Université Paris Nanterre
200 av. de la République
92001 Nanterre Cedex
www.parisnanterre.fr

Membre de l'université Paris Lumières

École doctorale 139 :
Connaissance, langage, modélisation
Laboratoire Thermique Interfaces Environnement– EA 4415

Mehdi Belkacem CHERIKH

Caractérisation en régime dynamique des transferts de chaleur au contact glissant et imparfait de deux solides

Thèse présentée et soutenue publiquement le 08/11/2021
en vue de l'obtention du doctorat de Energétique, génie des procédés de l'Université Paris Nanterre
Sous la direction de M. Najib LARAQI (Université Paris Nanterre) et de M. Jean Gabriel BAUZIN (Université Paris Nanterre)

Jury* :

Bertrand GARNIER	CR-CNRS-HDR, Université de Nantes	Rapporteur
Tahar LOULOU	Professeur, Université de Bretagne Sud	Rapporteur
Said ABBOUDI	Professeur, UTBM, Belfort	Examinateur
Jean Gabriel BAUZIN	MCF HDR, Université Paris Nanterre	Examinateur
Pablo ESCOT BOCANEGRA	MCF, Université d'Orléans	Examinateur
Ali HOCINE	MCF, Université Paris Nanterre	Examinateur
Najib LARAQI	Professeur, Université Paris Nanterre	Examinateur

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES 4
Liste des figures 7
Liste des tableaux 12
Résumé 14
Abstract 15
Introduction générale 17
Partie I. Bibliographie et état de l'art 20
I.1. La thermique des contacts 20
I.1.1. Contact statique et phénomène de constriction 20
I.1.2. Contact frottant 22
I.1.2.1. Contact parfait 22
I.1.2.2. Contact imparfait 24
I.2. Caractérisation des matériaux 28
I.2.1. Caractérisation des propriétés thermiques par la Méthode TPS 29
I.2.2. Détermination expérimentale du coefficient de dilation thermique 31
I.3. Approche par méthodes inverses 32
I.3.1. Définition générale 33
I.3.2. Nature mal posé des problèmes inverses 34
I.3.3. Estimateur des moindres carrées 36
I.3.4. Régularisation des problèmes inverses 39
I.3.4.1. Minimisation d'un critère modifié 40
I.3.4.2. Pénalisation de l'estimateur 42
I.3.4.3. Régularisation par troncature spectrale 46
I.3.4.4. Exemple d'application 46
I.3.5. Contrôle en dimension 51
I.3.5.1. Paramétrisation 52
I.3.5.2. Spécification de fonctions 52
I.3.6. Contrainte du domaine 52
I.4. Conclusion 53
Partie II. Etude numérique de la caractérisation d'une interface en contact frottant 54
II.1. Modèle direct 54
II.2. Modèle inverse 56
II.3. Procédures d'estimation 56
II.3.1. La méthode de l'horizon glissant (Spécification de fonction) 57

II.3.2. Méthode de paramétrisation 57
II.3.3. Procédure de minimisation « LM » utilisée. 59
II.4. Etude numérique 61
II.4.1. Analyse de sensibilité et problème de corrélation 63
II.4.1.1. Analyse de sensibilité 63
II.4.1.2. Analyse des corrélations 65
II.4.1.3. La paramétrisation comme solution aux corrélations 69
II.4.2. Résultats numériques d'estimations 80
II.4.2.1. Introduction 80
II.4.2.2. Méthode de l'horizon glissant (Spécification de fonction). 81
II.4.2.3. Méthode de la paramétrisation avec décalage temporel. 87
II.4.3. Erreur liée à l'incertitude des paramètres d'entrées 94
II.4.3.1. Erreur due au positionnement des thermocouples 94
II.4.3.2. Erreur due aux propriétés thermiques 97
II.5. Conclusion 101
Partie III. Caractérisation expérimentale d'une interface en contact frottant sec 103
III.1. Estimation expérimentale des paramètres de contact thermique 103
III.1.1. Instrumentation du banc expérimentale 103
III.1.1.1. Instrumentation de la vitesse 105
III.1.1.2. Instrumentation de la température. 106
III.1.2. Résultats d'estimation de fonction 107
III.1.2.1. Vitesse constante 108
III.1.2.2. Influence de la vitesse sur les paramètres de contacts 113
III.1.2.3. Vitesse variable 117
III.2. Conclusion 127
Partie IV. Identification de propriété thermomécanique 129
IV.1. Modèle direct 129
IV.1.1. Fonction de transfert thermoélastique 129
IV.1.2. Expression explicite temporelle de la déformation 132
IV.2. Modèle inverse 134
IV.2.1. Identification de la diffusivité thermique et du coefficient de dilatation thermique 134
IV.2.1.1. Etude de sensibilité 135
IV.2.2. Estimation de la température de surface 138
IV.2.2.1. Régularisation du problème inverse 139
IV.3. Validation numérique 140
IV.3.1. Identification des propriétés thermomécanique 144

IV.3.2. Estimation de la température 153
IV.3.2.1. Influence de la méthode de régularisation 154
IV.4. Résultats expérimentaux 161
IV.4.1. Description du banc expérimental 161
IV.4.2. Résultats expérimentaux 165
IV.5. Conclusion 168
Conclusion générale 170
I. Annexe 1 173
II. Annexe 2 175
Bibliographie 178

Liste des figures

Figure I:1 : Schématisation du phénomène de constriction thermique en régime stationnaire. 21
Figure I:2 : Schéma simplifié de configuration pion-disque 27
Figure I:3 : Utilisation du dispositif TPS pour un échantillon en Bronze 31
Figure I:4 : Schéma de la configuration étudiée. 32
Figure I:5 : Schéma conceptuel des méthodes inverses en thermique 34
Figure I:6 : Répartitions des valeurs des vecteurs *x* et *y*. 36
Figure I:7 : Répartition des valeurs du vecteur *x* pour une perturbation de la matrice *M* 36
Figure I:8: Schéma général d'optimisation par méthode inverse 40
Figure I:9 : Répartition des composantes du vecteur solution 48
Figure I:10 : Répartition des valeurs du vecteur *x* avec régularisation de Tikhonov 49
Figure I:11 : Répartition des composants du vecteur *x* avec régularisation par troncature 50
Figure I:12 : Répartition des résultats pour x_1 sans régularisation et avec régularisation de Tikhonov à différents ordres. 51
Figure II:1 : Procédure d'estimation avec hypothèse de paramètres constants [27, Fig. 8] 54
Figure II:2: Représentation schématique du modèle 1D 55
Figure II:3: Schéma explicatif de la méthode de l'horizon glissant 58
Figure II:4 :Schéma de la procédure de paramétrisation 58
Figure II:5: Bruit blanc numérique utilisé dans le cadre de cette étude. 61
Figure II:6: Paramètres de contact variables de génération 62
Figure II:7 Sensibilités réduites aux paramètres à l'indice *n* 63
Figure II:8: Influence du pas de temps sur les sensibilités réduites 64
Figure II:9: Matrice de corrélation 65
Figure II:10: Sous matrice de corrélation pour $CC_{(\beta_p,\beta_p)}$ à différents agrandissements 66
Figure II:11: Sous matrice de corrélation entre le flux et les deux autres paramètres 67
Figure II:12: Sous matrice de corrélation entre le coefficient de partage et la conductance de contact $CC_{(\alpha_p,h_{cg_p})}$ à différents agrandissements. 67
Figure II:13 : Influence du pas de temps sur les matrices de corrélation $CC_{(\beta_{i_m},\beta_{i_n})}$ 68
Figure II:14: Influence de la fréquence de paramétrisation sur les biais de paramétrage. 70
Figure II:15: Influence de la fréquence de paramétrisation sur les biais de paramétrage forme sinusoïdale. 72
Figure II:16:Influence de la paramétrisation sur le flux généré 73
Figure II:17: Sous matrice de corrélation après paramétrisation. 74
Figure II:18: Corrélation entre le coefficient de partage et la conductance de contact après paramétrisation 75

Figure II:19: Sous matrice de corrélation $CC_{(\alpha_i,h_{cg_i})}$ après décalage temporel. 76

Figure II:20 : Sous matrice de corrélation $CC_{(\alpha_i,h_{cg_i})}$ à tous les instants 77

Figure II:21 : Coefficient de corrélation pour les différentes configurations 78

Figure II:22: Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_i,h_{cg_i})}$ 79

Figure II:23: Champ de température généré et bruitée 81

Figure II:24: Estimation des paramètres par horizon glissant 82

Figure II:25: Flux et résistance de contact estimés pour différentes valeurs de α 83

Figure II:26: Résidus avec l'hypothèse de α constant 84

Figure II:27: Estimation de fonction de forme sinusoïdale et échelon 84

Figure II:28: Résultats d'estimation par la méthode de l'horizon glissant par identification alterné 85

Figure II:29: Estimation des paramètres avec la méthode de l'horizon glissant modifié pour des formes sinusoïdale et en échelon 86

Figure II:30:Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m,h_{cg_n})}$ 87

Figure II:31: Estimation des paramètres de contact avec les bibliothèques Matlab "lsqnonlin" 88

Figure II:32 : Comparaison entre les algorithmes de minimisation lors de l'estimation des paramètres 89

Figure II:33: Estimation des paramètres de contact pour différentes constantes de temps 90

Figure II:34: Estimation de paramètres de forme sinusoïdale 91

Figure II:35: Estimation de paramètres en forme de succession d'échelon. 92

Figure II:36: Estimation avec une erreur de 5% (++++) sur la position des thermocouples 95

Figure II:37 : *:* Estimation avec une erreur de 5% (--++) sur la position des thermocouples 96

Figure II:38: Estimation avec une erreur de 5% (+--+) sur la position des thermocouples 97

Figure II:39:Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 1 du Tableau II-12. 98

Figure II:40:Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 3 du Tableau II-12. 99

Figure II:41: Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 5 du Tableau II-12. 100

Figure II:42: Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 7 du Tableau II-12. 101

Figure III:1: Résidus d'identification avec hypothèse de paramètres constants 103

Figure III:2 : Banc expérimental dédié à l'étude d'un contact frottant 104

Figure III:3 Courbe de calibration du variateur 105

Figure III:4 : Détermination des positions des thermocouples 106

Figure III:5: Mesure du bruit blanc et sa répartition. 107

Figure III:6:Mesures standard pour la configuration d'étude à vitesse constante. 108

Figure III:7: Essai expérimental typique à vitesse constante. 108

Figure III:8 : $R_{cg}(t)$ et $\phi_g(t)$ Identifié par la méthode HG et HGS 110

Figure III:9 : $\alpha(t)$ Identifié par la méthode HGS 110
Figure III:10: Résidus après estimation par horizon glissant 110
Figure III:11 : $\phi_g(t)$ Identifiée par la méthode HGS et la méthode de paramétrisation 111
Figure III:12 : $R_{cg}(t)$ Identifiée par la méthode HGS et la méthode de paramétrisation 112
Figure III:13 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ 112
Figure III:14 : Résidus d'estimation 113
Figure III:15 : Identification de $\alpha(t)$ pour 4 vitesses différentes 114
Figure III:16 : Identification de $R_{cg}(t)$ pour 4 vitesses différentes 114
Figure III:17 : Identification de $\phi_g(t)$ pour 4 vitesses différentes 115
Figure III:18 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ 116
Figure III:19 : Coefficient de frottement (Bronze/Acier) 117
Figure III:20 : Températures mesurées et vitesse linéaire scénario 1 118
Figure III:21 : $\phi_g(t)$ estimation et vitesse linéaire 118
Figure III:22 : $R_{cg}(t)$ estimée et vitesse linéaire scénario 1 119
Figure III:23 : $\alpha(t)$ estimé et vitesse linéaire scénario 1 120
Figure III:24 : Résidus d'estimation pour le scénario 1 120
Figure III:25 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ 121
Figure III:26 : Températures mesurées et vitesse linéaire scénario 2 121
Figure III:27: $\phi_g(t)$ estimé et vitesse linéaire 122
Figure III:28: $R_{cg}(t)$ estimée et vitesse linéaire 122
Figure III:29 : $\alpha(t)$ estimé et vitesse linéaire 123
Figure III:30 : Résidus d'estimation pour le scénario 2 124
Figure III:31 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ 124
Figure III:32 : Températures mesurées et vitesse linéaire scénario 3 125
Figure III:33: $\phi_g(t)$ estimé et vitesse linéaire du scénario 3 125
Figure III:34: $R_{cg}(t)$ estimé et vitesse linéaire du scénario 3 126
Figure III:35 : $\alpha(t)$ estimé et vitesse linéaire du scénario 3 126
Figure III:36: résidus et coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ du scénario 3 127
Figure IV:1 : Schéma représentant le modèle étudié 130

Figure IV:2 : Température d'entrée et comparaison entre la déformation numérique et analytique à l'abscisse x=1cm 134

Figure IV:3 : Température de surface et déformation induite en $x_0 = [1,2,3,4]cm$ pour les deux matériaux matériau I..... 136

Figure IV:4 : Sensibilité réduite au coefficient de dilatation thermique et à la diffusivité thermique pour différentes positions de mesure pour le l'aluminium 137

Figure IV:5 : Sensibilité réduite au coefficient de dilatation thermique et à la diffusivité thermique pour différentes positions de mesure pour le l'acier..... 137

Figure IV:6 : Influence de la position de mesure sur le coefficient de corrélation $CC_{(a,\alpha_t)}$ 138

Figure IV:7 : Répartition du bruit de mesure numérique 141

Figure IV:8: Résultats de simulation numérique dans le cas de l'acier soumis à une excitation thermique en forme d'échelon (a) et de Spline (b)..... 143

Figure IV:9 : Résultats d'identification pour le cas de l'aluminium (Echelon). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées. 145

Figure IV:10 : Résultats d'identification pour le cas de l'aluminium (Spline). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées. 147

Figure IV:11 : Résultats d'identification pour le cas de l'acier (Echelon). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées. 148

Figure IV:12 : Résultats d'identification pour le cas de l'acier (Spline). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées. 150

Figure IV:13 : Résultats d'identification pour le cas du béton (Echelon). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées. 151

Figure IV:14 : Résultats d'identification pour le cas du béton (Spline). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées. 153

Figure IV:15: Température de surface identifiée sans régularisation..... 154

Figure IV:16 : Déformation à $x_0 = 1cm$ bruité issus du modèle numérique..... 155

Figure IV:17 : Evolution du RMSR en fonction de la valeur de α_r 156

Figure IV:18: Température identifié avec régularisation de Thikhonov..... 157

Figure IV:19 : Evolution du RMSR en fonction de la valeur de n 158

Figure IV:20 : Température identifié avec régularisation par la méthode TSVD..... 158

Figure IV:21: comparaison des deux méthodes de régularisation..... 159

Figure IV:22 : : Déformation à $x_0 = 2cm$ bruité issus du modèle numérique 160

Figure IV:23 : comparaison des deux méthodes de régularisation..... 161

Figure IV:24 : Banc expérimental. 162

Figure IV:25 : Schéma d'un pont de Wheatstone..... 163

Figure IV:26 : Comparaison de la déformation entre la solution analytique (déplacement radial imposé) et la solution numérique (avec des conditions limites représentatives du banc expérimental). 164

Figure IV:27 : Bruit blanc des mesures de déformations..... 164

Figure IV:28 : Exemple de mesure expérimentale (température et déformation). 165

Figure IV:29 : Déformations recalculées 166

Figure IV:30 : Comparaison entre la température mesuré et la température identifiée pour différents paramètres de régularisation de Tikhonov pour deux essais expérimentaux. 167

Figure IV:31 : Résidus pour différents paramètres de régularisation de Tikhonov pour deux essais expérimentaux. 167

Figure IV:32 : Comparaison entre la température mesuré et la température identifiée pour différents ordres de troncature pour deux essais expérimentaux. 168

Figure IV:33 : Résidus pour différents ordres de troncature pour deux essais expérimentaux. 168

Figure IV:34 : Diffusivité thermique du bronze mesuré par la méthode TPS..... 175

Figure IV:35 : Conductivité thermique du bronze mesuré par la méthode TPS 175

Figure IV:36 : Diffusivité thermique de l'acier mesuré par la méthode TPS..... 176

Figure IV:37 : Conductivité thermique de l'acier mesuré par la méthode TPS 176

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Différence des moyennes et des écarts-type des répartitions du vecteur solution 49
Tableau I-2 : Différence des moyennes et des écarts-type des répartitions du vecteur solution 51
Tableau II-1: Configuration numérique 61
Tableau II-2: Propriétés thermiques des matériaux. 62
Tableau II-3 : Valeurs initiales et asymptotiques des paramètres physiques 63
Tableau II-4 : Sensibilités réduites en fonction du pas de temps 64
Tableau II-5 : Biais introduit par la paramétrisation 71
Tableau II-6: Biais introduit par la paramétrisation 72
Tableau II-7: Configurations testées pour l'analyse de l'influence de la forme des paramètres 77
Tableau II-8: Couples de matériaux testés 79
Tableau II-9 : Sensibilité réduite maximale à 50s 80
Tableau II-10 : Ecart relatif des valeurs moyennes estimée et des écart-type aux paliers. 93
Tableau II-11: Erreur d'estimation induite par l'erreur sur la position exacte des thermocouples 94
Tableau II-12 : Erreur d'estimation induite par l'erreur sur les propriétés thermiques. 98
Tableau III-1 : Propriétés thermiques des matériaux 105
Tableau III-2 : Position des thermocouples par rapport à l'interface 106
Tableau III-3: Résistance statique identifiée avant et après chaque phase dynamique 109
Tableau III-4 : Ecart-type des résidus à différentes vitesses (HG séquentielle) 111
Tableau III-5 : Valeurs asymptotique des paramètres estimés pour différentes vitesses 115
Tableau III-6 : Ecart-type des résidus à différentes vitesses (Paramétrisation) 115
Tableau III-7 : Valeurs moyennes des paramètres estimées dans chacune des phases 119
Tableau III-8 : Valeurs moyennes des paramètres estimées dans chacune des phases 123
Tableau IV-1: Propriétés physiques du matériau utilisé 135
Tableau IV-2: Propriétés physique du béton 142
Tableau IV-3: Résumé des résultats d'identification (Aluminium, Porte) 144
Tableau IV-4 : Résumé des résultats d'identification (Aluminium, Polynomiale) 146
Tableau IV-5: Résumé des résultats d'identification (Acier, Porte) 147
Tableau IV-6: Résumé des résultats d'identification (Acier, Polynomiale) 149
Tableau IV-7: Résumé des résultats d'identification (Béton, Porte) 149
Tableau IV-8: Résumé des résultats d'identification (Béton, Spline) 152
Tableau IV-9: Valeur du RMSR pour différents paramètres de régularisation 156
Tableau IV-10: Valeur du RMSR pour différents ordres de troncature 157
Tableau IV-11: Résultats d'identification de propriétés thermomécaniques 166

Résumé

Titre : Caractérisation en régime dynamique des transferts de chaleur au contact glissant et imparfait de deux solides

Mots clés : Thermique des contacts frottants secs, Résistance de contact, Méthodes inverses, Estimation de fonction, Couplage thermoélastique.

Le travail développé dans cette thèse est une contribution à l'étude du transfert de chaleur entre deux corps solides en contact frottant sec. Le problème du transfert de chaleur à travers les interfaces représente une partie essentielle de la modélisation thermique de nombreux mécanismes et procédés industriels. Les niveaux de température peuvent atteindre des valeurs susceptibles d'occasionner des dommages dans les systèmes soumis au frottement. Par conséquent, il est nécessaire de caractériser l'interface d'un frottement avant la conception de tels systèmes.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à l'aspect macroscopique des contacts frottants secs. Le modèle retenu comprend une équation de couplage et trois paramètres de contacts : *(i)* le flux généré par frottement, *(ii)* le coefficient de partage intrinsèque du flux généré, *(iii)* la résistance de contact.

La caractérisation d'une interface à travers le modèle adopté, signifie l'identification de ces paramètres de contact par le biais de méthodes inverses. L'originalité de ce travail consiste à estimer simultanément l'évolution dynamique des paramètres de contact.

Différentes techniques d'estimations en inversion de mesures ont été testées. Après une étude de sensibilité et de corrélation approfondie, la méthode adoptée est la paramétrisation avec décalage temporel. Cette méthode permet de minimiser les corrélations entre les paramètres et affiche une bon résultat d'estimation. Cette technique est utilisée dans le but de caractériser ces paramètres de contact expérimentalement sur un banc d'essai dédié. Dans la perspective d'intégrer une interaction thermique-mécanique à l'étude du contact frottant sec dans de futures recherches, une approche novatrice du couplage thermique et mécanique à travers une configuration 1D transitoire est présentée.

Grâce à une méthode analytique, la déformation à une position donnée est calculée par le produit de convolution entre une fonction de transfert et la température à une autre position. Ainsi, cette relation, nous a permis de développer une méthode de caractérisation thermomécanique des matériaux par inversion de mesure. En plus de l'identification de la diffusivité thermique et du coefficient de dilatation thermique, une procédure d'identification de la température par 'déconvolution' a été réalisée. Le système étant fortement instable, des techniques de régularisation par la méthode de Tikhonov et de troncature de spectre sont utilisées. Un dispositif expérimental a été réalisé et instrumenté à cette fin.

Les résultats obtenus expérimentalement sont en accord avec la bibliographie et donnent de bon résidus.

Abstract

Title : Dynamic characterisation of heat transfer at sliding and imperfect contact of two solids

Key words: Dry sliding contact, contact resistance, inverse methods, Estimation of functions, Thermomechanical coupling.

The work presented in this thesis is a contribution to the study of heat transfer between two solid bodies in dry frictional contact. The problem of heat transfer across interfaces represents an essential part of the thermal modeling of many industrial devices and processes. Temperature levels can reach values that can cause damage in systems subjected to friction. Therefore, it is necessary to characterize the frictional interface before designing such systems.

This study is interested in the macroscopic aspect of dry frictional contacts. The chosen model includes a coupling equation and three contact parameters; *(i)* the heat flux generated by friction, *(ii)* the intrinsic partition coefficient of the generated heat flux, *(iii)* the contact resistance.

The characterization of an interface with this model signifies the identification of these contact parameters through inverse methods. The originality of this work is the simultaneous estimation of the dynamic evolution of the contact parameters.

Several estimation techniques by inversion of measurements have been tested. After a detailed sensitivity and correlation study, the method adopted is parametrization with time lag.

This method minimizes the correlations between the parameters and provides a good accuracy of estimation. This technique is used to characterize these contact parameters on an experimental bench. With the objective of integrating a thermal-mechanical interaction into the study of dry frictional contact in future research, an innovative approach to thermal-mechanical coupling in a transient 1D configuration is presented.

Using an analytical method, the deformation at a given position is calculated by the convolution product between a transfer function and the temperature at another position. Through this relation, a method of thermomechanical characterization of materials by inversion of measurement was developed. In addition to the identification of the thermal diffusivity and the coefficient of thermal expansion, a procedure for the identification of the temperature by 'deconvolution' was also developed. Due to the high instability of the system, regularization techniques using the Tikhonov method and spectrum truncation were used. An experimental device has been assembled and instrumented for this purpose.

The experimental results are in agreement with the literature and give good residuals.

Introduction générale

La thermique des contacts présente un intérêt scientifique et industriel de grande importance dans de nombreux secteurs d'activités. En effet, s'agissant d'assemblages statiques (en mécanique ou en électronique) de procédés de mise en forme des matériaux (formage, forgeage, laminage, usinage …) ou d'autres systèmes de friction (transmission de puissance, freinage), le problème du transfert de chaleur à travers les interfaces représente une partie essentielle de la modélisation thermique ou thermomécanique de ces processus. L'étude de ce phénomène vise principalement à anticiper les valeurs de la résistance de contact, du flux généré par frottement et des températures à l'interface. En effet, les niveaux de température peuvent atteindre des valeurs susceptibles d'occasionner des dommages dans les systèmes soumis au frottement.

Le travail développé dans cette thèse est une contribution à l'étude du transfert de chaleur entre deux corps solides en contact frottant sec. L'étude vise dans un premier temps, à valider un modèle de thermique des contacts glissants secs en phase transitoire et, dans un second temps, à déterminer avec une précision et une répétabilité acceptables l'évolution des paramètres mis en jeu à l'interface d'un contact frottant sur banc expérimental. Ce travail constitue la continuité d'études antérieures dans lesquelles les évolutions dynamiques de ces paramètres n'ont pas été prises en compte. L'originalité, ici, est le développement d'une stratégie d'identification qui permet de disposer des valeurs des paramètres à chaque instant de leur évolution.

Le modèle de contact, frottant et imparfait, retenu dans notre étude est celui proposé par Bardon [1] . Ce modèle consiste en un couplage des transferts thermiques entre deux solides en mouvements relatif. Il fait intervenir une équation de couplage et trois paramètres de contact. Ce modèle traduit le fait que le flux entrant dans chacun des solides représente la somme d'une partie du flux de conduction et d'une fraction du flux généré par frottement.

Dans le but d'introduire dans des travaux futurs l'interaction thermique-mécanique dans les contacts frottants, une étude sur le couplage thermoélastique a été réalisée sur un modèle 1D de diffusion thermique. Dans cette étude, une relation directe liant la déformation du matériau en un point donné à sa température en un autre point quelconque a été établie sur la base de considérations analytiques. Cette approche - novatrice – est également mis à profit pour pouvoir procéder à l'identification des propriétés thermomécaniques des matériaux.

Concernant cette étude de couplage thermoélastique, Les équations mécaniques sont considérées dans une approche quasi-statique et l'excitation extérieure est uniquement de nature thermique. La résolution des équations est réalisée de manière analytique.

Le travail effectué au cours de cette thèse est décliné dans ce manuscrit en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente un état de l'art décrivant les différents modèles thermiques théoriques, qu'ils soient microscopiques ou macroscopiques, donnant les paramètres intervenant dans les différents contacts (statique et frottant) entre matériaux solides. Des travaux expérimentaux sont aussi présentés dans cette partie. Etant donné les paramètres mis en jeu dans ces phénomènes au niveau de l'interface ne sont généralement pas directement mesurables, il est nécessaire d'avoir recours aux méthodes inverses. Ainsi, une présentation de différentes méthodes d'inversions est aussi réalisée dans cette partie. Les méthodes de régularisation les plus courantes sont décrites et analysées à travers un exemple.

Dans le deuxième chapitre, une fois le modèle de contact glissant sélectionné, une procédure d'estimation des paramètres régissant le contact frottant entre deux solides est décrite. Le modèle choisi est celui développé par Bardon [1] , il fait appel à une équation de couplage utilisant trois paramètres macroscopiques, $\phi_g(t)$ le flux généré par frottement, $R_{cg}(t)$ la résistance de contact glissant (ou $h_{cg}(t)$ la conductance de contact glissant, qui est l'inverse de la résistance) et $\alpha(t)$ le coefficient de partage intrinsèque du flux généré. Dans cette partie, différentes procédures d'inversion seront développées et comparées numériquement. L'étude de sensibilité et de corrélation sera présentée et on analysera, entre autres, l'influence du bruit de mesure et des erreurs susceptibles d'entacher les paramètres d'entrée, sur l'estimation des paramètres de contact.

Le troisième chapitre traite du problème de l'estimation des paramètres thermiques du contact glissant à partir de mesures expérimentales réalisées sur un banc d'essais dédié. Une description de ce dispositif expérimental sera proposée. Elle détaillera les méthodes d'instrumentation en termes de mesures, d'une part, des températures sur les éprouvettes d'essais et, d'autre part, de la vitesse contrôlée du moteur. On montre dans un premier temps que le modèle utilisé pour décrire ces phénomènes de contact glissant permet d'identifier les paramètres thermiques de contact et dans un second temps que les paramètres identifiés sont physiquement cohérents. En effet les résidus obtenus par inversion ne sont pas signés et restent de l'ordre du bruit de mesure.

Le dernier chapitre présente une contribution à l'étude thermomécanique. L'objectif est de développer une approche novatrice du couplage thermique et mécanique à travers une configuration 1D transitoire. Cette approche présente un double avantage. Elle permet de disposer d'outils thermomécaniques inverses pour identifier des conditions aux limites thermiques à partir de mesures de déformations et aussi d'identifier les propriétés thermomécaniques des matériaux (Diffusivité thermique et Coefficient de dilatation thermique). Un dispositif expérimental a été réalisé et instrumenté à cette fin. Les résultats obtenus et leur analyse seront présentés dans ce chapitre.

Enfin, une conclusion générale clôt ce manuscrit. Elle récapitule le bilan des résultats des travaux réalisés dans cette thèse. Elle est complétée par des perspectives de développement et d'approfondissement des phénomènes étudiés, tant pour l'aspect frottement que celui du couplage thermomécanique.

Partie I. Bibliographie et état de l'art

Il est primordial de pouvoir décrire les mécanismes et les processus thermiques ayant lieu à l'interface d'un contact. Que le contact soit statique ou glissant, il est nécessaire de pouvoir quantifier les grandeurs physiques décrivant le comportement thermique au niveau de l'interface. Le sujet du contact, qu'il soit statique ou dynamique, a fait l'objet de nombreuses études. Nous aborderons dans un premier temps une série d'études non exhaustives traitant de ces sujets. La connaissance des propriétés physique des matériaux est nécessaire dans ces études car elles sont des données d'entrées. C'est pourquoi, dans cette partie, il est proposé un bref résumé sur les techniques de caractérisation thermique des matériaux. De plus, étant donné que la thématique principale sur lesquels sera articulé ce travail fait appel aux méthodes inverses, nous conclurons ce chapitre par un état de l'art traitant de l'utilité et des problématiques posée par le recoure à ces méthodes. Il sera aussi présenté des techniques et méthodes permettant de réduire l'influence de ces problématiques à l'aide de méthodes de régularisations.

I.1. La thermique des contacts

Nous rappelons brièvement les notions de constriction thermique et de résistance thermique de contact. Une présentation non exhaustive des travaux réalisés dans le domaine de la thermique des contacts sera réalisée dans un premier temps. Ensuite, les différents aspects de la problématique des contacts frottants sec seront développés suivi d'une modélisation de l'interface de contact glissant. Il est important de noter que tous ces modèles ont pour données d'entrées les propriétés thermiques des matériaux. Nous finirons donc cette étude bibliographique par la présentation de quelques modèles de caractérisation thermiques des matériaux et la description plus détaillées des méthodes utilisées pour la caractérisation des matériaux utilisés dans cette thèse.

I.1.1. Contact statique et phénomène de constriction

Si on examine un contact statique, une des hypothèses consiste à considérer un contact parfait entre les solides en contact. Cette condition de liaison se traduit par une continuité de la température (T) et de la conservation du flux de chaleur (ϕ) de part et d'autre du contact (noté 1 et 2).

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ \phi_1 = \phi_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Lorsque deux corps solides sont en contact, une résistance au transfert de chaleur apparait entre ces corps. Cette résistance de contact est provoquée par l'imperfection des états de surfaces. En réalité, la surface véritablement en contact représente une partie très réduite de la surface de contact apparente. L'augmentation de la pression de contact n'a quasiment aucun impact sur la surface de contact qui ne représente que quelques % de la surface apparente. En réalité, le contact entre les deux milieux se fait

au travers de quelques points de contacts. Les poches de vide entre les points de contact sont comblées par le fluide interstitiel. Le fluide a généralement une conductivité thermique inférieure à celle des matériaux en contact. Cette différence de conductivité incite les lignes de flux à converger vers les points de contact car ils opposent moins de résistance. Ce phénomène est nommé : constriction thermique. La constriction engendre une perturbation thermique d'un ordre de grandeur supérieur à celui des rugosités. On utilise la notion de résistance thermique de contact (R_C) pour modéliser les phénomènes d'interface à l'échelle macroscopique. La zone comprise entre les plans a et b sur la Figure I:1, ou les lignes de flux sont perturbées est appelée zone de constriction. Cette figure représente un schéma descriptif du phénomène de constriction pour une configuration de diffusion en 1D et sans source interne en régime stationnaire. v_f et v_s sont respectivement les voix interstitielle et solide par lesquelles s'écoule le flux de chaleur. v_f représente les voix fluidiques et v_s les voix d'écoulement par le solide à travers les contacts ponctuels. $T_1(x)$ et $T_2(x)$ sont les champs de températures sur un axe vertical des solides 1 et 2. Alors que T_{c_1} et T_{c_2} sont les températures des corps 1 et 2 au niveau du plan de contact π. Ces températures sont interpolées à partir de $T_1(x)$ et $T_2(x)$.

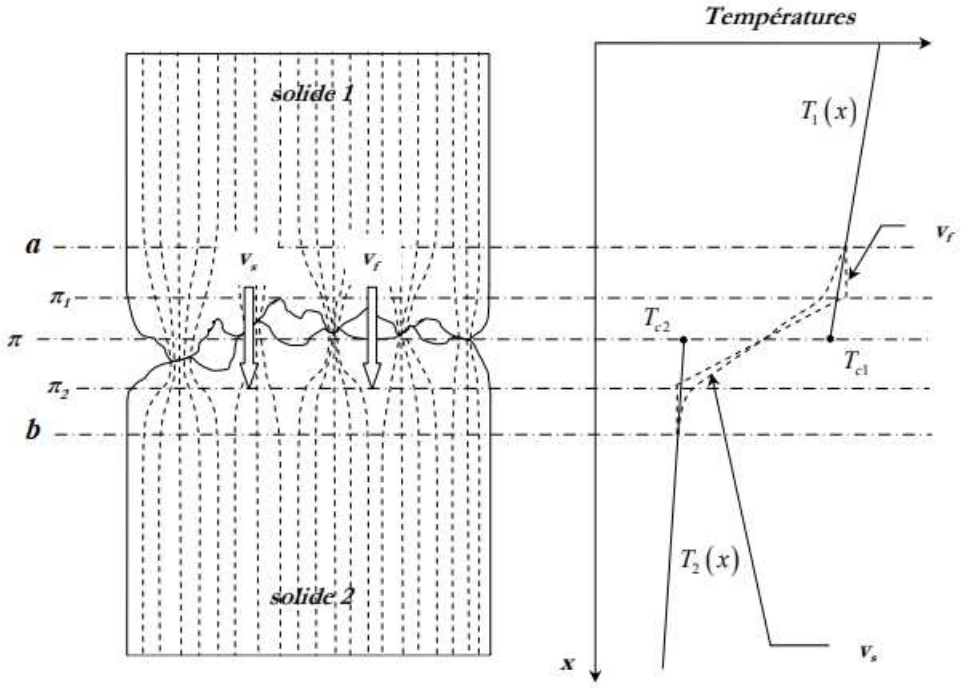


Figure I:1: Schématisation du phénomène de constriction thermique en régime stationnaire.

La constriction thermique induit un écart entre les deux températures surfaciques. D'un point de vue pratique, on modélise ce phénomène par l'introduction d'une résistance de contact noté (R_c) donnée par l'équation(1.2).

$$\begin{cases} R_{CT} = \dfrac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\phi} \\ |\phi| = |\phi_1| = |\phi_2| \end{cases} \tag{1.2}$$

ϕ est la densité de flux de chaleur traversant l'interface. La résistance de contact dépend de plusieurs paramètres, la topographie des surfaces, la nature des matériaux, la nature du fluide interstitiel, de la pression de contact et des niveaux de température.

De nombreuses études ont été entreprises tant sur le plan expérimental que théorique afin de créer et de valider des modèles permettant de calculer la résistance de contact statiques. Une liste de travaux pertinents mais toutefois pas exhaustive est proposée dans la thèse de J.G.Bauzin [2, p. 15,16].

Dans un récent papier Sun et al. [3] ont entrepris d'étudier l'influence de la température de l'interface, la pression de contact et la rugosité de l'interface sur la résistance thermique statique. Cette étude a été faite pour un contact statique entre le cristal de dihydrogénophosphate d'ammonium (ADP) et l'alliage d'aluminium (5A06). Les résultats présentés en [3, Fig. 7,8] indiquent que la résistance thermique diminue avec l'augmentation de la pression de contact pour une même rugosité et une même température à l'interface. Dans le même temps, le taux de décroissance diminue avec l'augmentation de la pression de contact, ce qui traduit le fait que la valeur de la résistance tend vers une valeur asymptotique. Sous la même rugosité de surface et la même pression de contact, la R_C diminue avec l'augmentation de la température d'interface. La R_C croit avec l'augmentation de la rugosité sous la même pression de contact et les mêmes conditions de température d'interface. Les auteurs de cet article ont aussi étudié l'effet de la direction du flux de chaleur. Ils trouvent que la résistance thermique statique est plus grande quand le flux de chaleur va de l'alliage d'aluminium vers l'ADP. Cet écart tend à diminuer avec l'augmentation de la pression de contact et aussi de la température. Dou et al .[4] ont étudié l'évolution de la résistance thermique de contact pour un contact entre deux solides d'acier inoxydable à haute température [350°C-650°C]. Les résultats observés sont sensiblement identiques à ceux de l'étude de Sun et al [3].

I.1.2. Contact frottant

Les premières études sur les contacts frottant ont commencé dans les années 30. Des travaux théoriques et expérimentaux ont été réalisés afin de décrire les phénomènes se déroulant à l'interface d'un contact glissant. Ces travaux ont été réalisés en considérant des contacts parfaits et des contacts imparfaits.

I.1.2.1. Contact parfait

Dans un contact frottant, l'interface de contact est le siège d'une génération de flux chaleur d'origine mécanique. Ce flux de chaleur est diffusé à travers les matériaux en contact. Dans un premier temps, les

toutes premières études se sont focalisées sur la détermination du flux et de sa répartition entre les solides en contact parfait. Blok [5], fut l'un des premiers à étudier le couplage solide en interaction. En utilisant l'hypothèse de solides semi-infinis, il développa un modèle analytique de transfert de chaleur entre deux solides. L'auteur considère un flux de chaleur uniforme. En appliquant l'hypothèse de contact parfait, il calcul le coefficient de partage du flux en faisant correspondre la moyenne arithmétique des températures surfacique des deux milieux. En régime établi, L'expression du coefficient de partage du flux pour un contact circulaire est donnée par Blok en fonction de la conductivité thermique et du nombre de Peclet. Pour un contact statique l'expression est donnée par l'équation(1.3).

$$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{pour } P_e \approx 0 \text{ et } \lambda_1 > \lambda_2 \tag{1.3}$$

Lors d'un contact glissant, l'égalité entre les températures moyennes à l'interface donne une expression du coefficient de partage du flux plus compliqué. L'équation (1.4) est valable uniquement pour $P_e > 5$.

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\pi . P_e}{2}}}{1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\pi . P_e}{2}}} \tag{1.4}$$

On constate que lorsque la valeur du nombre de Peclet tend vers l'infini, le coefficient de partage tend vers 1. Le flux est entièrement dirigé vers le corps mobile.

En gardant cette même approche de contact parfait, Une solution analytique est proposée par Jeager [6] dans l'hypothèse d'un contact de forme rectangulaire. A partir d'un processus itératif à convergence rapide, Ling [6] a résolu les équations introduites par le couplage. Komanduri et al. [8] proposent une méthode itérative utilisant la solution analytique de Jaeger sur des portions discrétisées du contact de manière à obtenir la distribution et le coefficient de partage du flux sur toute la longueur du contact.

Un modèle analytique a été développé par Kounas et al. [9] pour la détermination de la distribution de la chaleur de friction à l'interface de glissement d'un dispositif pion-cylindre. Ce modèle suppose que le cylindre est de longueur infinie et que la partie stationnaire est de très petite section. Le calcul du coefficient de partage du flux a été réalisée en considérant un contact parfait. Vernotte [10], étudie un contact parfait entre deux corps semi infinis en régime transitoire. Il trouve que le coefficient de partage du flux de chaleur généré par frottement s'écrit en fonction des effusivités des matériaux.

$$\alpha = \frac{b_1}{b_1 + b_2} \tag{1.5}$$

Ou, $b_i = \sqrt{\rho_i C_{p_i} \lambda_i}$, i=1,2

T.Kato et H.Fujii [11] sont arrivés à estimer le flux généré et le coefficient de partage expérimentalement. Ils ont aussi utilisé l'hypothèse de contact parfait.

Chen et al [12] ont mis en place un algorithme d'inversion basé sur la méthode du gradient conjugué et le principe de discordance est appliqué pour estimer la génération de chaleur inconnue en fonction du temps à l'interface de barres cylindriques pendant le processus de frottement. Aucune information préalable n'est disponible sur la forme fonctionnelle du flux de chaleur généré. Les données de température obtenues à partir du problème direct sont utilisées pour simuler les mesures de température, et l'effet des erreurs dans ces mesures sur la précision des résultats estimés est également pris en compte. Dans cette étude aussi, les auteurs ont considéré une égalité des températures de surface des solides à l'interface.

D'autres configurations géométriques ont été étudiées avec cette hypothèse de contact parfait. Cependant, ces approches se basant sur l'égalité des températures de contact entre les deux corps ne sont pas réalistes. En réalité, comme pour un contact statique, les états de surface irréguliers induisent les mêmes effets. Il existe donc une résistance de contact à l'interface.

I.1.2.2. Contact imparfait

De nombreuses études théoriques ont proposées des modèles permettant de calculer les températures de contact et des flux de chaleur. D'autres études basées cette fois sur des approches expérimentales ont été développées pour mettre en évidence l'aspect imparfait du contact.

L'une des premières expériences montrant le caractère imparfait du contact fût développée par Ling et al. [13]. Les auteurs ont mis en évidence une discontinuité de température au niveau de l'interface quel que soit le niveau de charge appliqué. Cette étude expérimentale concerna l'étude du frottement sec entre un secteur fixe et un disque tournant.

Un montage expérimental dédié à l'estimation de la résistance de contact dans un frottement entre deux couronnes, l'une en plastique et l'autre en métal fût réalisé par Mazo et al [14]. Les mesures de température ont été réalisées par thermocouples. Concernant la partir mobile, la transmission des signaux était réalisée par le biais d'un collecteur tournant.

Le phénomène de constriction thermique est aussi présent lors d'un contact frottant. Dans le but de prendre en compte ce phénomène, en plus du flux généré par frottement et du coefficient de partage du flux, on introduit donc une nouvelle grandeur afin de caractériser ce type de contact. Les résultats d'estimation de la résistance de contact glissant ont montré que cette dernière était plus faible que celle mesuré en contact statique. De plus, cette étude a abordé la problématique de la localisation des zones de génération de flux par frottement. Les auteurs ont conclu que le paramètre α peut être considéré comme étant un coefficient de partage local.

Vullierme et al [15] ont pu donner l'évolution de la résistance thermique de contact glissant en fonction de la vitesse de glissement réduite. Les résultats qu'ils ont obtenus indiquent que cette résistance décroit avec l'augmentation de la vitesse. Dans cette étude, les auteurs ont étudié le contact frottant axial entre

deux cylindres creux. Le premier cylindre creux est lisse alors que le second dispose de macro-aspérité usinée sur l'une de ses faces.

Berry et al [16] ont étudié la variation de la résistance thermique de contact en fonction de la vitesse et l'influence d'un film d'oxyde introduit à l'interface de glissement. L'expérience réalisée est similaire à celle de Mazo et al. La [16, Fig. 6] confirme bien que la résistance thermique de contact diminue avec l'augmentation de la vitesse de glissement et que plus la rugosité est importante plus la résistance de contact est élevé. L'introduction du film d'oxyde fait augmenter la valeur de la résistance de contact et plus ce film d'oxyde est épais plus la résistance est élevée.

D'autre auteurs ont abordé le thème de la thermique des contacts frottant à l'échelle de l'aspérité.

Lee et al [17] présentent une solution basée sur les différences finis d'un échange thermique entre deux aspérités sur des surfaces rugueuses de glissement opposées au cours d'une seule interaction transitoire. Les résultats sont également présentés pour la température maximale (température flash) correspondante. L'analyse dimensionnelle montre que les résultats peuvent être exprimés en fonction d'un seul paramètre sans dimension, le nombre de Peclet de l'aspérité.

Laraqi [18] a réalisé une étude analytique sur un contact frottant pour une aspérité unique de forme carrée de côté l. Il donne une expression de la résistance de constriction adimensionnelle ψ_c.

$$\psi_c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{u} F\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) \left(F\left(\frac{1+\nu^* u}{2\sqrt{u}}\right) + F\left(\frac{\left|1-\nu^* u\right|}{2\sqrt{u}}\right) - 2F\left(\frac{\nu^* \sqrt{u}}{2}\right) \right) du \qquad (1.6)$$

Avec :

$$F(x) = \int_0^{\infty} erf(\xi) d\xi = x erf(x) + \frac{e^{-x^2} - 1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } \nu^* = \frac{vl}{a} \qquad (1.7)$$

Il constate que la résistance de constriction décroit plus rapidement aux basses vitesses par rapport aux grandes vitesses. L'auteur propose une corrélation permettant d'estimer la résistance de constriction avec une erreur relative de 2%.

$$\psi_c = \frac{0.4732\left(1-e^{0.629\sqrt{\nu^*}}\right)}{0.629\sqrt{\nu^*}} \left(1 + 0.6777\left(1-e^{0.629\sqrt{\nu^*}}\right) - 0.7257\left(1-e^{0.629\sqrt{\nu^*}}\right)^2\right) \qquad (1.8)$$

H.A.Abdel-Aal [19] a étudié la dépendance du coefficient de partage du flux induit par le frottement par rapport à la charge, la vitesse relative et au conditions de contact. L'étude concerne un contact circulaire entre deux milieux semi-infini. A partir de l'expression de la température donnée par Carslaw et Jeager [20], il trouve l'expression des flux traversant chacun des solides. En introduisant une fonction caractéristique cette formule, il trouve ensuite l'expression du coefficient de partage donnée par l'équation :

$$\alpha = \frac{b_1 F_1}{b_1 F_1 + b_2 F_2} \tag{1.9}$$

Ou F_1 et F_2 reflètent la dépendance du coefficient de partage par rapport aux paramètres de contact, le rayon et la durée du contact.

$$F_i = \left\{ 1 - e^{\left(\frac{U_{slide}}{4\alpha_i} \sqrt{\frac{N}{\pi H}} \right)} \left[I_0 \left(\frac{U_{slide}}{4a_i} \sqrt{\frac{N}{\pi H}} \right) + I_1 \left(\frac{U_{slide}}{4a_i} \sqrt{\frac{N}{\pi H}} \right) \right] \right\} \tag{1.10}$$

Ou $R_i = \sqrt{\frac{N}{\pi H}}$ représente le rayon de contact de l'aspérité qui est donnée en fonction de la charge normale *N* et de la dureté du matériau *H*. U_{slide} est la vitesse de glissement, *a* est la diffusivité thermique et *I* représente les fonctions de Bessel.

Il analyse l'influence de la vitesse relative et du chargement sur le coefficient de partage du flux à travers l'influence la fonction caractéristique *F*.

Laraqi [21] propose une formulation basée sur une génération du flux par frottement fondée sur une répartition gaussienne, toutefois, le problème lié à la caractérisation du flux de chaleur reste présent. Il présente dans cette formulation une expression du coefficient de partage α .

En se basant sur la notion de résistance de constriction, Bardon [22] propose de déterminer l'expression théorique du coefficient de partage α . Il étudie un contact frottant entre deux solides (1et 2). Le solide 2 est supposé plus rugueux. Le flux de chaleur généré à l'interface ϕ_g est partagé entre les deux solides, ϕ_1 étant le flux transféré au solide 1 et ϕ_2 le flux coté solide 2. Le transfert de chaleur au niveau de l'interface est supposé entièrement réalisé par le contact solide-solide, ainsi le transfert par le fluide interstitiel est négligé.

Aux vues de toutes ces hypothèses, l'équation de conservation de la chaleur sur le solide 1 permet d'écrire :

$$(T_0 - T_1) = R_{c1}\phi_1 \tag{1.11}$$

$$(T_0 - T_2) = (R_{c2} + R_a)\phi_2 \tag{1.12}$$

Ou, T_0 est la température au niveau du contact solide-solide, T_1 et T_2 sont respectivement les températures aux limites de la zone de constriction de chacun des solides. R_{c1} et R_{c2} sont les résistances de constriction dans les solides 1 et 2 et R_a est la résistance de l'aspérité.

Sachant que $\phi_1 + \phi_2 = \phi_g$, on peut déduire des relations (1.11) et (1.12) l'équation suivante :

$$\phi_2 = \alpha\phi_g + \frac{T_1 - T_2}{R_{cg}} \tag{1.13}$$

Ou,

$$R_{cg} = R_{c1} + R_{c2} + R_a \tag{1.14}$$

$$\alpha = \frac{R_{c1}}{R_{cg}} \tag{1.15}$$

α est le coefficient de partage local et R_{cg} est la résistance thermique de contact.

Laraqi et al [23] ont présenté une solution analytique 3D pour déterminer la température et le coefficient de partage du flux généré par frottement dans un dispositif pion-disque. la Figure I:2 représente un schéma simplifié de configuration pion-disque étudiée. Les valeurs du coefficient de partage indiquent que la dissipation de la chaleur se fait principalement par le disque. Le coefficient de partage augmente avec l'augmentation de la vitesse de rotation et l'intensité des échanges convectifs au niveau du disque.

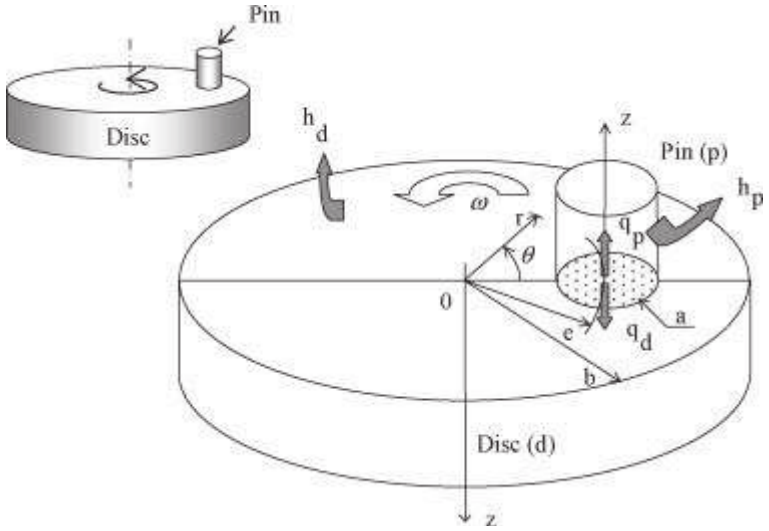


Figure I:2 : Schéma simplifié de configuration pion-disque

Bauzin et al. [24] présentent une estimation du flux thermique généré par frottement dans des conditions réelles de freinage d'avion en utilisant une méthode inverse. L'estimation est effectuée en considérant une hypothèse de modèle transitoire 1D et de multiples interfaces. Ce modèle prend en compte une description non parfaite du contact thermique. L'identification du flux thermique généré par frottement dans les différentes interfaces à partir de données expérimentales est réalisée à l'aide d'une paramétrisation temporelle linéaire du flux. Les auteurs ont pris un coefficient de partage $\alpha = 0.5$ étant donné que les solides en contact frottant étaient du même matériau. La résistance thermique de contact était imposée car l'étude de sensibilité a montré que son impact était très faible.

Bauzin et al [25] ont développé un modèle analytique pour déterminer la distribution de température 3D dans un disque de frein d'un train à grande vitesse. Dans ce système, la plaquette de frein est composée de plusieurs broches. Afin de résoudre le problème de transfert de chaleur, les transformées intégrales

de Fourier et de Hankel sont utilisées pour effectuer les calculs analytiques. L'expression ainsi obtenue est explicite et permet de calculer la distribution de température dans le disque quels que soient la vitesse de rotation, le nombre et la taille des spots, ainsi que les flux générés.

Moussa et al [26] ont estimé expérimentalement le flux chaleur et les paramètres interfaciaux $(\alpha \text{ et } R_{cg})$ dans un processus de meulage de verre. La température du verre de la paroi s'élève à des niveaux très élevés, entre 550 et 900 °C, en fonction des paramètres de traitement tels que la profondeur de meulage et les vitesses de rotation et d'avance de la meule. Le rapport de partition α est proche de 1 et les résistances de contact thermique supérieures à $3.83\times10^{-3}\left(m^2\cdot\mathrm{K}\cdot W^{-1}\right)$ exposent le mauvais transfert de chaleur à travers l'interface.

Basé aussi sur le formalisme de Bardon [1], une étude expérimentale menée par Bauzin et al [27] présente des résultats expérimentaux sur l'estimation simultanée du coefficient de partage, de la résistance thermique de contact et du flux généré d'un contact glissant à partir de plusieurs expériences pour un couple de matériaux acier/bronze. L'étude est réalisée sur un frottement axial de deux cylindres creux.

On ne trouve dans la littérature aucune référence se focalisant sur l'estimation simultanée des paramètres interfaciaux $(\alpha, R_{cg} \text{ et } \phi_g)$ variables. Pourtant, l'étude menée par Bauzin et al [27] a bien montré les limites de l'hypothèse de paramètres de contact glissant constant, les résidus étant signés.

Le travail de recherche principal développé dans cette thèse a pour but d'aller plus loin dans l'étude de la caractérisation des interfaces en contact frottant en ajoutant l'aspect de la variabilité temporelle de paramètres thermiques de contact. Le modèle adopté dans l'étude de contact frottant abordée dans cette thèse est celui faisant appel à trois paramètres macroscopiques :

α : Coefficient de partage intrinsèque du flux généré.

R_{cg} : Résistance du contact glissant.

ϕ_g : Flux généré par frottement.

Ces paramètres sont considérés variables et de forme inconnue. Une estimation de fonction de trois paramètres caractérisant un contact frottant sera principalement développée dans cette thèse.

I.2. Caractérisation des matériaux

Dans tous les travaux cités précédemment, les propriétés thermiques et mécaniques des matériaux utilisés sont considérées connues. Une erreur importante sur la valeur des propriétés thermiques induit un biais de modèle. En fonction de l'importance de ce biais, les résultats obtenus sont plus ou moins éloignés du résultat attendu. Il est donc nécessaire de connaitre la valeur des propriétés physiques et de

leur incertitude avant d'essayer de caractériser une interface d'un contact frottant. Cette remarque est valable pour toute études nécessitant la connaissance de paramètres physiques impactant de manière significative le modèle adopté.

On trouve dans la littérature plusieurs méthodes de caractérisation thermique. Soit en régime permanant ou bien en régime transitoire. Pour les méthodes en régime permanant, la seule propriété thermique pouvant être estimé est la conductivité thermique. Alors que pour les méthodes se réalisant en régime transitoire, il est possible d'estimer la diffusivité thermique seule ou bien les deux propriétés simultanément.

En 1994, Degiovanni [28] présente un éventail de méthodes de caractérisation thermique des solides. Il présente aussi les limites d'utilisations de chacune des méthodes présentées. En [28, Fig. 10], [28, Paragr. 4.4] l'auteur présente un ensemble de configuration permettant l'estimation de la conductivité thermique ou de la diffusivité thermique ou bien de l'effusivité des solides. Plus récemment Beaudhuin [29, p. 3] a dressé une liste non exhaustive des méthodes permettant la caractérisation de la conductivité thermique des matériaux avec les limites et les incertitudes de chacune des méthodes présentées.

Dans le cadre de notre étude, les matériaux utilisés sont solides, les propriétés thermiques nécessaires pour l'exécution du modèle développé sont la diffusivité thermique et la conductivité thermique. Nous avons donc opté pour la méthode de la source plane transitoire (TPS : Transient plane source).

I.2.1. Caractérisation des propriétés thermiques par la Méthode TPS

Cette méthode permet d'estimer à la fois les quatre propriétés thermiques d'un matériau : conductivité, effusivité, diffusivité et capacité thermique volumique. Deux sont mesurées alors que les deux autres sont déduites. Cette méthode est basée sur les travaux proposés par Gustafsson [30]. Sur la base de cette étude, une solution technologique a été développée et proposée à la commercialisation. On utilise une sonde de forme circulaire ou rectangulaire (circulaire dans le cadre de notre étude). Cette sonde remplit à la fois le rôle de source de chaleur et de capteur de température. Elle est composée d'un film de nickel de $10\,\mu m$ enveloppé par un film de 25 à $30\,\mu m$ en Kapton ou de $100\,\mu m$ en mica. Un circuit en double spirale est dessiné sur le film métallique. La mesure de la température se fait de manière indirecte. La variation de la résistivité du Nickel en fonction de la température étant connu, environ $0,004\ \mathrm{K}^{-1}$, Il suffit de mesurer la variation de la résistivité du nickel à l'aide d'un pont électrique pour déduire la variation de la température de l'enroulement.

La température moyenne relative de la sonde est calculée par l'équation(1.16). Cette expression est basée sur les travaux présentés par Carslaw et Jeager [20] :

$$\overline{\Delta T(\tau)} = P_0(\pi^{3/2} a\lambda)^{-1} D_s(\tau) \quad \text{, Avec } \tau = \left(\frac{at}{r^2}\right) \tag{1.16}$$

Avec :

$$D_s(\tau) = \left[m(m+1) \right]^{-2} \int_0^{\tau} \sigma^{-2} d\sigma \left[\sum_{l=1}^{m} l \sum_{k=1}^{m} k \exp\left(\frac{-(l^2+k^2)}{4m^2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{lk}{2m^2\sigma^2} \right) \right] \tag{1.17}$$

Où, a est la diffusivité thermique, P_0 est la puissance délivrée par la sonde, r représente le rayon de la sonde et m représente le nombre de spire dans la sonde.

Pour des valeurs de τ supérieur à *0.1* et un nombre de spire m supérieur à 10, un accord quasi-parfait entre les expression (1.16) et (1.18) peut être fait en appliquant une légère correction de temps [30].

$$\overline{\Delta T(\tau)} = P_0 (\pi^{3/2} a \lambda)^{-1} D(\tau) \tag{1.18}$$

Avec :

$$D_s(\tau) = \int_0^{\tau} \sigma^{-2} d\sigma \int_0^1 u du \int_0^1 v dv \times \exp\left(\frac{-\left(u^2+v^2\right)}{4\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{uv}{2\sigma^2} \right) \tag{1.19}$$

Basé sur cette solution, un dispositif de caractérisation thermique des matériaux a été produit et développé par Thermoconcept. Il permet la caractérisation thermique aussi bien de matériaux isotropes qu'anisotropes à l'aide de différents modules utilisant des méthodes de résolutions et d'identification différentes. Les mesures de températures effectuées par la sonde ont une précision de l'ordre du centième de °C.

Les erreurs dans les mesures par TPS peuvent provenir de deux sources :

1- L'incertitude dans les données expérimentales et la sélection de l'intervalle de temps pour l'analyse.

2- L'écart du modèle originel de transfert de chaleur analytique idéalisé.

Pour notre étude, on s'intéresse à la caractérisation de matériaux conducteurs solides et isotropes. En règle générale, il est plus facile de faire des mesures sur des échantillons de grande taille plutôt que sur des petits échantillons. La combinaison, taille de l'échantillon rayon de la sonde et temps de mesure sélectionnés doit permettre de rester en accord avec l'hypothèse de corps semi-infini. La sonde Hot-Disk est conçue pour être disposée entre deux échantillons identiques.



Figure I:3 : Utilisation du dispositif TPS pour un échantillon en Bronze

Les échantillons doivent être fermement serrés autour des capteurs pour limiter les espaces d'air entre les échantillons et le capteur.

Sachant que la solution est basée sur l'hypothèse que la sonde est localisée dans un corps semi-infini, le choix du rayon de la sonde et celui de temps de mesure doit respecter cette hypothèse. En d'autres termes, la profondeur de pénétration thermique ne doit pas dépasser les frontières de l'échantillon. Le constructeur préconise comme condition nécessaire mais non suffisante de prendre un échantillon avec une épaisseur supérieure au rayon de la sonde. La puissance imposée doit induire une élévation de température minimale au niveau de la sonde de 3-4K. Pour un matériau conducteur, il est préconisé de commencer par une puissance de 1W et d'augmenter la valeur de la puissance jusqu'à atteindre la valeur préconisée pour l'élévation de température de la sonde.

Une fois toutes les dispositions expérimentales prises en considération, une cinquantaine d'essais par échantillon ont été réalisés. Les résultats sont présentés en annexe II.

I.2.2. Détermination expérimentale du coefficient de dilation thermique

Les déformations thermiques jouent un rôle majeur dans la plupart des systèmes mécaniques. L'étude du couplage thermomécanique présente donc un intérêt scientifique et industriel important. On trouve plusieurs études dans la littérature de résolution de problèmes inverses de thermoélasticité.

On peut citer, M.N.Gaikwad et al. [31] qui ont tenté de résoudre le problème inverse de la thermoélasticité dans une fine plaque circulaire isotrope en déterminant le gradient de température inconnu, la distribution de la température et la dispersion thermique sur le bord de la plaque circulaire. Les résultats sont obtenus en termes de séries de la fonction de Bessel et illustrés numériquement.

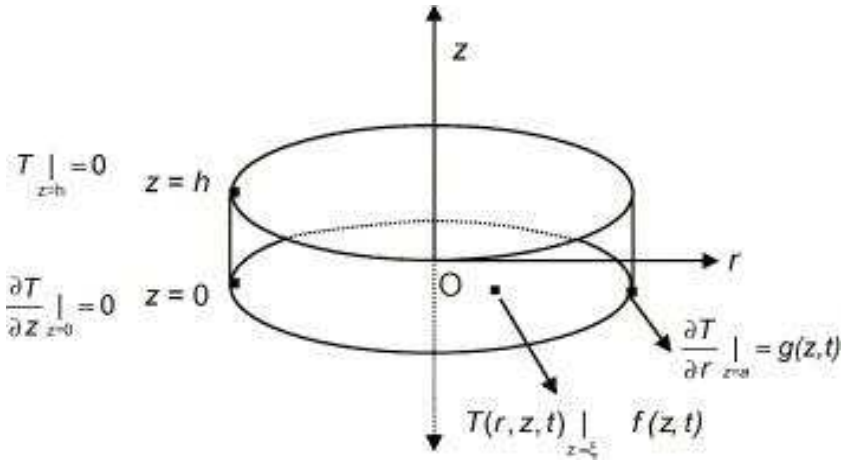


Figure I:4 : Schéma de la configuration étudiée.

Bauzin et al. [32] propose une méthodologie thermoélastique inverse, pour étudier l'effet d'un traitement laser appliqué à la surface d'un cylindre mince. Au moyen d'une approche analytique, les auteurs ont développé une fonction de transfert thermoélastique entre la température de la surface chauffée et la dilatation mécanique du cylindre. Ensuite, en mesurant, à intervalles de temps discrets, le déplacement d'un point interne du cylindre, ils appliquent ensuite un produit de déconvolution à ces mesures, afin d'identifier la température de la surface chauffée. De cette façon, il n'est plus nécessaire de connaître le champ de température pour résoudre le problème thermoélastique d'un tel dispositif expérimental. Puis, deux exemples sont utilisés pour démontrer la précision et l'efficacité de cette approche basée sur la mesure des déplacements thermiques. Enfin, Ils démontrent que cette procédure d'inversion peut être appliquée avec succès même dans des situations où le signal de mesure est affecté par un bruit de mesure, en utilisant la méthode de régularisation de Tikhonov. L'approche par fonctions de transfert a fait l'objet de plusieurs travaux publié, on peut citer, les études de Ana PaulaFernandes [33] et [34].

La plupart des études disponibles sur la détermination du coefficient de dilatation thermique, qu'il soit 1D ou 3D, exigent une condition de température uniforme dans les solides. L'approche proposée dans le chapitre 4, qui utilise la fonction de transfert, permet d'identifier le coefficient de dilatation thermique linéaire même dans des conditions de température non uniformes dans les solides.

I.3. Approche par méthodes inverses

L'approche scientifique la plus classique est de construire un modèle à partir d'équations représentatives reliant les grandeurs d'entrée et de sortie, puis de les résoudre analytiquement, numériquement ou bien, par une méthode hybride. Avec ce schéma de résolution, les conséquences du phénomène étudié (grandeurs de sortie) sont ainsi calculées en connaissant les causes (grandeurs d'entrée). Les problèmes résolus par cette approche sont dits problèmes directs. Par opposition, un problème inverse détermine les causes (grandeurs d'entée du modèle direct) à partir des mesures expérimentales des conséquences (grandeurs de sortie). Ces méthodes sont utilisées dans plusieurs domaines en sciences : en sismographie pour la détection de l'épicentre d'un séisme, dans le domaine médical en thermographie à rayon X, en

acoustique pour la reconstruction de source et beaucoup d'autres domaines tels que la mécanique, l'astronomie et la thermique. Il existe une grande quantité de travaux utilisant ces méthodes en diffusion thermique, tels que l'estimation des conditions limites (température ou flux), Identification de paramètres intrinsèques des matériaux ou encore l'identification d'une frontière dans un processus de changement de phase. Ils sont nommés (IHCP : Inverse Heat Conduction Problems).

I.3.1. Définition générale

Dans sa note introductive aux problèmes inverse, G.Roussel [35] décrit quatre types de problèmes. Si on prend un modèle $y(u) = M(x(r), \theta)$, on peut dire que :

- Connaissant *M, θ, x*, le calcul de *y* est un problème direct.
- Connaissant *M, θ, y*, le calcul de *x* est un problème inverse.
- Connaissant *M, x, y*, le calcul de θ est un problème inverse d'identifications de paramètres.
- Connaissant *M, y*, le calcul de θ et *x* est un problème inverse aveugle.

Dans les problèmes inverses d'inversion de mesures, une ou plusieurs données d'entrées du modèle sont inconnues. On peut citer plusieurs types de problèmes d'inversions de mesures appliquées à la conduction thermique :

- Reconstruction d'état initiale : Ce type de problème consiste en la reconstitution de la distribution de température à un instant donné en utilisant les données observationnelles postérieures à cet instant.
- Reconstruction de conditions limites : Ces problèmes sont très fréquents en thermique. À l'aide de mesure de température, on remonte à l'évolution de la température à une position donnée. Cela peut aussi concerner la détection de source de chaleur, que ça soit sa position ou bien l'évolution de son intensité.
- Estimation de paramètres : Déterminer les propriétés intrinsèques au système étudié, comme les propriétés physiques des matériaux.

On peut aussi être confronté à des problèmes d'inversion combinant plusieurs types de configurations.

Les problèmes inverses sont fréquemment mal posés, contrairement aux problèmes bien posés généralement rencontrés dans la modélisation mathématique directe. Parmi les trois conditions d'un problème bien posé suggérées par Jacques Hadamard (existence, unicité et stabilité de la ou des solutions), l'une ou plusieurs de ces conditions ne sont pas vérifiées dans les problèmes inverses. Au sens de l'analyse fonctionnelle, le problème inverse est représenté par une cartographie entre les espaces métriques. Alors que les problèmes inverses sont souvent formulés dans des espaces de dimension

infinie, les limitations à un nombre fini de mesures et la considération pratique de ne récupérer qu'un nombre fini de paramètres inconnus peuvent conduire à une refonte des problèmes sous forme discrète.

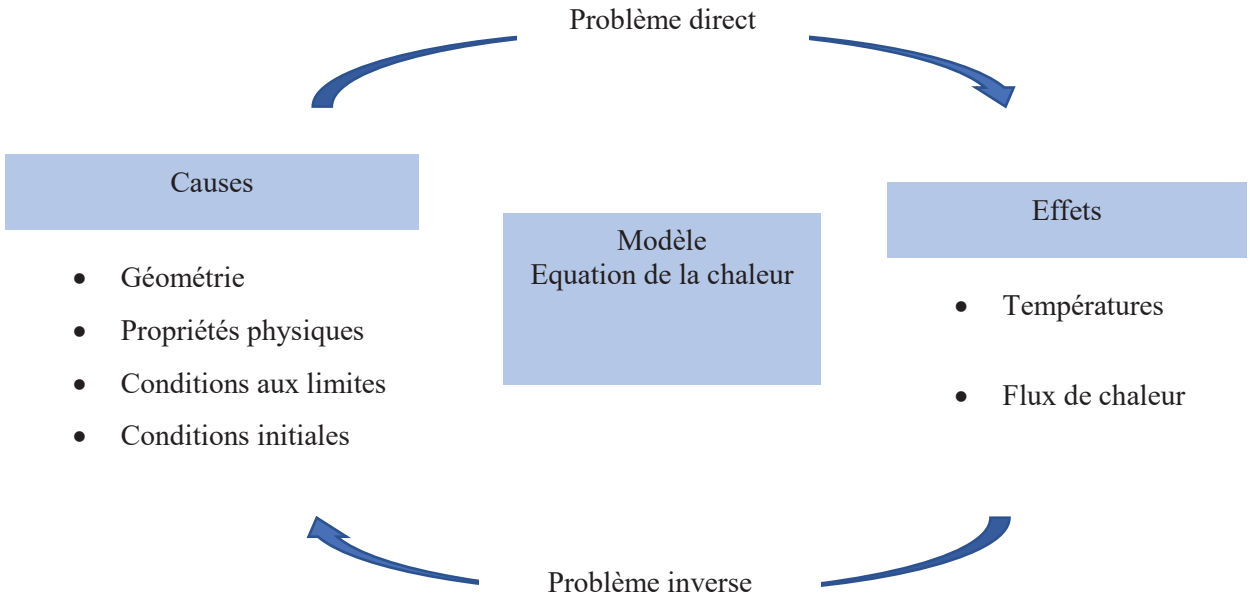


Figure I:5 : Schéma conceptuel des méthodes inverses en thermique

Dans ce cas, le problème inverse sera généralement mal conditionné. Alors, la régularisation peut être utilisée pour introduire des hypothèses légères sur la solution et éviter le surajustement [36]. Des algorithmes efficaces pour résoudre les problèmes inverses ne peuvent être développés sans obtenir plus de précision sur ces questions de stabilité et de conditionnement.

Les problèmes inverses ne vérifient souvent pas une ou plusieurs de ces conditions. Ceci est dû à plusieurs raisons. *(i)* Tout d'abord, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées. Ces bruits viennent des instruments utilisés soit pour la mesure ou bien pour l'acquisition de ces mesures. *(ii)* Ensuite, si une solution existe pour un jeu de paramètres, il est parfaitement envisageable que des paramètres différents mènent aux mêmes observations.

I.3.2. Nature mal posé des problèmes inverses

Un problème inverse est très fortement susceptible d'être mal posé, il est nécessaire de connaitre la nature et le poids de ces conditions qui mènent à le rendre « mal posé ».

Premièrement, la non-existence de la solution d'un problème inverse n'est pas rédhibitoire. Il est couramment possible de relaxer la notion de solution afin de rétablir la condition d'existence ; soit, dans le cas d'un problème linéaire surdimensionné diminuant le nombre d'équations. La recherche d'une solution au sens des moindres carrés est aussi considérée comme un moyen de relaxer la notion de solution.

Deuxièmement, la condition d'unicité, avoir une information à priori permettrait de trancher entre les différentes solutions possibles. Enfin, le manque de stabilité dans une solution approchée ou numérique est particulièrement problématique. Afin d'illustrer ce phénomène d'instabilité très fréquent dans les problèmes inverses en thermique, prenant un système linéaire simple $Mx = y$.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} 23 \\ 25 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

La solution de ce système est $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Le déterminent de la matrice M étant différent de zéro cette dernière est inversible. Le système matriciel ne présente pas de difficulté à résoudre. En réalisant plusieurs tentatives de résolution en introduisant une faible perturbation δy sur le vecteur *y*, la solution se trouve fortement modifiée.

On exécute le calcul 1000 fois en bruitant le vecteur *y* avec un signal de bruit blanc suivant une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et un écart-type $\sigma = 0.01$. La répartition normalisée de chacune des valeurs du vecteur x, $\sigma(x - moyenne(x))$ sont représentés sur la Figure I:6, avec celle du vecteur *y* $\sigma(y - moyenne(y))$. Les écarts-types des composants du nouveau vecteur solution sont :

$$\sigma_1 = 0.1573$$
$$\sigma_2 = 0.1710$$

Une faible perturbation, réaliste dans le cas de mesure de température, a provoqué une divergence des solutions avec un écart-type normalisé plus de 10 fois supérieure. Les bruits de mesures constituent une réalité dont on ne peut s'affranchir. Lors de la validation d'un modèle d'inversion, on est obligé d'imposer un bruit de mesure qui soit réaliste. Ces problèmes de non-continuité ne concernent pas que le vecteur des mesures, la matrice *M* peut aussi être soumise à des perturbations. Ces perturbations peuvent provenir d'hypothèses liées à la solution numérique du problème étudié. Afin d'illustrer cela, prenant le système linéaire (1.20) et appliquons une légère perturbation uniquement à la matrice *M*. La perturbation appliquée à chacun des coefficients de la matrice *M* est une répartition homogène de valeur appartenant à l'intervalle [-0.5, 0.5]. Sur la Figure I:7, on trace les répartitions des valeurs du vecteur *x* pour cette distribution de perturbations de la matrice *M*. Ces perturbations ont provoqué des erreurs conséquentes sur le vecteur solution du système linéaire. Les écarts-types de la répartition des différentes solutions du vecteur *x* sont :

$$\sigma_1 = 16.67$$
$$\sigma_2 = 14.92$$

Ce problème est donc mal posé, car il ne satisfait pas la troisième condition. Dans ces conditions précises, la matrice *M* est dite mal conditionnée. Il est possible de savoir au préalable si la matrice d'un système est mal conditionnée. Le conditionnement d'une matrice *M* est défini comme $\|M\|\|M^{-1}\|$. Le conditionnement dépend de la norme matricielle utilisée, le conditionnement usuellement utilisé est celui associé à la norme matricielle euclidienne. On peut montrer que le conditionnement d'une matrice suivant cette norme matricielle est égal au rapport de sa plus grande valeur propre sur sa plus petite valeur propre. Une valeur de conditionnement importante implique un problème instable donc mal posé.

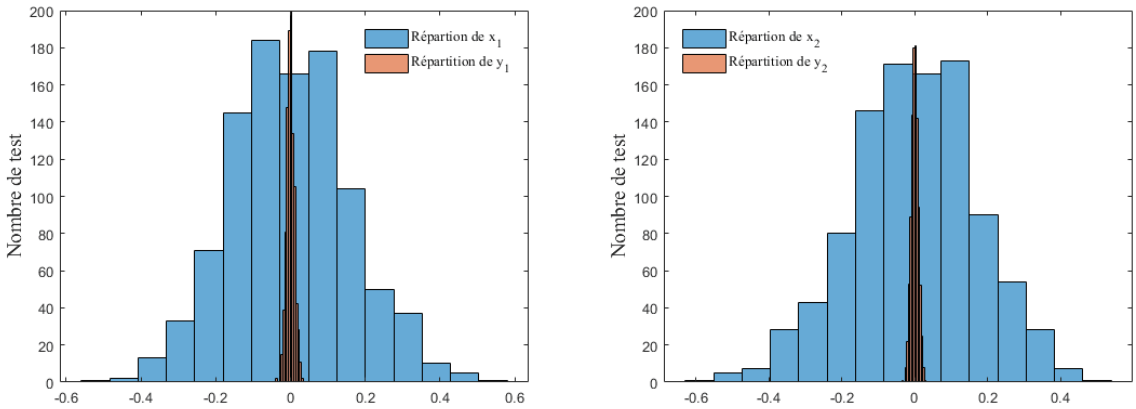


Figure I:6 : Répartitions des valeurs des vecteurs *x* et *y*.

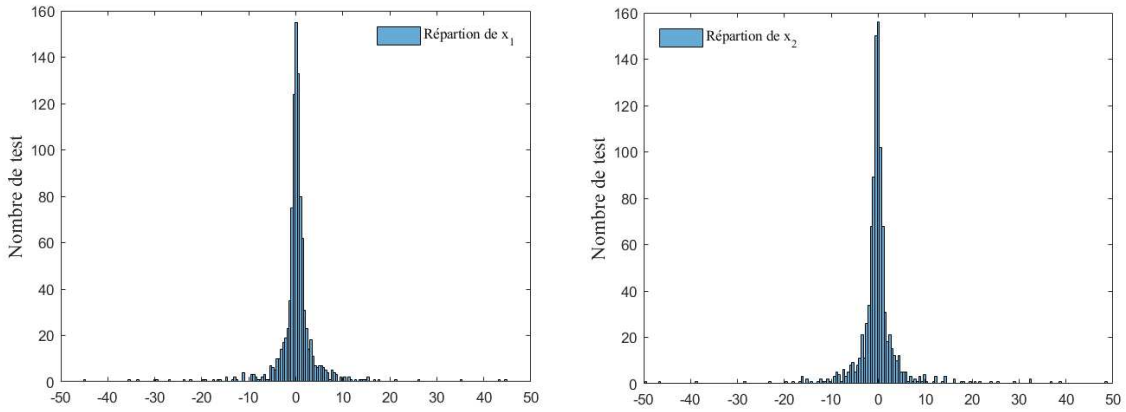


Figure I:7 : Répartition des valeurs du vecteur *x* pour une perturbation de la matrice *M*

I.3.3. Estimateur des moindres carrées

La méthode des moindres carrés a été découverte par Gauss en 1795. Elle est depuis devenue le principal outil pour réduire l'influence des erreurs lors de l'ajustement des modèles aux observations données. Les problèmes des moindres carrés sont largement abordés dans les livres d'algèbre linéaire, on peut citer l'ouvrage de P. Lascaux et R. Théodor [37] qui regroupe des problèmes rencontrés dans les sciences de

l'ingénieur et conduisant à la résolution de systèmes d'équations en dimension finie, ainsi que le livre de Gene. H. Golub et al. [38] qui est un texte classique en informatique. Il fournit des informations essentielles sur le contexte mathématique et les compétences algorithmiques requises pour la construction de logiciels numériques adaptés aux problèmes linéaires complexe, asymétrique ou creux. Le livre de Å.Björck [39] est considéré comme une référence dans ce domaine. Il traite de manière approfondie de sujets tels que les méthodes pour les problèmes de moindres carrés creux, les méthodes itératives, les moindres carrés modifiés, les problèmes pondérés et les problèmes contraints et régularisés. Comme mentionné dans le paragraphe §I.3.2, les problèmes inverses sont le plus souvent mal posé. La solution à un problème inverse peut ne pas exister. Il est donc nécessaire d'introduire le concept de quasi-solution que l'on doit au mathématicien Ivanov [40]. On cherche à utiliser un estimateur à minimiser. Le jeu de paramètres à trouver donnant la valeur minimale de cet estimateur est appelé, quasi-solution. L'estimateur le plus couramment utilisé est l'estimateur des moindres carrés. D'une part, cet estimateur est bien connu et a fait l'objet de plusieurs ouvrages. De plus, son écriture matricielle simple permet une manipulation opérationnelle très facile (Eq(1.22). Cependant, l'estimateur des moindres carrées peut être utilisé dans des conditions de bruit de mesure bien précise. Ce dernier doit être additif, de moyenne nulle, non corrélé et de variance constante.

$$F(\beta) = [T - T(\beta)]^T [T - T(\beta)] \tag{1.22}$$

Où

- F représente la fonctionnelle résiduelle à minimiser.
- $\beta^T = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{N_P}]$ est le vecteur des inconnues à déterminer.
- $T(\beta)$ est le vecteur des températures estimées en résolvant le problème direct.
- T désigne le vecteur des températures mesurées.

Les mesures expérimentales étant discrètes en temps et en espace, la fonctionnelle résiduelle à minimiser $F(\beta)$ s'écrit :

$$F(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left[\tilde{T}(x_j, t_i) - T(\beta)(x_j, t_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left[\tilde{T}_i^j - T_i^j(\beta) \right]^2 \tag{1.23}$$

Ou M représente le nombre de capteurs et N le nombre de mesures en fonction du temps. Le vecteur des résidus dans ce cas est :

$$(T - T)^T = (\tilde{T}_{11} - T_{11}, \tilde{T}_{12} - T_{12}, \tilde{T}_{13} - T_{13}, ..., \tilde{T}_{ji} - T_{ji}, ..., \tilde{T}_{MN} - T_{MN}) \tag{1.24}$$

La quasi-solution β^* représente le vecteur des inconnus à identifier et qui correspond à :

$$F(\beta^*) = \min\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left[\tilde{T}_i^j - T_i^j(\beta)\right]^2\right) \tag{1.25}$$

Afin de trouver le jeu de paramètre β^*, il est nécessaire de recourir à des algorithmes de minimisation. La plus usuelle des méthodes de minimisation et la méthode de Gauss-Newton. Cette méthode est bien adaptée à l'identification de jeux de paramètres réduits. Le jeu de paramètres qui minimise la fonctionnelle $F(\beta)$ est dit optimal. Cela s'effectue en calculant le dérivé première de $F(\beta)$ par rapport à chacun des paramètres inconnus à identifier et de rendre le résultat nul.

$$\frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta_1} = \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta_2} = \ldots = \frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta_{N_p}} = 0 \tag{1.26}$$

La forme vectorielle de cette condition est donnée par l'équation(1.27).

$$\Delta F(\beta) = 2\left[-\frac{\partial T^T(\beta)}{\partial \beta}\right][T - T(\beta)] = 0 \tag{1.27}$$

Où :

$$\frac{\partial T^T(\beta)}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_{N_p}} \end{bmatrix} [T_1, T_2, T_3, \cdots, T_M] \tag{1.28}$$

A partir de l'équation(1.28), on construit la matrice de sensibilités décrite dans l'équation (1.29)

$$J(\beta) = \left[\frac{\partial T^T(\beta)}{\partial \beta}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_{11}}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial T_{11}}{\partial \beta_i} & \cdots & \frac{\partial T_{11}}{\partial \beta_{N_p}} \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta_i} & \cdots & \frac{\partial T_{12}}{\partial \beta_{N_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_{ji}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_{ji}}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial T_{ji}}{\partial \beta_i} & \cdots & \frac{\partial T_{ji}}{\partial \beta_{N_p}} \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial T_{MN}}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_{MN}}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial T_{MN}}{\partial \beta_i} & \cdots & \frac{\partial T_{MN}}{\partial \beta_{N_p}} \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

Pour *M* capteurs et *N* mesures de températures par capteur, si on désire estimer N_p paramètres, la matrice de sensibilité ***J*** est de dimension $([M \times N] \times N_p)$. La $i^{ème}$ colonne correspond à la sensibilité au $i^{ème}$

paramètres. Alors que la $j^{ème}$ ligne correspond à la $j^{ème}$ mesure. Les éléments de la matrice de sensibilité sont appelés coefficient de sensibilité.

L'équation (1.27) devient alors :

$$-2J^T(\beta)[T - T(\beta)] = 0 \tag{1.30}$$

Dans le cas d'un problème linéaire en paramètres, la matrice $\boldsymbol{J}$ ne s'écrit pas en fonction des paramètres à estimer. Les éléments de la matrice $\boldsymbol{J}$ ne dépendant pas des inconnus β_i, l'estimation se fait sans processus itératif. Il suffit de résoudre le système linéaire donné par l'équation(1.31).

$$[J^T J]\beta = J^T T \tag{1.31}$$

Dans des conditions de non-linéarité, ou les coefficients de la matrice de sensibilité dépendent des inconnus, le problème est dit non linéaire. Dans ce cas, on utilise un développement de Taylor d'ordre 1 de la variable $\boldsymbol{T}$ au voisinage de la solution recherchée [41]. On introduit donc une linéarisation locale de $\boldsymbol{T}$ qui est donnée par l'équation (1.32).

$$T(\beta) = T(\beta^{(k)}) + J^{(k)}(\beta)[\beta - \beta^{(k)}] \tag{1.32}$$

Ou k, désigne l'itération du processus itératif.

En incorporant l'équation (1.32) dans (1.30) et après réarrangement on obtient

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + [(J^{(k)})^T J^{(k)}]^{-1}(J^{(k)})^T[T - T(\beta^{(k)})] \tag{1.33}$$

La matrice carrée définit par $H^* = J^T J$ est nommée « pseudo-Hessien ». Le Hessien fait en vérité intervenir des dérivées d'ordre 2 dans l'expression de Q dans l'équation (1.34) .

$$H = 2J^T J + 2Q \tag{1.34}$$

Cette approximation comporte trois avantages selon Maillet et al. [41] :

- Réduction des calculs et donc tu temps de calcul.
- Permet d'empêcher l'apparition d'éventuelles divergences de calculs.
- Cette approximation devient très bonne au voisinage de l'optimum.

Cette matrice est aussi appelée matrice d'information. Elle intervient dans le problème linéaire et non linéaire (Eq (1.31)et(1.33)). L'étude du conditionnement de cette matrice représente une partie inévitable dans les problèmes inverse.

I.3.4. Régularisation des problèmes inverses

Le concept de quasi-solution permet de satisfaire la condition d'existence de la solution. Cependant, l'unicité et la stabilité reste insatisfaite. Donc des méthodes de régularisation sont nécessaires afin de construire une quasi-solution unique et stable. Régulariser un problème mal posé, équivaut à le convertir en un problème bien posé, en faisant attention à ce que l'erreur introduite soit compensée par le gain de stabilité. Cette partie va traiter des différentes méthodes de régulation permettant de minimiser

l'estimateur des moindres carrés. Il existe plusieurs ouvrage traitant de ses problématiques [32], [38]–[41]

I.3.4.1. Minimisation d'un critère modifié

Une première méthode consiste à renforcer la diagonal du 'pseudo-Hessien' afin de diminuer son conditionnement. Des algorithmes de minimisations basées sur la méthode de Gauss-Newton ont été proposés dans ce but. Ces méthodes sont préconisées pour des calculs itératifs. La pénalisation de Tikhonov est quant à elle directement liée à l'estimateur.

Le conditionnement d'une matrice dépend de la norme subordonnée. Prenons une matrice inversible *M* subordonnée à la norme $\|.\|$, son conditionnement est donné par l'équation(1.35).

$$\kappa(M) = \left\|A^{-1}\right\|\|A\| \tag{1.35}$$

Dans notre cas on s'intéresse à la norme d'espace l_2, notée $\|.\|_2$. Dans ce cas, le conditionnement de la matrice *M* est :

$$\kappa(M) = \frac{\sigma_{\max}(M)}{\sigma_{\min}(M)} \tag{1.36}$$

Ou $\sigma_{\max}$ et $\sigma_{\min}$ sont respectivement les valeurs propres maximal et minimal de la matrice *M.*

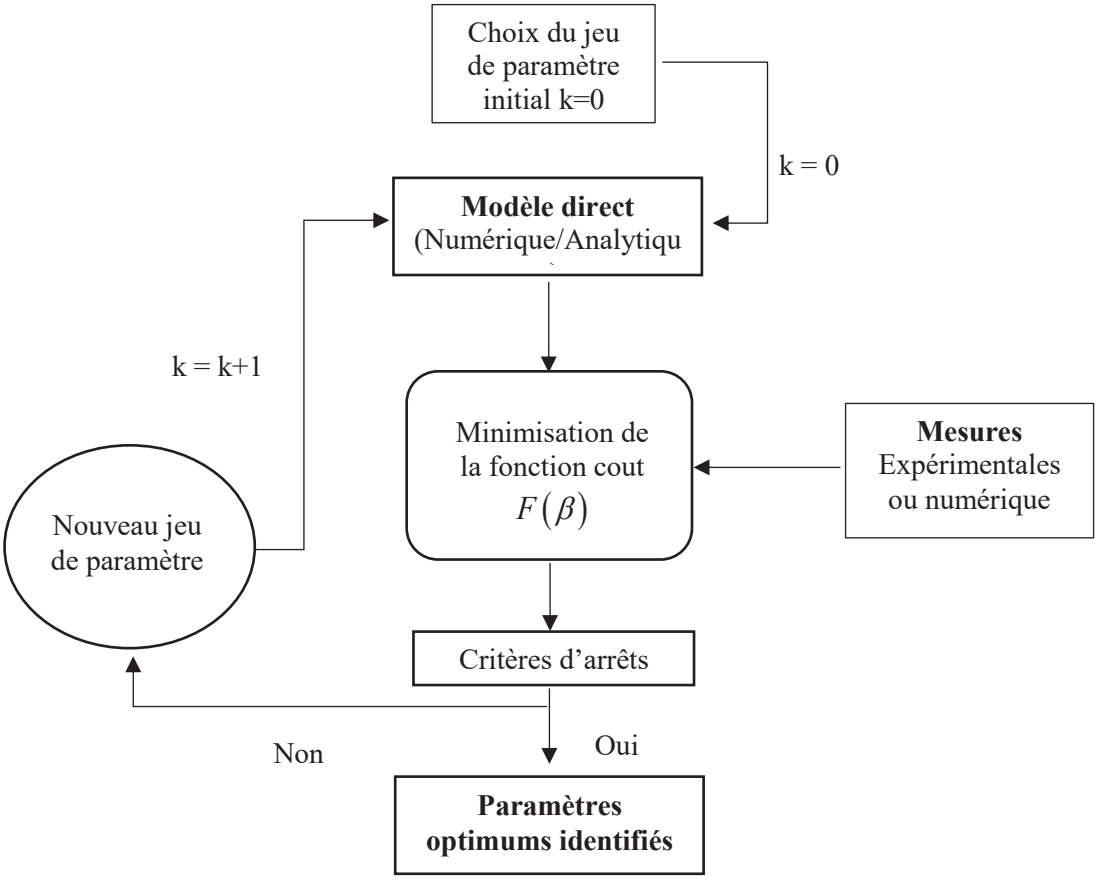


Figure I:8: Schéma général d'optimisation par méthode inverse

I.3.4.1.1. Algorithmes de Gauss-Newton modifiés

En général, dans les problèmes inverses, la matrice *H* est singulière avec un conditionnement tel, qu'on se retrouve confronté aux mêmes problèmes présentés en §I.3.2 ou à une convergence lente et parfois absence de convergence. Parmi les algorithmes de type gradient, variantes de l'algorithme de Gauss-Newton on peut citer : Marquardt, Levenberg-Marquardt, algorithme à région de confiance. L'algorithme de Levenberg-Marquardt permet de diminuer le conditionnement de la matrice *H* en renforçant sa diagonale [46], [47]. Le schéma itératif de cette méthode est donné par l'équation (1.37)

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + [(J^{(k)})^T J^{(k)} + \lambda^{(k)}\Omega^{(k)}]^{-1}(J^{(k)})^T [T - T(\beta^{(k)})] \tag{1.37}$$

La modification de la diagonale tend à rendre le problème plus stable [48]. Cependant, une diagonale trop dominante ne permet pas à l'algorithme de converger. Dans la littérature, différente version de cet algorithme sont présentées. Les différences proviennent du choix de la matrice $\Omega^{(k)}$ et de la manière d'initialiser et de faire varier le paramètre $\lambda^{(k)}$. La matrice $\Omega^{(k)}$ la plus utilisée est la matrice identité.

$$\Omega^{(k)} = I_d \tag{1.38}$$

Une deuxième possibilité existe, Cette matrice est construite en prenant la diagonale de la matrice H^*. Ce choix s'avère plus judicieux dans le cas où les éléments de la matrice Hessienne ont des ordres de grandeurs différents.

$$\Omega^{(k)} = diag[(J^{(k)})^T J^{(k)}] \tag{1.39}$$

Le choix initial du paramètre d'amortissement (hyperparamètre de LM) dépend du conditionnement de la matrice de sensibilité à la première itération. Dans l'algorithme de recalage d'aster [49], l'initialisation de $\lambda^{(0)}$ se fait suivant l'algorithme suivant :

- *Si* $\lambda_{\min} = 0$, *alors,* $\lambda = 10^{-3}\lambda_{\max}$
- *Sinon*
  - *Si* $cond((J^{(0)})^T J^{(0)}) < 10^5$, *alors,* $\lambda = 10^{-16}\lambda_{\max}$
  - *Sinon* $\lambda = \left|(10^5\lambda_{\min} - \lambda_{\max}\right| / 10001$

Dans le dernier cas, la valeur attribuée à λ a pour effet de ramener le conditionnement du H^* à 10^5. Le paramètre d'amortissement évolue à chaque itération. Marquardt [46] propose de commencer avec $\lambda = \lambda^{(0)}$ et un facteur $\mu > 1$. Si la fonctionnelle *F(β)* diminue, on peut utiliser une valeur plus faible de lambda $\lambda = \frac{\lambda}{\mu}$ ce qui fait tendre l'algorithme vers la méthode de Gauss-Newton. Si en revanche une itération est inefficace ou bien peu efficace, on peut augmenter la valeur de $\lambda = \mu\lambda$. D'autre auteur [50], [51] propose des options de recherche du paramètre d'amortissement se basant sur la comparaison

entre l'approximation quadratique et la valeur de la diminution de la fonctionnelle entre deux itérations. Plusieurs dérivé de cet algorithme ont été proposé on peut citer [48]–[51]

I.3.4.1.2. Algorithme quasi-Newton (BFGS)

La méthode présentée précédemment nécessite le calcul du pseudo-Hessien à chaque itération. On a vue dans §I.3.3 que le calcul du Hessien nécessité de calculer une dérivée d'ordre 2. Le calcul de la matrice Hessienne n'est pas tout le temps conseillé voir possible. Dans la méthode de Newton on approximait la matrice Hessienne en « pseudo-Hessien ».

Il existe des méthodes quasi-Newton ne nécessitant pas le calcul de la matrice *H* à chaque itération. La différence entre ces différentes méthodes réside principalement sur la manière de construire la matrice *H* ou plus précisément la matrice *B* approchant l'inverse du Hessien. La méthode BFGS fait partie de ces méthodes. Elle tient son nom des initiales des mathématiciens C. G. Broyden, R. Fletcher, D. Goldfarb et D. F. Shanno, qui l'ont découverte indépendamment à la fin des années 60 [56]. Le calcul du Hessien est nécessaire uniquement lors de la première itération.

I.3.4.2. Pénalisation de l'estimateur

La pénalisation de la solution des moindres carrés permet d'avoir un compromis acceptable entre un système plus stable avec une erreur introduite qui reste tout fois acceptable. Dans la littérature, deux techniques sont proposées pour traiter cette situation indésirable : soit en filtrant le bruit, soit en régularisant la matrice à inverser, afin d'améliorer son conditionnement. Filtrer les mesures brutes mène à une suppression d'information. Il faudrait bien étudier les fréquences à filtrer pour perdre le moins d'information possible. Cette notion ne sera pas abordée dans ce document. Il est généralement préférable d'utiliser l'approche de régularisation de la matrice. L'une des méthodes les plus utilisée est la pénalisation de Tikhonov [57], [58]. Cette technique consiste à modifier l'estimateur des moindres carrés. La fonctionnelle à minimiser de l'équation (1.23) devient :

$$F_\alpha(\beta) = \|Mx - y\|^2 + \alpha_r \|x\|^2 \tag{1.40}$$

Où le paramètre α_r, appelé paramètre de régularisation doit respecter la condition $\alpha_r > 0$. Avant de parler plus en détail de la régularisation de Tikhonov, abordons d'abord la décomposition en valeur singulière des matrices (SVD : Singular Value Decomposition). Il est nécessaire de commencer dans cet ordre car les matrices à inverser dans les systèmes linéaires ne sont pas forcément carrées. Vu que la quantité d'informations est supérieure au nombre d'inconnus les matrices ne sont donc pas carrées. Ces informations supplémentaires permettent de satisfaire la deuxième condition d'Hadamard, l'unicité. Dans le processus d'inversion, il est obligatoire de passer par l'inversion matricielle. La décomposition SVD permet la résolution du système linéaire et facilite l'implémentation de la régularisation de Tikhonov et de la méthode de troncature. Pour plus d'information sur la méthode de décomposition SVD, se référer à l'annexe 1.

I.3.4.2.1. Régularisation de Tikhonov

La méthode de régularisation de Tikhonov consiste donc, à minimiser un critère des moindres carrés modifié. La fonctionnelle en résultant est décrite dans l'équation(1.40). Il faut donc trouver un compromis entre le gain en stabilité et la perte en précision. L'ajout du terme μ conduit à une pénalisation du critère. Sous forme matricielle, le nouveau critère s'écrit :

$$F_{\alpha_r}(x) = (Mx - y)^T (Mx - y) + \alpha_r^2 x^T x \tag{1.41}$$

La minimisation de F_{α_r} mène à la résolution de l'équation suivante :

$$(M^T M + \alpha_r^2 I) x_{\alpha_r} = M^T y \tag{1.42}$$

Où, x_{α_r} est la solution régularisée et I la matrice identité.

En méthode numérique, alourdir la diagonale d'une matrice permet de mieux inverser une matrice [37]. C'est le rôle que joue le terme $\alpha_r I$. L'équation(1.41), ne représente pas le cas général. La méthode générale consiste à introduire un opérateur *R* dans la fonctionnelle. Cette dernière devient :

$$F_{\alpha_r}(x) = (Mx - y)^T (Mx - y) + \alpha_r^2 x^T R^T R x \tag{1.43}$$

La minimisation de F_{α_r} mène à l'équation :

$$(M^T M + \alpha_r^2 R^T R) x_{\alpha_r} = M^T y \tag{1.44}$$

$$(VS^T SV^T + \alpha_r^2 I) x_{\alpha_r} = VS^T U^T y \tag{1.45}$$

Il existe plusieurs ordres dans la régularisation de Tikhonov. L'ordre de la régularisation dépend du choix de l'opérateur *R*.

- Régularisation d'ordre zéro, consiste à prendre $R = I$. Le système linéaire à résoudre dans ce cas est décrit par l'équation(1.42).
- Régularisation d'ordre 1 :

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

- Régularisation d'ordre 2 :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

Lorsque le coefficient α_r est grand, pour une régularisation d'ordre zéro, les composantes du vecteur solution x_{α_r} tendent vers zéro, tandis qu'avec une régularisation d'ordre 1, le vecteur solution voit ses composantes tendres vers la même valeur. Alors qu'une régularisation d'ordre 2, fait apparaitre une relation linéaire entre les composantes de x_{α_r} [59]. Il est important de privilégier la régularisation à l'ordre zéro si on ne dispose d'aucune information sur la forme du vecteur solution x_{α_r} .

I.3.4.2.2. Implémentation de la régularisation de Tikhonov à l'aide de la décomposition SVD.

Une méthode d'analyse et de résolution des problèmes des moindres carrés qui présente un intérêt particulier pour les systèmes mal conditionnés et/ou déficients en rangs est la décomposition en valeurs singulières, ou SVD [60], [61]. Les détails de cette méthode de décomposition sont donnés en annexe.

L'équation (1.42) représente l'ensemble des équations de contraintes pour une régularisation de Tikhonov d'ordre zéro solution de $Mx = y$. En appliquant la décomposition SVD sur la matrice *M* dans cette équation, on trouve :

$$(VS^T U^T USV^T + \alpha_r^2 I)x_{\alpha_r} = M^T y \tag{1.48}$$

$$(VS^T SV^T + \alpha_r^2 I)x_{\alpha_r} = VS^T U^T y \tag{1.49}$$

Prenant, $m = V^T x$, donc $x_{\alpha_r} = Vm$ car $VV^T = V^T V = I$. On aura alors :

$$(VS^T SV^T + \alpha_r^2 VV^T)x_{\alpha_r} = VS^T U^T y \tag{1.50}$$

$$V(S^T S + \alpha_r^2 I)V^T x_{\alpha_r} = VS^T U^T y \tag{1.51}$$

$$(S^T S + \alpha_r^2 I)m = S^T U^T y \tag{1.52}$$

Le système d'équation est facile à résoudre car la matrice à gauche de l'égalité est diagonale, ce qui donne :

$$m_i = \frac{s_i U_{.,i}^T y}{s_i^2 + \alpha_r^2} \tag{1.53}$$

Comme $x_{\alpha_r} = Vm$, on obtient :

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{l} \frac{s_i U_{.,i}^T y}{s_i^2 + \alpha_r^2} V_{.,i} \tag{1.54}$$

Avec, $l = \min(m,n)$ correspondant à toutes les valeurs singulières non nulles. On voit bien que plus le paramètre α_r est grand plus les composants du vecteur solution x_α tendent vers zéro.

I.3.4.2.3. Détermination du paramètre de régularisation.

A partir de cette étape, il suffit d'optimiser le choix du paramètre de régularisation pour calculer les composants du vecteur solution x_α . Un paramètre de régulation proche de zéro privilégie la fidélité aux informations bruts contenues dans le vecteur de mesure *y*. Alors qu'une valeur élevée de ce paramètre, favorise les informations introduites par la régularisation avec les conséquences liées au choix de l'ordre de régularisation. Il est donc nécessaire d'avoir un bon compromis entre précision et stabilité. Il existe plusieurs méthodes pour le choix du paramètre de régularisation. G.H.Golub et al. [62] Proposent une revue des principales méthodes de calcul du paramètre de régularisation. On s'intéressera dans cette partie à deux méthodes différentes. Dans la première il est nécessaire de connaitre à priori l'écart-type du bruit de mesure alors que la seconde ne nécessite pas la connaissance des propriétés du bruit de mesure.

- **Principe de divergence de Morozov**

Pour utiliser cette méthode, il est nécessaire de connaitre soit l'écart-type du bruit de mesure ou bien le signal du bruit blanc *e*. Le paramètre de régularisation α_r est choisi tel que, la norme des résidus et celle du terme d'erreur soient égales.

$$\left\| Mx_{\alpha_r} - y \right\| = \left\| e \right\| \tag{1.55}$$

La valeur du paramètre de régularisation peut être définie selon ce principe comme la valeur qui interdit au processus d'inversion d'aller au-delà d'une minimisation faisant apparaitre des résidus moins importants que le bruit de mesure. On définit le RMSR (Root Mean Square Residual) qui représente la racine de la somme des résidus selon les moindres carrés, rapportés au nombre de mesures effectuées.

$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N_f} \left(y_i^{\mathrm{mod}} - y_i \right)^2}{N_m - 1}} \tag{1.56}$$

Où y_i^{mod} représentent les valeurs recalculées par estimation et y_i le vecteur des mesures.

À la vue de la condition de Morozov, on peut écrire :

$$RMSR \geq \sigma_m \tag{1.57}$$

Quand le paramètre de régularisation est optimal on a :

$$RMSR = \sigma_m \tag{1.58}$$

On cherche donc la valeur de $\alpha_{r_{Optimal}}$ solution de l'équation(1.59).

$$\min\left(\sqrt{\frac{\left(M\sum_{i=1}^{p}\frac{s_i U_{.,i}^T y}{s_i^2+\alpha_{r_{Optimal}}^2}V_{.,i}-y\right)^T\left(M\sum_{i=1}^{p}\frac{s_i U_{.,i}^T y}{s_i^2+\alpha_{r_{Optimal}}^2}V_{.,i}-y\right)}{N_m}}-\sigma_m\right) \quad (1.59)$$

- **La méthode L-Curve**

Le critère de la courbe en *L* est basé sur le tracé de la norme du vecteur solution $\left\|x_{\alpha_r}\right\|_2$ en fonction de la norme des résidus $\left\|Mx-y\right\|_2$ pour différente valeur de α_r en échelle logarithmique. Cette méthode a été proposée par P.C.Hansen [61]–[63] . Elle permet de retrouver une valeur quasi-optimale de α_r . En échelle logarithmique, cette courbe est en forme de *L* la valeur optimale de α_r correspond au point angulaire de cette courbe.

I.3.4.3. Régularisation par troncature spectrale

Une condition qui assure la stabilité de la solution résulte naturellement de l'équation (5.10) est la condition de Picard discrète [44]. La condition discrète de Picard est satisfaite lorsque les produits scalaires des colonnes de la matrice U et le vecteur des mesures *y* tend vers zéro plus rapidement que les valeurs singulières. Dans cette condition, nous ne devrions pas voir d'instabilité en raison de petites valeurs singulières. La condition de Picard discrète peut être évaluée en traçant le rapport $\frac{U_{.,i}.y}{s_i}$.

Même si la condition de Picard discrète n'est pas satisfaite, il est encore possible de récupérer un modèle utile en tronquant la série pour *x* au terme $p'<p$, pour produire une solution SVD tronquée. Cette méthode est appelée TSVD (Truncated SVD). p' est appelé ordre de troncature. Une façon de décider où tronquer la série consiste à appliquer le principe de divergence de Morozov. On cherche donc la valeur de p' satisfaisant l'équation (1.60).

$$\min\left(\sqrt{\frac{\left(M\sum_{i=1}^{p'}\frac{s_i U_{.,i}^T y}{s_i^2}V_{.,i}-y\right)^T\left(M\sum_{i=1}^{p'}\frac{s_i U_{.,i}^T y}{s_i^2}V_{.,i}-y\right)}{N_m}}-\sigma_m\right) \quad (1.60)$$

I.3.4.4. Exemple d'application

Prenons le système matriciel $y=Mx$ donnée par l'équation(1.61). Ce système matriciel est couramment utilisé pour illustrer les phénomènes d'instabilités [66].

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

La solution de ce système linéaire est :

$$x = [1,1,1,1]^T \tag{1.62}$$

On introduit un bruit de mesure décrivant une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et un écart-type de $\sigma_m = 0.1$. On calcule le vecteur solution *x* pour 1000 essais différents. La répartition de chacune des composantes du vecteur *x* sont représentées sur la .

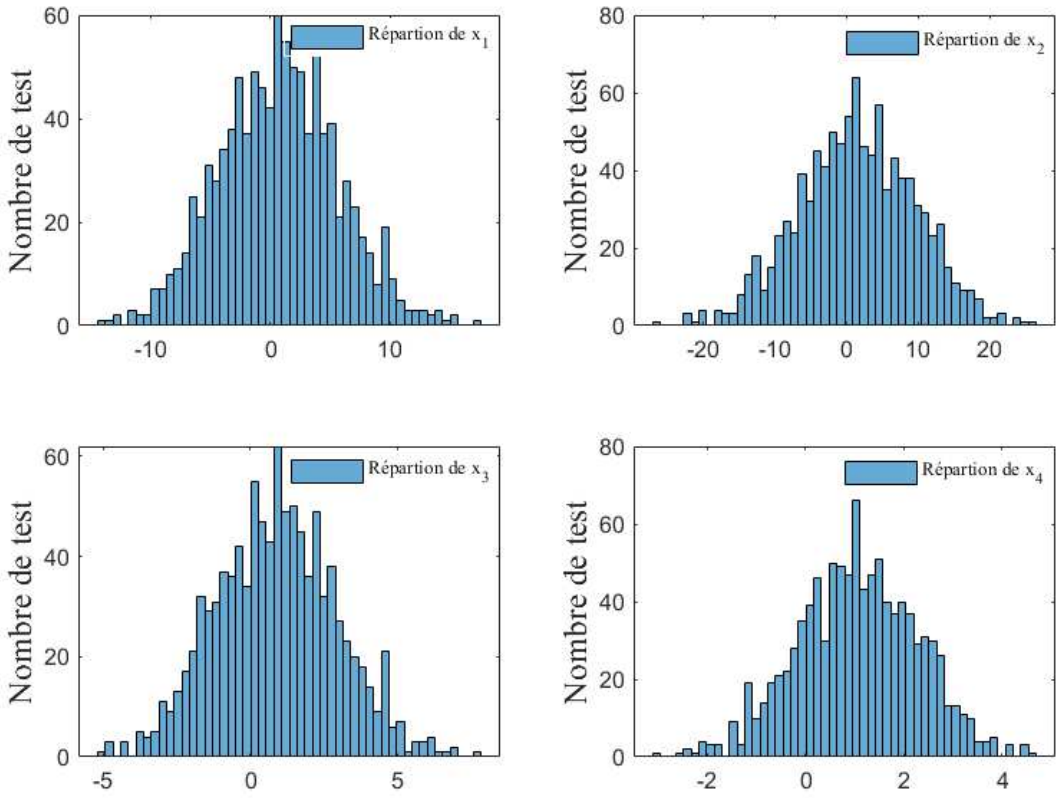


Figure I:9 : Répartition des composantes du vecteur solution

On voit bien que cette petite fluctuation sur le vecteur des mesures a engendré une erreur très significative sur le calcul du vecteur des solutions *x*. L'écart-type de chacune des répartitions sont données par l'équation

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= 4.7872 \\ \sigma_{x_2} &= 7.9252 \\ \sigma_{x_3} &= 1.9944 \\ \sigma_{x_4} &= 1.1850 \end{aligned} \tag{1.63}$$

On peut deviner que la matrice de *M* du système linéaire (1.61) est mal conditionnée. Pour en avoir la certitude, on peut calculer le conditionnement de la matrice.

$$\kappa(M) = \frac{v_{p_{\max}}}{v_{p_{\min}}} = \frac{30.2887}{0.0102} = 2969.5 \tag{1.64}$$

On peut aussi calculer l'amplitude du facteur l'erreur relative [43] avec la formule suivante :

$$e_F = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\left[\frac{\|\delta y\|}{\|y\|}\right]^{-1} \tag{1.65}$$

On calcul ce facteur noté e_F pour chacun des 1000 essais et donne sa valeur minimale et maximale, ainsi que sa moyenne et son écart-type.

$$\begin{aligned} &\min(e_F) = 18.7076 \\ &\max(e_F) = 2951.9 \\ &std(e_F) = 796.74 \\ &mean(e_F) = 1242.2 \end{aligned} \tag{1.66}$$

On utilise dans un premier temps une régularisation de Tikhonov couplée à la méthode de divergence de Morozov pour la détermination du paramètre de régularisation. La Figure I:10 donne les répartitions des éléments du vecteur solution *x* après régularisation. L'écart-type de chacune de ces répartitions est faible alors que leur moyenne sont décalées par rapport à la solution réel du problème. Cela traduit bien le fait que la régularisation par pénalisation de l'estimateur stabilise le système mais introduit des erreurs.

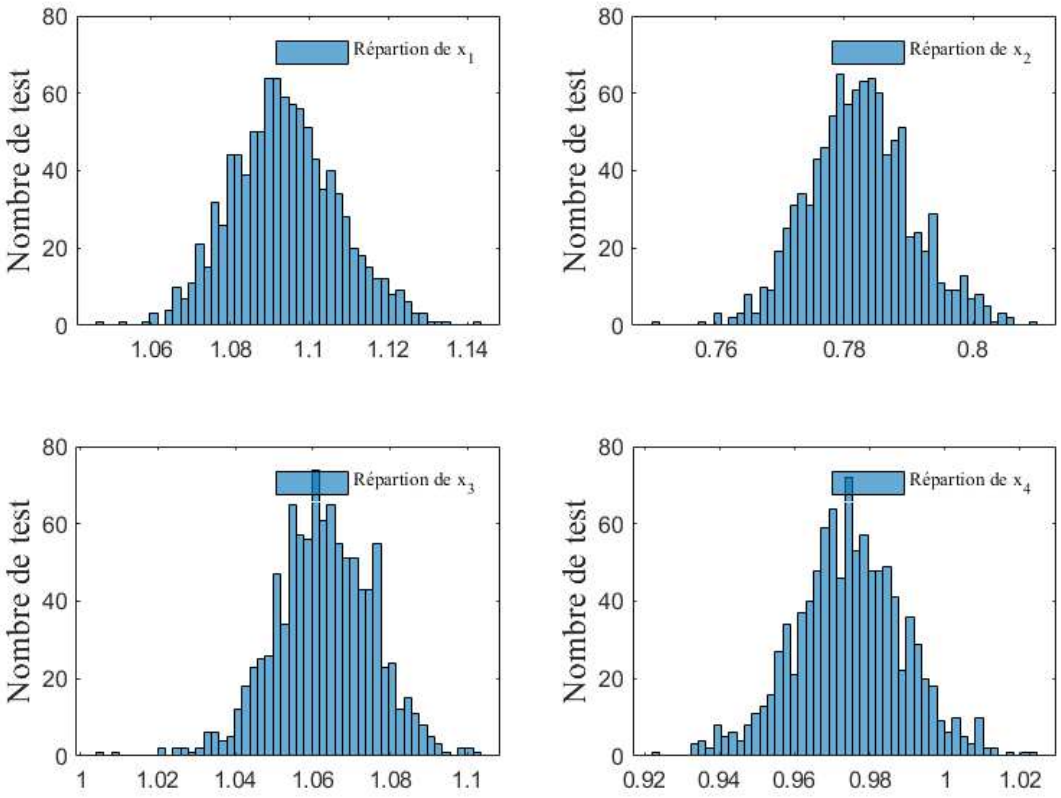


Figure I:10 : Répartition des valeurs du vecteur *x* avec régularisation de Tikhonov

Pour le même système linéaire testons la régularisation par troncature (TSVD). L'ordre de troncature est calculé suivant le critère de divergence de Morozov. Pour chacun des 1000 essai, la valeur de p' représentant l'ordre de troncature qui satisfait l'équation (1.60) est $p' = 3$.

Le Tableau I-1 donne les écarts-type et les moyennes pour chacun des éléments du vecteur *x*, sans régularisation et avec régularisation de Tikhonov et par la méthode TSVD.

Tableau I-1 : Différence des moyennes et des écarts-type des répartitions du vecteur solution

	sans régularisation		**Tikhonov**		**Troncature**	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ
X_1	1.0820	4.9596	1.0934	0.013	1.0474	0.0017
X_2	0.8683	8.2137	0.7817	0.008	0.7535	0.0012
X_3	1.0232	2.0692	1.0621	0.0124	1.0938	0.0018
X_4	0.9883	1.229	0.9761	0.015	1.0323	0.0017

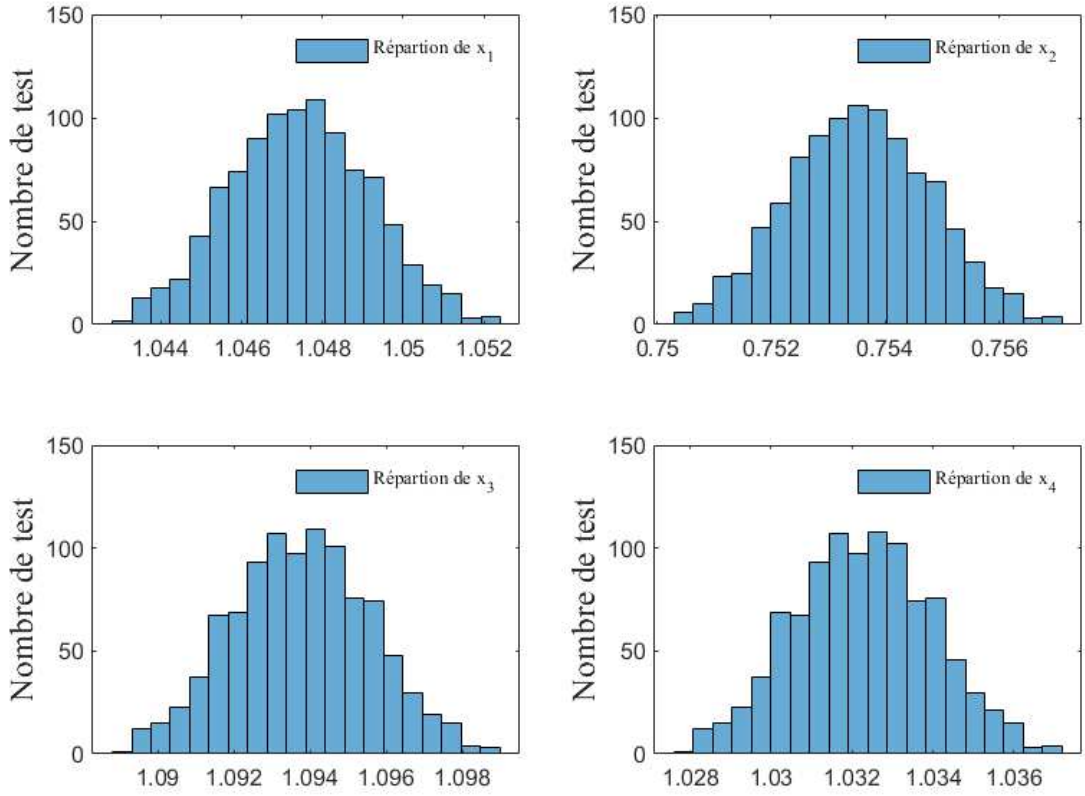


Figure I:11 : Répartition des composants du vecteur *x* avec régularisation par troncature

On constat que sur les 1000 essais, la moyenne des valeurs du vecteur solution *x* calculée est proche des valeurs exactes avec et sans régularisation. En revanche, la différence entre les résultats avec régularisation donne des répartitions avec des écarts-type très faible. Dans cet exemple, la régularisation a introduit un biais qui a permis de stabiliser la solution. Il n'apparait aucune différence notable entre les deux méthodes de régularisation dans cet exemple.

Il est intéressant aussi d'étudier pour ce cas l'influence de l'ordre de régularisation. On a vu dans les paragraphes précédents que l'ordre de régularisation influe sur la nature de la relation entre les valeurs du vecteur solution. Dans ce cas d'étude, les paramètres du vecteur *x* sont égales. En considérant les informations données dans la dernière partie du paragraphe §I.3.4.2.1, une régularisation d'ordre 1 serait préférable à un ordre 0.

Afin de vérifier cette affirmation, on résout ce système linéaire en utilisant la régularisation de Tikhonov avec les trois ordres différents. Les répartitions pour la valeur de x_1 calculés sans régularisation et les trois ordres de régularisation de Tikhonov sont présentés dans la Figure I:12. Les différentes valeurs de moyennes et d'écart-types sont quant à elle données dans le Tableau I-2.

Les résultats confirment bien le fait l'ordre de la régularisation influe sur la qualité de l'inversion. Si on connait à priori la relation entre les paramètres un ordre de régularisation sera plus avantageux que les

autres. Dans le cas de ce système linéaire, un ordre 1 est plus adapté car les valeurs du vecteur x sont identiques.

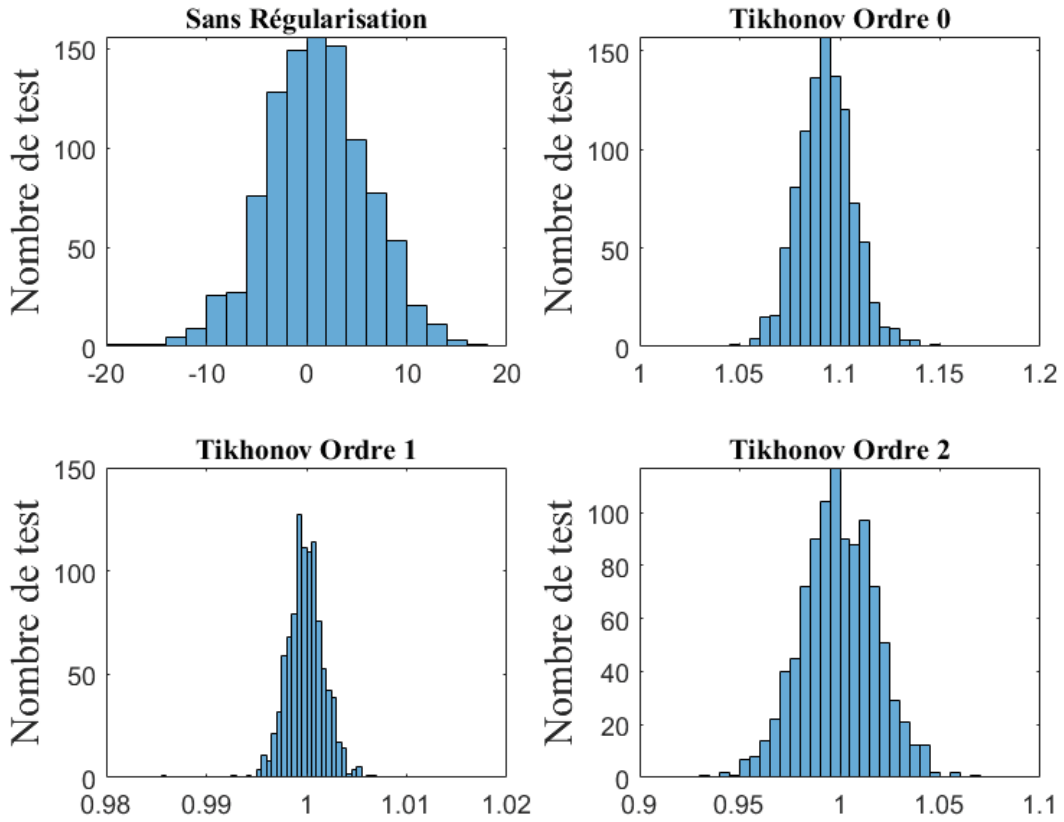


Figure I:12 : Répartition des résultats pour x_1 sans régularisation et avec régularisation de Tikhonov à différents ordres.

Tableau I-2 : Différence des moyennes et des écarts-type des répartitions du vecteur solution

	sans régularisation		**Tikhonov Ordre 0**		**Tikhonov Ordre 1**		**Tikhonov Ordre 2**	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
x_1	1.0225	5.0675	1.0930	0.0135	0.9999	0.0018	0.9996	0.0187
x_2	0.9625	8.3897	0.7819	0.0084	0.9999	0.0018	0.9998	0.0068
x_3	1.0082	2.1080	1.0630	0.0121	1	0.0018	1.0001	0.0059
x_4	0.9956	1.2511	0.9753	0.0146	1	0.0019	1.0003	0.0177

I.3.5. Contrôle en dimension

Les techniques de contrôle en dimension consistent à diminuer le nombre de degrés de liberté du problème inverse à étudier. Cela peut se faire par la diminution du nombre d'inconnus à estimer, filtrage des données mesurées ou bien par réduction de modèle [59].

I.3.5.1. Paramétrisation

La paramétrisation est une méthode de régularisation couramment utilisée dans les problèmes inverses de conduction thermique [43], [59], [24]. Elle est notamment appliquée à l'estimation de grandeurs variables, tel que le flux de chaleur ou bien l'évolution d'une température. En plus du gain de temps d'exécution indéniable lié à la diminution du nombre de paramètres, on enlève toute dépendance entre le maillage, le nombre de paramètres à estimer et le conditionnement de la matrice Hessienne.

I.3.5.2. Spécification de fonctions

L'estimation de fonctions se distingue de l'estimation des paramètres lorsqu'un grand nombre de valeurs doit être identifiés. En règle générale, les fonctions à estimer sont dépendantes du temps ou de la température. La procédure de spécification de fonctions est appelée ainsi parce que la nature sous-jacente de la fonction estimée est supposée ou spécifiée. En règle générale, on utilise une forme simple de fonction afin de la spécifier, telle qu'une fonction constante par morceaux ou une fonction linéaire par morceaux est supposée. Dans la méthode de spécification de fonction séquentielle, les composants de la fonction sont déterminés un par un dans l'ordre plutôt que tous à la fois dans un processus classique. Cette méthode séquentielle a été introduite par Beck [45], [67], [68]. Elle a ensuite été utilisée dans de nombreux travaux [69], [70]. Cette méthode utilise les données des pas de temps postérieurs pour construire les résidus (estimateur des moindres carrés) à minimiser à l'instant de calcul.

$$F(\beta^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{M} \left[\tilde{T}(x_j, t_{k+i}) - T\left(\beta^{(k)}\right)(x_j, t_{k+i}) \right]^2 \tag{1.67}$$

Ou, k représente l'instant de calcul et n_f représente le nombre de pas de temps futur.

Une des hypothèses les plus simples à utiliser consiste à supposer le paramètre à estimer constant sur le r pas de temps futur. Cette hypothèse mène à la construction d'une fonction constante par morceaux. Cela revient donc à utiliser r mesures au lieu d'une seule. En introduisant des données supplémentaires, cette méthode permet donc de régulariser la solution. On peut évidemment utiliser d'autres hypothèses sur la variation des paramètres. On peut par exemple imaginer une évolution linéaire ou bien en spline.

On peut aussi coupler deux méthodes de régularisation différentes. Une régularisation de Tikhonov pour chaque horizon temporel dans une procédure d'estimation par spécification de fonction peut être utilisée. La fonctionnelle à minimiser dans ce cas est donnée par l'équation(1.68).

$$F(\beta^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{M} \left[\tilde{T}(x_j, t_{k+i}) - T\left(\beta^{(k)}\right)(x_j, t_{k+i}) \right]^2 + \alpha_r^2 \left\| \beta^{(k)} R \right\| \tag{1.68}$$

I.3.6. Contrainte du domaine

Une autre voie pour la régularisation consiste à contraindre le domaine de recherche des paramètres à estimer. En forçant la recherche de la solution dans un intervalle on limite les possibilités de convergence

de la solution vers des minimums locaux aberrant physiquement. Cela se traduit par la recherche de la solution dans un domaine inclue dans $\Re^+$. Si on cherche à estimer un coefficient représentant un pourcentage, on cherche une solution $\beta \in [0,1] \subset \Re^+$. Il existe plusieurs méthodes de minimisation permettant d'introduire des contraintes. On peut citer l'algorithme de la région de confiance [71], la méthode du simplex et d'autre algorithme adapté au problèmes quadratiques [49], [72].

I.4. Conclusion

L'étude bibliographique de la thermique du contact statique et glissant présentée dans ce chapitre propose plusieurs modélisations, que ce soit sur le plan microscopique (à l'échelle d'une aspérité) ou macroscopique (à l'échelle de la surface de contact) du problème. Le modèle retenu pour l'étude du transfert de chaleur lors du frottement fait appel à une équation de couplage et trois paramètres macroscopiques. Une étude antérieure a montré que ces paramètres étaient impactés par l'évolution des paramètres dynamiques lors du contact glissant. Afin de prendre en considération ces variations, une modification sera introduite au modèle, cette modification introduit le caractère variable des paramètres à estimer. La connaissance des paramètres thermiques des matériaux soumis au contact frottant est importante. Alors, il est nécessaire de les caractérisé. Des études bibliographiques détaillées traitant de ce sujet sont citées dans cette partie. Une brève présentation des techniques retenues pour la caractérisation des matériaux utilisés dans les différentes études de cette thèse est réalisée. Une approche par méthode inverse est indispensable à l'estimation des paramètres de contact glissant et des paramètres thermiques lors de la caractérisation des matériaux. Les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, au sens d'Hadamard. L'instabilité est la principale difficulté proposée par les méthodes inverses. Il existe des techniques permettant de rétablir une certaine stabilité du modèle. Ce regain de stabilité ne peut se faire que par une modification sensible du problème à résoudre. Cela est possible grâce aux techniques de régularisations. Différentes méthodes sont présentées avec une comparaison entre les régularisations de Tikhonov à différents ordres et la technique de la troncature de spectre.

Partie II. Etude numérique de la caractérisation d'une interface en contact frottant

L'étude de Bauzin et al. [27] a été réalisée en considérant des paramètres de contacts constants.

Dans cette étude, les résidus de température après identification étaient signés aux premiers instants [27, Fig. 8]. Cette signature omniprésente dans tous les essais réalisés est due au fait que les paramètres de contact soient variables et aussi dus au fait que la mise en vitesse de l'éprouvette n'est pas instantanée et passe par une phase transitoire avant d'atteindre la valeur de consigne. La constante de temps du moteur a donc un impact sur la durée de cette phase transitoire. On peut aussi imaginer des sollicitations différentes, avec un régime de sollicitation du moteur périodique ou autres. À partir de ces résultats, il est apparu nécessaire de considérer des paramètres de contact variables.

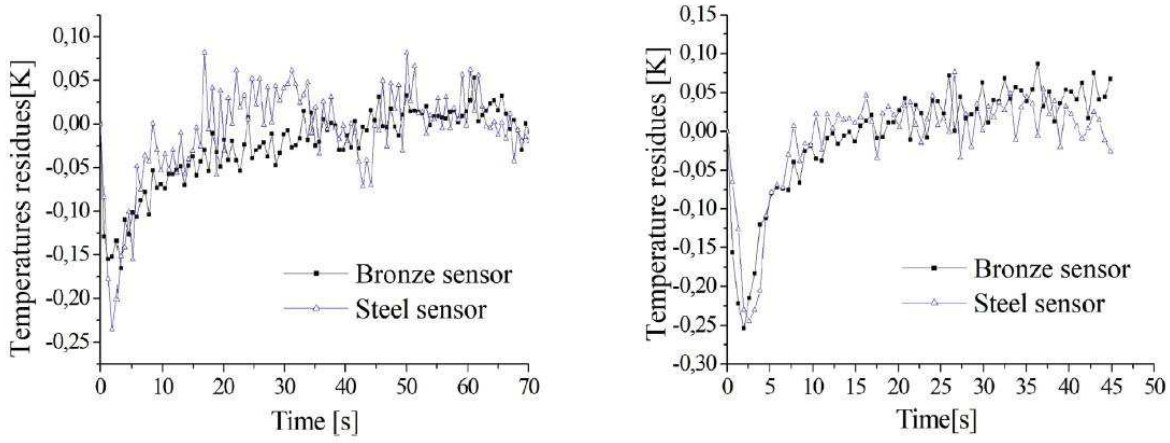


Figure II:1 : Procédure d'estimation avec hypothèse de paramètres constants [27, Fig. 8]

Dans cette partie sera développée puis validée une procédure permettant de prendre en considération la nature variable de ces paramètres de contacts. L'estimation de paramètres thermiques caractérisant le contact glissant est un problème inverse. Dans un premier temps, les équations décrivant le phénomène thermique étudié seront présentées. Ensuite, on abordera les différentes techniques permettant la résolution du problème d'estimation de fonction traité. Pour finir, on procèdera à une validation numérique des résultats d'estimation avec une étude sur l'influence des différentes incertitudes sur les paramètres supposément connus.

II.1. Modèle direct

Pour la modélisation et la mise en équation des phénomènes liés à la thermique des contacts glissants, le modèle de contact imparfait glissant sec développé par Bardon [22] a été privilégié. Ce modèle thermique fait intervenir trois paramètres macroscopiques et une équation de couplage. Il prend en compte les effets liés à la constriction et la partition du flux de chaleur généré par le frottement. La configuration expérimentale à laquelle nous nous intéressons est celle du frottement entre deux cylindres

creux en contact axial afin de faciliter la possibilité d'une condition de diffusion de la chaleur en 1D [73]. Le problème est modélisé par deux corps en contact frottant, avec une densité de flux généré au niveau de l'interface notée ϕ_g . Comme les parois latérales sont isolées, ce flux est entièrement partagé entre les deux corps. On définit donc une grandeur adimensionnelle, notée α , qui représente la fraction ϕ_g allant du côté du matériau 1. α est le coefficient de partage intrinsèque du flux généré. La résistante thermique de contact glissant est notée R_{cg}, son inverse, la conductance, est quant à elle notée h_{cg}. Cette configuration est représentée schématiquement en modèle 1D sur la Figure II:2.

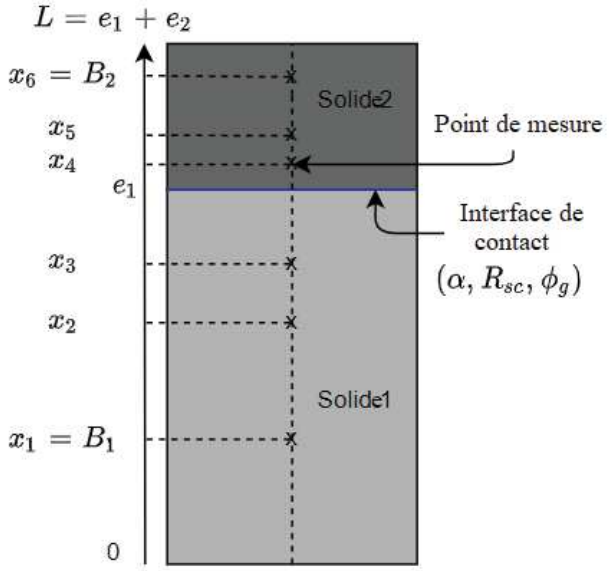


Figure II:2: Représentation schématique du modèle 1D

Le problème étudié est un modèle 1D de diffusion de la chaleur à travers deux corps en contact frottant sec. Les deux solides ont une longueur finie (e_1, e_2) et sont délimités à l'abscisse $x = 0$ à la fin du solide 1 et $x = e_1 + e_2$ à la fin du solide 2. Les conditions limites sont prisent en $x = B_1$ et $x = B_2$. L'équation de la chaleur sera résolue entre ces deux points. Les équations (2.1) et (2.2) régissent le phénomène thermique dans les solides 1 et 2.

Dans le solide 1 ($B_1 \le x \le e_1$)

$$
\begin{aligned}
& a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = 0 \\
& K_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x=e_1} = \alpha(t)\phi_g(t) + h_{cg}(t)\left[T_2(e_1,t) - T_1(e_1,t)\right] \\
& T_1(B_1,t) = \tilde{T}_1(t) \quad \text{Températures mesurées} \\
& T_1(x,0) = T_0(x)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Dans le solide 1 ($e_1 \le x \le B_2$)

$$
\begin{aligned}
& a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = 0 \\
& -K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=e_1} = \left[1-\alpha(t)\right]\phi_g(t) + h_{cg}(t)\left[T_1(e_1,t) - T_2(e_1,t)\right] \\
& T_2(B_2,t) = \tilde{T}_2(t) \qquad \text{Températures mesurées} \\
& T_2(x,0) = T_0(x)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Ces équations sont résolues numériquement par la méthode des différences finies. Ce modèle représente notre modèle direct permettant le calcul des températures lors de l'exécution de la procédure d'inversion.

II.2. Modèle inverse

L'estimation des paramètres $\alpha(t), R_{cg}(t)$ et $\phi_g(t)$ est réalisée en minimisant la différence entre températures mesurées et les températures calculées selon le critère des moindres carrés. La fonctionnelle à minimiser est donnée par l'équation (2.3):

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left[T(\beta)_i^j - \tilde{T}_i^j\right]^2 \\
F &= \left[T(\beta) - \tilde{T}\right]^T \left[T(\beta) - \tilde{T}\right]
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Ou,

T est le vecteur des températures calculées au temps *i* et la position *j* à partir des paramètres estimés.

$\tilde{T}$ est le vecteur des températures mesurées au temps *i* et à la position *j*. N est le nombre de pas de temps et M le nombre de capteurs.

$$
T = \left[T_1^1 \;\; T_2^1 \ldots T_N^1 \;\; T_1^2 \;\; T_2^2 \ldots T_i^j \ldots T_N^M\right]^T \tag{2.4}
$$

$$
\tilde{T} = \left[\tilde{T}_1^1 \;\; \tilde{T}_2^1 \ldots \tilde{T}_N^1 \;\; \tilde{T}_1^2 \;\; \tilde{T}_2^2 \ldots \tilde{T}_i^j \ldots \tilde{T}_N^M\right]^T \tag{2.5}
$$

β_c est le vecteur des paramètres

$$
\begin{aligned}
\beta &= \left[\beta_\alpha \, \beta_{h_{sc}} \beta_{\phi_g}\right]^T \\
\beta &= \left[\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \alpha_N \;\; h_{cg_1} \ldots h_{cg_n} \ldots h_{cg_N} \ldots \phi_{g_1} \ldots \phi_{g_n} \ldots \phi_{g_N}\right]^T
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

II.3. Procédures d'estimation

Comme mentionné précédemment, l'estimation des paramètres variables est un problème inverse, donc très probablement mal posé par construction. Si on prend une fréquence d'échantillonnage $f_e = 20s^{-1}$, à cause des effets diffusifs dans les transferts de chaleurs à de telles fréquences, les paramètres successifs seront fortement couplés et donc impossibles à identifier. Il est à noter que le temps de réponse d'un

thermocouple de type *K* de 100 μm de diamètre est très faible, en plus il est utilisé SCA (Soudure Chaude Apparente) ce qui diminue encore le temps de réponse. Il est quasiment impossible d'identifier les paramètres de contact à chaque pas de temps. En plus, le nombre de paramètres à identifier est $N_T = 3 \times f_e \times temps$. Un grand nombre de paramètres induits un temps de calcul conséquent. Il est donc nécessaire de développer des stratégies permettant de diminuer le nombre de paramètres et aussi de les découpler.

Deux méthodes ont été investiguées dans cette thèse :

1- La méthode de l'horizon glissant (Spécification de fonction).

2- Paramétrisation couplée à un algorithme de minimisation plus efficient [§II.3.3].

Il est nécessaire de recourir à ces méthodes de régularisations comme indiqué au chapitre précédant.

Ces deux méthodes seront décrites et testées et validées dans une étude numérique, ou leurs avantages et leurs inconvénients seront décrits.

II.3.1. La méthode de l'horizon glissant (Spécification de fonction)

La spécification de fonction est une méthode de régularisation des problèmes inverses qui a fait l'objet de plusieurs études citées précédemment [69], [70]. Dans cette méthode on définit deux paramètres de réglage. La Longueur de l'Horizon (LH*)* et le Pas de Décalage de l'Horizon (*PDH*). Dans chaque intervalle *LH*, les paramètres sont supposés constants, on note qu'il est possible de faire l'hypothèse de paramètre linéaire. On exécute une procédure d'identification de paramètres constants pour le premier intervalle d'une longueur *LH*. Le vecteur des paramètres de contact propre au premier intervalle est noté β_{c1}. En fonction de la valeur du *PDH*, le nouvel intervalle est construit. On doit donc recalculer les températures initiales dans cet intervalle en utilisant β_{c1} . En continuant itérativement on trouve finalement un vecteur $\beta_{HG} = [\alpha_{HG}, h_{cg_{HG}}, \phi_{g_{HG}}]$ dont la longueur dépend des paramètres *LH* et *PDH*. La Figure II:3 représente un schéma de la procédure itérative à suivre. Prenant l'exemple d'une fréquence d'échantillonnage $f_e = 20 s^{-1}$, pour une *LH* et un *PDH* de 1s, la taille du vecteur des paramètres identifiés β_{HG} est calculé à partir de l'équation (2.7).

$$\beta_{HG} = 3 \times \left[1 + \frac{(temps - LH)}{PDH} \right] \tag{2.7}$$

II.3.2. Méthode de paramétrisation

Le premier intérêt de cette méthode est de diminuer le nombre de valeurs à identifier pour chaque paramètre $\alpha(t), h_{cg}(t)$ et $\phi_g(t)$. Les intervalles d'interpolation sont pris comme étant réguliers. La

fréquence de paramétrisation f_p, choisie devra forcément être inférieure à la fréquence d'échantillonnage f_e . La variation des paramètres est supposée linéaire en chaque intervalle. La Figure II:4 représente un schéma de cette paramétrisation.

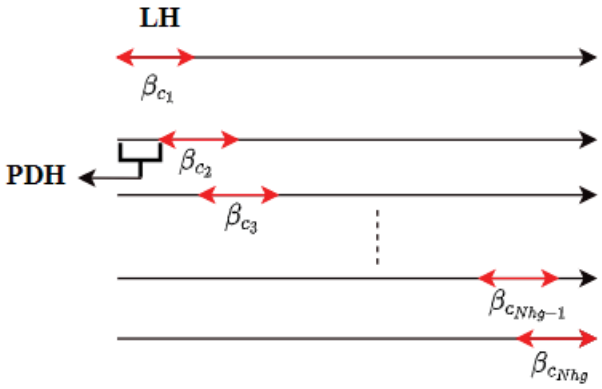


Figure II:3: Schéma explicatif de la méthode de l'horizon glissant

Pour chacun des paramètres de contact le nombre d'inconnus à identifier est $N_p = f_p \times temps.$ Le nombre total de valeurs à identifier est donc :

$$N_T = 3 \times N_p ; N_T = 3 \times f_p \times temps \tag{2.8}$$

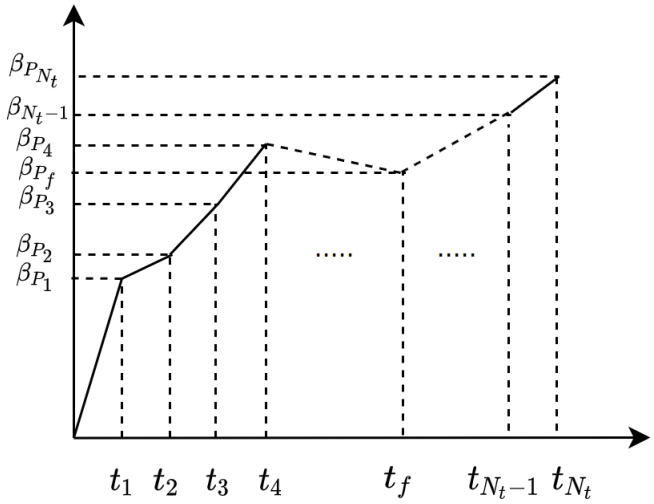


Figure II:4 :Schéma de la procédure de paramétrisation

Le vecteur des paramètres à identifier devient donc :

$$\beta = \left[\beta_\alpha \, \beta_{h_{sc}} \beta_{\phi_g} \right]^T$$
$$\beta = \left[\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \alpha_{N_p} \;\; h_{sc_1} \ldots h_{sc_n} \ldots h_{sc_{N_p}} \ldots \phi_{g_1} \ldots \phi_{g_n} \ldots \phi_{g_{N_p}} \right]^T \tag{2.9}$$

Toute paramétrisation peut bien sûr introduire un biais. Afin d'éviter d'avoir des biais de modèle important et rédhibitoire, il faudra donc choisir une fréquence de paramétrage f_p introduisant un biais minime. Cette problématique sera abordée au paragraphe §II.4.1.3.1

II.3.3. Procédure de minimisation « LM » utilisée.

Nous utilisons un algorithme de Levenberg-Marquardt modifié pour la minimisation de fonctionnelle. L'algorithme en question sera nommé par suite LM-Borné. Dans la construction de cet algorithme, deux techniques de régularisations seront utilisées simultanément. D'une part, à travers l'utilisation de la méthode de Levenberg-Marquardt, la minimisation d'un critère modifié permet de diminuer le conditionnement de la matrice pseudo-Hessienne et donc de stabiliser le système linéaire à résoudre à chaque itération. D'autre part, une contrainte du domaine sera appliquée pour restreindre la recherche d'un jeu de paramètres dans un intervalle physiquement acceptable. La contrainte des paramètres se fait par le biais d'une méthode basée sur un changement de variable donné dans les (2.13), (2.14) et (2.17). L'espace des paramètres bornés est nommé espace *x*, alors que l'espace *y* représente l'espace dans lequel la procédure sera développée Eq (2.10).

$$x_{espace}\begin{cases} \beta_{\alpha_n} \in [0,1] \\ \beta_{h_{sc\,n}} \in [0,+\infty[\\ \beta_{\phi_{g\,n}} \in [0,+\infty[\end{cases} ; y_{espace}\begin{cases} \beta_{\alpha_n} \in]-\infty\ ,+\infty[\\ \beta_{h_{sc\,n}} \in]-\infty\ ,+\infty[\\ \beta_{\phi_{g\,n}} \in]-\infty\ ,+\infty[\end{cases} \tag{2.10}$$

L'algorithme est construit comme suite :

Après initialisation du paramètre de LM λ^0 et du vecteur des paramètres recherché β_0, on calcule le Jacobien à l'aide de l'équation (2.11). Ensuite, à l'aide des équations (2.13) et (2.14), on calcule β_0 et le Jacobien dans l'espace E_Y. Puis, on résout l'équation (2.15) et on calcule le vecteur des paramètres à l'itération suivante dans l'espace E_X à l'aide des équations (2.16) et (2.17). Le calcul du paramètre de Levenberg-Marquardt pour l'itération suivante se fait à l'aide des équations (2.18)-(2.20). Pour finir, on vérifie les critères d'arrêt, si aucun d'eux n'est atteint, on redémarre à partir de l'équation (2.21).

1) Initialisation de l'algorithme pour $k = 0$, β^0 vecteur des paramètres d'initialisation $F^0 = F\left(\beta_q^0\right)$, λ^0 [51].

2) Calcul du Jacobien dans l'espace *x* :

$$J_{\beta_q}^k = \left[\frac{\partial F_1^{1k}}{\partial \beta_q^k} \cdots \frac{\partial F_N^{1k}}{\partial \beta_q^k} \cdots \frac{\partial F_i^{jk}}{\partial \beta_q^k} \cdots \frac{\partial F_N^{Mk}}{\partial \beta_q^k} \right]^T \tag{2.11}$$

Donc :

$$J_\beta^k = \left[J_{\beta_1}^k \cdots J_{\beta_{N_T}}^k \right] \tag{2.12}$$

3) Calcul de $\beta_q \in y_{space}$, vecteur des solutions dans l'espace *y* :

$$\beta_q^k\Big|_{\in y_{space}} = \frac{ub_q + lb_q}{2} \times sin^{-1}\left(\frac{2\,\beta_q^k\Big|_{\in x_{space}} - \left(lb_q + ub_q\right)}{ub_q - lb_q}\right) \tag{2.13}$$

4) Calcul du Jacobien dans l'espace *y* :

$$J^k_{\beta_q^k \in y_{space}} = J^k_{\beta_q^k \in x_{space}} \times dj_q^k \quad ; \quad dj_q^k = \cos\left(\frac{2\,\beta_q^k\Big|_{\in y_{space}}}{ub_q - lb_q}\right) \tag{2.14}$$

5) Résolution de l'équation de LM pour $\Delta\beta^k$ et calcul de $\beta^{k+1} \in y_{space}$:

$$\left[\left(J_\beta^k\right)^T J_\beta^k + \lambda \times diag\left(\left(J_\beta^k\right)^T J_\beta^k\right)\right]\Delta\beta^k = \left(J_\beta^k\right)^T \times F_0 \tag{2.15}$$

Donc :

$$\beta^{k+1} = \beta^k + \Delta\beta^k \tag{2.16}$$

6) Revenir à l'espace *x* :

$$\beta_q^{k+1}\Big|_{\in x_{space}} = \frac{lb_q + ub_q}{2} + \frac{ub_q - lb_q}{2}\sin\left(\frac{2\,\beta_q^{k+1}\Big|_{\in y_{space}}}{ub_q - lb_q}\right) \tag{2.17}$$

7) Calcul de λ^{k+1}

Bazaraa et al. [51] proposent une méthode efficiente de calcul de λ . Ils définissent la grandeur *R*, Eq (2.18). Cette grandeur représente le ratio entre la diminution de la fonctionnelle et la diminution prévu de l'approximation quadratique $q(Z)$,Eq (2.19).

$$R = \frac{F\left(\beta^k\right) - F\left(\beta^{k+1}\right)}{q\left(\beta^k\right) - q\left(\beta^{k+1}\right)} \tag{2.18}$$

Avec $\beta \in x_{space}$

$$q\left(Z\right) = F\left(\beta^k\right) + \nabla F\left(\beta^k\right)^T\left(Z - \beta^k\right) + \frac{1}{2}\left(Z - \beta^k\right)^T\left[\left(J^k\right)^T J^k + \lambda I\right]\left(Z - \beta^k\right) \tag{2.19}$$

$$If \quad ; \quad \begin{array}{ll} R < 0.25 & ; \ \lambda^{k+1} = \lambda^k \times 15 \\ R > 0.75 & ; \ \lambda^{k+1} = \dfrac{\lambda^k}{10} \end{array} \qquad else \ ; \ \lambda^{k+1} = \lambda^k \tag{2.20}$$

8) Critère d'arrêt

L'algorithme converge lorsque l'un des critères d'arrêt suivant est atteint :

$$\max\left[\frac{\left|\Delta\beta_q^k\right|}{\beta_q^k}\right]<\varepsilon_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\left\|\nabla F\left(\beta^k\right)\right\|}{\left\|\nabla F\left(\beta^0\right)\right\|}<\varepsilon_2 \tag{2.21}$$

ε_1 est l'erreur maximum admissible de la variation du paramètre β_q après calcul à l'itération *k*.

ε_2 est un critère d'arrêt basé sur la diminution du gradient de la fonctionnelle.

On prend $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$.

II.4. Etude numérique

Une étude numérique sur la faisabilité d'une estimation de fonction est effectuée dans cette partie. Le problème étudié est celui présenté en §II.1. Les formes des fonctions à identifier sont inconnues. Plusieurs formes de paramètres de contacts sont testées pour valider la procédure d'estimation dans cette partie. Les équations donnants les paramètres utilisés pour la génération des données numériques sont données par l'équation (2.22). Commençons d'abord par le cas présenté sur la Figure II:6. Ces paramètres présentent une partie transitoire et une partie stationnaire tendant vers une valeur asymptotique. Cette forme de paramètres de contacts est utilisée dans un premier temps car on a constaté dans la précédente étude expérimentale [27] que la signature des résidus était présente au premiers instants. D'autres formes de paramètres seront traitées dans cette partie, une forme sinusoïdale et une succession d'échelon.

Tableau II-1: Configuration numérique

Pas de temps (s)	**Écart-type du bruit blanc (°C)**
0.05	0.08

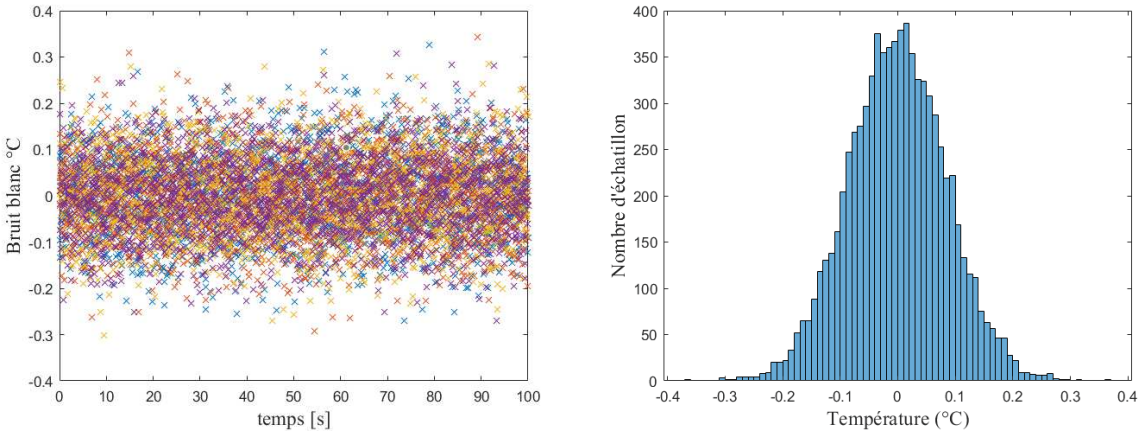


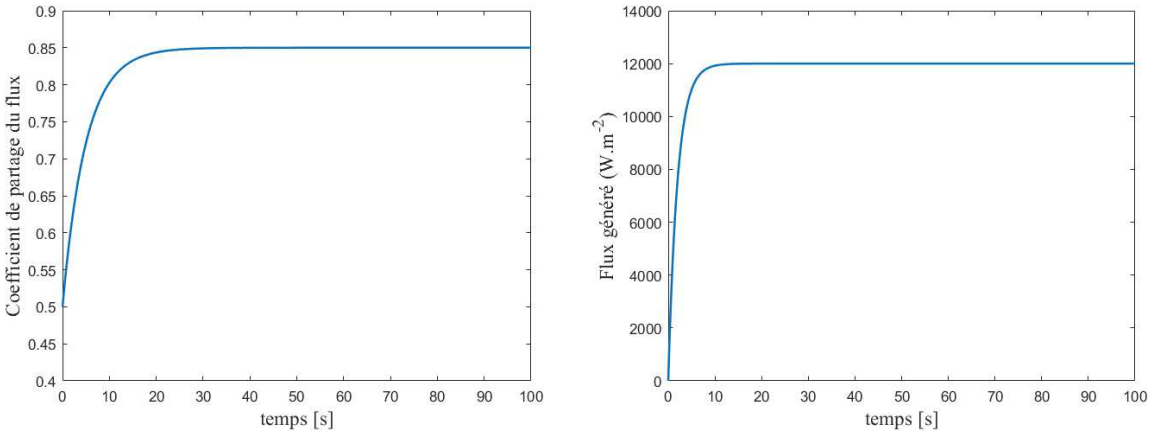
Figure II:5: Bruit blanc numérique utilisé dans le cadre de cette étude.

Les températures générées sont bruitées pour mieux correspondre à la réalité. La répartition du bruit utilisé suit une loi normale de moyenne $\mu = 0°C$ et un écart-type $\sigma = 0.08°C$ (Figure II:5). Les propriétés thermiques sont calculées à l'aide des méthodes de caractérisation de matériaux présentées

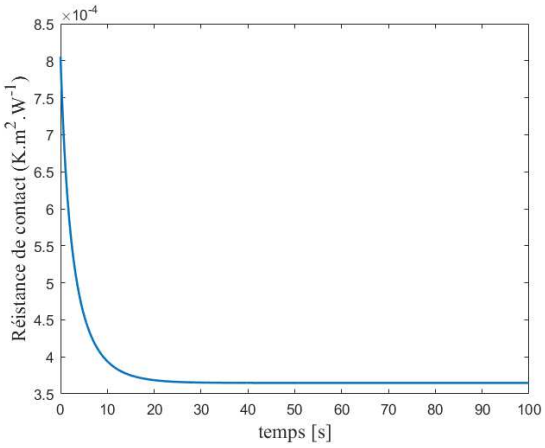
en §I.2.1. On utilise dans cette étude numérique, les propriétés des matériaux utilisés dans l'étude expérimentale et données dans le Tableau II-2.

Tableau II-2: Propriétés thermiques des matériaux.

	Acier	**Bronze**
Conductivité thermique $\left(W.m^{-1}.K^{-1}\right)$	43	64
Diffusivité thermique x10^{-6} $\left(m^2.s^{-1}\right)$	11	24



a) Coefficient de partage b) Flux généré



c) Résistance de contact

Figure II:6: Paramètres de contact variables de génération

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5 + 0.35\left(1 - e^{-(t/10)}\right) \\ h_{cg} &= h_{cg_{statique}} + 1200\left(1 - e^{-(t/10)}\right) \\ \phi_g &= 12000\left(1 - e^{-(t/10)}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Tableau II-3 : Valeurs initiales et asymptotiques des paramètres physiques

Paramètre physique	Valeur initiale	Valeur asymptotique
Coefficient de partage	0.5	0.85
Conductance de contact	1500	2700
Flux généré	0	12000

II.4.1. Analyse de sensibilité et problème de corrélation

Dans un premier temps on analyse les sensibilités des paramètres. Cette étude permettra d'avoir deux informations cruciales, statuer sur la faisabilité de l'identification et observer l'existence de corrélations entre les paramètres. La sensibilité de chacun des paramètres physiques à estimer dépend du temps. La valeur de la sensibilité d'un paramètre β_n, pris au pas de temps *n* sera plus élevé au voisinage de *n* et tendra vers une valeur nulle au-delà et en amont de sa zone d'influence temporelle.

II.4.1.1. Analyse de sensibilité

Comme le montre la Figure II:7, les sensibilités des paramètres α_n, h_{cg_n} et ϕ_{g_n} ont la forme d'un pseudo Dirac. Le maximum est atteint au pas de temps *n*. L'écart-type est non nul mais reste très petit, cela veut dire que l'influence des paramètres est restreinte dans le temps. La valeur maximum de la courbe des sensibilités sera appelée la sensibilité réduite maximale. Cette valeur nous permettra d'avoir l'ordre de grandeur des sensibilités de α_n, h_{cg_n} et ϕ_{g_n}. La courbes des sensibilités réduites de chaque paramètre physique a la même nature (pseudo Dirac). En traçant les mêmes courbes de sensibilités réduites en échelle logarithmique on constate une forte corrélation entre les paramètres α_n et h_{cg_n}. Cette corrélation sera traitée plus en profondeur dans le paragraphe §II.4.1.2.

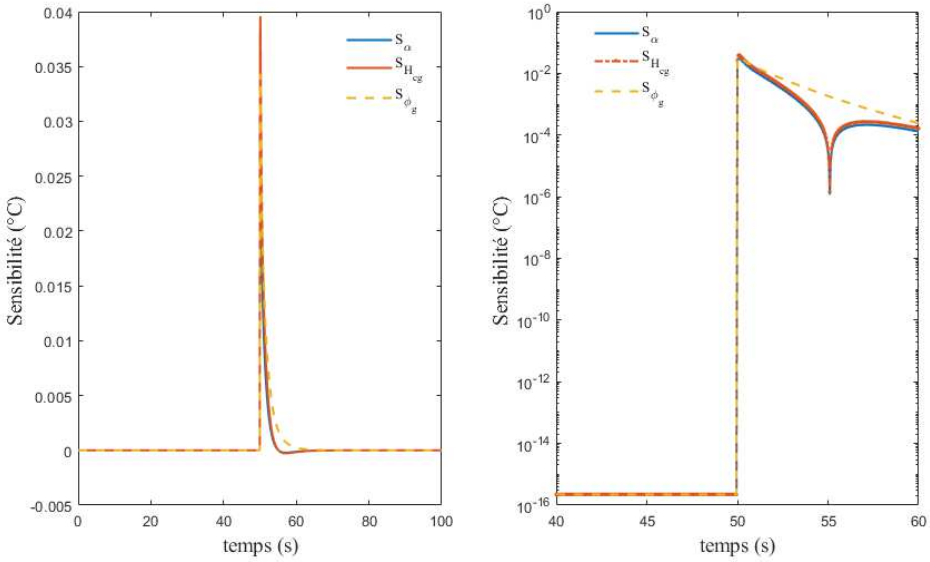


Figure II:7 Sensibilités réduites aux paramètres à l'indice *n*

Influence de la fréquence d'échantillonnage

La fréquence d'échantillonnage peut avoir une influence sur la sensibilité des paramètres. On cherche donc à analyser cet effet en traçant les courbes de sensibilités $S_{\alpha_n}, S_{h_{cg_n}}$ et $S_{\phi_{g_n}}$ pour différents pas de temps en se basant sur des données générées numériquement. Les pas de temps testés sont $\Delta t = [1, 0.5, 0.1, 0.05] s$. La figure ci-dessous représente l'évolution de la sensibilité réduites des paramètres à l'indice de temps *n* correspondant à 50s pour différents pas de temps de simulation. On constate que la valeur de la sensibilité maximale augmente avec l'augmentation de la valeur du pas de temps. Ce résultat a nourri l'idée d'avoir recours à une paramétrisation des paramètres en vue de leurs estimations. Le Tableau II-4 donne les valeurs des sensibilités réduites maximale pour chacun des paramètres.

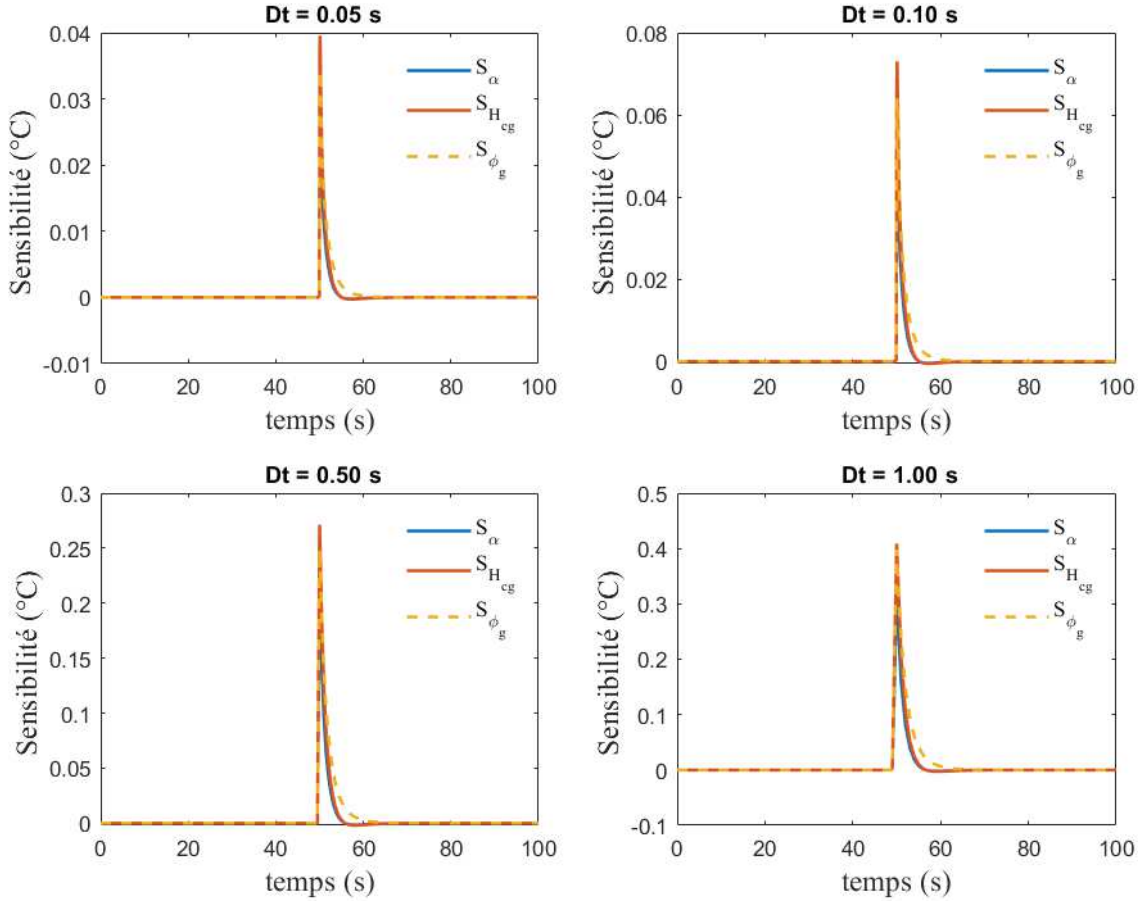


Figure II:8: Influence du pas de temps sur les sensibilités réduites

Tableau II-4 : Sensibilités réduites en fonction du pas de temps

Pas de temps (s)	0.05			0.1			0.5			1		
Sensibilité réduites maximale à 50s	S_{α_n}	$S_{h_{cg_n}}$	$S_{\phi_{g_n}}$	S_{α_n}	$S_{h_{cg_n}}$	$S_{\phi_{g_n}}$	S_{α_n}	$S_{h_{cg_n}}$	$S_{\phi_{g_n}}$	S_{α_n}	$S_{h_{cg_n}}$	$S_{\phi_{g_n}}$
	0.03	0.04	0.034	0.06	0.07	0.06	0.2	0.3	0.25	0.3	0.4	0.4

II.4.1.2. Analyse des corrélations

Afin de confirmer l'existence de corrélations et mettre en évidence leurs intensités, on calcule la matrice de corrélation. Le calcul du coefficient de corrélation entre deux paramètres β_q et β_r est donnée par l'équation(2.23).

$$CC\left(X_{\beta_q}, X_{\beta_r}\right) = \frac{\left(X_{\beta_q}^T X_{\beta_r}\right)}{\sqrt{\left(X_{\beta_q}^T X_{\beta_q}\right)\left(X_{\beta_r}^T X_{\beta_r}\right)}} \tag{2.23}$$

Les coefficients de corrélation qui forme la matrice de corrélation seront affichées en code couleur. Les coefficients de corrélation supérieurs à 95 % seront affichés en couleur rouge. La Figure II:9 présente la matrice de corrélation du problème inverse à résoudre. Les différentes sous matrices nécessaires à la bonne compréhension seront représentées et discutées. Pour plus de clarté et de lisibilité, on se focalisera sur les zones entourées par un carré de couleur rouge. Ces différentes sous matrices représentent les différentes corrélations existantes entre les paramètres β_{p_m} et β_{q_n}, ces sous-matrices seront notées $CC_{(\beta_p,\beta_q)}$.

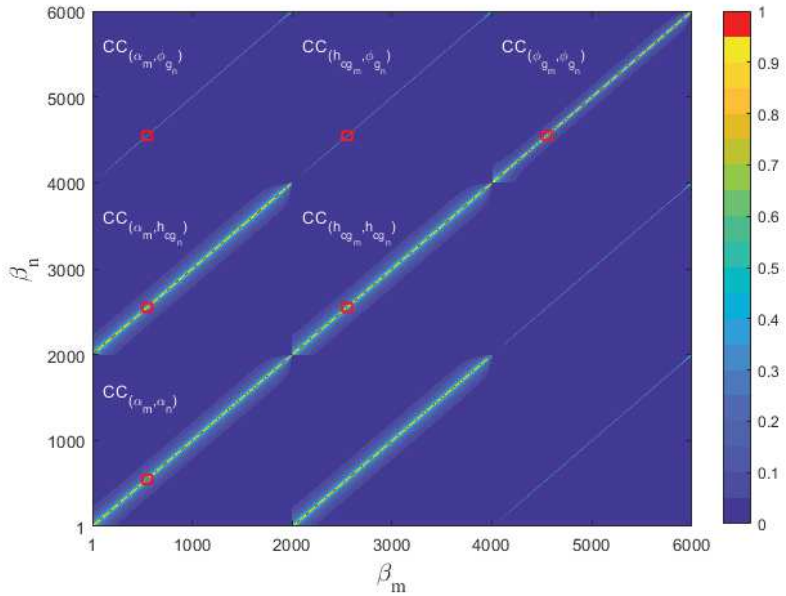


Figure II:9: Matrice de corrélation

a) Corrélation entre des paramètres de contact identique β_p et β_p

Il est évident d'avoir une corrélation totale entre un paramètre avec lui-même. La diagonale de la matrice principale ne contient donc que des valeurs égales à 1, $CC_{(\beta_{p_i},\beta_{p_i})} = 1$. En revanche, comme le montre Figure II:10.D on retrouve des corrélations supérieures à 95% entre un paramètre β_{p_i} et les deux suivants

$\beta_{p_{i+1}}, \beta_{p_{i+2}}$, et donc par symétrie $\beta_{p_{i-1}}, \beta_{p_{i-2}}$. Cette problématique sera abordée plus en détail dans le paragraphe §II.4.1.3.

Les problématiques de stabilités engendrées par une corrélation supérieure à cette valeur ne peuvent plus être compensées par une régularisation ou autre technique de stabilisation [24].

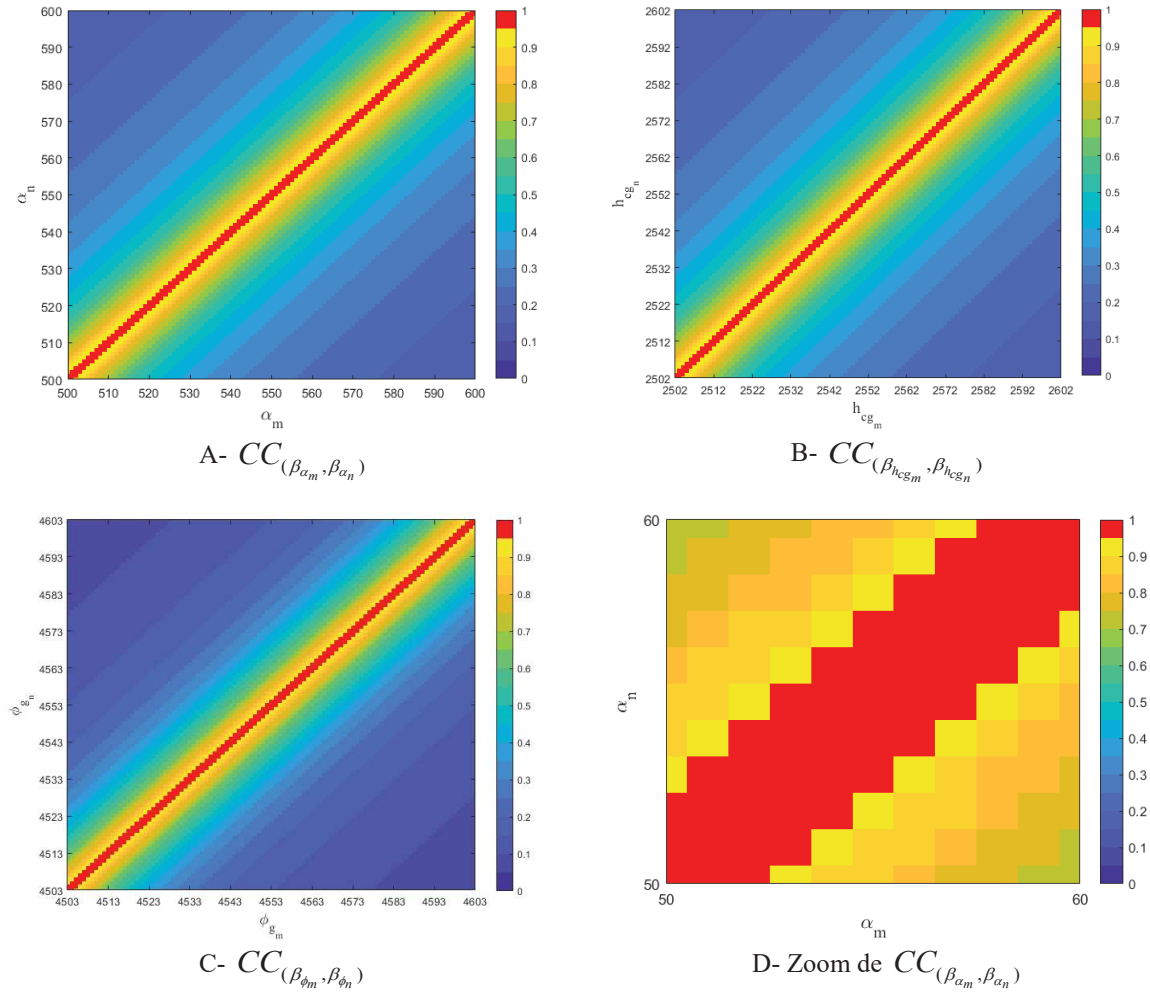


Figure II:10: Sous matrice de corrélation pour $CC_{(\beta_p,\beta_p)}$ à différents agrandissements

b) Corrélation entre des paramètres de contact différent β_p et β_q

Cette étude fait apparaitre deux tendances :

- Corrélation entre le flux généré ϕ_g et les deux autres paramètres.

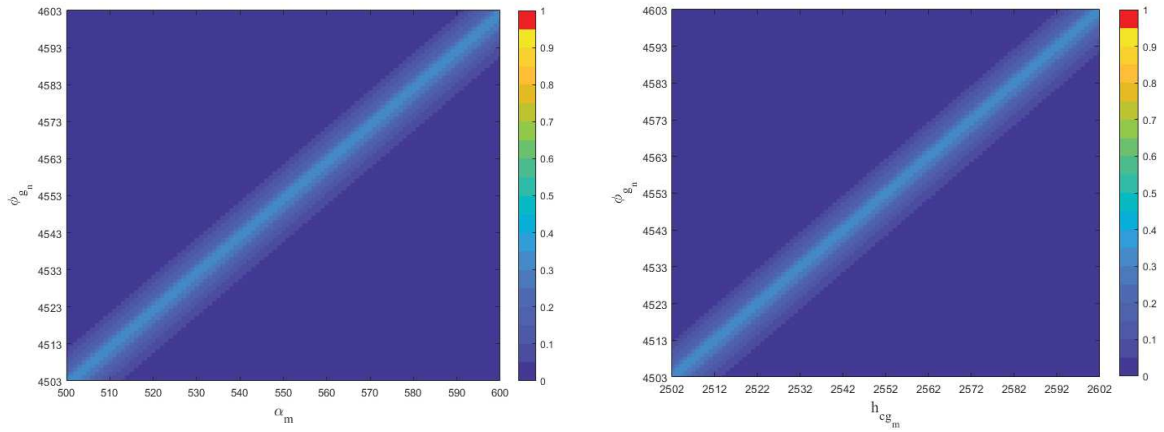


Figure II:11: Sous matrice de corrélation entre le flux et les deux autres paramètres

La Figure II:11 montre que les corrélations du flux généré avec le coefficient de partage et la conductance de contact glissant sont faibles. Ces valeurs ne posent aucun problème pour une estimation. En plus, cette non-corrélation ne dépend pas des valeurs numériques des paramètres.

- Corrélation entre le coefficient de partage α et la conductance de contact glissant h_{cg}

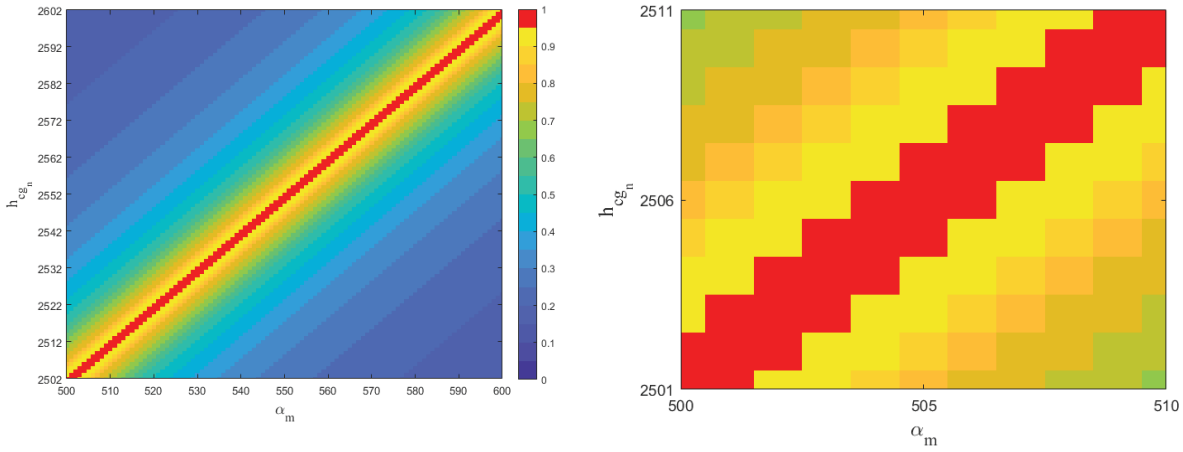


Figure II:12: Sous matrice de corrélation entre le coefficient de partage et la conductance de contact $CC_{(\alpha_p, h_{cg_p})}$ à différents agrandissements.

La Figure II:12 représente les différents coefficients de corrélation entre le coefficient de partage et la conduction. Une corrélation supérieure à 95% est clairement visible dans cette figure entre les coefficients diagonaux $CC_{(\beta_{\alpha_i}, \beta_{h_{cg_i}})}$ et entre les coefficients diagonaux et leurs plus proches voisins $CC_{(\beta_{\alpha_i}, \beta_{h_{cg_{i-1}}})}$ et $CC_{(\beta_{\alpha_i}, \beta_{h_{cg_{i+1}}})}$.

Influence de la fréquence d'échantillonnage.

Dans le paragraphe précédent, on a constaté une corrélation élevée entre un paramètre β_{p_i} et ses plus proches voisins $\beta_{p_{i+1}}, \beta_{p_{i+2}}$ et donc par symétrie les deux précédents $\beta_{p_{i-1}}, \beta_{p_{i-2}}$. Le pas de temps utilisé

est $\Delta t = 0.05s$. On cherche dans ce paragraphe à voir l'influence du pas de temps et donc de la fréquence d'échantillonnage sur ce type de corrélation. Pour cela, on calcul les coefficients de corrélation pour différents pas de temps et on compare les coefficients de corrélation adjacent. Les pas de temps testés sont $\Delta t = [1, 0.5, 0.1, 0.05]s$. Les résultats sont présentés dans la Figure II:13.

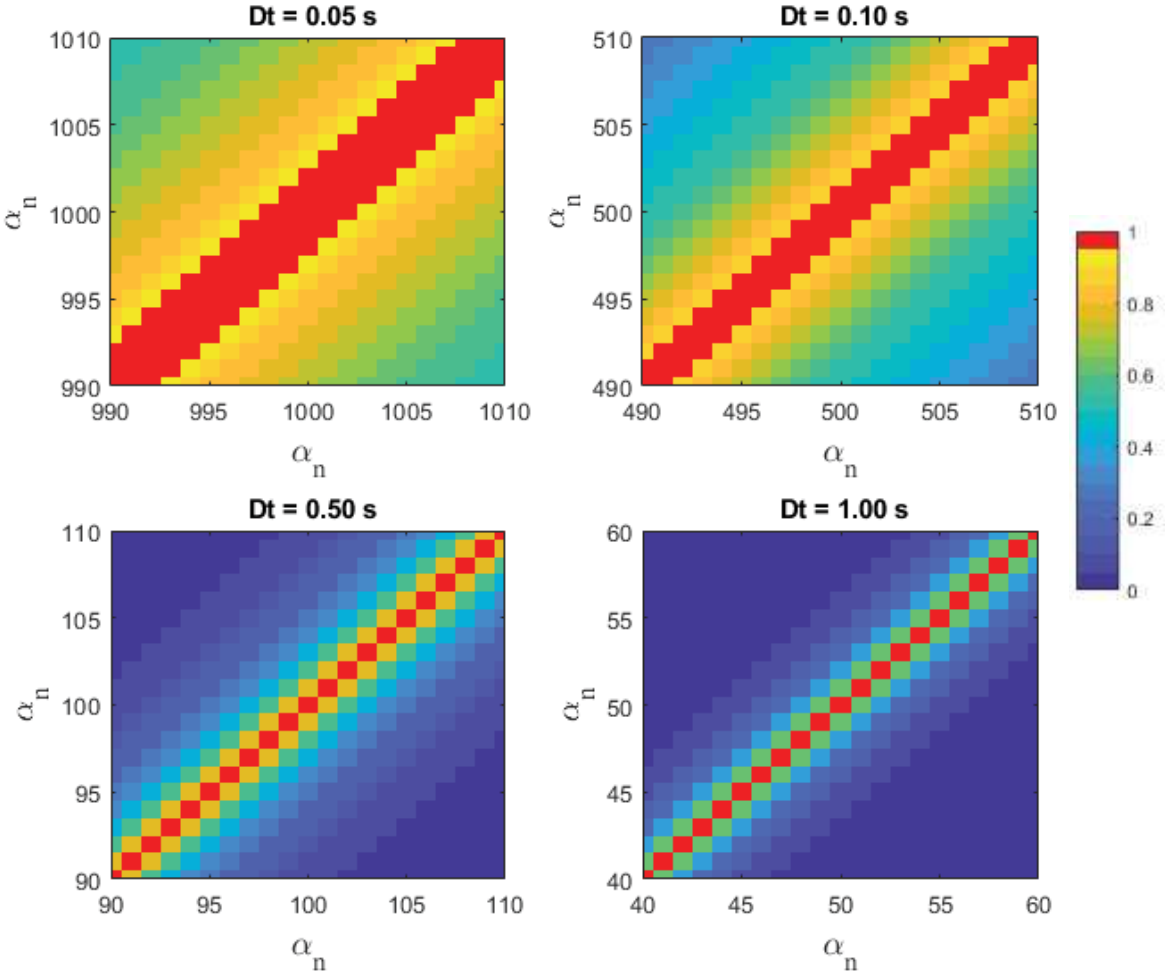


Figure II:13 : Influence du pas de temps sur les matrices de corrélation $CC_{(\beta_{i_m},\beta_{i_n})}$

Comme attendue, ce type de corrélation est lié au nombre de points de mesures et donc cela dépend de la fréquence d'échantillonnage. On peut donc utiliser une fréquence d'échantillonnage moins élevé pour atténuer cette corrélation. A partir d'un pas de temps supérieur ou égale à 0.2s, les corrélations entre les paramètres d'indice *i* avec leur plus proche voisin, sont inférieur à 90%.

Toutefois, cela induit une diminution du nombre de mesures et peut altérer la procédure de minimisation. On verra dans le paragraphe §II.4.2 que le nombre de mesures influes bel et bien sur la qualité de l'estimation des paramètres. Il est donc nécessaire d'utiliser une autre méthode pour éliminer ces corrélations tout en bénéficiant d'un nombre suffisant de mesures. La paramétrisation est une solution

possible afin de résoudre ce problème. Il faut tout fois bien choisir la fréquence de paramétrisation. On reviendra sur ces considérations dans la partie II.4.1.3

II.4.1.3. La paramétrisation comme solution aux corrélations

Nous avons donc distingué deux problèmes de corrélation distincts. Le premier concerne un terme diagonal de la matrice de corrélation et ses deux plus proches voisins. On a constaté dans les paragraphes précédents que ce type de corrélation existe aussi dans toutes les sous-matrices de corrélation. Le pas de temps utilisé est $\Delta t = 0.05s$ et le temps de mesure $t_{final} = 100s.$ Dans ce chapitre sera mis en évidence l'impact de la paramétrisation sur la sensibilité des paramètres et des corrélations existantes. Mais avant tout, il est nécessaire de savoir si cette paramétrisation introduit un biais et de pouvoir l'anticiper.

II.4.1.3.1. Biais de paramétrisation

Le choix de la fréquence de paramétrisation influe sur les biais introduits au modèle, la vitesse d'exécution de la procédure d'estimation et sur la faisabilité de la décorrélation. Il est évident que la fréquence de paramétrisation doit être inférieure à la fréquence d'échantillonnage $f_p < f_e$. Pour étudier les biais introduits par la paramétrisation, on trace la différence entre les températures calculées par le modèle direct et les températures calculées par le modèle direct utilisant la paramétrisation. Ensuite, on compare le résultat avec le bruit blanc.

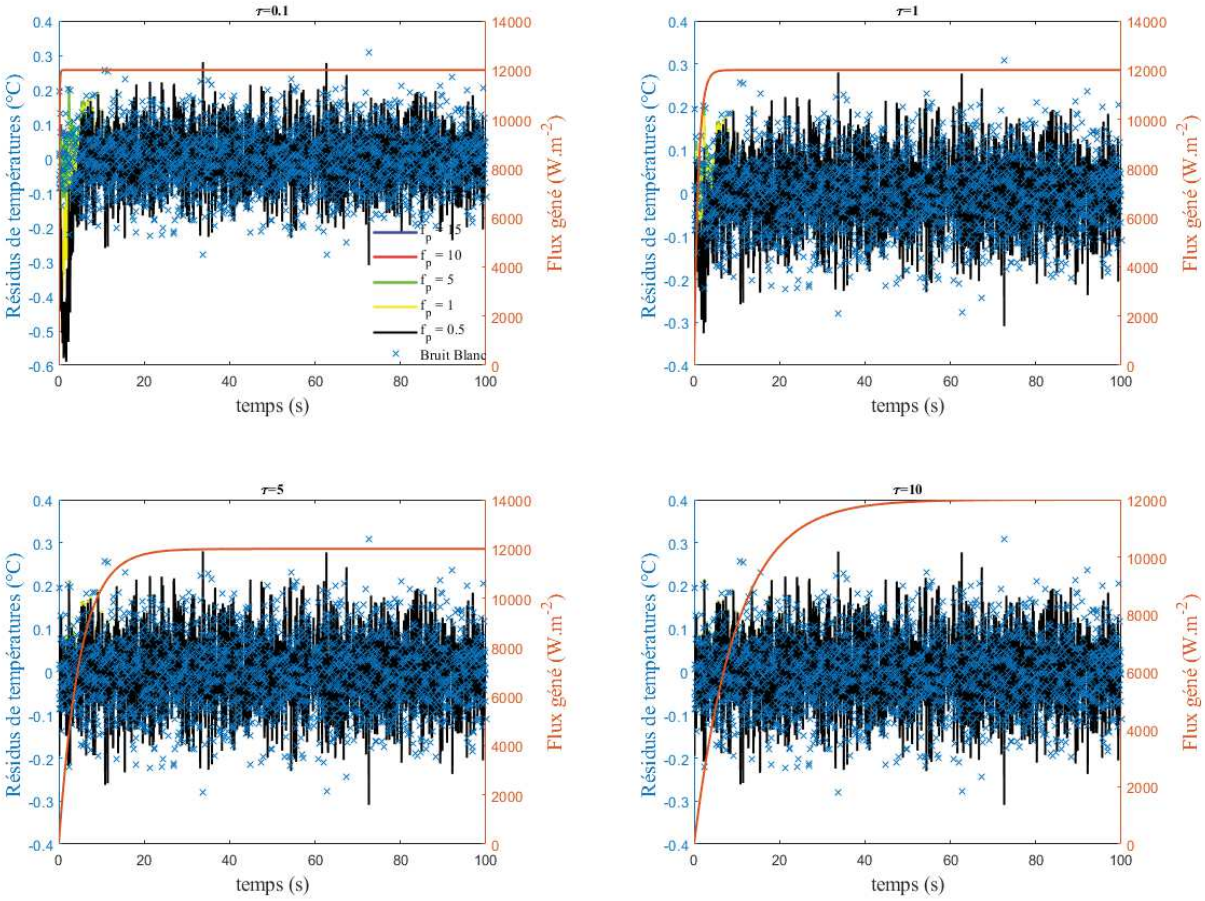


Figure II:14: Influence de la fréquence de paramétrisation sur les biais de paramétrage.

On utilise dans un premier temps les paramètres de contact glissant donnée précédemment par l'équation (2.22) avec les constantes de temps suivantes $\tau = [0.1,1,5,10]s$. Les fréquences de paramétrisation testées sont les suivantes : $f_p = [15,10,5,1,0.5]s^{-1}$.

La comparaison entre les températures est faite sur la position représentant le thermocouple le plus proche de l'interface du côté du matériau le plus diffusif. Ce choix est évidement poussé par le fait que la réponse thermique de ce matériau est plus rapide.

On constate dans la Figure II:14 que la qualité de la paramétrisation dépend de la forme des paramètres de contact glissant et de la fréquence de paramétrisation. Dans cette même figure on a aussi tracé le flux généré pour différentes valeurs de constantes de temps. On trouve que : plus les pentes des paramètres sont abruptes et plus la fréquence d'échantillonnage doit être élevée.
Les écarts induits par les différentes paramétrisations testées, sont représentées dans le tableau ci-dessous.

Pour rappel, l'écart-type du bruit blanc est de 0.085°C.

Les plus grands écarts sont visibles pour une constante de temps de 0.1s. A ce niveau de valeur de constante de temps, il n'est pas nécessaire de considérer des paramètres de contacts glissants variables.

L'hypothèse développée par Bauzin et al.[27] de paramètres de contacts glissants constants serait suffisante.

Tableau II-5 : Biais introduit par la paramétrisation

Constante de temps	**0.1**					**1**				
Fréquence de paramétrage	15	10	5	1	0.5	15	10	5	1	0.5
Ecart-type ($x10^2$)	8.51	8.51	8.52	9.07	10.62	8.5	8.5	8.5	8.53	8.76
Ecart (%)	0.12	0.12	0.24	6.71	24.94	0	0	0	0.35	3.06
Constante de temps	**5**					**10**				
Fréquence de paramétrage	15	10	5	1	0.5	15	10	5	1	0.5
Ecart-type ($x10^{-2}$)	8.5	8.5	8.5	8.51	8.51	8.5	8.5	8.5	8.5	8.51
Ecart (%)	0	0	0	0.12	0.12	0	0	0	0	0.12

Il est aussi possible d'avoir des formes de paramètres qui peuvent introduire des variations brutales des paramètres de contacts glissants ailleurs qu'en début d'essai. Pour ce type de variation, L'hypothèse développé en [27] de paramètres de contacts glissants constants ne peut être considérée. Une possible forme introduisant de telles variation est la variation périodique.

La Figure II:15 donne la différence entre les températures calculées avec et sans paramétrisation en considérant des paramètres de contacts glissant généré à partir de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5 + 0.35\left(1 - e^{-(t/10)}\right) + 0.1\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ h_{cg} &= h_{ch_{statique}} + 1200\left(1 - e^{-(t/10)}\right) + 400\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ \phi_g &= 12000\left(1 - e^{-(t/10)}\right) + 4000\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \end{aligned} \tag{2.24}$$

On constat dans cette figure que plus la période du sinus est basse, plus les résidus de température (différence entre la température calculée avec la paramétrisation des paramètres de contact glissant et la température calculée sans paramétrisation) sont signés. Ces résidus prennent la forme d'une fonction périodique centrée autour de zéro. Cette signature est plus importante pour des fréquences de paramétrisation basses et une faible période du sinus.

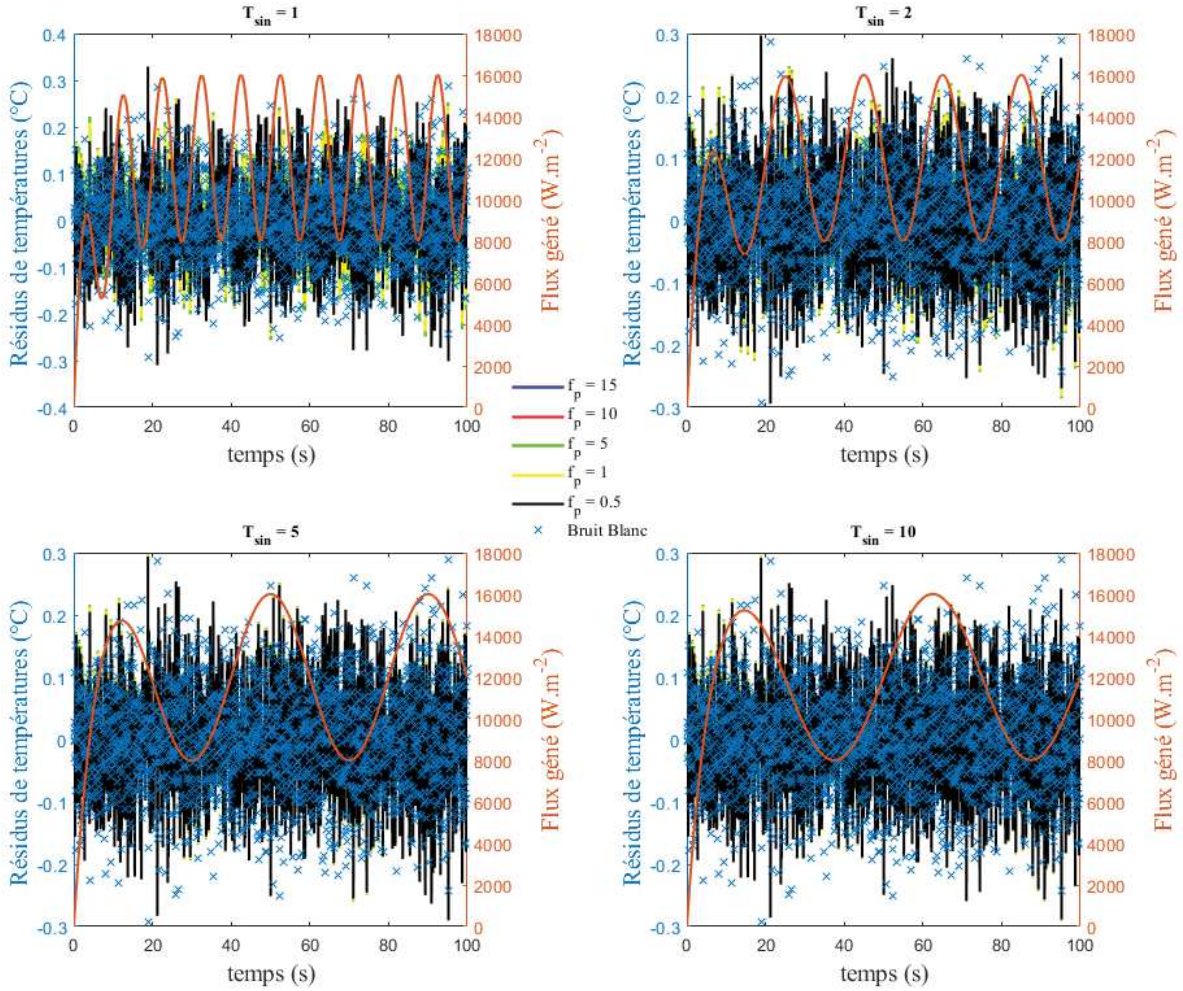


Figure II:15: Influence de la fréquence de paramétrisation sur les biais de paramétrage forme sinusoïdale.

Cela est dû au fait que l'écart entre les paramètres de contact glissant réel (Numérique) et leurs valeurs après paramétrisation est plus important. La Figure II:16 illustre ce phénomène. On voit bien que les changements d'allure de la courbe ne sont pas bien repris par la forme paramétrée du flux généré pour des fréquences de paramétrages inférieur à $f_p = 1s^{-1}$.

Tableau II-6: Biais introduit par la paramétrisation

Période	**1**					**2**				
Fréquence de paramétrage	15	10	5	1	0.5	15	10	5	1	0.5
Ecart-type ($\times 10^{-2}$)	8.53	8.53	8.53	8.59	9.26	8.52	8.52	8.52	8.52	8.61
Ecart (%)	0.35	0.35	0.35	1.06	8.94	0.24	0.24	0.24	0.24	1.29
Période	**5**					**10**				
Fréquence de paramétrage	15	10	5	1	0.5	15	10	5	1	0.5
Ecart-type ($\times 10^{-2}$)	8.51	8.51	8.51	8.52	8.53	8.51	8.51	8.51	8.51	8.53
Ecart (%)	0.12	0.12	0.12	0.24	0.35	0.12	0.12	0.12	0.12	0.35

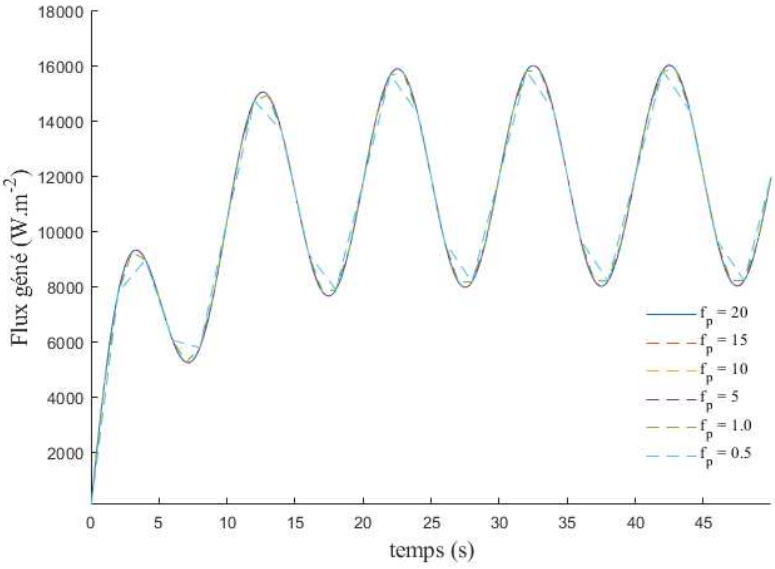


Figure II:16:Influence de la paramétrisation sur le flux généré

Les écarts induits par les différentes paramétrisations testées sont représentés dans le Tableau II-6. Pour rappel, l'écart-type du bruit blanc est de 0.085°C. Les écarts entre l'écart-type du bruit blanc et celui des résidus de température indiquent que pour des périodes faibles, la paramétrisation induit des erreurs inférieures ou égales à 1% pour des fréquences de paramétrage $f_p \geq 1$. On peut donc borner notre fréquence de paramétrisation par $1 \leq f_p < f_e$.

Dans le reste de cette étude, on prendra un pas de temps de 0.05s et une fréquence de paramétrisation $f_p = 1s^{-1}$. Si on se fixe un intervalle de paramétrisation de 1s, en utilisant la méthode présentée dans le paragraphe §II.3.2 on retrouve les sous-matrices de corrélation présentées dans la Figure II:17. On constate que les éléments non diagonaux adjacents au coefficient diagonal ont des valeurs de l'ordre de 70%, Ce qui prouve qu'elles ne sont plus aussi corrélées qu'avant. Alors que les coefficients de corrélation diagonaux sont en rouge, donc supérieur à 95%. On voit bien alors que grâce à la paramétrisation on a pu éliminer les corrélations liées aux effets de proximité temporelle.

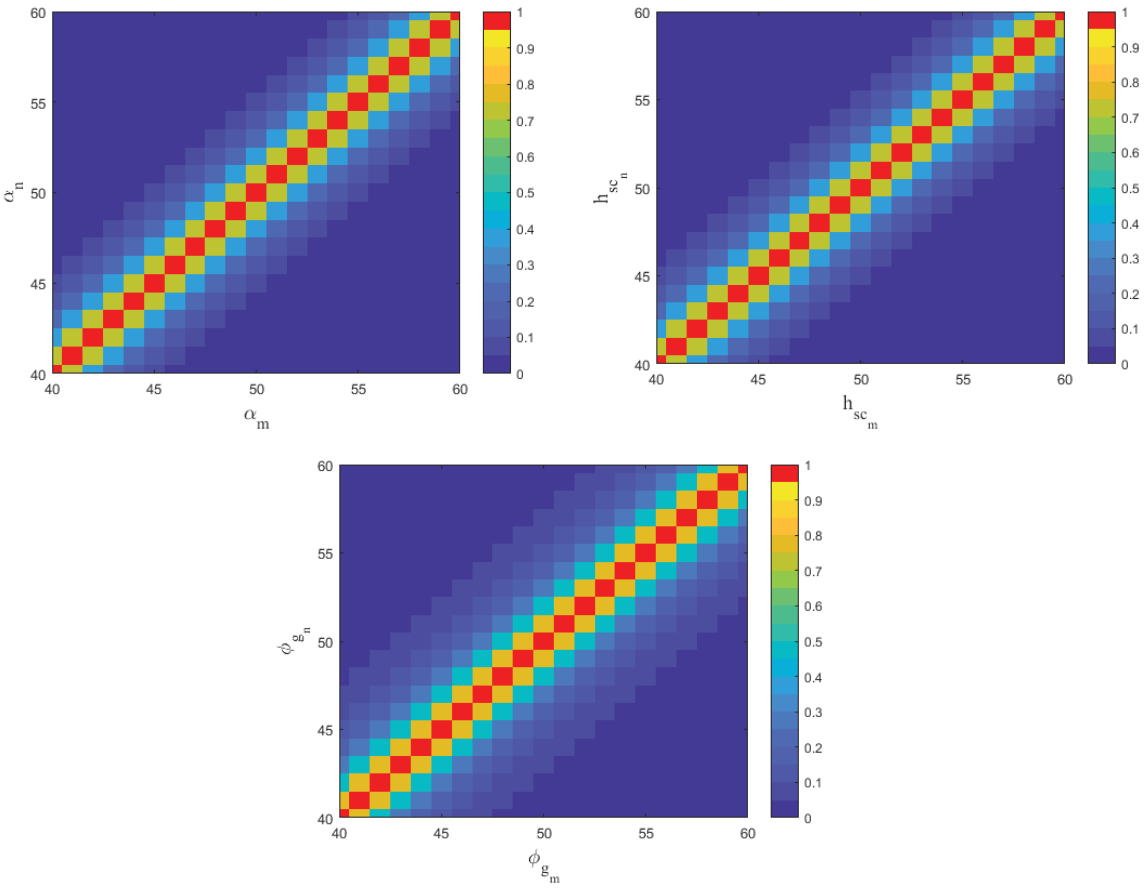


Figure II:17: Sous matrice de corrélation après paramétrisation.

Cependant, On voit dans la Figure II:18 que les coefficients de corrélation entre le coefficient de partage et la conductance de contact pris à des indices de temps identique $CC_{(\alpha_i, h_{cg_i})}$ sont encore supérieurs à 95%.

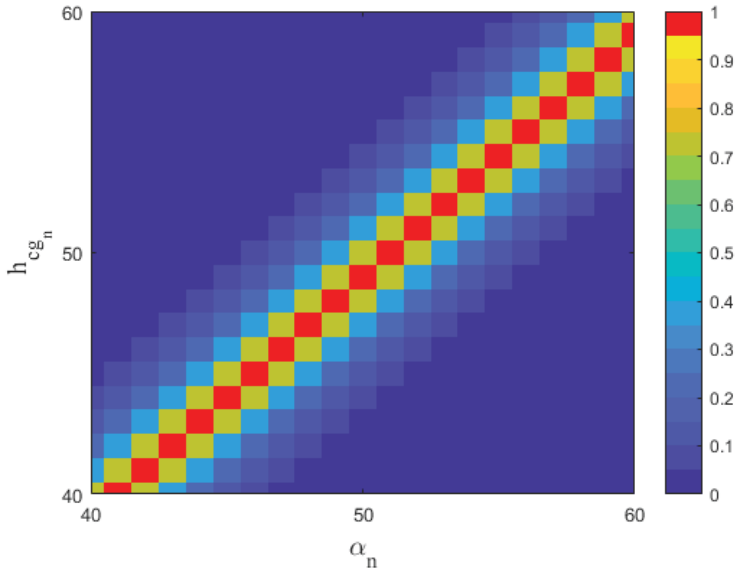


Figure II:18: Corrélation entre le coefficient de partage et la conductance de contact après paramétrisation

Comme cette corrélation est visible uniquement entre des paramètres pris à des indices de temps identiques, la solution proposée ici est de construire des intervalles de temps de paramétrisation différents pour le coefficient de partage et pour la conductance de contact.

$$t_{alpha} = [0, d, d+\delta_p, d+2\delta_p, ..., t_{final}]$$
$$t_{h_{cg}} = [0, \delta t_p, 2\delta_p, ..., t_{final}]$$
$$t_{\phi_g} = [0, \delta t_p, 2\delta_p, ..., t_{final}]$$

$$\text{Avec, } \delta t_p = \frac{1}{f_p} \text{ et } d \in]0, \delta t_p[.$$

Intuitivement, la valeur de la variable *d*, nous permettant d'éviter le plus les interactions entre les paramètres α_i et h_{cg_i} est :

$$d = \frac{1}{2}\frac{1}{f_p} = 0.5$$

On aura donc :

$$t_{alpha} = [0, 0.5, 1.5, 2.5, ..., t_{final}]$$
$$t_{h_{cg}} = [0, 1, 2, ..., t_{final}]$$

La Figure II:19 montre bien l'efficacité de ce décalage temporel qui permet de se retrouver avec des coefficients de corrélation $CC_{(\alpha_i, h_{cg_i})}$ inférieurs à 95% pour des valeurs de $d \geq 0.4s$. Avec une procédure de régularisation efficace et adaptée, des corrélations de cet ordre de grandeur, ne représente pas un facteur rédhibitoire.

On note, à partir de la Figure II:20 que des coefficients de corrélations supérieures à 95% entre le coefficient de partage et la conductance de contact sont encore présent au dernier et aux deux premiers instants.

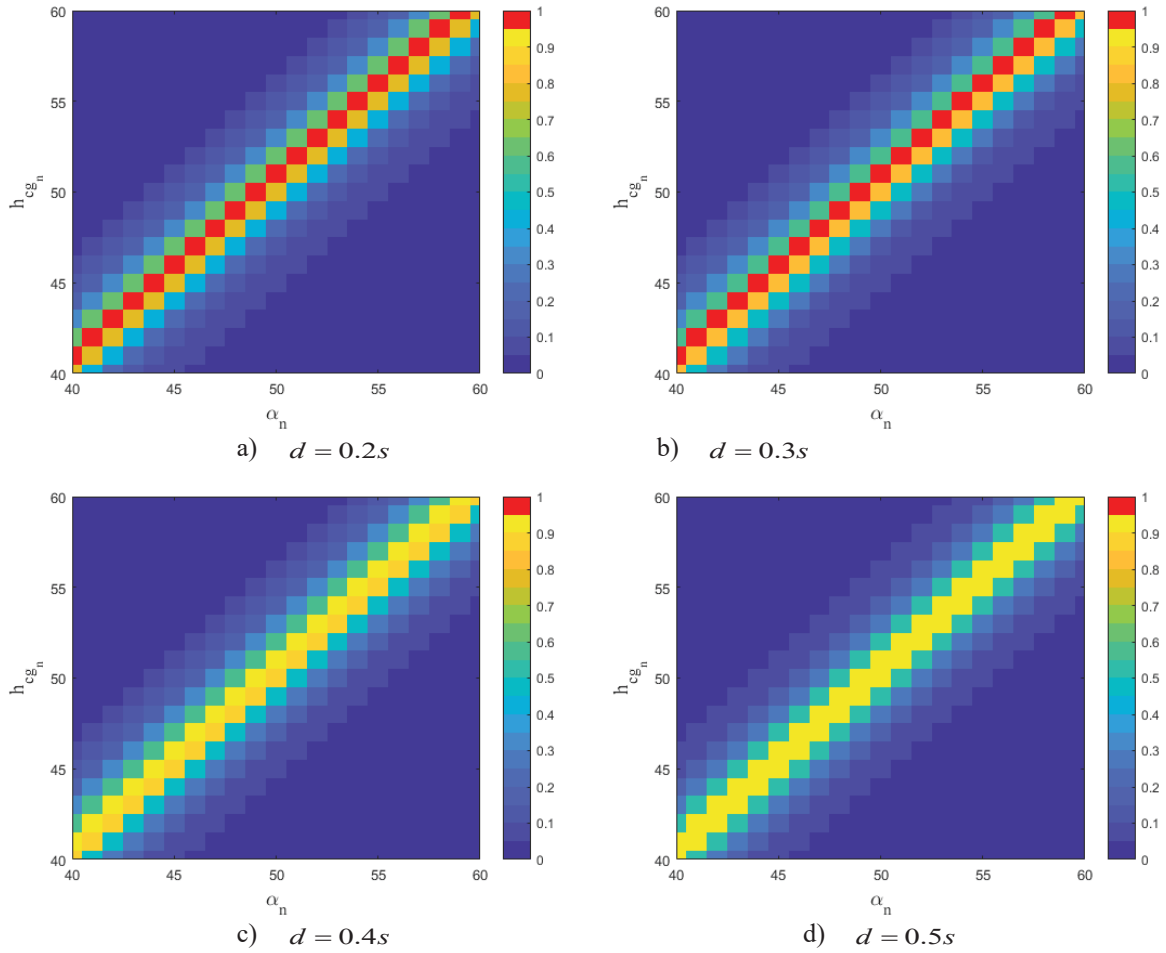


Figure II:19: Sous matrice de corrélation $CC_{(\alpha_i, h_{cg_i})}$ après décalage temporel.

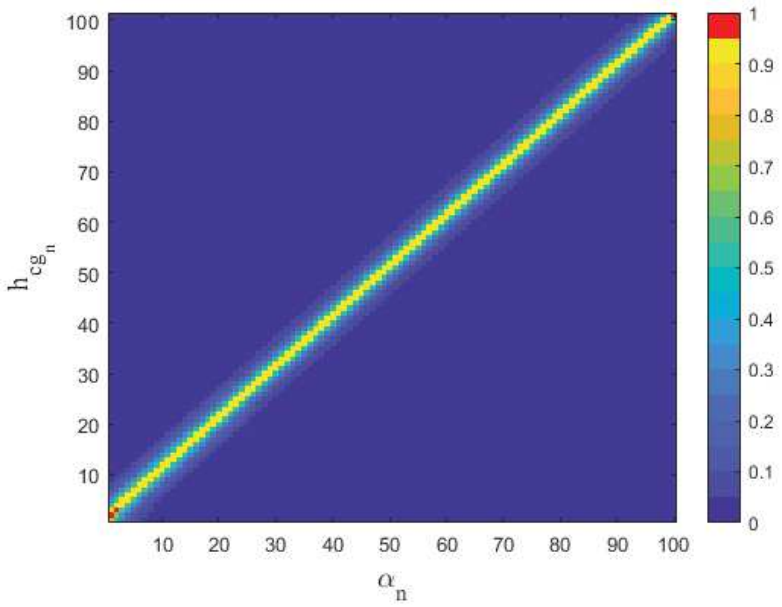


Figure II:20 : Sous matrice de corrélation $CC_{(\alpha_i, h_{cg_i})}$ à tous les instants

II.4.1.3.2. Influence de la forme des paramètres

La forme des paramètres n'étant pas connus, on s'intéresse dans cette partie à l'étude des sensibilités et des corrélations pour des formes de paramètres thermiques de contacts glissant différentes. Actuellement, il n'existe aucune étude donnant le comportement des trois paramètres de contacts glissants simultanément. Après l'étude menée par Bauzin et al. [27] on sait que les trois paramètres de contacts glissants ne sont pas constants simultanément. On cherche à mettre en évidence dans cette partie si cette corrélation entre le coefficient de partage et la conductance de contact glissant reste présente dans le cas où l'évolution de ces deux paramètres est différente. Il est à préciser que les matrices de corrélation sont calculées sans la technique du décalage temporel pour permettre de mettre en évidence d'éventuelles corrélations. Les configurations testées sont présentées dans le Tableau II-7 :

Tableau II-7: Configurations testées pour l'analyse de l'influence de la forme des paramètres

	Constant	Exponentielle	Echelon	Périodique
I	α	h_{cg} , ϕ_g		
II		h_{cg} , ϕ_g	α	
III		ϕ_g	h_{cg}	α
IV		ϕ_g	α	h_{cg}
V	h_{cg}	ϕ_g	α	
VI	α , h_{cg}	ϕ_g		

Comme illustré dans la Figure II:21, quel que soit la configuration testée, les corrélations entre le coefficient de partage et la conductance de contact sont présentes. Cela peut vouloir dire que le coefficient de partage et la résistance de contact glissant sont affectées par les mêmes éléments physique et structurels, l'état de surface, les propriétés thermiques des matériaux et les conditions dynamiques (Vitesse et pression de contact).

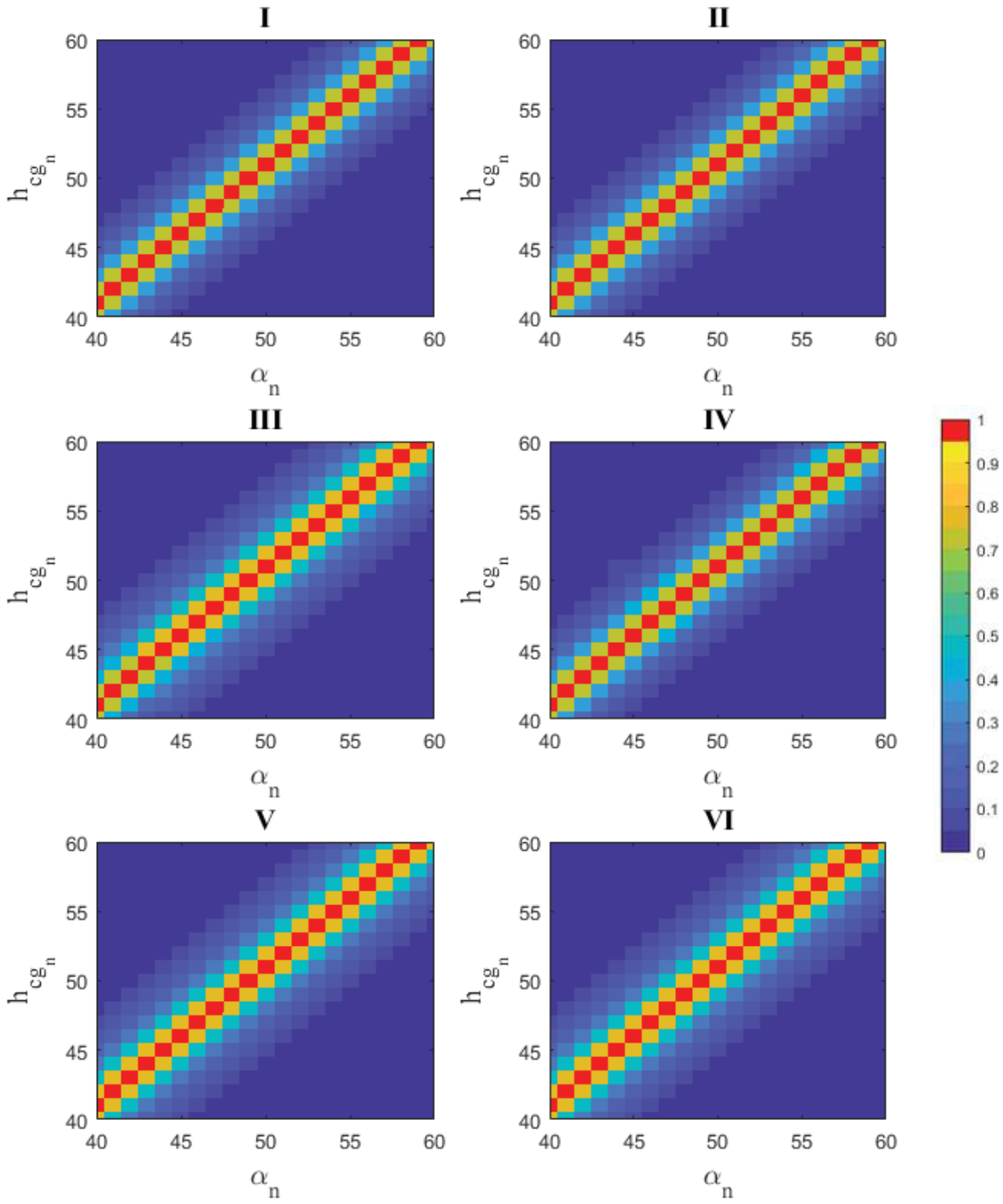


Figure II:21 : Coefficient de corrélation pour les différentes configurations

Au vue de ces résultats, la méthode de décalage temporelle semble nécessaire quelque-soit la forme des paramètres du contact glissant.

II.4.1.3.3. Influence des propriétés thermiques des matériaux

L'influence des propriétés thermiques des matériaux a un effet certain sur la sensibilité des paramètres à estimer. Le Tableau II-8 présente les propriétés thermiques des couples de matériaux testé dans ce paragraphe.

Tableau II-8: Couples de matériaux testés

	λ_1	$a_1 \times 10^6$	λ_2	$a_2 \times 10^6$
I	64	21	10	5
II	400	117	43	11
III	43	11	64	21
IV	10	5	400	117

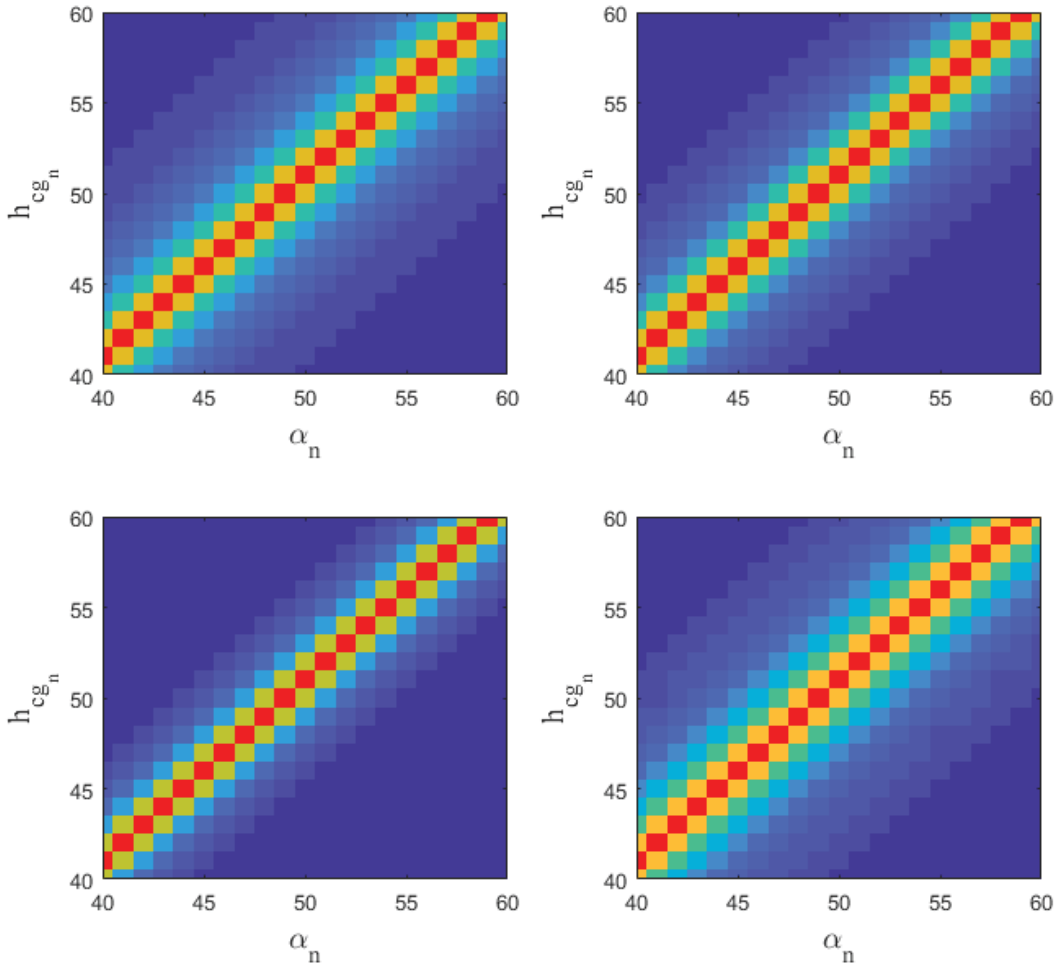


Figure II:22: Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_i, h_{cg_i})}$

Le Tableau II-9 donne les sensibilités réduites maximale à 50 secondes pour chacun des paramètres physiques. En comparant les valeurs maximales de sensibilité de chacun des paramètres physiques au même instant, on constate que les moins bonnes sensibilités dans l'ensemble sont attribuées à la configuration II. Si on considère les résultats de sensibilités des paramètres physiques pris individuellement, on constate que pour le coefficient de partage et le flux généré la configuration donnant la moins bonne sensibilité est la II. Alors que pour la conductance de contact glissant c'est la

configuration IV qui est la plus désavantageuse. Ces deux configurations ont comme point commun l'utilisation d'un matériau très diffusif.

Tableau II-9 : Sensibilité réduite maximale à 50s

	S_{α}	$S_{h_{cg}}$	S_{ϕ_g}
I	0.25	0.18	0.43
II	0.13	0.22	0.15
III	0.31	0.38	0.38
IV	0.61	0.10	0.65

Au regard de ces résultats, la méthode de décalage temporelle semble aussi nécessaire quelque-soit les propriétés thermiques des matériaux utilisés pour éviter les corrélations entre le coefficient de partage du flux généré et la conductance de contact.

II.4.2. Résultats numériques d'estimations

II.4.2.1. Introduction

Les méthodes présentées dans les paragraphes précédents sont utilisées pour estimer les fonctions des paramètres de contacts présentés dans la Figure II:6. On reprend le Tableau II-3 pour rappeler les valeurs asymptotiques et initiales de la première configuration numérique.

Paramètre physique	**Valeur initiale**	**Valeur asymptotique**
Coefficient de partage	0.5	0.85
Conductance de contact	1500	2700
Flux généré	0	12000

Le champ de température généré à l'aide de ces paramètres de contacts est représenté sur la Figure II:23. On note la présence d'un gradient de température au début. Sans ce gradient il est impossible d'identifier la résistance de contact en phase dynamique. Il permet aussi d'identifier la résistance de contact en phase statique. L'introduction expérimentale de ce gradient est développée dans le paragraphe §III.1.1. Les températures générées sont bruitées avec un signal de même nature que celui présenté dans le paragraphe §II.4. Pour rappel, le signal du bruit de mesure constitue une loi normale de moyenne $\mu = 0°C$ et un écart-type de l'ordre de $\sigma = 0.085°C$.

Dans un premier temps, les résultats de l'estimation par la méthode de l'horizon glissant seront présentés avec une discussion sur les points forts et les limites de cette méthode appliquée à notre problème d'estimation de fonction. Ensuite, on fera de même pour la méthode de la paramétrisation avec décalage temporel.

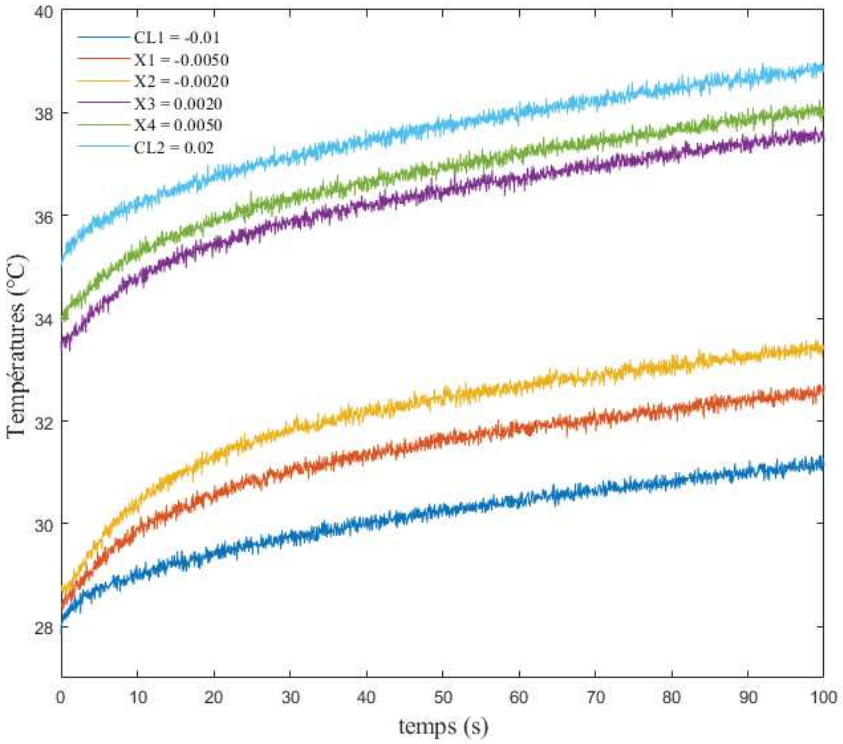


Figure II:23: Champ de température généré et bruitée

II.4.2.2. Méthode de l'horizon glissant (Spécification de fonction).

Comme mentionné plus haut, cette méthode fait appel à deux grandeurs d'ajustement. Le *PDH* et la *LH*. Plus le *LH* est grand plus les courbes des paramètres estimés sont lisses. Evidemment, si le *PDH* est lui aussi trop élevé, cela ne permet pas de rendre précisément compte des variations des paramètres.

On prendra une LH de 1s pour s'accorder avec la méthode de paramétrisation et on teste différents *PDH* afin de comprendre son influence sur l'estimation. La Figure II:24 représente les estimations des différents paramètres et leurs valeurs réelles pour différentes valeurs de *PDH*. On constate que son influence est faible sur l'estimation. On prendra une valeur de 10 pour le reste de l'étude. Bien que le coefficient de partage et la résistance de contact ne soient pas parfaitement identifiés, les résidus ont une forme de nuage de points centré en zéro. Ces résidus ont aussi une répartition suivant une loi normale, de moyenne $\mu = 0°C$ et un écart-type $\sigma = 0.083°C$.

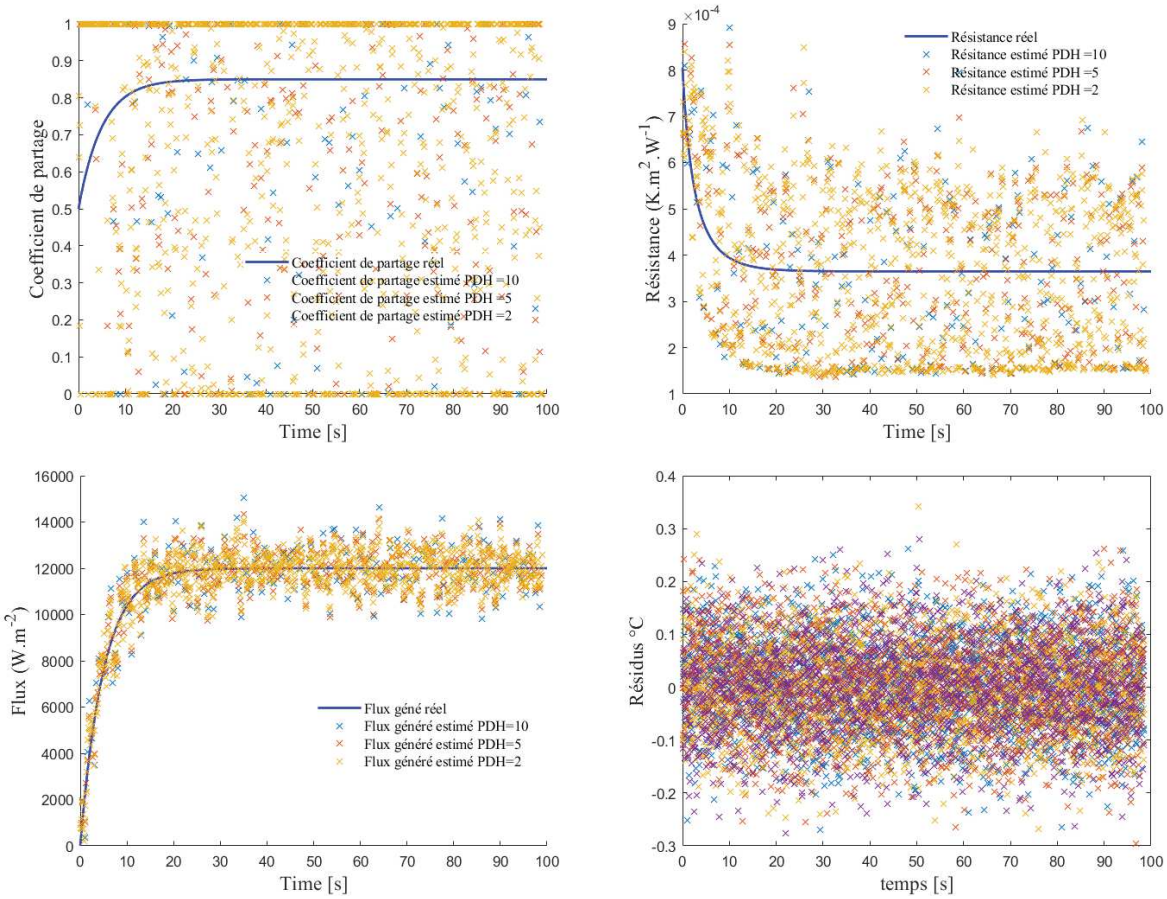


Figure II:24: Estimation des paramètres par horizon glissant

Quelques conclusions :

- Le flux estimé ne dépend pas du *PDH* et est estimé avec une bonne précision. L'estimation du flux est satisfaisante tant qualitativement que quantitativement.
- Concernant le coefficient de partage, on identifie dans la majorité des intervalles tour à tour la borne supérieure puis la borne inférieure [0,1]. L'estimation du coefficient de partage ne reflète ni la forme du coefficient réel ni les valeurs de ce dernier. Cette méthode ne fonctionne pas quelques soient les formes de variations des paramètres.
- La résistance de contact estimé est quant à elle encadrée entre deux fonctions décroissantes. Ces deux fonctions représentent la fonction de la résistance estimée pour les cas où le coefficient de partage $\alpha = 0$ ou 1. L'estimation respecte bien la forme, mais pas la valeur.
- Ce résultat montre bien la corrélation qui existe entre le coefficient de partage et la résistance de contact.

On utilise dans un second temps cette méthode en supposant que la valeur du coefficient de partage est connue et constante. Puis on identifie les deux autres paramètres pour des valeurs du coefficient de partage allant de 0 à 1. La Figure II:25 représente les résultats d'estimation avec cette hypothèse. On

constate bien l'encadrement de la résistance de contact à l'intérieur d'une enveloppe allant de 1.5×10^{-4} à $5\times10^{-4}(K.m^2.W^{-1})$ en valeur asymptotique. Avec cette hypothèse, en calculant les résidus pour les 6 différentes valeurs de α on retrouve des résidus similaires à ce qui est représenté en Figure II:26 $\sigma = 0.085°C$ On a décidé de prendre comme paramètre constant, le coefficient de partage, car il est physiquement défini dans l'intervalle [0,1]. En exécutant la procédure d'inversion avec les deux bornes du coefficient de partage, on considère donc tout l'intervalle des valeurs possible de la résistance de contact. La courbe de la résistance estimée est la plus proche de la courbe réel pour une valeur de $\alpha = 0.8.$ Rappelons que la valeur asymptotique de la courbe réelle du coefficient de partage est $\alpha_{asym} = 0.85$. On note que l'estimation du flux n'est pas impactée par cette hypothèse.

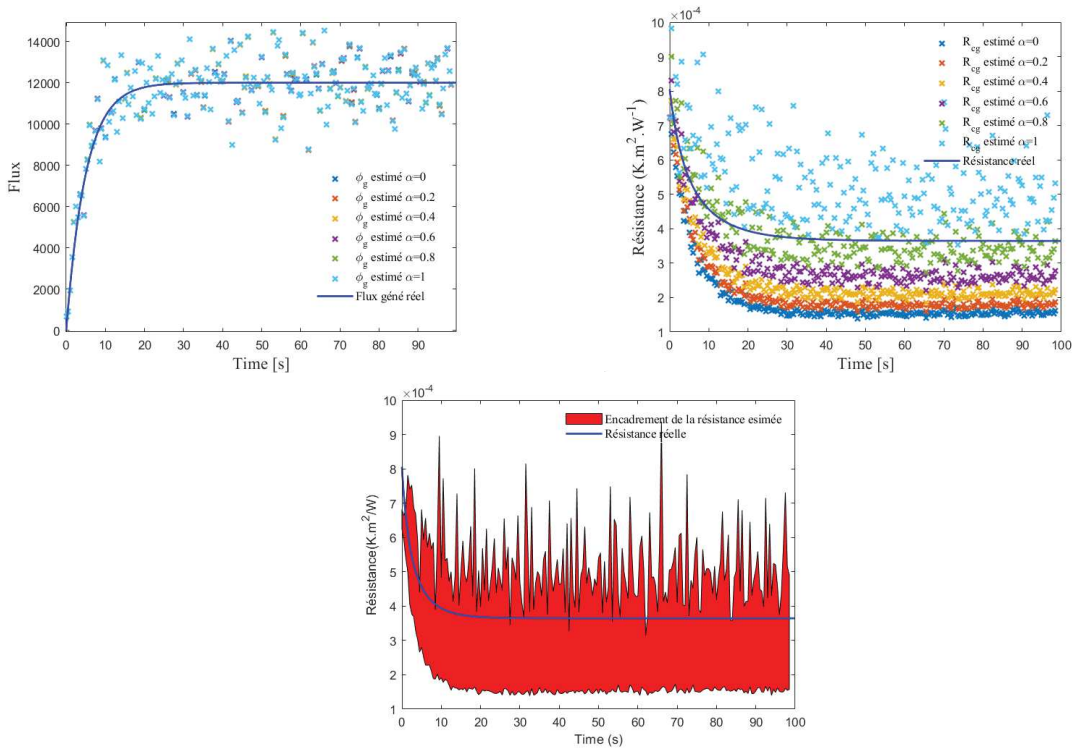


Figure II:25: Flux et résistance de contact estimés pour différentes valeurs de α

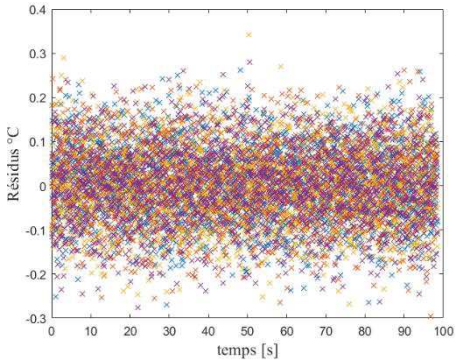


Figure II:26: Résidus avec l'hypothèse de α constant

Avoir cet encadrement de la résistance nous donne des informations sur la forme de la résistance.

Pour confirmer ce résultat, on teste cette méthode sur d'autres formes de paramètres sinusoïdal puis avec des échelons successifs. Les résultats sont présentés sur la Figure II:27.

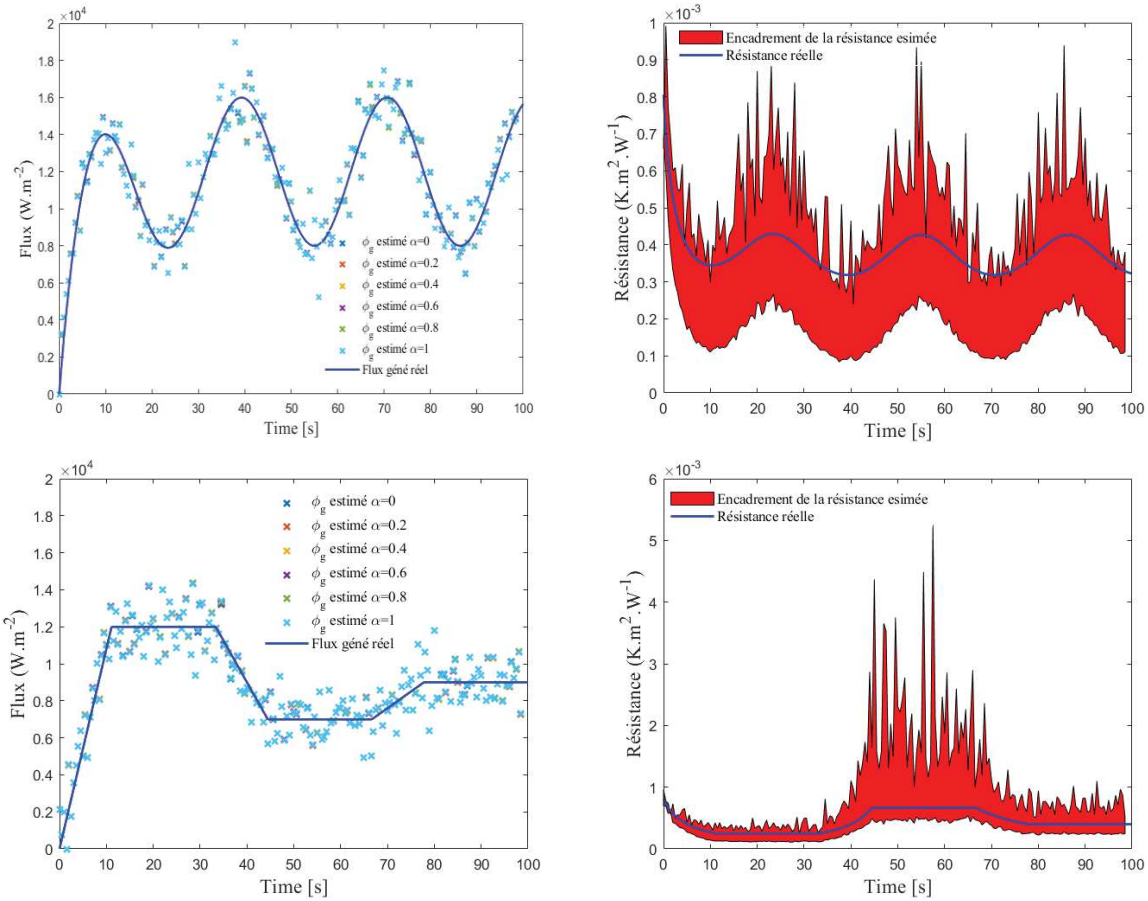


Figure II:27: Estimation de fonction de forme sinusoïdale et échelon

Ces résultats montrent que la corrélation entre le coefficient de partage et la résistance de contact est extrêmement importante. Etant donné que la corrélation est présente uniquement entre le coefficient de partage et la conductance de contact glissant, on se propose de construire une méthode d'horizon glissant alternative ou on aurait besoin d'identifier deux paramètres par intervalle (*LH*).

À chaque horizon on identifie soit $[\alpha, \phi_g]$, soit $[\phi_g, h_{cg}]$. Au premier intervalle on identifie d'abord le couple $[\alpha_0, \phi_{g_0}]$ en considérant $h_{cg_0} = h_{cg_{statique}}$. Alors qu'à l'horizon suivant on pose $\alpha_1 = \alpha_0$ et on identifie $[\phi_{g_1}, h_{cg_1}]$. Cette méthode sera nommée Horizon glissant séquentiel. On poursuit de la même manière jusqu'au temps final. Les résultats d'estimation avec cette méthode sont représentés dans la Figure II:28.

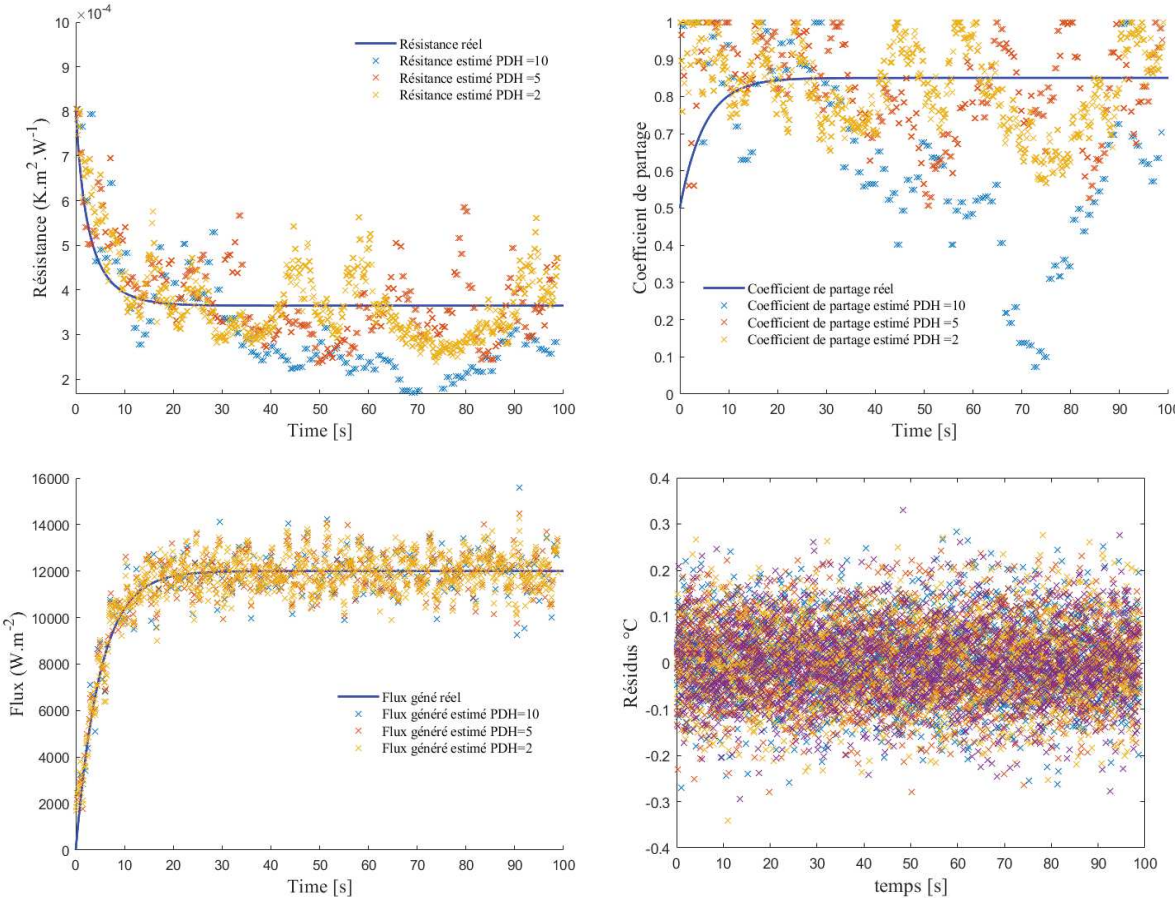


Figure II:28: Résultats d'estimation par la méthode de l'horizon glissant par identification alterné

Quelques conclusions :

- On constate une amélioration sur l'identification du coefficient de partage et de la résistance de contact.
- Le flux quant à lui n'est pas impacté et on a une bonne estimation de ce paramètre.
- La corrélation entre les deux paramètres de contact existe encore. Mais elle est toute fois moins élevée.
- Les résidus sont non signés en forme de nuage de points autour de zéro d'écart-type $\sigma = 0.084°C$.

- L'influence du *PDH* n'est pas négligeable dans cette méthode de l'horizon glissant séquentielle. On constate que pour les valeurs de $PDH \leq 5$ les résultats d'estimation sont meilleur.

On teste aussi cette méthode avec les formes sinusoïdales et la succession d'échelon vu précédemment.

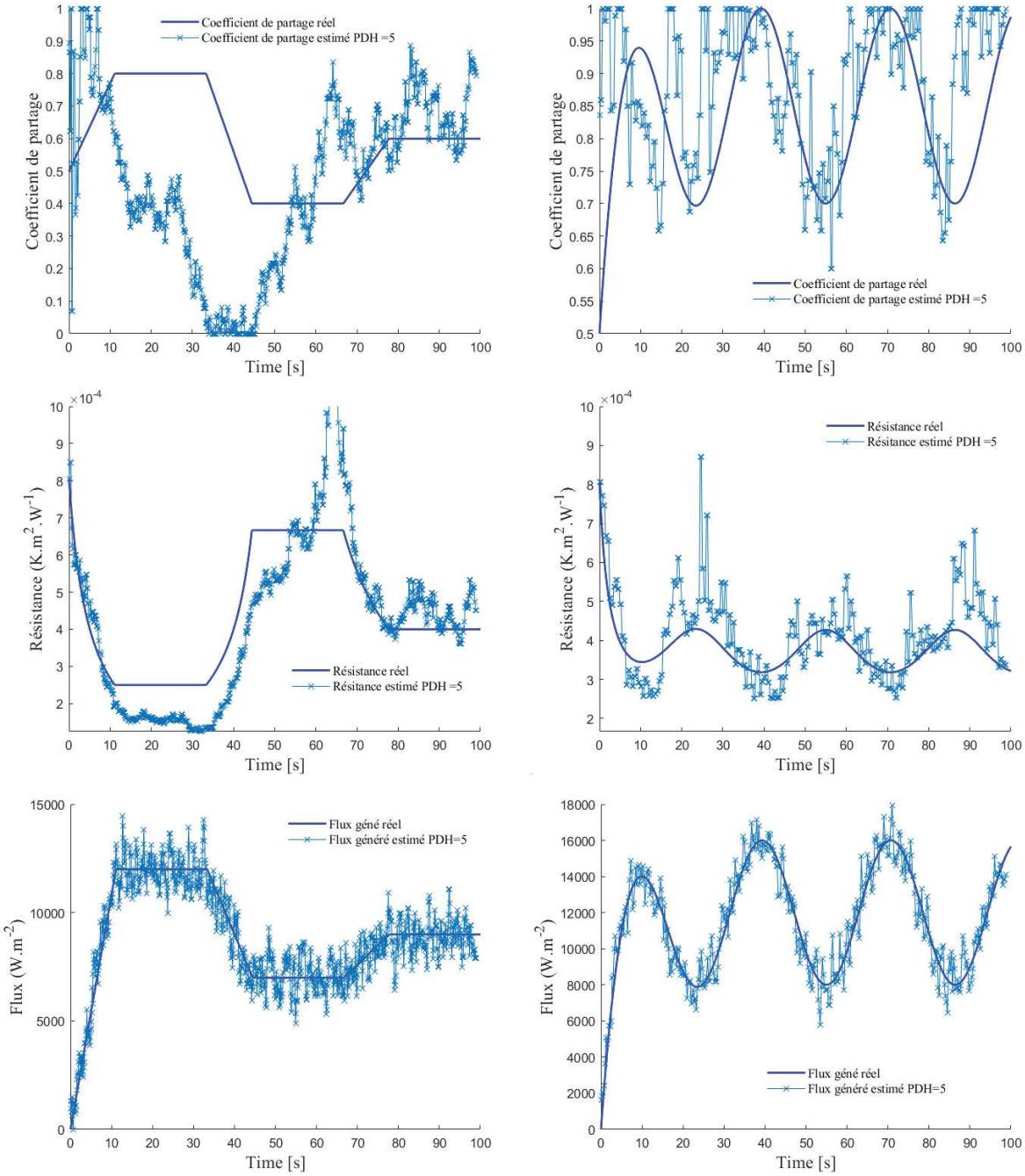


Figure II:29: Estimation des paramètres avec la méthode de l'horizon glissant modifié pour des formes sinusoïdale et en échelon

- La précision de l'estimation du flux est claire, quelles que soient ses variations ou sa forme.

- La précision de l'estimation des deux autres paramètres dépend de leur forme et de leur variation. La forme et la variation des paramètres sont supposées inconnues lors de l'estimation expérimentale.
- Comme le montre la Figure II:30 Il existe encore une forte corrélation entre le coefficient de partage et la résistance de contact.

La méthode de l'horizon glissant est intéressante pour l'estimation du flux et pour donner des indications sur la forme et l'ordre de grandeur du coefficient de partage et de la résistance de contact glissant. Elle permet aussi de réaliser un encadrement de la résistance de contact.

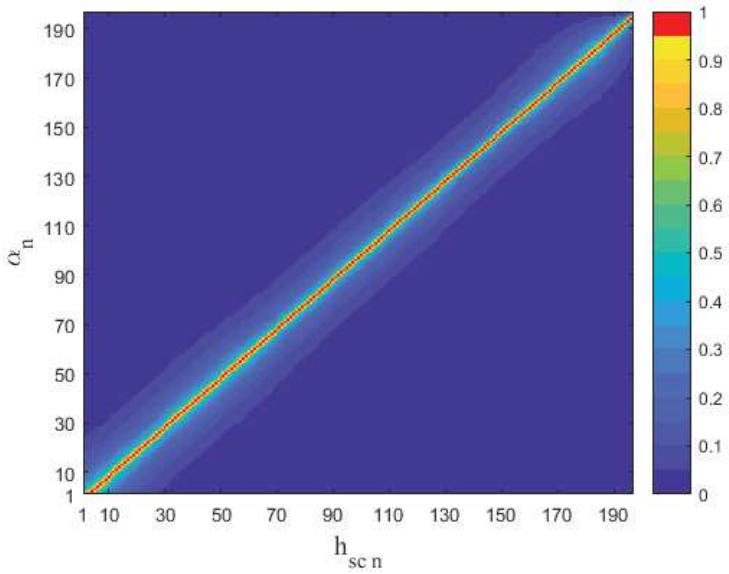


Figure II:30:Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$

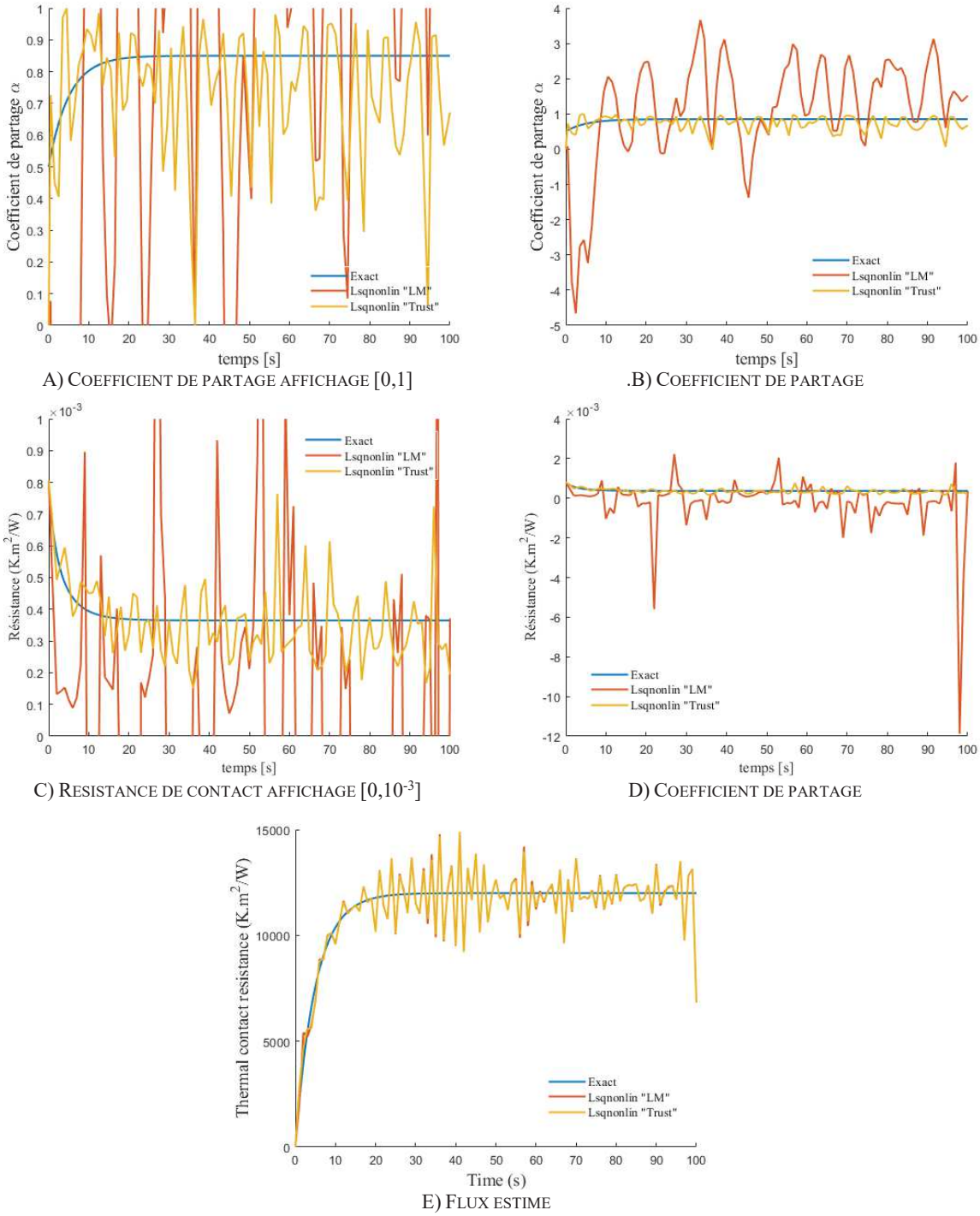
II.4.2.3. Méthode de la paramétrisation avec décalage temporel.

On utilise les mêmes données numériques, que pour la partie §II.4.2.2 pour tester cette méthode. L'impact du décalage sur la décorrélation des paramètres $[\alpha_i, h_{cg_i}]$a été montré dans les paraphes précèdent et sera vérifié après estimation des paramètres.

Algorithme de minimisation du commerce :

La procédure de minimisation est une partie importante lors de l'estimation de paramètre. On a décidé de prendre les algorithmes existants dans la bibliothèque de Matlab « lsqnonlin » pour l'exécution de la minimisation. On teste deux algorithmes de cette bibliothèque, le premier est un algorithme classique de Levenberg Marquardt [46], [50]. Le second est l'algorithme de la région de confiance [74], [75] qui permet un encadrement de la solution recherchée. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure II:31. L'estimation du flux généré est identique pour les deux algorithmes et elle donne une bonne estimation tant sur le plan qualitatif que quantitatif. L'estimation du coefficient de partage et de la résistance de contact avec l'algorithme de Levenberg Marquardt de la routine Matlab « lsqnonlin » donne des résultats

non physiques. Cet algorithme est donc non retenu pour notre problème d'identification. L'algorithme de la région de confiance de la même routine Matlab donne la possibilité de contraindre le domaine de recherche de la solution. Comme on a vu au paragraphe §I.3.6, cela constitue une méthode de régularisation du problème inverse. Bien que les résultats restent contraints dans un domaine prédéfini comme physiquement acceptable, les fluctuations ne permettent pas de bien rendre compte de la forme du coefficient de partage. En revanche, l'estimation de la résistance de contact semble donner un résultat satisfaisant.



A) COEFFICIENT DE PARTAGE AFFICHAGE [0,1]

.B) COEFFICIENT DE PARTAGE

C) RESISTANCE DE CONTACT AFFICHAGE [0,10^{-3}]

D) COEFFICIENT DE PARTAGE

E) FLUX ESTIME

Figure II:31: Estimation des paramètres de contact avec les bibliothèques Matlab "lsqnonlin"

Néanmoins, l'objectif de cette étude est d'estimer les trois paramètres de contacts. On a donc cherché d'autres algorithmes basés sur la méthode du gradient. On a opté pour une minimisation par le biais d'un algorithme BFGS contraint. L'algorithme en question sera nommé « Alexander », du nom de son auteur [76]. Cet algorithme donne des résultats satisfaisants uniquement si on choisit une bonne initialisation du flux généré. Pour des valeurs extrêmement éloignées de la valeur asymptomatique, cet algorithme retourne comme résultats les valeurs d'initialisation. On utilisera aussi l'algorithme décrit en §II.3.3 qui sera nommé « LM-Borné ».

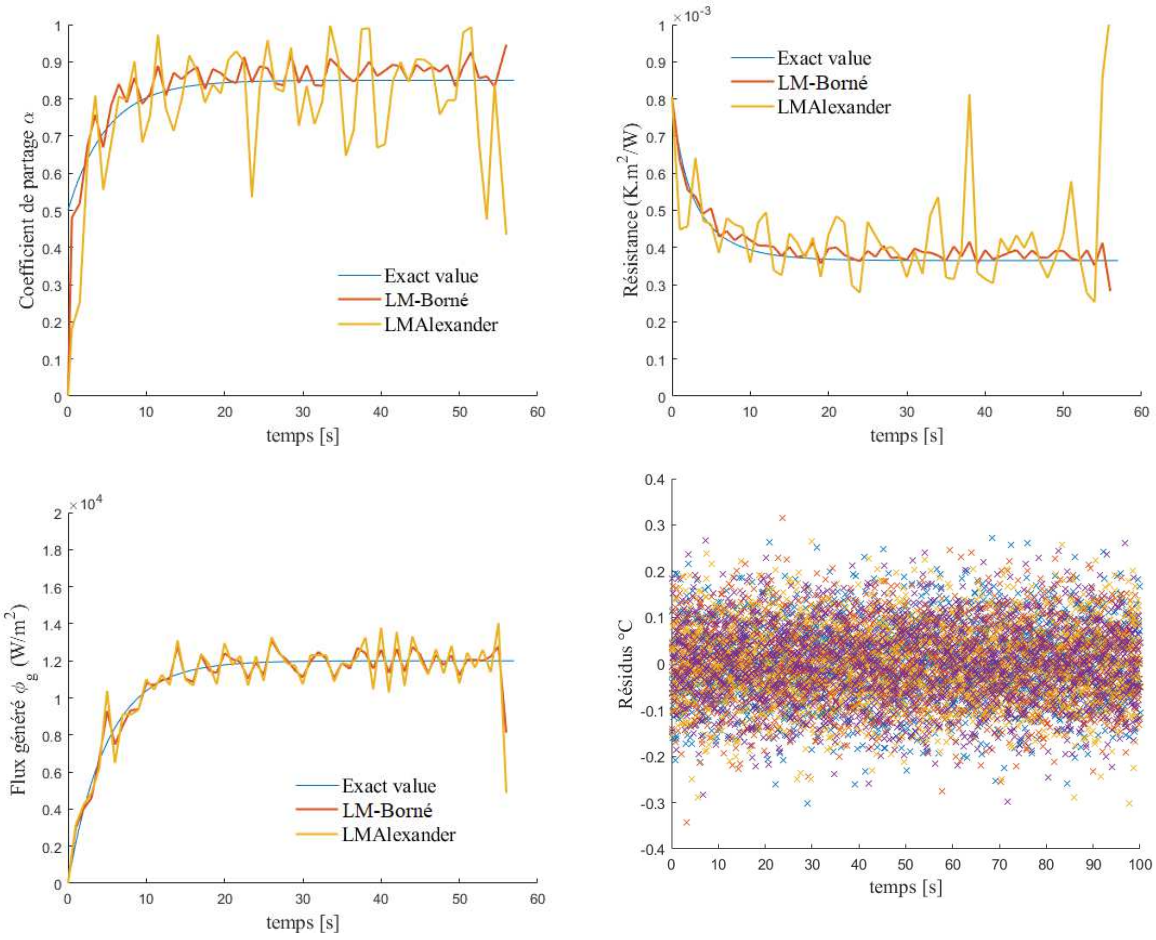


Figure II:32 : Comparaison entre les algorithmes de minimisation lors de l'estimation des paramètres

On représente dans la Figure II:32 les paramètres de contact identifiés et les résidus de température. Le flux généré estimé est quasiment superposé sur le flux réel avec des fluctuations liées à la nature instable du problème inverse. Le coefficient de partage et la résistance de contact estimé avec la méthode « LM-Borné » et « Alexander » sont plus stables et précis que les algorithmes de la fonction lsqnonlin de Matlab (Figure II:31). La résistance de contact estimé avec la méthode « LM-Borné » et « Alexander » est plus stable et précise que les algorithmes de la fonction lsqnonlin de Matlab. Fort de ce résultat, on se contentera de comparer les résultats d'estimation des algorithmes « LM-Borné » et « Alexander ».

II.4.2.3.1. Influence de la forme des paramètres sur leur estimation

A) Influence de la constante de temps

La Figure II:33 représente les estimations des paramètres suivant la même nature que le paragraphe précédent, mais avec une constante de temps τ différente. Que la fonction soit abrupte ou bien atténuée, cela n'affecte que peu la qualité de l'estimation par cette méthode en utilisant l'algorithme «LM-Borné». Alors que l'estimation par l'algorithme « Alexander » engendre des crêtes de fluctuations plus éloignées de la valeur réelle lorsqu'on utilise une constante de temps τ plus élevée.

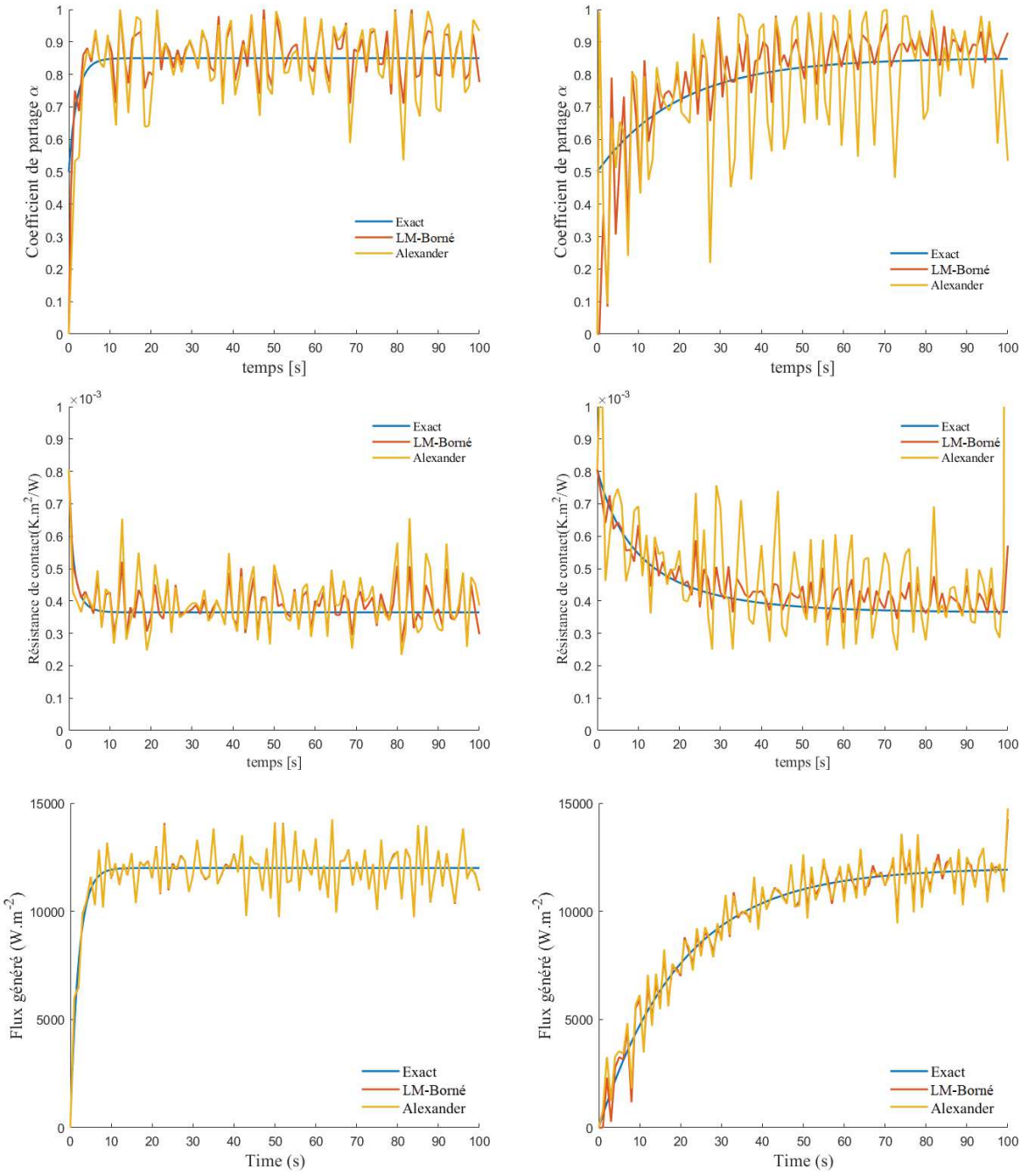


Figure II:33: Estimation des paramètres de contact pour différentes constantes de temps

B) Forme sinusoïdale

La forme des paramètres de contact étant inconnue dans les faits, on teste cette méthode d'estimation sur une fonction sinusoïdale. La Figure II:34 représente les résultats d'estimation des paramètres de contact de forme sinusoïdale. Deux périodes différentes sont testées.

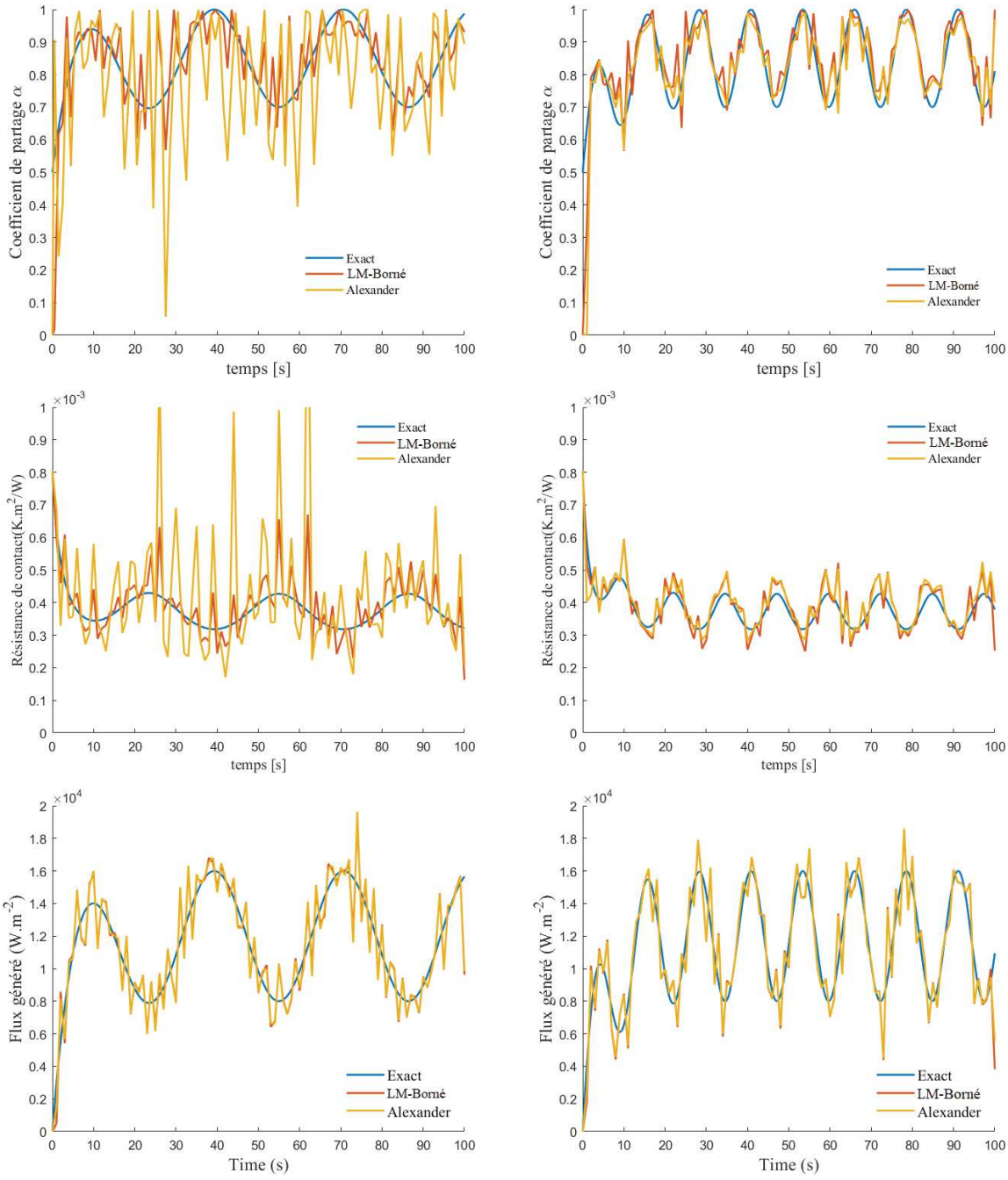


Figure II:34: Estimation de paramètres de forme sinusoïdale

Les deux algorithmes donnent des fonctions qui sont superposables à la fonction de génération. L'algorithme « LM-Borné » est encore plus stable que l'algorithme « Alexander ». Cette différence entre les algorithmes est moins présente pour des fréquences plus élevées. Ce qui montre que

l'algorithme « LM-Borné » reste plus stable que l'algorithme « Alexander » quand les phénomènes étudiés induisent moins de gradients et donc moins de sensibilité.

C) Succession de fonction porte.

On teste ici une configuration de paramètres ayant la forme d'une succession d'échelons. La Figure II:35 donne un comparatif entre les valeurs réels numériques et les fonctions des paramètres estimés par la méthode de paramétrisation. Comme dans le paragraphe précédent, on comparera les résultats de minimisation des algorithmes « Alexander » et « LM-Borné ».

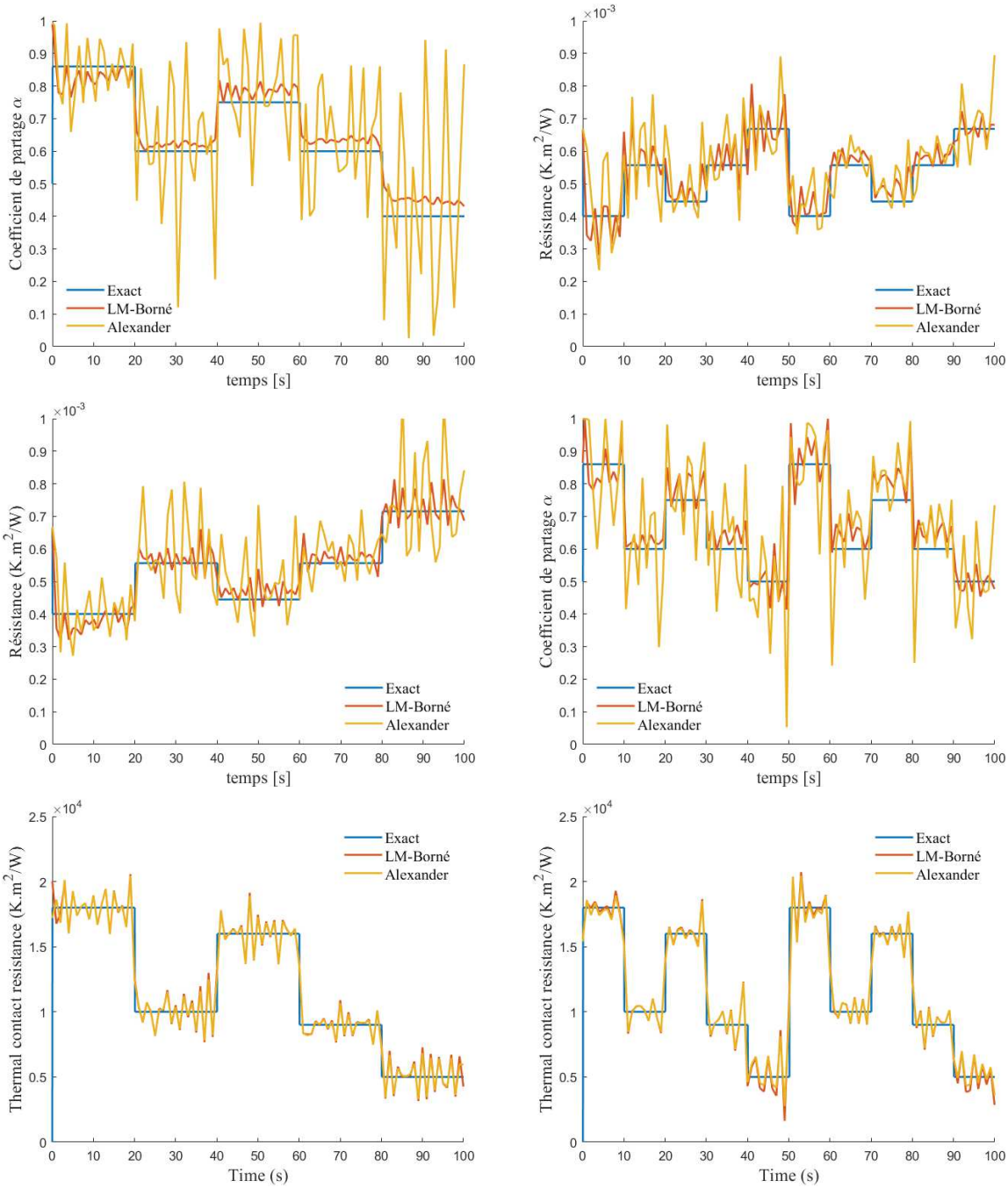


Figure II:35: Estimation de paramètres en forme de succession d'échelon.

On voit bien dans cette figure, que l'identification du flux généré est bien plus précise que l'estimation du coefficient de partage et de la conductance de contact glissant. On constate qu'il existe un léger écart entre le tracé des paramètres réel et des paramètres estimés.

Dans le but d'évaluer la précision de la procédure d'estimation des paramètres de contact glissant pour ce type de configuration, on peut comparer les valeurs moyennes réelles et estimées de chacun des paramètres aux différents paliers ainsi que les écart-types normalisés aux mêmes paliers. Les résultats sont présentés dans le Tableau II-10. Ces deux grandeurs de comparaison sont comme suite :

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{\beta_{P_{Identifié}}}}{\beta_{moyenneP_{Identifié}}}$$
$$\mu_N = 1 - \frac{\mu_{P_{Réel}}}{\mu_{p_{Identifié}}} \qquad (2.25)$$

Tableau II-10 : Ecart relatif des valeurs moyennes estimée et des écart-type aux paliers.

Palier			I	II	III	IV	V
α	μ_N (%)	LM-Borné	-2.85	5	3.86	6.34	12.55
		Alexander	-0.21	3	3.94	8.01	12.3
α	σ_N (%)	LM-Borné	6.13	8.15	5	5.72	8.25
		Alexander	11.11	34.66	24.45	26.6	64.55
$h_{cg}\left(K.m^2.W^{-1}\right)$	μ_N (%)	LM-Borné	5.654	-0.65	-5.433	-3.11	-1.376
		Alexander	0.6	0.86	-7.01	-3	-0.0136
$h_{cg}\left(K.m^2.W^{-1}\right)$	σ_N (%)	LM-Borné	18.74	8.72	6.91	7.4	6.9
		Alexander	23.84	23.33	21.7	12.24	20.6
$\phi_g\left(W.m^{-2}\right)$	μ_N (%)	LM-Borné	-0.66	2.067	-0.59	0.852	3.342
		Alexander	-1.187	1.47	-0.91	0.46	3.66
$\phi_g\left(W.m^{-2}\right)$	σ_N (%)	LM-Borné	9.98	15.82	9.77	15.3	28.74
		Alexander	9.89	14.4	9.82	14.81	24.9

Dans ce tableau on calcul l'écart relatif des moyennes des valeurs estimées pour les deux méthodes de minimisations. On trouve, pour l'estimation du coefficient de partage, pour l'algorithme « Alexander », des écarts sur la valeur moyenne au palier qui varient de $-0.21\% \le \alpha_{moyenP_{Alexnder}} \le 12.3\%$ et des valeurs d'écart-type normalisé allant de 11 à 64%. Alors que pour l'algorithme « LM-Borné » on a $-2.85\% \le \alpha_{moyenP_{LM-Borné}} \le 12.55\%$ et des valeurs d'écart-type normalisé allant de 5 à 8.25%.

Pour la résistance de contact glissant on constate que les valeurs de la moyenne normalisé sont du même ordre de grandeur que pour le coefficient de partage. Les valeurs de l'écart-type normalisé sont encore en faveur de l'algorithme « LM-Borné ». Concernant le flux généré, que ça soit pour la moyenne normalisée ou bien l'écart-type normalisé, les deux algorithmes son quasiment similaire.

Fort de ces résultats, on n'utilisera dans les études suivantes que l'algorithme « LM-Borné » qui donne des résultats plus précis et bien plus stable.

II.4.3. Erreur liée à l'incertitude des paramètres d'entrées

II.4.3.1. Erreur due au positionnement des thermocouples

On a quatre positions de thermocouples, deux sur chaque éprouvette. Des erreurs de plus ou moins 5%,2% et 1 % ont été simulées. Les erreurs de positionnement introduisent un biais dans la procédure inverse. Ce biais se traduit par une instabilité du système. Cela induit donc des paramètres estimés plus ou moins éloignés des paramètres réels.

Sur le Tableau II-11, la première colonne $(\pm,\pm,\pm,\pm)$ donnent le signe de l'erreur introduite sur les positions des thermocouples. Les deux premières positions, que ça soit (-) ou (+), s'applique sur les thermocouples du solide 1. Les deux derniers concernent le solide 2. Un signe (-) appliqué au corps (1) traduit le fait que l'erreur de positionnement des thermocouples induit un éloignement de l'interface de contact. Inversement, un signe (-) appliqué au corps (2) traduit le fait que l'estimation des paramètres se fait à une position erronée plus proche de l'interface de contact. Dans le Tableau II-11, quand les signes sont en rouges, cela traduit le fait que la position erronée à induit un rapprochement vers l'interface. Alors que les signes en bleus, traduisent un éloignement de l'interface.

Tableau II-11: Erreur d'estimation induite par l'erreur sur la position exacte des thermocouples

	μ_{N_α} Asymptotique (%)			$\mu_{N_{h_{cg}}}\left(K.m^2.W^{-1}\right)$ Asymptotique (%)			$\mu_{N_{\phi_g}}\left(W.m^{-2}\right)$ Asymptotique (%)		
Erreur de positionnement	**1(%)**	**2(%)**	**5(%)**	**1(%)**	**2(%)**	**5(%)**	**1(%)**	**2(%)**	**5(%)**
1. (----)	0.18	0.71	1.61	1.5	1.3	2.12	-2.65	-4.94	-12.9
2. (++++)	-1	-1.24	-2.47	0.6	0.5	-3.75	2.3	4.51	13.18
3. (--++)	-2.1	-3.12	-5.38	-0.45	-3.7	-15	0.1	-0.3	-2.51
4. (++--)	0.79	2.54	4.51	2.68	3	9.83	0.25	0.73	2.74
5. (+--+)	-0.69		0.14	-0.024		-0.13	-0.38		-4.6
6. (-++-)	-0.22	0.73	0.93	1	-1.41	0.07	0.34	2.63	5.1
7. (+-+-)	-0.74	-0.082	-1.5	0.36	-0.7	-1.22	-0.36	-1.45	-3
8. (-+-+)	0.65	0.37	1.54	-0.003	1.15	3.54	0.9	1.72	3.1

L'équation (2.26) permet le calcul de l'écart relatif entre la valeur asymptotique réel et estimé.

$$\mu_{N_p} = 1 - \frac{\mu_{p_{estimé}}}{\mu_{p_{réel}}} \tag{2.26}$$

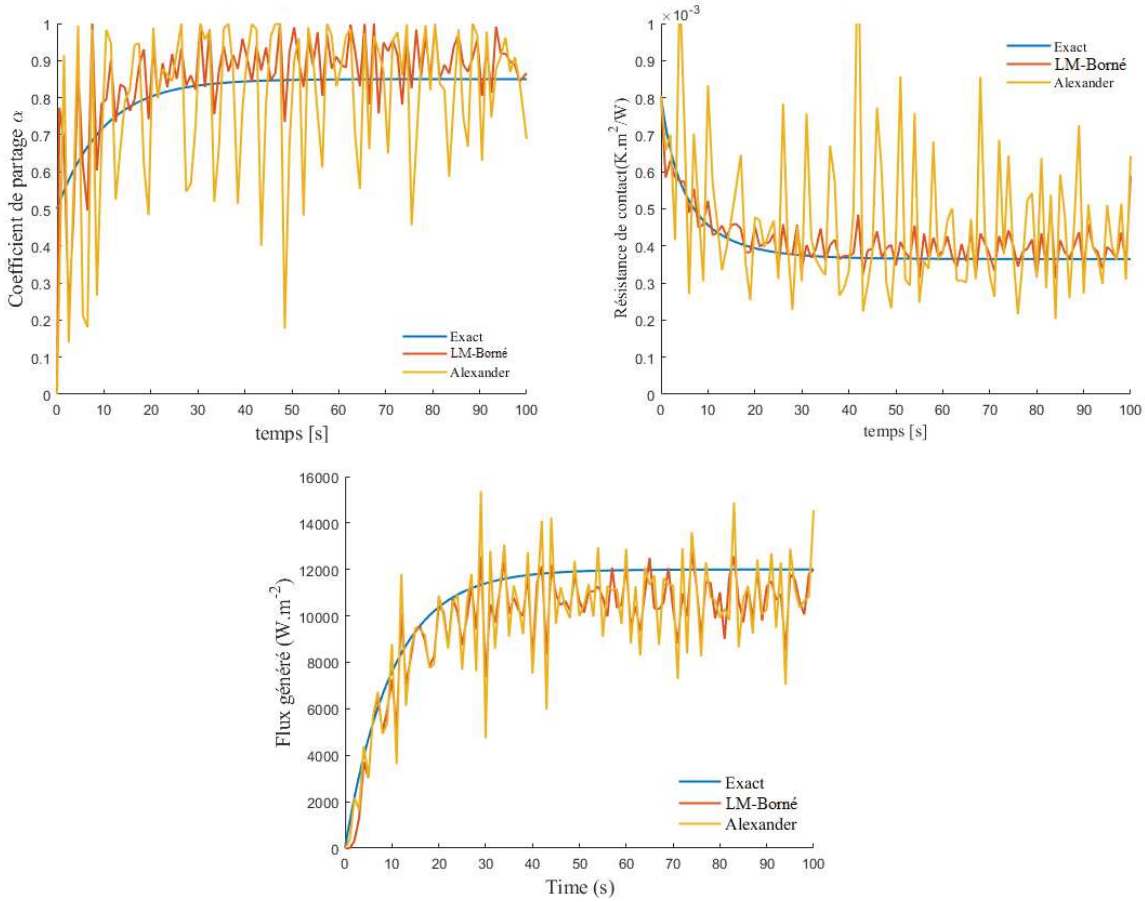


Figure II:36: Estimation avec une erreur de 5% (++++) sur la position des thermocouples

- Les deux premières lignes correspondent à une erreur de même nature pour tous les thermocouples. Dans cette configuration, on trouve les erreurs d'estimations de flux les plus importantes, de l'ordre de $\pm 13\%$ pour une erreur sur la position de $\pm 5\%$. Le flux est sous-estimé pour des erreurs de positionnement traduisant une prise de mesure à des positions plus proche de l'interface que dans la configuration théorique pour le corps (1). Inversement, il est surestimé lorsque les erreurs de positionnement des thermocouples induisent un éloignement par rapport à l'interface. On constate aussi une erreur d'estimation concernant le coefficient de partage et la résistance de contact. Toutefois, ces erreurs n'atteignent pas des valeurs significatives. Les résultats pour des erreurs de positionnements de thermocouple de 5% sont représentés dans la Figure II*:36*.
- La troisième et la quatrième ligne, regroupent les configurations ou toutes les erreurs de positionnement des thermocouples induisent un rapprochement ou bien un éloignement de l'interface de contact. Ces deux configurations induisent des erreurs significatives sur le coefficient de partage et la résistance de contact glissant. La résistance de contact et le coefficient de partage sont surestimés lorsque les erreurs sur les positions des thermocouples donnent des positions plus éloignées de l'interface. Réciproquement, ces deux paramètres de

contacts sont sous-estimés lorsque les erreurs sur les positions des thermocouples donnent des positions plus proches de l'interface. Concernant l'estimation du flux, l'écart relatif n'atteint pas des valeurs significatives. Le signe de cet écart fait apparaitre les mêmes résultats que pour la configuration 1 et 2. La Figure II:37 donne une représentation des estimations des trois paramètres pour une erreur sur la position de 5%.

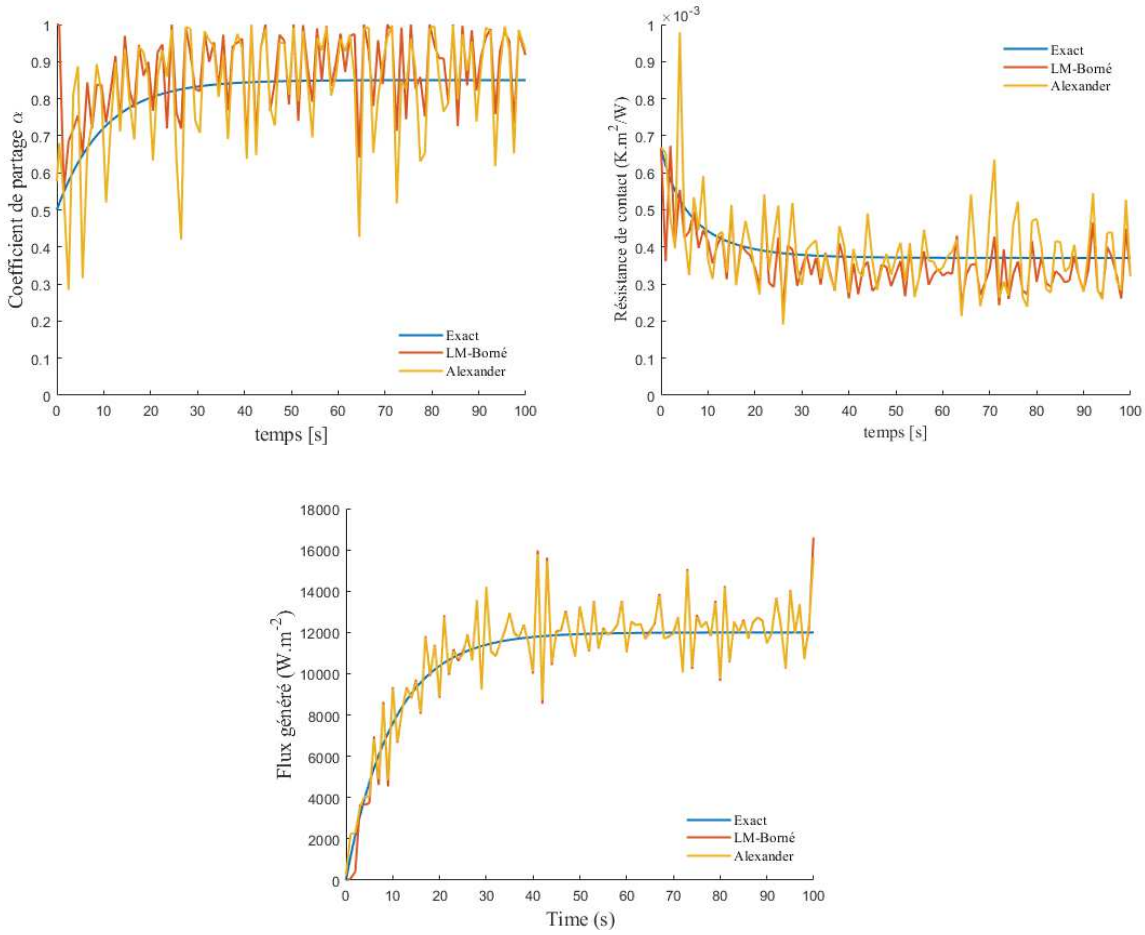


Figure II:37 : . Estimation avec une erreur de 5% (--++) sur la position des thermocouples

- De la configuration 5 à 8, les positions de mesures d'un même corps n'ont pas la même nature d'erreur. L'écart relatif des valeurs asymptotiques des trois paramètres de contact glissant n'atteignent pas des valeurs significatives. C'est ce type d'erreurs auxquels on devra probablement faire face expérimentalement. Figure II:38 donnent une représentation des estimations des trois paramètres pour une erreur sur la position de 5%.

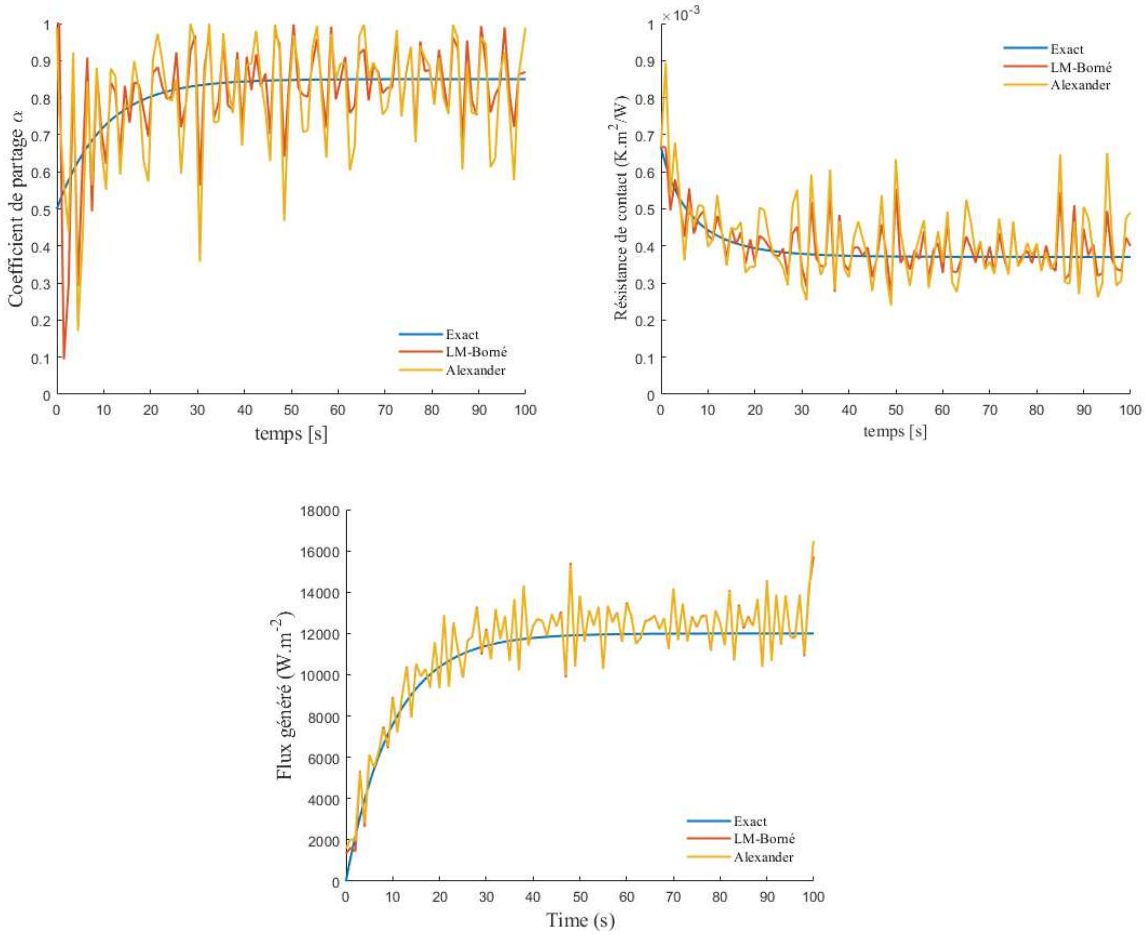


Figure II:38: Estimation avec une erreur de 5% (+-+) sur la position des thermocouples

Dans l'ensemble, les erreurs liées à la position des thermocouples induisent des instabilités qui ont pour conséquences un manque de précision dans l'estimation des paramètres des contacts glissant. L'importance de ces erreurs dépend de l'écart entre la position réelle et la position introduite dans le modèle. On trouve que les configurations I, II et IV, donnent les erreurs les plus importante (9%, 12%, 13%).

II.4.3.2. Erreur due aux propriétés thermiques

Les méthodes de caractérisation présentées dans la partie I.2.1 engendrent une marge d'erreur. Pour la méthode TPS, la marge d'erreur pour la conductivité thermique et la diffusivité thermique en respectant les bonnes conditions d'utilisation sont respectivement 5 et 10%. Il est donc nécessaire d'anticiper les erreurs éventuelles liées aux propriétés thermiques des matériaux. Les résultats d'estimation des paramètres de contact pour des erreurs de 5% de chacune des conductivités thermiques et de 10% pour la diffusivité de l'acier et du bronze sont présentés dans le Tableau II-12. Les écarts relatifs sont calculés avec l'équation(2.26).

Tableau II-12 : Erreur d'estimation induite par l'erreur sur les propriétés thermiques.

Erreur sur les propriétés thermiques (%)		μ_{N_α} Asymptotique (%)	$\mu_{N_{h_{cg}}}\left(K.m^2.W^{-1}\right)$ Asymptotique (%)	$\mu_{N_{\phi_g}}\left(W.m^{-2}\right)$ Asymptotique (%)
Conductivité thermique (%)	Diffusivité thermique (%)			
1. (+5, -5)	(+10, -10)	0.91	2.06	-10.8
2. (-5, +5)	-10, +10)	-2	0.62	10.9
3. (0, 0)	+10, -10)	0.04	1.53	0.63
4. (0, 0)	-10, +10)	-0.8	1.3	0.25
5. (+5, -5)	0, 0)	0.52	1.5	-10.31
6. (-5, +5)	0, 0)	-1.72	0.7	10.4
7. (-5, -5)	0, 0)	1.92	3.5	5.11
8. (+5, +5)	0, 0)	-2.9	1.23	-4.5

- Les deux premières configurations représentent les cas où on a une erreur de $\pm 5\%$ sur la conductivité thermique et $\pm 10\%$ sur la diffusivité thermique pour les deux corps. On constate que les erreurs d'estimations du coefficient de partage et de la résistance de contact sont faibles. Alors qu'elles sont de l'ordre de $\pm 11\%$ pour le flux généré. Dans le cas où l'erreur sur les paramètres thermiques induit une surévaluation de ces derniers dans le corps (1) et une sous-évaluation pour le corps (2), le flux généré estimé se trouve surestimé. Alors que si l'erreur sur les paramètres thermiques induit une sous-évaluation de ces derniers dans le corps (1) et une surévaluation pour le corps (2), le flux généré estimé se trouve sous-évalué.

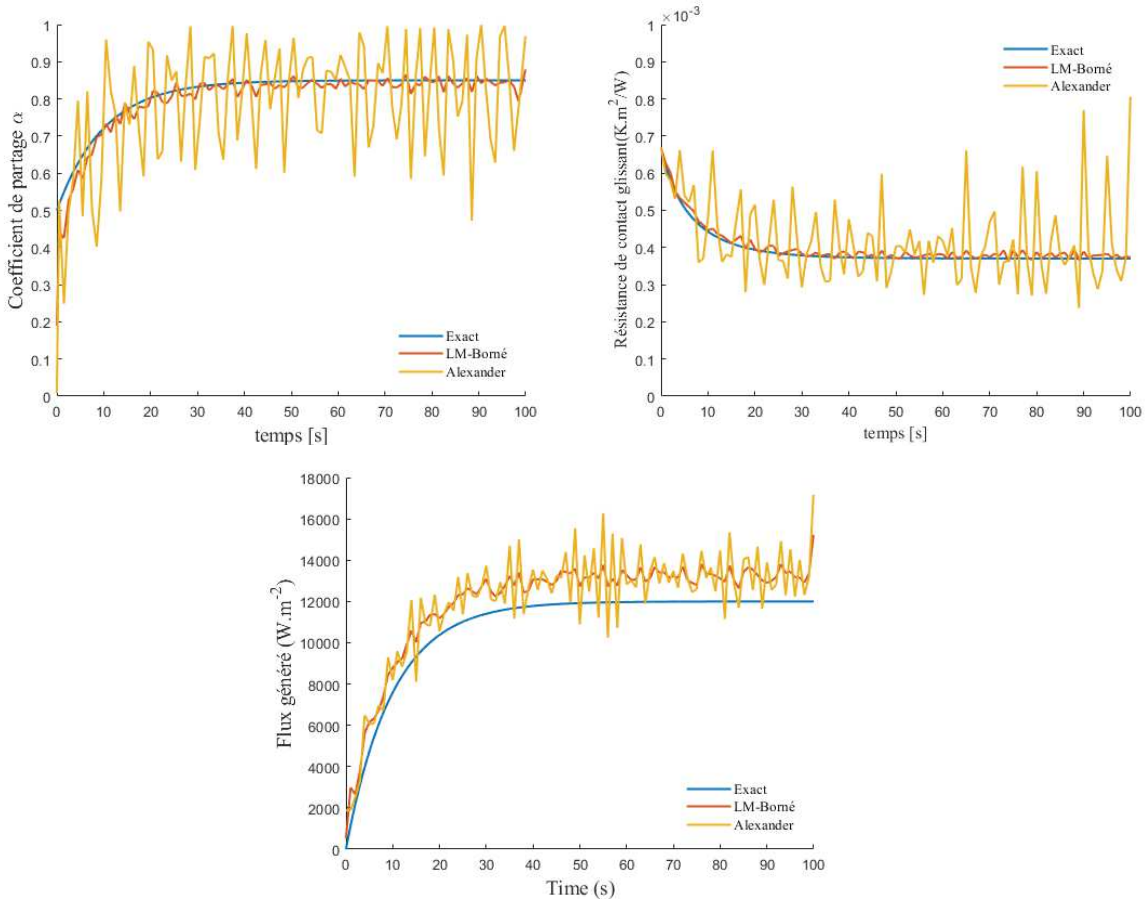


Figure II:39:Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 1 du Tableau II-12.

Dans le premier cas, comme l'erreur a induit une surévaluation du caractère conducteur du matériau, le flux est naturellement surévalué pour correspondre aux températures mesurées (Numériques). La Figure II:39 représente les courbes réels des paramètres de contact glissant et les courbes des paramètres estimés pour la configuration 1.

- Les configurations 3 et 4 sont réalisées pour découvrir laquelle des deux propriétés thermiques a le plus d'influence sur les erreurs d'estimation. On considère une conductivité thermique égale à la valeur théorique et on introduit une erreur de $\pm 10\%$ sur la diffusivité thermique. Les erreurs d'estimations des paramètres de contacts glissant sont faibles. Cela nous permet de conclure que les erreurs de caractérisation de la diffusivité thermique impacte peut la fiabilité de l'estimation dans ce problème inverse. La Figure II:40 représente les courbes réels des paramètres de contact glissant et les courbes des paramètres estimés pour la configuration 3.

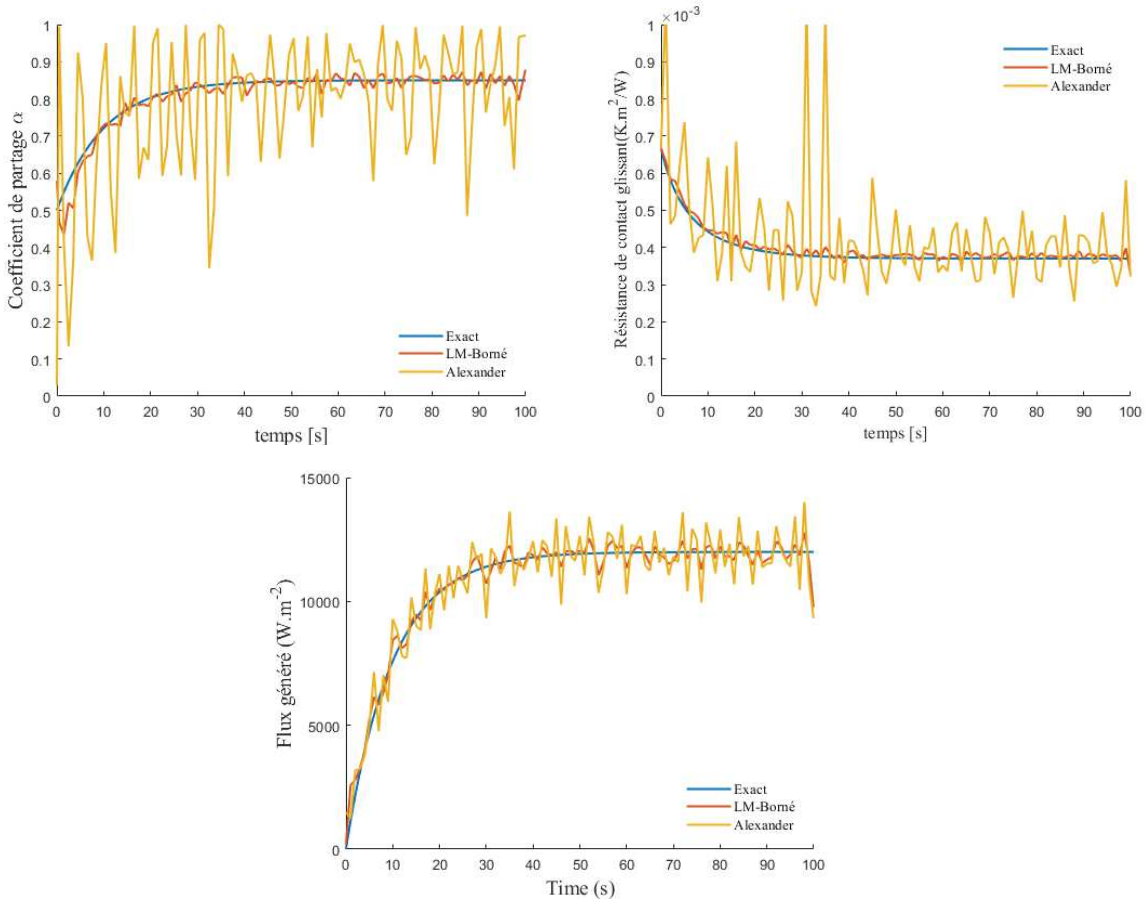


Figure II:40:Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 3 du Tableau II-12.

- Les configurations de 5 à 8 sont simulées dans le but de déterminer l'impact de l'erreur de caractérisation de la conductivité thermique sur l'estimation des paramètres de contact glissant. Les configurations 5 et 6 introduisent des erreurs de signes opposés sur la conductivité thermique. On retrouve quasiment les mêmes valeurs d'écart relatifs des paramètres estimés que

pour la configuration 1 et 2. L'erreur d'estimation induite par des erreurs de caractérisation thermiques des matériaux est principalement portée par la conductivité thermique. Figure II:41 représente les courbes réels des paramètres de contact glissant et les courbes des paramètres estimés pour la configuration 5.

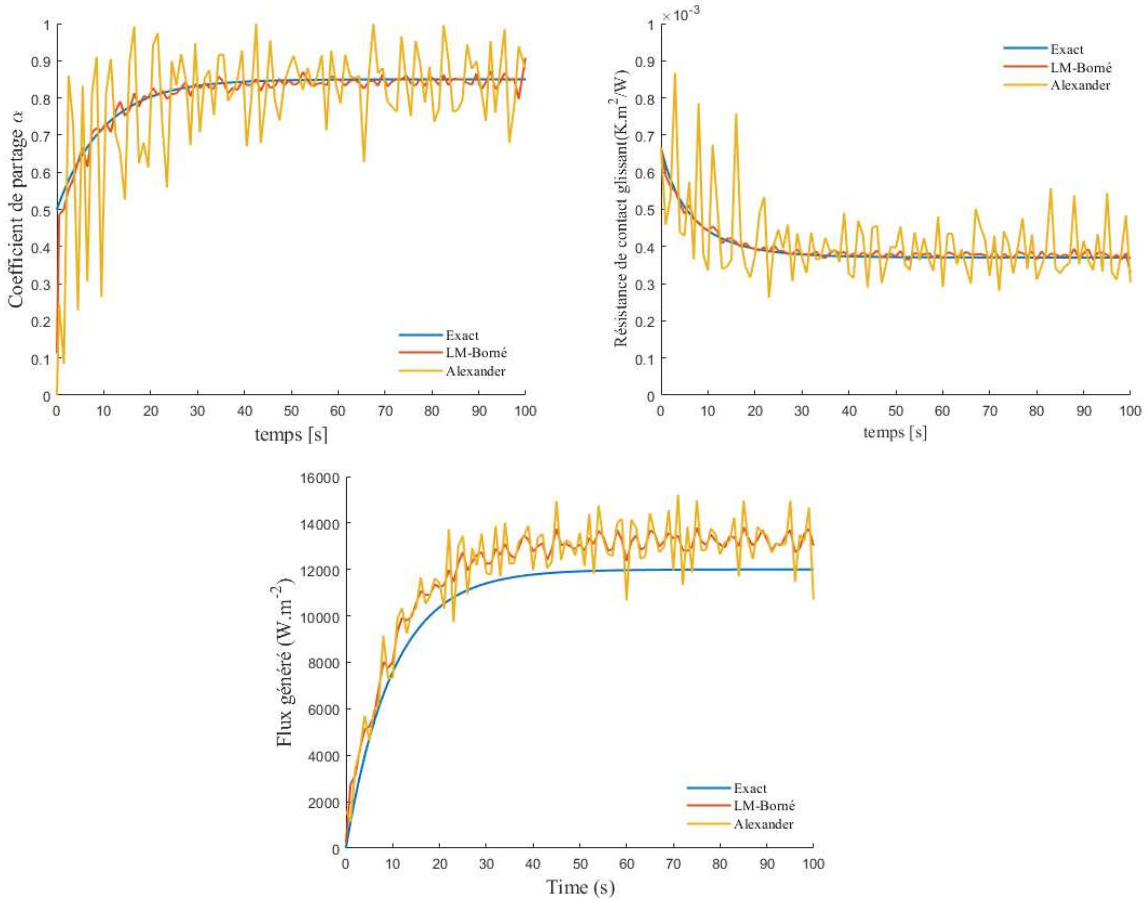


Figure II:41: Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 5 du Tableau II-12.

- Les cas 7 et 8 introduisent des erreurs de signe identique sur la conductivité thermique. Les erreurs d'estimations du coefficient de partage et de la résistance de contact glissant augmentent sensiblement, mais reste toutefois faible. Alors que l'erreur d'estimation du flux est quant à elle atténuée. La Figure II:42 représente les courbes réels des paramètres de contact glissant et les courbes des paramètres estimés pour la configuration 7.

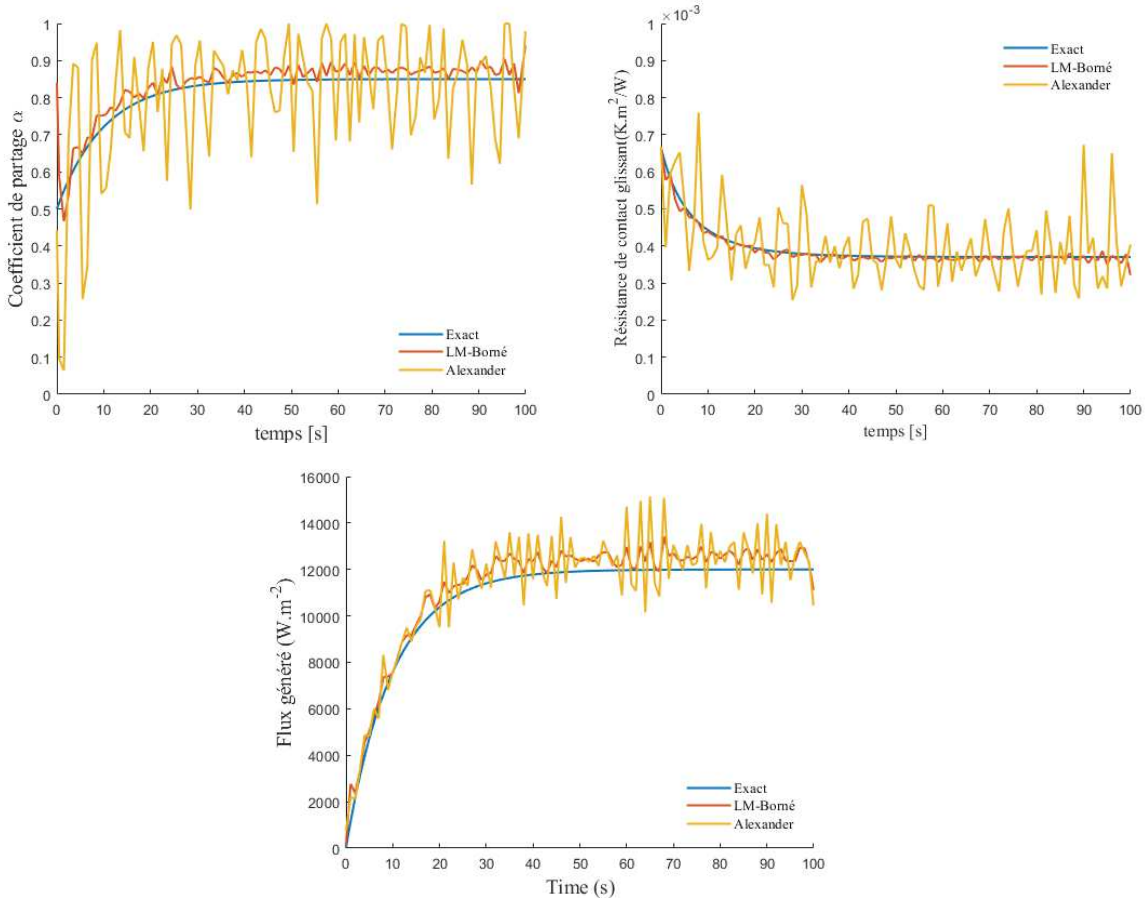


Figure II:42: Estimation des paramètres de contact glissant pour la configuration 7 du Tableau II-12.

II.5. Conclusion

Après avoir attesté de la nature variable des paramètres de contacts glissants, un modèle direct a été mis en place en prenant en compte cet aspect. Cette étude numérique a été menée dans le but de vérifier la possibilité d'estimer les fonctions des trois paramètres de contact glissant.

Différentes méthodes d'estimation ont été développées et testée dans cette partie. Une étude de sensibilité et de corrélation a été réalisée afin de vérifier la faisabilité de l'estimation des fonctions des paramètres de contacts. Une forte corrélation existe entre le coefficient de partage et la résistance de contact. Cette corrélation est atténuée en réalisant un décalage temporel lors de la phase de paramétrisation. Différentes méthodes d'inversion ont été testées, la méthode de l'horizon glissant séquentielle, permettant d'estimer avec précision uniquement la fonction du flux généré, la méthode de l'horizon glissant à deux paramètres, qui permet d'encadrer la fonction de la résistance de contact glissant autour d'une enveloppe et d'estimer avec précision la fonction du flux généré. Pour finir sur les méthodes développées, la méthode de paramétrisation avec décalage temporel, couplée à un algorithme de minimisation de Levenberg-Marquadt doté de la possibilité de contraindre l'intervalle de recherche de la solution. Afin de tester et de valider ces différents algorithmes, plusieurs tests ont été réalisés avec des formes de paramètres de contacts différentes en introduisant à chaque fois un bruit de mesure aux

données numériques semblables au bruit blanc, du banc expérimental. Une étude de l'impact des erreurs des positions des thermocouples et des propriétés thermiques des matériaux sur l'estimation des paramètres de contact a été réalisée et a montré une bonne robustesse de la procédure de paramétrisation avec décalage temporel, couplée à l'algorithme de minimisation cité précédemment.

Partie III. Caractérisation expérimentale d'une interface en contact frottant sec

III.1. Estimation expérimentale des paramètres de contact thermique

Une fois que les résultats numériques des méthodes d'estimation ont été validés, on cherche dans cette partie à estimer les fonctions des paramètres de contact en situation expérimentale. Le dimensionnement et les caractéristiques d'un banc d'essai respectant la configuration théorique ont été d'abord effectués par Salti [73]. Par la suite, dans la thèse de Bauzin [77] les premiers essais expérimentaux ont pu être réalisés. C'est à partir de ce montage expérimental que les essais présentés dans cette thèse ont été effectués.

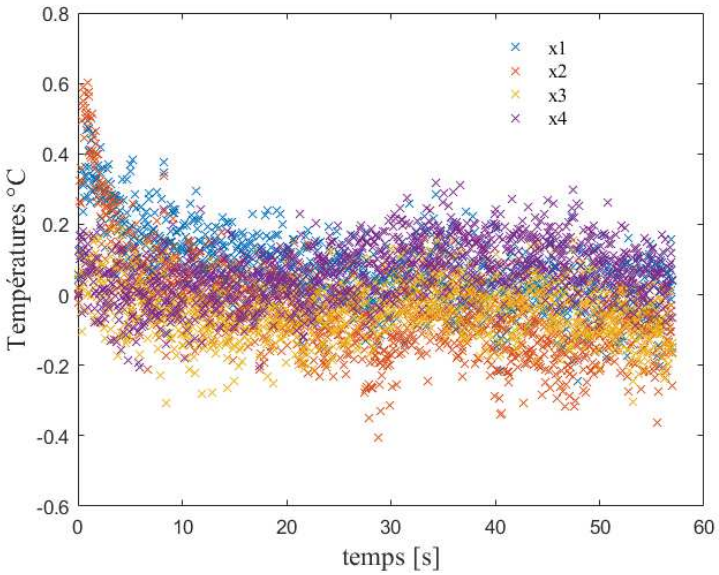


Figure III:1: Résidus d'identification avec hypothèse de paramètres constants

Pour montrer la pertinence du recourt à une estimation de paramètres variables, une identification sur un essai expérimental en supposant les paramètres de contacts constants est réalisée. Les résidus d'une telle identification de paramètres sont présentés dans la Figure III:1. On constate la même signature révélatrice d'une phase d'évolution des paramètres de contacts aux premiers instants. L'hypothèse de paramètres constants n'est donc pas vérifiée et la répétabilité des résidus obtenus indique une variation des paramètres dans les premiers instants.

III.1.1. Instrumentation du banc expérimentale

Le banc expérimental dédié à cette étude a été présenté dans plusieurs thèses et articles scientifiques. Ce montage expérimental nous permet l'étude d'un frottement entre deux cylindres creux en contact axial. Ce dispositif est présenté sur la Figure III:2. Il se compose de deux cylindres creux (1 et 2) en contact axial. Leurs surfaces latérales sont isolées à l'aide de PTFE et leurs profondeurs radiales sont plus faibles

que leurs diamètres afin de favoriser un transfert unidirectionnel de la chaleur. Ainsi, les conditions expérimentales correspondent au modèle théorique donné par les équations (2.1) et (2.2). Le cylindre 1 est animé d'un mouvement de rotation alors que le cylindre 2 est fixe. Une précédente étude théorique [78] montre la nécessité d'avoir un saut de température important à l'interface afin d'identifier la résistance de contact thermique en contact frottant. Dans le but d'assurer cette condition, un élément chauffant est placé en haut du cylindre rotatif. Cet élément chauffant reste alimenté tout au long de l'essai. Au cours de cette phase de chauffage, on identifiera aussi la résistance de contact statique. La partie mobile est soumise à un mouvement de rotation à l'aide d'un moteur électrique contrôlé par un variateur de fréquence.

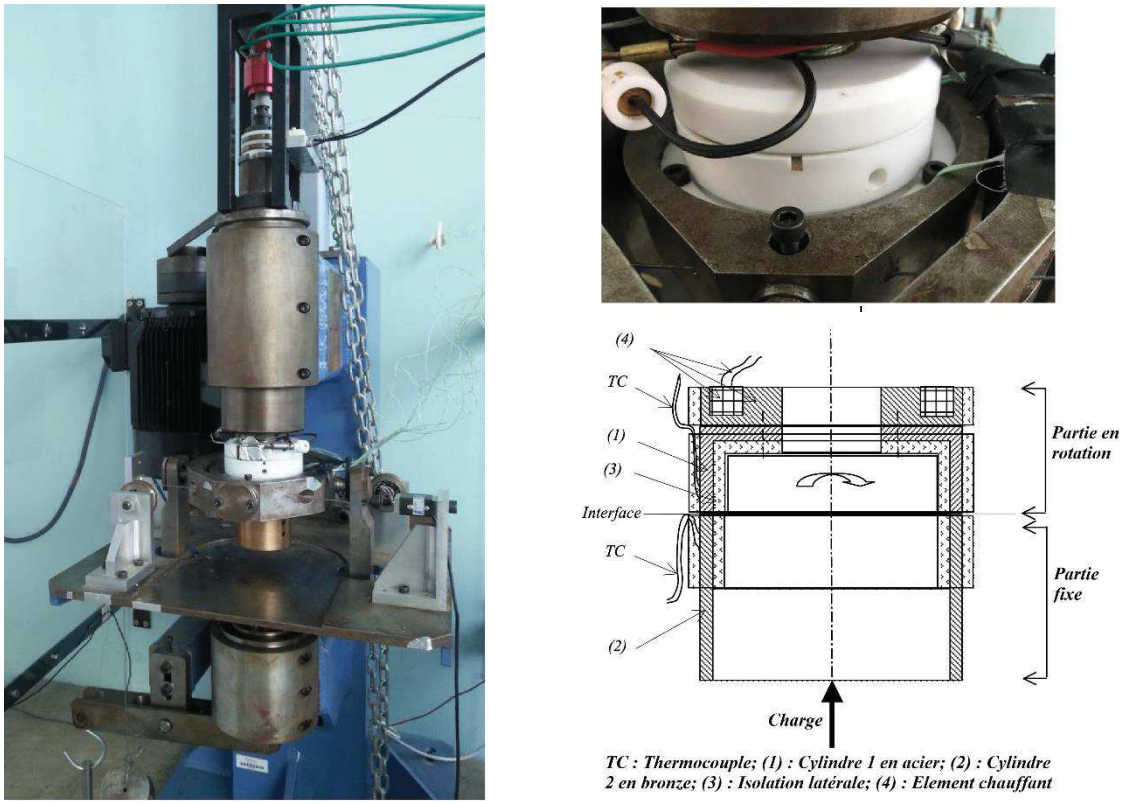


Figure III:2 : Banc expérimental dédié à l'étude d'un contact frottant

Le signal du variateur de fréquence est récupéré afin d'avoir la courbe d'évolution de la vitesse du moteur. Le solide 1 est fixé sur un cardan afin d'assurer l'uniformité du contact entre les deux solides. Ce cardan est lui-même fixé sur un lien coulissant qui permet de mettre les deux solides en contact ou bien de les éloigner l'un l'autre. La charge axiale est transmise au cylindre creux via ce cardan. Les propriétés thermiques des matériaux utilisés (acier C35 / bronze) sont données dans le Tableau III-2. Elles ont été mesurées expérimentalement par un dispositif utilisant la méthode TPS (Transient plane source). Le solide 1 est en bronze et le solide 2 est en acier.

Tableau III-1 : Propriétés thermiques des matériaux.

	Acier	Bronze
Conductivité thermique $\left(W.m^{-1}.K^{-1}\right)$	43	64
Diffusivité thermique x 10^{-6} $\left(m^2.s^{-1}\right)$	11	24

III.1.1.1. Instrumentation de la vitesse

La vitesse est un facteur dynamique auquel on a voulu s'intéresser au cours de cette étude. L'influence de cette grandeur physique sur les paramètres de contacts glissants variables n'a pas encore été établie.

L'acquisition du signal de sorti du variateur de vitesse se fait par un module Arduino. Une courbe d'étalonnage a été réalisée. Cette courbe permet d'avoir la tension mesurée par le module Arduino en fonction de la fréquence indiquée par le variateur de fréquence.

Ensuite, on utilise un tachymètre afin de mesurer la vitesse pour chaque fréquence indiquée par le variateur de commande du moteur. Une courbe de calibrage de la vitesse de rotation et la fréquence du variateur est ainsi obtenue. En combinant les deux courbes de calibration, on obtient la courbe permettant de calculer la vitesse de rotation en fonction de la tension mesurée. À l'aide d'une règle de proportionnalité, on peut ensuite calculer les vitesses linéaires en $m.s^{-1}$.

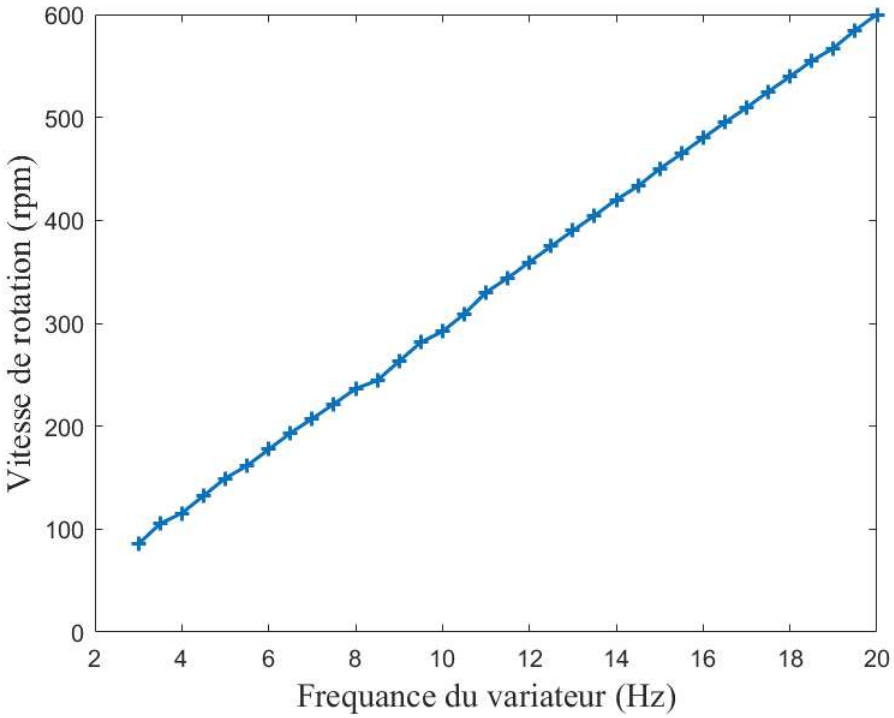


Figure III:3 Courbe de calibration du variateur

III.1.1.2. Instrumentation de la température.

Les températures sont mesurées en utilisant des thermocouples de type K de 100 µm de diamètre. Ils sont soudés sur la surface latérale de chaque cylindre. Les distances entre les thermocouples et l'interface sont données dans le Tableau III-2. Les positions des thermocouples sont calculées par analyse d'images. L'acquisition est faite à l'aide d'un module NI9213 dédié aux mesures de températures.

Tableau III-2 : Position des thermocouples par rapport à l'interface

	CL1	X1	X2	X3	X4	CL2
Positions(mm)	-6.60	-3.65	-1.76	2.46	5.38	14.3

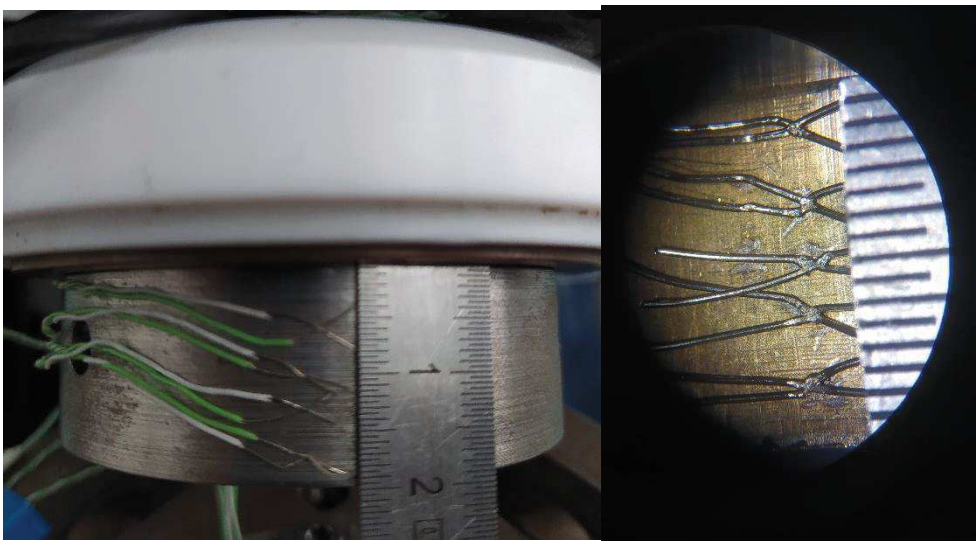


Figure III:4 : Détermination des positions des thermocouples

Les mesures sur le solide 1 (fixe) sont simples à réaliser, les thermocouples sont d'un côté soudés sur la paroi latérale du cylindre creux et de l'autre côté fixé sur la chaine d'acquisition. Étant donné que le solide 2 est mobile, le même montage ne peut être effectué. On utilise un transmetteur à mercure comme intermédiaire entre les thermocouples soudés sur le solide et les fils connectés à la chaine d'acquisition.

Les transmetteurs rotatifs utilisent une voie de mercure pour faire le lien entre la partie fixe et la partie en rotation. Chaque cellule contenant une de ces pistes de mercure est traversée par un axe creux de faible diamètre par lequel passent les fils d'interconnexion. Chaque cellule du transmetteur compte pour un canal. Les cellules sont bien évidemment isolées électriquement les unes des autres et de l'extérieur. La faible surface de frottement entre la piste de mercure et l'axe garantit un échauffement minimal du dispositif. Cela évite la génération d'une FEM liée à l'effet Peltier et qui serait alors induite par l'échauffement du point de contact entre les deux métaux

Le bruit blanc d'acquisition de l'ensemble du système de mesures est représenté sur la Figure III:5. Il suit une loi normale de moyenne $\mu = 0°C$ et un écart-type $\sigma = 0.08°C.$ Le signal du bruit de mesure a été réalisé en phase dynamique sans contact.

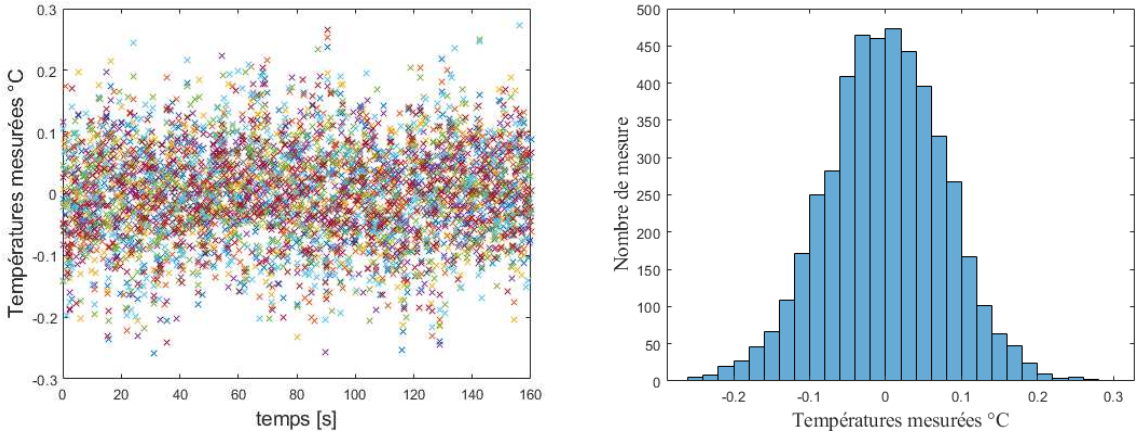


Figure III:5: Mesure du bruit blanc et sa répartition.

III.1.2. Résultats d'estimation de fonction

Deux types de configurations seront étudiées dans cette partie :

- **Vitesse constante**

Une mesure complète comporte plusieurs phases, statiques et dynamiques. L'estimation aura lieu sur la phase dynamique ou la vitesse est quasi-constante à cause de la constante de temps du moteur qui a une valeur très petite (quelques ms). L'évolution des températures pour un essai dans ces conditions et un chargement de $9.48\times10^4\,Pa$ est représenté dans la Figure III:6. On impose d'abord une vitesse à partir du variateur de fréquence puis on alimente le moteur. La vitesse nominale est atteinte rapidement. C'est sur ce modèle de configuration expérimentale que ce sont basées les études antérieures qui faisaient apparaitre une signature des résidus avec l'hypothèse de paramètres constants.

- **Vitesse variable**

L'estimation des paramètres thermiques se fera en imposant des schémas de forme de vitesse différentes. N'ayant pas pu programmer le variateur de fréquence, les modifications seront exécutées manuellement. Le but sera donc d'estimer expérimentalement la variation des paramètres de contact dans des conditions de variation de régime de vitesse. Trois scénarii seront étudiés.

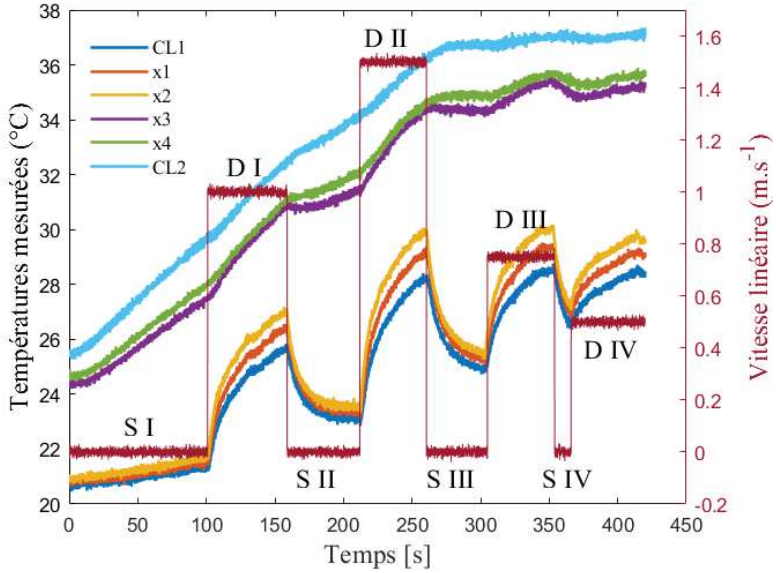


Figure III:6:Mesures standard pour la configuration d'étude à vitesse constante.

III.1.2.1. Vitesse constante

La Figure III:7 est un exemple de champ de température et la courbe de vitesse des essais traités dans cette partie. Trois phases distinctes peuvent être déterminées dans chacun des essais.

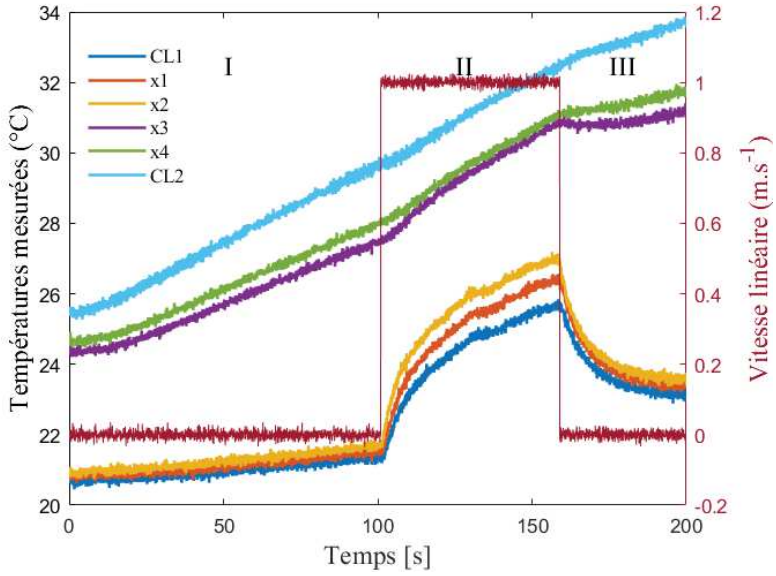


Figure III:7: Essai expérimental typique à vitesse constante.

- I : Phase de chauffage sans frottement (Phase statique, solides en contact).
- II : Phase de frottement (Phase dynamique).
- III : Phase d'arrêt du frottement (Phase statique, solides en contact).

La résistance de contact statique est identifiée au cours de la première phase. Cette valeur est utilisée pour l'estimation des paramètres de contact dans la phase II de l'essai.

Afin de comprendre et de vérifier expérimentalement l'influence du contact frottant sur la variation de la résistance de contact statique, On identifie aussi cette dernière en phase III (Tableau III-3).

Tableau III-3: Résistance statique identifiée avant et après chaque phase dynamique

Phase	**SI**	**S II**	**S III**	**S IV**
Résistance statique $\left(K.W^{-1}.m^{-2}\right)$	8.05×10^{-4}	7.95×10^{-4}	8.13×10^{-4}	8.32×10^{-4}

Tout au long d'un essai expérimental, la résistance de contact identifiée dans chacune des phases statiques est peu impactée et elle a sensiblement la même valeur. Plusieurs essais ont été réalisés avec des vitesses différentes. Les vitesses linéaires utilisées sont : $\left[0.5,\ 0.75,\ 1,\ 1.5\right] m.s^{-1}$.

Avant d'avoir développé la procédure inverse par paramétrisation, des identifications par la méthode de la spécification de fonction (Horizon Glissant) à deux variables ont été réalisées. Par la suite, une procédure HG Séquentiel présentée dans la partie numérique a été appliquée. Avec la première approche, une estimation préliminaire de la fonction du flux a été obtenue et un encadrement de l'estimation de la résistance de contact réalisé. Toutefois, le but principal était d'estimer les trois paramètres de contact, d'où le recours à la seconde méthode. L'essai utilisé pour cette illustration a été réalisé avec une vitesse linéaire de frottement de $1.5 m.s^{-1}$.

La Figure III:8 représente l'estimation des paramètres de contact avec les deux méthodes. On constate d'abord que le flux généré estimé par la méthode HG Séquentiel est plus réaliste dans les premiers pas de temps que celui identifié par la méthode HG à coefficient de partage constant. Sachant que l'instant initial de l'essai est dans la phase statique, on peut aisément attester que le flux de chaleur généré par le frottement $\phi_g = 0 W.m^{-2}$. Quant à la résistance de contact estimée par la méthode HG séquentielle, elle est bien comprise dans l'encadrement prévisionnel construit avec la méthode HG à coefficient de partage constant. L'avantage de la méthode HG Séquentielle est d'offrir la possibilité d'estimer aussi le coefficient de partage. Ce dernier est représenté dans la Figure III:9. On constate que ce paramètre varie dans le temps et a les mêmes tendances de variation que la résistance de contact. Afin de départager ces deux méthodes, on calcule l'écart-type des résidus calculés pour chacune d'elle. Ces résidus sont représentés dans la Figure III:10.

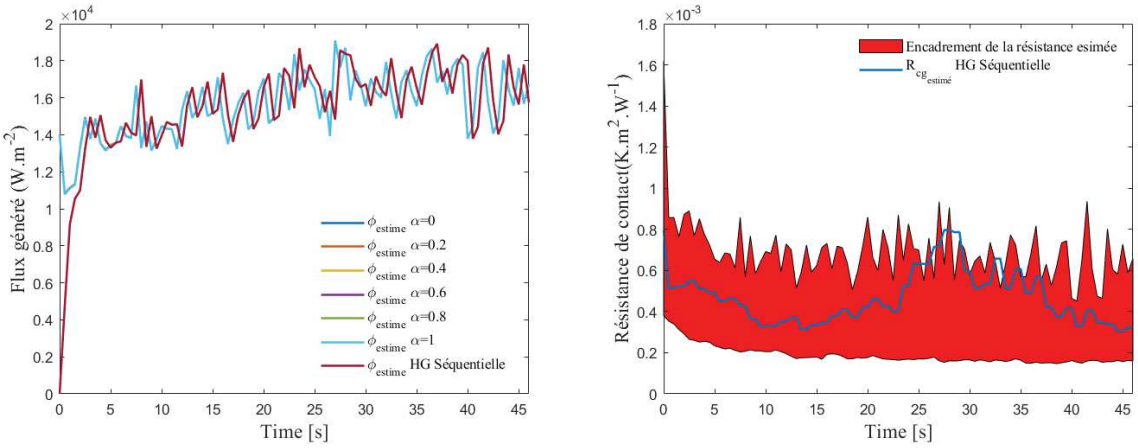


Figure III:8 : $R_{cg}(t)$ et $\phi_g(t)$ Identifié par la méthode HG et HGS

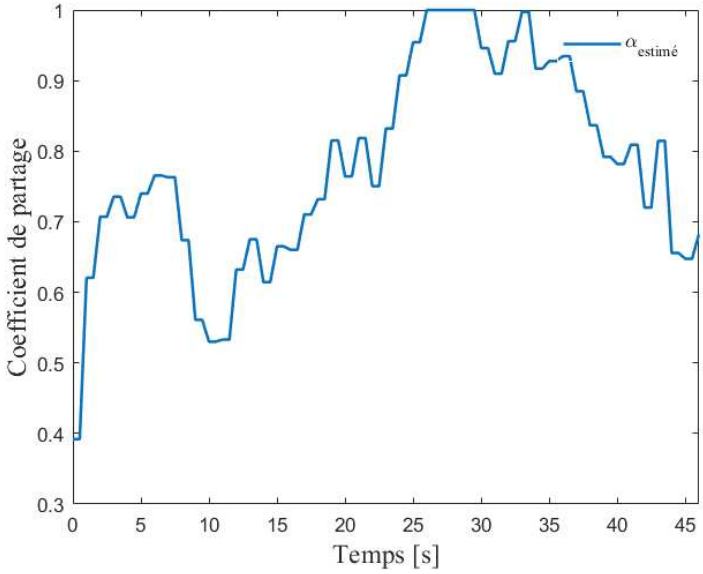
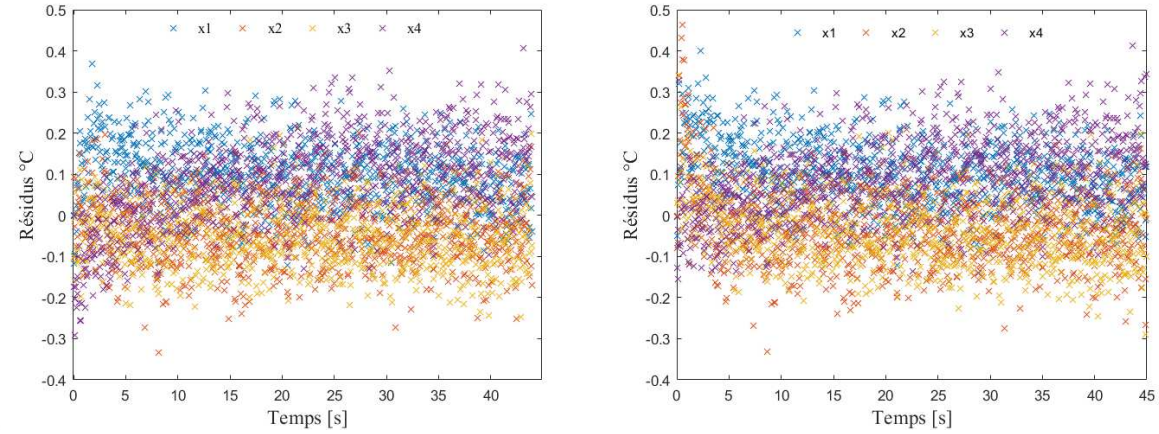


Figure III:9 : $\alpha(t)$ Identifié par la méthode HGS



A) Horizon glissant à coefficient de partage constant

B) Horizon glissant séquentiel.

Figure III:10: Résidus après estimation par horizon glissant

L'écart-type des résidus par la méthode HG à coefficient de partage constant est $\sigma_{estimation} = 0.1091°C$, alors que celui de la méthode HG Séquentielle est $\sigma_{estimation_{HGS}} = 0.1087°C$. Ils sont sensiblement similaires au-delà des tout premiers instants. Ce faible écart vient du fait de la corrélation qui existe entre le coefficient de partage et la résistance de contact. Il existe donc un phénomène de compensation entre ces deux paramètres. Il est vrai que ces deux valeurs d'écart-type sont sensiblement éloignées de la valeur de l'écart-type du bruit de mesure qui est $\sigma_{mesures} = 0.08°C$. Cet écart est principalement dû au phénomène de vibration mécanique plus important à cette vitesse de rotation. Le Tableau III-4 donne les écarts-types des résidus d'essais réalisés à différentes vitesses utilisant ces deux méthodes d'estimation.

Tableau III-4 : Ecart-type des résidus à différentes vitesses (HG séquentielle)

Vitesse linéaire V (m.s-1)	**0.5**	**0.75**	**1**	**1.5**
Écart-type (°C)	0.084	0.0824	0.093	0.1087

On a vu dans la partie numérique que la méthode la plus complète est celle de la paramétrisation avec décalage temporel. On comparera donc les résultats de cette méthode avec les précédents afin de statuer définitivement sur l'approche à adopter.

Sur la Figure III:11, on a confirmation de ce qu'on a constaté dans l'étude numérique concernant l'estimation du flux. On constate que toutes les méthodes testées donnent des estimations similaires sur la fonction du flux généré.

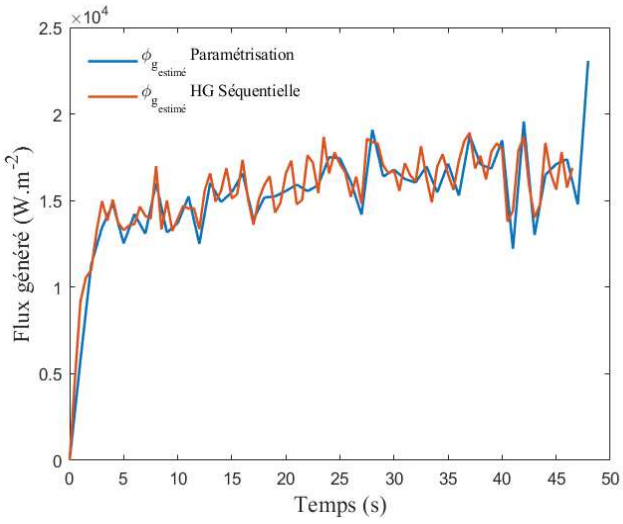


Figure III:11 : $\phi_g(t)$ Identifiée par la méthode HGS et la méthode de paramétrisation

Sur Figure III:12, on trace les fonctions estimées des deux autres paramètres. On remarque des différences concernant l'identification du coefficient de partage et de la résistance de contact. Les fonctions estimées par la méthode HG Séquentielle semblent être corrélées. Ce résultat a aussi été

constaté dans la partie numérique de l'étude. Pour en être convaincu, on trace la matrice de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ entre les valeurs de ces deux paramètres de contact. Cette matrice est illustrée sur la Figure III:13. On trouve le même résultat que dans la partie numérique. Les paramètres α_n et h_{cg_n} sont fortement corrélés. Cela entraine un biais dans l'estimation des paramètres. Pour finir cette discussion sur la méthode à adopter expérimentalement, on va s'intéresser aux résidus.

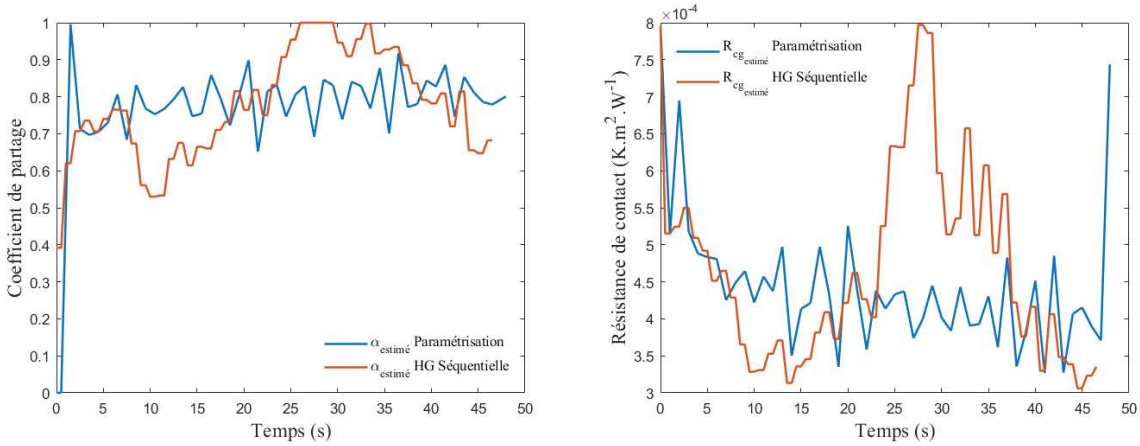
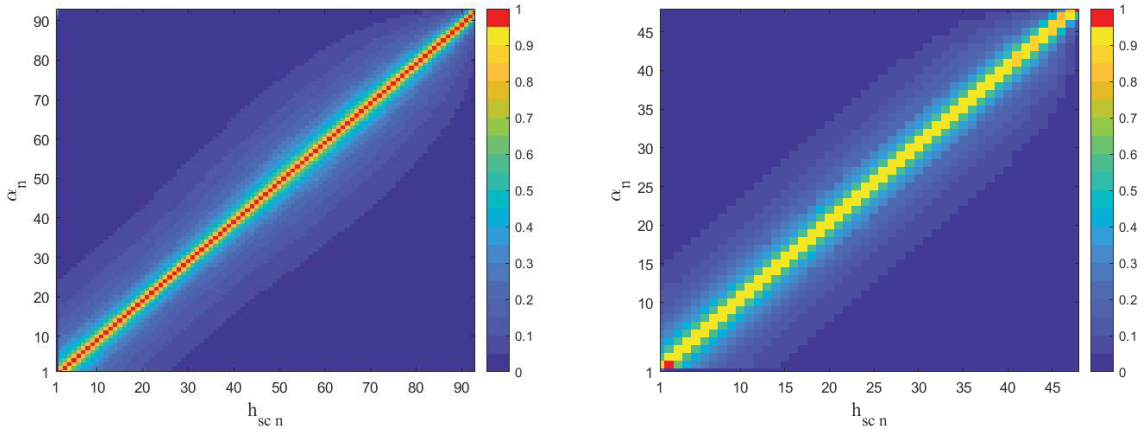


Figure III:12 : $R_{cg}(t)$ Identifiée par la méthode HGS et la méthode de paramétrisation



a) Méthode HG Séquentielle. b) Méthode de paramétrisation

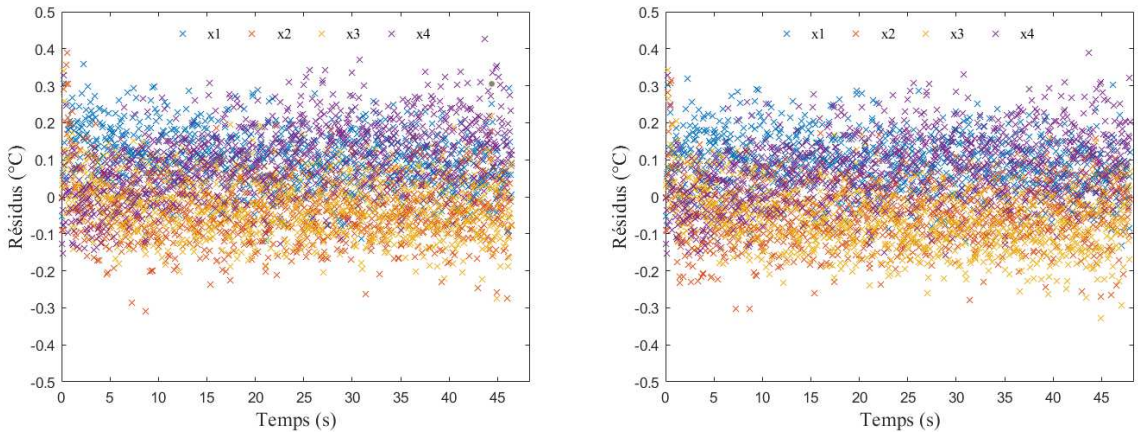
Figure III:13 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$

Les résidus de chacune des deux méthodes sont représentés dans la Figure III:14. Les écarts-types des résidus sont quasiment identiques. Pour la méthode *HG* Séquentielle on trouve un écart-type $\sigma_{HGS} = 0.1087°C$ et pour la méthode de paramétrisation avec décalage temporel on a $\sigma_{Paramétrisation} = 0.1083°C.$ Ces deux valeurs sont très proches. La différence entre les deux résidus de température est plus significative si on compare leurs moyennes. Ainsi, on trouve une moyenne

$\mu_{HGS} = 0.0365°C$ pour la méthode HG Séquentielle, alors que pour l'autre méthode on trouve $\mu_{Paramétrisation} = 0.015°C.$

Au vu des éléments à disposition, on peut donc attester que la procédure donnant les meilleurs résultats d'estimation en termes de résidus et coefficient de corrélation est la méthode de paramétrisation avec décalage temporel.

La procédure d'inversion qui sera utilisée dans le reste de l'étude expérimentale est la méthode de paramétrisation avec décalage temporel et minimisation par l'algorithme « LM-borné ».



a) Méthode HG Séquentielle. b) Méthode de paramétrisation

Figure III:14 : Résidus d'estimation

III.1.2.2. Influence de la vitesse sur les paramètres de contacts

Les évolutions des paramètres de contacts estimés pour différentes vitesses ($0.5m.s^{-1}, 0.75m.s^{-1}, 1m.s^{-1}, 1.5m.s^{-1}$) sont présentées dans les Figure III:15, Figure III:16 et Figure III:17.

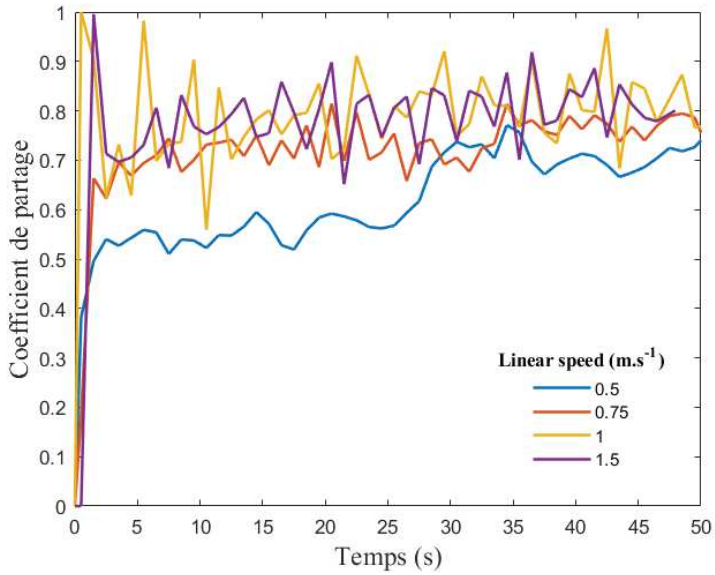


Figure III:15 : Identification de $\alpha(t)$ pour 4 vitesses différentes

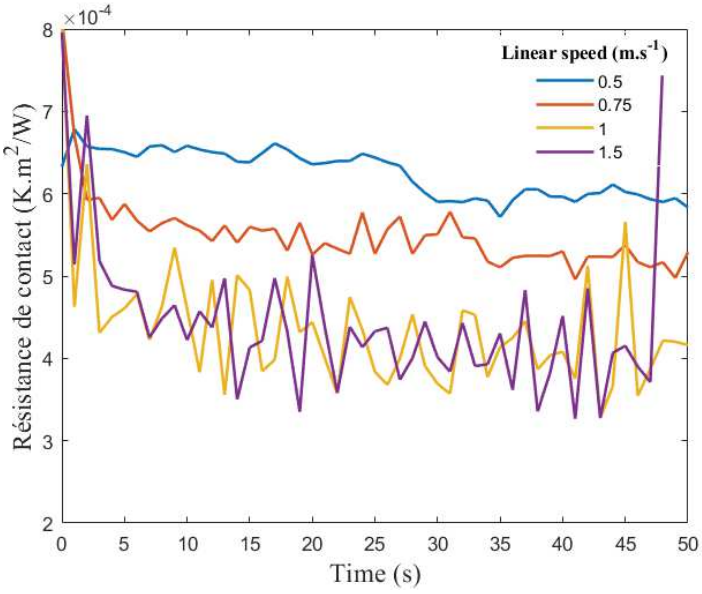


Figure III:16 : Identification de $R_{cg}(t)$ pour 4 vitesses différentes

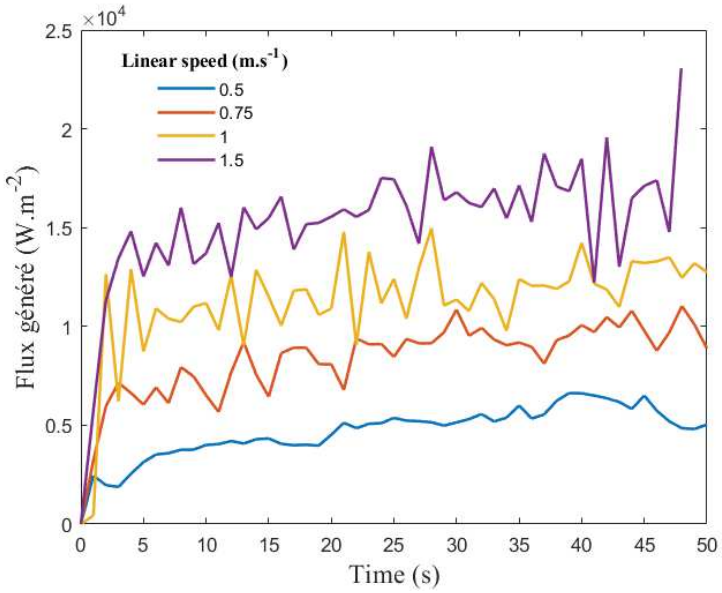


Figure III:17 : Identification de $\phi_g(t)$ pour 4 vitesses différentes

La variation de la résistance de contact thermique décroit avec l'augmentation de la vitesse linéaire (Figure III:16) . D'apprêt cette figure, la variation de la résistance de contact glissant tend vers une valeur asymptotique avec l'augmentation de la vitesse. Le coefficient de partage du flux généré peut être considéré comme constant au cours de l'expérience. Hormis pour l'essai à la vitesse de $0.5 m.s^{-1}$, on peut dire que la variation de vitesse de rotation n'affecte pas significativement ce paramètre dans ces conditions expérimentales (Figure III:15). Le flux de chaleur généré estimé augmente avec l'augmentation de la vitesse (Figure III:17). Les valeurs asymptotiques des paramètres estimés sont données dans le Tableau III-5.

Tableau III-5 : Valeurs asymptotique des paramètres estimés pour différentes vitesses

Vitesse linéaire V (m.s-1)	**0.5**	**0.75**	**1**	**1.5**
$\lim_{t\to\infty}(\alpha(t))$	0.71	0.74	0.81	0.81
$\lim_{t\to\infty}(R_{cg}(t))\ (m^2.K.W^{-1})$	6 10^{-4}	5.36 10^{-4}	4.16 10^{-4}	4.10 10^{-4}
$\lim_{t\to\infty}(\phi_g(t))\ (W.m^{-2})$	5423	9600	12373	16778

Afin de valider les résultats d'estimation, on procède à deux types de vérifications. La première sera méthodologique et la seconde physique.

○ Vérification méthodologique

On calcule les écarts-types et les moyennes des résidus. Les moyennes et les écarts-types des résidus pour chaque essai doivent être respectivement proche de $\mu_{bruit} = 0°C$ et de $\sigma_{bruit} = 0.08°C$.

Tableau III-6 : Ecart-type des résidus à différentes vitesses (Paramétrisation)

Vitesse linéaire V ($m.s^{-1}$)	**0.5**	**0.75**	**1**	**1.5**
Écart-type (°C)	0.0833	0.0816	0.0918	0.1083
Moyenne (°C)	8.9 10^{-4}	0.0069	0.0116	0.0149

On constate que les moyennes des résidus données dans le Tableau III-6 sont proches de la moyenne du bruit blanc de mesure $\mu_{bruit} = 0°C$. On peut faire la même remarque pour les écarts-types. L'écart entre les propriétés du bruit blanc et les propriétés des résidus augmente avec l'évolution de la vitesse. En augmentant la vitesse de rotation, les vibrations mécaniques s'intensifient et créent une nouvelle source de perturbation.

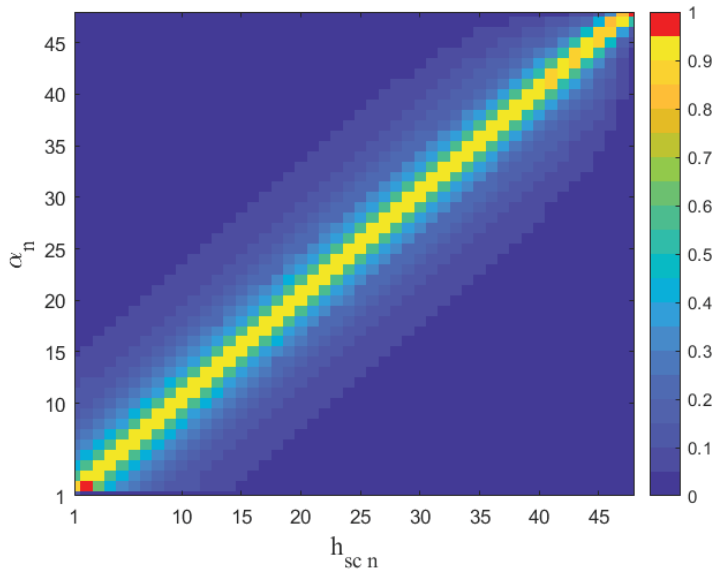


Figure III:18 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$

Pour confirmer aussi la solidité de la procédure, on analyse les matrices de corrélations et principalement la sous-matrice des coefficients de corrélation entre le coefficient de partage et la résistance de contact. On voit bien dans la Figure III:18 que ces coefficients sont tous inférieurs à 95%.

- **Vérification physique**

Afin de vérifier la validité physique de cette estimation, le coefficient de frottement mécanique $\mu_{Acier/Bonze}$ est calculé avec la relation suivante :

$$\mu_{Acier/Bronze} = \frac{\phi_{identifié}}{P.V} \tag{2.27}$$

La Figure III:19 montre que la valeur asymptotique de ce coefficient est la même quelle que soit la vitesse et elle est $\mu_{bornze/steel} = [0.12 - 0.13]$. Dans la littérature, la valeur du coefficient de frottement mécanique du couple (Bronze/Acier) est comprise dans l'intervalle $\mu_{bornze/steel} = [0.10 - 0.16]$.

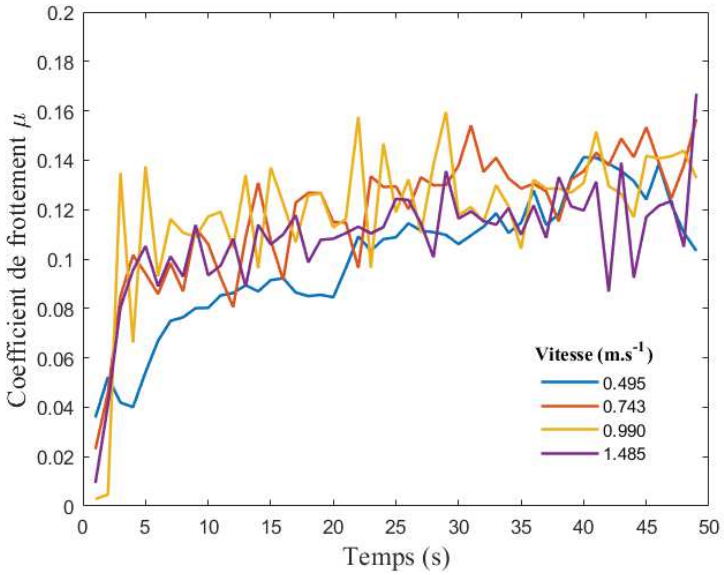


Figure III:19 : Coefficient de frottement (Bronze/Acier)

III.1.2.3. Vitesse variable

L'objectif est de retrouver l'évolution des paramètres lorsque les conditions de frottement changent durant un essai. Des expériences à vitesse variable et à pression de contact constante sont réalisées pour effectuer l'estimation des paramètres de contacts. Il est important de souligner que les expériences sont réalisées avec un contact plus rugueux que précédemment pour les scénarios 1 et 2. Trois scénarii différents ont été étudiés.

- **Scénario 1**

Ce premier scénario est composé de plusieurs fonctions portes. Comme le changement de vitesse à partir du variateur de fréquence se fait manuellement, les phases de transition d'une vitesse à l'autre prennent quelques secondes. La vitesse linéaire a comme valeur minimale *1 m.s^{-1}* et *2 m.s^{-1}* comme valeur maximale. Ce test expérimental est composé de 5 paliers de vitesse. Le premier est *1 m.s^{-1}*, la vitesse est doublée dans la deuxième étape. Ensuite, on revient à *1 m.s^{-1}*. Enfin, la vitesse linéaire revient à sa valeur maximum en passant par le palier *1,5 m.s^{-1}*.

Les mesures de température et les cinq phases (I-II-III-IV-V) de l'évolution de la vitesse sont présentées sur la Figure III:20. La pression dans l'interface est constante et elle vaut $P = 10.53 \times 10^4\, Pa$.

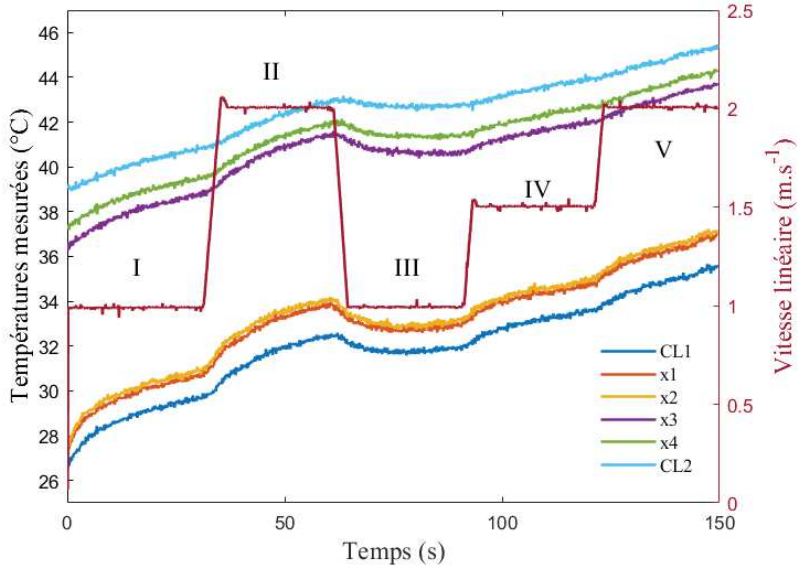


Figure III:20 : Températures mesurées et vitesse linéaire scénario 1

Comme le montre la Figure III:21, La fonction du flux généré estimée suit la forme de la vitesse linéaire.

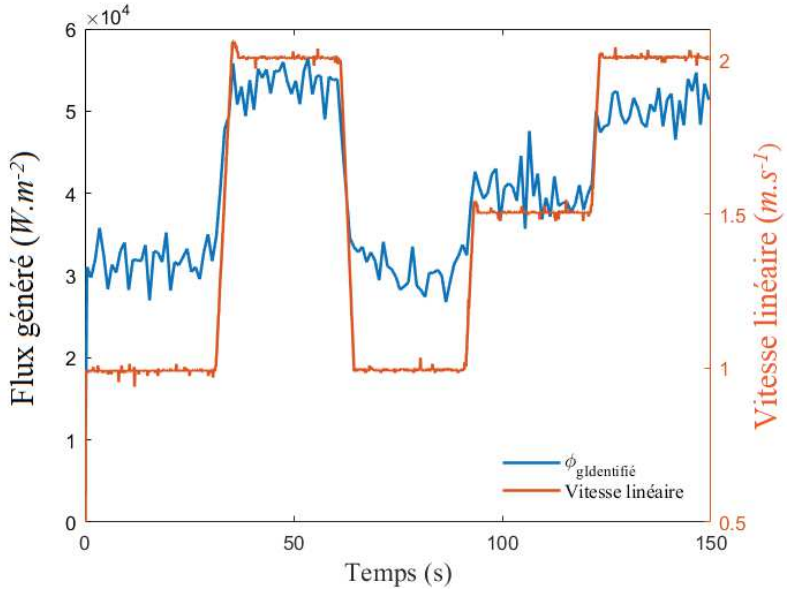


Figure III:21 : $\phi_g(t)$ estimation et vitesse linéaire

Les valeurs moyennes du flux de chaleur généré (Figure III:21) à la même vitesse sont similaires. À $1\ \text{m.s}^{-1}$ (phases I et III), la valeur moyenne identifiée est d'environ $3.20\times10^4\ W.m^{-2}$ et à $2\ \text{m.s}^{-1}$ (phases II et V) elle est d'environ $5\times10^4 W.m^{-2}$. L'évolution de la résistance de contact en fonction de la vitesse linéaire est illustrée sur la Figure III:22. On a une confirmation du résultat précédent qui dit que la résistance de contact diminue avec l'accroissement de la vitesse de frottement. De la même manière, les valeurs de la résistance de contact à des vitesses identiques sont quasiment similaires (Figure III:22). Ainsi, dans la phase (I et III) ou la vitesse est égale à 1 m.s-1, la valeur de la résistance

de contact est d'environ $2.4\times10^{-4}K.m^2.W^{-1}$. Pour les phases (II et V) qui correspondent à une vitesse de $2m.s^{-1}$, la résistance de contact est d'environ $1.6\times10^{-4}K.m^2.W^{-1}$ Pour le coefficient de partage, sa variation en fonction de la vitesse linéaire n'est pas significative comme le montre la Figure III:23. Sa valeur varie entre [0.5, 0.6] pour un doublement de la vitesse de rotation. La moyenne de sa valeur sur tout l'essai est $\alpha_{moyen}=0.56$.

Tableau III-7 : Valeurs moyennes des paramètres estimées dans chacune des phases

Phase	Valeur moyenne de $\phi_g\ (W.m^{-2})$	Valeur moyenne de R_{cg} $\times10^{-4}\ (K.m^2.W^{-1})$	Valeur moyenne de α
I	31694	2.45	0.59
II	51292	1.74	0.50
III	32435	2.37	0.61
IV	39623	2.13	0.62
V	49685	1.52	0.51

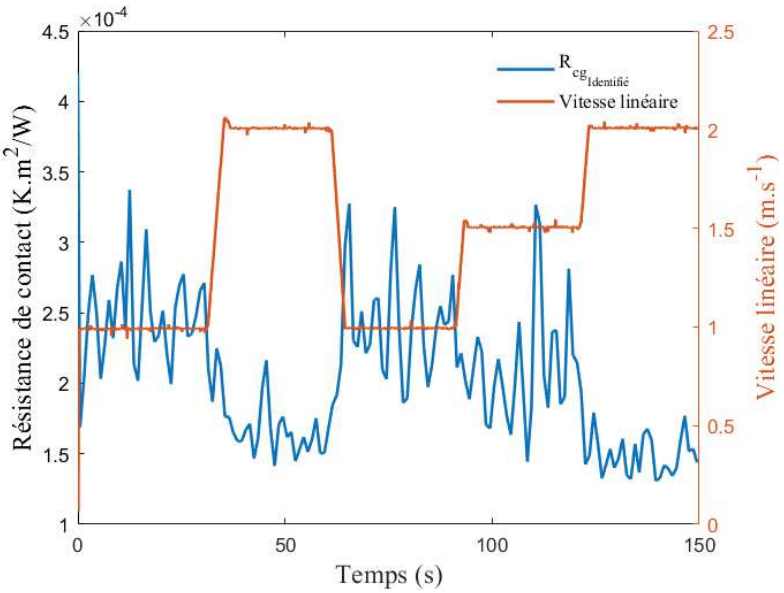


Figure III:22 : $R_{cg}(t)$ estimée et vitesse linéaire scénario 1

Les résidus de température non signés présentés sur la Figure III:24 confirment l'exactitude de l'estimation. La valeur moyenne des résidus est $\mu_{résidus}=5.10^{-4}°C$ et leur écart-type est $\sigma_{résidus}=0.0808°C$. Cette valeur est très proche de l'écart-type du bruit blanc de mesure $\sigma_{bruit}=0.08°C$. De plus, la valeur maximale des coefficients de corrélation $CC_{(\alpha_m,R_{cg_n})}$ est inférieur à 95% (Figure III:25). La valeur maximum est de 92,57%. Ces deux résultats nous permettent garantir la précision de l'estimation.

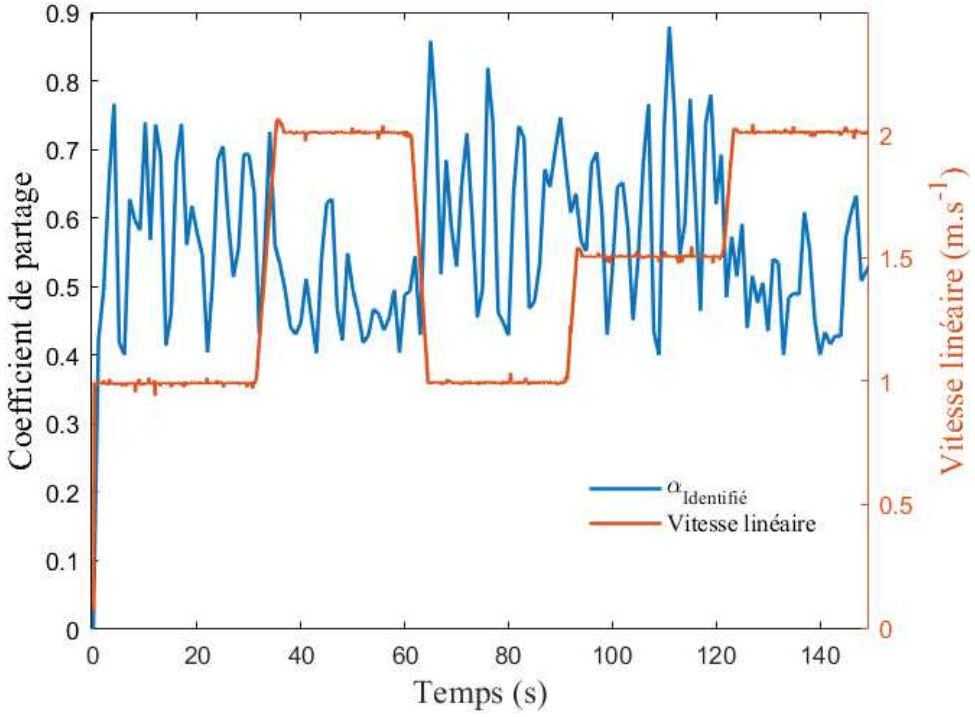


Figure III:23 : $\alpha(t)$ estimé et vitesse linéaire scénario 1

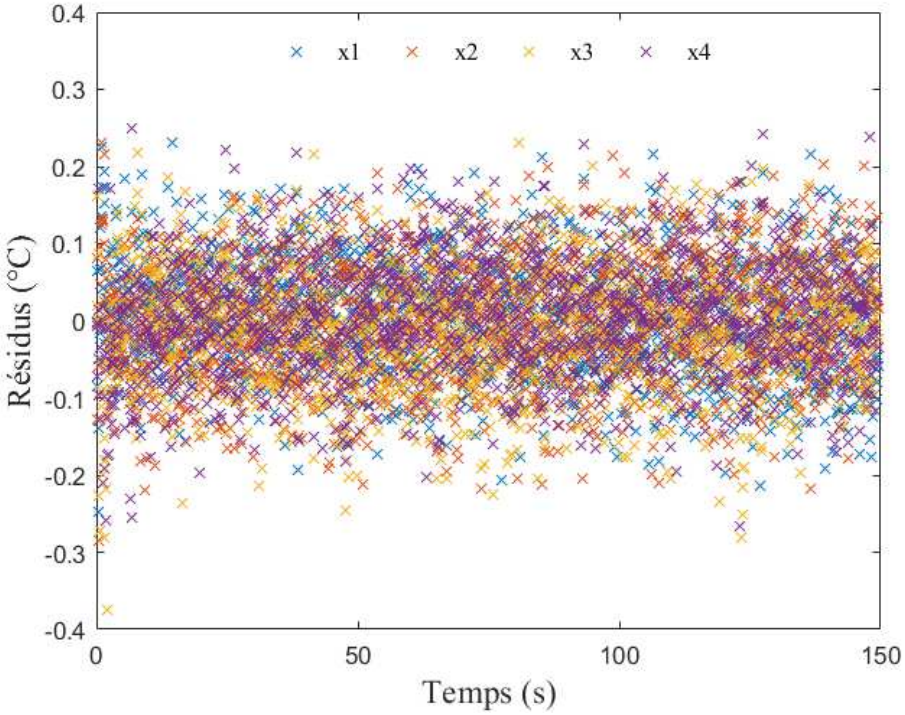


Figure III:24 : Résidus d'estimation pour le scénario 1

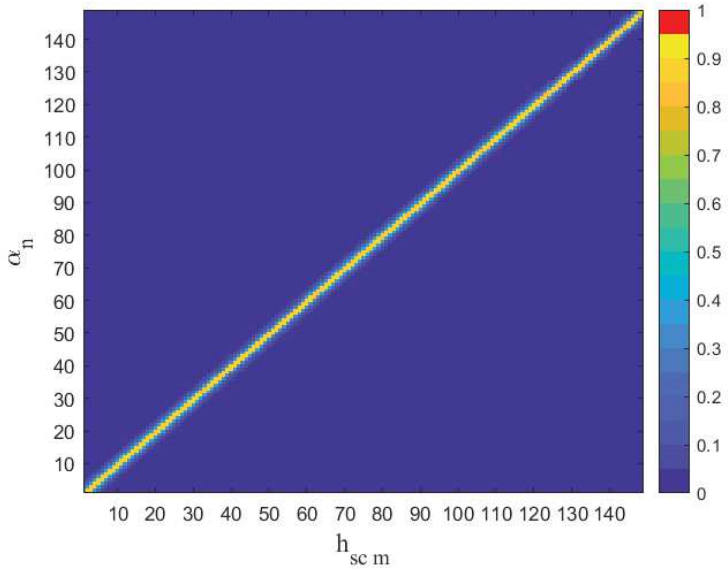


Figure III:25 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$

- **Scénario 2**

Ce deuxième scénario est de forme pyramidale. Il est composé de sept niveaux de vitesse et se divise en une phase croissante et une phase décroissante. La vitesse de glissement augmente et ne diminue par pas de $0.5 m.s^{-1}$ entre une vitesse minimale de $0.5 m.s^{-1}$ et maximale de $2 m.s^{-1}$. Les mesures de température et les sept phases (I-II-III-IV-V-VI-VII) d'évolution de la vitesse sont présentées sur la Figure III:26. La pression de contact est $P = 13.10^4\ Pa$.

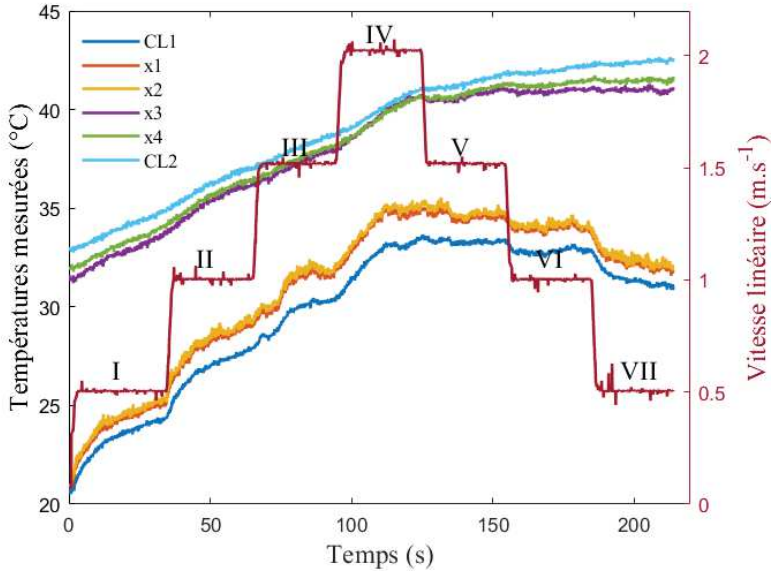


Figure III:26 : Températures mesurées et vitesse linéaire scénario 2

La Figure III:27 : montre que la fonction du flux estimé a une forme très proche de celle de la vitesse. On retrouve une proportionnalité entre flux généré et vitesse. Le flux de chaleur augmente avec

l'augmentation de la vitesse et puis diminue durant la phase de décroissance de la vitesse. Comme cela a été constaté dans les paragraphes précédents, la résistance de contact thermique diminue lorsque la vitesse linéaire augmente (Figure III:28). Les deux variations sont assez symétriques. Le Tableau III-8 confirme que les valeurs moyennes du flux de chaleur généré à une vitesse identique, en phase croissante et décroissante sont très proches. La même observation peut être faite pour la résistance de contact thermique.

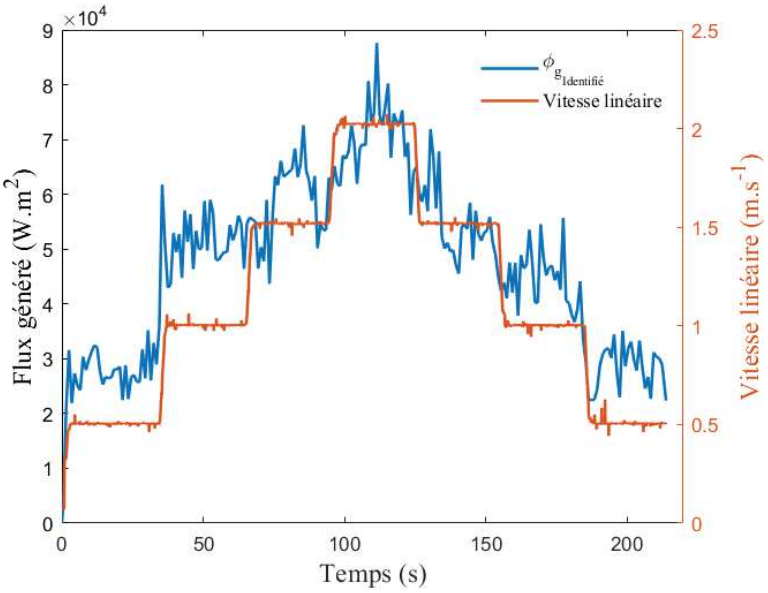


Figure III:27: $\phi_g(t)$ estimé et vitesse linéaire

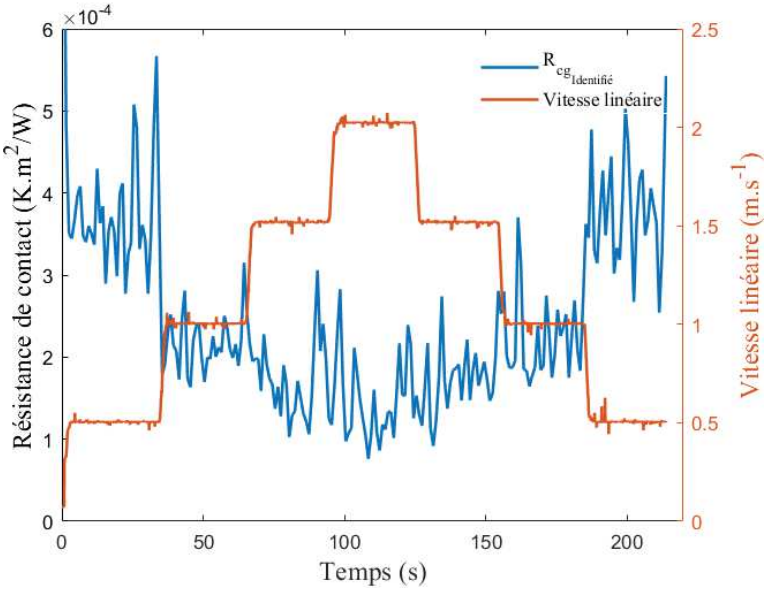


Figure III:28: $R_{cg}(t)$ estimée et vitesse linéaire

Dans cet essai, le coefficient de partage de chaleur intrinsèque identifié présenté sur la Figure III:28 est également constant. La valeur moyenne est $\alpha(t) = 0.57$ (Figure III:29). Ce résultat confirme que ce

paramètre est peu affecté par la variation de la vitesse. Dans le premier scénario, la valeur identifiée était d'environ $\alpha(t) = 0.56.$ Pour deux tests différents, avec des scénarii de vitesses variables différents et un état de surface proche, avec des pressions de contact différentes, mais de mêmes ordres de grandeur, le coefficient de partage de chaleur intrinsèque estimé est similaire et presque invariant. Il convient de noter que les conditions de surface étaient similaires dans le premier et le second scénario.

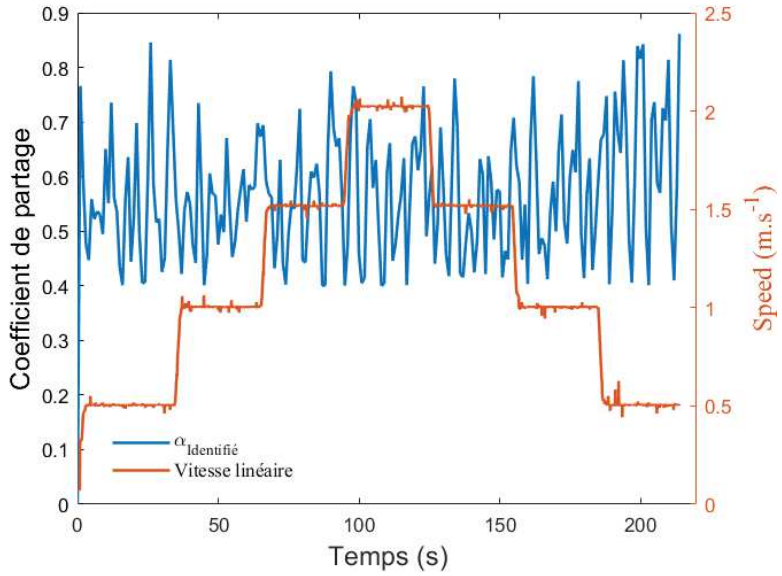


Figure III:29 : $\alpha(t)$ estimé et vitesse linéaire

Tableau III-8 : Valeurs moyennes des paramètres estimées dans chacune des phases

Phase	**Valeur moyenne de $\phi_g\ (W.m^{-2})$**	**Valeur moyenne de R_{cg} $\times 10^{-4}\ (K.m^2.W^{-1})$**	**Valeur moyenne de α**
I	26430	3086	0.55
II	48179	2.45	0.55
III	58350	1.78	0.56
IV	68101	1.55	0.57
V	57570	1.71	0.56
VI	46411	2.16	0.57
VII	30148	3.58	0.63

Les résidus de température ne sont pas signés et la valeur moyenne de ces résidus est $\mu_{résidus} = 0.0033°C$. L'écart-type des résidus de température dans ce scénario est $\sigma_{résidus} = 0.095°C$. On constate un écart entre l'écart-type des résidus et l'écart-type du bruit de mesure. Cet écart est dû principalement aux conditions expérimentales. On a remarqué que lorsque les vitesses sont supérieures à $1.5 m.s^{-1}$, à partir de quelques dizaines de secondes les vibrations deviennent plus présentes et induisent une perturbation supplémentaire qu'il est très dur de quantifier.

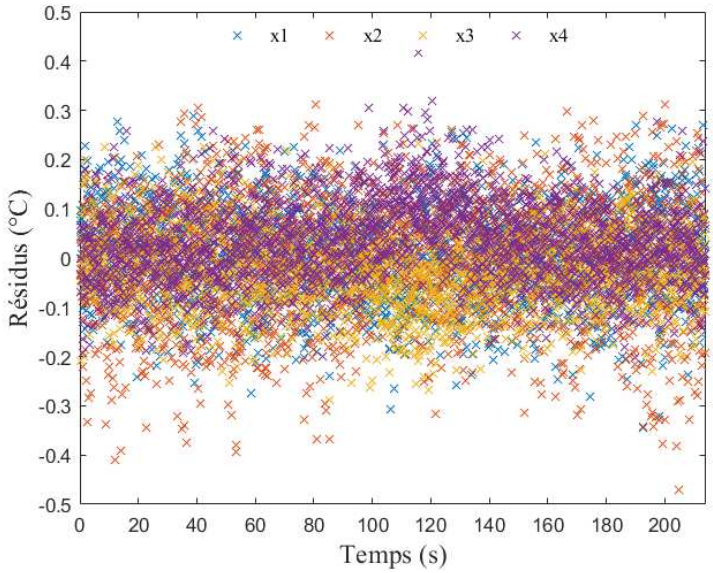


Figure III:30 : Résidus d'estimation pour le scénario 2

Comme pour tous les essais précédents, les coefficients de corrélation entre le coefficient de partage et la résistance de contact sont inférieurs à 95%. La Figure III:31 illustre bien ce résultat. La valeur maximale de $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ est de 95%.

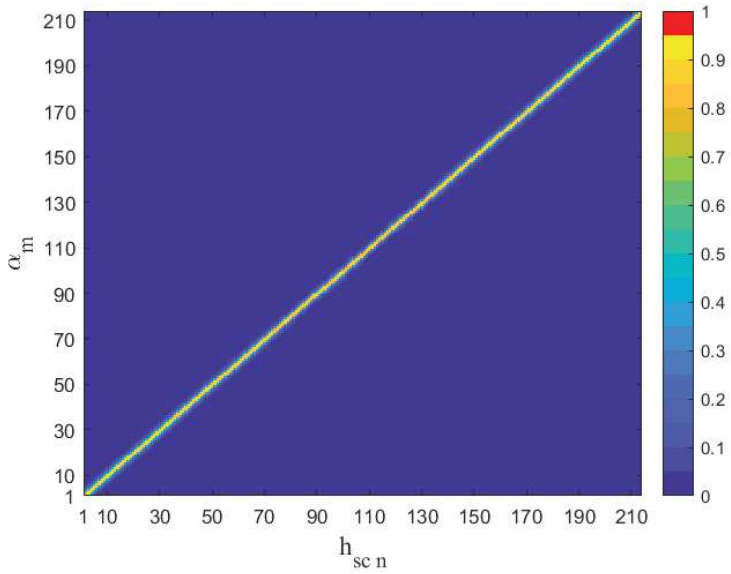


Figure III:31 : Coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$

- **Scénario 3**

Le scénario 3 est quant à lui composé de 5 périodes successives. La vitesse linéaire passe de $0.5 m.s^{-1}$ à $1 m.s^{-1}$, puis revient à $0.5\ m.s^{-1}$. Les périodes de cet essai sont de $30s$. Sur la Figure III:32 sont représentés les températures et les vitesses mesurées au cours de l'essai.

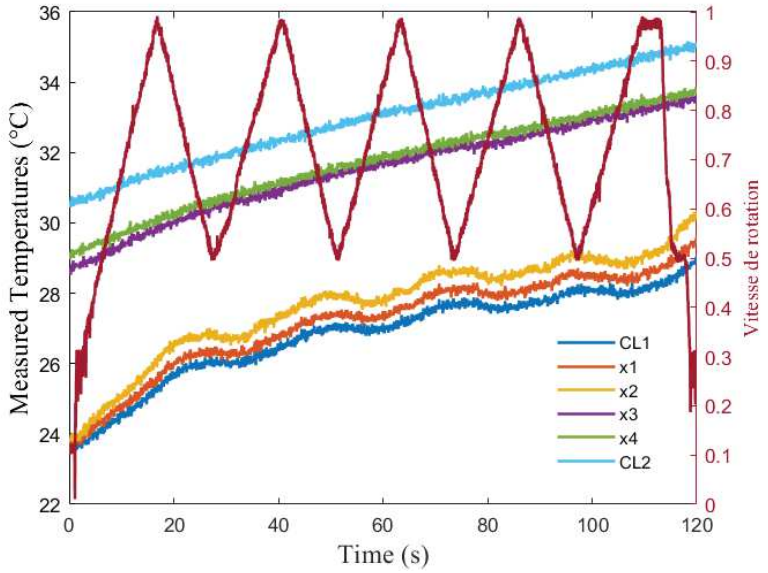


Figure III:32 : Températures mesurées et vitesse linéaire scénario 3

Le flux généré estimé suit bien la forme de la vitesse avec un léger décalage. La Figure III:33 montre bien ce retard. La fonction du flux estimée est aussi périodique avec une équivalence des valeurs aux mêmes vitesses.

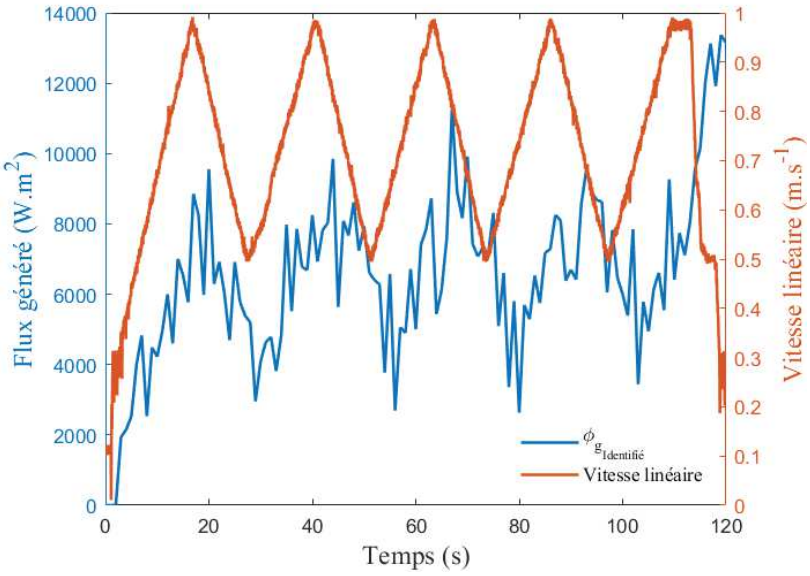


Figure III:33: $\phi_g(t)$ estimé et vitesse linéaire du scénario 3

On retrouve aussi le même schéma d'évolution pour la résistance de contact (Figure III:34). La résistance décroit avec l'augmentation de la vitesse et elle croit quand la vitesse décroit.

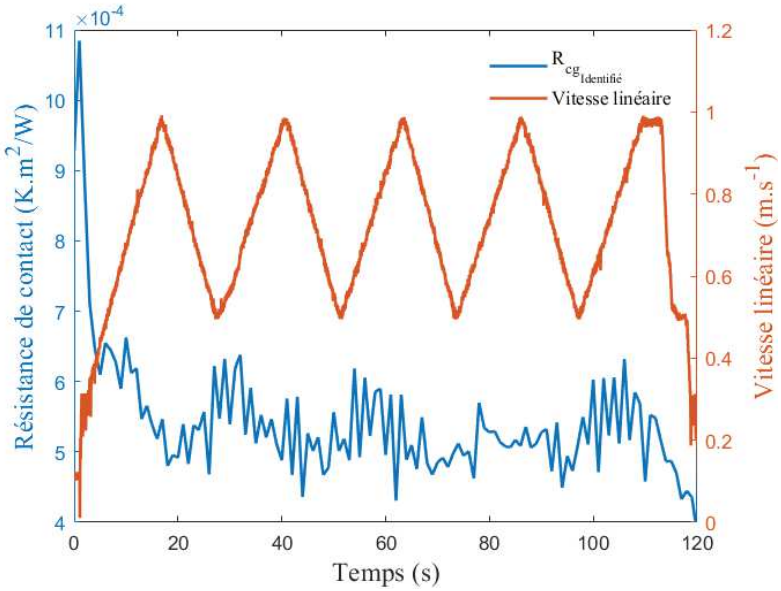


Figure III:34: $R_{cg}(t)$ estimé et vitesse linéaire du scénario 3

Le coefficient de partage varie peu. L'influence de la vitesse sur ce paramètre est différente dans ce scénario. La Figure III:35 montre bien une évolution du coefficient de partage dans les premiers instants qui correspondent à une évolution de la vitesse de $0m.s^{-1}$ à $1m.s^{-1}$ en *18s*. À partir de cet instant, toutes les variations du coefficient de partage qui correspondent à un changement de signe de l'accélération du moteur sont atténuées jusqu'à atteindre une valeur asymptotique.

$$\lim_{t\to\infty}\left(\alpha(t)\right)=0.78$$

Le coefficient de partage peut être sensible à l'évolution de la vitesse lorsque celle-ci a une évolution douce et étalée dans le temps.

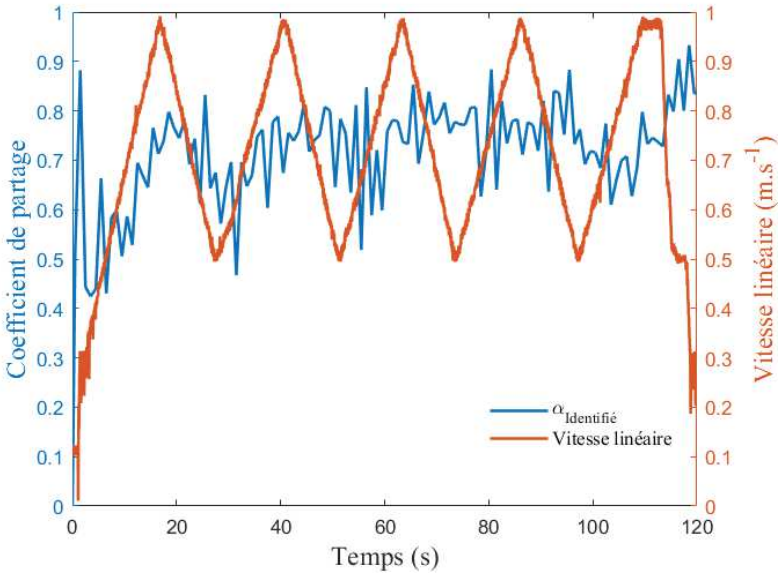


Figure III:35 : $\alpha(t)$ estimé et vitesse linéaire du scénario 3

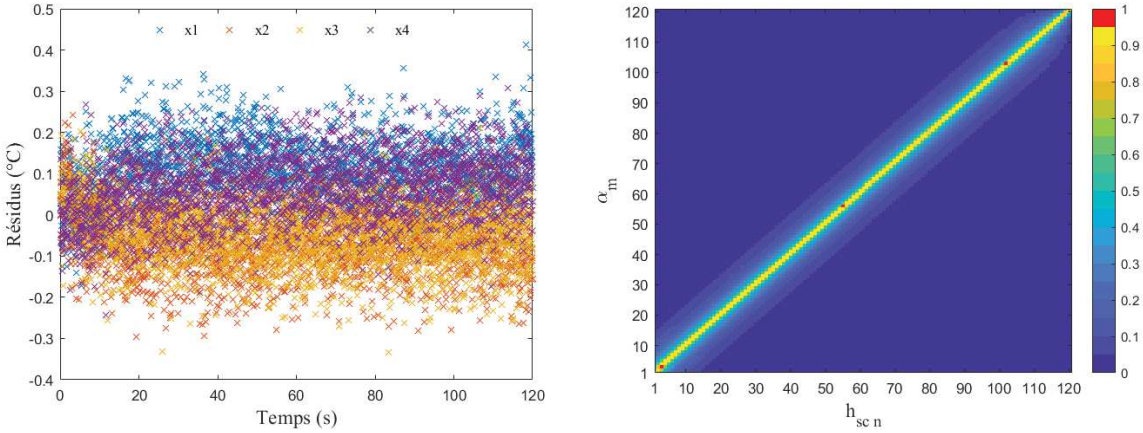


Figure III:36: résidus et coefficient de corrélation $CC_{(\alpha_m, h_{cg_n})}$ du scénario 3

Les résidus présentés sur Figure III:36 montrent un léger décalage du nuage de points. La moyenne de ce résidu est $\mu_{résidus} \approx 0°C$ et son écart-type est de $\sigma_{résidus} = 0.09°C$. On constate aussi qu'il existe trois coefficients de corrélations entre le coefficient de partage et la résistance de contact qui sont supérieurs à 95%. Dans la partie numérique il avait été montré avec un test semblable à ce scénario que l'estimation des paramètres été possible avec une bonne restitution des paramètres de contact. Ces erreurs d'estimation viennent sans doute de la mauvaise qualité des signaux de température acquis. En effet, l'évolution de la fréquence à partir du variateur se faisait manuellement. Cela a entraîné des variations de vitesse du moteur par à-coup. Ces secousses on induit un surplus de vibration qui a rajouté un nouveau biais imprévisible.

III.2. Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs pistes et une méthode reproductible et robuste ont été présentées pour l'estimation de paramètre variable. Après avoir démontré numériquement la faisabilité de l'identification temporelle, l'estimation a été réalisée à partir de mesures expérimentales. Ainsi, il a été réalisé une caractérisation thermique expérimentale d'une interface en contact glissant entre le couple de matériau (Acier/Bronze). L'estimation de l'évolution des trois paramètres de contact thermique macroscopique peut être réalisée en appliquant la méthode présentée, quelles que soient les conditions dynamiques du frottement. Les résultats obtenus mettent en évidence que l'évolution du flux généré et celle de la vitesse sont quasiment proportionnelles. La résistance de contact suit l'évolution inverse de la vitesse. Cette étude tend à confirmer que le coefficient de partage thermique intrinsèque est indépendant de la vitesse de glissement lorsque les variations de vitesse sont brutales. Le scénario 3, montre que le coefficient de partage peut être dépendant de la vitesse dans les premiers instants si cette dernière varie de manière douce. D'autres tests avec un équipement moins soumis à l'inertie mécanique peuvent être réalisés pour confirmer les résultats de ce dernier essai.

Partie IV. Identification de propriété thermomécanique

Comme mentionné dans la partie bibliographie, la connaissance des propriétés physiques des matériaux est primordiale. L'étude de tel couplage dans les contacts frottants, constitue lui-même un sujet de thèse. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étude d'un couplage thermomécanique. L'objectif de cette étude est de présenter une méthodologie thermomécanique inverse pour identifier les conditions limites thermiques et les propriétés thermique et thermomécanique d'un matériau (Diffusivité thermique et Coefficient de dilatation thermique) à partir de mesures expérimentales de déformation. Au moyen d'une approche analytique, nous établissons une fonction de transfert entre la température d'une surface chauffée d'un solide et la déformation mécanique de ce dernier à une abscisse donnée loin de la surface d'excitation thermique. Par la suite, nous mesurons cette déformation à des intervalles de temps discrets en utilisant une jauge de déformation et nous appliquons un produit de déconvolution à ces mesures afin d'identifier la température de la surface chauffée. De cette façon, il n'est plus nécessaire de connaître le champ de température pour résoudre le problème thermomécanique. Nous démontrons que la procédure d'inversion peut être appliquée avec succès même dans des situations où le signal mesuré est affecté par du bruit de mesure, en utilisant la méthode de Tikhonov ou une décomposition tronquée de valeur singulière (TSVD : Truncated singular value decomposition) comme méthode de régularisation. Enfin, une deuxième utilisation du banc expérimental mis en œuvre, permet d'identifier le coefficient de dilatation thermique à partir d'une mesure de la température de surface et des mesures de déformation.

IV.1. Modèle direct

IV.1.1. Fonction de transfert thermoélastique

Dans cette étude, la configuration à laquelle nous nous intéressons, représentée schématiquement dans la Figure IV:1, est celle d'un barreau métallique (cylindre plein) soumis à une température $T_0(t)$ à une extrémité $(x=0)$ et isolé thermiquement latéralement. De plus, le grand rapport longueur/diamètre du cylindre nous permet d'assumer une conduction thermique unidimensionnelle. L'équation différentielle partielle, ainsi que les conditions limites et initiales du système sont :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t < 0 \tag{4.1}$$

$$T(0,t) = T_0(t) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,\ x = L,\ t > 0 \tag{4.3}$$

$$T(x,0) = 0,\ 0 \le x \le L,\ t = 0 \tag{4.4}$$

Comme la température ambiante T_{amb} est supposée constante dans le processus expérimental, la température $T(x,t)$ et $T_0(t)$ seront données relativement à la température ambiante.

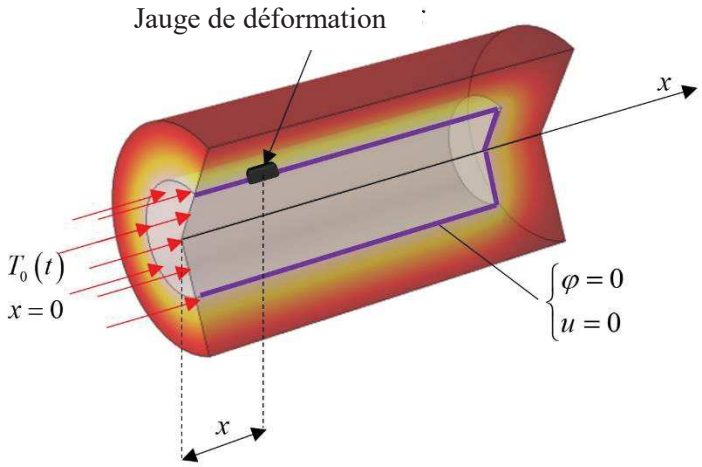


Figure IV:1 : Schéma représentant le modèle étudié

Les équations mécaniques sont considérées dans une approche quasi-statique et l'équation de déplacement est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k_0 \frac{\partial T}{\partial x},\ 0 < x < L,\ t > 0 \tag{4.5}$$

En utilisant la condition au limite $\sigma(0,t) = k_0 T_0(t)$ pour la surface chauffée, ce qui traduit le fait que la contrainte mécanique est uniquement induite par des phénomènes thermiques. On peut écrire :

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = k_0 T_0(t) \tag{4.6}$$

Où le paramètre k_0 est défini comme :

$$k_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \tag{4.7}$$

De plus, le cylindre est fixe à l'extrémité non chauffée $(x = L)$, l'autre condition limite est donc :

$$u(L,t) = 0 \tag{4.8}$$

Le cylindre est initialement au repos, les conditions initiales sont donc :

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \tag{4.9}$$

Rappelons ici que la transformé de Laplace d'une fonction f est définit comme-suite :

$$\bar{F}(x) = L\{f(x,t)\} = \int_0^\infty f(x,t) e^{-pt} dt \tag{4.10}$$

Où, L est l'opérateur de Laplace et p est la variable de Laplace. La transformé inverse de Laplace donnée par l'équation ci-dessous permet de revenir à l'espace temporelle.

$$f(x,t) = L^{-1}\left\{\bar{F}(x)\right\} \tag{4.11}$$

La résolution des équations (4.1) - (4.4) permet d'écrire dans l'espace de Laplace :

$$\bar{T}(x) = \frac{ch\left(q\left(L-x\right)\right)}{ch\left(qL\right)}\bar{T}_0 \tag{4.12}$$

En appliquant aussi la transformé de Laplace à l'équation (4.5) et en considérant l'équation (4.12) , on trouve une relation entre le déplacement et la température. Cette relation est donnée par l'équation (4.13)

$$\bar{U}(x) = \bar{H}_u(x).\bar{T}_0 \tag{4.13}$$

Où $\bar{H}_{u(x)}$ est la fonction de transfert thermoélastique, dont l'expression est donnée par l'équation (4.14).

$$\bar{H}_u(x) = -\frac{k_0}{q}\left(\frac{sh\left(q\left(L-x\right)\right)}{ch\left(qL\right)}\right) \tag{4.14}$$

Avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$.

La déformation ε est liée au déplacement u dans l'espace de Laplace par la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}(x,p) = \frac{\partial \bar{U}(x,p)}{\partial x} \tag{4.15}$$

On trouve après dérivation de $\bar{U}(x)$ par rapport à x :

$$\bar{\varepsilon}(x) = -k_0\left(\frac{ch\left(q\left(L-x\right)\right)}{ch\left(qL\right)}\right).\bar{T}_0 \tag{4.16}$$

On note $\bar{H}(x,p)$ la fonction de transfert thermoélastique permettant de relier la déformation à n'importe quelle abscisse à la température de surface $(x=0)$.

$$\begin{gathered}\bar{H}(x,p) = k_0\left(\frac{ch\left(q\left(L-x\right)\right)}{ch\left(qL\right)}\right) \\ \bar{\varepsilon}(x,p) = \bar{H}(x,p).\bar{T}_0\end{gathered} \tag{4.17}$$

IV.1.2. Expression explicite temporelle de la déformation

En remplaçant les cosinus hyperboliques par leurs expressions exponentielles, on écrit la fonction de transfert suivante :

$$\bar{H}\left(x,p\right)=k_0\frac{e^{q\left(L-x\right)}+e^{-q\left(L-x\right)}}{e^{qL}+e^{-qL}} \tag{4.18}$$

Soit :

$$\bar{H}\left(x,p\right)=k_0\frac{e^{qx}+e^{-q\left(2L-x\right)}}{1+e^{-2qL}} \tag{4.19}$$

Sachant que le développement en série entière de la fonction $\frac{1}{1+x}$ est données par l'équation suivante :

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n x^n \tag{4.20}$$

On déduit :

$$\frac{1}{1+e^{-2qL}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n e^{-2nqL} \tag{4.21}$$

En injectant (4.21) dans (4.19), l'expression de la fonction de transfert dans le domaine de Laplace devient :

$$\bar{H}\left(x,p\right)=k_0\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\left(e^{-q\left(2nL+x\right)}+e^{-q\left(2L\left(n+1\right)-x\right)}\right) \tag{4.22}$$

La transformé inverse de Laplace de la fonction e^{-qX} est connu :

$$L^{-1}\left\{e^{-qX}\right\}=\frac{X}{2\sqrt{\pi at^3}}e^{-\frac{X^2}{4at}} \tag{4.23}$$

L'expression explicite de la fonction de transfert, qui représente la réponse impulsionnelle du système, est donc :

$$h\left(x,t\right)=k_0\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{2nL+x}{2\sqrt{\pi at^3}}e^{-\frac{\left(2nL+x\right)^2}{4at}}+\frac{2L\left(n+1\right)-x}{2\sqrt{\pi at^3}}e^{-\frac{\left(2L\left(n+1\right)-x\right)^2}{4at}}\right) \tag{4.24}$$

La déformation du solide peut être calculée par le produit de convolution entre la fonction de transfert thermoélastique correspondante (réponse impulsionnelle du système donnée : l'équation(4.24)) et l'équation de la température de surface $T_0\left(t\right)$ (excitation).

$$\varepsilon\left(x,t\right)=h\left(x,t\right)*T_0\left(t\right)$$

$$\varepsilon\left(x,t\right)=k_0\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{2nL+x}{2\sqrt{\pi at^3}}e^{-\frac{\left(2nL+x\right)^2}{4at}}+\frac{2L\left(n+1\right)-x}{2\sqrt{\pi at^3}}e^{-\frac{\left(2L\left(n+1\right)-x\right)^2}{4at}}\right)*T_0\left(t\right) \tag{4.25}$$

Où $*$ désigne le produit de convolution.

Pour toute entrée $T_0(t)$, la sortie $\varepsilon(x,t)$ est donnée par l'intégrale de convolution, telle qu'exprimée dans l'équation (4.26)

$$\varepsilon(x,t) = \int_0^t h(x,t-\xi) T_0(\xi) d\xi \tag{4.26}$$

Ce produit de convolution peut être calculé numériquement [32], [34]. La paramétrisation de l'excitation, sur une base de fonctions constantes par morceaux définies sur un pas de temps Δt constant, permet de présenter un échantillon de la réponse. Le produit de convolution peut alors être exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon = M \cdot T \tag{4.27}$$

Où :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N_f-1} \\ \varepsilon_{N_f} \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ h_3 & h_2 & h_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_f} & h_{N_f-1} & h_{N_f-2} & \cdots & h_1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_f-1} \\ T_{N_f} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Avec :

$$h_i = \int_{t_i-1}^{t_i} h(x,t)dt \tag{4.29}$$

M est une matrice carrée de taille $(N_f \times N_f)$ où chaque élément est donné par l'équation(4.29). Il est important de noter que pour que l'équation soit valide, il est nécessaire que le pas de temps soit suffisamment petit par rapport aux temps caractéristiques de la fonction d'entrée et de transfert. Dans une première approche, la discrétisation temporelle étant suffisamment fine, l'hypothèse d'une variation linéaire sur le pas de temps peut être faite. On a dans ce cas :

$$h_i = \left(\frac{h(x,t_i) + h(x,t_{i-1})}{2} \right) \tag{4.30}$$

Le résultat de la déformation calculée à partir de l'équation (4.25) est comparé à un résultat numérique calculé par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel COMSOL. La température imposée à la surface pour cette comparaison est une fonction porte. Les courbes de déformation temporelle calculées à 1 cm de la surface sont présentées sur la Figure IV:2. Le maillage pour la méthode des éléments finis est choisi suffisamment fin pour que la discrétisation n'ait pas d'impact significatif sur les résultats.

On trouve une bonne concordance des résultats analytiques avec les résultats extraits de la simulation COMSOL.

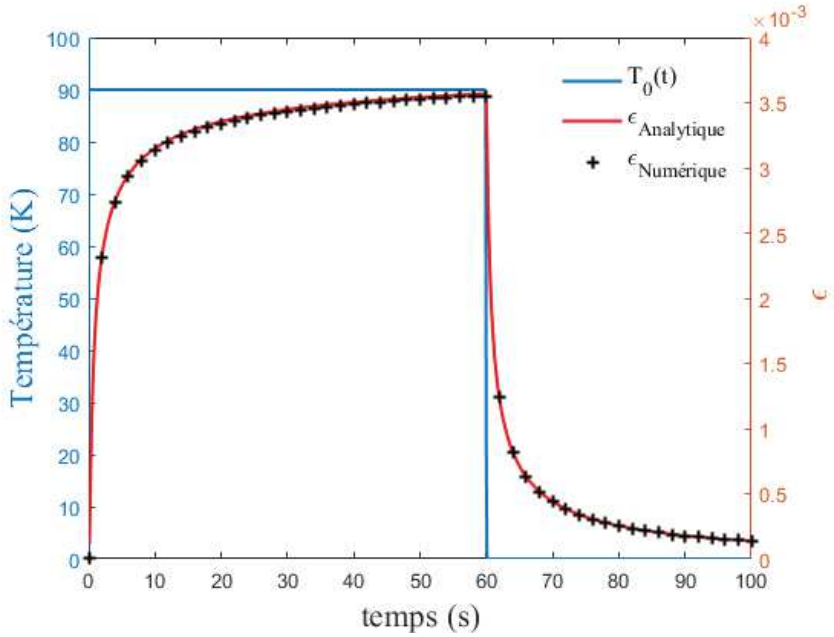


Figure IV:2 : Température d'entrée et comparaison entre la déformation numérique et analytique à l'abscisse x=1cm

IV.2. Modèle inverse

Nous allons dans un premier temps identifier la diffusivité thermique et le coefficient de dilatation thermique en utilisant l'équation (4.25). Ensuite, un développement inverse permettra l'estimation de la température de surface à partir de la mesure de la déformation.

IV.2.1. Identification de la diffusivité thermique et du coefficient de dilatation thermique

Afin d'identifier la diffusivité thermique et le coefficient de dilatation simultanément, une fonctionnelle ayant pour uniques inconnus ces deux paramètres devra être minimisée. Une validation numérique à partir de données générées par le logiciel Comsol sera d'abord réalisée.

On considère un vecteur $\beta = \left[a, \alpha_t\right]$, vecteur constitué d'un jeu de paramètres composé de la diffusivité thermique et du coefficient de dilatation thermique. Considérant aussi une fonctionnelle $F\left(\beta\right)$ à minimiser. La mesure de la déformation se fera à une abscisse qu'on notera x_0.

$$\begin{aligned} F\left(\beta\right) &= \sum_{i=1}^{N_f} \left[\varepsilon(\beta)_i - \tilde{\varepsilon}_i\right]^2 \\ F\left(\beta\right) &= \left[\varepsilon\left(\beta\right) - \tilde{\varepsilon}\right]^T \left[\varepsilon\left(\beta\right) - \tilde{\varepsilon}\right] \end{aligned} \tag{4.31}$$

Ou, $\varepsilon(\beta)$ représente la déformation à une abscisse donné calculée avec l'équation (4.25), $\tilde{\varepsilon}$ représente la déformation mesurée expérimentalement ou numériquement. *i* représente l'indice de temps.

IV.2.1.1. Etude de sensibilité

L'étude de sensibilité réalisée dans cette partie a pour objectif de démontrer la faisabilité d'identifier à la fois le coefficient de dilatation thermique et la diffusivité thermique du matériau testé. Une étude de corrélation sera aussi réalisée afin de déterminer la qualité de l'identification.

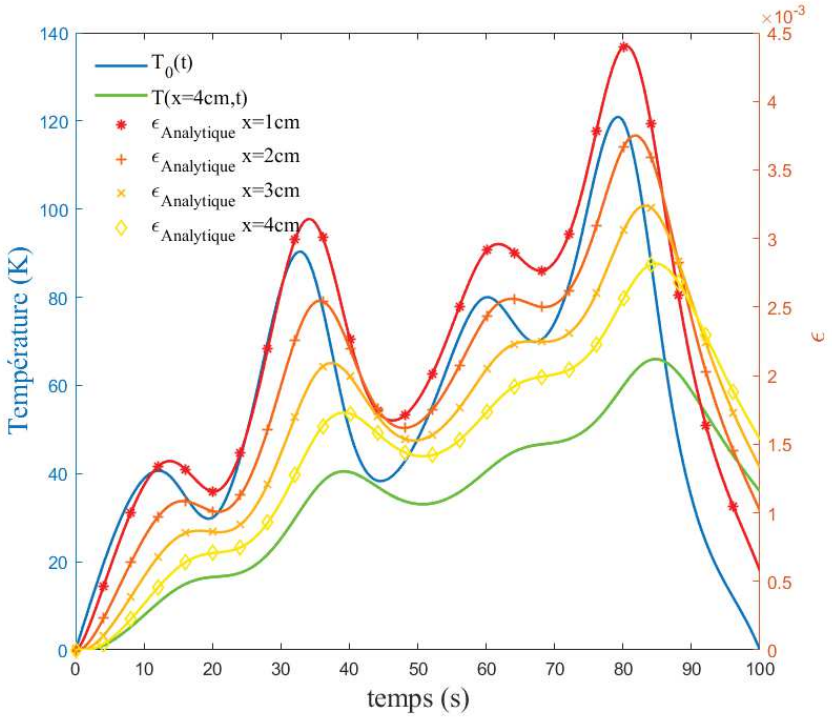
Considérons l'excitation thermique en surface $(x=0)$ et la réponse en déformation du système en x_0 représentée dans la Figure IV:3.

Les matériaux considéré sont un aluminium et un acier, dont les propriétés physiques nécessaires sont données dans le Tableau IV-1.

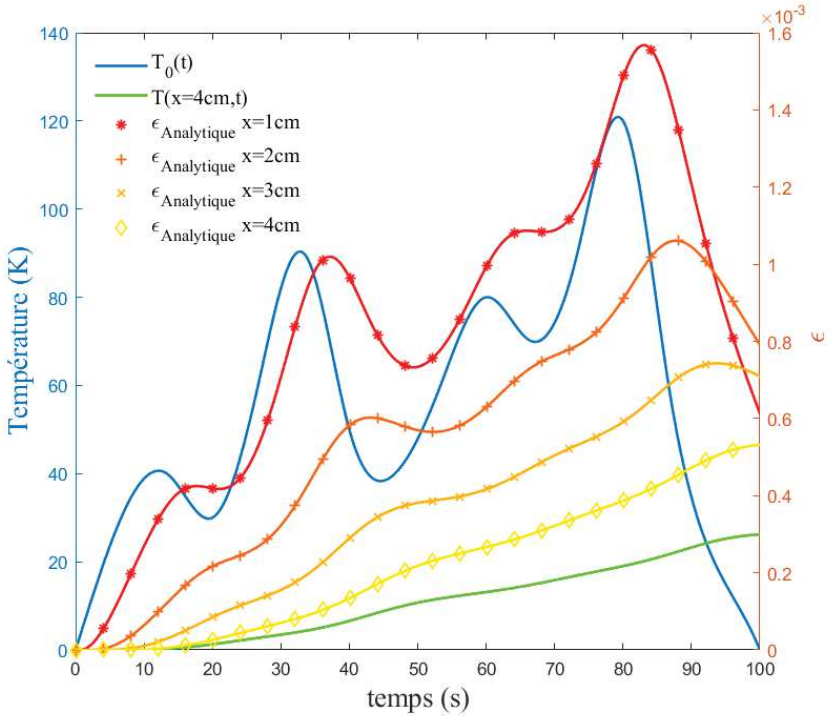
Tableau IV-1: Propriétés physiques des matériaux utilisés

Matériau	**Aluminium**	**Acier**
Masse volumique $\left(kg.m^{-3}\right)$	2710	8000
Coefficient de poisson	0.3	0.3
Diffusivité thermique $\times 10^{-6}\left(m.s^{-2}\right)$	90.62	10.94
Coefficient de dilatation thermique $\times 10^{-6}\left(K^{-1}\right)$	23	10.94

La Figure IV:3 représente l'excitation thermique imposée à deux matériaux différents et la réponse en température à $(x=4cm)$ et la réponse en déformation à différentes abscisses x_0. En comparant les deux graphiques de cette figure, on constate que le niveau de température atteint en $(x=4cm)$ pour le matériau moins diffusif est beaucoup plus faible que sur le matériau plus diffusif. Ceci, en plus du fait que le coefficient de dilatation thermique du matériau plus diffusif est quasiment deux fois plus élevé, explique la grande différence des valeurs de déformation. Il est donc judicieux d'étudier l'impact de la nature diffusive ou non des matériaux à caractériser.



a) Aluminium



b) Acier

Figure IV:3 : Température de surface et déformation induite en $x_0 = [1,2,3,4]cm$ pour les deux matériaux matériau I

Les deux figures ci-dessous donnent l'évolution de la sensibilité aux paramètres à identifier pour différentes positions de mesure de la déformation et pour les deux matériaux étudiés.

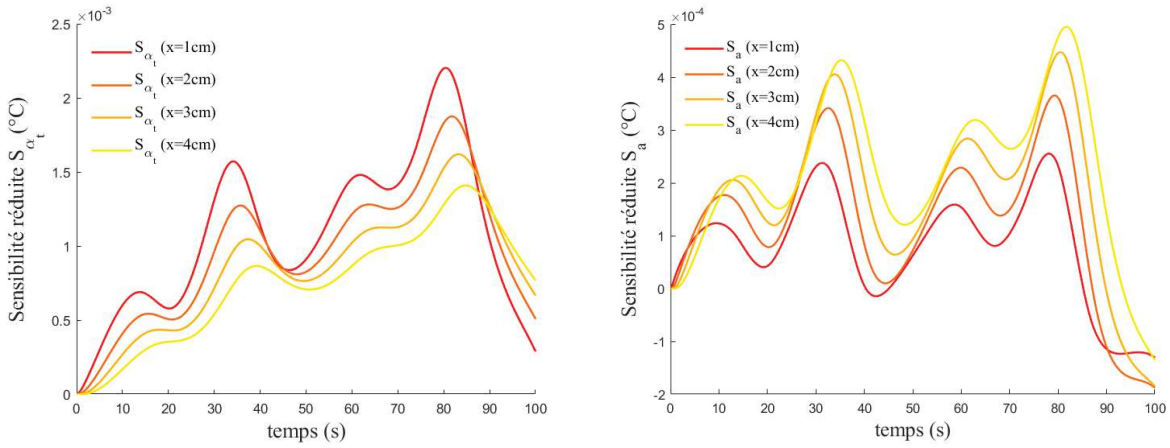


Figure IV:4 : Sensibilité réduite au coefficient de dilatation thermique et à la diffusivité thermique pour différentes positions de mesure pour le l'aluminium

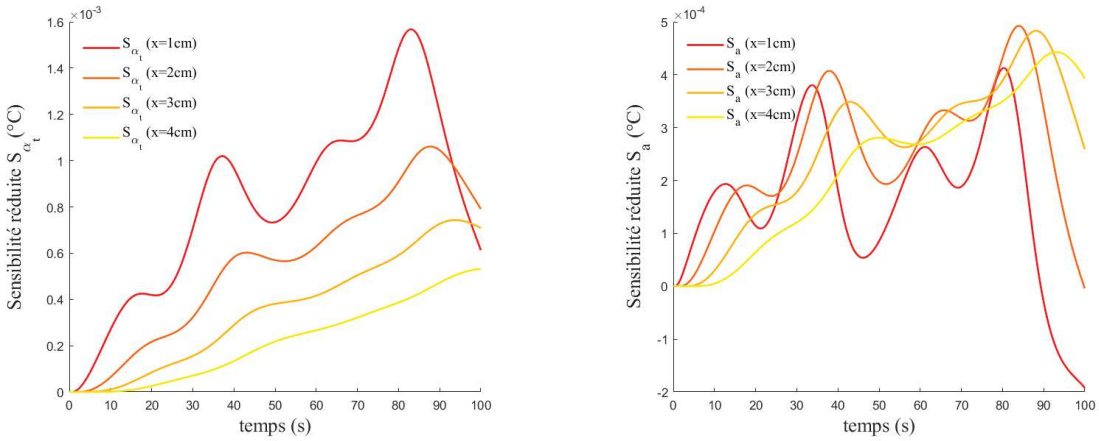


Figure IV:5 : Sensibilité réduite au coefficient de dilatation thermique et à la diffusivité thermique pour différentes positions de mesure pour le l'acier

On constate pour les courbes de l'aluminium que les sensibilités ont plus ou moins la même forme. Il existe un décalage entre les courbes d'une même figure lié au phénomène de diffusion. Concernant l'acier, ce phénomène est beaucoup moins visible car il est moins diffusif. Les répercutions d'un changement d'allure de la température imposée apparaissent moins vite dans le cas de l'acier.

On constate que la sensibilité au coefficient de dilatation thermique est plus importante que la sensibilité à la diffusivité thermique. Cependant l'écart n'est pas excessif. La sensibilité au coefficient de dilatation est plus importante pour une mesure de la déformation proche de la surface chauffée. Alors que pour la diffusivité thermique on constate le comportement inverse. Aux vues de ses résultats, il n'est pas intuitif de trouver une position idéale du capteur de déformation. Il est donc nécessaire de passer par une étude numérique pour évaluer la position de mesure de la déformation et son impact sur l'identification. On peut dire avec cette étude préliminaire, qu'au vu des valeurs de sensibilités, il est plus judicieux de positionner la jauge de déformation en avantageant l'identification de la diffusivité thermique vu que la sensibilité à ce paramètre est plus faible. Les valeurs des coefficients de corrélation entre (α_t, a)

calculées à partir de ces résultats sont représentés dans le Figure IV:6. Dans cette figure on trace des valeurs de corrélation qui dépendent des positions de mesure de la déformation pour les deux matériaux.

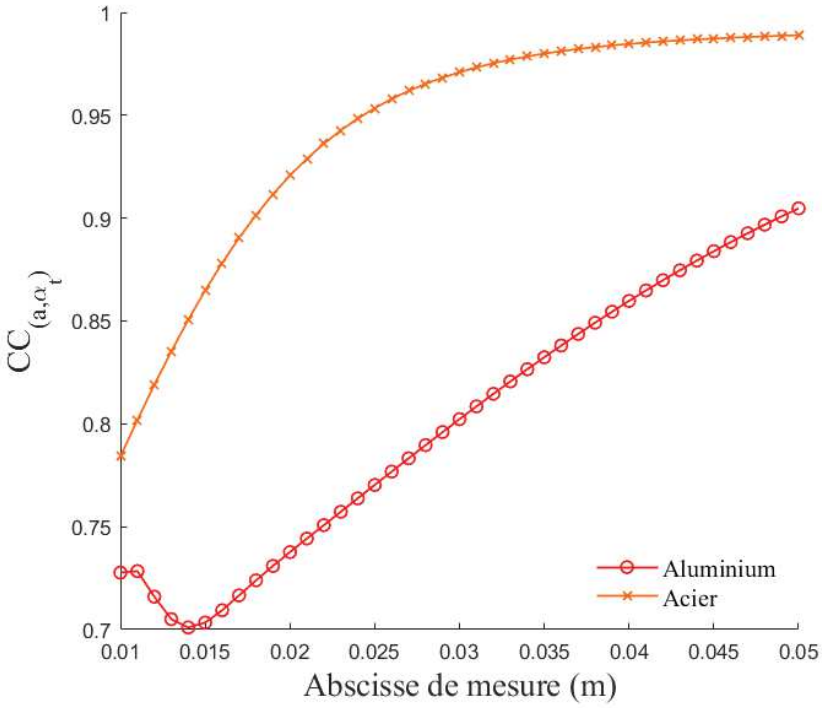


Figure IV:6 : Influence de la position de mesure sur le coefficient de corrélation $CC_{(a,\alpha_t)}$

On trouve pour les deux matériaux que ce coefficient de corrélation augmente avec l'éloignement de l'abscisse de mesure par rapport à la surface de chauffe. La valeur maximum imposée des 95% n'est pas atteinte dans le cas de l'aluminium pour les abscisses testées. Alors que pour l'acier, cette valeur est atteinte à une position de $x_0 = 2.4cm$. Il est donc envisageable d'avoir des complications d'identification pour ce cas qui nécessiteront le recourt à des méthodes de régularisation.

IV.2.2. Estimation de la température de surface

Avec cette procédure il est possible de déterminer la température de surface (imposée) sans mesure thermique. Il suffit d'avoir une mesure de la déformation à une abscisse quelconque. Dans un premier temps, un développement de la méthode sera proposé. Ensuite, une validation numérique de cette procédure inverse sera développée en utilisant les mêmes essais qu'aux paragraphes précédents.

La courbe de déformation est utilisée pour identifier la température imposée. Ainsi, nous pouvons écrire le produit de déconvolution suivant :

$$T_0(t) = \frac{1}{h(x,t)} * \varepsilon(x,t) \tag{4.32}$$

La solution de ce problème est la température de surface, l'entrée étant la déformation. La nouvelle fonction de transfert de ce système est $\frac{1}{h(x,t)}$.

En discrétisant le problème linéaire sur un pas de temps constant Δt, le système matriciel devient :

$$T = M^{-1} \cdot \varepsilon \tag{4.33}$$

Dans le but d'inverser la matrice on utilise une décomposition en valeurs singulières (SVD). La procédure d'inversion matricielle par décomposition SVD permet d'implémenter facilement de la régularisation par troncature de spectre et par pénalisation de Tikhonov. La détermination du paramètre de régularisation sera calculée en prenant en considération le principe de Morozov.

Selon l'équation(4.32), il est alors possible de calculer l'évolution temporelle de la température de surface à partir de la connaissance du déplacement à une certaine profondeur et des caractéristiques thermomécaniques du matériau.

IV.2.2.1. Régularisation du problème inverse

L'estimation des paramètres est effectuée en minimisant le carré de la norme de la différence entre les déformations mesurées et calculées. La fonction $F(T)$ de la méthode des moindres carrés régularisée par la méthode de Tikhonov est donnée par l'équation suivante :

$$F(T) = \left\| MT - \varepsilon_{mes} \right\|^2 + \alpha_r \left\| T \right\|^2 \tag{4.34}$$

Où, α_r est le paramètre de régularisation de Tikhonov. Ce paramètre varie entre 0 et $+\infty$. La valeur de 0 correspond à une inversion sans régularisation. En utilisant la méthode de décomposition SVD on trouve :

$$T_{\alpha_r} = V \cdot D_{\alpha_r}^{-1} U^T \varepsilon_{mes} \tag{4.35}$$

Où

$$D_{\alpha_r}^{-1} = diag\left(\frac{D_1}{D_1^2 + \alpha_r^2}, \frac{D_2}{D_2^2 + \alpha_r^2}, ..., \frac{D_{N_f}}{D_{N_f}^2 + \alpha_r^2} \right) \tag{4.36}$$

La recherche de l'hyper paramètre de Tikhonov est réalisé en utilisant le théorème de Morozov. Rappelons que le principe de Morozov impose une valeur du paramètre de régularisation qui interdit au processus d'inversion d'aller au-delà d'une minimisation faisant apparaitre des résidus moins importants que le bruit de mesure. Il doit donc satisfaire la relation suivante :

$$RMSR \geq \sigma_{bruit}$$
$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N_f} \left(\varepsilon_i^{calcul} - \varepsilon_i\right)^2}{N_f - 1}} \tag{4.37}$$

Ou, le $RMSR$ est le 'Root Mean Square Residual', σ_{bruit} est l'écart-type du bruit et ε^{calcul} représente le signal de déformation recalculé après la procédure d'estimation.

Afin de trouver le paramètre de régularisation de Tikhonov on cherche α_r satisfaisant l'équation suivante :

$$\min\left(RMSR - \sigma_{brui}\right) \tag{4.38}$$

Dans le cas de la méthode de régularisation par troncature de spectre, on ne parle pas de paramètre de régularisation mais plutôt d'ordre de régularisation. Dans cette méthode de régularisation, seules les *n* premières valeurs singulières les plus grandes de la matrice diagonale D sont conservées, tandis que les plus petites sont exclues. L'inverse de la matrice diagonale devient :

$$D^{-1} = diag\left(D_1^{-1}, D_2^{-1}, ...D_{n_{optim}}^{-1}, 0, ..., 0\right) \tag{4.39}$$

La valeur optimale du nombre de valeur singulière à prendre en considération est notée : n_{optim} . Elle est calculée en prenant en considération le principe de Morozov.

IV.3. Validation numérique

Prenant plusieurs cas testes, simulés numériquement par une méthode d'éléments finies à partir de l'outil Comsol. Une fois les simulations réalisées, les mesures numériques de température et de déformations sont respectivement bruitées en utilisant les signaux dont la répartition suit une loi normale avec les valeurs de moyenne et d'écart-type suivants :

$$\begin{aligned} &\mu_\varepsilon = 0,\ \sigma_\varepsilon = [10^{-5}, 10^{-7}] \\ &\mu_T = 0^\circ\mathrm{C},\ \sigma_T = 0.1^\circ\mathrm{C} \end{aligned} \tag{4.40}$$

Les répartitions de ces bruits blancs numériques sont représentées dans la Figure IV:7. On considèrera dans cette partie trois matériaux. En plus de l'aluminium et de l'acier, dont les références sont indiquées au Tableau IV-1, on considèrera un matériau peu diffusif, on décide de prendre le béton.

Les caractéristiques thermiques et mécaniques sont données dans le tableau ci-dessous.

On exécute plus fois l'identification en utilisant des niveaux de bruit de déformation différant pour la déformation, d'où la valeur de l'écart-type σ_ε qui varie aléatoirement entre $[10^{-5},10^{-7}]$ à chaque essai.

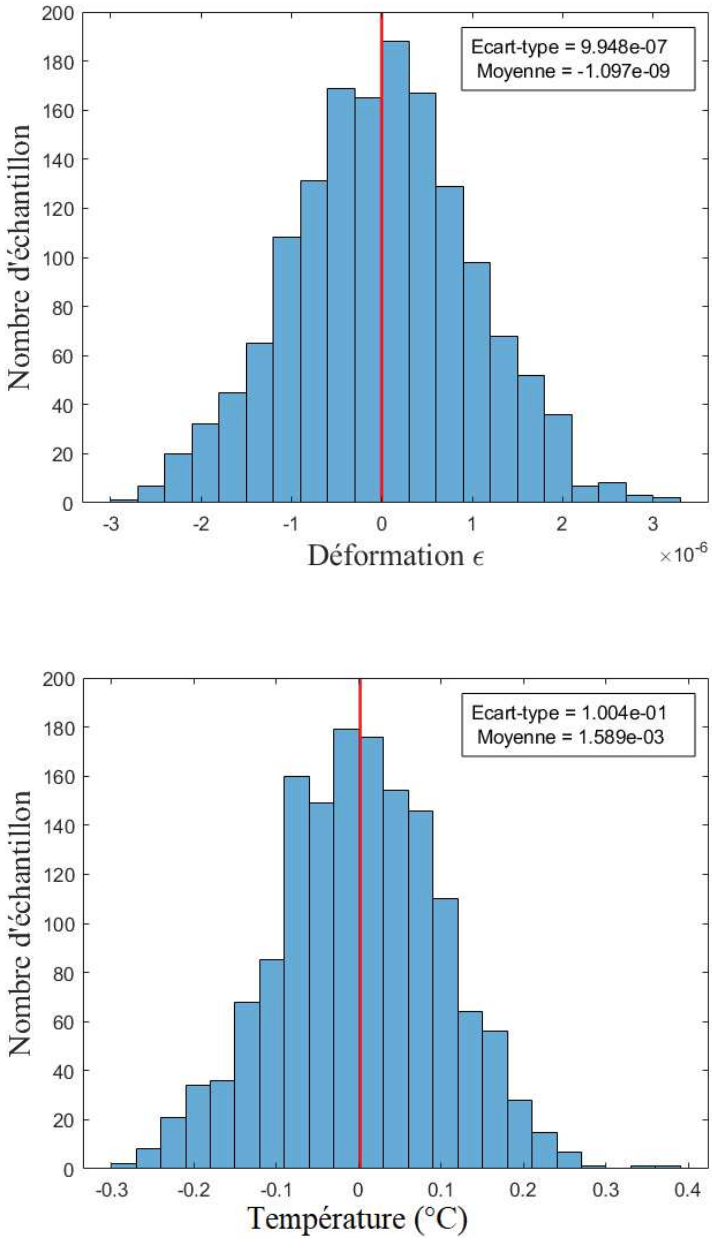


Figure IV:7 : Répartition du bruit de mesure numérique

Tableau IV-2: Propriétés physique du béton

Matériau	**Béton**
Masse volumique $\left(kg.m^{-3}\right)$	2300
Coefficient de poisson	0.2
Diffusivité thermique $\times 10^{-7}\left(m.s^{-2}\right)$	8.9
Coefficient de dilatation thermique $\times 10^{-6}\left(K^{-1}\right)$	10

Remarque :

Afin de représenter le plus fidèlement ce qui se produit sur le plan expérimental, nous prenons en compte les mêmes conditions de mesures de la déformation. En effet, la jauge de déformation se dilate également en fonction de l'évolution de la température. La mesure affichée représente donc le différentiel de déformation entre le capteur et le solide :

$$\varepsilon_{mesure} = \varepsilon_{materau} - \varepsilon_{jauge} \tag{4.41}$$

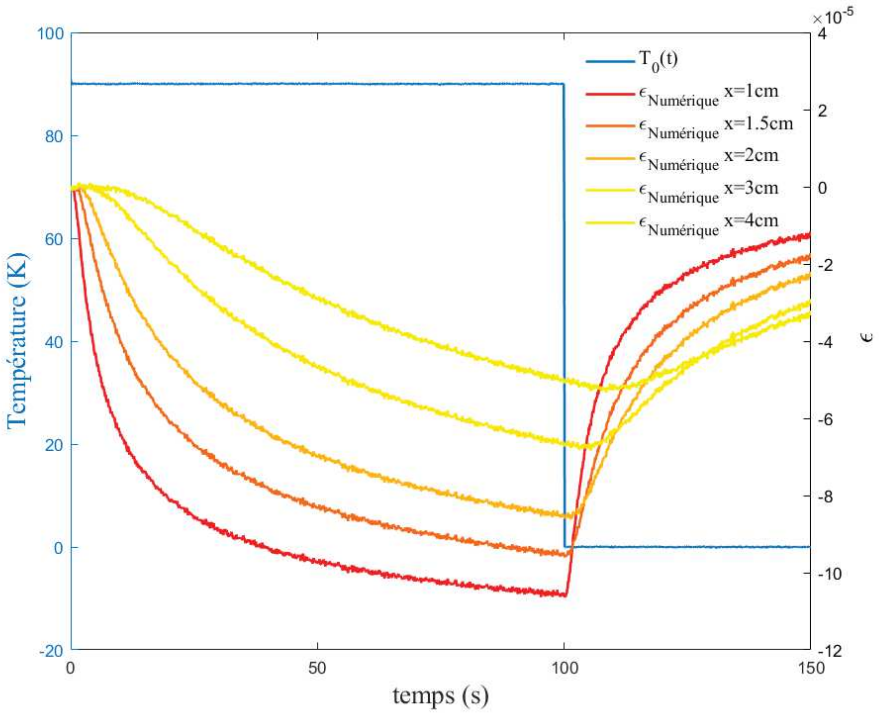
Cela veut dire que plus le coefficient de dilatation thermique du matériau à caractériser est proche de celui de la jauge de déformation, moins la déformation relative sera importante.

$$\alpha_{t_{materiau}} = \alpha_{t_{mesure}} + \alpha_{t_{jauge}} \tag{4.42}$$

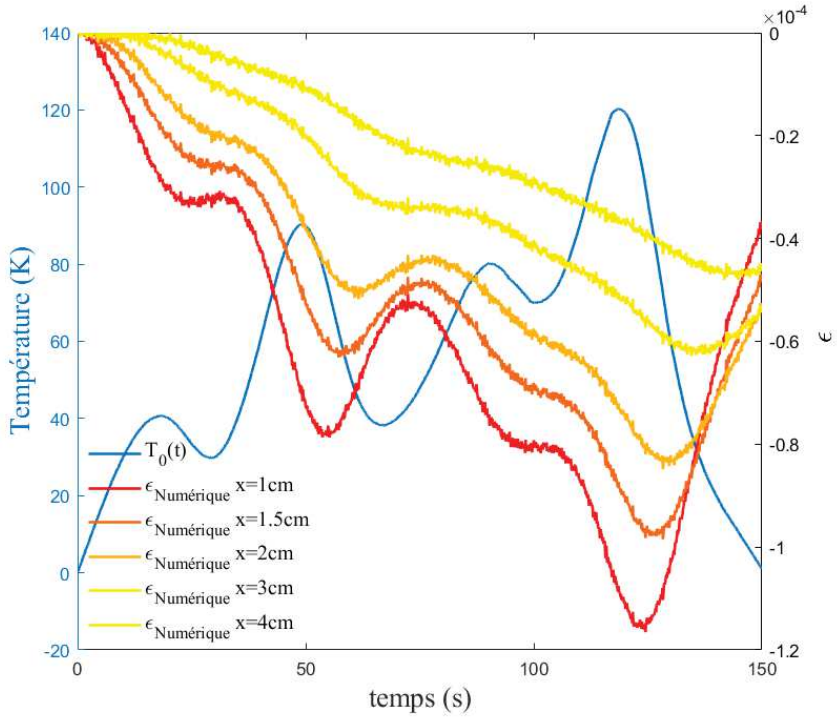
Dans la partie expérimentale, le matériau à caractériser est de l'acier C35 dont le coefficient de dilatation thermique est proche de celui de la jauge de déformation. La valeur du coefficient de la jauge de déformation est $\alpha_{t_{Jauge}} = 11.7 \times 10^{-6} K^{-1}$. Cette étude numérique nous permettra d'analyser la possibilité de faire cette caractérisation expérimentalement.

On considèrera aussi deux modèles de variation de température pour chaque matériau. Une variation en forme de fonction porte et une autre sous forme polynomiale. Au vu des résultats de l'étude de sensibilité, il est pertinent d'analyser l'influence de la position de la jauge de déformation sur la qualité de l'identification. Pour cela on effectue des identifications en prenant des mesures de déformation à différentes abscisses. Les résultats de ces essais numériques sont illustrés dans la Figure IV:8.

Comme plusieurs identifications sont réalisées avec des bruits de mesures différents, on peut calculer une moyenne des propriétés physique identifiées et aussi donner un intervalle de confiance.



a)



b)

Figure IV:8: Résultats de simulation numérique dans le cas de l'acier soumis à une excitation thermique en forme d'échelon (a) et de Spline (b)

IV.3.1. Identification des propriétés thermomécanique

La moyenne des valeurs identifiées pour chaque position du capteur de déformation x_0 est calculée comme suite :

$$\tilde{p}_{identifié} = \frac{1}{N_{test}} \sum_{z=1}^{N_{test}} p_i \tag{4.43}$$

Les valeurs de coefficient de dilatation thermique introduite dans les tableaux Tableau IV-3 sont celle des matériaux caractérisés :

$$\alpha_t = \alpha_{t_{Identifié}} + \alpha_{t_{Jauge}} \tag{4.44}$$

L'écart relatif donné en pourcentage $(\%)$ est ensuite calculé de la manière suivante :

$$\tilde{e}_P = \frac{\left(p - \tilde{p}\right)}{p} \times 100 \tag{4.45}$$

Pour finir, l'écart-type de l'écart relatif est calculé comme suite :

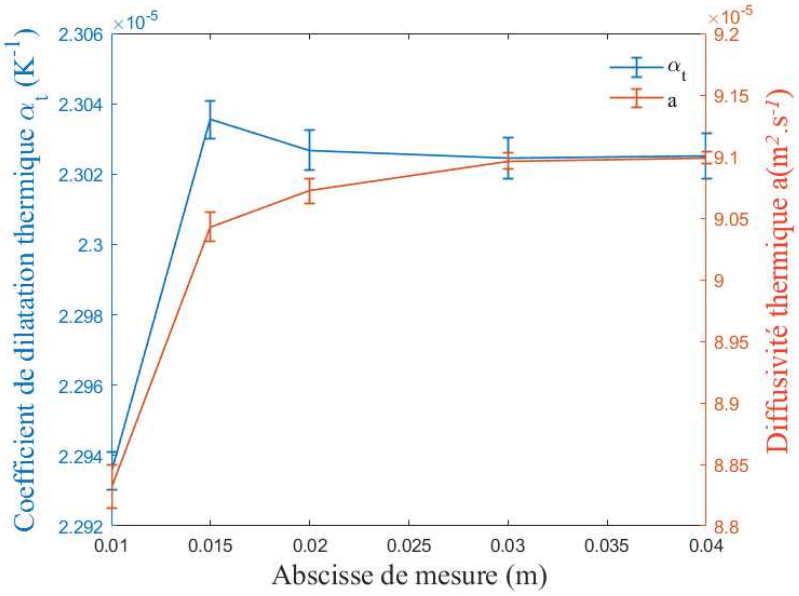
$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{N_{test} - 1} \sum_{z=1}^{N_{test}} \left| p_i - \tilde{p}_{identifié} \right|^2} \tag{4.46}$$

Tableau IV-3: Résumé des résultats d'identification (Aluminium, Porte)

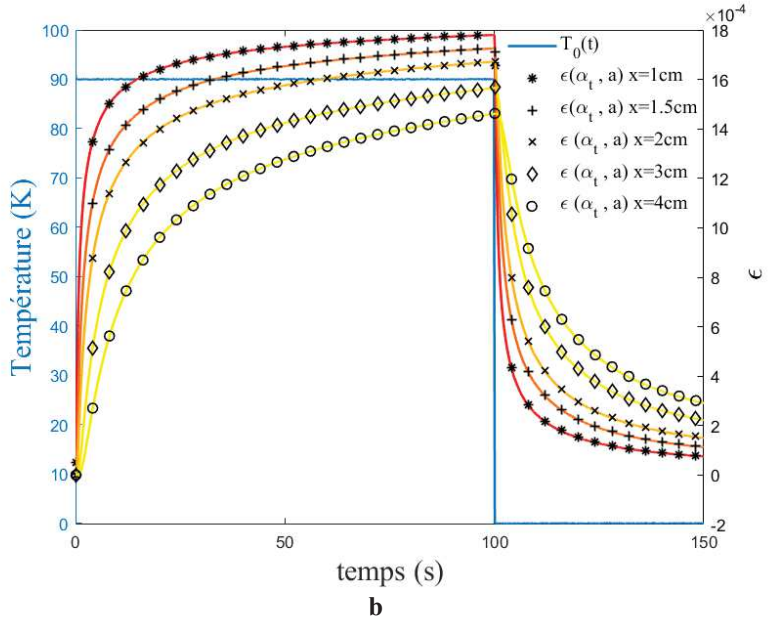
	Position	$x_0 = 1cm$	$x_0 = 1.5cm$	$x_0 = 2cm$	$x_0 = 3cm$	$x_0 = 4cm$
Diffusivité thermique	Moyenne $\left(mm^2.s^{-1}\right)$	88.39	90.49	90.77	91	91
	Ecart relative (%)	2.46	0.14	-0.17	-0.4	-0.43
Coefficient de dilatation thermique	Moyenne (x10^{-6})	23	23.02	23.01	23.01	23.01
	Ecart relative (%)	0.14	-0.07	-0.05	-0.05	-0.05

On constate à partir du Tableau IV-3 que les résultats d'identification du coefficient de dilatation thermique sont très peu impactés par la position du capteur de déformation. La marge d'erreur est inférieure à 1% pour l'identification de ce paramètre. Alors que l'identification de la diffusivité thermique est quant à elle impactée par la position de la jauge de déformation. Ainsi, à $x_0 = 1cm$ on a une erreur relative de 2.5%. A partir d'une abscisse $1.5 \le x_0 < 3cm$ on a des erreurs relatives inférieur à 0.2%. Cette erreur relative se remet à croitre à partir d'une valeur $x_0 > 3cm$.

La Figure IV:9.a, donne une représentation graphique des valeurs du tableau ci-dessus et La Figure IV:9.b illustre le fait que les valeurs des paramètres identifiées permettent une reconstruction (Eq(4.25)) quasi à l'identique des déformations mesurées.



a



b

Figure IV:9 : Résultats d'identification pour le cas de l'aluminium (Echelon). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées.

On constate à partir du Tableau IV-4 que les résultats d'identification du coefficient de dilatation thermique sont aussi très peu impactés par la position du capteur de déformation dans le cas d'une excitation thermique en forme polynomiale. La marge d'erreur est inférieure à 1% pour l'identification de ce paramètre. Alors que l'identification de la diffusivité thermique est quant à elle impactée de manière significative par la position de la jauge de déformation. Ainsi, à $x_0 = 1cm$ on a une erreur

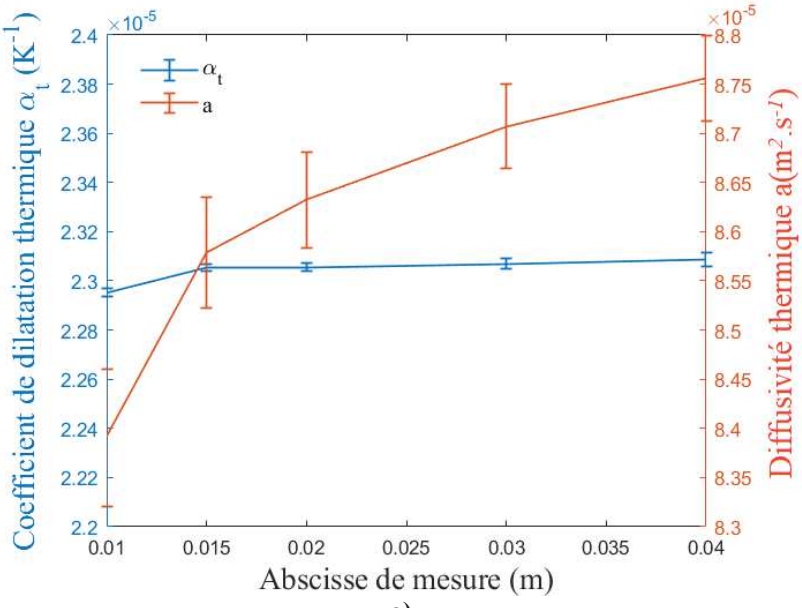
supérieure à 7%. Cette erreur s'atténue avec l'éloignement de la mesure de la déformation par rapport à la surface d'excitation. Elle atteint une valeur de 5.3% à l'abscisse $x_0 = 1.5cm$. Sa diminution continue pour atteindre une valeur inférieure à 3.5% à l'abscisse $x_0 = 4cm$. Des résultats pour des positions supérieures à cette dernière abscisse n'ont pas été simulé.

Tableau IV-4 : Résumé des résultats d'identification (Aluminium, Polynomiale)

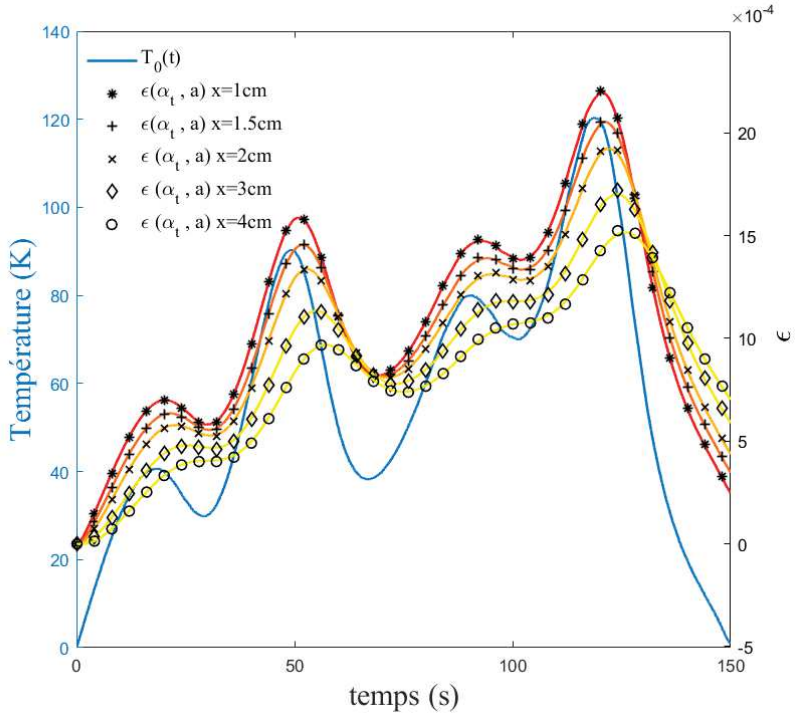
	Position	$x_0 = 1cm$	$x_0 = 1.5cm$	$x_0 = 2cm$	$x_0 = 3cm$	$x_0 = 4cm$
Diffusivité thermique	Moyenne $\left(mm^2.s^{-1}\right)$	83.9	85.8	86.32	87.07	87.56
	Ecart relative (%)	7.42	5.34	4.75	3.92	3.4
Coefficient de dilatation thermique	Moyenne (x10^{-6})	22.98	23.03	23.03	23.04	23.04
	Ecart relative (%)	0.1	-0.12	-0.12	-0.15	-0.18

Avec ces écarts assez importants aux abscisses proches de la surface de chauffe, La Figure IV:10b, montre que la reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées est aussi quasi identique aux déformations simulées. Cela vient confirmer les résultats de l'étude de sensibilité, qui montraient une sensibilité à la diffusivité thermique moins importante aux abscisses les plus proches.

On voit aussi que la marge d'erreur est plus importante pour la diffusivité thermique que pour le coefficient de dilatation thermique dans les deux cas étudiés jusqu'à présent.



a)



b)

Figure IV:10 : Résultats d'identification pour le cas de l'aluminium (Spline). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées.

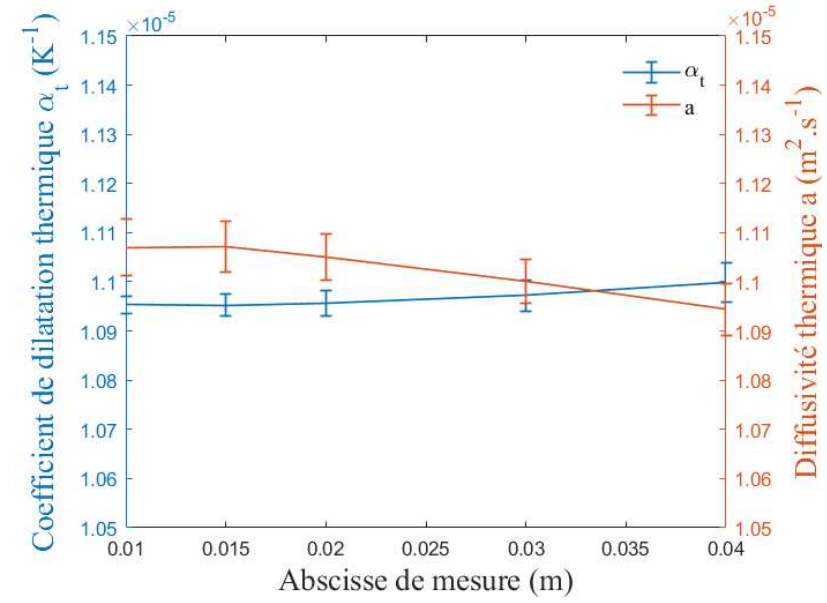
Tableau IV-5: Résumé des résultats d'identification (Acier, Porte)

	Position	$x_0 = 1cm$	$x_0 = 1.5cm$	$x_0 = 2cm$	$x_0 = 3cm$	$x_0 = 4cm$
Diffusivité thermique	Moyenne $\left(mm^2.s^{-1}\right)$	11.04	11.04	11.02	10.98	10.92
	Ecart relatif (%)	-0.55	-0.54	-0.36	0.064	0.6
Coefficient de dilatation thermique	Moyenne (x10^{-6})	10.94	10.94	10.94	10.94	10.93
	Ecart relatif (%)	0.01	0.01	0.015	0.027	0.05

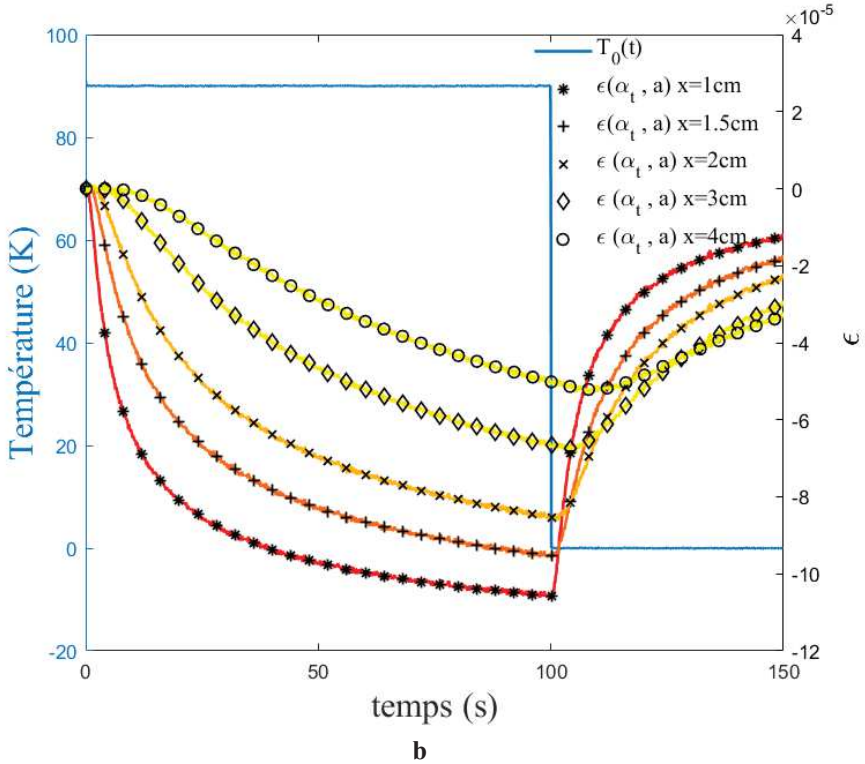
La lecture du Tableau IV-5 montre que l'écart relatif concernant la diffusivité thermique est le plus important pour $x_0 = 1cm$. Cet écart diminue avec l'augmentation de la distance entre l'excitation et la mesure jusqu'à l'abscisse $x_0 = 3cm$. A partir de là, l'écart relatif se remet à augmenter. Alors que pour le coefficient de dilatation thermique, on a un écart relatif qui augmente avec l'éloignement de la mesure de la déformation par rapport à la surface d'excitation thermique.

D'après la Figure IV:11, on voit que la reconstruction des déformations à parti des valeurs identifiée est bonne et que la marge d'erreur pour la diffusivité est plus importante que celle pour le coefficient de

dilatation thermique. On constate aussi, que les erreurs relatives pour l'acier sont proches de celle pour l'aluminium à toutes les abscisses hormis $x_0 = 1cm$.



a



b

Figure IV:11 : Résultats d'identification pour le cas de l'acier (Echelon). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées.

Tableau IV-6: Résumé des résultats d'identification (Acier, Polynomiale)

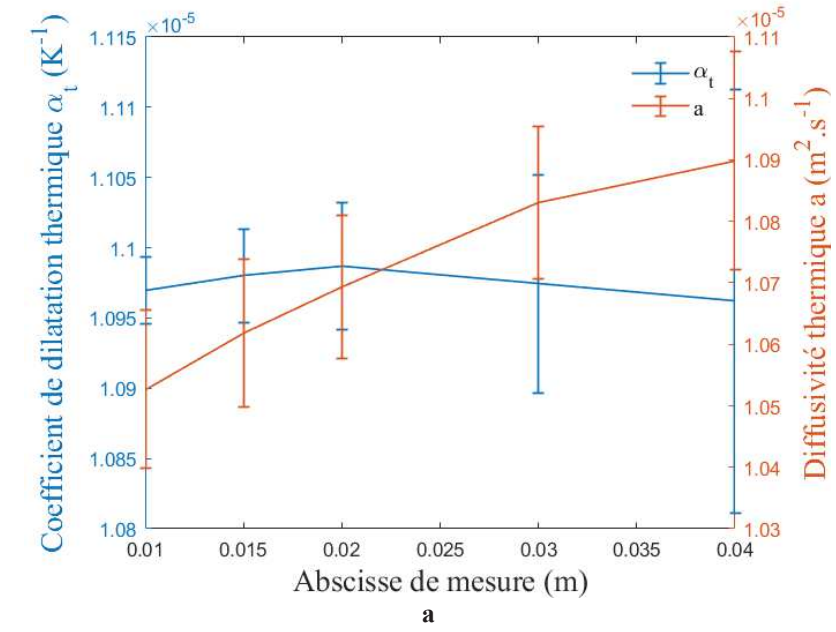
	Position	$x_0 = 1cm$	$x_0 = 1.5cm$	$x_0 = 2cm$	$x_0 = 3cm$	$x_0 = 4cm$
Diffusivité thermique	Moyenne $\left(mm^2.s^{-1}\right)$	10.52	10.61	10.68	10.8	10.9
	Ecart relative (%)	4.22	3.42	2.8	1.64	0.8
Coefficient de dilatation thermique	Moyenne (x10^{-6})	10.94	10.94	10.94	10.94	10.94
	Ecart relative (%)	0.02	0.02	0.03	0.02	-0.01

Comme pour l'aluminium avec une excitation en Forme polynomiale, l'écart relatif de la diffusivité thermique baisse avec l'éloignement de la mesure de la déformation. Cet écart passe donc de 4.22% pour une abscisse $x_0 = 1cm$ jusqu'à 0.8% pour une abscisse $x_0 = 4cm$. Les écarts relatifs de la valeur du coefficient de dilatation thermique identifié sont tellement faibles qu'on peut considérer que pour $1 \le x_0 \le 4$ l'éloignement de la mesure de déformation de la surface d'excitation n'a pas d'influence sur l'identification du coefficient de dilatation thermique et que ce dernier a une bonne précision.

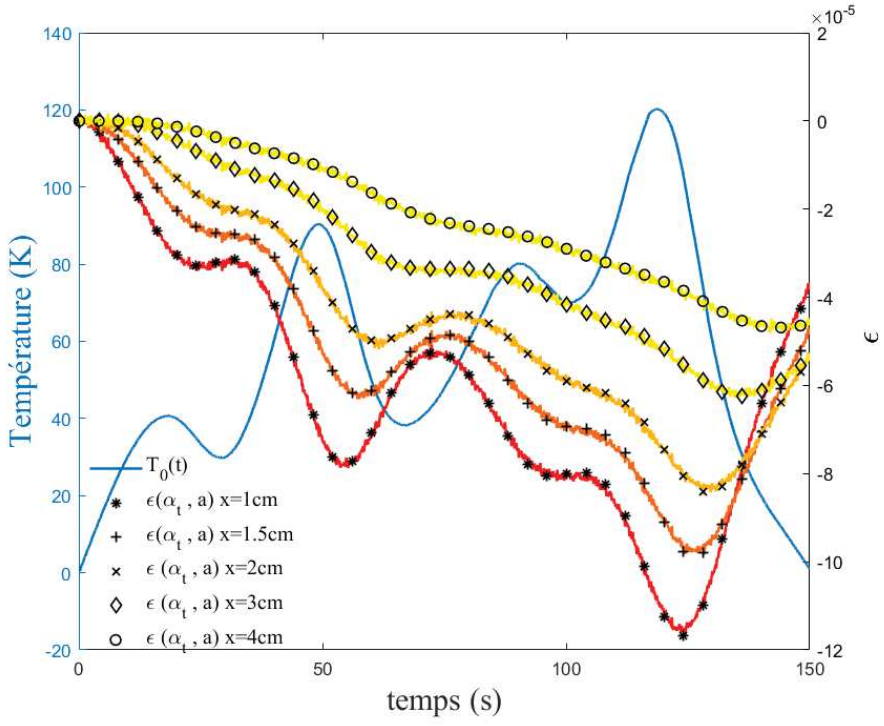
On retrouve aussi que la marge d'erreur concernant l'identification de la diffusivité thermique est encore plus importante que celle du coefficient de dilatation thermique (Figure IV:12.a). En revanche, l'écart-type des valeurs identifiées de coefficient de dilatation augmente avec l'éloignement de l'abscisse de mesure de la déformation. Un positionnement plus éloigné induit donc une marge d'erreur plus importante et une plus grande sensibilité au bruit de mesure.

Tableau IV-7: Résumé des résultats d'identification (Béton, Porte)

	Position	$x_0 = 1cm$	$x_0 = 1.5cm$	$x_0 = 2cm$	$x_0 = 3cm$	$x_0 = 4cm$
Diffusivité thermique	Moyenne $\left(m^2.s^{-1}\right)\times 10^{-7}$	9	8.9	10.6	10.9	15.36
	Ecart relative (%)	-1.2	0.4	-19	-22.8	-1627.5
Coefficient de dilatation thermique	Moyenne (x10^{-6})	10.01	10	10.32	10.65	11.7
	Ecart relative (%)	-0.09	0.0034	-3.22	-6.48	-16.93



a



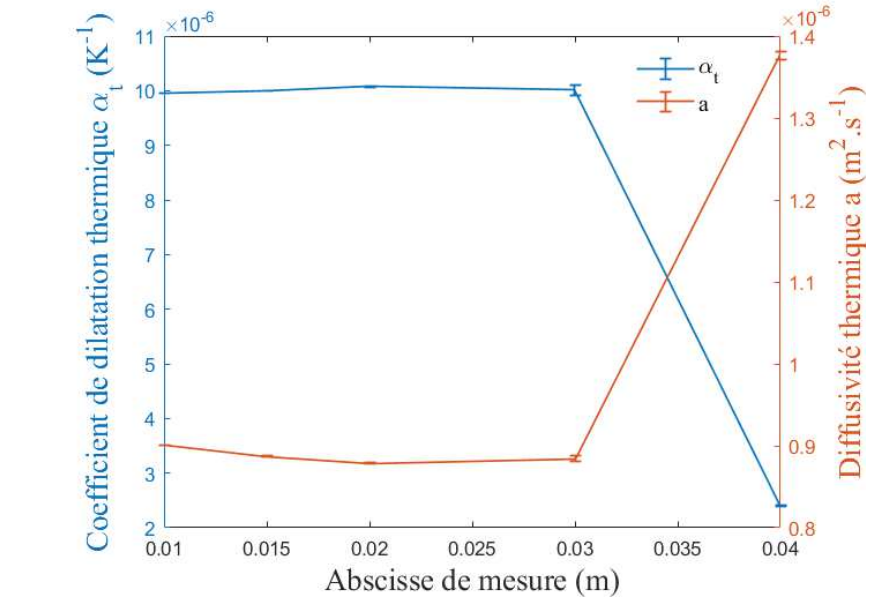
B

Figure IV:12 : Résultats d'identification pour le cas de l'acier (Spline). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées.

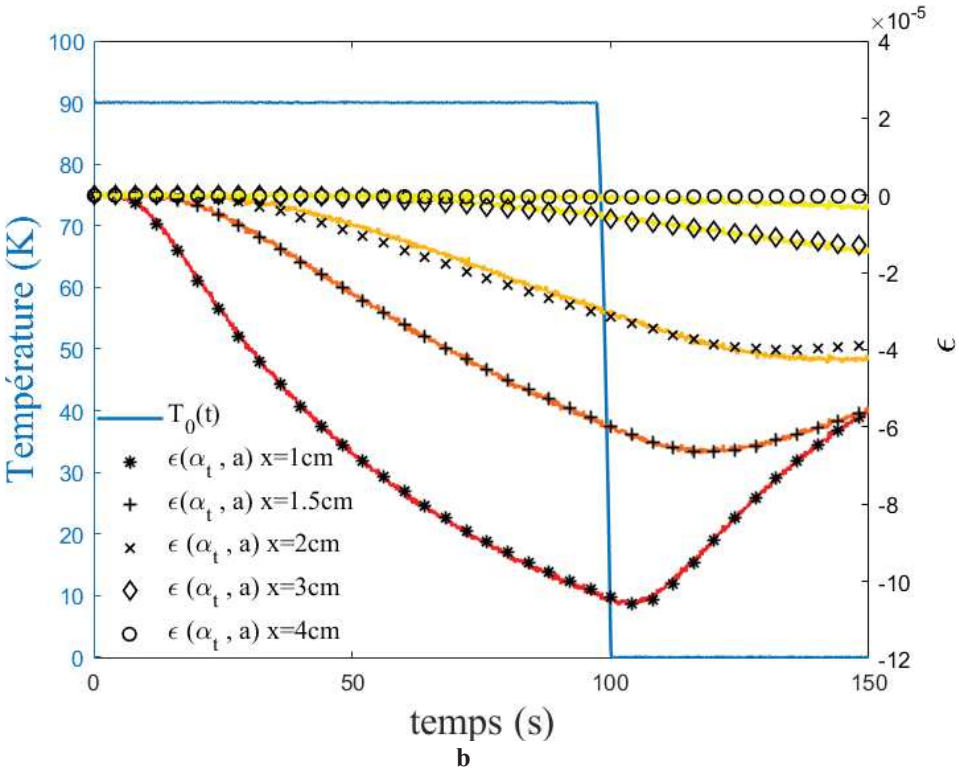
Pour le béton, qui est le matériau le moins diffusif de cette étude, on constate qu'au-delà d'une certaine position, dans le cas de cette excitation en échelon $x_0 = 1.5cm$ les marges d'erreurs deviennent très importantes (Tableau IV-7). Cela s'explique par le fait que l'excitation thermique imposée n'a pas induit de variation significative de la déformation au-delà de cette abscisse (Figure IV:13.b). L'identification des propriétés thermomécanique reste toutefois possible aux autres abscisses étudiées. Pour les abscisses

$x_0 < 1.5cm$, l'identification de deux paramètres thermomécaniques est possible avec une faible marge d'erreur. Ces erreurs d'identification sont aussi visibles lors de la reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées pour les abscisses $x_0 > 1.5cm$.

On trouve aussi dans le cas du béton avec cette excitation que la marge d'erreur pour l'identification du coefficient de dilatation thermique est moins importante que pour la diffusivité thermique.



a



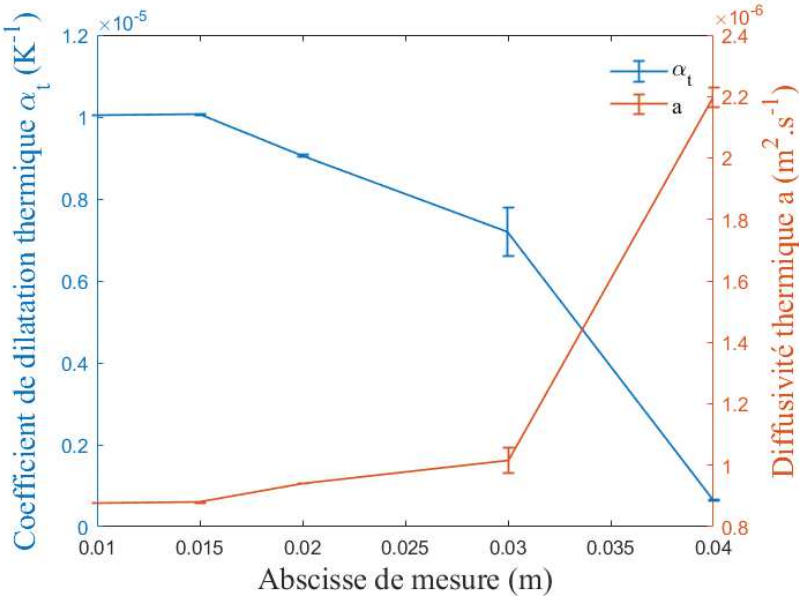
b

Figure IV:13 : Résultats d'identification pour le cas du béton (Echelon). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées.

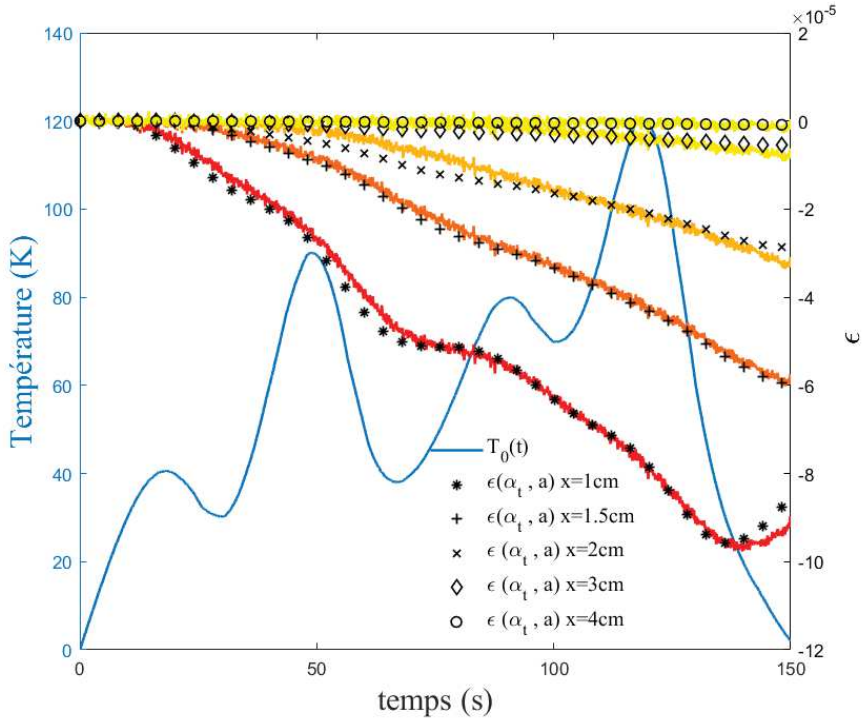
Tableau IV-8: Résumé des résultats d'identification (Béton, Spline)

	Position	$x_0 = 1cm$	$x_0 = 1.5cm$	$x_0 = 2cm$	$x_0 = 3cm$	$x_0 = 4cm$
Diffusivité thermique	Moyenne $\left(m^2.s^{-1}\right)\times 10^{-7}$	10.83	9.88	18.53	38.23	65.53
	Ecart relative (%)	-21.82	-11.12	-108.3	-330	-636
Coefficient de dilatation thermique	Moyenne (x10^{-6})	10.18	10.13	10.97	11.55	11.68
	Ecart relative (%)	-1.83	-1.34	-9.73	-15.5	-16.76

Pour des abscisse $x_0 < 1.5cm$ l'identification du coefficient de dilatation se fait avec une faible marge d'erreur. Alors que pour l'identification de la diffusivité thermique les erreurs sont supérieures à 25%. Le Tableau IV-8 nous permet aussi de constater qu'au-delà de l'abscisse $x_0 = 3cm$ les erreurs relatives deviennent excessives excluant toutes possibilités d'identification. On voit ici les limites de cette méthode concernant la caractérisation thermomécanique de matériau faiblement diffusif. Il est impératif, pour la caractérisation de ce type de matériau sous ce type d'excitation (intensité et durée), de faire des mesures de déformation proche de la surface d'excitation.



a



b

Figure IV:14 : Résultats d'identification pour le cas du béton (Spline). a) Erreurs relatives d'identification. b) Reconstruction des déformations à partir des valeurs identifiées.

En mettant en perspective les résultats précédant, on constate que pour identifier les paramètres thermomécaniques avec précision, il est nécessaire d'avoir une variation significative de la déformation à l'abscisse de mesure. Dans le but de caractériser des matériaux peu diffusifs on peut soit faire en sorte d'augmenter la valeur de la température d'excitation ou bien augmenter la durée d'excitation. L'autre possibilité est de rapprocher la mesure de la déformation de la surface d'excitation. Pour le cas de l'acier, le choix d'une abscisse $1.5 \leq x_0 \leq 3cm$ parait être le bon compromis entre précision et possibilité opératoire expérimentale.

Au vu des résultats présentés, l'identification effectuée est donc cohérente. La procédure d'inversion est donc validée par les résultats et la faible marge d'erreur.

IV.3.2. Estimation de la température

Lors de l'estimation de la température de surface, on étudiera dans un premier temps l'impact de la régularisation par la méthode de troncature de spectre et par pénalisation de Tikhonov. Ensuite l'impact de l'erreur sur l'identification des paramètres thermomécaniques sera abordé en comparant les résultats d'estimation par l'utilisation des paramètres thermomécaniques identifiés au préalable et des paramètres thermomécaniques connus.

IV.3.2.1. Influence de la méthode de régularisation

Comme on a eu recours à la méthode de décomposition 'SVD', il est commode d'introduire la méthode de pénalisation de Tikhonov ou bien la méthode de troncature de spectre. Dans la première, il est nécessaire de déterminer le paramètre de régularisation. En optant pour une recherche de ce paramètre avec la méthode de Morozov, on rajoute une recherche de valeur optimale qui alourdit légèrement le calcul. Il est de même pour la méthode de troncature, mais la recherche de l'ordre de troncature optimal demande moins de temps de calcul. La différence de temps de calcul n'étant pas significative, on se base sur la qualité des résultats pour affiner notre choix.

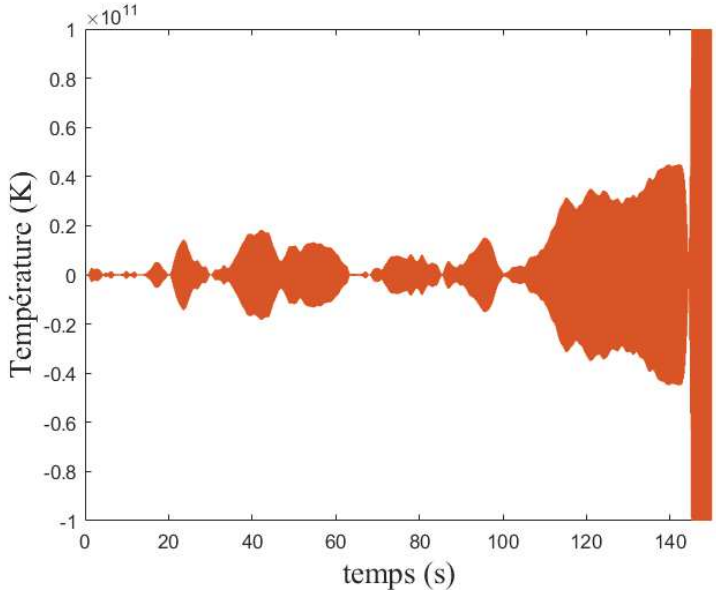


Figure IV:15: Température de surface identifiée sans régularisation

Pour faire notre choix, on prend le cas de l'acier avec l'excitation polynomiale. On considère aussi que les propriétés thermomécaniques du matériau sont identifiées. Les valeurs de déformation sont d'abord prises à une abscisse $x_0 = 1cm$ puis $x_0 = 2cm$ (Figure IV:16)

La Figure IV:15 représente la température identifiée pour une inversion sans régularisation.

Le résultat est complètement incohérent à cause de la nature mal posée de ce problème. Cette figure illustre bien la nécessité d'avoir recours à la régularisation.

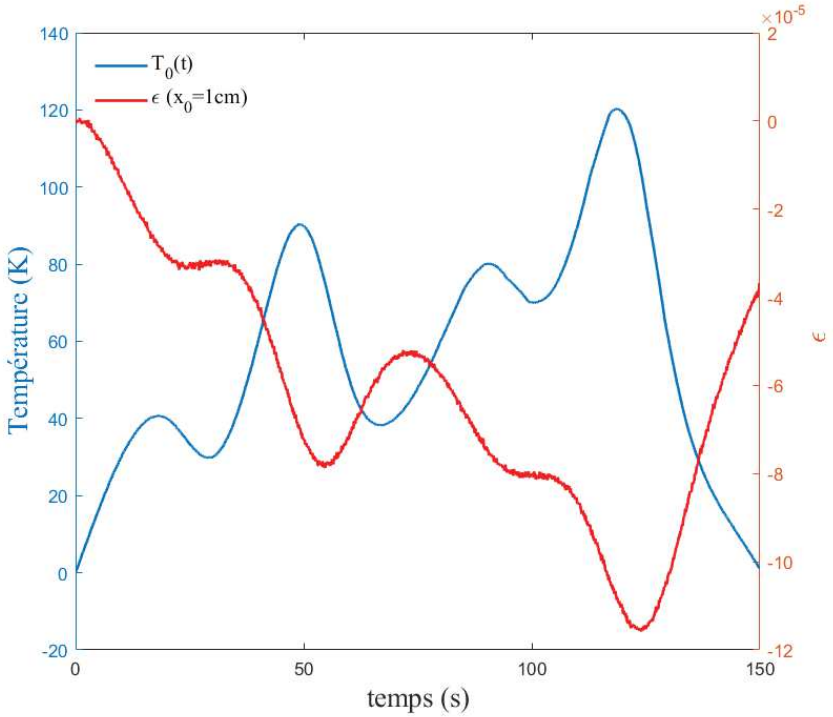


Figure IV:16 : Déformation à $x_0 = 1cm$ bruité issus du modèle numérique

La Figure IV:16 représente les mesures numériques de température imposée et de déformation bruitées mesurées à l'abscisse $x_0 = 1cm$. Le bruit de mesure introduit à un écart-type de $\sigma_{bruit} = 4.12 \times 10^{-7}$ pour la déformation. On applique d'abord la régularisation par pénalisation de Tikhonov présentée dans le premier chapitre de cette thèse et résumée dans le paragraphe §IV.2.2.1. La recherche du paramètre de régularisation se fait par minimisation du *RMSR* donnée par l'équation (4.37)

La Figure IV:17 donne la variation du *RMSR* en fonction de la valeur de α_r. En rouge sont indiquées les coordonnées du point qui satisfait la fonction (4.38) La valeur du paramètre de régularisation pour ce cas est $\alpha_{r_{optim}} = 4.61 \times 10^{-8}$. Cette valeur du paramètre de régularisation est utilisée lors de l'exécution de la procédure d'inversion afin d'identifier la température d'excitation. Le résultat de la température de surface identifié par la méthode de régularisation de Tikhonov est représenté dans la Figure IV:18.

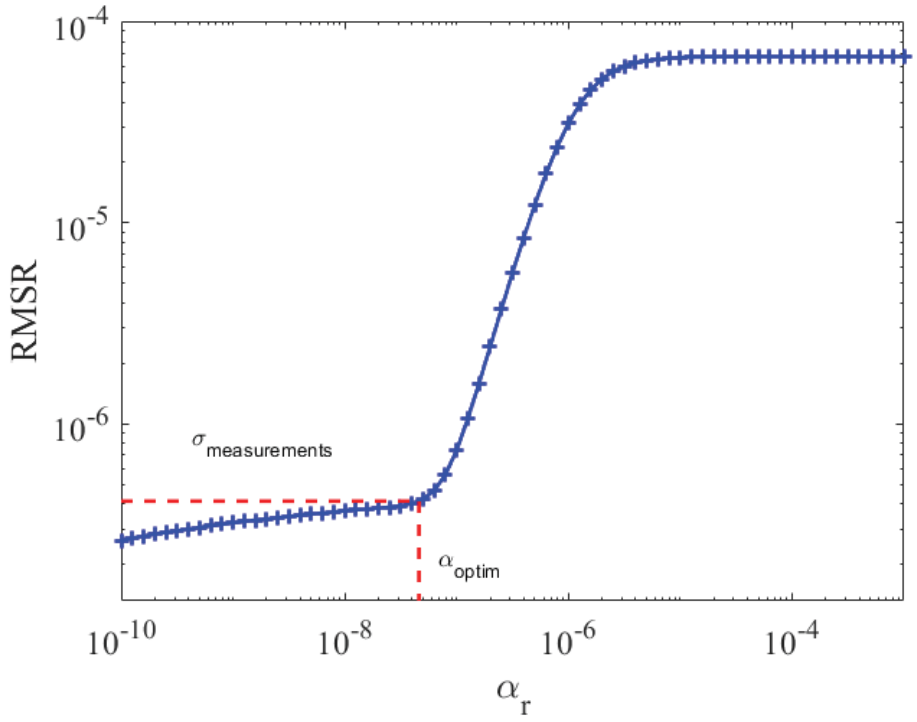


Figure IV:17 : Evolution du RMSR en fonction de la valeur de α_r

On peut visualiser à partir de la Figure IV:18 la sensibilité des estimations pour des valeurs du paramètre de régularisation différents de celui calculé suivant le principe de Morozov $\left(\frac{\alpha_{r_{optim}}}{2}, \alpha_{r_{optim}}, 2\times\alpha_{r_{optim}}\right)$. Il est à noter que la température identifiée est représentative de la température introduite dans le modèle. On constate que l'écart-type des résidus est identique à l'écart-type du bruit ajouté à la déformation pour une valeur du paramètre de régularisation optimal $\alpha_r = \alpha_{r_{optim}}$ (Tableau IV-9). L'identification effectuée est donc cohérente. La procédure d'inversion est donc validée par les résidus recalculés après l'identification.

Tableau IV-9: Valeur du RMSR pour différents paramètres de régularisation

Valeur du paramètre de régularisation α_r	**Valeur du RMSR**
$\alpha_r = \frac{\alpha_{r_{optim}}}{2}$	3.83×10^{-7}
$\alpha_r = \alpha_{r_{optim}}$	4.12×10^{-7}
$\alpha_r = 2\times\alpha_{r_{optim}}$	6.62×10^{-7}

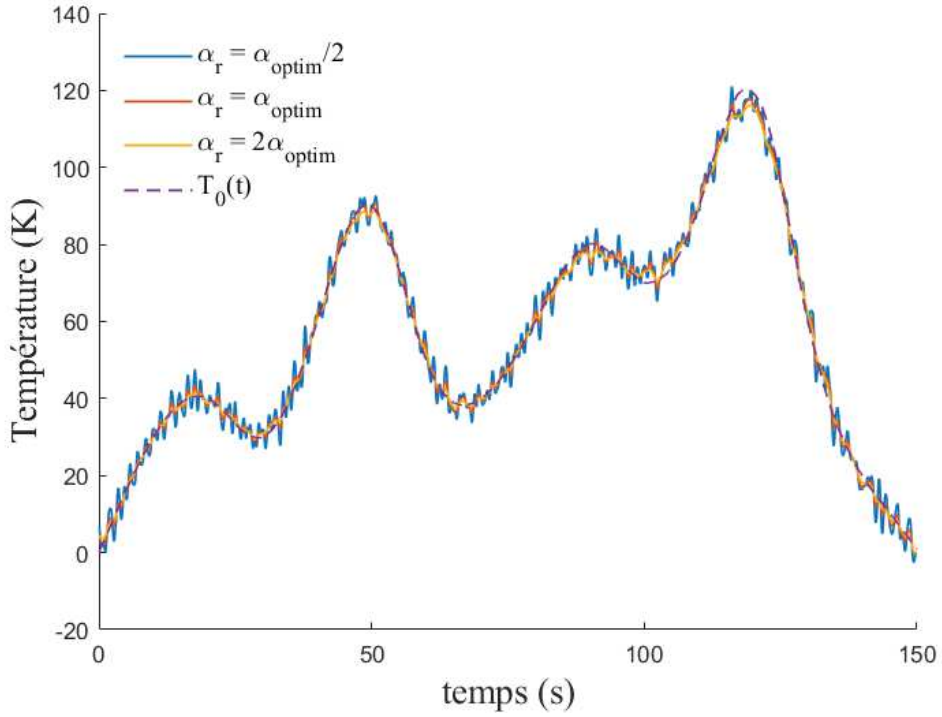


Figure IV:18: Température identifié avec régularisation de Thikhonov

Une régularisation TSVD est appliquée. La Figure IV:19 présente l'évolution du RMSR en fonction du nombre de valeurs singulières prise en compte pour ce cas numérique étudié. Le nombre optimal pour la procédure d'inversion est dans ce cas $n_{optim} = 43$. La recherche de cette valeur optimale de l'ordre de troncature se fait par la méthode de dichotomie.

Tableau IV-10: Valeur du RMSR pour différents ordres de troncature

Valeur du paramètre de régularisation α_r	**Valeur du RMSR**
$n = \frac{n_{optim}}{2}$	4.57×10^{-7}
$n = n_{optim}$	4.12×10^{-7}
$n = 2\times n_{optim}$	4×10^{-7}

Les résultats de l'identification de la température de surface sont présentés sur Figure IV:20 pour trois valeurs d'ordre de troncature $\left(\frac{n_{optim}}{2}, n_{optim}, 2\times n_{optim}\right)$. Nous visualisons ainsi la sensibilité des estimations par rapport au nombre de valeurs singulières retenues dans la procédure d'identification. Il est à noter que la température identifiée est représentative de la température introduite dans le modèle pour un nombre optimal de valeurs singulières retenues.

On constate d'après le Tableau IV-10 que l'écart-type des résidus est identique à l'écart-type du bruit ajouté à la déformation pour un ordre de troncature optimal.

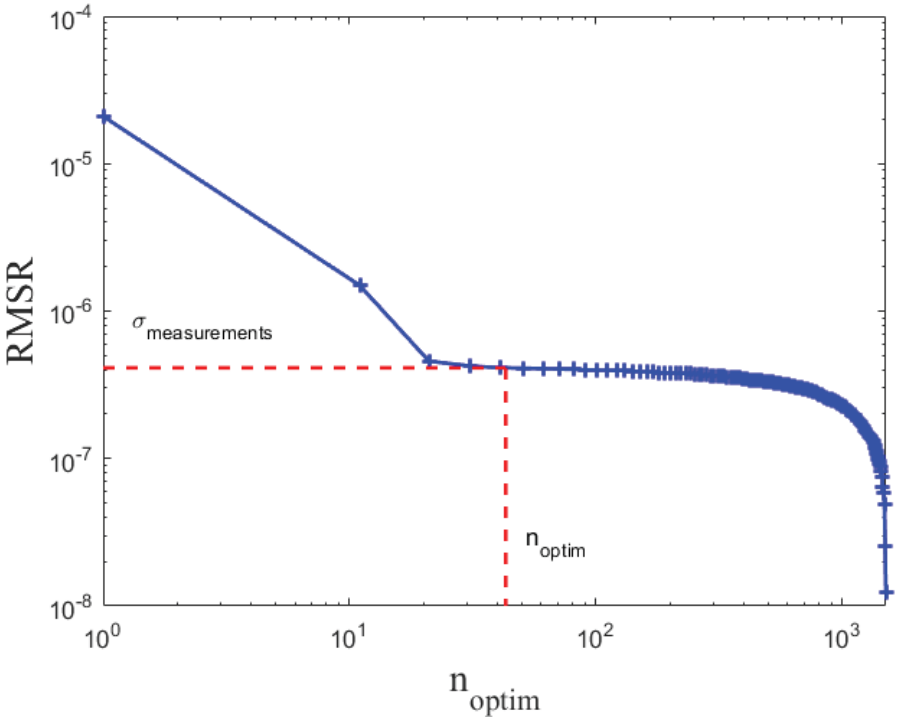


Figure IV:19 : Evolution du RMSR en fonction de la valeur de n

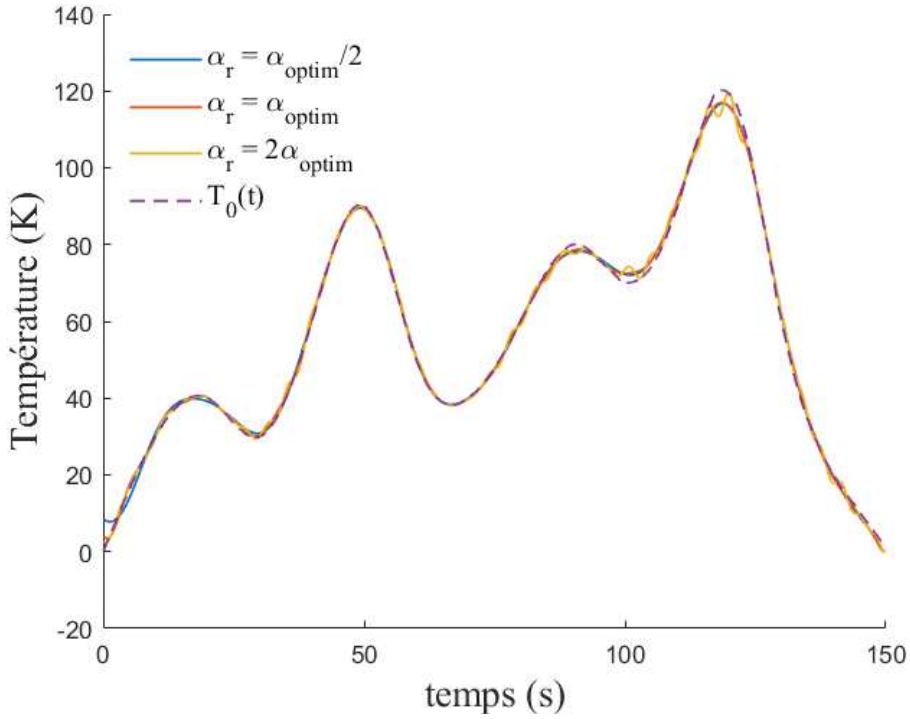


Figure IV:20 : Température identifié avec régularisation par la méthode TSVD

On a vu dans les paragraphes précédents que la position du capteur avait une influence sur la qualité de l'identification. Un des choix qui s'offre à nous pour vérifier si une des deux méthodes de régularisation est meilleure que l'autre, c'est de les tester en utilisant des mesures de déformation à une abscisse plus éloignée. On teste une abscisse $x_0 = 2cm$. Les résultats de cette identification par le biais de la procédure inverse avec les deux méthodes de régularisation sont représentés dans la Figure IV:21. Les résultats d'identification représentés dans cette figure sont calculés en considérant la valeur optimale du paramètre de régularisation pour la méthode de Tikhonov et l'ordre de troncature optimal pour la méthode de régularisation par troncature de spectre. On constate qu'aucune différence significative n'apparait entre les deux méthodes de régularisation. On remarque toutefois, que la procédure d'inversion est moins précise à cette abscisse.

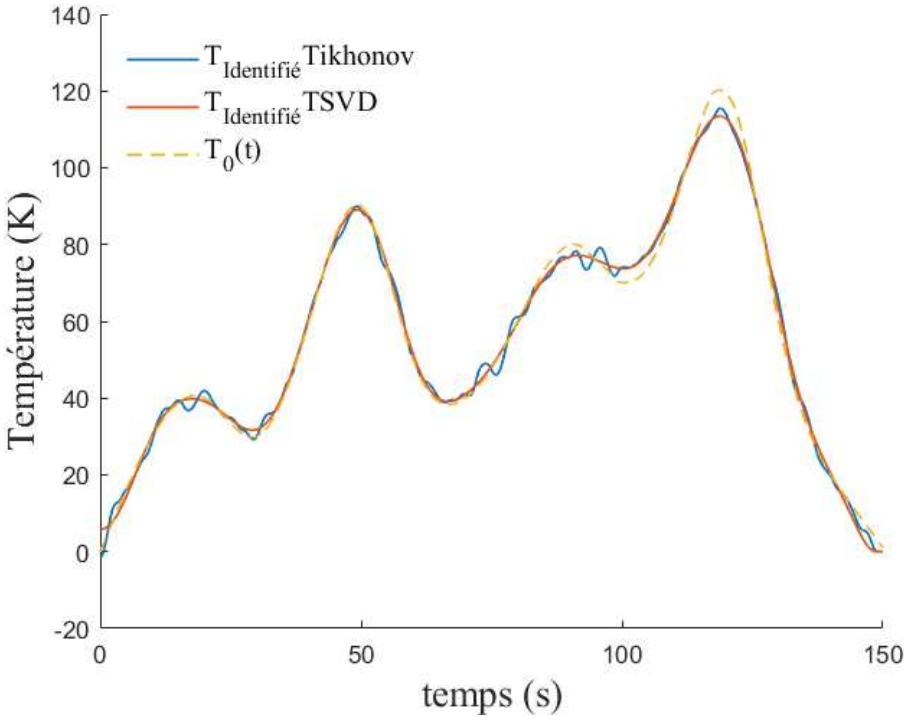


Figure IV:21: comparaison des deux méthodes de régularisation

Afin de saisir la robustesse de cette méthode d'inversion, on bruite les données de déformation avec un bruit de mesure plus important. La Figure IV:22 représente la courbe de la température imposée et celle de la déformation à $x_0 = 2cm$ issu du modèle numérique. Cette courbe de déformation est bruitée avec un signal d'écart-type $\sigma_{bruit} = 4.12 \times 10^{-6}$.

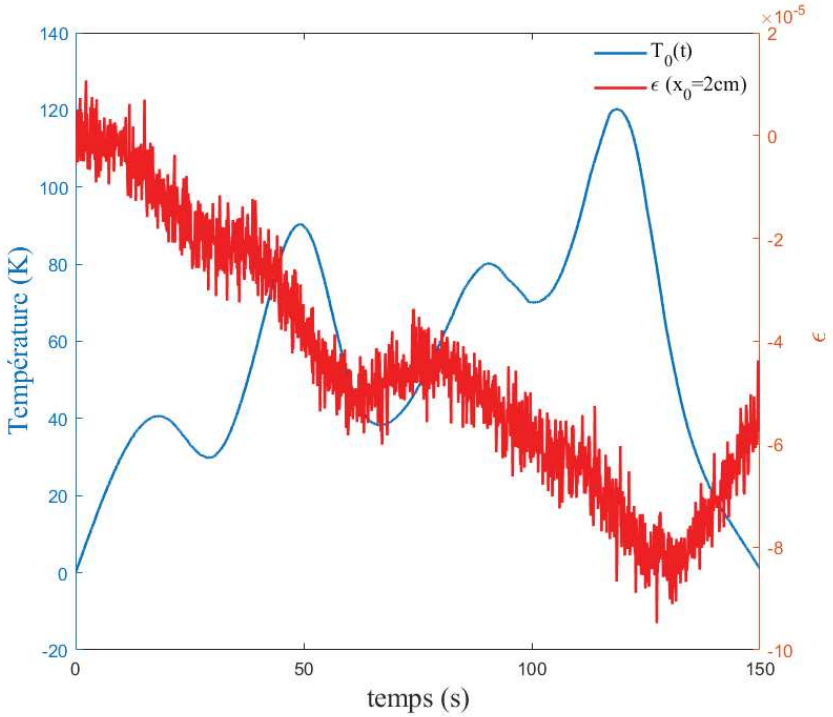


Figure IV:22 : : Déformation à $x_0 = 2cm$ bruité issus du modèle numérique

La Figure IV:23 fait apparaitre qu'avec un bruit nettement plus important que celui relevé expérimentalement, la température identifiée reste représentative de la température imposée. On ne constate pas de réelle différence entre les deux méthodes de régularisations. La seule crainte que fait apparaitre la méthode de régularisation par troncature est le faible nombre de valeur singulière pris en considération. On trouve ainsi un $n_{optim} = 10$. Comme la méthode de troncature de spectre néglige une partie des termes de la matrice et donc néglige une partie des données, cette méthode de régularisation peut donner une image bien plus biaisée que celle donnée par une régularisation par la méthode de pénalisation de Tikhonov.

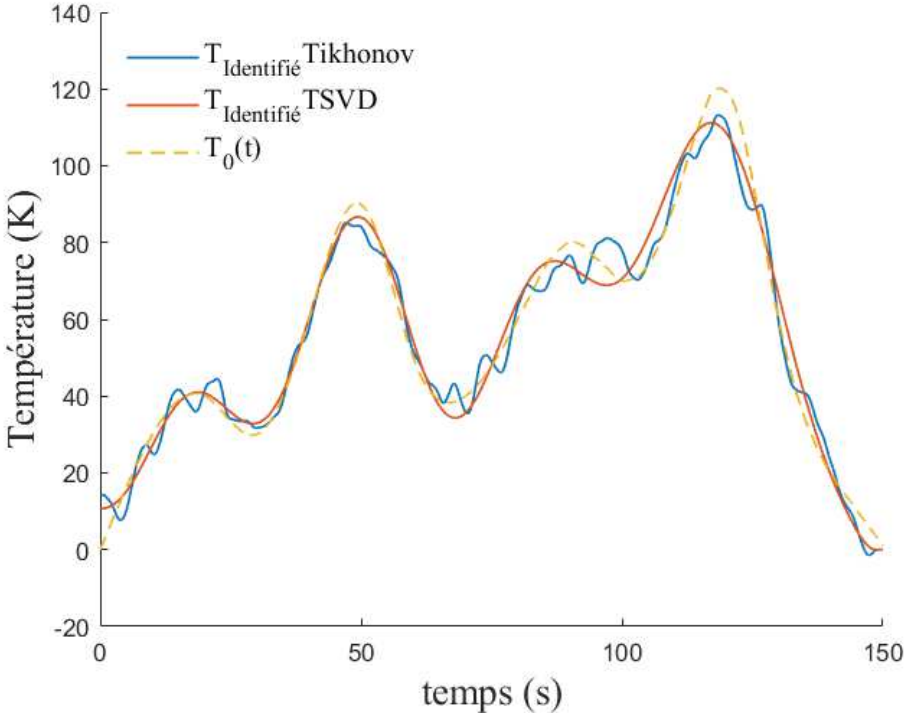


Figure IV:23 : comparaison des deux méthodes de régularisation

IV.4. Résultats expérimentaux

Dans un premier temps on considère la température imposée comme étant connue. En réalité, elle sera mesurée expérimentalement. Avec les signaux de la température imposée et des déformations induites, on identifie les paramètres thermomécaniques de l'acier C35 avec la procédure décrite en §IV.2.1. Après avoir identifié les propriétés de cet acier, On considère la température d'excitation comme étant une condition limite à déterminer en utilisant ainsi, la procédure décrite dans le paragraphe §IV.2.2.

IV.4.1. Description du banc expérimental

Le dispositif expérimental consiste en une barre d'acier, chauffée à son extrémité par un élément chauffant. De l'autre côté, la barre est bloquée par une pince pour satisfaire la condition de déplacement nul. La mesure de la température est effectuée à différentes positions par des thermocouples de type K directement soudés au matériau. Une jauge de contrainte est fixée à la barre pour mesurer la déformation à l'abscisse souhaitée. Les positions des capteurs sont mesurées par analyse d'image. Le solide est isolé pour être placé dans des conditions similaires au modèle direct. La Figure IV:24 : montre le dispositif expérimental utilisé.

La jauge de déformation ayant elle-même un coefficient de dilatation, la procédure expérimentale nous permet donc d'identifier un coefficient de dilatation qui représente en réalité la différence entre le coefficient de dilatation thermique de l'acier et celui de la jauge de déformation.

$$\alpha_{t_{mesuré}} = \alpha_{t_{acier}} - \alpha_{t_{jauge}} \tag{4.47}$$

Les mesures de déformation sont réalisées à l'aide d'une jauge de déformation uni axiale de la marque kyowa. La jauge est collée sur la paroi latérale de la barre d'acier. Le signal électrique émis par cette jauge qui subit des déformations liées à l'excitation thermique imposé à l'extrémité de la barre d'acier, est transmis via des câbles électriques à une chaine d'acquisition 'National Instrument'.

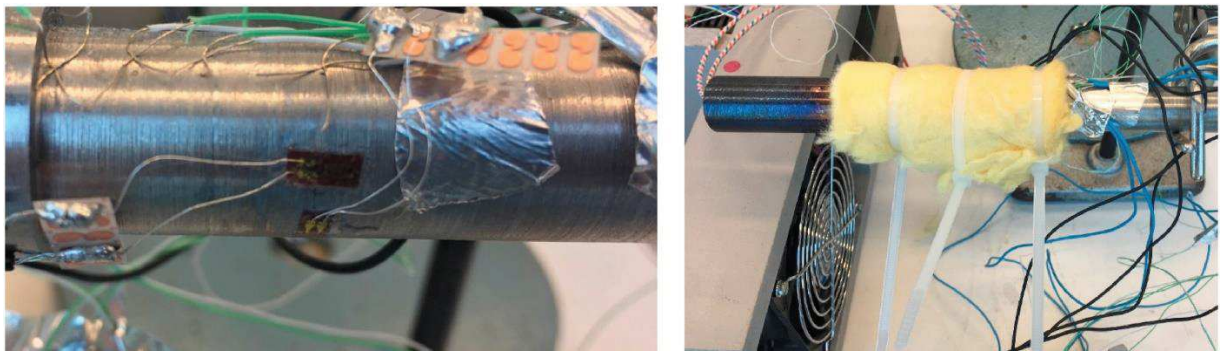


Figure IV:24 : Banc expérimental.

Si la force de traction ou de compression externe augmente ou diminue, la résistance augmente ou diminue proportionnellement. Supposons que la résistance initiale R varie de ΔR à cause de la déformation ε : l'équation suivante est établie.

$$\frac{\Delta R}{R} = K_s \varepsilon \tag{4.48}$$

Où K_s est le facteur de la jauge de déformation. Il exprime le coefficient de sensibilité des jauges de contrainte.

La variation de la résistance induite par la contrainte est extrêmement faible. Ainsi, pour la mesure de la contrainte, un pont de Wheatstone est formé pour convertir la variation de résistance en une variation de tension. Supposons que sur la Figure IV:25, les résistances sont *R1, R2, R3* et *R4* et que la tension d'excitation en Volt (V) est *E*. Alors, la tension de sortie e_0 est obtenue par l'équation suivante :

$$e_0 = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E \tag{4.49}$$

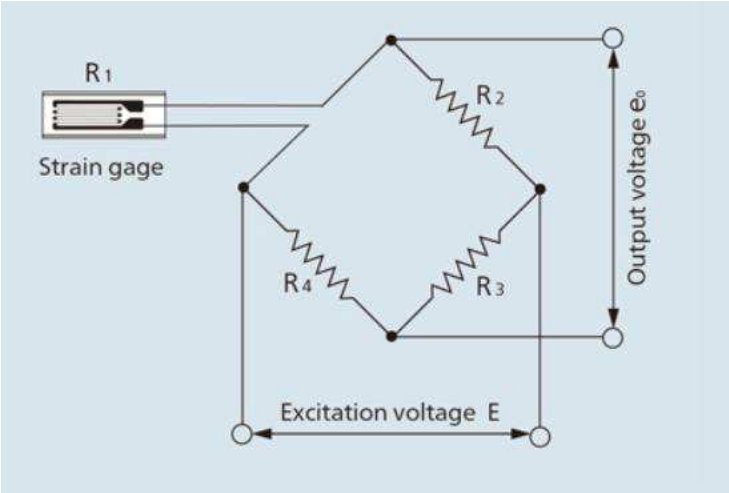


Figure IV:25 : Schéma d'un pont de Wheatstone

Si on suppose que la résistance R_1 est la résistance de la jauge de déformation, alors soumise à un effort, sa valeur change de ΔR , alors la tension de sortie devient :

$$e_0 = \frac{\left(R_1 + \Delta R\right)R_3 - R_2 R_4}{\left(R_1 + \Delta R + R_2\right)\left(R_3 + R_4\right)} E \tag{4.50}$$

Si on a initialement $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ alors la tension de sortie devient :

$$e_0 = \frac{R^2 + R\Delta R - R^2}{\left(2R + \Delta R\right)2R} E \tag{4.51}$$

Puisque R peut être considéré comme extrêmement plus grand que ΔR , l'équation (4.51) devient :

$$e_0 = \frac{1}{4}\frac{\Delta R}{R} E = \frac{1}{4} K_s \varepsilon E \tag{4.52}$$

La chaine d'acquisition utilisée pour la mesure de la déformation donne la valeur de la déformation en exécutant ces calculs.

Le banc d'essai et le modèle analytique ne prennent pas en compte les mêmes conditions limites mécaniques radiales. Il est tout d'abord nécessaire de vérifier la validité du modèle dans ces conditions.

Alors, le rapport de Poisson est fixé à zéro dans le modèle analytique. Dans ce cas, les déformations du modèle analytique (prenant en compte un déplacement radial nul imposé) et les déformations calculées à partir d'un modèle numérique avec déplacement radial libre sont similaires. La Figure IV:26 représente la déformation induite par une excitation thermique en forme de porte. On y représente la déformation issue du modèle numérique permettant un déplacement radial non imposé (libre) et la déformation issue du calcul à partir du modèle analytique, ou le déplacement radial et fixé à 0 et le coefficient de poisson $\nu = 0$.

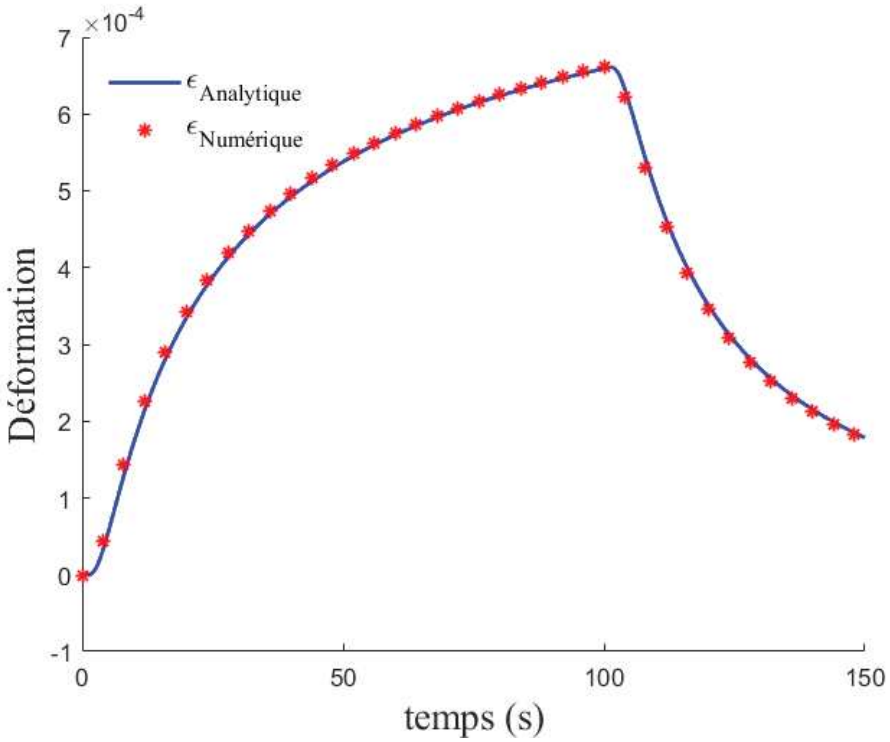


Figure IV:26 : Comparaison de la déformation entre la solution analytique (déplacement radial imposé) et la solution numérique (avec des conditions limites représentatives du banc expérimental).

Les bruit de mesures de la jauge de déformation sont représentés dans la Figure IV:27.

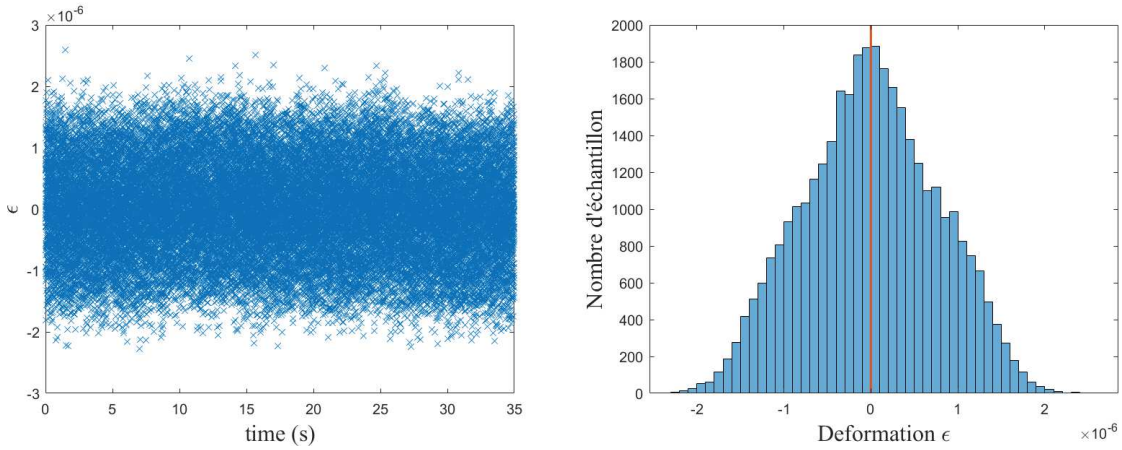


Figure IV:27 : Bruit blanc des mesures de déformations

Les mesures des essais expérimentaux utilisés sont données dans la Figure IV:28. Dans cette figure, pour chacun des deux essais expérimentaux testés, on trace la température imposée (mesurée par thermocouple) et la déformation induite (mesurée par jauge de déformation) à respectivement $x_0 = [18, 30] mm$ pour chacun des essais.

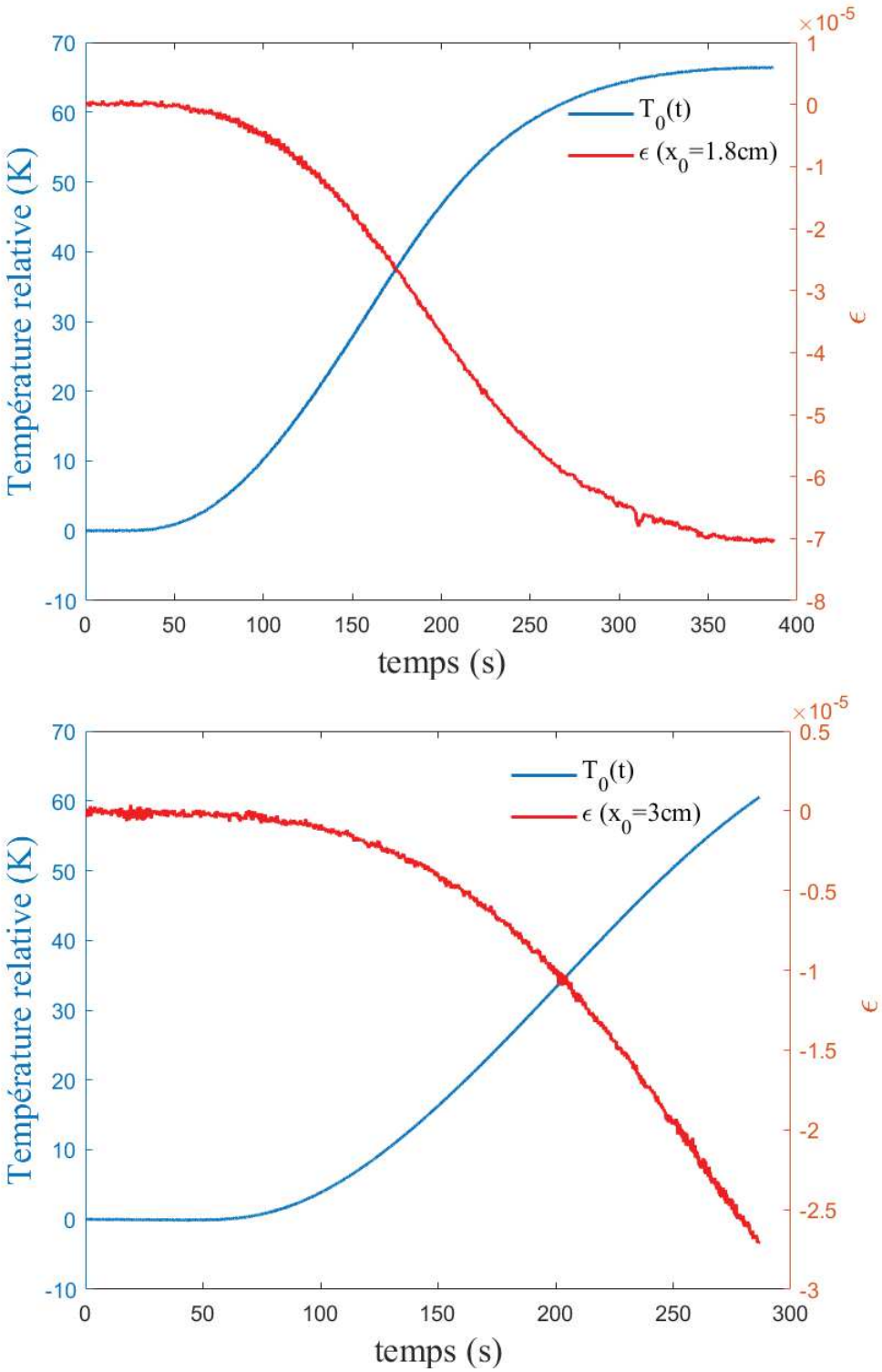


Figure IV:28 : Exemple de mesure expérimentale (température et déformation).

IV.4.2. Résultats expérimentaux

L'identification des paramètres thermomécaniques et thermiques est réalisée de manière simultanée. Dans le premier cas la température est considérée comme étant une donnée d'entrée et les paramètres thermomécaniques comme les inconnues à identifier. Dans un second temps, on identifiera la température d'excitation, en considérant les paramètres thermomécaniques comme étant des données

d'entrée. Dans les deux processus d'identification la mesure de déformation est considérée comme une donnée d'entrée.

Tableau IV-11: Résultats d'identification de propriétés thermomécaniques

	Coefficient de dilatation thermique $\left(\times 10^{-6} K^{-1}\right)$	**Diffusivité thermique** $\left(\times 10^{-6} m^2.s^{-1}\right)$
Essai 1	10.853	11.9
Essai 2	10.77	11.84

Les valeurs identifiées pour les deux essais expérimentaux sont données dans le Tableau IV-11. Ces valeurs sont en accord avec le coefficient linéaire de dilatation thermique de l'acier trouvé dans la littérature [79, 80] et la valeur de la diffusivité thermique est en accord avec celle trouvée par procédure TPS sur un échantillon de même acier. Les résultats retrouvés par caractérisation TPS de cet Acier C35 sont donnés en annexe 2. La valeur moyenne de diffusivité est $a_{AcierXC38} = 11 \times 10^{-6} m^2.s^{-1}$.

Les courbes de déformations recalculées avec les paramètres identifiées sont présentées dans la Figure IV:29. Cette figure montre que la déformation mesurée et celle calculée sont en accord.

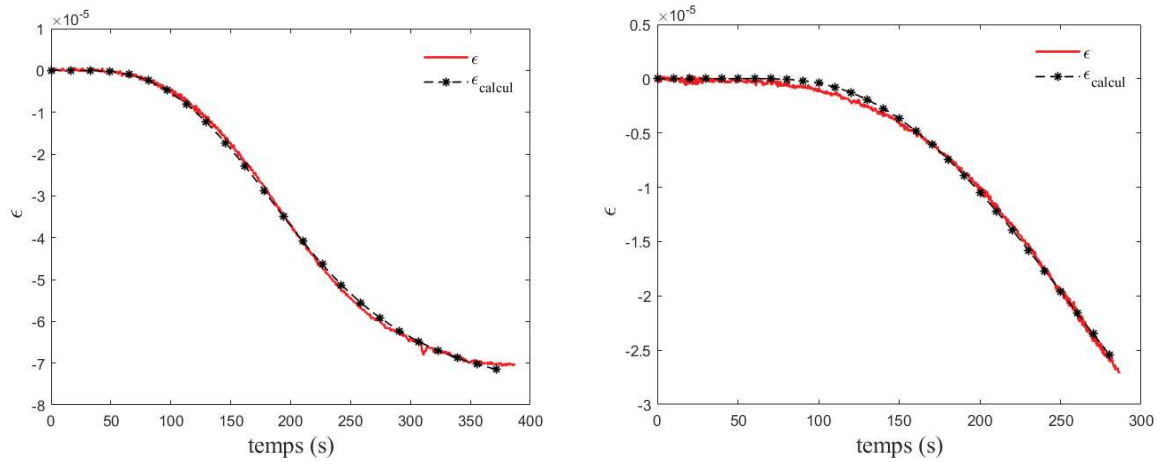


Figure IV:29 : Déformations recalculées

En considérant ces valeurs de paramètres thermomécaniques, on exécute la procédure d'identification de la température d'excitation. Les résultats exposés dans la Figure IV:30, sont calculés par régularisation de Tikhonov. Alors que la Figure IV:32 représente les températures identifiées suivant une régularisation par troncature de spectre.

Nous visualisons ainsi la sensibilité des estimations en prenant plusieurs valeurs du paramètre de régularisation optimal. Il est à noter que la température identifiée est représentative de la température mesurée, quel que soit le choix de la méthode de régularisation. On a bien la meilleure identification pour la valeur optimale du paramètre de régularisation.

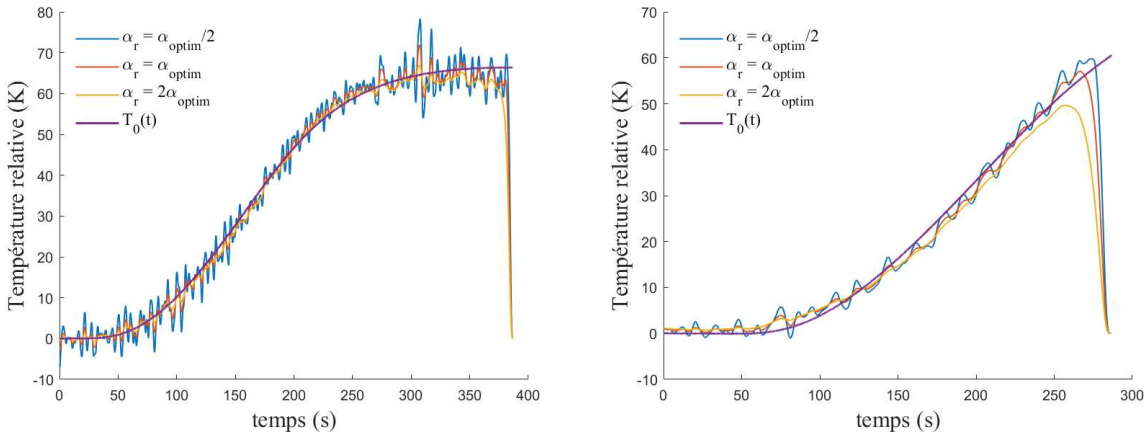


Figure IV:30 : Comparaison entre la température mesuré et la température identifiée pour différents paramètres de régularisation de Tikhonov pour deux essais expérimentaux.

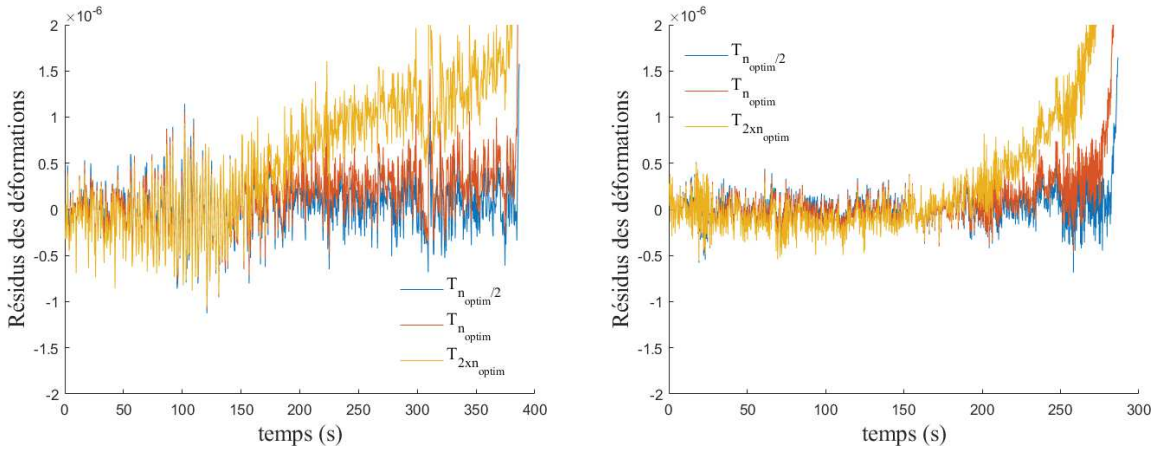


Figure IV:31 : Résidus pour différents paramètres de régularisation de Tikhonov pour deux essais expérimentaux.

On voit qu'il est donc possible de reconstruire le signal de la température d'excitation. Les résidus concernant la déformation sont donnés sur la Figure IV:31 et la Figure IV:33. L'écart-type obtenu pour les valeurs optimales des paramètres de régularisation $\sigma_{résidus} \approx 4.14\times10^{-7}$. Ils sont en accord avec le bruit mesuré sur le dispositif expérimental $\sigma_{bruit} = 4.12\times10^{-7}$.

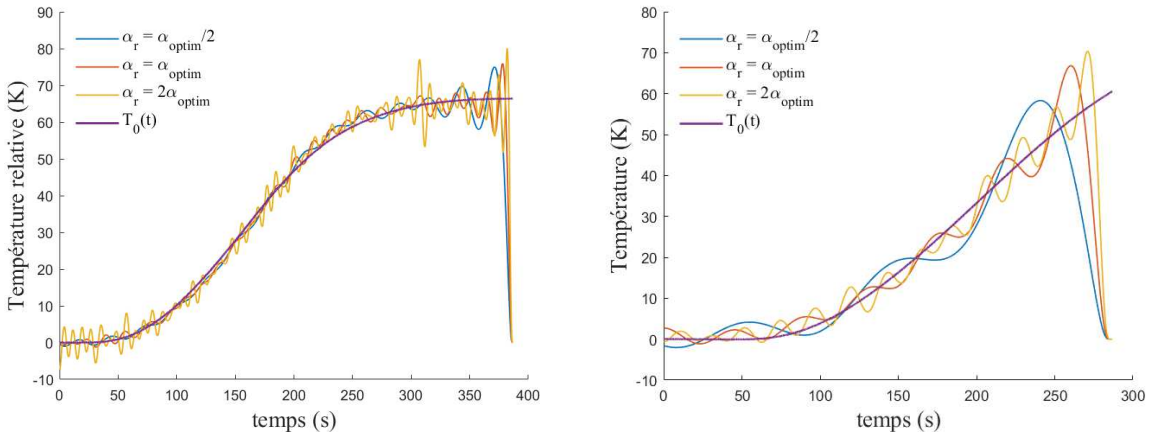


Figure IV:32 : Comparaison entre la température mesuré et la température identifiée pour différents ordres de troncature pour deux essais expérimentaux.

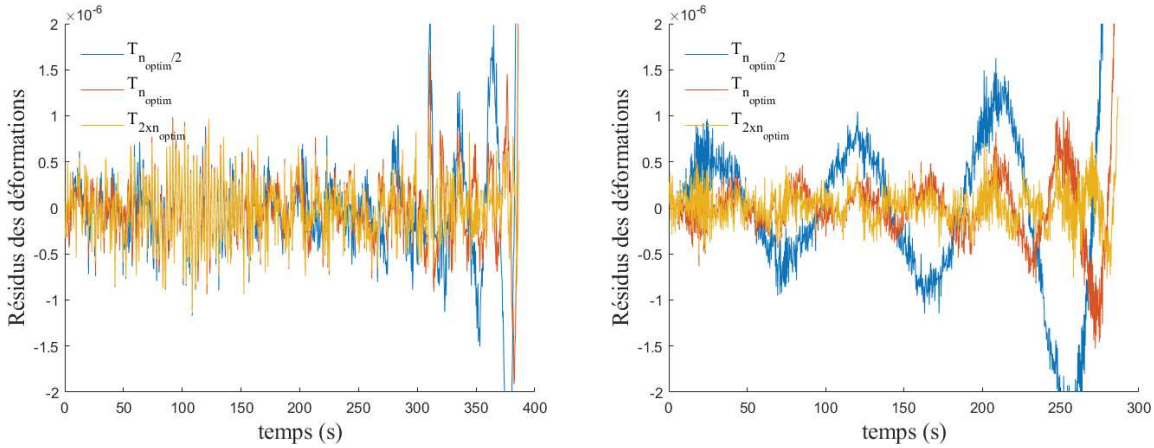


Figure IV:33 : Résidus pour différents ordres de troncature pour deux essais expérimentaux.

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre une méthode de calcul analytique a été développée et permet de décrire un couplage thermomécanique à l'aide d'une fonction de transfert. Par le calcul du produit de convolution entre cette fonction de transfert et la température d'excitation, on arrive à calculer la déformation induite à n'importe quelle abscisse du domaine étudié. Basé sur ce produit de convolution, une procédure d'inversion permettant l'identification de paramètres thermique (diffusivité thermique) et thermomécanique (coefficient de dilatation thermique) a été développée. L'étude de sensibilité et les différents tests numériques ont montré les limites de la procédure concernant des matériaux peu diffusifs voir isolants. En utilisant le produit de déconvolution, une procédure d'inversion permettant l'identification de la température d'excitation en utilisant les mesures de déformations a été mis en œuvre. Un banc expérimental a été mis en place dans le but d'appliquer ces deux méthodes à partir de mesures expérimentales.

Les résultats obtenus lors de l'identification des paramètres thermomécaniques sont cohérents avec ceux présentés dans la littérature. En outre, cette procédure permet d'identifier l'évolution régissant la

température d’excitation, quelle que sa forme. Les résultats obtenus à partir de mesures expérimentales sont cohérents et en accord avec les mesures réalisées.

Conclusion générale

Le présent travail a permis la caractérisation d'une interface en contact glissant par estimation des paramètres macroscopiques en régime dynamique. Le flux généré $\phi_g(t)$, le coefficient de partage intrinsèque du flux généré $\alpha(t)$ et la résistance de contact glissant $R_{cg}(t)$ ont été identifiés par inversion de mesure. L'estimation de l'évolution temporelle de ces paramètres offre deux avantages prépondérants. En plus de gagner en précision dans le cas d'excitation dynamique (vitesse) constante - impossible à réaliser expérimentalement à cause de la partie transitoire permettant le passage d'un état immobile à la vitesse nominale - cette méthode permet l'estimation des paramètres dans le cas d'excitations dynamiques (Vitesse) variables et de forme quelconque, sans aucune connaissance à priori de la forme de cette dernière.

Cette étude constitue un apport à la littérature existante, traitant des contacts glissants. En effet, les études réalisées jusqu'à présent traitaient de l'identification des paramètres de contact glissant constant ou alors, se limitaient à la variation d'un seul des trois paramètres. Il n'existe pas à notre connaissance des travaux permettant l'estimation dynamique simultanée des trois paramètres.

L'élaboration de cet outil et la garantie de sa précision et de sa fiabilité a nécessité une étude approfondie des méthodes d'inversion et de régularisation des systèmes non linéaires.

Une méthode globale est utilisée pour l'estimation de ces paramètres. Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle. Celle-ci représente l'écart selon les moindres carrées, entre les températures mesurées et les températures calculées numériquement via une fonction dépendant des paramètres à estimer. A l'aide de cette fonctionnelle, une étude de sensibilité et de corrélation permettant d'examiner la faisabilité de l'estimation a été présentée.

L'étude de sensibilité a mis en évidence la possibilité d'estimer ces paramètres simultanément. Cependant, elle a révélé l'existence de fortes corrélations. Les corrélations constatées peuvent être classées en deux catégories.

La première est liée à la valeur élevée de la fréquence d'échantillonnage et concerne le $i^{ème}$ paramètre et ses deux plus proches voisins antérieurs et postérieurs. Afin d'éliminer cette sorte de corrélation, une paramétrisation des grandeurs à estimer a été utilisée.

La deuxième catégorie de corrélation apparaît entre le coefficient de partage intrinsèque du flux généré et la résistance de contact glissant aux mêmes indices de temps. Une méthode de décalage temporel au niveau de la paramétrisation a été introduite pour réduire le niveau de ces corrélations.

Les méthodes de minimisation usuelles n'ayant pas donné satisfaction, une autre démarche a été développée pour la réalisation de cette minimisation. Celle-ci est basée sur la méthode de Levenberg-Marquadt, couplée à une méthode de contrainte de l'espace de recherche de la solution. Cette technique a permis d'avoir une meilleure robustesse et une précision améliorée.

L'étude du contact glissant pour le couple (Acier/Bronze) a été testée expérimentalement. Ce contact a été étudié pour différentes formes et intensités de vitesses. Les résultats obtenus confirment la proportionnalité logique entre le flux généré et la vitesse. Ils ont montré également que l'évolution de la résistance de contact glissant décroissait avec l'augmentation de la vitesse du contact. Ce dernier résultat est en accord avec celui de la littérature, que ce soit sur le plan expérimental que sur le plan théorique. Cette étude tend à montrer aussi que le coefficient de partage thermique intrinsèque est indépendant de la vitesse de glissement lorsque le passage d'une vitesse nominale à une autre se fait de manière rapide (quelques dixièmes de seconde).

L'étude proposée au dernier chapitre constitue une investigation destinée à ouvrir des perspectives sur la modélisation d'un couplage thermomécanique lors du frottement entre solides.

Le couplage thermomécanique étudié a permis de déterminer, pour une configuration 1D, la relation liant les déformations d'un matériau causées par une excitation thermique de forme quelconque à une extrémité, à la température en cette même extrémité (ou à une position quelconque). Dans ces conditions, le problème traité est un problème de thermoélasticité à une dimension. Outre l'identification de la température à partir de mesure de déformation, on a montré, à travers des techniques d'inversion, la possibilité d'identifier à la fois le coefficient de dilatation thermique et la diffusivité thermique du matériau utilisé.

Ces techniques ont été validées numériquement, puis ont été utilisées afin d'identifier expérimentalement les propriétés thermomécaniques de l'acier C35.

Les suites et les évolutions à donner à ces recherches sont multiples :

- Etendre le modèle théorique à un modèle permettant la prise en compte de la taille et de la répartition des aspérités au niveau du contact. Un tel modèle nécessite le passage à une formulation en 3 dimensions du problème.

- On peut aussi prévoir l'intégration des équations de la mécanique afin déterminer et d'évaluer les différentes interactions thermomécaniques pouvant avoir lieu dans un contact frottant sec.

- Une validation expérimentale étant nécessaire, l'instrumentation du banc expérimental devra sans aucun doute être revue, d'abord sur le plan thermique, mais aussi sur le plan des mesures mécaniques.

- Dans une telle configuration il sera nécessaire d'effectuer des mesures sur les parois latérales à différents angles et différentes hauteurs pour les deux éprouvettes.

- L’acquisition des mesures de températures sur l’éprouvette mobile devra être améliorée pour qu’elle puisse permettre l’acquisition d’un nombre plus important de mesures.

- Enfin, les résultats obtenus pourront être utilisés dans le but d’étudier les interactions thermiques et mécaniques mis en jeu dans les contacts frottants, notamment en application au freinage.

I. Annexe 1

Méthode de décomposition en valeur singulière « SVD »

La SVD est une méthode de factorisation matricielle. La factorisation par cette technique d'une matrice *M* de dimension $(m \times n)$ *est :*

$$M = USV^T \tag{5.1}$$

Où

- U est une matrice de dimension $(m \times m)$. Elle est composée d'un ensemble de vecteurs de base orthonormés de R^m.
- S est une matrice diagonale de dimension $(m \times n)$. Sa diagonale contient les valeurs propres de la matrice M. Par convention, les éléments diagonaux S_{ii} sont arrangés par ordre décroissant.
- V est une matrice de dimension $(n \times n)$, elle est composée d'un ensemble de vecteurs de base orthonormés de R^n.

Cette décomposition matricielle est valable pour toute les matrices [38], $s_{11} \geq s_{22} \geq ... \geq s_{\min(m,n)}$. Il est tout à fait possible d'avoir des valeurs singulières nulle. Dans ce cas, si les *p* première valeurs propres ne sont pas nulle, on peut écrire :

$$S = \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

S_p est une matrice diagonale de dimension $(p \times p)$. L'écriture de la matrice *M* en fonction des vecteur colonne des matrices *U* et *V* donne

$$M = [U_{.,1}, U_{.,2}, ..., U_{.,m}] \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[V_{.,1}, V_{.,2}, ... V_{.,n} \right]^T \tag{5.3}$$

$$M = [U_{.,p}, U_{.,0}] \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[V_{.,p}, V_{.,0} \right]^T \tag{5.4}$$

Ou, U_p désigne les *p* premières colonnes de U, U_0 désigne les dernières $(m-p)$ colonnes de U, V_p désigne les *p* premières colonnes de V, et V_0 désigne les dernières $(n-p)$ colonnes de V. Vu que les dernières $(m-p)$ colonnes de U et les dernières $(n-p)$ colonnes de V dans (5.4) sont multipliées par Les valeurs nulle de S, on peut simplifier la décomposition SVD de *M* en une forme compact donnée par l'équation (5.5).

$$M = U_p S_p V_p^T \tag{5.5}$$

Le système linéaire donné par l'équation (1.20) devient,

$$y = U_p S_p V_p^T x \tag{5.6}$$

Pour résoudre ce système linéaire on doit inverser la matrice $M = U_p S_p V_p^T$.

$$x = V_p S_p^{-1} U_p^T y \tag{5.7}$$

Les matrices V et U étant orthogonales, on a $V^{-1} = V^T$ et $U^{-1} = U^T$.

Les éléments du vecteur $U_p^T y$ sont les produits scalaires des première *p* colonnes de U avec *y*.

$$U_p^T y = \begin{bmatrix} (U_{.,1})^T y \\ (U_{.,2})^T y \\ \vdots \\ (U_{.,p})^T y \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

En multipliant S_p^{-1} fois (5.8), on obtient

$$S_p^{-1} U_p^T y = \begin{bmatrix} \dfrac{(U_{.,1})^T y}{s_1} \\ \dfrac{(U_{.,2})^T y}{s_2} \\ \vdots \\ \dfrac{(U_{.,p})^T y}{s_p} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

En multipliant V_p par l'équation (5.9), on obtient finalement une combinaison linéaire des colonne de V_p qui peut être écrite comme suite :

$$x = V_p S_p^{-1} U_p^T y = \sum_{i=1}^{p} \frac{U_{.,i}^T y}{s_i} V_{.,i} \tag{5.10}$$

II. Annexe 2

Résultats de caractérisation par méthode TPS d'un échantillon d'acier et un autre de bronze :

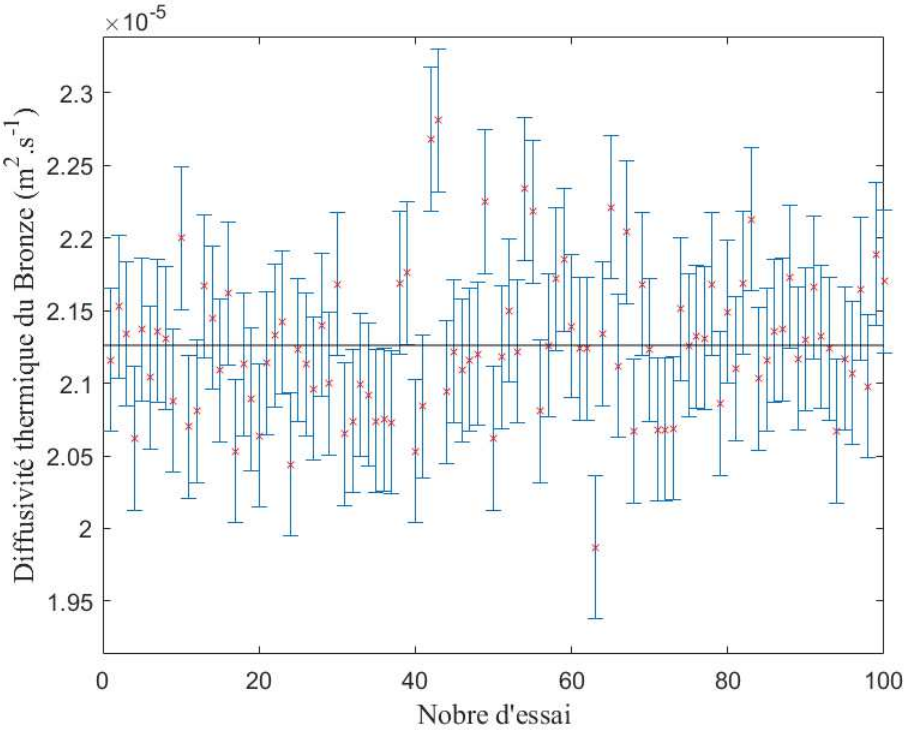


Figure IV:34 : Diffusivité thermique du bronze mesuré par la méthode TPS

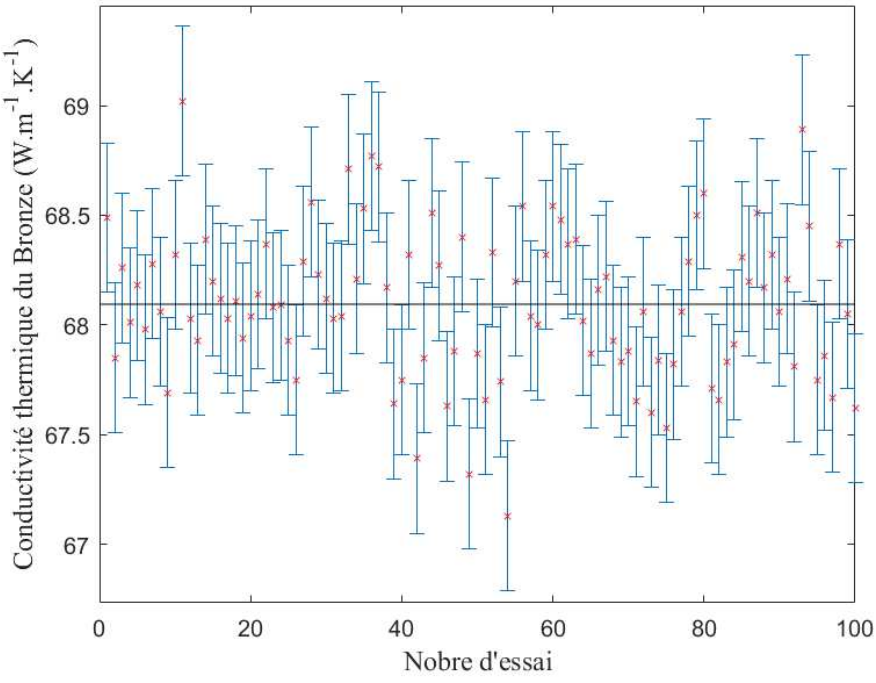


Figure IV:35 : Conductivité thermique du bronze mesuré par la méthode TPS

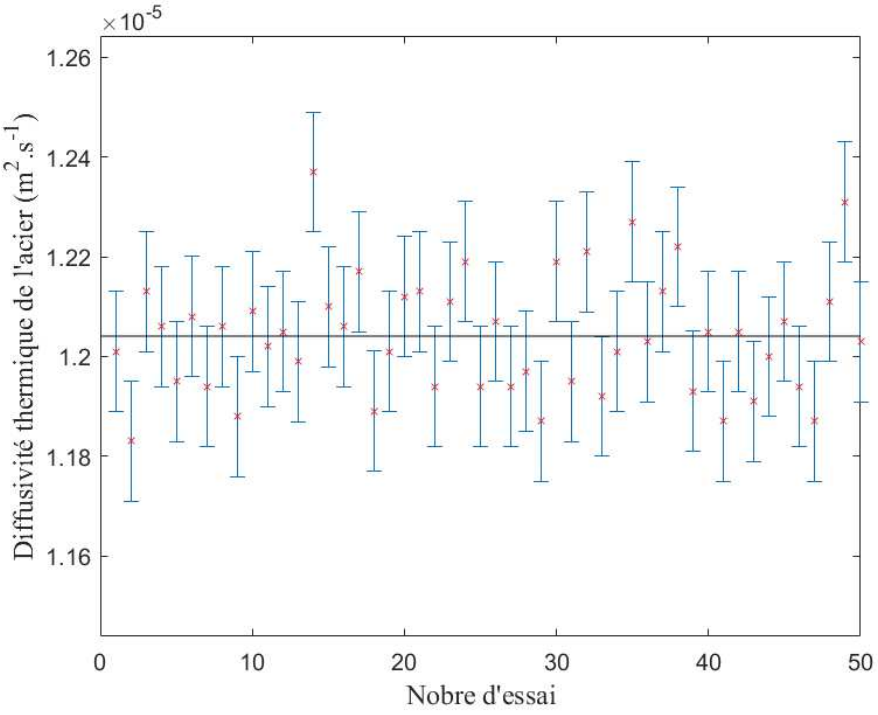


Figure IV:36 : Diffusivité thermique de l'acier mesuré par la méthode TPS

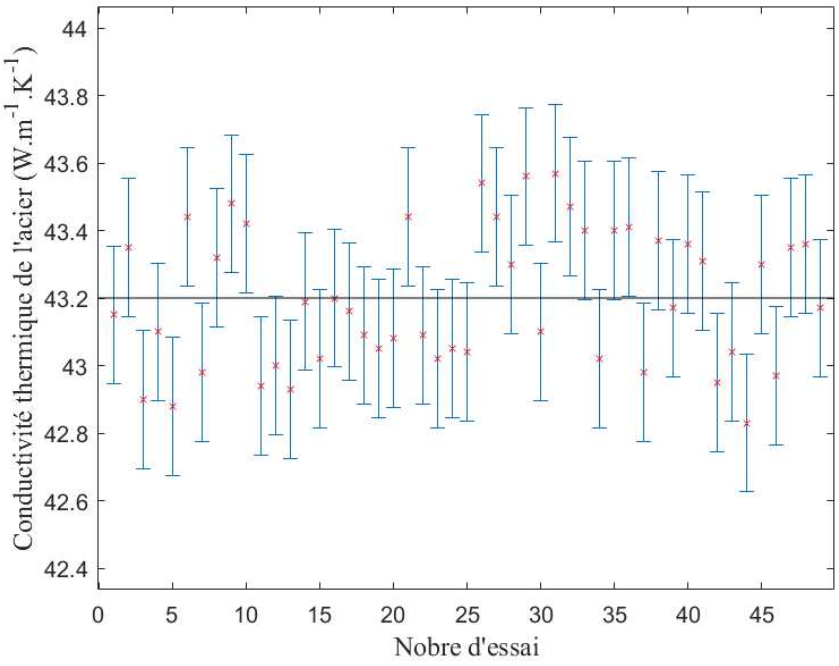


Figure IV:37 : Conductivité thermique de l'acier mesuré par la méthode TPS

Bibliographie

[1] J. P. BARDON, « Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif », *Bases Phys. Cond. Contact Therm. Imparfait Entre Milieux En Glissement Relat.*, vol. 33, nº 386, p. 83, 85-91 [8 p.], 1994.

[2] J.-G. Bauzin, « Identification expérimentale des paramètres thermiques dans le contact entre deux solides en frottement sec », Doctorat, Paris Nanterre, Paris, 2003. Consulté le: sept. 17, 2017. [En ligne]. Disponible sur: http:// primo-prod.u-paris10. fr/SCD: default_scope: SCD_ ALEPH000408433

[3] F. Sun, P. Zhang, H. Wang, J. Shen, et L. Nie, « Experimental study of thermal contact resistance between aluminium alloy and ADP crystal under vacuum environment », *Appl. Therm. Eng.*, vol. 155, p. 563-574, juin 2019, doi: 10.1016/j.applthermaleng.2019.04.027.

[4] R. Dou, T. Ge, X. Liu, et Z. Wen, « Effects of contact pressure, interface temperature, and surface roughness on thermal contact conductance between stainless steel surfaces under atmosphere condition », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 94, p. 156-163, mars 2016, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.11.069.

[5] H. BLOK, « Theoretical Study of Temperature Rise at Surfaces of Actual Contact under Oiliness Lubricating Conditions », *Proc Instn Mech Engrs Gen. Discuss. Lubr. Lubr.*, vol. 2, p. 222, 1937.

[6] J. C. Jeager, « Moving sources of heat and the temperature at sliding contact », *R. Soc. NSW*, nº 76, p. 203-224, 1942.

[7] F. F. Ling, « A quasi-iterative method for computing interface temperature distributions », *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 10, p. 461-474, sept. 1959, doi: 10.1007/BF01601355.

[8] R. Komanduri et Z. B. Hou, « Analysis of heat partition and temperature distribution in sliding systems », *Wear*, vol. 251, nº 1, p. 925-938, oct. 2001, doi: 10.1016/S0043-1648(01)00707-4.

[9] P. S. Kounas, A. D. Dimarogonas, et G. N. Sandor, « The distribution of friction heat between a stationary pin and a rotating cylinder », *Wear*, vol. 19, nº 4, p. 415-424, 1972, doi: 10.1016/0043-1648(72)90315-8.

[10] P. Vernotte, « P. Vernotte, Thermodynamique générale, Ministère de l' air (1961). ».

[11] T. Kato et H. Fujii, « Energy partition in conventional surface surface grinding », *J. Manuf. Sci. Eng.*, vol. 121, 1999.

[12] W.-L. Chen, Y.-C. Yang, et S.-S. Chu, « Estimation of heat generation at the interface of cylindrical bars during friction process », *Appl. Therm. Eng.*, vol. 29, nº 2, p. 351-357, févr. 2009, doi: 10.1016/j.applthermaleng.2008.03.001.

[13] F. F. Ling et T. E. Simkins, « Measurement of Pointwise Juncture Condition of Temperature at the Interface of Two Bodies in Sliding Contact », *J. Basic Eng.*, vol. 85, nº 3, p. 481, 1963, doi: 10.1115/1.3656655.

[14] B. Mazo, B. Cassagne, D. Badie-Levet, et J.-P. Bardon, « Etude des conditions de liaison thermique dans le cas du frottement métal-plastique », *Rev. Générale Therm. Fr.*, nº 204, p. 919-933, 1978.

[15] J. J. Vullierme, J. J. Lagarde, et H. Cordier, « Etude de la resistance de contact entre deux materiaux en frottement—Influence de la vitesse relative de glissement », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 22, nº 8, p. 1209-1219, août 1979, doi: 10.1016/0017-9310(79)90167-4.

[16] G. A. Berry et J. R. Barber, « The Division of Frictional Heat—A Guide to the Nature of Sliding Contact », *J. Tribol.*, vol. 106, nº 3, p. 405, 1984, doi: 10.1115/1.3260948.

[17] Y. Lee, Y. Liu, J. R. Barber, et Y. H. Jang, « Thermal considerations during transient asperity contact », *Tribol. Int.*, vol. 94, p. 87-91, févr. 2016, doi: 10.1016/j.triboint.2015.08.008.

[18] N. Laraqi, « Thermal constriction phenomenon in sliding contacts », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 39, nº 17, p. 3717-3724, 1996.

[19] H. A. Abdel-Aal, « Division of frictional heat: The dependence on sliding parameters », *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 26, nº 2, p. 279-288, févr. 1999, doi:10.1016/S0735-1933(99)00014-7.

[20] H. S. Carslaw et J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.

[21] N. Laraqi, « Températures de contact et coefficient de partage de flux généré par frottement sec entre deux solides. Approche nouvelle de la génération de flux », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 35, nº 11, p. 3131-3139, nov. 1992, doi:10.1016/0017-9310(92)90332-M.

[22] J. P. Bardon, « Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif / Physical basis of the thermal interface boundary conditions for an imperfect contact between two sliding media. », *Rev. Générale Therm.*, vol. 33, nº 386, 1994, [En ligne]. Disponible sur: http://www.refdoc.fr/Detailnotice?idarticle

[23] N. Laraqi, N. Alilat, J. M. G. de Maria, et A. Bairi, « Temperature and division of heat in a pin-on-disc frictional device—Exact analytical solution », *Wear*, vol. 266, nº 7, p. 765-770, mars 2009, doi: 10.1016/j.wear.2008.08.016.

[24] J.-G. Bauzin, N. Keruzore, N. Laraqi, A. Gapin, et J.-F. Diebold, « Identification of the heat flux generated by friction in an aircraft braking system », *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 130, p. 449-456, août 2018, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.008.

[25] J.-G. Bauzin, S. Vintrou, et N. Laraqi, « 3D-transient identification of surface heat sources through infrared thermography measurements on the rear face », *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 148, p. 106115, févr. 2020, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2019.106115.

[26] T. Moussa, B. Garnier, U. Pelay, Y. Favennec, et H. Peerhossaini, « Heat transfer at the grinding interface between glass plate and sintered diamond wheel », *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 107, p. 89-95, sept. 2016, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2016.03.027.

[27] J.-G. Bauzin, M.-N. Nguyen, N. Laraqi, et M.-B. Cherikh, « Thermal characterization of frictional interfaces using experiments and inverse heat conduction methods », *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 137, p. 431-437, mars 2019, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.12.004.

[28] A. DEGIOVANNI, « Conductivité et diffusivité thermique des solides », *Ref : TIP672WEB - « Mesures physiques »*, janv. 10, 1994. http://www.techniques.ingenieur.fr/base-documentaire/42544210-mesure-des-grandeurs-thermophysiques/download/r2850/conductivite-et-diffusivite-thermique-des-solides.html.

[29] M. BEAUDHUIN, « Mesure de la conductivité thermique par la méthode 3-oméga », *Ref : TIP672WEB - « Mesures physiques »*, déc. 10, 2019. http://www.techniques.ingenieur.fr/base-documentaire/42544210-mesure-des-grandeurs-thermophysiques/download/r2918/mesure-de-la-conductivite-thermique-par-la-methode-3-omega.html (consulté le août 05, 2020).

[30] S. E. Gustafsson, « Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials », *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 62, nº 3, p. 797-804, mars 1991, doi: 10.1063/1.1142087.

[31] M. N. Gaikwad et K. C. Deshmukh, « Thermal deflection of an inverse thermoelastic problem in a thin isotropic circular plate », *Appl. Math. Model.*, vol. 29, nº 9, p. 797-804, sept. 2005, doi: 10.1016/j.apm.2004.10.012.

[32] J.-G. Bauzin, M.-N. Nguyen, N. Laraqi, A. Vaca Hernández, et A. Dehmani, « Thermoelastic mechanical and heat conduction study through inverse method and transfer functions », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 135, p. 1260-1268, juin 2019, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.02.049.

[33] A. P. Fernandes, M. B. dos Santos, et G. Guimarães, « An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems », *Appl. Math. Model.*, vol. 39, nº 22, p. 6897-6914, nov. 2015, doi: 10.1016/j.apm.2015.02.012.

[34] W. Al Hadad, D. Maillet, et Y. Jannot, « Experimental transfer functions identification: Thermal impedance and transmittance in a channel heated by an upstream unsteady volumetric heat source », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 116, p. 931-939, janv. 2018, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.079.

[35] G. Roussel, « Problèmes inverses », p. 52.

[36] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. doi: 10.1137/1.9780898717921.

[37] P. Lascaux et R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Dunod, 2004.

[38] Gene. H. Golub et Charles. F. Van Loan, *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996. Consulté le: juin 30, 2020. [En ligne]. Disponible sur: https:// books.google.fr/ books?id=mlOa7wPX6OYC&hl= fr&source= gbs_book_similarbooks

[39] Å. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. doi: 10.1137/1.9781611971484.

[40] « V. K. Ivanov, “On linear problems which are not well-posed”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1962, Volume 145,Number 2,Pages <nobr>270–272</nobr> ». http:// m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=26722&option_lang=eng

[41] Denis MAILLET, Yvon JARNY, et Daniel PETIT, « Problèmes inverses en diffusion thermique - Formulation et résolution du problème des moindres carrés », janv. 2011, Consulté le: juin 16, 2017. [En ligne].Disponible sur:http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/ energies-th4/transferts-thermiques-42214210/problemes-inverses-en-diffusion-thermique be8266/

[42] M. Kern, « Problèmes inverses: aspects numériques », p. 139.

[43] Y. Jarny, « Inverse Problems - Part A: Regularized Solutions », in *Proceedings of the 5th METTI School*, Roscoff, France, juin 2011, vol. Lecture 9. [En ligne]. Disponible sur: www.sft.asso.fr/Local/sft/dir/user-3775/documents/actes/Metti5_School/Lectures&Tutorials-Texts/Text-L9A-Jarny.pdf

[44] P. C. Hansen, *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. doi: 10.1137/1.9780898718836.

[45] J. V. Beck et K. J. Arnold, *Parameter Estimation in Engineering and Science*, 1St Edition edition. New York: John Wiley & Sons Inc, 1977.

[46] D. W. Marquardt, « An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters », *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 11, nº 2, p. 431-441, juin 1963, doi: 10.1137/0111030.

[47] K. Levenberg, « A method for the solution of certain non-linear problems in least squares », *Q. Appl. Math.*, vol. 2, nº 2, p. 164-168, juill. 1944, doi: 10.1090/qam/10666.

[48] P. E. Gill et W. Murray, « Algorithms for the Solution of the Nonlinear Least-Squares Problem », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, nº 5, p. 977-992, oct. 1978, doi: 10.1137/0715063.

[49] D. S. Thomas, « Algorithme de recalage », p. 15.

[50] J. J. Moré, « The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory », in *Numerical analysis*, Springer, 1978, p. 105-116.

[51] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, et C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, 2013.

[52] L. Lukšan, « Hybrid Methods for Nonlinear Least Squares Problems », Ústav informatiky, Pod vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8, http://www.cs.cas.cz/, 2019. Consulté le: juill. 07, 2020. [En ligne]. Disponible sur: http://www.nusl.cz/ntk/nusl-395920

[53] R. Behling, D. S. Gonçalves, et S. A. Santos, « Local Convergence Analysis of the Levenberg–Marquardt Framework for Nonzero-Residue Nonlinear Least-Squares Problems Under an Error Bound Condition », *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 183, nº 3, p. 1099-1122, déc. 2019, doi: 10.1007/s10957-019-01586-9.

[54] C. Kanzow, N. Yamashita, et M. Fukushima, « Levenberg–Marquardt methods with strong local convergence properties for solving nonlinear equations with convex constraints », *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 172, nº 2, p. 375-397, déc. 2004, doi: 10.1016/j.cam.2004.02.013.

[55] M. R. Osborne, « Nonlinear least squares — the Levenberg algorithm revisited* », *ANZIAM J.*, vol. 19, nº 3, p. 343-357, juin 1976, doi: 10.1017/S033427000000120X.

[56] « 09-bfgs.pdf ». Consulté le: oct. 27, 2020. [En ligne]. Disponible sur: https://transp-or.epfl.ch/courses/optimization2011/slides/09-bfgs.pdf

[57] A. N. Tikhonov et V. I. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*. Washington; New York: Winston ; Distributed solely by Halsted Press, 1977.

[58] A. N. Tikhonov, A. Goncharsky, V. V. Stepanov, et A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Springer Science & Business Media, 2013.

[59] Denis MAILLET, Yvon JARNY, et Daniel PETIT, « Problèmes inverses en diffusion thermique - Outils spécifiques de conduction inverse et de régularisation », juill. 2011, Consulté le: juin 16, 2017. [En ligne]. Disponible sur: http:// www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/ 42214210-transferts-thermiques/download/be8267/problemes-inverses-en-diffusion-thermique.html

[60] C. Lanczos, *Linear Differential Operators*. Mansfield Centre, CT: Martino Fine Books, 2012.

[61] S. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*. New Delhi: Thomson Press, 2004.

[62] G. H. Golub, « Tikhonov Regularization for Large Scale Problems », p. 24.

[63] P. C. Hansen et D. P. O'Leary, « The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 14, nº 6, p. 1487-1503, nov. 1993, doi: 10.1137/0914086.

[64] P. C. Hansen, « REGULARIZATION TOOLS: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems », *Numer. Algorithms*, vol. 6, nº 1, p. 1-35, mars 1994, doi: 10.1007/BF02149761.

[65] P. C. Hansen, « Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve », *SIAM Rev.*, vol. 34, nº 4, p. 561-580, déc. 1992, doi: 10.1137/1034115.

[66] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation - 5ème édition*. Dunod, 2007.

[67] J. V. Beck, B. Blackwell, et C. R. S. C. Jr, *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. James Beck, 1985.

[68] J. V. Beck et D. A. Murio, « Combined function specification-regularization procedure for solution of inverse heat conduction problem », *AIAA J.*, vol. 24, nº 1, p. 180-185, 1986, doi: 10.2514/3.9240.

[69] E. P. Scott et J. V. Beck, « Analysis of Order of the Sequential Regularization Solutions of Inverse Heat Conduction Problems », *J. Heat Transf.*, vol. 111, nº 2, p. 218-224, mai 1989, doi: 10.1115/1.3250665.

[70] E. D. S. Magalhães, B. D. C. S. Anselmo, A. L. F. de Lima e Silva, et S. M. M. Lima e Silva, « Time Traveling Regularization for Inverse Heat Transfer Problems », *Energies*, vol. 11, nº 3, Art. nº 3, mars 2018, doi: 10.3390/en11030507.

[71] J.-F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemarechal, et C. A. Sagastizábal, *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*. Springer Science & Business Media, 2006.

[72] K. Kunisch et F. Rendl, « An Infeasible Active Set Method for Quadratic Problems with Simple Bounds », *SIAM J. Optim.*, vol. 14, nº 1, p. 35-52, janv. 2003, doi: 10.1137/S1052623400376135.

[73] B. Salti, « Contribution à l'étude de la stylisation thermique des contacts glissants imparfaits-Application au frottement sec entre deux solides », Paris 6, Paris, 1997.

[74] T. F. Coleman et Y. Li, « On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds », *Math. Program.*, vol. 67, nº 1, p. 189-224, oct. 1994, doi: 10.1007/BF01582221.

[75] T. F. Coleman et Y. Li, « An Interior Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds », *SIAM J. Optim.*, vol. 6, nº 2, p. 418-445, mai 1996, doi: 10.1137/0806023.

[76] Alexander, « Levenberg-Marquardt toolbox », 2015 10apr. J.-C. https:// www.mathworks.com/ matlabcentral/fileexchange/53449-levenberg-marquardt-toolbox (consulté le juin 05, 2020).

[77] J.-G. Bauzin, « Identification expérimentale des paramètres thermiques dans le contact entre deux solides en frottement sec », Doctorat, Paris Nanterre, Paris, 2003. Consulté le: sept. 17, 2017. [En ligne]. Disponible sur: http:// primo-prod.u-paris10.fr/ SCD:default_scope: SCD_ ALEPH000408433

[78] J.-G. Bauzin et N. Laraqi, « Simultaneous Estimation of Frictional Heat Flux and Two Thermal Contact Parameters for Sliding Contacts », *Numer. Heat Transf. Part Appl.*, vol. 45, nº 4, p. 313-328, mars 2004, doi: 10.1080/10407780490250355.

[79] M. De Strycker, L. Schueremans, W. Van Paepegem, et D. Debruyne, « Measuring the thermal expansion coefficient of tubular steel specimens with digital image correlation techniques », *Opt. Lasers Eng.*, vol. 48, nº 10, p. 978-986, oct. 2010, doi: 10.1016/j.optlaseng.2010.05.008.

[80] V. Martelli, G. Bianchini, et G. Ventura, « Measurement of the thermal expansion coefficient of AISI 420 stainless steel between 20 and 293K », *Cryogenics*, vol. 62, p. 94-96, juill. 2014, doi: 10.1016/j.cryogenics.2014.04.018.