ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES TECHNOLOGIES ET SANTÉ N° 585
CENTRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE DE LENS – CNRS UMR 8188

Thèse de doctorat

Présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Informatique

de l'Université d'Artois

par

Anis Gargouri

Sur la notion de support monotone en argumentation abstraite

Soutenue le 17 décembre 2021 après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M. N. Maudet, Professeur, Sorbonne Université - LIP6	Président du jury
Mme S. Villata, Chargée de Recherches HDR, CNRS, I3S	Rapporteur
Mme F. Dupin De Saint-Cyr – Bannay, Maître de Conférences HDR, Université Paul Sabatier, IRIT	Rapporteur
M. S. Konieczny, Directeur de recherches, CNRS - Université d'Artois, CRIL	Co-directeur de thèse
M. P. Marquis, Professeur, Université d'Artois - CNRS, CRIL	Co-directeur de thèse
M. S. Vesic, Chargé de recherches HDR, CNRS - Université d'Artois, CRIL	Co-encadrant

Mise en page avec memcril (B. Mazure, CRIL) et thloria (D. Roegel, LORIA).

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord les membres du jury :
Mme Florence Dupin De Saint-Cyr – Bannay et Mme Serena Villata pour avoir accepté d'être rapporteures. Je leur suis reconnaissant de l'intérêt qu'elles ont porté à mon travail ;
Je remercie également M. Nicolas Maudet qui m'a honoré en acceptant de participer au jury de cette thèse.

Mes remerciements vont ensuite à ceux qui m'ont encadré durant ces années de thèse, M. Sébastien Konieczny, M. Pierre Marquis et M. Srdjan Vesic. Je les remercie de m'avoir soutenu et guidé tout au long de ces années de thèse. Travailler avec eux a été une expérience enrichissante, à la fois d'un point de vue professionnel et scientifique, mais aussi d'un point de vue humain. Merci à tous les trois pour leur gentillesse et leur patience.

Un grand remerciement est adressé à tous les membres du CRIL pour l'ambiance très favorable qu'ils ont su créer autour de moi. Je tiens aussi à remercier Virginie, Sandrine et Frédéric pour leur sympathie et leur accueil.

Je remercie également tous les doctorants et collègues de bureau pour la bonne ambiance de travail mais également (et surtout) pour les nombreux bons moments passés ensembles.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans le soutien financier de la région Hauts-de-France, qui m'a permis de rester entièrement concentré sur mes recherches durant ma thèse.

Enfin merci à ceux et celles que je n'ai pas pu citer ici.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Contexte et motivations

Depuis quelques années, les plates-formes de débat et les sites de vente en ligne connaissent un développement sans précédent, permettant d'échanger des avis et des opinions des utilisateurs sur différents produits et sujets, ce qui rend l'exploitation « manuelle » de cette grande masse d'informations peu efficace. Le problème est que les données sont peu structurées et leurs volumes réclament beaucoup de ressources pour le traitement. Dans un tel cas, il peut être difficile de réaliser une synthèse utilisable. Un moyen facile pour guider cette synthèse est d'ajouter une structure à cette information, afin de permettre une exploitation automatisée simplifiée. Le problème est alors de déterminer une structure facilement appréhendable par l'ensemble des utilisateurs.

La théorie de l'argumentation est l'étude de telles représentations structurées et est un moyen pour effectuer un raisonnement et pour guider les processus de décision. Il s'agit de la capacité, pour un agent (un être humain, une machine, un logiciel, ...), de raisonner en tenant compte des informations (éventuellement contradictoires) sur ce sujet. Bien sûr, l'argumentation est aussi un moyen de convaincre un autre agent de changer d'avis. Dans les deux cas, l'argumentation peut être un outil de prise de décision. Plus généralement, l'argumentation peut être utilisée pour modéliser tout type de raisonnement, dès lors qu'il existe une certaine notion d'incompatibilité ou de conflit dans les données du problème.

La théorie de l'argumentation est étudiée depuis des années en intelligence artificielle. La représentation la plus abstraite considère un graphe, où les arguments sont les sommets, et où un arc entre deux sommets représente une attaque entre les deux arguments correspondants. La question usuelle est alors de déterminer les arguments acceptables conjointement [DUNG 1995]. Ce cadre abstrait pour l'argumentation s'est révélé extrêmement utile pour analyser divers types de processus d'argumentation. Un système d'argumentation prend en entrée un ensemble d'arguments et une relation d'attaque entre ces arguments. Il donne en sortie (selon la sémantique considérée) un ensemble d'arguments qui représentent une solution.

Des sémantiques plus adéquates ont été proposées pour des applications de débat sur Internet, avec beaucoup d'utilisateurs et beaucoup d'arguments. Les sémantiques graduées, dont le but n'est pas juste d'identifier les arguments acceptables et non acceptables, mais de donner un ordre complet sur les arguments, des plus ou moins acceptables ([LEITE & MAR-

TINS 2011, AMGOUD & BEN-NAIM 2013, BONZON *et al.* 2016b, BONZON *et al.* 2016a]). Toutefois, dans l'ensemble de ces travaux, la seule relation utilisée est une relation d'attaque. Or, dans les débats, il est important pour les intervenants d'exprimer non seulement des attaques entre arguments, mais également des supports : un argument peut être avancé pour donner plus de légitimité à un argument présenté auparavant.

La notion de bipolarité a été étudiée dans différents domaines ces dernières années. Les travaux de [AMGOUD *et al.* 2004, CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2005] ont introduit la bipolarité dans l'argumentation et ont présenté un premier cadre d'argumentation dit bipolaire. Cependant, l'étude des sémantiques prenant en compte les supports entre arguments est assez récente ([CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2005, OREN & NORMAN 2008, BOELLA *et al.* 2010, NOUIOUA & RISCH 2011, COHEN *et al.* 2012]), et il n'y a pas encore de consensus clair sur ce à quoi devrait ressembler une sémantique prenant en compte la notion de support. Toutes ces sémantiques correspondent à des intuitions diverses (et quelque peu contradictoires) de ce que pourrait être une relation de support : support déductif, de nécessité, évidentiel et d'appui. En effet, ces sémantiques capturent différents types d'interactions entre arguments, qui ne correspondent pas à des attaques. Par exemple, le support déductif exprime une relation d'implication entre arguments, plutôt qu'une contribution positive (aide) d'un argument à un autre. Ceci est problématique car certains systèmes de délibération profitent également des relations de support. Pour aller plus loin, aboutir à une meilleure compréhension de ce que signifie la notion de support est un objectif important à atteindre. Cette thèse s'inscrit dans cette perspective.

Dans ce travail, nous commençons par proposer une nouvelle interprétation de la notion de support et formalisons la notion de support monotone. Nous introduisons deux postulats pour capturer cette nouvelle interprétation. Le premier postulat, appelé *monotonie*, empêche une relation de support de dégrader le statut d'acceptation de l'argument supporté. Le second postulat, appelé *non-trivialité*, requiert l'existence d'un système d'argumentation bipolaire pour lequel soutenir un argument conduit à augmenter son statut d'acceptation.

Par la suite, nous présentons notre première contribution, la famille générale de sémantiques à base d'extensions, appelée *Support Score-Based (SSB)*, qui capture la notion de support monotone. Nous proposons des propriétés et donnons un théorème de représentation.

Notre deuxième contribution est l'introduction de la famille de sémantiques à base de labellings, appelée *Labelling Support Score-Based (LSSB)*, qui capture la notion de support monotone et qui a pour utilité de donner un résultat plus fin qu'avec les *Support Score-Based semantics*. Nous proposons des propriétés et donnons également un théorème de représentation pour cette famille de sémantiques.

1.2 Organisation du mémoire de thèse

La suite de ce mémoire est organisée comme suit : Les deux chapitres suivants (chapitre 2 et chapitre 3) rappellent les notions clés sur laquelle notre contribution s'appuie et constituent un état de l'art ciblé à notre besoin. Le chapitre 2 présente les principales sémantiques pour l'argumentation abstraite en l'absence de support, alors que le chapitre 3 se focalise sur l'argumentation abstraite bipolaire. La contribution de la thèse est fournie aux chapitres 4, 5 et 6. Le chapitre 4 commence par introduire la notion de *support monotone* et définir les propriétés de base que le support monotone doit satisfaire, ainsi que des propriétés additionnelles souvent désirables pour un concept de support. Par la suite, il propose une étude comparative des systèmes d'argumentation bipolaire, sur la base des propriétés introduites. Le chapitre 5 présente, en premier lieu, la famille des sémantiques *Support Score-Based* pour l'argumentation abstraite bipolaire. Ensuite, définit les propriétés de cette famille de sémantiques et donne un résultat de représentation reliant les axiomes qu'une sémantique SSB satisfait aux propriétés des fonctions d'agrégation utilisées pour la définir. Le chapitre 6 est consacré à la famille des sémantiques *Labelling Support Score-Based*. Il définit également les propriétés de cette famille de sémantiques et donne un résultat de représentation. Enfin, le chapitre 7 fournit une conclusion générale de la thèse et présente quelques perspectives.

Chapitre 2

Système d'argumentation abstrait

Sommaire

L'argumentation est un domaine de recherche important pour la communauté de l'intelligence artificielle. Au cours des dernières années, de nombreuses recherches sur le thème de l'argumentation se sont basées sur la théorie de l'argumentation abstraite de Dung [DUNG 1995]. Ce travail concerne les systèmes d'argumentation qui représentent des arguments d'une façon abstraite et des relations capturant les conflits entre eux. Ainsi, dans un tel système, on ne s'intéresse ni à l'origine de l'argument ni à sa structure interne. Autrement dit, l'argument n'est pas défini explicitement et par conséquent il n'est pas précisé si l'attaque entre les arguments porte, par exemple, sur des conclusions contradictoires ou s'il s'agit d'une autre forme d'attaque. On se focalise uniquement sur l'existence d'interaction entre les arguments. Une telle représentation des arguments permet de se concentrer sur l'acceptabilité de ces derniers. Ces systèmes sont représentés par un graphe orienté dans lequel les nœuds sont des arguments et les arcs correspondent à la relation d'attaque entre arguments.

Dans cette section, nous rappelons dans une première partie les notions de bases de la théorie de l'argumentation abstraite, telles que définies par Dung. Ensuite, nous présentons les sémantiques à base d'extensions et les sémantiques à base de labellings. Enfin, nous rappelons les propriétés principales des sémantiques dans l'argumentation abstraite.

2.1 Système d'argumentation de Dung

Nous pouvons expliquer le fonctionnement du système d'argumentation abstrait de Dung [DUNG 1995] en disant que, d'une façon basique, une déclaration devient crédible si elle peut être argumentée avec succès contre les arguments qui l'attaquent. En d'autres termes, les arguments soutenant cette déclaration sont acceptables s'ils ont la capacité de se défendre avec succès contre les contre-arguments.

L'exemple ci-dessous illustre cette idée.

Exemple 2.1

Deux agents ne sont pas d'accord à propos de la prévision des prix du pétrole :

Agent 1 : – *La demande mondiale augmente, les prix vont augmenter.* (a)
Agent 2 : – *Les prix du pétrole vont chuter suite à l'accord iranien.* (b)
Agent 1 : – *C'est vrai, mais les négociations avec l'Iran n'avancent pas.* (c)

Si la discussion s'arrête ici, il peut sembler que l'agent 1 a imposé son point de vue. Pourtant, si l'agent 2 donne un nouvel argument contre celui de l'agent 1, alors c'est l'agent 2 qui « remporte le débat ».

Ce genre de discussion peut aisément être représenté de façon formelle. Dans le reste de cette section, nous présentons le formalisme de Dung pour représenter un système d'argumentation, ainsi que la notion d'extension qui permet de décider quels arguments peuvent être considérés comme « vainqueurs» du débat.

Dans son cadre abstrait, Dung définit un système d'argumentation comme un couple constitué d'un ensemble d'arguments et d'une relation binaire qui exprime un conflit entre les arguments, appelée aussi relation d'attaque entre arguments.

La définition formelle d'un système d'argumentation de Dung est la suivante :

Définition 2.1 (Système d'argumentation [DUNG 1995])

Un *système d'argumentation (Argumentation Framework : AF)* est un couple $\langle A, R \rangle$, où A est un ensemble fini et non vide d'arguments et $R \subseteq A \times A$ est une relation binaire sur A, qui représente la notion d'attaque entre les arguments. La relation d'attaque est graphiquement représentée par $\rightarrow$.

Notation 2.1

Soit deux arguments $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$, nous notons par $\mathtt{a}R\mathtt{b}$ l'attaque $(\mathtt{a}, \mathtt{b}) \in R$.

Notation 2.2

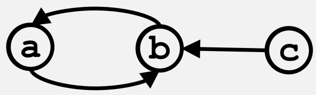
Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un AF, pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, nous notons l'ensemble de ses attaquants par :

$$att_{\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a}) = \{\mathtt{b} \in A \mid (\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R\}$$

Il convient de mentionner que chaque système d'argumentation peut être représenté par un graphe orienté, dont les nœuds sont les arguments de A et les arcs sont les différentes attaques de R.

Exemple 2.1 (cont.)

Les arguments échangés dans le dialogue précédent et les relations qui existent entre eux peuvent être représentés par le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ et $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{a}), (\mathtt{c}, \mathtt{b})\}$.
Le système d'argumentation $\mathcal{F}$ est représenté graphiquement comme suit :



Contrairement à une attaque entre deux arguments, qui peut être observée directement, une autre relation implicite existe, appelée relation de défense. Elle correspond à deux attaques consécutives. En effet, le fait d'attaquer un attaquant d'un argument, permet de défendre cet argument.

Définition 2.2 (Défense)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation. Soit $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$ deux arguments tels que $(b, a) \in R$. Un argument $\mathtt{c} \in A$ défend $\mathtt{a}$ contre $\mathtt{b}$ si $(\mathtt{c}, \mathtt{b}) \in R$.

Exemple 2.1 (cont.)

Comme résultat de cette discussion, nous pouvons conserver l'argument $\mathtt{c}$ et l'argument $\mathtt{a}$, car $\mathtt{c}$ n'est pas attaqué, $\mathtt{a}$ est défendu par $\mathtt{c}$, tandis que nous rejetons l'argument $\mathtt{b}$, qui est défait par $\mathtt{c}$.

Un système d'argumentation de Dung est un graphe orienté d'un point de vue mathématique. Nous introduisons la notion de chemin que nous utiliserons par la suite.

Définition 2.3 (Chemin)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$ deux arguments. Un chemin de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{b}$ est une suite $\mathtt{a}_1 ... \mathtt{a}_n$ ($n \geq 2$) telle que $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$, $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$, on a $(\mathtt{a}_i, \mathtt{a}_{i+1}) \in R$ (on note aussi cela en $\mathtt{a}_1 R ... R \mathtt{a}_n$).
La longueur du chemin est égale à $n - 1$, elle est égale au nombre d'attaques qui le composent.

Selon la longueur d'un chemin entre deux arguments $\mathtt{a}$ et $\mathtt{b}$, l'argument $\mathtt{a}$ peut être un attaquant ou un défenseur de l'argument $\mathtt{b}$: si $n = 1$, $\mathtt{a}$ est un attaquant (direct) de $\mathtt{b}$; si $n = 2$, $\mathtt{a}$ est un défenseur (direct) de $\mathtt{b}$; dans le cas où $n \geq 3$, $\mathtt{a}$ est un attaquant indirect si le chemin est de longueur impaire et un défenseur indirect si le chemin est de longueur paire.

Définition 2.4 (Attaque et défense)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$ deux arguments. Soit $R_n(\mathtt{b}) = \{\mathtt{a} | \exists \mathtt{a}_1 R ... R \mathtt{a}_n$ avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$ et $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}\}$ un multiensemble d'arguments qui sont liés par un chemin de longueur $n - 1$ à l'argument $\mathtt{b}$.
Un argument $\mathtt{a} \in R_n(\mathtt{b})$ est :
- un attaquant de $\mathtt{b}$ si $n = 1$
- un défenseur de $\mathtt{b}$ si $n = 2$
- un attaquant indirect de $\mathtt{b}$ si $n \geq 3$ et n est impair
- un défenseur indirect de $\mathtt{b}$ si $n \geq 3$ et n est pair

Les notions précédentes d'attaque et de défense ne concernent que deux arguments. Ces notions peuvent être étendues à un ensemble d'arguments qui attaque ou défend un argument donné.

Définition 2.5 (Attaque et défense d'un ensemble)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, $\mathtt{a} \in A$ un argument et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments.
- $\mathcal{E}$ attaque $\mathtt{a}$ si, et seulement si, $\exists \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$.
- $\mathcal{E}$ défend $\mathtt{a}$ si, et seulement si, $\forall \mathtt{b} \in A$ si $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$ alors $\exists \mathtt{c} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{c}, \mathtt{b}) \in R$.

Notation 2.3

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. Nous notons par $\mathcal{E}^+$ l'ensemble $\{\mathtt{a} \in A \mid \mathcal{E}$ attaque $\mathtt{a}\}$.

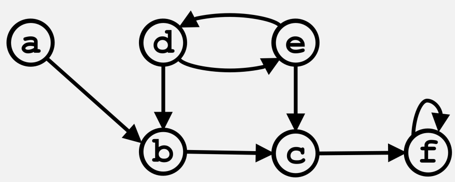
Avant d'introduire la notion d'admissibilité, nous commençons par définir le concept d'ensemble sans conflit ; il est essentiel, pour retenir un ensemble d'arguments qu'on accepte, que cet ensemble présente une certaine cohérence, pour cela il ne faut pas qu'un de ses arguments en attaque un autre.

Définition 2.6 (Ensemble sans conflit)

Un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ est dit sans conflit s'il n'y a pas d'arguments $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{a}, \mathtt{b}) \in R$.

Exemple 2.2

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ et $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c}), (\mathtt{d}, \mathtt{b}), (\mathtt{d}, \mathtt{e}), (\mathtt{e}, \mathtt{d}), (\mathtt{e}, \mathtt{c}), (\mathtt{c}, \mathtt{f}), (\mathtt{f}, \mathtt{f})\}$. La représentation graphique du système est illustrée ci-dessous :



L'ensemble $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ n'est pas sans conflit, puisque $\mathtt{a}$ attaque $\mathtt{b}$, en revanche $\{\mathtt{a}, \mathtt{d}\}$ est sans conflit : ni $(\mathtt{a}, \mathtt{d})$, ni $(\mathtt{d}, \mathtt{a})$, ni les boucles $(\mathtt{a}, \mathtt{a})$ et $(\mathtt{d}, \mathtt{d})$ n'appartiennent à R.

Un agent rationnel accepte un argument si celui-ci n'est pas attaqué, ou s'il peut être défendu contre chaque attaque le visant. Cette idée d'acceptabilité est capturée par la définition suivante :

Définition 2.7 (Argument acceptable)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, un argument $\mathtt{a} \in A$ est acceptable par rapport à un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ si, et seulement si, $\forall \mathtt{b} \in A$ si $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$ alors $\exists \mathtt{c} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{c}, \mathtt{b}) \in R$ ($\mathtt{a}$ est défendu par $\mathtt{c}$ contre $\mathtt{b}$).

L'ensemble de tous les arguments acceptés par un agent est un ensemble d'arguments sans conflit qui peut se défendre contre toute attaque. Cette notion, appelée *admissibilité*, combine la notion d'ensemble sans conflit et d'acceptabilité, et constitue un principe de base pour construire les sémantiques du Dung.

Définition 2.8 (Admissibilité)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est admissible si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est sans conflit et $\forall \mathtt{a} \in \mathcal{E}$ $\mathtt{a}$ est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$.

En d'autres termes, un ensemble d'arguments est admissible si cet ensemble est cohérent et qu'il est capable de défendre ses éléments.

Exemple 2.2 (cont.)

Dans le système d'argumentation précédent, l'argument $\mathtt{c}$ est acceptable par rapport à l'ensemble $\{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ car $\mathtt{d}$ défend $\mathtt{c}$ contre $\mathtt{b}$. De plus, $\mathtt{d}$ se défend contre $\mathtt{e}$. Comme $\{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ est sans conflit, $\{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ est admissible.
Les ensembles admissibles de $\mathcal{F}$ sont : $\varnothing$, $\{\mathtt{a}\}$, $\{\mathtt{d}\}$, $\{\mathtt{e}\}$, $\{\mathtt{a}, \mathtt{d}\}$, $\{\mathtt{a}, \mathtt{e}\}$, $\{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ et $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$.

2.2 Sémantiques à base d'extensions

Étant donné un système d'argumentation, on peut se demander quel(s) ensemble(s) d'arguments peuvent être acceptés ensemble : répondre à cette question correspond à définir une sémantique d'argumentation.

Dans un système d'argumentation où les conflits sont représentés par la relation d'attaque, le principal problème de raisonnement consiste à déterminer les positions qu'un agent rationnel pourrait accepter. Les solutions à ce problème peuvent être représentées par des extensions, correspondant à des ensembles d'arguments acceptables qui sont cohérents entre eux. Les extensions sont calculées en utilisant une sémantique d'acceptabilité, qui peut être définie comme un ensemble de critères qui doivent être satisfaits par un ensemble d'arguments afin d'être acceptables.

D'une façon formelle, une sémantique à base d'extensions est définie comme suit :

Définition 2.9

Une sémantique à base d'extensions σ est une application qui associe à chaque système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un ensemble de sous-ensembles de A.

Notation 2.4

Étant donné un système d'argumentation $\mathcal{F}$, nous notons par $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$ l'ensemble de toutes les extensions de $\mathcal{F}$ pour une sémantique donnée σ.

Dung présente plusieurs sémantiques d'acceptabilité, basées sur différentes notions d'extensions, plus ou moins contraintes, qui permettent d'obtenir un ensemble d'ensembles d'arguments qui seront potentiellement acceptés par un agent. Les sémantiques de Dung permettent d'affiner le principe d'admissibilité afin de sélectionner des ensembles admissibles satisfaisant certains critères supplémentaires.

Des exemples de sémantiques à base d'extensions sont les sémantiques *complètes*, *préférées*, *stables* et *de base*, introduites par [DUNG 1995] ; ainsi que leurs raffinements, les sémantiques *semi-stables* [CAMINADA *et al.* 2012], *idéales* [DUNG *et al.* 2007], *prudentes* [COSTE-MARQUIS *et al.* 2005], etc. Une vue d'ensemble des sémantiques à base d'extensions a été présentée dans [BARONI *et al.* 2011].

Notation 2.5

Nous utilisons les abréviations *pr*, *co*, *st*, *sst*, *gr* et *id* pour se référer respectivement aux sémantiques *préférée*, *complète*, *stable*, *semi-stable*, *de base* et *idéale*.

Dans ce qui suit, nous rappelons les définitions formelles des différentes sémantiques à base d'extensions.

2.2.1 Sémantique complète

La sémantique complète peut être considérée comme un renforcement des exigences de base imposées par la notion d'admissibilité. Intuitivement, alors que l'admissibilité exige que l'on puisse donner des raisons pour les arguments acceptés et rejetés mais ne considère pas l'éventualité de s'étendre avec des arguments potentiellement acceptables, la sémantique complète exige également que l'on inclut dans l'ensemble, tous les arguments qui sont acceptables avec cet ensemble. Par exemple, il n'y a pas de raison particulière de considérer l'ensemble vide comme une extension lorsqu'il existe au moins un argument non attaqué dans le système d'argumentation.

Définition 2.10

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est une extension complète de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est admissible et pour chaque argument $\mathtt{a}$ qui est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$, $\mathtt{a} \in \mathcal{E}$.

Exemple 2.2 (cont.)

Les extensions complètes de $\mathcal{F}$ sont : $\{\mathtt{a}\}$, $\{\mathtt{a}, \mathtt{e}\}$ et $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$.

Dung a montré que :

Théorème 2.1 ([DUNG 1995])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.
— $\mathcal{F}$ a au moins une extension complète.

2.2.2 Sémantique de base

Pour la sémantique complète, qui peut renvoyer plus d'une extension, chaque extension complète est considérée comme une position raisonnable que l'on peut prendre lorsqu'il existe des informations contradictoires dans le système d'argumentation. Une question est alors de déterminer quelle est la position qui est la moins discutable. La sémantique de base vise à renvoyer une telle extension unique qui ne contient que les arguments indiscutables.

Afin de calculer les ensembles d'arguments acceptables par rapport à un ensemble d'arguments donné, le concept de fonction caractéristique a été introduit par Dung.

Définition 2.11 (Fonction caractéristique)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. La fonction caractéristique de $\mathcal{F}$, notée $F : 2^A \rightarrow 2^A$ est définie de telle sorte que pour tout $\mathcal{E}$:

$$F(\mathcal{E}) = \{\texttt{a} \mid \texttt{a} \in A \text{ est acceptable par rapport à } \mathcal{E}\}$$

La sémantique de base peut alors être définie comme suit :

Définition 2.12

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est l'extension de base de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est le plus petit point fixe (par rapport à $\subseteq$) de la fonction caractéristique F.

Si l'ensemble A est fini, l'extension de base d'un système d'argumentation $\mathcal{F}$ peut être calculée par des applications itératives de la fonction caractéristique F à l'ensemble vide. Étant donné un ensemble d'arguments $\mathcal{E}$, la fonction F retourne l'ensemble des arguments défendus par $\mathcal{E}$. Autrement dit, $F(\mathcal{E})$ est l'ensemble contenant exclusivement les arguments défendus par $\mathcal{E}$. Formellement, nous obtenons le résultat suivant : l'extension de base de $\mathcal{F}$ est $\bigcup_{i=0}^{\infty} F^i(\varnothing)$, tel que $F^i(\mathcal{E}) = \underbrace{F(F(...F}_{i \text{ fois}}(\mathcal{E}))...)$.

Exemple 2.2 (cont.)

L'extension de base de $\mathcal{F}$ est : $\{\texttt{a}\}$.

Dung a montré que :

Théorème 2.2 ([Dung 1995])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.
- $\mathcal{F}$ a exactement une extension de base.
- L'extension de base de $\mathcal{F}$ est l'intersection de toutes les extensions complètes de $\mathcal{F}$.

2.2.3 Sémantique préférée

On peut également considérer un point de vue alternatif orienté vers l'acceptation d'autant d'arguments que possible. Cela peut donner lieu à des alternatives d'acceptation mutuellement exclusives. Par exemple, deux arguments qui s'attaquent mutuellement peuvent être raisonnablement départagés en acceptant l'un des deux arguments conflictuels, mais pas les deux en même temps afin de conserver un ensemble sans conflit. L'idée de maximiser les ensembles d'arguments acceptés est exprimée par la sémantique préférée.

Définition 2.13

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est une extension préférée de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, elle est un ensemble admissible maximal (par rapport à $\subseteq$).

Exemple 2.2 (cont.)

Les extensions préférées de $\mathcal{F}$ sont : $\{\mathtt{a}, \mathtt{e}\}$ et $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$.

Dung a montré que :

Théorème 2.3 ([Dung 1995])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.
- $\mathcal{F}$ a au moins une extension préférée.
- Toute extension préférée de $\mathcal{F}$ est une extension complète de $\mathcal{F}$.
- L'extension de base de $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de chaque extension préférée de $\mathcal{F}$.

2.2.4 Sémantique stable

L'idée derrière la sémantique stable est que chaque argument ne peut être que pour ou contre un point de vue dans un débat, autrement dit, la neutralité n'est pas autorisée.

Formellement, une extension stable est une extension sans conflit qui attaque tous les arguments n'appartenant pas à $\mathcal{E}$.

Définition 2.14

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est une extension stable de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est sans conflit et $\forall \mathtt{a} \in A \setminus \mathcal{E}$, $\exists \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$.

Exemple 2.2 (cont.)

La seule extension stable de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$.

Dung a montré que :

Théorème 2.4 ([Dung 1995])

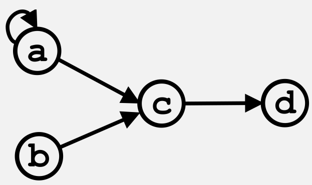
Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.

— Toute extension stable de $\mathcal{F}$ est une extension préférée de $\mathcal{F}$.

La sémantique stable a ses défauts, le plus évident est l'absence potentielle d'extensions stables. L'exemple ci-dessous montre ce cas de figure.

Exemple 2.3

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ et $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{a}), (\mathtt{a}, \mathtt{c}), (\mathtt{b}, \mathtt{c}), (\mathtt{c}, \mathtt{d})\}$. La représentation graphique du système est illustrée ci-dessous :



Il est clair que $\mathcal{F}$ n'a pas d'extensions stables. Cela est dû au fait qu'aucun ensemble sans conflit d'arguments n'attaque l'argument $\mathtt{a}$, malgré le fait que $\mathtt{a}$ s'auto-attaque lui même.

2.2.5 Sémantique semi-stable

La sémantique semi-stable [VERHEIJ 1996, CAMINADA 2006b, CAMINADA *et al.* 2012] est "rétro-compatible" avec la sémantique stable, dans le sens que dans les situations où des extensions stables existent, elle est équivalente à la sémantique stable, et dans les situations où les extensions stables n'existent pas, elle donne toujours un résultat raisonnable (de préférence assez proche de stable). L'un des avantages de la sémantique semi-stable est que pour les systèmes d'argumentation finis, il existe toujours au moins une extension semi-stable.

Définition 2.15

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. Une extension semi-stable est une extension complète $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, tel que $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}^+$ est maximal (par rapport à $\subseteq$) parmi toutes les extensions complètes (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension complète $\mathcal{E}_1$ telle que $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}^+ \subset \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_1^+$).

Exemple 2.2 (cont.)

La seule extension semi-stable de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$.

Exemple 2.3 (cont.)

La seule extension semi-stable de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$.

Caminada a montré que :

Théorème 2.5 ([CAMINADA 2006b])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.
- Chaque extension stable de $\mathcal{F}$ est une extension semi-stable de $\mathcal{F}$.
- Chaque extension semi-stable de $\mathcal{F}$ est une extension préférée de $\mathcal{F}$.

Il est à noter que les extensions semi-stables coïncident avec les extensions stables quand l'ensemble d'extensions stables n'est pas vide.

2.2.6 Sémantique idéale

La sémantique idéale [DUNG *et al.* 2007] est une alternative moins rigide à la sémantique de base. Tout comme la sémantique de base, la sémantique idéale renvoie toujours une extension unique. Aussi, une extension idéale est un ensemble d'arguments maximal pour l'inclusion ensembliste, qui est un sous-ensemble de chaque extension préférée.

Comme démontré dans [CAMINADA & PIGOZZI 2011] une extension idéale est aussi une extension complète, par conséquent nous pouvons dire que l'extension idéale est un sur-ensemble de l'extension de base.

Définition 2.16 ([DUNG *et al.* 2007])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est une extension idéale de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, il est un sous-ensemble 1) inclus dans chaque extension préférée qui est 2) admissible et maximal (par rapport à $\subseteq$) parmi tous les sous-ensembles qui vérifient 1 et 2.

Exemple 2.2 (cont.)

L'extension idéale de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{a}\}$.

Dung a montré que :

Théorème 2.6 ([DUNG *et al.* 2007])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation.

— $\mathcal{F}$ a une extension idéale unique.

— L'extension idéale de $\mathcal{F}$ est une extension complète de $\mathcal{F}$.

2.2.7 Sémantiques prudentes

Les sémantiques prudentes [COSTE-MARQUIS *et al.* 2005] sont basées sur l'idée qu'une extension ne doit pas contenir des arguments qui s'attaquent indirectement.

Un ensemble sans conflit indirect a été défini comme suit :

Définition 2.17 (Ensemble sans conflit indirect)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation. L'ensemble $\mathcal{E} \subseteq A$ est sans conflit indirect si, et seulement si, pour tout $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ il n'existe pas un chemin de longueur impaire de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{b}$ dans $\mathcal{F}$.

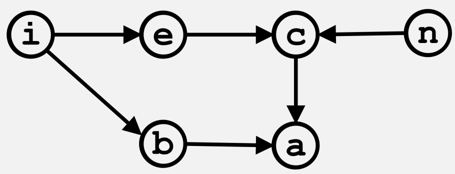
Tout comme les sémantiques de Dung, les sémantiques prudentes sont basées sur l'admissibilité. Les auteurs ont défini une nouvelle notion dite de p-admissibilité (« p » pour « prudente »).

Définition 2.18 (p-admissibilité)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. L'ensemble $\mathcal{E} \subseteq A$ est p-admissible si, et seulement si, chaque $a \in \mathcal{E}$ est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est sans conflit indirect.

Exemple 2.3 (Exemple de [COSTE-MARQUIS *et al.* 2005])

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{e}, \mathtt{n}, \mathtt{i}\}$ et $R = \{(\mathtt{i}, \mathtt{b}), (\mathtt{i}, \mathtt{e}), (\mathtt{b}, \mathtt{a}), (\mathtt{e}, \mathtt{c}), (\mathtt{c}, \mathtt{a}), (\mathtt{n}, \mathtt{c})\}$. La représentation graphique du système est illustrée ci-dessous :



Les ensembles p-admissibles sont : $\varnothing$, $\{\mathtt{n}\}$, $\{\mathtt{i}\}$, $\{\mathtt{n}, \mathtt{i}\}$.
L'ensemble $\{\mathtt{a}, \mathtt{n}, \mathtt{i}\}$ n'est pas p-admissible.

Ainsi les sémantiques introduites par Dung : *de base*, *complète*, *stable* et *préférée*, ont été redéfinies respectivement en : *prudente-de-base*, *prudente-complète*, *prudente-stable* et *prudente-préférée*.

La sémantique prudente-préférée est définie comme suit :

Définition 2.19 (prudente-préférée)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. Un ensemble p-admissible $\mathcal{E} \subseteq A$ est une extension prudente-préférée de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\nexists \mathcal{E}' \subseteq A$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}'$ est p-admissible dans $\mathcal{F}$.

Exemple 2.3 (cont.)

La seule extension prudente-préférée de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{n}, \mathtt{i}\}$.

La sémantique prudente-stable est définie comme suit :

Définition 2.20 (prudente-stable)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. Un ensemble $\mathcal{E} \subseteq A$ sans conflit indirect est une extension prudente-stable de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\mathcal{E}$ attaque directement chaque argument de $A \setminus \mathcal{E}$.

Exemple 2.3 (cont.)

$\mathcal{F}$ n'a pas d'extension prudente-stable.

La sémantique prudente-complète est définie comme suit :

Définition 2.21 (prudente-complète)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et soit $\mathcal{E}$ un ensemble p-admissible dans $\mathcal{F}$. $\mathcal{E}$ est une extension prudente-complète de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, chaque argument qui est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$ et qui est sans conflit indirect avec $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$.

Exemple 2.3 (cont.)

La seule extension prudente-complète de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{n}, \mathtt{i}\}$.

La sémantique prudente-de-base est définie comme suit :

Définition 2.22 (prudente-de-base)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments. $\mathcal{E}$ est l'unique extension prudente-de-base si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est le plus petit point fixe (par rapport à $\subseteq$) de la fonction caractéristique F^p, tel que :

- $F^p : 2^A \to 2^A$
- $F^p(\mathcal{E}) = \{\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \in A$ est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \cup \{\mathtt{a}\}$ est sans conflit indirect$\}$

Exemple 2.3 (cont.)

L'unique extension prudente-de-base de $\mathcal{F}$ est : $\{\mathtt{n}, \mathtt{i}\}$.

Notation 2.6

Nous utilisons les abréviations *p-pr*, *p-co*, *p-st* et *p-gr* pour se référer respectivement aux sémantiques *prudente-préférée*, *prudente-complète*, *prudente-stable* et *prudente-de-base*.

2.2.8 Degré d'acceptabilité

Dans le cadre des sémantiques à base d'extensions, deux interrogations sont conventionnellement associées aux sémantiques qui retournent possiblement plusieurs extensions (e.g. sémantiques complètes, préférées, stable, etc.). La première consiste à déterminer si un argument donné appartient à au moins une extension. Dans ce cas, cet argument est considéré comme accepté de manière crédule. Un tel argument peut être accepté si l'agent n'a pas besoin d'une certitude absolue sur son statut. La seconde interrogation permet de savoir si un argument donné appartient à chacune des extensions. Un tel argument est considéré comme sceptiquement accepté et sera sélectionné par un agent qui n'admet aucun doute sur son acceptabilité.

De ce fait, un argument peut avoir trois différents niveaux d'acceptation. Un argument est considéré comme sceptique (Sc) s'il appartient à toutes les extensions, il est considéré comme crédule (Cr) s'il appartient à au moins une extension et il est rejeté (Rj) s'il n'appartient à aucune extension.

Il est à noter que la notion d'argument crédulement accepté diffère de la notion de *credulously justified argument* introduite par [Baroni & Giacomin 2009], puisque la condition de ne pas appartenir à chaque extension est habituellement omise, de sorte que tout argument sceptiquement accepté est également accepté de manière crédule (à condition qu'il existe une extension). Être accepté de manière crédule devrait être considéré comme une manière courte, mais plus lisible, d'affirmer que le degré d'acceptabilité de l'argument que nous considérons est Cr.

Définition 2.23 (Degré d'acceptabilité)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et σ une sémantique basée sur les extensions, retournant un ensemble d'extensions $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$. Le degré d'acceptabilité d'un argument $\mathtt{a} \in A$, noté $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a})$ est un élément de $\{Sc, Cr, Rj\}$ défini comme suit :

$$Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a}) = \begin{cases} Sc & \text{si, et seulement si, } \mathtt{a} \in \cap_{\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})} \mathcal{E} \\ Rj & \text{si, et seulement si, } \mathtt{a} \notin \cup_{\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})} \mathcal{E} \\ Cr & \text{sinon} \end{cases}$$

Un argument est considéré plus acceptable s'il appartient à toutes (respectivement au moins une) extension(s) que s'il appartient à seulement quelques (respectivement aucune) extension(s). Les niveaux d'acceptation peuvent être ordonnés selon l'ordre $Sc > Cr > Rj$ et ainsi considérés comme des degrés d'acceptabilité (qualitatifs).

Exemple 2.2 (cont.)

Reprenons le système d'argumentation de l'exemple 2.2, en considérant la sémantique préférée $\sigma = pr$ nous avons : $Ext_{pr}^{AF}(\mathcal{F}) = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}\}$ et $\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$. Donc nous pouvons dire que :

— $Deg_{pr,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a}) = Sc$
— $Deg_{pr,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{c}) = Deg_{pr,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{d}) = Deg_{pr,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{e}) = Cr$
— $Deg_{pr,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{b}) = Deg_{pr,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{f}) = Rj$

2.2.9 Lien entre les sémantiques

Dung [DUNG 1995] a présenté des propriétés intéressantes pour ses sémantiques, établissant des liens entre elles ; nous les résumons ci-dessous :

Proposition 2.1

1. Il y a au moins une extension préférée, toujours une unique extension de base, et aucune, une ou plusieurs extensions stables.
2. Tout ensemble admissible est contenu dans une extension préférée.
3. Toute extension stable est également préférée, l'inverse étant faux.
4. Toute extension préférée (resp. stable) contient l'extension de base.
5. Tout argument n'étant pas attaqué appartient à l'extension de base (et donc à chaque extension préférée et chaque extension stable).
6. L'extension de base peut être calculée en appliquant itérativement la fonction caractéristique F à partir de l'ensemble vide.
7. Si A n'est pas vide, alors une extension stable est toujours non vide.

Pour les sémantiques prudentes [COSTE-MARQUIS *et al.* 2005], les liens entre les différentes sémantiques sont résumés ci-dessous :

Proposition 2.2

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini

1. L'ensemble de tous les sous-ensembles p-admissible de A est un ensemble complet de $(2^A, \subseteq)$.
2. Pour chaque ensemble p-admissible $S \subseteq A$, il existe au moins une extension prudente-préférée $\mathcal{E} \subseteq A$ tel que $S \subseteq \mathcal{E}$.
3. $\mathcal{F}$ a au moins une extension prudente-préférée.
4. Toute extension prudente-stable est aussi une extension prudente-préférée, l'inverse est faux.
5. Si $\mathcal{F}$ est acyclique, alors l'extension prudente-de base est non vide.
6. L'extension prudente-de base est une extension prudente-complète.
7. Si $\mathcal{F}$ a une extension prudente-stable, alors l'intersection de toutes les extensions prudente-préférées est inclus dans l'extension prudente-de base.

Dans la figure 2.1 nous illustrons les relations d'inclusion entre les différentes sémantiques utilisées dans cette thèse. Une flèche d'une sémantique σ_1 vers une autre sémantique σ_2 signifie qu'une extension pour la sémantique σ_1 est aussi une extension pour la sémantique σ_2. En d'autres termes, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $Ext^{AF}_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \subseteq Ext^{AF}_{\sigma_2}(\mathcal{F})$.

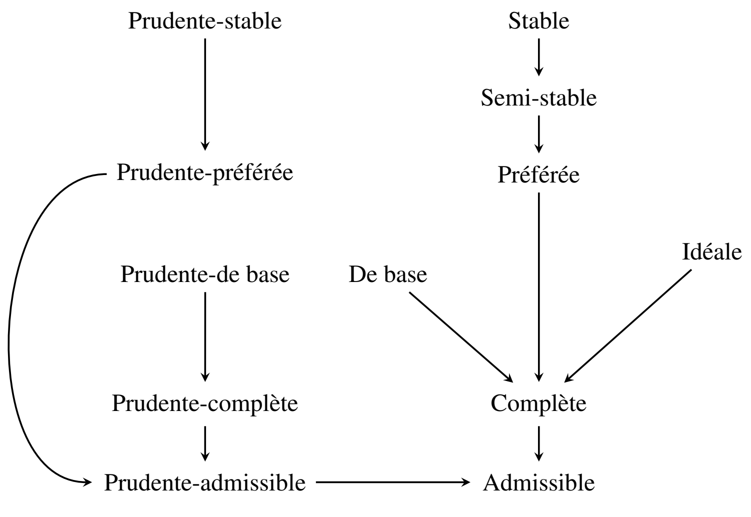


FIGURE 2.1 – Relation d'inclusion entre les ensembles d'extensions caractérisés par les différentes sémantiques

Des résultats plus détaillés sur la façon dont les différentes extensions sont liées ont été présentés dans [DUNG 1995, CAMINADA 2006a, CAMINADA & PIGOZZI 2011].

2.3 Sémantiques à base de labellings

Dans cette section, nous poursuivons notre présentation des fondements de l'argumentation abstraite et nous nous intéressons à une autre façon de représenter le concept d'admissibilité, à travers une approche basée sur les labellings [CAMINADA 2006a]. L'objectif est d'obtenir un résultat plus précis qu'avec l'approche à base d'extensions. Plutôt que d'attribuer à chaque argument un statut « accepté » ou « rejeté » à partir des ensembles d'arguments, une approche à base de labellings associe exactement un label (étiquette) à chaque argument.

L'un des choix commun pour l'ensemble de labels est $\mathbb{L} = \{in, out, undec\}$. Le label in indique que l'argument est explicitement accepté, le label out indique que l'argument est explicitement rejeté, et le label $undec$ indique que le statut de l'argument est indécis, ce qui signifie que l'on s'abstient de juger si l'argument est accepté ou rejeté.

D'une façon générale, nous pouvons définir un labelling comme suit :

Définition 2.24 (Labelling)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathbb{L}$ un ensemble de labels. L est un labelling de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $L : A \to \mathbb{L}$ est une application de A dans $\mathbb{L}$.

2.3.1 Reinstatement labelling

La notion de reinstatement labelling permet de s'assurer que l'application prend en compte la relation d'attaque : un argument a un label *in* s'il est non attaqué ou si tous ses attaquants directs sont étiquetés *out* ; un argument a un label *out* si au moins un de ses attaquants directs est étiqueté *in* ; un label *undec* dans les autres cas.

Définition 2.25 (Reinstatement labelling)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. Un labelling L est un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, :

— $\forall \mathtt{a} \in A, L(\mathtt{a}) = in$ si, et seulement si, $\forall \mathtt{b} \in A$ si $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$ alors $L(\mathtt{b}) = out$;

— $\forall \mathtt{a} \in A, L(\mathtt{a}) = out$ si, et seulement si, $\exists \mathtt{b} \in A$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$ et $L(\mathtt{b}) = in$;

— $\forall \mathtt{a} \in A, L(\mathtt{a}) = undec$ si, et seulement si, $L(\mathtt{a}) \neq in$ et $L(\mathtt{a}) \neq out$.

Un reinstatement labelling peut être utilisé pour partitionner l'ensemble des arguments de la façon suivante :

Définition 2.26

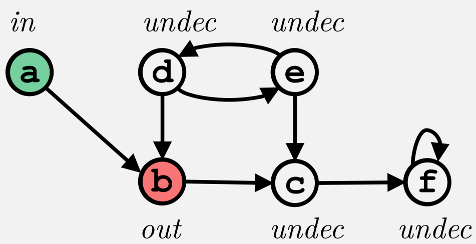
Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation et L un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$. Nous définissons :

— $in(L) = \{\mathtt{a} \in A \mid L(\mathtt{a}) = in\}$;
— $out(L) = \{\mathtt{a} \in A \mid L(\mathtt{a}) = out\}$;
— $undec(L) = \{\mathtt{a} \in A \mid L(\mathtt{a}) = undec\}$.

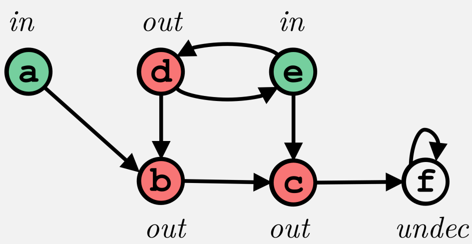
Exemple 2.2 (cont.)

Pour le système d'argumentation de l'exemple 2.2 il existe trois différents reinstatement labellings L_1, L_2, L_3 :

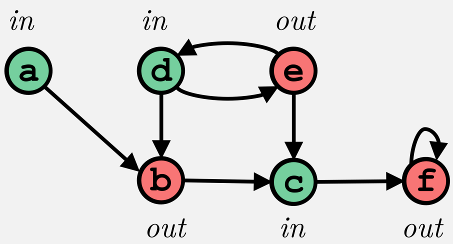
$in(L_1) = \{\mathtt{a}\}$,
$out(L_1) = \{\mathtt{b}\}$,
$undec(L_1) = \{\mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$



$in(L_2) = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}\}$,
$out(L_2) = \{\mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$,
$undec(L_2) = \{\mathtt{f}\}$



$in(L_3) = \{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$,
$out(L_3) = \{\mathtt{b}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$,
$undec(L_3) = \varnothing$



Donner le label in à un argument a peut s'expliquer par le fait d'attribuer le label out à tous ses attaquants ou par le fait que a n'est pas attaqué par un autre argument, par conséquent a n'est affecté par aucune attaque. L'attribution du label out à a s'explique par l'assignation du label in à l'un de ses attaquants, ce qui permet de rejeter a.

Ceci est exprimé par la définition suivante :

Définition 2.27 (Labelling admissible [Baroni *et al.* 2011])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. Un labelling admissible est un labelling où pour chaque argument qui a un label in tous ses attaquants ont un label out et pour chaque argument qui a un label out au moins un de ses attaquants a un label in.

2.3.2 Correspondance entre labellings et extensions

Caminada a défini deux fonctions qui, étant donné un système d'argumentation, permettent à un ensemble d'arguments d'être converti en un labelling et vice-versa [Caminada 2006a]. La fonction *Ext2Lab* prend un ensemble d'arguments sans conflit et le convertit en un labelling. La fonction *Lab2Ext* prend un labelling et le convertit en un ensemble d'arguments.

Définition 2.28 (Ext2Lab et Lab2Ext)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, $\mathcal{E} \subseteq A$ un ensemble d'arguments et L un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$. Nous notons par :

— $Lab2Ext(L) = in(L)$

— $Ext2Lab(\mathcal{E}) = \mathbb{I} \cup \mathbb{O} \cup \mathbb{U}$ tel que :
$\mathbb{I} = \{(\mathtt{a}, in) \mid \mathtt{a} \in \mathcal{E}\}$
$\mathbb{O} = \{(\mathtt{a}, out) \mid \exists \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R\}$
$\mathbb{U} = \{(\mathtt{a}, undec) \mid \mathtt{a} \notin \mathcal{E}$ et $\nexists \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R\}$

Il a été démontré qu'il existe un lien entre les extensions selon les sémantiques de Dung et certaines familles particulières de reinstatement labellings [Caminada 2006a, Baroni *et al.* 2011]. En effet, les extensions complètes correspondent exactement aux reinstatement labellings.

De ce fait, les autres extensions peuvent également être capturés avec des reinstatement labellings restreints. Par exemple, la sémantique stable correspond aux reinstatement labellings sans argument indécis (*undec*).

Notation 2.7

Pour chaque sémantique σ, $Labs_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$ désigne l'ensemble des labellings associés au système d'argumentation $\mathcal{F}$ par rapport à σ.

Proposition 2.3 (Relations entre labellings et extensions)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.
Étant donné $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$ une extension de $\mathcal{F}$ pour la sémantique σ et $L = Ext2Lab(\mathcal{E})$:
- si $\mathcal{E}$ est une extension complète, alors L est un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$;
- si $\mathcal{E}$ est une extension préférée, alors L est un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$ tel que $in(L)$ est maximal ;
- si $\mathcal{E}$ est une extension de base, alors L est un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$ tel que $in(L)$ est minimal ;
- si $\mathcal{E}$ est une extension stable, alors L est un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$ tel que $undec(L) = \varnothing$.

Étant donné L un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} = Lab2Ext(L)$:
- $\mathcal{E}$ est une extension complète de $\mathcal{F}$;
- si $in(L)$ est maximal, alors $\mathcal{E}$ est une extension préférée de $\mathcal{F}$;
- si $in(L)$ est minimal, alors $\mathcal{E}$ est une extension de base de $\mathcal{F}$;
- si $undec(L) = \varnothing$, alors $\mathcal{E}$ est une extension stable de $\mathcal{F}$.

Exemple 2.2 (cont.)

Pour le système d'argumentation de l'exemple 2.2, les labellings pour les différentes sémantiques sont :
- $Labs_{pr}^{AF}(\mathcal{F}) = \{L_2, L_3\}$;
- $Labs_{co}^{AF}(\mathcal{F}) = \{L_1, L_2, L_3\}$;
- $Labs_{st}^{AF}(\mathcal{F}) = \{L_3\}$;
- $Labs_{gr}^{AF}(\mathcal{F}) = \{L_1\}$.

2.4 Propriétés des sémantiques d'argumentation abstraite

Les différentes sémantiques d'argumentation reposent sur des intuitions différentes, qui peuvent être exprimées en termes de propriétés formelles des extensions ou des labellings. Dans cette section, nous passons en revue et discutons plusieurs propriétés générales des sémantiques d'argumentation abstraite, définies par [BARONI *et al.* 2011]. La plupart de ces propriétés ont été initialement introduites dans le contexte des approches à base d'extensions, nous considérons leurs définitions également dans le contexte des approches à base de labellings.

Admissibilité *(Admissibility)* : la notion de défense d'un argument a contre ses attaquants est une condition *nécessaire* à l'appartenance à une extension (définition 2.5) : un argument qui n'est pas défendu par une extension ne peut pas appartenir à cette extension. Cela correspond à la propriété d'*admissibilité*, qui a une formulation évidente pour les sémantiques basées sur les extensions ainsi que pour celles basées sur les labellings.

Définition 2.29 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique σ basée sur les extensions satisfait la propriété d'*admissibilité* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $\forall \mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}$ est un ensemble admissible (définition 2.8).

Définition 2.30 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique σ basée sur les labellings satisfait la propriété d'*admissibilité* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $\forall L \in Labs_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, L est un labelling admissible (définition 2.27).

Réintégration *(Reinstatement)* : en suivant le même raisonnement que pour la propriété précédente, nous pouvons dire que la défense contre les attaquants est une condition *suffisante* pour l'appartenance à une extension : un argument qui est défendu (et qui n'est pas attaqué) par une extension doit appartenir à cette extension. Cette propriété est appelée *réintégration* : puisque le degré d'acceptabilité d'un argument est « réintégré » grâce à la défense contre les attaquants.

Définition 2.31 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique σ basée sur les extensions satisfait la propriété de *réintégration* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$, $\forall \mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, et pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, on a :

$$(\forall \mathtt{b} \in att_{\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a}), \exists \mathtt{c} \in \mathcal{E} \cap att_{\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{b})) \Rightarrow \mathtt{a} \in \mathcal{E}$$

Pour l'approche basée sur les labellings, la même idée peut être exprimée en exigeant que si tous les attaquants d'un argument on un label out, alors l'argument a un label in. La définition suivante formalise cela.

Définition 2.32 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique σ basée sur les labellings satisfait la propriété de *réintégration* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$, $\forall L \in L_{\sigma}(\mathcal{F})$, et pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, on a :

$$(\forall \mathtt{b} \in att_{\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a}), L(\mathtt{b}) = out) \Rightarrow L(\mathtt{a}) = in$$

En examinant la définition 2.31, il est clair qu'une extension complète est un ensemble admissible la propriété de réintégration est satisfaite. D'autre part, à partir de la définition 2.32 nous pouvons constater que la propriété de réintégration n'est pas suffisante pour rendre un labelling admissible complet. En effet, dans le contexte des labellings, nous avons également besoin d'une définition explicite pour le rejet.

Rejet *(Rejection)* : Un argument $\mathtt{a}$ qui est attaqué par un argument $\mathtt{b}$ avec un label in ne peut pas avoir un label $undec$ et doit explicitement être rejeté.

Définition 2.33 ([Baroni *et al.* 2011])

Une sémantique σ basée sur les labellings satisfait la propriété de *rejet* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle, \forall L \in L_\sigma(\mathcal{F})$, et pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, on a :

$$(\forall \mathtt{b} \in att_{\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{a}), L(\mathtt{b}) = in) \Rightarrow L(\mathtt{a}) = out$$

I-maximalité *(I-maximality)* : pour l'approche basée sur les extensions, la propriété de *I-maximalité* indique simplement qu'aucune extension n'est un sous-ensemble strict d'une autre.

Définition 2.34 ([Baroni *et al.* 2011])

Un ensemble d'extensions E est I-maximal si, et seulement si, $\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in E$, si $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ alors $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.
Une sémantique σ satisfait le critère de *I-maximalité* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})$ est I-maximal.

Pour l'approche basée sur les labellings, nous pouvons formuler des considérations analogues, à la différence que les arguments avec un label in et out doivent être pris en compte dans la définition.

Définition 2.35 ([Baroni *et al.* 2011])

Un ensemble de labels L est I-maximal si, et seulement si, $\forall L_1, L_2 \in L$ si $in(L_1) \subseteq in(L_2)$ et $out(L_1) \subseteq out(L_2)$ alors $L_1 = L_2$.
Une sémantique σ basée sur les labellings satisfait la propriété de *I-maximalité* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $L_\sigma(\mathcal{F})$ est I-maximal.

Permission d'abstention *(Allowing abstention)* : du point de vue où les extensions et les labellings correspondent à des positions déterminées (soit d'accepter, soit de rejeter des arguments), il peut être souhaitable qu'un ensemble d'extensions/labellings permette de mélanger les deux positions. C'est dans ce sens que la propriété de *permission d'abstention* permet de tenir compte de la position où l'on s'abstient simplement d'avoir une opinion explicite.

Avant de définir la propriété, nous introduisons la notion suivante :

Définition 2.36

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $\mathcal{E}$ un ensemble d'arguments, l'ensemble des arguments attaqués par $\mathcal{E}$ est défini par : $\mathcal{E}^+ = \{\mathtt{a} \in A \mid \exists \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R\}$

Définition 2.37 ([Baroni *et al.* 2011])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, un ensemble d'extensions E permet l'abstention si, et seulement si, pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, si $\exists \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in E$ tel que $\mathtt{a} \in \mathcal{E}_1$ et $\mathtt{a} \in \mathcal{E}_2^+$ alors $\exists \mathcal{E}_3 \in E$ tel que $\mathtt{a} \notin (\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_3^+)$.
Une sémantique à base d'extensions σ satisfait la *permission d'abstention* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})$ permet l'abstention.

Pour l'approche basée sur les labellings, nous pouvons définir la propriété de la façon suivante :

Définition 2.38 ([Baroni *et al.* 2011])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, un ensemble de labels L permet l'abstention si, et seulement si, pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, si $\exists \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in L$ tel que $\mathcal{L}_1(\mathtt{a}) = in$ et $\mathcal{L}_2(\mathtt{a}) = out$ alors $\exists \mathcal{L}_3 \in L$ tel que $\mathcal{L}_3(\mathtt{a}) = undec$.
Une sémantique σ à base de labellings satisfait la *permission d'abstention* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F}$, $Lab_\sigma(\mathcal{F})$ permet l'abstention.

Résistance au crash *(Crash resistance)* : la propriété de *résistance au crash* permet d'exclure des cas de systèmes d'argumentation « contaminants ». Cette intuition vient du fait que si un système d'argumentation peut être partitionné en plusieurs sous-graphes qui ne sont pas connectés les uns aux autres, ceux-ci ne devraient pas s'affecter entre eux au niveau de la sémantique.

Afin de formaliser cette idée, nous introduisons d'abord l'opération d'union de systèmes d'argumentation (disjoints).

Définition 2.39 ([Baroni *et al.* 2011])

Deux systèmes d'argumentations $\mathcal{F}_1 = \langle A_1, R_1 \rangle$ et $\mathcal{F}_2 = \langle A_2, R_2 \rangle$ sont disjoints si, et seulement si, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
L'union de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ est définie comme suit : $\mathcal{F}_1 \uplus \mathcal{F}_2 = \langle A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2 \rangle$.

Dans le cadre des sémantiques à base d'extensions, la propriété est définie comme suit :

Définition 2.40 ([BARONI *et al.* 2011])

Un système d'argumentation $\mathcal{F}_1$ est contaminant pour une sémantique à base d'extensions σ, si pour chaque système d'argumentation $\mathcal{F}_2$ disjoint de $\mathcal{F}_1$ on a $Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}_1 \uplus \mathcal{F}_2) = Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}_1)$.
Une sémantique σ à base d'extensions satisfait la propriété de *résistance au crash* s'il n'existe pas de système d'argumentation contaminant pour σ.

Dans le cadre des sémantiques à base de labellings, la propriété est définie comme suit :

Définition 2.41 ([BARONI *et al.* 2011])

Un système d'argumentation $\mathcal{F}_1$ est contaminant pour une sémantique à base de labellings σ, si pour chaque système d'argumentation $\mathcal{F}_2$ disjoint de $\mathcal{F}_1$ on a $Lab_\sigma(\mathcal{F}_1 \uplus \mathcal{F}_2) = Lab_\sigma(\mathcal{F}_1)$.
Une sémantique σ à base de labellings satisfait la propriété de *résistance au crash* s'il n'existe pas de système d'argumentation contaminant pour σ.

Non interférence *(Non interference)* : la propriété de *non interférence* se base sur le principe d'ensembles isolés, elle capture l'intuition que tout ensemble isolé d'arguments ne doit pas être affecté par d'autres parties du système d'argumentation.

Avant de donner les définitions formelles, nous introduisons d'abord la restriction d'un système d'argumentation à un sous-ensemble de ses arguments.

Définition 2.42 ([BARONI *et al.* 2011])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$, la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{E}$, notée $\mathcal{F}{\downarrow_\mathcal{E}}$ est le système d'argumentation $\langle \mathcal{E}, R \cap (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \rangle$.

On dit qu'un ensemble est isolé s'il n'attaque pas et ne reçoit pas d'attaques d'arguments extérieurs à l'ensemble.

Définition 2.43 ([BARONI *et al.* 2011])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ est isolé dans $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $R \cap ((\mathcal{E} \times (A \setminus \mathcal{E})) \cup ((A \setminus \mathcal{E}) \times \mathcal{E})) = \varnothing$.

Dans le cadre des sémantiques à base d'extensions, la propriété est définie comme suit :

Définition 2.44 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique à base d'extensions σ satisfait la propriété de *non interférence* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$, pour tout ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ isolé dans $\mathcal{F}$ on a $AExt_\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}{\downarrow_\mathcal{E}})$ avec $AExt_\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \{(\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}) \mid \mathcal{E}' \in Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})\}$.

Dans le cadre des sémantiques à base de labellings, la propriété est définie comme suit :

Définition 2.45 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique à base de labellings σ avec un ensemble de labels $\mathbb{L}$ satisfait la propriété de *non interférence* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$, pour tout ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ isolé dans $\mathcal{F}$ on a $ALab_\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = Lab_\sigma(\mathcal{F}{\downarrow_\mathcal{E}})$ avec $ALab_\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \{(\mathcal{L} \cap (\mathcal{E} \times \mathbb{L})) \mid \mathcal{L} \in Lab_\sigma(\mathcal{F})\}$.

Directionnalité *(Directionality)* : partant du fait que les arguments ne peuvent s'affecter entre eux qu'en suivant le sens de l'attaque, l'idée derrière la propriété de *directionnalité* est que les ensembles d'arguments non attaqués ne devraient pas être affectés par le reste du système d'argumentation.

Avant de donner les définitions formelles, nous introduisons d'abord l'ensemble d'arguments non attaqué.

Définition 2.46 ([BARONI *et al.* 2011])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ est non attaqué dans $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\nexists(\mathtt{a}, \mathtt{b}) \in R$ tel que $\mathtt{a} \in A \setminus \mathcal{E}$ et $\mathtt{b} \in \mathcal{E}$.

Dans le cadre des sémantiques à base d'extensions, la propriété est définie comme suit :

Définition 2.47 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique à base d'extensions σ satisfait la propriété de *directionnalité* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$, pour tout ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ non attaqué dans $\mathcal{F}$ on a $AExt_\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}{\downarrow_\mathcal{E}})$.

Dans le cadre des sémantiques à base de labellings, la propriété est définie comme suit :

Définition 2.48 ([BARONI *et al.* 2011])

Une sémantique à base de labellings σ satisfait la propriété de *directionnalité* si, et seulement si, pour tout système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R \rangle$, pour tout ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ non attaqué dans $\mathcal{F}$ on a $ALab_\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = Lab_\sigma(\mathcal{F}\downarrow_\mathcal{E})$.

La table 2.1 présente un résumé de la satisfaction des propriétés par les sémantiques introduites précédemment. Les résultats concernant les sémantiques *complète (co)*, *de-base (gr)*, *préférée (pr)*, *stable (st)*, *semi-stable (sst)* et *idéale (id)* ont été prouvés par [BARONI & GIACOMIN 2007, BARONI *et al.* 2011], et les résultats concernant les sémantiques *prudente-complète (p-co)*, *prudente-de-base (p-gr)*, *prudente-préférée (p-pr)* et *prudente-stable (p-st)* ont été prouvés par [BARONI & GIACOMIN 2007, VAN DER TORRE & VESIC 2018].
Le symbole ✓ (resp. ×) signifie que l'axiome est satisfait (resp. violé) par la sémantique.

Propriétés \ Sémantiques	*co*	*gr*	*pr*	*st*	*sst*	*id*	*p-co*	*p-gr*	*p-pr*	*p-st*
Admissibilité	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Réintégration	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	✓
Rejet	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
I-maximalité	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓
Permission d'abstention	✓	✓	×	×	×	✓	✓	✓	×	×
Résistance au crash	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	×
Non interférence	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	×
Directionnalité	✓	✓	✓	×	×	✓	×	✓	×	×

TABLE 2.1 – Satisfaction propriétés par les sémantiques introduites. Le symbole ✓ (resp. ×) signifie que l'axiome est satisfait (resp. violé) par la sémantique

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, en premier lieu, nous avons rappelé les concepts de base d'un système d'argumentation. Ensuite, nous avons détaillé les différentes sémantiques proposées dans la littérature scientifique, qui sont utilisées dans les approches à base d'extensions et à base de labellings. Les approches à base d'extensions permettent de sélectionner des ensembles d'arguments sans conflits appelés extensions. L'avantage des approches à base de labellings par rapport aux extensions est que les arguments qui sont explicitement rejetés (avec un label out) et indécis (avec un label $undec$) peuvent être distingués. En dernière partie du chapitre, nous avons présenté les propriétés principales qui s'appliquent à ces sémantiques.

Dans le chapitre suivant, nous introduisons les systèmes d'argumentation bipolaires ainsi que les différentes approches à base d'extensions qui capturent la notion du support. Les approches étudiées ont été définies pour les sémantiques classiques de Dung, à savoir, la *préférée*, la *stable* et la *complète*. Dans la suite du manuscrit on se focalise sur l'étude des ces sémantiques mais notre travail pourrait être étendu au reste des sémantiques.

Chapitre 3

Système d’argumentation bipolaire

Sommaire

Dans le système de Dung [DUNG 1995], il n’existe qu’une seule relation entre les arguments : la relation d’attaque. Cette relation est essentielle en argumentation pour représenter un conflit entre deux arguments. Néanmoins, la perspective d’un système d’argumentation muni d’une seule relation est assez restrictive. Des premières études [KARACAPILIDIS & PAPADIAS 2001, VERHEIJ 2003] suggèrent qu’en plus de la relation d’attaque, qui représente une interaction négative entre les arguments, un autre type de relation peut être considéré, à savoir la relation de support. Une telle relation vise à capturer l’interaction positive entre les arguments.

Parmi les premiers travaux qui ont été effectués dans cette perspective, nous pouvons citer [AMGOUD *et al.* 2004, CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2005]. Ces travaux permettent de rajouter la relation de support au cadre abstrait présenté dans le Chapitre 2, ce qui a permis de poser les premières définitions d’un système d’argumentation bipolaire. Afin de mettre en place une représentation de l’interaction bipolaire entre les arguments, l’une des principales hypothèses énoncées stipule que les relations d’attaque et de support sont indépendantes l’une de l’autre, c’est-à-dire que la relation de support n’est pas définie en utilisant la relation d’attaque ou vice-versa. Cette hypothèse est motivée par le fait que la notion de défense est une conséquence de la relation d'attaque et qu'elle est insuffisante pour capturer l'interaction positive entre les arguments. Ainsi, considérer directement une relation de support explicite donne la possibilité de représenter ce lien positif indépendamment de tout autre argument.

3.1 Définition formelle d'un BAF

Un système d'argumentation bipolaire étend le système d'argumentation introduit par Dung, en prenant en compte deux sortes d'interactions entre les arguments, la relation d'attaque et la relation de support.

La définition formelle d'un système d'argumentation bipolaire suivante a été introduite dans [AMGOUD *et al.* 2004] :

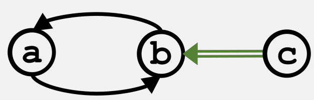
Définition 3.1 (Système d'argumentation bipolaire)

Un système d'argumentation bipolaire (*Bipolar Argumentation Framework : BAF*) est un triplet $\langle A, R, S\rangle$, où A est un ensemble fini d'arguments, $R \subseteq A \times A$ une relation d'attaque entre arguments et $S \subseteq A \times A$ une relation de support entre arguments. Les relations d'attaque et de support sont graphiquement représentées respectivement par $\rightarrow$ et $\Rightarrow$.

La représentation bipolaire des interactions entre les arguments, implique implicitement que l'ensemble des attaques et des supports sont indépendants.

Exemple 3.1

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF tel que $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$, $R = \{(\texttt{a}, \texttt{b}), (\texttt{b}, \texttt{a})\}$ et $S = \{(\texttt{c}, \texttt{b})\}$



Dans le BAF ci-dessus, les arguments a et b s'attaquent mutuellement, tandis que l'argument c supporte b.

Notation 3.1

Soit deux arguments $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$, nous notons par $\mathtt{a}S\mathtt{b}$ le support $(\mathtt{a}, \mathtt{b}) \in S$.
Soit un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ et un argument $\mathtt{a} \in A$, nous disons que $\mathcal{E}$ supporte $\mathtt{a}$, noté par $\mathcal{E}S\mathtt{a}$, si $\exists \mathtt{b} \in \mathcal{E}$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in S$.

Notation 3.2

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF, pour tout argument $\mathtt{a} \in A$, nous notons l'ensemble de ses attaquants par : $att_{\mathcal{F}}^{BAF}(\mathtt{a}) = \{\mathtt{b} \in A \mid (\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R\}$ et l'ensemble de ses supporters par : $sup_{\mathcal{F}}^{BAF}(\mathtt{a}) = \{\mathtt{b} \in A \mid (\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in S\}$.

3.2 Sémantiques pour les BAFs

De la même façon que pour les AFs, nous pouvons définir de façon formelle une sémantique à base d'extensions dans le cadre bipolaire.

Définition 3.2 (Sémantique à base d'extensions)

Une sémantique à base d'extensions σ pour les BAFs est une application qui associe à chaque système d'argumentation bipolaire $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un ensemble de sous-ensembles de A.

Notation 3.3

Soit $\mathcal{F}$ un BAF, nous notons par $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$ l'ensemble de toutes les extensions de $\mathcal{F}$ pour une sémantique donnée σ.

Afin de prendre en compte la relation de support et de déterminer l'acceptabilité des arguments, les sémantiques existantes pour les BAFs consistent à réduire les BAF en des AF : les relations de support dans le BAFs d'origine sont supprimées et des attaques supplémentaires résultant de la combinaison des relations de support et d'attaque existantes sont ajoutées. Ce processus de transformation, appelé *flattening*, est basé sur un principe de saturation (fermeture transitive) qui génère toutes les extra-attaques possibles. Ce qui donne comme résultat un AF associé contenant les attaques originales et celles nouvellement générées (extra-attaques). Ce qui permet de définir les extensions du BAF d'entrée, en calculant les extensions de l'AF associé (par rapport à une sémantique usuelle pour le cadre de Dung). Ainsi, afin de définir les sémantiques pour les BAFs, il suffit de préciser comment les extra-attaques sont générées selon l'interprétation donnée à la relation de support (déductive, de nécessité, d'appui, etc.).

Notation 3.4

Soit un BAF $\mathcal{F}$, nous notons par $\mathcal{F}_{\rhd AF}$ l'AF associé obtenu par le processus de transformation par *flattening*.

Dans la suite, nous nous intéressons aux approches à base d'extensions qui prennent un BAF en entrée et le traduisent en un AF (AF associé) pour calculer l'acceptabilité des arguments [Cayrol & Lagasquie-Schiex 2005, Boella *et al.* 2010, Nouioua & Risch 2011, Nouioua 2013, Cohen *et al.* 2012].

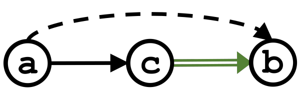
3.3 Interprétations de la relation de support

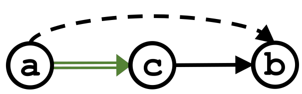
Dans ce qui suit, nous présentons les systèmes d'argumentation bipolaire qui se basent sur des interprétations spécifiques de la relation de support.

3.3.1 Interprétation générale : « Bipolar Argumentation System (BAS) »

Dans le système BAS, une interprétation assez générale de la relation de support a été proposée [Cayrol & Lagasquie-Schiex 2005, Cayrol & Lagasquie-Schiex 2013]. Les auteurs ont défini la relation de support comme une relation positive entre arguments et qui est indépendante de la relation d'attaque, c'est-à-dire que la relation de support n'est pas définie en utilisant la relation d'attaque ou vice-versa.

Le système BAS se base sur le processus de transformation par *flattening* pour déterminer l'AF associé et ainsi calculer les sémantiques usuelles pour les BAFs. Deux types d'attaques supplémentaires sont ajoutées : le premier type d'extra-attaque, appelé attaque secondaire (*secondary attack*), se produit lorsque $\mathtt{a}R\mathtt{c}$ et $\mathtt{c}S\mathtt{b}$ alors « l'acceptation de `a` implique la non-acceptation de `c` », et ainsi « l'acceptation de `a` implique la non-acceptation de `b` ».
Le second type est appelé attaque supportée (*supported attack*), il véhicule l'idée que : si $\mathtt{a}S\mathtt{c}$ et $\mathtt{c}R\mathtt{b}$ alors « l'acceptation de `a` implique l'acceptation de `c` » et « l'acceptation de `c` implique la non-acceptation de `b` », et donc « l'acceptation de `a` implique la non-acceptation de `b` ».





La définition suivante reprend d'une façon formelle cette idée :

Définition 3.3

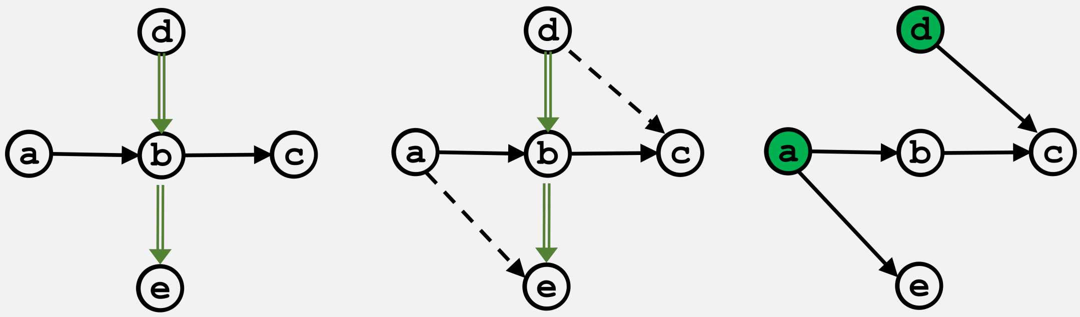
Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ des arguments de A :

— Il existe une attaque *secondaire* de a vers b (notée $\mathtt{a}R^{+}\mathtt{b}$) s'il existe une suite ($\mathtt{a}_1 R \mathtt{a}_2$ ou $\mathtt{a}_1 R^{+} \mathtt{a}_2$) et $\mathtt{a}_2 S ... S \mathtt{a}_n$ avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$, $\mathtt{a}_2 = \mathtt{c}$, $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

— Il existe une attaque *supportée* de a vers b (notée $\mathtt{a}R^{+}\mathtt{b}$) s'il existe une suite $\mathtt{a}_1 S ... S \mathtt{a}_{n-1}$ et ($\mathtt{a}_{n-1} R \mathtt{a}_n$ ou $\mathtt{a}_{n-1} R^{+} \mathtt{a}_n$) avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$, $\mathtt{a}_{n-1} = \mathtt{c}$, $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

Exemple 3.2

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c})\}$ et $S = \{(\mathtt{d}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{e})\}$. Une représentation graphique de ce système d'argumentation est donnée par la sous-figure (1) :



(1) (2) (3)

Par le processus de *flattening* deux extra-attaques sont ajoutées : la première de d vers c et la seconde de a vers e, représentées dans la sous-figure (2). La sous-figure (3) illustre l'AF associé résultat. À titre d'exemple, en considérant la sémantique préférée $\sigma = pr$ pour les AF, nous obtenons $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{a}, \mathtt{d}\}\}$.

3.3.2 Interprétation déductive : « Deductive and Defeasible Support (DDS) »

Le concept de support déductif a été introduit par [Boella *et al.* 2010] dans le système DDS, il représente une interprétation particulière du support, c'est-à-dire : si un argument a supporte un argument b, si a est accepté alors b doit être accepté également (donc si b n'est pas accepté alors a ne doit pas être accepté non plus).

Le système DDS se base sur le processus de *flattening* pour générer deux types d'attaques supplémentaires : une attaque du premier type, appelée attaque supportée (*supported attack*), est ajoutée lorsque $\mathtt{a}S\mathtt{c}$ et $\mathtt{c}R\mathtt{b}$, elle véhicule l'idée que « l'acceptation de a implique l'acceptation de c » et que « l'acceptation de c implique la non-acceptation de b », et ainsi cela permet de

déduire que « l'acceptation de $\mathtt{a}$ implique la non-acceptation de $\mathtt{b}$ ».
Les attaques du second type sont appelées attaques médiatisées (*mediated attacks*). Une attaque médiatisée se produit lorsque $\mathtt{b}S\mathtt{c}$ et $\mathtt{a}R\mathtt{c}$, alors « l'acceptation de $\mathtt{a}$ implique la non acceptation de $\mathtt{c}$ » et « la non acceptation de $\mathtt{c}$ implique la non acceptation de $\mathtt{b}$ ».

Cette idée se concrétise formellement par la définition suivante :

Définition 3.4

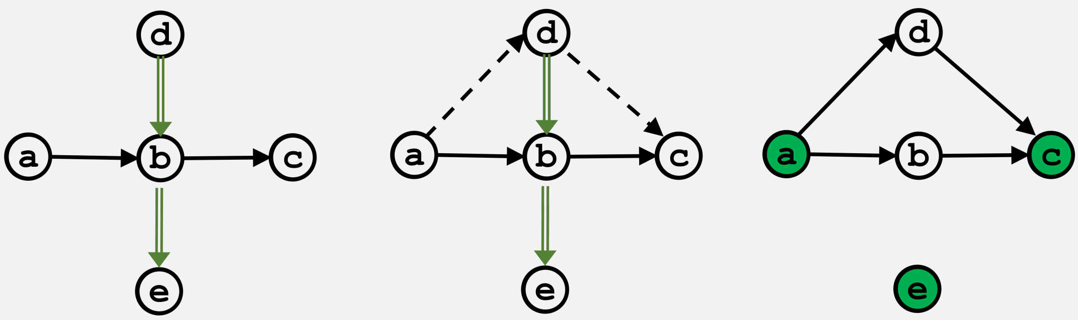
Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ des arguments de A :

— Il existe une attaque *supportée* de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{b}$ (notée $\mathtt{a}R^{+}\mathtt{b}$) s'il existe une suite $\mathtt{a}_1 S ... S \mathtt{a}_{n-1}$ et ($\mathtt{a}_{n-1} R \mathtt{a}_n$ ou $\mathtt{a}_{n-1} R^{+} \mathtt{a}_n$) avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}, \mathtt{a}_{n-1} = \mathtt{c}, \mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

— Il existe une attaque *médiatisée* de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{b}$ (notée $\mathtt{a}R^{+}\mathtt{b}$) s'il existe une suite $\mathtt{a}_1 S ... S \mathtt{a}_{n-1}$ et ($\mathtt{a}_n R \mathtt{a}_{n-1}$ ou $\mathtt{a}_n R^{+} \mathtt{a}_{n-1}$) avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{b}, \mathtt{a}_{n-1} = \mathtt{c}, \mathtt{a}_n = \mathtt{a}$ et $n \geq 3$.

Exemple 3.3

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c})\}$ et $S = \{(\mathtt{d}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{e})\}$. Une représentation graphique de ce système d'argumentation est illustrée par la sous-figure (1) :



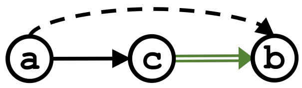
(1) (2) (3)

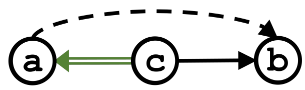
Par le processus de *flattening* deux extra-attaques sont ajoutées : la première de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{d}$ et la seconde de $\mathtt{d}$ vers $\mathtt{c}$, représentées dans la sous-figure (2). La sous-figure (3) illustre l'AF associé résultat. À titre d'exemple, en considérant la sémantique préférée pour les AF, nous obtenons $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{e}\}\}$.

3.3.3 Interprétation de nécessité : « Argumentation Framework with Necessities (AFN) »

Dans le système AFN, Nouioua et Risch [Nouioua & Risch 2011, Nouioua 2013] ont introduit un type particulier de support : la relation de nécessité. Selon cette interprétation, si un argument $\mathtt{a}$ supporte un autre argument $\mathtt{b}$, alors $\mathtt{a}$ est nécessaire pour obtenir $\mathtt{b}$. De cette manière, si $\mathtt{b}$ est accepté, alors $\mathtt{a}$ est également accepté (donc si $\mathtt{a}$ n'est pas accepté alors $\mathtt{b}$ ne peut pas être accepté non plus).

Le système AFN se base aussi sur le processus de *flattening* pour prendre en compte le support nécessaire. On ajoute également deux types d'attaques supplémentaires : les attaques du premier type sont les mêmes que ceux de type attaque secondaire, comme défini par [Cayrol & Lagasquie-Schiex 2005] et rappelée précédemment.
Les attaques du second type se produisent lorsque $\mathtt{c}S\mathtt{a}$ et $\mathtt{c}R\mathtt{b}$, alors « l'acceptation de $\mathtt{a}$ implique l'acceptation de $\mathtt{c}$ » et « l'acceptation de $\mathtt{c}$ implique la non-acceptation de $\mathtt{b}$ ». Et donc « l'acceptation de $\mathtt{a}$ implique la non-acceptation de $\mathtt{b}$ ».





La définition suivante capture formellement cette idée :

Définition 3.5

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ des arguments de A :

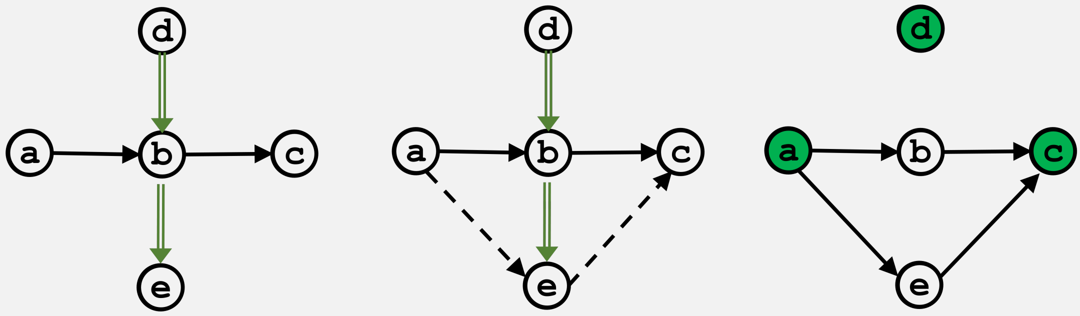
— Il existe une attaque *secondaire* de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{b}$ (notée $\mathtt{a}R^{+}\mathtt{b}$) s'il existe une suite ($\mathtt{a}_1 R \mathtt{a}_2$ ou $\mathtt{a}_1 R^{+} \mathtt{a}_2$) et $\mathtt{a}_2 S ... S \mathtt{a}_n$ avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$, $\mathtt{a}_2 = \mathtt{c}$, $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

— Il existe une attaque *étendue* de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{b}$ (notée $\mathtt{a}R^{+}\mathtt{b}$) s'il existe une suite $\mathtt{a}_{n-1} S ... S \mathtt{a}_1$ et ($\mathtt{a}_{n-1} R \mathtt{a}_n$ ou $\mathtt{a}_{n-1} R^{+} \mathtt{a}_n$) avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}, \mathtt{a}_{n-1} = \mathtt{c}, \mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

Il est important de souligner que dans le système AFN les auteurs ont abordé la question des cycles de support supposant une relation de nécessité acyclique [Nouioua & Risch 2011]. Par la suite, une caractérisation formelle de la *necessity-cycle-freeness* a été fournie dans [Nouioua 2013]. Enfin, dans [Boudhar *et al.* 2012] les auteurs ont proposé une nouvelle caractérisation des AFN en exigeant que la relation de nécessité soit irréflexive, évitant ainsi tout risque d'avoir des cycles de nécessités.

Exemple 3.4

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c})\}$ et $S = \{(\mathtt{d}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{e})\}$. Une représentation graphique du système d'argumentation est donnée par la sous-figure (1) :



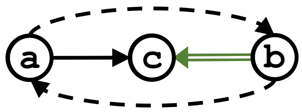
(1) (2) (3)

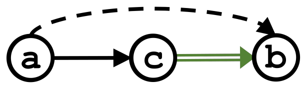
Par le processus de *flattening* deux extra-attaques sont ajoutées : la première de $\mathtt{a}$ vers $\mathtt{e}$ et la seconde de $\mathtt{e}$ vers $\mathtt{c}$, représentées dans la sous-figure (2). La sous-figure (3) illustre l'AF associé résultat. À titre d'exemple, en considérant la sémantique préférée pour les AF, nous obtenons $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}\}$.

3.3.4 Interprétation d'appui : « Backing-Undercutting Argumentation Framework (BUAF) »

Le système d'argumentation backing-undercutting [Cohen *et al.* 2012] est différent des autres systèmes présentés, il considère une relation de préférence sur les arguments en plus des paramètres standard d'un BAF. Par définition, un BUAF est un tuple $\langle A, R, S, \leq \rangle$ où $\leq$ est un ordre partiel sur les arguments.
Étant donné que notre objectif initial est d'étudier le cadre de Dung et l'étendre par l'ajout de relations de support, il est possible d'adapter le système BUAF et ainsi de pouvoir le comparer avec les autres systèmes étudiés ; pour ce faire, nous devons supposer que tous les arguments sont équivalents (ce qui est implicite pour tous les systèmes présentés ci-dessus), plus formellement : $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$; $\mathtt{a} \simeq \mathtt{b}$ où $\mathtt{a} \simeq \mathtt{b}$ est une abréviation de $\mathtt{a} \leq \mathtt{b}$ et $\mathtt{b} \leq \mathtt{a}$.

Comme pour les autres systèmes, BUAF se base sur le processus de *flattening* et génère des attaques supplémentaires à partir des relations d'attaque et des relations de support existantes, ce qui permet de transformer le système bipolaire initial en un système de Dung équivalent. Deux types d'attaques supplémentaires sont présentées : une attaque du premier type, appelée attaque implicite (*implicit attack*), se produit lorsque $\mathtt{a}R\mathtt{c}$ et $\mathtt{b}S\mathtt{c}$. Alors, d'un côté « l'acceptation de $\mathtt{a}$ implique la non acceptation de $\mathtt{c}$ et la non acceptation de $\mathtt{b}$ » et d'un autre côté « l'acceptation de $\mathtt{b}$ implique la non acceptation de $\mathtt{a}$ et l'acceptation de $\mathtt{c}$ ». Le second type d'attaques est celui des attaques indirectes (*indirect attacks*), se produit lorsque $\mathtt{a}R\mathtt{c}$ et $\mathtt{c}S\mathtt{b}$. Alors « l'acceptation de `a` implique la non acceptation de `c` » et « l'acceptation de `a` implique la non acceptation de `b` ».





La définition suivante reprend d'une façon formelle cette idée :

Définition 3.6

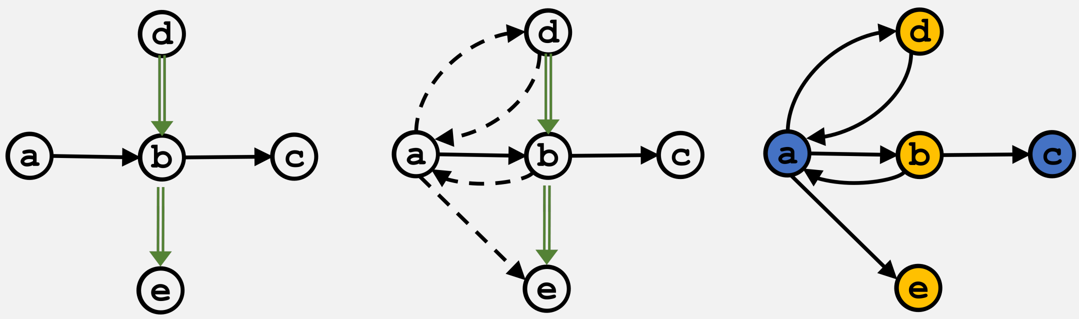
Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S, \leq \rangle$ un BUAF et $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ des arguments de A tel que $\mathtt{a} \simeq \mathtt{b}$ et $\mathtt{b} \simeq \mathtt{c}$:

— Il existe une attaque *implicite* de `a` vers `b` (notée $\mathtt{a}R^+\mathtt{b}$) et une attaque *implicite* de `b` vers `a` (notée $\mathtt{b}R^+\mathtt{a}$) s'il existe une suite $\mathtt{a}_1S...S\mathtt{a}_{n-1}$ et ($\mathtt{a}_nR\mathtt{a}_{n-1}$ ou $\mathtt{a}_nR^+\mathtt{a}_{n-1}$) avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$, $\mathtt{a}_{n-1} = \mathtt{c}$, $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

— Il existe une attaque *indirecte* de `a` vers `b` (notée $\mathtt{a}R^+\mathtt{b}$) s'il existe une suite ($\mathtt{a}_1R\mathtt{a}_2$ ou $\mathtt{a}_1R^+\mathtt{a}_2$) et $\mathtt{a}_2S...S\mathtt{a}_n$ avec $\mathtt{a}_1 = \mathtt{a}$, $\mathtt{a}_2 = \mathtt{c}$, $\mathtt{a}_n = \mathtt{b}$ et $n \geq 3$.

Exemple 3.5

Considérons le système d'argumentation $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c})\}$ et $S = \{(\mathtt{d}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{e})\}$. Une représentation graphique du système d'argumentation est donnée par la sous-figure (1) :



(1) (2) (3)

Par le processus de *flattening* quatre extra-attaques sont ajoutées : deux extra-attaques entre `a` et `d`, une troisième de `a` vers `e`, qui génère à son tour (par transitivité) une quatrième extra-attaque de `b` vers `a`, représentées dans la sous-figure (2). La sous-figure (3) illustre l'AF obtenu comme résultat. À titre d'exemple, en considérant la sémantique préférée pour les AF, nous obtenons $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}, \{\mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}\}$.

3.3.5 Interprétation d'évidence : « Evidential Argumentation Framework (EAF) »

Le système d'argumentation évidentiel [Oren & Norman 2008] *Evidential Argumentation Framework (EAF)* est un autre système qui étend le système d'argumentation de Dung. Tout comme les BAFs, les EAFs permettent de représenter une relation de support. Néanmoins, ils contiennent également un argument supplémentaire spécial η, qui représente un défaut ou une forme de preuve incontestable. L'interprétation d'une relation de support de η vers un argument est que l'argument soutenu est vrai par défaut, ou qu'il existe des preuves inattaquables pour l'argument. Le support entre d'autres arguments peut impliquer qu'un lien d'inférence existe entre eux.

Le système d'argumentation évidentiel est défini comme suit :

Définition 3.7

Un système d'argumentation évidentiel est un BAF avec un argument « spécial » $\eta \in A$ tel que :
- $\nexists \mathtt{a} \in A$ tel que $(\eta, \mathtt{a}) \in R$; et
- $\nexists \mathtt{b}$ tel que $(\mathtt{b}, \eta) \in R$ ou $(\mathtt{b}, \eta) \in S$.

Une condition nécessaire pour qu'un argument appartienne à une extension est qu'il soit directement, ou indirectement, soutenu par une évidence ; c'est-à-dire qu'il existe une chemin de η vers l'argument.

Définition 3.8 (Support évidentiel)

- Un argument $\mathtt{a}$ a un support par évidence (e-support) d'un ensemble $\mathcal{E} \subseteq A$ si, et seulement si, $\mathcal{E}S\mathtt{a}$ tel que $\mathcal{E} = \{\eta\}$ ou $\exists \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}'S\mathtt{a}$ et $\forall \mathtt{b} \in \mathcal{E}'$, $\mathtt{b}$ a un support d'évidence de $\mathcal{E} \setminus \{\mathtt{b}\}$.
- Un argument $\mathtt{a}$ a un e-support minimal d'un ensemble $\mathcal{E}$ s'il n'existe pas $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ tel que $\mathtt{a}$ a un e-support de $\mathcal{E}'$.

Définition 3.9 (Attaque supportée par l'évidence)

- Un ensemble $\mathcal{E} \subseteq A$ mène une attaque e-supported sur $\mathtt{a}$ si $(\mathcal{E}', \mathtt{a}) \in R$ tel que $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ et $\forall \mathtt{b} \in \mathcal{E}'$, $\mathtt{b}$ a un e-support de $\mathcal{E}$.
- Une attaque e-supported par $\mathcal{E}$ sur argument $\mathtt{a}$ est minimale si, et seulement si, il n'existe pas $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}'$ mène une attaque e-supported sur $\mathtt{a}$.

Compte tenu de ces notions, nous pouvons définir les sémantiques pour les EAFs construites autour de la notion d'acceptabilité d'une manière similaire à celle de Dung. Cependant, pour Dung, seule la relation d'attaque a été considérée. Pour les EAFs, non seulement les arguments doivent être défendus contre les attaques, mais ils doivent également être suffisamment supportés pour être acceptables.

Définition 3.10 (Acceptabilité)

Un argument a est acceptable par rapport à un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ si, et seulement si, a est e-supporté par $\mathcal{E}$; et si $\mathcal{E}' \subseteq A$ mène une e-supported attaque minimale sur a alors $\mathcal{E}$ mène une e-supported attaque sur un élément de $\mathcal{E}'$.

Nous pouvons maintenant définir des versions modifiées d'un certain nombre d'extensions de Dung.

Définition 3.11 (Extensions usuelles)

Un ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ est :
— admissible si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est sans conflit et $\forall \mathsf{a} \in \mathcal{E}$, a est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$.
— une extension préférée si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est un ensemble admissible maximal (par rapport à $\subseteq$).
— une extension complète si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est admissible et pour chaque argument a qui est acceptable par rapport à $\mathcal{E}$, $\mathsf{a} \in \mathcal{E}$.
— une extension stable si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est sans conflit ; $\forall \mathsf{a} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ e-supports a ; et $\forall \mathsf{a}$ e-supporté par A tel que $\mathsf{a} \notin \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ mène une e-supported attaque soit sur a soit sur chaque ensemble d'arguments qui e-supporte minimalement a.

Étant donné que l'argument spécial η considéré dans le système EAF ne peut pas être pris en compte – directement – dans les autres approches, rendant la comparaison inéquitable, dans ce qui suit nous nous intéressons aux travaux de [POLBERG & OREN 2014], qui ont démontré qu'un EAF peut être converti en un AFN, et aussi comment un AFN peut être converti en EAF. Ce qui permet de prendre en compte l'argument spécial η et de pouvoir appliquer les sémantiques usuelles.

Correspondance entre un AFN et un EAF : Nous examinons maintenant comment le support nécessaire peut être exprimé en tant que support évidentiel. La question importante est de savoir comment les arguments doivent être liés à l'évidence. Dans les EAFs, l'évidence est la seule confirmation de la validité, nous devons être capables de remonter des arguments à l'évidence. Dans les AFNs, la validité est obtenue par acyclicité - nous devons être capables de remonter d'un argument valide à des arguments qui ne nécessitent aucun support. Par conséquent, si nous voulons que les arguments non supportés puissent être valides dans le cadre EAF, il est facile de voir que ces arguments (et seulement eux) doivent être soutenus par η.
Cette observation permet de définir la conversion ci-dessous.

Étant donné un AFN $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$. L'EAF correspondant $\mathcal{F}' = \langle A', R, S' \rangle$ est construit comme suit :
(1) $A' = A \cup \{\eta\}$.
(2) L'ensemble d'attaques R reste inchangé.
(3) Soit $\mathtt{a}$ un argument dans A et $Z = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble d'arguments tel que $(x_i, \mathtt{a}) \in S$ est un support par nécessité. Si $Z = \varnothing$, ajouter $(\eta, \mathtt{a})$ à S'. Sinon, ajouter $(x_i, \mathtt{a})$ à S'.

Correspondance entre un EAF et un AFN : Cette mise en correspondance est multiple dans le sens où de nombreux EAFs différents peuvent être convertis en un AFN avec une structure de graphe identique. Le but de cette conversion est de préserver les sémantiques des EAFs. Autrement dit, tout argument qui se trouve dans une certaine extension de l'EAF devrait se trouver dans une extension analogue du AFN.

Étant donné un EAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$. L'AFN correspondant $\mathcal{F}' = \langle A, R, S' \rangle$ est construit comme suit :
(1) L'ensemble des arguments A reste le même.
(2) L'ensemble d'attaques R reste inchangé.
(3) Soit $\mathtt{a} \neq \eta$ un argument dans A et $Z = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble d'arguments tel que $(x_i, \mathtt{a}) \in S$ est un support évidentiel. Si $Z = \varnothing$, ajouter $(\mathtt{a}, \mathtt{a})$ à S'. Sinon, ajouter $(x_i, \mathtt{a})$ à S'.

La plus grande difficulté ici est la manipulation de η. Nous notons que η est la seule confirmation de la « vérité » dans un EAF — sa présence au début d'une suite de supports est requise pour qu'un argument soit valide. Tout argument non soutenu par η se doit de justifier sa propre vérité, agissant ainsi en tant qu'auto-support. En raison des exigences d'acyclicité dans les AFN, un tel argument ne serait pas (correctement) considéré comme valide. Ceci est le cas pour les arguments initialement non supportés dans l'EAF et qui sont encodés par un auto-support, ces arguments ne seront pas pris en compte dans l'AFN résultant. Ceci est le cas l'argument η aussi.

Polberg et Oren ont montré que :

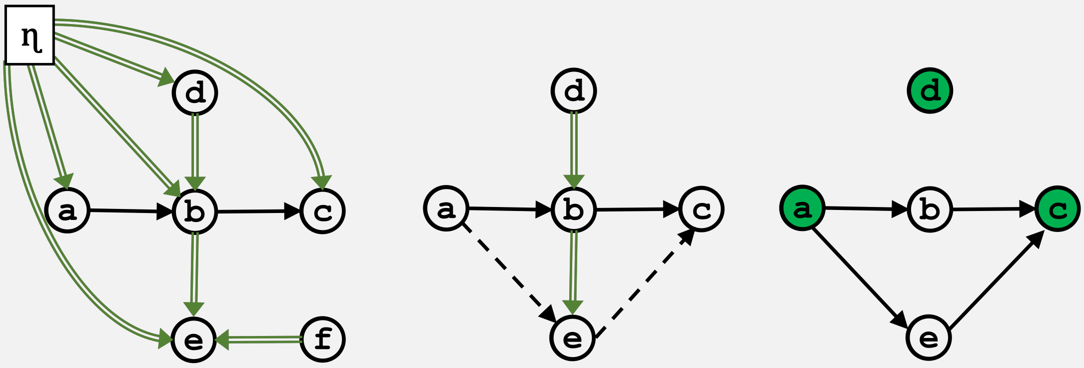
Théorème 3.1 ([POLBERG & OREN 2014])

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un EAF et $\mathcal{F}' = \langle A, R', S' \rangle$ l'AFN correspondant à $\mathcal{F}$. Un ensemble $\mathcal{E}$ est une extension de $\sigma \in \{ad, pr, co, st\}$ dans $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est une extension de σ dans $\mathcal{F}'$.

Exemple 3.6

Considérons le système d'argumentation évidentiel $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c})\}$ et $S = \{(\eta, \mathtt{a}), (\eta, \mathtt{b}), (\eta, \mathtt{c}), (\eta, \mathtt{d}), (\eta, \mathtt{e}), (\mathtt{d}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{e}), (\mathtt{f}, \mathtt{e})\}$. Une représentation graphique du système d'argumentation est donnée par la sous-figure (1) :

Exemple 3.6 (cont.)



(1) (2) (3)

Le résultat de construction de l'AFN correspondant ainsi que les extra-attaques ajoutées par le processus de *flattening* dans l'AFN obtenu sont illustrés par la sous-figure (2)). La sous-figure (3) illustre l'AF associé.
Il est à noter qu'en raison de la contrainte d'acyclicité des AFN, l'argument f n'est pas pris en compte dans l'AF associé.
À titre d'exemple, en considérant la sémantique préférée pour les AF, nous obtenons $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{a}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}\}$.

3.4 Propriétés des sémantiques d'argumentation bipolaire

Dans cette section, nous présentons plusieurs propriétés définies par [AMGOUD & BEN-NAIM 2018a], que les sémantiques devraient satisfaire dans un cadre d'argumentation bipolaire. Ces propriétés ont été initialement introduites dans le contexte des systèmes d'argumentation bipolaire pondérés. Nous nous intéressons au cas où tous les arguments sont initialement équivalents, ce qui nous permet de voir chaque BAF comme un BAF pondéré pour lequel tous les arguments ont la même valeur de poids initial (par exemple, $w(\mathtt{a}) = \frac{1}{2}, \forall \mathtt{a} \in A$). Par conséquent, nous pouvons appliquer les propriétés du cadre pondéré pour les BAFs.

Nous adaptons aussi la définition des degrés d'acceptabilité. En effet, dans le cadre pondéré, les degrés des arguments appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$, or cela peut être vu comme un raffinement des degrés à trois niveaux $\{Sc, Cr, Rj\}$ (voir définition 2.23).

Le degré Rj correspond à la valeur 0, le degré Sc correspond à la valeur 1 et le degré Cr correspond à une valeur comprise dans l'intervalle $]0, 1[$.

0	$<$	...	$<$	1
Rj	$<$	Cr	$<$	Sc

Anonymat *(Anonymity)* : le premier axiome de base garantit que le degré d'acceptabilité d'un argument ne dépend pas de son identité.

Rappelons d'abord la notion d'isomorphisme entre graphes.

Définition 3.12

Soit $\mathcal{F}_1 = \langle A_1, R_1, S_1 \rangle$ et $\mathcal{F}_2 = \langle A_2, R_2, S_2 \rangle$ deux BAFs. Un isomorphisme de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$ est une fonction bijective f de A_1 dans A_2 tel que :
- $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b} \in A_1$, $\mathtt{a} R_1 \mathtt{b}$ si, et seulement si, $f(\mathtt{a}) R_2 f(\mathtt{b})$,
- $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b} \in A_1$, $\mathtt{a} S_1 \mathtt{b}$ si, et seulement si, $f(\mathtt{a}) S_2 f(\mathtt{b})$.

Ainsi, la propriété d'*anonymat* est définie comme suit :

Définition 3.13 ([Amgoud & Ben-Naim 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété d'*anonymat* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F}_1 = \langle A_1, R_1, S_1 \rangle$ et $\mathcal{F}_2 = \langle A_2, R_2, S_2 \rangle$ et pour tout isomorphisme f de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$, on a $\forall \mathtt{a} \in A_1$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}_1}(\mathtt{a}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}_2}(f(\mathtt{a}))$.

Indépendance bivariée *(Bi-variate Independence)* : la propriété de l'*indépendance bivariée* stipule que le degré d'acceptabilité d'un argument $\mathtt{a}$ doit être indépendant de tout argument $\mathtt{b}$ qui n'est pas connecté à $\mathtt{a}$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de chaîne [1] entre $\mathtt{b}$ et $\mathtt{a}$).

Définition 3.14 ([Amgoud & Ben-Naim 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété d'*indépendance bivariée* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F}_1 = \langle A_1, R_1, S_1 \rangle$ et $\mathcal{F}_2 = \langle A_2, R_2, S_2 \rangle$ tel que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, on a $\forall \mathtt{a} \in A_1$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}_1}(\mathtt{a}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}_1 \uplus \mathcal{F}_2}(\mathtt{a})$. [a]

a. $\uplus$ désigne l'opérateur d'union tel que défini à la définition 2.39

Directionnalité bivariée *(Bi-variate Directionality)* : la propriété de *directionnalité bivariée* stipule que le degré d'acceptabilité d'un argument ne doit dépendre que des attaques/supports reçus, et donc pas des arguments qu'il attaque ou supporte lui-même.

1. Une chaîne désigne une séquence d'arcs successifs (attaques et supports) sans tenir compte de leurs orientations.

Définition 3.15 ([Amgoud & Ben-Naim 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété de *directionnalité bivariée* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F}_1 = \langle A_1, R_1, S_1 \rangle$ et $\mathcal{F}_2 = \langle A_2, R_2, S_2 \rangle$ tel que $A_1 = A_2$, $R_1 \subseteq R_2$ et $S_1 \subseteq S_2$, on a $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} \in A_1$, si $R_2 \cup S_2 = R_1 \cup S_1 \cup \{(a, b)\}$ et il n'existe pas de chaîne de $\mathtt{b}$ vers $\mathtt{c}$ dans $\mathcal{F}_2$, alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}_1}(\mathtt{c}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}_2}(\mathtt{c})$.

Équivalence bivariée *(Bi-variate Equivalence)* : la propriété d'*équivalence bivariée* garantit que le degré d'acceptabilité d'un argument ne dépend que du degré d'acceptabilité de ses attaquants et supporters directs.

Définition 3.16 ([Amgoud & Ben-Naim 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété d'*équivalence bivariée* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ et $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$:

— s'il existe une fonction bijective f de $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a})$ vers $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b})$ telle que $\forall \mathtt{c} \in att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a})$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(f(\mathtt{c}))$,

— et s'il existe une fonction bijective f' de $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a})$ vers $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b})$ telle que $\forall \mathtt{c} \in sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a})$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(f'(\mathtt{c}))$

alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{b})$

Neutralité *(Neutrality)* : la propriété de *neutralité* stipule que les attaquants ou les supporters avec un degré d'acceptabilité minimal n'ont aucun effet.

Définition 3.17 ([Amgoud & Ben-Naim 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété de *neutralité* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ et $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} \in A$, si $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \subseteq att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b})$, $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \subseteq sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b})$, $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) \cup sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) = att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \cup sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \cup \{c\}$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}) = Rj$ alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{b})$.

Monotonie bivariée *(Bi-variate Monotony)* : la *monotonie bivariée* stipule ce qui suit : si un argument a est également ou moins attaqué qu'un argument b, et également ou plus supporté que b, alors le degré d'acceptabilité de a devrait être aussi fort ou plus fort que celui de b.

Définition 3.18 ([AMGOUD & BEN-NAIM 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété de *monotonie bivariée* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ et $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$ si $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \subseteq att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b})$ et $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) \subseteq sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a})$, alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \geq Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{b})$.

Renforcement bivarié *(Bi-variate Reinforcement)* : la propriété de *renforcement bivarié* énonce que le degré d'acceptabilité d'un argument augmente si le degré d'acceptabilité de ses attaquants diminue et le degré d'acceptabilité de ses supporters augmente.

Définition 3.19 ([AMGOUD & BEN-NAIM 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété de *renforcement bivariée* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, $\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq A$, $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b} \in A$ et $\forall \mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{d}_1, \mathtt{d}_2 \in A \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$, si :

— $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}_1) \leq Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}_2)$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{d}_1) \geq Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{d}_2)$,

— $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = \mathcal{E}_1 \cup \{c_1\}$, $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) = \mathcal{E}_1 \cup \{c_2\}$,

— $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = \mathcal{E}_2 \cup \{d_1\}$ et $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) = \mathcal{E}_2 \cup \{d_2\}$

alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a}) \geq Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{b})$

Franklin : la propriété de *Franklin* stipule qu'un attaquant et un supporter d'un même degré d'acceptabilité doivent se contrebalancer l'un l'autre. Ainsi, ni les attaques ni les supports n'auront d'impact sur l'argument cible.

Définition 3.20 ([AMGOUD & BEN-NAIM 2018a])

Une sémantique σ satisfait la propriété de *Franklin* si, et seulement si, pour tout BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ et $\forall \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2 \in A$, si :

— $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}_1) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{c}_2)$,

— $att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = att^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) \cup \{c_1\}$,

— $sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = sup^{BAF}_{\mathcal{F}}(\mathtt{b}) \cup \{c_2\}$

alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{b})$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit en premier lieu les systèmes d'argumentation bipolaire. Ensuite, nous avons passé en revue les différentes interprétations et approches existantes pour la notion de support. En dernière partie du chapitre, nous avons présenté les propriétés qui s'appliquent au cadre bipolaire.

L'hétérogénéité des interprétations de la relation de support nous laisse nous interroger sur le vrai sens du support. Dans le chapitre suivant, nous proposons une définition générale de la notion de support en argumentation.

Chapitre 4

Support Monotone

Sommaire

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *support monotone*. Nous commençons dans une première section par discuter la monotonie de la notion de support, ensuite dans une deuxième section nous définissons les propriétés de base qu'une notion de support monotone doit satisfaire, ainsi que des propriétés additionnelles souvent désirables pour un concept de support. Enfin, nous proposons une étude comparative des systèmes d'argumentation bipolaire, sur la base des propriétés introduites.

Avant de commencer, nous présentons les notations suivantes :

Notation 4.1

Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, nous notons par $\mathcal{F}_{\downarrow AF}$ l'AF obtenu de la restriction de $\mathcal{F}$ à $\langle A, R \rangle$.

Notation 4.2

Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, nous notons par $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F}_{\downarrow AF})$ l'ensemble de toutes les extensions de l'AF obtenu de la restriction de $\mathcal{F}$ à $\langle A, R \rangle$, pour une sémantique donnée σ.
Pour des raisons de lisibilité, $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F}_{\downarrow AF})$ est référencé par $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$.

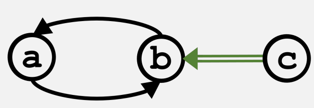
4.1 La notion de support

D'une manière générale, le support est une relation qui doit capturer une interaction positive entre arguments, contrairement à l'interaction négative déjà définie par la relation d'attaque. Dans un système d'argumentation bipolaire, ce qui est tout à fait logique, c'est d'interpréter l'attaque comme une relation dégradante et le support comme une relation renforçante, et que ces deux relations soient indépendantes l'une de l'autre.

Ci-dessous un exemple tiré de la vie réelle qui illustre la notion de *support monotone* entre arguments :

Exemple 4.1

Considérons les affirmations suivantes issues d'une conversation impliquant trois agents :
Agent 1 : – *Pendant de la réunion, Alice portait un pantalon.* (a)
Agent 2 : – *Pendant de la réunion, Alice portait une jupe verte.* (b)
Agent 3 : – *Pendant de la réunion, Alice était habillée en vert.* (c)



Dans le BAF ci-dessus, les arguments `a` et `b` s'attaquent mutuellement, tandis que l'argument `c` supporte `b`.

Dans l'exemple précèdent, les arguments a et b sont en conflit, tandis que l'argument c supporte l'argument b. À notre avis, le fait que c supporte b ne doit en aucun cas dégrader le degré d'acceptabilité de b. Dans le sens que, si b est accepté avant de prendre en compte la relation de support de c vers b (en prenant en compte seulement les relations d'attaque), alors b ne doit pas devenir rejeté lorsque le support de c vers b est prit en compte. C'est ce que nous entendons par *support monotone*.

Illustrons sur un exemple les différentes sémantiques BAS, DDS, AFN et BUAF. Le but est de montrer, à l'aide de cet exemple, que toutes ces sémantiques sont distinctes deux à deux, en ce sens qu'elles définissent des ensembles distincts d'extensions. En tant que telles, elles capturent des intuitions distinctes sur ce que signifie le fait de « supporter ».

Exemple 4.2

Considérons le BAF $\mathcal{F}$ représenté par la figure suivante :

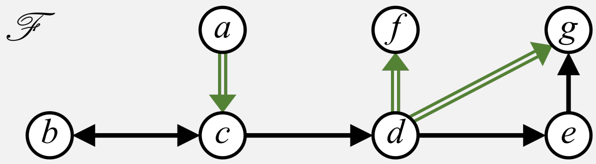


FIGURE 4.1 – Le BAF $\mathcal{F}$

En appliquant la sémantique préférée $\sigma = pr$ à l'AF $\mathcal{F}_{\downarrow AF}$, nous obtenons l'ensemble d'extensions : $Ext_{pr}^{AF}(\mathcal{F}) = \{\{a, b, d, f, g\}, \{a, c, e, f\}\}$. Ces deux extensions sont celles obtenues sans tenir compte des relations de support .

Pour le système **BAS**, afin de prendre en compte la relation de support, nous appliquons le processus de transformation par *flattening* et nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}^{BAS}$ représenté par la figure suivante :

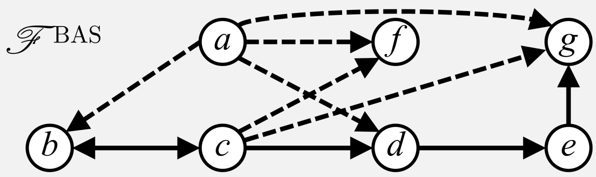


FIGURE 4.2 – AF associé pour les sémantiques de BAS

Nous obtenons $Ext_{pr}^{BAF}(\mathcal{F}) = Ext_{pr}^{AF}(\mathcal{F}^{BAS}) = \{\{a, c, e\}\}$.

Exemple 4.2 (cont.)

Pour le système **DDS**, nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}^{DDS}$ représenté par la figure suivante :

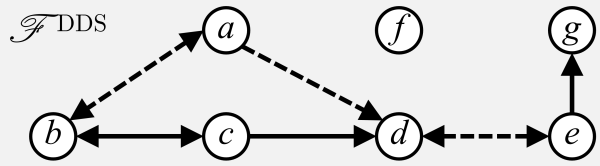


FIGURE 4.3 – AF associé pour les sémantiques de DDS

Nous obtenons $Ext^{BAF}_{pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{pr}(\mathcal{F}^{DDS}) = \{\{b, d, f, g\}, \{a, c, e, f\}, \{b, e, f\}\}$.
Pour le système **AFN**, nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}^{AFN}$ représenté par la figure suivante :

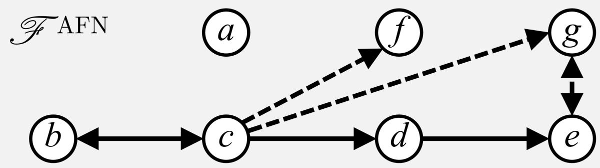


FIGURE 4.4 – AF associé pour les sémantiques d'AFN

Nous obtenons $Ext^{BAF}_{pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{pr}(\mathcal{F}^{AFN}) = \{\{a, c, e\}, \{a, b, d, f, g\}\}$.
Pour le système **BUAF**, nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}^{BUAF}$ représenté par la figure suivante :

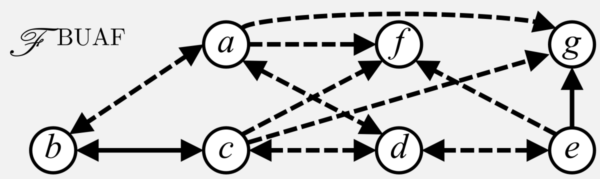


FIGURE 4.5 – AF associé pour les sémantiques de BUAF

Nous obtenons $Ext^{BAF}_{pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{pr}(\mathcal{F}^{BUAF}) = \{\{b, d, f, g\}, \{a, c, e\}, \{b, e\}\}$.

Malgré l'hétérogénéité et la multitude des interprétations de la relation de support qui ont été introduites dans la littérature scientifique (déductive, nécessaire, d'appui, etc.), nous avons surtout constaté un manque d'analyse des propriétés attendues d'une relation de support.

Notre première problématique a donc été de poser les bases d'une définition formelle de ce que doit être une relation de support en argumentation. Dans la section suivante nous proposons une nouvelle interprétation de la notion de support et nous formalisons la notion de *support monotone*.

4.2 Étude axiomatique de la notion de support

Notre étude axiomatique a consisté à recueillir les différentes propriétés et axiomes qui ont été proposés dans la littérature scientifique pour le relation de support. Cette étude a concerné un cadre plus large que celui des approches standard à base d'extensions. Un premier constat est qu'il existe un large ensemble d'axiomes et de propriétés qui ne sont pas toujours compatibles entre eux, certains de ces axiomes sont généraux tels que l'*anonymat*, l'*indépendance*, la *directionnalité*, etc. mais selon nous aucun axiome ne capture ce qu'est une relation de support. Même si quelques axiomes, tels que la *bi-variate monotonie* (définition 3.18), ont visé à formaliser l'apport d'une relation de support, ils restent insuffisants pour caractériser une telle relation. C'est à partir de cette analyse que nous proposons dans cette section une nouvelle interprétation de la notion de support et nous formalisons la notion de *support monotone*. Nous introduisons deux axiomes pour décrire formellement cette nouvelle interprétation, à savoir la *monotonie* et la *non-trivialité*.

Avant d'introduire les axiomes, nous présentons la notation suivante :

Notation 4.3

Soir $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et $\mathtt{a}$ et $\mathtt{b}$ deux arguments de A. Nous notons par $\mathcal{F}^{S+(\mathtt{a},\mathtt{b})}$ le BAF $\langle A, R, S \cup \{(\mathtt{a}, \mathtt{b})\} \rangle$.

4.2.1 Monotonie

Le premier axiome, appelé *monotonie*, empêche une relation de support de dégrader le statut d'acceptation de l'argument supporté. Il stipule que si un argument x reçoit un support en plus, cela ne doit pas diminuer (dégrader) en aucune manière son degré, dans le pire des cas cela ne va rien lui apporter de plus (c'est-à-dire, le degré de x reste inchangé).

Définition 4.1 (Monotonie)

Une sémantique σ pour les BAFs satisfait la *monotonie* si, et seulement si, pour chaque BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, pour chaque $x, y \in A$, on a $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(x) \leq Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^{S+(y,x)}}(x)$.

4.2.2 Non-trivialité

Le second axiome, appelé *non-trivialité*, requiert l'existence de BAF pour lequel supporter un argument conduit à augmenter son statut d'acceptation. Il stipule qu'il existe des cas de figure où la relation de support améliore strictement le degré de x. Sans cette condition, toute sémantique pour les BAF qui ne prend pas en compte la relation de support serait considérée comme acceptable, ce qui n'est pas voulu.

Définition 4.2 (Non-trivialité)

Une sémantique σ pour les BAFs satisfait la *non-trivialité* si, et seulement si, il existe un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, et il existe $x, y \in A$, tel que $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(x) < Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^{S+(y,x)}}(x)$.

Ces deux axiomes définissent selon nous une base minimale pour qu'une relation soit considérée comme une relation de support monotone.

4.3 Postulats additionnels

Dans cette section, nous introduisons des propriétés souvent désirables pour un concept de support, à savoir les propriétés *Dung compatibilité*, *impact*, *strength impact* et *irrelevance*. Elles caractérisent des sous-classes de sémantiques intéressantes ; toutefois, nous ne considérons pas ces propriétés comme obligatoires pour définir la notion de support monotone.

4.3.1 Dung Compatibilité

La première propriété exprime une forme de compatibilité avec les sémantiques classiques de Dung :

Définition 4.3 (Dung Compatibilité)

Une sémantique σ pour les BAFs satisfait *Dung compatibilité* si, et seulement si, pour chaque BAF $\mathcal{F}$, on a $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}) \subseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$.

Cette propriété indique simplement que les extensions qui résultent de la sémantique d'un BAF sont parmi celles de $\mathcal{F}_{\downarrow AF}$ (l'AF obtenu de la restriction de $\mathcal{F}$ à $\langle A, R \rangle$). Cette propriété donne l'assurance que les extensions considérées sont de « vraies » extensions au sens de Dung.

4.3.2 Irrelevance

La propriété d'irrelevance régit l'impact de l'ajout d'un support dans un BAF. Pour un BAF donné $\mathcal{F}$, elle indique que si un ensemble d'arguments n'est pas une extension du BAF, et si un support est ajouté à un argument n'appartenant pas à cet ensemble, alors cet ensemble ne deviendra pas une extension du BAF élargi.

Définition 4.4 (Irrelevance)

Une sémantique σ pour les BAFs satisfait *irrelevance* si, et seulement si, pour chaque BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, pour chaque ensemble d'arguments $\mathcal{E} \subseteq A$ tel que $\mathcal{E} \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$, pour chaque $x \notin \mathcal{E}$ et $y \in A$, on a $\mathcal{E} \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}^{S+(y,x)})$.

4.3.3 Impact

La propriété suivante régit l'impact de l'ajout d'un support dans un BAF. Elle indique que si un support est ajouté à un argument appartenant à une extension du BAF alors cette extension restera une extension du BAF élargi.

Définition 4.5 (Impact)

Une sémantique σ pour les BAFs satisfait *impact* si, et seulement si, pour chaque BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, $\forall \mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$, $\forall x \in \mathcal{E}$ et $y \in A$, on a $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}^{S+(y,x)})$.

4.3.4 Strength impact

Enfin, afin de prendre en compte la force du support des arguments, la propriété de strength impact énonce que si deux extensions d'un BAF sont supportées par un argument chacune, celle qui reçoit le support de l'argument ayant le degré d'acceptabilité le plus élevé sera sélectionnée au dépend de l'autre extension.

Définition 4.6 (Strength impact)

Une sémantique σ pour les BAFs satisfait *strength impact* si, et seulement si, pour chaque BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, $\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$, $\forall x_1 \in \mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2$, $\forall x_2 \in \mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1$, $\forall a, b \in A$ tel que $(a, x_1) \notin S$, $(b, x_2) \notin S$, et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(a) > Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(b)$, on a $\mathcal{E}_1 \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}^{S+(a,x_1)+(b,x_2)})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}^{S+(a,x_1)+(b,x_2)})$.

4.4 Étude comparative

Dans cette section, nous proposons une étude comparative des systèmes d'argumentation bipolaire présentés à la section 3.3, sur la base des propriétés de la *monotonie* et de la *non-trivialité* qui définissent le support monotone. Ainsi que *Dung compatibilité*, *impact strength impact* et *irrelevance*.

4.4.1 Étude comparative de BAS

Monotonie : les sémantiques de BAS pour les BAFs ne satisfont pas la monotonie. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.1 est de montrer par un contre-exemple que si un argument reçoit un support en plus, son degré d'acceptabilité va diminuer. Ce qui prouve qu'il existe des cas de figure où le support joue un rôle dégradant.

Proposition 4.1

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st\}$. Les sémantiques de BAS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *monotonie*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c\}, \{(c, b)\}, \{\} \rangle$ et $\sigma \in \{pr, st\}$, nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c\}\}$. Comme il n'y a qu'une seule extension, nous avons $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(a) = Sc$.
Ajoutons une relation de support de b vers a, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle \{a, b, c\}, \{(c, b)\}, \{(b, a)\} \rangle$. Dans ce cas de figure, pour l'approche BAS une attaque étendue (*secondary attack*) est ajoutée entre les arguments c et a. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{c\}\}$ et donc $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(a) = Rj$. La figure ci-dessous illustre graphiquement les deux BAFs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$:

Dans le BAF initial $\mathcal{F}$, le degré d'acceptabilité de l'argument a est Sc, après l'ajout du support (b, a) le degré d'acceptabilité de a est devenu Rj. Dans ce contre-exemple, le support reçu de b a joué un rôle dégradant pour a. Ceci conclut la preuve pour *monotonie*.

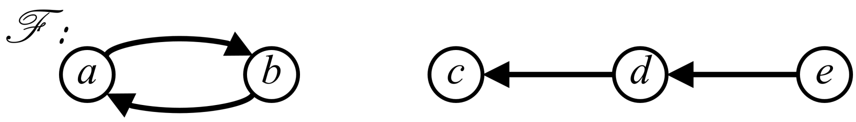
□

Non-trivialité : afin de prouver que la non-trivialité est satisfaite par les sémantiques de BAS pour les BAFs, il nous suffit de montrer par un exemple qu'il existe un BAF où le degré d'acceptabilité d'un argument s'améliore strictement après avoir reçu un support en plus.

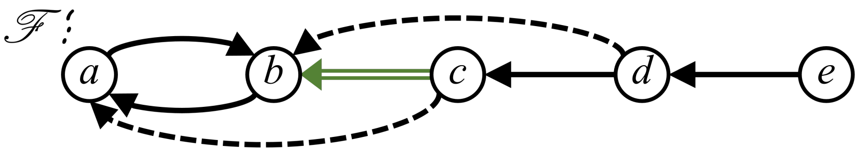
Proposition 4.2

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st\}$. Les sémantiques de BAS pour les BAFs sous la sémantique σ satisfont la *non-trivialité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (e, d), (d, c)\}, \{\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Pour $\sigma \in \{pr, st\}$ nous obtenons $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c, e\}, \{b, c, e\}\}$, ce qui implique que $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(b) = Cr$. Ajoutons une relation de support de c vers b, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (e, d), (d, c)\}, \{(c, b)\}\rangle$. Du fait du support (c, b), dans l'approche BAS une première attaque étendue (*secondary attack*) est ajoutée de d vers b et une autre (*supported attack*) de c vers a. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{b, c, e\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$. Par conséquent $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(b) = Sc$. La figure ci-dessous illustre graphiquement $\mathcal{F}'$:



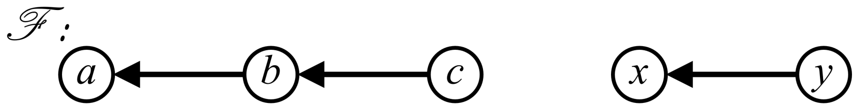
□

Dung compatibilité : l'intuition derrière la preuve de la proposition 4.3 est de montrer par un contre-exemple que $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}) \nsubseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$.

Proposition 4.3

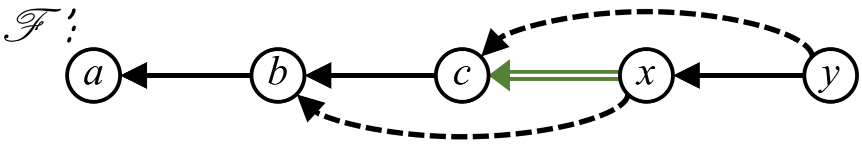
Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st\}$. Les sémantiques de BAS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *Dung compatibilité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Nous avons $Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$. Ajoutons une relation de support de x vers c, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{(x, c)\}\rangle$. Deux

attaques supplémentaires sont alors ajoutées de y vers c et de x vers b.
Nous obtenons $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{b, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$. Par conséquent, $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') \nsubseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$. La figure suivante représente graphiquement $\mathcal{F}'$:



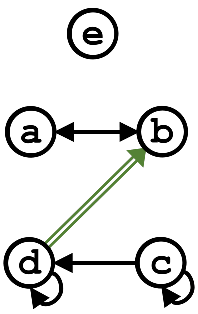
□

Irrelevance : les sémantiques de BAS pour les BAFs ne satisfont pas irrelevance. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.4 est de montrer par un contre-exemple que si un ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ n'est pas une extension du BAF $\mathcal{F}$, et si un support est ajouté à un argument n'appartenant pas à cet ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{E}$ deviendra une extension du BAF élargi.

Proposition 4.4

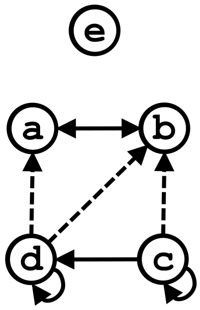
Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st\}$. Les sémantiques de BAS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *irrelevance*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, d)\}, \{(d, b)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :

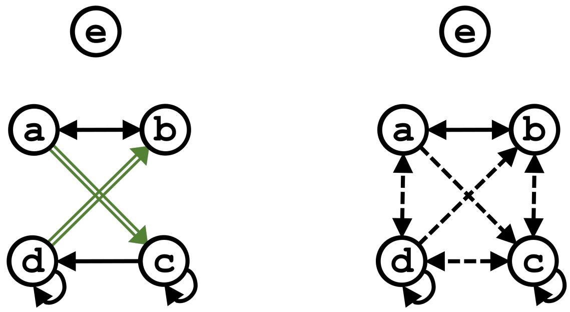


Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison des attaques et du support (d, b) entraîne l'ajout de 3 attaques supplémentaires de c vers b, de d vers b et de d vers a. Nous obtenons alors l'AF associé [2] $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, d), (c, b), (d, a), (d, b)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :

2. $\mathcal{F}_{\triangleright AF}$ désigne l'AF associé tel que introduit par la notation 3.4



Par conséquent, $Ext^{BAF}_{BAS,pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BAS,pr}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{e\}\}$ et $Ext^{BAF}_{BAS,st}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BAS,st}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\}$.
Ajoutons maintenant une relation de support de a vers c, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, d)\}, \{(d, b), (a, c)\}\rangle$. La combinaison des attaques et du support (a, c) entraîne l'ajout de 4 attaques supplémentaires de b vers c, de a vers c, de a vers d et de d vers c. La combinaison des attaques et du support (d, b) entraîne l'ajout des 3 attaques supplémentaires déjà mentionnées. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, d), (c, b), (d, a), (d, b), (b, c), (a, c), (a, d), (d, c)\}\rangle$.
La figure suivante représente $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'_{\triangleright AF}$:



Nous obtenons pour $\sigma \in \{pr, st\}$, $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{e, a\}\}$. Ceci conclut la preuve pour *irrelevance*.

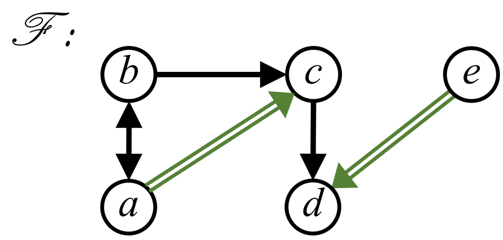
□

Strength impact : les sémantiques de BAS pour les BAFs ne satisfont pas strength impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.5 est de montrer par un contre-exemple que si deux extensions d'un BAF sont supportées par un argument chacune, celle qui reçoit le support de l'argument ayant le degré d'acceptabilité le plus élevé ne sera pas sélectionnée au dépend de l'autre extension.

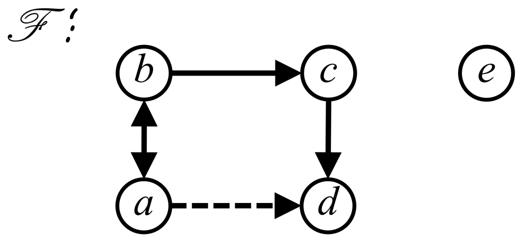
Proposition 4.5

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st\}$. Les sémantiques de BAS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *strength impact*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F}^0 = \langle\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\}, \{\}\rangle$. Pour $\sigma \in \{pr, st\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\{a,c,e\},\{b,d,e\}\}$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(e) = Sc$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(a) = Cr$. Ajoutons deux relations de support de a vers c et de e vers d, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\}, \{(a,c),(e,d)\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Dans l'approche BAS, la combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de a vers d. Nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(a,d)\}, \{\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{a,c,e\},\{b,d,e\}\}$. Donc $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}) = Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}')$. Ceci conclut la preuve.

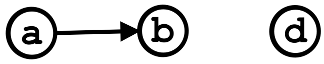
$\square$

Impact : les sémantiques de BAS pour les BAFs ne satisfont pas impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.6 est de montrer par un contre-exemple que si un support est ajouté vers un argument appartenant à une extension du BAF $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{E}$ ne sera plus une extension du BAF élargi.

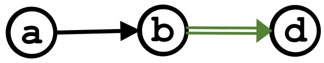
Proposition 4.6

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st\}$. Les sémantiques de BAS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *impact*.

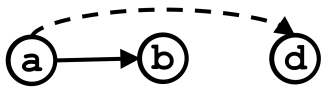
Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a,b,d\}, \{(a,b)\}, \{\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b)\}\rangle$. Donc pour $\sigma \in \{pr, st\}$, $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a, d\}\}$.
Ajoutons une relation de support de b ver d, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b)\}, \{(b, d)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}'$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison de l'attaque (a, b) et du support (b, d) entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de a vers d. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b), (a, d)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent, pour $\sigma \in \{pr, st\}$ $Ext^{BAF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{BAS,\sigma}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a\}\}$. Ceci conclut la preuve pour *impact*.

□

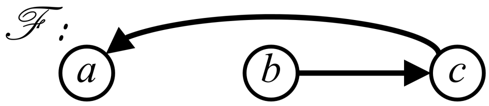
4.4.2 Étude comparative de DDS

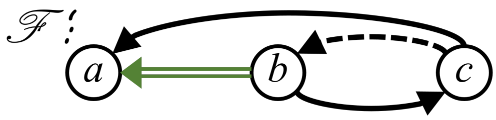
Monotonie : les sémantiques de DDS pour les BAFs ne satisfont pas la monotonie. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.7 est de montrer par un contre-exemple que si un argument reçoit un support en plus, son degré d'acceptabilité va diminuer. Ce qui prouve qu'il existe des cas de figure où le support joue un rôle dégradant.

Proposition 4.7

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de DDS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *monotonie*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c\}, \{(b, c), (c, a)\}, \{\}\rangle$ et $\sigma \in \{pr, st, co\}$, nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, b\}\}$. Comme il n'y a qu'une seule extension, nous avons $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(a) = Sc$.
Ajoutons une relation de support de b vers a nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, d\}, \{(b, c), (c, a)\}, \{(b, a)\}\rangle$. Dans ce cas de figure, pour l'approche DDS une attaque étendue (*mediated attack*) est ajoutée entre les arguments c et b. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{a, b\}, \{c\}\}$ et donc $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(a) = Cr$. La figure suivante illustre graphiquement les deux BAFs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$:





Dans ce contre-exemple, le degré d'argument a passe de Sc à Cr après avoir reçu un support, ce qui montre que le support a joué un rôle dégradant. Ceci conclut la preuve pour *monotonie*.

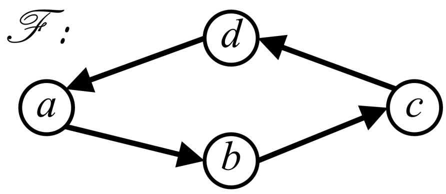
□

Non-trivialité : pour montrer que les sémantiques de DDS pour les BAFs satisfont la non-trivialité, il nous suffit de montrer par un exemple qu'il existe un BAF où le degré d'acceptabilité d'un argument s'améliore strictement après avoir reçu un support.

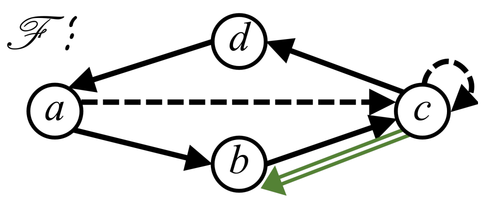
Proposition 4.8

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de DDS pour les BAFs sous la sémantique σ satisfont la *non-trivialité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}, \{\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$ nous obtenons $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, ce qui implique que $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(b) = Cr$. Ajoutons une relation de support de c vers b, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}, \{(c, b)\}\rangle$. Du fait du support (c, b), dans l'approche DDS une première attaque étendue (*mediated attack*) est ajoutée de a vers c et une autre (*supported attack*) de c vers c. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{b, d\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Par conséquent $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(b) = Sc$. La figure suivante illustre graphiquement $\mathcal{F}'$:



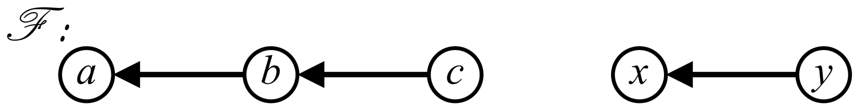
□

Dung compatibilité : l'intuition derrière la preuve de la proposition 4.9 est de montrer par un contre-exemple que $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) \nsubseteq Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$.

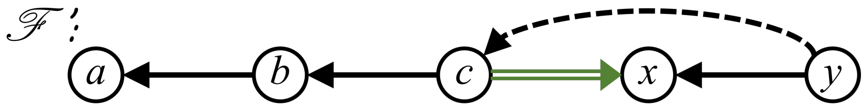
Proposition 4.9

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de DDS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *Dung compatibilité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Nous avons $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F}) = \{\{a, c, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Ajoutons une relation de support de c vers x, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{(c, x)\}\rangle$. Une attaque supplémentaire est alors ajoutée de y vers c. Nous obtenons alors $Ext_{DDS,\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}') = \{\{b, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Par conséquent $Ext_{DDS,\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}') \nsubseteq Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$. La figure suivante représente graphiquement $\mathcal{F}'$:



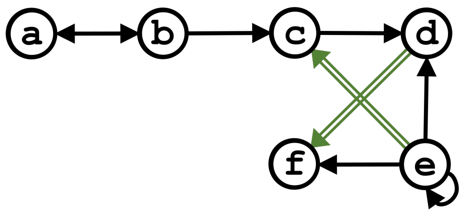
□

Irrelevance : les sémantiques de DDS pour les BAFs ne satisfont pas irrelevance. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.10 est de montrer par un contre-exemple que si un ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ n'est pas une extension du BAF $\mathcal{F}$, et si un support est ajouté à un argument n'appartenant pas à cet ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{E}$ deviendra une extension du BAF élargi.

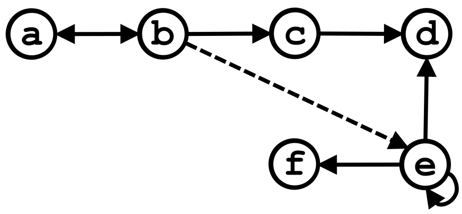
Proposition 4.10

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de DDS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *irrelevance*.

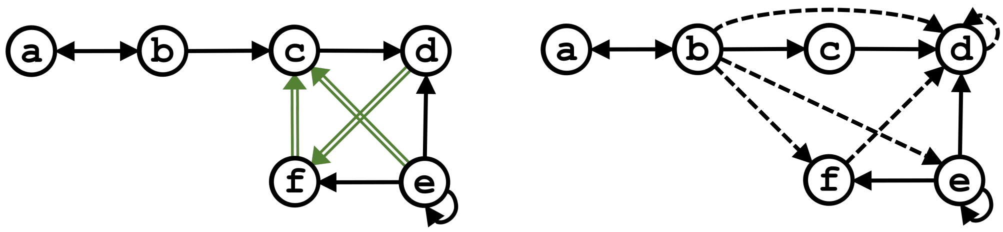
Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a,b,c,d,e,f\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(e,e),(e,d),(e,f)\}, \{(d,f),(e,c)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de b vers e. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle\{a,b,c,d,e,f\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(e,e),(e,d),(e,f),(b,e)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent, $Ext^{BAF}_{DDS,pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{DDS,pr}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a,c\},\{b,d,f\}\}$, $Ext^{BAF}_{DDS,st}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{DDS,st}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{b,d,f\}\}$ et $Ext^{BAF}_{DDS,co}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{DDS,co}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a,c\},\{b,d,f\},\varnothing\}$.
Ajoutons maintenant une relation de support de f vers c, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a,b,c,d,e,f\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(e,e),(e,d),(e,f)\}, \{(d,f),(e,c),(f,c)\}\rangle$.
La combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout de 5 attaques supplémentaires de b vers e, de b vers f, de b vers d, de f vers d et de d vers d. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle\{a,b,c,d,e,f\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(e,e),(e,d),(e,f),(b,e),(b,f),(b,d),(f,d),(d,d)\}\rangle$. La figure suivante représente $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'_{\triangleright AF}$:



Nous obtenons $Ext^{BAF}_{DDS,pr}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{DDS,pr}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a,c\},\{b\}\}$, $Ext^{BAF}_{DDS,st}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{DDS,st}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{b\}\}$ et $Ext^{BAF}_{DDS,co}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{DDS,co}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a,c\},\{b\},\varnothing\}$. Ceci conclut la preuve pour *irrelevance*.

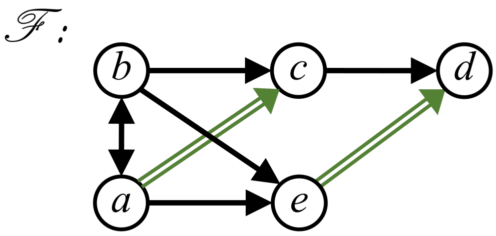
□

Strength impact : les sémantiques de DDS pour les BAFs ne satisfont pas strength impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.11 est de montrer par un contre-exemple que si deux extensions d'un BAF sont supportées par un argument chacune, celle qui reçoit le support de l'argument ayant le degré d'acceptabilité le plus élevé ne sera pas sélectionnée au dépend de l'autre extension.

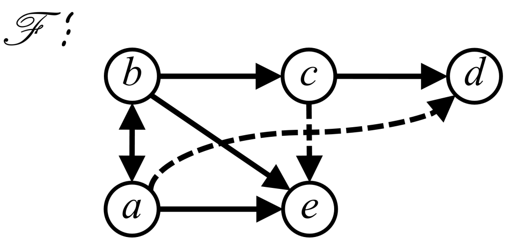
Proposition 4.11

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de DDS pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *strength impact*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F}^0 = \langle\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(a,e),(b,e)\}, \{\}\rangle$. Pour $\sigma \in \{pr, st\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$, et pour $\sigma = co$ nous obtenons $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\varnothing, \{a,c\},\{b,d\}\}$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(e) = Rj$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(a) = Cr$. Ajoutons deux relations de support de a vers c et de e vers d, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(a,e),(b,e)\}, \{(a,c),(e,d)\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Dans l'approche DDS, la combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout de deux attaques supplémentaires, la première de a vers d et la seconde de c vers e. Nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(a,e),(b,e),(a,d),(c,e)\}, \{\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$ et $Ext^{BAF}_{DDS,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\varnothing, \{a,c\},\{b,d\}\}$ pour $\sigma = co$. Ceci conclut la preuve.

$\square$

4.4.3 Étude comparative d'AFN

Monotonie : les sémantiques d'AFN pour les BAFs ne satisfont pas la monotonie. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.12 est de montrer par un contre-exemple que si un argument reçoit un support en plus, son degré d'acceptabilité va diminuer. Ce qui prouve qu'il existe des cas de figure où le support joue un rôle dégradant.

Proposition 4.12

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques d'AFN pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *monotonie*.

Preuve. Considérons le même contre-exemple que celui donné dans la preuve de la proposition 4.1, étant donné un BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c\}, \{(c, b)\}, \{\}\rangle$ et $\sigma \in \{pr, st, co\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c\}\}$. Comme il n'y a qu'une seule extension, alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(a) = Sc$. Ajoutons une relation de support de b vers a, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c\}, \{(c, b)\}, \{(b, a)\}\rangle$. Du fait du support (b, a), dans l'approche AFN une attaque étendue est ajoutée de l'argument c vers l'argument a. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{c\}\}$ et donc $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(a) = Rj$. La figure ci-dessous illustre graphiquement les deux BAFs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$:

Dans le BAF initial $\mathcal{F}$ le degré d'acceptabilité de l'argument a était Sc, après l'ajout du support (b, a) le degré d'acceptabilité de a est devenu Rj. Dans ce contre-exemple, le support reçu par a a joué un rôle dégradant pour a. Ceci conclut la preuve pour *monotonie*.

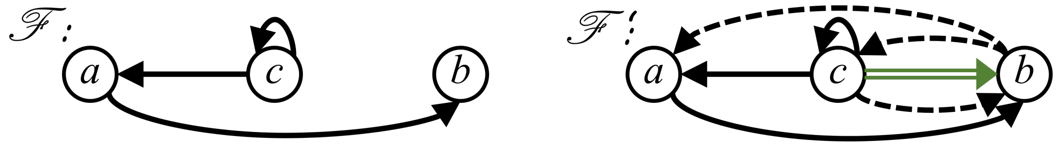
□

Non-trivialité : afin de prouver la satisfaction de la non-trivialité par les sémantiques d'AFN pour les BAFs, il nous suffit de montrer par un exemple qu'il existe un BAF où le degré d'acceptabilité d'un argument s'améliore strictement après avoir reçu un support.

Proposition 4.13

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques d'AFN pour les BAFs sous la sémantique σ satisfont la *non-trivialité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c\}, \{(c, c), (c, a), (a, b)\}, \{\} \rangle$.
Pour $\sigma \in \{pr, co\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{AFN,pr}(\mathcal{F}) = Ext^{BAF}_{AFN,co}(\mathcal{F}) = \{\varnothing\}$ et pour $\sigma = st$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{AFN,st}(\mathcal{F}) = \{\}$. Par conséquent, pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(b) = Rj$.
Considérons maintenant le BAF $\mathcal{F}' = \langle \{a, b, c\}, \{(c, c), (c, a), (a, b)\}, \{(c, b)\} \rangle$, tel que la seule différence avec $\mathcal{F}$ est la relation de support de c vers b. Dans l'approche AFN, du fait de la présence du support (c, b), une première attaque étendue est ajoutée de c vers b, une deuxième de b vers c et une troisième de b vers a. La figure suivante illustre graphiquement les deux BAFs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$:



Par conséquent, pour $\sigma \in \{pr, st\}$, $Ext^{BAF}_{AFN,pr}(\mathcal{F}') = Ext^{BAF}_{AFN,st}(\mathcal{F}') = \{\{b\}\}$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(b) = Sc$. Pour $\sigma = co$, $Ext^{BAF}_{AFN,co}(\mathcal{F}') = \{\{b\}, \varnothing\}$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(b) = Cr$.
Ceci conclut la preuve pour *non-trivialité*.

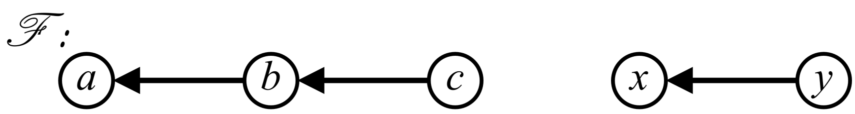
□

Dung compatibilité : l'intuition derrière la preuve de la proposition 4.14 est de montrer par un contre-exemple que $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}) \nsubseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$.

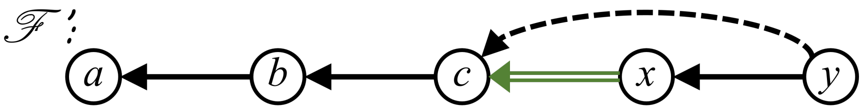
Proposition 4.14

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques d'AFN pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *Dung compatibilité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{\} \rangle$ représenté par la figure suivante :



Nous avons $Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Ajoutons une relation de support de x vers c, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle \{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{(x, c)\} \rangle$. Une attaque supplémentaire est alors ajoutée de y vers c. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{b, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Par conséquent $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}') \nsubseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$. La figure suivante représente graphiquement $\mathcal{F}'$:



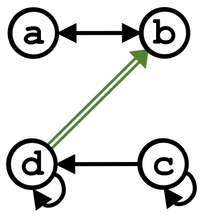
□

Irrelevance : les sémantiques d'AFN pour les BAFs ne satisfont pas irrelevance. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.15 est de montrer par un contre-exemple que si un ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ n'est pas une extension du BAF $\mathcal{F}$, et si un support est ajouté à un argument n'appartenant pas à cet ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{E}$ deviendra une extension du BAF élargi.

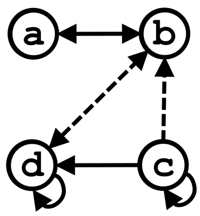
Proposition 4.15

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques d'AFN pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *irrelevance*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, d)\}, \{(d, b)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :

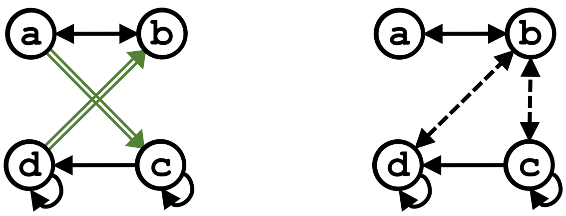


Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison des attaques et du support (d, b) entraîne l'ajout de 3 attaques supplémentaires de c vers b, de d vers b et de b vers d. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, a), (c, c), (c, d), (d, d), (b, c), (d, b), (b, d)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent, $Ext^{BAF}_{AFN,pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{AFN,pr}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a\}\}$, $Ext^{BAF}_{AFN,st}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{AFN,st}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\}$ et $Ext^{BAF}_{AFN,co}(\mathcal{F}) = \{\{a\}, \varnothing\}$.

Ajoutons maintenant une relation de support de a vers c, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a,b,c,d\},\{(a,b),(b,a),(c,c),(c,d),(d,d)\},\{(d,b),(a,c)\}\rangle$ La combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout de 4 attaques supplémentaires de c vers b, de d vers b et de b vers d et de b vers c. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle\{a,b,c,d\},\{(a,b),(b,a),(c,c),(c,d),(d,d),(b,c),(d,b),(b,d),(b,c)\}\rangle$. La figure suivante représente $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'_{\triangleright AF}$:



Nous obtenons $Ext^{BAF}_{AFN,pr}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{AFN,pr}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a\},\{b\}\}$, $Ext^{BAF}_{AFN,st}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{AFN,st}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{b\}\}$ et $Ext^{BAF}_{AFN,co}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{AFN,co}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a\},\{b\},\varnothing\}$. Ceci conclut la preuve pour *irrelevance*.

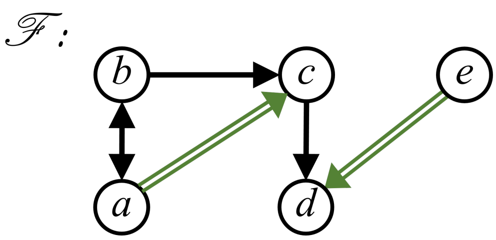
$\square$

Strength impact : les sémantiques d'AFN pour les BAFs ne satisfont pas strength impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.16 est de montrer par un contre-exemple que si deux extensions d'un BAF sont supportées par un argument chacune, celle qui reçoit le support de l'argument ayant le degré d'acceptabilité le plus élevé ne sera pas sélectionnée au dépend de l'autre extension.

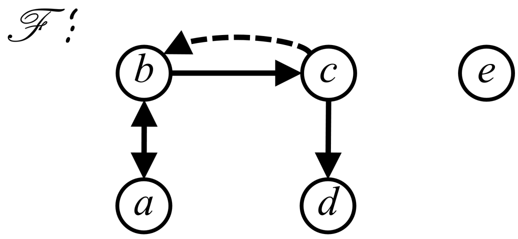
Proposition 4.16

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques d'AFN pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *strength impact*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F}^0 = \langle\{a,b,c,d,e\},\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\},\{\}\rangle$. Pour $\sigma \in \{pr, st\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\{a,c,e\},\{b,d,e\}\}$, et pour $\sigma = co$ nous obtenons $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\{e\},\{a,c,e\},\{b,d,e\}\}$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(e) = Sc$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(a) = Cr$. Ajoutons deux relations de support de a vers c et de e vers d, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a,b,c,d,e\},\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\},\{(a,c),(e,d)\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Dans l'approche AFN, la combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de c vers b. Nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (c, b)\}, \{\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{a, c, e\}, \{b, d, e\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$ et $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{e\}, \{a, c, e\}, \{b, d, e\}\}$ pour $\sigma = co$. Ceci conclut la preuve.

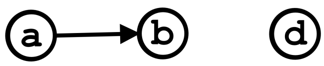
□

Impact : les sémantiques d'AFN pour les BAFs ne satisfont pas impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.17 est de montrer par un contre-exemple que si un support est ajouté vers un argument appartenant à une extension du BAF $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{E}$ ne sera plus une extension du BAF élargi.

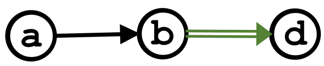
Proposition 4.17

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques d'AFN pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *impact*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b)\}, \{\}\rangle$, représenté par la figure suivante :

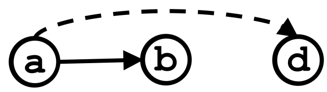


Nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b)\}\rangle$. Donc pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$, $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a, d\}\}$.
Ajoutons une relation de support de b ver d, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b)\}, \{(b, d)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}'$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison de l'attaque (a, b) et du support (b, d) entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de a

vers d. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, d\}, \{(a, b), (a, d)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent, pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$ $Ext^{BAF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{AFN,\sigma}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a\}\}$. Ceci conclut la preuve pour *impact*.

$\square$

4.4.4 Étude comparative de BUAF

Monotonie : les sémantiques de BUAF pour les BAFs ne satisfont pas la monotonie. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.18 est de montrer par un contre-exemple que si un argument reçoit un support en plus, son degré d'acceptabilité va diminuer. Ce qui prouve qu'il existe des cas de figure où le support joue un rôle dégradant.

Proposition 4.18

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de BUAF pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *monotonie*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c\}, \{(b, c), (c, a)\}, \{\}\rangle$ et $\sigma \in \{pr, st, co\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, b\}\}$. Comme il n'y a qu'une seule extension, alors $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(a) = Sc$. Ajoutons une relation de support de b vers a, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, d\}, \{(b, c), (c, a)\}, \{(b, a)\}\rangle$. Du fait de la présence du support (b, a), dans l'approche BUAF une attaque étendue (*implicit attack*) est ajoutée entre les arguments c et b. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{BUAF,pr}(\mathcal{F}') = Ext^{BAF}_{BUAF,st}(\mathcal{F}') = \{\{a, b\}, \{c\}\}$ et $Ext^{BAF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}') = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}\}$. Donc pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$ nous avons $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(a) = Cr$. La figure suivante illustre graphiquement les deux BAFs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$:

Dans ce contre-exemple, le degré d'argument a passe de Sc à Cr après avoir reçu un support, ce qui montre que le support a joué un rôle dégradant. Ceci conclut la preuve pour *monotonie*.

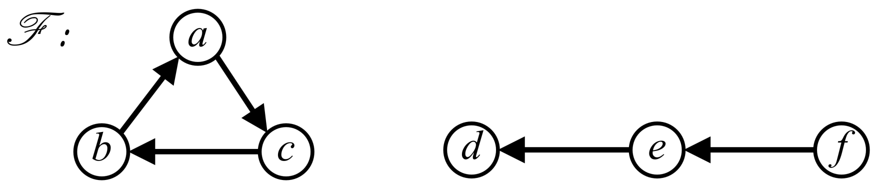
$\square$

Non-trivialité : afin de prouver la satisfaction de la non-trivialité par les sémantiques de BUAF pour les BAFs, il nous suffit de montrer par un exemple qu'il existe un BAF où le degré d'acceptabilité d'un argument s'améliore strictement après avoir reçu un support.

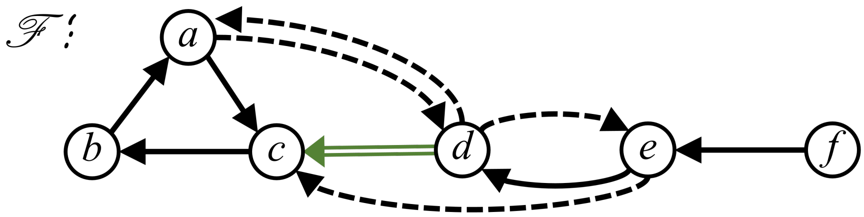
Proposition 4.19

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de BUAF pour les BAFs sous la sémantique σ satisfont la *non-trivialité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, d, e, f\}, \{(a, b), (b, c), (c, a), (f, e), (e, d)\}, \{\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Nous obtenons $Ext^{BAF}_{BUAF,pr}(\mathcal{F}) = Ext^{BAF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}) = \{\{d, f\}\}$ et $Ext^{BAF}_{BUAF,st}(\mathcal{F}) = \{\}$. Ce qui implique que pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(c) = Rj$. Ajoutons une relation de support de d vers c, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, d, e, f\}, \{(a, b), (b, c), (c, a), (f, e), (e, d)\}, \{(d, c)\}\rangle$. Dans l'approche BUAF, du fait du support (d, c) des attaques étendues sont ajoutées de e vers c, de d vers e, de a vers d et de d vers a. Par conséquent, $Ext^{BAF}_{BUAF,pr}(\mathcal{F}') = Ext^{BAF}_{BUAF,st}(\mathcal{F}') = \{\{c, d, f\}\}$ et $Ext^{BAF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}') = \{\{c, d, f\}, \{f\}\}$.
Donc pour $\sigma \in \{pr, st\}$ $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(c) = Sc$ et pour $\sigma = co$, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(c) = Cr$. La figure ci-dessous illustre graphiquement $\mathcal{F}'$:



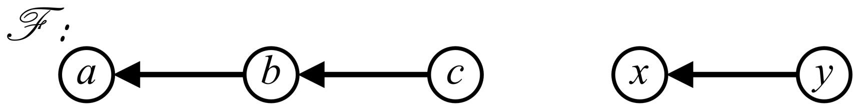
□

Dung compatibilité : l'intuition derrière la preuve de la proposition 4.20 est de montrer par un contre-exemple que $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}) \nsubseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$.

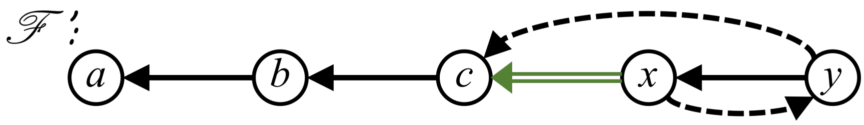
Proposition 4.20

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de BUAF pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas la *Dung compatibilité*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Nous avons $Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{a, c, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Ajoutons une relation de support de x vers c, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, x, y\}, \{(b, a), (c, b), (y, x)\}, \{(x, c)\}\rangle$. Deux attaques supplémentaires sont alors ajoutées de y vers c et de x vers y. Nous obtenons alors $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{a, c, x\}, \{b, y\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$, et nous obtenons $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\varnothing, \{a, c, x\}, \{b, y\}\}$ pour $\sigma = co$. Par conséquent $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') \not\subseteq Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$. La figure suivante illustre graphiquement $\mathcal{F}'$:



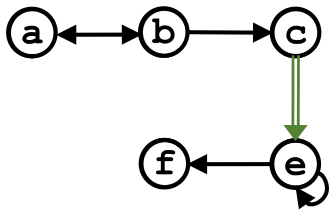
$\square$

Irrelevance : les sémantiques de BUAF pour les BAFs ne satisfont pas irrelevance. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.21 est de montrer par un contre-exemple que si un ensemble d'arguments $\mathcal{E}$ n'est pas une extension du BAF $\mathcal{F}$, et si un support est ajouté à un argument n'appartenant pas à cet ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{E}$ deviendra une extension du BAF élargi.

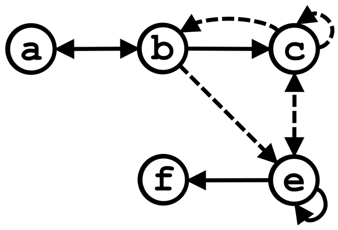
Proposition 4.21

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de BUAF pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *irrelevance*.

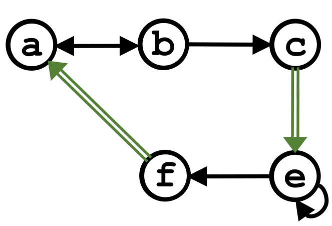
Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, e, f\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (e, e), (e, f)\}, \{(c, e)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :

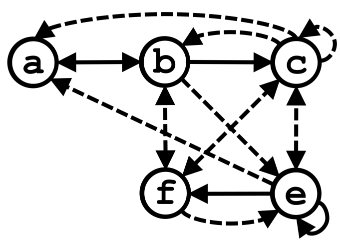


Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison des attaques et du support (c, e) entraîne l'ajout de 5 attaques supplémentaires de b vers e, de c vers b, de c vers c, de c vers e et de e vers c. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, c, e, f\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (e, e), (e, f), (b, e), (c, b), (c, c), (c, e), (e, c)\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent, $Ext^{BAF}_{BUAF,pr}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BUAF,pr}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a\}, \{b, f\}\}$, $Ext^{BAF}_{BUAF,st}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BUAF,st}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{b, f\}\}$ et $Ext^{BAF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a\}, \{b, f\}, \varnothing\}$.
Ajoutons maintenant une relation de support de f vers a, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, e, f\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (e, e), (e, f)\}, \{(c, e), (f, a)\}\rangle$ La combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout de 7 nouvelles attaques supplémentaires, en plus de celles ajoutées précédemment, de b vers f, de c vers a, de c vers f, de e vers a, de f vers b, de f vers c et de f vers e. Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle\{a, b, c, e, f\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (e, e), (e, f), (b, e), (c, b), (c, c), (c, e), (e, c), (b, f), (c, a), (c, f), (e, a), (f, b), (f, c), (f, e)\}\rangle$.
La figure suivante représente $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'_{\triangleright AF}$:





Nous obtenons pour $\sigma \in \{pr, st\}$, $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a, f\}, \{b\}\}$ et $Ext^{BAF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{BUAF,co}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a, f\}, \{b\}, \varnothing\}$. Ceci conclut la preuve pour *irrelevance*.

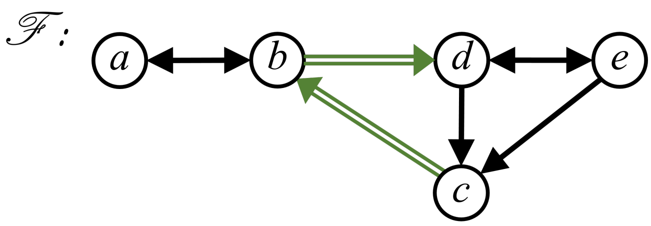
□

Strength impact : les sémantiques de BUAF pour les BAFs ne satisfont pas strength impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.22 est de montrer par un contre-exemple que si deux extensions d'un BAF sont supportées par un argument chacune, celle qui reçoit le support de l'argument ayant le degré d'acceptabilité le plus élevé ne sera pas sélectionnée au dépend de l'autre extension.

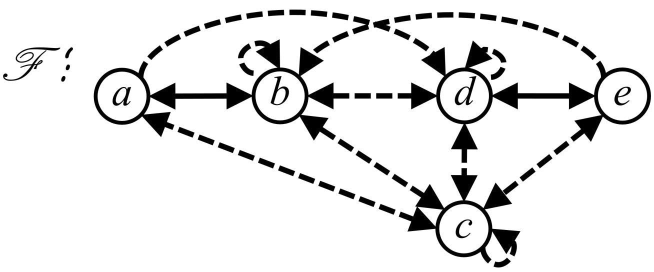
Proposition 4.22

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de BUAF pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *strength impact*.

Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F}^0 = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (d, e), (e, d), (d, c), (e, c)\}, \{\}\rangle$. Pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, e\}\}$, et pour $\sigma = co$ nous obtenons $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}^0) = \{\varnothing, \{e, b\}, \{e, a\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{e\}\}$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(b) = Cr$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}^0}(c) = Rj$. Ajoutons deux relations de support de b vers d et de c vers b, nous obtenons alors le BAF $\mathcal{F} = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (d, e), (e, d), (d, c), (e, c)\}, \{(b, d), (c, b)\}\rangle$ représenté par la figure suivante :



Dans l'approche BUAF, la combinaison des attaques et des supports entraîne l'ajout de 13 attaques supplémentaires, ce qui nous donne le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, a), (d, e), (e, d), (d, c), (e, c), (a, d), (e, b), (b, b), (d, d), (b, d), (d, b), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, d), (c, e), (c, c), \}, \{\}\rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\{a, e\}\}$ pour $\sigma \in \{pr, st\}$ et $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = \{\varnothing, \{a, e\}\}$ pour $\sigma = co$. Ceci conclut la preuve.

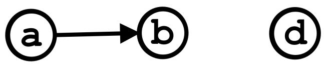
□

Impact : les sémantiques de BUAF pour les BAFs ne satisfont pas impact. L'intuition derrière la preuve de la proposition 4.23 est de montrer par un contre-exemple que si un support est ajouté vers un argument appartenant à une extension du BAF $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{E}$ ne sera plus une extension du BAF élargi.

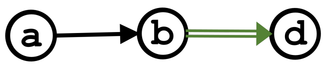
Proposition 4.23

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Les sémantiques de BUAF pour les BAFs sous la sémantique σ ne satisfont pas *impact*.

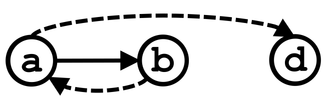
Preuve. Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b)\}, \{\} \rangle$, représenté par la figure suivante :



Nous obtenons l'AF associé $\mathcal{F}_{\triangleright AF} = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b)\} \rangle$. Donc pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$, $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}) = Ext^{AF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}_{\triangleright AF}) = \{\{a, d\}\}\}$.
Ajoutons une relation de support de b ver d, nous obtenons le BAF $\mathcal{F}' = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b)\}, \{(b, d)\} \rangle$, représenté par la figure suivante :



Afin de calculer les extensions de $\mathcal{F}'$, nous appliquons le processus de flattening. La combinaison de l'attaque (a, b) et du support (b, d) entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de a vers d, et la combinaison de l'attaque (a, d) et du support (b, d) entraîne l'ajout d'une attaque supplémentaire de b vers a Nous obtenons alors l'AF associé $\mathcal{F}'_{\triangleright AF} = \langle \{a, b, d\}, \{(a, b), (b, a), (a, d)\} \rangle$, représenté par la figure suivante :



Par conséquent, pour $\sigma \in \{pr, st\}$, $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\{a\}, \{b, d\}\}$, et pour $\sigma = co$, $Ext^{BAF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}') = Ext^{AF}_{BUAF,\sigma}(\mathcal{F}'_{\triangleright AF}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b, d\}\}$. Ceci conclut la preuve pour *impact*.

$\square$

Nous résumons tous les résultats obtenus dans cette section dans le table 4.1, où le symbole $\times$ signifie que la propriété n'est pas satisfaite, le symbole ✓ signifie que la propriété est satisfaite et aucun symbole signifie que nous ne savons pas si la propriété est satisfaite ou non.

Propriétés \ Sémantiques	**BAS**		**DDS**			**AFN**			**EAF**			**BUAF**		
	pr	***st***	***pr***	***st***	***co***	***pr***	***st***	***co***	***pr***	***st***	***co***	***pr***	***st***	***co***
Monotonie	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Non-trivialité	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Dung compatibilité	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Irrelevance	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Impact	×	×				×	×	×	×	×	×	×	×	×
Strength impact	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

TABLE 4.1 – Satisfaction des axiomes par les sémantiques étudiées.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit la notion de *support monotone*. Nous avons défini deux axiomes pour décrire formellement cette nouvelle interprétation, à savoir la *monotonie* et la *non-trivialité*. Ces deux axiomes définissent selon nous une base minimale pour qu'une relation soit considérée comme une relation de support monotone. Nous avons aussi introduit des propriétés additionnelles souvent désirables pour un concept de support. En dernière partie du chapitre, nous avons proposé une étude comparative des systèmes d'argumentation bipolaire, sur la base des propriétés introduites.

Dans le chapitre suivant, nous introduisons la famille des sémantiques *Support Score-Based (SSB)* qui vérifient les axiomes de la monotonie et de la non-trivialité.

Chapitre 5

La famille des sémantiques « Support Score-Based »

Sommaire

Alors que les sémantiques pour les AFs nous permettent de définir des extensions en considérant les attaques entre les arguments, les sémantiques pour les BAF qui prennent en compte la relation de support ne font pas l'unanimité sur une même définition de la notion de support. Ceci laisse le problème ouvert : *comment définir des sémantiques pour les BAF qui permettent de définir des extensions en prenant en compte ces deux relations ?*

Dans ce chapitre nous introduisons notre première contribution, la famille des sémantiques *Support Score-Based (SSB)* qui vérifient les axiomes de la monotonie et de la non-trivialité. Nous proposons ensuite des propriétés et nous prouvons un théorème de représentation reliant les axiomes qu'une sémantique SSB satisfait aux propriétés des fonctions d'agrégation utilisées pour la définir. Nous terminons ce chapitre par des exemples illustratifs des sémantiques SSB.

5.1 Les sémantiques « Support Score-Based (SSB) »

Dans cette section, nous présentons les sémantiques *Support Score-Based (SSB)* qui se basent sur le score des supports pour définir les extensions . Il s'agit d'une nouvelle famille de sémantiques pour les BAFs vérifiant les axiomes de la *monotonie* et de la *non-trivialité*.

L'idée principale de ces sémantiques est de séparer la prise en compte des attaques et des supports lors de la définition des extensions pour un BAF $\langle A, R, S\rangle$: dans un premier temps, seulement les attaques sont considérées (sans prendre en compte les relations de support), ce qui permet de calculer d'une façon classique l'ensemble des extensions données par le AF $\langle A, R\rangle$ correspondant au BAF initial. Ensuite, les relations de support sont prises en compte, ce qui permet d'affiner l'ensemble d'extensions obtenus et ainsi de pouvoir sélectionner la/les meilleure(s) extensions supportées.

Cette séparation entre la prise en compte des attaques et des supports, permet aussi de garantir un résultat *Dung compatible*, puisque l'ensemble des extensions résultat (les extensions du BAF) est une sélection des extensions originales (les extensions du AF correspondant).

Afin de définir l'ensemble des extensions d'un BAF, les sémantiques SSB utilisent des fonctions d'agrégation. Nous commençons par introduire quelques définitions basiques :

Définition 5.1 (Multi-mapping)

Une fonction *multi-mapping* est une famille d'applications de $\mathbb{N}^n$ vers $\mathbb{N}$, $\forall n > 0$.

Une fonction d'agrégation est alors définie comme suit :

Définition 5.2 (Agrégation)

Une fonction d'*agrégation* $\otimes$ est une fonction multi-mapping telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

- si $x_i \leq x'_i$, alors $\otimes(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leq \otimes(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n)$ (non-décroissance)
- $\otimes(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si, et seulement si, $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (minimalité)
- $\otimes(0, x_1, \ldots, x_n) = \otimes(x_1, \ldots, x_n)$ (élément neutre)
- $\otimes(x) = x$ (identité)

Des propriétés supplémentaires peuvent également être envisagées :

Définition 5.3

Soit $\otimes$ une fonction multi-mapping telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

- pour toute permutation π, $\otimes(x_1, \ldots, x_n) = \otimes(\pi(x_1, \ldots, x_n))$ (symétrie)
- $\otimes(x_1, \ldots, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) > \otimes(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1} + 1, \ldots, x_n)$ (priorité)
- si $\otimes(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \geq \otimes(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ alors $\otimes(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) \geq \otimes(y_1, \ldots, y_i + 1, \ldots, y_n)$ (co-monotonie)

Les sémantiques tirent parti des fonctions d'agrégation pour déterminer dans quelle mesure chaque extension de l'AF correspondant au BAF initial est supportée. Bien que de nombreuses fonctions d'agrégation puissent être exploitées, des fonctions d'agrégation standard sont considérées dans ce qui suit. De ce fait, nous nous intéressons dans cette section aux fonctions d'agrégation Σ (somme) et (plus généralement) $w\Sigma$ (somme pondérée), ainsi que lex (leximax).

lex associe à chaque vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{N}^n$ une valeur *lex*$((x_1, \ldots, x_n))$ de telle sorte que pour toute paire de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$, nous avons *lex*$((x_1, \ldots, x_n)) \leq$

lex$((x'_1, \ldots, x'_n))$ si, et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est inférieur ou égal à $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en ce qui concerne l'ordre lexicographique. En supposant (sans perte de généralité) que les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{N}^n$ sont tels que $max_{i \in \{1,\ldots,n\}} x_i < q$ avec $q \in \mathbb{N}$ est un nombre entier fixé, *lex*$((x_1, \ldots, x_n))$ peut être défini comme *lex*$((x_1, \ldots, x_n)) = \Sigma_{i=1}^{n} q^{n-i} \times x_i$. Ainsi, *lex* peut être considéré comme un agrégateur de somme pondérée spécifique associé au vecteur de poids $(q^{n-1}, \ldots, 1)$.

Il est à noter que d'autres fonctions spécifiques telles que , *max*, *min*, *leximin* pourraient également être utilisées pour définir d'autres sémantiques qui se basent sur le score des supports.

Dans ce qui suit, nous définissons les sémantiques SSB. Pour un BAF $\mathcal{F}$ et une sémantique σ pour les AF, le principe des sémantiques SSB est de prendre en compte le nombre de supports reçus par chaque extension de l'ensemble $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, de calculer une valeur de score pour chaque extension afin de sélectionner la ou les meilleures extensions. Ces sémantiques se basent sur deux fonctions d'agrégation ($\oplus$ et $\odot$) et leur calcul suit un processus en trois étapes :

– Étape 1 : dans la première étape, une *valeur de support reçu* est attribuée à chaque argument $\mathtt{a} \in A$ pour chaque degré d'acceptabilité dans $\{Sc, Cr, Rj\}$.

Définition 5.4 (Valeur de support reçue)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et $\sigma \in \{pr, st, co\}$. Pour chaque degré i dans $\{Sc, Cr, Rj\}$, la *valeur de support reçue* pour un argument $\mathtt{a} \in A$ est définie comme suit :

$$\mathtt{SUPP}_i^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = |\ \{(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in S \mid Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(\mathtt{b}) = i\}\ |$$

– Étape 2 : dans un deuxième temps, une *valeur de score* est calculée pour chaque extension $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$. Pour ce faire, une première fonction multi-mapping $\oplus$ évalue le niveau de support d'une extension pour chaque degré d'acceptabilité $\{Sc, Cr, Rj\}$ et une seconde fonction multi-mapping $\odot$ évalue le niveau de support global de l'extension.

Définition 5.5 (Valeur de score)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF, $\sigma \in \{pr, st, co\}$, $\odot$ et $\oplus$ des fonctions multi-mapping. La *valeur de score* de $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$ est définie comme suit :

$$\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(\oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}_{Sc}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}_{Cr}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}_{Rj}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})))$$

– Étape 3 : enfin, dans une troisième étape, l'ensemble des extensions sélectionnées par la sémantique SSB est calculé, il représente le sous-ensemble des extensions ayant un niveau de support global maximal.

Définition 5.6 (Extensions pour la sémantique SSB)

Soit $\mathcal{F}$ un BAF, $\sigma \in \{pr, st, co\}$, $\odot$ et $\oplus$ des fonctions multi-mapping.
La sémantique *Support Score-Based* $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ définit l'ensemble des extensions sélectionnées comme suit :

$$Ext^{BAF}_{\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E} \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}) \mid \forall \mathcal{E}' \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}), \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') \leq \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})\}$$

où $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$ est la *valeur de score* de $\mathcal{E} \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$.

Détaillons les conditions supplémentaires sur les fonctions multi-mapping $\odot$ et $\oplus$, et leur impact sur la sélection réalisée par la sémantique $\mathtt{SSB}$ correspondante. Imposer la condition de symétrie à $\oplus$ est un moyen de se conformer à une notion de neutralité (cela signifie qu'aucun argument dans une extension n'est considéré comme plus important que tout autre argument de l'extension), tandis que la condition de priorité sur $\odot$ garantit que le support provenant d'un argument est d'autant plus important que le degré d'acceptabilité de cet argument est élevé.

5.2 Propriétés des sémantiques $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma,\odot}$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas où $\oplus = \Sigma$ (évidemment dans ce cas la condition de symétrie est satisfaite) et nous étudions les liens entre les propriétés satisfaites par $\odot$ et les propriétés satisfaites par la sémantique Support Score-Based induite par $\oplus$ et $\odot$. Nous considérons les sémantiques usuelles pour les AF et supposons que $\odot$ est une application unique d'arité 3, étant donné qu'il n'y a que trois degrés d'acceptation. Les connexions entre les propriétés satisfaites par $\odot$ et les postulats satisfaits par $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ sont précisées par les propositions ci-dessous.

Proposition 5.1

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ satisfait *Dung compatibilité*.

Preuve. *Dung compatibilité* découle directement de la définition 5.6

□

Avant de présenter le reste des propositions, nous commençons par introduire un résultat intermédiaire. Le lemme suivant, garanti pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$ l'existence d'un BAF pour lequel il existe deux extensions sélectionnées $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et tel que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c)$.

Lemme 5.1

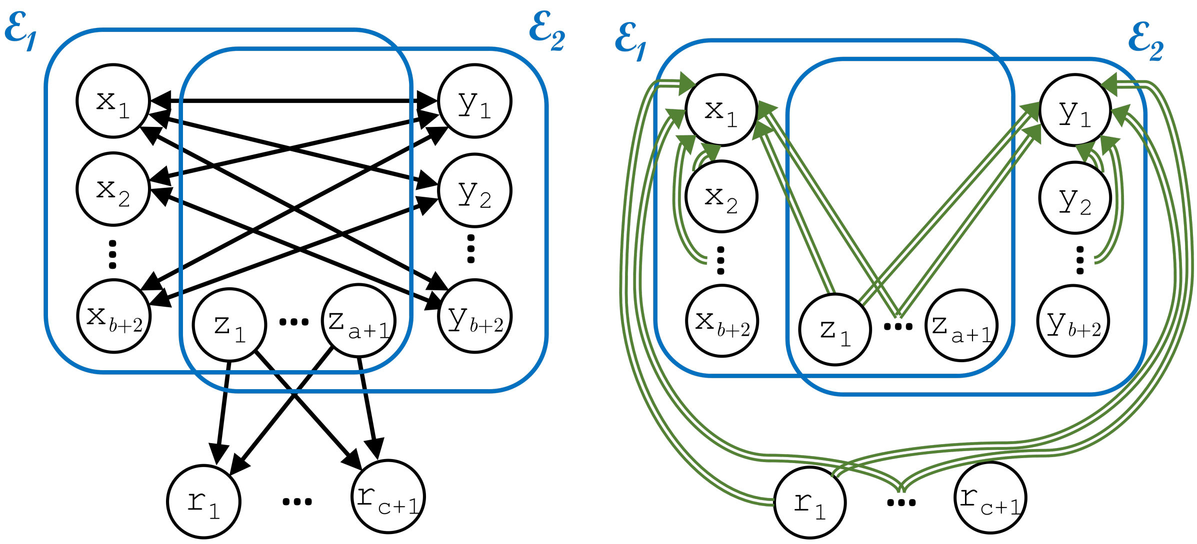
Soit $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ une sémantique *Support Score-Based*, avec $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*.
Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$ tel que $a + b + c > 0$, il existe un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que :

— $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$
— $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$,
— $|\{\mathtt{x} \in A \mid Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(\mathtt{x}) = Sc\}| = a + 1$,
— $|\{\mathtt{x} \in A \mid Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(\mathtt{x}) = Cr\}| = 2b + 4$,
— $|\{\mathtt{x} \in A \mid Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(\mathtt{x}) = Rj\}| = c + 1$, et
— $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c)$

où $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}$ est la fonction de score pour la sémantique $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ et $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ reçoivent a supports d'arguments de degré Sc, b supports d'arguments de degré Cr et c supports d'arguments de degré Rj.

Preuve. Soit le BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ défini comme suit :
$A = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}\} \cup \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{b+2}\} \cup \{\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_{b+2}\} \cup \{\mathtt{r}_1, \ldots, \mathtt{r}_{c+1}\}$,
$R = \{(\mathtt{x}_i, \mathtt{y}_j), (\mathtt{y}_j, \mathtt{x}_i) \mid 1 \leq i \leq b+2, 1 \leq j \leq b+2\} \cup \{(\mathtt{z}_i, \mathtt{r}_j) \mid 1 \leq i \leq a+1, 1 \leq j \leq c+1\}$,
$S = \{(\mathtt{z}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{z}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i < a+1\} \cup \{(\mathtt{x}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{y}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 < i < b+2\} \cup \{(\mathtt{r}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{r}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i < c+1\}$.

Pour plus de clarté, $\mathcal{F}$ est représenté graphiquement à l'aide de deux graphes : la figure 5.1(a) illustre les attaques et la figure 5.1(b) illustre les supports.



(a) Le graphe d'attaques de $\mathcal{F}$

(b) Le graphe de supports de $\mathcal{F}$

FIGURE 5.1 – Le BAF $\mathcal{F}$

Par construction, $\mathcal{F}_{\downarrow AF}$ (l'AF obtenu de la restriction de $\mathcal{F}$ à $\langle A, R\rangle$) a deux extensions préférées, qui sont aussi des extensions stables : $Ext_{pr}^{AF}(\mathcal{F}) = Ext_{st}^{AF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ tel que $\mathcal{E}_1 = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}, \mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{b+2}\}$, et $\mathcal{E}_2 = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}, \mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_{b+2}\}$. En plus de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_{\downarrow AF}$ a une troisième extension complète $\mathcal{E}_3 = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}\}$.

Nous obtenons pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$:

— pour chaque $i \in \{1, \ldots, a+1\}$, $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{z}_i) = Sc$,

— pour chaque $i \in \{1, \ldots, b+2\}$, $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{x}_i) = Cr$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{y}_i) = Cr$, et

— pour chaque $i \in \{1, \ldots, c+1\}$, $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(\mathtt{r}_i) = Rj$.

D'après cette construction, chacun des arguments $\mathtt{x}_1$ et $\mathtt{y}_1$ est supporté par a arguments avec un degré d'acceptabilité Sc, b arguments avec un degré d'acceptabilité Cr et c arguments avec un degré d'acceptabilité Rj. Par conséquent $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ reçoivent le même nombre de supports, à savoir, a (resp. b, c) supports d'arguments Sc (resp. Cr, Rj), tandis que $\mathcal{E}_3$ ne reçoit aucun support.

Nous obtenons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c)$ et $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_3) = \odot(0, 0, 0)$. Sachant que $\odot$ satisfait *minimalité*, nous avons $\odot(0, 0, 0) = 0$ et puisque $a + b + c > 0$ nous avons $\odot(a, b, c) > 0$. Par conséquent, $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_3)$. Ce qui implique que $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, ceci conclut la preuve.

□

La proposition suivante définit la relation entre l'axiome de la *monotonie* et la propriété des fonctions d'agrégation *non-décroissance*.

Proposition 5.2

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. Si $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ satisfait *monotonie* alors $\odot$ satisfait *non-décroissance*.

Preuve. Par le lemme 5.1 nous pouvons construire un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $a + b + c > 0$, sachant que a est le nombre des supports reçus d'arguments Sc, b est le nombre des supports reçus d'arguments Cr et c est le nombre des supports reçus d'arguments Rj pour chacune des extensions $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

Rappelons que : $A = \{z_1, \ldots, z_{a+1}\} \cup \{x_1, \ldots, x_{b+2}\} \cup \{y_1, \ldots, y_{b+2}\} \cup \{r_1, \ldots, r_{c+1}\}$, $R = \{(x_i, y_j), (y_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq b+2, 1 \leq j \leq b+2\} \cup \{(z_i, r_j) \mid 1 \leq i \leq a+1, 1 \leq j \leq c+1\}$, $S = \{(z_i, x_1), (z_i, y_1) \mid 1 \leq i \leq a\} \cup \{(x_i, x_1), (y_i, y_1) \mid 1 < i \leq b+1\} \cup \{(r_i, x_1), (r_i, y_1) \mid 1 \leq i \leq c\}$.
$\mathcal{E}_1 = \{z_1, \ldots, z_{a+1}, x_1, \ldots, x_{b+2}\}$ et $\mathcal{E}_2 = \{z_1, \ldots, z_{a+1}, y_1, \ldots, y_{b+2}\}$.

Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x_1)\}$, $y \in A$. D'après *monotonie* nous savons que $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(x_1) \leq Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x_1)$.
Nous avons donc trois cas de figure :
– Cas 1 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Sc$.
Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a+1, b, c)$ et d'autre part

nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a+1,b,c) \geq \odot(a,b,c)$.
– Cas 2 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Cr$.
Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b+1,c)$ et d'autre part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a,b+1,c) \geq \odot(a,b,c)$.
– Cas 3 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Rj$.
Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b,c+1)$ et d'autre part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a,b,c+1) \geq \odot(a,b,c)$.

□

La proposition suivante définit la relation entre l'axiome *impact* et la propriété des fonctions d'agrégation *co-monotonie*.

Proposition 5.3

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ satisfait *impact* alors $\odot$ satisfait *co-monotonie*.

Preuve. Nous avons trois cas de figure en considérant les degrés d'acception $\{Sc, Cr, Rj\}$:
– Cas 1 : *cas d'un support d'un argument* Sc
Nous voulons prouver que si $\odot(a,b,c) \geq \odot(a',b',c')$ alors $\odot(a+1,b,c) \geq \odot(a'+1,b',c')$, $\forall a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{N}$.
Par l'absurde, supposons que $\odot(a,b,c) \geq \odot(a',b',c')$ et $\odot(a+1,b,c) < \odot(a'+1,b',c')$.
• Sous-cas 1.1 : $\odot(a,b,c) = \odot(a',b',c')$
Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A,R,S\rangle$ tel que $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b,c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a',b',c')$ avec $a',b',c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$, nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a,b,c) = \odot(a',b',c')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A',R,S\rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, $\{\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2'\} \subseteq Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A',R,S'\rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y,x)\}$, $y \in A$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Sc$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}_1' \cap \mathcal{E}_2'$, nous obtenons $\{\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2'\} \subseteq Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}'')$. Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$. Et donc $\odot(a+1,b,c) = \odot(a'+1,b',c')$. Contradiction.
• Sous-cas 1.2 : $\odot(a,b,c) > \odot(a',b',c')$
Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A,R,S\rangle$ tel que $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}_1 \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b,c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a',b',c')$ avec $a',b',c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre

de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $\mathcal{E}_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a, b, c) > \odot(a', b', c')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A', R, S \rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, $\mathcal{E}'_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$ et $\mathcal{E}'_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A', R, S' \rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Sc$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}'_1$, nous obtenons $\mathcal{E}'_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}'')$.
Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2)$. Et donc $\odot(a+1, b, c) \geq \odot(a'+1, b', c')$. Contradiction.
– Cas 2 : *cas d'un support d'un argument Cr*
Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c) \geq \odot(a', b', c')$ alors $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a', b'+1, c')$, $\forall a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{N}$.
Par l'absurde, supposons que $\odot(a, b, c) \geq \odot(a', b', c')$ et $\odot(a, b+1, c) < \odot(a', b'+1, c')$.
• Sous-cas 2.1 : $\odot(a, b, c) = \odot(a', b', c')$
Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a', b', c')$ avec $a', b', c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a, b, c) = \odot(a', b', c')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A', R, S \rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, $\{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\} \subseteq Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A', R, S' \rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Cr$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}'_1 \cap \mathcal{E}'_2$, nous obtenons $\{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\} \subseteq Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}'')$. Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2)$. Et donc $\odot(a, b+1, c) = \odot(a', b'+1, c')$. Contradiction.
• Sous-cas 2.2 : $\odot(a, b, c) > \odot(a', b', c')$
Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a', b', c')$ avec $a', b', c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $\mathcal{E}_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a, b, c) > \odot(a', b', c')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A', R, S \rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, $\mathcal{E}'_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$ et $\mathcal{E}'_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A', R, S' \rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Cr$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}'_1$, nous obtenons $\mathcal{E}'_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}'')$.
Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2)$. Et donc $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a', b'+1, c')$. Contradiction.

– Cas 3 : *cas d'un support d'un argument* Rj
Nous voulons prouver que si $\odot(a,b,c) \geq \odot(a',b',c')$ alors $\odot(a,b,c+1) \geq \odot(a',b',c'+1)$, $\forall a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{N}$.
Par l'absurde, supposons que $\odot(a,b,c) \geq \odot(a',b',c')$ et $\odot(a,b,c+1) < \odot(a',b',c'+1)$.
• Sous-cas 3.1 : $\odot(a,b,c) = \odot(a',b',c')$
Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A,R,S\rangle$ tel que $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b,c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a',b',c')$ avec $a',b',c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\}$, nous avons $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a,b,c) = \odot(a',b',c')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A',R,S\rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, $\{\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2'\} \subseteq Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A',R,S'\rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y,x)\}$, $y \in A$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Rj$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}_1' \cap \mathcal{E}_2'$, nous obtenons $\{\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2'\} \subseteq Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}'')$. Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$. Et donc $\odot(a,b,c+1) = \odot(a',b',c'+1)$. Contradiction.
• Sous-cas 3.2 : $\odot(a,b,c) > \odot(a',b',c')$
Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A,R,S\rangle$ tel que $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b,c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a',b',c')$ avec $a',b',c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $\mathcal{E}_1 \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) > \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a,b,c) > \odot(a',b',c')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A',R,S\rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Ainsi, $\mathcal{E}_1' \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$ et $\mathcal{E}_2' \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A',R,S'\rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y,x)\}$, $y \in A$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Rj$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}_1'$, nous obtenons $\mathcal{E}_1' \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}'')$.
Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$. Et donc $\odot(a,b,c+1) \geq \odot(a',b',c'+1)$. Contradiction.
□

La proposition suivante définit la relation entre les propriétés des fonctions d'agrégation *non-décroissance* et *co-monotonie* et et l'axiome *impact*.

Proposition 5.4

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ satisfait *impact*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$, $\mathcal{E}^o \in Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$.
D'après la définition 5.5 nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o)$ avec $a^o, b^o, c^o \in \mathbb{N}$.
Puisque $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S' \rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$, $x \in \mathcal{E}$.

Nous avons trois cas de figure en considérant les degrés d'acception $\{Sc, Cr, Rj\}$:

– Cas 1 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(y) = Sc$
• Sous-cas 1.1 : $x \in \mathcal{E}^o$
D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a^o + 1, b^o, c^o) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a^o + 1, b^o, c^o)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
• Sous-cas 1.2 : $x \notin \mathcal{E}^o$
D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– Cas 2 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(y) = Cr$
• Sous-cas 2.1 : $x \in \mathcal{E}^o$
D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a^o, b^o + 1, c^o) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b + 1, c) \geq \odot(a^o, b^o + 1, c^o)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a, b + 1, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
• Sous-cas 2.2 : $x \notin \mathcal{E}^o$
D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a, b + 1, c) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a, b + 1, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– Cas 3 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(y) = Rj$
• Sous-cas 3.1 : $x \in \mathcal{E}^o$
D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a^o, b^o, c^o + 1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c + 1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o + 1)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c + 1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
• Sous-cas 3.2 : $x \notin \mathcal{E}^o$
D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a, b, c + 1) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c + 1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.

□

La proposition suivante définit la relation entre l'axiome de la *strength impact* et la propriété des fonctions d'agrégation *priorité*.

Proposition 5.5

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. Si $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ satisfait *strength impact* alors $\odot$ satisfait *priorité*.

Preuve. Par le lemme 5.1 nous pouvons construire un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $a + b + c > 0$, sachant que a est le nombre des supports d'arguments Sc, b est le nombre des supports d'arguments Cr et c est le nombre des supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).

Rappelons que : $A = \{z_1, \ldots, z_{a+1}\} \cup \{x_1, \ldots, x_{b+2}\} \cup \{y_1, \ldots, y_{b+2}\} \cup \{r_1, \ldots, r_{c+1}\}$, $R = \{(x_i, y_j), (y_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq b{+}2, 1 \leq j \leq b{+}2\} \cup \{(z_i, r_j) \mid 1 \leq i \leq a{+}1, 1 \leq j \leq c{+}1\}$, $S = \{(z_i, x_1), (z_i, y_1) \mid 1 \leq i \leq a\} \cup \{(x_i, x_1), (y_i, y_1) \mid 1 < i \leq b + 1\} \cup \{(r_i, x_1), (r_i, y_1) \mid 1 \leq i \leq c\}$.
$\mathcal{E}_1 = \{z_1, \ldots, z_{a+1}, x_1, \ldots, x_{b+2}\}$ et $\mathcal{E}_2 = \{z_1, \ldots, z_{a+1}, y_1, \ldots, y_{b+2}\}$.

Soit $\mathcal{F}' = \langle A', R', S'\rangle$ tel que :
$A' = A \cup \{t_1, t_2, t_3\}$
$R' = R \cup \{(t_2, x_i), (x_i, t_2) \mid 1 \leq i \leq b + 2\} \cup \{(t_1, t_3)\}$
Par cette construction, nous obtenons : $Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}') = \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\}$ tel que $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 \cup \{t_1\}$ et $\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_2 \cup \{t_1, t_2\}$. Ce qui implique que $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(t_1) = Sc$, $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(t_2) = Cr$ et $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(t_3) = Rj$.

Nous avons trois cas de figure :

– Cas 1 : $S' = S \cup \{(t_1, x_1), (t_2, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2)$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \odot(a + 1, b, c)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2) = \odot(a, b + 1, c)$. Donc $\odot(a + 1, b, c) > \odot(a, b + 1, c)$.

– Cas 2 : $S' = S \cup \{(t_1, x_1), (t_3, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2)$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \odot(a + 1, b, c)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2) = \odot(a, b, c + 1)$. Donc $\odot(a + 1, b, c) > \odot(a, b, c + 1)$.

– Cas 3 : $S' = S \cup \{(t_2, x_1), (t_3, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2)$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_1) = \odot(a, b + 1, c)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'_2) = \odot(a, b, c + 1)$. Donc $\odot(a, b + 1, c) > \odot(a, b, c + 1)$.

Ainsi, $\odot$ satisfait *priorité*.

□

La proposition suivante définit la relation entre la propriétés des fonctions d'agrégation *non-décroissance* et l'axiome *monotonie*.

Proposition 5.6

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma\odot}$ satisfait *monotonie*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ et $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$.
Pour tout $\mathcal{E}^o \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, d'après la définition 5.5 nous avons : $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o)$ et $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c)$, avec $a^o, b^o, c^o, a, b, c \in \mathbb{N}$, sachant que a^o (respectivement a) est le nombre de supports d'arguments Sc, b^o (respectivement b) est le nombre de supports d'arguments Cr et c^o (respectivement c) est le nombre de supports d'arguments Rj reçu par $\mathcal{E}^o$ (respectivement $\mathcal{E}$).
Pour tout $x \in \mathcal{E}$, nous avons deux cas de figure selon le degré d'acceptabilité de x :
– Cas 1 : $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(x) = Cr$:
Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S' \rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $(y, x) \notin S$.
Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}^o) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o)$.

Nous avons trois sous-cas selon le degré d'acceptabilité de y :

• **Sous-cas 1.1 :** $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(y) = Sc$.
Notons que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a+1, b, c)$. Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a+1, b, c) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité : $\odot(a+1, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$. (1.1)
Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$, soit (ii) $\mathcal{E} \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c') > \odot(a+1, b, c)$ avec $\odot(a', b', c') = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$. D'après (1.1) cela implique que $\odot(a', b', c') > \odot(a^o, b^o, c^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 1.2 :** $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(y) = Cr$.
Notons que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b+1, c)$. Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$. (1.2)
Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$, soit (ii) $\mathcal{E} \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c') > \odot(a, b+1, c)$ avec $\odot(a', b', c') = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$. D'après (1.2) cela implique que $\odot(a', b', c') > \odot(a^o, b^o, c^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 1.3 :** $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(y) = Rj$.
Notons que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c+1)$. Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c+1) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c+1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o)$. (1.3)
Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$, soit (ii) $\mathcal{E} \notin Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c') > \odot(a, b, c+1)$ avec $\odot(a', b', c') = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$. D'après (1.3) cela implique que $\odot(a', b', c') > \odot(a^o, b^o, c^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg_{\sigma,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$.

– Cas 2 : $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(x) = Sc$:
Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S' \rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $(y, x) \notin S$.
Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o)$.
Nous avons trois sous-cas selon le degré d'acceptabilité de y :

- **Sous-cas 2.1 :** $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(y) = Sc$.

Notons que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a + 1, b, c)$. Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) > \odot(a^o, b^o, c^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité : $\odot(a + 1, b, c) > \odot(a^o, b^o, c^o)$. (2.1)
Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$, d'après (2.1) cela implique que $\odot(a', b', c') = \odot(a + 1, b, c)$ tel que $\odot(a', b', c') = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}')$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

- **Sous-cas 2.2 :** $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(y) = Cr$.

Notons que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b + 1, c)$. Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) > \odot(a^o, b^o, c^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b + 1, c) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b + 1, c) > \odot(a^o, b^o, c^o)$. (2.2)
Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$, d'après (2.2) cela implique que $\odot(a', b', c') = \odot(a, b + 1, c)$ tel que $\odot(a', b', c') = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}')$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

- **Sous-cas 2.3 :** $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(y) = Rj$.

Notons que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c + 1)$. Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c) > \odot(a^o, b^o, c^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c + 1) \geq \odot(a, b, c)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c + 1) > \odot(a^o, b^o, c^o)$. (2.3)
Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$, d'après (2.3) cela implique que $\odot(a', b', c') = \odot(a, b, c + 1)$ tel que $\odot(a', b', c') = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}')$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

□

La proposition suivante définit la relation entre les propriétés des fonctions d'agrégation *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie* et l'axiome *strength impact*.

Proposition 5.7

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\texttt{SSB}^{\Sigma\odot}_{\sigma}$ satisfait *strength impact*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que : $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, $\sigma \in \{pr, st, co\}$.
D'après la définition 5.5 nous avons $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c')$, $a', b', c' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments Rj reçu par $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{E}'$).

Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S' \rangle$ tel que :
– $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ et $x' \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$,
– $y, y' \in A$,

– $\{(y, x), (y', x')\} \notin S$,
– $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y) > Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y')$ et
– $S' = S \cup \{(y, x), (y', x')\}$.

Nous avons trois cas de figure possibles pour les degrés d'acceptabilité de y et y' :

– Cas 1 : $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y) = Sc$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y') = Cr$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments Sc, b'' supports d'arguments Cr et c'' supports d'arguments Rj, alors, $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'')$. Donc $\odot(a, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Nous avons alors deux sous-cas :

– *Sous-cas 1.1 :* $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a'' + 1, b'', c'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'' + 1, b'', c'') \geq \odot(a'', b'', c'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

– *Sous-cas 1.2 :* $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a, b, c)$. Sachant que $\odot(a, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Par transitivité, nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Donc à partir des sous-cas 1.1 et sous-cas 1.2 nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c) = \odot(a'+1, b', c')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a'+1, b', c') > \odot(a', b'+1, c')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a+1, b, c) > \odot(a', b'+1, c')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

– Cas 2 : $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y) = Sc$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y') = Rj$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments Sc, b'' supports d'arguments Cr et c'' supports d'arguments Rj, alors, $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'')$. Donc $\odot(a, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Nous avons alors deux sous-cas :

– *Sous-cas 2.1 :* $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a'' + 1, b'', c'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'' + 1, b'', c'') \geq \odot(a'', b'', c'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

– *Sous-cas 2.2 :* $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a, b, c)$. Sachant que $\odot(a, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Par transitivité, nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Donc à partir des sous-cas 2.1 et sous-cas 2.2 nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c) = \odot(a'+1, b', c')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a' + 1, b', c') > \odot(a', b' + 1, c')$ et $\odot(a', b' + 1, c') > \odot(a', b', c' + 1)$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a + 1, b, c) > \odot(a', b', c' + 1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

– Cas 3 : $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y) = Cr$ et $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(y') = Rj$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}')$.

Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments Sc, b'' supports d'arguments Cr et c'' supports d'arguments Rj, alors, $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'')$. Donc $\odot(a, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.

Nous avons alors deux sous-cas :

– *Sous-cas 3.1 :* $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a'', b''+1, c'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'', b''+1, c'') \geq \odot(a'', b'', c'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.
– *Sous-cas 3.2 :* $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a, b, c)$. Sachant que $\odot(a, b, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.
Par transitivité, nous obtenons $\odot(a, b+1, c) \geq \odot(a'', b'', c'')$.
Donc à partir des sous-cas 3.1 et sous-cas 3.2 nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.
D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b+1, c) = \odot(a', b'+1, c')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a', b'+1, c') > \odot(a', b', c'+1)$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a, b+1, c) > \odot(a', b', c'+1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F}')$.

$\square$

La proposition suivante définit la relation entre la propriétés des fonctions d'agrégation *non-décroissance* et l'axiome *irrelevance*.

Proposition 5.8

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\mathtt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ satisfait *irrelevance*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $\mathcal{E} \in Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E} \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $x \notin \mathcal{E}$, $y \in A$ et $(y, x) \notin S$.

Étant donné que $\mathcal{E} \notin Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$, nous pouvons déduire que $\exists \mathcal{E}' \in Ext_\sigma^{BAF}(\mathcal{F})$ tel que :

$$\mathtt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) \tag{1}$$

D'après la définition 5.5 nous avons : $\mathtt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c')$ avec $a', b', c' \in \mathbb{N}$, sachant que a' est le nombre de supports d'arguments Sc, b' est le nombre de supports d'arguments Cr et c' est le nombre de supports d'arguments Rj reçus par $\mathcal{E}'$.

Nous voulons prouver que : $\exists \mathcal{E}' \in Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}')$ tel que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$.
D'après la définition 5.5 et étant donné que $Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}) = Ext_\sigma^{AF}(\mathcal{F}')$ nous avons :

$$\mathtt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) \tag{2}$$

Nous avons alors deux cas :
– Cas 1 : $x \in \mathcal{E}'$. Considérons chaque degré d'acceptabilité de $\{Sc, Cr, Rj\}$:
– Si $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Sc$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a'+1, b', c')$.
– Si $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Cr$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b'+1, c')$.
– Si $Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{BAF}(y) = Rj$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c'+1)$.
Sachant que $\odot$ satisfait *non-décroissance*, nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') \geq \mathtt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$. Étant donné (1) et (2), nous pouvons déduire par transitivité que : $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$.
– Cas 2 : $x \notin \mathcal{E}'$. Alors, $\mathtt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$.
Étant donné (1) et (2), nous pouvons déduire par transitivité que : $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$.

$\square$

La proposition suivante définit la relation des propriétés des fonctions d'agrégation *minimalité* et *non-décroissance* avec l'axiome de *non-trivialité*.

Proposition 5.9

Soit σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *minimalité* alors $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ satisfait *non-trivialité*.

Preuve. Soit le BAF $\mathcal{F} = \langle\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, x)\}, \{\}\rangle$. Soit $\mathcal{E} = \{x, z\}$, $\mathcal{E}' = \{y, z\}$ et $\mathcal{E}'' = \{z\}$.
Pour $\sigma \in \{pr, st\}$ nous avons $Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}_\sigma^{\oplus\odot}}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}, \mathcal{E}'\}$, par conséquent $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(x) = Cr$.
Pour $\sigma = co$ nous avons $Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}_\sigma^{\oplus\odot}}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''\}$, par conséquent $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}}(x) = Cr$.

Soit le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, x)\}, \{(z, x)\}\rangle$. D'après la définition 5.5 nous avons : $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c')$, $a', b', c' \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_\mathcal{F}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'')$, $a'', b'', c'' \in \mathbb{N}$, tel que a (respectivement a' et a'') est le nombre de supports d'arguments Sc, b (respectivement b' et b'') est le nombre de supports d'arguments Cr et c (respectivement c' et c'') est le nombre de supports d'arguments Rj, reçus par $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$).

Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(1, 0, 0)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(0, 0, 0)$.
Sachant que $\odot$ satisfait *minimalité*, nous avons $\odot(0, 0, 0) = 0$ et $\odot(1, 0, 0) > 0$.
Par conséquent, $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'')$.
Donc pour $\sigma \in \{pr, st, co\}$ nous obtenons $Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}_\sigma^{\oplus\odot}}(\mathcal{F}') = \mathcal{E} = \{\{x, z\}\}$. D'où, $Deg^{BAF}_{\sigma,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

$\square$

À partir des propositions précédentes, nous concluons le théorème suivant, qui est l'un des principaux résultats de notre travail :

Théorème 5.1

Soit $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ une sémantique *support score-based* avec σ une sémantique pour les AFs telle que $\sigma \in \{pr, st, co\}$ et soit $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ satisfait *monotonie*, *strength impact* , *impact* et *irrelevance* si, et seulement si, $\odot$ satisfait *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie*.

Preuve.
($\Rightarrow$)
À partir de la proposition 5.2 nous savons que si $\texttt{SSB}_\sigma^{\oplus\odot}$ satisfait *monotonie* alors $\odot$ satisfait *non-décroissance*.
À partir de la proposition 5.5 nous savons que si $\texttt{SSB}_\sigma^{\oplus\odot}$ satisfait *strength impact* alors $\odot$ satisfait *priorité*.

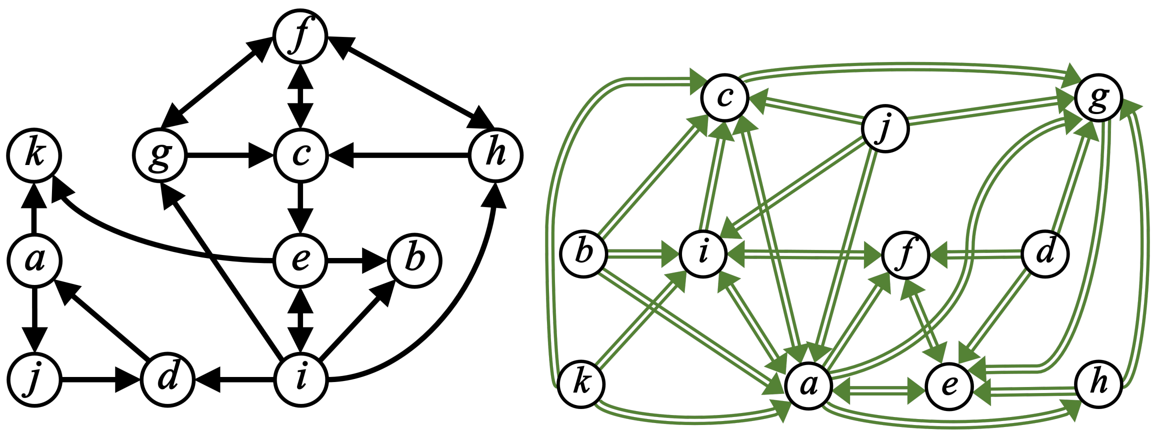
À partir de la proposition 5.3 nous savons que si $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ satisfait *impact* alors $\odot$ satisfait *co-monotonie*.

($\Leftarrow$)
À partir de la proposition 5.6 nous savons que si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ satisfait *monotonie*.
À partir de la proposition 5.7 nous savons que si $\odot$ satisfait *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ satisfait *strength impact*.
À partir de la proposition 5.4 nous savons que si $\odot$ satisfait *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ satisfait *impact*.
À partir de la proposition 5.8 nous savons que si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ satisfait *irrelevance*.

□

5.3 Exemple illustratif des sémantiques $\texttt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma,\odot}$

Dans cette section, un exemple de BAF est fourni afin d'illustrer le comportement des sémantiques SSB, selon les fonctions d'agrégation utilisées. Ce comportement est caractérisé par les extensions qui sont sélectionnées.



(a) Le graphe d'attaques de $\mathcal{F}$ (b) Le graphe de supports de $\mathcal{F}$

Considérons le BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ représenté sur les deux figures ci-dessus. Par souci de clarté, $\mathcal{F}$ est représenté graphiquement à l'aide de deux graphes : le premier (a) donne les attaques et le second (b) donne les supports.

Selon la sémantique préférée pour les AFs $\sigma = pr$, nous obtenons les extensions suivantes :

$$Ext_{pr}^{AF}(\mathcal{F}) = \{\{a, c, i\}, \{e, g, h\}, \{e, f\}, \{a, f, i\}\}.$$

Les colonnes des tableaux suivants correspondent aux quatre extensions de $Ext_{pref}^{AF}(\mathcal{F})$. Pour chaque $\oplus \in \{\Sigma, max, min\}$ les valeurs des vecteurs $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Sc}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Cr}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)),$

$\oplus_{x \in \mathcal{E}}(\texttt{SUPP}^{\sigma,\mathcal{F}}_{Rj}(x)))$ sont fournies. La table 5.1 présente la valeur de $\texttt{SCORE}^{\oplus lex}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ et la table 5.2 présente la valeur de $\texttt{SCORE}^{\oplus w\Sigma}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ avec $w_{Sc} = 4$, $w_{Cr} = 2$ et $w_{Rj} = 1$.

	$\{a,c,i\}$	$\{e,g,h\}$	$\{e,f\}$	$\{a,f,i\}$
$\oplus = \Sigma$	$(0,7,9)$	$(0,8,3)$	$(0,7,2)$	$(0,8,7)$
$\texttt{SCORE}^{\Sigma,lex}_{\mathcal{F}}$	863	979	856	**983**
$\oplus = max$	$(0,3,3)$	$(0,4,2)$	$(0,4,1)$	$(0,3,3)$
$\texttt{SCORE}^{max,lex}_{\mathcal{F}}$	369	**490**	489	369
$\oplus = min$	$(0,2,3)$	$(0,1,0)$	$(0,3,1)$	$(0,2,1)$
$\texttt{SCORE}^{min,lex}_{\mathcal{F}}$	247	122	**367**	245

TABLE 5.1 – $\texttt{SSB}^{\oplus lex}_{\sigma}$ with $\oplus \in \{\Sigma, max, min\}$

	$\{a,c,i\}$	$\{e,g,h\}$	$\{e,f\}$	$\{a,f,i\}$
$\oplus = \Sigma$	$(0,7,9)$	$(0,8,3)$	$(0,7,2)$	$(0,8,7)$
$\texttt{SCORE}^{\Sigma,w\Sigma}_{\mathcal{F}}$	**23**	19	16	**23**
$\oplus = max$	$(0,3,3)$	$(0,4,2)$	$(0,4,1)$	$(0,3,3)$
$\texttt{SCORE}^{max,w\Sigma}_{\mathcal{F}}$	9	**10**	9	9
$\oplus = min$	$(0,2,3)$	$(0,1,0)$	$(0,3,1)$	$(0,2,1)$
$\texttt{SCORE}^{min,w\Sigma}_{\mathcal{F}}$	**7**	2	**7**	5

TABLE 5.2 – $\texttt{SSB}^{\oplus w\Sigma}_{\sigma}$ avec $\oplus \in \{\Sigma, max, min\}$

Étant donné que le nombre de supports reçus par un argument ne peut excéder $|A|$ et une extension ne peut contenir plus que $|A|$ arguments, le nombre total de supports reçus par une extension (dans le cas de Σ) ne peut excéder $|A|^2$. Par conséquent, nous définissons la valeur de q à $11^2 + 1 = 122$ pour définir lex (voir Section 5.1).

Les extensions sélectionnées sont :
$Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}^{\Sigma,lex}_{pref}}(\mathcal{F}) = \{\{a,f,i\}\}$,
$Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}^{max,lex}_{pref}}(\mathcal{F}) = \{\{e,g,h\}\}$,
$Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}^{min,lex}_{pref}}(\mathcal{F}) = \{\{e,f\}\}$,
$Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}^{\Sigma,w\Sigma}_{pref}}(\mathcal{F}) = \{\{a,c,i\},\{a,f,i\}\}$,
$Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}^{max,w\Sigma}_{pref}}(\mathcal{F}) = \{\{e,g,h\}\}$,
$Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}^{min,w\Sigma}_{pref}}(\mathcal{F}) = \{\{a,c,i\},\{e,f\}\}$.

Cet exemple illustre la différence de comportements entre les différents opérateurs : dans le cas général, ils sélectionnent différentes extensions.

Chapitre 6

La famille des sémantiques « Labelling Support Score-Based »

Sommaire

Dans ce chapitre nous introduisons notre deuxième contribution, la famille des sémantiques *Labelling Support Score-Based (LSSB)*, une nouvelle famille de sémantiques pour les BAF à base de labellings. Nous commençons dans la première section par définir les labellings dans le cadre bipolaire, ensuite dans la deuxième section nous nous intéressons aux possibilités de raffinement qu'offrent les labellings. Dans le reste du chapitre, nous définissons la famille des sémantiques LSSB et présentons des propriétés caractéristiques de cette famille de sémantiques. Enfin, nous terminons par des exemples illustratifs.

6.1 Les labellings dans le cadre bipolaire

Afin d'utiliser les labellings pour les BAFs, rappelons les définitions de base, qui formalisent la notion des labellings.

La définition d'un labelling (définition 2.24) est définie dans le cadre bipolaire comme suit :

Définition 6.1 (Labelling pour les BAFs)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et $\mathbb{L}$ un ensemble de labels. L est un labelling de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $L : A \to \mathbb{L}$ est une application de A dans $\mathbb{L}$.

La littérature scientifique présente une multitude de choix pour l'ensemble de labels $\mathbb{L}$. Nous pouvons citer des exemples d'ensembles de labels tels que $\{+, -\}$, $\{+, -, \pm\}$ et $\{+, -, \pm, \varnothing\}$ utilisés par [JAKOBOVITS & VERMEIR 1999], ou $\{in, out\}$, $\{on, off\}$, $\{in, out, undec\}$ et $\{in, out, undec, off\}$ utilisés par [BARONI *et al.* 2016, BARONI & GIACOMIN 2009, BARONI *et al.* 2011], ou $\{yes, fal, unk, ni\}$ utilisés par [RIVERET *et al.* 2018].

L'un des choix communs pour l'ensemble de labels est $\mathbb{L} = \{in, out, undec\}$. Le label in indique que l'argument est explicitement accepté, le label out indique que l'argument est explicitement rejeté, et le label $undec$ indique que le statut de l'argument est indécis, ce qui signifie que l'on s'abstient de juger si l'argument est accepté ou rejeté.

De la même façon que pour les AF, la notion de reinstatement labelling permet de s'assurer de la prise en compte de la relation d'attaque : un argument a un label *in* s'il est non attaqué ou si tous ses attaquants directs sont étiquetés *out* ; un argument a un label *out* si au moins un de ses attaquants directs est étiqueté *in* ; un label *undec* dans les autres cas.

Le concept d'un reinstatement labelling (définition 2.25) est défini dans le cadre bipolaire comme suit :

Définition 6.2 (Reinstatement labelling pour les BAFs)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF. Un labelling L est un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, :

— $\forall \mathtt{a} \in A, L(\mathtt{a}) = in$ si, et seulement si, $\forall \mathtt{b} \in A$ si $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$ alors $L(\mathtt{b}) = out$;

— $\forall \mathtt{a} \in A, L(\mathtt{a}) = out$ si, et seulement si, $\exists \mathtt{b} \in A$ tel que $(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in R$ et $L(\mathtt{b}) = in$;

— $\forall \mathtt{a} \in A, L(\mathtt{a}) = undec$ si, et seulement si, $L(\mathtt{a}) \neq in$ et $L(\mathtt{a}) \neq out$.

Un reinstatement labelling peut être utilisé pour partitionner l'ensemble des arguments de la façon suivante :

Définition 6.3

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF et L un reinstatement labelling de $\mathcal{F}$. Nous définissons :

— $in(L) = \{\mathtt{a} \in A \mid L(\mathtt{a}) = in\}$;

— $out(L) = \{\mathtt{a} \in A \mid L(\mathtt{a}) = out\}$;

— $undec(L) = \{\mathtt{a} \in A \mid L(\mathtt{a}) = undec\}$.

Rappelons la proposition 2.3 de [CAMINADA 2006a] :

Proposition 6.1

Un reinstatement labelling L d'un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ est :
- un labelling complet de $\mathcal{F}$;
- un labelling préféré de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $in(L)$ est maximal ;
- un labelling de base de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $in(L)$ est minimal ;
- un labelling stable de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $undec(L) = \varnothing$.

Notation 6.1

Pour chaque sémantique σ, $Labs_{\sigma}^{BAF}(\mathcal{F})$ désigne l'ensemble des labellings associés au BAF $\mathcal{F}$ par rapport à σ.

6.2 Raffinement par les labellings

Les approches classiques à base d'extensions permettent de juger de l'acceptabilité des arguments selon 3 niveaux. Cependant, cette classification reste grossière et ne permet pas de différencier par exemple entre un argument non attaqué (son degré d'acceptation est Sc) et un argument défendu par d'autres arguments (son degré d'acceptation est Sc aussi).

Une première contribution permettant de raffiner les statuts des arguments a été introduite par [WU *et al.* 2010]. Les auteurs ont défini la notion de *statut de justification* pour la sémantique complète, ce qui permet une distinction plus fine entre les arguments.

Définition 6.4 (Statut de justification d'un argument)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R\rangle$ un AF et $\mathtt{a} \in A$. Le statut de justification de $\mathtt{a}$ est donné par la fonction $JS^{\mathcal{F}} : A \to 2^{\{in,out,undec\}}$ tel que $JS^{\mathcal{F}}(\mathtt{a}) = \{\mathcal{L}(\mathtt{a}) \mid \mathcal{L} \in Labs_{co}^{AF}(\mathcal{F})\}$.

Concrètement, le statut de justification d'un argument définit l'ensemble des labels qui peuvent être attribuées à un argument par rapport à la sémantique complète.

Par exemple, si un argument a un label in ou $undec$ dans tous les labellings complets, alors le statut de justification de cet argument est $\{in, undec\}$.

De cette façon, nous obtenons 6 statuts possibles qu'un argument peut avoir : $\{in\}$, $\{out\}$, $\{undec\}$, $\{in, undec\}$, $\{out, undec\}$, $\{in, out, undec\}$. Les statuts de justification peuvent être ordonnés comme suit : $\{in\} > \{in, undec\} > \{in, out, undec\} \simeq \{undec\} > \{out, undec\} > \{out\}$. Selon cette classification, nous pouvons dire qu'un argument est plus acceptable qu'un autre s'il a un meilleur statut.

La figure 6.1 illustre la hiérarchie des statuts de justification.

La notion de statut de justification, initialement définie pour la sémantique complète, a été étendue dans le cadre des AF par [BONZON *et al.* 2018] pour l'ensemble des sémantiques de

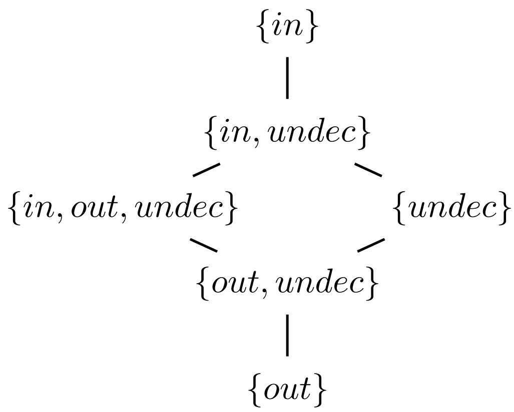


FIGURE 6.1 – La hiérarchie des statuts de justification

Dung $\sigma \in \{co, st, pr, gr\}$. Dans ce qui suit, nous présentons une définition de la notion de statut de justification, adaptée au cadre bipolaire :

Définition 6.5 (Statut de justification étendu)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ un BAF, $\sigma \in \{co, st, pr, gr\}$ et $\mathtt{a} \in A$. Le statut de justification de a est donné par $JS^{\mathcal{F}}_{\sigma}(\mathtt{a}) = \{\mathcal{L}(\mathtt{a}) \mid \mathcal{L} \in Labs^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})\}$.

En plus des 6 statuts $\{in\}$, $\{out\}$, $\{undec\}$, $\{in, undec\}$, $\{out, undec\}$ et $\{in, out, undec\}$, le statut $\{in, out\}$ doit être pris en compte, ce statut n'apparaissait pas pour la sémantique complète, mais peut être obtenu, par exemple avec la sémantique préférée.

Le statut $\{in, out\}$ peut être considéré équivalent au statut $\{in, out, undec\}$, par conséquent, les statuts de justification peuvent être ordonnés comme suit : $\{in\} > \{in, undec\} > \{in, out, undec\} \simeq \{in, out\} \simeq \{undec\} > \{out, undec\} > \{out\}$.

La figure 6.2 illustre la hiérarchie des statuts de justification étendus.

Notation 6.2

Nous ferons référence au statut de justification : $\{in\}$ par `I`, $\{in, undec\}$ par `IU`, $\{in, out, undec\}$ par `IOU`, $\{in, out\}$ par `IO`, $\{undec\}$ par `U`, $\{out, undec\}$ par `OU` et $\{out\}$ par `O`.

6.3 Les sémantiques « Labelling Support Score-Based (LSSB) »

Dans cette section, nous présentons la famille des sémantiques *Labelling Support Score-Based : LSSB*, qui est une famille de sémantiques pour les BAFs qui capturent la notion du

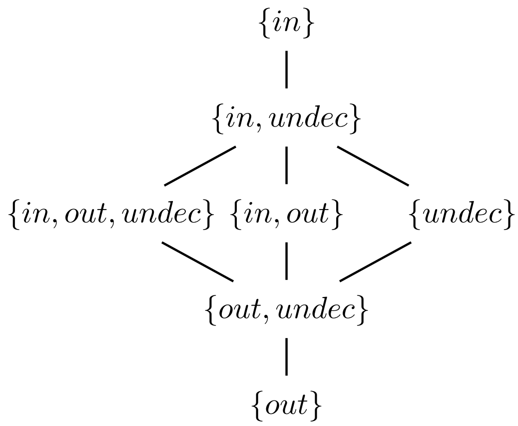


FIGURE 6.2 – La hiérarchie des statuts de justification étendus

support monotone, D'un façon formelle, les sémantiques LSSB vérifient les axiomes de la *monotonie* et de *non-trivialité*.

L'idée principale de ces sémantiques est de donner un résultat plus fin qu'avec les sémantiques SSB. Une caractéristique importante des sémantiques LSSB est qu'elles tirent parti des statuts de justification définis par les labellings pour considérer plus de classes d'arguments. En effet, en considérant les statuts de justifications cela nous permet d'avoir une différenciation plus fine entre les statuts des arguments qu'avec les niveaux $Sc > Cr > Rj$.

Les sémantiques LSSB se basent sur le score des supports pour définir les extensions. La différence avec les sémantiques SSB est que les labellings nous permettent d'utiliser un cadre plus raffiné pour sélectionner les extensions.

Tout comme pour les sémantiques SSB, l'idée principale des sémantiques LSSB est de séparer la prise en compte des attaques et des supports lors de la définition des extensions pour un BAF $\langle A, R, S\rangle$: dans un premier temps, seulement les attaques sont considérées (sans prendre en compte les relations de supports), ce qui permet de calculer d'une façon classique l'ensemble des extensions données par le AF $\langle A, R\rangle$ associé au BAF initial. Ensuite, les relations de support sont prises en compte, ce qui permet d'affiner l'ensemble d'extensions obtenues et ainsi de pouvoir sélectionner la/les meilleure(s) extensions supportées.

Cette séparation entre la prise en compte des attaques et des supports, permet aussi de garantir un résultat *Dung compatible*, puisque l'ensemble des extensions résultats (extensions du BAF) est une sélection parmi les extensions originales (extensions du AF).

Dans ce qui suit nous étudions les différentes façons d'ordonner ordonner les statuts de justification. Nous commençons par définir les sémantiques LSSB5 qui se basent sur la hiérarchie en 5 niveaux proposée par [BONZON *et al.* 2018], ensuite nous définissons les sémantiques LSSB6 qui se basent sur une hiérarchie en 6 niveaux.

6.3.1 LSSB5 : raffinement en 5 niveaux

La classification des statuts de justification en 5 niveaux fait comme hypothèse que les statuts $\{in, out, undec\}$, $\{in, out\}$ et $\{undec\}$ sont équivalents (référencés par le niveau `IOU`).

par conséquent, les statuts de justification peuvent être ordonnés comme suit : $\mathtt{I} > \mathtt{IU} > \mathtt{IOU} > \mathtt{OU} > \mathtt{O}$.

Dans ce qui suit, nous définissons les sémantiques LSSB5 : pour un BAF $\mathcal{F}$ et une sémantique σ pour les AF, le principe des sémantiques LSSB5 est de prendre en compte le nombre de supports reçus par chaque extension de l'ensemble $Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$, de calculer une valeur de score pour chaque extension afin de sélectionner la ou les meilleures extensions. Elle se basent sur deux fonctions d'agrégation ($\oplus$ et $\odot$) et suivent un processus en trois étapes :

– Étape 1 : dans la première étape, une *valeur de support reçu* est attribuée à chaque argument $\mathtt{a} \in A$ pour chaque statut de justification dans $\{\mathtt{I}, \mathtt{IU}, \mathtt{IOU}, \mathtt{OU}, \mathtt{O}\}$.

Définition 6.6 (Valeur de support reçue)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF et $\sigma = co$. Pour chaque statut de justification i dans $\{\mathtt{I}, \mathtt{IU}, \mathtt{IOU}, \mathtt{OU}, \mathtt{O}\}$, la *valeur de support reçue* pour un argument $\mathtt{a} \in A$ est définie comme suit :

$$\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{i}(\mathtt{a}) = |\ \{(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \in S \mid JS^{\mathcal{F}}_{\sigma}(\mathtt{b}) = i\}\ |$$

– Étape 2 : dans un deuxième temps, une *valeur de score* est calculée pour chaque extension $\mathcal{E} \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$. Pour ce faire, une première fonction multi-mapping $\oplus$ évalue le niveau de support d'une extension pour chaque statut de justification $\{\mathtt{I}, \mathtt{IU}, \mathtt{IOU}, \mathtt{OU}, \mathtt{O}\}$ et une seconde fonction multi-mapping $\odot$ évalue le niveau de support global de l'extension.

Définition 6.7 (Valeur de score)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF, $\sigma = co$, $\odot$ et $\oplus$ des fonctions multi-mapping. La *valeur de score* de $\mathcal{E} \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$ est définie comme suit :

$$\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) = \odot(\oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{I}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{IU}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{IOU}}(\mathtt{a})),$$

$$\oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{OU}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{O}}(\mathtt{a})))$$

– Étape 3 : enfin, dans une troisième étape, l'ensemble des extensions sélectionnées par la sémantique LSSB5 est calculé, il représente le sous-ensemble des extensions ayant un niveau de support global maximal.

Définition 6.8 (Extensions pour la sémantique LSSB5)

Soit $\mathcal{F}$ un BAF, $\sigma = co$, $\odot$ et $\oplus$ des fonctions multi-mapping.
La sémantique $\mathtt{LSSB5}^{\oplus\odot}_{\sigma}$ définit l'ensemble des extensions sélectionnées comme suit :

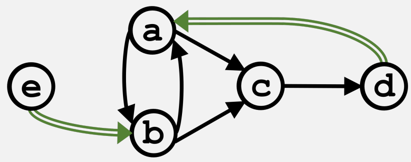
$$Ext^{BAF}_{\mathtt{LSSB5}^{\oplus\odot}_{\sigma}}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E} \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}) \mid \forall \mathcal{E}' \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F}), \mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}') \leq \mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})\}$$

où $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ est la *valeur de score* de $\mathcal{E} \in Ext^{AF}_{\sigma}(\mathcal{F})$.

L'exemple suivant montre comment les sémantiques à base de labellings permettent de faire une sélection plus fine que les sémantiques à base d'extensions.

Exemple 6.1

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF tel que $A = \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d},\mathtt{e}\}$, $R = \{(\mathtt{a},\mathtt{b}),(\mathtt{b},\mathtt{a}),(\mathtt{a},\mathtt{c}),(\mathtt{b},\mathtt{c}),(\mathtt{c},\mathtt{d})\}$ et $S = \{(\mathtt{d},\mathtt{a}),(\mathtt{e},\mathtt{b})\}$.



Pour $\sigma = pr$, nous avons $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{a},\mathtt{d},\mathtt{e}\},\{\mathtt{b},\mathtt{d},\mathtt{e}\}\}$.

Les colonnes du tableau suivant correspondent aux deux extensions de $Ext^{BAF}_{\sigma}(\mathcal{F})$. La partie supérieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}^{\sigma,\mathcal{F}}_{Sc}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}^{\sigma,\mathcal{F}}_{Cr}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}^{\sigma,\mathcal{F}}_{Rj}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{Sc} = 4$, $w_{Cr} = 2$ et $w_{Rj} = 1$.

La partie inférieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{I}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{IU}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{IOU}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{OU}}(x)),$ $\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}^{\sigma,\mathcal{F}}_{\mathtt{O}}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{\mathtt{I}} = 16$, $w_{\mathtt{IU}} = 8$, $w_{\mathtt{IOU}} = 4$, $w_{\mathtt{OU}} = 2$ et $w_{\mathtt{O}} = 1$.

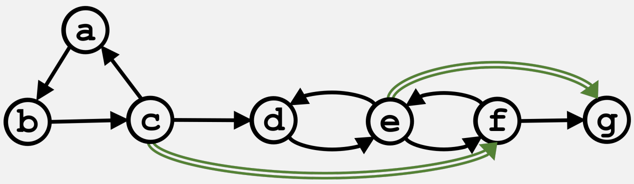
	$\{a,d,e\}$	$\{b,d,e\}$
$\mathtt{SSB}^{\Sigma,w\Sigma}_{\sigma}$	$(1,0,0)$	$(1,0,0)$
$\mathtt{SCORE}^{\Sigma,w\Sigma}_{\mathcal{F}}$	**4**	**4**
$\mathtt{LSSB5}^{\Sigma,w\Sigma}_{\sigma}$	$(0,1,0,0,0)$	$(1,0,0,0,0)$
$\mathtt{SCORE}^{\Sigma,w\Sigma}_{\mathcal{F}}$	8	**16**

Pour la sémantique $\mathtt{SSB}^{\Sigma,w\Sigma}_{\sigma}$ les extensions sélectionnées sont $Ext^{BAF}_{\mathtt{SSB}^{\Sigma,w\Sigma}_{\sigma}}(\mathcal{F}) = \{\{a,d,e\},\{b,d,e\}\}$, cela est dû au fait que chacune de ces extensions reçoit un support d'un argument Sc. Malgré le fait que les arguments $\mathtt{e}$ et $\mathtt{d}$ ont un degré d'acceptation Sc, l'argument $\mathtt{e}$ n'est pas attaqué, tandis que l'argument $\mathtt{d}$ est défendu. La sémantique $\mathtt{LSSB5}^{\Sigma,w\Sigma}_{\sigma}$ permet de prendre en compte cette différence, en sélectionnant l'extension $Ext^{BAF}_{\mathtt{LSSB5}^{\Sigma,w\Sigma}_{\sigma}}(\mathcal{F}) = \{\{b,d,e\}\}$

Les sémantiques LSSB5 permettent de réaliser un raffinement plus important qu'avec les sémantiques SSB qui se basent seulement sur les 3 niveaux d'acceptabilité Sc, Cr, Rj. L'exemple suivant montre cependant que la classification des statuts de justification en 5 niveaux peut conduire à des résultats non attendus.

Exemple 6.2

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{c}), (\mathtt{c}, \mathtt{a}), (\mathtt{c}, \mathtt{d}), (\mathtt{d}, \mathtt{e}), (\mathtt{e}, \mathtt{d}), (\mathtt{e}, \mathtt{f}), (\mathtt{f}, \mathtt{e}), (\mathtt{f}, \mathtt{g})\}$ et $S = \{(\mathtt{c}, \mathtt{f}), (\mathtt{e}, \mathtt{g})\}$.



Nous avons $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\{\mathtt{e}, \mathtt{g}\}, \{\mathtt{f}\}, \varnothing\}$.
Les colonnes du tableau suivant correspondent aux trois extensions de $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$.
La partie supérieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}_{Sc}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}_{Cr}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}_{Rj}^{co,\mathcal{F}}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{Sc} = 4$, $w_{Cr} = 2$ et $w_{Rj} = 1$.

La partie inférieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}_{\mathtt{I}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}_{\mathtt{IU}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}_{\mathtt{IOU}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}_{\mathtt{OU}}^{co,\mathcal{F}}(x)),$ $\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP5}_{\mathtt{O}}^{co,\mathcal{F}}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{\mathtt{I}} = 16$, $w_{\mathtt{IU}} = 8$, $w_{\mathtt{IOU}} = 4$, $w_{\mathtt{OU}} = 2$ et $w_{\mathtt{O}} = 1$.

	$\{e, g\}$	$\{f\}$	$\varnothing$
$\mathtt{SSB}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
$\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	**2**	1	0
$\mathtt{LSSB5}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0, 0, 1, 0, 0)$	$(0, 0, 1, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0)$
$\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	**4**	**4**	0

Pour la sémantique $\mathtt{SSB}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$ l'extension sélectionnée est $Ext_{\mathtt{SSB}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}(\mathcal{F})}^{BAF} = \{\{e, g\}\}$, cela est dû au fait que l'extension $\{e, g\}$ reçoit un support d'un argument Cr, tandis que l'extension $\{f\}$ reçoit un support d'un argument Rj.
La sémantique $\mathtt{LSSB5}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$ ne permet pas de prendre en compte cette différence, elle sélectionne les extensions $Ext_{\mathtt{LSSB5}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}(\mathcal{F})}^{BAF} = \{\{e, g\}, \{f\}\}$

Ce contre-exemple met en évidence que les statuts $\{in, out, undec\}$ et $\{undec\}$ ne sont pas équivalents. En effet, l'argument c et l'argument e appartiennent au niveau IOU même si le degré d'acceptation de c est Rj et celui de e est Cr. Ce qui peut être considéré comme problématique dans notre cadre, et nous éloigne de l'idée même des sémantiques LSSB.

Ceci nous suggère de réévaluer la classification des statuts de justification en 5 niveaux présentée dans la littérature scientifique, en considérant le statut $\{undec\}$ à part. Dans la section suivante, nous définissons les sémantiques LSSB pour une hiérarchie en 6 niveaux.

6.3.2 LSSB6 : raffinement en 6 niveaux

La classification des statuts de justification en 6 niveaux fait comme hypothèse que seuls les statuts $\{in, out, undec\}$ et $\{in, out\}$ sont équivalents (référencés par le niveau $\texttt{IOU}$), ils représentent une « indécision indéterminée ». Tandis que le statut $\{undec\}$ (référencé par le niveau $\texttt{U}$) représente une « indécision déterminée ». Par conséquent, les statuts de justification peuvent être ordonnés comme suit : $\texttt{I} > \texttt{IU} > \texttt{IOU} > \texttt{U} > \texttt{OU} > \texttt{O}$.

La figure 6.3 illustre la hiérarchie des statuts de justification étendue à 6 niveaux.

$$
\begin{tikzcd}
 & \{in\} \arrow[d, dash] & \\
 & \{in, undec\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{in, out, undec\} \arrow[dr, dash] & & \{in, out\} \arrow[dl, dash] \\
 & \{undec\} \arrow[d, dash] & \\
 & \{out, undec\} \arrow[d, dash] & \\
 & \{out\} &
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 6.3 – La hiérarchie des statuts de justification étendue (6 niveaux)

Dans ce qui suit, nous définissons les sémantiques LSSB6 : pour un BAF $\mathcal{F}$ et une sémantique σ pour les AF, le principe des sémantiques LSSB6 est de prendre en compte le nombre de supports reçus par chaque extension de l'ensemble $Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$, de calculer une valeur de score pour chaque extension afin de sélectionner la ou les meilleures extensions. Elle se basent sur deux fonctions d'agrégation ($\oplus$ et $\odot$) et suivent un processus en trois étapes :

– Étape 1 : dans la première étape, une *valeur de support reçu* est attribuée à chaque argument $\texttt{a} \in A$ pour chaque statut de justification dans $\{\texttt{I}, \texttt{IU}, \texttt{IOU}, \texttt{U}, \texttt{OU}, \texttt{O}\}$.

Définition 6.9 (Valeur de support reçue)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF et $\sigma = co$. Pour chaque statut de justification i dans $\{\texttt{I}, \texttt{IU}, \texttt{IOU}, \texttt{U}, \texttt{OU}, \texttt{O}\}$, la *valeur de support reçue* pour un argument $\texttt{a} \in A$ est définie comme suit :

$$\texttt{SUPP6}_i^{\sigma,\mathcal{F}}(\texttt{a}) = |\ \{(\texttt{b}, \texttt{a}) \in S \mid JS_{\sigma}^{\mathcal{F}}(\texttt{b}) = i\}\ |$$

– Étape 2 : dans un deuxième temps, une *valeur de score* est calculée pour chaque extension $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$. La fonction multi-mapping $\oplus$ évalue le niveau de support d'une extension pour chaque statut de justification $\{\mathtt{I}, \mathtt{IU}, \mathtt{IOU}, \mathtt{U}, \mathtt{OU}, \mathtt{O}\}$ et la fonction multi-mapping $\odot$ évalue le niveau de support global de l'extension.

Définition 6.10 (Valeur de score)

Soit $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ un BAF, $\sigma = co$, $\odot$ et $\oplus$ des fonctions multi-mapping. La *valeur de score* de $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$ est définie comme suit :

$$\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(\oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{I}}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{IU}}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{IOU}}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})),$$

$$\oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{U}}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{OU}}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})), \oplus_{\mathtt{a}\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{O}}^{\sigma,\mathcal{F}}(\mathtt{a})))$$

– Étape 3 : enfin, dans une troisième étape, l'ensemble des extensions sélectionnées par la sémantique LSSB6 est calculé, il représente le sous-ensemble des extensions ayant un niveau de support global maximal.

Définition 6.11 (Extensions pour la sémantique LSSB6)

Soit $\mathcal{F}$ un BAF, $\sigma = co$, $\odot$ et $\oplus$ des fonctions multi-mapping.
La sémantique $\mathtt{LSSB6}_{\sigma}^{\oplus\odot}$ définit l'ensemble des extensions sélectionnées comme suit :

$$Ext_{\mathtt{LSSB6}_{\sigma}^{\oplus\odot}}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F}) \mid \forall\mathcal{E}' \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F}), \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') \leq \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})\}$$

où $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$ est la *valeur de score* de $\mathcal{E} \in Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F})$.

Exemple 6.1 (cont.)

Reprenons l'exemple 6.1 en considérant la sémantique $\mathtt{LSSB6}_{\sigma}^{\oplus,\odot}$ pour le BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}$, $R = \{(\mathtt{a}, \mathtt{b}), (\mathtt{b}, \mathtt{a}), (\mathtt{a}, \mathtt{c}), (\mathtt{b}, \mathtt{c}), (\mathtt{c}, \mathtt{d})\}$ et $S = \{(\mathtt{d}, \mathtt{a}), (\mathtt{e}, \mathtt{b})\}$.
La troisième partie du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{I}}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{IU}}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{IOU}}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{U}}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{OU}}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}_{\mathtt{O}}^{\sigma,\mathcal{F}}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{\mathtt{I}} = 32$, $w_{\mathtt{IU}} = 16$, $w_{\mathtt{U}} = 8$, $w_{\mathtt{IOU}} = 4$, $w_{\mathtt{OU}} = 2$ et $w_{\mathtt{O}} = 1$.

Exemple 6.1 (cont.)

	$\{a,d,e\}$	$\{b,d,e\}$
$\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma,w\Sigma}$	$(1,0,0)$	$(1,0,0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$
$\texttt{LSSB5}_\sigma^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0,1,0,0,0)$	$(1,0,0,0,0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	8	$\mathbf{16}$
$\texttt{LSSB6}_\sigma^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0,1,0,0,0,0)$	$(1,0,0,0,0,0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	16	$\mathbf{32}$

l'extension sélectionnée est $Ext^{BAF}_{\texttt{LSSB6}_\sigma^{\Sigma,w\Sigma}}(\mathcal{F}) = \{\{b,d,e\}\}$.

Exemple 6.2 (cont.)

Reprenons l'exemple 6.2 en considérant la sémantique $\texttt{LSSB6}_{co}^{\oplus,\odot}$ pour le BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $A = \{\texttt{a},\texttt{b},\texttt{c},\texttt{d},\texttt{e},\texttt{f},\texttt{g}\}$, $R = \{(\texttt{a},\texttt{b}),(\texttt{b},\texttt{c}),(\texttt{c},\texttt{a}),(\texttt{c},\texttt{d}),(\texttt{d},\texttt{e}),(\texttt{e},\texttt{d}),(\texttt{e},\texttt{f}),(\texttt{f},\texttt{e}),(\texttt{f},\texttt{g})\}$ et $S = \{(\texttt{c},\texttt{f}),(\texttt{e},\texttt{g})\}$. La troisième partie du tableau présente les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{I}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{IU}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{IOU}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{U}}^{co,\mathcal{F}}(x)),$ $\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{OU}}^{co,\mathcal{F}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{O}}^{co,\mathcal{F}}(x)))$ ainsi que la valeur de $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{\texttt{I}} = 32$, $w_{\texttt{IU}} = 16$, $w_{\texttt{U}} = 8$, $w_{\texttt{IOU}} = 4$, $w_{\texttt{OU}} = 2$ et $w_{\texttt{O}} = 1$.

	$\{e,g\}$	$\{f\}$	$\varnothing$
$\texttt{SSB}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	$\mathbf{2}$	1	0
$\texttt{LSSB5}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0,0,1,0,0)$	$(0,0,1,0,0)$	$(0,0,0,0,0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{4}$	0
$\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0,0,1,0,0,0)$	$(0,0,0,1,0,0)$	$(0,0,0,0,0,0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma,w\Sigma}$	$\mathbf{8}$	4	0

l'extension sélectionnée est $Ext^{BAF}_{\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}(\mathcal{F})} = \{\{e,g\}\}$.

6.4 Propriétés des sémantiques $\texttt{LSSB6}_\sigma^{\Sigma,\odot}$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas où $\oplus = \Sigma$ et nous étudions les liens entre les propriétés satisfaites par $\odot$ et les propriétés satisfaites par la sémantique LSSB6 induite par $\oplus$ et $\odot$. Nous considérons les sémantiques usuelles pour les AF et supposons que $\odot$ est une application unique d'arité 6, étant donné qu'il y a six niveaux de statuts de justification. Les connexions entre les propriétés satisfaites par $\odot$ et les postulats satisfaits par $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$ sont précisées par les propositions ci-dessous.

Dans cette section, nous étudions les LSSB6 en particulier pour la sémantique complète ($\sigma = co$). Ce choix découle de l'idée principale des sémantiques LSSB6, qui ont pour objectif de donner un résultat plus fin qu'avec les sémantiques SSB. Or, pour les sémantiques préférée et stable, les statuts de justifications se limitent à 3 niveaux $\mathtt{I} > \mathtt{IO} > \mathtt{O}$, ce qui a pour effet de donner les mêmes résultats que pour les sémantiques SSB qui se basent sur les niveaux $Sc > Cr > Rj$. D'un point de vue technique, les propriétés et le résultat de caractérisation peuvent facilement être prouvé pour $\sigma \in \{pr, st\}$, en adaptant le lemme 6.1 aux niveaux $\mathtt{I} > \mathtt{IO} > \mathtt{O}$ et en reprenant les preuves pour ces 3 niveaux.

Proposition 6.2

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *Dung compatibilité*.

Preuve. *Dung compatibilité* découle directement de la définition 6.11

□

Avant de présenter le reste des propositions, nous commençons par introduire un résultat intermédiaire. Le lemme suivant, garanti pour la sémantique complète, pour tout $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ l'existence d'un BAF pour lequel il existe deux extensions sélectionnées $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et tel que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Lemme 6.1

Soit $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ une sémantique *Labelling Support Score-Based* avec $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. Pour tout $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ tel que $a+b+c+d+e+f > 0$, il existe un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que :

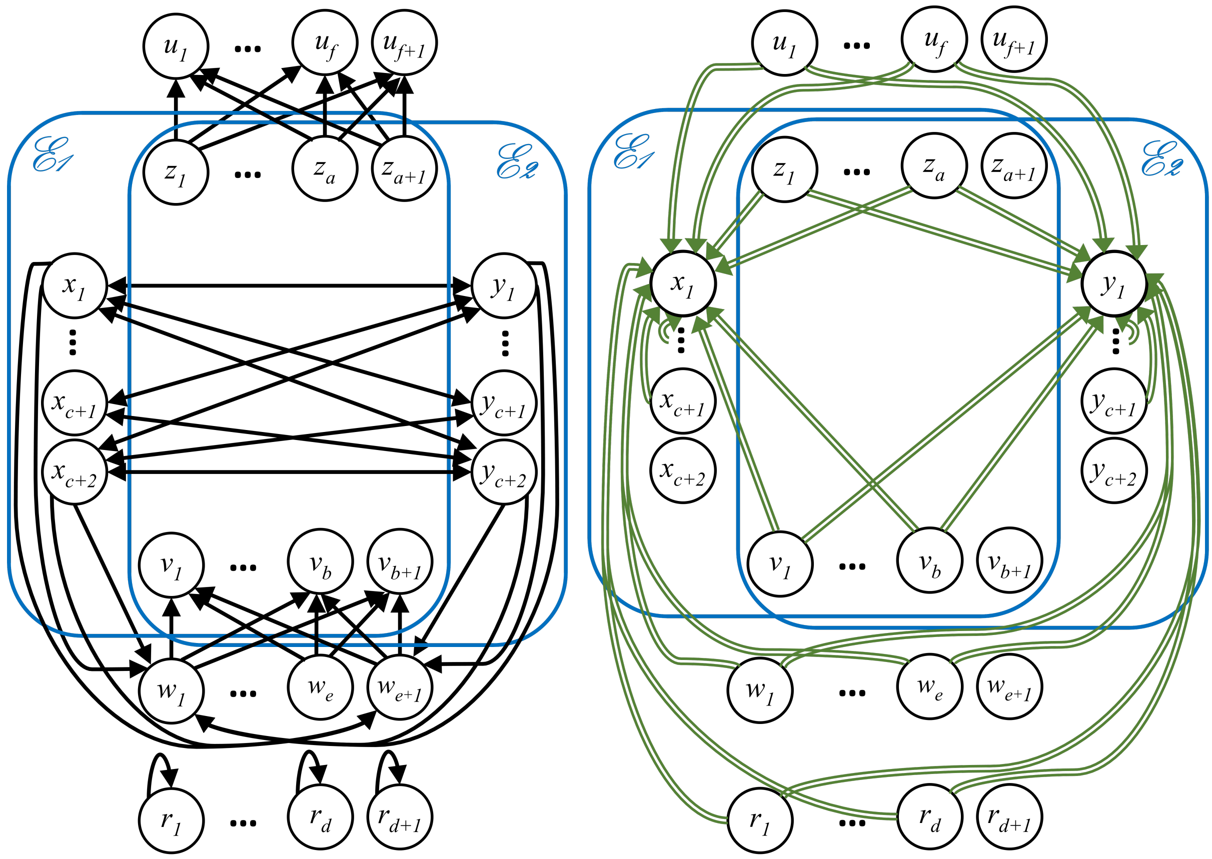
- $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$
- $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$,
- $|\{\mathtt{x} \in A \mid JS_{co}^{\mathcal{F}}(\mathtt{x}) = \mathtt{I}\}| = a + 1$,
- $|\{\mathtt{x} \in A \mid JS_{co}^{\mathcal{F}}(\mathtt{x}) = \mathtt{IU}\}| = b + 1$,
- $|\{\mathtt{x} \in A \mid JS_{co}^{\mathcal{F}}(\mathtt{x}) = \mathtt{IOU}\}| = 2c + 4$,
- $|\{\mathtt{x} \in A \mid JS_{co}^{\mathcal{F}}(\mathtt{x}) = \mathtt{U}\}| = d + 1$,
- $|\{\mathtt{x} \in A \mid JS_{co}^{\mathcal{F}}(\mathtt{x}) = \mathtt{OU}\}| = e + 1$,
- $|\{\mathtt{x} \in A \mid JS_{co}^{\mathcal{F}}(\mathtt{x}) = \mathtt{O}\}| = f + 1$, et
- $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c, d, e, f)$.

où $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}$ est la *valeur de score* (définition 6.10) et $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ reçoivent a supports d'arguments $\mathtt{I}$, b supports d'arguments $\mathtt{IU}$, c supports d'arguments $\mathtt{IOU}$, d supports d'arguments $\mathtt{U}$, e supports d'arguments $\mathtt{OU}$ et f supports d'arguments $\mathtt{O}$.

Preuve. Soit le BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ défini comme suit : $A = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}\} \cup \{\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_{b+1}\} \cup \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{c+2}\} \cup \{\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_{c+2}\} \cup \{\mathtt{r}_1, \ldots, \mathtt{r}_{d+1}\} \cup \{\mathtt{w}_1, \ldots, \mathtt{w}_{e+1}\} \cup \{\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{u}_{f+1}\}$,
$R = \{(\mathtt{x}_i, \mathtt{y}_j), (\mathtt{y}_j, \mathtt{x}_i) \mid 1 \leq i \leq c+2, 1 \leq j \leq c+2\} \cup \{(\mathtt{x}_i, \mathtt{w}_j) \mid 1 \leq i \leq c+2, 1 \leq j \leq e+1\} \cup \{(\mathtt{y}_i, \mathtt{w}_j) \mid 1 \leq i \leq c+2, 1 \leq j \leq e+1\} \cup \{(\mathtt{w}_i, \mathtt{v}_j) \mid 1 \leq i \leq e+1, 1 \leq j \leq$

$b+1\} \cup \{(\mathtt{z}_i, \mathtt{u}_j) \mid 1 \leq i \leq a+1, 1 \leq j \leq f+1\} \cup \{(\mathtt{r}_i, \mathtt{r}_i) \mid 1 \leq i \leq d+1\}$,
$S = \{(\mathtt{z}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{z}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq a\} \cup \{(\mathtt{v}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{v}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq b\} \cup \{(\mathtt{x}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{y}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 < i \leq c+1\} \cup \{(\mathtt{r}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{r}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq d\} \cup \{(\mathtt{w}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{w}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq e\} \cup \{(\mathtt{u}_i, \mathtt{x}_1), (\mathtt{u}_i, \mathtt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq f\}$.

Pour plus de clarté, $\mathcal{F}$ est représenté graphiquement à l'aide de deux graphes : la figure 6.4(a) illustre les attaques et la figure 6.4(b) illustre les supports.



(a) Le graphe d'attaque de $\mathcal{F}$

(b) Le graphe de support de $\mathcal{F}$

FIGURE 6.4 – Le BAF $\mathcal{F}$

Par construction, $\mathcal{F}_{\downarrow AF}$ (l'AF obtenu de la restriction de $\mathcal{F}$ à $\langle A, R\rangle$) a trois extensions complètes : $Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ tel que $\mathcal{E}_1 = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}, \mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_{c+2}, \mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_{b+1}\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}, \mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_{c+2}, \mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_{b+1}\}$ et $\mathcal{E}_3 = \{\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_{a+1}\}$.

Nous obtenons donc :
- pour chaque $i \in \{1, \ldots, a+1\}$, $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{z}_i) = \mathtt{I}$,
- pour chaque $i \in \{1, \ldots, b+1\}$, $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{v}_i) = \mathtt{IU}$,
- pour chaque $i \in \{1, \ldots, c+2\}$, $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{x}_i) = \mathtt{IOU}$ et $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{y}_i) = \mathtt{IOU}$,
- pour chaque $i \in \{1, \ldots, d+1\}$, $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{r}_i) = \mathtt{U}$,
- pour chaque $i \in \{1, \ldots, e+1\}$, $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{w}_i) = \mathtt{OU}$ et
- pour chaque $i \in \{1, \ldots, f+1\}$, $JS^{\mathcal{F}}_{co}(\mathtt{u}_i) = \mathtt{O}$.

D'après cette construction, chacun des arguments $\mathtt{x}_1$ et $\mathtt{y}_1$ est supporté par a arguments avec

un statut de justification $\mathtt{I}$, b arguments avec un statut de justification $\mathtt{IU}$, c arguments avec un statut de justification $\mathtt{IOU}$, d arguments avec un statut de justification $\mathtt{U}$, e arguments avec un statut de justification $\mathtt{OU}$ et f arguments avec un statut de justification $\mathtt{O}$. Par conséquent $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ reçoivent le même nombre de supports, à savoir, a (resp. b, c, d, e, f) supports d'arguments $\mathtt{I}$ (resp. $\mathtt{IU}$, $\mathtt{IOU}$, $\mathtt{U}$, $\mathtt{OU}$,$\mathtt{O}$), tandis que $\mathcal{E}_3$ ne reçoit aucun support.
Nous obtenons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a,b,c,d,e,f)$ et $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_3) = \odot(0,0,0,0,0,0)$. Sachant que $\odot$ satisfait *minimalité*, nous avons $\odot(0,0,0,0,0,0) = 0$ et puisque $a+b+c+d+e+f > 0$ nous avons $\odot(a,b,c,d,e,f) > 0$. Par conséquent, $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_2) > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\Sigma\odot}(\mathcal{E}_1)$. Ce qui implique que $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, ceci conclut la preuve.

□

La proposition suivante définit la relation entre l'axiome de la *monotonie* et la propriété des fonctions d'agrégation *non-décroissance*.

Proposition 6.3

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. Si $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *monotonie* alors $\odot$ satisfait *non-décroissance*.

Preuve. Par le lemme 6.1 nous pouvons construire un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a,b,c,d,e,f)$ avec $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ et $a+b+c+d+e+f > 0$, sachant que a est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{I}$, b est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{IU}$, c est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{IOU}$, d est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{U}$, e est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{OU}$ et f est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{O}$ pour chacune des extensions $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

Rappelons que $A = \{\mathtt{z}_1,\ldots,\mathtt{z}_{a+1}\} \cup \{\mathtt{v}_1,\ldots,\mathtt{v}_{b+1}\} \cup \{\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_{c+2}\} \cup \{\mathtt{y}_1,\ldots,\mathtt{y}_{c+2}\} \cup \{\mathtt{r}_1,\ldots,\mathtt{r}_{d+1}\} \cup \{\mathtt{w}_1,\ldots,\mathtt{w}_{e+1}\} \cup \{\mathtt{u}_1,\ldots,\mathtt{u}_{f+1}\}$,
$R = \{(\mathtt{x}_i,\mathtt{y}_j),(\mathtt{y}_j,\mathtt{x}_i) \mid 1 \le i \le c+2, 1 \le j \le c+2\} \cup \{(\mathtt{x}_i,\mathtt{w}_j) \mid 1 \le i \le c+2, 1 \le j \le e+1\} \cup \{(\mathtt{y}_i,\mathtt{w}_j) \mid 1 \le i \le c+2, 1 \le j \le e+1\} \cup \{(\mathtt{w}_i,\mathtt{v}_j) \mid 1 \le i \le e+1, 1 \le j \le b+1\} \cup \{(\mathtt{z}_i,\mathtt{u}_j) \mid 1 \le i \le a+1, 1 \le j \le f+1\} \cup \{(\mathtt{r}_i,\mathtt{r}_i) \mid 1 \le i \le d+1\}$,
$S = \{(\mathtt{z}_i,\mathtt{x}_1),(\mathtt{z}_i,\mathtt{y}_1) \mid 1 \le i \le a\} \cup \{(\mathtt{v}_i,\mathtt{x}_1),(\mathtt{v}_i,\mathtt{y}_1) \mid 1 \le i \le b\} \cup \{(\mathtt{x}_i,\mathtt{x}_1),(\mathtt{y}_i,\mathtt{y}_1) \mid 1 < i \le c+1\} \cup \{(\mathtt{r}_i,\mathtt{x}_1),(\mathtt{r}_i,\mathtt{y}_1) \mid 1 \le i \le d\} \cup \{(\mathtt{w}_i,\mathtt{x}_1),(\mathtt{w}_i,\mathtt{y}_1) \mid 1 \le i \le e\} \cup \{(\mathtt{u}_i,\mathtt{x}_1),(\mathtt{u}_i,\mathtt{y}_1) \mid 1 \le i \le f\}$.

Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x_1)\}$, $y \in A$. D'après *monotonie* nous savons que $Deg_{co,\mathcal{F}}^{BAF}(x_1) \le Deg_{co,\mathcal{F}'}^{BAF}(x_1)$.
Nous avons donc six cas de figure :
– Cas 1 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{I}$.
Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a+1,b,c,d,e,f)$ et d'autre part nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \ge \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a+1,b,c,d,e,f) \ge \odot(a,b,c,d,e,f)$.
– Cas 2 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{IU}$.
Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a,b+1,c,d,e,f)$ et d'autre

part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a, b + 1, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

– Cas 3 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{IOU}$.

Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c+1, d, e, f)$ et d'autre part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a, b, c + 1, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

– Cas 4 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{U}$.

Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c, d+1, e, f)$ et d'autre part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

– Cas 5 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{OU}$.

Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c, d, e + 1, f)$ et d'autre part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a, b, c, d, e + 1, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

– Cas 6 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{O}$.

Étant donné que $x_1 \in \mathcal{E}_1$, d'une part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c, d, e, f + 1)$ et d'autre part nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc nous pouvons conclure que $\odot(a, b, c, d, e, f + 1) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

□

La proposition suivante définit la relation entre l'axiome *impact* et la propriété des fonctions d'agrégation *co-monotonie*.

Proposition 6.4

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *impact* alors $\odot$ satisfait *co-monotonie*.

Preuve. Nous avons six cas de figure en considérant les statuts de justification $\{\texttt{I}, \texttt{IU}, \texttt{IOU}, \texttt{U}, \texttt{OU}, \texttt{O}\}$:

– Cas 1 : *cas d'un support d'un argument* $\texttt{I}$

Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ alors $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a' + 1, b', c', d', e', f')$, $\forall a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$.

Par l'absurde, supposons que $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ et $\odot(a+1, b, c, d, e, f) < \odot(a' + 1, b', c', d', e', f')$.

• **Sous-cas 1.1 :** $\odot(a, b, c, d, e, f) = \odot(a', b', c', d', e', f')$

Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$. D'après la définition 6.10 nous avons : $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c, d, e, f)$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a', b', c', d', e', f')$ avec $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{I}$, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IU}$, c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d (respectivement d') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{U}$, e (respectivement e') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f (respectivement f') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{O}$ reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).

Puisque $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$ nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a, b, c, d, e, f) = \odot(a', b', c', d', e', f')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A', R, S\rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc, $\{\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2'\} \subseteq Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A', R, S'\rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{I}$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}_1' \cap \mathcal{E}_2'$, nous obtenons $\{\mathcal{E}_1', \mathcal{E}_2'\} \subseteq Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}'')$. Alors $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$. Et donc $\odot(a+1, b, c, d, e, f) = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$. Contradiction.

• **Sous-cas 1.2 :** $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a', b', c', d', e', f')$

Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\} \subseteq Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}_1 \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$. D'après la définition 6.10 nous avons : $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \odot(a, b, c, d, e, f)$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a', b', c', d', e', f')$ avec $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments `I`, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments `IU`, c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments `IOU`, d (respectivement d') est le nombre de supports d'arguments `U`, e (respectivement e') est le nombre de supports d'arguments `OU` et f (respectivement f') est le nombre de supports d'arguments `O` reçus par $\mathcal{E}_1$ (respectivement $\mathcal{E}_2$).
Puisque $\mathcal{E}_1 \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_2 \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$ nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a', b', c', d', e', f')$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A', R, S\rangle$ tel que : $A' = A \cup \{x\}$. Par cette construction nous avons : $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 \cup \{x\}$ et $\mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2 \cup \{x\}$. Étant donné que x ne reçoit pas de supports, nous obtenons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2)$. Donc, $\mathcal{E}_1' \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$ et $\mathcal{E}_2' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Soit $\mathcal{F}'' = \langle A', R, S'\rangle$ tel que : $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$ et $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{I}$.
D'après *impact* et étant donné que $x \in \mathcal{E}_1'$, nous obtenons $\mathcal{E}_1' \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}'')$. Alors, $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') \geq \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}''}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$. Et donc $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$. Contradiction.

– **Cas 2 :** *cas d'un support d'un argument* `IU`
Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ alors $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$, $\forall a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$.
La preuve par l'absurde est analogue à celle du *Cas 1*.

– **Cas 3 :** *cas d'un support d'un argument* `IOU`
Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ alors $\odot(a, b, c+1, d, e, f) \geq \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$, $\forall a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$.
La preuve par l'absurde est analogue à celle du *Cas 1*.

– **Cas 4 :** *cas d'un support d'un argument* `U`
Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ alors $\odot(a, b, c, d+1, e, f) \geq \odot(a', b', c', d'+1, e', f')$, $\forall a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$.
La preuve par l'absurde est analogue à celle du *Cas 1*.

– **Cas 5 :** *cas d'un support d'un argument* `OU`
Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ alors $\odot(a, b, c, d, e+1, f) \geq \odot(a', b', c', d', e'+1, f')$, $\forall a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$.
La preuve par l'absurde est analogue à celle du *Cas 1*.

– **Cas 6 :** *cas d'un support d'un argument* `O`
Nous voulons prouver que si $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a', b', c', d', e', f')$ alors $\odot(a, b, c, d, e, f+1)$

$\geq \odot(a', b', c', d', e', f' + 1), \forall a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$.
La preuve par l'absurde est analogue à celle du *Cas 1*.

$\square$

La proposition suivante définit la relation entre les propriétés des fonctions d'agrégation *non-décroissance* et *co-monotonie* et l'axiome *impact*.

Proposition 6.5

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *impact*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$, $\mathcal{E}^o \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$.
D'après la définition 6.10 nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d, e, f)$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ et $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$ avec $a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o \in \mathbb{N}$.
Puisque $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$, $x \in \mathcal{E}$.

Nous avons six cas de figure en considérant les statuts de justification $\{\mathtt{I}, \mathtt{IU}, \mathtt{IOU}, \mathtt{U}, \mathtt{OU}, \mathtt{O}\}$:

– Cas 1 : $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y) = \mathtt{I}$

• **Sous-cas 1.1 :** $x \in \mathcal{E}^o$

D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a^o + 1, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a + 1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o + 1, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a + 1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 1.2 :** $x \notin \mathcal{E}^o$

D'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a + 1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité nous obtenons $\odot(a + 1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Par conséquent $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– Cas 2 : $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y) = \mathtt{IU}$

La preuve consiste à montrer par transitivité que $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Cette preuve est analogue à celle du *Cas 1*

– Cas 3 : $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y) = \mathtt{IOU}$

La preuve consiste à montrer par transitivité que $\odot(a, b, c+1, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Cette preuve est analogue à celle du *Cas 1*

– Cas 4 : $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y) = \mathtt{U}$

La preuve consiste à montrer par transitivité que $\odot(a, b, c, d+1, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Cette preuve est analogue à celle du *Cas 1*

– Cas 5 : $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y) = \mathtt{OU}$

La preuve consiste à montrer par transitivité que $\odot(a, b, c, d, e+1, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.
Cette preuve est analogue à celle du *Cas 1*

– Cas 6 : $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y) = \mathtt{O}$

La preuve consiste à montrer par transitivité que $\odot(a, b, c, d, e, f+1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$.

Cette preuve est analogue à celle du *Cas 1*

$\square$

La proposition suivante définit la relation entre l'axiome de la *strength impact* et la propriété des fonctions d'agrégation *priorité*.

Proposition 6.6

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. Si $\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *strength impact* alors $\odot$ satisfait *priorité*.

Preuve. Par le lemme 6.1 nous pouvons construire un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1) = \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2) = \odot(a, b, c, d, e, f)$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ et $a + b + c + d + e + f > 0$.

Rappelons que : $A = \{\texttt{z}_1, \ldots, \texttt{z}_{a+1}\} \cup \{\texttt{v}_1, \ldots, \texttt{v}_{b+1}\} \cup \{\texttt{x}_1, \ldots, \texttt{x}_{c+2}\} \cup \{\texttt{y}_1, \ldots, \texttt{y}_{c+2}\} \cup \{\texttt{r}_1, \ldots, \texttt{r}_{d+1}\} \cup \{\texttt{w}_1, \ldots, \texttt{w}_{e+1}\} \cup \{\texttt{u}_1, \ldots, \texttt{u}_{f+1}\}$, $R = \{(\texttt{x}_i, \texttt{y}_j), (\texttt{y}_j, \texttt{x}_i) \mid 1 \leq i \leq c + 2, 1 \leq j \leq c + 2\} \cup \{(\texttt{x}_i, \texttt{w}_j) \mid 1 \leq i \leq c + 2, 1 \leq j \leq e + 1\} \cup \{(\texttt{y}_i, \texttt{w}_j) \mid 1 \leq i \leq c + 2, 1 \leq j \leq e + 1\} \cup \{(\texttt{w}_i, \texttt{v}_j) \mid 1 \leq i \leq e + 1, 1 \leq j \leq b + 1\} \cup \{(\texttt{z}_i, \texttt{u}_j) \mid 1 \leq i \leq a + 1, 1 \leq j \leq f + 1\} \cup \{(\texttt{r}_i, \texttt{r}_i) \mid 1 \leq i \leq d + 1\}$, $S = \{(\texttt{z}_i, \texttt{x}_1), (\texttt{z}_i, \texttt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq a\} \cup \{(\texttt{v}_i, \texttt{x}_1), (\texttt{v}_i, \texttt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq b\} \cup \{(\texttt{x}_i, \texttt{x}_1), (\texttt{y}_i, \texttt{y}_1) \mid 1 < i \leq c + 1\} \cup \{(\texttt{r}_i, \texttt{x}_1), (\texttt{r}_i, \texttt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq d\} \cup \{(\texttt{w}_i, \texttt{x}_1), (\texttt{w}_i, \texttt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq e\} \cup \{(\texttt{u}_i, \texttt{x}_1), (\texttt{u}_i, \texttt{y}_1) \mid 1 \leq i \leq f\}$.

Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$, nous avons $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(z_{a+1}) = \texttt{I}$, $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(v_{b+1}) = \texttt{IU}$, $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(x_{c+2}) = \texttt{IOU}$, $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(y_{c+2}) = \texttt{IOU}$, $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(r_{d+1}) = \texttt{U}$, $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(w_{e+1}) = \texttt{OU}$ et $JS_{co}^{\mathcal{F}'}(u_{f+1}) = \texttt{O}$.

Nous avons 15 cas de figure :

– Cas 1 : $S' = S \cup \{(z_{a+1}, x_1), (v_{b+1}, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \odot(a + 1, b, c, d, e, f)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \odot(a, b + 1, c, d, e, f)$.
Donc $\odot(a + 1, b, c, d, e, f) > \odot(a, b + 1, c, d, e, f)$.

– Cas 2 : $S' = S \cup \{(v_{b+1}, x_1), (y_{c+2}, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \odot(a, b + 1, c, d, e, f)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \odot(a, b, c + 1, d, e, f)$.
Donc $\odot(a, b + 1, c, d, e, f) > \odot(a, b, c + 1, d, e, f)$.

– Cas 3 : $S' = S \cup \{(x_{c+2}, x_1), (r_{d+1}, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \odot(a, b, c + 1, d, e, f)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \odot(a, b, c, d + 1, e, f)$.
Donc $\odot(a, b, c + 1, d, e, f) > \odot(a, b, c, d + 1, e, f)$.

– Cas 4 : $S' = S \cup \{(r_{d+1}, x_1), (w_{e+1}, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$.
Nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') = \odot(a, b, c, d + 1, e, f)$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2') = \odot(a, b, c, d, e + 1, f)$.
Donc $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) > \odot(a, b, c, d, e + 1, f)$.

– Cas 5 : $S' = S \cup \{(r_{d+1}, x_1), (w_{e+1}, y_1)\}$:
D'après *strength impact* nous savons que $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_1') > \texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}_2')$.

Nous avons $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}'_1) = \odot(a, b, c, d, e+1, f)$ et $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}'_2) = \odot(a, b, c, d, e, f+1)$. Donc $\odot(a, b, c, d, e+1, f) > \odot(a, b, c, d, e, f+1)$.

Les cas :
- **Cas 6 :** $S' = S \cup \{(z_{a+1}, x_1), (y_{c+2}, y_1)\}$,
- **Cas 7 :** $S' = S \cup \{(z_{a+1}, x_1), (r_{d+1}, y_1)\}$,
- **Cas 8 :** $S' = S \cup \{(z_{a+1}, x_1), (w_{e+1}, y_1)\}$,
- **Cas 9 :** $S' = S \cup \{(z_{a+1}, x_1), (u_{f+1}, y_1)\}$,
- **Cas 10 :** $S' = S \cup \{(v_{b+1}, x_1), (r_{d+1}, y_1)\}$,
- **Cas 11 :** $S' = S \cup \{(v_{b+1}, x_1), (w_{e+1}, y_1)\}$,
- **Cas 12 :** $S' = S \cup \{(v_{b+1}, x_1), (u_{f+1}, y_1)\}$,
- **Cas 13 :** $S' = S \cup \{(x_{c+2}, x_1), (w_{e+1}, y_1)\}$,
- **Cas 14 :** $S' = S \cup \{(x_{c+2}, x_1), (u_{f+1}, y_1)\}$, et
- **Cas 15 :** $S' = S \cup \{(r_{d+1}, x_1), (u_{f+1}, y_1)\}$

sont déductibles par transitivité à partir des 5 cas précédents.

Ainsi, nous avons prouvé que $\odot$ satisfait *priorité*.

□

La proposition suivante définit la relation entre la propriétés des fonctions d'agrégation *non-décroissance* et l'axiome *monotonie*.

Proposition 6.7

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\texttt{LSSB6}^{\Sigma\odot}_{co}$ satisfait *monotonie*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ et $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$.
Pour tout $\mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$, d'après la définition 6.10 nous avons : $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$ et $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d, e, f)$, avec $a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$, sachant que a^o (respectivement a) est le nombre de supports d'arguments $\texttt{I}$, b^o (respectivement b) est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IU}$, c^o (respectivement c) est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d^o (respectivement d) est le nombre de supports d'arguments $\texttt{U}$, e^o (respectivement e) est le nombre de supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f^o (respectivement f) est le nombre de supports d'arguments $\texttt{O}$ reçus par $\mathcal{E}^o$ (respectivement $\mathcal{E}$).

Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $y \in A$, $x \in \mathcal{E}$ et $(y, x) \notin S$.
Nous avons six cas de figure en considérant les statuts de justification $\{\texttt{I}, \texttt{IU}, \texttt{IOU}, \texttt{U}, \texttt{OU}, \texttt{O}\}$:
– Cas 1 : $JS^{\mathcal{F}'}_{co}(y) = \texttt{I}$
Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Notons aussi que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a+1, b, c, d, e, f)$.

• **Sous-cas 1.1 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (1.1)
Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$, ou (ii) $\mathcal{E} \notin Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a+1, b, c, d, e, f)$. D'après (1.1) cela

implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 1.2 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Sc$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Donc par transitivité : $\odot(a + 1, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (1.2)

Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, d'après (1.2) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') = \odot(a + 1, b, c, d, e, f)$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

– Cas 2 : $JS^{\mathcal{F}'}_{co}(y) = \mathtt{IU}$

Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Notons aussi que $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b + 1, c, d, e, f)$.

• **Sous-cas 2.1 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Donc par transitivité : $\odot(a, b + 1, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (2.1)

Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$, ou (ii) $\mathcal{E} \notin Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a, b + 1, c, d, e, f)$. D'après (2.1) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 2.2 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Sc$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Donc par transitivité : $\odot(a, b + 1, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (2.2)

Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, d'après (2.2) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') = \odot(a, b + 1, c, d, e, f)$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

– Cas 3 : $JS^{\mathcal{F}'}_{co}(y) = \mathtt{IOU}$

Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Notons aussi que $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c + 1, d, e, f)$.

• **Sous-cas 3.1 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c+1, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Donc par transitivité : $\odot(a, b, c + 1, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (3.1)

Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$, ou (ii) $\mathcal{E} \notin Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a, b, c + 1, d, e, f)$. D'après (3.1) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 3.2 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Sc$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c+1, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Donc par transitivité : $\odot(a, b, c + 1, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (3.2)

Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, d'après (3.2) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') = \odot(a, b, c + 1, d, e, f)$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

– Cas 4 : $JS^{\mathcal{F}'}_{co}(y) = \texttt{U}$
Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Notons aussi que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d+1, e, f)$.

• **Sous-cas 4.1 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c, d+1, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c, d+1, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (4.1)
Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$, ou (ii) $\mathcal{E} \notin Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a, b, c, d+1, e, f)$. D'après (4.1) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 4.2 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Sc$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c, d+1, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c, d+1, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (4.2)
Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, d'après (4.2) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') = \odot(a, b, c, d+1, e, f)$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

– Cas 5 : $JS^{\mathcal{F}'}_{co}(y) = \texttt{OU}$
Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Notons aussi que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d, e+1, f)$.

• **Sous-cas 5.1 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c, d, e+1, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c, d, e+1, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (5.1)
Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$, ou (ii) $\mathcal{E} \notin Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a, b, c, d, e+1, f)$. D'après (5.1) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 5.2 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Sc$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c, d, e+1, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c, d, e+1, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (5.2)
Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F}')$, d'après (5.2) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') = \odot(a, b, c, d, e+1, f)$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

– Cas 6 : $JS^{\mathcal{F}'}_{co}(y) = \texttt{O}$
Tout d'abord, notons que $\forall \mathcal{E}^o \in Ext^{AF}_{co}(\mathcal{F})$ tel que $x \notin \mathcal{E}^o$: $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}^o) = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}^o) = \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Notons aussi que $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d, e, f+1)$.

• **Sous-cas 6.1 :** $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext^{BAF}_{co}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c, d, e, f+1) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c, d, e, f+1) \geq \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (6.1)

Alors (i) soit $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$ et donc $Deg_{co,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$, ou (ii) $\mathcal{E} \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$, donc $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$ tel que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a, b, c, d, e, f+1)$. D'après (6.1) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. Donc forcement $x \in \mathcal{E}'$, d'où $Deg_{co,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) \geq Cr$.

• **Sous-cas 6.2 :** $Deg_{co,\mathcal{F}}^{BAF}(x) = Sc$. Puisque $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, nous avons $\odot(a, b, c, d, e, f) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. D'après *non-décroissance* nous avons : $\odot(a, b, c, d, e, f+1) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.
Donc par transitivité : $\odot(a, b, c, d, e, f+1) > \odot(a^o, b^o, c^o, d^o, e^o, f^o)$. (6.2)
Donc si $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$, d'après (6.2) cela implique que $\odot(a', b', c', d', e', f') = \odot(a, b, c, d, e, f+1)$. Donc $x \in \mathcal{E}'$. D'où $Deg_{co,\mathcal{F}'}^{BAF}(x) = Sc$.

□

La proposition suivante définit la relation entre les propriétés des fonctions d'agrégation *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie* et l'axiome *strength impact*.

Proposition 6.8

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *strength impact*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S \rangle$ tel que : $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$.
D'après la définition 6.10 nous avons $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d, e, f)$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c', d', e', f')$, $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$, sachant que a (respectivement a') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{I}$, b (respectivement b') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IU}$, c (respectivement c') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d (respectivement d') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{U}$, e (respectivement e') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f (respectivement f') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{O}$ reçus par $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{E}'$).

Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S' \rangle$ tel que :
– $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ et $x' \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$,
– $y, y' \in A$,
– $\{(y, x), (y', x')\} \notin S$,
– $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) > JS_{co}^{\mathcal{F}}(y')$ et
– $S' = S \cup \{(y, x), (y', x')\}$.

Nous avons les cas de figure suivants selon les statuts de justification de y et y' :
– Cas 1 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{I}$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments $\texttt{I}$, b'' supports d'arguments $\texttt{IU}$, c'' supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d'' supports d'arguments $\texttt{U}$, e'' supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f'' supports d'arguments $\texttt{O}$, alors, $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Donc $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.

Nous avons alors deux cas de figure :
– $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a''+1, b'', c'', d'', e'', f'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a''+1, b'', c'', d'', e'', f'') \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.
– $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$. Sachant que $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.
Donc nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 1.1 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{IU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a'+1, b', c', d', e', f') > \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) > \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 1.2 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{IOU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a'+1, b', c', d', e', f') > \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$ et $\odot(a', b'+1, c', d', e', f') > \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) > \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 1.3 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{U}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a'+1, b', c', d', e', f') > \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$, $\odot(a', b'+1, c', d', e', f') > \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$ et $\odot(a', b', c'+1, d', e', f') > \odot(a', b', c', d'+1, e', f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) > \odot(a', b', c', d'+1, e', f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 1.4 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{OU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a'+1, b', c', d', e', f') > \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$, $\odot(a', b'+1, c', d', e', f') > \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$, $\odot(a', b', c'+1, d', e', f') > \odot(a', b', c', d'+1, e', f')$ et $\odot(a', b', c', d'+1, e', f') > \odot(a', b', c', d', e'+1, f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) > \odot(a', b', c', d', e'+1, f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 1.5 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{O}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a'+1, b', c', d', e', f') > \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$, $\odot(a', b'+1, c', d', e', f') > \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$, $\odot(a', b', c'+1, d', e', f') > \odot(a', b', c', d'+1, e', f')$, $\odot(a', b', c', d'+1, e', f') > \odot(a', b', c', d', e'+1, f')$ et $\odot(a', b', c', d', e'+1, f') > \odot(a', b', c', d', e', f'+1)$, par transitivité nous obtenons $\odot(a+1, b, c, d, e, f) > \odot(a', b', c', d', e', f'+1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– Cas 2 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{IU}$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments $\texttt{I}$, b'' supports d'arguments $\texttt{IU}$, c'' supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d'' supports d'arguments $\texttt{U}$, e'' supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f'' supports d'arguments $\texttt{O}$, alors, $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Donc $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.

Nous avons alors deux cas de figure :
– $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b''+1, c'', d'', e'', f'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'', b''+1, c'', d'', e'', f'') \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.
– $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a, b+1, c, d, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$.

Sachant que $\odot(a,b,c,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$.
Donc nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 2.1 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{IOU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) = \odot(a',b'+1,c',d',e',f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a',b'+1,c',d',e',f') > \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) > \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 2.2 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{U}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) = \odot(a',b'+1,c',d',e',f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a',b'+1,c',d',e',f') > \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$ et $\odot(a',b',c'+1,d',e',f') > \odot(a',b',c',d'+1,e',f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) > \odot(a',b',c',d'+1,e',f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 2.3 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{OU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) = \odot(a',b'+1,c',d',e',f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a',b'+1,c',d',e',f') > \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$, $\odot(a',b',$
$c'+1,d',e',f') > \odot(a',b',c',d'+1,e',f')$ et $\odot(a',b',c',d'+1,e',f') > \odot(a',b',c',d',e'+1,f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) > \odot(a',b',c',d',e'+1,f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 2.4 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{O}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) = \odot(a',b'+1,c',d',e',f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a',b'+1,c',d',e',f') > \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$, $\odot(a',b',c'+1,d',e',f') > \odot(a',b',c',d'+1,e',f')$, $\odot(a',b',c',d'+1,e',f') > \odot(a',b',c',d',e'+1,f')$ et $\odot(a',b',c',d',e'+1,f') > \odot(a',b',c',d',e',f'+1)$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b+1,c,d,e,f) > \odot(a',b',c',d',e',f'+1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– **Cas 3 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{IOU}$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments $\mathtt{I}$, b'' supports d'arguments $\mathtt{IU}$, c'' supports d'arguments $\mathtt{IOU}$, d'' supports d'arguments $\mathtt{U}$, e'' supports d'arguments $\mathtt{OU}$ et f'' supports d'arguments $\mathtt{O}$, alors, $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$. Donc $\odot(a,b,c,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$.

Nous avons alors deux cas de figure :
– $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c''+1,d'',e'',f'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'',b'',c''+1,d'',e'',f'') \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$.
– $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) \geq \odot(a,b,c,d,e,f)$. Sachant que $\odot(a,b,c,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) \geq \odot(a'',b'',c'',d'',e'',f'')$.
Donc nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 3.1 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{U}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) = \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a',b',c'+1,d',e',f') > \odot(a',b',c',d'+1,e',f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) > \odot(a',b',c',d'+1,e',f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 3.2 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{OU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a,b,c+1,d,e,f) = \odot(a',b',c'+1,d',e',f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a',b',c'+1,d',e',f') > \odot(a',b',c',d'+$

$1, e', f')$ et $\odot(a', b', c', d' + 1, e', f') > \odot(a', b', c', d', e' + 1, f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c + 1, d, e, f) > \odot(a', b', c', d', e' + 1, f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 3.3 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{O}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c + 1, d, e, f) = \odot(a', b', c' + 1, d', e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a', b', c' + 1, d', e', f') > \odot(a', b', c', d' + 1, e', f')$, $\odot(a', b', c', d' + 1, e', f') > \odot(a', b', c', d', e' + 1, f')$ et $\odot(a', b', c', d', e' + 1, f') > \odot(a', b', c', d', e', f' + 1)$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c+1, d, e, f) > \odot(a', b', c', d', e', f' + 1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– Cas 4 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{U}$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments $\texttt{I}$, b'' supports d'arguments $\texttt{IU}$, c'' supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d'' supports d'arguments $\texttt{U}$, e'' supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f'' supports d'arguments $\texttt{O}$, alors, $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Donc $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.

Nous avons alors deux cas de figure :
– $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'' + 1, e'', f'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'', b'', c'', d'' + 1, e'', f'') \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.
– $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$. Sachant que $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.
Donc nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 4.1 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{OU}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) = \odot(a', b', c', d' + 1, e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a', b', c', d' + 1, e', f') > \odot(a', b', c', d', e' + 1, f')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c, d+1, e, f) > \odot(a', b', c', d', e' + 1, f')$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas 4.2 :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \texttt{O}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) = \odot(a', b', c', d' + 1, e', f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a', b', c', d' + 1, e', f') > \odot(a', b', c', d', e' + 1, f')$ et $\odot(a', b', c', d', e' + 1, f') > \odot(a', b', c', d', e', f' + 1)$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c, d + 1, e, f) > \odot(a', b', c', d', e', f' + 1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

– Cas 5 : $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \texttt{OU}$.

Prouvons d'abord que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.
Étant donné que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}'' \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ une extension arbitraire de Dung qui reçoit a'' supports d'arguments $\texttt{I}$, b'' supports d'arguments $\texttt{IU}$, c'' supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d'' supports d'arguments $\texttt{U}$, e'' supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f'' supports d'arguments $\texttt{O}$, alors, $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Donc $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.

Nous avons alors deux cas de figure :
– $x \in \mathcal{E}''$, d'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c, d, e + 1, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'' + 1, f'')$ et d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a'', b'', c'', d'', e'' + 1, f'') \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$. Par transitivité, nous obtenons $\odot(a, b, c, d, e + 1, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.
– $x \notin \mathcal{E}''$, d'après *non-décroissance* nous avons $\odot(a, b, c, d, e + 1, f) \geq \odot(a, b, c, d, e, f)$. Sachant que $\odot(a, b, c, d, e, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c, d, e + 1, f) \geq \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$.

Donc nous pouvons conclure que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

• **Sous-cas :** $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y') = \mathtt{O}$. D'après *co-monotonie* nous avons $\odot(a, b, c, d, e+1, f) = \odot(a', b', c', d', e'+1, f')$, d'après *priorité* nous avons $\odot(a', b', c', d', e'+1, f') > \odot(a', b', c', d', e', f'+1)$, par transitivité nous obtenons $\odot(a, b, c, d, e+1, f) > \odot(a', b', c', d', e', f'+1)$. Donc $\mathcal{E}' \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$.

□

La proposition suivante définit la relation entre la propriétés des fonctions d'agrégation *non-décroissance* et l'axiome *irrelevance*.

Proposition 6.9

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\mathtt{SSB}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *irrelevance*.

Preuve. Soit un BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$ tel que $\mathcal{E} \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E} \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ tel que $S' = S \cup \{(y, x)\}$, $x \notin \mathcal{E}$, $y \in A$ et $(y, x) \notin S$.

Étant donné que $\mathcal{E} \notin Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$, nous pouvons déduire que $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F})$ tel que :

$$\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) \quad (1)$$

D'après la définition 6.10 nous avons : $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c', d', e', f')$ avec $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$, sachant que a' est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{I}$, b' est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{IU}$, c' est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{IOU}$, d' est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{U}$, e' est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{OU}$ et f' est le nombre des supports reçus d'arguments $\mathtt{O}$ pour l'extension $\mathcal{E}'$.

Nous voulons prouver que : $\exists \mathcal{E}' \in Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F}')$ tel que $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$.
D'après la définition 6.10 et étant donné que $Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F}) = Ext_{co}^{AF}(\mathcal{F}')$ nous avons :

$$\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}) \quad (2)$$

Nous avons alors deux cas :

– Cas 1 : $x \in \mathcal{E}'$. Considérons chaque statut de justification parmi $\{\mathtt{I}, \mathtt{IU}, \mathtt{IOU}, \mathtt{U}, \mathtt{OU}, \mathtt{O}\}$:
– Si $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{I}$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a'+1, b', c', d', e', f')$.
– Si $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{IU}$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b'+1, c', d', e', f')$.
– Si $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{IOU}$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c'+1, d', e', f')$.
– Si $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{U}$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c', d'+1, e', f')$.
– Si $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{OU}$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c', d', e'+1, f')$.
– Si $JS_{co}^{\mathcal{F}}(y) = \mathtt{O}$ alors $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c', d', e', f'+1)$.
Sachant que $\odot$ satisfait *non-décroissance*, nous avons $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') \geq \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$. Étant donné (1) et (2), nous pouvons déduire par transitivité que : $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$.
– Cas 2 : $x \notin \mathcal{E}'$. Alors, $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') = \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}')$.
Étant donné (1) et (2), nous pouvons déduire par transitivité que : $\mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E}') > \mathtt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$.

□

La proposition suivante définit la relation entre la propriétés des fonctions d'agrégation *minimalité* et l'axiome *non-trivialité*.

Proposition 6.10

Soit $\odot$ une fonction multi-mapping. Si $\odot$ satisfait *minimalité* alors $\texttt{SSB}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *non-trivialité*.

Preuve. Soit le BAF $\mathcal{F} = \langle\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, x)\}, \{\}\rangle$. Soit $\mathcal{E} = \{x, z\}$, $\mathcal{E}' = \{y, z\}$ et $\mathcal{E}'' = \{z\}$.

$Ext^{BAF}_{\texttt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''\}$, par conséquent $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}}(x) = Cr$.

Soit le BAF $\mathcal{F}' = \langle\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, x)\}, \{(z, x)\}\rangle$. D'après la définition 6.10 nous avons : $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) = \odot(a, b, c, d, e, f)$ avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$, $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}') = \odot(a', b', c', d', e', f')$, $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{N}$ et $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}'') = \odot(a'', b'', c'', d'', e'', f'')$, $a'', b'', c'', d'', e'', f'' \in \mathbb{N}$, tel que a (respectivement a' et a'') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{I}$, b (respectivement b' et b'') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IU}$, c (respectivement c' et c'') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{IOU}$, d (respectivement d' et d'') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{U}$, e (respectivement e' et e'') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{OU}$ et f (respectivement f' et f'') est le nombre de supports d'arguments $\texttt{O}$ reçus par $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$).
Nous avons : $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) = \odot(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ et $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}') = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}'') = \odot(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
Sachant que $\odot$ satisfait *minimalité*, nous avons $\odot(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$ et $\odot(1, 0, 0, 0, 0, 0) > 0$.
Par conséquent, $\texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}) > \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}') = \texttt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{E}'')$.
Donc nous obtenons $Ext^{BAF}_{\texttt{SSB}_{co}^{\oplus\odot}}(\mathcal{F}') = \mathcal{E} = \{\{x, z\}\}$. D'où, $Deg^{BAF}_{co,\mathcal{F}'}(x) = Sc$.

□

À partir des propositions précédentes, nous concluons le théorème suivant, qui est l'un des principaux résultats de notre travail :

Théorème 6.1

Soit $\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ une sémantique *Labelling Support Score-Based* et soit $\odot$ une fonction multi-mapping qui satisfait *minimalité*. $\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma\odot}$ satisfait *monotonie*, *strength impact*, *impact* et *irrelevance* si, et seulement si, $\odot$ satisfait *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie*.

Preuve.
($\Rightarrow$)
À partir de la proposition 6.3 nous savons que si $\texttt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *monotonie* alors $\odot$ satisfait *non-décroissance*.

À partir de la proposition 6.6 nous savons que si $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *strength impact* alors $\odot$ satisfait *priorité*.
À partir de la proposition 6.4 nous savons que si $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *impact* alors $\odot$ satisfait *co-monotonie*.

($\Leftarrow$)
À partir de la proposition 6.7 nous savons que si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *monotonie*.
À partir de la proposition 6.8 nous savons que si $\odot$ satisfait *priorité*, *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *strength impact*.
À partir de la proposition 6.5 nous savons que si $\odot$ satisfait *non-décroissance* et *co-monotonie* alors $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *impact*.
À partir de la proposition 6.9 nous savons que si $\odot$ satisfait *non-décroissance* alors $\mathtt{LSSB6}_{co}^{\oplus\odot}$ satisfait *irrelevance*.

□

6.5 Exemple illustratif des sémantiques $\mathtt{LSSB6}_{\sigma}^{\Sigma,\odot}$

Dans cette section, nous illustrons sur un exemple de BAF le résultat donné par la sémantique $\mathtt{LSSB6}_{\sigma}^{\Sigma,\odot}$ pour différentes configurations de supports. Nous comparons aussi les résultats obtenus aux résultats donnés par les sémantiques $\mathtt{SSB}_{\sigma}^{\Sigma,\odot}$.

Soit le BAF $\mathcal{F} = \langle A, R, S\rangle$, représenté à la figure 6.5, tel que $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (b, d), (d, e), (e, d), (e, f), (f, e), (f, g), (e, g), (g, h), (i, j)\}$ et $S = \varnothing$.

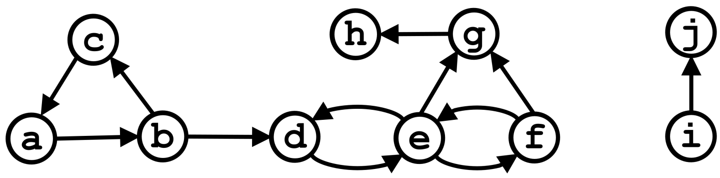


FIGURE 6.5 – Le BAF initial $\mathcal{F}$

Pour la sémantique complète pour les AFs $\sigma = co$, nous obtenons l'ensemble des extensions :

$$Ext_{\sigma}^{AF}(\mathcal{F}) = \{\{h, i, e\}, \{h, i, f\}, \{i\}\}$$

Le tableau suivant donne, pour chaque argument, son degré d'acceptabilité ainsi que son statut de justification.

$x =$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$Deg_{\sigma,\mathcal{F}}^{AF}(x) =$	Rj	Rj	Rj	Rj	Cr	Cr	Rj	Cr	Sc	Rj
$JS_{\sigma}^{\mathcal{F}}(x) =$	U	U	U	OU	IOU	IOU	OU	IU	I	O

Considérons le BAF $\mathcal{F}' = \langle A, R, S'\rangle$ avec $S' = S \cup \{(d, f), (j, e)\}$, représenté à la figure 6.6.

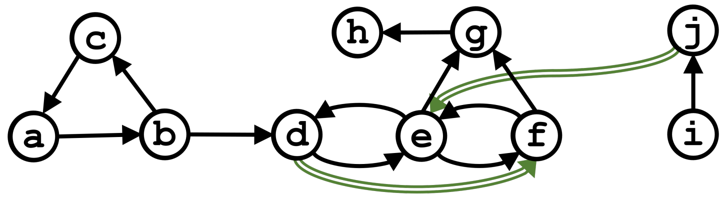


FIGURE 6.6 – Le BAF $\mathcal{F}'$

Les colonnes du tableau suivant correspondent aux trois extensions de $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}')$. La partie supérieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Sc}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Cr}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Rj}^{co,\mathcal{F}'}(x)))$ ainsi que la valeur de $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{Sc} = 4$, $w_{Cr} = 2$ et $w_{Rj} = 1$.

La partie inférieure du tableau présente les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{I}}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{IU}}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{IOU}}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{U}}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{OU}}^{co,\mathcal{F}'}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP6}_{\texttt{O}}^{co,\mathcal{F}'}(x)))$ ainsi que la valeur de $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\oplus\odot}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{\texttt{I}} = 32$, $w_{\texttt{IU}} = 16$, $w_{\texttt{IOU}} = 8$, $w_{\texttt{U}} = 4$, $w_{\texttt{OU}} = 2$ et $w_{\texttt{O}} = 1$.

	$\{h, i, e\}$	$\{h, i, f\}$	$\{i\}$
$\texttt{SSB}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\Sigma,w\Sigma}$	**1**	**1**	0
$\texttt{LSSB6}_{co}^{\Sigma,w\Sigma}$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\Sigma,w\Sigma}$	1	**2**	0

D'une part, en appliquant $\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}$, nous obtenons $Ext_{\texttt{SSB}_\sigma^{\Sigma\odot}}^{BAF}(\mathcal{F}') = \{\{h, i, e\}, \{h, i, f\}\}$, car les arguments d et j ont tous les deux un degré d'acceptabilité Rj et par conséquent les supports reçus de d et j ont un impact équivalent sur les deux extensions, ce qui se traduit par la même valeur de $\texttt{SCORE}_{\mathcal{F}'}^{\Sigma,w\Sigma}$.

D'autre part, en appliquant $\texttt{LSSB6}_\sigma^{\Sigma\odot}$, nous obtenons $Ext_{\texttt{LSSB}_\sigma^{\Sigma\odot}}^{BAF}(\mathcal{F}') = \{\{h, i, f\}\}$, car l'extension $\{h, i, f\}$ est mieux supportée que $\{h, i, e\}$.

Considérons le BAF $\mathcal{F}'' = \langle A, R, S''\rangle$ avec $S'' = S \cup \{(d, f), (c, e)\}$, représenté à la figure 6.7.

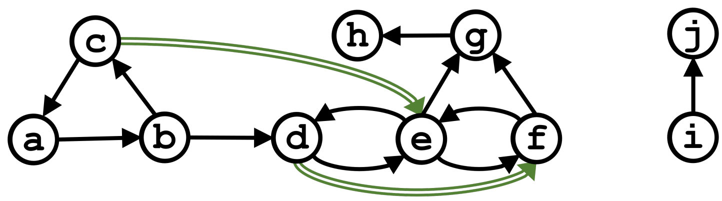


FIGURE 6.7 – Le BAF $\mathcal{F}''$

Les colonnes du tableau suivant correspondent aux trois extensions de $Ext_{co}^{BAF}(\mathcal{F}'')$. La partie supérieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Sc}^{co,\mathcal{F}''}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\texttt{SUPP}_{Cr}^{co,\mathcal{F}''}(x)),$

$\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP}^{co,\mathcal{F}'}_{Rj}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}''}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{Sc} = 4$, $w_{Cr} = 2$ et $w_{Rj} = 1$.

La partie inférieure du tableau donne les valeurs du vecteur $(\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}^{co,\mathcal{F}''}_{\mathtt{I}}(x))$, $\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}^{co,\mathcal{F}''}_{\mathtt{IU}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}^{co,\mathcal{F}''}_{\mathtt{IOU}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}^{co,\mathcal{F}''}_{\mathtt{U}}(x)), \oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}^{co,\mathcal{F}''}_{\mathtt{OU}}(x))$, $\oplus_{x\in\mathcal{E}}(\mathtt{SUPP6}^{co,\mathcal{F}''}_{\mathtt{O}}(x)))$ ainsi que la valeur de $\mathtt{SCORE}^{\oplus\odot}_{\mathcal{F}''}(\mathcal{E})$, pour $\oplus = \Sigma$ et $\odot = w\Sigma$ avec $w_{\mathtt{I}} = 32$, $w_{\mathtt{IU}} = 16$, $w_{\mathtt{IOU}} = 8$, $w_{\mathtt{U}} = 4$, $w_{\mathtt{OU}} = 2$ et $w_{\mathtt{O}} = 1$.

	$\{h,i,e\}$	$\{h,i,f\}$	$\{i\}$
$\mathtt{SSB}^{\Sigma,w\Sigma}_{co}$	$(0,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$
$\mathtt{SCORE}^{\Sigma,w\Sigma}_{\mathcal{F}'}$	**1**	**1**	0
$\mathtt{LSSB6}^{\Sigma,w\Sigma}_{co}$	$(0,0,0,1,0,0)$	$(0,0,0,0,1,0)$	$(0,0,0,0,0,0)$
$\mathtt{SCORE}^{\Sigma,w\Sigma}_{\mathcal{F}'}$	**4**	2	0

D'une part, en appliquant $\mathtt{SSB}^{\Sigma\odot}_{\sigma}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{\mathtt{SSB}^{\Sigma\odot}_{\sigma}}(\mathcal{F}'') = \{\{h,i,e\},\{h,i,f\}\}$, et d'autre part, en appliquant $\mathtt{LSSB6}^{\Sigma\odot}_{\sigma}$, nous obtenons $Ext^{BAF}_{\mathtt{LSSB}^{\Sigma\odot}_{\sigma}}(\mathcal{F}'') = \{\{h,i,e\}\}$.

Cet exemple, montre comment pour les BAFs $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, la sémantique $\mathtt{LSSB6}^{\Sigma,w\Sigma}_{co}$ a permis de raffiner le niveau Rj.

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

L'objectif global de ce travail a été d'étudier la notion de support dans le contexte de l'argumentation abstraite. Le cadre abstrait de Dung modélise les systèmes d'argumentation (AF) sous forme de graphes, où les arguments sont les sommets et où un arc entre deux sommets représente une attaque entre les deux arguments correspondants. Nous pouvons alors définir des ensembles d'arguments qui peuvent être acceptés ensemble. Ces ensembles représentent des points de vue cohérents (solutions), et sont appelés extensions. D'une manière générale, le support est une relation qui doit capturer une interaction positive entre arguments, contrairement à l'interaction négative déjà définie par la relation d'attaque.

Des études récentes en théorie de l'argumentation ont introduit l'utilisation de la bipolarité dans l'argumentation abstraite et ont défini les systèmes d'argumentation bipolaire (BAF) qui prennent en compte les supports entre arguments. Plusieurs sémantiques à base d'extensions ont été définies pour les systèmes d'argumentation bipolaire, généralisant les sémantiques usuelles du cadre abstrait de Dung. Les systèmes BAS, DDS, AFN et BUAF sont des approches qui se basent sur le processus de transformation par *flattening*. Ces systèmes prennent un BAF en entrée et le traduisent en un AF (AF associé), afin de calculer l'acceptabilité des arguments par les sémantiques usuelles.

Dans le système BAS, une interprétation assez générale de la relation de support a été proposée. Les auteurs ont défini la relation de support comme une relation positive entre arguments et qui est indépendante de la relation d'attaque. Dans l'AF associé deux types d'attaques supplémentaires sont ajoutées : les *secondary attacks* et les *supported attacks*. Ces attaques traduisent les contraintes suivantes sur l'acceptabilité des arguments dans le cas où un argument a supporte un argument b : si a est accepté, alors b doit être accepté aussi ; et si a n'est pas accepté, alors b ne peut pas être accepté non plus.

Le concept de support déductif a été introduit dans le système DDS, il représente une interprétation particulière du support. Le support déductif établit les contraintes suivantes sur l'acceptabilité des arguments dans le cas où un argument a supporte un argument b : si a est accepté, alors b doit être accepté aussi ; et si b n'est pas accepté, alors a ne doit pas être accepté non plus. Ces contraintes sont traduites dans l'AF associé par l'ajout de deux types d'attaques supplémentaires : les *supported attacks* et les *mediated attacks*.

Le système AFN, une extension du cadre de Dung qui incorpore un type spécialisé de relation de support entre arguments : la relation de nécessité. Elle établit que si un argument a supporte un autre argument b, alors a est nécessaire pour obtenir b. De cette façon, si b est accepté, alors a est accepté aussi ; et si a n'est pas accepté, alors b ne peut pas être accepté non plus. Ceci se traduit par l'ajout de deux types d'attaques supplémentaires dans l'AF associé : les attaques de même type que les *secondary attacks* et les *extended attacks*.

Le système BUAF, une extension du cadre de Dung qui incorpore un type spécialisé de relation de support entre arguments : la relation d'appui. Il permet de capturer les relations de défaite de Pollock et les relations d'appui de Toulmin. Le support d'appui établit les contraintes suivantes sur l'acceptabilité des arguments dans le cas où un argument a supporte un argument b : si b n'est pas accepté, alors a ne doit pas être accepté ; et si a n'est pas accepté, alors b ne peut pas être accepté non plus. Ceci se traduit par l'ajout de deux types d'attaques supplémentaires dans l'AF associé : les *implicit attacks* et les *indirect attacks*.

Le système EAF est un autre système qui étend le cadre de Dung. Il présente une interprétation particulière du support : le support évidentiel. Une telle notion de support établit qu'un argument ne peut être accepté que s'il est supporté par une évidence.
Un argument spécial η est considéré dans le système EAF. Il ne peut pas être pris en compte – directement – dans les autres approches, rendant une comparaison juste impossible. Toutefois, des travaux ultérieurs ont montré qu'il existe une correspondance entre un EAF et un AFN. Nous nous sommes basés sur ces travaux pour convertir les EAF en des AFN et ainsi calculer l'acceptabilité des arguments par les sémantiques usuelles.

Toutes ces sémantiques correspondent à des intuitions diverses (et quelque peu contradictoires) de ce que pourrait être une relation de support. Elles capturent différents types d'interactions entre arguments, qui ne correspondent pas à des attaques. Malgré la multitude d'interprétations de la relation de support qui ont été introduites dans la littérature scientifique, nous avons constaté un manque d'analyse des propriétés attendues d'une relation de support. De ce fait, notre première piste de recherche a été de poser les bases d'une définition formelle de ce que doit être une relation de support en argumentation.

Notre étude axiomatique a consisté à recueillir les différentes propriétés et axiomes qui ont été proposés dans la littérature scientifique pour le relation de support. Cette étude a concerné un cadre plus large que celui des approches standard à base d'extensions. Un premier constat est qu'il existe un large ensemble d'axiomes et de propriétés qui ne sont pas toujours compatibles entre eux, certains de ces axiomes sont généraux tels que l'anonymat, l'indépendance, la directionnalité, etc. mais selon nous aucun axiome ne capture ce qu'est une relation de support. Même si quelques axiomes, tels que la bi-variate monotonie, ont visé à formaliser l'apport d'une relation de support, ils restent insuffisants pour caractériser une telle relation. C'est à partir de cette analyse que nous avons proposé, dans le chapitre 4, une nouvelle interprétation de la notion de support et nous avons formalisé la notion de *support monotone*. Nous avons introduit deux postulats pour décrire formellement cette nouvelle interprétation. Le premier postulat, appelé *monotonie*, empêche une relation de support de dégrader le statut d'acceptation de l'argument supporté. Le second postulat, appelé *non-trivialité*, requiert l'existence de BAF pour lequel soutenir un argument conduit à augmenter son statut d'acceptation. Ces deux axiomes définissent selon nous une base minimale pour qu'une relation soit considérée comme une relation de support monotone. Nous avons introduit également d'autres propriétés souvent désirables pour un concept de support, à savoir les propriétés Dung compatibilité, impact, strength impact et irrelevance. Elles caractérisent des sous-classes de sémantiques intéressantes ; toutefois, nous ne considérons pas ces propriétés comme obligatoires pour définir la notion de support monotone. Par la suite, nous avons réalisé une étude axiomatique de toutes les sémantiques étudiées à la lumière des propriétés proposées. Cette étude vise à mieux comprendre le comportement de chaque sémantique. Elle a montré qu'aucune des sémantiques pour le support introduites par BAS, DDS, AFN, EAF ou BUAF ne satisfait le postulat de la monotonie. Cela ne veut pas dire qu'il y a quelque chose qui ne va pas avec ces sémantiques ou qu'elles sont inutiles, mais simplement qu'elles capturent seulement d'autres intuitions que celles sur lesquelles se fonde le concept de support monotone. Recourir à une approche axiomatique, comme nous l'avons fait dans cette thèse en proposant des postulats pour caractériser une interprétation de la relation de support est très important pour obtenir une méthode fondée sur des principes permettant de définir, d'étudier et de comparer sur des bases formelles différentes propositions pour capturer les diverses intuitions sur la signification du terme « support ».

Au chapitre 5, nous avons introduit la famille des sémantiques *Support Score-Based (SSB)* qui vérifient les axiomes de la monotonie et de la non-trivialité. L'idée principale de ces sémantiques est de prendre en compte le degré d'acceptabilité de l'origine des supports pour calculer une valeur de score pour chaque extension. Ce qui permet de différencier entre l'origine des supports selon l'ordre $Sc > Cr > Rj$ des niveaux d'acceptation. Par exemple, un support reçu d'un argument Sc aura plus de valeur qu'un support reçu d'un argument Rj. Les SSB est une famille générale de sémantiques qui sont paramétrées par certaines fonctions d'agrégation et qui se basent sur le score des supports pour définir les extensions pour les BAF. Nous avons proposé des propriétés et nous avons prouvé un théorème de représentation reliant les axiomes qu'une sémantique SSB satisfait aux propriétés des fonctions d'agrégation utilisées pour la définir.

Au chapitre 6, nous avons introduit la famille de sémantiques à base de labellings, les sémantiques *Labelling Support Score-Based (LSSB)*, qui capturent aussi la notion de support monotone et qui ont pour utilité de donner un résultat plus fin qu'avec les sémantiques SSB. L'idée principale de ces sémantiques est de donner un résultat plus fin qu'avec les sémantiques SSB. Une caractéristique importante des sémantiques LSSB est qu'elles tirent parti des statuts de justification définis par les labellings pour considérer plus de classes d'arguments. En effet, en considérant les niveaux $\mathtt{I} > \mathtt{IU} > \mathtt{IOU} > \mathtt{U} > \mathtt{OU} > \mathtt{O}$ cela nous permet d'avoir une différenciation plus fine entre les statuts des arguments qu'avec les niveaux $Sc > Cr > Rj$. Ce qui permet de calculer une valeur de score plus précise que celle obtenu pour les sémantiques SSB. Nous avons également donné un théorème de représentation pour cette famille de sémantiques.

Le travail qui a fait l'objet de cette thèse ouvre plusieurs nouvelles pistes à explorer. Une première piste est relative à notre famille des sémantiques pour les BAF à base de labellings, et concerne la définition d'une nouvelle approche totalement basée sur les labellings, qui permet de définir la/les meilleure(s) labellings supportées. Une deuxième piste, consiste à explorer les possibilités de prendre en compte les votes sur les arguments et/ou les relations d'attaque et de support pour définir la/les meilleure(s) ensembles d'arguments d'un débat dans un cadre multi-agents.

Pour conclure, nous pensons qu'il y a beaucoup de place pour étudier et définir de nouvelles sémantiques de support intéressantes pour les BAFs, que ce soit dans un cadre étendu de Dung ou en redéfinissant le concept original d'admissibilité.

Bibliographie

[AMGOUD & BEN-NAIM 2013] Leila AMGOUD et Jonathan BEN-NAIM. « Ranking-based semantics for argumentation frameworks ». Dans *International Conference on Scalable Uncertainty Management*, pages 134–147. Springer, 2013. 1.1

[AMGOUD & BEN-NAIM 2016a] Leila AMGOUD et Jonathan BEN-NAIM. « Axiomatic foundations of acceptability semantics ». Dans *Proceedings of the 15th International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2016)*, page 2–11, Cape Town, South Africa, April 2016. AAAI Press.

[AMGOUD & BEN-NAIM 2016b] Leila AMGOUD et Jonathan BEN-NAIM. « Evaluation of Arguments from Support Relations : Axioms and Semantics ». Dans *Proceedings of the 25th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2016)*, pages 900–906, New York, USA, July 2016. AAAI Press.

[AMGOUD & BEN-NAIM 2018a] Leila AMGOUD et Jonathan BEN-NAIM. « Evaluation of arguments in weighted bipolar graphs ». *International Journal of Approximate Reasoning*, 99 :39–55, 2018. 3.4, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20

[AMGOUD & BEN-NAIM 2018b] Leila AMGOUD et Jonathan BEN-NAIM. « Weighted Bipolar Argumentation Graphs : Axioms and Semantics ». Dans *Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2018)*, pages 5194–5198, Stockholm, Sweden, July 2018. AAAI Press.

[AMGOUD *et al.* 2004] Leila AMGOUD, Claudette CAYROL, et Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX. « On the bipolarity in argumentation frameworks ». Dans *Proceedings of the 10th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR 2004)*, pages 1–10, Whistler, BC, Canada, June 2004. 1.1, 3, 3.1

[BARONI & GIACOMIN 2007] Pietro BARONI et Massimiliano GIACOMIN. « On principle-based evaluation of extension-based argumentation semantics ». *Artificial Intelligence*, 171(10-15) :675–700, 2007. 2.4

[BARONI & GIACOMIN 2009] Pietro BARONI et Massimiliano GIACOMIN. « Semantics of Abstract Argument Systems ». *Argumentation in Artificial Intelligence*, page 25, 2009. 2.2.8, 6.1

[BARONI *et al.* 2011] Pietro BARONI, Martin CAMINADA, et Massimiliano GIACOMIN. « An introduction to argumentation semantics ». *Knowledge Engineering Review*, 26(4) :365 – 410, 2011. 2.2, 2.27, 2.3.2, 2.4, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.45, 2.46, 2.47, 2.48, 2.4, 6.1

[BARONI *et al.* 2016] Pietro BARONI, Guido GOVERNATORI, et Régis RIVERET. « On labelling statements in multi-labelling argumentation ». Dans *Proceedings of the Twenty-second European Conference on Artificial Intelligence*, pages 489–497, 2016. 6.1

[BIRNBAUM *et al.* 1980] Lawrence BIRNBAUM, Margot FLOWERS, et Rod MCGUIRE. « Towards an AI model of argumentation ». Dans *Proceedings of the 1st Annual National Conference on Artificial Intelligence (AAAI 1980)*, pages 313–315, Stanford University, CA, USA, August 1980.

[BOELLA *et al.* 2010] Guido BOELLA, Dov M GABBAY, Leon van der TORRE, et Serena VILLATA. « Support in abstract argumentation ». Dans *Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Models of Argument (COMMA 2010)*, pages 40–51, Desenzano del Garda, Italy, September 2010. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS Press. 1.1, 3.2, 3.3.2

[BONZON *et al.* 2016a] Elise BONZON, Jérôme DELOBELLE, Sébastien KONIECZNY, et Nicolas MAUDET. « Argumentation Ranking Semantics Based on Propagation. ». *COMMA*, 16 :139–150, 2016. 1.1

[BONZON *et al.* 2016b] Elise BONZON, Jérôme DELOBELLE, Sébastien KONIECZNY, et Nicolas MAUDET. « A comparative study of ranking-based semantics for abstract argumentation ». Dans *Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2016. 1.1

[BONZON *et al.* 2018] Elise BONZON, Jérôme DELOBELLE, Sébastien KONIECZNY, et Nicolas MAUDET. « Combining extension-based semantics and ranking-based semantics for abstract argumentation ». Dans *Sixteenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 2018. 6.2, 6.3

[BOUDHAR *et al.* 2012] Imane BOUDHAR, Farid NOUIOUA, et Vincent RISCH. « Handling Preferences in Argumentation Frameworks with Necessities. ». Dans *ICAART (1)*, pages 340–345, 2012. 3.3.3

[CAMINADA & PIGOZZI 2011] Martin CAMINADA et Gabriella PIGOZZI. « On judgment aggregation in abstract argumentation ». *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 22(1) :64 – 102, 2011. 2.2.6, 2.2.9

[CAMINADA *et al.* 2012] Martin WA CAMINADA, Walter A CARNIELLI, et Paul E DUNNE. « Semi-stable semantics ». *Journal of Logic and Computation*, 22(5) :1207–1254, 2012. 2.2, 2.2.5

[CAMINADA 2006a] Martin CAMINADA. « On the issue of reinstatement in argumentation ». Dans *European Workshop on Logics in Artificial Intelligence*, pages 111–123. Springer, 2006. 2.2.9, 2.3, 2.3.2, 2.3.2, 6.1

[CAMINADA 2006b] Martin CAMINADA. « Semi-stable semantics ». *COMMA*, 144 :121–130, 2006. 2.2.5, 2.5

[CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2005] Claudette CAYROL et Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX. « On the acceptability of arguments in bipolar argumentation frameworks ». Dans *Proceedings of the 8th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU 2005)*, pages 378–389, Barcelona, Spain, July 2005. Springer. 1.1, 3, 3.2, 3.3.1, 3.3.3

[CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2009] Claudette CAYROL et Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX. « Bipolar abstract argumentation systems ». *Argumentation in Artificial Intelligence*, pages 65–84, 2009.

[CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2010] Claudette CAYROL et Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX. « Coalitions of arguments : A tool for handling bipolar argumentation frameworks ». *International Journal of Intelligent Systems*, 25(1) :83–109, 2010.

[CAYROL & LAGASQUIE-SCHIEX 2013] Claudette CAYROL et Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX. « Bipolarity in argumentation graphs : Towards a better understanding ». *International Journal of Approximate Reasoning*, 54(7) :876–899, 2013. 3.3.1

[COHEN *et al.* 2012] Andrea COHEN, Alejandro J GARCÍA, et Guillermo R SIMARI. « Backing and undercutting in abstract argumentation frameworks ». Dans *Proceedings of the 7th International Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems (FoIKS 2012)*, pages 107–123, Kiel, Germany, March 2012. Springer. 1.1, 3.2, 3.3.4

[COHEN *et al.* 2014] Andrea COHEN, Sebastian GOTTIFREDI, Alejandro J GARCÍA, et Guillermo R SIMARI. « A survey of different approaches to support in argumentation systems ». *The Knowledge Engineering Review*, 29(5) :513–550, 2014.

[COHEN 1987] Robin COHEN. « Analyzing the structure of argumentative discourse ». *Computational linguistics*, 13(4) :11–24, 1987.

[COSTE-MARQUIS *et al.* 2005] Sylvie COSTE-MARQUIS, Caroline DEVRED, et Pierre MARQUIS. « Prudent semantics for argumentation frameworks ». Dans *17th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI'05)*, pages 5–pp. IEEE, 2005. 2.2, 2.2.7, 2.3, 2.2.9

[COSTE-MARQUIS *et al.* 2012] Sylvie COSTE-MARQUIS, Sébastien KONIECZNY, Pierre MARQUIS, et Mohand Akli OUALI. « Selecting extensions in weighted argumentation frameworks ». Dans *Proceedings of the 4th International Conference on Computational Models of Argument (COMMA 2012)*, pages 342–349, Vienna, Austria, September 2012. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS Press.

[DUNG *et al.* 2007] Phan Minh DUNG, Paolo MANCARELLA, et Francesca TONI. « Computing ideal sceptical argumentation ». *Artificial Intelligence*, 171(10-15) :642–674, 2007. 2.2, 2.2.6, 2.16, 2.6

[DUNG 1995] Phan Minh DUNG. « On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games ». *Artificial intelligence*, 77(2) :321–357, 1995. 1.1, 2, 2.1, 2.1, 2.2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.2.9, 2.2.9, 3

[DUNNE *et al.* 2011] Paul E. DUNNE, Anthony HUNTER, Peter MCBURNEY, Simon PARSONS, et Michael WOOLDRIDGE. « Weighted argument systems : Basic definitions, algorithms, and complexity results ». *Artificial Intelligence*, 175(2) :457 – 486, 2011.

[EĞILMEZ *et al.* 2013] Sinan EĞILMEZ, Joao MARTINS, et Joao LEITE. « Extending social abstract argumentation with votes on attacks ». Dans *Proceedings of the International Workshop on Theorie and Applications of Formal Argumentation (TAFA 2011)*, pages 16–31. Springer, 2013.

[GROSSI & MODGIL 2015] Davide GROSSI et Sanjay MODGIL. « On the Graded Acceptability of Arguments ». Dans *Proceedings of the 24th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2015)*, pages 868–874, Buenos Aires, Argentina, July 2015. AAAI Press.

[JAKOBOVITS & VERMEIR 1999] Hadassa JAKOBOVITS et Dirk VERMEIR. « Robust semantics for argumentation frameworks ». *Journal of logic and computation*, 9(2) :215–261, 1999. 6.1

[KARACAPILIDIS & PAPADIAS 2001] Nikos KARACAPILIDIS et Dimitris PAPADIAS. « Computer supported argumentation and collaborative decision making : the HERMES system ». *Information systems*, 26(4) :259–277, 2001. 3

[KONIECZNY *et al.* 2015] Sébastien KONIECZNY, Pierre MARQUIS, et Srdjan VESIC. « On Supported Inference and Extension Selection in Abstract Argumentation Frameworks ». Dans *Proceedings of the 13th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2015)*, pages 49–59, Compiégne, France, July 2015. Springer.

[LEITE & MARTINS 2011] Joao LEITE et Joao MARTINS. « Social abstract argumentation ». Dans *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2011)*, pages 2287–2292, Barcelona, Spain, July 2011. 1.1

[NOUIOUA & RISCH 2011] Farid NOUIOUA et Vincent RISCH. « Argumentation frameworks with necessities ». Dans *Proceedings of the 5th International Conference on Scalable Uncertainty Management (SUM 2011)*, pages 163–176, Dayton, OH, USA, October 2011. Springer. 1.1, 3.2, 3.3.3, 3.3.3

[NOUIOUA 2013] Farid NOUIOUA. « AFs with necessities : further semantics and labelling characterization ». Dans *Pro-*

ceedings of the 7th International Conference on Scalable Uncertainty Management (SUM 2013), pages 120–133, Washington, DC, USA, September 2013. Springer. 3.2, 3.3.3, 3.3.3

[OREN & NORMAN 2008] Nir OREN et Timothy J NORMAN. « Semantics for evidence-based argumentation ». Dans *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Models of Argument (COMMA 2008)*, pages 276–284, Toulouse, France, May 2008. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS Press. 1.1, 3.3.5

[OREN *et al.* 2010] Nir OREN, Michael LUCK, et Chris REED. « Moving between argumentation frameworks ». Dans *Proceedings of the 2010 International Conference on Computational Models of Argument*. IOS Press, 2010.

[POLBERG & OREN 2014] Sylwia POLBERG et Nir OREN. « Revisiting Support in Abstract Argumentation Systems. ». Dans *COMMA*, pages 369–376, 2014. 3.3.5, 3.1

[RIVERET *et al.* 2018] Régis RIVERET, Pietro BARONI, Yang GAO, Guido GOVERNATORI, Antonino ROTOLO, et Giovanni SARTOR. « A labelling framework for probabilistic argumentation ». *Annals of mathematics and artificial intelligence*, 83(1) :21–71, 2018. 6.1

[TOULMIN 1958] Stephen E. TOULMIN. *The uses of argument*. Cambridge university press, 1958.

[VAN DER TORRE & VESIC 2018] Leon van der TORRE et Srdjan VESIC. « The Principle-Based Approach to Abstract Argumentation Semantics ». *Handbook of Formal Argumentation*, pages 797–837, 2018. 2.4

[VERHEIJ 1996] Bart VERHEIJ. « Two approaches to dialectical argumentation : admissible sets and argumentation stages ». Dans *Proceedings of National Association of Insurance Commissioners (NAIC 1996)*, pages 357–368, June 1996. 2.2.5

[VERHEIJ 2003] Bart VERHEIJ. « Deflog : on the logical interpretation of prima facie justified assumptions ». *Journal of Logic and Computation*, 13(3) :319–346, 2003. 3

[WU *et al.* 2010] Yining WU, Martin CAMINADA, et Mikotaj PODLASZEWSKI. « A labelling-based justification status of arguments ». *Studies in Logic*, 3(4) :12–29, 2010. 6.2

Abstract

The bipolar argumentation framework (BAF) is an extension of Dung's setting for abstract argumentation, that considers an additional relation, called support relation. The study of semantics that take into account supports between arguments is quite recent. Several interpretations of such a support relation have been pointed out so far, and there is still no clear consensus of what a semantics taking into account supports should look like. All those semantics correspond to various (and somewhat conflicting) intuitions of what a support could be : deductive support, necessary support, evidential support, etc. Indeed, these semantics capture different kinds of interaction between arguments, that do not correspond to attacks. For example, a deductive support expresses a relation of implication between arguments, rather than a positive contribution (aid) from one argument to another. The purpose of this thesis is to study the notion of support in abstract argumentation.

We start by proposing a new interpretation of the concept of support and make formal a notion of "monotonic support". Two postulates for capturing this new interpretation are introduced. The first one, called monotony, prevents a support from downgrading the acceptance status of a supported argument. The second one, called non-triviality, requires the existence of BAFs for which supporting an argument leads to increase its acceptance status. Imposing this postulate prevents from considering as an acceptable semantics for BAFs any semantics that would simply ignore the support relation. We also introduce additional postulates, that we do not consider mandatory for the notion of monotonic support. Then, we compare axiomatically all these semantics with respect to the proposed properties aiming to better understand the behavior of each semantics.

We present a general family of extension-based semantics for BAFs, called "support score-based (SSB)" semantics, that capture the notion of monotonic support and are parameterized by some aggregation functions. We prove a characterization result linking the postulates that a SBB semantics satisfies with the properties of the aggregation functions used to define it.

At last, we introduce the family of labelling-based semantics for BAFs, called "Labelling Support Score-Based (LSSB)" semantics, that also capture the notion of monotonic support and which have the utility of giving a finer result than with SSB semantics. We also prove a characterization result for this family of semantics.

Keywords: Argumentation, Abstract Argumentation, Bipolarity, Support-Knowledge Representation and Reasoning, Artificial Intelligence.

Résumé

Le système d'argumentation bipolaire (BAF) est une extension du cadre de Dung pour l'argumentation abstraite qui prend en compte une relation supplémentaire, appelée relation de support. L'étude des sémantiques qui considèrent les supports entre arguments est assez récente. Plusieurs sémantiques ont été proposées dans le cadre bipolaire, mais il n'y a pas encore de consensus clair sur ce à quoi devrait ressembler une sémantique prenant en compte la notion de support. Toutes ces sémantiques correspondent à des intuitions diverses (et quelque peu contradictoires) de ce que pourrait être une relation de support : support déductif, de nécessité, évidentiel, etc. En effet, elles capturent différents types d'interactions entre arguments, qui ne correspondent pas à des attaques. Par exemple, le support déductif exprime une relation d'implication entre arguments, plutôt qu'une contribution positive (aide) d'un argument à un autre. Le but de cette thèse est d'étudier la notion de support en argumentation abstraite.

Nous commençons par proposer une nouvelle interprétation de la notion de support et formalisons la notion de support monotone. Nous introduisons deux axiomes pour capturer cette nouvelle interprétation. Le premier, monotonie, empêche une relation de support de dégrader le statut d'acceptation de l'argument supporté. Le second, non-trivialité, nécessite l'existence de BAF pour lequel soutenir un argument conduit à augmenter son statut d'acceptation. Nous introduisons également d'autres axiomes, que nous ne considérons pas comme obligatoires pour la notion de support monotone. Ensuite nous comparons axiomatiquement toutes ces sémantiques à la lumière des propriétés proposées visant à mieux comprendre le comportement de chaque sémantique.

Par la suite, nous présentons une famille générale de sémantiques à base d'extensions, les sémantiques "Support Score-Based (SSB)", qui capturent la notion de support monotone et qui sont paramétrées par certaines fonctions d'agrégation. Nous donnons un théorème de représentation reliant les axiomes qu'une sémantique SBB satisfait aux propriétés des fonctions d'agrégation utilisées pour la définir.

Enfin, nous introduisons la famille de sémantiques à base de labellings, les sémantiques "Labelling Support Score-Based (LSSB)", qui capturent aussi la notion de support monotone et qui ont pour utilité de donner un résultat plus fin qu'avec les sémantiques SSB. Nous donnons également un théorème de représentation pour cette famille de sémantiques.

Mots-clés: Argumentation, Argumentation Abstraite, Bipolarité, Support, Représentation de connaissances et raisonnements, Intelligence Artificielle.