Université Paris Nanterre
200 av. de la République
92001 Nanterre Cedex
www.parisnanterre.fr

Membre de l'université Paris

École Doctorale Connaissance, Langage, Modélisation (CLM) - ED 139
Laboratoire Énergétique, Mécanique & Électromagnétisme (LEME)

Walid Tarraf

Entropie d'échelle et statistiques intermittentes appliquées aux écosystèmes

Thèse présentée et soutenue publiquement le 14/01/2021

en vue de l'obtention du doctorat en Énergétique, génie des procédés de l'Université Paris Nanterre

sous la direction du Professeur M. Diogo Queiros-Conde (Université Paris Nanterre)

Jury *:

Rapporteur:	M. LANZETTA François	Professeur, Université de Franche-Comté
Rapporteur:	M. GERBAUD Vincent	Directeur de Recherches, CNRS
Membre du jury:	M. BENELMIR Riad	Professeur, Université de Lorraine
Membre du jury:	M. DGHEIM Joseph	Professeur, Université Libanaise
Membre du jury:	M. GOUPIL Christophe	Professeur, Université Paris Diderot
Membre du jury:	M. SERIO Bruno	Professeur, Université Paris Nanterre
Membre du jury:	M. SEURONT Laurent	Directeur de Recherches, CNRS

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'un long travail qui constitue le fil conducteur d'une tranche de vie souvent à l'aube de la maturité scientifique.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse.

J'exprime ici toute ma reconnaissance envers M. Diogo Queiros-Condé mon directeur de thèse pour sa supervision. Celui qui m'a fait connaitre les véritables exigences d'une observation et d'une recherche scientifique. Je profite de cette occasion pour exprimer mon admiration pour ses qualités exceptionnelles d'un chercheur sérieux, professionnel et surtout ouvert d'esprit.

J'ajoute également mon admiration pour son humanisme, sa compréhension, sa compassion avec les doctorants et son orientation continue.

Je remercie également Patrick Ribeiro pour sa disponibilité, son engagement et ses conseils importants. J'ai vraiment apprécié son élan scientifique, sa passion pour le travail et l'essai de son mieux pour améliorer le travail en fond et en forme. En encadrant cette thèse, j'ai bénéficié de la richesse de son expérience, de son savoir et de son observation précise.

Ce travail n'aurait pas été achevé sans la contribution de l'ensemble des rapporteurs François Lanzetta et Vincent Gerbaud qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail. Leurs remarques importantes m'ont permis de perfectionner mon travail sur tous les niveaux.

Je remercie également les collègues : Salim Sebai, Ahmad Saoud, Laithé Aboudou, Mirjana Milanovic, Girolamo Di cara et autres, qui m'ont soutenu par leurs interventions sur le niveau logistique, technique et scientifique afin d'élaborer un travail concis et cohérent. Les échanges avec eux ont rendu le travail fructueux et plus intéressant.

Au terme de ce parcours, je remercie enfin ma chère famille et surtout mon père : leur bénédiction m'a accompagné tout au long de ces années. La noblesse de leurs sentiments généreux et leur soutient illimité faisaient partie intégrante de mon succès lors de la réalisation de cette thèse doctorale.

À la mémoire de ma mère

À la mémoire de ma mère

SOMMAIRE

Introduction Générale 13

Chapitre I.Outils physiques pour décrire les écosystèmes 18

I.1 Introduction 19
I.2 Outils multi-échelles 20
I.2.1 Historique 20
I.2.2 Généralités sur les objets fractals 25
I.2.3 Fractal dépendant d'échelle 31
I.2.4 Les différents cas simples 37
I.3 La turbulence développée et théorie de Kolmogorov 39
I.3.1 L'intermittence dans la turbulence 44
I.4 La théorie constructale 46
I.5 L'exergie 48
I.5.1 Eco-exergie 53
I.5.2 Description du potentiel chimique et de la diffusion de la matière par la structure fractale dépendant de l'échelle et intermittente 58

Chapitre II.Modèle physique de la loi zone-espèces (SAR) 63

II.1 Biodiversité : distribution spatiale des espèces 64
II.2 Loi zone-espèces 66
II.2.1 Historique 66
II.2.2 Modèle de Plotkin 67
II.2.3 La théorie neutre de biodiversité de Hubelle (NTB) : 68
II.2.4 Interprétation de Storch de la théorie neutre de biodiversité 68
II.2.5 Modèle de Sizling et Storch 71
II.2.6 La théorie de maximisation d'entropie MaxEnt 73
II.2.7 Modèle de fractales généralisées 81
II.2.8 Approche multifractale 83

Chapitre III.Loi multi-échelle de la distribution des espèces 88

III.1 Introduction 89
III.2 L'intermittence dans la distribution spatiale des espèces 90
III.3 La dynamique des peaux entropiques 91
III.4 Recensement et procédure expérimentale 93
III.5 Sites étudiés 95
III.6 Représentation logarithmique de SAR 98

III.7 Mesure de l'exposant d'échelle 99
III.8 Les peaux entropiques appliquées sur la répartition des espèces 100
III.8.1 Dynamiques du corps et de crête des peaux entropiques 100
III.8.2 Équation analytique 101
III.9 Résultats 105
III.10 Calcul de la densité de potentiel évolutif β 106
III.11 Conclusion et discussion 106

Chapitre IV.Modèle fractal et intermittent de distribution des individus 109

IV.1 Introduction 110
IV.2 Présentation de modèle de distribution 111
IV.3 Procédure expérimentale 113
IV.3.1 Problème de topologie 114
IV.3.2 Correction de bords de grille 114
IV.3.3 Mesure 115
IV.4 L'intermittence dans la distribution cantor 2D 117
IV.5 Les peaux entropiques : dynamiques de l'intermittence 119
IV.5.1 Géométrie des peaux entropiques 119
IV.5.2 Statistique de peaux entropiques 121
IV.5.3 Autosimilarité étendue dans la géométrie du cantor 2D 124
IV.6 Dynamiques des peaux entropiques appliqué sur la distribution cantor 2D 125
IV.6.1 Analyse en échelle : calcul de facteur de réversibilité géométrique γ_{geo} 127
IV.6.2 Analyse intermittente 138
IV.7 Résultats 150
IV.7.1 Déviation par rapport à l'homogénéité 150
IV.7.2 Dynamique du corps et de crête 152
IV.7.3 Égalité de facteur de réversibilité statistique γstatet l'autre géométriqueγ_{geo} 153
IV.8 Conclusion 154

Conclusion générale & perspectives 156

Annexes 160

Références bibliographiques 165

Table des figures

Chapitre I.

Figure I.1 : la baderne d'Apollonius 21
Figure I.2 : Fonction de Weierstrass 21
Figure I.3 : représentent respectivement le flocon de neige von Koch, le triangle de Sierpinski, ensemble de cantor et ensemble de julia dérivant de l'ensemble de Mandelbrot 23
Figure I.4 : présentation logarithmique de distribution des gisements pétroliers mondiaux (exclut Canada et Union européenne) liant la taille (en millions de barrils) et le rang des gisements : la courbe subit une tendance parabolique (Laherrère, 1996) 24
Figure I.5 : distribution de la population urbaine au monde : un tracé liant les logarithmes taille-rang montre une allure parabolique (Laherrère, 1996) 24
Figure I.6 : Représentation de Hs(F) en fonction de s pour un ensemble F. La dimension d'Hausdorff est la valeur de s à laquelle Hs(F) passe de valeurs infinies à 0. Ce saut correspond à la dimension fractale de l'ensemble F. 28
Figure I.7 : spectre de singularité F(α) en fonction de α (Sheluhin and Garmashev, 2013) 30
Figure I.8 : structure multi échelle dans un espace d'échelle intégrale $l0$ recouvert par des boîtes d'échelles li (méthode de comptage de boite) 33
Figure I.9 : Schéma expliquant l'hypothèse de conservation du flux d'entropie d'échelle entre les ensembles aux échelles x et $x + dx$. 34
Figure I.10 : Au gauche, $\beta(x,t) > 0$, la dimension fractale locale diminue quand l'échelle diminue, autrement dit, le taux de remplissage de l'espace diminue lorsqu'on zoom l'objet. Une perte de potentialités évolutives a lieu. À droite, $\beta(x,t) < 0$, la dimension fractale locale augmente quand l'échelle diminue, le taux de remplissage de l'espace augmente lors de zoom de l'objet. Donc on a un gain de potentialités évolutives. 36
Figure I.11 : par définition mathématique, la dimension est le nombre des vecteurs d'un combinaison linéaire, linéairement indépendants, formant les différentes bases d'un espace vectoriel. Dans une géométrie euclidienne, les dimensions pour une droite, un plan et une espace sont respectivement égaux à 1,2 et 3. 37
Figure I.12 : Le tapis de Sierpiński est un objet fractal obtenu à partir d'un carré. Le tapis est créé par le découpage du carré en neuf carrés égaux avec une grille de 3x3 mailles, en supprimant celle du milieu, et en appliquant cette procédure répétitivement aux carrés restants (Jiang, 2015). 38
Figure I.13 : À gauche, des analyses en échelle d'une fractale parabolique dans les deux différents cas : la courbe bleue correspond à un cas de parabolique concave tel que $\beta = 0.2$ et D_f =1.3 et l'autre à un cas parabolique convexe tel que

$\beta = -0.2$et même dimension fractale. La droite est associée à un cas fractal pur. À droite, les courbes d'entropie d'échelle en fonction d'échelle pour les deux fractals paraboliques : convexe (en bleu) et concave 39
Figure I.14 : image météo de l'Europe prise le 31 aout 2020 à 13 :30 (CEST) par un satellite. Les caractéristiques turbulentes sont claires à propos du mouvement du vent et nuage (sat24, 2020). 39
Figure I.15 : Visualisation d'un jet d'écoulement turbulent (Karinate Okiy, 2015)..... 41
Figure I.16 : représentation de la turbulence en se basant sur la théorie de Kolmogorov (Queiros-Condé et al., 2015) 43
Figure I.17 : Spectre qualitatif de turbulence dans les domaines de l'inertie et de la dissipation basée sur la théorie de Kolmogorov (Frost and Moulden, 1977) .. 44
Figure I.18 : les lois de la thermodynamique qui gèrent le phénomène d'évolution et qui sont responsables à l'apparition des formes, aboutissent aux contraintes d'optimisation visant à réduire la perte d'énergie et de matière pour s'opposer à l'entropie 46
Figure I.19 : réseau constructal de Bejan de distribution de fluide dont le rapport de diamètres entre des tuyaux d'échelles adjacentes variant à travers les échelles 47
Figure I.20 : Construction du pont de fourmi : un phénomène est très semblable au parcours de l'énergie dont l'anergie présente le « pont énergétique » utilisé par l'énergie utile(exergie) pour dépasser de l'état initial vers l'état final ("Modeling Swarm Behavior," 2006) 49
Figure I.21 : Super-système contenant le système fermé et son milieu ambiant dans les deux états initiaux et finaux 50
Figure I.22 : Le contenu exérgétique du système est calculé par rapport au même écosystème à la même température et à la même pression à l'équilibre thermodynamique 54
Figure I.23 : mélange de particules de type A (triangles noirs) et de type B (étoiles) 59

Chapitre II

Figure II.1 : Les quatre composantes essentielles de la biodiversité terrestre 65
Figure II.2 : distribution homogène des espèces 69
Figure II.3 : distribution des espèces: chaque espèce ne se trouve que dans un seul endroit 69
Figure II.4 : distribution des espèces dans le cas de petites échelles 70
Figure II.5 : la curvilinéarité est plus claire lorsque la SAR et l'IAR sont près l'un de l'autre. La pente SAR locale (c.-à-d. sa dérivée dans une zone donnée) dépend de la distance log(I) – log(S), qui est égale à log(I/S) 71
Figure II.6 : la théorie géométrique des SAR imbriqués. Chaque phase du SAR est contrainte par des effets géométriques particuliers (Storch, 2016) 71

Figure II.7 : une représentation géométrique de Asat dans une zone rectangulaire Atot. (b) L'effet de l'Asat sur la SAR. 72
Figure II.8 : La relation zone-espèces prédite par la théorie METE : les valeurs prédites et observées de la pente locale de SAR en fonction de la valeur locale du rapport N/S entre l'abondance et la richesse des espèces, donc de la surface A. La ligne horizontale à la marque correspond à la loi de puissance souvent supposée de SAR avec une pente de 0,25 (Harte and Kitzes, 2015) 80
Figure II.9 : relation zone-espèces observée et prédite par MaxEnt pour deux ensembles de données sur la végétation : (a) Barro Colorado, (b) San Emilio. L'ajustement de la courbure en ligne droite s'améliore avec l'augmentation de la surface 80
Figure II.10 : Fractale généralisée en tant que fractale hiérarchique aléatoire processus.. 83
Figure II.11 : Le spectre des exposants généralisés 85

Chapitre III

Figure III.1 : richesse spatiale des arbres aux États-Unis 91
Figure III.2 : Procédure d'échantillonnage adopté. 95
Figure III.3 : les écosystèmes étudiés à travers le globe : la plupart sont tropicales exclus l'Oosting appartenant aux forêts de chêne-caryer. Les forêts varient largement en termes de diversité des espèces et d'environnement 97
Figure III.4.a : Nombre d'espèces en fonction de la surface des zones pour les parcelles étudiées (ha) de Lambir, Pasoh, HKK et Madumalai 98
Figure III.5.b : Nombre d'espèces en fonction de la surface des zones (ha) pour les parcelles de l'ile de Barro colorado, Luquilo-tropical, et Oosting 98
Figure III.6: Variation de pente z en fonction de surface de parcelles A (ha) pour tous les écosystèmes 99
Figure III.7 : comparaison entre : la répartition spatiale de la biodiversité en France métropolitaine et le phénomène de turbulence développée en présentant le champ de vorticité potentielle (rotationnel de vitesse) qui correspond 101
Figure III.8 : analyse fractale d'une répartition spatiale des espèces 102
Figure III.9 : $\ln\left(\mathrm{N_s}(\mathrm{A_i})/\mathrm{N_s}(\mathrm{A_0})\right)$en fonction de $\ln^2\left(\mathrm{A_i}/\mathrm{A_0}\right)$ 105

Chapitre IV

Figure IV.1 : Vues aériennes de végétation prise vie Google Earth pour la réserve naturelle de Mudumalai 110
Figure IV.2 : modèle de distribution du cantor 2D à travers les itérations 112
Figure IV.3 : distribution du cantor 2D dans un domaine de 4096×4096 pixels : le processus s'est répété jusqu'à la 4ème itération. 112
Figure IV.4 : la fluctuation statistique de distribution sur les mailles diagonales (nombre de mailles libellées : 1,2,3,4,5 dépend de l'échelle utilisée), pour différentes échelles du cantor θ et échelles r 112
Figure IV.5 : représentation de grille sous forme de matrice : chaque élément de matrice présente le nombre des points situés dans une maille 114
Figure IV.6 : correction du bord de grille 115
Figure IV.7 : distributions du cantor 2D pour différentes valeurs de facteur a à travers les itérations pour un facteur d'échelle $\theta = 1/3$ 116
Figure IV.8 : La distance moyenne (échelle topique) entre les particules et la taille des blocs au cours des itérations 117
Figure IV.9 : distributions du cantor 2D dans la même boite et ayant le même nombre d'itérations pour différentes échelles du cantor θ 118
Figure IV.10 : Quantification de l'extension spatiale de chaque peau obtenue par seuillage en recouvrant par des balles de diamètre r 120
Figure IV.11 : Zones croix (zone encadrée en rouge) et zones blocs (zone hachurée) dans le modèle de distribution cantor 2D de domaine 4096 × 4096 pixels. 128
Figure IV.12 : multiplication 4 fois des zones croix à travers les itérations 129
Figure IV.13 : cumulation de zones croix à travers les itérations 130
Figure IV.14 : analyse en échelle d'une distribution du cantor 2D d'un tiers $(\theta = 1/3)$ dans une boîte de taille 4096 × 4096 pixels atteint 4 itérations et variation de la dimension fractale locale en fonction de l'échelle 132
Figure IV.15 : Analyse en échelle du cantor $(\theta = 1/3)$ pour différents constants de peuplement a 135
Figure IV.16 : La dimension fractale locale en fonction d'un intervalle d'échelle 136
Figure IV.17 : Les trois phases de l'analyse en échelle de distribution du cantor en 2D .. 137
Figure IV.18 : analyse en échelle d'une distribution homogène dans une boite de taille 4096×4096. 138
Figure IV.19 : Représentations logarithmiques de fonction de structure d'ordre 1,2,3,4 et 5 en fonction de l'échelle r 139
Figure IV.20 :fonction de structure en fonction de l'échelle dans un cas du cantor $(\theta = 1/4)$. 140
Figure IV.21 :fonction de structure en fonction de l'échelle dans un cas du cantor $(\theta = 1/3)$. 140

Figure IV.22 : Représentations logarithmiques de fonction de structure d'ordre 2,3,4 et 5 en fonction de structure d'ordre 1 pour une échelle ($\ln(10/4096) < \ln(r/4096) < \ln(205/4096)$), dans le cas d'homogénéité..... 141
Figure IV.23 : Représentations logarithmiques de fonction de structure d'ordre 2,3,4 et 5 en fonction de structure d'ordre 1 pour une échelle ($\ln(10/4096) < \ln(r/4096) < \ln(205/4096)$), dans le cas d'intermittence..... 142
Figure IV.24 : Représentation logarithmique de fonction de structure et fonction de structure normalisée des ordres 5, pour un cantor un tiers ($\theta = 1/3$), en fonction d'échelle r..... 143
Figure IV.25 : Représentation logarithmique de fonctions de structure d'ordre p et fonctions de structure normalisées des différentes ordres 3, 4, 5, pour des cantors des différentes échelles..... 144
Figure IV.26 : représentation logarithmique de fonctions de structure normalisées au cas homogène, en fonction de $\ln(r/r_0)$..... 146
Figure IV.27 : exposants des échelles z_p(à droite) et rapport des exposants des échelles zpzq (à gauche)en fonction de p pour différentes échelles du cantor θ , dans une gamme d'échelle entre $\ln(r/r_0) = -6.01$ (r=10) et $\ln(r/r_0) = -2.99$ (r=205) 147
Figure IV.28 : les exposants des échelles zp (à droites) et les exposants des échelles relatives z_p/z_1(à gauche) pour différentes échelles du cantor en fonction du p dans une gamme inertielle [$\ln 10/4096$, $\ln 90/4096$]..... 148
Figure IV.29 : les exposants des échelles zp pour différentes échelles du cantor en fonction du p dans une zone inertielle variant à travers des niveaux p..... 149
Figure IV.30 :représentation logarithmique de$\alpha_{p+dp}(r)$ en fonction de$\alpha_p(r)$. 150
Figure IV.31 : rapport des exposants des échelles en fonction de niveaux des fluctuations 151
Figure IV.32 : les allures des dimensions du corps D_f et de crête D_∞ en fonction de $1/\ln\theta$ 152
Figure IV.33 : γ_{geo} et γ_{stat} en fonction du facteur d'échelle θ..... 153
Figure IV.34 : rapport $\gamma_{geo}/\gamma_{stat}$ en fonction de densité d'intermittence θ 154

Nomenclature

SAR	Loi zone-espèces (species area relationship)
MaxEnt	Maximisation d'entropie
METE	Théorie de Maximisation d'Entropie en Écologie
l_c	Échelle de coupure
l_i	Échelle d'observation
l_0	Échelle intégrale
$M_{[i,0]}$	Mesure d'une géométrie à l'échelle l_i dans une géométrie d'échelle intégrale l_0
$N_{[i,0]}$	Nombre de recouvrements à l'échelle l_i dans une géométrie d'échelle intégrale l_0
d	Dimension topologique
Δ_0	Dimension correspond à l'échelle l_0
Δ_c	Dimension correspond à l'échelle l_c
Δ_x , $\Delta_{[i,0]}$	Dimension à l'échelle l_i dans une géométrie d'échelle intégrale l_0
φ_x	Flux d'entropie spatiale sur une gamme d'échelle $[x, x + dx]$
χ	Diffusivité d'échelle
$\omega(x,t)$	Puits d'entropie d'échelle
$\beta(x,t)$	Densité de pertes ou de gains évolutif à l'échelle x et au temps t
a_i	Activité du composant i
A	Échelle d'une zone
A_i	Échelle d'observation d'une zone
z	Exposant d'échelles
z_i	Exposant local d'échelles
S_0	Nombre des espèces à l'échelle A_0
N_0	Nombre des individus à l'échelle A_0
N_s	Nombre des espèces
$N_{c,i}$	Nombre de recouvrements du corps à l'échelle de coupure A_c vu de l'échelle A_i

$N^{\infty}{}_{c,i}$	Nombre de recouvrements de crête à l'échelle de coupure A_c vu de l'échelle A_i
$N_{i,0}$	Nombre de recouvrements du corps à l'échelle A_i vu de l'échelle intégrale A_0
p_{occ}	Probabilité d'occupation
Ω_p	Structure fluctuante
Δ_p	Dimension structure fluctuante
Δ_f, Δ_1	Dimension du corps
Δ_∞	Dimension de crête
$< n_r >$	Nombre moyen de points à une échelle donnée r
$M(r)$	Nombre de mailles à l'échelle r et n_i , le nombre de points dans une maille i
$< \delta n^p{}_r >$	Taux de fluctuation moyenne par à un niveau de fluctuation p
$< \delta n_r >_*{}^p$	Taux de fluctuation moyenne par à un niveau de fluctuation p correspondant au cas homogène
$n_{b,i}$	Nombre des points par un certain bloc associé à l'itération i
l_i	Taille d'un bloc à une itération i
l_{*i}	La distance inter- particulaire moyenne à une certaine itération i
θ	Rapport de modifie interne (facteur d'échelle)
$n_{c,i}$	Nombre des points jetés dans les zones croix à l'itération i
$n_{b,i}$	Nombre des points jetés dans une des zones blocs à l'itération i
a	Facteur de peuplement.
n_{T0}	Nombre total de points dans l'itération 0, dans l'homogène.
$\delta\bar{n}_r$	Taux de fluctuation moyenne du nombre de points fluctuants à une échelle r
$\alpha_p(r)$	Fonctions de structure relative
γ	Efficacité de réversibilité.
d	Dimension Topologique
D_f	Dimension fractale du corps
D_∞	Dimension fractale de crête.
$f(r)$	Facteur de lacunarité.
z_p	Exposant d'échelle
y_p	Exposant d'échelle lacunaire

Introduction Générale

Dans un contexte de développement durable, il est primordial de comprendre et de bien estimer l'état des écosystèmes terrestres, de pouvoir mesurer leur niveau de dégradation éventuelle générée par les impacts environnementaux. Il s'agit aussi d'estimer les ressources naturelles qui nous sont accessibles et de prévoir. Le développement humain a incontestablement des effets puissants sur les milieux naturels et les écosystèmes. Il est souvent lié à une fragmentation des milieux, une parcellisation ainsi qu'à une réduction des espaces. Quelle est la conséquence de cette fragmentation sur le nombre d'espèces et le nombre d'individus présents sur une certaine surface ?

Depuis la fin du 19^{e} siècle et tout au long du 20^{e} siècle, les naturalistes ont exploré la biodiversité des écosystèmes. Un grand nombre d'études ont été réalisées sur les végétaux (plantes, arbres, champignons, fleurs…) ainsi que sur la faune (oiseaux, insectes, mammifères). Ils ont observé et compté le nombre d'espèces vivant sur un certain territoire (Arrhenius, 1921; Hubbell, 1997; Rosenzweig, 1995) . Les naturalistes ont trouvé, dans de nombreux cas et pour des échelles locales, que le nombre d'espèces N_s présentes sur une aire A semblait suivre une loi de puissance $\mathrm{N_s} = \mathrm{C}\ \mathrm{A^z}$ où z est un exposant proche de 0.25 et C un facteur multiplicatif. Cette relation entre le nombre d'espèces et l'aire porte le nom dans la littérature scientifique de « Species-Area Relationship » (SAR). Cette relation dans un contexte de développement durable est d'un intérêt quasi-stratégique puisqu'elle permet de relier la biodiversité des espèces à la surface considérée. Soit une surface A avec un nombre d'espèces $\mathrm{N_s(A)}$, si on double la surface on aurait alors $\mathrm{N_s(2A)} = 2^z \mathrm{N_s(A)}$ i.e. $\mathrm{N_s(2A)} = 1.19\ \mathrm{N_s(A)}$ en prenant $(\mathrm{z} = 0.25)$. La loi de puissance a suggéré, dans le sillage de Mandelbrot, d'appliquer la géométrie fractale à la distribution des espèces. Cependant, les nombreux relevés SAR permettent aujourd'hui d'affirmer que, si cette loi est vérifiée pour des échelles locales, elle est loin de l'être sur une gamme d'échelles plus vaste où l'exposant z peut en fait varier entre 0 et 1. Plus précisément, avec l'accumulation des données, une évolution dite triphasique semble progressivement s'imposer (Storch, 2016). Sur des échelles locales, la courbe SAR possède les caractéristiques d'une loi de puissance avec une valeur de z relativement constante puisl'exposant z diminue avec l'aire A jusqu'à atteindre une valeur proche de 0 pour des échelles intermédiaires pour se remettre à augmenter vers une valeur limite proche de 1 pour les très grandes échelles. La loi SAR est donc beaucoup plus complexe qu'une simple

loi de puissance. La géométrie fractale peut-elle alors être encore utile ? La réponse est positive si on accepte de généraliser la notion de fractale et de considérer des fractales dépendantes d'échelle décrites par l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle. Ces objets géométriques ont été introduits afin de décrire les déviations à la fractalité qui ont été observées dans de nombreux phénomènes physiques. Il apparaît aujourd'hui très clairement que la fractalité pure n'est qu'un cas ultra-particulier et ne peut représenter qu'une limite asymptotique. L'étude fine des analyses en échelles a par contre montré que l'évolution parabolique de la courbe en échelles qui correspond à une dimension fractale locale variant linéairement avec le logarithme de l'échelle est omniprésente dans les systèmes naturels (Queiros-Condé et al, 2015) ce qui confirme les travaux antérieurs de Lahérrère (1996). L'avantage du formalisme introduit via l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle est de faire apparaître la fractalité pure et la fractalité parabolique comme deux cas particuliers évidents et de permettre, grâce à la diffusivité d'échelle, une approche spatio-temporelle de la distribution des espèces.

La connaissance précise de la loi zone-espèces qui gère véritablement le phénomène de distribution spatiale des espèces et des individus nous permet de prédire la réponse de la biodiversité aux changements environnementaux à différentes échelles et d'évaluer les options politiques de conservation globale de la biodiversité. D'autre part, elle répond aussi à la notion de développement durable de gérer durablement les forêts, protéger l'utilisation durable des écosystèmes terrestres, lutter contre la désertification, et arrêter la dégradation des écosystèmes comme ressources naturelles indispensables.

L'étude de la distribution des individus et des espèces au sein d'un écosystème fait apparaître des caractéristiques évidentes d'amassement (« clustérisation ») rappelant le phénomène d'intermittence en turbulence développée. Là où il y a déjà des individus, la probabilité de trouver de nouveaux individus est beaucoup plus forte que dans le cas d'une statistique gaussienne. En d'autres termes, la répartition des individus n'est pas homogène et la densité varie fortement d'un point à l'autre et ceci de manière extrêmement intermittente et inhomogène. Cette tendance à l'agrégation autour de zones de grande densité alternant avec des zones de vide s'accompagne d'une structure multi-échelles qui peut, à première vue, faire penser à une structure fractale. Les caractéristiques multi-échelles et intermittentes de la distribution des individus et des espèces au sein des

écosystèmes nous orientent vers des outils géométriques et thermodynamiques qui décrivent ces caractéristiques dans des phénomènes comme la turbulence développée où la croissance des amas limités par la diffusion (Queiros-Conde, 1997). Il s'agit de faire émerger de nouveaux outils physiques de description et d'analyse de la distribution des espèces dans un domaine donné. Nous proposons d'utiliser la géométrie des peaux entropiques qui a permis de décrire et de comprendre le phénomène d'intermittence dans de nombreux systèmes physiques. La géométrie des peaux entropiques est basée sur l'existence de deux structures multi-échelles particulières : le corps et la crête. Le corps est le lieu des faibles fluctuations par rapport à une moyenne où un certain équilibre tandis que la crête est le lieu des fluctuations les plus élevées et hors-équilibre. La crête pour les écosystèmes est formée des zones de très fortes densités d'individus où le métabolisme serait le plus fort et le plus éloigné de la moyenne. Le modèle définit alors la surface du corps qui est l'extension spatiale de la zone des faibles fluctuations et la surface de la crête comme l'extension spatiale de la zone des hautes fluctuations. Le modèle montre que le rapport de la surface du corps sur la surface de crête pour une aire A donnée représente le nombre d'espèces pour cette aire.

Dans le chapitre (I), intitulé "Outils physiques pour la description des écosystèmes", nous présenterons des géométries et des phénomènes thermodynamiques physiques qui peuvent être des outils appropriés pour décrire et caractériser les écosystèmes aux niveaux : énergétique, géométrique et statistique. Nous traiterons la géométrie multi-échelle fractale puisque c'est une géométrie de la nature et introduirons les outils mathématiques qui permettent de décrire les déviations à la géométrie fractale généralisant ainsi sa portée. En outre, nous aborderons le phénomène de turbulence développée dans les fluides et les fluctuations spatiales qui s'y produisent, connues sous le nom de « dynamique d'intermittence ». Nous aborderons également la théorie constructale modélisant les réseaux naturels et la notion d'éco-exergie décrivant l'évolution des écosystèmes du point de vue énergétique.

Dans le chapitre (II), nous verrons plusieurs modèles physiques de la loi zone-espèces (SAR) qui étudient la répartition des espèces dans les écosystèmes par le biais de différents mécanismes et approches.

Dans le chapitre (III), nous étudierons, sur des bases de données existantes répertoriant jusqu'à une aire de 50 ha les espèces d'arbres dans des forêts tropicales, la structure de la courbe du nombre d'espèces en fonction de l'aire. Quel type de loi peut-on proposer ? Comment décrire la déviation à la loi de puissance observée ? Mais surtout comment peut-on relier cette courbe de type parabolique à une éventuelle géométrie multi-échelle sous-jacente ? Dans ce but, nous hybriderons la théorie des peaux entropiques avec l'équation de diffusion d'entropie d'échelle pour relier le nombre d'espèces à une dynamique corps-crête.

Dans le chapitre (IV), nous développerons un modèle fractal et intermittent de la distribution des individus en appliquant la dynamique de peaux entropiques et en vérifiant sa validité pour décrire la distribution des individus dans un espace. Dans cette optique, nous proposons la distribution de points sous une forme se rapprochant de la géométrie de l'ensemble fractal de Cantor à deux dimensions. Le modèle commence par distribuer des points au hasard sur un plan de manière homogène. Nous introduisons alors une différenciation en densité en définissant des zones où la densité de points sera plus élevée. Dans ces zones, les points seront distribués au hasard, mais avec une densité plus élevée que dans la première étape. Le processus de différenciation est alors reproduit. Nous associons donc distribution homogène des individus avec un mécanisme de différenciation fractale qui reproduit de nombreuses caractéristiques des phénomènes intermittents. Ce modèle pourrait simuler plusieurs phénomènes d'agrégation dans la nature. Nous montrerons alors comment, à partir d'une telle distribution d'individus réglé par un mécanisme de fractalisation et de différenciation, il est possible d'interpréter le nombre d'espèces comme étant le rapport de la surface du corps rapporté à la surface de la crête.

Chapitre I. Outils physiques pour décrire les écosystèmes

« La richesse du réel déborde chaque langage, chaque structure logique, chaque éclairage conceptuel. »

Ilya prigogine (1917 - 2003)

I.2.2 Généralités sur les objets fractals 25
I.2.2.1 Définition et propriétés 25
I.2.2.2 Mesures et dimension fractales 26
I.2.2.3 Méthode de comptage des boîtes (Box Counting) 28
I.2.2.4 Multifractal 29
I.2.3 Fractal dépendant d'échelle 31
I.2.3.1 Différentes approches dépendantes d'échelle 31
I.2.3.2 Entropie d'échelle : équation de diffusion 32
I.2.3.3 Fractal parabolique 35
I.2.4 Les différents cas simples 37
I.2.4.1 Cas de géométrie euclidienne 37
I.2.4.2 Cas de la géométrie fractale dite pure 37
I.2.4.3 Cas de la géométrie fractale parabolique 38
I.3 La turbulence développée et théorie de Kolmogorov 39
I.3.1 L'intermittence dans la turbulence 44
I.4 La théorie constructale 46
I.5 L'exergie 48
I.5.1 Eco-exergie 53
I.5.2 Description du potentiel chimique et de la diffusion de la matière par la structure fractale dépendant de l'échelle et intermittente 58

I.1 Introduction

L'écosystème peut être défini comme l'ensemble des êtres vivants qui interagissent les uns avec les autres dans un environnement spécifique d'une part et avec cet environnement d'autre part. Ces interactions des organismes assurent des adaptations globales avec leurs milieux ainsi que la continuité et l'évolution de toutes les espèces.
Dans ce cadre, les écosystèmes absorbent de la matière et de l'énergie au fur et à mesure que les organismes se développent, se reproduisent et entretiennent la vie. Ainsi, les flux d'énergie et de matière circulent dans un écosystème en plusieurs étapes à travers la chaîne alimentaire et entre les organismes.

En effet, pour qu'un élément vivant survive et garde son évolution continue dans un écosystème, il faut qu'il soit traversé par des flux de matières et d'énergie. Ceci met en évidence une surface de contact pour assurer ces procédures. Afin de garder et favoriser le phénomène d'évolution en intensifiant le transfert des flux (en terme thermodynamique « maximiser l'entropie ») une augmentation de cette surface par rapport au volume d'un élément vivant en cours d'accroissement aurait lieu.

Par exemple, le rapport d'une surface de sphère et son volume est de $3/r$ (rayon de la sphère). Ainsi, si r augmente du fait de l'accroissement, le rapport diminue. On assiste à une compétition entre volume et surface pour les échanges et consommations de flux.

Une solution à ce problème est la fragmentation des éléments à volume constant. Ainsi, on augmente la surface qui tend les fragments à se hiérarchiser.

Notons que la structuration de la hiérarchie se déroule à partir de différents processus comme la fragmentation (multiplication de bactéries par division, mutation des cellules ,etc), la ramification et la complexification (les arbres, les chaines de montagne), la structure physique des objets (d'échelle microscopique jusqu'à échelle macroscopique), le mouvement des individus et des éléments (voies de déplacement des populations ou des organismes) qui génèrent une topologie multi-échelle d'occupation d'espace et du temps, etc.

Par conséquent, lorsque l'on parle de hiérarchie, on parle de structure multi-échelle décrite par la géométrie fractale. C'est ce qui a mené Mandelbrot à considérer cette géométrie comme la géométrie de la nature (Voss 1988)

De ce fait, même le phénomène de turbulence intermittente multi-échelle dans la nature contribue au processus d'évolution en augmentant les surfaces de contact, dans le cadre de l'adaptation nécessaire dans l'espace multi-échelle d'un écosystème.

Par exemple, dans les écosystèmes marins, la turbulence augmente le taux de contact entre les prédateurs planctoniques et leurs proies. Ainsi, l'aspect intermittent de la distribution des planctons impose des adaptations comportementales aux prédateurs planctoniques, ce qui augmente aussi explicitement le taux de rencontre (Seuront, 2001; Seuront et al., 2001).

Par ailleurs, plusieurs exemples dans la nature mettent en évidence l'existence du phénomène de turbulence intermittente (distribution des nuages, précipitations, vent, etc.) et son rôle intéressant dans le processus d'évolution des écosystèmes (Mascaro et al., 2013; Warhaft, 2002).

Dans ce chapitre, nous introduisons divers outils physiques qui pourraient être appliqués à l'étude des écosystèmes.

I.2 Outils multi-échelles

I.2.1 Historique

Dans l'histoire, les mathématiciens se sont surtout intéressés aux ensembles et aux fonctions auxquels peuvent s'appliquer les méthodes de calcul classique associées à la géométrie euclidienne. Les ensembles ou les fonctions qui ne sont pas suffisamment lisses ou réguliers sont plutôt ignorés. En effet, ces objets n'étaient pas pris au sérieux comme une classe à laquelle une théorie générale pourrait être applicable. Ils étaient considérés comme des curiosités individuelles. Dans les dernières décennies, cette attitude a changé.

L'histoire mathématique des fractales a commencé successivement, sans que personne ne s'en aperçoive, d'abord, avec l'apparition de la baderne d'Apollonis qui consiste en un

cercle tangent à trois autres objets (points, lignes ou cercles) (voir Figure I.1). C'était avant qu'une seconde fractale n'apparaisse, en 1520, le pentagone Dürer (Mandelbrot, 2010).

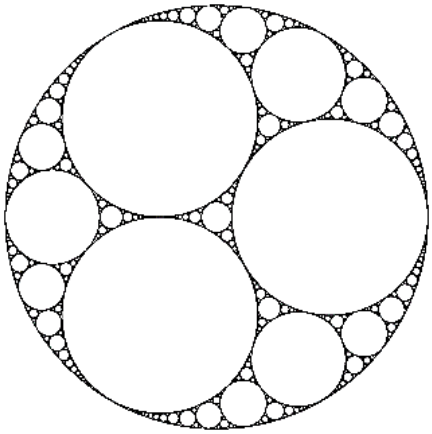


Figure I.1 : la baderne d'Apollonius

En 1700, Leibniz a défini une propriété fondamentale des géométries fractales : la notion d'autosimilarité (Hutchinson, 1981). Un siècle plus tard, en 1872, le mathématicien Karl Weierstrass introduit une fonction qui est continue partout mais nulle part dérivable (Hunt, 1998) (voir Figure I.2).

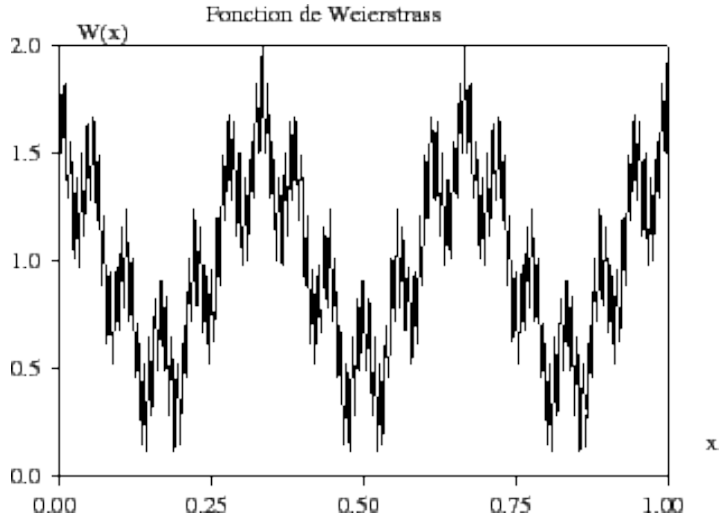


Figure I.2 : Fonction de Weierstrass W(x)= $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \ cos\ (b^n \pi x)$; pour a=0.5 et b=6

En 1904, Helge Von Koch a affiné la définition de la fonction de Weierstrass et a donné une définition plus géométrique d'une fonction similaire, qui est maintenant appelée le flocon

de Von Koch. La construction du flacon de Von Koch se résume en enlevant le tiers central d'un segment et en le remplaçant par deux autres côtés du triangle équilatéral sur la base du segment enlevé, en répétant la même procédure, à chacun des segments de structure (Koch, 1904) (voir Figure I.3.a).

En 1915, Waclaw Sierpinsky a construit des modèles autosimilaires qui s'appelaient le triangle de Sierpinsky (Bunde et Havlin, 1994) et les fonctions qui les génèrent, obtenues en retirant de façon itérative les triangles équilatéraux (inversés) à l'intérieur d'un triangle équilatéral initial, comme le montre la Figure I.3.b.

George Cantor a également donné l'exemple d'une fractale autosimilaire provenant de la suppression du tiers médian d'un intervalle unitaire donné en appliquant la même opération pour tous les intervalles restants (Cantor, 1884) (voir Figure I.3.c).

Au début du XXe siècle, Poincaré, Klein, Fatou et Julia ont poussé plus loin les fractales. Ces géométries conduisent à de nouvelles conceptions de la dimension permettant l'existence de dimensions de Hausdorff-Besicovitch non entières. En 1975, Mandelbrot a réuni ces travaux et les a qualifiés de " fractales ", venant du mot latin « fractus » qui signifie " cassé " ou " irrégulier " ou " non lisse ", afin de trouver un concept mathématique convenable pour l'appliquer à la description de phénomènes naturels comme le littoral (comme son essai connu sur la côte de Bretagne), les nuages, la ramification des plantes (Losa et al., 2002; Mandelbrot, 2010), etc. Il a défini une géométrie fractale "indépendante de l'échelle". Cette propriété, appelée autosimilarité, dont toute partie de la courbe, si elle est agrandie à une échelle arbitraire, semble identique à la courbe entière ; cela signifie que la forme de l'objet se répète à travers les échelles et les itérations.

La transition d'une échelle à une autre peut alors être représentée sous forme d'itérations d'un processus d'échelle. Cela a conduit à la création de l'ensemble connu sous le nom d'ensemble de Mandelbrot (2010) et de ceux qui en dérivent (Frame et Robertson, 1992; Michelitsch et Rössler, 1992; Rochon, 2000; Alik et Ayyıldız, 2016; Zireh, 2010) (voir Figure I.3.d).

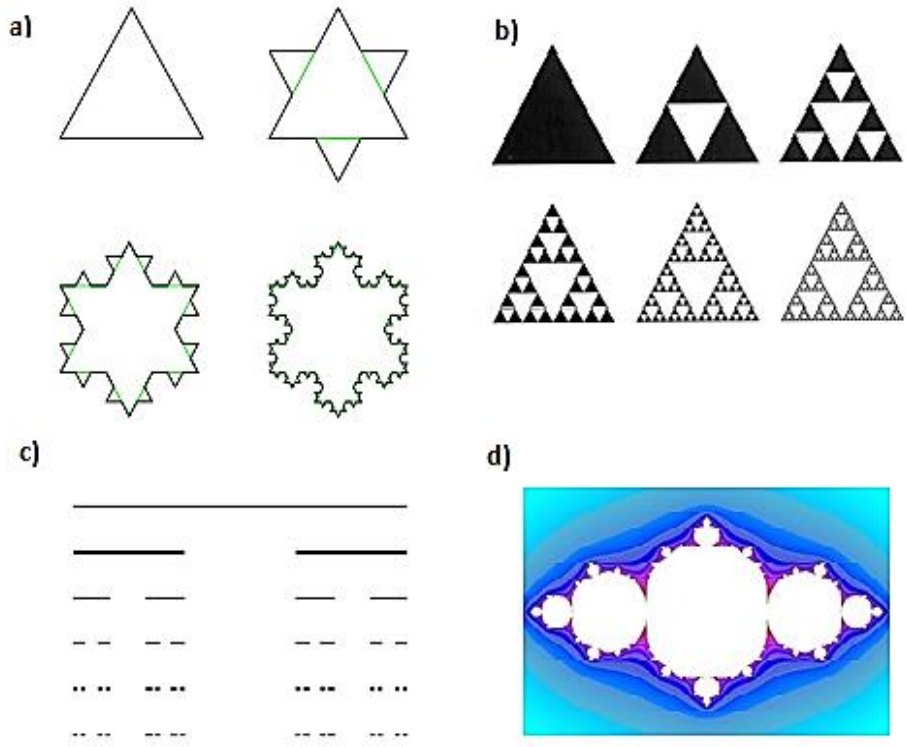


Figure I.3 : a,b, c et d représentent respectivement le flocon de neige von Koch, le triangle de Sierpinski, ensemble de cantor et ensemble de juliadérivant de l'ensemble de Mandelbrot

Plus tard, cette géométrie a commencé à être appliquée dans différents domaines du fait qu'elle soit plus réaliste et inspirée des phénomènes naturels (Lopes et Betrouni, 2009; Mandelbrot, 1997, 1982; Yang et Pitchumani, 2001).

Cependant, dans les années 1980 et 1990, à propos des résultats de ces applications, il apparaît qu'il existe des courbes d'analyse en échelle subissant des déviations significatives par rapport à la linéarité associée au fractal pur, sur une large gamme d'échelles(Nottale, 2010) (Queiros-Condé et al., 2015) , c.à.d. que les dimensions fractales varient d'une échelle à l'autre. Cette dépendance en échelle a été observée d'abord en turbulence développée par (Catrakis et Dimotakis, 1996). Ce qui souligne la localité dans l'espace de l'échelle, par conséquent, les dimensions fractales locales.

Certaines approches ont été proposées pour tenir compte de cette variation de dimension fractale à travers les échelles ainsi que pour expliquer et quantifier ces déviations dans l'espace des échelles, comme le modèle de semi-fractals dans le domaine de systèmes biologiques et les travaux de Laherrère (1996) qui avait introduit la fractale parabolique, appliquée sur de nombreuses distributions comme la population urbaine et les réserves du pétrole en fonction de la surface (voir Figure I.4 et Figure I.5). Enfin, la théorie des peaux

entropiques qui décrit d'un point de vue fractal le phénomène d'intermittence dans la turbulence développée : une approche basée sur une équation fondamentale de la diffusion dans l'espace des échelles.

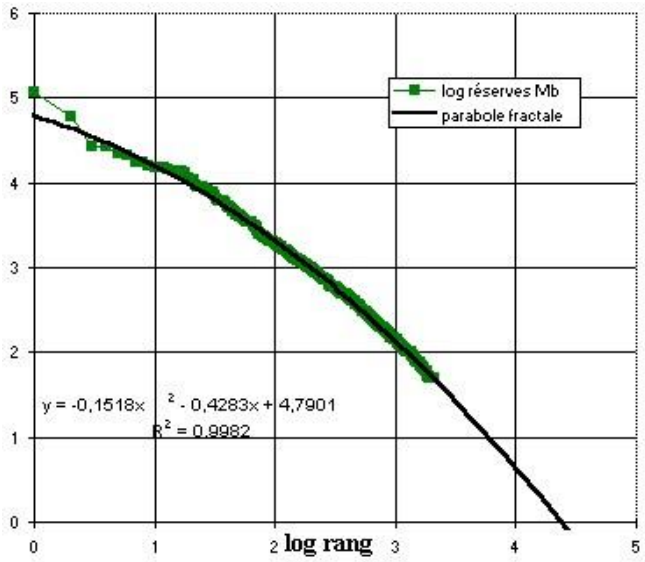


Figure I.4 : présentation logarithmique de distribution des gisements pétroliers mondiaux (exclut Canada et Union européenne) liant la taille (en millions de barrils) et le rang des gisements : la courbe subit une tendance parabolique(Laherrère, 1996)

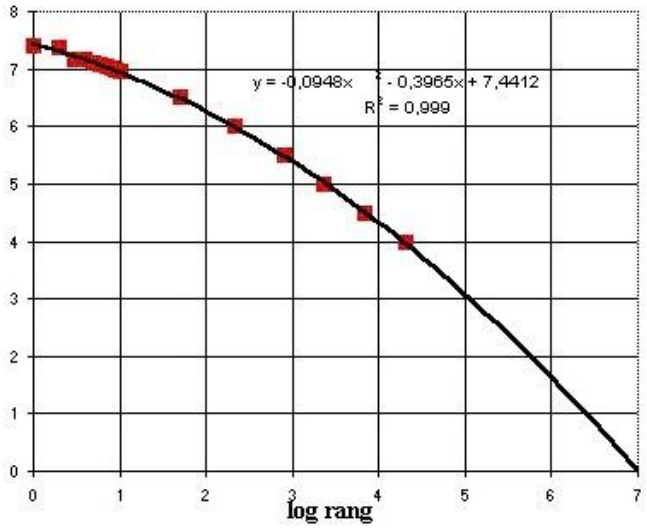


Figure I.5 : distribution de la population urbaine au monde : un tracé liant les logarithmes taille-rang montre une allure parabolique(Laherrère, 1996)

I.2.2 Généralités sur les objets fractals

I.2.2.1 Définition et propriétés

Dans son premier article de base dans lequel il introduit le terme fractal,Benoît Mandelbrot décrit une forme géométrique « rugueuse », nulle part lisse et « fragmentée et autosimilaire » subdivisible en parties, chacune d'elles étant (au moins approximativement) une copie similaire réduite de l'ensemble, mises dans une disposition itérative, ayant une dimension de Hausdorff-Besicovitch (D) supérieure à sa dimension topologique (D_T) (au sens de Lebesgue, Brouwer, Menger et Urysohn), avec (D) étant naturelle ou décimale. En conséquence, on peut définir la géométrie fractale comme outil mathématique permettant de traiter des systèmes complexes dans différents domaines, sans échelle de longueur caractéristique (Tricot, 1995,2008, Barnsley, 2000, Falconer, 2003). Elle présente le complément manquant à la géométrie euclidienne et aux symétries cristallines et quasi cristallines(Gouyet, 1996).

En effet, il n'y a pas de théorie propre qui décrirait toutes les fractales et ces définitions ne sont pas assez claires et capables de décrire précisément tous les ensembles fractals. Donc, il semble préférable de considérer un objet fractal à partir de ses propriétés mathématiques. Par conséquent, nous qualifions un ensemble comme fractal, en général, s'il a une de ces propriétés :

a. L'ensemble a une structure fine donc des détails sur des échelles arbitraires.

b. L'ensemble est trop irrégulier pour être décrit avec la géométrie euclidienne classique, à la fois localement et globalement.

c. L'ensemble a une certaine forme d'autosimilarité, qui peut être approximative ou statistique.

d. La dimension de Hausdorff de l'ensemble est supérieure à sa dimension topologique.

e. Dans la plupart des cas, l'ensemble a une définition très simple, c'est-à-dire qu'il peut être défini de manière récursive.

Plusieurs tentatives pour donner une définition mathématique pure des fractales ont été effectuées, mais toutes se sont montrées insuffisantes. Nous utiliserons donc, de façon approximative, les propriétés ci-dessus lorsque l'on parle de fractales (Falconer, 2003).

I.2.2.2 Mesures et dimensionfractales

Une caractéristique fondamentale des objets fractals est leurs propriétés métriques mesurées telles que la longueur ou la surface, en fonction de l'échelle de mesure effectuée (comme l'exemple de la longueur d'un littoral donné par (Mandelbrot, 1967).

Ainsi, pour caractériser un ensemble géométrique, fractal ou non, on utilise ce qu'on appelle une mesure.

Dans un formalisme mathématique, Lebesgue (1875-1941) a donné la définition d'une mesure dans les espaces euclidiens. Il a souligné que si un ensemble est décomposé en un nombre fini et dénombrable de parties, alors la valeur du tout est la somme des parties. La mesure d'un ensemble vide est nulle et la dimension topologique D_T d'un objet correspond au nombre de variables indépendantes nécessaires à sa description (Hunt, 1998; Mandelbrot, 2010). Ainsi, un point a une dimension 0, une courbe a une dimension 1, un plan a une dimension 2, et en général l'espace euclidien R^n a une dimension n.

D'un terme général, selon Lebesgue, on dit que μ est une mesure de R^n si μ affecte un nombre strictement positif à chaque sous-ensemble de R^n tel que :

— $\mu(\emptyset) = 0$
— $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$
— Si $A_1, A_2.., A_i$est une séquence finie d'ensemble, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Cette définition implique que, pour mesurer un certain ensemble, il faut compter tous les segments de recouvrement nécessaires pour couvrir tous les éléments de l'ensemble (comme le pavage) et faire ensuite la somme de ces segments ou de ces pavés. Ainsi, la mesure de Lebesgue généralisant la notion de longueur (sur un ensemble A) est donnée par :

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i , b_i]\right\}$$

Puisque la dimension d'Hausdorff donne une définition globale de la dimension fractale, selon la définition de Mandelbrot et qu'elle peut être utilisée comme mesure des espaces

métriques, on considère une autre mesure que celle de Lebesgue, la mesure d'Hausdorff (sur un ensemble F).

Cette mesure présente une généralisation de la mesure de Lebesgue, par suite elle s'applique à des espaces ayant des dimensions entières. Celle-ci requiert ce que l'on appelle un δ-recouvrement de l'ensemble à mesurer et un diamètre des sous-ensembles de recouvrement U_i (la plus grande distance entre deux paires de points dans U_i) :

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \; \forall \, i: 0 < |U_i| \leq \delta \; |U_i| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

On définit maintenant pour s un nombre strictement positif, tel que soit δ>0 :

$$\mathcal{H}_{\delta}^{s}(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta - \text{recouvrement de } F\right\}$$

Enfin, pour $\delta \to 0$, l'infimum$\mathcal{H}_{\delta}^{s}(F)$ augmente et approche une limite. Cette limite existe pour tout sous-ensemble de R^n, à travers les valeurs-limites pouvant être 0 ou ∞. On appelle $\mathcal{H}^s(F)$ la mesure s-dimensionnelle d'Hausdorff de F(Falconer, 2003).

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_{\delta}^{s}(F)$$

Alors pour tous ensemble F et δ< 1, $\mathcal{H}^s(F)$ n'augmente pas avec s en passant à la limite δ→0, donc $\mathcal{H}^s(F)$n'augmente pas. Si t>s et $\{U_i\}$ est un δ-recouvrement de F, on a :

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \underset{\text{infima}}{\Longrightarrow} \mathcal{H}_{\delta}^{t}(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^{s}(F)$$

Si $\mathcal{H}^s(F)<\infty$, $\mathcal{H}^s(F)= 0$, pour t >s. Il existe une valeur critique pour laquelle $\mathcal{H}^s(F)$passe de ∞ à 0, que l'on appellera la dimension d'Hausdorff (voir Figure I.6) :

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \inf\{s: \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s: \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

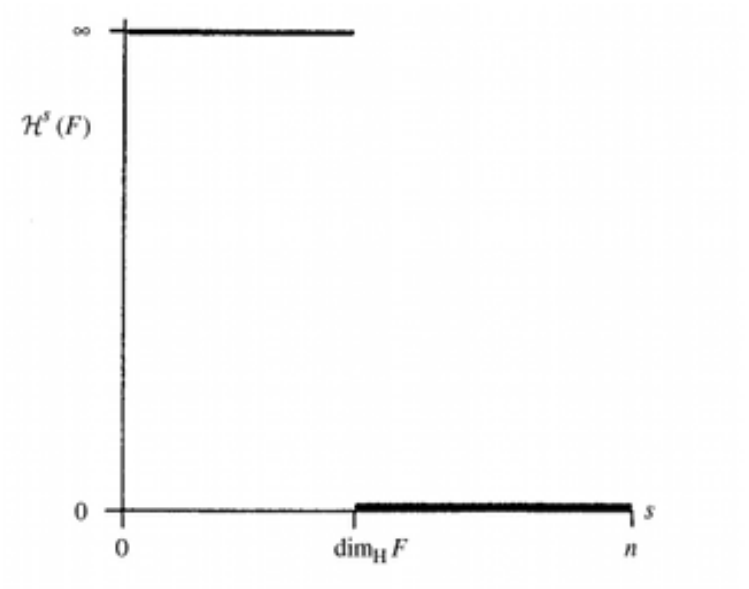


Figure I.6 : Représentation de $H^s(F)$ en fonction de s pour un ensemble F. La dimension d'Hausdorff est la valeur de s à laquelle $H^s(F)$ passe de valeurs infinies à 0. Ce saut correspond à la dimension fractale de l'ensemble F.

Dans le cas fractal le plus simple qu'on appelle fractal pur, la dimension d'Hausdorff est constante. Donc, elle correspond à une géométrie autosimilaire (invariance d'échelle). Cependant, diverses théories (Angel, 2014; Balankin, 1990; Barenblatt, 2014, 1996; Dyskin, 2007; El Naschie, 2009; Pocheau et Queiros-Condé, 1996) soulignent une déviation au comportement linéaire de la dimension, ce qui met en évidence l'idée de « fractale dépendant d'échelle ».

I.2.2.3 Méthode de comptage des boîtes (Box Counting)

D'autres méthodes plus simples, adaptées, permettent également d'étudier la fractalité des phénomènes. Nous utilisons dans notre travail, une méthode plus connue et pratique, ce qu'on appelle « la dimension de boîte » ou « la dimension de comptage de boîte ».

Cette méthode a été définie par Russel et al (1980). Elle est analogue à la méthode de mesure du périmètre que Mandelbrot (1975) a utilisée pour les mesures des côtes de Bretagne.

En se basant sur la notion de dimensions d'Hausdorff, soit $N_\delta(F)$ le plus petit nombre d'ensembles des diamètres au plus δ, recouvrant l'ensemble F (sous-ensemble non vide de R^n), on définit la dimension de boîte inférieure et supérieure comme :

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Lorsque celles-ci sont égales, on a :

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

D'une manière plus simple, on couvre l'objet avec une grille, puis on compte le nombre de cases nécessaires pour couvrir complètement cet objet. Ensuite, nous faisons la même chose, mais en variant la taille de case élémentaire de grille, d'une autre manière, l'échelle r. Il vient simplement :

$$\dim = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

De plus, comme la réitération pour différentes tailles de r peut produire différentes tailles de N(r), la grille devrait être déplacée au hasard à chaque itération (Appleby, 1996). Récemment, Pruess (2007) a prouvé que le calcul de la dimension fractale est sensible à la taille des boîtes.

I.2.2.4 Multifractal

La théorie multifractale peut être considérée comme une extension de fractale . C'est une des théories qui a été introduite pour interpréter, de façon plus générale, les déviations au fractal pur (Benzi et Biferale, 2009; Frisch et Vergassola, 1991). L'analyse multifractale est d'abord apparue avec des modèles multiplicatifs en cascade de Mandelbrot, dès l'année 1960, pour l'étude de la dissipation d'énergie dans le phénomène de la turbulence développée (Mandelbrot,1967), notamment dans le contexte de ce qu'il appelle la dimension fractale ponctuelle. Il interprète la présence de fractalités à l'intérieur même d'une fractale et décrit le comportement local singulier de mesures ou de fonctions d'une manière géométrique et statistique.

L'approche multifractale suppose qu'il existe des lois d'échelles locales caractérisant les singularités du champ du taux de dissipation d'énergie : $\varepsilon_r \sim r^{\alpha-1}$pour une échelle r. Les points du champ où la singularité d'exposant ponctuelle α (c.à.d. avec le même exposant

α) sont regroupés en ensembles supports $S(\alpha)$de dimension fractale $F(\alpha)$.Le support de $S(\alpha)$ est donc l'ensemble des points d'un champ qui suivent localement une loi de puissance telle que $\varepsilon_r \sim r^{\alpha-1}$. L'exposant α-1 est une quantité ponctuelle et locale alors que $F(\alpha)$ est une quantité globale.

En général, la mesure directe des exposants locauxα est irréalisable. Donc, il est utile de relier cette quantité à des quantités mesurables telles qu'aux exposants d'intermittence des fonctions de structure. La transformée de Legendre permet de relier les exposants globaux d'intermittence dissipative τ_q et les exposants locaux α. En effet, la dimension fractale F(α) est obtenue par : $F(\alpha) = \min\left(q\,(\alpha-1) + d - \tau_q\right)$ où d est la dimension de l'espace topologique. Par suite la dimension fractale ponctuelle D_q sera liée aux exposants d'intermittence des fonctions de structure telle que :

$$\tau_q = (1-q)\,D_q$$

Le paramètre q sert à distinguer différentes régions de la mesure unique:

1. Pour$q = 1$, D_1 est la dimension d'information
2. Pour$q = 2$, D_2est la dimension de corrélation
3. Pour $q = \pm\infty$, on a une pente infinie $\alpha_{min} = D_{+\infty}$, et $\alpha_{min} = D_{-\infty}$

Pour un objet multifractal, F(α) est une fonction convexe dont le maximum (pour q=0), correspond à la dimension de Hausdorff D_h et les dimensions D_q des fonctions décroissantes de q (voir Figure I.7).

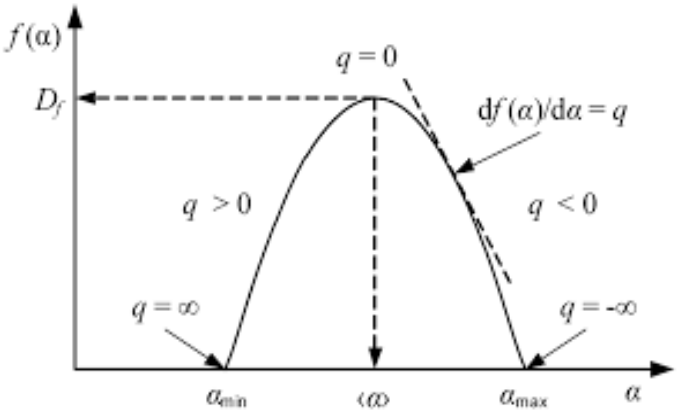


Figure I.7 : spectre de singularité F(α) en fonction de α(Sheluhin and Garmashev, 2013)

Cependant, une structure multifractale peut être considérée comme une superposition de structures mono fractales homogènes (Lopes and Betrouni, 2009).

Les multifractals sont utilisées dans diverses applications des sciences comme l'analyse de séismes (Hirata et Imoto, 1991), les écosystèmes et les vivants (Meakin, 2011), la recherche des modèles DLA (Mandelbrot and Evertsz, 1991), la modélisation du trafic Internet (Riedi and Véhel, 1997) et le traitement du signal (Véhel and Mignot, 1994).

I.2.3 Fractal dépendant d'échelle

I.2.3.1 Différentes approches dépendantes d'échelle

Comme indiqué précédemment, une dépendance à l'échelle a été remarquée à propos de plusieurs études qui soulignent des déviations significatives des courbes d'analyse en échelles par rapport à la linéarité. Ceci a montré le besoin d'une généralisation de la géométrie fractale afin de décrire un comportement dépendant d'échelle et qui pourrait être utilisée pour caractériser divers phénomènes ayant des complexités géométriques dépendantes d'échelle

La dépendance en échelle est apparue, d'abord par l'introduction du concept de bi-fractal où un phénomène est caractérisé par deux dimensions(Thomas et al., 1999; Wan et al., 2014; Wu, 2000).

Puis, elle a été appliquée par Li (2014) dans le domaine de l'écologie, qu' en turbulence par Catrakis et Dimotakis (1996). D'autres approches de dépendance en échelle ont été proposées ailleurs, comme le modèle log-périodique des phénomènes (Sornette, 1998; Stauffer et Sornette, 1998), le concept de semi-fractalité (Rigaut et al., 1985) et la géométrie fractale parabolique de Laherrère (1996) appliquée aux distributions populaires urbaines.

Cependant, Queiros–Conde (2003) a défini une quantité physique représentant l'occupation de l'espace à une échelle donnée appelée l'entropie d'échelle, à travers laquelle il a caractérisé la dynamique fractale dépendante d'échelle par une équation de diffusion.

I.2.3.2 Entropie d'échelle : équation de diffusion

La déviation à la fractalité pure met en évidence qu'une dimension unique n'est plus suffisante pour caractériser un phénomène fractal. Ceci a mené à la notion de dimensions variant à travers les échelles.

En effet, Queiros–Conde (2003) a introduit la notion d'entropie d'échelle, une quantité physique représentant l'occupation de l'espace à une échelle donnée, sans imposer les contraintes d'invariance d'échelle. L'entropie d'échelle est définie comme le logarithme du nombre minimal d'éléments nécessaires pour recouvrir l'objet étudié, (dénommé plus tard spation), telle que :

$$S_{[i,0]} = \log(w_{[i,0]}) \tag{I.1}$$

La quantité $w_{[i,0]}$ pourrait être définie comme le ratio d'une mesure à une échelle maximale $M_{[0,0]}$, sur une mesure à l'échelle d'observation du phénomène $M_{[i,0]}$.

Citons que l'observation de phénomène s'effectue sur une gamme d'échelles bornée par une petite échelle de coupure l_c et l'échelle intégrale l_0. Alors, on définit l'échelle logarithmique x, comme le logarithme du rapport des échelles $\frac{l_i}{l_0}$: $x = \ln\left(\frac{l_i}{l_0}\right) / \; l_c < l_i < l_0$.

Dans notre travail, nous utilisons la méthode de comptage de boîte pour effectuer l'analyse en échelle (voir Figure I.8), alors si $N_{[i,0]}$ est le nombre minimum de balles de taille $l_i$nécessaires pour couvrir l'objet, alors, $M_{[i,0]} = N_{[i,0]} {l_i}^d$ et $N_{[0,0]} = 1$ avec d : dimension euclidienne.

En effet, la relation intrinsèque entre l'entropie d'échelle et le nombre de recouvrements nécessaires, dans un espace logarithmique est :

$$S(x) = \ln\left(\frac{M_{[0,0]}}{M_{[i,0]}}\right) = -\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\left(\frac{l_i}{l_0}\right)^d\right) = -\ln\left(N_{[i,0]}\right) - dx \tag{I.2}$$

Comme $N_{[i,0]} = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)^{-\Delta_x} / \; \Delta_x \equiv \Delta_{[i,0]}$: une dimension fractale locale d'échelle, on trouve enfin :

$$S(x) = (\Delta_x - d)\, x \tag{I.3}$$

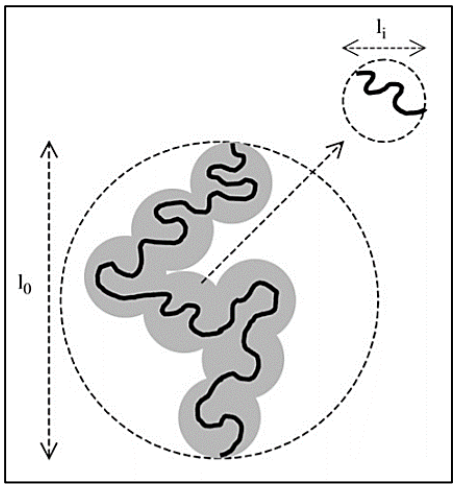


Figure I.8 : structure multi échelle dans un espace d'échelle intégrale l_0 recouvert par des boîtes d'échelles li (méthode de comptage de boite)

L'entropie d'échelle permet de caractériser la dispersion d'un phénomène spatial multi-échelle en fonction de l'échelle et présente un certain potentiel évolutif. C'est-à-dire que si le phénomène occupe largement l'espace, l'entropie d'échelle diminue, ce qui implique que ce phénomène est forcément désorganisé, et donc il y ait moins de possibilité de remplir l'espace. Au contraire, si le phénomène est bien localisé, son entropie d'échelle est importante, par la suite le phénomène est faiblement désorganisé et donc la possibilité de remplir l'espace augmente.

Afin de quantifier l'évolution de la répartition du phénomène à travers les échelles, Queiros–Conde (2003)a introduit un flux d'entropie spatiale φ_x sur une gamme d'échelle $[x, x + dx]$, étant une dérivée partielle de l'entropie d'échelle tel que :

$$\varphi_x = \frac{dS}{dx} = \Delta_x - d$$

En effet, dans cette gamme d'échelle, le système est caractérisé par une dimension fractale locale d'échelle Δ_x , définissant sa fractalité locale. Ceci répond à la notion de fractalité dépendant d'échelle.

On suppose que Δ_x varie entre Δ_∞(ou Δ_c) et Δ_0 (avec $\Delta_\infty < \Delta_0$), qui sont des dimensions correspondantes, respectivement, aux échelles l_c et l_0.

Dans l'espace des échelles, $S(x)$ est donc une quantité globale et φ_x une quantité locale.

Dans le cas général, la dimension fractale locale évolue dans l'espace des échelles, le flux évolutif d'échelle n'est pas une constante et l'évolutivité d'échelle $\omega(x)$ n'est pas nulle.

Par conséquent, nous supposons qu'il y ait une production ou une perte d'entropie d'échelle notée $\omega(x)dx$ comme $\varphi_{x+dx} - \varphi_x = \omega(x)dx$, (voir Figure I.9). Cela conduit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} - \omega(x,t) = 0 \qquad (I.4)$$

Queiros–Condé a essayé de modéliser le phénomène de cascade d'énergie dans une turbulence développée, supposée fractale, via la notion de l'entropie d'échelle. Il a proposé une équation de diffusion dans l'espace des échelles, en généralisant l'équation par analogie intéressante avec une équation de conduction, en fonction du temps, lorsque la dimension fractale $\Delta_{x,t}$, dû à des fluctuations non stationnaires dépendent du temps, et en introduisant le concept de puits d'entropie d'échelle $\omega(x,t)$ et de diffusivité d'échelle (χ) :

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} - \omega(x,t) = \frac{1}{\chi}\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} \qquad (I.5)$$

L'équation de diffusion d'entropie d'échelle décrit un phénomène fractal, on l'appelle fractal soit dissipatif soit cumulatif, ceci dépend du signe du puits d'entropie d'échelle $\omega(x,t)$.

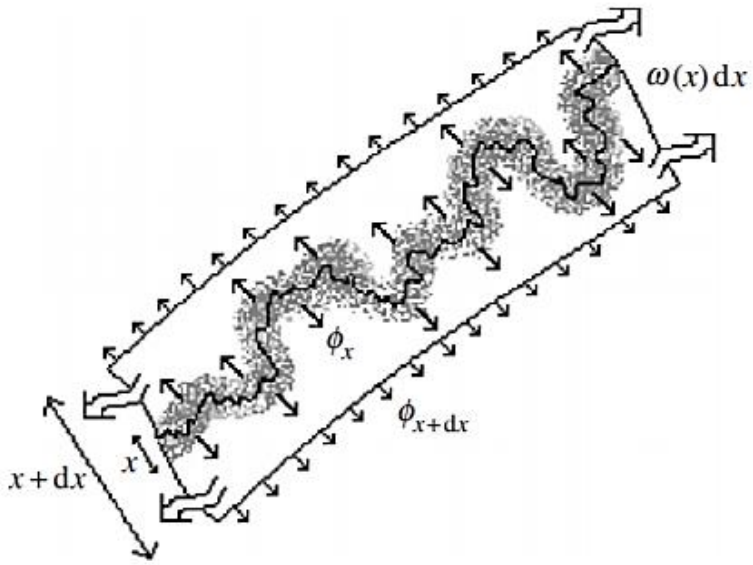


Figure I.9 : Schéma expliquant l'hypothèse de conservation du flux d'entropie d'échelle entre les ensembles aux échelles x et $x + dx$.

I.2.3.3 Fractal parabolique

Une autre généralisation des interprétations fractales a été présentée par Laherrère (1996)et étendue en géographie. Il l'a appelée la fractale parabolique.
Dans ses études sur les populations urbaines des États-Unis en 1990, Laherrère (1996) a prouvé qu'une loi de puissance linéaire, donne des résultats exagérés d'extrapolation du nombre de population, tandis que, l'extrapolation d'un ajustement parabolique donne des résultats plus proches de la réalité démographique de ce pays (Dauphiné, 2011). Il a donc perçu la nécessité de s'orienter vers un ajustement qui n'est pas linéaire, mais polynomial parabolique.

De plus, J. Laherrère a utilisé ce type d'analyse de fractalité pour caractériser les réserves pétrolières du Nigeria et il a montré, plus tard, que cette méthode parabolique s'applique à la plupart des gisements mondiaux de pétrole (Laherrère, 1998). Une interprétation identique a été effectuée aux incendies de forêts par Mangiavillano (2008).
Théoriquement, il existe en effet deux cas particuliers à propos de l'approche de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle à travers les échelles, invariante au cours du temps: (i) le cas fractal pur pour un régime stationnaire et sans terme puits ou source associée au potentiel évolutif($\omega(x) = 0$), (ii) le cas du fractal parabolique pour un régime stationnaire avec le terme puits ou source constante à travers les échelles, associé au potentiel évolutif réparti de manière uniforme dans l'espace d'échelles (Queiros–Conde, 2003) . Par conséquent, le comportement du fractal parabolique est un cas particulier de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle.

Retournons à l'équation générale de diffusion d'entropie d'échelle, le terme $\omega(x,t)$ est égal à $\beta(x,t)$ qui désigne la densité de pertes ou de gains évolutif à l'échelle x et au temps t, donc, si $\beta(x,t) > 0$ on aurait une perte et si $\beta(x,t) < 0$ un gain.

Dans le cas du fractale parabolique stationnaire, l'évolutivité d'échelle est constante $\omega(x) = \beta$. Le puits de flux d'entropie d'échelle sur dx est donc $\beta\, dx$. Ceci implique que $\frac{d\varphi_x}{dx} - \beta = 0$ de même $\frac{d\Delta_x}{dx} - \beta = 0$, et donc :

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} - \beta = 0 \qquad \text{(I.6)}$$

En effet, le terme β désigne une valeur cruciale pour la fractalité parabolique. Dans le cas de β positive, la dimension fractale locale $\Delta_x$diminue quand l'échelle diminue, ceci correspond à une analyse en échelle convexe. Ce cas désigne la plupart des systèmes physiques.

Cependant, dans le cas de β négative la dimension fractale locale Δ_x augmente lorsque l'échelle diminue, ce qui correspond à une analyse en échelle concave, il révèle plus des détails géométriques à petites échelles. Pour cela, on appelle, respectivement, les deux cas fractals : fractal parabolique convexe ou concave. Comme le montre la Figure I.10.

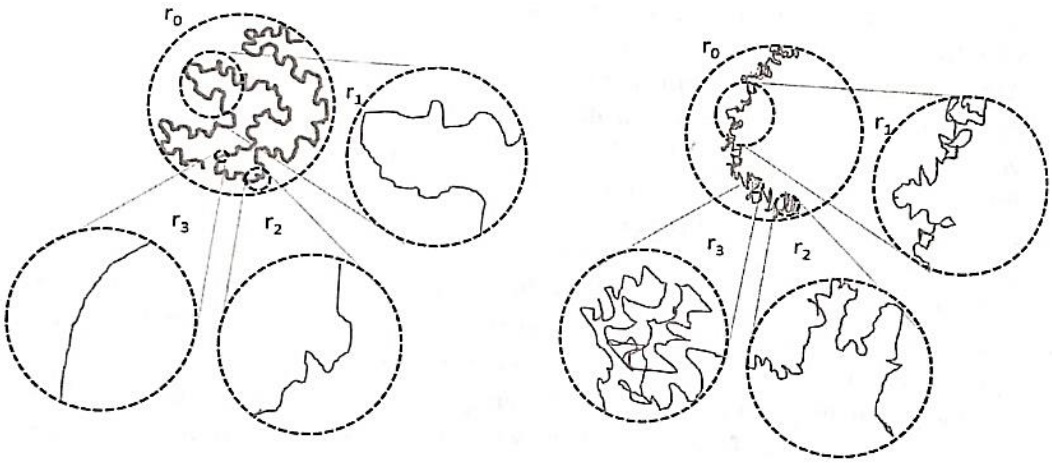


Figure I.10 : Au gauche, $\beta(x,t) > 0$, la dimension fractale locale diminue quand l'échelle diminue, autrement dit, le taux de remplissage de l'espace diminue lorsqu'on zoom sur l'objet. Une perte de potentialités évolutives a lieu. À droite, $\beta(x,t) < 0$, la dimension fractale locale augmente quand l'échelle diminue, le taux de remplissage de l'espace augmente lors du zoom sur l'objet. Donc, on a un gain de potentialités évolutives.

Puisque$\Delta_x \rightarrow \Delta_0$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $\Delta_x \rightarrow \Delta_c$ pour $x \rightarrow x_c = \ln\left(\frac{l_c}{l_0}\right)$, on obtient :

$$\Delta_x = \Delta_0 + \beta x \text{ avec } \beta = \frac{\Delta_0 - \Delta_\infty}{\ln\left(\frac{l_0}{l_c}\right)}$$

Rappelons que$\Delta_0$est la dimension fractale locale à l'échelle intégrale l_0 et Δ_∞ la dimension fractale locale à l'échelle de coupure l_c.

Intégrons l'équation (I.4) en utilisant les conditions limites définies par :

(i) $\varphi_{x=0} = \Delta_0 - d$

(ii) $\varphi_{x=x_c} = \Delta_\infty - d$

(iii) $S_{x=0} = 0$

On obtient alors la solution de l'équation (I.6) caractérisant l'entropie d'échelle :

$$S(x) = \frac{\beta}{2}x^2 + (\Delta_0 - d)x$$

L'entropie d'échelle à travers les échelles montre une allure parabolique.

En tenant compte de l'équation(I.2), on obtient le nombre de recouvrements :

$$\ln\left(N_{[i,0]}\right) = -\frac{\beta}{2}x^2 - \Delta_0\, x \qquad (I.7)$$

I.2.4 Les différents cas simples

I.2.4.1 Cas de géométrie euclidienne

Dans le cas de la géométrie euclidienne, la dimension est invariante à travers les échelles et est égale à la dimension topologique même $\Delta_0 = \Delta = d$ (voir Figure I.11). L'existence d'un puits d'entropie d'échelle dans ce cas est nulle $(\beta(x,t) = 0)$. Ceci nous mène à une solution d'équation de diffusion telle que :

$$S(x) = 0\ ,\ N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^d$$

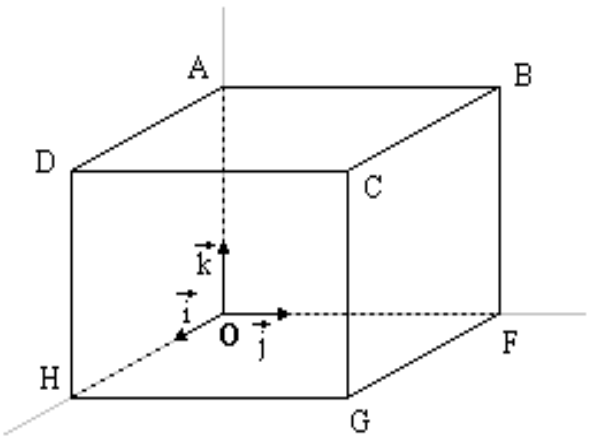


Figure I.11 : par définition mathématique, la dimension est le nombre des vecteurs d'une combinaison linéaire*,* linéairement indépendants*, formant les différentes bases d'un espace vectoriel. Dans une géométrie euclidienne, les dimensions pour une droite, un plan et une espace sont respectivement égaux à 1,2 et 3.*

I.2.4.2 Cas de la géométrie fractale dite pure

La fractale pure présente le cas le plus simple du fractal dont sa dimension fractale est non entière, constante à travers les échelles et strictement supérieure à la dimension

topologique. D'autre part, comme dans le cas euclidien classique, le puits d'entropie d'échelle est nul. En effet, on a :

$$S(x) = (\Delta_x - d)x \; ; \quad N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\Delta_x}$$

Le tapis de Sierpiński est une des géométries fractales pures les plus connues (voir Figure I.12) ayant une dimension fractale égale à $\frac{\log(8)}{\log(3)} = 1.892$

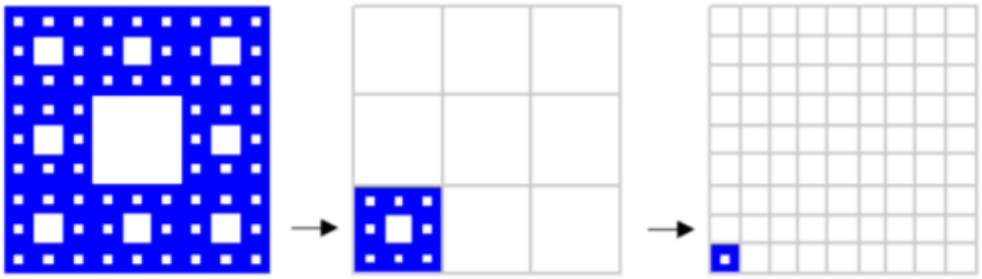


Figure I.12 : Le tapis de Sierpiński est un objet fractal obtenu à partir d'un carré. Le tapis est créé par le découpage du carré en neuf carrés égaux avec une grille de 3x3 mailles,en supprimant celle du milieu, et en appliquant cette procédure répétitivement aux carrés restants(Jiang, 2015).

I.2.4.3 Cas de la géométrie fractale parabolique

La fractale parabolique correspond à une géométrie munie d'un puits constant réparti uniformément dans l'espace des échelles $(\beta(x,t) \neq 0)$. L'existence du puits d'entropie d'échelle serait la cause d'une variation linéaire de dimension fractale Δ_x à travers les échelles, comme le montre l'équation(I.6). Les différentes dimensions fractales locales Δ_0, Δ_x et Δ_c sont inférieures à la dimension topologique d. La Figure I.13 montre l'analyse en échelle et l'entropie d'échelle d'un phénomène fractal parabolique pour différents cas.

Nous avons vu que l'entropie d'échelle augmente lorsque l'échelle diminue quand $\beta > 0$. Cependant, quand $\beta < 0$, l'entropie d'échelle diminue lorsque l'échelle diminue. Pour cela, par analogie à l'équation de mouvement uniformément accéléré, on appelle le comportement fractal parabolique : fractale parabolique accélérée lorsque $\beta > 0$ et fractale parabolique décélérée lorsque $\beta < 0$

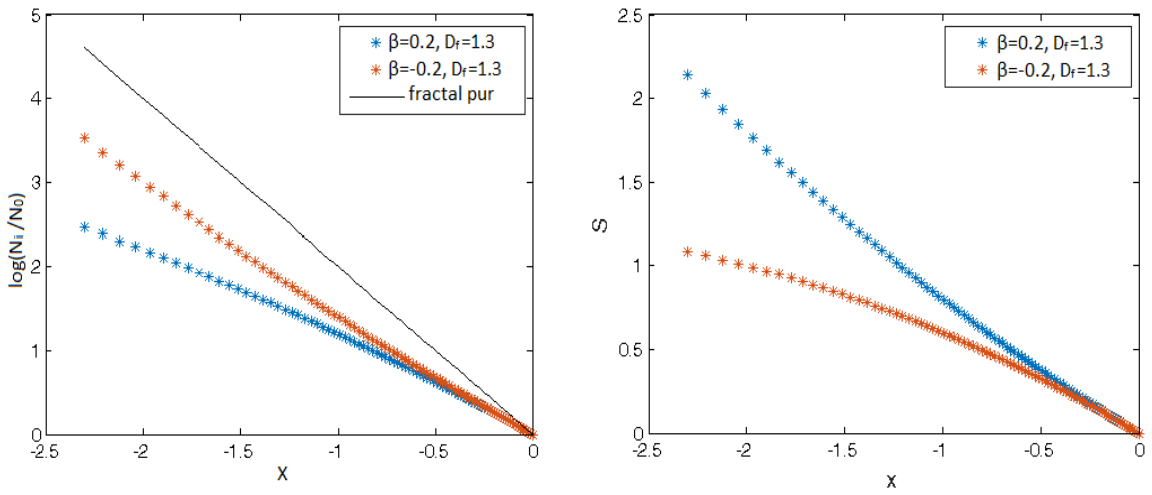


Figure I.13 : À gauche, des analyses en échelle d'une fractale parabolique dans les deux différents cas : la courbe bleue correspond à un cas parabolique concave tel que $\beta = 0.2$ et D_f=1.3 et l'autre à un cas parabolique convexe tel que $\beta = -0.2$ et même dimension fractale.La droite est associée à un cas fractal pur. À droite, les courbes d'entropie d'échelle en fonction d'échelle pour les deux fractals paraboliques : convexe (en bleu) et concave

I.3 La turbulence développée et théorie de Kolmogorov

La turbulence existe dans la majorité des phénomènes naturels, comme la formation des nuages, le mouvement du vent, la combustion (Bisetti et al., 2012; Grabowski et Wang, 2013; Pocheau et Queiros-Condé, 1996) etc. (voir Figure I.14).

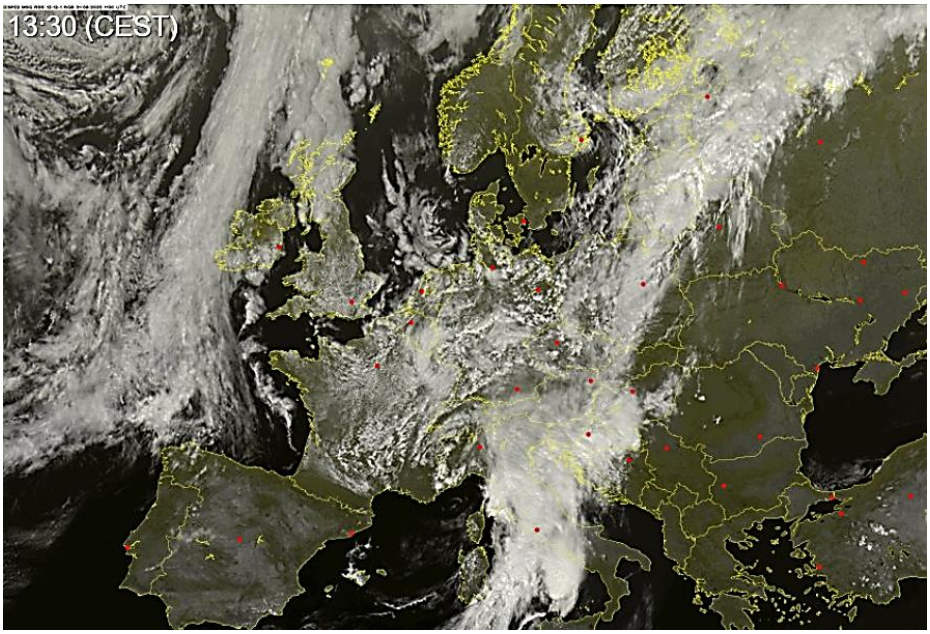


Figure I.14 : image météo de l'Europe le 31 aout 2020 à 13 :30 (CEST) par un prise satellite. Les caractéristiques turbulentes sont claires à propos du mouvement du vent et des nuages (sat24, 2020).

Le mouvement irrégulier des particules de fluide provoqué par des gradients de pression et des conditions initiales fluctuantes présente une des caractéristiques fondamentales dans un écoulement turbulent au niveau du déplacement et du mélange. En effet, nous pouvons le décrire comme un phénomène chaotique et irrégulier, montrant une coexistence des structures et du hasard (Harte, 2001)

Celle-ci met en évidence une sorte de dualité d'être à la fois génératrice de désordre et créatrice de structures ; une certaine confusion se produit quelque part entre pur déterminisme et hasard absolu (Queiros-Condé et al., 2015).

Cette dualité rend la nature de l'écoulement turbulent imprévisible. Les mouvements du fluide dans une turbulence développée sont parfois calmes et parfois extrêmement troublés. D'autant plus qu'ils ne sont pas périodiques et ne suivent aucune règle d'occurrence. Donc, une inhomogénéité spatiale et temporelle est claire.

Ce qui fait de la turbulence le problème non résolu le plus important de la physique classique comme le dit le physicien connu Richard P. Feynman (1918–1988). Les écoulements turbulents sont caractérisés par d'importants mouvements tourbillonnaires. Ils se manifestent généralement par une vaste variation en échelle de temps et d'espace.

De même, la turbulence peut être représentée comme une superposition de tourbillons (voir Figure I.15). Aux grandes échelles, les mouvements sont fortement influencés par la géométrie d'écoulement, ainsi que par des conditions limites contrôlant le déplacement et le mélange dans l'écoulement (David, 2016; Frost et Moulden, 1977) .

En revanche, aux petites échelles, ils peuvent être déterminés presque entièrement par la vitesse à laquelle ils reçoivent l'énergie des grandes échelles, bien qu'ils soient également influencés par la viscosité du fluide (Frost et Moulden, 1977).

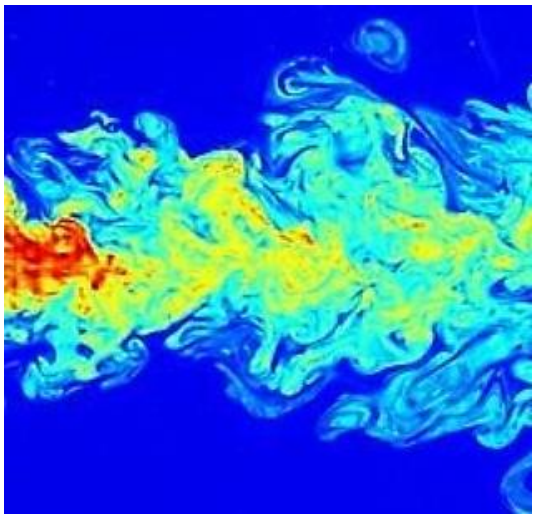


Figure I.15 : Visualisation d'un jet d'écoulement turbulent (KarinateOkiy, 2015)

Il est clair que les diverses échelles ne peuvent être indépendantes les unes des autres et qu'une dynamique d'ensemble les relie. En effet, on peut voir la turbulence comme une cascade dynamique d'échelles dont la turbulence présente une structure multi-échelle. Cette structure est évidemment modélisable par la géométrie fractale. Ainsi, les dimensions fractales sont connectées les unes aux autres

D'autre part, les écoulements turbulents sont instables et subissent des fluctuations aléatoires sur une large gamme d'échelles de temps ainsi que d'espace (Hinze et Drake, 1959; Kraichnan, 1970). Ceci montre que l'approche déterministe des problèmes de turbulence n'est pas rigoureuse, et qu'il est plus favorable d'utiliser les statistiques pour les modéliser.

Les différents niveaux de fluctuations ne sont pas indépendants les uns des autres, en revanche ils sont mis en corrélation entre eux grâce à une certaine dynamique. Ce phénomène est dénommé « intermittence » (Queiros-Conde et al.,1999,,2006, 2015a).

L'aspect chaotique et irrégulier de la turbulence a permis de chercher à analyser divers phénomènes naturels par analogie à la turbulence développée, comme dans les domaines de l'écologie (Borda-de-Água et al., 2012; Seuront, 2015) et de l'urbanisme (Helbing et al., 2007) et d'utiliser parfois le même raisonnement statistique.

En effet, une théorie fondée par Andreï Kolmogorov, en 1941 présente une des pierres angulaires de l'analyse du phénomène de turbulence développée, avec un très grand nombre de Reynolds. Cette théorie s'appuie sur les travaux de (Richardson, 1922), dans

lequel il est parvenu à définir qu'un écoulement turbulent se compose d'une hiérarchie d'échelles de tourbillons, ce qui permet donc l'application de l'outil statistique (Kolmogorov, 1941). Au niveau expérimental, les approches statistiques de la turbulence s'intéressent essentiellement aux moments des quantités physiques observables, telles que la fluctuation du taux de dissipation d'énergie $\varepsilon(\mathrm{r})$ à l'échelle et celle de la vitesse $\delta \mathrm{V}(\mathrm{r})$ entre 2 points distants de r, défini par :

$$\delta \mathrm{V}(\mathrm{r}) = |\mathrm{V}(\mathrm{x}+\mathrm{r}) - \mathrm{V}(\mathrm{x})|$$

Avec $\mathrm{V}(\mathrm{x})$ qui désigne la composante de la vitesse dans la direction x .

Kolmogorov a défini une échelle minimale $\mathrm{r_k}$, de tourbillon sous laquelle il ne peut y avoir de fluctuations turbulentes. Une échelle où la dissipation visqueuse devient du même ordre de grandeur que l'énergie cinétique : le tourbillon est détruit du fait des forces visqueuses et se dissipe sous forme de chaleur. Cette échelle définie dimensionnellement s'appelle échelle de Kolmogorov et s'exprime par :

$$\mathrm{r_k} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \qquad \text{(I.8)}$$

Cette échelle est obtenue dès que le nombre de Reynolds associé à une échelle r, $R_e = \frac{u'_r r}{\nu}$, (où u'désigne la vitesse caractéristique des tourbillons à la même échelle et ν la viscosité), soit égal à 1.

L'hypothèse fondamentale de Kolmogorov suppose un écoulement isotrope et homogène en tenant compte du principe de localité des transferts, de manière à que ce taux de dissipation d'énergie ne subit aucune variation à travers les échelles : $\varepsilon(r) = \varepsilon = constante$. L'énergie cinétique par unité de masse et de temps de retournement, disposé dans la cascade allant des échelles de tourbillons à l'échelle de Kolmogorov, s'ajusterait mutuellement de telle manière qu'elle soit conservée dans une gamme d'échelles $[\mathrm{r_k}; \mathrm{r_0}]$ où $\mathrm{r_0}$est l'échelle intégrale (voir Figure I.16)

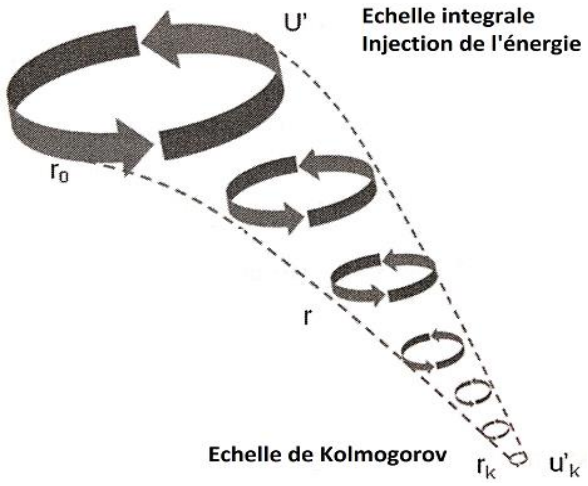


Figure I.16 : représentation de la turbulence en se basant sur la théorie de Kolmogorov (Queiros-Condé et al., 2015)

Traduisons cette hypothèse analytiquement. Par conséquent, une vitesse caractéristique des tourbillons à l'échelle r, u'_r est définie telle que : $u'_r = \sqrt{< dV(r)2 >}$. Ainsi le temps de retournement d'un tourbillon est $t_r = r/u'_r$. Et comme le taux de dissipation d'énergie cinétique par unité de masse est donné par : $\varepsilon_r = u'^2/t_r$. On obtient : $u'_r = {\varepsilon_r}^{1/3} r^{1/3}$.

Par suite :

$$< \delta V(r)^2 > = {\varepsilon_r}^{2/3} r^{2/3} \qquad \text{(I.9)}$$

La notation « <…> » désigne une moyenne sur l'espace de la fluctuation de vitesse.

On appelle la quantité $< \delta V(r)^2 >$: la fonction de structure d'ordre 2 de la fluctuation de vitesse $\delta V(r)$. En général, les quantités $< \delta V(r)^p >$ définissent les fonctions de structure d'ordre p de $\delta V(r)$.

Comme il est indiqué dans l'hypothèse, le taux de dissipation d'énergie ε_r est constant à travers les échelles, ceci implique que la fonction de structure d'ordre p varie en loi de puissance :

$$< \delta V(r)^p > \sim r^{p/3} \qquad \text{(I.10)}$$

Cette loi, pour le premier ordre $(p = 1)$, conduit au spectre d'énergie de Kolmogorov qui présente l'énergie cinétique dans l'espace de Fourier, telle que :

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \qquad \text{(I.11)}$$

Où$E(k)$ représente la densité d'énergie cinétique associée au nombre d'ondes k, donné par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Comme ici présente la Figure I.17.

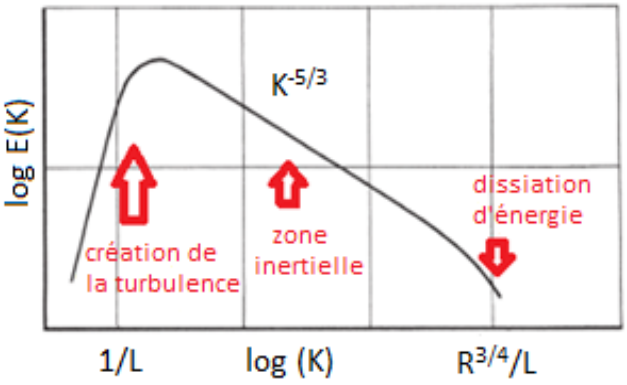


Figure I.17 : Spectre qualitatif de turbulence dans les domaines de l'inertie et de la dissipation basée sur la théorie de Kolmogorov (Frost and Moulden, 1977)

I.3.1 L'intermittence dans la turbulence

Les flux turbulents sont habituellement étudiés à l'aide des fonctions de structures suivantes :

$$< \delta V(r)^p > \sim r^{z_p}$$

$$< \varepsilon(r)^p > \sim r^{\tau_p}$$

Tels que : z_p et τ_p sont des exposants d'échelle.

Une certaine généralisation de l'équation (I.9) a été établie par Kolmogorov (1962), pour différents ordres, que l'on appelle la relation de similarité raffinée :

$$< \delta V(r)^p > = < \varepsilon(r)^{p/3} > r^{p/3}$$

Cette relation n'est pas prouvée théoriquement, mais elle est confirmée par plusieurs études expérimentales et numériques (Chen et al., 1993; Stolovitzky et al., 1992). Par suite, les exposants d'échelle z_p et $\tau_{p/3}$ sont liés par le lien suivant :

$$z_p = \tau_{p/3} + \frac{p}{3}$$

Rappelons, dans sa théorie des champs (K41), que Kolmogorov a prédit que les exposants z_p devaient suivre une loi linéaire : $z_p = \frac{p}{3}$, c'est-à-dire $\tau_{p/3} = 0$. Il a supposé l'uniformité spatiale du taux de dissipation d'énergie c.à.d une invariance d'échelle globale des

fluctuations statistiques des taux de dissipation d'énergie et ainsi de vitesse dans une turbulence développée.

En revanche, cette théorie ne s'accorde pas avec les résultats de nombreuses études expérimentales réalisées plus tard (Anselmet et al., 1984; Gagne, 1987; Queiros-Conde et Vassilicos, 2001; Vincent et Meneguzzi, 1991) qui ont montré des écarts significatifs par rapport à la linéarité de z_p prédite par Kolmogorov. Ces écarts sont dûs au caractère intermittent de la dissipation d'énergie, généralement dénommé « phénomène d'intermittence ».

Il a été noté que les exposants z_p mesurés expérimentalement commencent, depuis une valeur de $p = 2$, à s'écarter des valeurs prédites par Kolmogorov (Queiros-Conde, 2000). Donc, la théorie de Kolmogorov a démontré son incapacité à décrire la dynamique d'intermittence.

De nombreux modèles ont été développés pour décrire ce phénomène et déterminer les exposants d'intermittence, comme le modèle log-normal de Kolmogorov et Obukhov, (1962), afin de tenir compte des corrections non linéaires des exposants z_p. Ils ont supposé que la variable aléatoire $\varepsilon(r)$ est en fait log-normal, c'est-à-dire que la fonction de densité de probabilité de la variable $\log(\varepsilon(r))$ est gaussienne de variance $\sigma(r)$ et de valeur moyenne $\varepsilon(r)$.

De même pour le β-modèle introduit par Frisch et al. (1978). Il est connu par cette dénomination du fait de β désignant la fraction de volume occupée par les zones actives à chaque niveau de la cascade. La fraction β est supposée constante et indépendante du niveau.

Une autre version du β-modèle est apparue avec Benzi et al. (1984) que l'on appelle le β-modèle aléatoire dans laquelle Benzi et ses collègues considèrent le support géométrique du β-modèle comme un ensemble multifractal, tandis que celui du β-modèle est un ensemble fractal.

Plus tard, She et Lévêque (1994) ont proposé une nouvelle interprétation intéressante de l'intermittence basée sur « le modèle à deux fluides » de She (1991). Ils sont partis de l'idée que les structures de fluctuation forment une hiérarchie dans le sens où les structures

d'ordre supérieur entraînent celles d'ordre inférieur (St-Jean, 2005). Cette hiérarchie est décrite par un moment relatif $\varepsilon(r)^{(p+1)} = \frac{<\varepsilon(r)^{p+1}>}{<\varepsilon(r)^{p}>}$, dont tous les moments $\varepsilon(r)^{(p)}$ des structures d'ordre adjacent sont liées par une relation de symétrie :

$$\varepsilon\,(r)^{(p+1)} = A_p \varepsilon\,(r)^{(p)\,\beta}\,\varepsilon\,(r)^{(\infty)\,1-\beta} \qquad 0 < \beta < 1 \qquad \text{(I.12)}$$

dont A_p est une constante caractéristique et le moment $\varepsilon\,(r)^{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} \varepsilon_r{}^p$ décrit les structures les plus intermittentes (filamentaires).

I.4 La théorie constructale

Un autre outil physique multi-échelle dans le cadre de la description de l'écosystème est la théorie constructale. Cette théorie représente un pont de la thermodynamique et surtout le deuxième principe vers la géométrie fractale parabolique.

Elle a été présentée par Adrian Bejan (1997) désignant un problème d'optimisation d'une structure de réseau, qui minimise les pertes de charge distribuée et maximise ses flux et qui par conséquent, minimise la production d'entropie dans la structure (Reis, 2006) (voir Figure I.18).

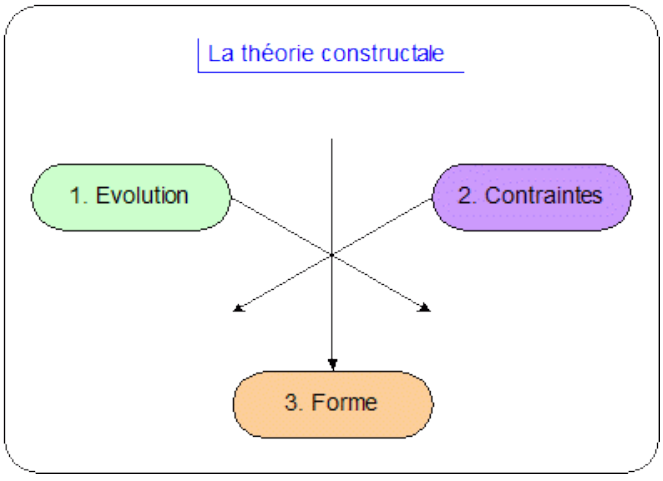


Figure I.18 : les lois de la thermodynamique qui gèrent le phénomène d'évolution etqui sont responsables à l'apparition des formes, aboutissent aux contraintes d'optimisation visant à réduire la perte d'énergie et de matière pour s'opposer à l'entropie

Cette structure en réseau arborescent est similaire à beaucoup de phénomènes complexes dans la nature comme les arbres, les ramifications des poumons et les réseaux rivières et autres (Bejan et Lorente, 2010).

Au niveau fondamental, la production d'entropie S_{gen} est due aux irréversibilités(Bejan, 1997, 1982; Feidt, 2016) qui se produisent à cause de plusieurs phénomènes sources comme ceux qui sont liés au transfert de chaleur, à la dissipation visqueuse (frottements fluides liés au mouvement de la matière), à la diffusion et au mélange ceux qui finalement résultent des réactions chimiques (Feidt, 2016).

Comme ces irréversibilités entraînent une perte de qualité d'énergie, la fraction mécanisable utile de l'énergie est mise en évidence et connue sous le nom de l'exergie. C'est dans cet esprit que Bejan a entrepris de mettre en pratique sa théorie actuelle afin de préserver la quantité d'exergie de façon optimale.

L'aspect d'optimisation à propos du réseau de Bejan, se basant sur le principe de la minimisation de la production d'entropie à chaque échelle, amène à un certain rapport de diamètres entre des tuyaux d'échelles adjacentes et encore des rapports de longueurs qui ne sont pas constants, mais variants à travers les échelles et diminuant en se rapprochant de la périphérie, comme le montre la Figure I.19. Ceci met en évidence les caractères multi-échelles de ce réseau (Bejan and Lorente, 2005).

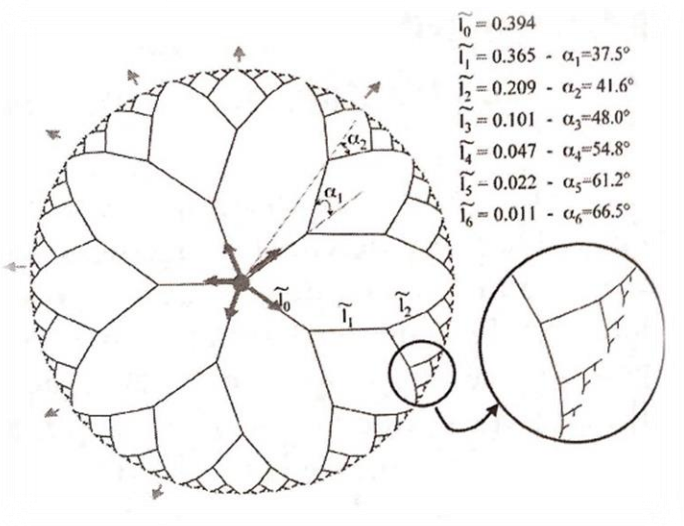


Figure I.19 : réseau constructal de Bejan de distribution de fluide dont le rapport de diamètres entre des tuyaux d'échelles adjacentes variant à travers les échelles

L'analyse en échelle du réseau constructal montre un comportement parabolique de dimension fractale décroissante avec l'échelle, c.à.d. que il subit un fractal parabolique convexe. Par comparaison à l'analyse en échelle de la fractale pure (dimension 1,73), le réseau constructal est identique à celui-ci aux grandes échelles tandis qu'il indique une déviation significative aux petites échelles. Ceci met en évidence la répartition uniforme des pertes de flux évolutif dans l'espace des échelles (Queiros-Conde et al., 2007, 2015). Ainsi, les pertes de charge de ce réseau fractal sont beaucoup plus importantes que celles dans le réseau constructal.

On peut dire que la théorie constructale présente une vision très avancée des phénomènes et des structures et donc lie l'aspect énergétique et l'aspect géométrique. Bejan a ainsi appliqué sa théorie sur le drainage de la chaleur et des fluides, allant même jusqu'à l'appliquer à l'urbanisme pour le drainage des voyageurs (Bejan, 2000; Bejan et Merkx, 2007).

I.5 L'exergie

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les lois de la thermodynamique qui gèrent le phénomène d'évolution sont responsables de la dynamique des formes et de la complexité du système. Ce concept désigne une interface entre la thermodynamique et la géométrie surtout en tant qu'outil pour décrire le phénomène de la complexité dans la nature comme la géométrie fractale.
Étant donné que l'évolution du système se déroule quand il reçoit de l'énergie en s'éloignant de l'équilibre, alors il est nécessaire de parler de la notion d'exergie dans le but de décrire les écosystèmes.

L'exergie est un concept thermodynamique utilisé depuis de nombreuses années dans les analyses techniques des procédés et systèmes introduite par Gouy (1889) sous le concept d'énergie utilisable, ensuite poursuivi par Stodola (1903) et Keenan (1951). Finalement, elle a été introduite sous le nom d'« exergie » par Rant (1956).

L'exergie désigne le maximum de travail utile qui peut être extrait d'un système quand il arrive en équilibre avec son environnement. En d'autres termes, elle montre une distance

énergétique par rapport à l'équilibre d'un système en considérant les effets de l'environnement sur le système.

La notion d'exergie s'appuie sur un couplage de la première et la deuxième loi de thermodynamique désignant respectivement le principe de la conservation de l'énergie dans tout processus de transformation et le fait que ces processus subissent une perte d'une certaine mesure de la qualité du système provenant de la production de l'entropie et de ce que l'on appelle l'Anergie (voir Figure I.20).



Figure I.20 : Construction du pont de fourmi : un phénomène est très semblable au parcours de l'énergie dont l'anergie présente le « pont énergétique » utilisé par l'énergie utile(exergie) pour dépasser de l'état initialvers l'état final("Modeling Swarm Behavior," 2006)

En effet, on peut dire que l'exergie est une mesure de la qualité de l'énergie dont il s'agit à la fois d'une mesure quantitative et qualitative de l'énergie incorporée dans un système.

Le critère adopté de qualification de l'énergie par la notion de l'exergie se réfère à la forme de l'énergie la plus fondamentale et consiste à la capacité d'effectuer un travail physique, c'est-à-dire de surmonter une résistance pour créer une certaine transformation (évolution). Autrement dit, c'est la non-dégradabilité de cette énergie.

Cela nous permet de considérer l'énergie thermique (la chaleur) intrinsèquement de qualité inférieure à d'autres formes d'énergie, comme l'électricité ou le mouvement mécanique considérés comme "nobles", puisque la chaleur, normalement, indique une énergie « résiduelle », « dégradée » et très « désordonnée » qui ne peut être récupérée lors d'une transformation et utilisée pour effectuer un travail physique, provenant de processus irréversible de création d'entropie.

Différentes études basées sur la notion d'exergie ont été effectuées, comme les domaines vitaux de l'économie, l'environnement (Rosen, 2002), le développement durable et les énergies renouvelables (Dincer et Rosen, 2013; Queiros-Conde et al., 2011) et d'autres domaines techniques énergétiques comme l'ingénierie dans l'étude du moteur Stirling, les procédés de fabrication et l'analyse des systèmes énergétiques (Bilgen and Takahashi, 2002, 2002; Feidt, 2013, 2008; Feidt and Costea, 2012; Grosu, 2014; Grosu et al., 2004; Hoque et al., 2015; Li et al., 2016; Popescu et al., 1996).

Afin de prendre en compte l'interaction entre le système étudié et son milieu ambiant permettant à ce système d'être ramené de son état initial à un état d'équilibre dans le cadre de certains échanges, on introduit alors le terme « sur-système » désignant l'ensemble du système et de son milieu ambiant (Benelmir et al., 2002).

Prenons un modèle simple de système indiqué dans la Figure I.21 ,un système fermé dans son milieu ambiant formant ensemble un sur-système présenté dans deux états : l'un initial quelconque et l'autre final en équilibre. Chaque état étant caractérisé par son énergie $\mathrm{E_n}$, son entropie S, son volume V, sa température T, sa pression P, son nombre de particules N,son entropie S et son potentiel chimique μ (dont μ_i indique celle de chaque constituant du système). On note que X^0 la grandeur X du milieu ambiant et $\mathrm{X_0}$ la grandeur en équilibre avec le milieu ambiant.

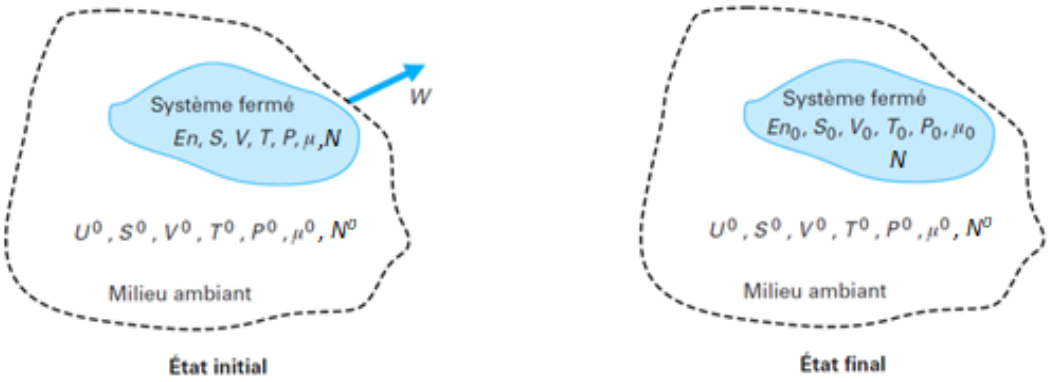


Figure I.21 : Sur-système contenant le système fermé et son milieu ambiant dans les deux états initiaux et finaux

Le travail fourni par le sur-système (négatif) est égal à sa variation d'énergie et exprimé selon la première loi par :

$$w = \Delta E_n + \Delta {E_n}^0 = U_0 - E_n + \Delta U^0$$

Telle que :$\Delta E_n = U_0 - E_n$,($U_0 = E_{n0}$) et$\Delta {E_n}^0 = \Delta U^0$

Comme :

$$U_0 = T_0 S_0 - P_0 V_0 + \sum_i \mu_i^0 N_i^0 \quad (I.13)$$

Et

$$\Delta U^0 = T^0 \Delta S^0 - P^0 \Delta V^0 + \sum_i \mu_i^0 \Delta N_i^0 \quad (I.14)$$

Dont toutes les variations des variables s'expriment telles que:

$$\Delta E_n = U_0 - E_n;\ \Delta S = S_0 - S \Delta V = V_0 - V;\ \Delta N_i = \Delta N_{i,0} - N_i$$

Or tenant compte des équilibres mécaniques et thermiques ayant lieu, il vient :

$$T_0 = T^0 \text{ et } P_0 = P^0$$

Le volume global du super-système est constant, alors les variations de volume de chaque sous-ensemble sont égales : $\Delta V = -\Delta V^0$

De plus, considérons la conservation de quantité de matière :

$$\Delta N_i = -\Delta N_i^0$$

Donc : $\Delta E_n^0 = \Delta U^0 = T_0 \Delta S^0 + P_0 \Delta V - \sum_i \mu_i^0 \Delta N_i$

Indiquons la présence d'irréversibilités, la production d'entropie du super-système, S_p est égal à la somme des variations d'entropie du système fermé et de son milieu ambiant :

$$S_p = \Delta S + \Delta S^0$$

D'où :$W = \Delta E_n - T_0 \Delta S + P_0 \Delta V - \sum_i \mu_i^0 \Delta N_i + T_0 S_p$

Le travail maximal W_{max} récupérable du super-système lorsque le système passe de son état initial à un état final correspond idéalement au cas comme quoi le système subit une transformation réversible où la génération d'entropie est nulle. Pour qu'il soit réaliste, le travail W fourni par le super-système doit remarquer le processus de la production de l'entropie en se réduisant par rapport au travail optimal maximal, alors :

$$W = W_{max} + T_0 S_p \quad (I.15)$$

Notons qu'en présence d'une production d'entropie, le travail d'une machine motrice (travail négatif) est réduit en valeur absolue par rapport au travail optimal ou augmenté dans le cas d'un travail reçu (les machines à cycle inverse).

En outre, par définition, le travail optimal du système est équivalent à sa variation d'exergie du système. On obtient par suite :

$$\Delta Ex = W_{max} = \Delta E_n - T_0 \Delta S + P_0 \Delta V - \sum_i \mu_i^0 \Delta N_i \quad (I.16)$$

Or $\Delta E_n = U_0 - E_n$, donc :

$$\Delta Ex = W_{max} = (U_0 - E_n) - T_0(S_0 - S) + P_0(V_0 - V) - \sum_i \mu_i^0 (N_{i,0} - N_i)$$

Selon la définition de l'exergie et par convention l'exergie du système en équilibre avec son milieu ambiant est nulle. Ce qui donne l'exergie Ex :

$$Ex = (E_n - U_0) - T_0(S_0 - S) - P_0(V_0 - V) + \sum_i \mu_i^0 (N_{i,0} - N_i)$$

Considérons l'équation(I.13), on aura :

$$Ex = E_n - T_0 S + P_0 V - \sum_i N_{i,0} \mu_i^0$$

En négligeant les constituants « supplémentaires » de l'énergie de système E_n ($E_n = U_0$ + l'énergie cinétique E_c+ l'énergie potentielle E_p +…) et en gardant l'énergie interne U_0, alors on aura:

$$Ex = U_0 - T_0 S + P_0 V - \sum_i N_{i,0} \mu_i^0$$

Par conséquent :

$$Ex = S(T - T_0) - V(P - P_0) + \sum_i N_{i,0}(\mu_{i,0} - \mu_i^0) \quad (I.17)$$

Particulièrement, quand le système est en équilibre mécanique et thermique avec le milieu ambiant, alors $T = T_0$; $P = P_0$.

Donc :

$$Ex = \sum_i N_{i,0}(\mu_{i,0} - \mu_i^0) \quad (I.18)$$

Ce cas particulier met en évidence la notion d'exergie chimique connue sous le nom de « l'éco-exergie ».

I.5.1 Eco-exergie

En général, l'exergie est une propriété de tous les flux de matières et d'énergie et dépend de caractéristiques du système telles que la température, les compositions chimiques et autres par rapport à un environnement extérieur. Ceci est indiqué à propos de l'équation finale de l'éxergie (I.18). En partant de ce raisonnement, on introduit le terme éco-exergie désignant l'exergie chimique même et indiquant l'exergie associée à l'échange des matières (flux) ayant des différents potentiels chimiques. Ceci est clair dans l'équation finale, dans un cas particulier, dont le système est déjà en équilibre mécanique et thermique. Cette équation dévoile que la notion d'éco-exergie découle du potentiel chimique et surtout de la différence entre les potentiels chimiques du système et du milieu ambiant. Il est utile, pour comprendre l'éco-exergie, de voir la notion du potentiel chimique tel qu'il s'agit de la variation d'énergie d'un système thermodynamique (unité SI :[J]) associée à la variation de la quantité de matière (unité SI :[mole]) d'une espèce de ce système (Cook et Dickerson, 1995; Gill, 1962). Elle peut être vue encore comme mesure de la tendance de la matière à la diffusion et mesure de " taux de changement " (pas au cours du temps) d'une fonction thermodynamique pendant une transformation (Baierlein, 2001).

Selon la définition du potentiel chimique dérivant de l'énergie de Gibbs, cette quantité et l'éco-exergie même sont identiques, sachant que les réactions chimiques sont généralement étudiées à une pression et température constante.

Donc, l'éco-exergie désigne la capacité de travail d'un écosystème par rapport au même système en équilibre thermodynamique avec T et P constantes (Jørgensen, 2007) (voir Figure I.22).

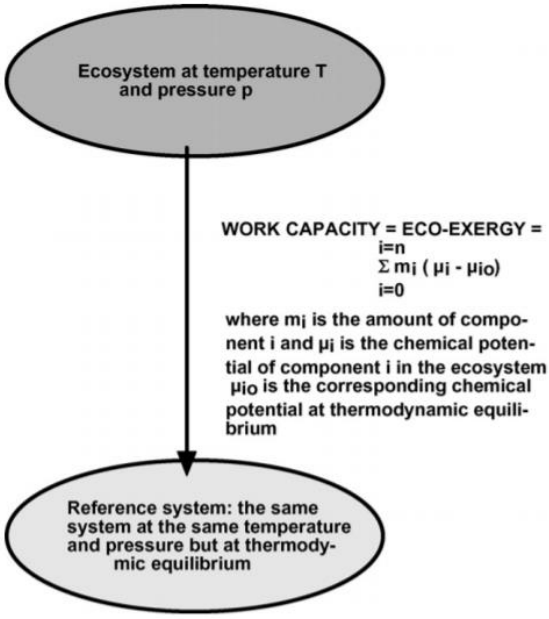


Figure I.22 : Le contenu exérgétique du système est calculé par rapport au même écosystème à la même température et à la même pression en état d'équilibre thermodynamique

Selon la loi tentative d'écologique (ELT) : un système qui reçoit un flux d'exergie tentera d'utiliser le flux exérgétique pour s'éloigner de l'équilibre thermodynamique et si plusieurs combinaisons de composants et de processus sont proposées pour utiliser le flux exérgétique, le système sélectionnera l'organisation qui lui permettra de maximiser le stockage exérgétique dans la mesure du possible (Jørgensen et al., 2005, 2000, 1995) (pour plus de détails voir l'Annexe B).

Jørgensen (2005) a considéré que l'éco-exergie exprime la survie des organismes dans l'écosystème comme une mesure appropriée à la complexité biologique et écologique et ainsi caractérise l'évolution d'un écosystème.

D'autre part, le taux de croissance de la complexité est proportionnel à l'auto-organisation correspondant à un écosystème (Fath et al., 2004; Jørgensen, 2007; Jorgensen et Svirezhev, 2004).

Par définition, le potentiel chimique d'un composé i dépendant de l'activité a_i du composé est donné par la relation dont μ_i^0représente le potentiel chimique standard :

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln (a_i)$$

En cas de phase liquide : solution diluée idéale dont le constituant i est l'un des solutés, $a_i = \frac{c_i}{c_{ieq}}$ où c_i est la concentration du i-ème composant exprimé dans des unités appropriées, c_{ieq}est la concentration du i-ème composant à l'équilibre thermodynamique.

En se fondant dessus, Jørgensen a calculé l'éco-exergie en fonction des concentrations, et a entrepris de l'appliquer sur la construction et l'émergence des écosystèmes et des organismes en le considérant comme des systèmes thermodynamiques.

$$\mathrm{Ex} = \mathrm{RT} \sum_{i=0}^{n} c_i \ln \frac{c_i}{c_{i,eq}} \qquad [\mathrm{ML^2T^{-2}T}] \tag{I.19}$$

Où R est la constante de gaz, T est la température de l'environnement et du système et n est le nombre total des composants.

Il a proposé l'environnement comme référence pour un système à l'équilibre thermodynamique.

En se basant sur le fait que le taux de croissance de la complexité est proportionnel à l'auto-organisation correspondant à un écosystème, et que l'exergie chimique indique la complexité d'un système, Jørgensen , Susani et leurs collègues ont proposé un nouveau concept d'éco-exergie qui tient compte du contenu informatique dans la structure des éléments de l'écosystème (Susani et al., 2006). Ils ont considéré que la carte génétique de l'organisme caractérise sa complexité dont la réalisation de la structure peut être considérée comme une distance à l'équilibre (Jørgensen et al., 2005, 2000).

Ceci implique une distinction entre les deux composantes de l'éco-exergie : l'éco-exergie classique et l'éco-exergie structurelle (informationnelle). Il a démarré son concept (Mejer and Jørgensen, 1979) de l'équation de l'exergie chimique apportée par les composants dans un système ouvert avec débit (flux de matières):

$$\mathrm{Ex} = \mathrm{RT} \sum_{i=0}^{n} c_i \ln \frac{c_i}{c_{i,eq}} - (c_i - c_{i,eq}) \tag{I.20}$$

Le potentiel chimique de la matière organique morte, indexé i= 1, peut être exprimé à partir de la thermodynamique classique (par exemple Russell et Adebiyi, 2005) :

$$\mu_1 = \mu_{1,eq} + \mathrm{RT} \ln \left(\frac{c_1}{c_{1,eq}}\right) \quad [\mathrm{ML^2T^{-2}mole^{-1}}] \tag{I.21}$$

La différence $(\mu_1 - \mu_{1,eq})$ est connue pour la matière organique détritale.

En calculant la concentration $c_{i,eq}$ à partir de la définition de la probabilité de trouver le composant i à l'équilibre thermodynamique $P_{i,eq}$, on trouve :

$$P_{i,eq} = \frac{c_{i,eq}}{\sum_{i=0}^{n} c_{i,eq}} \tag{I.22}$$

Comme le composant inorganique de concentration c_0 est très dominant à l'équilibre thermodynamique, l'équation(I.22) peut être estimé comme suit :

$$P_{i,eq} \approx \frac{c_{i,eq}}{c_{0,eq}} \tag{I.23}$$

Par une combinaison de l'équation (I.23) et l'équation(I.22), nous obtenons :

$$P_{1,eq} = \frac{c_1}{c_{0,eq}} \exp[-(\mu_1 - \mu_{1,eq})/RT] \tag{I.24}$$

Pour les composants biologiques, $i = 2, 3, \ldots, n$ ($i = 0$ couvre les composés inorganiques et $i = 1$ les détritus), $P_{i,eq}$, est la probabilité de produire de la matière organique $P_{1,eq}$, de plus la probabilité, $P_{i,a}$, d'assemblage de l'information génétique pour déterminer les séquences d'acides aminés. En effet, P_{ia} peut être calculé à partir du nombre de permutations parmi lesquelles la séquence d'acides aminés caractéristique pour l'organisme considéré, a été sélectionnée.

On a donc:

$$P_{i,eq} = P_{1,eq}\, P_{i,a} \qquad (i \geq 2) \tag{I.25}$$

Les organismes utilisent 20 acides aminés différents et chaque gène détermine une séquenced'environ700 acides aminés(Li et Grauer, 1991) alors :

$$P_{i,a} = 20^{-700g}$$

Où g est le nombre de gènes.

Les deux équations(I.20) et (I.23) donnent :

$$Ex \approx RT \sum_{i=0}^{n} c_i \ln \frac{c_i}{P_{i,eq}\, c_{0,eq}} - (c_i - P_{i,eq}\, c_{0,eq}) \quad [ML^2T^{-2}] \tag{I.26}$$

Cette équation peut être simplifiée par l'utilisation de certaines approximations et les compositions inorganiques (pour $i = 0$) peuvent être négligées. Alors,la contribution significative est celle de $1/P_{i,eq}$. D'où on obtient :

$$\mathrm{Ex} \approx -\mathrm{RT}\sum_{i=1}^{n} c_i \ln P_{i,eq} \quad [\mathrm{ML^2T^{-2}}] \tag{I.27}$$

Telle que la somme commence à partir de 1 car $P_{0,eq} \approx 1$.

Insérons $P_{1,eq}$ comme dans l'équation (I.24) et $P_{i,eq}$comme dans l'équation(I.25) comme précédemment et nous arrivons à l'expression suivante pour un indice d'exergie :

$$\mathrm{Ex/RT} \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \ln \frac{c_1}{c_{0,eq}} - (\mu_1 - \mu_{1,eq}) \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{RT} - \sum_{i=2}^{n} c_i \ln P_{i,a} \quad [\mathrm{mole\ l^{-3}}] \tag{I.28}$$

Comme la première somme est mineure par rapport aux deux autres (utiliser par exemple $\frac{c_i}{c_{0,eq}} = 1$), on trouve :

$$\mathrm{Ex/RT} = (\mu_1 - \mu_{1,eq}) \sum_{i=1}^{n} c_i/\mathrm{RT} - \sum_{i=2}^{n} c_i \ln P_{i,a} \tag{I.29}$$

Jorgensen a réussi à insérer la probabilité et les informations génétiques dans la formule de l'éco-exergie. La différence $(\mu_1 - \mu_{1,eq})$ est connue pour la matière organique « détritale » (par rapport au détritus).

Par exemple, si seuls des détritus sont considérés, nous savons que l'énergie libérée est d'environ 18,7 $\mathrm{kJ/g}$. R est 8,4 $\mathrm{J/mol}$ et la masse moléculaire moyenne des détritus est d'environ $10^5\,\mathrm{g/mole}$. Nous obtenons la contribution suivante d'exergie par les détritus par litre d'eau, lorsque l'on utilise l'unité g, l'exergie de détritus équivalent/l:

$$\mathrm{Ex_1} = 18.7 c_i \text{ KJ/l} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{Ex_1}}{\mathrm{RT}} = 7.34 \times 10^5 c_i \ [\mathrm{ML^{-3}}] \tag{I.30}$$

Par exemple, étudions le cas d'une algue unicellulaire typique ayant en moyenne 850 gènes, alors une séquence de $850 \times 700 = 595\,000$ acides aminés. Cela représente en utilisant l'équivalent de détritus g/l comme unité de concentration, d'après la relation (I.29), une contribution d'exergie par litre d'eau de :

$$\frac{\mathrm{Ex_{algae}}}{\mathrm{RT}} = \underbrace{7.34 \times 10^5 c_i}_{\text{(exergie de détritus)}} - \underbrace{c_i\, 20^{-700\times850}}_{\text{(contribution de l'exergie structurelle)}} = 25.2 \times 10^5 c_i \ \ [\mathrm{g/l}] \tag{I.31}$$

Les organismes avec plus d'une cellule auront de l'ADN dans toutes les cellules déterminées par la première cellule. Le nombre de micro-états possibles est donc proportionnel au nombre de cellules.

Le terme $\frac{\mathrm{Ex}}{\mathrm{RT}}$ peut être considéré comme un indice d'éco-exergie utile et calculé en fonction

des concentrations de composants chimiques c_i, multipliés par des facteurs de pondération β_i. Il met en évidenceles contenus exégétiques des différents composants correspond à leur énergie chimique et des informations incorporées dans l'ADN :

$$Ex = \sum_{i=0}^{n} \beta_i c_i$$

Les valeurs de β_i associées aux équivalents d'exergie des détritus sont disponibles pour différentes espèces et de groupes taxonomiques (Jorgensen et al., 2005). L'unité équivalente d'exergie détritale exprimée en g/l peut être convertie en kJ/l par multiplication de 18,7 la quantité d'énergie moyenne dans 1 g de détritus (Morowitz, 1968). Les facteurs de pondération β_i peuvent être considérés comme des facteurs de qualité donnant la mesure de la contribution des différents taxons à l'exergie globale. Elle indique la complexité structurelle et informationnelle d'une espèce. On peut les considérer comme le terme $\frac{Ex}{RT}$: un indice de contenues exérgétique chimique et informationnelle des différentes espèces.

Récemment, l'exergie a été proposée plutôt comme outil thermodynamique pour évaluer et améliorer le développement durable. Elle sert à bien caractériser et décrire énergétiquement les systèmes sur lesquels elle s'applique et à donner des informations utiles. Cette propriété encourage son application dans le cadre d'assurer la durabilité.

I.5.2 Description du potentiel chimique et de la diffusion de la matière par la structure fractale dépendant de l'échelle et intermittente

Comme nous l'avons vu, l'éco-exergie présente le potentiel chimique permettant d'effectuer la transformation pendant un équilibre thermodynamique à l'exception chimique. Pour cela, l'éco-exergie et le potentiel chimique ont le même traitement analytique.

Puisque le concept de potentiel chimique et son sens physique présentent une sorte d'ambiguïté, plus récemment, Queiros-condé a entrepris de chercher une représentation géométrique au potentiel chimique afin de mieux le comprendre. En effet, il a introduit une approche géométrique fractale adéquate du potentiel chimique, avec son collègue Michel Feidt dans leur livre récent «*fractal and Trans-scale* Nature of Entropy ». Ils ont discuté la

nature du potentiel chimique à partir d'une description géométrique basée sur le concept d'entropie d'échelle et la théorie des peaux entropiques).

Dans cette étude, Queiros-condé (2000,2003,2018) a travaillé sur le cas des mélanges du gaz parfait. Il considère un système qui montre l'énergie et l'échange de matière avec l'environnement. Représentons à cet effet un mélange de particules de forme A (triangles noirs) et de forme B (étoiles) contenant $N = N_A + N_B$ particules, comme le montre la Figure I.23.

Le mélange correspond à un volume topique $v^* = V/N$ et donc à une échelle topique $l_* = (V/N)^{1/3}$. On obtient la meilleure situation pour les particules A en retirant toutes les particules B (Figure I.23.b et c).

En supposant que les particules A soient seules dans le volume V, cela déterminerait un volume topique, que l'on appelait "idéal", car les particules A ne sont pas seules. Alors l'échelle topique idéale des particules A est $l_{\otimes A} = (V/N_A)^{1/3}$. De même, le cas idéal de B est obtenu en éliminant toutes les particules A. D'où l'échelle topique idéale des particules B est $l_{\otimes B} = (V/N_B)^{1/3}$. Par suite, les échelles caractéristiques sont reliées les unes aux autres par l'équation suivante :

$$\frac{1}{{l_*}^3} = \left(\frac{1}{{l_{\otimes A}}^3} + \frac{1}{{l_{\otimes B}}^3}\right) \tag{I.32}$$

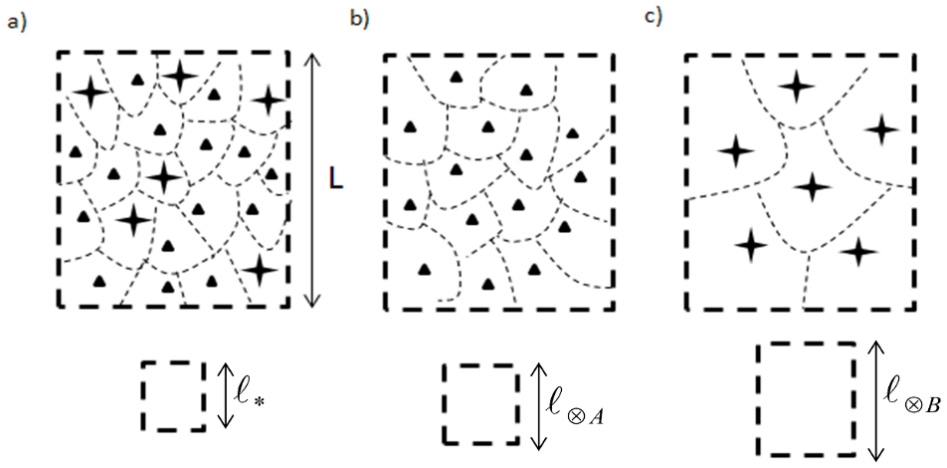


Figure I.23 : mélange de particules de type A (triangles noirs) et de type B (étoiles)

Donc, on peut généraliser par : $\frac{1}{l_*^{\,3}} = \sum_{i=1}^{n_c} \frac{1}{l_{\otimes i}^{\,3}}$ avec n_c qui est le nombre de composants.

Selon la définition de l'entropie d'échelle introduite dans le cadre de la turbulence développée,qui décrit la production du phénomène dans un volume V mais ayant une structure active de volume V_f (avec $V_f < V$): $\sigma = k_s \ln\left(\frac{V}{V_f}\right)$ où k_s est une constante dimensionnellement équivalente à une entropie.

La constante k_s sera équivalente à la constante de Boltzmann, si l'échelle de coupure interne est proche de l'échelle atomique ou moléculaire.

En effet, le volume global V est équivalent à L^d à une certaine échelle L et toutes les particules de type i occupent un volume $V_i = N_i v^*$. Puisque V peut s'écrire $V = N v^*$ et $N = (L/l_*)^d$, ceci implique : $\frac{N_i}{N} = \frac{V_i}{V} = N_i\left(\frac{l_*}{L}\right)^d$. La dispersion des particules semble présenter une caractéristique multi-échelle. Supposons qu'il s'agit d'une fractale sur l'échelle $[l_* ; L]$, alors on peut écrire : $N_i = (L/l_*)^{D_i}$

Enfin, nous avons simplement :

$$\sigma = k_s \ln\left(\frac{V}{V_f}\right) = k_s (d - D_i) \ln\left(\frac{L}{l_*}\right) \tag{I.33}$$

σ est nulle si $D_i = d$.

Selon L'équation Sackur-Tétrode, l'entropie S d'un gaz monoatomique (Sackur, O., 1911; Tetrode, 1912) est donnée par (Blundell et Blundell 2010) :

$$S = \frac{5KN}{2} + K \ln \frac{V}{N} + kN \ln\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \tag{I.34}$$

Où k est la constante de Boltzmann, h est la constante de Planck et m est la masse d'une particule individuelle. En utilisant la relation de longueur d'onde thermique de Broglie $l_{db} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$, l'échelle topique $l_* = (V/N)^{1/3}$ et l'énergie moyenne de N particules du gaz $U = \frac{3}{2} NKT$, on obtient :

$$S = NK + \frac{U}{T} + Nk \ln\left(\frac{l_*^{\,3}}{l_{db(i)}^{\,3}}\right) \tag{I.35}$$

Le potentiel chimique d'un seul composant est défini par (Blundell et Blundell 2010) :

$$\mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} \tag{I.36}$$

Évidemment :

$$\mu = -kT\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right] \tag{I.37}$$

D'où :

$$\frac{\mu}{T} = -k\ln\left(\frac{{l_*}^3}{{l_{db}}^3}\right) \tag{I.38}$$

Si N_i est le nombre de particules de type i et si m_i est la masse d'une particule i, alors le potentiel chimique d'une particule i s'écrit sous la forme :

$$\mu_i(T,P,N_i) = -kT\ln\left[\frac{V}{N_i}\left(\frac{2\pi m_i kT}{h^2}\right)^{3/2}\right]$$

Pour le potentiel chimique d'un mélange du gaz parfait, on utilise l'équation de la loi du gaz parfait $PV = NKT$ et la décomposition $(V/N_i = V/N \times N/Ni)$, ceci implique :

$$\mu_i(T,P,N_i) = -kT\ln\left[\frac{KT}{P}\left(\frac{2\pi m_i kT}{h^2}\right)^{3/2}\right] + KT\ln\frac{N_i}{N}$$

$$\mu_i(T,P,N_i) = {\mu_i}^{(0)}(T,P) + KT\ln\frac{N_i}{N} \tag{I.39}$$

Avec ${\mu_i}^{(0)}(T,P) = -kT\ln\left(\frac{{l_{*i}}^3}{{l_{db(i)}}^3}\right)$ est le potentiel chimique d'un système pur (" idéal ") composé de molécules de type i à température T et pression P (Gould et Tobochnik, 2010).

D'autre part, dans le même principe que l'équation (I.33), Queiros-condé a défini ${\sigma_i}^{\approx}$ et ${\sigma_i}^{\odot}$ respectivement comme une entropie d'échelle d'ondulation de Broglie et l'autre celle de clustérisation et ayant les valeurs :

$${\sigma_i}^{\approx} = k\ln\left(\frac{{l_{*i}}^3}{{l_{db(i)}}^3}\right) \text{ et } {\sigma_i}^{\odot} = K\ln\frac{N}{N_i} = K\ln\frac{{l_{\otimes i}}^3}{{l_*}^3} \tag{I.40}$$

D'ou :

$$\mu_i(T,P,N_i) = {\mu_i}^{(0)}(T,P) + KT\ln\frac{N_i}{N} = -T{\sigma_i}^{\approx} - T{\sigma_i}^{\odot}$$

En remplaçant $\frac{N_i}{N}$ par sa valeur$(\frac{l_*}{L})^{d-D_i}$et en multipliant par le nombre d'Avogadro N_A, et puisque $KN_A = R$, on obtient finalement le potentiel chimique molaire :

$$\mu_i^{(m)} = \mu_i^{(0)(m)} - RT\,(1 - \frac{D_i}{d}) \ln N \tag{I.41}$$

En se basant sur le postulat de Maxwell "le potentiel chimique de tout composant est l'intensité avec laquelle il tend à expulser cette substance de sa masse" (Baierlein, 2001), Une interprétation très interressante peut être déduite. Les deux dernières équations signifient que certaines particules d'une substance ayant un potentiel chimique élevé, ainsi une capacité énergétique à s'expulser du melange, présentent une faible entropie de clustérisation. Au contraire, lorsque le potentiel chimique est faible, autrement dit, faible potentiel d'expulsion ou de propagation, l'entropie de clustérisation est élevée : une infinité des possibilités à remplir l'espace aurait lieu.

Nous avons vu dans ce chapitre les outils thermodynamiques et multi-échelles utilisés pour décrire et caractériser les écosystèmes et les phénomènes qui s'y déroulent.

Dans le chapitre suivant, nous allons voir des modèles physiques qui traitent un des phénomènes essentiels dans les écosystèmes dont la biodiversité, en d'autre terme ,la distribution spatiale des espèces representées par la loi zone-espèces connues par Species Area Relationship (SAR).

Chapitre II. Modèle physique de la loi zone-espèces (SAR)

« Si apprendre la vérité est le but d'un scientifique,
alors il doit se faire l'ennemi de tout ce qu'il lit »

-Alhazen (965 - 1040)

II.1 Biodiversité : distribution spatiale des espèces 64
II.2 Loi zone-espèces 66
II.2.1 Historique 66
II.2.2 Modèle de Plotkin 67
II.2.3 La théorie neutre de biodiversité de Hubelle (NTB) : 68
II.2.4 Interprétation de Storch de la théorie neutre de biodiversité 68
II.2.4.1 La loi zone-espèces SAR à grande échelle (continentale) : 68
II.2.4.2 La SAR aux échelles intermédiaires : 69
II.2.4.3 La SAR aux petites échelles : 70
II.2.5 Modèle de Sizling et Storch 71
II.2.6 La théorie de maximisation d'entropie MaxEnt 73
II.2.7 Modèle de fractales généralisées 81
II.2.8 Approche multifractale 83

II.1 Biodiversité : distribution spatiale des espèces

En 1980, le biologiste américain Thomas E. Lovejoy a introduit pour la première fois le principe de la diversité biologique ou biodiversité, et l'a défini comme "la variété et la variabilité de tous les organismes vivants" (Magurran, 2010; Wilson and Peter, 1988), comprenant :

- La variabilité génétique au niveau des espèces et de leurs populations
- La variabilité des espèces et de leurs modes de vie
- La diversité des complexes d'espèces associées et leurs interactions
- La diversité des processus écologiques qu'ils influencent ou dans lesquels ils sont acteurs.

Ce concept de biodiversité est formé de quatre composantes essentielles:

I. La diversité génétique, qui désigne la variété de gènes, d'allèles et de structures de chromosomes que l'on trouve au sein d'une espèce et d'une communauté écologique. Cela permettra aux espèces de s'adapter aux différents changements de leur environnement.
II. La diversité spécifique, qui est la plus évidente, qui fait référence à la variété des espèces présentes dans un écosystème donné. Cette diversité est nécessaire aux différents processus de vie des espèces tels que la consommation, la production, la décomposition, le recyclage et autres...
III. La diversité écosystémique qui comprend tous les milieux de vie des espèces. Cette diversité des écosystèmes est indispensable pour couvrir les besoins des espèces de la terre, notamment en matière de nourriture et d'habitat.
IV. La diversité fonctionnelle, qui intègre tous les phénomènes qui se déroulent dans les écosystèmes, y compris les interactions trophiques indispensables à la vie dans ces milieux.

Ceci est montré dans la Figure II.1 : Les quatre composantes essentielles de la biodiversité terrestre. La diversité biologique inclut la variété (i) des gènes des espèces, (ii) des espèces mêmes, (iii) des écosystèmes où les espèces vivent, et (iv) de tous les mécanismes nécessaires à la vie dans les écosystèmes (Miller et Spoolman, 2011; Salmier, 2016):

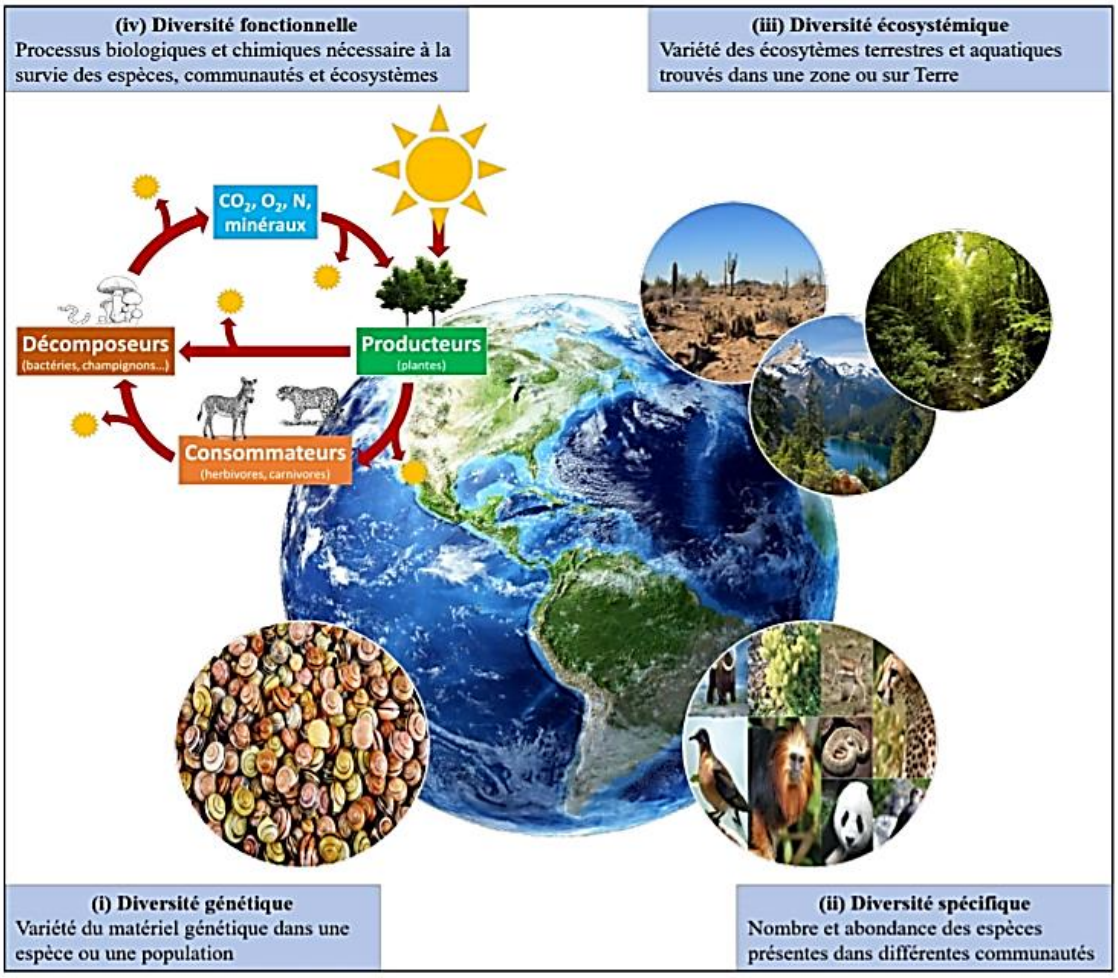


Figure II.1 : Les quatre composantes essentielles de la biodiversité terrestre. La diversité biologique inclut la variété (i) des gènes des espèces, (ii) des espèces mêmes, (iii) des écosystèmes où les espèces vivent, et (iv) de tous les mécanismes nécessaires à la vie dans les écosystèmes (Miller et Spoolman, 2011; Salmier, 2016)

Dans cette thèse, nous nous intéressons surtout à la diversité spécifique en étudiant la répartition spatiale des espèces dans un écosystème donné et ses caractéristiques statistiques et géométriques multi-échelles.

Cependant, dans ce chapitre, nous allons voir quelques modèles physiques, thermodynamiques et multi-échelles cherchant à caractériser la loi zone-espèces (SAR) selon différentes méthodes et points de vue.

II.2 Loi zone-espèces

II.2.1 Historique

La relation de la loi zone- espèce (SAR) présente l'outil le plus utilisé qui décrit la dépendance en échelle de la biodiversité dans les écosystèmes. Elle représente explicitement la richesse des espèces en fonction de la zone d'échantillonnage, c'est-à-dire en fonction de l'échelle spatiale. Elle sert à prédire la réponse de la biodiversité aux changements environnementaux à différentes échelles permettant d'évaluer les options politiques de conservation globale (Geijzendorffer et al., 2016; Pereira et al., 2013) . Comment la perte d'habitat et la destruction des forêts tropicales sont-elles liées à l'extinction des espèces ? Combien d'espèces d'arbres doivent rester dans une forêt exploitée pour que les espèces primates y survivent ? Quelle est la meilleure conception possible d'une réserve naturelle qui maximise le nombre ou la diversité génétique des espèces survivantes ? Toutes ces questions écologiques pourraient trouver une réponse à travers la loi zone-espèces SAR.

À l'origine, une relation zone - espèces (SAR) de la forme : $S = cA^z$ tel que S est le nombre d'espèces, A est la superficie et c et z sont des constantes, a été suggérée par Watson au cours de la première moitié de XIXe siècle pour les espèces de plantes vasculaires des Grands Lacs de Grande-Bretagne (Rosenzweig, 1995). Une étude similaire avec des conclusions similaires a été réalisée par Arrhenius (1921) pour des groupes de végétaux sur les îles de Stockholm, en Suède. De plus, une autre approche semi-logarithmique a été mise en évidence l'année suivante par Gleason (1922) afin de rattraper « l'erreur de l'équation d'Arrhenius », et a préconisé la relation semi-logarithmique comme meilleur modèle tel que :

$$S = c_1 + b \log(A)$$

Où, c_1 et b sont des constantes.

À cette époque, les écologistes déduisaient la SAR de la loi de puissance à partir des données statistiques (Caswell et Cohen, 2005; MacArthur et Wilson, 2001; May, 1975; Preston, 1962) ou dynamique (Hubbell, 2001, 1997). Preston (1962) et May (1975) ont cherché à dériver la SAR de la loi de puissance : $S \approx cN^z$ en supposant que l'abondance des

espèces N suivit une distribution log-normale. Ils ont montré qu'en supposant N proportionnel à la surface A, on obtient immédiatement la valeur de l'exposant z, approximativement égale à 0,25 pour les taxons des îles d'un même archipel et à 0.12 à l'intérieur d'une île ou d'un continent (Rosenzweig, 1995). Notons que toutes les valeurs de z mesurées pour divers écosystèmes et dans différentes études sont plus petites que 1 (Harte, 2011; Harte et al., 1999; Hubbell, 1997; Plotkin et al., 2000; Sizling et Storch, 2007; Storch, 2012).

Plus récemment, Harte et Kinzig (1997) ont souligné que la loi de puissance est équivalente à l'autosimilarité. Notons que le principe d'autosimilarité est généralement utilisé dans l'étude des fractales et qui est une caractéristique principale pour certains objets ou structures fractales.

Cependant, Harte et al. (1999) ont supposé que la loi zone-espèces SAR ne soit pas uniquement une loi de puissance et ainsi que les distributions des espèces sont fractales ayant une seule et même dimension fractale D. D'ici, l'idée souvent que la loi zone-espèces (SAR) est une loi de puissance, a commencé à changer vu qu'elle ne confirme pas aux études expérimentales; ainsi une déviation par rapport à la loi de puissance ait lieu.

II.2.2 Modèle de Plotkin

Une certaine déviation à l'autosimilarité a été soulignée par Plotkin (2000), celle-ci apparaît pour des superficies inférieures à 50 hectares de forêts tropicales. Pour remplacer le modèle autosimilaire strict, il a proposé un modèle exponentiel généralisant la loi de puissance basé sur la fonction de persistance spatiale $a(A)$, en tant qu'extension continue du paramètre de persistance spatiale a_i tel que : $a_i = \frac{S_i}{S_{i-1}}$ et i désignant l'indice de l'itération d'échantillonnage (en faisant zoom in). Il dérive ainsi un modèle canonique à deux paramètres, de persistance $a(A)$, en se basant sur la fonction d'erreur donnée par la distribution relative de Gauss et en utilisant les valeurs de persistance de données empiriques. Par conséquent, selon Plotkin (2000), la loi zone-espèces SAR est donnée par :

$$S = cA^z e^{-kA} \qquad \text{(II.1)}$$

Tel que c, z et k sont des constantes déterminées par $a(A)$.

Le modèle de Plotkin permet d'obtenir des résultats plus précis comparé aux autres méthodes précédentes. En effet, elle est entre 5 et 10 fois plus précise que la loi de puissance.

Plus tard, il a été souligné que l'autosimilarité est respectée uniquement à l'intérieur d'une certaine gamme intermédiaire d'échelles (Hubbell, 2001; Lomolino, 2000). Pour les petites échelles spatiales, la loi zone-espèces SAR ne suit pas une loi de puissance, elle est curviligne sur une échelle logarithmique (Plotkin et al., 2000) alors que pour les grandes échelles, la SAR subit une déviation vers le haut vers une pente limite d'unité (Durrett and Levin, 1996; Hubbell, 2001).

Ces écarts ont été indiqués par différentes études, comme l'étude de Hubbell (2001, 1997) dans sa théorie neutre de biodiversité (NTB) dans laquelle il montre que la SAR est généralement triphasée dans l'espace logarithmique. Ces trois phases peuvent être dérivées de simples considérations géométriques comme le montre Storch (2016).

II.2.3 La théorie neutre de biodiversité de Hubelle (NTB) :

La théorie neutre suppose que les perspectives de mort et de reproduction de chaque individu sont indépendantes de l'espèce à laquelle il appartient ou de celle de ses voisins (Hubbell, 2001) . Elle a été inspirée de la théorie neutre de la génétique des populations, selon laquelle, au sein d'une espèce, les perspectives de mort et de reproduction de chaque individu sont indépendantes de son génotype (Kimura, 1983).

D'après Hubelle et d'une vision empirique, la loi zone-espèces SAR est généralement triphasée dans l'espace logarithmique, de sorte qu'elle augmente fortement aux plus petites échelles, ralentit à des échelles intermédiaires et augmente de nouveau fortement à des échelles continentales (Storch, 2012).

II.2.4 Interprétation de Storch de la théorie neutre de biodiversité

II.2.4.1 La loi zone-espèces SAR à grande échelle (continentale) :

Storch a considéré que la SAR varie entre deux extrêmes : si toutes les espèces étaient partout, la SAR serait une fonction constante, c'est-à-dire que sa pente serait nulle (voir

Figure II.2).

En revanche, si chaque espèce n'occupait qu'un seul endroit (superficie unitaire), le nombre d'espèces serait proportionnel à la superficie et la pente de représentation logarithmique de la SAR serait de 1 (voir Figure II.3). Les situations réelles se situent quelque part entre les deux. Les pentes se situent donc entre zéro et un, et de plus, les grandes échelles contiennent les espèces les plus rares. C'est-à-dire que la proportion des aires de répartition des espèces qui sont plus petites que la superficie de l'échantillon, augmente également, impliquant une augmentation de la pente.

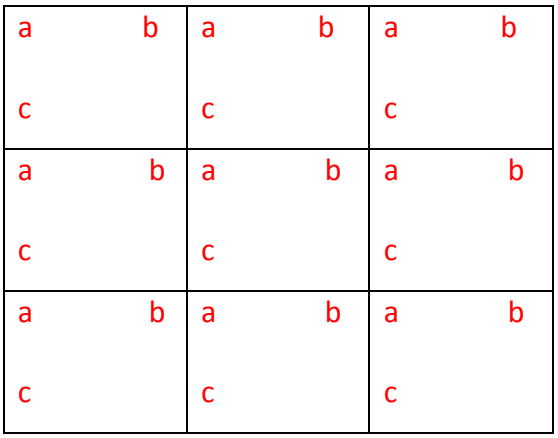


Figure II.2 : Si toutes les espèces sont partout c.à.d. distribuées de manière homogène, la SAR est une fonction constante, S(r)=3 ; S(2r) =3 ; S(3r) =3 (r=1); le nombre des espèces est toujours constant, donc z=0

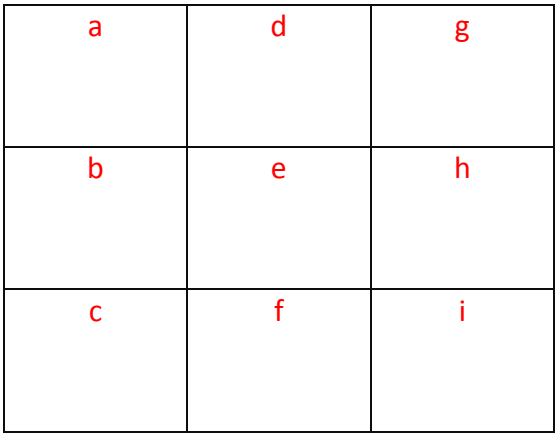


Figure II.3 : Si chaque espèce ne se trouve que dans un seul endroit alors, S(r) =1; S (2r) =4; S (3r) =9 (r=1); S variera linéairement avec l'aire de superficie dans l'espace logarithmique tel que z=1

II.2.4.2 La SAR aux échelles intermédiaires :

Storch (2016) a justifié que la SAR suit une loi de puissance, car il n'y a pas de fortes contraintes imposées à la forme du SAR aux échelles intermédiaires.

II.2.4.3 La SAR aux petites échelles :

Selon Storch, dans le plan d'échantillonnage imbriqué, le nombre total moyen d'individus de toutes les espèces (I) est proportionnel à la superficie. Par conséquent, la relation individu-zone (IAR) est une ligne droite avec une pente unité dans l'espace logarithmique. La loi zone-espèces SAR doit se situer sous l'IAR (car le nombre d'espèces est nécessairement inférieur au nombre d'individus) et avoir une pente plus faible, rappelons que la pente unité de SAR (z=1) signifie que chaque espèce ne se trouve qu'à un endroit (plus des explications dans la Figure II.4).

aa	b	cc	d	e
d	g	hh	i	j
k	lll	m		ppp
q	n	s	tt	v
w	x x x x		zz	o

Figure II.4 : comme si z=1, cela signifie que chaque espèce ne se trouve qu'à un endroit. Dans le cas de petites échelles, on remarque que la distribution arrive à s'approcher de ce cas, c.à.d. sa pente z tend vers 1

Par conséquent, Storch a remarqué qu'à mesure que la superficie diminue, les deux lignes se rapprochent progressivement l'une de l'autre, mais comme la SAR ne peut pas croiser l'IAR pour la raison déjà citée, la SAR doit être curviligne dans certaines petites zones avec une pente locale proche de 1, comme le montre la Figure II.5.

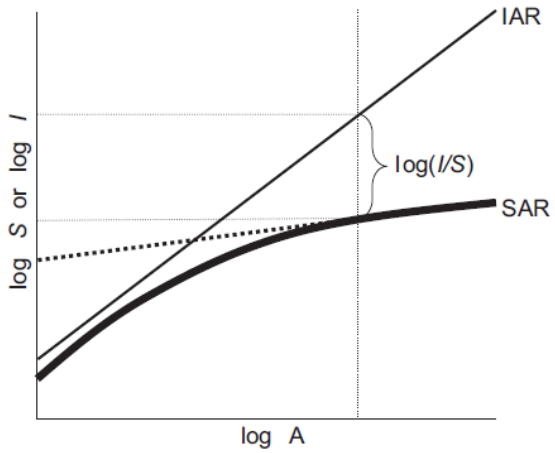


Figure II.5 : la curvilinéarité est plus claire lorsque la SAR et l'IAR sont près l'un de l'autre. La pente SAR locale (c.-à-d. sa dérivée dans une zone donnée) dépend de la distance log(I) – log(S), qui est égale à log(I/S)

Storch et ses collègues ont abordé en 2016 la théorie de ce modèle par une approche purement géométrique. Le concept général de la loi SAR pour les trois phases est montré dans la Figure II.6.

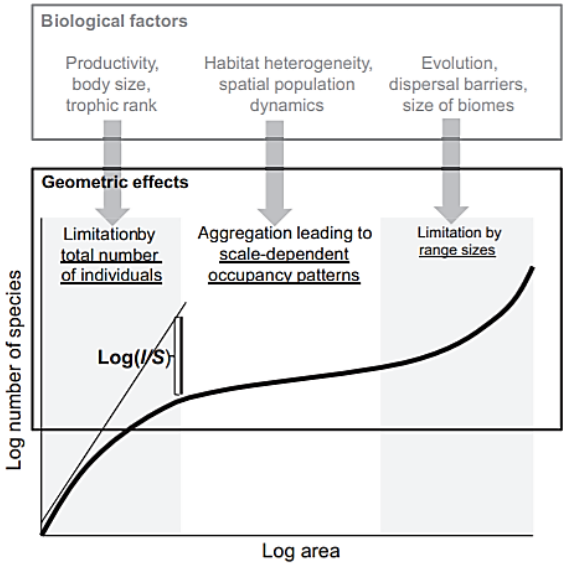


Figure II.6 : la théorie géométrique des SAR imbriqués. Chaque phase du SAR est contrainte par des effets géométriques particuliers (Storch, 2016)

II.2.5 Modèle de Sizling et Storch

Une autre interprétation géométrique de la SAR a été proposée par Sizling et Storch (2004, 2007) montrant que même si les espèces diffèrent dans leurs dimensions fractales, la loi SAR qui en résulte sera à peu près linéaire sur une échelle logarithmique en le justifiant du

fait que les distributions spatiales observées sont inévitablement limitées dans l'espace (effet des zones finies ou de taille finie), définissant en conséquence l'existence d'une zone de saturation dans la distribution de chaque espèce. $\mathrm{A_{sat}}$ est définie comme une zone minimale de la placette d'étude qui contient toujours l'espèce tel qu'au-delà de $\mathrm{A_{sat}}$, la probabilité d'occupation $\mathrm{p_{occ}}$ est égal à 1, impliquant une baisse de la pente de la SAR dans l'échelle logarithmique (voir Figure II.7).

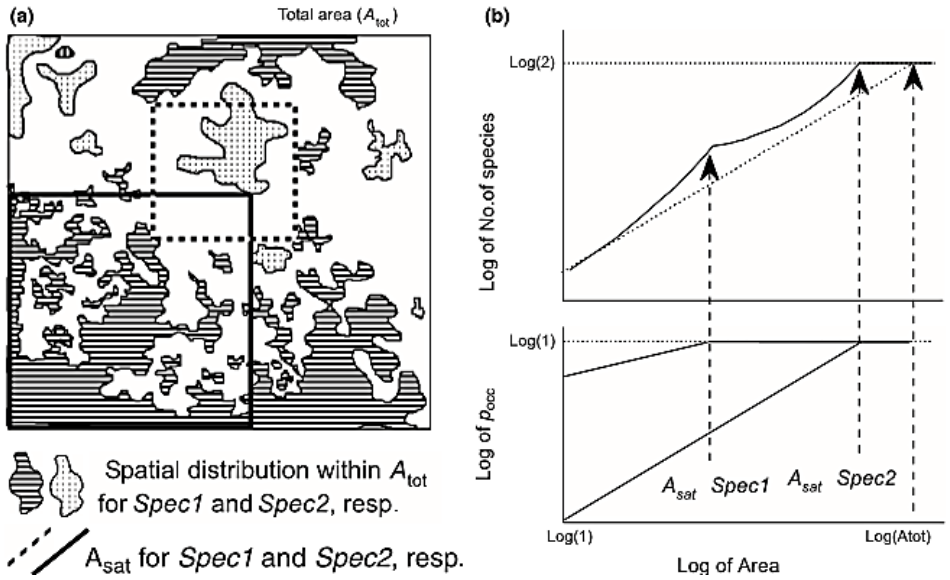


Figure II.7 : (a) une représentation géométrique de A_{sat} dans une zone rectangulaire A_{tot}. A_{sat}présente la superficie minimale d'une parcelle où les espèces respectives sont nécessairement présentes, n'importe où soit son emplacement, dont p_{occ} égale à 1 pour toutes les zones plus grandes que A_{sat}. A_{sat}se diffèrent nécessairement pour différentes espèces (ici Spec1 et Spec2). (b) L'effet de l'A_{sat} sur la SAR. La relation linéaire entre A et p_{occ} dans un espace logarithmique, caractérisant la distribution des espèces, n'est valable que jusqu'à A_{sat} où $p_{occ} = 1$ (ci-dessous). Ceci affecte la forme de SAR (ci-dessus en ligne pleine) résultant de la sommation du p_{occ} pour les deux espèces (Spec1 et Spec2). Le A_{sat} pousse la pente du SAR vers le bas en la faisant se rapprocher de la loi de puissance (Sizling and Storch, 2007).

La probabilité d'occupation $\mathrm{p_{occ,i}}$ pour une certaine espèce d'indice i, liée à la dimension fractale $\mathrm{D_f}$ est donnée par :

$$\mathrm{p_{occ,i}} \approx \pi_i A^{1-\frac{Df}{2}} \qquad \text{(II.2)}$$

Avec "π_i" est la probabilité d'occupation pour A =1.

Ainsi, le nombre moyen d'espèces peut être calculé comme ci-dessous :

$$\bar{S}(A) = \sum_{i=1}^{S_{tot}} p_{occi}\,(A) \qquad \text{(II.3)}$$

Où S_{tot} est le nombre total d'espèces considérées et p_{occ} est la probabilité d'occurrence des espèces i dans les placettes dont la superficie est A.

Considérons la loi zone-espèces SAR classique d'Arrhenius (1921), selon Sizling et Storch, la pente z pour une seule espèce est donnée par :

$$z_i = 1 - \frac{D_f}{2} \qquad \text{(II.4)}$$

En se basant sur ce modèle, Sizling et Storch (2004, 2007) ont proposé une nouvelle méthode pour estimer la forme de la SAR entre deux échelles fixes et différentes, en utilisant la distribution de fréquence des occupations des espèces.

Cependant, plusieurs approches physiques non géométriques de la SAR ont été proposées (Tjørve, 2009), comme la méthode de maximisation d'entropie (MaxEnt) de Harte appliquée aux écosystèmes, qui présente une approche thermodynamique de la biodiversité d'une façon fondamentale mettant en évidence la tendance des distributions dans certain système, vers l'équilibre (Harte, 2011; Harte et al., 2008; Harte et Newman, 2014).

II.2.6 La théorie de maximisation d'entropie MaxEnt

La méthode de maximisation d'entropie (MaxEnt) a été appliquée dans divers domaines scientifiques (Dewar, 2003; Elith et al., 2006; Laurent et Cai, 2007; Lorenz, 2003; Phillips et al., 2006; Schneidman et al., 2006; Shipley et al., 2006), dont l'écologie.

Le principe de maximisation d'entropie (MaxEnt), due à Jaynes (1982, 1979, 1965, 1957) et s'appuyant sur les travaux de Shannon (1948), repose sur le fait que la maximisation de l'entropie d'information fournit une base logique pour déduire la distribution de probabilité la moins biaisée (Harte et al., 2008). C'est-à-dire qu'elle permet de choisir parmi de nombreuses distributions de probabilité, celle qui répond aux contraintes imposées par le système, tout en maximisant par ailleurs l'incertitude, en rendant la distribution de probabilité la plus uniforme possible.

L'application de cette méthode à l'écologie a été effectuée par Harte et Newman (2014) connue sous le nom de METE (Theorie de Maximisation d'Entropie en Ecologie), afin de prédire l'évolution de la biodiversité en fonction de l'échelle étudiée en macroécologie comprenant la distribution abondance-espèces (SAD), la relation zone-espèces (SAR), la relation zone-endémique (EAR)... Nous nous intéressons ici uniquement à la relation zone-espèces (SAR).

Harte (2008) a considéré qu'un système écologique avec des variables d'état (le nombre total d'espèces S et d'individus N, les taux totaux de métabolisme ε étant dans certains groupes taxonomiques et dans certaines surfaces géographiques A), est analogue à un système thermodynamique, ayant des variables d'états comme la pression et le volume qui décrivent l'état macroscopique d'un système. Par conséquent, il a déduit les dérivations des variables d'états d'un écosystème en appliquant la méthode d'entropie maximale (MaxEnt) comme dans la formulation de la thermodynamique de Gibbs-Jaynes (Jaynes, 1965).

En effet, l'écosystème est considéré comme un ensemble canonique qui tend vers l'équilibre, un équilibre qui se réalise en maximisant l'entropie, c'est-à-dire qui correspond à une distribution de probabilité uniforme.

Deux procédures de calcul basées sur deux distributions de probabilité principales différentes forment le noyau de la théorie (Harte, 2011).

La première est la « fonction de structure d'écosystème » R (n, ε‖S0, N0, E0) qui forme une distribution conditionnelle conjointe sur l'abondance (n) et le taux métabolique (ε), telle qu'elle est discrète en abondance, et continue sur un taux d'énergie métabolique (Harte, 2011).

Ainsi, $\mathrm{Rd}\varepsilon$ est la probabilité que, si une espèce est sélectionnée dans le bassin d'espèces, elle ait une abondance n, et si un individu est sélectionné au hasard dans cette espèce, ses besoins en énergie métabolique soient situés dans l'intervalle $(\varepsilon, \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon)$.

La deuxième distribution de probabilité principale est la « distribution d'abondance spatiale au niveau de l'espèce » représentée par $\mathrm{P_A}^{(\mathrm{n_0})}(\mathrm{n})$ qui décrit l'agrégation spatiale des individus d'une espèce (Harte et al., 2008).

Si une espèce a n_0 individus dans une zone A_0, alors $P_A{}^{(n_0)}(n)$ sera la probabilité pour qu'elle ait n individus dans une zone A comprise dans A_0. Donc, les prédictions de variables d'états (A : aire, S : espèce, N : individu, E : énergie métabolique) dérivent des distributions de probabilité de R et P.

Avec R soumise aux contraintes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_0^{E_0} R(n,\varepsilon)d\varepsilon = 1 \tag{II.5}$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_0^{E_0} nR(n,\varepsilon)d\varepsilon = \frac{N_0}{S_0} \tag{II.6}$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_0^{E_0} n\varepsilon R(n,\varepsilon)d\varepsilon = \frac{E_0}{S_0} \tag{II.7}$$

L'équation (II.5) est une conséquence de condition de normalisation, (II.6) désigne la contrainte sur le nombre moyen d'individus par espèce et (II.7) exprime la contrainte sur les besoins en énergie totale moyenne de tous les individus d'une même espèce.

L'application de la condition de normalisation sur la distribution spatiale d'abondance $P_A{}^{(n_0)}(n)$ définie ci-dessus sur une échelle fixe, $\frac{A}{A_0}$ peut s'exprimer par :

$$\sum_{n=0}^{n_0} P_A{}^{(n_0)}(n) = 1 \tag{II.8}$$

En outre, une autre contrainte sur $P_A{}^{(n_0)}(n)$ s'applique sur le nombre total d'individus, n_0, à l'échelle la plus grande A_0, alors :

$$\sum_{n=0}^{n_0} nP_A{}^{(n_0)}(n) = n_0 \frac{A}{A_0} \tag{II.9}$$

On définit la distribution abondance-espèce (n) comme la fraction des espèces d'abondance n que l'on l'obtient en intégrant R sur toutes les valeurs possibles d'énergie.

$$\Phi(n) = \int_0^{E_0} R(n, \varepsilon) d\varepsilon \tag{II.10}$$

Comme le SAR peut être dérivé de la connaissance de ${P_A}^{(n_0)}(n)$ et de $\Phi(n)$, par conséquent, le nombre d'espèces prévu sur une parcelle de la zone A est le nombre total d'espèces S_0 en A_0 fois la somme sur les abondances, n_0, du produit de : la probabilité qu'une espèce avec une abondance n_0 dans A_0 soit présente sur la zone A $(1 - {P_A}^{(n_0)}(0))$, et la fraction des espèces d'abondance n_0, $\Phi(n_0)$ (Harte, 2011). Notons que la probabilité de présence est de 1 moins la probabilité d'absence, nous avons donc:

$$S(A) = S_0 \sum_{n=1}^{N_0} [1 - {P_A}^{(n_0)}(0)]\, \Phi(n_0) \tag{II.11}$$

À partir des équations de contrainte (II.5), (II.6) et (II.7), l'application de MaxEnt a pour résultat :

$$R(n, \varepsilon) = \frac{e^{-\lambda_1 n} e^{-\lambda_2 n \varepsilon}}{\sum_{n'=1}^{N_0} \int_0^{E_0} e^{-\lambda_1 n'} e^{-\lambda_2 n' \varepsilon'}\, d\varepsilon'} \tag{II.12}$$

Où les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange et sont connus dépendants des valeurs de N_0, E_0 et S_0 (voir annexe A.1 et A.2)

$$\lambda_2 = \frac{S_0}{E_0} \tag{II.13}$$

$$\lambda_1 \ln {\lambda_1}^{-1} = \frac{S_0}{N_0} \tag{II.14}$$

En utilisant le résultat de l'application de MaxEnt sur (II.6) :

$$\frac{S_0}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} e^{-\lambda_{\phi,0} n} = \sum_{n=1}^{N_0} \frac{e^{-\lambda_{\phi,0} n}}{n}$$

Et les approximations : $e^{-\lambda_2 n E_0} << 1$ et $e^{-\lambda_1} \approx 1 - \lambda_1$ ($\lambda_1 << 1$), en plus de l'équation (A.1.4) et de l'équation (II.10) nous trouvons :

$$\Phi(n) = \frac{1}{\ln(\lambda_1{}^{-1})}\frac{e^{-\lambda_1 n}}{n} \tag{II.15}$$

MaxEnt appliquée sur la distribution de l'abondance spatiale au niveau des espèces, implique :

$$P_A{}^{(n_0)}(n) = \frac{e^{-\lambda_p n}}{\sum_{k=0}^{n_0} e^{-\lambda_p k}} \tag{II.16}$$

Par approximation :

$$\sum_{n=1}^{N_0} e^{-\beta n} = \frac{e^{-\beta(N_0+1)}}{1-e^{-\beta}} \text{ et } e^{-\lambda_1} \approx 1-\lambda_1 \tag{II.17}$$

$$P_A{}^{(n_0)}(n) = \frac{e^{-\lambda_p}}{n_0+1} \tag{II.18}$$

Alors

$$P_A{}^{(n_0)}(0) = \frac{1}{n_0+1} \tag{II.19}$$

Par suite :

$$S(A) = S_0 \sum_{n_0=1}^{N_0} [1 - P_A{}^{(n_0)}(0)]\, \Phi(n_0)$$

$$S(A) = S_0 \sum_{n_0=1}^{N_0} \left[1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{n_0} e^{-\lambda_p n}}\right] \frac{1}{\ln(\lambda_1{}^{-1})}\frac{e^{-\lambda_1 n_0}}{n_0} \tag{II.20}$$

Parce que ici et dans ce qui suit, le multiplicateur de Lagrange, λ_1, sera évalué suivant différentes échelles, alors $\lambda_1 = \lambda_1(A)$.

On peut relier $S(A/2)$ la moyenne des valeurs de richesse de l'espèce dans un grand nombre de parcelles de la zone $A/2$ inclue dans A, à $S(A)$ celles qui sont trouvées en A, en utilisant l'approximation(II.17)et les équations (II.19) et (II.20):

$$\bar{S}(A/2) = \bar{S}(A) \sum_{n=1}^{N(A)} \frac{n}{n+1} \frac{1}{\ln(\lambda_1{}^{-1}(A))} \frac{e^{-\lambda_1(A)n}}{n} \quad \text{(II.21)}$$

Ici, par souci de simplicité, nous avons mis n au lieu de n_0. Notez également que nous avons écrit $\bar{S}(A)$ et pas S (A).

Tenons compte le résultat du l'application de MaxEnt sur (II.6) :

$$\frac{S_0}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} e^{-\lambda_{\phi,0}n} = \sum_{n=1}^{N_0} \frac{e^{-\lambda_{\phi,0}n}}{n}$$

Comme $\beta N_0 >> 1$ et $\beta << 1$, alors :

$$\sum_{n=1}^{N_0} \frac{e^{-\beta n}}{n} \approx \log\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

or

$$\sum_{n=1}^{N_0} e^{-\beta n} = \frac{e^{-\beta} - e^{-\beta(N_0+1)}}{1 - e^{-\beta}}$$

Donc on a :

$$\frac{S_0}{N_0} \approx \frac{1 - e^{-\beta}}{e^{-\beta} - e^{-\beta}(N_0 + 1)} \log\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

En insérant l'équation $\frac{S_0}{N_0} \approx \frac{1-e^{-\beta}}{e^{-\beta}-e^{-\beta}(N_0+1)} \log\left(\frac{1}{\beta}\right)$ et l'équation (II.21), on obtient :

$$\bar{S}(A/2) = \bar{S}(A)e^{-\lambda_1(A)} - N(A) \frac{1 - e^{-\lambda_1(A)}}{e^{-\lambda_1(A)} - e^{-\lambda_1(A)(N(A)+1)}} \left(1 - \frac{e^{-\lambda_1(A)\,N(A)}}{N(A)+1}\right) \quad \text{(II.22)}$$

Comme $N >> S >> 1$, λ_1>>1 et $e^{-\lambda_1 N}$<<1, par conséquent :

$$\bar{S}(A/2) \approx \bar{S}(A) - N(A)\lambda_1(A) \quad \text{(II.23)}$$

En utilisant l'équation (II.14), l'équation (II.23)peut être réécrite comme ci-dessous :

$$\bar{S}(A/2) \approx \bar{S}(A) - \frac{\bar{S}(A)}{\ln(\lambda_1{}^{-1}(A))} \tag{II.24}$$

Si nous exprimons maintenant la relation zone-espèces sous la forme $S(A) \sim A^z$, en considérant que z puisse dépendre de l'échelle, nous pourrons écrire :

$$\bar{S}(A) = 2^{z(A)}\bar{S}(A/2) \tag{II.25}$$

On obtient ainsi :

$$z(A) \approx \frac{\ln\left(\frac{\ln(1/\lambda_1(A))}{\ln\left(\frac{1}{\lambda_1(A)}\right)-1}\right)}{\ln(2)} \tag{II.26}$$

Si λ_1 est suffisamment petite, alors $\ln(1/\lambda_1) >> 1$ et l'équation (II.26) pourra être simplifiée :

$$z(A) \approx \frac{1}{\ln(2)\ .\ \ln\left(\frac{1}{\lambda_1(A)}\right)} \tag{II.27}$$

Pour caractériser la forme de la SAR, Harte a adopté deux mesures qui peuvent être calculées à chaque échelle à partir de la théorie et des données SAR : la pente locale $z(A) = \frac{d\ln(S(A))}{d\ln(A)}$, et la courbure locale, $\eta(A)$, de $\log(S)$ en fonction de $\log(A)$, définie d'une manière standard comme ceci :

$$\eta(A) = \frac{\left(\frac{d^2\ln(S(A))}{d\ln(A)^2}\right)}{(1+z^2(A))^{3/2}} \tag{II.28}$$

Il est clair que la pente du $S = f(A)$ est une fonction de N/S uniquement, et donc de la surface A, c.à.d. que seul le rapport de N_0/S_0 gère $z(A)$(Harte et al., 2008) (voir Figure II.8).

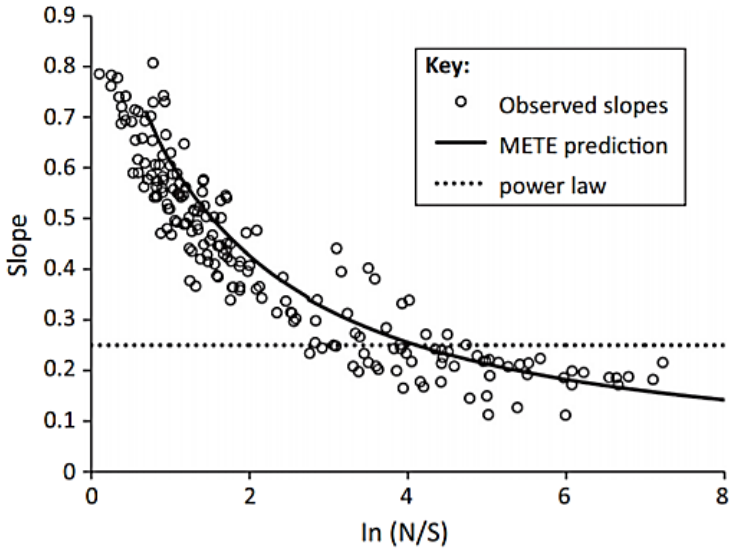


Figure II.8 : La relation zone-espèces prédite par la théorie METE : les valeurs prédites et observées de la pente locale de SAR en fonction de la valeur locale du rapport N/S entre l'abondance et la richesse des espèces, donc de la surface A. La ligne horizontale à la marque correspond à la loi de puissance souvent supposée de SAR avec une pente de 0,25 (Harte and Kitzes, 2015)

La valeur absolue de la courbure diminue dans cette limite. Ainsi, l'ajustement en ligne droite sur les échelles logarithmiques s'améliore à mesure que ce rapport augmente (Harte, 2011) (voir Figure II.9).

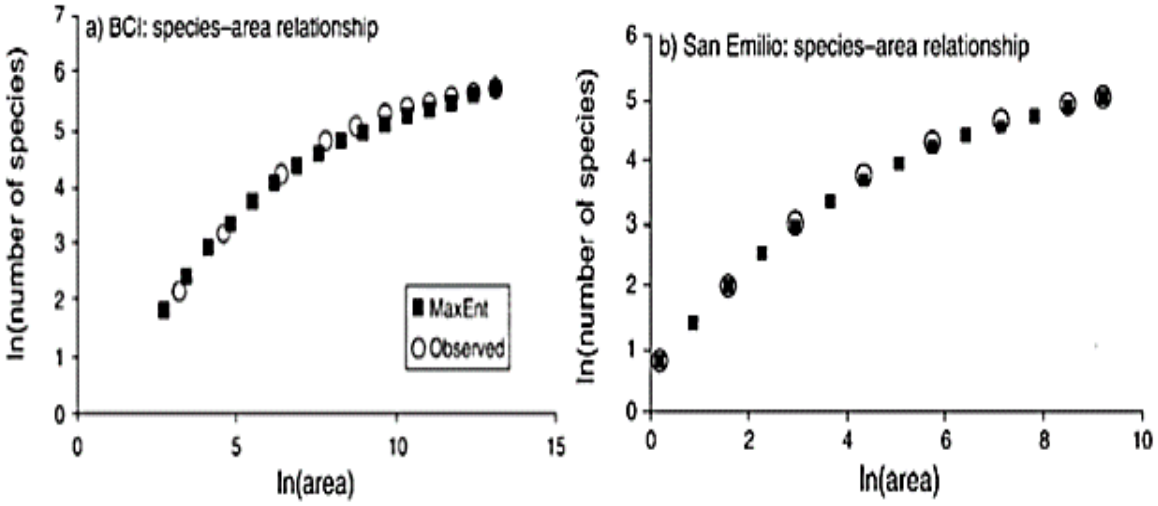


Figure II.9 : relation zone-espèces observée et prédite par MaxEnt pour deux ensembles de données sur la végétation : (a) Barro Colorado, (b) San Emilio. L'ajustement de la courbure en ligne droite s'améliore avec l'augmentation de la surface

D'autre part, Sizling et al. (2011) ont montré une interprétation géométrique de cette dépendance et en même temps que cette dépendance ne peut pas être universelle à travers les taxons : si elle s'applique à un taxon composé de deux sous-ensembles d'espèces

et aussi à l'un de ses sous-ensembles, elle ne pourra s'appliquer simultanément à l'autre sous-ensemble.

Par ailleurs, lorsque S_0/N_0 diminue et la distribution $\Phi(n)$, est proche d'une série géométrique pure, la SAR prédite tend vers une loi de puissance (Harte, 2011).

Cependant, des écarts importants parfois observés sont notés dans les écosystèmes subissant des changements écologiques ou évolutifs relativement rapides.

En particulier, au niveau de la SAR, Harte (2009) a pris en compte l'hétérogénéité de la superficie de l'environnement, en considérant des endroits non viables (rocheux) et a donc suggéré que l'hétérogénéité à grande échelle puisse constituer une contrainte supplémentaire dans les applications MaxEnt en macro-écologie.

D'autre part, l'application de la METE à la prévision de la loi zone-espèces SAR peut-être de manière récursive ou non récursive, c.à.d. soit le nombre des espèces à différentes échelles est obtenu en divisant ou en doublant successivement la superficie (Harte et al., 2009), soit il est obtenu directement par la mesure expérimentale (Harte et al., 2008). De plus, comme la SAR obtenue par la METE dérive de la distribution d'abondance des espèces (SAD), la SAR peut être prédite à partir de N et S ou bien à partir de la distribution empirique utilisée. Donc, l'application de la METE pour l'estimation de la SAR peut aussi être effectuée par l'utilisation d'une distribution de l'abondance théorique ou observée des espèces (SAD).

McGlinn (2013) a suggéré que la meilleure approche pour mesurer la diversité utilisant la METE consiste à utiliser une combinaison d'échelle non récursive et une distribution théorique de l'abondance, ceci permet avec une connaissance de la richesse en espèces et de l'abondance totale à une seule échelle, de prédire la SAR sur une large gamme d'échelles spatiales.

II.2.7 Modèle de fractales généralisées

Dans la nature, l'écart réaliste de la loi de puissance observée a mis en évidence le besoin de généraliser le comportement fractal gérant la SAR, comme Storch et ses collègues (2008) qui ont proposé un modèle de SAR et l'ont nommé "les fractales généralisées" considérant les distributions spatiales des espèces comme un processus hiérarchique aléatoire dans lequel les parcelles d'habitat originales ont été remplacées au hasard par des ensembles

de plus petites parcelles imbriquées à l'intérieur. Ils ont montré que l'idée d'agrégation des espèces à plusieurs échelles spatiales est la clé pour comprendre les modèles macros écologiques spatiaux, comme ceux qui visent à prédire l'abondance, la distribution spatiale et la variation de richesse des espèces dont les individus sont agrégés à de telles échelles est proche de la fractale.

Ils ont trouvé qu'une bonne façon de caractériser l'agrégation spatiale d'une seule espèce à de multiples échelles est d'utiliser la relation entre la superficie d'une placette et la probabilité de présence d'une espèce dans une placette de cette zone, « relation P-zone » (Harte et al., 2005; He et Gaston, 2000), ou entre la superficie d'une maille et la proportion des cellules occupées de cette taille (He et Condit, 2007; Kunin, 1998) qui est directement liée à la probabilité d'occurrence.

Étant donné que deux structures de même dimension peuvent varier considérablement dans leurs relations zone-P, Storch et al. (2008) ont adopté la proportion de la superficie occupée à un niveau d'agrégation particulier pour décrire le processus hiérarchique de l'agrégation des espèces, parce qu'« elle est biologiquement plus importante et mieux interprétable que la dimension fractale D ».

Cependant, les fractales généralisées modélisées représentent une approche universelle de toute agrégation multi-échelle, cherchant le réalisme biologique autant que possible.

Ils ont utilisé un paramètre principal, r ou D, tel que r l'occupation relative au sein d'un niveau d'agrégation, donné par :

$$\sum_{(i)} \left(\frac{l_i}{L}\right)^D = r \qquad \text{(II.29)}$$

Où « L » est la longueur du côté d'une pièce de forme carrée d'origine (voir Figure II.10), l_i est la longueur du i-ème sous-patch, et D est la dimension.

Storch et ses collègues ont effectué quatre simulations des modèles fractales généralisées d'agrégation des espèces avec des contraintes déterminant les configurations spatiales générées étant différentes.

Les distributions spatiales des espèces ont été modélisées comme la disposition spatiale des parcelles (par carrés) au niveau de l'agrégation finale. Ils étaient comme suite :

M1 - simulation du modèle fractal qui maintient D constant sur tous les niveaux d'agrégation (D a été tiré de la distribution observée des valeurs pour chaque espèce) ; et $r = 1$.

M2 - simulation avec r entièrement corrélé, c'est-à-dire r constant pour une espèce donnée à travers l'espace et les échelles spatiales. Le carré d'origine est remplacé par un ensemble de n carrés sans recouvrement de taille variable, dont la surface totale représentait une proportion r du carré.

M3 - simulation avec seulement une corrélation spatiale r. Ici, la procédure était la même que dans le cas précédent, mais $r$variait de façon aléatoire pour chaque niveau d'agrégation et avec D = 2.

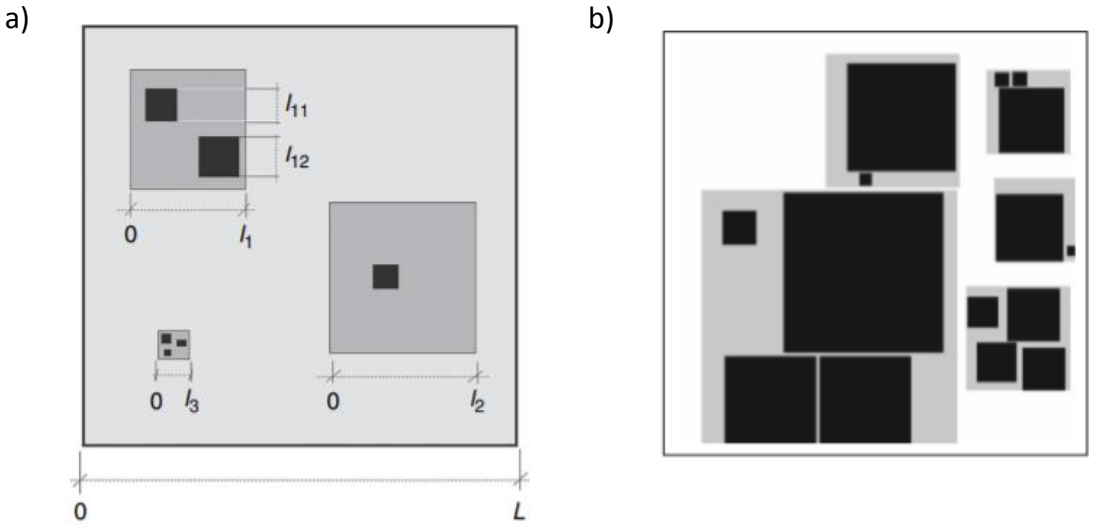


Figure II.10 : Fractale généralisée en tant que fractale hiérarchique aléatoire processus. (a) La plaque d'origine de forme carrée de longueur latérale L est remplacée par un ensemble de sous-patchs plus petits de longueur latérale li selon les zones et les numéros des sous-patchs dans la zone du patch original. Ce processus se poursuit pour plusieurs niveaux d'agrégation (b), ici le premier et le deuxième niveau d'agrégation (ci-dessus) et le troisième et le quatrième niveau d'agrégation (ci-dessous) sont indiqués pour une réalisation du modèle M2 dont r = 0,67.

M4 - simulation avec r. Dans ce cas, il n'y a pas du tout de corrélation. « r » variait non seulement d'un niveau d'agrégation à l'autre, mais aussi d'un niveau à l'autre au hasard pour chaque carré individuel, menant encore à D = 2.

II.2.8 Approche multifractale

Plusieurs modèles basés sur la géométrie fractale ont été proposés pour produire des modèles macroécologiques (par exemple Ritchie et Olff (2004) ; Harte et al. (1999)). De

plus, des modèles complexes de distribution spatiale des espèces sont analysés par une méthodologie fractale (Hastings et Sugihara, 1993), incluant une analyse multifractale qui utilise des informations beaucoup plus détaillées sur ces modèles pour obtenir leur description plus exacte comme les travaux de Borda-de-Água et al. (2012, 2002) .

Borda-de-Água et al. (2002) ont appliqué la multifractale sur la biodiversité spatiale et la distribution de l'abondance des espèces. Ils ont appliqué les deux méthodes multifractales : la méthode des moments et la méthode de l'histogramme qui mettent en évidence différents aspects de la théorie.

La méthode des moments : afin de caractériser un multifractal à l'aide de la méthode des moments, une fonction de partition, χ_q , se définit comme ci-dessous :

$$\chi_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} {p_i}^q \tag{II.30}$$

Où p_i est la proportion des points à l'intérieur de la case i et q est un nombre réel choisi (positif ou négatif).

Le rôle de q est de déterminer la sensibilité des équations (II.30) aux boîtes à fort ou faible abondance. Par analogie à l'application de méthode de comptage de boîte (box counting), le nombre des espèces suit une loi de puissance en fonction de surface et est donné tel que :

$$S(A) \propto \left(\frac{1}{A}\right)^{-z} \tag{II.31}$$

La fonction de partition, $\chi_q(A)$, au propos de SAR devient en matière de nombre relatif d'individus d'une espèce donnée i:

$$\chi_q(A) = \sum_{i=1}^{S(A)} {p_i}^q \tag{II.32}$$

D'où $p_i = n_i/N$ ou n_i le nombre d'individus de l'espèce i, et N est le nombre total d'individus de toutes les espèces.

La somme est effectuée pour toutes les espèces, $S(A)$, dans la zone A. Donc nous introduisons un spectre des exposants généralisés, z_q , tel que :

$$z_q = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-q} \frac{\log \sum_{i=1}^{S(A)} {p_i}^q}{\log A} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-q} \frac{\log \chi_q}{\log A} \qquad \text{(II.33)}$$

Le spectre des exposantes généralisées, z_q, a une courbe de forme sigmoïdale et est une fonction décroissante monotone en fonction de q (voir Figure II.11) (Grassberger, 1983).

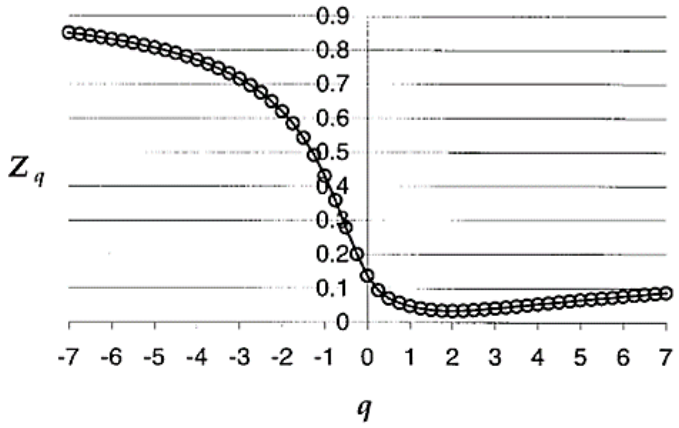


Figure II.11 : Le spectre des exposants généralisés

Cependant, la méthode des moments conduit à des relations fonctionnelles entre certains indices de diversité bien connus et le domaine A.

Pour $q = 0$, la forme familière de loi de puissance de SAR est récupérée :

$$z_0 = \lim_{A\to\infty} \frac{\log(S(A))}{\log A} \qquad \text{(II.34)}$$

Qui n'est autre que la définition d'une dimension fractale.

Pour $q = 1$, on obtient l'exposant z_1 tel que :

$$z_1 = \lim_{A\to\infty} \frac{-\sum_{i=1}^{S(A)} p_i \log p_i}{\log A} \qquad \text{(II.35)}$$

Dont l'indice de Shannon peut être reconnu dans le numérateur.

Pour $q = 2$, on obtient, par simple substitution de q par 2 :

$$z_1 = -\lim_{A\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{S(A)} {p_i}^2}{\log A} \tag{II.36}$$

Le numérateur correspond au logarithme de l'indice de Simpson.

Donc, selon Borda-de-Água et ses collègues, la forme de loi de puissance de la relation zone-espèces et les indices de diversité Shannon, Simpson, et Berger-Parker appartiennent à une série d'équations reliant le nombre des espèces, leur abondance et la zone par les moments de la fonction abondance-probabilité.

La méthode de l'histogramme : Cette méthode traite directement de la fonction de distribution au lieu des moments. Elle commence par la construction d'histogrammes de la distribution de l'abondance relative des espèces pour des zones de différentes tailles, suivie de quelques transformations appropriées.

La méthode de l'histogramme conduit au spectre des indices d'échelle, f(α), tel que α est l'exposant dit l'exposant de Holder, défini en tant que :

$$\alpha_i = -\frac{\log p_i}{\log A} \tag{II.37}$$

Où p_i est, comme précédemment, l'abondance relative des espèces i.

Pour obtenir le spectre f(α), la première étape consiste à déterminer, pour une zone donnée, A, combien d'espèces, S_α, ont le même exposant Holder, α. Ces valeurs sont ensuite regroupées pour produire un histogramme.

Le spectre des indices d'échelle, f(α), est alors défini comme :

$$f(\alpha) = \lim_{A\to\infty} \frac{\log(S_\alpha(A))}{\log A} \tag{II.38}$$

Borda-de-Água et ses collègues ont souligné que les distributions de l'abondance des espèces recueillies à différentes échelles spatiales peuvent s'effondrer en une seule courbe après une renormalisassions appropriée.

Dans un autre travail, Borda-de-Água et al. (2012) ont analysé les propriétés d'échelle des distributions de l'abondance des espèces en utilisant les moments du nombre d'individus transformés logarithmiquement. Ils ont constaté que les moments en fonction de la taille de la zone suivent une loi de puissance.

Il n'est pas encore très clair pourquoi la distribution des espèces devrait être proche de celle des fractales, ce qui détermine les paramètres des distributions de type fractales. Cependant, les analyses fractales représentent des outils analytiques et descriptifs utiles.

Dans le chapitre suivant, nous allons voir une nouvelle approche fractale et statistique intermittente essayant de décrire et de caractériser le phénomène de distribution des espèces dans l'espace.

Chapitre III. Loi multi-échelle de la distribution des espèces

La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou de dogmes immuables ; loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot, elle cherche à cerner la vérité par approximations successives.

Bertrand Russell

III.1 Introduction 89
III.2 L'intermittence dans la distribution spatiale des espèces 90
III.3 La dynamique des peaux entropiques 91
III.4 Recensement et procédure expérimentale 93
III.5 Sites étudiés 95
III.6 Représentation logarithmique de SAR 98
III.7 Mesure de l'exposant d'échelle 99
III.8 Les peaux entropiques appliquées sur la répartition des espèces 100
III.8.1 Dynamiques du corps et de crête des peaux entropiques 100
III.8.2 Équation analytique 101
III.9 Résultats 105
III.10 Calcul de la densité de potentiel évolutif β 106
III.11 Conclusion et discussion 106

III.1 Introduction

L'écosystème est une entité très active et vivante qui subit des interactions très importantes entre ses éléments, assurant leurs adaptations globales ainsi que leur continuité. En fait, la relation "interspécifique" entre une espèce et une autre, au sein des différentes communautés évolue à travers leurs interactions, en fonction de différentes contraintes telles que les besoins, le mode de nutrition, le type d'abri ainsi que les habitudes de l'espèce (Kronfeld-Schor et al., 2017). La diversité des populations est aussi importante pour élargir les interactions entre elles et pour leurs survies (Book et al., 2017; Winfree et al., 2015). On pourra donc dire que les relations entre les espèces sont proportionnelles à leur présence. En effet, un besoin énergétique métabolique au sein des organismes aurait lieu pour assurer l'évolution vers un état bien adapté, d'où une activité biologique de décomposition et de production se déroulant (voir Annexe B).

Du point de vue thermodynamique, ceci rappel le fait que les processus biologiques utilisent l'énergie capturée (l'éco-exergie) pour sortir de l'équilibre et aller vers la complexité, impliquant une organisation hiérarchique de l'écosystème. De fait, lorsque l'on parle de complexité (surtout au niveau spatial), celle-ci nous rappel l'entropie d'échelle.

Cependant, remarquons que l'aspect intermittent est présent au sein de la distribution des espèces dans un écosystème au vu de l'adaptation indispensable des espèces avec leur environnement (où elles subissent des contraintes spatiales et biologiques).

Comme la répartition des espèces ne suit pas une loi de puissance comme l'a été soulignée par la majorité des écologistes (Harte et al., 1999; Plotkin et al., 2000; Storch, 2012), il est important de trouver un autre modèle de loi zone-espèces (SAR) en adoptant une perspective nouvelle et avantageuse et en reconsidérant les différents aspects de ce phénomène. En effet, nous avons cherché à modéliser la distribution des espèces dans un écosystème en tenant compte des deux aspects : géométrique multi-échelle et statistique intermittente.

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur la loi de zone-espèces (SAR-species area relationship) caractérisant la biodiversité et les évolutions spatiales des espèces dans l'environnement.

Nous étudions la géométrie de la distribution des espèces dans l'écosystème, examinons le comportement fractal parabolique de la loi zone-espèces SAR en utilisant des outils de

la dynamique des peaux entropiques, proposée pour décrire la distribution spatiale au sein du phénomène de la turbulence développée à travers l'équation de diffusion pilotant l'entropie spatiale d'échelle, dont les dimensions fractales locales varient en fonction de l'échelle.

Pour tester le comportement fractal parabolique de la SAR et dans le but de le généraliser, nous avons disposé de données spatialement explicites présentées à travers sept parcelles de forêts à travers le monde dont la plupart sont tropicales et dont une d'elles appartient aux forêts de chêne-caryer en Amérique du nord (Tableau III.1). En effet, tous les ensembles de données sont des communautés végétales terrestres et ligneuses. Les forêts tropicales contiennent plus de la moitié des espèces du monde (Wilson et Peter, 1988) et présentent les communautés terrestres les plus génétiquement diversifiées sur la Terre (Sutton et al., 1983).

Les données des parcelles que nous avons analysées sont obtenues des deux sources différentes dont une (Oosting) a été publiée par l'Université de Duke, Durham, Caroline du Nord, aux États-Unis (McGlinn et al., 2013; Palmer et al., 2007) et les six restantes font partie d'un programme de recherche à long terme coordonné par le Centre de sciences des forêts tropicales du Smithsonian (Condit, 1998; Condit et al., 2012, 2004; Hubbell et al., 1999; Plotkin et al., 2000).

III.2 L'intermittence dans la distribution spatiale des espèces

La répartition spatiale des espèces n'est pas du tout homogène (voir Figure III.1). Elle dépend toujours des conditions écologiques qui lui imposent son extension spatiale. Cependant, le nombre d'espèces peut présenter des fluctuations spatiales par rapport au nombre moyen d'espèces supposées correspondre à une distribution homogène. Cela est dû à la présence d'un type d'habitat particulier adapté à une espèce sans les autres, et une combinaison de conditions (climatiques, géologiques, etc.) : différentes variantes sur une large gamme d'échelles de manière intermittente.

Ainsi, la distribution des espèces dans un écosystème semble avoir les mêmes caractéristiques géométriques multi-échelles et statistiques intermittentes que le phénomène de turbulence développée.

Pour cela, nous avons adopté la dynamique des peaux entropiques, proposée pour décrire la distribution spatiale intermittente au sein du phénomène de turbulence développée, comme outil pour caractériser la distribution des espèces dans un écosystème.

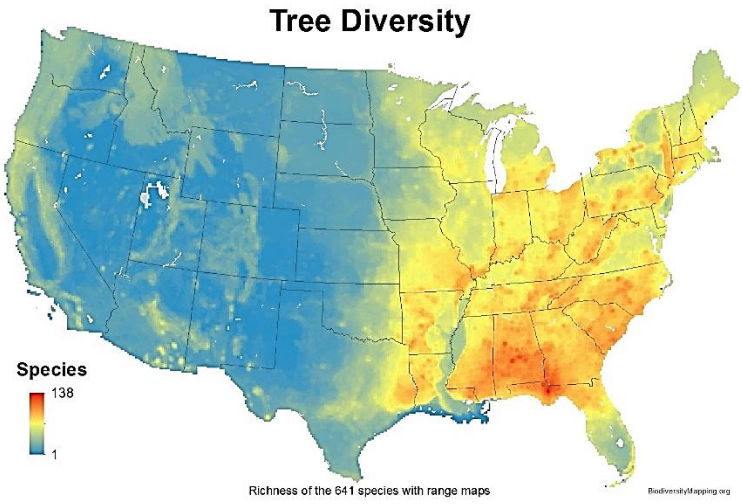


Figure III.1 : richesse spatiale des arbres aux États-Unis ("Trees in the USA," 2020)

III.3 La dynamique des peaux entropiques

Le phénomène d'intermittence est un phénomène dynamique corrélant les divers niveaux de fluctuations. Le modèle des peaux entropiques a été développé par Queiros-Condé (1999) afin de décrire l'intermittence en turbulence développée, et d'expliquer la déviation par rapport au comportement linéaire de Kolmogorov ($z_p = p/3$), associée à ce phénomène (Kolmogorov, 1941).

C'est une interprétation qui repose sur un couplage entre l'aspect géométrique fractale et l'aspect statistique. Cette liaison suppose l'existence d'une certaine hiérarchie de structures fractales corrélées, caractérisant la dynamique des niveaux de fluctuations.

D'abord, dans le but de caractériser la dynamique dans l'espace des fluctuations, on considère un champ fluctuant pour une certaine variable fluctuante x qui peut être n'importe quelle quantité physique, y compris le taux de vitesse ou de dissipation d'énergie comme dans le cas de la turbulence développée.

En déterminant la moyenne de la variable fluctuante $\langle x(r) \rangle$ pour une échelle donnée r, on

définit localement la valeur absolue de la fluctuation relativement à la moyenne :

$$\langle \delta x(r) \rangle = \langle \left| x - \langle x(r) \rangle \right| \rangle$$

Afin de quantifier et de distinguer les niveaux de fluctuations, on adopte un processus de seuillage, à travers un paramètre p (ordre de puissance de la fluctuation) en donnant un seuil de fluctuation et en éliminant toutes les fluctuations inférieures (Queiros-Conde et al., 2015a).

En effet, pour chaque niveau de fluctuation d'ordre p, est associé un champ fluctuant Ω_p inclus dans le champs initial Ω_0 ; le champs Ω_p représente une structure de dimension Δ_p. Ce champ Ω_p représente une structure, de dimension $\Delta_p$incluse dans une autre structure Ω_{p-dp} , de dimension Δ_{p-dp} d'une manière récurrente tel que $\Delta_{p-dp} > \Delta_p$, dans une disposition hiérarchique. Par évidence, le champ correspond au niveau de fluctuation inférieur $p = 0$, incluant tous les autres champs présentant des niveaux de fluctuation supérieurs : $\Omega_0 \supset \Omega_{p-dp} \supset \Omega_p$.

Alors, la fonction de structure désignant la valeur absolue de la fluctuation à un certain niveau p devient :

$$\langle \delta x(r)^p \rangle = \langle \left| x - \langle x(r) \rangle \right|^p \rangle \qquad \text{(III.1)}$$

Puisque l'ordre p varie de 0 jusqu'à l'infini, cela signifie que la turbulence se décrit comme une superposition de structures allant de celle qui est désordonnée montrant des fluctuations faibles (à $p = 0$), à celle qui est ordonnée (filaments) où les plus grandes fluctuations par rapport à la moyenne, se produisent (pour $p \to \infty$).

Pour $p = 0$, le support spatial du moment $\langle \delta x(r)^0 \rangle$ est l'extension spatiale entière, y compris la zone non intermittente, représentant la structure initiale Ω_0 d'une dimension fractale $\Delta_0 = d$.

Pour $p = 1$, la partie efficace du moment $\langle \delta x(r) \rangle$ se développe sur une structure fractale la moins désordonnée, de dimension Δ_1, où Δ_1 désigne la dimension fractale classique D_f, $\Delta_1 = D_f$. On appelle cette structure fractale Ω_1, le « corps d'émergence ». Enfin, le moment $\langle \delta x(r)^\infty \rangle$ obtenu pour $p \to \infty$, se répartit sur une structure fractale la plus désordonnée qu'on appelle la « crête de convergence » supposée de formes filamentaires de dimension

$\Delta_\infty = 1$ dans le cas d'une turbulence développée (grand nombre de Reynolds) (Queiros-Conde, 2000).

Cet aperçu nous a donné une idée générale sur le concept hiérarchique d'un dégradé de structures représentant les niveaux des fluctuations, désignant l'hypothèse centrale de la théorie de peaux entropiques.

Dans cet esprit, nous avons considéré la distribution spatiale des espèces comme une superposition de structures allant d'un niveau moins ordonné et plus dispersé, au niveau plus ordonné et plus amassé, disposée dans une hiérarchie de structures fractales corrélées, caractérisant la dynamique des niveaux de fluctuations.

Pour cela, nous avons utilisé le même concept et les mêmes outils des peaux entropiques utilisés pour caractériser l'intermittence, afin de décrire notre phénomène étudié en supposant que la distribution des espèces dans un écosystème montre une dynamique du corps et de crête comme le cas dans l'intermittence en turbulence développée.

III.4 Recensement et procédure expérimentale

Pour toutes les parcelles, chaque tige ligneuse autonome de plus de 1 cm de diamètre a été identifiée comme individu correspondant à une espèce. Nous incluons toutes ces tiges dans nos analyses, à l'exception des sites d'Oosting où le diamètre minimum adopté était de 20 mm. Le nombre de ces tiges et le nombre d'espèces parmi elles diffèrent fortement d'une parcelle à l'autre (voir Tableau III.1).

Tableau III.1 : caractéristiques géographiques et écologiques des écosystèmes échantillonnés

Nom de site	Type d'habitat	Pays	Ref	A_0 (ha)	N_0 (individu)	S_0 (espèce)	Mesure
BCI	Forêts tropicales	Panama	1,2,34,5,8	50	235,317	301	Végétales ligneuses diamètre minimal à hauteur de poitrine ≥1 cm
Lambir	Forêts tropicales	Malaisie	4,5	50	339,266	1,171	Tige ligneuse ≥1 cm de diamètre (arbre)
Pasoh	Forêts tropicales	Malaisie	4,5,8	50	320,903	817	Tige ligneuse ≥1 cm de diamètre (arbre)

Huai Kha Khaeng	Forêts tropicales	Thailand	4,5,8	50	96,072	251	Tige ligneuse ≥1 cm de diamètre (arbre)
Mudumalai	Forêts tropicales	Inde	4,5,8	50	17,432	68	Tige ligneuse ≥1 cm de diamètre (arbre)
Luquillo	Forêts tropicales	Île de Porto Rico	6,8	12.5	32,320	124	Végétales ligneuses diamètre minimal à hauteur de poitrine ≥10 mm
Oosting	Forêt de chênes-caryers	États-Unis	7,8	6.5536	8892	39	Tige ligneuse ≥20 mm de diamètre (arbre)

1. Condit (1998), 2. Hubbell et al. (1999), 3. Condit et al. (2012), 4. Plotkin et al. (2000).
5. Smithsonian Tropical Research Institute (https://stri.si.edu/), 6. Zimmerman et al. (1994).
7. Palmer et al. (2007), 8. McGlinn et al. (2013).

Nous avons tenté de choisir les années de recensement qui ont été les moins soumises à des perturbations auxquelles les écosystèmes peuvent être exposés.

Les recensements s'étaient effectués sur des zones bissectées. Nous avons donc limité nos ensembles de données aux zones carrées ou rectangulaires avec un rapport dimensionnel de 2. Nous avons ensuite calculé les résultats pour chacune des deux sous-parcelles et rapporté la moyenne (voir Figure III.2).

Puisque nous étudions l'approche fractale de la SAR, il semble plus utile d'analyser la variation du nombre d'espèces en fonction de la surface sous forme logarithmique.

La représentation logarithmique peut minimiser l'influence des valeurs de richesse très importantes et de plus, les écarts relatifs présentent plus d'intérêt pour l'évaluation de la SAR que les différences absolues.

Nous avons utilisé Matlab dans le traitement des données pour extraire les données analytiques recueillies des différentes sources (sous forme de courbes) et les traiter numériquement.

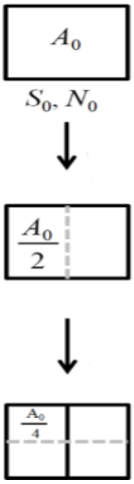


Figure III.2 : Procédure d'échantillonnage adopté. L'échantillonnage s'est effectué d'une manière récursive dont $A_{i+1} = \frac{A_i}{2}$ et A_0 est l'échelle intégrale. L'indice i indique l'itération d'échelle sur laquelle se déroule l'échantillonnage c.à.d le degré de zoom d'échelle.

III.5 Sites étudiés

Les parcelles étudiées sont situées dans différentes forêts à travers le monde où chacune a des caractéristiques écologiques dépendant de ses données topographiques. En effet, il serait utile d'introduire ces forêts et leurs caractéristiques naturelles comme suit :

- La réserve forestière de Pasoh en Malaisie péninsulaire : La réserve de Pasoh est située à 2° 59' de latitude nord et 102° 18' de longitude ouest, soit environ 140 km au sud-est de Kuala Lumpur, dans la partie intérieure de NegeriSembilan, au milieu d'une vaste étendue de terres plates et de crêtes doucement ondulées qui s'appuient sur le côté ouest de la Main Range. Son écologie avait été étudiée lors du Programme biologique international (Ashton, 1976).
- L'île de Barro Colorado (BCI) : elle est située dans le lac Gatun, un réservoir d'eau douce formé par la construction du canal de Panama, en 1914 (9º 10' N lat., 79º 51' O long.). La surface de l'île est un d'environ 1 616 ha, et son élévation maximale de 163 m au-dessus du niveau de la mer, et elle est une réserve naturelle depuis 1923 (Condit, 1998; Knight, 1975). Aucune exploitation forestière ou activité agricole n'a eu lieu depuis cette époque. La végétation potentielle de cette région du Panama est classée comme forêt tropicale humide (Knight, 1975), la région serait considérée comme une forêt saisonnière semi-verte.

- La réserve naturelle de Huai Kha Khaeng : le site d'étude est situé dans la réserve de la faune de Huai Kha Khaeng, à 15^{o} 40' de latitude nord et 99^{o}10' de longitude Est, dans la province d'Uthai Thani, dans le centre-ouest de la Thaïlande, à environ 300 km au nord-ouest de Bangkok. La faune couvre 2780 km2 du bassin versant de la rivière Huai Kha Khaeng (Bunyavejchewin et al., 2001). Le climat est de nature humide, avec une saison pluvieuse qui s'étend du mois de mai à mois d'octobre et une saison de la sécheresse qui s'étend de novembre à avril.
- Les collines de Lambir : l'étude a été réalisée sur la parcelle permanente de dynamique forestière de 52 ha du Parc national de collines de Lambir, Sarawak, Malaisie (nord-ouest de Bornéo ; 4^{o} 14' N, 114^{o} 2' E). La réserve a été établie en 1991-1992 (Arellano et al., 2019) et recensée en 1997, 2003 et 2008 suites au protocole standard de la Centre des sciences des forêts tropicales - Réseau Forest GEO (Condit, 1998). La forêt est une plaine forêt tropicale humide à feuilles persistantes, et est dominée par des arbres de la famille des Diptérocarpées (Arellano et al., 2019). Elle se trouve sur un terrain disséqué, allant de 109 à 240 m au-dessus du niveau de la mer.
- La réserve naturelle de Mudumalai : elle se trouve du côté nord et nord-ouest des Nilgiris (Montagnes bleues), Tamil Nadu, Inde, entre 11^{o} 32'-11^{o} 43'N latitudes, 76^{o} 22' - 76^{o} 45' E longitudes et couvre une superficie de 321 km^{2}. Le terrain est collinaire dont l'altitude varie de 440 m à 1260 m au-dessus du niveau de la mer. Géologiquement parlant, les roches sont de gneiss péninsulaire. Les sols sont des loams sableux noirs et du loam rouge lourd. En matière de biodiversité et de répartition de la composition des espèces, le site est considéré comme unique en raison de sa topographie et de ses changements climatiques. Il existe quatre principaux types de végétation : les feuillus tropicaux humides, les feuillus tropicaux secs, fluviaux tropicale (riveraine) et tropicale australe le maquis épineux prévaut dans le sanctuaire (Reddy et al., 2008).
- La réserve de Luquillo : elle est située dans les montagnes de Luquillo du nord-est de Porto Rico à 18° 22' N, 65° 42' O, et est une réserve forestière tropicale, englobe cinq zones de vie subtropicales (humides, forêt humide et pluviale ; basse montagne humide et pluviale forêt), s'étend sur près de 1 000 m d'altitude (120 à 1074 m au-dessus du niveau de la mer), et mesure 11 331 ha . Elle est riche en biodiversité et

abrite à des milliers d'espèces indigènes, dont 150 espèces de fougères et 240 espèces d'arbres, telles que 23 ne se trouvent que dans la réserve (Kathleen A. et al., 2016).

- La zone naturelle d'Oosting : La zone naturelle d'Oosting a une surface environ 65 ha située à 35° 56' N, 79° 2' O, et appartient à la forêt de Duke dans le comté d'Orange, en Caroline du Nord, une des forêts de type chênes caryers dont elle est gérée par l'Université de Duke depuis le milieu des années 1940 et réservée au profit de la conservation et de la recherche non manipulatrice. L'altitude de cette zone varie entre 100 et 150 m au-dessus du niveau de la mer. Cette forêt de feuillus du Piémont de seconde venue est dominée par Liriodendron tulipifera (peuplier tulipe), Liquidambar styraciflua, plusieurs espèces de Quercus (principalement Q. rubra, Q. alba), plusieurs espèces de Carya, (principalement C. tomentosa), et deux espèces de Pinus (taeda, echinata) (Palmer and White, 1994). Les spécimens de référence sont déposés à l'Herbier de l'Université de Duke, Durham, Caroline du Nord, aux états unis.

Tous les écosystèmes étudiés sont montrés à travers le globe dans la Figure III.3

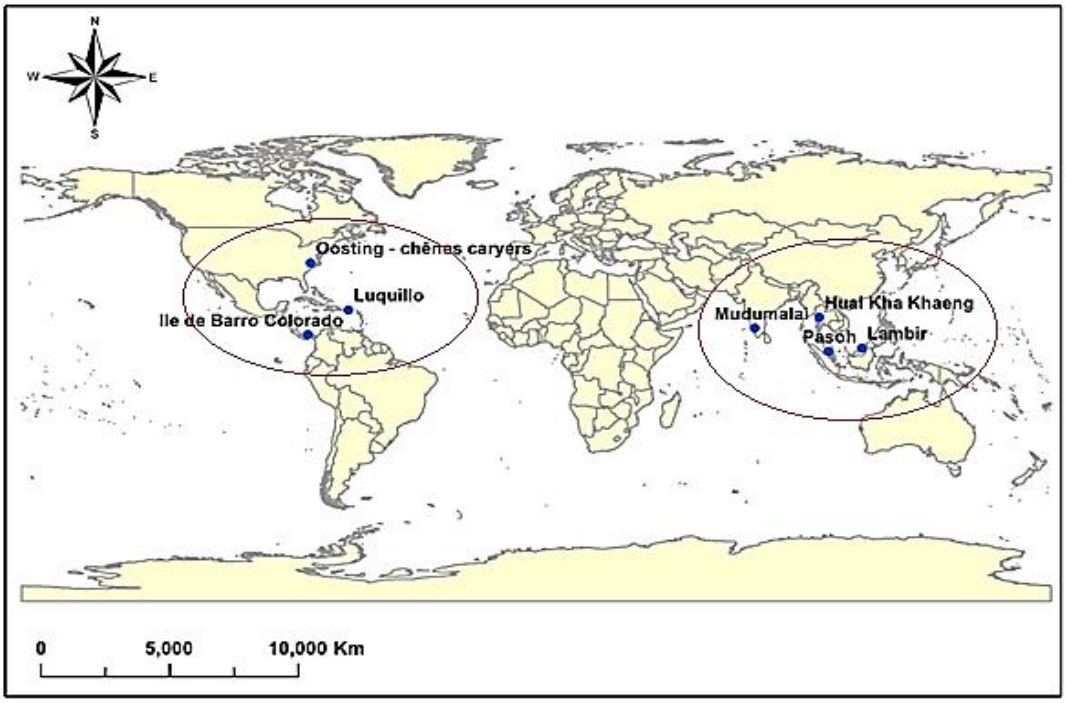


Figure III.3 : les écosystèmes étudiés à travers le globe : la plupart sont tropicales exclus l'Oosting appartenant aux forêts de chêne-caryer. Les forêts varient largement en termes de diversité des espèces et d'environnement

III.6 Représentation logarithmique de SAR

La représentation logarithmique permet d'étudier l'exposant z qui est dans ce cas la pente de variation du nombre des espèces N_s en fonction de la surface A présentée en coordonnées logarithmiques. Nous avons recueilli les courbes des différentes sources et unifié les unités (de surface) pour éviter toute confusion, comme le montrent les Figure III.4 et Figure III.5

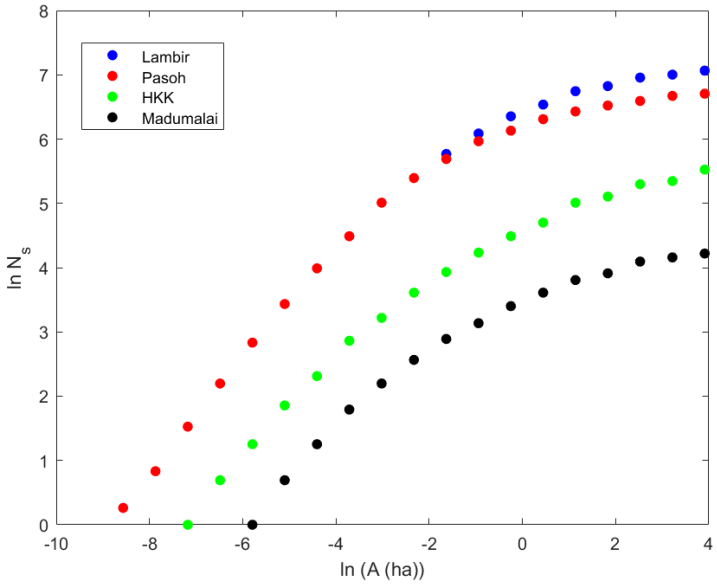


Figure III.4 : Nombre d'espèces en fonction de la surface des zones pour les parcelles étudiées (ha) de Lambir, Pasoh, HKK et Madumalai

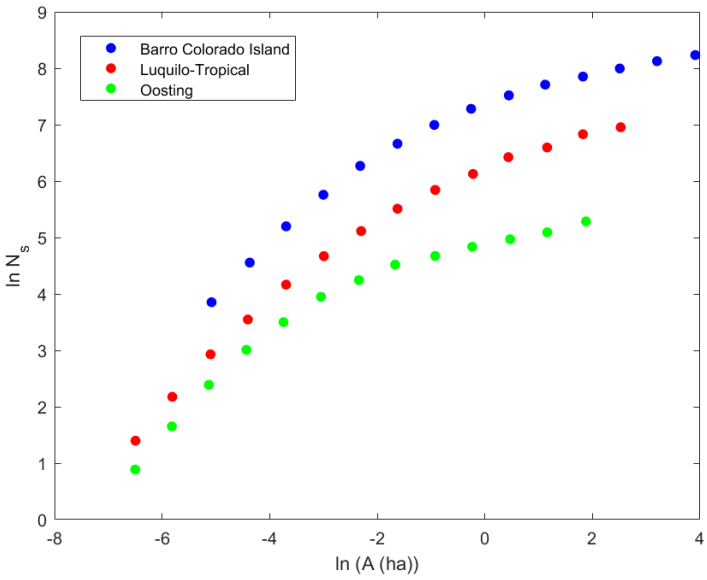


Figure III.5 : Nombre d'espèces en fonction de la surface des zones (ha) pour les parcelles de l'ile de Barro Colorado, Luquilo-tropical et Oosting

Il est clair que l'allure des données logarithmiques n'est pas linéaire, ceci indique que l'exposant d'échelle z varie à travers les échelles. La SAR n'est donc pas une fractale pure.

III.7 Mesure de l'exposant d'échelle

Nous remarquons que les pentes z des différentes courbes ne sont pas des constantes. Étant donné que l'exposant d'échelle z dépend de l'échelle, il est donc important d'étudier l'exposant d'échelle locale z_i.

Nous calculons l'exposant d'échelle locale z_i de la SAR, entre les échelles consécutives comme suit :

$$z_i = z(A_i) = \frac{\ln N_s(A_i) - \ln N_s(A_{i-1})}{\ln A_i - \ln A_{i-1}}$$

Le résultat est montré dans la Figure III.6.

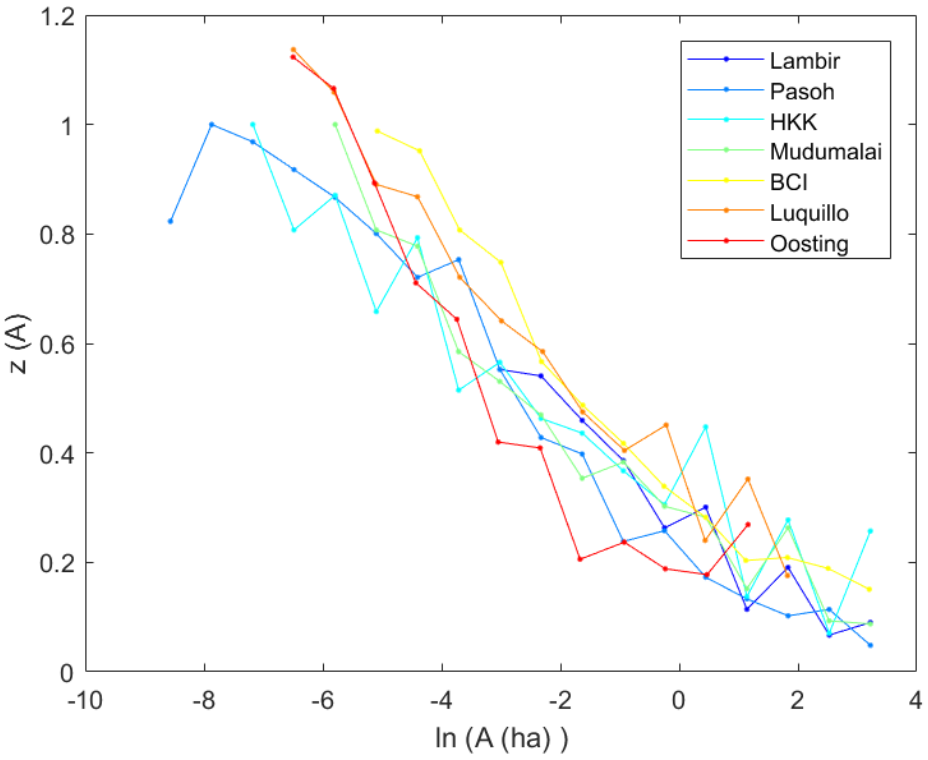


Figure III.6: Variation de pente z en fonction de surface de parcelles A (ha) pour tous les écosystèmes

Nous remarquons que les exposants d'échelles locaux pour les différents écosystèmes étudiés sont décroissants monotones avec l'échelle. Une indication géométrique mérite d'être suivie.

III.8 Les peaux entropiques appliquées sur la répartition des espèces

Nous avons observé des caractéristiques communes entre le phénomène de la répartition des espèces végétales dans un écosystème, exprimé par la loi zone-espèces SAR et de la turbulence développée, au niveau de la conception physique statistique et géométrique. Les deux phénomènes sont fractals et intermittents.

Pour cela, nous allons appliquer le modèle de peaux entropiques utilisé pour caractériser l'intermittence dans la turbulence développée dans le but d'étudier le phénomène de distribution des espèces dans un écosystème en gardant la même dynamique adoptée.

III.8.1 Dynamiques du corps et de crête des peaux entropiques

Dans le phénomène d'intermittence, selon le modèle de P.E, la fluctuation se développe sur une « zone spatiale efficace » entre les deux extrémités de la hiérarchie des structures : le corps et la crête. Ainsi, le corps présente le support géométrique de toute la gamme des fluctuations (structure moins ordonné) et la crête les zones les plus denses et amassées par rapport aux restes, où les plus fortes fluctuations existent (structure plus ordonnée).

En effet, revenons au phénomène de répartition des espèces, nous considérons l'extension spatiale de toute la population végétale dans un écosystème comme le corps du phénomène qui contient toute la gamme des fluctuations en biodiversité, la « bio-porté » des espèces de l'écosystème.

De même, nous considérons la crête comme les zones les plus riches et les plus denses en biodiversité, c'est-à-dire les différentes espèces où l'activité métabolique est la plus forte. La Figure III.7 montre une approche géostatistique entre le phénomène de turbulence développée et la distribution des espèces, en simulant la vorticité en turbulence où la vitesse est importante au niveau de la crête (également une fluctuation de vitesse importante) par les zones ayant la plus grande activité métabolique. Les crêtes pour les deux phénomènes indiqués dans la Figure III.7 sont entourées.

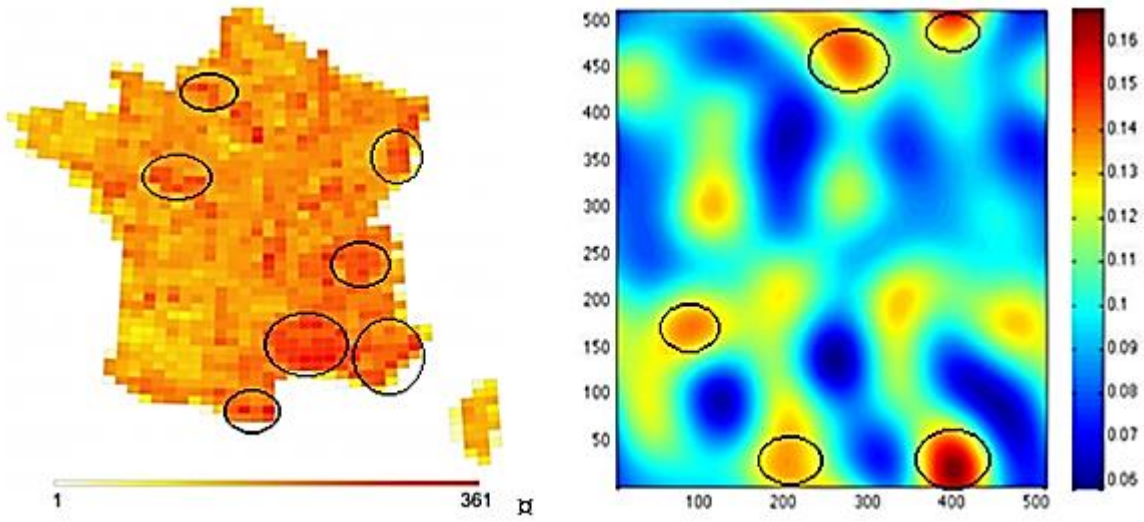


Figure III.7 : comparaison entre : la répartition spatiale de la biodiversité en France métropolitaine (Witté et Touroult, 2014) (à gauche) et le phénomène de turbulence développée en présentant le champ de vorticité potentielle (rotationnel de vitesse) qui correspond (Tort, 2010) (à droite)

Par conséquent, une analogie peut exister entre « la vitesse de l'activité métabolique », essentiellement l'activité productive et la vitesse d'un tourbillon. Il est de même pour l'énergie requise lors de cette activité (éco-exergie) et l'énergie dissipée de tourbillon.

En outre, nous avons supposé que la distribution spatiale du corps dans le phénomène de répartition des espèces soit fractale parabolique.

Notons que le choix de travailler sur des données surtout végétales sert largement l'hypothèse de régime stationnaire de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle pour les espèces (d'où la fractale parabolique). Les changements éventuels des végétaux au cours du temps pourraient être négligés (sans terme puits ou source).

D'autre part, nous supposons également que la distribution de crête est fractale pure.

III.8.2 Équation analytique

La procédure d'analyse d'échelle appliquée sur un objet à plusieurs échelles, telles qu'une répartition des espèces, donne accès à une mesure quantitative de sa complexité spatiale pour toute la gamme d'échelles. En utilisant l'analyse en échelle (méthode de comptage de boîte), la répartition semble se dérouler sur une échelle $]\, l_c; l_0]$, où l_c est l'échelle de coupure interne et l_0 l'échelle de coupure externe correspondant à l'échelle intégrale.

En effet, deux échelles ici sont importantes : l'échelle de la fenêtre du champ où l'objet est vu et considéré, et la résolution à laquelle cette analyse est effectuée. Prenons l'objet multi-échelle de la Figure III.8 et l'échelle donnée $\mathrm{l_i}$, avec $\mathrm{l_c} < \mathrm{l_i} < \mathrm{l_0}$. Considérons l'analyse en échelle de l'objet à une résolution $\mathrm{l_c}$ dans une fenêtre de champs de taille $\mathrm{l_i}$ (c'est-à-dire dans un seul disque de diamètre $\mathrm{l_i}$). Alors $\mathrm{N_{c,i}}$ est le nombre de recouvrement de l'objet à l'échelle de coupure $\mathrm{l_c}$ vu de l'échelle $\mathrm{l_i}$.

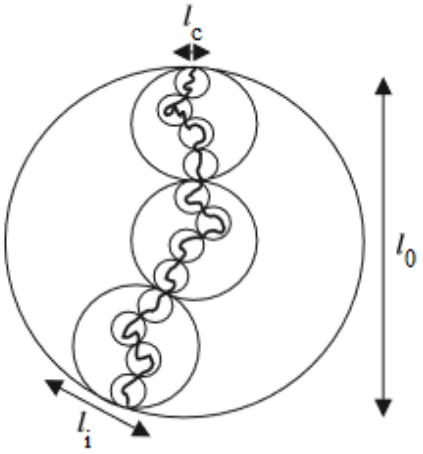


Figure III.8 : analyse fractale d'une répartition spatiale des espèces. On considère $l_i^{\,2} = A_i$

Dans notre distribution étudiée, tant que le corps est considéré être l'extension spatiale de toute la population végétale dans un écosystème, on a $\mathrm{N_{c,i}}$ le nombre de recouvrement du corps à l'échelle de coupure $\mathrm{A_c}$ vu de l'échelle $\mathrm{A_i}$. De même, en se basant sur la même hypothèse concernant la crête, on considère $\mathrm{N^{\infty}{}_{c,i}}$ le nombre de recouvrement de crête, à l'échelle de coupure $\mathrm{A_c}$, vu de l'échelle $\mathrm{A_i}$.

En supposant que la complexité à une échelle donnée $\mathrm{l_0}$ soit, en moyenne, homogène le long de la distribution, on trouve que $\mathrm{N_{c,0}} = \mathrm{N_{c,i}N_{i,0}}$. Cette relation est appelée propriété de « multiplicativité » de l'analyse en échelle.

En effet, l'échelle de coupure $\mathrm{A_c}$ désigne ici la surface de « la niche écologique » d'une espèce, c'est-à-dire la position (surface minimale) occupée par une espèce dans un écosystème. Pour cela, on considère que le nombre des espèces $\mathrm{N_s}$ à l'échelle de coupure $\mathrm{A_c}$ est égale à 1, $\mathrm{N_s(A_c)} = 1$.

Ainsi, nous nous sommes basés dans la prédiction du nombre des espèces vertes sur une hypothèse telle que le nombre des espèces à une échelle A_i est égale au rapport des nombre des recouvrements du corps et de crête, sur le champ des individus, à l'échelle de coupure A_c vu de l'échelle A_i , ainsi :

$$N_s(A_i) = \frac{N_{c,i}}{N^{\infty}{}_{c,i}} \qquad \text{(III.2)}$$

D'une autre façon, le nombre d'espèces $N_s(A_i)$ peut considérer comme le nombre possible des recouvrements de crête $N^{\infty}{}_{c,i}$ à l'échelle de coupure A_c vu de l'échelle A_i , dans la structure spatiale de répartition recouvert par $N_{c,i}$ nombre de boules. Ceci présente une relation essentielle pour étudier le comportement de la SAR.

Une autre présentation pourrait être utile afin de clarifier les notations :

$$N_s(A_i) = \frac{N_{c,i}}{N^{\infty}{}_{c,i}} = \frac{N_{[lc,li]}}{N^{\infty}{}_{[lc,li]}} = \frac{N_{[A_c,A_i]}}{N^{\infty}{}_{[A_c,A_i]}} \quad / A_i = {l_i}^2$$

En invoquant la multiplicativité de l'analyse en échelles :

$$N_{c,0} = N_{c,i} \times N_{i,0} \Rightarrow \frac{N_{c,0}}{N_{i,0}} = N_{c,i} \qquad \text{(III.3)}$$

De même ${N_{c,0}}^{\infty} = {N_{c,i}}^{\infty} \times {N_{i,0}}^{\infty} \Rightarrow \frac{{N_{c,0}}^{\infty}}{{N_{i,0}}^{\infty}} = {N_{c,i}}^{\infty}$

Alors : $$\frac{1}{{N_{c,i}}^{\infty}} = \frac{{N_{i,0}}^{\infty}}{{N_{c,0}}^{\infty}} \text{Avec} \quad N_{i,0} = {N_{i,0}}^{\infty} \qquad \text{(III.4)}$$

Les équations (III.3) et (III.4) dans (III.2), donnent :

$$N_s(A_i) = \frac{N_{c,0}}{N_{i,0}} \times \frac{{N_{i,0}}^{\infty}}{{N_{c,0}}^{\infty}} = \frac{N_{c,0}}{{N_{c,0}}^{\infty}} \times \frac{{N_{i,0}}^{\infty}}{N_{i,0}} \qquad \text{(III.5)}$$

Or ${N_{i,0}}^{\infty} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{D\infty} = \left(\frac{A_0}{A_i}\right)^{\frac{D\infty}{2}}$ et $N_{i,0} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{D_0+D_i}{2}} = \left(\frac{A_0}{A_i}\right)^{\frac{D_0+D_i}{4}}$ avec $A_i = {l_i}^2$

Puisque le corps et la crête sont respectivement fractals parabolique et pure (voir Chapitre I).

De même pour : ${N_{c,0}}^{\infty} = \left(\frac{A_0}{A_c}\right)^{\frac{D\infty}{2}}$ et $N_{c,0} = \left(\frac{A_0}{A_c}\right)^{\frac{D_0+D_c}{4}}$

Par suite, l'équation (III.5) donne : $N_s(A_i) = (\frac{A_0}{A_c})^{\frac{D_0+D_c}{4}-\frac{D_\infty}{2}} (\frac{A_i}{A_0})^{\frac{D_0+D_i}{4}-\frac{D_\infty}{2}}$

D'ou : $N_s(A_i) = (\frac{A_0}{A_c})^{\frac{(D_0-D_\infty)}{4}+\frac{(D_c-D_\infty)}{4}} (\frac{A_i}{A_0})^{\frac{(D_0-D_\infty)}{4}+\frac{(D_i-D_\infty)}{4}}$

On suppose : $$z_i = \frac{(D_i - D_\infty)}{2} \quad \text{(III.6)}$$

Alors : $$N_s(A_i) = (\frac{A_0}{A_c})^{\frac{(z_0+z_c)}{2}} (\frac{A_i}{A_0})^{\frac{(z_0+z_i)}{2}} \quad \text{(III.7)}$$

Nous avons supposé que la dimension locale du corps D_i varie linéairement avec l'échelle, telle que : $D_i = D_0 + \beta \ln\frac{l_i}{l_0}$, et donc, $D_i = D_0 + \frac{\beta}{2}\ln\frac{A_i}{A_0}$.

En la remplaçant dans l'équation (III.6):

$$z_i = \frac{1}{2}\left(D_0 + \frac{\beta}{2}\ln\frac{A_i}{A_0}\right) - \frac{D_\infty}{2} = \frac{(D_0 - D_\infty)}{2} + \frac{1}{4}\beta \ln(\frac{A_i}{A_0})$$

Ainsi,

$$z_i = z_0 + \frac{1}{4}\beta \ln(\frac{A_i}{A_0}) \qquad / \; z_0 = \frac{(D_0-D_\infty)}{2}$$

Supposons : $\beta' = \frac{\beta}{4}$ avec β est la densité de potentiel évolutif

On écrit : $$z_i = z_0 + \beta' \ln(\frac{A_i}{A_0}) \quad \text{(III.8)}$$

Ensuite, insérons l'équation (III.8) dans (III.7):

$$N_s(A_i) = (\frac{A_0}{A_c})^{\frac{(z_c+z_0)}{2}} (\frac{A_i}{A_0})^{z_0} (\frac{A_i}{A_0})^{\frac{\beta'}{2}\ln\frac{A_i}{A_0}}$$

$\frac{N_s(A_i)}{N_s(A_0)} = (\frac{A_i}{A_0})^{z_0} (\frac{A_i}{A_0})^{\frac{\beta'}{2}\ln(\frac{A_i}{A_0})}$, Puisque $N_s(A_0) = (\frac{A_0}{A_c})^{\frac{(z_c+z_0)}{2}}$

$$\frac{N_s(A_i)}{N_s(A_0)} = (\frac{A_i}{A_0})^{z_0} (\frac{A_i}{A_0})^{\frac{\beta'}{2}\ln(\frac{A_i}{A_0})}$$

Finalement, on obtient : $$\ln\frac{N_s(A_i)}{N_s(A_0)} = z_0\ln(\frac{A_i}{A_0}) + \frac{\beta'}{2}\ln^2(\frac{A_i}{A_0}) \quad \text{(III.9)}$$

III.9 Résultats

Une représentation graphique de $\ln\frac{N_S(A_i)}{N_S(A_0)}$ en fonction de $\ln^2(\frac{A_i}{A_0})$ est nécessaire pour examiner le comportement parabolique de la SAR normalisée et toutes les hypothèses supposées caractérisant la SAR, sur lesquelles se base la relation finale obtenue (III.9), et permettant de calculer les coefficients physiques significatifs (voir Figure III.9). Les représentations pour différents écosystèmes dévoilent une allure linéaire $\ln\frac{N_S(A_i)}{N_S(A_0)}$ en fonction de $\ln^2(\frac{A_i}{A_0})$ pour tous les écosystèmes étudiés, autrement dit $\ln\frac{N_S(A_i)}{N_S(A_0)}$ suit une loi parabolique en fonction de $\ln(\frac{A_i}{A_0})$.

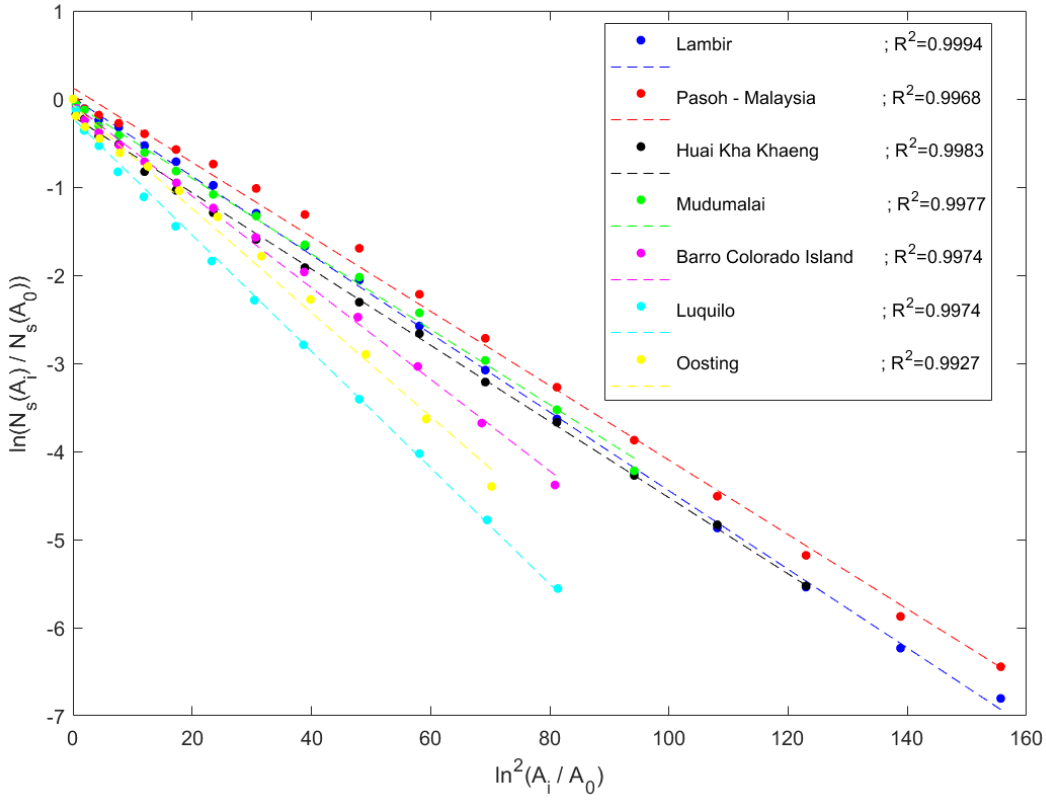


Figure III.9 : $ln\frac{N_S(A_i)}{N_S(A_0)}$ en fonction de $ln^2(\frac{A_i}{A_0})$, l'allure définit un comportement linéaire

Cette relation (III.9) est compatible avec $\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\right) = -\frac{\beta}{2}x^2 - \Delta_{[0,0]}\,x$ tel que $x = \ln\frac{r}{r_0}$ obtenue de l'équation(I.7) dans le Chapitre I. On peut donc conclure que la loi SAR (normalisée) est fractale parabolique.

III.10 Calcul de la densité de potentiel évolutif β

Cependant, puisque nous trouvons que la SAR suit une loi parabolique à travers les échelles, il semble utile de calculer la densité de potentiel évolutif β pour déterminer la nature de la « fractalité » parabolique : accélérée ou décélérée. Pour cela, nous utilisons le coefficients β' provenant de la valeur mesurée de la pente linéaire de $\ln\frac{N_S(A_i)}{N_S(A_0)}$ en fonction de $\ln^2(\frac{A_i}{A_0})$ avec $\beta' = \frac{\beta}{4}$ (d'après le calcul). Les différentes valeurs calculées sont données dans le Tableau III.2.

Tableau III.2 : Densité de potentiel évolutif β pour différents écosystèmes

Nom de site	Potentiel de perte ou gain évolutif $\boldsymbol{\beta}$
Lambir	-0,36
Pasoh	-0,34
Huai Kha Khaeng	-0,35
Mudumalai	-0,34
BCI	-0,42
Luquillo	-0,53
Oosting	-0,45

Revenons à l'équation de dimension fractale locale : $D_i = D_0 + \beta \ln\frac{l_i}{l_0}$. Puisque β est négatif, il est clair que la dimension fractale locale D_i augmente à travers les échelles et vice versa, c.à.d. D_i diminue avec l'échelle. On peut finalement conclure que la SAR suit une loi fractale parabolique décélérée où un gain évolutif a lieu (taux de remplissage de l'espace augmente lors de zoom).

III.11 Conclusion et discussion

Dans ce travail, nous avons proposé une approche géométrique et statistique du phénomène de répartition des espèces végétales dans un écosystème, présentée par la SAR, inspirée de la conception du phénomène d'intermittence dans une turbulence

développée, dont on a utilisé les outils et les propriétés physiques qui caractérisent ce phénomène. Pour cela, nous avons utilisé la dynamique de peaux entropiques qui décrit le phénomène d'intermittence.

En effet, nous avons trouvé que la répartition des espèces est bien décrite par le modèle des P.E tel que toutes nos hypothèses sont validées. Par conséquent, la loi zone-espèces SAR caractérise une dynamique intermittente possédant une hiérarchie de peaux entropiques qui s'étend entre un corps fractal parabolique correspondant à l'extension spatiale de la population végétale moins ordonnée et une crête fractale pure correspondant aux zones très actives métaboliquement et ordonnées.

Ceci indique que les statistiques d'intermittence peuvent se produire dans des phénomènes autres que la turbulence.

De plus, l'allure linéaire obtenue de $\ln\frac{N_s(A_i)}{N_s(A_0)}$ en fonction de $\ln^2(\frac{A_i}{A_0})$ pour tous les écosystèmes étudiés montre que la SAR est une loi parabolique en fonction de l'échelle A. En outre, puisque la densité de potentiel évolutif β est négative, on vérifie que la SAR est fractale parabolique décélérée (concave vers le bas), tant que la dimension locale D_i diminue linéairement à travers les échelles. Ce qui correspond au cas d'un gain évolutif.

D'autre part comme l'exposant local de la SAR z_i est lié linéairement à la dimension locale D_i ($z_i = \frac{(D_i - D_\infty)}{2}$), alors il possède théoriquement la même allure que D_i (D_∞ est constante vu que la crête est supposée fractale pure). Par suite, z_i est monotone décroissant en fonction de l'échelle, variant entre 0 et 1 (Harte, 2011; McGlinn et al., 2013; Plotkin et al., 2000). Deux écosystèmes font exception : Luquillo et Oosting, dont les valeurs maximales à plus petite échelle sont autour de 1,1. L'allure de z en fonction de l'échelle suggère un comportement linéaire correspondant à notre hypothèse.

Notons que ceci est compatible avec le postulat de Hubell affirmant que la SAR est généralement triphasée dans l'espace logarithmique, de sorte qu'elle augmente fortement aux échelles locales, puis ralentit à des échelles intermédiaires (Storch, 2012). Une diminution de pente à travers les échelles aura lieu.

Ainsi, notre travail intersecte l'approche géométrique de Storch et de ses collègues (2016) où l'exposant d'échelle z_i est très proche de 1 aux petites échelles et diminue en se rapprochant de 0 aux échelles intermédiaires : la SAR montre une concavité vers le bas ($\beta < 0$).

Une autre intersection a eu lieu avec la théorie thermodynamique de maximisation d'entropie MaxEnt appliquée aux écosystèmes se manifestant du fait que l'exposant local z_i diminue à travers les échelles. Cependant, la MaxEnt affirme une l'allure de z_i plutôt exponentielle tandis que dans notre cas nous trouvons une variation linéaire.

Remarquons d'autre part que les écosystèmes qui appartiennent à une même région géographique naturelle ont des valeurs de densité β très proches comme Lambir ,Pasoh, Huai Kha Khaeng et Mudumalai ayant β autour de -0.35 situés au Sud Est de l'Asie. Les autres BCI, Luquillo et Oosting ayant β autour de -0.47 sont situés en Amérique du Nord (voir Figure III.3).

Ceci indique que la densité de potentiel évolutif pourrait être considérée comme une caractéristique particulière d'une région écologique.

Dans le chapitre suivant, nous allons voir une approche fractale et statistique des phénomènes de distributions des individus dont les espèces pourraient en être un cas particulier.

Chapitre IV. Modèle fractal et intermittent de distribution des individus

« L'imagination est plus importante que le savoir»

-Einstein (1879 - 1955)

IV.1 Introduction 110
IV.2 Présentation de modèle de distribution 111
IV.3 Procédure expérimentale 113
IV.3.1 Problème de topologie 114
IV.3.2 Correction de bords de grille 114
IV.3.3 Mesure 115
IV.4 L'intermittence dans la distribution cantor 2D 117
IV.5 Les peaux entropiques : dynamiques de l'intermittence 119
IV.5.1 Géométrie des peaux entropiques 119
IV.5.2 Statistique de peaux entropiques 121
IV.5.3 Autosimilarité étendue dans la géométrie du cantor 2D 124
IV.6 Dynamiques des peaux entropiques appliqué sur la distribution cantor 2D 125
IV.6.1 Analyse en échelle : calcul de facteur de réversibilité géométrique γ_{geo} 127
IV.6.1.1 Mesure de dimension fractale de crête 127
IV.6.1.2 Mesure des dimensions du corps 135
IV.6.2 Analyse intermittente 138
IV.6.2.1 Mesure des exposants d'échelles 138
IV.6.2.2 Autosimilarité étendue en distribution cantor 2D 140
IV.6.2.3 L'écart à l'homogénéité 142
IV.6.2.4 Définition de la zone inertielle 145
IV.6.2.5 Effet de gamme d'échelle 146
IV.6.2.6 Calcul du facteur de réversibilité statistique γ_{stat} 149
IV.7 Résultats 150
IV.7.1 Déviation par rapport à l'homogénéité 150
IV.7.2 Dynamique du corps et de crête 152
IV.7.3 Égalité de facteur de réversibilité statistique γ_{stat} et l'autre géométrique γ_{geo} 153
IV.8 Conclusion 154

IV.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre III que le nombre des espèces à une échelle A_i est égale au rapport des extensions spatiales du corps et de crête sur le champ des individus ($N_s(A_i) = \frac{N_{c,i}}{N^{\infty}_{c,i}}$). Cependant, notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la répartition des individus et des espèces dans un espace donné et voir l'évolution de cette répartition quand la surface d'espace varie. Dans ce but, nous allons introduire un mécanisme d'agrégation des individus rapprochant de distribution des points sous forme du cantor 2D, en injectant des crêtes (zones très amassées). Chaque point présente un individu.

Cette géométrie nous permet d'étudier et de bien comprendre le phénomène de distribution spatiale des individus et des espèces, et aussi de développer un modèle le décrivant du point de vue géométrique fractale et statistique intermittente. Pour cela, nous avons utilisé la dynamique de peaux entropiques (P.E) proposée pour caractériser l'intermittence en turbulence développée, en mécanique de fluide.

En effet, plusieurs phénomènes de distributions semblent avoir les mêmes caractéristiques géométriques et statistiques intermittentes que le phénomène de turbulence développée. La distribution des individus et des espèces dans un écosystème en est un exemple (puisqu'elle n'est pas homogène en réalité). Le nombre de ces individus peut manifester des fluctuations spatiales par rapport au nombre moyen des individus, du fait de la présence d'un type d'habitat particulier adapté à une espèce sans les autres. Celui-ci dépend toujours d'une combinaison de conditions, dont certaines (comme le climat, la géologie, etc…) varient sur une large échelle de façon intermittente.(voir Figure IV.1)



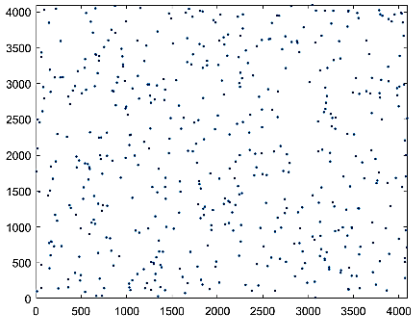
Figure IV.1 : vues aériennes de végétation forestière prise via Google Earth pour la réserve naturelle de Mudumalai. La répartition spatiale des végétations n'est pas homogène. Elles montrent des fluctuations

La déviation statistique et géométrique de l'homogénéité met en évidence le phénomène d'intermittence, par conséquent, une théorie sur l'intermittence des espèces semble nécessaire (autant temporelle que spatiale).

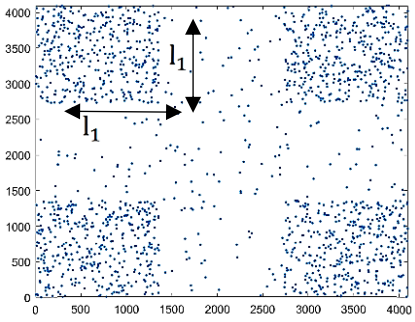
IV.2 Présentation de modèle de distribution

Afin de visualiser le phénomène d'intermittence, nous avons proposé une structure géométrique intermittente de distribution des points, prenant la forme d'un cantor à deux dimensions avec rapport de modifie interne (échelle du cantor θ) représentant le paramètre d'intermittence. Cette structure est construite de manière itérative en suivant les étapes détaillées ci-dessous :

1- Considérons un domaine de taille $l_0 \times l_0$ pixels dans lequel nous lançons de manière uniformément aléatoire un certain nombre de points $n^{(0)}$: l'itération 0.



2- Nous supprimons les zones du tirage initial de la même façon qu'un cantor à deux dimensions (les zones centrales), ces zones ayant des côtés de taille θ (rapport de modifie interne) multiplié par l'échelle entière l_0 ($l_1 = l_0\,\theta$). Ensuite, nous lançons le même nombre de points $n^{(0)}$ qu'à la précédente itération dans chaque zone non retirée (les quatre coins restants).



3- Considérons chaque sous-bloc carré généré et appliquons ce processus.

4- Itérer à l'infini.

Notons que l_i présente la taille des côtés des carrés générés à travers les échelles i.

Le modèle est montré dans les figures Figure IV.2 et Figure IV.3.

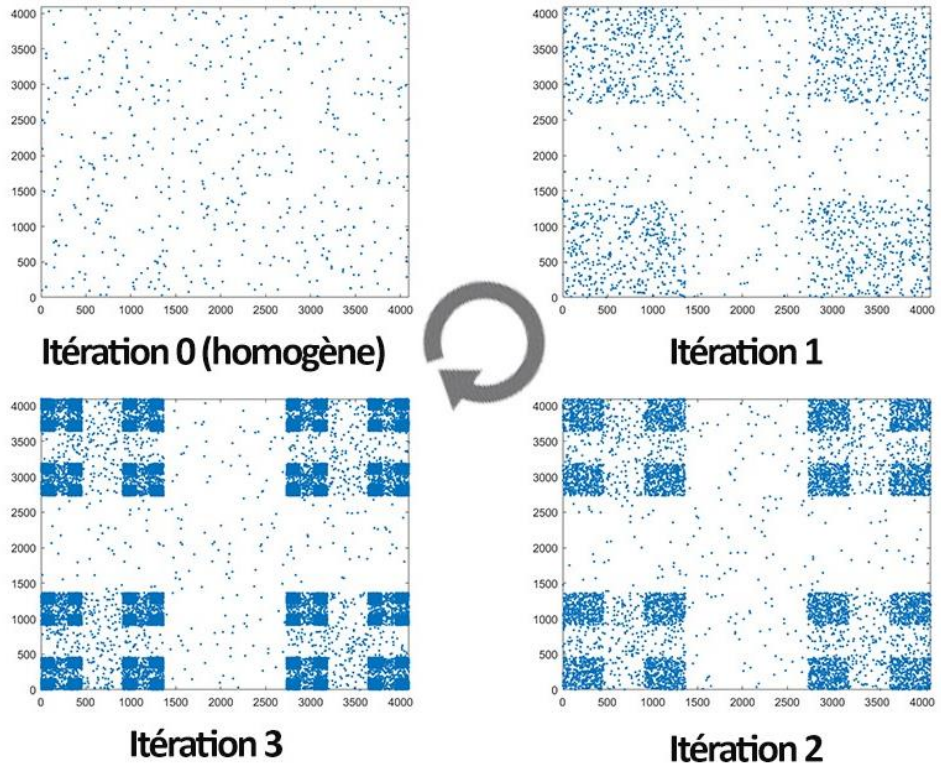


Figure IV.2 : modèle de distribution du cantor 2D à travers les itérations

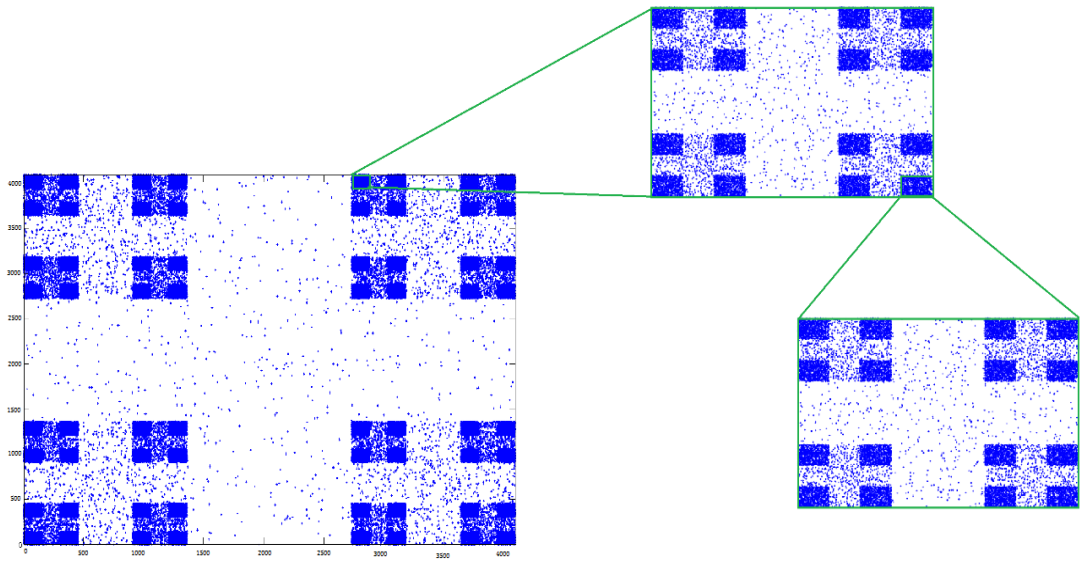


Figure IV.3 : distribution du cantor 2D dans un domaine de 4096×4096 *pixels : le processus s'est répété jusqu'à la 4ème itération.*

Généralement, nous travaillons dans un domaine de taille 4096×4096 pixels sauf lorsque l'on veut faire varier la taille l_0 pour connaitre son influence sur les mesures. Cette distribution a été comparée à une distribution homogène (aléatoire), mais équitablement répartie dans un domaine (boîte) de même taille.

Le facteur d'échelle θ désigne le rapport des côtés des carrés de deux itérations successives telle que : $\theta = \frac{l_{i+1}}{l_i}$. Elle montre un facteur fondamental reflétant le degré d'intermittence variant dans la gamme]0, 0.5] tel que si θ est relativement faible. La distribution subit des fortes fluctuations, et ainsi une intermittence considérable. Si θ est élevée (proche de 0.5), la distribution devient proche de l'homogénéité (voir Figure IV.4).

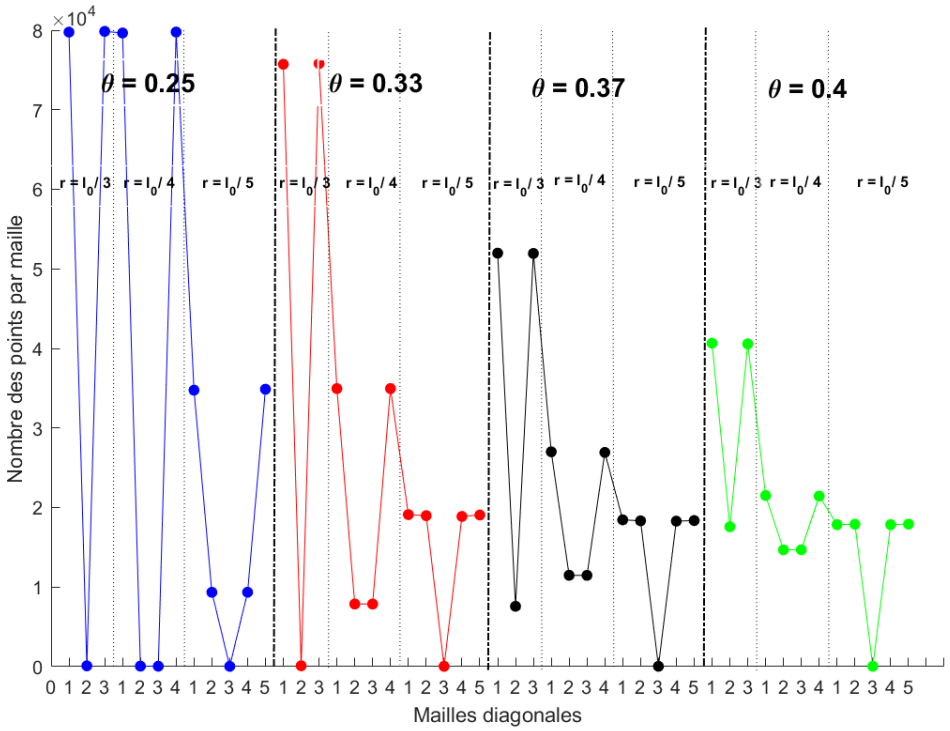


Figure IV.4 : la fluctuation statistique de distribution sur les mailles diagonales (nombre de mailles libellées : 1,2,3,4,5 dépend de l'échelle utilisée), pour différentes échelles du cantor θ et échelles r . Nous remarquons que quand θ augmente, les fluctuations diminuent donc la distribution tend vers l'homogénéité

IV.3 Procédure expérimentale

Nous cherchons à mesurer les fluctuations locales du nombre des points par rapport à la moyenne. Pour cela, nous recouvrons la boîte par une grille de la même taille, en faisant varier l'échelle r, c.à.d. la taille de maille élémentaire, afin d'effectuer les analyses requises.

Nous avons créé un programme MATLAB qui compte le nombre de points situés dans les différentes mailles et qui donne le résultat sous forme d'une matrice recouvrant toute la grille. Chaque élément de matrice présente le nombre de points situés dans la maille correspondante (voir Figure IV.5). On notera que nous avons utilisé lors de la réalisation de l'homogénéité, une fonction MATLAB (Random) suivant la loi aléatoire de Poisson.

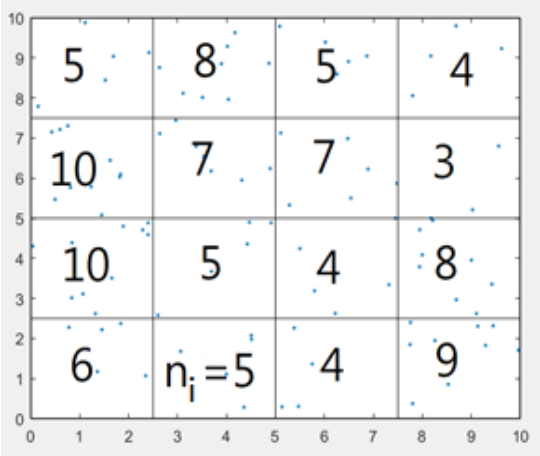


Figure IV.5 : représentation de grille sous forme de matrice :
chaque élément de matrice présente le nombre des points situés dans une maille

IV.3.1 Problème de topologie

Du fait des jets aléatoires (distribution uniforme), certains écarts dans le nombre de mailles touchées $N_F(r)$ peut exister. Cela produit des problèmes d'incertitude. Pour cela, nous avons remédié à ce problème en répétant les jets des points plusieurs fois dans le but de diminuer ces incertitudes, et en moyennant la mesure sur tous les jets.

IV.3.2 Correction de bords de grille

La distribution étudiée se situe dans une boîte de taille $l_0 \times l_0$ recouverte par une grille de maille de côté r. Si l'échelle r n'est pas un multiple de l_0, les extrémités des grilles et des domaines ne seraient pas compatibles (car le rapport l_0/r n'est pas un entier) (voir Figure IV.6). Dans ce cas, on a considéré les mailles résiduelles (correspondant aux échelles r' et marquées en rouge dans la Figure IV.6), comme les autres mailles régulières ayant des échelles normales r, même si on dépasse la taille maximale. Nous remarquons que cela n'a aucun effet sur nos analyses, qu'elles soient géométriques ou statistiques.

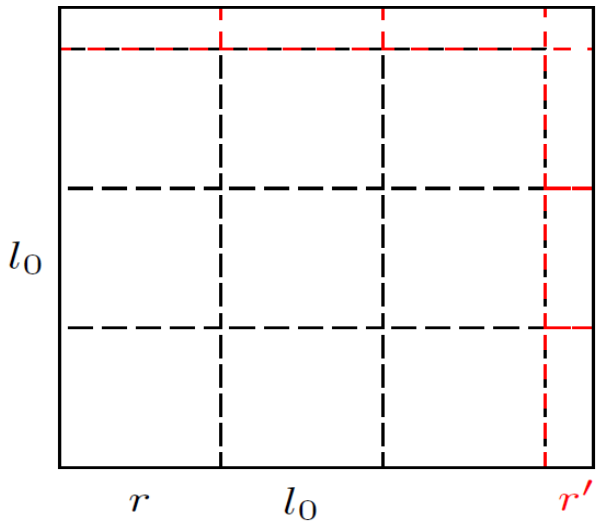


Figure IV.6 : Correction du bord de grille dans le cas où l'échelle r n'est pas un multiple de l_0 . L'échelle résiduelle r' est considérée telle que: $\frac{l_0}{r} = le\ nombre\ entier\ des\ mailles\ des\ cotés\ r + \frac{r'}{r}$

IV.3.3 Mesure

L'intérêt du modèle de distribution du cantor 2D est qu'il est très simple et plus efficace pour décrire et permettre une visualisation claire de la géométrie d'une structure intermittente subissant la dynamique du corps et de crête.

Afin de mesurer les fluctuations locales du nombre de points, nous recouvrons la boîte par une grille de la même taille, en faisant varier la taille r de maille élémentaire, explicitement l'échelle. On détermine le nombre moyen de points à une échelle donnée r comme :

$$< n_i(r) >= \frac{1}{N(r)} \sum_{i=1}^{N(r)} n_i$$

Où $N(r)$ est le nombre de mailles à l'échelle r et n_i , le nombre de points dans une maille i.

Nous définissons donc, les fonctions de structure (taux de fluctuation moyenne de nombre de points) à un niveau de fluctuation p :

$$< n_i(r)^p >= \frac{1}{N(r)} \sum_{i=1}^{N(r)} |n_i - < n_i(r) >|^p = < |n_i - < n_i(r) >|^p >$$

En considérant une cascade de structures de fluctuation à travers les échelles des peaux entropiques, les fonctions de structures suivent une loi d'échelles :

$$< n_i(r)^p > \sim r^{z_p} \qquad \text{(IV.1)}$$

En effet, plusieurs paramètres semblent influencer les analyses géométriques et statistiques : le facteur d'échelle θ, le facteur de peuplement a, ainsi que la distance entre les particules l_{*i}.

Le facteur de peuplement (a) présente le rapport du nombre de points par bloc $n_{b,i}$ et $n_{b,i+1}$, associé à deux itérations consécutives i et $i+1$ d'où $a = \frac{n_{b,i+1}}{n_{b,i}}$. Il désigne la concentration relative de points par itération (voir la Figure IV.7).

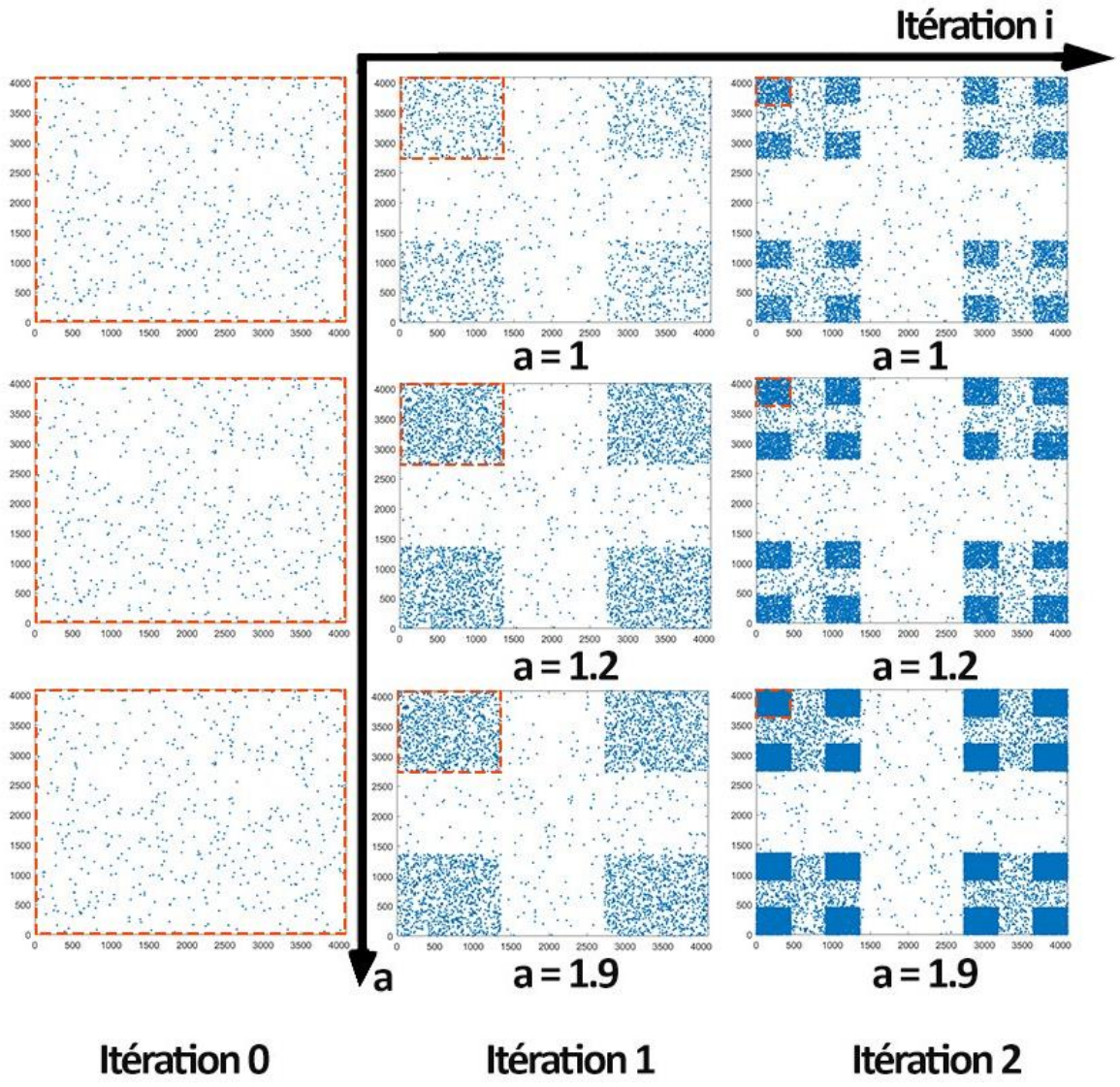


Figure IV.7 : distributions du cantor 2D pour différentes valeurs de facteur a à travers les itérations pour un facteur d'échelle $\theta = 1/3$

Dans la Figure IV.7, le facteur du peuplement a est le nombre de points dans un bloc à une certaine itération sur le nombre de points dans un bloc à l'itération précédente (marqués en rouge dans la figure).

Notons que lorsque le facteur a augmente, la concentration relative de points à travers les itérations augmente. Autrement dit, la concentration de points à travers les itérations croît plus rapidement.

D'autre part, nous définissons l_{*i}, la distance interparticulaire (topique) moyenne à une certaine itération i :

$$l_{*i} = \sqrt{\frac{{l_i}^2}{a\, n_{b,i}}} = \frac{l_i}{\sqrt{a\, n_{b,i}}} \qquad \text{(IV.2)}$$

$n_{b,i}$représente le nombre de points par bloc associé à l'itération i, $l_i$est la taille du bloc tel que $l_i = l_{i-1}\,\theta$, et a est le facteur de peuplement ($a = \frac{n_{b,i+1}}{n_{b,i}}$).

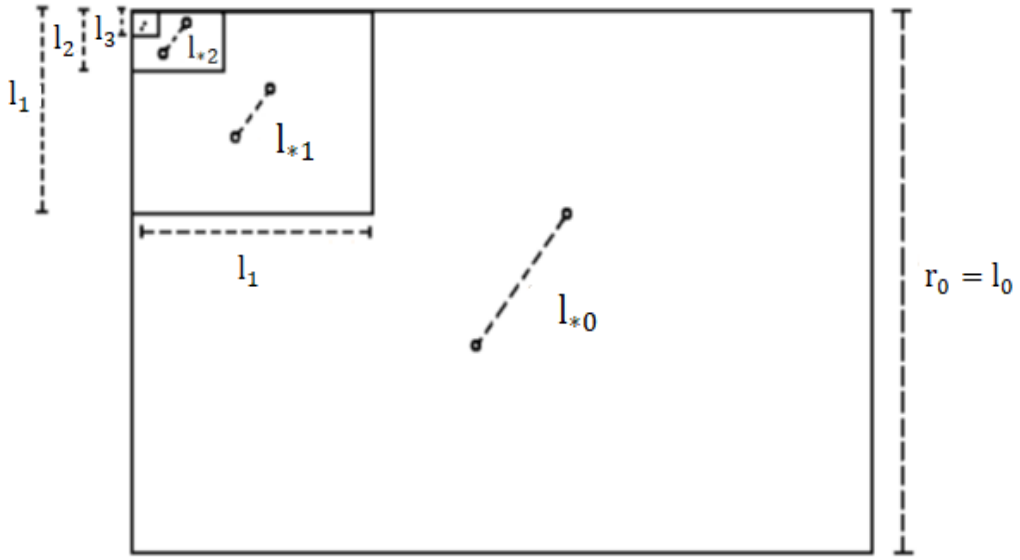


Figure IV.8 : La distance moyenne (échelle topique) entre les particules et la taille des blocs au cours des itérations

IV.4 L'intermittence dans la distribution cantor 2D

Il est clair que la distribution du cantor 2D n'est pas homogène. Des blocs de points amassés ont été générés à travers les itérations. Le nombre de points manifeste donc des fluctuations spatiales par rapport au nombre moyen de points. Ceci met en évidence le phénomène d'intermittence à propos de cette géométrie.

L'intensité de l'intermittence dépend explicitement de facteur d'échelle θ, gérant les tailles des blocs de points à travers les itérations. En effet, le facteur θ varie dans une gamme de

valeur de]0, 0.5] tel que quand θ est relativement faible et proche de 0, la distribution dévie fortement de l'homogénéité et présente de fortes fluctuations et ainsi une intermittence importante. En revanche, quand θ est élevée d'une manière proche de 0.5, la distribution devient moins amassée et se rapproche du cas homogène (voir Figure IV.9).

La mesure des fluctuations est déjà introduite dans le paragraphe précédent.

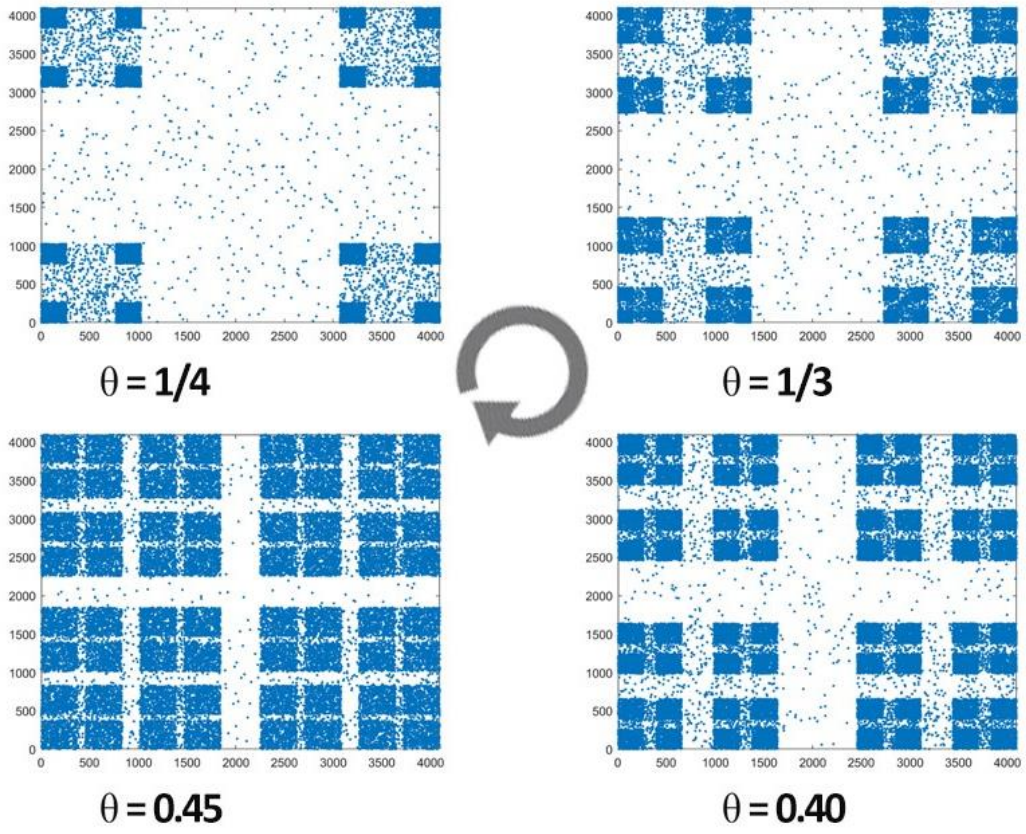


Figure IV.9 : distributions du cantor 2D dans la même boite et ayant le même nombre d'itérations pour différentes échelles du cantor θ

Afin de décrire cette déviation par rapport à l'homogénéité (l'intermittence), nous avons utilisé la dynamique des peaux entropiques, proposée pour caractériser la distribution spatiale intermittente du phénomène de turbulence développée.

IV.5 Les peaux entropiques : dynamiques de l'intermittence

IV.5.1 Géométrie des peaux entropiques

Rappelons que le concept de peaux entropiques suppose l'existence d'une hiérarchie de structures fractales corrélées qui caractérise la dynamique de niveaux de fluctuations.

Pour mettre en évidence la dynamique de corrélation des peaux entropiques, il faut quantifier l'extension spatiale de chaque peau obtenue par seuillage.

Pour cela, Queiros-condé a utilisé la notion d'entropie d'échelle qu'il l'a introduit, afin de trouver une relation déterministe entre les entropies caractérisant chacune des peaux .

L'extension spatiale de la structure Ω_p est définie par sa fraction volumique à l'échelle r :

$$f_p\,(r) \;=\; V_p\,(r) \,/\, V_0,$$

Où $V_p\,(r)$ est le volume occupé par Ω_p à l'échelle r dans un volume total correspondant à l'échelle intégrale $V_0 = {r_0}^d$.

En mathématiques, l'ensemble $V_p\,(r)$ est connu comme le volume de "l'ensemble de Minkowski" d'échelle r de Ω_p.

$N_p\,(r)$ est le nombre minimal de recouvrements d'épaisseur r pour couvrir l'ensemble Ω_p.

Le volume est alors donné par : $V_p\,(r) \;=\; N_p\,(r)\;\; r^d$.

Le nombre de configurations à l'échelle r pour un ensemble Ω_p est $w_p\,(r) \;=\; 1 \,/\, f_p(r)$.

On obtient l'entropie d'échelle comme suit :

$$S_p(r) = \ln\big(w(r)\big)$$

D'où : $$S_p(r) = \;(d \;-\; \Delta p)\ln(r/r_0) \qquad \text{(IV.3)}$$

On note que deux peaux successives Ω_p et Ω_{p+dp} ont deux valeurs d'entropie d'échelle différentes telle que la valeur d'entropie d'échelle augmente à travers le dégradé de structures, tandis que la dimension fractale diminue, (voir Figure IV.10).

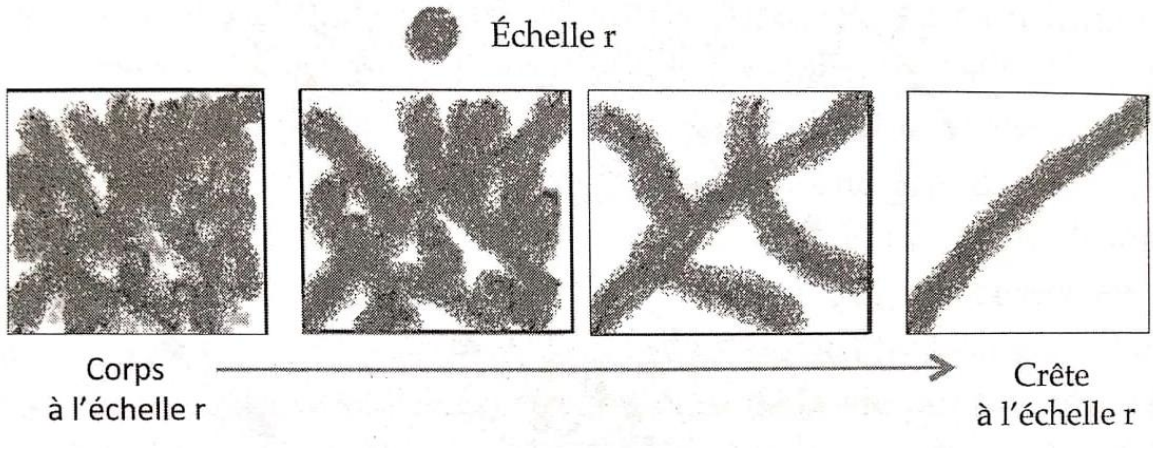


Figure IV.10 : quantification de l'extension spatiale de chaque peau obtenue par seuillage en recouvrant par des balles de diamètre r

Pour bien étudier les sauts d'entropie à travers les ordres des peaux, on introduit la différence d'entropies $\Delta S_p(r)$ entre peaux : $\Delta S_p(r) = S_p(r) - S_{p-dp}(r)$, qui peuvent être interprétés comme le flux d'entropie spatial.

Considérons le saut d'entropie $\Delta S_p(r) = S_p(r) - S_{p-dp}(r) = \Delta S_{p-in}(r)$ comme un flux d'entrée d'entropie d'échelle pour la structure Ω_p provenant des structures hiérarchiques inférieures et de la même façon $\Delta S_{p+dp}(r) = S_{p+dp}(r) - S_p(r) = \Delta S_{p-out}(r)$ désignant un flux d'entropie d'échelle de la structure Ω_p prévue dans les structures hiérarchiques supérieures .

Le modèle des peaux entropiques suppose l'existence d'une liaison entre les peaux successives de la hiérarchie exprimée par une relation linéaire :

$$\Delta S_{p+dp}(r) = \gamma\, \Delta S_p(r), \quad 0 < \gamma < 1. ,$$

La quantité γ_p peut caractériser le fait de la transmission d'entropie d'échelle à travers les structures consécutives. Elle montre une sorte d'efficacité de cette transmission correspondant à une peau d'ordre p, allant de la peau précédente $p - dp$ vers la peau suivante $p + dp$. On définit ainsi « le facteur de réversibilité » par :

$$\gamma_p(r) = \frac{\Delta S_{p-out}(r)}{\Delta S_{p-in}(r)} = \frac{S_{p+dp}(r) - S_p(r)}{S_p(r) - S_{p-dp}(r)} \qquad \text{(IV.4)}$$

De sorte que : pour $\gamma_p(r) = 1$, cela signifie que la perte d'entropie à travers les peaux est nulle, et donc le phénomène est non-intermittent. Pour $\gamma_p(r) \to 0$, le phénomène devient infiniment intermittent.

Vu que le dégradé des peaux entropiques est fractal, alors selon les équations (IV.3) et (IV.4) nous aurons :

$$\gamma_p = \frac{\Delta_{p+dp} - \Delta_p}{\Delta_p - \Delta_{p-dp}} \qquad \text{(IV.5)}$$

Queiros-condé a supposé que la dynamique des liens entre les peaux entropiques, réalisée au niveau géométrique par la notion de facteur de réversibilité, est constante sur toute la hiérarchie de la manière suivante : $\gamma_p = \gamma^{dp}$.

Physiquement, cela signifie que chaque peau Ω_p montre la même capacité à transmettre l'entropie d'échelle que la peau qui la précède Ω_{p-1}vers des niveaux supérieurs Ω_{p+1}(Queiros-Conde, 2000,2006,2015).

Rappelons que la crête de convergence et le corps d'émergence représentent les deux extrémités de la hiérarchie des structures des peaux, et qu'ils subissent respectivement une géométrie fractale pure et parabolique et particulièrement parabolique décélérant dans le cas de la turbulence développée. On obtient par récurrence la relation de l'efficacité à travers toutes les structures de la hiérarchie :

$$\gamma_p = \frac{\Delta_f - \Delta_\infty}{d - \Delta_\infty} \qquad \text{(IV.6)}$$

IV.5.2 Statistique de peaux entropiques

Pour calculer les moments $< \varepsilon(r)^p >$, nous avons supposé que la valeur d'une fonction de structure est donnée par sa partie active dont il a considéré deux contributions : la première $\bar{\varepsilon}(r)^p$ est la moyenne sur la partie active réelle du champ et la deuxième $f_p(r)$, la fraction de volume, indique un facteur d'intermittence permettant l'aspect lacunaire de la dissipation d'énergie (Queiros-Condé, 2000,2006). Ainsi, on a :

$$< \varepsilon(r)^p >= \bar{\varepsilon}(r)^p f_p(r) = \bar{\varepsilon}(r)^p (r/r_0)^{d-\Delta_p} \qquad \text{(IV.7)}$$

Pour $p = 1$, $< \varepsilon(r) > = \bar{\varepsilon}(r/r_0)^{d-\Delta_1}$.

Notons que $\bar{\varepsilon}(r)$ subit une loi de puissance :

$$\bar{\varepsilon}(r) \sim r^{\chi} \quad / \quad \chi = \Delta_f - d \tag{IV.8}$$

Inspiré de l'idée du couplage entre l'aspect géométrique fractale et l'aspect statistique, Queiros-condé a entrepris d'introduire des quantités qui permettent de déterminer γ expérimentalement. Alors, il a introduit les fonctions de structures relatives :

$$\mu_p(r) = \frac{< \varepsilon(r)^p >}{< \varepsilon(r)^{p-dp} >} \tag{IV.9}$$

Comme $< \varepsilon(r)^p >$ = $\bar{\varepsilon}(r)^p (r/r_0)^{d-\Delta_p}$ et $\gamma^{dp} = \frac{\Delta_{p+dp}-\Delta_p}{\Delta_p-\Delta_{p-dp}}$, on obtient la relation des fonctions de structure relatives :

$$\mu_{p+dp}(r) = \bar{\varepsilon}(r)^{(1-\gamma^{dp})}\, \mu_p(r)^{\gamma^{dp}} \tag{IV.10}$$

Puisque $\mu_{p+dp}(r)$= $\bar{\varepsilon}(r)^{dp} (r/r_0)^{\Delta_p-\Delta_{p+dp}}$ et $\mu_p(r) = \bar{\varepsilon}(r)^{dp} (r/r_0)^{\Delta_{p-dp}-\Delta_p}$, on déduit de l'équation (IV.9): pour $p \to \infty$, on obtient $\mu_{p\to\infty}(r) = \bar{\varepsilon}(r)$.

De manière analogue, pour la fluctuation de la vitesse, on introduit des fonctions de structures relatives :

$$\nu_p(r) = \frac{< V(r)^p >}{< V(r)^{p-dp} >} \tag{IV.11}$$

On peut écrire encore en se basant sur la relation $\bar{\varepsilon}(r) = \overline{\delta V}(r)^3/r$ et l'hypothèse de similarité raffinée $< \delta V(r)^p > = < \varepsilon(r)^{p/3} > r^{p/3}$:

$$\nu_{p+dp}(r) = \overline{\delta V}(r)^{(1-\gamma_\nu{}^{dp})}\, \nu_p(r)^{\gamma_\nu{}^{dp}} \quad / \gamma_\nu = \gamma^{1/3} \tag{IV.12}$$

On note que : $\nu_0(r) = < \delta V(r) >$, pour $p \to \infty$, on obtient $\lim_{p\to\infty} \nu_p(r) = \overline{\delta V}(r)$.

En se basant à l'équation (IV.5), on trouve :

$$\Delta_p = \Delta_\infty + (d - \Delta_\infty)\, \gamma^p \tag{IV.13}$$

Utilisons les lois universelles et chacune des relations : (IV.6), (IV.7)et (IV.8) ce qui permet d'obtenir :

$$\tau_p = \chi\, p + (d - \Delta_\infty)\,(1 - \gamma^p) \tag{IV.14}$$

Avec $\chi = \Delta_f - d$, $\Delta_f = \Delta_1$

Par conséquent, l'application de la relation de similarité raffinée donne :

$$z_p = \frac{(\chi + 1)}{3} p + (d - \Delta_\infty)\,(1 - \gamma^{p/3}) \qquad \text{(IV.15)}$$

Comme $d = 3$ (cas de turbulence dans l'espace), on peut écrire :

$$z_p = \left[\frac{\Delta_\infty\,(1-\gamma) + 3\gamma - 2}{3}\right] p + (3 - \Delta_\infty)\,(1 - \gamma^{p/3})$$

Notons que les deux relations (IV.14) et (IV.15) sur les exposants z_p et $\tau_p$ont aussi été obtenues par She et Levêque (She et Leveque, 1994).

Pour $\gamma = 1$, correspondant au cas non intermittent, c.à.d. $\Delta_f = \Delta_\infty = d$, on a $z_p = p/3$, ce qui correspond à la théorie de Kolmogorov.

Pour $\gamma = 0$, le cas le plus intermittent, on a $z_p = \frac{(\Delta_f - d + 1)}{3} p + d - \Delta_\infty$, nous obtenons une relation "linéaire plus constante" déjà vue dans le modèle β (Frisch, 1995; Frisch et al., 1978).

Au niveau de la crête de convergence ($p \to \infty$), considérée comme des structures fractales les plus désordonnées, et correspondant aux événements subissant « les plus hors équilibre » de l'écoulement, les expériences ont indiqué que ces structures ont des formes filamentaires qui présentent une hiérarchie de longueur ayant une dimension fractale $\Delta_\infty = 1$. Elles sont faiblement dissipatives et portent les événements les plus intermittents du champ.

Ainsi, en se basant sur la valeur de la dimension crête Δ_∞=1, on obtient :

$$\tau_p = 2(\gamma - 1)p + 2\,(1 - \gamma^p) \quad et \quad z_p = \left[\frac{2\gamma - 1}{3}\right] p + 2\,(1 - \gamma^{p/3}) \qquad \text{(IV.16)}$$

L'application de la théorie des peaux entropiques dans le cadre de la turbulence a permis d'obtenir un concept logique et raisonnable du phénomène d'intermittence et permis de déduire une loi pour les exposants d'intermittence cinétique et dissipative, respectivement z_p et τ_p . En s'appuyant sur le couplage « actif » entre l'aspect géométrique fractal et l'aspect statistique effectué par la théorie, on peut dire que le modèle des peaux entropiques a muni le modèle de (She et Leveque, 1994) d'un cadre géométrique qui aide à la représentation du phénomène.

En utilisant la relation de Sreenivasan et al (1989) tel que : $\Delta_f = 2 + z_1$, l'équation (IV.13) et l'exposant z_1 calculé par l'équation (IV.16), Queiros-condé a obtenu une équation de solution γ :

$$\gamma = \left((1 + 3/\sqrt{8})^{1/3} + (1 - 3/\sqrt{8})^{1/3}\right) \approx 0.68 \quad \text{(IV.17)}$$

Cette valeur a montré un accord avec les valeurs expérimentale. De plus, l'exposant γ a une valeur très proche du modèle de She-Levêque ($\lambda_\infty = -2/3$) et du modèle-β ($\beta = 2/3$), mais leurs interprétations physiques sont différentes (Queiros-Conde, 2000). Cependant, le concept de She-Levêque ne s'intéresse pas à la structure géométrique du phénomène, il est uniquement centré sur l'analyse statistique.

En ce qui concerne la dimension fractale du corps Δ_f , par remplacement de z_1 dans la relation de Sreenivasan et ses collègues, on obtient la relation : $\Delta_f = 1 + 2\gamma$, et par suite $\Delta_f \approx 2.36$. Cette valeur montre une intersection avec des résultats recueillis par plusieurs expériences (Constantin et al., 1991; Rys et Waldvogel, 1986; Sreenivasan et al., 1989).

Notamment da Silva et ses collègues (2014) ont trouvé que la frontière entre la zone active turbulente et le reste non turbulent d'une couche limite pour un grand nombre de Reynolds présente une zone asymptotique ayant une dimension fractale égale à 2.36.

IV.5.3 Autosimilarité étendue dans la géométrie du cantor 2D

Un autre outil caractérisant l'intermittence dans la turbulence est l'autosimilarité étendue de Benzi et ses collègues (1993), qui ont relancé le débat sur la notion d'invariance d'échelle en turbulence. Ils ont montré que toute fonction de structure $S_p(r)$ est une loi de puissance de $S_3(r)$. De façon plus générale, que toute fonction $S_p(r)$ est une loi de puissance de toute autre fonction $S_q(r)$(Benzi et al., 1993). Ceci permet d'obtenir les rapports S_p/S_q. Cette autosimilarité est valable dans la zone inertielle de la turbulence mais aussi et surtout dans les zones dissipatives proches de l'échelle de Kolmogorov. Ce résultat est donc vérifié aussi bien pour des écoulements à faible nombre de Reynolds que pour les petites échelles de la zone dissipative. Ces travaux ont apporté une précision accrue sur la détermination des exposants d'échelle z_p et ont prouvé qu'une similarité particulière regroupait dans une même description les régimes dissipatifs et inertiels d'un écoulement turbulent. Citons que cette invariance d'échelle ne se manifeste que dans une certaine représentation (moments en fonction des moments) et les raisons pour lesquelles cette autosimilarité existe en turbulence sont encore mal comprises.

Cependant, puisque la preuve des exposants d'intermittence prédite pour des grands nombres de Reynolds est difficile, elle est d'autant plus difficile pour des nombres de Reynolds modérés car l'échelle associée est petite. Pour résoudre ce problème, (Benzi et al., 1993) ont introduit la notion d'autosimilarité étendue (Extended Self-SimilarityESS). Ils ont montré l'existence d'une autosimilarité étendue aussi bien pour un nombre de Reynolds élevé que pour un nombre de Reynolds faible, caractérisée par les mêmes exposants d'intermittence des fluctuations de vitesse. Ce qui veut dire que toute fonction de structure $< \delta V(r)^p >$ d'ordre p (soit de vitesse, soit du taux de dissipation d'énergie) est une loi de puissance de $< \delta V(r)^3 >$. De manière plus générale, toute fonction$< \delta V(r)^p >$ d'ordre p est une loi de puissance de toute autre fonction $< \delta V(r)^q >$ d'ordre q dont la pente de leur représentation graphique logarithmique correspond à z_p/z_q .

Par conséquent, les exposants absolus z_p peuvent être déterminés en utilisant le résultat exact de Kolmogorov (1941)z_3 = 1, à partir du rapport z_p/z_3 des exposants d'échelle z_p qui serait idéalement obtenu pour des nombres de Reynolds élevés.

D'une manière réciproque, on peut dire que la notion d'autosimilarité étendue représente donc une détermination indirecte des exposants de mise à l'échelle par des mesures obtenues à des nombres de Reynolds faibles et modérés afin d'obtenir des résultats qui constitueraient une limite à des nombres de Reynolds élevés.

Pour les écoulements turbulents homogènes et isotropes conformément à l'hypothèse de Kolmogorov, la relation de similarité raffinée ($z_p = p/3$) implique que $z_p/z_q = p/q$. Cependant, dans le cas intermittent, un écart se manifeste par rapport à p/q en raison de fluctuations produites à travers le taux de dissipation d'énergie.

IV.6 Dynamiques des peaux entropiques appliqué sur la distribution cantor 2D

De façon analogue à la dynamique de peaux entropiques en turbulence développée, nous supposons que la statistique intermittente est pilotée par deux objets fractals spécifiques : le corps et la crête, associés respectivement aux structures fluctuantes : Ω_1, de dimension $\Delta_1 = D_f$ (à $p = 1$), tel que D_f est la dimension fractale du phénomène, et Ω_∞ , de dimension Δ_∞ (tel que $p \to \infty$).

En effet, à partir de l'hypothèse donnant les moments de fluctuation du taux de dissipation moyen d'énergie, associés au premier niveau de fluctuation (Queiros-Conde et al., 2015b), nous supposons les moments de fluctuation de nombre des points, considérés moyens, associés au niveau p, tel que :$< \varepsilon_r >= \overline{\varepsilon_r}\, f(r) = \overline{\varepsilon_r}(\frac{r}{r_0})^{d-\Delta_f}$

$$< \delta n_i(r) >=< \delta n_i(r) >_F (\frac{r}{r_0})^{d-\Delta_1}$$

Généralisons, au niveau p : $$< \delta n_i(r)^p >=< \delta n_i(r) >^p{}_F \left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-\Delta_p} \quad \text{(IV.18)}$$

Tel que $< \delta n_i(r) >^p{}_F$: est le taux moyen de fluctuation du nombre de points sur les mailles affectées, fluctuant sur la structure fractale au niveau p.

De même : $$< \delta n_i(r)^{p+dp} \geq< \delta n_i(r) >^{p+dp}{}_F \left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-\Delta_{p+dp}} \quad \text{(IV.19)}$$

En divisant (IV.19) sur (IV.18), on obtient :

$$\frac{< \delta n_i(r)^{p+dp} >}{< \delta n_i(r)^p >} =< \delta n_i(r) >^{dp}{}_F \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\Delta_p-\Delta_{p+dp}}$$

Définissons les fonctions de structure relative $\alpha_p(r)$ comme suit : $\alpha_p(r) = \frac{<\delta n_i(r)^p>}{<\delta n_i(r)^{p-dp}>}$

Évidemment : $\alpha_{p+1}(r) = \frac{<\delta n_i(r)^{p+dp}>}{<\delta n_i(r)^p>}$; alors :

$$\frac{\alpha_p(r)}{< \delta n_i(r) >^{dp}{}_F} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\Delta_{p-dp}-\Delta_p} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_{p+dp}(r)}{< \delta n_i(r) >^{dp}{}_F} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\Delta_p-\Delta_{p+dp}}$$

Ceci nous donne : $\frac{\alpha_{p+dp}(r)}{<\delta n_i(r)>^{dp}{}_F} = \left(\frac{\alpha_p(r)}{<\delta n_i(r)>^{dp}{}_F}\right)^{\frac{\Delta_p-\Delta_p+dp}{\Delta_{p-dp}-\Delta_p}}$. En utilisant : $\gamma^{dp} = \frac{\Delta_{p+dp}-\Delta_p}{\Delta_p-\Delta_{p-dp}}$, on obtient donc la relation (1.5), similaire à celle de She et Levêque (1994) appuyée par Queiros-Conde, (2000) :

$$\alpha_{p+dp}(r) =< \delta n_i(r) >_F{}^{(1-\gamma^{dp})}\ \alpha_p(r)^{\gamma^{dp}} \quad \text{(IV.20)}$$

Tel que :$\alpha_{p\to\infty} =< \delta n_i(r) >_F$

Dans notre étude, nous prendrons $dp = 0.2$ comme pas de seuillage.

IV.6.1 Analyse en échelle : calcul de facteur de réversibilité géométrique γ_{geo}

Au niveau de l'analyse en échelle, comme abordé précédemment, nous avons utilisé la méthode de comptage de boîte (box counting), comptant les mailles de grille touchées par la structure étudiée.

Cette analyse nous permet de mesurer la dimension fractale D_f de distribution du cantor 2D, puis nous calculons le facteur γ_{geo} par l'outil géométrique :

$$\gamma_{geo} = \frac{D_f - D_\infty}{d - D_\infty} \quad \text{(IV.21)}$$

Pour effectuer ce calcul, il faut d'abord calculer la dimension de la crête. Nous obtenons ensuite le facteur géométrique de réversibilité γ_{geo} .

Remarque : dans un but de simplification, nous utiliserons le terme D au lieu de Δ.

IV.6.1.1 Mesure de dimension fractale de crête

Puisque la fluctuation et l'intermittence se développent sur un support spatial ou une « zone efficace » entre les deux extrémités de la hiérarchie des structures, on peut déduire que dans notre distribution cantor 2D, la crête présente les zones les plus denses et amassées.

Vu que l'amassement de points se manifeste à travers les itérations dans les blocs présentant une invariance d'échelle, nous pouvons calculer la dimension de crête à partir de la méthode classique de comptage de boîte tant que les zones entre les blocs denses sont négligées du fait du seuillage adopté, comme suit :

$$D_\infty = -\frac{\ln(N_b)}{\ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right)} = -\frac{\ln(4)}{\ln(\theta)} \quad \text{(IV.22)}$$

N_b : nombre de blocs.

D'autre part, le phénomène d'amassement des points dans les blocs met en évidence le rôle crucial de l'échelle topique interparticulaire dont l'analyse en échelle touche ces points amassés entièrement à petites échelles quand r relativement proche de l_{*i} à i-ème et dernière itération. En effet, ce phénomène est bien clair dans l'analyse en échelle.

Dans cette optique, nous avons remarqué que l'analyse en échelle reste homogène jusqu'à l'échelle topique de la distribution homogène (l'itération 0) l_{*0} . Puis, la courbe entre dans une phase transitoire avant de prendre une allure asymptotique telle que sa pente aux petites échelles commence à tendre vers D_{∞} .

Dans ce cadre, nous avons entrepris d'étudier analytiquement l'allure de la courbe d'analyse en échelle à travers les itérations, entre les échelles topiques l_{*i} , surtout à petites échelles.

Sachant qu'à une échelle $r = l_{*i}$, le nombre des mailles touchées est théoriquement égale au nombre de points cumulés jusqu'à cette itération i, $n^{(i)}$.

En effet, notre attracteur géométrique adopté génère des blocs répartis d'une manière auto-similaire, contenant des points distribués de façon homogène. Entre ces blocs se développent évidemment des croix, à travers les itérations, dans lesquelles il y a aussi une distribution homogène des points. Au cours du comptage de points, nous devons distinguer entre deux zones qu'on appelle : zones blocs et zones croix, comme le montre la Figure IV.11. Les deux zones forment l'ensemble de la géométrie générée.

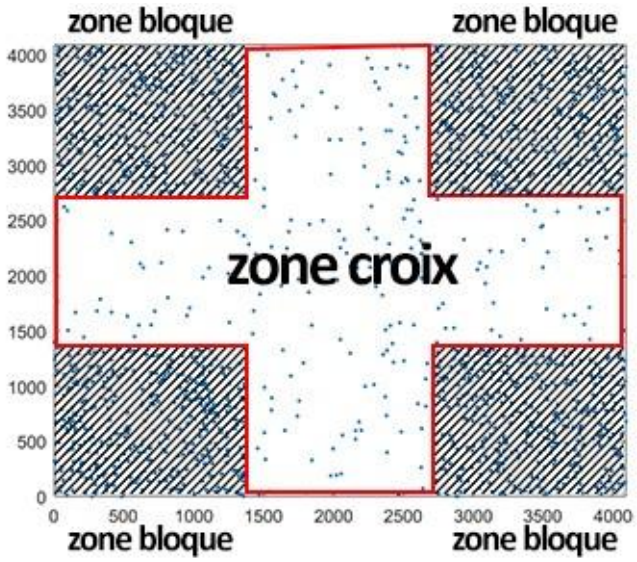


Figure IV.11 : Zones croix (zone encadrée en rouge) et zones blocs (zone hachurée) dans le modèle de distribution cantor 2D de domaine 4096 × 4096 pixels.

Pour être rigoureux, on redéfinit $n_{b,i}$ le nombre des points pour un bloc à une certaine itération i.

De même pour les zones en croix, on définit $n_{c,i}$ le nombre de points par croix à une itération i tel qu'à l'itération 1, le nombre de points pour une croix doit être $n_{c,1}$.

Le nombre des points pour un bloc à une itération i, $n_{b,i}$, est égal au nombre de points total jeté à l'itération 0, $n^{(0)}$, multiplié par le facteur de peuplement a, i fois :

$$n_{b,i} = a^i \, n^{(0)}$$

Puisque les zones croix se multiplient 4 fois par itération (voir Figure IV.12), on trouve que le nombre de points cumulés pour les zones en blocs à une itération i est :

$$n_b{}^{(i)} = 4^i a^i \, n^{(0)}$$

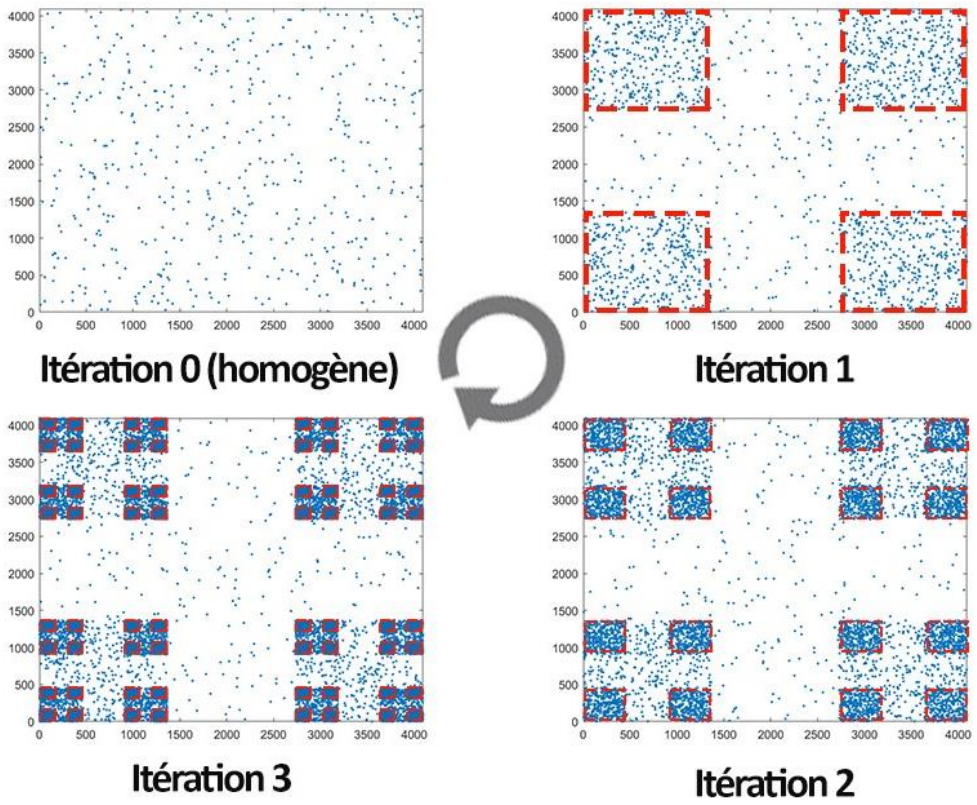


Figure IV.12 : multiplication 4 fois des zones croix à travers les itérations

Pour les zones en croix, le nombre de points cumulés à une itération i est :

$$n_c{}^{(i)} = n_{c,1} \sum_{j=0}^{i-1} (4a)^j$$

Le terme $n_{c,1}$ désigne le nombre de points jetés dans la zone croix à l'itération $i = 1$, avec $n_{c,1} = (1 - 4\theta^2) \, n^{(0)}$.

Par exemple, pour $\theta = 1/3$, $n_{c,1} = \left(1 - \frac{4}{9}\right) n^{(0)} = \frac{5}{9} n^{(0)}$.

Cependant, le terme $\sum_{j=0}^{i-1}(4a)^j$ exprime deux contributions : la cumulation de zones croix à travers les itérations 4 fois par itération (voir Figure IV.13), et le facteur de peuplement qui multiple le nombre des points (dans le bloc correspondant à l'itération i-1 précédente) une fois par itération.

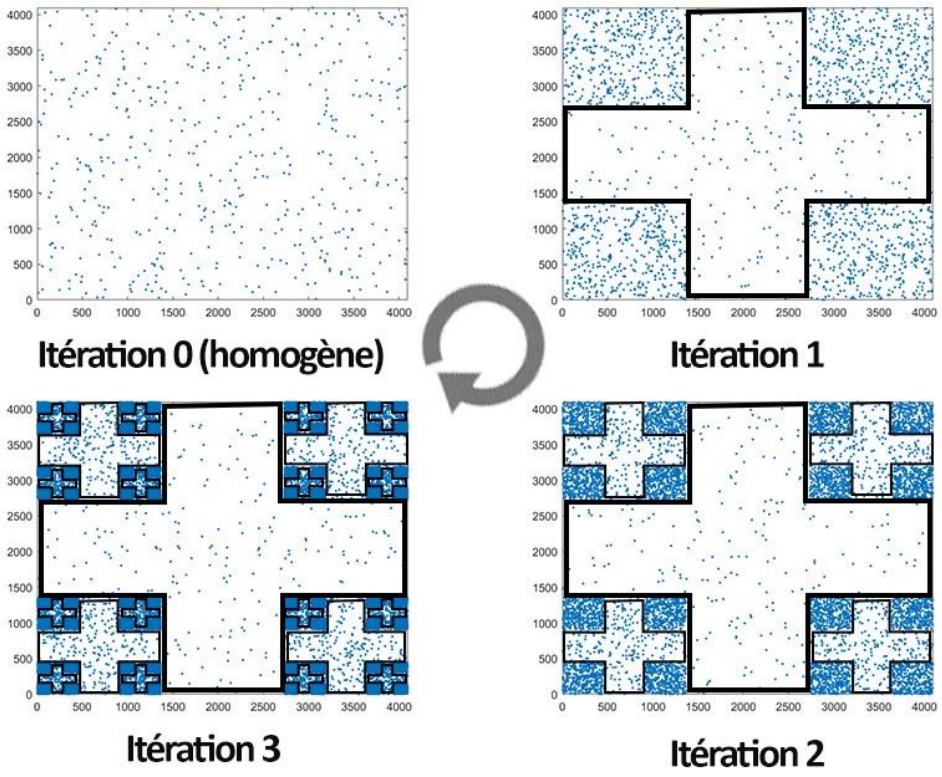


Figure IV.13 : cumulation de zones croix à travers les itérations : le nombre des zones croix est égal à $\sum_{j=0}^{i-1}(4a)^j$

Notons qu'à l'itération 1, il n'y a qu'une zone croix. La cumulation des zones croix 4 fois par itération commence à l'itération 2 (voir Figure IV.13).

Pour cela, nous définissons une équation du nombre de points total $n^{(i)}$ jetés dans une distribution cantor 2D, jusqu'à une itération i :

$$n^{(i)} = n_c{}^{(i)} + n_b{}^{(i)} = n_{c,1} \sum_{j=0}^{i-1} (4a)^j + 4^i a^i \, n^{(0)} \qquad a \neq 0 \qquad \text{(IV.23)}$$

Effectuons le rapport : $\frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}} = \left(\frac{n_{c,1}\sum_{j=0}^{i}(4a)^j + 4^{i+1}a^{i+1}\,n^{(0)}}{n_{c,1}\sum_{j=0}^{i-1}(4a)^j + 4^i a^i\,n^{(0)}}\right)$

Or la somme $\sum_{j=0}^{i}(4a)^j = (4a)^{i+1} \times \left[\frac{1}{(4a)^{i+1}} + \frac{1}{(4a)^i} + \cdots + \frac{1}{4a}\right] = (4a)^{i+1}\sum_{j=1}^{i+1}\frac{1}{(4a)^j}$

De même ; $\sum_{j=0}^{i-1}(4a)^j = (4a)^i \times \left[\frac{1}{(4a)^i} + \frac{1}{(4a)^{i-1}} + \cdots + \frac{1}{4a}\right] = (4a)^i\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(4a)^j} \quad /a > 1/4$

Alors, $$\lim_{i\to\infty}\frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}} = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{n_{c,1}\,(4a)^{i+1}\sum_{j=0}^{i+1}\frac{1}{(4a)^j} + (4a)^{i+1}\,n^{(0)}}{n_{c,1}\,(4a)^i\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{(4a)^j} + (4a)^i\,n^{(0)}}\right)$$

Ainsi, $$\lim_{i\to\infty}\frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}} = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{(4a)^{i+1}\,[n_{c,1}\sum_{j=0}^{i+1}\frac{1}{(4a)^j} + n^{(0)}]}{(4a)^i[n_{c,1}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{(4a)^j} + n^{(0)}]}\right)$$

Puisque le terme $\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(4a)^j} = \frac{1}{4a} + \cdots + \frac{1}{(4a)^i} + \frac{1}{(4a)^{i+1}}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{4a}$, alors $\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(4a)^j} = \frac{(4a)^i - 1}{(4a)^{i+1}}\frac{4a}{4a-1}$, d'où $\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{(4a)^j} = \frac{1}{4a-1}$ avec $4a > 1$.

De même : $\lim_{i\to\infty}\sum_{i=1}^{i+1}\frac{1}{(4a)^j} = \frac{1}{4a-1}$.

On obtient que: $$\lim_{i\to\infty}\frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}} = \frac{\lim_{i\to\infty}\left((4a)^{i+1}\,[n_{c,1}\sum_{j=0}^{i+1}\frac{1}{(4a)^j} + n^{(0)}]\right)}{\lim_{i\to\infty}\left((4a)^i\,[n_{c,1}\sum_{j=0}^{i+1}\frac{1}{(4a)^j} + n^{(0)}]\right)} = \frac{\lim_{i\to\infty}[(4a)^{i+1}]\;\;[n_{c,1}\frac{1}{4a-1} + n^{(0)}]}{\lim_{i\to\infty}[(4a)^i]\;\;[n_{c,1}\frac{1}{4a-1} + n^{(0)}]}$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}} = \frac{(4a)^{i+1}}{(4a)^i} = 4a$$

Utilisons $\frac{l_{i+1}}{l_i} = \theta$, $a = \frac{n_{b,i+1}}{n_{b,i}}$ et l'équation(IV.2), on obtient : $\frac{l_{*i+1}}{l_{*i}} = \theta/\sqrt{a}$;

Donc : $$\lim_{i\to\infty} D_i = -\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{n^{(i+1)}}{n^{(i)}}\right)}{\ln\left(\frac{l_{*i+1}}{l_{*i}}\right)}\right) = -\frac{\ln(4a)}{\ln(\theta/\sqrt{a})} \qquad \text{(IV.24)}$$

En particulier, pour $a = 1$ et $\theta = \frac{1}{3}$, le cas est un cantor 2D classique :

$$\lim_{i\to\infty} D_i = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1.2618$$

On notera que la condition $a > 1/4$ est significative au niveau physique. L'équation (IV.24) ne se valide que si le facteur de peuplement est plus grand que ¼, c'est-à-dire qu'il faut que la multiplication globale du nombre de points à travers les itérations, qui est dans le cas du

cantor 2D de $4a$ (depend du nombre de blocs), soit supérieure à 1 (comme on le verra plus tard dans la Figure IV.15.

D'après tout ce qui précède, nous avons obtenu une vérification analytique explicite à propos de l'allure de la courbe telle que sa pente aux petites échelles commence à tendre vers la dimension de crête D_∞.

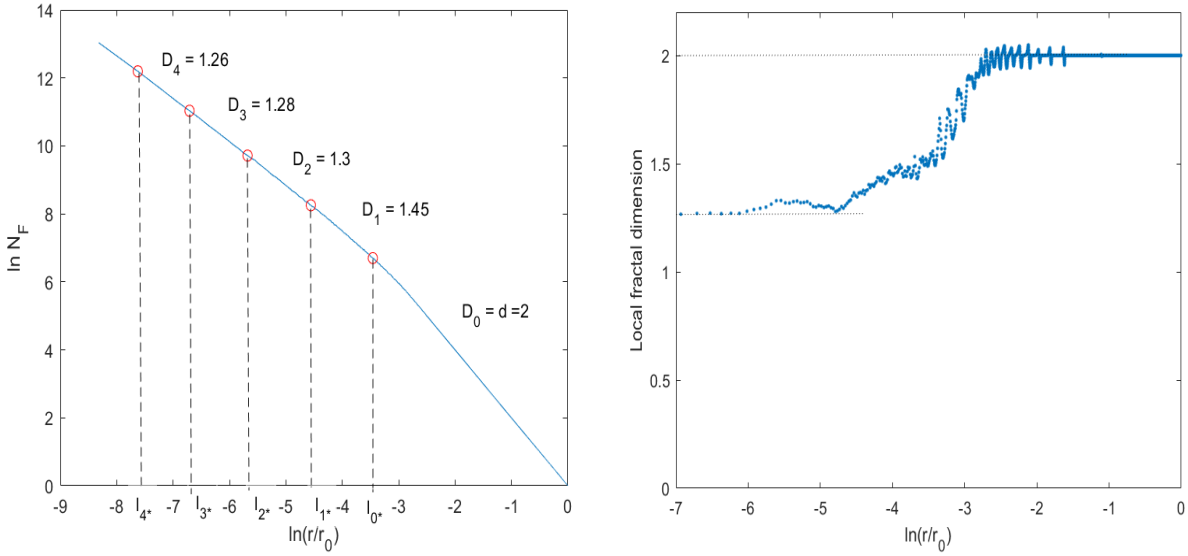


Figure IV.14 : À gauche, analyse en échelle d'une distribution du cantor 2D d'un tiers ($\theta = 1/3$) dans une boîte de taille 4096 × 4096 pixels atteint 4 itérations : la dimension fractale entre les échelles topiques à travers les itérations commence à prendre la valeur de D_∞ depuis l'échelle topiquel_{*3} de 3-ème itération (l'avant-dernière). À droite, variation de la dimension fractale locale en fonction de l'échelle (pas de l'échelle égale à 6) lorsqu'elle diminue de 2 à 1,26 : la dimension fractale locale commence à quitter complétement la valeur de $D_\infty = 1{,}26$ en augmentant avec l'échelle depuis l_{*1}

Donc, l'effet d'échelles topiques (inter-particulaires) sur l'analyse en échelle est notable. Elles « amortissent » le comportement de courbes vers l'homogénéité à travers les itérations, telle que la dimension fractale diminue avec l'échelle, d'une valeur d jusqu'à prendre la valeur de D_∞dès que $r = l_{*i-1}$ qui présente l'échelle topique de l'avant dernière itération où i présente la dernière itération atteinte. La dimension fractale locale commence à quitter complètement la valeur D_∞ en augmentant avec l'échelle dès que r approche de l_1,(Voir Figure IV.14).

Remarque : La dimension fractale pourrait avoir le même ordre de grandeur que la moyenne arithmétique des dimensions fractales locales aux échelles l_0 et l_1.

En effet, afin de vérifier notre hypothèse, nous avons cherché les valeurs de dimensions fractales locales D_i à travers les itérations par deux méthodes : analytique en appliquant la formule obtenue dans l'équation (IV.24) et graphique expérimentale en régressant linéairement (fitting) la courbe d'analyse en échelle, entre des échelles topiques l_{*i}à chaque itération traversée,(Voir Figure IV.14).

Les valeurs trouvées d'après les deux méthodes restent proches, avec des erreurs négligeables, (Voir Tableau IV.1,Tableau IV.2,Tableau IV.3,Tableau IV.4)

Ce qui indique la validation de notre hypothèse dont la distribution du cantor 2D proposée suit une loi que l'on a appelée « fractal par morceaux ».

Tableau IV.1: comparaison des dimensions fractales D_i à travers les itérations et entre les échelles topiques calculées par : la méthode analytique et la méthode graphique, pour une distribution du cantor 2D d'un tiers ($\theta = \frac{1}{3}$)et du facteur de peuplement a=1, dont D_∞ =1,26

Itération i	0	1	2	3	4
l_{*i}	129	43	14	5	2
n_i	1000	4556	18780	75676	303260
$D_i = \frac{\ln\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)}{\ln\left(\frac{l_{*i+1}}{l_{*i}}\right)}$	2	1,4	1,28	1,268	1,263
$D_i$obtenue par régression linéaire	2	1,45	1,3	1,28	

Tableau IV.2: comparaison des dimensions fractales D_i à travers les itérations et entre les échelles topiques calculées par : la méthode analytique et la méthode graphique, pour une distribution du cantor 2D d'un tiers ($\theta = \frac{1}{3}$)et du facteur de peuplement a=1,1, dont D_∞ =1,29

Itération i	0	1	2	3	4
l_{*i}	129	41	13	4	1
n_i	1000	4958	22365	98981	435979
$D_i = \frac{\ln\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)}{\ln\left(\frac{l_{*i+1}}{l_{*i}}\right)}$	2	1,4	1,31	1,297	1,293
$D_i$obtenue par régression linéaire	2	1,44	1,32	1,3	

Tableau IV.3: comparaison des dimensions fractales D_i à travers les itérations et entre les échelles topiques calculées par : la méthode analytique et la méthode graphique, pour une distribution du cantor 2D d'un tiers ($\theta = \frac{1}{3}$) et du facteur de peuplement a=1,2, dont D_∞ =1,318

Itération i	0	1	2	3	4
l_{*i}	129	39,25345	11,94444	3,634579	1,105967
n_i	1000	5315	26275	126751	608279
$D_i = \frac{\ln\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)}{\ln\left(\frac{l_{*i+1}}{l_{*i}}\right)}$	2	1,4	1,34	1,32	1,318
$D_i$obtenue par régression linéaire	2	1,44	1,32	1,31	

Tableau IV.4: comparaison des dimensions fractales D_i à travers les itérations et entre les échelles topiques calculées par : la méthode analytique et la méthode graphique, pour une distribution du cantor 2D d'un quart ($\theta = \frac{1}{4}$)et du facteur de peuplement a=1,3, dont D_∞ =1,08

Itération i	0	1	2	3	4
l_{*i}	129	28,28512	6,201923	1,359862	0,298169
n_i	1000	5945	31703	165722	861306
$D_i = \frac{\ln\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)}{\ln\left(\frac{l_{*i+1}}{l_{*i}}\right)}$	2	1,18	1,1	1,08	1,08
$D_i$obtenue par régression linéaire	2	1,23	1,12	1,1	

Nous avons vérifié notre hypothèse pour différents cas, en faisant varier le facteur d'échelle θ sur une gamme de [0.25 ; 0.43] et le facteur de de peuplement sur une gamme de [1 ; 1,4].

En effet, la variation du facteur de peuplement a, permet une variation de concentration de nombre des points et donc le nombre des mailles touchées, ce qui influence implicitement l'allure de la courbe et sa pente aux échelles crêtes, voir Figure IV.15.

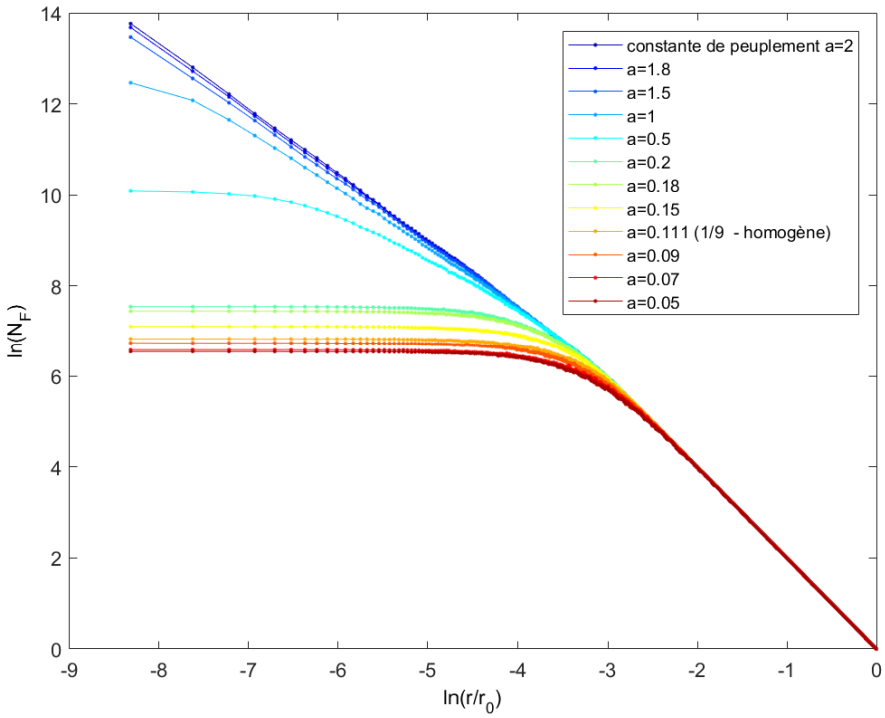


Figure IV.15 : Analyse en échelle du cantor ($\theta = 1/3$) pour différentes constantes de peuplement $a = \frac{n_{b,i+1}}{n_{b,i}}$

Par conséquent, on peut dire que dans les cas où $a > 1$, les échelles inter-particulaires jouent un rôle « d'atténuation » de la courbe d'analyse en échelle, et s'opposent à son comportement fractal par morceaux supposés ($a = 1$), à travers les échelles. Pour cela, leurs dimensions locales aux échelles de crête, D_∞, tendent vers des valeurs plus grandes que celles qui correspondent à la valeur $a = 1$.

IV.6.1.2 Mesure des dimensions du corps

Revenons à la définition du « corps » puisqu'il s'agit de l'extrémité de la hiérarchie des peaux les moins fluctuantes. En effet, la densité des points augmente à travers les itérations. Ceci indique que la structure la moins fluctuante correspond à la première itération. Donc, on peut dire qu'à partir de $r = l_{*1}$, la courbe d'analyse commence à quitter le domaine du corps en allant vers le domaine de la crête. Ainsi, le corps est concerné par la gamme d'échelles s'étendant entre l_{*1} et l_0 .

Pour vérifier notre hypothèse, nous avons mesuré la dimension fractale locale sur plusieurs gammes d'échelles en fixant l'extrémité à la plus petite échelle sur l'échelle topique de la

dernière itération l_{*i} et en faisant varier la gamme d'échelle $\Delta r\,(r) = r - l_{*i}$ (en faisant varier l'autre extrémité) sur laquelle on mesure la dimension locale (en faisant varier l'échelle r).

Nous avons noté que quand Δr est proche de la valeur $l_{*1} - l_{*i}$; c.à.d. pour $r = l_{*1}$; $\ln(\frac{r}{4096}) = \ln(\frac{l_{*1}}{4096})$ (dans la représentation logarithmique), la dimension locale commence à toucher des valeurs très proches de D_∞ en descendant avec la gamme d'échelle Δr donc, l'échelle r. Ceci vérifie notre observation (voir Figure IV.16).

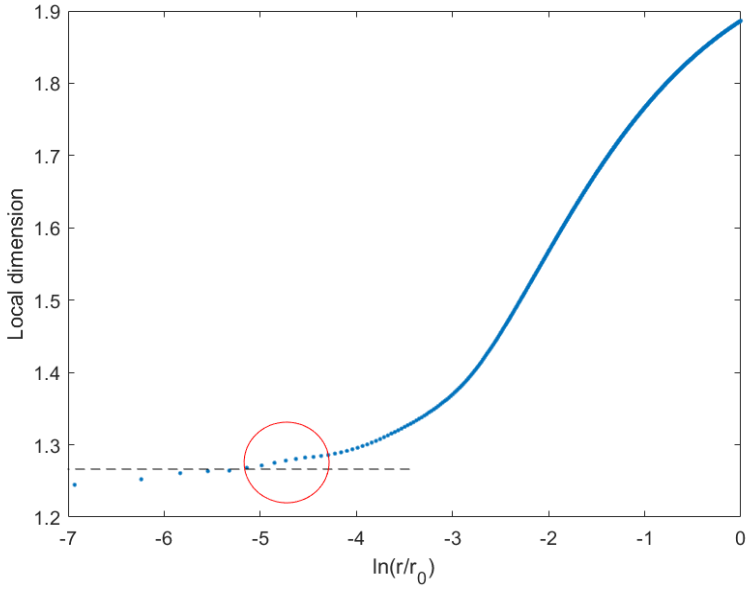


Figure IV.16 : La dimension fractale locale en fonction d'un intervalle d'échelle varie entre une échelle fixe égale à $ln(\frac{l_{*4}}{4096})$ (pour 4 itérations) et une autre variable $ln(\frac{r}{4096})$ pour une distribution cantor 2D d'un tiers. À une gamme d'échelle $ln(\frac{\Delta r}{4096})$ proche de $(\frac{l_{*1}-l_{*4}}{4096})$ ($r = l_{crête} = l_{*1} \approx 43$), la dimension locale commence à atteindre des valeurs très proches de D_∞= 1.26 (droite pointié)

Cependant, pour obtenir la dimension fractale de distribution, D_f, nous avons mesuré la pente de régression linéaire de la courbe d'analyse en échelle sur la gamme entre l'échelle de crête $l_{crête} = l_{*1}$, et l'échelle intégrale $r_0 = l_0$, sans tenir compte de la gamme de crête (Voir Figure IV.17).

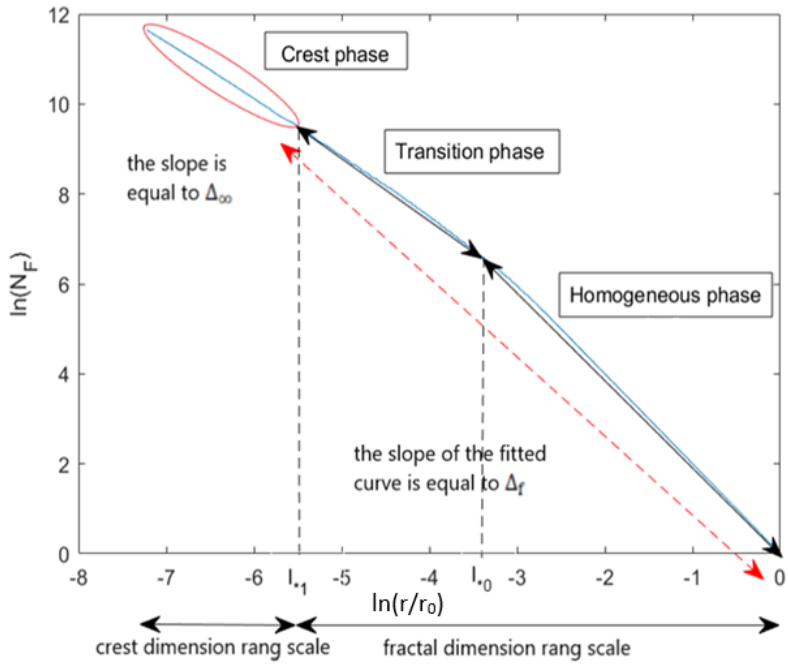


Figure IV.17 : Les trois phases de l'analyse en échelle de distribution du cantor en 2D : la dimension fractale D_f présente la pente linéaire de la courbe entre l'échelle entière r_0 et l'échelle de crête $l_{crest} = l_{*1}$.

Récapitulons, l'analyse en échelle de distribution cantor 2D dépend explicitement des échelles topiques à travers les itérations successives. Par conséquent, elle se divise en trois phases : la phase homogène s'étend entre l'échelle intégrale l_0 et l'échelle topique l_{*0} , la phase transitoire entre l_{*0} et l_{*1} et la phase de crête qui occupe la gamme d'échelle $[\,\mathrm{l}_{*1}, \mathrm{l}_{*\mathrm{i}}\,]$ où la courbe continue ayant une asymptote oblique de pente de dimension crête D_∞ , comme le montre la Figure IV.17.

L'analyse en échelle entre l'échelle intégrale r_0 et l'échelle topique $\mathrm{l}_{\mathrm{crête}}$, nous donne une dimension fractale $\mathrm{D_f}$, égale à une dimension euclidienne $\mathrm{d} = 2$, donnant un facteur de réversibilité γ_{geo} égal à 1. Ce résultat sera compatible avec l'analyse statistique de cas homogène ayant $\gamma_{\mathrm{stat}} = 0\ 997 \approx 1$ (voir Figure IV.18).

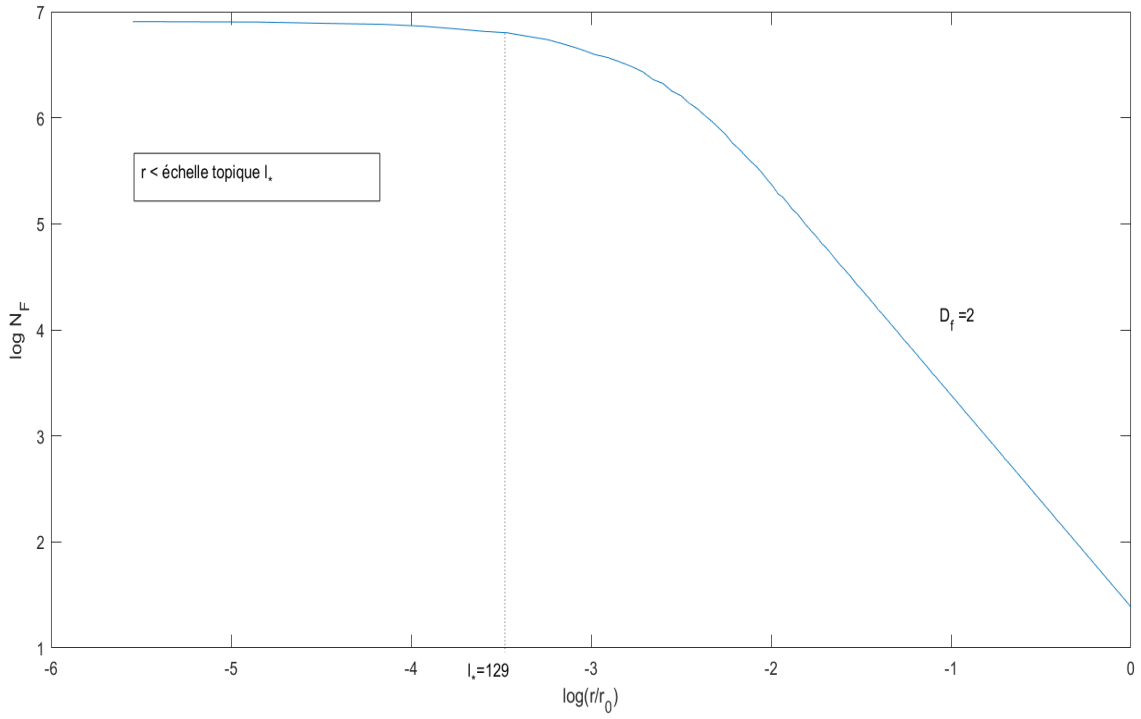


Figure IV.18 : analyse en échelle d'une distribution homogène dans une boîte de taille 4096×4096. A l'échelle plus petite que l'échelle topique l_* , la pente tend vers 0

IV.6.2 Analyse intermittente

IV.6.2.1 Mesure des exposants d'échelles

Les fonctions de structures présentant le taux de fluctuation à travers les échelles et les peaux suivent une loi d'échelles telle que : $< \delta n_i(r)^p > \sim r^{z_p}$.

Afin d'effectuer l'analyse statistique de la géométrie étudiée, nous avons mesuré les exposants d'échelles z_p. Et pour cela, nous avons représenté les fonctions de structure en coordonnées logarithmiques, avec z_p la pente (voir Figure IV.19). Dans le cas homogène, nous obtenons des droites présentant une faible dispersion de points, des pentes égales à p, où l'on trouve z_p variant linéairement avec p.

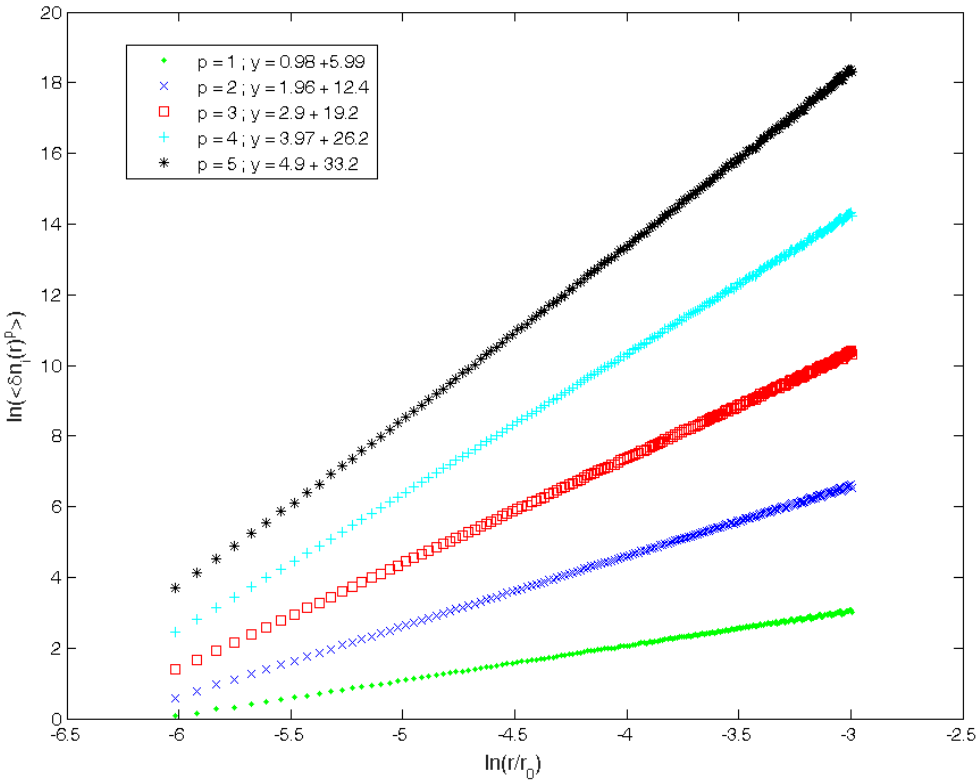


Figure IV.19 : Représentations logarithmiques de fonction de structure $< \delta n_i(r)^p >$ d'ordre 1,2,3,4 et 5 en fonction de l'échelle r ($ln(\frac{10}{4096})<ln(\frac{r}{4096})<ln(\frac{205}{4096})$). Puisque $< \delta n_i(r)^p > \sim r^{z_p}$, on trouve que $z_p = p$

Dans le cas du cantor, nous remarquons une log-périodicité apparaissant sur les moments $\ln < \delta n_i(r) >$ en fonction de l'échelle normalisée, entre les valeurs successives de l_i à travers les échelles, avec $l_{i+1} = \frac{l_i}{\theta^i}$ (voir Figure IV.21, Figure IV.20). En effet, il est clair que z_p, contrairement au cas homogène, est différent de p. Un certain écart à l'homogénéité a lieu.

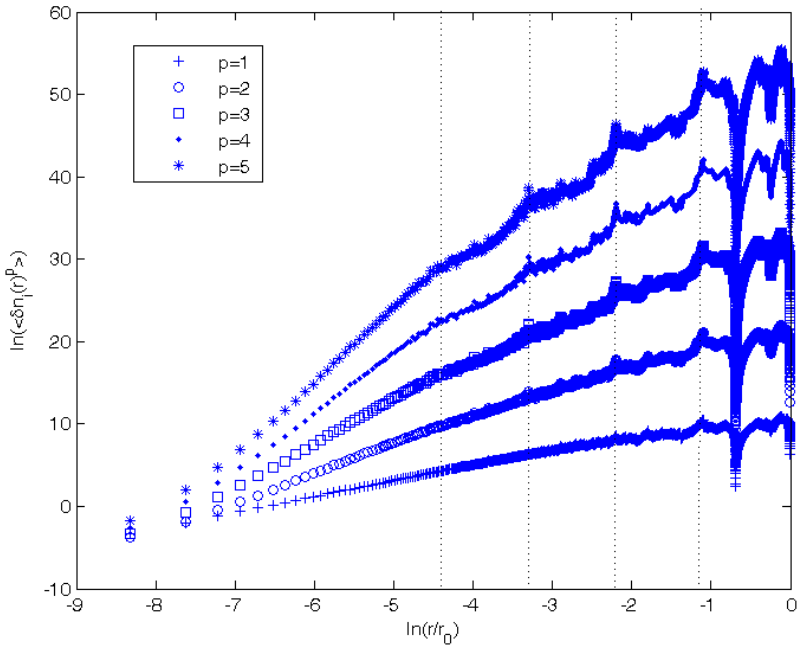


Figure IV.21 : $ln < \delta n_i(r)^p >$ en fonction de l'échelle dans un cas du cantor ($\theta = 1/3$). La log-périodicité est remarqué entre des pics aux échelles 1365 $(\frac{4096}{3})$, 455 $(\frac{4096}{3^2})$, 151 $(\frac{4096}{3^3})$, 50 $(\frac{4096}{3^4})$

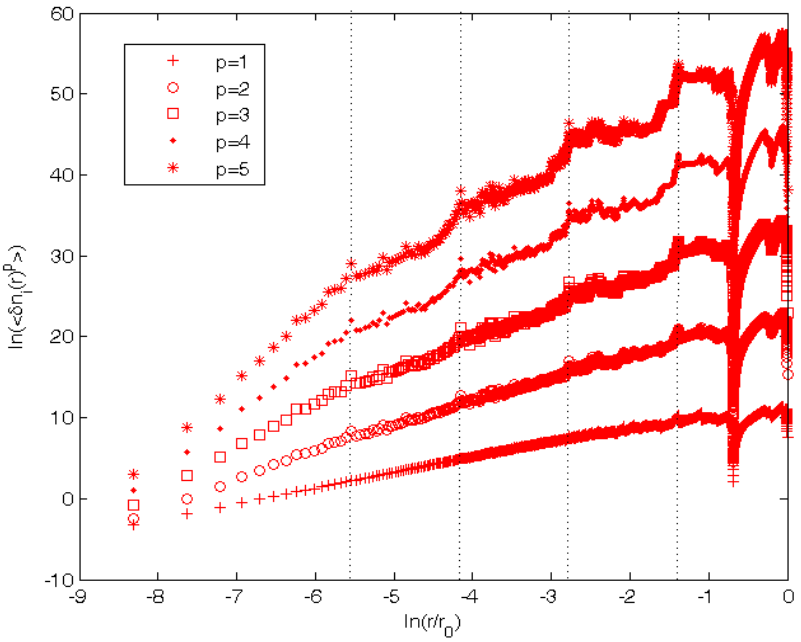


Figure IV.20: $ln < \delta n_i(r) >$ en fonction de l'échelle dans un cas du cantor ($\theta = 1/4$). La log-périodicité est remarqué entre des pics aux échelles 1024 $(\frac{4096}{4})$, 512 $(\frac{4096}{4^2})$, 256 $(\frac{4096}{4^3})$, 128 $(\frac{4096}{4^4})$

IV.6.2.2 Autosimilarité étendue en distribution cantor 2D

Afin de mettre en évidence le phénomène d'intermittence et ses caractéristiques, nous utilisons l'hypothèse d'autosimilarité étendue vue dans les études d'intermittence en

turbulence développée, effectuées par Benzi et ses collègues qui ont indiqué l'existence d'une autosimilarité étendue des fonctions de structure à travers les différents niveaux des fluctuations, signifiant que toute fonction de structure est une loi de puissance de toute autre fonction. Une représentation logarithmique de $< \delta n_i(r)^p >$ en fonction de $< \delta n_i(r)^q >$ donne une valeur de pente $\frac{z_p}{z_q}$, notamment dans le cas de l'homogénéité, la pente $\frac{z_p}{z_q}$ est égale à $\frac{p}{q}$; cela signifie que sa représentation en fonction de p est linéaire avec une pente $\frac{p}{q}$. En revanche, un écart de valeur de $\frac{p}{q}$ doit se produire dans le cas d'une intermittence.

En effet, nous avons entrepris de vérifier cette loi pour les deux cas homogènes et intermittents (voir Figure IV.22).

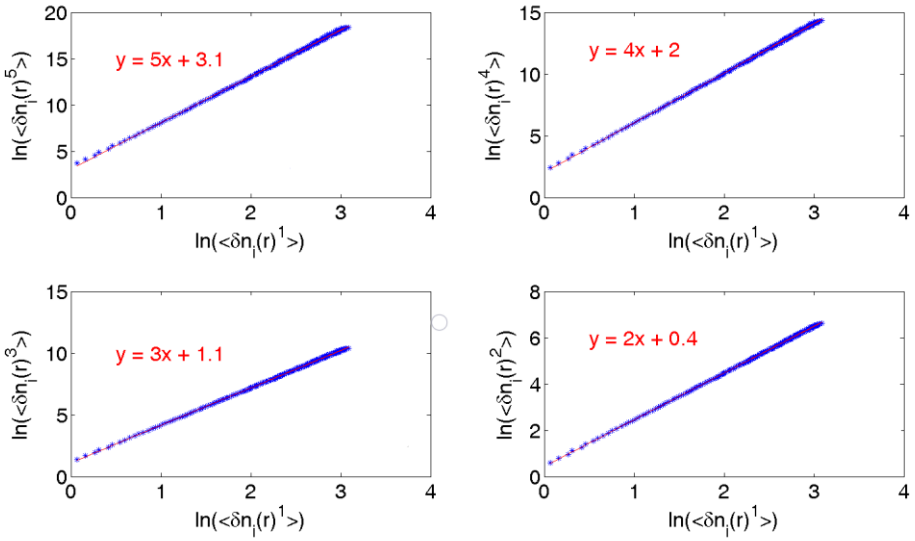


Figure IV.22 : Représentations logarithmiques de fonction de structure d'ordre 2,3,4 et 5 en fonction de fonction de structure d'ordre 1 pour une gamme échelle ($ln\ (\frac{10}{4096})$ <$ln\ (\frac{r}{4096})$ <$ln\ (\frac{205}{4096})$), dans le cas d'homogénéité

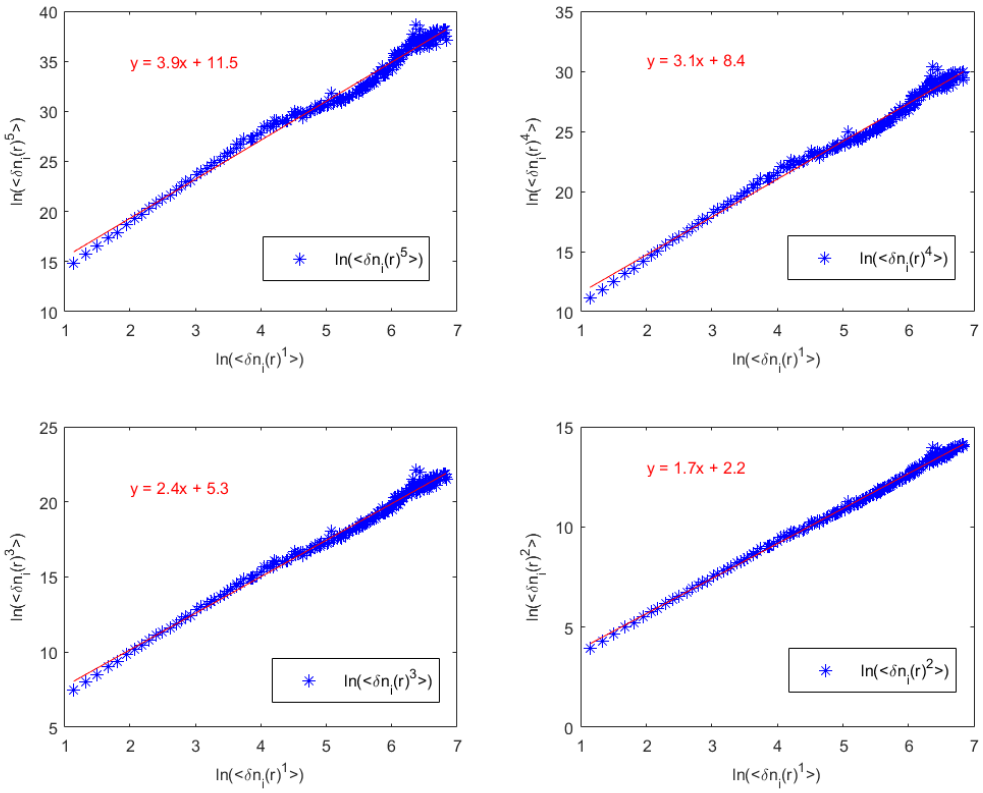


Figure IV.23 : Représentations logarithmiques de fonction de structure d'ordre 2,3,4 et 5 en fonction de fonction de structure d'ordre 1 pour une gamme échelle ($ln\ (\frac{10}{4096})$ <$ln\ (\frac{r}{4096})$ <$ln\ (\frac{205}{4096})$), dans le cas d'intermittence

IV.6.2.3 L'écart à l'homogénéité

Par souci de bien définir et distinguer les variables, la fonction de structure $< \delta n_i(r)^p >$ correspondant au cas homogène sera noté $< \delta n_i(r)^p >_*^p$, dans la suite de ce travail.

Afin d'étudier cet écart entre les deux distributions, nous supposons que la valeur de fonction de structure à un certain niveau de fluctuation, dans le cas intermittent (cantor) est équivalente à la valeur de fonction de structure associée à l'homogénéité en tenant compte de la contribution « lacunaire » pondérant la distribution de l'homogénéité avec la distribution intermittente, ce qui donne l'hypothèse suivante :

$$< \delta n_i(r)^p > =< \delta n_i(r)^p >_*\ f(r) = k < \delta n_i(r) >_*^p\ f(r) \qquad \text{(IV.25)}$$

$f(r) = (\frac{r}{r_0})^{y_p}$ est un facteur de « lacunarité » , tel que y_p représente l'exposant d'échelle lacunaire. k est une constante.

D'une part, puisque $< \delta n_r^{\,p} > \sim r^{z_p}$ et $< \delta n_r >_*^{\,p} \sim r^p$, l'équation (IV.25) donne :

$$z_p = p + y_p \qquad \text{(IV.26)}$$

D'autre part, en appliquant la fonction logarithme sur (IV.25), on obtient :

$$\ln \frac{< \delta n_i(r)^p >}{< \delta n_i(r) >_*^{\,p}} = y_p \ln \frac{r}{r_0} + \ln k \qquad \text{(IV.27)}$$

Nous considérons le rapport $\frac{<\delta n_i(r)^p>}{<\delta n_i(r)>_*^{\,p}}$ entre les fonctions de structures des deux cas : homogène et intermittent, comme une fonction de structure normalisée. Cette fonction de structure normalisée est notée par $\ln < \delta n_i(r)^p >_n$:

$$\ln < \delta n_i(r)^p >_n = \ln(k) + y_p \ln(r/r_0) \qquad \text{(IV.28)}$$

Les figures Figure IV.24 et Figure IV.25 représentent la fonction de structure $< \delta n_i(r)^p >$ et la fonction de structure normalisée $< \delta n_i(r)^p >_n$ en fonction de l'échelle dans des différents cas intermittents.

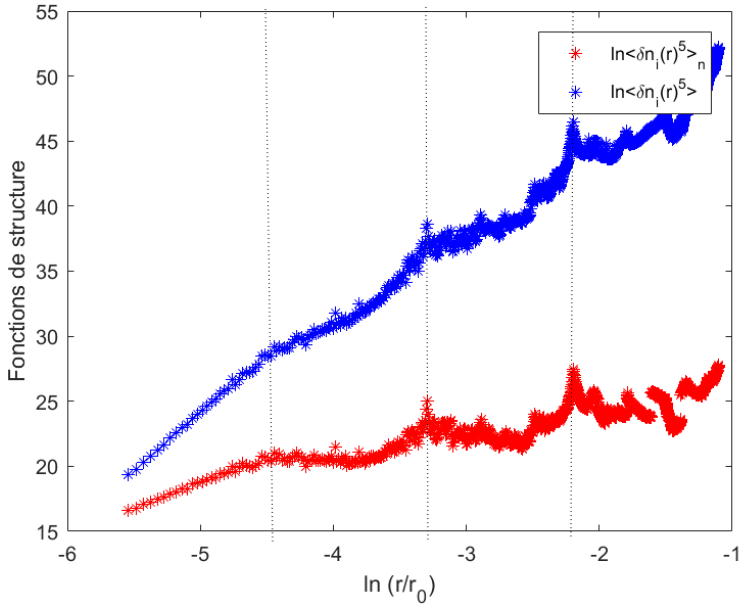


Figure IV.24 : Représentation logarithmique de fonction de structure $< \delta n_i(r)^5 >$ et fonction de structure normalisée $< \delta n_i(r)^5 >_n$ des ordres 5, pour un cantor un tiers ($\theta = \frac{1}{3}$), en fonction d'échelle r

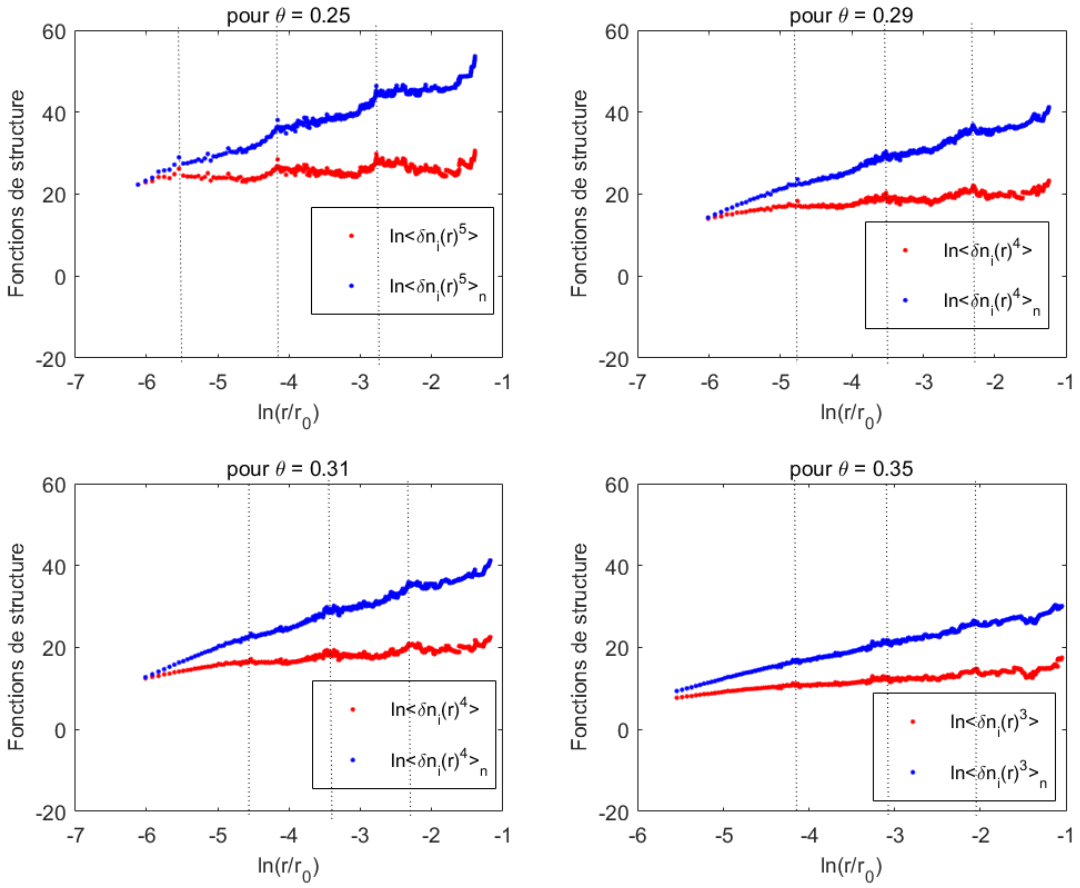


Figure IV.25 : Représentation logarithmique de fonctions de structure $< \delta n_i(r)^p >$et fonctions de structure normalisées $< \delta n_i(r)^p >_n$des différentes ordres 3, 4, 5, pour des différentes facteurs d'échelles

Nous remarquons que les fonctions de structure $< \delta n_i(r)^p >$et les fonctions de structures normalisées $< \delta n_i(r)^p >_n$ augmentent à travers les échelles avec des pentes différentes pour chaque courbe, mais conservent la même allure et la même log-périodicité. Rappelons que les pentes des deux fonctions de structure sont z_p et y_p.

Pour vérifier la relation obtenue par équation (IV.26) entre z_p et y_p, nous avons lissé les deux courbes linéairement d'une manière approximative, sur une gamme d'échelle r entre 10 et 205 (dépend de la définition de la zone inertielle que nous verrons plus tard), pour différents cantors et pour différents niveaux de fluctuation, même si elles ne sont pas linéaires. Nous trouvons que la différence entre $z_p$et y_p est toujours égale à p, la relation $z_p = p + y_p$ est donc validée.

Dans le cas de la distribution homogène, y_p est à peu près 0 et z_p est égale à p. Ceci est compatible avec l'analyse précédente, déjà accomplie au début de cette partie.

Dans ce cas la relation (IV.26) devient :

$$\ln < \delta n_i(r)^p >_{*n} = \ln(k) \qquad (y_p = 0) \tag{IV.29}$$

Comme montré dans la Figure IV.26, $\ln < \delta n_i(r)^p >_{*n}$ est constante en fonction de l'échelle r entre 10 et 205 (la pente ≈ 0), du fait que $< \delta n_i(r)^p >_* = k < \delta n_i(r) >_*^p$. Ce qui justifie notre choix de gamme d'échelle comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Notons que les valeurs de z_p et y_p ne sont pas rigoureuses, car nous avons réalisé approximativement une régression linéaire. En effet, une courbure parabolique à travers les échelles est remarquable. Il sera utile de chercher à l'avenir à identifier y_p et z_p en fonction de l'échelle r et du niveau de fluctuation p.

IV.6.2.4 Définition de la zone inertielle

En présentant une approche géostatistique de turbulence développée, il faut d'abord présenter une zone inertielle de distribution : une gamme d'échelles intermédiaires, à laquelle les prédictions statistiques de la turbulence sont donc restreintes.
Dans cette optique, nous avons adopté les validations ayant lieu dans le cas homogène concernant les fonctions de structures comme critère, ou $< \delta n^p{}_r >_* = k < \delta n_r >_*^p /$ K est constante (IV.29), soit valide.

En effet**,** cette égalité qui correspond à l'homogénéité semble se valider dans une gamme d'échelle entre $\frac{10}{4096}$ et $\frac{205}{4096}$, comme le montre la présentation logarithmique de $\ln \frac{<\delta n_i(r)^p>_*}{<\delta n_i(r)>_*^p}$en fonction de $\ln(\frac{r}{r_0})$ à travers tous les niveaux de fluctuation donc selon l'équation (IV.29) , elle doit présenter une allure constante (voir Figure IV.26).

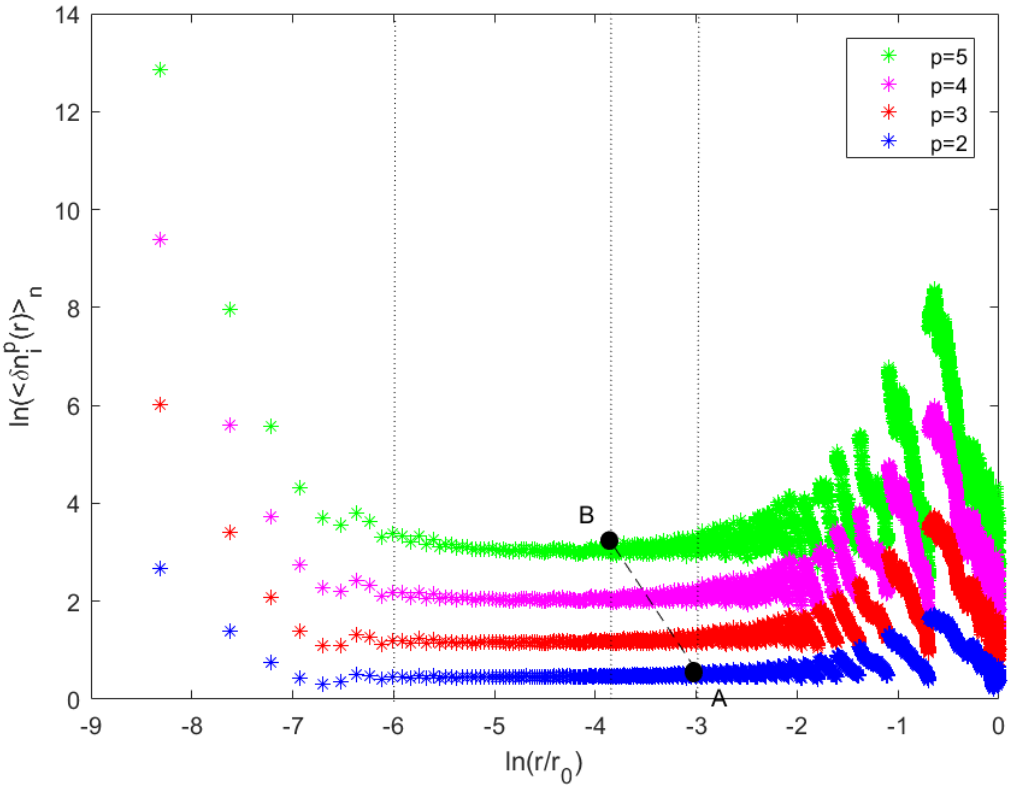


Figure IV.26 : représentation logarithmique de $ln < \delta n_i(r) >_{*n}$ *au cas homogène, en fonction de ln(r/r₀) pour tous les niveaux de fluctuation dont* $< \delta n_i(r) >_n$ *reste constante dans une gamme d'échelle entre* $ln(\frac{r}{r_0}) = -6.01$ $(r = 10)$ *et* $ln(\frac{r}{r_0}) = -2.99$ $(r = 205)$*, (les deux extrêmes lignes pointillés)*

IV.6.2.5 Effet de gamme d'échelle

Pour être rigoureux, nous avons tout d'abord proposé plusieurs « hypothèses » de choix possibles de gamme d'échelle inertielle, avant d'en définir la plus convenable.

- **Choix 1 : gamme d'échelle inertielle entre** $\mathbf{ln\frac{10}{4096}}$ **et** $\mathbf{ln\frac{205}{4096}}$ **(**$\mathbf{r = 10}$ **et** $\mathbf{r = 205}$**)**

Nous avons essayé ce choix en le supposant valable pour tous les niveaux de fluctuations. Nous avons obtenu le rapport $\frac{z_p}{z_1}$ en fonction du p pour différentes échelles du cantor, présenté dans la Figure IV.27, et donc z_p en fonction de p.

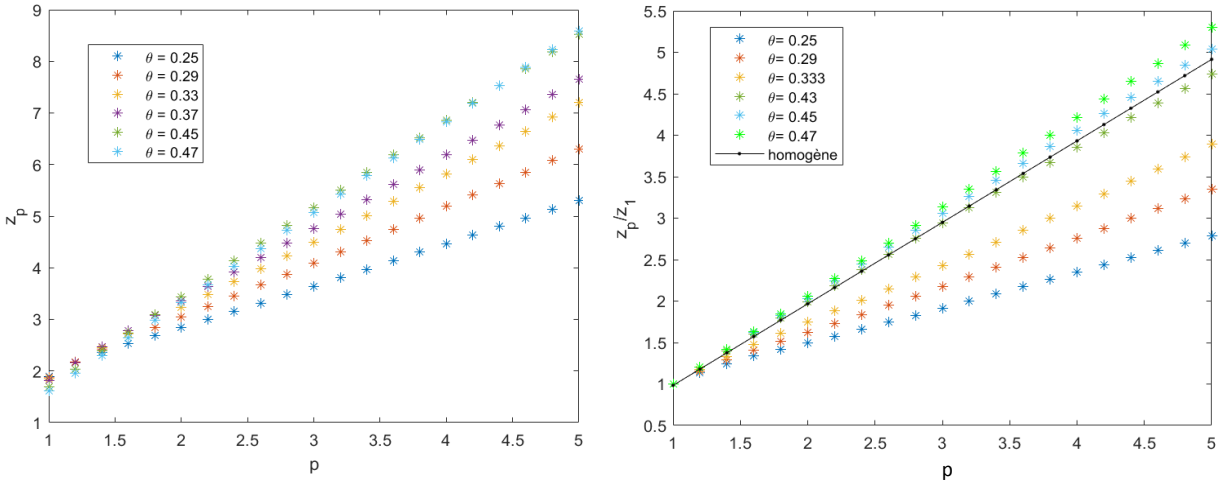


Figure IV.27 : exposants des échelles z_p (à droite) et rapport des exposants des échelles $\frac{z_p}{z_q}$ (à gauche) en fonction de p pour différentes échelles du cantor θ , dans une gamme d'échelle entre $ln(\frac{r}{r_0}) = -6.01$ (r=10) et $ln(\frac{r}{r_0}) = -2.99$ (r=205)

Un léger dépassement de courbe $\frac{z_p}{z_q}$ à peu près de 0.2, par rapport à la valeur de pente 5 (ligne noire continue) correspond à l'homogénéité, à propos de $\theta = 0.47$ et $\theta = 0.45$. Sachant que ces deux valeurs des échelles des cantors sont très proches du cas homogène. Ce dépassement peut être considéré négligeable.

Il est aussi remarqué que les deux courbes correspondant aux $\theta = 0.47$ et $\theta = 0.45$ se confondent particulièrement.

Choix 2 : gamme d'échelle inertielle [$\ln\frac{10}{4096}$, $\ln\frac{90}{4096}$]

Remarquons que la courbe de $\ln\frac{<\delta n^p{}_r>}{<\delta n_r>_*{}^p}$ en fonction de $\ln(\frac{r}{r_0})$ subit des fluctuations (perturbations) à travers tous les niveaux p, alors nous avons essayé de choisir la gamme d'échelles la plus étroite [$\ln\frac{10}{4096}$, $\ln\frac{90}{4096}$] celle du niveau de fluctuation le plus important p=5, comme une zone inertielle de distribution, afin d'essayer d'éviter l'effet de fluctuation. Par suite, nous avons eu la variation de $\frac{z_p}{z_1}$ et $z_1$en fonction de p comme suit (voir Figure IV.28).

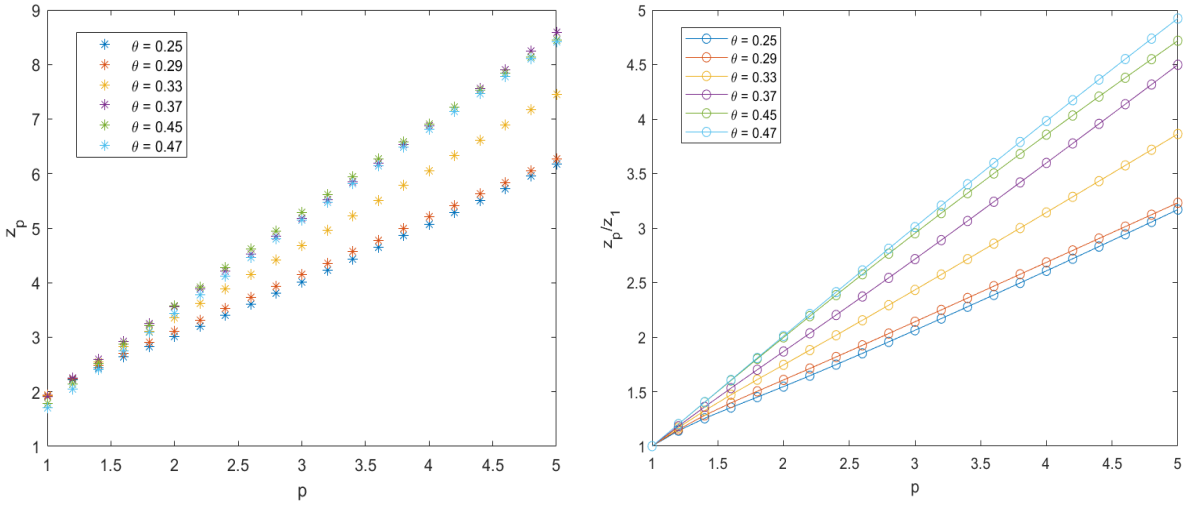


Figure IV.28 : les exposants des échelles z_p (à droite) et les exposants des échelles relatives $\frac{z_p}{z_1}$ (à gauche) pour différentes facteurs d'échelles du cantor en fonction du p dans une gamme inertielle [$ln\frac{10}{4096}$, $ln\frac{90}{4096}$]

Il est clair que les courbes z_p correspondant aux $\theta = 0.47$ et $\theta = 0.45$ sont aussi quasiment confondues, tout comme celles qui correspond aux $\theta = 0.25$ et $\theta = 0.29$.

Choix 3 : gamme d'échelles inertielles varie à travers des niveaux de fluctuation

Vu que la fluctuation générée augmente à travers les niveaux p, il est donc possible que la gamme d'échelles inertielles puisse varier en fonction de p. Pour cela, nous avons entrepris de trouver et essayer l'hypothèse de variation de zone inertielle en fonction des niveaux de fluctuation, en la modélisant par une équation linéaire entre deux points extrêmes : A ($r = \ln\frac{205}{4096}$, $p = 2$) et B (r= $\ln\frac{90}{4096}$, $p = 5$) présentée par la ligne en tirets dans la Figure IV.26. Nous avons obtenu les courbes z_p en fonction de p pour les différentes θ (voir Figure IV.29).

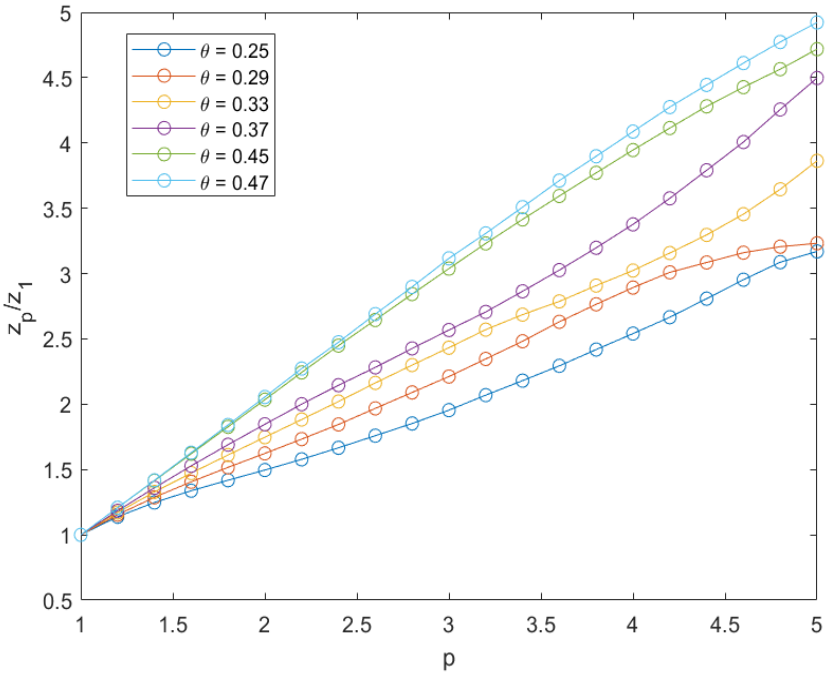


Figure IV.29 : les exposants des échelles z_p pour différentes facteurs d'échelles en fonction du p dans une zone inertielle variante à travers des niveaux p

On remarque que les courbes $\frac{z_p}{z_1}$pour $\theta = 0.25, 0.29, 0.33$ et 0.37 sont concaves vers le haut, ce qui contredit le fait que l'intermittence augmente avec p en s'éloignant du comportement fractal ($\frac{z_p}{z_1} = p$: ligne noire dans la Figure IV.29).

Il est nécessaire de chercher un compromis entre courbes qui se confondent et courbes qui doivent respecter les aspects intermittents théoriques. Par conséquent, au vu de ce qui précède, le meilleur choix semble être le premier dont la zone inertielle $[\ln\frac{10}{4096}, \ln\frac{205}{4096}]$ est invariante à travers les niveaux de fluctuation.

IV.6.2.6 Calcul du facteur de réversibilité statistique γ_{stat}

Pour calculer le facteur de réversibilité statistique γ_{stat}, nous retournons à la relation de She et Lévêque obtenue par P.E. appliquée à la distribution de points :

$$\alpha_{p+dp}(r) = < \delta n_i(r) >_F^{(1-\gamma^{dp})} \qquad \alpha_p(r)^{\gamma^{dp}} \qquad /\alpha_{p\to\infty} = < \delta n_i(r) >_F$$

Nous présentons $\alpha_{p+dp}(r)$ et $\alpha_p(r)$ en coordonnées logarithmiques pour toutes les échelles sur un même graphe, en supposons que γ_{stat} est constante pour toutes les échelles étudiées. Nous obtenons une courbe linéaire de pente gamma $\gamma_{stat}{}^{dp}$(voir Figure IV.30).

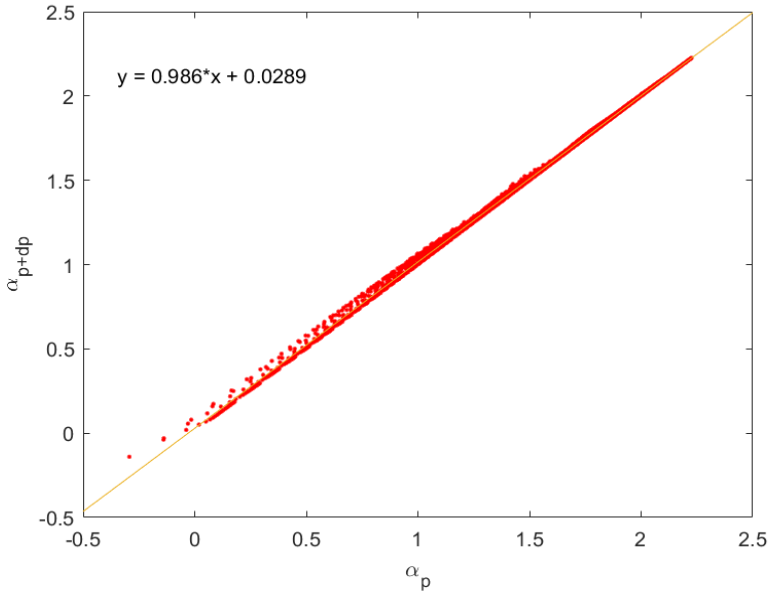


Figure IV.30 : représentation logarithmique de $\alpha_{p+dp}(r)$ en fonction de $\alpha_p(r)$.
La gamme d'échelle de mesure de gamma est [l_{*i} , l_0]. La pente obtenue présente γ^{dp}

Pour s'assurer que l'on travaille bien sur la gamme d'échelles où l'intermittence se développe, il faut éviter les échelles plus petites que l_{*i} l'échelle topique de la dernière itération i, ce qui implique une gamme d'échelles de mesure de γ_{stat} soit $[l_{*i}, l_0]$.

Dans le cas homogène, l'analyse statistique nous donne un facteur de réversibilité statistique $\gamma_{stat} = 0.997 \approx 1$.

IV.7 Résultats

IV.7.1 Déviation par rapport à l'homogénéité

Notre objectif est d'étudier la validation du concept proposé par la théorie de P.E pour décrire le phénomène d'intermittence. En effet, nous avons accompli les analyses statistiques et géométriques en effectuant toutes les mesures requises pour différents degrés d'intermittence en faisant varier le paramètre d'intermittence :le rapport de modifie interne θ, le facteur le plus efficace qui présente explicitement et

proportionnellement la densité de l'intermittence. Le paramètre θ varie dans une gamme de]0 ; 0.5] tel que si $\theta \to 0$: la structure du cantor 2D est plus intermittente. Et si θ approche de la valeur de 0.5, la distribution est moins intermittente et touche l'homogénéité d'une manière que la fluctuation par rapport à la moyenne diminue fortement.

Nous avons mesuré les valeurs de $\frac{z_p}{z_1}$ en fonction de p en appliquant l'hypothèse d'autosimilarité. Nous trouvons que la courbe montre une loi de puissance très proche de p identique au cas homogène, signifiant l'existence d'une autosimilarité. Ceci est analogue à la théorie de Kolmogorov dans la turbulence développée. Une certaine déviation à la loi de puissance à partir de p=1,2 est observée dans les cas des distributions du cantor 2D pour différents paramètres d'intermittence θ. Ce qui met en évidence les caractéristiques intermittentes de la distribution (voir Figure IV.31).

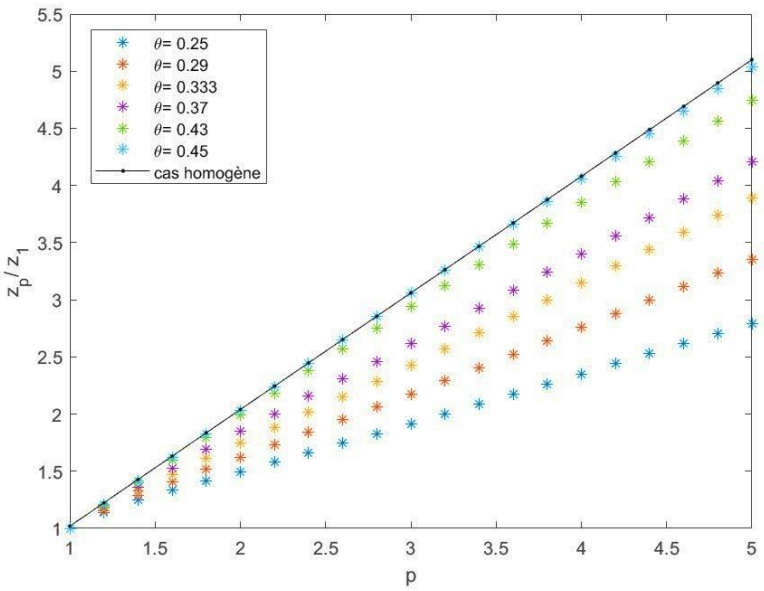


Figure IV.31 : rapport des exposants des échelles en fonction de niveaux des fluctuations

La déviation par rapport à l'homogénéité augmente inversement proportionnelle avec le facteur d'intermittence θ. De plus, quand θ augmente le rapport $\frac{z_p}{z_1}$ d'autosimilarité s'approche de l'homogénéité. Ceci est compatible avec le cas de l'intermittence en turbulence développée.

IV.7.2 Dynamique du corps et de crête

La mesure des dimensions du corps et des crêtes pour différents paramètres d'intermittence θ a dévoilé une correspondance et une harmonisation entre θ et les deux dimensions, telles qu'ils mettent explicitement en évidence la densité de l'intermittence.

Représentons D_f en fonction de $\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}$ comme nous l'avons fait pour D_∞ en fonction de $\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}$ selon l'équation (IV.22) avec $\theta = \frac{l_{i+1}}{l_i}$. La variation de D_f en fonction de θ semble parabolique, de telle sorte que D_f crois avec θ. De même pour D_∞, tandis que $D_\infty(\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}})$ est linéaire de pente $\ln 4$ (voir Figure IV.32).

L'interpolation des courbes des deux dimensions $D_f(\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}})$ et $D_\infty(\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}})$ donne les deux équations :

$$D_f = -1.5\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}\right)^2 - 0.44\,\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}} + 1.7 \qquad \text{(IV.30)}$$

$$D_\infty = \frac{\ln 4}{\ln\frac{1}{\theta}} \qquad \text{(IV.31)}$$

Les deux courbes se croisent à une abscisse $\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}} = 1.44$, d'où $\theta \approx 0.5$ et $D_f = D_\infty \approx 2$. Ceci correspond à l'homogénéité.

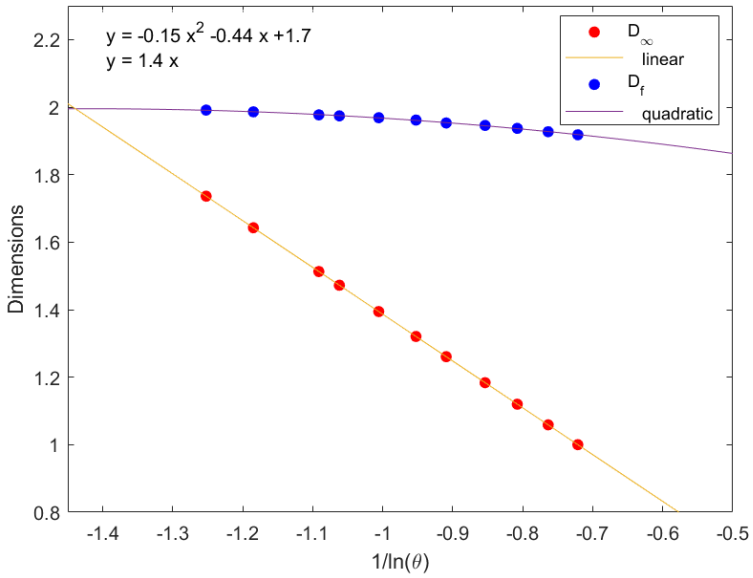


Figure IV.32 : les allures des dimensions du corps D_f et de crête D_∞ en fonction de $\frac{1}{\ln\theta}$. Les deux courbes convergent à un facteur d'échelle $\theta \approx 0.5$ vers une valeur de $D_f = D_\infty \approx d = 2$.

IV.7.3 Égalité de facteur de réversibilité statistique γ_{stat} et l'autre géométrique γ_{geo}

Les résultats obtenus présentent une égalité entre facteur de réversibilité statistique γ_{stat} et l'autre géométrique γ_{geo}, avec une marge d'erreur relative maximum de 1.7 %.

Les deux coefficients d'intermittence γ_{geo} et γ_{stat} en fonction du facteur θ indiquent presque la même allure, avec une erreur négligeable pour les deux courbes $\gamma_{geo}(\theta)$ et $\gamma_{stat}(\theta)$. En effet, ils diminuent avec θ mettant en évidence l'augmentation de la densité d'intermittence (voir Figure IV.33).

Dans le but de vérifier cette égalité, nous avons réalisé l'expérience en faisant varier tous les paramètres qui peuvent influencer la distribution, comme : le facteur d'échelle θ, le nombre des points jetés par bloc n_b, la taille de la boîte l_0 et le facteur du peuplement a.

L'égalité reste validée avec une étroite marge d'erreur. En outre, la représentation graphique de $\gamma_{geo}(\theta)$ et $\gamma_{stat}(\theta)$ montre une corrélation claire entre ces deux quantités.

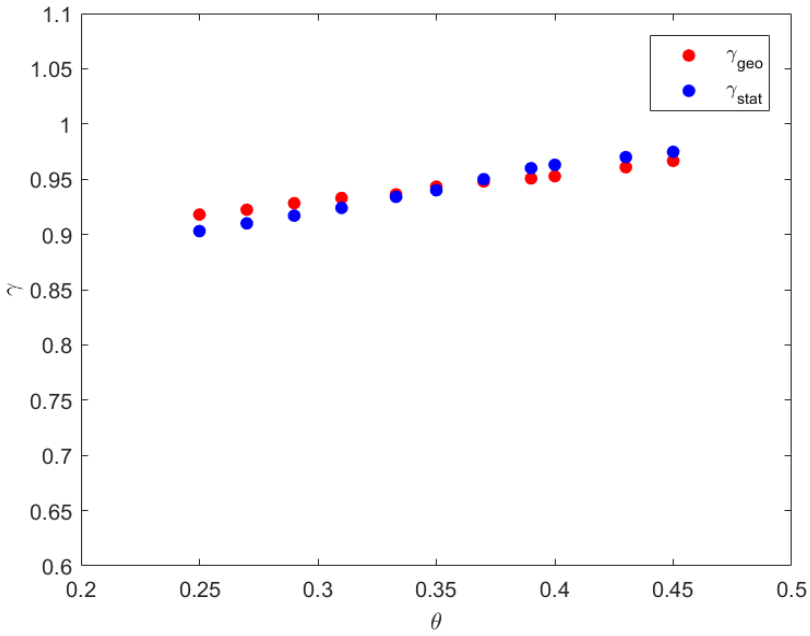


Figure IV.33 : γ_{geo} et γ_{stat} en fonction du facteur d'échelleθ

Cependant, nous avons présenté le rapport $\frac{\gamma_{geo}}{\gamma_{stat}}$ en fonction de densité d'intermittence θ. Les valeurs sont dispersées autour de la droite : y=1 (voir Figure IV.34).

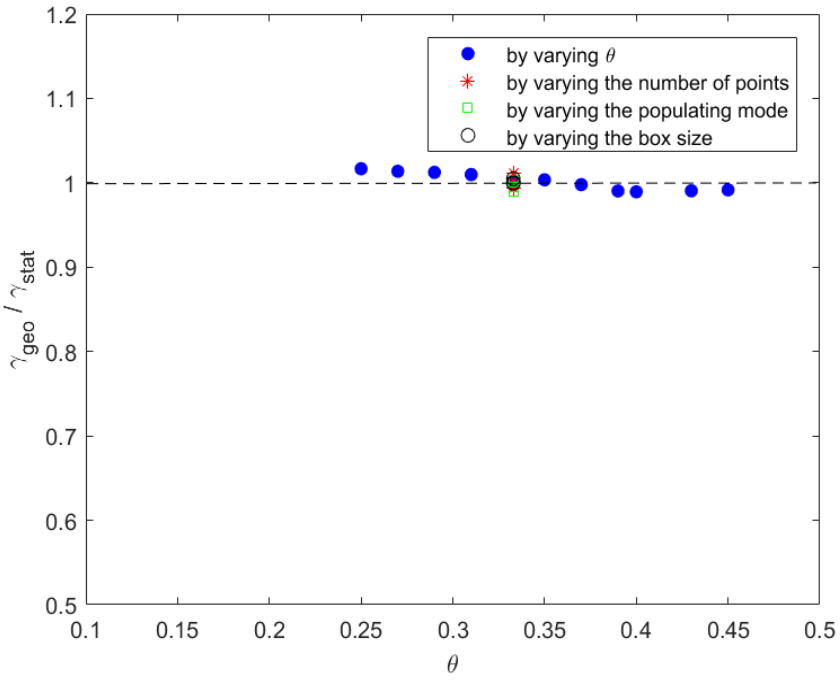


Figure IV.34 : rapport $\frac{\gamma_{geo}}{\gamma_{stat}}$ en fonction de densité d'intermittence θ

Nous avons obtenu une égalité intrinsèque sur laquelle repose la notion du modèle des peaux entropiques. Cette égalité des deux facteurs de réversibilité statistique γ_{stat}et géométrique γ_{geo} est accompagnée par une corrélation pour diverses valeurs des paramètres pouvant influencer la distribution.

IV.8 Conclusion

Dans notre travail, nous avons étudié le phénomène de répartition des individus et des espèces dans les écosystèmes. Dans ce but, nous avons utilisé le modèle de peaux entropiques utilisé en turbulence.

Nous avons obtenu une validation de théorie des peaux entropiques dans la description du phénomène d'intermittence en l'appliquant à une simulation d'un simple modèle géométrique de distribution de points de la forme du cantor 2D. Cette validation a été confirmée par l'égalité intrinsèque de deux facteurs d'intermittence géométrique γ_{geo} et statistique γ_{stat} à propos du modèle de peaux entropiques P.E.

Nous avons trouvé que la dynamique du corps et de crête proposée par le P.E comme deux extrémités de hiérarchie d'intermittence est très efficace et adéquate pour décrire le

phénomène d'intermittence des distributions des points, où les dimensions de crête D_∞ et du corps D_f ainsi que le facteur de réversibilité γ expriment explicitement sur la densité d'intermittence.

Par ailleurs, la déviation obtenue dans l'analyse statistique de P.E par rapport à l'homogénéité supposée par Kolmogorov à propos de l'autosimilarité $\frac{z_p}{z_1}(p)$, a mis en évidence la dynamique d'intermittence au sein de la distribution des points liant les niveaux de fluctuations.

Enfin, nous avons proposé un modèle géométrique et intermittent caractérisant le phénomène de distribution des individus (implicitement les espèces), à partir d'une distribution de points sous forme de cantor 2D. Ce modèle pourrait simuler plusieurs phénomènes d'agrégation dans la nature.

Conclusion générale & perspectives

"Le vrai point d'honneur n'est pas d'être toujours dans le vrai. Il est d'oser, de proposer des idées neuves, et ensuite de les vérifier."

Pierre-Gilles de Gennes

Dans ce travail, nous avons proposé une approche multi-échelles et statistique pour caractériser le phénomène de distribution des individus et des espèces au sein d'un écosystème. Cette étude s'est faite dans le cadre d'un lien existant entre la géométrie fractale et la thermodynamique via une hybridation de la théorie des peaux entropiques et de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle.

Après avoir réalisé un état de l'art des diverses théories physiques appliquées au domaine des écosystèmes, nous nous sommes focalisés sur une étude de la loi zone-espèce dite SAR (« Species Area-Relationship ») dans la littérature scientifique. En utilisant diverses bases de données de forêts tropicales donnant le nombre d'espèces d'arbres $N_s(A)$ en fonction de l'aire explorée A pour des aires variant de 0 à une aire maximale A_0. La loi SAR est loin d'être une simple loi de puissance ; en effet, pour des échelles locales (jusqu'à 50 ha environ), l'évolution en coordonnées logarithmiques n'est pas linéaire, mais présente une courbure de type parabolique avec un exposant z local qui diminue quand on augmente l'aire pour atteindre une valeur proche de 0. Nous avons ainsi trouvé que $\ln\frac{N_s(A_i)}{N_s(A_0)}$ en fonction de $\ln^2(\frac{A_i}{A_0})$ montre une allure linéaire pour tous les écosystèmes étudiés avec une pente, la quantité $\beta/2$ où β est le potentiel évolutif du système à travers les échelles. Ceci montre que la SAR est une loi parabolique en fonction de l'échelle A. Un tel comportement est prédit dans le cadre des peaux entropiques en faisant l'hypothèse d'un potentiel évolutif β constant à travers les échelles.

La densité du potentiel évolutif β est négative. Ce qui donne conséquemment une SAR fractale parabolique décélérée ayant une dimension locale D_i qui diminue linéairement à travers les échelles. D'autre part comme l'exposant local de la SAR z_i est lié linéairement à la dimension locale D_i ($z_i = \frac{(D_i - D_\infty)}{2}$), il possède la même allure que D_i. Par suite, nous avons obtenu un exposant z_i décroissant quasi linéairement en fonction de l'échelle, compris entre 0 et 1(Harte, 2011; McGlinn et al., 2013; Plotkin et al., 2000). Ceci est compatible avec le postulat de Hubelle affirmant que la SAR est généralement triphasée dans l'espace logarithmique, de sorte qu'elle augmente fortement aux échelles locales, puis ralentit à des échelles intermédiaires (Storch, 2012). Une diminution de pente a lieu à travers les échelles. Soulignons que les écosystèmes qui appartiennent à une même région géographique naturelle ont des valeurs de densité β très proches comme Lambir, Pasoh,

Huai Kha Khaeng et Mudumalai ayant des β autour de -0.35 (situés au Sud Est de l'Asie), tandis que les autres BCI, Luquillo et Oostingont des β autour de -0.47 (situés en Amérique du Nord (voir Figure III.3)). Ceci nous porte à croire que la densité du potentiel évolutif peut être considérée comme une caractéristique spécifique à une région écologique.

Le modèle des peaux entropiques hybridé avec l'équation de diffusion d'entropie d'échelle nécessite comme hypothèse l'existence deux supports géométriques caractéristiques : le corps et la crête. Le corps est le support spatial de l'ensemble de la zone active tandis que la crête est le lieu géométrique des événements les plus éloignés de la moyenne, support des fluctuations de densité les plus élevées. Nous avons donc développé une simulation numérique qui part d'un champ homogène d'individus et introduit un mécanisme de différenciation fractale de la population selon un ensemble de Cantor en deux dimensions qui fait office de crête. Ayant ainsi défini la crête, le corps apparaît simplement par différence entre l'espace de plongement et la crête. Nous avons réalisé la simulation pour une gamme de rapports d'homothétie du Cantor. Connaissant la dimension de crête et la dimension de corps, le facteur de réversibilité peut être déterminé de manière géométrique. Nous avons alors étudié l'intermittence du champ de points résultant de manière à déterminer via des outils statistiques déjà utilisés dans le domaine de la turbulence. Par calcul des fonctions de structure et de leur exposant d'échelle nous avons mis en évidence un phénomène d'intermittence caractérisé par la déviation des exposants par rapport au comportement linéaire équivalent à la théorie de Kolmogorov en turbulence et caractéristique d'un phénomène homogène.

Nous avons alors déterminé le facteur de réversibilité (ou facteur d'intermittence) de manière statistique en calculant les fonctions de structure et en extrayant les exposants d'échelle associés. La cohérence de notre approche tient dans le fait que les facteurs de réversibilité sont très proches qu'ils soient déterminés par la voie géométrique ou par la voie statistique. Nous sommes ainsi parvenus à valider la théorie des peaux entropiques dans la description du phénomène d'intermittence en turbulence en l'appliquant à un modèle géométrique simple de distribution de points ayant une forme de Cantor 2D. Cette validation a été confirmée par l'égalité intrinsèque des deux facteurs d'intermittence géométrique γ_{geo} et statistique γ_{stat}inhérents au modèle des peaux entropiques.

Nous observons donc que la dynamique du corps et de crête proposée par la théorie des peaux entropiques comme deux extrémités de hiérarchie d'intermittence est très efficace et adéquate pour décrire le phénomène d'intermittence en distribution des points, où les dimensions de la crête D_∞et du corps D_f ainsi que le facteur de réversibilité γ expriment explicitement la densité d'intermittence.

Nous avons ainsi trouvé que la répartition des espèces est bien décrite par le modèle des peaux entropiques. En effet, toutes nos hypothèses ont été validées. La loi SAR montre une dynamique intermittente possédant une hiérarchie de peaux entropiques qui s'étend entre un corps fractal parabolique (correspondant à l'extension spatiale de la population végétale moins ordonnée) et une crête fractale pure (correspondant aux zones métaboliquement actives et ordonnées). Les statistiques d'intermittence peuvent donc se produire dans des phénomènes autres que la turbulence. L'analyse de la distribution des espèces dans les écosystèmes, présentée par la loi zones espèces (SAR), par des outils multi-échelles et intermittents en régime stationnaire pourrait servir comme base pour une prochaine étape dans laquelle le facteur temps serait pris en considération puisque l'équation de diffusion d'entropie d'échelle comporte un terme temporel grâce à la notion de diffusivité d'échelle.

Annexes

L'objectif de MaxEnt est d'estimer la distribution de probabilité p(n) la moins biaisée maximisant l'entropie d'information, obéissant à un ensemble de K contraintes imposées par des connaissances antérieures à propos de cet ensemble dont ils peuvent être exprimée sous la forme de K équations :

$$\sum_n f_k(n)p(n) = \langle f_k \rangle \quad (1)$$

Où n est sommé sur toutes ses valeurs possibles, $<f_k>$ est la valeur numérique de la moyenne de f_k, et l'index k va de 1 à K.

D'après Shannon (1948), l'entropie d'information est :

$$I = -\sum_n p(n) In\big(p(n)\big) \quad (2)$$

La maximisation est réalisée à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En supposant une entropie de référence uniforme (Jaynes et al., 1982), La procédure de maximisation donne probabilité :

$$P(n) = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{k} \lambda_k f_k(n)}}{Z(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} \quad (3)$$

Où Z est la fonction de partition :

$$Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \sum_n e^{-\sum_{k=1}^{k} \lambda_k f_k(n)} \quad (4)$$

Et les λ_k sont obtenus par les solutions de l'équation suivante :

$$\frac{\partial In(Z)}{\partial \lambda_k} = -\langle f_k \rangle \quad (5)$$

On obtient la fonction de partition (équation A.1.4) pour R (n,ε) en intégrant l'équation (1.12):

$$Z(\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{n=1}^{N_0} \int_0^{E_0} e^{-\lambda_1 n} e^{-\lambda_2 n\varepsilon}\, d\varepsilon = \sum_{n=1}^{N_0} \frac{e^{-\lambda_1 n}}{\lambda_{2n}} \left(1 - e^{-\lambda_2 n E_0}\right) \quad (1)$$

Pour déterminer λ_2, nous appliquons l'équation A.1.5 en utilisant :

$$\frac{\partial \mathrm{In}(Z)}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} \quad (2)$$

Comme la moyenne de l'énergie par espèces vaut $\frac{E_0}{S_0}$, l'équation A.1.5 devient :

$$\frac{E_0}{S_0} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{Z}\sum_{n=1}^{N_0} \frac{e^{-\lambda_1 n}\left(1-(1+\lambda_2 E_0)e^{-\lambda_2 n E_0}\right)}{\lambda_2^2 n} \quad (3)$$

Vue que $n \geq 1$, $(1 + S_0)e^{-S_0} << 1$, alors on peut négliger le terme $e^{-\lambda_2 n E_0}$, impliquent :

$$\lambda_2 = \frac{S_0}{E_0}$$

En appliquant l'équation A.1.5 pour λ_1 négligeant les termes de l'ordre $e^{-\lambda_1 N_0}$; on obtient :

$$\frac{1}{\mathrm{In}\left(\frac{1}{1-e^{\lambda_1}}\right)}\left(\frac{e^{-\lambda_1}}{1-e^{-\lambda_1}}\right) = \frac{N_0}{S_0} \quad (4)$$

Comme nous utilisons le développement limité, $e^{-\lambda_1} \approx 1 - \lambda_1$, nous obtenons l'équation (1.15).

Nous présentons ici l'ensemble des dix lois présentées par S.E. Jørgensen lors d'un "brainstorming sur l'énergie" pendant la conférence sur le Baïkal et discutées lors d'une réunion des pères de l'écologie des systèmes modernes sur l'île danoise de Møn (Jørgensen, 2006; Kozhov, 2010). Voici donc les dix lois écologiques (E.L), proposées :

1. Les conservations de masse et d'énergie sont valables pour les écosystèmes. Ce principe, basé sur la première loi de la thermodynamique, est utilisé encore et encore en matière d'écologie et en particulier dans la modélisation écologique.

2. Tous les processus de l'écosystème sont irréversibles et s'accompagnent de la production d'entropie et de la destruction des exergies. Les organismes vivants ont besoin d'énergie pour couvrir le maintien des processus de vie. Cette énergie est perdue en tant que chaleur dans l'environnement en accord avec la deuxième loi de la thermodynamique.

3. Tous les écosystèmes sont des systèmes ouverts intégrés dans un environnement à partir duquel ils reçoivent en entrée des énergies et des matières et en rejettent en sortie. D'un point de vue thermodynamique, ce principe est une condition préalable aux processus écologiques.

4. Les écosystèmes ont plusieurs niveaux d'organisation et de fonctionnent hiérarchique. Ce principe est utilisé à plusieurs reprises lorsque les écosystèmes sont décrits : les atomes, les molécules, les cellules, les organes, les organismes, les populations, les communautés, les écosystèmes et la biosphère. Les propriétés d'une population sont déterminées par les propriétés des individus et donc la population influence les propriétés des individus.

5. Les composants dans un écosystème forment un réseau écologique interactif et auto-organisé complexe. Ce réseau a un effet synergique sur les composants : l'écosystème est plus que la somme des composants.

6. La vie à base de carbone sur Terre, possède une caractéristique biochimique basique

que tous les organismes partagent. Cela implique que de nombreux composés biochimiques peuvent être trouvés dans tous les organismes vivants. La composition de tous les organismes peut être représentée comme une gamme relativement étroite d'environ 25 éléments.

7. D'un point de vue thermodynamique, la vie à base de carbone a un domaine de viabilité déterminé entre environ $250 - 350\,°\mathrm{K}$, Elle est dans cette gamme de température car il existe un bon équilibre entre l'ordre et le désordre : la décomposition de la matière organique et la construction de composés biochimiques importants.

8. Après la capture initiale de l'énergie à travers une frontière, la croissance et le développement de l'écosystème sont possibles par :
   -Une augmentation de la structure physique (biomasse),
   -Une augmentation du réseau (plus de cyclisme)
   -Une augmentation de l'information incarnée dans le système.

9. Les processus biologiques utilisent l'énergie capturée (entrée) pour aller hors de l'équilibre thermodynamique et maintenir un état de faible entropie et une forte exergie par rapport à son environnement et à l'équilibre thermodynamique.

10. Si l'écosystème offre plus de voies ou de combinaisons de voies pour s'éloigner de l'équilibre thermodynamique, les combinaisons de voies qui déplacent le système le plus loin de l'équilibre thermodynamique gagnent. (La deuxième loi écologique de la thermodynamique.)

Références bibliographiques

Alik, B., Ayyıldız, S.Ş., 2016. Fractals and Fractal Design in Architecture. Presented at the 13th INTERNATIONAL CONFERENCE “STANDARDIZATION, PROTYPES AND QUALITY: A MEANS OF BALKAN COUNTRIES’ COLLABORATION.

Angel, F.C. del, 2014. Fractal Effect of Corrosion on Mechanical Behavior of Unprotected Structural Steel. Dev. Corros. Prot. https://doi.org/10.5772/57061

Anselmet, F., Gagne, Y., Hopfinger, E.J., Antonia, R.A., 1984. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. J. Fluid Mech. 140, 63–89. https://doi.org/10.1017/S0022112084000513

Appleby, S., 1996. Multifractal Characterization of the Distribution Pattern of the Human Population. Geogr. Anal. 28, 147–160. https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1996.tb00926.x

Arellano, G., Medina, N.G., Tan, S., Mohamad, M., Davies, S.J., 2019. Crown damage and the mortality of tropical trees. New Phytol. 221, 169–179. https://doi.org/10.1111/nph.15381

Arrhenius, O., 1921. Species and Area. J. Ecol. 9, 95–99. https://doi.org/10.2307/2255763

Ashton, P., 1976. Mixed dipterocarp forest and its variation with habitat in the Malayan lowlands: a re-evaluation at Pasoh [Malaysia]. Malays. For.

Baierlein, R., 2001. The elusive chemical potential. Am. J. Phys. 69, 423–434. https://doi.org/10.1119/1.1336839

Balankin, A.S., 1990. Self-organization and dissipative structures in a deformable body. Phys. Lett. (p.103).

Barenblatt, G.I., 2014. Flow, Deformation and Fracture: Lectures on Fluid Mechanics and the Mechanics of Deformable Solids for Mathematicians and Physicists, Cambridge University Press. ed. https://doi.org/10.1017/CBO9781139030014

Barenblatt, G.I., 1996. Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics: Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics, Cambridge University Press. ed. https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242

Barnsley, M.F., 2000. Fractals Everywhere, 2nd New edition. ed. Morgan Kaufmann, San Diego, Calif.

Bejan, A., 2000. Shape and Structure, from Engineering to Nature. Cambridge University Press.

Bejan, A., 1997. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. Int. J. Heat Mass Transf. 40, 799–816. https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00175-5

Bejan, A., 1982. Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow, 1 edition. ed. Wiley, New York.

Bejan, A., Lorente, S., 2010. The constructal law of design and evolution in nature. Philos. Trans. R. Soc. B Biol. Sci. 365, 1335–1347. https://doi.org/10.1098/rstb.2009.0302

Bejan, A., Lorente, S., 2005. La Loi constructale, Paris, L'Harmattan.

Bejan, A., Merkx, G.W., 2007. Constructal Theory of Social Dynamics. Springer Science+Business Media, LLC., Boston, MA.

Benelmir, R., LALLEMAND, A., FEIDT, M., 2002. Analyse exergétique - Définitions.

Benzi, R., Biferale, L., 2009. Fully Developed Turbulence and the Multifractal Conjecture. J. Stat. Phys. 135, 977–990. https://doi.org/10.1007/s10955-009-9738-9

Benzi, R., Ciliberto, S., Tripiccione, R., Baudet, C., Massaioli, F., Succi, S., 1993. Extended self-similarity in turbulent flows. Phys. Rev. E 48, R29–R32. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.R29

Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G., Vulpiani, A., 1984. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. J. Phys. Math. Gen. 17, 3521–3531. https://doi.org/10.1088/0305-4470/17/18/021

Bilgen, E., Takahashi, H., 2002. Exergy analysis and experimental study of heat pump systems. Exergy Int. J. 2, 259–265. https://doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00083-3

Bisetti, F., Blanquart, G., Mueller, M.E., Pitsch, H., 2012. On the formation and early evolution of soot in turbulent nonpremixed flames. Combust. Flame 159, 317–335. https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2011.05.021

Book, G., Ingham, C., Ariel, G., 2017. Modeling cooperating micro-organisms in antibiotic environment. PLOS ONE 12, e0190037. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0190037

Borda-de-Água, L., Borges, P.A.V., Hubbell, S.P., Pereira, H.M., 2012. Spatial scaling of species abundance distributions. Ecography 35, 549–556. https://doi.org/10.1111/j.1600-0587.2011.07128.x

Borda-de-Água, L., Borges, P.A.V., Hubbell, S.P., Pereira, H.M., 2012. Spatial scaling of species abundance distributions. Ecography 35, 549–556. https://doi.org/10.1111/j.1600-0587.2011.07128.x

Borda-de-Água, L., Hubbell, S.P., McAllister, M., 2002. Species-Area Curves, Diversity Indices, and Species Abundance Distributions: A Multifractal Analysis. Am. Nat. 159, 138–155. https://doi.org/10.1086/324787

Bunde, A., Havlin, S., 1994. A Brief Introduction to Fractal Geometry, in: Bunde, A., Havlin, S. (Eds.), Fractals in Science. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 1–26. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77953-4_1

Bunyavejchewin, S., Baker, P.J., Lafrankie, J.V., Ashton, P.S., 2001. Stand structure of a seasonal dry evergreen forest at Huai Kha Khaeng Wildlife Sanctuary, Western Thailand [WWW Document]. Nat. Hist. Bull. Siam Soc. URL https://eurekamag.com/research/011/394/011394108.php (accessed 3.27.20).

Cantor, G., 1884. De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. Acta Math. 4, 381–392. https://doi.org/10.1007/BF02418423

Caswell, H., Cohen, J.E., 2005. Local and Regional Regulation of Species-Area Relations : A Patch-Occupancy Model.

Catrakis, H.J., Dimotakis, P.E., 1996. Scale Distributions and Fractal Dimensions in Turbulence. Phys. Rev. Lett. 77, 3795–3798. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.3795

Chen, S., Doolen, G.D., Kraichnan, R.H., She, Z., 1993. On statistical correlations between velocity increments and locally averaged dissipation in homogeneous turbulence. Phys. Fluids Fluid Dyn. 5, 458–463. https://doi.org/10.1063/1.858897

Conde, D.Q., Feidt, M., 2018. Fractal and Trans-scale Nature of Entropy: Towards a Geometrization of Thermodynamics. Elsevier.

Condit, R., 1998. Tropical Forest Census Plots: Methods and Results from Barro Colorado Island, Panama and a Comparison with Other Plots, Environmental Intelligence Unit. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03664-8

Condit, R., Aguilar, S., Hernandez, A., Perez, R., Lao, S., Angehr, G., Hubbell, S.P., Foster, R.B., 2004. Tropical forest dynamics across a rainfall gradient and the impact of an

El Niño dry season. J. Trop. Ecol. 20, 51–72. https://doi.org/10.1017/S0266467403001081

Condit, R., Lao, S., Pérez, R., Dolins, S.B., Foster, R., Hubbell, S., 2012. Barro Colorado Forest Census Plot Data. https://doi.org/10.5479/data.bci.20130603

Constantin, P., Procaccia, I., Sreenivasan, K.R., 1991. Fractal geometry of isoscalar surfaces in turbulence: Theory and experiments. Phys. Rev. Lett. 67, 1739–1742. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.1739

Cook, G., Dickerson, R.H., 1995. Understanding the chemical potential. https://doi.org/10.1119/1.17844

da Silva, C.B., Hunt, J.C.R., Eames, I., Westerweel, J., 2014. Interfacial Layers Between Regions of Different Turbulence Intensity. Annu. Rev. Fluid Mech. 46, 567–590. https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141357

Dauphiné, A., 2011. Géographie fractale. Hermes Science Publications, Paris.

David, T., 2016. Basics of Engineering Turbulence, 1st Edition. ed.

Dewar, R., 2003. Information theory explanation of the fluctuation theorem, maximum entropy production and self-organized criticality in non-equilibrium stationary states. J. Phys. Math. Gen. 36, 631–641. https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/3/303

Dincer, I., Rosen, M.A., 2013. Thermodynamic Fundamentals, in: Exergy. Elsevier, pp. 1–20. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097089-9.00001-2

Durrett, R., Levin, S., 1996. Spatial Models for Species-Area Curves. J. Theor. Biol. 179, 119–127. https://doi.org/10.1006/jtbi.1996.0053

Dyskin, A.V., 2007. Self-similar pattern formation and continuous mechanics of self-similar systems. Hydrol. Earth Syst. Sci. 11, 665–676. https://doi.org/10.5194/hess-11-665-2007

El Naschie, M.S., 2009. The theory of Cantorian spacetime and high energy particle physics (an informal review). Chaos Solitons Fractals 41, 2635–2646. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.059

Elith, J., H. Graham, C., P. Anderson, R., Dudík, M., Ferrier, S., Guisan, A., J. Hijmans, R., Huettmann, F., R. Leathwick, J., Lehmann, A., Li, J., G. Lohmann, L., A. Loiselle, B., Manion, G., Moritz, C., Nakamura, M., Nakazawa, Y., McC. M. Overton, J., Townsend

Peterson, A., J. Phillips, S., Richardson, K., Scachetti-Pereira, R., E. Schapire, R., Soberón, J., Williams, S., S. Wisz, M., E. Zimmermann, N., 2006. Novel methods improve prediction of species' distributions from occurrence data. Ecography 29, 129–151. https://doi.org/10.1111/j.2006.0906-7590.04596.x

Falconer, K., 2003. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, 2nd Edition. ed. Wiley-Blackwell, Chichester, England.

Fath, B.D., Jørgensen, S.E., Patten, B.C., Straškraba, M., 2004. Ecosystem growth and development. Biosystems 77, 213–228. https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2004.06.001

Feidt, M., 2016. Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés, 2nd ed.

Feidt, M., 2013. Two Examples of Exergy Optimization Regarding the "Thermo-Frigopump" and Combined Heat and Power Systems. Entropy 15, 544–558. https://doi.org/10.3390/e15020544

Feidt, M., Costea, M., 2012. Energy and Exergy Analysis and Optimization of Combined Heat and Power Systems. Comparison of Various Systems. Energies 5, 3701–3722. https://doi.org/10.3390/en5093701

Feidt, M.L., 2008. Optimal use of energy systems and processes. Int. J. Exergy 5, 500–531. https://doi.org/10.1504/IJEX.2008.020823

Frame, M., Robertson, J., 1992. A generalized mandelbrot set and the role of critical points. Comput. Graph. 16, 35–40. https://doi.org/10.1016/0097-8493(92)90068-7

Frisch, U., 1995. Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov. Camb. Univ. Press 11.

Frisch, U., Sulem, P.-L., Nelkin, M., 1978. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. J. Fluid Mech. 87, 719–736. https://doi.org/10.1017/S0022112078001846

Frisch, U., Vergassola, M., 1991. A Prediction of the Multifractal Model: the Intermediate Dissipation Range. Europhys. Lett. EPL 14, 439–444. https://doi.org/10.1209/0295-5075/14/5/009

Frost, W., Moulden (Eds.), 1977. Handbook of Turbulence: Volume 1 Fundamentals and Applications. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2322-8

Gagne, Y., 1987. Etude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée (thesis). Université Joseph Fourier (Grenoble).

Geijzendorffer, I.R., Regan, E.C., Pereira, H.M., Brotons, L., Brummitt, N., Gavish, Y., Haase, P., Martin, C.S., Mihoub, J.-B., Secades, C., Schmeller, D.S., Stoll, S., Wetzel, F.T., Walters, M., 2016. Bridging the gap between biodiversity data and policy reporting needs: An Essential Biodiversity Variables perspective. J. Appl. Ecol. 53, 1341–1350. https://doi.org/10.1111/1365-2664.12417

Gill, S.J., 1962. The chemical potential. J. Chem. Educ. 39, 506. https://doi.org/10.1021/ed039p506

Gleason, H.A., 1922. On the Relation Between Species and Area. Ecology 3, 158–162. https://doi.org/10.2307/1929150

Gould, H., Tobochnik, J., 2010. Statistical and Thermal Physics – With Computer Applications. Princeton UniversityPress, Princeton, N.J.

Gouy, 1889. Sur l'énergie utilisable. J. Phys. Théorique Appliquée 8, 501–518. https://doi.org/10.1051/jphystap:018890080050101

Gouyet, J.-F., 1996. Physics and fractal structures. Springer, New york, N.Y.

Grabowski, W.W., Wang, L.-P., 2013. Growth of Cloud Droplets in a Turbulent Environment. Annu. Rev. Fluid Mech. 45, 293–324. https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-011212-140750

Grassberger, P., 1983. Generalized dimensions of strange attractors. Phys. Lett. A 97, 227–230. https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90753-3

Grosu, L., 2014. Exergie et systèmes énergétiques. Académiques, Saarbrücken.

Grosu, L., Feidt, M., Benelmir, R., 2004. Study of the improvement in the performance coefficient of machines operating with three reservoirs. Int. J. Exergy 1, 147. https://doi.org/10.1504/IJEX.2004.004729

Harte, D., 2001. Multifractals: theory and applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Harte, J., 2011. Maximum Entropy and Ecology: A Theory of Abundance, Distribution, and Energetics. OUP Oxford.

Harte, J., Conlisk, E., Ostling, A., Green, J.L., Smith, A.B., 2005. A THEORY OF SPATIAL STRUCTURE IN ECOLOGICAL COMMUNITIES AT MULTIPLE SPATIAL SCALES. Ecol. Monogr. 75, 179–197. https://doi.org/10.1890/04-1388

Harte, J., Kinzig, A.P., 1997. On the Implications of Species-Area Relationships for Endemism, Spatial Turnover, and Food Web Patterns. Oikos 80, 417–427. https://doi.org/10.2307/3546614

Harte, J., Kitzes, J., 2015. Inferring Regional-Scale Species Diversity from Small-Plot Censuses. PLOS ONE 10, e0117527. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0117527

Harte, J., McCarthy, S., Taylor, K., Kinzig, A., Fischer, M.L., 1999. Estimating Species-Area Relationships from Plot to Landscape Scale Using Species Spatial-Turnover Data. Oikos 86, 45–54. https://doi.org/10.2307/3546568

Harte, J., Newman, E.A., 2014. Maximum information entropy: a foundation for ecological theory. Trends Ecol. Evol. 29, 384–389. https://doi.org/10.1016/j.tree.2014.04.009

Harte, J., Smith, A.B., Storch, D., 2009. Biodiversity scales from plots to biomes with a universal species–area curve. Ecol. Lett. 12, 789–797. https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2009.01328.x

Harte, J., Zillio, T., Conlisk, E., Smith, A.B., 2008. MAXIMUM ENTROPY AND THE STATE-VARIABLE APPROACH TO MACROECOLOGY. Ecology 89, 2700–2711. https://doi.org/10.1890/07-1369.1

Hastings, H.M., Sugihara, G., 1993. Fractals. A user's guide for the natural sciences. Oxf. Sci. Publ. Oxf. N. Y. Oxf. Univ. Press C1993.

He, F., Condit, R., 2007. Scaling Biodiversity: The distribution of species: occupancy, scale, and rarity. https://doi.org/10.1017/CBO9780511814938.005

He, F., Gaston, K.J., 2000. Estimating Species Abundance from Occurrence. Am. Nat. 156, 553–559. https://doi.org/10.1086/303403

Helbing, D., Johansson, A., Al-Abideen, H.Z., 2007. Dynamics of crowd disasters: An empirical study. Phys. Rev. E 75, 046109. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.046109

Hinze, J.O., Drake, R.M., 1959. Turbulence Intro to Mechanism and Theory Hinze 1959, 1st edition. ed. McGraw-Hill.

Hoque, M.R., Méndez, G.V., Durany, X.G., Sala, C.S., 2015. Exergy analysis of construction material manufacturing processes and assessment of their improvement potentials. Int. J. Exergy 16, 22–52. https://doi.org/10.1504/IJEX.2015.067298

Hubbell, S., Foster, R., O'Brien, S., Harms, K., Condit, null, Wechsler, B., Wright, S., de Lao, S., 1999. Light-Gap disturbances, recruitment limitation, and tree diversity in a neotropical forest. Science 283, 554–557. https://doi.org/10.1126/science.283.5401.554

Hubbell, S.P., 2001. The Unified Neutral Theory of Biodiversity and Biogeography (MPB-32). Princeton University Press.

Hubbell, S.P., 1997. A unified theory of biogeography and relative species abundance and its application to tropical rain forests and coral reefs. Coral Reefs 16, S9–S21. https://doi.org/10.1007/s003380050237

Hunt, B., 1998. The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions. Proc. Am. Math. Soc. 126, 791–800. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04387-1

Hutchinson, J.E., 1981. Fractals and Self Similarity. Indiana Univ. Math. J. 30, 713–747.

Jaynes, E.T., 1982. On the rationale of maximum-entropy methods. Proc. IEEE 70, 939–952. https://doi.org/10.1109/PROC.1982.12425

Jaynes, E.T., 1979. Where do we Stand on Maximum Entropy? Maximum Entropy Formalism 15.

Jaynes, E.T., 1965. Gibbs vs Boltzmann Entropies. Am. J. Phys. 33, 391–398. https://doi.org/10.1119/1.1971557

Jaynes, E.T., 1957. Information Theory and Statistical Mechanics. Phys. Rev. 106, 620–630. https://doi.org/10.1103/PhysRev.106.620

Jiang, B., 2015. The fractal nature of maps and mapping. Int. J. Geogr. Inf. Sci. 29, 159–174. https://doi.org/10.1080/13658816.2014.953165

Jørgensen, S.E., 2007. Evolution and exergy. Evol. Exergy 203, 490–494.

Jørgensen, S.E., 2006. An Integrated Ecosystem Theory 15.

Jørgensen, S.E., Ladegaard, N., Debeljak, M., Marques, J.C., 2005. Calculations of exergy for organisms. Ecol. Model. 185, 165–175. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2004.11.020

Jørgensen, S.E., Nielsen, S.N., Mejer, H., 1995. Emergy, environ, exergy and ecological modelling. Ecol. Model. 77, 99–109. https://doi.org/10.1016/0304-3800(93)E0080-M

Jørgensen, S.E., Patten, B.C., Straškraba, M., 2000. Ecosystems emerging: Ecol. Model. 126, 249–284. https://doi.org/10.1016/S0304-3800(00)00268-4

Jorgensen, S.E., Svirezhev, Y.M., 2004. Towards a Thermodynamic Theory for Ecological Systems. Pergamon, Amsterdam ; Boston.

KarinateOkiy, 2015. A Comparative Analysis of Turbulence Models Utilised for the Prediction of Turbulent Airflow through a Sudden Expansion. Int. J. Eng. Res. Afr. Vol. 16 (2015), pp 64-78. https://doi.org/DOI: 10.4028/www.scientific.net/JERA.16.64

Kathleen A., M., Ariel E., L., Pedro, R., 2016. Draft Revised Land and Resource Management Plan: El Yunque National Forest; USDA Forest Service: Rio Grande, Puerto Rico.

Keenan, J.H., 1951. Availability and irreversibility in thermodynamics. Br. J. Appl. Phys. 2, 183–192. https://doi.org/10.1088/0508-3443/2/7/302

Kimura, M., 1983. The Neutral Theory of Molecular Evolution. Cambridge University Press.

Knight, D.H., 1975. A Phytosociological Analysis of Species-Rich Tropical Forest on Barro Colorado Island, Panama. Ecol. Monogr. 45, 259–284. https://doi.org/10.2307/1942424

Koch, V., 1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometriqueelementaire. Ark. Mat. Astron. OchFys. 1, 681–704.

Kolmogorov, A.N., 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. J. Fluid Mech. 13, 82–85. https://doi.org/10.1017/S0022112062000518

Kolmogorov, A.N., 1941. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. C R Acad Sci URSS 30, 301–305.

Kozhov, M., 2010. Lectures in Memory of Professor M. Kozhov.

Kraichnan, R.H., 1970. Instability in Fully Developed Turbulence. Phys. Fluids 13, 569. https://doi.org/10.1063/1.1692962

Kronfeld-Schor, N., Visser, M.E., Salis, L., van Gils, J.A., 2017. Chronobiology of interspecific interactions in a changing world. Philos. Trans. R. Soc. B Biol. Sci. 372, 20160248. https://doi.org/10.1098/rstb.2016.0248

Kunin, W.E., 1998. Extrapolating Species Abundance Across Spatial Scales. Science 281, 1513–1515. https://doi.org/10.1126/science.281.5382.1513

Laherrère, J., 1996. Distributions de type 'fractal parabolique' dans la nature. Académie Sci. 322,.

Laherrère, J.H., 1998. THE EVOLUTION OF THE WORLD'S HYDROCARBON RESERVES 35.

Laurent, R., Cai, X., 2007. A maximum entropy method for combining AOGCMs for regional intra-year climate change assessment. Clim. Change 82, 411–435. https://doi.org/10.1007/s10584-006-9197-0

Li, B.-L., 2014. Fractal Dimensions, in: Balakrishnan, N., Colton, T., Everitt, B., Piegorsch, W., Ruggeri, F., Teugels, J.L. (Eds.), Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, p. stat07471. https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat07471

Li, R., Grosu, L., Queiros-Conde, D., 2016. Multi-objective optimization of Stirling engine using Finite Physical Dimensions Thermodynamics (FPDT) method. Energy Convers. Manag. 124, 517--527. https://doi.org/10.1016/j.enconman.2016.07.047

Li, W.H., Grauer, D., 1991. Fundamentals of Molecular Evolution. Sinauer, Sunderland, Massachusetts.

Lomolino, M.V., 2000. Ecology's most general, yet protean 1 pattern: the species-area relationship. J. Biogeogr. 27, 17–26. https://doi.org/10.1046/j.1365-2699.2000.00377.x

Lopes, R., Betrouni, N., 2009. Fractal and multifractal analysis: A review. Med. Image Anal. 13, 634–649. https://doi.org/10.1016/j.media.2009.05.003

Lorenz, R., 2003. COMPUTATIONAL MATHEMATICS: Full Steam Ahead-Probably. Science 299, 837–838. https://doi.org/10.1126/science.1081280

Losa, G.A., Merlini, D., Nonnenmacher, T.F., Weibel, E.R. (Eds.), 2002. Fractals in Biology and Medicine, Mathematics and Biosciences in Interaction. Birkhäuser Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8119-7

MacArthur, R.H., Wilson, E.O., 2001. The Theory of Island Biogeography, 2nd ed. Princeton University Press.

Magurran, A.E., 2010. Q&A: What is biodiversity? BMC Biol. 8, 145. https://doi.org/10.1186/1741-7007-8-145

Mandelbrot, B., 2010. Les objets fractals : Forme, hasard et dimension. Flammarion, Paris.

Mandelbrot, B., 1997. Fractales, hasard et finance de Benoît Mandelbrot - Editions Flammarion.

Mandelbrot, B., 1967. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. Science 156, 636–638. https://doi.org/10.1126/science.156.3775.636

Mandelbrot, B.B., 1982. The fractal geometry of nature. San Francisco : W.H. Freeman.

Mandelbrot, B.B., Evertsz, C.J.G., 1991. Multifractality of the harmonic measure on fractal aggregates, and extended self-similarity. Phys. Stat. Mech. Its Appl. 177, 386–393. https://doi.org/10.1016/0378-4371(91)90177-E

Mangiavillano, A., 2008. Multi-scalarité du phénomène feu de forêt en régions méditerranéennes françaises de 1973 à 2006.

Mascaro, G., Deidda, R., Hellies, M., 2013. On the nature of rainfall intermittency as revealed by different metrics and sampling approaches. Hydrol. Earth Syst. Sci. 17, 355–369. https://doi.org/10.5194/hess-17-355-2013

May, R., 1975. Patterns of species abundance and diversity.

McGlinn, D.J., Xiao, X., White, E.P., 2013. An empirical evaluation of four variants of a universal species–area relationship. PeerJ 1, e212. https://doi.org/10.7717/peerj.212

Meakin, P., 2011. Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium, Reissue edition. ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Mejer, H., Jørgensen, Sven Erik, 1979. EXERGY AND ECOLOGICAL BUFFER CAPACITY, in: Jørgensen, S. E. (Ed.), State-of-the-Art in Ecological Modelling. Pergamon, pp. 829–846. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-023443-4.50042-7

Michelitsch, M., Rössler, O.E., 1992. The “burning ship” and its quasi-Julia sets. Comput. Graph. 16, 435–438. https://doi.org/10.1016/0097-8493(92)90032-Q

Modeling Swarm Behavior [WWW Document], 2006. URL https://phys.org/news/2006-02-swarm-behavior.html (accessed 10.18.20).

Morowitz, H.J., 1968. Energy Flow in Biology. Acad. N. Y.

Nottale, L., 2010. Scale Relativity and Fractal Space-Time: Theory and Applications. Found. Sci. 15, 101–152. https://doi.org/10.1007/s10699-010-9170-2

Obukhov, A.M., 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. J. Geophys. Res. 1896-1977 67, 3011–3014. https://doi.org/10.1029/JZ067i008p03011

Palmer, M.W., Peet, R.K., Reed, R.A., Xi, W., White, P.S., 2007a. A MULTISCALE STUDY OF VASCULAR PLANTS IN A NORTH CAROLINA PIEDMONT FOREST. Ecology 88, 2674–2674. https://doi.org/10.1890/07-0796.1

Palmer, M.W., Peet, R.K., Reed, R.A., Xi, W., White, P.S., 2007b. A Multiscale Study of Vascular Plants in a North Carolina Piedmont Forest. Ecology 88, 2674–2674. https://doi.org/10.1890/07-0796.1

Palmer, M.W., White, P.S., 1994. Scale Dependence and the Species-Area Relationship. Am. Nat. 144, 717–740.

Pereira, H.M., Ferrier, S., Walters, M., Geller, G.N., Jongman, R.H.G., Scholes, R.J., Bruford, M.W., Brummitt, N., Butchart, S.H.M., Cardoso, A.C., Coops, N.C., Dulloo, E., Faith, D.P., Freyhof, J., Gregory, R.D., Heip, C., Höft, R., Hurtt, G., Jetz, W., Karp, D.S., McGeoch, M.A., Obura, D., Onoda, Y., Pettorelli, N., Reyers, B., Sayre, R., Scharlemann, J.P.W., Stuart, S.N., Turak, E., Walpole, M., Wegmann, M., 2013. Essential Biodiversity Variables. Science 339, 277–278. https://doi.org/10.1126/science.1229931

Phillips, S.J., Anderson, R.P., Schapire, R.E., 2006. Maximum entropy modeling of species geographic distributions. Ecol. Model. 190, 231–259. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2005.03.026

Plotkin, J.B., Potts, M.D., Yu, D.W., Bunyavejchewin, S., Condit, R., Foster, R., Hubbell, S., LaFrankie, J., Manokaran, N., Seng, L.H., Sukumar, R., Nowak, M.A., Ashton, P.S., 2000. Predicting species diversity in tropical forests. Proc. Natl. Acad. Sci. 97, 10850–10854. https://doi.org/10.1073/pnas.97.20.10850

Pocheau, A., Queiros-Condé, D., 1996. Scale Covariance of the Wrinkling Law of Turbulent Propagating Interfaces. Phys. Rev. Lett. 76, 3352–3355. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.3352

Popescu, G., Radcenco, V., Costea, M., Feidt, M., 1996. Optimisation thermodynamique en temps fini du moteur de Stirling endo- et exo-irréversible. Rev. Générale Therm. 35, 656–661. https://doi.org/10.1016/S0035-3159(96)80062-6

Preston, F.W., 1962. The Canonical Distribution of Commonness and Rarity: Part I. Ecology 43, 185–215. https://doi.org/10.2307/1931976

Queiros-Condé, D., 2006. Dynamique des peaux entropiques dans les systèmes intermittents et multi-échelle.

Queiros–Conde, D., 2003. A diffusion equation to describescale–and time–dependent dimensions of turbulent interfaces. Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Eng. Sci. 459, 3043–3059. https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1167

Queiros-Conde, D., 2000. Le modèle des peaux entropiques en turbulence développée. Comptes Rendus L39Académie Sci. - Ser. IIB - Mech. 328, 541–546.

Queiros-Condé, D., 1999. Géométrie de l'intermittence en turbulence développée. Comptes Rendus Académie Sci. - Ser. IIB - Mech.-Phys.-Astron. 327, 1385–1390. https://doi.org/10.1016/S1287-4620(00)87509-2

Queiros-Conde, D., 1997. Geometrical Extended Self-Similarity and Intermittency in Diffusion-Limited Aggregates. Phys. Rev. Lett. 78, 4426–4429. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4426

Queiros-Conde, D., Bonjour, J., Wechsatol, W., Bejan, A., 2007. Parabolic scaling of tree-shaped constructal network. Phys. Stat. Mech. Its Appl. 384, 719–724. https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.05.037

Queiros-Conde, D., Carlier, J., Grosu, L., Stanislas, M., 2015a. Entropic-Skins Geometry to Describe Wall Turbulence Intermittency. Entropy 17, 2198–2217. https://doi.org/10.3390/e17042198

Queiros-Conde, D., Carlier, J., Grosu, L., Stanislas, M., 2015b. Entropic-Skins Geometry to Describe Wall Turbulence Intermittency. Entropy 17, 2198–2217. https://doi.org/10.3390/e17042198

Queiros-Condé, D., Chaline, J., Dubois, J., 2015. Le monde des fractales : la nature trans-échelles, Ellipses. ed.

Queiros-Conde, D., Grosu, L., Zellou, A., Feidt, M., 2011. L'EXERGIE, de l'énergie à l'écologie : un outil d'analyse et de décision pour un Développement Durable.

Queiros-Conde, D., Vassilicos, J.C., 2001. Turbulent wakes of 3-D fractal grids. Intermittency Turbul. FLows Ed J C Vassilicos.

Rant, Z., 1956. Exergie. Ein Neues Wort Tech. Arb.-FahigkeitForsch Ing -Wes 22, 36–37.

Reddy, C.S., Ugle, P., Murthy, M.S.R., Sudhakar, S., 2008. Quantitative Structure and Composition of Tropical Forests of Mudumalai Wildlife Sanctuary, Western Ghats, India 53, 7.

Reis, A.H., 2006. Constructal Theory: From Engineering to Physics, and How Flow Systems Develop Shape and Structure. Appl. Mech. Rev. 59, 269–282. https://doi.org/10.1115/1.2204075

Richardson, L.F., 1922. Weather prediction by numerical process. Cambridge, The University press.

Riedi, R., Véhel, J.L., 1997. Multifractal Properties of TCP Traffic: a Numerical Study (report). INRIA.

Rigaut, J.P., Berggren, P., Robertson, B., 1985. Stereology, Fractals and Semi-Fractals, the Lung Alveolar Structure Studied Through a New Model. Presented at the Proceedings of the Fourth European Symposium on Stereology, Acta Stereol., in press.

Ritchie, M.E., Olff, H., 2004. Resource partitioning and biodiversity in fractal environments, with application to dryland communities.

Rochon, D., 2000. A generalized mandelbrot set for bicomplex numbers. Fractals 08, 355–368. https://doi.org/10.1142/S0218348X0000041X

Rosen, M.A., 2002. Exergy and economics: Is exergy profitable? Exergy Int. J. 2, 218–220. https://doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00086-9

Rosenzweig, M.L., 1995. Species Diversity in Space and Time, 1st ed. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511623387

Russell, L.D., Adebiyi, G.A., 2005. Classical Thermodynamics: International Edition.

Rys, F.S., Waldvogel, A., 1986. Fractal shape of hail clouds. Phys. Rev. Lett. 56, 784–787. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.784

Sackur, O., 1911. The application of the kinetic theory of gases to chemical problems. .,. Ann Phys 36, 958–980. https://doi.org/10.1002/andp.201300720

sat24 [WWW Document], 2020. URL https://fr.sat24.com/fr

Schneidman, E., Berry, M.J., Segev, R., Bialek, W., 2006. Weak pairwise correlations imply strongly correlated network states in a neural population. Nature 440, 1007–1012. https://doi.org/10.1038/nature04701

Seuront, L., 2015. On uses, misuses and potential abuses of fractal analysis in zooplankton behavioral studies: A review, a critique and a few recommendations. Phys. Stat. Mech. Its Appl. 432, 410–434. https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.03.007

Seuront, L., 2001. Multiscale patchiness of the calanoid copepod Temoralongicornis in a turbulent coastal sea. J. Plankton Res. 23, 1137–1145. https://doi.org/10.1093/plankt/23.10.1137

Seuront, L., Schmitt, F., Lagadeuc, Y., 2001. Turbulence intermittency, small-scale phytoplankton patchiness and encounter rates in plankton: where do we go from here? Deep Sea Res. Part Oceanogr. Res. Pap. 48, 1199–1215. https://doi.org/10.1016/S0967-0637(00)00089-3

Shannon, C.E., 1948. A Mathematical Theory of Communication. Bell Syst. Tech. J. 27, 379–423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

She, Z.-S., 1991. Intermittency and non-gaussian statistics in turbulence. Fluid Dyn. Res. 8, 143–158. https://doi.org/10.1016/0169-5983(91)90039-L

She, Z.-S., Leveque, E., 1994. Universal scaling laws in fully developed turbulence. Phys. Rev. Lett. 72, 336–339. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.336

Sheluhin, O.I., Garmashev, A.V., 2013. Numerical Methods of Multifractal Analysis in Information Communication Systems and Networks. https://doi.org/10.4018/978-1-4666-2208-1.ch002

Shipley, B., Vile, D., Garnier, E., 2006. From Plant Traits to Plant Communities: A Statistical Mechanistic Approach to Biodiversity. Science 314, 812–814. https://doi.org/10.1126/science.1131344

Sizling, A., Kunin, W.E., Eva \vSizlingová, Reif, J., Storch, D., 2011. Between geometry and biology: the problem of universality of the species-area relationship. Am. Nat. 178, 602–611. https://doi.org/10.1086/662176

Sizling, A., Storch, D., 2007. Geometry of species distributions: random clustering and scale invariance, in: Scaling Biodiversity. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 77–100. https://doi.org/10.1017/CBO9780511814938.007

Sizling, A., Storch, D., 2004. Power-law species–area relationships and self-similar species distributions within finite areas. Ecol. Lett. 7, 60–68. https://doi.org/10.1046/j.1461-0248.2003.00549.x

Smithsonian Tropical Research Institute (https://stri.si.edu/) [WWW Document], n.d. . Smithson. Trop. Res. Inst. URL https://stri.si.edu/ (accessed 8.16.20).

Sornette, D., 1998. Discrete scale invariance and complex dimensions. Phys. Rep. 297, 239–270. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00076-8

Sreenivasan, K.R., Ramshankar, R., Meneveau, C., 1989. Mixing, Entrainment and Fractal Dimensions of Surfaces in Turbulent Flows. Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci. 421, 79–108. https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0004

Stauffer, D., Sornette, D., 1998. Log-periodic oscillations for biased diffusion on random lattice. Phys. Stat. Mech. Its Appl. 252, 271–277. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(97)00680-8

St-Jean, P., 2005. An interpretation of the She-Lévêque model based on order statistics. Eur. Phys. J. B 46, 449–455. https://doi.org/10.1140/epjb/e2005-00273-5

Stodola, A., 1903. Die DampfturbinenmiteinemAnhangüber die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine, 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-36970-8

Stolovitzky, G., Kailasnath, P., Sreenivasan, K.R., 1992. Kolmogorov's refined similarity hypotheses. Phys. Rev. Lett. 69, 1178–1181. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1178

Storch, D., 2016. The theory of the nested species–area relationship: geometric foundations of biodiversity scaling. J. Veg. Sci. 27, 880–891. https://doi.org/10.1111/jvs.12428

Storch, D., 2012. Biodiversity and its Energetic and Thermal Controls, in: Sibly, R.M., Brown, J.H., Kodric-Brown, A. (Eds.), Metabolic Ecology. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, pp. 120–131. https://doi.org/10.1002/9781119968535.ch11

Storch, D., Šizling, A.L., Reif, J., Polechová, J., Šizlingová, E., Gaston, K.J., 2008. The quest for a null model for macroecological patterns: geometry of species distributions at multiple spatial scales. Ecol. Lett. 11, 771–784. https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2008.01206.x

Susani, L., Pulselli, F.M., Jørgensen, S.E., Bastianoni, S., 2006. Comparison between technological and ecological exergy. Ecol. Model. 193, 447–456. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2005.08.020

Sutton, S.L. (ed), Whitmore, T.C. (ed), Chadwick, A.C. (ed), 1983. Tropical rain forest: ecology and management.

Tetrode, H., 1912. Die chemischeKonstante der Gase und das elementareWirkungsquantum. Ann. Phys. 343, 434–442. https://doi.org/10.1002/andp.19123430708

Thomas, T.R., Rosén, B.-G., Amini, N., 1999. Fractal characterisation of the anisotropy of rough surfaces. Wear 232, 41–50. https://doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00128-3

Tjørve, E., 2009. Shapes and functions of species–area curves (II): a review of new models and parameterizations. J. Biogeogr. 36, 1435–1445. https://doi.org/10.1111/j.1365-2699.2009.02101.x

Tort, M., 2010. Dissipation num´erique et cascades turbulentes Evaluation dans un mod`eleid´ealis´e de l'atmosph`ere (Rapport de Stage de M2). Ecole Normale Supérieure, Cachan.

Trees in the USA [WWW Document], 2020. URL https://biodiversitymapping.org/index.php/usa-trees/

Tricot, C., 2008. Géometrie& Mesures Fractales une Introduction. Ellipses Marketing, Paris.

Tricot, C., 1995. Curves and Fractal Dimension. Springer-Verlag, New York.

Véhel, J.L., Mignot, P., 1994. Multifractal Segmentation of Images. Fractals 2, 371–378. https://doi.org/10.1142/S0218348X94000466

Vincent, A., Meneguzzi, M., 1991. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. J. Fluid Mech. 225, 1–20. https://doi.org/10.1017/S0022112091001957

Wan, F., Li, G., Gong, J., Wu, B., 2014. An improved algorithm for the normal contact stiffness and damping of a mechanical joint surface: Proc. Inst. Mech. Eng. Part B J. Eng. Manuf. https://doi.org/10.1177/0954405413506587

Warhaft, Z., 2002. Turbulence in nature and in the laboratory. Proc. Natl. Acad. Sci. 99, 2481–2486. https://doi.org/10.1073/pnas.012580299

Wilson, E.O., Peter, F.M. (Eds.), 1988. Biodiversity. National Academies Press (US), Washington (DC).

Winfree, R., Fox, J.W., Williams, N.M., Reilly, J.R., Cariveau, D.P., 2015. Abundance of common species, not species richness, drives delivery of a real-world ecosystem service. Ecol. Lett. 18, 626–635. https://doi.org/10.1111/ele.12424

Witté, I., Touroult, J., 2014. Répartition de la biodiversité en France métropolitaine : une synthèse des Atlas faunistiques. VertigO - Rev. Électronique En Sci. Environ. https://doi.org/10.4000/vertigo.14645

Wu, J.-J., 2000. Characterization of fractal surfaces. Wear 239, 36–47. https://doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00362-2

Yang, F., Pitchumani, R., 2001. A fractal Cantor set based description of interlaminar contact evolution during thermoplastic composites processing. J. Mater. Sci. 36, 4661–4671. https://doi.org/10.1023/A:1017950215945

Zimmerman, J.K., Everham, E.M., Waide, R.B., Lodge, D.J., Taylor, C.M., Brokaw, N.V.L., 1994. Responses of Tree Species to Hurricane Winds in Subtropical Wet Forest in Puerto Rico: Implications for Tropical Tree Life Histories. J. Ecol. 82, 911–922. https://doi.org/10.2307/2261454

Zireh, A., 2010. A Generalized Mandelbrot Set of Polynomials of Type Ed for Bicomplex Numbers. Georgian Math. J. 15, 189–194. https://doi.org/10.1515/GMJ.2008.189