspond au cas particulier $\alpha = 0.5$. L'influence du paramètre α sur les valeurs de la fonction métrique est exposée sur la FIG.2.2. Lorsque $\alpha = 0$, la fonction métrique est identiquement égale à l'unité et le champ de distance vérifiant l'équation eikonale correspondent alors aux champs des distances euclidiennes. Au contraire, lorsque la fonction métrique m tend vers 0, les distances augmentent fortement. Le paramètre α sert alors à définir la vitesse avec laquelle la fonction métrique s'approche de 0 en fonction de l'endommagement, et définit les propriétés non-locales de la formulation non-locale eikonale. L'influence du paramètre α sur les propriétés mécaniques du modèle d'endommagement non-local eikonal est étudiée et discutée dans la suite de ce chapitre.

1.2 Définition du problème

Dans la suite de ce chapitre, le comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal est étudié en considérant une barre encastrée Ω de longueur L et de section uniforme S. La géométrie du milieu est représentée par le schéma donné sur la FIG.2.3. La barre n'est soumise à aucune force volumique, mais est soumise à une force F de traction à son extrémité libre. Dans des conditions quasi-statiques, le couple déplacement/contrainte $(u = u(x), \sigma)$ solution du problème vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \Omega =]0, L[, \quad \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.14}$$

avec $F_N = \sigma S$ l'effort normal dans une section orthogonale de la barre. La section S de la barre étant uniforme le long de la barre, il y a une équivalence directe entre les observations de l'effort normal F_N et les observations de la contrainte σ.

Pour compléter la définition mathématique du problème de mécanique, les conditions aux limites sont ajoutées :

$$u(x = 0) = 0 \qquad\qquad F_N(x = L) = F \tag{2.15}$$

Enfin, pour terminer la définition formelle du problème de mécanique, il est nécessaire de relier les déformations aux déplacements. Dans ce manuscrit, les déformations du matériau sont toujours mesurées selon l'hypothèse des petites perturbations. Sous cette hypothèse, la déformation $\varepsilon = \varepsilon(x)$ en un point matériel x est calculée par la dérivée de déplacement :

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.16}$$

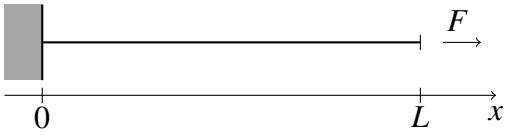


FIGURE 2.3: Géométrie du problème unidimensionnel

1.2.1 Discrétisation spatiale

Le problème est résolu numériquement par la méthode des éléments finis. [1] Le domaine $\Omega =]0, L[$ est discrétisé en un nombre N_{el} d'éléments à deux nœuds. L'ensemble des nœuds est notée par la séquence ordonnée :

$$I_N = \{\tilde{x}_1 = 0, \ldots, \tilde{x}_N = L\} \tag{2.17}$$

avec $N = N_{el} + 1$ le nombre de nœuds.

1. La méthode de résolution aux éléments finis n'est pas décrite dans ce chapitre. Cependant, le développement de la formulation faible du problème de mécanique ainsi que les détails de résolutions peuvent être trouvés, par exemple, dans la référence [Brenner et Scott, 2008].

La solution en déplacement est cherchée sous la forme d'une interpolation de fonctions de forme. L'approximation u_h de la solution u du problème mécanique s'écrit alors, en tout point x de la barre, de la façon suivante :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \varphi_i(x) \tag{2.18}$$

où les déplacements nodaux U_i sont les inconnues à déterminer.

Le choix est fait ici d'interpoler la solution en déplacement à l'aide de fonctions de forme φ linéaires. Il est possible d'utiliser d'autres types de fonctions, notamment des fonctions quadratiques par exemple. Le type de fonction de forme a une influence sur la qualité de l'interpolation des solutions en déplacement et en contrainte.

Dans le cas des fonctions de forme linéaires à support compact, la dérivée de l'approximation u_h du champ de déplacement est constante par élément. Dans le cadre 1D de ce chapitre, la déformation de l'élément i s'écrit en fonction de la taille h de l'élément et des déplacements des nœuds définissant l'élément :

$$\varepsilon_i = \varepsilon(x = x_i) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}, \quad \forall x_i \in I \tag{2.19}$$

Pour mener les analyses du comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal, il faut définir la position des points où sont calculées les déformations, les contraintes et les variables internes nécessaires au fonctionnement du modèle. Le champ de déformation étant constant par élément, le champ de contrainte est aussi constant par élément. L'intégration de l'équation d'équilibre sous sa forme faible est réalisée élément par élément. Le calcul numérique de cette intégrale utilise donc la méthode du point milieu où la quantité intégrée est considérée constante sur le domaine d'intégration, ici l'élément, après avoir été estimée au centre du domaine d'intégration. Il est donc cohérent de considérer que les déformations, des contraintes et des variables internes sont calculées en des points d'intégration situés au centre de chaque élément. L'ensemble des points d'intégration est alors noté par la séquence ordonnée :

$$I = \left\{ x_1, \ldots, x_w = \frac{L}{2}, \ldots, x_{N-1} \right\} \tag{2.20}$$

Pour des raisons de symétrie, le nombre N_{el} d'éléments est toujours impair de façon à avoir un point d'intégration situé exactement au milieu de la barre en $x_w = L/2$.

1.2.2 Application du chargement et pilotage

Dans le but de résoudre numériquement le problème mécanique avec la discrétisation en éléments finis définie précédemment, l'équation d'équilibre s'écrit comme l'égalité entre le vecteur des forces internes et le vecteur des forces externes, $\boldsymbol{f}_{int} = \boldsymbol{f}_{ext}$. Cette équation prend en compte l'équation d'équilibre (2.14) et les conditions aux limites de Neumann (EQ.2.15) grâce à la notation vectorielle des inconnues nodales.

Les conditions aux limites de Dirichlet nécessitent un traitement particulier. Il existe plusieurs méthodes permettant d'appliquer un chargement en déplacement comme la condensation statique ou la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Généralement, ces méthodes consistent à réaliser des opérations simples sur l'équation vectorielle de l'équilibre afin de faire apparaitre explicitement les déplacements dans l'équation d'équilibre.

Les efforts extérieurs $\boldsymbol{f}_{ext}$ correspondent aux efforts appliqués sur la barre en chaque nœud. Dans le problème considéré ici, aucun effort volumique n'est appliqué sur la barre et le chargement en traction est représenté par un effort ponctuel appliqué au bout de la barre au nœud $\tilde{x}_N = L$. Les efforts extérieurs sont alors notés sous la forme d'une amplitude de chargement λ, inconnue dans le cas d'un pilotage indirect, et d'un vecteur $\hat{\boldsymbol{f}}$ désignant le nœud où est appliqué l'effort extérieur. Dans le cas présent, les valeurs du vecteur sont nulles pour chaque nœud à l'exception du nœud où est appliquée la force de traction à l'extrémité libre de la barre, $\hat{\boldsymbol{f}} = [0,\dots,0,1]^\top$.

Pour pouvoir modéliser correctement les non-linéarités apportées par le modèle d'endommagement non-local, il est préférable d'appliquer le chargement de la barre de manière progressive et quasi-statique entre un instant initial $t = 0$ et un instant final $t = t_{fin}$. Du point de vue numérique, l'application du chargement est discrétisée en un nombre n_c de pas de chargements. Ainsi, à chaque instant t_n le système d'équations suivant doit être vérifié :

$$\boldsymbol{f}_{int}^n = \lambda^n \hat{\boldsymbol{f}} \qquad\qquad p(\lambda^n, \boldsymbol{U}^n) = 0 \tag{2.21}$$

avec p une équation de pilotage dépendante des variables du problème, comme les déplacements nodaux $\boldsymbol{U}$ et l'amplitude de chargement λ.

Du fait de la non-linéarité du problème mécanique par l'intervention de l'endommagement, la recherche d'une solution numérique pour chaque pas de temps est itérative. Plus précisément, cela veut dire que l'équation d'équilibre n'est pas directement vérifiée et il faut donc définir une procédure de calcul permettant de converger vers l'équilibre en un nombre fini d'itérations. Pour cela, un résidu quantifiant l'écart entre les efforts intérieurs et les efforts extérieurs est défini à l'itération k du pas n :

$$\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{f}_{int}^{n,k} - \lambda^{n,k} \hat{\boldsymbol{f}} \tag{2.22}$$

Les efforts intérieurs sont calculés à partir de la prédiction du champ de déplacement $\boldsymbol{U}^{n,k}$ à l'itération k du pas de temps n. Pour un chargement indirect, l'objectif d'une itération k de calcul revient donc au calcul du vecteur des forces internes $\boldsymbol{f}_{int}^{n,k}$ et de l'amplitude de chargement $\lambda^{n,k}$ afin de calculer le résidu.

Dans la suite de cette partie, les équations explicitent la méthode de calcul de la prédiction du champ de déplacement pour le pas de chargement $n+1$ en connaissant totalement l'état mécanique du milieu au pas de chargement n. Il est supposé que l'équilibre n'a pas été atteint à l'itération k et il est donc nécessaire de calculer une prédiction du champ de déplacement à l'itération $k+1$ afin de vérifier une nouvelle fois l'équilibre :

$$\boldsymbol{U}^{n+1,k+1} = \boldsymbol{U}^n + \Delta\boldsymbol{U}^{n+1,k} + \delta\boldsymbol{U}^{n+1,k+1} \tag{2.23}$$

où le champ de déplacement convergé du pas de chargement précédent $\boldsymbol{U}^n$ déjà connu. L'incrément de déplacement $\Delta\boldsymbol{U}^{n+1,k}$ a déjà été calculé à l'itération précédente k, il est donc suffisant de calculer la variation de l'incrément de déplacement $\delta\boldsymbol{U}^{n+1,k+1}$ afin de connaître totalement le champ de déplacement $\boldsymbol{U}^{n+1,k+1}$. Dans la suite, les grandeurs sont calculées pour le pas de chargement $n+1$, cet indice est omis pour clarifier la lecture. Les autres indices sont gardés dans la notation.

À cause de la dégradation de la rigidité de la barre par l'adoucissement du matériau dû à l'endommagement, il est possible d'observer un phénomène de « snap-back ». Les méthodes de chargement direct en déplacements sont adaptées à la recherche d'une solution numérique avec un adoucissement de la résistance mécanique. Cependant, ces méthodes ne sont pas adaptées en présence d'un « snap-back ».

Une méthode de chargement indirecte en déplacement ([Riks, 1979, Crisfield, 1981, de Borst *et al.*, 2012, Rastiello *et al.*, 2019, Oliveira *et al.*, 2021]) est utilisée ici. Pour cela, la variation de l'incrément du

champ de déplacement au pas de temps n est cherchée sous la forme d'une somme d'une contribution du résidu $\delta \boldsymbol{U}_I^{k+1}$ et d'une contribution des efforts extérieurs $\delta \boldsymbol{U}_{II}^{k+1}$:

$$\delta \boldsymbol{U}^{k+1} = \delta\lambda^{k+1}\delta \boldsymbol{U}_I^{k+1} + \delta \boldsymbol{U}_{II}^{k+1} \tag{2.24}$$

Les expressions des contributions $\delta \boldsymbol{U}_I^{k+1}$ et $\delta \boldsymbol{U}_{II}^{k+1}$ sont calculées en cherchant à annuler le résidu à l'itération $k+1$ en connaissant sa valeur à l'itération k :

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{r}^k + \delta \boldsymbol{r}^{k+1} = 0 \qquad \delta \boldsymbol{r}^{k+1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \delta \boldsymbol{U}} \delta \boldsymbol{U}^{k+1} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \lambda} \delta\lambda^{k+1} \tag{2.25}$$

Les dérivées partielles du résidu par rapport au facteur de chargement λ et par rapport à la variation du champ de déplacent $\delta \boldsymbol{U}$ sont calculées à partir des expressions des forces internes et des forces externes.

Les forces externes dépendent linéairement du facteur de chargement (EQ.2.21). En ce qui concerne les efforts internes, il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite générale de la dépendance au champ de déplacement ou à sa variation. Il est alors considéré que la variation d'effort interne par rapport à l'itération précédente dépend linéaire de la variation de déplacement :

$$\boldsymbol{f}_{int}^{k+1} = \boldsymbol{f}_{int}^{k} + \boldsymbol{K}^k \delta \boldsymbol{U}^{k+1} \tag{2.26}$$

Cette hypothèse forte permet d'exprimer de façon simple le calcul des variations de déplacement et de facteur de chargement à partir de l'expression du résidu à l'itération $k+1$:

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{r}^k + \boldsymbol{K}^k \delta \boldsymbol{U}^{k+1} - \delta\lambda^{k+1} \hat{\boldsymbol{f}} = 0 \tag{2.27}$$

Les expressions des contributions à la variation du champ de déplacement sont déduites à partir de l'équation précédente :

$$\boldsymbol{K}^k \, \delta \boldsymbol{U}_I^{k+1} = \hat{\boldsymbol{f}} \qquad \boldsymbol{K}^k \, \delta \boldsymbol{U}_{II}^{k+1} = -\boldsymbol{r}^k \tag{2.28}$$

Il faut noter que la matrice $\boldsymbol{K}$ représente la direction de recherche de la solution en déplacement. La définition de cette matrice a une influence non négligeable sur la vitesse de convergence. Si le comportement du matériau est élastique, alors $\boldsymbol{K}$ est définie comme la matrice de rigidité globale élastique. Lorsque cela est possible, calculer l'opérateur tangent de la loi de comportement permet d'obtenir une vitesse de convergence quadratique en mettant à jour la matrice $\boldsymbol{K}$ à chaque itération. Par exemple, il est souvent possible de calculer cette matrice pour des modèles de plasticité. Cependant, il est impossible de réaliser cette opération explicitement avec les modèles d'endommagement non-locaux. Dans ce cas spécifique, il est possible de calculer numériquement l'opérateur tangent par perturbation, mais cela peut s'avérer très coûteux en temps de calcul. Pour les modèles d'endommagement non-locaux, calculer l'opérateur sécant de la loi de comportement offre un bon compromis en termes de temps de calcul et vitesse de convergence. Il est aussi possible de ne pas mettre à jour la matrice $\boldsymbol{K}$ à chaque itération afin d'économiser le temps de calcul de la reconstruction de cette matrice en supposant que les changements dans la direction de recherche de la solution en déplacement sont négligeables pendant quelques itérations.

La formulation indirecte du pilotage en déplacement nécessite d'être complétée par une équation de pilotage. Dans l'objectif d'étudier les propriétés du modèle d'endommagement non-local eikonal, deux

solutions semblent adaptées à la résolution du problème. En effet, le phénomène de localisation des déformations est forcé dans l'élément central de la barre pour préserver la géométrie du problème. La localisation des déformations dans le centre de la barre pouvant introduire un phénomène de « snap-back », il faut définir une équation de pilotage permettant d'assurer l'observation de ce phénomène. Le phénomène de « snap-back » dans le cas d'un modèle d'endommagement est causé par la décharge du matériau lors de la localisation des déformations dans une zone finie. Dans les cas d'études de ce chapitre, il parait donc cohérent d'écrire l'équation de pilotage en fonction de la déformation de l'élément central, noté w :

$$p = \Delta\varepsilon_w - \Delta\tau = 0 \tag{2.29}$$

À partir de cette équation, la variation du facteur de chargement est déduite :

$$\delta\lambda^{k+1} = \frac{\Delta\tau - \Delta\varepsilon_w^k - \delta\varepsilon_{w,II}^{k+1}}{\delta\varepsilon_{w,I}^{k+1}} \tag{2.30}$$

Dans le cas d'une formulation d'endommagement non-local, le phénomène de dissipation d'énergie par l'endommagement est exclusivement lié à la déformation non-locale. Imposer le chargement de la variation de déformation non-locale d'un élément permet donc d'assurer la recherche d'une solution dissipative :

$$p = \Delta\bar{\varepsilon}_w - \Delta\tau = 0 \tag{2.31}$$

avec l'expression de la variation du facteur de chargement :

$$\delta\lambda^{k+1} = \frac{\Delta\tau - \Delta\bar{\varepsilon}_w^k - \delta\bar{\varepsilon}_{w,II}^{k+1}}{\delta\bar{\varepsilon}_{w,I}^{k+1}} \tag{2.32}$$

1.3 Calcul numérique des distances et des interactions non-locales

Les déformations non-locales sont calculées à l'aide de la méthode du point milieu pour le calcul numérique de l'intégrale :

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{h}{V_i}\sum_{i}^{N_{el}} \varepsilon_j \phi\left(\frac{\ell_{i,j}}{\ell_c}\right) \tag{2.33}$$

avec :

- $\ell_{i,j}$ la distance entre l'élément i et l'élément j. La distance entre deux éléments est définie par la distance entre leurs points d'intégration. Dans le cas présent, les points d'intégration sont situés au centre des éléments.
- h la longueur des éléments finis (uniforme le long de la barre).
- $V_i = h\sum_j^{N_{el}} \phi\left(\frac{\ell_{i,j}}{\ell_c}\right)$.

Pour évaluer la déformation non-locale il faut calculer les distances entre chaque élément comme la distance entre les deux points d'intégration. La mesure de la distance entre deux éléments peut être choisie comme la distance euclidienne entre ces deux éléments :

$$\ell_{i,j} = \left|x_i - x_j\right| \tag{2.34}$$

correspondant alors à la formulation intégrale non-locale originale de [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987].

En ce qui concerne le calcul des distances pour la formulation non-locale eikonale, il est nécessaire de résoudre l'équation eikonale EQ.2.10. Bien qu'il n'existe pas de solution analytique générale applicable quel que soit le champ d'endommagement, il suffit en 1D de calculer l'intégrale de la métrique en fonction de la discrétisation spatiale du problème :

$$\ell_{i,j} = \int_{\min(x_i,x_j)}^{\max(x_i,x_j)} (m(z))^{-1} \, \mathrm{d}z \tag{2.35}$$

L'hypothèse la plus simple pour calculer l'intégrale 2.35 est de considérer que le champ d'endommagement est uniforme par élément, comme le champ de déformation.

Le champ de distance pour la métrique précédemment définie $m(z) = (1 - D(z))^{\alpha}$ est alors calculé de façon récursive en partant de la condition initiale $\ell_{i,i} = 0$:

$$\begin{aligned} \ell_{i,j+1} &= \ell_{i,j} + \frac{h}{2}\left[(1-D_j)^{-\alpha} + (1-D_{j+1})^{-\alpha}\right] && \forall j > i \\ \ell_{i,j-1} &= \ell_{i,j} + \frac{h}{2}\left[(1-D_{j-1})^{-\alpha} + (1-D_j)^{-\alpha}\right] && \forall j < i \end{aligned} \tag{2.36}$$

Pour des raisons de robustesse numérique qui seront exposées dans la suite de ce chapitre, il est possible de faire une autre hypothèse sur la forme du champ d'endommagement pour le calcul des distances effectives. Par exemple, [Jirásek et Desmorat, 2019] propose de considérer que le champ d'endommagement est linéaire entre chaque point d'intégration. Cette hypothèse influence grandement l'expression du calcul des distances effectives et il faut distinguer deux cas distincts en fonction de la valeur du paramètre α pour la métrique 2.13 :

$$\begin{aligned} \ell_{i,j+1} &= \ell_{i,j} + \frac{1}{1-\alpha}\frac{h}{D_{j+1}-D_j}\left[(1-D_j)^{1-\alpha} - (1-D_{j+1})^{1-\alpha}\right] && \forall j > i,\ \forall \alpha \neq 1 \\ &= \ell_{i,j} + \frac{h}{D_{j+1}-D_j}\left[\ln(1-D_j) - \ln(1-D_{j+1})\right] && \forall j > i,\ \text{si } \alpha = 1 \\ \ell_{i,j-1} &= \ell_{i,j} + \frac{1}{1-\alpha}\frac{h}{D_j-D_{j-1}}\left[(1-D_{j-1})^{1-\alpha} - (1-D_j)^{1-\alpha}\right] && \forall j < i,\ \forall \alpha \neq 1 \\ &= \ell_{i,j} + \frac{h}{D_j-D_{j-1}}\left[\ln(1-D_{j-1}) - \ln(1-D_j)\right] && \forall j < i,\ \text{si } \alpha = 1 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Il faut aussi distinguer le cas où deux éléments adjacents observent la même valeur d'endommagement, dans ce cas, l'expression du calcul des distances s'écrit :

$$\begin{aligned} \ell_{i,j+1} &= \ell_{i,j} + h(1-D_j)^{-\alpha} \quad \text{si} \quad D_j = D_{j+1} && \forall j > i \\ \ell_{i,j-1} &= \ell_{i,j} + h(1-D_j)^{-\alpha} \quad \text{si} \quad D_j = D_{j-1} && \forall j < i \end{aligned} \tag{2.38}$$

1.4 Algorithme de résolution aux éléments finis

Maintenant que tous les éléments nécessaires à la résolution aux éléments finis ont été définis, il convient d'écrire l'algorithme de résolution pour chaque pas de chargement $n+1$ en connaissant l'état mécanique du milieu au pas de temps n :

1. Calcul des distances effectives à partir du champ d'endommagement convergé du pas de chargement précédent n ;
2. Calcul d'une prédiction des déplacements nodaux ;
3. Évaluation locale de la loi de comportement ;
4. Calcul des variables non-locales grâce au champ des distances effectives ;
5. Évaluation non-locale de la loi de comportement ;
6. Intégration des contraintes et calcul du résidu ;
   — Si convergence, passage au pas de chargement suivant : $n+2$;
   — Sinon, retour à l'étape 2.

Il faut noter que le calcul des distances effectives pour le calcul non-local constitue la première étape de résolution de chaque pas de chargement. En effet, cette étape s'avère indispensable dans le cas du pilotage en déformation non-locale. De plus, bien qu'il soit possible de mettre à jour le champ des distances effectives à chaque itération en fonction du champ d'endommagement à l'itération précédente, le choix est fait ici de n'effectuer qu'une seule évaluation du champ de distance pour des raisons de temps de calcul.

2 Modélisation de la localisation des déformations en 1D par l'approche non-locale eikonale

Dans cette section, le comportement numérique de la formulation non-locale eikonale est étudié. En particulier, l'influence de la méthode de calcul des distances effective est mise en évidence. Pour cela, les deux méthodes illustrées précédemment (EQ.2.36 et EQ.2.38) sont comparées en termes de réponse globale, d'énergie dissipée et de propriétés de régularisation. Les résultats des calculs numériques sont donnés systématiquement pour les deux formulations. La formulation supposant un champ d'endommagement uniforme par élément est appelée « ENL1 » (EQ.2.36) et la seconde formulation supposant un champ d'endommagement linéaire entre les points d'intégration est appelée « ENL2 » (EQ.2.37 et EQ.2.38).

2.1 Présentation de l'étude et considérations numériques

Afin de déclencher la localisation des déformations et observer les effets de la régularisation non-locale, le module d'élasticité est affaibli au centre de la barre. Pour minimiser la variation de raideur totale en fonction du nombre d'éléments, l'affaiblissement est appliqué selon une loi gaussienne centrée au point d'intégration x_w (c'est-à-dire au centre de la barre). Le module d'Young E_i d'un élément est calculé par l'équation suivante :

$$E_i = E_0 \left[1 - \frac{1}{10} \exp\left(-4 \left(\frac{x_i - x_w}{L/10} \right)^2 \right) \right] \tag{2.39}$$

La répartition des valeurs de l'affaiblissement du rapport E/E_0 est illustrée sur la FIG.2.4 pour un maillage constitué de 81 éléments.

Pour améliorer la convergence de la résolution numérique, la matrice $\boldsymbol{K}$ est mise à jour régulièrement selon la méthode sécante. Il est alors nécessaire de limiter l'endommagement à une valeur D_{max} afin

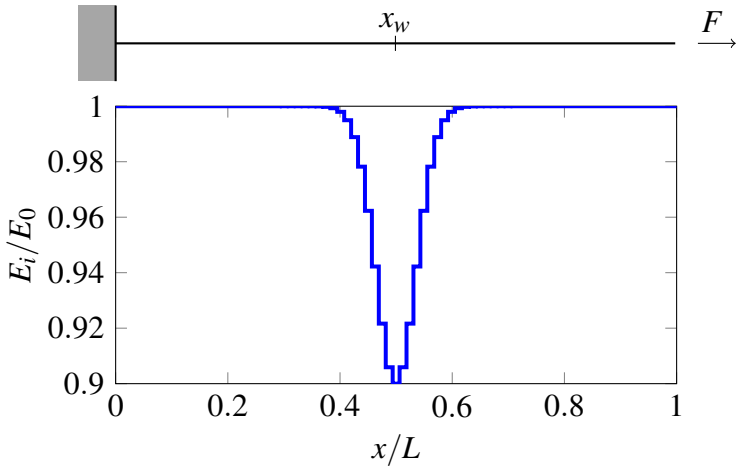


FIGURE 2.4: Affaiblissement du module d'Young le long de la barre pour un maillage de 81 éléments

Paramètre	Valeur
L	100 mm
ℓ_c	L/5
E_0	100 MPa
S	5×10^{-3} m^2
κ_0	1×10^{-4}
κ_c	$10 \times \kappa_0$

TABLE 2.1: Valeurs numériques des paramètres pour la résolution aux éléments finis en 1D

d'éviter les problèmes numériques de division par zéros lorsque l'endommagement est numériquement calculé à des valeurs supérieures ou égales à 1.

Enfin, toutes les valeurs numériques des paramètres géométrique et matériaux de la modélisation sont définies dans le TAB.2.1. La fonction de pondération choisie pour les études de ce chapitre est la fonction en forme de cloche ϕ_2 donnée à l'EQ.2.8.

2.2 Réponse représentative du comportement de la formulation ENL

2.2.1 Observations globales

Pour étudier le comportement des formulations ENL1 et ENL2 dans leurs versions originales (avec $\alpha = 0.5$), une résolution du problème mécanique présenté dans la section précédente est conduite. Les résultats sont obtenus avec un maillage comprenant $N_{el} = 81$ éléments. Les réponses globales correspondantes aux formulations ENL1 et ENL2 sont tracées sur la FIG.2.5. Les réponses sont comparées à la réponse obtenue pour la formulation intégrale non-locale originale, appelée « INL », ainsi qu'à la réponse correspondante à un comportement purement local. Les simulations pour les modèles ENL1 et ENL2 sont réalisées en utilisant l'équation de pilotage sur la déformation non-locale (EQ.2.31) avec un

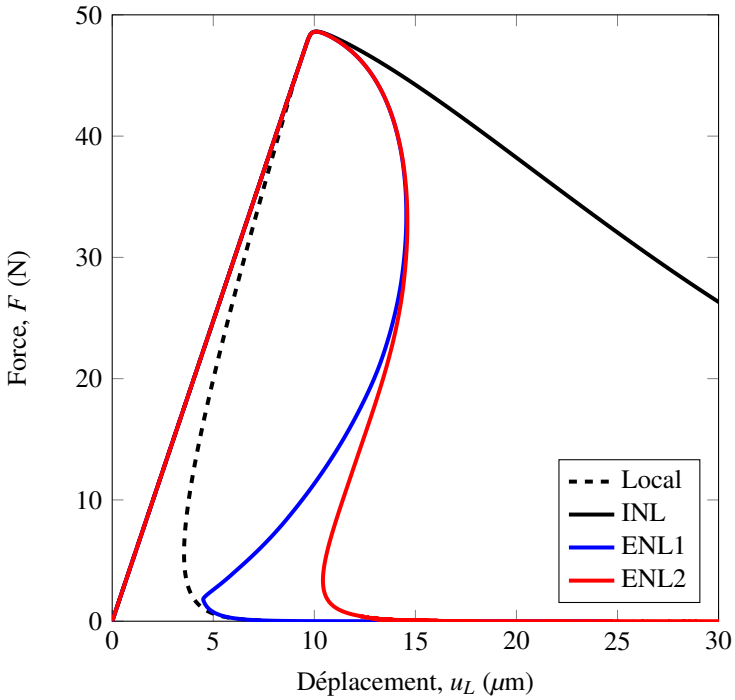


FIGURE 2.5: Réponse globale représentative du comportement de la formulation ENL (81 éléments)

pas de chargement en déformation de $\Delta\tau = \kappa_0/50$ pour assurer un processus d'endommagement assez graduel.

Comme l'avaient déjà observé [Rastiello *et al.*, 2018] pour une formulation ENL en 2D, les réponses des formulations ENL1, ENL2 sont confondues avec la réponse de la formulation INL jusqu'à un certain niveau d'endommagement. En effet, comme le montre la FIG.2.2, les valeurs de la métrique sont très proches de 1, pour des niveaux d'endommagement relativement faibles, et les distances effectives pour les formulations ENL1 et ENL2 sont encore très proches des distances euclidiennes. De la même façon, les formulations ENL1 et ENL2 ont des réponses globales très proches jusqu'à des niveaux d'endommagement élevés, car les différentes méthodes de calcul numérique des distances effectives donnent des résultats similaires pour des valeurs d'endommagement suffisamment faibles. Lors de la localisation, cependant, les réponses des formulations ENL1 et ENL2 s'écartent à cause des différences sur le calcul des distances effectives explicité précédemment.

2.2.2 Processus de localisation

En observant le développement de l'endommagement le long de la barre sur la FIG.2.6, il est possible de distinguer trois ensembles d'éléments correspondant à une zone élastique où les éléments ne sont pas endommagés, une zone « active » où l'endommagement augmente et une zone endommagée « inactive » où l'endommagement est strictement positif, mais n'augmente pas. Ces zones sont formellement

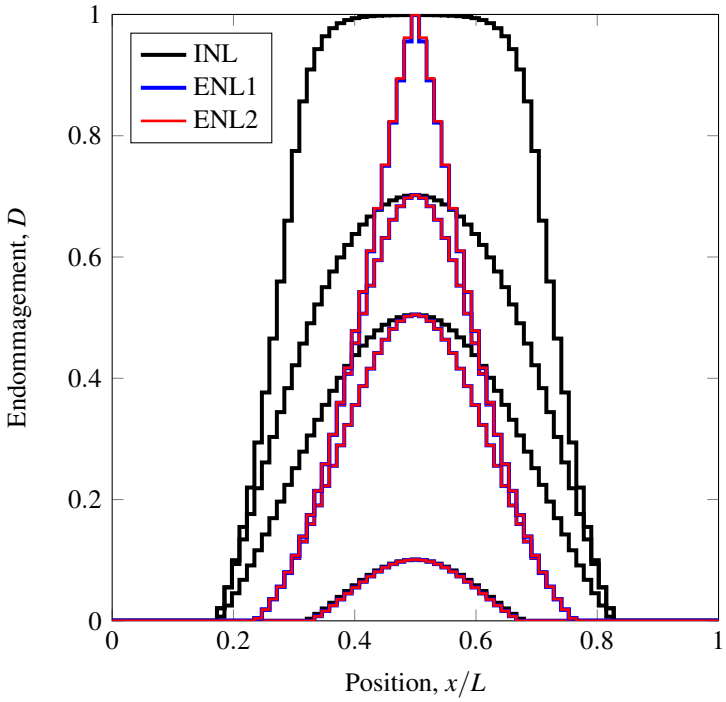


FIGURE 2.6: Profils d'endommagement le long de la barre pour différents pas de chargement (81 éléments)

distinguées par les trois ensembles :

$$I_{elastique} = \{x_i \in I \mid D_i = 0,\ \Delta D_i = 0\}$$
$$I_{actif} = \{x_i \in I \mid \Delta D_i > 0\}$$
$$I_{inactif} = \{x_i \in I \mid D_i > 0,\ \Delta D_i = 0\}$$

Pour les formulations ENL1 et ENL2, le nombre d'éléments au comportement élastique diminue jusqu'à un nombre minimum, puis n'évolue plus au cours du temps. Cette observation est également correcte pour la formulation INL pour les niveaux de chargement présentés dans le cadre de cette étude. Néanmoins, à cause de la diffusion de l'endommagement bien connue pour cette formulation, pour un niveau de chargement suffisamment élevé, il est possible d'observer un endommagement complet de la barre avec l'ensemble $I_{elastique}$ qui devient vide.

Phases principales du processus d'endommagement. Pendant la première phase de chargement où le nombre d'éléments dans l'ensemble $I_{elastique}$ diminue, une augmentation du nombre d'éléments dans la zone active de l'endommagement (I_{actif}) est observée pendant que le nombre d'éléments dans la zone inactive ($I_{inactif}$) reste nul. L'augmentation des distances effectives pour les formulations ENL1 et ENL2 mène à une limite d'évolution de la zone élastique qui n'évolue plus, quelle que soit l'intensité du chargement appliqué. À partir de cet instant, les éléments de l'ensemble I_{actif} sont progressivement transférés dans l'ensemble $I_{inactif}$ où l'endommagement n'évolue plus. Ce processus d'endommagement non-locale est également visible sur les profils de déformations non-locales (FIG.2.7) : les déformations

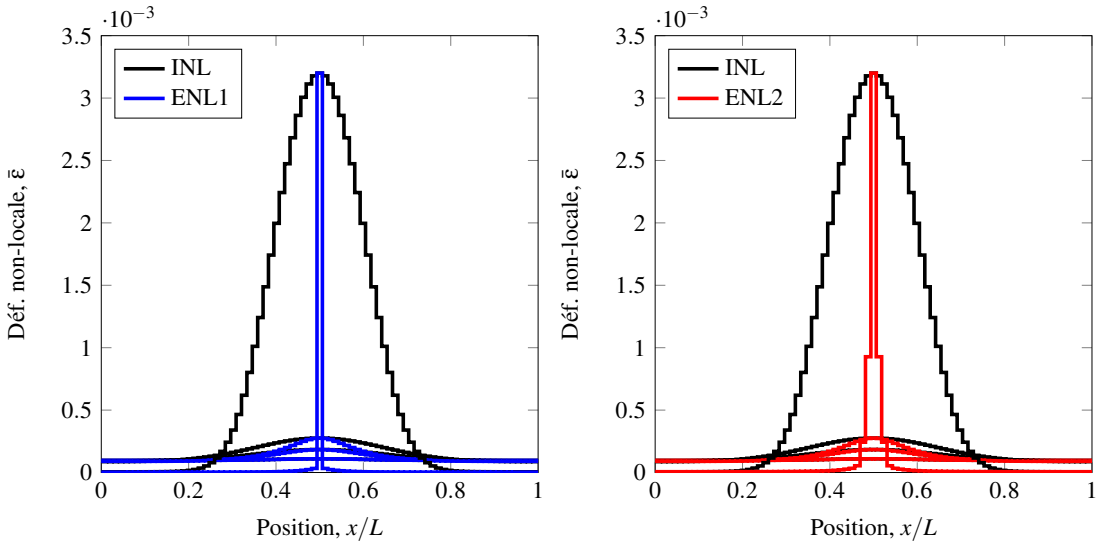


FIGURE 2.7: Profil de déformation non-locale le long de la barre pour différends pas de chargement (81 éléments)

non-locales se concentrent de plus en plus au centre de la barre, ce qui n'est pas le cas pour la formulation INL. Par ailleurs, pour le dernier pas de chargement représenté sur la figure, les déformations non-locales pour la formulation ENL2 sont plus élevées dans le voisinage du centre de la barre que pour la formulation ENL1.

ENL1 vs ENL2. L'influence du choix de la méthode d'interpolation du champ d'endommagement a une influence sur la réponse globale ainsi que sur le développement du profil d'endommagement de la barre au cours du temps. Les différences observées entre les formulations ENL1 et ENL2 proviennent du comportement particulier de la barre dans le voisinage direct de l'élément central.

L'évolution de l'endommagement dans l'élément central w et dans son élément voisin direct $w+1$ peut être observée sur la FIG.2.8. L'évolution de l'endommagement D_w de l'élément au centre de la barre est exactement identique pour chaque formulation, car la déformation non-locale de cet élément est imposée par le pilotage (EQ.2.31). Cependant, l'endommagement D_{w+1} reste constant après avoir atteint une valeur maximale pour ENL1 contrairement à ENL2 où l'endommagement D_{w+1} continue d'augmenter. Ce phénomène de diffusion de l'endommagement pour la formulation ENL2 s'explique par le calcul de la distance entre l'élément w et l'élément $w+1$ et symétriquement $w-1$.

Ainsi, si la distance $\ell_{w,w+1}$ reste supérieure à la longueur caractéristique ℓ_c, l'interaction non-locale entre les deux éléments ne s'annule pas et la déformation non-locale de l'élément $w+1$ continue d'augmenter suivant la déformation locale ε_w malgré la décharge de l'élément $w+1$ visible sur la FIG.2.8b. Le phénomène de diffusion de l'endommagement est particulièrement visible sur la FIG.2.7 où sont tracés les profils de déformation non-locale pour différentes étapes du chargement. Pour le dernier instant de chargement représenté, la déformation non-locale $\bar{\varepsilon}_w$ pour la formulation ENL1 est très supérieure aux valeurs de déformation non-locales dans le reste de la barre. Au contraire, pour la formulation ENL2, les

valeurs de déformations non-locales dans les éléments voisins de l'élément central affaibli w ne sont pas négligeables devant la déformation non-locale de l'élément w.

Les différences observées entre les formulations ENL1 et ENL2 peuvent s'expliquer simplement par le calcul de la distance $\ell_{w,w+1}$ entre l'élément central affaibli et son voisin direct. Pour cela, on considère que l'endommagement D_w augmente de façon monotone jusqu'à tendre vers 1, du fait du pilotage en déformation non-locale. Pendant ce temps, l'endommagement D_{w+1} de l'élément voisin reste toujours inférieur à l'endommagement D_w. Cette hypothèse est bien cohérente avec le processus de localisation décrit précédemment pour les formulations non-locales.

Sous l'hypothèse formulée, la contribution de l'endommagement D_{w+1} sur le calcul de la distance $\ell_{w,w+1}$ pour la formulation ENL1 est négligeable quand $D_w \to 1$:

$$\ell_{w,w+1} = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-D_w}} + \frac{1}{\sqrt{1-D_{w+1}}}\right] \approx \frac{h}{2}\frac{1}{\sqrt{1-D_w}} \tag{2.40}$$

d'après l'EQ.2.36. Il existe une valeur de D_w telle que $\ell_{w,w+1} > \ell_c$ et pour laquelle le point d'intégration x_w n'a plus d'interaction avec les autres points d'intégration. Le choix de la fonction de pondération a une influence sur la valeur de D_w pour laquelle les interactions non-locales sont interrompues.

Sous la même hypothèse, la contribution de l'endommagement D_w sur le calcul de la distance $\ell_{w,w+1}$ pour la formulation ENL2 n'est plus prépondérante, mais négligeable devant la contribution de l'endommagement D_{w+1} :

$$\ell_{w,w+1} = \frac{2h}{D_{w+1}-D_w}\left(\sqrt{1-D_w} - \sqrt{1-D_{w+1}}\right) \approx \frac{2h}{\sqrt{1-D_{w+1}}} \tag{2.41}$$

d'après l'EQ.2.37. Les interactions non-locales entre le point d'intégration x_w et ses voisins proches ne sont pas interrompues avec l'augmentation de l'endommagement D_w, menant alors à une la diffusion de l'endommagement. Il existe néanmoins une valeur de l'endommagement D_{w+1} pour laquelle la distance $\ell_{w,w+1}$ s'annule. Quand cette valeur est atteinte, la diffusion de l'endommagement n'a plus lieu, car les déformations sont localisées dans l'élément central. Il n'y a donc plus d'augmentation des déformations non-locales possible dans les éléments autres que l'élément central.

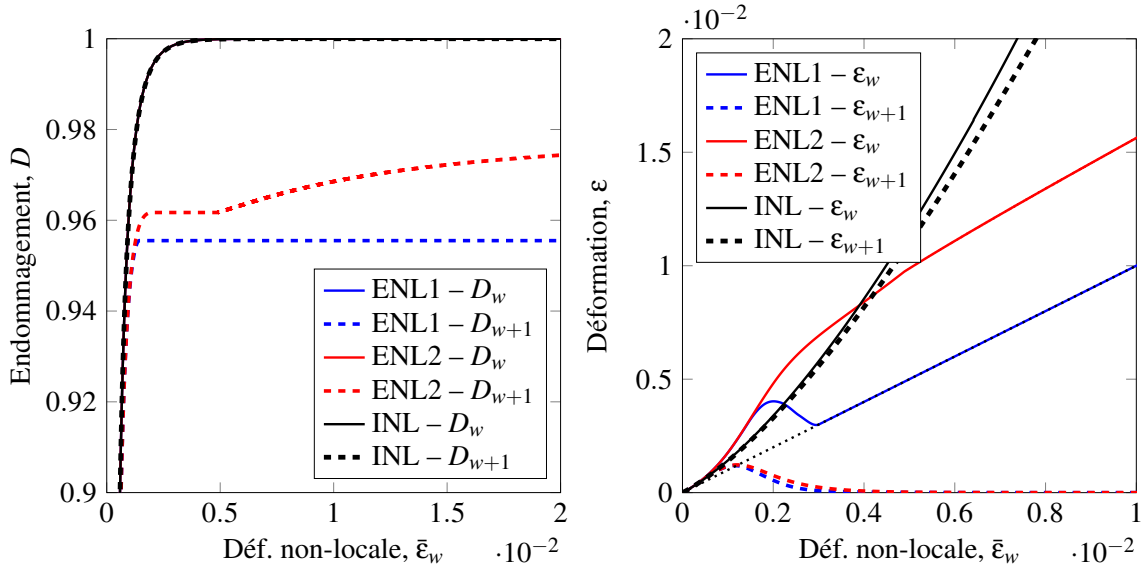
2.2.3 Influence de l'équation de pilotage

Sur la FIG.2.8b, une diminution de la déformation locale ε_w dans l'élément central est observée (pour la formulation ENL1) alors que la déformation non-locale $\bar{\varepsilon}_w$ de ce même élément continue d'augmenter. Bien que cela semble contre-intuitif, il est possible d'expliquer ce phénomène à partir de l'EQ.2.31 de pilotage en déformation non-locale. Pour des raisons de clarté, la notation pour le calcul des déformations non-locales est simplifiée.

La déformation non-locale au point d'intégration x_i au pas de chargement n peut alors s'écrire :

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_j \varepsilon_j^n \phi_{i,j}^n}{\sum_j \phi_{i,j}^n}$$

avec $\phi_{i,j}^n = \phi\left(\ell_{i,j}^n/\ell_c\right)$ le calcul de la fonction de pondération au pas de chargement n pour la contribution de l'élément j à l'élément i.



(a) **(b)**

FIGURE 2.8: Évolution de l'endommagement et de la déformation au centre de la barre (81 éléments)

En écrivant l'équation de pilotage quantifiant l'évolution de la déformation non-locale entre les pas de temps n et $n+1$, il est possible d'écrire :

$$\Delta\bar{\varepsilon}_w = \bar{\varepsilon}_w^{n+1} - \bar{\varepsilon}_w^{n} = \frac{\sum_j (\varepsilon_j + \Delta\varepsilon_j)}{\sum_j \phi_{w,j}^n} - \frac{\sum_j \varepsilon_j^n \phi_{w,j}^{n-1}}{\sum_j \phi_{w,j}^{n-1}} = \Delta\tau \tag{2.42}$$

En séparant systématiquement les contributions de l'élément central w, notées $\bullet_w^*$, des contributions des autres éléments, notées $\bar{\bullet}_w^*$, l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\Delta\bar{\varepsilon}_w = \Delta\varepsilon_w^* + \Delta\bar{\varepsilon}_w^* + \varepsilon_w^* + \bar{\varepsilon}_w^* = \Delta\tau \tag{2.43}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_w^* &= \frac{\Delta\varepsilon_w}{\sum_j \phi_{w,j}^n} \\
\Delta\bar{\varepsilon}_w^* &= \frac{\sum_{j\neq w} \Delta\varepsilon_j \phi_{w,j}^n}{\sum_j \phi_{w,j}^n} \\
\varepsilon_w^* &= \varepsilon_w^n \frac{\sum_j \phi_{w,j}^{n-1} - \sum_j \phi_{w,j}^n}{\left(\sum_j \phi_{w,j}^n\right)\left(\sum_j \phi_{w,j}^{n-1}\right)} \\
\bar{\varepsilon}_w^* &= \frac{\sum_{j\neq w} \varepsilon_j^n \phi_{w,j}^n}{\sum_j \phi_{w,j}^n} - \frac{\sum_{j\neq w} \varepsilon_j^n \phi_{w,j}^{n-1}}{\sum_j \phi_{w,j}^{n-1}}
\end{aligned}$$

L'évolution de ces quantités sont représentées sur la FIG.2.9. Au cours du processus de localisation, les éléments aux extrémités de la barre ont tendance à se décharger. Par conséquent, la quantité $\Delta\bar{\varepsilon}_w^*$ (i.e.,

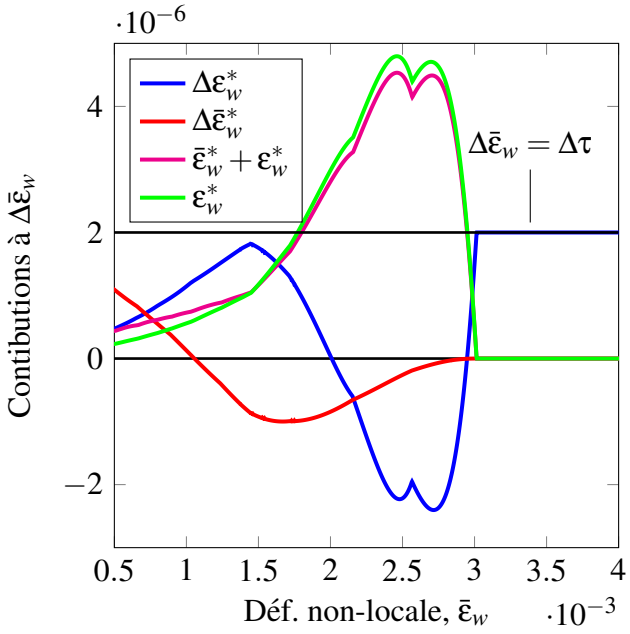


FIGURE 2.9: Réponse globale représentative du comportement de la formulation ENL (81 éléments)

la variation de déformation de chaque élément sauf de l'élément central) diminue, peut devenir négative et finit par s'annuler une fois que les déformations sont concentrées dans l'élément central. De la même façon, au cours du processus de localisation la déformation ε_w devient de plus en plus grande ce qui a pour effet de faire augmenter fortement la quantité ε_w^*. Quand la valeur de $\bar{\varepsilon}_w^* + \varepsilon_w^*$ devient suffisamment grande, la seule façon de respecter l'équation de pilotage est d'avoir des valeurs négatives de la variation de déformation locale dans l'élément central $\Delta\varepsilon_w^* < 0$, expliquant ainsi la diminution de déformation locale dans l'élément central.

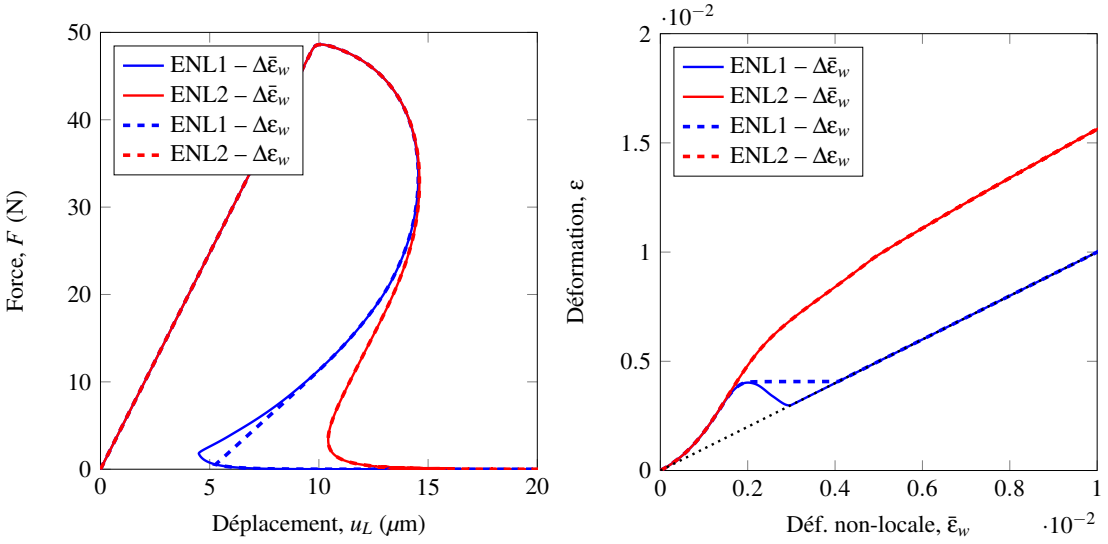
Les raisons évoquées ici permettent aussi de juger que le pilotage en déformation locale (EQ.2.29) n'est pas adapté pour la formulation ENL1. Les différences sur la réponse globales peuvent être observées sur la FIG.2.10a. La FIG.2.10b montre que le pilotage en déformation locale de la formulation ENL1 ne permet pas de trouver une solution dissipative pour chaque pas de temps puisque la déformation non-locale dans l'élément central reste constante pendant plusieurs pas de chargement.

Ce problème n'est pas rencontré dans le cadre de la formulation ENL2. En effet, la relation entre la déformation non-locale et la déformation locale dans l'élément central est strictement monotone.

2.3 Influence du paramètre α de la métrique

Maintenant que le comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal a été étudié dans sa forme originale introduite par [Desmorat *et al.*, 2015], il reste à étudier l'influence du paramètre α. L'étude est menée dans les mêmes conditions que l'étude précédente, seul le calcul numérique des distances est modifié pour étudier l'influence du paramètre α.

Les réponses globales obtenues pour différentes valeurs de α sont tracées sur la FIG.2.11 pour les formulations ENL1 et ENL2. Pour les deux formulations ENL1 et ENL2, les réponse globales affichent un



(a) Réponse globale **(b)** Évolution de la déformation locale ε_w

FIGURE 2.10: Influence de l'équation de pilotage sur la réponse de la formulation ENL1

comportement plus fragile pour les valeurs de α les plus grandes. Comme attendu, le comportement pour $\alpha = 0.1$ se rapproche du comportement observé pour de la formulation INL qui peut être retrouvée à partir de la formulation eikonale non-locale avec $\alpha = 0$.

Comme le mettent en évidence les réponses globales, le paramètre α joue un rôle important sur l'énergie dissipée dans la barre lors du développement des dégradations. Cette observation est aussi valable à propos des profils d'endommagement dans la barre tracés pour le dernier pas de chargement sur la figure 2.12. On peut voir que la taille de la zone non endommagée ainsi que l'étalement de l'endommagement se réduisent en fonction du paramètre α.

L'énergie dissipée peut se définir de façon équivalente ici comme l'intégrale de la réponse globale (F, u_L) ou comme l'intégrale sur la barre de la dissipation du modèle d'endommagement défini au début du chapitre. L'énergie dissipée s'écrit ainsi comme l'intégrale entre le temps initial $t = 0$ et le temps t :

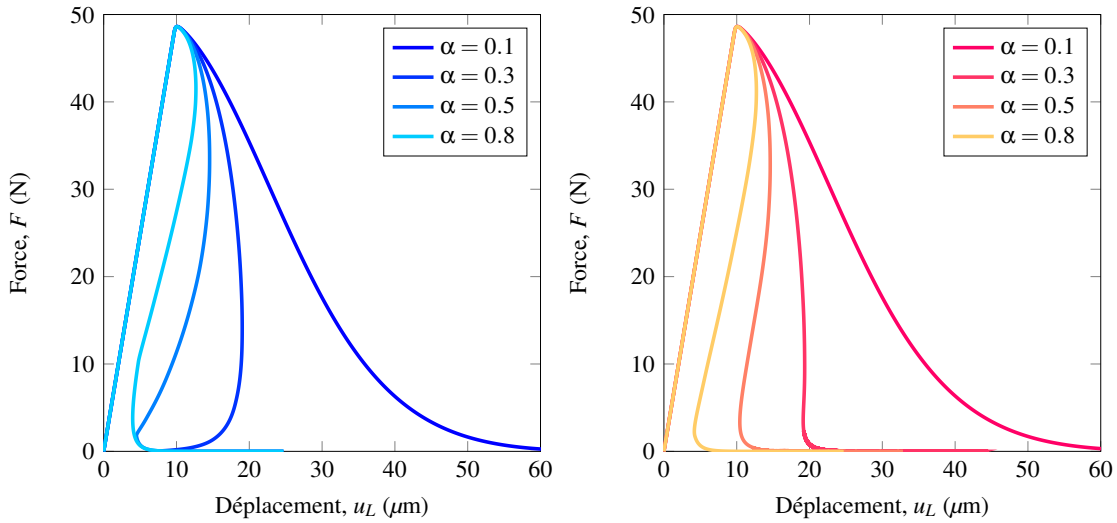
$$\mathcal{W}^{ENL}(t) = \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \dot{D} \, \mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{2.44}$$

L'énergie dissipée totale dans la barre correspond alors à l'énergie dissipée à la fin du chargement : $\mathcal{W}_T^{ENL} = \mathcal{W}^{ENL}(t = t_{fin})$.

La quantité d'énergie dissipée en fonction du paramètre α pour les deux formulations ENL1 et ENL2 est tracée sur la FIG.2.13. De manière cohérente avec les observations des profils d'endommagement, l'énergie dissipée augmente quand α diminue.

2.4 Remarques sur l'isolation de l'élément central

Dans la sous-section précédente, pour $\alpha = 0.5$, le calcul de la distance entre l'élément central et l'élément directement voisin a été explicitée. Il a été montré pour la formulation ENL1 qu'il est existe une valeur



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.11: Réponses globales pour différentes valeurs de α – 81 éléments

d'endommagement dans l'élément central D_w pour lequel l'élément central n'a plus aucune interaction non-locale avec son voisinage. Cette observation n'est pas vrai pour la formulation ENL2 où l'isolement de l'élément central dépend principalement du niveau d'endommagement de son voisin direct D_{w+1}. Ces observations sont généralisables, quelle que soit la valeur du paramètre α.

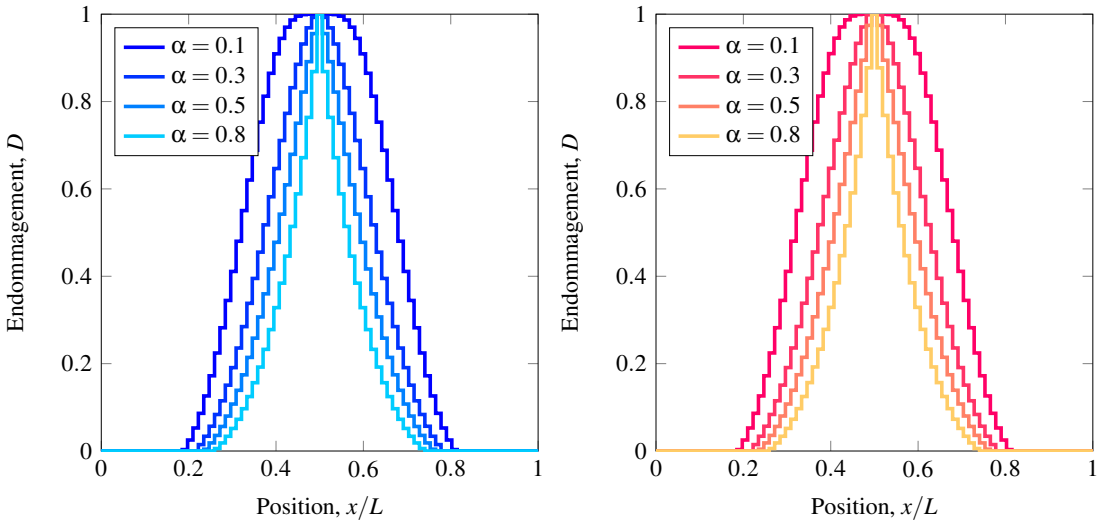
Formulation ENL1. En suivant le même raisonnement que dans la sous-section précédente, pour $\alpha \geq 0$ la distance entre les éléments w et $w+1$ dépend principalement de D_w lorsque $D_w \to 1$:

$$\ell_{w,w+1} = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{(1-D_w)^\alpha} + \frac{1}{(1-D_{w+1})^\alpha}\right) \approx \frac{h}{2(1-D_w)^\alpha} \tag{2.45}$$

Il existe donc une valeur de D_w quel que soit la valeur de $\alpha > 0$ telle que $\ell_{w,w+1} > \ell_c$ permet d'annuler les interactions non-locales de l'élément central avec son voisinage. Cependant, il faut noter qu'il existe une valeur de α relativement proche de 0, pour laquelle la distance $\ell_{w,w+1}$ reste toujours inférieure à ℓ_c à cause de la limite numérique imposée à l'endommagement D_w (dans le cadre de ce chapitre, cette limite est fixée à $D_{max} = 1 - 10^{-9}$). Pour cette raison, il est possible d'observer une diffusion de l'endommagement sur la FIG.2.12 pour $\alpha = 0.1$. Il faut tout de même noter que cette diffusion de l'endommagement reste limitée dans le cadre 1D par le niveau d'endommagement des éléments voisins.

Formulation ENL2. En ce qui concerne la formulation ENL2, il faut distinguer trois cas : $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$. Les remarques pour le cas $\alpha < 1$ sont similaires aux remarques de la sous-section précédente avec $\alpha = 0.5$. La distance entre les éléments w et $w+1$ dépend majoritairement de l'endommagement D_{w+1} lorsque $D_w \to 1$:

$$\ell_{w,w+1} = \frac{h}{1-\alpha}\frac{(1-D_w)^{1-\alpha} - (1-D_{w+1})^{1-\alpha}}{D_{w+1} - D_w} \approx \frac{h}{1-\alpha}\frac{(1-D_{w+1})^{1-\alpha}}{1-D_{w+1}} \tag{2.46}$$



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.12: Profils d'endommagement pour différentes valeurs de α au dernier pas de chargement – 81 éléments

Il existe alors un niveau d'endommagement D_{w+1} pour lequel l'élément central est complètement isolé de son voisinage non-locale. Cela autorise une diffusion de l'endommagement dans les éléments directement voisins jusqu'à atteindre cette valeur limite. Cette remarque n'est plus valable si $\alpha > 1$. Dans la but de simplifier la démonstration, l'intervention du paramètre α est adaptée en introduisant le paramètre $\beta = \alpha - 1$:

$$1 - \alpha = -\beta \qquad\qquad \alpha > 1 \Rightarrow \beta > 0$$

La distance entre les éléments w et $w+1$ pour la formulation ENL2 lorsque $\alpha > 1$ s'écrit :

$$\ell_{w,w+1} = \frac{h}{-\beta} \frac{(1-D_w)^{-\beta} - (1-D_{w+1})^{-\beta}}{D_{w+1} - D_w} = \frac{h}{\beta(D_w - D_{w+1})} \left(\frac{1}{(1-D_w)^{\beta}} - \frac{1}{(1-D_{w+1})^{\beta}} \right) \tag{2.47}$$

Cette fois, la contribution de l'élément w devient prépondérante devant la contribution de $w+1$ et l'expression de la distance $\ell_{w,w+1}$ peut se simplifier lorsque $D_w \to 1$:

$$\ell_{w,w+1} \approx \frac{h}{\beta(D_w - D_{w+1})} \frac{1}{(1-D_w)^{\beta}} \tag{2.48}$$

Il existe donc une valeur d'endommagement D_w de l'élément central pour laquelle $\ell_{w,w+1} > \ell_c$ permettant ainsi d'annuler les interactions non-locales avec ses voisins directs et évitant toute diffusion de l'endommagement. Cette remarque est également vraie pour $\alpha = 1$. Dans ce cas, l'expression de la distance $\ell_{w,w+1}$ est donnée lorsque $D_w \to 1$:

$$\ell_{w,w+1} = \frac{h}{D_{w+1} - D_w} \left[\ln(1-D_w) - \ln(1-D_{w+1}) \right] \approx \frac{h}{D_{w+1} - D_w} \ln(1-D_w) \tag{2.49}$$

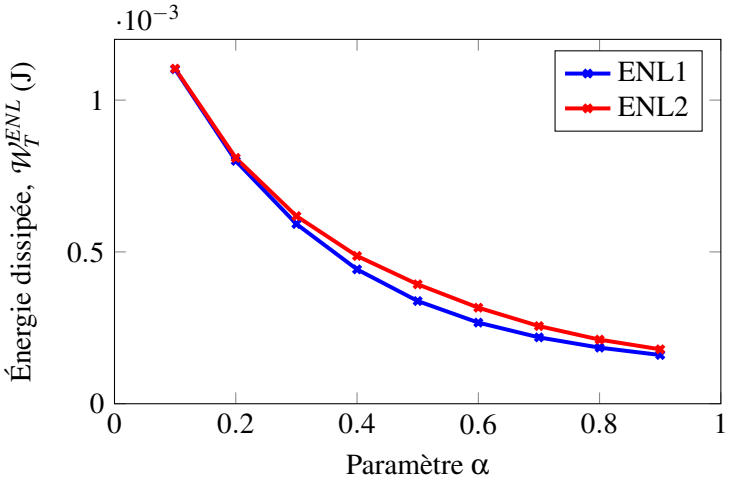


FIGURE 2.13: Influence du paramètre α sur l'énergie dissipée – 81 éléments

3 Propriétés de régularisation du modèle d'endommagement non-local eikonal

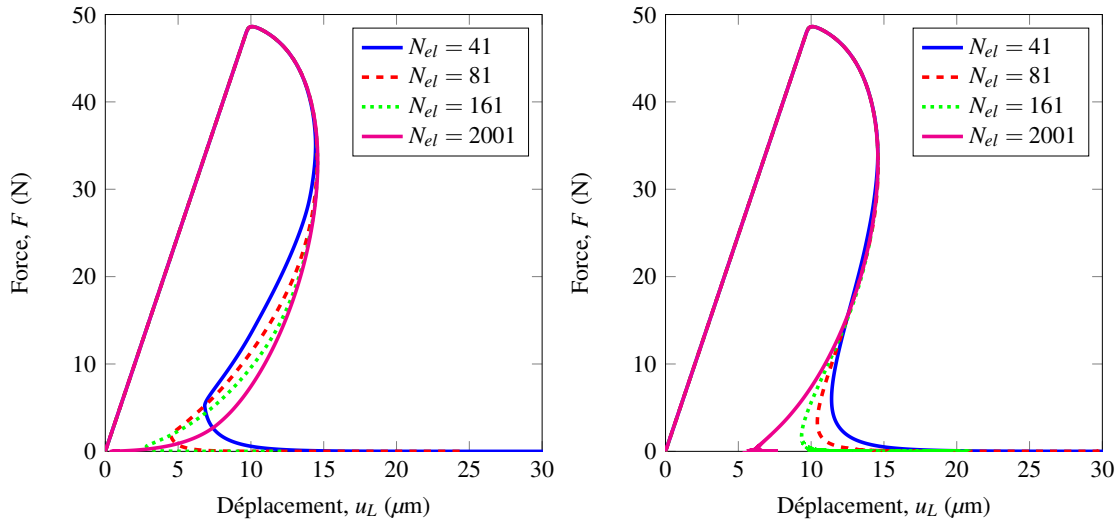
Dans la section précédente, le comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal a été étudié selon deux formulations numériques possibles appelées ENL1 et ENL2. La différence entre ces deux formulations réside dans une hypothèse sur la forme du champ de l'endommagement dans le calcul des distances effectives intervenant dans l'évaluation de la variable non-locale. Il a été montré que l'endommagement dans l'élément subissant la localisation des déformations joue un rôle déterminant sur le calcul des distances effectives avec ses éléments voisins et en conséquence sur le comportement non-local. La distance effective est par ailleurs proportionnelle à la taille des éléments finis. Il est donc important d'étudier les propriétés de régularisation des formulations ENL1 et ENL2 en fonction de la discrétisation spatiale du problème.

3.1 Influence de la discrétisation spatiale

Dans cette sous-section, l'étude est menée suivant les paramètres et considérations numériques présentés dans la sous-section 2.1. Plusieurs valeurs différentes sont choisies pour le nombre d'éléments constituant la discrétisation spatiale de la barre entre $N_{el} = 41$ et $N_{el} = 2001$, correspondant à des finesses éléments finis variant entre $h \approx \ell_c/8$ et $h \approx \ell_c/400$.

Les réponses globales obtenues pour différentes valeurs de finesse éléments finis sont tracées sur la FIG.2.14 pour les formulations ENL1 et ENL2. Sur cette figure, seules les réponses pour $\alpha = 0.5$ sont représentées. Les réponses globales obtenues pour différentes valeurs de α sont disponibles en annexe ANN.A (1).

La FIG.2.14 montre que la discrétisation spatiale a un effet non-négligeable sur le comportement des formulations ENL1 et ENL2. Il faut noter que les réponses sont équivalentes, quelle que soit la discrétisation spatiale jusqu'à un certain niveau de chargement où le phénomène de localisation n'est plus négligeable. Néanmoins les réponses semblent converger vers la réponse correspondant à la discrétisation spatiale la



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.14: Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.5$

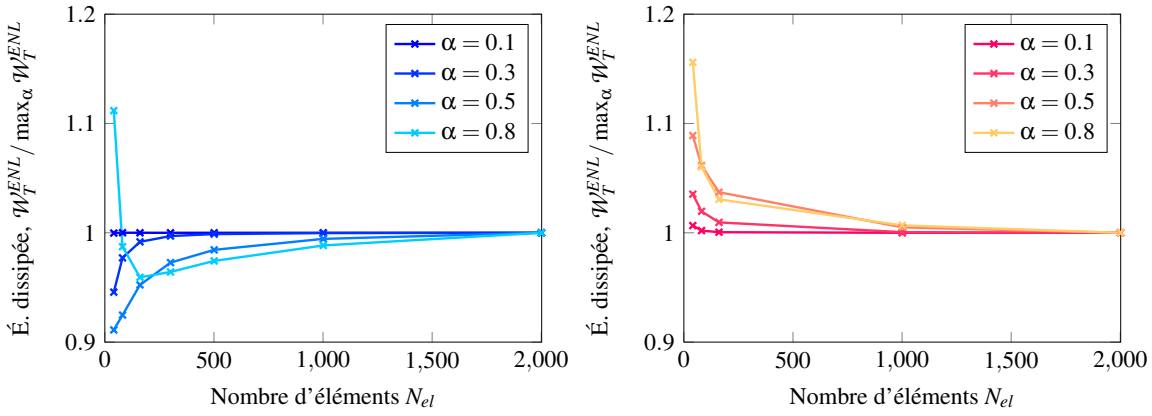
plus fine. Cette observation est confirmée par la FIG.2.15 où est représentée la convergence de l'énergie dissipée en fonction de la discrétisation spatiale.

3.2 Identification d'un endommagement critique

Il a été mis en évidence précédemment que les réponses globales obtenues avec différents maillages sont équivalentes jusqu'à un certain niveau de chargement, et plus précisément, jusqu'à un certain niveau d'endommagement. Il convient donc de déterminer les conditions de perte d'objectivité sur la réponse globale par rapport à la discrétisation spatiale.

Considérations préliminaires. Les problèmes de localisation et de perte d'objectivité vis-à-vis du maillage ont été étudiés dans la littérature. Les travaux de [Hill, 1958] ont permis d'établir les conditions nécessaire et suffisante de localisation des déformations à partir du module tangent. Malgré l'absence d'expression théorique explicite du module tangent pour la méthode de régularisation non-locale intégrale, [Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993] ont pu montrer les propriétés de régularisation en calculant les longueurs d'onde d'ondes stationnaires. Dans le cas présent, la dépendance des distances au champ d'endommagement ne permet pas de mener la même analyse théorique des propriétés de régularisation de l'approche non-locale eikonale pour l'endommagement. Le problème d'objectivité des résultats vis-à-vis du maillage est donc abordé d'un point de vue numérique.

Perte d'objectivité. Comme il a été montré plus tôt dans ce chapitre, le comportement de la formulation ENL est fortement dépendant de la valeur de l'endommagement dans l'élément central. Par ailleurs, l'équation de pilotage impose une évolution strictement monotone de cet endommagement au cours du chargement. Il paraît alors logique de considérer une perte d'objectivité lorsqu'un niveau critique d'endommagement D_{cr} est atteint.



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.15: Influence de la discrétisation spatiale sur l'énergie dissipée

Il reste alors à déterminer la valeur de cet endommagement critique. Comme il n'existe pas de méthode théorique ni de méthode objective pour déterminer l'instant critique où l'endommagement atteint une valeur critique, la méthode la plus simple et objective consiste à définir une erreur sur la réponse globale par rapport à une réponse globale de référence. L'instant critique est alors déterminé comme l'instant où cette erreur dépasse une tolérance donnée.

La perte d'objectivité est définie par deux calculs d'erreur sur la réponse globale : une erreur sur la résistance de la barre F et une erreur sur l'énergie dissipée $\mathcal{W}$. Ces erreurs sont définies à partir d'une solution de référence correspondant à la solution obtenue avec le maillage le plus fin considéré dans l'étude :

$$\zeta_F(t) = \left| \frac{F(t) - F_{ref}(t)}{\max_t F_{ref}(t)} \right| \tag{2.50}$$

$$\zeta_{\mathcal{W}}(t) = \left| \frac{\mathcal{W}(t) - \mathcal{W}_{ref}(t)}{\max_t \mathcal{W}_{ref}(t)} \right| \tag{2.51}$$

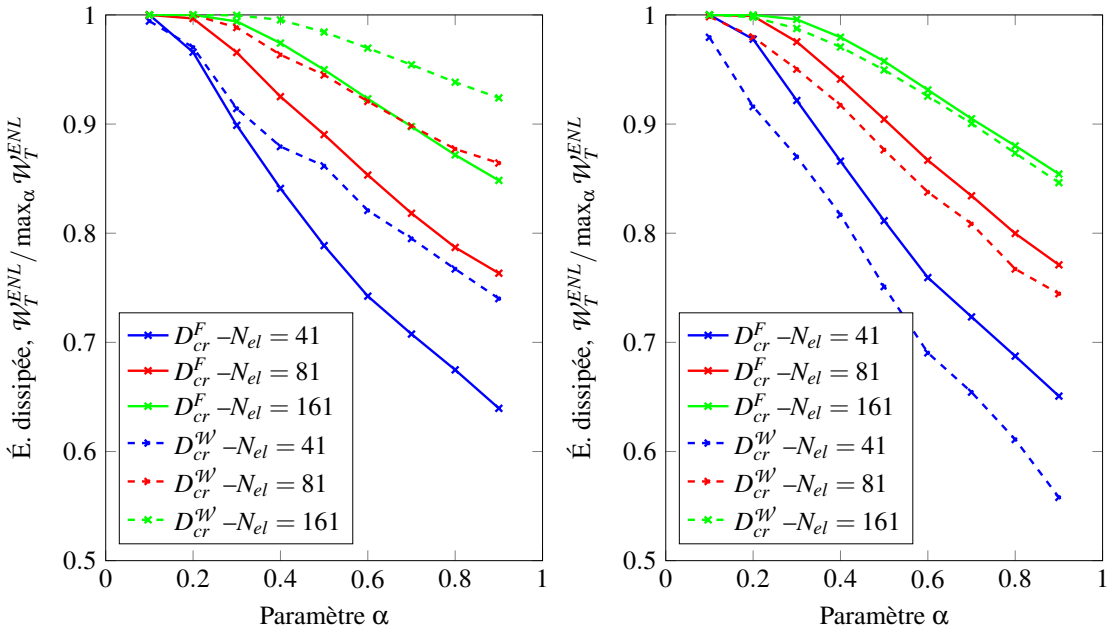
En effet, l'étude de l'influence de la finesse du maillage sur l'énergie dissipée a montré une convergence de l'énergie dissipée en fonction du nombre d'éléments. L'instant critique est alors déterminé comme le premier instant ne respectant pas les tolérances choisies :

$$\zeta(t_{cr}) > \zeta^{tol} \tag{2.52}$$

L'endommagement critique est alors déterminé comme l'endommagement de l'élément central à l'instant critique :

$$D_{cr} = D_w(t = t_{cr}) \tag{2.53}$$

Dans les conditions de l'étude menée sur les propriétés de régularisation dans la sous-section précédente, le choix peut être fait, par exemple, de garder un niveau d'erreur sur la réponse global inférieur à 1% sur chacune des deux erreurs définies. Afin de se préserver du risque d'accumulation d'erreur numérique, une tolérance de $\zeta^{tol} = 10^{-3}$ est alors choisie.



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.16: Détermination de l'endommagement critique

Les endommagements critiques obtenus pour les deux formulations ENL1 et ENL2 sont rassemblés sur la FIG.2.16 en fonction du paramètre α pour trois discrétisations spatiales. Comme le laissaient penser les observations de l'influence de α sur le comportement de la méthode ENL et sur ses propriétés de régularisation (voir Section 2.3), l'endommagement critique se rapproche de 1 quand la valeur du paramètre se rapproche de 0.

L'erreur en résistance mécanique semble prépondérante par rapport à l'erreur en énergie dissipée sur la détermination d'un endommagement critique pour la formulation ENL1. Il s'agit pourtant du contraire pour la formulation ENL2. Il est alors choisi dans le cas général de déterminer l'endommagement critique comme la plus petite des valeurs d'endommagement critique calculées pour les deux types d'erreurs :

$$D_{cr} = \min \left\{ D_{cr}^F, D_{cr}^{\mathcal{W}} \right\} \tag{2.54}$$

3.3 Modification de la métrique pour améliorer les propriétés de régularisation

Dans la sous-section précédente, la perte d'objectivité a été quantifiée à l'aide de deux erreurs sur la réponse globale obtenue avec les formulations ENL.

Métrique modifiée. Il est proposé dans cette sous-partie de modifier la métrique de la formulation ENL selon la méthode proposée par [Rastiello *et al.*, 2018] afin de régulariser le problème et obtenir des réponses indépendantes vis-à-vis du maillage éléments finis. Le principe de cette méthode est de modifier la métrique de l'équation eikonale afin de limiter l'endommagement à une valeur maximale dans le calcul

des distances effectives :

$$m(z) = (1 - \min\{D(z), D_{min}\})^{\alpha} \tag{2.55}$$

Choix du seuil $D_{\min}$. L'objectif de cette étude est d'obtenir les mêmes résultats en termes de réponse globale et d'énergie dissipée pour les trois maillages choisis : 41, 81 et 161 éléments. En considérant que les formulations ENL1 et ENL2 donnent des résultats objectif, par rapport au maillage, avant de dépasser un endommagement critique, il paraît logique de limiter l'endommagement dans le calcul des distances à la valeur de l'endommagement critique. Il faut remarquer que différentes valeurs de l'endommagement critique sont possibles pour chaque finesse du maillage. Pour obtenir le comportement global quelle que soit la finesse du maillage il faut adopter l'endommagement critique minimum pour les trois maillages :

$$D_{min} = \min_{h} D_{cr} \tag{2.56}$$

Objectivité et diffusion de l'endommagement. Les réponses globales sont tracées sur la figure 2.17 pour $\alpha = 0.5$. Les réponses globales pour des valeurs du paramètre α différentes sont disponibles en annexe ANN.A (1.1). Les mesures d'erreurs maximales entre les trois maillages sur la FIG.2.18 montrent qu'il n'y a pas de perte d'objectivité puisque les mesures d'erreurs restent inférieures à la tolérance choisie de 1%.

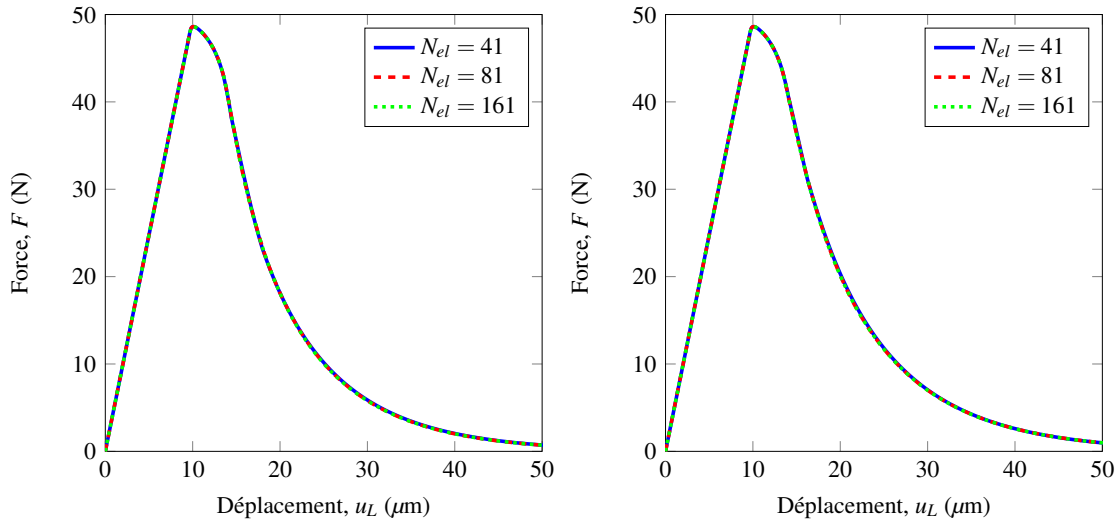
Limiter la valeur de l'endommagement dans la fonction métrique permet d'obtenir des réponses globales ne dépendant pas de la finesse du maillage. Cependant, limiter les valeurs de la fonction métrique limite aussi les distances effectives pour le comportement non-local. En réalité, l'objectivité des résultats par rapport au maillage est obtenue en gardant un comportement non-local dans la barre, évitant ainsi l'effet néfaste de la localisation. Néanmoins, comme il a été montré précédemment dans ce chapitre, limiter la croissance des distances effectives peut mener à une diffusion de l'endommagement, car l'élément central, lorsqu'il est très endommagé et très déformé, peut ne pas être totalement isolé de ses voisins.

4 Transition vers un modèle à discontinuité forte

Dans la section précédente, une perte d'objectivité des résultats par rapport à la discrétisation spatiale a été observée pour la formulation ENL. En appliquant la méthode proposée par [Rastiello *et al.*, 2018], il est possible de retrouver des résultats objectifs pour la formulation ENL. Néanmoins, la limitation de l'endommagement dans l'expression de la métrique conduit à une limitation de l'évolution des distances effectives au cours du processus de localisation. En conséquence, une diffusion de l'endommagement est observée de la même façon que pour la méthode classique INL.

Afin de retrouver une régularisation satisfaisante tout au long du processus de localisation en évitant le problème de diffusion de l'endommagement, une nouvelle formulation du modèle d'endommagement non-local eikonal basée sur l'introduction d'une zone cohésive dans les zones fortement endommagées est proposée.

Le nouveau modèle d'endommagement non-local avec transition est décrit en premier lieu. Par la suite, la possibilité d'identifier une loi cohésive à partir du comportement de la formulation non-locale eikonale initiale sera étudiée. Enfin, le comportement général ainsi que les propriétés de régularisation de la nouvelle formulation seront étudiés.



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.17: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – Réponses globales

4.1 Présentation de la nouvelle formulation

On considère un milieu Ω constitué d'un matériau se comportant selon un modèle d'endommagement, défini dans la section 1. Le principe du modèle de transition est d'introduire une discontinuité dans le champ de déplacement à la position x_{tr} et à un instant de transition t_{tr}. Le champ de déplacement s'écrit alors sous la forme d'un champ de déplacement continu $\tilde{u}$ et d'un saut de déplacement a :

$$u(x) = \tilde{u}(x) + a\mathcal{H}(x - x_{tr}) \tag{2.57}$$

avec $\mathcal{H}$ la fonction de Heaviside définie telle que $\mathcal{H}(\eta) = 1$ si $\eta > 1$ et $\mathcal{H}(\eta) = 0$ si $\eta < 0$.

Au niveau de la discontinuité, la résistance de la zone cohésive σ_c se comporte selon une loi traction-ouverture :

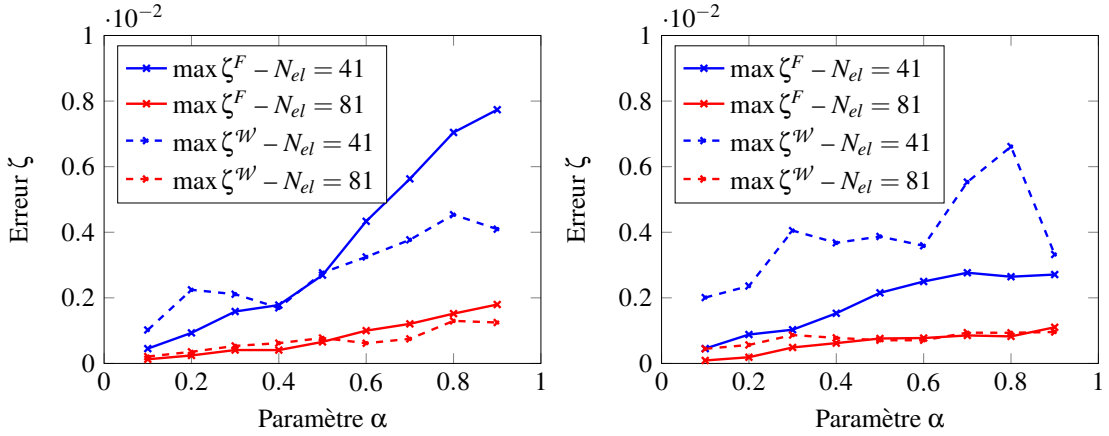
$$\sigma_c = \sigma_c(a) \tag{2.58}$$

La compatibilité des comportements entre le modèle d'endommagement non-local et la zone cohésive est assurée par la continuité des contraintes au niveau de la discontinuité :

$$\sigma_c = \sigma(x_{tr}) \tag{2.59}$$

4.1.1 Application au problème mécanique 1D

L'introduction d'une discontinuité dans le champ d'endommagement doit être pris en compte dans la résolution numérique du problème. La technologie des éléments finis enrichis (E-FEM) est utilisée, ce qui permet d'utiliser le même algorithme de résolution défini dans la section 1 ainsi que les mêmes méthodes de pilotage [Rastiello *et al.*, 2019]. Les changements amenés par l'introduction d'une zone cohésive sont



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE 2.18: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – Erreurs maximales

simplement pris en compte au niveau local, par la loi de comportement reliant la déformation d'un élément à la contrainte supportée par cet élément.

Dans un élément, au point d'intégration i, où une zone cohésive est introduite, le modèle d'endommagement cohabite avec le modèle à discontinuité forte. Il est supposé que la variable d'endommagement reste constante à partir de l'introduction de la discontinuité du déplacement à l'instant t_{tr}. La déformation de l'élément est alors calculée simplement par :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c + \frac{a_i}{h} \tag{2.60}$$

avec a_i la valeur du saut de déplacement au point d'intégration x_i et ε_c la déformation due à la partie continue du champ de déplacement.

Le système d'équation à résoudre pour le calcul de la contrainte σ_i à partir de la déformation de l'élément ε_i est :

$$\sigma_i = E\,(1 - D_{tr})\,(\varepsilon_i - a_i/h) \tag{2.61}$$

$$\sigma_i = \sigma_c\,(a_i) \tag{2.62}$$

avec $D_{tr} = D_i(t = t_{tr})$ l'endommagement de l'élément à l'instant de transition.

Dans le calcul de la déformation non-locale, la déformation totale de l'élément ε_i n'est plus prise en compte en faveur de la déformation de volume ε_c. Il ne semble pas correct de considérer la contribution du saut de déplacement a dans le calcul de la déformation non-locale puisque le saut de déplacement cherche à représenter un phénomène différent du comportement non-local. La déformation non-locale s'exprime sous sa forme numérique :

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{h}{V_i} \sum_{i}^{N_{el}} \left(\varepsilon_j - \frac{a_j}{h}\right) \phi\left(\frac{\ell_{i,j}}{\ell_c}\right) \tag{2.63}$$

lorsque tous les éléments ont la même taille h.

D'un point de vue numérique, il semble naturel de considérer qu'un élément dans lequel une zone cohésive est apparue est complètement détérioré et qu'il ne participe plus au comportement non-locale du milieu. Grâce à la méthode ENL, il est possible de résoudre ces deux problèmes simplement et de manière naturelle en introduisant un endommagement virtuel dans l'expression de la métrique :

$$m(z_i) = \left(1-(1-\gamma_i)D(z_i)-\gamma_i D^{virtuel}\right)^{\alpha} \quad \forall z_i \in I \tag{2.64}$$

avec $\gamma_i = 1$ aux points d'intégrations où une zone cohésive a été introduite et $\gamma_i = 0$ sinon. De manière générale, l'endommagement virtuel $D^{virtuel}$ est choisi égal à 1 afin d'annuler complètement les interactions d'un élément où un saut de déplacement est introduit.

4.1.2 Critère de transition

Il semble logique de considérer un critère en endommagement comme critère de transition entre le modèle d'endommagement et le modèle à discontinuité forte. Il faut alors déterminer l'endommagement de transition D_{tr} de façon à observer des propriétés de régularisation satisfaisantes. Pour cela, il est possible de procéder de la même manière que pour la formulation ENL avec la métrique modifiée. Il suffit de choisir l'endommagement critique minimum (EQ.2.56) en fonction des finesses de maillage considérées pour l'étude :

$$D_{tr} = D_{min} = \min_h D_{cr} \tag{2.65}$$

Le comportement du modèle d'endommagement ENL dans le cadre d'étude défini dans la sous-section 2.1 permet de prédire que le critère de transition en endommagement sera atteint dans l'élément central, au point d'intégration x_w pour lequel l'endommagement est maximum dans la barre à chaque instant. L'adoucissement dû à la loi cohésive et à la localisation des déformations dans cet élément permet de considérer qu'une seule zone cohésive sera introduite au cours du chargement.

4.2 Identification d'une loi cohésive

Maintenant que le nouveau modèle a été complètement décrit et qu'un critère de transition a été choisi, il est nécessaire de s'attarder sur la définition de la loi de traction-séparation $\sigma_c(a)$ entre le saut de déplacement a et la résistance mécanique de la zone cohésive σ_c.

4.2.1 Méthode d'équivalence en énergie dissipée totale

La méthode la plus directe de définir la loi de traction-séparation est de proposer une loi d'évolution explicite avec des paramètres à identifier. Par exemple, il est possible de choisir une loi exponentielle :

$$\sigma_c(a) = \sigma_{tr} \exp\left(-a\frac{\sigma_{tr}}{G_f}\right) \tag{2.66}$$

avec G_f un paramètre à identifier et σ_{tr} la contrainte au niveau de la discontinuité à l'instant de transition.

Le paramètre G_f peut être choisi en établissant une équivalence entre l'énergie dissipée entre une solution de référence au comportement purement ENL et l'énergie dissipée dans le cadre de l'introduction d'une

fissure cohésive. L'énergie dissipée totale par le modèle d'endommagement ENL avec transition est donnée par :

$$\mathcal{W}_T^{ENL-CZM} = \int_0^{t_{tr}} \int_\Omega \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \dot{D}\, S \mathrm{d}y \mathrm{d}t + \int_{t_{tr}}^{T} \sigma S\, \dot{a} \mathrm{d}t = \mathcal{W}^{ENL}(t = t_{tr}) + SG_f \tag{2.67}$$

En imposant l'équivalence en énergie dissipée $\mathcal{W}_T^{ENL-CZM} = \mathcal{W}_T^{ENL}$, la valeur du paramètre G_f est obtenue :

$$G_f = \frac{\mathcal{W}_T^{ENL} - \mathcal{W}^{ENL}(t = t_{tr})}{S} \tag{2.68}$$

4.2.2 Méthode d'équivalence en réponse globale

La méthode développée par [Cuvilliez *et al.*, 2012] propose d'identifier la loi traction-séparation à partir de la réponse globale d'une solution de référence au comportement purement non-local.

Pour la formulation ici considérée, l'équivalence en réponse globale entre les deux formulations est imposée à chaque instant :

$$u_L^{ENL}(t) = u_L^{ENL-CZM}(t) \quad \forall t \tag{2.69}$$

Il est alors possible de calculer le saut de déplacement en fonction de la réponse globale de la solution de référence :

$$a(t) = u_L^{ENL} - \frac{\sigma(t)}{K_{tr}} \tag{2.70}$$

avec $K_{tr} = \sigma(t_{tr})/u_L^{ENL}(t_{tr})$ la rigidité globale de la barre à l'instant de transition.

4.2.3 Méthode d'équivalence en dissipation d'énergie

[Cazes *et al.*, 2009] propose aussi une méthode développée pour identifier la loi traction-séparation à partir des résultats d'une solution de référence.

Le principe de cette méthode est d'imposer, entre la formulation non-locale de référence et la formulation non-locale avec transition, une équivalence sur le taux d'énergie dissipée. Pour les méthode ENL et ENL-CZM l'équivalence s'écrit :

$$\dot{\mathcal{W}}^{ENL} = \dot{\mathcal{W}}^{ENL-CZM} \tag{2.71}$$

Après la transition, l'endommagement dans la barre reste figé. Dans ce cas, le seul processus de dissipation d'énergie est dans la zone cohésive :

$$\dot{\mathcal{W}}^{ENL-CZM} = \frac{S}{2}(\sigma\dot{a} - a\dot{\sigma}) \tag{2.72}$$

Il est alors possible de calculer le saut de placement en chaque instant à partir de l'expression implicite précédente en imposant également que les contraintes entre les deux formulations doivent être équivalentes en chaque instant.

4.3 Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec transition

Dans cette partie, le comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal avec transition est étudié. Les propriétés de régularisation sont démontrées en mettant en œuvre la méthode d'identification par équivalence en énergie dissipée totale. Cette méthode d'identification est notée « M1 » dans la suite. Les performances des méthodes d'identification par équivalence en réponse globale, notée « M2 », et par équivalence de dissipation d'énergie, notée « M3 », sont étudiées ensuite.

4.3.1 Étude du comportement du modèle avec transition

Réponses globales. Les réponses globales pour les modèles avec transition ENL1-CZM et ENL2-CZM sont tracées sur la FIG.2.19 (pour la méthode M1) [2]. L'absence de la courbe de réponse pour la méthode ENL2-CZM pour 161 éléments est due à des problèmes de convergences lors de l'introduction de la discontinuité. Ces problèmes de convergence sont expliqués dans la suite de cette sous-partie. Ces courbes de réponse montrent l'objectivité des résultats par rapport à la finesse du maillage pour le modèle avec transition. Elles exposent clairement l'instant de transition. La réponse globale suit le comportement du modèle d'endommagement ENL pendant les premières phases de l'endommagement, les courbes sont confondues avec la courbe de référence pour la réponse du modèle ENL sans transition. L'instant de transition correspond sur les courbes de réponse globale à l'instant dans lequel le comportement ne suit plus la courbe de référence.

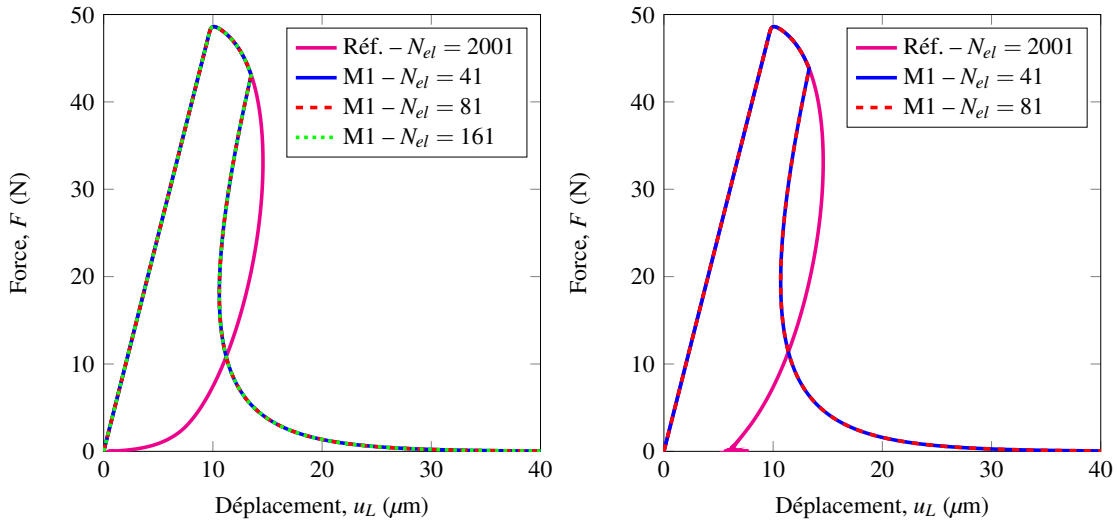
La FIG.2.19 illustre l'intérêt de la méthode d'identification M1. Le comportement post-pic du modèle ENL avec transition n'est pas exactement équivalent avec le modèle ENL sans transition. Cependant, lorsque la barre atteint son niveau d'endommagement final maximal, l'énergie dissipée est exactement équivalente avec la réponse de référence du modèle ENL sans transition.

Quantités locales. La FIG.2.20 expose le comportement local du modèle ENL avec transition.

L'évolution de l'ouverture de la discontinuité est représentée sur le graphe FIG.2.20a. À partir de l'instant de transition, la discontinuité s'active dans l'élément central le plus endommagé et son ouverture suit l'évolution prescrite par la loi cohésive. La déformation de volume $\varepsilon_b = \varepsilon - a/h$ dans l'élément central décroît selon la rigidité endommagée de l'élément à partir de l'instant de transition. L'endommagement étant bloqué dans cet élément, l'élément subit simultanément un retour élastique vis-à-vis de sa déformation de volume et une augmentation de l'ouverture de la fissure associée à une dissipation d'énergie. À partir de l'instant de transition, seul l'élément ayant activé une discontinuité continue à dissiper de l'énergie. L'objectivité des résultats vis-à-vis de la finesse du maillage est retrouvée grâce à ce comportement localisé indépendant de la discrétisation spatiale du problème.

Cependant, il est nécessaire de noter une remarque concernant les résultats obtenus pour la méthode ENL2. L'évolution de l'endommagement au centre de la barre est tracée sur la FIG.2.20b. Ce graphe montre que l'endommagement D_{w+1} de l'élément voisin à l'élément central où est activée la transition n'évolue plus après l'instant de transition. Ce n'est pas le cas pour la méthode ENL2. En effet, les niveaux d'endommagement D_{w+1} et D_{w-1} des éléments voisins à l'élément central continuent d'augmenter jusqu'à atteindre le niveau d'endommagement critique. Une discontinuité est alors introduite dans chacun de ces éléments. Néanmoins, il faut noter que les ouvertures de ces nouvelles discontinuités restent nulles

2. Les propriétés du matériau sont les mêmes que dans les études précédentes et sont répertoriées dans le tableau 2.1



(a) ENL1-CZM **(b)** ENL2-CZM

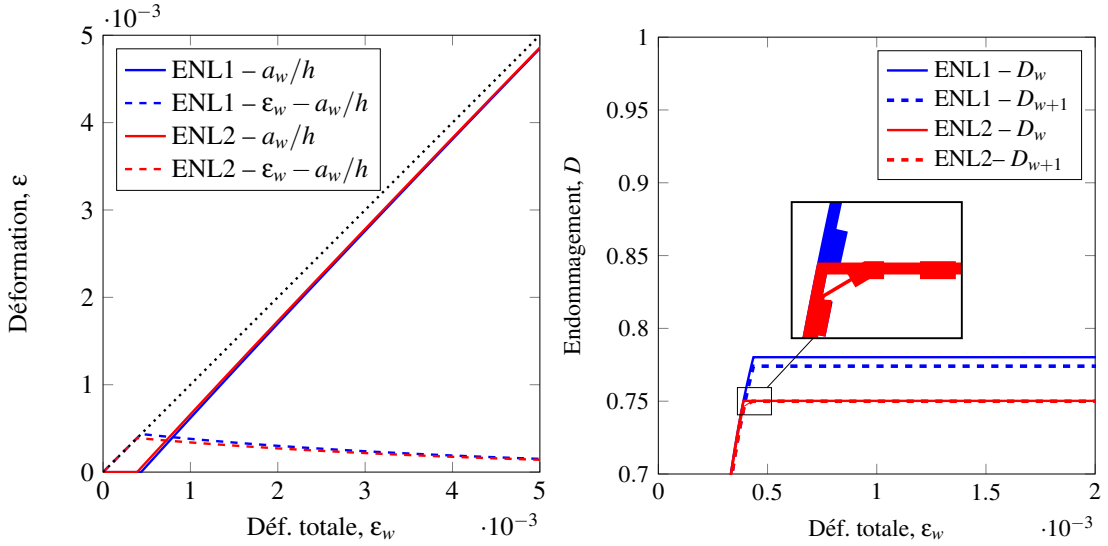
FIGURE 2.19: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec transition

grâce au déchargement préalable de ces éléments lors de l'activation de la première transition. L'augmentation du niveau d'endommagement menant à l'activation de nouvelles fissures est due à des interactions non-locales résiduelles non-négligeables après l'introduction de la première discontinuité. La méthode de calcul des distances effectives ne permet pas d'annuler complètement les interactions non-locales pour la méthode ENL2 en introduisant un endommagement virtuel dans la métrique lors de l'activation de la transition et explique les problèmes de convergences observées. Cette observation montre aussi qu'il n'est pas possible de totalement bloquer l'endommagement non-local en manipulant la métrique pour la méthode ENL2. Il faut noter que lors de l'introduction de discontinuités dans les éléments voisins à l'élément central, l'endommagement n'évolue plus du tout dans la barre. En effet, l'endommagement virtuel est effectivement égal à 1 sur une portion finie de la barre, permettant ainsi d'annuler toute interaction non-locale avec l'élément central, qui est le seul à ne pas observer une décharge élastique. Il est néanmoins possible d'éviter l'apparition de discontinuité à ouverture nulle pour la méthode ENL2. En effet, en forçant le blocage de l'endommagement non-local dans l'ensemble de la barre à la manière de [Cuvilliez *et al.*, 2012] sans utiliser la métrique permet d'éviter ce problème.

4.3.2 Comparaison des méthodes d'identification de la loi cohésive

Dans cette partie, les trois méthodes d'identification de la loi cohésive (M1, M2 et M3) sont comparées. La solution de référence considérée est la solution obtenue pour la discrétisation spatiale la plus fine. Il s'agit de la solution simulée à l'aide de 2001 éléments pour les méthodes ENL1 et ENL2.

Réponses ENL1 et ENL2 comme solutions de référence. Les lois de traction-séparation identifiées sont tracées sur la FIG.2.21. Comme montré dans la sous-partie précédente, en imposant la forme de la loi cohésive (ici une fonction exponentielle décroissante), la loi obtenue est cohérente avec la réalité. Ce n'est pas le cas des méthodes M2 et M3. Un effet de snap-back est observé sur les lois cohésives obtenues



(a) Ouverture de la discontinuité au centre de la barre

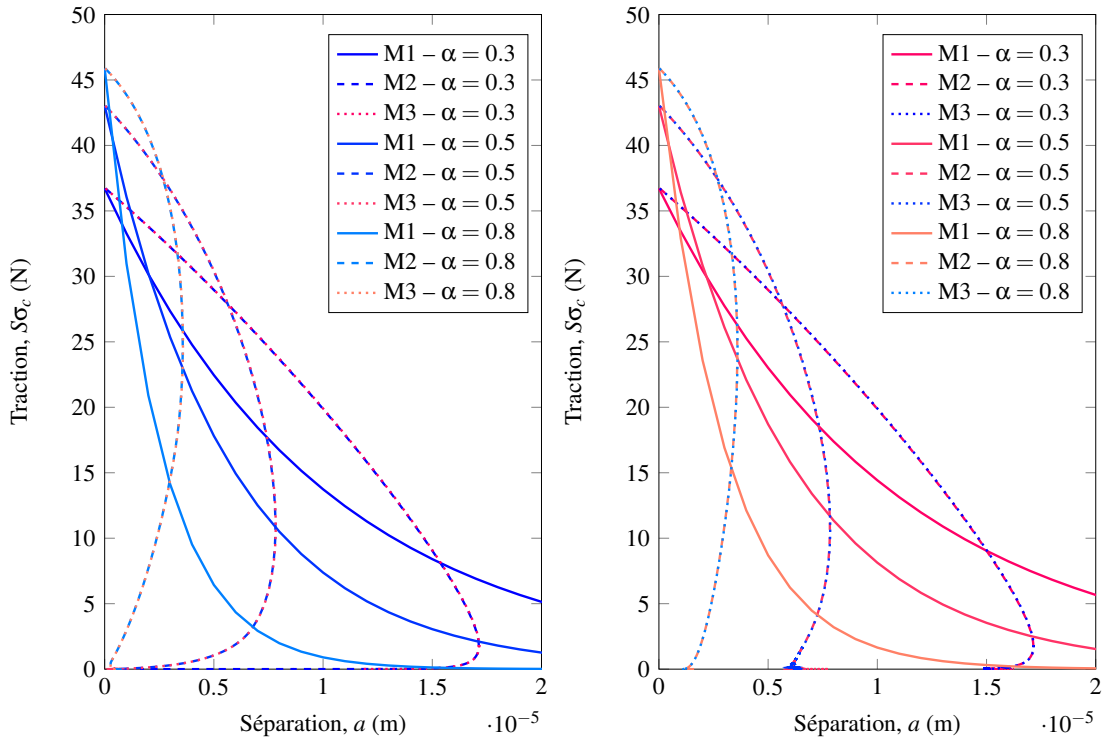
(b) Évolution de l'endommagement

FIGURE 2.20: Évolution de quantités d'intérêts pour le modèle ENL avec transition

avec ces deux méthodes. Cette forme n'est pas réaliste pour une loi d'évolution matérielle. Les méthodes ne sont pas réellement en cause. Ce phénomène est observé en raison de la forme particulière de la réponse globale des solutions de références. En effet, dans ces simulations, un snap-back est observé et les méthodes d'identification M2 et M3 sont basé sur une équivalence pas à pas avec la réponse globale. Il est alors possible d'obtenir ce type de forme dans la mise en œuvre des méthodes d'identification M2 et M3. Il faut noter que les méthodes d'identification M2 et M3 donnent les mêmes résultats. En fait, ces méthodes sont équivalentes en 1D.

Réponses ENL1 et ENL2 avec métrique modifiée comme solutions de référence. Afin de montrer les capacités de ces deux méthodes malgré les lois cohésives non réalistes obtenues, une autre solution de référence est choisie pour laquelle le comportement global ne présente pas de snap-back. La méthode ENL sans transition avec métrique modifiée dont les résultats et les propriétés de régularisation ont été montrées dans une partie précédente est choisie. Les lois cohésives obtenues sont tracées sur la FIG.2.22. Cette fois, aucun snap-back n'est observé sur les lois de traction-séparation. Ces lois sont donc acceptables du point de vue du comportement du matériau.

Le modèle ENL-CZM est alors simulé en utilisant les lois cohésives de la FIG.2.22 pour les méthodes ENL1 et ENL2 et pour différentes valeurs de α. Les réponses globales calculées sont tracées sur la FIG.2.23. Le comportement global est cohérent avec la nouvelle solution de référence malgré la différence importante sur le comportement du matériau. En effet, la solution de référence a un comportement purement non-local pour l'endommagement, alors que le modèle ENL-CZM introduit une discontinuité. Dans ce cas d'étude précis, la solution de référence présente une diffusion possible de l'endommagement du fait de la métrique limitée. Le modèle ENL-CZM n'observe pas de diffusion d'endommagement, ou très peu dans le cas de la méthode ENL2. Le modèle ENL avec transition permet donc de simuler le comportement global d'un modèle ENL avec métrique modifiée en évitant le problème de diffusion d'endommagement et en présentant des propriétés de régularisation au moins équivalente.



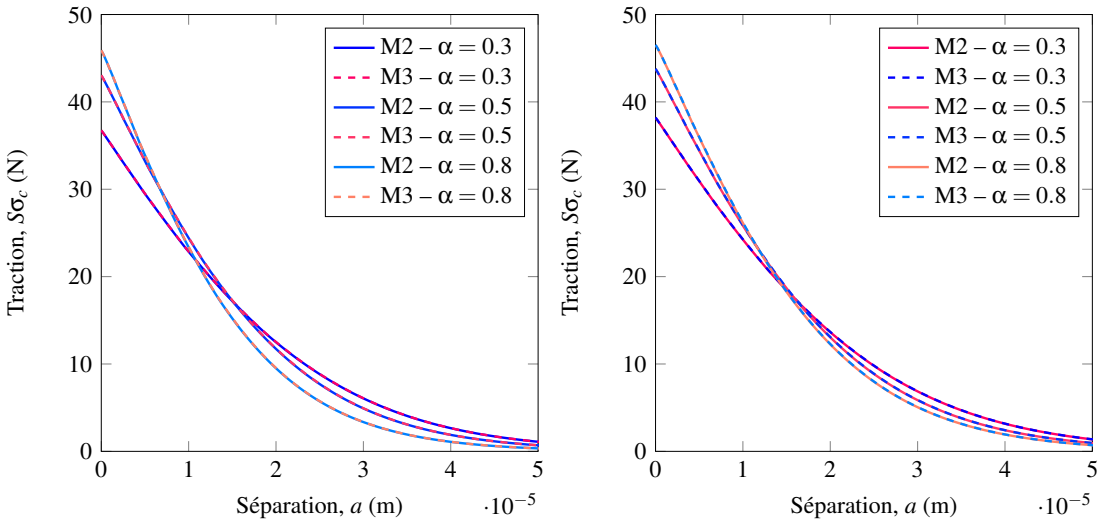
(a) ENL1-CZM **(b)** ENL2-CZM

FIGURE 2.21: Lois cohésives identifiées à partir des solutions de références pour les méthodes ENL1 et ENL2

5 Conclusion du chapitre

La méthode non-locale eikonale pour l'endommagement a été présentée dans ce chapitre pour un contexte unidimensionnel où le calcul des distances effectives se réduit au calcul d'une intégrale. Deux hypothèses sur le champ d'endommagement sont proposées afin d'expliciter le calcul des distances. Les propriétés du modèle d'endommagement non-local eikonal selon ces deux hypothèses ont été illustrées et discutées. L'hypothèse d'un champ d'endommagement constant par élément nécessite l'introduction du pilotage en déformation non-locale afin d'assurer le calcul d'une solution dissipative, ce qui n'est pas nécessaire pour l'hypothèse d'un champ d'endommagement linéaire entre chaque point d'intégration.

Les propriétés de régularisation propres aux modèles non-locaux sont gardées jusqu'à un certain niveau d'endommagement puis sont perdues à cause du phénomène de localisation, quelle que soit la valeur du paramètre α de la métrique ou l'hypothèse sur le champ d'endommagement. Une méthode de calcul de l'endommagement critique est proposée afin de pouvoir réaliser des simulations objectivement par rapport au maillage. Une première méthode pour tenter de résoudre le problème d'objectivité consiste à limiter les valeurs de la métrique afin de limiter les distances effectives et prévenir du phénomène de localisation. Cette méthode permet effectivement de retrouver l'objectivité des résultats par rapport au maillage. Néanmoins, une diffusion de l'endommagement caractéristique de la méthode non-locale intégrale originale est observée.

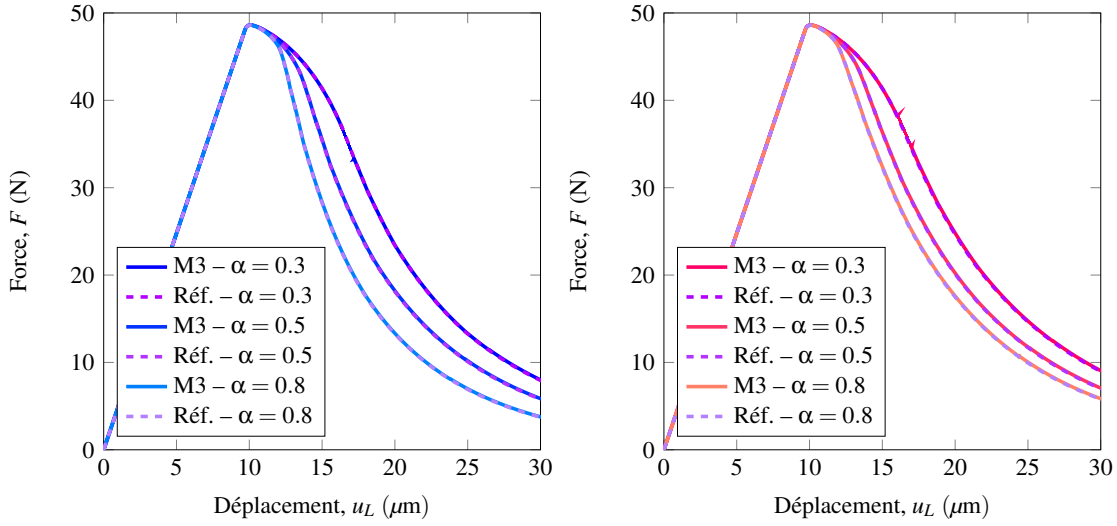


(a) ENL1-CZM **(b)** ENL2-CZM

FIGURE 2.22: Lois cohésives identifiées à partir des solutions avec métrique limitée

Une seconde méthode introduisant une discontinuité dans les éléments observant un endommagement critique a été proposée. Cette méthode permet d'obtenir des résultats objectifs par rapport au maillage tout en évitant la diffusion de l'endommagement. Cependant, cette méthode introduit des paramètres supplémentaires au modèle, notamment une loi cohésive difficile à identifier en pratique. Trois procédures d'identification ont été présentées pour calibrer la loi cohésive en posant une équivalence entre le modèle d'endommagement non-local eikonal pur et le modèle avec introduction d'une discontinuité forte.

Enfin, ce chapitre a montré que la méthode non-locale eikonale pour l'endommagement peut modéliser la localisation des déformations après le développement des dégradations dans une zone de taille finie. Le problème d'objectivité des résultats par rapport à la discrétisation spatiale est résolu en 1D par l'introduction d'une transition vers un modèle à discontinuité forte.



(a) ENL1-CZM **(b)** ENL2-CZM

FIGURE 2.23: Réponses globales du modèle ENL-CZM

Chapitre 3

Étude de la formulation Eikonale Non-Locale en 2D

La formulation ENL définie dans le chapitre précédent pour les problèmes 1D est étendue à la résolution de problèmes 2D. Un certain nombre de détails concernant l'implémentation numérique, réalisée dans le code aux éléments finis Cast3M, sont donnés. Ensuite, les résultats de la simulation de la propagation de l'endommagement dans une poutre en flexion trois points sont analysés et les propriétés de régularisation du modèle sont étudiées. Enfin, la possibilité de la formulation d'un modèle de transition ENL-discontinuité forte dans le cadre des éléments finis enrichis est discutée.

Sommaire

1 Implémentation de la formulation ENL dans un solveur éléments finis 75
1.1 Méthodes numériques de résolution de l'équation eikonale 75
1.2 Présentation de la méthode Fast Marching 76
1.3 Calcul du champ de distance 80
1.4 Compléments sur la discrétisation de la grille Fast Marching 83
2 Exemple d'application : poutre en flexion trois points 85
2.1 Présentation de l'étude 85
2.2 Traitement des conditions aux limites 89
2.3 Propriétés de régularisation de la méthode ENL en 2D 92
3 Études préliminaires d'une approche de transition endommagement ENL – discontinuité forte 101
3.1 Formulation du modèle ENL-EFEM et validation 101

3.2 Propagation de fissure et comportement non-local 104
4 Conclusion du chapitre 107

1 Implémentation de la formulation ENL dans un solveur éléments finis

Dans un contexte 1D, il est possible de calculer analytiquement le champ de distance d'interactions non-locales en posant une hypothèse sur la forme de la métrique figurant dans l'équation eikonale. Cependant, dans un espace multi-dimensionnel, il n'existe pas de solution théorique dans le cas général. Il est donc nécessaire de recourir à un algorithme d'approximation numérique pour l'évaluation du champ des distance géodésiques. L'objectif de cette partie est de définir l'implémentation du calcul de ce champ des distances effectives afin de permettre l'évaluation des variables non-locales pour la résolution aux éléments finis. Les développements détaillés ici ont été réalisés dans le code de calcul par éléments finis Cast3M.

1.1 Méthodes numériques de résolution de l'équation eikonale

La résolution de l'équation eikonale dans un espace 1D ne pose pas réellement de problème technique. Dans le cas de la formulation ENL définie au chapitre précédent, l'hypothèse de forme sur le champ d'endommagement, constant ou linéaire par élément, permet de calculer analytiquement la distance entre deux points. Dans le cas hypothétique où la forme de la métrique ne permet d'obtenir une formule analytique, il reste possible de discrétiser simplement l'espace et d'obtenir une approximation numérique entre deux points.

Dans un espace de dimension supérieur à 1, la distance entre deux points est définie comme la longueur du plus court chemin possible entre ces deux points dans un espace déformé par l'endommagement via la fonction métrique. La difficulté technique du calcul de la distance entre deux points réside alors dans l'identification du chemin le plus court. Par ailleurs, du point de vue numérique,la formulation ENL a besoin d'évaluer le champ de distance à partir de chaque point d'intégration. Il est donc nécessaire d'implémenter un algorithme capable de calculer le champ de distance de manière efficace et rapide.

L'équation eikonale à résoudre est considérée sous la forme générale suivante :

$$||\nabla \ell(\vec{z})|| = W(\vec{z}) \tag{3.1}$$

avec la condition initiale $\ell(\vec{z}) = 0,\ \forall \vec{z} \in \Gamma$. Dans le cadre particulier de la résolution pour la formulation non-locale considérée, la ligne Γ est réduite à un unique point $\vec{z}_0$ dont les coordonnées correspondent au point d'intégration où a lieu l'évaluation non-locale.

Méthodes numériques pour la résolution de l'équation eikonale La littérature propose principalement deux familles de méthodes pour la résolution numérique de l'équation eikonale (EQ.3.1) :

— la méthode « Fast Marching », est basée sur l'algorithme de [Dijkstra, 1959] en théorie des graphes, où les distances sont calculées aux nœuds d'une discrétisation de l'espace et non en des sommets d'un graphe. Dans la méthode Fast Marching développée indépendemment par [Tsitsiklis, 1995] et [Sethian, 1996], le calcul des distances est effectué sur une grille cartésienne régulière. Le développement de la méthode pour des grilles non cartésiennes [Carlini *et al.*, 2013] peut s'avérer intéressant pour l'implémentation dans un cadre éléments finis afin de simplifier la correspondance entre la discrétisation spatiale propre aux éléments finis et la discrétisation spatiale propre au calcul des distances. La complexité algorithmique est en $O(M \log M)$ avec M le nombre de points où sont calculées les distances ;

— les méthodes de type « Fast Sweeping » ont été développées originellement par [Tsai *et al.*, 2003] puis par exemple par [Fomel *et al.*, 2009]. Elle est basée sur des itérations de Gauss-Seidel pour l'évaluation du champ de distance. Sa complexité algorithmique en $O\left(M^2\right)$ paraît être un défaut majeur par rapport à la méthode Fast Marching mais la mise en œuvre pratique peut s'avérer très rapide.

Choix de la méthode pour l'implémention d'un modèle ENL Les principales méthodes disponibles dans la littérature répondent aux conditions d'implémentation de la formulation ENL pour l'endommagement. Il a été montré expérimentalement ([Chacon et Vladimirsky, 2011, Gremaud et Kuster, 2006]) que dans les cas où la métrique varie beaucoup, les performances de la méthode Fast Sweeping se dégradent énormément. Dans le cas d'un modèle d'endommagement non-local, des zones endommagées peuvent apparaître et introduire de fortes variations dans les valeurs de la métrique. La méthode Fast Marching semble donc mieux adaptée. De plus elle est désormais disponible en un grand nombre de bibliothèques de calcul numérique (en Fortran, C++, Python, etc).

1.2 Présentation de la méthode Fast Marching

La méthode Fast Marching présentée ici est la méthode originellement développée par [Sethian, 1996]. Un espace Ξ à deux dimensions est discrétisé en une grille cartésienne régulière Ξ_h de pas h_{FM}. Les points de la grille z_k sont repérés par leurs positions dans la grille $k = \{i, j\}$ avec $i \in [1, N_x]$ et $j \in [1, N_y]$. L'équation eikonale est réécrite sous forme discrétisée :

$$\left|\left|\nabla \ell_{ij}\right|\right| = W_{ij} \tag{3.2}$$

avec la condition initiale $\ell_{k_0} = \ell_{i_0 j_0} = 0$.

Évaluation du gradient du champ de distance L'algorithme Fast Marching est très similaire à l'algorithme de Dijsktra. La principale différence se situe en réalité lors du calcul de distances des points de la grille. Pour calculer le champ de distance solution de l'équation eikonale, il faut réaliser une estimation de la norme du gradient du champ de distance.

L'approximation de la norme du gradient a été proposée par [Rouy et Tourin, 1992] :

$$\left\|\nabla \ell_{ij}\right\|^2 = \max\left\{D_{ij}^{+x}\ell, -D_{ij}^{-x}\ell, 0\right\}^2 + \max\left\{D_{ij}^{+y}\ell, -D_{ij}^{-y}\ell, 0\right\}^2 = W_{ij}^2 \tag{3.3}$$

avec l'approximation des gradients au premier ordre dans chaque direction (en 2D) :

$$D_{ij}^{+x} = \frac{\ell_{i+1,j} - \ell_{i,j}}{h_{FM}} \qquad D_{ij}^{-x} = \frac{\ell_{i,j} - \ell_{i-1,j}}{h_{FM}} \tag{3.4}$$

$$D_{ij}^{+y} = \frac{\ell_{i,j+1} - \ell_{i,j}}{h_{FM}} \qquad D_{ij}^{-y} = \frac{\ell_{i,j} - \ell_{i,j-1}}{h_{FM}} \tag{3.5}$$

[Rickett et Fomel, 2001] proposent d'améliorer l'approximation des gradients en utilisant une expression au second ordre :

$$D_{ij}^{+x} = \frac{-\ell_{i,j} + 4\ell_{i+1,j} - 3\ell_{i+2,j}}{2h_{FM}} \qquad D_{ij}^{-x} = \frac{\ell_{i,j} - 4\ell_{i-1,j} + 3\ell_{i-2,j}}{2h_{FM}} \tag{3.6}$$

$$D_{ij}^{+y} = \frac{-\ell_{i,j} + 4\ell_{i,j+1} - 3\ell_{i,j+2}}{2h_{FM}} \qquad D_{ij}^{-y} = \frac{\ell_{i,j} - 4\ell_{i,j-1} + 3\ell_{i,j-2}}{2h_{FM}} \tag{3.7}$$

En pratique, l'approximation du gradient au second ordre pose un problème technique aux conditions aux limites. Dans ce cas, l'approximation est réalisée au premier ordre pour les points près du bord de la grille. Quelques détails utiles à l'implémentation de cette méthode sont compilés dans [Rickett et Fomel, 2001].

Algorithme La procédure de calcul du champ de distances est décrite par l'algorithme ALG.1. L'objectif de cet algorithme est de calculer la distance entre chaque point P_k et le point de départ P_{k_0}. Pour cela, trois ensembles sont définis :

- l'ensemble *Inconnus* contenant initialement tous les points de la grille à l'exception du point de départ P_{k_0}, pour lequel, la distance $\ell_{k_0} = 0$ est déjà connue. Les distances ℓ_k de tous les autres points sont initialement fixées à l'infinie ;
- l'ensemble *Front* contiendra au cours de la progression de l'algorithme, l'ensemble des points pour lesquelles une valeur de distance a été calculée, mais n'est pas définitive et possiblement modifiée si un chemin plus court est trouvé ;
- enfin, l'ensemble *Connus* rassemble les points de la grille dont la distance a été calculée et dont la valeur est définitive.

De la même façon que l'algorithme de Dijkstra, la boucle principale de l'algorithme Fast Marching cherche à extraire le point P_{min} de l'ensemble *Front* dont la valeur de distance est minimale sur cet ensemble et à le placer dans l'ensemble *Connus*. En d'autres termes, la distance du point le plus proche du point de départ dans l'ensemble *Front* est fixée et ne pourra plus évoluer. Une fois cette étape effectuée, l'algorithme prescrit de calculer les valeurs de distance pour chaque point dans le voisinage du point qui vient d'être placé dans *Connus*.

Le voisinage du point $P_k = P_{ij}$ est défini de la façon suivante :

$$Voisinage\,(P_k = P_{ij}) = \left\{P_{i+1,j}, P_{i-1,j}, P_{i,j+1}, P_{i,j-1}\right\} \tag{3.8}$$

L'action d'extraire un point de l'ensemble *Front* et de le placer dans l'ensemble *Connus* à chaque itération de la boucle principale permet d'assurer un critère d'arrêt naturel à l'algorithme. Le nombre d'itérations ne peut alors pas dépasser le nombre total de points $N_{FM} = N_x N_y$ de la grille de discrétisation. L'opération la plus coûteuse en termes de temps de calcul est la procédure d'identification de la distance minimale sur l'ensemble *Front*. Une telle procédure nécessite de comparer l'ensemble des points entre eux afin d'établir la distance minimale. Sans traitement spécifique, le nombre d'opérations à réaliser correspond alors au nombre de points à comparer (dans le pire des cas, N_{FM}). Cependant, il est possible d'utiliser une structure en arbre binaire pour le stockage en mémoire de l'ensemble *Front*. L'identification de la distance minimale nécessite alors un nombre d'opérations de l'ordre de $O(\log N_{FM})$ dans le pire des cas. Cette structure de données constitue un réel avantage pour la méthode Fast Marching dont la complexité est alors en $O(N_{FM} \log N_{FM})$ en comptant le nombre d'itérations de la boucle principale.

Extension au cas 3D La description de l'algorithme Fast Marching a été présentée ici dans un contexte bidimensionnel mais il est possible d'étendre directement l'algorithme au contexte tridimensionnel sans autre modification que la prise en compte de la troisième dimension dans la définition du voisinage d'un point et dans le calcul de la norme du gradient.

Convergence de la méthode Fast Marching La qualité d'approximation de la méthode Fast Marching est évaluée dans cette sous partie pour une métrique uniforme et unitaire :

$$\forall \vec{z} \in \Xi,\ W(\vec{z}) = 1 \tag{3.9}$$

Algorithme 1 : Algorithme Fast Marching

Initialisation
$\forall k \neq k_0$, $Inconnus = \{P_k\}$ et $\ell_k = +\infty$
$Connus = \varnothing$
$Front = \{P_{k_0}\}$ et $\ell_{k_0} = 0$
tant que $Front \neq \varnothing$ **faire**
  Trouver $P_{min} = \text{argmin}\{\ell_i\}$
  $Connus = Connus \cup \{P_{min}\}$
  $Front = Front - \{P_{min}\}$
  pour $P_k \in Voisinage(P_{min})$ **faire**
    Calculer la distance $\tilde{\ell}_k$ de P_k
    si $\ell_k = +\infty$ **alors**
      $\ell_k \leftarrow \tilde{\ell}_k$
      $Front \leftarrow Front \cup \{P_k\}$
      $Inconnus = Inconnus - \{P_k\}$
    si $\tilde{\ell}_k < \ell_k$ **alors**
      $\ell_k \leftarrow \tilde{\ell}_k$

Pour cette forme de la métrique, il existe une solution théorique à l'équation eikonale. Il s'agit simplement de la distance euclidienne $\ell^{th} = \|\vec{z} - \vec{z}_0\|$. Dans le but de quantifier la qualité de l'approximation numérique du champ de distance obtenue par la mise en œuvre de la méthode Fast Marching, deux erreurs entre l'approximation numérique et la solution théorique sont définies :

$$\varepsilon_2 = \left(\int_{\Xi} \left(\ell^{th}(x,y) - \ell(x,y) \right)^2 dxdy \right)^{1/2} \tag{3.10}$$

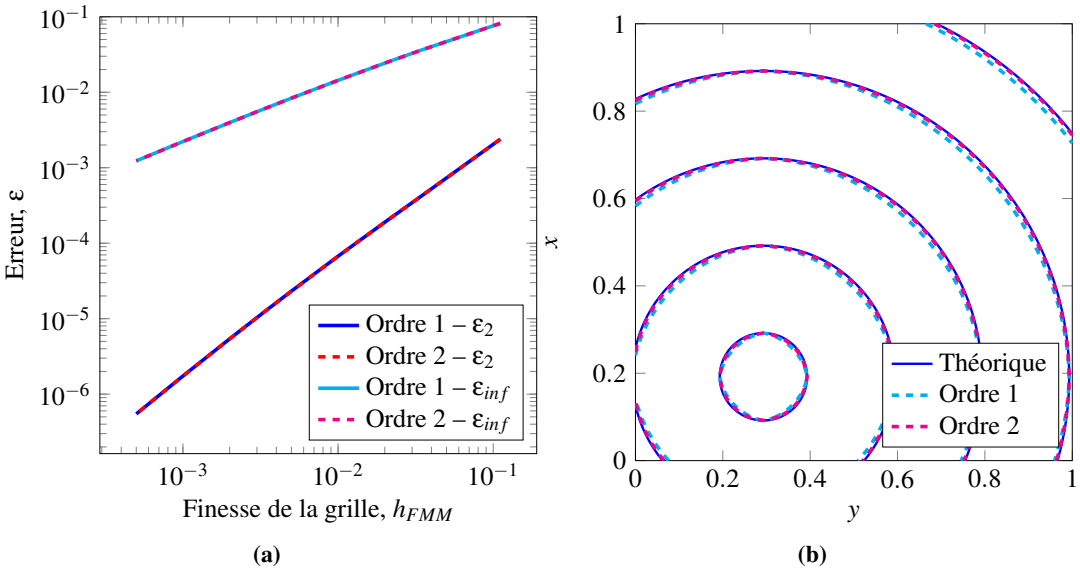
$$\varepsilon_{inf} = \max_{(x,y)\in\Xi} \left| \ell^{th}(x,y) - \ell(x,y) \right| \tag{3.11}$$

ou encore, sous forme discrétisée :

$$\varepsilon_2 = \left(\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{1}{h_{FM}^2} \left(\ell_{ij}^{th} - \ell_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \tag{3.12}$$

$$\varepsilon_{inf} = \max_{i=1..N_x, j=1..N_y} \left| \ell_{ij}^{th} - \ell_{ij} \right| \tag{3.13}$$

Les évolutions de ces deux erreurs d'approximations sont tracées sur la FIG.3.1a pour le calcul des distances à l'ordre 1 et à l'ordre 2. La décroissance de l'erreur d'approximation en fonction de la finesse de la grille de discrétisation démontre la convergence de la solution numérique vers la solution théorique pour une métrique uniforme. La FIG.3.1b illustre la différence entre les approximations à l'ordre 1 et 2. En ce qui concerne le temps de calcul, il faut noter qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux méthodes de résolution numériques (voir FIG.3.2).



(a) **(b)**

FIGURE 3.1: Convergence de la méthode Fast Marching pour une métrique uniforme et comparaison de l'ordre d'expression du gradient de distance

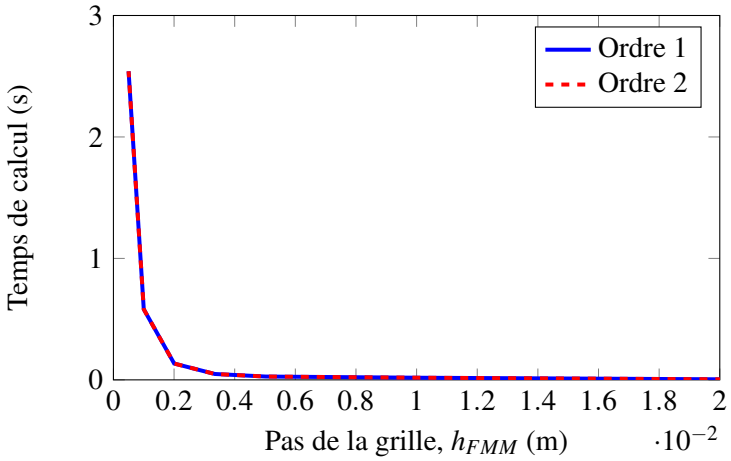


FIGURE 3.2: Comparaison des temps de calcul de la méthode Fast Marching à l'ordre 1 et à l'ordre 2

1.3 Calcul du champ de distance

La finalité de la mise en œuvre de la méthode Fast Marching est de calculer les champs de distances d'interaction entre les points d'intégration pour le calcul non-local en éléments finis. Les distances doivent donc être calculées aux points d'intégration des contraintes, point d'intégration par point d'intégration. La dispersion spatiale des points d'intégration est imposée par le maillage éléments finis. La finesse du maillage éléments finis étant indépendante de la finesse de la grille de résolution Fast Marching, il est nécessaire d'établir la relation entre les deux discrétisations spatiales ([Rastiello *et al.*, 2018]).

La précision de la solution numérique de l'équation eikonale calculée par la méthode Fast Marching dépend de la finesse de la discrétisation spatiale comme le montrent les résultats présentés sur la FIG.3.1a. Afin d'obtenir les meilleures résolutions numériques possible, la grille de résolution Fast Marching doit être plus fine que la dispersion spatiale des points d'intégration du maillage éléments finis.

L'intérêt d'utiliser une grille cartésienne régulière pour la résolution Fast Marching est de ne pas avoir à manipuler de maillage pour la résolution de l'équation eikonale. Puisque le pas de la grille est constant, la programmation de la résolution de l'équation eikonale ne nécessite que l'utilisation d'un tableau à deux entrées pour manipuler entièrement le champ de distance. En outre, cette méthode ne nécessite pas de construire et stocker la grille de résolution de manière permanente. Utiliser une méthode de résolution Fast Marching avec une discrétisation nécessitant la construction d'un maillage spécifique permanent pourrait s'avérer difficile en termes de mémoire à cause de la finesse de discrétisation ou bien en termes de praticité d'utilisation.

La procédure de calcul des distances s'établit ainsi :

1. Construction de la grille de résolution Fast Marching ;
2. Projection du champ d'endommagement du maillage d'éléments finis sur la grille ;
3. Construction de la métrique sur la grille ;
4. Calcul des distances selon la méthode Fast Marching ;
5. Récupération des distances aux points d'intégration.

1.3.1 Relation entre la méthode Fast Marching et les éléments finis

La construction de la grille de résolution Fast Marching est réalisée à partir de la position des points d'intégration du maillage éléments finis. Dans cette sous-partie, le calcul des variables non-locales est réalisé en un point d'intégration du maillage éléments finis noté M_0 de coordonnées $\vec{x_0}$. L'ensemble des points d'intégration situés dans le domaine non-local du point M_0 est noté I_M. Dans ce manuscrit, la fonction métrique W de l'équation eikonale 3.1 est toujours définie à valeurs supérieures à l'unité. De cette façon, la distance effective entre le point d'intégration M_0 et n'importe quel autre point d'intégration $M_i \in I_M$ est toujours supérieure ou égale à la distance euclidienne entre ces deux points.

Cette condition permet de définir l'ensemble des points d'intégration appartenant au domaine non-local du point d'intégration M_0, c'est à dire tous les points d'intégration du maillage éléments finis situés à une distance euclidienne inférieure à une distance ℓ_{NL} du point M_0 :

$$I_M = \{M_i \in I_{EF} \mid \|\vec{x}_0 - \vec{x}_i\| \leq \ell_{NL}\} \tag{3.14}$$

La grille de résolution Fast Marching est alors construite à partir des coordonnées du point de départ M_0. Ce point étant le point d'initialisation de la méthode Fast Marching, la distance de ce point à lui-même est exactement nulle, quelle que soit la valeur de la métrique en ce point.

Afin de respecter au mieux cette condition, la grille Fast Marching est construite de façon est faire coïncider le point M_0 avec un point de la grille. Le reste de la grille est construite à partir du pas de la grille h_{FM}.

La dispersion des points d'intégration est complètement indépendante de la grille Fast Marching. Dans ce cas, la relation entre les points d'intégration et les points de la grille Fast Marching n'est pas directe à l'exception du point M_0. La valeur de distance à attribuer au point $M_i \in I_{\mathcal{M}}$ est la valeur de distance calculée au point de la grille Fast Marching dont les coordonnées sont les plus proches.

Cette opération de récupération des distances termine la procédure de calcul des distances aux points d'intégration. Il est légitime de se demander son coût puisqu'il faut réaliser la projection des distances de la grille Fast Marching vers le maillage éléments finis. En réalité, grâce à la construction particulière de la grille, il existe une relation directe entre un point d'intégration et le point de la grille Fast Marching dont les coordonnées sont les plus proches. L'étape de construction de la grille Fast Marching ainsi que l'étape de récupération des distances sont illustrées sur la FIG.3.3.

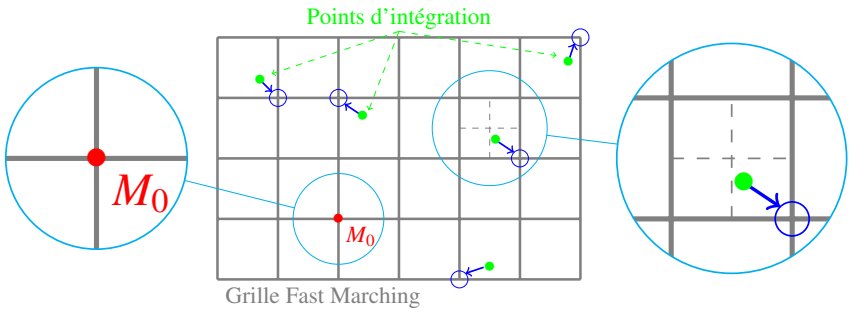


FIGURE 3.3: Schématisation de la méthode de construction de la grille Fast Marching et de récupération des distances (M_0 : point d'intégration de départ)

1.3.2 Projection de la métrique sur la grille de résolution Fast Marching

Le point de la grille Fast Marching prend la valeur de la métrique du point d'intégration le plus proche comme illustré sur la FIG.3.4. Il s'agit de la projection la plus simple à mettre en œuvre. Le chapitre sur la formulation non-locale eikonale en 1D a montré qu'il n'était pas forcément intéressant d'utiliser une projection linéaire, même si la projection linéaire en 2D n'avait pas forcément les mêmes résultats suivant les configurations. Par ailleurs, il faut noter que la projection de la métrique a un coût de calcul relativement important, la complexité algorithmique de cette procédure étant exactement $O(N_{FM})$.

Dans la méthode de projection, il est possible de prendre en compte les bords géométriques. L'objectif de cette intervention est de prévenir les interactions non-locales à travers les limites géométriques. En pratique, pour chaque point P_k de la grille Fast Marching, le point du bord le plus proche P_{bord} est déterminé. La valeur de la métrique en ce point est fixée selon la condition suivante :

$$W_k = \beta_{FM}\ell_c/h_{FM} \quad \text{si} \quad \|\vec{z}_k - \vec{z}_{bord}\| < h_{FM} \tag{3.15}$$

avec β_{FM} un facteur permettant de s'assurer que la distance de ce point par rapport à n'importe quel point de départ soit toujours supérieur à ℓ_c ou à la valeur pertinente pour interrompre l'interaction non-locale en fonction de la pondération.

Il faut noter que la condition écrite pour l'EQ.3.15 permet de limiter les interactions non-locales seulement si la discrétisation spatiale des points du bord observe une finesse de $1/h_{FM}$ au maximum. Dans la suite de ce chapitre, cette méthode toujours appliquée lorsqu'il est nécessaire d'interrompre les interactions non-locales à travers les limites géométriques.

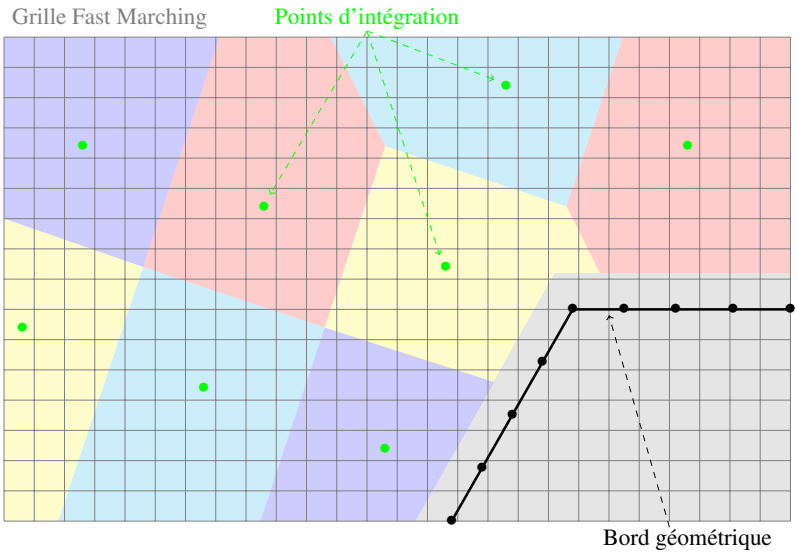


FIGURE 3.4: Illustration de la méthode de projection de la métrique

1.3.3 Remarques sur le coût en temps de calcul

La mise en œuvre de la méthode eikonale non-locale pour l'endommagement augmente largement le coût en temps de calcul par rapport à la méthode non-locale intégrale classique. Le calcul du champ des distances effectives doit être réalisé pour chaque point d'intégration où doit être évalué le modèle non-local. Le temps de calcul de l'algorithme Fast Marching doit donc être multiplié par le nombre de points d'intégration.

Le temps de calcul nécessaire pour calculer les distances d'interaction peut être décomposé en trois parties. En premier lieu, il faut projeter la métrique sur la grille de résolution. Cette opération a une complexité en $O(N_{FM})$ et n'est donc pas négligeable. Comme montré précédemment, le calcul des distances avec l'algorithme Fast Marching n'est pas non plus négligeable. La récupération des distances pour former le champ de distance exploitable pour le calcul non-locale est directe et la complexité algorithmique de cette opération correspond simplement au nombre de points d'intégration présents dans le domaine non-local du point d'intégration de départ.

Optimiser le temps de calcul pour une simulation aux éléments finis du modèle d'endommagement non-local eikonal peut se concentrer sur trois points en particulier :

— Temps de calcul de l'algorithme Fast Marching : il est possible d'arrêter l'algorithme Fast Marching lorsque la distance du point de calcul courant est supérieure à une limite. Le fonctionnement

intrinsèque de la méthode Fast Marching impose la recherche, à chaque itération, du point le plus proche du point de départ. Visuellement, ce principe peut-être comparé à un front de propagation d'onde. Cette propriété de la méthode permet d'assurer que tous les points n'étant pas dans l'ensemble *Connus* ont une distance minimale au point de départ supérieure à la distance du point courant. Il est alors possible, dans un contexte de calcul non-local, de définir une distance limite telle que la valeur de la fonction de pondération devient négligeable et ainsi d'interrompre l'algorithme Fast Marching (i.e., ne pas poursuivre un calcul inutile).

— Temps de calcul des distances d'interaction à partir des points d'intégration : il est possible de paralléliser le calcul du champ de distance. En d'autres termes, l'algorithme Fast Marching est exécuté pour calculer les distances à partir de différents points d'intégration en parallèle.

— En plus de paralléliser le calcul des distances, il est également possible de déterminer une condition d'utilisation de la méthode Fast Marching pour ce calcul. En effet, lorsque la métrique est égale à 1 sur l'ensemble du domaine non-local (milieu non endommagé), les distances effectives correspondent aux distances euclidiennes. Il n'est alors pas nécessaire de faire appel à la méthode Fast Marching dans ce cas spécifique.

1.4 Compléments sur la discrétisation de la grille Fast Marching

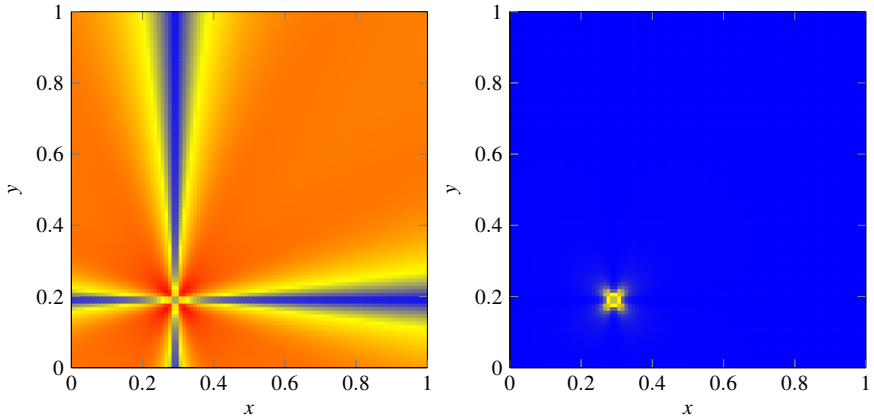
Dans une sous-section précédente, la question de l'erreur d'approximation de la méthode Fast Marching a été évoquée pour montrer la convergence de la résolution vers la solution théorique en fonction de la finesse de discrétisation. Cependant, en ce qui concerne l'implémentation du calcul des distances pour la formulation non-locale, la qualité de l'approximation se pose au niveau des points d'intégration plutôt qu'aux points de la grille Fast Marching.

1.4.1 Analyse des cartes d'erreur

En observant les cartes des erreurs absolues et relatives (FIG.3.5) obtenues pour la résolution numérique Fast Marching à l'ordre 2 (100×100 points) pour une métrique uniforme unitaire, il est possible d'écrire deux observations. Premièrement, il semble que les erreurs d'approximations ont principalement lieu aux points de la grille en diagonale avec le point de départ de la résolution. Cette observation s'explique par la méthode de calcul des distances dans l'algorithme Fast Marching. En effet, les gradients du champ de distance ne sont évalués que dans les deux directions principales de la grille. On peut remarquer aussi que l'erreur relative est maximale aux points directement en diagonale avec le point de départ. En fait, cette erreur d'approximation vient du fait que la formule d'approximation de [Rouy et Tourin, 1992] n'est pas adaptée pour le calcul des points proches du point de départ.

En ce qui concerne le calcul non-locale, l'évaluation des distances est particulièrement importante. En effet, les points d'intégration les plus influents sur le point de calcul non-local sont les points les plus proches. L'erreur sur l'approximation des distances se traduit directement par une erreur sur les plus importantes pondérations du calcul non-locale.

Les erreurs d'approximation numérique sont inévitables, le problème revient donc sur le choix du pas de la grille Fast Marching h_{FM} afin de minimiser les erreurs. Néanmoins, la finesse de la grille Fast Marching reste limitée par des conditions technologiques sur le temps de calcul.



(a) Erreur absolue **(b)** Erreur relative

FIGURE 3.5: Erreur d'approximation pour la méthode Fast Marching à l'ordre 2

1.4.2 Modification de l'algorithme Fast Marching

D'après les observations faites sur les cartes d'erreurs de la FIG.3.5, il apparaît que l'erreur maximale se trouve aux points de la grille Fast Marching situés directement en diagonal avec le point de départ. En suivant une idée de M. Jirásek, il est possible d'annuler l'erreur d'approximation en ces points en forçant l'algorithme Fast Marching à calculer de façon exacte la distance en ces quatre points. Afin de pouvoir réaliser ce calcul exact, il faut supposer que la valeur de la métrique est uniforme sur le domaine composé du point de départ, de ses quatre voisins directs et de ses quatre voisins en diagonale. Du fait de la méthode de projection adoptée, cette hypothèse n'est pas difficile à respecter, à condition de choisir un pas de la grille Fast Marching inférieur à la moitié de la plus petite distance entre deux points d'intégration.

La modification de l'algorithme Fast Marching est très simple, il suffit d'initialiser l'ensemble *Front* avec l'ensemble des huit voisins du point de départ (i_0, j_0). Les valeurs des distances correspondantes sont en 2D :

$$\ell_{i_0+1,j_0} = \ell_{i_0-1,j_0} = \ell_{i_0,j_0+1} = \ell_{i_0,j_0-1} = h_{FM} W_{i_0,j_0}$$
$$\ell_{i_0+1,j_0+1} = \ell_{i_0-1,j_0+1} = \ell_{i_0-1,j_0-1} = \ell_{i_0+1,j_0-1} = h_{FM}\sqrt{2} W_{i_0,j_0}$$

1.4.3 Erreur d'approximation des distances aux points de Gauss

Dans le but d'étudier plus précisément l'influence du pas de la grille Fast Marching sur la qualité d'approximation des distances au niveau des points d'intégration, un exemple d'application en éléments finis est réalisé.

La métrique de l'équation eikonale est considérée uniforme et unitaire. Les distances théoriques sont exactement les distances euclidiennes. Or, pour la méthode non-locale eikonale, la métrique n'est pas supposée rester constante au cours du calcul, néanmoins, le cas particulier d'une métrique uniforme et unitaire correspond à une condition initiale de matériau sain pour le problème mécanique. Il convient donc de s'assurer de la qualité du calcul des distances pour ce cas particulier.

L'étude est menée sur un disque de rayon L discrétisé à l'aide d'éléments triangulaires à trois nœuds. Ces éléments possèdent un seul point d'intégration situé au barycentre des trois points. La discrétisation spatiale des nœuds pour la méthode des éléments finis est réalisée de manière à respecter une densité h_{EF} sur tout le domaine.

La quantité d'intérêt de l'étude est l'erreur relative sur le calcul des distances obtenue en chaque point d'intégration du domaine non-local. D'après les cartes d'erreurs de la FIG.3.5, l'erreur relative d'approximation des distances ℓ est maximale au niveau des points d'intégration les plus proches. La grandeur d'intérêt pour cette étude est l'erreur relative maximale commise sur l'ensemble I des points d'intégration du disque :

$$\varepsilon_{max} = \max_{x \in I} \left\{ \frac{\ell(x) - \ell^{th}(x)}{\ell^{th}(x)} \right\} \tag{3.16}$$

Malgré cette définition formelle de l'erreur maximale observée sur tous les points d'intégration, dans la courte étude menée, les erreurs maximales correspondent toujours, sans exception, au point d'intégration le plus proche du point de départ.

Le pas de la grille de résolution Fast Marching h_{FM} est défini à partir de la densité du maillage éléments finis h_{EF} :

$$h_{FM} = \frac{h_{EF}}{k_{FM}} \tag{3.17}$$

Les résultats de l'étude sont tracés sur la FIG.3.6 pour la méthode Fast Marching originale à l'ordre 2 et la méthode Fast Marching modifiée proposée. Les deux méthodes sont comparées en utilisant trois densités de discrétisation du maillage éléments finis. L'évolution de l'erreur maximale est tracée en fonction de la finesse de la grille de résolution Fast Marching.

L'erreur relative maximale d'approximation décroît avec le pas de la grille pour les deux méthodes. Cependant, la modification de la méthode Fast Marching permet une meilleure approximation des distances cartésiennes en utilisant une finesse de grille Fast Marching plus grossière. Il est donc intéressant d'utiliser cette méthode modifiée afin de réduire la finesse de la grille de résolution et ainsi gagner en temps de calcul. Il faut noter que les temps d'exécution de la méthode Fast Marching et de la méthode modifiée sont équivalentes. En effet, l'algorithme et les opérations réalisées sont strictement les mêmes, seule la condition initiale change.

2 Exemple d'application : poutre en flexion trois points

La méthode de calcul numérique des distances effectives et l'implémentation numérique de la méthode non-locale eikonale ont été décrites dans la partie précédente. Un exemple d'application à une poutre en flexion trois points est analysé dans cette section. La mise en œuvre pratique de la méthode non-locale eikonale est abordée et le traitement spécifique des conditions aux limites est explicité.

2.1 Présentation de l'étude

Une poutre entaillée respectant les dimensions du schéma de la FIG.3.7 est étudiée dans un contexte 2D en contraintes planes. Le chargement en flexion 3 points est appliqué par déplacement imposé au droit

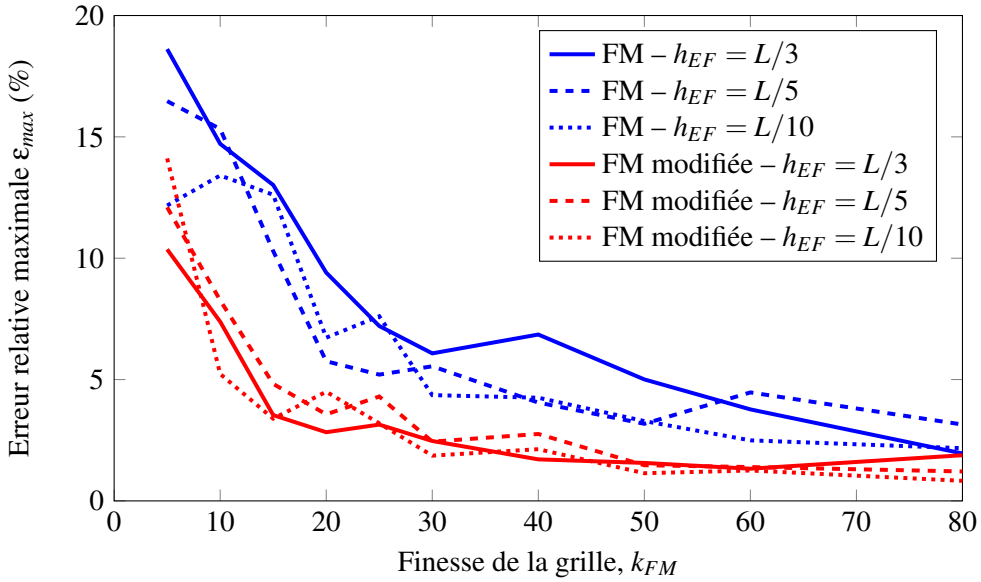


FIGURE 3.6: Erreur d'approximation de la méthode Fast Marching au point d'intégration le plus proche

de l'entaille. L'objectif de cette étude est d'observer la formation et le développement de la fissuration d'un matériau quasi-fragile modélisé par un modèle d'endommagement non-local eikonal.

Le maillage pour la résolution aux éléments finis est réalisé à l'aide d'élément triangulaire à 3 nœuds. Le développement de la fissuration est orienté par l'entaille et les zones d'endommagement se situent donc directement au droit de l'entaille. Pour cette raison, il est possible d'appliquer le modèle d'endommagement uniquement dans la zone centrale de la poutre et d'appliquer un modèle d'élasticité au reste de la poutre. Ce choix de modélisation permet de réduire significativement le temps de calcul non-local sans influencer le résultat final. Aussi, la densité des nœuds du maillage est significativement augmentée dans la zone centrale de la poutre où l'endommagement non-local est censé se développer.

Il faut noter que le chargement de flexion est imposé par le déplacement vertical contrôlé d'une ligne de taille non nulle dans le but d'éviter le développement de l'endommagement au point d'application du chargement. La taille de la zone d'application du chargement est de 4 mm. L'épaisseur de l'entaille est de 2 mm.

2.1.1 Modèle d'endommagement et équation eikonale

Dans ce chapitre, le matériau quasi-fragile est modélisé par le même modèle d'endommagement isotrope que dans le chapitre précédent. La relation caractéristique reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C}\,(1-D) : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{3.18}$$

La variable d'endommagement scalaire D suit une loi d'évolution $D = g(\kappa)$, avec κ une variable d'histoire mesurant la plus grande déformation équivalente non-locale $\bar{\varepsilon}_{eq}$ subie par le matériau. Il est alors possible de définir une surface de charge f ainsi que les conditions de charge-décharge :

$$f = \bar{\varepsilon}_{eq} - \kappa \tag{3.19}$$

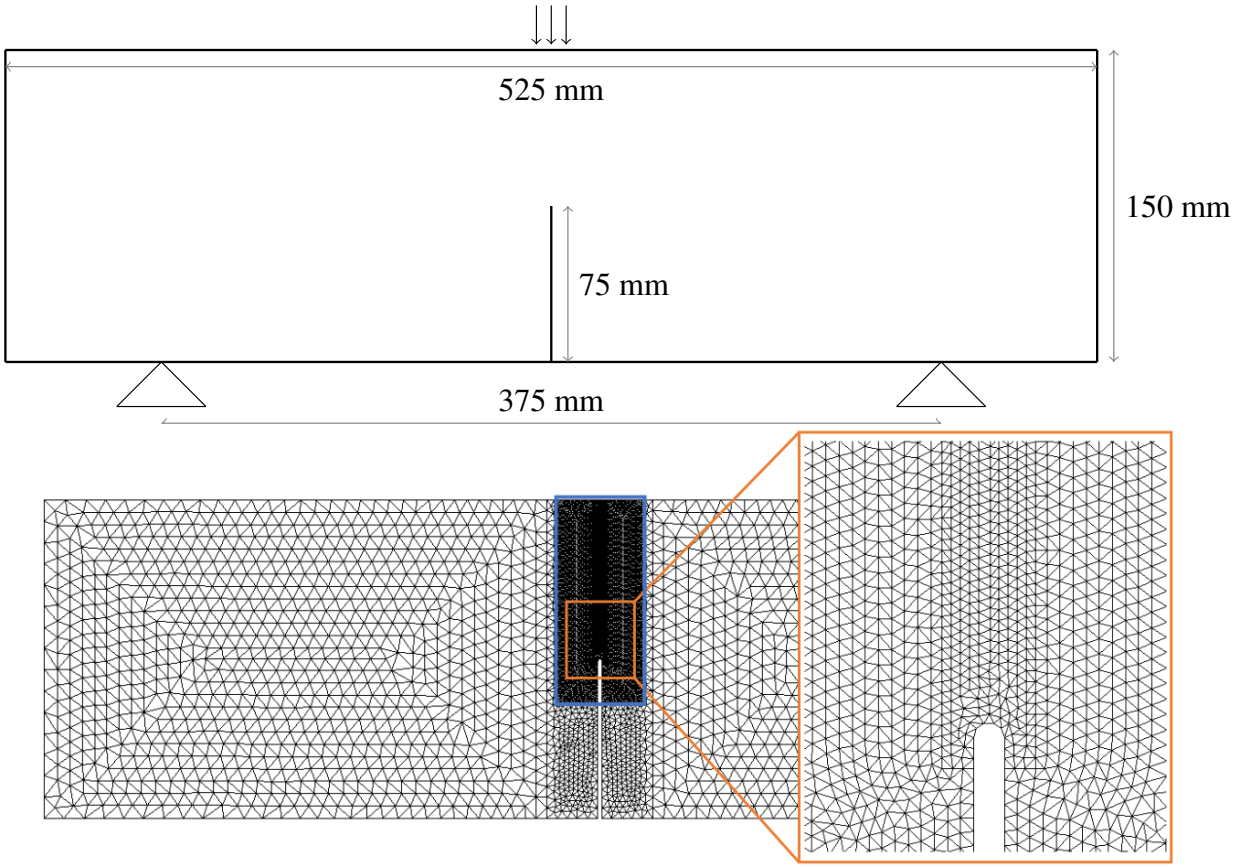


FIGURE 3.7: Géométrie de la poutre en flexion 3 points et exemple de maillage (zone bleue : zone au comportement non-locale)

$$\dot{\kappa} \geq 0 \qquad f \leq 0 \qquad f\dot{\kappa} = 0$$

Dans cet environnement multi-dimensionnel, la déformation équivalente doit être une mesure scalaire du tenseur des déformations. Pour cela, la déformation équivalente de Mazars est calculée à partir des déformations principales :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{I}^{3} \langle \varepsilon_I \rangle_+^2} \tag{3.20}$$

avec les crochets $\langle . \rangle_+$ désignant la partie positive.

De la même façon que dans la modélisation unidimensionnel, la déformation équivalente non-locale est calculée comme la moyenne spatiale de la déformation équivalente locale ε_{eq} :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(\vec{x}) = \frac{1}{V(x)} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{\ell_{xy}}{\ell_c}\right) \varepsilon_{eq}(\vec{y})\, dy \tag{3.21}$$

où le champ de distance ℓ_{xy} est solution de l'équation eikonale :

$$m(\vec{z}) \left|\left| \frac{d\ell_{xy}}{d\vec{z}} \right|\right| = 1 \tag{3.22}$$

La fonction métrique est définie de la même façon qu'en 1D puisque l'endommagement est toujours scalaire :

$$m(\vec{z}) = (1 - D(\vec{z}))^{\alpha} \tag{3.23}$$

2.1.2 Prescriptions relatives au calcul des distances effectives

Le temps de calcul global d'un pas de temps est significativement impacté par la résolution Fast Marching nécessaire pour chaque point d'intégration. La première partie (sections 1.3.3 et 1.4.2) de ce chapitre s'est intéressée à l'optimisation de la méthode Fast Marching ainsi qu'aux prescriptions relatives à la précision du calcul des distances en fonction de la finesse de la grille de résolution. En réalité, le coût de calcul pour la méthode ENL est dû au fait que le calcul des distances doit être mené à chaque pas de temps pour chaque point d'intégration. Il est alors possible de diminuer considérablement le coût du calcul des distances effectives en réduisant le nombre de résolutions Fast Marching à réaliser à chaque pas de temps.

Activation progressive du calcul des distances En observant les résultats de simulation en 1D dans le chapitre précédent, il est possible d'observer que les éléments situés aux extrémités de la barre ne sont jamais endommagés. Dans les simulations du modèle d'endommagement ENL, il existe des éléments nécessaires à la résolution globale qui ne seront jamais endommagés. Cela signifie que ces éléments ne sont pas liés à des éléments subissant des déformations équivalentes importantes ou bien étant suffisamment endommagés ou éloignés pour ne pas avoir d'influence.

Il est alors envisagé ici de réaliser la résolution Fast Marching pour le calcul des distances effectives uniquement pour les points d'intégration dont l'endommagement est strictement positif. Plus précisément, pour les points d'intégration dont la valeur de la métrique est strictement supérieure à 1. En effet, la métrique étant initialement égale à 1, il n'est pas nécessaire de réaliser la résolution Fast Marching puisque les distances effectives sont égales aux distances euclidiennes.

Dans ce manuscrit, la condition formelle suivante est utilisée pour déclencher la résolution Fast Marching pour le point d'intégration considéré :

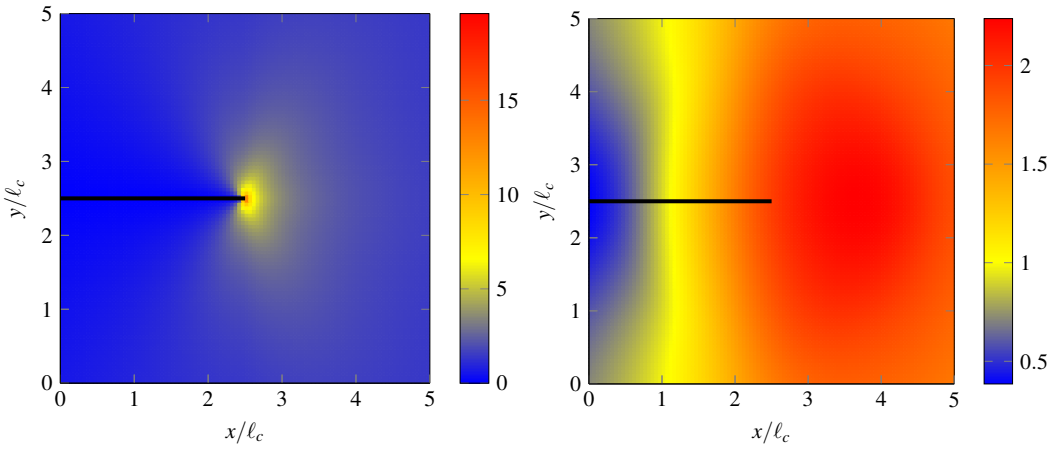
$$(m(\vec{x}))^{-1} > 1 + \varepsilon \tag{3.24}$$

avec ε une valeur strictement positive permettant de choisir la valeur de la métrique déclenchant la résolution Fast Marching pour le point d'intégration à la position $\vec{x}$. Les champs de distances pour tous les autres points d'intégration sont alors obtenus par le calcul des distances euclidiennes. Cependant, il faut noter que de cette façon les distances entre un point d'intégration observant une métrique supérieure à 1 et un point d'intégration observant une métrique égale à 1 n'ont pas les mêmes valeurs. La condition de symétrie est alors imposée lors du calcul des distances euclidiennes. Si la distance est déjà connue par symétrie alors cette valeur est conservée au détriment du calcul euclidien.

Cette méthode permet de réduire le coût de calcul de manière considérable tout en gardant la réciprocité des interactions non-locales. Enfin, il faut noter qu'il peut exister des situations où le calcul de la distance entre deux points d'intégration non endommagés serait erroné s'ils étaient séparés par une zone endommagée. Cependant, il est supposé que ce type de situation est soit peu probable dans les simulations menées dans ce chapitre, soit sans influence significative sur le calcul non-local. En effet, pour un modèle d'endommagement non-local, la zone d'endommagement s'étalant sur une zone dont la taille est de l'ordre de deux fois la distance caractéristique, la situation problématique décrite ne peut avoir lieu que pour des points d'intégration relativement éloignés.

2.2 Traitement des conditions aux limites

La mise en oeuvre de modèles non-locaux nécessite parfois un traitement particulier des conditions aux limites. En effet, comme l'ont montré [Simone *et al.*, 2004], l'initiation de l'endommagement est incorrecte en pointe d'entaille. Cette pathologie caractéristique des modèles d'endommagement non-locaux est susceptible d'apparaître pour le cas d'étude proposé ici. En effet, le modèle d'endommagement ENL utilise la déformation équivalente non-locale comme force thermodynamique pilotant l'endommagement. Au niveau de la pointe d'entaille, le maximum du champ de déformation équivalente non-locale est décalé vers l'intérieur du milieu alors que le maximum du champ de déformation équivalente locale se situe directement à la pointe de l'entaille.



(a) Déformation équivalente **(b)** Déformation équivalente non-locale (INL)

FIGURE 3.8: Champs de déformation équivalente locale et non-locale (INL) en présence d'une entaille

Afin d'obtenir une initiation correcte de l'endommagement en pointe d'entaille, la littérature propose de réduire le caractère non-local des matériaux dans les zones proches des conditions aux limites. Ainsi, [Bazant *et al.*, 2010] propose de considérer une couche au comportement local au niveau des conditions aux limites. Les modèles non-locaux basés sur l'état de contrainte permettent de prendre en compte les conditions aux limites naturellement, par exemple, [Giry *et al.*, 2011], [Pijaudier-Cabot *et al.*, 2004]. [Krayani *et al.*, 2009] proposent d'adapter la fonction de pondération non-locale en modifiant le paramètre de longueur caractéristique pour correspondre à la distance du bord géométrique le plus proche.

Modification de la métrique à proximité du bord Dans le cas de la formulation eikonale pour l'endommagement, le cadre établi autour de l'équation eikonale permet de traiter le problème d'initiation par l'intermédiaire de la métrique sans avoir à modifier la formulation non-locale. Il s'agit d'ajouter un endommagement fictif à la fonction métrique m au niveau des points d'intégration proches des conditions aux limites :

$$m(\vec{z}) = (1 - \max\{D(\vec{z}), D_{cl}(\vec{z})\})^{\alpha} \tag{3.25}$$

avec D_{cl} un champ d'endommagement fictif à définir. Cet endommagement fictif permet de diminuer le caractère non-local du matériau proche des conditions aux limites. Il est par exemple possible de définir l'endommagement fictif D_{cl} en fonction de la distance du bord géométrique le plus proche, le caractère non-local étant censé diminuer en fonction de la proximité d'un bord géométrique.

Pour modéliser cet effet, une possibilité consiste à augmenter l'endommagement fictif en fonction de l'inverse de la distance au bord géométrique le plus proche.

$$D_{cl} = \left\langle 1 - \left(\frac{\ell_b}{L_b}\right)^2 \right\rangle_+^2 \tag{3.26}$$

avec L_b un paramètre de distance à choisir et ℓ_b la distance au bord géométrique le plus proche.

Initiation de l'endommagement Dans le but de montrer l'influence d'un champ virtuel sur l'initiation de l'endommagement, une étude numérique est menée dans un domaine 2D où une entaille de longueur b et d'épaisseur nulle est placée. Le champ de déformation en phase élastique linéaire peut être exprimé sous l'hypothèse des contraintes planes par :

$$\varepsilon_{11}(r,\theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi}}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}\left(1-\nu-(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{3.27}$$

$$\varepsilon_{22}(r,\theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi}}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}\left(1-\nu+(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{3.28}$$

$$\varepsilon_{12}(r,\theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi}}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{3.29}$$

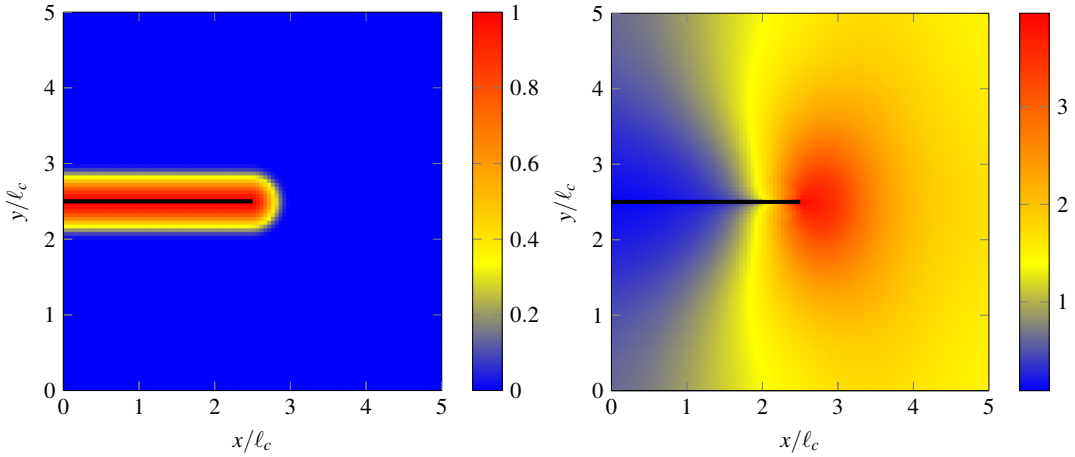
$$\varepsilon_{33}(r,\theta) = -\frac{K_I}{E\sqrt{2\pi}}2\nu\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \tag{3.30}$$

En utilisant cette expression du champ de déformation, [Simone *et al.*, 2004] a pu montrer l'initiation incorrecte de l'endommagement. En considérant que la phase d'endommagement est précédée par une phase élastique linéaire, alors il suffit d'observer la position du maximum de déformation équivalente par rapport à la pointe de l'entaille. L'étude menée par [Simone *et al.*, 2003] a été réalisée par une mesure de déformation équivalente correspondant au critère de Von Mises en contrainte ([van Mier, 2008]). Dans l'étude menée ici, la déformation équivalente de Mazars est utilisée. Dans ce cas, il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite du champ de déformation équivalente à cause de la diagonalisation nécessaire du tenseur des contraintes. Néanmoins il est possible de mener l'étude numériquement. Les champs de déformation équivalente locale et non-locale sont tracés sur la FIG.3.8. Il apparaît un décalage du maximum de la déformation équivalente non-locale par rapport à la pointe d'entaille.

Cela s'explique facilement en considérant qu'avant l'initiation de l'endommagement dans le voisinage de la pointe d'entaille, le comportement est purement élastique et les interactions non-locales effectives pour le modèle ENL correspondent à celles du modèle INL excepté au niveau de l'entaille. En effet, aucun endommagement ne s'est encore développé donc la fonction métrique est unitaire. Dans ce cas, les distances d'interaction effectives pour le calcul non-local sont exactement les distances euclidiennes. Néanmoins, pour le modèle non-local eikonal, même si la métrique est unitaire, la présence d'une frontière géométrique dans le milieu est prise en compte directement lors de la construction de la carte des valeurs de la métrique avant la mise en œuvre de la méthode Fast Marching. Cependant, cette précision technique ne permet pas nécessairement d'éviter le problème d'initiation de l'endommagement dans le cas général.

Au contraire, l'application d'un champ d'endommagement virtuel (FIG.3.9a) offre la possibilité de fixer la position de l'initiation de l'endommagement par rapport à l'entaille. Par exemple, la FIG.3.9b montre

l'effet du champ d'endommagement fictif sur le calcul de la déformation non-locale avec la méthode eikonale. Le maximum de déformation équivalente non-locale est situé directement en pointe de l'entaille.



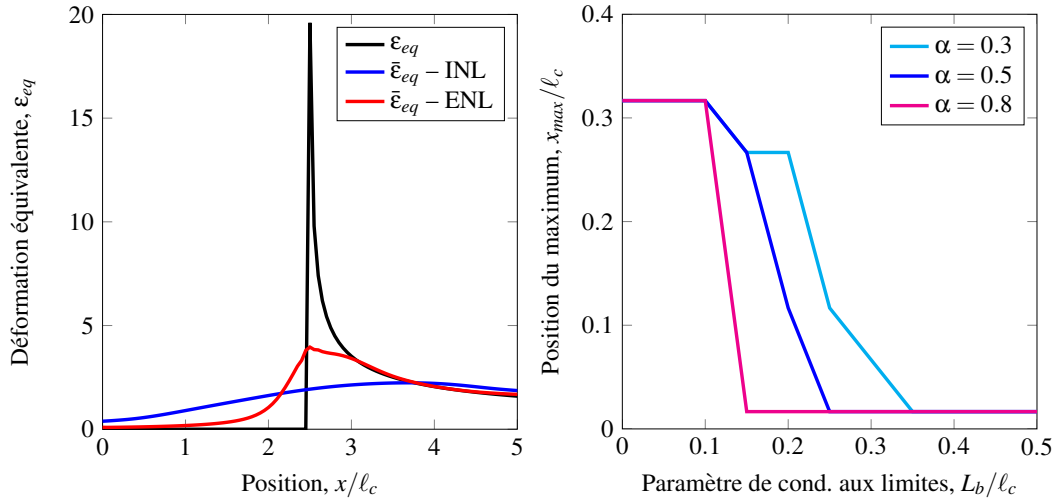
(a) Endommagement virtuel **(b)** Déformation équivalente non-locale (ENL)

FIGURE 3.9: Champs de déformation équivalente non-locale (ENL) en présence d'une entaille – Paramètres : $L_b = \ell_c/2$ et $\nu = 0.2$

En outre, en ajustant le paramètre de longueur L_b dans l'expression du champ d'endommagement virtuel, il est possible de contrôler la position du maximum de déformation équivalente non-locale. Les résultats sont tracés sur la FIG.3.10b. L'introduction du champ d'endommagement virtuel peut permettre de calibrer la position précisément du maximum de déformation équivalente non-locale en fonction des paramètres matériau. Le graphe de la FIG.3.10a illustre les profils des déformations dans la continuité de l'entaille.

Il faut noter que le champ de déformation décrit par les équations 3.27 est uniquement valable dans la géométrie présentée et pour une ouverture de l'entaille en mode I. Cependant, il reste possible de conclure que l'application d'un champ d'endommagement virtuel permet de traiter le problème d'initiation de l'endommagement aux conditions limites.

Choix du paramètre L_b Bien qu'il soit possible de mettre en œuvre une procédure d'identification du paramètre L_b comme un paramètre matériau, le choix est fait ici de choisir directement ce paramètre en fonction de son influence sur la position de l'initiation de l'endommagement. Pour le matériau considéré dans l'étude du modèle ENL en flexion trois points, l'initiation de l'endommagement a lieu directement à la pointe de l'entaille. Il convient donc de choisir une valeur du paramètre de distance permettant de modéliser cette caractéristique comportementale du matériau. La FIG.3.11 montre l'influence du paramètre L_b sur le champ de déformation équivalente non-locale dans le contexte de l'étude en flexion trois points. Il faut noter que la forme de l'entaille ainsi que la finesse de la discrétisation spatiale ont une influence non négligeable sur la position du maximum de déformation équivalente non-locale. Pour le cas considéré ici, le maximum de déformation équivalente non-locale doit se situer en pointe d'entaille. Il faut donc choisir la valeur du paramètre $L_b = \ell_c/4$ permettant d'observer cette condition pour les différents jeux de paramètre considérés dans le cadre de l'étude.



(a) Projection du champ de déformation équivalente au droit de l'entaille ($L_b = \ell_c/2$)

(b) Influence du paramètre L_b sur l'initiation de l'endommagement

FIGURE 3.10: Décalage du maximum de déformation équivalente non-locale en présence d'une entaille – Paramètres : $\nu = 0.2$

2.3 Propriétés de régularisation de la méthode ENL en 2D

2.3.1 Paramètres de l'étude

Les détails de modélisation, et particulièrement du calcul des distances et du traitement des conditions aux limites dans le cadre non-local eikonal, ont été décrits dans les sous-parties précédentes. Il reste à définir les valeurs numériques des paramètres du modèle d'endommagement.

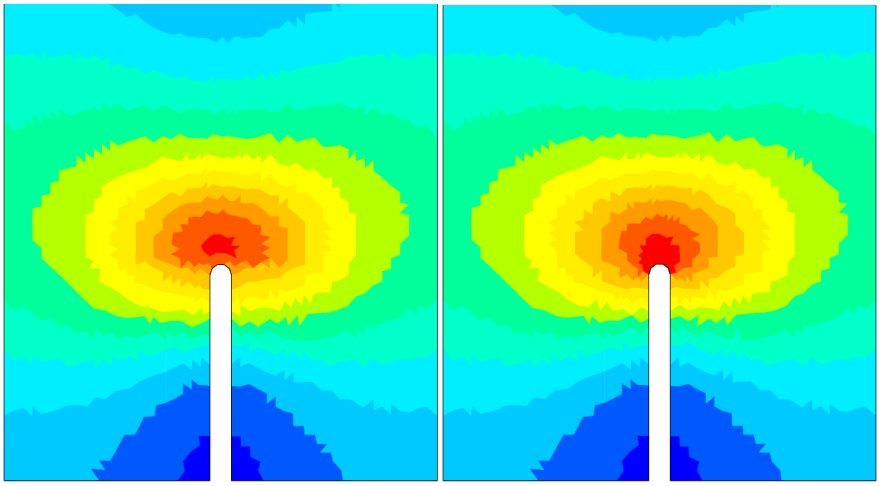
L'endommagement suit une loi d'évolution exponentielle de la forme :

$$D(\kappa) = 1 - \exp\left(-B_t\left(\kappa - \kappa_0\right)\right) \tag{3.31}$$

avec le paramètre B_t contrôlant la vitesse d'évolution de l'endommagement en fonction de la mesure non-locale des extensions κ dans le matériau.

Le choix de la fonction de pondération a un effet sur la distribution du champ d'endommagement, mais aussi un impact non négligeable sur le temps de calcul dans le cas de la méthode ENL. Le choix d'une fonction $\phi(\xi)$ à support compact en forme de cloche (EQ.2.8) se distingue. En effet, le support compact de cette fonction impose une valeur nulle de $\phi(\xi)$ pour des distances effectives supérieures à ℓ_c. Il n'est donc pas nécessaire de réaliser le calcul non-local en considérant l'ensemble du milieu, mais seulement son voisinage effectif, contrairement au cas d'une fonction de pondération à support non compact. Or, il reste possible de tronquer ce type de fonction afin d'obtenir un support compact. Cependant, dans le cas de la fonction gaussienne couramment utilisée pour les calculs non-locaux, la fonction est généralement tronquée à $1.5 \times \ell_c$, ce qui représente un volume non-local significativement plus grand que dans le cas de la fonction en forme de cloche.

Les valeurs numériques des paramètres retenues pour l'étude en flexion 3 points sont rassemblés dans le tableau 3.1.



(a) $L_b = 0$ **(b)** $L_b = \ell_c/4$

FIGURE 3.11: Influence d'un champ d'endommagement fictif sur l'initiation de l'endommagement en pointe d'entaille

Paramètre	Valeur
Module d'Young	$E = 130$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$
Déformation de première fissuration	$\kappa_0 = 10^{-4}$
Paramètre d'endommagement	$B_t = 500$
Longueur caractéristique	$\ell_c = 5$ mm
Traitement des conditions aux limites	$L_d = \ell_c/2$
Condition pour calcul Fast Marching	$\varepsilon = 10^{-3}$
Finesse grille Fast Marching	$h_{FM} = h_{FE}/15$

TABLE 3.1: Valeurs des paramètres pour l'étude en flexion 3 points

2.3.2 Propagation d'une fissure en flexion 3 points

Les résultats des simulations pour trois valeurs de α (0.3, 0.5 et 0.8) sont donnés sur la FIG.3.12. Les simulations ont été réalisées en choisissant une discrétisation pour la résolution Fast Marching en accord avec les conclusions tirées de la FIG.3.6. Le pas de la grille est fixé à $h_{FM} = h_{EF}/15$.

La phase d'initiation de l'endommagement en pointe de l'entaille est caractérisée par la perte de la linéarité sur la courbe de réponse globale. La phase post-pic correspond ensuite à la propagation de l'endommagement au travers de la hauteur de la poutre. Les profils d'endommagement à ces différentes étapes sont donnés sur la FIG.3.14. Les profiles de déformation équivalente non-locale sont donnés sur la FIG.3.15. Ces figures montrent le développement de la zone d'élaboration de la fissure au cours de son processus de propagation au travers de la hauteur de la poutre. En pointe de fissure, l'endommagement évolue dans une zone dont la taille dépend de la longueur caractéristique. En aval de la pointe de fissure, la zone non-locale se réduit progressivement jusqu'à concentrer les déformations dans une bande d'un seul élément d'épaisseur. Cette observation montre la capacité du modèle non-local eikonal à modéliser

le développement de la zone d'élaboration en pointe de fissure ainsi que la transition vers la localisation des dégradations.

La FIG.3.13 montre les évolutions de l'endommagement et de la déformation équivalente non-locale pour un élément situé dans la zone de localisation et un élément directement voisin, à la même ordonnée, situé en dehors de la zone de localisation. L'endommagement de l'élément voisin est limité à une valeur maximale et n'évolue plus lors de la propagation de la fissure dans le reste de la poutre.

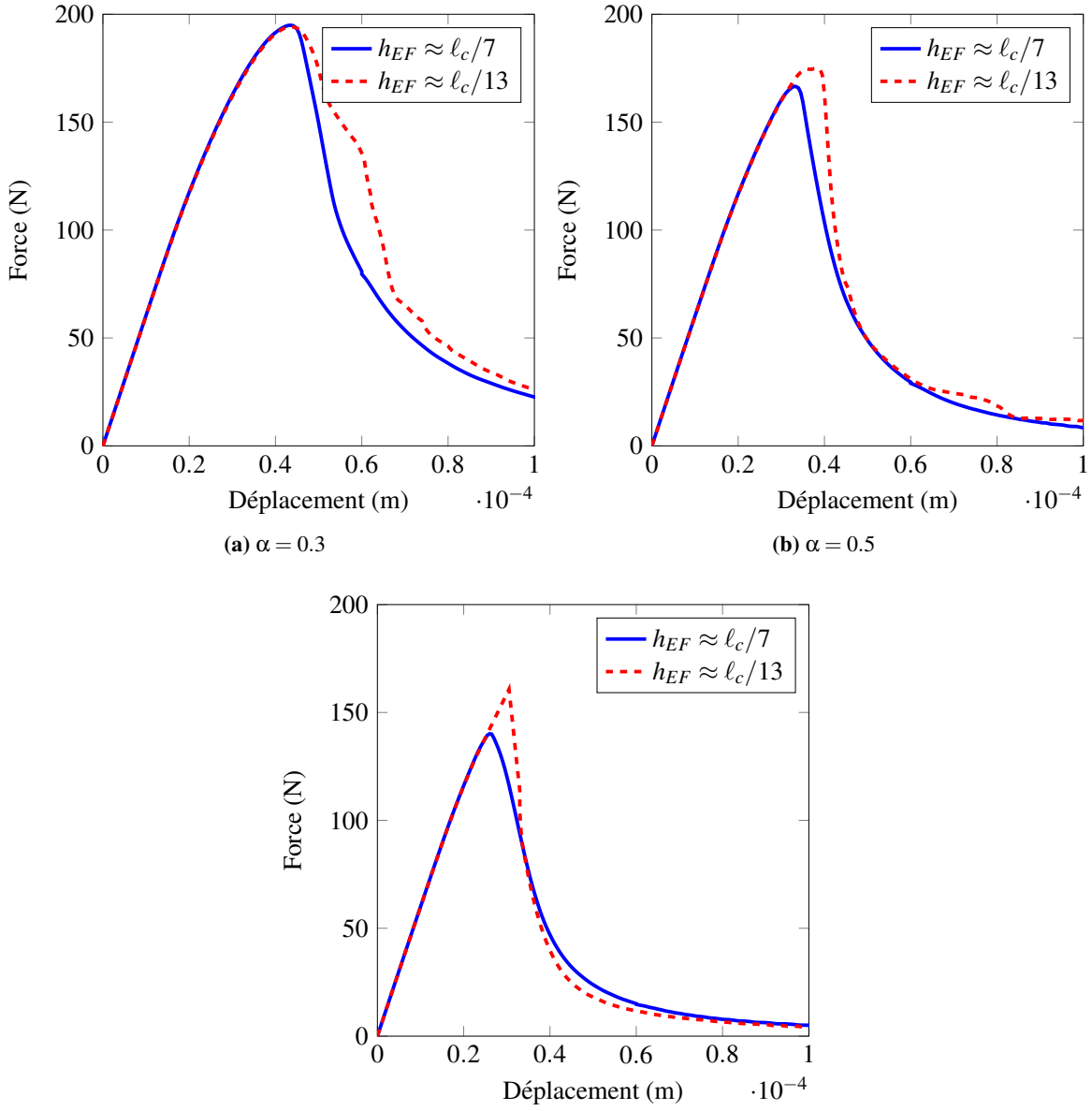
2.3.3 Régularisation par limitation de la métrique

De la même façon que pour le problème unidimensionnel, il est possible de limiter la valeur de l'endommagement dans la métrique afin de limiter les distances effectives et garder un comportement non-local. Dans ce cas la métrique est réécrite avec un endommagement maximum D_{lim} fictif :

$$m(\vec{z}) = (1 - \min\{D(\vec{z}), D_{lim}\})^{\alpha} \tag{3.32}$$

Les propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique limitée peuvent être observées sur la FIG.3.16 pour les trois valeurs de α étudiées dans cette partie. Ces résultats montrent que l'objectivité des résultats vis-à-vis de la finesse du maillage est retrouvée pour des valeurs d'endommagement fictif inférieures à 0.7.

En contrepartie de cette régularisation du problème, la FIG.3.18 suivante montre néanmoins un étalement significatif de l'endommagement par rapport au modèle d'endommagement ENL pure. En réalité, la limitation de la métrique introduit une diffusion de l'endommagement en aval de la pointe de fissure. La FIG.3.17 illustre les évolutions de l'endommagement et de la déformation équivalente non-locale pour les mêmes éléments que sur la FIG.3.17 pour un élément central censé se retrouver dans la zone de localisation pour le modèle d'endommagement ENL pur, ainsi que pour un voisin proche et un voisin éloigné, tous deux situés à la même ordonnée que l'élément central. Au contraire du modèle d'endommagement ENL pur, la déformation équivalente non-locale continue d'augmenter pour les voisins au lieu de diminuer. Cette observation est confirmée en observant les isovaleurs de déformation équivalente non-locale sur la FIG.3.19. Cette figure montre que la déformation équivalente non-locale ne localise pas dans une bande d'un seul élément d'épaisseur en aval de la pointe de fissure.

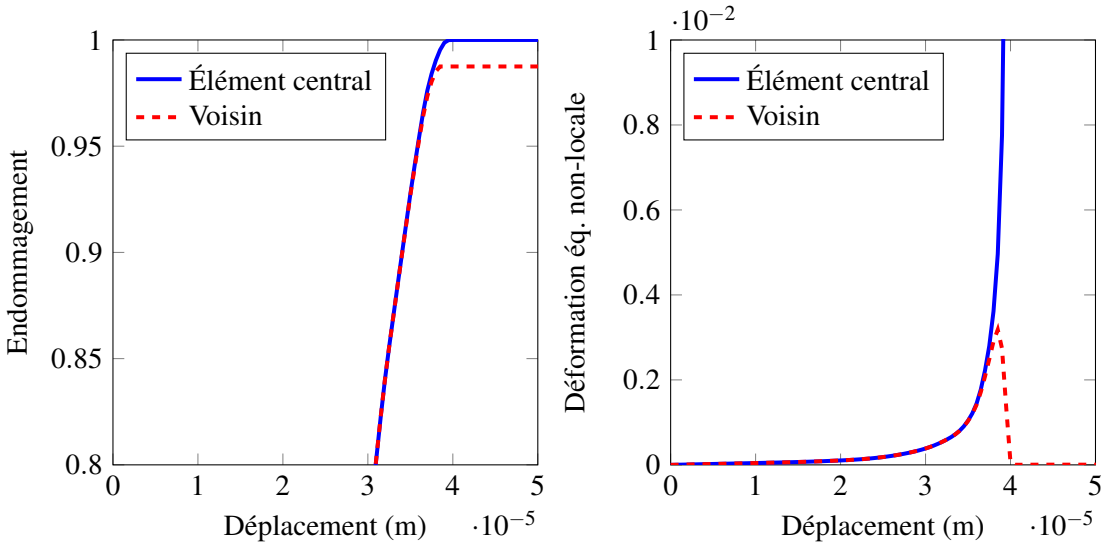


(a) $\alpha = 0.3$

(b) $\alpha = 0.5$

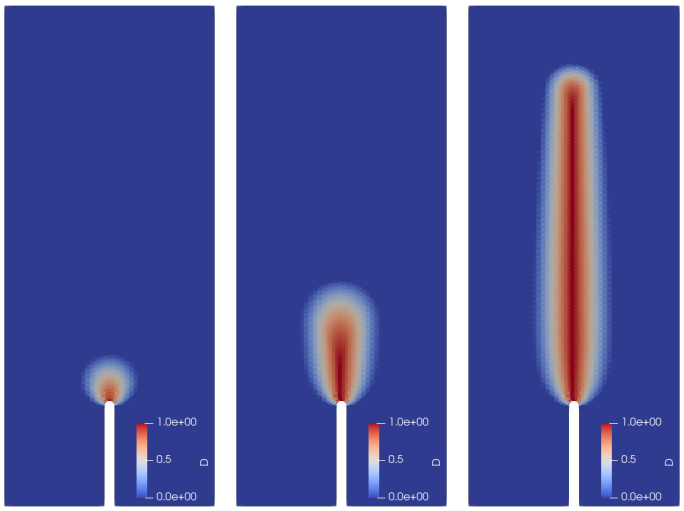
(c) $\alpha = 0.8$

FIGURE 3.12: Réponse globale en flexion 3 points pour le modèle d'endommagement ENL



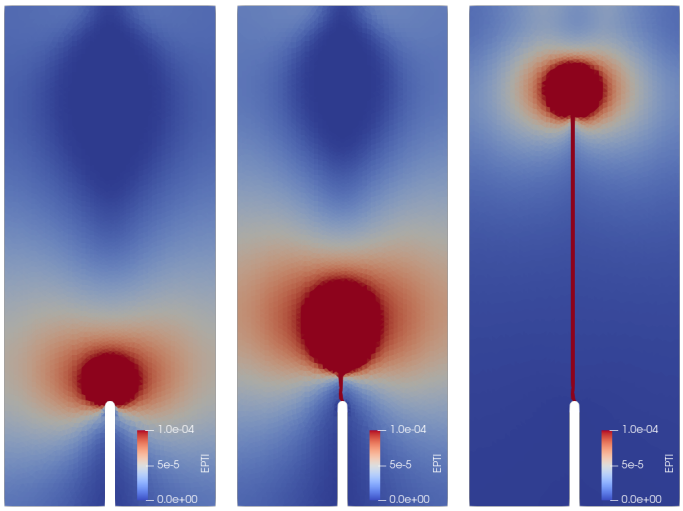
(a) Évolution de l'endommagement **(b)** Évolution de la déformation équivalente non-locale

FIGURE 3.13: Localisation des déformations pour la formulation ENL en 2D – $\alpha = 0.5$



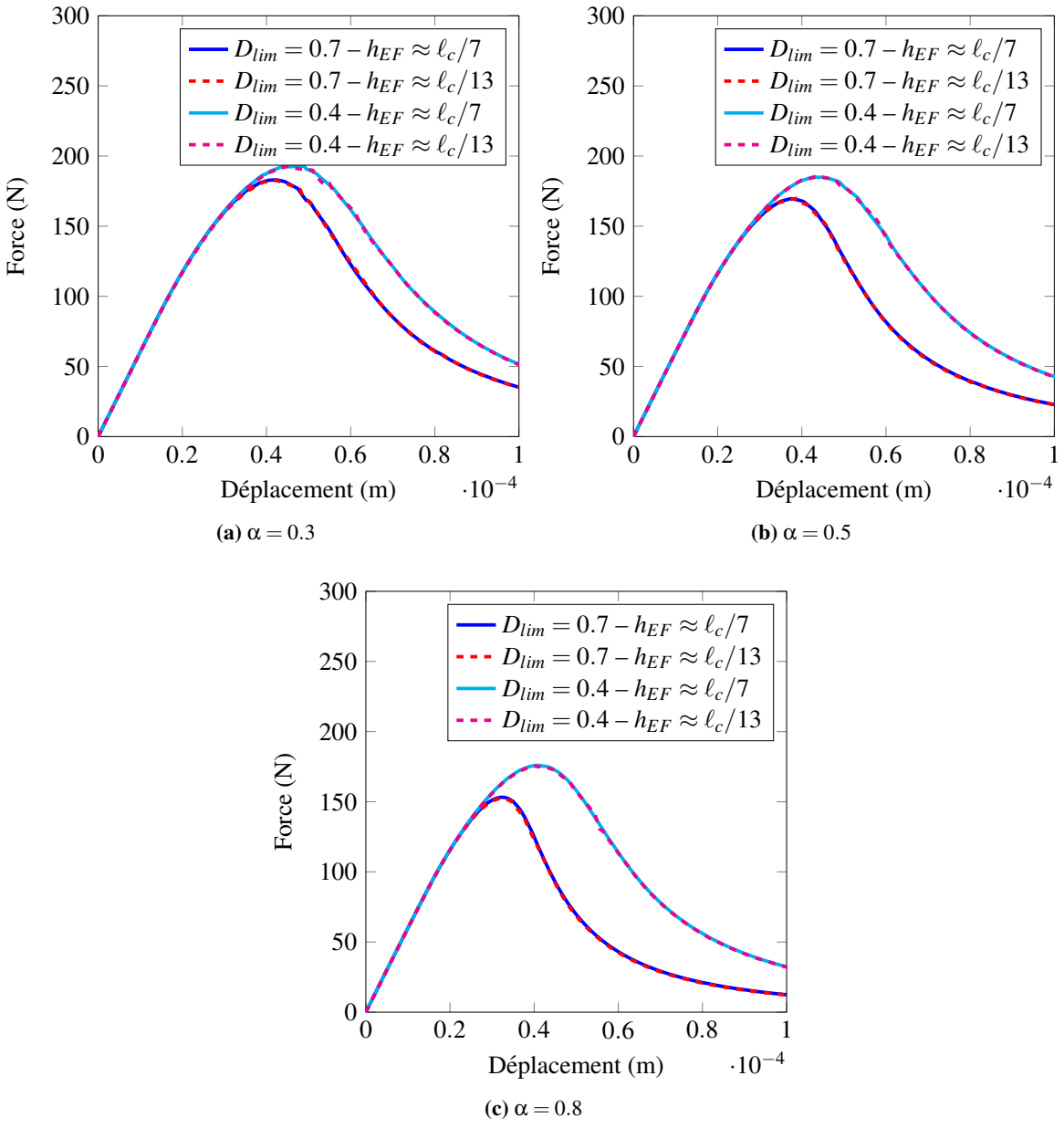
(a) **(b)** **(c)**

FIGURE 3.14: Isovaleurs d'endommagement en flexion 3 points – $\alpha = 0.5$



(a) **(b)** **(c)**

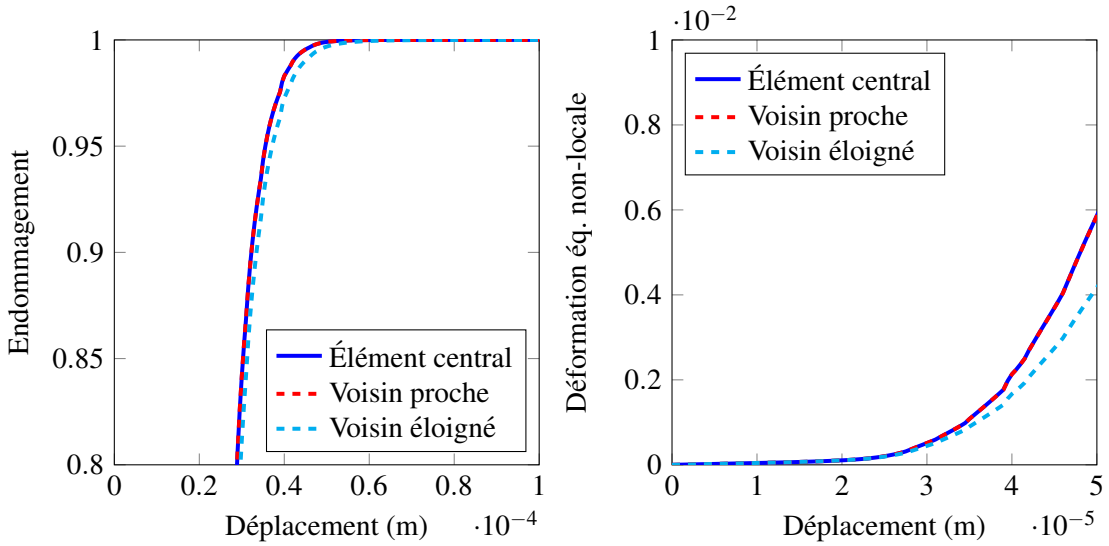
FIGURE 3.15: Isovaleurs de déformation équivalente non-locale en flexion 3 points – $\alpha = 0.5$



(a) $\alpha = 0.3$ **(b)** $\alpha = 0.5$

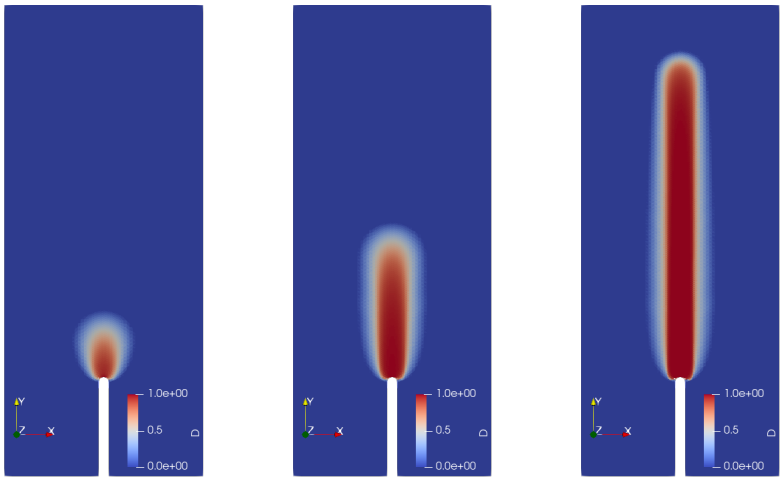
(c) $\alpha = 0.8$

FIGURE 3.16: Régularisation par limitation de la métrique



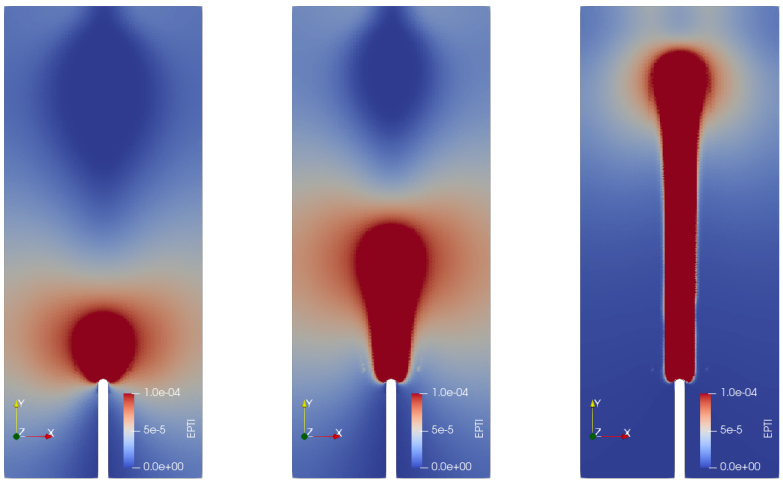
(a) Évolution de l'endommagement **(b)** Évolution de la déformation équivalente non-locale

FIGURE 3.17: Diffusion de l'endommagement pour la formulation ENL à métrique limitée en 2D – $\alpha = 0.5$



(a) **(b)** **(c)**

FIGURE 3.18: Isovaleurs d'endommagement en flexion 3 points avec métrique limitée – $\alpha = 0.5$



(a) **(b)** **(c)**

FIGURE 3.19: Isovaleurs de déformation équivalente non-locale en flexion 3 points avec métrique limitée– $\alpha = 0.5$

3 Études préliminaires d'une approche de transition endommagement ENL – discontinuité forte

Comme montré dans le chapitre précédent l'introduction d'une discontinuité dans les zones les plus endommagées permet d'améliorer l'objectivité des résultats par rapport au maillage. Ce chapitre s'attache donc à l'extension de ce modèle 1D au contexte 2D. Encore une fois, la formulation du modèle à discontinuité forte est assurée à l'aide de la technologie des éléments finis enrichis (E-FEM). Une fois la formulation des éléments finis enrichis définie, il faut définir le modèle d'endommagement non-local eikonal avec transition vers une discontinuité forte. Un exemple d'application et de validation sur un tirant est ensuite donné pour illustrer le comportement du modèle complet.

3.1 Formulation du modèle ENL-EFEM et validation

3.1.1 Formulation du modèle de la discontinuité

Cette formulation a déjà été présentée au premier chapitre (section 4.3). Dans le cadre des éléments finis enrichis, le champ de déplacement discontinu s'écrit :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\hat{u}}(\vec{x}) + \vec{\tilde{u}}\ \mathcal{H}_\Gamma(\vec{x}) \tag{3.33}$$

avec $\vec{u}$ le champ de déplacement total, $\vec{\hat{u}}$ la partie continue du champ de déplacement et $\vec{\tilde{u}}$ le saut de déplacement et enfin, $\mathcal{H}_\Gamma$ la fonction de Heaviside valant 1 sur la partie Ω_+ et 0 sur la partie Ω_- (FIG.1.16).

Le principe des éléments finis enrichis EFEM est de traiter la discontinuité au niveau des éléments. Le champ de déplacement total $\vec{u}$ est résolu dans le schéma de résolution global tandis que le champ $\vec{\tilde{u}}$ est calculé au niveau de la loi de comportement. Du point de vue de la méthode des éléments finis, il existe trois manières différentes de traiter le comportement de la discontinuité ([Jirásek, 2000]) :

- la méthode « SOS » (*Statically Optimum Symmetric*) ;
- la méthode « KOS » (*Kinematically Optimum Symmetric*) ;
- la méthode « SKON » (*Statically and Kinematically Optimum Symmetric*).

Dans la méthode SOS, la discontinuité n'est pas introduite sur le champ de déplacement ($\vec{\tilde{u}} = \vec{0}$) mais sur le champ de déformation. Comme son nom l'indique, cette formulation permet de respecter inconditionnellement la continuité des contraintes à l'interface Γ entre les contraintes dans les volumes Ω_+ et Ω_-, et la résistance de l'interface. Au contraire, la méthode KOS permet de prendre en compte l'effet de la discontinuité directement sur le champ de déplacement. Cependant, cette formulation ne garantit pas le respect de la continuité des contraintes à l'interface. Enfin la méthode SKON combine les deux méthodes précédentes. Elle permet l'introduction du saut de déplacement tout en imposant la continuité des contraintes à l'interface.

L'approche d'une transition endommagement non-local eikonal – discontinuité forte est définie en adoptant la méthode SKON pour le traitement de la discontinuité. La formulation numérique relative à cette méthode est donnée en annexe B.

3.1.2 Formulation complète

Le modèle complet de transition du modèle d'endommagement ENL vers un modèle à discontinuité forte est détaillé. Le matériau ne présente pas de fissure initialement. De la même façon que dans le contexte unidimensionnel, le comportement du matériau est modélisé par l'endommagement non-local eikonal (section 2.1.1). La discontinuité du champ de déplacement est activée lorsqu'un critère de transition est vérifié.

Définition de la transition Comme justifié dans le chapitre précédent, la transition est activée en un point d'intégration lorsque l'endommagement dépasse une valeur critique D_{cr}. Le modèle d'endommagement est désactivé à partir de l'instant où le critère de transition est franchi. Le comportement du modèle à discontinuité forte est activé en considérant les propriétés élastiques dégradées du matériau suite au développement de l'endommagement dans le volume.

Le modèle d'endommagement est désactivé uniquement dans les éléments où apparaît une zone cohésive. Le comportement d'endommagement non-local dans le voisinage de cet élément n'est pas désactivé de manière directe. Afin d'annuler l'interaction non-locale entre l'élément fissuré (i.e., l'élément présentant une discontinuité du déplacement activée) et son voisinage, la valeur de la fonction métrique pour cet élément est modifiée artificiellement de la façon suivante :

$$m(\vec{z}) = \left(1-(1-\gamma(\vec{z}))D(\vec{z})-\gamma(\vec{z})D^{virtuel}\right)^{\alpha} \tag{3.34}$$

avec γ le paramètre d'activation de la discontinuité :

$$\gamma(\vec{z}) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(\vec{z})-D_{cr}<0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.35}$$

Cette expression de la fonction métrique a été démontrée efficace en 1D (cf. CHAP.2) pour annuler les interactions non-locales à travers la zone fissurée. Il faut cependant noter qu'en 2D, cette expression de la métrique permet uniquement d'annuler les interactions non-locales de l'élément où est activée la discontinuité. En effet, il est possible que deux points matériels séparés par la zone fissurée soient toujours en interaction non-locale dans le cas où la distance effective entre ces deux points corresponde au chemin contournant la zone fissurée. Dans ce cas, l'interaction non-locale se trouve affaiblie, mais reste possiblement significative.

Comportement après la transition L'introduction de la discontinuité dans un élément active le comportement spécifique de la formulation E-FEM. La loi de comportement s'écrit par un système de trois équations : une équation de compatibilité cinématique (3.36), une équation de comportement élastique dégradé dans le volume (3.37) et une équation de continuité des contraintes combinée à la loi cohésive (3.38) :

$$\boldsymbol{\varepsilon_b} = \boldsymbol{\varepsilon_T} - \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{e} \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D_{tr})\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\varepsilon_b} \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}) \tag{3.38}$$

avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon_T}$ et $\boldsymbol{\varepsilon_b}$ respectivement les vecteurs de déformation totale et de déformation de volume en notation de Voigt ;
- $\boldsymbol{e}$ le vecteur de saut de déplacement dans le repère de la discontinuité et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e})$ la loi cohésive décrivant la résistance de l'interface ;
- $\boldsymbol{\sigma}$ le vecteur contrainte en notation de Voigt, $\boldsymbol{C}$ la matrice élastique en notation de Voigt et D_{tr} l'endommagement au moment dans la transition ;
- $\boldsymbol{P}$ la matrice de projection du repère global dans le repère de la discontinuité, et $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ des matrices permettant de prendre en compte le comportement cinématique de la discontinuité.

La construction des matrice ainsi que le schéma de résolution implicite des contraintes et du saut de déplacement sont donnés en annexe B.

Définition de la loi cohésive Afin de poursuivre l'étude du modèle complet, une loi cohésive est choisie sous la même forme que pour la méthode M1 introduite au CHAP.2 (section 4.2) dans le but de modéliser une ouverture en mode I. Lorsque l'endommagement critique est atteint en un point du matériau, la discontinuité est activée et la valeur de la contrainte normale au niveau de la discontinuité est alors enregistrée :

$$\sigma_{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{\sigma}(t = t_{tr}) \tag{3.39}$$

La loi cohésive est écrite dans le repère $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$ de la discontinuité, et donne la relation entre les contraintes normales g_n et tangentielles g_m et l'ouverture de la discontinuité e_n et le glissement e_m :

$$g_n(e_n, e_m) = \sigma_{tr} \exp\left(-\frac{\sigma_{tr}}{G_f} e_n\right) \tag{3.40}$$

$$g_m(e_n, e_m) = 0 \tag{3.41}$$

Afin de simplifier le comportement au niveau de la discontinuité, le glissement de la discontinuité est supposé rester nul. Cette hypothèse sur le comportement de la discontinuité est très limitante sur les capacités du modèle. Le comportement dans la direction tangentielle à l'ouverture de la fissure reste élastique conformément au comportement élastique du matériau.

Dans les cas test illustrés dans la suite de ce travail, l'orientation définie par le vecteur normal à la discontinuité $\vec{n}$ est prédéterminée. Cette contrainte sur le comportement du matériau suppose de connaître préalablement la direction du chargement. Dans un cas plus général, la mise en place de techniques de suivi de chemin de fissuration ([Alfaiate *et al.*, 2002, Oliver *et al.*, 2002, Riccardi *et al.*, 2017]) doit être envisagée. Cet aspect n'est pas abordé dans la suite.

3.1.3 Analyse de la réponse d'un tirant

Avant, d'étudier le comportement du modèle complet en flexion trois points, il convient d'illustrer le comportement du modèle sur un exemple simple afin de valider l'implémentation.

Description du problème Un tirant est modélisé dans un environnement à deux dimensions et est soumis à un chargement de traction-compression simple. Le tirant est discrétisé par des éléments triangulaires à trois nœuds. Deux maillages différents sont utilisés pour analyser la dépendance au maillage de la réponse obtenue. Les paramètres du matériau sont donnés dans le tableau 2.1 du chapitre 2. Pour cet

exemple, le paramètre de la fonction métrique est établi à $\alpha = 0.5$ et le paramètre d'énergie dissipée de la loi cohésive est fixé à $G_f = 200$ mJ. Enfin, la valeur d'endommagement critique pour la transition est définie à $D_{cr} = 0.8$. Les paramètres du modèle ont été choisis pour ne pas avoir une réponse structurale instable caractérisée par un snap-back avec le modèle ENL. En effet, la version de Cast3M 2019 utilisée dans cette étude ne dispose pas d'outils permettant la simulation de ces problèmes. Des algorithmes de pilotage indirect du chargement, très similaires à ceux décrits dans le chapitre précèdent, sont cependant disponibles à partir de la version de Cast3M 2021 [Oliveira *et al.*, 2021].

Phases principales de la réponse Le chargement est appliqué en imposant le déplacement à l'extrémité droite de la barre. On distingue cinq phases dans l'évolution de la réponse globale :

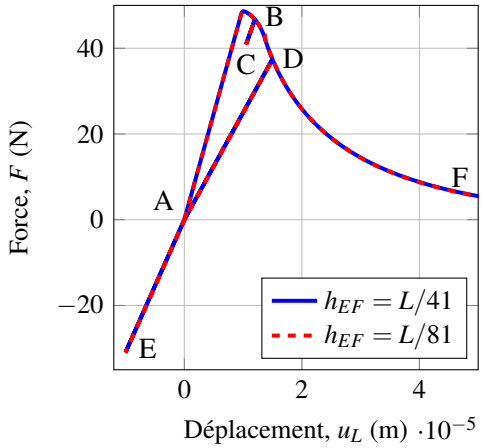
- $A \rightarrow B$: chargement en traction pour atteindre la limite d'élasticité prévue par le modèle d'endommagement non-local ; l'endommagement commence à se développer dans la partir centrale de la barre.
- $B \rightarrow C$: déchargement pour illustrer la perte de rigidité due à l'endommagement.
- $C \rightarrow D$: chargement en traction au-delà de l'endommagement critique et ouverture d'une fissure dans la direction orthogonale à la direction du chargement. À ce stade, le niveau d'endommagement dans le tirant correspond au niveau maximal dont la valeur au niveau de la discontinuité est égale à l'endommagement critique. L'ouverture de la discontinuité est décrite par le modèle E-FEM présenté précédemment.
- $D \rightarrow E$: déchargement jusqu'à l'état de repos initial et chargement en compression. La refermeture de fissure lors de la phase de déchargement est observée. Le comportement élastique en compression est dégradé par la valeur de l'endommagement.
- $E \rightarrow F$: déchargement jusqu'à l'état de repos initial et chargement en traction. Le comportement en traction suit directement l'évolution de la discontinuité. La phase élastique correspond à l'ouverture de la fissure jusqu'au niveau maximal historique observé dans les chargements précédents.

Dépendance au maillage Le comportement observé sur le tirant correspond au comportement attendu pour le modèle complet défini précédemment. Les courbes de réponse globales pour différentes discrétisations spatiales montrent l'objectivité des résultats vis-à-vis du maillage.

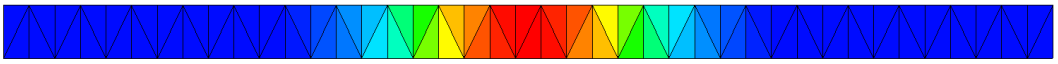
3.2 Propagation de fissure et comportement non-local

L'étude menée ici cherche à simuler l'ouverture d'une fissure dans un milieu non-local. La particularité du modèle d'endommagement ENL semble résoudre le problème d'évolution de l'endommagement dans le voisinage de la fissure cohésive de façon naturelle par l'introduction d'une zone endommagée fictive dans la fonction métrique.

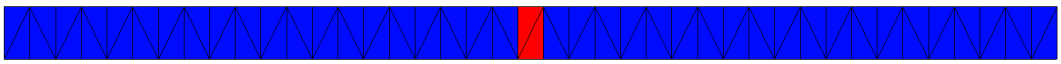
Description du problème La simulation de la propagation d'une fissure dans une poutre en flexion trois points est menée en utilisant les paramètres d'études donnés dans le tableau 3.1. Un endommagement critique de 0.7 est choisi pour l'introduction d'une discontinuité et le déclenchement du modèle de transition. La valeur du paramètre d'énergie dissipée de la loi cohésive est fixée à $G_f = 5$ mJ.



(a) Propriétés de régularisation



(b) Champ d'endommagement



(c) Présence de discontinuité

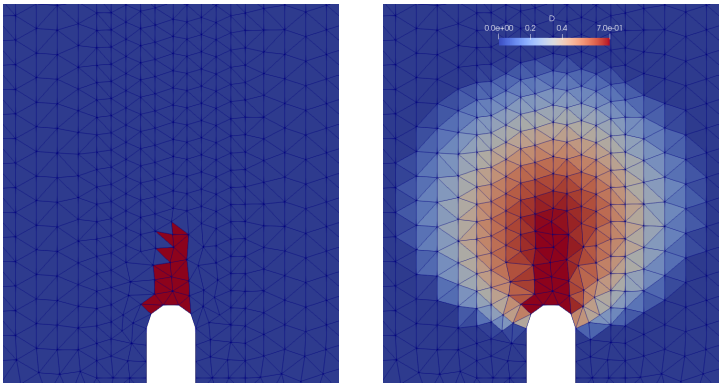
FIGURE 3.20: Validation du modèle ENL-EFEM sur un tirant en traction-compression

Propagation de fissure La FIG.3.21 montre les éléments où une discontinuité a été introduite ainsi que le champ d'endommagement. Cette figure montre que l'évolution de l'endommagement n'est pas interrompue au droit du lieu où est introduite la discontinuité. En réalité, en 2D, le comportement non-local conduit à une évolution de l'endommagement en aval de la fissure même après l'introduction d'une discontinuité et l'adaptation de la métrique pour couper les interactions non-locales des éléments fissurés. La conséquence de ce comportement est le développement de l'endommagement dans une zone d'épaisseur supérieure à un seul élément jusqu'à l'endommagement critique. Des discontinuités sont alors introduites et nuisent au développement normal de l'endommagement et de la fissure dans la hauteur de la barre. Par ailleurs, l'activation de ces discontinuités introduit des instabilités dans la convergence numérique de la résolution aux éléments finis.

Améliorations possibles Il faut noter plusieurs adaptations possibles pour limiter cet effet et observer un comportement comparable au comportement observé dans le chapitre précédent.

Ces adaptations consistent en une réduction des interactions non-locales dans le voisinage de la pointe de fissure. Les stratégies suivantes sont possibles :

— Les résultats des simulations réalisées dans ce chapitre et dans le chapitre précédent dans un contexte unidimensionnel montrent que le paramètre α influence significativement le comportement non-local du matériau. Plus précisément, ce paramètre influence directement le profil d'endommagement. Il est alors possible de choisir une valeur de α permettant l'introduction de la discontinuité dans un élément tout en limitant naturellement l'évolution de l'endommagement en aval de la pointe de fissure. L'inconvénient majeur de cette adaptation vient de la difficulté à



(a) Présence de discontinuité **(b)** Champ d'endommagement

FIGURE 3.21: Incompatibilité entre le modèle d'endommagement non-local eikonal et E-FEM en 2D – Zoom sur la pointe d'entaille

calibrer le paramètre α pour l'adapter au modèle de transition. De plus, le paramètre α devient un paramètre à identifier sur une condition de transition du modèle vers un comportement discontinu alors que ce paramètre joue une influence significative sur le développement de l'endommagement et sur la forme de la zone d'élaboration de la fissure.

— [Cuvilliez *et al.*, 2012] traite ce problème en désactivant le comportement non-local en aval de la pointe de fissure. L'avantage de cette adaptation réside dans sa facilité d'implémentation pratique. Cependant, l'utilisation de cette technique diminue l'intérêt de l'approche eikonale pour le comportement non-local.

— Introduire une zone d'influence en pointe de fissure pour réduire les influences non-locales. En utilisant le paramètre γ d'activation de la discontinuité dans le calcul de la fonction métrique, il est possible d'étendre l'utilisation de ce paramètre dans une zone autour de la pointe de fissure pour limiter les interactions non-locales. La nouvelle expression de la fonction métrique pourrait s'écrire avec un paramètre $\bar{\gamma}$:

$$m(\vec{z}) = \left(1 - (1 - \bar{\gamma}(\vec{z}))D(\vec{z}) - \bar{\gamma}(\vec{z})D^{virtuel}\right)^{\alpha} \tag{3.42}$$

avec :

$$\bar{\gamma}(\vec{z}) = \left\langle 1 - \frac{||\vec{z} - \vec{z}_\Gamma||^2}{L_\gamma^2} \right\rangle_+^2 \tag{3.43}$$

et avec $\vec{z}_\Gamma$ la position de la pointe de fissure, c'est-à-dire la position du dernier élément ayant observé l'introduction d'une discontinuité. Le principal avantage de cette méthode résiderait dans la facilité de son implantation pratique. Cependant, elle introduirait un paramètre supplémentaire (L_Γ) à calibrer. De plus cette méthode introduirait un effet non-local de la présence d'une discontinuité.

— En suivant l'idée précédente, il serait possible d'utiliser une définition similaire à 3.43, mais en introduisant dans $\bar{\gamma}$ une dépendance à la direction de propagation de la fissure. Cela permettrait de limiter les interactions non-locales des éléments très déformés en amont de la pointe de fissure sur les éléments en aval, tout en limitant l'interférence avec le comportement non-local de l'endommagement. Cependant cette méthode pourrait s'avérer difficile à implémenter car il faut réussir à prévoir la direction propagation de la fissure.

Les techniques proposées reposent sur la manipulation de la métrique lors de l'introduction d'une discontinuité afin de réduire les interactions non-locales et limiter les instabilités observées. Cependant, ces méthodes interfèrent fortement avec le comportement non-local « naturel » du modèle d'endommagement. Il peut alors être difficile de calibrer la méthode d'adaptation et d'observer à la fois un comportement non-local pour l'endommagement puis un comportement localisé dans une seule ligne de discontinuités.

4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, le comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal a été étudié en 2D. Les détails de l'implémentation du calcul numérique des distances effectives par la méthode Fast Marching ont été présentés. Le traitement des conditions aux limites par l'intermédiaire de la fonction métrique a été discuté pour répondre au problème d'initiation de l'endommagement.

Les simulations du modèle d'endommagement non-local eikonal sont conformes aux résultats observés dans le contexte 1D. L'endommagement se développe dans une zone non-locale se rétrécissant avec le développement des dégradations et finissant par mesurer la taille d'un élément. La localisation des déformations mène à la perte d'objectivité des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. La modification de la métrique prenant en compte une valeur limitée de l'endommagement permet de retrouver des résultats objectifs vis-à-vis du maillage. Cependant, la limitation de la métrique introduit le problème de diffusion de l'endommagement en aval de la pointe de fissure.

La possibilité d'utiliser la technologie des éléments finis enrichis dans la formulation du modèle pour effectuer la transition vers une discontinuité forte a été discutée à la fin du chapitre. Ce type de formulation a montré dans le chapitre précédent la capacité à retrouver l'objectivité des résultats par rapport à la discrétisation spatiale. Cependant, il semble que la formulation non-locale eikonale soit incompatible avec l'introduction de discontinuité selon le modèle décrit. En effet, le contexte bidimensionnel ne permet pas de contrôler de manière simple le comportement non-local des éléments en aval de la pointe de fissure. En conséquence, la localisation des déformations n'intervient pas dans une bande d'épaisseur d'un élément et l'introduction de plusieurs discontinuités parallèles à la direction de propagation de la fissure provoque des instabilités numériques.

Chapitre 4

Identification des paramètres du modèle d'endommagement non-local eikonal

Dans les chapitres précédents, le modèle d'endommagement non-local eikonal a été défini et son comportement a été étudié en 1D et en 2D. Le problème d'identification des paramètres se pose maintenant. Après une revue des méthodes d'identification classiques, une procédure d'identification est proposée. Cette procédure se base sur la construction d'un méta-modèle permettant d'estimer les grandeurs d'intérêt du modèle ENL. L'identification est alors menée en utilisant un algorithme génétique. Les performances de la procédure ainsi que la possibilité d'identification des paramètres non-locaux sont discutées sur un exemple d'identification du modèle d'endommagement ENL en flexion 3 points.

Sommaire

1 Méthodes d'identification des paramètres 111
1.1 Liste des paramètres 111
1.2 Identification des paramètres non-locaux dans la littérature 112
1.3 Problème d'optimisation 113
1.4 Algorithmes et méthodes classiques 114
1.5 Algorithmes évolutionnistes 115
2 Méthode d'identification des paramètres du modèle ENL 116
2.1 Procédure de la méthode d'identification 117
2.2 Définition du méta-modèle 118
3 Exemple d'application sur un test de flexion 3 points 119

3.1 Présentation de l'étude 119
3.2 Identification des paramètres 124
4 Conclusion du chapitre 136

1 Méthodes d'identification des paramètres

1.1 Liste des paramètres

Le modèle d'endommagement non-local eikonal (ENL) a été étudié dans les deux chapitres précédents. Les propriétés de régularisation ont été quantifiées et le processus de localisation dans les zones fortement endommagées a été explicité. Il reste cependant à définir une procédure d'identification des paramètres du modèle pour son utilisation pratique. Pour cela, ce chapitre présente une méthode d'identification des paramètres du modèle d'endommagement non-local eikonal.

La liste des paramètres matériaux et numériques du modèle d'endommagement ENL tel qu'il est décrit dans le chapitre 3 est donnée dans le TAB.4.1.

Paramètre	Symbole
Module d'Young	E
Coefficient de Poisson	ν
Déformation de première fissuration	ε_0
Paramètre d'adoucissement	B_t
Longueur caractéristique	ℓ_c
Paramètre de la métrique	α

(a) Caractéristiques du matériau

Paramètre	Symbole
Finesse éléments finis	h_{FE}
Finesse grille Fast Marching	h_{FMM}
Champ virtuel aux CL	L_b

(b) Paramètres numériques

FIGURE 4.1: Paramètres du modèle ENL à identifier

Pour une identification complète des paramètres, il faut considérer les différents paramètres purement numériques associés à la mise en œuvre du modèle non-local eikonal. Cependant, la méthode développée ici s'attache à l'identification des paramètres du matériau afin de simuler des expériences réalistes. Ainsi, la calibration des paramètres numériques dépend des conditions de l'expérience, des dimensions de l'éprouvette et des choix de modélisation (par exemple, la taille des éléments finis, la finesse de la grille Fast Marching, ...). Des éléments pouvant motiver le choix de ces paramètres purement numériques ont été présentés et débattus dans le chapitre précédent.

Finalement, la liste des paramètres à identifier se limite à ces six paramètres : deux paramètres d'élasticité isotrope E et ν, deux paramètres d'endommagement ε_0 et B_t, la longueur caractéristique non-locale ℓ_c et le paramètre α sur la fonction métrique de la méthode non-locale eikonale.

Dans ce chapitre, la méthode d'identification développée ne cherche pas à déterminer les paramètres élastiques. Ainsi, l'identification du module d'Young et du coefficient de Poisson est considérée comme directe et les valeurs numériques de ces deux caractéristiques du matériau s'obtiennent préalablement à l'identification des paramètres d'endommagement non-locaux. Concernant ces paramètres élastiques, ils sont généralement calculés grâce aux mesures réalisées lors de la phase élastique de l'expérience à simuler numériquement. Il est cependant possible de citer, par exemple, les méthodes multi-échelles permettant de calculer les paramètres macroscopiques d'un matériau hétérogène à l'aide des caractéristiques des constituants aux échelles inférieures. Dans ce cas, il faut connaître parfaitement les constituants du matériau à son échelle macroscopique. De plus, il faut noter que les méthodes multi-échelles d'identification ont très souvent des plages d'utilisation limitées qui peuvent fortement influencer la qualité de l'identification.

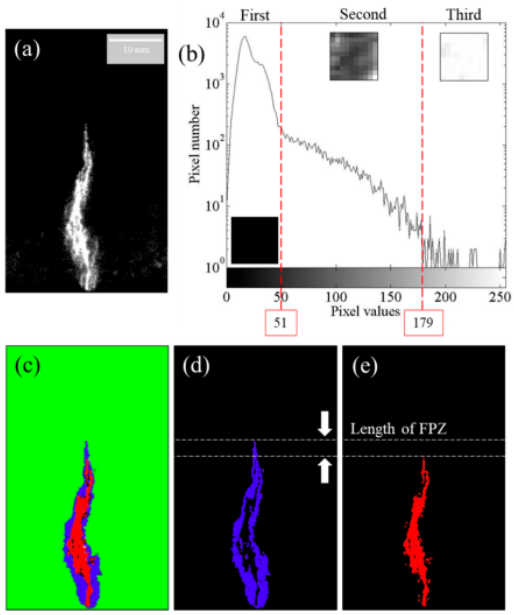


FIGURE 4.2: Exemple de mesure de la taille de la FPZ avec peinture mécano-luminescente ([Kim *et al.*, 2020]) – (a-b) Histogramme – (c–d) mesure de la FPZ

1.2 Identification des paramètres non-locaux dans la littérature

Mesure à partir d'essais expérimentaux L'identification de la longueur caractéristique des modèles non-locaux reste un sujet ouvert. Pour la méthode non-locale originale [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987], [Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989] tente d'identifier la longueur caractéristique introduite à partir d'une approche énergétique. Cette étude montre la possibilité d'identifier la longueur caractéristique à partir d'essais expérimentaux et établit une proportionnalité avec la taille des granulats (environ trois fois la taille du plus gros granulat). Cependant, les essais de traction sur des éprouvettes de béton peuvent s'avérer difficiles à réaliser ([Boudon-Cussac *et al.*, 1999, Soleilhet, 2018]).

Lien avec la taille de la zone d'élaboration Dans la définition du modèle non-local, la longueur caractéristique s'établit comme un paramètre de pondération de la moyenne spatiale de la variable non-locale. Il peut alors être possible de lier cette longueur caractéristique à la taille de la zone d'élaboration de la fissure. Des études expérimentales concernant ce sujet sont rapportées dans la littérature.

Le développement technologique de ces vingt dernières années semble permettre l'observation et la mesure de la zone d'élaboration de la fissure de manière non destructive. Trois méthodes expérimentales semblent se distinguer : la mesure d'évènements acoustiques ([Alam *et al.*, 2014]), la corrélation d'image ([Skarżyński *et al.*, 2011, Dong *et al.*, 2018, Yu *et al.*, 2019], ou plus récemment l'utilisation de peinture mécano-luminescente par [Kim *et al.*, 2020]. En exploitant les histogrammes des mesures réalisées, ces méthodes parviennent à quantifier expérimentalement la taille de la zone d'élaboration (voir FIG.4.2).

Application au modèle d'endommagement non-local eikonal La littérature propose de nombreuses méthodes afin de déterminer directement le paramètre de longueur caractéristique des modèles non-

locaux. Cependant, ces mesures expérimentales ne donnent pas d'indications sur les autres paramètres du modèle et les possibles interactions de ces paramètres sur la taille de la zone d'élaboration. Il apparaît alors le besoin de recourir à des algorithmes d'optimisation pour l'identification des paramètres.

[Carmeliet, 1999, Mahnken et Kuhl, 1999], par exemple, utilisent ce genre d'algorithme afin d'identifier les paramètres d'un modèle d'endommagement à gradient de variables internes. Ces derniers définissent une erreur des moindres carrés entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux dans la mise en œuvre de l'algorithme d'optimisation. En constatant la capacité des modèles non-locaux à modéliser le comportement du matériau face aux effets d'échelles, d'autres auteurs utilisent des éprouvettes de différentes tailles et cherchent les paramètres du modèle permettant de reproduire les effets d'échelle ([Bažant et Planas, 2019]). Par exemple, les travaux de [Le Bellégo *et al.*, 2003],[Iacono *et al.*, 2006] et [Grégoire *et al.*, 2013] peuvent être cités.

1.3 Problème d'optimisation

L'identification directe des paramètres est possible quand les modèles de comportement restent simples et qu'il y a peu de paramètres à identifier. La sous-partie précédente montre qu'il est difficile d'identifier la longueur caractéristique à associer au modèle bien qu'il soit possible d'observer directement son effet au cours d'expériences réelles. Pour ces raisons, il est parfois utile de s'appuyer sur des algorithmes d'identification des paramètres. Mathématiquement, ce genre d'algorithme entre dans la catégorie des problèmes d'optimisation.

Un problème d'optimisation repose sur la définition d'une fonction-objectif ou fonction-coût. Cette fonction est définie sur l'espace des paramètres A et est à valeurs réelles. Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\text{Minimiser } J : A \to \mathbb{R} \tag{4.1}$$

ou encore :

$$\text{Trouver } x_{min} \in A \text{ tel que } \forall x \in A,\ J(x_{min}) \leq J(x) \tag{4.2}$$

Les problèmes d'optimisation sont généralement résolus grâce à des algorithmes cherchant à trouver le jeu de paramètre optimal x_{min} de manière itératives. La littérature propose beaucoup de méthodes pour identifier x_{min}. La grande majorité de ces méthodes peuvent s'écrire sous la forme générale de l'algorithme 2.

Algorithme 2 : Résolution générale d'un problème d'optimisation

Initialisation :
Choisir un jeu de paramètre initial $x_0 \in A$
$k \leftarrow 0$
Résolution :
tant que $k < k_{limite}$ **faire**

1. $k \leftarrow k+1$
2. Évaluer $J(x_k)$
   — Si $J(x_k) < \varepsilon_{tol}$ alors $x_{min} = x_k$ et l'algorithme s'arrête
3. Calculer/Mettre à jour x_{k+1}

En utilisant ce type d'algorithme, la mise en œuvre d'une méthode d'identification revient alors à définir une fonction-objectif et une méthode pour calculer ou mettre à jour le jeu de paramètre x_{k+1} qui sera évalué à l'itération $k+1$.

Dans l'algorithme 2, la fonction-objectif est définie positive. Cette condition sur la fonction-objectif possède l'avantage pratique de connaître la valeur minimale de la fonction-objectif. De cette façon, il est possible de définir un critère d'arrêt à l'algorithme grâce à une tolérance sur cette valeur minimale. En réalité, cette condition n'est pas nécessaire pour résoudre un problème d'optimisation. Il est possible de définir d'autres types de critères d'arrêt. Par exemple, un critère d'arrêt sur une norme de la différence entre deux jeux de paramètre successif permet de ne pas connaître à l'avance la valeur minimale de la fonction-objectif. L'algorithme s'arrête alors quand le point de recherche dans l'espace des paramètres semble stagner. Cependant, ce type de critère d'arrêt présente plusieurs inconvénients. En effet, il est possible que l'algorithme s'arrête lorsqu'un minimum local est atteint et non un minimum global. Bien que ce ne soit pas le rôle du critère d'arrêt de protéger contre l'identification de minimum locaux, la connaissance de la valeur minimale de la fonction-objectif permet de lever l'ambiguïté lors d'une identification.

1.4 Algorithmes et méthodes classiques

La méthode de résolution la plus simple du problème d'optimisation posé dans la section précédente est la méthode du gradient. Le principe de cet algorithme consiste à chercher le nouveau jeu de paramètre dans la direction de la plus forte pente. Plus précisément, la recherche de la solution est calculée à partir du gradient de l'évaluation du modèle :

$$x_{k+1} = x_k - \beta \nabla J(x_k) \tag{4.3}$$

L'avantage de cet algorithme reste sa simplicité de mise en œuvre pratique. Le paramètre β permet de contrôler la vitesse de convergence. Cependant, le choix de ce paramètre n'est pas trivial et peut s'avérer critique sur les performances de l'algorithme. La fiabilité de la méthode du gradient dépend fortement du jeu de paramètre initial x_0. En effet, cet algorithme s'arrête au premier minimum local trouvé. Dans le cas de l'identification de paramètre, il est préférable de trouver le minimum global de la fonction-objectif.

Par ailleurs, la mise en œuvre de cet algorithme nécessite de pouvoir calculer le gradient de la fonction-objectif. Ce calcul peut être plus ou moins simple suivant le type d'évaluation du modèle. Lorsque le modèle peut être réduit sous une forme analytique, il est parfois possible de calculer l'expression du gradient. Cependant, il est rarement possible d'obtenir le gradient de manière direct. Il est alors possible d'approcher numériquement le gradient. Néanmoins, cela complexifie grandement la mise en œuvre de cet algorithme. Cette étape peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul lorsque le modèle dépend d'un nombre important de paramètres.

1.4.1 Améliorations et extensions de l'algorithme du gradient

Il faut noter l'existence d'algorithmes basés sur l'algorithme du gradient permettant d'améliorer l'efficacité de cette méthode de résolution d'un problème d'optimisation. En particulier, l'algorithme du gradient conjugué possède l'avantage d'avoir des propriétés de convergences théoriques largement supérieures. Il est aussi possible d'utiliser la matrice Hessienne de la fonction-objectif dans le calcul du paramètre

β. Cette astuce permet d'ajuster la direction de recherche. Cependant, malgré l'avantage de convergence conféré par ces algorithmes du gradient améliorés, le principal défaut reste l'obligation de calculer le gradient de la fonction objectif. De même, la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno nécessite le calcul du gradient. Néanmoins, cette méthode s'affranchit du calcul de la matrice Hessienne, en déterminant une matrice similaire à partir des calculs du gradient.

1.4.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt combine à la fois les méthodes du gradient et de Newton. Cette méthode est particulièrement adaptée lorsque la fonction-objectif est sous la forme d'une somme des moindres carrés. L'algorithme général de cette méthode suit toujours l'algorithme 2. La mise à jour du jeu de paramètres est réalisée à partir de la linéarisation de l'évaluation du modèle. Cette méthode nécessite donc le calcul de cette matrice jacobienne ce qui peut évidemment représenter un coût de calcul important.

1.5 Algorithmes évolutionnistes

Les algorithmes évolutionnistes sont des algorithmes utilisant des processus aléatoires afin de simuler les principes de la théorie de l'évolution. En particulier, ce type d'algorithme peut permettre de résoudre des problèmes d'optimisation. L'algorithme général des méthodes évolutionnistes reste similaire à celui écrit en 2. Le point particulier par rapport aux algorithmes d'identification classiques est qu'une population de jeux de paramètres est considérée à chaque itération au lieu d'un seul jeu de paramètres. Les différentes méthodes évolutionnistes se distinguent sur la manière de mettre à jour la population de jeux de paramètres pour l'itération suivante en utilisant les principes de la théorie de l'évolution.

1.5.1 Algorithme génétique

Les algorithmes génétiques ([Mitchell, 1996]) reprennent le principe de la théorie de l'évolution où un jeu de paramètres est considéré comme un individu. Le principe de l'algorithme est d'utiliser les principes de l'évolution à chaque itération afin de construire une nouvelle population d'individus. L'objectif est d'extraire les propriétés de chaque individu permettant d'améliorer les résultats vis-à-vis du problème d'optimisation.

La forme générale de la construction d'une nouvelle population d'individus à tester peut s'écrire en trois étapes :

1. Sélection d'individus dans la population précédente
2. Croisement entre les individus sélectionnés
3. Mutation possible chez certains individus

La sélection des individus utilisés pour la création de la nouvelle population est généralement effectuée selon la capacité de chaque individu à s'adapter à son environnement selon la théorie de l'évolution. Dans le cadre d'un problème d'optimisation, ce principe se traduit par le résultat du jeu de paramètres (ou de l'individu) sur la fonction-objectif par l'intermédiaire d'une évaluation du modèle. Ainsi, il existe plusieurs méthodes de sélections des individus avant de passer à l'étape des croisements. Généralement,

la méthode de sélection la plus simple consiste à ordonner les individus selon leur performance sur la fonction-objectif et ne retenir que les meilleurs.

Les propriétés des individus sélectionnés sont ensuite transmises pour la construction de la population suivante à tester. Cette transmission consiste à transmettre les propriétés des individus aux individus de la nouvelle population. Un croisement des propriétés entre des individus « parents » est généralement réalisé pour la construction. À la dernière étape, les individus de la nouvelle population sont déjà construits. Cette étape permet de réaliser une mutation aléatoire sur les propriétés d'un individu. La quantité de mutations à chaque itération est limitée par une probabilité.

L'étape des mutations est extrêmement importante, car elle permet de ne pas rester bloqué dans un minimum local. En réalité, l'étape de mutation montre son importance sur la convergence théorique des algorithmes génétiques d'après la démonstration mathématique de [Cerf, 1994].

L'avantage de ce type d'algorithme repose sur son efficacité. En effet, la convergence vers le minimum globale semble être possible s'il existe. Cependant, il faut noter la présence de nombreux paramètres nécessaires à l'exécution pratique comme la taille de la population à chaque itération, la méthode et les paramètres de sélection des meilleurs individus de chaque population, la probabilité de mutation, etc... Ces paramètres ayant une influence directe sur la convergence et l'efficacité de l'algorithme, il peut parfois être difficile de les calibrer. Enfin, le plus gros désavantage de ce type d'algorithme est qu'il nécessite beaucoup plus d'estimations du modèle afin de fonctionner. Ce dernier point peut devenir un inconvénient insurmontable dans certains cas.

1.5.2 Algorithme à estimation de distribution

Le fonctionnement des algorithmes à estimation de distribution ([Mühlenbein et Paass, 1996]) est similaire au fonctionnement des algorithmes génétiques dans le sens où les performances d'une population sont utilisées pour construire la prochaine population à tester. Les populations sont composées d'individus dont les propriétés sont tirées aléatoirement selon une distribution de probabilité définie. La construction de la nouvelle population repose alors sur la sélection des meilleurs individus afin de recalculer la distribution de probabilité de chaque propriété. Les propriétés des individus de la nouvelle population sont alors tirées aléatoirement selon les distributions de probabilités mises à jour.

2 Méthode d'identification des paramètres du modèle ENL

Les méthodes d'identification décrites dans la partie précédente permettent généralement, suivant la méthode, de trouver un jeu de paramètres satisfaisant les critères d'identification fixés. Cependant, ces méthodes ne considèrent pas la difficulté d'obtenir l'évaluation du modèle. Cette évaluation est généralement très rapide pour des modèles simples. Cependant, l'évaluation est réellement longue pour le cas du modèle d'endommagement non-local eikonal. C'est pourquoi il est peut-être intéressant de construire un méta-modèle permettant de calculer les évaluations du modèle très rapidement. La méthode d'identification proposée ici repose sur deux étapes distinctes : la construction du méta-modèle, puis la mise en œuvre d'un algorithme d'optimisation utilisant le méta-modèle à la place du modèle. Le problème de coût en temps est décalé sur la construction du méta-modèle. L'avantage en termes de temps réel provient de la parallélisation possible des évaluations coûteuses du modèle. L'inconvénient directement lié à cet avantage est que le coût en temps de calcul augmente considérablement.

2.1 Procédure de la méthode d'identification

La procédure d'identification consiste à construire en premier lieu un méta-modèle permettant de calculer très rapidement les évaluations du modèle lors de la mise en œuvre de l'algorithme d'identification. Afin d'obtenir une évaluation du méta-modèle relativement proche des évaluations du modèle réel, il est nécessaire de réaliser plusieurs évaluations du modèle en différents points générés aléatoirement puis de construire un premier méta-modèle.

Dans ce chapitre, il est considéré que l'opérateur dispose d'un budget de N évaluations coûteuses du modèle réel qui vont nécessiter le temps réel d'une seule évaluation s'il est possible d'effectuer ces évaluations en parallèle. La procédure d'identification consiste alors à construire un méta-modèle à partir des résultats des N premières simulations puis d'utiliser ce méta-modèle pour l'identification concrète des paramètres. Il est possible que le méta-modèle $\tilde{J}$ ne soit pas de qualité suffisante pour approcher le vrai modèle J. Il peut alors être nécessaire d'enrichir le méta-modèle à l'aide des résultats de nouvelles simulations du modèle J. Plus précisément, la procédure complète s'écrit ainsi :

— Initialisation :
  1. Tirage d'un ensemble initial $\Xi_0 = \{x_i\}_{i=1..N}$ de N jeux de paramètres
  2. Simulations numériques de l'ensemble initial $J(x \in \Xi_0)$
  3. Construction du méta-modèle $\tilde{J}^0$ à partir des $k \times N$ jeux de paramètres déjà simulés
  4. Identification d'un ensemble Θ_1 de paramètres vérifiant la fonction objectif pour le modèle $\tilde{J}^0$

— Tant que nécessaire (avec $k \geq 1$) :
  1. Sélection d'un ensemble Ξ_k de N jeux de paramètres. Les jeux de paramètres sont tirés soit parmi Θ_k pour intensification, soit pour l'exploration de l'espace des paramètres
  2. Simulations numériques de l'ensemble des N jeux de paramètres d'enrichissement Ξ_k
  3. Construction d'un nouveau méta modèle $\tilde{J}^k$ à partir des résultats de simulation du modèle J sur tous les ensembles $\Xi_{j=1..k}$
  4. Identification d'un ensemble Θ_{k+1} de paramètres vérifiant la fonction objectif pour le modèle $\tilde{J}^k$

Cette procédure repose sur l'idée d'utiliser un méta-modèle dont le temps d'évaluation est quasiment négligeable afin de rendre possible l'identification par un algorithme très performant demandant beaucoup d'évaluations comme les algorithmes évolutionnistes. Cependant, l'utilisation d'un méta-modèle ne garantit pas que les jeux de paramètres minimisant la fonction objectif pour le méta-modèle, minimisent aussi la fonction-objectif pour le modèle réel. C'est pourquoi il est nécessaire d'enrichir progressivement le méta-modèle à l'aide des résultats de nouvelles simulations du modèle réel. L'idée est d'utiliser les résultats de l'algorithme d'identification afin d'enrichir le méta-modèle dans le voisinage des points dans l'espace des paramètres donnant les meilleurs résultats sur la fonction-objectif. En utilisant cet enrichissement par intensification, la procédure cherche à identifier un jeu de paramètres satisfaisant en un minimum d'itérations nécessitant à chaque fois N simulations coûteuses du modèle réel. En réalité, chaque itération de cette procédure correspond à une itération d'un algorithme classique. Le principe de cette procédure repose sur l'utilisation possible de la parallélisation des différentes simulations afin de gagner un temps réel considérable. Il faut noter qu'en se concentrant uniquement sur l'enrichissement par intensification, la procédure pourrait dépenser quelques itérations à chercher une solution trop

éloignée de la vérité lorsque la fonction-objectif présente de nombreux extrema locaux. Même s'il est très peu probable que dans le problème mécanique considéré les fonctions-objectif présentent ce type de propriété désavantageuse, il peut être intéressant de considérer l'enrichissement du méta-modèle par exploration. Plus précisément, il peut être intéressant de chercher les lieux les plus isolés de l'espace des paramètres. L'ensemble Ξ_k des nouvelles simulations à réaliser est alors créé pour un enrichissement mixte d'intensification et d'exploration.

2.2 Définition du méta-modèle

La question se pose maintenant de construire le méta-modèle permettant de calculer rapidement des estimations du modèle réel. Il existe plusieurs méthodes permettant de construire des méta-modèles comme par exemple les réseaux de neurones profonds ([Goodfellow *et al.*, 2016]) ou la régression de processus gaussien ([Laurent, 2013]). Ce chapitre se concentre en particulier sur le krigeage pour la construction d'un méta-modèle de régression permettant de se substituer au modèle d'endommagement non-local eikonal dans l'algorithme d'optimisation. L'idée de cette méthode est de construire une approximation du modèle réel à partir de quelques estimations seulement. Dans le cadre de la procédure d'identification présentée dans ce chapitre, le krigeage présente alors l'avantage de pouvoir construire un méta-modèle pouvant estimer la réponse du modèle réel sur la totalité de l'espace des paramètres à partir de quelques estimations coûteuses du modèle réel. De plus, la méthode de krigeage permet aussi de calculer une estimation de la qualité du méta-modèle vis-à-vis du modèle réel. Il est donc possible de quantifier la confiance dans le méta-modèle pour représenter le modèle réel.

Mathématiquement, le krigeage cherche à construire un estimateur $\tilde{J}(x)$ d'un processus gaussien $J(x)$. Dans le contexte de la procédure d'identification, les résultats de la simulation du modèle d'endommagement non-local eikonal sont représentés par le processus gaussien J et le méta-modèle de substitution à construire est représenté par $\tilde{J}$. La variable x représente un jeu de paramètres en entrée du modèle. Le processus gaussien J est considéré comme la somme entre une partie déterministe μ et une partie probabiliste ϑ suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2 :

$$J(x) = \mu(x) + \vartheta(x) \tag{4.4}$$

De cette manière, la moyenne de $J(x)$ est exactement égale à la partie déterministe $\mu(x)$ et la variance de $J(x)$ correspond à la variance de $\vartheta(x)$.

2.2.1 Construction du méta-modèle par krigeage

L'évaluation du méta-modèle au point x_0 consiste à calculer la fonction μ ainsi que la variance σ^2 au point x_0 en utilisant les n_s observations (x_i, y_i) du modèle réel. Pour cela, la fonction μ est recherchée sous la forme d'une fonction linéaire :

$$\mu(x) = \sum_l \beta_l h_l(x) \tag{4.5}$$

avec h_l des fonctions de bases, et β_l des poids inconnus à calculer à chaque évaluation.

À partir de la connaissance des n_s observations (x_i, y_i), il est possible d'écrire un système d'équations permettant de calculer les poids β_l pour l'évaluation au point x_0. Pour cela, il est nécessaire de connaître les fonctions de base h_l ainsi que la matrice de covariance de la fonction μ. L'évaluation du méta-modèle

de krigeage se résume alors en l'inversion d'une matrice de taille $n_s \times n_s$. La complexité de l'évaluation est donc en $O(n_s^3)$.

Dans la suite de ce chapitre, les méta-modèles de krigeage sont tous construits de la même manière. Les fonctions de base h_l sont simplement des monômes d'ordre 1 permettant de prendre en compte directement les valeurs de x sans transformation. La matrice de covariance de la fonction μ est calculée pour les observations (x_i, y_i) par la fonction noyau de Matérn $5/2$ dont l'expression s'écrit :

$$k(x,x') = \theta_1^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}r}{\theta_2} + \frac{5r^2}{3\theta_2^2}\right) \tag{4.6}$$

avec $r = ||x - x'||$ la distance euclidienne entre les points x et x' de l'espace des paramètres, et θ_1 et θ_2 des paramètres de la fonction noyau.

3 Exemple d'application sur un test de flexion 3 points

La procédure d'identification décrite dans la partie précédente est mise en œuvre dans cette partie pour identifier les paramètres sur la base d'un essai à l'échelle du matériau. L'expérience réalisée sur ce matériau est modélisée numériquement à l'aide d'une résolution aux éléments finis avec un modèle de comportement d'endommagement non-local eikonal. La procédure d'identification cherche à obtenir un jeu de paramètres permettant de reproduire au mieux l'expérience sur le matériau. Les paramètres sont identifiés pour permettre par la suite de modéliser la réponse d'une structure à plus grande échelle utilisant ce matériau.

3.1 Présentation de l'étude

L'objectif de cette partie est de montrer les performances de la procédure d'identification pour le modèle d'endommagement non-local eikonal. En réalité, il n'est pas nécessaire de réaliser une expérience et de chercher à simuler au mieux cette expérience. Il serait tout à fait possible de choisir arbitrairement les résultats d'une expérience fictive et de chercher à reproduire ces résultats avec modèle d'endommagement afin d'étudier la possibilité d'identifier un jeu de paramètre satisfaisant. Néanmoins, une expérience est réalisée sur un matériau numérique afin de se placer dans une situation où le jeu de paramètre à identifier n'est pas connu à l'avance.

Une expérience de flexion trois points est choisie pour tester le matériau numérique. Ce test de flexion présente au moins deux avantages. Premièrement, ce test permet d'observer un comportement post-pic avec propagation d'une fissure. Ensuite, ce type de test est relativement simple à mettre en œuvre, que ce soit numériquement ou expérimentalement. Cependant, ce type de test peut être considéré comme un test sur une structure complète qui ne peut pas être utilisé pour en déduire le comportement d'un volume élémentaire représentatif.

3.1.1 Matériau à simuler

Le matériau numérique est simulé sur Cast3M à l'échelle mésoscopique afin de représenter un matériau quasi-fragile selon la méthode développée par [Gangnant *et al.*, 2016]. Il est constitué de deux phases :

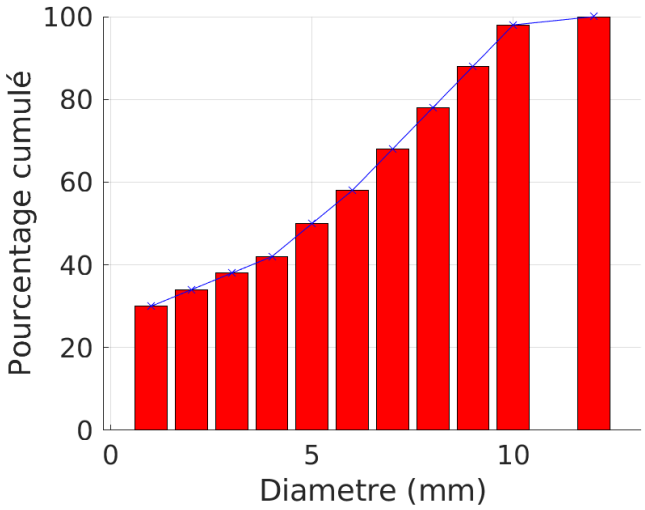


FIGURE 4.3: Courbe granulométrique pour la construction du matériau numérique

une matrice cimentaire dans laquelle sont plongés des granulats. L'objectif n'est pas ici de représenter au mieux un matériau existant. La modélisation mésoscopique sert simplement à produire une réponse de matériau quasi-fragile modèle pour tester la procédure d'identification des paramètres sur le modèle d'endommagement ENL. Les granulats sont sphériques et les paramètres du modèle numérique sont choisis de façon à observer un mode de ruine en flexion trois points correspondant à la faiblesse de la matrice cimentaire.

Le matériau numérique est préparé en tirant aléatoirement la position des inclusions dans un domaine rectangulaire. Les particules sont placées successivement du plus gros diamètre au plus fin selon la courbe granulométrique FIG.4.3. La procédure de placement impose aux particules de ne pas se chevaucher.

Dans le cadre de la simulation à l'aide des éléments finis, le matériau numérique est modélisé par le modèle de Mazars modifié implémenté dans le solveur Cast3M. L'endommagement se développe avec les extensions dans le matériau et la variable d'endommagement en traction s'écrit à partir de deux paramètres selon la formule de [Feenstra, 1993] :

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa}{\varepsilon_0} \exp\left(-B_t\left(\kappa - \varepsilon_0\right)\right) \tag{4.7}$$

avec la variable κ représentant l'histoire du matériau, i.e., le maximum de déformation équivalente observée par le matériau.

La matrice et les inclusions sont représentées par la même loi de comportement locale. Les deux phases du matériau sont distinguées par projection des caractéristiques du matériau sur le maillage éléments finis ([Gangnant, 2016]). Les propriétés du matériau sont définies dans le tableau pour les deux phases. La matrice est plus souple et plus fragile que les inclusions.

Une régularisation énergétique de type Hillerborg est réalisée. Dans cette expérience numérique, la régularisation non-locale n'est pas vraiment adaptée, car il s'agit justement du comportement recherché en représentant l'hétérogénéité du matériau. Le paramètre d'adoucissement est donc donné selon la fi-

Caractéristique	Matrice	Inclusions
Module d'Young E	100 MPa	150 MPa
Coefficient de Poisson ν	0.2	0.2
Déf. de première fissuration ε_0	1×10^{-4}	2.0×10^{-4}
Énergie de fissuration G_f	100×10^{-3} J/m^2	200×10^{-3} J/m^2

nesse de la discrétisation spatiale h_{FE} par la formule de [Feenstra, 1993] :

$$B_t = \frac{h_{FE} E \varepsilon_0}{Gf - h_{FE}\varepsilon_0^2/(2E)} \tag{4.8}$$

Après avoir défini le matériau et le modèle, la poutre en flexion 3 points est discrétisée par des éléments finis linéaires à 3 nœuds (« Tri3 ») dans la partie élastique de la poutre. Cette partie du maillage n'est pas discrétisée finement. Le comportement est censé rester élastique, quel que soit le chargement. La partie centrale de la poutre est entaillée jusqu'à la moitié de sa hauteur afin d'initier une fissure sans rupture excessivement fragile. La partie centrale est discrétisée par des éléments finis à 4 nœuds. La forme des éléments reste carrée dans l'ensemble du domaine. De ce fait, la taille de ces éléments finis est fixée à $h_{FE} = 0.25$ mm. L'énergie dissipée ainsi que le chemin emprunté par la fissure dépendent de la taille des éléments finis de manière non négligeable. Cependant, l'objectif n'étant pas ici de modéliser un matériau réaliste, la taille des éléments finis est fixée et gardée constante pour les différents tirages de la mésostructure. En réalisant l'expérience avec différents tirages on observe alors la variabilité due à la position des granulats. Un exemple de tirage de la mésostructure est donné sur la FIG.4.5.

3.1.2 Résultats de l'expérience

Avant de procéder à la mise en œuvre de l'expérience, il est nécessaire de mesurer les paramètres élastiques du matériau numérique. En effet, afin de modéliser seulement la partie centrale de la poutre avec la mésostructure, les parties censées rester élastiques peuvent être modélisées avec un comportement élastique homogène. Une simple expérience de traction dans le domaine élastique des composants de la mésostructure permet de déduire un module d'Young et un coefficient de Poisson apparents. La mesure de ces paramètres élastiques est réalisée sur 10 tirages et les résultats sont compilés dans le tableau 4.1 :

Caractéristiques	Moyenne	Écart-type
Module d'Young	127 MPa	0.392 MPa
Coefficient de Poisson	0.20	8.0×10^{-5}

TABLE 4.1: Mesure des paramètres élastiques du matériau numérique

L'expérience est menée sur 5 tirages différents afin d'observer une variabilité sur la réponse globale. Dans le cadre de l'identification des paramètres du modèle d'endommagement ENL, il est possible de se contenter de seulement une seule courbe de réponse globale à utiliser pour l'identification. Cependant, il peut être intéressant d'éprouver la procédure dans des conditions expérimentales réalistes où le matériau à modéliser présente des variabilités dans les résultats de l'expérience.

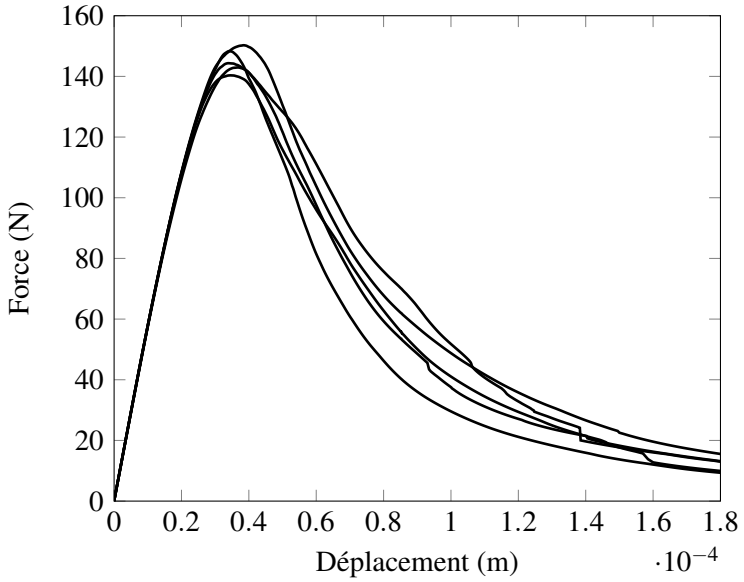


FIGURE 4.4: Réponses globales de l'expérience menée sur les 5 tirages de la mésostructure

3.1.3 Critères d'identification

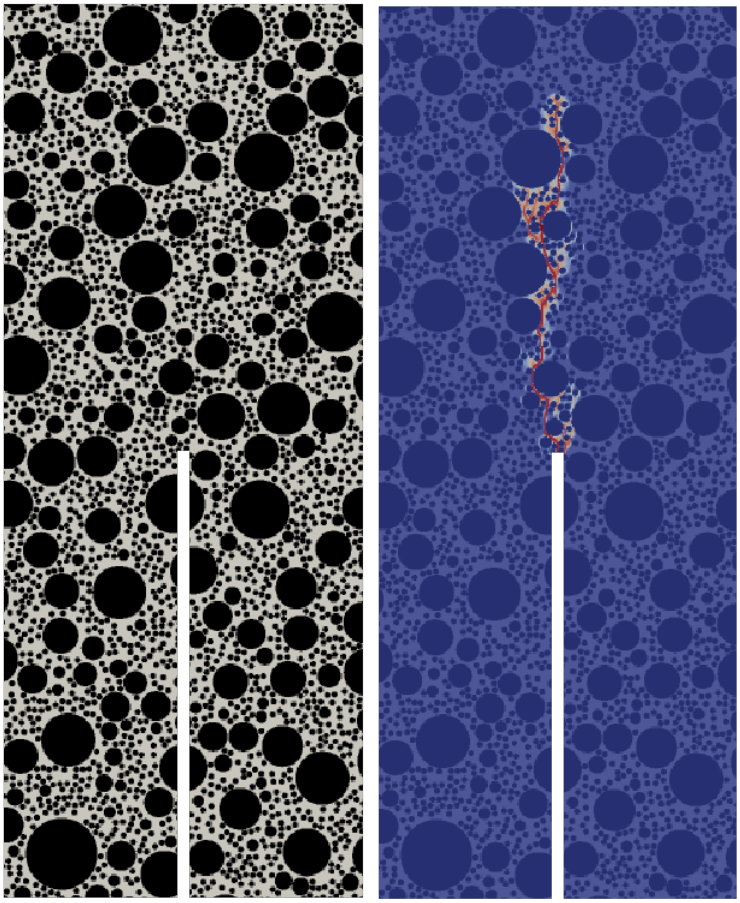
Le matériau numérique servant d'exemple pour la mise en œuvre de la procédure d'identification a été présenté et des résultats d'une expérience numérique en flexion 3 points ont été obtenus. Il est maintenant nécessaire de définir quelle partie des résultats est utilisée pour l'identification. En menant une expérience numérique, il est possible d'avoir accès à toutes les grandeurs physiques mesurables très facilement. Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas expérimentalement. Dans le cadre limité d'une expérience réelle, il est généralement possible d'obtenir la courbe de réponse globale entre le déplacement appliqué sur le dessus de la poutre et la force de réaction de la poutre comme illustré sur la FIG.4.4.

Le type de résultat à utiliser est en réalité imposé par la procédure d'identification. En effet, la méthode de krigeage permet de construire des méta-modèles estimant des grandeurs scalaires. Il n'est donc pas possible d'estimer la totalité des résultats d'une simulation du modèle d'endommagement ENL avec un seul méta-modèle. Il faut donc choisir les grandeurs pertinentes comme des quantités scalaires et construire la fonction-objectif comme une combinaison de ces grandeurs pertinentes.

Afin de reproduire au mieux les résultats de l'expérience grâce à un modèle, il est possible de tenter de minimiser l'erreur sur la réponse globale. Il est alors courant de définir une erreur des moindres carrés sur les points de mesures de la courbe globale obtenue par l'expérience. En notant (η_s, Υ_s) les points de la réponse globale obtenue par l'expérience et en notant g_x la fonction représentant la réponse globale obtenue par simulation du modèle $J(x)$ avec le jeu de paramètre x, l'erreur des moindres carrés s'écrit :

$$\varepsilon = \sum_{s=1}^{N_s} (\Upsilon_s - g_x(\eta_s))^2 \tag{4.9}$$

La procédure d'identification cherche donc à minimiser l'erreur des moindres carrés ε sur la réponse globale. Le principal intérêt de cette méthode est sa capacité à pouvoir obtenir un jeu de paramètres permettant une simulation du modèle dont la réponse globale est très proche de celle obtenue expérimentalement.



(a) Projection de la mésostructure sur les points d'intégrations **(b)** Fissuration en fin d'expérience

FIGURE 4.5: Expérience numérique sur un matériau modélisé à l'échelle de la mésostructure

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut réussir à obtenir une estimation de l'erreur sur la courbe globale grâce à un méta-modèle. Par ailleurs, même si cette méthode permet d'assurer une bonne correspondance sur la réponse globale, elle ne permet pas d'assurer des résultats plus généraux comme l'énergie dissipée ou la résistance mécanique du matériau.

Il est proposé ici de plutôt chercher à identifier ces deux résultats généraux, la résistance au pic et l'énergie dissipée totale. Il est alors possible de construire une fonction-objectif comme une erreur sur ces deux quantités. L'avantage d'identifier à partir de ces quantités est de pouvoir utiliser la méthode de krigeage pour construire un méta-modèle permettant d'estimer une grandeur scalaire.

Dans l'exemple du matériau numérique décrit dans la partie précédente, les mesures de résistance au pic et d'énergie dissipée ont été réalisées et sont données dans le TAB.4.2.

Quantité	Moyenne	Écart-type
Résistance	145 N	3.37 N
Énergie dissipée	10.9 mN.m	1.1 mN.m

TABLE 4.2: Mesure des quantités à identifier

3.2 Identification des paramètres

L'exemple d'application pour la mise en œuvre de la méthode d'identification est entièrement définie. Les résultats de l'expérience à utiliser pour l'identification sont donnés dans la sous-partie précédente. Les quantités pertinentes représentant ces résultats sont utilisées pour construire la fonction-objectif. Ensuite, la procédure d'identification est mise en œuvre avec l'objectif d'identifier un jeu de paramètres permettant de simuler le modèle d'endommagement ENL et d'obtenir les mêmes résultats que ceux de l'expérience en termes d'énergie dissipée et de résistance au pic.

3.2.1 Définition de la fonction-objectif

Afin d'illustrer le fonctionnement de la procédure d'identification et de ses différentes étapes et dans le but d'observer plus profondément le comportement du modèle d'endommagement dans le cadre d'une identification des paramètres, trois fonctions-objectifs sont définies.

La première fonction objectif cherche à identifier le pic de résistance en flexion 3 points. La valeur de résistance en flexion 3 points mesurée dans l'expérience est notée Q_1. La fonction-objectif est écrite sous une forme quadratique d'une erreur relative dans le but de fixer son minimum global théorique à 0 :

$$f_1(x) = \left(\frac{Q_1 - \tilde{J}_1(x)}{Q_1} \right)^2 \tag{4.10}$$

avec $\tilde{J}_1$ constituant le méta-modèle construit par krigeage. Le calcul de $\tilde{J}_1(x)$ donne une estimation par le méta-modèle de la grandeur Q_1 donnée par le modèle réel J_1. Par nature, la méthode de kriegage ne permet pas de construire un seul méta-modèle donnant simultanément l'estimation des quantités Q_1 et Q_2. Il est alors nécessaire de construire un second méta-modèle $\tilde{J}_2$ permettant d'estimer la quantité équivalente

à Q_2. La fonction-objectif correspondant à l'identification à partir de cette grandeur seulement est écrite sous la même forme que la fonction-objectif f_1 précédemment définie :

$$f_2(x) = \left(\frac{Q_2 - \tilde{J}_2(x)}{Q_2} \right)^2 \tag{4.11}$$

Enfin, il est possible d'écrire une fonction-objectif d'une forme plus générale permettant de réaliser l'identification sur toutes les quantités d'intérêt simultanément :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N_k} \gamma_k f_k(x) \tag{4.12}$$

avec γ_k des coefficients à définir permettant de donner une importance relative à chaque quantité d'intérêt dans l'algorithme d'identification. Il faut noter que l'utilisation d'une fonction objectif de cette forme nécessite que les fonctions f_k soient normalisées et observent un minimum global identique.

Dans le cadre de l'exemple de ce chapitre, la fonction-objectif pertinente souhaitée est définie à partir des deux quantités d'intérêt Q_1 et Q_2 :

$$f_{12}(x) = \gamma_1 f_1(x) + \gamma_2 f_2(x) \tag{4.13}$$

3.2.2 Étape 1 : tirage aléatoire des premiers jeux de paramètres

Intervalle de recherche des paramètres Avant de réaliser le tirage aléatoire du premier ensemble de jeux de paramètres, il est nécessaire de définir les intervalles de recherche de ces paramètres. Dans un objectif d'efficacité de résolution du problème d'identification, il est préférable de réduire au maximum les intervalles de recherche des paramètres. De cette façon, le méta-modèle nécessite moins de valeurs pour proposer une bonne représentation de la grandeur à modéliser sur l'ensemble de l'espace des paramètres. Néanmoins, il faut rester prudent à ne pas trop réduire l'espace de recherche pour des raisons de convergence de la procédure d'identification. En effet, il est possible de se tromper dans l'évaluation des intervalles de recherche et de ne pas obtenir en conséquence le jeu de paramètres le plus optimal.

La définition des intervalles de recherche des paramètres est délicate. En sous-estimant la taille d'un intervalle, il est possible de ne pas trouver de solution au problème d'identification. Au contraire, une taille d'intervalle trop grande peut compliquer les recherches en augmentant le nombre d'itérations de la procédure d'identification. Dans cette partie, le paramètre α du modèle d'endommagement ENL est recherché entre les valeurs 0.2 et 1.5. Ce paramètre de la métrique dans le calcul des interactions non-locales a une forte influence sur le développement de l'endommagement comme le montrent les résultats obtenus dans les chapitres précédents. Une valeur faible de ce paramètre permet d'obtenir des réponses globales plus ductiles en réduisant la « vitesse » d'augmentation des distances effectives non-locales par rapport au développement de l'endommagement. Inversement, augmenter la valeur du paramètre α permet d'obtenir des réponses plus fragiles. De la même manière, le paramètre B_t de la loi d'évolution de l'endommagement permet de contrôler la fragilité de la réponse. Cependant, ce paramètre ne contrôle pas directement le comportement non-local du modèle. Le paramètre de longueur caractéristique est recherché entre les valeurs 3 mm et 8 mm. La littérature a montré que la valeur de ce paramètre est fortement liée, voire proportionnelle, à la taille de la zone d'élaboration de la fissure. En observant le champ d'endommagement obtenu par l'expérience sur le matériau numérique, il est possible de définir

un intervalle de recherche pour la longueur caractéristique. Enfin, le paramètre de déformation à première fissuration est recherché entre les valeurs 0.8×10^{-4} et 1.5×10^{-4}. Dans le contexte de cette expérience, il est peut-être possible de définir la valeur de ce paramètre en fonction de la valeur des paramètres mésoscopiques du matériau numérique. En effet, la déformation de première fissuration pour la matrice est fixée à 1.0×10^{-4}. En observant les résultats de l'expérience numérique, il apparaît que l'endommagement se concentre dans la matrice. Fixer la déformation de première fissuration à 1.0×10^{-4} pour le modèle d'endommagement non-local semble être un choix sensé. Cependant, cette mesure est peut-être plus délicate expérimentalement. Ce paramètre n'est pas fixé ici afin de se placer dans un cas général où seulement les paramètres élastiques sont connus. Il faut noter que la connaissance d'un paramètre avant la mise en œuvre de la procédure d'identification permet de simplifier la recherche. Les intervalles de recherche sont rappelés dans le TAB.4.3.

Paramètre	limite basse	limite haute
Déformation de première fissuration ε_0	0.8×10^{-4} N	1.5×10^{-4}
Paramètre d'adoucissement B_t	300	600
Longueur caractéristique ℓ_c	3 mm	8 mm
Paramètre de la métrique α	0.3	1.5

TABLE 4.3: Plage de variation des paramètres à identifier

Tirage des premiers jeux de paramètres Le tirage des jeux de paramètres dans l'espace des paramètres est réalisé à l'aide de la méthode LHS (*Latin Hypercube Sampling*). Cette méthode de tirage aléatoire se montre efficace dans l'objectif de construction de méta-modèle par krigeage. Le tirage LHS permet d'obtenir une distribution uniforme avec peu de paramètres. De plus, cette méthode impose une distance minimale entre les points de l'espace des paramètres. Des points trop proches dans l'espace des paramètres représentent une information redondante au moment de la construction du méta-modèle par krigeage à condition que la fonction objectif ne présente pas d'importantes fluctuations qui resteraient invisibles avec un échantillonnage trop grossier de l'espace des paramètres. Cependant, dans le cas des modèles d'endommagement non-locaux, l'hypothèse de fonctions objectifs relativement lisses n'est pas aberrante.

3.2.3 Étape 2 : construction du premier méta-modèle

Les 20 jeux de paramètres du premier tirage sont simulés simultanément en flexion 3 points. Les réponses globales de ces simulations sont données sur la FIG.4.6. Les mesures de pic de résistance sont données sur la FIG.4.7. La valeur Q_1 visée pour l'identification est affichée en rouge sur les nuages de points. À cette étape de la procédure, il est possible de remarquer s'il existe une simulation parmi celles déjà réalisées dont le résultat est satisfaisant du point de vue de la fonction-objectif. En effet, dans ce cas d'étude, un jeu de paramètre du tirage initial permet d'obtenir un pic de résistance proche du pic de résistance recherché. À partir de ces résultats, le méta-modèle est construit.

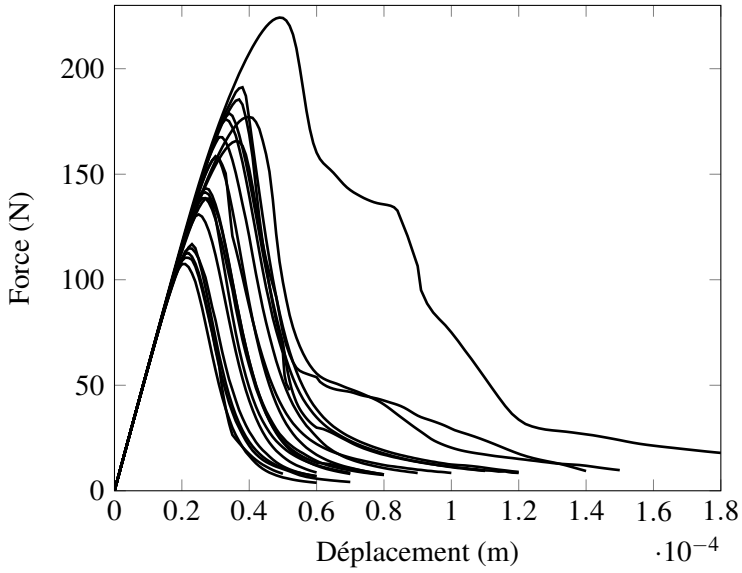


FIGURE 4.6: Résultats de simulation sur le premier tirage

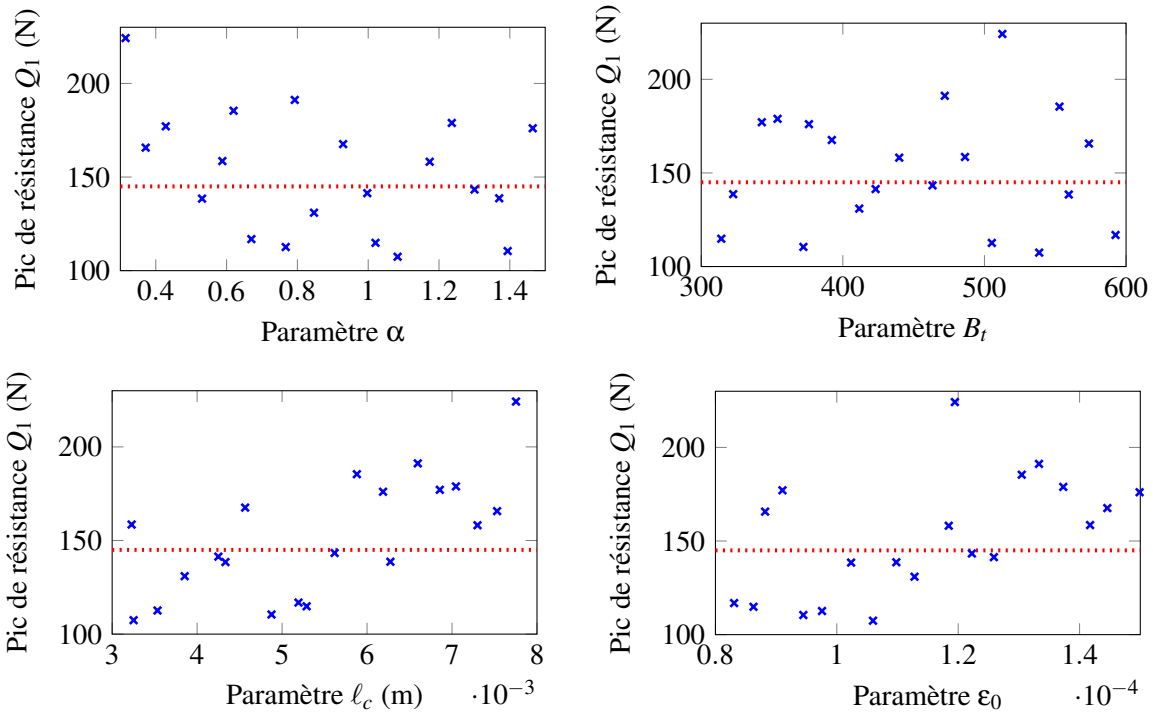


FIGURE 4.7: Répartition des mesures de pic de résistance pour le tirage initial

3.2.4 Étape 3 : Identification d'un ensemble de jeux de paramètres

L'algorithme génétique est mis en œuvre afin de rechercher des jeux de paramètres permettant d'obtenir le pic de résistance recherché. Le problème d'optimisation est alors posé avec la fonction-objectif f_1 définie précédemment. Lorsque le minimum global de la fonction-objectif n'est pas unique, la solution donnée par l'algorithme génétique dépend de son initialisation. Dans le cas d'étude présent, l'algorithme génétique est simplement appelé plusieurs fois afin d'obtenir un ensemble de solutions potentielles au problème d'optimisation. Les résultats de cette identification sur la fonction-objectif f_1 sont donnés sur la FIG.4.8, chaque point correspondant à une identification par l'algorithme génétique. Dans le cas présent, l'algorithme génétique est appelé 1000 fois pour obtenir un ensemble de solutions de 1000 points. La répartition des solutions au problème d'optimisation sur le méta-modèle semble montrer une forte influence du paramètre de déformation de première fissuration ε_0. En effet, aucune solution ne semble pouvoir être trouvée avec un paramètre ε_0 supérieure à 1.7×10^{-4}. De plus il semblerait que cette limite diminue avec le paramètre ℓ_c : plus la longueur caractéristique est grande, plus la déformation de première fissuration est limitée et sa limite se rapproche de 1.7×10^{-4}.

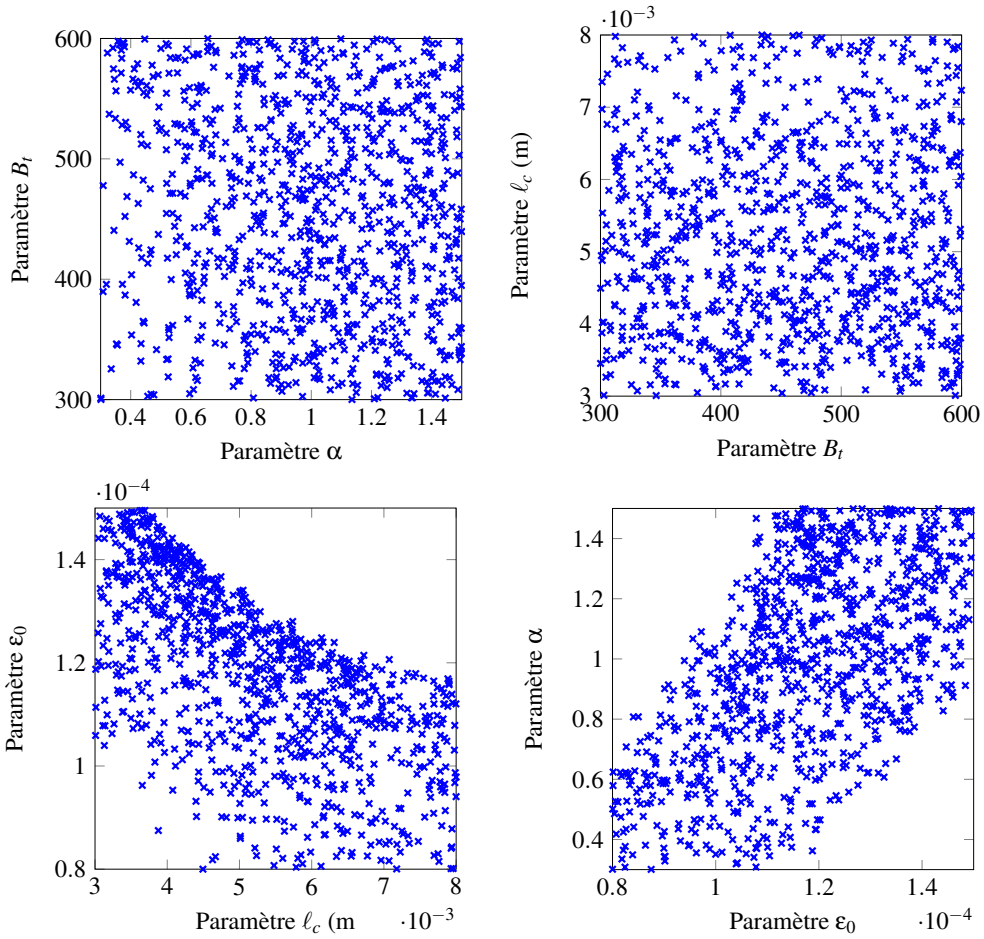


FIGURE 4.8: Ensemble solution après la première identification

L'ensemble de 1000 solutions est obtenu par identification sur le méta-modèle construit à partir des

résultats de seulement 20 jeux de paramètres. Il peut être intéressant de procéder à une nouvelle série de simulations pour enrichir le méta-modèle ou simplement valider les solutions trouvées avec le méta-modèle. La série de jeux de paramètres à tester est de nouveau constituée de 20 éléments. Si l'objectif est d'enrichir le méta-modèle, il est possible de tirer ces jeux de paramètres aléatoirement comme lors du premier tirage. Cependant, il est aussi possible d'utiliser les premiers résultats et les premières solutions afin d'enrichir le méta-modèle dans des zones prometteuses de l'espace des paramètres. En effet, les zones de l'espace des paramètres où les valeurs de la fonction-objectif ne sont pas proches de son minimum global sont moins probables de contenir une solution au problème d'identification à moins que l'approximation du méta-modèle ne soit pas suffisamment précise dans ces zones. C'est pourquoi il est préférable de tirer parmi les solutions déjà identifiées sur le méta-modèle afin d'obtenir une meilleure précision du méta-modèle en ces points de l'espace des paramètres après l'enrichissement. De plus, la simulation de ces jeux de paramètres ont une chance de valider une solution pour la procédure d'identification en obtenant directement une valeur de la fonction-objectif satisfaisante avec le modèle réel.

Dans un cas général, il peut être prudent de réserver quelques jeux de paramètres du second tirage pour l'exploration de l'espace des paramètres afin d'améliorer la qualité générale du méta-modèle. Dans le cas d'étude présentée ici, l'ensemble des solutions semble couvrir l'ensemble des valeurs possibles pour les paramètres B_t, α et ℓ_c. Dans ce cas, les 20 jeux de paramètres sont tirés parmi les solutions du méta-modèle. La seule condition imposée est de respecter une distance minimale dans l'espace des paramètres normalisés de 0.2 entre chaque point du nouveau tirage, mais aussi avec chaque point du premier tirage. Cette condition permet d'éviter de simuler deux jeux de paramètres proches et permet de mieux répartir les points dans l'espace des paramètres. La distance minimale est imposée dans l'espace normalisé des paramètres. Cette distance correspond en réalité à un écart unidirectionnel de 0.24 pour α, 60 pour B_t, 1 mm pour ℓ_c et 0.14×10^{-4} pour ε_0.

3.2.5 Étape 4 : Enrichissement du méta modèle

Les résultats de simulation pour le second tirage sont donnés sur la FIG.4.9 et les mesures de pics de résistance sur ces simulations sont tracées sur la FIG.4.10 en fonction des quatre paramètres.

À l'aide des résultats de simulation du premier tirage et du second tirage. Un nouveau méta-modèle est construit avec l'ensemble de ces résultats. Il est donc possible de mettre en œuvre une nouvelle fois l'algorithme génétique avec la fonction-objectif f_1 pour trouver un nouvel ensemble de solutions. La qualité du méta-modèle est supposée meilleure à cette itération qu'à l'itération initiale. En s'appuyant sur une plus grande base de données pour sa construction, le méta-modèle montre une plus grande fidélité. Ainsi il est possible de choisir un tirage parmi l'ensemble solution de la FIG.4.11. Dans le cas où il est souhaitable de réaliser une itération supplémentaire, il faut à nouveau tirer aléatoirement 20 jeux de paramètres à simuler parmi l'ensemble des solutions déterminées à cette itération par l'algorithme génétique.

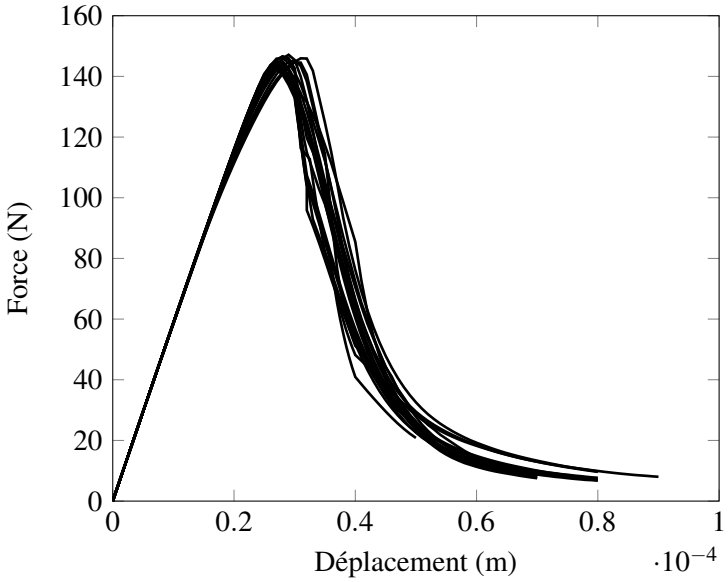


FIGURE 4.9: Résultats de simulation sur le second tirage

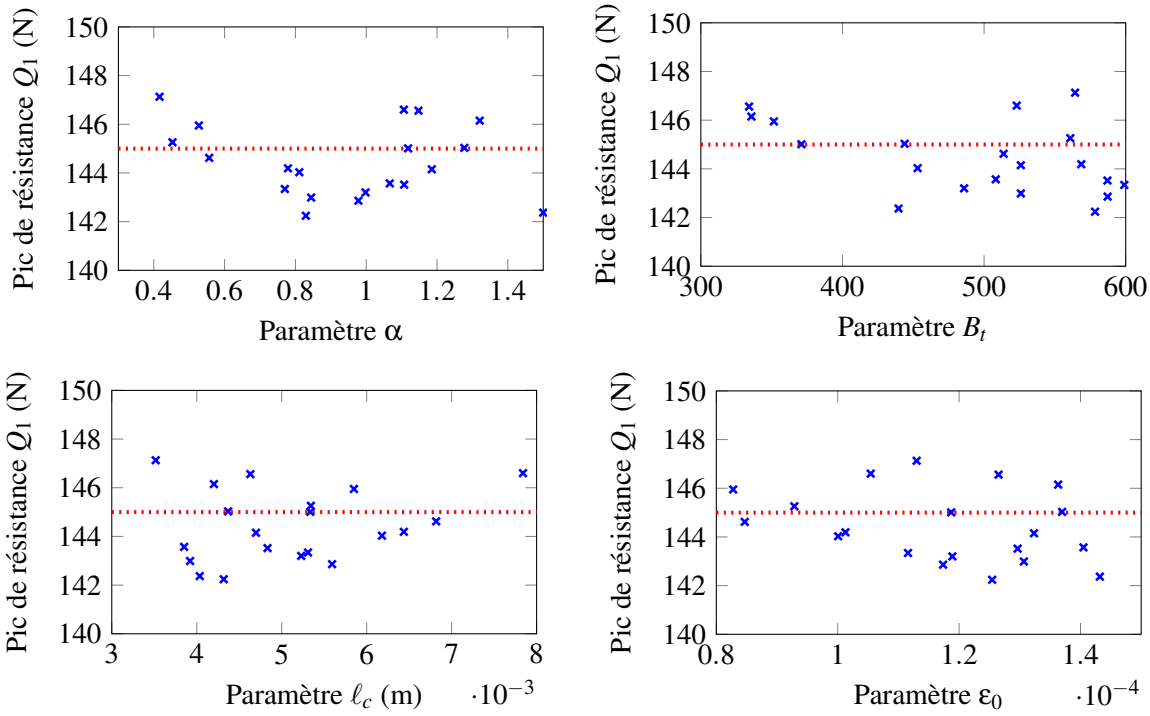


FIGURE 4.10: Répartition des mesures de pic de résistance pour le deuxième tirage

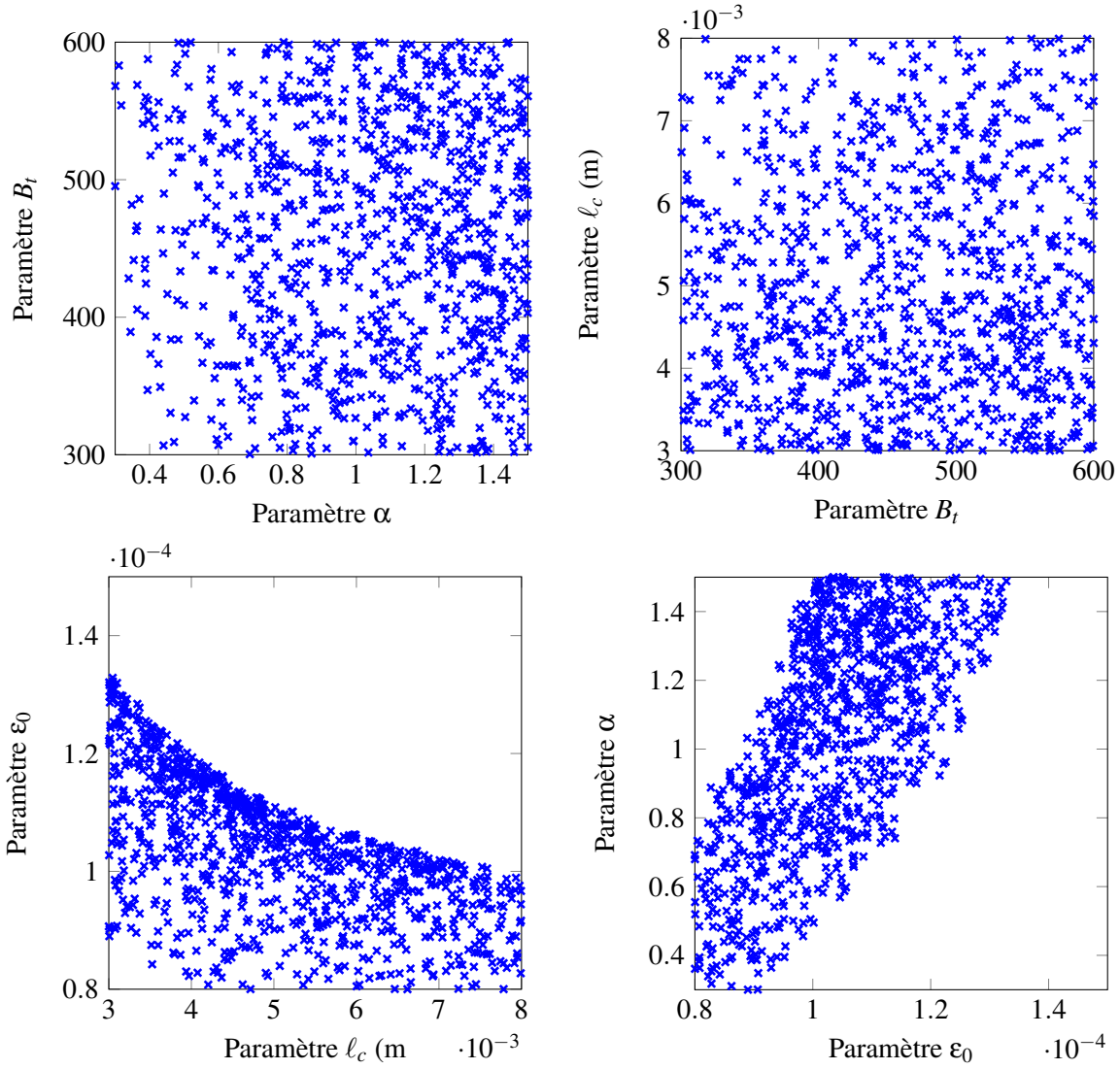


FIGURE 4.11: Ensemble solution après la deuxième identification sur le pic de résistance

3.2.6 Identification sur l'énergie dissipée

Le fonctionnement de la procédure d'identification a été explicité dans les sous-parties précédentes à travers l'identification sur la valeur du pic de résistance Q_1. Cette sous-partie s'intéresse maintenant à l'identification sur la valeur d'énergie dissipée Q_2.

Résultats du premier tirage Les valeurs d'énergie dissipée mesurées sur les résultats de simulations du tirage initial sont données sur FIG.4.12. Il faut noter que les résultats de deux jeux de paramètres ont été omis. En effet, le temps de calcul étant largement plus élevé que pour les autres jeux de paramètres, la valeur d'énergie dissipée n'est pas mesurée pour ces deux jeux de paramètres. Réduire le nombre de

données pour la construction du méta-modèle par krigeage diminue la qualité du méta-modèle mais il est toujours possible de réaliser l'identification à l'aide l'algorithme génétique.

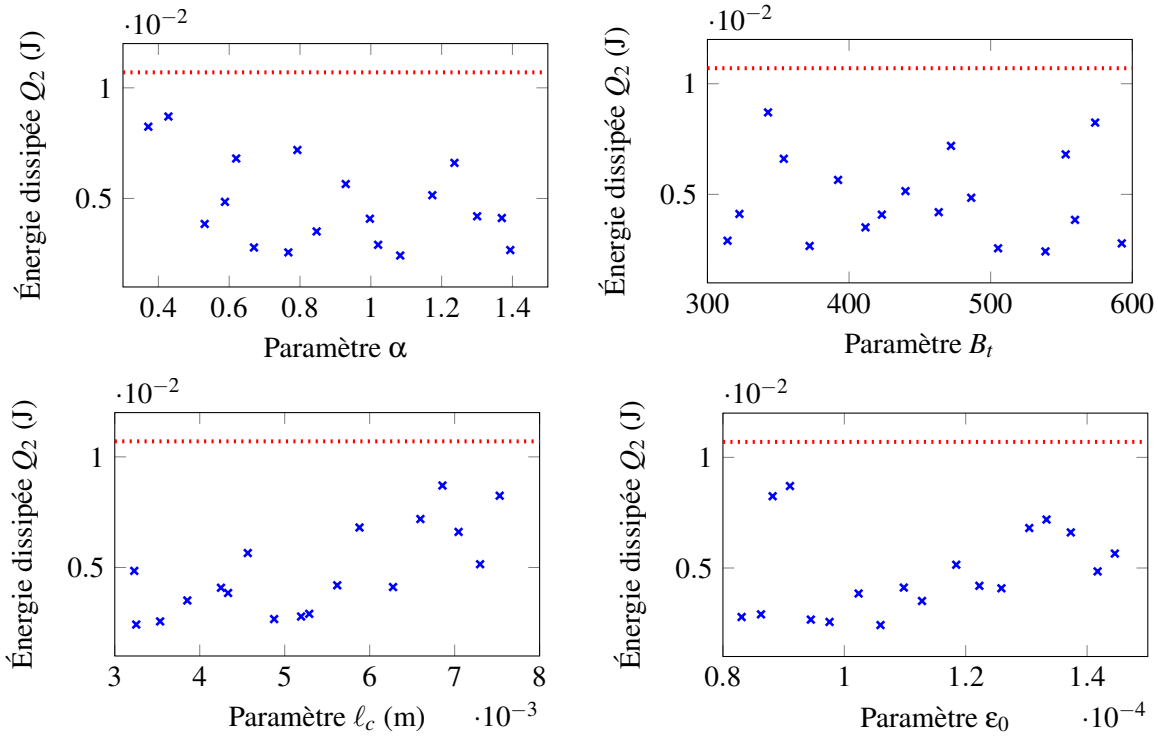


FIGURE 4.12: Répartition des mesures d'énergie dissipée pour le tirage initial

Identification d'un ensemble solution L'ensemble des solutions de l'algorithme génétique obtenues pour l'identification sur la fonction-objectif f_2 est donné sur la FIG.4.13. L'identification montre des solutions proches des frontières de l'ensemble des paramètres. Un méta-modèle construit par krigeage est réputé pour montrer des valeurs de variance élevées aux frontières de l'espace des paramètres. Cette observation vient du fait que le krigeage est un modèle d'interpolation et qu'il n'est pas réellement possible d'avoir une réelle interpolation proche des bords de l'espace des paramètres.

De plus, les résultats du tirage initial ne sont pas dispersés autour de la valeur d'énergie dissipée recherchée. La valeur recherchée est supérieure à toutes les valeurs mesurées sur le tirage initial. Il semble alors difficile d'identifier la valeur d'énergie dissipée avec le méta-modèle de krigeage construit sur le tirage initial. Cela indique que l'espace des paramètres a été mal choisi et ne permet pas d'obtenir cette valeur d'énergie dissipée pour le modèle d'endommagement non-local eikonal. Par exemple, les limites de variation des paramètres B_t et ℓ_c pourraient être étendues afin d'obtenir des valeurs d'énergie dissipée supérieures lors des simulations d'un tirage initial.

Identification sur valeur exemple d'énergie dissipée Dans l'objectif de montrer la capacité de la procédure d'identification à identifier un jeu de paramètre respectant une valeur d'énergie dissipée pour le modèle d'endommagement non-local eikonal, une autre valeur d'énergie dissipée à rechercher est choisie

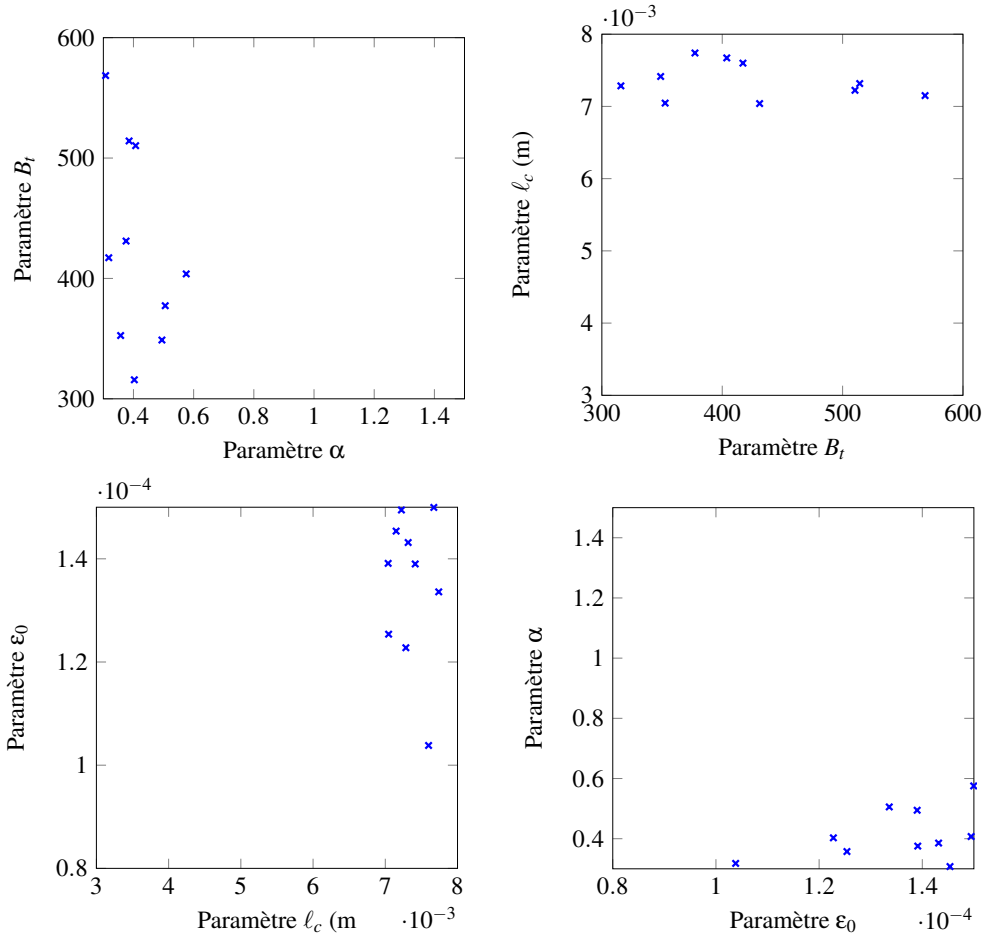


FIGURE 4.13: Ensemble solution après la première identification

pour l'exemple. La FIG.4.14 présente l'ensemble des solutions obtenues avec l'algorithme génétique pour une valeur d'énergie dissipée visée $\tilde{Q}_2 = 7 \times 10^{-3}$ J. La fonction-objectif utilisée est adaptée à cette nouvelle valeur :

$$\tilde{f}_2(x) = \left(\frac{\tilde{Q}_2 - \tilde{J}_2(x)}{\tilde{Q}_2} \right)^2 \tag{4.14}$$

Les résultats pour ce nouveau tirage sont tracés sur les FIG.4.15 et FIG.4.16. Cette dernière figure montre que des valeurs d'énergie dissipées satisfaisantes par rapport à la valeur de $\tilde{Q}_2$ visée sont obtenues. Cela montre qu'il est possible d'identifier les paramètres du modèle d'endommagement non-local eikonale en fonction d'un critère sur l'énergie dissipée.

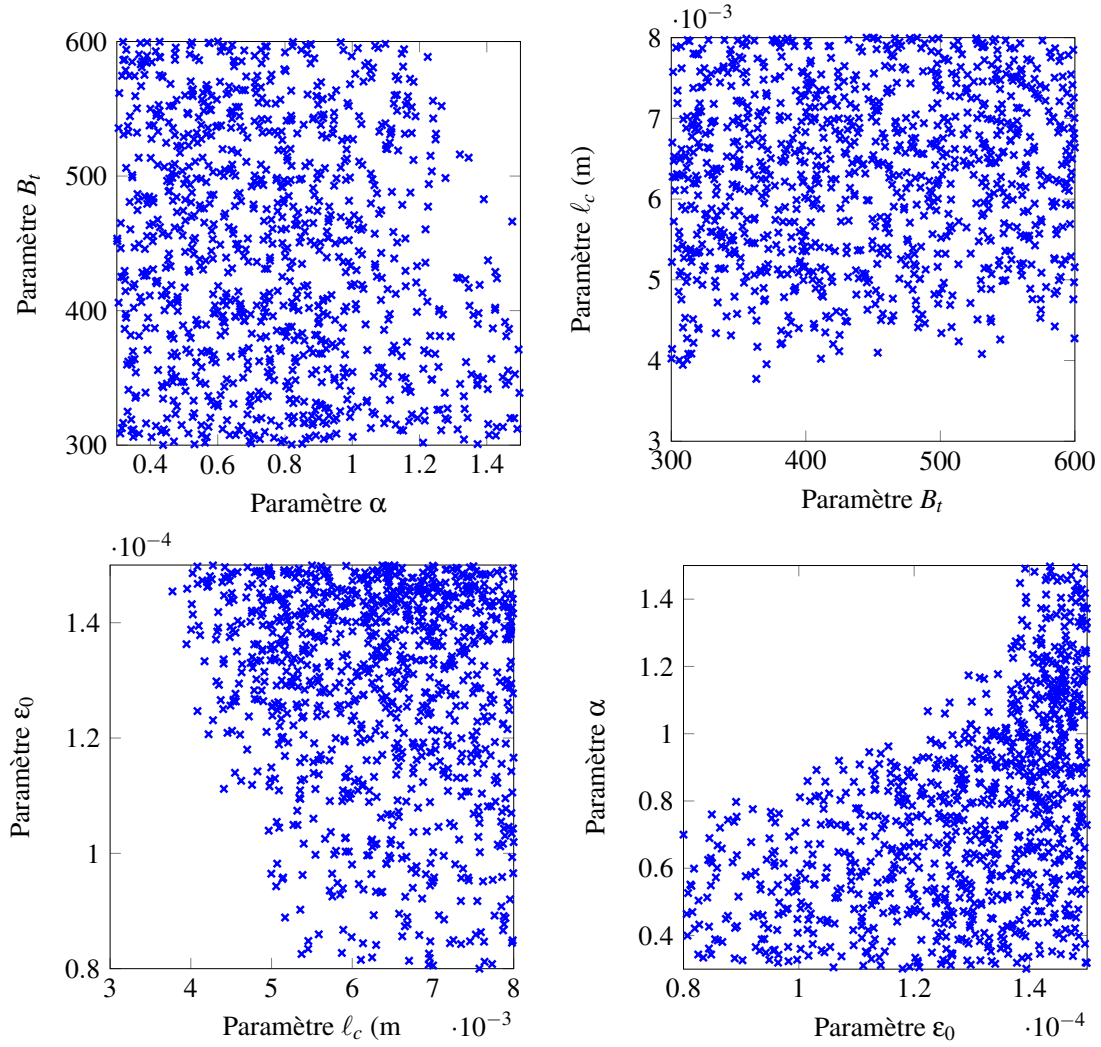


FIGURE 4.14: Ensemble solution de la fonction-objectif $\tilde{f}_2$ après la première identification

3.2.7 Identification sur le pic de résistance et l'énergie dissipée

Cette sous-partie étudie la possibilité d'identifier un jeu de paramètre permettant de satisfaire simultanément les deux fonctions-objectif f_1 et f_2 afin de modéliser au mieux le matériau numérique en flexion trois points.

Le front de Pareto entre les fonctions-objectif f_1 et f_2 est tracé sur la FIG.4.17. Le front est tracé par l'évaluation aléatoire de 2×10^6 jeux de paramètre. La FIG.4.17 met en évidence la capacité du modèle non-local eikonal à modéliser le matériau numérique en flexion trois points en respectant le pic de résistance et l'énergie dissipée simultanément en montrant la relation entre la valeur de f_1 et de f_2. Sur les 2×10^6 jeux de paramètres aléatoires testés, il ne semble pas possible d'obtenir une valeur de la fonction-objectif inférieure à 10^{-4}, correspondant à une erreur relative de 1% sur la valeur de la grandeur recherchée.

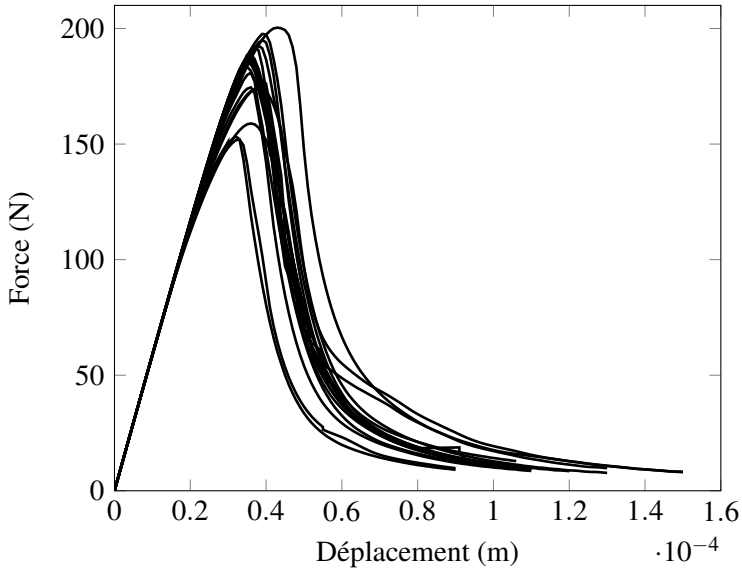


FIGURE 4.15: Résultats de simulation sur le second tirage après identification sur l'énergie dissipée ($\tilde{f}_2$)

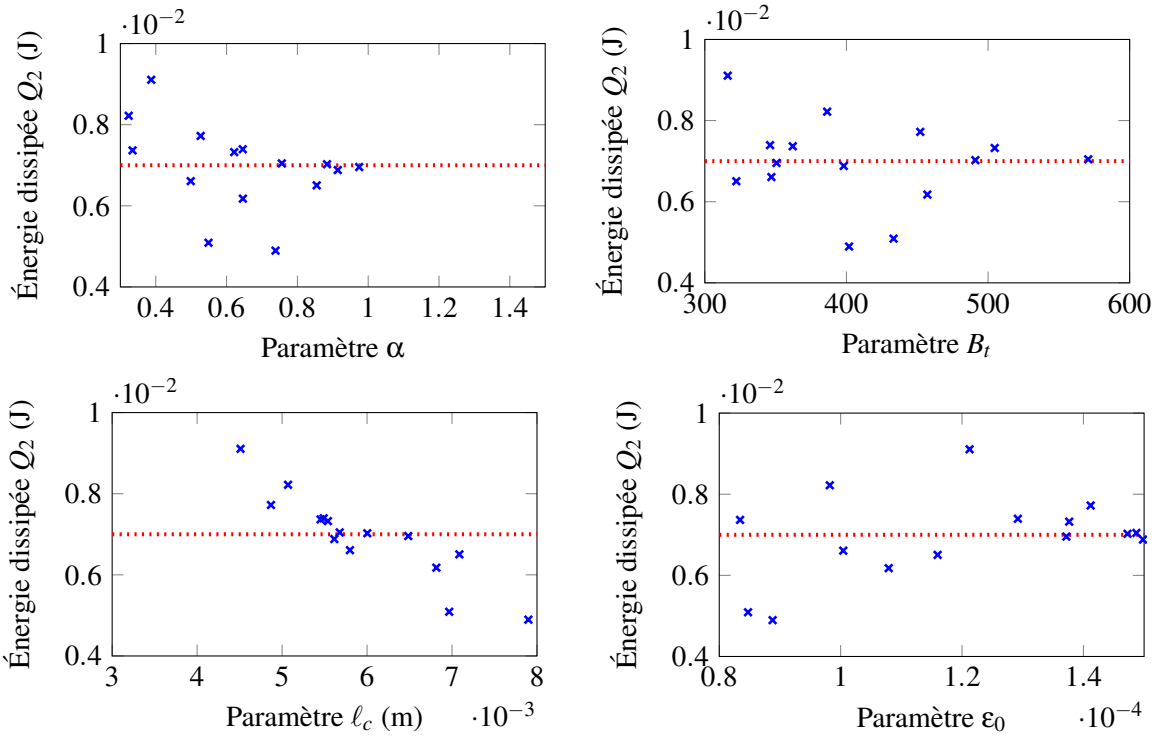


FIGURE 4.16: Répartition des mesures d'énergie dissipée pour le second tirage après identification sur une valeur fictive de l'énergie dissipée

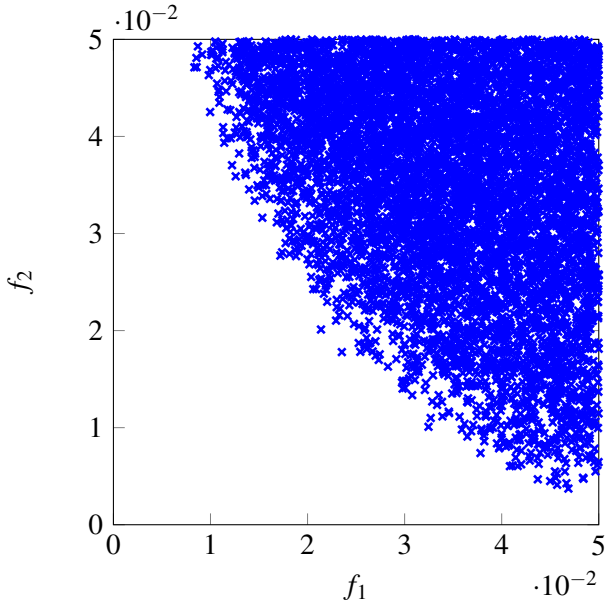


FIGURE 4.17: Front de Pareto après le premier tirage

Cette observation est attendue en conséquence du problème d'identification sur l'énergie dissipée mis en évidence précédemment. En effet, il ne semble pas possible d'identifier des jeux de paramètres satisfaisant en utilisant la fonction f_2. Cependant, en choisissant une valeur $\tilde{Q}_2$ comme valeur d'énergie dissipée à identifier, il devient possible d'obtenir un ensemble de solutions pour la fonction-objectif suivante :

$$f_{12}(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} \tilde{f}_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1 - \tilde{J}_1(x)}{Q_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{Q}_2 - \tilde{J}_2(x)}{\tilde{Q}_2} \right)^2 \tag{4.15}$$

Les résultats de cette identification sont présentés sur la FIG.4.18. Il faut néanmoins remarquer que les jeux de paramètres identifiés sont sur le bord des domaines des paramètres ℓ_c et ε_0. Les valeurs de la fonction-objectif f_{12} étant inférieures à 10^{-4}, les jeux de paramètres obtenus sont satisfaisants. Il faut probablement réaliser plusieurs itérations afin d'améliorer la confiance sur la fonction-objectif proche des bords du domaine des paramètres ℓ_c et ε_0.

4 Conclusion du chapitre

Une procédure d'identification des paramètres du modèle d'endommagement non-local eikonal a été proposée dans ce chapitre. La procédure est basée sur la construction d'un méta-modèle par krigeage afin de remplacer l'évaluation coûteuse du modèle d'endommagement par l'évaluation du méta-modèle dans les algorithmes d'optimisation. L'utilisation d'un méta-modèle a permis l'utilisation d'algorithmes d'optimisation puissants comme l'algorithme génétique. La procédure d'identification requiert la définition d'une fonction-objectif scalaire permettant de représenter au mieux les résultats d'une expérience sur un matériau et le choix a été porté sur la mesure du pic de résistance et la mesure de l'énergie dissipée par l'intermédiaire de l'aire sous la courbe de réponse globale.

Il a été montré que la procédure d'identification est très efficace pour l'identification de paramètre lié au pic de résistance en flexion trois points. La procédure est très efficace également sur l'identification basée sur l'énergie dissipée. Cependant, il faut noter que le choix du domaine de chaque paramètre est très important et risque de faire échouer l'identification si l'intervalle de variation d'un paramètre ne permet pas de trouver la valeur recherchée de la grandeur d'intérêt. L'identification simultanée sur le pic de résistance et l'énergie dissipée a montré la relation entre ces deux mesures pour le modèle d'endommagement non-local eikonal en flexion trois points.

Enfin, ce chapitre a permis de montrer la robustesse de la procédure d'identification. En effet, grâce à l'utilisation d'un méta-modèle de krigeage, chaque simulation contribue à l'amélioration du méta-modèle et ainsi à l'amélioration de la capacité à trouver un jeu de paramètres satisfaisant.

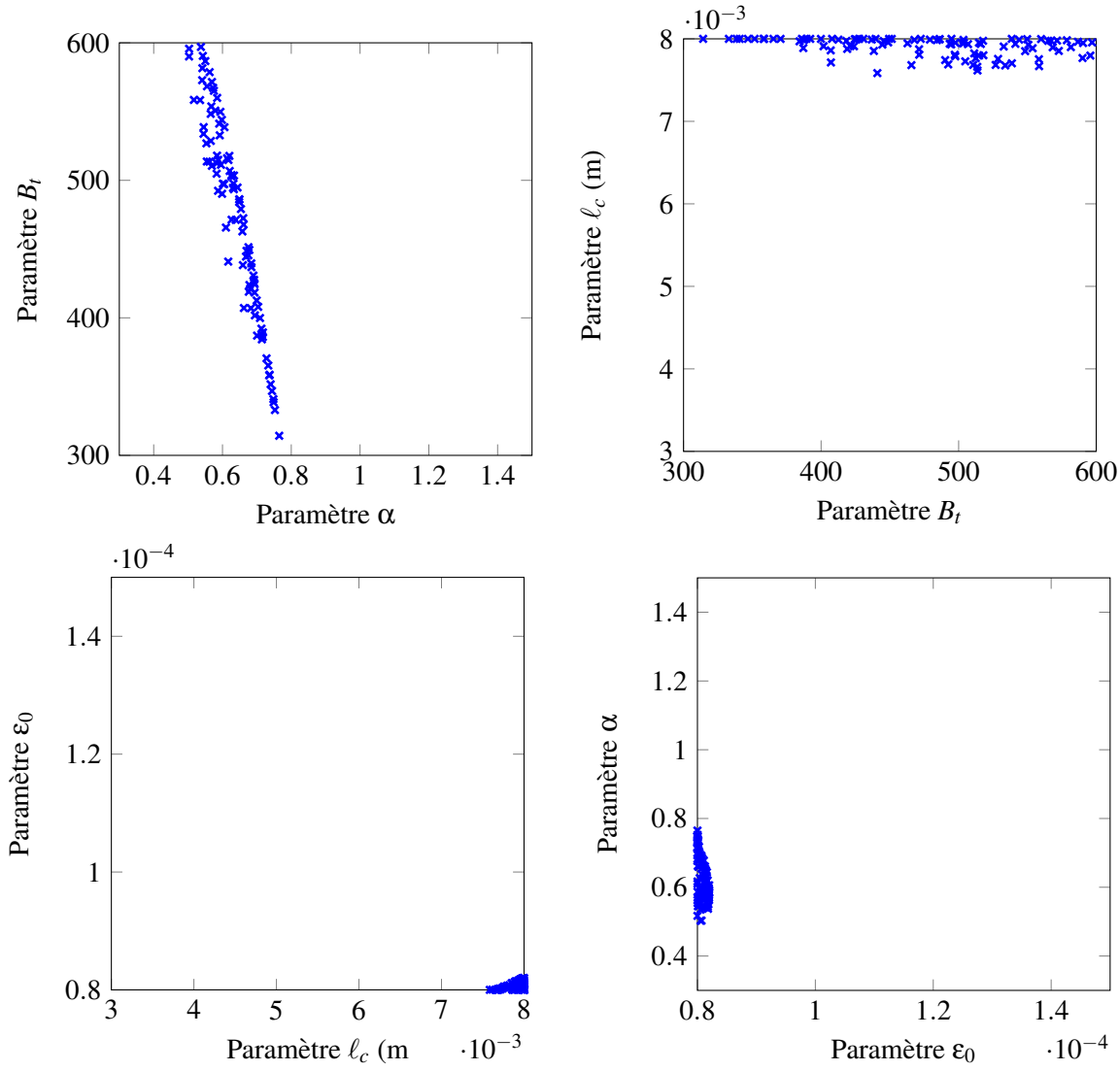


FIGURE 4.18: Ensemble solution de la fonction-objectif $\tilde{f}_{12}$ après la première identification

Conclusion

Conclusions

L'objectif principal de cette thèse constituait en l'étude du comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal face au phénomène de localisation. Pour atteindre cet objectif, le modèle a été implémenté dans un code de calcul 1D, pour une étude précise du processus de localisation, puis dans le code de calcul industriel Cast3M en 2D. Les études ont été réalisées en observant l'influence du paramètre α intervenant dans l'expression de la métrique. Le paramètre a montré un intérêt à être exploité pour contrôler le processus de localisation de l'approche eikonale avec cette expression de la métrique. Enfin, dans le dernier chapitre, une procédure d'identification a été proposée afin de démontrer la possibilité d'identification des paramètres du modèle, notamment des paramètres non-locaux.

Le premier chapitre a permis d'étudier le comportement du modèle non-local eikonal pour l'endommagement en 1D face à la localisation des déformations. La première partie de ce chapitre a montré l'influence du calcul des distances effectives sur le développement de l'endommagement. Deux formulations pour le calcul des distances ont été comparées et ont permis de conclure sur l'efficacité de l'approche eikonale pour résoudre le problème de diffusion de l'endommagement. La localisation observée pour de hauts niveaux d'endommagement mène néanmoins à une perte d'objectivité des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Dans ce chapitre, deux méthodes ont été proposées afin de retrouver cette objectivité. En limitant l'effet de l'endommagement dans l'expression de la métrique, la première méthode a permis de retrouver des propriétés de régularisation similaire à la méthode non-locale intégrale. Néanmoins cette méthode a montré une diffusion de l'endommagement pathologique caractéristique de la méthode intégrale. En introduisant une discontinuité forte dans la formulation eikonale, la seconde méthode a permis de retrouver l'objectivité des résultats tout en prévenant la diffusion fallacieuse de l'endommagement. Des méthodes d'identification du comportement relatif à la discontinuité ont été utilisées afin d'établir une équivalence entre le modèle d'endommagement non-locale eikonale et l'approche eikonale avec discontinuité forte.

La première partie du second chapitre s'est appliquée à la description de l'implémentation numérique du modèle d'endommagement non-local eikonal en 2D. Le calcul des distances effectives par résolution de l'équation eikonale a été discuté vis-à-vis de sa précision et de son efficacité algorithmique. La relation entre le calcul des distances effectives et le calcul non-local a été explicitée. Le problème d'initiation de l'endommagement en pointe d'entaille en flexion trois points a été adressé. Un champ d'endommagement virtuel a été introduit dans le voisinage des limites géométriques du milieu afin de contrôler les interactions non-locale et ainsi maîtriser le décalage de l'initiation de l'endommagement. La deuxième partie du chapitre a illustré le comportement du modèle dans un exemple de flexion trois points. La dernière partie de chapitre s'est attachée à présenter la possibilité de l'introduction d'une discontinuité

forte dans la formulation eikonale afin modéliser objectivement la modélisation. Cette partie a montré l'incompatibilité entre le comportement non-locale et la description de la fissure à l'aide d'une discontinuité forte. La possibilité de traiter ce problème à l'aide du cadre fourni par l'équation eikonale a été discutée.

Par rapport à la méthode intégrale non-locale classique, l'approche eikonale fait intervenir un paramètre supplémentaire. Une procédure basée sur l'optimisation avec un algorithme génétique a été présentée. L'utilisation d'un méta-modèle de régression de processus gaussien a permis de s'affranchir du temps de calcul conséquent de l'approche eikonale en exploitant la parallélisation des simulations. Un exemple d'identification a été proposé à travers un essai de flexion trois points. Dans cet exemple l'identification a été réalisée à l'aide de fonctions d'optimisation basées sur des grandeurs physiques facilement mesurables expérimentalement, à savoir le pic de résistance et l'énergie dissipée. Il est démontré dans ce chapitre qu'il est possible d'identifier les paramètres du modèle non-local eikonal pour l'endommagement à partir d'une fonction d'optimisation sur une seule grandeur. L'utilisation d'une fonction d'optimisation combinant le pic de résistance et l'énergie dissipée n'a pas été possible avec le domaine d'étude choisi pour les paramètres. L'étude de la fonction d'optimisation par le tracé d'un front de Pareto pourrait montrer une interdépendance entre le pic de résistance et l'énergie dissipée dans le cas présenté.

Perspectives

Suite aux travaux menés dans cette thèse, il est possible de distinguer plusieurs axes de recherche à propos du modèle d'endommagement non-local eikonal. Ces perspectives se classent dans deux catégories :

— celles liées au développement de l'approche eikonale
— celles liées à la procédure d'identification

Développement de l'approche eikonale Tout d'abord, en ce qui concerne les perspectives liées au développement de l'approche eikonale, la plus évidente est celle de l'extension du modèle au contexte 3D. L'implémentation dans ce contexte est directement adaptée de l'implémentation déjà réalisée en 2D. Le calcul des distances effectives par la méthode Fast Marching ne nécessite pas de modification profonde et le calcul non-local ainsi que la loi de comportement d'endommagement sont déjà écrites de manière équivalente en 3D. Cependant, il faut noter que le temps de calcul d'une simulation avec un tel modèle risque d'exploser par rapport au calcul 2D à cause de la dimension supplémentaire.

Les travaux de cette thèse ont été exclusivement menée pour la mécanique de l'endommagement. Il est tout à fait possible d'adapter l'approche eikonale à d'autres types de lois de comportement, notamment la plasticité comme cela a déjà été étudié dans un contexte unidimensionnel ([Jirásek et Desmorat, 2019]). Pour rester dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, l'équation eikonale est généralisable au cas d'une métrique anisotrope. Cette propriété offre la possibilité d'étendre l'approche eikonale aux modèles d'endommagement anisotropes. Cette extension pourrait aussi permettre d'utiliser l'approche pour simuler des chargements plus complexes. De la même façon, il pourrait être intéressant d'étudier le comportement du modèle d'endommagement non-local eikonal en présence de renforcement. Dans le cas d'une étude concrète, le matériau béton est presque toujours renforcé. La suite du développement de l'approche eikonal s'oriente donc inévitablement vers la modélisation de ce type de matériau.

Le sujet des effets d'échelle n'a pas été abordé dans cette thèse. En s'intégrant dans les modèles non-locaux, l'approche eikonale semble prometteuse pour reproduire les effets d'échelles dans les matériaux

quasi-fragiles.

Enfin, l'étude préliminaire sur le modèle de transition en 2D grâce à la technologie des éléments finis enrichis appelle à sa concrétisation. Cet axe de recherche demande le développement d'une solution pour résoudre l'incompatibilité du comportement non-local avec le développement de la fissuration. La réflexion menée dans ce manuscrit propose de profiter du cadre offert par l'équation eikonale. En effet, il semblerait possible de contrôler le comportement non-local dans le voisinage des discontinuités par l'intermédiaire d'une définition adéquate de la fonction métrique.

Développement de la procédure d'identification Dans ces travaux, l'identification des paramètres du modèle a été menée uniquement sur deux grandeurs d'intérêt. Il peut être intéressant d'étudier la possibilité d'identifier les paramètres grâce à d'autres grandeurs. Par exemple :

- l'erreur sur la courbe de réponse globale est une fonction d'optimisation très utilisée dans la littérature pour l'identification de paramètre. Cependant, cela impliquerait de construire un méta modèle représentant une erreur entre des résultats numériques et expérimentaux, ce qui ne semble pas naturel ;
- l'énergie dissipée à différentes étapes du calcul est certainement moins contraignante qu'une erreur sur la courbe globale. Cependant, la détermination des étapes pertinentes n'est peut-être pas triviale et le post-traitement de chaque réponse globale pourrait s'avérer difficile ;
- la vitesse de propagation de la fissure. Cette grandeur d'intérêt nécessite la possibilité de post-traitement sur les résultats expérimentaux. De plus, elle nécessite la définition d'une équivalence entre l'endommagement et une fissure.

La construction d'un méta-modèle de krigeage permet le calcul de la variance lors de l'évaluation du modèle. Cette variance représente la qualité, ou la confiance, du méta-modèle au point d'observation. Il est alors possible d'imaginer des fonctions d'optimisation faisant intervenir la grandeur d'intérêt ainsi que la variance. L'optimisation consisterait alors à minimiser à la fois l'erreur sur la grandeur d'intérêt et la variance. Les solutions de ce problème d'optimisation seraient de meilleurs candidats pour l'identification finale que les solutions obtenues sans intervention de la variance.

Au delà de l'identification des paramètres, la construction d'un méta-modèle pour simuler une grandeur d'intérêt peut permettre une étude de sensibilité sur le modèle. De la même façon que l'identification par un algorithme d'optimisation, l'utilisation d'un méta-modèle peut simplifier grandement la mise œuvre de méthode d'analyse de sensibilité comme les méthodes de Morris ou de Sobol qui nécessitent un grand nombre d'évaluations du modèle.

Annexe A

Figures complémentaires au chapitre 2

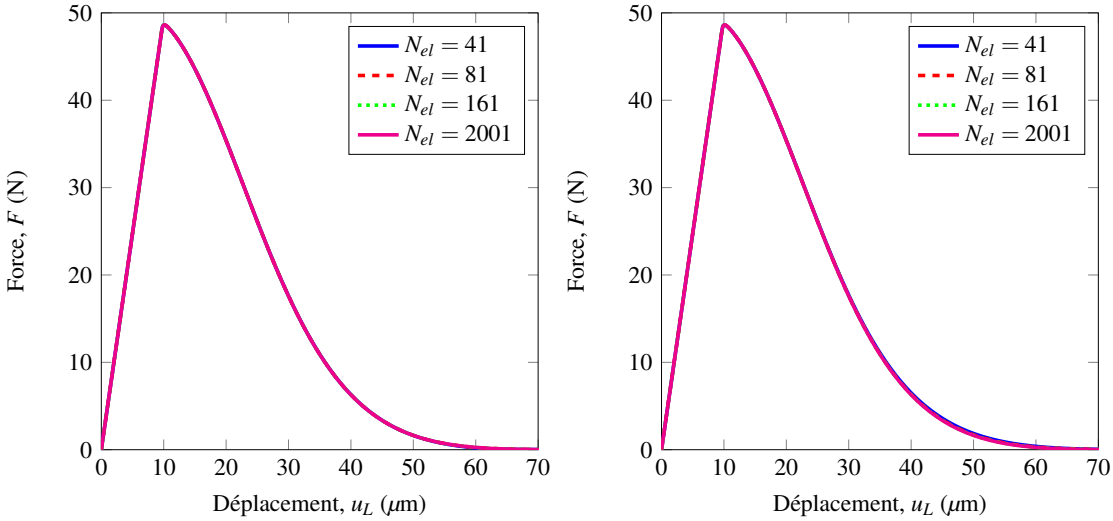
1 Propriétés de régularisation du modèle d'endommagement non-local eikonal

Les réponses globales de simulatons mettant en évidence les propriétés de régularisation du modèle d'endommagement non-local eikonal sont tracés pour les formulations ENL1 et ENL2 et pour différentes valeurs de α :

— $\alpha = 0.1$ sur la FIG.A.1
— $\alpha = 0.3$ sur la FIG.A.2
— $\alpha = 0.5$ sur la FIG.A.3
— $\alpha = 0.8$ sur la FIG.A.4

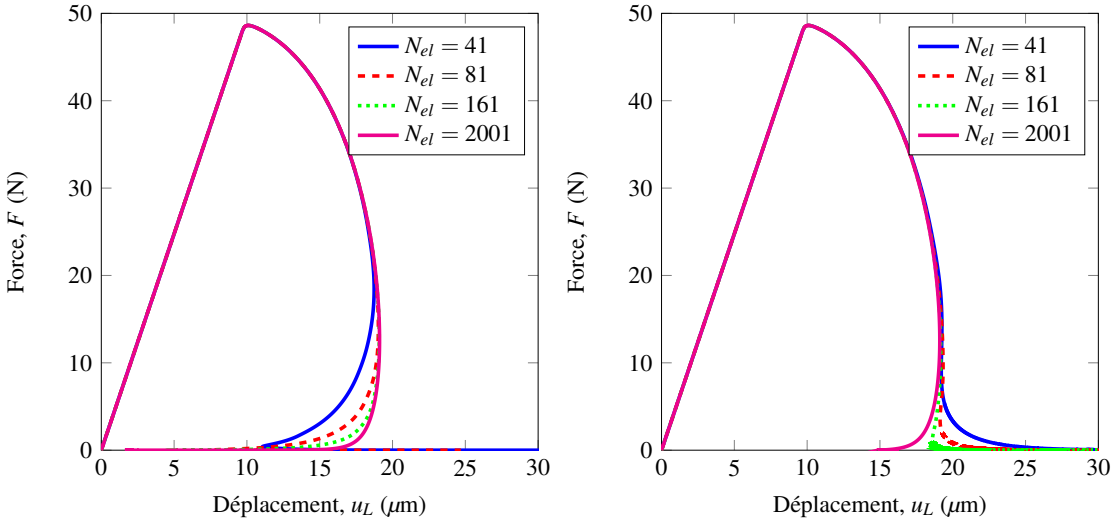
1.1 Propriétés de régularisation avec limitation de la métrique

— $\alpha = 0.1$ sur la FIG.A.5
— $\alpha = 0.3$ sur la FIG.A.6
— $\alpha = 0.5$ sur la FIG.A.7
— $\alpha = 0.8$ sur la FIG.A.8



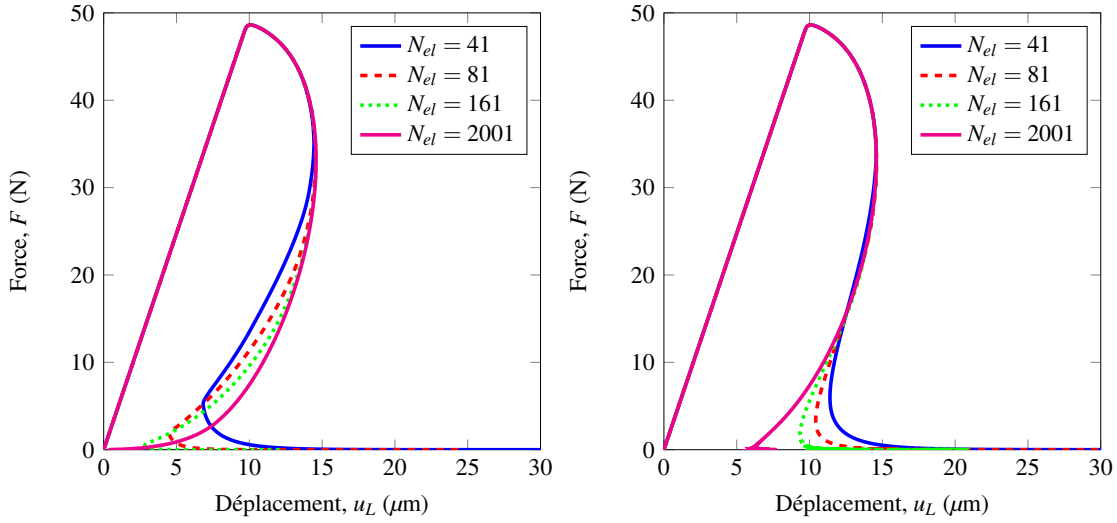
(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.1: Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.1$



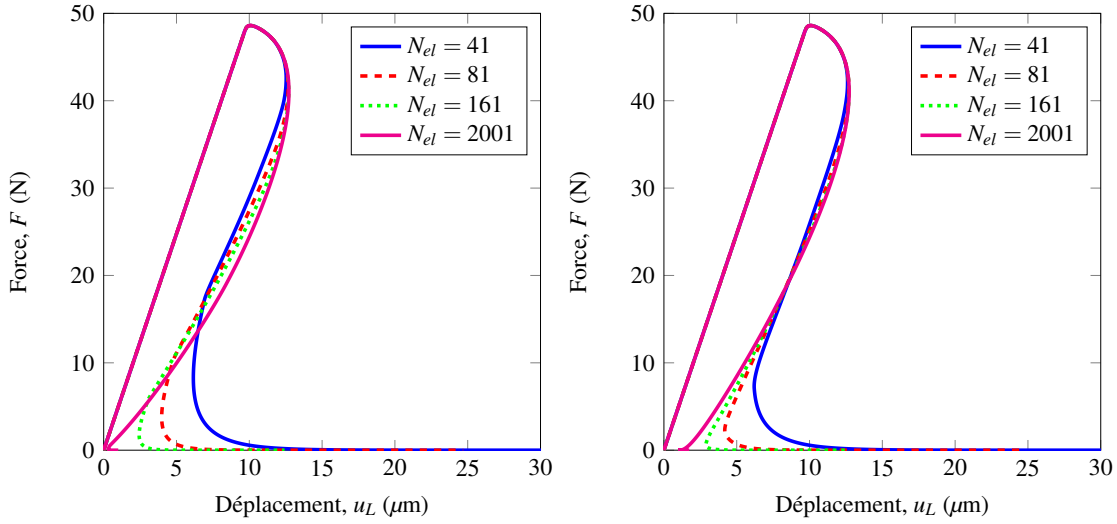
(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.2: Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.3$



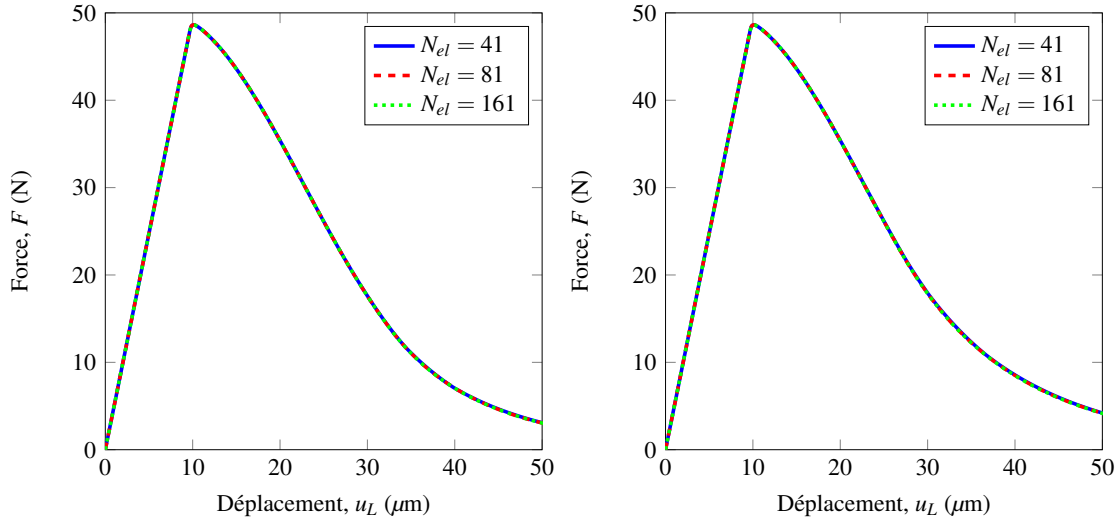
(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.3: Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.5$



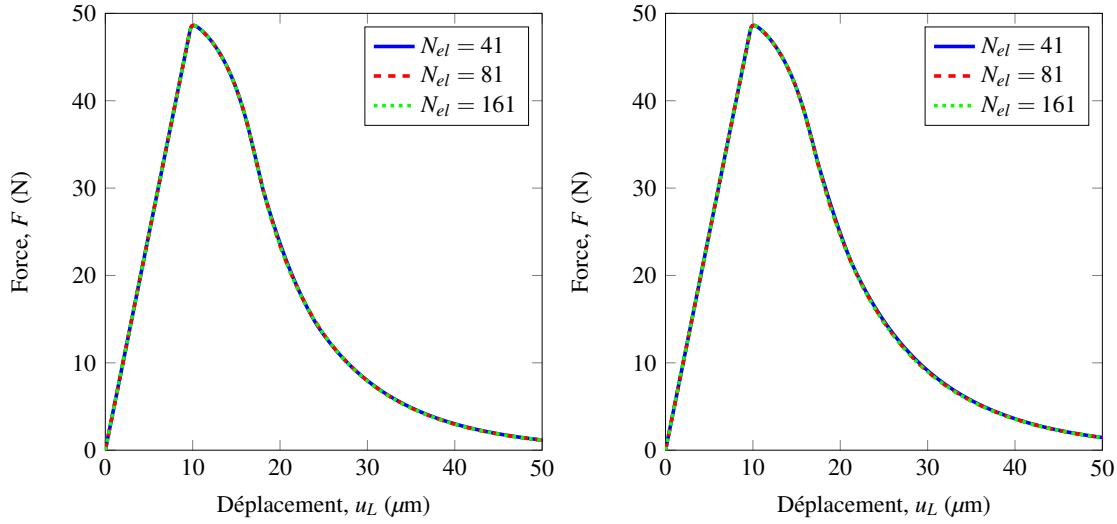
(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.4: Influence de la discrétisation spatiale sur la réponse globale – $\alpha = 0.8$



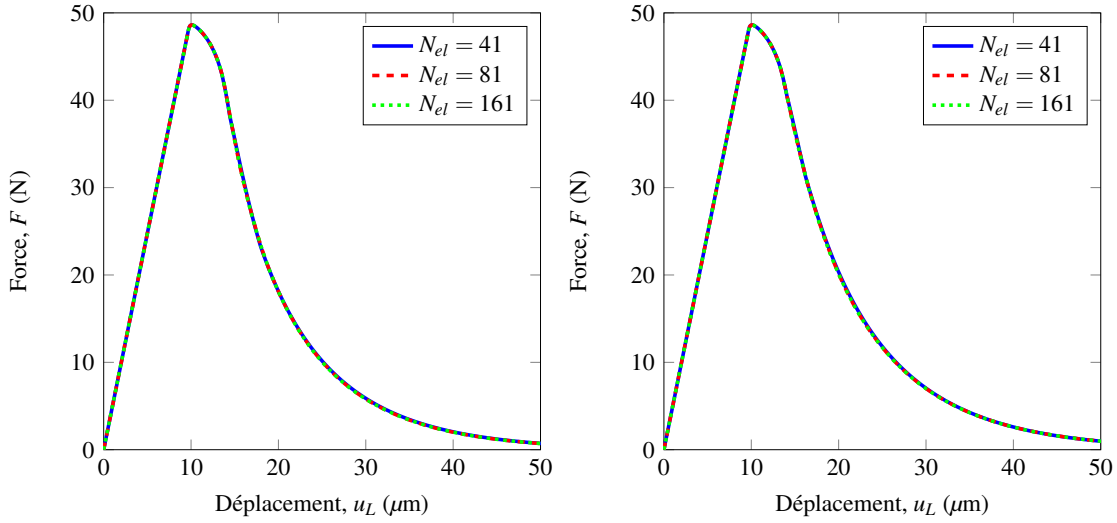
(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.5: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.1$



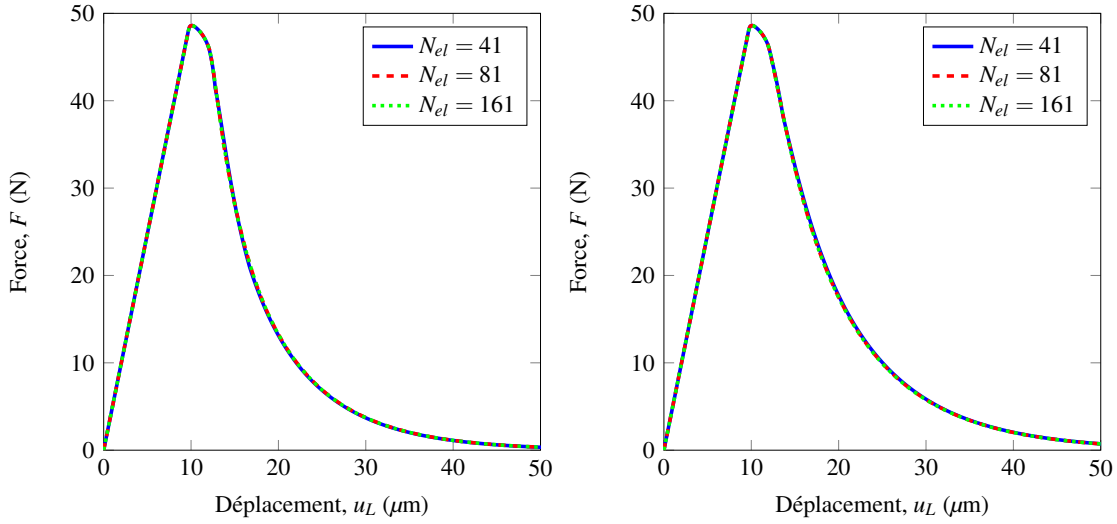
(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.6: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.3$



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.7: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.5$



(a) ENL1 **(b)** ENL2

FIGURE A.8: Propriétés de régularisation de la formulation ENL avec métrique modifiée – $\alpha = 0.8$

Annexe B

Résolution numérique aux éléments finis enrichis

1 Description de la discontinuité et notations

La formulation du modèle est basée sur la formulation développée par [Jirásek et Zimmermann, 2001a] pour les éléments finis linéaires à 3 nœuds. Afin de simplifier le développement des équations du modèle, la notation de Voigt est utilisée. Ainsi les tenseurs des déformations et des contraintes sont notés sous la forme vectorielle suivante dans le repère des coordonnées globales ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$) :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

Conformément au schéma de la figure B.1, la discontinuité est définie par un vecteur d'ouverture $\boldsymbol{e}$ et un vecteur représentant les contraintes cohésives $\boldsymbol{t}$. Dans le repère local de la discontinuité, l'indices $\cdot_n$ indique la direction normale à la discontinuité et l'indice $\cdot_m$ la direction orthogonale à la normale :

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_n \\ e_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_n \\ t_m \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

Enfin, le vecteur des déplacements nodaux condense les déplacements u_i dans la direction globale $\boldsymbol{X}$ et v_i dans la direction globale $\boldsymbol{Y}$ pour chaque nœud i :

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}^T \tag{B.3}$$

Le cosinus l'angle donnant l'orientation de la discontinuité est noté c et le sinus de l'angle est noté s. Ainsi, les vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$ s'écrivent dans le repère global de la façon suivante :

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

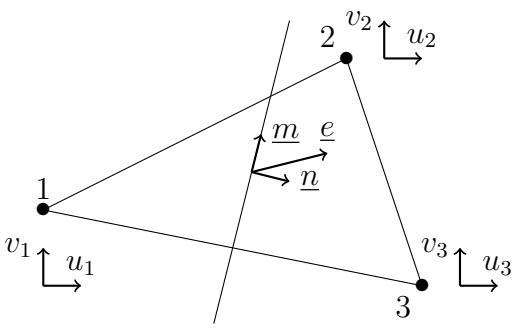


FIGURE B.1: Schéma de la formulation E-FEM

2 Déformation de l'élément

La déformation totale ε de l'élément correspond à la contribution d'une déformation de volume ε_b et d'une contribution de la discontinuité obtenue par l'intermédiaire d'une matrice $\boldsymbol{H}$ à définir :

$$\boldsymbol{\varepsilon_b} = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{\varepsilon_T} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{e} \tag{B.5}$$

Matrice $\boldsymbol{B}$ La matrice $\boldsymbol{B}$ correspond à la matrice des dérivées des fonctions de formes linéaires de l'élément. Dans le cadre des éléments finis, le déplacement en un point à l'intérieur d'un élément est donné à partir des déplacements nodaux et des fonctions d'interpolations.

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} N_i(x,y) \tag{B.6}$$

avec $N_i(x,y) = a_i x + b_i y + c_i$. Il est très simple de calculer les coefficients a_i, b_i, c_i en sachant que la fonction de forme N_i est unitaire au nœud i et nulle aux nœuds j : $N_i(x_j,y_j) = \delta_{ij}$. Les coefficients en fonction des coordonnées des nœuds et de l'aire A du triangle sont alors donnés par :

$$\begin{array}{ll} a_1 = (y_2 - y_3)/2A & b_1 = (x_3 - x_2)/2A \\ a_2 = (y_3 - y_1)/2A & b_2 = (x_1 - x_3)/2A \\ a_3 = (y_1 - y_2)/2A & b_3 = (x_2 - x_1)/2A \end{array}$$

Il n'est pas nécessaire d'expliciter les coefficients c_i dans le cadre de cette formulation.

Sous l'hypothèse des petites perturbations supposée ici, la déformation en un point de l'élément est donnée par le gradient symétrique du déplacement en ce point :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) \tag{B.7}$$

La matrice $\boldsymbol{B}$ correspondante est alors simplement obtenue à partir des caractéristiques géométriques de l'élément.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

Matrice $\boldsymbol{H}$ La matrice $\boldsymbol{H}$ permet de rendre compte de l'effet du saut de déplacement $\boldsymbol{e}$ sur les déplacements nodaux. Les déplacements nodaux uniquement provoqués par la discontinuité sont notés dans le repère global par $\tilde{u}_i$ et $\tilde{v}_i$ pour le nœud i. À ce stade, il faut noter que l'élément est séparé en deux parties distinctes. La partie Ω_+ correspond à la partie située dans le sens de la normale $\boldsymbol{n}$ de la discontinuité. La partie complémentaire de l'élément est notée Ω_- :

$$\tilde{u}_i = \gamma_i \, \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{X} = \gamma_i \, (ce_n - se_m) \quad \tilde{v}_i = \gamma_i \, \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Y} = \gamma_i \, (se_n + ce_m) \tag{B.9}$$

avec $\gamma_1 = 1$ si le nœud i est dans Ω_+ et $\gamma_i = 0$ sinon.

Dans le cas de la figure B.1, les nœuds 2 et 3 sont dans Ω_+. La matrice $\boldsymbol{H}$ s'écrit donc simplement :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & s & c & s \\ 0 & 0 & -s & c & -s & c \end{pmatrix}^T \tag{B.10}$$

3 Contraintes dans l'élément

Dans ce chapitre, le comportement de volume dans l'élément est toujours considéré comme élastique. La relation entre la déformation de volume et le vecteur des contraintes dépend alors de la matrice de Hooke élastique $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \, \boldsymbol{\varepsilon_b} \tag{B.11}$$

En contraintes planes, la matrice de Hooke $\boldsymbol{C}$ est s'exprime à l'aide des paramètres d'élasticités E, le module d'Young et ν, le coefficient de Poisson :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

La relation entre les contraintes dans l'élément fini et le vecteur des contraintes cohésives au niveau de la discontinuité est définie par une l'hypothèse de continuité. Ainsi, au niveau de la discontinuité, les contraintes correspondant aux déformations élastiques de volumes sont équivalentes aux contraintes cohésives de la discontinuité :

$$\boldsymbol{P} \, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{t} \tag{B.13}$$

avec la matrice $\boldsymbol{P}$ permettant d'exprimer les contraintes de l'élément dans le repère local de la discontinuité. Pour construire la matrice $\boldsymbol{P}$ il suffit de calculer le vecteur contrainte au niveau de la discontinuité suivant la normale $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} c\sigma_{11} + s\sigma_{12} \\ c\sigma_{12} + s\sigma_{22} \end{pmatrix}_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} \tag{B.14}$$

En exprimant le vecteur contraintes $\boldsymbol{t}$ dans le repère de la discontinuité, on obtient l'expression du vecteur des contraintes cohésives et la matrice $\boldsymbol{P}$ s'écrit alors :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix} \tag{B.15}$$

3.0.1 Schéma de résolution

Avant l'apparition d'une fissure, le comportement de l'élément est connu et le saut de déplacement est nul. Le comportement du matériau peut être élastique dans le cas où les dégradations du matériau sont exclusivement modélisées par la loi cohésive une fois la discontinuité activée. Dans la formulation présentée et étudiée dans ce manuscrit le comportement du matériau avant l'apparition de la discontinuité est considéré comme élastique ou élastique dégradé par l'endommagement. Ainsi, après l'activation de la discontinuité par un critère à définir, le comportement de volume est élastique et ses propriétés sont connues.

Il est alors possible de définir le comportement du matériau après l'activation de la discontinuité par les quatre équations suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon_b} = \boldsymbol{\varepsilon_T} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{e} \tag{B.16}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{\varepsilon_b} \tag{B.17}$$

$$\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{t} \tag{B.18}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{e}\right) \tag{B.19}$$

Les quatre équations peuvent se mettre sous la forme d'une seule, ne faisant apparaître que le saut de déplacement de la discontinuité $\boldsymbol{e}$ comme inconnue :

$$\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon_T} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{e}\right) = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{e}\right) \tag{B.20}$$

Un résidu est écrit pour tester la convergence à l'itération k :

$$\boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon_T} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{e}^k\right) - \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{e}^k\right) \tag{B.21}$$

Si le résidu à l'itération k n'est pas de norme nulle (inférieure à une tolérance $\mathcal{T}$), on cherche à l'annuler à l'itération $k+1$ en corrigeant le saut de déplacement $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k + \mathrm{d}\boldsymbol{R}^{k+1} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{k+1} = 0 \tag{B.22}$$

La correction à appliquer au saut de déplacement à chaque itération est calculée en fonction de la valeur non nulle du résidu de l'itération précédente et de l'état mécanique du matériau de l'itération en cours :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{k+1} = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}\right)^{-1}\boldsymbol{R}^k \tag{B.23}$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}} \tag{B.24}$$

L'objectif de cet algorithme est de calculer les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et l'ouverture $\boldsymbol{e}$ à partir du vecteur des déplacements nodaux préalablement calculé au niveau de la boucle de résolution globale des éléments finis. L'algorithme 3 correspond simplement à l'évaluation d'une loi de comportement pour l'intégration des contraintes. La convergence des itérations sur le calcul de l'ouverture est établie lorsque la norme du résidu R est inférieure à la tolérance $\mathcal{T}$.

Algorithme 3 : Algorithme de résolution E-FEM

Données d'entrée : ε_T^{i+1}, e^i, $\boldsymbol{V}^i$
Résultats : $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$, e^{i+1}, $\boldsymbol{V}^{i+1}$
$\boldsymbol{\sigma} \leftarrow \boldsymbol{C}\ \left(\varepsilon_{\boldsymbol{T}}^{i+1} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ e^i\right)$
si $f < 0$ **alors**
  $\boldsymbol{\sigma}^{i+1} \leftarrow \boldsymbol{\sigma}$
  $e^{i+1} \leftarrow e^i$
  $\boldsymbol{V}^{i+1} \leftarrow \boldsymbol{V}^i$
  Fin
$\boldsymbol{R} \leftarrow \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{C}\ \left(\varepsilon_{\boldsymbol{T}}^{i+1} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ e\right) - \boldsymbol{g}\left(e\right)$
tant que $||\boldsymbol{R}|| > \mathcal{T}$ **faire**
  $\mathrm{d}e \leftarrow -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}e}\right)^{-1} \boldsymbol{R}$
  $e \leftarrow e + \mathrm{d}e$
  si $e_n < 0$ **alors**
    $\boldsymbol{\sigma}^{i+1} \leftarrow \boldsymbol{C}\ \varepsilon_{\boldsymbol{T}}^{i+1}$
    $e^{i+1} \leftarrow e^i$
    $e_n^{i+1} \leftarrow 0$
    $\boldsymbol{V}^{i+1} \leftarrow \boldsymbol{V}^i$
    Fin
  $\boldsymbol{R} \leftarrow \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{C}\ \left(\varepsilon_{\boldsymbol{T}}^{i+1} - \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{H}\ e\right) - \boldsymbol{g}\left(e\right)$
Fin

Bibliographie

[Alam *et al.*, 2014] ALAM, S. Y., SALIBA, J. et LOUKILI, A. (2014). Fracture examination in concrete through combined digital image correlation and acoustic emission techniques. *Construction and Building Materials*, 69:232–242.

[Alfaiate *et al.*, 2002] ALFAIATE, J., WELLS, G. N. et SLUYS, L. J. (2002). On the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-I and mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(6):661–686.

[Anderson et Anderson, 2005] ANDERSON, T. L. et ANDERSON, T. L. (2005). *Fracture Mechanics : Fundamentals and Applications, Third Edition*. CRC Press.

[Bazant *et al.*, 2010] BAZANT, Z., LE, J.-L. et HOOVER, C. (2010). Nonlocal boundary layer (nbl) model : Overcoming boundary condition problems in strength statistics and fracture analysis of quasibrittle materials. *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures-Recent Advances in Fracture Mechanics of Concrete*, pages 135–143.

[Bažant et Jirásek, 2002] BAŽANT, Z. P. et JIRÁSEK, M. (2002). Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage : Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11):1119–1149.

[Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989] BAŽANT, Z. P. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4):755–767. Publisher : American Society of Civil Engineers.

[Bažant et Planas, 2019] BAŽANT, Z. P. et PLANAS, J. (2019). *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. Routledge, Boca Raton.

[Bolander *et al.*, 1996] BOLANDER, J. E., SHIRAISHI, T. et ISOGAWA, Y. (1996). An adaptive procedure for fracture simulation in extensive lattice networks. *Engineering Fracture Mechanics*, 54(3):325–334.

[Boudon-Cussac *et al.*, 1999] BOUDON-CUSSAC, D., HILD, F. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1999). Tensile Damage in Concrete : Analysis of Experimental Technique. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(8):906–913. Publisher : American Society of Civil Engineers.

[Brenner et Scott, 2008] BRENNER, S. et SCOTT, R. (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 3 édition.

[Carlini *et al.*, 2013] CARLINI, E., FALCONE, M. et HOCH, P. (2013). A Generalized Fast Marching Method on Unstructured Triangular Meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(6):2999–3035. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics.

[Carmeliet, 1999] CARMELIET, J. (1999). Optimal estimation of gradient damage parameters from localization phenomena in quasi-brittle materials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4(1):1–16. _eprint : https ://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/%28SICI%291099-1484%28199901%294%3A1%3C1%3A%3AAID-CFM54%3E3.0.CO%3B2-F.

[Cazes *et al.*, 2009] CAZES, F., CORET, M., COMBESCURE, A. et GRAVOUIL, A. (2009). A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6):1476–1490.

[Cerf, 1994] CERF, R. (1994). *Une théorie asymptotique des algorithmes génétiques*. These de doctorat, Montpellier 2.

[Chacon et Vladimirsky, 2011] CHACON, A. et VLADIMIRSKY, A. (2011). Fast two-scale methods for Eikonal equations. *arXiv :1110.6220 [math]*.

[Cordebois et Sidoroff, 1982] CORDEBOIS, J. et SIDOROFF, F. (1982). Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Numéro spécial:45–60.

[Crisfield, 1981] CRISFIELD, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures*, 13(1):55–62.

[Cundall et Strack, 1979] CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65. Publisher : ICE Publishing.

[Cusatis *et al.*, 2003] CUSATIS, G., BAŽANT, Z. P. et CEDOLIN, L. (2003). Confinement-Shear Lattice Model for Concrete Damage in Tension and Compression : I. Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(12):1439–1448. Publisher : American Society of Civil Engineers.

[Cusatis *et al.*, 2006] CUSATIS, G., BAŽANT, Z. P. et CEDOLIN, L. (2006). Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7154–7171.

[Cuvilliez *et al.*, 2012] CUVILLIEZ, S., FEYEL, F., LORENTZ, E. et MICHEL-PONNELLE, S. (2012). A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237-240:244–259.

[de Borst *et al.*, 2012] de BORST, R., CRISFIELD, M. A., REMMERS, J. J. C. et VERHOOSEL, C. V. (2012). Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, 2nd Edition. Publication Title : Wiley.

[De Borst et Mühlhaus, 1992] DE BORST, R. et MÜHLHAUS, H.-B. (1992). Gradient-dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(3):521–539. _eprint : https ://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620350307.

[de Vree *et al.*, 1995] de VREE, J. H. P., BREKELMANS, W. A. M. et van GILS, M. A. J. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, 55(4):581–588.

[Desmorat, 2015] DESMORAT, R. (2015). Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton. *Rencontres Universitaires de Génie Civil*, page 9.

[Desmorat *et al.*, 2015] DESMORAT, R., GATUINGT, F. et JIRÁSEK, M. (2015). Nonlocal models with damage-dependent interactions motivated by internal time. *Engineering Fracture Mechanics*, 142: 255–275.

[Desmorat *et al.*, 2007] DESMORAT, R., GATUINGT, F. et RAGUENEAU, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10):1539–1560.

[Dijkstra, 1959] DIJKSTRA, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271.

[Dong *et al.*, 2018] DONG, W., RONG, H., WU, Q. et LI, J. (2018). Investigations on the FPZ evolution of concrete after sustained loading by means of the DIC technique. *Construction and Building Materials*, 188:49–57.

[Dvorkin et Assanelli, 1991] DVORKIN, E. N. et ASSANELLI, A. P. (1991). 2D finite elements with displacement interpolated embedded localization lines : The analysis of fracture in frictional materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90(1):829–844.

[Elices *et al.*, 2002] ELICES, M., GUINEA, G. V., GÓMEZ, J. et PLANAS, J. (2002). The cohesive zone model : advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2):137–163.

[Erdogan, 2000] ERDOGAN, F. (2000). Fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 37(1):171–183.

[Eringen et Edelen, 1972] ERINGEN, A. C. et EDELEN, D. G. B. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3):233–248.

[Feenstra, 1993] FEENSTRA, P. H. (1993). *Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete*. PhD Thesis, Delft University.

[Feenstra et De Borst, 1995] FEENSTRA, P. H. et DE BORST, R. (1995). A survey of plasticity and damage-based models for FE analysis of fracture in concrete. *Computational plasticity ; fundamentals and applications ; proceedings of the fourth international conference held in Barcelona, Spain, 3rd-6th, April, 1995.Pt.2., 1535-1546. (1995)*.

[Fomel *et al.*, 2009] FOMEL, S., LUO, S. et ZHAO, H. (2009). Fast sweeping method for the factored eikonal equation. *Journal of Computational Physics*, 228(17):6440–6455.

[Frémond et Nedjar, 1996] FRÉMOND, M. et NEDJAR, B. (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1083–1103. Publisher : Elsevier, Amsterdam MSC2010 : 74R99 = Fracture and damage.

[Gangnant, 2016] GANGNANT, A. (2016). Modélisation de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique. *In 34èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil de l'AUGC (RUGC 2016)*, Liège, Belgium.

[Gangnant *et al.*, 2016] GANGNANT, A., SALIBA, J., LA BORDERIE, C. et MOREL, S. (2016). Modeling of the quasibrittle fracture of concrete at meso-scale : Effect of classes of aggregates on global and local behavior. *Cement and Concrete Research*, 89:35–44.

[Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002] GATUINGT, F. et PIJAUDIER-CABOT, G. (2002). Coupled damage and plasticity modelling in transient dynamic analysis of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(1):1–24. _eprint : https ://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nag.188.

[Germain *et al.*, 1983] GERMAIN, P., SON NGUYEN, Q. et SUQUET, P. (1983). Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50:1010–1020. Publisher : American Society of Mechanical Engineers.

[Giry *et al.*, 2011] GIRY, C., DUFOUR, F. et MAZARS, J. (2011). Stress-based nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 48(25):3431–3443.

[Goodfellow *et al.*, 2016] GOODFELLOW, I., BENGIO, Y. et COURVILLE, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.

[Grassl et Jirásek, 2006] GRASSL, P. et JIRÁSEK, M. (2006). Damage-plastic model for concrete failure. *International Journal of Solids and Structures*, 43(22):7166–7196.

[Grassl *et al.*, 2013] GRASSL, P., XENOS, D., NYSTRÖM, U., REMPLING, R. et GYLLTOFT, K. (2013). CDPM2 : A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 50(24):3805–3816.

[Gremaud et Kuster, 2006] GREMAUD, P. A. et KUSTER, C. M. (2006). Computational Study of Fast Methods for the Eikonal Equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6):1803–1816.

[Griffith, 1921] GRIFFITH, A. A. (1921). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221:163–198. Publisher : The Royal Society.

[Grondin *et al.*, 2007] GRONDIN, F., DUMONTET, H., BEN HAMIDA, A., MOUNAJED, G. et BOUSSA, H. (2007). Multi-scales modelling for the behaviour of damaged concrete. *Cement and Concrete Research*, 37(10):1453–1462.

[Grégoire *et al.*, 2012] GRÉGOIRE, D., ROJAS-SOLANO, L. B. et PIJAUDIER-CABOT, G. (2012). Continuum to discontinuum transition during failure in non-local damage models. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 10(6):136.

[Grégoire *et al.*, 2013] GRÉGOIRE, D., ROJAS-SOLANO, L. B. et PIJAUDIER-CABOT, G. (2013). Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(10):1434–1452. Publisher : Wiley.

[Haidar *et al.*, 2005] HAIDAR, K., PIJAUDIER-CABOT, G., DUBÉ, J. F. et LOUKILI, A. (2005). Correlation between the internal length, the fracture process zone and size effect in model materials. *Materials and Structures*, 38(2):201.

[Hill, 1958] HILL, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3):236–249.

[Hillerborg, 1991] HILLERBORG, A. (1991). Application of the fictitious crack model to different types of materials. *International Journal of Fracture*, 51:95–102.

[Hillerborg *et al.*, 1976] HILLERBORG, A., MODÉER, M. et PETERSSON, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–781.

[Hutchinson et Tvergaard, 1981] HUTCHINSON, J. W. et TVERGAARD, V. (1981). Shear band formation in plane strain. *International Journal of Solids and Structures*, 17(5):451–470.

[Iacono *et al.*, 2006] IACONO, C., SLUYS, L. J. et van MIER, J. G. M. (2006). Estimation of model parameters in nonlocal damage theories by inverse analysis techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7211–7222.

[Irwin, 1957] IRWIN, G. R. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(3):361–364.

[Jason *et al.*, 2006] JASON, L., HUERTA, A., PIJAUDIER-CABOT, G. et GHAVAMIAN, S. (2006). An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52): 7077–7092.

[Jirásek, 1998] JIRÁSEK, M. (1998). Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31):4133–4145.

[Jirásek, 2000] JIRÁSEK, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1):307–330.

[Jirásek, 2007] JIRÁSEK, M. (2007). Mathematical analysis of strain localization. *Revue Européenne de Génie Civil*, 11.

[Jirásek et Desmorat, 2019] JIRÁSEK, M. et DESMORAT, R. (2019). Localization analysis of nonlocal models with damage-dependent nonlocal interaction. *International Journal of Solids and Structures*, 174-175:1–17.

[Jirásek et Suárez, 2016] JIRÁSEK, M. et SUÁREZ, F. (2016). Localization properties of Desmorat's anisotropic damage model. *Computers & Structures*, 174:139–153.

[Jirásek et Zimmermann, 2001a] JIRÁSEK, M. et ZIMMERMANN, T. (2001a). Embedded crack model : I. Basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6):1269–1290.

[Jirásek et Zimmermann, 2001b] JIRÁSEK, M. et ZIMMERMANN, T. (2001b). Embedded crack model. Part II : combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6):1291–1305.

[Kim *et al.*, 2020] KIM, S.-K., SHIN, H. G., TIMILSINA, S. et KIM, J. S. (2020). Determining the Fracture Process Zone Length and Mode I Stress Intensity Factor in Concrete Structures via Mechanoluminescent Technology. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 20(5):1257.

[Krayani *et al.*, 2009] KRAYANI, A., PIJAUDIER-CABOT, G. et DUFOUR, F. (2009). Boundary effect on weight function in nonlocal damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(14):2217–2231.

[Laurent, 2013] LAURENT, L. (2013). *Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l'optimisation multiniveaux de structures*. phdthesis, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.

[Le Bellégo *et al.*, 2003] LE BELLÉGO, C., FRANÇOIS DUBÉ, J., PIJAUDIER-CABOT, G. et GÉRARD, B. (2003). Calibration of nonlocal damage model from size effect tests. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(1):33–46.

[Lee *et al.*, 2004] LEE, S.-K., SONG, Y.-C. et HAN, S.-H. (2004). Biaxial behavior of plain concrete of nuclear containment building. *Nuclear Engineering and Design*, 227(2):143–153.

[Lemaitre *et al.*, 2009] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 3 édition.

[Lemaitre *et al.*, 2000] LEMAITRE, J., DESMORAT, R. et SAUZAY, M. (2000). Anisotropic damage law of evolution. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(2):187–208.

[Lorentz, 2008] LORENTZ, E. (2008). *Modélisation et simulation numérique de l'endommagement des structures*. thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

[Mahnken et Kuhl, 1999] MAHNKEN, R. et KUHL, E. (1999). Parameter identification of gradient enhanced damage models with the finite element method. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 18(5):819–835.

[Mazars, 1984] MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement linéaire et à la rupture du béton de structure*. PhD Thesis, Université Paris VI.

[Mazars *et al.*, 1990] MAZARS, J., BERTHAUD, Y. et RAMTANI, S. (1990). The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(4):629–635.

[Miehe *et al.*, 2010] MIEHE, C., WELSCHINGER, F. et HOFACKER, M. (2010). Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10):1273–1311. _eprint : https ://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2861.

[Mitchell, 1996] MITCHELL, M. (1996). *An Introduction to Genetic Algorithms*. Complex Adaptive Systems. A Bradford Book, Cambridge, MA, USA.

[Moës et Belytschko, 2002] MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833.

[Moës et Chevaugeon, 2021] MOËS, N. et CHEVAUGEON, N. (2021). Lipschitz regularization for softening material models : the Lip-field approach. *Comptes Rendus. Mécanique*, 349(2):415–434.

[Moës *et al.*, 1999] MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150. _eprint : https ://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819990910%2946%3A1%3C131%3A%3AAID-NME726%3E3.0.CO%3B2-J.

[Moës *et al.*, 2011] MOËS, N., STOLZ, C., BERNARD, P.-E. et CHEVAUGEON, N. (2011). A level set based model for damage growth : The thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(3):358–380.

[Murakami et Ohno, 1981] MURAKAMI, S. et OHNO, N. (1981). A Continuum Theory of Creep and Creep Damage. *In* PONTER, A. R. S. et HAYHURST, D. R., éditeurs : *Creep in Structures*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, pages 422–444, Berlin, Heidelberg. Springer.

[Mühlenbein et Paass, 1996] MÜHLENBEIN, H. et PAASS, G. (1996). From Recombination of Genes to the Estimation of Distributions I. Binary Parameters. *In From Recombination of Genes to the Estimation of Distributions I. Binary Parameters*, volume 1141, pages 178–187.

[Mühlhaus et Alfantis, 1991] MÜHLHAUS, H. B. et ALFANTIS, E. C. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(7):845–857.

[Nelissen, 1972] NELISSEN, L. J. M. (1972). Biaxial Testing of Normal Concrete. *HERON, 18 (1), 1972*.

[Oliveira *et al.*, 2021] OLIVEIRA, H. L., RASTIELLO, G., MILLARD, A., BITAR, I. et RICHARD, B. (2021). Modular implementation framework of partitioned path-following strategies : Formulation, algorithms and application to the finite element software Cast3M. *Advances in Engineering Software*, 161:103055.

[Oliver, 1996] OLIVER, J. (1996). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1 : Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(21):3575–3600.

[Oliver *et al.*, 2002] OLIVER, J., HUESPE, A. E., PULIDO, M. D. G. et CHAVES, E. (2002). From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2):113–136.

[Ortiz *et al.*, 1987] ORTIZ, M., LEROY, Y. et NEEDLEMAN, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(2):189–214.

[Otsuka et Date, 2000] OTSUKA, K. et DATE, H. (2000). Fracture process zone in concrete tension specimen. *Engineering Fracture Mechanics*, 65(2):111–131.

[Ottosen et Runesson, 1991] OTTOSEN, N. S. et RUNESSON, K. (1991). Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 27(4):401–421.

[Peerlings *et al.*, 1996] PEERLINGS, R. H. J., BORST, R. D., BREKELMANS, W. a. M. et VREE, J. H. P. D. (1996). Gradient Enhanced Damage for Quasi-Brittle Materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19):3391–3403.

[Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993] PIJAUDIER-CABOT, G. et BENALLAL, A. (1993). Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 30(13):1761–1775.

[Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] PIJAUDIER-CABOT, G. et BAŽANT, Z. P. (1987). Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10):1512–1533.

[Pijaudier-Cabot *et al.*, 2004] PIJAUDIER-CABOT, G., HAIDAR, K. et DUBÉ, J.-F. (2004). Non-local damage model with evolving internal length. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7-8):633–652.

[Ramtani, 1990] RAMTANI, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommage avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris ; 1971-2017, France.

[Rastiello *et al.*, 2018] RASTIELLO, G., GIRY, C., GATUINGT, F. et DESMORAT, R. (2018). From diffuse damage to strain localization from an Eikonal Non-Local (ENL) Continuum Damage model with evolving internal length. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331:650–674.

[Rastiello *et al.*, 2019] RASTIELLO, G., RICCARDI, F. et RICHARD, B. (2019). Discontinuity-scale path-following methods for the embedded discontinuity finite element modeling of failure in solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 349:431–457.

[Riccardi *et al.*, 2017] RICCARDI, F., KISHTA, E. et RICHARD, B. (2017). A step-by-step global crack-tracking approach in E-FEM simulations of quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 170:44–58.

[Rice, 1968] RICE, J. R. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):379–386.

[Rickett et Fomel, 2001] RICKETT, J. et FOMEL, S. (2001). A Second-Order Fast Marching Eikonal Solver.

[Riks, 1979] RIKS, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7):529–551.

[Rizzi *et al.*, 1995] RIZZI, E., CAROL, I. et WILLAM, K. (1995). Localization Analysis of Elastic Degradation with Application to Scalar Damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(4):541–554. Publisher : American Society of Civil Engineers.

[Rouy et Tourin, 1992] ROUY, E. et TOURIN, A. (1992). A Viscosity Solutions Approach to Shape-From-Shading. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(3):867–884.

[Rudnicki et Rice, 1975] RUDNICKI, J. W. et RICE, J. R. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6):371–394.

[Schauffert et Cusatis, 2012] SCHAUFFERT, E. A. et CUSATIS, G. (2012). Lattice Discrete Particle Model for Fiber-Reinforced Concrete. I : Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 138(7):826–833. Publisher : American Society of Civil Engineers.

[Schlangen et van Mier, 1992] SCHLANGEN, E. et van MIER, J. G. M. (1992). Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. *Materials and Structures*, 25(9):534–542.

[Sethian, 1996] SETHIAN, J. A. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4):1591–1595.

[Shah et Ouyang, 1994] SHAH, S. P. et OUYANG, C. (1994). Fracture Mechanics for Failure of Concrete. *Annual Review of Materials Science*, 24(1):293–320.

[Shen *et al.*, 2021] SHEN, L., DI LUZIO, G., ZHU, D., YAO, X., CUSATIS, G., CAO, M., HAN, Y., WANG, Y. et REN, Q. (2021). Mechanical Responses of Steel Fiber–Reinforced Concrete after Exposure to High Temperature : Experiments and Mesoscale Discrete Modeling. *Journal of Engineering Mechanics*, 147(11):04021084. Publisher : American Society of Civil Engineers.

[Simo *et al.*, 1993] SIMO, J. C., OLIVER, J. et ARMERO, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5): 277–296.

[Simone *et al.*, 2004] SIMONE, A., ASKES, H. et SLUYS, L. J. (2004). Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media. *International Journal of Solids and Structures*, 41(2):351–363.

[Simone *et al.*, 2003] SIMONE, A., WELLS, G. N. et SLUYS, L. J. (2003). From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(41):4581–4607.

[Skarżyński *et al.*, 2011] SKARŻYŃSKI, , SYROKA, E. et TEJCHMAN, J. (2011). Measurements and Calculations of the Width of the Fracture Process Zones on the Surface of Notched Concrete Beams. *Strain*, 47(s1):e319–e332.

[Soleilhet, 2018] SOLEILHET, F. (2018). *Etudes expérimentales et numériques des matériaux cimentaires sous sollicitations hydro-mécaniques*. phdthesis, Université Paris-Saclay.

[Tenchev et Purnell, 2005] TENCHEV, R. et PURNELL, P. (2005). An application of a damage constitutive model to concrete at high temperature and prediction of spalling. *International Journal of Solids and Structures*, 42(26):6550–6565.

[Terrien, 1980] TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post- critique. *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 105:65–72.

[Triantafyllidis et Aifantis, 1986] TRIANTAFYLLIDIS, N. et AIFANTIS, E. C. (1986). A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16:225–237. Publisher : Springer Netherlands, Dordrecht MSC2010 : 74B20 = Nonlinear elasticity MSC2010 : 74S30 = Other numerical methods in solid mechanics (MSC2010).

[Tsai *et al.*, 2003] TSAI, Y.-H. R., CHENG, L.-T., OSHER, S. et ZHAO, H.-K. (2003). Fast Sweeping Algorithms for a Class of Hamilton–Jacobi Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(2): 673–694.

[Tsitsiklis, 1995] TSITSIKLIS, J. (1995). Efficient Algorithms for Globally Optimal Trajectories. *Transactions on Automatic Control*, 40(9):1528–1538.

[van Mier, 2008] van MIER, J. G. M. (2008). Framework for a generalized four-stage fracture model of cement-based materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(18):5072–5086.

[Vassaux *et al.*, 2016] VASSAUX, M., OLIVER-LEBLOND, C., RICHARD, B. et RAGUENEAU, F. (2016). Beam-particle approach to model cracking and energy dissipation in concrete : Identification strategy and validation. *Cement and Concrete Composites*, 70:1–14.

[Willam et Warnke, 1974] WILLAM, K. et WARNKE, E. (1974). Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. *In Seminar on concrete strucutres subjected to triaxial stresses*.

[Williams, 1956] WILLIAMS, M. (1956). On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *undefined*.

[Wittmann et Hu, 1991] WITTMANN, F. H. et HU, X. (1991). Fracture process zone in cementitious materials. *International Journal of Fracture*, 51(1):3–18.

[Yip *et al.*, 2006] YIP, M., LI, Z., LIAO, B.-S. et BOLANDER, J. E. (2006). Irregular lattice models of fracture of multiphase particulate materials. *International Journal of Fracture*, 140(1):113–124.

[Yu *et al.*, 2019] YU, Y., ZENG, W., LIU, W., ZHANG, H. et WANG, X. (2019). Crack Propagation and Fracture Process Zone (FPZ) of Wood in the Longitudinal Direction Determined Using Digital Image Correlation (DIC) Technique. *Remote Sensing*, 11:1562.