UNIVERSITÉ DE RENNES 1

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE RENNES 1

ECOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par
Léo MORIN

Analyse spectrale semiclassique du Laplacien magnétique

Étude des états semi-excités par formes normales de Birkhoff

Thèse présentée et soutenue à l'Université de Rennes 1, le 13 Juillet 2021
Unité de recherche : IRMAR (UMR CNRS 6625)

Rapporteurs avant soutenance :

Véronique FISCHER	Senior Lecturer, University of Bath
Stéphane NONNENMACHER	Professeur, Université Paris-Sud

Composition du Jury :

Rapporteurs :	Véronique FISCHER	Senior Lecturer, University of Bath
	Stéphane NONNENMACHER	Professeur, Université Paris-Sud
Examinateurs :	Christophe CHEVERRY	Professeur, Université de Rennes 1
	Søren FOURNAIS	Professeur, Aarhus University
	Lysianne HARI	Maître de conférences, Université de Bourgogne Franche Comté
	Dorian LE PEUTREC	Professeur, Université d'Orléans
Dir. de thèse :	Nicolas RAYMOND	Professeur, Université d'Angers
	San VŨ NGỌC	Professeur, Université de Rennes 1

Analyse spectrale semiclassique du Laplacien magnétique : Étude des états semi-excités par formes normales de Birkhoff

Léo Morin

Remerciements

Ces trois années de thèse furent riches et étonnantes, elles m'ont appris énormément et pas seulement sur le plan mathématique. Tout ceci fut possible grâce aux nombreux acteurs qui y ont participé directement ou indirectement, et à qui je voudrais adresser de très chaleureux remerciements.

Bien sûr, je pense d'abord à Nicolas et San. Merci pour la grande confiance que vous m'avez accordée depuis le début, et pour le soutient que vous m'avez apporté dans les moments plus difficiles. Nos discussions passionnantes et vos visions des mathématiques me guideront encore longtemps.

Un grand merci également aux chercheurs qui ont acceptés de faire partie de mon jury, et tout particulièrement aux rapporteurs, Véronique Fischer et Stéphane Nonnenmacher qui ont pris le temps de relire cette thèse en détail.

Au-delà des aspects mathématiques, rien n'aurait été possible sans trois personnes à qui je dois tout : Cassandra, Marie, et Maman. Je ne vous remercierai jamais assez pour tout ce que vous m'avez apporté. Merci à mon père et à mes grand-parents, qui m'ont toujours soutenu et à qui je pense particulièrement aujourd'hui.

Merci Antoine pour ces neufs années d'amitié et de mathématiques partagées, de la salle de khôle au bureau 203. Merci Lucile, Fabrice, Tom, Noémie, Camille et Juliette pour ces magnifiques années passées à Rennes. Merci Louis, Léopold, Josselin, Paul, et les autres doctorants pour tous ces moments partagés à l'IRMAR, et pas seulement. Merci Tho et Enguerrand pour ces discussions toujours aussi agréables.

Table des matières

1 Introduction **9**

1.1 Du monde classique au monde quantique . . . 9
1.1.1 La mécanique classique . . . 9
1.1.2 La mécanique quantique . . . 11
1.1.3 Le Laplacien magnétique . . . 12
1.1.4 La limite semi-classique . . . 13
1.1.5 Quantification . . . 13
1.2 Approximation Harmonique . . . 14
1.2.1 Oscillateur Harmonique . . . 14
1.2.2 Forme normale de Birkhoff . . . 15
1.3 Spectre du Laplacien magnétique . . . 18
1.3.1 Champ magnétique constant . . . 18
1.3.2 Champ magnétique confinant, avec $\mathbf{B}(q)$ inversible . . . 19
1.3.3 Influence du noyau de $\mathbf{B}(q)$ . . . 24
1.3.4 Perturbation non-autoadjointe du Laplacien magnétique . . . 25
1.4 Conclusion . . . 26
1.5 Sommaire . . . 28

2 Le Laplacien Magnétique **31**

2.1 Définition du Laplacien magnétique . . . 31
2.1.1 Définition sur $\mathbf{R}^d$ . . . 31
2.1.2 Définition sur une variété Riemannienne . . . 33
2.2 Le champ magnétique . . . 33
2.2.1 Champ magnétique sur $\mathbf{R}^d$ . . . 33
2.2.2 Champ magnétique sur une variété . . . 34
2.2.3 Changements de jauge . . . 34
2.2.4 Fonction d'intensité magnétique . . . 35
2.3 Écriture en coordonnées locales . . . 36
2.4 Minoration de l'énergie . . . 37
2.4.1 Minoration en dimension 2 . . . 37
2.4.2 Minoration en dimension quelconque . . . 37
2.5 Premières estimations spectrales . . . 40
2.5.1 Spectre sur une variété compacte . . . 40
2.5.2 Estimation du spectre essentiel . . . 41
2.5.3 Estimation du bas du spectre . . . 41
2.6 Décroissance d'Agmon pour les fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$ . . . 43

2.7 Annexe : Deux lemmes techniques 45

3 Opérateurs Pseudodifférentiels 47
3.1 Opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels sur $\mathbf{R}^d$ 47
3.1.1 Définition et classes de symboles 47
3.1.2 Produit de Weyl 49
3.1.3 Classes $S_\delta(m)$ 50
3.1.4 Quelques propriétés fondamentales 51
3.1.5 Calcul fonctionnel 52
3.2 Opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels sur une variété 53
3.2.1 Définition et symbole principal 53
3.2.2 Symbole sous-principal 56
3.2.3 Symbole du Laplacien magnétique 57
3.3 Théorèmes d'Egorov 59

4 Forme normale de Birkhoff électrique 63
4.1 Principaux résultats 63
4.1.1 Hypothèses 63
4.1.2 Énoncé du Théorème 64
4.1.3 Organisation du chapitre 65
4.2 Construction de la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$ 65
4.2.1 Séries formelles 65
4.2.2 Forme normale de Birkhoff 68
4.2.3 Quantification de la forme normale 70
4.3 Comparaison des spectres de $\mathcal{N}_\hbar$ et de $\mathcal{H}_\hbar$ 74
4.3.1 Microlocalisation des fonctions propres 74
4.3.2 Preuve du Théorème 4.1 76
4.4 Effet de résonances sur la forme normale 78
4.5 Annexe 79

5 Forme normale de Birkhoff magnétique 83
5.1 Principaux résultats 84
5.1.1 Hypothèses 84
5.1.2 Théorème principal 85
5.1.3 Applications dans le cas k=0 87
5.1.4 Applications dans le cas k>0 90
5.1.5 Organisation du Chapitre 94
5.2 Construction de la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$ 94
5.2.1 Réduction du symbole principal H 94
5.2.2 Un espace de séries formelles adapté 103
5.2.3 La forme normale de Birkhoff formelle 105
5.2.4 Quantification de la forme normale 106
5.3 Comparaison des spectres de $\mathcal{L}_\hbar$ et de $\mathcal{N}_\hbar$ 110
5.3.1 Spectre de $\mathcal{N}_\hbar$ 110
5.3.2 Microlocalisation des fonctions propres 111
5.3.3 Preuve du Théorème 5.1 114
5.4 A second normal form in the case $k > 0$ 116

5.4.1 Symplectic reduction of $N_\hbar^{[0]}$ . . . 116
5.4.2 Formal second normal form . . . 118
5.4.3 Quantized second normal form . . . 121
5.4.4 Proof of Theorem 5.5 . . . 123

6 Application to the Bochner Laplacian 125
6.1 Introduction . . . 125
6.1.1 Motivations and context . . . 125
6.1.2 The Bochner Laplacian on a line bundle . . . 126
6.1.3 Main results . . . 128
6.2 Some Remarks . . . 131
6.2.1 The Bochner Laplacian and the magnetic Laplacian are locally the same . . . 131
6.2.2 On the quantization of a magnetic field . . . 131
6.3 Proof of Theorem 6.1 . . . 132
6.3.1 Agmon-like estimates . . . 132
6.3.2 Comparison of the spectrum of Δ^{L^p} and $\mathcal{L}_p^{(j)}$ . . . 135

7 Non-selfadjoint perturbation 139
7.1 Introduction . . . 139
7.1.1 Context . . . 139
7.1.2 Main result . . . 140
7.1.3 Structure of the chapter . . . 143
7.2 A first normal form . . . 143
7.2.1 Proof of Proposition 7.12 . . . 144
7.2.2 Microlocalization of the eigenfunctions . . . 146
7.3 The truncated operator $\widehat{\mathscr{L}_h}$ . . . 147
7.3.1 Operator-valued symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ . . . 148
7.3.2 Expansion of the symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ . . . 150
7.3.3 About the principal part $\mathsf{P}_0(X_2)$ . . . 151
7.4 Parametrix construction and consequences . . . 152
7.4.1 Parametrix construction . . . 152
7.4.2 From $\widehat{\mathscr{L}_h}$ to $\mathscr{E}_{h,\pm}$ . . . 155
7.5 Spectral reduction . . . 156
7.5.1 The spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is discrete . . . 156
7.5.2 The spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ lies near the one of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ . . . 158
7.5.3 The spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ lies near the one of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ . . . 158
7.6 Removing the cutoff function . . . 160
7.7 On the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ . . . 164

8 White noise magnetic field 167
8.1 Introduction . . . 167
8.2 Definition of the operator . . . 171
8.2.1 Construction of the domain . . . 171
8.2.2 First properties of H . . . 175
8.2.3 Form comparison between H and Δ . . . 178

8.3 Self-adjointness and spectrum . . . 180
8.3.1 The operator is symmetric . . . 180
8.3.2 The operator is self-adjoint . . . 181
8.3.3 H is the resolvent-limit of H_ε . . . 183
8.3.4 Comparison between the spectrum of H and Δ . . . 184
8.4 Stochastic renormalisation of the singular potential . . . 186
8.5 Paracontrolled calculus . . . 188

9 Perspectives **191**
9.1 Influence des résonances . . . 191
9.2 Quantification de la variété caractéristique . . . 194
9.3 Effet de courbure et effet semiclassique . . . 196
9.4 Champs magnétiques plus généraux . . . 197
9.5 Étude d'opérateurs hypoelliptiques . . . 198
9.6 Perturbations non-autoadjointes . . . 200

A **201**
A.1 Quelques résultats de théorie spectrale . . . 201
A.2 Darboux and Weinstein lemmas . . . 201

Chapitre 1

Introduction

1.1 – Du monde classique au monde quantique

1.1.1 – La mécanique classique

Depuis les travaux initiateurs de Galilée puis de Newton sur la mécanique des corps célestes, les théories physiques et mathématiques du mouvement des corps n'ont cessé d'évoluer. Les équations postulées par Newton ont servi de base dans la description de la plupart des phénomènes physiques jusqu'au début du XXe siècle. Leur étude constitue ce que l'on appelle désormais la *mécanique classique*. Elle repose souvent sur le formalisme Hamiltonien. Il existe de très nombreux traités sur l'analyse mathématique des équations de la mécanique classique, dont une des principales références reste le livre [Arn89].

Nous considérons ici le cas particulier d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique, en dimension $d = 3$. Nous supposons que le champ électrique $\mathbf{E} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ et le champ magnétique $\mathbf{B} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ sont statiques. Ce dernier satisfait l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. En mécanique classique, on peut représenter le mouvement d'une telle particule par une fonction du temps $t \in \mathbf{R} \mapsto q(t) \in \mathbf{R}^d$. Les lois de Newton postulent que cette fonction doit satisfaire l'équation

$$m\ddot{q}(t) = \mathbf{F}_{\mathsf{em}}\left(q(t), \dot{q}(t)\right), \tag{1.1.1}$$

où m est la masse de notre particule et $\mathbf{F}_{\mathsf{em}} : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une force électromagnétique. Si l'on note $\mathbf{E} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ le champ électrique et $\mathbf{B} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ le champ magnétique dans lesquels la particule est plongée, cette force s'écrit

$$\mathbf{F}_{\mathsf{em}}(q, v) = e\left(\mathbf{E}(q) + v \wedge \mathbf{B}(q)\right), \tag{1.1.2}$$

où e est la charge électrique de la particule. Dans la suite, nous supposerons pour simplifier que $m = 1$ et $e = 1$. En notant $v(t) = \dot{q}(t)$ la vitesse, l'équation (1.1.1) peut se réécrire

$$\begin{cases} \dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= \mathbf{E}(q) + v \wedge \mathbf{B}(q). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

En général, il suffit de se donner une position initiale $q_0 \in \mathbf{R}^d$ et une vitesse initiale $v_0 \in \mathbf{R}^d$ pour que l'équation (1.1.3) admette une unique solution vérifiant

$$q(0) = q_0, \quad v(0) = v_0, \tag{1.1.4}$$

mais il n'est pas toujours évident d'étudier le comportement de la solution. Le formalisme de Hamilton permet d'exploiter des symétries du problème pour faciliter son étude. Supposons que les champs $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ dérivent de potentiels $V : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ et $\mathbf{A} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ satisfaisant

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.1.5}$$

Dans ce cas, en considérant la variable de moment généralisé $p = v + \mathbf{A}(q)$, l'équation (1.1.3) est équivalente à

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \nabla_p H(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t)). \end{cases} \tag{1.1.6}$$

avec $H(q,p) = \frac{1}{2}|p - \mathbf{A}(q)|^2 + V(q)$. H est appelé Hamiltonien du système. Il est remarquable que le Hamiltonien caractérise le système. Plus généralement, n'importe quelle fonction $H \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^{2d})$ définit un système dynamique par (1.1.6), qui peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J \nabla H(q,p), \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.7}$$

Si $t \mapsto (q(t), p(t))$ résout (1.1.6), un simple calcul montre que H est constante le long de cette solution : $H(q(t), p(t)) = E$ est l'énergie du système. En dimension $d = 1$, cette remarque suffit souvent à résoudre l'équation, puisque les graphes des solutions s'identifient avec les courbes de niveau de H. En dimension plus grande, on est ramené à une dynamique posée sur l'ensemble de niveau $\{H = E\}$ qui est génériquement une hypersurface (de dimension $2d - 1$). Il est utile de trouver de nouvelles quantités conservées pour poursuivre l'étude.

Pour étudier le système (1.1.7), on peut préférer travailler dans de nouvelles variables $(x, \xi) = \varphi(q,p)$, dans lesquelles $\widehat{H} = H \circ \varphi^{-1}$ aura une forme plus appropriée. Dans ce cas, pour que le système reste sous la forme Hamiltonienne :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = J \nabla \widehat{H}(x, \xi), \tag{1.1.8}$$

il faut que φ vérifie la relation suivante en tout point (q,p) :

$$(\nabla \varphi)^T J (\nabla \varphi) = J. \tag{1.1.9}$$

On dit que φ est *symplectique* ou que les variables (x, ξ) sont *canoniques*.

Intrinsèquement, H est plutôt défini sur le cotangent $T^*(\mathbf{R}^d)$ qui est muni de la 2-forme canonique

$$\omega_0 = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q,$$

et qui s'identifie avec $\mathbf{R}^{2d}$. Nous noterons des éléments de $T^*(\mathbf{R}^d)$ soit (q,p) soit (x,ξ) (ou (y,η)) en fonction du contexte. Dire que le changement de variables $(x,\xi) = \varphi(q,p)$ est symplectique revient à dire que φ préserve ω_0 :

$$\varphi^*\left(\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q.$$

1.1.2 – La mécanique quantique

Au début du XXe siècle, plusieurs expériences ont remis en question la vision classique de la physique, basée sur les lois de Newton. Ces lois prédisent notamment qu'un électron dans un atome ne peut être stable : il devrait s'écraser sur le noyau, et la matière telle qu'on la connait ne pourrait donc pas exister ! Ainsi les physiciens des années 1920-1930 ont tiré la conclusion que la matière (et notamment les électrons) possède à la fois des propriétés *corpusculaires* et *ondulatoires*, ce qui peut sembler déroutant au premier abord. Un électron se déplace comme une onde étendue dans l'espace, mais possède tout de même une masse et une charge bien déterminée. De plus, on constate expérimentalement que l'énergie d'un électron dans un atome est *quantifiée* : elle ne peut prendre que certaines valeurs discrète. Ceci a donné lieu au modèle mathématique actuel de la physique quantique. Pour avoir plus de détails sur la construction de la théorie quantique et de son modèle mathématique, on pourra se référer à l'introduction de [Rob87] ou aux livres [LL74], [FH65].

On représente mathématiquement une particule quantique par une *fonction d'onde* $\psi_t(q)$, telle que

$$\|\psi_t\|^2 := \int_{\mathbf{R}^d} |\psi_t(q)|^2 \mathrm{d}q = 1.$$

Ainsi $|\psi_t(q)|^2\mathrm{d}q$ est une mesure de probabilité, qui s'interprète comme la probabilité de présence de la particule au point q. De plus, si l'on considère une particule chargée soumise à un champ électromagnétique satisfaisant (1.1.5), ψ_t doit satisfaire l'*équation de Schrödinger*

$$i\hbar\partial_t\psi_t = \mathcal{H}\psi_t, \tag{1.1.10}$$

où $\mathcal{H}$ est un opérateur auto-adjoint non borné sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ donné formellement par

$$\mathcal{H} = (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})^2 + V. \tag{1.1.11}$$

Plus généralement, n'importe quel opérateur auto-adjoint $\mathcal{H}$ défini un système dynamique quantique par (1.1.10).

Un exemple fondamental de solutions de (1.1.10) est donné par les fonctions propres de $\mathcal{H}$: Si $\psi_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ vérifie $\mathcal{H}\psi_0 = \lambda\psi_0$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) alors

$$\psi_t(q) = e^{\frac{it\lambda}{\hbar}}\psi_0(q) \tag{1.1.12}$$

est solution de l'équation de Schrödinger. Une telle solution est *stationnaire* au sens où la mesure $|\psi_t(q)|^2\mathrm{d}q$ ne dépend pas du temps. Dans ce cas, λ s'interprète comme l'énergie de la particule dans l'état ψ_0. La quantification de l'énergie se traduit donc

comme une discrétisation du spectre de $\mathcal{H}$.

Le spectre de $\mathcal{H}$ joue un rôle tout particulier dans l'étude de (1.1.10), et trouver les énergies possibles pour notre système revient à calculer les valeurs propres de $\mathcal{H}$. Cette thèse porte sur l'étude du spectre du *Laplacien magnétique* $(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})^2$, qui est l'opérateur décrivant une particule soumise à un champ purement magnétique.

1.1.3 – Le Laplacien magnétique

Le but de cette thèse est d'étudier le spectre du Laplacien magnétique

$$\mathcal{L}_\hbar = (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})^2$$

sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$, ou plus généralement sur une variété Riemannienne compacte. Ici, $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^d)$ est un potentiel-vecteur régulier. En imposant des conditions de Dirichlet au bord de Ω, nous verrons au Chapitre 2 que $\mathcal{L}_\hbar$ définit un opérateur auto-adjoint non borné sur $\mathsf{L}^2(\Omega)$.

Depuis les années 1980, l'étude de l'influence du champ magnétique et de ses variations sur le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ a donné lieu à de nombreux travaux. Nous en donnerons un bref aperçu dans les lignes qui suivent, mais le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages très complets existants sur le sujet ([FH10], [Ray17], [HK14b]).

En dimension d arbitraire, le champ magnétique est représenté par une matrice anti-symétrique $\mathbf{B}(x) \in \mathbf{R}^{d\times d}$ qui dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de la variable spatiale $x \in \Omega$:

$$\mathbf{B}(x) = (\partial_i A_j - \partial_j A_i)_{1\leq i,j\leq d}\,.$$

Comme pour toute matrice anti-symétrique à coefficients réels, on peut trouver un changement de base $P(x)$ qui met $\mathbf{B}(x)$ sous la forme diagonale suivante :

$$P(x)^{-1}\mathbf{B}(x)P(x) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(x) & & & & \\ -\beta_1(x) & 0 & & & & \\ & & 0 & \beta_2(x) & & \\ & & -\beta_2(x) & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

où $\beta_j(x) > 0$ pour $1 \leq j \leq s$, et $2s$ est le rang de $\mathbf{B}(x)$. Son noyau est de dimension $k = d - 2s$. En général, s et k peuvent dépendre de x. On peut mesurer l'intensité du champ magnétique à l'aide de la fonction scalaire $b : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ définie par

$$b(x) = \sum_{j=1}^{s(x)} \beta_j(x).$$

Nous verrons bientôt comment les quantitées β_j et b peuvent apparaître dans le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$.

1.1.4 – La limite semi-classique

L'analyse semi-classique est née de la volonté de donner un fondement mathématique rigoureux au *principe de correspondance* de Bohr. Ce principe peut s'énoncer de manière informelle sous la forme suivante : Si l'on considère la constante de Planck $\hbar$ comme un petit paramètre dans les équations de la physique quantique, on devrait retrouver la dynamique classique dans la limite $\hbar \to 0$. Nourrie par l'analyse microlocale en plein essort dans les années 70, une communauté de mathématiciens a construit l'analyse semi-classique à partir de ce principe.

En physique quantique $\hbar$ est une constante, qui vaut $\hbar \approx 10^{-34} J.s$. Alors quel sens donner à la limite $\hbar \to 0$? Tout d'abord, la valeur de $\hbar$ peut sembler "petite", mais cela a peu de sens dans l'absolu étant donné que cela dépend d'un choix d'unité. En général, on considère que $\hbar$ est petite par rapport aux autres quantités considérées. Par exemple, si l'on mesure l'intensité d'un champ magnétique par une constante $\kappa > 0$, le Laplacien magnétique s'écrit $(-i\hbar\nabla - \kappa\mathbf{A})^2$ et son étude est équivalente (en divisant par κ^2) à

$$\Big(-i\frac{\hbar}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\Big)^2.$$

Ainsi, la limite semi-classique $\hbar \to 0$ est équivalente à la limite des grands champs magnétiques $\kappa \to +\infty$. Le régime étudié est celui où $\hbar$ est petit par rapport à κ. Enfin, on peut voir la limite $\hbar \to 0$ comme un outil de calcul : Il est difficile de calculer le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ pour $\hbar > 0$ fixé ; prendre la limite $\hbar \to 0$ permet d'obtenir de bonnes approximations des énergies mesurées expérimentalement.

Mathématiquement, l'analyse semi-classique permet d'étudier n'importe quelle équation différentielle où un petit paramètre apparaît devant chaque dérivation. Il existe aussi des équations partiellement semi-classiques comme

$$-\Big(\frac{m}{M}\Big)\Delta_x u - \Delta_y u + V(x,y)u = f,$$

qui est issue de la chimie. Si le rapport entre les masses de deux atomes $\frac{m}{M}$ est petit, l'approximation de Born-Oppenheimer $\frac{m}{M} \to 0$ est de nature semi-classique par rapport à la variable x. De tels modèles ont été étudiés dans [BNHR16, Ker18] par exemple.

1.1.5 – Quantification

On peut faire le lien entre le Hamiltonien classique $H(q,p) = |p - \mathbf{A}(q)|^2$ et le Laplacien magnétique $\mathcal{L}_\hbar$ via une *quantification* notée $\mathsf{Op}_\hbar^w$:

$$\mathcal{L}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w H.$$

Plus généralement, n'importe quel opérateur de la forme $\mathcal{A}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(a)$ est dit $\hbar$-*pseudodifférentiel*. On dit que a est le symbole de l'opérateur $\mathcal{A}_\hbar$. Nous donnerons une définition précise de $\mathsf{Op}_\hbar^w$ au Chapitre 3 et nous y rappellerons les résultats principaux, dont les détails peuvent être trouvés dans de très complets ouvrages

([Zwo12], [Mar02], [Rob87], [Hel88b], [FK] ...).

L'intérêt de cette approche est qu'elle permet d'étudier des opérateurs $\mathcal{A}_\hbar$ à l'aide de manipulations sur leur symbole $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2d}, \mathbf{R})$. Il existe plusieurs formules de quantification. Dans toute cette thèse nous utiliserons la quantification de Weyl donnée formellement par

$$\mathsf{Op}^w_\hbar(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\cdot\xi}\, a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi,$$

qui a l'avantage de donner un opérateur auto-adjoint dès que a est à valeurs réelles.

Le lien entre un opérateur $\mathcal{A}_\hbar$ et son symbole a est particulièrement bien illustré par le Théorème d'Egorov (voir [Zwo12, Mar02]). Ce Théorème permet de quantifier un changement de variable canonique. L'idée est la suivante : si $(\hat{x}, \hat{\xi}) = \varphi(x, \xi)$ est canonique alors il existerait un opérateur unitaire $\mathsf{U}_\hbar$ tel que

$$\mathsf{U}^*_\hbar \mathsf{Op}^w_\hbar(a) \mathsf{U}_\hbar = \mathsf{Op}^w_\hbar(a \circ \varphi^{-1}),$$

Ainsi, un changement de variable canonique sur le symbole a ne changerait pas le spectre de $\mathsf{Op}^w_\hbar(a)$. En fait, cet énoncé n'est pas exact tel quel : Nous en donnerons un énoncé précis au Chapitre 3.

1.2 – Approximation Harmonique

1.2.1 – Oscillateur Harmonique

L'oscillateur harmonique classique est le système décrit par le Hamiltonien de potentiel $V(x) = x^2$:

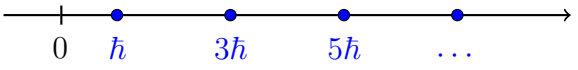
$$H_0(x, \xi) = \xi^2 + x^2, \tag{1.2.1}$$

dont les lignes de niveaux sont des cercles. Il décrit un mouvement d'oscillations non amorties. D'après les règles de quantification, son analogue semi-classique est

$$\mathcal{I}_\hbar = -h^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2. \tag{1.2.2}$$

On peut montrer que cet opérateur est auto-adjoint. Son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres simples,

$$\lambda_n(\hbar) = (2n+1)\hbar, \quad n \in \mathbf{N}\,. \tag{1.2.3}$$



La fonction propre associée à $\lambda_0(\hbar)$ n'est autre que la Gaussienne $\Psi_0(x) = (2\pi)^{-1/2}\hbar^{-1/4}e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}$, et les autres fonctions propres sont les fonctions d'Hermites :

$$\Psi_n(x) = C_n \hbar^{-1/4} P_n(\hbar^{-1/2}x) e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}, \tag{1.2.4}$$

où P_n est le n-ième polynôme de Hermite et $C_n > 0$, qui ne dépend que de n, est choisie telle que $\|\Psi_n\| = 1$.

Nous retiendrons qu'un mouvement d'oscillation se traduit au niveau quantique par une quantification des énergies en valeurs propres simples, dont l'écart est d'ordre $\hbar$: $\lambda_{n+1}(\hbar) - \lambda_n(\hbar) = 2\hbar$.

En dimension $d \geq 1$, un oscillateur Harmonique d-dimensionnel est un opérateur de la forme

$$-\hbar^2\Delta + \sum_{\ell=1}^{d} \mu_\ell x_\ell^2,$$

sur $\mathbf{R}^d$, avec $\mu_\ell > 0$. On déduit du cas $d = 1$ que le spectre d'un tel opérateur est donné par

$$\left\{ \hbar E_n = \hbar \sum_{\ell=1}^{d} \sqrt{\mu_\ell}(2n_\ell + 1), \quad n \in \mathbf{N}^d \right\},$$

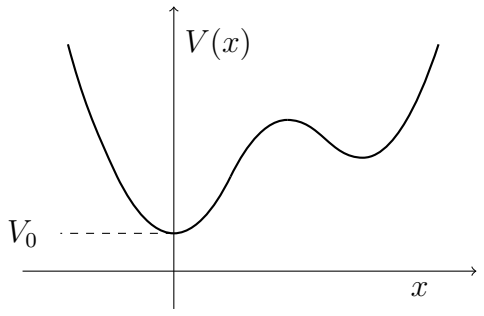
et la fonction propre normalisée associée à $\hbar E_n$ est

$$x \mapsto (\mu_1 \cdots \mu_d)^{-1/8} \Psi_{n_1}(\mu_1^{1/4} x_1) \cdots \Psi_{n_d}(\mu_d^{1/4} x_d).$$

1.2.2 – Forme normale de Birkhoff

Considérons maintenant le cas d'un potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ en dimension d, qui admet un unique minimum global, atteint de manière non-dégénérée en 0 :

$$V(0) = V_0, \quad V'(0) = 0, \quad V''(0) > 0.$$



Supposons également pour simplifier que $V(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$, et que la Hessienne de V en 0 est diagonale :

$$V''(0) = 2 \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_d \end{pmatrix}.$$

Si la particule soumise au potentiel V a une énergie proche de V_0,

$$H(x, \xi) := \xi^2 + V(x) = V_0 + \varepsilon,$$

alors elle doit rester dans la région $V(x) - V_0 \leq \varepsilon$, et on peut approcher son mouvement modulo $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ par une oscillation harmonique autour de 0 :

$$H(x,\xi) = V_0 + \sum_{\ell=1}^{d} \left(\xi_\ell^2 + \mu_\ell x_\ell^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).$$

En fait *l'algorithme de forme normale de Birkhoff* permet d'être beaucoup plus précis. En effet, il donne l'existence de nouvelles variables canoniques $(\hat{x}, \hat{\xi}) = \varphi(x,\xi)$ explicites dans lesquelles H s'écrit :

$$\widehat{H} = H \circ \varphi^{-1} = V_0 + f\Big(\hat{\xi}_1^2 + \hat{x}_1^2, \cdots, \hat{\xi}_d^2 + \hat{x}_d^2\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^{r/2}),$$

où $f(I_1, \cdots, I_d) = \sum_{\ell=1}^{d} \sqrt{\mu_\ell} I_\ell + \mathcal{O}(I^2)$ est explicite. Ainsi, cet algorithme permet de calculer explicitement la déformation de la trajectoire autour de l'oscillation harmonique modulo $\mathcal{O}(\varepsilon^{r/2})$. Que vaut l'entier r ? En fait, l'algorithme est limité par des phénomènes de résonances entre les coefficients $\sqrt{\mu_\ell}$ $(1 \leq \ell \leq d)$. L'ordre r où l'algorithme s'arrête est donné par :

$$r = \inf\Big\{|\alpha|, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^d \setminus 0, \quad \sum_{\ell=1}^{d} \alpha_\ell \sqrt{\mu_\ell} = 0\Big\},$$

où la longueur du multi-entier α est $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots |\alpha_d|$. Génériquement, il n'y aura aucune relation entière entre les $\sqrt{\mu_\ell}$ et on aura donc $r = +\infty$.

La forme normale de Birkhoff a une longue histoire en physique, qui remonte à Delaunay [Del60] et Lindstedt [Lin82]. Cette forme normale formelle a été le point de départ de nombreuses études sur la stabilité de points d'équilibres et la théorie KAM (d'après Kolmogorov [Kol54], Arnold [Arn63], et Moser [Mos62]). Les travaux de Birkhoff [Bir27] et de Gustavson [Gus66] ont donnés son nom à la méthode. Nous référons à [Mos68] et [HZ94] pour des résultats plus précis que permet d'obtenir cette forme normale dans l'étude de systèmes Hamiltoniens *classiques*.

L'opérateur semi-classique associé à H est l'opérateur de Schrödinger

$$\mathcal{H}_\hbar = -\hbar^2 \Delta + V(x).$$

Dans ce cadre, l'*approximation Harmonique* consiste à approcher le spectre de $\mathcal{H}_\hbar$ par celui de l'oscillateur Harmonique :

$$\mathcal{H}_\hbar^0 = \sum_{\ell=1}^{d} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} + \mu_\ell x_\ell^2\right) + V_0.$$

En effet on peut montrer que le spectre de $\mathcal{H}_\hbar$ est discret, et que pour tout $n \in \mathbf{N}^d$, si $\hbar > 0$ est assez petit il existe $\lambda_n(\hbar)$ une valeur propre de $\mathcal{H}_\hbar$ telle que

$$\lambda_n(\hbar) = V_0 + \hbar E_n + o(\hbar),$$

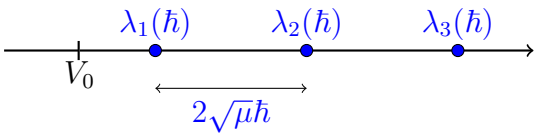


FIGURE 1.1 – En dimension $d = 1$: Spectre de $-\hbar^2\Delta + V$ en présence d'un puits électrique en 0.

où $V_0 + \hbar E_n$ est une valeur propre de l'oscillateur $\mathcal{H}_\hbar^0$: $E_n = (2n_1 + 1)\sqrt{\mu_1} + \cdots + (2n_d + 1)\sqrt{\mu_d}$. De plus, pour tout $E > 0$ nous avons décrit ainsi l'intégralité du spectre de $\mathcal{H}_\hbar$ dans $(-\infty, V_0 + E\hbar)$. Ce résultat est bien connu des physiciens depuis les débuts de la physique quantique. Sa démonstration mathématique remonte aux travaux de Helffer-Sjöstrand (Voir [Hel88b]) et de Simon [Sim83].

En fait, il est possible d'adapter l'algorithme de Birkhoff au cadre semi-classique pour obtenir une description plus précise de ces valeurs propres. De nombreux physiciens et chimistes des années 1980 avaient déjà remarqués que cet algorithme permettait de calculer les énergies de molécules [DKN83, JR82, Mar85, SR82]. Joyeux et Sugny ont aussi utilisé ces techniques pour décrire la dynamique d'états excités (voir [JS02] par exemple). Dans [Sjo92], Sjöstrand a construit une forme normale de Birkhoff semi-classique pour un opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$, en utilisant la quantification de Weyl, pour étudier mathématiquement les états semi-excités. Nous pouvons reformuler son résultat sous la forme suivante.

Théorème 1.1. *Pour $\hbar > 0$ assez petit, il existe un opérateur unitaire $\mathsf{U}_\hbar$ et une fonction (explicite) $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1] \times \mathbf{R}^d)$ tels que*

$$\mathsf{U}_\hbar \mathcal{H}_\hbar \mathsf{U}_\hbar^* = V_0 + f(\hbar, \mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}) + \mathcal{R}_\hbar,$$

où $\mathcal{R}_\hbar$ est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel dont le symbole est $\mathcal{O}((\hbar + x^2 + \xi^2)^{r/2})$, et $\mathcal{I}_\hbar^{(\ell)}$ est l'oscillateur Harmonique

$$\mathcal{I}_\hbar^{(\ell)} = -\hbar^2\partial_{x_\ell}^2 + x_\ell^2.$$

Nous donnerons la démonstration de ce Théorème au Chapitre 4. Il permet d'obtenir une description précise du spectre de $\mathcal{H}_\hbar$.

Corollaire 1.2. *Soit $\eta \in (0,1)$. Alors pour $\hbar$ assez petit, les valeurs propres de $\mathcal{H}_\hbar$ dans $(-\infty, V_0 + \hbar^\eta)$ sont des réels $\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar)$ pour $n \in \mathbf{N}^d$, tels que :*

$$\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) = V_0 + f\left(\hbar, (2n_1 + 1)\hbar, \cdots, (2n_d + 1)\hbar\right) + \mathcal{O}(\hbar^{r/2}),$$

uniformément par rapport aux n tels que $\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) \leq V_0 + \hbar^\eta$.

Remarquons que ce résultat décrit des états *semi-excités*. En particulier, le nombre de valeurs propres décrites est de plus en plus grand quand $\hbar$ tend vers 0.

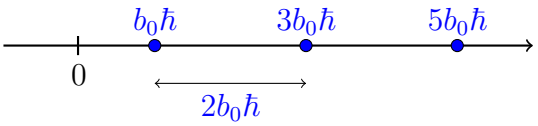


FIGURE 1.2 – Spectre du Laplacien magnétique avec champ constant sur $\mathbf{R}^2$.

1.3 – Spectre du Laplacien magnétique

Le but de cette thèse est d'étudier l'influence du champ magnétique sur le spectre du Laplacien magnétique. Les méthodes d'approximation harmonique et de forme normale de Birkhoff décrites au paragraphe précédent, ont été utilisées pour étudier le spectre du Laplacien magnétique sur $\mathbf{R}^2$ par Raymond-Vũ Ngọc [RVuN15] (Puis sur $\mathbf{R}^3$ par Helffer-Kordyukov-Raymond-Vũ Ngọc [HKRVuN16]). Dans le chapitre 5 de cette thèse, nous généraliserons leurs méthodes à des dimensions plus grandes et aux variétés Riemanniennes compactes.

Pour mieux comprendre l'effet d'un champ magnétique sur le spectre, nous présenterons d'abord le cas d'un champ constant sur $\mathbf{R}^2$, avant d'étudier l'influence des variations du champ. Nous présenterons un résultat nouveau obtenu lors de cette thèse, le Théorème 1.4 permettant de décrire le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ quand la matrice $\mathbf{B}(q)$ est inversible. Comme corollaire nous obtiendrons une loi de Weyl et le comportement asymptotique des premières valeurs propres quand $\hbar \to 0$, qui n'était pas connu auparavant. Nous obtiendrons un résultat analogue quand la matrice $\mathbf{B}(q)$ admet un noyau, et nous verrons comment cela influe sur l'asymptotique des valeurs propres, qui n'était pas plus connue dans ce cas. La démonstration de ces résultats constituera le Chapitre 5 de cette thèse.

1.3.1 – Champ magnétique constant

Sur $\mathbf{R}^2$, la matrice magnétique

$$\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 A_2(q) - \partial_2 A_1(q) \\ \partial_2 A_1(q) - \partial_1 A_2(q) & 0 \end{pmatrix}$$

est entièrement déterminée par la fonction scalaire $b = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$. Si le champ magnétique est constant et non nul $b \equiv b_0 > 0$, alors le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicité *infinie* :

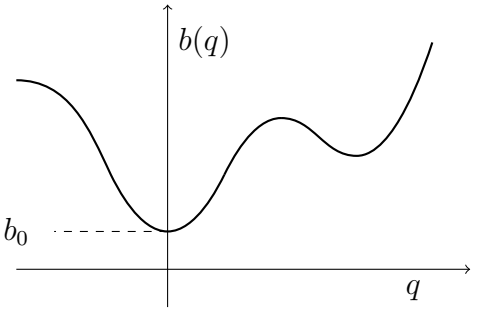
$$\lambda_n(\hbar) = (2n+1)b_0\hbar, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Le spectre n'est donc pas discret (à cause de la multiplicité) mais il est bien quantifié, et $\lambda_n(\hbar)$ est appelé n-ième niveau de Landau. On pourra trouver une démonstration de ce résultat dans [FH10] par exemple. Nous voyons déjà une différence majeure avec le cas électrique : la simple présence du champ magnétique suffit à quantifier le spectre, alors même que le champ n'est pas confinant. En fait, on peut interpréter ce résultat en regardant la dynamique classique. Une particule

soumise à un champ magnétique constant aura un simple mouvement de rotation. Cette dynamique est confinante et on voit apparaître un oscillateur qui se trouve être à l'origine de la séparation en niveaux de Landau.

1.3.2 – Champ magnétique confinant, avec $\mathbf{B}(q)$ inversible

Nous verrons plus loin que la séparation du spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ en niveaux de Landau reste présente pour des champs magnétiques non constants. Nous sommes en particulier intéressé par les champs magnétiques confinants. Sur $\mathbf{R}^d$, supposons que le champ b admet un unique minimum b_0, atteint de manière non-dégénérée en 0. On suppose $b_0 > 0$, ce qui assure que le champ ne s'annule pas.

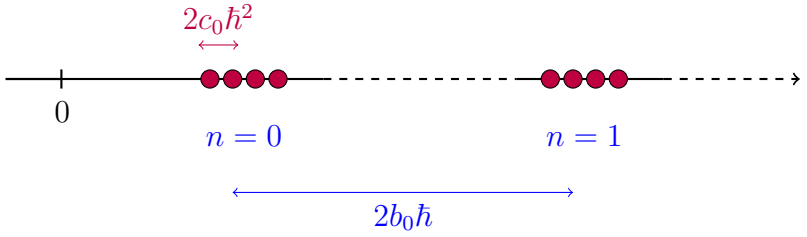


Sous ces hypothèses, Helffer et Kordyukov [HK11] ont démontré le résultat suivant, en construisant des quasimodes.

Théorème 1.3 (Helffer, Kordyukov 2011). *En dimension $d = 2$, pour tout n, $j \in \mathbf{N}$, si $\hbar > 0$ est assez petit, il existe $\lambda_{nj}(\hbar) \in \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar)$ tel que*

$$\lambda_{nj}(\hbar) = (2n+1)\left(b_0\hbar + ((2j+1)\alpha_0 + c_n)\hbar^2\right) + \mathcal{O}(\hbar^{5/2}).$$

De plus si $n = 0$, $\lambda_{0j}(\hbar)$ est la j-ième plus petite valeur propre de $\mathcal{L}_\hbar$, comptée avec multiplicité.



Ils ont également obtenu un développement asymptotique complet de $\lambda_{nj}(\hbar)$ en puissances de $\hbar^{1/2}$, et leur méthode permet de calculer explicitement les coefficients $c_0 > 0$ et $c_n \in \mathbf{R}$.

On constate donc à nouveau la séparation du spectre en niveaux de Landau $n = 0, 1, 2...$, même phénomène que pour un champ constant. Mais cette fois-ci dans chaque niveau n on voit l'effet confinant du champ magnétique via une division du spectre en valeurs propres simples dont l'écart est d'ordre $\hbar^2$: Un second oscillateur

harmonique semble apparaître à cette nouvelle échelle. Cependant, il faut être prudent dans l'interprétation du dessin ci-dessus. Fixons par exemple $n = 0$. Pour $\hbar$ petit mais fixé, $\lambda_{0j}(\hbar)$ est la j-ième valeur propre de $\mathcal{L}_\hbar$; mais si on laisse j augmenter $\lambda_{0j}(\hbar)$ finira par s'approcher du deuxième niveau de Landau $n = 1$. Ainsi, il semble y avoir au voisinage de $3b_0\hbar$ un mélange des contributions des niveaux de Landau $n = 0$ et $n = 1$. Nous nous posons alors la question suivante : Peut-on trouver pour chaque $n \in \mathbf{N}$ un opérateur effectif $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ qui décrive l'apport du n-ième niveau de Landau dans le spectre ? Nous allons répondre postivement à cette question à l'aide d'une forme normale de Birkhoff. Cela permettra de clarifier la division du spectre, et de s'assurer que l'on décrit bien l'intégralité du spectre de cette façon (au moins dans une gamme d'énergie de la forme $(-\infty, b_1\hbar)$).

Comment utiliser l'algorithme de Birkhoff sur le Laplacien magnétique ? Expliquons la démarche générale que nous suivrons au Chapitre 5, dans le cas où la matrice $\mathbf{B}(q)$ est inversible - et donc $d = 2s$ est pair (nous traiterons en fait le cas plus général où le rang de $\mathbf{B}(q)$ est constant par rapport à q). Il faut d'abord repérer l'oscillateur Harmonique caché dans $\mathcal{L}_\hbar$ via son symbole $H(q,p) = |p - \mathbf{A}(q)|^2$. Pour des énergies proches de 0, la dynamique décrite par le Hamiltonien H confine près de la *variété caractéristique*

$$\Sigma = H^{-1}(0) = \{(q,p) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad p = \mathbf{A}(q)\}.$$

En fait, la dynamique classique associée à H exhibe une oscillation harmonique autour de Σ, qui génère au niveau quantique une séparation en niveaux de Landau : c'est le mouvement *cyclotron*.

Nous verrons que H peut s'écrire dans de nouvelles coordonnées $(x, \xi, q) = \Phi(q,p)$ sous la forme

$$\widehat{H}(x,\xi,q) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j(q)(\xi_j^2 + x_j^2) + \mathcal{O}((x,\xi)^3),$$

où $(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2s}$ mesure l'éloignement à Σ. De plus, ces coordonnées vérifient

$$\Phi_*(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q) = B_q + \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x,$$

où B est la 2-forme associée à $\mathbf{B}$:

$$B_q = \sum_{1 \le k < \ell \le d} \mathbf{B}_{k\ell}(q)\mathrm{d}q_k \wedge \mathrm{d}q_\ell.$$

Ainsi nous avons exhibé l'oscillateur harmonique $\xi_j^2 + x_j^2$, mais pour obtenir une version quantifiée (via la formule de Weyl) de ce résultat il faut des variables canoniques $(y,\eta) = \varphi(q)$ telles que

$$\varphi_* B = \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y.$$

Ceci est possible localement sous l'hypothèse que $\mathbf{B}$ est inversible : C'est le Théorème de Darboux. Ensuite, il ne reste plus qu'à utiliser l'algorithme de Birkhoff par rapport à l'oscillateur $\sum_j (\xi_j^2 + x_j^2)\beta_j \circ \varphi(y,\eta)$ (qui dépend de paramètres (y,η)). On obtient le résultat suivant. (Et son analogue sur une variété Riemannienne compacte).

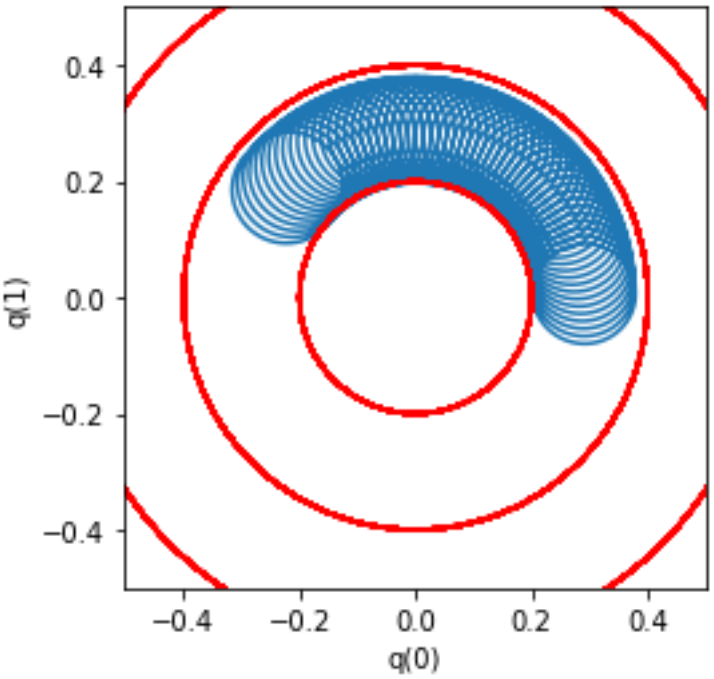


FIGURE 1.3 – Mouvement cyclotron pour une particule dans un champ magnétique radial $B(r) = 1 + r^2$. Lignes de niveaux de B en rouge.

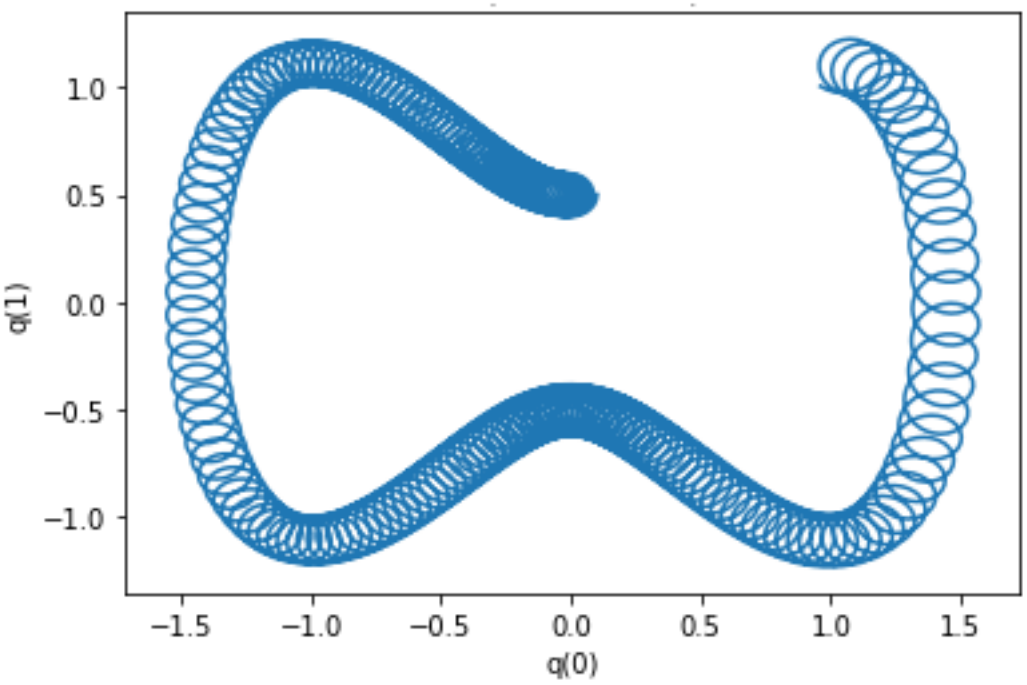


FIGURE 1.4 – Particule dans un champ double-puit $B(x, y) = (x-1)^2(x+1)^2+y^2+1$.

Théorème 1.4 ([Mor19], Chapitre 5 Théorème 5.1). *Soit $\mathcal{L}_\hbar$ le Laplacien magnétique avec conditions de Dirichlet sur Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^d$. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que :*

- *b admet un unique minimum non-dégénéré, en un point $q_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$.*
- *$\mathbf{B}(q_0)$ est inversible (et donc d est pair $d = 2s$).*
- *Il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $3 \leq r \leq \min\left\{|\alpha|, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^s \setminus 0, \quad \sum_{j=1}^s \alpha_j\beta_j(q_0) = 0\right\}$.*

Alors pour $\eta > 0$ suffisamment petit, il existe un difféomorphisme (localement près de q_0) $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^{2s}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^s$ un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ tel qu'on ait le résultat suivant. Il existe $\hbar_0 > 0$ et pour $\hbar \in (0, \hbar_0)$ une bijection

$$\Lambda_\hbar : \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar) \cap (-\infty, (b_0 + \eta)\hbar) \to \bigcup_{n \in \mathbf{N}^s} \mathsf{sp}(\mathcal{N}_\hbar^{[n]}) \cap (-\infty, (b_0 + \eta)\hbar),$$

telle que $\Lambda_\hbar(\lambda) = \lambda + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r}{2}-\varepsilon})$. De plus, le symbole principal de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ est

$$N_\hbar^{[n]}(y, \eta) = \hbar \sum_{j=1}^s (2n_j + 1)\beta_j \circ \varphi^{-1}(y, \eta).$$

Remarque 1. Il y a un léger abus de notations dans ce résultat. On sait que le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ (et de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$) est constitué de valeurs propres discrètes. Ici, $\mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{L}_\hbar$ *comptées autant de fois que leur multiplicité.*

Remarque 2. Ce résultat a été d'abord été démontré en dimension $d = 2$ par Raymond-Vũ Ngọc [RVuN15]. Sa généralisation aux dimensions supérieures et aux variétés Riemanniennes est nouvelle. Bien que basée sur les mêmes principes, il y a plusieurs subtilités qui compliquent la démonstration. Tout d'abord, il n'était pas clair a priori que des niveaux de Landau en dimension $s = d/2$ apparaîtraient, et que les symboles effectifs soient donnés par $N_\hbar^{[n]}$. De plus, la construction et l'existence même des changements de variables canoniques Φ et φ n'avaient rien d'évident à cause des multiples composantes de la matrice $\mathbf{B}(q)$, alors qu'en dimension $d = 2$, $\mathbf{B}(q)$ est donnée par un scalaire. Enfin et surtout, un phénomène propre aux dimensions $d \geq 4$ apparait : les résonances entre les coefficients β_j, $1 \leq j \leq s$. En effet, à partir de $s = 2$ (et donc $d = 4$), il peut exister des points q et des entiers $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ tels que

$$\sum_{j=1}^s \alpha_j\beta_j(q) = 0,$$

ce qui empêche d'appliquer l'algorithme de Birkhoff. En fait, à partir du moment où les fonctions $\beta_j(q)$ sont non constantes, de telles résonances apparaîtrons forcément. Nous avons résolu ce problème en utilisant la localisation de b au voisinage de q_0. Un entier r étant fixé comme dans l'énoncé du Théorème, on peut toujours trouver un petit voisinage Ω de q_0 sur lequel,

$$\forall q \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^s, \quad 0 < |\alpha| < r \Rightarrow \sum_{j=1}^s \alpha_j\beta_j(q) \neq 0.$$

On arrive à se réduire à l'ouvert Ω, sur lequel on peut appliquer l'algorithme de Birkhoff, quitte à diminuer η (c'est à dire la portion de spectre décrite). Cela permet de décrire au moins le premier niveau de Landau, et donc un nombre de valeurs propres arbitrairement grand quand $\hbar$ tend vers 0.

Comme corollaire de ce résultat, on obtient la loi de Weyl suivante (précédemment démontrée dans [Dem85] en approchant localement le champ par une constante).

Corollaire 1.5. *Pour $\hbar > 0$ on note $N(\mathcal{L}_\hbar, (b_0+\eta)\hbar)$ le nombre de valeurs propres de $\mathcal{L}_\hbar$ dans $(-\infty, (b_0+\eta)\hbar)$, comptées avec multiplicités. Sous les hypothèses du Théorème 1.4, quand $\hbar \to 0$ on a :*

$$N(\mathcal{L}_\hbar, (b_0+\eta)\hbar) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^s} \sum_{n\in\mathbf{N}^s} \int_{b^{[n]}(x)\leq b_0+\eta} \beta_1(x)\cdots\beta_s(x)\mathrm{d}x + o(\hbar^{-s}),$$

où $b^{[n]}(x) = \sum_{j=1}^s (2n_j+1)\beta_j(x)$.

Le Théorème 1.4 permet également d'obtenir une description des plus petites valeurs propres de $\mathcal{L}_\hbar$, en présence d'un puits magnétique simple.

Corollaire 1.6. *Soit $j \in \mathbf{N}$. Sous les hypothèses du Théorème 1.4, pour $\hbar$ assez petit le bas du spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est donné par j valeurs propres simples telles que*

$$\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar) = b_0\hbar + (E_j + c_0)\hbar^2 + o(\hbar^2),$$

où $c_0 \in \mathbf{R}$ et $\hbar E_j$ est la j-ième valeur propre d'un oscillateur harmonique de symbole $\nabla^2(b\circ\varphi)(0)((y,\eta),(y,\eta))$.

Expliquons brièvement d'où vient ce résultat. Pour j fixé et $\hbar$ assez petit, $\lambda_j(\hbar)$ est décrite par le premier niveau de Landau $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$. Or, le symbole principal de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ est $\hbar b$, et b admet son unique minimum en 0. On a alors

$$\hbar b = \hbar\left(b_0 + \nabla^2 b(0)(X,X) + \mathcal{O}(X^3)\right).$$

On reconnait le terme principal $\hbar b_0$, et $\nabla^2 b(0)(X,X)$ est le symbole d'un oscillateur harmonique dont la j-ième valeur propre est $\hbar E_j$: c'est de là que vient l'asymptotique. Ainsi, le bas du spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est décrit par deux mouvements d'oscillations :

- Le mouvement cyclotron qui sépare selon les niveaux de Landau $n \in \mathbf{N}^s$.
- Une oscillation due aux variations de b, qui sépare les valeurs propres selon $j \in \mathbf{N}$ au sein du premier niveau $n = 0$.

On observe ces deux mouvements oscillatoires sur les figures 1.3 et 1.4. Le mouvement cyclotron est le mouvement de rotation rapide et de faible rayon. La seconde oscillation, beaucoup plus lente, correspond au décalage qui s'observe le long d'une ligne de niveau de b.

En dimension $d = 2$, le développement de la première valeur propre $\lambda_0(\mathcal{L}_\hbar) = b_0\hbar + \alpha\hbar^2 + o(\hbar^2)$ (avec α explicite) a d'abord été démontré par Helffer et Morame [HM01], puis Helffer et Kordyukov [HK11] ont obtenu le développement de $\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar)$. La méthode de Raymond et Vũ Ngọc [RVuN15] a permis d'étudier les états semi-excités, toujours en dimension 2. Des résultats analogues ont été obtenus par Helffer et Kordyukov [HK14a].

En dimension $d > 2$, le Corollaire 1.6 n'était pas connu (bien qu'une borne supérieure ait été obtenue dans [Kor20b]). Ce résultat a été démontré simultanément par Kordyukov [Kor19], dans le contexte du Laplacien de Bochner (qui est une généralisation du Laplacien magnétique en présence d'un champ non exact). Son énoncé autorise la présence de plusieurs puits magnétiques, mais ne fait pas apparaître les niveaux de Landau et états semi-excités. Au Chapitre 6, nous définirons le Laplacien de Bochner et nous expliquerons comment nos résultats du Chapitre 5 peuvent s'y appliquer. Plus récemment, les niveaux de Landau magnétiques ont été étudiés par Charles [Cha20] et Kordyukov [Kor20a] dans le cas où les fonctions β_j sont constantes.

1.3.3 – Influence du noyau de $\mathbf{B}(q)$

Dans le cas où la matrice $\mathbf{B}(q)$ admet un noyau (de dimension $k > 0$ constante par rapport à q), nous obtiendrons également une description du spectre du Laplacien magnétique. Le premier résultat dans ce sens est celui de Helffer-Kordyukov [HK13].

Théorème 1.7 (Helffer-Kordyukov 2012). *En dimension $d = 3$, soit $\mathcal{L}_\hbar$ le Laplacien magnétique avec conditions de Dirichlet sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Supposons que b admet un unique minimum non-dégénéré $b_0 > 0$, atteint en un point $q_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$. Alors, pour tout $n, m, j \in \mathbf{N}$, si $\hbar$ est assez petit, il existe $\lambda_{nmj}(\hbar) \in \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar)$ tel que*

$$\begin{aligned}\lambda_{nmj}(\hbar) =&(2n+1)b_0\hbar + (2n+1)^{1/2}(2m+1)\nu_0\hbar^{3/2}\\ &+ \left((2n+1)(2j+1)\alpha_0 + c_{nm}\right)\hbar^2 + \mathcal{O}(\hbar^{9/4}),\end{aligned}$$

où $\nu_0 > 0$ et $\alpha_0, c_{nm} \in \mathbf{R}$.

Ce résultat suggère que la séparation en niveaux de Landau $n = 0, 1, 2\cdots$ a encore lieu, mais cette fois-ci un troisième oscillateur apparait, qui sépare selon $m \in \mathbf{N}$ à l'échelle $\hbar^{3/2}$. En fait, il s'agit d'un mouvement d'oscillation dans la direction des lignes de champs (c'est-à-dire les directions du noyau de $\mathbf{B}$). Nous démontrerons un résultat analogue au Théorème 1.4 quand $\mathbf{B}(q)$ admet un noyau de dimension non nulle, et nous expliciterons ce troisième oscillateur. Comme corollaire, nous obtiendrons l'asymptotique suivante.

Théorème 1.8 ([Mor20a], Chapitre 5 Corollaire 5.7). *Soit $\mathcal{L}_\hbar$ le Laplacien magnétique avec conditions de Dirichlet sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbf{R}^d$. Supposons que :*

- *b admet un unique minimum non-dégénéré, en un point $q_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$.*
- *$\mathbf{B}(q)$ est de rang constant égal à $2s < d$ sur un voisinage de q_0 (notons $d = 2s + k$ avec $s, k > 0$).*

- *Les $\beta_j(q_0)$ $(1 \leq j \leq s)$ sont deux à deux distincts.*

Alors, pour tout $j \in \mathbf{N}$, si $\hbar$ est assez petit,

$$\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar) = b_0\hbar + \nu_0\hbar^{3/2} + (E_j + c_0)\hbar^2 + o(\hbar^2),$$

où $\nu_0 > 0$, $c_0 \in \mathbf{R}$, et $\hbar E_j$ est la j-ième valeur propre d'un oscillateur harmonique en dimension s.

En dimension $d = 3$ (donc $s = 1$ et $k = 1$) le résultat de [HK13] ne donne que la majoration

$$\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar) \leq b_0\hbar + \nu_0\hbar^{3/2} + (E_j + c_0)\hbar^2 + o(\hbar^2).$$

Les méthodes de formes normales ont permis à Helffer-Kordyukov-Raymond-Vũ Ngọc [HKRVuN16] d'obtenir la minoration en dimension 3. Le résultat en dimension plus grande, dont la démonstration suit les idées de [HKRVuN16], est nouveau. Comme dans le cas où $\mathbf{B}(q)$ est inversible, des difficultés liées aux dimensions supérieures apparaissent. La présence d'un noyau de dimension $k > 1$ rend délicate la réduction du symbole H. Nous arrivons à nous en sortir à l'aide de méthodes issues de la géométrie symplectique, en présence d'une 2-forme de rang constant B. En particulier, il n'est *clairement pas évident* de trouver l'asymptotique de $\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar)$ si le rang de $\mathbf{B}(q)$ n'est plus constant. Enfin, de nouveaux phénomènes de résonances doivent être gérés pour l'oscillateur k-dimensionnel apparaissant dans les directions du noyau de $\mathbf{B}$.

1.3.4 – Perturbation non-autoadjointe du Laplacien magnétique

Dans le Chapitre 7, nous étudions le spectre d'une perturbation non-autoadjointe du Laplacien magnétique sur $\mathbf{R}^2$:

$$(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})^2 + \hbar V,$$

où $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$. Nous utilisons une autre méthode de réduction (analogue à celle de Birkhoff) pour ramener l'étude du spectre de cet opérateur à celle d'un opérateur effectif P^{eff} (agissant en dimension 1) dont le symbole principal est donné par $\hbar(B + V)$. Cet opérateur décrit en fait le premier niveau de Landau, comme $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ précédemment. Nous montrerons que, si l'on connait le spectre de P^{eff} et qu'il a une forme suffisamment agréable, alors le spectre de $\mathcal{L}_\hbar + hV$ est proche de celui de P^{eff}. Nous renvoyons au Théorème 7.4 du Chapitre 7 pour un énoncé précis. Citons plutôt le résultat suivant comme cas particulier.

Théorème 1.9. *On suppose que*

(1) B et V sont analytiques sur un voisinage tubulaire de $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$.

(2) B est confinant : Il existe un compact $K \subset \mathbf{R}^2$ et $b_1 > \min B$ tels que $B(q) \geq b_1$ pour $q \in \mathbf{R}^2 \setminus K$.

(3) B admet un unique minimum non-dégénéré $b_0 > 0$, atteint en 0.

Soit $C > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ il existe $\hbar_0(\varepsilon) > 0$ tels que, pour $\hbar \in (0, \hbar_0(\varepsilon))$, le spectre de $\mathcal{L}_{\hbar,\varepsilon} = (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})^2 + \hbar\varepsilon V$ dans $D(\mu_\varepsilon \hbar, C\hbar^2)$ est donné par une famille de valeurs propres discrètes $(\lambda_j(\hbar, \varepsilon))_{1 \leq j \leq N}$ de multiplicités géométriques simples telles que

$$\lambda_j(\hbar, \varepsilon) = \mu_\varepsilon \hbar + ((2j+1)c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon))\hbar^2 + o(\hbar^2),$$

où $\mu_\varepsilon = B(z_\varepsilon) + \varepsilon V(z_\varepsilon)$, z_ε est l'unique point critique de $B + \varepsilon V$ dans $\mathbf{R}^2$ tel que $z_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$, et $c_0(\varepsilon)$, $c_1(\varepsilon) \in \mathbf{C}$ vérifient

$$c_0(\varepsilon) = b_0^{-1} \left| \frac{1}{2} \nabla^2 B(0) \right|^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Remarquons qu'en pratique on peut souvent étudier le spectre de l'opérateur effectif à l'aide des résultats de Hitrik [Hit04]. Enfin, notre résultat peut aussi s'appliquer au cas auto-adjoint où V est à valeurs réelles : on obtient l'asymptotique des premières valeurs propres de l'opérateur quand $B + V$ admet un unique minimum non dégénéré.

Cette méthode permet de considérer une grande classe de perturbations complexes V. Il serait intéressant de l'adapter afin d'appliquer à l'opérateur effectif unidimensionnel des résultats récents sur les perturbations non-autoadjointes, comme ceux d'O. Rouby [Rou18] pour les états excités, et ceux de S. Nonnenmacher et M. Vogel [NV21] pour des perturbations aléatoires.

1.4 – Conclusion

Le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ a la particularité de se diviser en niveaux de Landau. Ce phénomène provient de son symbole $H(x, \xi) = |\xi - \mathbf{A}(x)|^2$, qui est quadratique dans certaines directions de l'espace des phases. Dans le cas d'un puits magnétique discret, on arrive à décrire le spectre du n-ième niveau de Landau par un opérateur effectif, dont le symbole principal est

$$\hbar \sum_{j=1}^{s} (2n_j + 1)\beta_j.$$

Cela permet de décrire précisément le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$, ou de perturbations non nécessairement auto-adjointes de celui-ci.

La méthode de réduction utilisée (la forme normale de Birkhoff) a des contraintes qui limitent l'étude de champs magnétiques plus généraux. Une réduction par une méthode de type *Grushin*, telle que présentée au Chapitre 7, permettrait peut-être de se débarrasser des contraintes de non-résonance entre les fonctions β_j. Une seconde contrainte est liée à la géométrie du champ et de la variété sur laquelle on se place :

il s'agit d'un choix de quantification. Pour quantifier le symbole $b(q) = \sum_j \beta_j(q)$, nous avons utilisé des coordonnées canoniques $(y, \eta) = \varphi(q)$, qui permettent d'utiliser le calcul pseudodifférentiel. Cela dit, cette quantification est locale (elle dépend des coordonnées canoniques choisies) et ne respecte en rien la géométrie du champ magnétique. Ainsi, trouver une quantification plus adaptée au champ magnétique pourrait simplifier les méthodes et donner des résultats pour des champs bien plus généraux. On pourrait même espérer traiter n'importe quel champ magnétique qui ne s'annule pas, et ainsi montrer que la séparation en niveaux de Landau a toujours lieu.

Tous les résultats reposent essentiellement sur la structure du symbole du Laplacien magnétique ; il est minimal sur une sous-variété de l'espace des phases dont la structure symplectique est donnée par B. On peut donc espérer de la même manière étudier le spectre d'opérateurs plus généraux, en fonction de leur symbole. Des opérateurs sous-elliptiques comme le sous-Laplacien ou Laplacien sous-Riemannien ont une structure similaire au Laplacien magnétique. On peut le voir sur l'exemple du sous-Laplacien sur $\mathbf{R}^3$ de symbole

$$(\xi_1 - A_1\xi_3)^2 + (\xi_2 - A_2\xi_3)^2.$$

Il existe dans ce contexte un opérateur antisymétrique B qui joue le même rôle que le champ magnétique. Il existe de nombreux travaux sur ce type d'opérateurs. Citons par exemple l'article de C. Fermannian-Kammerer et V. Fischer [FKF19] dans lequel les symétries de la variété M et de l'opérateur B sont exploitées via une quantification adaptée. Cette quantification, qui est basée sur la structure de groupe de Lie de M, pourrait aussi être utile dans l'étude du Laplacien magnétique.

Dans cette thèse nous nous sommes focalisé sur les valeurs propres de $\mathcal{L}_\hbar$: Que peut-on dire des fonctions propres associées ? Des constructions BKW magnétiques ont été obtenues par Bonthonneau-Raymond [BR20] sur $\mathbf{R}^2$, puis avec Nguyen et Vũ Ngọc [BNRVuN21] sur une variété Riemannienne de dimension 2. On ne sait pas comment faire des constructions BKW en dimension supérieure. Les résultats de cette thèse suggèrent que les directions des lignes de champ doivent jouer un rôle spécifique.

Une question liée est celle de la décroissance des fonctions propres (en présence d'un puits magnétique discret). Des estimations de type Agmon ne donne qu'une décroissance en $\mathcal{O}(e^{-c/\hbar^{1/2}})$ en dehors du puit, alors que les constructions BKW suggèrent une décroissance bien plus rapide, en $\mathcal{O}(e^{-c/\hbar})$. Bonthonneau-Raymond-Vũ Ngọc ont montré cette décroissance, dans le cas de $\mathbf{R}^2$. Ces questions sont motivées par l'effet tunnel : L'interaction exponentiellement petite entre deux puits magnétiques symétriques, dont l'étude est essentiellement un problème ouvert.

Enfin, nous avons uniquement étudié les états stationnaires de l'équation de Schrödinger en présence d'un champ purement magnétique. Il serait intéressant de décrire la dynamique en temps long d'états cohérents, comme l'ont fait Boil et Vũ Ngọc [BVuN21] sur $\mathbf{R}^2$. Leur méthode est basée sur des formes normales pour le

Laplacien magnétique, ce qui suggère qu'elle pourrait s'adapter en dimension plus grande à l'aide des résultats de cette thèse.

1.5 – Sommaire

Voici comment s'organise ce manuscrit.

Au Chapitre 2, nous définirons le Laplacien magnétique sur $\mathbf{R}^d$ et sur une variété Riemannienne. Nous donnerons les premiers résultats généraux sur l'opérateur, une asymptotique grossière du bas du spectre, et un résultat de décroissance sur ses fonctions propres. Ce Chapitre est inspiré de [FH10, Ray17, HM96].

Au Chapitre 3, nous énoncerons les résultats principaux sur la quantification de Weyl, qui nous seront utiles par la suite. Ces résultats classiques peuvent se trouver dans les livres [Mar02, Zwo12] par exemple. En particulier, nous donnerons un énoncé du Théorème d'Egorov. Nous calculerons aussi le symbole du Laplacien magnétique.

Au Chapitre 4, nous présenterons les résultats de Sjöstrand [Sjo92]. Il s'agit de construire une forme normale de Birkhoff pour étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$ en présence d'un puits discret.

Au Chapitre 5, nous construirons une forme normale de Birkhoff pour le Laplacien magnétique, pour un champ de rang constant. Ces résultats sont issus de [Mor19] et [Mor20a].

Au Chapitre 6 (en anglais) nous définirons le Laplacien de Bochner, généralisation du Laplacien magnétique quand le champ magnétique n'est pas exact. Nous montrerons comment appliquer les résultats du Chapitre 5 dans ce cadre. Ce chapitre est issu de [Mor20b].

Au Chapitre 7 (en anglais) nous réduirons le Laplacien magnétique à l'aide d'une méthode de Grushin. Nous utiliserons cette méthode pour étudier le spectre de perturbations non-autoadjointes de l'opérateur.

Au Chapitre 8 (en anglais) nous présenterons un résultat obtenu en collaboration avec A. Mouzard [MM21]. Il s'agit de définir le Laplacien magnétique en présence d'un champ magnétique aléatoire très irrégulier, sur le tore en dimension 2. Le champ est donné par un bruit blanc, qui est presque sûrement une distribution de classe $\mathcal{C}^{-1-\kappa}$, pour tout $\kappa > 0$. Ainsi le potentiel vecteur A sera de classe $\mathcal{C}^{-\kappa}$ mais pas mieux, et il n'est pas évident de voir comment définir le Laplacien magnétique avec des coefficients si irréguliers. Nous verrons comment les méthodes de calcul paracontrôlé et de renormalisation permettent de définir un opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}$ qui vérifie des propriétés convenables. Plus précisément, en notant A_ε un potentiel régularisé qui converge vers A quand $\varepsilon \to 0$, et $\mathcal{L}^\varepsilon$ le Laplacien magnétique associé ;

le comportement de $\mathcal{L}^\varepsilon$ quand $\varepsilon \to 0$ sera décrit par $\mathcal{L}$.

Enfin, au Chapitre 9 nous discuterons de diverses perspectives et questions soulevées par cette thèse.

Chapitre 2

Le Laplacien Magnétique

Dans ce chapitre, nous définissons l'objet principal de cette thèse, le Laplacien magnétique, noté $\mathcal{L}_\hbar$. Nous donnons également quelques propriétés fondamentales de cet opérateur. Nous en profiterons pour donner un bref aperçu de quelques méthodes standards d'analyse semi-classique.

Dans la section 1, nous donnons une définition du Laplacien magnétique sur $\mathbf{R}^d$ Euclidien, puis sur une variété compacte M. Dans la section 2, nous définissons le champ magnétique et la fonction d'intensité magnétique. Dans la section 3, nous donnons les expressions en coordonnées locales des objets définis sur M. Dans la section 4, nous démontrons une minoration de la forme quadratique $Q_\hbar$ associée à $\mathcal{L}_\hbar$. Dans la section 5, nous en déduisons de premières estimations générales sur le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$. Cette section est aussi une introduction à la méthode des quasimodes pour approcher le spectre. Enfin, nous démontrons en section 6 un résultat de décroissance exponentielle des fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$, les *estimations d'Agmon magnétiques*.

2.1 – Définition du Laplacien magnétique

2.1.1 – Définition sur $\mathbf{R}^d$

Un *potentiel magnétique* sur $\mathbf{R}^d$ est donné par un champ de vecteur

$$\mathbf{A} = (A_1, \cdots, A_d) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d).$$

Formellement, le Laplacien magnétique associé à $\mathbf{A}$ est défini, pour $\hbar > 0$, par

$$\mathcal{L}_\hbar = (i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2 = \sum_{j=1}^{d} \left(ih\frac{\partial}{\partial q_j} + A_j(q) \right)^2, \tag{2.1.1}$$

où l'on a noté la variable $q = (q_1, \cdots q_d) \in \mathbf{R}^d$. Pour pouvoir étudier $\mathcal{L}_\hbar$ comme opérateur auto-adjoint sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$, il faut le définir plus précisément. Nous allons utiliser la méthode d'extension de Friedrich. Le lecteur pourra consulter [CR20] pour avoir plus de détail sur cette méthode, basée sur le théorème de Lax-Milgram. Dans

toute la suite, on notera le produit scalaire et la norme sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ par :

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbf{R}^d} u(x)\overline{v(x)}\mathrm{d}x \quad \|u\|^2 := \langle u, u\rangle.$$

Notons $Q_\hbar$ la forme quadratique définie par :

$$Q_\hbar(u, v) = \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbf{R}^d} (i\hbar\partial_j + A_j)u \ \overline{(i\hbar\partial_j + A_j)v}\mathrm{d}q, \tag{2.1.2}$$

pour des fonctions u, v appartenant à

$$\mathsf{Dom}(Q_\hbar) = \{u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d); \quad (i\hbar\partial_j + A_j)u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d), \quad 1 \leq j \leq d\}. \tag{2.1.3}$$

Ici $\partial_j u$ désigne la dérivée de u au sens des distributions. $Q_\hbar$ étant une forme hermitienne positive, on vérifie aisément que

$$\|u\|^2_{Q_\hbar} := Q_\hbar(u, u) + \|u\|^2 \tag{2.1.4}$$

défini une norme sur $\mathsf{Dom}(Q_\hbar)$, et que cet espace est complet et dense dans $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$. La forme quadratique $\| \bullet \|^2_{Q_\hbar}$ est continue et coercive sur $\mathsf{Dom}(Q_\hbar)$, pour la norme $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$. Par conséquent, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence d'un opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}_\hbar$ défini sur :

$$\mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar) = \{u \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar); v \mapsto Q_\hbar(u, v) \text{ est continue pour la topologie } \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)\}, \tag{2.1.5}$$

par la relation

$$Q_\hbar(u, v) = \langle \mathcal{L}_\hbar u, v\rangle, \quad \forall v \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar), \quad \forall u \in \mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar). \tag{2.1.6}$$

De plus, le domaine $\mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar)$ est dense dans $\mathsf{Dom}(Q_\hbar)$, et il est caractérisé par

$$\mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar) = \{u \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar); \quad (i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2 u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)\}. \tag{2.1.7}$$

Une intégration par partie dans (2.1.2) suffit à montrer que, pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{L}_\hbar u$ est bien défini par la relation (2.1.1).

Remarque 1. Pourquoi considérer cette construction du Laplacien magnétique, et pas une autre ? En fait, on peut vérifier que $\mathcal{L}_\hbar$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ par (2.1.1) admet une *unique* extension en un opérateur auto-adjoint. On dit que $\mathcal{L}_\hbar$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Voir [RS75] pour plus de détails à ce sujet.

Remarque 2. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, on peut définir de la même manière le Laplacien magnétique de Dirichlet sur $\mathsf{L}^2(\Omega)$, en prenant soin d'imposer la condition $u_{\partial\Omega} = 0$ aux fonctions du domaine de $Q_\hbar$.

2.1.2 – Définition sur une variété Riemannienne

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte, orientable, éventuellement avec un bord qui sera noté ∂M. L'orientabilité de M assure l'existence d'une mesure (ou *forme volume*) sur M, que nous noterons $\mathrm{d}V$, ou parfois simplement $\mathrm{d}q$. Cette mesure permet de définir l'espace $\mathsf{L}^2(M)$ des fonctions de carré intégrable sur M. Nous noterons $\| \bullet \|$ la norme et $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire associés.

Un potentiel magnétique sur M est la donnée d'une 1-forme $A \in \Omega^1(M)$, que nous supposerons $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons d la *dérivation extérieure*, qui à toute p-forme α associe la $p+1$-forme $\mathrm{d}\alpha$. Formellement, le Laplacien magnétique est défini par

$$\mathcal{L}_\hbar = (i\hbar \mathrm{d} + A)^*(i\hbar \mathrm{d} + A). \tag{2.1.8}$$

Bien évidemment, comme dans le cas $\mathbf{R}^d$, il faut préciser cette définition. De plus, la variété M admettant un bord, il faut se donner des conditions aux bords. Nous considérerons uniquement la *réalisation de Dirichlet* de $\mathcal{L}_\hbar$.

Dans ce cas, la forme quadratique $Q_\hbar$ est définie sur

$$\mathsf{Dom}(Q_\hbar) = \{u \in \mathsf{L}^2(M); \quad (i\hbar \mathrm{d} + A)u \in \mathsf{L}^2\Omega^1(M); \quad u_{\partial M} = 0\}, \tag{2.1.9}$$

par la relation

$$Q_\hbar(u, v) = \int_M (i\hbar \mathrm{d} + A)u \ \overline{(i\hbar \mathrm{d} + A)v} \mathrm{d}V. \tag{2.1.10}$$

Ici, $\mathsf{L}^2\Omega^1(M)$ désigne l'espace des 1-formes de carré intégrable. De plus, $u_{\partial M}$ désigne la *trace* de la fonction u. Celle-ci a bien un sens pour les fonctions $u \in \mathsf{L}^2(M)$ telles que $\mathrm{d}u \in \mathsf{L}^2\Omega^1(M)$, ce qui est le cas ici puisque A est bornée sur le compact M.

La méthode d'extension de Friedrich permet de définir l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}_\hbar$ sur

$$\mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar) = \{u \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar); \quad (i\hbar \mathrm{d} + A)^*(i\hbar \mathrm{d} + A)u \in \mathsf{L}^2(M)\}, \tag{2.1.11}$$

par la relation

$$Q_\hbar(u, v) = \langle \mathcal{L}_\hbar u, v \rangle, \quad \forall v \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar), \quad \forall u \in \mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar). \tag{2.1.12}$$

$\mathcal{L}_\hbar$ est le *Laplacien magnétique de Dirichlet* sur M.

2.2 – Le champ magnétique

2.2.1 – Champ magnétique sur $\mathbf{R}^d$

La définition du Laplacien magnétique fait apparaître un potentiel magnétique $\mathbf{A}$, mais nous n'avons pas encore fait le lien avec un champ magnétique. Sur $\mathbf{R}^d$, le champ magnétique $\mathbf{B}$ associé à $\mathbf{A}$ est la matrice rotationnelle de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}(q) := (B_{ij}(q))_{1 \leq i,j \leq d} = (\partial_i A_j - \partial_j A_i)_{1 \leq i,j \leq d}. \tag{2.2.1}$$

En particulier, cette matrice est anti-symétrique.

En dimension 1, il n'y a pas de champ magnétique : $\mathbf{B} = 0$ et nous verrons que $\mathcal{L}_\hbar$ est conjugué au Laplacien $-\hbar^2\partial^2$.

En dimension 2, le champ magnétique est entièrement déterminé par la fonction scalaire $B_{12}(q) = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$.

En dimension 3, les données de la matrice magnétique

$$\mathbf{B}(q) = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}(q) & B_{13}(q) \\ -B_{12}(q) & 0 & B_{23}(q) \\ -B_{13}(q) & -B_{23}(q) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

sont entièrement contenues dans le champ de vecteurs $(B_{23}, -B_{13}, B_{12})$. Ce champ justifie la terminologie "champ magnétique" et correspond au champ magnétique habituel de la physique.

Remarque. Plus intrinsèquement, le champ magnétique peut être représenté par la 2-forme

$$B = \sum_{1 \le i < j \le d} B_{ij} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}q_j.$$

En notant $A = A_1 \mathrm{d}q_1 + \cdots A_d \mathrm{d}q_d$, on a alors $B = \mathrm{d}A$. Cette approche est compatible avec les changements de coordonnées, et permet de définir le champ magnétique sur une variété.

2.2.2 – Champ magnétique sur une variété

Sur une variété Riemannienne (M, g), le champ magnétique est donné par la 2-forme fermée

$$B = \mathrm{d}A. \tag{2.2.3}$$

Ainsi, pour tout $q \in M$, B_q est une forme bilinéaire antisymétrique sur l'espace tangent T_qM. En utilisant le produit scalaire g_q sur T_qM donné par la métrique Riemannienne, on peut définir un endomorphisme $\mathbf{B}(q) : T_qM \to T_qM$ par :

$$B_q(X, Y) = g_q(X, \mathbf{B}(q)Y), \quad \forall X, Y \in T_qM. \tag{2.2.4}$$

L'endomorphisme $\mathbf{B}(q)$ ainsi défini est antisymétrique pour le produit scalaire g_q, et le rang de B_q est égal au rang de $\mathbf{B}(q)$.

2.2.3 – Changements de jauge

Considérons le cas $M = \mathbf{R}^d$. Étant donné un champ magnétique $\mathbf{B}$, le Laplacien magnétique semble dépendre du choix d'un potentiel $\mathbf{A}$ tel que $\mathbf{B} = \mathsf{rot}\mathbf{A}$. On parle d'un *choix de jauge*. En fait, on peut passer d'une jauge à une autre sans modifier la théorie spectrale de l'opérateur. En effet, si $\mathbf{A}$ et $\tilde{\mathbf{A}}$ sont tels que $\mathsf{rot}\mathbf{A} = \mathsf{rot}\tilde{\mathbf{A}}$, alors

il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ telle que $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f$. De plus, un simple calcul montre que

$$e^{i\hbar^{-1}f}(i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2 e^{-i\hbar^{-1}f} = (i\hbar\nabla + \mathbf{A} + \nabla f)^2. \tag{2.2.5}$$

Ainsi, les deux opérateurs sont conjugués. Ils ont même spectre, et les fonctions propres de l'un et de l'autre diffèrent uniquement du facteur multiplicatif $e^{i\hbar^{-1}f}$.

Remarque 1. En dimension 1, en prenant pour f une primitive de la fonction scalaire $-\mathbf{A}$ on voit que le Laplacien magnétique est équivalent à $-\hbar^2\partial^2$. De même, en dimension plus grande, on peut toujours se ramener à un potentiel $\mathbf{A}$ tel que $A_1 = 0$.

Remarque 2. Sur une variété Riemannienne plus générale, on peut toujours passer d'un potentiel A à un potentiel $A + \mathrm{d}f$, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Cependant, la relation $\mathrm{d}A = \mathrm{d}\tilde{A}$ n'implique pas l'existence d'une fonction f telle que $A - \tilde{A} = \mathrm{d}f$. (On dit que la 1-forme fermée $A - \tilde{A}$ n'est pas nécessairement exacte). Ce phénomène provient de la géométrie globale de la variété. En dimension $d = 2$, cela se produit quand M n'est pas simplement connexe. Dans ce cas, la théorie spectrale de $\mathcal{L}_\hbar$ peut dépendre d'un choix de potentiel. Un tel phénomène s'appelle effet Aharonov-Bohm, et a été étudié dans [Hel88a] par exemple.

2.2.4 – Fonction d'intensité magnétique

Dans cette section nous définissons une fonction scalaire $b : M \to \mathbf{R}$ qui mesure l'intensité du champ magnétique. Cette fonction joue un rôle remarquable dans la théorie spectrale de $\mathcal{L}_\hbar$, et $\hbar b$ peut parfois s'interprêter comme un potentiel effectif, jouant le même rôle qu'un potentiel électrique V pour l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$.

L'endomorphisme $\mathbf{B}(q)$ étant anti-symétrique et réel, ses valeurs propres sont imaginaires pures et symétriques par rapport à l'axe réel. Nous noterons

$$(\pm i\beta_1(q), \cdots \pm i\beta_s(q))$$

avec $\beta_j(q) > 0$ ses valeurs propres non nulles. $2s$ désigne donc le rang de $\mathbf{B}(q)$, qui peut lui-même dépendre de q. L'*intensité magnétique* est la fonction scalaire définie par

$$b(q) = \sum_{j=1}^{s(q)} \beta_j(q). \tag{2.2.6}$$

Parfois b est appelé "trace +" de $\mathbf{B}$.

Remarque. En général, la fonction b n'a aucune raison d'être régulière. Cependant, on peut montrer que b est continue sur tout ouvert où $\mathbf{B}$ est de rang constant. De plus, si $q_0 \in M$ est un point où les valeurs propres non-nulles de $\mathbf{B}(q_0)$ sont simples, alors les fonctions β_j sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de q_0, et donc b également. Dans cette thèse nous nous placerons au voisinage d'un tel point pour pouvoir utiliser le calcul pseudodifférentiel.

2.3 – Écriture en coordonnées locales

Le but de cette section est de voir comment s'écrivent en coordonnées locales les objets définis sur M : $\mathcal{L}_\hbar$, $Q_\hbar$, B, $\mathbf{B}$, ...

Soit $\mathcal{V} \subset M$ un ouvert borné sur lequel on se donne des coordonnées locales $q = (q_1, ..., q_d)$ (c'est à dire un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}^d$). On en déduit une base $(\partial_{q_1}, \cdots, \partial_{q_d})$ de l'espace tangent T_qM, et la base duale $(\mathrm{d}q_1, \cdots \mathrm{d}q_d)$ de T_qM^*. Dans ces bases, le produit scalaire g_q sur T_qM est identifié avec une matrice symétrique $(g_{ij}(q))$ de déterminant noté $|g|$, et d'inverse noté $(g^{ij}(q))$. Le produit scalaire g_q sur T_qM induit un produit scalaire g_q^* sur T_qM^* qui s'écrit comme la matrice $(g^{ij}(q))$ dans la base $(\mathrm{d}q_1, \cdots \mathrm{d}q_d)$. On peut écrire la 1-forme A et la 2-forme B dans ces coordonnées :

$$A = A_1 \mathrm{d}q_1 + \cdots + A_d \mathrm{d}q_d, \quad B = \sum_{i<j} B_{ij} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}q_j, \tag{2.3.1}$$

où $\mathbf{A} = (A_1, \cdots, A_d) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$, et

$$B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = ({}^T\nabla \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A})_{ij}. \tag{2.3.2}$$

Ici $\nabla \mathbf{A}$ est la matrice Jacobienne de $\mathbf{A}$, et ${}^T\nabla \mathbf{A}$ sa transposée. On note $(\mathbf{B}_{ij}(q))_{1 \le i,j \le d}$ la matrice de l'opérateur $\mathbf{B}(q) : T_qM \to T_qM$ dans la base $(\partial_{q_1}, \cdots, \partial_{q_d})$. Avec cette notation, la relation (2.2.4) reliant B et $\mathbf{B}$ s'écrit :

$$\forall Q, \tilde{Q} \in \mathbf{R}^d, \quad \sum_{ijk} g_{ik} Q_i \mathbf{B}_{kj} \tilde{Q}_j = \sum_{ij} B_{ij} Q_i \tilde{Q}_j,$$

ce qui signifie que

$$\forall i, j, \quad B_{ij} = \sum_k g_{ik} \mathbf{B}_{kj}. \tag{2.3.3}$$

En utilisant la carte $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbf{R}^d$, on peut réécrire la forme quadratique $Q_\hbar$ en coordonnées locales. Pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{V})$, on note $\tilde{u} = u \circ \varphi^{-1}$ et on a :

$$Q_\hbar(u) = \int_M \sum_{k\ell} (i\hbar\partial_k \tilde{u} + A_k \tilde{u})\, g^{k\ell} \overline{(i\hbar\partial_\ell \tilde{u} + A_\ell \tilde{u})} |g|^{1/2} \mathrm{d}q. \tag{2.3.4}$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient :

$$Q_\hbar(u) = \int_M \sum_{k\ell} \left[|g|^{-1/2} (i\hbar\partial_\ell + A_\ell) |g|^{1/2} g^{k\ell} (i\hbar\partial_k + A_k) \tilde{u} \right] \overline{\tilde{u}} |g|^{1/2} \mathrm{d}q.$$

Par conséquent, on a $(\mathcal{L}_\hbar u) \circ \varphi^{-1} = \mathcal{L}_\hbar^{coord}(u \circ \varphi^{-1})$ avec :

$$\mathcal{L}_\hbar^{coord} \tilde{u} = \sum_{k,\ell=1}^{d} |g|^{-1/2} (i\hbar\partial_\ell + A_\ell) |g|^{1/2} g^{k\ell} (i\hbar\partial_k + A_k) \tilde{u}. \tag{2.3.5}$$

2.4 – Minoration de l'énergie

L'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$ peut être minoré par le potentiel V lui-même. Cette propriété a de nombreuses conséquences sur sa théorie spectrale. Un exemple remarquable est le resultat d'Agmon [Agm82] sur la décroissance des fonctions propres, que nous aborderons plus loin. Dans cette section, nous montrons que $\mathcal{L}_\hbar$ est minoré par $\hbar b$ dans la limite $\hbar \to 0$, ce qui justifie l'interprétation de $\hbar b$ comme potentiel effectif.

2.4.1 – Minoration en dimension 2

Dans le cas particulier où $M = \mathbf{R}^2$, on montre la minoration suivante.

Théorème 2.1. *On suppose $M = \mathbf{R}^2$. Notons $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$. Pour tout $\hbar > 0$ et tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, on a l'inégalité :*

$$Q_h(u,u) \geq \left| \int_M \hbar B(q)|u(q)|^2 \mathrm{d}q \right|. \tag{2.4.1}$$

Démonstration. En notant $\Pi_j = i\hbar\partial_j + A_j$, on a la relation de commutation suivante :

$$[\Pi_1, \Pi_2] = i\hbar(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = i\hbar B.$$

Pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, on en déduit que :

$$i\langle u, \hbar B u\rangle = -i\langle u, \Pi_1\Pi_2 u - \Pi_2\Pi_1 u\rangle = -i\left(\langle \Pi_1 u, \Pi_2 u\rangle - \langle \Pi_2 u, \Pi_1 u\rangle\right).$$

Il reste donc

$$|\langle u, \hbar B u\rangle| = 2|\mathsf{Im}\langle \Pi_1 u, \Pi_2 u\rangle| \leq \|\Pi_1 u\|^2 + \|\Pi_2 u\|^2 = Q_\hbar(u,u).$$

□

2.4.2 – Minoration en dimension quelconque

Sur une variété de dimension plus grande, Helffer-Mohamed [HM96] ont démontré une minoration de l'énergie qui est valable dans la limite semiclassique $\hbar \to 0$. La preuve consiste à approcher localement le champ magnétique et la métrique par des constantes, l'inégalité étant déjà connue dans ce cas.

Théorème 2.2. *Supposons que (M, g) est une variété Riemannienne compacte, ou $\mathbf{R}^d$ muni de la métrique Euclidienne. Dans le cas de $\mathbf{R}^d$, on suppose également :*

$$\exists C > 0, \quad |\nabla \mathbf{B}(q)| \leq C(1 + |\mathbf{B}(q)|). \tag{2.4.2}$$

Alors il existe $\hbar_0 > 0$ et $C_0 > 0$ tels que, pour $\hbar \in (0, \hbar_0]$,

$$\forall u \in D(Q_\hbar), \quad (1 + \hbar^{1/4} C_0) Q_\hbar(u) \geq \int_M \hbar(b(q) - \hbar^{1/4} C_0)|u(q)|^2 \mathrm{d}q. \tag{2.4.3}$$

Démonstration. Soit $(\mathcal{V}_m)_{m\geq 0}$ un recouvrement de M par des ouverts bornés $\mathcal{V}_m$ sur lesquels il existe des coordonnées $\phi_m : \mathcal{V}_m \to \mathbf{R}^d$. Soit $(\chi_m)_{m\geq 0}$ une partition de l'unité sur M, telle que

$$\sum_{m\geq 0} \chi_m^2 = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{m\geq 0} |\mathrm{d}\chi_m(q)|^2 \leq C, \quad \forall q \in M,$$

avec $\mathsf{supp}(\chi_m) \subset \mathcal{V}_m$. Alors par la formule de localisation (Lemma 2.8), pour tout $u \in D(Q_\hbar)$ on a :

$$Q_\hbar(u) = \sum_{m\geq 0} Q_\hbar(\chi_m u) - \hbar^2 \sum_{m\geq 0} \|u\mathrm{d}\chi_m\|^2 \geq \sum_{m\geq 0} Q_\hbar(\chi_m u) - C\hbar^2\|u\|^2. \tag{2.4.4}$$

On peut alors utiliser la carte ϕ_m sur $\mathsf{supp}(\chi_m)$. Notons $v_m = (\chi_m u)\circ\phi_m^{-1}$. Alors en utilisant les coordonnées locales $x = \phi_m(q)$ on a (avec les notations données en section 2.3) :

$$Q_\hbar(\chi_m u) = \sum_{k,\ell=1}^{d} \int_{\phi_m(\mathcal{V}_m)} g^{k\ell}(x)(i\hbar\partial_k v_m + A_k v_m)(i\hbar\partial_\ell v_m + A_\ell v_m)|g(x)|^{1/2}\mathrm{d}x = Q_\hbar^{co}(v_m).$$

Si l'on arrive à démontrer l'inégalité (2.4.3) pour $Q_\hbar^{co}(v_m)$ alors, en sommant sur m, on en déduira l'inégalité pour $Q_\hbar$ en utilisant (2.4.4).

Notons $\langle \mathbf{B}(x)\rangle = (1+|\mathbf{B}(x)|^2)^{1/2}$. Dans le cas $M = \mathbf{R}^d$, avec l'hypothèse (2.4.2), quitte à choisir $\mathcal{V}_m$ assez petit, on peut trouver $z_m \in \mathbf{R}^d$ et $C > 0$ tel que :

$$C^{-1}\langle \mathbf{B}(x)\rangle \leq \langle \mathbf{B}(z_m)\rangle \leq C\langle \mathbf{B}(x)\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{V}_m, \quad \forall m \geq 0. \tag{2.4.5}$$

Dans le cas M compact, l'inégalité (2.4.5) est évidente car il n'y a qu'un nombre fini de $m \geq 0$. En dilatant une partition de l'unité sur $\mathbf{R}^d$, on peut trouver une nouvelle partition $(\chi_{m,j}^\hbar)_{j\geq 0}$ sur $\mathcal{U}_m = \phi_m(\mathcal{V}_m)$ telle que :

$$\sum_{j\geq 0} |\chi_{m,j}^\hbar|^2 = 1, \quad \text{and} \quad \sum_{j\geq 0} |\mathrm{d}\chi_{m,j}^\hbar(x)|^2 \leq C\langle \mathbf{B}(z_m)\rangle\hbar^{-2\alpha}, \tag{2.4.6}$$

où $C > 0$ ne dépend pas de m, $\alpha > 0$ sera choisi ultérieurement, et

$$\mathsf{supp}(\chi_{m,j}^\hbar) \subset \mathcal{B}_{m,j} := \{x : |x - y_{m,j}| \leq \langle \mathbf{B}(z_m)\rangle^{-1/2}\hbar^\alpha\}. \tag{2.4.7}$$

Alors en utilisant à nouveau la formule de localisation, on a pour tout $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U}_m)$:

$$Q_\hbar^{co}(v) \geq \sum_j Q_\hbar^{co}(\chi_{m,j}v) - C\langle \mathbf{B}(z_m)\rangle\hbar^{2-2\alpha}\|v\|^2 \tag{2.4.8}$$

$$\geq \sum_j Q_\hbar^{co}(\chi_{m,j}v) - C\hbar^{2-2\alpha}\int (b(x)+1)|v(x)|^2|g(x)|^{1/2}\mathrm{d}x, \tag{2.4.9}$$

car $\langle \mathbf{B}(z_m)\rangle \leq C\langle \mathbf{B}(x)\rangle \leq C'(b(x)+1)$. Maintenant nous allons approcher le champ magnétique par une constante sur $\mathcal{B}_{m,j}$. Comme b est continue, on peut trouver $z_{m,j} \in \mathcal{B}_{m,j}$ tel que

$$b(z_{m,j}) \geq b(x), \quad \forall x \in \mathcal{B}_{m,j}. \tag{2.4.10}$$

Un changement de jauge permet d'annuler le potentiel $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_d)$ au point $z_{m,j}$. Autrement dit, on peut trouver une fonction $\varphi_{m,j}$ sur $\mathcal{B}_{m,j}$ tel que

$$\tilde{\mathbf{A}}(z_{m,j}) = 0,$$

où $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\varphi_{m,j}$. Un tel changement revient à changer $\chi_{m,j}v$ en $\chi_{m,j}e^{i\hbar^{-1}\varphi_{m,j}}v$, ce qui ne change en aucun point la minoration voulue de $Q_\hbar^{co}(\chi_{m,j}v)$. On définit le linéarisé

$$\mathbf{A}_{lin}(x) = \mathbf{B}(z_{m,j}).(x - z_{m,j}),$$

qui vérifie :

$$|\tilde{\mathbf{A}}(x) - \mathbf{A}_{lin}(x)| \leq \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{B}\|_{\infty,\mathcal{B}_{j,m}}|x - z_{m,j}|^2, \quad \text{sur } \mathcal{B}_{m,j},$$

et en utilisant (2.4.2) et (2.4.5),

$$|\tilde{\mathbf{A}}(x) - \mathbf{A}_{lin}(x)| \leq C\langle\mathbf{B}(z_{m,j})\rangle|x - z_{m,j}|^2, \quad \text{sur } \mathcal{B}_{m,j}. \tag{2.4.11}$$

alors en notant $Q_\hbar^{lin}$ la forme quadratique associée au potentiel linéarisé $\mathbf{A}_{lin}$, on a pour $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}_{m,j})$,

$$Q_\hbar(e^{i\hbar^{-1}\varphi_{m,j}}v) = Q_\hbar^{lin}(v) + \|(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}_{lin})v\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}_{lin})v, (i\hbar\nabla + \mathbf{A}_{lin})v\rangle.$$

En utilisant (2.4.11)) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$Q_\hbar^{co}(e^{i\hbar^{-1}\varphi_{m,j}}v) \geq Q_\hbar^{lin}(v) - 2C\|\langle\mathbf{B}(z_{m,j})\rangle|x - z_{m,j}|^2v\|\sqrt{Q_\hbar^{lin}(v)}.$$

On utilise l'inégalité $2|ab| \leq \varepsilon^2a^2 + \varepsilon^{-2}b^2$ avec $\varepsilon = \hbar^\beta$ pour obtenir

$$\begin{aligned} Q_\hbar^{co}(e^{i\hbar^{-1}\varphi_{m,j}}v) &\geq \left(1 - C\hbar^{2\beta}\right)Q_\hbar^{lin}(v) - C\hbar^{-2\beta}\|\langle\mathbf{B}(z_{m,j})\rangle|x - z_{m,j}|^2v\|^2 \\ &\geq \left(1 - C\hbar^{2\beta}\right)Q_\hbar^{lin}(v) - \tilde{C}\hbar^{4\alpha-2\beta}\|v\|^2 \quad \text{d'après (2.4.5) et (2.4.7).} \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Il reste à estimer $Q_\hbar^{lin}$. Dans le cas où la variété de départ M est compacte, la matrice g de la métrique peut ne pas être constante. Nous allons l'approcher par sa valeur en $z_{m,j}$. Ceci est possible à une erreur en $\hbar^\alpha$ près, car $\mathcal{B}_{m,j}$ est de taille $\mathcal{O}(\hbar^\alpha)$.

$$\begin{aligned} Q_\hbar^{lin}(v) &= \sum_{k,l}\int |g(x)|^{1/2}g^{kl}(x)(i\hbar\partial_k v + A_k^{lin}v)\overline{(i\hbar\partial_l v + A_l^{lin}v)}\mathrm{d}x \\ &\geq (1 - C\hbar^\alpha)\sum_{k,l}\int |g(z_{m,j})|^{1/2}g^{kl}(z_{m,j})(i\hbar\partial_k v + A_k^{lin}v)\overline{(i\hbar\partial_l v + A_l^{lin}v)}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $y = P_{m,j}x$ avec $P_{m,j}$ une matrice telle que $P_{m,j}^T(g^{k\ell}(z_{m,j}))P_{m,j} = I$. Alors, en notant $\hat{v}(y) = v(P_{m,j}^{-1}y)$ et $\hat{\mathbf{A}}^{lin}(y) = P_{m,j}^{-1}\mathbf{A}^{lin}(y)$, on obtient

$$Q_\hbar^{lin}(v) \geq (1 - C\hbar^\alpha)\sum_{k=1}^d\int |i\hbar\partial_k\hat{v} + \hat{A}_k^{lin}v|^2\mathrm{d}y.$$

On a minoré $Q_\hbar^{lin}$ par la forme quadratique d'un Laplacien magnétique avec champ constant sur $\mathbf{R}^d$, de matrice $\mathbf{B}(z_{m,j})$. Pour un tel opérateur, la minoration par $\hbar b(z_{m,j})$ est bien connue. On obtient donc

$$\begin{aligned} Q_\hbar^{lin}(v) &\geq (1 - C\hbar^\alpha)\,\hbar \int b(z_{m,j})|\hat{v}(y)|^2 \mathrm{d}y \\ &\geq (1 - C\hbar^\alpha)\,\hbar \int b(z_{m,j})|v(x)|^2 |g(z_{m,j})|^{1/2} \mathrm{d}x \\ &\geq (1 - C\hbar^\alpha)\,\hbar \int b(x)|v|^2 |g(x)|^{1/2} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

grâce à (2.4.10) et l'approximation de $g(x)$ par $g(z_{m,j})$. Ainsi,

$$Q_\hbar^{lin}(e^{-i\hbar^{-1}\varphi_{m,j}} v) \geq (1 - C\hbar^\alpha)\,\hbar \int b(x)|v|^2 |g(x)|^{1/2} \mathrm{d}x.$$

En utilisant cette inégalité dans (2.4.12), il reste, pour tout $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}_{m,j})$,

$$Q_\hbar^{co}(v) \geq (1 - C\hbar^{2\beta})(1 - C\hbar^\alpha) \int \hbar b(x)|v(x)|^2 |g(x)|^{1/2} \mathrm{d}x - \tilde{C}\hbar^{4\alpha - 2\beta}\|v\|^2.$$

On applique cette inégalité à $\chi_{m,j} v$ dans (2.4.9), et on obtient pour $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U}_m)$,

$$\begin{aligned} Q_\hbar^{co}(v) \geq &(1 - C\hbar^{2\beta})(1 - C\hbar^\alpha) \int \hbar b(x)|v(x)|^2 |g(x)|^{1/2} \mathrm{d}x - \tilde{C}\hbar^{4\alpha - 2\beta}\|v\|^2 \\ &- C\hbar^{2-2\alpha} \int_M (b(x) + 1)|v(x)|^2 |g(x)|^{1/2} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Quitte à augmenter les constantes, on peut réorganiser les puissances de $\hbar$:

$$(1 + C\hbar^{2\beta} + C\hbar^\alpha + C\hbar^{1-2\alpha}) Q_\hbar^{co}(v) \geq \hbar \int_M (b(x) - C\hbar^{4\alpha - 2\beta - 1} - C\hbar^{1-2\alpha})|v|^2 |g|^{1/2} \mathrm{d}x.$$

L'inégalité désirée est obtenue en choisissant $\beta = 1/8$ et $\alpha = 3/8$. □

2.5 – Premières estimations spectrales

Dans cette section, nous démontrons que le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est discret dans le cas où M est compacte, puis nous donnons une estimation du bas du spectre essentiel dans le cas où $M = \mathbf{R}^d$. Enfin, nous donnons une estimation grossière du bas du spectre de la forme $\lambda_1(\hbar) = b_0\hbar + o(h)$, ce qui permet d'introduire des méthodes standards d'analyse semiclassique.

2.5.1 – Spectre sur une variété compacte

L'opérateur $\mathcal{L}_\hbar$ étant auto-adjoint, son spectre se décompose en deux ensembles disjoints $\mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar) = \mathsf{sp}_d(\mathcal{L}_\hbar) \cup \mathsf{sp}_{ess}(\mathcal{L}_\hbar)$. Le spectre discret $\mathsf{sp}_d(\mathcal{L}_\hbar)$ est composé de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Le reste du spectre $\mathsf{sp}_{ess}(\mathcal{L}_\hbar)$ est appelé spectre essentiel : Il s'agit de la partie du spectre qui est stable par perturbations compactes. Il est standard que, dans le cas où M est compacte, $\mathcal{L}_\hbar$ n'admet pas de spectre essentiel.

Théorème 2.3. *Supposons que M est compacte. Alors, l'opérateur $\mathcal{L}_\hbar$ est à résolvante compacte. Par conséquent, son spectre est discret et formé d'une suite de valeurs propres $\lambda_1(\hbar) \leq \lambda_2(\hbar) \leq ...$ telle que $\lambda_j(\hbar) \to +\infty$ quand $j \to +\infty$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{L}_\hbar$ est positif, $-1 \notin \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar)$ et la résolvante en -1 est bien définie :

$$(\mathcal{L}_\hbar + 1)^{-1} : \mathsf{L}^2(M) \to \mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar).$$

De plus $\mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar) = \mathsf{H}^1_0(M) \cap \mathsf{H}^2(M)$. D'après le théorème d'injection de Sobolev, comme M est compacte, l'injection de $\mathsf{H}^1_0(M)$ dans $\mathsf{L}^2(M)$ est compacte, et donc $(\mathcal{L}_\hbar + 1)^{-1}$ est compact en tant qu'opérateur $\mathsf{L}^2(M) \to \mathsf{L}^2(M)$. □

2.5.2 – Estimation du spectre essentiel

Dans le cas où $M = \mathbf{R}^d$, $\mathcal{L}_\hbar$ peut avoir du spectre essentiel. La minoration de la forme quadratique par $\hbar b$, démontrée en section 2.4.2 permet d'obtenir une estimation du bas du spectre essentiel (voir [HM96]).

Théorème 2.4. *Supposons que $M = \mathbf{R}^d$ muni de la métrique Euclidienne, et que le champ magnétique vérifie*

$$|\nabla \mathbf{B}(q)| \leq C(1 + |\mathbf{B}(q)|).$$

Soient $b_1 \geq 0$ et $R > 0$ tels que

$$b(q) \geq b_1, \quad \forall |q| \geq R. \tag{2.5.1}$$

Alors, il existe $\hbar_0 > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $\hbar \in (0, \hbar_0]$,

$$\inf \mathsf{sp}_{ess}(\mathcal{L}_\hbar) \geq \hbar(b_1 - C\hbar^{1/4}). \tag{2.5.2}$$

Démonstration. Pour $u \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R}^d)$ tel que $\mathsf{supp}(u) \subset \{|q| \geq R\}$, le Théorème 2.2 donne :

$$\langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle \geq \hbar(b_1 - C\hbar^{1/4})\|u\|^2.$$

Par conséquent, la caractérisation de Persson du spectre essentiel (Cf annexe Théorème A.2) donne :

$$\inf \mathsf{sp}_{ess}(\mathcal{L}_\hbar) = \lim_{R \to +\infty} \inf_{u \in \mathcal{C}^\infty_0(\{|q| \geq R\})} \frac{\langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle}{\|u\|^2} \geq \hbar(b_1 - C\hbar^{1/4}).$$

□

2.5.3 – Estimation du bas du spectre

Notons $\lambda_1(\hbar) = \inf \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar)$. Comme $\mathcal{L}_\hbar$ est auto-adjoint et positif, le principe du min-max (Théorème A.1) assure que

$$\lambda_1(\hbar) = \inf_{\substack{u \in \mathsf{Dom}(\mathcal{L}_\hbar) \\ \|u\| = 1}} \langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle.$$

Par conséquent, la construction d'un *quasimode*, c'est à dire d'une fonction v qui vérifie une équation propre approchée $\mathcal{L}_\hbar v = \mu(\hbar)v + \mathcal{O}(\hbar^\alpha)$, permet d'obtenir une majoration de $\lambda_1(\hbar)$. Couplé à une minoration, cette méthode peut permettre d'obtenir de bonnes approximations des valeurs propres. De cette manière on obtient l'estimation suivante, en choisissant un quasimode gaussien. Cette preuve est inspirée de [FH10].

Théorème 2.5. *Soit $b_0 = \min_{q\in M} b(q)$, et supposons que le minimum soit atteint en au moins un point de $M \setminus \partial M$. Dans le cas $M = \mathbf{R}^d$, on suppose que $|\nabla \mathbf{B}(q)| \leq C(1 + |\mathbf{B}(q)|)$. Alors*

$$\lambda_1(\hbar) = b_0\hbar + \mathcal{O}(\hbar^{5/4}).$$

Démonstration. Pour simplifier les notations nous traiterons le cas où d est pair (le cas d impair ne change presque rien à la preuve). Soit $q_0 \in M\setminus\partial M$ tel que $b(q_0) = b_0$. Choisissons une carte $\varphi : \Omega \subset M \to V \subset \mathbf{R}^d$ au voisinage de q_0 telle que $\varphi(q_0) = 0$. Si $v \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$, on peut lui associer le quasimode $u = v \circ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et on a :

$$Q_\hbar(u,u) = \int_V \sum_{1\leq k,\ell\leq d} g^{k\ell}(x)(i\hbar\partial_k v(x) + A_k(x)v(x))\overline{(i\hbar\partial_\ell v(x) + A_\ell(x)v(x))}\mathrm{d}x. \tag{2.5.3}$$

Nous pouvons toujours choisir φ tel que, au point $x = 0$ la matrice $g(0)$ est l'identité et $\mathbf{B}(0)$ la matrice diagonale par blocs :

$$\mathbf{B}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(0) & \dots & & \\ -\beta_1(0) & 0 & \dots & & \\ & & 0 & \beta_2(0) & \dots \\ & & -\beta_2(0) & 0 & \dots \\ & & & & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.5.4}$$

De plus, nous allons faire un choix de jauge tel que $\mathbf{A}(0) = 0$ et pour $1 \leq j \leq d/2$

$$\partial_k A_{2j-1}(0) = \begin{cases} \frac{\beta_j(0)}{2} & \text{pour } k = 2j \\ 0 & \text{pour } k \neq 2j \end{cases} \tag{2.5.5}$$

$$\partial_k A_{2j}(0) = \begin{cases} -\frac{\beta_j(0)}{2} & \text{pour } k = 2j-1 \\ 0 & \text{pour } k \neq 2j. \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Ceci est possible en choisissant une fonction de jauge $f : V \to \mathbf{R}$ telle que $\nabla f(0) = -\mathbf{A}(0)$ et $\partial_{k\ell} f(0) = -M_{k\ell}$, où M est la matrice symétrique :

$$M = \begin{pmatrix} \partial_1 A_1(0) & \partial_1 A_2(0) - \frac{\beta_1(0)}{2} & \partial_1 A_3(0) & \partial_1 A_4(0) & \dots \\ \partial_2 A_1(0) + \frac{\beta_1(0)}{2} & \partial_2 A_2(0) & \partial_2 A_3(0) & \partial_2 A_4(0) & \dots \\ \partial_3 A_1(0) & \partial_3 A_2(0) & \partial_3 A_3(0) & \partial_3 A_4(0) - \frac{\beta_2(0)}{2} & \dots \\ \partial_4 A_1(0) & \partial_4 A_2(0) & \partial_4 A_3(0) + \frac{\beta_2(0)}{2} & \partial_4 A_4(0) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

M est bien symétrique d'après (2.5.4), car $\mathbf{B}_{ij}(0) = \partial_i A_j(0) - \partial_j A_i(0)$. Le nouveau potentiel $\mathbf{A} + \nabla f$ vérifie les conditions voulue en $x = 0$. Nous choisissons un

quasimode gaussien tronqué :

$$v(x) = \frac{\sqrt{\rho_1 \cdots \rho_d}}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\hbar}(\rho_1 x_1^2 + ... + \rho_d x_d^2)\right) \chi(x\hbar^{-1/2+\varepsilon}),$$

où ρ est un vecteur fixe à déterminer, et χ est une fonction de troncature, valant 1 sur un voisinage de 0. Notons que, pour $|x| \geq c\hbar^{1/2-\varepsilon}$ on a $\exp(-\frac{1}{4\hbar}(\rho_1 x_1^2 + ... + \rho_d x_d^2)) \leq \exp(-\frac{c^2}{4\hbar^\varepsilon})$. Donc dans les calculs qui suivent, on peut remplacer χ par 1, à une erreur exponentiellement petite près. Par conséquent, d'après (2.5.3) :

$$Q_\hbar(u,u) = \int_V \sum_{k\ell} g^{k\ell}(x)(-\frac{i}{2}\rho_k x_k + A_k(x))\overline{(-\frac{i}{2}\rho_\ell x_\ell + A_\ell(x))}|v|^2 |g(x)|^{1/2} \mathrm{d}x + \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Or, sur le support de v on a $|x| \leq c\hbar^{1/2-\varepsilon}$, donc on peut faire un développement limité de la fonction intégrande au voisinage de 0. Sachant que $g(0) = I$ et avec le choix de jauge fait précédemment, il reste :

$$Q_\hbar(u,u) = \int_V |v(x)|^2 \sum_{j=1}^{d/2} |-\frac{i}{2}\rho_{2j-1}x_{2j-1} + \frac{\beta_j(0)}{2}x_{2j}|^2 + |-\frac{i}{2}\rho_{2j}x_{2j} - \frac{\beta_j(0)}{2}x_{2j-1}|^2 + \mathcal{O}(\hbar^{3/2-3\varepsilon})$$

En choisissant $\rho_{2j-1} = \rho_{2j} = \beta_j(0)$, on obtient :

$$Q_\hbar(u,u) = \sum_{j=1}^{d/2} \int_V \frac{\beta_j(0)^2}{2}(x_{2j}^2 + x_{2j-1}^2)v(x)^2 \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{d/2} \hbar\beta_j(0) + \mathcal{O}(\hbar^{3/2-3\varepsilon}).$$

De plus, $\|u\|^2 = \|v\|^2 = 1 + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$, donc $Q_\hbar(u,u) = \left(\hbar b_0 + \mathcal{O}(\hbar^{3/2-3\varepsilon})\right)\|u\|^2$. D'après le principe du min-max on a donc $\lambda_1(\hbar) \leq b_0\hbar + \mathcal{O}(\hbar^{3/2-3\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon > 0$. On obtient la minoration $\lambda_1(\hbar) \geq b_0\hbar - C_0\hbar^{5/4}$ en minorant b par b_0 dans l'estimation de $Q_\hbar$ donnée par le Théorème 2.2. □

2.6 – Décroissance d'Agmon pour les fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$

Dans son cours [Agm82], Agmon utilise l'inégalité $-\hbar^2\Delta + V \geq V$ pour démontrer une décroissance exponentielle des fonctions propres de $-\hbar^2\Delta + V$ en dehors du "puit électrique" $\{V(q) = \min V\}$, ou encore $\{V(q) \leq E\}$. Ce résultat est essentiel dans l'étude de l'effet tunnel. Dans le cas du Laplacien magnétique, la minoration de $\mathcal{L}_\hbar$ par $\hbar b$ (donnée par le Théorème 2.2) permet d'obtenir le même genre de résultats. Ce théorème, fondamental dans cette thèse, est issu de [Ray17].

Théorème 2.6. *On se place sous les hypothèses du Théorème 2.2. Soient $\alpha \in (0, 1/2)$ et $\tilde{b}_1 > b_1 > 0$ tels que $K := \{b(q) \leq \tilde{b}_1\}$ est compact. Alors il existe $C > 0$ et $\hbar_0 > 0$ tels que, pour $\hbar \in (0, \hbar_0)$, toutes les fonctions propres ψ de $\mathcal{L}_\hbar$ associées à une valeur propre $\lambda \leq b_1\hbar$ vérifient :*

$$\int_M |e^{\mathrm{d}(q,K)\hbar^{-\alpha}}\psi|^2 \mathrm{d}V \leq C\|\psi\|^2. \tag{2.6.1}$$

Démonstration. Si $\Phi : M \to \mathbf{R}$ est une fonction Lipschitzienne telle que $e^{\Phi}\psi \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar)$, on a la formule d'Agmon (Lemme 2.9) :

$$Q_\hbar(e^{\Phi}\psi) = \lambda\|e^{\Phi}\psi\|^2 + \hbar^2\|\mathrm{d}\Phi e^{\Phi}\psi\|^2.$$

Avec l'inégalité du Théorème 2.2,

$$(1+\hbar^{1/4}C_0)Q_\hbar(e^{\Phi}\psi) \geq \int \hbar(b(q)-\hbar^{1/4}C_0)|e^{\Phi}\psi|^2\mathrm{d}V,$$

on obtient :

$$\int \left[\hbar(b(q)-\hbar^{1/4}C_0) - (1+\hbar^{1/4}C_0)(\lambda+\hbar^2|\mathrm{d}\Phi|^2)\right]|e^{\Phi}\psi|^2\mathrm{d}V \leq 0.$$

Nous allons minorer la partie non compacte de l'intégrale par sa partie compacte. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{K^c} &\left[\hbar(b(q)-\hbar^{1/4}C_0) - (1+\hbar^{1/4}C_0)(\lambda+\hbar^2|\mathrm{d}\Phi|^2)\right]|e^{\Phi}\psi|^2\mathrm{d}V \\ &\leq \int_K \left[-\hbar(b(q)-\hbar^{1/4}C_0) + (1+\hbar^{1/4}C_0)(\lambda+\hbar^2|\mathrm{d}\Phi|^2)\right]|e^{\Phi}\psi|^2\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Nous choisissons pour Φ une approximation de $\mathsf{d}(q,K)\hbar^{-\alpha}$:

$$\Phi_m(q) = \chi_m(d(q,K))\hbar^{-\alpha} \quad \text{pour } m > 0,$$

où $\chi_m(t) = t$ pour $t < m$, $\chi_m(t) = 0$ pour $t > 2m$, et χ_m' est uniformément bornée par rapport à m. Comme $\Phi_m(q) = 0$ sur K, $b(q) \geq 0$, et $\lambda \leq b_1\hbar$, on a :

$$\int_{K^c} \left[\hbar(b(q)-\hbar^{1/4}C_0) - (1+\hbar^{1/4}C_0)(\lambda+\hbar^2|\mathrm{d}\Phi_m|^2)\right]|e^{\Phi_m}\psi|^2\mathrm{d}V \leq C\hbar\|\psi\|^2.$$

De plus on a $|\mathrm{d}\Phi_m|^2 \leq C\hbar^{-2\alpha}$:

$$\int_{K^c} \left[\hbar(b(q)-\hbar^{1/4}C_0) - (1+\hbar^{1/4}C_0)(b_1\hbar+C\hbar^{2-2\alpha})\right]|e^{\Phi_m}\psi|^2\mathrm{d}V \leq C\hbar\|\psi\|^2.$$

Comme $b \geq \tilde{b}_1$ sur K^c, quitte à augmenter C_0 il reste :

$$\int_{K^c} \hbar(\tilde{b}_1 - b_1 - \hbar^{1/4}C_0 - C\hbar^{1-2\alpha})|e^{\Phi_m}\psi|^2\mathrm{d}V \leq C\hbar\|\psi\|^2.$$

De plus $\tilde{b}_1 > b_1$, et donc $\tilde{b}_1 - b_1 - \hbar^{1/4}C_0 - C\hbar^{1-2\alpha} > 0$ pour $\hbar$ assez petit. On a donc montré l'existence d'un $C > 0$ tel que

$$\int_{K^c} |e^{\Phi_m}\psi|^2\mathrm{d}V \leq C\|\psi\|^2,$$

et comme $\Phi_m = 0$ sur K :

$$\int |e^{\Phi_m}\psi|^2\mathrm{d}V \leq (C+1)\|\psi\|^2.$$

Le Lemme de Fatou permet de prendre la limite $m \to +\infty$, et de conclure

$$\int |e^{d(q,K)\hbar^{-\alpha}}\psi|^2\mathrm{d}V \leq (C+1)\|\psi\|^2.$$

□

Ce résultat sera utilisé essentiellement sous la forme suivante, pour localiser les fonctions propres sur un compact, modulo un reste $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$.

Corollaire 2.7. *Sous les hypothèses du Théorème 2.6, soit $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ telle que $|\chi_0| \leq 1$ et $\chi_0 = 1$ sur un voisinage de K. Alors toute fonction propre ψ de $\mathcal{L}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda \leq b_1\hbar$ vérifie :*

$$\psi = \chi\psi + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|\psi\|,$$

et le $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ est uniforme par rapport à (λ, ψ).

Démonstration. Notons $\chi = 1 - \chi_0$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $K_\varepsilon = \{q \in M; \mathsf{d}(q, K) \leq \varepsilon\}$, et on choisi $\varepsilon > 0$ tel que $\chi_0 = 1$ sur K_ε. On peut évaluer le reste comme suit :

$$\|\chi\psi\|^2 \leq \int_{\chi_0 \neq 1} |\chi\psi|^2 \mathrm{d}V \leq \int_{K_\varepsilon^c} |\psi|^2 \mathrm{d}V \leq e^{-2\varepsilon\hbar^{-\alpha}} \int_{K_\varepsilon^c} e^{2\mathsf{d}(q,K)\hbar^{-\alpha}} |\psi|^2 \mathrm{d}V, \tag{2.6.2}$$

et le Théorème 2.6 donne l'estimation voulue :

$$\|\chi\psi\| \leq Ce^{-\varepsilon\hbar^{-\alpha}}\|\psi\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|\psi\|. \tag{2.6.3}$$

□

Remarque. En fait, le reste est mieux que $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$, il est exponentiellement petit. Cependant, ceci n'apportera rien dans les résultats de cette thèse, car les méthodes utilisées ne sont valides que modulo $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$.

2.7 – Annexe : Deux lemmes techniques

Nous donnons les démonstrations de deux résultats utilisés dans ce chapitre, la formule de localisation et la formule d'Agmon.

Lemme 2.8 (Formule de Localisation). *Si $(\chi_m)_{m\geq 0}$ est une partition de l'unité sur M, telle que*

$$\sum_{m\geq 0} \chi_m^2 = 1,$$

alors pour tout $u \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar)$:

$$Q_\hbar(u) = \sum_{m\geq 0} Q_\hbar(\chi_m u) - \hbar^2 \sum_{m\geq 0} \|u\mathrm{d}\chi_m\|^2.$$

Démonstration. Par définition de $Q_\hbar$ on a :

$$\sum_m Q_\hbar(\chi_m u) = \sum_m \int_M |(i\hbar\mathrm{d} + A)(\chi_m u)|^2 \mathrm{d}V = \sum_m \int_M |\chi_m(i\hbar\mathrm{d} + A)u + iu\mathrm{d}\chi_m|^2 \mathrm{d}V.$$

Développons le carré :

$$\sum_m Q_\hbar(\chi_m u) = \sum_m \int_M \left[\chi_m^2 |(i\hbar\mathrm{d} + A)u|^2 + 2\mathsf{Re}\langle i\hbar\chi_m \mathrm{d}\chi_m, u(i\hbar\mathrm{d} + A)u\rangle + |i\hbar u\mathrm{d}\chi_m|^2\right] \mathrm{d}V.$$

Or, en différentiant $1 = \sum_m \chi_m^2$, on obtient $0 = \sum \chi_m \mathrm{d}\chi_m$, et donc il reste

$$\sum_m Q_\hbar(\chi_m u) = Q_\hbar(u) + \hbar^2 \sum_m \int_M |u\mathrm{d}\chi_m|^2 \mathrm{d}V.$$

□

Lemme 2.9 (Formule d'Agmon). *Soit ψ une fonction propre de $\mathcal{L}_\hbar$ associée à la valeur propre λ, et $\Phi : M \to \mathbf{R}$ une fonction Lipschitzienne telle que $e^\Phi \psi \in \mathsf{Dom}(Q_\hbar)$. Alors $\mathrm{d}\Phi$ est définie presque partout et :*

$$Q_\hbar(e^\Phi \psi) = \lambda \|e^\Phi \psi\|^2 + \hbar^2 \|e^\Phi \psi \ \mathrm{d}\Phi\|^2.$$

Démonstration. Par définition de $Q_\hbar$,

$$Q_\hbar(e^\Phi \psi) = \int_M |(i\hbar \mathrm{d} + A)(e^\Phi \psi)|^2 \mathrm{d}V = \int_M |e^\Phi (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi + i\hbar \mathrm{d}\Phi e^\Phi \psi|^2 \mathrm{d}V.$$

On développe le carré pour obtenir

$$Q_\hbar(e^\Phi \psi) = (A) + (B) + (C), \tag{2.7.1}$$

avec

$$\begin{cases} (A) = \int_M |e^\phi (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi|^2 \mathrm{d}V \\ (B) = \int_M \hbar^2 |\mathrm{d}\Phi e^\Phi \psi|^2 \mathrm{d}V \\ (C) = \int_M 2\mathsf{Re}\langle e^\Phi (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi, i\hbar \mathrm{d}\Phi e^\Phi \psi \rangle \mathrm{d}V. \end{cases} \tag{2.7.2}$$

Comme Φ est réelle, (A) peut se réécrire

$$\begin{array}{rcl} (A) & = & \int_M \langle (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi, e^{2\Phi}(i\hbar \mathrm{d} + A)\psi \rangle \mathrm{d}V \\ & = & \int_M \langle (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi, (i\hbar \mathrm{d} + A)(e^{2\Phi}\psi) \rangle - \langle (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi, 2i\hbar \mathrm{d}\Phi e^{2\Phi}\psi \rangle \mathrm{d}V \\ & = & \langle \mathcal{L}_\hbar \psi, e^{2\Phi}\psi \rangle - \int_M 2\langle e^\Phi (i\hbar \mathrm{d} + A)\psi, i\hbar \mathrm{d}\Phi e^\Phi \psi \rangle \mathrm{d}V. \end{array} \tag{2.7.3}$$

De plus, (A) est réel (d'après (2.7.2)) et $\mathcal{L}_\hbar \psi = \lambda \psi$, donc il reste

$$(A) = \mathsf{Re}(A) = \lambda \|e^\Phi \psi\|^2 - (C). \tag{2.7.4}$$

D'après (2.7.1), on obtient

$$Q_\hbar(e^\Phi \psi) = \lambda \|e^\Phi \psi\|^2 + \hbar^2 \|\mathrm{d}\Phi e^\Phi \psi\|^2. \tag{2.7.5}$$

□

Chapitre 3

Opérateurs Pseudodifférentiels

Dans ce chapitre nous donnons les résultats principaux sur les opérateurs pseudodifférentiels semi-classiques, qui seront utilisés dans le reste de la thèse. Nous expliquons également en quoi la théorie des opérateurs pseudodifférentiels peut-être vue comme une perturbation non-commutative de la géométrie symplectique (Théorème d'Egorov). Ceci permettra d'adapter des méthodes de géométrie symplectique (c'est à dire, de dynamique classique) comme la forme normale de Birkhoff, à un cadre semi-classique.

Dans la section 1, nous donnons la définition et les résultats principaux sur les opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels sur $\mathbf{R}^d$; puis dans la section 2, nous définissons les opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels sur une variété Riemannienne M, ainsi que leurs symboles principaux et sous-principaux. Enfin en section 3, nous énonçons différentes versions du Théorème d'Egorov. La plupart des résultats de ce chapitre sont donnés sans démonstration. Ces résultats sont classiques et se retrouvent dans les livres de Zworski [Zwo12] et de Martinez [Mar02], par exemple.

3.1 – Opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels sur $\mathbf{R}^d$

3.1.1 – Définition et classes de symboles

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ est l'espace des fonctions lisses $u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^d, \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| < +\infty.$$

Définition 3.1. *Si $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d})$ et $\hbar \in (0, 1]$, la quantification de Weyl de a est l'opérateur $\mathsf{Op}_\hbar^w(a) : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ défini par*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y,\xi\rangle} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi. \tag{3.1.1}$$

$\mathsf{Op}_\hbar^w(a)$ est appelé l'*opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel* de symbole a. On peut vérifier que $\mathsf{Op}_\hbar^w(a)$ est un opérateur *continue* de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui-même.

Remarque. Si a dépend de 2 paires de variables canoniques $a(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2)$, nous serons amenés à considérer les quantifications *partielles* par rapport aux variables (x_1, ξ_1) (resp. (x_2, ξ_2)). On notera alors $\mathsf{Op}_\hbar^{w,1}(a)$ (resp. $\mathsf{Op}_\hbar^{w,2}(a)$) ou encore $\mathsf{Op}_\hbar^{w,x_1,\xi_1}(a)$ la quantification de a par rapport aux variables (x_1, ξ_1). Ainsi, $\mathsf{Op}_\hbar^{w,1}(a)$ est un opérateur pseudodifférentiel en x_1, dépendant des paramètres (x_2, ξ_2).

Si l'on devait se restreindre à des symboles $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d})$, l'intérêt des opérateurs pseudodifférentiels serait limité. C'est pourquoi nous définissons des classes plus générales de symboles pour lesquelles on peut définir $\mathsf{Op}_\hbar^w(a)$.

Définition 3.2. *Une fonction d'ordre sur $\mathbf{R}^{2d}$ est une fonction $m : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}_+^*$ telle que*

$$\exists C, N > 0, \quad \forall z, w \in \mathbf{R}^{2d}, \quad m(w) \leq C\langle z - w\rangle^N m(z).$$

Dans cette définition, on a utilisé la notation $\langle z\rangle := (1 + |z|^2)^{1/2}$. Ainsi, on impose aux fonctions d'ordre un comportement de croissance au plus polynomiale. Les fonctions d'ordres les plus utilisées sont définies, pour $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ par

$$m(x, \xi) = \langle x\rangle^\alpha \langle \xi\rangle^\beta.$$

Définition 3.3. *Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbf{R}^{2d}$. La classe de symboles $S(m)$ est l'ensemble des fonctions lisses $a_\hbar : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{C}$ (dépendant de $\hbar \in (0, 1]$) telles que, pour $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^d$,*

$$\exists C_{\alpha\beta} > 0, \forall \hbar \in (0, 1], \forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} m(x, \xi).$$

Un *symbole* sera un élément de $S(m)$, pour une certaine fonction d'ordre m. Notons que si $a_\hbar$ dépend de $\hbar$, on demande à la constante $C_{\alpha\beta}$ d'être indépendante de $\hbar$. La plus petite constante $C_{\alpha\beta}$ définit une semi-norme sur $S(m)$, et l'ensemble de ces semi-normes définissent la topologie de $S(m)$. Si $m = 1$, un symbole $a_\hbar \in S(1)$ sera dit "borné".

Si $a_\hbar$ est un symbole, on peut donner un sens à la formule (3.1.1) définissant $\mathsf{Op}_\hbar^w(a)$. En effet, en effectuant des intégrations par parties formelles en y et ξ, on peut faire apparaître des puissances négatives arbitrairement élevées de y et ξ. Comme $a_\hbar$ est à croissance polynômiale, l'intégrale deviendra convergente après suffisamment d'intégrations par parties. Une telle définition de l'intégrale (3.1.1) est appelée *intégrale oscillante*.

Définition 3.4. *Soit m une fonction d'ordre et $a_\hbar \in S(m)$. La quantification de Weyl de $a_\hbar$ est l'opérateur $\mathsf{Op}_\hbar^w(a_\hbar) : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ défini par l'intégrale oscillante :*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a_\hbar)u(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y,\xi\rangle} a_\hbar\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi. \tag{3.1.2}$$

On appellera *opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel* un opérateur de la forme $\mathsf{Op}_\hbar^w(a_\hbar)$, pour un $a_\hbar \in S(m)$. Enfin, nous imposerons parfois une certaine dépendance en $\hbar$:

Définition 3.5. *Un symbole $a_\hbar \in S(m)$ est dit "classique" ou encore "développable en puissance de $\hbar$" s'il existe des symboles $a_0, a_1, ... \in S(m)$ indépendants de $\hbar$, tels que*

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad a_\hbar = a_0 + \hbar a_1 + ... + \hbar^N a_N + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}),$$

pour la topologie de $S(m)$.

De la même manière, on peut définir les symboles développables en puissance de $\hbar^{1/2}$, par exemple.

Remarque. Si un symbole $a^t \in S(m)$ dépend d'un paramètre $t \in [0,T]$, on dira qu'il est uniforme en t si c'est une fonction continue de $[0,T] \to S(m)$, ce qui signifie que les constantes qui bornent les dérivées de a^t sont uniformes en t. Dans ce cas, $\int_0^T a^t \mathrm{d}t$ est encore dans $S(m)$, et on a :

$$\mathsf{Op}_\hbar^w \left(\int_0^T a^t \mathrm{d}t \right) = \int_0^T \mathsf{Op}_\hbar^w(a^t) \mathrm{d}t,$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$.

Pour finir cette section, regardons comment sont quantifiés les symboles quadratiques en ξ.

Proposition 3.6. *Soit $a(x,\xi) = |\xi|^2 + \sum_{j=1}^d f_j(x)\xi_j + f_0(x)$, où $f_j : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ vérifie, pour $j = 0, 1, \cdots, d$,*

$$\exists N \geq 0, \forall \alpha \in \mathbf{R}^d, \exists C_\alpha > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d, \quad |\partial_x^\alpha f_j(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^N.$$

Alors $a \in S(m)$ pour la fonction d'ordre $m(x,\xi) = \langle \xi \rangle^2 + \langle \xi \rangle \langle x \rangle^N$, et pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a)u = -\hbar^2 \Delta u + \frac{\hbar}{i} \sum_{j=1}^d \left(f_j \partial_{x_j} u + \partial_{x_j}(f_j u) \right) + f_0 u.$$

3.1.2 – Produit de Weyl

Un des intérêts des opérateurs pseudodifférentiels est la possibilité de traduire la composition d'opérateurs en un produit sur les symboles. Ceci est à la base du *calcul symbolique*.

Théorème 3.7. *Soient m_1 et m_2 deux fonctions d'ordre sur $\mathbf{R}^{2d}$, et $a_1 \in S(m_1)$, $a_2 \in S(m_2)$. Alors il existe un symbole $a_1 \star a_2 \in S(m_1 m_2)$ tel que*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a_1 \star a_2) = \mathsf{Op}_\hbar^w(a_1) \mathsf{Op}_\hbar^w(a_2).$$

De plus, $a_1 \star a_2$ admet le développement suivant dans $S(m_1 m_2)$, pour tout $N \geq 0$:

$$a_1 \star a_2(x,\xi) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i} \square \right)^k a_1(x,\xi) a_2(y,\eta)|_{x=y, \xi=\eta} + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}), \tag{3.1.3}$$

où $\Box = \sum_{j=1}^{d} \partial_{\xi_j}\partial_{y_j} - \partial_{x_j}\partial_{\eta_j}$. *En particulier, on a le développement suivant pour le symbole du commutateur :*

$$[a_1, a_2] := a_1 \star a_2 - a_2 \star a_1 = \frac{\hbar}{i}\{a_1, a_2\} + \mathcal{O}(\hbar^3), \tag{3.1.4}$$

où $\{\bullet, \bullet\}$ *est le crochet de Poisson :*

$$\{a_1, a_2\} = \sum_{j=1}^{d} \partial_{\xi_j} a_1 \partial_{x_j} a_2 - \partial_{x_j} a_1 \partial_{\xi_j} a_2. \tag{3.1.5}$$

Ce produit $\star$ est parfois appelé *produit de Weyl* ou *produit de Moyal*. Il n'est pas commutatif, mais peut être vu comme une perturbation du produit usuel de fonctions, puisqu'on a $a_1 \star a_2 = a_1 a_2 + \mathcal{O}(\hbar)$. En ce sens, on peut voir l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbf{R}^d$ comme une perturbation non commutative de l'algèbre des fonctions lisses sur la variété symplectique $\mathbf{R}^{2d} \simeq T^*\mathbf{R}^d$. De même, il est à noter que le commutateur entre les opérateurs est une perturbation du crochet de Poisson (qui est issu de la structure symplectique de $T^*\mathbf{R}^d$). Nous verrons plus loin (Théorème d'Egorov) comment la structure symplectique est transportée sur les opérateurs pseudodifférentiels.

3.1.3 – Classes $S_\delta(m)$

Parfois, il est nécessaire d'autoriser une perte de puissance de $\hbar$ aux symboles que l'on veut considérer. Pour cela, nous définissons les classes de symboles $S_\delta(m)$.

Définition 3.8. *Soient* $\delta \in [0, 1/2)$ *et* m *une fonction d'ordre sur* $\mathbf{R}^{2d}$. *La classe de symboles* $S_\delta(m)$ *est l'ensemble des fonctions lisses* $a_\hbar : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{C}$ *(dépendantes de* $\hbar \in (0, 1]$*) telles que, pour* $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^d$,

$$\exists C_{\alpha\beta} > 0, \forall \hbar \in (0, 1], \forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \hbar^{-\delta(|\alpha|+|\beta|)} m(x, \xi).$$

La restriction $\delta < 1/2$ est nécessaire pour obtenir le résultat suivant, qui est fondamental pour pouvoir utiliser le calcul symbolique.

Théorème 3.9. *Soient* $\delta \in [0, 1/2)$, *et* m_1, m_2 *deux fonctions d'ordre sur* $\mathbf{R}^{2d}$, *et* $a_1 \in S_\delta(m_1)$, $a_2 \in S_\delta(m_2)$. *Alors il existe un symbole* $a_1 \star a_2 \in S_\delta(m_1 m_2)$ *tel que*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a_1 \star a_2) = \mathsf{Op}_\hbar^w(a_1)\mathsf{Op}_\hbar^w(a_2).$$

De plus, $a_1 \star a_2$ *admet le développement suivant dans* $S_\delta(m_1 m_2)$, *pour tout* $N \geq 0$ *:*

$$a_1 \star a_2(x, \xi) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i}\Box\right)^k a_1(x, \xi) a_2(y, \eta)|_{x=y, \xi=\eta} + \mathcal{O}(\hbar^{(N+1)(1-2\delta)}), \tag{3.1.6}$$

où $\Box = \sum_{j=1}^{d} \partial_{\xi_j}\partial_{y_j} - \partial_{x_j}\partial_{\eta_j}$.

Remarque 1. Dire que $a = \mathcal{O}(\hbar^r)$ dans $S_\delta(m)$ signifie que, pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^d$, et tout $(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2d}$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \hbar^{r-\delta(|\alpha|+|\beta|)} m(x,\xi).$$

Remarque 2. Le cas $\delta = 1/2$ peut se ramener au cas $\hbar = 1$ par un changement de variable $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \hbar^{-1/2}(x,\xi)$ dans la définition de $\mathsf{Op}_\hbar^w$. On retrouve alors la théorie des opérateurs pseudodifférentiels non semi-classiques (c'est à dire que la quantification ne dépend pas de $\hbar$). Dans ce cas on peut toujours définir $a_1 \star a_2$, mais on n'a plus de développement asymptotique (Voir par exemple [HÖ85] ou [ES98]).

3.1.4 – Quelques propriétés fondamentales

Dans cette section nous énonçons quelques résultats fondamentaux de la théorie des opérateurs ħ-pseudodifférentiels : l'inégalité de Gårding, et la continuité sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ des opérateurs à symbole borné. On trouvera les démonstrations dans [Zwo12], [Rob87], ou [Mar02].

Théorème 3.10. *Si $a \in S(1)$, alors $\mathsf{Op}_\hbar^w(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur borné*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a) : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d).$$

De plus, il existe des constantes $M, C > 0$ indépendantes de a telles que :

$$\|\mathsf{Op}_\hbar^w(a)\| \leq C \sum_{|\alpha| \leq Md} \sup_{\mathbf{R}^d} |\partial^\alpha a|.$$

Il est remarquable que, dans le cas où $a \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{2d})$, la démonstration du théorème précédent devient très simple, et on obtient une borne plus précise.

Théorème 3.11. *Soit $a \in S(1)$ tel que $a \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{2d})$. Alors*

$$\|\mathsf{Op}_\hbar^w(a)\|^2 \leq \int_{\mathbf{R}^{2d}} |a(x,\xi)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Soit $(e_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une base Hilbertienne de $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ telle que $e_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, et notons $A = \mathsf{Op}_\hbar^w(a)$. On a :

$$\langle Ae_j, e_k\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbf{R}^{3d}} e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y,\xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e_j(y)\overline{e_k(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi.$$

En notant $b(X,Z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}\langle z,\xi\rangle} a(X,\xi)\mathrm{d}\xi$, on a donc

$$\langle Ae_j, e_k\rangle = \int_{\mathbf{R}^{2d}} b((x+y)/2, x-y) e_j(y)\overline{e_k(x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Ces nombres complexes sont donc les coefficients de la fonction $(x,y) \mapsto b((x+y)/2, x-y)$ dans la base Hilbertienne $(e_j \otimes e_k)_{j,k\in\mathbf{N}}$. D'après le théorème de Parseval on a donc :

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} |b((x+y)/2, x-y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j,k} |\langle Ae_j, e_k\rangle|^2 =: \|A\|_{HS}$$

Le changement de variable $Z = x - y$, $X = (x + y)/2$ est de Jacobien 1 et donne

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} |b(X, Z)|^2 \mathrm{d}X\mathrm{d}Z = \|A\|_{HS}. \tag{3.1.7}$$

$b(X, \bullet)$ est la transformée de Fourier de $a(X, \bullet)$, et le Théorème de Plancherel permet d'affirmer que

$$\|A\|_{HS} = \int_{\mathbf{R}^{2d}} |a(x, \xi)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi.$$

Il reste à montrer que la *norme Hilbert-Schmidt* $\|A\|_{HS}$ contrôle la norme $\|A\|$. Ceci découle de l'égalité de Bessel :

$$\|Au\|^2 = \sum_{j \in \mathbf{N}} |\langle Au, e_j \rangle|^2$$

qui donne

$$\|Au\|^2 = \sum_j |\sum_k \langle u, e_k \rangle \langle Ae_k, e_j \rangle|^2 \leq \sum_j \left(\sum_k |\langle u, e_k \rangle|^2 \right) \left(\sum_k |\langle Ae_k, e_j \rangle|^2 \right) = \|u\|^2 \|A\|_{HS}^2.$$

Ainsi, $\|A\|^2 \leq \|A\|_{HS}^2 = \int_{\mathbf{R}^{2d}} |a(x, \xi)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$. □

Enfin, l'inégalité de Gårding ci-dessous permet de déduire d'inégalités entre symboles des inégalités entre opérateurs. Ainsi, c'est un résultat fondamental pour le calcul symbolique.

Théorème 3.12 (Inégalité de Gårding). *Soit $a \in S(1)$ tel que $a \geq 0$. Alors il existe $C > 0$ et $\hbar_0 > 0$ tels que, pour $\hbar \in (0, \hbar_0]$ et $u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$,*

$$\langle \mathsf{Op}_\hbar^w(a)u, u \rangle \geq -C\hbar \|u\|^2.$$

3.1.5 – Calcul fonctionnel

Cette section est consacrée au résultat suivant, dont la démonstration est due à Helffer-Robert, puis Helffer-Sjöstrand avec la méthode des extensions quasi-analytiques (Voir [DS99] et [Mar02]).

Théorème 3.13. *Soit $\mathcal{A}_\hbar$ un opérateur auto-adjoint non borné sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$, avec domaine $\mathcal{D}_A$. Supposons que $\mathcal{A}_\hbar$ agit comme un opérateur pseudo-différentiel au sens où,*

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_A, \quad \mathcal{A}_\hbar \psi = \mathsf{Op}_\hbar^w(a_\hbar)\psi,$$

pour un certain symbole $a_\hbar$ dans une classe de symbole $S_\delta(m)$. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, on sait que $f(\mathcal{A}_\hbar)$ est un opérateur borné sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$. De plus, c'est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel, dont le symbole $\sigma_\hbar$ vérifie

1. $\mathsf{supp}\,(\sigma_\hbar) \subset \mathsf{supp}\,(f \circ a_0)$,
2. $\sigma_0 = f \circ a_0$.

3.2 – Opérateurs ħ-pseudodifférentiels sur une variété

3.2.1 – Définition et symbole principal

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte. Pour pouvoir définir les opérateurs pseudodifférentiels sur M, on a besoin d'une classe de symboles invariante par changement de carte. C'est le cas des classes de *Kohn-Niremberg*, définies comme suit.

Définition 3.14. *Soit $m \in \mathbf{Z}$. La classe de symboles $S^m(\mathbf{R}^{2d})$ est l'ensemble des fonctions lisses $a_\hbar : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{C}$ (dépendants de $\hbar \in (0,1]$) telles que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^d$,*

$$\exists C_{\alpha\beta} > 0, \forall \hbar \in (0,1], \forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}.$$

Remarquons que $S^m(\mathbf{R}^{2d}) \subset S(\langle \xi \rangle^m)$. Ainsi, on peut encore considérer l'opérateur $\mathsf{Op}_\hbar^w(a) : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ pour $a \in S^m(\mathbf{R}^{2d})$, et on a encore un développement du produit $\star$.

Théorème 3.15. *Soient m_1, $m_2 \in \mathbf{Z}$, et $a_1 \in S^{m_1}(\mathbf{R}^{2d})$, $a_2 \in S^{m_2}(\mathbf{R}^{2d})$. Alors $a_1 \star a_2 \in S^{m_1+m_2}(\mathbf{R}^{2d})$ et quelque soit $N > 0$,*

$$a_1 \star a_2(x,\xi) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i} \Box \right)^k a_1(x,\xi) a_2(y,\eta)|_{x=y,\xi=\eta} + \mathcal{O}_{S^{m_1+m_2-N-1}}(\hbar^{N+1}). \quad (3.2.1)$$

On peut définir les opérateurs ħ-pseudodifférentiels sur M à l'aide de ces classes de symboles.

Définition 3.16. *Un opérateur $\mathcal{A}_\hbar : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, dépendant de $\hbar \in (0,1]$, est un opérateur ħ-pseudodifférentiel sur M si il vérifie les deux conditions suivantes :*
(i) Il existe un entier m tel que, pour toute carte $\gamma : U \subset M \to V \subset \mathbf{R}^d$, il existe un symbole $a_\gamma \in S^m(\mathbf{R}^{2d})$ tel que

$$\chi_1 \mathcal{A}_\hbar(\chi_2 u) = \chi_1 \gamma^* \mathsf{Op}_\hbar^w(a_\gamma)(\gamma^{-1})^*(\chi_2 u),$$

pour tous χ_1, $\chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$, et $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
(ii) Pour tous χ_1, $\chi_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à supports disjoints, on a pour tout N,

$$\|\chi_1 \mathcal{A}_\hbar \chi_2\|_{\mathsf{H}^{-N}(M) \to \mathsf{H}^N(M)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Remarques. Ici $\mathsf{H}^N(M)$ désigne l'espace de Sobolev d'exposant N sur M. La condition (i) signifie que $\mathcal{A}$ agit comme un opérateur pseudodifférentiel dans les cartes. La condition (ii) assure que $\mathcal{A}$ est pseudo-local : Modulo un terme régularisant et $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$, $\mathcal{A}$ ne créé pas d'interaction entre des zones éloignées de M. En pratique, on se ramènera à des opérateurs différentiels sur M, qui sont évidemment pseudodifférentiels car ils sont locaux et différentiels dans les cartes.

Si $\mathcal{A}_\hbar$ est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel, le plus petit entier m pour lequel on a la condition (i) s'appelera *l'ordre de* $\mathcal{A}_\hbar$. Nous noterons $\Psi_\hbar^m(M)$ l'ensemble des opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels d'ordre $\leq m$. Le symbole *principal* d'un tel opérateur est bien défini, comme fonction de $(x,\xi) \in T^*M$. Définissons d'abord les classes de symboles sur M.

Définition 3.17. *Soit $m \in \mathbf{Z}$. Un symbole $a \in S^m(T^*M)$ est une fonction $a \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$ telle que, pour toute carte $\gamma : U \subset M \subset V \subset \mathbf{R}^d$, on a $\gamma_* a \in S^m(V \times \mathbf{R}^d)$, où a_γ est défini par :*

$$\gamma_* a(\gamma(x), (\mathrm{d}_x\gamma)^T \xi) = a(x,\xi).$$

Remarque. Ici, on assimile $T^*V \subset T^*\mathbf{R}^d$ avec $V \times \mathbf{R}^d \subset \mathbf{R}^{2d}$. La classe $S^m(V \times \mathbf{R}^d)$ est définie de la même manière que $S^m(\mathbf{R}^{2d})$, en restreignant à des $x \in V$. Ainsi, un élément de $S^m(T^*M)$ est juste une fonction qui s'écrit dans toute carte comme un élément de $S^m(\mathbf{R}^{2d})$.

Théorème 3.18. *Soit $m \in \mathbf{Z}$. Il existe une application*

$$\sigma_0 : \Psi^m(M) \to S^m(T^*M)/\hbar S^{m-1}(T^*M),$$

qui à tout opérateur $\mathcal{A} \in \Psi_\hbar^m(M)$ associe son symbole principal $\sigma_0(\mathcal{A})$. Si on écrit $\sigma_0(\mathcal{A})$ dans une carte $\gamma : U \subset M \to V \subset \mathbf{R}^d$, on obtient $\gamma_*\sigma_0(\mathcal{A}) = a_\gamma \bmod \hbar S^{m-1}$, où a_γ est le symbole de $\mathcal{A}$ quand on l'exprime dans la carte γ (Voir définition 3.16). De plus, σ_0 vérifie :

$$\sigma_0(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \sigma_0(\mathcal{A})\sigma_0(\mathcal{B}).$$

Démonstration. Nous allons donner l'idée générale de la démonstration, les détails étant donnés dans [Zwo12] (Chapitre 9 et 14). On a envie de définir $\sigma_0(\mathcal{A})$ dans les cartes par a_γ. Pour que ceci ait bien un sens, il faut s'assurer que le symbole a_γ de $\mathcal{A}$ (vu dans la carte) est invariant par changement de coordonnées (et ce ne sera vrai que modulo $\hbar$). Cela revient donc à montrer que, pour tout difféomorphisme (local) $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, et tout symbole $a \in S^m(\mathbf{R}^{2d})$, on a

$$\varphi^* \mathsf{Op}_\hbar^w(a)(\varphi^{-1})^* = \mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{a}),$$

avec $\tilde{a} = \varphi^* a + \mathcal{O}_{S^{m-1}}(\hbar)$. Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on a :

$$(E) := \varphi^* \mathsf{Op}_\hbar^w(a)(\varphi^{-1})^* u(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i}{\hbar}\langle \varphi(\tilde{x}) - y, \xi\rangle} a\left(\frac{\varphi(\tilde{x}) + y}{2}, \xi\right) u(\varphi^{-1}(y)) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi.$$

Le changement de variable $\tilde{y} = \varphi^{-1}(y)$ donne

$$(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{\frac{i}{\hbar}\langle \varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y}), \xi\rangle} a\left(\frac{\varphi(\tilde{x}) + \varphi(\tilde{y})}{2}, \xi\right) u(\tilde{y}) |\mathrm{d}\varphi(\tilde{y})| \mathrm{d}\tilde{y} \mathrm{d}\xi.$$

Par un développement de Taylor, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{x}) = \varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right) + \mathrm{d}\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right)\left(\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right) + \mathrm{d}^2\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right)\left(\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}, \frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right) \\ + \langle F(\tilde{x},\tilde{y}), \tilde{x}-\tilde{y}\rangle,\end{aligned}$$

$$\varphi(\tilde{y}) = \varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right) - \mathrm{d}\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right)\left(\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right) + \mathrm{d}^2\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right)\left(\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}, \frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right) + \langle F(\tilde{y},\tilde{x}), \tilde{x}-\tilde{y}\rangle,$$

avec $F(\tilde{x},\tilde{y}) = \mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y})^2)$. En prenant la différence, on obtient

$$\varphi(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{y}) = \mathrm{d}\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right)(\tilde{x}-\tilde{y}) + \langle F(\tilde{x},\tilde{y}) - F(\tilde{y},\tilde{x}), \tilde{x}-\tilde{y}\rangle.$$

Par conséquent, le changement de variable

$$\tilde{\xi} = \left[\mathrm{d}\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right) + F(\tilde{x},\tilde{y}) - F(\tilde{y},\tilde{x})\right]^T \xi =: G(\tilde{x},\tilde{y})\xi$$

dans l'intégrale (E) donne

$$(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int e^{\frac{i}{\hbar}\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle} a\left(\frac{\varphi(\tilde{x})+\varphi(\tilde{y})}{2}, G(\tilde{x},\tilde{y})^{-1}\tilde{\xi}\right) u(\tilde{y})|\mathrm{d}\varphi(\tilde{y})||G(\tilde{x},\tilde{y})^{-1}|\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{\xi}.$$

De plus,

$$\frac{\varphi(\tilde{x})+\varphi(\tilde{y})}{2} = \varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right) + \mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y})^2),$$

donc

$$(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int e^{\frac{i}{\hbar}\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle}\left[\varphi^* a\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}, \tilde{\xi}\right) + \mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y})^2)\right] u(\tilde{y})|\mathrm{d}\varphi(\tilde{y})||G(\tilde{x},\tilde{y})^{-1}|\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{\xi}.$$

On a également

$$|\mathrm{d}\varphi(\tilde{y})||G(\tilde{x},\tilde{y})^{-1}| = |\mathrm{d}\varphi(\tilde{y})||\mathrm{d}\varphi\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right)|^{-1} + \mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y})^2) = 1 + \mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y})),$$

et donc

$$(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int e^{\frac{i}{\hbar}\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle}\left[\varphi^* a\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}, \tilde{\xi}\right) + \mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y}))\right] u(\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{\xi}.$$

(Notons que le reste peut être amélioré en $\mathcal{O}((\tilde{x}-\tilde{y})^2)$ dans le cas où $|d\varphi| = 1$ en tout point.) Enfin, en remarquant que

$$\frac{\hbar}{i}\partial_{\tilde{\xi}_j} e^{\frac{i}{\hbar}\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle} = (\tilde{x}-\tilde{y})e^{\frac{i}{\hbar}\langle\tilde{x}-\tilde{y},\tilde{\xi}\rangle},$$

on peut faire des intégrations par parties pour changer le $\mathcal{O}(\tilde{x}-\tilde{y})$ en $\mathcal{O}(\hbar)$, et on obtient le résultat voulu. (Dans le cas où $|\mathrm{d}\varphi| = 1$ en tout point, on obtient donc un reste en $\mathcal{O}(\hbar^2)$.) □

3.2.2 – Symbole sous-principal

Nous avons vu dans la section précédente que, pour un opérateur $\hbar$-pseudo-différentiel sur M, le symbole principal est bien défini (c'est à dire que le symbole modulo $\mathcal{O}(\hbar)$ est invariant par changement de carte). En fait, on peut définir le symbole sous-principal (le terme d'ordre $\hbar$). En effet, le symbole modulo $\mathcal{O}(\hbar^2)$ est invariant par changement de carte *préservant le volume*.

Théorème 3.19. *Soit $m \in \mathbf{Z}$. Il existe une application*

$$\sigma : \Psi^m(M) \to S^m(T^*M)/\hbar^2 S^{m-2}(T^*M),$$

qui à tout opérateur $\mathcal{A} \in \Psi^m_\hbar(M)$ associe son symbole modulo $\hbar^2$: $\sigma(\mathcal{A})$. Si on écrit $\sigma(\mathcal{A})$ dans une carte $\gamma : U \subset M \to V \subset \mathbf{R}^d$ dans laquelle la métrique g a déterminant 1, on obtient $\gamma_*\sigma(\mathcal{A}) = a_\gamma \bmod \hbar^2 S^{m-2}$, où a_γ est le symbole de $\mathcal{A}$ quand on l'exprime dans la carte γ (Voir définition 3.16).

Démonstration. Une carte γ dans laquelle la métrique g est de déterminant 1 *préserve le volume* :

$$\int_U f(x)\mathrm{d}V = \int_{\gamma(U)} f\circ\gamma^{-1}(y)|g_y|^{1/2}\mathrm{d}y = \int_V f\circ\gamma^{-1}(y)\mathrm{d}y.$$

Pour montrer que le symbole $\sigma_\mathcal{A}$ est bien défini modulo $\hbar^2$, il suffit de montrer qu'il est invariant par changement de carte *qui préserve le volume*. Il s'agit donc de montrer que, pour tout difféomorphisme (local) $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ tel que $|\mathrm{d}_x\varphi| = 1$ en tout point, et tout symbole $a \in S^m(\mathbf{R}^{2d})$, on a

$$\varphi^* \mathsf{Op}^w_\hbar(a)(\varphi^{-1})^* = \mathsf{Op}^w_\hbar(\tilde{a}),$$

avec $\tilde{a} = \varphi^* a + \mathcal{O}_{S^{m-2}}(\hbar^2)$. On vérifie directement que la preuve du Théorème 3.18 s'adapte pour démontrer ce résultat. □

Remarque : les demi-densités. Expliquons en quoi, se restreindre à des cartes qui préservent le volume revient à travailler sur des *demi-densités* plutôt que des fonctions. Une demi-densité sur M est une expression de la forme $f(x)|\mathrm{d}V|^{1/2}$, où $f \in \mathsf{L}^2(M)$. On peut définir un produit scalaire sur l'espace des demi-densités, par la formule

$$\langle f(x)|\mathrm{d}V|^{1/2}, g(x)|\mathrm{d}V|^{1/2}\rangle = \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(M)}.$$

Pour l'instant, travailler avec des demi-densités semble être la même chose qu'avec des fonctions. Là où il y a une différence, c'est dans l'action des difféomorphismes. Si $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est un difféomorphisme, et $|\mathrm{d}x|$ est la forme volume canonique sur $\mathbf{R}^d$, on définit :

$$\varphi^*(f(x)|\mathrm{d}x|^{1/2}) = f\circ\varphi(y)|\mathrm{d}_y\varphi|^{1/2}|\mathrm{d}y|^{1/2}.$$

Ainsi, tous les difféomorphismes préservent le produit scalaire sur les demi-densités. Tout opérateur $\mathcal{A}$ agissant sur $\mathsf{L}^2(M)$ peut être vu comme un opérateur $\hat{\mathcal{A}}$ sur les demi-densités par la formule :

$$\hat{\mathcal{A}}(f|\mathrm{d}V|^{1/2}) := \mathcal{A}(f)|\mathrm{d}V|^{1/2}.$$

Si l'on écrit ceci dans des cartes, on obtient

$$\hat{\mathcal{A}}(f(x)|g(x)|^{1/4}|\mathrm{d}x|^{1/2}) = \mathcal{A}(f)(x)|g(x)|^{1/4}|\mathrm{d}x|^{1/2},$$

et l'action de $\hat{\mathcal{A}}$ est donc donnée par :

$$|g|^{-1/4}\hat{\mathcal{A}}|g|^{1/4} = \mathcal{A}.$$

On peut donc définir les opérateurs $\hbar$-pseudodifférentiels agissants sur des demi-densités, et le Théorème 3.19 assure que leur symbole modulo $\mathcal{O}(\hbar^2)$ est invariant par tout changement de carte. Autrement dit, pour calculer le symbole de $\mathcal{A}$ modulo $\hbar^2$ dans des coordonnées ne préservant pas nécessairement le volume, il faut calculer celui de $|g|^{-1/4}\mathcal{A}|g|^{1/4}$. Nous renvoyons à [Zwo12] pour plus de détails sur cette approche.

Du point de vue de la physique, l'approche des demi-densités est plus naturelle puisque ce n'est pas tant la fonction d'onde f qui a une interprétation physique que la mesure $|f(y)|^2\mathrm{d}y$ (qui mesure la probabilité de présence en y d'une particule).

3.2.3 – Symbole du Laplacien magnétique

Dans cette section, nous calculons le symbole principal et sous-principal du Laplacien magnétique $\mathcal{L}_\hbar$ agissant sur M.

Proposition 3.20.

- *Si M est une variété Riemannienne compacte, et $A \in \Omega^1(M)$, l'opérateur*

$$\mathcal{L}_\hbar = (i\hbar\mathrm{d} + A)^*(i\hbar\mathrm{d} + A)$$

est dans $\Psi^2_\hbar(M)$, et son symbole (principal et sous-principal) est donné par :

$$\sigma(\mathcal{L}_\hbar) = |p - A(q)|^2_{g^*(q)} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

- *Si $M = \mathbf{R}^d$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ est dans une classe de symboles, alors*

$$\mathcal{L}_\hbar = (i\hbar\nabla + \mathbf{A})^2$$

est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel sur $\mathbf{R}^d$ de symbole total $\|p - \mathbf{A}(q)\|^2$.

Démonstration. Dans le cas où M est une variété Riemannienne, $\mathcal{L}_\hbar$ agit en coordonnées par la formule :

$$\mathcal{L}^{coord}_\hbar = \sum_{k\ell} |g|^{-1/2}(i\hbar\partial_k + A_k)g^{k\ell}|g|^{1/2}(i\hbar\partial_\ell + A_\ell).$$

Nous allons calculer le symbole

$$\sigma_\hbar = \sigma(|g|^{1/4}\mathcal{L}^{coord}_\hbar|g|^{-1/4}) + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

en utilisant $\sigma(-i\hbar\partial_k - A_k) = p_k - A_k$, et le produit $\star$:

$$\sigma(|g|^{1/4}\mathcal{L}_\hbar^{coord}|g|^{-1/4}) = \sum_{k\ell} |g|^{-1/4} \star (p_k - A_k) \star g^{k\ell}|g|^{1/2} \star (p_\ell - A_\ell) \star |g|^{-1/4},$$

et à l'aide de la formule suivante (Théorème 3.1.6) :

$$f \star g = fg + \frac{\hbar}{2i}\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Calculons d'abord $a_k = |g|^{-1/4} \star (p_k - A_k) \star |g|^{1/4}$.

$$\begin{aligned} a_k &= (p_k - A_k) + \frac{\hbar}{2i}\left[\{|g|^{-1/4}(p_k - A_k), |g|^{1/4}\} + \{|g|^{-1/4}, p_k - A_k\}|g|^{1/4}\right] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= (p_k - A_k) + \frac{\hbar}{2i}\left[|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_k} - \frac{\partial|g|^{-1/4}}{\partial q_k}|g|^{1/4}\right] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= (p_k - A_k) + \frac{\hbar}{i}|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_k} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

On obtient une formule similaire pour $b_\ell = |g|^{1/4} \star (p_\ell - A_\ell) \star |g|^{-1/4}$:

$$b_\ell = (p_\ell - A_\ell) - \frac{\hbar}{i}|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_\ell} + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} a_k \star g^{k\ell} &= g^{k\ell}(p_k - A_k) + \frac{\hbar}{2i}\{p_k - A_k, g^{k\ell}\} + \frac{\hbar}{i}|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_k}g^{k\ell} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= g^{k\ell}(p_k - A_k) + \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial g^{k\ell}}{\partial q_k} + \frac{\hbar}{i}|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_k}g^{k\ell} + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_k \star g^{k\ell} \star b_\ell = g^{k\ell}(p_k - A_k)(p_l - A_l) &+ \frac{\hbar}{2i}\{g^{k\ell}(p_k - A_k), p_\ell - A_\ell\} - \frac{\hbar}{i}g^{k\ell}(p_k - A_k)|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_\ell} \\ &+ \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial g^{k\ell}}{\partial q_k}(p_\ell - A_\ell) + \frac{\hbar}{i}|g|^{-1/4}\frac{\partial|g|^{1/4}}{\partial q_k}(p_\ell - A_\ell) + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

En sommant sur k et ℓ, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k\ell} a_k \star g^{k\ell} \star b_\ell &= \sum_{k\ell} g^{k\ell}(p_k - A_k)(p_l - A_l) + \frac{\hbar}{2i}\{g^{k\ell}(p_k - A_k), p_\ell - A_\ell\} \\ &\quad + \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial g^{k\ell}}{\partial q_k}(p_\ell - A_\ell) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= \sum_{k\ell} g^{k\ell}(p_k - A_k)(p_\ell - A_\ell) + \frac{\hbar}{2i}g^{k\ell}\frac{\partial(p_\ell - A_\ell)}{\partial q_k} - \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial g^{k\ell}(p_k - A_k)}{\partial q_\ell} \\ &\quad + \frac{\hbar}{2i}\frac{\partial g^{k\ell}}{\partial q_k}(p_\ell - A_\ell) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= \sum_{k\ell} g^{k\ell}(p_k - A_k)(p_\ell - A_\ell) + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

et donc

$$\sigma(|g|^{1/4}\mathcal{L}_\hbar^{coord}|g|^{-1/4}) = \sum_{k\ell} a_k \star g^{k\ell} \star b_\ell = \sum_{k\ell} g^{k\ell}(p_k - A_k)(p_\ell - A_\ell) + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

On conclut en remarquant que $\sum_{k\ell} g^{k\ell}(p_k - A_k)(p_\ell - A_\ell)$ est l'écriture en coordonnées de $|p - A(q)|_{g^*(q)}$. Dans le cas où $M = \mathbf{R}^d$, la condition $\mathbf{A} \in S(m)$ implique que

$$\|p - \mathbf{A}(q)\|^2 \in S(m\langle p\rangle^2),$$

et les calculs précédents (ou la proposition 3.6 sur les symboles quadratiques) assurent que c'est le symbole *total* de $\mathcal{L}_\hbar$:

$$\mathcal{L}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(\|p - \mathbf{A}(q)\|^2).$$

□

3.3 – Théorèmes d'Egorov

Le Théorème d'Egorov porte sur le lien entre la dynamique classique associée à un Hamiltonien Q, et la dynamique quantique associée à son quantifié $\mathcal{Q}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w Q$. Supposons que $Q \in S(1)$. Le Hamiltonien $Q : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}$ définit un flot (symplectique) $\varphi_Q^t : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}^{2d}$, qui décrit la dynamique *classique* associée à l'énergie Q :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_Q^t(x,\xi) = J\nabla Q(\varphi_Q^t(x,\xi)), \\ \varphi_Q^0(x,\xi) = (x,\xi), \end{cases} \tag{3.3.1}$$

où J est la matrice symplectique usuelle :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

La dynamique *quantique* associée à Q est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t \psi_t = \mathcal{Q}_\hbar \psi_t. \tag{3.3.2}$$

$\mathcal{Q}_\hbar$ étant un opérateur borné sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ (Théorème 3.10), la solution de cette équation est donnée par :

$$\psi_t = e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\psi_0.$$

Une observable définie sur l'espace des phases $P : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{C}$ va évoluer selon la dynamique classique en $P(\varphi^t(x,\xi))$. Quantiquement, l'observable $\langle \mathsf{Op}_\hbar^w P\psi, \psi\rangle$ évolue selon

$$\langle \mathsf{Op}_\hbar^w P\psi_t, \psi_t\rangle = \langle e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathsf{Op}_\hbar^w P e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\psi_0, \psi_0\rangle.$$

Une question apparait alors naturellement : Est-ce que l'évolution quantique suit l'évolution classique dans la limite $\hbar \to 0$? Autrement dit, on se demande si

$$e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathsf{Op}_\hbar^w P e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar^w(P \circ \varphi^t) \quad ?$$

La réponse est donnée par le Théorème d'Egorov.

Théorème 3.21. *Soient $\delta \in [0,1/2)$, $Q, P \in S_\delta(1)$, $\mathcal{Q}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w Q$ et $T > 0$. Supposons que Q est à valeurs réelles. Alors*

$$e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathsf{Op}_\hbar^w(P)e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{P}^t),$$

pour un symbole $\tilde{P}^t \in S(1)$ (continue par rapport à $t \in [-T,T]$). De plus, $\tilde{P}^t$ admet un développement en puissances de $\hbar$ dans $S_\delta(1)$:

$$\tilde{P}^t = \sum_{n=0}^{N} \hbar^n \tilde{P}_n^t + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}), \quad \forall N \geq 0,$$

avec $\tilde{P}_0^t = P \circ \varphi_Q^t$. Enfin, pour tout $N \geq 0$, on a $\mathsf{supp}(\tilde{P}_N^t) \subset \varphi_Q^{-t}(\mathsf{supp}P)$.

Démonstration. Nous donnerons les éléments principaux de la démonstration, les détails pouvant se trouver dans [Zwo12] ou [Rob87]. Notons

$$R_1(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{P}_0^t)e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} - \mathsf{Op}_\hbar^w(P). \tag{3.3.3}$$

avec $\tilde{P}_0^t = P \circ \varphi_Q^t$. $\tilde{P}_0^t$ est dans $S_\delta(1)$ uniformément par rapport à t d'après (3.3.1). Donc $R_1(t)$ est un opérateur borné sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ et on peut calculer sa dérivée

$$\partial_t R_1(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\left[\mathsf{Op}_\hbar^w(\partial_t\tilde{P}_0^t) + \frac{i}{\hbar}[\mathsf{Op}_\hbar^w\tilde{P}_0^t, \mathsf{Op}_\hbar^w Q]\right]e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}.$$

Or on a :

$$\frac{i}{\hbar}[\mathsf{Op}_\hbar^w\tilde{P}_0^t, \mathsf{Op}_\hbar^w Q] = \mathsf{Op}_\hbar^w\{P_0^t, Q\} + \mathcal{O}(\hbar) = \mathsf{Op}_\hbar^w\{P,Q\}\circ\varphi_Q^t + \mathcal{O}(\hbar),$$

et $\partial_t\tilde{P}_0^t = \{Q,P\}\circ\varphi_Q^t$, donc $\|\partial_t R_1(t)\| = \mathcal{O}(\hbar)$ (uniformément par rapport à t). En intégrant par rapport à t on en déduit que

$$R_1(t) = R_1(0) + \mathcal{O}(\hbar) = \mathcal{O}(\hbar).$$

Nous allons itérer pour obtenir un reste en $\mathcal{O}(\hbar^2)$. On va chercher un symbole $\tilde{P}_1(t) \in S_\delta(1)$ tel que

$$R_2(t) := e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{P}_0^t + \hbar\tilde{P}_1^t)e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} - \mathsf{Op}_\hbar^w(P)$$

soit un $\mathcal{O}(\hbar^2)$. Si on dérive par rapport à t on obtient

$$\partial_t R_2(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\left[\mathsf{Op}_\hbar^w(\partial_t\tilde{P}_0^t + \hbar\partial_t\tilde{P}_1^t) + \frac{i}{\hbar}[\mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{P}_0^t + \hbar\tilde{P}_1^t), \mathsf{Op}_\hbar^w(Q)]\right]e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}.$$

En notant $B_1^t \in S_\delta(1)$ tel que

$$[\mathsf{Op}_\hbar^w\tilde{P}_0^t, \mathsf{Op}_\hbar^w Q] = \mathsf{Op}_\hbar^w\left(\frac{\hbar}{i}\{\tilde{P}_0^t, Q\} + \hbar^2 B_1^t\right) + \mathcal{O}(\hbar^3),$$

il reste :

$$\partial_t R_2(t) = \hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\left[\mathsf{Op}_\hbar^w(\partial_t\tilde{P}_1^t + iB_1^t + \{\tilde{P}_1^t, Q\})\right]e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

On choisit pour $\tilde{P}_1^t$ la solution de l'équation

$$\partial_t \tilde{P}_1^t = -\{\tilde{P}_1^t, Q\} - iB_1^t, \quad \tilde{P}_1^0 = 0. \tag{3.3.4}$$

et on a alors $\|R_2(t)\| = \mathcal{O}(\hbar^2)$. En itérant ce processus on peut obtenir un reste en $\mathcal{O}(\hbar^N)$. Pour pouvoir conclure la démonstration, il resterait à vérifier que ce reste est bien un opérateur pseudodifférentiel dans $S_\delta(1)$. Ceci peut s'obtenir à l'aide du critère de Beals. Nous renvoyons à [Zwo12] pour plus de détails. *Remarque :* Si P est à valeurs réelles, il est clair que $\frac{i}{\hbar}(P \star Q - Q \star P)$ est à valeurs réelles, et on peut donc en déduire que le symbole $\tilde{P}^t$ est à valeurs réelles.

Pour finir, notons $S_1^t(x,\xi) := \tilde{P}_1^t \circ \varphi_Q^{-t}(x,\xi)$. Alors on a :

$$\partial_t S_1^t(x,\xi) = -iB_1^t \circ \varphi_Q^{-t}(x,\xi),$$

et B_1 est le symbole sous-principal de $[\mathsf{Op}_\hbar^w P \circ \varphi_Q^t, \mathcal{Q}_\hbar]$ dont le support est contenu dans $\varphi_Q^{-t}(\mathsf{supp} P)$. Par conséquent, on a bien $\mathsf{supp}\tilde{P}_1^t \subset \varphi_Q^{-t}(\mathsf{supp} P)$. Un calcul similaire donnera le résultat pour $\tilde{P}_N^t$ (voir [Rob87]). □

Nous pouvons en déduire un résultat un peu plus général, avec moins de restriction sur les classes de symboles (voir [HKRVuN16]).

Théorème 3.22. *Soient $\delta \in [0, 1/2)$, $Q \in S_\delta(m')$, $P \in S_\delta(m)$, $\mathcal{Q}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w Q$ et $T > 0$. Supposons que Q est à valeurs réelles, que $m' \leq 1$, et que $mm' \leq 1$. Alors*

$$e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} \mathsf{Op}_\hbar^w(P) e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{P}^t),$$

pour un symbole $\tilde{P}^t \in S(m)$ (continue par rapport à $t \in [-T, T]$). De plus, $\tilde{P}^t = P \circ \varphi_Q^t + \mathcal{O}_{S_\delta(1)}(\hbar)$, et le reste admet un développement en puissance de $\hbar$ dans $S_\delta(1)$. De plus, on a le même résultat sur le support de $\tilde{P}^t$ que dans le Théorème 3.21.

Démonstration. Pour tout t, on peut dériver la fonction suivante (dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(e^{\frac{i\tau}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\ \mathsf{Op}_\hbar^w(p \circ \varphi_Q^{t-\tau}) e^{-\frac{i\tau}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\right) \\ = e^{\frac{i\tau}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\left(\frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_\hbar, \mathsf{Op}_\hbar^w(p \circ \varphi_Q^{t-\tau})] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathsf{Op}_\hbar^w(p \circ \varphi_Q^{t-\tau})\right) e^{-\frac{i\tau}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}.\end{aligned}$$

Or $p \circ \varphi_Q^{t-\tau} \in S(m)$ et donc $\frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_\hbar, \mathsf{Op}_\hbar^w(p \circ \varphi_Q^{t-\tau})]$ est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel à symbole $S_\delta(m'm) \subset S_\delta(1)$. De plus,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathsf{Op}_\hbar^w(p \circ \varphi_Q^{t-\tau}) = \mathsf{Op}_\hbar^w(\{Q, p\} \circ \varphi_Q^{t-\tau}\})$$

avec $\{Q, p\} \circ \varphi_Q^{t-\tau} \in S_\delta(m'm) \subset S_\delta(1)$. En intégrant, on en déduit que

$$e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} \mathsf{Op}_\hbar^w(p) e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar^w(p \circ \varphi_Q^t) + \int_0^t e^{\frac{i\tau}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} \mathsf{Op}_\hbar^w(p_1^{t-\tau}) e^{-\frac{i\tau}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} \mathrm{d}\tau,$$

pour un certain $p_1^t \in S_\delta(1)$ (continue en t). Le théorème d'Egorov 3.21 permet de conclure. □

Enfin, voici une variante de ce résultat, portant sur la quantification des symplectomorphismes. Plus précisément, étant donné un symplectomorphisme $\varphi : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}^{2d}$ et un symbole P, on se demande comment relier $\mathsf{Op}_\hbar^w(P)$ et $\mathsf{Op}_\hbar^w(P \circ \varphi)$. On peut le faire à l'aide du Théorème suivant, dont la démonstration est donnée dans [Mar02] et [Zwo12].

Théorème 3.23. *Soient U, $V \subset \mathbf{R}^{2d}$ des ouverts bornés, et $\varphi : U \to V$ un symplectomorphisme. Il existe un opérateur microlocalement unitaire $\mathsf{U}_\hbar : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ tel que pour tout $a \in S(m)$,*

$$\mathsf{U}_\hbar^* \mathsf{Op}_\hbar^w(a) \mathsf{U}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{a}) \quad \textit{microlocalement sur } U \times U, \tag{3.3.5}$$

$$\mathsf{U}_\hbar \mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{a}) \mathsf{U}_\hbar^* = \mathsf{Op}_\hbar^w(a) \quad \textit{microlocalement sur } V \times V, \tag{3.3.6}$$

où $\tilde{a} \in S(m)$ vérifie $\tilde{a} = a \circ \varphi + \mathcal{O}_{S(1)}(\hbar)$.

Remarque 1. L'égalité microlocale dans (3.3.5) signifie que, pour tous $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{2d})$ tels que $\mathsf{supp}(\chi_j) \subset U$, on a

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(\chi_1) \left[\mathsf{U}_\hbar \mathsf{Op}_\hbar^w(a) \mathsf{U}_\hbar^* - \mathsf{Op}_\hbar^w(\tilde{a}) \right] \mathsf{Op}_\hbar^w(\chi_2) = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Remarque 2. Dire que $\mathsf{U}_\hbar$ est microlocalement unitaire signifie que

$$\begin{cases} \mathsf{U}_\hbar^* \mathsf{U}_\hbar = I & \text{microlocalement sur } U \times U \\ \mathsf{U}_\hbar \mathsf{U}_\hbar^* = I & \text{microlocalement sur } V \times V \end{cases}$$

Remarque 3. L'opérateur $\mathsf{U}_\hbar$ est en fait un opérateur intégral de Fourier (OIF). Les OIF forment une classe d'opérateurs qui généralise celle des opérateurs pseudodifférentiels. Le lecteur trouvera plus d'informations à ce sujet dans [Zwo12], [Mar02], [Rob87] ou d'un point de vue plus général et abstrait, [GS13].

Pour finir, voici le théorème d'Egorov linéaire, qui dit que l'on peut faire n'importe quel changement de variables symplectique *linéaire* sur les symboles. Voir [Zwo12].

Théorème 3.24 (Egorov linéaire). *Si $\varphi : \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}^{2d}$ est linéaire et symplectique, alors il existe un opérateur unitaire $\mathsf{U}_\hbar : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ calculable explicitement, tel que pour tout $a \in S(m)$,*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(a \circ \varphi) = \mathsf{U}_\hbar^* \mathsf{Op}_\hbar^w(a) \mathsf{U}_\hbar.$$

Chapitre 4

Forme normale de Birkhoff pour un puit électrique

Dans ce chapitre, nous présentons une forme normale de Birkhoff s'appliquant à l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$, au voisinage d'un minimum non-dégénéré du potentiel V. Ces résultats sont essentiellement issus d'un article de Sjöstrand [Sjo92] (Voir aussi [DS99], [Ray17]). Cette méthode sera adaptée au Laplacien magnétique dans les chapitres suivants. On y trouve déjà les principaux ingrédients : microlocalisation des fonctions propres, construction d'une forme normale formelle, phénomènes de résonances à gérer, et principe du min-max pour comparer le spectre de l'opérateur de départ à celui de la forme normale.

4.1 – Principaux résultats

4.1.1 – Hypothèses

Nous considérons un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{H}_\hbar = \mathsf{Op}^w_\hbar H_\hbar$ sur $\mathbf{R}^d$, dont le symbole $H_\hbar$ est à valeurs réelles et admet un développement en puissances de $\hbar$ dans une classe $S(m)$. On suppose de plus que le symbole principal $H(x,\xi)$ admet un unique minimum $H_0 \in \mathbf{R}$, atteint en $(x_0,\xi_0) \in \mathbf{R}^{2d}$, et que ce minimum est non-dégénéré. Enfin, on suppose que

$$H_\infty := \liminf_{(x,\xi)\to+\infty} H(x,\xi) > H_0,$$

de sorte que le minimum n'est pas non plus atteint à l'infini. Quitte à translater les variables (x,ξ), on supposera que $(x_0,\xi_0) = 0$. On peut alors faire le développement limité suivant :

$$H_\hbar(x,\xi) = H_0 + H_1\hbar + H_2(x,\xi) + \mathcal{O}(\hbar^2 + \hbar(x,\xi) + (x,\xi)^3), \tag{4.1.1}$$

uniformément sur tout compact en (x,ξ), avec $H_0, H_1 \in \mathbf{R}$ et $H_2(x,\xi)$ la forme quadratique Hessienne de H en 0. On suppose que H_2 est sous la forme diagonale suivante :

$$H_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \nu_j(\xi_j^2 + x_j^2), \tag{4.1.2}$$

avec $\nu_j > 0$. En fait, on peut toujours se ramener à une telle forme pour H_2 quitte à faire des changements de variables symplectiques linéaires (voir la fin de ce Chapitre section 4.5). Le théorème d'Egorov linéaire 3.24 dit que cela revient à conjuguer $\mathcal{H}_\hbar$ par des opérateurs unitaires explicites, et donc que ça ne change pas le spectre.

Enfin, nous noterons $\mathbf{r}_0$ *l'ordre de résonance* des coefficients $\nu_1, ..., \nu_d$: c'est le plus grand entier tel que,

$$\forall \alpha \in \mathbf{Z}^d, \quad 0 < |\alpha| < \mathbf{r}_0, \quad \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \nu_j \neq 0.$$

Remarque. Il est possible que $\mathbf{r}_0 = \infty$, et dans ce cas on dit que les ν_j sont non-résonants. C'est d'ailleurs un cas générique. On remarquera que toutes les démonstrations qui suivent sont valides pour $\mathbf{r}_0 = \infty$. Les restes obtenus dans ce cas sont en $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$. C'est en particulier le cas en dimension $d = 1$, puisqu'il n'y a qu'un seul coefficient ν_1.

4.1.2 – Énoncé du Théorème

Dans ce chapitre, nous noterons $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$ l'oscillateur harmonique agissant sur la variable x_j. Il est donné par :

$$\mathcal{I}_\hbar^{(j)} = \mathsf{Op}_\hbar^w \left(\xi_j^2 + x_j^2\right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2. \tag{4.1.3}$$

Sous les hypothèses précédentes, nous démontrons le théorème suivant (dû à Sjöstrand [Sjo92]). Ce théorème dit que toute une gamme du spectre de $\mathcal{H}_\hbar$ est donné par une fonction des oscillateurs harmoniques $\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, ..., \mathcal{I}_\hbar^{(d)}$.

Théorème 4.1. *Soit $\eta \in (0, 1)$. Il existe une fonction $f^\star \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times [0, 1])$ à support dans un voisinage arbitrairement petit de 0 telle que $|f^\star(I, \hbar)| \leq C(|I| + \hbar)^2$, et avec les notations :*

$$\mathcal{N}_\hbar := H_0 + \hbar H_1 + \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathcal{I}_\hbar^{(j)} + f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, ..., \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar)$$

$$N_\hbar^{\mathsf{max}} = \max\{n \geq 0; \quad \lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) \leq H_0 + \hbar^\eta\},$$

on a

$$\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) = \lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{\eta \mathbf{r}_0}{2}}),$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$.

$\mathcal{N}_\hbar$ est une fonction d'oscillateurs harmoniques, donc son spectre est facilement calculable. En effet, chaque $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$ a un spectre discret sur $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}_{x_j})$, constitué des valeurs propres simples $\{(2k+1)\hbar;\ k \in \mathbf{N}\}$. De plus, les fonctions propres associées sont des fonctions de Hermite en la variable x_j. On en déduit une asymptotique des valeurs propres de $\mathcal{H}_\hbar$.

Corollaire 4.2. *Modulo $\mathcal{O}(\hbar^{\frac{\eta \mathbf{r}_0}{2}})$, le spectre de $\mathcal{H}_\hbar$ dans $(-\infty, H_0 + \hbar^\eta]$ est donné par :*

$$\left\{ H_0 + \hbar \left(H_1 + \sum_{j=1}^{d} \nu_j (2k_j + 1) \right) + f^\star \left((2k_1 + 1)\hbar, ..., (2k_d + 1)\hbar, \hbar \right) ; \quad k \in \mathbf{N}^d \right\}.$$

Remarque 1. En particulier, ceci donne un équivalent du trou spectral $\lambda_{n+1}(\mathcal{H}_\hbar) - \lambda_n(\mathcal{H}_\hbar)$ tant que $\mathbf{r}_0 \geq 3$ (ce qui signifie que les ν_j sont deux à deux distincts). Ce trou est d'ordre $\hbar$.

Remarque 2. La fonction $f^\star$ est obtenue par un algorithme de forme normale de Birkhoff. En particulier, elle est calculable explicitement. On en déduit un développement asymptotique explicite de $\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar)$ en puissances de $\hbar$.

Remarque 3. Plus η est proche de 0, plus on décrit une grande part du spectre. On décrit les états semi-excités $\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) - \lambda_0(\mathcal{H}_\hbar) \leq ch^\eta$. En particulier, plus $\hbar$ est petit, plus on décrit un grand nombre de valeurs propres.

4.1.3 – Organisation du chapitre

La preuve du Théorème 4.1 sera faite dans les sections 4.2 et 4.3. Dans la section 4.4, nous discuterons d'un résultat annexe obtenu par Charles et Vũ Ngọc, qui ont étudié la forme normale en présence de résonances.

L'idée première de la forme normale est que le symbole principal $H(x, \xi)$ permet de localiser les fonctions propres dans un petit voisinage de 0. Ainsi, nous serons amenés à travailler à partir de la série de Taylor en 0,

$$H_\hbar(x, \xi) = H_0 + \hbar H_1 + H_2(x, \xi) + \mathcal{O}(\hbar^2 + \hbar(x, \xi) + (x, \xi)^3).$$

La forme normale de Birkhoff consiste à utiliser le terme H_2 pour transformer les termes d'ordres supérieurs en une fonction des oscillateurs harmoniques classiques $\xi_j^2 + x_j^2$. Ce travail est fait dans un espace de séries formelles, en section 4.2.2. Dans la section 4.2.3 nous quantifions cette forme normale : il s'agit de passer des séries formelles aux symboles, puis des symboles aux opérateurs. On obtient l'opérateur $\mathcal{N}_\hbar$. La section 4.3 consiste à comparer le spectre de $\mathcal{N}_\hbar$ et celui de $\mathcal{H}_\hbar$. Nous prouvons d'abord en section 4.3.1 que le symbole de $\mathcal{H}_\hbar$ localise ses fonctions propres près de 0, et un résultat analogue pour $\mathcal{N}_\hbar$. Enfin, en section 4.3.2 nous démontrons le Théorème 4.1 en utilisant le principe du min-max.

4.2 – Construction de la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$

4.2.1 – Séries formelles

Nous travaillerons dans l'espace de séries formelles

$$\mathcal{E} = \mathbf{C}[[x, \xi, \hbar]],$$

qui seront vues comme des séries de Taylor en 0 de symboles, que nous quantifierons à l'aide de la quantification de Weyl. Étant donné un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{A} = \mathsf{Op}^w_\hbar a_\hbar$, où $a_\hbar \in S(m)$ admet un développement en puissances de $\hbar$ dans $S(m)$, nous noterons $[a_\hbar]$ ou encore $\sigma^T(\mathcal{A})$ la série de Taylor de $a_\hbar$ en 0 : ceci définit un élément de $\mathcal{E}$. Réciproquement, étant donné une série formelle $\tau \in \mathcal{E}$, en utilisant une sommation de Borel, nous pouvons lui associer un symbole $a_\hbar \in S(1)$ admettant un développement en puissances de $\hbar$ dans $S(1)$, tel que $[a_\hbar] = \tau$. Ce processus n'est pas unique, mais étant donnés deux $a_\hbar, \tilde{a}_\hbar \in S(1)$ tel que $[a_\hbar] = [\tilde{a}_\hbar] = \tau$, on a $a_\hbar = \tilde{a}_\hbar + \mathcal{O}((x,\xi,\hbar)^\infty)$ dans $S(1)$.

Remarque. Nous démontrerons plus loin que les fonctions propres de $\mathcal{H}_\hbar$ sont microlocalisées là où $|(x,\xi)| \leq C\hbar^{\eta/2}$, et donc les restes en $(x,\xi,\hbar)^\infty$ seront bien négligeables.

• Nous allons faire des manipulations diverses sur les séries de Taylor, via un algorithme de forme normale de Birkhoff. Pour que ces manipulations aient un sens une fois quantifiées, il faut les adapter au produit des opérateurs : $\mathsf{Op}^w_\hbar(a)\mathsf{Op}^w_\hbar(b) = \mathsf{Op}^w_\hbar(a \star b)$ où $\star$ est le produit de Weyl sur les symboles. Ainsi, nous munirons $\mathcal{E}$ du produit de Weyl, défini de la manière suivante. Étant donné $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{E}$, nous pouvons leur associer des symboles $a_1, a_2 \in S(1)$ tels que $[a_1] = \tau_1$, $[a_2] = \tau_2$. Nous définissons alors $\tau_1 \star \tau_2 := [a_1 \star a_2]$. Il reste à vérifier que cette définition ne dépend pas du choix a_1, a_2 des symboles représentants les séries τ_1, τ_2. De fait, nous avons le développement suivant :

$$a_1 \star a_2 := \sum_{k\geq 0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{2i}\Box\right)^k a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)|_{x=y,\xi=\eta} + \mathcal{O}(\hbar^{N+1}), \tag{4.2.1}$$

où $\Box = \partial_\xi\partial_y - \partial_x\partial_\eta$. De plus, une dérivée α-ième de la série de Taylor de a est la série de Taylor de $\partial^\alpha a$. Par conséquent, la série de Taylor de $a_1 \star a_2$ ne dépend que des séries de Taylor de a_1 et a_2. Ainsi, le produit $\tau_1 \star \tau_2$ est bien défini et donné par la formule (4.2.1).

• Nous munirons $\mathcal{E}$ d'une graduation. L'application degré $\deg : \mathcal{E} \to \mathbf{N}$ est définie sur les monômes par

$$\deg(x^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\hbar^\ell) := |\alpha_1| + |\alpha_2| + 2\ell.$$

Une série formelle est de degré N si son monôme de plus haut degré est de degré N. Pour $N \geq 0$, nous désignerons par $\mathcal{O}_N$ les séries formelles de valuation $\geq N$: Il s'agit de toute série formelle dont chaque monôme est de degré $\geq N$. Nous noterons $\mathcal{D}_N$ l'espace vectoriel engendré par les monômes de degré N. Pourquoi $\hbar$ doit-il compter deux fois plus de x ou ξ ? On peut le comprendre en considérant l'oscillateur harmonique, dont le symbole est $\xi_1^2 + x_1^2$ et dont la première valeur propre est $\hbar$. Ainsi en un sens, $x_1^2 + \xi_1^2$ doit être de l'ordre de $\hbar$. Mais la raison plus profonde est la compatibilité du degré avec le produit de Moyal. On constate directement avec la formule (4.2.1) que, pour tous monômes τ_1, τ_2,

$$\deg(\tau_1 \star \tau_2) = \deg\tau_1 + \deg\tau_2.$$

En effet, $\Box$ fait perdre 2 degrés aux monômes, donc $\hbar\Box$ conserve le degré. Nous utiliserons ce résultat sous la forme suivante :

$$\mathcal{O}_{N_1} \star \mathcal{O}_{N_2} \subset \mathcal{O}_{N_1+N_2}.$$

• Nous considérerons des commutateurs, toujours représentés par des crochets $[\bullet,\bullet]$ ou par ad. Le commutateur entre deux opérateurs $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ est $[\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2] = \mathsf{ad}_{\mathcal{A}_1}\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$. Le commutateur entre deux symboles a_1, a_2 est $[a_1,a_2] = \mathsf{ad}_{a_1}a_2 = a_1\star a_2 - a_2\star a_1$. Si $\mathcal{A}_j = \mathsf{Op}^w_\hbar a_j$, on a $\mathsf{Op}^w_\hbar[a_1,a_2] = [\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2]$. Enfin, le commutateur entre deux séries formelles τ_1, τ_2 est $[\tau_1,\tau_2] = \mathsf{ad}_{\tau_1}\tau_2 = \tau_1\star\tau_2 - \tau_2\star\tau_1$. D'après (4.2.1), il est donné par

$$[\tau_1,\tau_2] = 2\sinh\left(\frac{\hbar}{2i}\Box\right)\tau_1(x,\xi)\tau_2(y,\eta)|_{x=y,\xi=\eta}. \tag{4.2.2}$$

Cette série est multiple de $\hbar$, et nous avons donc

$$\forall\tau_1\in\mathcal{O}_{N_1},\quad \forall\tau_2\in\mathcal{O}_{N_2},\quad \frac{i}{\hbar}[\tau_1,\tau_2]\in\mathcal{O}_{N_1+N_2-2}, \tag{4.2.3}$$

et $\frac{i}{\hbar}[\tau_1,\tau_2] = \{\tau_1,\tau_2\} + \mathcal{O}(\hbar^2)$, où $\{\bullet,\bullet\}$ désigne le crochet de Poisson.

• Pour finir, l'algorithme de forme normale de Birkhoff repose sur le Lemme suivant.

Lemme 4.3. *Pour $1\le j\le d$, notons $z_j = x_j + i\xi_j$ et $|z_j|^2 = x_j^2+\xi_j^2$.*

1. *Pour toute série $\tau\in\mathcal{E}$, on a :*
$$\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{|z_j|^2}\tau = \{|z_j|^2,\tau\}.$$
2. *Rappelons que $H_2 = \sum_{j=1}^d \nu_j|z_j|^2$. On a :*
$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}\left(\mathsf{ad}_{H_2}\right)\oplus\mathsf{Im}\left(\mathsf{ad}_{H_2}\right).$$
3. *Soit $\tau\in\mathcal{E}$ une série formelle **de degré** $<\mathbf{r}_0$. Alors :*
$$\begin{aligned}\tau\in\mathsf{Ker}\left(\mathsf{ad}_{H_2}\right) &\Leftrightarrow \tau\in\bigcap_{j=1}^d\mathsf{Ker}\left(\mathsf{ad}_{|z_j|^2}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists F\in\mathbf{C}[I_1,...,I_d,\hbar],\quad \tau = F(|z_1|^2,...,|z_d|^2,\hbar).\end{aligned}$$

Remarque. Le point (3) du Lemme caractérise les séries formelles de degré $<\mathbf{r}_0$ qui commutent avec H_2 : ce sont celles qui commutent avec tous les oscillateurs harmoniques $|z_j|^2$, ou encore celles qui sont fonction des oscillateurs harmoniques. On comprend l'intérêt de ce lemme pour démontrer le Théorème 4.1. Nous voulons transformer la série de Taylor associée à $H_\hbar$ en une fonction d'oscillateurs harmoniques : c'est le but de l'algorithme de Birkhoff. Remarquons que cette réduction sera limitée par un $\mathcal{O}_{\mathbf{r}_0}$, qui apparait en effet dans le reste du Théorème 4.1.

Démonstration. Le point (1) du Lemme 4.3 découle de la formule (4.2.2) appliquée à $a_1 = |z_j|^2$. Le terme principal de $|z_j|^2 \star \tau$ est bien $\frac{\hbar}{i}\{|z_j|^2, \tau\}$. Tous les termes suivants sont nuls, puisque l'opérateur $\Box^k(|z_j|^2, \tau)$ dérive k-fois $|z_j|^2$, ce qui fait 0 pour $k \geq 3$.

En remarquant que les monômes de la forme $z^{\alpha_1}\overline{z}^{\alpha_2}\hbar^\ell$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{N}^d$, $\ell \in \mathbf{N}$) forment une base de $\mathcal{E}$, le point (2) découle de la formule suivante

$$\mathsf{ad}_{H_2}(z^{\alpha_1}\overline{z}^{\alpha_2}\hbar^\ell) = \langle \alpha_2 - \alpha_1, \nu\rangle z^{\alpha_1}\overline{z}^{\alpha_2}\hbar^\ell, \tag{4.2.4}$$

obtenue par un simple calcul de crochet de Poisson. En effet, de cette formule on déduit que le monôme $\tau = z^{\alpha_1}\overline{z}^{\alpha_2}\hbar^\ell$ est dans $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{ad}_{H_2})$ si $\langle \alpha_2 - \alpha_1, \nu\rangle = 0$, et dans $\mathsf{Im}\,(\mathsf{ad}_{H_2})$ sinon.

Montrons enfin le point (3). Il suffit de le montrer pour $\tau = z^{\alpha_1}\overline{z}^{\alpha_2}\hbar^\ell$, avec $|\alpha_1| + |\alpha_2| + 2\ell < \mathbf{r}_0$. Puisque

$$\mathsf{ad}_{H_2} = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathsf{ad}_{|z_j|^2},$$

les implications dans le sens $\Leftarrow$ sont évidentes. Réciproquement, supposons que $\tau \in \mathsf{Ker}\,(\mathsf{ad}_{H_2})$. D'après (4.2.4), on a $\langle \alpha_2 - \alpha_1, \nu\rangle = 0$. En notant $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$, cela peut se réécrire $\sum_{j=1}^d \gamma_j \nu_j = 0$. De plus, $|\gamma| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| < \mathbf{r}_0$, donc par définition de $\mathbf{r}_0$ on a $\gamma = 0$. On en déduit que $\alpha_1 = \alpha_2$ et donc que $\tau = z^{\alpha_1}\overline{z}^{\alpha_2}\hbar^\ell$ est bien une fonction des oscillateurs harmoniques. □

4.2.2 – Forme normale de Birkhoff

Dans cette section, nous construisons la forme normale de Birkhoff à un niveau formel. Il s'agit de travailler sur la série de Taylor associée au symbole $H_\hbar$ de $\mathcal{H}_\hbar$. D'après (4.1.1), nous pouvons écrire cette série formelle sous la forme

$$[H_\hbar] = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \sum_{k\geq 3} H_k, \tag{4.2.5}$$

où $H_k \in \mathcal{D}_k$ pour $k \geq 3$, $H_0, H_1 \in \mathbf{C}$, et $H_2 = \sum_{j=1}^d \nu_j |z_j|^2$. Au niveau formel, la forme normale de Birkhoff s'écrit comme suit.

Lemme 4.4. *Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_3$, il existe $\kappa, \tau \in \mathcal{O}_3$ et $\rho \in \mathcal{O}_{\mathbf{r}_0}$ tels que :*

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau}(H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \gamma) = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \kappa + \rho,$$

où κ une fonction des oscillateurs harmoniques : $\kappa = F(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2, \hbar)$ pour une série $F \in \mathbf{C}[[I_1, \cdots, I_d, \hbar]]$. De plus, si γ est à coefficients réels, alors τ, κ, ρ aussi.

Remarque 1. Tout d'abord, il est à noter que $e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau}(H)$ défini bien une série formelle pour $H \in \mathcal{E}$. Cette série est définie par :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau}(H) = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau\right)^k (H).$$

Cette série est bien convergente *au sens de la filtration* $(\mathcal{O}_k)_{k\geq 0}$, et cela se voit par le simple fait qu'il suffit d'un nombre fini de termes pour calculer le coefficient de degré N de la série $e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau}(H)$. En effet d'après (4.2.3),

$$\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k+1}, \tag{4.2.6}$$

et donc pour $k > N$, on a $\left(\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau\right)^k (H) \in \mathcal{O}_{N+1}$.

Remarque 2. Expliquons brièvement pourquoi nous considérons une telle équation (d'inconnues τ et $\kappa + \rho$). Inspiré par la forme normale classique et le Théorème d'Egorov 3.21, nous cherchons à construire une forme normale sous la forme

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathcal{N}_\hbar + \mathcal{R}_\hbar.$$

(En effet, quand $\hbar$ tend vers 0 on obtiendrait alors $H \circ \varphi = N + R$, où $\{|z_j|^2, N\} = 0$ d'après le Théorème d'Egorov, ce qui correspond à une forme normale de Birkhoff classique). En développant les exponentielles dans cette équation, on obtient comme premiers termes :

$$\mathcal{H}_\hbar + \frac{i}{\hbar}\left(\mathcal{Q}_\hbar\mathcal{H}_\hbar - \mathcal{H}_\hbar\mathcal{Q}_\hbar\right) + \ldots = \mathcal{N}_\hbar + \mathcal{R}_\hbar.$$

On reconnait $\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar$. En calculant les termes suivants, on reconnait les crochets itérés $\mathsf{ad}^k_{\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar$, et on obtient (au moins formellement)

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}}\mathcal{H}_\hbar = \mathcal{N}_\hbar + \mathcal{R}_\hbar.$$

Au niveau des symboles, cette équation devient celle du Lemme 4.4.

Démonstration. Nous allons raisonner par récurrence sur un entier $N \geq 3$. Supposons construits $\tau_{N-1}, K_3, \cdots, K_{N-1} \in \mathcal{O}_3$ avec $[K_i, |z_j|^2] = 0$ pour tout (i,j) et $K_i \in \mathcal{D}_i$, tels que :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau_{N-1}}}(H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \gamma) = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + \mathcal{O}_N.$$

(Cette hypothèse est évidemment vérifiée au rang $N = 3$.) Voyons comment construire K_N et τ_N. Pour simplifier les notations, notons $H = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \gamma$. Le terme en $\mathcal{O}_N$ peut s'écrire $H_N + \mathcal{O}_{N+1}$, avec $H_N \in \mathcal{D}_N$. Il reste :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau_{N-1}}}(H) = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + H_N + \mathcal{O}_{N+1}.$$

Pour $\tau' \in \mathcal{O}_N$ à déterminer, on applique $e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau'}}$:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau_{N-1}+\tau'}}(H) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau'}}\left(H_0 + \hbar H_1 + H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + H_N + \mathcal{O}_{N+1}\right).$$

En remarquant que $H_0, H_1 \in \mathbf{C}$ commutent avec τ', et que $\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau'} : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k+N-2}$, il reste :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau_{N-1}+\tau'}}(H) = H_0 + \hbar H_1 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + H_N + \frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau'}H_2 + \mathcal{O}_{N+1}.$$

Ainsi, si on trouve $K_N \in \mathcal{D}_N$ qui commute avec les $|z_j|^2$, tel que

$$K_N = H_N + \frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau'} H_2, \tag{4.2.7}$$

on posera $\tau_N = \tau_{N-1} + \tau'$ et on aura terminé. Il reste donc à résoudre l'équation (4.2.7) d'inconnues τ' et K_N. Or, cette équation peut se réécrire

$$H_N = K_N + \frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{H_2}\tau', \tag{4.2.8}$$

et le point (2) du Lemme 4.3 assure que H_N peut s'écrire sous cette forme avec $K_N \in \mathsf{Ker}(\mathsf{ad}_{H_2})$. Le point (3) du même Lemme assure que K_N commute avec les oscillateurs harmoniques $|z_j|^2$ tant que $N < \mathbf{r}_0$. La récurrence s'arrête en $N = \mathbf{r}_0$, d'où le reste $\rho \in \mathcal{O}_{\mathbf{r}_0}$. Finalement, $\kappa = K_3 + \cdots + K_{\mathbf{r}_0 - 1}$ est une fonction des oscillateurs harmoniques d'après le Lemme 4.3. Pour conclure, on remarque que $\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{H_2} = \{H_2, \bullet\}$ est un $\mathbf{R}$-endomorphisme, et donc que la décomposition (2) du Lemme 4.3 reste valide sur $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}[[x, \xi, \hbar]] = \mathsf{Ker}_{\mathbf{R}}(\mathsf{ad}_{H_2}) \oplus_{\mathbf{R}} \mathsf{Im}_{\mathbf{R}}(\mathsf{ad}_{H_2}).$$

Par conséquent, l'équation (4.2.8) peut être résolue sur $\mathbf{R}$. □

Remarque 3. Cette construction est complètement explicite : l'algorithme de Birkhoff permet de calculer tous les termes apparaissant dans κ.

Remarque 4. On voit dans cette démonstration que l'on peut poursuivre la récurrence pour faire en sorte que ρ commute avec H_2, mais cela n'implique plus que ρ commute avec les oscillateurs harmoniques car ρ contient des termes de degré $\geq \mathbf{r}_0$. On pourrait donc construire une forme normale complète (i.e. modulo $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$) qui commuterait avec H_2, mais l'étude de son spectre serait plus délicate. Ceci est à l'origine de l'article de Charles et Vũ Ngọc [CVuN08], dont nous parlerons en section 4.4.

4.2.3 – Quantification de la forme normale

Dans cette section nous obtenons la forme normale semi-classique $\mathcal{N}_\hbar$ en quantifiant la forme normale formelle obtenue dans la section précédente (Lemme 4.4).

Théorème 4.5. *Pour tout voisinage compact V de $0 \in \mathbf{R}^d$, il existe :*

1. *Un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel borné $\mathcal{Q}_\hbar$ dont le symbole est à support compact,*
2. *Une fonction $f^\star \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ à support contenu dans V telle que $|f^\star(I, \hbar)| \leq C(|I| + \hbar)^2$,*
3. *Un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{R}_\hbar$ dont le symbole est $\mathcal{O}(|(\hbar^{1/2}, x, \xi)|^{\mathbf{r}_0})$*

tels que

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathcal{N}_\hbar + \mathcal{R}_\hbar,$$

avec $\mathcal{N}_\hbar = H_0 + \hbar H_1 + \sum_{j=1}^d \nu_j \mathcal{I}_\hbar^{(j)} + f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar)$.

Remarque. En prenant $\hbar = 0$, on retrouve d'après le Théorème d'Egorov la forme normale de Birkhoff classique : Il existe une transformation canonique φ (qui est le flot au temps 1 associé à l'Hamiltonien donné par le symbole principal de $\mathcal{Q}_\hbar$), tel que

$$H \circ \varphi = H_0 + \sum_{j=1}^{d} \nu_j |z_j|^2 + f(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2, 0) + \mathcal{O}(|(x,\xi)|^{\mathbf{r}_0}).$$

Démonstration. D'après (4.1.1) on peut écrire la série de Taylor de $H_\hbar$ sous la forme $[H_\hbar] = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \gamma$, où $\gamma \in \mathcal{O}_3$. Appliquons le Lemme 4.4 à cette série : on obtient $\tau \in \mathcal{O}_3$, $F \in \mathbf{C}[[I_1, \cdots I_d, \hbar]]$ et $\rho \in \mathcal{O}_{\mathbf{r}_0}$ tels que

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau}(H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \gamma) = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + F(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2, \hbar) + \rho. \quad (4.2.9)$$

Soit $Q \in S(1)$ un symbole à valeurs réelles et à support compact dont la série de Taylor est $[Q] = \tau$. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ à support contenu dans V, dont la série de Taylor en 0 est donnée par $F(I_1, \cdots, I_d, \hbar)$. Soit $R \in S(1)$ un symbole tel que $[R] = \rho$. Avec la notation $\mathcal{Q}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(Q)$, montrons que $e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}$ est de la forme voulue. Soit $N > 0$. D'après la formule de Taylor, appliquée à la fonction

$$t \mapsto e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar},$$

on a le développement suivant (au sens de la topologie forte, c'est à dire valide en appliquant à tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$) :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}|_{t=0} + \int_0^1 \frac{1}{N!}(1-t)^N \frac{\mathrm{d}^{N+1}}{\mathrm{d}t^{N+1}} e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathrm{d}t.$$

En appliquant la règle de dérivation du produit, tout en prenant compte la non-commutativité de $\mathcal{H}_\hbar$ et $\mathcal{Q}_\hbar$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\left[\left(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}\right)^k \mathcal{H}_\hbar\right] e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar},$$

et donc

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}\right)^k \mathcal{H}_\hbar + \mathcal{R}_N$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_N &= \int_0^1 \frac{1}{N!}(1-t)^N e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\left[\left(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}\right)^{N+1}\mathcal{H}_\hbar\right] e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathrm{d}t \\ &= \left(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}\right)^{N+1} \int_0^1 \frac{1}{N!}(1-t)^N e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $\mathsf{ad}_{\mathcal{Q}_\hbar}$ commute avec $e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}$. D'après le théorème d'Egorov 3.22, $e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}$ est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel à symbole dans $S(m)$. Par linéarité et continuité en t, on en déduit que l'intégrale est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel à symbole $S(m)$. En notant a ce symbole, on a :

$$\mathcal{R}_N = \mathsf{Op}_\hbar^w\left[\left(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_Q\right)^{N+1} a\right],$$

et donc finalement

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar^w\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_Q)^k H_\hbar + (i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_Q)^{N+1}a\right).$$

On a bien un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel, et en considérant la série de Taylor de son symbole, on obtient :

$$\sigma^T\left(e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\right) = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(i\hbar^{-1}\mathsf{ad}_\tau)^k(H_0+\hbar H_1+H_2+\gamma)+\mathcal{O}_{N+1},$$

car $\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k+1}$, ce qui donne $(\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau)^{N+1} : \mathcal{E} \to \mathcal{O}_{N+1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sigma^T\left(e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\right) &= e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau}(H_0+\hbar H_1+H_2+\gamma)+\mathcal{O}_{N+1}\\ &= H_0+\hbar H_1+H_2+F(|z_1|^2,\cdots,|z_d|^2,\hbar)+\rho+\mathcal{O}_{N+1}.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout N, on a

$$\sigma^T\left(e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\right) = H_0+\hbar H_1+H_2+F(|z_1|^2,\cdots,|z_d|^2,\hbar)+\rho,$$

et avec notre choix de f et R au début de la preuve :

$$\sigma^T\left(e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\right) = [H_0+\hbar H_1+H_2+f(|z_1|^2,\cdots|z_d|^2,\hbar)+R].$$

Par conséquent, il existe un opérateur pseudodifférentiel $\tilde{\mathcal{R}}_\hbar$ dont le symbole est $\mathcal{O}((x,\xi,\hbar^{1/2}))^\infty)$ tel que :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\mathcal{H}_\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar^w\left(H_0+\hbar H_1+H_2+f(|z_1|^2,\cdots,|z_d|^2,\hbar)+R\right)+\tilde{\mathcal{R}}_\hbar$$

Comme $R=\mathcal{O}((x,\xi,\hbar^{1/2})^{\mathrm{r}_0})$, et $\mathsf{Op}_\hbar^w H_2 = \sum_{j=1}^d \nu_j\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$, le Lemme qui suit permet de conclure. □

Lemme 4.6. *Il existe $f^\star \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R})$ à support contenu dans V, et un symbole $R\in S(1)$ tels que $R=\mathcal{O}((x,\xi,\hbar^{1/2})^\infty)$ et :*

$$\mathsf{Op}_\hbar^w f(|z_1|^2,\cdots,|z_d|^2,\hbar) = f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)},\cdots,\mathcal{I}_\hbar^{(d)},\hbar)+\mathsf{Op}_\hbar^w R.$$

Démonstration. • Reprenons la fonction F donnée par le Lemme (4.4). Si F s'écrit

$$F(|z_1|^2,\cdots,|z_d|^2,\hbar) = \sum_{\alpha,\ell} c_{k\ell}|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_d|^{2\alpha_d}\hbar^\ell,$$

alors il existe des coefficients $c_{k\ell}^\star \in \mathbf{R}$ tels que :

$$F(|z_1|^2,\cdots,|z_d|^2,\hbar) = \sum_{\alpha,\ell} c_{k\ell}^\star\left(|z_1|^2\right)^{\star\alpha_1}\cdots\left(|z_d|^2\right)^{\star\alpha_d}\hbar^\ell,$$

où $(|z_j|^2)^{\star\alpha_j} = |z_j|^2 \star \cdots \star |z_j|^2$ est la puissance α_j-ième de $|z_j|^2$ pour le produit $\star$. En effet, quelque soit $\alpha \in \mathbf{N}^d$, la série formelle

$$\tau_\alpha = \left(|z_1|^2\right)^{\star\alpha_1} \cdots \left(|z_d|^2\right)^{\star\alpha_d}$$

est en fait un polynôme, qui commute avec les oscillateurs harmoniques, et donc il peut s'écrire comme une fonction des $|z_j|^2$. De plus,

$$\tau_\alpha = |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_d|^{2\alpha_d} + \hbar \mathcal{O}_{2|\alpha|-2}.$$

Par conséquent, la relation donnant les $(\tau_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^d}$ en fonction des $(|z|^{2\alpha})_{\alpha\in\mathbf{N}^d}$ peut s'inverser (système triangulaire), et on peut exprimer les $(|z|^{2\alpha})_{\alpha\in\mathbf{N}^d}$ en fonction des $(\tau_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^d}$.

- Soit $f^\star \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ une fonction dont la série de Taylor en 0 est donnée par $\sum_{\alpha,\ell} c^\star_{\alpha\ell} I_1^{\alpha_1} \cdots I_d^{\alpha_d} \hbar^\ell$. On peut choisir cette fonction à support compact contenu dans V. On considérant une fonction troncature χ valant 1 sur le support de f, on peut écrire pour tout $N > 0$, et $I_1, \cdots I_d, \hbar > 0$:

$$f^\star(I,\hbar) = \sum_{|\alpha|+\ell=0}^{N-1} c^\star_{\alpha\ell} I_1^{\alpha_1} \cdots I_d^{\alpha_d} \hbar^\ell \chi(I) + (I_1 + \cdots + I_d + \hbar)^N g^\star_N(I,\hbar)$$

où $g^\star_N$ est à support compact. Si on applique $f^\star$ à $(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)})$, on obtient

$$\begin{aligned} f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar) = & \sum_{|\alpha|+\ell=0}^{N-1} c^\star_{\alpha\ell} (\mathcal{I}_\hbar^{(1)})^{\alpha_1} \cdots (\mathcal{I}_\hbar^{(d)})^{\alpha_d} \hbar^\ell \chi(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}) \\ & + (\mathcal{I}_\hbar^{(1)} + \cdots + \mathcal{I}_\hbar^{(d)} + \hbar)^N g^\star_N(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar) \\ = & (A) + (B) \end{aligned}$$

En utilisant le calcul fonctionnel, on sait que (A) est un opérateur pseudodifférentiel et

$$(A) = \mathsf{Op}^w_\hbar \left(\sum_{|\alpha|+\ell}^{N-1} c^\star_{\alpha\ell} (|z_1|^2)^{\star\alpha_1} \cdots (|z_d|^2)^{\star\alpha_d} \hbar^\ell \right) \chi(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}).$$

De plus, le symbole complet de $\chi(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)})$ vaut 1 sur un voisinage de $z = 0$, modulo $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$. Par conséquent, le série de Taylor du symbole de (A) est

$$\sigma^T((A)) = \sum_{|\alpha|+\ell=0}^{N-1} c^\star_{\alpha\ell} (|z_1|^2)^{\star\alpha_1} \cdots (|z_d|^2)^{\star\alpha_d} \hbar^\ell = F(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2, \hbar) + \mathcal{O}_{2N}$$

De même, $g^\star_N(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)})$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole borné (notons-le $\sigma(g)$), donc

$$\sigma^T((B)) = (|z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2 + \hbar)^{\star N} \star \sigma(g) = \mathcal{O}_{2N}.$$

En sommant les symboles de (A) et (B), on obtient que $f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar)$ est un opérateur pseudodifférentiel tel que :

$$\begin{aligned}\sigma^T\left(f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar)\right) &= F(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2, \hbar) + \mathcal{O}_{2N} \\ &= [f(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2, \hbar)] + \mathcal{O}_{2N}.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $N > 0$, on en déduit que le symbole de $f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar)$ vaut $f(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2) + R$, pour un certain R dont la série de Taylor est nulle $[R] = 0$. Ainsi,

$$f^\star(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)}, \hbar) = \mathsf{Op}_\hbar^w\left(f(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2)\right) + \mathsf{Op}_\hbar^w R.$$

□

4.3 – Comparaison des spectres de $\mathcal{N}_\hbar$ et de $\mathcal{H}_\hbar$

4.3.1 – Microlocalisation des fonctions propres

Dans cette section, nous démontrons que les fonctions propres de $\mathcal{H}_\hbar$ d'énergie $\lambda \leq H_0 + 2\hbar^\eta$ sont microlocalisées là où $|(x,\xi)| \leq C\hbar^{\eta/2}$. Ceci permettra en section suivante de considérer les restes $\mathcal{O}((x,\xi,\hbar^{1/2})^{\mathbf{r}_0})$ issus de la forme normale comme des $\mathcal{O}(\hbar^{\mathbf{r}_0\eta/2})$.

Théorème 4.7. *Soient $\eta \in (0,1)$ et $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{2d})$ valant 1 sur un voisinage suffisamment grand de 0. Pour toute fonction propre $\psi_\hbar$ de $\mathcal{H}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq H_0 + 2\hbar^\eta$, on a*

$$\psi_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(\chi_0(\hbar^{-\eta/2}(x,\xi)))\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar,$$

où le $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ est dans $\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d), \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d))$ et ne dépend pas de $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$.

Démonstration. Soit $g_\hbar \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$g_\hbar(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq H_0 + 2\hbar^\eta, \\ 0 & \text{si } \lambda \geq H_0 + 3\hbar^\eta. \end{cases}$$

Alors la fonction propre $\psi_\hbar$ vérifie $\psi_\hbar = g_\hbar(\lambda_\hbar)\psi_\hbar = g_\hbar(\mathcal{H}_\hbar)\psi_\hbar$. On va montrer que

$$\|\mathsf{Op}_\hbar^w \chi(\hbar^{-\eta/2}(x,\xi)) g_\hbar(\mathcal{H}_\hbar)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

où $\chi = 1 - \chi_0$, ce qui permettra de conclure que $\psi_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w \chi_0(\hbar^{-\eta/2}(x,\xi))\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar$ uniformément par rapport à $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$.

Pour alléger les notations, notons $\chi^w := \mathsf{Op}_\hbar^w \chi(\hbar^{-\eta/2}(x,\xi))$. Pour tout $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ notons $\varphi = g_\hbar(\mathcal{H}_\hbar)\psi$. Alors on a :

$$\langle \mathcal{H}_\hbar \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle = \langle \chi^w \mathcal{H}_\hbar \varphi, \chi^w \varphi\rangle + \langle \left[\mathcal{H}_\hbar, \chi^w\right]\varphi, \chi^w \varphi\rangle. \tag{4.3.1}$$

Nous allons majorer les deux termes de droite, et minorer le terme de gauche. Tout d'abord, comme $g_\hbar(\lambda)$ est supporté en $\lambda \leq H_0 + 3\hbar^\eta$ on a

$$\langle \chi^w \mathcal{H}_\hbar \varphi, \chi^w \varphi \rangle \leq (H_0 + 3\hbar^\eta) \|\chi^w \varphi\|^2. \tag{4.3.2}$$

D'autre part, le commutateur $\left[\mathcal{H}_\hbar, \chi^w\right]$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $\hbar$, dont le symbole est supporté sur $\mathsf{supp}\chi$. On a donc

$$\langle \left[\mathcal{H}_\hbar, \chi^w\right] \varphi, \chi^w \varphi \rangle \leq C\hbar \|\underline{\chi}^w \varphi\| \|\chi^w \varphi\| \tag{4.3.3}$$

où $\underline{\chi}$ vérifie les mêmes propriétés que χ et vaut 1 sur $\mathsf{supp}\chi$. Enfin, le symbole de χ^w est supporté dans $\{|(x,\xi)| \geq M\hbar^{\eta/2}\}$, et le symbole de $\mathcal{H}_\hbar$ est minoré par $H_0 + cM^2\hbar^\eta$ sur cet ensemble. On peut donc utiliser l'inégalité de Gårding pour obtenir

$$\langle \mathcal{H}_\hbar \chi^w \varphi, \chi^w \varphi \rangle \geq (H_0 + cM^2\hbar^\eta) \|\chi^w \varphi\|^2.$$

En utilisant cette dernière minoration dans (4.3.1), puis en majorant les termes de droite par (4.3.2) et (4.3.3) on obtient

$$(H_0 + cM^2\hbar^\eta) \|\chi^w \varphi\|^2 \leq (H_0 + 3\hbar^\eta) \|\chi^w \varphi\|^2 + C\hbar \|\underline{\chi}^w \varphi\| \|\chi^w \varphi\|.$$

Si χ_0 vaut 1 sur un voisinage suffisamment grand de 0, on aura $cM^2 > 3$ et donc

$$\|\chi^w \varphi\| \leq \tilde{C}\hbar^{1-\eta} \|\underline{\chi}^w \varphi\|.$$

En itérant le raisonnement avec $\underline{\chi}$ à la place de χ, on obtient pour $N > 0$ arbitrairement grand

$$\|\chi^w \varphi\| \leq C_N \hbar^N \|\varphi\|$$

Ceci est vrai pour tout $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ avec $\varphi = g_\hbar(\mathcal{H}_\hbar)\psi$, et donc on a bien

$$\|\chi^w g_\hbar(\mathcal{H}_\hbar)\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

□

Nous prouvons un résultat similaire pour $\mathcal{N}_\hbar$.

Théorème 4.8. *Soient $C_0 > 0$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{2d})$ valant 1 sur un voisinage suffisamment grand de 0. Pour toute fonction propre $\psi_\hbar$ de $\mathcal{N}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq H_0 + C_0\hbar^\eta$, on a*

$$\psi_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(\chi(\hbar^{-\eta/2}(x,\xi)))\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar,$$

où le $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ est dans $\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d), \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d))$ et ne dépend pas de $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$.

Démonstration. $\mathcal{N}_\hbar$ est une fonction des oscillateurs harmoniques $(\mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(d)})$ dont le spectre est discret et bien connu :

$$\mathsf{sp}(\mathcal{I}_\hbar^{(j)}) = \{(2n+1)\hbar; n \in \mathbf{N}\}.$$

Par conséquent, le spectre de $\mathcal{N}_\hbar$ est discret et donné par

$$\{H_0 + \hbar H_1 + \hbar \sum_{j=1}^{d} \nu_j(2n_j+1) + f^\star((2n+1)\hbar, \hbar); \quad n \in \mathbf{N}^d\}.$$

Si $\lambda_\hbar$ est une valeur propre de $\mathcal{N}_\hbar$, notons $n^\hbar \in \mathbf{N}^d$ le multi-entier associé. Si $\lambda_\hbar \leq H_0 + C_0\hbar^\eta$ alors

$$\hbar H_1 + \hbar \sum_{j=1}^{d} \nu_j(2n_j^\hbar+1) + f^\star((2n^\hbar+1)\hbar, \hbar) \leq C_0\hbar^\eta. \tag{4.3.4}$$

Or la fonction $f^\star$ vérifie $f^\star(I,\hbar) \geq -\rho(I)(|I|+\hbar)^2$ pour une certaine fonction plateau ρ. On en déduit l'existence de $c>0$ tel que $f^\star((2n^\hbar+1)\hbar,\hbar) \geq -c|n^\hbar|\hbar$. De plus, quitte à réduire le support de $f^\star$, on peut réduire le support de ρ, et la constante c peut être aussi petite que l'on veut. D'après (4.3.4) on a donc

$$\hbar H_1 + C\hbar|n^\hbar| - c\hbar|n^\hbar| \leq C_0\hbar^\eta,$$

où $C = 2\min_j \nu_j > 0$. Pour c assez petit on en déduit que

$$\lambda_\hbar \leq C_0\hbar^\eta \quad \Rightarrow \quad \hbar|n^\hbar| \leq \tilde{C}\hbar^\eta.$$

Par conséquent, si $\psi_\hbar$ est une fonction propre de $\mathcal{N}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq C_0\hbar^\eta$, on a

$$\chi_0(\hbar^{-\eta}\mathcal{I}_\hbar^{(1)}) \cdots \chi_0(\hbar^{-\eta}\mathcal{I}_\hbar^{(d)})\psi_\hbar = \psi_\hbar$$

pour une fonction plateau χ_0 qui vaut 1 sur un voisinage de 0.
(En effet, $\chi_0(\hbar^{-\eta}(2n_j+1)\hbar) = 1$ pour $\hbar n_j \leq K\hbar^\eta$). Pour finir la démonstration, il suffit donc de montrer que

$$\mathsf{Op}_\hbar^w(1-\chi(\hbar^{-\eta}(x,\xi)))\chi_0(\hbar^{-\eta}\mathcal{I}_\hbar^{(1)}) \cdots \chi_0(\hbar^{-\eta}\mathcal{I}_\hbar^{(d)}) = \mathcal{O}(\hbar^\infty),$$

ce qui s'obtient par la même méthode que pour le Théorème 4.7. □

4.3.2 – Preuve du Théorème 4.1

Pour finir la démonstration du Théorème 4.1, il reste à montrer que

$$\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) = \lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{\eta \mathbf{r}_0/2}),$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$, où

$$N_\hbar^{\mathsf{max}} = \max\{n \geq 0; \quad \lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) \leq H_0 + \hbar^\eta\}.$$

Nous allons montrer les deux inégalités successivement, avec les deux Lemmes suivants.

Lemme 4.9. *On a*

$$\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) \leq \lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{\eta \mathbf{r}_0/2}),$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$.

Démonstration. Pour $n \in [1, N_\hbar^{\max}]$, notons $\psi_n^\hbar$ la fonction propre normalisée de $\mathcal{N}_\hbar$ associée à $\lambda_n(\mathcal{N}_\hbar)$, et

$$\varphi_n^\hbar = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\psi_n^\hbar. \tag{4.3.5}$$

Nous allons utiliser $\varphi_n^\hbar$ comme quasimode pour $\mathcal{H}_\hbar$. Soit $N \in [1, N_\hbar^{\max}]$, et

$$V_N^\hbar = \mathsf{Vect}\{\varphi_n^\hbar; 1 \leq n \leq N\}.$$

Pour $\varphi \in V_N^\hbar$ on utilisera la notation $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\varphi$. D'après le Théorème 4.5, on a

$$\langle \mathcal{H}_\hbar\varphi, \varphi\rangle = \langle \mathcal{N}_\hbar\psi, \psi\rangle + \langle \mathcal{R}_\hbar\psi, \psi\rangle \leq \lambda_N(\mathcal{N}_\hbar)\|\psi\|^2 + \langle \mathcal{R}_\hbar\psi, \psi\rangle. \tag{4.3.6}$$

D'après le Théorème 4.8, ψ est microlocalisée là où $|(x,\xi)| \leq C\hbar^{\eta/2}$, et le symbole de $\mathcal{R}_\hbar$ vérifie $R_\hbar = \mathcal{O}((x,\xi,\hbar^{1/2})^{\mathbf{r}_0})$ donc :

$$\langle \mathcal{R}_\hbar\psi, \psi\rangle = \mathcal{O}(\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2})\|\psi\|^2. \tag{4.3.7}$$

D'après (4.3.6), (4.3.7), et sachant que $\|\psi\| = \|\varphi\|$ on a

$$\langle \mathcal{H}_\hbar\varphi, \varphi\rangle \leq (\lambda_N(\mathcal{N}_\hbar) + C\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2})\|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in V_N^\hbar.$$

Comme $V_N^\hbar$ est de dimension N, le principe du min-max A.1 permet de conclure que

$$\lambda_N(\mathcal{H}_\hbar) \leq \lambda_N(\mathcal{N}_\hbar) + C\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2}.$$

□

Lemme 4.10. *On a*

$$\lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) \leq \lambda_n(\mathcal{H}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2}),$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\max}]$.

Démonstration. Pour $n \in [1, N_\hbar^{\max}]$ notons $\psi_n^\hbar$ la fonction propre normalisée de $\mathcal{H}_\hbar$ associée à $\lambda_n(\mathcal{H}_\hbar)$, et

$$\varphi_n^\hbar = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\psi_n^\hbar.$$

Nous allons utiliser $\varphi_n^\hbar$ comme quasimode pour $\mathcal{N}_\hbar$. Soit $N \in [1, N_\hbar^{\max}]$ et

$$V_N^\hbar = \mathsf{Vect}\{\varphi_n^\hbar; 1 \leq n \leq N\}.$$

Pour $\varphi \in V_N^\hbar$ on utilisera la notation $\psi = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\varphi$. D'après le Théorème 4.5 on a

$$\langle \mathcal{N}_\hbar\varphi, \varphi\rangle = \langle \mathcal{H}_\hbar\psi, \psi\rangle + \langle \mathcal{R}_\hbar\varphi, \varphi\rangle \leq \lambda_N(\mathcal{H}_\hbar)\|\varphi\|^2 + \langle \mathcal{R}_\hbar\varphi, \varphi\rangle. \tag{4.3.8}$$

D'après le Théorème 4.7, ψ est microlocalisée là où $|(x,\xi)| \leq C\hbar^{\eta/2}$. Donc d'après le théorème d'Egorov, $\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}\psi$ est microlocalisée là où $|\phi_Q(x,\xi)| \leq C\hbar^{\eta/2}$, où ϕ_Q est le flot au temps $t = 1$ associé au symbole principal Q de $\mathcal{Q}_\hbar$. Or $Q(x,\xi) = \mathcal{O}((x,\xi)^3)$ donc $\phi_Q(x,\xi) = (x,\xi) + \mathcal{O}((x,\xi)^2)$. Ainsi, φ est microlocalisée là où $|(x,\xi)| \leq C\hbar^{\eta/2}$, et le symbole de $\mathcal{R}_\hbar$ vérifie $R_\hbar = \mathcal{O}((x,\xi,\hbar^{1/2})^{\mathbf{r}_0})$ donc

$$\langle \mathcal{R}_\hbar\varphi, \varphi\rangle = \mathcal{O}(\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2}). \tag{4.3.9}$$

D'après (4.3.8) et (4.3.9) on a donc

$$\langle \mathcal{N}_\hbar\varphi, \varphi\rangle \leq (\lambda_N(\mathcal{H}_\hbar) + C\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2})\|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in V_N^\hbar. \tag{4.3.10}$$

Comme $V_N^\hbar$ est de dimension N, le principe du min-max A.1 permet de conclure que

$$\lambda_N(\mathcal{N}_\hbar) \leq \lambda_N(\mathcal{H}_\hbar) + C\hbar^{\eta\mathbf{r}_0/2}.$$

□

4.4 – Effet de résonances sur la forme normale

Dans cette section nous présentons des résultats de Charles et Vũ Ngọc. Dans [CVuN08] ils expliquent comment construire une forme normale en présence de résonances, c'est-à-dire quand la partie principale

$$H_2 = \sum_{j=1}^{d} \nu_j(\xi_j^2 + x_j^2)$$

vérifie une relation du type

$$\exists \alpha \in \mathbf{Z}^d, |\alpha| \neq 0, \quad \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \nu_j,$$

même si l'ordre de résonance est petit ($|\alpha| = 2, 3...$ par exemple). Supposons pour l'instant que les (ν_j) sont complètement résonants.

Définition 4.11. *Les coefficients $\nu_j > 0$ $(1 \leq j \leq d)$ sont dit complètement résonants s'il existe $\nu_c > 0$ et des entiers premiers entre eux $p_1, \cdots, p_d$ tels que $\nu_j = \nu_c p_j$.*

Si les (ν_j) sont complètement résonants alors le spectre de l'oscillateur

$$\mathsf{Op}_\hbar^w H_2 = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathcal{I}_\hbar^{(j)}$$

est constitué de la suite de valeurs propres

$$E_N = \hbar\nu_c(|\nu| + 2N), \quad N \in \mathbf{N},$$

et elles ne sont pas toutes simples. Il est démontré dans [CVuN08] que le spectre de $\mathcal{H}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(H_\hbar)$ avec

$$H_\hbar = H_2(x, \xi) + \mathcal{O}(\hbar^2 + \hbar(x, \xi) + (x, \xi)^3) \tag{4.4.1}$$

se sépare en paquets autour des E_N.

Théorème 4.12 (Charles-Vũ Ngọc [CVuN08]). *On suppose les $(\nu_j)_{1\leq j\leq d}$ complètement résonants, et que $H_\hbar$ vérifie (4.4.1). Alors :*

1. *Il existe $\hbar_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0]$*

$$\mathsf{sp}(\mathcal{H}_\hbar) \cap (-\infty, C\hbar^{2/3}] \subset \bigcup_{N\in\mathbf{N}} \left[E_N - \frac{2\nu_c\hbar}{3}, E_N + \frac{2\nu_c\hbar}{3}\right].$$

2. *Si $E_N \leq C\hbar^{2/3}$, on note $m(E_N, \hbar) = \#\mathsf{sp}\,(\mathcal{H}_\hbar) \cap \left[E_N - \frac{2\nu_c\hbar}{3}, E_N + \frac{2\nu_c\hbar}{3}\right]$. Alors $m(E_N, \hbar)$ est égal la dimension de $\mathsf{Ker}(\mathsf{Op}_\hbar^w H_2 - E_N)$.*

En fait, leurs résultats sont plus précis : ils obtiennent une description de la répartition des valeurs propres dans chaque paquet. Enfin, ils retrouvent un développement asymptotique complet des premières valeurs propres (déjà obtenu par Helffer-Sjöstrand [HS84]). Dans le Théorème suivant, il n'y a aucune hypothèse de résonance sur les coefficients (ν_j).

Théorème 4.13 ([HS84] Thm 3.6 ; [CVuN08] Thm 4.7). *Soit*

$$H_\hbar = H_0 + \hbar H_1 + H_2 + \mathcal{O}(\hbar^2 + \hbar(x,\xi) + \hbar^2).$$

Alors pour tout $j \in \mathbf{N}$ et $\hbar$ suffisamment petit, $\lambda_j(\mathcal{H}_\hbar)$ admet un développement asymptotique de la forme

$$\lambda_j(\mathcal{H}_\hbar) = H_0 + \hbar(H_1 + \mu_0) + \hbar^{3/2} \sum_{m=0}^{\infty} \hbar^{m/2} \mu_m,$$

où $\hbar\mu_0$ est une valeur propre de $\mathsf{Op}_\hbar^w H_2$. De plus, le nombre de valeurs propres avec un μ_0 fixé est égal à la multiplicité de $\hbar\mu_0$ comme valeur propre de $\mathsf{Op}_\hbar^w H_2$.

Remarque. Grâce à la forme normale de Birkhoff on voit que les puissances impaires de $\hbar^{1/2}$ proviennent uniquement de résonances entre les coefficients ν_j. Par exemple, si l'ordre de résonance $\mathbf{r}_0$ est égal à 3, alors le coefficient d'ordre $\hbar^{3/2}$ est explicite : il s'agit de la moyenne le long du flot de H_2 du terme d'ordre 3 dans la série de Taylor du symbole (voir [CVuN08], section 5.3).

4.5 – Annexe : Réduction d'une forme quadratique en coordonnées symplectiques

En suivant la méthode de réduction des endomorphismes normaux en base orthonormée, on démontre le résultat suivant. C'est une réduction de formes quadratiques en base symplectique. Ici on note

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & \\ & \ddots & \\ & & J_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.14. *Soit G une matrice symétrique définie positive sur $\mathbf{R}^{2d}$. Notons $\Omega = -JG$. Il existe $P \in \mathsf{GL}_{2d}(\mathbf{R})$ telle que :*

$$^T PGP = D, \qquad ^T PJP = J,$$

avec $D = \mathsf{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_d, \lambda_d)$, et les λ_j sont les modules des valeurs propres de Ω.

Remarque. En appliquant ce résultat à la forme quadratique $G = H_2$, le changement de variables linéaire $(x,\xi) \mapsto P(x,\xi)$ est symplectique, et met H_2 sous la forme

$$H_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \nu_j(\xi_j^2 + x_j^2)$$

où les ν_j sont les modules des valeurs propres de $-JH_2$.

Démonstration. $\Omega = -JG$ défini un endomorphisme de $\mathbf{R}^{2d}$ tel que,

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{2d}, \quad \langle Gu, v\rangle = \langle J\Omega u, v\rangle.$$

Ce n'est autre que la forme quadratique G vue à travers J. Remarquons que la symétrie de G implique :

$$\langle J\Omega u, v\rangle = \langle J\Omega v, u\rangle = -\langle Ju, \Omega v\rangle.$$

On pourrait dire que Ω est "J-antisymétrique" bien que J ne soit pas une forme quadratique. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de Ω et $z \in \mathbf{C}^{2d}$ un vecteur propre associé. Alors $\overline{z}$ est vecteur propre de Ω associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$. On peut choisir $\mathsf{Im}(\lambda) > 0$ quitte à inverser z et $\overline{z}$.

1) $\lambda \neq \overline{\lambda}$, car si λ était réel, on aurait un vecteur propre réel $u = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ ou $v = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, et

$$\langle Gu, u\rangle = \lambda\langle Ju, u\rangle = 0$$

ce qui impliquerait $u = 0$ (car G est symétrique définie positive et u réel).

2) Le sous-espace $F = \mathsf{Vect}_{\mathbf{R}}(u, v)$ est donc de dimension 2. Notons l'orthogonal symplectique :

$$F^{\perp} = \{X \in \mathbf{R}^{2d}, \quad \forall Y \in F, \quad \langle JX, Y\rangle = 0\}.$$

Montrons que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Il suffit de montrer $\langle Ju, v\rangle \neq 0$, et ceci découle de :

$$\langle Gu, u\rangle = \frac{1}{4}\langle J\Omega(z+\overline{z}), z+\overline{z}\rangle = \frac{1}{4}(\lambda\langle Jz, \overline{z}\rangle + \overline{\lambda}\langle J\overline{z}, z\rangle) = \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{4}\langle Jz, \overline{z}\rangle = \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i}\langle Ju, v\rangle.$$

3) On a aussi $\mathsf{dim}(F^{\perp}) + \mathsf{dim}(F) = 2d$ et donc $\mathbf{R}^{2d} = F \oplus F^{\perp}$. Notons $\tilde{\Omega}$ la restriction de Ω à $F^{\perp}$. Alors $\tilde{\Omega}$ est un endomorphisme de $F^{\perp}$, puisque tout $X \in F^{\perp}$ vérifie :

$$0 = \langle Jz, X\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle J\Omega z, X\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle Jz, \Omega X\rangle,$$

et de même $\langle J\overline{z}, \Omega X\rangle = 0$, ce qui donne $\Omega X \in F^{\perp}$.

4) Regardons comment Ω s'écrit dans la base (u, v) de F. Notons $\lambda = \nu e^{i\theta}$ avec $\nu = |\lambda|$. Alors

$$\begin{cases} \Omega u = \frac{1}{2}(\lambda z + \overline{\lambda}\overline{z}) = \nu\mathsf{Re}(e^{i\theta}z) = \nu(\cos\theta u - \sin\theta v), \\ \Omega v = \frac{1}{2i}(\lambda z - \overline{\lambda}\overline{z}) = \nu\mathsf{Im}(e^{i\theta}z) = \nu(\sin\theta u + \cos\theta v). \end{cases}$$

Donc, dans la base (u, v) de F, Ω est la matrice $\nu\mathsf{R}_{\theta} = \nu\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

5) En appliquant le même résultat à $\tilde{\Omega}$ (par récurrence sur la dimension), on en déduit une base $(u_1, v_1, \cdots, u_d, v_d)$ de $\mathbf{R}^{2d}$ telle que :

$$P^{-1}\Omega P = \begin{pmatrix} \nu_1\mathsf{R}_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_d\mathbf{R}^{\theta_d} \end{pmatrix},$$

où P est la matrice de changement de base, de la base canonique à la nouvelle base. Par construction, cette base est J-orthogonale par blocs. J devient donc de la forme :

$$ {}^TPJP = \begin{pmatrix} \alpha_1 J_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_d J_0, \end{pmatrix} $$

avec $\alpha_j = \langle Ju_j, v_j \rangle = \frac{\langle Gu_j, u_j \rangle}{\mathsf{Im}(\lambda)}$. Quitte à diviser u_j et v_j par $\sqrt{\alpha_j}$, on peut se ramener à $\alpha_j = 1$.

6) Pour finir, on a

$$ {}^TPGP = {}^TPJPP^{-1}\Omega P = \begin{pmatrix} \nu_1 J_0 \mathsf{R}_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_d J_0 \mathsf{R}_{\theta_d} \end{pmatrix}, $$

avec $J_0\mathsf{R}_{\theta_d} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$. Comme G est symétrique, on a nécessairement $\theta_j = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ et $J_0\mathsf{R}_{\theta_j} = I$, ce qui permet de conclure.

□

Chapitre 5

Forme normale de Birkhoff pour le Laplacien magnétique

Dans ce chapitre, nous construisons une forme normale de Birkhoff pour le Laplacien magnétique sur $\mathbf{R}^d$ ou sur une variété Riemannienne compacte. L'analogie avec l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2\Delta + V$ est intéressante. En effet, celui-ci a pour symbole $|\xi|^2 + V(x)$, et ses fonctions propres sont microlocalisées dans l'espace des phases en $\xi = 0$ et en x_0 tel que $V(x_0) = \min V$. Dans le cas d'un puit électrique simple, elles sont donc microlocalisées en un point $(x_0, 0)$ de l'espace des phases. La forme normale construite au Chapitre 4 transforme l'opérateur en un oscillateur harmonique, qui oscille autour de $(x_0, 0)$.

La situation est un peu différente pour le Laplacien magnétique. En effet, son symbole est $H(x, \xi) = |\xi - \mathbf{A}(x)|^2$ et ses fonctions propres sont microlocalisées sur la surface caractéristique $\Sigma = \{(x, \xi); \quad \xi = \mathbf{A}(x)\}$, qui est de dimension d. Il s'agira donc de construire un opérateur effectif sur Σ, et de ramener l'opérateur $\mathcal{L}_\hbar$ à une oscillation harmonique autour de Σ.

Cette différence principale mise à part, le démarche générale restera la même que dans le Chapitre 4. Les résultats de ce Chapitre sont issus des articles [Mor19, Mor20a]. En dimension 2, une forme normale de Birkhoff avait déjà été construite dans [RVuN15], puis en dimension 3 dans [HKRVuN16]. Il y a des différences fondamentales entre ces deux cas, dues à la présence d'un noyau de dimension 1 pour le champ magnétique B en dimension 3. Nous verrons dans ce chapitre l'impact d'un noyau de dimension $k \geq 0$ sur la forme normale. Dans le cas où $k = 0$, nous en déduirons directement des estimations spectrales. Si $k > 0$ un travail supplémentaire sera nécessaire pour obtenir ses estimations, et l'asymptotique du spectre sera différente.

5.1 – Principaux résultats

5.1.1 – Hypothèses

Dans tout ce chapitre, nous considérons le Laplacien magnétique

$$\mathcal{L}_\hbar = (i\hbar \mathrm{d} + A)^*(i\hbar \mathrm{d} + A)$$

sur une variété Riemannienne (M, g), qui est soit compacte, soit $\mathbf{R}^d$ Euclidien. Nous utiliserons les notations du chapitre 2 : $B = \mathrm{d}A$ est le champ magnétique, et l'opérateur antisymétrique $\mathbf{B}(q)$ associé est défini par :

$$B_q(X, Y) = g_q(X, \mathbf{B}(q)Y), \quad \forall X, Y \in T_qM, \quad \forall q \in M. \tag{5.1.1}$$

Ses valeurs propres non nulles sont $(\pm i\beta_1(q), \cdots, \pm i\beta_s(q))$, et l'intensité magnétique est par définition :

$$b(q) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j(q). \tag{5.1.2}$$

Hypothèse Principale (H1). Le rang de $\mathbf{B}(q)$ ne dépend pas de q, et vaut $2s > 0$.

Nous noterons k la dimension du noyau de $\mathbf{B}(q)$, de sorte que $d = 2s + k$. On rappelle que la fonction b est continue, mais pas régulière en général. Dans le cas $M = \mathbf{R}^d$, nous supposerons également que $\mathbf{A}$ est dans une classe de symboles, de telle sorte que la Proposition 3.20 s'applique : $\mathcal{L}_\hbar$ est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel, et son symbole est

$$H_\hbar(q, p) = |p - A_q|^2_{g_q^*} + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \forall (q, p) \in T^*M.$$

Toujours pour $M = \mathbf{R}^d$, nous supposerons de plus qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall q \in \mathbf{R}^d, |\nabla \mathbf{B}(q)| \leq C(1 + |\mathbf{B}(q)|),$$

ce qui permet d'avoir la minoration de la forme quadratique associée à $\mathcal{L}_\hbar$ par $\hbar b$ (Théorème 2.2) et donc les estimations d'Agmon (Théorème 2.6). Ces estimations permettent d'utiliser b pour localiser les fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$.

Avec la notation $b_0 = \min_{q \in M} b(q)$, nous ferons l'hypothèse de localisation suivante.

Hypothèse (H2) Il existe une constante $\tilde{b}_1 > b_0$ et un ouvert borné $\Omega \subset M$ tels que $K_{\tilde{b}_1} := \{b(q) \leq \tilde{b}_1\} \subset \Omega$.

L'hypothèse (H2) assure que les fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$ d'énergie $\lambda_\hbar < \tilde{b}_1\hbar$ sont localisées dans l'ouvert Ω. Ceci découle en effet des estimations d'Agmon. Nous ferons également l'hypothèse de non-résonance suivante.

Hypothèse (H3). Il existe un entier $r_{\mathbf{1}} \geq 3$ tel que :

$$\forall q \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^s, \quad 0 < |\alpha| < r_{\mathbf{1}}, \quad \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \beta_j(q) \neq 0.$$

Il est à noter que, si jamais cette hypothèse de non-résonance a lieu en un point $q_0 \in \Omega$, alors il existe un voisinage Ω de ce point sur lequel l'hypothèse a encore lieu. Plus généralement, si $r_{\mathbf{1}}$ est grand, cette hypothèse limite la taille de l'ouvert Ω sur lequel on peut se placer. Dans nos applications, on pourra prendre un ouvert arbitrairement petit (mais cela limitera la portion de spectre décrite par la forme normale). Cette hypothèse contient aussi la condition $r_{\mathbf{1}} \geq 3$: ceci signifie que les $(\beta_j(q))$ sont deux à deux distincts. Il serait intéressant de chercher à construire une forme normale sans l'hypothèse (H3), pour supprimer la limitation de taille sur Ω, mais aussi pour étudier le cas où deux des β_j peuvent coïncider. Une réduction via une méthode de Grushin semble être une bonne piste dans cette direction.

Sous l'hypothèse (H3), les valeurs propres $(\pm i\beta_j(q))$ de $\mathbf{B}(q)$ sont simples sur Ω. Par conséquent, elles sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R}_+)$. En particulier, $b \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R}_+)$. Tout notre travail sera réduit à l'ouvert Ω, et nous sommes donc assurés que les fonctions considérées sont lisses, ce qui permet d'utiliser les techniques d'analyse microlocale.

5.1.2 – Théorème principal

L'idée à la base de ce travail est de faire une réduction dans l'espace des phases de l'opérateur $\mathcal{L}_\hbar$, à l'aide des outils d'analyse microlocale semi-classique. Expliquons la démarche générale : L'opérateur $\mathcal{L}_\hbar$ a pour symbole

$$H_\hbar(q,p) = |p - A_q|^2 + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{5.1.3}$$

Les premières fonctions propres seront donc microlocalisées sur la surface caractéristique Σ, où le symbole principal $H(q,p) = |p - A_q|^2$ est minimal :

$$\Sigma = H^{-1}(0) = \{(q,p) \in T^*\Omega, p = A_q\}. \tag{5.1.4}$$

Nous avons également restreint à $q \in \Omega$, puisque les fonctions propres y sont également localisées d'après les estimations d'Agmon. Nous allons construire des coordonnées $(x, \xi, y, \eta, t, \tau) \in \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2k}$ au voisinage de Σ dans l'espace des phases telles que (y, η, t) décrive la surface Σ et (x, ξ, τ) décrive l'éloignement à Σ. Ensuite, nous feront un développement limité de H selon les variables (x, ξ, τ) (c'est à dire, au voisinage de Σ) :

$$H = H_2 + \mathcal{O}((x, \xi, \tau)^3).$$

Le terme principal H_2 sera un oscillateur harmonique en (x, ξ) paramétré par (y, η, t, τ). Une fois quantifié, il jouera le rôle d'opérateur effectif pour décrire le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$.

Expliquons brièvement d'où viennent les variables $(x, \xi, y, \eta, t, \tau)$. Pour pouvoir être quantifié (via le théorème d'Egorov), notre changement de variable doit préserver la structure symplectique de l'espace des phases. Il se trouve que Σ est naturellement muni de la 2-forme B qui est de rang constant égal à $2s$. Ceci permet de munir

Σ de coordonnées $(y, \eta, t) \in \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^k$, telles que t décrive le noyau de B, et (y, η) une partie non-dégénérée de Σ. On peut compléter ce jeu de coordonnées à l'aide de coordonnées (x, ξ, τ) dans une direction supplémentaire, de manière à ce que la forme symplectique sur T^*M s'écrive comme la forme canonique de $\mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2k}$:

$$\omega_0 = \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t.$$

Cette démarche, suivie d'une forme normale de Birkhoff selon les variables (x, ξ), nous permettra de démontrer le théorème principal de ce chapitre, que nous explicitons maintenant. Nous considérerons des variables canoniques notées :

$$z = (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2s}, \quad w = (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2s}, \quad (t, \tau) \in \mathbf{R}^{2k}. \tag{5.1.5}$$

Pour clarifier certains énoncés, nous indiquerons parfois en indices à quelles variables nous faisons référence (comme $\mathbf{R}^{2s}_z$). Enfin, nous utiliserons la notation $z_j = (x_j, \xi_j) \in \mathbf{R}^2$ pour $1 \leq j \leq s$ et des notations analogues pour les autres variables.

Nous supposerons donné un difféomorphisme

$$\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^{2s+k}_{y,\eta,t}$$

tel que $\varphi^*(\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y) = B$, et nous noterons

$$\widehat{\beta}_j(y, \eta, t) := \beta_j \circ \varphi^{-1}(y, \eta, t).$$

Théorème 5.1. *Soit $b_1 \in (b_0, \tilde{b}_1)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N_{max}, une fonction $f^\star_{\mathbf{1}}(y, \eta, t, \tau, I_1, \cdots, I_s, \hbar)$ à support compact telle que*

$$|f^\star_{\mathbf{1}}(y, \eta, t, \tau, I, \hbar)| \leq C\left((|I| + \hbar)^2 + |\tau|(|I| + \hbar) + |\tau|^3\right),$$

et une matrice symétrique définie positive $M(y, \eta, t) \in \mathbf{R}^{k \times k}$ dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de (y, η, t) vérifiant la propriété suivante. Pour $n \in \mathbf{N}^s$, notons $\mathcal{N}^{[n]}_\hbar$ l'opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel en (y, t) de symbole

$$N^{[n]}_\hbar = \langle M(y, \eta, t)\tau, \tau\rangle + \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(y, \eta, t)(2n_j + 1)\hbar + f^\star_{\mathbf{1}}(y, \eta, t, \tau, (2n + 1)\hbar, \hbar).$$

Pour $\hbar << 1$, il existe une bijection

$$\Lambda_\hbar : \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar) \cap (-\infty, b_1\hbar) \to \bigcup_{|n| \leq N_{max}} \mathsf{sp}\left(\mathcal{N}^{[n]}_\hbar\right) \cap (-\infty, b_1\hbar)$$

telle que $\Lambda_\hbar(\lambda) = \lambda + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_{\mathbf{1}}}{2} - \varepsilon})$ uniformément par rapport à λ. De plus, cette bijection préserve les multiplicités.

Remarque 1. Ici nous avons fait un léger abus de notations. Par $\mathsf{sp}(\mathcal{A})$ nous désignons en fait le spectre de $\mathcal{A}$ *répété avec multiplicités*. Autrement dit, si λ est valeur propre de $\mathcal{A}$ avec multiplicité m, alors $\mathsf{sp}(\mathcal{A})$ contient m fois le réel λ.

Remarque 2. Dans la section qui suit, nous déduirons de ce résultat des asymptotiques de valeurs propres dans le cas où $k = 0$. Le cas où $k > 0$ nécessitera plus de travail pour être utilisable : nous verrons cela dans la section 5.1.4.

5.1.3 – Applications dans le cas k=0

Quand la matrice $\mathbf{B}(q)$ n'a pas de noyau ($k = 0$ et $d = 2s$), la forme normale $\mathcal{N}_\hbar^{[n]} = \mathsf{Op}_\hbar^w(N_\hbar^{[n]})$ a une forme plus simple et directement utilisable. En effet, il n'y a plus de variables (t, τ), et il reste donc :

$$N_\hbar^{[n]}(y,\eta) = \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(y,\eta)(2n_j+1)\hbar + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

La spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est donc ramené à l'union de spectres d'opérateurs dont le symbole principal est d'ordre $\hbar$ et donné par

$$\widehat{b}^{[n]}(y,\eta) = \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(y,\eta)(2n_j+1). \tag{5.1.6}$$

Pour $n = 0$, on retombe sur l'intensité magnétique $\widehat{b}^{[0]}(y,\eta) = \widehat{b}(y,\eta) = b \circ \varphi^{-1}(y,\eta)$, et on peut montrer que si λ est une valeur propre suffisamment petite de $\mathcal{L}_\hbar$, elle proche d'une valeur propre de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]} = \mathsf{Op}_\hbar^w(\widehat{b})$.

Corollaire 5.2. *En plus des hypothèses précédentes, on suppose que $k = 0$. Alors il existe $\eta > 0$ et pour $\hbar << 1$ une bijection*

$$\Lambda_\hbar : \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar) \cap (-\infty, (b_0+\eta)\hbar) \to \mathsf{sp}(\mathcal{N}_\hbar^{[0]}) \cap (-\infty, (b_0+\eta)\hbar)$$

telle que $\Lambda_\hbar(\lambda) = \lambda + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon})$ uniformément par rapport à λ.

Démonstration. D'après le théorème 5.1, on sait que le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est donné par l'union des spectres des $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$. Il suffit donc de montrer que pour $n \neq 0$,

$$\mathsf{sp}(\mathcal{N}_\hbar^{[n]}) \cap (-\infty, (b_0+\eta)\hbar) = \emptyset.$$

Soit $n \neq 0$, et j tel que $n_j \neq 0$. Le symbole de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ vérifie

$$N_\hbar^{[n]}(y,\eta) \geq \hbar\widehat{b}(y,\eta) + 2\hbar n_j \widehat{\beta}_j(y,\eta) - C\hbar^2 \geq \hbar(b_0 + 2\min\beta_j - C\hbar).$$

D'après l'inégalité de Garding, on a donc

$$\langle \mathcal{N}_\hbar^{[n]}\psi, \psi\rangle \geq \hbar(b_0 + 2\min\beta_j - \tilde{C}\hbar)\|\psi\|^2, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^s).$$

Par conséquent, le spectre de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ est contenu dans $[\hbar(b_0+\eta), +\infty)$ avec $\eta = 2\min_j \min_q \beta_j(q) - \tilde{C}\hbar_0 > 0$, pour $\hbar < \hbar_0$ assez petit. □

Il faut remarquer que ce résultat décrit déjà un nombre arbitrairement grand de valeurs propres, quand $\hbar$ tend vers 0. Par exemple, dans le cas d'un puit magnétique non dégénéré, on en déduit directement l'asymptotique suivante.

Corollaire 5.3. *Supposons que $k = 0$, que b admet un unique minimum global en q_0, et que ce minimum est non-dégénéré. On suppose que (H3) est vérifié sur un petit voisinage Ω de q_0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $j \geq 1$,*

$$\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar) = \hbar \sum_{\ell=0}^{r_{\mathbf{1}}-3} \alpha_{j\ell} \hbar^{\ell/2} + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_{\mathbf{1}}}{2}-\varepsilon}),$$

avec des coefficients $\alpha_{j\ell} \in \mathbf{R}$ qui vérifient :

$$\alpha_{j,0} = b_0, \quad \alpha_{j,1} = 0, \quad \alpha_{j,2} = E_j + c,$$

où E_j est la j-ème valeur propre d'un oscillateur harmonique s-dimensionnel. En particulier si $r_{\mathbf{1}} \geq 5$ on a un équivalent du trou spectral quand E_j est simple :

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j \sim (E_{j+1} - E_j)\hbar^2.$$

Remarque 1. En dimension d paire, l'hypothèse $k = 0$ est générique. De plus, dans le cas d'un puit magnétique simple (c'est à dire quand b admet un unique minimum, en q_0), on a génériquement que ce minimum est non-dégénéré. Quelque soit $r_{\mathbf{1}} > 0$, on a génériquement que

$$\forall \alpha \in \mathbf{Z}^s, \quad 0 < |n| < r_{\mathbf{1}}, \quad \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \beta_j(q_0) \neq 0.$$

Enfin, $r_{\mathbf{1}}$ étant fixé, on peut étendre cette condition à un petit voisinage Ω de q_0. Le corollaire précédent donne donc un équivalent générique du trou spectral dans le cas des puits magnétiques simples.

Remarque 2. L'asymptotique de $\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar)$ obtenue n'est autre que celle de la j-ième valeur propre d'un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal $\hbar\widehat{b}$. En particulier, pour un puit magnétique simple, on sait donner des conditions génériques pour que $\alpha_{j,(2\ell+1)} = 0$ pour tout ℓ (Voir le Chapitre 4). Dans ce cas on obtient un développement en puissances entières de $\hbar$. C'est en particulier le cas en dimension $d = 2$.

Remarque 3. La remarque précédente permet aussi d'affirmer que dans certains cas, les coefficients des puissances impaires de $\hbar^{1/2}$ sont non nuls (grâce au Théorème 4.13).

Remarque 4. Il serait intéressant d'étudier l'influence des résonances. Par exemple, en dimension $d = 4$, si $\beta_1(q_0) = 2\beta_2(q_0)$, on ne peut pas prendre mieux que $r_{\mathbf{1}} = 3$: Quel est l'équivalent du trou spectral dans ce cas ? Et quand $\beta_1(q_0) = \beta_2(q_0)$? Comment ces résonances influent sur les puissances impaires de $\hbar^{1/2}$?

Démonstration. On choisit pour Ω un voisinage suffisamment petit de q_0. Alors, si $\eta > 0$ est assez petit, $\{b(q) \leq \tilde{b}_0 + 2\eta\}$ est contenu dans Ω, car q_0 est l'unique point où b admet son minimum. Ainsi l'hypothèse (H2) est vérifiée. Les autres hypothèses

sont vérifiées pour Ω assez petit, et l'on peut donc utiliser le théorème principal 5.1, ainsi que son corollaire 5.2 car $k = 0$.

Quitte à réduire η, le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ dans $(-\infty, (b_0 + \eta)\hbar)$ est donné par celui de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$. Or $\hbar^{-1}\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ est un opérateur pseudodifférentiel en dimension s, dont le symbole principal est $\widehat{b}$. Comme $\widehat{b}$ admet un unique minimum, qui est non-dégénéré, on peut donc appliquer le théorème 4.13. On obtient que la j-ième valeur propre de cet opérateur admet une asymptotique de la forme

$$\mu_j(\hbar) \sim \sum_{\ell \geq 0} \alpha_{j\ell} \hbar^{\ell/2},$$

avec $\alpha_{j,0} = b_0, \quad \alpha_{j,1} = 0, \quad \alpha_{j,2} = E_j$, où E_j est la j-ième valeur propre de l'oscillateur harmonique associé à $\mathsf{Hess}_0 \widehat{b}$. Enfin $\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar)$ est donné par $\hbar\mu_j(\hbar)$ modulo $\mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon})$. □

Pour terminer cette section, remarquons que l'on pourrait décrire une plus large portion du spectre en considérant les contributions des opérateurs $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ avec $n \neq 0$. En particulier, on peut obtenir une loi de Weyl. Cette loi peut-être obtenue par une méthode plus classique consistant à approcher localement le champ magnétique et la métrique par des constantes (Voir [Dem85]). Il est remarquable que les lois de Weyl magnétiques sont très différentes de celles de l'opérateur de Schrödinger.

Corollaire 5.4. *Sous les hypothèses de la section 5.1.1, si $k = 0$ et $d = 2s$, pour tout $b_1 \in (b_0, \tilde{b}_1)$ on a*

$$N(\mathcal{L}_\hbar, b_1\hbar) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s} \sum_{|n| \leq N_{max}} \int_{b^{[n]}(q) \leq b_1} \frac{B^s}{s!},$$

quand $\hbar \to 0$, avec la notation

$$b^{[n]}(q) = \sum_{j=1}^{s} (2n_j + 1)\beta_j(q).$$

En notant $\mathrm{d}V$ *la forme volume sur M, cette formule peut se réécrire :*

$$N(\mathcal{L}_\hbar, b_1\hbar) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s} \sum_{|n| \leq N_{max}} \int_{b^{[n]}(q) \leq b_1} \beta_1(q) \cdots \beta_s(q) \mathrm{d}V.$$

Remarque 1. La borne $N_{\max}$ a peu d'importance : si $|n| > N_{\max}$ alors l'ensemble $\{b^{[n]}(q) \leq b_1\}$ est vide.

Remarque 2. Dans la première formule on utilise la notation symplectique, dans la seconde la notation riemannienne. La quantité $\beta_1(q) \cdots \beta_s(q)$ s'appelle *Pfaffien* de B : c'est elle qui relie le volume symplectique au volume riemannien.

Démonstration. $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ est un opérateur elliptique en dimension s de symbole $\hbar\widehat{b}^{[n]}$. On a donc la loi de Weyl

$$N(\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, \hbar b_1) = N(\hbar^{-1}\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, b_1) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s}\mathsf{Vol}(\widehat{b}^{[n]} \leq b_1).$$

On peut utiliser le changement de variable φ, qui vérifie $\varphi^*\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y = B$ et donc

$$\varphi^*(\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y) = \varphi^*(\frac{1}{(s!)}(\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y)^s) = \frac{B^s}{s!},$$

où $\mathrm{d}\eta\mathrm{d}y$ est la forme volume canonique sur $\mathbf{R}^{2s}$. Par conséquent :

$$\mathsf{Vol}(\widehat{b}^{[n]} \leq b_1) = \int_{\widehat{b}^{[n]} \leq b_1} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}y = \int_{b^{[n]} \leq b_1} \frac{B^s}{s!},$$

car $\widehat{b}^{[n]} = b^{[n]} \circ \varphi^{-1}$. D'après le Théorème 5.1, on a donc

$$N(\mathcal{L}_\hbar, b_1\hbar) = \sum_{|n| \leq N_{\max}} N(\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, b_1\hbar) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^s} \sum_{|n| \leq N_{\max}} \int_{b^{[n]} \leq b_1} \frac{B^s}{s!}.$$

Remarquons que B^s est proportionnel à la forme volume $\mathrm{d}V$ sur M : $B^s = f(q)\mathrm{d}V$. En choisissant une base de l'espace tangent T_qM dans laquelle g_q est la matrice identité et B_q la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_1(q) & & & \cdots \\ -\beta_1(q) & 0 & & & \cdots \\ & & 0 & \beta_2(q) & \\ & & -\beta_2(q) & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

on voit que $B^s = (s!)\beta_1(q)\cdots\beta_s(q)\mathrm{d}V$ au point q. □

5.1.4 – Applications dans le cas k>0

Dans le cas plus général où $\mathbf{B}(q)$ a un noyau non nul ($k > 0$), un nouveau mouvement apparaît dans l'espace des phases, selon les variables (t, τ) qui correspondent aux directions des *lignes de champs*. C'est ce qui se passe génériquement en dimension $d = 3$ (avec $k = 1$ et $s = 1$). Dans le cas d'un puit magnétique discret, ce mouvement consiste en une oscillation dans la direction des lignes de champs (c'est à dire dans la variable t) : c'est ce que nous allons mettre en évidence. Nous ajoutons donc l'hypothèse suivante

Hypothèse (H4). On suppose que b admet un unique minimum global, atteint en $q_0 \in M \setminus \partial M$, et que ce minimum est non-dégénéré.

Notons que cette hypothèse implique l'hypothèse de confinement (H2). De plus, on peut réécrire l'hypothèse de non-résonance (H3) sous la forme suivante (quitte à

considérer Ω un voisinage de q_0 suffisamment petit) :

Hypothèse (H5). Il existe un entier $r_{\mathbf{1}} \geq 3$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbf{Z}^s, \quad 0 < |\alpha| < r_{\mathbf{1}}, \quad \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \beta_j(q_0) \neq 0.$$

Dans ce cas, on arrive à étudier le spectre de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ à l'aide d'une seconde forme normale de Birkhoff. En effet, le symbole de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ est

$$N_\hbar^{[0]}(w,t,\tau) = \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \hbar\widehat{b}(w,t) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\tau\hbar) + \mathcal{O}(\tau^3),$$

donc en notant $s(w)$ le point minimiseur de $t \mapsto \widehat{b}(w,t)$ (qui est unique sur un voisinage de 0), on a un développement de la forme

$$N_\hbar^{[0]}(w,t,\tau) = \langle M(w,s(w))\tau,\tau\rangle + \frac{\hbar}{2}\langle \frac{\partial^2 \widehat{b}}{\partial t^2}(w,s(w))\cdot(t-s(w)), t-s(w)\rangle + \text{"restes"}$$

et l'on reconnait dans le terme principal une oscillation harmonique dont les fréquences sont $\sqrt{\hbar}\nu_j(w)$ $(1 \leq j \leq k)$ où $(\nu_j(w)^2)$ sont les valeurs propres de la matrice :

$$M(w,s(w))^{1/2} \cdot \frac{1}{2}\partial_t^2 \hat{b}(w,s(w)) \cdot M(w,s(w))^{1/2},$$

qui sont des fonctions régulières de w sur un voisinage de 0, et qui ne s'annulent pas. Sous l'hypothèse de non-résonance suivante, on démontre une caractérisation du spectre de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$.

Hypothèse (H6). Il existe un entier $r_{\mathbf{2}} \geq 3$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbf{Z}^k, \quad 0 < |\alpha| < r_{\mathbf{2}}, \quad \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \nu_j(0) \neq 0.$$

Théorème 5.5. *Supposons $(H1)-(H4)-(H5)-(H6)$ avec $k>0$. Soient $c>0$ et $\delta \in (0,1/2)$. Il existe une fonction $f_{\mathbf{2}}^\star(y,\eta,J_1,\cdots,J_k,\sqrt{\hbar})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact telle que*

$$|f_{\mathbf{2}}^\star(y,\eta,J,\sqrt{\hbar})| \leq C(|J|+\sqrt{\hbar})^2$$

et vérifiant la propriété suivante.
Pour $n \in \mathbf{N}^k$, notons $\mathcal{M}_\hbar^{[n]}$ l'opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel en y de symbole

$$M_\hbar^{[n]}(y,\eta) = \hat{b}(y,\eta,s(y,\eta)) + \sqrt{\hbar}\sum_{j=1}^{k}\nu_j(y,\eta)(2n_j+1) + f_{\mathbf{2}}^\star(y,\eta,(2n+1)\sqrt{\hbar},\sqrt{\hbar}).$$

Pour $\hbar << 1$, il existe une bijection

$$\Lambda_{\mathbf{2},\hbar} : \mathsf{sp}(\mathcal{N}_\hbar^{[0]}) \cap (-\infty,(b_0+c\hbar^\delta)\hbar) \to \bigcup_{n\in\mathbf{N}^k} \mathsf{sp}(\hbar\mathcal{M}_\hbar^{[n]}) \cap (-\infty,(b_0+c\hbar^\delta)\hbar),$$

telle que $\Lambda_{\mathbf{2},\hbar}(\lambda) = \lambda + \mathcal{O}(\hbar^{1+\delta r_{\mathbf{2}}/2})$ uniformément par rapport à λ. De plus cette bijection préserve les multiplicités.

On peut déduire du Théorème 5.5 que le bas du spectre du Laplacien magnétique $\mathcal{L}_\hbar$ est décrit par l'opérateur effectif $\hbar\mathcal{M}_\hbar^{[0]}$. On obtient les deux corollaires suivants.

Corollaire 5.6. *On se place sous les hypothèses du Théorème 5.5. Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in (0, \min_j \nu_j(0))$, notons $\nu(0) = \sum_j \nu_j(0)$ et $r = \min(2r_{\mathbf{1}}, r_{\mathbf{2}} + 4)$. Pour $\hbar << 1$ il existe une bijection*

$$\Lambda_{\mathbf{2},\hbar} : \mathsf{sp}(\mathcal{L}_\hbar) \cap (-\infty, \hbar b_0 + \hbar^{3/2}(\nu(0)+2c)) \to \mathsf{sp}(\hbar\mathcal{M}_\hbar^{[0]}) \cap (-\infty, \hbar b_0 + \hbar^{3/2}(\nu(0)+2c))$$

telle que $\Lambda_{\mathbf{2},\hbar}(\lambda) = \lambda + \mathcal{O}(\hbar^{r/4-\varepsilon})$ uniformément par rapport à λ.

Démonstration. D'après le Théorème 5.1, pour $b_1 > b_0$ aussi proche de b_0 que l'on veut, le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ dans $(-\infty, b_1\hbar)$ est donné par le spectre de $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}^s} \mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ modulo $\mathcal{O}(\hbar^{r_{\mathbf{1}}/2-\varepsilon}) = \mathcal{O}(\hbar^{r/4-\varepsilon})$. De plus le symbole de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ pour $n \neq 0$ vérifie

$$N_\hbar^{[n]}(y,\eta,t,\tau) \geq \hbar(b_0 + 2\min\beta_j - C\hbar),$$

et donc d'après l'inégalité de Garding

$$\langle \mathcal{N}_\hbar^{[n]}\psi, \psi\rangle \geq \hbar b_1 \|\psi\|^2, \quad \forall\psi,$$

si b_1 est assez proche de b_0. Ainsi, le spectre de $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}^s} \mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ dans $(-\infty, b_1\hbar)$ est donné par le spectre de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$. En appliquant le Théorème 5.5 avec δ suffisamment proche de $1/2$, on voit que le spectre de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ dans $(-\infty, (b_0+\hbar^\delta)\hbar)$ est donné par le spectre de $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}^k} \hbar\mathcal{M}_\hbar^{[n]}$, modulo $\mathcal{O}(\hbar^{1+r_{\mathbf{2}}/4-\varepsilon}) = \mathcal{O}(\hbar^{r/4-\varepsilon})$. Le symbole de $\mathcal{M}_\hbar^{[n]}$ vérifie, pour $n \neq 0$,

$$M_\hbar^{[n]}(y,\eta) \geq b_0 + \hbar^{1/2}\sum_{j=1}^k \nu_j(y,\eta)(2n_j+1) - C\hbar,$$

et les fonctions propres de $\mathcal{M}_\hbar^{[n]}$ sont microlocalisées sur un voisinage arbitrairement petit de $(y,\eta) = 0$ (Cf. Lemme 5.30), et donc $M_\hbar^{[n]}$ vérifie sur ce voisinage :

$$\begin{aligned} M_\hbar^{[n]}(y,\eta) &\geq b_0 + \hbar^{1/2}\sum_{j=1}^k \nu_j(0)(2n_j+1) - \hbar^{1/2}\varepsilon - C\hbar \\ &\geq b_0 + \hbar^{1/2}(\nu(0) + 2\min\nu_j(0) - \varepsilon) - C\hbar. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Garding le spectre de $\mathcal{M}_\hbar^{[n]}$ $(n \neq 0)$ est donc $\geq b_0 + \hbar^{1/2}(\nu(0) + c)$, pour $\hbar$ assez petit. Ainsi, le spectre de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ dans $(-\infty, \hbar b_0 + \hbar^{3/2}(\nu(0)+c))$ est donné par le spectre de $\hbar\mathcal{M}_\hbar^{[0]}$, ce qui prouve le corollaire. □

Corollaire 5.7. *Sous les hypothèses du Théorème 5.5, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $j \geq 1$,*

$$\lambda_j(\mathcal{L}_\hbar) = \hbar\sum_{\ell=0}^{\lfloor r/2\rfloor - 2} \alpha_{j\ell}\hbar^{\ell/2} + \mathcal{O}(\hbar^{r/4-\varepsilon})$$

avec des coefficients $\alpha_{j\ell} \in \mathbf{R}$ *tels que*

$$\alpha_{j,0} = b_0, \quad \alpha_{j,1} = \sum_{j=1}^{k} \nu_j(0), \quad \alpha_{j,2} = E_j + c_0,$$

où $c_0 \in \mathbf{R}$ *et* E_j *est la* j*-ième valeur propre (comptée avec multiplicité) d'un oscillateur harmonique* s*-dimensionnel.*

Démonstration. D'après le corollaire 5.6, le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ dans la fenêtre d'énergie $(-\infty, \hbar b_0 + \hbar^{3/2}(\nu(0) + 2c))$ est donné par celui de $\hbar\mathcal{M}_\hbar^{[0]}$, modulo $\mathcal{O}(\hbar^{r/4-\varepsilon})$. Or le symbole de $\mathcal{M}_\hbar^{[0]}$ est de la forme suivante :

$$M_\hbar^{[0]}(w) = \widehat{b}(w, s(w)) + \hbar^{1/2}\nu(0) + \hbar^{1/2}\nabla\nu(0)\cdot w + \hbar\tilde{c}_0 + \mathcal{O}(\hbar w + \hbar^{3/2} + \hbar^{1/2}w^2),$$

avec $\nu(w) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)$. La partie principale admet un unique minimum en 0, qui est non dégénéré. Comme expliqué en section 4.5, on peut effectuer un changement de variable symplectique linéaire qui diagonalise la Hessienne de $\widehat{b}$ et se ramener à un symbole de la forme

$$\widehat{M}_\hbar^{[0]}(w) = b_0 + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \left(\eta_j^2 + y_j^2\right) + \hbar^{1/2}\nu(0) + \hbar^{1/2}\nabla\nu(0)\cdot w + \hbar\tilde{c}_0 + \mathcal{O}(w^3 + \hbar w + \hbar^{3/2} + \hbar^{1/2}w^2).$$

En factorisant le terme linéaire $\nabla\nu(0)\cdot w$ on obtient :

$$\widehat{M}_\hbar^{[0]}(w) = b_0 + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \left(\left(\eta_j + \frac{\partial_{\eta_j}\nu(0)}{2\mu_j}\hbar^{1/2}\right)^2 + \left(y_j + \frac{\partial_{y_j}\nu(0)}{2\mu_j}\hbar^{1/2}\right)^2 \right) + \hbar^{1/2}\nu(0) + \hbar c_0 + \mathcal{O}(w^3 + \hbar w + \hbar^{3/2} + \hbar^{1/2}w^2).$$

(Le terme c_0 d'ordre $\hbar$ est modifié). En conjuguant $\mathsf{Op}_\hbar^w \widehat{M}_\hbar^{[0]}$ par l'opérateur unitaire $U_\hbar$:

$$U_\hbar v(x) = \mathsf{exp}\left(\frac{i}{\sqrt{\hbar}} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial_{\eta_j}\nu(0)}{2\mu_j} y_j\right) v\left(x - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial_{y_j}\nu(0)}{2\mu_j}\hbar^{1/2}\right),$$

on effectue une translation dans l'espace des phases, qui nous ramène au symbole

$$\tilde{M}_\hbar^{[0]}(w) = b_0 + \sum_{j=1}^{s} \mu_j(\eta_j^2 + y_j^2) + \hbar^{1/2}\nu(0) + \hbar c_0 + \mathcal{O}(w^3 + \hbar w + \hbar^{3/2} + \hbar^{1/2}w^2).$$

On peut appliquer l'algorithme de Birkhoff vu au Chapitre 4 à un tel symbole. En effet, la présence de puissance impaires de $\hbar^{1/2}$ dans le développement du symbole ne change rien à l'algorithme, tant que l'on remarque que $\hbar^{1/2}$ est du même ordre que $w = (y, \eta)$, et donc que le reste est d'ordre 3 au sens de la section 4.2.1 du Chapitre 4 :

$$\tilde{M}_\hbar^{[0]}(w) = b_0 + \sum_{j=1}^{s} \mu_j(\eta_j^2 + y_j^2) + \hbar^{1/2}\nu(0) + \hbar c_0 + \mathcal{O}_3.$$

Pour la même raison, les résultats de Charles-Vu Ngoc [CVuN08] restent valides, et on peut appliquer le Théorème 4.13 : Pour $\hbar$ assez petit, la j-ième valeur propre de $\mathcal{M}_\hbar^{[0]}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$\lambda_j(\mathcal{M}_\hbar^{[0]}) = b_0 + \hbar^{1/2}\nu(0) + \hbar(c_0 + E_j) + \hbar^{3/2}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{j,m}\hbar^{m/2},$$

où $\hbar E_j$ est la j-ième valeur propre (comptée avec multiplicité) de l'oscillateur harmonique de symbole $\sum_{j=1}^{s}\mu_j(\eta_j^2 + y_j^2)$. □

5.1.5 – Organisation du Chapitre

Dans la section 5.2 nous construirons la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$, puis nous comparerons en section 5.3 les spectres de $\mathcal{N}_\hbar$ et de $\mathcal{L}_\hbar$, ce qui démontrera le Théorème 5.1. En section 5.4, nous traiterons le cas où $k > 0$: nous construirons la seconde forme normale $\mathcal{M}_\hbar$ puis nous démontrerons le Théorème 5.5.

Nous commencerons en section 5.2.1 par construire des coordonnées symplectiques qui simplifieront le symbole principal H au voisinage de sa courbe d'annulation $\Sigma = H^{-1}(0)$, pour faire apparaître l'oscillateur harmonique transverse à Σ. Ensuite nous construirons une forme normale de Birkhoff dans un espace de séries formelles en sections 5.2.2 et 5.2.3. Nous quantifierons cette forme normale en section 5.2.4, ce qui terminera la construction de $\mathcal{N}_\hbar$. Comme $\mathcal{N}_\hbar$ est une fonction d'oscillateurs harmoniques, on peut le décomposer selon des niveaux de Landau (section 5.3.1). Nous montrerons en section 5.3.2 que les fonctions propres de $\mathcal{N}_\hbar$ et de $\mathcal{L}_\hbar$ sont microlocalisées sur un voisinage de Σ où les restes apparaissant dans la forme normale sont petits. Enfin, en section 5.3.3 nous comparerons les spectres de $\mathcal{L}_\hbar$ et de $\mathcal{N}_\hbar$.

Dans le cas $k > 0$, nous expliquerons comment réduire le symbole de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ au voisinage de son minimum en section 5.4.1. Cela fera apparaitre un nouvel oscillateur harmonique. Nous montrerons comment adapter l'algorithme de Birkhoff à ce nouvel oscillateur en 5.4.2, puis comment le quantifier en 5.4.3, ce qui donnera lieu à une seconde forme normale $\mathcal{M}_\hbar$. Enfin en section 5.4.4, nous énoncerons les résultats de microlocalisation permettant de comparer les spectres de $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ et de $\mathcal{M}_\hbar$ et donc de démontrer le Théorème 5.5.

5.2 – Construction de la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$

5.2.1 – Réduction du symbole principal H

Dans cette section, nous construisons des coordonnées canoniques locales dans T^*M qui simplifient l'expression de

$$H(q,p) = |p - A_q|^2_{g_q^*}, \quad (q,p) \in T^*M, \tag{5.2.1}$$

au voisinage de son minimum

$$\Sigma = \{(q,p) \in T^*M; \quad q \in \Omega, \quad p = A_q\}. \tag{5.2.2}$$

Ces coordonnées seront notées $(z,w,t,\tau) \in \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2k} = \mathbf{R}^{2d}$, avec

$$z = (x,\xi) \in \mathbf{R}^{2s}, \quad w = (y,\eta) \in \mathbf{R}^{2s}, \quad (t,\tau) \in \mathbf{R}^{2k}, \tag{5.2.3}$$

et munies de la forme symplectique canonique

$$\omega_0 = \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t. \tag{5.2.4}$$

Elles permettront d'identifier Σ à

$$\Sigma' = \{(x,\xi,y,\eta,t,\tau) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad x = \xi = 0, \quad \tau = 0\} = \mathbf{R}^{2s+k}_{(y,\eta,t)} \times \{0\}. \tag{5.2.5}$$

Plus précisément, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 5.8. *Quitte à réduire Ω, il existe un voisinage $U_{\mathbf{1}}$ de Σ dans T^*M, un voisinage $U'_{\mathbf{1}}$ de Σ' dans $\mathbf{R}^{2d}$, et un symplectomorphisme $\Phi_{\mathbf{1}} : U'_{\mathbf{1}} \to U_{\mathbf{1}}$, tel que $\Phi_{\mathbf{1}}(\Sigma') = \Sigma$ et*

$$\widehat{H} := H \circ \Phi_{\mathbf{1}} = \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(w,t)|z_j|^2 + \mathcal{O}((\tau,x,\xi)^3), \tag{5.2.6}$$

avec $M(w,t) = \partial^2_\tau \widehat{H}(z=0,w,t,\tau=0)$, et $\widehat{\beta}_j(w,t) = \beta_j \circ \varphi(w,t)$ où φ est la fonction définie comme restriction de $\Phi_{\mathbf{1}}$ à Σ' par

$$\Phi_1(0,0,y,\eta,t,0) = (q,A_q), \quad q = \varphi(y,\eta,t).$$

Remarque 1. L'égalité (5.2.6) n'est autre qu'un développement de Taylor de $\widehat{H}$ au voisinage de Σ' (ce qui revient dans les coordonnées initiales à développer H au voisinage de Σ). Ce théorème donne donc l'existence de coordonnées symplectiques (ou canoniques) dans lesquelles la Hessienne partielle de H par rapport à (τ,z) au point $(q,A_q) \in \Sigma$ est diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} M(w,t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widehat{\beta}_1(w,t) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \widehat{\beta}_s(w,t) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les variables (z,τ) (par rapport auxquelles on développe) mesurent l'éloignement à Σ.

Remarque 2. Le lecteur constatera que la seule restriction sur la taille de Ω est donnée par l'existence de coordonnées de Darboux globale sur (Ω,B).

Plusieurs lemmes seront nécessaires pour démontrer ce théorème. Avant de construire Φ_1^{-1} sur un voisinage $U_{\mathbf{1}}$ de Σ, nous allons nous restreindre à Σ. Pour cela il faut comprendre la structure de Σ héritée par la structure symplectique de T^*M. Rappelons que sur T^*M, la 1-forme de Liouville α est définie par

$$\alpha_{(q,p)}(\mathcal{V}) = p((\mathrm{d}\pi)_{(q,p)}\mathcal{V}), \quad \forall (q,p) \in T^*M, \quad \mathcal{V} \in T_{(q,p)}(T^*M),$$

où $\pi : T^*M \to M$ est la projection canonique : $\pi(q,p) = q$, et $\mathrm{d}\pi$ sa différentielle. T^*M est munie de la forme symplectique $\omega = \mathrm{d}\alpha$. Σ est une sous-variété de dimension d de T^*M, qui peut être assimilée à M via l'application

$$j : q \in M \mapsto (q, A_q) \in \Sigma,$$

qui admet π comme inverse. Σ est naturellement munie de la restriction ω_Σ de ω à Σ. Le Lemme suivant dit que ω_Σ est donnée par $B = \mathrm{d}A$.

Lemme 5.9. *La restriction de ω à Σ est $\omega_\Sigma := \pi^*B$.*

Démonstration. Fixons $q \in \Omega$, et $Q \in T_qM$. Alors

$$(j^*\alpha)_q(Q) = \alpha_{j(q)}((\mathrm{d}j)Q) = A_q((\mathrm{d}\pi) \circ (\mathrm{d}j)Q) = A_q(Q),$$

puisque $\pi \circ j = \mathsf{id}$. Ainsi $j^*\alpha = A$ et donc $\alpha_\Sigma = \pi^* j^* \alpha = \pi^* A$. En appliquant la différentielle extérieure on obtient

$$\omega_\Sigma = \mathrm{d}\alpha_\Sigma = \pi^*(\mathrm{d}A) = \pi^* B.$$

□

Remarque 3. Comme la restriction de π à Σ est un difféomorphisme, π^*B est une 2-forme fermée de rang constant égal à $2s$. (Σ, π^*B) est donc une variété pré-symplectique. Via l'application j, cette variété est complètement équivalente à (Ω, B). Rappelons le théorème de Darboux, qui dit qu'une telle variété est localement équivalente à $(\mathbf{R}^{2s+k}_{(y,\eta,t)}, \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y)$.

Lemme 5.10. *Quitte à réduire Ω, il existe un ouvert Σ' de $\mathbf{R}^{2s+k}$ et un difféomorphisme $\varphi : \Sigma' \subset \mathbf{R}^{2s+k}_{(y,\eta,t)} \to \Omega$ tel que $\varphi^* B = \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y$.*

Remarque 4. L'application φ est la même que dans le Théorème 5.8. À toute fonction f sur Ω peut être associée une fonction $\widehat{f} = f \circ \varphi$ sur Σ'.

Remarque 5. Nous pouvons prendre des coordonnées (quelconques) sur Ω. Ainsi, quitte à se placer dans ces coordonnées, il suffit de traiter le cas $M = \mathbf{R}^d$ avec

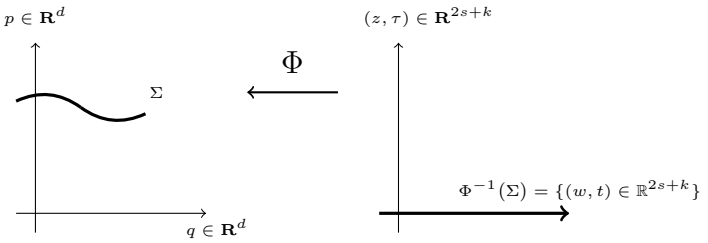
$$H(q,p) = \sum_{k,\ell=1}^{d} g^{k\ell}(q)(p_k - A_k(q))(p_\ell - A_\ell(q)), \quad (q,p) \in T^*\mathbf{R}^d \simeq \mathbf{R}^{2d}$$

pour démontrer le théorème 5.8. C'est ce que nous ferons pour le reste de cette section. Dans ces coordonnées, ω est donnée par $\omega = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q = \sum_{j=1}^d \mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}q_j$, Σ est la sous-variété

$$\Sigma = \{(q, \mathbf{A}(q)), q \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^{2d},$$

et $j \circ \varphi : \Sigma' \to \Sigma$.

Nous avons identifié la variété "courbe" Σ à un ouvert Σ' du plan $\mathbf{R}^{2s+k}$ via l'application $j \circ \varphi$. De plus, nous avons fait cette identification de telle sorte que $(j \circ \varphi)^* B = \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y$. Pour démontrer le théorème 5.8, nous allons montrer un résultat plus fort. En effet, nous montrerons que tout un voisinage de Σ dans $\mathbf{R}^{2d}_{(q,p)}$ peut être identifiée à un voisinage de Σ' dans $\mathbf{R}^{2s+2s+2k}_{(z,w,t,\tau)}$, via un symplectomorphisme Φ.



Pour étendre $j \circ \varphi$ à un voisinage de Σ' *tout en préservant la structure symplectique*, il convient de décomposer l'espace tangent $T_{j(q)}(\mathbf{R}^{2d})$ (en un point $j(q) \in \Sigma$) selon des directions tangentes à Σ et des directions sortantes. C'est l'objet des deux Lemmes suivants.

Lemme 5.11. *Fixons $j(q) = (q, \mathbf{A}(q)) \in \Sigma$. Alors l'espace tangent à Σ est donné par*

$$T_{j(q)}\Sigma = \{(Q, P) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad P = \nabla_q \mathbf{A} \cdot Q\}.$$

De plus, l'orthogonal $T_{j(q)}\Sigma^\perp$ pour la forme symplectique ω est

$$T_{j(q)}\Sigma^\perp = \{(Q, P) \in \mathbf{R}^{2d}, \quad P = (\nabla_q \mathbf{A})^T \cdot Q\}.$$

Enfin,

$$T_{j(q)}\Sigma \cap T_{j(q)}\Sigma^\perp = \mathsf{Ker}(\pi^* B).$$

Démonstration. Σ étant le graphe de la fonction $q \mapsto \mathbf{A}(q)$, l'espace tangent $T_{j(q)}\Sigma$ est bien le graphe de la différentielle $Q \mapsto (\nabla_q \mathbf{A}) \cdot Q$. Pour calculer l'orthogonal symplectique $T_{j(q)}\Sigma^\perp$, notons que la forme symplectique $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ est définie par

$$\omega_{(q,p)}((Q_1, P_1), (Q_2, P_2)) = \langle P_2, Q_1 \rangle - \langle P_1, Q_2 \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente ici le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^d$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(Q, P) \in T_{j(q)}\Sigma^\perp &\iff \forall Q_0 \in \mathbf{R}^d, \quad \omega_{j(q)}((Q_0, \nabla_q \mathbf{A} \cdot Q_0), (Q, P)) = 0 \\
&\iff \forall Q_0 \in \mathbf{R}^d, \quad \langle P, Q_0 \rangle - \langle (\nabla_q \mathbf{A}) \cdot Q_0, Q \rangle = 0 \\
&\iff \forall Q_0 \in \mathbf{R}^d, \quad \langle P - (\nabla_q \mathbf{A})^T \cdot Q, Q_0 \rangle = 0 \\
&\iff P = (\nabla_q \mathbf{A})^T \cdot Q.
\end{aligned}$$

Enfin le Lemme 5.9 assure que la restriction de ω à des vecteurs tangents à Σ est donnée par $\pi^* B$. Par conséquent, $T_{j(q)}\Sigma \cap T_{j(q)}\Sigma^\perp$ est l'ensemble des (Q, P) tangents à Σ tels que

$$\pi^* B((Q, P), (Q_0, P_0)) = 0, \quad \forall (Q_0, P_0) \in T_{j(q)}\Sigma.$$

Il s'agit donc bien du noyau de $\pi^* B$. □

Nous allons maintenant exhiber des vecteurs particulier de $T_{j(q)}\Sigma$ et de son orthogonal. Comme $\mathbf{B}(q)$ est anti-symétrique pour le produit scalaire g, il existe des vecteurs $\mathbf{u}_1(q), \mathbf{v}_1(q), \cdots, \mathbf{u}_s(q), \mathbf{v}_s(q), \mathbf{w}_1(q), \cdot, \mathbf{w}_k(q) \in \mathbf{R}^d$ deux à deux g-orthogonaux tels que

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{u}_j = -\beta_j \mathbf{v}_j, \quad 1 \leq j \leq s, \\ \mathbf{B}\mathbf{v}_j = \beta_j \mathbf{u}_j, \quad 1 \leq j \leq s, \\ \mathbf{B}\mathbf{w}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq k. \end{cases} \tag{5.2.7}$$

De plus, ces vecteurs dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ de q car les valeurs propres non nulles $\pm i\beta_j(q)$ sont simples (Hypothèse H3). Ils forment une base de $\mathbf{R}^d$. Considérons maintenant les vecteurs orthogonaux à Σ suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_j(q) := \frac{1}{\sqrt{\beta_j(q)}}(\mathbf{u}_j(q), (\nabla_q \mathbf{A})^T \cdot \mathbf{u}_j(q)), \quad 1 \leq j \leq s, \\ \mathbf{f}'_j(q) := \frac{1}{\sqrt{\beta_j(q)}}(\mathbf{v}_j(q), (\nabla_q \mathbf{A})^T \mathbf{v}_j(q)), \quad 1 \leq j \leq s. \end{cases} \tag{5.2.8}$$

Comme les vecteurs $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$ sont deux à deux orthogonaux (pour le produit scalaire g), ils forment une famille libre et on a

$$T_{j(q)}\Sigma^\perp = K \oplus F,$$

avec

$$K = \mathsf{Ker}(\pi^* B), \quad F = \mathsf{Vect}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}'_1, \cdots, \mathbf{f}_s, \mathbf{f}'_s). \tag{5.2.9}$$

De même l'espace tangent $T_{j(q)}\Sigma$ admet une décomposition

$$T_{j(q)}\Sigma = E \oplus K,$$

définie comme suit. L'application $\varphi : \Sigma' \subset \mathbf{R}^{2s+k}_{w,t} \to \Sigma$ du Lemme 5.10 vérifie $\varphi^*(\pi^* B) = \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y$. Par conséquent, sa différentielle envoie le noyau K de $\pi^* B$ sur le noyau de $\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y$:

$$K = \{(\mathrm{d}\varphi)_q(0, T); \quad T \in \mathbf{R}^k\}$$

Un supplémentaire de K dans $T_{j(q)}\Sigma$ est donné par

$$E := \{(\mathrm{d}\varphi)_q(W, 0); \quad W \in \mathbf{R}^{2s}\}. \tag{5.2.10}$$

Le lemme qui suit permet d'obtenir une décomposition de l'espace tangent à $\mathbf{R}^{2d}_{(q,p)}$ adaptée à la structure pré-symplectique de Σ.

Lemme 5.12. *Fixons $j(q) = (q, \mathbf{A}(q)) \in \Sigma$. Alors on a la décomposition suivante :*

$$T_{j(q)}(\mathbf{R}^{2d}) = \underbrace{E \oplus \overbrace{K \oplus F}^{T\Sigma^\perp}}_{T\Sigma} \oplus L$$

où L est un supplémentaire Lagrangien de K dans $(E \oplus F)^\perp$.

Démonstration. On a $T\Sigma + T\Sigma^\perp = E \oplus K \oplus F$, et la restriction de $\omega = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ à cet espace a pour noyau $K = T\Sigma \cap T\Sigma^\perp$. Par conséquent, la restriction $\omega_{E\oplus F}$ de ω

à $E \oplus F$ est non-dégénérée. Il en est de même de son orthogonal $(E \oplus F)^\perp$, qui est donc un espace vectoriel symplectique pour ω, de dimension $2d - 4s = 2k$, et on a :

$$T_{j(q)}\mathbf{R}^{2d} = (E \oplus F) \oplus (E \oplus F)^\perp.$$

K est un sous espace Lagrangien de $(E \oplus F)^\perp$. Il admet donc un supplémentaire Lagrangien : Un sous espace L de $(E \oplus F)^\perp$ de dimension k tel que $\omega_L = 0$, et tel que $(E \oplus F)^\perp = K \oplus L$. □

Remarque 7. Une base $(\mathbf{g}_j)$ de L est donnée par la condition :

$$\omega(\mathbf{g}_j, \mathrm{d}\varphi(0,T)) = T_j, \quad \forall T \in \mathbf{R}^k. \tag{5.2.11}$$

En effet, la décomposition $(E \oplus F)^\perp = K \oplus L$ donne une bijection entre L et l'espace K^* des formes linéaires sur K. Cette bijection est $\mathbf{g} \mapsto \omega(\mathbf{g}, \bullet)$. La forme linéaire

$$\mathrm{d}\varphi(0,T) \in K \mapsto T_j \in \mathbf{R}$$

est représentée par le vecteur $\mathbf{g}_j$.

On peut maintenant utiliser les résultats précédents pour construire notre difféomorphisme $\Phi_\mathbf{1}$. On vérifiera ensuite qu'il diagonalise la Hessienne partielle de H.

Lemme 5.13. *Il existe un difféomorphisme*

$$\Phi_\mathbf{1} : U'_\mathbf{1} \subset \mathbf{R}^{2s+2k+2s}_{(w,t,\tau,z)} \to U_\mathbf{1} \subset \mathbf{R}^{2d}_{(q,p)},$$

tel que $\Phi_\mathbf{1}^*\omega = \omega_0$ *et* $\Phi_\mathbf{1}(w,t,0,0) = j \circ \varphi(w,t)$ *; et tel que sa différentielle en* $(w,t,z=0,\tau=0) \in \Sigma'$ *est donnée par*

$$\mathrm{d}\Phi_\mathbf{1}(W,T,\mathcal{T},Z) = \mathrm{d}_{(w,t)}j \circ \varphi(W,T) + \sum_{j=1}^{k} \mathcal{T}_j \hat{\mathbf{g}}_j(w,t) + \sum_{j=1}^{s} X_j \hat{\mathbf{f}}_j(w,t) + \Xi_j \hat{\mathbf{f}}'_j(w,t).$$

Remarque 8. On a noté $Z = (X, \Xi)$ et $\hat{\mathbf{f}}_j = \mathbf{f}_j \circ \varphi$, $\hat{\mathbf{f}}'_j = \mathbf{f}'_j \circ \varphi$, et $\hat{\mathbf{g}}_j = \mathbf{g} \circ \varphi$.

Idée de la preuve. Nous allons d'abord construire Φ tel que $\Phi^*\omega_{|\Sigma'} = \omega_{0\ |\Sigma'}$ uniquement sur $\Sigma' = \Phi^{-1}(\Sigma)$. Ensuite, un théorème de Weinstein permettra de modifier légèrement Φ en un difféomorphisme $\Phi_\mathbf{1}$ qui vérifie $\Phi_\mathbf{1}^*\omega = \omega_0$ sur un voisinage $U'_\mathbf{1}$ de Σ'.

Démonstration. On définit Φ par

$$\Phi(w,t,\tau,z) = j \circ \varphi(w,t) + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \hat{\mathbf{g}}_j(w,t) + \sum_{j=1}^{s} x_j \hat{\mathbf{f}}_j(w,t) + \xi_j \hat{\mathbf{f}}'_j(w,t).$$

Sa différentielle en $(w,t,0,0)$ a bien la forme demandée. Fixons un point $(w,t,0,0) \in \Sigma'$ et calculons $\Phi^*\omega$ en ce point. Par définition,

$$\Phi^*\omega_{(w,t,0,0)}(\bullet,\bullet) = \omega_{j(q)}((\mathrm{d}\Phi)\bullet, (\mathrm{d}\Phi)\bullet),$$

où $q = \varphi(w,t)$. Pour calculer ce que vaut cette forme dans la base canonique de $\mathbf{R}^{2s+2k+2s}$, on est amené à calculer ω sur les vecteur $\mathbf{g}_j$, $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}'_j$ et $\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W,T)$. Par définition de $\mathbf{f}_j$ on a :

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j) &= \frac{1}{\sqrt{\beta_i\beta_j}}\left(\langle(\nabla_q\mathbf{A})^\perp\cdot\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i\rangle - \langle(\nabla_q\mathbf{A})^\perp\cdot\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_i\beta_j}}\langle((\nabla_q\mathbf{A})^\perp - (\nabla_q\mathbf{A}))\cdot\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i\rangle\\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_i\beta_j}}B(\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta_i\beta_j}}g(\mathbf{u}_j,\mathbf{B}\mathbf{u}_i)\\ &= 0,\end{aligned}$$

car $\mathbf{B}\mathbf{u}_i = -\beta_i\mathbf{v}_i$ est orthogonal à $\mathbf{u}_j$. De même, on obtient :

$$\omega(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}'_j) = \delta_{ij},\quad \omega(\mathbf{f}'_i,\mathbf{f}'_j) = 0.$$

De plus, $\mathbf{g}_i \in L \subset F^\perp$ donc

$$\omega(\mathbf{g}_i,\mathbf{f}_j) = \omega(\mathbf{g}_i,\mathbf{f}'_j) = 0.$$

Comme L est Lagrangien on a aussi $\omega(\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_j) = 0$. Le vecteur $\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W,T)$ est tangent à Σ, et $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}'_j \in T\Sigma^\perp$ donc

$$\omega(\mathbf{f}_j,\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W,T)) = \omega(\mathbf{f}'_j,\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W,T)) = 0.$$

Comme $\mathbf{g}_j \in L \subset E^\perp$, et d'après (5.2.11), on a

$$\omega(\mathbf{g}_j,\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W,T)) = \omega(\mathbf{g}_j,\mathrm{d}(j\circ\varphi)(0,T)) = T_j.$$

Enfin, $(j\circ\varphi)^*\omega = \varphi^*B = \mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}y$ donc

$$\omega(\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W,T),\mathrm{d}(j\circ\varphi)(W',T')) = \mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}y((W,T),(W',T')).$$

Tous ces calculs montrent que $(\Phi^*\omega)_{(w,t,0,0)}$ coïncide avec $\omega_0 = \mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}t$. Ainsi $\Phi^*\omega = \omega_0$ sur Σ. Le Lemme de Weinstein A.4 permet de changer Φ en $\Phi_{\mathbf{1}}(w,t,\tau,z) = \Phi(w,t,\tau,z) + \mathcal{O}((z,\tau)^2)$ tel que $\Phi_{\mathbf{1}}^*\omega = \omega_0$ sur un voisinage $U'_{\mathbf{1}}$ de Σ'. En particulier, la différentielle de $\Phi_{\mathbf{1}}$ en $(w,t,0,0)$ coïncide avec celle de Φ. □

Pour terminer la preuve du Théorème 5.8, il reste à montrer le Lemme suivant.

Lemme 5.14. *Le Hamiltonien $\widehat{H} = H\circ\Phi_{\mathbf{1}}$ admet le développement de Taylor suivant :*

$$\widehat{H}(w,t,\tau,z) = \langle\partial_\tau^2\widehat{H}(w,t,0)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^{s}\hat{\beta}_j(w,t)|z_j|^2 + \mathcal{O}((\tau,z)^3).$$

Démonstration. Calculons la différentielle et la Hessienne de

$$H(q,p) = \sum_{k,\ell=1}^{d} g^{k\ell}(q)(p_k - A_k(q))(p_\ell - A_\ell(q))$$

en un point $(q, \mathbf{A}(q)) \in \Sigma$. On a d'abord :

$$\nabla_{(q,p)} H \cdot (Q,P) = \sum_{k,\ell=1}^{d} 2g^{k\ell}(q)(p_k - A_k(q))(P_\ell - \nabla_q A_\ell \cdot Q) + (p_k - A_k(q))(p_\ell - A_\ell(q))\nabla_q g \cdot Q, \tag{5.2.12}$$

en $p = \mathbf{A}(q)$ la Hessienne vaut :

$$\langle \nabla^2_{j(q)} H \cdot (Q,P), (Q',P') \rangle = 2 \sum_{k,\ell=1}^{d} g^{k\ell}(q)(P_k - \nabla_q A_k \cdot Q)(P'_\ell - \nabla_q A_\ell \cdot Q'). \tag{5.2.13}$$

Nous pouvons déduire de ces calculs le développement de Taylor de $\widehat{H}(w,t,\tau,z)$ par rapport aux variables (τ, z) (en laissant fixé un point $(q, \mathbf{A}(q)) = j \circ \varphi(w,t) \in \Sigma$). D'abord, on a :

$$\widehat{H}(w,t,0,0) = H(q, \mathbf{A}(q)) = 0.$$

Ensuite, on peut calculer la différentielle (partielle) par composition :

$$\partial_{\tau,z} \widehat{H}(w,t,0,0) \cdot (W,T) = \nabla_{j(q)} H \cdot \partial_{\tau,z} \Phi_{\mathbf{1}}(w,t,0,0) \cdot (W,T) = \nabla_{j(q)} H \cdot \mathrm{d}(j \circ \varphi)(W,T) = 0,$$

car $\mathrm{d}(j \circ \varphi)(W,T) \in T_{j(q)}\Sigma$. Le développement de Taylor de $\widehat{H}$ s'écrit donc

$$\widehat{H}(w,t,\tau,z) = \frac{1}{2} \langle \partial^2_{\tau,z} \widehat{H}(w,t,0) \cdot (\tau,z), (\tau,z) \rangle + \mathcal{O}((\tau,z)^3),$$

où $\partial^2_{\tau,z}\widehat{H}$ est la Hessienne partielle de $\widehat{H}$ par rapport aux variables (τ, z). Par composition on a :

$$\partial^2_{\tau,z} \widehat{H} = (\partial_{(\tau,z)} \Phi_{\mathbf{1}})^T \cdot \nabla^2_{j(q)} H \cdot (\partial_{(\tau,z)} \Phi_{\mathbf{1}}).$$

Calculer les coefficients de la Hessienne revient donc à calculer $\nabla^2_{j(q)} H$ sur les vecteurs $\mathbf{g}_j$, $\mathbf{f}_j$, $\mathbf{f}'_j$. Pour $(Q,P) \in T_{j(q)}\Sigma^\perp$ on a $P = (\nabla_q A)^T \cdot Q$ donc d'après (5.2.13) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^2_{j(q)} H((Q,P),(Q',P')) &= \sum_{k,\ell,i,j=1}^{d} g^{k\ell}(q)(\partial_k A_j Q_j - \partial_j A_k Q_j)(\partial_\ell A_i Q'_i - \partial_i A_\ell Q'_i) \\ &= \sum_{k,\ell,i,j} g^{k\ell}(q) B_{kj} Q_j B_{\ell i} Q'_i. \end{aligned}$$

Or $\sum_k g^{k\ell} B_{kj} = \mathbf{B}_{\ell j}$ (voir Chapitre 2, formule (2.3.3)), d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^2_{j(q)} H((Q,P),(Q',P')) &= \sum_{i,j,\ell} B_{\ell i}(\mathbf{B}_{\ell j} Q_j) Q'_i \\ &= B(\mathbf{B} \cdot Q, Q'). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $(Q,P)=\mathbf{f}_j$ pour $1\le j\le s$, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla^2_{j(q)}H(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j)&=\frac{1}{\sqrt{\beta_i\beta_j}}B(\mathbf{B}\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)\\&=\frac{1}{\sqrt{\beta_i\beta_j}}g(\mathbf{B}\mathbf{u}_i,\mathbf{B}\mathbf{u}_j)\\&=\sqrt{\beta_i\beta_j}g(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)\\&=\sqrt{\beta_i\beta_j}\delta_{ij}.\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{1}{2}\nabla^2_{j(q)}H(\mathbf{f}'_i,\mathbf{f}'_j)=\sqrt{\beta_i\beta_j}\delta_{ij},\quad \frac{1}{2}\nabla^2_{j(q)}H(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}'_j)=0.$$

Enfin, il reste à montrer que

$$\nabla^2_{j(q)}H(\mathbf{g}_i,\mathbf{f}_j)=\nabla^2_{j(q)}H(\mathbf{g}_i,\mathbf{f}'_j)=0, \tag{5.2.14}$$

pour conclure que la Hessienne partielle de $\widehat{H}$ est de la forme :

$$\partial^2_{\tau,z}\widehat{H}(w,t,0,0)=\begin{pmatrix}\partial^2_\tau\widehat{H}(w,t,0,0) & & & & & & \\ & \beta_1 & & & & & \\ & & \beta_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \beta_s & & \\ & & & & & \beta_s & \end{pmatrix}.$$

(5.2.14) découle de

$$L\subset F^\perp=\left(T\Sigma^\perp\right)^{\perp H}, \tag{5.2.15}$$

où $\perp H$ désigne l'orthogonal pour la forme quadratique $\nabla^2 H$ (qui est à distinguer de l'orthogonal symplectique $\perp$). Démontrons (5.2.15) :

$$\begin{aligned}(Q,P)\in(T\Sigma^\perp)^{\perp H}&\iff\forall Q'\in\mathbf{R}^d,\quad \nabla^2H((Q,P),(Q',(\nabla_q\mathbf{A})^T\cdot Q')=0\\&\iff\forall Q'\in\mathbf{R}^d,\quad \sum_{k,\ell,j}g^{k\ell}(P_k-\nabla_qA_k\cdot Q)B_{\ell j}Q'_j=0\\&\iff\forall Q'\in\mathbf{R}^d,\quad \sum_{k,j}(P_k-\nabla_qA_k\cdot Q)\mathbf{B}_{kj}Q'_j=0\\&\iff\forall Q'\in\mathbf{R}^d,\quad \langle P-\nabla_q\mathbf{A}\cdot Q,\mathbf{B}Q'\rangle=0\\&\iff\forall Q'\in\mathbf{R}^d,\quad \langle P,\mathbf{B}Q'\rangle-\langle Q,(\nabla_q\mathbf{A})^T\cdot\mathbf{B}Q'\rangle=0\\&\iff\forall Q'\in\mathbf{R}^d,\quad \omega((Q,P),(\mathbf{B}Q',(\nabla_q\mathbf{A})^T\cdot\mathbf{B}Q'))=0,\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}F&=\{(V,(\nabla_q\mathbf{A})^TV);\quad V\in\mathsf{vect}(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1,\cdots\mathbf{u}_s,\mathbf{v}_s)\}\\&=\{(\mathbf{B}Q,(\nabla_q\mathbf{A})^T\mathbf{B}Q);\quad Q\in\mathbf{R}^d\},\end{aligned}$$

car les vecteurs $\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_j$ engendrent l'image de $\mathbf{B}$. Par conséquent on a bien

$$(Q,P)\in(T\Sigma^\perp)^{\perp H}\iff(Q,P)\in F^\perp.$$

□

5.2.2 – Un espace de séries formelles adapté

Notons $U = U_{\mathbf{1}}' \cap \{x = \xi = 0; \tau = 0\} \subset \mathbf{R}^{2s+k}_{(w,t)} \times \{0\}$. Nous allons construire la forme normale de Birkhoff dans l'espace

$$\mathcal{E}_{\mathbf{1}} = \mathcal{C}^\infty(U)[[x, \xi, \tau, \hbar]].$$

Il s'agit des séries formelles en $(x, \xi, \tau, \hbar)$ dont les coefficients dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$ de paramètres $(w, t) \in U$. Ces séries formelles seront vues comme des séries de Taylor de symboles, que nous quantifierons à l'aide de la quantification de Weyl. Étant donné une fonction d'ordre m sur $\mathbf{R}^{2d}$ et un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{A} = \mathsf{Op}^w_\hbar a_\hbar$, où $a_\hbar \in S(m)$ admet un développement en puissances de $\hbar$ dans $S(m)$, nous noterons $[a_\hbar]$ ou encore $\sigma^T(\mathcal{A})$ la série de Taylor de $a_\hbar$ par rapport aux variables (x, ξ, τ) en $(x, \xi, \tau) = 0$: ceci défini un élément de $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}$. Réciproquement, étant donné une série formelle $\rho \in \mathcal{E}_{\mathbf{1}}$, en utilisant une sommation de Borel, nous pouvons lui associer un symbole $a_\hbar \in S(1)$ tel que $[a_\hbar] = \rho$. Ce processus n'est pas unique, mais étant donné deux $a_\hbar$, $\tilde{a}_\hbar \in S(1)$ tels que $[a_\hbar] = [\tilde{a}_\hbar] = \rho$, on a $a_\hbar = \tilde{a}_\hbar + \mathcal{O}((x, \xi, \hbar)^\infty)$ uniformément en $(w, t) \in U$.

Remarque. Nous démontrerons plus loin que les fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$ sont microlocalisées là où $(w, t) \in U$ et $|(x, \xi)| \leq C\hbar^{1/2}$, et donc les restes en $\mathcal{O}((x, \xi, \hbar)^\infty)$ seront bien négligeables.

• Comme dans le Chapitre 4, nous allons faire des manipulations diverses sur les séries de Taylor, via un algorithme de forme normale de Birkhoff. Pour que ces manipulations aient un sens une fois quantifiées, il faut les adapter au produit des opérateurs $\mathsf{Op}^w_\hbar(a)\mathsf{Op}^w_\hbar(b) = \mathsf{Op}^w_\hbar(a \star b)$. Nous munirons $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}$ du produit de Weyl défini par $\rho_1 \star \rho_2 := [a_1 \star a_2]$ où a_1 et a_2 sont des symboles tels que $\rho_1 = [a_1]$ et $\rho_2 = [a_2]$. Il s'agit du produit de Weyl *par rapport à toutes les variables* (y compris w et t). Rappelons qu'il vérifie :

$$a_1 \star a_2 = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i} \Box \right)^k a_1(w, t, \tau, z) a_2(w', t', \tau', z')|_{w'=w, t'=t, \tau'=\tau, z'=z} + \mathcal{O}(\hbar^N) \tag{5.2.16}$$

où

$$\Box = \sum_{j=1}^{s} \left(\partial_{\eta_j} \partial_{y_j'} - \partial_{y_j} \partial_{\eta_j'} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\partial_{\xi_j} \partial_{x_j'} - \partial_{x_j} \partial_{\xi_j'} \right) + \sum_{j=1}^{k} \left(\partial_{\tau_j} \partial_{t_j'} - \partial_{t_j} \partial_{\tau_j'} \right).$$

• Nous définissons le degré d'un monôme par

$$\deg(x^\alpha \xi^{\alpha'} \tau^{\alpha''} \hbar^\ell) = |\alpha| + |\alpha'| + |\alpha''| + 2\ell.$$

Nous désignerons par $\mathcal{D}_N$ le $\mathcal{C}^\infty(U)$-module engendré par les monômes de degré N et $\mathcal{O}_N$ le $\mathcal{C}^\infty(U)$-module des séries formelles de valuation $\geq N$. Comme dans le Chapitre 4, on a

$$\mathcal{O}_{N_1} \star \mathcal{O}_{N_2} \subset \mathcal{O}_{N_1+N_2}.$$

Les commutateurs entre séries formelles (resp. entre symboles, resp. entre opérateurs) seront notés

$$[\rho_1, \rho_2] = \mathsf{ad}_{\rho_1}\rho_2 = \rho_1 \star \rho_2 - \rho_2 \star \rho_1.$$

D'après (5.2.16), il est donné par

$$[\rho_1, \rho_2] = 2\sinh\left(\frac{\hbar}{2i}\Box\right)\rho_1\rho_2. \tag{5.2.17}$$

On a donc

$$\forall \rho_1 \in \mathcal{O}_{N_1}, \quad \forall \rho_2 \in \mathcal{O}_{N_2}, \quad \frac{i}{\hbar}[\rho_1, \rho_2] \in \mathcal{O}_{N_1+N_2-2}, \tag{5.2.18}$$

et $\frac{i}{\hbar}[\rho_1, \rho_2] = \{\rho_1, \rho_2\} + \mathcal{O}(\hbar^2)$. Enfin, nous avons l'analogue du Lemme 4.3 du Chapitre 4, à la base de l'algorithme de Birkhoff. La différence principale est la dépendance en (w, t) des coefficients, qui nécessite l'hypothèse (H3) de non-résonance sur tout un ouvert en $(w, t) = \varphi^{-1}(q)$.

Lemme 5.15. *Pour $1 \leq j \leq s$, notons $z_j = x_j + i\xi_j$ et $|z_j|^2 = x_j^2 + \xi_j^2$.*

1. *Pour toute série $\rho \in \mathcal{E}_{\mathbf{1}}$, on a :*
$$\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{|z_j|^2}\rho = \{|z_j|^2, \rho\}.$$
2. *Soit $0 \leq N < r_{\mathbf{1}}$. Pour tout $R_N \in \mathcal{D}_N$, il existe $\rho_N, K_N \in \mathcal{D}_N$ tels que*
$$R_N = K_N + \sum_{j=1}^{s} \hat{\beta}_j(w, t)\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{|z_j|^2}\rho_N$$
et $[K_N, |z_j|^2] = 0$ pour $1 \leq j \leq s$.
3. *Si $K \in \mathcal{E}_{\mathbf{1}}$ alors $[K, |z_j|^2] = 0$ pour tout $1 \leq j \leq s$ si et seulement si il existe une série formelle $F \in \mathcal{C}^\infty(U)[[I_1, \cdots, I_s, \tau, \hbar]]$ telle que*
$$K = F(|z_1|^2, \cdots, |z_s|^2, \tau, \hbar).$$

Démonstration. Le point (1) s'obtient par calcul, comme au Chapitre 4. Pour les points (2-3), il suffit de considérer le cas d'un monôme $R_N = c(w, t)z^\alpha \bar{z}^{\alpha'}\tau^{\alpha''}\hbar^\ell$. Remarquons que :

$$\mathsf{ad}_{|z_j|^2}(c(w, t)z^\alpha \bar{z}^{\alpha'}\tau^{\alpha''}\hbar^\ell) = (\alpha'_j - \alpha_j)c(w, t)z^\alpha \bar{z}^{\alpha'}\tau^{\alpha''}\hbar^\ell,$$

si bien que le monôme R_N commute avec $|z_j|^2$ $(1 \leq j \leq s)$ si et seulement si $\alpha = \alpha'$, ce qui revient à dire que R_N est une fonction des $|z_j|^2$, et cela prouve le point (3). D'autre part,

$$\sum_j \widehat{\beta}_j \mathsf{ad}_{|z_j|^2}(z^\alpha \bar{z}^{\alpha'}\tau^{\alpha''}\hbar^\ell) = \langle \alpha' - \alpha, \widehat{\beta}\rangle z^\alpha \bar{z}^{\alpha'}\tau^{\alpha''}\hbar^\ell,$$

où $\langle \gamma, \widehat{\beta}\rangle = \sum_{j=1}^s \gamma_j \widehat{\beta}_j(w, t)$. Sous l'hypothèse $|\alpha| + |\alpha'| + |\alpha''| + 2\ell < r_{\mathbf{1}}$, on a bien $|\alpha' - \alpha| < r_{\mathbf{1}}$ et donc d'après l'hypothèse de non-résonance (H3), $\langle \alpha' - \alpha, \widehat{\beta}(w, t)\rangle$ ne s'annule pas pour $(w, t) \in U$ (sauf si $\alpha = \alpha'$). Dans le cas $\alpha = \alpha'$, on prend $\rho_N = 0$ et $R_N = K_N$ commute avec les $|z_j|^2$. Dans le cas $\alpha \neq \alpha'$, on pose $K_N = 0$ et

$$\rho_N = \frac{c(w, t)}{\langle \alpha' - \alpha, \widehat{\beta}\rangle} z^\alpha \bar{z}^{\alpha'}\tau^{\alpha''}\hbar^\ell,$$

et cela permet de conclure le point (2). □

5.2.3 – La forme normale de Birkhoff formelle

Dans cette section, nous construisons la forme normale de Birkhoff à un niveau formel. Nous travaillerons sur la série de Taylor associée au symbole H de $\mathcal{L}_\hbar$, vu dans les nouvelles coordonnées $\Phi_{\mathbf{1}}$. D'après le Théorème 5.8, $\widehat{H} = H \circ \Phi_{\mathbf{1}}$ définit une série formelle de la forme

$$[\widehat{H}] = H_2 + \sum_{k\geq 3} H_k, \tag{5.2.19}$$

où $H_k \in \mathcal{D}_k$ et

$$H_2 = \langle M(w,t)\tau, \tau\rangle + \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(w,t)|z_j|^2. \tag{5.2.20}$$

Remarque 1. Plus généralement, on peut remplacer $\widehat{H}$ en $\widehat{H} + \hbar^2 R$ ce qui ne changera pas la forme du développement (5.2.19), car $\hbar^2$ est de degré 4.

Au niveau formel, la forme normale s'énonce comme suit. La différence principale avec le Chapitre 4 est que nos séries formelles dépendent de paramètres supplémentaires (y, η, t, τ) par rapport auxquels *il faut dériver* quand on considère un crochet de Poisson ou un commutateur.

Théorème 5.16. *Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_3$, il existe κ, $\rho \in \mathcal{O}_3$ tels que :*

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\rho}(H_2 + \gamma) = H_2 + \kappa + \mathcal{O}_{r_{\mathbf{1}}},$$

où κ est une fonction des oscillateurs harmoniques : $\kappa = F(|z_1|^2, \cdots, |z_s|^2, \tau, \hbar)$ pour une série formelle $F \in \mathcal{C}^\infty(U)[[I_1, \cdots, I_s, \tau, \hbar]]$. De plus, si γ est à coefficients réels, alors ρ, κ, et le reste $\mathcal{O}_{r_{\mathbf{1}}}$ le sont aussi.

Remarque 2. La série formelle

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\rho}(H) = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\tau\right)^k (H)$$

a le même sens qu'au Chapitre 4.

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur un entier $N \geq 3$. Supposons construits $\tau_{N-1}, K_3, \cdots, K_{N-1} \in \mathcal{O}_3$ avec $[K_i, |z_j|^2] = 0$ pour tout (i,j) et $K_i \in \mathcal{D}_i$, tels que :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau_{N-1}}}(H_2 + \gamma) = H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + \mathcal{O}_N.$$

Écrivons le reste sous la forme $R_N + \mathcal{O}_{N+1}$ avec $R_N \in \mathcal{D}_N$. On a alors

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\tau_{N-1}}}(H_2 + \gamma) = H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + R_N + \mathcal{O}_{N+1}.$$

Pour $\rho' \in \mathcal{O}_N$ à déterminer, on applique $e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho'}}$:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho_{N-1}+\rho'}}(H_2 + \gamma) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho'}}(H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + R_N + \mathcal{O}_{N+1}).$$

Comme $\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho'} : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k+N-2}$ il reste :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho_{N-1}+\rho'}}(H_2 + \gamma) = H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + R_N + \frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho'}(H_2) + \mathcal{O}_{N+1}. \tag{5.2.21}$$

Le terme supplémentaire $\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho'}(H_2) = -\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{H_2}(\rho')$ peut encore se simplifier. En effet d'après (5.2.20) :

$$\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{H_2}(\rho') = \frac{i}{\hbar}\left[\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle,\rho'\right] + \sum_{j=1}^{s}\left(\widehat{\beta}_j\frac{i}{\hbar}\left[|z_j|^2,\rho'\right] + |z_j|^2\frac{i}{\hbar}\left[\widehat{\beta}_j,\rho'\right]\right), \quad (5.2.22)$$

avec :

$$\frac{i}{\hbar}\left[\widehat{\beta}_j,\rho'\right] = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\hat{\beta}_j}{\partial y_i}\frac{\partial\rho'}{\partial\eta_i} - \frac{\partial\hat{\beta}_j}{\partial\eta_i}\frac{\partial\rho'}{\partial y_i}\right) + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\hat{\beta}_j}{\partial t_i}\frac{\partial\rho'}{\partial\tau_i} + \mathcal{O}_{N-1} = \mathcal{O}_{N-1},$$

puisque dériver en (y,η,t) ne diminue pas le degré. De même,

$$\begin{aligned}\frac{i}{\hbar}\left[\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle,\rho'\right] &= \sum_{j=1}^{k}\left(\langle\partial_{t_j}M(w,t)\tau,\tau\rangle\frac{\partial\rho'}{\partial\tau_j} - \frac{\partial\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle}{\partial\tau_j}\frac{\partial\rho'}{\partial t_j}\right) + \mathcal{O}_{N+1}\\ &= \mathcal{O}_{N+1}\end{aligned}$$

et donc (5.2.22) devient :

$$\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{H_2}(\rho') = \sum_{j=1}^{s}\left(\hat{\beta}_j\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{|z_j|^2}(\rho')\right) + \mathcal{O}_{N+1}.$$

On injecte ceci dans (5.2.21) pour obtenir

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{\rho_{N-1}+\rho'}}(H_2+\gamma) = H_2 + K_3 + \cdots + K_{N-1} + R_N - \sum_{j=1}^{s}\hat{\beta}_j\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{|z_j|^2}(\rho') + \mathcal{O}_{N+1}.$$

Nous cherchons donc $K_N, \rho' \in \mathcal{D}_N$ tels que

$$R_N = K_N + \sum_{j=1}^{s}\hat{\beta}_j\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_{|z_j|^2}(\rho'),$$

avec $[K_N, |z_j|^2] = 0$. D'après le Lemme 5.15, on peut résoudre cette équation tant que $N < r_{\mathbf{1}}$, ce qui conclut la preuve. Comme dans le Chapitre 4, on peut résoudre cette équation dans $\mathbf{R}$. □

5.2.4 – Quantification de la forme normale

Dans ce chapitre, nous noterons $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$ l'oscillateur harmonique agissant sur la variable x_j. Il est donné par

$$\mathcal{I}_\hbar^{(j)} = \mathsf{Op}_\hbar^w(\xi_j^2 + x_j^2) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2. \quad (5.2.23)$$

Cette section est consacrée à la quantification des théorèmes 5.8 et 5.16 des sections précédentes. Nous obtiendrons une forme normale $\mathcal{N}_\hbar$ qui est fonction des oscillateurs harmoniques $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$. Nous démontrons le résultat suivant, dont l'ingrédient principal est le Théorème d'Egorov.

Théorème 5.17. *Si Ω est suffisamment petit, il existe :*

1. *Un opérateur microlocalement unitaire $\mathsf{U}_\hbar : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d_{(x,y,t)}) \to \mathsf{L}^2(M)$ qui quantifie un symplectomorphisme $\tilde{\Phi}_{\mathbf{1}} = \Phi_{\mathbf{1}} + \mathcal{O}((x,\xi,\tau)^2)$ microlocalement sur $U'_{\mathbf{1}} \times U_{\mathbf{1}}$.*
2. *Une fonction $f^\star_{\mathbf{1}} : \mathbf{R}^{2s+2k}_{(y,\eta,t,\tau)} \times \mathbf{R}^s_I \times [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, telle que*

$$f^\star_{\mathbf{1}}(y,\eta,t,\tau,I,\hbar) \leq C\left((|I|+\hbar)^2 + |\tau|(|I|+\hbar) + |\tau|^3\right),$$

3. *Un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{R}_\hbar$ dont le symbole est $\mathcal{O}((x,\xi,\tau,\hbar^{1/2})^{r_1})$ sur $U'_{\mathbf{1}}$,*

tels que

$$\mathsf{U}^*_\hbar \mathcal{L}_\hbar \mathsf{U}_\hbar = \mathcal{N}_\hbar + \mathcal{R}_\hbar,$$

avec

$$\mathcal{N}_\hbar = \mathsf{Op}^w_\hbar \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^s \mathcal{I}^{(j)}_\hbar \mathsf{Op}^w_\hbar \widehat{\beta}_j(w,t) + \mathsf{Op}^w_\hbar f^\star_{\mathbf{1}}(y,\eta,t,\tau,\mathcal{I}^{(1)}_\hbar,\cdots,\mathcal{I}^{(s)}_\hbar,\hbar).$$

Remarque 1. $\mathsf{U}_\hbar$ est un opérateur intégral de Fourier, et il quantifie $\tilde{\Phi}_{\mathbf{1}}$ au sens suivant :

- Pour tout opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel $\mathcal{A}$ sur M de symbole $a_\hbar = a_0 + \mathcal{O}(\hbar^2)$, l'opérateur $\mathsf{U}^*_\hbar \mathcal{A} \mathsf{U}_\hbar$ est $\hbar$-pseudodifférentiel sur $\mathbf{R}^d_{(x,y,t)}$ et son symbole $\sigma_\hbar$ vérifie

$$\sigma_\hbar = a_0 \circ \tilde{\Phi}_{\mathbf{1}} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{sur } U'_{\mathbf{1}}.$$

- Si de plus $a_\hbar$ est à support compact contenu dans $U_{\mathbf{1}}$, alors $\sigma_\hbar$ est à support compact contenu dans $\tilde{\Phi}^{-1}_{\mathbf{1}}(\mathsf{supp}\ a_\hbar)$.

Remarque 2. En prenant $\hbar = 0$, on obtient une forme normale de Birkhoff *classique* : La transformation canonique $\tilde{\Phi}_{\mathbf{1}}$ vérifie

$$H \circ \tilde{\Phi}_{\mathbf{1}} = \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^s \widehat{\beta}_j(w,t)|z_j|^2 + f^\star_{\mathbf{1}}(w,t,\tau,|z_1|^2,\cdots,|z_s|^2,0) + \mathcal{O}((z,\tau)^{r_1}),$$

qui dit que la dépendance en z de l'Hamiltonien peut se ramener à une fonction d'oscillateurs harmoniques, modulo $\mathcal{O}((z,\tau)^{r_1})$. Remarquons que, pour énoncer (et démontrer) ce résultat, nous n'aurions pas eu besoin des coordonnées (w,t) pour paramétrer $\Sigma = j(\Omega)$. Autrement dit, nous aurions pu rester dans les coordonnées $q = \pi \circ \varphi(w,t)$ et dire "Il existe une transformation canonique Φ et une fonction f telle que" :

$$H \circ \Phi(q,x,\xi,\tau) = \langle M(q)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^s \beta_j(q)|z_j|^2 + f(q,\tau,|z_1|^2,\cdots,|z_s|^2) + \mathcal{O}((\tau,z)^{r_1}).$$

Cela dit, pour obtenir un résultat quantifié, il faudrait trouver une quantification adapté, qui permette d'associer à toute fonction sur Σ un opérateur sur un espace

de Hilbert. On entre donc dans la problématique de quantification d'une variété présymplectique (Σ, B). Développer une telle approche (à l'aide d'une quantification de Toeplitz par exemple) permettrait d'étudier l'influence de la géométrie globale de la variété Σ. Nous avons introduit des coordonnées canoniques locales (y, η, τ) sur Σ pour pouvoir quantifier à l'aide de la quantification de Weyl. Remarquons pour conclure cette remarque que d'autres contraintes nous imposent de rester sur un petit ouvert (l'hypothèse de non-résonance H3) ce qui diminue l'intérêt de la recherche d'une quantification globale dans l'immédiat.

Remarque 3. La présence des paramètres (y, η, t, τ) dans la forme normale formelle implique une quantification supplémentaire, d'où le terme en $\mathsf{Op}_\hbar^w f_{\mathbf{1}}^\star$. Il s'agit d'une quantification par rapport aux variables (y, η, t, τ) d'un symbole à valeurs opérateurs $f_{\mathbf{1}}^\star(y, \eta, t, \tau, \mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(s)}, \hbar)$. Ce symbole-opérateur est particulièrement simple puisqu'on peut le diagonaliser explicitement. En notant $h_{n_j}^j(x_j)$ la n_j-ième fonction propre de $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$, associée à la valeur propre $(2n_j+1)\hbar$, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^s$:

$$f_{\mathbf{1}}^\star(y, \eta, t, \tau, \mathcal{I}_\hbar^{(1)}, \cdots, \mathcal{I}_\hbar^{(s)}, \hbar) h_n(x) = f_{\mathbf{1}}^\star(y, \eta, \tau, (2n+1)\hbar, \hbar) h_n(x),$$

où $h_n(x) = h_{n_1}^1(x_1) \cdots h_{n_s}^s(x_s)$. Par conséquent, l'opérateur $\mathsf{Op}_\hbar^w f_{\mathbf{1}}^\star$ vérifie (et cela peut être pris comme définition), pour tout $u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}_{y,t}^{s+k})$,

$$(\mathsf{Op}_\hbar^w f_{\mathbf{1}}^\star) u \otimes h_n = (\mathsf{Op}_\hbar^w f_{\mathbf{1}}^\star(y, \eta, t, \tau, (2n+1)\hbar, \hbar) u) \otimes h_n.$$

Nous séparons la preuve du théorème 5.17 en plusieurs Lemme. Le Lemme 5.18 quantifie le changement de coordonnées $\Phi_{\mathbf{1}}$ du Théorème 5.8. Le Lemme 5.19 quantifie la forme normale formelle du Théorème 5.16.

Lemme 5.18. *Il existe un opérateur intégral de Fourier microlocalement unitaire $\mathsf{V}_\hbar : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d) \to \mathsf{L}^2(M)$ qui quantifie $\Phi_{\mathbf{1}}$ microlocalement sur $U_{\mathbf{1}}' \times U_{\mathbf{1}}$. On a donc*

$$\mathsf{V}_\hbar^* \mathcal{L}_\hbar \mathsf{V}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w(\sigma_\hbar),$$

pour un symbole $\sigma_\hbar$ tel que

$$\sigma_\hbar = \widehat{H} + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \text{sur } U_{\mathbf{1}}'.$$

Démonstration. Ce résultat est une application directe du Théorème d'Egorov 3.23. □

Lemme 5.19. *Il existe un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel borné $\mathcal{Q}_\hbar$ dont le symbole est à support compact tel que*

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} \mathsf{Op}_\hbar^w(\sigma_\hbar) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar} = \mathcal{N}_\hbar + \mathcal{R}_\hbar,$$

où $\mathcal{N}_\hbar$ et $\mathcal{R}_\hbar$ sont sous la forme annoncée dans le Théorème 5.17.

Démonstration. Le symbole $\sigma_\hbar$ est de la forme $\widehat{H} + \mathcal{O}(\hbar^2)$ sur $U_{\mathbf{1}}'$. Par conséquent, d'après (5.2.19) sa série formelle associée est de la forme $[\sigma_\hbar] = H_2 + \gamma$ pour un

$\gamma \in \mathcal{O}_3$. En appliquant l'algorithme de Birkhoff (Théorème 5.16) à cette série, on obtient $\kappa, \rho \in \mathcal{O}_3$ tels que

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathsf{ad}_\rho}(H_2+\gamma) = H_2 + \kappa + \mathcal{O}_{r_1},$$

où κ est une fonction des oscillateurs harmoniques :

$$\kappa = \sum_{2|\alpha|+|\alpha'|+2\ell\geq 3} c_{\alpha\alpha'\ell}(w,t)|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_s|^{2\alpha_s}\tau_1^{\alpha'_1}\cdots\tau_k^{\alpha'_k}\hbar^\ell.$$

On choisit un opérateur $\mathcal{Q}_\hbar$ dont le symbole est $\sigma^T(\mathcal{Q}_\hbar) = \rho$, et une fonction $f_{\mathbf{1}}$ dont la série de Taylor est donnée par

$$[f_{\mathbf{1}}] = \sum_{2|\alpha|+|\alpha'|+2\ell\geq 3} c_{\alpha\alpha'\ell}(w,t) I_1^{\alpha_1}\cdots I_s^{\alpha_s}\tau_1^{\alpha'_1}\cdots\tau_k^{\alpha'_k}\hbar^\ell.$$

La même preuve que celle du Théorème 4.5 du Chapitre 4 permet de conclure. □

Pour terminer la démonstration du Théorème 5.17, on applique les Lemmes 5.18 et 5.19 et on pose $\mathsf{U}_\hbar = \mathsf{V}_\hbar e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}$. D'après le Théorème d'Egorov, $e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{Q}_\hbar}$ quantifie la transformation canonique φ_Q, flot au temps 1 du Hamiltonien Q (symbole principal de $\mathcal{Q}_\hbar$). Par composition, $\mathsf{U}_\hbar$ quantifie donc $\tilde{\Phi}_{\mathbf{1}} = \Phi_{\mathbf{1}} \circ \varphi_Q$. Par construction, $[Q] \in \mathcal{O}_3$ donc $Q = \mathcal{O}((\tau,x,\xi)^3)$. Ainsi son flot vérifie

$$\varphi_Q(w,t,\tau,x,\xi) = (w,t,\tau,x,\xi) + \mathcal{O}((\tau,x,\xi)^2),$$

et donc $\tilde{\Phi}_{\mathbf{1}} = \Phi_{\mathbf{1}} + \mathcal{O}((\tau,x,\xi)^2)$. Enfin, notons le résultat suivant, qui permet de voir $\mathcal{N}_\hbar$ comme une perturbation de H_2.

Lemme 5.20. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $f_{\mathbf{1}}^\star$ telle que*

$$|f_{\mathbf{1}}^\star(w,t,\tau,I,\hbar)| \leq \varepsilon\left(\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^s \widehat{\beta}_j(w,t)I_j.\right)$$

Démonstration. La fonction $f_{\mathbf{1}}^\star$ est définie par sa série de Taylor en $(\tau,I,\hbar) = 0$. Par conséquent, on peut choisir son support arbitrairement petit. Pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on choisit $f_{\mathbf{1}}^\star$ supporté là où $|I| + |\tau| + \hbar \leq \varepsilon$. Le développement de Taylor de $f_{\mathbf{1}}^\star$ assure que :

$$|f_{\mathbf{1}}^\star| \leq C((|I|+\hbar)^2 + |\tau|(|I|+\hbar) + |\tau|^3)$$

et donc

$$|f_{\mathbf{1}}^\star| \leq C\varepsilon(|I| + |\tau|^2).$$

La forme quadratique $\tau \mapsto \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle$ est équivalente à la norme $|\tau|^2$, et les $\widehat{\beta}_j$ sont bornés inférieurement donc

$$|f_{\mathbf{1}}^\star| \leq \tilde{C}\varepsilon\left(\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^s \widehat{\beta}_j(w,t)I_j\right).$$

Quitte à changer ε en $\varepsilon/\tilde{C}$, le résultat est démontré. □

5.3 – Comparaison des spectres de $\mathcal{L}_\hbar$ et de $\mathcal{N}_\hbar$

5.3.1 – Spectre de $\mathcal{N}_\hbar$

Cette section est consacrée à l'étude du spectre de la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$. Pour $n \in \mathbf{N}^s$, notons $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ l'opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel sur $\mathbf{R}^{s+k}_{(y,t)}$ de symbole

$$N_\hbar^{[n]} = \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(w,t)(2n_j+1)\hbar + f_{\mathbf{1}}^\star(w,t,\tau,(2n+1)\hbar,\hbar). \tag{5.3.1}$$

$\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$ est donc l'opérateur obtenu en remplaçant $\mathcal{I}_\hbar^{[j]}$ par sa valeur propre $(2n_j+1)\hbar$ dans l'expression de $\mathcal{N}_\hbar$. Quelque soit $1 \leq j \leq s$ et $n_j \geq 0$, nous noterons h_{n_j} la fonction de Hermite en la variable x_j. Il s'agit de la fonction propre de $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$ telle que :

$$\mathcal{I}_\hbar^{(j)} h_{n_j} = \hbar(2n_j+1)h_{n_j}.$$

$(h_{n_j})_{n_j\geq 0}$ forme une base Hilbertienne de $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}_{x_j})$. Si $n \in \mathbf{N}^s$, h_n représentera la fonction

$$h_n(x) = h_{n_1} \otimes \cdots \otimes h_{n_s}(x) = h_{n_1}(x_1)\cdots h_{n_s}(x_s). \tag{5.3.2}$$

$(h_n)_{n\in\mathbf{N}^s}$ forme une base Hilbertienne de $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^s_x)$. Nous pouvons utiliser cette base pour décomposer l'espace $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{2s+k}_{x,y,t})$ sur lequel $\mathcal{N}_\hbar$ agit :

$$\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{2s+k}_{x,y,t}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}^s} \left(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{s+k}_{y,t}) \otimes h_n\right) \tag{5.3.3}$$

En tant que fonction des oscillateurs harmoniques $\mathcal{I}_\hbar^{(j)}$, la forme normale $\mathcal{N}_\hbar$ agit diagonalement selon la décomposition (5.3.3).

Lemme 5.21. *Pour tout $u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{s+k}_{(y,t)})$, et tout $n \in \mathbf{N}^s$,*

$$\mathcal{N}_\hbar(u \otimes h_n) = \left(\mathcal{N}_\hbar^{[n]} u\right) \otimes h_n.$$

En particulier, le spectre de $\mathcal{N}_\hbar$ est donné par

$$\mathsf{sp}\,(\mathcal{N}_\hbar) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^s} \left(\mathsf{sp}\ \mathcal{N}_\hbar^{[n]}\right), \tag{5.3.4}$$

et les multiplicités sont préservées. De plus, quelque soit $b_1 > 0$, il existe $N_{max} > 0$ tel que pour tout $\hbar << 1$,

$$\mathsf{sp}\,(\mathcal{N}_\hbar) \cap (-\infty, b_1\hbar) = \bigcup_{|n|\leq N_{max}} \left(\mathsf{sp}\ \mathcal{N}_\hbar^{[n]} \cap (-\infty, b_1\hbar)\right), \tag{5.3.5}$$

Démonstration. Rappelons que

$$\mathcal{N}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w\left(\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(w,t)\mathcal{I}_\hbar^{(j)} + f_{\mathbf{1}}^\star(w,t,\tau,\mathcal{I}_\hbar^{(1)},\cdots,\mathcal{I}_\hbar^{(s)},\hbar)\right),$$

si bien que $\mathcal{N}_\hbar(u \otimes h_n) = \left(\mathcal{N}_\hbar^{[n]} u\right) \otimes h_n$. Si $u_\hbar$ est fonction propre de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$, associée à la valeur propre $\lambda_\hbar$, on en déduit que $u_\hbar \otimes h_n$ est fonction propre de $\mathcal{N}_\hbar$:

$$\mathcal{N}_\hbar(u_\hbar \otimes h_n) = \lambda_\hbar u_\hbar \otimes h_n.$$

Réciproquement, $\mathcal{N}_\hbar$ agissant de manière diagonale par blocs selon la décomposition (5.3.3), toute fonction propre $\psi_\hbar$ de $\mathcal{N}_\hbar$ est de la forme $\psi_\hbar = u_\hbar \otimes h_n$ pour un certain $n(\hbar) \in \mathbf{N}^s$. Montrons que, si la valeur propre associée est $\lambda_\hbar \leq b_1\hbar$ alors $n(\hbar)$ est borné uniformément par rapport à $\hbar$. En effet, d'après le Lemme 5.20 on a

$$\begin{aligned} N_\hbar^{[n(\hbar)]} &\geq (1-\varepsilon)\left(\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum_{j=1}^{s} \widehat{\beta}_j(w,t)(2n_j(\hbar)+1)\hbar\right), \\ &\geq (1-\varepsilon)m(2|n(\hbar)|+1), \end{aligned}$$

avec $m = \min_j \min_{(w,t)} \widehat{\beta}_j$. D'après l'inégalité de Garding on a donc :

$$\lambda_\hbar \|u_\hbar\|^2 = \langle \mathcal{N}_\hbar^{[n(\hbar)]} u_\hbar, u_\hbar\rangle \geq (1-\varepsilon)m(2|n(\hbar)|+1)\hbar\|u_\hbar\|^2.$$

Il reste donc $C|n(\hbar)|\hbar \leq \lambda_\hbar \leq b_1\hbar$, et $n(\hbar)$ est bien borné. □

5.3.2 – Microlocalisation des fonctions propres

Dans cette section nous montrons que les fonctions propres de $\mathcal{L}_\hbar$ et de $\mathcal{N}_\hbar$ sont microlocalisées dans l'espace des phases sur un voisinage de taille $\hbar^{1/2}$ de Σ, et localisée en espace dans l'ouvert Ω. Rappelons que $\tilde{b}_1$ est choisi tel que

$$K_{\tilde{b}_1} = \{b(q) \leq \tilde{b}_1\} \subset\subset \Omega. \tag{5.3.6}$$

Lemme 5.22. *Soit $\delta \in (0,1/2)$ et $b_1 \in (b_0, \tilde{b}_1)$. Soit $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ une fonction plateau telle $\chi_0 = 1$ sur un voisinage de $K_{\tilde{b}_1}$. Soit $\chi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(T^*M)$ telle que $\chi_1 = 1$ sur un voisinage de Σ. Alors toute fonction propre $\psi_\hbar$ de $\mathcal{L}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq b_1\hbar$ vérifie :*

$$\psi_\hbar = \chi_0(q)\mathsf{Op}_\hbar^w \chi_1\left(\hbar^{-\delta}(q,p)\right)\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar,$$

où le $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ est dans $\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(M), \mathsf{L}^2(M))$ et ne dépend pas de $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$.

Démonstration. Soit $g_\hbar \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$g_\hbar(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq b_1\hbar, \\ 0 & \text{si } \lambda \geq \tilde{b}_1\hbar. \end{cases}$$

Alors pour la fonction propre $\psi_\hbar$ on a

$$\psi_\hbar = g_\hbar(\lambda_\hbar)\psi_\hbar = g_\hbar(\mathcal{L}_\hbar)\psi_\hbar,$$

car $\lambda_\hbar \leq b_1\hbar$. En notant $\chi = 1 - \chi_1$, nous allons montrer que

$$\|\mathsf{Op}_\hbar^w \chi(\hbar^{-\delta}(q,p)) g_\hbar(\mathcal{L}_\hbar)\|_{\mathcal{L}(\mathsf{L}^2,\mathsf{L}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty), \tag{5.3.7}$$

ce qui prouvera que $\psi_\hbar = \mathsf{Op}^w_\hbar \chi_1(\hbar^{-\delta}(q,p))\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar$ uniformément par rapport à $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$. D'après les estimations d'Agmon 2.6, on peut également tronquer en espace : $\psi_\hbar = \chi_0\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$, ce qui permettra de conclure.

Pour alléger les notations, notons $\chi^w := \mathsf{Op}^w_\hbar \chi(\hbar^{-\delta}(q,p))$. Pour tout $\psi \in \mathsf{L}^2(M)$, notons $\varphi = g_\hbar(\mathcal{L}_\hbar)\psi$. On a alors :

$$\langle \mathcal{L}_\hbar \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle = \langle \chi^w \mathcal{L}_\hbar \varphi, \chi^w \varphi\rangle + \langle \left[\mathcal{L}_\hbar, \chi^w\right]\varphi, \chi^w\varphi\rangle. \tag{5.3.8}$$

Nous allons majorer les deux termes de droite, et minorer le terme de gauche. Tout d'abord, comme $g_\hbar(\lambda)$ est supporté en $\lambda \leq \tilde{b}_1\hbar$ on a,

$$\langle \chi^w \mathcal{L}_\hbar \varphi, \chi^w \varphi\rangle \leq \tilde{b}_1\hbar \|\chi^w\varphi\|^2. \tag{5.3.9}$$

D'autre part, le commutateur $\left[\mathcal{L}_\hbar, \chi^w\right]$ est un opérateur pseudodifférentiel borné d'ordre $\hbar$, dont le symbole est supporté sur $\mathsf{supp}\chi$. Donc, en notant $\underline{\chi}$ une fonction ayant les mêmes propriétés que χ, telle que $\underline{\chi} = 1$ sur le support de χ, on a :

$$\langle \left[\mathcal{L}_\hbar, \chi^w\right]\varphi, \chi^w\varphi\rangle \leq C\hbar \|\underline{\chi}^w\varphi\| \|\chi^w\varphi\|. \tag{5.3.10}$$

Enfin, le symbole de χ^w vaut 0 sur un voisinage de taille $\hbar^\delta$ de Σ. Le symbole de $\mathcal{L}_\hbar$, donné par $|p - A(q)|^2$, est donc $\geq c\hbar^{2\delta}$ sur le support du symbole de χ^w. D'après l'inégalité de Gårding, on a donc

$$\langle \mathcal{L}_\hbar \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle \geq c\hbar^{2\delta} \|\chi^w\varphi\|^2. \tag{5.3.11}$$

En utilisant cette dernière inégalité dans (5.3.8), puis en majorant le membre de droite à l'aide de (5.3.9) et (5.3.10) on obtient :

$$c\hbar^{2\delta}\|\chi^w\varphi\|^2 \leq \tilde{b}_1\hbar\|\chi^w\varphi\|^2 + C\hbar\|\underline{\chi}^w\varphi\|\|\chi^w\varphi\|,$$

et on en déduit que

$$\|\chi^w\varphi\| \leq C\hbar^{1-2\delta}\|\underline{\chi}^w\varphi\|.$$

En itérant avec $\underline{\chi}$ à la place de χ, on obtient finalement pour $N > 0$ arbitrairement grand

$$\|\chi^w\varphi\| \leq C_N\hbar^N\|\varphi\|.$$

Ceci est vrai pour tout ψ, avec $\varphi = g_\hbar(\mathcal{L}_\hbar)\psi$ donc on a bien $\|\chi^w g_\hbar(\mathcal{L}_\hbar)\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$. □

Lemme 5.23. *Soit $\delta \in (0, 1/2)$ et $b_1 \in (b_0, \tilde{b}_1)$. Soit $\chi_1 \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R}^{2s+k}_{x,\xi,\tau})$ égale à 1 sur un voisinage de 0. Alors toute fonction propre $\psi_\hbar$ de $\mathcal{N}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq b_1\hbar$ vérifie :*

$$\psi_\hbar = \mathsf{Op}^w_\hbar \chi_1(\hbar^{-\delta}(x,\xi,\tau))\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar,$$

où le $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ est dans $\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d), \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d))$ et ne dépend pas de $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$.

Démonstration. De même que pour le Lemme précédent, il suffit de montrer que

$$\|\chi^w g_\hbar(\mathcal{N}_\hbar)\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

où $\chi^w = \mathsf{Op}_\hbar^w(1-\chi_1)(\hbar^{-\delta}(x,\xi,\tau))$. On démontre ceci de la même manière. Pour $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ et $\varphi = g_\hbar(\mathcal{N}_\hbar)\psi$ on a

$$\langle \mathcal{N}_\hbar \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle = \langle \chi^w \mathcal{N}_\hbar \varphi, \chi^w \varphi\rangle + \langle \big[\mathcal{N}_\hbar, \chi^w\big]\varphi, \chi^w\varphi\rangle. \tag{5.3.12}$$

On majore les membres de droite comme précédemment, et on utilise le Lemme 5.20 pour minorer le membre de gauche :

$$\langle \mathcal{N}_\hbar \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle \geq (1-\varepsilon)\langle \mathcal{H}_2 \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle, \tag{5.3.13}$$

avec $\mathcal{H}_2 = \mathsf{Op}_\hbar^w\left(\langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \sum \beta_j(w,t)|z_j|^2\right)$. Le symbole de χ^w vaut 0 sur un voisinage de taille $\hbar^\delta$ de $x=\xi=\tau=0$. Par conséquent on peut minorer le symbole de $\mathcal{H}_2$ et utiliser l'inégalité de Gårding :

$$\langle \mathcal{H}_2 \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle \geq c\hbar^{2\delta}\|\chi^w\varphi\|^2. \tag{5.3.14}$$

La fin de la démonstration est identique au Lemme précédent.

□

Lemme 5.24. *Soit $b_1 \in (b_0, \tilde{b}_1)$, et $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{2s+k}_{w,t})$ telle que $\chi_0 = 1$ sur un voisinage de $\{\widehat{b}(w,t) \leq \tilde{b}_1\}$. Alors toute fonction propre de $\mathcal{N}_\hbar$ associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq b_1\hbar$ vérifie :*

$$\psi_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w \chi_0(w,t)\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar,$$

où le $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ est dans $\mathcal{L}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d), \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d))$ et ne dépend pas de $(\lambda_\hbar, \psi_\hbar)$.

Démonstration. Toute fonction propre de $\mathcal{N}_\hbar$ est de la forme $\psi_\hbar(x,y,t) = u_\hbar(y,t)h_n(x)$ pour une certaine fonction de Hermite $h_n(x)$ avec $|n| \leq N_{\max}$ et $u_\hbar$ une fonction propre de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$. Il suffit donc de montrer ce résultat pour les fonctions propres de $\mathcal{N}_\hbar^{[n]}$. Si $u_\hbar$ est une telle fonction propre, associée à une valeur propre $\lambda_\hbar \leq b_1\hbar$, on a

$$u_\hbar = g_\hbar(\mathcal{N}_\hbar^{[n]})u_\hbar.$$

Montrons que

$$\|\chi^w g_\hbar(\mathcal{N}_\hbar^{[n]})\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

avec $\chi^w = \mathsf{Op}_\hbar^w(1-\chi_0)$, ce qui permettra de conclure. Pour tout $u \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{k+s})$, on note $\varphi = g_\hbar(\mathcal{N}_\hbar^{[n]})u$, et on a :

$$\langle \mathcal{N}_\hbar^{[n]} \chi^w \varphi, \chi^w \varphi\rangle = \langle \chi^w \mathcal{N}_\hbar^{[n]} \varphi, \chi^w \varphi\rangle + \langle \big[\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, \chi^w\big]\varphi, \chi^w\varphi\rangle. \tag{5.3.15}$$

D'une part on a la minoration

$$\langle \chi^w \mathcal{N}_\hbar^{[n]} \varphi, \chi^w \varphi\rangle \leq \tilde{b}_1\hbar\|\chi^w\varphi\|^2. \tag{5.3.16}$$

D'autre part, le commutateur $\left[\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, \chi^w\right]$ est un opérateur $\hbar$-pseudodifférentiel borné dont le symbole est d'ordre $\hbar$ et supporté sur $\mathsf{supp}\chi$. De plus son symbole principal est $\{N_\hbar^{[n]}, \chi\}$. D'après l'expression de $N_\hbar^{[n]}$ on a

$$\langle \left[\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, \chi^w\right]\varphi, \chi^w\varphi\rangle \leq \hbar(1+C\hbar)\langle \underline{\chi}^w|\tau|^w\varphi, \chi^w\varphi\rangle,$$

où $\underline{\chi}$ vérifie les mêmes propriétés que χ et vaut 1 sur $\mathsf{supp}\chi$. D'après le Lemme 5.23, on peut ajouter une troncature en $|\tau| \leq \hbar^\delta$ et on obtient

$$\langle \left[\mathcal{N}_\hbar^{[n]}, \chi^w\right]\varphi, \chi^w\varphi\rangle \leq C\hbar^{1+\delta}\|\underline{\chi}^w\varphi\|\|\chi^w\varphi\|. \tag{5.3.17}$$

Enfin, pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a la minoration

$$\langle \mathcal{N}_\hbar^{[n]}\chi^w\varphi, \chi^w\varphi\rangle \geq \hbar(\tilde{b}_1+\varepsilon)\|\chi^w\varphi\|^2$$

car $N_\hbar^{[n]}(w,t) \geq \hbar\widehat{b}(w,t)$ et χ vaut 0 sur un voisinage de $\{\widehat{b}(w,t) \leq \tilde{b}_1\}$. En utilisant cette dernière minoration dans (5.3.15), puis en majorant les membres de droite par (5.3.16) et (5.3.17), on obtient

$$\hbar(\tilde{b}_1+\varepsilon)\|\chi^w\varphi\|^2 \leq \hbar\tilde{b}_1\|\chi^w\varphi\|^2 + C\hbar^{1+\delta}\|\underline{\chi}^w\varphi\|\|\chi^w\varphi\|. \tag{5.3.18}$$

Ainsi

$$\varepsilon\|\chi^w\varphi\| \leq C\hbar^\delta\|\underline{\chi}^w\varphi\|,$$

et en itérant avec $\underline{\chi}$ à la place de χ on obtient le résultat voulu. □

5.3.3 – Preuve du Théorème 5.1

Pour terminer la démonstration du Théorème 5.1, il reste à montrer que

$$\lambda_n(\mathcal{L}_\hbar) = \lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{r_1/2-\varepsilon})$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$ où

$$N_\hbar^{\mathsf{max}} = \max\{n \in \mathbf{N}, \quad \lambda_n(\mathcal{L}_\hbar) \leq b_1\hbar\}.$$

Nous allons démontrer les deux inégalités successivement avec les deux lemmes suivants.

Lemme 5.25. *On a*

$$\lambda_n(\mathcal{L}_\hbar) \leq \lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon})$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$.

Démonstration. Pour $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$, notons $\psi_n^\hbar$ la fonction propre normalisée de $\mathcal{N}_\hbar$ associée à $\lambda_n(\mathcal{N}_\hbar)$, et

$$\varphi_n^\hbar = \mathsf{U}_\hbar\psi_n^\hbar. \tag{5.3.19}$$

Nous allons utiliser $\varphi_n^\hbar$ comme quasimode pour $\mathcal{L}_\hbar$. Soit $N \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$ et

$$V_N^\hbar = \mathsf{Vect}\{\varphi_n^\hbar; \quad 1 \leq n \leq N\}.$$

Pour $\varphi \in V_N^\hbar$ on utilisera la notation $\psi = \mathsf{U}_\hbar^{-1}\varphi$. D'après le Théorème 5.17, on a

$$\langle \mathcal{L}_\hbar \varphi, \varphi\rangle = \langle \mathcal{N}_\hbar \psi, \psi\rangle + \langle \mathcal{R}_\hbar \psi, \psi\rangle \leq \lambda_N(\mathcal{N}_\hbar)\|\psi\|^2 + \langle \mathcal{R}_\hbar \psi, \psi\rangle. \tag{5.3.20}$$

D'après les lemmes 5.23 et 5.24, ψ est microlocalisée là où $|(x,\xi,\tau)| \leq \hbar^\delta$ et $(w,t) \in \{\widehat{b}(w,t) \leq \tilde{b}_1\} \subset U$. Or le symbole de $\mathcal{R}_\hbar$ vérifie $R_\hbar = \mathcal{O}((x,\xi,\tau,\hbar^{1/2})^{r_1})$ pour $(w,t) \in U$, donc

$$\langle \mathcal{R}_\hbar \psi, \psi\rangle = \mathcal{O}(\hbar^{\delta r_1}) = \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon}), \tag{5.3.21}$$

pour $\delta \in (0,1/2)$ bien choisi. D'après (5.3.20) et (5.3.21) on a

$$\langle \mathcal{L}_\hbar \varphi, \varphi\rangle \leq (\lambda_N(\mathcal{L}_\hbar) + C\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon})\|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in V_N^\hbar.$$

Comme $V_N^\hbar$ est de dimension N, le principe du min-max permet de conclure que

$$\lambda_N(\mathcal{L}_\hbar) \leq \lambda_N(\mathcal{N}_\hbar) + C\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon}. \tag{5.3.22}$$

□

Lemme 5.26. *On a*

$$\lambda_n(\mathcal{N}_\hbar) \leq \lambda_n(\mathcal{L}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon}),$$

uniformément par rapport à $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$.

Démonstration. Pour $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$ notons $\psi_n^\hbar$ la fonction propre normalisée de $\mathcal{L}_\hbar$ associée à $\lambda_n(\mathcal{L}_\hbar)$ et

$$\varphi_n^\hbar = \mathsf{U}_\hbar^* \psi_n^\hbar.$$

Nous allons utiliser $\varphi_n^\hbar$ comme quasimode pour $\mathcal{N}_\hbar$. Soit $N \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}]$ et

$$V_N^\hbar = \mathsf{Vect}\{\varphi_n^\hbar, \quad 1 \leq n \leq N\}.$$

Pour $\varphi \in V_N^\hbar$ on utilisera la notation $\psi = \mathsf{U}_\hbar \varphi$. D'après le Théorème 5.17 on a

$$\langle \mathcal{N}_\hbar \varphi, \varphi\rangle = \langle \mathcal{L}_\hbar \psi, \psi\rangle + \langle \mathcal{R}_\hbar \varphi, \varphi\rangle \leq \lambda_N(\mathcal{L}_\hbar)\|\varphi\|^2 + \langle \mathcal{R}_\hbar \varphi, \varphi\rangle. \tag{5.3.23}$$

D'après le lemme 5.22, ψ est microlocalisée là où $b(q) \leq \tilde{b}_1$ et sur un voisinage de taille $\hbar^\delta$ de Σ. Par conséquent, d'après le Théorème d'Egorov $\varphi = \mathsf{U}_\hbar^* \psi$ est microlocalisée là où $\mathsf{dist}(\tilde{\Phi}_1(w,z,t,\tau), \Sigma) \leq \hbar^\delta$ c'est à dire là où $|(x,\xi,\tau)| \leq \hbar^\delta$. Or le symbole de $\mathcal{R}_\hbar$ vérifie $R_\hbar = \mathcal{O}((x,\xi,\tau,\hbar^{1/2})^{r_1})$ donc :

$$\langle \mathcal{R}_\hbar \varphi, \varphi\rangle \leq \mathcal{O}(\hbar^{\delta r_1})\|\varphi\|^2 = \mathcal{O}(\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon})\|\varphi\|^2, \tag{5.3.24}$$

pour $\delta \in (0,1/2)$ bien choisi. D'après (5.3.23) et (5.3.24) on a donc

$$\langle \mathcal{N}_\hbar \varphi, \varphi\rangle \leq (\lambda_N(\mathcal{L}_\hbar) + C\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon})\|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in V_N^\hbar. \tag{5.3.25}$$

Comme $V_N^\hbar$ est de dimension N, le principe du min-max permet de conclure que

$$\lambda_N(\mathcal{N}_\hbar) \leq \lambda_N(\mathcal{L}_\hbar) + C\hbar^{\frac{r_1}{2}-\varepsilon}.$$

□

5.4 – A second normal form in the case $k > 0$

The following section, taken from the english-written paper [Mor20a], focuses on the case $k > 0$ to study the influence of the Kernel of $\mathbf{B}$.

In the last sections, we reduced the spectrum of $\mathcal{L}_\hbar$ to the spectrum of a normal form $\mathcal{N}_\hbar$. Moreover, if $b_1 > b_0$ is sufficiently close to b_0 then the spectrum of $\mathcal{N}_\hbar$ in $(-\infty, b_1\hbar)$ is given by the spectrum of $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$, an $\hbar$-pseudodifferential operator on $\mathbf{R}^{s+k}_{(y,t)}$ with symbol

$$N_\hbar^{[0]} = \langle M(y,\eta,t)\tau,\tau\rangle + \hbar\widehat{b}(y,\eta,t) + f_{\mathbf{1}}^\star(y,\eta,t,\tau,\hbar). \tag{5.4.1}$$

In this section, we will construct a Birkhoff normal form again, to reduce the spectrum of $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ to an effective operator $\mathcal{M}_\hbar$ on $\mathbf{R}^s_y$. In that purpose, in section 5.4.1 we will find new canonical variables $(\hat{t},\hat{\tau})$ in which $N_\hbar^{[0]}$ is the perturbation of an harmonic oscillator. In sections 5.4.2 and 5.4.3 we will construct the semiclassical Birkhoff normal form $\mathcal{M}_\hbar$. In section 5.4.4 we will prove that the spectrum of $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ is given by the spectrum of $\mathcal{M}_\hbar$.

In the following, we assume that $t \mapsto \widehat{b}(w,t)$ admits a non-degenerate minimum at $s(w)$ for w in a neighborhood of 0, and we denote by $(\nu_1^2(w),\cdots,\nu_k^2(w))$ the eigenvalues of the positive symmetric matrix:

$$M(w,s(w))^{1/2}\cdot\frac{1}{2}\partial_t^2\hat{b}(w,s(w))\cdot M(w,s(w))^{1/2}.$$

$\nu_1,\cdots,\nu_k$ are smooth non-vanishing functions in a neighborhood of $w = 0$.

5.4.1 – Symplectic reduction of $N_\hbar^{[0]}$

In this section we prove the following Lemma.

Lemma 5.27. *There exists a canonical (symplectic) transformation $\Phi_{\mathbf{2}} : U_{\mathbf{2}} \to V_{\mathbf{2}}$ between neighborhoods $U_{\mathbf{2}}$, $V_{\mathbf{2}}$ of $0 \in \mathbf{R}^{2s+2k}_{(y,\eta,t,\tau)}$ such that*

$$\begin{aligned}\hat{N}_\hbar := N_\hbar^{[0]}\circ\Phi_{\mathbf{2}} = \hbar\widehat{b}(w,s(w)) + \sum_{j=1}^k \nu_j(w)\left(\tau_j^2+\hbar t_j^2\right) + \mathcal{O}(|t|^3|\tau|^2)\\ + \mathcal{O}(|t|^3\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar|\tau|) + \mathcal{O}(|\tau|^3) + \mathcal{O}(|t||\tau|^2).\end{aligned}$$

Proof. We want to expan $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ near its minimum with respect to the variables $v = (t,\tau)$. First, from the Taylor expansion of $f_{\mathbf{1}}^\star$ we deduce:

$$N_\hbar^{[0]} = \langle M(w,t)\tau,\tau\rangle + \hbar\widehat{b}(w,t) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\tau\hbar) + \mathcal{O}(\tau^3).$$

We will Taylor-expand $t \mapsto \widehat{b}(w,t)$ on a neighborhood of its minimum point $s(w)$. In that purpose, we define new variables $(\tilde{y},\tilde{\eta},\tilde{t},\tilde{\tau}) = \tilde{\varphi}(y,\eta,t,\tau)$ by:

$$\begin{cases} \tilde{y} &= y - \sum_{j=1}^{k} \tau_j \nabla_\eta s_j(y,\eta), \\ \tilde{\eta} &= \eta + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \nabla_y s_j(y,\eta), \\ \tilde{t} &= t - s(y,\eta), \\ \tilde{\tau} &= \tau. \end{cases}$$

Then $\tilde{\varphi}^*\omega_0 = \omega_0 + \mathcal{O}(\tau)$. Using the Darboux-Weinstein Theorem A.4, we can make $\tilde{\varphi}$ symplectic on a neighborhood of 0, up to a change of order $\mathcal{O}(\tau^2)$. In these new variables, the symbol $\tilde{N}_\hbar := N_\hbar^{[0]} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ is:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\hbar &= \langle M\left[\tilde{w} + \mathcal{O}(\tilde{\tau}), \tilde{t} + s(\tilde{w} + \mathcal{O}(\tilde{\tau}))\right]\tilde{\tau},\tilde{\tau}\rangle + \hbar\widehat{b}\left[\tilde{y} + \mathcal{O}(\tilde{\tau}), \tilde{\eta} + \mathcal{O}(\tilde{\tau}), s(\tilde{y},\tilde{\eta}) + \tilde{t} + \mathcal{O}(\tilde{\tau})\right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar\tilde{\tau}) + \mathcal{O}(\tilde{\tau}^3) \\ &= \langle M(\tilde{w},\tilde{t} + s(\tilde{w}))\tilde{\tau},\tilde{\tau}\rangle + \hbar\widehat{b}\left[\tilde{y},\tilde{\eta}, s(\tilde{y},\tilde{\eta}) + \tilde{t}\right] + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar\tilde{\tau}) + \mathcal{O}(\tilde{\tau}^3). \end{aligned}$$

Then we remove the tildes and we expand this symbol in powers of t, τ, $\hbar$. We get

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\hbar = \langle M(w,s(w))\tau,\tau\rangle + \hbar\widehat{b}(w,s(w)) + \frac{\hbar}{2}\langle \partial_t^2\widehat{b}(w,s(w))t,t\rangle \\ + \mathcal{O}(|t|^3\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar|\tau|) + \mathcal{O}(|\tau|^3) + \mathcal{O}(|t||\tau|^2). \end{aligned}$$

Now, we want to coreduce the positive quadratic forms $M(w,s(w))$ and $\frac{1}{2}\partial_t^2\widehat{b}\,[w,s(w)]$. The reduction of quadratic forms in orthonormal coordinates implies that there exists a matrix $P(w)$ such that:

$$^tP\ M^{-1}P = I, \quad \text{and } ^tP\ \frac{1}{2}\partial_t^2\widehat{b}\ P = \mathrm{diag}(\nu_1^2,...,\nu_k^2).$$

We define the new coordinates $(\check{y},\check{\eta},\check{t},\check{\tau}) = \check{\varphi}(y,\eta,t,\tau)$ by:

$$\begin{cases} \check{t} &= P(w)^{-1}t \\ \check{\tau} &= \ ^tP(w)\tau \\ \check{y} &= y + \ ^t[\nabla_\eta(P^{-1}t)].^tP\tau \\ \check{\eta} &= \eta - \ ^t[\nabla_y(P^{-1}t)].^tP\tau, \end{cases}$$

so that $\check{\varphi}^*\omega_0 - \omega_0 = \mathcal{O}(|t|^2 + |\tau|)$. Again, we can make it symplectic up to a change of order $\mathcal{O}(|t|^3 + |\tau|^2)$ by Weinstein Lemma A.4. In these new variables, the symbol becomes (after removing the "checks"):

$$\begin{aligned} \check{N}_\hbar = \hbar\widehat{b}(w,s(w)) + \sum_{j=1}^{k}\left(\tau_j^2 + \hbar\nu_j(w)^2t_j^2\right) + \mathcal{O}(|t|^3|\tau|^2) \\ + \mathcal{O}(|t|^3\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar|\tau|) + \mathcal{O}(|\tau|^3) + \mathcal{O}(|t||\tau|^2). \end{aligned}$$

The last change of coordinates $(\hat{y},\hat{\eta},\hat{t},\hat{\tau}) = \hat{\varphi}(y,\eta,t,\tau)$ defined by:

$$\begin{cases} \hat{t}_j &= \nu_j(w)^{1/2}t_j \\ \hat{\tau}_j &= \nu_j(w)^{-1/2}\tau_j \\ \hat{y}_j &= y_j + \sum_{i=1}^{k}\nu_i^{-1/2}\tau_i\partial_{\eta_j}\nu_i^{1/2}t_i \\ \hat{\eta} &= \eta - \sum_{i=1}^{k}\nu_i^{-1/2}\tau_i\partial_{y_j}\nu_i^{1/2}t_i, \end{cases}$$

is such that $\hat{\varphi}^*\omega_0 = \omega_0 + \mathcal{O}(\tau)$, so it can be corrected modulo $\mathcal{O}(|\tau|^2)$ to be symplectic, and we get the new symbol:

$$\hat{N}_\hbar = \hbar\widehat{b}(w, s(w)) + \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)\left(\tau_j^2 + \hbar t_j^2\right) + \mathcal{O}(|t|^3|\tau|^2)$$
$$+ \mathcal{O}(|t|^3\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar|\tau|) + \mathcal{O}(|\tau|^3) + \mathcal{O}(|t||\tau|^2).$$

and Lemma 5.27 is proved. □

5.4.2 – Formal second normal form

The harmonic oscillators occuring in $\hat{N}_\hbar$ are

$$\mathcal{J}_\hbar^{(j)} = \mathsf{Op}_\hbar(\hbar^{-1}\tau_j^2 + t_j^2), \quad 1 \leq j \leq k.$$

If we denote

$$h = \sqrt{\hbar},$$

the symbol of $\mathcal{J}_\hbar^{(j)}$ for the h-quantization is $\tilde{\tau}_j^2 + t_j^2$. This is why we use the following mixed quantization:

$$\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})u(y_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-k}(2\pi\sqrt{\hbar})^k} \int e^{\frac{i}{\hbar}\langle y_0 - y, \eta\rangle} e^{\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\langle t_0 - t, \tilde{\tau}\rangle} \mathsf{a}(\sqrt{\hbar}, y, \eta, t, \tilde{\tau}) u(y, t) \mathrm{d}y \mathrm{d}\eta \mathrm{d}t \mathrm{d}\tilde{\tau}.$$

It is related to the $\hbar$-quantization by the relation

$$\tau = h\tilde{\tau}, \quad h = \sqrt{\hbar}.$$

In other words, if a is a symbol in some standard class $S(m)$, and if we denote:

$$\mathsf{a}(h, y, \eta, t, \tilde{\tau}) = a(h^2, y, \eta, t, h\tilde{\tau}),$$

then we have:

$$\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a}) = \mathsf{Op}_\hbar(a).$$

However, if we take $\mathsf{a} \in S(m)$, then $\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})$ is not necessarily a $\hbar$-pseudodifferential operator, since the associated a may not be bounded with respect to $\hbar$, and though it does not belong to any standard class. For instance, we have:

$$\partial_\tau a = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \partial_{\tilde{\tau}} \mathsf{a}.$$

But still $\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})$ is a h-pseudodifferential operator, with symbol:

$$\mathfrak{a}(h, y, \tilde{\eta}, t, \tilde{\tau}) = \mathsf{a}(h, y, h\tilde{\eta}, t, \tilde{\tau}).$$

With this notation:

$$\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a}) = \mathsf{Op}_h(\mathfrak{a}).$$

Thus, in this sense, we can use the properties of $\hbar$-pseudodifferential and h-pseudodifferential operators to deal with our mixed quantization.

In our case, we have:

$$\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{N}_h) = \mathsf{Op}_\hbar(\widehat{N}_\hbar),$$

with

$$\mathsf{N}_h = h^2\widehat{b}(w, s(w)) + h^2 \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)(\tilde{\tau}_j^2 + t_j^2) + \mathcal{O}(h^2|t|^3) + \mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(h^3|\tilde{\tau}|) + \mathcal{O}(h^2|t||\tilde{\tau}|^2).$$

Let us construct a semiclassical Birkhoff normal form with respect to this quantization. We will work in the space of formal series

$$\mathcal{E}_{\mathbf{2}} := \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d_w)[[t, \tilde{\tau}, h]]$$

endowed with the star product $\star$ adapted to our mixed quantization. In other words

$$\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a} \star \mathsf{b}) = \mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{b}).$$

The change of variable $\tau = h\tilde{\tau}$ between the classical quantization and our mixed quantization yields the following formula for the star product:

$$\mathsf{a} \star \mathsf{b} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{h}{2i}\right)^k A_h(\partial)^k (\mathsf{a}(h, y_1, \eta_1, t_1, \tilde{\tau}_1)\mathsf{b}(h, y_2, \eta_2, t_2, \tilde{\tau}_2))_{|(t_1,\tau_1,y_1,\eta_1)=(t_2,\tau_2,y_2,\eta_2)}, \tag{5.4.2}$$

with

$$A_h(\partial) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial t_{1j}}\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_{2j}} - \frac{\partial}{\partial t_{2j}}\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}_{1j}} + h\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial y_{1j}}\frac{\partial}{\partial \eta_{2j}} - \frac{\partial}{\partial y_{2j}}\frac{\partial}{\partial \eta_{1j}}.$$

The degree function on $\mathcal{E}_{\mathbf{2}}$ is defined by:

$$\deg(t^{\alpha_1}\tilde{\tau}^{\alpha_2}h^\ell) = |\alpha_1| + |\alpha_2| + 2\ell.$$

The degree of a general series depends on w. We denote by $\mathcal{D}_N$ the subspace spanned by monomials of degree N, and $\mathcal{O}_N$ the subspace of formal series with valuation at least N on a neighborhood of $w = 0$. For $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{E}_{\mathbf{2}}$, we define

$$\mathsf{ad}_{\tau_1}(\tau_2) = [\tau_1, \tau_2] = \tau_1 \star \tau_2 - \tau_2 \star \tau_1.$$

Then, if $\tau_1 \in \mathcal{O}_{N_1}$ and $\tau_2 \in \mathcal{O}_{N_2}$,

$$\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau_1}(\tau_2) \in \mathcal{O}_{N_1+N_2-2}.$$

We denote

$$N_0 = \widehat{b}(w, s(w)) \in \mathcal{D}_0 \quad \text{and} \quad N_2 = \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)|\tilde{v}_j|^2 \in \mathcal{D}_2,$$

with the notation $\tilde{v}_j = t_j + i\tilde{\tau}_j$, so that

$$\frac{1}{h^2}\mathsf{N}_h = N_0 + N_2 + \mathcal{O}_3.$$

Then we can construct the following normal form. Recall that $r_{\mathbf{2}}$ is an integer chosen such that

$$\forall \alpha \in \mathbf{Z}^k, \quad 0 < |\alpha| < r_{\mathbf{2}}, \quad \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \nu_j(0) \neq 0.$$

Moreover, this non-resonance relation at $w = 0$ can be extended to a small neighborhood of 0.

Lemma 5.28. *For any $\gamma \in \mathcal{O}_3$, there exist $\kappa, \tau \in \mathcal{O}_3$ and $\rho \in \mathcal{O}_{r_{\mathbf{2}}}$ such that*

$$e^{\frac{i}{h}\mathsf{ad}_\tau}(N_0 + N_2 + \gamma) = N_0 + N_2 + \kappa + \rho, \tag{5.4.3}$$

and $[\kappa, |\tilde{v}_j|^2] = 0$ for $1 \leq j \leq k$.

Proof. We prove this result by induction. Assume that we have, for some $N > 0$, a $\tau \in \mathcal{O}_3$ such that

$$e^{\frac{i}{h}\mathsf{ad}_\tau}(N_0 + N_2 + \gamma) = N_0 + N_2 + K_3 + ... + K_{N-1} + R_N + \mathcal{O}_{N+1},$$

with $R_N \in \mathcal{D}_N$ and $K_i \in \mathcal{D}_i$ such that $[K_i, |\tilde{v}_j|^2] = 0$. We are looking for a $\tau_N \in \mathcal{D}_N$. For such a τ_N, $\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau_N} : \mathcal{O}_j \to \mathcal{O}_{N+j-2}$ so:

$$e^{\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau+\tau_N}}(N_0+N_2+\gamma) = N_0+N_2+K_3+...+K_{N-1}+R_N+\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau_N}(N_0+N_2)+\mathcal{O}_{N+1}.$$

Moreover N_0 does not depend on (t, τ) so the expansion (5.4.2) yields

$$\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau_N}(N_0) = h\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \tau_N}{\partial y_j}\frac{\partial N_0}{\partial \eta_j} - \frac{\partial \tau_N}{\partial \eta_j}\frac{\partial N_0}{\partial y_j}\right) + \mathcal{O}_{N+6} = \mathcal{O}_{N+2},$$

and thus:

$$e^{\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau+\tau_N}}(N_0 + N_2 + \gamma) = N_0 + N_2 + K_3 + ... + K_{N-1} + R_N + \frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\tau_N}(N_2) + \mathcal{O}_{N+1}.$$

So we are looking for $\tau_N, K_N \in \mathcal{D}_N$ solving the equation

$$R_N = K_N + \frac{i}{h}\mathsf{ad}_{N_2}\tau_N + \mathcal{O}_{N+1}. \tag{5.4.4}$$

To solve this equation, we study the operator $\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{N_2} : \mathcal{O}_N \to \mathcal{O}_N$.

$$\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{N_2}(\tau_N) = \sum_{j=1}^{k}\left(\nu_j(w)\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{|\tilde{v}_j|^2}(\tau_N) + \frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\nu_j}(\tau_N)|\tilde{v}_j|^2\right),$$

and since ν only depends on w, expansion (5.4.2) yields:

$$\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{\nu_i}(\tau_N) = \sum_{j=1}^{s} h\left(\frac{\partial \nu_i}{\partial y_j}\frac{\partial \tau_N}{\partial \eta_j} - \frac{\partial \nu_i}{\partial \eta_j}\frac{\partial \tau_N}{\partial y_j}\right) + \mathcal{O}_{N+6} = \mathcal{O}_{N+2}.$$

Hence,

$$\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{N_2}(\tau_N) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{|\tilde{v}_j|^2}(\tau_N) + \mathcal{O}_{N+2},$$

and equation (5.4.4) becomes:

$$R_N = K_N + \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{|\tilde{v}_j|^2}(\tau_N) + \mathcal{O}_{N+1}. \tag{5.4.5}$$

Moreover, $\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{|\tilde{v}_j|^2}$ acts as:

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)\frac{i}{h}\mathsf{ad}_{|\tilde{v}_j|^2}(v^{\alpha_1}\bar{v}^{\alpha_2}h^{\ell}) = \langle \nu(w), \alpha_2 - \alpha_1\rangle v^{\alpha_1}\bar{v}^{\alpha_2}h^{\ell}.$$

The definition of $r_{\mathbf{2}}$ ensures that $\langle \nu(w), \alpha_2 - \alpha_1\rangle$ does not vanish on a neighborhood of $w = 0$ if $N = |\alpha_1| + |\alpha_2| + 2\ell < r_{\mathbf{2}}$ and $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Hence we can decompose every R_N as in (5.4.5), where K_N contains the terms with $\alpha_1 = \alpha_2$. These terms are exactly the ones commuting with $|\tilde{v}_j|^2$ for $1 \leq j \leq k$. □

5.4.3 – Quantized second normal form

Now we can quantize Lemma 5.27 and Lemma 5.28 to prove the following Theorem.

Theorem 5.29. *There are :*

(1) A unitary operator $\mathsf{U}_{\mathbf{2},\hbar} : \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{s+k}_{(y,t)}) \to \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{s+k}_{(y,t)})$ quantifying a symplectomorphism $\tilde{\Phi}_{\mathbf{2}} = \Phi_{\mathbf{2}} + \mathcal{O}((t,\tau)^2)$ microlocally near 0,

(2) A function $f^{\star}_{\mathbf{2}} : \mathbf{R}^{2s}_w \times \mathbf{R}^k_J \times [0,1) \to \mathbf{R}$ which is $\mathcal{C}^{\infty}$ with compact support, such that

$$|f^{\star}_{\mathbf{2}}(w, J_1, \cdots, J_k, \sqrt{\hbar})| \leq C(|J| + \sqrt{\hbar})^2,$$

(3) A $\sqrt{\hbar}$-pseudodifferential operator $\mathcal{R}_{\mathbf{2},\hbar}$ with symbol $\mathcal{O}((t, \hbar^{-1/2}\tau, \hbar^{1/4})^{r_{\mathbf{2}}})$ on a neighborhood of 0,

such that

$$\mathsf{U}^{*}_{\mathbf{2},\hbar}\mathcal{N}^{[0]}_{\hbar}\mathsf{U}_{\mathbf{2},\hbar} = \hbar\mathcal{M}_{\hbar} + \hbar\mathcal{R}_{\mathbf{2},\hbar},$$

where $\mathcal{M}_{\hbar}$ is the following $\hbar$-pseudodifferential operator :

$$\mathcal{M}_{\hbar} = \mathsf{Op}^{w}_{\hbar}\widehat{b}(w, s(w)) + \sum_{j=1}^{k} \mathcal{J}^{(j)}_{\hbar}\mathsf{Op}^{w}_{\hbar}\nu_j + \mathsf{Op}^{w}_{\hbar} f^{\star}_{\mathbf{2}}(w, \mathcal{J}^{(1)}_{\hbar}, \cdots, \mathcal{J}^{(k)}_{\hbar}, \sqrt{\hbar}).$$

Proof. Lemma 5.27 gives a symplectomorphism $\Phi_{\mathbf{2}}$ such that:

$$N^{[0]}_{\hbar} \circ \Phi_{\mathbf{2}} = \hbar\widehat{b}(w, s(w)) + \sum_{j=1}^{k} \nu_j(w)\left(\tau_j^2 + \hbar t_j^2\right) + \mathcal{O}(|t|^3|\tau|^2)$$
$$+ \mathcal{O}(|t|^3\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar|\tau|) + \mathcal{O}(|\tau|^3) + \mathcal{O}(|t||\tau|^2).$$

We can apply the Egorov Theorem to get a Fourier Integral Operator $\mathsf{V}_{\mathbf{2},\hbar}$ such that:

$$\mathsf{V}^*_{\mathbf{2},\hbar}\mathsf{Op}_\hbar(N^{[0]}_\hbar)\mathsf{V}_{\mathbf{2},\hbar} = \mathsf{Op}_\hbar(\hat{N}_\hbar),$$

with $\hat{N}_\hbar = N^{[0]}_\hbar \circ \Phi_{\mathbf{2}} + \mathcal{O}(\hbar^2)$. We define

$$\mathsf{N}_h(y,\eta,t,\tilde{\tau}) = \hat{N}_\hbar(y,\eta,t,h\tilde{\tau}),$$

and following the notations of Section 5.4.2, we have the associated formal series:

$$\frac{1}{h^2}\mathsf{N}_h = N_0 + N_2 + \gamma, \quad \gamma \in \mathcal{O}_3.$$

We apply Lemma 5.28 and we get formal series τ, κ, ρ. Since $\kappa \in \mathcal{O}_3$ commutes with $|\tilde{v}_j|^2$, it can be written

$$\kappa = \sum_{2|\alpha|+2\ell\geq 3} c^\star_{\alpha\ell}(w)\left(|\tilde{v}_1|^2\right)^{\star\alpha_1} ... \left(|\tilde{v}_k|^2\right)^{\star\alpha_k} h^\ell.$$

We take a compactly supported symbol $\mathsf{a}(h,w,t,\tilde{\tau})$ with Taylor series τ. We take $f^\star_{\mathbf{2}}(h,w,J_1,...,J_k)$ a smooth compactly supported function with Taylor series:

$$[f^\star_{\mathbf{2}}] = \sum_{2|\alpha|+2\ell\geq 3} c^\star_{\alpha\ell}(w) J_1^{\alpha_1}...J_k^{\alpha_k}h^\ell.$$

Using the Taylor formula we have:

$$e^{ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathsf{Op}_\sharp(h^{-2}\mathsf{N}_h)e^{-ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})} = \sum_{n=0}^{r_{\mathbf{2}}-1}\left(\frac{i}{h}\right)^n \mathsf{ad}^n_{\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathsf{Op}_\sharp(h^{-2}\mathsf{N}_h)$$
$$+\int_0^1 \frac{(1-s)^{r_{\mathbf{2}}-1}}{(r_{\mathbf{2}}-1)!}e^{ish^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathsf{ad}^{r_{\mathbf{2}}}_{ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathsf{Op}_\sharp(h^{-2}\mathsf{N}_h)e^{-ish^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathrm{d}s,$$

and

$$\left(\frac{i}{h}\right)^{r_{\mathbf{2}}}\mathsf{ad}^{r_{\mathbf{2}}}_\tau : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_{r_{\mathbf{2}}},$$

so Lemma 5.28 and the Egorov Theorem imply that:

$$e^{ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathsf{Op}_\sharp\left(h^{-2}\mathsf{N}_h\right)e^{-ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})} = \mathsf{Op}_\sharp(\sigma) + \mathsf{Op}_\hbar(\mathfrak{s}),$$

for some symbol σ with Taylor series:

$$[\sigma] = N_0 + N_2 + \kappa + \mathcal{O}_{r_{\mathbf{2}}},$$

and $\mathfrak{s} = \mathcal{O}((|t|^2 + |\tilde{\tau}|^2 + h)^{r_{\mathbf{2}}/2})$.

$f^\star_{\mathbf{2}}$ is constructed such that the pseudo-differential operator $f^\star_{\mathbf{2}}(h,w,\mathcal{J}^{(1)}_\hbar,...,\mathcal{J}^{(k)}_\hbar)$ has a symbol with Taylor series κ. So there exists a symbol $\mathfrak{r}_h = \mathcal{O}((|t|^2+|\tilde{\tau}|^2+h)^{r_{\mathbf{2}}/2})$ such that:

$$e^{ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}\mathsf{Op}_\sharp\left(h^{-2}\mathsf{N}_h\right)e^{-ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})} = \mathsf{Op}_\sharp N_0 + \mathsf{Op}_\sharp N_2 + \mathsf{Op}_\hbar f^\star_{\mathbf{2}}(h,w,\mathcal{J}^{(1)}_\hbar,...,\mathcal{J}^{(k)}_\hbar)$$
$$+ \mathsf{Op}_\hbar \mathfrak{r}_h.$$

We denote $W_{\mathbf{2},h} = e^{-ih^{-1}\mathsf{Op}_\sharp(\mathsf{a})}$. Multiplying by h^2, and getting back to the $\hbar$-quantization, we get:

$$\mathsf{W}^*_{\mathbf{2},\hbar}\mathsf{Op}_\hbar(\hat{N}_\hbar)\mathsf{W}_{\mathbf{2},\hbar} = \hbar\mathcal{M}_\hbar + \hbar\mathcal{R}_\hbar,$$

with:

$$\mathcal{M}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar\widehat{b}(w, s(w)) + \sum_{j=1}^{k}\mathsf{Op}_\hbar\nu_j(w)\mathcal{J}_\hbar^{(j)} + \mathsf{Op}_\hbar f^\star_{\mathbf{2}}(\sqrt{\hbar}, w, \mathcal{J}_\hbar^{(1)}, ..., \mathcal{J}_\hbar^{(k)}),$$

and $\mathcal{R}_\hbar$ a $\sqrt{\hbar}$-pseudodifferential operator with symbol $\mathfrak{r}_h$. Note that $\mathcal{M}_\hbar$ is a $\hbar$-pseudodifferential operator whose symbol admits an expansion in powers of $\sqrt{\hbar}$. □

5.4.4 – Proof of Theorem 5.5

In order to prove Theorem 5.5, we need the following microlocalization lemma.

Lemma 5.30. *Let $\delta \in (0, 1/2)$ and $c > 0$. Let $\chi_0 \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R}^{2s}_{(y,\eta)})$ and $\chi_1 \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R}^{2k}_{(t,\tilde\tau)})$ both equal to 1 on a neighborhood of 0. Then every eigenfunction $\psi_\hbar$ of $\mathcal{N}_\hbar$ or $\hbar\mathcal{M}_\hbar$ associated to an eigenvalue $\lambda_\hbar \leq \hbar(b_0 + c\hbar^\delta)$ satisfies :*

$$\psi_\hbar = \mathsf{Op}^w_{\sqrt{\hbar}}\chi_0(\sqrt{\hbar}^{-\delta}(t, \tilde\tau))\mathsf{Op}^w_\hbar\chi_1(y, \eta)\psi_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\psi_\hbar.$$

Proof. Using our mixed quantization and $h = \sqrt{\hbar}$, we have $\mathcal{N}^{[0]}_\hbar = \mathsf{Op}^w_\sharp\mathsf{N}^{[0]}_\hbar$ with

$$\mathsf{N}^{[0]}_\hbar(y, \eta, t, \tilde\tau) = h^2\langle M(y, \eta, t)\tilde\tau, \tilde\tau\rangle + h^2\widehat{b}(w, t) + f^\star_{\mathbf{1}}(y, \eta, t, h\tilde\tau, h^2).$$

The principal part of $\mathsf{N}^{[0]}_h$ is of order h^2, and implies a microlocalization of the eigenfunctions where

$$h^2\langle M(w, t)\tilde\tau, \tilde\tau\rangle + h^2\widehat{b}(w, t) \leq \lambda_h \leq h^2(b_0 + ch^{2\delta}).$$

Since $\widehat{b}$ admits a unique and non-degenerate minimum b_0 at 0, this implies that w lies in an arbitrarily small neighborhood of 0, and that :

$$|t|^2 \leq Ch^{2\delta}, \quad |\tilde\tau|^2 \leq Ch^{2\delta}.$$

The technical details follow the same ideas of Lemmas 5.22, 5.23 and 5.24. Now we can focus on $\mathcal{M}_\hbar$ whose principal symbol with respect to the $\mathsf{Op}^w_\sharp$-quantization is

$$\mathsf{M}_0(y, \eta, t, \tilde\tau) = \widehat{b}(y, \eta, s(y, \eta)) + \sum_{j=1}^{k}\nu_j(y, \eta)(\tilde\tau_j^2 + t_j^2).$$

Hence its eigenfunctions are microlocalized where

$$\widehat{b}(y, \eta, s(y, \eta)) + \sum_{j=1}^{k}\nu_j(y, \eta)(\tilde\tau_j^2 + t_j^2) \leq b_0 + ch^{2\delta},$$

which implies again that w lies in an arbitrarily small neighborhood of 0 and that

$$|t|^2 \leq Ch^{2\delta}, \quad |\tilde\tau|^2 \leq Ch^{2\delta}.$$

□

Using the same method as before, we deduce from Theorem 5.29 and Lemma 5.30 a comparison of the spectra of $\mathcal{N}_\hbar^{[0]}$ and $\mathcal{M}_\hbar$. With the notation

$$N_\hbar^{\mathsf{max}}(c,\delta) = \max\{n \in \mathbf{N}, \quad \lambda_n\left(\mathcal{N}_\hbar^{[0]}\right) \leq \hbar(b_0 + c\hbar^\delta)\},$$

the following lemma concludes the proof of Theorem 5.5.

Lemma 5.31. *Let $\delta \in (0,1/2)$ and $c > 0$. We have*

$$\lambda_n(\mathcal{N}_\hbar^{[0]}) = \hbar\lambda_n(\mathcal{M}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^{1+\delta r_{\mathbf{2}}/2}),$$

uniformily with respect to $n \in [1, N_\hbar^{\mathsf{max}}(c,\delta)]$.

Proof. We use the same method as before (see lemma 5.25). The remainder $\mathcal{R}_{\mathbf{2},\hbar}$ is $\mathcal{O}((t,\tilde{\tau},\sqrt{\hbar})^{r_{\mathbf{2}}})$ and the eigenfunctions are microlocalized where $|t| + |\tilde{\tau}| \leq C\hbar^{\delta/2}$. Hence the $\hbar\mathcal{R}_{\mathbf{2},\hbar}$ term yield an error in $\hbar^{1+\delta r_{\mathbf{2}}/2}$. □

Chapter 6

Application to the Bochner Laplacian

6.1 – Introduction

6.1.1 – Motivations and context

The spectral theory of the magnetic Laplacian, and the Bochner Laplacian, has given rise to many interesting questions. First motivated by the Ginzburg-Landau theory, bound states of the magnetic Laplacian $(i\hbar \mathrm{d} + A)^*(i\hbar \mathrm{d} + A)$ on a Riemannian manifold in the semiclassical limit $\hbar \to 0$ were studied in many works (see the books [FH10, Ray17]), and appeared to have very various behaviours according to the variations of the magnetic field $B = \mathrm{d}A$ and the boundary conditions. As shown in Chapter 5, reduction methods based on semiclassical tools such as microlocalization estimates and Birkhoff normal forms can give precise descriptions of the spectrum of this operator. In the semiclassical limit $\hbar \to 0$, we recover the classical behaviour of a particle exposed to the magnetic field B, since the magnetic Laplacian is the quantification of the classical energy.

If we are given a magnetic field B which is not exact, there is no potential A and we cannot define the magnetic Laplacian. However, the Bochner Laplacian $\frac{1}{p^2}\Delta^{L^p}$ appears to be the suitable generalization in this case, since it acts *locally* as a magnetic Laplacian. In this context the semiclassical parameter is $p = \hbar^{-1}$. Its spectral theory appears to be deeply related to holomorphic structures and to the Kodaira Laplacian (or the renormalized Bochner Laplacian more generaly). For instance, this is exploited in the works of Marinescu-Savale [MS18], and Kordyukov [Kor19]. In this last paper, the case of non-degenerate magnetic wells with full-rank magnetic field is studied, and expansions of the ground states energies are given, using quasimodes. In [Mor19], similar results were obtained in the special case of the magnetic Laplacian, using a Birkhoff normal form, but also giving a description of semi-excited states, and a Weyl law. In [Mor20a], these results are generalized to constant-rank magnetic fields.

The spectral theory of the Bochner Laplacian is also deeply related to the global geometry of complex manifolds. For instance, in [Dem85], a Weyl law was proven for Δ^{L^p}, and used to get Morse inequalities and Riemann-Roch formulas.

In this chapter, we use Agmon-like estimates to reduce the spectral theory of the Bochner Laplacian with magnetic wells to magnetic Laplacians. Then, we deduce spectral asymptotics for the Bochner Laplacian using the results of chapter 5.

6.1.2 – The Bochner Laplacian on a line bundle

Let (M, g) be a compact oriented manifold of dimension $d > 1$. We consider a complex line bundle $L \to M$ over M, endowed with a Hermitian metric h. In other words, we associate to each $x \in M$ a 1-dimensional complex vector space L_x, and a Hermitian product h_x on L_x. L is a $d+1$-dimensional manifold such that $L = \bigcup_{x\in M} L_x$. A smooth section of L (or L-valued function) is a smooth function $s : M \to L$ such that $s(x) \in L_x$. It is the generalisation of the notion of function $f : M \to \mathbf{C}$, but here the target space can vary with $x \in M$. Similarily, L-valued k-forms are sections of $\wedge^k T^*M \otimes L$. We denote by $\mathcal{C}^\infty(M, L)$ the set of smooth sections of L, and $\Omega^k(M, L)$ the set of smooth L-valued k-forms.

We take ∇^L a Hermitian connexion on (L, h). It is the generalisation of the exterior derivative d. The underlying idea is that the "derivative" of a L-valued function should be L-valued too. $\nabla^L : \Omega^k(M, L) \to \Omega^{k+1}(M, L)$ satisfies:

$$\nabla^L(s\alpha) = \nabla^L s \wedge \alpha + s\mathrm{d}\alpha, \quad \forall s \in \mathcal{C}^\infty(M, L), \quad \alpha \in \Omega^k(M, \mathbf{C}), \tag{6.1.1}$$

$$\mathrm{d}h(s_1, s_2) = h(\nabla^L s_1, s_2) + h(s_1, \nabla^L s_2), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathcal{C}^\infty(M, L). \tag{6.1.2}$$

One can prove that $(\nabla^L)^2 : \Omega^0(M, L) \to \Omega^2(M, L)$ acts as a multiplication. There exists a real closed 2-form B on M such that:

$$(\nabla^L)^2 s = iBs, \quad \forall s \in \mathcal{C}^\infty(M, L). \tag{6.1.3}$$

Example : The trivial line bundle. The line bundle $L = M \times \mathbf{C}$, such that $L_x = \{x\} \times \mathbf{C}$ is called the trivial line bundle. We identify sections $s \in \mathcal{C}^\infty(M, L)$ with functions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ by $s(x) = (x, f(x))$. Similarily, L-valued k-forms are identified with $\mathbf{C}$-valued k-forms, and we recover the usual differential objects on M. If L is endowed with the Hermitian product $h_x((x, z_1), (x, z_2)) = z_1\overline{z}_2$, we call (L, h) the trivial Hermitian line bundle. We write $h(z_1, z_2)$ for short. Hermitian connexions on the trivial line bundle are given by $\nabla_\alpha = \mathrm{d} + i\alpha$ where $\alpha \in \Omega^1(M, \mathbf{R})$ and d is the exterior derivative. The curvature of ∇_α is $\nabla_\alpha^2 = i\mathrm{d}\alpha$, as shown by the easy but enlightening calculation:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha^2 f &= (\mathrm{d} + i\alpha)(\mathrm{d}f + if\alpha) = \mathrm{d}^2 f + i\alpha \wedge \mathrm{d}f + i\mathrm{d}(f\alpha) + if\alpha \wedge \alpha \\ &= i\alpha \wedge \mathrm{d}f + i\mathrm{d}f \wedge \alpha + if\mathrm{d}\alpha = if\mathrm{d}\alpha. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Let us describe now the Bochner Laplacian Δ^L associated to a Hermitian connexion ∇^L on a Hermitian complex line bundle (L, h). First note that the spaces $\mathcal{C}^\infty(M, L) = \Omega^0(M, L)$ and $\Omega^1(M, L)$ are endowed with L^2-norms. The norm of a section $s \in \mathcal{C}^\infty(M, L)$ is:

$$\|s\|^2 = \int_M h_x(s(x), s(x))\mathrm{d}\nu_g(x), \tag{6.1.5}$$

where $\mathrm{d}\nu_g$ denotes the volume form of the oriented Riemannian manifold (M, g). We denote by $\mathsf{L}^2(M, L)$ the completion of $\mathcal{C}^\infty(M, L)$ for this norm. The definition of the norm of a L-valued 1-form α is a little more involved. First, using a partition of unity, it is enough to define it for $\alpha \in \Omega^1(U, L)$ where U is a small open subset of M. If U is small enough, there exists a section $e \in \mathcal{C}^\infty(U, L)$ such that $h_x(e(x), e(x)) = 1$. Then for any $\alpha \in \Omega^1(U, L)$, there exists a unique $X \in TM$ such that $\alpha_x(\bullet) = g_x(X_x, \bullet)e_x$ (we identify 1-forms with tangent vectors using the metric g). We define:

$$\|\alpha\|^2 = \int_M g_x(X_x, X_x)\mathrm{d}\nu_g(x). \tag{6.1.6}$$

The completion of $\Omega^1(M, L)$ for this norm is denoted by $\mathsf{L}^2\Omega^1(M, L)$: it is the space of square-integrable L-valued 1-forms. These norms are associated with scalar products, denoted by brackets $\langle ., . \rangle$.

The formal adjoint of $\nabla^L : \Omega^0(M, L) \to \Omega^1(M, L)$ for these scalar products is denoted by $(\nabla^L)^* : \Omega^1(M, L) \to \Omega^0(M, L)$. The Bochner Laplacian Δ^L is the self-adjoint extension of $(\nabla^L)^*\nabla^L$. It is the operator associated with the quadratic form:

$$Q(s_1, s_2) = \langle \nabla^L s_1, \nabla^L s_2 \rangle. \tag{6.1.7}$$

We denote by $\mathsf{Dom}(\Delta^L)$ its domain. $\mathcal{C}^\infty(M, L)$ is a dense subspace of $\mathsf{Dom}(\Delta^L)$ and:

$$\langle \Delta^L s_1, s_2 \rangle = \langle \nabla^L s_1, \nabla^L s_2 \rangle, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathsf{Dom}(\Delta^L). \tag{6.1.8}$$

Since M is compact, one can prove that Δ^L has compact resolvent, and we denote by

$$\lambda_1(\Delta^L) \leq \lambda_2(\Delta^L) \leq ... \tag{6.1.9}$$

the non-decreasing sequence of its eigenvalues. We will use the following notation for the Weyl counting function:

$$N(\Delta^L, \lambda) := \sharp\{j; \lambda_j(\Delta^L) \leq \lambda\}.$$

In this paper, we are interested in the semiclassical limit, i.e. the high curvature limit "$B \to +\infty$". We can increase the curvature B using tensor products of L. For any $p \in \mathbf{N}$, we denote by $L^p = L \otimes ... \otimes L$ the p-th tensor power of L. L^p is still a complex line bundle of M, with $L^p_x = L_x \otimes ... \otimes L_x$. It is endowed with the Hermitian product $h^p_x(s_1 \otimes ... \otimes s_p, s_1 \otimes ... \otimes s_p) = \Pi_{i=1}^p h_x(s_i, s_i)$. The connexion ∇^L induces a Hermitian connexion ∇^{L^p} on L^p by the formula:

$$\nabla^{L^p}(s_1 \otimes ... \otimes s_p) = (\nabla^L s_1) \otimes ... \otimes s_p + ... + s_1 \otimes ... \otimes (\nabla^L s_p).$$

The curvature of ∇^{L^p} is

$$(\nabla^{L^p})^2 = ipB. \tag{6.1.10}$$

Hence, the high curvature limit is $p \to +\infty$. We want to investigate the behaviour of $\lambda_j(\Delta^{L^p})$ and the corresponding eigensections in the limit $p \to +\infty$.

6.1.3 – Main results

One can measure the "intensity" of the curvature B (the magnetic field) in the following way. We denote by $\mathbf{B}_x : T_xM \to T_xM$ the linear operator defined by

$$g_x(\mathbf{B}_x U, V) = B_x(U, V), \quad \forall U, V \in T_xM. \tag{6.1.11}$$

$\mathbf{B}_x$ is real and skew-symmetric with respect to g_x, and thus its eigenvalues lie on the imaginary axis and are symmetric with respect to the origin. We denote its non-zero eigenvalues by:

$$\pm i\beta_1(x), \cdots, \pm i\beta_s(x), \tag{6.1.12}$$

with $\beta_j(x) > 0$. Hence, the rank of $\mathbf{B}_x$ is $2s$ and might depend on x, but we will soon assume that s is constant, at least locally. The magnetic intensity is the function $b : M \to \mathbf{R}_+$ defined by:

$$b(x) = \sum_{j=1}^{s(x)} \beta_j(x). \tag{6.1.13}$$

This function is continuous on M, but not smooth in general. However, note that it is smooth on a neighborhood of any point x_0 where the $(\beta_j(x_0))_{1\leq j\leq s}$ are simple (if s is locally constant near x_0).

One of the purposes of this chapter is to show that the eigensections of Δ^{L^p} are localized near the minimum points of b, and to deduce that the low-lying spectrum of Δ^{L^p} is given by magnetic Laplacians on neighborhoods of the minimal points of b. We will do the following assumptions.

Assumptions

(A1) The minimal value of b is only reached at non degenerate points $x_1, \cdots, x_N \in M$. We denote by $b_0 = b(x_j) = \min_{x\in M} b$.

(A2) The rank of $\mathbf{B}$ is constant on small neighborhoods $U_1, \cdots, U_N$ of $x_1, \cdots, x_N$. We denote by $2s_j$ the rank of $\mathbf{B}_{x_j}$.

(A3) We assume $b_0 > 0$, which is equivalent to say that $s_j > 0$ for any j.

As noticed in several papers, one can prove using Agmon-like estimates that the eigensections of Δ^{L^p} associated to low-lying eigenvalues are exponentially localized near $\{x \in M, \quad b(x) = b_0\}$, in the limit $p \to +\infty$. Now let us present the local model operators on U_j.

Recall that the 2-form B is closed: $\mathrm{d}B = 0$. Hence, if the open sets U_j are small enough, B is exact on U_j: there exists $A_j \in \Omega^1(U_j)$ such that $B = \mathrm{d}A_j$ on U_j. We denote by $\mathcal{L}_p^{(j)}$ the Dirichlet realization of $(d + ipA_j)^*(d + ipA_j)$ on $\mathsf{L}^2(U_j)$. It is the self-adjoint operator associated to the following sesquilinear form on $\mathcal{C}_0^\infty(U_j)$:

$$Q_j(u, v) = \int_M (\mathrm{d}u + ipA_j u)\overline{(\mathrm{d}v + ipA_j v)}\mathrm{d}\nu_g. \tag{6.1.14}$$

We prove the following Theorem.

Theorem 6.1. *Let $\alpha \in (0, 1/2)$. Under assumptions $(A1)$ and $(A3)$, if $\eta, \varepsilon > 0$ are small enough, then:*

$$\lambda_k(\Delta^{L^p}) = \lambda_k\left(\mathcal{L}_p^{(1)} \oplus ... \oplus \mathcal{L}_p^{(N)}\right) + \mathcal{O}(exp(-\varepsilon p^\alpha)), \tag{6.1.15}$$

uniformly with respect to $k \in [1, K_p]$, where

$$K_p = \min\left(N(\Delta^{L^p}, (b_0+\eta)p), N(\mathcal{L}_p^{(1)} \oplus ... \oplus \mathcal{L}_p^{(N)}, (b_0+\eta)p)\right),$$

and $N(\mathcal{A}, \lambda)$ denotes the number of eigenvalues of an operator $\mathcal{A}$ below λ, counted with multiplicities.

As a corollary, we can deduce spectral asymptotics for Δ^{L^p} from already-known results for $\mathcal{L}_p^{(j)}$. Let us recall some of these results here.

The full-rank case

Under the assumptions $(A1) - (A2) - (A3)$, we fix a $j \in \{1, \cdots, N\}$, and we denote by $B_j = \mathrm{d}A_j$. Hence, B_j is just the restriction of B to the small open set U_j, where it admits a primitive A_j. $\mathcal{L}_p^{(j)}$ is the magnetic Laplacian with Dirichlet boundary conditions on U_j, with magnetic field B_j. We first focus on the full-rank case, when the rank of B_j is maximal: $2s_j = d$. We define $r_j \in \mathbf{N}$ by the condition

$$\forall n \in \mathbf{Z}^{s_j}, \quad 0 < \sum_{\ell=1}^{s_j} |n_\ell| < r_j \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{s_j} n_\ell \beta_\ell(x_j) \neq 0. \tag{6.1.16}$$

Note that, if the $\beta_\ell(x_j)$ are pairwise distinct, we can choose $r_j \geq 3$. Moreover, if the open set U_j is small enough we have, for all $x \in U_j$ and $n \in \mathbf{Z}^{s_j}$,

$$0 < \sum_{\ell=1}^{s_j} |n_\ell| < r_j \implies \sum_{\ell=1}^{s_j} n_\ell \beta_\ell(x) \neq 0. \tag{6.1.17}$$

The following Theorem is a reformulation of Theorem 5.1.

Theorem 6.2. *We assume $(A1) - (A2) - (A3)$ with $2s_j = d$ and $r \geq 3$ in (6.1.16). Let $\eta, \varepsilon > 0$ small enough. Then there exists a symplectomorphism $\psi : U_j \to T^*\mathbf{R}^{d/2}$ such that:*

$$\frac{1}{p^2}\lambda_k(\mathcal{L}_p^{(j)}) = \lambda_k\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{N}^d} \mathcal{N}_p^{[j,n]}\right) + \mathcal{O}(p^{-r_j/2+\varepsilon}), \tag{6.1.18}$$

uniformly with respect to $k \in [1, \tilde{K}_p]$, where $\mathcal{N}_p^{[j,n]}$ is a pseudo-differential operator with principal symbol:

$$\sigma(\mathcal{N}_p^{[j,n]}) = \frac{1}{p}\sum_{\ell=1}^{s_j}(2n_\ell + 1)\beta_\ell \circ \psi^{-1}(x, \xi),$$

and

$$\tilde{K}_p = \min\left(N(\mathcal{L}_p^{(j)}, (b_0+\eta)p), N(\oplus_n \mathcal{N}_p^{[j,n]}, (b_0+\eta)p^{-1})\right).$$

From Corollaries 5.4 and 5.3 we also deduce the following Weyl law and description of the first eigenvalues.

Corollary 6.3. *Assume $(A_1)-(A_2)-(A_3)$, and for any $j \in \{1, \cdots, N\}$ that $s_j = d/2$, and that $(\beta_\ell(x_j))_{1\leq \ell \leq N}$ are pairwise distinct. Then, for $\eta > 0$ small enough,*

$$N(\Delta^{L^p}, (b_0+\eta)p) \sim \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{d/2} \sum_{n\in \mathbf{N}^{d/2}} \int_{b^{[n]}(x)\leq b_0+\eta} \frac{B^{d/2}}{(d/2)!}, \tag{6.1.19}$$

in the limit $p \to +\infty$, where $b^{[n]}(x) = \sum_{\ell=1}^{d/2}(2n_\ell + 1)\beta_\ell(x)$.

Finally, we also deduce asymptotic expansions of the first eigenvalues.

Corollary 6.4. *Assume $(A1)-(A2)-(A3)$, and for any $j \in \{1, \cdots N\}$ that $s_j = d/2$ and that $(\beta_\ell(x_j))_{1\leq \ell \leq N}$ are pairwise distinct, and $r := \min_j r_j \geq 5$. Then, for any $k \in \mathbf{N}$ and $\varepsilon > 0$,*

$$\lambda_k(\Delta^{L^p}) = b_0 p + \sum_{i=0}^{r-5} \alpha_{i,k} p^{-i/2} + \mathcal{O}(p^{2-r/2+\varepsilon}),$$

for some coefficients $\alpha_{i,k} \in \mathbf{R}$.

Remark. We also have geometric interpretations of the coefficients. First, the full expansion comes from the effective operator $\mathcal{N}_p^{[j,0]}$, which is the reduction of $\mathcal{L}_p^{(j)}$ to the lowest energy of the Harmonic oscillator describing the classical cyclotron motion. Moreover, $\alpha_{0,k}$ is given by an eigenvalue of an other Harmonic oscillator whose symbol is the Hessian of b at x_j (for some $1 \leq j \leq N$): it describes a slow drift of the classical particle arround x_j. If the eigenvalues of this oscillator are simple, then a Birkhoff normal form can be used to show that $\alpha_{i,k} = 0$ if i is odd.

The constant-rank case

In the non-full-rank case, the kernel of B (which corresponds to the directions of the field lines), has a great influence on the spectrum of Δ^{L^p}. Fix $1 \leq j \leq N$. If the rank of B_j is constant, equal to $2s_j$, then its kernel as dimension $k_j = d - 2s_j$. The partial Hessian of b at x_j, in the directions of the Kernel of B_j, is non-degenerate. We denote by $\nu_{j,1}^2, \cdots, \nu_{j,k_j}^2$ its eigenvalues in a suitable basis, as in Chapter 5. For simplicity, we will make the following non-resonance assumptions (however, we can deal with resonances using a resonance order r as in the full-rank case).

Assumptions

(A4) For every j, $(\beta_\ell(x_j))_{1\leq \ell \leq s_j}$ are non-resonant in the following sense:

$$\forall n \in \mathbf{Z}^{s_j}, \quad n \neq 0 \implies \sum_{\ell=1}^{s_j} n_\ell \beta_\ell(x_j) \neq 0.$$

(A5) For every j such that $k_j > 0$, $(\nu_{j,\ell})_{1\leq \ell \leq k_j}$ are non-resonant in the following sense:

$$\forall n \in \mathbf{Z}^{k_j}, \quad n \neq 0 \implies \sum_{\ell=1}^{k_j} n_\ell \nu_{j,\ell} \neq 0.$$

Applying the results of Chapter 5 to get spectral asymptotics for $\mathcal{L}_p^{(j)}$, we deduce from Theorem 6.1 the following corollary.

Corollary 6.5. *Assume* $(A1) - (A2) - (A3) - (A4) - (A5)$, *and let* $n \in \mathbf{N}$. *Then* $\lambda_n(\Delta^{L^p})$ *admits a full asymptotic expansion in powers of* $p^{-1/2}$*:*

$$\lambda_n(\Delta^{L^p}) = b_0 p + \kappa p^{1/2} + \sum_{i \geq 0} \alpha_{i,n} p^{-i/2} + \mathcal{O}(p^{-\infty}).$$

Moreover:

- *If there is at least one* j *such that* $k_j = 0$, *then* $\kappa = 0$.
- *If* $\forall j \in \{1, \cdots, N\}, k_j > 0$, *then* $\kappa = \min_{j=1,\cdots,N} \sum_{\ell=1}^{k_j} \nu_{j,\ell}$.

6.2 – Some Remarks

6.2.1 – The Bochner Laplacian and the magnetic Laplacian are locally the same

If U is any open subset of M such that there exists a non-vanishing section $e \in \mathcal{C}^\infty(U, L)$, then any $s \in \mathcal{C}^\infty(U, L)$ can be written $s = ue$ for some $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Hence,

$$\nabla s = (\nabla e)u + e(\mathrm{d}u) = e[(\mathrm{d} + iA)u],$$

with $\nabla e = eiA$. Moreover,

$$\begin{aligned} \nabla^2 s &= \nabla e \wedge [(\mathrm{d} + iA)u] + e\mathrm{d}[(\mathrm{d} + iA)u] \\ &= e(iA \wedge \mathrm{d}u) + e(iA \wedge iA)u + e\mathrm{d}^2 u + ieu\mathrm{d}A + e\mathrm{d}u \wedge iA \\ &= ieu\mathrm{d}A = (i\mathrm{d}A)s, \end{aligned}$$

and thus $B = \mathrm{d}A$. Hence ∇ acts locally as $\mathrm{d} + iA$, and Δ^L as the magnetic Laplacian $(\mathrm{d} + iA)^*(\mathrm{d} + iA)$. This is the core of Theorem 6.1.

6.2.2 – On the quantization of a magnetic field

If we are given a closed 2-form B (the magnetic field), the quantization question constist in finding a quantum operator associated to B. If B is exact, this question is answered by the semiclassical magnetic Laplacian $(\hbar\mathrm{d} + iA)^*(\hbar\mathrm{d} + iA)$, with $B = \mathrm{d}A$. Here, $\hbar > 0$ is the semiclassical parameter (Planck's constant) and the semiclassical limit is $\hbar \to 0$.

If B is not exact, but if there exists an Hermitian line bundle with Hermitian connexion such that $\nabla^2 = iB$, then the Bochner Laplacian $\nabla^*\nabla$ acts locally as the magnetic Laplacian and hence it is a good candidate. Moreover, we have *locally*

$$\Delta^{L^p} = (\mathrm{d} + ipA)^*(\mathrm{d} + ipA) = p^2(\frac{1}{p}\mathrm{d} + iA)^*(\frac{1}{p}\mathrm{d} + iA),$$

so that the semiclassical parameter is now $\hbar = \frac{1}{p}$ (Also notice the p^2 factor which is important for the eigenvalue asymptotics). The limit $\hbar \to 0$ is equivalent to $p \to +\infty$ exept that the semiclassical parameter becomes discrete ($p \in \mathbf{N}$).

A new question arises : When does such an Hermitian line bundle exists ? Weyl's Theorem states that it exists if and only if B satisfies the prequantization condition:

$$[B] \in 2\pi\mathbf{Z}, \tag{6.2.1}$$

where $[B]$ denotes the cohomology class of B. This condition also enlightens the discreteness of the semiclassical parameter. Indeed, if one wants to quantize the magnetic field $\frac{1}{\hbar}B$, then one must have $\left[\frac{1}{\hbar}B\right] \in 2\pi\mathbf{Z}$, and thus $\frac{1}{p} \in \mathbf{Z}$, unless $[B] = 0$ which means that B is exact (and thus we can use the magnetic Laplacian !).

6.3 – Proof of Theorem 6.1

6.3.1 – Agmon-like estimates

In this section, we prove exponential decay on the eigensections of Δ^{L^p}, away from the set $\{x_1, \cdots x_N\}$. We need the following Lemma. This Lemma was proven in [HM96], in the case of a magnetic Laplacian, using a local approximation of the magnetic field and the metric by constants.

Lemma 6.6. *There exist $p_0 > 0$ and $C_0 > 0$ such that, for $p \geq p_0$ and $s \in \mathcal{C}^\infty(M, L)$,*

$$(1 + \frac{C_0}{p^{1/4}})\|\nabla^{L^p} s\|^2 \geq p \int_M (b(x) - \frac{C_0}{p^{1/4}})|s(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Remark. Actually, one has the better inequality obtained replacing $p^{1/4}$ by p in Lemma 6.6. This was proven by Guillemin-Uribe [GU88] in the case of full rank B, by Borthwick-Uribe [BU96] in the constant rank case, and by Ma-Marinescu [MM02] in a more general setting.

Proof. Take a partition of unity $(\chi_\alpha)_\alpha$ on M, such that $\mathsf{supp}\chi_\alpha \subset U_\alpha$ with U_α a small open subset of M, and

$$1 = \sum_\alpha \chi_\alpha^2, \quad \sum_\alpha |\mathrm{d}\chi_\alpha|^2 \leq C. \tag{6.3.1}$$

Then, for any $s \in \mathcal{C}^\infty(M, L)$ we have

$$\|\nabla^{L^p} s\|^2 = \sum_\alpha \|\nabla^{L^p}(\chi_\alpha s)\|^2 - \sum_\alpha \||\mathrm{d}\chi_\alpha| s\|^2, \tag{6.3.2}$$

and $\chi_\alpha s \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\alpha, L)$. If every U_α are small enough, we can find a non-vanishing section e_α on U_α which we can use to trivialize the line bundle. Writting $\chi_\alpha s = u_\alpha e_\alpha$ for some $u_\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\alpha)$, we have

$$\nabla^{L^p}(\chi_\alpha s) = [(\mathrm{d} + ipA_\alpha)u_\alpha]\, e_\alpha, \tag{6.3.3}$$

where $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ is such that $B = \mathrm{d}A_\alpha$. For the magnetic Laplacian $(\mathrm{d} + ipA_\alpha)^*(\mathrm{d} + ipA_\alpha)$, the desired inequality is well-known: There exist $p_\alpha \in \mathbf{N}$, $C_\alpha > 0$ such that, for every $u_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$, and $p \geq p_\alpha$:

$$(1 + \frac{C_\alpha}{p^{1/4}})\|(\mathrm{d} + ipA_\alpha)u_\alpha\|^2 \geq p \int_{U_\alpha} (b(x) - \frac{C_\alpha}{p^{1/4}})|u_\alpha(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{6.3.4}$$

Using (6.3.2), (6.3.3), and (6.3.4), we deduce that

$$(1 + \frac{C_0}{p^{1/4}})\|\nabla^{L^p} s\|^2 \geq p \int_M (b(x) - \frac{C_0}{p^{1/4}})|s(x)|^2 \mathrm{d}x - (1 + \frac{C_0}{p^{1/4}}) \sum_\alpha \||\mathrm{d}\chi_\alpha| s\|^2, \tag{6.3.5}$$

with $C_0 = \max_\alpha C_\alpha$, and for $p \geq \max_\alpha p_\alpha$. Finally, (6.3.1) yields

$$(1 + \frac{C_0}{p^{1/4}}) \sum_\alpha \||\mathrm{d}\chi_\alpha| s\|^2 \leq C(1 + \frac{C_0}{p^{1/4}})\|s\|^2 \leq \tilde{C} p^{3/4} \|s\|^2. \tag{6.3.6}$$

Hence, up to changing C_0 into $C_0 + \tilde{C}$, Lemma 6.6 is proved. □

Now we can use Lemma 6.6 to prove Agmon-like decay estimates.

Theorem 6.7. *Let $\alpha \in (0, 1/2)$, $\eta > 0$, and $K_\eta = \{b(x) \leq b_0 + 2\eta\}$. There exist $C > 0$ and $p_0 > 0$ such that, for all $p \geq p_0$ and all eigenpair (λ, ψ) of Δ^{L^p} with $\lambda \leq (b_0 + \eta)p$,*

$$\int_M |e^{\mathrm{d}(x, K_\eta) p^\alpha} \psi|^2 \mathrm{d}q \leq C\|\psi\|^2.$$

Proof. Let $\Phi : M \to \mathbf{R}$ be a Lipschitz function. The Agmon formula is:

$$\langle \Delta^{L^p} e^\Phi \psi, e^\Phi \psi \rangle = \lambda \|e^\Phi \psi\|^2 + \|\mathrm{d}\Phi e^\Phi \psi\|^2. \tag{6.3.7}$$

Using Lemma 6.6, we deduce that:

$$\int (pb(x) - C_0 p^{3/4} - (1 + C_0 p^{-1/4})(\lambda + |\mathrm{d}\Phi|^2))|e^\Phi \psi|^2 \mathrm{d}x \leq 0.$$

We split this integral into two parts.

$$\int_{K_\eta^c} (pb(x) - C_0 p^{3/4} - (1 + C_0 p^{-1/4})(\lambda + |\mathrm{d}\Phi|^2))|e^\Phi \psi|^2 \mathrm{d}x$$
$$\leq \int_{K_\eta} (-pb(x) + C_0 p^{3/4} + (1 + C_0 p^{-1/4})(\lambda + |\mathrm{d}\Phi|^2))|e^\Phi \psi|^2 \mathrm{d}x$$

We choose Φ:

$$\Phi_m(x) = \chi_m(d(x, K_\eta))p^\alpha, \quad \text{for } m > 0,$$

where $\chi_m(t) = t$ for $t < m$, $\chi_m(t) = 0$ for $t > 2m$, and χ_m' uniformly bounded with respect to m. Since $\Phi_m = 0$ on K_η and $pb(x) - C_0 p^{3/4} > 0$ for p large enough, we have:

$$\int_{K_\eta^c} (pb(x) - C_0 p^{3/4} - (1 + C_0 p^{-1/4})(\lambda + |\mathrm{d}\Phi_m|^2))|e^{\Phi_m} \psi|^2 \mathrm{d}x$$
$$\leq (b_0 + \eta)p \int_{K_\eta} (1 + C_0 p^{-1/4})|\psi|^2 \mathrm{d}x \leq Cp\|\psi\|^2.$$

Moreover, since $\lambda \leq (b_0+\eta)p$ and $|\mathrm{d}\Phi_m|^2 \leq Cp^{2\alpha}$,

$$\int_{K_\eta^c} (pb(x) - C_0 p^{3/4} - (1+C_0 p^{-1/4})(b_0 p + \eta p + Cp^{2\alpha})|e^{\Phi_m}\psi|^2 \mathrm{d}x \leq Cp\|\psi\|^2$$

$$p\int_{K_\eta^c} (b(x) - (b_0+\eta) - C_0 p^{-1/4} - \tilde{C}p^{2\alpha-1})|e^{\Phi_m}\psi|^2 \mathrm{d}x \leq Cp\|\psi\|^2,$$

for p large enough. But $b(x) > b_0 + 2\eta$ on K_η^c, so there is a $\delta > 0$ and $p_0 > 0$ such that, for $p \geq p_0$:

$$\delta \int_{K^c} |e^{\Phi_m}\psi|^2 \mathrm{d}q \leq C\|\psi\|^2.$$

Since $\Phi_m = 0$ on K, we get a new $C > 0$ such that:

$$\|e^{\Phi_m}\psi\|^2 \leq C\|\psi\|^2,$$

and we can use Fatou's lemma in the limit $m \to +\infty$ to get the desired inequality. □

Corollary 6.8. *Let $\varepsilon > 0$ and $\chi : M \to [0,1]$ be a smooth cutoff function, being 1 on a small neighborhood of*

$$K_\eta + \varepsilon = \{x; \quad \mathrm{d}(x, K_\eta) < \varepsilon\}.$$

Then, for any eigenpair (λ, ψ) of Δ^{L^p}, with $\lambda \leq (b_0+\eta)p$ we have:

$$\psi = \chi\psi + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^\alpha})\|\psi\|,$$

and

$$\nabla^{L^p}(\chi\psi) = \nabla^{L^p}\psi + \mathcal{O}(p^{1/2}e^{-\varepsilon p^\alpha})\|\psi\|,$$

uniformly with respect to (λ, ψ).

Proof. By Theorem 6.7, we have:

$$\|(1-\chi)\psi\|^2 \leq \int_{(K_\eta+\varepsilon)^c} |\psi|^2 \mathrm{d}q \leq \int_M e^{-2\varepsilon p^\alpha} |e^{\mathrm{d}(x,K_\eta)p^\alpha}\psi|^2 \mathrm{d}x \leq Ce^{-2\varepsilon p^\alpha}\|\psi\|^2, \quad (6.3.8)$$

which gives the first estimates. Moreover, we have with $\Phi(x) = \mathrm{d}(x, K_\eta)$,

$$\|e^{\Phi p^\alpha}\nabla^{L^p}\psi\| \leq \|\nabla^{L^p}(e^{\Phi p^\alpha}\psi)\| + p^\alpha\|\mathrm{d}\Phi e^{\Phi p^\alpha}\psi\|,$$

and using Agmon's formula 6.3.7 and Theorem 6.7:

$$\|\nabla^{L^p}(e^{\Phi p^\alpha}\psi)\|^2 = \lambda\|e^{\Phi p^\alpha}\psi\|^2 + p^{2\alpha}\|\mathrm{d}\Phi e^{\Phi p^\alpha}\psi\|^2 \leq C^2 p\|\psi\|^2.$$

Thus,

$$\|e^{\Phi p^\alpha}\nabla^{L^p}\psi\| \leq Cp^{1/2}\|\psi\|. \quad (6.3.9)$$

We can use these Agmon estimates on $\nabla^{L^p}\psi$ to get our second result.

$$\|\nabla^{L^p}((1-\chi)\psi)\| \leq \|(\nabla^{L^p}\chi)\psi\| + \|(1-\chi)\nabla^{L^p}\psi\| \quad (6.3.10)$$

The first term is dominated by

$$\|(\nabla^{L^p}\chi)\psi\| \leq C\|(1-\overline{\chi})\psi\| \tag{6.3.11}$$

where $\overline{\chi}$ is a cutoff function such that $\overline{\chi} = 1$ on $K_\eta + \varepsilon$ and $\overline{\chi} = 0$ on $\mathsf{supp}(1-\chi)$. We can apply (6.3.8) to $\overline{\chi}$ to get:

$$\|(\nabla^{L^p}\chi)\psi \leq Ce^{-\varepsilon p^\alpha}\|\psi\|. \tag{6.3.12}$$

The second term of (6.3.10) is dominated as in (6.3.8), using (6.3.9):

$$\|(1-\chi)\nabla^{L^p}\psi\| \leq Cp^{1/2}e^{-\varepsilon p^\alpha}\|\psi\|. \tag{6.3.13}$$

Finally, (6.3.10) with (6.3.12) and (6.3.13) yields

$$\|\nabla^{L^p}((1-\chi)\psi)\| \leq Cp^{1/2}e^{-\varepsilon p^\alpha}\|\psi\|.$$

□

6.3.2 – Comparison of the spectrum of Δ^{L^p} and $\mathcal{L}_p^{(j)}$

We recall that the minimum b_0 of b is reached at $x_1, \cdots, x_N$ in a non-degenerate way. For $\eta > 0$ small enough, the compact set $K_\eta = \{b(x) \leq b_0 + \eta\}$ has N disjoint connected components $K_\eta^{(j)}$ such that $x_j \in K_\eta^{(j)}$. We fix the value of η, and we take U_j a neighborhood of $K_\eta^{(j)}$. For $\varepsilon > 0$ sufficiently small, $K_\eta^{(j)} + 2\varepsilon \subset U_j$.

We denote by B_j the restriction of B to U_j. $\mathcal{L}_p^{(j)}$ is the Dirichlet realisation of $(\mathrm{d} + ipA_j)^*(\mathrm{d} + ipA_j)$, with $A_j \in \Omega^1(U_j, L)$ such that $B_j = \mathrm{d}A_j$. It is the self adjoint operator associated to the quadratic form:

$$Q_j(u,v) = \int_{U_j} (\mathrm{d} + ipA_j)u\overline{(\mathrm{d} + ipA_j)v}\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in \mathsf{H}_0^1(U_j). \tag{6.3.14}$$

Let us denote by

$$K_p = \min\left[N(\Delta^{L^p}, (b_0+\eta)p); N\left(\bigoplus_{j=1}^N \mathcal{L}_p^{(j)}, (0, b_0+\eta)p\right)\right]. \tag{6.3.15}$$

We split the proof of Theorem 6.1 into two Lemmas.

Lemma 6.9. *Let $\alpha \in (0, 1/2)$. We have:*

$$\lambda_k(\bigoplus_{j=1}^N \mathcal{L}_p^{(j)}) \leq \lambda_k(\Delta^{L^p}) + \mathcal{O}(\exp(-\varepsilon p^\alpha)),$$

uniformily with respect to $k \in [1, K_p]$.

Proof. We prove this using the min-max principle. For $k \in [1, J_p]$, let ψ_k be the normalized eigenfunction associated to $\lambda_k(\Delta^{L^p})$. We will define the quasimode $u_{j,k} \in \mathcal{C}_0^\infty(U_j)$ using a local trivialisation of L^p on U_j. Let $e_j \in \mathcal{C}^\infty(U_j, L)$ be the non-vanishing local section of L such that, for any $u \in \mathcal{C}^\infty(U_j)$,

$$\nabla^{L^p}(ue_j) = [(\mathrm{d} + ipA_j)u]\, e_j. \tag{6.3.16}$$

Let $\chi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(U_j)$ be a smooth cutoff function, such that $\chi_j = 1$ on $K_\eta^{(j)} + \varepsilon$. We define $u_{j,k} \in \mathcal{C}_0^\infty(U_j)$ by $\chi_j \psi_k = u_{j,k} e_j$, and

$$u_k = u_{1,k} \oplus \ldots \oplus u_{N,k}.$$

Then

$$\langle \bigoplus_j \mathcal{L}_p^{(j)} u_k, u_k \rangle = \sum_{j=1}^N \langle \mathcal{L}_p^{(j)} u_{j,k}, u_{j,k} \rangle = \sum_{j=1}^N \|(\mathrm{d} + ipA_j)u_{j,k}\|^2.$$

Moreover, by (6.3.16),

$$\|(\mathrm{d} + ipA_j)u_{j,k}\|^2 = \int_{U_j} |(\mathrm{d} + ipA_j)u_{j,k}|^2 \mathrm{d}x = \int_{U_j} |\nabla^{L^p}(\chi_j \psi_k)|^2 \mathrm{d}x.$$

Now, $\chi = \sum_{j=1}^N \chi_j$ satisfies the assumptions of Corollary 6.8 (with 2ε instead of ε). Thus,

$$\langle \bigoplus_j \mathcal{L}_p^{(j)} u_k, u_k \rangle = \int_M |\nabla^{L^p}(\chi \psi_k)|^2 \mathrm{d}x = \|\nabla^{L^p} \psi_k\|^2 + \mathcal{O}(p^{1/2} e^{-2\varepsilon p^\alpha}) \|\psi_k\|,$$

uniformly with respect to k. ψ_k being the eigensection associated to $\lambda_k(\Delta^{L^p})$, it remains:

$$\langle \bigoplus_j \mathcal{L}_p^{(j)} u_k, u_k \rangle = \left(\lambda_k(\Delta^{L^p}) + \mathcal{O}(p^{1/2} e^{-2\varepsilon p^\alpha})\right) \|\psi_k\|.$$

This is true for every $k \in [1, K_p]$. Hence, for $1 \leq i \leq k \leq K_p$ we have

$$\langle \bigoplus_j \mathcal{L}_p^{(j)} u_i, u_i \rangle \leq \left(\lambda_k(\Delta^{L^p}) + \mathcal{O}(p^{1/2} e^{-2\varepsilon p^\alpha})\right) \|\psi_k\|,$$

and the Lemma follows from the min-max principle, because the vector space ranged by $(u_i)_{1 \leq i \leq k}$ is k-dimensional (and $p^{1/2} e^{-2\varepsilon p^\alpha} = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^\alpha})$). □

The reverse inequality is proven similarily.

Lemma 6.10. *Let $\alpha \in (0, 1/2)$. We have:*

$$\lambda_k(\Delta^{L^p}) \leq \lambda_k(\bigoplus_{j=1}^N \mathcal{L}_p^{(j)}) + \mathcal{O}(\exp(-\varepsilon p^\alpha)),$$

uniformily with respect to $k \in [1, K_p]$.

Proof. The k-th eigenvalue of $\bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{L}_p^{(j)}$ is given by an eigenpair (μ_k, u_k) of $\mathcal{L}_p^{(j_k)}$ for some $j_k \in \{1, \cdots, N\}$. Let $\chi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(U_{j_k})$ be a cutoff function equal to 1 on $K_\eta^{(j_k)} + 2\varepsilon$. Then, Agmon estimates (Theorem 6.7) for $\mathcal{L}_p^{(j)}$ imply that

$$(\mathrm{d} + ipA)u_k = (\mathrm{d} + ipA)(\chi_k u_k) + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^\alpha})\|u_k\|$$

uniformly with respect to k. We define $s_k = \chi_k u_k e_{j_k}$, where e_{j_k} satisfies (6.3.16), and we extend s_k by 0 outside U_{j_k}. Then,

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{L^p} s_k, s_k \rangle &= \textstyle\int_{U_{j_k}} |(\mathrm{d} + ipA)\chi_k u_k|^2 \mathrm{d}x \\ &= \textstyle\int_{U_{j_k}} |(\mathrm{d} + ipA)u_k|^2 \mathrm{d}x + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^\alpha}) \\ &= \mu_k \|u_k\|^2 + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^\alpha}). \end{aligned}$$

Hence the min-max principle implies

$$\lambda_k(\Delta^{L^p}) \leq \mu_k + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^\alpha}),$$

which is the desired inequality. □

Chapter 7

Non-selfadjoint perturbations of the magnetic Laplacian

7.1 – Introduction

7.1.1 – Context

In this chapter we present new results, obtained in collaboration with Raymond and Vũ Ngọc, on the spectral analysis of the non self-adjoint semiclassical operator:

$$\mathscr{L}_h = (-ih\nabla - \mathbf{A})^2 + hV(q_1, q_2)\,,$$

where $\mathbf{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is a smooth vector potential and $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ a complex scalar potential. The associated magnetic field $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ is assumed to be positive and to belong to the class of *bounded symbols*

$$S_{\mathbf{R}^2}(1) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{C}) : \forall \alpha \in \mathbf{N}\,, \exists C > 0\,, |\partial^\alpha f| \leq C\}\,.$$

We also assume that the complex perturbation V belongs to this class, *i.e.*, $V \in S_{\mathbf{R}^2}(1)$. We can already make an important preliminary remark. Due to the gauge invariance, we may assume that $\mathbf{A}$ is in the form

$$\mathbf{A} = (0, A_2)\,, \quad A_2(q) = \int_0^{q_1} B(s, q_2)\mathrm{d}s\,.$$

When $V = 0$, the low-lying spectrum of this operator has been studied in several papers (See for instance the books [FH10, Ray17]). In particular, when the magnetic field has a unique minimum $b_0 > 0$, which is non-degenerate and non attained at infinity, it was proved in [HK14a] that

$$\lambda_n(h) = b_0 h + ((2n-1)c_0 + c_1)h^2 + o(h^2)\,,$$

where $c_1 \in \mathbf{R}$ and $c_0 = b_0^{-1}|\frac{1}{2}\nabla^2 B(q_0)|^{1/2}$.

When the perturbation V is turned on, we would like to understand how the spectrum moves, in a disc $D(\mu_0 h, Ch^2)$ (which should contain a finite number of eigenvalues). To do so, it will be convenient to interpret $\mathscr{L}_h$ as a pseudo-differential operator, by noticing that

$$\mathscr{L}_h = \mathsf{Op}_h^w(H)\,, \quad H(q,p) = p_1^2 + (p_2 - A_2(q_1, q_2))^2 + hV(q_1, q_2)\,.$$

7.1.2 – Main result

In this chapter we will make the following assumptions.

Assumption 7.1. *The magnetic field is non-vanishing: there exists $b_0 > 0$ such that*

$$\forall q \in \mathbf{R}^2, \quad B(q) > b_0 > 0.$$

Assumption 7.2. *There exist $u, v \in \mathbf{R}$, $u > 0$ such that the function $F = u(B + \mathsf{Re}(V)) + v\mathsf{Im}(V)$ admits a global minimum. Thus we can take $\mu_0 \in \mathbf{C}$ such that:*

$$u\mathsf{Re}\mu_0 + v\mathsf{Im}\mu_0 = \min_{q\in\mathbf{R}^2} F(q).$$

Assumption 7.3. *The function F is confining: There exists a compact set $K \subset \mathbf{R}^2$ and $\gamma > \min F$ such that*

$$\forall q \in \mathbf{R}^2 \setminus K, \quad F(q) \geq \gamma.$$

The function F should be interpreted as the localizing function for our operator : it gives informations on where the spectrum should lie. These assumptions imply discreteness of the spectrum in a disc $D(\mu_0 h, Ch^2)$ and localization of the associated eigenfunctions (Proposition 7.36 and Lemma 7.17). Here are some interesting particular cases when Assumptions 7.2 and 7.3 are valid:

1. $B + \mathsf{Re}(V)$ is confining and $\mathsf{Im}(V)$ is arbitrary (take $u = 1$ and $v = 0$).

2. $\mathsf{Im}(V)$ is confining and $B + \mathsf{Re}(V)$ is constant (take $u = 1$ and $v = 1$).

3. $B + \mathsf{Re}(V) \geq 0$ and $\mathsf{Im}(V)$ are semi-confining in different directions: There exists compact sets $K_1, K_2 \subset \mathbf{R}$ such that $B + \mathsf{Re}(V) \geq \gamma$ when $q_1 \notin K_1$, and $\mathsf{Im}(V) \geq \gamma$ when $q_2 \notin K_2$. In this case with $u = v = 1$, $u(B + \mathsf{Re}(V)) + v\mathsf{Im}(V) \geq \gamma$ when $(q_1, q_2) \notin K_1 \times K_2$.

We will work in new variables, adapted to the magnetic geometry. Let us denote by $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ the following diffeomorphism:

$$(\xi, x) = \varphi(q) = \left(\int_0^{q_1} B(s, q_2)\mathrm{d}s, q_2 \right), \tag{7.1.1}$$

and $\hat{B}(\xi, x) = B \circ \varphi^{-1}(\xi, x)$, $\quad \hat{V}(\xi, x) = V \circ \varphi^{-1}(\xi, x)$. In the following, we prove that the spectrum of $\mathcal{L}_\hbar$ in $D(\mu_0 h, Ch^2)$ is described by an effective operator $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$. This h-pseudodifferential operator $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}} = \mathsf{Op}_\hbar^w \mu_h^{\mathsf{eff}}$ has a symbol of the form

$$\mu_h^{\mathsf{eff}}(x, \xi) = \hat{B}(\xi, x) + \hat{V}(\xi, x) + h\mu_1(x, \xi), \tag{7.1.2}$$

where the subprincipal term $\mu_1(x, \xi)$ has an explicit formula described in (7.5.1). Our main Theorem below states that, if we know how the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ behaves and if it is nice, then it gives a precise description of the spectrum of $\mathcal{L}_\hbar$.

Theorem 7.4. *(Under assumptions 7.1, 7.2, and 7.3) Let $\kappa > 0$, $C > 0$. Assume that there exist $c, h_0 > 0$ such that, for $h \in (0, h_0)$, the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ in $D(\mu_0, Ch)$ is finite and consists of a familly of discrete eigenvalues $(\nu_j(h))_{1\leq j\leq N}$ of simple geometric multiplicity, such that*

$$\forall (k,\ell) \in \{1, \cdots, N\}^2, \quad k \neq \ell \Rightarrow |\nu_k(h) - \nu_\ell(h)| \geq ch.$$

Moreover, assume the following bound on the resolvent:

$$\exists \gamma \leq 1, \exists M \geq 2, \quad \|(z - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\| \leq \frac{\tilde{C}}{\mathrm{dist}(z, \mathsf{sp}\ \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}) - Ch^M} + \frac{1}{h^\gamma}. \tag{7.1.3}$$

Then for h small enough, the spectrum of $\mathcal{L}_\hbar$ in $D(\mu_0 h, Ch^2)$ is finite and consists of a familly of discrete eigenvalues $(\lambda_j(h))_{1\leq j\leq N}$ of simple geometric multiplicities, such that

$$\lambda_j(h) = h\nu_j(h) + \mathcal{O}(h^{\frac{5}{2}-\kappa}).$$

Remark 7.5. *We will describe below several cases when $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ has the desired properties.*

Remark 7.6. *This Theorem is also true for $N = 0$, meaning that if $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ has no spectrum in $D(\mu_0, Ch)$ then $\mathcal{L}_\hbar$ has no spectrum in $D(\mu_0 h, Ch^2)$.*

In particular, we recover the eigenvalue asymptotics from [HK14a], in the self-adjoint case.

Corollary 7.7 (Self-adjoint case). *Assume that $\mathsf{Im}(V) = 0$, $B \geq b_0 > 0$, and that $B + \mathsf{Re}(V)$ is confining and admits a unique and non-degenerate minimum $\mu_0 \in \mathbf{R}$ reached at 0. Let $C > 0$. There exists $h_0 > 0$ such that, for $h \in (0, h_0)$ the spectrum of $\mathcal{L}_\hbar$ in $D(\mu_0 h, Ch^2)$ is finite and consists of a familly of discrete eigenvalues $(\lambda_j(h))_{1\leq j\leq N}$ of simple multiplicities such that*

$$\lambda_j(h) = \mu_0 h + ((2j+1)c_0 + c_1)h^2 + o(h^2),$$

where $c_1 \in \mathbf{R}$ and $c_0 = B(0)^{-1}|\frac{1}{2}\nabla^2(B+V)(0)|^{1/2}$.

Proof. When $\mathsf{Im}(V) = 0$, $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ and $\mathcal{L}_\hbar$ are self-adjoint. In particular, the resolvent bound (7.1.3) follows from the spectral Theorem. Moreover $B + V$ is confining and the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ in $D(\mu_0, Ch)$ is well known in this case : it consists of discrete simple eigenvalues such that

$$\nu_j(h) = \mu_0 + \left((2j+1)|\frac{1}{2}\nabla^2(\hat{B}+\hat{V})(0)|^{1/2} + c_1\right)h + o(h).$$

The computation of c_0 follows from the link between $\hat{B}+\hat{V}$ and $B+V$, in (7.1.1). □

Remark 7.8. *In the case $V = 0$, we recover the eigenvalue asymptotics of the magnetic Laplacian with discrete magnetic wells, proved in [HK14a].*

Now let us state a non-selfadjoint corollary. In this case, the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ in $D(\mu_0, Ch)$ is given by a result of Hitrik [Hit04]. We summarize the ideas of [Hit04] in section 7.7.

Corollary 7.9. *Together with Assumptions 7.1, 7.2, and 7.3, also assume that B and V are analytic on a tubular neighborhood of $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$, and denote by $p = B + V$. Assume that $p^{-1}(\mu_0) \cap \mathbf{R}^2 = \{0\}$, with $\nabla p(0) = 0$ and that $\nabla^2 p(0)$ is non-degenerate. For $C > 0$, there exists $h_0 > 0$ such that, for $h \in (0, h_0)$ the spectrum of $\mathcal{L}_h$ in $D(\mu_0 h, Ch^2)$ consists of a familly of discrete eigenvalues $(\lambda_j(h))_{1 \leq j \leq N}$ with simple geometric multiplicities such that*

$$\lambda_j(h) = \mu_0 h + ((2j+1)c_0 + c_1)\, h^2 + o(h^2),$$

where $c_0, c_1 \in \mathbf{C}$, $c_0 \neq 0$.

Proof. To apply Theorem 7.4, we need to check that $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ has the expected spectral properties in $D(\mu_0, Ch)$. Since the principal symbol of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ is $\hat{p} = \hat{B} + \hat{V}$, this is an application of the article [Hit04], describing the spectrum of a 1-dimensional pseudodifferential operator. To apply this result, we need the following properties :

(i) $\hat{p}^{-1}(\mu_0) = \{0\}$,

(ii) $(\hat{p} - \mu_0)$ vanishes at second order,

(iii) There is an exterior cone : We can find $\varepsilon_0 > 0$ and $\theta_0 \in \mathbf{R}$ such that:

$$\left(\mu_0 + (0, \varepsilon_0) e^{i(\theta_0 - \varepsilon_0, \theta_0 + \varepsilon_0)}\right) \cap p(\mathbf{R}^2) = \emptyset\,.$$

The first two points follow from our assumptions. Actually, the third one follows from Assumption 7.2. Indeed, μ_0 is chosen such that

$$\mathsf{Re}((u - iv)\mu_0) = \min \mathsf{Re}((u - iv)p)\,.$$

Thus, if $z \in \mathbf{C}$ is chosen such that $\mathsf{Re}(z) < 0$ then

$$\mathsf{Re}((u - iv)p) \geq \mathsf{Re}((u - iv)\mu_0) > \mathsf{Re}((u - iv)\mu_0 + z)\,,$$

so $\mu_0 + (u - iv)^{-1} z$ cannot be in $p(\mathbf{R}^2)$, so there is an exterior *half-plane*. Hence we can apply [Hit04] and we deduce that the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ in $D(\mu_0, Ch)$ consists of a familly of discrete eigenvalues with simple geometric multiplicities :

$$\nu_j(h) = \mu_0 + ((2j+1)c_0 + c_1)h + o(h).$$

Finally, we will explain in section 7.7 how the resolvent bound (7.1.3) follows from [Hit04]. □

The two following results are special cases of Corollary 7.9.

Corollary 7.10 (Constant real part). *Assume that $B \geq b_0 > 0$, that $B + \mathsf{Re}(V)$ is constant on $\mathbf{R}^2$ equal to μ_0 and that B and V are analytic on a tubular neighborhood of $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$. Assume $\mathsf{Im}(V)$ is confining and admits a unique and non-degenerate minimum at 0, with $\mathsf{Im}V(0) = 0$. For $C > 0$, there exists $h_0 > 0$ such that, for $h \in (0, h_0)$ the spectrum of $\mathcal{L}_h$ in $D(\mu_0 h, Ch^2)$ consists of a familly of discrete eigenvalues $(\lambda_j(h))_{1 \leq j \leq N}$ with simple geometric multiplicities such that*

$$\lambda_j(h) = \mu_0 h + ((2j+1)ic_0 + c_1)h^2 + o(h^2),$$

where $c_0 > 0$ and $c_1 \in \mathbf{C}$.

Proof. In this case, Assumptions 7.2 and 7.3 are valid with $u = v = 1$. We can apply corollary 7.9. Indeed, we have $p = \mu_0 + i\mathsf{Im}(V)$ so that $p(\mathbf{R}^2) = \mu_0 + i\mathbf{R}_+$ and 0 is the only point where $p = \mu_0$. The Hessian of p is $i\nabla^2 V(0)$: it is non degenerate. Moreover, the result of Hitrik states that $\mathsf{arg}(ic_0) = \frac{\pi}{2}$ and this is why c_0 must be a positive real number. □

Corollary 7.11 (Perturbation of a confining magnetic field). *Assume that B and V are analytic on a tubular neighborhood of $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$. Assume that B is confining and admits a unique and non-degenerate minimum b_0, reached at 0. Let $C > 0$. There exists $\varepsilon_0 > 0$ and for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ there exists $h_0(\varepsilon) > 0$ such that, for $h \in (0, h_0(\varepsilon))$ the spectrum of $\mathcal{L}_{h,\varepsilon} = (-ih\nabla - A)^2 + h\varepsilon V$ in $D(\mu_\varepsilon h, Ch^2)$ consists of a familly of discrete eigenvalues $(\lambda_j(h,\varepsilon))_{1\leq j\leq N}$ with simple geometric multiplicities such that*

$$\lambda_j(h,\varepsilon) = \mu_\varepsilon h + ((2j+1)c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon))\, h^2 + o(h^2),$$

where $\mu_\varepsilon = B(z_\varepsilon) + \varepsilon V(z_\varepsilon)$, z_ε is the unique critical point of $B + \varepsilon V$ in $\mathbf{R}^2$ such that $z_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$, and $c_0(\varepsilon)$, $c_1(\varepsilon) \in \mathbf{C}$ satisfy

$$c_0(\varepsilon) = b_0^{-1} \left| \frac{1}{2}\nabla^2 B(0) \right|^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Proof. For $\varepsilon > 0$ small enough, $B + \varepsilon V$ admits a unique and non-degenerate real critical point z_ε close to 0, since it is a perturbation of B. Then $p = B + \varepsilon V$ satisfies the hypothesis of Corollary 7.9, as a perturbation of B, and Corollary 7.11 is just a reformulation of this result. □

7.1.3 – Structure of the chapter

The chapter is organized as follows. In section 7.2, we introduce new coordinates, which are more adapted to the magnetic geometry. We prove that $\mathscr{L}_h$ is unitarily equivalent to an operator $h\widehat{\mathscr{L}_h^0}$, which can be seen as a perturbation of a harmonic oscillator. In section 7.3, we introduce $\widehat{\mathscr{L}_h}$ which is a slight modification of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ (we add cutoff functions in its symbol). In 7.3.2 we see $\widehat{\mathscr{L}_h}$ as a pseudodifferential operator with operator-valued symbol, and we expan its symbol in powers of $h^{1/2}$. The properties of its principal symbol P_0, which is a harmonic oscillator, are described in 7.3.3. In section 7.4, we use a Grushin method to reduce to the ground state of P_0, and in section 7.5 we prove that the spectrum $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is a perturbation of the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$. Finally, in section 7.6 we "remove the cutoff functions", proving that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ is a perturbation of the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$, and concluding the proof of Theorem 7.4. In the additional section 7.7, we summarize the ideas of the article [Hit04], which we used to describe the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ in Corollary 7.9.

7.2 – A first normal form

The aim of this section is to prove the following proposition. It provides us with a first normal form of the electro-magnetic Laplacian.

Proposition 7.12. *The operator $\mathscr{L}_h$ is unitarily equivalent to $h\widehat{\mathscr{L}_h^0} = h\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathsf{Op}_1^{w,1}\widehat{H^0}$, where*

$$\begin{aligned}\widehat{H^0}(x,\xi) =&\hat{B}(\xi_2 + h^{1/2}x_1, x_2 + h^{1/2}\xi_1)^2\xi_1^2 + \big(x_1 + \hat{\alpha}(\xi_2 + h^{1/2}x_1, x_2 + h^{1/2}\xi_1)\xi_1\big)^2 \\ &+ \hat{V}(\xi_2 + h^{1/2}x_1, x_2 + h^{1/2}\xi_1) + h^{1/2}W_1(\xi_2 + h^{1/2}x_1, x_2 + h^{1/2}\xi_1)\cdot(x_1,\xi_1) \\ &+ hW_2(\xi_2 + h^{1/2}x_1, x_2 + h^{1/2}\xi_1)\,,\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

and

(i) $\hat{f} = f\circ\varphi^{-1}$,

(ii) $\alpha(q_1,q_2) = \partial_2 A_2(q_1,q_2)$,

(iii) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *is the diffeomorphism given by*

$$\varphi(q) = \left(\int_0^{q_1} B(u,q_2)\mathrm{d}u, q_2\right)\,.$$

(iv) $W_1 = i\big(\partial_1\hat{\alpha}, \hat{\alpha}\partial_1\hat{\alpha}\big)\,,$

(v) $W_2 = \frac{1}{4}(\partial_1\hat{B})^2\,.$

Remark 7.13. *Here $\mathsf{Op}_h^{w,2}$ is the h-Weyl quantization with respect to (x_2,ξ_2), and $\mathsf{Op}_1^{w,1}$ is the non-semiclassical Weyl quantization with respect to (x_1,ξ_1).*

7.2.1 – Proof of Proposition 7.12

We split the proof into two steps : Lemma 7.14 and Lemma 7.15.

Lemma 7.14. *The operator $\mathscr{L}_h$ is unitarily equivalent to $\widetilde{\mathscr{L}_h} = \mathsf{Op}_h^w\tilde{H}$, where*

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,\xi) =&\hat{B}(\xi_2 + x_1, x_2 + \xi_1)^2\xi_1^2 + (x_1 + \hat{\alpha}(\xi_2 + x_1, x_2 + \xi_1)\xi_1)^2 \\ &+ h\hat{V}(\xi_2 + x_1, x_2 + \xi_1) + ih(x_1 + \hat{\alpha}(\xi_2 + x_1, x_2 + \xi_1)\xi_1)\partial_1\hat{\alpha}(\xi_2 + x_1, x_2 + \xi_1) \\ &+ h^2(\partial_1\hat{B}(\xi_2 + x_1, x_2 + \xi_1))^2\,.\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Proof. First, let us rewrite the operator in the variables $(x_1,x_2) = \varphi(q_1,q_2)$. For any $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ we denote $\hat{u} = u\circ\varphi^{-1}$, so that $\hat{u}(x) = u(q)$. Then we have :

$$\begin{cases}\partial_{q_1}u = \hat{B}\partial_{x_1}\hat{u},\\ \partial_{q_2}u = \hat{\alpha}\partial_{x_1}\hat{u} + \partial_{x_2}\hat{u}\,,\end{cases}$$

with $\alpha(q) = \partial_2 A_2(q)$. Then $\mathscr{L}_h$ is given in these variables by

$$\mathscr{L}_h u = -h^2(\hat{B}\partial_{x_1})^2\hat{u} + (-ih\hat{\alpha}\partial_{x_1} - ih\partial_{x_2} - x_1)^2\,\hat{u} + h\hat{V}\hat{u}\,,$$

because $x_1 = A_2(q)$. In other words, if U is the following unitary transformation:

$$U : \begin{array}{ccc}\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^2) & \to & \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^2)\\ u & \mapsto & |\mathrm{d}\varphi^{-1}|^{1/2}u\circ\varphi^{-1}\end{array}$$

then (because $|\mathrm{d}\varphi| = B$)

$$U\mathscr{L}_h U^*\hat{u} = -h^2\hat{B}^{1/2}\partial_{x_1}\hat{B}\partial_{x_1}(\hat{B}^{1/2}\hat{u}) + \hat{B}^{-1/2}\left(-ih\hat{\alpha}\partial_{x_1} - ih\partial_{x_2} - x_1\right)^2(\hat{B}^{1/2}\hat{u}) + h\hat{V}\hat{u}\,,$$

The Weyl-symbol of this operator is

$$\check{H}(x,\xi) = \hat{B}(x)^2\xi_1^2 + (\hat{\alpha}\xi_1 + \xi_2 - x_1)^2 + ih(\hat{\alpha}\xi_1 + \xi_2 - x_1)\partial_1\hat{\alpha} + h\hat{V} + \frac{h^2}{4}(\partial_{x_1}\hat{B})^2\,.$$

Then we do the following linear canonical change of variables:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 &= x_1 - \xi_2 \\ \tilde{\xi}_1 &= \xi_1 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 - \xi_1 \\ \tilde{\xi}_2 &= \xi_2\,. \end{cases}$$

Using the linear Egorov Theorem, $\mathscr{L}_h$ is unitarily equivalent to $\mathsf{Op}_h^w\tilde{H}$ with:

$$\tilde{H}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2) = H(\tilde{x}_1 + \tilde{\xi}_2, \tilde{x}_2 + \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\,,$$

and the Lemma is proved. □

Lemma 7.15. *The operator $\widetilde{\mathscr{L}_h}$ is unitary equivalent to $h\widehat{\mathscr{L}_h^0}$.*

Proof. First we split the x_1 and x_2 quantizations:

$$\widetilde{\mathscr{L}_h} = \mathsf{Op}_h^w\tilde{H} = \mathsf{Op}_h^{w,2}\mathsf{Op}_h^{w,1}\tilde{H}\,.$$

Then we can change the semiclassical quantization with respect to (x_1,ξ_1) into a non-semiclassical one. Removing the (x_2,ξ_2)-dependence in the notations, we have:

$$\left(\mathsf{Op}_h^{w,1}\tilde{H}\right)u(x_1) = \frac{1}{2\pi h}\int e^{\frac{i}{h}(x_1-y_1)\xi_1}\tilde{H}\Big(\frac{x_1+y_1}{2},\xi_1\Big)u(y_1)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}\xi_1\,.$$

We do the following change of variables $x_1 = h^{1/2}\hat{x}_1, y_1 = h^{1/2}\hat{y}_1, \xi_1 = h^{1/2}\hat{\xi}_1$,

$$\left(\mathsf{Op}_h^{w,1}\tilde{H}\right)u(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int e^{(\hat{x}_1-\hat{y}_1)\hat{\xi}_1}\tilde{H}\Big(h^{1/2}\frac{\hat{x}_1+\hat{y}_1}{2}, h^{1/2}\hat{\xi}_1\Big)u(h^{1/2}\hat{y}_1)\mathrm{d}\hat{y}_1\mathrm{d}\hat{\xi}_1\,.$$

If we denote by V the unitary transformation $Vu(\hat{x}_1) = u(h^{1/2}\hat{x}_1)h^{1/2}$ then we deduce

$$\left(\mathsf{Op}_h^{w,1}\tilde{H}\right)u = V^*\mathsf{Op}_1^{w,1}aVu$$

with $a(x_1,\xi_1,h) = \tilde{H}(h^{1/2}x_1, h^{1/2}\xi_1)$. Note that $a = h\widehat{H^0}$ to conclude the proof. □

Note that the diffeomorphism φ behaves well with respect to the symbol classes.

Lemma 7.16. *For any order function m, and any function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$,*

$$f \in S(m) \Rightarrow \hat{f} \in S(\hat{m})\,.$$

In particular, if $f \in S(1)$, then $\hat{f} \in S(1)$.

Proof. The derivatives of $\hat{f}$ are related to the derivatives of f by:

$$\begin{cases} \partial_1 \hat{f} = \frac{1}{B}\partial_1 f \\ \partial_2 \hat{f} = -\frac{\alpha}{B}\partial_1 f + \partial_2 f. \end{cases}$$

Iterating this formula, and using $B \geq b_0$ for the denominators and $B \in S(1)$ for the numerators, we deduce that:

$$|\partial^\gamma \hat{f}(\hat{q})| \leq C_\gamma \sum_{|\ell| \leq |\gamma|} |\partial^\ell f(q)|,$$

and thus if $f \in S(m)$,

$$|\partial^\gamma \hat{f}(\hat{q})| \leq C_\gamma m(q) = C_\gamma \hat{m}(\hat{q}).$$

□

7.2.2 – Microlocalization of the eigenfunctions

We prove here that the eigenfunctions of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ are microlocalized where $|\hat{x}_1|+|\hat{\xi}_1| \leq Ch^{\delta-1/2}$, for any $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. We will use this result to add a cutoff function χ_δ in the symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$.

Lemma 7.17. *Let $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ and $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ equal to 1 on a neighborhood of 0. Then, for any normalized eigenpair (λ, ψ) of $\widetilde{\mathscr{L}_h}$ with $\lambda \in D(\mu_0 h, Ch^2)$:*

$$\psi = \mathsf{Op}_h^w \chi(h^{-\delta}x_1)\chi(h^{-\delta}\xi_1)\psi + \mathscr{O}(h^\infty)\,.$$

In particular, the eigenpairs (λ, ψ) of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ with $\lambda \in D(\mu_0, Ch)$ satisfy

$$\psi = \mathsf{Op}_h^w \chi_\delta \psi + \mathcal{O}(h^\infty)\,,$$

with $\chi_\delta(\hat{x}_1, \hat{\xi}_1) = \chi(h^{\frac{1}{2}-\delta}(\hat{x}_1, \hat{\xi}_1))$.

Proof. In this proof we use the notation $\chi_0(x,\xi) = 1 - \chi(h^{-\delta}x_1)\chi(h^{-\delta}\xi_1)$, and $\chi_0^w = \mathsf{Op}_h^w \chi_0$. We want to prove that $\|\chi_0^w \psi\| = \mathcal{O}(h^\infty)$. Consider

$$(u-iv)\langle \widetilde{\mathscr{L}_h}\chi_0^w\psi, \chi_0^w\psi\rangle = (u-iv)\langle \chi_0^w \widetilde{\mathscr{L}_h}\psi, \chi_0^w\psi\rangle + (u-iv)\langle \left[\widetilde{\mathscr{L}_h}, \chi_0^w\right]\psi, \chi_0^w\psi\rangle. \quad (7.2.3)$$

We will take the real part, bound the right-hand side, and minore the left-hand side. First we have

$$\mathsf{Re}(u-iv)\langle \chi_0^w \widetilde{\mathscr{L}_h}\psi, \chi_0^w\psi\rangle \leq h(u\mathsf{Re}\mu_0 + v\mathsf{Im}\mu_0 + Ch)\|\chi_0^w\psi\|^2\,. \quad (7.2.4)$$

Moreover, the commutator $\left[\widetilde{\mathscr{L}_h}, \chi_0^w\right]$ is a pseudodifferential operator of order h, whose symbol is supported in $\mathsf{supp}\chi_0$. Taking $\underline{\chi}_0$ a cutoff function with the same properties of χ_0, which is equal to 1 on $\mathsf{supp}\chi_0$, we have

$$\mathsf{Re}(u-iv)\langle \left[\widetilde{\mathscr{L}_h}, \chi_0^w\right]\psi, \chi_0^w\psi\rangle \leq Ch\|\underline{\chi}_0^w\psi\|\|\chi_0^w\psi\|\,. \quad (7.2.5)$$

Finally we can minore the symbol $\tilde{H}$ of $\widetilde{\mathscr{L}_h}$ in the following way

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}(u-iv)\tilde{H} &\geq c(\xi_1^2+x_1^2)+u\mathsf{Re}\hat{V}+v\mathsf{Im}\hat{V}\\ &\geq c(\xi_1^2+x_1^2)\,.\end{aligned}$$

With the Gårding inequality we deduce that

$$\mathsf{Re}(u-iv)\langle\widetilde{\mathscr{L}_h}\chi_0^w\psi,\chi_0^w\psi\rangle\geq c\|(\xi_1^2+x_1^2)^w\chi_0^w\psi\|^2\,,$$

and χ_0 is supported where $|x_1|+|\xi_1|>h^\delta$, so

$$\mathsf{Re}(u-iv)\langle\widetilde{\mathscr{L}_h}\chi_0^w\psi,\chi_0^w\psi\rangle\geq ch^{2\delta}\|\chi_0^w\psi\|^2\,.$$

Using this last inequality in (7.2.3), and bounding the right-hand side with (7.2.4) and (7.2.5), we deduce that

$$ch^{2\delta}\|\chi_0^w\psi\|^2\leq Ch\|\chi_0^w\psi\|\|\underline{\chi}_0^w\psi\|\,,$$

and

$$\|\chi_0^w\psi\|\leq\tilde{C}h^{1-2\delta}\|\underline{\chi}_0^w\psi\|\,.$$

Iterating with $\underline{\chi}_0$ instead of χ_0, we get $\|\chi_0^w\psi\|=\mathcal{O}(h^\infty)$ and this concludes the proof. □

7.3 – The truncated operator $\widehat{\mathscr{L}_h}$

In the following sections, we will study the spectrum of an other operator $\widehat{\mathscr{L}_h}$ which we call the *truncated* operator. At the end (section 7.6) we will prove that $\widehat{\mathscr{L}_h}$ and $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ have the same spectrum in the desired region.

Definition 7.18. *Fix $\delta\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ and let χ be a smooth cutoff function on $\mathbf{R}^2$, supported in a small neighborhood of 0. The truncated operator $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is the pseudodifferential operator*

$$\widehat{\mathscr{L}_h}=\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathsf{Op}_1^{w,1}p_h$$

with symbol

$$\begin{aligned}p_h(x,\xi)=\hat{B}^2(\xi_2+h^{1/2}\chi_\delta x_1,x_2+h^{1/2}\chi_\delta\xi_1)\xi_1^2+\big(x_1+\hat{\alpha}(\xi_2+h^{1/2}\chi_\delta x_1,x_2+h^{1/2}\chi_\delta\xi_1)\xi_1\big)^2\\ +\hat{V}(\xi_2+h^{1/2}\chi_\delta x_1,x_2+h^{1/2}\chi_\delta\xi_1)+h^{1/2}W_1(\xi_2+h^{1/2}\chi_\delta x_1,x_2+h^{1/2}\chi_\delta\xi_1)\cdot(x_1,\xi_1)\\ hW_2(\xi_2+h^{1/2}\chi_\delta x_1,x_2+h^{1/2}\chi_\delta\xi_1)\,,\quad(7.3.1)\end{aligned}$$

where $\chi_\delta=\chi(h^{\frac{1}{2}-\delta}(x_1,\xi_1))$.

The eigenfunctions of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ being microlocalized near $x_1=\xi_1=0$, adding these cutoff functions should not change the spectrum too much : This will be proved in section 7.6. Thanks to this cutoff function we can expand $\hat{B}$ and $\hat{\alpha}$ with respect to $h^{1/2}\chi_\delta x_1$ without increasing the powers of (x_1,ξ_1) at infinity : we remain in a suitable class of symbols.

7.3.1 – Operator-valued symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h}$

We now focus on $\widehat{\mathscr{L}_h} = \mathsf{Op}_h^{w,2}\mathsf{Op}_1^{w,1}(p_h)$. Note that, due to the assumption on $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$, we have for some $c_1, c_2 > 0$,

$$c_1|X_1|^2 \leq p_h \leq c_2|X_1|^2 \,.$$

Notation 1. *We consider the operator symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ defined by*

$$\mathsf{P}_h(X_2) = \mathsf{Op}_1^{w,1}(p_h)\,,$$

and acting on

$$B^2(\mathbf{R}) = \{\psi \in H^2(\mathbf{R}) : x^2\psi \in L^2(\mathbf{R})\}\,.$$

Lemma 7.19. *For all $X_2 \in \mathbf{R}^2$, the operator $(B^2(\mathbf{R}), \mathsf{P}_h(X_2))$ is closed. Its graph norm is equivalent to $\|\cdot\|_{B^2(\mathbf{R})}$ (independently from X_2 and h small enough). In particular, $(B^2(\mathbf{R}), \mathsf{P}_h(X_2))$ has compact resolvent.*

Proof. First, we notice that the operator is indeed well defined on $B^2(\mathbf{R})$. Consider for instance

$$\mathsf{Op}_1^{w,1}\left(\hat{B}^2(\xi_2 + h^{\frac{1}{2}}\chi_\delta x_1, x_2 + h^{\frac{1}{2}}\chi_\delta\xi_1)\xi_1^2\right)\,.$$

By considering the product of $\mathsf{Op}_1^{w,1}\left(\hat{B}^2(\xi_2 + h^{\frac{1}{2}}\chi_\delta x_1, x_2 + h^{\frac{1}{2}}\chi_\delta\xi_1)\right)$ with $\mathsf{Op}_1^{w,1}\xi_1^2$, and by using the Caldéron-Vaillancourt theorem (with parameters), we get that, for all $\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$,

$$\left\|\mathsf{Op}_1^{w,1}\left(\hat{B}^2(\xi_2 + h^{\frac{1}{2}}\chi_\delta x_1, x_2 + h^{\frac{1}{2}}\chi_\delta\xi_1)\xi_1^2\right)\psi\right\| \leq C\|\psi\|^2_{H^2(\mathbf{R})}\,,$$

where C does not depend on (X_2, h). We can deal with the other term in the same way and get

$$\forall\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})\,, \quad \|\mathsf{P}_h(X_2)\psi\| \leq C\left(\|\psi\|^2_{H^2(\mathbf{R})} + \|\langle x_1\rangle^2\psi\|^2\right)\,.$$

Conversely, we may apply the Gårding inequality to the symbol $p_h - c_1|X_1|^2 \geq 0$, and we see that there exist $c, C > 0$ such that, for all $\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$,

$$\langle \mathsf{P}_h(X_2)\psi, \psi\rangle \geq c\|\psi\|^2_{B^1(\mathbf{R})} - C\|\psi\|^2\,.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality, we deduce that

$$\forall\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})\,, \quad \|\psi\|_{B^1(\mathbf{R})} \leq C(\|\psi\| + \|\mathsf{P}_h(X_2)\psi\|)\,.$$

To get the control of $\|\cdot\|_{B^2(\mathbf{R})}$, we can use, for instance, the difference quotient method. Let us explain this without going into detail. We consider the difference quotient

$$Q_k\psi(x_1) = \frac{\psi(x_1 + k) - \psi(x_1)}{k}\,,$$

and we notice that

$$Q_k(\mathsf{P}_h(X_2))\psi = \mathsf{P}_h(X_2)Q_k\psi + \mathsf{Op}_1^{w,1}(Q_k p_h)\tau_k\psi\,, \quad \tau_k\psi = \psi(\cdot + k)\,.$$

Then, we have

$$|\langle \mathsf{P}_h(X_2)\psi, Q_{-k}Q_k\psi\rangle| \leq \|P_h\psi\|\|Q_{-k}Q_k\psi\| \leq \|P_h\psi\|\|Q_k\psi'\|\,,$$

so that

$$|\langle Q_k\mathsf{P}_h(X_2)\psi, Q_k\psi\rangle| \leq \|P_h\psi\|\|Q_k\psi'\|\,,$$

and

$$|\langle \mathsf{P}_h(X_2)Q_k\psi, Q_k\psi\rangle| \leq \|P_h\psi\|\|\psi''\| + |\langle \mathsf{Op}_1^{w,1}(Q_kp_h)\tau_k\psi, Q_k\psi\rangle|\,.$$

In this way, we get

$$\|Q_k\psi\|^2_{B^1(\mathbf{R})} \leq \|P_h\psi\|\|Q_k\psi'\| + |\langle \mathsf{Op}_1^{w,1}(Q_kp_h)\tau_k\psi, Q_k\psi\rangle| + C\|Q_k\psi\|^2\,.$$

In particular,

$$\|Q_k\psi'\|^2 + \|Q_k(x_1\psi)\|^2 \leq \|P_h\psi\|\|Q_k\psi'\| + |\langle \mathsf{Op}_1^{w,1}(Q_kp_h)\tau_k\psi, Q_k\psi\rangle| + C\|\psi\|^2_{B^1(\mathbf{R})}\,.$$

By similar arguments, we have

$$|\langle \mathsf{Op}_1^{w,1}(Q_kp_h)\tau_k\psi, Q_k\psi\rangle| \leq C\|\psi\|_{B^1(\mathbf{R})}(\|Q_k\psi\| + \|Q_k\psi'\|)\,,$$

and

$$|\langle \mathsf{Op}_1^{w,1}(Q_kp_h)\tau_k\psi, Q_k\psi\rangle| \leq C(\|\psi\|^2_{B^1(\mathbf{R})} + \|\psi\|_{B^1(\mathbf{R})}\|Q_k\psi'\|)\,.$$

We infer that

$$\|Q_k\psi'\|^2 + \|Q_k(x_1\psi)\|^2 \leq C\|\mathsf{P}_h(X_2)\psi\|^2 + C\|\psi\|^2_{B^1(\mathbf{R})}\,.$$

It follows that

$$\|\psi''\| + \|(x_1\psi)'\| \leq C(\|\psi\| + \|\mathsf{P}_h(X_2)\psi\|)\,.$$

This information allows us to get the control of $\|x_1^2\psi\|$.

To conclude, we have found $c, C > 0$ such that

$$\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})\,, \quad c\|\psi\|^2_{B^2(\mathbf{R})} \leq \|\mathsf{P}_h(X_2)\psi\| + \|\psi\| \leq C\|\psi\|^2_{B^2(\mathbf{R})}\,.$$

The density of $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ in $B^2(\mathbf{R})$ gives the conclusion. □

Let us consider the class of bounded operator-valued symbols

$$\begin{aligned} &S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R}))) \\ &\quad = \Big\{ \mathsf{P} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R}))) : \forall \alpha \in \mathbf{N}^2\,, \exists C_\alpha > 0\,, \forall X_2 \in \mathbf{R}^2\,, \\ &\qquad\qquad \forall \psi \in B^2(\mathbf{R})\,, \|\partial^\alpha_{X_2}\mathsf{P}(X_2)\psi\| \leq C_\alpha\|\psi\|_{B^2(\mathbf{R})} \Big\}\,. \end{aligned}$$

By using the same arguments as in the proof of Lemma 7.19, we get the following.

Lemma 7.20. *The operator symbol $X_2 \mapsto \mathsf{P}_h(X_2)$ belongs to $S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})))$.*

7.3.2 – Expansion of the symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h}$

Recall that $\delta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. We prove the following expansion for the symbol $\mathsf{P}_h = \mathsf{Op}_1^{w,1} p_h$ of $\widehat{\mathscr{L}_h}$.

Lemma 7.21. *We have an expansion in powers of $h^{1/2}$ for the symbol of $\widehat{\mathscr{L}_h}$:*

$$\mathsf{P}_h = \mathsf{P}_0 + h^{1/2}\mathsf{P}_1 + h\mathsf{P}_2 + h^{3\delta} R_h$$

with $R_h \in S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})))$ uniformly bounded with respect to h. Moreover the principal part $\mathsf{P}_0(X_2)$ is the following X_2-dependent Harmonic oscillator :

$$\mathsf{P}_0(X_2) = \mathsf{Op}_1^{w,1}\left(\hat{B}^2(\xi_2, x_2)\xi_1^2 + (x_1 + \hat{\alpha}(\xi_2, x_2)\xi_1)^2 + \hat{V}(\xi_2, x_2)\right).$$

Proof. We can expand the symbol p_h with respect to $\hbar = h^{1/2}$ by using a Taylor expansion:

$$p(X_1, X_2, \hbar) = p_0 + \hbar p_1 + \hbar^2 p_2 + \hbar^3 r_\hbar\,,$$

where

$$r_\hbar = \int_0^1 (1-t)^2 \partial_\hbar^3 p(X_1, X_2, t\hbar)\mathrm{d}t\,,$$

and $p_j = \frac{1}{j!}\partial_\hbar^j p(X_1, X_2, 0)$. Note that the p_j still slightly depend on h (through the cutoff functions χ_δ). Explicitely, we have

$$\begin{aligned}
p_0 =& \hat{B}^2(\xi_2, x_2)\xi_1^2 + (x_1 + \hat{\alpha}(\xi_2, x_2)\xi_1)^2 + \hat{V}(\xi_2, x_2)\,,\\
p_1 =& \chi_\delta\left[2\xi_1^2\hat{B}\nabla\hat{B}\cdot X_1 + 2\xi_1(x_1 + \hat{\alpha}\xi_1)\nabla\hat{\alpha}\cdot X_1 + \nabla\hat{V}\cdot X_1\right] + W_1(\xi_2, x_2)\cdot X_1\,,\\
p_2 =& \chi_\delta^2\left[(\nabla\hat{B}\cdot X_1)^2 + \nabla^2\hat{B}(X_1, X_1) + \xi_1^2(\nabla\hat{\alpha}\cdot X_1)^2 + \xi_1(x_1 + \hat{\alpha}\xi_1)\nabla^2\hat{\alpha}(X_1, X_1)\right]\\
&+ \chi_\delta^2\nabla^2\hat{V}(X_1, X_1) + \chi_\delta\nabla W_1 X_1\cdot X_1 + W_2(\xi_2, x_2)\,.
\end{aligned}$$

where the functions $\hat{B}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{V}$ and their gradients are implicitely taken at (ξ_2, x_2). Letting

$$\mathsf{P}_j(X_2) = \mathsf{Op}_1^{w,1} p_j\,, \tag{7.3.2}$$

we notice that

$$\mathsf{P}_h(X_2) = \mathsf{P}_0(X_2) + \hbar\mathsf{P}_1(X_2) + \hbar^2\mathsf{P}_2(X_2) + \hbar^3\mathsf{Op}_1^{w,1} r_\hbar\,.$$

By using the Caldéron-Vaillancourt theorem, due to the cutoff functions we can check that

$$\forall\psi \in B^2(\mathbf{R})\,,\quad \|\partial_{X_2}^\alpha \mathsf{Op}_1^{w,1} r_\hbar\psi\| \le C_\alpha h^{-3\left(\frac{1}{2}-\delta\right)}\|\psi\|_{B^2(\mathbf{R})}\,.$$

Therefore, we can write

$$\mathsf{P}_h = \mathsf{P}_0 + \hbar\mathsf{P}_1 + \hbar^2\mathsf{P}_2 + \hbar^{6\delta} R_\hbar$$

with $R_\hbar \in S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})))$ uniformly bounded with respect to h. This leads to choose $\delta \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ and concludes the proof.

□

7.3.3 – About the principal part $\mathsf{P}_0(X_2)$

In this section we describe some important properties of $\mathsf{P}_0(X_2)$. Since it is a Harmonic oscillator, we have the following spectral properties. If we let

$$u_{X_2}(x_1) = C(X_2) e^{-\frac{\hat{B}}{2(\hat{B}^2+\hat{\alpha}^2)}x_1^2} e^{i\frac{\hat{\alpha}}{2(\hat{B}^2+\hat{\alpha}^2)}x_1^2}, \quad C(X_2) = \left(\frac{\hat{B}}{\pi(\hat{B}^2+\hat{\alpha}^2)}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

then we have

$$\mathsf{P}_0(X_2) u_{X_2} = \mu(X_2) u_{X_2}, \quad \mu(X_2) = \hat{B}(\xi_2, x_2) + \hat{V}(\xi_2, x_2).$$

Moreover, the eigenvalues of $\mathsf{P}_0(X_2)$ are in the form

$$(2n-1)\hat{B}(\xi_2, x_2) + \hat{V}(\xi_2, x_2), \quad n \geq 1.$$

Thus u_{X_2} is the ground state of $\mathsf{P}_0(X_2)$. When considering the restriction of $\mathsf{P}_0(X_2)$ to $u_{X_2}^\perp$ we get the following lemma.

Lemma 7.22. *The operator $(\mathsf{P}_0(X_2) - z) : B^2(\mathbf{R}) \cap u_{X_2}^\perp \to u_{X_2}^\perp$ is bijective when*

$$u\mathsf{Re}(z - \mu_0) + v\mathsf{Im}(z - \mu_0) < 2ub_0.$$

Since $ub_0 > 0$, this is the case for $z \in D(\mu_0, Ch)$ if h is small enough.

Proof. We can check that $u_{X_2}^\perp$ is indeed stable under P_0. Then, we notice that, for all $\psi \in B^2(\mathbf{R}) \cap u_{X_2}^\perp$,

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}\left[(u - iv)\langle(\mathsf{P}_0(X_2) - z)\psi, \psi\rangle\right] &\geq \left[u(3\hat{B}(X_2) + \mathsf{Re}(\hat{V}(X_2) - z)) + v\mathsf{Im}(\hat{V}(X_2) - z)\right] \|\psi\|^2 \\ &\geq \left[2ub_0 + u\mathsf{Im}(\mu_0 - z) + v\mathsf{Im}(\mu_0 - z)\right] \|\psi\|^2,\end{aligned}$$

because μ_0 minimize the quantity $u(\hat{B}(X_2) + \mathsf{Re}\hat{V}(X_2)) + v\mathsf{Im}\hat{V}(X_2)$ (Assumption 7.2). This shows that $\mathsf{P}_0(X_2) - z$ is injective with closed range. But $\mathsf{P}_0(X_2) - z$ is a self-adjoint harmonic oscillator + constant, so the conclusion follows. □

Proposition 7.23. *Let $z \in D(\mu_0, Ch)$. We consider the operator*

$$\mathscr{P}_0(X_2, z) = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0(X_2) - z & \cdot u_{X_2} \\ \langle \cdot, u_{X_2}\rangle & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}, L^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}).$$

We have

$$\mathscr{P}_0(\cdot, z) \in S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}, L^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C})).$$

Moreover, $\mathscr{P}_0(X_2, z)$ is a bijection and

$$\mathscr{Q}_0 := \mathscr{P}_0^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathsf{P}_0 - z)^{-1}\Pi^\perp & \cdot u_{X_2} \\ \langle \cdot, u_{X_2}\rangle & z - [\hat{B} + \hat{V}] \end{pmatrix} \in S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}, B^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C})),$$

where $\Pi^\perp = \mathrm{Id} - \langle \cdot, u_{X_2}\rangle u_{X_2}$.

Proof. Let us consider $(\psi, \beta) \in L^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}$ and look for $(\varphi, \alpha) \in B^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}$ such that

$$(\mathsf{P}_0 - z)\varphi = \psi - \alpha u_{X_2}\,, \quad \langle \varphi, u_{X_2}\rangle = \beta\,.$$

The first equation has solutions if and only if

$$\langle \psi - \alpha u_{X_2}, u_{X_2}\rangle = (\mu - z)\langle \varphi, u_{X_2}\rangle = (\mu - z)\beta\,,$$

which is equivalent to $\alpha = \langle \psi, u_{X_2}\rangle + (z-\mu)\beta$. With this choice, we write

$$(\mathsf{P}_0 - z)(\varphi - \beta u_{X_2}) = \psi - \alpha u_{X_2} + \beta(\mu - z)u_{X_2} \in u_{X_2}^{\perp}\,.$$

It remains to apply Lemma 7.22. □

7.4 – Parametrix construction and consequences

7.4.1 – Parametrix construction

Let us now consider the « Grushin operator symbol »

$$X_2 \mapsto \mathscr{P}_h(X_2) = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_h(X_2) - z & \cdot u_{X_2} \\ \langle \cdot, u_{X_2}\rangle & 0 \end{pmatrix} \in S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}, L^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}))\,,$$

and notice that

$$\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{P}_h = \begin{pmatrix} \widehat{\mathscr{L}_h} - z & \mathfrak{P}^* \\ \mathfrak{P} & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \mathfrak{P} = \mathsf{Op}_h^{w,2}\langle \cdot, u_{X_2}\rangle\,.$$

Note that, in the class $S(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(B^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}, L^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}))$, with $\delta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$,

$$\mathscr{P}_h(X_2) = \mathscr{P}_0 + h^{1/2}\mathscr{P}_1 + h\mathscr{P}_2 + \mathcal{O}(h^{3\delta})\,,$$

with $\mathscr{P}_0$ defined in Proposition 7.23, and for $j \geq 1$,

$$\mathscr{P}_j = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_j(X_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

The following proposition is an approximate parametrix construction.

Proposition 7.24. *For $z \in D(\mu_0, Ch)$ we consider*

$$\begin{cases} \mathscr{Q}_1 = -\mathscr{Q}_0\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_0 \\ \mathscr{Q}_2 = -\mathscr{Q}_0\mathscr{P}_2\mathscr{Q}_0 - \mathscr{Q}_1\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_0 - \frac{1}{2i}\{\mathscr{Q}_0, \mathscr{P}_0\}\mathscr{Q}_0\,, \end{cases}$$

and we let

$$\mathscr{Q}_h^{[2]} = \mathscr{Q}_0 + h^{1/2}\mathscr{Q}_1 + h\mathscr{Q}_2\,.$$

Then we have

$$\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{Q}_h^{[2]}\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{P}_h = \mathrm{Id} + \mathscr{R}_{h,z}\,, \quad \mathscr{R}_{h,z} = \mathscr{O}(h^{3\delta})\,,$$

where the bounded operator $\mathscr{R}_{h,z}$ depends on z analytically. We also have

$$\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{P}_h\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{Q}_h^{[2]} = \mathrm{Id} + \widetilde{\mathscr{R}}_{h,z}\,, \quad \widetilde{\mathscr{R}}_{h,z} = \mathscr{O}(h^{3\delta})\,,$$

Moreover, the operator $\mathscr{Q}_h^{[2]}$ has the form

$$\mathscr{Q}_h^{[2]}(X_2) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \mathscr{Q}_{h,\pm}^{[2]}(X_2) \end{pmatrix},$$

with

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_{h,\pm}^{[2]} = z - \mu(X_2) - h^{1/2}\langle \mathsf{P}_1(X_2)u_{X_2}, u_{X_2}\rangle \\ + h\left(-\langle \mathsf{P}_2(X_2)u_{X_2}, u_{X_2}\rangle + \langle \mathsf{P}_1(X_2)(\mathsf{P}_0(X_2) - z)^{-1}\Pi^{\perp}\mathsf{P}_1(X_2)u_{X_2}, u_{X_2}\rangle\right)\,.\end{aligned}$$

Proof. Let us briefly explain where the expressions of the $\mathscr{Q}_j$ are coming from. The composition $\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{Q}_h^{[2]}\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{P}_h$ gives a new pseudo-differential operator (with operator symbol). This symbol is given by the usual Moyal composition law (with $\hbar = h^{1/2}$) $\mathscr{Q}_h^{[2]} \star \mathscr{P}_h$, and we have

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}_h^{[2]} \star \mathscr{P}_h =& (\mathscr{Q}_0 + \hbar\mathscr{Q}_1 + \hbar^2\mathscr{Q}_2) \star (\mathscr{P}_0 + \hbar\mathscr{P}_1 + \hbar^2\mathscr{P}_2 + \mathcal{O}(\hbar^{6\delta}) \\ =& \mathscr{Q}_0\mathscr{P}_0 + \frac{\hbar}{2i}\{\mathscr{Q}_0, \mathscr{P}_0\} + \hbar\left(\mathscr{Q}_0\mathscr{P}_1 + \mathscr{Q}_1\mathscr{P}_0\right) \\ &+ \hbar^2\left(\mathscr{Q}_2\mathscr{P}_0 + \mathscr{Q}_0\mathscr{P}_2 + \mathscr{Q}_1\mathscr{P}_1\right) + \mathscr{O}(\hbar^{6\delta})\,.\end{aligned}$$

This leads to the choices of the $\mathscr{Q}_j$. Let us now compute $\mathscr{Q}_{h,\pm}^{[2]}$. An easy product of operator matrices gives

$$\mathscr{Q}_{1,\pm} = -\langle \mathsf{P}_1(X_2)u_{X_2}, u_{X_2}\rangle\,.$$

In the same way, we get

$$(-\mathscr{Q}_0\mathscr{P}_2\mathscr{Q}_0)_{\pm} = -\langle \mathsf{P}_2(X_2)u_{X_2}, u_{X_2}\rangle\,.$$

Then, we have

$$-\mathscr{Q}_1\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_0 = \mathscr{Q}_0\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_0\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_0\,,$$

and a computation gives

$$(-\mathscr{Q}_1\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_0)_{\pm} = \langle \mathsf{P}_1(\mathsf{P}_0 - z)^{-1}\Pi^{\perp}\mathsf{P}_1 u_{X_2}, u_{X_2}\rangle\,.$$

We recall that

$$\{\mathscr{Q}_0, \mathscr{P}_0\} = \partial_\xi\mathscr{Q}_0\partial_x\mathscr{P}_0 - \partial_x\mathscr{Q}_0\partial_\xi\mathscr{P}_0\,.$$

Another computation gives

$$\begin{aligned}(\{\mathscr{Q}_0, \mathscr{P}_0\}\mathscr{Q}_0)_{\pm} =& \langle(\partial_x\mathsf{P}_0)u_{X_2}, \partial_\xi u_{X_2}\rangle - \langle(\partial_\xi\mathsf{P}_0)u_{X_2}, \partial_x u_{X_2}\rangle \\ &+ (\mu - z)\left(\langle\partial_x u_{X_2}, \partial_\xi u_{X_2}\rangle - \langle\partial_\xi u_{X_2}, \partial_x u_{X_2}\rangle\right)\,.\end{aligned}$$

Note that, since u_{X_2} is an L^2-normalized eigenfunction,

$$\begin{aligned}0 = \partial_x\langle(\mathsf{P}_0 - z)u_{X_2}, \partial_\xi u_{X_2}\rangle = \langle(\partial_x\mathsf{P}_0)u_{X_2}, \partial_\xi u_{X_2}\rangle + \langle(\mathsf{P}_0 - z)\partial_x u_{X_2}, \partial_\xi u_{X_2}\rangle \\ + \langle(\mathsf{P}_0 - z)u_{X_2}, \partial_x\partial_\xi u_{X_2}\rangle\,,\end{aligned}$$

and

$$0 = \partial_\xi \langle (\mathsf{P}_0 - z) u_{X_2}, \partial_x u_{X_2} \rangle = \langle (\partial_\xi \mathsf{P}_0) u_{X_2}, \partial_x u_{X_2} \rangle + \langle (\mathsf{P}_0 - z) \partial_\xi u_{X_2}, \partial_x u_{X_2} \rangle + \langle (\mathsf{P}_0 - z) u_{X_2}, \partial_x \partial_\xi u_{X_2} \rangle \,,$$

Thus,

$$(\{\mathscr{Q}_0, \mathscr{P}_0\} \mathscr{Q}_0)_\pm = -\langle (\mathsf{P}_0 - \mu) \partial_x u, \partial_\xi u \rangle + \langle (\mathsf{P}_0 - \mu) \partial_\xi u, \partial_x u \rangle = 0 \,,$$

where we used that $\mathsf{P}_0 - \mu$ is self-adjoint.

Therefore,

$$\mathscr{Q}_{2,\pm} = -\langle \mathsf{P}_2(X_2) u_{X_2}, u_{X_2} \rangle + \langle \mathsf{P}_1(X_2) (\mathsf{P}_0 - z)^{-1} \Pi^\perp \mathsf{P}_1(X_2) u_{X_2}, u_{X_2} \rangle \,.$$

□

Remark 7.25. *The expression of the « Schur complement » $\mathscr{Q}^{[2]}_{h,\pm}$ has already appeared in previous works (see [Ker18, Proposition 3.1.10]). Note however that the assumption of [Ker18, Hypothèse 3.1.9]* (i.e., *the principal operator symbol does not depend on ξ) is not satisfied in our context. It is also important to notice that our h-pseudo-differential operator is expanded according to the powers of $\hbar = h^{\frac{1}{2}}$ and not h. This allows us to avoid the nasty Poisson brackets computations of [Ker18, Lemme 3.1.11].*

Actually, the subprincipal symbol of $\mathscr{Q}^{[2]}_{h,\pm}$ is quite flat.

Lemma 7.26. *We have, in the symbol class $S(1)$,*

$$\langle \mathsf{P}_1(X_2) u_{X_2}, u_{X_2} \rangle = \mathscr{O}(h^\infty) \,.$$

Proof. This follows from the fact that $\mathsf{P}_1(X_2) = \mathsf{Op}_1^{w,1} p_1$ where

$$p_1 = \chi_\delta \tilde{p}_1 + W_1 \cdot X_1 \,,$$

with

$$\tilde{p}_1 = 2\xi_1^2 \hat{B} \nabla \hat{B} \cdot X_1 + 2\xi_1 (x_1 + \hat{\alpha}\xi_1) \nabla \hat{\alpha} \cdot X_1 + \nabla V \cdot X_1 \,.$$

Indeed, $\tilde{p}_1$ (and $W_1 \cdot X_1$) is a homogeneous function of X_1 of odd order, and u_{X_2} is an even function of x_1 so that, for all $X_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \mathsf{Op}_1^{w,1} \tilde{p}_1 u_{X_2}, u_{X_2} \rangle = 0 \,.$$

We deal with χ_δ by using the exponential decay of u_{X_2}. □

Corollary 7.27. *For h small enough, $\mathrm{Id} + \mathscr{R}_{h,z}$ and $\mathrm{Id} + \widetilde{\mathscr{R}}_{h,z}$ are bijective. If we let*

$$\mathscr{E}_h = (\mathrm{Id} + \mathscr{R}_{h,z})^{-1} \mathsf{Op}_h^{w,2} \mathscr{Q}_h^{[2]} \,, \quad \widetilde{\mathscr{E}}_h = \mathsf{Op}_h^{w,2} \mathscr{Q}_h^{[2]} (\mathrm{Id} + \widetilde{\mathscr{R}}_{h,z})^{-1} \,,$$

we have

$$\mathscr{E}_h \cdot \mathsf{Op}_h^{w,2} \mathscr{P}_h = \mathrm{Id} \,, \quad \mathsf{Op}_h^{w,2} \mathscr{P}_h \cdot \widetilde{\mathscr{E}}_h = \mathrm{Id} \,, \quad \widetilde{\mathscr{E}}_h = \mathscr{E}_h \,.$$

7.4.2 – From $\widehat{\mathscr{L}_h}$ to $\mathscr{E}_{h,\pm}$

According to Corollary 7.27, the operator $\mathscr{E}_h$ is the inverse of $\mathsf{Op}_h^{w,2}\mathscr{P}_h$. We can write it in the matrix form

$$\mathscr{E}_h = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_{h,++} & \mathscr{E}_{h,+} \\ \mathscr{E}_{h,-} & \mathscr{E}_{h,\pm}\,. \end{pmatrix}$$

Then we have the following classical observation.

Lemma 7.28. *For $z \in D(\mu_0, Ch)$ we have*

$$z \in \mathrm{sp}(\widehat{\mathscr{L}_h}) \Longleftrightarrow 0 \in \mathrm{sp}(\mathscr{E}_{h,\pm})\,.$$

Moreover, when $z \notin \mathrm{sp}(\widehat{\mathscr{L}_h})$, we have

$$\mathscr{E}_{h,\pm}^{-1} = -\mathfrak{P}(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)^{-1}\mathfrak{P}^*\,, \tag{7.4.1}$$

and

$$(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)^{-1} = \mathscr{E}_{h,++} - \mathscr{E}_{h,+}\mathscr{E}_{h,\pm}^{-1}\mathscr{E}_{h,-}\,. \tag{7.4.2}$$

Proof. From Corollary 7.27, we have

$$(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)\mathscr{E}_{h,+} + \mathfrak{P}^*\mathscr{E}_{h,\pm} = 0\,, \quad \mathfrak{P}\mathscr{E}_{h,+} = \mathrm{Id}\,, \tag{7.4.3}$$

and

$$\mathscr{E}_{h,-}(\widehat{\mathscr{L}_h} - z) + \mathscr{E}_{h,\pm}\mathfrak{P} = 0\,, \quad \mathscr{E}_{h,-}\mathfrak{P}^* = \mathrm{Id}\,. \tag{7.4.4}$$

By using (7.4.3) and (7.4.4), we see that when $\widehat{\mathscr{L}_h} - z$ is bijective, so is $\mathscr{E}_{h,\pm}$. Then, assume that $\mathscr{E}_{h,\pm}$ is bijective and consider also

$$\mathscr{E}_{h,++}(\widehat{\mathscr{L}_h} - z) + \mathscr{E}_{h,+}\mathfrak{P} = \mathrm{Id}\,.$$

With (7.4.4), we get

$$\left(\mathscr{E}_{h,++} - \mathscr{E}_{h,+}\mathscr{E}_{h,\pm}^{-1}\mathscr{E}_{h,-}\right)(\widehat{\mathscr{L}_h} - z) = \mathrm{Id}\,.$$

Using (7.4.3) and also

$$(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)\mathscr{E}_{h,++} + \mathfrak{P}^*\mathscr{E}_{h,-} = \mathrm{Id}\,,$$

we get

$$(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)\left(\mathscr{E}_{h,++} - \mathscr{E}_{h,+}\mathscr{E}_{h,\pm}^{-1}\mathscr{E}_{h,-}\right) = \mathrm{Id}\,.$$

□

7.5 – Spectral reduction

In Lemma 7.28 we proved that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ in $D(\mu_0, Ch)$ is given by those z such that $\mathscr{E}_{h,\pm}(z)$ is not bijective. Moreover, according to Corollary 7.27 and Proposition 7.24 ,

$$\mathscr{E}_{h,\pm}(z) = \mathsf{Op}_h^w \left(z - \mu_h^{\mathsf{eff}}(X_2) + \mathcal{O}(h^{3\delta}) \right) .$$

with

$$\mu_h^{\mathsf{eff}}(X_2) = \hat{B}(X_2) + \hat{V}(X_2) + h \left(\langle \mathsf{P}_2(X_2) u_{X_2}, u_{X_2} \rangle - \langle \mathsf{P}_1(X_2)(\mathsf{P}_0(X_2) - z)^{-1} \Pi^{\perp} \mathsf{P}_1(X_2) u_{X_2}, u_{X_2} \rangle \right) . \quad (7.5.1)$$

Indeed, the $h^{1/2}$-order term appears to be small by Lemma 7.26. We recall that P_j was defined in (7.3.2), u_{X_2} is the first eigenfunction of the harmonic oscillator $\mathsf{P}_0(X_2)$ and $\Pi^{\perp}$ is the orthogonal projection onto $u_{X_2}^{\perp}$ (see Lemma 7.22). We denote $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}} = \mathsf{Op}_h^w \mu_h^{\mathsf{eff}}$. The aim of this section is to prove that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is given by the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ up to a small error.

7.5.1 – The spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is discrete

Proposition 7.29. *The following families are analytic families of Fredholm operators of index* 0*:*

$$\begin{pmatrix} \left(z - \mathsf{Op}_h^w(\hat{B} + \hat{V}) \right)_{z \in D(\mu_0, Ch)} & \left(z - \mathsf{Op}_h^w(\mu_h^{\mathsf{eff}}) \right)_{z \in D(\mu_0, Ch)} \\ \left(\mathscr{E}_{h,\pm}(z) \right)_{z \in D(\mu_0, Ch)} & \left(\widehat{\mathscr{L}_h} - z \right)_{z \in D(\mu_0, Ch)} \end{pmatrix}$$

Proof. Let us consider the family $\left(z - \mathsf{Op}_h^w(\hat{B} + \hat{V}) \right))_{z \in D(\mu_0, Ch)}$. This is an analytic family of bounded operators. By perturbation, it is enough to prove that $\mathsf{Op}_h^w(\hat{B} + \hat{V}) - \mu_0$ is a Fredholm operator with index 0 (since the set of Fredhom operators of index 0 is open). Let $u > 0$ and $v \in \mathbf{R}$ given by Assumptions 7.2 and 7.3. The function $F = u(\hat{B} + \mathsf{Re}\hat{V}) + v\mathsf{Im}\hat{V}$ admits a global minimum, and there exist a compact K and a constant $\gamma > \min F$ such that,

$$\forall X_2 \in \mathbf{R}^2 \setminus K, \quad F(X_2) \geq \gamma .$$

Thus we may consider a smooth cutoff function χ supported in a neighborhood of K such that

$$F + \chi \geq \gamma > \min F .$$

Define

$$P = \mathsf{Op}_h^w(\hat{B} + \hat{V}) + (u - iv)^{-1} \chi .$$

Proving that $P - \mu_0$ is invertible is enough to conclude that $\mathsf{Op}_h^w(\hat{B} + \hat{V}) - \mu_0$ is a Fredholm operator with index 0. Let $w = (u - iv)\mu_0$ and $Q = (u - iv)P$, so that

$$\begin{aligned} (u - iv)(P - \mu_0) = Q - w \\ &= \mathsf{Op}_h^w \left(u\mathsf{Re}(\hat{B} + \hat{V} - \mu_0) + v\mathsf{Im}(\hat{V} - \mu_0) + \chi \right) \\ &\quad + i\, \mathsf{Op}_h^w \left(u\mathsf{Im}(\hat{V} - \mu_0) - v\mathsf{Re}(\hat{V} + \hat{B} - \mu_0) \right) . \end{aligned}$$

Each parenthesis being self-adjoint, we deduce for all $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbf{R})$ that

$$\begin{aligned}|\langle (Q-w)\psi,\psi\rangle| &\geq \mathsf{Re}\langle (Q-w)\psi,\psi\rangle \\ &\geq \left\langle \mathsf{Op}_h^w\big(u\mathsf{Re}(\hat{B}+\hat{V}-\mu_0)+v\mathsf{Im}(\hat{V}-\mu_0)+\chi\big)\psi,\psi\right\rangle .\end{aligned}$$

Using the Gårding inequality, and with $\min F = u\mathsf{Re}\mu_0 + v\mathsf{Im}\mu_0$, we get

$$|\langle (Q-w)\psi,\psi\rangle| \geq (\gamma - \min F)\|\psi\|^2 .$$

Hence $Q-w$ is one-to-one with closed range. We can apply the same arguments for the adjoint of $Q-w$. We deduce that $Q-w$ is bijective, and so is $P-\mu_0$.

By Corollary 7.27, we have, for $z \in D(\mu_0, Ch)$,

$$\mathscr{E}_{h,\pm}(z) = \mathsf{Op}_h^w\left(z-\hat{B}-\hat{V}\right) + \mathscr{O}(h).$$

Thus, $\mathscr{E}_{h,\pm}(z)$ is Fredholm of index 0, as soon as h is small enough (and by construction it is analytic with respect to z). The same perturbation argument hold for $z - \mathsf{Op}_h^w \mu_h^{\mathsf{eff}}$. Using again Corollary 7.27, this implies that $\widehat{\mathscr{L}_h} - z$ is also a Fredholm operator of index 0 (the Fredholmness of the Schur complement $\mathscr{E}_{h,\pm}$ is equivalent to that of $\widehat{\mathscr{L}_h} - z$). □

Proposition 7.29 is not enough to establish that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is discrete in $D(\mu_0, Ch)$: We have to check that the resolvent set intersects $D(\mu_0, Ch)$.

Remark 7.30. *Thanks to the assumptions on $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$, we know that we can draw in the resolvent set of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ the circle $\Gamma_{j,h}$ of radius $h^{1+\alpha}$ and center $\nu_j(h)$ for h small enough. In the following, $\alpha > 0$ is assumed to be such that $\alpha < 3\delta - 1$ (which is possible since $\delta > \frac{1}{3}$).*

Lemma 7.31. *For all $j \in \{1,\dots,N\}$, there exists $h_0 > 0$ such that, for all $h \in (0,h_0)$, we have*

$$\Gamma_{j,h} \subset \rho(\widehat{\mathscr{L}_h}) .$$

Proof. We recall that, for $z \in D(\mu_0, Ch)$, we have

$$\mathscr{E}_{h,\pm,z} = z - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}} + \mathscr{O}(h^{3\delta}) .$$

By a classical perturbation argument using (7.1.3), we see that, for all $z \in \Gamma_{j,h}$, $\mathscr{E}_{h,\pm,z}$ is bijective. Indeed, it is bijective as soon as

$$h^{3\delta} < \|(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}} - z)^{-1}\|^{-1}$$

so it is sufficient that $h^{3\delta} < h^{1+\alpha}$, which is true because $1+\alpha < 3\delta$. Thanks to Lemma 7.28, we deduce that $\Gamma_{j,h} \subset \rho(\widehat{\mathscr{L}_h})$. □

Lemma 7.31 and Proposition 7.29 imply that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ in $D(\mu_0, Ch)$ is discrete (thanks to the analytic Fredholm theory). This also implies that, for $z \in D(\mu_0, Ch)$, $\mathscr{E}_{h,\pm}(z)$ is bijective except for discrete values of z.

7.5.2 – The spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ lies near the one of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$

The following proposition states that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ must be located near the spectrum of the effective operator.

Proposition 7.32. *There exist $h_0, \tilde{C} > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$, if $\lambda \in D(\mu_0, Ch) \cap \mathrm{sp}(\widehat{\mathscr{L}_h})$, then*

$$\mathrm{dist}(\lambda, \mathrm{sp}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})) \leq \tilde{C} h^{3\delta} .$$

Proof. Since we know that the spectrum is discrete, we may consider an eigenpair (λ, ψ). By Corollary 7.27, we have

$$\mathscr{Q}_{h,++}^{[2]}(\widehat{\mathscr{L}_h} - \lambda) + \mathscr{Q}_{h,+}^{[2]}\mathfrak{P} = \mathrm{Id} + \mathscr{O}(h^{3\delta}) ,$$

and

$$\mathscr{Q}_{h,-}^{[2]}(\widehat{\mathscr{L}_h} - \lambda) + \mathscr{Q}_{h,\pm}^{[2]}\mathfrak{P} = \mathscr{O}(h^{3\delta}) ,$$

so that

$$\|\psi\| \leq C\|\mathfrak{P}\psi\| , \quad \|\mathscr{Q}_{h,\pm}^{[2]}\mathfrak{P}\psi\| \leq Ch^{3\delta}\|\psi\| \leq \tilde{C}h^{3\delta}\|\mathfrak{P}\psi\| .$$

The resolvent bound (7.1.3) provides us with

$$\mathrm{dist}(z, \mathrm{sp}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}))\|\varphi\| \leq C \left\| \left(z - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}\right) \varphi \right\| , \tag{7.5.2}$$

and thus, we get

$$\mathrm{dist}(z, \mathrm{sp}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}))\|\mathfrak{P}\psi\| \leq Ch^{3\delta}\|\mathfrak{P}\psi\| .$$

□

7.5.3 – The spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ lies near the one of $\widehat{\mathscr{L}_h}$

Proposition 7.33. *Consider $j \in \{1, \dots, N\}$ and $\alpha \in (0, 3\delta - 1)$. There exists $h_0 > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$, the circle of center $\nu_j(h)$ and radius $h^{1+\alpha}$ encircles at least one point in the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$.*

Proof. We recall Lemma 7.31. For $z \in \Gamma_{j,h}$, thanks to a Neumann series we get

$$\mathscr{E}_{h,\pm,z}^{-1} = (z - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}(\mathrm{Id} + \mathscr{N}_{h,z}) , \tag{7.5.3}$$

where the bounded operator $\mathscr{N}_{h,z}$ satisfies

$$\|\mathscr{N}_{h,z}\| \leq Ch^{3\delta}\mathrm{dist}(z, \mathrm{sp}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}))^{-1} \leq \tilde{C}h^{3\delta-1-\alpha} < 1 ,$$

uniformly with respect to $z \in \Gamma_{j,h}$. Therefore, we get

$$\|\mathscr{E}_{h,\pm,z}^{-1} - (z - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\| \leq \tilde{C}\hbar^{3\delta-2-2\alpha} .$$

Integrating over the contour (whose length is $2\pi h^{1+\alpha}$), we find that

$$\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{j,h}} \mathscr{E}_{h,\pm,z}^{-1} \mathrm{d}z - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{j,h}} (z - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1} \mathrm{d}z \right\| \leq \tilde{C}\hbar^{3\delta-1-\alpha} .$$

We see that the right-hand-side goes to 0 when h goes to 0. We recall that $\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}(z-\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\mathrm{d}z$ is the (Riesz) projection on the eigenspace of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ associated with $\nu_j(h)$. If $\Gamma_{j,h}$ does not encircles any element in the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$, we see with Lemma 7.28 that $\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}\mathscr{E}_{h,\pm,z}^{-1}\mathrm{d}z = 0$, and thus that the projection $\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}(z-\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\mathrm{d}z$ must be zero, and this would be a contradiction. □

In fact, we can prove slightly more.

Proposition 7.34. *Let us consider the spectral projector $\Pi_{j,h}$ of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ associated with the contour $\Gamma_{j,h}$. Then,*

$$\dim \mathrm{Ran}\,\Pi_{j,h} = 1\,.$$

In other words, there is exactly one eigenvalue of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ encircled by $\Gamma_{j,h}$.

Proof. We already know that $\dim \mathrm{Ran}\,\Pi_{j,h} \geq 1$. As in the proof of Proposition 7.32, we have

$$\|\psi\| \leq C\|\mathfrak{P}\psi\| + C\|(\widehat{\mathscr{L}_h} - \nu_j(h))\psi\| + Ch^{3\delta}\|\psi\|\,,$$

and

$$\|(\nu_j(h) - \mathsf{Op}_h^w\mu_h^{\mathrm{eff}})\mathfrak{P}\psi\| \leq C\hbar^{3\delta}\|\psi\| + C\|(\widehat{\mathscr{L}_h} - \nu_j(h))\psi\|\,.$$

Let us assume that ψ belong to the range of the projection

$$\Pi_{j,h} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}(\eta - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}\mathrm{d}\eta\,.$$

We have

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathscr{L}_h} - \nu_j(h))\psi &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}(\widehat{\mathscr{L}_h} - \nu_j(h))(\eta - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}\psi\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}(\eta - \nu_j(h))(\eta - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}\psi\mathrm{d}\eta\,,\end{aligned}$$

so that

$$\|(\widehat{\mathscr{L}_h} - \nu_j(h))\psi\| \leq h^{1+\alpha}h^{1+\alpha}\sup_{\eta\in\Gamma_{j,h}}\|(\eta - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}\|\|\psi\|\,.$$

We recall (7.5.3), and notice that, for all $\eta \in \Gamma_{j,h}$,

$$\|\mathscr{E}_{h,\pm,\eta}^{-1}\| \leq C\|(\eta - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\| \leq C\mathrm{dist}(\eta, \mathrm{sp}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}))^{-1}\,.$$

With (7.4.2), this gives

$$\|(\eta - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}\| \leq C\mathrm{dist}(\eta, \mathrm{sp}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}))^{-1} = Ch^{-1-\alpha}\,.$$

Thus, for all $\psi \in \mathrm{Ran}\,\Pi_{j,h}$,

$$\|(\widehat{\mathscr{L}_h} - \nu_j(h))\psi\| \leq Ch^{1+\alpha}\|\psi\|\,.$$

It follows that

$$\|\psi\| \leq C\|\mathfrak{P}\psi\|\,, \tag{7.5.4}$$

and

$$\|(\nu_j(h) - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})\mathfrak{P}\psi\| \leq Ch^{1+\alpha}\|\psi\| \leq \tilde{C}h^{1+\alpha}\|\mathfrak{P}\psi\|\,.$$

In particular, (7.5.4) implies that $\dim \mathfrak{P}(\operatorname{Ran}\Pi_{j,h}) = \dim \operatorname{Ran}\Pi_{j,h}$. Then, for all $\varphi \in \mathfrak{P}(\operatorname{Ran}\Pi_{j,h})$,

$$\|(\nu_j(h) - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})\varphi\| \leq Ch^{1+\alpha}\|\varphi\|\,.$$

Let us now consider the spectral projection $\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}}$ associated with $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ and the contour $\Gamma_{j,h}$:

$$\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}} (\eta - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\mathrm{d}\eta\,.$$

In fact, since $\Gamma_{j,h}$ encircles only $\nu_j(h)$ as element of the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ and due to the gap of order h between the eigenvalues of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$, we have also

$$\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde{\Gamma}_{j,h}} (\eta - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}\mathrm{d}\eta\,,$$

where $\tilde{\Gamma}_{j,h}$ is the circle of center $\nu_j(h)$ and radius $h^{1+\tilde{\alpha}}$ where $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$. We have

$$\begin{aligned}\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}}\varphi &= \varphi + \frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde{\Gamma}_{j,h}} \left[(\eta - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1} - (\eta - \nu_j(h))^{-1}\right]\varphi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \varphi + \frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde{\Gamma}_{j,h}} (\eta - \mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}})^{-1}(\eta - \nu_j(h))^{-1}(\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}} - \nu_j(h))\varphi\,\mathrm{d}\eta\,.\end{aligned}$$

We deduce that

$$\|\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}}\varphi - \varphi\| \leq Ch^{-1-\tilde{\alpha}}h^{-1-\tilde{\alpha}}h^{1+\alpha}|\tilde{\Gamma}_{j,h}|\|\varphi\| \leq Ch^{\alpha-\tilde{\alpha}}\|\varphi\|\,.$$

In particular, for all $\varphi \in \mathfrak{P}(\operatorname{Ran}\Pi_{j,h})$,

$$\|\varphi\| \leq C\|\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}}\varphi\|\,.$$

This implies that

$$1 = \dim \operatorname{Ran}\Pi_{j,h}^{\mathrm{eff}} \geq \dim \operatorname{Ran}\Pi_{j,h}\,,$$

and the conclusion follows. □

Remark 7.35. *We have seen that, for all $z \in \Gamma_{j,h}$,*

$$\|(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)^{-1}\| \leq Ch^{-1-\alpha}\,.$$

7.6 – Removing the cutoff function

In the previous section, we proved that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ is close to the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$. $\widehat{\mathscr{L}_h}$ was the operator in which we inserted cutoff functions χ_δ (Definition 7.18). Let us now remove these cutoff functions and prove that the spectrum of the initial operator $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ (defined in 7.2.1) is close to the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$.

Proposition 7.36. *The families* $\left(\widehat{\mathscr{L}_h^0} - z\right)_{z\in D(\mu_0,Ch)}$ *and* $(\mathscr{L}_h - z)_{z\in D(\mu_0 h,Ch^2)}$ *are analytic families of Fredholm operators of index* 0. *In particular the spectrum of* $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ *in* $D(\mu_0, Ch)$ *and of* $\mathscr{L}_h$ *in* $D(\mu_0 h, Ch^2)$ *are discrete.*

Proof. By using the unitary equivalence of $h\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ and $\mathscr{L}_h$, we can focus on the family $(\mathscr{L}_h - z)_{z\in D(\mu_0 h,Ch^2)}$. Let $u > 0$ and $v \in \mathbf{R}$ given by Assumption 7.2 and 7.3. The function $F = u(B + \mathsf{Re}V) + v\mathsf{Im}V$ admits a global minimum, and there exists a compact K and a constant $\gamma > \min F$ such that,

$$\forall q \in \mathbf{R}^2 \setminus K, \quad F(q) \geq \gamma\,.$$

Thus we may consider a smooth cutoff function χ supported near K such that

$$F + \chi \geq \gamma > \min F\,.$$

Define

$$P = \mathscr{L}_h + h(u - iv)^{-1}\chi\,.$$

Proving that $P - hz$ is invertible is enough to conclude that $\mathscr{L}_h - hz$ is a Fredholm operator of index 0. Let $w = (u - iv)z$ and $Q = (u - iv)P$, so that

$$\begin{aligned}(u - iv)(P - hz) &= Q - hw\\ &= \left(u((ih\nabla + \mathbf{A})^2 + h\mathsf{Re}(V - z)) + vh\mathsf{Im}(V - z) + h\chi\right)\\ &\quad + i\left(uh\mathsf{Im}(V - z) - v((ih\nabla + \mathbf{A})^2 + h\mathsf{Re}(V - z))\right)\,.\end{aligned}$$

Each parenthesis being self-adjoint, we deduce for $\psi \in \mathsf{Dom}(\mathscr{L}_h)$ that

$$\begin{aligned}|\langle(Q - hw)\psi, \psi\rangle| &\geq \mathsf{Re}\langle(Q - hw)\psi, \psi\rangle\\ &\geq \left\langle\left(u(ih\nabla + \mathbf{A})^2 + uh\mathsf{Re}(V - z) + vh\mathsf{Im}(V - z) + h\chi\right)\psi, \psi\right\rangle\,.\end{aligned}$$

Using the quadratic-form minoration $(ih\nabla + \mathbf{A})^2 \geq hB$, we get

$$|\langle(Q - hw)\psi, \psi\rangle| \geq h\langle(u\mathsf{Re}(B + V - z) + v\mathsf{Im}(V - z) + \chi)\psi, \psi\rangle\,.$$

For $z \in \mathbf{C}$ such that $u\mathsf{Re}(z - \mu_0) + v\mathsf{Im}(z - \mu_0) < Ch$, since μ_0 satisfies

$$\min F = u\mathsf{Re}\mu_0 + v\mathsf{Im}\mu_0$$

we have

$$|\langle(Q - hw)\psi, \psi\rangle| \geq h(\gamma - \min F - Ch)\|\psi\|^2\,.$$

Hence $Q - hw$ is one-to-one with closed range. We can apply the same arguments for the adjoint of $Q - hw$. We deduce that $Q - w$ is bijective, and so is $P - hz$.

Thus $\mathscr{L}_h - hz$, for z in $\Omega = \{u\mathsf{Re}(z - \mu_0) + v\mathsf{Im}(z - \mu_0) < Ch\}$, is an analytic familly of Fredholm operators with index 0. To conclude discreteness of the spectrum it remains to show that Ω intersects the resolvent set of $\mathscr{L}_h$. To see this, note that $\mathsf{Re}(u - iv)\mathscr{L}_h \geq uh(B + \mathsf{Re}V) + vh\mathsf{Im}V \geq uh\mathsf{Re}\mu_0 + vh\mathsf{Im}\mu_0$, and thus when $\mathsf{Re}z \to -\infty$ we must reach the resolvent set. □

Let us denote by $D_{j,h}$ the open disc of center $\nu_j(h)$ and radius $h^{1+\alpha}$, where the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ lies.

Lemma 7.37. *There exists $h_0 > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$ and all $\lambda \in D(\mu_0, Ch) \cap \mathrm{sp}(\widehat{\mathscr{L}_h^0})$, we have $\lambda \in \cup_{j=1}^N D_{j,h}$. In particular, for all $j \in \{1, \dots, N\}$, $\Gamma_{j,h} \subset \rho(\widehat{\mathscr{L}_h^0})$.*

Proof. Assume that it is not true. Then, for some h (as small as desired), we can find an element of the spectrum $\lambda \in D(\mu_0, Ch) \setminus \cup_{j=1}^N D_{j,h}$ and it is a discrete eigenvalue according to Proposition 7.36. Consider an associated normalized eigenfunction

$$\widehat{\mathscr{L}_h^0}\psi = \lambda\psi\,.$$

Using the microlocalization Lemma 7.17 on the eigenfunctions of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$, we can add the cutoff functions χ_δ in the symbol to get

$$\widehat{\mathscr{L}_h}\psi = \lambda\psi + \mathscr{O}(h^\infty)\,.$$

But we know that the spectrum of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ lies in $\cup_{j=1}^N D_{j,h}$ and that the resolvent is bounded by a negative power of h:

$$\|(\widehat{\mathscr{L}_h} - z)^{-1}\| \leq Ch^{-1-\alpha}\,,$$

for $z \in D(\mu_0, Ch) \setminus \cup_{j=1}^N D_{j,h}$. This implies that $\psi = 0$, and this contradicts the normalization of ψ. □

Proposition 7.38. *For each $j \in \{1, \dots, N\}$, the contour $\Gamma_{j,h}$ encircles at most one eigenvalue of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ (with **geometric** multiplicity).*

Proof. If it is not the case, a contour $\Gamma_{j,h}$ encircles at least two eigenvalues λ and μ associated with normalized orthogonal eigenfunctions φ and ψ, respectively. We have $\hat{\Pi}_{j,h}^0\varphi = \varphi$ and $\hat{\Pi}_{j,h}^0\psi = \psi$. Then, the resolvent formula gives that

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_{j,h} - \hat{\Pi}_{j,h}^0 &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}} \left((z - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1} - (z - \widehat{\mathscr{L}_h^0})^{-1}\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}} (z - \widehat{\mathscr{L}_h^0})^{-1}(\widehat{\mathscr{L}_h} - \widehat{\mathscr{L}_h^0})(z - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

By the microlocalization Lemma 7.17 on φ and ψ, we get:

$$\hat{\Pi}_{j,h}\varphi = \hat{\Pi}_{j,h}^0\varphi + \mathscr{O}(h^\infty) = \varphi + \mathscr{O}(h^\infty)\,, \quad \hat{\Pi}_{j,h}\psi = \psi + \mathscr{O}(h^\infty)\,.$$

This implies that the range of $\hat{\Pi}_{j,h}$ is at least two, and this is a contradiction. □

In fact, we can even prove that each $\Gamma_{j,h}$ encircles exactly one eigenvalue (with **algebraic** multiplicity).

Proposition 7.39. *For each $j \in \{1, \dots, N\}$, the contour $\Gamma_{j,h}$ encircles exactly one eigenvalue of $\widehat{\mathscr{L}_h^0}$ (with **algebraic** multiplicity).*

Proof. The proof uses the ellipticity at infinity with respect to X_1. Let us consider a partition of the unity $\chi_{1,h}(X_1)+\chi_{2,h}(X_1)=1$ with $\mathrm{supp}\chi_{2,h}\subset\{|X_1|\geq h^{-\delta}\}$ and such that the operator $\chi^w_{1,h}(\widehat{\mathscr{L}_h}-\widehat{\mathscr{L}^0_h})$ is $\mathscr{O}(h^\infty)$ (which is possible by definition of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ and $\widehat{\mathscr{L}^0_h}$).

Let $N\in\mathbb{N}$. We have, for all $z\in\Gamma_{j,h}$, and all v,

$$\|\chi^w_{2,h}(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}v\|\leq Ch^{2\delta}\|v\|+Ch^N\|(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}v\|\,. \tag{7.6.1}$$

The estimate (7.6.1) follows by considering the equation

$$(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)u=v\,,$$

and writing for instance that

$$(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)\chi^w_{2,h}u=\chi^w_{2,h}v+[\chi^w_{2,h},\widehat{\mathscr{L}^0_h}]u\,,$$

so that

$$Ch^{-2\delta}\|\chi^w_{2,h}u\|\leq C\|v\|+Ch^\delta\|\underline{\chi}^w_{2,h}u\|+Ch^N\|u\|\,,$$

where the support of $\underline{\chi}_{2,h}$ is slightly larger than the one of $\chi_{2,h}$. By induction, we get (7.6.1). At this stage, we still do not control the whole resolvent $(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}$. By the resolvent formula, and the symbolic calculus, we see that

$$\chi^w_{1,h}\left[(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}-(\widehat{\mathscr{L}_h}-z)^{-1}\right]=\underbrace{\chi^w_{1,h}(\widehat{\mathscr{L}_h}-z)^{-1}\left[\widehat{\mathscr{L}_h}-\widehat{\mathscr{L}^0_h}\right]}_{=\mathscr{O}(h^\infty)}(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}\,.$$

Therefore,

$$\|\chi^w_{1,h}(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}v\|\leq\|(\widehat{\mathscr{L}_h}-z)^{-1}v\|+Ch^N\|(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}v\|\,. \tag{7.6.2}$$

Combining (7.6.1) and (7.6.2), we get

$$\|(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}v\|\leq C\|v\|+\|(\widehat{\mathscr{L}_h}-z)^{-1}v\|\leq\tilde{C}\left(1+\|(\widehat{\mathscr{L}_h}-z)^{-1}\|\right)\|v\|\,.$$

In particular, for all $z\in\Gamma_{j,h}$,

$$\|(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}\|\leq Ch^{-1-\alpha}\,.$$

Coming back to (7.6.1), we deduce that

$$\|\chi^w_{2,h}(\widehat{\mathscr{L}^0_h}-z)^{-1}\|\leq\tilde{C}h^{2\delta}\,. \tag{7.6.3}$$

Let us now estimate the difference of the spectral projectionsby using the microlocal partition of the unity:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_{j,h}-\hat{\Pi}^0_{j,h}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}\chi^w_{2,h}\left((z-\widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}-(z-\widehat{\mathscr{L}^0_h})^{-1}\right)\mathrm{d}z\\+\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{j,h}}\chi^w_{1,h}\left((z-\widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}-(z-\widehat{\mathscr{L}^0_h})^{-1}\right)\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

We get

$$\|\hat{\Pi}_{j,h} - \hat{\Pi}^0_{j,h}\| \leq C|\Gamma_{j,h}|h^{2\delta} + \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\Gamma_{j,h}} \underbrace{\chi^w_{1,h}(z - \widehat{\mathscr{L}_h})^{-1}(\widehat{\mathscr{L}^0_h} - \widehat{\mathscr{L}_h})}_{=\mathscr{O}(h^\infty)} \underbrace{(z - \widehat{\mathscr{L}^0_h})^{-1}}_{=\mathscr{O}(h^{-1-\alpha})} \mathrm{d}z \right\| .$$

Thus, for h small enough, we get

$$\|\hat{\Pi}_{j,h} - \hat{\Pi}^0_{j,h}\| < 1 \,,$$

and these projections have the same rank. In particular, the contour $\Gamma_{j,h}$ encircles as many eigenvalues (with algebraic multiplicity) of $\widehat{\mathscr{L}^0_h}$ as of $\widehat{\mathscr{L}_h}$ (*i.e.*, exactly one). □

7.7 – On the spectrum of $\mathsf{P}^{\mathsf{eff}}_h$

In this section, we give a summary of the result given in [Hit04], which we used in Corollary 7.9. It gives a description of the spectrum of $\mathsf{P}^{\mathsf{eff}}_h$.

A - Reduction of the symbol Under the assumptions of Corollary 7.9, we can expand the principal symbol $p = B + V$ of $\mathsf{P}^{\mathsf{eff}}_h$ on a neighborhood of 0:

$$p(x,\xi) = \mu_0 + p_2(x,\xi) + \mathcal{O}((x,\xi)^3) \,.$$

p_2 is a non-degenerate complex quadratic form. It is explained in [Hit04] how to find a *complex* canonical transformation κ_1 such that

$$p \circ \kappa_1(x,\xi) = \mu_0 + c_0(\xi^2 + x^2) + \mathcal{O}((x,\xi)^3)$$

for some complex number $c_0 \in \mathbf{C}$. Then, using a Birkhoff normal form, one can find another complex canonical transformation κ (on a neighborhood of $x = \xi = 0$) such that

$$p \circ \kappa(x,\xi) = g(\xi^2 + x^2) + \mathcal{O}((x,\xi)^\infty) \,,$$

where $g \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R})$ is complex valued and $g(\lambda) = \mu_0 + c_0\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Then one can use the analyticity of p to quantize this canonical transformation, even if it is complex-valued. One gets Fourier integral operators U, V such that $UV = VU = I$ (microlocally near $x = \xi = 0$) and

$$U\mathsf{P}^{\mathsf{eff}}_h V = f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h$$

where $f_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ satisfies $f_h(\lambda) = \mu_0 + c_0\lambda + \mathcal{O}((h+\lambda)^2)$, $\mathscr{I}_h = \mathsf{Op}^w_h(\xi^2 + x^2)$ is the harmonic oscillator and the symbol of R_h is $\mathcal{O}((x,\xi,h^{1/2})^\infty)$.

B - Where is the spectrum of $\mathsf{P}^{\mathsf{eff}}_h$? One can prove that the spectrum of $f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h$ in $D(\mu_0, Ch)$ is close to the spectrum of $f_h(\mathscr{I}_h)$, which is well known as function of a Harmonic oscillator. Let us explain the idea. Up to small modifications due to U and V, this gives a localization of the spectrum of $\mathsf{P}^{\mathsf{eff}}_h$.

If $z \in D(\mu_0, Ch)$ is in the spectrum of $f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h$, then it is an eigenvalue (because $f_h(\mathscr{I}_h)+\mathsf{R}_h$ is a Fredholm operator with index 0). There is an eigenfunction ψ, which is microlocalized on a neighborhood of size h^δ of $x = \xi = 0$, for any $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ (One can prove this as in Lemma 7.17). Thus,

$$(f_h(\mathscr{I}_h) - z)\psi = \mathsf{R}_h\psi = \mathcal{O}(h^\infty)\,.$$

Since the left-hand side is a function of a Harmonic oscillator, its resolvent can be bounded as

$$\|(f_h(\mathscr{I}_h) - z)^{-1}\| \leq C\mathsf{dist}(z, \mathsf{sp} f_h(\mathscr{I}_h))^{-1}\,,$$

and we deduce that

$$\exists n \in \mathbf{N}, \quad \lambda_h = f_h((2n-1)h) + \mathcal{O}(h^\infty)\,.$$

C - Comparison of the spectral projectors Let $\alpha >> 0$ be a large real number. We proved that the spectrum of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ lie in the discs of center $f_h((2n-1)h)$ and radius h^α. Now we want to prove that each of these discs contains exactly one eigenvalue of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$. It is enough to prove that the spectral projectors of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ and $f_h(\mathscr{I}_h)$ have the same rank. Up to small modifications due to U and V, we can focus on the projector of $f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h$ instead of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$. Let us denote the projectors by:

$$\Pi_h^R = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{n,h}} (f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\mathrm{d}z\,, \quad \Pi_h = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{n,h}} (f_h(\mathscr{I}_h) - z)^{-1}\mathrm{d}z\,,$$

where $C_{n,h}$ is the circle of center $f_h((2n-1)h)$ and radius h^α. We can estimate the norm $\|\Pi_h^R - \Pi_h\|$ using the same method as in Proposition 7.39. Let $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ be cutoff functions such that $\chi_1 + \chi_2 = 1$ and χ_2 supported where $x^2 + \xi^2 \leq h^{2\delta}$. Then we can use the resolvent formula to get

$$\chi_2^w(\Pi_h^R - \Pi_h) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{n,h}} \underbrace{\chi_2^w(f_h(\mathscr{I}_h) - z)^{-1}\mathsf{R}_h}_{\mathcal{O}(h^\infty)}(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\mathrm{d}z\,,$$

and thus for any $N > 0$,

$$\|\chi_2^w(\Pi_h^R - \Pi_h)\| \leq C_N h^N \int_{C_{n,h}} \|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\|\mathrm{d}z\,.$$

Since χ_1 is supported where $\xi^2 + x^2 \geq ch^{2\delta}$, with the Gårding inequality we have (for any φ) and $z \in D(\mu_0, Ch)$,

$$\|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)\varphi\| \geq Ch^{2\delta}\|\varphi\|\,,$$

and thus

$$\|\chi_1^w(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \leq Ch^{-2\delta}\,,$$

and the analogue bound holds for $(f_h(\mathscr{I}_h) - z)^{-1}$. We deduce that

$$\|\chi_1^w(\Pi_h^R - \Pi_h)\| \leq Ch^\alpha h^{-2\delta}\,.$$

Summing up the χ_2 and the χ_1 parts, we deduce that

$$\|\Pi_h^R - \Pi_h\| \leq Ch^{\alpha-2\delta} + Ch^N \int_{C_{n,h}} \|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \mathrm{d}z \,. \tag{7.7.1}$$

Actually we have a bound on the right-hand side resolvent because, for $z \in D(\mu_0, Ch)$,

$$\|\chi_1^w (f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \leq Ch^{-2\delta}$$

and

$$\|\chi_2^w \left((f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1} - (f_h(\mathscr{I}_h) - z)^{-1}\right)\| \leq C_N h^N \,,$$

which yield to

$$\|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \leq \|(f_h(\mathscr{I}_h) - z)^{-1}\| + Ch^{-2\delta} + C_N h^N \|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \,.$$

The last term being small with respect to the left-hand side, we can use the resolvent bound for a function of Harmonic oscillator to get:

$$\|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \leq \frac{C}{\mathsf{dist}(z, \mathsf{sp} f_h(\mathscr{I}_h))} + Ch^{-2\delta} \,. \tag{7.7.2}$$

For $z \in C_{n,h}$ we have $\mathsf{dist}(z, \mathsf{sp} f_h(\mathscr{I}_h)) = h^\alpha$, so (7.7.1) becomes

$$\|\Pi_h^R - \Pi_h\| \leq Ch^{\alpha-2\delta} + Ch^{N-\alpha} \,.$$

We can always choose $N > \alpha$, and finally $\|\Pi_h^R - \Pi_h\| < 1$ and the two projections must have same rank.

D - Resolvent bound for $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$ Actually, one can use the previous calculations to get a bound on the resolvent of $\mathsf{P}_h^{\mathsf{eff}}$. Again, up to small modifications due to U and V we focus on $f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h$. For $z \in D(\mu_0, Ch)$, recall that we have (7.7.2). But in the end we proved that the spectra of $f_h(\mathscr{I}_h)$ and $f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h$ are equal up to $\mathcal{O}(h^\infty)$ so we get for any $N > 0$,

$$\|(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h - z)^{-1}\| \leq \frac{C}{\mathsf{dist}(z, \mathsf{sp}(f_h(\mathscr{I}_h) + \mathsf{R}_h)) - C_N h^N} + Ch^{-2\delta} \,.$$

Chapter 8

Magnetic Laplacian with white noise magnetic field

8.1 – Introduction

In this chapter we present some results obtained in collaboration with Mouzard, in [MM21]. It is dedicated to the study of the magnetic Laplacian with random singular magnetic field given by the space white noise $B = \xi$ on the two-dimensional torus $\mathbf{T}^2$. It can be constructed as a distribution with independant random Fourier coefficients with centered normal law of unit variance. In two dimensions, this white noise ξ belongs almost surely to the Sobolev spaces $\mathsf{H}^{-1-\kappa}$ or Besov-Hölder spaces $\mathcal{C}^{-1-\kappa}$ for any $\kappa > 0$. Since the associated potential A satisfies the equation

$$\xi = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2,$$

each component A_1, A_2 is expected to belong to $\mathcal{C}^{-\kappa}$ for any $\kappa > 0$. The potential is not a measurable function and the associated magnetic Laplacian falls out of the range of the classical theory: It is a singular random operator. The study of PDEs or operators where rough stochastic terms give rise to ill-defined operations such as product of distributions has been intensively studied during the last ten years with the parallel introduction of regularity structures by Hairer [Hai14] and the paracontrolled calculus by Gubinelli, Imkeller and Perkowski [GIP15]. A famous example of such singular operator is the Anderson Hamiltonian

$$-\Delta + \xi$$

which naturally appears in the parabolic Anderson model describing random walks in random environment, see [Kö16] for a survey on the topic. The random operator introduced and studied in this chapter is the magnetic analog of the Anderson Hamiltonian.

The recently developped approach to define such an operator consists in the construction of a random subspace of $\mathsf{L}^2(\mathbf{T}^2)$ in which one can make sense almost surely of the equation. This subspace is constructed through a stochastic renormalisation procedure from the noise. The different approaches of regularity structures

and paracontrolled calculus differ by the tools used to study the singular products. In the first one, distributions are locally described by generalised Taylor expansions while the second one relies on tools from harmonic analysis with a description of distributions by frequency "schemes". In both approaches, solutions are described by a richer stochastic object than the noise called the enhanced noise, the renormalisation procedure corresponds to its construction. This idea takes root in the theory of Lyons' rough paths and Gubinelli's controlled paths developped as a pathwise approach to stochastic integration. This has been used to study the Anderson Hamiltonian

$$-\Delta + \xi$$

which is singular in dimension $d \geq 2$, the first time by Allez and Chouk using paracontrolled calculus on the two-dimensional torus, see [AC15]. See also [GUZ20, Lab19, Mou20] for more general settings. Following the approach of singular SPDEs, the idea is to construct a random subspace $\mathcal{D}_\Xi$ of L^2 as domain for the operator given an enhancement Ξ of the noise ξ such that $(H, \mathcal{D}_\Xi)$ is a well-defined unbounded operator in L^2. We deal with the singularity through a renormalisation procedure in the construction of the enhanced noise Ξ. In this work, we construct such a domain for the random magnetic Laplacian with white noise magnetic field.

Main results

The $2D$ magnetic Laplacian with potential $A : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}^2$ is formaly given by

$$H = -\Delta + 2iA \cdot \nabla + A \cdot A + i\mathrm{div}A$$

and the magnetic field is

$$B = \nabla \times A.$$

From the physical point of view, one considers a given magnetic field $B : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$ and chooses a potential A. Different choices of A yield different operators H_A, this is the choice of gauge. However, there is a partial invariance by gauge change. Indeed, if $A : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}^2$ is a given potential associated to B, then the new potential $A + \nabla f$ is still a potential associated to B for any smooth function $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$. The two operators are related formally by the relation

$$H_{A+\nabla f} = e^{if} H_A e^{-if}$$

hence the spectral properties of H_A and $H_{A+\nabla f}$ are the same. While on $\mathbf{R}^2$, every pair (A, A') of smooth potentials that satifies

$$\nabla \times A = \nabla \times A'$$

are related by

$$A = A' + \nabla f,$$

this is no longer the case on $\mathbf{T}^2$ due to topological holes. One can show that the choice of a potential A can influence the spectrum of H_A, see for example the Aharonov-Bohm effect in [Hel88b]. In this work, we consider the magnetic field $B = \xi$ the white noise and we choose the Lorentz gauge defined as follows. Take

$$A = \nabla^\perp \varphi \quad \text{where} \quad \Delta\varphi := \xi.$$

Then A satifies indeed

$$\xi = \nabla \times A$$

and also $\mathrm{div}(A) = 0$. Our method could also deal with a gauge $A + \nabla f$ with A the Lorentz gauge and f a smooth deterministic function, see Section 8.4 for a discussion about this. It would be interesting to study the influence of a more general gauge but the implicit definition

$$B = \nabla \times A$$

makes more difficult the study of singularities. This leaves us with

$$H = -\Delta + 2iA \cdot \nabla + A \cdot A$$

where $A \in \mathcal{C}^{\alpha-1}$ almost surely for any $\alpha < 1$. The term $A \cdot A$ is singular and one has to give a meaning to it using probabilistic arguments. We give a meaning to $A \cdot A$ in Section 8.4 and a denote by

$$\mathbf{A} = (A, A^2) \in \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2) \times \mathcal{C}^{2\alpha-2}(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}).$$

the enhanced potential. Remark that since A is a distribution of negative Hölder regularity, the singular product $A \cdot A$ is expected to worsen the regularity. Given such an enhanced potential $\mathbf{A}$, we construct in Section 8.2 a dense subspace $\mathcal{D}_{\mathbf{A}} \subset L^2$ such that

$$u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \quad \Longrightarrow \quad Hu \in L^2.$$

In Section 8.3, we show that $(H, \mathcal{D}_{\mathbf{A}})$ is almost surely a self-adjoint operator with discrete spectrum. We also prove that it is the resolvent-limit of

$$H_\varepsilon = -\Delta + 2iA_\varepsilon \cdot \nabla + A_\varepsilon^2$$

for any regularisation $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_\varepsilon, A_\varepsilon^2) \in C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2) \times C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ such that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|A - A_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{\alpha-2}} + \|A^2 - A_\varepsilon^2\|_{\mathcal{C}^{2\alpha-2}} = 0.$$

Finally, we construct in Section 8.4 the enhanced potential $\mathbf{A}$ associated to the random magnetic field $B = \xi$. In particular, it is described by the limit in probability of

$$\big(A_\varepsilon, A_\varepsilon^2 - c_\varepsilon\big)$$

as ε goes to 0 where A_ε is a regularisation of A and

$$c_\varepsilon = \mathbb{E}\big[A_\varepsilon(0) \cdot A_\varepsilon(0)\big].$$

In particular, the almost sure singularity of the product $A \cdot A$ implies the need to substract a diverging constant c_ε as ε goes to 0 and a singular random operator has to be interpreted as the description of the limiting behavior of a diverging system. One is interested in the fluctuations of this system in this diverging frame, as the central limit Theorem for a simple random walk. For the case of the Anderson Hamiltonian, see the work [MP19] of Martin and Perkowski for a nice example.

Our results on the random magnetic Laplacian are the analog of the ones obtained in [Mou20] on the Anderson Hamiltonian. This illustrates the flexibility of the

paracontrolled calculus approach to singular stochastic PDEs. In particular, this shows that the method could be used to deal with a general class of operators of the form

$$-\Delta + a_1 \cdot \nabla + a_2$$

with rough stochastic scalar fields a_1, a_2 and therefore associated time-dependant PDEs. Since we only define and prove self-adjointness of the operator, no major differences appear in the study of the Anderson Hamiltonian or the random magnetic Laplacian with white noise magnetic field. As one does for smooth potentials, it is natural to pursue the study of both operators to understand their differences.

In both the Anderson and the magnetic case, it would be interesting to study the influence of a scaling $\lambda > 0$ in the noise. For instance, the behavior of

$$-\Delta + \lambda\xi$$

as λ goes to 0 should not be a problem, but the limit $\lambda \to \infty$ is much more delicate and of great interest. It is equivalent to the large-volume limit obtained by taking a torus of large diameter $\sqrt{\lambda}$. It was studied for example in [CvZ19] by Chouk and Van Zuijlen using the large deviation principle, see also [KPvZ20] for motivations from Probability. This is also equivalent to the semiclassical limit h goes to 0 in

$$-h^2\Delta + \xi.$$

For regular potentials V, the semiclassical limit is deeply related to the classical dynamics described by the Hamiltonian

$$(x, v) \in T^*(\mathbf{T}^2) \mapsto |v|^2 + V(x)$$

with $T^*(\mathbf{T}^2)$ the cotangent bundle of $\mathbf{T}^2$. Similarily, would it be possible to find an effective "classical" equation describing the semiclassical limit in the case of a singular potential $V = \xi$ or $B = \xi$? See the work [DL20] by Dumaz and Labbé for a very precise description of the asymptotics in one dimension for the Anderson Hamiltonian.

Organisation of the chapter

In the first section, we construct the domain and prove density in L^2. We compare the graph norm and the natural norms of the domain which gives the closedness of the operator. We also give an explicit form comparison between the random magnetic Laplacian H and the Laplacian Δ. In the second section, we show that the operator is symmetric as a weak limit of the regularised operator. The form comparison of H and Δ with the Babuška-Lax-Milgram Theorem gives the self-adjointness. Finally, we show that H is the resolvent-limit of the regularised operator H_ε in Proposition 8.15 and compare the spectrum of H and Δ. In particular, this implies an almost sure Weyl-type law for the random magnetic Laplacian. The third Section deals with the construction of the enhanced potential $\mathbf{A}$ built from the noise ξ through a renormalisation procedure. We gather in Appendix 8.5 all the results we need for the paracontrolled calculus and refer to [Mou20] for the details.

In particular, P and Π respectively denotes the paraproduct and the resonent term such that

$$fg = \mathsf{P}_f g + \mathsf{P}_g f + \Pi(f, g)$$

and $\widetilde{\mathsf{P}}$ is a paraproduct intertwinned with P via the relation

$$\Delta \circ \widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ \Delta$$

and satisfies the same continuity properties as P. We also denote

$$\Delta^{-1} := -\int_0^1 e^{t\Delta} \mathrm{d}t$$

an inverse for the Laplacian up to the regularising operator e^{Δ}.

8.2 – Definition of the operator

In this section, we first construct the domain and show that its natural norms are equivalent to the graph norm of H. In particular, this guarantees the closedness of the operator. Finally, we compare the respective forms associated to H and L.

8.2.1 – Construction of the domain

Fix $\alpha \in (\frac{2}{3}, 1)$ and let $\mathbf{A}$ be an enhanced magnetic potential

$$\mathbf{A} = (A, A^2) \in \mathcal{X}^\alpha := \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2) \times \mathcal{C}^{2\alpha-2}(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$$

with its natural norm

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} := \|A\|_{\mathcal{C}^{\alpha-1}} + \|A^2\|_{\mathcal{C}^{2\alpha-2}}.$$

For $A \in L^\infty$, the term A^2 can be interpreted as $A \cdot A$ while it is not defined if A is only a distribution. It is enhanced in the sense that one does not have a natural interpretation of $A \cdot A$ for singular potential, this is specified by the additional data A^2. Section 8.4 is devoted to the particular case of magnetic white noise where A^2 is constructed through a probabilistic renormalisation procedure. Thus we refer as noise-dependent a quantity that depends on this enhanced potential $\mathbf{A}$.

For any regular function $u \in C^\infty(\mathbf{T}^2)$, we have

$$2iA \cdot \nabla u + A^2 u = \mathsf{P}_{\nabla u} 2iA + \mathsf{P}_u A^2 + (\sharp)$$

where $(\sharp) \in C^\infty(\mathbf{T}^2)$ with $\mathsf{P}_u 2iA \in \mathsf{H}^{\alpha-1}$ and $\mathsf{P}_{\nabla u} A^2 \in \mathsf{H}^{2\alpha-2}$. Assuming $Hu \in L^2$ yields

$$-\Delta u = Hu - 2iA \cdot \nabla u + A^2 u \in \mathsf{H}^{2\alpha-2}$$

since $2\alpha - 2 < \alpha - 1$ hence u is expected to belong to $\mathsf{H}^{2\alpha}$ by elliptic regularity theory. For $u \in \mathsf{H}^{2\alpha}$, we have

$$\begin{aligned} 2iA \cdot \nabla u + A^2 u &= 2i\mathsf{P}_{\nabla u} A + 2i\mathsf{P}_A \nabla u + 2i\Pi(\nabla u, A) + \mathsf{P}_u A^2 + \mathsf{P}_{A^2} u + \Pi(u, A^2) \\ &= (\alpha - 1) + (3\alpha - 2) + (2\alpha - 2) + (4\alpha - 2) \\ &= \mathsf{P}_u A^2 + \mathsf{P}_{\nabla u} 2iA + (3\alpha - 2) \end{aligned}$$

where (β) denotes a term of formal regularity H^β for any $\beta \in \mathbf{R}$. Following the paracontrolled calculus approach, we want to consider a paracontrolled function of the form

$$u = \widetilde{\mathsf{P}}_u X_1 + \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u} X_2 + u^\sharp$$

with $u^\sharp$ a smoother remainder such that $Hu \in L^2$. Thus we take

$$X_1 := \Delta^{-1}(A^2) \quad \text{and} \quad X_2 := \Delta^{-1}(2iA)$$

and define the domain of H as follows.

Definition 8.1. *We define the set $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ of functions paracontrolled by $\mathbf{A}$ as*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} := \{u \in L^2;\ u - \widetilde{\mathsf{P}}_u X_1 - \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u} X_2 \in \mathsf{H}^2\}.$$

The domain is defined as

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = \Phi^{-1}(\mathsf{H}^2)$$

with

$$\Phi(u) := u - \widetilde{\mathsf{P}}_u X_1 - \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u} X_2.$$

However the domain could be anything from trivial to dense in L^2 a priori. For $s \in (0, 1)$, we introduce the map Φ^s as

$$\Phi^s : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathbf{A}} & \to & \mathsf{H}^2 \\ u & \mapsto & u - \widetilde{\mathsf{P}}^s_u X_1 - \widetilde{\mathsf{P}}^s_{\nabla u} X_2 \end{array} \right.$$

with $\widetilde{\mathsf{P}}^s$ the paraproduct truncated at scale s; see Appendix 8.5 for the definition. In particular, the map

$$\Phi^s : \mathsf{H}^\beta \to \mathsf{H}^\beta$$

is a perturbation of the identity for any $\beta \in [0, 2\alpha)$ invertible for s small enough, we denote its inverse Γ. Since $\big(\widetilde{\mathsf{P}}_v - \widetilde{\mathsf{P}}^s_v\big)X$ is a smooth function, the domain is also given by

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = (\Phi^s)^{-1}(\mathsf{H}^2) = \Gamma(\mathsf{H}^2).$$

The reader should keep in mind that Γ implicitely depends on s, we do not keep it in the notation to lighten this work. This parametrisation of the domain will be crucial to prove that the domain is dense in L^2 and to study H. In particular, sharp bounds on the eigenvalues of H are needed to get a Weyl-type law for H. To do so, we need to keep a careful track of the different constants. The reader interested only in the construction of the operator and its self-adjointess can skip these computations. Obtaining sharp bounds requires explicit constants with respect to the parameter

s and the regularity exponent in the paracontrolled calculus. We recall the needed bounds in Appendix 8.5, see [Mou20] for details and proofs. For $\beta \in [0, 2\alpha)$, let

$$s_\beta(\mathbf{A}) := \left(\frac{\beta^*}{m\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\right)^{\frac{4}{2\alpha-\beta}}$$

where $\beta^* = 1-\beta$ if $\beta \in [0,1)$ and $\beta^* = 2\alpha-\beta$ if $\beta \in [1, 2\alpha)$ and $m > 0$ is a universal constant, see Appendix 8.5. The following Proposition gives regularity estimates for Φ^s and Γ.

Proposition 8.2. *Let $\beta \in [0, 2\alpha)$ and $s \in (0,1)$. We have*

$$\|\Phi^s(u) - u\|_{\mathsf{H}^\beta} \leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{\beta^*}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\|u\|_{\mathsf{H}^\beta}.$$

In particular, $s < s_\beta(\mathbf{A})$ implies that the map Φ^s is invertible and its inverse Γ verifies the bound

$$\|\Gamma u^\sharp\|_{\mathsf{H}^\beta} \leq \frac{1}{1 - m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{\beta^*}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\|u^\sharp\|_{\mathsf{H}^\beta}.$$

Proof. If $\beta < 1$, the bounds on Φ^s follow directly from

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathsf{P}}^s_u X_1 + \widetilde{\mathsf{P}}^s_{\nabla u} X_2\|_{\mathsf{H}^\beta} &\leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{1-\beta}\|u\|_{L^2}\|X_1\|_{\mathcal{C}^{2\alpha}} + m\frac{s^{\frac{\alpha+1-\beta}{4}}}{1-\beta}\|\nabla u\|_{\mathsf{H}^{\beta-1}}\|X_2\|_{\mathsf{H}^{\alpha+1}} \\
&\leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{1-\beta}\|u\|_{\mathsf{H}^\beta}\big(\|X_1\|_{\mathcal{C}^{2\alpha}} + \|X_2\|_{\mathcal{C}^{\alpha+1}}\big) \\
&\leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{1-\beta}\|u\|_{\mathsf{H}^\beta}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}.
\end{aligned}$$

For $\beta \in [1, 2\alpha)$, we have

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathsf{P}}^s_u X_1 + \widetilde{\mathsf{P}}^s_{\nabla u} X_2\|_{\mathsf{H}^\beta} &\leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{2\alpha-\beta}\|u\|_{L^2}\|X_1\|_{\mathcal{C}^\alpha} + m\frac{s^{\frac{\alpha+1-\beta}{2}}}{\alpha+1-\beta}\|\nabla u\|_{L^2}\|X_2\|_{\mathsf{H}^{\alpha+1}} \\
&\leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{2\alpha-\beta}\|u\|_{\mathsf{H}^1}\big(\|X_1\|_{\mathcal{C}^{2\alpha}} + \|X_2\|_{\mathcal{C}^{\alpha+1}}\big) \\
&\leq m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{2\alpha-\beta}\|u\|_{\mathsf{H}^1}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}.
\end{aligned}$$

The result for Γ follows since $2\alpha - \beta > 0$. □

We also consider the associated maps Φ^s_ε and Γ_ε for a regularisation $\mathbf{A}_\varepsilon$ of the enhanced potential. It is defined as

$$\Phi^s_\varepsilon(u) := u - \widetilde{\mathsf{P}}_u X_1^{(\varepsilon)} - \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u} X_2^{(\varepsilon)}$$

and

$$\Gamma_\varepsilon u^\sharp = \widetilde{\mathsf{P}}_{\Gamma_\varepsilon u^\sharp} X_1^{(\varepsilon)} + \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla\Gamma_\varepsilon u^\sharp} X_2^{(\varepsilon)} + u^\sharp$$

where

$$X_1^{(\varepsilon)} := \Delta^{-1}(A_\varepsilon^2) \quad \text{and} \quad \Delta X_2^{(\varepsilon)} := 2iA_\varepsilon.$$

These satisfy the same continuity properties as Φ^s and Γ with bounds uniform with respect to ε. Moreover, we have the following approximation Lemma holds.

Lemma 8.3. *Let $\beta \in [0, 2\alpha)$ and $s \in (0,1)$. If $s \leq s_\beta(\mathbf{A})$, we have*

$$\|\mathrm{Id} - \Gamma\Gamma_\varepsilon^{-1}\|_{L^2 \to \mathsf{H}^\beta} \lesssim_{\mathbf{A},s} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}.$$

In particular, this implies the convergence of Γ_ε to Γ with the bound

$$\|\Gamma - \Gamma_\varepsilon\|_{\mathsf{H}^\beta \to \mathsf{H}^\beta} \lesssim_{\mathbf{A},s} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}.$$

Proof. Given any $u \in \mathsf{H}^\beta$, we have $u = \Gamma\Gamma^{-1}(u) = \Gamma(u - \widetilde{\mathsf{P}}_u^s X_1 - \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u}^s X_2)$. We get

$$\begin{aligned}
\|u - \Gamma\Gamma_\varepsilon^{-1}(u)\|_{\mathsf{H}^\beta} &= \big\|\Gamma\big(u - \widetilde{\mathsf{P}}_u^s X_1 - \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u}^s X_2\big) - \Gamma\big(u - \widetilde{\mathsf{P}}_u^s X_1^{(\varepsilon)} - \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u}^s X_2^{(\varepsilon)}\big)\big\|_{\mathsf{H}^\beta} \\
&= \Big\|\Gamma\Big(\widetilde{\mathsf{P}}_u^s\big(X_1^{(\varepsilon)} - X_1\big) + \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u}^s\big(X_2^{(\varepsilon)} - X_2\big)\Big)\Big\|_{\mathsf{H}^\beta} \\
&\lesssim_{\mathbf{A},s} \Big\|\widetilde{\mathsf{P}}_u^s\big(X_1^{(\varepsilon)} - X_1\big) + \widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u}^s\big(X_2^{(\varepsilon)} - X_2\big)\Big\|_{\mathsf{H}^\beta} \\
&\lesssim_{\mathbf{A},s} \|\mathbf{A}_\varepsilon - \mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^{2\alpha}} \|u\|_{L^2}
\end{aligned}$$

since $s < s_\beta(\mathbf{A})$ implies the continuity of $\Gamma : \mathsf{H}^\beta \to \mathsf{H}^\beta$ and $X_i^{(\varepsilon)} - X_i$ depends linearly on $\mathbf{A}_\varepsilon - \mathbf{A}$ for $i \in \{1,2\}$. The result on $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ follows from the bound on Γ_ε uniform with respect to ε. □

This allows to prove density of the domain.

Corollary 8.4. *The domain $\mathcal{D}_\mathbf{A}$ is dense in H^β for every $\beta \in [0, 2\alpha)$.*

Proof. Given $f \in \mathsf{H}^2$, $\Gamma(g_\varepsilon) \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$ where $g_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^{-1} f \in \mathsf{H}^2$ thus we can conclude with the previous Lemma that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - \Gamma(g_\varepsilon)\|_{\mathsf{H}^\beta} = 0.$$

The density of H^2 in H^β completes the proof. □

8.2.2 – First properties of H

Since H is formally given by

$$H = -\Delta + 2iA \cdot \nabla + A \cdot A,$$

we are able to define $(H, \mathcal{D}_{\mathbf{A}})$ as an unbounded operator in L^2 associated to the enhanced potential $\mathbf{A}$.

Definition 8.5. *We define $H : \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \subset L^2 \to L^2$ as*

$$Hu := -\Delta u^\sharp + R(u)$$

where $u^\sharp = \Phi(u)$ and

$$R(u) := \mathsf{P}_{2iA}\nabla u + \Pi(\nabla u, 2iA) + \mathsf{P}_{A^2}u + \Pi(u, A^2).$$

The definition of H is independant of the parameter $s \in (0,1)$. It is a very usefull tool to get differents bounds on the operator with the different representations

$$Hu = -\Delta u_s^\sharp + R(u) + \Psi^s(u)$$

where $u_s^\sharp := \Phi^s(u)$ and

$$\Psi^s(u) := -\Delta\big(\widetilde{\mathsf{P}}_u - \widetilde{\mathsf{P}}^s_u\big)X_1 - \Delta\big(\widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u} - \widetilde{\mathsf{P}}^s_{\nabla u}\big)X_2 \in C^\infty(\mathbf{T}^2).$$

For example, we can compare the graph norm of H

$$\|u\|_H^2 := \|u\|_{L^2}^2 + \|Hu\|_{L^2}^2$$

and the natural norms of the domain

$$\|u\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{A}}}^2 := \|u\|_{L^2}^2 + \|\Phi^s(u)\|_{\mathsf{H}^2}^2$$

with the following Proposition provided s is small. Let $\beta := \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + 2\alpha)$ and $\delta > 0$. For $s \in (0,1)$ such that $s < s_\beta(\mathbf{A})$, we introduce the constant

$$m_\delta^2(\mathbf{A}, s) := k s^{\frac{\alpha-2}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} + k\delta^{-\frac{\beta}{2-\beta}}\left(\frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}{1 - m\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{\beta^*}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\right)^{\frac{2}{2-\beta}}\big(1 + s^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\big)$$

with $k > 0$ a large enough constant depending. In particular, $m_\delta^2(\mathbf{A}, s)$ diverges as s goes to 0 or $s_\beta(\mathbf{A})$ or as δ goes to 0.

Proposition 8.6. *Let $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ and $s \in (0,1)$ such that $s < s_\beta(\mathbf{A})$. Then for any $\delta > 0$, we have*

$$(1-\delta)\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} \leq \|Hu\|_{L^2} + m_\delta^2(\mathbf{A}, s)\|u\|_{L^2}$$

and

$$\|Hu\|_{L^2} \leq (1+\delta)\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} + m_\delta^2(\mathbf{A}, s)\|u\|_{L^2}$$

with $u_s^\sharp = \Phi^s(u)$.

Proof. Recall that for any $s \in (0,1)$, the operator is given by

$$Hu = -\Delta u_s^\sharp + R(u) + \Psi^s(u)$$

thus we need to bound R and Ψ^s. For $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$, we have

$$\begin{aligned}\|\mathsf{P}_{2iA}\nabla u + \Pi(\nabla u, 2iA)\|_{L^2} &\lesssim \|2iA\|_{\mathcal{C}^{\alpha-1}}\|u\|_{\mathsf{H}^\beta}\\ \|\mathsf{P}_{A^2}u + \Pi(u, A^2)\|_{L^2} &\lesssim \|A^2\|_{\mathcal{C}^{2\alpha-2}}\|u\|_{\mathsf{H}^\beta}\end{aligned}$$

hence

$$\|R(u)\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\|u\|_{\mathsf{H}^\beta}.$$

We also have

$$\|\Psi^s(u)\|_{L^2} \lesssim \|(\widetilde{\mathsf{P}}_u - \widetilde{\mathsf{P}}^s_u)X_1 + (\widetilde{\mathsf{P}}_{\nabla u} - \widetilde{\mathsf{P}}^s_{\nabla u})X_2\|_{\mathsf{H}^2} \lesssim s^{\frac{\alpha-2}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\|u\|_{L^2}.$$

For $s < s_\beta(\mathbf{A})$, Proposition 8.2 gives

$$\|u\|_{\mathsf{H}^\beta} \leq \frac{1}{1 - m^{\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{\beta^*}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^\beta}$$

thus we get

$$\|Hu + \Delta u_s^\sharp\|_{L^2} \lesssim \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}{1 - m^{\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{\beta^*}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^\beta} + s^{\frac{\alpha-2}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\|u\|_{L^2}.$$

Since $0 < \beta < 2$, we have for any $t > 0$

$$\begin{aligned}\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^\beta} &\lesssim \left\|\int_0^t (-t'\Delta)e^{t'\Delta}u_s^\sharp\frac{\mathrm{d}t'}{t'}\right\|_{\mathsf{H}^\beta} + \left\|e^{t\Delta}u_s^\sharp\right\|_{\mathsf{H}^\beta}\\ &\lesssim t^{\frac{2-\beta}{2}}\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} + t^{-\frac{\beta}{2}}\|u_s^\sharp\|_{L^2}\\ &\lesssim t^{\frac{2-\beta}{2}}\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} + t^{-\frac{\beta}{2}}\Big(1 + s^{\frac{2\alpha}{4}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\Big)\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

For any $\delta > 0$, take

$$t = \left(\frac{\delta\big(1 - m^{\frac{s^{\frac{2\alpha-\beta}{4}}}{\beta^*}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\big)}{k\|A\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\right)^{\frac{2}{2-\beta}}$$

with k the constant from the previous inequality. This yields

$$\|Hu + \Delta u_s^\sharp\|_{L^2} \lesssim m_\delta^2(\mathbf{A}, s)\|u\|_{L^2} + \delta\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2}.$$

and completes the proof. □

Remark 8.7. *In comparison to the work [Mou20] on the Anderson Hamiltonian*

$$u \mapsto -\Delta u + u\xi$$

where the space white noise can be interpreted as an electric potential, one needs s small for these bounds to hold here. In fact, one could perform the same kind of expansion with

$$\Delta X_2 = \mathsf{P}_{\nabla X_1} 2iA$$

at the price of a nonlinear dependance of X_2 with respect to $\mathbf{A}$ in order to bypass the smallness condition on s. This would change the different bounds one get for Φ^s and Γ but still yield a self-adjoint operator that is the limit of the regularised H_ε. Theorem XIII.26 *from [RS80] guarantees that the different choice of construction coincide provided that H is self-adjoint.*

In particular, this implies that $(H, \mathcal{D}_{\mathbf{A}})$ is a closed operator in L^2.

Proposition 8.8. *The operator H is closed on its domain $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$.*

Proof. Let $(u_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ be a sequence such that

$$u_n \to u \quad \text{in } L^2 \quad \text{and} \quad Hu_n \to v \quad \text{in } L^2.$$

Proposition 8.6 gives that $\big(\Phi^s(u_n)\big)_{n\geq 0}$ is a Cauchy sequence in H^2 hence converges to $u_s^\sharp \in \mathsf{H}^2$ for $s < s_\beta(\mathbf{A})$. Since $\Phi^s : L^2 \to L^2$ is continuous, we have $\Phi^s(u) = u_s^\sharp$ hence $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$. Finally, we have

$$\begin{aligned}\|Hu - v\|_{L^2} &\leq \|Hu - Hu_n\|_{L^2} + \|Hu_n - v\|_{L^2} \\ &\lesssim_{\mathbf{A}} \|u_s^\sharp - \Phi^s(u_n)\|_{\mathsf{H}^2} + \|u - u_n\|_{L^2} + \|Hu_n - v\|_{L^2}\end{aligned}$$

hence $Hu = v$ and H is closed on $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$. □

We conclud this Section by computing the Hölder regularity of the functions in the domain.

Corollary 8.9. *We have*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} \subset \mathcal{C}^{1-\kappa}$$

for any $\kappa > 0$.

Proof. The Besov embedding in two dimensions implies

$$\mathsf{H}^2 \hookrightarrow \mathcal{B}^1_{\infty,2} \hookrightarrow L^\infty$$

and $\Phi^s : L^\infty \to L^\infty$ is also invertible for s small enough hence

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = (\Phi^s)^{-1}(\mathsf{H}^2) \subset L^\infty.$$

First for $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$, we have

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{C}^\alpha} &\lesssim \|u\|_{L^\infty}\|X_1\|_{\mathcal{C}^\alpha} + \|\nabla u\|_{\mathcal{C}^{-1}}\|X_2\|_{\mathcal{C}^{\alpha+1}} + \|u^\sharp\|_{\mathcal{C}^\alpha} \\ &\lesssim_{\mathbf{A}} \|u\|_{L^\infty} + \|u^\sharp\|_{\mathsf{H}^2}.\end{aligned}$$

Finally, this gives

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{C}^{1-\kappa}} &\lesssim \|u\|_{L^\infty}\|X_1\|_{\mathcal{C}^{1-\kappa}} + \|\nabla u\|_{\mathcal{C}^{\alpha-1}}\|X_2\|_{\mathcal{C}^{2-\alpha+\kappa}} + \|u^\sharp\|_{\mathcal{C}^{1-\kappa}} \\ &\lesssim_{\mathbf{A}} \|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{\mathcal{C}^\alpha} + \|u^\sharp\|_{\mathsf{H}^2}\end{aligned}$$

and the proof is complete. □

8.2.3 – Form comparison between H and Δ

We have proven in Theorem 8.6 that Hu can be seen as a small perturbation of $-\Delta u^\sharp$ in norm. Here, we prove a similar statement in the quadratic form setting. Let $\eta := \frac{\alpha}{4}$ and $\delta > 0$. For $s \in (0,1)$ such that $s < s_{1-\eta}(\mathbf{A})$, define

$$m^1_\delta(\mathbf{A}, s) := (1 + s^{\frac{\alpha-2}{2}})\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} + \delta^{-\frac{1-\eta}{\eta}}\left(\frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}{(1-\eta^{-1}s^{\frac{2\alpha+\eta-1}{4}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha})^2}\right)^{\frac{1}{\eta}}(1 + s^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha})$$

with $k > 0$ a large enough constant. In particular, $m^1_\delta(\mathbf{A}, s)$ diverges as s goes to 0 or $s_{1-\eta}(\mathbf{A})$ or as δ goes to 0.

Proposition 8.10. *Let $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ and $s \in (0,1)$ such that $s < s_{1-\frac{\alpha}{4}}(\mathbf{A})$. For any $\delta > 0$, we have*

$$(1-\delta)\langle \nabla u^\sharp_s, \nabla u^\sharp_s\rangle \leq \langle u, Hu\rangle + m^1_\delta(\mathbf{A}, s)\|u\|^2_{L^2}$$

and

$$(1-\delta)\langle \nabla u^\sharp_s, \nabla u^\sharp_s\rangle \leq \langle u, H_\varepsilon u\rangle + m^1_\delta(\mathbf{A}, s)\|u\|^2_{L^2}$$

where $u^\sharp_s = \Phi^s(u)$.

Proof. For $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$, recall that

$$Hu = -\Delta u^\sharp_s + R(u) + \Psi^s(u)$$

where $u^\sharp_s = \Phi^s(u) \in \mathsf{H}^2$. We have

$$\begin{aligned}\big\langle u, -\Delta u^\sharp_s\big\rangle &= \big\langle \widetilde{\mathsf{P}}^s_u X_1, -\Delta u^\sharp_s\big\rangle + \big\langle \widetilde{\mathsf{P}}^s_{\nabla u} X_2, -\Delta u^\sharp_s\big\rangle + \big\langle u^\sharp_s, -\Delta u^\sharp_s\big\rangle \\ &= -\big\langle \mathsf{P}^s_u \Delta X_1, u^\sharp_s\big\rangle - \big\langle \mathsf{P}^s_{\nabla u}\Delta X_2, u^\sharp_s\big\rangle + \big\langle \nabla u^\sharp_s, \nabla u^\sharp_s\big\rangle\end{aligned}$$

thus

$$\langle u, Hu\rangle = -\big\langle \mathsf{P}^s_u \Delta X_1, u^\sharp_s\big\rangle - \big\langle \mathsf{P}^s_{\nabla u}\Delta X_2, u^\sharp_s\big\rangle + \big\langle \nabla u^\sharp_s, \nabla u^\sharp_s\big\rangle + \big\langle u, R(u)\big\rangle + \big\langle u, \Psi^s(u)\big\rangle.$$

For $\eta \leq \frac{\alpha}{2}$, we have

$$\begin{aligned}
\big|\big\langle \mathsf{P}_u^s \Delta X_1, u_s^\sharp \big\rangle\big| &\lesssim \|\mathsf{P}_u^s \Delta X_1\|_{\mathsf{H}^{2\alpha-2}} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}} \lesssim \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{L^2} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}},\\
\big|\big\langle \mathsf{P}_{\nabla u}^s \Delta X_2, u_s^\sharp \big\rangle\big| &\lesssim \|\mathsf{P}_{\nabla u}^s \Delta X_2\|_{\mathsf{H}^{\alpha-1-\eta}} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}} \lesssim \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}},\\
\big|\big\langle u, \mathsf{P}_{2iA} \nabla u \big\rangle\big| &\lesssim \|u\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}} \|\mathsf{P}_{2iA} \nabla u\|_{\mathsf{H}^{\alpha-1-\eta}} \lesssim \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}}^2,\\
\big|\big\langle u, \mathsf{P}_{A^2} u + \Pi(u, A^2) \big\rangle\big| &\lesssim \|u\|_{L^2} \|\mathsf{P}_{A^2} u + \Pi(u, A^2)\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{L^2} \|u\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}},\\
\big|\big\langle u, \Psi^s(u) \big\rangle\big| &\lesssim \|u\|_{L^2} \|(\mathsf{P}_u - \mathsf{P}_u^s) L X_1 + (\mathsf{P}_{\nabla u} - \mathsf{P}_{\nabla u}^s) L X_2\|_{L^2} \lesssim s^{\frac{\alpha-2}{2}} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

The only term that is not a priori controlled is $\big\langle u, \Pi(2iA, \nabla u) \big\rangle$ since the resonant term is singular if we only suppose that $u \in \mathsf{H}^1$; this is where the almost duality property comes into play. We have

$$\big\langle u, \Pi(2iA, \nabla u) \big\rangle = \big\langle \mathsf{P}_u 2iA, \nabla u \big\rangle + \mathsf{F}(u, 2iA, \nabla u)$$

with the corrector $\mathsf{F}(u, 2iA, \nabla u)$ controlled if $u \in \mathsf{H}^{1-\eta}$ with $\eta < \frac{\alpha}{2}$. The paraproduct is not singular however one can not use better regularity than L^2 for u thus we use an integration by part to get

$$\big\langle \mathsf{P}_u 2iA, \nabla u \big\rangle = -\big\langle \mathrm{div}(\mathsf{P}_u 2iA), u \big\rangle = -\big\langle \mathsf{P}_u \mathrm{div}(2iA), u \big\rangle + \big\langle \mathsf{B}(u, 2iA), u \big\rangle$$

with

$$\mathsf{B}\big(a, (b_1, b_2)\big) := \mathrm{div}\big(\mathsf{P}_a(b_1, b_2)\big) - \mathsf{P}_a \mathrm{div}(b_1, b_2),$$

see Appendix 8.5 for continuity estimates on B. We have

$$\big\langle u, \Pi(2iA, \nabla u) \big\rangle \lesssim \big|\big\langle \mathsf{B}(u, 2iA), u \big\rangle\big| + |\mathsf{F}(u, 2iA, \nabla u)| \lesssim \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}}^2$$

since $\mathrm{div}(A) = 0$. Since $s < s_{1-\eta}(\mathbf{A})$, we get

$$\big|\langle u, Hu \rangle - \langle \nabla u_s^\sharp, \nabla u_s^\sharp \rangle\big| \lesssim (1 + s^{\frac{\alpha-2}{2}}) \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}{\big(1 - \eta^{-1} s^{\frac{2\alpha+\eta-1}{4}} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\big)^2} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}}^2.$$

To complete the proof, one only has to interpolate the $\mathsf{H}^{1-\eta}$ norm of $u_s^\sharp$ between its H^1 norm and its L^2 norm which is controlled by the L^2 norm of u, as in the proof of Proposition 8.6. Since $0 < 1 - \eta < 1$, we have for any $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}} &\lesssim \left\| \int_0^t (-t'\Delta) e^{t'\Delta} u_s^\sharp \frac{\mathrm{d}t'}{t'} \right\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}} + \big\| e^{t\Delta} u_s^\sharp \big\|_{\mathsf{H}^{1-\eta}}\\
&\lesssim t^{\frac{\eta}{2}} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^1} + t^{-\frac{1-\eta}{2}} \|u_s^\sharp\|_{L^2}\\
&\lesssim t^{\frac{\eta}{2}} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^1} + t^{-\frac{1-\eta}{2}} \Big(1 + s^{\frac{2\alpha}{4}} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\Big) \|u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

For any $\delta > 0$, take

$$t = \left(\frac{\delta \big(1 - \eta^{-1} s^{\frac{2\alpha+\eta-1}{4}} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\big)^2}{k \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}} \right)^{\frac{2}{\eta}}$$

with k the constant from the previous inequality. This yields

$$\big|\langle u, Hu \rangle - \langle \nabla u_s^\sharp, \nabla u_s^\sharp \rangle\big| \lesssim m_\delta^2(\mathbf{A}, s) \|u\|_{L^2} + \delta \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^1}.$$

and completes the proof. □

8.3 – Self-adjointness and spectrum

In this section, we prove that H is self-adjoint with pure point spectrum. It is symmetric since $H\Gamma$ is the limit in norm of the regularised $H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon$ as proved in Section 8.3.1. Hence it is enough to prove that

$$H + k : \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \to L^2$$

is surjective for some $k \in \mathbf{R}$, this is the content of Section 8.3.2. In Section 8.3.3, we prove that H_ε converges to H in the stronger resolvent sense. Finally, we give in Section 8.3.4 bounds for the eigenvalues of H using the different representation

$$H = -\Delta\Phi^s + R + \Psi^s$$

parametrised by $s \in (0,1)$ from the eigenvalues of $-\Delta$. In particular, it implies a Weyl-type law for H.

8.3.1 – The operator is symmetric

To prove that H is symmetric, we use the regularised operator H_ε. Recall that $(H_\varepsilon, \mathsf{H}^2)$ is self-adjoint and that $\Phi^s_\varepsilon : \mathsf{H}^2 \to \mathsf{H}^2$ is continuous. In some sense, the operator H should be the limit of

$$H_\varepsilon := -\Delta + 2iA_\varepsilon \cdot \nabla + A_\varepsilon^2$$

as ε goes to 0 with $\mathbf{A}_\varepsilon := (A_\varepsilon, A_\varepsilon^2)$ a smooth approximation of $\mathbf{A}$ in $\mathcal{X}^\alpha$. Since $\mathcal{D}(H_\varepsilon) = \mathsf{H}^2$, one can not compare directly the operators. However given any $u \in L^2$, we have

$$u = \big(\Gamma \circ \Phi^s\big)(u) = \lim_{\varepsilon\to 0} \big(\Gamma_\varepsilon \circ \Phi^s\big)(u).$$

Thus for $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$, the approximation $u_\varepsilon := \big(\Gamma_\varepsilon \circ \Phi^s\big)(u)$ belongs to H^2 and one can consider the difference

$$\|Hu - H_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} = \|(H\Gamma - H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon)u^\sharp\|_{L^2}$$

with $u^\sharp := \Phi^s(u)$. The following Proposition assures the convergence of $H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon$ to $H\Gamma$ provided $s < s_\beta(\mathbf{A})$ where $\beta = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + 2\alpha)$.

Proposition 8.11. *Let $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ and $s \in (0,1)$ such that $s < s_\beta(\mathbf{A})$. Then*

$$\|Hu - H_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \lesssim_{\mathbf{A},s} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}$$

with $u_s^\sharp = \Phi^s(u)$ and $u_\varepsilon := \Gamma_\varepsilon u_s^\sharp$. In particular, this implies that $H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon$ converges to $H\Gamma$ in norm as ε goes to 0 as operators from H^2 to L^2.

Proof. We have

$$H_\varepsilon u_\varepsilon = -\Delta u_s^\sharp + R_\varepsilon(u_\varepsilon) + \Psi_\varepsilon^s(u_\varepsilon)$$

where R_ε and Ψ_ε^s are defined as R and Ψ^s with $\mathbf{A}_\varepsilon$ instead of $\mathbf{A}$. Since $\frac{4}{3} < \beta < 2\alpha$, we have

$$\begin{aligned}\|R(u)-R_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^2} &\leq \|R(u-u_\varepsilon)\|_{L^2} + \|(R-R_\varepsilon)(u_\varepsilon)\|_{L^2}\\ &\lesssim_{s,\mathbf{A}} \|u-u_\varepsilon\|_{\mathsf{H}^\beta} + \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}\|u_\varepsilon\|_{\mathsf{H}^\beta}\end{aligned}$$

and

$$\|\Psi^s(u) - \Psi_\varepsilon^s(u_\varepsilon)\|_{L^2} \lesssim_{s,\mathbf{A}} \|u-u_\varepsilon\|_{L^2} + \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}\|u\|_{L^2}$$

and the proof is complete since $s < s_\beta(\mathbf{A})$ implies

$$\|u\|_{\mathsf{H}^\beta} \lesssim_{s,\mathbf{A}} \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^\beta}.$$

□

The symmetry of H immediately follows.

Corollary 8.12. *The operator H is symmetric.*

Proof. Let $u, v \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$ and consider $u^\sharp := \Phi^s(u)$ and $v^\sharp := \Phi^s(v)$ for $s < s_\beta(\mathbf{A})$. Since H_ε is a symmetric operator, we have

$$\langle Hu, v\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon u_s^\sharp, \Gamma_\varepsilon v_s^\sharp\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \Gamma_\varepsilon u_s^\sharp, H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon v_s^\sharp\rangle = \langle u, Hv\rangle$$

using that $H_\varepsilon\Gamma_\varepsilon$ converges to $H\Gamma$ and Γ_ε to Γ in norm convergence. □

8.3.2 – The operator is self-adjoint

In this Section, we prove that $(H, \mathcal{D}_\mathbf{A})$ is self-adjoint. Being closed and symmetric, it is enough to prove that

$$(H+k)u = v$$

admits a solution for some $k \in \mathbf{R}$, see Theorem X.1 in [RS75]. This is done using the Babuška-Lax-Milgram Theorem, see [Bab71], and Theorem 8.10 which implies that H is almost surely bounded below for any $\delta \in (0,1)$ and s small enough.

Proposition 8.13. *Let $\delta \in (0,1)$ and $s \in (0,1)$ such that $s < s_{1-\frac{\alpha}{4}}(\mathbf{A})$. For $k > m_\delta^1(\mathbf{A}, s)$, the operators $H+k$ and $H_\varepsilon + k$ are invertibles as unbounded operator in L^2. Moreover the operators*

$$\begin{aligned}\big(H+k\big)^{-1} &: L^2 \to \mathcal{D}_\mathbf{A}\\ \big(H_\varepsilon+k\big)^{-1} &: L^2 \to \mathsf{H}^2\end{aligned}$$

are bounded.

Proof. Since $s < s_{1-\frac{\alpha}{4}}(\mathbf{A})$ and $k > m^1_\delta(\mathbf{A}, s)$, Proposition 8.10 gives

$$\big(k - m^1_\delta(\mathbf{A}, s)\big)\|u\|^2_{L^2} < \big\langle (H+k)u, u\big\rangle$$

for $u \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$. Considering the norm

$$\|u\|^2_{\mathcal{D}_\mathbf{A}} = \|u\|^2_{L^2} + \|u^\sharp_s\|^2_{\mathsf{H}^2}$$

on $\mathcal{D}_\mathbf{A}$, this yields a weakly coercive operator using Proposition 8.6 in the sense that

$$\|u\|_{\mathcal{D}_\mathbf{A}} \lesssim_\mathbf{A} \|(H+k)u\|_{L^2} = \sup_{\|v\|_{L^2}=1} \big\langle (H+k)u, v\big\rangle$$

for any $u \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$. Moreover, the bilinear map

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathcal{D}_\mathbf{A} \times L^2 & \to & \mathbf{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \big\langle (H+k)u, v\big\rangle \end{array}$$

is continuous since Proposition 8.6 implies

$$|B(u,v)| \leq \|(H+k)u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \lesssim_\mathbf{A} \|u\|_{\mathcal{D}_\mathbf{A}}\|v\|_{L^2}$$

for $u \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$ and $v \in L^2$. The last condition we need is that for any $v \in L^2\backslash\{0\}$, we have

$$\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}_\mathbf{A}}=1} |B(u,v)| > 0.$$

Let assume that there exists $v \in L^2$ such that $B(u,v) = 0$ for all $u \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$. Then

$$\forall u \in \mathcal{D}_\mathbf{A}, \quad \langle u, v\rangle_{\mathcal{D}_\mathbf{A}, \mathcal{D}^*_\mathbf{A}} = 0.$$

hence $v = 0$ as an element of $\mathcal{D}^*_\mathbf{A}$. By density of $\mathcal{D}_\mathbf{A}$ in L^2, this implies $v = 0$ in L^2 hence the property we want. By the Theorem of Babuška-Lax-Milgram, for any $f \in L^2$ there exists a unique $u \in \mathcal{D}_\mathbf{A}$ such that

$$\forall v \in L^2, \quad B(u,v) = \langle f, v\rangle.$$

Moreover, we have $\|u\|_{\mathcal{D}_\mathbf{A}} \lesssim_\mathbf{A} \|f\|_{L^2}$ hence the result for $(H+k)^{-1}$. The same argument works for $H_\varepsilon + k$ since Peroposition 8.10 also holds for H_ε with bounds uniform in ε. □

As explained before, this immediatly implies that H is self-adjoint. Moreover, the resolvent is a compact operator from L^2 to itself since $\mathcal{D}_\mathbf{A} \subset \mathsf{H}^\beta$ for any $\beta \in [0, 2\alpha)$ hence it has pure point spectrum.

Corollary 8.14. *The operator H is self-adjoint with discret spectrum $\big(\lambda_n(\mathbf{A})\big)_{n\geq 1}$ which is a nondecreasing diverging sequence without accumulation points. Moreover, we have*

$$L^2 = \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{Ker}\big(H - \lambda_n(\mathbf{A})\big)$$

with each kernel being of finite dimension. We finally have the min-max principle

$$\lambda_n(\mathbf{A}) = \inf_{D} \sup_{u\in D;\|u\|_{L^2}=1} \langle Hu, u\rangle$$

where D is any n-dimensional subspace of $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ that can also be written as

$$\lambda_n(\mathbf{A}) = \sup_{v_1,\dots,v_{n-1}\in L^2} \inf_{\substack{u\in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_{n-1})^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \langle Hu, u\rangle.$$

8.3.3 – H is the resolvent-limit of H_ε

Since the intersection of the domains of H and H_ε is trivial, the natural convergence of H_ε to H is in the resolvent sense, this is the following Proposition. In particular, this result explains why our operator H is natural since the regularised operator satisfies

$$\left(i\partial_1 + A_1^{(\varepsilon)}\right)^2 + \left(i\partial_1 + A_2^{(\varepsilon)}\right)^2 = H + c_\varepsilon + o_{\varepsilon\to 0}(1)$$

in the norm resolvent sense.

Proposition 8.15. *Let $\delta > 0$ and $s \in (0,1)$ such that $s < s_\beta(\mathbf{A})$. Then for any constant $k > m_\delta^1(\mathbf{A}, s)$, we have*

$$\|(H+k)^{-1} - (H_\varepsilon + k)^{-1}\|_{L^2\to L^2} \lesssim_{\mathbf{A},s} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}.$$

Proof. Let $v \in L^2$. Since $H + k : \mathcal{D}_{\mathbf{A}} \to L^2$ is invertible, there exists $u \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ such that

$$v = (H+k)u$$

thus

$$\|(H+k)^{-1}v - (H_\varepsilon+k)^{-1}v\|_{L^2} = \|u - (H_\varepsilon+k)^{-1}(H+k)u\|_{L^2}.$$

We introduce $u_\varepsilon := \Gamma_\varepsilon \Phi^s(u)$ which converges to u in L^2 and we have

$$\|u - (H_\varepsilon+k)^{-1}(H+k)u\|_{L^2} \le \|u - u_\varepsilon\|_{L^2} + \|u_\varepsilon - (H_\varepsilon+k)^{-1}(H+k)u\|_{L^2}.$$

Since Lemma 8.3 gives

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^2} \lesssim_{\mathbf{A},s} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha},$$

we only have to bound the second term. We have

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - (H_\varepsilon+k)^{-1}(H+k)u\|_{L^2} &= \|(H_\varepsilon+k)^{-1}\big((H_\varepsilon+k)u_\varepsilon - (H+k)u\big)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|(H_\varepsilon+k)u_\varepsilon - (H+k)u\|_{L^2} \\ &\lesssim \|H_\varepsilon u_\varepsilon - Hu\|_{L^2} + k\|u_\varepsilon - u\|_{L^2}\end{aligned}$$

using Proposition 8.11. In the end, we have

$$\|(H+k)^{-1}v - (H_\varepsilon+k)^{-1}v\|_{L^2} \lesssim \|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2}\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha}$$

hence the result since $(H+k)^{-1} : L^2 \to \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ is continuous. □

8.3.4 – Comparison between the spectrum of H and Δ

The following Proposition provides sharp bounds for the eigenvalues of H from the eigenvalues of Δ, we denote by $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ the non-decreasing positive sequence of the eigenvalues of $-\Delta$ since it corresponds to the case $\mathbf{A} = 0$. For $\delta \in (0,1)$ and $s \in (0,1)$, introduce the constant

$$m_\delta^+(\mathbf{A}, s) := (1+\delta)(1 + ms^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}).$$

For $s < s_0(\mathbf{A})$, we also introduce

$$m_\delta^-(\mathbf{A}, s) := \frac{1-\delta}{1 - ms^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}.$$

Recall $\beta = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + 2\alpha)$. Write $a, b \leq c$ to mean that we have both $a \leq c$ and $b \leq c$.

Proposition 8.16. *Let $\delta \in (0,1)$ and $s \in (0,1)$ such that $s < s_\beta(\mathbf{A}) \wedge s_{1-\frac{\alpha}{4}}(\mathbf{A})$. Given any $n \in \mathbb{Z}^+$, we have*

$$\lambda_n(\mathbf{A}), \lambda_n(\mathbf{A}_\varepsilon) \leq m_\delta^+(\mathbf{A}, s)\lambda_n + 2 + 2ms^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} + m_\delta^2(\mathbf{A}, s).$$

If moreover $s < s_0(\mathbf{A})$, we have

$$\lambda_n(\mathbf{A}), \lambda_n(\mathbf{A}_\varepsilon) \geq m_\delta^-(\mathbf{A}, s)\lambda_n - m_\delta^1(\mathbf{A}, s).$$

Proof. Let $u_1^\sharp, \dots, u_n^\sharp \in \mathsf{H}^2$ be an orthonormal family of eigenfunctions of $-\Delta$ associated to $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ and consider

$$u_i := \Gamma u_i^\sharp \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$$

for $1 \leq i \leq n$. Since Γ is invertible, the family $(u_1, \dots, u_n)$ is free thus the min-max representation of $\lambda_n(\mathbf{A})$ yields

$$\lambda_n(\mathbf{A}) \leq \sup_{\substack{u \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n) \\ \|u\|_{L^2}=1}} \langle Hu, u\rangle.$$

Given any normalised $u \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, we have

$$\langle Hu, u\rangle \leq \|Hu\|_{L^2} \leq (1+\delta)\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} + m_\delta^2(\mathbf{A}, s)$$

for $u_s^\sharp = \Phi^s(u)$ using Proposition 8.6 and $s < s_\beta(\mathbf{A})$. Moreover

$$\|u_s^\sharp\|_{\mathsf{H}^2} \leq (1+\lambda_n)\|u_s^\sharp\|_{L^2} \leq (1+\lambda_n)\Big(1 + ms^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}\Big)$$

hence the upper bound

$$\lambda_n(\mathbf{A}) \leq m_\delta^+(\mathbf{A}, s)\lambda_n + 2 + 2ms^{\frac{\alpha}{2}}\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha} + m_\delta^2(\mathbf{A}, s).$$

For the lower bound, we use the min-max representation of $\lambda_n(\mathbf{A})$ under the form

$$\lambda_n(\mathbf{A}) = \sup_{v_1,\dots,v_{n-1}\in L^2} \inf_{\substack{u\in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_{n-1})^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} \langle Hu, u\rangle.$$

Introducing

$$F := \mathrm{Vect}(u_m; m \geq n),$$

we have that $F^\perp$ is a subspace of L^2 of finite dimension $n-1$ thus there exists a orthogonal family $(v_1, \dots, v_{n-1})$ such that $F^\perp = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$. Since F is a closed subspace of L^2 as an intersection of hyperplans, we have $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})^\perp$ hence

$$\lambda_n(\mathbf{A}) \geq \inf_{\substack{u\in F \\ \|u\|_{L^2}=1}} \langle Hu, u\rangle.$$

Let $u \in F$ with $\|u\|_{L^2} = 1$. Using Proposition 8.10, we have

$$\begin{aligned}\langle Hu, u\rangle &\geq (1-\delta)\langle \nabla u_s^\sharp, \nabla u_s^\sharp\rangle - m_\delta^1(\mathbf{A}, s) \\ &\geq (1-\delta)\langle u_s^\sharp, -\Delta u_s^\sharp\rangle - m_\delta^1(\mathbf{A}, s) \\ &\geq (1-\delta)\lambda_n \|u_s^\sharp\|_{L^2}^2 - m_\delta^1(\mathbf{A}, s).\end{aligned}$$

Finally using Proposition 8.2 for $s < s_{1-\frac{\alpha}{4}}(\mathbf{A})$, we get

$$\langle Hu, u\rangle \geq \frac{1-\delta}{1 - m s^{\frac{\alpha}{2}} \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}} \lambda_n - m_\delta^1(\mathbf{A}, s)$$

and the proof is complete. □

In particular, taking

$$s = \left(\frac{\delta}{m\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{X}^\alpha}}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$$

gives the simpler bounds

$$\lambda_n - m_\delta^1(\mathbf{A}) \leq \lambda_n(\mathbf{A}) \leq (1+\delta)^2\lambda_n + m_\delta^2(\mathbf{A})$$

for any δ small enough. This is sharp enough to get an almost sure Weyl-type law from the Weyl law for the Laplacian Δ.

Corollary 8.17. *We have*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} |\{n \geq 0; \lambda_n(\mathbf{A}) \leq \lambda\}| = \pi$$

Proof. The lower and upper bounds on the eigenvalues give

$$N\big(\lambda + m_\delta^1(\mathbf{A})\big) \leq \big|\{n \geq 0; \lambda_n(\mathbf{A}) \leq \lambda\}\big| \leq N\left(\frac{\lambda - m_\delta^2(\mathbf{A})}{1+\delta}\right)$$

hence the proof is complete using the result for the Laplacian. □

8.4 – Stochastic renormalisation of the singular potential

The enhanced potential

$$\mathbf{A} := (A, A^2) \in \mathcal{X}^\alpha = \mathcal{C}^{\alpha-1} \times \mathcal{C}^{2\alpha-2}$$

would be defined with $A^2 := A \cdot A$ for regular enough potential, for example $A \in L^\infty$ is enough. For arbitrary distributions $A \in \mathcal{C}^{\alpha-1}$, this does not make sense since the product of two distributions in Hölder spaces can be defined only if the sum of their regularity exponents is positive. The magnetic Laplacian with white noise $B = \xi$ as magnetic field corresponds to this framework since the associated magnetic potential

$$A := \nabla^\perp \varphi$$

where $\varphi = \Delta^{-1}\xi$ belongs to $\mathcal{C}^{\alpha-1}$ for any $\alpha < 1$. In this case, one has to make sense of

$$A \cdot A = (-\partial_2\varphi)^2 + (\partial_1\varphi)^2$$

which is expected to belong to $\mathcal{C}^{2\alpha-2}$ since $\alpha - 1 < 0$. A natural way of proceeding is to consider a regularisation of the noise $\xi_\varepsilon := \xi * \rho_\varepsilon$. In this case, the associated magnetic potential A_ε is smooth and the product $A_\varepsilon \cdot A_\varepsilon$ is well-defined. The singularity of the limit translates as the almost sure divergence of the product as ε goes to 0. Indeed for $x \in \mathbf{T}^2$, one has

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[A_\varepsilon(x) \cdot A_\varepsilon(x)\big] &= \mathbb{E}\big[(\partial_2\Delta^{-1}\xi_\varepsilon)^2(x) + (\partial_1\Delta^{-1}\xi_\varepsilon)^2(x)\big] \\ &= \big\|\partial_2 G_\varepsilon(x,\cdot)\big\|_{L^2}^2 + \big\|\partial_1 G_\varepsilon(x,\cdot)\big\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

with G the kernel of Δ^{-1} and $G_\varepsilon(x,\cdot) := G(x,\cdot) * \rho_\varepsilon$. In particular, G is smooth on $\mathbf{T}^2\backslash\{0\}$ with the same singularity as the Green function of the Laplacian at $x = 0$. Hence the mean of the regularised product diverges as

$$c_\varepsilon := \mathbb{E}[A_\varepsilon(0) \cdot A_\varepsilon(0)] \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\ln(\varepsilon)}{4\pi^2}.$$

While the mean of the random variable $A_\varepsilon(x)\cdot A_\varepsilon(x)$ diverges, one can try to describe the fluctuation around this asymptotic and find a limit to

$$A_\varepsilon \cdot A_\varepsilon - \mathbb{E}[A_\varepsilon \cdot A_\varepsilon]$$

as ε goes to 0. It happens that this converges to a limit in the expected Hölder space $\mathcal{C}^{2\alpha-2}$, this is the Wick product. As far as discrete associated models are concerned, this can be interpreted as a central limit Theorem where one describes the fluctuation around a diverging number of particules, see for example [MP19] for an exemple with the Anderson Hamiltonian.

Theorem 8.18. *There exists a random distribution A^2 that belongs almost surely to $\mathcal{C}^{2\alpha-2}$ such that*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\Big[\big\|A^2 - (A_\varepsilon \cdot A_\varepsilon - c_\varepsilon)\big\|_{\mathcal{C}^{2\alpha-2}}^p\Big] = 0$$

for any $p \geq 1$.

Proof. Let $(\Delta_k)_{k\geq -1}$ be the family of Paley-Littlewood projectors and consider

$$a_\varepsilon := A_i^{(\varepsilon)}$$

for $i \in \{1,2\}$ and we want to show that $a_\varepsilon^2 - \mathbb{E}[a_\varepsilon^2]$ converges in the correct space as ε goes to 0. Gaussian hypercontractivity gives

$$\mathbb{E}\left[\left|\Delta_k(a_\varepsilon^2)\right|^p(x)\right] = \mathbb{E}\left[\left|\Delta_k(a_\varepsilon^2)\right|^2(x)\right]^{\frac{p}{2}}$$

hence it is enough to consider second order moment. Using the Wick formula, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\Delta_k(a_\varepsilon^2)\right|^2(x)\right] &= \int_{\mathbf{T}^2\times\mathbf{T}^2} K_{\Delta_k}(x,y)K_{\Delta_k}(x,y)\mathbb{E}\big[a_\varepsilon(y)^2 a_\varepsilon(z)^2\big]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbf{T}^2\times\mathbf{T}^2} K_{\Delta_k}(x,y)K_{\Delta_k}(x,y)\Big(\mathbb{E}\big[a_\varepsilon^2(y)\big]\mathbb{E}\big[a_\varepsilon^2(z)\big] + 2\mathbb{E}\big[a_\varepsilon(y)a_\varepsilon(z)\big]^2\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \left(\int_{\mathbf{T}^2} K_{\Delta_k}(x,y)\mathbb{E}\big[a_\varepsilon^2(y)\big]\mathrm{d}y\right)^2 + 2\int_{\mathbf{T}^2\times\mathbf{T}^2} K_{\Delta_k}(x,y)K_{\Delta_k}(x,y)\mathbb{E}\big[a_\varepsilon(y)a_\varepsilon(z)\big]^2\mathrm{d}y\mathrm{d} \\
&= \mathbb{E}\Big[\left|\Delta_k(a_\varepsilon^2)\right|(x)\Big]^2 + 2I_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

The first term corresponds to the diverging quantity that is substracted thus we only have to bound the second one. We have

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(x) &\lesssim \int_{\mathbf{T}^2\times\mathbf{T}^2} K_{\Delta_k}(x,y)K_{\Delta_k}(x,y)\mathbb{E}\big[\partial_i\Delta^{-1}\xi_\varepsilon(y)\partial_i\Delta^{-1}\xi_\varepsilon(z)\big]^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\lesssim \int_{\mathbf{T}^2\times\mathbf{T}^2} K_{\Delta_k}(x,y)K_{\Delta_k}(x,y)\big\langle\partial_i G_\varepsilon(y-\cdot),\partial_i G_\varepsilon(z-\cdot)\big\rangle^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\lesssim 2^{-k\delta}
\end{aligned}$$

for any $\delta > 0$. This implies that $\big(A_\varepsilon\cdot A_\varepsilon - c_\varepsilon\big)$ is a bounded family in $\mathcal{C}^{2\alpha-2}$ for any $\alpha < 1$. The same type of computations shows that $A_\varepsilon\cdot A_\varepsilon - c_\varepsilon$ actually converges to a distribution in $\mathcal{C}^{2\alpha-2}$ that we denote by A^2. See for example Lemma 3.1 in [HL15]. □

Then $\mathbf{A} := (A, A^2)$ belongs to $\mathcal{X}^\alpha$ and the convergence in probability

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}^\alpha} = 0$$

with

$$\mathbf{A}_\varepsilon := (A_\varepsilon, A_\varepsilon\cdot A_\varepsilon - c_\varepsilon) \in \mathcal{X}^\alpha.$$

Remark 8.19. — *The effect of a change of gauge $\widetilde{A} = A + \mathrm{d}f$ on H can be seen at the level of the regularised operator. It would give*

$$\widetilde{H}_\varepsilon = (i\partial_1 + \widetilde{A}_1)^2 + (i\partial_2 + \widetilde{A}_2)^2 - \tilde{c}_\varepsilon$$

with

$$\widetilde{c}_\varepsilon = \mathbb{E}[\widetilde{A}_\varepsilon\cdot\widetilde{A}_\varepsilon].$$

Since the spectral properties of the magnetic Laplacian with smooth potential are not affected by the choice of gauge, it only remains to see the impact in the renormalisation procedure. It gives

$$\widetilde{c}_\varepsilon = \mathbb{E}[A_\varepsilon \cdot A_\varepsilon] + 2\mathbb{E}[\mathrm{d}f \cdot A_\varepsilon] + \mathbb{E}[\mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}f] = c_\varepsilon + \Delta f$$

in the case of a deterministic change of gauge $\mathrm{d}f$*. This would change the spectral properties of the limit however one could recover the same operator by incorporating the term* Δf *in the renormalisation procedure since it does not cause any divergence. The arbitrary choice one has to make in the renormalisation allows to deal with different gauge choice and should be motivated by the applications.*

— *As for the Anderson Hamiltonian, this raises interesting questions as far as probability is concerned. For example, the eigenvalues are random variables and a direct application of the method used in [Mou20] would give tail estimates. One could also consider the martingale problem associated to rough differential equations (RDEs) in the case of a time-independant distributional drift, see [PvZ20] and the references therein.*

8.5 – Paracontrolled calculus

In this Appendix, we recall the basics for paracontrolled calculus based on the heat semigroup, see [Mou20] for details. See also [BB19] where high order paracontrolled calculus was first introduced in a parabolic spacetime setting. We only consider the case of the Laplacian

$$L := -\Delta$$

but one can take any nice enough second order differential operators L in Hörmander form

$$L = -\sum_{i=1}^{d} V_i^2.$$

Given any integer b, consider the families of operators

$$Q_t^{(b)} := \frac{(tL)^b e^{tL}}{(b-1)!} \quad \text{and} \quad -\partial_t P_t^{(b)} = Q_t^{(b)}$$

with $P_0^{(b)} = \mathrm{Id}$. Then there exists a polynomial p_b of degree $b-1$ such that $P_t^{(b)} = p_b(tL)e^{tL}$ and we have

$$f = \lim_{t\to 0} P_t^{(b)} f = \int_0^1 Q_t^{(b)} f \frac{\mathrm{d}t}{t} + P_1^{(b)} f.$$

The operators $Q_t^{(b)}$ and $P_t^{(b)}$ play respectively the role of Paley-Littlewood projector and Fourier series. Indeed, working on the torus gives

$$\widehat{Q_t^{(b)}}(\lambda) = \frac{(t|\lambda|^2)^b}{(b-1)!} e^{-|\lambda|^2 t} \quad \text{and} \quad \widehat{P_t^{(b)}}(\lambda) = p_b\left(t|\lambda|^2\right) e^{-|\lambda|^2 t}$$

hence $Q_t^{(b)}$ localizes in frequency around the annulus $|\lambda| \sim t^{-\frac{1}{2}}$ and $P_t^{(b)}$ localizes in frequency on the ball $|\lambda| \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$. Since the measure dt/t gives unit mass to each interval $[2^{-(i+1)}, 2^{-i}]$, the operator $Q_t^{(b)}$ is a multiplier that is approximately localized at 'frequencies' of size $t^{-\frac{1}{2}}$. However, this decomposition using a continuous parameter does not satisfy a perfect cancellation property but the identity

$$Q_t^{(b)} Q_s^{(b)} = \left(\frac{ts}{(t+s)^2}\right)^b Q_{t+s}^{(2b)}$$

for any $s, t \in (0,1)$ which is small for $s \ll t$ or $t \ll s$ hence the parameter b encodes a "degree" of cancellation. We denote StGC^k the standard family of Gaussian operators with cancellation of order k, see Section 1.2 from [Mou20] for a precise definition.

Definition 8.20. *Given any $p, q \in [1, \infty]$ and $\alpha \in (-2b, 2b)$, we define the Besov space $\mathcal{B}^\alpha_{p,q}$ as the set of distribution $f \in \mathcal{D}'$ such that*

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha_{p,q}} := \left\|e^{-L} f\right\|_{L^p_x} + \sup_{\substack{Q \in \mathsf{StGC}^k \\ |\alpha| < k \leq 2b}} \left\| t^{-\frac{\alpha}{2}} \|Q_t f\|_{L^p_x} \right\|_{L^q(t^{-1}\mathrm{d}t)} < \infty.$$

The exponent $p = q = 2$ coresponds to Sobolev spaces and $p = q = \infty$ to Besov-Hölder spaces. As for the discrete Paley-Littlewood decomposition, this can be used to construct paraproducts. formally, a product is described by

$$\begin{aligned} fg &= \lim_{t \to 0} P_t^{(b)} \left(P_t^{(b)} f \cdot P_t^{(b)} g \right) \\ &= \int_0^1 \left\{ Q_t^{(b)} \left(P_t^{(b)} f \cdot P_t^{(b)} g \right) + P_t^{(b)} \left(Q_t^{(b)} f \cdot P_t^{(b)} g \right) + P_t^{(b)} \left(P_t^{(b)} f \cdot Q_t^{(b)} g \right) \right\} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\qquad + P_1^{(b)} \left(P_1^{(b)} f \cdot P_1^{(b)} g \right). \end{aligned}$$

The family $P^{(b)}$ does not encode any cancellation while $Q^{(b)}$ encodes cancellation of order $2b$. We can transfer some of the cancellation from $Q^{(b)}$ to the $P^{(b)}$ in each term using the Leibnitz rule

$$V_i(fg) = V_i(f) g + f V_i(g).$$

Multiple uses of this allows to decompose the product as

$$f \cdot g = \mathsf{P}_f g + \mathsf{P}_g f + \Pi(f, g)$$

where $\mathsf{P}_f g$ is a linear combination of

$$\int_0^1 Q_t^1 \left(P_t f \cdot Q_t^2 g \right) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

and $\Pi(f, g)$ of

$$\int_0^1 P_t \left(Q_t^1 f \cdot Q_t^2 g \right) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

with $Q^1, Q^2 \in \mathsf{StGC}^{\frac{b}{2}}$ and $P \in \mathsf{StGC}^{[0,b]}$. It is then a direct computation to prove the following continuity estimates. We refer to Appendix B in [Mou20] for a proof. The parameter b can be taken as large as needed in applications.

Proposition 8.21. *Let $\alpha, \beta \in (-2b, 2b)$ be regularity exponents.*

- *If $\alpha > 0$, then $(f, g) \mapsto \mathsf{P}_f g$ is continuous from $\mathcal{C}^\alpha \times \mathsf{H}^\beta$ to H^β and from $\mathsf{H}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$ to H^β.*
- *If $\alpha < 0$, then $(f, g) \mapsto \mathsf{P}_f g$ is continuous from $\mathcal{C}^\alpha \times \mathsf{H}^\beta$ to $\mathsf{H}^{\alpha+\beta}$ and from $\mathsf{H}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$ to $\mathsf{H}^{\alpha+\beta}$.*
- *If $\alpha + \beta > 0$, then $(f, g) \mapsto \Pi(f, g)$ is continuous from $\mathsf{H}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$ to $\mathsf{H}^{\alpha+\beta}$.*

Given any differentiable operator D constructed from the V_i's, one can consider a new paraproduct $\widetilde{\mathsf{P}}$ intertwined with P via the relation

$$D \circ \widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \circ D$$

It enjoys the same properties as P and appear naturally in the weak formulation of PDEs involving D. In this work, we consider $\widetilde{\mathsf{P}}$ intertwinned with P via L, it is the natural object to describe the domain of H. The truncated paraproduct $\widetilde{\mathsf{P}}^s$ is defined as a linear combination of

$$\int_0^s Q_t^1 \left(P_t f \cdot Q_t^2 g\right) \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

It is then possible to get explicit bounds on its convergence to 0 as s goes to 0 and the difference $\widetilde{\mathsf{P}} - \widetilde{\mathsf{P}}^s$ is smooth since it is localised in "frequency" in $[s, 1]$, see again Appendix B in [Mou20] for details. In particular, there exists a universal constant $m > 0$ that only depends on this construction such that

$$\|\widetilde{\mathsf{P}}_a^s b\|_{\mathsf{H}^\gamma} \leq m \frac{s^{\frac{\beta-\gamma}{4}}}{\beta^*} \|a\|_{\mathsf{H}^\alpha} \|b\|_{\mathsf{H}^\beta}.$$

for $s \in (0, 1), \beta \in [0, 2\alpha)$ and $\gamma \in [0, \beta)$. The last ingredient used in this work is continuity estimates on the corrector

$$\mathsf{F}(a, b, c) = \big\langle a, \Pi(b, c)\big\rangle - \big\langle \mathsf{P}_a b, c\big\rangle$$

and the commutator

$$\mathsf{B}\big(a, (b_1, b_2)\big) = \mathrm{div}\big(\mathsf{P}_a(b_1, b_2)\big) - \mathsf{P}_a \mathrm{div}(b_1, b_2).$$

Proposition 8.22.

- *Let $\alpha, \beta, \gamma \in (-2b, 2b)$ such that $\beta + \gamma < 1$ and $\alpha + \beta + \gamma \geq 0$. If $\alpha < 1$, then $(a, b, c) \mapsto \mathsf{F}(a, b, c)$ extends in a unique trilinear operator from $\mathsf{H}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \times \mathcal{C}^\gamma$ to $\mathbf{R}$.*
- *Let $\alpha, \beta \in (-2b, 2b)$ such that. If $\alpha < 1$, then $(a, b) \mapsto \mathsf{B}(a, b)$ extends in a unique bilinear operator from $\mathsf{H}^\alpha(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \times \mathcal{C}^\beta(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ to $\mathsf{H}^{\alpha+\beta-1}(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$.*

Proof. The proof of the continuity estimates of F is already present in [Mou20] hence we only consider here B. We have

$$\mathsf{B}\big(a, (b_1, b_2)\big) = \partial_1 \mathsf{P}_a b_1 + \partial_2 \mathsf{P}_a b_2 - \mathsf{P}_a \partial_1 b_1 + \mathsf{P}_a \partial_2 b_2$$

hence the result follows from the continuity estimates on the commutators

$$(a, b) \mapsto V_i \mathsf{P}_a b - \mathsf{P}_a V_i b,$$

see for example Theorem 7 in Section 2.2 from [BM19] for the result on Hölder spaces. The extension to Sobolev spaces can be done as in [Mou20]. □

Chapitre 9

Perspectives

Dans ce chapitre nous discutons de diverses perspectives et questions soulevées par cette thèse. Il est divisé en six parties :

1. Influence des résonances sur le spectre du Laplacien magnétique
2. Quantification de la variété caractéristique
3. Effet de courbure et effet semiclassique
4. Étude de champs magnétiques plus généraux
5. Étude d'opérateurs hypoelliptiques
6. Perturbations non-autoadjointes

9.1 – Influence des résonances

Notons $\mathcal{L}_\hbar$ le Laplacien magnétique sur la variété Riemannienne M. Dans cette thèse nous avons obtenu une description du spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ dans une fenêtre d'énergie de la forme $(-\infty, b_1\hbar)$. Le choix du seuil b_1 est directement lié à la fonction d'intensité magnétique

$$b : M \to \mathbf{R}_+ .$$

En effet, pour des valeurs propres $< b_1\hbar$, les fonctions propres associées sont exponentiellement localisées dans l'ouvert

$$\Omega = \{q \in M , \quad b(q) \leq b_1\} ,$$

et diminuer b_1 revient à réduire Ω. Or pour pouvoir mener notre étude, nous avons dû restreindre la taille de Ω par deux contraintes distinctes :

- L'absence de résonances sur Ω,
- L'existence de coordonnées de Darboux pour B.

Dans cette section nous discuterons du premier point, et le deuxième sera l'objet de la section suivante.

Un entier $r > 0$ étant fixé, nous avons supposé la condition de non-résonance suivante entre les valeurs propres $(\pm i\beta_j(q))_{1\leq j\leq s}$ de la matrice magnétique $\mathbf{B}(q)$:

$$\forall q \in \Omega , \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^s , \quad 0 < |\alpha| < r \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \beta_j(q) \neq 0 . \tag{9.1.1}$$

Plus précisément, nous avons supposé que (9.1.1) était vérifiée en un point q_0 (unique minimum de b), ce qui permet de l'étendre à un petit voisinage Ω de q_0. Sous cette hypothèse, nous avons pu utiliser l'algorithme de Birkhoff pour obtenir une description du spectre modulo $\mathcal{O}(\hbar^{r/2})$. Ainsi, cette condition de non-résonance impose de nombreuses restrictions :

1. les minima de b doivent être discrets,
2. le seuil b_1 doit être potentiellement proche de b_0,
3. La précision est réduite à $\mathcal{O}(\hbar^{r/2})$.

Bien sûr, en dimension $d = 2$ aucune résonance ne peut exister puisque qu'il n'y a qu'une fonction β_1. Mais en dimension plus grande, les résonances influent fortement sur le spectre à part dans des cas assez spécifiques comme sous les contraintes 1,2, et 3 ci-dessus. Il est donc naturel de chercher à décrire le spectre malgré la présence de résonances.

Une piste pour étudier ces résonances serait d'utiliser une méthode de réduction de Grushin, comme au Chapitre 7. Supposons par exemple que $M = \mathbf{R}^d$, et que le champ B soit une 2-forme non-dégénérée. D'après le Théorème de Darboux, on peut trouver des coordonnées préservant le volume Euclidien dans lesquelles B s'écrive :

$$B = \sum_{j=1}^{s} \beta_j(q_{2j-1}, q_{2j}) \mathrm{d}q_{2j-1} \wedge \mathrm{d}q_{2j} \,.$$

Dans ces coordonnées, le symbole de $\mathcal{L}_\hbar$ est de la forme

$$H(q,p) = \sum_{k,\ell} (p_k - A_k(q)) g^{k\ell}(q)(p_\ell - A_\ell(q)) + \mathcal{O}(\hbar^2) \,,$$

et à changement de jauge prêt on peut choisir le potentiel suivant

$$A_{2j-1}(q) = 0 \,, \quad A_{2j}(q) = \int_0^{q_{2j-1}} \beta_j(s, q_{2j}) \mathrm{d}s \,.$$

On peut alors écrire l'opérateur dans les nouvelles variables $\hat{x}_{2j-1} = A_{2j}(q) \,, \quad \hat{x}_{2j} = q_{2j}$ puis effectuer le changement de variables canoniques linéaire analogue à la dimension 2 (Chapitre 7),

$$\begin{cases} x_j &= q_{2j} - p_{2j-1} \\ \xi_j &= p_{2j} \\ y_j &= q_{2j-1} - p_{2j} \\ \eta_j &= p_{2j-1} \end{cases}$$

pour se ramener à un symbole de la forme

$$\hat{H}(X,Y) = X G_\hbar(X,Y) X^T \,,$$

où $X = (x, \xi)$, $Y = (y, \eta)$, et $G_\hbar(X,Y)$ est une matrice symétrique définie positive. Ainsi on est ramené à une forme quadratique en X dont les coefficients dépendent de (X,Y). Les fonctions propres étant microlocalisées en $|X| \lesssim \hbar^{1/2}$, on peut faire

la dilatation $X \mapsto \hbar^{1/2}X$, de sorte que le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ soit décrit par l'opérateur pseudodifférentiel en Y suivant :

$$\hbar \mathsf{Op}_\hbar^{w,Y} \mathsf{P}_\hbar(Y), \quad \mathsf{P}_\hbar(Y) = \mathsf{Op}_1^{w,X}\left(XG_0(Y)X^T + \mathcal{O}(\hbar^{1/2})\right).$$

Le symbole principal $\mathsf{P}_0(Y) = \mathsf{Op}_1^{w,X} XG_0(Y)X^T$ est un oscillateur Harmonique. On peut alors chercher à adapter la méthode de réduction de Grushin du Chapitre 7. Le spectre de $\mathsf{P}_0(Y)$ est donnée par

$$b_n(Y) = \sum_{j=1}^{s}(2n_j+1)\beta_j(Y), \quad n \in \mathbf{N}^s$$

et on peut trouver une base de fonctions propres associées $\Psi_n(Y)$. Considérons un ensemble fini (mais assez grand) d'indices $n \in N \subset \mathbf{N}^s$, et pour $Y \in \mathbf{R}^{2s}$:

$$\Pi(Y) : \begin{array}{ccc} \mathsf{L}^2 & \to & \mathbf{C}^{|N|} \\ u & \mapsto & (\langle u, \Psi_n(Y)\rangle)_{n\in N} \end{array},$$

$$\Pi^*(Y) : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{|N|} & \to & B^2 \\ \alpha & \mapsto & \sum_{n\in N}\alpha_n\Psi_n(Y) \end{array}.$$

La matrice de Grushin

$$\mathscr{P}_0(Y) = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0(Y) - z & \Pi^*(Y) \\ \Pi(Y) & 0 \end{pmatrix} : B^2 \times \mathbf{C}^{|N|} \to \mathsf{L}^2 \times \mathbf{C}^{|N|}$$

sera inversible pour $|z| \leq b_1$ (en choisissant bien l'ensemble N) et son inverse sera de la forme

$$\mathscr{P}_0^{-1} = \begin{pmatrix} * & \Pi^*(Y) \\ \Pi(Y) & z - E_0(Y) \end{pmatrix}$$

avec $E_0(Y) = (\langle \mathsf{P}_0(Y)\Psi_n(Y), \Psi_m(Y)\rangle)_{n,m}$. La méthode de Grushin développée au Chapitre 7 permettrait d'étudier des perturbations cette matrice. Ainsi, l'opérateur

$$\mathsf{Op}_\hbar^{w,Y}\begin{pmatrix} \mathsf{P}_\hbar(Y) - z & \Pi^*(Y) \\ \Pi(Y) & 0 \end{pmatrix} : B^2 \times \mathbf{C}^{|N|} \to \mathsf{L}^2 \times \mathbf{C}^{|N|}$$

admettrait une parametrix de la forme

$$\mathsf{Op}_\hbar^{w,Y}\begin{pmatrix} * & \Pi^*(Y) \\ \Pi(Y) & -E_\hbar(Y,z) \end{pmatrix}, \quad E_\hbar(Y,z) = E_0(Y) - z + \mathcal{O}(\hbar^{1/2}),$$

et l'inversibilité de $\mathsf{Op}_\hbar\left(\mathsf{P}_\hbar(Y) - z\right)$ serait équivalente à celle de $\mathsf{Op}_\hbar E_\hbar(Y,z)$. Ce dernier est un opérateur pseudodifférentiel à symbole matriciel, et dont le symbole principal est diagonal :

$$E_0(Y) - z = \mathsf{diag}(b_n(Y))_{n\in N}.$$

On obtiendrait une réduction en présence de résonances : le spectre serait décrit par l'opérateur effectif $\mathsf{Op}_\hbar E_\hbar(Y,z)$.

La difficulté principale dans cette démarche, au-delà de l'étude de l'opérateur effectif, serait de faire un lien précis entre le spectre de $\mathsf{Op}_\hbar \mathsf{P}_\hbar(Y)$ et l'inversibilité de $\mathsf{Op}_\hbar E_\hbar$ dans la plus grande généralité possible. En effet, pour utiliser la réduction de Grushin au Chapitre 7, nous avons supposé que le spectre de l'opérateur effectif était discret et avec un trou spectral d'ordre $\hbar$. D'un autre côté, nous considérons ici des opérateurs auto-adjoints, ce qui simplifie l'étude.

9.2 – Quantification de la variété caractéristique

La réduction du Laplacien magnétique présentée dans cette thèse est basée sur une réduction du symbole $H(q,p) = |p - A(q)|^2$ au voisinage de son minimum

$$\Sigma = \{(q,p) \in T^*M\,, \quad p = A(q)\}\,,$$

la *variété caractéristique*. Remarquons que Σ peut s'identifier à M via $q \mapsto (q, A(q))$. En tant que sous-variété de $(T^*\mathbf{R}^d, \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q)$, Σ est naturellement munie de la 2-forme B. Sous l'hypothèse que B est non-dégénérée, (Σ, B) est donc une variété symplectique, nous avons montré que H s'écrit dans des coordonnées $(q,x,\xi) = \Psi(q,p)$ sous la forme

$$H \circ \Psi^{-1}(q,x,\xi) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j(q)(\xi_j^2 + x_j^2) + \mathcal{O}((x,\xi)^3)$$

où (x,ξ) mesure la distance à Σ, $\Psi^*(B + \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x) = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$, et $\Psi(q,0,0) = q$. Pour pouvoir quantifier ce changement de coordonnées, via le Théorème d'Egorov, nous avons utilisé des coordonnées canoniques (y,η) sur (Σ, B) qui permettent d'utiliser le calcul pseudodifférentiel. Mais un tel choix de coordonnées est complètement arbitraire, et n'existe que localement. Il semble donc naturel de chercher une quantification plus adaptée à la variété symplectique (Σ, B), qui ne soit pas basée sur le calcul pseudodifférentiel. Une quantification dite de *Toeplitz* pourrait être utile dans ce cas.

Plaçons-nous par exemple sur $\mathbf{R}^2$ (bien qu'il existe des analogues sur une variété de dimension 2, et peut-être même en dimension supérieure). Le champ magnétique est donné par la 2-forme $B(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, avec $B(x,y) > 0$. Dans ce cas on peut réécrire le Laplacien magnétique sous la forme suivante

$$\mathcal{L}_\hbar = 4\hbar^2 \left(\overline{\partial} + \frac{i}{2\hbar}A\right)^* \left(\overline{\partial} + \frac{i}{2\hbar}A\right) + \hbar B = 4\hbar^2 \overline{\partial}_A^* \overline{\partial}_A + \hbar B, \tag{9.2.1}$$

avec

$$A = A_1 + iA_2\,, \quad B = \partial_x A_2 - \partial_y A_1\,, \quad 2\overline{\partial} = \partial_x + i\partial_y\,.$$

On voudrait utiliser les propriétés de $\overline{\partial}_A$ pour étudier l'opérateur. On sait que

$$\mathsf{Ker}\left(\overline{\partial}_A\right) = \mathcal{O}(\mathbf{C})e^{-\frac{\Phi}{\hbar}},$$

où $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes de la variable $z = x + iy$, et Φ vérifie $\Delta\Phi = B$. On note $\Pi_\hbar$ la projection orthogonale $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^2) \to \mathsf{Ker}\left(\overline{\partial}_A\right)$.

Remarque. En fait, $\overline{\partial}_A$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann associée à une certaine structure complexe sur un fibré au-dessus de $\mathbf{C}$. Ce fibré est topologiquement trivial, mais muni de la métrique Hermitienne $h_z(\lambda,\mu) = \exp(-2\hbar^{-1}\Phi(z))\lambda\bar{\mu}$. $\Pi_\hbar$ est le projecteur sur l'espace des sections holomorphes de ce fibré. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C})$, l'opérateur de Toeplitz de symbole f est

$$\Pi_\hbar f \Pi_\hbar : \mathsf{Ker}\left(\overline{\partial}_A\right) \to \mathsf{Ker}\left(\overline{\partial}_A\right)\,.$$

Ceci définit une quantification de la variété symplectique $(\mathbf{R}^2, B(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$.

On voudrait voir l'opérateur $\mathcal{L}_\hbar$ comme un opérateur de Toeplitz de symbole $\hbar B$, à l'aide de la forme quadratique associée :

$$\langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle = \hbar^2 \|\overline{\partial}_A u\|^2 + \hbar\langle Bu, u\rangle\,.$$

En écrivant $u = \Pi_\hbar u + (I-\Pi_\hbar)u$ on a :

$$\langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle = \langle \mathcal{L}_\hbar(I-\Pi_\hbar)u, (I-\Pi_\hbar)u\rangle + \hbar\langle \Pi_\hbar B\Pi_\hbar u, u\rangle + 2\hbar\mathrm{Re}\langle (I-\Pi_\hbar)B\Pi_\hbar u, u\rangle\,. \tag{9.2.2}$$

Si $\Pi_\hbar v$ est fonction propre de $\hbar\Pi_\hbar B\Pi_\hbar$:

$$\hbar\Pi_\hbar B\Pi_\hbar v = \mu_\hbar \Pi_\hbar v\,,$$

alors on peut appliquer (9.2.2) à $u = \Pi_\hbar v$ pour obtenir $\langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle = \mu_\hbar \|\Pi_\hbar v\|^2$, et le principe du min-max permet d'en déduire que

$$\lambda_n(\mathcal{L}_\hbar) \leq \lambda_n(\hbar\Pi_\hbar B\Pi_\hbar)\,, \quad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Réciproquement, soit $\lambda_\hbar \leq (3b_0 - \varepsilon)\hbar$ une valeur propre de $\mathcal{L}_\hbar$: $\mathcal{L}_\hbar u = \lambda_\hbar u$. Si on avait les estimations suivantes

$$\|(I-\Pi_\hbar)u\| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|\,, \tag{9.2.3}$$

et

$$(I-\Pi_\hbar)B\Pi_\hbar = \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,, \tag{9.2.4}$$

alors on déduirait de (9.2.2) que

$$\langle \hbar\Pi_\hbar B\Pi_\hbar u, u\rangle \leq (\mu_\hbar + \mathcal{O}(\hbar^\infty))\|\Pi_\hbar u\|^2\,,$$

et donc par le principe du min-max que

$$\lambda_n(\hbar\Pi_\hbar B\Pi_\hbar) \leq \lambda_n(\mathcal{L}_\hbar) + \mathcal{O}(\hbar^\infty)\,.$$

Ainsi, les spectres de $\mathcal{L}_\hbar$ et de $\hbar\Pi_\hbar B\Pi_\hbar$ dans $(-\infty, (3b_0-\varepsilon)\hbar)$ coïncideraient modulo $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$. Il reste à voir d'où viendraient les estimations (9.2.3) et (9.2.4).

Pourquoi $(I-\Pi_\hbar)B\Pi_\hbar$ serait petit ? Pour démontrer (9.2.4), l'idée serait de commuter $(I-\Pi_\hbar)$ et B. On a en effet :

$$\begin{aligned}(I-\Pi_\hbar)B\Pi_\hbar &= (I-\Pi_\hbar)^2 B\Pi_\hbar\\ &= (I-\Pi_\hbar)(B - B\Pi_\hbar + [B,\Pi_\hbar])\Pi_\hbar\\ &= (I-\Pi_\hbar)B(I-\Pi_\hbar)\Pi_\hbar + (I-\Pi_\hbar)[B,\Pi_\hbar]\Pi_\hbar\\ &= (I-\Pi_\hbar)[B,\Pi_\hbar]\Pi_\hbar\,,\end{aligned}$$

et on peut espérer que le commutateur soit d'ordre $\hbar$, à l'instar du calcul pseudo-différentiel. On peut ensuite itérer se raisonnement pour augmenter le nombre de crochets :

$$(I-\Pi_\hbar)B\Pi_\hbar = (I-\Pi_\hbar)[[B,\Pi_\hbar],\Pi_\hbar]\Pi_\hbar\,,$$

ce qui donnerait un reste d'ordre $\hbar^2$, etc.

D'où viendrait l'estimation (9.2.3) ? En commutant $\mathcal{L}_\hbar$ et $(I-\Pi_\hbar)$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_\hbar(I-\Pi_\hbar)u,(I-\Pi_\hbar)u\rangle &\leq \lambda_\hbar\|(I-\Pi_\hbar)u\|^2+\langle[\mathcal{L}_\hbar,I-\Pi_\hbar]u,(I-\Pi_\hbar)u\rangle\\ &\leq \lambda_\hbar\|(I-\Pi_\hbar)u\|^2+\langle(\Pi_\hbar\mathcal{L}_\hbar-\mathcal{L}_\hbar\Pi_\hbar)u,(I-\Pi_\hbar)u\rangle\\ &\leq \lambda_\hbar\|(I-\Pi_\hbar)u\|^2+\mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|^2\,,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'estimation (9.2.4). Or on a également la minoration

$$\langle \mathcal{L}_\hbar(I-\Pi_\hbar)u,(I-\Pi_\hbar)u\rangle \geq \|\overline{\partial}_A(I-\Pi_\hbar)u\|^2+\hbar b_0\|(I-\Pi_\hbar)u\|^2$$

et il est connu que $\overline{\partial}_A^*\overline{\partial}_A$ restreint à $\mathsf{Ker}\left(\overline{\partial}_A\right)^\perp$ est minoré par $2\hbar b_0$, d'où

$$\langle \mathcal{L}_\hbar(I-\Pi_\hbar)u,(I-\Pi_\hbar)u\rangle \geq 3\hbar b_0\|(I-\Pi_\hbar)u\|^2$$

et donc finalement

$$(3\hbar b_0-\lambda_\hbar)\|(I-\Pi_\hbar)u\|^2\leq \mathcal{O}(\hbar^\infty)\|u\|^2\,,$$

ce qui permettrait de conclure.

Ainsi, on réussirait à étudier le premier niveau de Landau (i.e. $\lambda_\hbar<3b_0\hbar$) à l'aide d'un opérateur de Toeplitz de symbole $\hbar B$. Il serait intéressant d'étudier les niveaux suivants en adaptant la méthode ci-dessus, et en utilisant l'opérateur de création $2\overline{\partial}_A$, qui vérifie

$$[2\overline{\partial}_A^*,2\overline{\partial}_A]=2\hbar B\,.$$

Remarque. Cette approche a été exploité par Iwatsuka, Tamura [IT98] et Raikov [Rai03] pour étudier des perturbations compactes de $\overline{\partial}_A^*\overline{\partial}_A$. Cependant leur limite n'est pas d'origine semiclassique : ils comptent le nombre de valeurs propres sous le spectre essentiel. Dans le cas d'un champ magnétique *constant*, on pourra consulter les notes [Rai16] où il est question de perturbations de $\overline{\partial}_A^*\overline{\partial}$, et [TP06] où le spectre du Laplacien de Bochner à champ constant sur une surface de Riemann à courbure constante est calculé par cette même approche.

9.3 – Effet de courbure et effet semiclassique

Tout au long de notre étude, nous avons remarqué un *double* effet du champ magnétique sur le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$. Dans le cas où B est non-dégénéré par exemple :

- Dès le départ, la simple présence d'un champ magnétique non nul créé le mouvement cyclotron qui est à l'origine de la séparation en niveaux de Landau du spectre. D'autre part, $\hbar B$ apparait comme un symbole effectif qui décrit le spectre au sein du premier niveau de Landau.
- Quand on décrit la surface caractéristique $\Sigma=H^{-1}(0)$, on constate que les restrictions de $\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q$ à $T\Sigma$ ET à $T\Sigma^\perp$ sont données par B.
- D'une part $H^{-1}(0)$ est munie de la 2-forme B, d'autre part la Hessienne de H dans les directions transverses à Σ est donnée par B,

$$\hat{H}(q,x,\xi)=B(q)(\xi^2+x^2)+\mathcal{O}((x,\xi)^3),\quad \text{en dimension 2.}$$

Il serait donc intéressant de réussir à dissocier complètement ces deux effets. En fait, l'approche décrite dans la section 2 ci-dessus, consistant à utiliser la structure complexe induite par B permet de le faire. Sur $\mathbf{R}^2$ par exemple, le Laplacien magnétique est de la forme

$$\mathcal{L}_\hbar = 4\hbar^2 \left(2\overline{\partial} + \frac{i}{\hbar}A\right)^* \left(2\overline{\partial} + \frac{i}{\hbar}A\right) + \hbar B\,.$$

Le terme en $2\overline{\partial} + i\hbar^{-1}A$ apparait comme un terme de *courbure*, alors que $\hbar B$ fait plutôt office de symbole ou potentiel effectif. Pour étudier l'influence de chacun de ces deux termes, nous suggérons donc de considérer l'opérateur

$$\mathscr{L}_{\hbar,p} = \hbar^2 \left(2\overline{\partial} + ipA\right)^* \left(2\overline{\partial} + ipA\right) + \hbar V\,, \tag{9.3.1}$$

dans la double limite $\hbar \to 0$ et $p \to +\infty$, pour un potentiel V non nécessairement égal à B. Nous appellerons la limite $p \to +\infty$ une limite de *grande courbure*, en opposition à la limite semiclassique $\hbar \to 0$. Remarquons qu'un tel opérateur a encore un sens sur une variété Riemannienne compacte, comme expliqué dans l'article de Prieto [TP06].

Au-delà des asymptotiques de valeurs propres, il serait intéressant d'étudier les propriétés de décroissance des fonctions propre de $\mathscr{L}_{\hbar,p}$, et les éventuelles constructions BKW. Par exemple, pour un champ magnétique avec unique minimum (non-dégénéré), il a été démontré dans [BRVuN19] que les premières fonctions propres du Laplacien magnétique décroissent comme $\exp(-S/\hbar)$ en dehors du puits (ce qui est bien mieux que les estimations d'Agmon). Mais il n'est pas clair que cette décroissance provienne de la limite $\hbar \to 0$, de la limite $p \to +\infty$, ou d'un mélange des deux. Ceci motive l'étude de la décroissance des fonctions propres de $\mathscr{L}_{\hbar,p}$. Une telle étude pourrait aussi permettre de mieux comprendre l'effet tunnel entre deux puits magnétiques discrets (dans l'esprit de [HS84]).

De même, des constructions BKW ont été obtenues pour le Laplacien magnétique en dimension 2 dans [BR20, BNRVuN21], et faire des constructions BKW pour $\mathscr{L}_{\hbar,p}$ permettrait de mieux comprendre l'influence des deux limites.

9.4 – Champs magnétiques plus généraux

Dans cette thèse, l'hypothèse principale est que le champ B_q admet un rang constant par rapport à q. Il est naturel de se demander ce qu'il se passe quand le rang varie. Cela correspond à l'annulation de l'une des fonctions β_j. Pour se guider dans une telle étude, on pourrait s'inspirer du cas particulier suivant. Plaçons-nous sur $\mathbf{R}^4$, et supposons que le champ s'écrive

$$B(x) = \beta_1(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \beta_2(x_3, x_4)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4\,,$$

avec $\min \beta_1 > 0$ et β_2 qui s'annule au premier ordre. Dans ce cas, le Laplacien magnétique associé est une somme directe de deux Laplacien magnétiques bidimensionnels, qui commutent :

$$\mathcal{L}_\hbar = \mathcal{L}^1_\hbar + \mathcal{L}^2_\hbar\,,$$

où $\mathcal{L}_\hbar^j$ agit sur (x_{2j-1}, x_{2j}) avec le champ β_j. En supposant β_1 et β_2 confinants, le spectre de $\mathcal{L}_\hbar$ est discret et constitués des valeurs propres

$$\lambda(\hbar) = \lambda^1(\hbar) + \lambda^2(\hbar)$$

où $\lambda^j(\hbar)$ parcours le spectre de $\mathcal{L}_\hbar^j$. Sous des hypothèses convenables sur β_1 (unique minimum non-dégénéré...) on connait le bas du spectre de $\mathcal{L}_\hbar^1$,

$$\lambda_n^1(\hbar) = b_0\hbar + (c(2n-1) + c')\hbar^2 + o(\hbar^2)\,.$$

Le cas de $\mathcal{L}_\hbar^2$ où le champ s'annule a également été étudié (voir [HK08, Miq18]) et sous des hypothèses convenables on pourrait avoir

$$\lambda_m^2(\hbar) = \alpha\hbar^{4/3} + d_m\hbar^{5/3} + d'_m\hbar^2 + o(\hbar^2)\,.$$

On obtiendrait donc une asymptotique de la forme

$$\lambda_{n,m}(\hbar) = b_0\hbar + \alpha\hbar^{4/3} + d_m\hbar^{5/3} + (c(2n-1) + c' + d'_m)\hbar^2 + o(\hbar^2)\,.$$

Ainsi, le changement de rang aurait pour effet de réhausser le bas du spectre de $\alpha\hbar^{4/3}$, et de créer une nouvelle séparation à l'ordre $\hbar^{5/3}$. Il serait intéressant de d'étudier ce phénomène pour des champs plus généraux dont le rang varie. On pourrait aussi se demander comment se répartissent les états semi-excités.

9.5 – Étude d'opérateurs hypoelliptiques

L'étude du Laplacien magnétique proposée dans cette thèse se base essentiellement sur les propriétés de son symbole

$$H_0 = \sum_{j=1}^{d} (\xi_j - A_j(x))^2\,,$$

et en particulier des propriétés symplectiques de la variété caractéristique $\Sigma_0 = H_0^{-1}(0)$. Il semble donc naturel d'étudier des opérateurs plus généraux en fonction de leur symbole. Par exemple, en supposant que le symbole p soit une somme de carrés,

$$p(x,\xi) = p_1(x,\xi)^2 + \cdots + p_s(x,\xi)^2\,, \tag{9.5.1}$$

tels que $\Sigma = \{(x,\xi)\,, \quad \forall j \quad p_j(x,\xi) = 0\}$ définisse une variété de codimension s, on devrait pouvoir étudier le spectre de $\mathsf{Op}_h^w p$, sous l'hypothèse que Σ est une sous-variété symplectique (ou de rang constant) de $(T^*\mathbf{R}^d, \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x)$.

Ces résultats portent sur des opérateurs semiclassiques, dépendants du paramètre $\hbar$, mais il y a une véritable analogie avec la théorie homogène (sans paramètre). Dans ce cadre, où les symboles sont homogènes en ξ, il n'y a plus de paramètre, mais l'analogue de la limite $\hbar \to 0$ est $|\xi| \to +\infty$. Ainsi, on peut s'intéresser à des opérateurs *hypoelliptiques* $\mathsf{Op}_1^w p$ (non semiclassiques) où p est homogène en ξ et donné par (9.5.1). En fonction du rang de la variété caractéristique $\Sigma = p^{-1}(0) \cap \{\xi \neq 0\}$, des parametrix et des lois de Weyl on été obtenues dans différents articles dont

les liens avec le Chapitre 5 de cette thèse seraient intéressants à préciser (Voir les travaux de Boutet de Monvel, Grigis, Helffer [BdMGH76], et Menikoff, Sjöstrand [MS78] par exemple).

Voici juste un exemple qui exhibe ce lien. Sur $\mathbf{R}^3$, considérons l'opérateur $\mathsf{Op}_1^w H$ non-semiclassique de symbole

$$H(x,\xi) = (\xi_1 - A_1(x_1,x_2)\xi_3)^2 + (\xi_2 - A_2(x_1,x_2)\xi_3)^2 \tag{9.5.2}$$

Imaginons que son spectre soit discret, et que l'on veuille estimer le nombre de valeurs propres $\leq \lambda$ dans la limite $\lambda \to +\infty$. Ceci revient à estimer le nombre de valeurs propres $\leq \lambda^{-1}$ de l'opérateur de symbole $\lambda^{-2}H$. Or ce nouvel opérateur est semiclassique, et en posant $\hbar = \lambda^{-1}$, on considère donc

$$\mathcal{L}_\hbar = \mathsf{Op}_\hbar^w \left((\xi_1 - A_1\xi_3)^2 + (\xi_2 - A_2\xi_3)^2\right) .$$

Il est de la forme (9.5.1), et la variété caractéristique est

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in \mathbf{R}^3 \times (\mathbf{R}^3 \setminus 0)\,, \quad \xi_1 = A_1(x)\xi_3\,, \quad \xi_2 = A_2(x)\xi_3\}\,.$$

Elle est munie de la 2-forme

$$\omega_\Sigma = \xi_3 B(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}\xi_3 \wedge \mathrm{d}x_3,,$$

où $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$. En supposant $B > 0$, Σ est donc symplectique, et on peut espérer adapter les résultats de cette thèse à cet opérateur, pour obtenir une loi de Weyl. Bien sûr, dans cet exemple nous utilisons λ comme paramètre semiclassique, mais on pourrait chercher à étudier les effets régularisants d'opérateurs hypoelliptiques par des méthodes similaires. Les restes "petits quand $\hbar \to 0$" deviendraient alors des termes "plus régularisants". Peut-être que des méthodes comme la réduction de Grushin pourraient s'adapter à ce contexte.

L'opérateur donné par (9.5.2) est un exemple de *sous-Laplacien*, qui est une famille d'opérateurs dont la théorie spectrale est source de travaux récents (voir [Bra14, CR21, FKF19] par exemple). Supposons par exemple que l'espace tangent à notre variété M admette la décomposition suivante,

$$TM = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$$

telle que $[\mathfrak{v},\mathfrak{v}] = \mathfrak{z} \neq 0$. Soit $(v_1,\cdots,v_n)$ une base de $\mathfrak{v}$, et $(z_1,\cdots,z_p)$ une base de $\mathfrak{z}$. On peut définir le sous-Laplacien

$$\Delta_s = \sum_{j=1}^{n} v_j^2\,,$$

où l'on identifie le champ de vecteur v_j avec l'opérateur différentiel d'ordre 1 associé. Pour $\lambda \in \mathfrak{z}^*$, la forme bilinéaire

$$B(\lambda) : (V_1,V_2) \mapsto \lambda([V_1,V_2])$$

peut être vue comme une généralisation du champ magnétique, et influe donc grandement sur le spectre de Δ_s. Notre exemple (9.5.2) correspond au cas particulier où $\mathfrak{z}$ est de dimension 1.

9.6 – Perturbations non-autoadjointes

Au chapitre 7, nous avons obtenu une description du spectre d'un opérateur non-autoadjoint $(i\hbar\nabla+A)^2+V$ avec V complexe, dans une boule de la forme $B(\mu_0\hbar, C\hbar^2)$. Ce spectre est décrit par un opérateur effectif de symbole principal $\hbar(B+V)$. Il serait intéressant d'étudier d'autres parties du spectre. On pourrait par exemple essayer d'appliquer les résultats de [DSZ04] au symbole effectif pour montrer que certaines boules $B(\mu\hbar, C\hbar^2)$ ne contiennent pas de spectre. On pourrait aussi essayer de décrire un plus grand nombre de valeurs propres, voir des états semi-excités. Il serait aussi intéressant de considérer des potentiels V (ou des champs B) plus généraux, ou des potentiels aléatoires. Dans ce cas, on pourrait essayer d'appliquer les résultats de Vogel-Nonnenmacher [NV21] à l'opérateur effectif aléatoire $B + V$. De telles généralisations posent des difficultés supplémentaires par rapport au chapitre 7. D'abord, il faut s'assurer que la portion de spectre décrite n'est influencée que par le premier niveau de Landau. Ensuite, il faut que le spectre de l'opérateur effectif soit discret et constitué de valeurs propres espacées d'au moins $\mathcal{O}(\hbar)$.

De plus, nous nous sommes focalisés sur l'influence d'une partie imaginaire pour le potentiel électrique V sur le spectre de l'opérateur $(i\hbar\nabla + A)^2 + V$. Il serait intéressant d'étudier le cas où le potentiel magnétique admettrait aussi une partie imaginaire. Il n'est pas évident que notre méthode puisse s'adapter directement, mais elle ouvre des pistes pour une telle étude. Ce problème est motivé par l'analyse de ce que l'on appelle les *résonances* : des fonctions propres généralisées, qui ne sont pas dans L^2 mais qui croissent exponentiellement vite à l'infini. En effet, considérer l'opérateur non-autoadjoint

$$\mathcal{L}_\hbar^S = e^{-\frac{S}{\hbar}}\mathcal{L}_\hbar e^{\frac{S}{\hbar}}$$

revient à ajouter la partie imaginaire $i\nabla S$ au potentiel A. Si $\psi \in \mathsf{L}^2$ est fonction propre de $\mathcal{L}_\hbar^S$, alors $e^{\hbar^{-1}S}\psi$ est fonction propre généralisée de $\mathcal{L}_\hbar$.

Annexe A

A.1 – Quelques résultats de théorie spectrale

Le principe du min-max permet de décrire les premières valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint positif en fonction de sa forme quadratique associée. Une démonstration est donnée dans [CR20].

Théorème A.1 (Principe du min-max). *Soit $(T, \mathsf{Dom}(T))$ un opérateur auto-adjoint positif sur un espace de Hilbert H. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note*

$$\lambda_n(T) = \sup_{\psi_1,\cdots\psi_{n-1}} \inf_{u\in \mathsf{vect}(\psi_1,\cdots\psi_{n-1})^\perp \cap \mathsf{Dom}(T)} \frac{\langle Tu, u\rangle_{\mathsf{H}}}{\langle u, u\rangle_{\mathsf{H}}}.$$

Alors $(\lambda_n(T))_{n\geq 1}$ est une suite croissante, et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a une des deux propriétés suivantes :

- *$\lambda_n(T)$ est la n-ième valeur propre de T, comptée avec multiplicité, et T n'a que du spectre discret dans $(-\infty, \lambda_n(T)]$.*
- *$\lambda_n(T)$ est le bas du spectre essentiel de T, et pour tout $j \geq n$ on a $\lambda_j(T) = \lambda_n(T)$.*

Le théorème qui suit donne une caractérisation bien pratique du bas du spectre essentiel du Laplacien magnétique. Ce résultat reste vrai pour des opérateurs de Schrödinger plus généraux. On en trouvera une démonstration dans [Agm82] par exemple.

Théorème A.2 (Caractérisation de Persson du spectre essentiel). *Soit $\mathcal{L}_\hbar$ le Laplacien magnétique sur $\mathbf{R}^d$. Le bas du spectre essentiel de $\mathcal{L}_\hbar$ est donné par*

$$\inf \mathsf{sp}\,(\mathcal{L}_\hbar) = \lim_{R\to+\infty} \inf_{u\in\mathcal{C}_0^\infty(\{|q|\geq R\})} \frac{\langle \mathcal{L}_\hbar u, u\rangle}{\|u\|^2}.$$

A.2 – Darboux and Weinstein lemmas

We used the following presymplectic Darboux Lemma.

Theorem A.3. *Let M be a d-dimensional manifold endowed with a closed constant-rank two form ω. We denote $2s$ the rank of ω and k the dimension of its kernel. For*

every $q_0 \in M$, there are a neighborhood V of q_0, a neighborhood U of $0 \in \mathbf{R}^{2s+k}_{(y,\eta,t)}$, and a diffeomorphism :

$$\varphi : U \to V,$$

such that

$$\varphi^*\omega = \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}y.$$

We also used the following result due to Weinstein (see [Wei71]). We follow the proof given in [RVuN15].

Theorem A.4. *Let ω_0 and ω_1 be two 2-forms on $\mathbf{R}^d$ which are closed and non-degenerate. Let us split $\mathbf{R}^d$ into $\mathbf{R}^k_x \times \mathbf{R}^{d-k}_y$. We assume that $\omega_0 = \omega_1 + \mathcal{O}(|x|^\alpha)$, for some $\alpha \geq 1$. Then there exists a neighborhood of $0 \in \mathbf{R}^d$ and a change of coordinates ψ on this neighborhood such that :*

$$\psi^*\omega_1 = \omega_0 \quad \textit{and} \quad \psi = \mathsf{Id} + \mathcal{O}(|x|^{\alpha+1}).$$

Démonstration. First we recall how to find a 1-form σ on a neighborhood of $x = 0$ such that :

$$\tau := \omega_1 - \omega_0 = \mathrm{d}\sigma, \quad \text{and} \quad \sigma = \mathcal{O}(|x|^{\alpha+1}).$$

We define the family $(\phi_t)_{0\leq t\leq 1}$ by :

$$\phi_t(x, y) = (tx, y).$$

We have :

$$\phi_0^*\tau = 0 \quad \text{and} \quad \phi_1^*\tau = \tau. \tag{A.2.1}$$

Let us denote by X_t the vector field associated with ϕ_t :

$$X_t = \frac{\mathrm{d}\phi_t}{\mathrm{d}t} \circ \phi_t^{-1} = t^{-1}(x, 0).$$

The Lie derivative of τ along X_t is given by $\phi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\tau$. From the Cartan formula we have :

$$\mathcal{L}_{X_t}\tau = \iota(X_t)\mathrm{d}\tau + \mathrm{d}(\iota(X_t)).$$

Since τ is closed, $\mathrm{d}\tau = 0$, and :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\tau = \mathrm{d}(\phi_t^*\iota(X_t)\tau). \tag{A.2.2}$$

We choose the following 1-form (where (e_j) denotes the canonical basis of $\mathbf{R}^d$) :

$$\sigma_t := \phi_t^*\iota(X_t)\tau = \sum_{j=1}^{k} x_j \tau_{\phi_t(x,y)}(e_j, \nabla\phi_t(.)) = \mathcal{O}(|x|^{\alpha+1}).$$

Equation (A.2.2) shows that $t \mapsto \phi_t^*\tau$ is smooth on $[0, 1]$. Thus, we can define $\sigma = \int_0^1 \sigma_t \mathrm{d}t$. It follows from (A.2.2) and (A.2.1) that :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\tau = \mathrm{d}\sigma_t \quad \text{and} \quad \tau = \mathrm{d}\sigma.$$

Then we use the Moser deformation argument. For $t \in [0,1]$, we let $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. The 2-form ω_t is closed and non degenerate on a small neighborhood of $x = 0$. We look for ψ_t such that :

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0.$$

For that purpose, let us determine the associated vector field Y_t :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = Y_t(\psi_t).$$

The Cartan formula yields :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^*\omega_t = \psi_t^* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_t + \iota(Y_t)\mathrm{d}\omega_t + \mathrm{d}(\iota(Y_t)\omega_t) \right).$$

So :

$$\omega_0 - \omega_1 = \mathrm{d}(\iota(Y_t)\omega_t),$$

and we are led to solve :

$$\iota(Y_t)\omega_t = -\sigma.$$

By non degeneracy of ω_t, this determines Y_t. ψ_t exists until time $t = 1$ on a small enough neighborhood of $x = 0$, and $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$. Thus $\psi = \psi_1$ is the desired diffeomorphism. Since $\sigma = \mathcal{O}(|x|^{\alpha+1})$, we get $\psi = \mathsf{Id} + \mathcal{O}(|x|^{\alpha+1})$. □

Bibliographie

[AC15] R. Allez and K. Chouk. The continuous anderson hamiltonian in dimension two. 2015.

[Agm82] S. Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*. Number 29 in Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 1982.

[Arn63] V.I. Arnold. Proof of a theorem of a.n. kolmogorov on the conservation of quasiperiodic motions under small change of the hamiltonian function. *Russian Mathematical Surveys*, 18(5) :9–36, 1963.

[Arn89] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Number 60 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2 edition, 1989.

[Bab71] I. Babuska. Error-bounds for finite element methods. *Numerische Mathematik*, 16 :322–333, 1971.

[BB19] I. Bailleul and F. Bernicot. High order paracontrolled calculus. *Forum of Mathematics, Sigma*, 7, 2019.

[BdMGH76] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, and B. Helffer. Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples. *Journées EDP*, pages 93–121, 1976.

[Bir27] G.D. Birkhoff. *Dynamical Systems*. Number 4 in Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1927.

[BM19] I. Bailleul and A. Mouzard. Paracontrolled calculus for quasilinear singular pdes. arXiv :1912.09073, 2019.

[BNHR16] V. Bonnaillie-Noël, F. Hérau, and N. Raymond. Magnetic wkb constructions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 221 :817–891, 2016.

[BNRVuN21] Y. Bonthonneau, D.T. Nguyen, N. Raymond, and S. Vũ Ngoc. Magnetic wkb constructions on surfaces. To appear in : Reviews in Mathematical Physics, 2021.

[BR20] Y. Bonthonneau and N. Raymond. Wkb constructions in bidimensional magnetic wells. *Mathematical Research Letters*, 27(3) :647–663, 2020.

[Bra14] M. Bramanti. *An invitation to hypoelliptic operators and Hörmander's Vector Fields*. Springer Briefs in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.

[BRVuN19] Y. Bonthonneau, N. Raymond, and S. Vũ Ngoc. exponential localization in 2d pure magnetic wells. hal-02319849. To appear in Ark. Math., 2019.

[BU96] D. Borthwick and A. Uribe. Almost complex structures and geometric quantization. *Mathematical Research Letters*, 3(6) :845–861, 1996.

[BVuN21] G. Boil and S. Vũ Ngoc. Long-time dynamics of coherent states in strong magnetic fields. To appear in : Amer. J. Math, 2021.

[Cha20] L. Charles. Landau levels on compact manifolds. arXiv : 2012.14190, 2020.

[CR20] C. Cheverry and N. Raymond. Handbook of spectral theory. To appear in the book series : Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2020.

[CR21] D. Cardona and M. Ruzhansky. Subelliptic pseudo-differential operators and fourier integral operators on compact lie groups. arXiv :2008.09651, 2021.

[CVuN08] L. Charles and S. Vũ Ngoc. Spectral asymptotics via the semiclassical birkhoff normal form. *Duke Mathematical Journal*, 143(3) :463–511, 2008.

[CvZ19] K. Chouk and W. van Zuijlem. Asymptotics for the eigenvalues of the anderson hamiltonian with white noise potential in two dimensions. 2019.

[Del60] C.E. Delaunay. Théorie du mouvement de la lune. *Paris Mem. Prés.*, 28, 1860.

[Dem85] J.P. Demailly. Champs magnétiques et inégalités de morse pour la d"-cohomologie. *Annales de l'Institut Fourier*, 35(4) :189–229, 1985.

[DKN83] J.B. Delos, S.K. Knudson, and D.W. Noid. High rydberg states of an atom in a strong magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 50 :579, 1983.

[DL20] L. Dumaz and C. Labbé. Localization of the continuous anderson hamiltonian in 1-d. *Probability Theory and Related Fields*, 176 :353–419, 2020.

[DS99] M. Dimassi and J. Sjostrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit.* Number 268 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1999.

[DSZ04] N. Denker, J. Sjöstrand, and M. Zworski. Pseudospectra of semiclassical (pseudo)-differential operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57(3) :384–415, 2004.

[ES98] Yu.V. Egorov and M.A. Shubin. *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[FH65] R. Feynmann and A. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals.* McGraw-Hill, 1965.

[FH10] S. Fournais and B. Helffer. *Spectral methods in surface superconductivity*. Number 77 in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston Inc., 2010.

[FK] C. Fermanian Kammerer. Opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques.

[FKF19] C. Fermannian Kammerer and V. Fischer. Quantum evolution and sub-laplacian operators on groups of heisenberg type. To appear in : Journal of Spectral Theory, 2019.

[GIP15] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski. Paracontrolled distributions and singular pdes. *Forum of Mathematics Pi*, 3, 2015.

[GS13] V. Guillemin and S. Sternberg. *Semi-classical analysis*. International Press of Boston Inc, 2013.

[GU88] V. Guillemin and A. Uribe. The laplace operator on the n-th tensor power of a line bundle : eigenvalues which are uniformly bounded in n. *Asymptotic Analysis*, 1(2) :105–113, 1988.

[Gus66] F.G. Gustavson. On constructing formal integrals of a hamiltonian system near an equilibrium point. *Astronomical Journal*, 71(8) :670–686, 1966.

[GUZ20] M. Gubinelli, B. Ugurcan, and I. Zachhuber. Semilinear evolution equations for the anderson hamiltonian in two and three dimensions. *Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations*, 8 :82–149, 2020.

[Ḧ85] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol I to IV*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

[Hai14] M. Hairer. A theory of regularity structures. *Inventiones Mathematicae*, 198(2) :269–504, 2014.

[Hel88a] B. Helffer. Effet d'aharonov bohm sur un état borné de l'équation de schrödinger. *Communications in Mathematical Physics*, 119 :315–329, 1988.

[Hel88b] B. Helffer. *Semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications*. Number 1336 in Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1988.

[Hit04] M. Hitrik. Boundary spectral behaviour for semiclassical operators in one dimension. *International Mathematics Research Notices*, 64 :3417–3438, 2004.

[HK08] B. Helffer and Y. Kordyukov. Semiclassical analysis of schrödinger operators with magnetic wells. *Actes du Colloque de Luminy : Spectral and scattering theory for quantum magnetic systems. P. Briet, F. Germinet, and G. Raikov editors. Contemporary Mathematics 500, p.105-122.*, 2008.

[HK11] B. Helffer and Y. Kordyukov. Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic schrödinger operator : The case of discrete wells. *Spectral Theory and Geometric Analysis*, 535 :55–78, 2011.

[HK13] B. Helffer and Y. Kordyukov. Eigenvalue estimates for a three-dimensional magnetic schrödinger operator. *Asymptotic Analysis*, 82(1) :65–89, 2013.

[HK14a] B. Helffer and Y. Kordyukov. Accurate semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic schrödinger operator. *Annales Henri Poincaré*, 16 :1651–1688, 2014.

[HK14b] B. Helffer and Y. Kordyukov. Semiclassical spectral asymptotics for a magnetic schrödinger operator with non-vanishing magnetic field. In *Geometric Methods in Physics*, Trends in Mathematics, pages 259–278. Birkhäuser, 2014.

[HKRVuN16] B. Helffer, Y. Kordyukov, N. Raymond, and S. Vũ Ngoc. Magnetic wells in dimension three. *Analysis and PDE*, 9(7) :1575–1608, 2016.

[HL15] M. Hairer and C. Labbé. A simple construction of the continuum parabolic anderson model on r2. *Electronic Communications in Probability*, 20(43) :1–11, 2015.

[HM96] B. Helffer and A. Mohamed. Semiclassical analysis for the ground state energy of a schrödinger operator with magnetic wells. *Journal of Functional Analysis*, 138 :40–81, 1996.

[HM01] B. Helffer and A. Morame. Magnetic bottles in connexion with superconductivity. *Journal of Functional Analysis*, 185(2) :604–680, 2001.

[HS84] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit. *Communications in Partial Differential Equations*, 9(4) :337–408, 1984.

[HZ94] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, Basel, 1994.

[IT98] A. Iwatsuka and H. Tamura. Asymptotic distribution of negative eigenvalues for two dimensional pauli operators with nonconstant magnetic fields. *Annales de l'institut Fourier*, 48(2) :479–515, 1998.

[JR82] C. Jaffe and W.P. Reinhardt. Uniform semiclassical quantization of regular and chaotic dynamics on the hénon-heiles surface. *J. Chem. Phys.*, 77, 1982.

[JS02] M. Joyeux and D. Sugny. Canonical perturbation theory for highly excited dynamics. *Canadian Journal of Physics*, 80(12) :1459–1480, 2002.

[Ker18] P. Keraval. *Formules de Weyl par réduction de dimension. Application à des Laplaciens électro-magnétiques.* PhD thesis, Université de Rennes 1, 2018.

[Kol54] A.N. Kolmogorov. On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk*, 98 :527–530, 1954.

[Kor19] Y.A. Kordyukov. Semiclassical eigenvalue asymptotics for the bochner laplacian of a positive line bundle on a symplectic manifold. arXiv : 1908.01756v1, 2019.

[Kor20a] Y.A. Kordyukov. Berezin-toeplitz quantization associated with higher landau levels of the bochner laplacian. arXiv : 2012.14198, 2020.

[Kor20b] Y.A. Kordyukov. Semiclassical spectral analysis of toeplitz operators on symplectic manifolds : The case of discrete wells. *Math. Z.*, 296 :911–943, 2020.

[KPvZ20] W. König, N. Perkowski, and W. van Zuijlem. Longtime asymptotics of the two-dimensional parabolic anderson model with white-noise potential. arXiv :2009.11611, 2020.

[Kö16] W. König. *The parabolic Anderson model : Random walk in random potential*. Pathways in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2016.

[Lab19] C. Labbé. The continuous anderson hamiltonian in $d \leq 3$. *Journal of Functional Analysis*, 277(9) :3187–3235, 2019.

[Lin82] A. Lindstedt. Beitrag zur integration der differentialgleichungen der störungstheorie. *Abh. K. Wiss. St. Petersburg*, 33, 1882.

[LL74] L. Landau and E. Lifshitz. *Mécanique quantique non relativiste*. Mir (Moscou), 1974.

[Mar85] R.A. Marcus. Aspects of intramolecular dynamics in chemistry. *Chaotic behavior in quantum systems*, 120 :293–298, 1985.

[Mar02] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Universitext. Springer-Verlag, 2002.

[Miq18] J-P. Miqueu. Eigenstates of the neumann magnetic laplacian with vanishing magnetic field. *Annales Henri Poincaré*, 19 :2021–2068, 2018.

[MM02] X. Ma and G. Marinescu. The spin-c dirac operator on high tensor powers of a line bundle. *Mathematische Zeitschrift*, (240) :651–664, 2002.

[MM21] L. Morin and A. Mouzard. 2d random magnetic laplacian with white noise magnetic field. arXiv :2101.05020, 2021.

[Mor19] L. Morin. A semiclassical birkhoff normal form for symplectic magnetic wells. arXiv :1907.03493. To appear in : Journal of Spectral Theory, 2019.

[Mor20a] L. Morin. A semiclassical birkhoff normal form for constant-rank magnetic fields. arXiv :2005.09386, 2020.

[Mor20b] L. Morin. Spectral asymptotics for the semiclassical bochner laplacian of a positive line bundle with constant rank curvature. arXiv :2010.00226, 2020.

[Mos62] J. Moser. On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. *Matematika*, 6(5) :51–68, 1962.

[Mos68] J. Moser. Lectures on hamiltonian systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 81, 1968.

[Mou20] A. Mouzard. Weyl law for the anderson hamiltonian on a two-dimensional manifold. arXiv :2009.03549, 2020.

[MP19] J. Martin and N. Perkowski. Paracontrolled distributions on bravais lattices and weak universality of the 2d parabolic anderson model. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probab. Statist*, 55(4) :2058–2110, 2019.

[MS78] A. Menikoff and J. Sjöstrand. On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators. *Mathematische Annalen*, 235 :55–86, 1978.

[MS18] G. Marinescu and N. Savale. Bochner laplacian and bergman kernel expansion of semi-positive line bundles on a riemann surface. arXiv : 1811.00992, 2018.

[NV21] S. Nonnenmacher and M. Vogel. Local eigenvalue statistics of one-dimensional random nonselfadjoint pseudodifferential operators. *Journal of the European Mathematical Society*, 23(5) :1521–1612, 2021.

[PvZ20] N. Perkowski and W. van Zuijlem. Quantitative heat kernel estimates for diffusions with distributional drift. arXiv :2009.10786, 2020.

[Rai03] G.D. Raikov. Spectral asymptotics for the perturbed 2d pauli operator with oscillating magnetic fields. i. non-zero mean value of the magnetic field. *Markov Processes and Related Fields*, 9 :775–794, 2003.

[Rai16] G.D. Raikov. Berezin-toeplitz operators in the spectral and scattering theory of magnetic quantum hamiltonians, 2016.

[Ray17] N. Raymond. *Bound States of the Magnetic Schrödinger Operator*. Number 27 in Tracts in Mathematics. European Mathematical Society, 2017.

[Rob87] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhauser, 1987.

[Rou18] O. Rouby. Bohr-sommerfeld quantization conditions for non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in dimension one. *International Mathematics Research Notices*, 2018(7) :2156–2207, 2018.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, 1975.

[RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis*. Academic Press, 1980.

[RVuN15] N. Raymond and S. Vũ Ngoc. Geometry and spectrum in 2d magnetic wells. *Annales de l'Institut Fourier*, 65(1) :137–169, 2015.

[Sim83] B. Simon. Semiclassical limit of low lying eigenvalues i - non degenerate minima. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 38(3) :295–308, 1983.

[Sjo92] J. Sjostrand. Semi-excited states in non-degenerate potential wells. *Asymptotic analysis*, 6(1) :29–43, 1992.

[SR82] R.B. Shirts and W.P. Reinhardt. Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics : Vague tori, semiclassical quantization, and classical intramolecular energy flow. *J. Chem. Phys.*, 77(10), 1982.

[TP06] C. Tejero Prieto. Holomorphic spectral geometry of magnetic schrodinger operators on riemann surfaces. *Differential Geometry and its Applications*, 24 :288–310, 2006.

[Wei71] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, 6(3) :329–346, 1971.

[Zwo12] M. Zworski. *Semiclassical Analysis*. Number 138 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2012.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Titre : Analyse spectrale semiclassique du Laplacien magnétique : Étude des états semi-excités par formes normales de Birkhoff

Mots clés : équations aux dérivées partielles, théorie spectrale, analyse microlocale, limite semiclassique, Laplacien magnétique, formes normales

Résumé : Le Laplacien magnétique est un opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique, et le but de cette thèse est d'étudier son spectre dans la limite semiclassique. Nous considérons des champs qui ne s'annulent pas. Dans ce cas, les méthodes d'analyse microlocale et semiclassique permettent d'exhiber un oscillateur harmonique qui est induit par le champ lui-même : le mouvement cyclotron. Dans le cas d'un champ uniforme, cette oscillation quantifie le spectre en niveaux de Landau : des valeurs propres infiniment dégénérées. Si l'on ajoute des variations au champ, ces niveaux se divisent et contribuent à l'ensemble du spectre. Nous expliquons ce phénomène et en déduisons une description précise du spectre du Laplacien magnétique et de perturbations non nécessairement auto-adjointes de celui-ci, à l'aide de formes normales de Birkhoff.

Nous exhibons en particulier l'influence de quantités géométriques comme les lignes de champ sur le spectre de l'opérateur. Le cas des puits magnétiques discrets est étudié en détail.

Title : Spectral analysis of the semiclassical magnetic Laplacian: Semi-excited states and Birkhoff normal forms

Keywords : partial differential equations, spectral theory, microlocal analysis, semiclassical limit, magnetic Laplacian, normal forms

Abstract : The magnetic Laplacian is a Schrödinger operator with magnetic field. The aim of this thesis is to study its spectrum in the semiclassical limit. We focus on non-vanishing magnetic fields. As one can see using microlocal and semiclassical analysis, a specific harmonic oscillator is induced by the magnetic field, the cyclotron motion. In a uniform magnetic field, this oscillation quantizes the spectrum into Landau levels, eigenvalues of infinite multiplicity. When the magnetic field varies, these energy levels split into infinitely many discrete eigenvalues. We explain this phenomenon and deduce a precise description of the spectrum of the magnetic Laplacian and some non-selfadjoint perturbations, using Birkhoff normal forms.

In particular we show the influence of geometric quantities such as field lines on the spectrum of the operator. We emphasize on the case of discrete magnetic wells.