



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Méthodologie data-driven de détection séquentielle de ruptures pour des signaux physiologiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 29 novembre 2021

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention mathématiques)

par

Nassim Sahki

Composition du jury

<i>Directrices :</i>	Anne Gégout-Petit	Université de Lorraine
	Sophie Wantz-Mézières	Université de Lorraine
<i>Président :</i>	Alain Celisse	Université Paris 1
<i>Rapporteurs :</i>	Adeline Leclercq-Samson	Université Grenoble Alpes
	Christian Paroissin	Université de Pau et des Pays de l'Adour
<i>Examinatrice :</i>	Sandie Ferrigno	Université de Lorraine
<i>Invités :</i>	Pascal Wild	Institut National de Recherche et de Sécurité
	Jean-Marie Monnez	Université de Lorraine

RÉSUMÉ

Cette thèse traite de la problématique de la détection de rupture dans le cadre séquentiel où le signal est supposé être observé en temps réel et le phénomène passe de son état de départ "normal" à un état post-changement "anormal". Le défi de la détection séquentielle est de minimiser le délai de détection, soumis à une limite tolérable de fausse alarme. L'idée est de tester séquentiellement l'existence d'une rupture par l'écriture récursive de la statistique de détection en fonction du score, qui remplace le Log-Likelihood Ratio lorsque la distribution des données est inconnue. La procédure de détection repose ainsi sur une statistique récursive, un seuil de détection et une règle d'arrêt. Dans un premier travail, nous considérons la statistique score-CUSUM et proposons d'évaluer la performance de détection de certains seuils de détection. Deux seuils sont issus de la littérature, et trois nouveaux seuils sont construits par une méthode basée sur la simulation : le premier est constant, le second instantané et le troisième est une version dynamique "data-driven" du précédent. Nous définissons rigoureusement chacun des seuils en mettant en évidence les différentes notions du risque de fausse alarme contrôlé suivant le seuil. Par ailleurs, nous proposons une nouvelle règle d'arrêt corrigée pour réduire le taux de fausse alarme. Nous effectuons ensuite une étude de simulation pour comparer les différents seuils et évaluer la règle d'arrêt corrigée. Nous constatons que le seuil empirique conditionnel est le meilleur pour minimiser le délai de détection tout en maintenant le risque toléré de fausse alarme. Cependant, sur des données réelles, nous recommandons d'utiliser le seuil data-driven car c'est le plus simple à construire et à utiliser pour une implémentation pratique. Dans la seconde partie, nous appliquons notre méthodologie de détection data-driven sur des signaux physiologiques, à savoir des signaux temporels enregistrés au niveau du faisceau supérieur du trapèze de 30 sujets effectuant différentes activités bureautiques. La méthodologie est sujet-activité dépendante ; elle inclut l'estimation on-line des paramètres du signal et la construction du seuil data-driven sur le début du signal de chaque activité de chaque sujet. L'objectif était d'identifier des changements de régimes au cours d'une activité afin d'évaluer le niveau de sollicitation du muscle et la variabilité du signal EMG, qui sont liés à la fatigue musculaire. Les résultats obtenus ont confirmé l'aisance de notre méthodologie et la performance et praticité du seuil data-driven proposé. Par la suite, les résultats ont permis la caractérisation de chaque type d'activité en utilisant des modèles mixtes.

Mots-clés : Statistique CUSUM, Analyse séquentielle, Détection de rupture, Seuils de détection, Simulation, Signal EMG du muscle.

ABSTRACT

This thesis deals the problem of change-point detection in the sequential framework where the signal is assumed to be observed in real time and the phenomenon changes from its "normal" starting state to an "abnormal" post-change state. The challenge of sequential detection is to minimize the detection delay, subject to a tolerable false alarm limit. The idea is to sequentially test for the existence of a change-point by recursively writing the detection statistic as a function of the score, which replaces the Log-Likelihood Ratio when the data distribution is unknown. The detection procedure is thus based on a recursive statistic, a detection threshold and a stopping rule. In a first work, we consider the score-CUSUM statistic and propose to evaluate the detection performance of some detection thresholds. Two thresholds come from the literature, and three new thresholds are constructed by a method based on simulation : the first is constant, the second instantaneous and the third is a dynamic "data-driven" version of the previous one. We rigorously define each of the thresholds by highlighting the different notions of the controlled false alarm risk according to the threshold. Moreover, we propose a new corrected stopping rule to reduce the false alarm rate. We then perform a simulation study to compare the different thresholds and evaluate the corrected stopping rule. We find that the conditional empirical threshold is the best to minimize the detection delay while maintaining the tolerated risk of false alarms. However, on real data, we recommend using the data-driven threshold as it is the easiest to build and use for practical implementation. In the second part, we apply our data-driven detection methodology to physiological signals, namely temporal signals recorded at the level of the upper trapezium beam of 30 subjects performing different office activities. The methodology is subject-activity dependent ; it includes the on-line estimation of the signal parameters and the construction of the data-driven threshold on the start of the signal of each activity of each subject. The objective was to identify regime changes during an activity in order to assess the level of muscle solicitation and EMG signal variability, which are associated with muscle fatigue. The results obtained confirmed the ease of our methodology and the performance and practicality of the proposed data-driven threshold. Subsequently, the results allowed the characterization of each type of activity using mixed models.

Keywords : CUSUM statistic, Sequential analysis, Change-point detection, Detection thresholds, Simulation, Muscle EMG signal.

Remerciements

Mes premiers et plus grands remerciements vont à Anne et Sophie pour tout ce qu'elles m'ont apporté tout au long de cette thèse, tant sur le plan mathématique que sur le plan humain. Merci pour leur humilité, leur esprit critique et leur enthousiasme qu'elles sur-ent me communiquer. Je ne les remercierai jamais assez pour la confiance qu'elles m'ont accordée, pour leur précieux conseils et leur disponibilité infaillible malgré les contraintes, leur optimisme sans limite même dans les périodes incertaines, et pour toutes les lectures et relectures de mes rédactions "tordues" ! ... J'aimerais leurs adresser l'expression de ma reconnaissance et de mon plus profond Respect.

Je tiens à transmettre ma sincère gratitude à Alain Viari pour son soutien incondi-tionnel depuis le tout début. Je remercie également Sylvain Petitjean et Bruno Lévy pour leur appui en tant que directeurs de l'Inria.

Je souhaite remercier Jean-Marie et Pascal d'avoir accepté de faire partie de mon comité de suivi de thèse et aussi de faire partie du jury. Merci pour leur écoute bienveillante. J'ai-merais tout particulièrement adresser mes vifs remerciements à Pascal qui nous a sauvés au moment opportun. Sans lui la deuxième partie de la thèse n'aurait jamais vu le jour. Un grand Merci également à Thomas Laeubli de nous avoir fourni les données de son étude. Je remercie vivement Clarisse Gaudet de nous avoir donné un coup de main dans la deuxième partie par ses analyses, ses remarques et son aide efficace lors de la rédaction.

Je remercie vivement Adeline Leclercq-Samson et Christian Paroissin qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'à Alain Celisse et Sandie Ferrigno pour avoir accepté de faire partie du jury. Merci pour l'intérêt que vous portez à mon tra-vail.

Je remercie chaleureusement tous les membres de l'IECL qu'ils soient permanents, thé-sards ou stagiaires, que j'ai eu beaucoup de plaisir à côtoyer durant ces quatre dernières années. Merci pour leur accueil, leur sympathie et tous les moments conviviaux passés ensemble.

Merci enfin à ma famille pour ses encouragements, notamment Lynda pour son soutien indéfectible ; merci de m'avoir supporté durant toute cette période.

Table des matières

Introduction générale	1
Partie I	4
Introduction	5
1 Contexte de la détection de rupture	7
1.1 Rupture	9
1.2 Contexte de détection off-line	11
1.3 Contexte de détection on-line	13
1.3.1 Statistique de CUSUM	14
1.3.2 Statistique de Shiryaev-Roberts	17
1.3.3 Statistiques CUSUM et SR basées sur le score	17
1.3.4 Règle d'arrêt	19
1.3.5 Paramètres de détection	21
1.3.6 Choix de seuil pour la statistique de CUSUM	23
2 Construction de seuils et règle d'arrêt	25
2.1 Comportement de la statistique	25
2.2 Seuils de détection	27
2.2.1 Seuil Constant de Wald (CW)	27
2.2.2 Seuil Constant Empirique (CE)	27
2.2.3 Seuil Instantané Empirique Conditionnel (IEC)	30
2.2.4 Seuil Instantané Empirique (IE)	32
2.2.5 Seuil Instantané Empirique Dynamique (IED)	33
2.3 Comparaison des seuils de détection	36
2.4 Règle d'arrêt corrigée	37
3 Procédure d'évaluation	39
3.1 Design de la simulation	39
3.1.1 Paramètres pour les données de l'évaluation	39
3.1.2 Paramètres pour la construction des seuils empiriques	40
3.1.3 Modèles pour les simulations	41
3.2 Estimation des paramètres	42

4	Résultats	45
4.1	Évaluation des taux instantanés λ_t^0 et λ_t^1	45
4.1.1	Modèle 1	45
4.1.2	Modèle 2	47
4.2	Évaluation de MIBFA et ADD	49
4.2.1	Modèle 1	49
4.2.2	Modèle 2	54
4.2.3	Erreur sur la distribution présumée	56
4.3	Évaluation de la règle d'arrêt corrigée	59
4.3.1	Modèle 1	59
4.3.2	Erreur sur la distribution présumée	60
	Conclusion et perspective	64
	Partie II	67
	Introduction	68
5	Données électromyographiques - EMG	70
5.1	Contexte de recueil des données	70
5.2	Signal EMG	71
5.2.1	Traitement du signal	71
5.2.2	Description du signal	74
5.3	Problématiques	78
6	Détection de changements d'état musculaire	80
6.1	Procédure de détection data-driven	81
6.1.1	Estimation des paramètres	81
6.1.2	Construction du Seuil-IED	83
6.2	Résultats	85
6.2.1	Détection avec le Seuil-IED	86
	Analyse et synthèse	92
6.2.2	Comparaison de la détection des Seuils IED et CW	93
	Analyse et synthèse	96
7	Caractérisation des activités	99
7.1	Variables de caractérisation	99
7.2	Modèle de comparaison	100
7.3	Résultats	101
7.3.1	Variable Nombre de ruptures	102
7.3.2	Variable Durée du régime	104
7.3.3	Variable Moyenne du signal	108
7.3.4	Variable Amplitude de saut	111
7.3.5	Variable Variance du signal	114

7.3.6	Analyse et synthèse	117
Conclusion		119
Conclusion générale		121
Bibliographie		124
A	Calculs	135
A.1	Démonstration du Lemme 1	135
A.2	Récurtivité de la statistique de CUSUM	136
A.3	Récurtivité de la statistique SR	136
A.4	Démonstration du Lemme 2	137
A.5	Démonstration de l'équivalence $S_t \equiv L_t$ dans le cas gaussien	137
B	Description et résultats	139
B.1	Description des cinq activités	139
B.2	Résultats de détection obtenus sur tous les sujets	140

Introduction générale

Le sujet de thèse initial "Détection de rupture dans des signaux multivariés pour la prédiction d'événement redouté à partir de paramètres physiologiques recueillis par capteurs connectés après greffe pulmonaire" était placé dans le cadre d'une collaboration entre l'Inria Nancy Grand Est et l'AP-HP (Assistance Publique des Hôpitaux de Paris). Il est lié à l'essai clinique EOLE VAL de l'hôpital Bichat sur des patients transplantés pulmonaires. Le projet consiste à suivre l'évolution temporelle de sept paramètres physiologiques (SpO₂, température cutanée, fréquence cardiaque, fréquence respiratoire, activité physique, qualité du sommeil, perfusion cutanée) enregistrés en temps réel par des capteurs connectés sur des patients (faible nombre) venant de subir une greffe pulmonaire. L'objectif était de mesurer l'intérêt de l'étude de ces signaux enregistrés par capteurs pour la prédiction et l'anticipation d'événements redoutés comme l'infection ou le rejet. Ainsi nous devions donc identifier l'état du patient greffé, à savoir : stable, en instance d'infection ou de rejet.

Le contexte d'application nous place ainsi naturellement dans le cadre de la détection « on-line » de rupture où il faut considérer simultanément le délai de détection et le taux de fausse alarme. Nous rentrons alors directement dans le vif de notre sujet et entamons notre premier travail méthodologique sur les méthodes de détection on-line de rupture, basées sur des tests statistiques séquentiels. Ces méthodes s'appuient sur une statistique de détection réursive, un seuil de détection et une règle d'arrêt pour signaler l'existence d'une rupture à un instant donné sur une série séquentiellement observée. Dans notre méthodologie, nous utilisons la statistique classique de CUSUM « Cumulative Sum », et nous proposons de nouveaux seuils de détection et règle d'arrêt, qui ont des propriétés différentes en termes de minimisation du délai de détection ou maintien du taux de fausse alarme. Nous étudions ensuite les propriétés des seuils proposés par une étude de simulation poussée pour évaluer la méthodologie proposée, étant donné que nous n'avons pas eu accès aux données réelles de santé prévues pour la thèse.

Entre temps, le lancement du projet EOLE VAL et le recueil des données qui devaient commencer à l'automne 2017, ont connu malheureusement un retard considérable à cause de problèmes logistique (problème de fonctionnement des capteurs connectés), puis juridique (le contrat entre l'AP-HP et Docapost, le partenaire privé de l'AP-HP pour l'hébergement et la transmission des données collectées étant devenu caduque entre temps). Les premiers patients ont été inclus à l'été 2019. Par la suite, l'arrivée de la COVID-19 a stoppé l'essai clinique de l'AP-HP et la possibilité de travailler sur ces données originales dans le cadre de la thèse. Sachant que notre sujet est très appliqué, ce manque de données a été un handicap certain pour l'avancement de la thèse et l'atteinte des objectifs soulignés.

Pour y remédier, nous avons recherché d'autres données réelles. Ainsi, à l'occasion du dernier CSI (Comité de Suivi Individuel) du 15 juin 2020, nous avons réorienté le projet de thèse vers d'autres données physiologiques proposées par Mr. Pascal WILD, membre du CSI que nous remercions chaleureusement. Les données concernent des signaux temporels EMG (électromyographiques) du muscle de trapèze supérieur de 30 sujets effectuant différentes activités bureautiques au cours d'une journée expérimentale. Les données ont été recueillies dans le cadre d'une étude sur le risque de développement de la myalgie du muscle trapèze en milieu de travail.

La thèse est organisée en deux parties :

- La première partie est un travail méthodologique s'adressant à la détection de ruptures dans le cadre séquentiel (QCD "Quickest Change-point Detection") où on s'intéresse à la détection la plus rapide de rupture tout en respectant un niveau donné de fausse alarme. Nous abordons les deux statistiques classiques de la détection séquentielle : CUSUM et Shiryaev-Roberts, qui proposent une écriture récursive en fonction du log du rapport de vraisemblance. La version semi-paramétrique est donnée en remplaçant le log du rapport de vraisemblance par une fonction de score. La principale contribution de ce travail est la proposition de trois nouveaux seuils de détection, construits par une méthode empirique basée sur la simulation du régime pré-changement (état normal du signal). Les seuils sont alors empiriques, spécifiques à la distribution des données sous le régime pré-changement et à l'objectif de détection souhaité. Nous proposons également une nouvelle règle d'arrêt corrigée en modifiant la règle d'arrêt classique. Pour enfin évaluer l'efficacité de la règle d'arrêt et des seuils proposés, et comparer ces derniers à certains seuils de la littérature, nous proposons une étude de simulation poussée, incluant différents scénarios et situations qui peuvent se présenter dans la pratique. La performance de la détection est évaluée par l'estimation de certains critères, qui sont notamment le taux de fausse alarme instantané, le temps moyen entre fausses alarmes ainsi que le délai moyen de détection. Ce travail correspond à un article publié dans la revue QREI (Quality and Reliability Engineering International).
- La deuxième partie concerne l'application de notre méthodologie sur les données réelles EMG. La problématique liée à ce type de données ne nécessite pas forcément un traitement on-line, néanmoins, pour évaluer l'application pratique de notre méthodologie, seuils de détection et règle d'arrêt proposés, nous considérons que le signal EMG d'un sujet durant une période d'activité donnée, est observé séquentiellement, point par point. Par la suite, nous adaptons la méthodologie de la statistique score-CUSUM pour la détection de ruptures dans l'activité musculaire du trapèze supérieur de chaque sujet. La procédure de détection que nous proposons est data-driven; elle intègre l'estimation on-line des paramètres du signal et la

construction du seuil empirique dynamique "data-driven" dont les performances ont été démontrées dans la première partie. L'objectif de la détection de ruptures sur les signaux EMG est en premier lieu d'identifier des changements de régimes dans l'activité musculaire du trapèze au cours de la période d'activité. Ces changements de régimes correspondent à des changements de sollicitation du muscle que l'on peut considérer qui engendrent donc plus ou moins de fatigue. En second lieu, nous utilisons les différents paramètres issus de la détection de rupture (durée des régimes, intensité du signal sur la période du régime, amplitude de changement entre les régimes, ...) dans l'objectif de caractériser les différentes activités. Pour cela, nous les modélisons via des modèles mixtes en fonction des activités afin de tenir compte du fort effet sujet.

PREMIÈRE PARTIE

Détection de rupture dans le contexte séquentiel

Introduction

Nous abordons dans cette partie le problème de la détection de rupture en posant un test d'hypothèse séquentiel. Nous nous concentrons sur le cas on-line où la série est supposée être observée de manière séquentielle, et nous considérons que la rupture concerne soit la moyenne, soit la variance ou les deux en même temps. La détection séquentielle repose sur le choix d'une statistique réursive et du seuil qu'elle doit atteindre pour signaler une détection. L'instant de déclenchement d'une alarme (temps d'arrêt) pour signaler qu'une rupture s'est produite est défini par une règle d'arrêt.

Nous considérons la version on-line de la statistique de détection des sommes cumulées (CUSUM) [48], définit récursivement par une fonction de score. Et nous nous plaçons dans le cadre QCD "Quickest Changepoint Detection" où le défi est la détection la plus rapide de rupture, tout en respectant un taux donné de fausses alarmes. Nous proposons dans ce cadre de nouveaux seuils de détection construits par une méthode empirique basée sur la simulation. La méthode consiste à simuler la statistique de détection sous le régime pré-changement et construire le seuil à partir de la distribution empirique de la statistique. Le premier seuil proposé est constant comme celui de Tsiamyrtzis [45] et contrôle le risque global sur une plage de temps donnée. Le second seuil est instantané, construit en contrôlant le taux de fausse alarme non conditionnel à chaque instant. Le troisième est la version dynamique du précédent : il consiste à utiliser le seuil instantané construit précédemment et à l'adapter au comportement de la statistique (seuil "data-driven"). Par ailleurs, nous proposons également une nouvelle règle d'arrêt par correction de la règle d'arrêt utilisée classiquement par l'approche CUSUM, et cela dans le but de réduire les fausses alarmes.

Notre objectif est d'étudier l'efficacité des seuils proposés (constant empirique, instantané empirique et instantané empirique dynamique), et de les comparer avec le seuil constant de Wald [48] et l'instantané empirique conditionnel de Margavio [19] sur des données simulées. Pour ce faire, nous avons donc effectué une étude de simulation pour évaluer les performances des différents seuils et de la règle d'arrêt corrigée, mesurées principalement par le taux de détection instantané conditionnel empirique, l'estimation du temps moyen entre fausses alarmes (MTBFA "Mean Time Between False Alarm") et du délai moyen de détection (ADD "Average Detection Delay"). L'évaluation est effectuée sur plusieurs scénarios, incluant des données indépendantes ou autocorrélées, selon l'objectif de détection et le niveau réel de la rupture sur les données.

Cette partie, présente et complète les résultats présentés dans l'article [32] que nous avons publié dans QREI. En effet, nous étudions ici les taux de détection (ou fausse alarme) instantanés conditionnels empiriques qui ne sont pas présentés dans [32] et nous discutons plus rigoureusement les différents risques associés au seuil.

Chapitre 1

Contexte de la détection de rupture

Dans la théorie de la détection de rupture dans un signal, la configuration des approches diffère selon le contexte de l'analyse des données. Les deux principaux sont le contexte "off-line" et le contexte "on-line". En 1931, Shewhart [36] est le premier à s'attaquer au problème de la détection de rupture dans le contexte général, à la fois off-line et on-line. Dans le contexte off-line, qui est la configuration la plus simple, l'ensemble des données est fixe, c'est-à-dire, il est observé et traité en une fois. Dans ce cas, on s'intéresse à la détection de toutes les ruptures, le plus précisément possible. Neyman & Pearson [25] ont proposé en 1933 une solution optimale qui maximise la probabilité de détection. Dans le contexte on-line, les données arrivent en temps réel, soit par point, soit par lot. L'ajout et le traitement de données sont effectués séquentiellement à l'arrivée de nouvelles données. Dans ce cas, on s'intéresse à la détection la plus rapide de la plus récente rupture ; le délai de détection est la principale préoccupation.

Dans le contexte on-line, le problème de la détection de rupture se divise en deux principaux cadres, selon le design de la problématique posée et le but visé par la détection. Le premier cadre QCD "Quickest Change-point Detection" (ou détection séquentielle de rupture) s'intéresse à la détection la plus rapide de rupture, dans le cas où le phénomène passe de son état de départ "normal" à un état post-changement "anormal". Ici, la durée de la rupture est illimitée et l'objectif de la détection est de minimiser le délai moyen de détection, soumis à une limite tolérable du risque de fausse alarme. C'est-à-dire, pratiquement l'utilisateur choisit un taux de fausse alarme toléré que l'on ne doit pas dépasser, et souhaite la détection la plus rapide. Dans le second cadre TCD "Transient Changepoint Detection", on suppose que les ruptures sont transitoires, c'est-à-dire, la durée de la rupture est limitée. Dans ce cas, l'utilisateur impose la contrainte sur le délai maximum de détection. Les ruptures détectées après ce délai limité sont considérées comme manquées. Le critère d'optimalité ici est de minimiser la probabilité de détection manquée sous réserve d'un niveau acceptable de la probabilité de fausse alarme dans une période de temps donnée [3, 7, 2].

Nous sommes intéressés par la détection la plus rapide de rupture (QCD "Quickest Changepoint Detection") qui minimise le délai moyen de détection tout en

maintenant une probabilité donnée de fausse alarme. Un aperçu exhaustif du problème de la détection séquentielle de rupture (QCD) est donné par Basseville & Nikiforov [3], Poor & Hadjiliadis [30], et Tartakovsky et al. [41]. La détection séquentielle de rupture est largement appliquée dans différents domaines, notamment le contrôle de la qualité industrielle [16], la sécurité des réseaux informatiques et de l'information [16], la finance [27], la surveillance de l'intégrité des systèmes de navigation par satellite [2, 6, 41], la santé et l'épidémiologie [39, 49].

L'analyse séquentielle est une méthode d'inférence statistique dont la caractéristique est de résoudre des problèmes de test d'hypothèses lorsque la taille de l'échantillon n'est pas déterminée avant l'expérience mais dépend des données observées. La théorie de l'analyse séquentielle a été formulée pour la première fois par Wald [48, 47] en 1945, où il présente le fameux test d'hypothèses statistiques, dit test séquentiel de rapport de probabilité (SPRT "Sequential Probability Ratio Test"). Une statistique de test est calculée à chaque instant pour décider si une rupture s'est produite ou non. En 1954, Page [26], inspiré par l'algorithme de Wald, a proposé la statistique populaire de CUSUM ("CUmulative SUM"). L'idée est de tester séquentiellement l'occurrence d'une rupture par l'écriture récursive de la statistique de détection en fonction du log du rapport de vraisemblance (LLR "Log-Likelihood Ratio"). L'optimalité du CUSUM, donnée par la minimisation du délai moyen de détection pour une borne donnée du taux de fausse alarme, est établie par Lorden [18] en 1971 pour le cas asymptotique, et par Moustakides [23] en 1986 pour le cas non-asymptotique. Dans ce contexte d'analyse séquentielle, une autre procédure populaire connue sous le nom de Shiryaev - Roberts "SR" (Shiryaev [38, 37]; Roberts [31]) est également optimale. Une optimalité asymptotique a été démontrée par Pollak [28] en 1985, et par la suite en 2010, une optimalité stricte est proposée par Polunchenko & Tartakovsky [29].

Les statistiques de CUSUM et SR se basent sur le LLR pour le calcul des statistiques de détection lorsqu'on suppose que les données sont générées selon une distribution particulière connue. Lorsqu'on ne pose aucune hypothèse sur la loi de distribution des données (ce qui est généralement le cas dans la pratique), la version semi-paramétrique des deux approches est donnée par la construction d'une fonction de score qui remplace le log du rapport de vraisemblance, comme le suggèrent Tartakovsky et al. [44, 43, 42].

Une rupture est signalée lorsque la statistique dépasse un seuil. Pour les statistiques CUSUM et SR, la plupart des travaux de la littérature utilisent un seuil constant basé sur les inégalités de Wald [48], en contrôlant le taux de fausses alarmes tout au long de la trajectoire. L'inégalité de Wald utilisée lie le seuil au risque instantané de fausse alarme. Récemment, Tsiamyrtzis & Hawkins [45] ont proposé un seuil constant empirique construit à partir des simulations du régime pré-changement (état normal sans rupture). Margavio et al. [19] en 1995, ont été les premiers à utiliser un seuil de détection instantané dépendant du temps, en contrôlant à chaque instant le taux de fausse alarme conditionnel (c'est-à-dire la probabilité que l'observation en cours déclenche une fausse alarme, sachant qu'elle est la première depuis le début). Il a été utilisé par Hawkins et al. [11] en 2003, puis par

Shen et al. [35] en 2013, et récemment en 2016 par Huang et al. [12].

Dans ce chapitre, nous commençons d'abord par donner une définition formelle de la rupture. Nous introduisons ensuite le contexte off-line de la détection de rupture, et nous présentons rapidement la version rétrospective de la statistique de CUSUM. La section 1.3 est consacrée au contexte de détection on-line, où nous présentons les deux fameuses approches utilisées dans ce contexte : la statistique de CUSUM et celle de Shiryaev-Roberts. Nous présentons ensuite dans la section 1.3.3, la fonction de score proposée pour remplacer le Log du rapport de vraisemblance. Dans la section 1.3.4, nous définissons la règle d'arrêt utilisée dans le cadre de la détection séquentielle. Par la suite, nous définissons les différents paramètres de détections dans la section 1.3.5. Enfin, nous finirons par la présentation de la méthode classique de Wald utilisée pour le choix du seuil de détection.

1.1 Rupture

Un point de rupture est un instant donné dans une séquence d'observations où la distribution de probabilité des observations change. La notion de détection de rupture est la question liée à l'estimation de l'emplacement de ce point de rupture dans une série d'observations [14].

Nous considérons un phénomène aléatoire que nous observons à chaque instant. Au début, le comportement est supposé dans l'état normal. Mais un changement qui affecte le comportement du phénomène se produit à un instant inconnu. Mathématiquement, nous avons une série d'observations (séquence de données) : $\{x_t\}_{t=1,\dots,n} = \{x_1, \dots, x_n\}$, issues d'un échantillon de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$. n est le nombre d'observations et t est l'instant d'arrivée de l'observation x_t . On admet qu'au début, dans l'état "normal" (avant la rupture), l'échantillon $X_1, \dots, X_n$ est identiquement distribué (pas nécessairement indépendant) selon la fonction de densité $f_0(\cdot)$. À un instant donné $1 < v \leq n$, supposé inconnu, une rupture se produit et la distribution des X_i change pour satisfaire la distribution de post-changement $f_1(\cdot) \neq f_0(\cdot)$. Dans ce cas, l'échantillon $X_1, X_2, \dots, X_{v-1}$ est identiquement distribué selon la densité de pré-changement $f_0(\cdot)$, et l'échantillon $X_v, X_{v+1}, \dots, X_n$ est identiquement distribué selon une densité de post-changement $f_1(\cdot)$.

Les changements qui se produisent dans une séquence d'observations peuvent être divers et différents comme l'illustre la Figure 1.1. Néanmoins, dans ce manuscrit, ils sont principalement liés à deux caractéristiques statistiques, qui sont la moyenne et/ou la variance de la séquence. C'est-à-dire, une rupture existe si la moyenne et/ou la variance des deux segments $\{X_1, \dots, X_{v-1}\}$ et $\{X_v, \dots, X_n\}$ sont différentes.

Dans le cas d'existence de multiples ruptures, nous supposons qu'il existe un certain nombre m de points de rupture, aux instants $\{v_1, \dots, v_m\}$. Chaque instant de rupture est un entier compris entre 2 et n . Les points de ruptures sont ordonnés de telle sorte que $v_i < v_j$ si $i < j$. Dans ce cas, la densité de distribution change à

chaque instant de rupture $\{v_i\}_{i=1,\dots,m}$. Il y a alors $(m + 1)$ "régimes" de distribution correspondant aux intervalles $[1, v_1[, [v_1, v_2[, \dots, [v_m, n[,$ et aux paramètres μ_{j-1} ou σ_{j-1}^2 qui sont respectivement la moyenne et la variance des observations du $j^{\text{ème}}$ segment $[v_{j-1}, v_j[,$ avec $j = 1, \dots, (m + 1)$.

La Figure 1.1 montre dans (a) un exemple de rupture sur la moyenne à l'instant $v = 100$, dans (b) un exemple de rupture sur la variance et dans (c) elle montre un exemple de rupture sur la moyenne et sur la variance. Les exemples (a), (b) et (c) représentent le cas où il existe deux états (régimes) : état normal (régime pré-changement) et état anormal (régime post-changement). Et la rupture est l'instant du passage de l'état normal à l'état anormal. Le cas (d) est particulier car il montre un exemple de régression qui ne rentre pas dans le cadre précédent, il montre un exemple de rupture de pente où le régime post-changement n'est pas stable et ne représente pas un seul état mais plusieurs, avec un passage progressif entre les états.

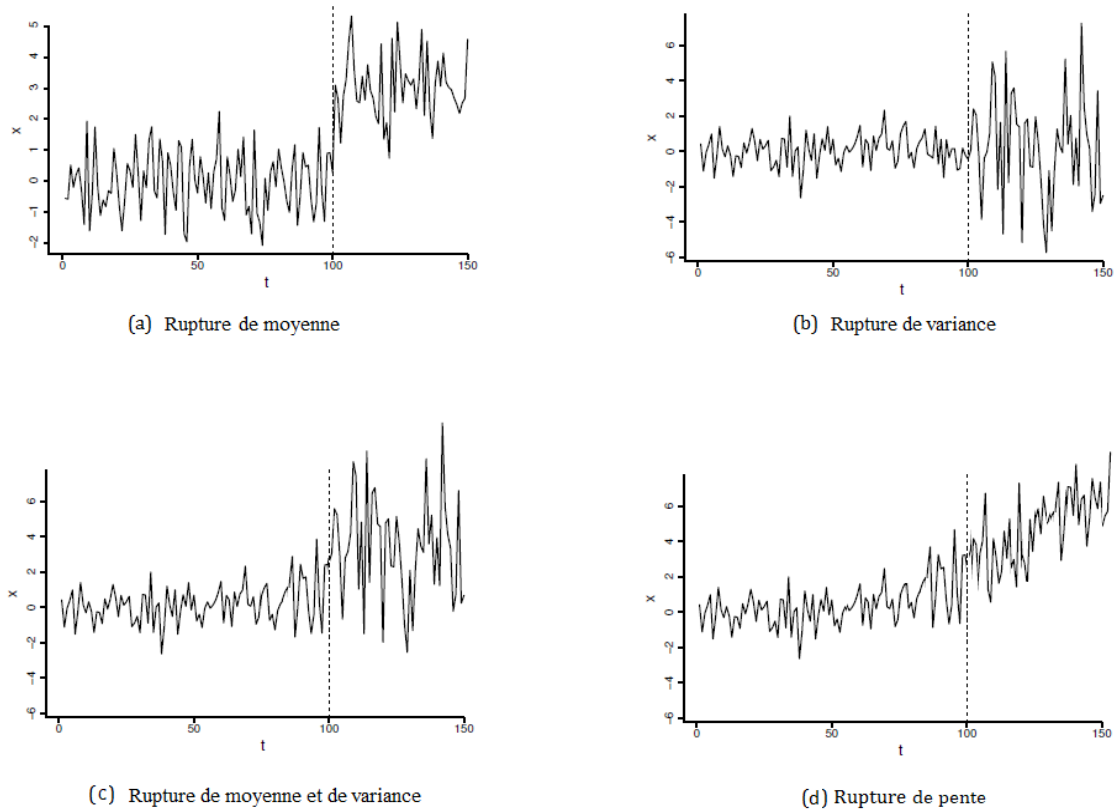


FIGURE 1.1 – Exemples de rupture.

1.2 Contexte de détection off-line

Dans cette section, nous allons brièvement présenter le contexte de la détection off-line, où on suppose que le nombre d'observations N est fixé, pour un échantillon $\{X_t\}_{t=1,\dots,N}$. La détection se fait donc rétrospectivement. Nous donnerons également la statistique classique de CUSUM utilisée dans ce contexte.

Soit v l'instant de la rupture, la question de la détection de rupture est posée comme un test statistique entre l'hypothèse nulle H_0 : "aucune rupture ne s'est produite, soit $v = \infty$ " contre l'hypothèse alternative H_1 : "Il existe un instant $1 < v \leq N$ où une rupture s'est produite". Le test statistique peut donc s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : v = \infty & X_t \sim f_0(\cdot) & \forall t = 1, \dots, N. \\ H_1 : \exists v \leq N & \begin{aligned} X_t &\sim f_0(\cdot) & \forall t = 1, \dots, (v-1); \\ X_t &\sim f_1(\cdot) & \forall t = v, \dots, N, \end{aligned} \end{cases} \quad (1.1)$$

où f_0 est la distribution pré-changement, f_1 est la distribution post-changement; $f_0 \neq f_1$.

On définit le rapport de vraisemblance entre les distributions post-changement et pré-changement à chaque instant t comme suit :

$$\Lambda_t = \frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)}, \quad t \geq 1.$$

Le log du rapport de vraisemblance instantané (LLR "Log-Likelihood Ratio") est défini par :

$$L_t = \ln(\Lambda_t) = \ln\left(\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)}\right), \quad t \geq 1. \quad (1.2)$$

Nous posons $\mathbb{P}_0[\cdot], \mathbb{P}_1[\cdot]$ les probabilités sous le régime pré-changement et post-changement respectivement. Et nous notons par $\mu_0 = \mathbb{E}_0(X_t)$, $\sigma_0^2 = \mathbb{V}_0(X_t)$ respectivement la moyenne et la variance dans le régime pré-changement, et par $\mu_1 = \mathbb{E}_1(X_t)$, $\sigma_1^2 = \mathbb{V}_1(X_t)$ respectivement la moyenne et la variance dans le régime post-changement.

Lemme 1. (i) L'espérance du LLR sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0$ est négative ou nulle ($\mathbb{E}_0[L_t] \leq 0$); (ii) l'espérance du LLR sous le régime post-changement $\mathbb{P}_1$ est positive ou nulle ($\mathbb{E}_1[L_t] \geq 0$).

La démonstration du Lemme 1 est donnée dans l'annexe A.1. La statistique de détection des sommes cumulées (CUSUM) est introduite par Page (1954) [26]. La détection rétrospective (off-line) de rupture se base sur la statistique liée au rapport de vraisemblance Λ_j , elle est définie par :

$$V_N = \max_{1 \leq k \leq N} \prod_{j=k}^N \Lambda_j. \quad (1.3)$$

La rupture est donc l'instant $v = k$ qui réalise la valeur de V_N . Cela revient à maximiser en k la somme cumulée ("CUmulative SUM") du LLR $\sum_{j=k}^N L_j$, conduisant à :

$$\ln(V_N) = \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=k}^N L_j.$$

On estime alors la position de la rupture par :

$$\hat{v} = \arg \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=k}^N L_j. \quad (1.4)$$

Nous notons que pour calculer le CUSUM du LLR $\sum_{j=k}^N L_j$ pour tout $1 \leq k \leq N$ dans la formule (1.4), l'échantillon $\{X_1, \dots, X_N\}$ doit être complètement observé, jusqu'au dernier instant N fixé. Nous donnons dans la Figure 1.2, un exemple de détection off-line en utilisant cette statistique de CUSUM. Nous avons simulé une série de $N = 100$ observations de loi gaussienne sous H_1 avec une rupture de moyenne à l'instant $v = 50$, tel que : $\{X_t\}_{1 \leq t < v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $\{X_t\}_{v \leq t \leq N} \sim \mathcal{N}(1, 1)$ (partie (A)). Nous avons calculé dans la partie (B), le CUSUM du LLR $\sum_{j=k}^N L_j$ en fonction de k , en supposant que les distributions du régime pré- et post-changement (f_0 et f_1) sont connues. Son maximum est atteint à la valeur 38.5. Donc la détection est estimée à l'instant $\hat{v} = 49$. La procédure a identifié la rupture qui existe réellement à l'instant $v = 50$, avec une imprécision d'un temps avant la rupture ($\hat{v} = 49$).

Remarque 1.

- Pour l'utilisation de l'approche CUSUM basée sur le LLR, nous devons poser une hypothèse sur les distributions pré-changement f_0 et post-changement f_1 .
- La statistique CUSUM est intuitive car avant la rupture v (resp. après la rupture v), $\mathbb{E}_0[L_t] \leq 0$ (resp. $\mathbb{E}_1[L_t] \geq 0$) d'après le Lemme 1, de sorte qu'en espérance la $\sum_{j=k}^N L_j$ est maximale pour $k = v$.

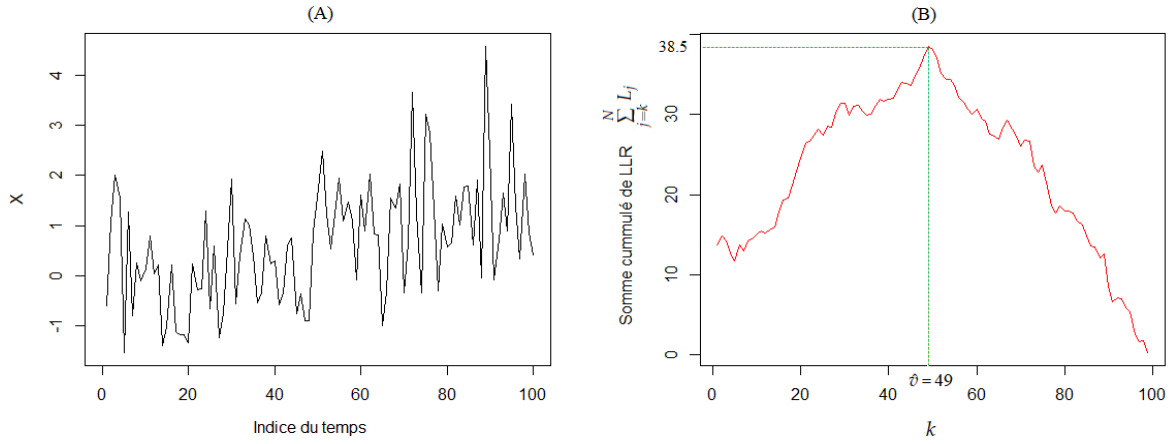


FIGURE 1.2 – Exemple de détection off-line en utilisant la statistique de CUSUM. (A) : simulation d'une série de $N = 100$ observations sous H_1 avec une rupture à l'instant $v = 50$; $\{X_t\}_{1 \leq t < v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $\{X_t\}_{v \leq t \leq N} \sim \mathcal{N}(1, 1)$. (B) : le CUSUM du LLR avec les paramètres $(\mu_0 = 0; \sigma_0^2 = 1)$ et $(\mu_1 = 1; \sigma_1^2 = 1)$ respectivement du régime pré- et post-changement, supposés connus. Instant de détection de la rupture : $\hat{v} = 49$.

1.3 Contexte de détection on-line

Dans le contexte on-line, la série d'observations $\{x_t\}_{t=1, \dots, n}$ issue de l'échantillon $\{X_t\}_{t=1, \dots, n}$, est séquentiellement observée jusqu'à l'instant n , non fixé. x_n est le dernier point ajouté à l'ensemble des données.

Statistiquement, pour tout $n \geq 1$, la question de détection de rupture consiste à tester séquentiellement l'hypothèse nulle $H_{0,n}$: "aucune rupture ne s'est produite avant l'instant n " contre l'hypothèse alternative $H_{1,n}$: "une rupture s'est produite à un instant $v \leq n$ " (1.5).

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_{0,n} : v > n, & X_t \sim f_0(\cdot) & \forall t = 1, \dots, n. \\ H_{1,n} : \exists v \leq n, & X_t \sim f_0(\cdot) & \forall t = 1, \dots, (v-1); \\ & X_t \sim f_1(\cdot) & \forall t = v, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Il est clair qu'il existe deux types d'erreurs : la première consiste à rejeter $H_{0,n}$ lorsqu'elle est vraie; c'est une fausse alarme. La deuxième est de ne pas rejeter $H_{0,n}$, lorsque $H_{1,n}$ est vraie, c'est une détection manquée.

Dans ce qui suit, nous présentons la statistique CUSUM adaptée au contexte on-line, en détaillant ses deux adaptations; l'adaptation du test séquentiel de rapport de probabilité (SPRT) et l'adaptation de la statistique off-line. Nous présentons également une autre statistique récursive connue sous le nom de Shiryaev-Roberts (SR). En premier lieu, les statistiques sont données en fonction du LLR; en deuxième lieu, nous définissons la fonction du score qui a été proposée dans la

littérature pour remplacer le LLR lorsqu'il est inconnu. Par la suite, nous présenterons la règle de décision où la procédure de détection on-line est basée sur une règle d'arrêt et le choix d'un seuil de détection.

1.3.1 Statistique de CUSUM

La version on-line de la statistique de CUSUM [26] s'écrit récursivement en fonction du log du rapport de vraisemblance LLR à l'instant t , comme suit :

$$W_t = \max\{0, W_{t-1} + L_t\}, \quad t \geq 1, \quad W_0 = 0, \quad (1.6)$$

$$\text{avec } L_t = \ln \left(\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \right).$$

Dans le régime pré-changement, la somme cumulée des L_t jusqu'à l'instant t est négative en espérance (d'après le Lemme 1), donc la statistique W_t vaut souvent zéro. Dans le régime post-changement, à partir de l'instant de l'occurrence de rupture, la somme cumulée des L_t croît en moyenne (Lemme 1). C'est pourquoi la règle d'arrêt, définie dans la section 1.3.4, propose de rejeter $H_{0,t}$ lorsque W_t dépasse un certain seuil.

a) Adaptation du test séquentiel de rapport de probabilité (SPRT)

L'adaptation intuitive de la statistique CUSUM de Page [26] est basée sur l'utilisation répétée du test séquentiel de rapport de probabilité (SPRT) de Wald [48], en testant les deux hypothèses $H_{0,n}$ contre $H_{1,n}$ à chaque instant $n \geq 1$. Définissons d'abord ci-dessous une seule utilisation de l'algorithme SPRT.

Définition 1. Le test séquentiel de rapport de probabilité (SPRT) est défini à l'aide du couple (d, T) , où d est la décision et T est un temps d'arrêt (appelé aussi règle d'arrêt, voir section 1.3.4) qui est un instant auquel la décision finale est prise et, par conséquence, où l'observation est arrêtée. On dit que (d, T) est un test de rapport de probabilité séquentiel (SPRT) pour tester entre deux hypothèses simples $H_{0,n}$ et $H_{1,n}$, si nous observons séquentiellement des données $\{X_t\}_{t=1,\dots,n}$, et si à l'instant n , nous prenons l'une des décisions suivantes :

- arrêter et accepter $H_{0,n}$ si $\sum_{t=1}^n L_t \leq -\epsilon$;
- arrêter et accepter $H_{1,n}$ si $\sum_{t=1}^n L_t \geq h$;
- continuer d'observer et de tester si $-\epsilon < \sum_{t=1}^n L_t < h$,

où $\sum_{t=1}^n L_t$ est la somme cumulée du LLR jusqu'à l'instant n , et $-\epsilon, h$ sont respectivement le seuil de détection inférieur et supérieur du test SPRT, tels que $\epsilon \geq 0, h > 0$ ($-\infty < -\epsilon \leq 0 < h < +\infty$).

La définition de SPRT peut être formulée comme suit :

$$d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{t=1}^n L_t \geq h; \\ 0 & \text{si } \sum_{t=1}^n L_t \leq -\epsilon; \\ \emptyset & \text{si } -\epsilon < \sum_{t=1}^n L_t < h. \end{cases} \quad (1.7)$$

Et le temps de sortie est défini par la règle d'arrêt suivante :

$$T = T_{-\epsilon, h} = \begin{cases} \infty & \text{si } -\epsilon < \sum_{t=1}^n L_t < h; \\ \min\{n \geq 1 : (\sum_{t=1}^n L_t \geq h) \cup (\sum_{t=1}^n L_t \leq -\epsilon)\} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.8)$$

avec la convention $\min \emptyset = \infty$.

Définition 2. Soit (d, T) un test SPRT. Lorsque le test s'arrête au temps T , deux probabilités d'erreur associées à la décision prise d sont possibles ;

- la probabilité d'accepter $H_{1,n}$ alors qu'aucune rupture ne s'est produite avant l'instant n . Elle est définie par

$$\alpha_n = \mathbb{P}_0 [d_n = 1] = \mathbb{P}_0 \left[\sum_{t=1}^n L_t \geq h \right]. \quad (1.9)$$

- la probabilité d'accepter $H_{0,n}$ alors qu'une rupture s'est produite avant l'instant n . Elle est définie par

$$\beta_n = \mathbb{P}_1 [d_n = 0] = \mathbb{P}_1 \left[\sum_{t=1}^n L_t \leq -\epsilon \right]. \quad (1.10)$$

L'idée clé de Page était de répéter l'utilisation du test SPRT jusqu'à ce que la décision $d = 1$ soit prise. C'est-à-dire, de redémarrer l'algorithme SPRT tant que la décision prise précédemment est $d = 0$. La première fois que $d = 1$, Page arrête l'observation et ne redémarre pas un nouveau cycle du SPRT. Ce temps est alors l'instant d'alarme auquel la rupture est détectée. Nous présentons ci-dessous dans la Figure 1.3, un exemple de calcul de la somme cumulée du LLR $\sum_{t=1}^n L_t$ sur une série simulée sous H_1 (utilisation de la même série de l'exemple de la Figure 1.2 en la traitant de façon on-line "point par point"), en considérant que les distributions pré- et post-changements sont connus. Nous pouvons voir respectivement les régions d'acceptation $H_{1,n}$ et $H_{0,n}$ pour un choix arbitraire des seuils supérieur $h = 3$ et inférieur $\epsilon = 4$. Notons que dans cet exemple, la procédure SPRT s'arrêterait à l'instant $n = 15$ lorsque le CUSUM $\sum_{t=1}^n L_t$ passe sous le seuil $-\epsilon$ avec $d_n = 0$ ($H_{0,n}$).

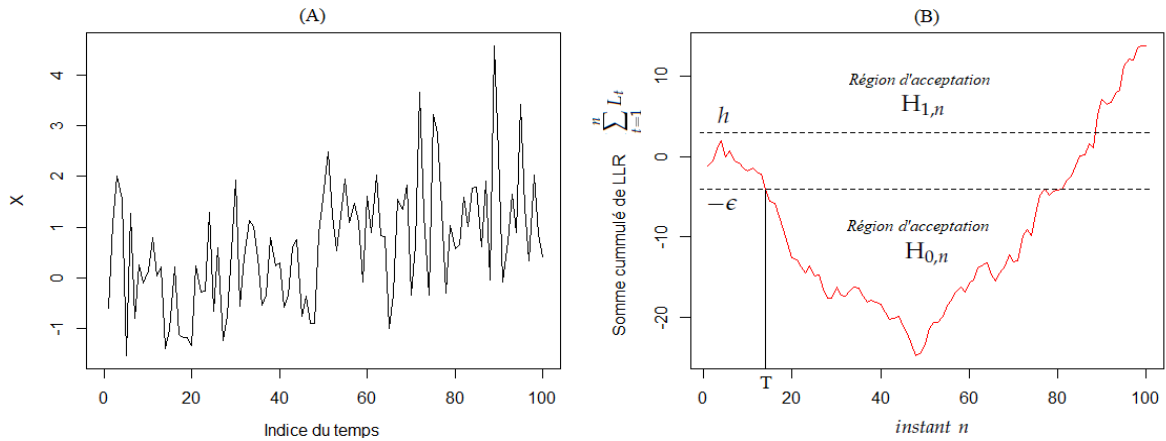


FIGURE 1.3 – (A) : série simulée sous H_1 avec une rupture sur la moyenne à l'instant $v = 50$; $\{X_t\}_{t < v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $\{X_t\}_{t \geq v} \sim \mathcal{N}(1, 1)$.

(B) : calcul de la somme cumulée du LLR $\sum_{t=1}^n L_t$ pour tout $n \geq 1$, avec les paramètres $(\mu_0 = 0; \sigma_0^2 = 1)$ et $(\mu_1 = 1; \sigma_1^2 = 1)$ respectivement du régime pré- et post-changement, supposés connus. Le choix arbitraire de $h = 3$ et de $\epsilon = 4$ délimite respectivement la région d'acceptation de $H_{1,n}$ et de $H_{0,n}$.

Pour définir enfin la statistique de CUSUM, Page suggère intuitivement de prendre la valeur zéro pour le seuil inférieur ($\epsilon = 0$). Cette proposition a été formellement démontrée optimale (critère d'optimalité dans le cadre séquentiel, i.e. minimisation du délai de détection en maintenant un taux donné de fausse alarme) par la suite par Shiryaev [38], Lorden [18], Moustakides [23] et Basseville et al. [3]. En utilisant alors un SPRT répété avec la valeur de seuil inférieur $\epsilon = 0$, la statistique de CUSUM basée sur le LLR peut être écrite récursivement à l'instant t comme suit :

$$W_t = \begin{cases} W_{t-1} + L_t & \text{si } W_{t-1} + L_t > -\epsilon = 0; \\ -\epsilon = 0 & \text{si } W_{t-1} + L_t \leq -\epsilon = 0. \end{cases} \quad W_0 = -\epsilon = 0. \quad (1.11)$$

Nous présenterons ultérieurement dans la Figure 1.4, le résultat de la détection en appliquant la statistique de CUSUM W_t (1.11) sur la même série simulée dans (A)- Figure 1.3.

Remarque 2.

- Si on définit deux statistiques de CUSUM W'_t, W''_t respectivement pour les deux valeurs du seuil inférieur $-\epsilon', -\epsilon''$; tel que $-\epsilon' \geq -\epsilon''$, il est clair que $W'_t \geq W''_t$. Par conséquent, W'_t peut détecter plus rapidement que W''_t , car W'_t peut atteindre le même seuil supérieur h avant W''_t .

- La statistique de CUSUM est définie pour détecter $H_{1,n}$. Elle ne s'intéresse pas à $H_{0,n}$. C'est-à-dire, la décision $d = 0$ ne va jamais être prise dans le cas de CUSUM. C'est pourquoi Page suggère que $\beta_n = 0$ (voir section 1.3.6).

b) Adaptation de la statistique off-line

L'idée de cette adaptation est d'écrire la statistique de CUSUM off-line V_t [26] donnée par (1.3), d'une façon récursive. Nous rappelons que $\ln(V_t)$ est le maximum de la somme cumulée du LLR; alors l'écriture récursive de la statistique de CUSUM est définie à l'instant t par :

$$\begin{aligned} W_t &= \max\{0, \ln(V_t)\}; \\ &= \max\{0, W_{t-1} + L_t\}, \quad W_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Une démonstration de l'égalité (1.12) est donnée dans l'annexe A.2.

1.3.2 Statistique de Shiryaev-Roberts

L'approche Shiryaev - Roberts est introduite en 1961 par Shiryaev [38, 37] pour la détection de changement dans le mouvement brownien, et reprise par Roberts en 1966 pour le temps discret [31]. La statistique de détection SR est introduite spécialement pour la détection séquentielle de rupture. Elle est définie par :

$$R_t = \sum_{k=1}^t \prod_{j=k}^t \Lambda_j \quad t \geq 1. \quad (1.13)$$

La statistique R_t peut être écrite à l'instant t sous sa forme récursive par :

$$R_t = (1 + R_{t-1}) \cdot e^{L_t}, \quad t \geq 1; \quad R_0 = 0. \quad (1.14)$$

La démonstration de la récursivité de R_t est donnée dans l'annexe A.3. Comme le CUSUM, la statistique récursive de SR s'écrit en fonction de L_t . Tartakovsky [40] a montré que le comportement du $\log(R_t)$ pour l'approche SR est comparable à celui de la statistique W_t du CUSUM.

1.3.3 Statistiques CUSUM et SR basées sur le score

Lorsque les deux distributions f_0 (pré-changement) et f_1 (post-changement) sont connues, il est naturel d'utiliser le LLR pour construire les statistiques W_t de CUSUM et R_t de SR. Toutefois, dans la pratique, f_0 et f_1 ne sont pas toujours connues. Dans ce cas, toute approche basée sur la vraisemblance est inutile. Tartakovsky et al. proposent de remplacer le LLR défini par L_t dans (1.2) par une fonction de score calculée en fonction des observations $S_t = S_t(X_1, \dots, X_t)$. Dans un premier temps, ils proposent une fonction de score pour une détection de rupture sur la moyenne dans [44, 43]. Par la suite, une généralisation pour une détection pour la moyenne et/ou pour la variance a été donnée dans [42]. Ils suggèrent de définir un score S_t qui doit évoluer avec le même comportement que L_t dans les

régimes pré- et post-changement. Avant qu'une rupture ne se produise, L_t a une espérance négative (Lemme 1). Après l'instant de rupture, le cumul des L_t croît en espérance (S_t a une espérance positive). La fonction de score S_t doit donc respecter ce comportement : $\mathbb{E}_0(S_t) \leq 0$ et $\mathbb{E}_1(S_t) \geq 0$.

Définition 3. La fonction de score S_t est définie dans [42] pour une détection de rupture sur la moyenne et/ou sur la variance par :

$$S_t(\delta, q) = C_1 \cdot Y_t + C_2 \cdot Y_n^2 - C_3 \quad (1.15)$$

avec $Y_t = (X_t - \mu_0)/\sigma_0$ version centrée réduite de X_t à l'instant t sous $\mathbb{P}_0$, et

$$C_1 = \delta \cdot q^2, \quad C_2 = \frac{1-q^2}{2}, \quad C_3 = \frac{\delta^2 \cdot q^2}{2} - \log(q),$$

$$\delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma_0 \quad \text{et} \quad q = \sigma_0/\sigma_1.$$

Les paramètres de détection δ et q sont fixés en fonction de l'objectif de détection qui concerne la moyenne et/ou la variance. C'est-à-dire, dans la pratique, on doit connaître le type et le niveau de la rupture attendues pour pouvoir fixer ces paramètres :

- δ est la différence de moyenne entre le régime pré- et post-changement normalisée par l'écart-type pré-changement. Il est considéré comme le niveau minimum de changement sur la moyenne que l'on voudrait détecter. Si la rupture que l'on cherche ne concerne que la variance (pas de détection sur la moyenne) : $\mu_1 = \mu_0 \Rightarrow \delta = 0$, alors $C_1 = 0$. Dans le cas où $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$), on parle d'une rupture d'augmentation (resp. de diminution) de la moyenne.
- q est le rapport de variances entre le régime pré- et post-changement. Il est considéré comme le niveau minimum de changement de variance que l'on voudrait détecter. Si la rupture que l'on cherche ne concerne que la moyenne (pas de détection sur la variance) : $\sigma_1 = \sigma_0 \Rightarrow q = 1$, alors $C_2 = 0$. Dans le cas où $q < 1$ (resp. $q > 1$), on parle d'une rupture d'augmentation (resp. de diminution) de la variance.

Remarque 3.

- Dans le cas où les distributions pré-changement et post-changement des données (f_0 et f_1) sont gaussiennes avec des paramètres μ_1, σ_1^2 et μ_0, σ_0^2 connus, alors $S_t \equiv L_t$. Autrement dit, sous l'hypothèse gaussienne, les statistiques basées sur S_t et L_t sont les mêmes. La démonstration de cette égalité est donnée dans l'annexe A.5.

- La fonction de score S_t remplace le log du rapport de vraisemblance L_t lorsque les distributions pré- et post-changement sont inconnues. Cependant, la statistique basée sur le score S_t ne peut être définie qu'à la connaissance des paramètres de moyenne et de variance des données dans le régime pré-changement (μ_0, σ_0^2) et l'objectif de détection (δ et q). Dans la pratique, il est nécessaire d'estimer μ_0 et σ_0^2 à partir des données d'apprentissage sous le régime $\mathbb{P}_0$. À ce stade, nous les supposons connus. Ensuite, selon le type de détection de moyenne et/ou de variance, et le niveau de détection attendu, on fixe δ et q . Ce qui revient à fixer la moyenne et la variance du régime post-changement (μ_1, σ_1^2) que l'on voudrait détecter.
- Dans le cas où $\mu_1 = \mu_0$ et $\sigma_1^2 = \sigma_0^2$ alors $\delta = 0$ et $q = 1$, et $S_t \equiv 0, \forall t$, ce qui correspond bien au cas sans détection.

Lemme 2. *L'espérance de la fonction de score $S_t(\delta, q)$ sous les régimes pré-changement $\mathbb{P}_0$ et post-changement $\mathbb{P}_1$ est donnée par les deux expressions suivantes :*

$$(i) \mathbb{E}_0[S_t(\delta, q)] = \ln(q) + \frac{1}{2} (1 - q^2 - \delta^2 q^2) \leq 0, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall q > 0.$$

$$(ii) \mathbb{E}_1[S_t(\delta, q)] = \ln(q) + \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \frac{1}{q^2} - 1 \right) > 0, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall q > 0.$$

La démonstration du Lemme est donnée dans l'annexe [A.4](#).

Définition 4. *En remplaçant le LLR L_t par la fonction de score $S_t(\delta, q)$ donnée par [1.15](#), les statistiques $W_t(\delta, q)$ de CUSUM et $R_t(\delta, q)$ de SR basées sur le score sont définies récursivement à l'instant t par :*

$$W_t(\delta, q) = \max\{0, W_{t-1}(\delta, q) + S_t(\delta, q)\}, \quad t \geq 1, \quad W_0 = 0. \quad (1.16)$$

$$R_t(\delta, q) = (1 + R_{t-1}(\delta, q)) \cdot e^{S_t(\delta, q)}, \quad t \geq 1, \quad R_0 = 0. \quad (1.17)$$

1.3.4 Règle d'arrêt

Sous le régime post-changement $\mathbb{P}_1$, la W- statistique de CUSUM (respectivement la R- statistique de SR) a tendance à croître (Lemme [1](#)). Il est alors naturel de rejeter l'hypothèse $H_{0,t}$ lorsque la statistique W_t (respectivement R_t) dépasse un seuil de détection. Ce seuil doit être choisi en fonction d'un objectif de risque de fausse alarme ou de délai de détection.

La règle d'arrêt consiste à déclencher une alarme (temps d'arrêt) pour signaler qu'une rupture s'est produite avant l'instant t lorsque $W_t(\delta, q)$ (respectivement $R_t(\delta, q)$) dépasse le seuil de détection h (respectivement $\tilde{h}$), fixé à l'avance. Pour la procédure de CUSUM, une alarme se déclenche à un instant T défini par la règle d'arrêt suivante :

$$T = \min\{t \geq 1 : W_t(\delta, q) \geq h\}. \quad (1.18)$$

On note que le choix d'une statistique et d'une règle d'arrêt définit une procédure de détection qui peut être évaluée sous les régimes pré- et post-changement. L'évènement $\{T \leq t\}$ ne dépend que de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_t)$. T est une variable aléatoire qui a les propriétés d'un temps d'arrêt pour la filtration générée par $(W_t)_{t \geq 1}$ (ou $(R_t)_{t \geq 1}$ respectivement). Le temps d'arrêt T est l'estimateur de l'instant réel de la rupture v . Après un test de détection, trois cas sont possibles :

- $T \geq v$, la rupture v est détectée avec un délai $(T - v)$,
- $T < v$, la rupture v ne s'est pas encore produite à l'instant T . On dit que la procédure a déclenché une fausse alarme,
- $v < +\infty, T = +\infty$, la rupture v n'est pas détectée. On parle de détection manquée.

Nous présentons dans la Figure 1.4, un exemple de la détection on-line en utilisant la statistique de CUSUM basée sur le score $W_t(\delta, q)$ et la règle d'arrêt définie par (1.18). Dans la partie (A), nous présentons la série simulée sous H_1 avec une rupture sur la moyenne à l'instant $v = 50$ (la même série de l'exemple de la Figure 1.2 en observant les données de façon on-line); $\{X_t\}_{t < v} \sim \mathcal{N}(\mu_0 = 0, \sigma_0^2 = 1)$, et $\{X_t\}_{t \geq v} \sim \mathcal{N}(\mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 1)$. Dans la partie (B), nous présentons la statistique $W_t(\delta, q)$ calculée séquentiellement à chaque instant $t \geq 1$, pour un objectif de détection sur la moyenne $\delta = 1, q = 1$ (i.e. les distributions du régime pré- et post-changement sont supposées connues). En utilisant un seuil de détection $h = 3$, le temps d'arrêt signale une alarme à l'instant $T = 52$. Alors la rupture $v = 50$ est détectée avec un délai $T - v = 2$.

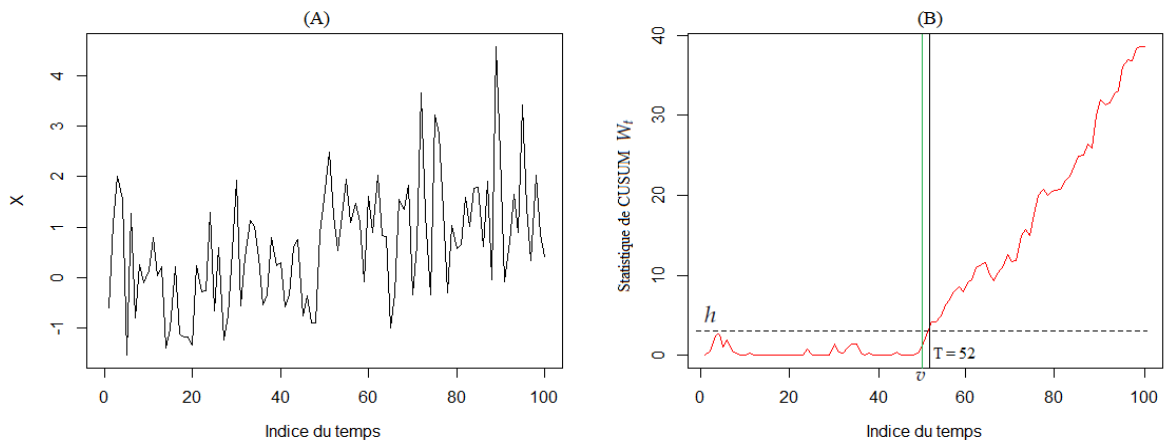


FIGURE 1.4 – Exemple de simulation pour la détection on-line de rupture en utilisant le statistique de CUSUM. (A) : série simulée sous H_1 avec une rupture sur la moyenne à l'instant $v = 50$; $\{X_t\}_{t < v} \sim \mathcal{N}(\mu_0 = 0, \sigma_0^2 = 1)$, et $\{X_t\}_{t \geq v} \sim \mathcal{N}(\mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 1)$. (B) : statistique de CUSUM $W_t(\delta, q)$ calculée pour tout $t \geq 1$, pour l'objectif de détection sur la moyenne ($\delta = 1, q = 1$) en supposant que les distributions du régime pré- et post-changement sont connues. Pour le choix du seuil $h = 3$, le temps d'arrêt $T = 52$. La rupture $v = 50$ est donc détectée avec un délai $T - v = 2$.

1.3.5 Paramètres de détection

Dans cette section, nous présentons les définitions théoriques des principaux paramètres de détection utilisés dans le contexte on-line pour évaluer la procédure de détection.

Soit T la variable aléatoire positive représentant l'instant de la première alarme.

- **Temps moyen entre fausses alarmes**

Page [26] et Lorden [18] proposent un paramètre pour évaluer le nombre moyen d'observations avant le déclenchement d'une fausse alarme. Il est donné par l'espérance sous $\mathbb{P}_0$ du premier instant d'alarme.

Définition 5. *le Mean Time Between False Alarm est défini par*

$$MTBFA = \mathbb{E}_0 [T]. \quad (1.19)$$

Plus le $MTBFA$ est élevé, plus le risque réel de fausse alarme est faible.

- **Taux de fausse alarme instantané conditionnel**

Il est évalué sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0$, et est défini comme dans le cadre de l'analyse de la survie comme suit :

Définition 6. *Le taux (ou risque) de fausse alarme instantané conditionnel est la probabilité conditionnelle qu'une fausse alarme ait lieu dans un petit intervalle de temps Δt après l'instant t , sachant qu'aucune fausse alarme n'est signalée jusqu'à t . Pour un $t \geq 1$ fixé, le taux de fausse alarme instantané conditionnel, noté λ_t^0 , est défini dans le cas discret par*

$$\lambda_t^0 = \mathbb{P}_0 [T = t | T \geq t]. \quad (1.20)$$

Dans le cas continu, il est défini par :

$$\lambda_t^0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_0 [t \leq T < t + \Delta t | T \geq t]}{\Delta t}. \quad (1.21)$$

Remarque 4. Si la variable aléatoire des instants d'alarme T admet une densité de probabilité g_0 , le taux de fausse alarme instantané conditionnel est égal au taux de saut, soit le rapport entre la densité et la fonction de survie.

$$\lambda_t^0 = \frac{g_0(t)}{\tilde{S}_0(t)} = -\ln(\tilde{S}_0(t))', \quad (1.22)$$

où $\tilde{S}_0(t)$ est la fonction de survie correspondante au temps t . Elle donne la probabilité qu'aucune fausse alarme ne se produise avant t . Pour $n \geq 1$, on peut

calculer

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_0(n) &= \mathbb{P}_0 [T > n] \\
&= \mathbb{P}_0 \left[\bigcap_{t=1}^n (T \neq t) \right] \\
&= \mathbb{P}_0 [T \neq 1] \times \mathbb{P}_0 [T \neq 2 | T \neq 1] \times \dots \times \mathbb{P}_0 [T \neq n | T \neq t, \forall t < n] \\
&= \prod_{t=1}^n (1 - \lambda_t^0).
\end{aligned}$$

Alors dans le cas où $n\tilde{S}_0(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, le temps moyen entre fausses alarmes *MTBFA* peut être calculé en fonction du taux conditionnel λ_t^0 , dans le cas discret pour $n \geq 1$, comme suit :

$$\begin{aligned}
MTBFA &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_0(n) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{t=1}^n (1 - \lambda_t^0).
\end{aligned}$$

Dans le cas continu, $MTBFA = \int_0^{\infty} \tilde{S}_0(x) dx$, avec $\tilde{S}_0(x) = \mathbb{P}_0 [T \geq x]$, et $x\tilde{S}_0(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

Supposons maintenant que le risque instantané de fausse alarme est constant dans le temps, c'est-à-dire que le taux conditionnel de fausse alarme est le même quelque soit l'instant $t \geq 1$, i.e. $\lambda_t^0 = \lambda^0$ (cas sans mémoire). Dans ce cas, la variable instant d'alarme T est distribuée selon la loi géométrique $\mathcal{G}\text{éom}(\lambda^0)$ dans le cas discret (dans le cas continu, selon la loi exponentielle $\text{Exp}(\lambda^0)$). Par conséquent, la fonction de survie au temps n vaut $\tilde{S}_0(n) = (1 - \lambda^0)^n$. Et le *MTBFA* est donnée par :

$$\begin{aligned}
MTBFA &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^0)^n \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - \lambda^0)^{u-1}}{\lambda^0} = \frac{1}{\lambda^0}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, le rapport $1/MTBFA$ est égal au taux de fausse alarme instantané conditionnel.

Nous devons noter que la quantité λ_t^0 est à distinguer de la densité discrète α_t de la variable T , qui dans le cas géométrique (i.e. λ_t^0 constant), s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\alpha_t &= \mathbb{P}_0 [T = t] \\
&= \lambda^0 (1 - \lambda^0)^{t-1}, \quad t \geq 1.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

• Taux de détection instantané conditionnel

L'équivalent du taux de fausse alarme sous $\mathbb{P}_1$, qu'il soit conditionnel ou non, est le taux de détection.

Définition 7. Le taux de détection instantané conditionnel (CIDR "Conditional Instantaneous Detection Rate"), noté λ_t^1 , est défini dans le cas discret, pour un $t \geq 1$ fixé par

$$\lambda_t^1 = \mathbb{P}_1 [T = t | T \geq t]. \quad (1.24)$$

Et dans le cas continu, il est donné par :

$$\lambda_t^1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_1 [t \leq T < t + \Delta t | T \geq t]}{\Delta t}. \quad (1.25)$$

• Délai moyen de détection

Le délai moyen de détection est évalué sous le régime post-changement pour quantifier le délai de détection (rapidité d'une détection) selon Pollak [28]. Il est donné par l'espérance sous $\mathbb{P}_1$ du temps d'alarme T .

Définition 8. L'Average Detection Delay est défini par

$$ADD = \mathbb{E}_1 [T]. \quad (1.26)$$

Remarque 5. La fonction ARL (Average Run Length) de la variable instant d'alarme T est utilisée dans le cadre séquentiel pour unifier les deux critères MTBFA et ADD [3, 44, 24]. Elle définit sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0$, le MTBFA, et sous le régime post-changement $\mathbb{P}_1$, l'ADD.

1.3.6 Choix de seuil pour la statistique de CUSUM

Nous avons vu dans la section 1.3.1 que Page [26] s'inspire du test SPRT de Wald [48] pour définir le test de CUSUM. Dans le cas du SPRT, Wald introduit deux inégalités et une approximation pour sélectionner les seuils de détection inférieur $-\epsilon$ et supérieur h (définition 1). Sachant que la statistique de CUSUM est une adaptation du test SPRT avec $-\epsilon = 0$ et $\beta_t = 0$ (section 1.3.1), Page propose alors de réadapter les inégalités et l'approximation de Wald pour fixer le seuil de détection h dans le cas du CUSUM. Ce seuil classique [18, 30, 3, 41, 6, 43, 42] est donc fixé en utilisant l'inégalité et/ou l'approximation de Wald suivantes :

1. L'inégalité de Wald :

Le seuil de détection h est fixé pour contrôler la probabilité de fausse alarme α_t , en respectant

$$h \leq \ln \left(\frac{1}{\alpha_t} \right) \quad (1.27)$$

2. L'approximation de Wald :

Le seuil de détection h est fixé pour contrôler le délai moyen de détection ADD , en respectant l'inégalité suivante qui résulte de l'approximation de Wald :

$$h \geq ADD \cdot K(f_1, f_0). \quad (1.28)$$

où $K(f_1, f_0)$ est la divergence de Kullback-Leibler entre les deux distributions de probabilité f_1 et f_0 . Elle est égale à l'espérance sous $\mathbb{P}_1$ du LLR ($\mathbb{E}_1[L_t]$), et mesure la différence (dissimilarité) entre les deux distributions.

Remarque 6.

- Dans le cas où on remplace le LLR L_t par le score S_t défini par (1.15), c'est-à-dire pour le modèle gaussien, $K(f_1, f_0)$ est calculée explicitement comme suit : $K(f_1, f_0) = \mathbb{E}_1[S_t] = \ln(q) + \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \frac{1}{q^2} - 1 \right)$.
- Dans le cas de la détection de rupture sur la moyenne ($q = 1$) :

$$K(f_1, f_0) = \mathbb{E}_1[S_t] = \frac{\delta^2}{2}.$$

Chapitre 2

Construction de seuils et règle d'arrêt

Nous nous plaçons ici dans le cadre séquentiel, où nous considérons que la série est observée d'une manière instantanée : l'arrivée des données est effectuée point par point.

La procédure de détection séquentielle de rupture requiert le choix d'une statistique de test récurrente, d'un seuil de détection que la statistique doit atteindre pour signaler une détection, et d'une règle d'arrêt. Dans la suite, nous choisissons d'utiliser la statistique de CUSUM basée sur le score $W_t(\delta, q)$ donnée dans (1.16), avec sa règle d'arrêt classique $T_{h(\alpha)}$ correspondante, définie dans (1.18) pour un seuil de détection donné $h(\alpha)$.

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par une brève analyse du comportement de la W -statistique sous le régime pré-changement. Par la suite, nous présentons les différents seuils de détection empiriques proposés et les étapes de leur construction. Et nous finissons enfin par la proposition d'une règle d'arrêt corrigée pour la procédure de détection séquentielle.

2.1 Comportement de la statistique

Afin d'étudier le comportement de la W -statistique de CUSUM sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0$, nous avons calculé la statistique de détection $W_t(\delta, q)$ sur des séries simulées sans rupture (dans leur état normal). Pour ce faire, nous supposons connaître les paramètres μ_0 et σ_0 (sous $\mathbb{P}_0$), et nous fixons les paramètres δ et q pour un objectif de détection donné. Les paramètres μ_1 et σ_1 (sous $\mathbb{P}_1$) seront automatiquement connus en fixant respectivement δ et q . De ce fait, la statistique $W_t(\delta, q)$ peut être facilement calculée pour tout $t \geq 1$.

La Figure 2.1 montre un exemple de la statistique $W_t(\delta, q)$ calculée sur la même série $\{X_t\}_{t=1, \dots, 200}$ simulée sous $\mathbb{P}_0$, de distribution gaussienne i.i.d avec $\mu_0 = 0$ et $\sigma_0 = 1$ ($X_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Dans la Partie (A) (resp. Partie (B)) de la Figure 2.1, la statistique est calculée pour trois différents objectifs (niveaux) de détection sur la moyenne $\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ (resp. de détection sur la variance $q \in \{0.15, 0.25, 0.5\}$, avec $\mu_0 = \mu_1 = 0$).

Il faut d'abord remarquer que la statistique de détection $W_t(\delta, q)$ est par définition toujours positive (voir (1.16)). Et que les trajectoires calculées diffèrent en

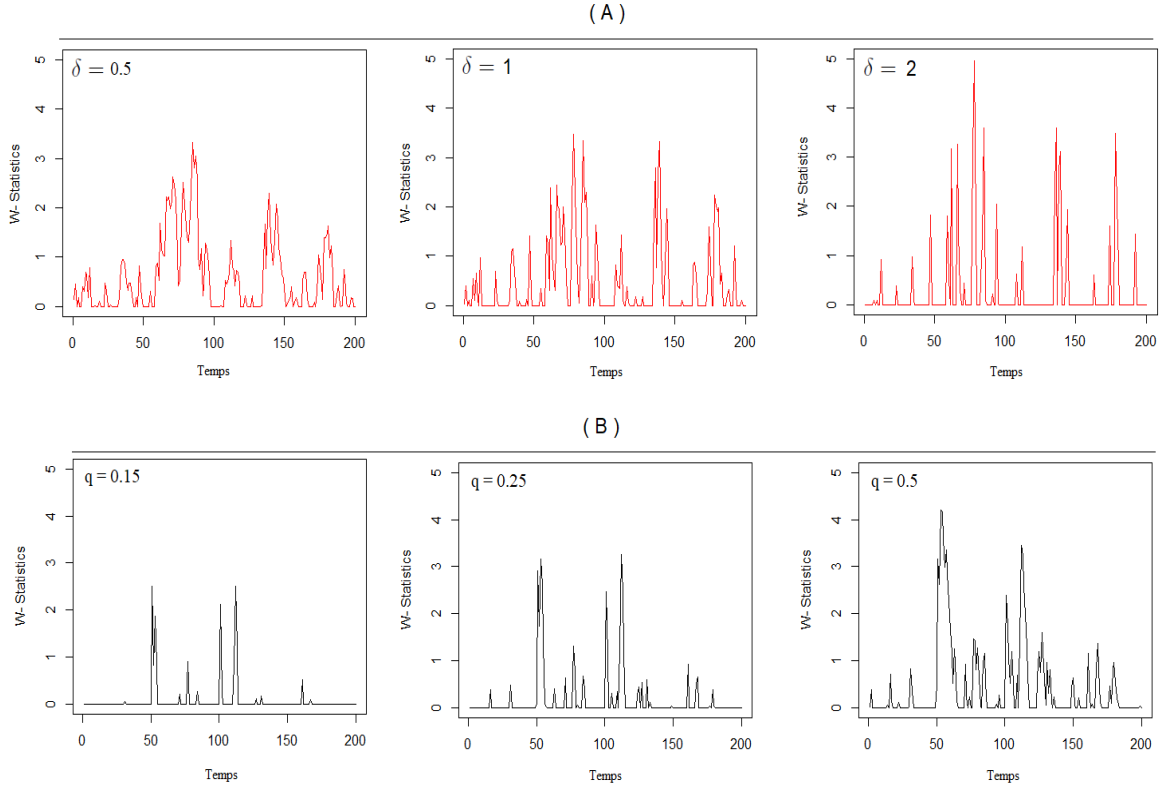


FIGURE 2.1 – Trajectoire de la statistique $W_t(\delta, q)$ de CUSUM calculée sous $\mathbb{P}_0$ ($X_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $t = 1.., 200$). Partie (A) (resp. Partie (B)), la statistique calculée pour les objectifs de détection sur la moyenne $\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ (resp. de détection sur la variance $q \in \{0.15, 0.25, 0.5\}$, avec $\mu_0 = \mu_1 = 0$)

terme de nombre, longueur et maximum de l'excursion¹ sur un intervalle donné. Dans le cas de la recherche de rupture sur la moyenne (i.e. $q = 1$), la partie (A) de la Figure 2.1 montre que lorsque δ est petit, les excursions de la statistique sont plus longues mais moins hautes. Et lorsque δ est grand, les excursions sont bien entendu moins longues mais atteignent des niveaux plus élevés quand elles montent. Dans le cas de la recherche de rupture sur la variance (i.e. $\delta = 0$), la partie (B) de la Figure 2.1 montre que lorsque q est petit, on a très peu d'excursions, très courtes et peu élevées, mais passent beaucoup de temps en zéro. Et quand q est grand, on a plus d'excursions, plus longues et plus élevées.

Cet exemple de simulation montre que le comportement de la statistique (variabilité et amplitude) dépend du niveau de changement de moyenne δ ou de variance q que l'on cherche à détecter.

De ce fait, il est donc clair qu'un seuil de détection doit dépendre de l'objectif de détection souhaité (δ, q) .

1. On appelle une excursion une partie de trajectoire comprise entre deux passages consécutifs en zéro.

2.2 Seuils de détection

Nous présentons dans cette section différents seuils de détection que nous allons évaluer dans le cadre de la détection séquentielle. Nous présentons d'abord le seuil constant analytique de Wald [48] provenant de la littérature, puis quatre seuils empiriques construits par une méthode basée sur la simulation : le premier seuil empirique est constant comme celui de Tsiamyrtzis [45]. Le second est l'instantané conditionnel de Margavio [19], construit par une nouvelle procédure de simulation, comparable à celle de Shen et al. [35], mais plus générale. Le troisième est un nouveau seuil instantané non-conditionnel, et le quatrième est une version data-driven de ce dernier : instantané non-conditionnel dynamique.

Notre méthode de construction de seuil consiste à effectuer un grand nombre de simulations de la statistique de test sous le régime pré-changement "état normal sans rupture", et à construire le seuil à partir de la distribution empirique de la statistique $W_t(\delta, q)$, afin de contrôler un certain risque mesuré. La méthode de la construction empirique diffère d'un seuil à l'autre. Nous donnerons ci-dessous les détails de la construction de chaque seuil proposé de manière empirique.

2.2.1 Seuil Constant de Wald (CW)

Dans le contexte séquentiel (QCD) de la détection la plus rapide de rupture, le seuil conventionnel [18, 30, 3, 41, 6, 43, 42] se base sur l'inégalité de Wald (1.27). Il est déterminé dans le but de contrôler le risque de fausse alarme tout au long de la détection. Dans ce manuscrit, nous utilisons cette méthode conventionnelle pour fixer le seuil constant de Wald (Seuil-CW) h^W , après le choix d'une probabilité tolérée de fausse alarme α ,

$$h^W(\alpha) = -\ln(\alpha). \quad (2.1)$$

La probabilité tolérée α est imposée par l'utilisateur. Elle doit être respectée, c'est-à-dire, aucun α_t (défini en (1.23)) ne dépasse α . En d'autres termes, par l'inégalité de Wald, on a le contrôle de la densité discrète

$$\alpha_t = \mathbb{P}_0 [T = t] \leq \mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h^W(\alpha)] \leq \alpha, \quad t \geq 1. \quad (2.2)$$

2.2.2 Seuil Constant Empirique (CE)

Ce premier seuil empirique proposé est constant, tout comme le Seuil-CW, mais basé sur la simulation sous $\mathbb{P}_0$. Notre but est donc de contrôler la probabilité de fausse alarme sur toute la trajectoire simulée de n observations $(X_1, \dots, X_n)_{n \geq 1}$. En effet, nous cherchons à déterminer un seuil constant empirique (Seuil-CE) h^E , après le choix d'une probabilité tolérée α , pour contrôler le risque de signaler une fausse alarme sur la trajectoire de longueur n , de sorte que

$$\mathbb{P}_0 [M_n(\delta, q) \geq h^E(\alpha, \delta, q)] \leq n \cdot \alpha, \quad (2.3)$$

où $M_n(\delta, q)$ est le maximum de la statistique de CUSUM $(W_t^j(\delta, q))_{1 \leq t \leq n}$ sur les n points observés ($M_n(\delta, q) = \max_{1 \leq t \leq n} W_t(\delta, q)$). Nous suggérons alors ici de contrôler le risque de signaler une fausse alarme sur la trajectoire de n observations par $n \cdot \alpha$.

L'idée de la construction du Seuil-CE $h^E(\alpha, \delta, q)$ est d'effectuer B simulations de la trajectoire de n observations $\{(X_t^j)_{1 \leq t \leq n}\}_{j=1, \dots, B}$ sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0$; de calculer séquentiellement, pour chacune des trajectoires simulées j , la statistique de CUSUM $(W_t^j(\delta, q))_{1 \leq t \leq n}$ correspondante; puis de calculer pour chaque W -statistique, son maximum $(M_n^j(\delta, q))_{1 \leq t \leq n}$ sur les n observations simulées. Et nous déterminons enfin le Seuil-CE $h^E(\alpha, \delta, q)$ à partir de la distribution empirique des B valeurs maximales $M_n^j(\delta, q)$ obtenues, plus précisément, à partir du quantile empirique d'ordre $(1 - n\alpha)$ $(\mathbf{q}_{(1-n\alpha)}[\cdot])$, comme suit :

$$h^E(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-n\alpha)} \left[\{M_n^j(\delta, q)\}_{1 \leq j \leq B} \right], \quad (2.4)$$

où α est la probabilité tolérée de fausse alarme, fixée par l'utilisateur. Les étapes de construction du Seuil-CE h^E sont résumées dans l'Algorithme 1 et la Figure 2.2.

Le maximum $M_n(\delta, q)$ est appelé le score local de la statistique de CUSUM $\{W_t(\delta, q)\}_{1 \leq t \leq n}$. Il a été introduit par Karlin & Altschul en 1990 [13] pour l'analyse des séquences biologiques et moléculaires, où les données sont globalement observées sur une longueur n fixe (off-line). La distribution du score local a été étudiée en premier lieu pour le processus de Lindley [17], un processus comparable à celui du CUSUM, défini en 1952 pour la théorie des files d'attente (une étude exhaustive est donnée par Lagnoux et. al [15]). En 2001, Mercier & Daudin en 2001 [22] donnent une définition équivalente du score local basé sur le processus de Lindley, pour étudier sa distribution. Récemment en 2020, Mercier [21] propose une étude de la distribution exacte du maximum partiel du processus de Lindley adapté pour la surveillance on-line, dans le cas i.i.d (variables indépendantes et identiquement distribuées). L'auteur conclut que le calcul de la distribution du score local nécessite la connaissance de la distribution des données.

Remarque 7.

- Notons que le maximum $M_n^j(\delta, q)$ dépend de la taille n de l'échantillon simulé. Par conséquent, le Seuil-CE dépend de n , de α et de l'objectif de détection (δ, q) , contrairement au Seuil-CW qui, lui ne dépend que de α .
- Il convient de noter que l'ordre du quantile empirique $(1 - n\alpha)$ doit appartenir à $[0, 1]$, ainsi si n est grand, α doit être très petit pour pouvoir calculer le quantile. Par exemple, pour $n = 50$, le α toléré que l'on va fixer, ne doit pas dépasser 0.02 ($\alpha \leq 0.02$).
- Notre méthode de simulation est comparable à celle de Tsiamyrtzis & Hawkins [45], qui utilisent aussi un seuil constant empirique construit en simulant la somme cumulative (CUSUM) d'un processus de poisson sous

Algorithm 1 Procédure de simulation pour la construction du Seuil-CE $h^E(\alpha, \delta, q)$

Require: Paramètres du régime pré-changement μ_0, σ_0 , objectif de détection q et δ , probabilité tolérée de fausse alarme α , nombre de séries simulées B , nombre d'observations n .

- 1: **Initialization** : $W_0 = 0$.
- 2: **for** $j = 1$ to B **do**
- 3: **for** $t = 1$ to n **do**
- 4: Générer x_t^j : la $t^{\text{ème}}$ observation de la $j^{\text{ème}}$ série simulée, sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0(x_t^j | x_{t-1}^j, \dots, x_1^j)$;
- 5: Calculer le score $s_t^j(\delta, q)$;
- 6: Calculer $w_t^j(\delta, q) = \max(0, w_{t-1}^j(\delta, q) + s_t^j(\delta, q))$: la statistique correspondante;
- 7: **end for**
- 8: Calculer $m_n^j(\delta, q) = \max_{1 \leq t \leq n} w_t^j(\delta, q)$: le maximum de la statistique;
- 9: **end for**
- 10: Construire le Seuil-CE en prenant le quantile empirique d'ordre $(1 - n\alpha)$ des B maximums calculés :

$$h^E(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-n\alpha)} \left[\{m_n^j(\delta, q)\}_{1 \leq j \leq B} \right]$$

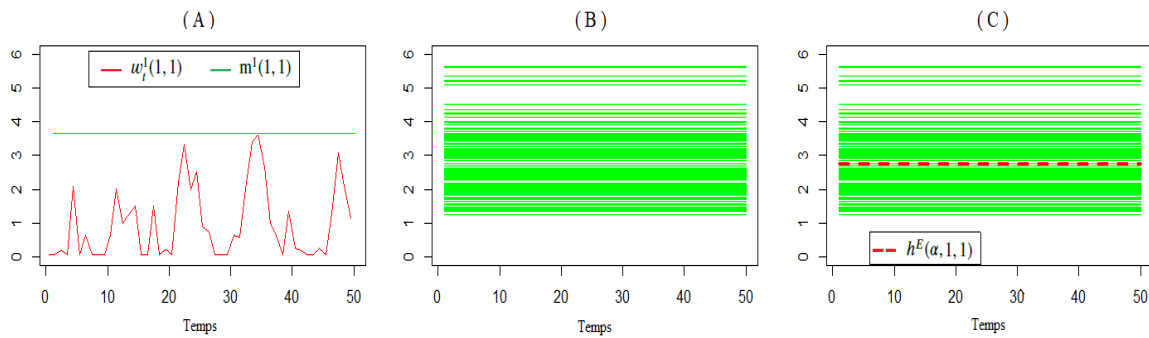


FIGURE 2.2 – Principe de construction du Seuil-CE $h^E(\alpha, \delta, q)$ pour $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1$ et $n = 50$. (A) : trajectoire de la statistique $w_t^1(1,1)$ et son maximum $m^1(1,1)$. (B) : calcul des B maximums $\{m_n^j(1,1)\}_{1 \leq j \leq B}$. (C) : $h^E(0.01, 1, 1)$ quantile empirique d'ordre $(1 - n\alpha)$.

le régime pré-changement. La spécificité de notre méthode réside dans le calcul du maximum de la statistique $M_n(\delta, q)$ sur l'intervalle $[1, n]$ et dans notre suggestion de contrôler le risque de signaler une fausse alarme sur une trajectoire de n observations par la quantité $n\alpha$. En d'autres termes, de considérer lors des simulations, le quantile d'ordre $(1 - n\alpha)$. Nous sommes conscients que cette proposition est un choix naïf; des investigations complémentaires seraient intéressantes sur ce sujet.

2.2.3 Seuil Instantané Empirique Conditionnel (IEC)

Les premiers à utiliser un seuil de détection instantané sont Margavio et al. [19]. Ils proposent un seuil dépendant du temps h_t dans le but de contrôler le taux de fausse alarme conditionnel λ_t^0 à chaque instant t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^0 = \mathbb{P}_0 [W_1(\delta, q) \geq h_1(\lambda_1^0)] \\ \lambda_2^0 = \mathbb{P}_0 [W_2(\delta, q) \geq h_2(\lambda_2^0) | W_1(\delta, q) < h_1(\lambda_1^0)] \\ \vdots \\ \lambda_t^0 = \mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h_t(\lambda_t^0) | W_i(\delta, q) < h_i(\lambda_i^0), \forall i < t], \quad t \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Dans ce cas, le seuil instantané conditionnel est déterminé de manière itérative. A un instant donné t , pour déterminer le seuil $h_t(\lambda_t^0)$, nous devons connaître les taux instantanés de fausses alarmes conditionnels jusqu'au temps t (i.e. $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_t^0) \in]0; 1[$), ainsi que les seuils jusqu'au temps $(t-1)$ (i.e. $(h_1(\lambda_1^0), h_2(\lambda_2^0), \dots, h_{t-1}(\lambda_{t-1}^0))$). Pour simplifier, Margavio et al. supposent que λ_t^0 est constant dans le temps (cas géométrique) : $\lambda_t^0 = \lambda^0, \forall t \geq 1$. Dans ce cas, le taux conditionnel de signaler une fausse alarme au temps t est donné par

$$\lambda^0 = \mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h_t(\lambda^0) | W_i(\delta, q) < h_i(\lambda^0), \forall i < t], \quad t \geq 1 \quad (2.6)$$

Nous déterminons alors le seuil instantané empirique conditionnel (Seuil-IEC) h_t^C en contrôlant le taux conditionnel de signaler une fausse alarme à un instant t , par le choix d'un risque toléré de fausse alarme α , de sorte que

$$\mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h_t^C(\alpha, \delta, q) | W_i(\delta, q) < h_i^C(\alpha, \delta, q), \forall i < t] \leq \alpha, \quad t \geq 1 \quad (2.7)$$

Le Seuil-IEC $h_t^C(\alpha, \delta, q)$ doit être construit de manière récursive. Pour ce faire, nous proposons la procédure de simulation suivante : soit la série de la statistique CUSUM $\{W_t^j(\delta, q)\}_{j \in J_t}$ simulée sous $\mathbb{P}_0$ au temps $t \geq 1$, où J_t est l'ensemble des trajectoires qui n'ont pas signalé de fausse alarme avant t , parmi les B trajectoires simulées au départ;

$$J_t = \begin{cases} \{1, \dots, B\} & \text{si } t = 1; \\ \{j \in J_{t-1} | W_i^j(\delta, q) < h_i^C(\alpha, \delta, q), \forall i < t\} & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Nous construisons enfin $h_t^C(\alpha, \delta, q)$ à chaque instant t par le quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$ ($\mathbf{q}_{(1-\alpha)}[\cdot]$) de la série $\{W_t^j(\delta, q)\}_{j \in J_t}$, comme suit :

$$h_t^C(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-\alpha)} [\{W_t^j(\delta, q)\}_{j \in J_t}]. \quad (2.8)$$

Les étapes de construction du Seuil-IEC h_t^C sont résumées dans l'Algorithme 2.

Algorithm 2 Procédure de simulation pour la construction du Seuil-IEC $h_t^C(\alpha, \delta, q)$.

Require: Paramètres du régime pré-changement μ_0, σ_0 , objectif de détection q et δ , probabilité tolérée de fausse alarme α , nombre de séries simulées B .

- 1: **Initialization** : $W_0 = 0, t = 1, J_1 = \{1, 2, \dots, B\}$.
- 2: **repeat**
- 3: **for** $j \in J_t$ **do**
- 4: Générer x_t^j : la $j^{\text{ème}}$ observation à l'instant t , sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0(x_t^j | x_{t-1}^j, \dots, x_1^j)$;
- 5: Calculer le score $s_t^j(\delta, q)$;
- 6: Calculer $w_t^j(\delta, q) = \max(0, w_{t-1}^j(\delta, q) + s_t^j(\delta, q))$: la statistique correspondante;
- 7: **end for**
- 8: Construire le Seuil-IEC à l'instant t par le quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$:

$$h_t^C(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-\alpha)} \left[\{w_t^j(\delta, q)\}_{j \in J_t} \right]$$

- 9: Poser $J_{t+1} = \{j \in J_t; w_t^j(\delta, q) < h_t^C(\alpha, \delta, q)\}$;
 - 10: Poser $t = t + 1$
 - 11: **until** Arrêter le test;
-

Hawkins et al. [11] sont les premiers à utiliser une méthode de simulation pour construire le seuil instantané conditionnel de Margavio, dans le but de comparer trois cartes de contrôle : Shewhart, Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) et CUSUM. Dans leur étude, les variables sont supposées i.i.d de distribution gaussienne. Par la suite, en 2013, Shen et al. [35] propose un autre algorithme de simulation pour déterminer le seuil de Margavio pour la carte de contrôle Poisson-CUSUM. Cet algorithme a été repris récemment en 2016, par Huang et al. [12] pour la carte de CUSUM généralisée appelée GLR-CUSUM.

Notre procédure de simulation est comparable à celle de Shen et al. [35] et Huang et al. [12]. Cependant, la notre est plus générale car elle inclut le cas où les données $\{x_t^j\}_{t \geq 1, j \in J_t}$ ne sont pas indépendantes, ce qui n'est pas le cas de [35] ou [12]. Par exemple, la loi de x_t^j peut dépendre des valeurs passées $\{x_s^j\}_{1 \leq s \leq t-1}$, comme dans le modèle 2 "données autocorrélées" que l'on présentera dans la section 3.1.3.

Remarque 8.

- Le Seuil-IEC $h_t^C(\alpha, \delta, q)$ dépend non seulement du risque toléré α et de l'objectif de détection (δ, q) , mais aussi du temps t de l'arrivée de chaque observation.
- Il est clair que l'ensemble J_t diminue avec t car $|J_{t+1}| = \lfloor |J_t|(1 - \alpha) \rfloor \approx (1 - \alpha)^t B$. C'est la raison pour laquelle B doit être assez grand, lors des simulations pour construire le Seuil-IEC.

2.2.4 Seuil Instantané Empirique (IE)

Nous proposons ici un nouveau seuil instantané dépendant du temps t : Seuil Instantané Empirique (Seuil-IE) h_t^I . L'idée est de déterminer $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ en contrôlant le taux de fausse alarme non conditionnel $\mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h_t^I(\alpha, \delta, q)]$ à chaque instant t , après la fixation de la probabilité tolérée α que l'on ne doit pas dépasser ;

$$\mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h_t^I(\alpha, \delta, q)] \leq \alpha, \quad t \geq 1. \quad (2.9)$$

Contrairement au Seuil-IEC, le Seuil-IE peut être construit de manière récursive ou non-récursive. Notre procédure de simulation non-récursive consiste à effectuer B simulations de la statistique de n observations chacune $\{(W_t^j(\delta, q))_{1 \leq t \leq n}\}_{j=1, \dots, B}$ sous $\mathbb{P}_0$; et construire ensuite le Seuil-IE $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ à l'instant t à partir de la distribution empirique des B valeurs de la statistique $W_t^j(\delta, q)$, comme suit

$$h_t^I(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-\alpha)} [\{W_t^j(\delta, q)\}_{1 \leq j \leq B}], \quad t = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

où $\mathbf{q}_{(1-\alpha)} [\cdot]$ est le quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$. Les étapes de la construction non-récursive du Seuil-IE sont résumées dans l'Algorithme 3 et la Figure 2.3. La version récursive est détaillée dans l'Algorithme 4.

Algorithm 3 Procédure de simulation pour la construction non-récursive du Seuil-IE

Require: Paramètres du régime pré-changement μ_0, σ_0 , objectif de détection q et δ , probabilité tolérée de fausse alarme α , nombre de séries simulées B , nombre d'observations n .

- 1: **Initialization** : $W_0 = 0$.
- 2: **for** $j = 1$ to B **do**
- 3: **for** $t = 1$ to n **do**
- 4: Générer x_t^j : la $t^{\text{ème}}$ observation de la $j^{\text{ème}}$ série simulée, sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0(x_t^j | x_{t-1}^j, \dots, x_1^j)$;
- 5: Calculer le score $s_t^j(\delta, q)$;
- 6: Calculer $w_t^j(\delta, q) = \max(0, w_{t-1}^j(\delta, q) + s_t^j(\delta, q))$: la statistique correspondante ;
- 7: **end for**
- 8: **end for**
- 9: Construire le Seuil-IE à chaque instant t en prenant le quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$ des B valeurs de la statistique :

$$h_t^I(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-\alpha)} [\{w_t^j(\delta, q)\}_{1 \leq j \leq B}], \quad t = 1, 2, \dots, n$$

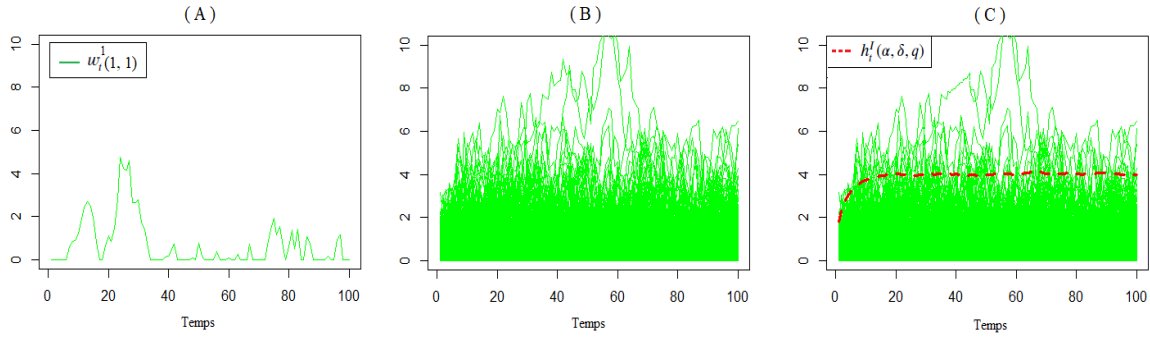


FIGURE 2.3 – Principe de construction du Seuil-IE $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ jusqu'à l'instant $n = 100$, pour $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1$. (A) : trajectoire de la statistique $w_t^1(1,1)$. (B) : calcul des $B = 100000$ statistiques $\{w_t^j(1,1)\}_{1 \leq j \leq B}$. (C) : $h_t^I(\alpha, 1, 1)$ quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$ à chaque instant t .

Algorithm 4 Procédure de simulation pour la construction récursive du Seuil-IE

Require: Paramètres du régime pré-changement μ_0, σ_0 , objectif de détection q et δ , probabilité tolérée de fausse alarme α , nombre de séries simulées B .

- 1: **Initialization** : $W_0 = 0, t = 1$.
 - 2: **repeat**
 - 3: **for** $j = 1$ to B **do**
 - 4: Générer x_t^j : la $j^{\text{ème}}$ observation à l'instant t , sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0(x_t^j | x_{t-1}^j, \dots, x_1^j)$;
 - 5: Calculer le score $s_t^j(\delta, q)$;
 - 6: Calculer $w_t^j(\delta, q) = \max(0, w_{t-1}^j(\delta, q) + s_t^j(\delta, q))$: la statistique correspondante;
 - 7: **end for**
 - 8: Construire le Seuil-IE à l'instant t par le quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$:

$$h_t^I(\alpha, \delta, q) = \mathbf{q}_{(1-\alpha)} \left[\{w_t^j(\delta, q)\}_{1 \leq j \leq B} \right]$$
 - 9: Poser $t = t + 1$
 - 10: **until** Arrêter le test;
-

2.2.5 Seuil Instantané Empirique Dynamique (IED)

Nous proposons ici de rendre le Seuil-IE dynamique, c'est-à-dire, de l'adapter au comportement de la statistique. Le principe est de réinitialiser la procédure de détection en déplaçant le seuil à chaque fois que la statistique revient à zéro (sa valeur initiale). Par conséquent, le Seuil Instantané Empirique Dynamique (Seuil-IED) noté h^D est basé sur le seuil h^I , mais dépend à chaque instant des données, en d'autres termes, il est "data-driven". Cette idée est inspirée du principe de la statistique de Page [26] qui consiste à redémarrer l'algorithme SPRT de Wald [48] à chaque fois que la statistique est inférieure au seuil inférieur fixé (qui est suggéré

comme étant zéro dans la statistique CUSUM).

Supposons que la série $\{X_t\}_{t \geq 1}$ est séquentiellement observée jusqu'au temps t . La statistique correspondante $W_t(\delta, q)$ est calculée récursivement pour chaque nouvelle observation. Nous définissons par $N_t = \sum_{i=1}^t \mathbf{1}_{\{W_i(\delta, q)=0\}}$ le nombre de fois que la W -statistique est revenue à zéro au temps t . Alors le dernier instant auquel la statistique est revenue à zéro peut être calculé à chaque temps t par le processus de renouvellement

$$Z_{N_t} = \inf\{i > Z_{N_t-1}; W_i(\delta, q) = 0\}.$$

Maintenant, nous partons du Seuil-IE, et nous définissons le Seuil-IED à chaque instant t par

$$h_t^D(\alpha, \delta, q, (X_i)_{i \leq t}) = h_{t-Z_{N_t}}^I(\alpha, \delta, q), \quad t \geq 1, \quad (2.11)$$

avec $N_0 = 0$ et $Z_{N_0} = 0$. Le temps d'arrêt correspondant est défini par $T_{h_t^D} = \min\{t \geq 1 : W_t(\delta, q) \geq h_{t-Z_{N_t}}^I(\alpha, \delta, q)\}$.

La procédure de détection à l'aide du Seuil-IED $h_t^D(\alpha, \delta, q, (X_i)_{i \leq t})$ est résumée dans l'Algorithme 5 et la Figure 2.4.

Algorithm 5 Pseudocode pour la procédure de détection utilisant le Seuil-IED

Require: Paramètres du régime pré-changement μ_0, σ_0 , objectif de détection q et δ , probabilité tolérée de fausse alarme α , Seuil-IE $h_t^I(\alpha, \delta, q)$.

- 1: **Initialization** : $Z = 0, T = \infty, w_0(\delta, q) = 0, h_1^D(\alpha, \delta, q) = h_1^I(\alpha, \delta, q), t = 1$.
 - 2: **while** il y a une nouvelle observation x_t **do**
 - 3: Calculer $s_t(\delta, q; x_t)$;
 - 4: Calculer $w_t(\delta, q) = \max(0, w_{t-1}(\delta, q) + s_t(\delta, q))$;
 - 5: **if** $w_t(\delta, q) = 0$ **then**
 - 6: $Z = t$;
 - 7: **end if**
 - 8: **if** $w_t(\delta, q) \geq h_t^D(\alpha, \delta, q, x_t)$ **then**
 - 9: Alarme pour signaler une détection à l'instant $T = t$;
 - 10: Aller à l'étape 1 : Initialization;
 - 11: **else**
 - 12: Poser $t = t + 1$, et $h_t^D(\alpha, \delta, q, x_t) = h_{t-Z}^I(\alpha, \delta, q)$;
 - 13: **end if**
 - 14: **end while**
-

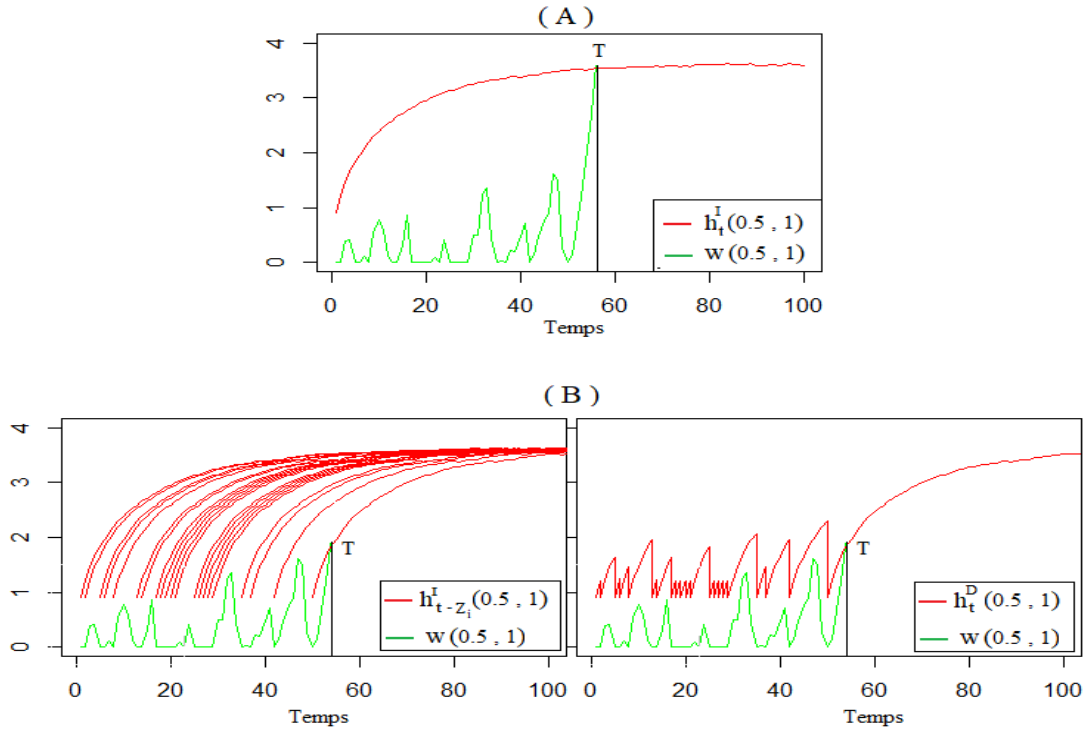


FIGURE 2.4 – Exemple de calcul de la statistique $w_t(0.5, 1)$ sur une série simulée sous le régime post-changement $\mathbb{P}_1$, avec une rupture à l'instant $v = 50$ pour un niveau de différence de 0.5 sur la moyenne. (A) : détection en utilisant le Seuil-IE $h_t^I(\alpha, 0.5, 1)$ avec $\alpha = 0.02$ (configuration sans réinitialisation). (B) : détection en utilisant le Seuil-IED $h_t^D(\alpha, 0.5, 1)$ (configuration data-driven avec réinitialisation).

Remarque 9.

Notons que les seuils de détection : CW, CE, IEC et IE ont été tous déterminés en contrôlant un risque de fausse alarme. Cependant, la signification du risque contrôlé n'est pas la même pour tous les seuils. Nous avons observé que ce risque de fausse alarme n'est pas toujours clairement défini dans la littérature.

Nous résumons ci-dessous la signification du risque de fausse alarme contrôlé pour chacun des différents seuils :

Seuil-CW h^W . Il est déterminé en contrôlant la densité discrète α_t de la variable instant d'alarme T (définie dans (1.23)) :

$$\alpha_t = \mathbb{P}_0 [T = t] \leq \mathbb{P}_0 [W_t(\delta, q) \geq h^W(\alpha)] \leq \alpha,$$

où α est le risque toléré de fausse alarme, fixé par l'utilisateur.

Seuil-CE h^E . Il est déterminé en contrôlant le score local $M_n(\delta, q)$ (maximum de la W-statistique) sur l'intervalle $[1, n]$:

$$\frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_0 \left[M_n(\delta, q) \geq h^E(\alpha, \delta, q) \right] \leq \alpha.$$

Seuil-IEC h^C . Il est déterminé en contrôlant le taux conditionnel de fausse alarme λ_t^0 (défini dans (1.20)) à chaque instant $t \geq 1$:

$$\lambda_t^0 \leq \alpha.$$

Seuil-IE h^I . Il est déterminé en contrôlant le taux non conditionnel de fausse alarme à chaque instant $t \geq 1$:

$$\alpha_t = \mathbb{P}_0 [T = t] \leq \mathbb{P}_0 \left[W_t(\delta, q) \geq h_t^I(\alpha, \delta, q) \right] \leq \alpha.$$

2.3 Comparaison des seuils de détection

Dans la Figure 2.5, nous représentons les différents seuils de détection, analytique : Seuil-CW h^W et empiriques : Seuil-IEC h^C , Seuil-CE h^E , Seuil-IE h^I . Les seuils sont déterminés pour un risque toléré de fausse alarme $\alpha = 0.02$, et pour trois exemples de l'objectif de détection sur la moyenne $(\sigma_0 \cdot \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, $q = 1$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A)- Figure 2.5, les seuils empiriques sont construits à partir de données indépendantes de distribution gaussienne avec $\mu_0 = 0$ et $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Dans la partie (B)- Figure 2.5, les seuils empiriques sont construits à partir de données autocorrélées du processus autorégressif d'ordre 1 AR(1). Nous avons choisi ces paramètres afin d'avoir les mêmes valeurs de moyenne et de variance dans les deux modèles.

Premièrement, il faut noter que le Seuil-CW ne dépend pas de la nature des données, ni du temps et qu'il reste le même quel que soit le niveau de changement attendu δ ($h^W(\alpha) = 3.91$). Deuxièmement, nous pouvons clairement voir que les seuils empiriques construits par le modèle autorégressif (B) sont considérablement plus élevés que ceux construits par le modèle gaussien indépendant (A), quels que soient δ et le seuil, en particulier, le Seuil-EI qui est d'ailleurs le seul à dépasser le Seuil-CW.

Concentrons nous maintenant sur la partie (A)- Figure 2.5. Nous pouvons constater que la différence entre les seuils n'est pas négligeable. Le Seuil-CW est supérieur aux seuils empiriques dans ce cas, donc il détectera moins rapidement, mais avec moins de fausses alarmes. Le Seuil-CE dépend du niveau de δ ($h^E(\alpha, 0.5, 1) = 1.30, h^E(\alpha, 1, 1) = 1.85, h^E(\alpha, 2, 1) = 2.10$). Il est plus élevé lorsque δ est grand.

Cela peut être expliqué par le comportement de la statistique que nous avons constaté précédemment en Figure 2.1 : elle reste plus en zéro lorsque δ est grand et est plus variable en intensité lorsque δ est petit. Les seuils instantanés IE et

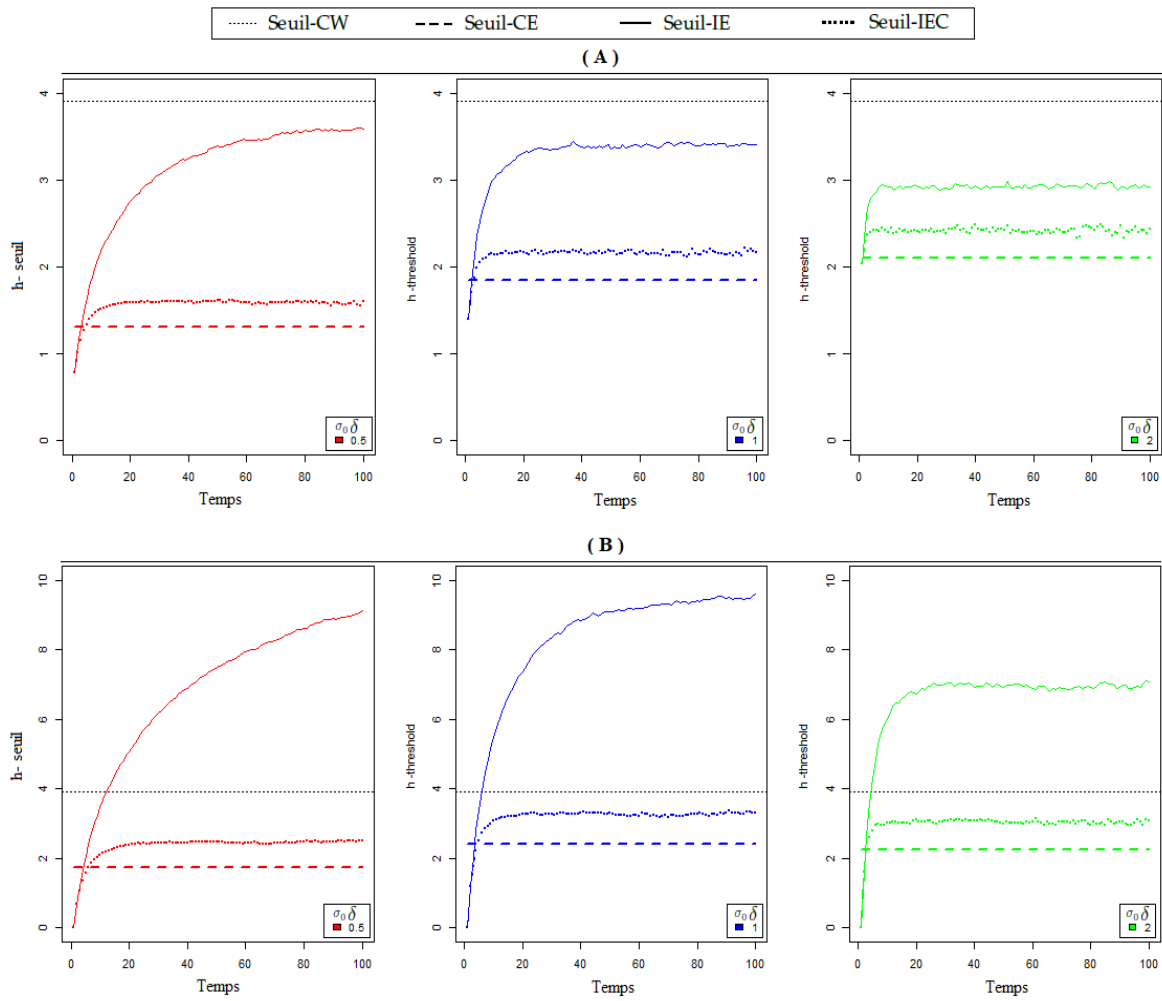


FIGURE 2.5 – Comparaison de différents seuils pour $\alpha = 0.02$, $(\sigma_0 \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, $q = 1$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A) (resp. (B)) les seuils empiriques sont construits à partir de données gaussiennes i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ (resp. à partir de données autocorrélées du processus auto-régressif $AR(1)$).

IEC, dépendent fortement du temps au début : on observe une croissance progressive jusqu'à un certain moment, puis les seuils se stabilisent à un certain niveau. L'instant et le niveau de stationnarité sont spécifiques à chaque type de seuil et à chaque objectif de détection δ . Le Seuil-IE est toujours plus élevé que le Seuil-IEC, et contrairement à ce dernier, il est plus faible lorsque δ est grand.

2.4 Règle d'arrêt corrigée

Nous proposons ici une nouvelle règle d'arrêt par la modification de la règle d'arrêt classique utilisée dans le contexte de détection séquentiel.

Supposons que l'on a calculé récursivement la statistique de CUSUM $W_t(\delta, q)$ jusqu'à l'instant t pour un objectif de détection (δ, q) (formule (1.16)), sur une série d'observation $\{x_t\}_{t \geq 1}$ séquentiellement observée. Pour tester l'existence d'une rupture à chaque instant donné $t \geq 1$, pour tout seuil h , la procédure de détection vérifie l'une des deux règles d'arrêt suivantes :

- **Règle d'arrêt classique** : la procédure signale l'existence d'une rupture à l'instant où la statistique de détection dépasse le seuil de détection choisi,

$$T_h = \min_{t \geq 1} \{t; W_t(\delta, q) \geq h\}.$$

- **Règle d'arrêt corrigée** : la procédure corrigée signale l'existence d'une rupture lorsque la statistique de détection dépasse le seuil de détection pendant un temps $c \geq 1$, c étant un paramètre à fixer à l'avance ($c = 1 \Leftrightarrow$ règle d'arrêt classique),

$$T_h^c = \min_{t \geq 1} \{t + c - 1; \bigcap_{i=t}^{t+c-1} (W_i(\delta, q) \geq h)\}.$$

Dans la Figure 2.6, nous montrons un exemple de calcul de la W- statistique sur une série simulée sous $\mathbb{P}_1$ avec $n = 100$ et une rupture en $v = 50$. La détection est faite en utilisant en premier cas, la règle d'arrêt classique $c = 1$ (partie (A)), et dans le deuxième cas, la règle d'arrêt corrigée avec $c = 3$ (partie (B)). Le Seuil-IE $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ utilisé a été construit à partir de données gaussiennes i.i.d $\mathcal{N}(0, 1)$ pour $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1$.

Cet exemple montre que l'utilisation de la règle d'arrêt corrigée avec $c = 3$, a permis d'éviter une fausse alarme qui aurait été commise si la règle classique ($c = 1$) avait été utilisée.

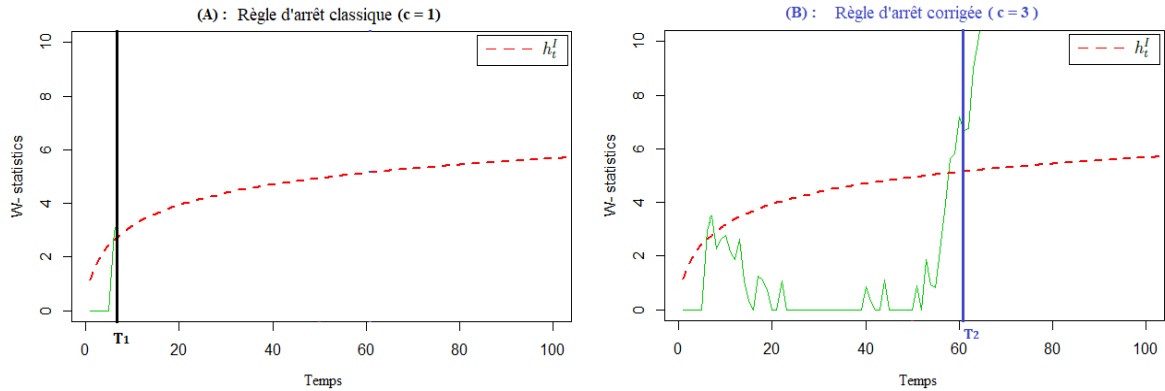


FIGURE 2.6 – Exemple de détection dans le cas de l'utilisation des règles d'arrêt (A) : classique ($c = 1$) et (B) : corrigée avec $c = 3$, sur la même série simulée sous $H_{1,n}$, avec $n = 100, v = 50$. Le seuil utilisé est $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ avec $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1, \sigma_0^2 = 1$.

Chapitre 3

Procédure d'évaluation

Nous proposons d'évaluer les différents seuils de détection et la règle d'arrêt corrigée présentés dans le chapitre précédent sur des données de simulation. Pour ce faire, nous générons des séries sous les régimes pré-changement $\mathbb{P}_0$ et post-changement $\mathbb{P}_1$, et estimons pour différents cadres de simulation les paramètres de détection correspondants, qui sont essentiellement le temps moyen entre les fausses alarmes *MTBFA* et son inverse, les taux instantanés conditionnels de fausse alarme et de détection λ_t^0, λ_t^1 respectivement, et le délai moyen de détection *ADD*.

Dans ce qui suit, nous présentons notre design général de la simulation de deux types de données : des données simulées sous $\mathbb{P}_0$ qui vont servir à la construction des seuils ; et des données simulées sous $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ qui vont servir à l'évaluation des seuils. Le design comprend le choix d'un modèle pour la distribution des deux types de données, et le choix d'un objectif de détection. Nous présenterons ensuite la procédure utilisée pour estimer les paramètres de détection.

3.1 Design de la simulation

Dans cette section, nous détaillons la conception de notre simulation pour l'évaluation des performances des seuils proposés. À part le Seuil-CW de Wald, les seuils empiriques sont construits grâce à des simulations. Ils dépendent de l'objectif de détection choisi et du "modèle supposé" pour les données. Le modèle supposé peut être différent de celui des données utilisées pour évaluer la performance "modèle réel".

3.1.1 Paramètres pour les données de l'évaluation

a. Données. Pour effectuer nos simulations de x_t nécessaires à l'évaluation, nous devons fixer les paramètres suivants :

- Le choix de la distribution réelle du régime pré-changement $\mathbb{P}_0^R$, en particulier le choix de la vraie moyenne μ_0^R et variance $\sigma_0^{2,R}$ des données sous le régime pré-changement ;

- Le choix de la distribution réelle post-changement $\mathbb{P}_1^R$, en particulier le choix de la vraie moyenne μ_1^R et variance $\sigma_1^{2,R}$ des données sous le régime post-changement, qui donnent le niveau réel de changement sur la moyenne δ^R et/ou sur la variance q^R ;
 - Le choix du nombre n d'observations simulées pour chaque trajectoire;
 - Le choix de l'instant réel de la rupture $1 < v \leq n$ sous $\mathbb{P}_1^R$.
- b. Nombre de répétitions.** Pour l'estimation empirique des paramètres (*MTBFA*, $\lambda_t^0, \lambda_t^1, ADD$), il faut aussi fixer B le nombre de répétitions sous H_0 et sous H_1 .

3.1.2 Paramètres pour la construction des seuils empiriques

- a. Données.** Pour la construction des seuils, nous devons simuler des données sous H_0 ; nous avons besoin de choisir la distribution $\mathbb{P}_0$ pour laquelle nous notons μ_0, σ_0^2 l'espérance et la variance. En pratique, $\mathbb{P}_0$ pourrait être inconnu et déterminé par avis d'expert ou par estimation. Il pourrait donc être différent de la distribution des données évaluées $\mathbb{P}_0^R$ (définie dans la section précédente 3.1.1).
- b. Longueur et nombre de répétitions.** Comme nous l'avons vu dans les différents algorithmes de construction des seuils empiriques (section 2.2), lors des simulations, nous avons besoin de fixer le nombre de répétitions B . Et spécialement pour les seuils construits non-récursivement : Seuil-CE (Algorithme 1) et Seuil-IE (Algorithme 3), nous avons également besoin de fixer la longueur n de la série x_t . Pour la version récursive du Seuil-IE (Algorithme 4) et le Seuil-IEC, nous n'avons pas besoin de fixer n .
- c. Probabilité tolérée de fausse alarme.** Que ce soit pour construire les seuils empiriques ou fixer le seuil analytique de Wald, nous devons choisir le risque α à ne pas dépasser. Nous rappelons que ce risque n'a pas toujours la même signification suivant les seuils (voir remarque 9).
- d. Paramètres pour le calcul de la statistique et objectif de détection.** Pour le calcul de la statistique de détection S_t par l'équation (1.15) lors de la construction de seuils empiriques, en plus de μ_0, σ_0^2 (utile pour calculer $Y_t = \frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0}$), nous avons besoin de connaître les paramètres de l'objectif de détection $\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$ et $q = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$. Alors, nous devons fixer δ et q pour spécifier le type et le niveau de changement que nous souhaitons détecter.

Une fois les seuils construits, nous utilisons lors de l'évaluation ces mêmes paramètres μ_0, σ_0^2 supposés du régime pré-changement et le même objectif de détection δ, q choisis; ils peuvent bien entendu être différents de $\mu_0^R, \sigma_0^{2,R}$ et δ^R et q^R (définis dans la section 3.1.1).

3.1.3 Modèles pour les simulations

Nous proposons trois modèles différents pour les données.

- **Modèle 1 : données gaussiennes i.i.d**

- Pour la construction du seuil avec ce modèle, nous avons utilisé
 $\hookrightarrow$ Régime pré-changement $\mathbb{P}_0 : X_t \sim \mathcal{N}(\mu_0; \sigma_0^2)$.
- Pour l'évaluation des seuils,
 $\hookrightarrow$ Régime pré-changement $\mathbb{P}_0^R : X_t \sim \mathcal{N}(\mu_0^R; \sigma_0^{2,R})$;
 $\hookrightarrow$ Régime post-changement $\mathbb{P}_1^R : X_t \sim \mathcal{N}(\mu_1^R; \sigma_1^{2,R})$.

- **Modèle 2 : données autocorrélées**

Nous simulons un processus autorégressif d'ordre 1, avec $\varphi = \frac{1}{2}$.

- Pour la construction du seuil avec ce modèle, nous avons utilisé
 $\hookrightarrow$ Régime pré-changement $\mathbb{P}_0$ défini par : $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
 On note que $\mathbb{E}_0[X_t] = 0$, et $\mathbb{V}_0[X_t] = \frac{1}{1-\varphi^2} = \frac{4}{3}$.
- Pour l'évaluation des seuils,
 $\hookrightarrow$ Régime pré-changement $\mathbb{P}_0^R$ défini par : $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
 $\hookrightarrow$ Régime post-changement $\mathbb{P}_1^R$ défini par : $X_t = Z_t + \sigma_0^R \delta^R$, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
 avec $Z_t = \frac{1}{2}Z_{t-1} + \varepsilon_t$, pour $t \geq v$.

Nous devons noter qu'ici $\mathbb{E}_{0,R}[X_t] = 0 = \mu_0^R$; $\mathbb{E}_{1,R}[X_t] = \sigma_0^R \delta^R = \mu_1^R$.
 Et $\sigma_0^{2,R} = \sigma_1^{2,R} = \frac{1}{1-\varphi^2} = \frac{4}{3}$.

- **Modèle 3 : données Gamma i.i.d**

Nous simulons des données Gamma avec $k = 2$ (*shape*) et $\beta = 2$ (*rate*).

- Pour la construction du seuil avec ce modèle, nous avons utilisé
 $\hookrightarrow$ Régime pré-changement $\mathbb{P}_0 : X_t \sim \Gamma(k = 2; \beta = 2)$.
 On note que $\mathbb{E}_0[X_t] = \frac{k}{\beta} = 1$, et $\mathbb{V}_0[X_t] = \frac{k-1}{\beta} = \frac{1}{2}$.
- Pour l'évaluation des seuils,
 $\hookrightarrow$ Régime pré-changement $\mathbb{P}_0^R : X_t \sim \Gamma(k = 2; \beta = 2)$;
 $\hookrightarrow$ Régime post-changement $\mathbb{P}_1^R : X_t \sim \Gamma(k = 2; \beta = 2) + \sigma_0^R \delta^R$.

Nous devons noter qu'ici $\mathbb{E}_{0,R}[X_t] = 1 = \mu_0^R$; $\mathbb{E}_{1,R}[X_t] = 1 + \sigma_0^R \delta^R = \mu_1^R$.
 Et $\sigma_0^{2,R} = \sigma_1^{2,R} = \frac{1}{2}$.

Remarque 10.

- Dans ce qui suit, nous étudions trois cas : (a) le cas où les données utilisées pour construire les seuils et celles pour les évaluer proviennent du modèle 1, (b) le cas où les données utilisées pour construire les seuils et celles pour les évaluer proviennent du modèle 2, et (c) le cas où les données utilisées pour construire les seuils proviennent du modèle 1 alors que les données pour les évaluer proviennent soit du modèle 2 ou soit du modèle 3. Ces cas de figure ont été proposés dans le but d'évaluer les seuils et la règle d'arrêt proposés sous différentes situations qui peuvent se présenter dans la pratique. Dans les cas (a) et (b), nous voulons traiter la situation où les données sont respectivement gaussiennes i.i.d et autocorrélées. Et dans le cas (c), nous voulons traiter deux éventuels scénarios d'erreur dans la considération de la distribution des données : le premier concerne le cas de violation de l'hypothèse d'indépendance des données et le second le cas de violation de l'hypothèse de normalité des données.
- Pour le cas de détection sur la moyenne, les paramètres de pré-changement μ_0 et σ_0^2 dans le modèle 1 ont été choisis de manière à avoir un signal de la même espérance et de la même variance dans le régime pré-changement pour les modèles 2 et 3. Pour cela, nous avons choisi $\mu_0 = 0$ et $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$ (respectivement $\mu_0 = 1$ et $\sigma_0^2 = \frac{1}{2}$) avec le paramètre $\varphi = \frac{1}{2}$ dans le modèle 2 (respectivement $k = 2$ et $\beta = 2$ dans le modèle 3).
- Nous avons choisi de traiter deux types d'objectif de détection : détecter un changement sur la moyenne ($q = 1$) de niveau $(\sigma_0\delta) \in \{0.5, 1, 2\}$; ou détecter un changement sur la variance ($\delta = 0$) de niveau $q \in \{0.15, 0.25, 0.50\}$. La vraie rupture sur la moyenne est de niveau réel $(\sigma_0^R\delta^R) \in \{1, 2\}$ ou sur la variance de niveau réel $q^R \in \{0.15, 0.25\}$. Nous traitons bien entendu tous les croisements de ces cas (i.e. $(\sigma_0\delta)$ avec $(\sigma_0^R\delta^R)$ et q avec q^R).
- Nous avons choisi $n = 100$ et $B = B_0 = B_1 = 100000$. La rupture est toujours fixée au temps $v = 50$.

3.2 Estimation des paramètres

Le taux de fausse alarme instantané conditionnel λ_t^0 et le temps moyen entre fausses alarmes *MTBFA* sont des paramètres de détection à évaluer sous $\mathbb{P}_0^R$, tandis que le taux de détection instantané conditionnel λ_t^1 et le délai moyen de détection *ADD* sont des paramètres à évaluer sous $\mathbb{P}_1^R$. Ils sont estimés à partir de la simulation de B trajectoires indépendantes $(X_t^j)_{1 \leq t \leq n}$, $j = 1, \dots, B$ sur lesquelles nous appliquons séquentiellement notre procédure de détection.

Soit T_j , $j = 1, \dots, B$, le temps de la première alarme signalée sur la $j^{\text{ème}}$ trajectoire. T est donc une variable aléatoire positive de caractère discret. La procédure de détection teste récursivement l'existence d'une rupture jusqu'à l'instant n . A chaque sortie de test j sur la trajectoire X_t^j , soit la procédure n'a pas signalé de détection ($T_j > n$), soit elle s'est arrêtée à la première détection ($T_j \in \{1, \dots, n\}$). Dans le

premier cas, le temps d'alarme T_j est censurée par n , alors que dans le second cas, le temps d'alarme T_j est observé.

En premier lieu, nous voudrions estimer à chaque instant $t \geq 1$, le taux de fausse alarme instantané conditionnel λ_t^0 (resp. le taux de détection instantané conditionnel λ_t^1). λ_t^0 et λ_t^1 sont définis de la même manière, dans le premier cas ($t < v$), on détecte une fausse alarme, dans le second ($t \geq v$), on détecte une vraie rupture. Dans le cas discret, $\lambda_t^k, k \in \{0, 1\}$, défini théoriquement dans la section 1.3.5, peut être estimé empiriquement à chaque instant t par

$$\hat{\lambda}_t^k = \frac{\sum_{j=1}^B \mathbb{1}_{\{T_j=t\}}}{\sum_{j=1}^B \mathbb{1}_{\{T_j \geq t\}}} = \frac{\sum_{j=1}^B \mathbb{1}_{\{T_j=t\}}}{B - \sum_{j=1}^B \mathbb{1}_{\{T_j < t\}}} = \frac{\sum_{j=1}^B \mathbb{1}_{\{T_j=t\}}}{B - \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^B \mathbb{1}_{\{T_j=i\}}}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

où B est le nombre de trajectoires simulées.

En deuxième lieu, nous voudrions estimer le temps moyen entre fausses alarmes *MTBFA*, qui est défini dans l'équation (1.19) par l'espérance du temps d'alarme T . Il devrait donc être facile de l'estimer par la moyenne empirique des temps T_j . Mais nous avons vu que les données sont censurées à droite au même instant n . Par conséquent, pour une estimation correcte du paramètre, nous proposons d'appliquer une analyse de survie [33]. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes :

Pour $n \geq 1$, l'échantillon d'informations éventuellement censuré est alors donné par le couple (Z_j, D_j) , $j = 1, \dots, B$, avec :

$$Z_j = \min\{T_j, n\}$$

$$D_j = \begin{cases} 1 & \text{si } T_j \leq n : \text{ alarme signalée à l'instant } T_j, \text{ "pas de censure"}; \\ 0 & \text{si } T_j > n : \text{ aucune alarme signalée, "censure"}. \end{cases}$$

Pour pouvoir estimer le *MTBFA* en tenant compte des données censurées, nous posons l'hypothèse que le taux de fausse alarme instantané conditionnel est constant dans le temps i.e. $\lambda_t^0 = \lambda^0$, $t \geq 1$. Et comme nous l'avons déjà évoqué dans la section 1.3.5, la distribution latente des temps d'alarme discrets dans ce cas est géométrique de paramètre λ^0 ($T \sim \mathcal{Géom}(\lambda^0)$), avec $\lambda^0 = 1/\text{MTBFA}$. La densité de probabilité latente est donnée alors par $g_{\lambda^0}(z) = \lambda^0 \cdot (1 - \lambda^0)^{z-1}$, et la fonction de survie associée par $\tilde{S}_{\lambda^0}(z) = (1 - \lambda^0)^z$. Alors la vraisemblance du modèle associée avec des observations indépendantes $(z_1, d_1), \dots, (z_B, d_B)$ s'écrit sous la forme

suivante :

$$\begin{aligned} L_{\lambda^0, n}(z_j, d_j) &= \prod_{j=1}^B \left(\lambda^0 \cdot (1 - \lambda^0)^{z_j-1} \right)^{d_j} \cdot \left((1 - \lambda^0)^{z_j} \right)^{1-d_j} \\ &= \left(\frac{\lambda^0}{1 - \lambda^0} \right)^{\sum_{j=1}^B d_j} \cdot (1 - \lambda^0)^{\sum_{j=1}^B z_j}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) du paramètre λ^0 est donné par

$$\widehat{\lambda^0} = \frac{\sum_{j=1}^B d_j}{\sum_{j=1}^B z_j}. \quad (3.3)$$

L'estimateur $\widehat{\lambda^0}$ est donc le rapport entre le nombre d'alarmes observées et l'exposition totale au risque. On peut déduire immédiatement l'estimateur de *MTBFA* par $\widehat{MTBFA} = 1/\widehat{\lambda^0}$.

Remarques :

- Nous observons que dans un modèle non-censuré, l'estimateur de *MTBFA* est donné par l'estimateur empirique de l'espérance : $\widehat{MTBFA} = \bar{T} = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B t_j$.
- Dans le cas continu avec distribution latente exponentielle de paramètre λ^0 , l'estimateur de λ^0 est aussi donné par : $\widehat{\lambda^0} = \sum_{j=1}^B d_j / \sum_{j=1}^B z_j$.

Enfin, nous présentons l'estimateur du délai moyen de détection *ADD* qui est donné par l'espérance des temps d'alarme sous $H_{1,n}^R$. En pratique, lors des simulations, chaque série simulée de n observations a une seule rupture à un instant donné $v \leq n$. Il y a deux cas, soit il y a une détection à l'instant T_j avec un délai de $(T_j - v)$, soit il n'y a pas de détection et le délai est censuré par $(n - v)$. Dans ce cas, l'estimateur de l'*ADD* en utilisant le modèle de survie paramétrique avec distribution géométrique latente est donné comme suit :

$$\widehat{ADD} = \frac{\sum_{j=1}^B (z_j - v) \cdot \mathbb{1}_{\{z_j \geq v\}}}{\sum_{j=1}^B d_j \cdot \mathbb{1}_{\{z_j \geq v\}}} \quad (3.4)$$

avec $z_j = \min\{t_j, n\}$ et $d_j \in \{0, 1\}$.

Chapitre 4

Résultats

4.1 Évaluation des taux instantanés λ_t^0 et λ_t^1

Dans cette section, nous utilisons des simulations avec ou sans rupture pour estimer empiriquement le taux de fausse alarme instantané conditionnel λ_t^0 pour tout $t < v$ (resp. taux de détection instantané conditionnel λ_t^1 pour tout $t \geq v$) par la formule (3.1) donnée dans la section 3.2, où v est le réel instant de la rupture présente sur les séries simulées. Les résultats sont obtenus en utilisant les différents seuils de détection présentés dans la section 2.2 : Seuil-CW (Constant de Wald), Seuil-CE (Constant Empirique), Seuil-IE (Instantané Empirique), Seuil-IED (Instantané Empirique Dynamique) et Seuil-IEC (Instantané Empirique Conditionnel), fixés pour une probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha = 0.02$.

Dans la section 4.1.1 (resp. la section 4.1.2), nous présentons les résultats de la simulation en utilisant des données gaussiennes indépendantes i.i.d. (modèle 1) (resp. des données autocorrélées (modèle 2)) à la fois pour la construction des seuils empiriques et la génération des données de test.

4.1.1 Modèle 1

Ici, nous considérons des variables gaussiennes indépendantes i.i.d. (modèle 1, section 3.1.3) pour la construction de seuils pour une probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha = 0.02$ et aussi pour la simulation des données d'évaluation. Nous présentons dans la Figure 4.1, les résultats d'estimation de λ_t^0 à chaque instant $t < v = 50$ (sous le régime pré-changement) et de λ_t^1 à chaque instant $t \geq v = 50$ (sous le régime post-changement), pour trois objectifs de détection sur la moyenne $(\sigma_0, \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, en supposant que la variance est connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. Notons que le réel changement de moyenne a lieu à l'instant $v = 50$ et est de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$.

Sous le régime pré-changement i.e. $t < v = 50$, pour (σ_0, δ) fixé, le taux de fausse alarme instantané conditionnel estimé en utilisant le Seuil-CW ($\hat{\lambda}_t^{0,CW}$) est presque constant après une faible croissance en tout début de test, mais il reste de valeur inférieure à tous les autres risques instantanés, ce qui est cohérent avec la Figure 2.5 - partie A (section 2.3) où le Seuil-CW était le plus élevé. A l'opposé,

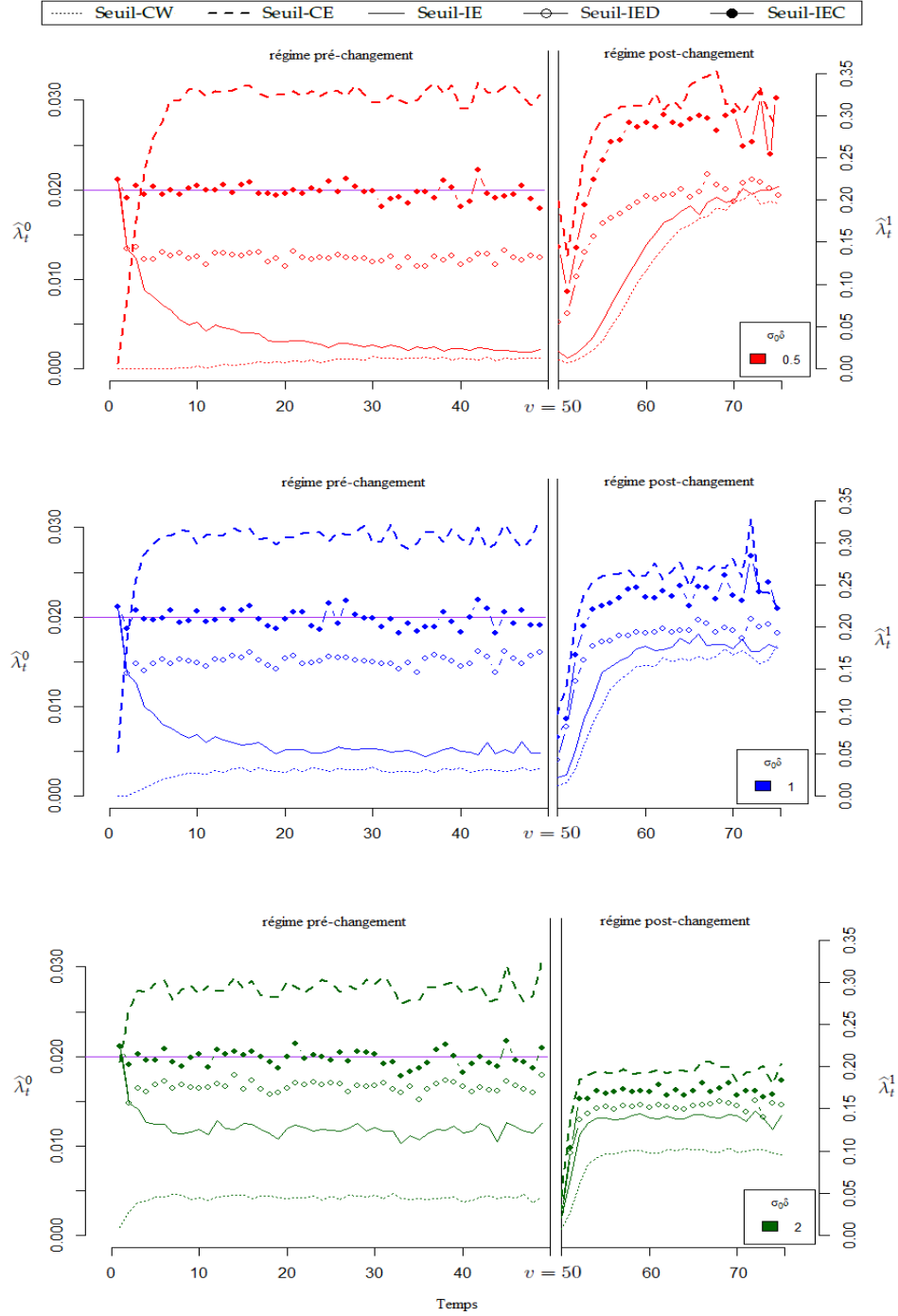


FIGURE 4.1 – Résultats d'estimation de λ_t^0 sous le régime pré-changement, puis de λ_t^1 sous le régime post-changement. Les données ont été simulées sous le modèle 1 à la fois pour la construction des seuils avec $\alpha = 0.02$ et pour l'évaluation. Les résultats ont été obtenus selon trois objectifs de détection sur la moyenne $(\sigma_0, \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. La vraie rupture de moyenne à l'instant $v = 50$, de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$.

celui estimé par le Seuil-CE ($\hat{\lambda}_t^{0,CE}$) croit très fortement en début de test pour devenir le risque le plus élevé, ce qui est aussi cohérent avec la Figure 2.5 - partie A. Au contraire, le taux $\hat{\lambda}_t^{0,IE}$ décroît progressivement pour passer au dessous de α et se stabilise à un niveau proche de $\hat{\lambda}_t^{0,CW}$. Les taux estimés $\hat{\lambda}_t^{0,IEC}$ et $\hat{\lambda}_t^{0,IED}$ se stabilisent dès le début du test à un niveau de fausse alarme homogène (ils sont stationnaires). $\hat{\lambda}_t^{0,IEC}$ est exactement autour de α , ce qui est attendu car le risque estimé est exactement le α qui a servi à construire le Seuil-IEC. Ce qui n'est pas le cas pour tous les autres seuils. $\hat{\lambda}_t^{0,IED}$ est autour d'un niveau de fausse alarme plus faible que le α fixé. Le taux instantané qu'une fausse alarme survienne à un instant $t < 50$, est en moyenne de (0.002; 0.012; 0.016; 0.02; 0.027) respectivement pour les seuils (CW; EI; IED; IEC; CE) lorsque $\sigma_0.\delta = 1$. Nous observons que $\hat{\lambda}_t^{0,IEC}$ n'est pas sensible à l'objectif de détection $\sigma_0.\delta$. Pour les Seuils -CW, -EI et -IED (resp. pour le Seuil-CE), $\hat{\lambda}_t^0$ estimé est légèrement plus important (resp. moins important) quand $\sigma_0.\delta$ est grand.

Sous le régime post-changement i.e. $t \geq v = 50$, pour $(\sigma_0.\delta)$ fixé, le taux de détection instantané conditionnel estimé $\hat{\lambda}_t^1$ croît rapidement à partir de l'instant de rupture $t = 50$ pour atteindre un niveau de détection spécifique à chaque seuil et se stabiliser autour de ce niveau. L'ordre du niveau stabilisé des seuils pour $\hat{\lambda}_t^1$ est le même que pour $\hat{\lambda}_t^0$. La courbe des $\hat{\lambda}_t^{1,CE}$ estimée en utilisant le Seuil-CE est la plus élevée. La plus faible correspond au Seuil-CW ($\hat{\lambda}_t^{1,CW}$). Notons que le taux de détection estimé du Seuil-IEC $\hat{\lambda}_t^{1,IEC}$ est le plus important parmi les seuils qui respectent en moyenne le α toléré sous le régime pré-changement. Le taux instantané qu'une détection soit rapportée à un instant $t \geq 50$, est en moyenne de (0.15; 0.16; 0.17; 0.23; 0.28) respectivement pour les seuils (CW; EI; IED; IEC; CE) lorsque $\sigma_0.\delta = 1$. En fonction de l'objectif de détection, pour tous les seuils, $\hat{\lambda}_t^1$ est plus faible lorsque $\sigma_0.\delta$ est grand.

4.1.2 Modèle 2

Dans ce modèle 2, nous considérons des variables autocorrélées (voir la section 3.1.3) pour la construction de seuils pour $\alpha = 0.02$ et aussi pour la simulation des données de test. Dans la Figure 4.2, nous présentons les résultats d'estimation de λ_t^0 à chaque instant $t < v = 50$ (sous le régime pré-changement) et de λ_t^1 à chaque instant $t \geq v = 50$ (sous le régime post-changement), pour trois objectifs de détection sur la moyenne $(\sigma_0.\delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, en supposant que la variance est connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. Notons que le réel changement de moyenne est à l'instant $v = 50$ et de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$.

Sous le régime pré-changement, i.e. $t < v = 50$, le comportement des résultats et la tendance des seuils sont les mêmes que ceux obtenus dans le modèle 1, sauf le Seuil-CW pour lequel l'estimation de λ_t^0 est plus élevée que pour le Seuil-IE, quel que soit $\sigma_0.\delta$. Cela est aussi cohérent avec la partie B de la Figure 2.5 où le Seuil-IE devient le plus élevé de tous les seuils. Nous observons aussi que la courbe du risque estimé du Seuil-IED $\hat{\lambda}_t^{0,IED}$ dépasse le risque toléré α lorsque $\sigma_0.\delta = 2$. Le taux instantané qu'une fausse alarme survienne à un instant $t < 50$,

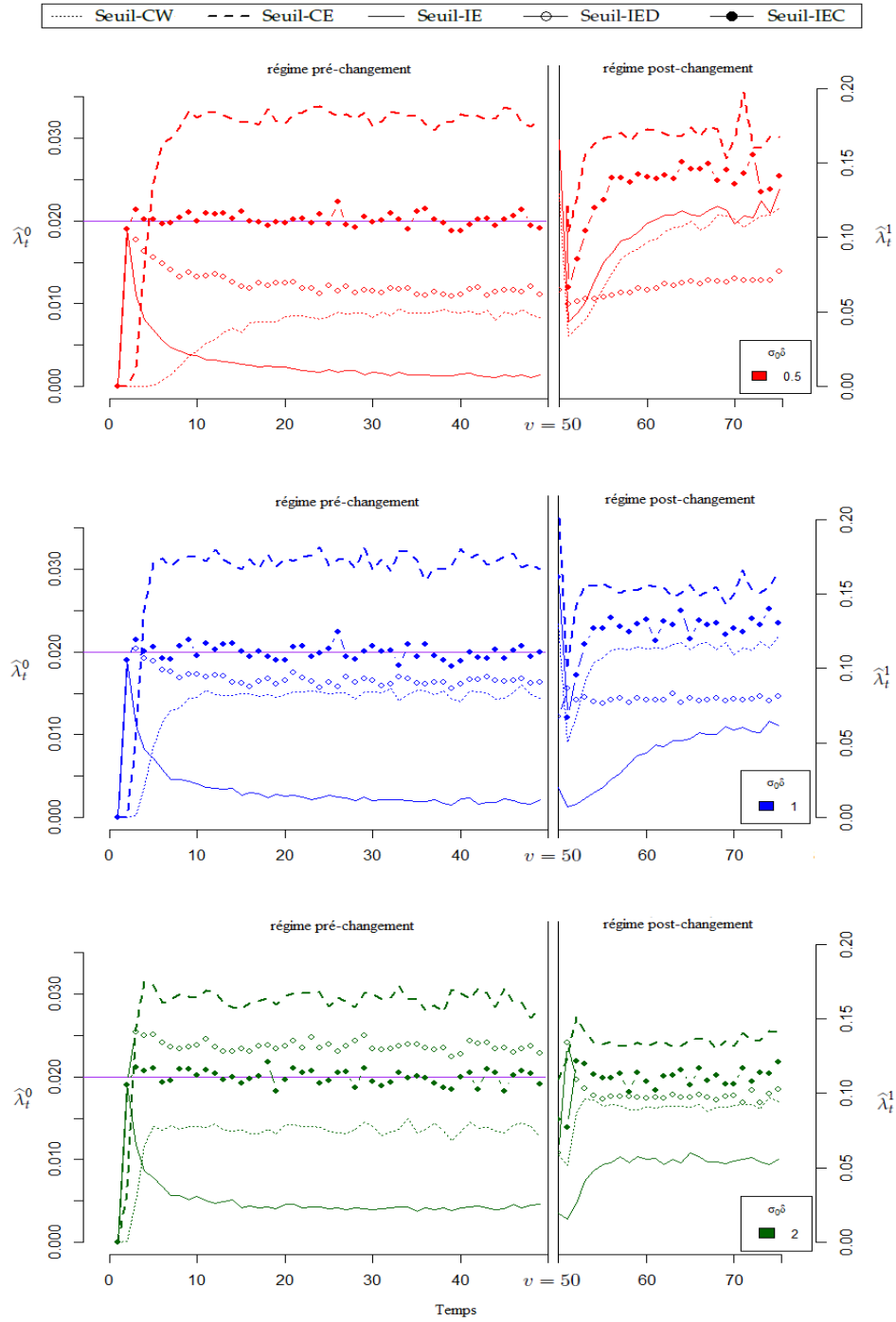


FIGURE 4.2 – Résultats d'estimation de λ_t^0 sous le régime pré-changement, puis de λ_t^1 sous le régime post-changement. Les données ont été simulées sous le modèle 2 à la fois pour la construction des seuils avec $\alpha = 0.02$ et pour l'évaluation. Les résultats ont été obtenus selon trois objectifs de détection sur la moyenne $(\sigma_0, \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. La vraie rupture de moyenne se situe à l'instant $v = 50$ de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$.

est en moyenne de (0.005; 0.013; 0.023; 0.019; 0.028) respectivement pour les seuils (EI; CW; IED; IEC; CE) lorsque $\sigma_0.\delta = 1$.

Sous le régime post-changement, $t \geq v = 50$, contrairement au modèle 1, ici le Seuil-CW devient concurrent, sa courbe du taux de détection estimé $\hat{\lambda}_t^{1,CW}$ est très proche de celle du Seuil-IEC. C'est logique car dans la partie B de la Figure 2.5, le Seuil-CW est juste au dessus du Seuil-IEC. Le taux instantané qu'une détection soit rapportée à un instant $t \geq 50$, est en moyenne de (0.11; 0.05; 0.08; 0.13; 0.15) respectivement pour les seuils (CW; EI; IED; IEC; CE) lorsque $\sigma_0.\delta = 1$. Pour tous les seuils, l'estimation de λ_t^1 est légèrement plus faible quand $\sigma_0.\delta$ est grand.

4.2 Évaluation de MIBFA et ADD

Dans cette section, nous voudrions évaluer la performance de chaque seuil de détection, en présentant le délai moyen de détection estimé $\widehat{ADD}$ en fonction de $\widehat{\lambda}^0 = 1/\widehat{MTBFA}$ estimé pour différents modèles et scénarios de simulation. λ^0 et ADD sont donc estimés respectivement par les formules (3.3) et (3.4) en utilisant l'analyse de survie présentée dans la section 3.2.

Dans la section 4.2.1, nous présentons les résultats obtenus en utilisant le modèle 1 à la fois pour la construction des seuils empiriques et la génération des données. Nous présentons tout d'abord le cas de la détection sur la moyenne lorsque la variance est connue ou correctement estimée, puis lorsqu'elle est mal estimée. Par la suite, nous présentons le cas de la détection sur la variance avec une moyenne connue. Dans la section 4.2.2, nous présentons les résultats en utilisant le modèle 2 pour la construction des seuils et les données de leur évaluation. Enfin, dans la section 4.2.3, nous présentons deux scénarios éventuels d'erreur dans l'estimation de la distribution des données. Le premier concerne le cas de violation de l'hypothèse d'indépendance des données et le second le cas de violation de l'hypothèse de normalité des données.

4.2.1 Modèle 1

Les résultats de cette section se réfèrent au modèle 1 (Section 3.1.3) de variables gaussiennes indépendantes i.i.d. Nous étudions successivement la performance des seuils (1) pour un changement de la moyenne avec une variance connue, (2) pour un changement de la moyenne avec une variance mal estimée et (3) pour un changement de la variance.

• Détection sur la moyenne

Nous considérons le modèle 1 de variables gaussiennes i.i.d avec une variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. Nous donnons en Figure 4.3, les résultats d'estimation de $\widehat{ADD}$ en fonction de $\widehat{\lambda}^0$ obtenus pour chacun des seuils précédemment

décrits et pour une détection sur la moyenne uniquement. Les résultats sont donnés selon trois valeurs de risque toléré de fausse alarme $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$ et pour différents objectifs de détection $(\sigma_0, \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$. Les parties (A) et (B) de la Figure 4.3 montrent les résultats d'estimation ADD obtenus sous le régime post-changement, lorsque le changement réel de la moyenne est respectivement $\sigma_0, \delta^R = 1$ et $\sigma_0, \delta^R = 2$.

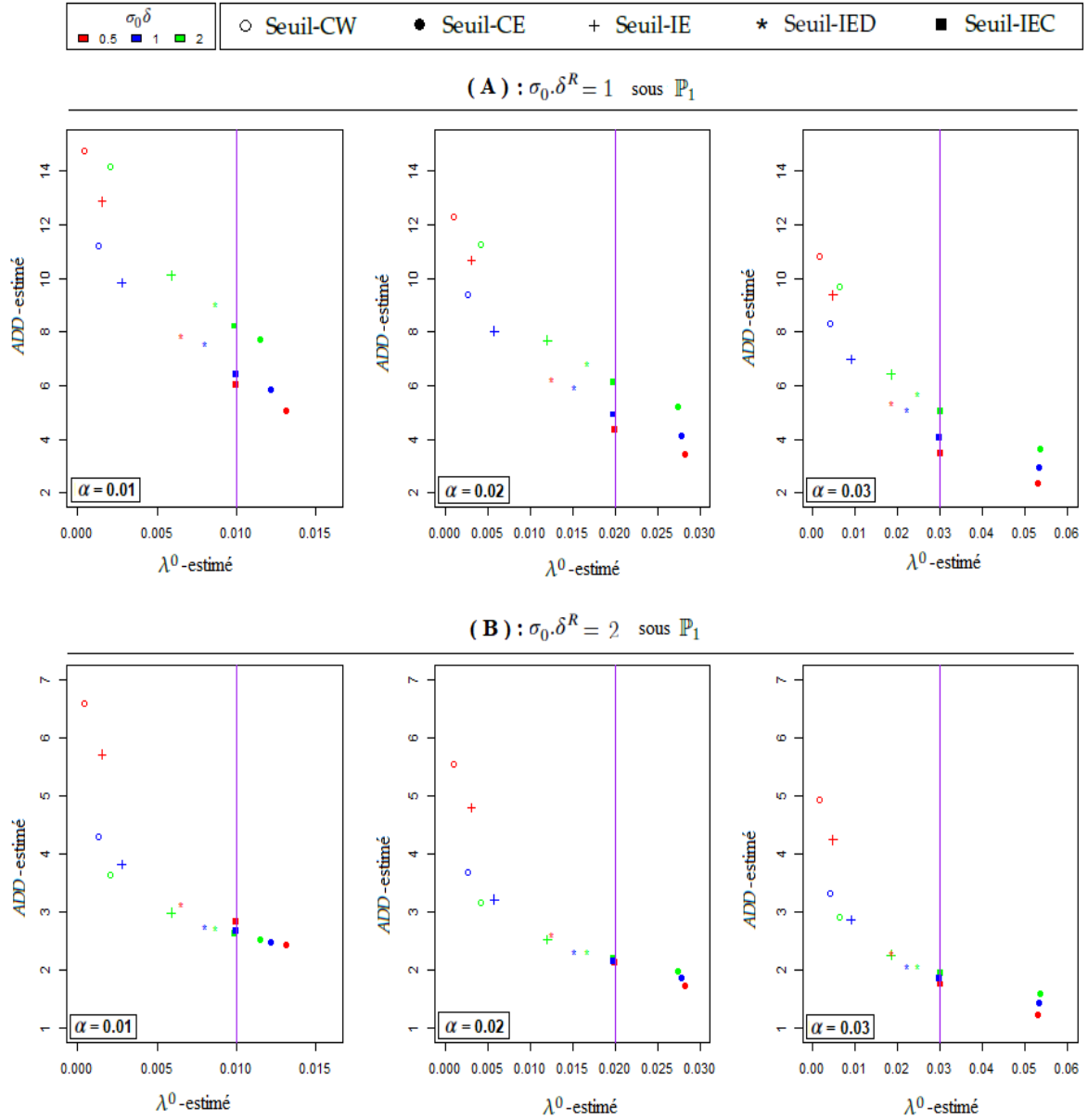


FIGURE 4.3 – Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus par les différents seuils pour trois valeurs données de $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$ pour le Modèle 1 (Gaussien i.i.d.) et selon $\sigma_0, \delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés sous H_1 avec un changement réel sur la moyenne de niveau $\sigma_0, \delta^R = 1$ (resp. $\sigma_0, \delta^R = 2$).

Les résultats montrent tout d'abord que la rupture est détectée plus rapidement lorsque le niveau réel de changement $\sigma_0 \delta^R$ est grand, quel que soit le seuil utilisé, le α toléré ou l'objectif de détection $\sigma_0 \delta$. Concernant les performances des seuils, on observe généralement le même comportement des résultats quelle que soit la valeur fixée de α . Si on se concentre sur le cas $\sigma_0 \delta^R = 1$ et α fixé à 0.02 (Figure 4.3, (A), graphique central). Nous nous intéressons à la conformité du seuil à α ; on observe ainsi que :

- Le Seuil-CE donne le délai de détection le plus bas, mais il dépasse toujours le α toléré;
- Le Seuil-IEC suit parfaitement le α fixé, et présente le meilleur délai de détection parmi ceux qui respectent α , $\widehat{ADD}_{h^C} = \{4.36, 4.91, 6.11\}$ respectivement quand $\sigma_0 \delta = \{0.5, 1, 2\}$;
- Parmi les seuils respectant le α toléré (i.e. $\widehat{\lambda}^0 < \alpha$), le Seuil-IED détecte plus rapidement : $\widehat{ADD}_{h^D} = \{6.28, 6.0, 6.86\}$, avec $\widehat{\lambda}^0$ proche du risque fixé α : $\widehat{\lambda}_{h^D}^0 = \{0.012, 0.015, 0.016\}$, respectivement quand $\sigma_0 \delta = \{0.5, 1, 2\}$. Le délai de détection le plus important est donné par le Seuil-CW : $\widehat{ADD}_{h^W} = \{12.27, 9.40, 11.25\}$, logiquement avec le taux de fausse alarme le plus faible : $\widehat{\lambda}_{h^W}^0 = \{0.001, 0.002, 0.004\}$.

Considérons maintenant la détection selon différentes valeurs de δ . Nous remarquons que, sauf pour le Seuil-CE et le Seuil-IEC, la détection est plus rapide lorsque nous demandons de détecter le niveau exact de changement qui existe sur la série, c'est-à-dire $\delta = \delta^R$. Comme on peut le voir dans la partie (A)- Figure 4.3 quand $\sigma_0 \delta^R = 1$, on détecte plus rapidement pour $\sigma_0 \delta = 1$ que pour $\sigma_0 \delta = 0.5$; et dans la partie (B)- Figure 4.3 quand $\sigma_0 \delta^R = 2$, on détecte plus rapidement pour $\sigma_0 \delta = 2$ que pour $\sigma_0 \delta = 0.5$ et $\sigma_0 \delta = 1$. Ce comportement est valable pour le Seuil-CW, le Seuil-IE et le Seuil-IED. Pour ces seuils, nous avons également observé un comportement inattendu du taux de fausse alarme conditionnel estimé $\widehat{\lambda}^0$: plus δ est grand, plus nous avons de fausses alarmes. C'est le contraire pour le Seuil-IEC et le Seuil-CE, pour lesquels la détection est généralement plus rapide tant que le niveau de changement souhaité est inférieur au niveau réel; et généralement $\widehat{\lambda}^0$ est similaire quel que soit δ .

A partir de ces résultats, on peut déduire différents faits, le premier est général et presque évident, les autres concernent la sensibilité des paramètres en fonction, soit de l'objectif de détection δ , soit du niveau réel post-changement δ^R .

- Lorsque δ et δ^R sont fixés, nous voyons que l'ADD- estimé est une fonction décroissante de λ^0 - estimé. La pente est très élevée pour les α proches de 0. Ce résultat est intuitif car il faut faire un compromis entre le taux de fausse alarme conditionnel λ^0 et le délai moyen de détection ADD.
- Sous H_0 , le Seuil-IE h^I n'est pas consistant dans le sens où le taux estimé

$\hat{\lambda}_{h^I}^0$ dépend fortement de l'objectif de détection δ . En revanche, cette non constance des résultats devient réduite lorsque le seuil est rendu dynamique avec le Seuil-IED h^D .

- Sous H_1 , et en particulier lorsque δ^R est grand, les Seuils -CW et -IE donnent des ADD qui dépendent fortement de l'objectif de détection δ . Avec les autres seuils, les paramètres estimés ne sont pas aussi fluctuants.

Dans tous les cas, nous avons vu que le Seuil-IEC a les meilleures performances car il estime exactement et atteint donc le risque de fausse alarme souhaité. Ses performances ne dépendent pas des valeurs de l'objectif de détection δ et du réel changement sur la moyenne δ^R . En comparaison avec les autres seuils, le Seuil-IED donne ainsi des résultats intéressants. Il respecte en effet le risque de fausse alarme toléré et réalise un délai de détection relativement proche du Seuil-IEC.

• Détection sur la moyenne, avec une variance mal-estimée

Nous considérons toujours le Modèle 1 de variables gaussiennes i.i.d. pour la détection d'un changement de la moyenne uniquement. On suppose que les paramètres $\sigma_0 = \sigma_1$ utilisés pour le calcul de la statistique $S_t(\delta, q)$, sont différents des σ_0^R et σ_1^R réels.

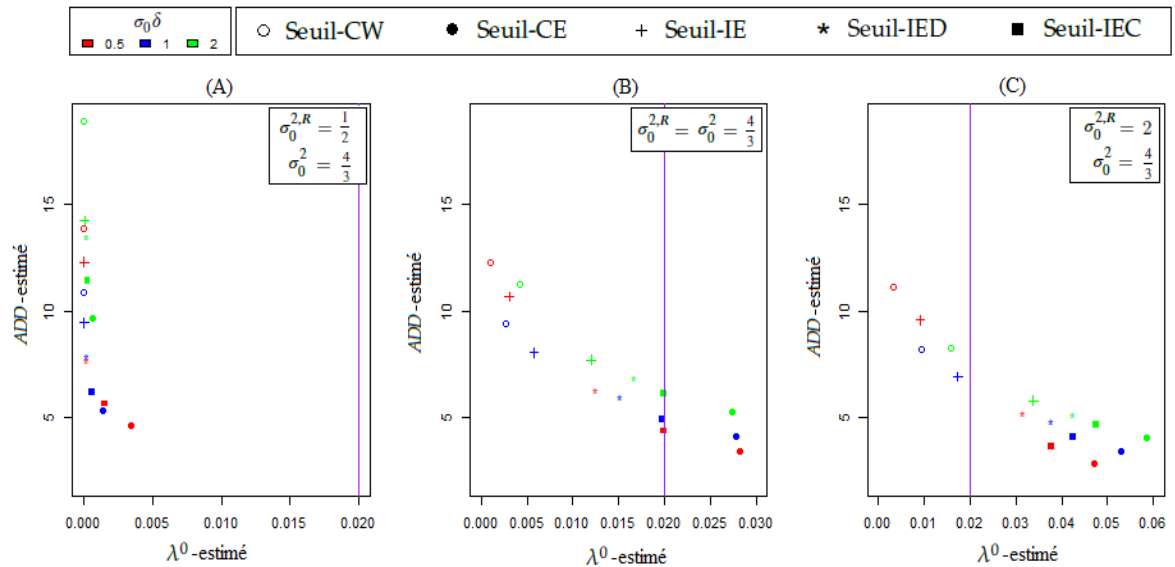


FIGURE 4.4 – Résultats d'estimation de $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus par les différents seuils pour la valeur de $\alpha = 0.02$, pour le Modèle 1 (Gaussien i.i.d.) et selon $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $q = 1$ et $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Nous comparons les résultats pour trois cas (A) : $\sigma_0^{2,R} = \frac{1}{2} < \sigma_0^2$; (B) : $\sigma_0^{2,R} = \frac{4}{3} = \sigma_0^2$; (C) : $\sigma_0^{2,R} = 2 > \sigma_0^2$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un changement réel sur la moyenne de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$.

Dans la Figure 4.4, on compare les résultats d'estimation obtenus par les différents seuils pour une détection sur la moyenne de trois situations différentes : (A)

la variance réelle des signaux est inférieure à celle supposée ($\sigma_0^{2,R} = \frac{1}{2} < \sigma_0^2 = \frac{4}{3}$), (B) la variance réelle des signaux est égale à celle supposée ($\sigma_0^{2,R} = \sigma_0^2 = \frac{4}{3}$), (C) la variance réelle des signaux est supérieure à celle supposée ($\sigma_0^{2,R} = 2 > \sigma_0^2 = \frac{4}{3}$). Nous avons donné les résultats pour la probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha = 0,02$, et différents objectifs de détection $\sigma_0\delta \in \{0,5,1,2\}$. Sous H_1 , le changement réel sur la moyenne est de niveau $\sigma_0^R\delta^R = 1$.

Les résultats montrent qu'une mauvaise estimation du paramètre de variance, avec ces niveaux observés, n'affecte pas trop la détection et ne change pas la tendance des résultats pour les différents seuils. Avec une sous-estimation de la variance, nous pouvons obtenir plus de fausses alarmes et potentiellement dépasser le risque toléré, comme observé pour les Seuils -IE, -IEC et -IED, mais avec une détection un peu plus rapide pour tous les seuils. Avec une sur-estimation de la variance, on peut détecter la rupture un peu plus lentement pour chaque seuil, mais dans ce cas on aura beaucoup moins de fausses alarmes, et tous les seuils respectent le risque toléré.

• Détection sur la variance

Dans la Figure 4.5, nous présentons les résultats d'estimation de $\widehat{ADD}$ en fonction de $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par chaque seuil pour une détection de changement sur la variance, fixée à $\mu_0^R = \mu_0 = \mu_1^R = \mu_1 = 0$, et estimé selon trois valeurs de la probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha \in \{0,01,0,02,0,03\}$ et pour différents objectifs de détection $q \in \{0,15,0,25,0,50\}$. La partie (A) (resp. (B)) de la Figure 4.5 donne les résultats d'estimation ADD obtenus sous le régime post-changement H_1 , lorsque le changement réel sur la variance est de niveau $q^R = 0.25$ (resp. $q^R = 0.15$). La rupture est toujours à l'instant $v = 50$.

A des fins de comparaison de performance de chacun des seuils, nous avons observé globalement le même comportement que la détection sur la moyenne, bien que l'on puisse remarquer quelques légères différences en fonction du niveau de changement sur la variance que l'on demande de détecter :

- La rupture est détectée plus rapidement si le niveau de changement demandé est inférieur ou égal au changement réel ($q \geq q^R$), sauf pour les Seuils -IE et -IED.
- Pour le Seuil-IE, le délai de détection est important lorsque q est grand (le niveau de changement demandé est plus petit que le réel dans les signaux). En revanche, lors de l'utilisation de la configuration dynamique du Seuil-IE, le délai de détection ne dépend pas de l'objectif de détection demandé q . Les résultats $\widehat{ADD}$ du Seuil-IED sont consistants.

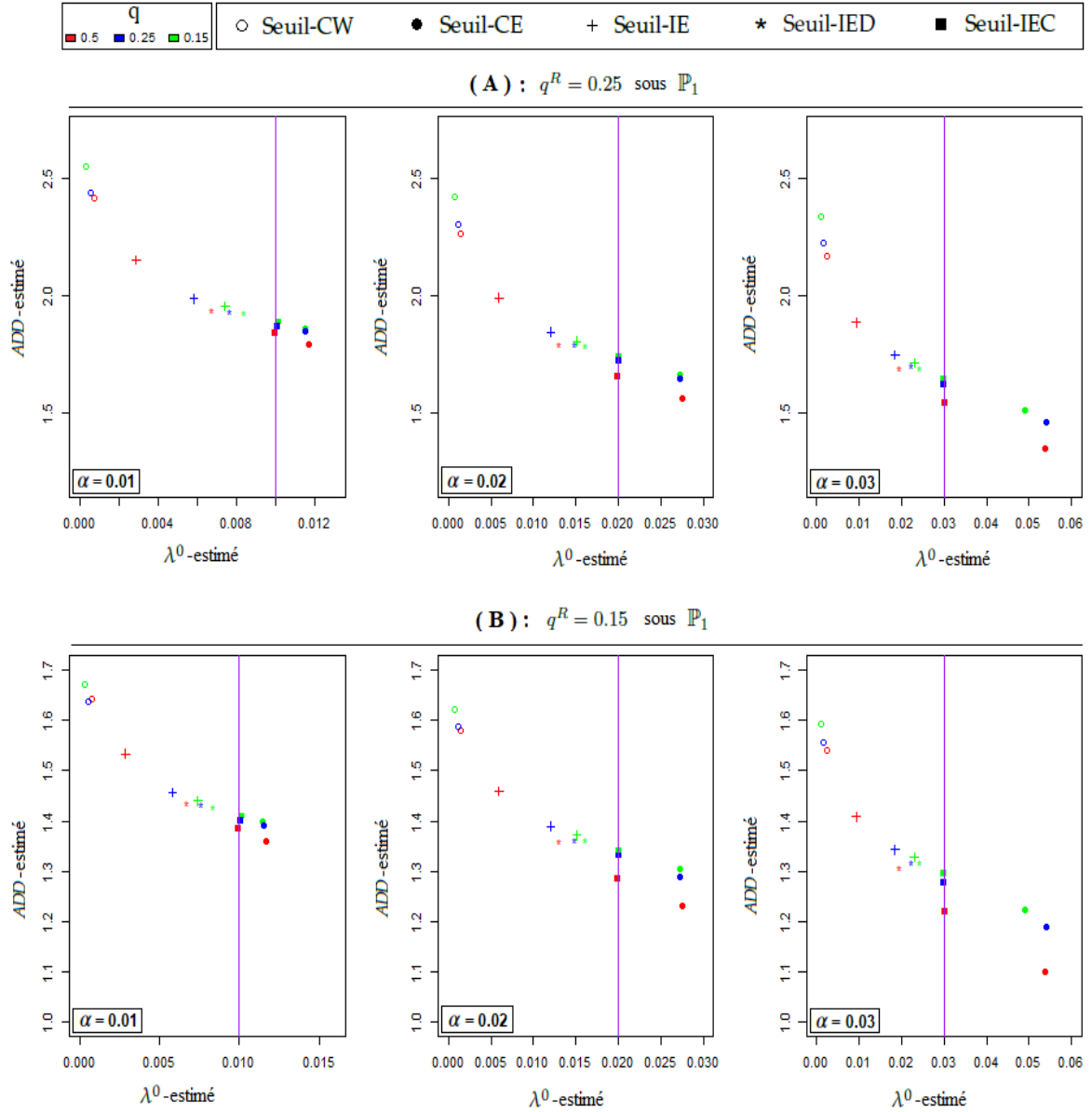


FIGURE 4.5 – Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils pour des données gaussiennes i.i.d (Modèle 1), trois valeurs données $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, et $q \in \{0.15, 0.25, 0.50\}$, avec $\delta = 0$ et $\mu_0 = \mu_0^R = 0$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un changement réel sur la variance de niveau $q^R = 0.25$ (resp. $q^R = 0.15$).

4.2.2 Modèle 2

Dans cette section, nous évaluons les seuils à l'aide des données autocorrélées simulées à partir d'un processus autorégressif. Ici, nous supposons que la distribution des données est connue ou correctement estimée. Nous avons également utilisé ce type de données autocorrélées pour construire les seuils empiriques.

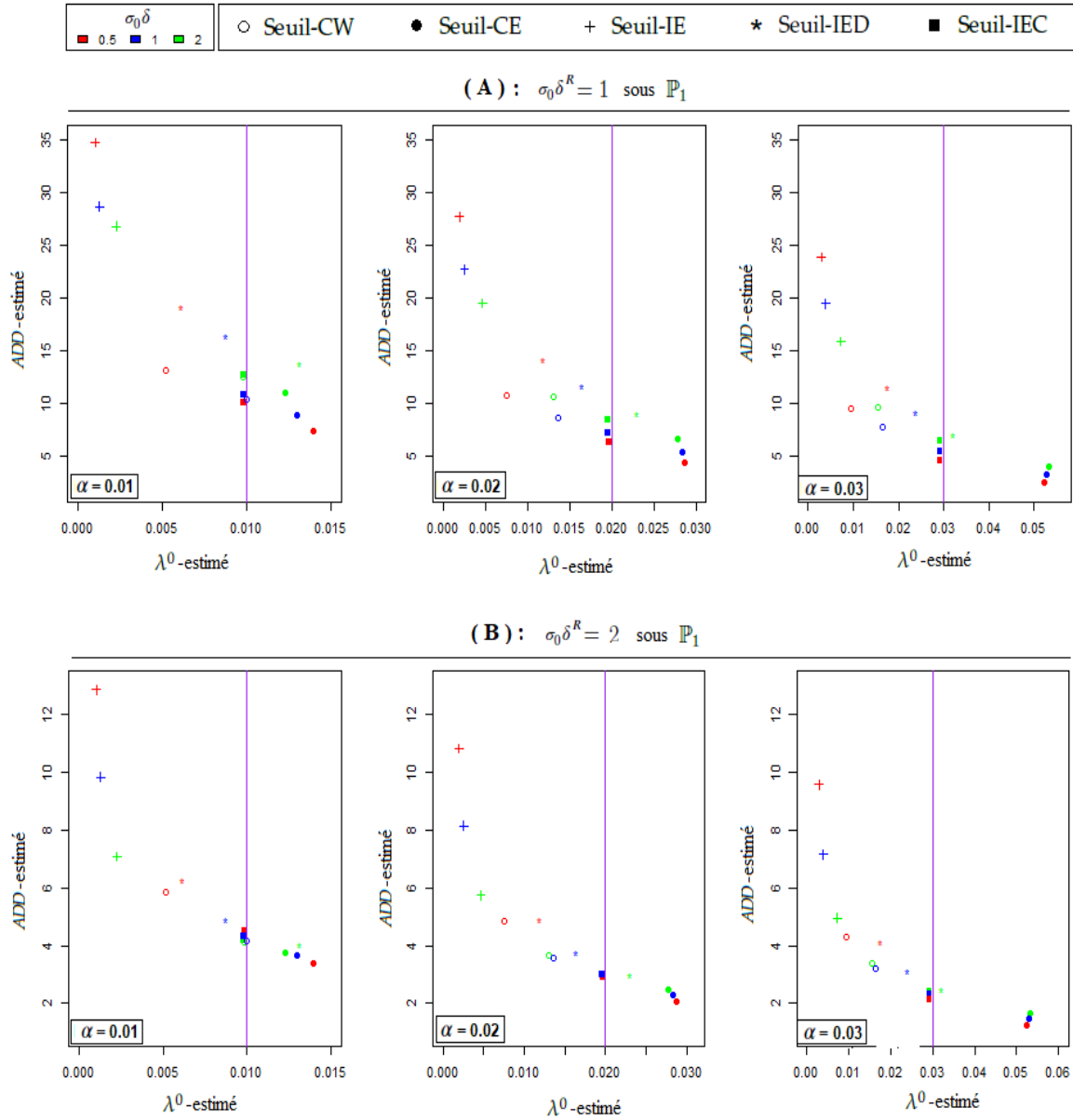


FIGURE 4.6 – Résultats d’estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils pour des données autocorrélées (Modèle 2), trois valeurs données $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}$, et $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les $\widehat{ADD}$ estimés respectivement avec changement réel de niveau de $\sigma_0 \delta^R = 1$ (resp. $\sigma_0 \delta^R = 2$).

Nous montrons dans la Figure 4.6 les résultats d’estimation $\widehat{ADD}$ en fonction de $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils pour une détection sur la moyenne, i.e. $q = 1$ avec $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = \frac{4}{3}$. Les résultats sont donnés selon trois valeurs de la probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$ et pour différents objectifs de détection $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}$. Dans la partie (A) (resp. (B)) de la Figure 4.6, les estimations

de l'ADD sous le régime post-changement sont obtenues lorsque le changement réel sur la moyenne est respectivement $\sigma_0\delta^R = 1$ (resp. $\sigma_0\delta^R = 2$).

Pour un risque toléré de fausse alarme α fixe et le changement réel $\sigma_0\delta^R$, la comparaison des résultats du modèle 1 (Figure 4.3) et du modèle 2 (Figure 4.6) montre que :

- Le délai de détection estimé pour chaque seuil et chaque valeur de $\sigma_0\delta$, est plus grand dans le modèle 2 que dans le modèle 1, en particulier pour le Seuil-IE, et à l'exception du Seuil-CW qui est légèrement plus rapide dans le modèle 2, ceci est logique car ce dernier est le même dans les deux modèles. Il n'est pas empirique.
- La tendance des performances des seuils est généralement la même dans les deux modèles, sauf que le Seuil-CW donne de meilleurs résultats dans le modèle 2, relativement proches de ceux du Seuil-IEC.
- En général, nous avons le même comportement selon $\sigma_0\delta$, sauf pour le Seuil-IED qui dépasse le α toléré lorsque $\sigma_0\delta = 2$.

4.2.3 Erreur sur la distribution présumée

Dans cette section, nous présentons les performances des seuils obtenues dans deux situations où la distribution des données est mal évaluée pour la construction des seuils : (1) le cas où l'hypothèse d'indépendance des données est violée, c'est-à-dire que les seuils empiriques ont été construits selon le modèle 1, alors que les données d'évaluation ont été simulées à partir du modèle 2, (2) le cas où l'hypothèse de normalité (symétrie) des données est violée, c'est-à-dire, les seuils empiriques ont été toujours construits selon le modèle 1, mais les données d'évaluation ont été simulées à partir du modèle 3.

• Violation de l'hypothèse d'indépendance des données

Dans la Figure 4.7, nous donnons les résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ en fonction de $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par chaque seuil pour une détection sur la moyenne i.e. $q = 1$ avec $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = \frac{4}{3}$. Les résultats sont donnés selon trois valeurs de la probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$ et pour différents objectifs de détection $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$. Les ADDs ont été estimés sous le régime post-changement lorsque le changement réel de la moyenne est de $\sigma_0\delta^R = 1$.

La Figure 4.7 montre les résultats de performance pour une mauvaise évaluation de la distribution des données, c'est-à-dire si nous supposons l'indépendance des données et construisons les seuils empiriques sous une distribution gaussienne i.i.d, tandis que les données sont autocorrélées. Dans ce cas, nous constatons que nous avons plus de fausses alarmes, mais logiquement une détection un peu plus rapide, pour chaque seuil. Cela conduit à un taux de fausse alarme supérieur au risque toléré, en particulier lorsque α est petit.

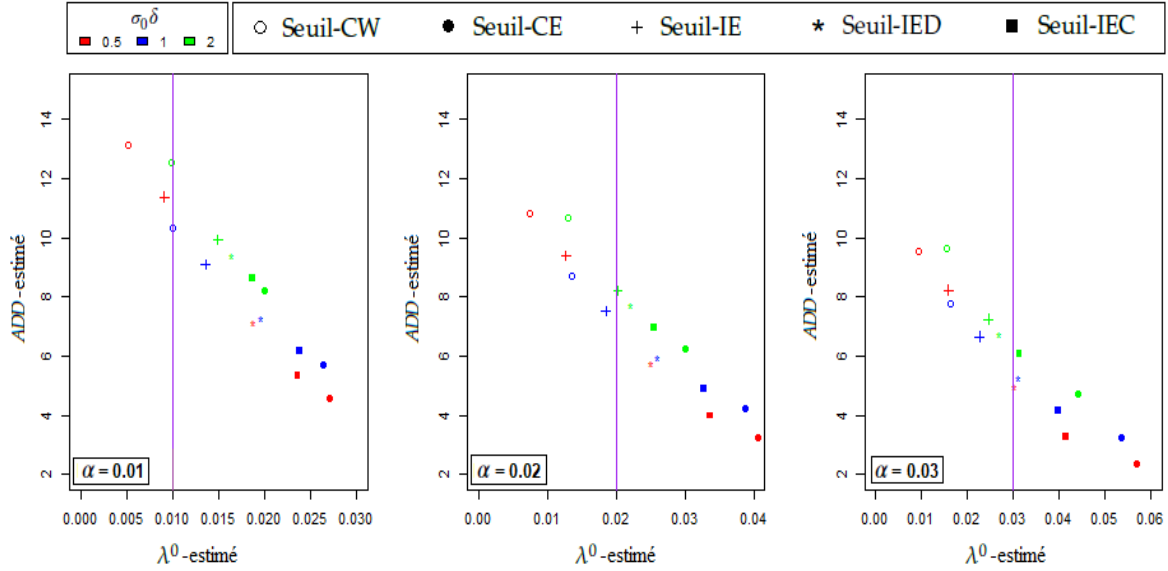


FIGURE 4.7 – Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils construits à partir de données gaussiennes i.i.d. (Modèle 1), appliqués sur des données autocorrélées (Modèle 2), pour trois valeurs données $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, et $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$.

Pour un objectif de détection δ fixé, l'ordre des performances des différents seuils reste le même. On note également, en particulier pour les Seuils -CE, -IED et -IEC, que lorsque $\sigma_0\delta = 2$, nous avons significativement moins de fausses alarmes que pour $\sigma_0\delta = 0,5$ et $\sigma_0\delta = 1$.

• Violation de l'hypothèse de normalité des données

Dans la Figure 4.8, nous donnons les résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ en fonction de $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par chaque seuil pour une détection sur la moyenne i.e. $q = 1$ avec $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = \frac{1}{2}$. Les résultats sont donnés selon trois valeurs de la probabilité tolérée de fausse alarme $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$ et pour différents objectifs de détection $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$. Les ADD s ont été estimés sous le régime post-changement avec un niveau réel de changement sur la moyenne de $\sigma_0\delta^R = 1$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les données de l'évaluation ont été simulées à partir du modèle 1, i.e. distribution gaussienne symétrique $\mathcal{N}(\mu_0 = 1, \sigma_0^2 = 0.5)$ (resp. à partir du modèle 3, i.e. distribution gamma asymétrique $\Gamma(k = 2, \beta = 2)$).

La Figure 4.8 montre les résultats de performance des différents seuils pour une mauvaise évaluation de la distribution des données. Ici, nous supposons la normalité des données pour construire les seuils empiriques, alors que les données de test sont asymétriques de distribution Gamma (Partie B). Dans ce cas, nous observons que le délai de détection n'est pas vraiment affecté, nous constatons

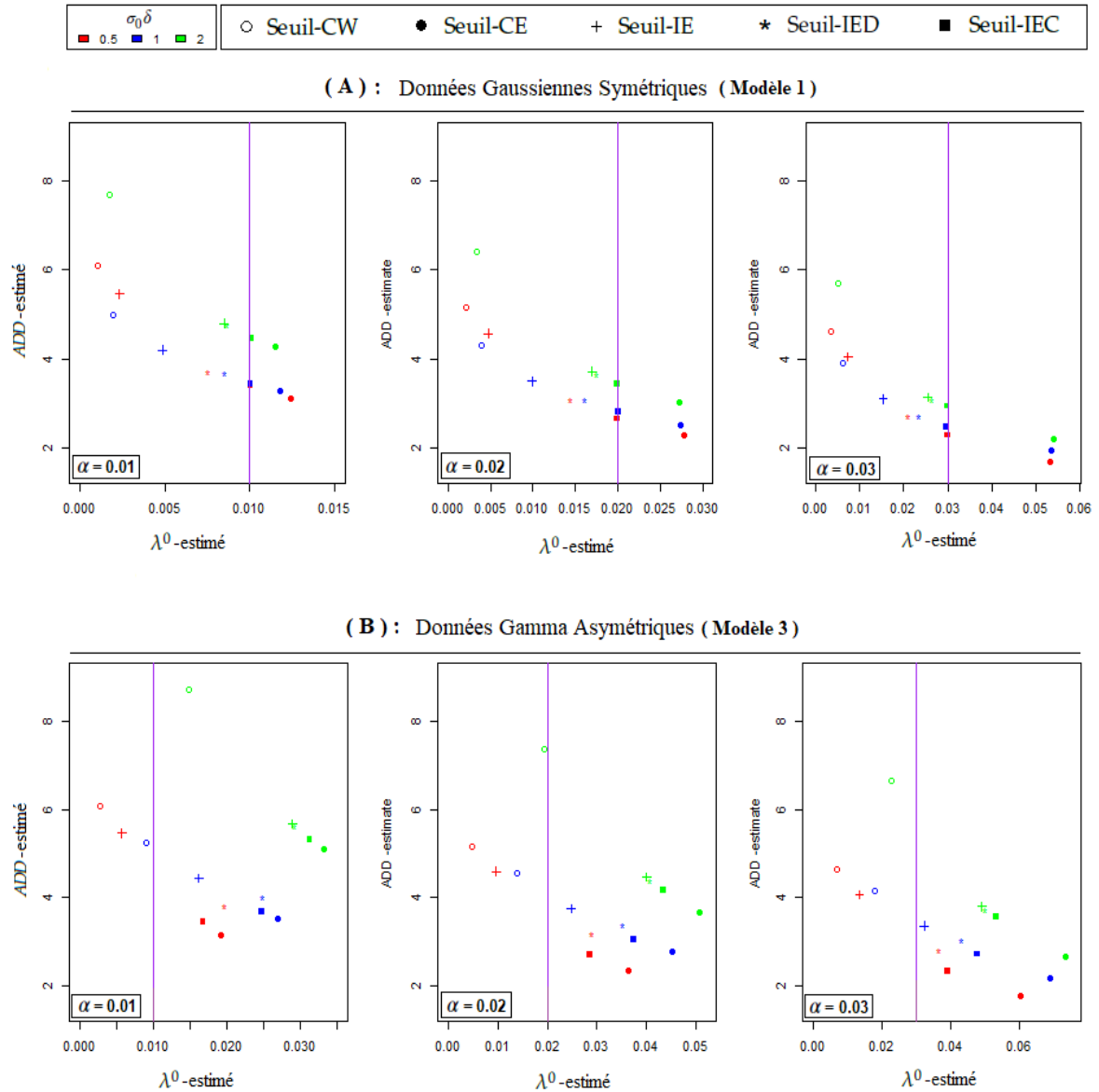


FIGURE 4.8 – Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils construits à partir des données gaussiennes i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_0 = 1, \sigma_0^2 = 0.5)$, pour trois valeurs de $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, et selon $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}, q = 1$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0 \delta^R = 1$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les données de l'évaluation ont été simulées à partir du modèle 1, i.e. $\mathcal{N}(\mu_0 = 1, \sigma_0^2 = 0.5)$ (resp. à partir du modèle 3, i.e. $\Gamma(shape = 2, rate = 2)$).

juste une légère augmentation quand $\delta = 2$. Par contre, par rapport au modèle bien évalué (Partie A), nous avons plus de fausses alarmes pour tous les seuils, ce qui entraîne le dépassement du risque toléré de fausse alarme, notamment lorsque δ est grand ou/et α est petit. Il ne reste que le Seuil-CW qui en général respecte le α toléré. Les Seuils -IEC et -IED ne vérifient plus cette propriété ici. Nous remarquons que plus δ est grand, plus le taux de fausse alarme estimé est

important. Les résultats sont moins consistants pour les seuils. En revanche, en comparant les performances des seuils pour un δ fixé, la tendance des résultats reste la même.

4.3 Évaluation de la règle d'arrêt corrigée

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'évaluation de la règle d'arrêt corrigée que nous avons proposé dans la section 2.4. Pour ce faire, nous allons comparer les performances données par les différents seuils de détection dans le cas de l'utilisation de la règle d'arrêt classique ($c = 1$) et le cas de l'utilisation de la règle d'arrêt corrigée pour $c \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Nous rappelons que le paramètre "c" est le temps durant lequel la statistique doit rester au dessus du seuil pour que la procédure signale une détection.

4.3.1 Modèle 1

Ici, l'évaluation de la règle d'arrêt corrigée est effectuée sous le modèle le plus simple, c'est-à-dire, nous utilisons des données gaussiennes i.i.d, à la fois pour la construction des seuils et la génération des données de test. Nous considérons le cas de détection sur la moyenne ($q = 1$) avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$.

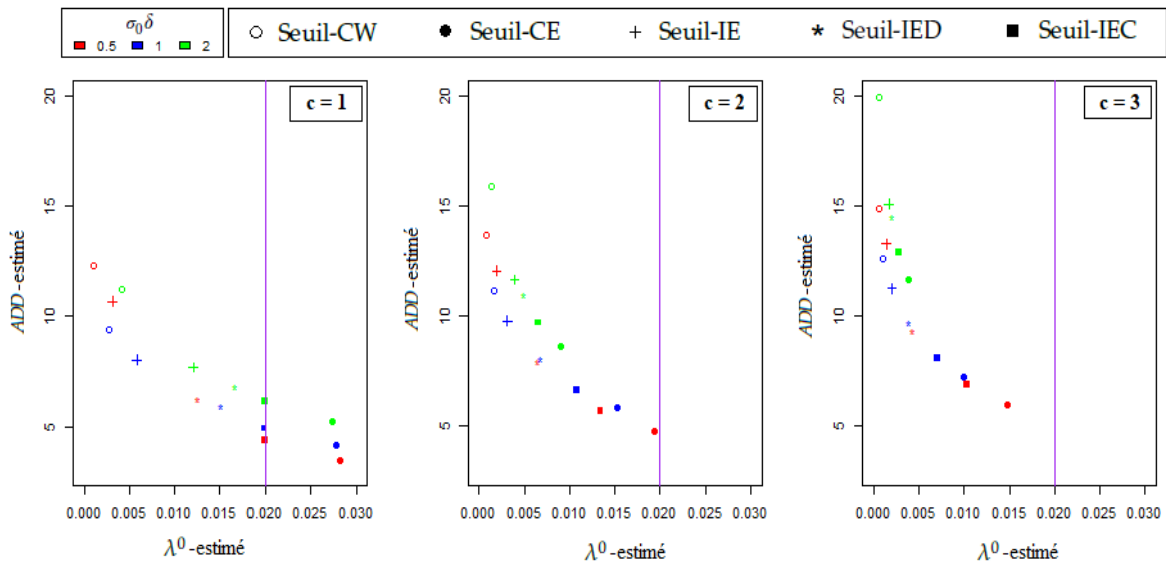


FIGURE 4.9 – Comparaison des résultats de l' $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus en utilisant la règle d'arrêt classique $c = 1$ et corrigée pour $c \in \{2, 3\}$. Les résultats ont été obtenus sous le Modèle 1 pour $\alpha = 0.02$ et selon l'objectif de détection sur la moyenne $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$.

Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0 \delta^R = 1$.

Nous représentons sur la Figure 4.9, les résultats d'estimation de $\widehat{ADD}$ versus $\widehat{\lambda}^0$ obtenus par chaque seuil construit sous le Modèle 1, pour un risque toléré $\alpha = 0.02$ et selon trois objectifs de détection sur la moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$. Les données d'évaluation ont été générées également à partir du Modèle 1, et les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement sous H_1 de $\sigma_0\delta^R = 1$. De gauche à droite, les trois graphiques de la Figure 4.9 montrent les résultats obtenus en utilisant respectivement les règles d'arrêts suivantes : la règle classique $c = 1$, la règle corrigée avec $c = 2$ et corrigée avec $c = 3$.

Les résultats montrent que, quels que soient le seuil et l'objectif δ choisis (notamment quand δ est grand), l'utilisation de la règle d'arrêt corrigée permet de minimiser considérablement le taux de fausse alarme, mais à l'inverse augmente légèrement le délai de détection. Cette augmentation est engendrée logiquement par l'attente supplémentaire au dessus du seuil qu'impose la règle corrigée. Par exemple, le Seuil-CE, en utilisant la règle classique, ne respectait pas le α toléré ($\widehat{\lambda}_{hE}^0 = \{0.028, 0.027, 0.027\}$, avec un $\widehat{ADD}_{hE} = \{3.44, 4.14, 5.23\}$ respectivement pour $\sigma_0\delta = \{0.5, 1, 2\}$). Mais en utilisant la règle corrigée, par exemple avec $c = 2$, le Seuil-CE ne dépasse plus le risque toléré α et estime un délai de détection relativement bon par comparaison avec les autres seuils ($\widehat{\lambda}_{hE}^0 = \{0.019, 0.015, 0.01\}$, avec un $\widehat{ADD}_{hE} = \{4.78, 5.83, 8.63\}$ respectivement pour $\sigma_0\delta = \{0.5, 1, 2\}$). Pour les autres seuils qui, en utilisant la règle classique, respectaient déjà le α toléré, l'utilisation de la règle corrigée n'est pas très bénéfique au sens de l'optimisation dans le cadre de la détection séquentielle (QCD) : rechercher un seuil qui minimise l' ADD tout en respectant le α toléré, car cela rajoute un délai de détection inutile.

Nous observons aussi globalement que pour un objectif δ fixé, la tendance des performances des seuils ne change pas à l'utilisation de la règle corrigée.

4.3.2 Erreur sur la distribution présumée

Dans cette section, nous voudrions évaluer l'efficacité de la règle d'arrêt corrigée à réduire le taux élevé de fausse alarme rapporté par les différents seuils dans les deux situations (présentées dans la section 4.2.3) où la distribution des données est mal choisie : violation de l'hypothèse d'indépendance ou de normalité des données.

• Violation de l'hypothèse d'indépendance des données

Nous reprenons ici les résultats du graphique central de la Figure 4.7 ($\alpha = 0.02$), où nous avons utilisé la règle d'arrêt classique pour la détection de rupture de moyenne ($q = 1$) avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$, sur des données générées sous le modèle 2, alors que les seuils sont construits sous le modèle 1. Pour la comparaison, nous avons repris les mêmes conditions mais en utilisant la règle d'arrêt corrigée avec un temps d'attente $c \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

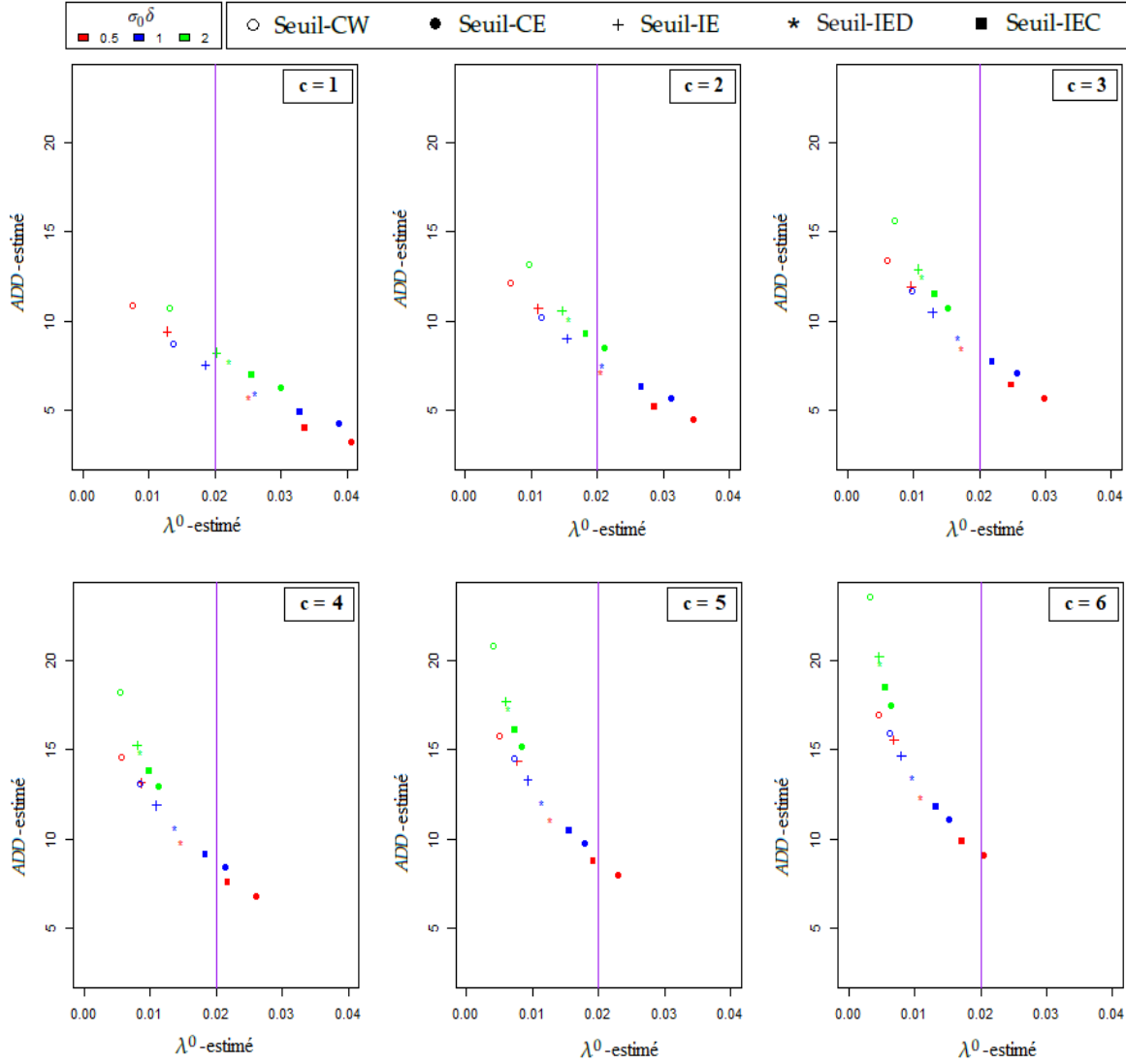


FIGURE 4.10 – Comparaison des résultats de $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus en utilisant la règle classique $c = 1$ et la règle corrigée pour $c \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Les résultats ont été obtenus par des seuils construits sous le Modèle 1 avec $\alpha = 0.02$, appliqués pour une détection de rupture de moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$, sur des données générées à partir du Modèle 2. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$.

La Figure 4.10 présente les résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ versus $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils construits sous le Modèle 1, avec un risque toléré $\alpha = 0.02$ et selon trois objectifs de détection $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, sur des données générées à partir du Modèle 2. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement sous H_1 de $\sigma_0\delta^R = 1$. Les six graphiques de la Figure 4.10 montrent les résultats obtenus en utilisant la règle classique $c = 1$ et la règle corrigée avec $c \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les résultats montrent qu'en général, l'utilisation de la règle d'arrêt corrigée dans cette situation permet de réduire les fausses alarmes mais en rajoutant un faible délai de détection quelque soit le seuil utilisé et le δ choisi, notamment quand $\sigma_0\delta = 2$ où les résultats sont plus sensibles à l'utilisation de la règle corrigée (lorsque c est grand, on estime le délai le plus élevé avec le taux de fausse alarme le plus faible pour $\sigma_0\delta = 2$).

Les résultats montrent aussi que la règle d'arrêt corrigée est efficace pour remédier au problème de dépassement du risque toléré de fausse alarme par certains seuils lorsque l'hypothèse d'indépendance des données est violée. Par exemple, pour ce cas de figure de $\alpha = 0.02$, lorsque l'hypothèse d'indépendance des données est violée, les Seuils -IED et -IEC ne respectent plus le α toléré avec l'utilisation de la règle d'arrêt classique. Mais l'utilisation de la règle corrigée avec un $c = 2$ ou 3 pour le Seuil-IED et avec un $c = 4$ ou 5 pour le Seuil-IEC permet de maintenir le risque toléré α et d'estimer un délai de détection raisonnable. Quant au Seuil-CE, dans cette situation il faut utiliser la règle corrigée avec $c = 5$ ou 6 pour permettre au seuil de respecter le α toléré.

• Violation de l'hypothèse de normalité des données

Pour évaluer la règle d'arrêt corrigée dans cette situation, nous reprenons les résultats du graphique central de la partie (B)- Figure 4.8 ($\alpha = 0.02$), où nous avons utilisé la règle d'arrêt classique pour la détection de rupture de moyenne ($q = 1$) avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 1/2$, sur des données générées sous le modèle 3, tandis que les seuils sont construits sous le modèle 1. Pour la comparaison, nous avons repris les mêmes conditions mais en utilisant la règle d'arrêt corrigée avec un temps d'attente $c \in \{2, 3\}$.

La Figure 4.11 présente les résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ versus $\widehat{\lambda}^0$ obtenus par les différents seuils construits sous le Modèle 1, pour un risque toléré $\alpha = 0.02$ et selon trois objectifs de détection $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, sur des données générées à partir du Modèle 3. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement sous H_1 de $\sigma_0\delta^R = 1$. Les trois graphiques de la Figure 4.11 montrent les résultats obtenus en utilisant la règle classique $c = 1$ et la règle corrigée avec $c \in \{2, 3\}$.

Comme dans le cas précédent, l'utilisation de la règle d'arrêt corrigée dans cette situation où l'hypothèse de normalité des données est violée, permet de réduire considérablement le taux de fausse alarme et corriger les Seuils -IE, -IED et -IEC qui dépassent le α toléré en utilisant la règle d'arrêt classique ($c = 1$). Ici, il suffit d'utiliser la règle corrigée avec $c = 2$ pour permettre à ces Seuils -IE, -IED et -IEC de maintenir le α toléré en rajoutant un délai de détection négligeable. Pour que le Seuil-CE respecte le α toléré, il faut utiliser la règle corrigée avec $c = 3$.

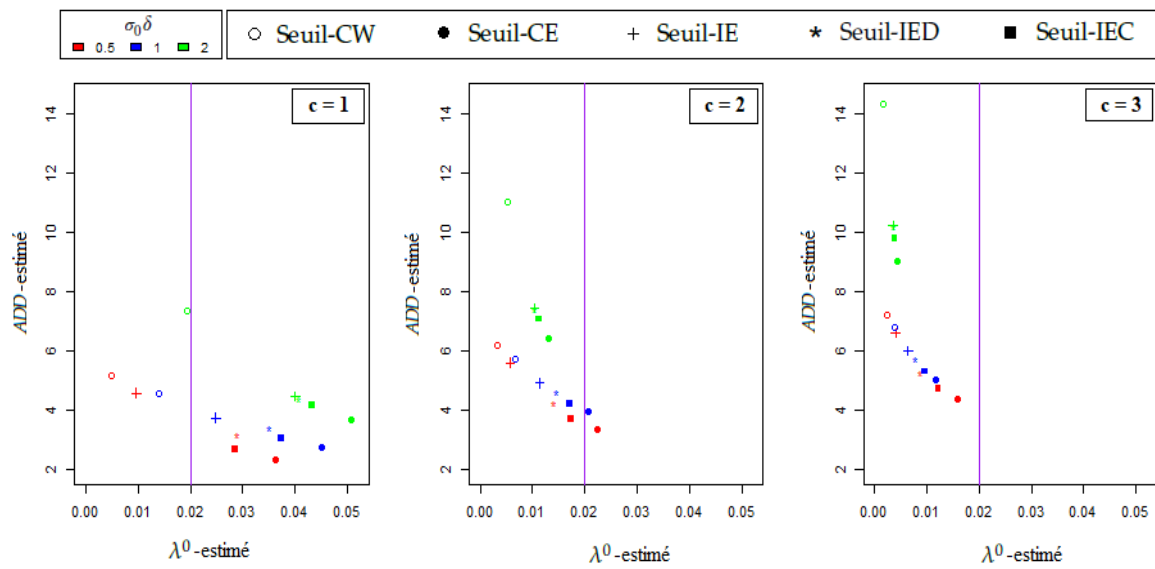


FIGURE 4.11 – Comparaison des résultats $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus en utilisant la règle classique $c = 1$ et la règle corrigée pour $c \in \{2, 3\}$. Les résultats ont été obtenus par des seuils construits sous le Modèle 1 avec $\alpha = 0.02$, appliqués pour une détection de rupture de moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{1}{2}$, sur des données générées à partir du Modèle 3. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$.

Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous avons traité le cas de la détection de rupture dans le contexte séquentiel où l'enjeu est de détecter un changement le plus rapidement possible tout en respectant un risque donné de fausse alarme. Nous avons considéré la statistique réursive CUSUM basée sur une fonction de score.

L'objectif est en premier lieu de comparer les performances de différents seuils de détection, et en deuxième lieu, d'évaluer la nouvelle règle d'arrêt corrigée que nous suggérons dans le but de réduire les fausses alarmes. Certains seuils de détection sont issus de la littérature (Constant analytique de Wald (CW) et l'Instantané Empirique Conditionnel de Margavio (IEC)), et les autres construits par une procédure basée sur la simulation (Constant Empirique (CE), Instantané Empirique (IE) et Instantané Empirique Dynamique (IED)) qui sont la principale contribution de ce travail. Notons que le Seuil-IEC de Margavio a été construit dans notre cas par une nouvelle procédure plus générale, qui permet d'inclure le cas où les données ne sont pas indépendantes. Chaque seuil a été déterminé dans le but de contrôler un risque de fausse alarme sous le régime pré-changement, par la fixation d'une probabilité tolérée α . La définition du risque contrôlé diffère suivant le seuil :

- Pour le Seuil-CW, le risque est lié à la densité discrète α_t de la variable instant d'alarme T ;
- Pour le Seuil-CE, le risque est lié au score local $M_n(\delta, q)$ de la W-statistique de CUSUM sur l'intervalle $[1, n]$;
- Pour le Seuil-IEC, le risque est lié au taux instantané conditionnel de fausse alarme λ_t^0 (taux de saut de T) ;
- Pour le Seuil-IE, le risque est lié au quantile empirique de la W-statistique de CUSUM ; et ainsi majore la densité α_t de T .

Les performances de détection ont été évaluées sur des données simulées en estimant, dans un premier temps, les taux instantanés conditionnels de fausse alarme λ_t^0 et de détection λ_t^1 . Et dans un second temps, en estimant sous H_1 , le délai moyen de détection ADD en fonction du temps moyen entre fausses alarmes $MTBFA = 1/\lambda^0$ estimé sous H_0 . Pour une estimation correcte de l' ADD et de la $MTBFA$, nous avons utilisé une analyse de survie car les observations sont censurées par la limite d'observation. Et le modèle de survie est construit sous l'hypothèse d'un taux d'alarme conditionnel constant λ^0 .

Les différents seuils de détection ont été évalués sous trois principaux modèles de simulation. Dans le premier, les données sont indépendantes de distribution

gaussienne. Dans le second, les données sont autocorrélées de processus autorégressif. Dans le troisième, les données sont indépendantes de distribution gamma. Nous avons examiné la détection de rupture sur la moyenne et sur la variance. Nous avons également évalué la sensibilité des résultats dans le cas où le paramètre de variance du signal n'est pas spécifié avec précision (mal-estimé). Enfin, nous avons proposé d'évaluer l'impact d'une erreur dans le choix de la distribution des données pour deux différents scénarios : violation de l'indépendance ou de la normalité des données.

Les résultats ont montré que :

- Les performances des différents seuils de détection sur la moyenne et sur la variance sont comparables. Nous avons le même comportement et la même tendance des résultats.
- Les seuils empiriques sont plus efficaces (délai plus petit) dans le premier modèle où les données sont indépendantes que dans le second où ils ne le sont pas. En revanche, le Seuil-CW non empirique est relativement plus efficace et compétitif dans le second modèle.
- En ce qui concerne la détection, les performances des seuils sont peu sensibles à une mis-estimation du paramètre de variance car le délai de détection n'est pas vraiment affecté. En revanche, nous risquons une augmentation (respectivement une diminution) des fausses alarmes en cas de sous-estimation (respectivement surestimation).
- La performance des seuils semble être robuste même si une erreur est commise dans le choix de la distribution des données, pour le cas de violation de l'indépendance des données, comme pour le cas de violation de leur normalité.
- Le taux de fausse alarme estimé à chaque fois par le Seuil-IEC est exactement le risque α qui a servi à sa construction. Le Seuil-IEC ainsi construit permet de contrôler la distribution de la variable T par le contrôle de son taux de saut λ^0 . En perspective, il est intéressant d'étudier le cas où le taux de saut de T est non constant.
- Le Seuil-IEC et le Seuil-IED donnent les meilleures performances sur les données simulées. Ils établissent un compromis entre le délai de détection et le niveau de fausse alarme. Le Seuil-IEC est plus performant que le Seuil-IED car il minimise le délai moyen de détection ADD .
- La règle d'arrêt corrigée est efficace pour réduire le taux de fausse alarme. Elle peut être utilisée pour la correction des seuils qui ne respectent pas le risque toléré α , comme le Seuil-CE dans le modèle 1. Voir la Figure 4.12 ci-après où nous présentons l'exemple de la correction du Seuil-CE en utilisant la règle d'arrêt corrigée avec $c = 2$ (Seuil-CE/c2) dans le modèle 1 et pour $\alpha = 0.02$. Le Seuil-CE/c2 devient concurrent des Seuils IEC et IED. Il ne dépasse plus le α toléré et estime un délai moyen de détection comparable à ceux de IEC et IED.

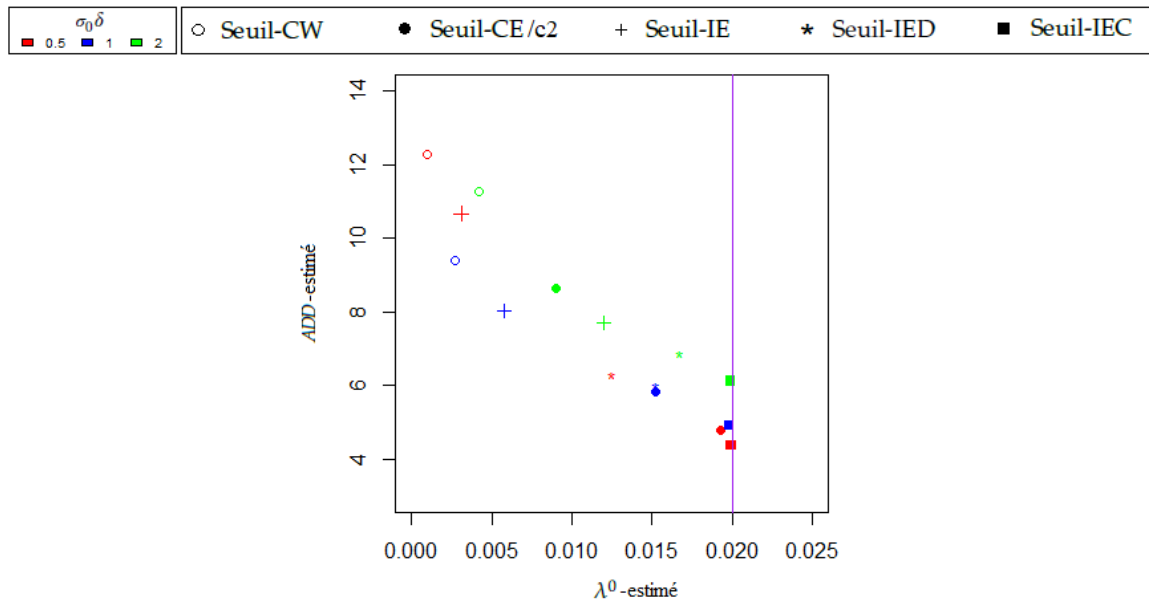


FIGURE 4.12 – Résultats de l' $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus en utilisant le Seuil-CE corrigé avec $c = 2$ (Seuil-CE/c2) et les autres seuils non corrigés (utilisant la règle d'arrêt classique $c = 1$). Les résultats ont été obtenus sous le Modèle 1 pour $\alpha = 0.02$ et selon l'objectif de détection sur la moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$.

Si nous analysons les résultats de cette étude dans la perspective d'appliquer les Seuils -IEC ou -IED basés sur la simulation à des données réelles, nous devons garder à l'esprit que pour générer des seuils basés sur la simulation, il faut déterminer la distribution de pré-changement. Cela doit être fait à partir des données. Notez que dans le cas réel, la série d'observations n'est probablement pas une séquence de variables indépendantes.

D'un point de vue pratique, le Seuil-IEC n'est pas applicable; sa construction inéluctablement réursive est très contraignante. Nous avons vu lors de sa construction (section 2.2.3) que d'une part, nous devons effectuer un grand nombre de simulations à chaque instant t pour déterminer le Seuil-IEC au temps t ; pour un traitement de données en temps réel (on-line), cela est difficilement réalisable. D'autre part, même pour un B initial très grand le nombre de trajectoires à disponibles pour l'estimation diminue avec t , cela rend le seuil caduque pour une utilisation de longue surveillance dans le temps.

En effet, nous recommandons d'utiliser le Seuil-IED car il est beaucoup plus facile/rapide à déterminer et à utiliser; comme nous l'avons vu dans la Figure 2.4, il n'utilise que le début de la trajectoire du Seuil-IE. Il est donc très facile à calculer et à mettre à jour avec de nouvelles informations.

DEUXIÈME PARTIE

*Détection de ruptures dans les signaux EMG de
l'activité musculaire du trapèze supérieur*

Introduction

Dans cette partie, nous proposons une méthodologie data-driven de détection de ruptures pour l'analyse de données réelles de santé. Notre méthodologie s'applique à des signaux temporels observés séquentiellement et qui présentent les caractéristiques suivantes : (1) nombre de sujets "faible"; (2) définition d'un état stable et d'une variabilité du signal qui dépend du sujet, en conséquence un fort effet sujet qui limite la base d'apprentissage.

Nous l'appliquons ici sur les données du laboratoire Sensory Motors Systems Lab, Dept of Health Sciences and Technology, Institute of Robotics and Intelligent Systems, ETH Zurich, Switzerland. Elles concernent les signaux temporels recueillis par électromyographie de surface (EMG) en mode bipolaire de l'activité musculaire du faisceau supérieur du trapèze de 30 sujets en bonne santé, sans cervicalgie chronique, à qui on a demandé d'effectuer des tâches bureautiques au cours d'une journée expérimentale. Le recueil des données s'inscrit dans le cadre d'une étude sur le risque de développement de la myalgie du muscle trapèze en milieu de travail [46, 10, 20]. Nous remercions vivement le Dr. Thomas Laeubli (Institute of Robotics and Intelligent Systems, ETH Zurich) pour nous avoir autorisés à utiliser les données de son étude et Mr. Pascal Wild (Institut de recherche INRS, France) pour leur mise à disposition.

Dans le but d'identifier les changements d'état musculaire dans l'activité du trapèze sur une période donnée, nous nous plaçons dans le contexte on-line où l'on admet que le signal EMG arrive point par point, en temps réel. La méthodologie de la détection séquentielle requiert le choix d'une statistique réursive, d'un seuil de détection et d'une règle d'arrêt. Nous allons utiliser la version semi-paramétrique de la statistique classique des sommes cumulées (CUSUM) basée sur la fonction de score (W-statistique donnée dans (1.16)) et le seuil instantané empirique dynamique (Seuil-IED) que nous avons recommandé pour les applications pratiques (voir section 2.2.5). Nous utilisons la règle d'arrêt corrigée (voir la section 2.4) dans le but de minimiser le taux de fausses alarmes. Le calcul de la statistique de score-CUSUM exige la connaissance des paramètres de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 du régime pré-changement, et la définition d'un objectif de détection (type et niveau de la rupture que l'on souhaite détecter).

Nous proposons dans ce travail, une procédure data-driven de détection de ruptures permettant l'estimation des paramètres du régime pré-changement (μ_0 , σ_0^2) d'une façon on-line sur le signal EMG. À chaque instant, l'algorithme permet de détecter une rupture d'augmentation ou de diminution pour le l'objectif de détection fixé. La procédure inclut également la construction du Seuil-IED sur le début du signal et son utilisation sur tout le signal de l'activité.

Notre objectif est en premier lieu la détection de changements de régime dans l'activité musculaire du trapèze sur le signal de chaque activité, et par la suite l'utilisation des résultats de détection obtenus pour donner une caractérisation de chaque type d'activité. Par ailleurs, nous allons comparer la performance de la méthodologie proposée en utilisant le Seuil-IED avec celle en utilisant le Seuil-CW (Constant de Wald).

Chapitre 5

Données électromyographiques - EMG

Ce chapitre est consacré à la présentation des données électromyographiques (EMG). Nous présentons d'abord dans la section 5.1, le contexte général de l'étude qui a permis le recueil des données. Ensuite, dans la section 5.2 nous présentons le signal EMG et le traitement de signal effectué avant son analyse. Par la suite, nous effectuons une analyse descriptive préliminaire des signaux recueillis. Enfin, nous terminons par la section 5.3 en posant la problématique et le plan d'analyse.

5.1 Contexte de recueil des données

Les données recueillies proviennent d'une étude sur la fatigue induite par le travail bureautique, plus précisément sur le faisceau supérieur du muscle trapèze. Toutes les expériences ont été réalisées au laboratoire Sensory Motors Systems Lab, Dept of Health Sciences and Technology, Institute of Robotics and Intelligent Systems, ETH Zurich, Switzerland. L'étude a été soutenue par la subvention 32003B_149645 du Swiss National Science Foundation (SNF) et a été approuvée par le comité d'éthique de l'ETH Zurich.

Trente jeunes participants (15 hommes, âge : $28,4 \pm 6,7$ ans et 15 femmes, âge : $29,7 \pm 9,1$ ans) en bonne santé, sans cervicalgie chronique ont participé à une étude en laboratoire simulant une journée de travail sur ordinateur.

Dans la session expérimentale, comme l'illustre la Figure 5.1, les participants ont effectué cinq activités de travail (Act) d'une durée de 50 minutes (périodes vertes), chacune séparée de l'autre par une pause de 10 minutes pour permettre un repos musculaire avant l'activité suivante. Les cinq activités étaient : "Puzzle", "Solitaire", "Stroop Test", "Typing task", "Typing task-elevated desk". Chacun des participants a effectué ces cinq activités dans un ordre aléatoire. La description détaillée de chaque activité est fournie dans l'annexe B.1. Les périodes TB (Test Battery), notées en bleu sur la Figure 5.1, ont été planifiées à des intervalles de temps spécifiques. Par exemple, sur les périodes "TB MO" du matin, les participants ont effectué les contractions de référence sous-maximales : tenir les bras en abduction

à 90° pendant 20s. Cette procédure a été répétée trois fois, les occurrences séparées par une pause de 40s. Le "TB MO" de chaque participant a été utilisé pour normaliser le signal EMG enregistré sur la journée expérimentale.

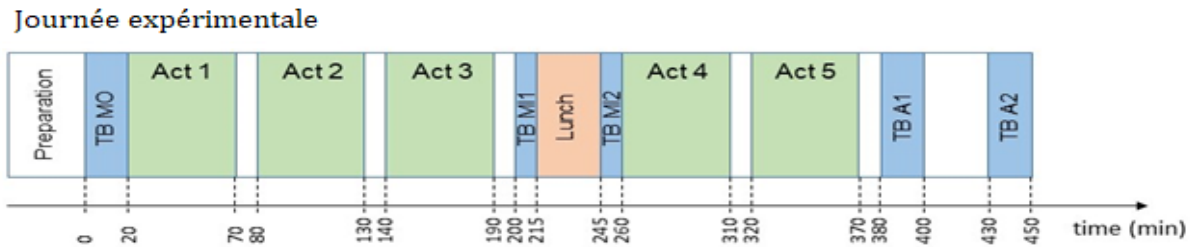


FIGURE 5.1 – Périodes d’activités et mesures effectuées pendant la journée expérimentale. Act : working Activity ; TB : Test Battery.

5.2 Signal EMG

L’activité du faisceau supérieur du muscle trapèze a été enregistrée par électromyographie de surface en mode bipolaire. Des électrodes sans fil ont été placées sur la peau en regard de ce muscle. L’enregistrement du signal a été effectué tout au long de la journée expérimentale, déjeuner inclus. Le signal a été traité par RMS (Root Mean Square) et étalonné par rapport au signal enregistré lors de la période "TB MO".

5.2.1 Traitement du signal

Phase 1

Cette première phase de traitement du signal a été effectuée par le laboratoire qui a réalisé l’étude et collecté les données. Dans cette partie, le signal EMG brut a été traité de la façon suivante selon quatre phases :

- Initialement, dans le but de supprimer les bruits de résonance captés par les électrodes, les signaux bruts ont été filtrés passe-bande avec un filtre de deuxième ordre, et les interférences sur les lignes électriques ont été supprimées avec la technique d’interpolation spectrale.
- Le RMS (Root Mean Square) a été calculé par la moyenne quadratique du signal EMG, comme donné par la formule (5.1), sur des intervalles de temps de $T = 250$ ms (millisecondes). Le RMS permet de détecter les irrégularités d’aspects du signal EMG (variation rapide de l’activité musculaire).

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt} \quad (5.1)$$

- Les RMS obtenus précédemment ont été normalisés par rapport à l'activation Electrique Volontaire de Référence (RVE) correspondant aux contractions de référence sous-maximales. La valeur RVE a été calculée comme la RMS moyenne sur des fenêtres de 10 secondes de l'enveloppe EMG stable sur les trois contractions de référence effectuées dans la période "TB MO".

C'est le signal RMS normalisé par le RVE qui nous a été fourni comme la variable reflétant l'activité musculaire.

Nous donnons à titre d'exemple le signal du sujet 1 dans la Figure 5.2. L'ordre des cinq activités effectuées par ce sujet est le suivant : "Puzzle, Solitaire, Typing task-elevated desk, Typing task, Stroop Test". Les parties (A) et (B) montrent respectivement le signal longitudinal RMS-RVE du sujet sur toute la journée expérimentale et un zoom sur la première activité.

Une période d'activité dure 50 minutes, ce qui correspond à 12000 points (elle est délimitée par des lignes noires pleines). Après chaque activité, on retrouve une pause de 10 minutes, ce qui correspond à 2400 points. Nous donnons ci-dessous dans le Tableau 5.1, le calcul de quelques statistiques descriptives sur les deux signaux. Nous observons comme sur toute la journée expérimentale, le signal de la première activité possède une étendue de mesure (Max - Min) très large et une forte variabilité. La moyenne ne bouge pas trop entre les deux signaux de ce sujet.

TABLE 5.1 – Statistiques descriptives du signal calculées sur la journée expérimentale et sur la première activité du sujet 1.

Signal	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3st Qu.	Max.	Var
Toute la journée	0.11	3.13	6.84	8.8	10.53	158.37	109.75
Première activité (Puzzle)	0.21	4.86	7.96	8.06	10.91	34.77	18.60

Phase 2

La variable RMS-RVE normalisée du signal EMG qui nous a été transmise couvre une longue période (12000 points pour toute activité de 50 mn), avec une forte variabilité (voir la Figure 5.2 et le Tableau 5.1). Dans le but de faciliter le processus de détection de ruptures, nous avons effectué un deuxième traitement du signal, qui comprend les deux transformations suivantes :

Transformation Logarithmique : nous avons appliqué la fonction Log sur le signal RMS-RVE de chaque sujet, dans le but de se libérer des unités de mesure relatives à chaque sujet. C'est aussi utile pour réduire la variabilité des données en rapprochant les valeurs extrêmes pour obtenir un signal de distribution moins étendue.

Lissage : nous avons appliqué un lissage en calculant la moyenne par lots successifs de $R = 4$ points (lissage sur 1 seconde). A la fin du lissage, l'activité de 50 minutes correspond à 3000 points.

Nous présentons sur la Figure 5.3, le signal RMS-RVE de la première activité du sujet 1 avec la transformation logarithmique. (A) et (B) montrent respectivement

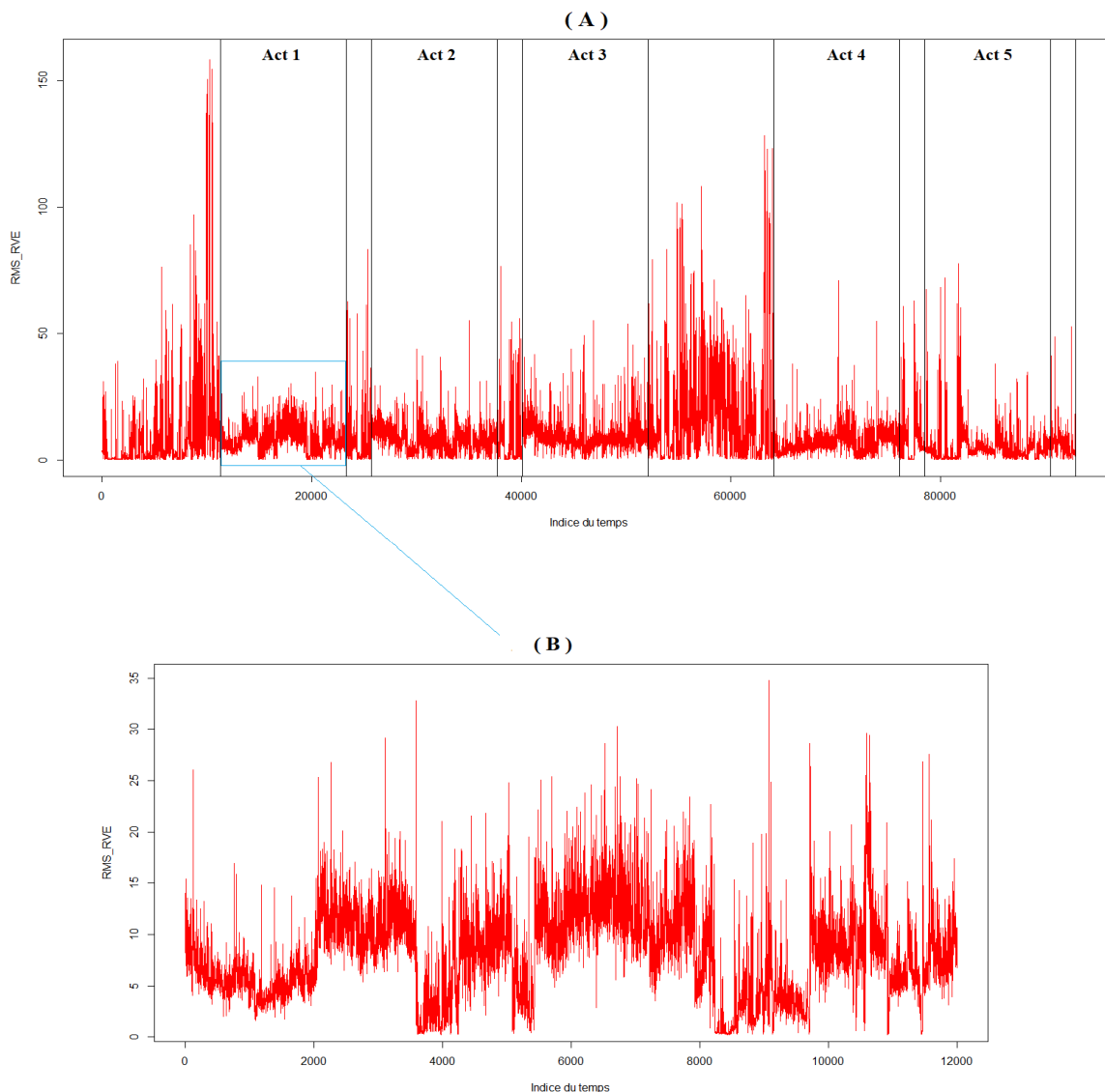


FIGURE 5.2 – Signal RMS-RVE du sujet 1. (A) : sur toute la journée expérimentale, activités, pauses et déjeuner inclus. (B) : focus sur la première activité (Puzzle). Les périodes d'activité sont délimitées par des lignes noires.

le signal sans le lissage et avec le lissage sur 1 seconde. Nous donnons dans le Tableau 5.2 quelques statistiques descriptives calculées respectivement sur les deux signaux de la partie (A) et (B). Nous observons que le lissage permet d'atténuer les valeurs extrêmes, mais les autres paramètres sont presque identiques. Notons aussi que les ruptures que l'on semblait distinguer dans (A), restent présentes dans (B). Pour cela, nous allons dorénavant travailler sur le signal lissé.

TABLE 5.2 – Statistiques descriptives calculées sur le signal de la première activité du sujet 1, Log-transformée non-lissée et lissée sur 1s.

Signal	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3st Qu.	Max.	Var
Act 1 Log-transformée non-lissée	-1.55	1.58	2.07	1.86	2.39	3.55	0.64
Act 1 Log-transformée lissée sur 1s	-1.34	1.60	2.08	1.86	2.37	3.23	0.57

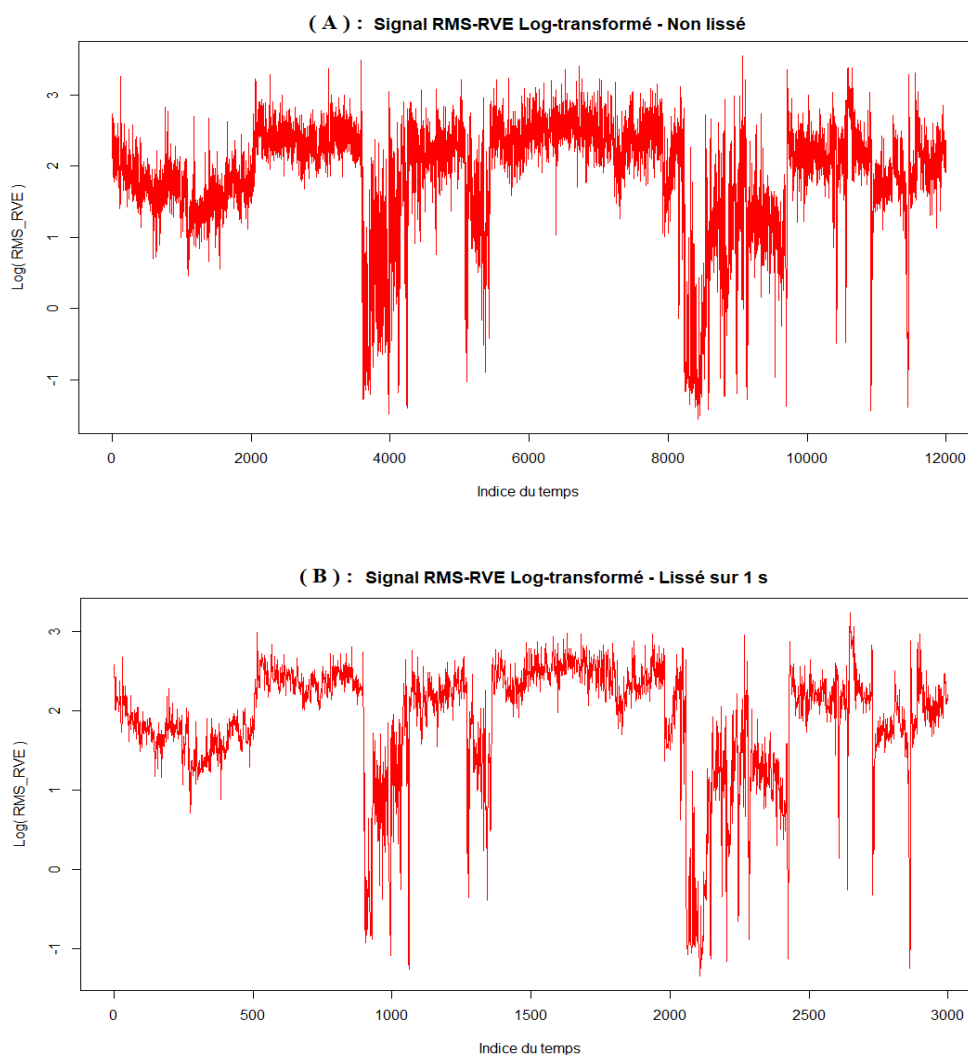


FIGURE 5.3 – Signal RMS-RVE Log-transformé de la première activité du sujet 1. (A) : signal non-lissé. (B) : signal lissé- 1s.

5.2.2 Description du signal

Nous présentons ici quelques statistiques descriptives calculées sur le signal EMG obtenu après le traitement, c'est-à-dire le signal RMS-RVE Log-transformé et lissé sur 1 seconde, noté dorénavant par X . Nous nous intéressons aux signaux des cinq activités, données avec leurs abréviations respectives dans le Tableau 5.3.

TABLE 5.3 – Activités et leurs abréviations respectives.

Activité	Abréviation
Typing task elevated desk	TextH
Typing task	Text
Puzzle	Puzl
Solitaire	Sol
Stroop Test	Str

Le Tableau 5.4 et la Figure 5.4 présentent respectivement des statistiques descriptives et boxplots calculés par activité sur les signaux de 29 sujets. Le sujet 13 a été exclu de l'étude pour manque d'informations sur le déroulement de la journée.

TABLE 5.4 – Statistiques descriptives des cinq activités calculées sur 29 sujets.

Act	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3st Qu.	Max.	Var
TextH	-1.52	2.71	3.39	3.12	3.83	6.22	1.42
Text	-1.35	1.86	3.21	2.72	3.72	6.61	2.11
Puzl	-1.34	1.28	2.59	2.37	3.51	6.38	2.17
Sol	-1.50	1.26	2.60	2.29	3.36	5.89	1.84
Str	-1.44	0.84	2.40	2.11	3.37	6.72	2.39

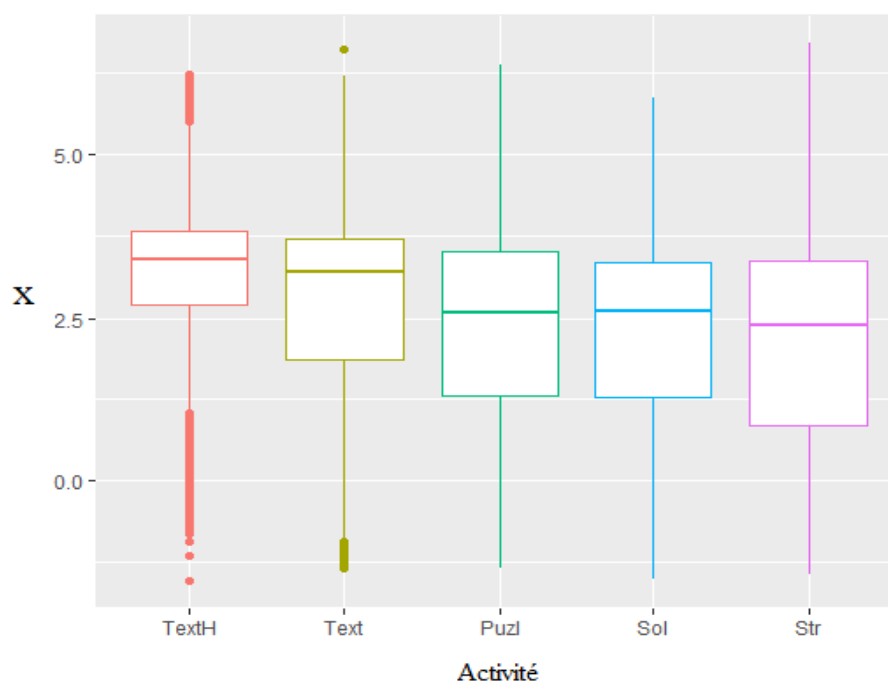


FIGURE 5.4 – Boxplots des signaux de 29 sujets, donnés par activité.

Une observation rapide du Tableau 5.4 et de la Figure 5.4 permet de constater un effet activité sur le signal EMG. En effet, nous pouvons distinguer deux activités se démarquant statistiquement des autres et donnant des valeurs différentes :

l'activité "TextH" donnant la moyenne la plus élevée, avec la plus faible variabilité par rapport aux autres, et l'activité "Str" qui donne la moyenne la plus faible, avec la plus importante variabilité. Les trois autres activités donnent des valeurs intermédiaires. Nous pouvons voir dans la Figure 5.5, la différence entre les signaux des deux activités "TextH" et "Str" du sujet 1. Les ruptures semblent plus nettes, avec de fortes amplitudes de changement (saut) dans le signal de l'activité "Str" par rapport à "TextH".

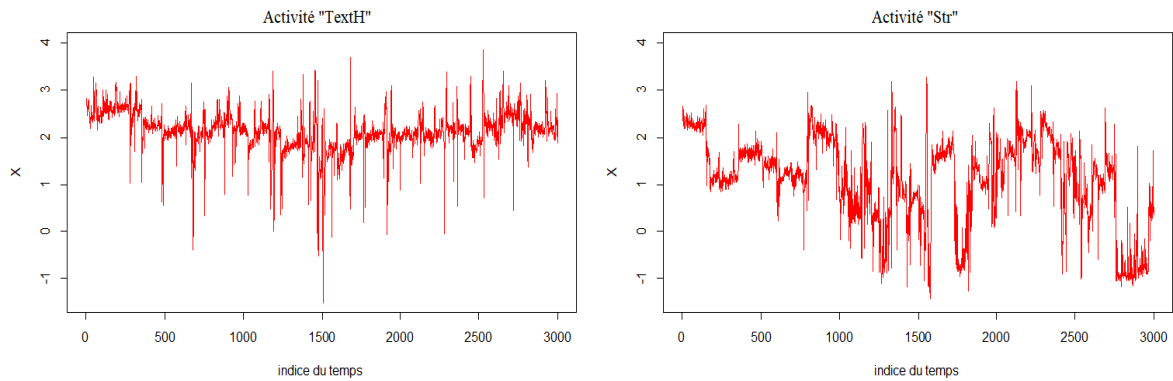


FIGURE 5.5 – Signaux des activités "TextH" et "Str" du premier sujet.

La Figure 5.6 présentant les boxplots par sujet, à titre d'exemple des deux activités "TextH" et "Str", montre qu'il y a également un effet sujet. Par exemple, nous pouvons clairement voir que le sujet 3 (resp. 8) a un signal moins (resp. plus) élevé

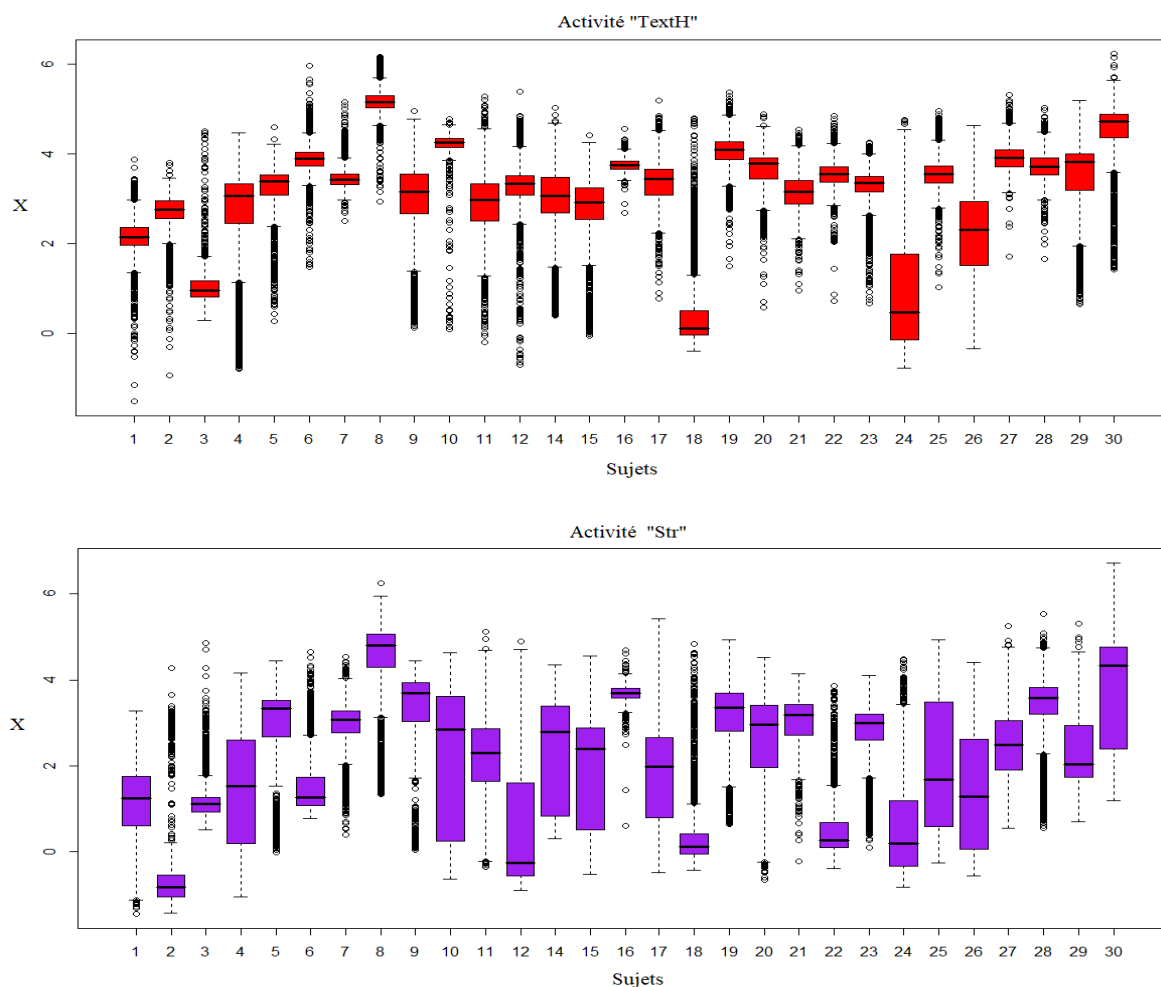


FIGURE 5.6 – Boxplots des activités "TextH" et "Str" donnés par sujet.

que les autres sujets. Le signal du sujet 16 a un niveau élevé avec peu de variabilité dans les deux types d'activité, alors que le sujet 24 présente un niveau faible mais avec une forte variabilité. Dans la Figure 5.7 ci-dessous, nous pouvons effectivement voir que les signaux du sujet 3, soit dans "TextH" ou dans "Str", ont des niveaux plus bas par rapport aux signaux du sujet 8 respectivement dans les deux activités.

Cette analyse préliminaire du signal EMG montre une variabilité inter-sujet importante quelle que soit l'activité. Par conséquent, l'état normal "régime pré-changement" du muscle de trapèze est relatif à chaque sujet et à chaque type d'activité. En effet, dans l'objectif de détecter des ruptures dans le signal EMG, le traitement doit être effectué par sujet et par activité.

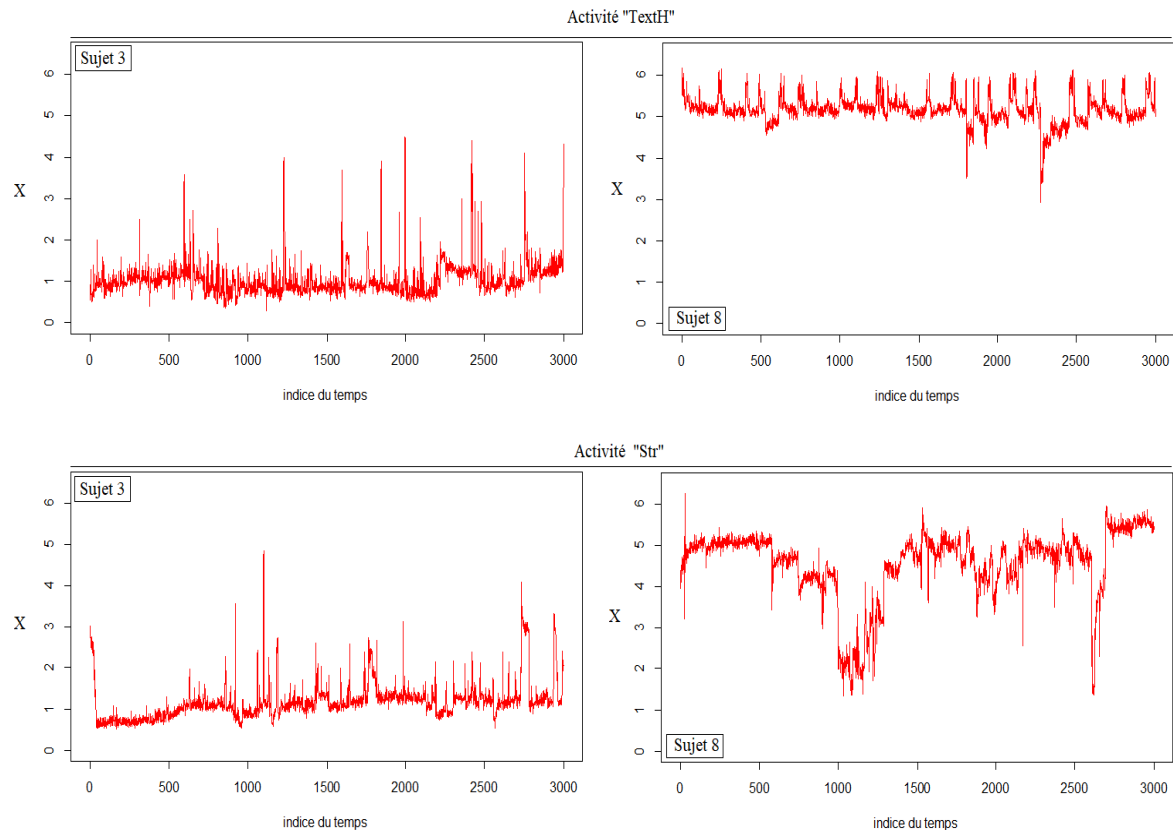


FIGURE 5.7 – Signaux des sujets 3 et 8 sur l'activité "TextH" et "Str".

5.3 Problématiques

Le contexte de notre étude est basé sur l'hypothèse suivante : un niveau de sollicitation musculaire moindre (niveau bas du signal EMG) associé à une variabilité élevée contribuerait à réduire l'apparition d'une fatigue musculaire et donc diminuerait le risque d'apparition de trouble musculo-squelettique (TMS) [1, 9, 34].

L'analyse effectuée dans la section précédente 5.2.2 nous amène à dire que l'activité "TextH" est l'activité qui peut engendrer le plus de fatigue musculaire. À l'opposé, dans l'activité "Str", on peut distinguer des changements de régime qui peuvent être interprétés comme des changements de niveau d'activité musculaire ; les régimes les plus bas étant les périodes où le muscle de trapèze est le moins sollicité, favorisant ainsi un repos musculaire. Notons également que le nombre de changements dans l'activité musculaire peut être interprété comme la variabilité du signal EMG.

D'autre part, la question de la caractérisation de chacune des cinq activités nous a aussi été posée.

Plan d'analyse

Dans un premier temps, notre objectif est la détection de changements d'état musculaire au sein d'une activité. C'est-à-dire, nous allons chercher sur le signal de chaque activité d'un participant, des ruptures de diminution qui évoqueraient une réduction de la sollicitation ou des ruptures d'augmentation qui évoqueraient au contraire une augmentation de la sollicitation. C'est l'objet du chapitre 6.

Dans un second temps, nous utiliserons les résultats de détection obtenus dans chaque activité de chaque sujet pour donner une caractérisation de chaque type d'activité. C'est l'objet du chapitre 7.

Remarque 11. L'analyse du signal EMG de cette partie a été effectuée en discussion avec Mr. Pascal Wild et Mme. Clarisse Gaudez, respectivement statisticien et médecin spécialiste des troubles musculo-squelettiques à l'INRS.

Chapitre 6

Détection de changements d'état musculaire

Dans ce chapitre, nous allons traiter séparément et de manière on-line le signal de chaque activité, et allons adapter la méthodologie de détection séquentielle, présentée dans la première partie, pour détecter les ruptures d'augmentation et de diminution présentes dans le signal.

La méthodologie de détection séquentielle requiert le choix d'une statistique réursive, d'un seuil de détection et d'une règle d'arrêt. Nous allons utiliser la statistique de CUSUM basée sur le score et le seuil instantané empirique dynamique (Seuil-IED) que nous avons recommandé pour les applications pratiques (voir section 2.2.5). Quant à la règle d'arrêt, nous utilisons la règle corrigée (i.e. une rupture est détectée si seulement si la W-statistique dépasse le seuil pendant un temps c prédéterminé) que nous avons également proposé pour réduire le taux de fausses alarmes (voir section 2.4).

Nous avons vu précédemment que par définition, l'utilisation de la W-statistique de CUSUM basée sur le score exige la connaissance des paramètres de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 du régime pré-changement, et la définition d'un objectif de détection (q, δ) : type et niveau de la rupture recherchée. Par ailleurs, la construction du Seuil-IED par simulation exige la connaissance de la distribution du régime pré-changement du signal, en particulier, des paramètres μ_0 et σ_0^2 de ce régime considéré comme l'état normal du sujet dans l'activité.

Dans ce qui suit, nous présentons dans la section 6.1 la procédure de détection data-driven que nous proposons pour détecter des changements de régime dans l'activité musculaire du trapèze des participants. La procédure permet l'estimation on-line des paramètres de pré-changement (μ_0, σ_0^2) sur le signal. À savoir, les paramètres sont estimés sur une partie des données au début du signal et ré-estimés à chaque détection. La procédure inclut également la construction du Seuil-IED sur le début du signal (première période d'estimation) et son utilisation tout au long de l'activité. L'idée est de considérer que le début de chaque activité, après les 10 minutes de repos et détente musculaire, est l'état normal du muscle, relatif au sujet et au type d'activité effectuée. Nous détaillons d'abord dans la section 6.1.1 l'algorithme de détection data-driven en utilisant un seuil donné $(h_t)_{t \geq 1}$. Puis dans la section 6.1.2, nous détaillons la construction du Seuil-IED (instantané empirique

dynamique). Dans la section 6.2, nous présentons en détail les résultats de détection obtenus sur les cinq activités du sujet 1 en utilisant le Seuil-IED. Enfin, nous terminons par la comparaison de la détection du Seuil-IED avec celle du Seuil-CW (Constant de Wald).

6.1 Procédure de détection data-driven

6.1.1 Estimation des paramètres

L'algorithme de détection que nous proposons peut détecter des ruptures d'augmentation ou de diminution pour un objectif de détection fixé (rupture de moyenne et/ou de variance). L'algorithme intègre la période d'estimation des paramètres de pré-changement (μ_0, σ_0^2) au début du traitement et après chaque changement de régime (ou détection) : au départ ou à chaque détection, on ré-estime μ_0 et σ_0^2 sur une partie de données d'une longueur L définie à priori.

Dans chaque régime, la moyenne μ_0 est estimée par la moyenne empirique calculée sur les L premiers points (secondes) du régime. En ce qui concerne la variance σ_0^2 , elle est estimée par une méthode qui tient compte des estimations antérieures à un régime donné. Au début du signal, elle est estimée par la variance empirique $\hat{s}^2[0]$ sur les L premières secondes du premier régime. À la $k^{\text{ème}}$ détection, on calcule l'estimateur empirique $\hat{s}^2[k]$ sur les L premières secondes du régime et la variance sur le régime k est estimée par

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2[0] &= \hat{s}^2[0] \\ \hat{\sigma}_0^2[k] &= \frac{\hat{\sigma}_0^2[k-1] + \hat{s}^2[k]}{2}, \quad k \geq 1\end{aligned}$$

Nous détaillons ci-dessous dans l'Algorithme 6, la procédure de détection de ruptures avec ré-estimation des paramètres sur le signal EMG, en utilisant un seuil $(h_t)_{t \geq 1}$ donné.

Dans la pratique, nous devons donc fixer, a priori, un ensemble de paramètres pour pouvoir appliquer l'algorithme de détection. Cet ensemble comprend le choix de :

- La longueur des données d'estimation (L);
- L'objectif de détection (q, δ);
- Le temps d'attente de la règle d'arrêt corrigée (c).

À chaque transition, l'algorithme de détection comprend d'abord une période d'estimation de longueur L , puis la procédure de détection de rupture reprend sur la suite du signal. Lorsque la statistique dépasse le seuil et que la rupture est signalée, au temps T , nous considérons a posteriori que le régime a changé en $T - c$, de sorte que nous estimons les paramètres (μ_0 et σ_0^2) de ce nouveau régime à partir de $T - c$.

Algorithm 6 Pseudo-code détaillant la procédure de détection data-driven

Require: smoothed signal $x = \text{smoothing} [\log(\text{RMS-RVE})]$, level of requested change (q, δ) , length of estimation data L , waiting time c , detection threshold $(h_t)_{t \geq 1}$.

```

1: Initialization :  $Cpt = []$ ,  $Current_{\mu_0} = []$ ,  $Current_{\sigma_0^2} = []$ ,  $t = 1$ ,  $w_0 = 0$ ,  $Time = 0$ .
2: Estimation : empirical estimation of pre-change parameters
3: while there is new observation  $x_t$  do
4:   if  $t = L$  then
5:     Estimate  $\hat{\mu}_0 = \bar{x}_L = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i$ ; and  $s^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_i - \bar{x}_L)^2$ ;
6:     if  $Time = 0$  then  $\hat{\sigma}_0^2 = s^2$ ;
7:     else  $\hat{\sigma}_0^2 = (Current_{\sigma_0^2}[\text{size}(Current_{\sigma_0^2})] + s^2) / 2$ ;
8:     end if
9:     Save  $Current_{\sigma_0^2} = (Current_{\sigma_0^2}, \hat{\sigma}_0^2)$ ; and  $Current_{\mu_0} = (Current_{\mu_0}, \hat{\mu}_0)$ ;
10:    Let  $Time = Time + t$ ,  $t = 1$  and go to 15 : Detection;
11:  else
12:    Let  $t = t + 1$ ;
13:  end if
14: end while
15: Detection : testing the existence of change-point
16: while there is new observation  $x_t$  do
17:   Compute score function  $s_t(\delta, q; x_t)$ ;
18:   Compute statistics  $w_t(\delta, q) = \max(0, w_{t-1}(\delta, q) + s_t(\delta, q))$ ;
19:   if  $[w_t(\delta, q) \geq h_t]$  then
20:     Let  $j = 1$ ;
21:     while there is new observation  $x_{t+j}$  do
22:       Compute score function  $s_{t+j}(\delta, q; x_{t+j})$ ;
23:       Compute statistics  $w_{t+j}(\delta, q) = \max(0, w_{t+j-1}(\delta, q) + s_{t+j}(\delta, q))$ ;
24:       if  $[w_{t+j}(\delta, q) < h_{t+j}]$  then
25:         Let  $t = t + j + 1$  and Break;
26:       else
27:         if  $j = c$  then
28:           Detection at  $Time = Time + t$ ;
29:           Save the change-point  $Cpt = (Cpt, Time)$ ;
30:           Initialization  $t = 1$  and go to 2 : Estimation;
31:         end if
32:       end if
33:       Let  $j = j + 1$ ;
34:     end while
35:   else
36:     Let  $t = t + 1$ ;
37:   end if
38: end while

```

Nous montrons dans la Figure 6.1, un exemple de détection sur la moyenne de niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$. Dans celui-ci, $L = 90$, $c = 60$, avec le Seuil-CW fixé pour $\alpha = 0.01$ ($h^W = 4.6$). On signale l'alarme au temps $T = 306$, ce qui correspond à un changement de régime au temps $Cpt = 246$.

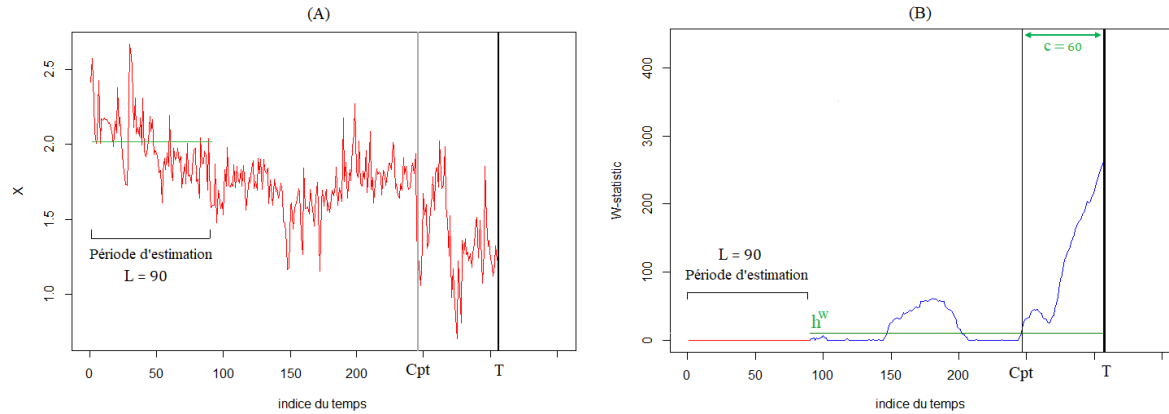


FIGURE 6.1 – Exemple de détection sur le signal EMG d'une activité. L'objectif de détection est sur la moyenne pour un niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$. (A) : le signal dans le premier régime avec la première période d'estimation $L = 90$. La moyenne estimée dans le premier régime est donnée par le segment vert ($\hat{\mu}_0 = 2$), et la variance estimée par $\hat{\sigma}_0^2 = 0.05$. (B) : W-statistique calculée dans le premier régime (ligne bleue), et signalement de la rupture produite à l'instant $Cpt = 246$ au temps d'arrêt $T = 306$.

6.1.2 Construction du Seuil-IED

Nous rappelons tout d'abord que le Seuil-IED (Instantané Empirique Dynamique) est un Seuil-IE (Instantané Empirique) qui se déplace dans le temps lorsque la statistique revient à sa valeur initiale zéro (voir section 2.2.5).

Pour construire le Seuil-IE par simulation, nous devons :

- (i) Poser l'hypothèse de la distribution du signal dans le régime pré-changement (état normal du muscle);
- (ii) Choisir la longueur du Seuil-IE à simuler.

En ce qui concerne le point (i), d'une part, nous avons constaté dans la section 4.2.3 de la première partie qu'en cas de présence de violation de l'hypothèse d'indépendance ou de normalité des données (données autocorrélées ou de distribution Gamma), le Seuil-IED construit avec des données gaussiennes indépendantes n'affecte pas la performance de la détection. Nous choisissons donc d'utiliser des variables gaussiennes i.i.d, dont il faut estimer la moyenne et la variance dans le régime pré-changement. D'autre part, sachant que chaque activité est précédée d'une pause de 10 minutes (repos et détente musculaire), il est donc raisonnable de considérer le signal au début de l'activité comme l'état normal du muscle de

chaque sujet. Par conséquent, nous allons utiliser la moyenne $\hat{\mu}_0[0]$ et la variance $\hat{\sigma}_0^2[0]$ estimées sur le début du premier régime pendant une longueur L . Notons que la longueur L a été fixée à 90 secondes (soit 1.5 minutes) en discussion avec les spécialistes.

Quant au point (ii), le Seuil-IE est aussi simulé sur une longueur L (ainsi nous avons simulé des séries de L points $\{X_t\}_{1 \leq t \leq L} \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_0[0], \hat{\sigma}_0^2[0])$). Pour justifier que le seuil est suffisamment long, nous avons étudié le temps de retour à 0 de la statistique du CUSUM sous le régime pré-changement (ici sur les $L=90$ premières secondes des cinq activités de chacun des sujets).

Nous donnons dans le Tableau 6.1, la description par activité de la variable "temps de retour à 0 de la statistique" calculée sur les signaux de tous les sujets.

Les résultats montrent que sous le régime pré-changement, la durée la plus longue sans revenir à 0 est de 72 secondes. Par conséquent, le Seuil-IE construit de $L = 90$ secondes est suffisamment long pour une utilisation dynamique (data-driven) sur tout le signal d'une activité (car 90 est supérieur à 72, la longueur maximale des excursions de la statistique sous le régime pré-changement).

TABLE 6.1 – Description du temps de retour à 0 de la statistique CUSUM sous le régime pré-changement ($L=90$ premières secondes de chaque activité). Le calcul a été effectué sur les signaux des 29 sujets de chaque activité. La statistique a été calculée pour un objectif de détection sur la moyenne de niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$.

Act	Count	Min.	P.1	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	P.99	Max.
TextH	2011	1	1	1	1	1.26	1	7	55
Text	1890	1	1	1	1	1.32	1	7.1	56
Puzl	2060	1	1	1	1	1.20	1	5.4	60
Sol	1858	1	1	1	1	1.32	1	9.4	72
Str	1811	1	1	1	1	1.35	1	8	69

Par les points suivants, nous résumons la construction du Seuil-IED sur le signal d'une activité,

- Estimer les paramètres de moyenne et de variance $(\hat{\mu}_0[0], \hat{\sigma}_0^2[0])$ sur la première période d'estimation de longueur L , supposée comme état normal du muscle (régime pré-changement);
- Simuler des données gaussiennes i.i.d $\{X_t\}_{1 \leq t \leq L} \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0^2)$;
- Construire le Seuil-IE de longueur L (voir la construction non-réursive : algorithme 3, section 2.2.4);
- Appliquer le Seuil-IED sur le reste du signal de l'activité (voir l'algorithme 5, section 2.2.5).

Remarque 12.

- Notons que le paramètre de départ μ_0 (moyenne du régime pré-changement) n'a pas d'impact sur la construction du seuil car la statistique du score utilise la variable centrée réduite par μ_0 et σ_0 (voir section 1.3.3). Le paramètre σ_0^2 (variance du régime pré-changement) quant à lui impacte le seuil. Le Seuil-IE dépend donc de δ , q et σ_0^2 .
- Le temps d'attente de la règle d'arrêt corrigée c doit obligatoirement être inférieur à la longueur du Seuil-IE ($c < L = 90$).

Nous présentons dans la Figure 6.2, un exemple de la construction du Seuil-IE sur les données de la première période d'estimation $L = 90$ de l'activité "Puzl" du premier sujet, pour $\alpha = 0.02$. En comparaison avec le Seuil-CW, fixé analytiquement pour le même α : $h^W = -\ln(0.02) = 3.91$, le Seuil-IE est beaucoup moins élevé. Par conséquent, lors de l'utilisation des deux seuils pour la détection de ruptures sur le signal de l'activité "Puzl", nous nous attendons logiquement à une détection plus rapide du Seuil-IED.

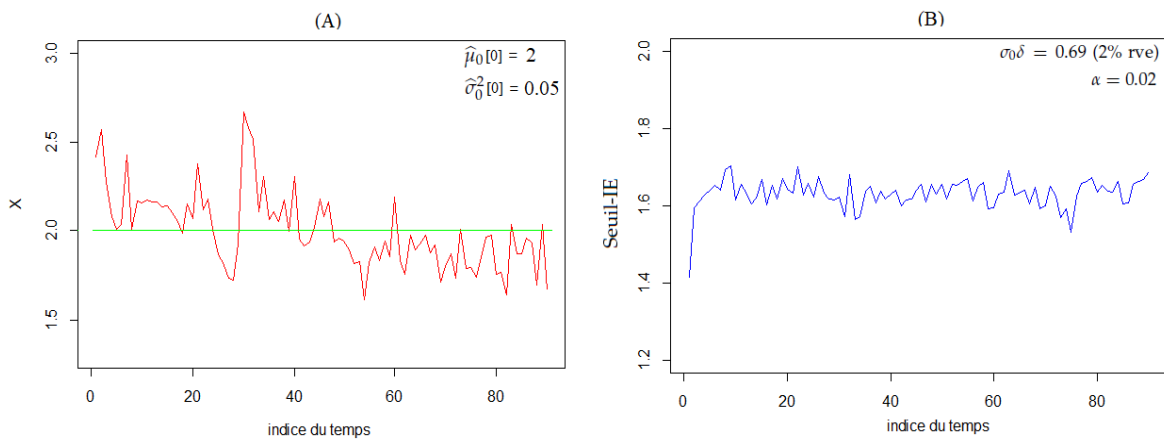


FIGURE 6.2 – Valeur du Seuil-IE construit sur les données de la première activité du sujet 1. (A) : signal de la première période d'estimation $L = 90$, avec les paramètres du régime pré-changement estimés $\hat{\mu}_0[0] = 2$ et $\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.05$. (B) : Seuil-IE construit pour $\alpha = 0.02$, et pour un l'objectif de détection sur la moyenne de niveau $\sigma_0 \delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$.

6.2 Résultats

Dans la section suivante 6.2.1, nous présentons les résultats de détection obtenus sur les signaux des cinq activités du sujet 1, traités séparément. Nous utilisons le Seuil-IED construit dans chaque activité et la procédure de détection data-driven proposée dans la section précédente 6.1, en choisissant le paramétrage suivant :

- La longueur des données d'estimation : $L = 90$ secondes (i.e. 1.5 minutes).
- L'objectif de détection : sur la moyenne de niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$.
- Le temps d'attente de la règle d'arrêt : $c = 60$ secondes (i.e. 1 minute).
- Le risque toléré de fausse alarme $\alpha = 0.02$.

Cet ensemble de paramètres a été fixé en discussion avec les spécialistes de l'étude. Dorénavant, nous utiliserons toujours ce paramétrage. À la section 6.2.2, nous comparons les résultats de détection obtenus par le Seuil-IED avec ceux obtenus par le Seuil-CW (i.e. $h^W(0.02) = 3.91$).

6.2.1 Détection avec le Seuil-IED

Les activités ont été effectuées par le premier sujet dans l'ordre suivant : "Puzl; Sol; TextH; Text; Str". Dans ce qui suit, nous présentons dans chaque figure les ruptures d'augmentation (resp. de diminution) détectées par des lignes verticales bleues (resp. grises). La moyenne estimée $\hat{\mu}_0$ dans chaque régime est représentée par une ligne horizontale verte.

- Activité 1 (Puzl)

La Figure 6.3 montre les ruptures de moyenne détectées sur l'activité 1 (Puzl). Nous détectons 16 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 7 de diminution). Les instants de ruptures et les paramètres $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\sigma}_0^2$ dans chaque régime sont donnés dans le Tableau 6.2. Le Seuil-IE construit et appliqué sur cette activité est celui présenté à la Figure 6.2.

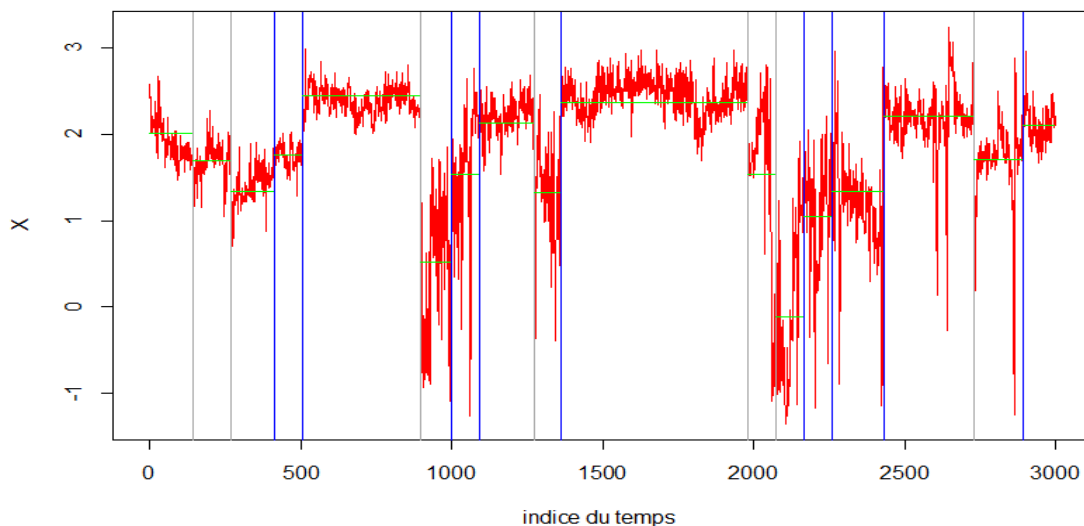


FIGURE 6.3 – Résultats de détection sur l'activité "Puzl" : 16 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 7 de diminution).

TABLE 6.2 – Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Puzl".

Ruptures détectées	↑					413	507			998	1093			1362			2167	2260	2432		2890
	↓		145	271				898				1271		1982	2074					2730	
Paramètres courants	$\hat{\mu}_0$	2.00	1.70	1.35	1.76	2.44	0.51	1.54	2.13	1.32	2.36	1.54	-0.12	1.06	1.34	2.20	1.71	2.10			
estimés	$\hat{\sigma}_0^2$	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.30	0.47	0.26	0.31	0.17	0.64	0.76	0.60	0.45	0.25	0.18	0.12			

- Activité 2 (Sol)

Le Seuil-IE construit et appliqué sur l'activité "Sol" est donné dans la Figure 6.4. Nous constatons qu'il est très différent de celui calculé pour l'activité "Puzl" (Figure 6.2). La Figure 6.5 montre les ruptures de moyenne détectées sur l'activité "Sol". Nous détectons 18 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 9 de diminution). Les instants de ruptures et les paramètres $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\sigma}_0^2$ dans chaque régime sont donnés dans le Tableau 6.3.

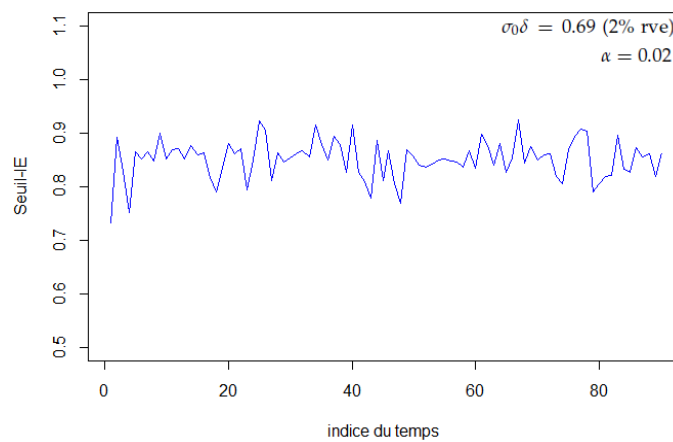


FIGURE 6.4 – Seuil-IE construit dans l'activité "Sol". Les paramètres du pré-changement sont estimés par $\hat{\mu}_0[0] = 2.47$ et $\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.03$.

TABLE 6.3 – Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Sol".

Ruptures détectées	↑			726		1033		1130				1462		1700				1976		2431		2614		2855	
	↓			608		835				1338		1609		1793		1884		2339		2522		2764			
Paramètres courants estimés	$\hat{\mu}_0$	2.47	1.67	2.27	0.84	1.43	2.25	1.18	1.87	1.48	1.82	1.10	0.53	1.86	0.72	1.65	1.36	1.95	1.35	2.20					
	$\hat{\sigma}_0^2$	0.03	0.06	0.07	0.18	0.31	0.24	0.30	0.20	0.35	0.43	0.40	0.64	0.49	0.86	0.66	0.75	0.46	0.50	0.30					

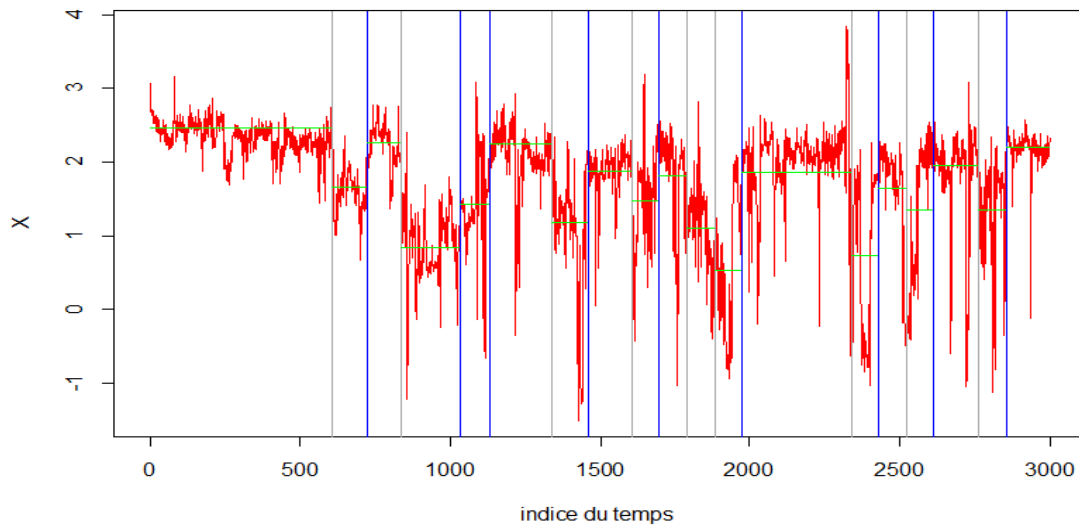


FIGURE 6.5 – Résultats de détection sur l'activité "Sol" : 18 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 9 de diminution).

- Activité 3 (TextH)

Le Seuil-IE construit et appliqué sur l'activité "TextH" est donné à la Figure 6.6.

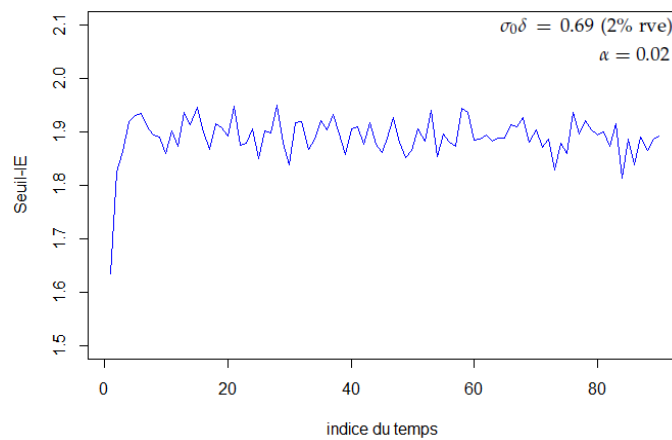


FIGURE 6.6 – Seuil-IE construit dans l'activité "TextH". Les paramètres sont estimés par $\hat{\mu}_0[0] = 2.59$ et $\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.05$.

La Figure 6.7 montre les ruptures de moyenne détectées sur l'activité "TextH". Nous détectons 8 changements d'activité musculaire (3 d'augmentation, 5 de diminution). Les instants de ruptures et les paramètres $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\sigma}_0^2$ dans chaque régime sont donnés dans le tableau 6.4.

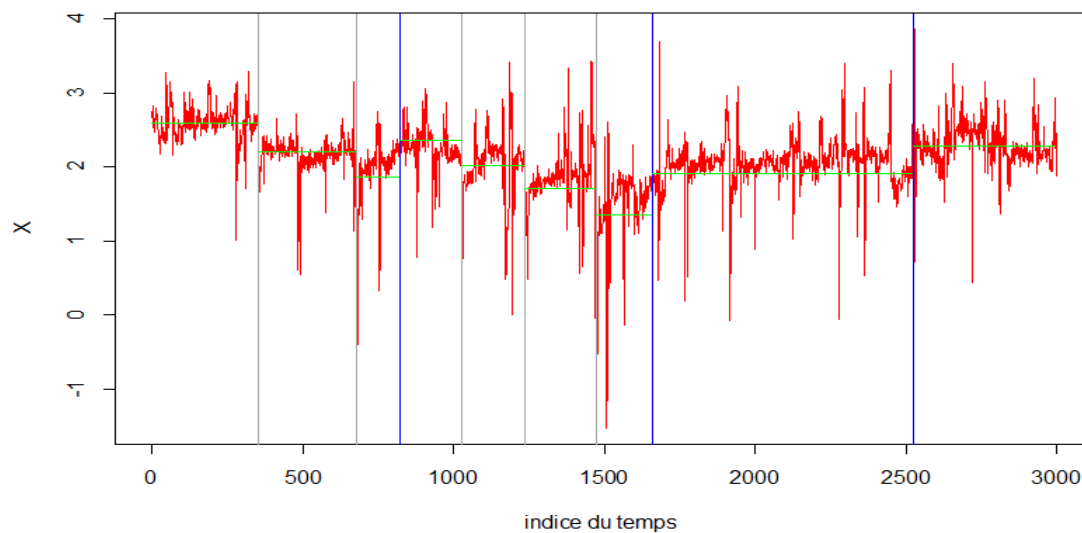


FIGURE 6.7 – Résultats de détection sur l'activité "TextH" : 8 changements d'activité musculaire (3 d'augmentation, 5 de diminution).

TABLE 6.4 – Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "TextH".

Ruptures détectées	↑	821				1660 2524			
	↓	353	678		1028	1236	1470		
Paramètres courants	$\hat{\mu}_0$	2.59	2.21	1.87	2.36	2.02	1.71	1.35	1.91
estimés	$\hat{\sigma}_0^2$	0.05	0.05	0.18	0.12	0.11	0.08	0.34	0.24

- Activité 4 (Text)

Le Seuil-IE construit et appliqué sur l'activité "Text" est donné à la Figure 6.8. La Figure 6.9 montre les ruptures de moyenne détectées sur l'activité "Text". Nous détectons 8 changements d'activité musculaire (5 d'augmentation, 3 de diminution). Les instants de ruptures et les paramètres $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\sigma}_0^2$ dans chaque régime sont donnés dans le Tableau 6.5.

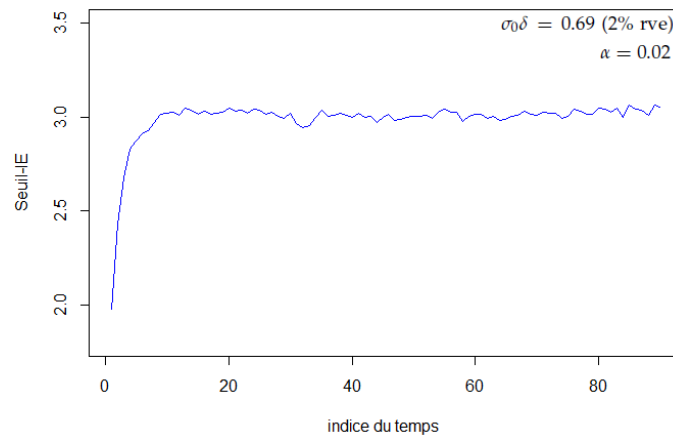


FIGURE 6.8 – Seuil-IE construit dans l'activité "Text". Les paramètres sont estimés par $\hat{\mu}_0[0] = 1.64$ et $\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.19$.

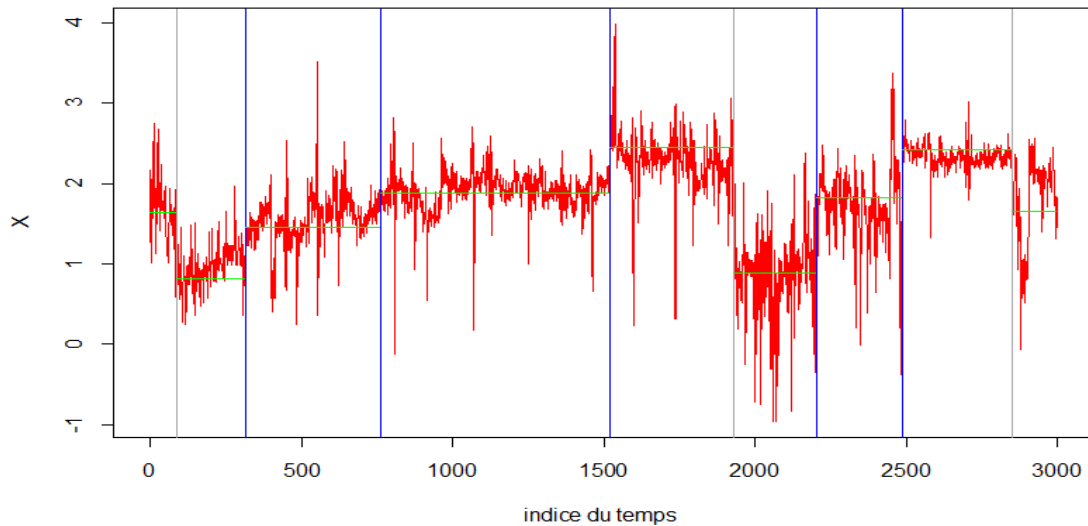


FIGURE 6.9 – Résultats de détection sur l'activité "Text" : 8 changements d'activité musculaire (5 d'augmentation, 3 de diminution).

TABLE 6.5 – Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Text".

Ruptures détectées	↑	318			761	1520	2206			2490
	↓	91			1929			2849		
Paramètres courants estimés	$\hat{\mu}_0$	1.64	0.81	1.47	1.88	2.45	0.88	1.83	2.43	1.66
	$\hat{\sigma}_0^2$	0.19	0.13	0.11	0.10	0.17	0.21	0.14	0.08	0.24

- Activité 5 (Str)

Le Seuil-IE construit et appliqué sur l'activité "Str" est donné à la Figure 6.10. La Figure 6.11 montre les ruptures de moyenne détectées sur l'activité "Str" du sujet 1. Nous détectons 19 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 10 de diminution). Les instants de ruptures et les paramètres $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\sigma}_0^2$ dans chaque régime sont donnés dans le Tableau 6.6.

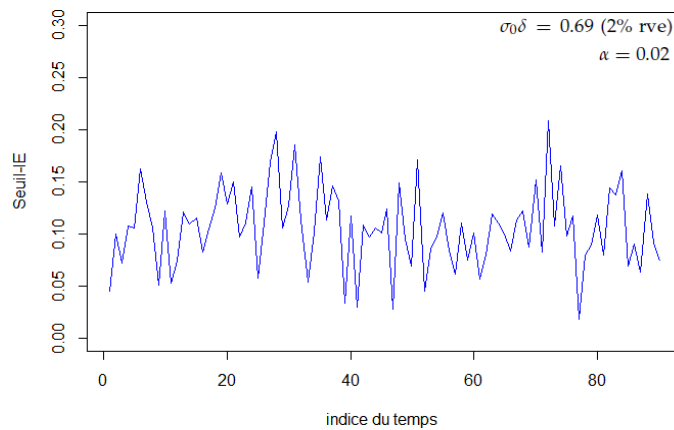


FIGURE 6.10 – Seuil-IE construit dans l'activité "Str". Les paramètres sont estimés par $\hat{\mu}_0[0] = 2.31$ et $\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.01$.

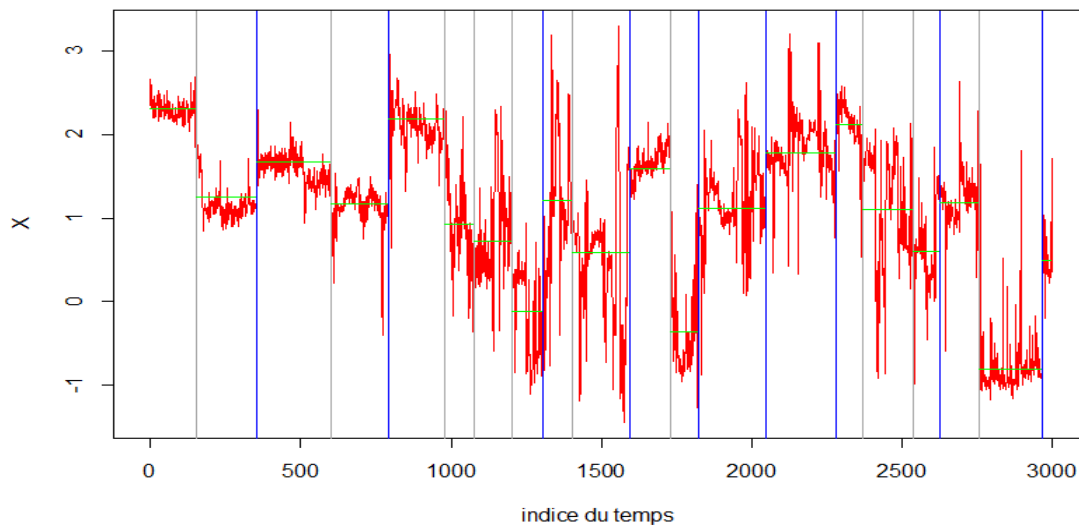


FIGURE 6.11 – Résultats de détection sur l'activité "Str" : 19 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 10 de diminution).

TABLE 6.6 – Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Str".

Ruptures détectées	↑	357		794		1303				1599		1825		2051	2281	2627			2965		
	↓	154		602		980	1077	1203	1400		1734						2372	2536	2756		
Paramètres courants	$\hat{\mu}_0$	2.31	1.25	1.67	1.16	2.18	0.93	0.72	-0.13	1.20	0.60	1.59	-0.38	1.12	1.78	2.12	1.11	0.60	1.19	-0.81	0.48
estimés	$\hat{\sigma}_0^2$	0.01	0.04	0.03	0.04	0.07	0.18	0.37	0.34	0.59	0.40	0.21	0.26	0.21	0.20	0.14	0.41	0.34	0.23	0.20	0.16

Analyse et synthèse

Concernant le Seuil-IE construit dans chaque activité pour un objectif de détection fixé ($\sigma_0\delta = 0.69$, $q = 1$), nous pouvons voir que le niveau du seuil est croissant en fonction de la variabilité estimée sur le premier régime $\hat{\sigma}_0^2[0]$. Le Seuil-IE de l'activité "Str" (voir Figure 6.10) a le niveau le plus bas, ce qui correspond à la variabilité estimée la plus faible ($\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.01$) par rapport aux autres activités (voir par exemple la Figure 6.8).

Concernant les résultats de détection, nous remarquons d'abord qu'il n'y a pas systématiquement d'alternance entre les ruptures d'augmentation et de diminution : plusieurs montées (resp. descentes) peuvent se succéder dans une activité.

Maintenant, en se focalisant particulièrement sur les résultats de détection des deux activités "TextH" et "Str" que nous avons distinguées dans la section 5.2.2 et en les comparant aux autres activités, nous remarquons que l'activité "TextH" donne très peu de ruptures (8 ruptures), avec des niveaux élevés de moyennes estimées et des amplitudes de sauts très faibles ; contrairement à l'activité "Str" qui présente beaucoup de ruptures (19 ruptures), des niveaux bas de moyennes et de fortes amplitudes de sauts.

En ce qui concerne les autres activités, on observe que "Text" donne le même nombre de rupture que "TextH", et avec des résultats de détection comparables, sauf pour les amplitudes de sauts qui sont un peu plus fortes sur "Text". On observe aussi que les résultats de l'activité "Sol" se rapprochent plutôt de "Str", en donnant le même nombre de rupture mais avec des niveaux de moyennes un peu plus élevés. L'activité "Puzl" donne beaucoup de ruptures (16 ruptures), avec des amplitudes de sauts importantes.

Nous avons réalisé le même travail de détection sur tous les sujets et observé les mêmes tendances dans chaque activité (voir les résultats dans l'annexe B.2).

Cette analyse nous amène à utiliser les résultats de détection sur une activité, à savoir, le nombre de ruptures qui est relatif à la variabilité du signal, la moyenne estimée dans chaque régime qui est relative à la sollicitation et l'amplitude de saut qui est relative à la variabilité et à la sollicitation, pour répondre à la question de la caractérisation des activités. C'est l'objet du chapitre 3.

6.2.2 Comparaison de la détection des Seuils IED et CW

Rappelons que nous ne possédons pas de gold-standard sur les signaux EMG de muscle que nous avons reçus, i.e. nous ne connaissons pas les vrais instants de rupture (changement d'activité musculaire). Ainsi, nous allons comparer la détection obtenue par le Seuil-IED avec celle du seuil de Wald (Seuil-CW, $h^W = -\ln(0.02) = 3.91$), le plus facile et rapide à déterminer.

La comparaison des seuils IED et CW consiste à calculer la différence de délais de détection (DDD "Detection Delay Difference") des ruptures détectées par les deux seuils : $DDD = DT^{CW} - DT^{IED}$, où DT "Detection Times" sont les instants de ruptures détectées.

En revanche, les deux seuils ne conduisent pas forcément au même nombre de détections de ruptures. Ainsi nous devons définir dans quel cas les deux détections correspondent à la même rupture. Nous rappelons que dans la règle d'arrêt utilisée, une rupture est détectée si la statistique dépasse le seuil de détection (passage dans un autre régime) pendant un temps $c = 60$ secondes. Il est donc cohérent de considérer qu'une rupture est détectée par les deux seuils si l'écart entre les deux détections est inférieur à 60 secondes. Pratiquement, lorsque l'un des seuils détecte une rupture à l'instant T , alors si le second seuil détecte une rupture dans un intervalle de temps $T + 60$, nous considérons que c'est la même rupture et nous calculons la différence de délai entre les deux détections. Sinon, nous considérons que la rupture a été manquée et nous nous arrêtons sans étudier le délai sur la suite du signal. Par exemple, dans le Tableau 6.7 ci-dessous donnant les instants de détection des deux seuils dans l'activité "Puzl" du sujet 1, nous pouvons voir que le Seuil-CW a détecté 15 ruptures, alors que le Seuil-IED en a détecté 16. C'est la détection N° 13 du Seuil-IED à l'instant 2260 qui n'a pas été détectée par le Seuil-CW ($2431 - 2260 > 60$). Par conséquent, à partir de la 13^{ème} détection, les détections qui suivent sont toutes décalées. Dans ce cas, nous arrêtons le calcul de la DDD à la 12^{ème} détection.

TABLE 6.7 – Exemple de la détection des seuils IED et CW sur l'activité 1 "Puzl".

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
DT^{CW}	146	271	415	507	898	1001	1112	1271	1364	1982	2075	2170	2431	2730	2891	-
DT^{IED}	145	271	413	507	898	998	1093	1271	1362	1982	2074	2167	2260	2432	2730	2890

Lorsque nous aurons calculé les DDDs entre les deux seuils sur une activité, nous pouvons finalement calculer la moyenne de la différence de délais de détection (ADDD "Average Detection Delay Difference").

Nous présentons ci-dessous, à titre d'exemple, les résultats de comparaison obtenus sur les cinq activités du sujet 1, dans l'ordre d'exécution.

- Activité 1 (Puzl)

Nous donnons dans le Tableau 6.8, les paramètres de comparaison (DDD et ADDD) entre les seuils IED et CW sur l'activité "Puzl". Les DDDs calculées sont toutes positives ou nulles; le Seuil-IED détecte les ruptures soit plus rapidement, soit aux mêmes instants que le Seuil-CW. Ainsi, en moyenne, le Seuil-IED détecte plus rapidement que le Seuil-CW (ADDD = 2.58 secondes).

TABLE 6.8 – Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Puzl" et les paramètres de comparaison (DDD et ADDD).

DT ^{CW}	146	271	415	507	898	1001	1112	1271	1364	1982	2075	2170	2431
DT ^{IED}	145	271	413	507	898	998	1093	1271	1362	1982	2074	2167	2260
DDD	1	0	2	0	0	3	19	0	2	0	1	3	NA
ADDD	2.58												

- Activité 2 (Sol)

Le Tableau 6.9 donne les paramètres de comparaison (DDD et ADDD) calculés dans l'activité "Sol". Ici, nous calculons la DDD sur les 8 premières détections; un décalage est observé à partir de la 9^{ème} détection. Les DDDs sont toutes supérieures ou égales à zéro. Le Seuil-IED détecte en moyenne plus rapidement que le Seuil-CW (ADDD = 1.25 secondes).

TABLE 6.9 – Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Sol" et les paramètres de comparaison (DDD et ADDD).

DT ^{CW}	610	729	835	1034	1132	1339	1462	1610	1860
DT ^{IED}	608	726	835	1033	1130	1338	1462	1609	1700
DDD	2	3	0	1	2	1	0	1	NA
ADDD	1.25								

- Activité 3 (TextH)

Le Tableau 6.10 présente les paramètres de comparaison sur l'activité "TextH". Ici, les seuils IED et CW détectent les mêmes ruptures. Et la DDD calculée à chaque détection est positive ou nulle. Sur cette activité aussi le Seuil-IED détecte en moyenne plus rapidement que le Seuil-CW (ADDD = 4.25 secondes).

TABLE 6.10 – Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "TextH" et les paramètres de comparaison (DDD et ADDD).

DT ^{CW}	353	678	830	1029	1236	1470	1683	2525
DT ^{IED}	353	678	821	1028	1236	1470	1660	2524
DDD	0	0	9	1	0	0	23	1
ADDD	4.25							

- Activité 4 (Text)

Le Tableau 6.11 présente les paramètres de comparaison sur l'activité "Text", où les deux seuils détectent les mêmes ruptures. Nous remarquons qu'à la 7^{ème} détection, le Seuil-CW détecte une seconde avant le Seuil-IED (DDD = -1). Sachant que le Seuil-IED construit et utilisé sur cette activité (Figure 6.8) est plus bas que le Seuil-CW ($h^W = 3.91$), ce retard particulier du Seuil-IED sur cette détection doit donc venir de l'estimation des paramètres du pré-changement (μ_0, σ_0^2) dans ce régime. À savoir, lors de l'utilisation du Seuil-CW (resp. du Seuil-IED), les paramètres ont été estimés sur les 90 premières secondes suivant la 6^{ème} détection au temps 2207 (resp. 2206). Cette seconde de différence a conduit à des estimations différentes dans les deux cas : $\hat{\mu}_0[6] = 1.81, \hat{\sigma}_0^2[6] = 0.13$ (resp. $\hat{\mu}_0[6] = 1.83, \hat{\sigma}_0^2[6] = 0.14$) lors de l'utilisation du Seuil-CW (resp. du Seuil-IED). Par conséquent, cela donne des valeurs de la statistique score-CUSUM différentes dans ce régime (car la statistique dépend des paramètres μ_0 et σ_0^2 estimés à chaque régime).

Malgré tout, sur toute l'activité le Seuil-IED détecte en moyenne plus rapidement que le Seuil-CW (ADDD = 0.62 secondes).

TABLE 6.11 – Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Text" et les paramètres de comparaison (DDD et ADDD).

DT ^{CW}	92	319	762	1521	1930	2207	2489	2849
DT ^{IED}	91	318	761	1520	1929	2206	2490	2849
DDD	1	1	1	1	1	1	-1	0
ADDD	0.62							

- Activité 5 (Str)

Le Tableau 6.12 présente les paramètres de comparaison sur l'activité "Str", où les deux seuils détectent les mêmes ruptures. Nous pouvons voir qu'à la 10^{ème} détection, le Seuil-CW détecte plus rapidement que le Seuil-IED (DDD = -2). Sur cette activité aussi, le Seuil-IED (voir Figure 6.10) est plus bas que le Seuil-CW, alors ce retard de détection du Seuil-IED est dû aux paramètres μ_0 et σ_0^2 estimés dans ce

régime. Le décalage de 23 secondes entre les deux détections a engendré deux estimations différentes : $\hat{\mu}_0[10] = 0.50, \hat{\sigma}_0^2[10] = 0.31$ (resp. $\hat{\mu}_0[10] = 0.60, \hat{\sigma}_0^2[10] = 0.40$) lors de l'utilisation du Seuil-CW (resp. du Seuil-IED).

Par contre, sur les 18 autres détections, le Seuil-IED détecte généralement (13 cas sur 18) plus rapidement que le Seuil-CW, avec une avance qui peut atteindre 39 secondes. Et les deux seuils détectent 5 ruptures aux mêmes instants. Par conséquent, en moyenne le Seuil-IED détecte plus rapidement que le Seuil-CW (ADDD = 7.79 secondes).

TABLE 6.12 – Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Str" et les paramètres de comparaison (DDD et ADDD).

DT ^{CW}	154	357	602	794	980	1080	1211	1317	1423	1597	1735	1827	2056	2295	2411	2539	2660	2760	2966
DT ^{IED}	154	357	602	794	980	1077	1203	1303	1400	1599	1734	1825	2051	2281	2372	2536	2627	2756	2965
DDD	0	0	0	0	0	3	8	14	23	-2	1	2	5	14	39	3	33	4	1
ADDD	7.79																		

Analyse et synthèse

Les résultats sur le sujet 1 montrent que les seuils IED et CW détectent généralement les mêmes ruptures sur une activité donnée. La comparaison de la détection en utilisant les deux seuils montre que la DDD est souvent positive ou nulle, sauf sur deux détections respectivement dans l'activité "Text" et "Str". Cela est expliqué par les valeurs des paramètres μ_0 et σ_0^2 estimés dans le régime en question ; à savoir des estimations différentes des paramètres engendrent des valeurs différentes de la statistique de détection.

Notons que sur tout le signal d'une activité, même dans le cas de "Text" ou "Str", le Seuil-IED détecte plus rapidement que le Seuil-CW. Sur l'activité "Text", le Seuil-CW détecte une fois avant le Seuil-IED avec un gain d'une seconde. Alors que le Seuil-IED détecte six fois avant le Seuil-CW avec un gain total de 6 secondes. Et sur "Str", le Seuil-CW détecte une fois avant le Seuil-IED avec un gain de 2 secondes. Par contre, le Seuil-IED détecte 13 fois avant le Seuil-CW avec un gain total de 150 secondes. Sur une détection, le Seuil-IED peut détecter jusqu'à 39 secondes avant le Seuil-CW.

Enfin, la différence de délais de détection moyenne (ADDD) calculée dans chaque activité du sujet 1 montre également que le Seuil-IED détecte en moyenne plus rapidement que le Seuil-CW.

Au préalable de la comparaison de la détection des seuils IED et CW sur les autres sujets, nous présentons d'abord dans le Tableau 6.13 une synthèse sur le nombre de détections obtenu par chacun des seuils sur les 29 signaux (correspondants aux sujets) de chaque activité. Nous pouvons voir que pour chacune des cinq activités, le nombre de détections donné par le Seuil-IED sur les 29 signaux traités est légèrement supérieur à celui donné par le Seuil-CW. Au total, sur 145

signaux traités (toutes les activités et sujets confondus), le Seuil-IED a détecté 1777 ruptures, et le Seuil-CW en a détecté 1724 (une différence de 53 détections).

Notons que parmi les 145 signaux, les deux seuils ont donné les mêmes détections sur 80 signaux, et ils n'ont donné aucune détection sur 4 signaux. Sur le reste des signaux où les deux seuils ont donné des détections différentes, sur 53 signaux, le seuil-CW a manqué au moins une détection qui a été signalée par le Seuil-IED; et sur 8 signaux, c'est le Seuil-IED qui a manqué au moins une détection signalée par le Seuil-CW.

TABLE 6.13 – Nombre de détections des seuils IED et CW sur les signaux des 29 sujets, donné par activité.

Act	$size(DT^{IED})$	$size(DT^{CW})$
TextH	266	254
Text	253	252
Puzl	388	374
Sol	453	437
Str	417	407
Total	1777	1724

Nous avons réalisé par la suite le travail de comparaison de la détection des deux seuils sur tous les sujets, pour analyser globalement le délai de détection. Nous présentons dans la Figure 6.12 ci-dessous, une synthèse des résultats obtenus par type d'activité, à savoir les différences de délais DDDs et leur moyenne ADDD calculées pour chaque sujet.

Tout d'abord, nous remarquons que les quatre signaux sur lesquels nous n'avons pas observé de détection par les deux seuils sont les signaux des activités "TextH", "Str" du sujet 16, "TextH" du sujet 10 et "Text" du sujet 21. Sur ces signaux, nous ne pouvons pas calculer bien entendu les critères de comparaison (DDD et ADDD).

Nous pouvons voir que quelque soit le type d'activité effectué, le paramètre de comparaison DDD obtenu est souvent positif ou nul. Il est négatif sur très peu de détections. Globalement, sur toutes les activités et sujets confondus, nous avons 1322 ruptures détectées par les deux seuils; la DDD est strictement positive (i.e. le Seuil-IED détecte plus rapidement que le Seuil-CW) sur 875 détections (66%), elle est nulle (i.e. les seuils IED et CW détectent avec la même vitesse) sur 420 détections (32%), et est négative (i.e. le Seuil-CW détecte plus rapidement que le Seuil-IED) sur 27 détections (2%).

Nous remarquons également que lorsque le Seuil-IED détecte avant le Seuil-CW ($DDD > 0$), la différence de délais DDD peut atteindre des valeurs élevées, allant jusqu'à 46 secondes. Par contre, lorsque le Seuil-CW détecte avant le Seuil-IED ($DDD < 0$), la différence de délais DDD ne dépasse pas 5 secondes, elle vaut dans la majorité des cas -1 ou -2 (23 cas sur 27).

L'ADDD tracée par une ligne dans chaque activité est toujours strictement positive. Cela veut dire que pour tout signal d'un participant enregistré dans n'importe quelle activité, constamment le Seuil-IED détecte en moyenne avant le Seuil-CW. En calculant la moyenne sur tous les sujets, l'ADDD vaut 3.7, 3.7, 2.6, 3.2 et 2.7

secondes respectivement sur les activités "TextH", "Text", "Puzl", "Sol" et "Str".

Au final, dans le cadre de la détection la plus rapide (QCD), le Seuil-IED fournit des performances de détection meilleures que celles du Seuil-CW car il détecte les ruptures plus rapidement. D'autre part, les deux seuils donnent des nombres de détections de ruptures comparables sur un signal donné.

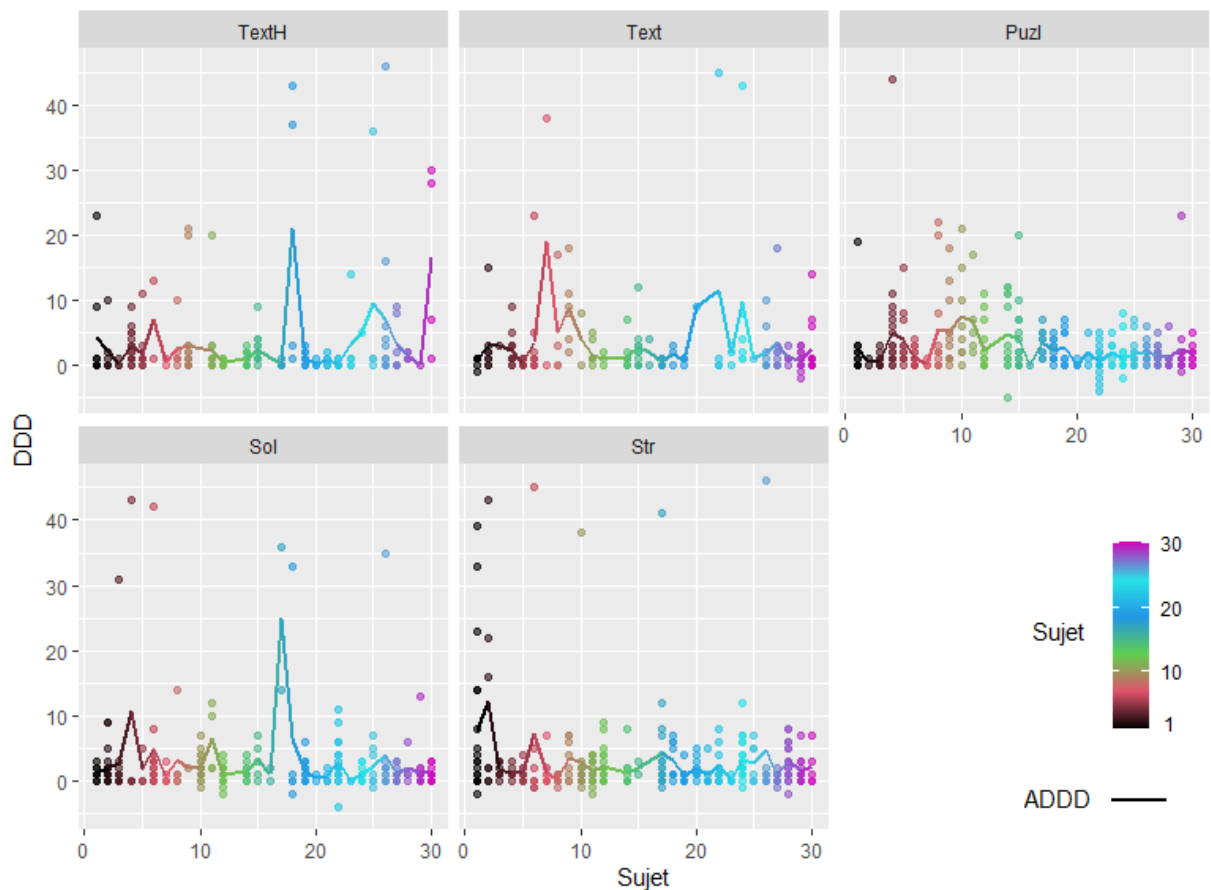


FIGURE 6.12 – Résultats de comparaison (DDD et ADDDs calculés) entre la détection du Seuil-IED et celle du Seuil-CW obtenus sur les 29 sujets, par activité.

Chapitre 7

Caractérisation des activités

Ce chapitre est consacré à la caractérisation des cinq types d'activités. L'objectif est de mettre en évidence les activités qui se ressemblent en se basant sur les résultats de détection obtenus dans chaque activité. Nous utilisons les résultats de détection présentés dans le chapitre précédent, obtenus en utilisant la procédure de détection data-driven et le Seuil-IED.

Nous présentons d'abord dans la section suivante 7.1, les variables de caractérisation que nous avons définies et calculées sur chaque activité de chaque sujet. Par la suite, nous présentons dans la section 7.2 le modèle mixte à effet aléatoire utilisé pour comparer les différents types d'activités en prenant en compte l'effet sujet. Enfin à la dernière section 7.3, nous présentons les résultats obtenus par chacune des variables de caractérisation.

7.1 Variables de caractérisation

Les variables de caractérisation choisies sont : Nombre de ruptures, Durée du régime, Moyenne du signal, Variance du signal et Amplitude de saut. Chaque variable, donnée avec son abréviation dans le Tableau 7.1, doit être calculée pour toute activité $j \in \{\text{TextH}, \text{Text}, \text{Puzl}, \text{Sol}, \text{Str}\}$ de chaque sujet $i \in \{1, \dots, 29\}$.

TABLE 7.1 – Variables de caractérisation et leurs abréviations respectives.

Variables de caractérisation	Abréviation
Nombre de ruptures	N.Rup
Durée du régime	Durée
Moyenne du signal	Mu
Variance du signal	Var
Amplitude de saut	Ampli

Prenons l'exemple de détection sur le signal de la première activité "Puzl" du sujet 1 (voir la Figure 6.3 dans la section 6.2.1). Le calcul des variables de caractérisation peut être expliqué comme suit :

- **N.Rup** : nombre de détections de ruptures d'augmentation et de diminution observées dans chaque activité.
Exemple : le nombre de ruptures dans l'activité $j = \text{Puzl}$ du sujet $i = 1$ est : $N.Rup_{1,\text{Puzl}} = 16$.
- **Durée** : durée entre deux ruptures.
Exemple : la durée du régime de l'activité $j = \text{Puzl}$ du sujet $i = 1$ est : $Durée_{1,\text{Puzl}} = (126; 142; 94; 391; 100; 95; 178; 91; 620; 92; 93; 93; 172; 298; 160)$.
- **Mu** : moyenne empirique estimée sur le signal entre deux ruptures.
Exemple : la moyenne du signal de l'activité $j = \text{Puzl}$ du sujet $i = 1$ est : $Mu_{1,\text{Puzl}} = (1.90; 1.68; 1.41; 1.76; 2.38; 0.46; 1.56; 2.21; 1.31; 2.44; 1.52; -0.09; 1.08; 1.20; 2.21; 1.66; 2.12)$.
- **Ampli** : différence entre les valeurs de la variable Mu en valeur absolue.
Exemple : l'amplitude de saut pour l'activité $j = \text{Puzl}$ du sujet $i = 1$ est : $Ampli_{1,\text{Puzl}} = (0.22; 0.27; 0.36; 0.62; 1.92; 1.10; 0.65; 0.90; 1.12; 0.92; 1.62; 1.18; 0.12; 1.01; 0.56; 0.47)$.
- **Var** : variance empirique estimée sur le signal entre deux ruptures.
Exemple : la variance du signal de l'activité $j = \text{Puzl}$ du sujet $i = 1$ est : $Var_{1,\text{Puzl}} = (0.05; 0.04; 0.04; 0.02; 0.02; 0.62; 0.62; 0.05; 0.36; 0.04; 1.12; 0.87; 0.44; 0.35; 0.11; 0.31; 0.05)$.

Remarque 13. Pour tout sujet $i \in \{1, \dots, 29\}$, la variable nombre de ruptures est de dimension 1 dans chaque activité j , contrairement aux autres variables qui sont des vecteurs de dimension $(N.Rup_{ij} + 1)$ dans chaque activité j .

7.2 Modèle de comparaison

Pour comparer entre les cinq types d'activités $\{\text{TextH}, \text{Text}, \text{Puzl}, \text{Sol}, \text{Str}\}$, nous appliquons un modèle mixte : test d'ANOVA à effet aléatoire afin de prendre en compte la variation due aux sujets, c'est-à-dire, incorporer dans notre modèle l'effet spécifique de chacun des sujets.

Dans le test d'ANOVA, la comparaison des activités s'appuie sur les moyennes. Les résidus des variables d'intérêt sont supposés gaussiens de moyenne zéro. Le modèle mixte peut être écrit selon la variable d'intérêt comme suit :

- **Modèle mixte à deux niveaux** : ce modèle est utilisé pour la variable N.Rup qui est de dimension 1 dans chaque activité. Soit $N.Rup_{ij}$ le nombre de ruptures observées dans l'activité j pour le $i^{\text{ème}}$ sujet,

$$N.Rup_{ij} = \mu + \text{Sujet}_i + \text{Act}_j + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

$$i \in \{1, \dots, 29\}, \quad j \in \{\text{Puzl}, \text{Sol}, \text{TextH}, \text{Text}, \text{Str}\}.$$

- **Modèle mixte à trois niveaux** : ce modèle est utilisé pour les variables Durée, Mu, Ampli et Var qui sont des vecteurs de dimension aléatoire ($N.Rup_{ij} + 1$) dans chaque activité. Soit Y_{ijk} la mesure de l'une des variables {Durée, Mu, Ampli ou Var} sur le $k^{\text{ème}}$ régime dans l'activité j pour le $i^{\text{ème}}$ sujet,

$$Y_{ijk} = \mu + \text{Sujet}_i + \text{Act}_j + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

$$i \in \{1, \dots, 29\}, \quad j \in \{\text{Puzl}, \text{Sol}, \text{TextH}, \text{Text}, \text{Str}\}, \quad k = 1, \dots, (N.Rup_{ij} + 1).$$

Dans les deux types de modèle, Act_j spécifie l'effet fixe de l'activité j , non aléatoire (c'est l'effet général entrant dans ce modèle). Sujet_i spécifie l'effet aléatoire du sujet i . $\text{Sujet}_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2)$ supposées gaussiennes i.i.d, centrées et de même variance inconnue σ_S^2 . $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ étant également gaussiennes i.i.d, centrées et de même variance inconnue σ_ε^2 . Nous supposons que Sujet_i est indépendante de ε_{ij} (resp. de ε_{ijk}) dans le premier modèle (resp. dans le second modèle). À savoir, nous faisons l'hypothèse d'homoscédasticité.

L'inclusion de termes aléatoires sujet-spécifique permet de modéliser la corrélation intra-sujet au niveau de la variable réponse. Prenons l'exemple simple du modèle à deux niveaux, la corrélation entre des mesures prises successivement chez le même sujet est calculée comme suit :

$$\text{Cor}(N.Rup_{ij}, N.Rup_{ij'}) = \frac{\text{Cov}(N.Rup_{ij}, N.Rup_{ij'})}{\sqrt{\text{Var}(N.Rup_{ij})} \sqrt{\text{Var}(N.Rup_{ij'})}}.$$

Sachant que μ et Act_j sont fixes, et que Sujet_i et ε_{ij} sont indépendants alors :

- $\text{Cov}(N.Rup_{ij}, N.Rup_{ij'}) = \text{Cov}(\text{Sujet}_i + \varepsilon_{ij}, \text{Sujet}_i + \varepsilon_{ij'}) = \text{Cov}(\text{Sujet}_i, \text{Sujet}_i) = \text{Var}(\text{Sujet}_i) = \sigma_S^2$.
- $\text{Var}(N.Rup_{ij}) = \text{Var}(N.Rup_{ij'}) = \text{Var}(\text{Sujet}_i) + \text{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma_S^2 + \sigma_\varepsilon^2$.

La corrélation entre deux mesures j et j' prises chez le même sujet i :

$$\text{Cor}(N.Rup_{ij}, N.Rup_{ij'}) = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_\varepsilon^2} = \rho_S.$$

Remarque 14. ρ_S reflète la proportion de la variance totale qui est due aux sujets eux-mêmes (corrélation intra-sujet). Elle permet de quantifier le degré de proximité entre les observations de différents sujets.

7.3 Résultats

Nous présentons d'abord pour chaque variable de caractérisation, une description préliminaire des résultats obtenus sur tous les sujets. Puis nous présentons les résultats du test d'ANOVA à effet aléatoire en comparant l'activité "TextH", posée comme intercept, avec les quatre autres activités ("Text", "Puzl", "Sol", "Str").

Nous rappelons que les variables de caractérisation ont été calculées sur les résultats de détection obtenus en choisissant le paramétrage suivant : la longueur des données d'estimation : $L = 90$ secondes ; l'objectif de détection sur la moyenne de niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$; le temps d'attente de la règle d'arrêt corrigée : $c = 60$ secondes et le seuil de détection utilisé est le Seuil-IED construit pour $\alpha = 0.02$.

7.3.1 Variable Nombre de ruptures

a) Description

Nous donnons dans le Tableau 7.2 quelques statistiques descriptives et la Figure 7.1 des boxplots, calculés par activité sur les résultats des 29 sujets.

Les résultats montrent que les activités "Str", "Puzl" et "Sol" présentent plus de ruptures que les activités "Text" et "TextH". Il existe au moins un cas où l'on ne détecte aucune rupture sur les activités "TextH", "Text" et "Str".

TABLE 7.2 – Statistiques descriptives calculées par activité sur la variable N.Rup.

Act	Count	Min.	1st Qu.	Median	Mean	Var	3st Qu.	Max.
TextH	29	0	6	8	9.17	31	13	22
Text	29	0	4	9	8.72	30.6	12	24
Puzl	29	1	11	15	13.4	33.6	16	24
Sol	29	2	14	16	15.6	34	19	24
Str	29	0	11	13	14.4	33	20	22

b) Test d'ANOVA à effet aléatoire

Dans le Tableau 7.3, nous donnons les paramètres de sortie estimés par le modèle mixte à effet aléatoire : variable *N.Rup* en fonction des cinq activités. Pour chaque activité (TextH en intercept), le modèle estime le coefficient du nombre de ruptures associé, son intervalle de confiance à 95% et sa *Pvalue* correspondante. Nous donnons ainsi dans le tableau la variance résiduelle et celle due aux sujets estimées par le modèle.

Le modèle estime pour l'activité "TextH" un nombre de ruptures moyen de 9.17. La différence de moyenne entre l'activité "Text" et "TextH" n'est pas significative (*Pvalue* = 0.67), elle est estimée à -0.45 . La différence entre le nombre moyen de ruptures des activités ("Puzl", "Sol", "Str") et celui de l'activité "TextH" est estimée respectivement à (4.21, 6.45, 5.21). Elles sont toutes les trois significatives ; à savoir, ces trois activités présentent significativement plus de ruptures que l'activité "TextH".

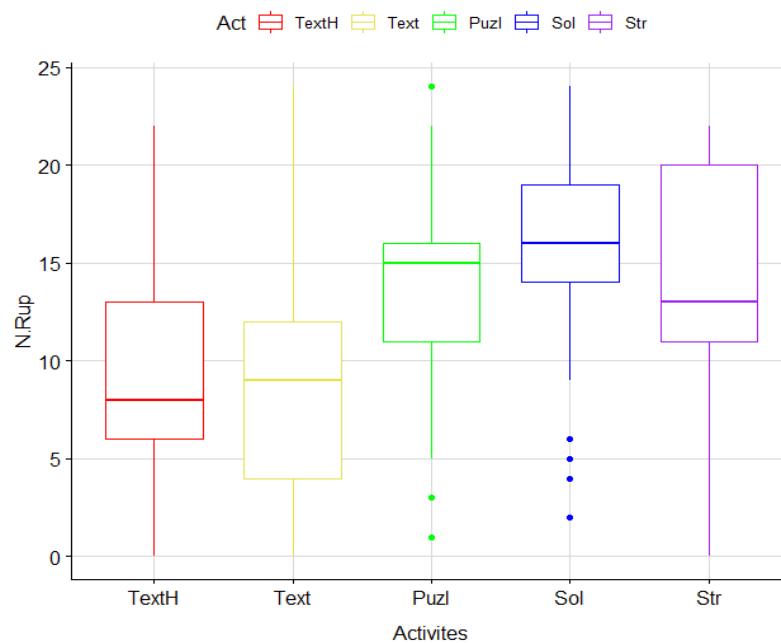


FIGURE 7.1 – Boxplots par activités de la variable N.Rup sur tous sujets confondus.

TABLE 7.3 – Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Nombre de ruptures en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient (nombre de ruptures) estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la *Pvalue* correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.

Act	Estimate (95% IC)	Std.Error	DF	t-value	P-value
TextH (Intercept)	9.17 (7.08; 11.27)	1.06	112	8.68	-
Text	-0.45 (-2.51; 1.62)	1.04	112	-0.43	0.67
Puzl	4.21 (2.14; 6.27)	1.04	112	4.04	<0.001
Sol	6.45 (4.38; 8.51)	1.04	112	6.19	<0.001
Str	5.21 (3.14; 7.27)	1.04	112	4.99	<0.001
Random_Effects (subject-specific)		Residual			
Variance		16.64	15.75		

La variance résiduelle au sein des activités est estimée à 15.75. La variance due aux sujets (effet aléatoire intra-groupes) expliquée par le modèle est estimée à 16.64. La proportion de la variance totale qui est due aux sujets eux-mêmes est égale à 0.51. Elle représente la corrélation entre sujets estimée par le modèle mixte.

Dans la Figure 7.2, nous présentons à gauche (resp. à droite) le nombre de ruptures observées (resp. prédits par le modèle) dans chaque activité de chaque sujet. Les valeurs prédites dans chaque activité montrent que les activités "Text" et

"TextH" se ressemblent et donnent le plus faible nombre de ruptures. À l'opposé, les activités "Str" et "Sol" donnent à chaque fois le plus important nombre de ruptures. L'activité "Puzl" est toujours entre les deux groupes mais se rapproche plutôt des activités "Str" et "Sol".

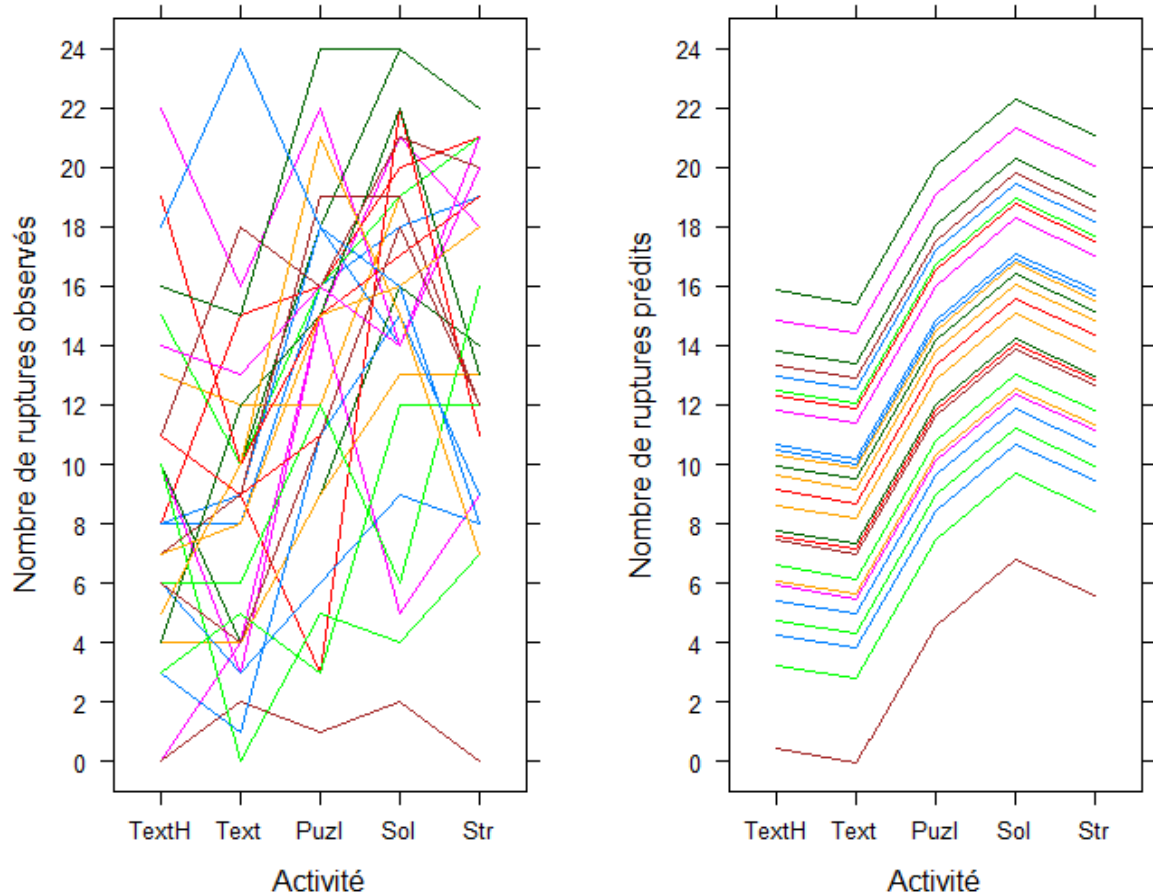


FIGURE 7.2 – Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Nombre de ruptures pour chacun des sujets.

7.3.2 Variable Durée du régime

a) Description

Notons d'abord que cette variable est corrélée négativement avec la précédente (N.Rup) puisque la durée d'une activité est fixe. Le Tableau 7.4 et la Figure 7.3 présentent respectivement quelques statistiques descriptives et boxplots par activité, calculés sur les résultats obtenus des 29 sujets.

TABLE 7.4 – Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Durée dans chacune des activités.

Act	Count	Min.	1st Qu.	Median	Mean	Var	3st Qu.	Max.
TextH	241	91	108	159	267	122754	265	3000
Text	226	91	105	171	275	97152	318	3000
Puzl	359	91	97	139	189	21994	208	1115
Sol	424	91	97	125	172	19285	191	1244
Str	390	91	98.2	130	193	46881	204	3000

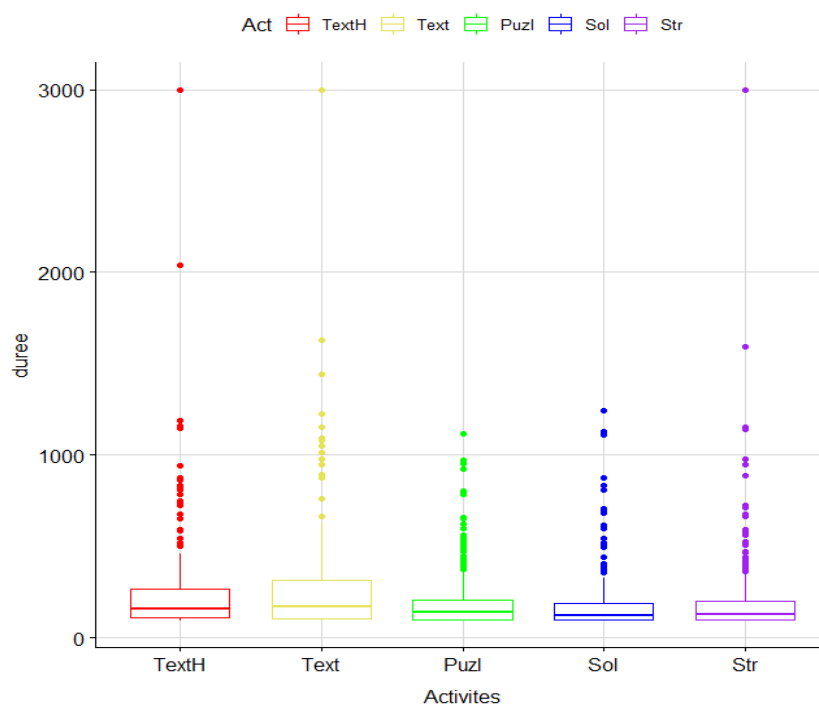


FIGURE 7.3 – Boxplots par activités de la variable Durée sur tous sujets confondus.

Nous pouvons voir dans la Figure 7.4, la distribution par boxplots de la variable Durée du régime en fonction des 29 sujets et des cinq activités. Nous remarquons que les mesures données par les deux activités "TextH" et "Text" sont proches, et ce sont les mesures de durées de régimes les plus importantes. Ce qui est cohérent avec un nombre de ruptures faible. Et les activités "Str", "Sol" et "Puzl" présentent les durées les plus faibles. Les boxplots par sujet montrent clairement que l'effet sujet n'est pas négligeable. Nous pouvons voir par exemple la différence entre le sujet 4 et 20.

b) Test d'ANOVA à effet aléatoire

Le test d'ANOVA à effet aléatoire estime pour l'activité "TextH", une durée moyenne de 324.12. La différence de moyenne entre l'activité "Text" et "TextH" n'est pas significative ($Pvalue = 0.31$). Elle est estimée à 20.15. La différence entre

la durée moyenne de ("Puzl", "Sol", "Str") et celui de "TextH" est estimée respectivement à $(-77.3, -100.88, -81.04)$, et elles sont toutes les trois significatives.

La variance résiduelle au sein des activités est estimée à 45111. La variance due aux sujets (effet aléatoire intra-groupes) expliquée par le modèle est estimée à 47834. La proportion de la variance totale qui est due aux sujets eux-mêmes égale à 0.51.

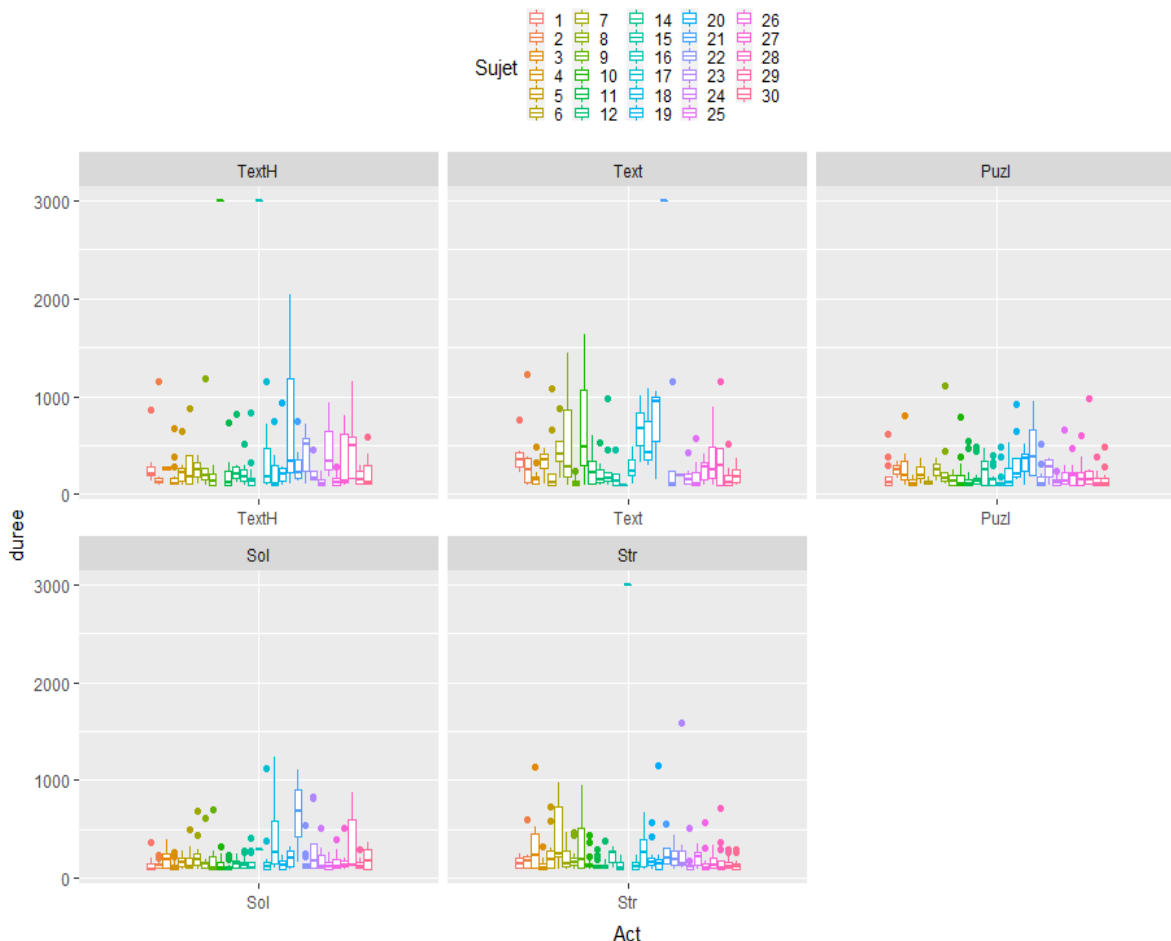


FIGURE 7.4 – Boxplots par sujets de la variable Durée, en fonction de l'activité.

Dans la Figure 7.5, nous présentons à gauche (resp. à droite) les durées observées (resp. prédites par le modèle) dans chaque activité de chaque sujet. Les données de prédiction montrent que les activités "TextH" et "Text" se ressemblent, elles donnent les durées les plus longues des activités. Par contre, les activités "Str", "Sol" et "Puzl" présentent les durées les plus courtes.

Ces résultats concordent avec les résultats obtenus pour la variable Nombre de ruptures dans la section précédente où le groupe "TextH" et "Text" obtenait le plus faible nombre de ruptures et le groupe de "Str", "Puzl" et "Sol" obtenait le plus grand nombre de ruptures.

TABLE 7.5 – Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Durée du régime en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la *Pvalue* correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.

Act	Estimate (95% IC)	Std.Error	DF	t-value	P-value
TextH (Intercept)	324.12 (239.65; 408.6)	43.07	1607	7.53	-
Text	20.15 (-18.88; 59.18)	19.9	1607	1.01	0.31
Puzl	-77.3 (-112.5; -42.11)	17.94	1607	-4.31	<0.001
Sol	-100.88 (-135.21; -66.55)	17.5	1607	-5.76	<0.001
Str	-81.04 (-115.68; -46.39)	17.66	1607	-4.59	<0.001

Random_Effects (subject-specific)		Residual
Variance	47834	45111

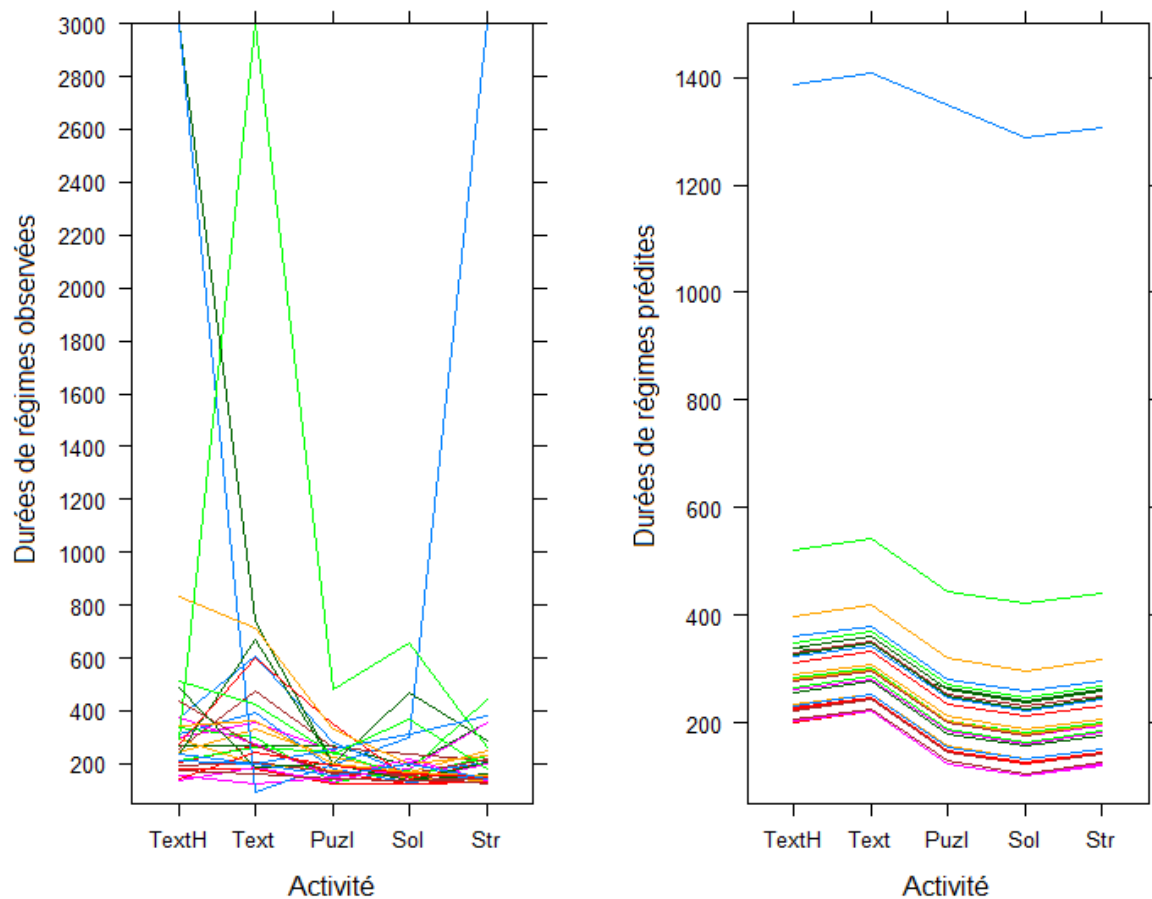


FIGURE 7.5 – Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Durée du régime pour chacun des sujets.

7.3.3 Variable Moyenne du signal

a) Description

Le Tableau 7.6 et la Figure 7.6 présentent respectivement quelques statistiques descriptives et boxplots par activité de la variable Moyenne du signal. La Figure 7.7 donne la distribution par boxplots de la variable Moyenne du signal en fonction des 29 sujets et des cinq activités.

TABLE 7.6 – Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Mu dans chacune des activités.

Act	Count	Min.	1st Qu.	Median	Mean	Var	3st Qu.	Max.
TextH	295	-0.42	2.16	2.99	2.81	1.34	3.54	5.31
Text	282	-1.02	1.76	2.79	2.52	1.66	3.44	5.38
Puzl	417	-1.02	1.27	2.16	2.18	1.60	3.00	5.39
Sol	482	-0.90	1.32	2.14	2.10	1.27	2.96	5.11
Str	446	-1.20	0.91	2.00	1.95	1.81	2.95	5.50

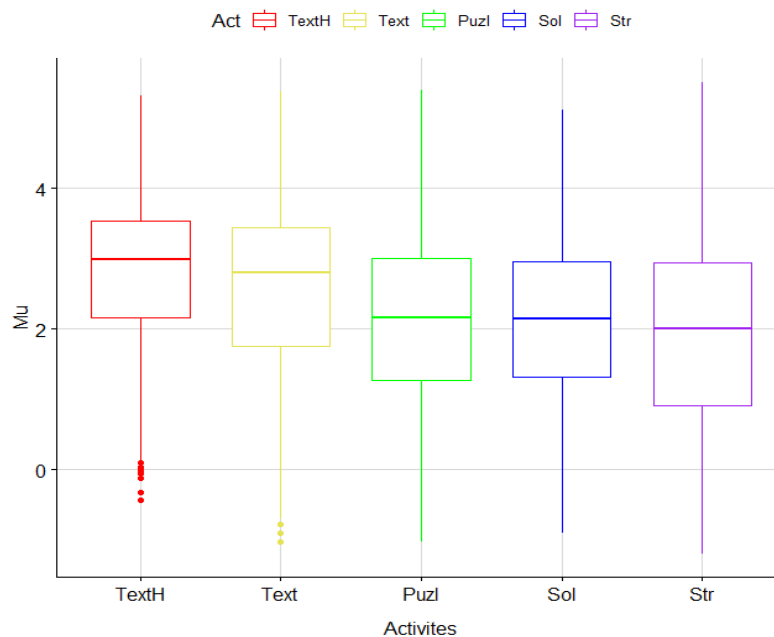


FIGURE 7.6 – Boxplots par activités de la variable Mu sur tous sujets confondus.

Les deux activités "TextH" et "Text" sont assez proches et donnent les moyennes les plus élevées. Et les activités "Str", "Sol" donnent les moyennes les plus faibles. L'activité "Puzl" est entre les deux niveaux de groupes.

L'effet sujet peut être observé dans la Figure 7.7, où on peut voir l'exemple du sujet 8 qui donne des valeurs élevées de la moyenne quelque soit l'activité, contrairement par exemple au sujet 24.

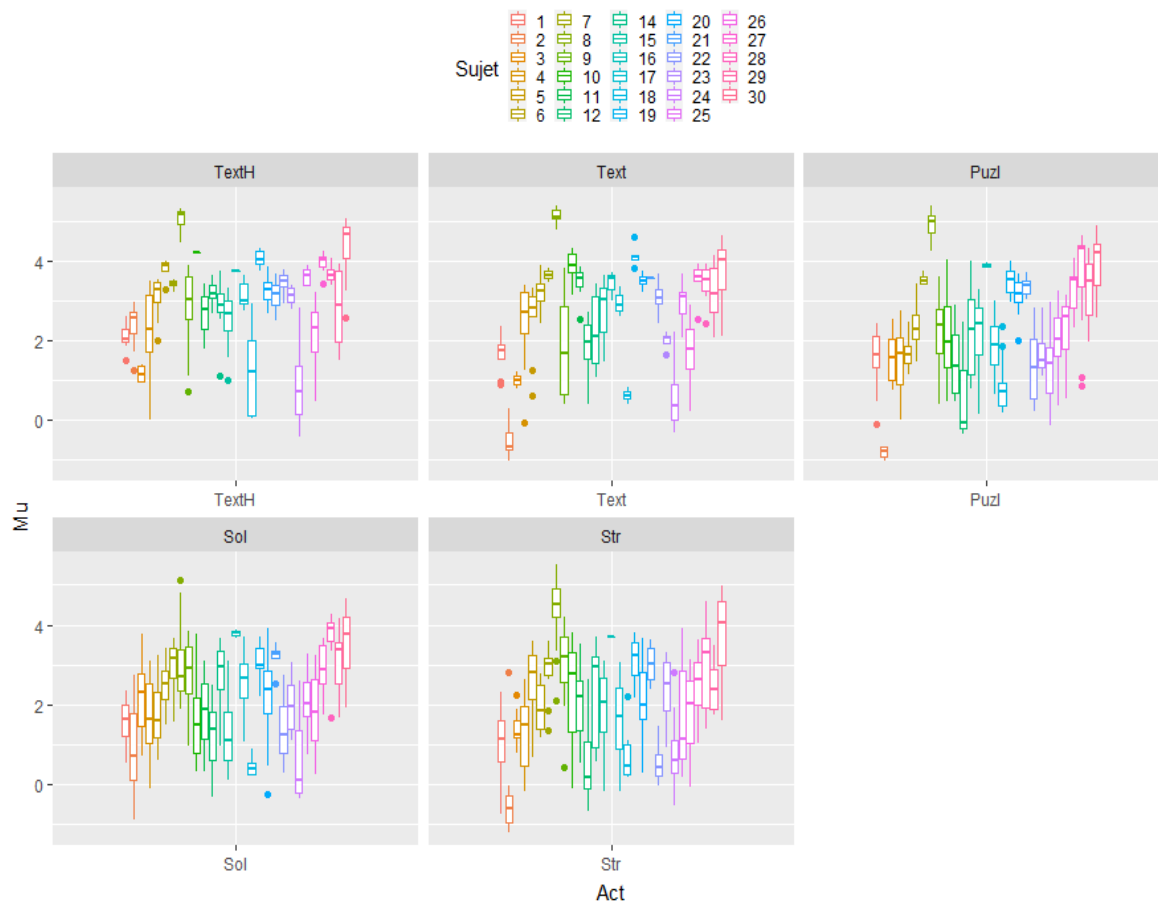


FIGURE 7.7 – Boxplots par sujets de la variable Mu, en fonction de l'activité.

b) Test d'ANOVA à effet aléatoire

Le modèle estime pour l'activité "TextH" un coefficient de 2.95. La différence de moyenne entre les activités ("Text", "Puzl", "Sol", "Str") et "TextH" sont toutes significatives. La variance résiduelle au sein des activités est estimée à 0.79. La variance due aux sujets expliquée par le modèle est estimée à 0.82. La proportion de la variance totale qui est due aux sujets eux-mêmes égale à 0.51.

Dans la Figure 7.8, nous présentons à gauche (resp. à droite) les moyennes observées (resp. prédites par le modèle) dans chaque activité pour chaque sujet. La prédiction par le modèle estimé montre que les cinq activités dans l'ordre suivant : "TextH", "Text", "Puzl", "Sol", "Str", présentent du niveau le plus élevé au niveau le plus bas de la moyenne.

TABLE 7.7 – Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : μ en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la *P*-value correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.

Act	Estimate (95% IC)	Std.Error	DF	t-value	P-value
TextH (Intercept)	2.95 (2.6 ; 3.29)	0.18	1889	16.66	-
Text	-0.31 (-0.45 ; -0.16)	0.07	1889	-4.1	<0.001
Puzl	-0.66 (-0.79 ; -0.52)	0.07	1889	-9.64	<0.001
Sol	-0.76 (-0.89 ; -0.63)	0.07	1889	-11.43	<0.001
Str	-0.93 (-1.07 ; -0.8)	0.07	1889	-13.86	<0.001
Random_Effects (subject-specific)			Residual		
Variance			0.82	0.79	

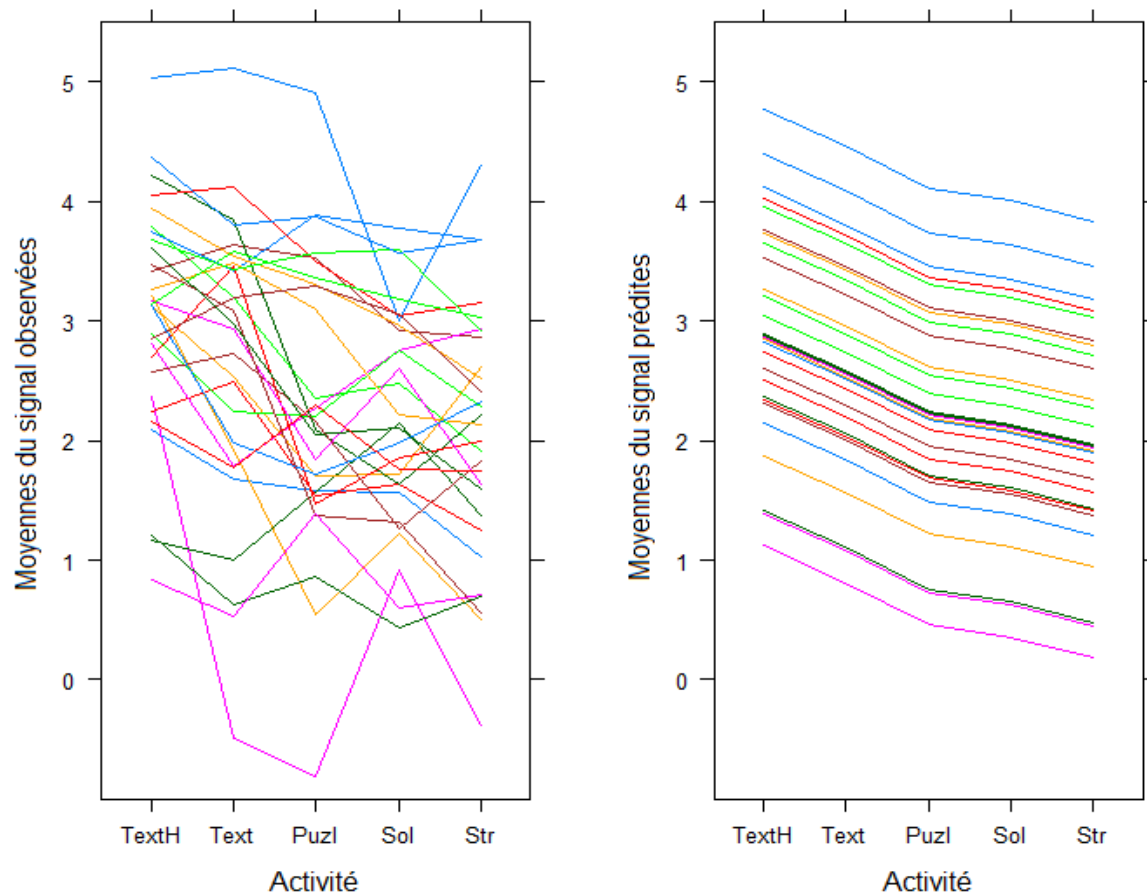


FIGURE 7.8 – Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable μ pour chacun des sujets.

7.3.4 Variable Amplitude de saut

a) Description

Les statistiques descriptives du Tableau 7.8 et les boxplots de la Figure 7.9 montrent que les deux activités "TextH" et "Text" donnent les amplitudes de saut les plus faibles. Et les activités "Str", "Sol" donnent les amplitudes les plus élevées. Les valeurs de l'activité "Puzl" indiquent qu'elle se rapproche plus du groupe d'activités "Str" et "Sol".

TABLE 7.8 – Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Ampli dans chacune des activités.

Act	Count	Min.	1st Qu.	Median	Mean	Var	3st Qu.	Max.
TextH	266	0.038	0.33	0.49	0.69	0.30	0.90	2.94
Text	253	0.006	0.33	0.54	0.73	0.33	0.97	3.40
Puzl	388	0.014	0.41	0.71	0.89	0.40	1.25	3.57
Sol	453	0.004	0.47	0.83	0.93	0.35	1.25	3.11
Str	417	0.030	0.46	0.81	1.02	0.50	1.46	3.67

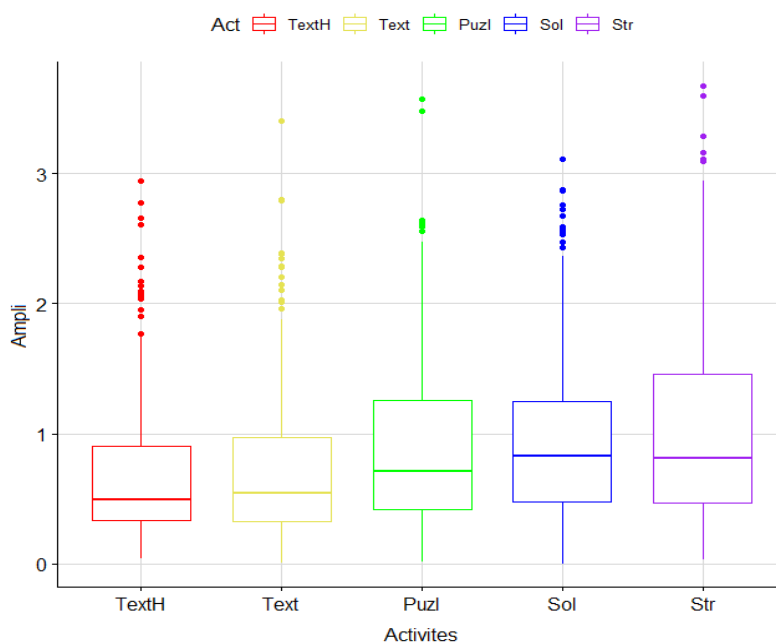


FIGURE 7.9 – Boxplots par activités de la variable Ampli sur tous sujets confondus.

Dans la Figure 7.10, nous pouvons voir que les amplitudes données par le sujet 9 et 23 sont très différentes; l'effet sujet est visible.

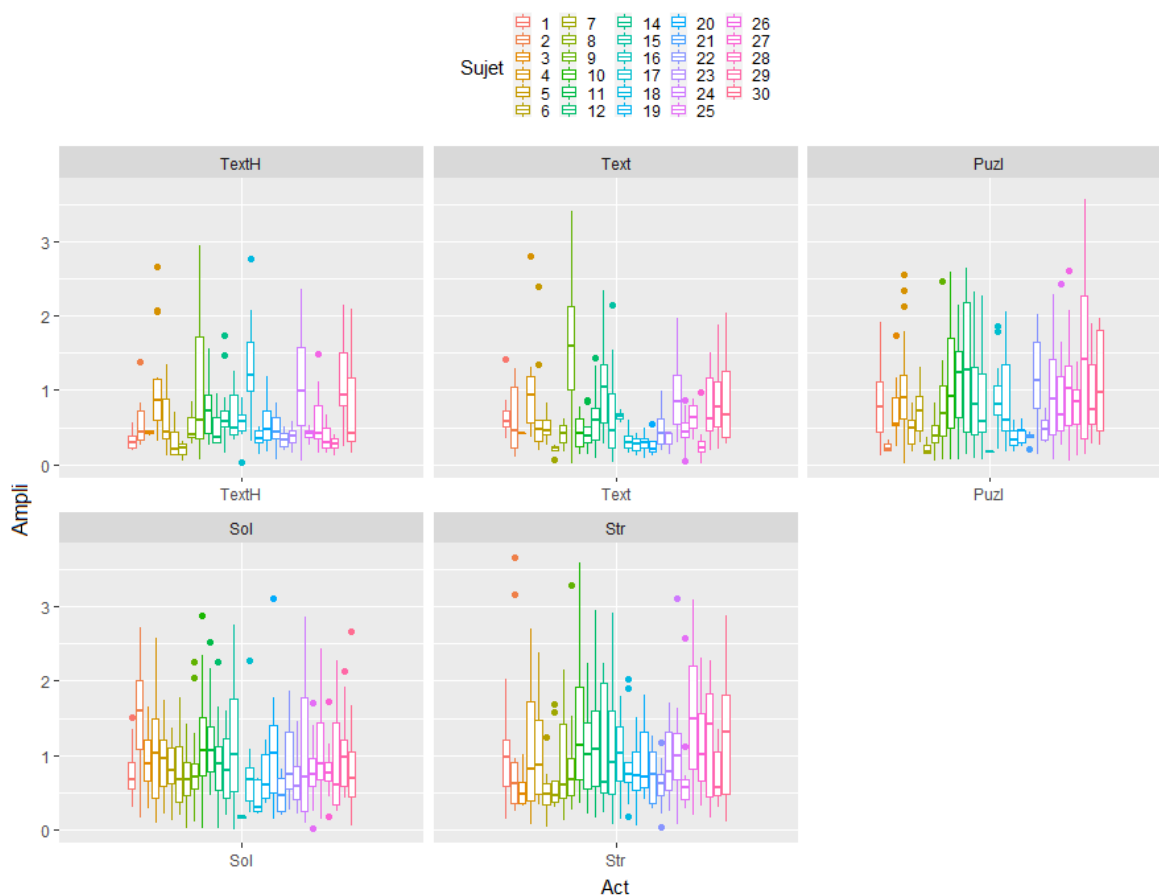


FIGURE 7.10 – Boxplots par sujets de la variable Ampli, en fonction de l'activité.

b) Test d'ANOVA à effet aléatoire

La différence de moyenne entre l'activité "Text" et "TextH" n'est pas significative. La différence de moyenne entre les activités ("Puzl", "Sol", "Str") et "TextH" sont toutes significatives. La variance résiduelle au sein des activités est estimée à 0.36. La variance due aux sujets expliquée par le modèle est estimée à 0.03. La proportion de la variance totale qui est due aux sujets est égale à 0.07.

Dans la Figure 7.11, nous présentons à gauche (resp. à droite) les amplitudes observées (resp. prédites par le modèle) dans chaque activité de chaque sujet. Les données de prédiction montrent que les activités "TextH" et "Text" se ressemblent et présentent les amplitudes les plus faibles, contrairement aux activités "Str", "Sol" et "Puzl" qui présentent les amplitudes les plus élevées.

TABLE 7.9 – Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Ampli en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la *Pvalue* correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.

Act	Estimate (95% IC)	Std.Error	DF	t-value	P-value
TextH (Intercept)	0.65 (0.55 ; 0.75)	0.05	1744	13.31	-
Text	0.03 (-0.08 ; 0.13)	0.05	1744	0.54	0.59
Puzl	0.21 (0.11 ; 0.31)	0.05	1744	4.32	<0.001
Sol	0.26 (0.17 ; 0.36)	0.05	1744	5.58	<0.001
Str	0.34 (0.25 ; 0.44)	0.05	1744	7.13	<0.001

Random_Effects (subject-specific)		Residual
Variance	0.03	0.36

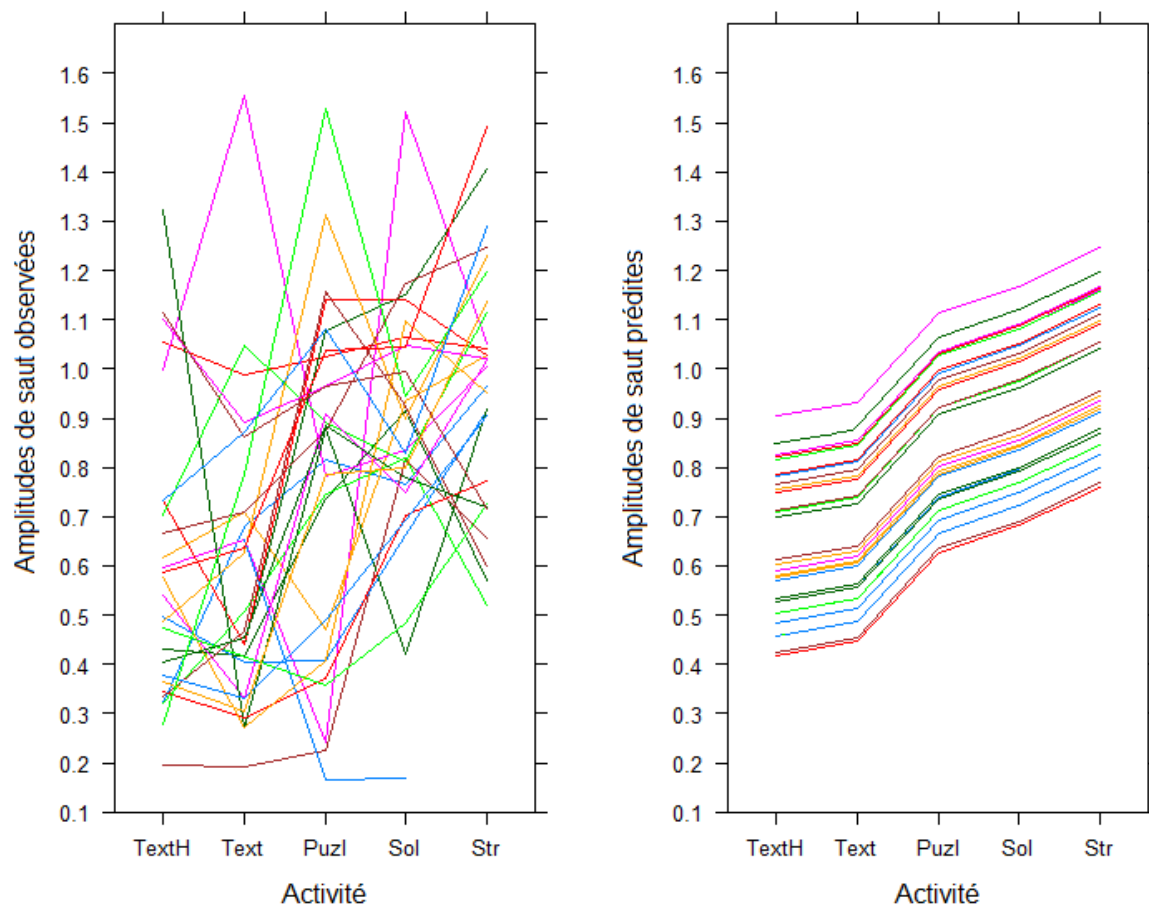


FIGURE 7.11 – Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Ampli pour chacun des sujets.

7.3.5 Variable Variance du signal

a) Description

Pour cette variable, les activités "Str", "Sol" donnent les valeurs de variance les plus élevées. Et les activités "Puzl", "Text" et "TextH" donnent les valeurs de variance les plus faibles.

L'effet sujet peut être observé dans la Figure 7.13, considérons par exemple les sujets 4 et 16 qui présentent des valeurs différentes pour une même activité.

TABLE 7.10 – Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Var dans chacune des activités.

Act	Count	Min.	1st Qu.	Median	Mean	Var	3st Qu.	Max.
TextH	295	0.011	0.06	0.13	0.32	0.23	0.23	0.23
Text	282	0.007	0.08	0.17	0.39	0.21	0.21	0.21
Puzl	417	0.007	0.05	0.14	0.30	0.17	0.17	0.17
Sol	482	0.012	0.09	0.24	0.42	0.21	0.21	0.21
Str	446	0.005	0.07	0.23	0.45	0.31	0.31	0.31

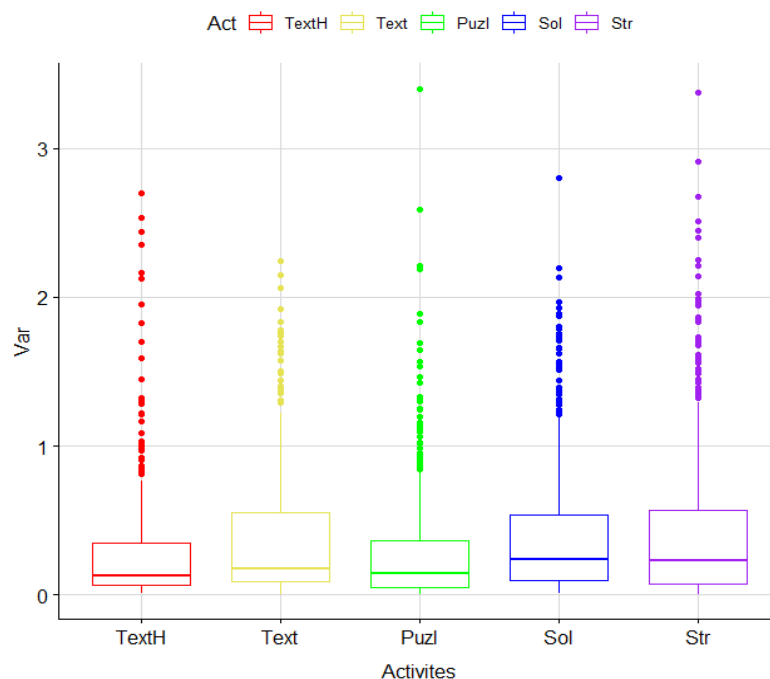


FIGURE 7.12 – Boxplots par activité de la variable Var sur tous sujets confondus.

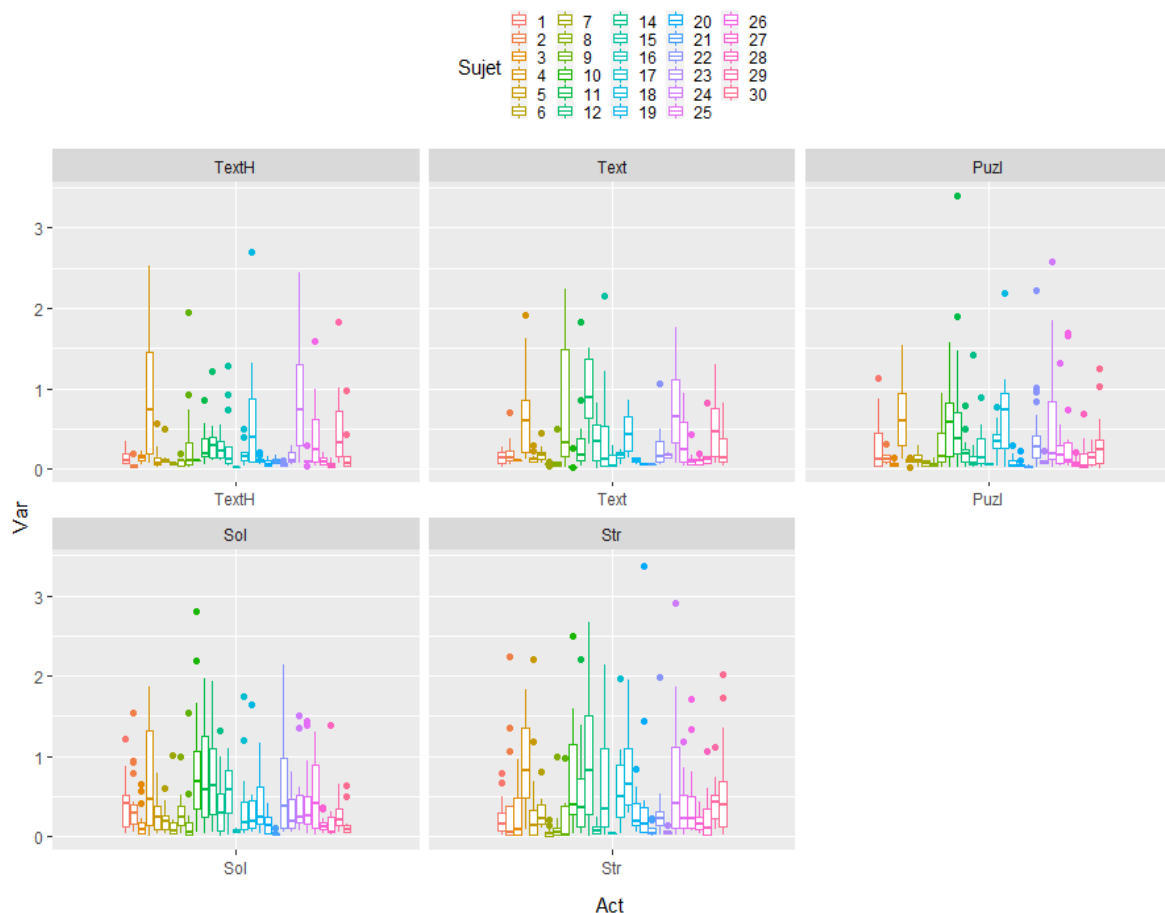


FIGURE 7.13 – Boxplots par sujets de la variable Var, en fonction de l'activité.

b) Test d'ANOVA à effet aléatoire

La différence de moyenne entre les variances du signal des activités ("Text", "Puzl") et "TextH" ne sont pas significatives. La différence de moyenne entre les activités ("Str", "Sol") et "TextH" sont significatives. La variance résiduelle au sein des activités est estimée à 0.19. La variance due aux sujets expliquée par le modèle est estimée à 0.03. La proportion de la variance totale qui est due aux sujets est égale à 0.17.

Dans la Figure 7.14, nous présentons à gauche (resp. à droite) les variances observées (resp. prédites par le modèle) dans chaque activité pour chaque sujet. Les données de prédiction montrent que l'activité "Puzl" se rapproche du groupe ("Text" et "TextH") qui présente les variances les plus faibles. Les deux activités "Str" et "Sol" se ressemblent encore une fois et présentent les variances les plus élevées.

TABLE 7.11 – Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Var en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la *Pvalue* correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.

Act	Estimate (95% IC)	Std.Error	DF	t-value	P-value
TextH (Intercept)	0.28 (0.19; 0.37)	0.04	1889	6.26	-
Text	0.06 (-0.01; 0.13)	0.04	1889	1.61	0.11
Puzl	-0.02 (-0.09; 0.04)	0.03	1889	-0.74	0.46
Sol	0.11 (0.05; 0.18)	0.03	1889	3.4	<0.001
Str	0.14 (0.07; 0.2)	0.03	1889	4.12	<0.001

Random_Effects (subject-specific)		Residual
Variance	0.03	0.19

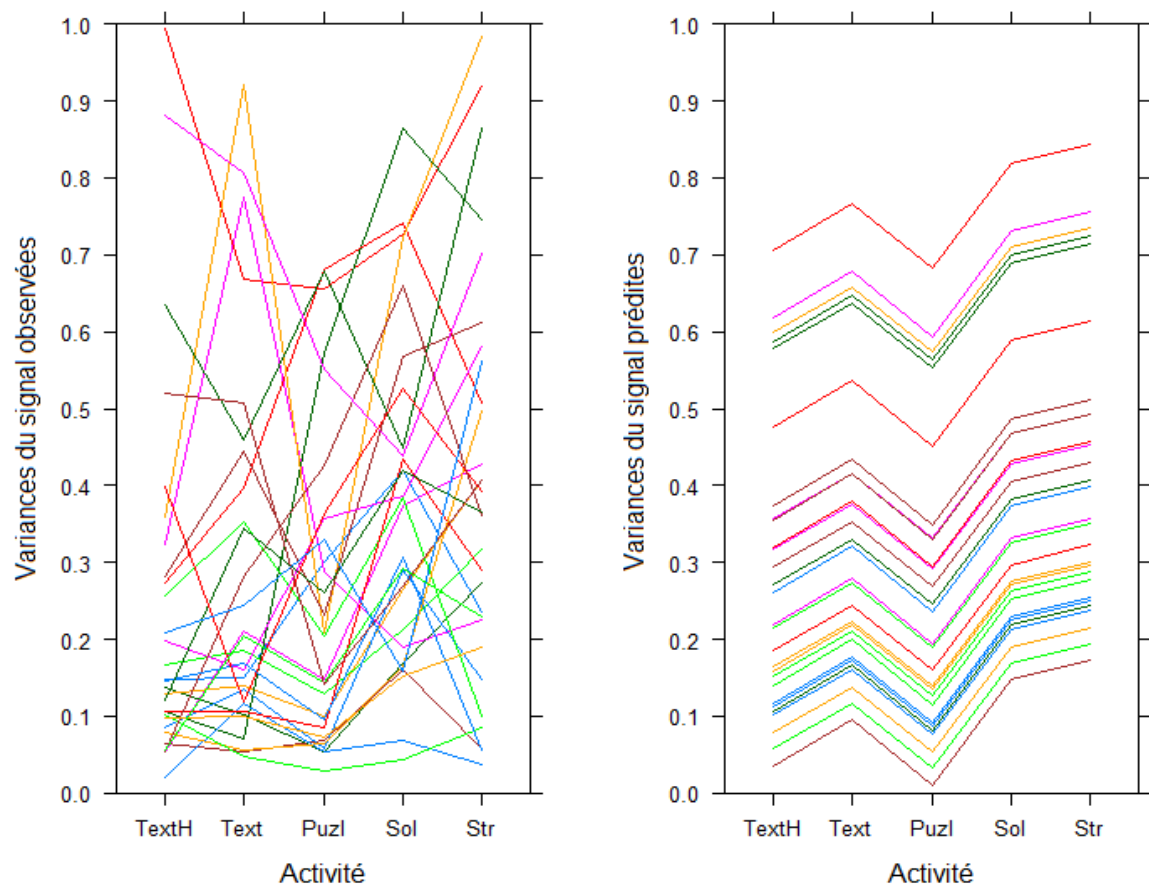


FIGURE 7.14 – Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Var pour chacun des sujets.

7.3.6 Analyse et synthèse

Dans le but de caractériser les cinq activités : "TextH", "Text", "Puzl", "Sol" et "Str", nous avons analysé l'effet de l'activité sur les variables de caractérisation (N.Rup, Durée, Mu, Ampli, Var) en considérant l'effet aléatoire dû aux sujets.

L'analyse des résultats présentés dans la section précédente montre que le type d'activité effectué influence les valeurs obtenues quelque soit la variable de caractérisation observée. La comparaison entre les activités montre également qu'il existe deux principaux groupes d'activités telles que, au sein du même groupe (intra-groupe), les activités donnent des résultats semblables, et entre les groupes (inter-groupes), les activités donnent des résultats significativement différents. Le premier groupe est formé par les activités utilisant le clavier : "TextH" et "Text", qui présentent le moins de ruptures, des longues durées de régime, des niveaux élevés de la moyenne du signal, les plus faibles variances du signal et amplitudes de saut. Le deuxième groupe est formé par deux activités utilisant la souris informatique : "Str" et "Sol" qui, contrairement aux activités utilisant le clavier, présentent le plus de ruptures, des courtes durées de régime, des niveaux bas de la moyenne du signal, les plus importantes variances du signal et amplitudes de saut. L'activité "Puzl", qui est une activité où la souris informatique est utilisée, donne généralement des résultats situés entre les deux groupes précédemment évoqués mais en se rapprochant souvent du groupe souris ("Str", "Sol"), et cela sur toutes les variables de caractérisation sauf sur la variable variance des segments où l'activité "Puzl" ressemble plus au groupe clavier ("TextH", "Text").

Dans les résultats présentés précédemment, les modèles mixtes ont été appliqués en posant à chaque fois l'activité "TextH" à l'intercept (i.e. comme activité de référence). Nous en avons constaté que l'activité "TextH" ressemble 4 fois à "Text", une seule fois à "Puzl" et aucune fois aux deux activités "Sol" et "Str". Pour affirmer cette répartition des activités, notamment l'activité "Puzl" qui est la moins claire, nous avons refait les modèles mixtes en posant à chaque fois une autre activité à l'intercept. Le Tableau 7.12 donne une synthèse des résultats obtenus sur les tests d'ANOVA à effet aléatoire liés aux cinq variables de caractérisation. Nous donnons à chaque fois le nombre de fois où l'activité i se trouve dans le même groupe que l'activité j (nombre de fois où les activités i et j ne présente pas de différence significative). En se focalisant sur l'activité "Puzl", nous pouvons voir qu'elle ressemble une fois à "TextH", aucune fois à "Text", 3 fois à "Sol" et 2 fois à "Str". Cela confirme son appartenance au groupe "Sol" et "Str", et affirme finalement la répartition des activités en deux principaux groupes : activités utilisant le clavier ("TextH" et "Text") et activités utilisant la souris informatique ("Puzl", "Sol" et "Str").

TABLE 7.12 – Nombre de fois où le couple d'activité (i,j) ne présente pas de différence significative sur les tests d'ANOVA à effet aléatoire liés aux cinq variables de caractérisation.

	Text	Puzl	Sol	Str
TextH	4	1	0	0
Text		0	1	0
Puzl			3	2
Sol				4

Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé une méthodologie data-driven de détection de ruptures pour des signaux physiologiques sujets dépendants, à savoir, des signaux EMG temporels enregistrés au niveau du faisceau supérieur du trapèze de 29 participants effectuant différentes activités bureautiques. La méthodologie est sujet-activité dépendante ; elle est adaptée au signal de chaque activité de chaque sujet pour détecter les changements d'état musculaire présents au sein d'une activité, afin d'évaluer la sollicitation et la variabilité du signal EMG contribuant à l'apparition d'une fatigue musculaire et donc au risque de trouble musculosquelettique.

Notre méthodologie inclut l'estimation des paramètres du régime pré-changement (μ_0, σ_0^2) sur le signal à chaque nouveau cycle de détection (après la ré-initialisation de la procédure). Elle comprend également la construction du Seuil-IED sur le début du signal de l'activité, considéré comme l'état normal du muscle ; le Seuil-IED est lui aussi sujet-activité dépendant.

La méthodologie proposée est appliquée aux signaux des cinq activités de tous les sujets. Les résultats obtenus en utilisant le Seuil-IED ont été comparés avec ceux du seuil classique de Wald (Seuil-CW). Les résultats de comparaison montrent que le Seuil-IED est plus performant que le Seuil-CW dans le cadre QCD "Quickest Change-point Detection" où le délai de détection est la principale préoccupation ; car le Seuil-IED permet de minimiser le délai de détection et donne un nombre de détections légèrement supérieur à celui du Seuil-CW.

Les résultats de détection obtenus ont permis également la caractérisation de chaque type d'activité. Nous avons appliqué les modèles mixtes pour analyser l'effet activité sur chaque variable de caractérisation en prenant en considération l'effet sujet. Les résultats montrent qu'il existe deux principaux groupes d'activités : le groupe d'activité utilisant le clavier ("TextH" et "Text") donne des niveaux élevés du signal EMG avec une faible variabilité, et le groupe d'activité utilisant la souris informatique ("Puzl", "Sol" et "Str") donne des niveaux bas du signal EMG avec une forte variabilité. Par conséquent, pendant un travail bureautique, les activités utilisant le clavier sont susceptibles d'engendrer plus de fatigue du muscle de trapèze que les activités utilisant la souris. Plus précisément, le classement des activités de la plus à la moins à risque de fatigue musculaire est donné par cet ordre : "TextH", "Text", "Puzl", "Sol", "Str".

Ces résultats corroborent ceux de la littérature [4, 5], où les auteurs ont montré que les activités utilisant le clavier génèrent une sollicitation du muscle trapèze supérieur aux activités utilisant la souris. Notre travail montre que l'analyse de la variabilité du signal, qui n'a pas été étudiée par ces auteurs, confirme ces résultats.

La méthodologie data-driven que nous avons proposée peut être appliquée à tout signal observé séquentiellement pour la détection de ruptures. L'utilisation de la méthodologie ne nécessite pas la connaissance de la distribution des données. Par contre, nous devons supposer que le comportement du phénomène étudié est dans son état normal au début du signal et que les ruptures arrivent ultérieurement.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce manuscrit, nous avons abordé le problème de détection de changement d'état (régime) dans un signal observé séquentiellement, en temps réel. Ce changement d'état est supposé traduit par un point de rupture de moyenne et/ou de variance à un instant donné inconnu sur le signal. L'enjeu central de ce type de détection est de pouvoir à la fois minimiser le délai de détection et maintenir un taux donné de fausse alarme.

Nous avons proposé une méthodologie de détection dépendante des caractéristiques du signal et des objectifs de détection. Elle utilise la statistique réursive CUSUM basée sur le score et deux éléments originaux proposés dans cette thèse, à savoir un seuil de détection empirique dynamique "data-driven" et une règle d'arrêt corrigée. Notre méthodologie est souple dans le sens où plusieurs éléments peuvent être modifiés :

- La statistique peut être remplacée par n'importe quelle statistique de test admettant une écriture réursive ;
- Le seuil de détection peut être choisi parmi les cinq seuils abordés dans la thèse ou tout autre seuil ;
- La règle d'arrêt peut aussi être modifiée ;
- La détection peut se faire soit sur la moyenne, soit sur la variance ou les deux en même temps, suivant l'objectif souhaité.

Dans un premier travail, nous avons suggéré et défini rigoureusement cinq seuils de détection : deux venant de la littérature et trois que nous proposons construits par simulation du régime pré-changement, qui sont la principale contribution de ce travail. Chaque seuil a été déterminé en contrôlant un risque de fausse alarme spécifique sous le régime pré-changement. Nous avons défini et discuté attentivement les différentes notions du risque contrôlé suivant le seuil, dans un contexte de littérature souvent peu précise.

Nous avons effectué une étude de simulation soigneuse pour comparer les performances des différents seuils de détection et évaluer la règle d'arrêt corrigée. Les résultats ont montré que la performance des seuils s'avère robuste lorsqu'un paramètre du régime de pré-changement est mal estimé ou lorsque l'hypothèse d'indépendance ou de normalité des données est violée. Nous avons également constaté que le seuil empirique conditionnel (IEC) est le meilleur pour minimiser le délai de détection tout en maintenant le taux de fausse alarme donné. Cependant, pour une implémentation pratique, nous recommandons d'utiliser le seuil empirique dynamique (IED) car il est le plus facile/rapide à construire et à utiliser. Le seuil dynamique peut être estimé à partir des données du régime normal avant rupture et utilisé tout au long du processus de détection.

Les résultats ont montré également que la règle d'arrêt corrigée est efficace pour réduire le taux de fausse alarme, et utile pour corriger un seuil qui ne respecte pas le risque toléré de fausse alarme.

Dans la seconde partie, nous avons appliqué notre méthodologie sur des données physiologiques sujet-activité dépendantes. Les résultats de comparaison étaient très cohérents avec ceux de l'étude de simulation de la première partie, ce qui confirme la performance et la praticité du Seuil-IED "data-driven".

Ce travail a montré toute la souplesse et l'aisance de la méthode pour une application sur des données réelles, et son intérêt pour l'étude des signaux de muscle de trapèze. Cette étude nous a permis d'étudier la succession et les caractéristiques des différents régimes de sollicitation du muscle et de caractériser les activités suivant les paramètres des ruptures et de la sollicitation dans chaque régime.

Les travaux effectués autour de cette thèse ouvrent des perspectives intéressantes à développer; nous en citons quelques unes dans les points ci-dessous :

Théorie

- Il serait intéressant de réaliser une étude théorique de la distribution exacte de la variable temps d'alarme T , en s'appuyant par exemple sur les travaux de Mercier [21].
- Le seuil constant empirique (CE) proposé a été déterminé en contrôlant le score local (maximum de la statistique score-CUSUM) sur une trajectoire de n observations par la quantité $n\alpha$, où α est la probabilité tolérée de fausse alarme. Nous sommes conscients que ce choix est perfectible; des investigations complémentaires sur ce sujet seraient intéressantes afin d'améliorer le Seuil-CE; dans le sens où il respecterait le risque α fixé.
- Afin d'estimer le temps moyen entre fausses alarmes $MTBFA$, nous avons considéré que le taux instantané conditionnel de fausse alarme (taux de saut) est constant dans le temps (i.e. $\lambda_t^0 = \lambda^0$, $t \geq 1$), et nous avons utilisé l'analyse de survie avec la distribution latente de T supposée géométrique de paramètre λ^0 . Il serait très intéressant d'étudier le cas où le taux de saut est non constant.
- Nous avons observé un comportement inexpliqué des seuils empiriques, à savoir de la statistique score-CUSUM, en fonction de la variance du régime pré-changement et de l'objectif de détection (voir sections 2.1, 4 et 6.2.1). Pour le justifier, il serait nécessaire d'effectuer une étude théorique de la loi de la statistique score-CUSUM sous le régime pré-changement.

Méthodologie

- Remplacement de la statistique CUSUM par une autre statistique récursive (par exemple, celle de Shiryaev-Roberts) et étude des performances.
- Comparaison de notre méthodologie data-driven avec d'autres approches, comme les cartes de contrôle Shewhart ou EWMA.
- Adaptation de notre méthodologie data-driven pour le cas multivarié, en se référant par exemple aux travaux de [8]; combiner les décisions des tests

univariés indépendants en distribuant un poids "par ordre d'importance et de priorité" pour chaque variable.

Pratique

- D'un point de vue pratique, nous souhaiterions toujours appliquer notre méthodologie data-driven dans le contexte de la e-santé pour des patients suivis par des capteurs connectés.

Bibliographie

- [1] A AUBLET-CUVELIER, C GAUDEZ et F CAIL. « Troubles musculosquelettiques des membres supérieurs d'origine professionnelle ». In : *Encyclopédie Médico-Chirurgicale, EMC, Pathologie professionnelle et de l'environnement*, 10 (3) (2015), p. 1–10.
- [2] Bacem BAKHACHE et Igor NIKIFOROV. « Reliable detection of faults in measurement systems ». In : *International Journal of adaptive control and signal processing* 14.7 (2000), p. 683–700.
- [3] Michèle BASSEVILLE, Igor V NIKIFOROV et al. *Detection of abrupt changes : theory and application*. T. 104. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1993.
- [4] JL BRUNO GARZA et al. « Observed differences in upper extremity forces, muscle efforts, postures, velocities and accelerations across computer activities in a field study of office workers ». In : *Ergonomics* 55.6 (2012), p. 670–681.
- [5] Catherine COOK, Robin BURGESS-LIMERICK et Shona PAPALIA. « The effect of wrist rests and forearm support during keyboard and mouse use ». In : *International Journal of Industrial Ergonomics* 33.5 (2004), p. 463–472.
- [6] Daniel EGEA-ROCA, Gonzalo SECO-GRANADOS et José A LÓPEZ-SALCEDO. « Comprehensive overview of quickest detection theory and its application to GNSS threat detection ». In : *Gyroscope and Navigation* 8.1 (2017), p. 1–14.
- [7] Daniel EGEA-ROCA et al. « Performance bounds for finite moving average tests in transient change detection ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 66.6 (2018), p. 1594–1606.
- [8] William J FAITHFULL, Juan J RODRÍGUEZ et Ludmila I KUNCHEVA. « Combining univariate approaches for ensemble change detection in multivariate data ». In : *Information Fusion* 45 (2019), p. 202–214.
- [9] Clarisse GAUDEZ, MA GILLES et Jonathan SAVIN. « Intrinsic movement variability at work. How long is the path from motor control to design engineering? » In : *Applied ergonomics* 53 (2016), p. 71–78.
- [10] N GOUDY et L MCLEAN. « Using myoelectric signal parameters to distinguish between computer workers with and without trapezius myalgia ». In : *European journal of applied physiology* 97.2 (2006), p. 196–209.
- [11] Douglas M HAWKINS, Peihua QIU et Chang Wook KANG. « The changepoint model for statistical process control ». In : *Journal of quality technology* 35.4 (2003), p. 355–366.

- [12] Wenpo HUANG et al. « CUSUM procedures with probability control limits for monitoring processes with variable sample sizes ». In : *IIE Transactions* 48.8 (2016), p. 759–771.
- [13] Samuel KARLIN et Stephen F ALTSCHUL. « Methods for assessing the statistical significance of molecular sequence features by using general scoring schemes ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 87.6 (1990), p. 2264–2268.
- [14] Rebecca KILLICK et Idris ECKLEY. « changepoint : An R package for changepoint analysis ». In : *Journal of statistical software* 58.3 (2014), p. 1–19.
- [15] Agnes LAGNOUX, Sabine MERCIER et Pierre VALLOIS. « Statistical significance based on length and position of the local score in a model of iid sequences ». In : *Bioinformatics* 33.5 (2017), p. 654–660.
- [16] Tze Leung LAI. « Sequential changepoint detection in quality control and dynamical systems ». In : *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* 57.4 (1995), p. 613–644.
- [17] David V LINDLEY. « The theory of queues with a single server ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 48. 2. Cambridge University Press. 1952, p. 277–289.
- [18] Gary LORDEN et al. « Procedures for reacting to a change in distribution ». In : *The Annals of Mathematical Statistics* 42.6 (1971), p. 1897–1908.
- [19] Thomas M MARGAVIO et al. « Alarm rates for quality control charts ». In : *Statistics & Probability Letters* 24.3 (1995), p. 219–224.
- [20] Ranjana K MEHTA et Raja PARASURAMAN. « Neuroergonomics : a review of applications to physical and cognitive work ». In : *Frontiers in human neuroscience* 7 (2013), p. 889.
- [21] Sabine MERCIER. « Transferring biological sequence analysis tools to breakpoint detection for on-line monitoring : A control chart based on the local score ». In : *Quality and Reliability Engineering International* 36.7 (2020), p. 2379–2397.
- [22] Sabine MERCIER et Jean-Jacques DAUDIN. « Exact distribution for the local score of one iid random sequence ». In : *Journal of Computational Biology* 8.4 (2001), p. 373–380.
- [23] George V MOUSTAKIDES. « Optimal stopping times for detecting changes in distributions ». In : *The Annals of Statistics* 14.4 (1986), p. 1379–1387.
- [24] George V MOUSTAKIDES, Aleksey S POLUNCHENKO et Alexander G TARTAKOVSKY. « Numerical comparison of CUSUM and Shiryaev–Roberts procedures for detecting changes in distributions ». In : *Communications in Statistics—Theory and Methods* 38.16-17 (2009), p. 3225–3239.
- [25] Jerzy NEYMAN et Egon Sharpe PEARSON. « IX. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 231.694-706 (1933), p. 289–337.

- [26] Ewan S PAGE. « Continuous inspection schemes ». In : *Biometrika* 41.1/2 (1954), p. 100–115.
- [27] Andrey PEPELYSHEV et Aleksey S POLUNCHENKO. « Real-time financial surveillance via quickest change-point detection methods ». In : *Statistics and Its Interface* 10.1 (2015), 93–106.
- [28] Moshe POLLAK. « Optimal detection of a change in distribution ». In : *The Annals of Statistics* (1985), p. 206–227.
- [29] Aleksey S POLUNCHENKO, Alexander G TARTAKOVSKY et al. « On optimality of the Shiryaev–Roberts procedure for detecting a change in distribution ». In : *The Annals of Statistics* 38.6 (2010), p. 3445–3457.
- [30] H Vincent POOR et Olympia HADJILIADIS. *Quickest detection*. Cambridge University Press, 2008.
- [31] SW ROBERTS. « A comparison of some control chart procedures ». In : *Technometrics* 8.3 (1966), p. 411–430.
- [32] Nassim SAHKI, Anne GÉGOUT-PETIT et Sophie WANTZ-MÉZIÈRES. « Performance study of change-point detection thresholds for cumulative sum statistic in a sequential context ». In : *Quality and Reliability Engineering International* 36.8 (2020), p. 2699–2719.
- [33] Philippe SAINT PIERRE. « Introduction à l’analyse des durées de survie ». In : *Cours de l’Université Pierre et Marie Curie, France* (2015).
- [34] Jonathan SAVIN et al. « Evidence of movement variability patterns during a repetitive pointing task until exhaustion ». In : *Applied Ergonomics* 96 (2021), p. 103464.
- [35] Xiaobei SHEN et al. « Monitoring Poisson count data with probability control limits when sample sizes are time varying ». In : *Naval Research Logistics (NRL)* 60.8 (2013), p. 625–636.
- [36] Walter Andrew SHEWHART. *Economic control of quality of manufactured product*. Macmillan And Co Ltd, London, 1931.
- [37] Albert N SHIRYAEV. « On optimum methods in quickest detection problems ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 8.1 (1963), p. 22–46.
- [38] AN SHIRYAEV. « The problem of the most rapid detection of a disturbance in a stationary process ». In : *Soviet Math. Dokl.* T. 2. 795–799. 1961.
- [39] Christian SONESSON et David BOCK. « A review and discussion of prospective statistical surveillance in public health ». In : *Journal of the Royal Statistical Society : Series A (Statistics in Society)* 166.1 (2003), p. 5–21.
- [40] Alexander G TARTAKOVSKY. « Rapid detection of attacks in computer networks by quickest changepoint detection methods ». In : *Data analysis for network cyber-security*. World Scientific, 2014, p. 33–70.
- [41] Alexander G TARTAKOVSKY, Igor NIKIFOROV et Michele BASSEVILLE. *Sequential analysis : Hypothesis testing and changepoint detection*. Chapman et Hall/CRC, 2014.

- [42] Alexander G TARTAKOVSKY, Aleksey S POLUNCHENKO et Grigory SOKOLOV. « Efficient computer network anomaly detection by changepoint detection methods ». In : *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 7.1 (2012), p. 4–11.
- [43] Alexander G TARTAKOVSKY et al. « A novel approach to detection of intrusions in computer networks via adaptive sequential and batch-sequential change-point detection methods ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 54.9 (2006), p. 3372–3382.
- [44] Alexander G TARTAKOVSKY et al. « Detection of intrusions in information systems by sequential change-point methods ». In : *Statistical methodology* 3.3 (2006), p. 252–293.
- [45] Panagiotis TSIAMYRTZIS et Douglas M HAWKINS. « Bayesian statistical process control for Phase I count type data ». In : *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 35.3 (2019), p. 766–787.
- [46] Kaj Bo VEIERSTED et al. « Assessment of time patterns of activity and rest in full-shift recordings of trapezius muscle activity—Effects of the data processing procedure ». In : *Journal of Electromyography and Kinesiology* 23.3 (2013), p. 540–547.
- [47] Abraham WALD. *Sequential analysis*. Courier Corporation, 2004.
- [48] Abraham WALD. « Sequential tests of statistical hypotheses ». In : *The annals of mathematical statistics* 16.2 (1945), p. 117–186.
- [49] Xian YU, Michael BARON et Pankaj K CHOUDHARY. « Change-point detection in binomial thinning processes, with applications in epidemiology ». In : *Sequential Analysis* 32.3 (2013), p. 350–367.

Table des figures

1.1	Exemples de rupture.	10
1.2	Exemple de détection off-line en utilisant la statistique de CUSUM. (A) : simulation d'une série de $N = 100$ observations sous H_1 avec une rupture à l'instant $v = 50$; $\{X_t\}_{1 \leq t < v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $\{X_t\}_{v \leq t \leq N} \sim \mathcal{N}(1, 1)$. (B) : le CUSUM du LLR avec les paramètres $(\mu_0 = 0; \sigma_0^2 = 1)$ et $(\mu_1 = 1; \sigma_1^2 = 1)$ respectivement du régime pré- et post-changement, supposés connus. Instant de détection de la rupture : $\hat{v} = 49$	13
1.3	(A) : série simulée sous H_1 avec une rupture sur la moyenne à l'instant $v = 50$; $\{X_t\}_{t < v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $\{X_t\}_{t \geq v} \sim \mathcal{N}(1, 1)$. (B) : calcul de la somme cumulée du LLR $\sum_{t=1}^n L_t$ pour tout $n \geq 1$, avec les paramètres $(\mu_0 = 0; \sigma_0^2 = 1)$ et $(\mu_1 = 1; \sigma_1^2 = 1)$ respectivement du régime pré- et post-changement, supposés connus. Le choix arbitraire de $h = 3$ et de $\epsilon = 4$ délimite respectivement la région d'acceptation de $H_{1,n}$ et de $H_{0,n}$	16
1.4	Exemple de simulation pour la détection on-line de rupture en utilisant la statistique de CUSUM. (A) : série simulée sous H_1 avec une rupture sur la moyenne à l'instant $v = 50$; $\{X_t\}_{t < v} \sim \mathcal{N}(\mu_0 = 0, \sigma_0^2 = 1)$, et $\{X_t\}_{t \geq v} \sim \mathcal{N}(\mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 1)$. (B) : statistique de CUSUM $W_t(\delta, q)$ calculée pour tout $t \geq 1$, pour l'objectif de détection sur la moyenne ($\delta = 1, q = 1$) en supposant que les distributions du régime pré- et post-changement sont connues. Pour le choix du seuil $h = 3$, le temps d'arrêt $T = 52$. La rupture $v = 50$ est donc détectée avec un délai $T - v = 2$	20
2.1	Trajectoire de la statistique $W_t(\delta, q)$ de CUSUM calculée sous $\mathbb{P}_0$ ($X_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $t = 1.., 200$). Partie (A) (resp. Partie (B)), la statistique calculée pour les objectifs de détection sur la moyenne $\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ (resp. de détection sur la variance $q \in \{0.15, 0.25, 0.5\}$, avec $\mu_0 = \mu_1 = 0$)	26
2.2	Principe de construction du Seuil-CE $h^E(\alpha, \delta, q)$ pour $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1$ et $n = 50$. (A) : trajectoire de la statistique $w_t^1(1, 1)$ et son maximum $m^1(1, 1)$. (B) : calcul des B maximums $\{m_n^j(1, 1)\}_{1 \leq j \leq B}$. (C) : $h^E(0.01, 1, 1)$ quantile empirique d'ordre $(1 - n\alpha)$	29

- 2.3 Principe de construction du Seuil-IE $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ jusqu'à l'instant $n = 100$, pour $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1$. (A) : trajectoire de la statistique $w_t^1(1, 1)$. (B) : calcul des $B = 100000$ statistiques $\{w_t^j(1, 1)\}_{1 \leq j \leq B}$. (C) : $h_t^I(\alpha, 1, 1)$ quantile empirique d'ordre $(1 - \alpha)$ à chaque instant t . 33
- 2.4 Exemple de calcul de la statistique $w_t(0.5, 1)$ sur une série simulée sous le régime post-changement $\mathbb{P}_1$, avec une rupture à l'instant $v = 50$ pour un niveau de différence de 0.5 sur la moyenne. (A) : détection en utilisant le Seuil-IE $h_t^I(\alpha, 0.5, 1)$ avec $\alpha = 0.02$ (configuration sans réinitialisation). (B) : détection en utilisant le Seuil-IED $h_t^D(\alpha, 0.5, 1)$ (configuration data-driven avec réinitialisation). . . . 35
- 2.5 Comparaison de différents seuils pour $\alpha = 0.02, (\sigma_0 \delta) \in \{0.5, 1, 2\}, q = 1$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A) (resp. (B)) les seuils empiriques sont construits à partir de données gaussiennes i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ (resp. à partir de données autocorrélées du processus autorégressif $AR(1)$). 37
- 2.6 Exemple de détection dans le cas de l'utilisation des règles d'arrêt (A) : classique ($c = 1$) et (B) : corrigée avec $c = 3$, sur la même série simulée sous $H_{1,n}$, avec $n = 100, v = 50$. Le seuil utilisé est $h_t^I(\alpha, \delta, q)$ avec $\alpha = 0.01, \delta = 1, q = 1, \sigma_0^2 = 1$ 38
- 4.1 Résultats d'estimation de λ_t^0 sous le régime pré-changement, puis de λ_t^1 sous le régime post-changement. Les données ont été simulées sous le modèle 1 à la fois pour la construction des seuils avec $\alpha = 0.02$ et pour l'évaluation. Les résultats ont été obtenus selon trois objectifs de détection sur la moyenne $(\sigma_0 \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. La vraie rupture de moyenne à l'instant $v = 50$, de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$ 46
- 4.2 Résultats d'estimation de λ_t^0 sous le régime pré-changement, puis de λ_t^1 sous le régime post-changement. Les données ont été simulées sous le modèle 2 à la fois pour la construction des seuils avec $\alpha = 0.02$ et pour l'évaluation. Les résultats ont été obtenus selon trois objectifs de détection sur la moyenne $(\sigma_0 \delta) \in \{0.5, 1, 2\}$, avec variance connue $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = 4/3$. La vraie rupture de moyenne se situe à l'instant $v = 50$ de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$ 48
- 4.3 Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus par les différents seuils pour trois valeurs données de $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$ pour le Modèle 1 (Gaussien i.i.d.) et selon $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \sigma_0^{2,R} = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés sous H_1 avec un changement réel sur la moyenne de niveau $\sigma_0 \delta^R = 1$ (resp. $\sigma_0 \delta^R = 2$). 50
- 4.4 Résultats d'estimation de $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus par les différents seuils pour la valeur de $\alpha = 0.02$, pour le Modèle 1 (Gaussien i.i.d.) et selon $\sigma_0 \delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $q = 1$ et $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Nous comparons les résultats pour trois cas (A) : $\sigma_0^{2,R} = \frac{1}{2} < \sigma_0^2$; (B) : $\sigma_0^{2,R} = \frac{4}{3} = \sigma_0^2$; (C) : $\sigma_0^{2,R} = 2 > \sigma_0^2$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un changement réel sur la moyenne de niveau $\sigma_0^R \delta^R = 1$ 52

- 4.5 Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils pour des données gaussiennes i.i.d (Modèle 1), trois valeurs données $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, et $q \in \{0.15, 0.25, 0.50\}$, avec $\delta = 0$ et $\mu_0 = \mu_0^R = 0$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un changement réel sur la variance de niveau $q^R = 0.25$ (resp. $q^R = 0.15$). 54
- 4.6 Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils pour des données autocorrélées (Modèle 2), trois valeurs données $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, et $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les $\widehat{ADD}$ estimés respectivement avec changement réel de niveau de $\sigma_0\delta^R = 1$ (resp. $\sigma_0\delta^R = 2$). 55
- 4.7 Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils construits à partir de données gaussiennes i.i.d. (Modèle 1), appliqués sur des données autocorrélées (Modèle 2), pour trois valeurs données $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, et $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$ 57
- 4.8 Résultats d'estimation $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus par les différents seuils construits à partir des données gaussiennes i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_0 = 1, \sigma_0^2 = 0.5)$, pour trois valeurs de $\alpha \in \{0.01, 0.02, 0.03\}$, et selon $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, $q = 1$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$. Dans la partie (A) (resp. (B)), les données de l'évaluation ont été simulées à partir du modèle 1, i.e. $\mathcal{N}(\mu_0 = 1, \sigma_0^2 = 0.5)$ (resp. à partir du modèle 3, i.e. $\Gamma(shape = 2, rate = 2)$ 58
- 4.9 Comparaison des résultats de l' $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus en utilisant la règle d'arrêt classique $c = 1$ et corrigée pour $c \in \{2, 3\}$. Les résultats ont été obtenus sous le Modèle 1 pour $\alpha = 0.02$ et selon l'objectif de détection sur la moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$ 59
- 4.10 Comparaison des résultats de l' $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus en utilisant la règle classique $c = 1$ et la règle corrigée pour $c \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Les résultats ont été obtenus par des seuils construits sous le Modèle 1 avec $\alpha = 0.02$, appliqués pour une détection de rupture de moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$, sur des données générées à partir du Modèle 2. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$ 61
- 4.11 Comparaison des résultats $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda^0}$ obtenus en utilisant la règle classique $c = 1$ et la règle corrigée pour $c \in \{2, 3\}$. Les résultats ont été obtenus par des seuils construits sous le Modèle 1 avec $\alpha = 0.02$, appliqués pour une détection de rupture de moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{1}{2}$, sur des données générées à partir du Modèle 3. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$ 63

4.12	Résultats de l' $\widehat{ADD}$ vs $\widehat{\lambda}^0$ obtenus en utilisant le Seuil-CE corrigé avec $c = 2$ (Seuil-CE/c2) et les autres seuils non corrigés (utilisant la règle d'arrêt classique $c = 1$). Les résultats ont été obtenus sous le Modèle 1 pour $\alpha = 0.02$ et selon l'objectif de détection sur la moyenne $\sigma_0\delta \in \{0.5, 1, 2\}$, avec $\sigma_0^2 = \frac{4}{3}$. Les $\widehat{ADD}$ s ont été estimés avec un niveau réel de changement $\sigma_0\delta^R = 1$	66
5.1	Périodes d'activités et mesures effectuées pendant la journée expérimentale. Act : working Activity ; TB : Test Battery.	71
5.2	Signal RMS-RVE du sujet 1. (A) : sur toute la journée expérimentale, activités, pauses et déjeuner inclus. (B) : focus sur la première activité (Puzzle). Les périodes d'activité sont délimitées par des lignes noires.	73
5.3	Signal RMS-RVE Log-transformé de la première activité du sujet 1. (A) : signal non-lissé. (B) : signal lissé- 1s.	74
5.4	Boxplots des signaux de 29 sujets, donnés par activité.	75
5.5	Signaux des activités "TextH" et "Str" du premier sujet.	76
5.6	Boxplots des activités "TextH" et "Str" donnés par sujet.	77
5.7	Signaux des sujets 3 et 8 sur l'activité "TextH" et "Str".	78
6.1	Exemple de détection sur le signal EMG d'une activité. L'objectif de détection est sur la moyenne pour un niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$. (A) : le signal dans le premier régime avec la première période d'estimation $L = 90$. La moyenne estimée dans le premier régime est donnée par le segment vert ($\widehat{\mu}_0 = 2$), et la variance estimée par $\widehat{\sigma}_0^2 = 0.05$. (B) : W-statistique calculée dans le premier régime (ligne bleue), et signalement de la rupture produite à l'instant $Cpt = 246$ au temps d'arrêt $T = 306$. . .	83
6.2	Valeur du Seuil-IE construit sur les données de la première activité du sujet 1. (A) : signal de la première période d'estimation $L = 90$, avec les paramètres du régime pré-changement estimés $\widehat{\mu}_0[0] = 2$ et $\widehat{\sigma}_0^2[0] = 0.05$. (B) : Seuil-IE construit pour $\alpha = 0.02$, et pour un l'objectif de détection sur la moyenne de niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$	85
6.3	Résultats de détection sur l'activité "Puzl" : 16 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 7 de diminution).	86
6.4	Seuil-IE construit dans l'activité "Sol". Les paramètres du pré-changement sont estimés par $\widehat{\mu}_0[0] = 2.47$ et $\widehat{\sigma}_0^2[0] = 0.03$	87
6.5	Résultats de détection sur l'activité "Sol" : 18 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 9 de diminution).	88
6.6	Seuil-IE construit dans l'activité "TextH". Les paramètres sont estimés par $\widehat{\mu}_0[0] = 2.59$ et $\widehat{\sigma}_0^2[0] = 0.05$	88
6.7	Résultats de détection sur l'activité "TextH" : 8 changements d'activité musculaire (3 d'augmentation, 5 de diminution).	89
6.8	Seuil-IE construit dans l'activité "Text". Les paramètres sont estimés par $\widehat{\mu}_0[0] = 1.64$ et $\widehat{\sigma}_0^2[0] = 0.19$	90
6.9	Résultats de détection sur l'activité "Text" : 8 changements d'activité musculaire (5 d'augmentation, 3 de diminution).	90

6.10	Seuil-IE construit dans l'activité "Str". Les paramètres sont estimés par $\hat{\mu}_0[0] = 2.31$ et $\hat{\sigma}_0^2[0] = 0.01$	91
6.11	Résultats de détection sur l'activité "Str" : 19 changements d'activité musculaire (9 d'augmentation, 10 de diminution).	91
6.12	Résultats de comparaison (DDD et ADDDs calculés) entre la détection du Seuil-IED et celle du Seuil-CW obtenus sur les 29 sujets, par activité. . . .	98
7.1	Boxplots par activités de la variable N.Rup sur tous sujets confondus.	103
7.2	Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Nombre de ruptures pour chacun des sujets.	104
7.3	Boxplots par activités de la variable Durée sur tous sujets confondus.	105
7.4	Boxplots par sujets de la variable Durée, en fonction de l'activité. .	106
7.5	Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Durée du régime pour chacun des sujets.	107
7.6	Boxplots par activités de la variable Mu sur tous sujets confondus.	108
7.7	Boxplots par sujets de la variable Mu, en fonction de l'activité. . . .	109
7.8	Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Mu pour chacun des sujets.	110
7.9	Boxplots par activités de la variable Ampli sur tous sujets confondus.	111
7.10	Boxplots par sujets de la variable Ampli, en fonction de l'activité. .	112
7.11	Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Ampli pour chacun des sujets. . .	113
7.12	Boxplots par activité de la variable Var sur tous sujets confondus. .	114
7.13	Boxplots par sujets de la variable Var, en fonction de l'activité. . . .	115
7.14	Valeurs observées (figure à gauche) et prédites (figure à droite) par le modèle mixte pour la variable Var pour chacun des sujets.	116

Liste des tableaux

5.1	Statistiques descriptives du signal calculées sur la journée expérimentale et sur la première activité du sujet 1.	72
5.2	Statistiques descriptives calculées sur le signal de la première activité du sujet 1, Log-transformée non-lissée et lissée sur 1s.	74
5.3	Activités et leurs abréviations respectives.	75
5.4	Statistiques descriptives des cinq activités calculées sur 29 sujets.	75
6.1	Description du temps de retour à 0 de la statistique CUSUM sous le régime pré-changement (L=90 premières secondes de chaque activité). Le calcul a été effectué sur les signaux des 29 sujets de chaque activité. La statistique a été calculée pour un objectif de détection sur la moyenne de niveau $\sigma_0\delta = 0.69$ (2% rve), $q = 1$	84
6.2	Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Puzl".	87
6.3	Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Sol".	87
6.4	Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "TextH".	89
6.5	Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Text".	90
6.6	Caractéristiques des changements d'activité musculaire détectés : instants de ruptures, moyennes et variances estimées dans chaque régime de l'activité "Str".	92
6.7	Exemple de la détection des seuils IED et CW sur l'activité 1 "Puzl".	93
6.8	Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Puzl" et les paramètres de comparaison (DDD et AD44).	94
6.9	Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Sol" et les paramètres de comparaison (DDD et AD44).	94
6.10	Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "TextH" et les paramètres de comparaison (DDD et AD44).	95
6.11	Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Text" et les paramètres de comparaison (DDD et AD44).	95
6.12	Instants de ruptures détectées (DT) des seuils IED et CW sur l'activité "Str" et les paramètres de comparaison (DDD et AD44).	96

6.13	Nombre de détections des seuils IED et CW sur les signaux des 29 sujets, donné par activité.	97
7.1	Variables de caractérisation et leurs abréviations respectives.	99
7.2	Statistiques descriptives calculées par activité sur la variable N.Rup.	102
7.3	Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Nombre de ruptures en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient (nombre de ruptures) estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la <i>Pvalue</i> correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.	103
7.4	Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Durée dans chacune des activités.	105
7.5	Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Durée du régime en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la <i>Pvalue</i> correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.	107
7.6	Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Mu dans chacune des activités.	108
7.7	Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Mu en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la <i>Pvalue</i> correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.	110
7.8	Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Ampli dans chacune des activités.	111
7.9	Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Ampli en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la <i>Pvalue</i> correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.	113
7.10	Statistiques descriptives calculées sur les 29 sujets pour la variable Var dans chacune des activités.	114
7.11	Résultats du modèle mixte à effet aléatoire : Var en fonction des activités. Le tableau du haut donne à chaque activité, le coefficient estimé avec son intervalle de confiance 95 % associé, l'écart-type d'erreur, le degré de liberté, la valeur de la statistique et la <i>Pvalue</i> correspondante. Le tableau du bas donne l'estimation de la variance résiduelle et celle de l'effet aléatoire du aux sujets.	116
7.12	Nombre de fois où le couple d'activité (i,j) ne présente pas de différence significative sur les tests d'ANOVA à effet aléatoire liés aux cinq variables de caractérisation.	118

Annexe A

Calculs

A.1 Démonstration du Lemme 1

(i) L'espérance du LLR sous le régime pré-changement $\mathbb{P}_0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_0[L_t] &= \mathbb{E}_0 \left[\ln \left(\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \right) \right] \leq \ln \left(\mathbb{E}_0 \left[\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \right] \right) \quad \text{d'après l'inégalité de Jensen avec} \\
 &\quad \text{la fonction Ln concave sur } \mathbf{R}^+. \\
 &\leq \ln \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \cdot f_0(x_t) dx \right) \\
 &\leq \ln \left(\int_{\mathbf{R}} f_1(x_t) dx \right) \\
 &\leq \ln(1) = 0.
 \end{aligned}$$

(ii) L'espérance du LLR sous le régime post-changement $\mathbb{P}_1$:

$$\text{On a } \mathbb{E}_1[L_t] = \mathbb{E}_1 \left[\ln \left(\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \right) \right] = -\mathbb{E}_1 \left[\ln \left(\frac{f_0(x_t)}{f_1(x_t)} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_1 \left[\ln \left(\frac{f_0(x_t)}{f_1(x_t)} \right) \right] &\leq \ln \left(\mathbb{E}_0 \left[\frac{f_0(x_t)}{f_1(x_t)} \right] \right) \quad \text{d'après Jensen} \\
 &\leq \ln \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{f_0(x_t)}{f_1(x_t)} \cdot f_1(x_t) dx \right) \\
 &\leq \ln \left(\int_{\mathbf{R}} f_0(x_t) dx \right) \\
 &\leq \ln(1) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \mathbb{E}_1[L_t] = -\mathbb{E}_1 \left[\ln \left(\frac{f_0(x_t)}{f_1(x_t)} \right) \right] \geq 0.$$

A.2 Récursivité de la statistique de CUSUM

La version on-line de statistique de CUSUM s'écrit comme suit : $W_t = \max \{0, \ln(V_t)\}$.
On va démontrer que la statistique W_t peut être écrite en fonction de $W_{t-1} + L_t$,
où $L_t = \ln \left(\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \right)$.

$$\begin{aligned}
 \ln(V_t) &= \max_{1 < k \leq t} \sum_{j=k}^t L_j \\
 &= \max \left\{ \sum_{j=2}^t L_j, \sum_{j=3}^t L_j, \dots, \sum_{j=t-1}^t L_j, L_t \right\} \\
 &= \max \left\{ \sum_{j=2}^{t-1} L_j + L_t, \sum_{j=3}^{t-1} L_j + L_t, \dots, L_{t-1} + L_t, L_t \right\} \\
 &= \max \left\{ \sum_{j=2}^{t-1} L_j, \sum_{j=3}^{t-1} L_j, \dots, L_{t-1}, 0 \right\} + L_t \\
 &= \max \left\{ \max_{1 < k \leq t-1} \sum_{j=k}^{t-1} L_j, 0 \right\} + L_t \\
 &= \max \{ \ln(V_{t-1}), 0 \} + L_t
 \end{aligned}$$

On en déduit que $W_t = \max \{0, \ln(V_t)\} = \max \{0, W_{t-1} + L_t\}$.

A.3 Récursivité de la statistique SR

On va démontrer que la version on-line de la statistique SR : $R_t = \sum_{k=1}^t \prod_{j=k}^t \Lambda_j$
peut être écrite récursivement en fonction de L_t .

$$\begin{aligned}
 R_t &= \sum_{k=1}^t \prod_{j=k}^t \Lambda_j \\
 &= \prod_{j=1}^t \Lambda_j + \prod_{j=2}^t \Lambda_j + \dots + \prod_{j=t-1}^t \Lambda_j + \Lambda_t \\
 &= \left(\prod_{j=1}^{t-1} \Lambda_j + \prod_{j=2}^{t-1} \Lambda_j + \dots + \Lambda_{t-1} + 1 \right) \cdot \Lambda_t \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{t-1} \prod_{j=k}^{t-1} \Lambda_j + 1 \right) \cdot \Lambda_t \\
 &= (R_{t-1} + 1) \cdot e^{L_t}
 \end{aligned}$$

A.4 Démonstration du Lemme 2

On a $S_t(\delta, q) = \frac{q^2 \delta (X_t - \mu_0)}{\sigma_0} + \frac{(1 - q^2)(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{q^2 \delta^2}{2} + \ln(q)$.

(i) Sous $\mathbb{P}_0 : \mathbb{E}_0 \left(\frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0} \right) = 0$ et $\mathbb{E}_0 \left(\frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 = 1$.

On a alors $\mathbb{E}_0 [S_t(\delta, q)] = \ln(q) + \frac{1}{2} (1 - q^2 - \delta^2 q^2) = \Phi_0(\delta, q)$.

On pose $\Phi'_0(q) = \frac{\partial (\mathbb{E}_0 [S_t(\delta, q)])}{\partial q} = -q (1 + \delta^2) + \frac{1}{q}$.

$\Phi'_0(q) = 0 \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{1}{1 + \delta^2}}$.

- Si $q = \sqrt{\frac{1}{1 + \delta^2}}$, on a $\mathbb{E}_0 \left[S_t(\delta, \sqrt{\frac{1}{1 + \delta^2}}) \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 + \delta^2} \right) \leq 0, \forall \delta \in \mathbb{R}$.

- Si $q \neq \sqrt{\frac{1}{1 + \delta^2}}$, on a $\mathbb{E}_0 [S_t(\delta, q)] < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 + \delta^2} \right) \leq 0, \forall \delta \in \mathbb{R}$, car $\Phi_0(\delta, q)$ est une fonction croissante sur l'intervalle $\left] 0; \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 + \delta^2} \right) \right]$, et décroissante sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 + \delta^2} \right); +\infty \right[$.

(ii) Sous $\mathbb{P}_1 : \mathbb{E}_1 \left(\frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0} \right) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$ et $\mathbb{E}_1 \left(\frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}$.

On a alors $\mathbb{E}_1 [S_t(\delta, q)] = \ln(q) + \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \frac{1}{q^2} - 1 \right) = \Phi_1(\delta, q)$.

on pose $\Phi'_1(\delta, q) = \frac{\partial (\mathbb{E}_1 [S_t(\delta, q)])}{\partial q} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{q^2} \right)$.

$\Phi'_1(\delta, q) = 0 \Leftrightarrow q = 1$.

- Si $q = 1$, on a $\mathbb{E}_1 [S_t(\delta, 1)] = \frac{\delta^2}{2} \geq 0, \forall \delta \in \mathbb{R}$.

- Si $q \neq 1$, on a $\mathbb{E}_1 [S_t(\delta, q)] > \frac{\delta^2}{2} \geq 0, \forall \delta \in \mathbb{R}$, car $\Phi_1(\delta, q)$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $\left] 0; \frac{\delta^2}{2} \right]$, et croissante sur l'intervalle $\left] \frac{\delta^2}{2}; +\infty \right[$.

A.5 Démonstration de l'équivalence $S_t \equiv L_t$ dans le cas gaussien

Dans le cas gaussien, on a $L_t = \ln \left(\frac{f_1(x_t)}{f_0(x_t)} \right) = \frac{(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(X_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \ln \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)$.

On remplace $\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$, $q = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ et $Y_t = \frac{X_t - \mu_0}{\sigma_0}$ dans S_t donnée dans la définition 3, et on développe pour avoir :

$$\begin{aligned}
S_t(\delta, q) &= \frac{q^2 \delta (X_t - \mu_0)}{\sigma_0} + \frac{(1 - q^2)(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{q^2 \delta^2}{2} + \ln(q) \\
&= \frac{(X_t - \mu_0)(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_1^2} + \frac{(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{2\sigma_1^2} + \ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \\
&= \frac{(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(X_t - \mu_0)^2 - 2(X_t - \mu_0)(\mu_1 - \mu_0) + (\mu_1 - \mu_0)^2}{2\sigma_1^2} + \ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \\
&= \frac{(X_t - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(X_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) \\
&= L_t
\end{aligned}$$

Annexe B

Description et résultats

B.1 Description des cinq activités

Typing task : Les participants ont été invités à utiliser un clavier d'ordinateur pour taper un texte présenté sur un document pdf sur le côté gauche de l'écran. La hauteur du bureau supportant le clavier a été initialement ajustée à la hauteur sol-coude de chaque participant (REF). Cette hauteur est restée la même pour toutes les autres activités effectuées, à l'exception de la condition « elevated desk ».

Typing task-elevated desk : La «Typing task» décrite ci-dessus a été effectuée avec la hauteur du bureau réglée à 10 cm au-dessus de la hauteur des coudes.

Solitaire : Les sujets devaient jouer au jeu d'ordinateur Spider Solitaire implémenté sous Windows, avec la pression du temps. Cette activité doit être effectuée avec une souris informatique où le sujet doit sélectionner un objet, le déplacer puis le déposer. Afin d'accroître la motivation des participants, une récompense de 20 CHF était offerte au participant ayant réalisé le meilleur score.

Stroop Test : Ce test consiste à lire le nom d'une couleur dont le texte est dans une couleur différente du nom (c'est-à-dire que la couleur du texte ne correspond pas au nom écrit de la couleur). En utilisant une souris informatique, le nom de la couleur doit être sélectionné à partir d'un panneau à choix multiples affichant les noms de couleur. Un nouveau mot de couleur s'affichait toutes les 2 secondes et le nombre de réponses correctes a été compté sur la période de 50 minutes.

Puzzle : le même puzzle en ligne a été présenté à tous les participants. L'assemblage du puzzle a été réalisé par des actions de glisser-déposer effectuées avec une souris informatique.

B.2 Résultats de détection obtenus sur tous les sujets

