



UNIVERSITÉ DES ANTILLES

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DES ANTILLES

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

intitulée

Existence et non-existence de solutions pour une classe de systèmes elliptiques avec opérateurs non-linéaires

présentée et soutenue par

NABAB Dany

le 06/12/2021 devant le jury ci-dessous

Michel	GEOFFROY	Professeur	Université des Antilles	Président
Gisèle	MOPHOU-LOUDJOM	Professeur	Université des Antilles	Examineur
Abdellaoui	BOUMEDIENE	Professeur	Université de Tlemcen	Rapporteur
Jacques	GIACOMONI	Professeur	Université de Pau	Rapporteur
Abdelkrim	MOUSSAOUI	Professeur	Université de Bejaia	Co-directeur de thèse
Jean	VELIN	Professeur	Université des Antilles	Directeur de thèse

École Doctorale et spécialité :

ED589 - Milieu insulaire tropical à risques : protection, valorisation, santé et développement.

Unité de recherche :

LAMIA : Laboratoire de Mathématiques et d'Informatique Appliquées.

CHAPITRE 0 — Introduction générale	8
0.1 Positionnement de la thèse	9
0.2 Quelques études antérieures	9
0.3 Exemples de phénomènes associés aux problèmes étudiés	13
0.4 Notations	24
0.5 Espaces à exposants variables	27
0.6 Organisation générale de l'étude	30
 CHAPITRE 1 — Résultat d'existence avec le degré topologique de Berkovits	32
1.1 A propos de la notion de degré topologique	33
1.2 Hypothèses	36
1.3 Résultats principaux	36
1.4 Définitions et résultats préliminaires	37
1.5 Quelques éléments de base	42
1.6 Existence d'au moins une solution pour le problème (1.5)	45
 CHAPITRE 2 — Résultat d'existence avec la méthode des sous- et sur-solutions	57
2.1 A propos du théorème de point fixe de Schauder et de la méthode des sous- et sur-solutions	58
2.2 Positionnement et traitement du problème	61
2.3 Résultats préliminaires	62
2.4 Construction et comparaison des sous- et sur-solutions	73
2.5 Preuve du résultat principal	79
 CHAPITRE 3 — Non-existence avec singularités	85
3.1 Cas non convectif	86
3.2 Cas convectif	90

CHAPITRE 4 — Perspectives	94
4.1 Estimation globale du gradient pour un problème singulier convectif	94
4.2 Sur- et sous-solutions pour un système convectif sans singularités	112
ANNEXE A — Propriété liée à la première valeur propre du $p(x)$-Laplacien	123
A.1 État du sous-espace propre associé à une valeur propre du $p(x)$ -Laplacien.	124
A.2 Invariance du signe des premières fonctions propres	125
A.3 Une inégalité de type Diaz et Saa	125
A.4 Un résultat lié à l'isolation	128
A.5 Preuve du Théorème A.0.1	130
ANNEXE B — Théorème de la Valeur Moyenne	131
B.1 Un théorème de la Valeur Moyenne	131
B.2 Preuve du Théorème B.3.1	136
B.3 État du sous-espace propre associé à la valeur propre du $p(x)$ -Laplacien	138
B.4 Preuve du Théorème B.3.1	140
CHAPITRE C — Autres résultats de base	142

Dans cette thèse, nous proposons des résultats d'existence et de non-existence pour les solutions de systèmes d'équations elliptiques convectifs et fortement couplés, pour lesquels les termes de diffusion sont modélisés par des opérateurs quasi-linéaires à exposants variables, tel que le pseudo-Laplacien. Ces systèmes présentent également des termes sources avec des singularités. Des études sur la régularité et le comportement des solutions y sont également consacrées. Notre approche est basée essentiellement sur le degré topologique de Berkovits, le théorème du point fixe de Schauder, ainsi que la méthode des sous-et-sur-solutions.

Précisément, dans le Chapitre 1, nous nous intéressons à l'existence de solutions non-triviales pour une classe de systèmes elliptiques quasi-linéaires à exposants variables et présentant des termes de convection. Notre approche est basée essentiellement sur l'application du récent degré topologique de Berkovits.

Dans le Chapitre 2, nous considérons des systèmes convectifs à exposants variables plus généraux, qui présentent éventuellement des singularités à l'origine. Ces dernières se caractérisent par la présence de non-linéarités qui explosent au bord du domaine. L'existence de solutions positives est obtenue en combinant la méthode des sur- et sous-solutions avec le théorème du point fixe de Schauder. Cela nécessite non seulement des estimations a priori sur les solutions mais aussi un contrôle sur leur gradient du fait de la convection. Par ailleurs, il est important de noter que le recours au théorème des valeurs intermédiaires est fondamental afin de parer à l'absence de propriétés importantes telles que l'homogénéité. Cette dernière constitue un obstacle majeur dans l'obtention des estimations a priori ainsi que dans la construction des sous et sur solutions.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de l'absence de solutions pour des problèmes elliptiques quasi-linéaires et singuliers, à exposants variables. Les résultats obtenus sont basés sur les propriétés spectrales de l'opérateur $p(x)$ -Laplacien.

La thèse s'achève par le chapitre 4. Au vu des résultats obtenus dans les chapitres précédents, nous précisons des études, nécessitant des approches nouvelles et plus approfondies, qui pourront être proposées et abordées ultérieurement. Cependant, dans certaines situations, nous montrons que nous pouvons apporter un début de réponse.

Dans le but d'alléger la lecture du manuscrit, nous regroupons dans des sections annexes un certain nombre de résultats fondamentaux, mais assez denses en raisonnement. Ces résultats portent sur les propriétés spectrales du $p(x)$ -Laplacien et une variante du théorème de la Valeur

Moyenne.

Mots clés : Problème elliptique non-linéaire,
Système elliptique singulier,
Espaces de Lebesgue et de Sobolev généralisés,
Pseudo-Laplacien à exposants variables,
Degré topologique.

Classifications : $35J60$, $46E35$, $47J05$, $47H11$

ABSTRACT

In this thesis, we provide existence and non-existence results for solutions of systems of convective elliptic equations and strongly coupled, for which the diffusion terms are governed by quasi-linear operators with variable exponents such as pseudo-Laplacian. These systems also present source terms with singularities. Our approach is based essentially on the topological degree of Berkovits, the fixed-point theorem of Schauder, as well as the method of lower-and-upper-solutions.

Precisely, in Chapter 1, we are interested in the existence of solutions of non-trivial solutions for a class of quasi-linear elliptic systems involving variable exponents and convection terms. Our approach is based essentially on the recent topological degree of Berkovits.

In Chapter 2, we study more general convective systems involving variable exponents, and presenting eventually singularities at the origin. The latter are characterized of non-linearities which blow-up at the boundary of the domain. The existence of positive solutions is obtained by combining the upper-and-lower solutions with Schauder's fixed-point theorem. This requires not only a priori estimation of the solutions but also a control on their gradient due to convection. Moreover, it is worth noting that the use of the Mean Value Theorem is crucial in order to ward off the absence of important properties such as homogeneity. The latter constitutes a major obstacle in obtaining a priori estimates as well as in the construction of upper-and-lower solutions.

Chapter 3 is devoted to the study of the non-existence of solutions for quasi-linear and singular elliptic problems with variable exponents. The results obtained are based on the spectral properties of the $p(x)$ -Laplacian operator.

The thesis concludes with chapter 4. Based on the results obtained in the previous chapters, we have identified studies that require new and more in-depth approaches, that can be proposed and addressed in the future. However, we show that one can provide a beginning of answer in certain cases.

In order to simplify the reading of the manuscript, we group in appendices some fundamental results, but rather dense in reasoning. These results are related to the spectral properties of $p(x)$ -Laplacian and a variant of the Mean Value Theorem.

Keywords : Non-linear elliptic problem,
Singular elliptic system,
Generalized Lebesgue and Sobolev spaces,
Pseudo-Laplacian with variable exponents,
Topological degree.

Classifications : $35J60, 46E35, 47J05, 47H11$

REMERCIEMENTS

Pour débiter, je voudrais remercier toutes celles et ceux qui se sont impliqués durant toute la phase de préparation de ma thèse.

Des remerciements au Professeur Jean VAILLANT (ex- directeur de l'École Doctorale), qui m'a apporté l'aide logistique nécessaire pour débiter la thèse.

De sincères remerciements à Messieurs les Professeurs Jean VELIN et Abdelkrim MOUSSAOUI, pour avoir respectivement, dirigé et co-dirigé mes travaux de thèse. Ils y ont investi énormément d'efforts personnels.

Je remercie également Messieurs les Professeurs Jacques GIACOMONI et Abdellaoui BOUMEDIENE qui ont contribué à travers leurs remarques à l'amélioration de la rédaction de mon manuscrit de thèse.

Je n'oublie pas le Laboratoire LAMIA en la personne de son Directeur le Professeur Michel GEOFFROY, ainsi que l'École doctorale ED589. Grâce à leur implication, une bourse doctorale (MESR) m'a été allouée par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche. Ce support financier m'a été d'une aide précieuse tout au long de mes trois années de thèse.

Bien évidemment, je ne saurais terminer sans adresser de vives remerciements à ma famille, en commençant par ma mère, pour le réconfort quotidien, tant physique que mental, et l'encouragement qu'elle m'a apportés. Mes remerciements à son adresse ne seront jamais suffisants. J'adresse aussi une pensée en ce sens au reste de ma famille. La présence de tout ce petit monde me fut très précieuse par dessus tout.

La collaboration et le soutien moral de mon collègue de bureau, le Docteur Endrick BARNACIN, m'ont permis d'être à l'aise au travail. Enfin, que tout le Département de Mathématiques et Informatique, dirigé par le Professeur Pascal POULLET, trouve en ses termes toute ma gratitude pour l'hospitalité qui a été manifestée à mon égard.

Encore une fois, merci à tous.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Contents

0.1	Positionnement de la thèse	9
0.1.1	Présentation des problèmes étudiés	9
0.2	Quelques études antérieures	9
0.2.1	Travaux liés aux problèmes non convectifs	9
0.2.2	Travaux liés aux problèmes convectifs	10
0.3	Exemples de phénomènes associés aux problèmes étudiés	13
0.3.1	Restauration d'images	13
0.3.2	Modélisation de fluides électrorhéologiques	14
0.3.3	Modèles de réaction avec coefficients stoechiométriques constants . . .	16
0.3.4	Modèles de réaction avec coefficients stoechiométriques variables . . .	17
0.3.5	Modèles de réaction coopérative et compétitive	18
0.3.6	Modèles de réaction-diffusion	20
0.3.7	Modèles de réaction-diffusion-convection	21
0.3.8	Mouvement d'un gaz	22
0.3.9	Connexion de ces thématiques à notre problème	23
0.4	Notations	24
0.4.1	Notations basiques	24
0.4.2	Espaces de Orlicz	25
0.4.3	Produit cartésien d'espaces de Orlicz	26
0.4.4	Autres espaces	27
0.5	Espaces à exposants variables	27
0.5.1	Éléments de base	27
0.5.2	Propriétés basiques de espaces de Orlicz modulaires	28
0.6	Organisation générale de l'étude	30

0.1 Positionnement de la thèse

0.1.1 Présentation des problèmes étudiés

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'existence et la non-existence de solutions pour des équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2), & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2), & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $-\Delta_{p_i(x)} = -\operatorname{div}(|\nabla(\cdot)|^{p_i(x)-2} \nabla(\cdot))$, $i = 1, 2$ sont des opérateurs, et $f_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) sont des applications. Le système $(\mathcal{S})$ implique de fortes non-linéarités dues à la présence de puissances variables en u_1, u_2 et $\nabla u_1, \nabla u_2$. Ces fortes non-linéarités, ainsi que la présence de termes gradients, ou termes de convection, dans les termes sources f_i , compliquent l'utilisation des méthodes classiques, telles que méthodes variationnelles ou les méthodes dites topologiques. De plus, compte tenu de la non validité de certaines propriétés telles que la compacité, due à la structure des applications f_i , nos méthodes seront basées sur l'adaptation de nouveaux concepts, tel que le degré topologique de Berkovits[Ber07b], ainsi que l'utilisation du point fixe de Schauder[GT98] et la méthode des sur- et sous-solutions[Kel69, AM71].

0.2 Quelques études antérieures

Les systèmes tels que $(\mathcal{S})$ ont largement été investigués depuis les dernières décennies. En effet, ils interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes complexes rencontrés dans divers domaines scientifiques, et constituent un défi en termes d'étude mathématique.

0.2.1 Travaux liés aux problèmes non convectifs

Pour les systèmes à deux EDPs dont les termes sources ne dépendent pas du gradient, i.e. les problèmes du type

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = f(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = g(x, u_1, u_2) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

les auteurs Alves et Moussaoui [AM18] se sont intéressés au cas suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = \lambda |u_1|^{\alpha_1(x)} |u_2|^{\beta_1(x)} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = \lambda |u_1|^{\alpha_2(x)} |u_2|^{\beta_2(x)} & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

sous les conditions $\alpha_2^-, \beta_1^- > 0$ (resp. $\alpha_2^+, \beta_1^+ < 0$) et $\alpha_1^+, \beta_2^+ < 0$ (resp. $\alpha_1^-, \beta_2^- < 0$) appelée structure coopérative (resp. structure compétitive). Leurs résultats d'existence ont été établis à l'aide de la méthode des sur- et sous-solutions, combinée au point fixe de Schauder. D'autres résultats ont été obtenus par Saifia et Vélin[SV14], qui ont étudié le système

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = c(x) u_1 |u_1|^{\alpha(x)-1} |u_2|^{\beta(x)} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = c(x) |u_1|^{\alpha(x)} u_2 |u_2|^{\beta(x)-1} & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

au moyen de la méthode de fibrage, basée sur les travaux de Pohozaev. Finalement, ce problème fut encore généralisé par Vélin[Vé16], qui a considéré le cas suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = c(x) u_1 |u_1|^{\alpha(x)-1} |u_2|^{\beta(x)} + f(x) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = c(x) |u_1|^{\alpha(x)} u_2 |u_2|^{\beta(x)-1} + g(x) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et a prouvé l'existence d'au moins une solution, en établissant explicitement une paire de sous-et-sur-solutions de type radiale et en exploitant la monotonie d'opérateurs associés au système.

0.2.2 Travaux liés aux problèmes convectifs

Dans le cas scalaire, les problèmes elliptiques quasi-linéaires avec dépendance en le gradient du type

$$-\Delta_{p(x)} u = f(x, u, \nabla u) \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

ont fait l'objet d'un grand intérêt ces 30-40 dernières années, depuis les travaux pionniers de Kazdan et Kramer [KK78]. La méthode des sous-et-sur-solutions, basée sur le principe du maximum de Choquet-Bruhat et Leray[CBL72] et Kramer[Kra78], a été appliquée par [KK78] pour montrer l'existence de solutions pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = cu + F(x) + |\nabla u|^2 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cependant, les méthodes variationnelles ne peuvent être appliquées aux problèmes du type (1), même lorsque l'exposant $p(x)$ est une fonction constante. Puisque les non-linéarités ne dérivent pas d'un potentiel ou encore qu'aucune fonctionnelle énergie ne peut être associée à (1) (voir Girardi et al.[DFGM04], ou encore Motreanu et al.[CLM07]). Ceux-ci sont souvent étudiés via le théorème de point fixe, avec des approximations sur des sous-espaces de dimension finie, voir Gallouët et al.[FMM14], Le et al.[Tan13], Gallouët et al.[BGO97], ou encore via des arguments blow-up, voir Iturriaga et Louca[IL07], Montenegro[MM00] ou Ruiz[Rui04]. A cela, l'homogénéité, bien connue pour le p -Laplacien, tombe en défaut lorsque p est non constant ce qui rend difficilement applicables les propriétés usuelles sur les espaces de Sobolev, voir Ekinoglu et Ayazoglu[AE16]. Par ailleurs, pour traiter ce problème, de nombreux travaux ont été établis sur des espaces adéquats, à savoir les espaces de Orlicz-Lebesgue $L^{p(x)}$, les espaces de Orlicz-Sobolev $W^{1,p(x)}$, et plus généralement les espaces de Orlicz-Muzielak $W^{m,p(x)}$, présentant de meilleures propriétés lorsqu'ils sont équipés de la norme de Luxembourg, qui généralise la norme classique de Lebesgue (voir la section 0.5 pour plus de détails sur ces nouveaux espaces). Dans [LZZ14], en se basant sur les travaux de Garcia-Melian et al.[AGMQ12], Betle et Giarrusso [BG96], Giarrusso[Gia00] et Zhang[Zha06], Girardi et al. ont prouvé l'existence de solutions radiales de type blow-up sur le bord pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + f(x, u) = \rho(x, u) + K(|x|) |\nabla u|^{\delta(|x|)} & \text{sur } \Omega \\ u(x) \rightarrow +\infty & \text{when } d(x, \partial\Omega) \rightarrow 0, \end{cases}$$

en combinant la méthode des sur- et sous-solutions et celle du point fixe de Schauder. Pour plus d'informations sur la méthode des sur- et sous-solutions pour des problèmes non-linéaires avec

dépendance en le gradient, le lecteur peut consulter Le et al.[CLM07]. Récemment, Ekincioglu et Ayazoglu[AE16] ont prouvé l'existence d'une solution positive pour l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) + |u|^{p(x)-2} u = f(x, u, |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Dans cette étude, les auteurs ont considéré une famille de problèmes auxiliaires sans termes gradients, puis ont utilisé des méthodes variationnelles de type passe-montagne, en s'inspirant des travaux de Girardi et al.[DFGM04] et Figueiredo[DF08].

Récemment, les auteurs Ait Hammou et al.[HAL19] ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{p(x)-2} u + f(x, u, \nabla u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où un résultat d'existence de solutions a été obtenu à l'aide du degré topologique de Berkovits. Pour les systèmes à deux EDPs avec dépendance du gradient dans les termes sources, i.e. les systèmes du type (S), les exposants p_i ($i = 1, 2$) sont considérés constants dans la littérature, de même que les exposants intervenant dans la croissance polynomiale des termes sources f_i ($i = 1, 2$), et à notre connaissance, le cas où tous ces exposants sont variables n'a pas encore été considéré. Par exemple, Carl et Motreanu [CM15a] ont étudié en 2007 le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \text{ sur } \Omega \\ -\Delta_{p_2} u_2 = f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \text{ sur } \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

sous la condition de bord de Dirichlet, et les conditions suivantes

$$\begin{cases} |f_1(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq \rho_1(x) + c_1 \left(|\xi_1|^{p_1-1} + |\xi_2|^{\frac{p_2}{p_1}} \right) \\ |f_2(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq \rho_2(x) + c_2 \left(|\xi_1|^{\frac{p_1}{p_2}} + |\xi_2|^{p_2-1} \right) \\ c_i > 0 \ (i = 1, 2), \rho_i \in L_+^{p'_i}, 1 < p_i < \infty \ (i = 1, 2), \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ borné,} \end{cases}$$

Ils ont prouvé l'existence de solutions de deux façons, l'une en adoptant une approche topologique (plus précisément la théorie des opérateurs pseudo-monotones, combinée avec des résultats de régularité dus à Cianchi et Maz'ya), l'autre en adoptant une approche variationnelle (basée sur la construction d'une suite de régions pièges avec le principe du maximum de Pucci-Serrin). Plus tard, en 2017, Motreanu, Moussaoui et Zhang[MMZ17] ont étudié le système (3) sous la condition de bord de Dirichlet, et les conditions suivantes

$$\begin{cases} m_1 (s_1 + |\xi_1|)^{\alpha_1} (s_2 + |\xi_2|)^{\beta_1} \leq f_1(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_1 (s_1 + |\xi_1|)^{\alpha_1} (s_2 + |\xi_2|)^{\beta_1} \\ m_2 (s_1 + |\xi_1|)^{\alpha_2} (s_2 + |\xi_2|)^{\beta_2} \leq f_2(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_2 (s_1 + |\xi_1|)^{\alpha_2} (s_2 + |\xi_2|)^{\beta_2} \\ m_i, M_i > 0 \ (i = 1, 2), \alpha_2, \beta_1 < 0 < \alpha_1, \beta_2, \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ borné.} \end{cases}$$

Les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution positive au moyen du théorème de point fixe de Schauder, avec la méthode des sous-et sur-solutions. L'année suivante, le problème (3) a été repris par Motreanu, Vetro et Vetro[MVV18] sous la condition de bord de Dirichlet, et les

conditions suivantes suivantes

$$\begin{cases} |f_1(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq \sigma_1(x) + b_1 \left(|\xi_1|^{\beta_1} + |\xi_2|^{\frac{\beta_1 p_2}{p_1}} \right) \\ |f_2(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq \sigma_2(x) + b_2 \left(|\xi_1|^{\frac{\beta_2 p_1}{p_2}} + |\xi_2|^{\beta_2} \right) \\ b_i, \beta_i \geq 0 \ (i = 1, 2), \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert borné.} \end{cases}$$

Les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution, avec la méthode des sous-et sur-solution et le théorème des opérateurs pseudo-monotones [CLM07, Théorème 2.99]. Par la suite, en 2020, Candito, Livrea et Moussaoui [CLM20] ont étudié le système (3) sous la condition de bord de Dirichlet, et les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} m_1 s_1^{\alpha_1} s_2^{\beta_1} \leq f_1(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_1 s_1^{\alpha_1} s_2^{\beta_1} + |\xi_1|^{\gamma_1} + |\xi_2|^{\theta_1} \\ m_2 s_1^{\alpha_2} s_2^{\beta_2} \leq f_2(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_2 s_1^{\alpha_2} s_2^{\beta_2} + |\xi_1|^{\gamma_2} + |\xi_2|^{\theta_2} \\ m_i, M_i, \gamma_i, \theta_i > 0 \ (i = 1, 2), \alpha_1, \beta_2 < 0 < \beta_1, \alpha_2, \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert borné.} \end{cases}$$

Les auteurs ont utilisé le théorème de point fixe de Schauder, avec la méthode des sous-et sur-solutions, pour prouver l'existence d'une solution au problème. L'année suivante, Guarnotta et Marano [GM21] se sont intéressés au problème (3) sous les conditions suivantes

$$\begin{cases} |f_1(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq a_1(x) s_1^{\alpha_1} s_2^{\beta_1} + b_1(x) \left(|\xi_1|^{\gamma_1} + |\xi_2|^{\delta_1} \right) + c_1(x) \\ |f_2(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)| \leq a_2(x) s_1^{\alpha_2} s_2^{\beta_2} + b_2(x) \left(|\xi_1|^{\gamma_2} + |\xi_2|^{\delta_2} \right) + c_2(x) \\ a_i, b_i, c_i \in L^\infty(\Omega), \alpha_1, \beta_2 < 0 < \beta_1, \alpha_2, \gamma_i, \delta_i \ (i = 1, 2), \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert borné.} \end{cases}$$

Les auteurs ont prouvé l'existence d'une infinité de solutions, grâce au théorème de point fixe de Schauder et à la méthode des sous- et sur-solutions.

0.3 Exemples de phénomènes associés aux problèmes étudiés

Dans cette section, nous montrons comment il est possible d'obtenir, à partir d'un problème concret, un modèle d'EDPs du type (S) , en particulier dans les domaines de l'informatique, de la chimie et de la biologie, à travers plusieurs champs différents, à savoir :

- La restauration d'images, basée sur la recherche d'une image parfaite à partir d'une image bruitée. Cette étude fut associée pour la première fois, par les auteurs Chen, Levine et Rao au début des années 2000, à la recherche de solutions d'une classe d'EDPs elliptiques, faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien ;
- Les fluides électrorhéologiques, i.e. les fluides qui changent leur propriétés chimiques lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique. Ce champ a récemment été développé par les auteurs Rajagopal et Ruzicka dans les années 90, et a donné naissance à l'étude des problèmes de diffusion avec exposants variables. Ces problèmes concernent aussi la biologie, puisqu'il a été découvert que le sang a des propriétés de fluide électrorhéologique ;
- La méthode d'auto- et cross-catalyse, initiée par Turing dans les années 90, qui constitue la base théorique des modèles de réaction chimique entre deux substances dans un milieu donné (un liquide si on fait de la chimie ou une cellule si on fait de la biologie). Cette méthode, basée sur la loi bien connue d'action de masse, est appliquée en embryogenèse pour expliquer comment l'interaction entre un morphogène activateur, i.e. une enzyme catalysant la croissance d'un embryon, et un morphogène inhibiteur, peut conduire à la formation de structures physiologiques complexes (ex. : formes de l'anatomie ou motifs sur la peau) ;
- Le champ des ondes de convection, initié depuis les années 70 par Nicolis et Prigogine. Ces auteurs ont étudié les fronts de propagation d'ondes chimiques qui peuvent intervenir au cours d'une réaction chimique et de ce fait, la modifier.

0.3.1 Restauration d'images

Le but de la restauration d'images est de supprimer le bruit dans une image, tout en conservant les détails qui y figurent. Soit u_0 une telle image bruitée, définie sur une grille de pixels Ω de dimension $N \times N$, et composée de la "vraie" image u et du bruit η supposé additif, i.e. $u_0 = u + \eta$. Récupérer u à partir de u_0 conduit à la minimisation de la fonctionnelle énergie

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u_0(x) - u(x)|^2 dx.$$

composée d'une énergie de lissage $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, et d'une énergie d'approximation $\int_{\Omega} |u_0(x) - u(x)|^2 dx$. Il s'agit donc de résoudre l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$-\Delta u = \lambda(u_0 - u) \quad \text{dans } \Omega.$$

Cependant, ce processus de restauration, bien connu des informaticiens (voir le monographie [Hä05]), a le défaut de détruire les "petits" détails présents à l'intérieur de l'image. Pour remédier à ce problème, on pourrait considérer une fonctionnelle énergie plus générale, de la forme

$$E_p(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \lambda \int_{\Omega} |u_0(x) - u(x)|^2 dx,$$

associée à l'équation elliptique

$$-\Delta_p u = \lambda(u_0 - u).$$

Le cas $p = 1$ est bien connu dans la littérature pour ses propriétés de conservation des variations de l'image (voir les travaux de Chambolle et Lions), et est appelé lissage avec variation totale. Cependant, il produit le phénomène inverse du lissage classique (i.e. le cas $p = 2$), à savoir la création de variations superflues à l'intérieur de l'image, appelé effet "staircase", voir [Hä05]. La solution naturelle aux problèmes rencontrés dans le cas $p = 1$ et $p = 2$, développée par les auteurs Chen, Levine et Rao [CLR06], a été de combiner les forces des deux techniques en une seule technique. Plus spécifiquement, les auteurs ont cherché à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$E_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} |u_0(x) - u(x)|^2 dx,$$

associée à l'équation elliptique

$$-\Delta_{p(x)} u = \lambda(u_0 - u).$$

où $p(\cdot)$ est une fonction variant entre 1 et 2.

0.3.2 Modélisation de fluides électrorhéologiques

Un autre champ d'application des EDPs faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien concerne la chimie, à travers l'étude des fluides électrorhéologiques. L'électrorhéologie est un terme faisant référence à la réaction rapide et réversible d'un matériau ou de particules sous l'action d'un champ électrique.

Dans la littérature, les matériaux les plus utilisés pour observer un tel phénomène sont : le P1723, composé d'huile paraffine et de gel de silicone, avec une viscosité de 100 millipascal (mPa) à 25°C ; le MY-41, composé de particules polarisées dispersées à 35% en huile de silicone, avec une viscosité de 270 mPa à 25°C.

Ces deux fluids ER ont un comportement newtonien en l'absence de champ électrique. L'étude des propriétés de ces fluides peut être effectuée à l'aide d'un viscomètre, qui peut être soit rotationnel, soit fendu. Les viscomètres rotationnels sont généralement composés d'un stator cylindrique externe, équipé d'aimants, et d'un rotor interne, équipé d'une cavité où sont placés les échantillons de fluide, avec à ses extrémités différents capteurs chargés de mesurer la vitesse du fluide, sa viscosité, etc. Un viscomètre fendu est composé d'un canal rectangulaire recouvert en haut et en bas de deux couches de métal générant un champ électrique, couches entre lesquelles sont placés les échantillons de fluides.

On distingue deux modèles de représentation du tenseur de stress τ des fluides ER lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique E . Ces modèles sont :

- Les "modèles linéaires", tels que le "modèle Bingham", représentant le tenseur de stress de certains fluides, tels que le P1723, à l'intérieur d'un viscomètre rotationnel, et le "modèle Casson", représentant le tenseur de stress de certains fluides tels que le MY-41 à l'intérieur d'un viscomètre rotationnel. Ils sont définis par les relations

$$\begin{aligned} \tau(E, \dot{\gamma}) &= \tau_0(E) + \eta_B \dot{\gamma} && \text{(modèle Bingham)} \\ \sqrt{\tau(E, \dot{\gamma})} &= \sqrt{\tau_0(E)} + \sqrt{\eta_c \dot{\gamma}} && \text{(modèle Casson),} \end{aligned}$$

où τ_0 fait référence à la contrainte d'élasticité, η_B la constante de viscosité de Bingham, η_c la constante de viscosité de Casson et $\dot{\gamma}$ la vitesse de cisaillement. Ces modèles représentent des situations où la puissance de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ ne dépend pas de la position spatiale x .

• Les "modèles non-linéaires", tels que le modèle "Power-law", représentant le tenseur de stress de certains fluides, tels que le P1723, à l'intérieur d'un viscomètre fendu. Ils sont définis par la relation

$$\tau(E, \dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n(E)} \quad (\text{modèle Power-law}),$$

où m est une constante. À la différence des modèles précédents, le modèle "Power law" présente une forte non-linéarité, compte tenu du fait que la puissance de la vitesse de cisaillement dépend de la position spatiale x , sous l'hypothèse que le champ électrique E est variable à l'intérieur du domaine.

Pour plus d'informations sur ces différents modèles, voir [AJB97],[AJB96] et [AJB95].

Par soucis de simplification, dans un grand nombre de travaux, les auteurs considèrent que le champ électrique responsable de la variation de la vitesse et de la viscosité des fluides ER est constant, et par conséquent ne dépend pas de la position spatiale x (voir par exemple [BGHa89],[Whi90],[WB00],[AJB97],[AJB96],[AJB95],[HM92]). Pour traiter des tenseurs de stress avec une puissance variable du type Power-law, les auteurs Rajagopal et Ruzicka ont proposé, vers la fin des années 90, un modèle mathématique prenant en compte cette situation. Ce modèle est basé sur l'adaptation des lois physiques et thermodynamiques interprétant la dynamique des fluides ER, que sont : la loi de conservation de la masse, la loi de conservation du mouvement linéaire, la loi de conservation du mouvement angulaire, la loi de conservation de l'énergie, la seconde loi de thermodynamique et les équations de Maxwell.

L'approche adoptée est de résoudre les équations de Maxwell afin de déterminer le champ électrique E ; puis de résoudre l'équation de mouvement linéaire afin de déterminer le champ de vitesse v ; et enfin de résoudre les autres équations à l'aide de E et v . Le point clé dans l'approche de Ruzicka et Rajagopal est d'exprimer l'équation de conservation du mouvement linéaire de la façon suivante

$$\rho \dot{v} - \text{div}(-\pi I_d + S) = \rho b + f_e \quad (\text{conservation du mouvement linéaire}), \quad (4)$$

où v fait référence à la vitesse de cisaillement ("shear rate" en anglais), π la pression, b la force externe, f_e la force électromagnétique, et

$$\begin{aligned} S(x) = & \left\{ k + \frac{1}{2} |\nabla v + [\nabla v]^t|^2 \right\}^{(\mathfrak{p}(x)-2)/2} \left[\alpha_{21} \left\{ k + \frac{1}{2} |\nabla v + [\nabla v]^t|^2 \right\}^{-1} E(x) \otimes E(x) \right. \\ & + (\alpha_{31} + \alpha_{33}|E(x)|^2) \frac{1}{2} (\nabla v + [\nabla v]^t) + \alpha_{51} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla v + [\nabla v]^t) E(x) \otimes E(x) \right. \\ & \left. \left. + E(x) \otimes \frac{1}{2} (\nabla v + [\nabla v]^t) E(x) \right\} \right] - k\alpha_{21} E(x) \otimes E(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Ici, E désigne le champ électrique, qui dépend de la position spatiale x dans le domaine, et $\mathfrak{p}(x) = p(|E(x)|^2)$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$1 < \mathfrak{p}_\infty \leq \mathfrak{p}(x) \leq \mathfrak{p}_0.$$

D'autres conditions, liées à l'inégalité de Clausius-Duhem, sont à prendre en considération pour assurer la validité des coefficients α_{ij} , formulées à travers les inégalités suivantes :

- $\frac{\partial S_{ij}(E, D)}{\partial D_{kl}} B_{ij} B_{kl} \geq \gamma_1 (k + |D|^2) (k + |D|^2)^{(p(|E(x)|^2)-2)/2} |B|^2$ (monotonie uniforme) (6)

- $\left| \frac{\partial S_{ij}(E, D)}{\partial D_{kl}} \right| \leq \gamma_2 (k + |E(x)|^2) (k + |D|^2)^{(p(|E(x)|^2)-2)/2}$ (7)

- $\left| \frac{\partial S_{ij}(E, D)}{\partial E_n} \right| \leq \gamma_3 |E(x)| (k + |E(x)|^2) (k + |D|^2)^{(p(|E(x)|^2)-1)/2} (k + \ln(k + |D|^2))$ (8)

- $S(E, D) \cdot D \geq c (k + |E(x)|^2) (k + |D|^2)^{(p(|E(x)|^2)-2)/2} |D|^2$, (coercivité), (9)

pour des matrices $B, D \in X := \{F \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \text{tr}(F) = 0\}$. On peut consulter [Ruz04] pour plus de détails.

0.3.3 Modèles de réaction avec coefficients stoechiométriques constants

Soit à considérer une réaction bio-moléculaire élémentaire du type



où α, β sont des coefficients dits stoechiométriques et A, B sont les réactifs. Ici, les coefficients stoechiométriques sont supposés être des quantités indépendantes de la position x , i.e. des constantes. Dans toute la suite de cette section, les quantités $[A]$ et $[B]$ feront référence à la concentration (en moles par litre) de A et B respectivement.

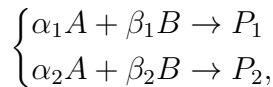
Depuis les travaux pionniers de Turing [Tur90], on considère que le taux de réaction v de (10), défini par

$$v = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial [A]}{\partial t} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial [B]}{\partial t}, \quad (11)$$

obéit à la loi d'action de masse, i.e. v est proportionnel au produit des concentrations des réactifs. Cela signifie, d'après (10) et (11), qu'il existe une constante k appelée constante taux (ou "rate constant" en anglais), telle que

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial [A]}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial [B]}{\partial t} = -k [A]^\alpha [B]^\beta.$$

L'étude d'un système de la forme



où P_1, P_2 sont les représentations moléculaires des différents produits obtenus au cours de la réaction chimique, conduit au système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial [A]}{\partial t} = -k_1 [A]^{\alpha_1} [B]^{\beta_1} \\ \frac{\partial [B]}{\partial t} = -k_2 [A]^{\alpha_2} [B]^{\beta_2}, \end{cases}$$

où k_1, k_2 sont des constantes taux.

Dans le cas d'une réaction bio-moléculaire du type



l'étude de la vitesse de réaction directe, notée V_d , et de la vitesse de réaction inverse, notée V_i , revient à considérer le système suivant

$$\begin{cases} V_d = -k_1[A]^{\alpha_1}[B]^{\beta_1} \\ V_i = -k_2[S]^{\alpha_2}[T]^{\beta_2}, \end{cases}$$

qui vérifie à l'état d'équilibre

$$k_1[A]^{\alpha_1}[B]^{\beta_1} = k_2[S]^{\alpha_2}[T]^{\beta_2}, \quad (13)$$

puisque, à l'équilibre, on a $V_d = V_i$. Par substitution, on déduit, d'après (13), qu'à l'équilibre

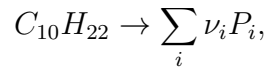
$$\frac{k_1}{k_2} \frac{[A]^{\alpha_1}[B]^{\beta_1}}{[S]^{\alpha_2}[T]^{\beta_2}} = 1. \quad (14)$$

Maintenant, si on considère (12) dans le cas particulier $S \equiv A$ et $T \equiv B$, alors la réaction (12) est appelée réaction de cross-catalyse. D'après (14), le taux de réaction à l'équilibre associé à la réaction (12) est

$$\frac{k_1}{k_2} [A]^{\alpha_1 - \alpha_2} [B]^{\beta_1 - \beta_2} = 1. \quad (15)$$

0.3.4 Modèles de réaction avec coefficients stoechiométriques variables

Dans la littérature, la plupart des modèles de la forme (10) sont considérés dans le cas où les coefficients α et β sont des constantes par rapport à la position spatiale x . Cependant, pour certaines réactions chimiques telles que le craquage thermique d'huiles d'hydrocarbure, décrit par le modèle simplifié



où P_i représente la formule moléculaire du i -ème produit, et ν_i le coefficient stoechiométrique associé, il a été observé que des variations au niveau des coefficients ν_i peuvent intervenir en fonction de la position spatiale x à des pressions super-critiques. En d'autres termes, le processus de craquage thermique génère un taux de production pouvant varier d'une position à une autre dans le domaine. Voir [JWZ19] pour une exposition complète de ce phénomène intéressant. Sous cette hypothèse, l'équation de réaction (15) devient

$$\frac{k_1(x)}{k_2(x)} [A]^{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} [B]^{\beta_1(x) - \beta_2(x)} = 1, \quad (16)$$

où k_1, k_2 et $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des fonctions dépendant de la position spatiale x .

Dans la suite, nous garderons cette hypothèse de dépendance des paramètres k_1, k_2 et $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ en la position spatiale x , par soucis de généralité.

0.3.5 Modèles de réaction coopérative et compétitive

Posons

$$f([A], [B]) = \frac{[A]^{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}}{[B]^{\beta_2(x) - \beta_1(x)}}.$$

Dans le cas où

$$\alpha_1^- - \alpha_2^+ > 0 \text{ et } \beta_2^- - \beta_1^+ < 0,$$

alors $f([A], [B])$ représente le taux de croissance de $[A]$, croissance de type activateur-inhibiteur, où A joue le rôle de l'activateur et B le rôle de l'inhibiteur. Dans un tel cas, la croissance de la concentration de la substance A est inhibée par celle de la substance B . Inversement, si

$$\alpha_1^+ - \alpha_2^- < 0 \text{ et } \beta_2^+ - \beta_1^- < 0$$

alors A devient l'inhibiteur et B l'activateur. Ces situations ont des applications importantes en morphogenèse, pour la modélisation de l'interaction entre des enzymes activateurs (tels que les peptides, les protéines ou les lipides), et les enzymes inhibiteurs (tels que la plupart des produits pharmaceutiques).

A titre d'exemple, un modèle particulier de type activateur-inhibiteur fut proposé en 1972 par les auteurs Gierer et Meinhardt [GM72], pour des organismes multicellulaires. Sa formulation en dimension N est la suivante

$$\begin{cases} (u_1)_t - d_1 \Delta u_1 = -\alpha u_1 + c \rho \frac{u_1^2}{u_2} + \rho_0 \rho & \text{dans } \Omega, \\ (u_2)_t - d_2 \Delta u_2 = -\beta u_2 + c' \rho' u_1^2 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (17)$$

où $u_1, u_2 \equiv u_1(x, t), u_2(x, t)$ sont des fonctions définies sur $\Omega \times \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, c, c', \rho_0, d_1, d_2$ sont des constantes positives, et $\rho, \rho' \equiv \rho(x), \rho'(x)$ sont des fonctions réelles positives et bornées définies sur Ω .

Ce modèle est particulier dans la mesure où il fait intervenir à la fois des termes de dégradation, $-\alpha u_1$ et $-\beta u_2$, et la combinaison d'une équation présentant un terme d'activation-inhibition $c \rho \frac{u_1^2}{u_2}$, avec une équation présentant uniquement un terme d'activation $c' \rho' u_1^2$.

Voici l'explication fournie par Gierer et Meinhardt à propos de la validité de ce modèle :

“ Imaginons une région bornée du corps d'un organisme multicellulaire, composée de cellules activatrices (i.e. de cellules composées d'enzymes d'activation), de densité ρ , et de cellules inhibitrices (i.e. de cellules composées d'enzymes d'inhibition), de densité ρ' . La concentration des activateurs est dénotée par u_1 , tandis que la concentration des inhibiteurs est dénotée par u_2 . Les activateurs, comme les inhibiteurs, sont supposés diffusifs, i.e. capables de se propager entre les cellules.

Au début de la réaction, une concentration basale ρ_0 d'activateurs est produite, proportionnellement à la densité de la cellule, d'où la présence d'un terme $\rho_0 \rho$ dans le taux de croissance de u_1 .

Au cours du processus d'activation-inhibition, lorsque les activateurs pénètrent les différentes

cellules, ils s'activent eux-même ainsi que les inhibiteurs, tandis que les inhibiteurs inhibent seulement les activateurs, proportionnellement à la densité de chaque cellule. Il en résulte la présence de termes $c\rho\frac{u_1^2}{u_2}$ et $c'\rho'u_1^2$ dans le taux de croissance de u_1 et u_2 , où c et c' sont des constantes expérimentales.

De plus, on peut supposer que u_1 et u_2 subissent des dégradations cinétiques de premier ordre, représentées par $-\alpha u_1$ et $-\beta u_2$ respectivement, soit par fuite, re-capture par la source, ou la combinaison de tels mécanismes. Ici α et β sont des constantes expérimentales.

Toutes ces considérations conduisent à l'étude du système (17).”

Ce problème est lié au phénomène de formation de motifs, dont l'étude fut initiée par Turing, et est basé sur trois postulats, qui sont :

- L'activation à courte portée, i.e. la diffusivité des activateurs représentée par la constante d_1 doit être faible ;
- L'inhibition à longue portée, i.e la diffusivité des inhibiteurs représentée par la constante d_2 doit être grande, de sorte que v devienne rapidement égal dans tout le domaine ;
- La distinction entre les concentrations effectives u_1, u_2 (i.e. la distribution des activateurs et des inhibiteurs à travers leurs cellules respectives), et les densités de source ρ, ρ' (i.e. la distribution des cellules activatrices et inhibitrices). Ceci est dû au fait que la distribution des quantités u et v peut varier au cours du temps sans pour autant que le nombre de leurs cellules respectives varie.

On peut consulter [GM72] pour plus de détail sur ces postulats. En implémentant l'équation (17) dans un logiciel, sous l'hypothèse que le domaine est une portion de ligne, Gierer et Meinhardt ont pu obtenir, après 3000 itérations, et en partant d'une distribution uniforme des activateurs et des inhibiteurs, la distribution des deux substances à l'état d'équilibre, voir [GM72] Fig. 1a)-1m).

Le fait intéressant est que l'on obtient un pic aigu de la quantité u_1 uniquement aux endroits où ρ , la densité des cellules activatrices, est le plus élevé, tandis qu'aux autres endroits (i.e. au delà d'un petit voisinage des endroits où ρ le plus élevé), les valeurs de u_1 deviennent pratiquement nulles.

Ce comportement est observé même si ρ est supposé être une fonction linéaire avec une pente très faible. Le motif représenté par la courbe de la concentration des activateurs est appelé motif de Turing. Par ailleurs, le motif de Turing de la quantité u_2 est beaucoup plus homogène, ce qui n'est pas surprenant compte tenu de l'hypothèse d'inhibition à longue portée.

Ce phénomène est à l'origine de nombreuses structures motiviques présentes dans notre entourage, telles que les rayures de zèbre, les ondes de surface, le développement des organes humains, ou la structure des paysages dans les écosystèmes. On peut consulter [SWW17] pour une bibliographie complète sur ces différentes applications.

Les cas

$$\alpha_1^+ - \alpha_2^- < 0 \text{ et } \beta_2^- - \beta_1^+ > 0, \quad (18)$$

ou

$$\alpha_1^- - \alpha_2^+ > 0 \text{ et } \beta_2^- - \beta_1^+ < 0, \quad (19)$$

correspondent à des cas de croissance compétitive des quantités $[A]$ et $[B]$ (compétition positive dans le cas (18) ou compétition négative dans le cas (19)). Ces situations interviennent en catalyse constructive ou catalyse destructive.

Il est à remarquer que (15) englobe des situations beaucoup plus complexes que celles mentionnées, car compte tenu de la variabilité des coefficients il peut y avoir compétition sur certaines régions du domaine, et coopération sur d'autres.

La généralisation de (15) à un système à deux équations est

$$\begin{cases} \frac{k_1(x) [A]^{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}}{k_2(x) [B]^{\beta_2(x)-\beta_1(x)}} = 1 \\ \frac{k_3(x) [A]^{\sigma_1(x)-\sigma_2(x)}}{k_4(x) [B]^{\tau_2(x)-\tau_1(x)}} = 1, \end{cases}$$

qui englobe, entre autres, les systèmes d'activation-inhibition croisés.

0.3.6 Modèles de réaction-diffusion

Supposons que la réaction entre les substances A et B se déroule dans les cellules d'un organisme, que l'on peut représenter par un anneau de cercle pour faire simple. Supposons aussi que ces cellules ont une paroi poreuse, et que A et B peuvent se diffuser de cellule en cellule à travers les pores, dans le sens où ils perdent de leur concentration pour la partager avec les autres cellules.

Enfin, supposons que le processus de diffusion est proportionnel à la différence unitaire entre la concentration des substances dans les cellules voisines. Cela signifie, dans le cas à une dimension pour une substance arbitraire K , que la diffusion $D([K])$ entre trois cellules adjacentes placées sur un anneau est

$$D([K]) = \mu_K ([K]_R - 2[K]_M + [K]_L),$$

où $[K]_R$, $[K]_M$ et $[K]_L$ sont les concentrations de K dans la cellule de droite, la cellule du milieu et la cellule de gauche respectivement.

Par conséquent, si l'on tient compte de termes de croissance $f([A], [B])$ et $g([A], [B])$, on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial [A]}{\partial t} = f([A], [B]) + \mu_A ([A]_R - 2[A]_M + [A]_L) \\ \frac{\partial [B]}{\partial t} = g([A], [B]) + \mu_B ([B]_R - 2[B]_M + [B]_L), \end{cases} \quad (20)$$

où μ_A et μ_B sont les constantes de diffusivité des substances A et B .

Lorsque μ_A et μ_B sont inversement proportionnels au carré de la distance angulaire entre la cellule et la source de propagation, le cas limite de (20) pour un anneau continu de cellules est

$$\begin{cases} \frac{\partial [A]}{\partial t} - \mu'_A \frac{\partial^2 [A]}{\partial x^2} = f([A], [B]) \\ \frac{\partial [B]}{\partial t} - \mu'_B \frac{\partial^2 [B]}{\partial x^2} = g([A], [B]), \end{cases} \quad (21)$$

où μ'_A et μ'_B sont des constantes.

Le système (21) peut être généralisé pour des domaines de dimension N comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial[A]}{\partial t} - \mu'_A \Delta[A] = f([A], [B]) \\ \frac{\partial[B]}{\partial t} - \mu'_B \Delta[B] = g([A], [B]), \end{cases} \quad (22)$$

où Δ correspond à l'opérateur Laplacien.

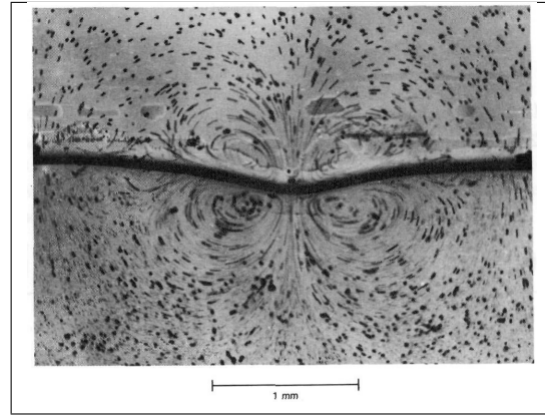
0.3.7 Modèles de réaction-diffusion-convection

Les équations de réaction-diffusion, telles que (22), sont valides pourvu que les substances chimiques sont placées dans un milieu inerte à la réaction, tels que les gels. Cette hypothèse est nécessaire afin d'éviter des phénomènes de convection.

En effet, selon [RADW12], on observe que lorsqu'ils sont placés dans des solutions liquides arbitraires, certaines réactions, telles que la réaction Isoamylol-Eau-Sodium, génèrent une onde de propagation sous forme de rouleaux (voir [SDHa07] pour des illustrations).

Les ondes de convection les plus étudiées, dans des solutions à l'air libre, sont les ondes Marangoni et les ondes buoyancy. Les ondes Marangoni sont des ondes apparaissant au niveau de la surface séparant deux substances diffusives. L'effet de couplage entre la réaction et la diffusion entraîne la formation de rouleaux d'ondes, comme on peut le voir sur la Figure 1. On peut

FIGURE 1 – Rouleaux d'ondes développés à la surface entre de l'isoamylol et de l'eau, en la présence de sulfate de sodium surfactant hexadecyl, un détergent commun. Un tel phénomène est appelé effet Marangoni.



consulter [RADW12] ou [Per97] pour plus de détails sur les ondes Marangoni.

Les ondes buoyancy (ou ondes de flottabilité) sont des ondes générées par des variations de densité de la solution. En effet, certaines réactions chimiques peuvent affecter les propriétés chimiques du milieu, dans lequel les réactifs sont placés, i.e. un liquide, et ainsi modifier la densité, la viscosité et la tension superficielle de ce milieu, ce qui en retour affecte la réaction. Si la densité de la solution est affectée, on peut assister à l'apparition d'ondes buoyancy tandis que lorsqu'il s'agit de la tension de surface qui est affectée, on voit apparaître des ondes Marangoni. Les modèles mathématiques utilisés pour décrire des réactions présentant des ondes de convection font intervenir la combinaison des équations incompressibles de Navier-Stokes, dont la solution donne le champ de vitesse $\vec{v}$, avec une équation de réaction-diffusion-convection

dont la solution donne la concentration c . Le modèle est le suivant

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta v &= -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \vec{g} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{équations de Navier-Stokes})$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \Delta c = f(c) - \vec{v} \cdot \nabla c \quad (\text{équation de réaction-diffusion-convection}),$$

où p dénote la pression, $\vec{g} = (0, -g)$ l'accélération gravitationnelle le long de l'axe z , ρ_0 la densité de la solution, $\nu = \mu/\rho_0$ la viscosité cinématique, D le coefficient de diffusivité moléculaire. Voir [RADW12] et [SDHa07] pour plus de détails sur ces équations.

0.3.8 Mouvement d'un gaz

Lorsque la substance chimique considérée correspond à un amas de particules, ou plus précisément un gaz, il a été considéré, dans [CM15b], le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad (\text{conservation de la masse}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \quad (\text{conservation du mouvement linéaire}), \end{aligned} \right. \quad (23)$$

où $v(x, t)$, $\rho(x, t)$, $a(x, t)$ désignent respectivement la vitesse du gaz, la densité du gaz et la vitesse du son, au niveau d'une particule x donnée, et à un temps t donné. Ce système modélise le comportement d'un gaz, enfermé dans un tube cylindrique de longueur L , dont une des extrémités est équipée d'un piston oscillant, tandis que l'autre est fermée. Selon les auteurs, l'équation d'état du flot isentropique d'un gaz parfait peut être écrit de la façon suivante

$$a^2 = \rho^{\gamma-1}, \quad (24)$$

où γ correspond au coefficient adiabatique du gaz, aussi appelé "coefficient de Laplace", et est défini par

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

Ici, C_P représente la capacité thermique isobare (à pression P constante), et C_V la capacité thermique isochore (à volume V constant). Ces quantités sont définies par

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad \text{et} \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V,$$

où U représente l'énergie interne du gaz, H l'enthalpie et T la température. Il est à remarquer qu'en général, d'après la définition de C_P et C_V , le coefficient γ dépend de la température T , i.e. $\gamma \equiv \gamma(T)$.

Supposons que la température T est constante sur tout le domaine, i.e. dans tout le tube, et ne varie pas en fonction du temps, i.e. $T(x, t) \equiv T_0$. Par conséquent le coefficient $\gamma(T)$ devient une constante indépendante du temps et de la position spatiale x , i.e. $\gamma(T) \equiv \gamma$. Aussi, suivant

l'approche de [CM83], si on remplace $\rho(x, t)$ dans (23) par $a(x, t)$ grâce à l'égalité (24), on obtient, après calculs, sous l'hypothèse qu'il s'agit d'un gaz isotropique, l'équation suivante

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\partial a}{\partial x} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right).$$

À titre d'exemple, dans l'hypothèse où le gaz étudié est diffusif, les auteurs de [ABG89] se sont intéressés au problème suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (u^q)_x, & x \in (0, 1), & t \in (0, T) \\ u_x + f(u) = 0, & x \in \{0, 1\}, & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (25)$$

avec p_2 une constante positive telle que $q > 1$. En posant $v = \int_0^x u(y, t) dy$, ils ont considéré que si u est une solution de (25), alors v est solution du problème suivant

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + (v_x)^q, & x \in (0, 1), & t \in (0, T) \\ v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = \int_0^1 u_0(x) dx \\ v(x, 0) = \int_0^x u_0(y) dy. \end{cases} \quad (26)$$

0.3.9 Connexion de ces thématiques à notre problème

Dans la littérature, les situations évoquées précédemment sont traitées indépendamment l'une de l'autre, dans la mesure où elles font l'objet d'une activité de recherche intense. Cependant, celles-ci laissent entrevoir la possibilité de considérer des modèles mathématiques faisant intervenir des termes de réaction, de diffusion et de convection, qui peuvent tous varier par rapport à la position spatiale x . Par conséquent, il est intéressant d'étudier des systèmes d'EDPs elliptiques avec des termes de diffusion non homogènes par rapport à la position spatiale, et des termes sources avec des conditions de croissances dépendant aussi de la position spatiale. Ces systèmes peuvent être représentés comme suit

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \phi_1(x, \nabla u_1) = f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \\ -\operatorname{div} \phi_2(x, \nabla u_2) = f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2), \end{cases}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions non-linéaires satisfaisant (6)-(9), sous la condition de croissance

$$m_i u_1^{\alpha_i(x)} u_2^{\beta_i(x)} \leq f_i(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \leq M_i \left(u_1^{\alpha_i(x)} u_2^{\beta_i(x)} + |\nabla u_1|^{\gamma_i(x)} + |\nabla u_2|^{\bar{\gamma}_i(x)} \right),$$

où m_i, M_i ($i = 1, 2$) sont des constantes strictement positives. Un exemple de telles fonctions ϕ_1 et ϕ_2 est $\phi_1(x, \nabla u_1) = |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1$ et $\phi_2(x, \nabla u_2) = |\nabla u_2|^{p_2(x)-2} \nabla u_2$.

Dans la section suivante, nous donnons une exposition complète des notations qui seront adoptées dans tout le reste du manuscrit, suivie d'une autre section faisant la présentation des espaces à exposants variables avec lesquels nous allons travailler.

0.4 Notations

0.4.1 Notations basiques

Ω	Ensemble borné de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Bord de Ω .
$d(x)$	Distance euclidienne, définie sur Ω par $d(x) = d(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} x - y .$
Ω_σ	Voisinage de $\partial\Omega$, défini par $\Omega_\sigma = \{x \in \Omega \mid d(x) \leq \sigma\}.$
$M(\Omega)$	Ensemble de toutes les fonctions réelles et mesurables définies sur Ω .
$-\Delta_{m(x)}$	Opérateur $m(x)$ -Laplacien, défini sur $W_0^{1,m(x)}(\Omega)$ par $-\Delta_{m(x)}u = -\operatorname{div}(\nabla u ^{m(x)-2} \nabla u).$
$\rightarrow$	Symbole de convergence forte.
$\rightharpoonup$	Symbole de convergence faible.
J	Fonctionnelle énergie, définie sur $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par $J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \nabla u ^{p(x)} dx, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$
J'	Dérivée faible de J , définie sur $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par $J'(u; v) = \int_{\Omega} \nabla u ^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$
s^-, s^+	$s^- := \inf_{x \in \operatorname{Dom}(s)} \{s(x)\}$ et $s^+ := \sup_{x \in \operatorname{Dom}(s)} \{s(x)\}.$

0.4.2 Espaces de Orlicz

$\rho_{p(x)}$	Fonction modulaire convexe, définie sur $M(\Omega)$ par $\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} u_1 ^{p(x)} dx.$
$L^{p(x)}(\Omega)$	Espace de Lebesgue généralisé, défini sur Ω par $L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in M(\Omega) \mid \rho_{p(x)}(u) < \infty \right\}.$
$\ \cdot\ _{p(x)}$	Norme de Luxembourg, définie sur $L^{p(x)}(\Omega)$ par $\ u\ _{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$
$L^{p'(x)}(\Omega)$	Espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.
$\ \cdot\ _{p'(x)}$	Norme duale de $\ \cdot\ _{p(x)}$, définie sur $L^{p'(x)}(\Omega)$ par $\ \phi\ _{p'(x)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \phi dx : \ \phi\ _{p(x)} \leq 1 \right\}.$
$W^{1,p(x)}(\Omega)$	Espace de Sobolev généralisé, défini sur Ω par $W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \mid D_i u \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, N \right\}.$
$ \cdot _{1,p(x)}$	Norme de Luxembourg, définie sur $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par $ u _{1,p(x)} = \ u\ _{p(x)} + \ Du\ _{p(x)}.$
$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$	Sous-espace de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, qui est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme $ \cdot _{1,p(x)}$.
$W^{-1,p'(x)}(\Omega)$	Espace dual de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
$\ \cdot\ _{-1,p'(x)}$	Norme de $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ définie par $\ \Phi\ _{-1,p'(x)} = \inf \left\{ \ \Phi_0\ _{p'(x)} + \sum_{i=1}^N \ \Phi_i\ _{p'(x)} \right\}, \quad \Phi = \Phi_0 - \operatorname{div}(F),$ avec $\Phi_0 \in L^{p'(x)}(\Omega)$ et $F = (\Phi_0, \dots, \Phi_N) \in \left(L^{p'(x)}(\Omega) \right)^N$.

0.4.3 Produit cartésien d'espaces de Orlicz

$L^{p_1(x), p_2(x)}(\Omega)$	Espace produit de Orlicz-Lebesgue $L^{p_1(x)}(\Omega) \times L^{p_2(x)}(\Omega)$.
$\ \cdot\ _{p_1(x), p_2(x)}$	Norme de Luxembourg, définie sur $L^{p_1(x), p_2(x)}(\Omega)$ par $\ (u_1, u_2)\ _{p_1(x), p_2(x)} = \ u_1\ _{p_1(x)} + \ u_2\ _{p_2(x)}.$
$L^{p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$	Espace dual de $L^{p_1(x), p_2(x)}(\Omega)$, correspondant à l'espace produit de Orlicz-Lebesgue $L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega)$.
$\ \cdot\ _{p'_1(x), p'_2(x)}$	Norme de Luxembourg, définie sur $L^{p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$ par $\ (\Phi_1, \Phi_2)\ _{p'_1(x), p'_2(x)} = \ \phi\ _{p'_1(x)} + \ \psi\ _{p'_2(x)}.$
$X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}$	Espace produit de Orlicz-Sobolev $W_0^{1, p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1, p_2(x)}(\Omega)$.
$\ \cdot\ _{1, p_1(x), p_2(x)}$	Norme de Luxembourg, définie sur $X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}$ par $\ (u_1, u_2)\ _{1, p_1(x), p_2(x)} = \ u\ _{1, p_1(x)} + \ v\ _{1, p_2(x)},$
$X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$	Espace dual de $X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega)$, correspondant à l'espace de Orlicz-Sobolev $W^{-1, p'_1(x)}(\Omega) \times W^{-1, p'_2(x)}(\Omega)$.
$\ \cdot\ _{-1, p'_1(x), p'_2(x)}$	Norme duale de $\ \cdot\ _{1, p_1(x), p_2(x)}$, définie sur $X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$ par $\ (\Phi, \Psi)\ _{-1, p'_1(x), p'_2(x)} = \ \Phi\ _{-1, p'_1(x)} + \ \Psi\ _{-1, p'_2(x)}.$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1, p_1(x), p_2(x)}$	Crochet de dualité entre les espaces duaux $X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega)$ et $X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$, défini par $\langle (u_1, u_2), (\Phi_1, \Phi_2) \rangle_{1, p_1(x), p_2(x)} = \langle u, \phi \rangle_{1, p_1(x)} + \langle v, \psi \rangle_{1, p_2(x)},$ pour tout $(u_1, u_2) \in X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega)$ et $(\Phi_1, \Phi_2) \in X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$.

0.4.4 Autres espaces

$C^0(\Omega)$	Espace des fonctions continues définies sur Ω .
$C^k(\Omega)$	Espaces fonctionnels, définis par $C^k(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) \mid D^k u \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)\}, \quad k \in \mathbb{N}.$
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Espaces des fonctions C^k -Hölder continues, définis sur Ω lorsque $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$ par $C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid u(x) - u(y) \leq x - y ^\alpha, \forall x, y \in \Omega\}.$
$\ \cdot\ _{k,\alpha}$	Norme de Hölder des espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$, définie par $\ u\ _{k,\alpha} = \max_{i \in [0,k]} \{\ D^i\ _\infty\} + \max_{i \in [0,k]} \{\ D^i\ _{0,\alpha}\}.$
$C^{k,1/\log(t)}$	Espaces des fonctions log-Hölder continues, définis par $C^{k,1/\log(t)} = \left\{u \in C^k \mid u(x) - u(y) \leq \frac{1}{ \log(x - y) }, \forall x, y \in \Omega\right\}.$
$C_0^+(\Omega)$	$C_0^+(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) \mid u > 0 \text{ dans } \Omega, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$

0.5 Espaces à exposants variables

0.5.1 Éléments de base

L'histoire mathématique des espaces à exposants variables remonte à l'article publié en 1931 par Orlicz[Orl31], dans lequel le problème suivant a été considéré :

Enoncé : Soit (p_i) (avec $p_i > 1$) et (x_i) des suites de nombres réels tels que $\sum x_i^{p_i}$ converge.

Question : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur (y_i) pour que $\sum x_i y_i$ converge ?

Cette anecdote, rapportée dans le travail de Diening, Hasto et Nekvinda [DHN04], connaît la réponse suivante :

Réponse : $\sum (\lambda y_i)^{p'_i}$ devrait converger pour une certaine constante $\lambda > 0$ avec $p'_i = p_i / (p_i - 1)$.

Ce problème correspond à la version discrétisée de l'inégalité de Hölder pour l'espace de Lebesgue généralisé $\mathcal{L}^{p_i}(\Omega)$, qui a d'abord été étudiée par Orlicz lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}$, puis qui a été généralisée au cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dans l'étude des espaces de Orlicz, on définit l'ensemble $L^\varphi(\Omega)$ des fonctions mesurables à valeurs réelles définies sur Ω , telles qu'il existe un réel $\lambda > 0$ pour lequel $\int_\Omega \phi(\lambda |u_1(x)|) dx < \infty$. Si la fonction φ dépend de la position dans Ω , de tels espaces sont

appelés espaces modulaires, et l'un des pionniers dans leur étude fut Nakano (voir [Nak50] par exemple), en tant que cas particulier des espaces dits de Nakano.

0.5.2 Propriétés basiques de espaces de Orlicz modulaires

Sharapudinov [Sha79] et Rakosnik et Kovacik [KR91] ont démontré que les espaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ sont des espaces de Banach, lorsqu'ils sont munis des normes de Luxembourg $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ et $\|\cdot\|_{1,p(\cdot)}$ définies par

$$\|u\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{u}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}, \quad \|v\|_{1,p(\cdot)} = \|v\|_{p(\cdot)} + \|\nabla v\|_{p(\cdot)},$$

$(u_1, u_2) \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \times W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Aussi, ces espaces sont séparables et réflexifs pourvu que $1 < \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} p(x) < \infty$. Par ailleurs, grâce aux travaux de Kovacik et Rakosnik [KR91] dans les années 90, qui ont permis d'apporter une meilleure compréhension des espaces à exposants variables, d'autre résultats importants sont apparus. On peut citer, par exemple, l'importance de la propriété de log-Hölder continuité de l'exposant variable $p(\cdot)$, i.e. l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{|\log |x - y||},$$

pour tout $|x - y| < 1/2$. On peut citer aussi l'importance des espaces à exposants variables dans la modélisation des fluides électrorhéologiques. Les espaces des fonctions log-Hölder continues, aussi appelées fonctions 0-Hölder continues, fonctions de Dini ou fonctions faiblement Lipschitz continues, sont notés $C^{0,1/|\log(t)|}$. Cependant, beaucoup de problèmes subsistent et ralentissent le développement des connaissances sur les espaces $L^{p(\cdot)}$, principalement dus au fait que ces espaces sont virtuellement jamais invariant par translation, et que la convolution entre deux fonctions appartenant à ces espaces ne satisfait plus l'inégalité de Young lorsque $p(\cdot)$ diffère d'une constante, i.e.

$$\|f \star g\|_{p(\cdot)} \leq c \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_1 \text{ a lieu si et seulement si } p \text{ est constant},$$

pour tout $f, g \in L^{p(\cdot)}$, voir [Die04a]. Ces deux points majeurs marquent la différence entre les espaces de Lebesgue à exposant constant et ceux à exposants variables. On peut citer également l'injection compacte de Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, qui n'est plus valide pour un exposant $p(\cdot)$ général, mais qui est vérifiée lorsque $p(\cdot)$ est log-Hölder continu, voir Diening [Die04b] et Samko [Sam98]. La question de la nécessité d'une telle condition pour assurer les injections de Sobolev reste à ce jour un problème ouvert, bien qu'il a été démontré par Kovacik et Rakosnik l'existence d'une fonction continue p telle que l'injection $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(\cdot)}(\Omega)$ n'ait pas lieu, où $p^*(x) = Np(x)/(N - p(x))$ est la généralisation de l'exposant critique de Sobolev.

Un autre problème, et pas des moindre, concerne la densité des fonctions lisses dans les espaces de Orlicz-Sobolev, i.e. les fonctions appartenant à l'espace $C^\infty(\Omega)$, qui est une propriété importante dans la mesure où elle permet l'approximation des fonctions faibles par une suite de fonctions régulières selon la norme considérée. Par ailleurs, il existe des espaces de Orlicz-Sobolev pour lesquels les fonctions lisses ne sont pas denses. Aussi, Kovacik et Rakosnik [KR91] ont démontré que la propriété de densité a lieu lorsque l'exposant variable $p(\cdot)$ est borné, condition qui fut plus tard affaiblie par Samko [Sam00], par la condition de log-Hölder continuité de $p(\cdot)$.

Pour finir, juste un mot sur la dualité de ces espaces : dans [KR91], l'auteur démontre que le dual de l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ correspond à l'espace $L^{p'(x)}(\Omega)$, sous la condition unique que $p \in L^\infty(\Omega)$, où $p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$ est l'exposant conjugué de $p(\cdot)$. Aussi la caractérisation du dual des espaces de Sobolev a été donnée dans [KR91] dans le cas où $p(\cdot)$ est une fonction mesurable et bornée, à savoir que pour toute distribution $G \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^* = W^{-1,p'(x)}(\Omega)$, il existe un couple unique $(g, |\nabla g|) \in \left(L^{p(\cdot)}(\Omega)\right)^2$ tel que l'identification suivante ait lieu

$$G(f) = \int_{\Omega} (fg + |\nabla f| |\nabla g|) dx, \quad \text{pour tout } f \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

De surcroît, lorsque le domaine est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$, et que p, q sont des fonctions mesurables, les injections continues $L^{p_2(\cdot)} \hookrightarrow L^{p(\cdot)}$ et $W^{k,p_2(x)} \hookrightarrow W^{k,p(x)}$ ($k \geq 0$) sont assurées, pourvu que $p(x) \leq p_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Aussi, l'extension de l'inégalité de Hölder pour les espaces de Orlicz-Lebesgue est donné par le lemme suivant.

Lemme 0.5.1 (voir [KWZ10a] Lemme 2.1). *Pour tous $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)} \leq 2 \|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)}.$$

0.6 Organisation générale de l'étude

L'étude dans sa globalité suit l'organisation suivante :

- Les chapitres 1 et 2 traitent de l'existence de solutions pour le système (S) , sous certaines conditions, dans un premier temps au moyen de la méthode du degré topologique (chapitre 1), et dans un deuxième temps au moyen du théorème de point fixe de Schauder et de la méthode des sur- et sous-solutions (chapitre 2).
- Dans le chapitre 1, nous considérons le système (S) sous les conditions suivantes

$$\begin{cases} f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = c_1(x)u_1|u_1|^{\alpha_1(x)-1}u_2|u_2|^{\beta_1(x)-1} + d_1(x)|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x) \\ f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = c_2(x)u_1|u_1|^{\alpha_2(x)-1}u_2|u_2|^{\beta_2(x)-1} + d_2(x)|\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x), \end{cases} \quad (27)$$

où $c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, e_i \in C(\overline{\Omega})$ ($i = 1, 2$), sont des fonctions positives et bornées, avec $e_i^- > 0$ ($i = 1, 2$).

Nous prouvons qu'un tel problème admet au moins une solution, sous certaines conditions sur les coefficients c_i, d_i, e_i ($i = 1, 2$) et les puissances $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$), par application du degré topologique de Berkovits. L'utilisation d'un degré topologique, initiée par Leray-Schauder[LS34], est basée globalement sur le passage par homotopie entre le problème initial et un autre problème admettant des solutions non triviales. De ce fait, on déduit l'existence d'une solution pour le problème initial par invariance homotopique du degré topologique.

- Dans le chapitre 2, nous considérons le système (S) sous les conditions suivantes

$$\begin{cases} m_1 u_1^{\alpha_1(x)} u_2^{\beta_1(x)} \leq f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \leq M_1 \left(u_1^{\alpha_1(x)} u_2^{\beta_1(x)} + |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + |\nabla u_2|^{\bar{\gamma}_1(x)} \right) \\ m_2 u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)} \leq f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \leq M_2 \left(u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)} + |\nabla u_1|^{\gamma_2(x)} + |\nabla u_2|^{\bar{\gamma}_2(x)} \right), \\ u_i > 0 \quad (i = 1, 2), \end{cases} \quad (28)$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i \in C(\overline{\Omega})$ ($i = 1, 2$), sont des fonctions bornées sur Ω (pouvant être négatives) et m_i, M_i sont des constantes positives.

Moyennant certaines conditions sur les coefficients m_i, M_i ($i = 1, 2$) et les puissances $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i$ ($i = 1, 2$), nous montrons que le problème admet au moins une solution en appliquant le théorème de point fixe de Schauder ainsi que la méthode des sur- et sous-solutions. La méthode des sur- et sous-solutions, introduite historiquement par Keller [Kel69] et Amann et Moser [AM71], est basée sur des techniques de comparaison entre la solution du problème (ou celle d'un problème auxiliaire), et des fonctions $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$, appelées respectivement sous-solutions et sur-solutions. Dans ce chapitre, ces dernières seront construites au moyen des fonctions (bien connues) $(p_1(x), p_2(x))$ -torsion.

- Dans le chapitre 3, nous prouvons, dans un premier temps, des résultats de non-existence pour le système (S) , dans le cas où les non-linéarités f_i ($i = 1, 2$) sont définies d'une part de la façon suivante

$$\begin{cases} f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = \lambda u_1^{\alpha_1(x)} u_2^{\beta_1(x)} \\ f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = \lambda u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)}, \end{cases}$$

et d'autre part de la façon suivante

$$\begin{cases} f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = \lambda \left(u_1^{\alpha_1(x)} u_2^{\beta_1(x)} + |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + |\nabla u_2|^{\overline{\gamma_1(x)}} \right) \\ f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = \lambda \left(u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)} + |\nabla u_1|^{\gamma_2(x)} + |\nabla u_2|^{\overline{\gamma_2(x)}} \right), \end{cases}$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \overline{\gamma}_i \in C(\overline{\Omega})$ ($i = 1, 2$), sont des fonctions positives et bornées, et λ est une constante strictement positive.

Le raisonnement suit les idées de Moussaoui, Didi et Khodja [DKM20, Théorème 1]. Précisément, les auteurs ont prouvé que, lorsque les termes sources sont du type $f_i(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) = \lambda u_1^{\alpha_i} u_2^{\beta_i}$, alors sous certaines conditions strictes sur les puissances α_i, β_i , supposées constantes, le problème (S) n'admet aucune solution non-triviale positive lorsque λ excède une certaine constante, construite à partir de la première valeur propre du $(p_1(x), p_2(x))$ -Laplacien. De tels résultats peuvent être étendus à des situations plus générales, où les puissances α_i, β_i sont variables, et avec présence de termes de convection dans l'expression de f_i ($i = 1, 2$), ce qui sera l'objet de la première partie de ce chapitre.

Dans un deuxième temps, nous prouvons la non-existence de solutions pour le système (S) dans le cas scalaire, avec d'une part la condition

$$f(x, u, \nabla u) = \lambda u^{-\alpha(x)} + \mu u^{r(x)}, \quad (29)$$

et d'autre part la condition

$$f(x, u, \nabla u) = \lambda u^{-\alpha(x)} + \mu u^{r(x)} + \nu(x) |\nabla u|^{\delta(x)}, \quad (30)$$

où α, r, δ sont des fonctions positives et bornées, et λ, μ sont des constantes strictement positives.

Dans la littérature, Giacomoni, Schlinder et Takac [GST07, Lemme 3.3] ont montré que des EDPs du type $-\Delta_p u = \lambda u^{-\alpha} + u^r$ n'admettent aucune solution lorsque λ excède une certaine valeur implicite, sous certaines conditions des exposants α et r , supposés constants. Ils ont raisonné par l'absurde, en utilisant l'isolation de la première valeur propre du p -Laplacien (p constant). Ici, le terme isolation signifie qu'il n'existe aucune suite de valeurs propres λ_i convergant vers la première valeur propre. Nous allons étendre ce résultat dans le cas scalaire, pour les termes sources (29) et (30).

- Le chapitre 4 est dédié à l'étude de deux pistes, laissées en perspective, qui pourraient faire l'objet de résultats futurs.

La première piste considérée concerne l'obtention d'une estimation globale du gradient de la solution a priori du système (S) , dans le cas scalaire, sous la condition

$$f(x, u, \nabla u) = \lambda \left(u^{-\alpha(x)} + |\nabla u|^{\gamma(x)} \right),$$

où $\alpha, \gamma \in C(\overline{\Omega})$ sont des fonctions positives et bornées, et λ est une constante positive.

Tout d'abord, suivant les idées de Zhang[Zha07], nous donnons une sous-estimation de la solution a priori d'un tel problème sur tout le domaine Ω . Puis, en s'inspirant des travaux de Ladyzhenskaya et Ural'tseva[LU68], nous prouvons une estimation du gradient à l'intérieur du domaine au moyen de la sous-estimation.

La deuxième piste porte sur l'existence d'au moins une solution non-triviale pour le système (S) sous la condition (27), suivant une autre approche que celle utilisée dans le Chapitre 1. Cette approche est basée sur la construction de sur-et-sous-solutions de type radial adaptées à (S) , inspirées de [Vé16].

CHAPITRE 1

RÉSULTAT D'EXISTENCE AVEC LE DEGRÉ TOPOLOGIQUE DE BERKOVITS

Contents

1.1	A propos de la notion de degré topologique	33
1.1.1	Définition d'un degré topologique	33
1.1.2	Degré topologique de Leray-Schauder	33
1.1.3	Degré topologique de Browder	34
1.1.4	Degré topologique de Berkovits	35
1.1.5	Articulation du chapitre	35
1.2	Hypothèses	36
1.3	Résultats principaux	36
1.4	Définitions et résultats préliminaires	37
1.4.1	Propriétés du degré de Berkovits	37
1.4.2	Définition des propriétés de demi-continuité et de classe $(S_+)_T$	38
1.4.3	Homotopie de classe $(S_+)_T$	38
1.4.4	Principe de Leray-Schauder	39
1.4.5	Propriétés de l'opérateur $p(x)$ -Laplacien	39
1.4.6	Propriétés algébriques	40
1.4.7	Un théorème de la Valeur Moyenne	41
1.5	Quelques éléments de base	42
1.5.1	Définition du problème (1.5)	42
1.5.2	Une propriété liée à la norme de Luxembourg	43
1.6	Existence d'au moins une solution pour le problème (1.5)	45
1.6.1	Une propriété de classe (S_+) pour l'opérateur $(p_1(x), p_2(x))$ -Laplacien	45
1.6.2	Une propriété de compacité	49
1.6.3	Preuve du Théorème 1.3.1	53

Dans ce chapitre, nous étudions le problème suivant :

$$(S_{\alpha,\beta}) \begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = c_1(x) u_1 |u_1|^{\alpha_1(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_1(x)-1} + d_1(x) |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = c_2(x) u_1 |u_1|^{\alpha_2(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_2(x)-1} + d_2(x) |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, e_i, c_i, d_i \in C(\Omega)$ ($i = 1, 2$) sont des fonctions positives et bornées, avec $e_i^- > 0$ ($i = 1, 2$).

Le but de ce chapitre est de généraliser les travaux de Vélin[Vé16]. Notre approche technique sera la même que celle de [HAL19], à savoir l'application du degré de Berkovits, introduit dans [Ber07a], et qui n'est autre que la généralisation du degré topologique classique de Leray-Schauder.

1.1 A propos de la notion de degré topologique

1.1.1 Définition d'un degré topologique

Soit G un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X , f une application définie de X à valeur dans un espace de Banach Y , et y_0 un nombre réel. Considérons une fonction d , associant au triplet (f, G, y_0) l'entier $d(f, G, y_0)$. Une telle fonction d est appelée degré topologique, pourvu qu'elle satisfait trois propriétés importantes, à savoir :

- (Propriété de normalisation) Si $f_0 : X \rightarrow Y$ désigne une application identité, alors $d(f_0, G, y_0) = +1$;
- (Propriété d'additivité) Si G_1 et G_2 sont deux sous-ensembles de G tels que $y_0 \notin f(cl(G) \setminus (G_1 \cup G_2))$, alors $d(f, G, y_0) = d(f, G_1, y_0) + d(f, G_2, y_0)$;
- (Propriété d'invariance homotopique) Si l'ensemble $\{f_t : cl(G) \rightarrow Y : 0 \leq t \leq 1\}$ représente une famille d'homotopies continues, et $\{y_t : 0 \leq t \leq 1\}$ représente une courbe continue de Y , telle que $y_t \notin f_t(\partial\Omega)$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors $d(f_t, G, y_t)$ est constant en t sur $[0, 1]$.

De tels outils sont utilisés pour prouver l'existence de solutions pour des problèmes du type $g(x) = x$, en considérant l'équation $(I - g)(x) = 0$ (appelée équation d'Hammerstein du problème), et en posant $f = I - g$ et $y_0 = 0$. Voici un court aperçu de l'évolution des degrés topologiques, bien détaillée dans [Bro83b].

1.1.2 Degré topologique de Leray-Schauder

En dimension finie, i.e. lorsque X et Y sont isomorphes à des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, il est bien connu l'existence d'une unique fonction $d_B(f, G, y_0)$ satisfaisant les propriétés d'un degré topologique, voir [Bro11]. La construction d'un tel degré fait intervenir la solution fondamentale du problème de Laplace dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, voir [Bro83b, Théorème 1] pour plus de détails.

En dimension infinie, le degré de Brouwer peut être généralisé, pourvu que $f(cl(G))$ est un ensemble relativement compact de X , i.e. un ensemble dont l'adhérence est compacte, voir

[Bro83b, Théorème 3]. Un tel degré, apparu en 1931, est le bien connu degré topologique de Leray-Schauder [LS34].

Pour construire ce degré, les auteurs ont eu recours à des méthodes de :

- Approximation de la fonction f par une fonction $\tilde{f}$ de rang finie, en utilisant la compacité de $(I - f)(cl(G))$;
- Invariance du degré de Brouwer par modification de l'approximant de f . Cette propriété se justifie en considérant une homotopie affine entre deux approximations différentes de f , et en utilisant l'invariance homotopique du degré de Brouwer ;
- Invariance du degré de Brouwer par restriction de f à un sous espace de dimension finie de G . Ce résultat est d'une importance capitale pour la construction du degré de Leray-Schauder, et sa justification repose sur la suspension de f par l'opérateur de suspension $S_1 : cl(G) \rightarrow X$, défini par

$$S_1(f)(x) = S_1(f)(x_0 + x_1) = f(x_0) + x_1, \quad \text{avec} \quad x = (x_0, x_1) \in G = G_0 \times B_1.$$

L'idée est de décomposer tout domaine $\tilde{X}^{(k)} \subset X$ de dimension k ($k \in \mathbb{N}$), en le produit cartésien d'un sous-domaine $\tilde{X}_0^{(k)}$, avec son complémentaire dans $\tilde{X}^{(k)}$, noté $\tilde{X}_1^{(k)}$. De ce fait, pour tout sous-ensemble borné $\tilde{G}^{(k)} \subset \tilde{X}^{(k)}$, on peut écrire que $\tilde{G}^{(k)} = \tilde{G}_0^{(k)} \times B_1^{(k)} \subset \tilde{X}_0^{(k)} \times \tilde{X}_1^{(k)}$, où $\tilde{G}_0^{(k)}$ est un ensemble borné de $\tilde{X}_0^{(k)}$, et $B_1^{(k)}$ une boule unité de $\tilde{X}_1^{(k)}$ centrée à l'origine (voir [Bro83b] Propositions 5 et 6). Cela permet de prouver que

$$d_B(\tilde{f}_0^{(k)}, \tilde{G}_0^{(k)}, y_0^{(k)}) = d_B(S_1(\tilde{f}^{(k)}), \tilde{G}^{(k)}, y_0^{(k)}) = d_B(\tilde{f}^{(k)}, \tilde{G}^{(k)}, y_0^{(k)}),$$

où $\tilde{f}^{(k)}, y_0^{(k)}$ font référence aux approximations de f et y_0 dans l'espace $\tilde{X}^{(k)}$, et $\tilde{f}_0^{(k)}$ est la restriction de $\tilde{f}^{(k)}$ à l'ensemble $\tilde{G}_0^{(k)}$. Par conséquent, le degré de Leray-Schauder $d_{LS}(f, G, y_0)$ correspond à la valeur commune de $d_B(\tilde{f}_0^{(k)}, \tilde{G}_0^{(k)}, y_0^{(k)})$, pour toute approximation finie $\tilde{f}_0^{(k)}$ de f , associée à un sous-ensemble $\tilde{G}_0^{(k)}$ de G , de dimension k ($k \in \mathbb{N}$).

1.1.3 Degré topologique de Browder

L'approche de Leray-Schauder fut reprise et généralisée par Browder pour une classe d'applications f , plus nécessairement compactes, mais vérifiant la propriété de classe (S_+) , avec la propriété de demi-continuité. Ces propriétés sont définies comme suit :

- (A) f est dite de classe (S_+) si, pour toute suite x_j dans G , convergeant faiblement vers x dans X , et pour laquelle $\overline{\lim} \langle f(x_j), x_j - x \rangle \leq 0$, on a $x_j \rightarrow x$.
- (B) f est dite demi-continue si elle est continue de la topologie forte de X vers la topologie faible de X^* .

Pour approcher l'application f par une suite d'approximations de dimension finie, l'auteur a utilisé la méthode d'approximation de Galerkin, et a considéré un opérateur de suspension $S_2 : cl(P^{-1}(G_0) \cap (I - P)^{-1}(B_1)) \rightarrow X_0^*$, défini par

$$S_2(f) = P^*fP + (I - P)^*J(I - P),$$

où P est l'opérateur de projection de X sur un sous-espace fermé $X_0 \subset X$, P^* et $(I - P)^*$ sont des opérateurs d'injection de X_0^* dans X^* , et $J : X \rightarrow X^*$ est l'application de dualité.

1.1.4 Degré topologique de Berkovits

Par la suite, les travaux de Browder ont été adaptés par Berkovits [Ber07b] à des problèmes de point fixe de la forme $(P_T) : f \circ T^{-1}(x) = x$, où $T^{-1} : X^* \rightarrow X$ est l'opérateur inverse d'un opérateur $T : X \rightarrow X^*$, satisfaisant $f(y) = Ty$. Ici, T est supposé borné, demi-continu, et de classe (S_+) . Ainsi, Berkovits a prouvé que, lorsque f satisfait les propriétés de bornitude, demi-continuité, et la propriété de classe $(S_+)_T$, définie par

(C) f est dite de classe $(S_+)_T$ si, pour toute suite x_j dans G , convergeant faiblement vers x dans X , telle que la suite $\{y_j\} = \{T(x_j)\}$ converge vers y dans X^* , et pour laquelle $\overline{\lim} \langle f(x_j), y_j - y \rangle \leq 0$, on a $x_j \rightarrow x$,

alors il existe une unique fonction degré, basée sur le degré de Browder, qui est invariante par approximation de f , et par discrétisation de G . L'auteur a utilisé la méthode d'approximation appelée "régularisation super elliptique" pour approcher f par une suite d'approximations de dimension finie, et a considéré l'opérateur de suspension $S_3 : \overline{G} \rightarrow X^*$, défini par

$$S_3(f) = \lambda \phi \hat{\phi} f + T, \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ suffisamment large,}$$

où ϕ désigne une injection linéaire compacte d'un espace de Hilbert séparable W dans X^* , $\hat{\phi} : X \rightarrow W$ est son auxiliaire, défini par

$$(\hat{\phi}(u)|v)_W = \langle u, \phi(v) \rangle, \text{ pour tout } v \in W \text{ et } u \in X.$$

Il est à remarquer que la solution de (P_T) , notée x^* , obtenue à partir du degré de Berkovits et satisfaisant $g(T^{-1}x^*) = x^*$, appartient à l'espace dual X^* , étant donné que $T^{-1} : X^* \rightarrow X$.

1.1.5 Articulation du chapitre

En vue de l'application du degré de Berkovits, nous nous focaliserons sur les propriétés de l'application $f : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$, définie par

$$f(u_1, u_2) \equiv (f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2), f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2)), \quad (1.2)$$

ainsi que les propriétés de l'opérateur $T : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$, défini par

$$T(u_1, u_2) \equiv (-\Delta_{p_1(x)} u_1, -\Delta_{p_2(x)} u_2),$$

afin de prouver l'existence de point fixe à l'opérateur $I - f \circ T^{-1} : X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$. Une des raisons principales justifiant l'utilisation du degré de Berkovits, au lieu du degré de Leray-Schauder, provient du fait que, généralement, l'opérateur T n'est pas compact (voir, par exemple, [PS99]).

Plus précisément, il s'agira pour nous de :

- Prouver que les applications f et T , ainsi définies, vérifient les propriétés de bornitude, demi-continuité, ainsi que la propriété de classe (S_+) (pour l'opérateur T), et celle de classe $(S_+)_T$ (pour l'application f).

- Reformuler notre problème sous la forme

$$(\Phi_1, \Phi_2) - f \circ T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) = 0, \quad (\Phi_1, \Phi_2) \in X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega), \quad (1.3)$$

appelée équation d'Hammerstein du problème, et qui n'est autre que le problème dual de

$$T(u_1, u_2) = f(u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) \in X^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega),$$

dans le sens où $T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) = (u_1, u_2) \in X^{1, p_1(x), p_2(x)}$.

- Établir une homotopie adéquate, permettant de passer de (1.3) vers une autre équation admettant des solutions non triviales. Pour ce faire, on va tout simplement considérer l'homotopie affine $H(t, \cdot) = I(\cdot) - tf \circ T^{-1}(\cdot)$, et conclure, en utilisant l'invariance homotopique et la normalisation du degré de Berkovits, que $d(I, G, 0) = d(H(1, (\Phi_1, \Phi_2)), G, 0) = 1$, i.e. que la solution duale (Φ_1^*, Φ_2^*) existe, et ainsi, par bijection de T , que la solution de notre problème (u_1^*, u_2^*) existe. Ici, l'ensemble $G \subset X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega)$ correspond à un ensemble borné tel que

$$H(t, (\Phi_1, \Phi_2)) = (\Phi_1, \Phi_2) - tf \circ T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) \neq 0, \quad \forall (\Phi_1, \Phi_2) \in \partial G, \quad (1.4)$$

et dont la construction sera précisée par la suite.

1.2 Hypothèses

Dans ce chapitre, nous nous plaçons sous les hypothèses suivantes (voir section Notations pour plus de détails).

- (H1) $p_i \in C^1(\Omega)$ et $1 < p_i^- \leq p_i(x) \leq p_i^+ < N$ ($i = 1, 2$),
- (H2) Ω : sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) suffisamment régulier,
- (H3) $c_i, d_i, e_i \in C(\Omega)$ ($i = 1, 2$) sont des fonctions positives et bornées, avec $e_i^- > 0$ ($i = 1, 2$),
- (H4) $0 < \alpha_i^-, \beta_i^-, \alpha_i, \beta_i \in C(\Omega)$ ($i = 1, 2$),
- (H5) $\alpha_i(x) \frac{p'_i(x)}{p_1(x)} + \beta_i(x) \frac{p'_i(x)}{p_2(x)} < \min \left(1, \frac{p_1^- p'_i(x)}{\eta' p_1(x)} + \frac{(p_2^- - \eta) p'_i(x)}{\eta p_2(x)}, \frac{(p_1^- - \eta) p'_i(x)}{\eta p_1(x)} + \frac{p_2^- p'_i(x)}{\eta' p_2(x)} \right) \quad \forall x \in \Omega,$
 $\eta \in (1, \min\{p_1^-, p_2^-\}), \quad \eta' = \frac{\eta}{\eta - 1} \quad (i = 1, 2)$
- (H6) $0 \leq \gamma_i(x) < p_i^- - 1, \gamma_i \in C(\Omega)$ ($i = 1, 2$).

1.3 Résultats principaux

Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant. Ce théorème assure l'existence de solutions, par application du degré topologique de Berkovits, pour le système quasi-linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = c_1(x) u_1 |u_1|^{\alpha_1(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_1(x)-1} + d_1(x) |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = c_2(x) u_1 |u_1|^{\alpha_2(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_2(x)-1} + d_2(x) |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

Théorème 1.3.1. *Sous les hypothèses (H1) à (H6), le système (1.5) admet au moins une solution non triviale dans $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$.*

1.4 Définitions et résultats préliminaires

Étant donné que l'on considère des solutions faibles de (1.5), on se place sous la définition suivante.

Définition 1.4.1. *On appelle solution faible de (1.5) tout couple $(u_1, u_2) \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ satisfaisant*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \nabla \varphi_1 \, dx = \int_{\Omega} \left(c_1(x) u_1 |u_1|^{\alpha_1(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_1(x)-1} + d_1(x) |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} \varphi_1 + e_1(x) \right) \varphi_1 dx, \\ \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)-2} \nabla u_2 \nabla \varphi_2 \, dx = \int_{\Omega} \left(c_2(x) u_1 |u_1|^{\alpha_2(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_2(x)-1} + d_2(x) |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} \varphi_2 + e_2(x) \right) \varphi_2 dx, \end{cases}$$

pour tout $(\varphi_1, \varphi_2) \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$.

Dans la suite, X fait référence à un espace de Banach réel, séparable et réflexif, X^* son espace dual, et $G \in \mathcal{O}$, avec $\mathcal{O}$ la collection de tous les ensembles ouverts et bornés dans X . Le symbole $\|\cdot\|$ fait référence à la norme sur X , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre X et X^* .

1.4.1 Propriétés du degré de Berkovits

Considérons la classe d'opérateurs suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\bar{G}) &:= \left\{ F : \bar{G} \rightarrow X^* \mid F \text{ est borné, demi-continu et de classe } (S_+) \right\}, \\ \mathcal{F}_T(\bar{G}) &:= \left\{ F : \bar{G} \rightarrow X \mid F \text{ est demi-continu et de classe } (S_+)_T \right\}, \\ \mathcal{F}_{T,B}(\bar{G}) &:= \left\{ F : \bar{G} \rightarrow X \mid F \text{ est borné, demi-continu et de classe } (S_+)_T \right\}. \end{aligned}$$

Le résultat clé de ce chapitre est le résultat d'existence suivant.

Lemme 1.4.1 (voir [Ber07b]). *Il existe une unique fonction degré*

$$d : \left\{ (F, G, h) \mid G \in \mathcal{O}, T \in \mathcal{F}_1(\bar{G}), F \in \mathcal{F}_{T,B}(\bar{G}), h \notin F(\partial G) \right\} \rightarrow \mathbb{Z},$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

1. (Existence) Si $d(F, G, H) \neq 0$, alors l'équation $F(u) = h$ admet une solution dans G .
2. (Additivité) Soit $F \in \mathcal{F}_{T,B}(\bar{G})$. Si G_1 et G_2 sont deux sous-ensembles ouverts et disjoints de G , tels que $h \notin F(\bar{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$, alors on a

$$d(F, G, h) = d(F, G_1, h) + d(F, G_2, h).$$

3. (Invariance homotopique) Si $H : [0, 1] \times \bar{G} \rightarrow X$ est une homotopie bornée, admissible avec le graphe intérieur essentiel d'une application commune, et continue, et si $h : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin continu dans X , tel que $h(t) \notin H(t, \partial G)$, pour tout $t \in [0, 1]$, alors la valeur de $d(H(t, \cdot), G, h(t))$ est constante pour tout $t \in [0, 1]$.
4. (Normalisation) Pour tout $h \in G$, on a $d(I, G, h) = 1$.

1.4.2 Définition des propriétés de demi-continuité et de classe $(S_+)_T$

Nous rappelons certaines propriétés basiques, et donnons la définition d'une fonction demi-continue. Cette définition sera utilisée plus tard pour l'application du degré de Berkovits.

Définition 1.4.2. *Soit Y un espace de Banach réel. Une application $F : D \subset X \rightarrow Y$ est dite :*

1. *bornée si l'image de tout ensemble borné est un ensemble borné.*
2. *demi-continue si pour tout suite $(u_n) \subset D$, $u_n \rightarrow u$, on a $F(u_n) \rightarrow F(u)$.*
3. *compacte si elle est continue, et que l'image de tout ensemble borné est un ensemble relativement compact.*

Dans ce qui suit, après avoir présenté certaines propriétés de monotonie, nous donnons la définition de fonctions de classe (S_+) et $(S_+)_T$, nécessaire pour l'application du degré de Berkovits.

Définition 1.4.3 (voir [Ber07a] p.291). *On définit les propriétés suivantes.*

– *Propriété de monotonie : une application $F : D \subset X \rightarrow X^*$ est monotone si, pour tout $u, v \in D$,*

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq 0.$$

– *Propriété de pseudo-monotonie : une application $F : D \subset X \rightarrow X^*$ est pseudo-monotone si, pour toute suite $(u_n) \subset D$, telle que $u_n \rightharpoonup u$, et satisfaisant*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle F(u_n), u_n - u \rangle \leq 0,$$

et $\langle F(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$ dans X , $u \in D$, on a $F(u_n) \rightarrow F(u)$.

– *Propriété de classe (S_+) : une application $F : D \subset X \rightarrow X^*$ est de classe (S_+) si, pour toute suite $(u_n) \subset D$, telle que $u_n \rightharpoonup u$, avec*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle F(u_n), u_n - u \rangle \leq 0,$$

on a $u_n \rightarrow u$ dans X .

– *Propriété de classe $(S_+)_T$: une application $F : D \subset X \rightarrow X$ satisfait la condition $(S_+)_T$ si, pour toutes suites $(u_n) \subset D$ et $(y_n) = (T(u_n)) \subset X^*$, telles que $u_n \rightharpoonup u$, $y_n \rightharpoonup y$, avec*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle F(u_n), y_n - y \rangle \leq 0,$$

on a $u_n \rightarrow u$ in X .

– *Propriété de quasi-monotonie : une application $F : D \subset X \rightarrow X^*$ est dite quasi-monotone si, pour toute suite $(u_n) \subset D$, telle que $u_n \rightharpoonup u$, on a*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle F(u_n), u_n - u \rangle \geq 0.$$

1.4.3 Homotopie de classe $(S_+)_T$

L'utilisation de la propriété d'invariance homotopique du degré de Berkovits nécessite de considérer des homotopies de classe $(S_+)_T$. Tout d'abord, nous définissons le concept d'homotopie affine admissible.

Définition 1.4.4. Soit $T : \bar{G} \subset X \rightarrow X^*$ un opérateur borné, continu, et de classe (S_+) . Considérons les applications $M, N : \bar{G} \subset X \rightarrow X$. L'homotopie affine $H : [0, 1] \times \bar{G} \rightarrow X$, définie par

$$H(t, u) := (1 - t)M(u) + tN(u), \text{ pour tout } (t, u) \in [0, 1] \times \bar{G}, \quad (1.6)$$

est appelée homotopie affine, admissible avec le graphe intérieur essentiel de l'opérateur commun et continu T .

Ensuite, nous établissons une relation entre les homotopies affines admissibles et les homotopies de classe $(S_+)_T$.

Lemme 1.4.2 (voir [Ber07a]). Si les applications $M, N : \bar{G} \subset X \rightarrow X$ sont des applications bornées, demi-continues, et de classe $(S_+)_T$, alors l'homotopie affine $H : [0, 1] \times \bar{G} \rightarrow X$, définie dans (1.6), a la propriété de classe $(S_+)_T$.

1.4.4 Principe de Leray-Schauder

Notre approche est basée grandement sur le lemme suivant.

Lemme 1.4.3 (Principe de Leray-Schauder, voir [Ber07a, Corollaire 9.3]). Soit $F = I - TS : \bar{G} \subset X \rightarrow X^*$ une application bornée, demi-continue, et de classe $(S_+)_T$, avec T une application bornée, demi-continue, et de classe (S_+) . L'équation $F(u) = 0$ admet au moins une solution, pourvu que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} 0 \in G, \\ t(u - F(u)) \neq u, \forall u \in \partial G, 0 < t < 1. \end{cases}$$

Dans le but d'appliquer le Lemme 1.4.3, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1.4.4 (voir [Ber07a] Lemmes 2.2 et 2.4). Soit $T : \bar{G} \subset X \rightarrow X^*$ une application bornée, demi-continue, et de classe (S_+) , et soit $S : D_S \subset X^* \rightarrow X$ et $L : D_L \subset X^* \rightarrow X$ des applications demi-continues, telles que $T(\bar{G}) \subset D_S \cap D_L$. Les énoncés suivants sont vérifiés :

1. Si S est quasi-monotone, alors $I + S \circ T : \bar{G} \subset X \rightarrow X$ est demi-continue et satisfait la condition $(S_+)_T$.
2. Si L est de classe (S_+) , alors $T \circ T^{-1} : \bar{G} \subset X \rightarrow X$ est demi-continue et satisfait la condition $(S_+)_T$.

1.4.5 Propriétés de l'opérateur $p(x)$ -Laplacien

Dans le but de prouver que l'opérateur $p(x)$ -Laplacien appartient à l'ensemble $\mathcal{F}_1(\bar{G})$, $\mathcal{F}_1$ défini plus tôt, où G est un ensemble qui sera précisé plus tard, le lemme suivant sera d'une grande aide.

Lemme 1.4.5 (voir [Cha86, Théorème 3.1]). Soit $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ l'opérateur $p(x)$ -Laplacien défini dans la section Notations, alors

1. $L_{p(x)}$ est un opérateur borné, continu, et strictement monotone.
2. $L_{p(x)}$ est un opérateur de classe (S_+) .
3. $L_{p(x)}$ est un homéomorphisme.

1.4.6 Propriétés algébriques

En pratique, la norme de Luxembourg $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ n'est pas aisément maniable, du fait que sa définition n'est pas aussi explicite que celle de la norme de Lebesgue dans le cas constant, définie dans la section Notations. Par conséquent, il s'agira plutôt d'utiliser la fonction modulaire $\rho_{p(\cdot)}$, et de faire appel au lemme suivant pour estimer $\rho_{p(\cdot)}$ en fonction de $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$.

Lemme 1.4.6 (voir [KWZ10a] Lemme 2.6). *Soit $\rho_{p(\cdot)}$, défini par $\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} |u_1|^{p(x)} dx$, $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Par conséquent, les énoncés suivants sont valides :*

- (1) $\rho_{p(x)}(u) > 1 (= 1; < 1)$ si et seulement si $\|u\|_{p(x)} > 1 (= 1; < 1)$ respectivement.
- (2) Si $\|u\|_{p(x)} < 1$, alors $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.
- (3) Si $\|u\|_{p(x)} > 1$, alors $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$.
- (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p(x)}(u_n - u) = 0$.

Remarque 1.4.1. *A partir des points (2) et (3) du Lemme 1.4.6, on peut déduire les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|u\|_{p(x)} \leq \rho_{p(x)}(u) + 1 \\ (2) \quad & \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-} + \|u\|_{p(x)}^{p^+}. \end{aligned}$$

Nous énonçons les lemmes suivants qui seront très utiles pour la suite.

Lemme 1.4.7 (voir [FIN97]). *Pour tous vecteurs réels $u, v \in \mathbb{R}^N$, il existe deux nombres positifs C_1, C_2 , dépendant de $p(x)$ ($x \in \Omega$ fixé), tels que les inégalités suivantes soient vérifiées*

$$\langle |u|^{p(x)-2}u - |v|^{p(x)-2}v, u - v \rangle \geq \begin{cases} C_1 (|u| + |v|)^{p(x)-2} |u - v| & \text{si } 1 < p(x) < 2 \text{ et } (u_1, u_2) \neq (0, 0), \\ C_2 |u - v|^{p(x)} & \text{si } p(x) \geq 2, \end{cases}$$

où $C_1 = p(x) - 1$ et $C_2 = 4^{1-p(x)}$.

Lemme 1.4.8 (voir [KWZ10a, Théorème 3.2]). *Soit $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, satisfaisant $1 \leq p(x) \leq 2$ pour tout $x \in \Omega$. Les inégalités suivantes sont valides :*

$$\text{Si } \left\| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} \right\|_{\frac{2}{p(x)}} > 1, \text{ alors}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \leq K_1(u_1, u_2) \int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx. \quad (1.7)$$

$$\text{Si } \left\| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} \right\|_{\frac{2}{p(x)}} \leq 1, \text{ alors}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \leq K_1(u_1, u_2) \left(\int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{p^+}}, \quad (1.8)$$

avec $K_1(u_1, u_2) = 2 \left(\rho_{p(x)}(|\nabla u|) + \rho_{p(x)}(|\nabla v|) + 1 \right)$.

Démonstration. Étant donné que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 0.5.1, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx &\leq 2 \left\| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right\|_{\frac{2}{2-p(x)}} \\ &\quad \times \left\| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} \right\|_{\frac{2}{p(x)}}. \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 1.4.1, et la convexité de $t \mapsto |t|^{p(x)}$ pour tout $x \in \Omega$, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \left\| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right\|_{\frac{2}{2-p(x)}} &\leq \rho_{\frac{2}{2-p(x)}} \left((|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right) + 1 \\ &= \rho_{p(x)} (|\nabla u| + |\nabla v|) + 1 \\ &\leq \rho_{p(x)} (|\nabla u|) + \rho_{p(x)} (|\nabla v|) + 1 \end{aligned}$$

Dans le but de simplifier, et pour une meilleure lecture, on pose

$$A = \left\| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} \right\|_{\frac{2}{p(x)}}.$$

Si $A > 1$, alors le Lemme 1.4.6 implique que

$$\begin{aligned} A &\leq \rho_{\frac{2}{p(x)}} \left((|\nabla u| + |\nabla v|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &= \left(\int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

Si $A \leq 1$, alors le Lemme 1.4.6 implique que

$$A \leq \left(\int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{p^+}}.$$

Ceci complète la démonstration. □

1.4.7 Un théorème de la Valeur Moyenne

Dans la suite, nous serons confrontés à des situations où nous aurons à estimer l'intégrale du produit de deux fonctions génériques f et ϕ uniquement à partir de l'intégrale de f . Une telle estimation est fournie par le Théorème de la Valeur Moyenne suivant, introduit par Banks dans [Bro83a].

Théorème 1.4.1 (voir [Bro83a] théorème 6). *Soit f et ϕ des fonctions à valeur réelle, définies sur $x \in \Omega$, avec f intégrable sur Ω , ϕ mesurable sur Ω , et satisfaisant la condition*

$$-\infty < m \leq \phi(x) \leq M < +\infty.$$

Soit l'ensemble

$$\omega = \{x \in \Omega : \phi(x) \geq y\}.$$

Si

$$0 \leq \int_{\omega} f dx \leq \int_{\Omega} f dx,$$

pour tout $y \in [m, M]$, alors il existe un réel $\gamma \in [m, M]$ tel que

$$\gamma \int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

1.5 Quelques éléments de base

1.5.1 Définition du problème (1.5)

Tout d'abord, précisons que, sous l'hypothèse (H) , le problème (1.5) est bien défini. En d'autres termes, les termes sources f_i appartiennent aux espaces duaux $L^{p'_i(\cdot)}(\Omega)$ ($i = 1, 2$). En effet, on a le lemme suivant.

Lemme 1.5.1. *Sous les hypothèses (H) , supposons que $(u_1, u_2) \in X_0^{1,p_1(x)} \times X_0^{1,p_2(x)}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} & \left(c_1(x)u_1(x)|u_1(x)|^{\alpha_1(x)-1}u_2(x)|u_2(x)|^{\beta_1(x)-1}, c_2(x)u_1(x)|u_1(x)|^{\alpha_2(x)-1}u_2(x)|u_2(x)|^{\beta_2(x)-1} \right) \\ & \in L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega), \end{aligned} \quad (1.9)$$

et

$$\left(d_1(x)|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x), d_2(x)|\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x) \right) \in L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega). \quad (1.10)$$

Démonstration. Il est clair que $(e_1(x), e_2(x)) \in L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega)$. Aussi, pour tout $(u_1, u_2) \in L^{p_1(x)}(\Omega) \times L^{p_2(x)}(\Omega)$, le Lemme 1.5.2 assure que

$$\left(|u_1|^{\alpha_i(x)p'_i(x)}, |u_2|^{\beta_i(x)p'_i(x)} \right) \in L^{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)p'_i(x)}}(\Omega) \times L^{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)p'_i(x)}}(\Omega), \quad (1.11)$$

$i = 1, 2$. Par conséquent,

$$c_i(x)|u_1(x)|^{\alpha_i(x)p'_i(x)}|u_2(x)|^{\beta_i(x)p'_i(x)} \in L^{t_i(x)}(\Omega), \quad (1.12)$$

où t_i est une fonction définie, pour tout $x \in \Omega$, par :

$$\frac{1}{t_i(x)} = \frac{\alpha_i(x)p'_i(x)}{p_1(x)} + \frac{\beta_i(x)p'_i(x)}{p_2(x)},$$

$i = 1, 2$. De plus, l'hypothèse (H5) assure, pour tout $x \in \Omega$, que $t_1(x) > 1$. Maintenant, d'après (1.12), l'inégalité de Hölder implique :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} c_i(x) |u_1(x)|^{\alpha_i(x)p'_i(x)} |u_2(x)|^{\beta_i(x)p'_i(x)} dx &\leq \|c_i\|_{\infty} \|1\|_{t'_i(x)} \left\| |u_1(x)|^{\alpha_i(x)p'_i(x)} |u_2(x)|^{\beta_i(x)p'_i(x)} \right\|_{t_i(x)} \\
&\leq \text{const} \left[\rho_{t_i(x)} \left(|u_1(x)|^{\alpha_i(x)p'_i(x)} |u_2(x)|^{\beta_i(x)p'_i(x)} \right) + 1 \right] \\
&\leq \text{const} \left[\left\| |u_1(x)|^{\alpha_i(x)p'_i(x)} \right\|_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)p'_i(x)}} \right. \\
&\quad \left. \times \left\| |u_2(x)|^{\beta_i(x)p'_i(x)} \right\|_{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)p'_i(x)}} + 1 \right], \tag{1.13}
\end{aligned}$$

où, pour tout $x \in \Omega$, on a $t'_i(x) = \frac{t_i(x)}{t_i(x)-1}$ ($i = 1, 2$). Par conséquent, à partir du Lemme 1.5.2 et de l'inégalité de Poincaré, il existe $x_0^i, x_1^i \in \Omega$ ($i = 1, 2$) tel que l'on ait :

$$\rho_{p'_i(x)} \left(c_i(x) |u_1(x)|^{\alpha_i(x)} |u_2(x)|^{\beta_i(x)} \right) \leq \text{const} \left[\|u_1(x)\|_{1,p_1(x)}^{\alpha_i(x_0^i)p'_i(x_0^i)} \|u_2(x)\|_{1,p_2(x)}^{\beta_i(x_1^i)p'_i(x_1^i)} + 1 \right]. \tag{1.14}$$

Ceci, d'après le Lemme 1.4.6, montre que $c_i(x)u_1(x)|u_1(x)|^{\alpha_i(x)-1}u_2(x)|u_2(x)|^{\beta_i(x)-1} \in L^{p'_i(x)}(\Omega)$ ($i = 1, 2$). Grâce à l'hypothèse (H6), l'injection suivante est vérifiée :

$$L^{p_i(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma_i(x)p'_i(x)}(\Omega),$$

$i = 1, 2$. Par conséquent, en vertu du Lemme 1.4.6 et du Corollaire 1.4.1, on a :

$$\begin{aligned}
\rho_{p'_i(x)} \left(d_i(x) |\nabla u_i|^{\gamma_i(x)} \right) &= \int_{\Omega} d_i(x) |\nabla u_i|^{\gamma_i(x)p'_i(x)} dx \\
&\leq \|d_i\|_{\infty} \rho_{\gamma_i(x)p'_i(x)} (|\nabla u_i|) \\
&\leq \|d_i\|_{\infty} \left(\|\nabla u_i\|_{\gamma_i(x)p'_i(x)}^{p_i^-} + \|\nabla u_i\|_{\gamma_i(x)p'_i(x)}^{p_i^+} \right) \\
&\leq \|d_i\|_{\infty} \text{const} \left(\|u_i\|_{1,p_i(x)}^{p_i^-} + \|u_i\|_{1,p_i(x)}^{p_i^+} \right), \tag{1.15}
\end{aligned}$$

ce qui, d'après le Lemme 1.4.6, implique que $d_i(x)|\nabla u_i|^{\gamma_i(x)} \in L^{p'_i(x)}(\Omega)$ ($i = 1, 2$). $\square$

1.5.2 Une propriété liée à la norme de Luxembourg

Le lemme suivant est la généralisation, au cas variable, de l'estimation de la quantité $\| |u_1|^m \|_{\frac{k}{m}}$ par rapport à la quantité $\|u\|_k^m$. Cette estimation sera très souvent utilisée au cours de nos travaux.

Lemme 1.5.2. *Soit u une fonction à valeur réelle, définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, et k, m deux fonctions réelles, bornées, et positives, avec $m^- > 0$. Supposons que $u \in L^{k(x)}(\Omega)$. Alors $u^{m(x)} \in L^{\frac{k(x)}{m(x)}}(\Omega)$, et il existe $x_0 \in \Omega$ tel que*

$$\left\| |u|^{m(x)} \right\|_{\frac{k(x)}{m(x)}} = \|u\|_{k(x)}^{m(x_0)}. \tag{1.16}$$

Démonstration. Dans la suite, nous supposons que $u \neq 0$ p.p. dans Ω , auquel cas l'égalité (1.16) serait trivialement vérifiée.

Tout d'abord, on peut remarquer que, grâce au Théorème C.0.5, l'égalité suivante est vérifiée :

$$1 = \rho_{k(x)} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{k(x)}} \right) \quad (1.17)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{|u|^{k(x)}}{\|u\|_{k(x)}^{k(x)}} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{k(x)}^{m(x)}} \right)^{\frac{k(x)}{m(x)}} dx = \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{k(x)}^{m(x)}} \right). \quad (1.18)$$

D'après l'inégalité

$$\rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{k(x)}^{m(x)}} \right) \geq \begin{cases} \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{k(x)}^{m(x)}} \right) & \text{si } \|u\|_{k(x)} \leq 1 \\ \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\|u\|_{k(x)}^{m^+}} \right) & \text{si } \|u\|_{k(x)} > 1, \end{cases}$$

on peut déduire que

$$\min \left(\|u\|_{k(x)}^{m^-}, \|u\|_{k(x)}^{m^+} \right) \in E := \left\{ \lambda > 0 : \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

De plus, on prouve que E admet une borne inférieure. En effet, d'après les propriétés de ρ , il résulte que

$$\begin{aligned} E &\subset \left\{ 0 < \lambda \leq 1 : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^+}{m^-}}} \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(|u|^{m(x)} \right) \leq 1 \right\} \cup \left\{ 1 < \lambda : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^-}{m^+}}} \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(|u|^{m(x)} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ 0 < \lambda \leq 1 : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^+}{m^-}}} \rho_{k(x)} (|u|) \leq 1 \right\} \cup \left\{ 1 < \lambda : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^-}{m^+}}} \rho_{k(x)} (|u|) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de la Valeur Moyenne, énoncé dans le Lemme 1.4.1, il existe $x_0 \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned} E &\subset \left\{ 0 < \lambda \leq 1 : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^+}{m^-}}} \|u\|_{k(x)}^{k(x_0)} \rho_{k(x)} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{k(x)}} \right) \leq 1 \right\} \cup \left\{ 1 < \lambda : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^-}{m^+}}} \|u\|_{k(x)}^{k(x_0)} \rho_{k(x)} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{k(x)}} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ 0 < \lambda \leq 1 : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^+}{m^-}}} \|u\|_{k(x)}^{k(x_0)} \leq 1 \right\} \cup \left\{ 0 < \lambda \leq 1 : \frac{1}{\lambda^{\frac{k^-}{m^+}}} \|u\|_{k(x)}^{k(x_0)} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\min \left(\|u\|_{k(x)}^{\frac{k(x_0)m^-}{k^+}}, \|u\|_{k(x)}^{\frac{k(x_0)m^+}{k^-}} \right) \leq \inf(E)$. Par conséquent, $\inf(E)$ existe, ce qui signifie que $|u|^{m(x)} \in L^{\frac{k(x)}{m(x)}}(\Omega)$, pour tout $x \in \Omega$. Maintenant, grâce au Théorème C.0.5, l'égalité suivante est valide :

$$1 = \rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\| |u|^{m(x)} \|_{\frac{k(x)}{m(x)}}} \right). \quad (1.19)$$

De surcroît, d'après la définition de ρ , l'égalité suivante est vérifiée

$$\rho_{\frac{k(x)}{m(x)}} \left(\frac{|u|^{m(x)}}{\| |u|^{m(x)} \|_{\frac{k(x)}{m(x)}}} \right) = \int_{\Omega} \left| \frac{u}{\|u\|_{k(x)}} \right|^{k(x)} \frac{\|u\|_{k(x)}^{k(x)}}{\| |u|^{m(x)} \|_{\frac{k(x)}{m(x)}}} dx.$$

Par conséquent, on peut utiliser le Théorème de la Valeur Moyenne, énoncé dans le Lemme 1.4.1, pour garantir l'existence de $x_0 \in \Omega$, tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{u}{\|u\|_{k(x)}} \right|^{k(x)} \frac{\|u\|_{k(x)}^{k(x)}}{\| |u_1|^{m(x)} \|_{\frac{k(x)}{m(x)}}} dx \\ &= \frac{\|u\|_{k(x_0)}^{k(x_0)}}{\| |u_1|^{m(x)} \|_{\frac{k(x_0)}{m(x_0)}}} \rho_{k(x)} \left(\frac{u}{\|u\|_{k(x)}} \right) = \frac{\|u\|_{k(x_0)}^{k(x_0)}}{\| |u|^{m(x)} \|_{\frac{k(x_0)}{m(x_0)}}}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité (1.16) d'après (1.19). □

1.6 Existence d'au moins une solution pour le problème (1.5)

1.6.1 Une propriété de classe (S_+) pour l'opérateur $(p_1(x), p_2(x))$ -Laplacien

On rappelle (cf Introduction) que l'application du degré de Berkovits nécessite de prouver que l'opérateur $T = (-\Delta_{p_1(x)}, -\Delta_{p_2(x)})$ est de classe (S_+) . Ceci est assuré par la proposition suivante.

Proposition 1.6.1. *Soit l'opérateur $T : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow (X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega))^*$, défini par*

$$T(u_1, u_2) = (-\Delta_{p_1(x)} u_1, -\Delta_{p_2(x)} u_2),$$

c'est-à-dire, pour tout couple de fonctions tests $(\phi_1, \phi_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}$, par

$$\begin{aligned} \langle T(u_1, u_2), (\phi_1, \phi_2) \rangle_{1,p_1(x),p_2(x)} &= \langle L_{p_1(x)} u_1, \phi_1 \rangle_{1,p_1(x)} + \langle L_{p_2(x)} u_2, \phi_2 \rangle_{1,p_2(x)} \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \nabla \phi_1 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)-2} \nabla u_2 \nabla \phi_2 dx. \end{aligned}$$

Alors T est de classe (S_+) (voir Définition 1.4.3).

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega \mid 1 < p_1(x), p_2(x) < 2\}, & \Omega_2 &= \{x \in \Omega \mid 1 < p_1(x) < 2, \quad 2 \leq p_2(x)\}, \\ \Omega_3 &= \{x \in \Omega \mid 2 \leq p_1(x), \quad 1 < p_2(x) < 2\}, & \Omega_4 &= \{x \in \Omega \mid 2 \leq p_1(x), p_2(x)\}. \end{aligned}$$

Soit $(u_{1,n}, u_{2,n})$ une suite de $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$, faiblement convergente vers (u_1, u_2) . On suppose que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle L(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) \rangle_{1,p_1(x),p_2(x)} \leq 0. \quad (1.20)$$

L est de classe (S_+) , pourvu que $(u_{1,n}, u_{2,n})$ converge fortement vers (u_1, u_2) . Pour cela, à l'aide de (1.20), on établit la convergence forte de $(u_{1,n}, u_{2,n})$ vers (u_1, u_2) . Dans cette perspective, on considérera les cas suivants.

• **Cas 1 : Estimation sur Ω_4**

D'après les inégalités algébriques fournies par les Lemmes 1.4.7 et 1.4.6, il est vrai que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_4} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx &\geq \int_{\Omega_4} 4^{1-p_1(x)} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx \\ &\geq 4^{1-p_1^+} \int_{\Omega_4} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx. \end{aligned} \quad (1.21)$$

On établit une estimation similaire en remplaçant $u_{1,n}$ par $u_{2,n}$ et $p_1(\cdot)$ par $p_2(\cdot)$.

• **Cas 2 : Estimation sur Ω_1**

Les Lemmes 1.4.7 et 1.4.8, ainsi que la condition

$$\left\| (|\nabla u_{1,n}| + |\nabla u_1|)^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} \right\|_{\frac{2}{p_1(x)}} > 1,$$

impliquent l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \\ &\geq \int_{\Omega_1} (p_1(x) - 1) (|\nabla u_{1,n}| + |\nabla u_1|)^{p_1(x)-2} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^2 dx \\ &\geq (p_1^- - 1) \int_{\Omega_1} (|\nabla u_{1,n}| + |\nabla u_1|)^{p_1(x)-2} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^2 dx \\ &\geq \frac{(p_1^- - 1)}{K(u_{1,n}, u_1)} \int_{\Omega_1} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx. \end{aligned}$$

Dans la cas où $\left\| (|\nabla u_{1,n}| + |\nabla u_1|)^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} \right\|_{\frac{2}{p_1(x)}} \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \\ &\geq \frac{(p_1^- - 1)}{K(u_{1,n}, u_1)} \left[\int_{\Omega_1} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx \right]^{p_1^+}, \end{aligned}$$

avec $K(u_{1,n}, u_1) = 2 \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + 1 \right)$.

Finalement, en posant $A_1(u_{1,n}, u_1) = \int_{\Omega_1} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx$, on aboutit à l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \\ &\geq \frac{(p_1^- - 1)}{K(u_{1,n}, u_1)} \min \left\{ A_1(u_{1,n}, u_1), A_1(u_{1,n}, u_1)^{p_1^+} \right\}. \end{aligned}$$

On établit une estimation similaire en remplaçant $u_{1,n}$ par $u_{2,n}$ et $p_1(\cdot)$ par $p_2(\cdot)$.

• **Cas 3 : Estimation sur Ω_2**

On reprend la démarche utilisée dans le cas 2 pour établir que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \\ & \geq \frac{(p_1^- - 1)}{K(u_{1,n}, u_1)} \min \left\{ A_2(u_{1,n}, u_1), A_2(u_{1,n}, u_1)^{p_1^+} \right\}, \end{aligned}$$

avec $K(u_{1,n}, u_1) = 2 \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega_2} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + 1 \right)$ et $A_2(u_{1,n}, u_1) = \int_{\Omega_2} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx$. Aussi, suivant la démarche utilisée dans le cas 1, on établit que

$$\int_{\Omega_2} \left(|\nabla u_{2,n}|^{p_2(x)-2} \nabla u_{2,n} - |\nabla u_2|^{p_2(x)-2} \nabla u_2 \right) (\nabla u_{2,n} - \nabla u_2) dx \geq 4^{1-p_2^+} \int_{\Omega_2} |\nabla u_{2,n} - \nabla u_2|^{p_2(x)} dx.$$

• **Cas 4 : Estimation sur Ω_3**

On reprend la démarche utilisée dans le cas 2 pour établir que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_3} \left(|\nabla u_{2,n}|^{p_2(x)-2} \nabla u_{2,n} - |\nabla u_2|^{p_2(x)-2} \nabla u_2 \right) (\nabla u_{2,n} - \nabla u_2) dx \\ & \geq \frac{(p_2^- - 1)}{K(u_{2,n}, u_2)} \min \left\{ A_3(u_{2,n}, u_2), A_3(u_{2,n}, u_2)^{p_2^+} \right\}, \end{aligned}$$

avec $K(u_{2,n}, u_2) = 2 \left(\int_{\Omega_3} |\nabla u_{2,n}|^{p_2(x)} dx + \int_{\Omega_3} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx + 1 \right)$ et $A_3(u_{2,n}, u_2) = \int_{\Omega_3} |\nabla u_{2,n} - \nabla u_2|^{p_2(x)} dx$. Aussi, suivant la démarche utilisée dans le cas 1, on établit que

$$\int_{\Omega_3} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \geq 4^{1-p_1^+} \int_{\Omega_3} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx.$$

Cas général : Estimation sur Ω

Puisque $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$, avec les ensembles disjoints Ω_i ($i = 1, \dots, 4$), on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \\ & \geq 4^{1-p_1^+} A_{(1,3)}(u_{1,n}, u_1) + \frac{(p_1^- - 1)}{K(u_{1,n}, u_1)} \min \left\{ A_{(2,4)}(u_{1,n}, u_1), A_{(2,4)}(u_{1,n}, u_1)^{p_1^+} \right\}, \end{aligned}$$

avec $A_{(1,3)}(u_{1,n}, u_1) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_3} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx$ et $A_{(2,4)}(u_{1,n}, u_1) = \int_{\Omega_2 \cup \Omega_4} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx$. Cela entraîne que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(|\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)-2} \nabla u_{1,n} - |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \right) (\nabla u_{1,n} - \nabla u_1) dx \\ & \geq \min \left(4^{1-p_1^+}, \frac{(p_1^- - 1)}{K(u_{1,n}, u_1)} \right) \times \min \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{1,n} - \nabla u_1|^{p_1(x)} dx, A_{(1,3)}(u_{1,n}, u_1) + A_{(2,4)}(u_{1,n}, u_1)^{p_1^+} \right). \end{aligned}$$

On établit une estimation similaire en remplaçant $u_{1,n}$ par $u_{2,n}$ et $p_1(\cdot)$ par $p_2(\cdot)$. De ce fait, on obtient, grâce au Lemme 1.4.6, le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & < L_{p_1(x)}(u_{1,n}) - L_{p_1(x)}(u_1), u_{1,n} - u_1 >_{1,p_1(x)} \\ & \geq \begin{cases} C_{1,p_1(x)}(u_{1,n}, u_1) \min \left(\|\nabla u_{1,n} - \nabla u_1\|_{p_1(x)}^{p_1^+}, C_{2,p_1(x)}(u_{1,n}, u_1) \right) & \text{si } \|\nabla u_{1,n} - \nabla u_1\|_{p_1(x)} \leq 1 \\ C_{1,p_1(x)}(u_{1,n}, u_1) \min \left(\|\nabla u_{1,n} - \nabla u_1\|_{p_1(x)}^{p_1^-}, C_{2,p_1(x)}(u_{1,n}, u_1) \right) & \text{si } \|\nabla u_{1,n} - \nabla u_1\|_{p_1(x)} > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec $C_{1,p_1(x)}(u_{1,n}, u_1) = \min \left(4^{1-p_1^+}, \frac{p_1^- - 1}{K(u_{1,n}, u_1)} \right)$, et $C_{2,p_1(x)}(u_{1,n}, u_1) = A_{(1,3)}(u_{1,n}, u_1) + A_{(2,4)}(u_{1,n}, u_1)^{p_1^+}$.

• **Conclusion : Propriété de classe (S_+)**

D'après le Lemme 1.4.5, on sait que l'opérateur $L_{p_1(x)}$ est monotone au sens de la Définition 1.4.3, ce qui conduit à la monotonie de l'opérateur $T := (L_{p_1(x)}, L_{p_2(x)})$. La continuité de T entraîne sa demi-continuité, qui, combinée avec la propriété de monotonie, entraîne la pseudo-monotonie de T , au sens de la Définition 1.4.3.

En vertu de la pseudo-monotonie de T , on obtient la faible convergence de la suite $(u_{1,n}, u_{2,n})$. Remarquons que l'hypothèse (1.20) garantit la convergence faible suivante

$$T(u_{1,n}, u_{2,n}) \rightharpoonup T(u_1, u_2). \quad (1.23)$$

Par conséquent, puisque

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_{1,n}, u_{2,n}) \rangle_{1,p_1(x),p_2(x)} - \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle T(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_1, u_2) \rangle_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) \rangle_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle T(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) \rangle_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ & \leq 0, \end{aligned}$$

alors, d'après (1.23), l'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} K(u_{1,n}, u_1) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (K(u_{1,n}, u_1) + K(u_{2,n}, u_2)) \\ & = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_{1,n}|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega_1} |\nabla u_{2,n}|^{p_2(x)} dx + \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega_1} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx + 2 \right) \\ & \leq 4 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx + 1 \right). \end{aligned}$$

On établit une estimation similaire en remplaçant $K(u_{1,n}, u_1)$ par $K(u_{2,n}, u_2)$. En combinant la convergence faible de $(u_{1,n}, u_{2,n})$ vers (u_1, u_2) avec l'hypothèse (1.20), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 & \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} < T(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) >_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ & + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} < -T(u_1, u_2), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) >_{1,p_1(x),p_2(x)}. \end{aligned}$$

De plus, par définition de la limite supérieure, et grâce aux hypothèses (1.20) et (1.22), on peut écrire que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} < T(u_{1,n}, u_{2,n}), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) >_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ &\quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} < -T(u_1, u_2), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) >_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} < T(u_{1,n}, u_{2,n}) - L(u_1, u_2), (u_{1,n} - u_1, u_{2,n} - u_2) >_{1,p_1(x),p_2(x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (1.22), la suite $(u_{1,n})_n$ (resp. $(u_{2,n})_n$) converge fortement dans $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$). $\square$

1.6.2 Une propriété de compacité

On a mentionné dans l'introduction de ce chapitre l'importance que l'application $f = (f_1, f_2)$, où f_1 et f_2 sont les termes sources du problème (1.5), soit bornée, demi-continue, et de classe $(S_+)_T$. Ces différentes propriétés sont partiellement assurées, grâce à la propriété de compacité de f , que nous prouvons dans la proposition suivante.

Proposition 1.6.2. *Sous les hypothèses (H), l'opérateur $S : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow (X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega))^*$, défini pour tout $(\Phi_1, \Phi_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ par*

$$\begin{aligned} &< S(u_1, u_2), (\Phi_1, \Phi_2) >_{1,p_1(x),p_2(x)} \\ &:= \int_{\Omega} \left(c_1(x) u_1 |u_1|^{\alpha_1(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_1(x)-1} + d_1(x) |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x) \right) \phi dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(c_2(x) u_1 |u_1|^{\alpha_2(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_2(x)-1} + d_2(x) |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x) \right) \psi dx, \end{aligned} \tag{1.24}$$

est compact, au sens de la Définition 1.4.2.

Démonstration. Étape 1 : Nous prouvons que les termes d'interaction

$$(u_1, u_2) \rightarrow c_i(x) u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1},$$

$i = 1, 2$, donnés dans la définition de $S(u_1, u_2)$, satisfont les propriétés de bornitude et de continuité.

Pour ce faire, soit $\zeta : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow L^{p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$ une application, définie pour tout $(u_1, u_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ par

$$\zeta(u_1, u_2) := \left(c_1(x) u_1 |u_1|^{\alpha_1(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_1(x)-1}, c_2(x) u_1 |u_1|^{\alpha_2(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_2(x)-1} \right).$$

Nous montrons que l'application ζ est continue. De plus, en utilisant (1.14), nous précisons qu'elle est bornée au sens de la Définition 1.4.2.

En effet, soit une suite $(u_{1,n}, u_{2,n})$ dans $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$, fortement convergente vers (u_1, u_2) dans $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$. Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned} &\|\zeta(u_{1,n}, u_{2,n}) - \zeta(u_1, u_2)\|_{p'_1(x),p'_2(x)} \\ &= \left\| c_1(x) \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_1(x)-1} u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_1(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_1(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_1(x)-1} \right) \right\|_{p'_1(x)} \\ &\quad + \left\| c_2(x) \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_2(x)-1} u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_2(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_2(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_2(x)-1} \right) \right\|_{p'_2(x)}. \end{aligned}$$

Cette remarque assure que la continuité sera obtenue pourvu que le terme de droite tend vers 0. En effet, nous montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| c_i(x) \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right\|_{p'_i(x)} = 0,$$

$i = 1, 2$, ce qui est équivalent, d'après le Lemme 1.4.6, à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p'_i(x)} \left(c_i(x) \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right) = 0,$$

$i = 1, 2$. Afin d'établir ce résultat, nous pouvons remarquer au préalable que

$$\begin{aligned} & c_i(x) \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \\ &= c_i(x) \left[\left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \right) u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} \right. \\ & \quad \left. + u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \left(u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right], \end{aligned}$$

$i = 1, 2$. Par conséquent, d'après l'inégalité de Hölder et l'inégalité triangulaire, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} & \rho_{p'_i(x)} \left(c_i(x) \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right) \\ & \leq \|c_i\|_\infty \|1\|_{t'_i(x)} \left(\left\| \left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \right) |u_{2,n}|^{\beta_i(x)} \right\|_{t_i(x)} \right. \\ & \quad \left. + \left\| |u_1|^{\alpha_i(x)} \left(u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right\|_{t_i(x)} \right), \end{aligned}$$

avec t_i, t'_i ($i = 1, 2$) définis comme dans le Lemme 1.5.1.

Il en résulte, d'après l'inégalité de Hölder généralisée, que

$$\begin{aligned} & \rho_{t_i(x)} \left(\left(u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \right) |u_{2,n}|^{\beta_i(x)} \right) \\ & \leq \left\| u_{1,n} |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} - u_1 |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \right\|_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}} \left\| |u_{2,n}|^{\beta_i(x)} \right\|_{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)}}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

$i = 1, 2$, et

$$\rho_{t_i(x)} \left(|u_1|^{\alpha_i(x)} \left(u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right) \leq \left\| |u_1|^{\alpha_i(x)} \right\|_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}} \left\| u_{2,n} |u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - u_2 |u_2|^{\beta_i(x)-1} \right\|_{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)}}, \tag{1.26}$$

$i = 1, 2$. Comme $(u_{1,n}, u_{2,n})_n$ est fortement convergente, alors, d'après [FZ01, Théorème 1.4], cela revient à dire que

$$(u_{1,n}, u_{2,n}) \text{ converge vers } (u_1, u_2) \text{ dans } \Omega \text{ en mesure,}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p_1(x)}(u_{1,n}) = \rho_{p_1(x)}(u) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p_2(x)}(u_{2,n}) = \rho_{p_2(x)}(u_2). \tag{1.27}$$

Avec la continuité de la fonction $s \mapsto |s|^{\alpha_i(x)}$, $x \in \Omega$ ($i = 1, 2$), d'après [Gra07, Théorème 10], nous avons

$$|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)} \text{ converge vers } |u_1|^{\alpha_i(x)} \text{ dans } \Omega \text{ en mesure,}$$

$i = 1, 2$. Cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\left\{ x \in \Omega \mid \left| |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)} - |u_1|^{\alpha_i(x)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0,$$

$i = 1, 2$, μ étant la mesure de Lebesgue. On établit une estimation similaire en remplaçant $u_{1,n}$ par $u_{2,n}$ et $\alpha_i(\cdot)$ par $\beta_i(\cdot)$ ($i = 1, 2$). De plus, l'ensemble E , défini par

$$E = \left\{ x \in \Omega \mid \left| |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)} - |u_1|^{\alpha_i(x)} \right| \geq \varepsilon \right\},$$

$i = 1, 2$, est tel que

$$\left\{ x \in \Omega \mid \left| |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} - |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \right| \geq \varepsilon \right\} \subset E,$$

$i = 1, 2$, ce qui provient du fait que $\varepsilon \leq \left| |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)} - |u_1|^{\alpha_i(x)} \right| \leq \left| |u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} - |u_1|^{\alpha_i(x)-1} \right|$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, nous avons aussi que

$$u_{1,n}|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} \text{ converge vers } u_1|u_1|^{\alpha_i(x)-1} \text{ dans } \Omega \text{ en mesure,}$$

$i = 1, 2$. Il est clair, d'après (H_6) , que $\alpha_i(x) < p_1(x)$, pour tout $x \in \Omega$ ($i = 1, 2$). Par ailleurs, d'après (1.27), et le fait que

$$\rho_{p_1(x)}(u_{1,n}) = \rho_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}} \left(|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)} \right) = \rho_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}} \left(u_{1,n}|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} \right),$$

$i = 1, 2$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}}(u_{1,n}|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1}) = \rho_{p_1(x)}(u_1) = \rho_{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}}(u_1|u_1|^{\alpha_i(x)-1}),$$

$i = 1, 2$. Cela implique, d'après [FZ01, Théorème 1.4], que $u_{1,n}|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1}$ converge fortement vers $u_1|u_1|^{\alpha_i(x)-1}$ dans $L^{\frac{p_1(x)}{\alpha_i(x)}}(\Omega)$ ($i = 1, 2$).

De façon similaire, d'après (H_6) , nous savons que $\beta_i(x) < p_2(x)$, pour tout $x \in \Omega$ ($i = 1, 2$). Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p_2(x)}(u_{2,n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)}}(|u_{2,n}|^{\beta_i(x)}) = \rho_{p_2(x)}(u_2) = \rho_{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)}}(u_2|u_2|^{\beta_i(x)-1}),$$

$i = 1, 2$. Cela signifie que $u_{2,n}|u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1}$ converge fortement vers $u_2|u_2|^{\beta_i(x)-1}$ dans $L^{\frac{p_2(x)}{\beta_i(x)}}(\Omega)$ ($i = 1, 2$).

En conclusion, d'après les inégalités (1.25) et (1.26), et [FZ01, Théorème 1.4], nous obtenons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| c_i(x) \left(|u_{1,n}|^{\alpha_i(x)-1} u_{2,n}|u_{2,n}|^{\beta_i(x)-1} - |u_1|^{\alpha_i(x)-1} u_2|u_2|^{\beta_i(x)-1} \right) \right\|_{p'_i(x)} = 0,$$

$i = 1, 2$. Nous concluons que ζ est continue sur $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$.

Étape 2 : Nous prouvons que les termes de convection

$$(u_1, u_2) \rightarrow d_1(x)|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x) \quad \text{et} \quad (u_1, u_2) \rightarrow d_2(x)|\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x),$$

satisfont les propriétés de bornitude et de continuité.

Soit

$$\kappa : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow L^{p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$$

un opérateur défini, pour tout $(u_1, u_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$, par

$$\kappa(u_1, u_2) := \left(d_1(x)|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + e_1(x), d_2(x)|\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + e_2(x) \right).$$

L'opérateur κ est borné, au sens de la Définition 1.4.2, grâce à l'inégalité (1.15). L'opérateur κ est aussi continu. En effet, soit $(u_{1,n}, u_{2,n})$ une suite dans $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ fortement convergente vers (u_1, u_2) dans $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$. Par conséquent, en tenant compte de la définition de κ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\kappa(u_{1,n}, u_{2,n}) - \kappa(u_1, u_2)\|_{p'_1(x),p'_2(x)} &\leq \|d_1\|_\infty \left\| |\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)} - |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} \right\|_{p'_1(x)} \\ &\quad + \|d_2\|_\infty \left\| |\nabla u_{2,n}|^{\gamma_2(x)} - |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} \right\|_{p'_2(x)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nous prouvons également que $(|\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)}, |\nabla u_{2,n}|^{\gamma_2(x)})$ converge fortement dans $L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega)$ vers $(|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)}, |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)})$, pour tout $x \in \Omega$. Le raisonnement suit la même démarche que celle adoptée dans l'Étape 1. En effet, comme $(|\nabla u_{1,n}|, |\nabla u_{2,n}|)$ est fortement convergente dans $L^{p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ vers $(|\nabla u|, |\nabla v|)$, alors, d'après [FZ01, Théorème 1.4], cela revient à dire que

$$(|\nabla u_{1,n}|, |\nabla u_{2,n}|) \text{ converge vers } (|\nabla u|, |\nabla v|) \text{ dans } \Omega \text{ en mesure,}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p_1(x)}(|\nabla u_{1,n}|) = \rho_{p_1(x)}(|\nabla u|) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p_2(x)}(|\nabla u_{2,n}|) = \rho_{p_2(x)}(|\nabla v|). \quad (1.29)$$

D'après (H_7) , il est clair que $\gamma_1(x) < p_1(x)$, pour tout $x \in \Omega$. Aussi, d'après (1.29), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{\frac{p_1(x)}{\gamma_1(x)}}(|\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)}) = \rho_{p_1(x)}(|\nabla u|) = \rho_{\frac{p_1(x)}{\gamma_1(x)}}(|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)}).$$

Avec la continuité de la fonction $s \mapsto |s|^{\gamma_1(x)}$, $x \in \Omega$, d'après [Gra07, Théorème 10], nous avons

$$|\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)} \text{ converge vers } |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} \text{ dans } \Omega \text{ en mesure.}$$

Cela implique, d'après [FZ01, Théorème 1.4], que $|\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)}$ converge fortement vers $|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)}$ dans $L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_1(x)}}(\Omega)$. Nous établissons une estimation similaire en remplaçant $u_{1,n}$ par $u_{2,n}$ et $\gamma_1(\cdot)$ par $\gamma_2(\cdot)$.

À partir de (H_7) et (H_8) , l'injection $L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_1(x)}}(\Omega) \times L^{\frac{p_2(x)}{\gamma_2(x)}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega)$ est réalisée, pour tout $x \in \Omega$. Nous en déduisons que la suite $(|\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)}, |\nabla u_{2,n}|^{\gamma_2(x)})$ converge fortement dans $L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega)$ vers $(|\nabla u_1|^{\gamma_1(x)}, |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)})$. D'après (1.28), nous pouvons donc écrire que

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\kappa(u_n, u_{2,n}) - \kappa(u_1, u_2)\|_{p'_1(x),p'_2(x)} \\ &\leq \|d_1\|_\infty \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| |\nabla u_{1,n}|^{\gamma_1(x)} - |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} \right\|_{p'_1(x)} + \|d_2\|_\infty \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| |\nabla u_{2,n}|^{\gamma_2(x)} - |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} \right\|_{p'_2(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Étape 3 : Nous montrons que l'application S est compacte sur $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$.

Comme l'injection $I : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow L^{p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ est compacte, au sens de la Définition 1.4.2, il est connu que l'injection adjointe $I^* : L^{p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$ est également compacte. Par conséquent, les applications composées $I^* \circ \zeta$ et $I^* \circ \kappa : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$ sont compactes. Nous concluons que l'application $f = I^* \circ \zeta + I^* \circ \kappa$ est compacte. Ceci complète la preuve de la Proposition 1.6.2. $\square$

1.6.3 Preuve du Théorème 1.3.1

En considérant les Lemmes 1.4.3, 1.4.4 et 1.4.5, ainsi que les Propositions 1.6.1 et 1.6.2, nous pouvons procéder à la preuve du Théorème 1.3.1. Nous suivons le plan présenté dans l'introduction de ce chapitre.

• Étape 1 : Reformulation du problème (1.5)

Définissons l'application non-linéaire $f : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow \left(X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)\right)^*$ et l'opérateur $T : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow \left(X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)\right)^*$, associés au problème (1.5), et donnés comme dans les Propositions 1.6.2 et 1.6.1.

En vue de l'application du Lemme 1.4.3, nous introduisons l'application $\tilde{f} : X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \rightarrow \left(X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)\right)^*$, en posant $\tilde{f} := -f$. Il s'ensuit que :

$$(u_1^*, u_2^*) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega) \text{ est solution faible de (1.5) si et seulement si } T(u_1^*, u_2^*) = -\tilde{f}(u_1^*, u_2^*). \quad (1.30)$$

Aussi, grâce à la bijection de l'opérateur $k(x)$ -Laplacien (voir Lemme 1.4.5), l'opérateur T est aussi bijectif. De ce fait, nous conviendrons de définir son opérateur inverse $T^{-1} : \left(X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)\right)^* \rightarrow X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ par

$$T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) = (T_{p_1(x)}^{-1}\Phi_1, T_{p_2(x)}^{-1}\Phi_2). \quad (1.31)$$

Pour garder la cohérence avec les notations de [Ber07a], nous disons que $(\Phi_1^*, \Phi_2^*) \in X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$ est une solution faible de (P^*) , si et seulement si :

$$(P^*) \quad (\Phi_1^*, \Phi_2^*) = -(\tilde{f} \circ T^{-1})(\Phi_1^*, \Phi_2^*), \quad T^{-1}(\Phi_1^*, \Phi_2^*) = (u_1^*, u_2^*), \quad (1.32)$$

où (u_1^*, u_2^*) est la solution à priori de (1.30). Dire que (1.30) admet pour solution le couple $(u_1^*, u_2^*) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}$, revient à dire que (Φ_1^*, Φ_2^*) est la solution duale de (1.32). En d'autres termes, trouver la solution du problème dual (1.32), revient à trouver la solution du problème initial (1.30).

Dans la suite, nous considérons l'opérateur d'Hammerstein abstrait $F : X_0^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega) \rightarrow X_0^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$, défini par

$$F := I + \tilde{f} \circ T^{-1}. \quad (1.33)$$

• Étape 2 : Construction du domaine de recherche du point fixe

Maintenant, afin de déterminer le domaine de recherche du point fixe de (1.5), satisfaisant (1.4), on postule que l'ensemble

$$B := \left\{ (\Phi_1, \Phi_2) \in X^{-1, p'_1(x), p'_2(x)}(\Omega) \mid (\Phi_1, \Phi_2) + t \left(\tilde{f} \circ T^{-1} \right) (\Phi_1, \Phi_2) = 0, t \in [0, 1] \right\}$$

est borné. Pour ce faire, nous prouvons que l'ensemble $\{T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) \mid (\Phi_1, \Phi_2) \in B\}$ est borné. En effet, d'après l'égalité $T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) = (u_1, u_2)$, alors

$$\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1, p_1(x), p_2(x)} = \|(u_1, u_2)\|_{1, p_1(x), p_2(x)} = \|\nabla u\|_{p_1(x)} + \|\nabla v\|_{p_2(x)}.$$

Nous définissons les ensembles

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ (u_1, u_2) \in X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega) \cap T^{-1}(B) \mid 1 < \|\nabla u\|_{p_1(x)}, \|\nabla v\|_{p_2(x)} \right\}, \\ X_2 &= \left\{ (u_1, u_2) \in X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega) \cap T^{-1}(B) \mid \|\nabla u\|_{p_1(x)} \leq 1 \text{ et } 1 < \|\nabla v\|_{p_2(x)} \right\}, \\ X_3 &= \left\{ (u_1, u_2) \in X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega) \cap T^{-1}(B) \mid 1 < \|\nabla u\|_{p_1(x)} \text{ et } \|\nabla v\|_{p_2(x)} \leq 1 \right\}, \\ X_4 &= \left\{ (u_1, u_2) \in X_0^{1, p_1(x), p_2(x)}(\Omega) \cap T^{-1}(B) \mid \|\nabla u\|_{p_1(x)}, \|\nabla v\|_{p_2(x)} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Pour tout $(u_1, u_2) \in X_4$, alors $\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1, p_1(x), p_2(x)}$ est borné (par définition). Pour tout $(u_1, u_2) \in X_1$, grâce au Lemmes 1.4.6 et 1.4.6, aux inégalités de Hölder et Young, et à l'injection $L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_1(x)}}(\Omega) \times L^{\frac{p_2(x)}{\gamma_2(x)}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'_1(x)}(\Omega) \times L^{p'_2(x)}(\Omega)$, nous obtenons, par définition de $\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1, p_1(x), p_2(x)}$, que

$$\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1, p_1(x), p_2(x)} \leq \|\nabla u\|_{p_1(x)}^{p_1^-} + \|\nabla v\|_{p_2(x)}^{p_2^-} \leq \rho_{p_2(x)}(\nabla u_2) + \rho_{p_1(x)}(\nabla u_1).$$

Le fait que $\rho_{p_2(x)}(\nabla u_2) + \rho_{p_1(x)}(\nabla u_1) = \langle T(u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle_{1, p_1(x), p_2(x)}$, combiné avec les propriétés $T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) = (u_1, u_2)$ et $(\Phi_1, \Phi_2) \in B$, conduisent à l'égalité

$$\langle T(u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle_{1, p_1(x), p_2(x)} = -t \left\langle \tilde{f} \circ T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2), T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) \right\rangle_{1, p_1(x), p_2(x)}.$$

D'après l'égalité

$$-t \left\langle \tilde{f} \circ T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2), T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) \right\rangle_{1, p_1(x), p_2(x)} = -t \left\langle \tilde{f}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \right\rangle_{1, p_1(x), p_2(x)},$$

nous déduisons, avec les inégalités de Hölder et Young, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1, p_1(x), p_2(x)} &\leq \|c_1\|_\infty \left(\int_\Omega \frac{1}{\eta} |u|^{\eta(\alpha_1(x)+1)} dx + \int_\Omega \frac{1}{\eta'} |v|^{\eta'(\beta_1(x)+1)} dx \right) \\ &\quad + \|c_2\|_\infty \left(\int_\Omega \frac{1}{\eta'} |u|^{\eta'\alpha_2(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{\eta} |v|^{\eta(\beta_2(x)+1)} dx \right) \\ &\quad + \|d_1\|_\infty \|u_1\|_{p_1(x)} \|\nabla u_1\|_{p'_1(x)}^{\gamma_1(x)} + \|d_2\|_\infty \|u_2\|_{p_2(x)} \|\nabla u_2\|_{p'_2(x)}^{\gamma_2(x)} \\ &\quad + \|e_1\|_\infty \|1\|_{p'_1(x)} \|u_1\|_{p_1(x)} + \|e_2\|_\infty \|1\|_{p'_2(x)} \|u_2\|_{p_2(x)}, \end{aligned}$$

pour une certaine constante $\eta > 1$. En utilisant les inégalités de Hölder et de Poincaré, avec le Lemme 1.5.2, nous pouvons trouver $x_i \in \Omega$ ($i = 0, 5$), et des constantes C_j ($j = 1, 5$), tels que

nous ayons

$$\begin{aligned}
& \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{p_1^-} + \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{p_1^-} \\
& \leq C_1 (\|c_1\|_\infty + \|c_2\|_\infty) \left[\|u_1\|_{1,p_1(x)}^{\eta(\alpha_1(x_0)+1)} + \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{\eta'\alpha_2(x_1)} + \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{\eta'\beta_1(x_2)} + \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{\eta(\beta_2(x_3)+1)} \right] \\
& + \|d_1\|_\infty C_2 \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{\gamma_1(x_4)+1} + \|d_2\|_\infty C_3 \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{\gamma_2(x_5)+1} \\
& + \|e_1\|_\infty C_4 \|u_1\|_{1,p_1(x)} + \|e_2\|_\infty C_5 \|u_2\|_{1,p_2(x)}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

En regroupant et en factorisant les termes en $\|u_1\|_{1,p_1(x)}$ et $\|u_2\|_{1,p_2(x)}$ de (1.34), nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{p_1^-} \left(1 - K_1 \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{\eta(\alpha_1(x_0)+1)-p_1^-} - K_1 \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{\eta'\alpha_2(x_1)-p_1^-} - K_2 \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{\gamma_1(x_4)+1-p_1^-} - K_3 \|u_1\|_{1,p_1(x)}^{1-p_1^-} \right) \\
& + \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{p_2^-} \left(1 - K_4 \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{\eta'\beta_1(x_2)-p_2^-} - K_4 \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{\eta(\beta_2(x_3)+1)-p_2^-} - K_5 \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{\gamma_2(x_5)+1-p_2^-} - K_5 \|u_2\|_{1,p_2(x)}^{1-p_2^-} \right) \\
& \leq 0.
\end{aligned}$$

Cependant, en choisissant $\eta \in (1, \min\{p_1^-, p_2^-\})$, nous avons, en vertu de (H5)

- $\eta(\alpha_1(x_0) + 1) - p_1^- < 0$,
- $\eta'\alpha_2(x_1) - p_1^- < 0$,
- $\eta'\beta_1(x_2) - p_2^- < 0$,
- $\eta(\beta_2(x_3) + 1) - p_2^- < 0$.

De surcroît, à partir de l'hypothèse (H6), nous avons :

- $\gamma_1(x_4) + 1 - p_1^- < 0$,
- $\gamma_2(x_5) + 1 - p_2^- < 0$,

et à partir de l'hypothèse (H1), nous avons :

- $1 - p_1^- < 0$,
- $1 - p_2^- < 0$.

Cela signifie que $\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1,p_1(x),p_2(x)}$ est borné. Pour tout $(u_1, u_2) \in X_2$, le Lemme 1.4.6 implique que

$$\begin{aligned}
\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1,p_1(x),p_2(x)} & \leq 1 + \|\nabla u_2\|_{p_2(x)}^{p_2^-} \leq 1 + \|\nabla u_2\|_{p_2(x)}^{p_2^-} + \|\nabla u_1\|_{p_1(x)}^{p_1^+} \\
& \leq 1 + \rho_{p_2(x)}(\nabla u_2) + \rho_{p_1(x)}(\nabla u_1).
\end{aligned}$$

De ce fait, suivant le même raisonnement que pour le cas précédent, nous concluons que $\|T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1,p_1(x),p_2(x)}$ est borné. La même chose est vérifiée pour tout $(u_1, u_2) \in X_3$, en inversant les positions de u et v . Par conséquent, nous avons prouvé que l'ensemble

$$\{T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) | (\Phi_1, \Phi_2) \in B\}$$

est borné. Aussi, puisque l'opérateur $\tilde{f}$ est borné, au sens de la Définition 1.4.2, il est clair, d'après (1.32), que l'ensemble B est borné dans $X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$. Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que

$$\|(\Phi_1, \Phi_2)\|_{1,p'_1(x),p'_2(x)} < R, \quad \text{pour tout } (\Phi_1, \Phi_2) \in B.$$

Il en découle que

$$(\Phi_1, \Phi_2) + t\tilde{f} \circ T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2) \neq 0, \quad \text{pour tout } (\Phi_1, \Phi_2) \in \partial B_R(0), \quad \text{et tout } t \in [0, 1].$$

Puisque $\tilde{f}$ est compacte, alors il est connu que $\tilde{f}$ est continue et quasi-monotone, et, grâce au Lemme 1.4.4, on a

$$I + \tilde{f} \circ T^{-1} \in \mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)}) \quad \text{et} \quad I = T \circ T^{-1} \in \mathcal{F}_T(\overline{B_R(0)}).$$

De plus, puisque I , $\tilde{f}$ et T sont bornés, au sens de la Définition 1.4.2, alors

$$I + \tilde{f} \circ T^{-1} \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)}) \quad \text{et} \quad I = T \circ T^{-1} \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)}).$$

• Étape 3 : Application du degré de Berkovits

Considérons l'homotopie $H : [0, 1] \times \overline{B_R(0)} \rightarrow X^{-1,p'_1(x),p'_2(x)}(\Omega)$, définie par

$$H(t, \Phi_1, \Phi_2) := (\Phi_1, \Phi_2) + t\tilde{f} \circ T^{-1}(\Phi_1, \Phi_2), \quad \text{pour tout } (t, \Phi_1, \Phi_2) \in [0, 1] \times \overline{B_R(0)}.$$

Le Lemme 1.4.2 garantit que $H \in \mathcal{F}_{T,B}(\overline{B_R(0)})$. Aussi, d'après les propriétés d'invariance homotopique et de normalisation du degré d_B (présenté dans le Théorème 1.4.1), nous avons

$$d_B(I + \tilde{f} \circ T^{-1}, B_R(0), 0) = d_B(I, B_R(0), 0) = 1.$$

Par conséquent, il existe $(\Phi_1^*, \Phi_2^*) \in B_R(0)$ tel que

$$(\Phi_1^*, \Phi_2^*) + \tilde{f} \circ T^{-1}(\Phi_1^*, \Phi_2^*) = 0.$$

Nous concluons que $(u_1^*, u_2^*) = T^{-1}(\Phi_1^*, \Phi_2^*)$ est une solution faible de (1.5), ce qui revient à dire, par définition de l'opérateur T , qu'une solution faible du système de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = \Phi_1^* & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = \Phi_2^* & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.35)$$

est aussi une solution faible de (1.5). D'après le théorème de Browder-Minty, une telle solution existe toujours. Par ailleurs, cette solution est non-triviale car $(0, 0)$ n'est pas solution de (1.5). Ceci achève la preuve du théorème, et de ce fait complète le chapitre.

CHAPITRE 2

RÉSULTAT D'EXISTENCE AVEC LA MÉTHODE DES SOUS- ET SUR-SOLUTIONS

Contents

2.1	A propos du théorème de point fixe de Schauder et de la méthode des sous- et sur-solutions	58
2.1.1	Présentation du théorème de point fixe de Schauder	58
2.1.2	Définition d'une sous- et sur-solution	59
2.2	Positionnement et traitement du problème	61
2.3	Résultats préliminaires	62
2.3.1	Estimation uniforme de la norme infinie du gradient de la solution . .	62
2.3.2	Estimation non-uniforme de la norme infinie de la solution	63
2.3.3	Application à un problème auxiliaire	65
2.3.4	Estimation uniforme de la norme infinie de la solution auxiliaire . . .	72
2.4	Construction et comparaison des sous- et sur-solutions	73
2.4.1	Cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$	76
2.4.2	Cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$	78
2.5	Preuve du résultat principal	79
2.5.1	Résultats pour le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm > 0$	79
2.5.2	Résultats pour le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \leq 0$	81
2.5.3	Preuve du Théorème 2.2.1	84

Dans ce chapitre, différentes situations seront prises en compte concernant les termes d'interaction (28).

De telles situations seront appelées "coopératives" lorsque $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$, et "compétitives" lorsque $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$.

Il est à remarquer qu'en réalité, les expressions "coopératif" et "compétitif" ne sont pas tout à fait adaptées à notre problème. En effet, du fait de la présence des termes de convection, l'application $f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2)$ n'est plus forcément croissante en v lorsque $f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2)$ est croissante en u , ou inversement croissante en u lorsque $f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2)$ est croissante en v , propriété qui correspond à la définition classique d'un système coopératif (voir [Kel69] ou

[AM71]). Il s'ensuit que le système (S) , sous l'hypothèse (28), n'est pas exactement "coopératif" ou "compétitif". Cependant, nous continuerons d'employer ces termes par abus de langage.

La différence principale entre les situations $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$ et $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$ est que nous ne sommes pas capables de prouver l'existence de solutions régulières, ni d'établir l'existence de sur-solutions dans le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$. Alors que dans le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$, nous parvenons à le faire.

Notons que dans la littérature, la plupart des phénomènes étudiés sont non-coopératifs, à l'exception des phénomènes de symbiose, bien que la plupart des méthodes de résolution, d'existence, et de non-existence existant concernent les systèmes coopératifs. Par conséquent, si on rajoute en plus la présence des termes de convection g_i , dont la considération est plutôt rare (voir la section Introduction générale), il s'agira dans ce chapitre d'étendre les techniques des cas coopératifs aux cas non-coopératifs, tout en gérant les termes de convection.

2.1 A propos du théorème de point fixe de Schauder et de la méthode des sous- et sur-solutions

2.1.1 Présentation du théorème de point fixe de Schauder

L'extension du théorème de point fixe de Brouwer à la dimension infinie est le très célèbre théorème de point fixe de Schauder, qui garantit l'existence d'une solution au problème $T(f) = f$, $f \in B$, sous l'hypothèse que T est une application continue et contractante, et que B est un sous-ensemble compact et convexe de X . La preuve de ce théorème, qui peut être trouvée dans les travaux de Gilbarg et Trudinger [GT98, Théorème 11.1], est basée sur le raisonnement suivant :

- Remarque 1 : par définition de la compacité de l'ensemble B , on peut recouvrir B par une réunion finie de boules $B^i = B_{1/k}(x_i)$, centrées en $x_i \in B$ ($i = 1, \dots, N$) et de rayon $1/k$, où k peut être aussi petit que $N = N(k)$ est large.
- Remarque 2 : par définition de la convexité de l'ensemble B , on peut considérer l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_N\}$, notée B_k , qui est un sous-ensemble de dimension finie de B .
- Remarque 3 : L'application $J_k : B \rightarrow B_k$ définie par

$$J_k x = \frac{\sum \text{dist}(x, B_k - B^i) x_i}{\sum \text{dist}(x, B_k - B^i)}, \quad x \in B$$

est continue pour tout $x \in B$. De plus, si l'ensemble B est restreint au sous-ensemble B_k , J_k est contractante, puisque

$$\|J_k x - x\| \leq \frac{\sum \text{dist}(x, B_k - B^i) \|x_i - x\|}{\sum \text{dist}(x, B_k - B^i)} < \frac{1}{k}. \quad (2.1)$$

- Remarque 4 : par définition de la continuité et de la contractance de l'application T sur l'ensemble B , l'application $J|_{B_k} \circ T|_{B_k}$, définie sur B_k par la composée des restrictions des applications J et T sur l'ensemble B_k , est aussi continue et contractante, et par conséquent admet un point fixe d'après le théorème de point fixe de Brouwer, noté $x^{(k)}$.

• Remarque 5 : Par compacité de l'ensemble B , la suite des $x^{(k)}$ converge vers un élément $x \in B$, qui correspond au point fixe de l'application T , puisque selon (2.1) on a

$$\|x^{(k)} - Tx^{(k)}\| = \|J|_{B_k} \circ T|_{B_k} x^{(k)} - Tx^{(k)}\| < \frac{1}{k}.$$

Ce paragraphe illustre l'importance de la condition de compacité, qui est utilisée à deux reprises dans la démonstration. Le point fort de cette approche réside dans le fait qu'aucune information a priori sur la solution n'est requise pour garantir son existence. En revanche, il n'y a aucun moyen de savoir s'il s'agit d'une solution triviale ou non triviale. Pour contourner ce problème, on peut utiliser les méthodes des sous- et sur-solutions.

2.1.2 Définition d'une sous- et sur-solution

Une sous-solution pour le système (S) désigne toute paire de fonctions $(\underline{u}, \underline{u}_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} \underline{u}_1 \leq f_1(x, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \nabla \underline{u}_1, \nabla \underline{u}_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_1(x)} \underline{u}_2 \leq f_2(x, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \nabla \underline{u}_1, \nabla \underline{u}_2) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Une sur-solution pour le système (S) désigne toute paire de fonctions $(\bar{u}, \bar{u}_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} \bar{u}_1 \geq f_1(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \nabla \bar{u}_1, \nabla \bar{u}_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} \bar{u}_2 \geq f_2(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \nabla \bar{u}_1, \nabla \bar{u}_2) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

La méthode des sous- et sur-solutions consiste à rechercher le point fixe de l'application T , définie précédemment, dans un ensemble B faisant intervenir le rectangle formé par ces fameuses sous- et sur-solutions. Son avantage est de garantir la non-trivialité de la solution, pourvu que les sous- et sur-solutions ont de bonnes propriétés, comme par exemple $\underline{u}, \underline{u}_2 \geq 0$ ou $\bar{u}, \bar{u}_2 \leq 0$. Cependant, la solution trouvée va dépendre du choix des sous- et sur-solutions, à moins de prouver que celle-ci est unique, ou que n'importe quelle solution a priori du système (S) appartient au rectangle formé par $\underline{u}, \underline{u}_2$ et $\bar{u}, \bar{u}_2$. Compte tenu de l'éventuelle présence de singularités dans les termes sources du système (S) , par solution il faut comprendre une solution faible au sens de la définition suivante.

Définition 2.1.1 (voir [Zha07]). Soit $(u_1, u_2) \in (W_{loc}^{1,p_1(x)}(\Omega) \cap C_0^+(\Omega)) \times (W_{loc}^{1,p_2(x)}(\Omega) \cap C_0^+(\Omega))$. Le couple (u_1, u_2) est appelé une solution faible du système (S) si

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)-2} \nabla u_1 \nabla \phi_1 dx &= \int_{\Omega} f_1(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \phi_1 dx \\ \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)-2} \nabla u_2 \nabla \phi_2 dx &= \int_{\Omega} f_2(x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \phi_2 dx, \end{aligned}$$

pour tout couple $(\phi_1, \phi_2) \in W_0^{1,p_1(x)}(K) \times W_0^{1,p_2(x)}(K)$, où K désigne n'importe quel sous-ensemble compact de Ω .

Articulation du chapitre

Dans ce chapitre, nous construisons nos sur-solutions à partir des fonctions $p_1(x)$ - et $p_2(x)$ -torsion, notées ξ_1 et ξ_2 respectivement, et satisfaisant le système découplé suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)}\xi_1 = 1, & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)}\xi_2 = 1, & \text{dans } \Omega \\ \xi_1 = \xi_2 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aussi, nous construisons nos sous-solutions à partir des troncatures des fonctions $p_1(x)$ - et $p_2(x)$ -torsion sur l'ensemble $\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid d(x) < \delta\}$, $\delta > 0$ supposé très petit, notées $\xi_{1,\delta}$ et $\xi_{2,\delta}$, et satisfaisant le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)}\xi_{1,\delta} = 1, & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\delta \\ -\Delta_{p_1(x)}\xi_{1,\delta} = 0, & \text{dans } \Omega_\delta \\ \xi_{1,\delta} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_{p_2(x)}\xi_{2,\delta} = 1, & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\delta \\ -\Delta_{p_2(x)}\xi_{2,\delta} = 0, & \text{dans } \Omega_\delta \\ \xi_{2,\delta} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans le but de prouver que le système (S) admet au moins une solution non-triviale sous l'hypothèse (28), il s'agira de :

- Prouver que les fonctions $\bar{u}_1 = C\xi_1$ et $\bar{u}_2 = C\xi_2$ sont des sur-solutions de (S) , pour une certaine constante $C > 0$.
- Prouver que les fonctions $\underline{u}_1 = C^{-1}\xi_{1,\delta}$ et $\underline{u}_2 = C^{-1}\xi_{2,\delta}$ sont des sous-solutions de (S) .
- Considérer le problème auxiliaire associé à (S) suivant

$$(\tilde{S}) \begin{cases} -\Delta_{p_1(x)}u_{1,z} = f_1(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2), & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)}u_{2,z} = f_2(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2), & \text{dans } \Omega \\ u_{1,z} = u_{2,z} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où z_1 et z_2 sont des fonctions fixées appartenant à un ensemble adéquat, et où les applications f_i satisfont

$$m_i z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \leq f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2) \leq M_i \left(z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} + |\nabla z_1|^{\gamma_i(x)} + |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_i(x)} \right), \quad i = 1, 2.$$

Dans le cas où $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \leq 0$ ($i = 1, 2$), on supposera que (z_1, z_2) appartient à l'ensemble $\mathcal{K}^-$, tandis que dans le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm > 0$ ($i = 1, 2$), les fonctions (z_1, z_2) sont supposées appartenir à l'ensemble $\mathcal{K}^+$.

- Prouver que les solutions du système auxiliaire $(\tilde{S})$, appelées solutions auxiliaires, appartiennent aussi à l'ensemble $\mathcal{K}^+$ ou $\mathcal{K}^-$, de sorte que l'application $\mathcal{T}^\pm : \mathcal{K}^\pm \rightarrow X_0^{1,p(\cdot),p_2(\cdot)}(\Omega)$, satisfaisant $\mathcal{T}^\pm(z_1, z_2) = (u_{1,z}, u_{2,z})$, soit contractante.
- Identifier le point fixe de $\mathcal{T}^\pm$ avec la solution du problème initial (S) .
- Prouver que l'application $\mathcal{T}^\pm$ vérifie les propriétés de continuité et de compacité, pour conclure, grâce au théorème de point fixe de Schauder, que $\mathcal{T}^\pm$ admet au moins un point fixe, i.e. (S) admet au moins une solution.

2.2 Positionnement et traitement du problème

Les résultats présentés dans ce chapitre nécessitent un certain nombre d'hypothèses adéquates. Celles-ci sont les suivantes :

Hypothèses

Les termes non-linéaires $f_i : \bar{\Omega} \times (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow (0, +\infty)$ sont supposés être de type Carathéodory, et peuvent présenter des singularités en les variables u_1 et u_2 . Plus précisément, on suppose que $f_i(\cdot, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2)$ est Lebesgue mesurable, pour tout $(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \in \Omega \times (0, \infty)^2 \times \mathbb{R}^{2N}$, et que $f_i(x, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ est continue, pour presque tout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que les termes f_i vérifient les conditions suivantes :

(H_f) Il existe des constantes $M_i, m_i > 0$, et des fonctions $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i \in C(\bar{\Omega})$, telles que

$$m_i s_1^{\alpha_i(x)} s_2^{\beta_i(x)} \leq f_i(s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_i (s_1^{\alpha_i(x)} s_2^{\beta_i(x)} + |\xi_1|^{\gamma_i(x)} + |\xi_2|^{\bar{\gamma}_i(x)}), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

pour tout $s_i > 0$, et tout $\xi_i \in \mathbb{R}^N$, sous les conditions suivantes :

(H₊) Si $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$:

$$0 \leq \min\{\gamma_i^-, \bar{\gamma}_i^-\} \leq \max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\} < p_i^- - 1, \quad (2.3)$$

et

$$|\alpha_i^\pm| + |\beta_i^\pm| < p_i^- - 1, \quad (2.4)$$

(H₋) Si $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$:

$$-\frac{1}{Np_i'^+} \leq -(|\alpha_i^\pm| + |\beta_i^\pm|) \leq |\alpha_i^\pm| + |\beta_i^\pm| \leq \frac{1}{Np_i'^+}, \quad (2.5)$$

avec

$$\gamma_i(x) \leq \frac{p_1(x)}{Np_i'(x)}, \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_i(x) \leq \frac{p_2(x)}{Np_i'(x)}, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

où

$$\alpha_i^\pm := \begin{cases} \alpha_i^- & \text{if } \alpha(\cdot) > 0 \\ \alpha_i^+ & \text{if } \alpha(\cdot) < 0 \end{cases} \quad \beta_i^\pm := \begin{cases} \beta_i^- & \text{if } \beta(\cdot) > 0 \\ \beta_i^+ & \text{if } \beta(\cdot) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2.$$

Ici, les paramètres p_i ($i = 1, 2$) satisfont la condition suivante :

(H_p) $p_i \in C^1(\bar{\Omega})$ et $1 < p_i^- \leq p_i(x) \leq p_i^+ < N$ ($i = 1, 2$).

Cette hypothèse de régularité jusqu'au bord sur les paramètres de diffusion p_i ($i = 1, 2$) sera nécessaire lors de l'application du résultat de régularité de Fan (voir Théorème C.0.3), lors de la construction des sur-solutions adaptées au système (P).

Résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre est énoncé comme suit.

Théorème 2.2.1. *Supposons que les hypothèses (H_f) et (H_p) sont vérifiées.*

- (i) *Sous l'hypothèse (H_+) le système (P) admet une solution positive et bornée (u_1, u_2) dans $C_0^{1,\tau}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\tau}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\tau \in (0, 1)$, satisfaisant*

$$u_i(x) \geq c_0 d(x), \text{ pour } i = 1, 2, \quad (2.7)$$

où c_0 est une constante positive.

- (ii) *Sous l'hypothèse (H_-) alors le système (P) admet une solution positive (u_1, u_2) dans $(W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,p_2(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$, satisfaisant (2.7).*

2.3 Résultats préliminaires

Considérons le problème de Dirichlet suivant

$$-\Delta_{p(x)} u = h(x) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.8)$$

Soient $\xi_i, \xi_{i,\delta} \in C^{1,\tau}(\overline{\Omega})$, $\tau \in (0, 1)$, les solutions des problèmes de Dirichlet

$$-\Delta_{p_i(x)} \xi_i(x) = 1 \text{ dans } \Omega, \quad \xi_i(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.9)$$

et

$$-\Delta_{p_i} \xi_{i,\delta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta \\ -1 & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases}, \quad \xi_{i,\delta}(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.10)$$

où

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : d(x) < \delta\},$$

pour une constante $\delta > 0$ suffisamment petite.

2.3.1 Estimation uniforme de la norme infinie du gradient de la solution

Ici, nous donnons un résultat d'estimation uniforme de la norme infinie du gradient de la solution du problème (2.8) dans Ω .

Lemme 2.3.1. *Supposons que la fonction h , définie dans (2.8), appartienne à l'espace $L^\infty(\Omega)$. Alors, il existe une constante positive k_p , dépendant uniquement de p , N , et Ω , telle que*

$$\|\nabla u\|_\infty \leq k_p \|h\|_\infty^{\frac{1}{p_1^- - 1}}. \quad (2.11)$$

Démonstration. Nous distinguerons deux situations.

1. Supposons que $\|h\|_\infty \leq 1$.

Alors, en multipliant le problème (2.8) par la fonction test $\phi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} h(x) \varphi \, dx \leq \int_{\Omega} \varphi \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \xi|^{p(x)-2} \nabla \xi \nabla \varphi \, dx, \quad (2.12)$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, avec $\varphi \geq 0$, où $\xi(x)$ est la fonction $p(x)$ -torsion définie par

$$-\Delta_{p(x)} \xi = 1 \text{ in } \Omega, \quad \xi = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (2.13)$$

Ainsi, d'après le principe de comparaison, on a $\|u\|_\infty \leq \|\xi\|_\infty$. Aussi, le résultat de régularité de Fan (Théorème C.0.3) assure l'existence de constantes $\delta \in (0, 1)$ et $k_p > 0$, telles que $\|\nabla u\|_\infty \leq \|u\|_{C^{1,\delta}} \leq k_p$.

Par ailleurs, sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\int_{\Omega} h(x) \varphi \, dx > 0, \quad (2.14)$$

parce que autrement, au lieu de (2.8), on considère le problème

$$-\Delta_{p(x)} u = -h(x) \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.15)$$

dont la solution est $\hat{u} = -u$. Ainsi, d'après (2.14), on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx > 0. \quad (2.16)$$

2. Si $\|h\|_\infty > 1$, d'après (2.16) et le Théorème B.1.1, il existe $x_k \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(|h|_\infty^{\frac{-1}{p_1^- - 1}} u)|^{p(x)-2} \nabla(|h|_\infty^{\frac{-1}{p_1^- - 1}} u) \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega} \|h\|_\infty^{\frac{-(p(x)-1)}{p_1^- - 1}} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \\ &= \|h\|_\infty^{\frac{-(p(x_k)-1)}{p_1^- - 1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \|h\|_\infty^{\frac{-(p(x_k)-1)}{p_1^- - 1}} \int_{\Omega} h(x) \varphi \, dx \\ &\leq \|h\|_\infty^{\frac{-(p_1^- - 1)}{p_1^- - 1}} \int_{\Omega} h(x) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \|h\|_\infty^{-1} h(x) \varphi \, dx \leq \int_{\Omega} \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'argument précédent, on déduit que

$$\|h\|_\infty^{\frac{-1}{p_1^- - 1}} \|\nabla u\|_\infty \leq k_p,$$

ce qui montre que (2.11) est vérifié. □

2.3.2 Estimation non-uniforme de la norme infinie de la solution

Afin d'établir une estimation non-uniforme de la norme infinie de la solution, on aura besoin du lemme suivant, qui garantit une propriété $L^\infty(\Omega)$ à toute solution du problème (2.8). Ce résultat jouera un rôle important par la suite dans la situation où $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$.

Lemme 2.3.2. *Supposons que $h \in L^{p'(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega)$ dans (2.8). Alors, il existe une constante $\bar{k}_0 > 0$ telle que*

$$\|u\|_\infty \leq \bar{k}_0 + \left(C \left[\frac{p_1^+ - 1}{p_1^- - 1} \left[\left(C \|h\|_{L^N(\Omega)} \right)^{\frac{p_1^+}{p_1^- - 1}} + 1 \right] + 1 \right] \right)^{\frac{N}{1+N}} (N+1) \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{N^2}{N+1}}.$$

Démonstration. En testant (2.8) avec la fonction $(u - k)^+$, et en définissant, pour $k \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $A_k = \{x \in \Omega \mid u(x) \geq k\} = \text{supp}(u - k)^+$, on obtient

$$\int_{A_k} |\nabla u|^{p(x)} dx = \int_{A_k} h(x) (u - k)^+ dx \leq \|h\|_{L^N(A_k)} \|(u - k)^+\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(A_k)}.$$

Comme $(u - k)^+ \in W^{1,1}(\Omega)$, l'inégalité de Sobolev entraîne que

$$\|(u - k)^+\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(A_k)} \leq C \int_{A_k} |\nabla u| dx,$$

pour une certaine constante $C > 0$. Ainsi, il en découle que

$$\int_{A_k} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C \|h\|_{L^N(A_k)} \int_{A_k} |\nabla u| dx. \quad (2.17)$$

En utilisant l'inégalité de Young, (2.17) devient

$$\begin{aligned} \int_{A_k} |\nabla u|^{p(x)} dx &\leq \int_{A_k} \frac{p(x) - 1}{p(x)} \left(C \|h\|_{L^N(A_k)} \right)^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx + \int_{A_k} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\ &\leq \frac{p_1^+ - 1}{p_1^-} \left[\left(C \|h\|_{L^N(A_k)} \right)^{\frac{p_1^+}{p_1^- - 1}} + 1 \right] |A_k| + \frac{1}{p_1^-} \int_{A_k} |\nabla u|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Après quelques calculs, on obtient l'existence d'une constante $C_1 > 0$, telle que

$$\int_{A_k} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C_1 |A_k|.$$

Finalement, on déduit que

$$\int_{A_k} |\nabla u| dx \leq \int_{A_k} |\nabla u|^{p(x)} dx + |A_k| \leq (C_1 + 1) |A_k|. \quad (2.18)$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Sobolev, on a

$$\int_{A_k} (u - k) dx \leq |A_k|^{\frac{1}{N}} \|u - k\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(A_k)} \leq C |A_k|^{\frac{1}{N}} \int_{A_k} |\nabla u| dx. \quad (2.19)$$

Par conséquent, on obtient, d'après (2.18) et (2.19), l'existence d'une constante $C_2 > 0$ satisfaisant

$$\int_{A_k} (u - k) dx \leq C_2 |A_k|^{1+\frac{1}{N}}.$$

En appliquant le Lemme C.0.5, l'énoncé du Lemme 2.3.2 est vérifié. Ceci complète la preuve. $\square$

2.3.3 Application à un problème auxiliaire

Avant de procéder aux applications, on commence par rappeler le résultat suivant.

Lemme 2.3.3. *Pour toute fonction $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $r^- < 0$, avec $r^+ < \infty$, et satisfaisant $-1 < r(x) < 0$, pour tout $x \in \Omega_\delta$, $0 < \delta$ suffisamment petit. Alors, on a*

$$\left| \int_{\Omega} d(x)^{r(x)} \phi dx \right| < \infty, \quad (2.20)$$

pour toute fonction test ϕ appartenant à un espace de Orlicz-Sobolev.

De plus, s'il existe une constante positive $s > 1$ telle que la fonction r satisfasse $-\frac{1}{s} < r(x) < 0$, pour tout $x \in \Omega_\delta$, alors

$$d(x)^{r(x)} \in L^s(\Omega). \quad (2.21)$$

Démonstration. La preuve est réalisée en deux étapes.

• **Étape 1 :** On prouve que (2.20) est vérifié lorsque $-1 < r(x) < 0$ dans Ω_δ . En effet, l'inégalité de Hölder généralisée et l'inégalité de Hardy-Sobolev généralisée (voir respectivement Lemme C.0.2 et Lemme C.0.9) assurent l'existence de constantes $0 < C_1, C_2$ telles que, pour tout $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} d(x)^{r(x)} \phi dx \right| &\leq \max_{x \in \Omega \setminus \Omega_\delta} \left\{ \delta^{r(x)}, \text{diam}(\Omega)^{r(x)} \right\} \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} |\phi| dx \\ &\quad + \max_{x \in \Omega_\delta} \left\{ \text{diam}(\Omega)^{1+r(x)} \right\} \left| \int_{\Omega_\delta} d(x)^{-1} \phi dx \right| \\ &\leq C_1 \|\phi\|_1 + C_2 \|\nabla \phi\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de (2.20).

• **Étape 2 :** On prouve que (2.24) est vérifié lorsque $-\frac{1}{s} < r(x) < 0$ dans Ω_δ , $s > 1$. En effet, d'après Lemme C.0.3, on sait que $\int_{\Omega} d(x)^t dx < \infty$ pour toute constante $t > -1$. Par conséquent, puisque, par hypothèse, il existe une constante négative $-1 < t_0 < \min_{x \in \Omega_\delta} \{sr(x)\}$, alors en procédant comme précédemment on peut écrire que

$$\begin{aligned} \|d(x)^{r(x)}\|_s &\leq \max_{x \in \Omega \setminus \Omega_\delta} \left\{ \delta^{sr(x)}, \text{diam}(\Omega)^{sr(x)} \right\} \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} dx \\ &\quad + \max_{x \in \Omega_\delta} \left\{ \text{diam}(\Omega)^{-t_0+sr(x)} \right\} \left| \int_{\Omega_\delta} d(x)^{t_0} dx \right| < \infty. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de (2.24). □

Pour tout $(z_1, z_2) \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$, on considère le problème auxiliaire suivant, qui est à la base de l'application du théorème de point fixe de Schauder :

$$(P_z) \quad \begin{cases} -\Delta_{p_i(x)} u_i = f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2) & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

où les applications f_i vérifient l'hypothèse (H_f) .

On établit une propriété de bornitude faible pour le gradient des solutions du problème (P_z) , sous certaines conditions sur les fonctions z_i .

Lemme 2.3.4. Soit $z = (z_1, z_2) \in X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$ satisfaisant la condition suivante

$$\tilde{c}d(x) \leq z_i \ (i = 1, 2) \text{ et } \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx \leq \tilde{L}, \quad (2.22)$$

pour certaines constantes positives $C, \tilde{c}, \tilde{L}$ indépendantes de z_1 et z_2 .

Alors, le problème (P_z) , sous les hypothèses (H_f) , (2.5) et (2.6), admet une unique solution dans $X_0^{1,p_1(x),p_2(x)}(\Omega)$, notée $u_z = (u_{1,z}, u_{2,z})$, et satisfaisant

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{2,z}|^{p_2(x)} dx \leq \tilde{L}. \quad (2.23)$$

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes.

• **Étape 1 : Existence et unicité de la solution de (P_z)**

On vérifie que, sous l'hypothèse (H_f) , on a

$$f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2) \in L^{p'_i(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega), \ i = 1, 2.$$

ou encore, d'après l'hypothèse (2.2), que

$$z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} + |\nabla z_1|^{\gamma_i(x)} + |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_i(x)} \in L^{p'_i(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega), \ i = 1, 2.$$

En effet, sous l'hypothèse (2.6), il en résulte l'injection suivante

$$L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_i(x)}}(\Omega) \times L^{\frac{p_2(x)}{\bar{\gamma}_i(x)}}(\Omega) \hookrightarrow \left(L^{p'_i(x)}(\Omega) \right)^2, \ i = 1, 2.$$

De plus, sous l'hypothèse (2.6), nous avons aussi l'injection suivante

$$L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_i(x)}}(\Omega) \times L^{\frac{p_2(x)}{\bar{\gamma}_i(x)}}(\Omega) \hookrightarrow \left(L^N(\Omega) \right)^2, \ i = 1, 2.$$

Ainsi, puisqu'on a $(|\nabla z_1|^{\gamma_i(x)}, |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_i(x)}) \in L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_i(x)}}(\Omega) \times L^{\frac{p_2(x)}{\bar{\gamma}_i(x)}}(\Omega)$ ($i = 1, 2$), alors on déduit que

$$(|\nabla z_1|^{\gamma_i(x)}, |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_i(x)}) \in \left(L^{p'_i(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega) \right)^2, \ i = 1, 2.$$

Il reste à prouver que $z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \in L^{p'_i(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega)$ ($i = 1, 2$). Faisons la disjonction de cas suivante.

1) Supposons que $\alpha_i^+, \beta_i^+ < 0$ ($i = 1, 2$). D'après (2.22), (2.5) et le Lemme 2.3.3, il est garanti que

$$z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \leq (\tilde{c}d(x))^{\alpha_i(x)+\beta_i(x)} \in L^{p'_i(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega), \ i = 1, 2, \quad (2.24)$$

et donc $z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \in L^{p'_i(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega)$ ($i = 1, 2$).

2) Supposons que $\alpha_i^+ < 0 < \beta_i^-$ ($i = 1, 2$). D'après (2.22), (2.20) et l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} a) & \left(\int_{\Omega} z_1^{N\alpha_i(x)} z_2^{N\beta_i(x)} dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ & \leq \left(\int_{\Omega} (\tilde{c}d(x))^{N\alpha_i(x)} z_2^{N\beta_i(x)} dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \frac{p_2(x) - N\beta_i(x)}{p_2(x)} (\tilde{c}d(x))^{\frac{N\alpha_i(x)p_2(x)}{p_2(x) - N\beta_i(x)}} dx + \int_{\Omega} \frac{N\beta_i(x)}{p_2(x)} z_2^{p_2(x)} dx \right)^{\frac{1}{N}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\begin{aligned}
b) \quad & \left(\int_{\Omega} z_1^{p_i'^+ \alpha_i(x)} z_2^{p_i'^+ \beta_i(x)} dx \right)^{\frac{1}{p_i'^+}} \\
& \leq \left(\int_{\Omega} (\tilde{c}d(x))^{p_i'^+ \alpha_i(x)} z_2^{p_i'^+ \beta_i(x)} dx \right)^{\frac{1}{p_i'^+}} \\
& \leq \left(\int_{\Omega} \frac{p_2(x) - p_i'^+ \beta_i(x)}{p_2(x)} (\tilde{c}d(x))^{\frac{p_i'^+ \alpha_i(x) p_2(x)}{p_2(x) - p_i'^+ \beta_i(x)}} dx + \int_{\Omega} \frac{p_i'^+ \beta_i(x)}{p_2(x)} z_2^{p_2(x)} dx \right)^{\frac{1}{p_i'^+}},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

et donc $z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \in L^{p_i'(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega)$ ($i = 1, 2$).

3) Supposons que $\beta_i^+ < 0 < \alpha_i^-$ ($i = 1, 2$). Alors on adopte le même raisonnement que dans 2) en échangeant les rôles de z_1 et z_2 .

En conclusion, des situations 1), 2) et 3), on déduit que dans le cas général $z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \in L^{p_i'(x)}(\Omega) \cap L^N(\Omega)$ ($i = 1, 2$).

Par conséquent, l'existence et l'unicité de u_z résultent directement du théorème de Browder-Minty.

• Étape 2 : Preuve de (2.23)

Choisissons $\phi = (u_{1,z}, u_{2,z})$ comme fonction test, et multiplions (P_z) par ϕ . En utilisant l'inégalité de Hölder, avec l'injection $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx & \leq M_1 \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N \|u_{1,z}\|_{\frac{N}{N-1}} + M_1 \| |\nabla z_1|^{\gamma_1} \|_N \|u_{1,z}\|_{\frac{N}{N-1}} + M_1 \| |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_1} \|_N \|u_{1,z}\|_{\frac{N}{N-1}} \\
& \leq M_1 C_T \int_{\Omega} \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N |\nabla u_{1,z}| dx + M_1 C_T \| |\nabla z_1|^{\gamma_1} \|_N \|\nabla u_{1,z}\|_1 \\
& \quad + M_1 C_T \| |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_1} \|_N \|\nabla u_{1,z}\|_1.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

En appliquant l'inégalité de Young à la dernière inégalité de (2.27), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx & \leq \int_{\Omega} \left(\frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} + \frac{\delta(x)^{p_1(x)}}{p_1(x)} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} \right) dx \\
& \quad + \left(\frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \| |\nabla z_1|^{\gamma_1} \|_N^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} + \frac{1}{p_1^-} \|\nabla u_{1,z}\|_1^{p_1^-} \right) \\
& \quad + \left(\frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \| |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_1} \|_N^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} + \frac{1}{p_1^-} \|\nabla u_{1,z}\|_1^{p_1^-} \right).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

En vertu de la convexité des fonctions $t \mapsto t^{p_1^-}$ et $t \mapsto t^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}}$, l'inégalité de Jensen appliquée au membre de droite de l'inégalité (2.28), donne

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx &\leq \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x) - 1}} \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x) - 1}} dx \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\delta(x)^{p_1(x)}}{p_1(x)} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx + \frac{2}{p_1^-} \int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1^-} dx \\
&+ \frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla z_1|^{\frac{N \gamma_1(x) p_1^-}{p_1^- - 1}} dx \right)^{\frac{1}{N}} \\
&+ \frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla z_2|^{\frac{N \bar{\gamma}_1(x) p_1^-}{p_1^- - 1}} dx \right)^{\frac{1}{N}}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

De plus, en appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Young au membre de droite de (2.29), on déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x) - 1}} \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x) - 1}} dx + \int_{\Omega} \frac{\delta(x)^{p_1(x)}}{p_1(x)} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx \\
&+ \frac{2}{p_1^-} \int_{\Omega} \left(\frac{p_1(x) - p_1^-}{p_1(x)} \delta(x)^{\frac{p_1(x)}{1 - p_1(x)}} + \frac{p_1^- \delta(x)^{p_1(x)}}{p_1(x)} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} \right) dx \\
&+ \frac{N - 1}{N} \left(\frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \right)^{\frac{N}{N - 1}} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} |\nabla z_1|^{\frac{N \gamma_1(x) p_1^-}{p_1^- - 1}} dx \\
&+ \frac{N - 1}{N} \left(\frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \right)^{\frac{N}{N - 1}} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} |\nabla z_2|^{\frac{N \bar{\gamma}_1(x) p_1^-}{p_1^- - 1}} dx.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Aussi, sous l'hypothèse $(H_{\gamma, \bar{\gamma}})$, nous sommes en mesure d'appliquer l'inégalité de Young au

membre de droite de l'inégalité (2.30) de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx &\leq \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} dx \\
&+ \frac{2}{p_1^-} \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - p_1^-}{p_1(x)} \delta(x)^{\frac{p_1(x)}{1-p_1(x)}} dx + \int_{\Omega} \frac{3\delta(x)^{p_1(x)}}{p_1(x)} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx \\
&+ 2 \frac{N-1}{N} \left(\frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \\
&+ \frac{1}{N} \int_{\Omega} \left(\frac{p_1(x)(p_1^- - 1) - N\gamma_1(x)p_1^-}{p_1(x)(p_1^- - 1)} \epsilon(x)^{\frac{p_1(x)(p_1^- - 1)}{N\gamma_1(x)p_1^- - p_1(x)(p_1^- - 1)}} \right. \\
&+ \left. \frac{N\gamma_1(x)p_1^-}{p_1(x)(p_1^- - 1)} \epsilon(x)^{\frac{p_1(x)(p_1^- - 1)}{N\gamma_1(x)p_1^-}} |\nabla z_1|^{p_1(x)} \right) dx \\
&+ \frac{1}{N} \int_{\Omega} \left(\frac{p_2(x)(p_1^- - 1) - N\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}{p_2(x)(p_1^- - 1)} \mu(x)^{\frac{p_2(x)(p_1^- - 1)}{N\bar{\gamma}_1(x)p_1^- - p_2(x)(p_1^- - 1)}} \right. \\
&+ \left. \frac{N\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}{p_2(x)(p_1^- - 1)} \mu(x)^{\frac{p_2(x)(p_1^- - 1)}{N\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}} |\nabla z_2|^{p_2(x)} \right) dx.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Le même raisonnement, appliqué à la seconde équation sous l'hypothèse $(H_{\gamma, \bar{\gamma}})$, permet d'obtenir une estimation de $\int_{\Omega} |\nabla u_{2,z}|^{p_2(x)} dx$ similaire à (2.31).

Maintenant, afin d'estimer le terme $\|z_1^{\alpha_1(x)} z_2^{\beta_1(x)}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}}$, $x \in \Omega$ fixé, on fait la disjonction de cas suivante.

1) Sous l'hypothèse $\alpha_1^+, \beta_1^+ < 0$, d'après (2.22), on a

$$\|z_1^{\alpha_1(x)} z_2^{\beta_1(x)}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} \leq \|(\tilde{c}d(x))^{\alpha_1(x)+\beta_1(x)}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}},$$

2) Sous l'hypothèse $\alpha_1^+ < 0 < \beta_1^-$, et la convexité de la fonction $t \mapsto t^{\frac{p_1^+}{p_1^+ - 1}}$, l'inégalité de Jensen donne

$$\begin{aligned}
\|z_1^{\alpha_1(x)} z_2^{\beta_1(x)}\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} &\leq 1 + \|z_1^{N\alpha_1(x)} z_2^{N\beta_1(x)}\|_1^{\frac{p_1^+}{N(p_1^+ - 1)}} \leq 1 + \|(\tilde{c}d(x))^{N\alpha_1(x)p_1'^+} z_2^{N\beta_1(x)p_1'^+}\|_1^{\frac{1}{N}} \\
&\leq 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} (\tilde{c}d(x))^{N\alpha_1(x)p_1'^+} z_2^{N\beta_1(x)p_1'^+} dx.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

D'après (2.22), en appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Young dans la dernière estimation

de (2.32), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \left\| z_1^{\alpha_1(x)} z_2^{\beta_1(x)} \right\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} \leq 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} (\tilde{c}d(x))^{N\alpha_1(x)p_1'^+} z_2^{N\beta_1(x)p_1'^+} dx \\
& \leq 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} (1 - N\beta_1(x)p_1'^+) (\tilde{c}d(x))^{\frac{N\alpha_1(x)p_1'^+}{1-N\beta_1(x)p_1'^+}} dx + \int_{\Omega} N\beta_1(x)p_1'^+ z_2 dx \\
& \leq 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} (1 - N\beta_1(x)p_1'^+) (\tilde{c}d(x))^{\frac{N\alpha_1(x)p_1'^+}{1-N\beta_1(x)p_1'^+}} dx + \|N\beta_1(x)p_1'^+\|_N \|z_2\|_{\frac{N}{N-1}} \\
& \leq 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} (1 - N\beta_1(x)p_1'^+) (\tilde{c}d(x))^{\frac{N\alpha_1(x)p_1'^+}{1-N\beta_1(x)p_1'^+}} dx + \|N\beta_1(x)p_1'^+\|_N C_T \|\nabla z_2\|_1 \\
& \leq 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \int_{\Omega} (1 - N\beta_1(x)p_1'^+) (\tilde{c}d(x))^{\frac{N\alpha_1(x)p_1'^+}{1-N\beta_1(x)p_1'^+}} dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2'(x)} \left(\lambda_2(x)^{-1} \|N\beta_1(x)p_1'^+\|_N C_T \right)^{p_2'(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} \lambda_2(x)^{p_2(x)} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx.
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé l'existence de constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ indépendantes de z , telles que

$$\left\| z_1^{\alpha_1(x)} z_2^{\beta_1(x)} \right\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} \leq \begin{cases} C_1 & \text{si } \alpha_1^+, \beta_1^+ < 0 \\ C_2 + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} \lambda_2(x)^{p_2(x)} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx & \text{si } \alpha_1^+ < 0 < \beta_1^- \\ C_3 + \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} \lambda_1(x)^{p_1(x)} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx & \text{si } \beta_1^+ < 0 < \alpha_1^- \end{cases} \quad (2.33)$$

De ce fait, l'inégalité (2.33) se résume de la façon suivante

$$\left\| z_1^{\alpha_1(x)} z_2^{\beta_1(x)} \right\|_N^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} \leq C_4 + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} \lambda_2(x)^{p_2(x)} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} \lambda_1(x)^{p_1(x)} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx, \quad (2.34)$$

avec $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$. En injectant (2.34) dans (2.31), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx \leq C_4 \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} dx \\
& + \left(\int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} dx \right) \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} \lambda_2(x)^{p_2(x)} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx \\
& + \left(\int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} dx \right) \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} \lambda_1(x)^{p_1(x)} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx \\
& + \frac{2}{p_1^-} \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - p_1^-}{p_1(x)} \delta(x)^{\frac{p_1(x)}{1-p_1(x)}} dx + \int_{\Omega} \frac{3\delta(x)^{p_1(x)}}{p_1(x)} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx \\
& + 2 \frac{N-1}{N} \left(\frac{p_1^- - 1}{p_1^-} [M_1 C_T]^{\frac{p_1^-}{p_1^- - 1}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \\
& + \frac{1}{N} \int_{\Omega} \frac{p_1(x)(p_1^- - 1) - N\gamma_1(x)p_1^-}{p_1(x)(p_1^- - 1)} \epsilon(x)^{\frac{p_1(x)(p_1^- - 1)}{N\gamma_1(x)p_1^- - p_1(x)(p_1^- - 1)}} dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\gamma_1(x)p_1^-}{p_1(x)(p_1^- - 1)} \epsilon(x)^{\frac{p_1(x)(p_1^- - 1)}{N\gamma_1(x)p_1^-}} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx \\
& + \frac{1}{N} \int_{\Omega} \frac{p_2(x)(p_1^- - 1) - N\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}{p_2(x)(p_1^- - 1)} \mu(x)^{\frac{p_2(x)(p_1^- - 1)}{N\bar{\gamma}_1(x)p_1^- - p_2(x)(p_1^- - 1)}} dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}{p_2(x)(p_1^- - 1)} \mu(x)^{\frac{p_2(x)(p_1^- - 1)}{N\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

On fait le choix des fonctions $\delta, \epsilon, \mu, \lambda_1$ et λ_2 de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
1) \quad & \delta(x) = \left(\frac{1}{4} \frac{p_1(x)}{3} \right)^{\frac{1}{p_1(x)}}, \\
2) \quad & \epsilon(x) = \left(\frac{1}{16} \frac{p_1(x)(p_1^- - 1)}{8\gamma_1(x)} \right)^{\frac{N\gamma_1(x)p_1^-}{p_1(x)(p_1^- - 1)}}, \\
3) \quad & \mu(x) = \left(\frac{1}{16} \frac{p_2(x)(p_1^- - 1)}{4\bar{\gamma}_1(x)} \right)^{\frac{N\bar{\gamma}_1(x)p_1^-}{p_2(x)(p_1^- - 1)}}, \\
4) \quad & \lambda_1(x) = \left[\frac{1}{16} \left(\int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} dx \right)^{-1} p_1(x) \right]^{\frac{1}{p_1(x)}}, \\
5) \quad & \lambda_2(x) = \left[\frac{1}{16} \left(\int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)} \left[\frac{M_1 C_T}{\delta(x)} \right]^{\frac{p_1(x)}{p_1(x)-1}} dx \right)^{-1} p_2(x) \right]^{\frac{1}{p_2(x)}}.
\end{aligned}$$

En ajoutant (2.35) avec son analogue pour la seconde équation en $\int_{\Omega} |\nabla u_{2,z}|^{p_2(x)} dx$, on obtient,

après simplification, l'existence de $\tilde{C} > 0$ tel que

$$\frac{3}{4} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_{2,z}|^{p_2(x)} dx \right) - \frac{1}{4} \left(\int_{\Omega} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx \right) \leq \tilde{C}. \quad (2.36)$$

Maintenant, supposons que z_1 et z_2 satisfont

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_1|^{p_1(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla z_2|^{p_2(x)} dx \leq \tilde{C}. \quad (2.37)$$

A partir de (2.36) et (2.37), on montre que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{1,z}|^{p_1(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{2,z}|^{p_2(x)} dx \leq \tilde{C},$$

Ceci complète la preuve. $\square$

2.3.4 Estimation uniforme de la norme infinie de la solution auxiliaire

Considérons l'ensemble

$$\tilde{B} = \left\{ (s_1, s_2) \in X_0^{1,p(x),p_2(x)}(\Omega) \mid c_0 d(x) \leq s_i \text{ et } \int_{\Omega} |\nabla s_1|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla s_2|^{p_2(x)} dx < \tilde{L} \right\},$$

où $\tilde{L} > 0$ est la constante apparaissant dans le Lemme 2.3.4.

Voici un résultat d'estimation de la solution du problème (P_z) .

Lemme 2.3.5. *Supposons que $(z_1, z_2) \in \tilde{B}$. Sous les hypothèses (H_f) et (2.6), il existe une constante $L > 1$, indépendante de z_i , telle que toute solution $(u_1, u_2) \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ de (P_z) appartient à l'espace $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, et vérifie*

$$\|u_i\|_\infty < L. \quad (2.38)$$

Démonstration. Posons $h(x) = f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2)$ dans le Lemme 2.3.1. Tout d'abord, remarquons que, d'après le Lemme 1.5.2 et le Lemme 2.3.4, il existe $x_0 \in \Omega$ et une constante $C_1 > 0$, indépendante de u_i et z_i , telle que

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|1\|_{L^{p'_i(x)}(\Omega)} \|u_i\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)} \leq \text{const} \|1\|_{L^{p'_i(x)}(\Omega)} \|\nabla u_i\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)} \\ &= \text{const} \|1\|_{L^{p'_i(x)}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_i|^{p_i(x)} dx \right)^{\frac{1}{p_i(x_0)}} \\ &\leq C_1, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$i = 1, 2$. Aussi, remarquons que, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|h\|_{L^N(\Omega)} \leq M_1 \|z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}\|_N + M_1 \|\nabla z_1\|_N + M_1 \|\nabla z_2\|_N.$$

En étudiant l'étape 2 de la preuve du Lemme 2.3.4, on vérifie facilement qu'il existe une constante $C_2 > 0$, indépendante de u_i et z_i , telle que

$$\|h\|_{L^N(\Omega)} \leq C_2, \quad (2.40)$$

En vertu de (2.39), (2.40) et du Lemme 2.3.2, on déduit (2.38). Ceci achève la démonstration. $\square$

2.4 Construction et comparaison des sous- et sur-solutions

Dans cette section, on considère certains résultats asymptotiques impliquant les fonctions $p_i(x)$ -torsions ($i = 1, 2$) et leurs troncature sur le bord du domaine, présentées dans l'introduction de ce chapitre. Ces fonctions seront à la base de la construction de nos sous- et sur-solutions u_i et $\bar{u}_i$ ($i = 1, 2$).

Avant de passer à la construction nous rappelons le lemme suivant.

Lemme 2.4.1 (voir [AM18] Lemme 3). *Soit $\epsilon > 0$ et h satisfaisant*

$$|h(x)| \leq Cd(x)^{-\gamma(x)}, \quad x \in \Omega, \quad (2.41)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné suffisamment régulier, et $\gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{d(x) \rightarrow 0} N\gamma(x) = L \in (0, 1).$$

Supposons que $h > 0$, et soit $\tilde{h} \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ satisfaisant (2.41). Alors, pour ϵ suffisamment petit, on a

$$u_\epsilon \geq \frac{u}{2} \quad \text{dans } \Omega,$$

où $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et $u_\epsilon \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est la solution du problème

$$-\Delta_{p(x)} u_\epsilon = \begin{cases} h(x) & \text{si } d(x) > \epsilon \\ \tilde{h}(x) & \text{si } d(x) < \epsilon \end{cases}, \quad u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Soit $\xi_i, \xi_{i,\delta} \in C^{1,\tau}(\bar{\Omega})$, $\tau \in (0, 1)$ les solutions des problèmes de Dirichlet (2.9) et (2.10) respectivement. Voici un lemme fournissant des informations sur le comportement asymptotique de ces fonctions.

Lemme 2.4.2. *Il existe des constantes $c_1, k_{p_1}, k_{p_2} > 1$ et $c_0, \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, avec $\theta_1, \theta_2 \approx 1$, telles que*

$$c_0 d(x) \leq \xi_{i,\delta}(x) \leq \xi_i(x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \quad (2.42)$$

$$\xi_i(x) \leq c_1 d(x)^{\theta_i}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega_\delta \quad (2.43)$$

et

$$\|\nabla \xi_{i,\delta}\|_\infty, \|\nabla \xi_i\|_\infty \leq k_{p_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.44)$$

Démonstration. D'après (2.9) et (2.10), il est clair que $\xi_{i,\delta}(x) \leq \xi_i(x)$, pour tout $x \in \Omega$, ($i = 1, 2$). Le principe fort du maximum (Lemme C.0.2), combiné avec le Lemme 2.4.1, entraîne que $\xi_{i,\delta}(x) \geq c_0 d(x)$ dans Ω , pour $\delta > 0$ suffisamment petit dans (2.10). De plus, grâce au Lemme 2.3.1, nous pouvons valider les estimations exprimées par (2.44).

Par conséquent, il ne reste plus qu'à montrer que (2.43) est valide. D'après [AM18, Lemme 1], en considérant une constante suffisamment large $A > 1$, qui sera précisée ultérieurement, il est bien connu que le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{p_i(x)} w_i = \frac{A}{w_i^{\gamma_i}} & \text{dans } \Omega \\ w_i > 0 & \text{dans } \Omega \\ w_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.45)$$

avec

$$\gamma_i \in (0, \min\{1, p_i^- - 1\}), \quad (2.46)$$

admet une solution unique $w_i \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\min\{\delta, d(x)\} \leq w_i(x) \leq \bar{c}_1 A^{\frac{1}{p_i^- - 1}} \quad \text{in } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.47)$$

pour une certaine constante positive $\bar{c}_1$, indépendante de A , et avec $\delta > 0$ petit. De plus, il existe une constante $\bar{c}_2 > 0$, dépendant de A , telle que

$$w_i(x) \leq \bar{c}_2 d(x)^{\theta_i} \quad \text{dans } \Omega_\delta, \quad (2.48)$$

pour certaines constantes $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, avec $\theta_1, \theta_2 \approx 1$, et $\delta > 0$ petit (voir [Zha07, Théorème 4.4]). D'après (2.45), on peut observer que

$$\int_{\Omega} |\nabla w_i|^{p_i(x)-2} \nabla w_i \nabla \varphi_i dx > 0,$$

pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$. Ainsi, en vertu du Théorème B.1.1, il existe $x_1^0, x_2^0 \in \Omega$ tels que, pour toute constante $L > 0$, on ait

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L^{p_i(x)-1} |\nabla w_i|^{p_i(x)-2} \nabla w_i \nabla \varphi_i dx &= L^{p_i(x_1^0)-1} \int_{\Omega} |\nabla w_i|^{p_i(x)-2} \nabla w_i \nabla \varphi_i dx \\ &\geq L^{p_i^- - 1} \int_{\Omega} |\nabla w_i|^{p_i(x)-2} \nabla w_i \nabla \varphi_i dx, \end{aligned}$$

pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

Fixons $A > 0$, suffisamment large, de sorte que

$$d(x) \leq A^{\frac{1}{\theta_i \gamma_i}} \quad \text{dans } \overline{\Omega}. \quad (2.49)$$

En vertu de (2.9), (2.49), (2.46) et (2.45), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \xi_i|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_i \nabla \varphi_i dx &= \int_{\Omega} \varphi_i dx = \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta} A^{\frac{\gamma_i}{p_i^- - 1} - \frac{\gamma_i}{p_i^+ - 1}} \varphi_i dx + \int_{\Omega_\delta} \varphi_i dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta} A^{\frac{\gamma_i}{p_i^- - 1}} \left(\frac{\bar{c}_1}{w_i}\right)^{\gamma_i} \varphi_i dx + \int_{\Omega_\delta} A \left(\frac{1}{d(x)^{\theta_i}}\right)^{\gamma_i} \varphi_i dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\delta} A \left(\frac{\bar{c}_1}{w_i}\right)^{\gamma_i} \varphi_i dx + \int_{\Omega_\delta} A \left(\frac{\bar{c}_2}{w_i}\right)^{\gamma_i} \varphi_i dx \leq L^{p_i^- - 1} \int_{\Omega} \frac{A}{w_i^{\gamma_i}} \varphi_i dx \\ &= L^{p_i^- - 1} \int_{\Omega} |\nabla w_i|^{p_i(x)-2} \nabla w_i \nabla \varphi_i dx \leq \int_{\Omega} |\nabla(Lw_i)|^{p_i(x)-2} \nabla(Lw_i) \nabla \varphi_i dx, \end{aligned}$$

pour $L > \max_{i=1,2} \left\{ \frac{\gamma_i}{\bar{c}_i^{p_i-1}} \right\}$, et pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$. D'après le principe de comparaison faible et (2.48), on conclut que

$$\xi_i(x) \leq Lw_i \leq c_1 d(x)^{\theta_i} \text{ pour tout } x \in \Omega_\delta,$$

pour une certaine constante $c_1 > 0$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque 2.4.1. En raison de la régularité des fonctions ξ_i ($i = 1, 2$), qui sont de classe $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ (cf résultat de régularité de Fan, Théorème C.0.3), on peut prendre $\theta_i = 1$ ($i = 1, 2$) dans l'estimation (2.43). Ainsi, dans la suite du chapitre, nous considérerons (2.43) avec $\theta_i = 1$ ($i = 1, 2$).

Pour une constante $C > 1$, posons

$$\underline{u}_i = C^{-1}\xi_{i,\delta} \quad \text{et} \quad \bar{u}_i = C\xi_i. \quad (2.50)$$

On affirme que $\bar{u}_i \geq \underline{u}_i$ dans $\bar{\Omega}$. En effet, d'après (2.9) et (2.10), on peut observer que les intégrales

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx, \quad (2.51)$$

$$- \int_{\Omega_\delta} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx, \quad (2.52)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \xi_i|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_i \nabla \varphi_i \, dx, \quad (2.53)$$

sont positives pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$. D'après (2.50), et grâce au Théorème B.1.1, il existe $x_i^1, x_i^2 \in \Omega$ tels que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \varphi_i \, dx &= \int_{\Omega} C^{-(p_i(x)-1)} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx \\ &= \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta} C^{-(p_i(x)-1)} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx - \int_{\Omega_\delta} (-C^{-(p_i(x)-1)} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i) \, dx \\ &= C^{-(p_i(x_i^1)-1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx - C^{-(p_i(x_i^2)-1)} \int_{\Omega_\delta} (-|\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i) \, dx. \end{aligned} \quad (2.54)$$

En utilisant (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \varphi_i \, dx &= C^{-(p_i(x_i^1)-1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta} \varphi_i \, dx - C^{-(p_i(x_i^2)-1)} \int_{\Omega_\delta} \varphi_i \, dx \\ &\leq C^{-(p_i^- - 1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta} \varphi_i \, dx - C^{-(p_i^+ - 1)} \int_{\Omega_\delta} \varphi_i \, dx. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Encore, le Théorème B.1.1 et (2.9) impliquent que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \bar{u}_i \nabla \varphi_i \, dx &= \int_{\Omega} C^{p_i(x)-1} |\nabla \xi_i|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_i \nabla \varphi_i \, dx \\ &= C^{p_i(x_i^0)-1} \int_{\Omega} |\nabla \xi_i|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_i \nabla \varphi_i \, dx \\ &\geq C^{p_i^- - 1} \int_{\Omega} |\nabla \xi_i|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_i \nabla \varphi_i \, dx \\ &= C^{p_i^- - 1} \int_{\Omega} \varphi_i \, dx, \end{aligned} \quad (2.56)$$

pour un certain $x_i^0 \in \Omega$. De ce fait, la combinaison de (2.54) - (2.56) entraîne

$$\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \varphi_i \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \bar{u}_i \nabla \varphi_i \, dx,$$

pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$, pourvu que la constante $C > 0$ est suffisamment grande. Ceci démontre notre affirmation.

Posons

$$R := \max_{i=1,2} \{1, k_{p_i}, \|\xi_i\|_{C^{1,\tau}(\bar{\Omega})}, \|\xi_{i,\delta}\|_{C^{1,\tau}(\bar{\Omega})}\}. \quad (2.57)$$

Les résultats suivants sont au coeur de la raison pour laquelle les fonctions (2.50) constituent des sur et sous solution du problème (S).

2.4.1 Cas $\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm} \geq 0$

Ici, on énonce un résultat de comparaison, faisant intervenir les fonctions (2.50) dans la situation $\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm} \geq 0$.

Proposition 2.4.1. *Supposons que (2.3) et (2.4) sont vérifiés, avec $\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm} > 0$ ($i = 1, 2$). Alors, pour $C > 0$ assez large dans (2.50), on a*

$$-\Delta_{p_i(x)} \underline{u}_i \leq m_i \begin{cases} \frac{\underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)}}{\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)}} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ \frac{\underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)}}{\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)}} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ \frac{\underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)}}{\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)}} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.58)$$

$$-\Delta_{p_i(x)} \bar{u}_i \geq 2M_i(RC)^{\max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\}} + M_i \begin{cases} \frac{\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)}}{\underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)}} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ \frac{\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)}}{\underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)}} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ \frac{\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)}}{\underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)}} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases} \quad \text{dans } \Omega, i = 1, 2, \quad (2.59)$$

où $R > 0$ est donné dans (2.57).

Démonstration. Tout d'abord, supposons que $\alpha_i^-, \beta_i^- > 0$. D'après (2.51)-(2.52), ainsi que le Théorème B.1.1, il existe $x_i^0 \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}$, et $x_i^1 \in \Omega_{\delta}$, tels que

$$\begin{aligned} & C^{-(p_i^- - 1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx - C^{-(p_i^+ - 1)} \int_{\Omega_{\delta}} \left(-|\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \right) \, dx \\ & \geq C^{-(p_i(x_i^0) - 1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx - C^{-(p_i(x_i^1) - 1)} \int_{\Omega_{\delta}} \left(-|\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \right) \, dx \\ & = \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} C^{-(p_i(x) - 1)} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \, dx - \int_{\Omega_{\delta}} C^{-(p_i(x) - 1)} \left(-|\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \varphi_i \right) \, dx \\ & = \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \varphi_i \, dx. \end{aligned} \quad (2.60)$$

A partir de (2.50), (2.4) et le Lemme 2.4.2, puisque $\alpha_i^-, \beta_i^- > 0$, on a

$$\begin{aligned}
m_i \int_{\Omega} \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} \varphi_i \, dx &= m_i \int_{\Omega} C^{-(\alpha_i(x)+\beta_i(x))} \xi_{1,\delta}^{\alpha_i(x)} \xi_{2,\delta}^{\beta_i(x)} \varphi_i \, dx \\
&\geq m_i \int_{\Omega} (C c_0^{-1})^{-(\alpha_i(x)+\beta_i(x))} d(x)^{\alpha_i(x)+\beta_i(x)} \varphi_i \, dx \\
&\geq m_i (C c_0^{-1})^{-(\alpha_i^++\beta_i^+)} \left(\delta^{\alpha_i^++\beta_i^+} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} \varphi_i \, dx + \int_{\Omega_{\delta}} d(x)^{\alpha_i(x)+\beta_i(x)} \varphi_i \, dx \right) \\
&\geq C^{-(p_i^- - 1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} \varphi_i \, dx - C^{-(p_i^+ - 1)} \int_{\Omega_{\delta}} \varphi_i \, dx,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$ ($i = 1, 2$), et $C > 0$ assez large. Ainsi, en combinant (2.55) avec (2.60)-(2.61), il découle que

$$\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \varphi_i \, dx \leq m_i \int_{\Omega} \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} \varphi_i \, dx,$$

pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$ ($i = 1, 2$). Ceci démontre le premier cas dans (2.58).

Ensuite, nous prouvons (2.59) dans le cas $\alpha_i^-, \beta_i^- > 0$. En utilisant (2.50), (2.57), (2.4) et (2.9), le Théorème B.1.1 garantit l'existence de $x_i^2 \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned}
M_i \int_{\Omega} (\bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)} + 2(RC)^{\max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\}}) \varphi_i \, dx \\
&= M_i \int_{\Omega} (C^{\alpha_i(x)+\beta_i(x)} \xi_1^{\alpha_i(x)} \xi_2^{\beta_i(x)} + 2(RC)^{\max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\}}) \varphi_i \, dx \\
&\leq M_i \int_{\Omega} (C^{\alpha_i^++\beta_i^+} R^{\alpha_i^++\beta_i^+} + 2(RC)^{\max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\}}) \varphi_i \, dx \\
&\leq \tilde{M}_R \max\{C^{\alpha_i^++\beta_i^+}, C^{\max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\}}\} \int_{\Omega} \varphi_i \, dx \leq C^{p_i^- - 1} \int_{\Omega} \varphi_i \, dx \\
&\leq C^{p_i(x_i^2) - 1} \int_{\Omega} \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} C^{p_i(x) - 1} |\nabla \xi_i|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_i \nabla \varphi_i \, dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \bar{u}_i \nabla \varphi_i \, dx,
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_i \geq 0$ ($i = 1, 2$), et $C > 0$ assez grand.

Maintenant, nous considérons les autres cas dans (2.58) et (2.59). Nous prouvons uniquement les inégalités correspondant au cas $\alpha_1^+ < 0 < \beta_1^-$, puisque la situation complémentaire $\beta_1^+ < 0 < \alpha_1^-$ est prouvée de façon similaire. Supposons donc que $\alpha_1^+ < 0 < \beta_1^-$. En vertu du Lemme 2.4.2, et (2.4), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} C^{\alpha_1(x)-\beta_1(x)} \xi_1^{\alpha_1(x)} \xi_{2,\delta}^{\beta_1(x)} \varphi_1 \, dx \\
&\geq C^{\alpha_1^- - \beta_1^+} R^{\alpha_1^-} (c_0 \delta)^{\beta_1^+} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} \varphi_1 \, dx + C^{\alpha_1^- - \beta_1^+} c_0^{\beta_1^+} c_1^{\alpha_1^-} \int_{\Omega_{\delta}} d(x)^{\theta_1 \alpha_1(x) + \beta_1(x)} \varphi_1 \, dx \\
&\geq C^{-(p_1^- - 1)} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} \varphi_1 \, dx - C^{-(p_1^+ - 1)} \int_{\Omega_{\delta}} \varphi_1 \, dx,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

pour tout $\varphi_1 \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_1 \geq 0$, pourvu que $C > 0$ est suffisamment grand. Alors d'après (2.50), (2.9) et (2.10), on obtient

$$m_1 \int_{\Omega} \bar{u}_1^{\alpha_1(x)} \underline{u}_2^{\beta_1(x)} \varphi_1 \, dx \geq \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_1|^{p_1(x)-2} \nabla \underline{u}_1 \nabla \varphi_1 \, dx.$$

Ensuite, nous prouvons (2.59) lorsque $\alpha_1^+ < 0 < \beta_1^-$. La positivité de l'intégrale (2.53), combinée avec le Théorème B.1.1, implique l'existence de $x_2 \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned} C^{p_1^- - 1} \int_{\Omega} |\nabla \xi_1|^{p_1(x)-2} \nabla \xi_1 \nabla \varphi_1 \, dx &\leq C^{p_1(x_2)-1} \int_{\Omega} |\nabla \xi_1|^{p_1(x)-2} \nabla \xi_1 \nabla \varphi_1 \, dx \\ &= \int_{\Omega} C^{p_1(x)-1} |\nabla \xi_1|^{p_1(x)-2} \nabla \xi_1 \nabla \varphi_1 \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_1|^{p_1(x)-2} \nabla \bar{u}_1 \nabla \varphi_1 \, dx. \end{aligned} \quad (2.63)$$

D'après (2.57), $(H_{\alpha,\beta})$, (2.38), (2.42) et le Lemme 2.4.2, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &M_1 \int_{\Omega} (\underline{u}_1^{\alpha_1(x)} \bar{u}_2^{\beta_1(x)} + 2(RC)^{\max\{\gamma_1^+, \bar{\gamma}_1^+\}}) \varphi_1 \, dx \\ &= M_1 \int_{\Omega} (C^{-\alpha_1(x)+\beta_1(x)} \xi_{1,\delta}^{\alpha_1(x)} \xi_2^{\beta_1(x)} + 2(RC)^{\max\{\gamma_1^+, \bar{\gamma}_1^+\}}) \varphi_1 \, dx \\ &\leq M_1 C^{-\alpha_1^- + \beta_1^+} \left[(c_0 \delta)^{\alpha_1^-} R^{\beta_1^+} \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{\delta}} \varphi_1 \, dx + c_1^{\beta_1^+} c_0^{\alpha_1^-} \int_{\Omega_{\delta}} d(x)^{\alpha_1^- + \theta_1 \beta_1^+} \varphi_1 \, dx \right] \\ &\quad + 2(RC)^{\max\{\gamma_1^+, \bar{\gamma}_1^+\}} \int_{\Omega} \varphi_1 \, dx \leq C^{p_1^- - 1} \int_{\Omega} \varphi_1 \, dx, \end{aligned} \quad (2.64)$$

pour tout $\varphi_1 \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$, avec $\varphi_1 \geq 0$, pourvu que $C > 0$ est suffisamment grand. Ainsi, en regroupant (2.63) et (2.64), on aboutit à

$$\int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_1|^{p_1(x)-2} \nabla \bar{u}_1 \nabla \varphi_1 \, dx \geq M_1 \int_{\Omega} (\underline{u}_1^{\alpha_1(x)} \bar{u}_2^{\beta_1(x)} + 2(RC)^{\max\{\gamma_1^+, \bar{\gamma}_1^+\}}) \varphi_1 \, dx.$$

□

2.4.2 Cas $\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm} < 0$

L'extension naturelle de la Proposition 2.4.1 pour la situation $\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm} < 0$ nécessite de considérer d'autres quantités que les fonctions $\bar{u}_i$, dans la mesure où une inégalité telle que (2.59) ne peut pas être obtenue. En effet, les termes sources f_i ne sont pas bornés sur toute la région Ω , compte tenu de l'explosion du terme $z_1^{\alpha_i(\cdot)} z_2^{\beta_i(\cdot)}$ sur le bord de Ω . Par conséquent, on ne peut assurer une estimation $C^{1,\alpha}$ du gradient de la solution, comme ce fut le cas pour la situation complémentaire. À la place, on peut utiliser l'estimation faible fournie par la Proposition 2.3.5, et remplacer les fonctions $\bar{u}_i$ par la constante L , définie dans le Lemme 2.3.5. La proposition suivante garantit un résultat de comparaison pour les fonctions $\underline{u}_i$ dans (2.50), et partage un certain nombre de similarités avec l'inégalité (2.58).

Proposition 2.4.2. *Supposons que (2.4) est vérifié, avec $\alpha_i^{\pm} + \beta_i^{\pm} < 0$. Alors, pour $C > 0$ suffisamment grand dans (2.57), on a*

$$-\Delta_{p_i(x)} \underline{u}_i \leq m_i \begin{cases} L^{\alpha_i^-} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ L^{\beta_i^-} \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \\ L^{\alpha_i^- + \beta_i^-} & \text{si } \alpha_i^+, \beta_i^+ < 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega, i = 1, 2, \quad (2.65)$$

où la borne $L > 1$ est fournie par le Lemme 2.3.5.

Démonstration. La preuve sera séparée en deux étapes.

Étape 1 : Cas lorsque $\alpha_i^+ < 0 < \beta_i^-$ ou $\beta_i^+ < 0 < \alpha_i^-$

On prouve seulement le cas lorsque $\alpha_i^+ < 0 < \beta_i^-$, puisque l'autre cas peut être justifié de façon similaire. Supposons que $\alpha_i^+ < 0 < \beta_i^-$, et prenons $\phi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$. D'après (2.57), on a

$$\begin{aligned} m_i \int_{\Omega} L^{\alpha_i(x)} C^{-\beta_i(x)} \xi_{2,\delta}^{\beta_i(x)} \phi_i dx &\geq m_i C^{-\beta_i^-} \eta^{\beta_i^+} \min \{L^{\alpha_i^\pm}\} \left(\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}} \phi_i dx + \int_{\Omega_\delta} \phi_i dx \right) \\ &\geq C^{1-p_i^-} \int_{\Omega} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \phi_i dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \phi_i dx. \end{aligned}$$

Étape 2 : Cas lorsque $\alpha_i^+, \beta_i^+ < 0$

Soit $\phi_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$. Alors, par définition de $\underline{u}_i$, on a

$$\begin{aligned} m_i \int_{\Omega} L^{\alpha_i(x)+\beta_i(x)} \phi_i dx &\geq m_i \min \{L^{(\alpha_i+\beta_i)^\pm}\} \left(\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}} \phi_i dx + \int_{\Omega_\delta} \phi_i dx \right) \\ &\geq C^{1-p_i^-} \int_{\Omega} |\nabla \xi_{i,\delta}|^{p_i(x)-2} \nabla \xi_{i,\delta} \nabla \phi_i dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}_i|^{p_i(x)-2} \nabla \underline{u}_i \nabla \phi_i dx. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

2.5 Preuve du résultat principal

Dans cette section, nous prouvons le Théorème 2.2.1. La preuve suit le raisonnement établi dans l'introduction du chapitre.

2.5.1 Résultats pour le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm > 0$

En utilisant les fonctions (2.50), ainsi que les constantes $R > 0$ et $C > 0$, définies dans (2.57) et (2.50) respectivement, on considère l'ensemble fermé, borné, et convexe suivant

$$\mathcal{K}^+ = \left\{ (s_1, s_2) \in \left(C^{1,\alpha}(\Omega) \right)^2 \mid \underline{u}_i \leq s_i \leq \overline{u}_i \text{ et } \|\nabla s_i\|_\infty < CR, i = 1, 2 \right\}.$$

Définissons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^+ : \mathcal{K}^+ &\rightarrow C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega}) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \mathcal{T}^+(z_1, z_2) = (u_1, u_2)_{(z_1, z_2)}, \end{aligned}$$

où (u_1, u_2) sont les solutions auxiliaires de (P_z) . Il est important de remarquer que les solutions du problème $(P_{(z_1, z_2)})$ coïncident avec les points fixes de l'application $\mathcal{T}^+$.

Étant donné que $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm > 0$, il s'ensuit que $\alpha_i^+ + \theta_2 \beta_i^- \geq 0$ (resp. $\alpha_i^+ + \theta_2 \beta_i^- \geq 0$), pour $\alpha_i^+ < 0 < \beta_i^-$ (resp. $\beta_i^+ < 0 < \alpha_i^-$), et pour $\theta_1, \theta_2 \approx 1$. Pour $(z_1, z_2) \in \mathcal{K}^+$, on obtient

$$z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \leq \begin{cases} \bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ \bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases}$$

Dans l'ensemble Ω_δ , défini dans la section Notations, en utilisant (2.50), avec le Lemme 2.4.2, on aboutit au fait que

$$\begin{aligned} z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} &\leq \begin{cases} C^{\alpha_i^+ + \beta_i^+} d(x)^{\theta_1 \alpha_i(x) + \theta_2 \beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ C^{-\alpha_i^- + \beta_i^+} d(x)^{\alpha_i(x) + \theta_2 \beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ C^{\alpha_i^+ - \beta_i^-} d(x)^{\theta_1 \alpha_i(x) + \beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} C^{\alpha_i^+ + \beta_i^+} \delta^{\theta_1 \alpha_i^- + \theta_2 \beta_i^-} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ C^{-\alpha_i^- + \beta_i^+} \delta^{\alpha_i^+ + \theta_2 \beta_i^-} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ C^{\alpha_i^+ - \beta_i^-} \delta^{\theta_1 \alpha_i^- + \beta_i^+} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^-, \end{cases} \end{aligned}$$

alors que dans $\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta$ on a

$$z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \leq \begin{cases} C^{\alpha_i^+ + \beta_i^+} \|\xi_1\|_\infty^{\alpha_i(x)} \|\xi_2\|_\infty^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ C^{-\alpha_i^- + \beta_i^+} \delta^{\alpha_i(x)} \|\xi_2\|_\infty^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ C^{\alpha_i^+ - \beta_i^-} \|\xi_1\|_\infty^{\alpha_i(x)} \delta^{\beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases}$$

Ainsi, on déduit à partir de $(\mathbf{H}_f)$, (2.50) et le Lemme 2.4.2 l'estimation

$$\begin{aligned} |f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2)| &\leq M_i(z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} + |\nabla z_1|^{\gamma_i(x)} + |\nabla z_2|^{\bar{\gamma}_i(x)}) \\ &\leq M_i C^{|\alpha_i^\pm| + |\beta_i^\pm|} L_0 + 2M_i (CR)^{\max\{\gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\}} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.66)$$

où la constante $L_0 > 0$ est indépendante de C .

Par conséquent, l'unicité de la solution (u_1, u_2) de $(P_{(z_1, z_2)})$, garantie par le théorème de Browder-Minty (voir [Bre83b]), implique que l'application $\mathcal{T}^+$ est bien définie. De plus, le résultat de régularité de [Fan07] entraîne que $(u_1, u_2) \in C_0^{1,\tau}(\bar{\Omega})^2$, pour un certain $\tau \in (0, 1)$, et il existe une constante $\hat{R} > 0$ telle que l'on ait

$$\|u_i\|_{C^{1,\tau}(\bar{\Omega})} < \hat{R}. \quad (2.67)$$

Maintenant, on affirme que l'application $\mathcal{T}^+$ est contractante.

Proposition 2.5.1. *L'ensemble $\mathcal{K}^+$ est invariant par l'application $\mathcal{T}^+$.*

Démonstration. En utilisant le fait que $z_1, z_2 \in \mathcal{K}^+$, il s'ensuit que

$$z_1^{\alpha_i(x)} z_2^{\beta_i(x)} \geq \begin{cases} \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^-, \beta_i^- > 0 \\ \bar{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \bar{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases} \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi, en considérant l'hypothèse $(\mathbf{H}_f)$, et la Proposition 2.4.1, le principe de comparaison faible implique que

$$\underline{u}_1 \leq y_1 \leq \bar{u}_1 \text{ et } \underline{u}_2 \leq u_2 \leq \bar{u}_2 \text{ dans } \Omega. \quad (2.68)$$

Par ailleurs, puisque $\max\{|\alpha_i^\pm| + |\beta_i^\pm|, \gamma_i^+, \bar{\gamma}_i^+\} < p_i - 1$, il découle de (2.66) que

$$|f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2)| \leq (CR)^{p_i-1},$$

pourvu que C est suffisamment large. D'où, grâce au Lemme 2.3.1, on déduit que

$$\|\nabla u_1\|_\infty, \|\nabla u_2\|_\infty \leq CR. \quad (2.69)$$

Par conséquent, la réunion de (2.67) - (2.69) conduit au fait que $(u_1, u_2) \in \mathcal{K}^+$, ce qui montre que $\mathcal{T}^+(\mathcal{K}^+) \subset \mathcal{K}^+$. $\square$

Aussi, nous assurons de bonnes propriétés pour l'application $\mathcal{T}^+$.

Proposition 2.5.2. *L'application $\mathcal{T}^+$ est compacte et continue.*

Démonstration. Sur la base de (2.67), avec la compacité de l'injection $C^{1,\tau}(\bar{\Omega}) \subset C_0^1(\bar{\Omega})$, on obtient que $\mathcal{T}^+(C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega}))$ est un sous-ensemble relativement compact de $C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega})$. Ceci prouve la compacité de l'opérateur $\mathcal{T}^+$.

Ensuite, nous montrons que $\mathcal{T}^+$ est continue par rapport à la topologie de $C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega})$. Soit la suite convergente $(z_{1,n}, z_{2,n}) \rightarrow (z_1, z_2)$ dans $C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En posant $(u_{1,n}, u_{2,n}) = \mathcal{T}^+(z_{1,n}, z_{2,n})$, on obtient, d'après (2.67), que $(u_{1,n}, u_{2,n}) \in C^{1,\tau}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\tau}(\bar{\Omega})$. En vertu du théorème d'Ascoli-Arzelà, on a aussi

$$(u_{1,n}, u_{2,n}) \rightarrow (u_1, u_2) \text{ in } C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Par ailleurs, pour tout $z_1, z_2 \in \mathcal{K}^+$, il est vrai que

$$f_i(z_{1,n}, z_{2,n}, \nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n}) \rightarrow f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2) \in W^{-1,p'_i(x)}(\Omega).$$

Ainsi, on conclut que l'application $\mathcal{T}^+$ est continue. $\square$

2.5.2 Résultats pour le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \leq 0$

En utilisant les fonctions $\underline{u}_i$ ($i = 1, 2$), définies dans (2.50), la constante $\tilde{L}$, définie dans le Lemme 2.3.4, et la borne L , introduite dans le Lemme 2.3.5, on considère l'ensemble suivant

$$\mathcal{K}^- = \left\{ \begin{array}{l} (y_1, y_2) \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega) : \underline{u}_i \leq y_i \leq L \text{ dans } \Omega \\ \text{et } \sum_{i=1,2} \int_\Omega |\nabla y_i|^{p_i(x)} dx \leq 2\tilde{L} \end{array} \right\},$$

qui est fermé, borné, et convexe dans $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$. Définissons l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^- : \mathcal{K}^- &\rightarrow W_0^{1,p_1(x)}(\bar{\Omega}) \times W_0^{1,p_2(x)}(\bar{\Omega}) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \mathcal{T}^-(z_1, z_2) = (u_1, u_2)_{(z_1, z_2)}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

où (u_1, u_2) est la solution auxiliaire du problème (P_z) . En vertu de (2.42), (2.50), et du Lemme 2.3.4, on déduit que (u_1, u_2) existe et est la solution unique du problème $(P_{(z_1, z_2)})$.

Maintenant nous affirmons que l'application $\mathcal{T}^-$ est contractante.

Proposition 2.5.3. *L'ensemble $\mathcal{K}^-$ est invariant par l'application $\mathcal{T}^-$.*

Démonstration. Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathcal{K}^-$, en combinant (H_f) avec la Proposition 2.4.2, on déduit que $u_i \geq \underline{u}_i$ dans Ω . De plus, le Lemme 2.3.5 implique que $u_i \leq L$, tandis que le Lemme 2.3.4 garantit l'existence de $\tilde{L} > 0$ tel que $\sum_{i=1,2} \int_{\Omega} |\nabla u_i|^{p_i(x)} dx \leq 2\tilde{L}$. D'où le fait que $u_i \in \mathcal{K}^-$, ce qui signifie que $\mathcal{T}^-(\mathcal{K}^-) \subset \mathcal{K}^-$. $\square$

Aussi nous garantissons de bonnes propriétés pour l'application $\mathcal{T}^-$.

Proposition 2.5.4. *L'application $\mathcal{T}^-$ est compacte et continue.*

Démonstration. Soit une suite convergente $(z_{1,n}, z_{2,n}) \rightarrow (z_1, z_2)$ dans $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \times W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$, i.e.

$$(z_{1,n}, z_{2,n}) \rightarrow (z_1, z_2) \text{ dans } L^{p_1(x)}(\Omega) \times L^{p_2(x)}(\Omega),$$

et

$$(\nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n}) \rightarrow (\nabla z_1, \nabla z_2) \text{ dans } \left(L^{p_1(x)}(\Omega)\right)^N \times \left(L^{p_2(x)}(\Omega)\right)^N,$$

avec $(z_{1,n}, z_{2,n}) \in \mathcal{K}^-$. D'après [FZ03, Théorème 2.4], les suites $(z_{1,n}, z_{2,n})$ et $(\nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n})$ convergent en mesure vers (z_1, z_2) et $(\nabla z_1, \nabla z_2)$, respectivement. Par conséquent, étant donné que la fonction f_i est de type Carathéodory, on peut écrire

$$f_i(x, z_{1,n}(x), z_{2,n}(x), \nabla z_{1,n}(x), \nabla z_{2,n}(x)) \longrightarrow f_i(x, z_1(x), z_2(x), \nabla z_1(x), \nabla z_2(x)) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

De plus, [FZ03, Théorème 2.4] assure que la suite $(\nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n})$ converge vers $(\nabla z_1, \nabla z_2)$ en module, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{p_i(x)}(\nabla z_{i,n} - \nabla z_i) = 0,$$

ou de façon équivalente

$$(|\nabla z_{1,n} - \nabla z_1|^{p_1(x)}, |\nabla z_{2,n} - \nabla z_2|^{p_2(x)}) \rightarrow (0, 0) \text{ dans } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega).$$

Ainsi, il existe une sous-suite $(|\nabla z_{1,n_k} - \nabla z_1|^{p_1(x)}, |\nabla z_{2,n_k} - \nabla z_2|^{p_2(x)})$, et des fonctions mesurables et positives $(g_1, g_2) \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$, telles que

$$\begin{cases} |\nabla z_{1,n_k}(x) - \nabla z_1(x)|^{p_1(x)} \leq g_1(x) \\ |\nabla z_{2,n_k}(x) - \nabla z_2(x)|^{p_2(x)} \leq g_2(x) \end{cases} \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (2.71)$$

Ici, il est important de remarquer que, puisque $z_{i,n} \in [\underline{u}_i, L]$, alors $z_i \in [\underline{u}_i, L]$. De plus, d'après le Lemme 2.4.2 et (2.50), on a

$$\begin{aligned} z_{1,n}^{\alpha_i(x)} z_{2,n}^{\beta_i(x)} &\leq \begin{cases} \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+, \beta_i^+ < 0 \\ \underline{u}_1^{\alpha_i(x)} L^{\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ L^{\alpha_i(x)} \underline{u}_2^{\beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases} \\ &\leq M_0 \begin{cases} d(x)^{\alpha_i(x) + \beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+, \beta_i^+ < 0 \\ d(x)^{\alpha_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ d(x)^{\beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^- \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

pour une certaine constante positive $M_0 := M_0(L, C, c_0, \alpha_i, \beta_i)$.

Supposons que $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$. En vertu de (H_f) et (2.72), on déduit, d'après (2.71), que

$$\begin{aligned} |f_i(x, z_{1,n}, z_{2,n}, \nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n})| &\leq M_i(z_{1,n}^{\alpha_i(x)} z_{2,n}^{\beta_i(x)} + |z_{1,n}|^{\gamma_i(x)} + |z_{2,n}|^{\tilde{\gamma}_i(x)}) \\ &\leq M_i(K(x) + \left\{g_1(x)^{\frac{1}{p_1(x)}} + |\nabla z_1|\right\}^{\gamma_i(x)} + \left\{g_2(x)^{\frac{1}{p_2(x)}} + |\nabla z_2|\right\}^{\tilde{\gamma}_i(x)}), \end{aligned}$$

où

$$K(x) = \begin{cases} (\tilde{c}d(x))^{\alpha_i(x)+\beta_i(x)} & \text{si } \alpha_i^+, \beta_i^+ < 0 \\ (\tilde{c}d(x))^{\alpha_i(x)} \|z_{2,n}^{\beta_i(x)}\|_\infty & \text{si } \alpha_i^+ < 0 < \beta_i^- \\ \|z_{1,n}^{\alpha_i(x)}\|_\infty (\tilde{c}d(x))^{\beta_i(x)} & \text{si } \beta_i^+ < 0 < \alpha_i^-. \end{cases}$$

En posant

$$G_i(x) = M_i \left(K(x) + \left\{ g_1(x)^{\frac{1}{p_1(x)}} + |\nabla z_1| \right\}^{\gamma_i(x)} + \left\{ g_2(x)^{\frac{1}{p_2(x)}} + |\nabla z_2| \right\}^{\bar{\gamma}_i(x)} \right),$$

on affirme que $G_i \in L^{p'_i(x)}(\Omega)$. En effet, puisque $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, il est clair que

$$\left\{ g_1(x)^{\frac{1}{p_1(x)}} + |\nabla z_1| \right\}^{\gamma_i(x)} \in L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_i(x)}}(\Omega), \quad (2.73)$$

et

$$\left\{ g_2(x)^{\frac{1}{p_2(x)}} + |\nabla z_2| \right\}^{\bar{\gamma}_i(x)} \in L^{\frac{p_2(x)}{\bar{\gamma}_i(x)}}(\Omega). \quad (2.74)$$

L'hypothèse (2.5) combinée avec [LM91, Lemme page 726] garantit que

$$\int_\Omega K(x)^{p'_i(x)} dx < \infty. \quad (2.75)$$

Ainsi, en regroupant (2.73)-(2.75), et en observant que les injections $L^{\frac{p_1(x)}{\gamma_i(x)}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'_i(x)}(\Omega)$ et $L^{\frac{p_2(x)}{\bar{\gamma}_i(x)}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'_i(x)}(\Omega)$ sont valides grâce à l'hypothèse (2.6), on conclut que $G_i(x) \in L^{p'_i(x)}(\Omega)$, ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue généralisé (voir [DHHR11, Lemme 3.2.8]), implique que

$$f_i(x, z_{1,n_k}, z_{2,n_k}, \nabla z_{1,n_k}, \nabla z_{2,n_k}) \rightarrow f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2) \quad \text{dans } L^{p'_i(x)}(\Omega).$$

Le principe de convergence assure que toute la suite $f_i(x, z_{1,n}, z_{2,n}, \nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n})$ converge vers $f_i(x, z_{1,n}, z_{2,n}, \nabla z_{1,n}, \nabla z_{2,n})$ dans $L^{p'_i(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'_i(x)}(\Omega)$, ce qui prouve la continuité de $\mathcal{T}^-$.

Une autre interprétation de l'application $\mathcal{T}^-$, définie dans (2.70), serait

$$\mathcal{T}^- = (L_1^{-1} \circ \Phi_1, L_2^{-1} \circ \Phi_2),$$

où $\Phi_i : X_0^{1,p(\cdot),p_2(\cdot)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'(\cdot),q'(\cdot)}(\Omega)$ est une application, et $L_i : X_0^{1,p(\cdot),p_2(\cdot)}(\Omega) \rightarrow X^{-1,p'(\cdot),q'(\cdot)}(\Omega)$ est un opérateur défini par

$$L_i = -\Delta_{p_i(x)} \text{ et } \Phi_i(z_1, z_2) = f_i(x, z_1, z_2, \nabla z_1, \nabla z_2) \text{ pour tout } (z_1, z_2) \in X_0^{1,p(\cdot),p_2(\cdot)}(\Omega).$$

La compacité de l'injection $L^{p'_i(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'_i(x)}(\Omega)$ implique que $\Phi_i(\mathcal{K}^-)$ est un sous-ensemble relativement compact de $W^{-1,p'_i(x)}(\Omega)$, d'où la compacité de Φ_i . Par conséquent, la compacité de Φ_i , et la bornitude de L_i^{-1} , due à [KWZ10b, Théorème 3.2], impliquent la compacité de $\mathcal{T}^-$. $\square$

2.5.3 Preuve du Théorème 2.2.1

En vertu des Propositions 2.5.1 et 2.5.2 (resp. Propositions 2.5.3 et 2.5.4), nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder pour l'application $\mathcal{T}^+ : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$ (resp. $\mathcal{T}^- : \mathcal{K}^- \rightarrow \mathcal{K}^-$), avec l'ensemble $\mathcal{K}^+$ (resp. $\mathcal{K}^-$). Celui-ci assure l'existence de $(u_1, u_2) \in \mathcal{K}^+$ (resp. $(u_1, u_2) \in \mathcal{K}^-$), satisfaisant $(u_1, u_2) = \mathcal{T}^+(u_1, u_2)$ (resp. $(u_1, u_2) = \mathcal{T}^-(u_1, u_2)$). En prenant en compte la définition de $\mathcal{T}^+$ (resp. $\mathcal{T}^-$), il s'ensuit que $(u_1, u_2) \in C_0^{1,\tau}(\bar{\Omega}) \times C_0^{1,\tau}(\bar{\Omega})$, pour un certain $\tau \in (0, 1)$ (resp. $(u_1, u_2) \in (W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,p_2(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$), est une solution positive du système (S). De plus, puisque la solution (u_1, u_2) appartient à l'ensemble $\mathcal{K}^+$ (resp. $\mathcal{K}^-$), le Lemme 2.4.2 implique que (2.7) est vérifié. Ceci achève la démonstration et clôture le chapitre.

CHAPITRE 3

NON-EXISTENCE AVEC SINGULARITÉS

Contents

3.1 Cas non convectif	86
3.1.1 Cas vectoriel	86
3.1.2 Cas scalaire	88
3.2 Cas convectif	90
3.2.1 Cas vectoriel	90
3.2.2 Cas scalaire	92

Dans la suite, nous supposons que le paramètres de diffusion p dans le cas scalaire (ou p_i , $i = 1, 2$, dans le cas vectoriel) satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Cas scalaire perturbé : } & p \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ et } 1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N. \\ \text{Cas vectoriel : } & p_i \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ et } 1 < p_i^- \leq p_i(x) \leq p_i^+ < N (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cette hypothèse de régularité jusqu'au bord sur les paramètres de diffusion p_i ($i = 1, 2$) sera requise lors de l'application du Théorème C.0.2 (voir Annexe A) afin de prouver l'isolation de la première valeur propre du $p(x)$ -Laplacien et ainsi prouver les résultats de non-existence donnés par les Théorèmes 3.1.2 et 3.2.2. Dans ce chapitre, nous donnons quelques résultats de non-existence pour des EDPs du type (S) , à une ou deux équations, avec des approches différentes, basées sur les propriétés spectrales de la première valeur propre du $p(x)$ -Laplacien. Cette valeur propre correspond à la plus petite valeur de $\lambda > 0$ pour laquelle le problème de Dirichlet elliptique suivant admet une solution

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{p(x)-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

ù $\lambda > 0$ est une constante.

Par solution de (3.2), il faut comprendre une solution faible au sens de la définition suivante.

Définition 3.0.1 (voir [FZZ05] Définition 1.1). *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. (u, λ) est appelé une solution faible du problème (3.2) si*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Considérons Λ , l'ensemble de toutes les valeurs non négatives λ , pour lesquelles (3.2) admet une solution. Dans [FZZ05, Théorème 2.2], les auteurs ont prouvé que Λ est non vide, et que le supremum de Λ est $+\infty$. De plus, d'après [FZZ05, Théorème 3.1], on sait que l'infimum de Λ est zéro, pourvu qu'il existe un sous-ensemble ouvert $U \subset \Omega$, et un élément $x_0 \in U$, tel que $p(x_0) < p(x)$ ou $p(x_0) > p(x)$, pour tout $x \in \partial U$, i.e. le paramètre p ne doit pas atteindre ses valeurs extrêmes sur l'ensemble ∂U . Par ailleurs, l'auteur démontre le théorème suivant

Théorème 3.0.1 (voir [FZZ05] Théorème 3.4). *Soit $N > 1$ la dimension de Ω . Supposons qu'il existe $x_0 \notin \overline{\Omega}$, tel que, pour tout $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, avec $\|w\| = 1$, la fonction $f(t) = p(x_0 + tw)$ est monotone pour $t \in I_{x_0, w} := \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tw \in \Omega\}$. Alors*

$$\lambda_\star = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ est une valeur propre de (3.2)} \} > 0.$$

3.1 Cas non convectif

3.1.1 Cas vectoriel

Considérons le système de Dirichlet elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = \lambda u_1^{\alpha_1(x)} u_2^{\beta_1(x)} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = \lambda u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)} & \text{dans } \Omega \\ u_1, u_2 > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\alpha_i, \beta_i \in C(\overline{\Omega})$ sont des fonctions bornées sur Ω , et λ est une constante strictement positive. Dans [DKM20, Théorème 1], les auteurs établissent que, lorsque $p_i(x) \equiv p_i$, $\alpha_i(x) \equiv \alpha_i$ et $\beta_i(x) \equiv \beta_i$, alors il existe une constante $\lambda_\star > 0$ telle que (3.3) n'admette aucune solution non-triviale sous les conditions $\beta_1 = \frac{p_2}{p_1}(p_1 - 1 - \alpha_1)$ ou $\alpha_2 = \frac{p_1}{p_2}(p_2 - 1 - \beta_2)$, et $\lambda \in (0, \lambda_\star)$. Les auteurs ont exploité la première valeur propre du p_i -Laplacien, notée λ_{1,p_i} ($i = 1, 2$), pour établir l'existence de la borne $\lambda_\star$, définie par $\lambda_\star \equiv \lambda_\star(\lambda_{1,p_1}, \lambda_{1,p_2})$.

L'extension naturelle de ce résultat est donnée par le théorème suivant, basé sur les propriétés spectrales de la première valeur propre du $p_i(x)$ -Laplacien, notée $\lambda_{1,p_i(x)}$ ($i = 1, 2$), où p_i ($i = 1, 2$) est une fonction, satisfaisant la condition de [FZZ05].

Théorème 3.1.1. *Supposons l'existence de $x_i \notin \overline{\Omega}$, tel que, pour tout $(t, w) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^N$, la fonction $p_i(x_i + tw)$ est monotone ($i = 1, 2$), où $p_i \in C^1(\Omega)$ est une fonction satisfaisant (3.1). Supposons aussi que*

$$\beta_1(x) = \frac{p_2(x)}{p_1(x)}(p_1(x) - 1 - \alpha_1(x)) \quad \text{et} \quad \alpha_2(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}(p_2(x) - 1 - \beta_2(x)), \quad (3.4)$$

avec $-1 < \alpha_1^- + \alpha_2^-$ et $-1 < \beta_1^- + \beta_2^-$, ainsi que $\alpha_1(x) < p_1(x) - 1$ et $\beta_2(x) < p_2(x) - 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Alors, le système (3.3) n'admet aucune solution, pour tout $\lambda > 0$ satisfaisant la condition suivante

$$\lambda < \lambda_\star = \min \left\{ \frac{p_1(x)}{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + 1} \lambda_{1,p_1(x)}, \frac{p_2(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x) + 1} \lambda_{1,p_2(x)} \right\}. \quad (3.5)$$

Démonstration. En multipliant (3.3) par u_i , en intégrant sur Ω , et en appliquant l'inégalité de Young au membre de droite, on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx = \lambda \int_{\Omega} u_1^{\alpha_1(x)+1} u_2^{\beta_1(x)} dx \leq \lambda \int_{\Omega} \frac{\alpha_1(x)+1}{p_1(x)} u_1^{p_1(x)} + \frac{p_1(x)-1-\alpha_1(x)}{p_1(x)} u_2^{\frac{\beta_1(x)p_1(x)}{p_1(x)-1-\alpha_1(x)}} dx, \quad (3.6)$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx = \lambda \int_{\Omega} u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)+1} dx \leq \lambda \int_{\Omega} \frac{p_2(x)-1-\beta_2(x)}{p_2(x)} u_1^{\frac{\alpha_2(x)p_2(x)}{p_2(x)-1-\beta_2(x)}} + \frac{\beta_2(x)+1}{p_2(x)} u_2^{p_2(x)} dx. \quad (3.7)$$

En combinant (3.6) avec (3.7), et en utilisant (3.4), il s'ensuit que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \leq \lambda \left[\left(\frac{\alpha_1(x)+1}{p_1(x)} + \frac{p_2(x)-1-\beta_2(x)}{p_2(x)} \right) \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx \right. \quad (3.8)$$

$$\left. + \left(\frac{p_1(x)-1-\alpha_1(x)}{p_1(x)} + \frac{\beta_2(x)+1}{p_2(x)} \right) \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx \right]. \quad (3.9)$$

Puisque $\lambda_{1,p_i(x)}$ est tel que

$$\lambda_{1,p_i(x)} = \inf_{v_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_i|^{p_i(x)} dx}{\int_{\Omega} |v_i|^{p_i(x)} dx},$$

alors, pour le choix particulier $v_i = u_i$ ($i = 1, 2$), on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx \geq \lambda_{1,p_1(x)} \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx, \quad (3.10)$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \geq \lambda_{1,p_2(x)} \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx. \quad (3.11)$$

Par conséquent, en combinant (3.10) et (3.11), on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \geq \lambda_{1,p_1(x)} \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx + \lambda_{1,p_2(x)} \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx. \quad (3.12)$$

Remarquons que l'hypothèse (3.4) conduit aux identités suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(x)+1}{p_1(x)} + \frac{p_2(x)-1-\beta_2(x)}{p_2(x)} &= \frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+1}{p_1(x)} \\ \text{et } \frac{p_1(x)-1-\alpha_1(x)}{p_1(x)} + \frac{\beta_2(x)+1}{p_2(x)} &= \frac{\beta_1(x)+\beta_2(x)+2}{p_2(x)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La soustraction (3.12)-(3.8) conduit à la caractérisation suivante

$$\left[\lambda_{1,p_1(x)} - \frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+1}{p_1(x)} \lambda \right] \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx + \left[\lambda_{1,p_2(x)} - \frac{\beta_1(x)+\beta_2(x)+1}{p_2(x)} \right] \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx \leq 0,$$

ce qui entraîne une contradiction, si on se place sous la condition (3.5). Ceci achève la démonstration. $\square$

3.1.2 Cas scalaire

Considérons le problème de Dirichlet elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \frac{\lambda}{u^{\alpha(x)}} + \mu u^{r(x)} & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

où $\alpha, r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions bornées, continues et positives, et $\lambda > 0$ est une constante. Dans [Zha07, Théorème 3.3], l'auteur prouve que, lorsque $\mu = 0$, alors (3.14) possède une unique solution u_λ , croissante par rapport à λ , pourvu que $\lambda > 0$ est suffisamment grand. Aussi, nous énonçons le résultat de comparaison suivant, qui est la généralisation directe de [GST07, Lemme 3.1] dans le cas variable.

Lemme 3.1.1. *Soit u_λ la solution de (3.14) sous la condition*

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha(x) < 1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.15)$$

Soit ϕ_1 le vecteur propre associé à la première valeur propre λ_1 de (3.2). Alors il existe une constante $\epsilon_\lambda > 0$ telle que

$$u_\lambda \geq \epsilon_\lambda \phi_1 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Démonstration. Soit $E : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle énergie associée au problème (3.14), définie par

$$E(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{1 - \alpha(x)} (u_+)^{1 - \alpha(x)} dx, \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tel que $E'(u) \in \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^*$, où $E'(u)$ est la dérivée de Gâteaux de E en u , alors on a

$$E'(u) := -\Delta_{p(x)}u - \lambda u^{-\alpha(x)}.$$

Aussi, pour tout $\epsilon > 0$, $E'(\epsilon\phi_1) \in \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^*$ et on a, en supposant que $0 < \epsilon \leq \epsilon_\lambda$ pour une constante ϵ_λ suffisamment petite, l'inégalité suivante

$$E'(\epsilon\phi_1) = -\Delta_{p(x)}(\epsilon\phi_1) - \lambda(\epsilon\phi_1)^{-\alpha(x)} \quad (3.16)$$

$$= \lambda(\epsilon\phi_1)^{p(x)-1} - \lambda(\epsilon\phi_1)^{-\alpha(x)} \quad (3.17)$$

$$= (\epsilon\phi_1)^{-\alpha(x)} \left[\lambda_1(\epsilon\phi_1)^{p(x)-1+\alpha(x)} - \lambda \right] \quad (3.18)$$

$$\leq -\frac{\lambda}{2}(\epsilon\phi_1)^{-\alpha(x)} < 0. \quad (3.19)$$

Maintenant, raisonnons par l'absurde, et supposons que la fonction $v = (\epsilon_\lambda\phi_1 - u_\lambda)_+$ n'est pas identiquement nulle dans Ω . On pose

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid v(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \xi(t) := E(u + tv), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

En vertu du fait que la restriction de ξ sur le cône positif $\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^+ = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid u \geq 0\}$ est convexe, alors on a $\xi(t) \geq \xi(0) = E(u_\lambda)$ pour tout $t > 0$. Aussi, puisque $t\epsilon_\lambda\phi_1 \leq \max\{u_\lambda, tv\} \leq$

$u_\lambda + tv$ pour tout $t > 0$, alors la dérivée de Gâteaux $E'(u_\lambda + tv)$ de E en $u_\lambda + tv$ existe et on a $\xi'(t) = \langle E'(u_\lambda + tv), v \rangle$. Comme ξ' est non-négative et non-décroissante, on peut écrire d'après (3.16) que

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi'(1) - \xi'(t) &= \langle E'(u_\lambda + v) - E'(u_\lambda + tv), v \rangle \\ &= \int_{\Omega^+} E'(\epsilon_\lambda \phi_1) v dx - \xi'(t) \\ &\leq -\frac{\lambda}{2} (\epsilon_\lambda \phi_1)^{-\alpha(x)} < 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne une contradiction. On peut donc conclure que $v \equiv 0$ p.p. dans Ω , i.e. $u_\lambda \geq \epsilon_\lambda \phi_1$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Dans [GST07, Lemme 3.3], les auteurs ont établi que, si $p(x) \equiv p$, $\alpha(x) \equiv \alpha \in (0, 1)$, $r(x) \equiv r$ et $\mu \neq 0$, alors il existe une constante $0 < L$ telle que le problème (3.14) n'admette aucune solution non-triviale lorsque $\lambda > L$. L'isolation de la première valeur propre du p -Laplacien a été un des arguments principaux.

Dans ce qui suit, on note A l'application définie par

$$\langle Au, \phi \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi + \lambda u^{-\alpha(x)} \phi) dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

pour tout $u \in S$, avec

$$S := \left\{ v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid Au \in \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega) \right)^* \right\}. \quad (3.20)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui établit un principe de comparaison entre les sur-et-sous solutions du problème (3.14).

Lemme 3.1.2 (voir [Zha05] Lemme 2.3). *Soient $u, v \in S$, défini dans (3.20), tels que*

$$Au - Av \geq 0 \quad \text{dans } \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega) \right)^*.$$

Soit la fonction $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \min \{ u(x) - v(x), 0 \}.$$

Si $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (i.e. $u \geq v$ sur $\partial\Omega$), alors $u \geq v$ p.p. dans Ω .

Dans le théorème qui suit, nous démontrons un résultat de non-existence qui généralise partiellement [GST07, Lemme 3.3].

Théorème 3.1.2. *Supposons que*

$$\mu \neq 0, \quad 0 < \alpha^- \leq \alpha^+ < 1 \quad \text{et} \quad 0 < p^- - 1 \leq p^+ - 1 < r^-, \quad (3.21)$$

où p est une fonction satisfaisant les conditions du Théorème 3.1.1. Alors, il existe une constante $\tilde{L} > 0$ telle que le problème (3.14) n'admette aucune solution, pour tout

$$\lambda > \tilde{L}. \quad (3.22)$$

Démonstration. Nous rappelons que λ_1 est la première valeur propre du problème (3.2). Raisonnons par l'absurde. Posons

$$\Lambda = \{\lambda > 0, \text{ tel que le problème (3.14) admette une solution positive } \}.$$

Supposons qu'il existe une suite $\lambda_n \in \Lambda$ ($n \in \mathbb{N}$), telle $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Alors, il existe une constante $\mathcal{L} > 0$ telle que

$$\frac{\lambda}{t^{\alpha(x)}} + \mu t^{r(x)} \geq (\lambda_1 + \varepsilon) t^{p(x)-1} \quad \text{pour tout } x \in \Omega, t > 0, \varepsilon \in (0, 1) \text{ et } \lambda > \mathcal{L}. \quad (3.23)$$

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, considérons le problème de Dirichlet elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = (\lambda_1 + \varepsilon) u^{p(x)-1} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

D'après (3.23), toute solution (u_n, λ_n) de (3.14), avec $\lambda_n > \mathcal{L}$, est une sur-solution du problème (3.24). Aussi, on peut trouver $\mu < \lambda_1 + \varepsilon$ telle que $\mu \cdot \phi_1$ est une sous-solution de (3.24), où ϕ_1 fait référence à une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 du problème (3.2).

Maintenant, on vérifie que toute solution a priori du problème (3.14) dans le cas $\mu \neq 0$ est aussi une sur-solution du problème (3.14) dans le cas $\mu = 0$. Par conséquent, d'après le Lemme 3.1.1 et le Lemme 3.1.2, il existe une constante $\epsilon_\lambda > 0$ telle que

$$u_n \geq u_\lambda \geq \epsilon_\lambda \mu \cdot \phi_1,$$

où u_{λ_n} désigne la solution du problème (3.14) dans le cas $\mu = 0$ en choisissant $0 < \lambda < \lambda_n$.

En effectuant un processus d'itération monotone (voir [LLV85],[Pao92],[Zei86]), on obtient une solution pour (3.24), pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, ce qui contredit le fait que λ_1 est une valeur isolée du spectre de l'opérateur $-\Delta_{p(x)}$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (voir Théorème A.0.1). Ceci achève la démonstration. $\square$

3.2 Cas convectif

3.2.1 Cas vectoriel

Considérons le problème de Dirichlet elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1(x)} u_1 = \lambda \left(u_1^{\alpha_1(x)} u_2^{\beta_1(x)} + |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} + |\nabla u_2|^{\overline{\gamma}_1(x)} \right) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2(x)} u_2 = \lambda \left(u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)} + |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} + |\nabla u_1|^{\overline{\gamma}_2(x)} \right) & \text{dans } \Omega \\ u_1, u_2 > 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \overline{\gamma}_i \in C(\overline{\Omega})$ sont des fonctions bornées sur Ω , et λ est une constante strictement positive.

Dans le chapitre 2, il a été prouvé que, lorsque $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$ (resp. $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$), le système (3.25) admet une solution positive, pourvu que $\gamma_i(x) < p_1(x) - 1$ et $\overline{\gamma}_i(x) < p_2(x) - 1$ (resp. $\gamma_i(x) < \frac{p_1(x)}{N_{p_i}'}$ et $\overline{\gamma}_i(x) < \frac{p_2(x)}{N_{p_i}'}$), pour tout $x \in \Omega$ (voir Théorème 2.2.1).

Dans ce qui suit, nous établissons le résultat de non-existence suivant

Théorème 3.2.1. *Supposons que p_i ($i = 1, 2$) satisfait les conditions du Théorème 3.1.1, avec $-1 < \alpha_1^- + \alpha_2^-$ et $-1 < \beta_1^- + \beta_2^-$, ainsi que $\alpha_1(x) < p_1(x) - 1$ et $\beta_2(x) < p_2(x) - 1$, pour tout $x \in \Omega$. Supposons aussi que pour tout $x \in \Omega$,*

$$\beta_1(x) = \frac{p_2(x)}{p_1(x)}(p_1(x) - 1 - \alpha_1(x)) \quad \text{et} \quad \alpha_2(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}(p_2(x) - 1 - \beta_2(x)) \quad (3.26)$$

$$\gamma_1(x) = \bar{\gamma}_1(x) = p_1(x) - 1 \quad \text{et} \quad \gamma_2(x) = \bar{\gamma}_2(x) = p_2(x) - 1. \quad (3.27)$$

Alors, le système (3.25) n'admet aucune solution, pour tout $\lambda > 0$ satisfaisant la condition suivante

$$\lambda < \lambda_\star = \min \left\{ (1 - \tau) \frac{p_1(x)}{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + 1} \lambda_{1,p_1(x)}, (1 - \tau) \frac{p_2(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x) + 1} \lambda_{1,p_2(x)}, \tau \frac{p_1(x)p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x)} \right\}. \quad (3.28)$$

Démonstration. Multiplions (3.25) par u_i , et intégrons sur Ω . En appliquant l'inégalité de Young au membre de droite, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx &= \lambda \int_{\Omega} \left(u_1^{\alpha_1(x)+1} u_2^{\beta_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} u_1 + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{\bar{\gamma}_1(x)} u_1 \right) dx \\ &\leq \lambda \left(\int_{\Omega} \frac{\alpha_1(x) + 1}{p_1(x)} u_1^{p_1(x)} + \frac{p_1(x) - 1 - \alpha_1(x)}{p_1(x)} u_2^{\frac{\beta_1(x)p_1(x)}{p_1(x)-1-\alpha_1(x)}} dx \right. \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)\gamma_1(x)} |\nabla u_1|^{\frac{p_1(x)\gamma_1(x)}{p_1(x)-1}} + \frac{1}{p_1(x)} u_1^{p_1(x)} dx \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)\bar{\gamma}_1(x)} |\nabla u_2|^{\frac{p_1(x)\bar{\gamma}_1(x)}{p_1(x)-1}} + \frac{1}{p_1(x)} u_1^{p_1(x)} dx \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx &= \lambda \int_{\Omega} \left(u_1^{\alpha_2(x)} u_2^{\beta_2(x)+1} + \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} u_2 + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{\bar{\gamma}_1(x)} u_2 \right) dx \\ &\leq \lambda \left(\int_{\Omega} \frac{p_2(x) - 1 - \beta_2(x)}{p_2(x)} u_1^{\frac{\alpha_2(x)p_2(x)}{p_2(x)-1-\beta_2(x)}} + \frac{\beta_2(x) + 1}{p_2(x)} u_2^{p_2(x)} dx \right. \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{p_2(x) - 1}{p_2(x)\gamma_2(x)} |\nabla u_1|^{\frac{p_2(x)\gamma_2(x)}{p_2(x)-1}} + \frac{1}{p_2(x)} u_2^{p_2(x)} dx \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{p_2(x) - 1}{p_2(x)\bar{\gamma}_2(x)} |\nabla u_2|^{\frac{p_2(x)\bar{\gamma}_2(x)}{p_2(x)-1}} + \frac{1}{p_2(x)} u_2^{p_2(x)} dx \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En combinant (3.29) avec (3.30) et (3.26), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(1 - \lambda \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)\gamma_1(x)} - \lambda \frac{p_2(x) - 1}{p_2(x)\gamma_2(x)} \right) |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} \left(1 - \lambda \frac{p_1(x) - 1}{p_1(x)\bar{\gamma}_1(x)} - \lambda \frac{p_2(x) - 1}{p_2(x)\bar{\gamma}_2(x)} \right) |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \\ &\leq \lambda \left[\left(\frac{\alpha_1(x) + 1}{p_1(x)} + \frac{p_2(x) - 1 - \beta_2(x)}{p_2(x)} \right) \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx + \left(\frac{p_1(x) - 1 - \alpha_1(x)}{p_1(x)} + \frac{\beta_2(x) + 1}{p_2(x)} \right) \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sous l'hypothèse (3.27), si nous supposons que

$$\lambda < \tau \frac{p_1(x)p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x)}, \quad 0 < \tau < 1,$$

alors (3.31) devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \leq (1-\tau)^{-1} \lambda \left[\left(\frac{\alpha_1(x)+1}{p_1(x)} + \frac{p_2(x)-1-\beta_2(x)}{p_2(x)} \right) \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx \right. \\ \left. + \left(\frac{p_1(x)-1-\alpha_1(x)}{p_1(x)} + \frac{\beta_2(x)+1}{p_2(x)} \right) \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Puisque $\lambda_{1,p_i(x)}$ est tel que

$$\lambda_{1,p_i(x)} = \inf_{v_i \in W_0^{1,p_i(x)}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_i|^{p_i(x)} dx}{\int_{\Omega} |v_i|^{p_i(x)} dx},$$

alors, pour le choix particulier $v_i = u_i$ ($i = 1, 2$), nous avons

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx \geq \lambda_{1,p_1(x)} \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx, \quad (3.33)$$

et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \geq \lambda_{1,p_2(x)} \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx. \quad (3.34)$$

Par conséquent, en combinant (3.33) et (3.34), nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2|^{p_2(x)} dx \geq \lambda_{1,p_1(x)} \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx + \lambda_{1,p_2(x)} \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx. \quad (3.35)$$

Remarquons que, sous l'hypothèse (3.26), les égalités (3.13) sont valides. En faisant la soustraction des relations (3.35) et (3.32) entre elles, et en utilisant l'identité (3.26), nous obtenons la caractérisation suivante

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_{1,p_1(x)} - \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + 1}{p_1(x)} (1-\tau)^{-1} \lambda \right] \int_{\Omega} u_1^{p_1(x)} dx \\ & + \left[\lambda_{1,p_2(x)} - \frac{\beta_1(x) + \beta_2(x) + 1}{p_2(x)} (1-\tau)^{-1} \lambda \right] \int_{\Omega} u_2^{p_2(x)} dx \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse (3.28). Ceci achève la démonstration. $\square$

3.2.2 Cas scalaire

Considérons le problème de Dirichlet elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \frac{\lambda}{u^{\alpha(x)}} + \mu u^{r(x)} + \nu(x) |\nabla u|^{\gamma(x)} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.36)$$

où $r, \nu, \alpha, \gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions positives, continues et bornées dans Ω , et μ, λ sont des constantes positives.

On énonce le résultat de non-existence suivant pour le problème (3.36).

Théorème 3.2.2. *Supposons que*

$$\mu \neq 0, \nu \not\equiv 0, \quad 0 < \alpha^- \leq \alpha^+ < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \gamma < p^- - 1 \leq p^+ - 1 < r^-, \quad (3.37)$$

avec p satisfaisant les conditions du Théorème 3.1.1. Il existe une constante $\hat{L} > 0$ telle que le problème (3.36) n'admette aucune solution, pour tout

$$\lambda > \hat{L}.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Posons

$$\tilde{\Lambda} = \{ \lambda > 0, \text{ tel que le problème (3.36) admette une solution positive } \}.$$

Supposons qu'il existe une suite $\lambda_n \in \tilde{\Lambda}$ ($n \in \mathbb{N}$), telle $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Alors, d'après (3.23), on a

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{t^{\alpha(x)}} + \mu t^{r(x)} + \nu(x) |\xi|^{\gamma(x)} &\geq \frac{\lambda}{t^{\alpha(x)}} + \mu t^{r(x)} \geq (\lambda_1 + \varepsilon) t^{p(x)-1} \\ \text{pour tout } (x, \xi) &\in \Omega \times \mathbb{R}_+, t > 0, \varepsilon \in (0, 1) \text{ et } \lambda > \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

D'après (3.38), toute solution $(u_{1,n}, \lambda_n)$ de (3.36), avec $\lambda_n > \mathcal{L}$, est une sur-solution du problème (3.24). Aussi, on peut trouver $\mu < \lambda_1 + \varepsilon$ telle que $\mu \cdot \phi_1$ est une sous-solution de (3.24), où ϕ_1 fait référence à une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 du problème (3.2).

Maintenant, on vérifie que toute solution a priori du problème (3.36) dans le cas $\mu \neq 0$ et $\nu \not\equiv 0$ est aussi une sur-solution du problème (3.36) dans le cas $\mu = 0$ et $\nu \equiv 0$. Par conséquent, d'après le Lemme 3.1.1 et le Lemme 3.1.2, il existe une constante $\epsilon_\lambda > 0$ telle que

$$u_n \geq u_\lambda \geq \epsilon_\lambda \mu \cdot \phi_1,$$

où u_{λ_n} désigne la solution du problème (3.36) dans le cas $\mu = 0$ et $\nu \equiv 0$ en choisissant $0 < \lambda < \lambda_n$.

En effectuant un processus d'itération monotone, on obtient une solution pour (3.24), pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, ce qui contredit le fait que λ_1 est une valeur isolée du spectre de l'opérateur $-\Delta_{p(x)}$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (voir Théorème A.0.1). Ceci achève la démonstration. $\square$

CHAPITRE 4

PERSPECTIVES

Contents

4.1	Estimation globale du gradient pour un problème singulier convectif	94
4.1.1	Introduction	94
4.1.2	Premier résultat obtenu	96
4.1.3	Estimation inférieure de la solution a priori	97
4.1.4	Une condition de Ladyzhenskaya	99
4.1.5	Une itération de Moser	105
4.1.6	Preuve du Théorème 4.1.1	111
4.1.7	Perspective	111
4.2	Sur- et sous-solutions pour un système convectif sans singularités	112
4.2.1	Introduction	112
4.2.2	Hypothèses et données empiriques	113
4.2.3	Construction des sous-solutions pour le système (4.54)	114
4.2.4	Construction des sur-solutions pour le système (4.54)	115
4.2.5	Perspective	116

4.1 Estimation globale du gradient pour un problème singulier convectif

4.1.1 Introduction

Dans la suite, nous nous placerons sous la condition suivante :

$$p \in C^1(\Omega) \text{ et } 1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N. \quad (4.1)$$

La perspective de ce chapitre serait d'établir une estimation du gradient de la solution des EDPs de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

dans tout le domaine Ω , sous la condition suivante

$$\begin{cases} ms^{-\alpha(x)} \leq f(x, s, \xi) \leq M \left(s^{-\alpha(x)} + |\xi|^{\gamma(x)} \right) \\ m, M, \alpha^- > 0, \alpha, \gamma \in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega) \ s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N, p \text{ satisfaisant (4.1)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

A cause de la présence de singularité dans le terme source de (4.2), par solution il faut comprendre une solution faible au sens de la définition suivante.

Définition 4.1.1 (voir [Zha07]). Si $u \in W_{loc}^{1,p(x)}(\Omega) \cap C_0^+(\Omega)$, u est appelé une solution faible du problème (4.2) si

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p(x)}(K),$$

où K désigne un sous-ensemble compact quelconque de Ω .

Pour le cas vectoriel, i.e. le système (S) , sous la condition

$$\begin{cases} m_i s_1^{\alpha_i(x)} s_2^{\beta_i(x)} \leq f_i(x, s_1, s_2, \xi_1, \xi_2) \leq M_i \left(s_1^{\alpha_i(x)} s_2^{\beta_i(x)} + |\xi_1|^{\gamma_i(x)} + |\xi_2|^{\bar{\gamma}_i(x)} \right) \\ m_i, M_i > 0, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \bar{\gamma}_i \in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega) \ s_i \in \mathbb{R}, \xi_i \in \mathbb{R}^N, p_i \in C^1(\Omega) \ (i = 1, 2), \end{cases}$$

nous avons mis en évidence dans le chapitre 2 que :

- D'un côté, dans le cas $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm \geq 0$ ($i = 1, 2$), on dispose du Lemme 2.3.1 qui garantit l'estimation suivante

$$\|\nabla u_i\|_\infty \leq k_{p_i} \|f_i\|_\infty \quad \text{dans tout } \Omega, \quad (4.4)$$

ce qui a permis de construire en particulier un couple de sur-et-sous-solutions pour (S) .

- D'un autre côté, lorsque $\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm < 0$ ($i = 1, 2$), nous n'avons pas pu raisonner comme cela l'a été pour le cas précédent, dans la mesure où nous ne disposons pas d'estimations uniformes adéquates des termes sources f_i ($i = 1, 2$).

Il convient donc d'étendre (4.4) pour le cas scalaire (4.2), sous la condition (4.3). Cependant, ne pouvant pas encore établir une telle estimation sur le bord de Ω , nous sommes déjà en mesure de le faire à l'intérieur du domaine Ω . C'est en ce sens que nous proposons les résultats de cette section.

Dans la littérature, d'un côté, un tel résultat peut être trouvé dans les travaux de Giacomoni, Schlinder, Takac [GST07], Cianchi et Maz'ya [CM15b] ou Alves et Moussaoui [AM18], mais uniquement pour les problèmes singuliers non convectifs. D'un autre côté, dans le Théorème C.0.3, Fan établit que les solutions a priori pour des problèmes convectifs mais sans singularités sont de classe $C^{1,\alpha}$. Dans cette section, il sera question de généraliser ces résultats pour des problèmes singuliers avec des termes de convection. Dans cette perspective, nous nous inspirerons du travail pionnier de Ladyzhenskaya et Ural'tseva [LU68]. L'enjeu pour nous sera de surmonter les difficultés liées à la présence d'un terme singulier et non-homogène en le gradient de la solution.

4.1.2 Premier résultat obtenu

Le premier résultat obtenu dans ce chapitre est le théorème suivant, qui établit une estimation de la solution de tout problème de la forme

$$(\mathcal{P}) \quad -\operatorname{div} A(x, \nabla u) = B(x, u, \nabla u), \quad (4.5)$$

où $A : \Omega \times \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est un opérateur continu et dérivable, et $B : \Omega \times L^{p(x)}(\Omega) \times \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de type Carathéodory, sous les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} [A_1] \quad & \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial A_k}{\partial \eta_j}(x, \eta) \xi_j \xi_k \geq \gamma_1 \left[\varepsilon + |\eta|^2 \right]^{(p(x)-2)/2} |\xi|^2; \\ [A_2] \quad & \sum_{j,k=1}^N \left| \frac{\partial A_k}{\partial \eta_j}(x, \eta) \right| \leq \gamma_2 \left[\varepsilon + |\eta|^2 \right]^{(p(x)-2)/2}; \\ [A_3] \quad & \sum_{j,k=1}^N \left| \frac{\partial A_k}{\partial x_j}(x, \eta) \right| \leq \gamma_3 \left(\left[\varepsilon + |\eta|^2 \right]^{p(x)/2} + \left[\varepsilon + |\eta|^2 \right]^{(p(x)-2)/2} \right); \\ [A_4] \quad & |B(x, u, \eta)| \leq \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha(x)} + \left[\varepsilon + |\eta|^2 \right]^{\mu(x)/2} \right) \\ [A_5] \quad & \sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial B}{\partial \eta_j}(x, u, \eta) \right| \leq \gamma_5 \left[\varepsilon + |\nabla u|^2 \right]^{\frac{\mu(x)-1}{2}} \\ [A_6] \quad & \left| \frac{\partial B}{\partial u}(x, u, \eta) \right| \leq \gamma_6 \nu(x)^{-\alpha(x)} \\ [A_7] \quad & \sum_i \left| \frac{\partial B}{\partial x_i}(x, u, \eta) \right| \leq \gamma_7 \left(\left[\varepsilon + |\nabla u|^2 \right]^{\frac{\mu(x)+2}{2}} + \left[\varepsilon + |\nabla u|^2 \right]^{\frac{\mu(x)-2}{2}} \right), \end{aligned}$$

pour tous vecteurs $\eta, \xi \in \mathbb{R}^N$, tout paramètre $\varepsilon \in (0, 1)$, et toutes fonctions $\nu, \alpha, \mu \in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, avec $k, j = 1, 2, \dots, N$ et $p \in C^1(\Omega)$. Il s'énonce comme suit.

Théorème 4.1.1. *Supposons que A et B ont les propriétés $[A_1]$ à $[A_7]$. Supposons aussi qu'il existe une constante $M > 0$, indépendante de u , telle que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx < M, \quad (4.6)$$

sous la condition suivante :

$$\max \left\{ 1, \frac{p(x)-2}{2} \right\} \leq \mu(x) \leq p(x) - 1. \quad (4.7)$$

Alors, pour toute solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de (4.5), on a

$$|\nabla u| \in L_{loc}^\infty(\Omega). \quad (4.8)$$

De plus, la quantité $\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathcal{K})}$ est estimée uniquement en termes de $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, pour tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset \Omega$.

Afin de démontrer ce théorème, nous aurons besoin de plusieurs résultats préliminaires, à commencer par une estimation inférieure de la solution de (4.2), sous la condition (4.3).

4.1.3 Estimation inférieure de la solution a priori

Parmi les auteurs ayant étudié des EDPs faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien, avec un terme source présentant des singularités par rapport à la solution, on peut citer Zhang [Zha07]. Sous l'hypothèse que $\partial\Omega$ est de classe C^2 , et en posant $\gamma_- = \min_{\Omega_\sigma} \gamma(x)$ et $\gamma^+ = \max_{\Omega_\sigma} \gamma(x)$ ($\sigma > 0$ suffisamment petit), Zhang [Zha07] a prouvé que toute solution u du problème singulier suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \frac{\lambda}{u^{\gamma(x)}} & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\gamma \in C(\overline{\Omega})$ est une fonction positive, et bornée et $\lambda > 0$ est une constante, a les propriétés suivantes :

- $C_2 d(x) \leq u$ lorsque $x \rightarrow \partial\Omega$ (voir [Zha07, Théorème 4.1]) ;
- Si $1 \leq \gamma_- < \gamma^+$, alors $C_3 d(x)^{\theta_1} \leq u(x) \leq C_4 d(x)^{\theta_2}$ lorsque $x \rightarrow \partial\Omega$, où $\theta_1 = \max_{d(x) \leq \sigma} (p(x)/(p(x) - 1 + \gamma(x)))$ et $\theta_2 = \min_{d(x) \leq \sigma} (p(x)/(p(x) - 1 + \gamma(x)))$ (voir [Zha07, Théorème 4.2]) ;
- Si $\gamma_- < \gamma^+ \leq 1$, alors $C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_5 d(x)^\theta$ lorsque $x \rightarrow \partial\Omega$, pour toute constante positive $\theta \in (0, 1)$ (voir [Zha07, Théorème 4.4]) ;
- Si $\gamma_- < 1 < \gamma^+$, alors $C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_6 d(x)^\theta$ lorsque $x \rightarrow \partial\Omega$, où $\theta = \min_{d(x) \leq \sigma} (p(x)/(p(x) - 1 + \gamma(x)))$ (voir [Zha07, Théorème 4.5]).

La preuve de ces estimations est basée sur le principe de comparaison [Zha05, Lemme 2.3].

Le principe de comparaison faible classique affirme que, si $-\Delta_{p(x)} u \geq -\Delta_{p(x)} v$ (resp. $-\Delta_{p(x)} u \leq -\Delta_{p(x)} v$) dans Ω , avec la condition que $u = v$ sur le bord de Ω , alors $u \geq v$ (resp. $u \leq v$) dans Ω . La démonstration est basée sur un raisonnement par l'absurde, faisant intervenir la fonction test $(v - u)^+$ (resp. $(u - v)^+$), la monotonie de l'opérateur $p(x)$ -Laplacien, et une certaine propriété algébrique du $p(x)$ -Laplacien (apparue dans les travaux de Fukagai et al. [FIN97] et Tolksdorf [Tol84]).

La nouveauté du principe de comparaison de Zhang est de combiner la monotonie du $p(x)$ -Laplacien avec la décroissance des termes singulier figurant dans le terme source. L'auteur démontre que, si $-\Delta_{p(x)} u - f(u) \geq -\Delta_{p(x)} v - f(v)$ (resp. $-\Delta_{p(x)} u - f(u) \leq -\Delta_{p(x)} v - f(v)$) dans Ω , avec la condition que $u = v$ sur le bord de Ω , alors $u \geq v$ (resp. $u \leq v$) dans Ω . Ici f représente toute fonction satisfaisant la propriété $f(u) \rightarrow 0$, lorsque $u \rightarrow \infty$.

Il est possible d'adapter le principe de comparaison [Zha05, Lemme 2.3] afin d'estimer inférieurement dans Ω les solutions de (4.2) à partir de la fonction $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, définie par :

$$\nu = \begin{cases} ad(x) & d(x) < \delta \\ a\delta + \int_\delta^{d(x)} a \left(\frac{2\delta - t}{\delta} \right)^{2/(p^- - 1)} dt & \delta \leq d(x) < 2\delta \\ a\delta + \int_\delta^{d(x)} a \left(\frac{2\delta - t}{\delta} \right)^{2/(p^- - 1)} dt & 2\delta \leq d(x), \end{cases} \quad (4.10)$$

où $a, \delta > 0$ sont des constantes.

En effet, considérons l'application A définie par :

$$\langle \underline{A}(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla \varphi - m v^{-\alpha(x)} \varphi \right) dx,$$

pour tout $v \in \left\{ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid B(u) \in \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega) \right)^{\star} \right\}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, où $m, M > 0$ sont des constantes et α désigne la même fonction que dans (4.2). D'après (4.3), on a

$$\langle A(u), \phi \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

où u fait référence à la solution de (4.2).

Aussi, considérons l'application B définie par :

$$\langle B(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla \varphi - \lambda v^{-\gamma(x)} \varphi \right) dx, \quad (4.12)$$

pour tout $v \in \left\{ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid B(u) \in \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega) \right)^{\star} \right\}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, où γ désigne la même fonction que dans (4.9). Dans [Zha07, Lemme 3.2], l'auteur a établi que, lorsque δ est suffisamment petit, et $a \in (0, 1)$, alors la fonction ν , définie dans (4.10), satisfait

$$-\Delta_{p(x)} \nu \leq \frac{\lambda}{\nu^{\gamma(x)}} \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.13)$$

pour toute fonction positive γ , et toute constante $\lambda > 0$ assez grande. De ce fait, d'après (4.13), et par définition de B , on a

$$\langle B(\nu), \varphi \rangle \leq 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.14)$$

On énonce le lemme suivant, qui est la généralisation partielle de [Zha07, Théorème 4.4].

Lemme 4.1.1 (Principe de comparaison). *Soit u la solution a priori du problème (4.2). Supposons que*

$$0 < \alpha(x) < 1. \quad (4.15)$$

Alors,

$$\nu(x) \leq u(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.16)$$

Démonstration. Supposons dans (4.13) que $\gamma \equiv \alpha$, et dans (4.3) que $m \geq \lambda$. Considérons l'ensemble $D_1 = \{x \in \Omega, u(x) < \nu(x)\}$, et posons $\varphi_1 = -(\nu - u)^+$. Remarquons que φ_1 est une fonction test admissible de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. D'après (4.11), (4.14), et la monotonie de $t \mapsto |t|^{p_i(x)-2}t$, $t \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle B(\nu) - A(u), \varphi_1 \rangle &= - \int_{D_1} \left(|\nabla \nu|^{p_i(x)-2} \nabla \nu - |\nabla u|^{p_i(x)-2} \nabla u \right) (\nabla \nu - \nabla u) dx \\ &\quad - \int_{D_1} \left(m u^{-\alpha(x)} - \lambda \nu^{-\gamma(x)} \right) (\nu - u) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{D_1} \left(|\nabla \nu|^{p_i(x)-2} \nabla \nu - |\nabla u|^{p_i(x)-2} \nabla u \right) (\nabla \nu - \nabla u) dx = 0. \quad (4.17)$$

D'après le Lemme 1.4.7, (4.17) implique que

$$C_1 \int_{D_1 \cap \{p < 2\}} (|\nabla \nu| + |\nabla u|)^{p(x)-2} |\nabla \nu - \nabla u| dx + C_2 \int_{D_1 \cap \{p \geq 2\}} |\nabla \nu - \nabla u|^{p(x)} dx \leq 0,$$

ce qui entraîne que

$$\nabla \varphi = 0 \text{ et } \varphi = 0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

i.e. $\nu \leq u$ p.p. dans Ω . □

Remarque 4.1.1. *Il est intéressant de noter qu'un tel principe de comparaison n'est plus valide lorsque $\mu u^{\alpha(x)} \leq f(x, u, \nabla u)$ avec $\alpha^- > 0$. Dans une telle situation, la meilleure idée serait d'utiliser le principe de comparaison faible classique, évoqué précédemment.*

Maintenant que nous disposons d'une estimation inférieure de la solution de tout problème de la forme (4.2), sous la condition (4.3), nous sommes en mesure d'estimer la norme infinie du gradient de la solution à l'intérieur de Ω . Cependant, par soucis de généralisation et de simplification, on considère le problème (4.5), sous les hypothèses $[A_1] - [A_7]$, dans le cas où $\nu \equiv \nu(x)$ représente la fonction définie dans (4.10).

4.1.4 Une condition de Ladyzhenskaya

La dérivée formelle de $(\mathcal{P})$ par rapport à x_i donne

$$-\operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial A(x, \nabla u)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A(x, \nabla u)}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} b(x, u, \nabla u) = 0 \quad (4.18)$$

dans Ω . Au sens faible, (4.18) devient

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N \frac{\partial A(x, \nabla u)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial A(x, \nabla u)}{\partial x_i} \right] \cdot \nabla \phi - b(x, u, \nabla u) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\} dx = 0, \quad (4.19)$$

pour toute fonction test $\phi_i \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ ($p^- > 1$). En additionnant (4.19) sur $i = 1, 2, \dots, N$, on obtient

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^N \frac{\partial A_k(x, \nabla u)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{\partial A(x, \nabla u)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right] dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b(x, u, \nabla u) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = 0. \quad (4.20)$$

Dans la suite, on adopte les notations $f_{x_s} = \frac{\partial f}{\partial x_s}$, et $f_{x_s x_r} = \frac{\partial f_{x_s}}{\partial x_r}$, pour une fonction arbitraire f . Aussi, on note

$$w \equiv [\varepsilon + |\nabla u|^2]. \quad (4.21)$$

Choisissons la fonction test

$$\phi = \nu^2 u_{x_i} \eta(w) \zeta^2,$$

où $\eta(\cdot)$ est une fonction lisse non-négative, avec $\eta'(w) \geq 0$, où $\nu \equiv \nu(x)$ est la fonction apparaissant dans $[A_4]$, et où ζ est la fonction de troncature, qui vaut 1 dans la boule $B(R - \sigma R)$, et dont le support est inclus dans la boule $B(R)$. La dérivée de ϕ par rapport à x_k donne

$$\phi_{x_k} = 2\nu_{x_i}\nu u_{x_i}\eta(w)\zeta^2 + \nu^2 u_{x_i x_k}\eta(w)\zeta^2 + \nu^2 u_{x_i} w_{x_k}\eta'(w)\zeta^2 + 2\nu^2 u_{x_i}\eta(w)\zeta\zeta_{x_k}.$$

Remarquons que

$$\sum_i u_{x_i x_j} u_{x_i} = \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{x_i}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_{x_i}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon + |\nabla u|^2) = \frac{1}{2} w_{x_j}. \quad (4.22)$$

Le résultat suivant a été inspiré de [Dib82, p.834-835].

Lemme 4.1.2. *Supposons que les hypothèses $[A_1] - [A_4]$ sont vérifiées, et que le problème $(\mathcal{P})$ admette une solution, notée $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Alors, il existe une constante γ , indépendante de R et k , telle que

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla (w^{p/2} - k)^+|^2 \zeta^2 dx &\leq \gamma \int_{B(R)} \nu^2 (w^{p/2} - k)^{+2} |\nabla \zeta|^2 dx \\ &\quad + \gamma \int_{B(R)} w^{p+1} (1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)}) \chi(w^{p/2} > k) \zeta^2 dx, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (4.23)$$

où w est défini dans (4.21).

Démonstration. Additionnons sur les $i = 1, 2, \dots, N$ les identités (4.20), avec le choix indiqué de la fonction test ϕ . D'après $[A_1] - [A_2]$, on obtient les estimations :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{B(R)} A_{u_{x_j}}^k u_{x_i x_j} [\phi_{x_k}] dx \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{B(R)} A_{u_{x_j}}^k u_{x_i x_j} \left[\nu^2 u_{x_i x_k} \eta(w) \zeta^2 + \nu^2 u_{x_i} w_{x_k} \eta'(w) \zeta^2 \right] dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{B(R)} A_{u_{x_j}}^k u_{x_i x_j} \left[2\nu_{x_i} \nu u_{x_i} \eta(w) \zeta^2 + 2\nu^2 u_{x_i} \eta(w) \zeta \zeta_{x_k} \right] \\ &\geq \gamma_1 \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma_1 \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \\ &\quad - 2\gamma_2 \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \zeta \nu (\zeta + \nu |\nabla \zeta|) dx. \end{aligned}$$

On pose

$$I(R) = \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 dx + \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \eta'(w) \zeta^2 dx. \quad (4.24)$$

D'après $[A_3]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{B(R)} A_{x_i}^k [\phi_{x_k}] dx &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{B(R)} A_{x_i}^k \left[\nu^2 u_{x_i x_k} \eta(w) \zeta^2 + \nu^2 u_{x_i} w_{x_k} \eta'(w) \zeta^2 \right] dx \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{B(R)} A_{x_i}^k \left[2\nu_{x_i} \nu u_{x_i} \eta(w) \zeta^2 + 2\nu^2 u_{x_i} \eta(w) \zeta \zeta_{x_k} \right] dx \\
&\leq \int_{B(R)} \gamma_3 (w^{p/2} + w^{(p-2)/2}) \nu^2 \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right)^{1/2} \eta(w) \zeta^2 dx \\
&+ \int_{B(R)} \gamma_3 (w^{p/2} + w^{(p-2)/2}) \nu^2 w^{1/2} |\nabla w| \eta'(w) \zeta^2 dx \\
&+ 2 \int_{B(R)} \gamma_3 (w^{p/2} + w^{(p-2)/2}) \eta(w) w^{1/2} \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Hölder (Lemme C.0.2), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{B(R)} A_{x_i}^k [\phi_{x_k}] dx &\leq \left(\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_{B(R)} \nu^2 \gamma_3^2 w^{(p-2)/2} [w+1]^2 \eta(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_{B(R)} \nu^2 \gamma_3^2 w^{(p-2)/2} [w+1]^2 w \eta'(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2\gamma_3 \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Young, on conclut que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{B(R)} A_{x_i}^k [\phi_{x_k}] dx &\leq \frac{1}{2} \delta \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \delta^{-1} \gamma_3^2 \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} [w+1]^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \delta \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \delta^{-1} \gamma_3^2 \int_{B(R)} \nu^2 w^{p/2} [w+1]^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \\
&+ 2\gamma_3 \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{B(R)} A_{x_i}^k [\phi_{x_k}] dx &\leq \frac{1}{2} \delta I(R) + \frac{1}{2} \gamma_3^2 \delta^{-1} \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\
&+ 2\gamma_3 \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Remarquons aussi que, d'après $[A_4]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx &= \sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) \left[\nu^2 u_{x_i x_k} \eta(w) \zeta^2 + \nu^2 u_{x_i} w_{x_k} \eta'(w) \zeta^2 \right] dx \\
&+ \sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) \left[2\nu_{x_i} \nu u_{x_i} \eta(w) \zeta^2 + 2\nu^2 u_{x_i} \eta(w) \zeta \zeta_{x_k} \right] dx \\
&\leq \int_{B(R)} \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right) \nu^2 \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right)^{1/2} \eta(w) \zeta^2 dx \\
&+ \int_{B(R)} \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right) \nu^2 w^{1/2} |\nabla w| \eta'(w) \zeta^2 dx \\
&+ 2 \int_{B(R)} \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right) \eta(w) w^{1/2} \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Avec l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx &\leq \left(\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_{B(R)} \nu^2 \gamma_4^2 w^{(2-p)/2} \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 \eta(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_{B(R)} \nu^2 \gamma_4^2 w^{(2-p)/2} \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 w \eta'(w) \zeta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2 \int_{B(R)} \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right) \eta(w) w^{1/2} \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Young, on conclut que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx &\leq \frac{1}{2} \delta \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_i |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \delta^{-1} \gamma_4^2 \int_{B(R)} \nu^2 w^{(2-p)/2} \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \delta \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \delta^{-1} \gamma_4^2 \int_{B(R)} \nu^2 w^{(4-p)/2} \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 \eta'(w) \zeta^2 dx \\
&+ 2 \int_{B(R)} \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right) \eta(w) w^{1/2} \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx \\
& \leq \frac{1}{2} \delta I(R) + \frac{1}{2} \gamma_4^2 \delta^{-1} \int_{B(R)} \nu^2 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 \left(w^{(2-p)/2} \eta(w) + w^{(4-p)/2} \eta'(w) \right) \zeta^2 dx \\
& + 2 \int_{B(R)} \gamma_4 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right) \eta(w) w^{1/2} \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les estimations (4.20), avec le choix $\delta = \gamma_1/4$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I(R) & \leq \gamma \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \zeta \nu (\zeta + \nu |\nabla \zeta|) dx \\
& + \gamma \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w + 1]^2 \zeta^2 dx \\
& + \gamma \int_{B(R)} \nu^2 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 \left(w^{(2-p)/2} \eta(w) + w^{(4-p)/2} \eta'(w) \right) \zeta^2 dx \\
& + \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2} + w^{1/2} \nu^{-\alpha} + w^{(\mu+1)/2}) \eta(w) \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Maintenant, adoptons les notations suivantes

$$v \equiv w^{p/2} \quad \text{et} \quad \eta(w) = \left(w^{p/2} - k \right)^+ \equiv (v - k)^+ \quad k > 1. \tag{4.28}$$

D'après l'inégalité de Young, (4.28), et (4.22), il est vrai que

$$\begin{aligned}
& \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \zeta \nu (\zeta + \nu |\nabla \zeta|) dx \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} |\nabla w| (v - k)^+ \zeta \nu (\zeta + \nu |\nabla \zeta|) dx \\
& = \int_{B(R)} \frac{1}{p(x)} |\nabla (v - k)^+| (v - k)^+ \nu^2 \zeta |\nabla \zeta| dx \\
& + \int_{B(R)} \frac{1}{p(x)} |\nabla (v - k)^+| (v - k)^+ \nu \zeta^2 dx \\
& \leq \frac{1}{2p^-} \delta \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla (v - k)^+|^2 \zeta^2 dx + \frac{1}{2p^-} \delta^{-1} \int_{B(R)} \nu^2 (v - k)^{+2} |\nabla \zeta|^2 dx \\
& + \frac{1}{2p^-} \delta \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla (v - k)^+|^2 \zeta^2 dx + \frac{1}{2p^-} \delta^{-1} \int_{B(R)} (v - k)^{+2} \zeta^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Ceci revient à dire, en majorant $(v - k)^{+2} \zeta^2$ par $w^{p+1} (1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)}) \zeta^2$,

$$\begin{aligned}
& \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \zeta \nu (\zeta + \nu |\nabla \zeta|) dx \\
& \leq \frac{1}{p^-} \delta \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla (v - k)^+|^2 \zeta^2 dx + \gamma(\delta) \int_{B(R)} \nu^2 (v - k)^{+2} |\nabla \zeta|^2 dx \\
& + \gamma(\delta) \int_{B(R)} w^{p+1} (1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)}) \zeta^2 dx.
\end{aligned}$$

Aussi, puisque $\eta'(w) = (p(x)/2)w^{(p(x)-2)/2}\chi(v > k)$, où $\chi(v > k) = \{x \in B(R) \mid v(x) > k\}$, alors on trouve :

$$\begin{aligned}
& \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\
& + \int_{B(R)} \nu^2 \left(\nu^{-\alpha} + w^{\mu/2} \right)^2 \left(w^{(2-p)/2} \eta(w) + w^{(4-p)/2} \eta'(w) \right) \zeta^2 dx \\
& = \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \left(w^{p/2} - k \right)^+ + w^{p/2} p/2 w^{(p-2)/2} \chi(v > k) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\
& + \int_{B(R)} \left(\nu^{2(1-\alpha)} + 2\nu^{2-\alpha} w^{\mu/2} + \nu^2 w^\mu \right) w^{(2-p)/2} \left(w^{p/2} - k \right)^+ \zeta^2 dx \\
& + \int_{B(R)} \left(\nu^{2(1-\alpha)} + 2\nu^{2-\alpha} w^{\mu/2} + \nu^2 w^\mu \right) w^{(4-p)/2} (p(x)/2) w^{(p-2)/2} \chi(v > k) \zeta^2 dx \\
& \leq \gamma(p^+) \int_{\Omega} w^{p+1} \left(1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)} \right) \chi(v > k) \zeta^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ici, on a juste majoré tous les termes en w par $w^{p(x)+1}$. De façon similaire, puisque

$$(v-k)^{+2} [\zeta + \nu |\nabla \zeta|]^2 \leq 2 \left[w^{p+1} \chi(v > k) \zeta^2 + (v-k)^{+2} \nu^2 |\nabla \zeta|^2 \right],$$

il est vrai, d'après l'inégalité de Young, que

$$\begin{aligned}
& \int_{B(R)} \left(w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2} + w^{1/2} \nu^{-\alpha} + w^{(\mu+1)/2} \right) \eta(w) \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx \\
& = \int_{B(R)} \left(w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2} + w^{1/2} \nu^{-\alpha} + w^{(\mu+1)/2} \right) (v-k)^+ \nu \zeta [\zeta + \nu |\nabla \zeta|] dx \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{B(R)} \left(w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2} + w^{1/2} \nu^{-\alpha} + w^{(\mu+1)/2} \right)^2 \chi(v > k) \nu^2 \zeta^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{B(R)} (v-k)^{+2} [\zeta + \nu |\nabla \zeta|]^2 dx \\
& \leq \gamma \int_{B(R)} w^{p+1} \left(1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)} \right) \chi(v > k) \zeta^2 dx + \gamma \int_{B(R)} (v-k)^{+2} \nu^2 |\nabla \zeta|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Par conséquent, en insérant les dernières inégalités de (4.29), (4.30), et (4.31), dans (4.27), et en laissant tomber le terme en $\eta(\cdot)$ dans (4.24), on déduit que

$$\begin{aligned}
& \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \chi(v > k) \zeta^2 dx \\
& \leq \frac{1}{p^-} \delta \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla(v-k)|^2 \zeta^2 dx + \gamma(\delta) \int_{B(R)} \nu^2 (v-k)^{+2} |\nabla \zeta|^2 dx \\
& + \gamma(p^+) \int_{\Omega} w^{p+1} \left(1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)} \right) \chi(v > k) \zeta^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Finalement, observons que

$$\begin{aligned}
\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} w^{(p-2)/2} |\nabla w|^2 \chi(v > k) \zeta^2 dx & = \int_{B(R)} \frac{2}{p(x)} |\nabla(v-k)^+|^2 \nu^2 \zeta^2 dx \\
& \geq \frac{2}{p^+} \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla(v-k)^+|^2 \zeta^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Par conséquent, en choisissant $\delta = p^-/p^+$ dans (4.32), et en utilisant (4.33), on conclut à l'existence d'une constante γ , indépendante de R et k , telle que

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} \nu^2 |\nabla(v-k)^+|^2 \zeta^2 dx &\leq \gamma \int_{B(R)} \nu^2 (v-k)^{+2} |\nabla \zeta|^2 dx \\ &+ \gamma \int_{B(R)} w^{p+1} \left(1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)}\right) \chi(v > k) \zeta^2 dx, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

4.1.5 Une itération de Moser

Le résultat suivant est une généralisation directe de [Dib82, Lemme 2.4]. Il utilise le fait que toute solution de (4.5) est uniformément localement Hölder continue dans Ω , c'est-à-dire que, pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Omega$, il existe des constantes $C, \beta \in (0, 1)$, dépendant uniquement des données et de $\text{dist}(\mathcal{K}, \partial\Omega)$, telles que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\beta, \quad (x, y) \in \mathcal{K}.$$

Un tel résultat a été prouvé dans [LU68, Théorème 1.1], pour des problèmes plus généraux que (4.5), pourvu que la borne essentielle maximum de la solution soit uniformément bornée dans Ω .

Lemme 4.1.3. *Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ la solution de (4.5), et considérons l'ensemble $B(R) \subset \Omega'$, où Ω' est un sous-domaine de Ω tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Supposons l'existence d'une constante $M > 0$, telle que u satisfasse*

$$\text{ess max}|u(x)| < M. \quad (4.34)$$

Alors, il existe une constante γ , dépendant uniquement des données, telle que, pour tout $\xi \in W^{1,p(x)}(B(R))$, on ait

$$\begin{aligned} &\int_{B(R)} \left[\varepsilon + |\nabla u|^2\right]^{(p(x)+2)/2} \xi^2 dx \\ &\leq \gamma R^{2\beta} \int_{B(R)} \left\{ \left[\varepsilon + |\nabla u|^2\right]^{(p(x)-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2\right) \xi^2 + \left[\varepsilon + |\nabla u|^2\right]^{p(x)/2} |\nabla \xi|^2 \right\} dx \\ &+ \gamma \int_{B(R)} \left[\varepsilon + |\nabla u|^2\right]^{p(x)/2} \xi^2 dx. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remplacer p par $p(x)$ dans la preuve de [Dib82, Lemme 2.4], et le lemme suit. $\square$

Maintenant, dans le but de surmonter la perte de la propriété d'homogénéité du terme source de (4.5) par rapport au gradient de la solution, nous considérerons le lemme suivant, qui établit une autre version de l'estimation (4.27) sous les hypothèses $[A_1]$ - $[A_7]$.

Lemme 4.1.4. *Supposons que les hypothèses $[A_1]$ - $[A_7]$ sont vérifiées. Alors, pour toute solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de (4.5), on a*

$$\begin{aligned}
I(R) \leq & \gamma \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \nu \left(\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla \zeta| \right) dx \\
& + \gamma \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\
& + \gamma \int_{B(R)} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} + w^{(2\mu-p+2)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\
& + \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \left[\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla \zeta| \right] dx,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

où la quantité $I(R)$ est définie dans (4.24), avec le choix $\eta(w) = w^{(3s+1)/2}$.

Démonstration. Dans la preuve du Lemme 4.1.2, nous allons modifier l'estimation effectuée sur le terme $B(x, u, \nabla u)$, à savoir l'estimation (4.26). Pour ce faire, nous utilisons l'inégalité de Hölder discrète

$$\sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j} \leq \left(\sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^N 1 \right)^{1/2} = N \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right)^{1/2},$$

sous les hypothèses $[A_5]$ - $[A_7]$, avec la notation $w = [\varepsilon + |\nabla u|^2]$, pour démontrer que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx &= - \sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u)_{x_i} [\phi] dx \\
&= - \int_{B(R)} \left(\sum_{i,j=1}^N B_{u_{x_j}} u_{x_j x_i} + \sum_{i=1}^N B_u u_{x_i} + \sum_{i=1}^N B_{x_i} \right) [\nu^2 u_{x_i} \eta(w) \zeta^2] dx \\
&\leq \int_{B(R)} \gamma_5 w^{\frac{\mu(x)-1}{2}} N \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right)^{1/2} \nu^2 w^{1/2} \eta(w) \zeta^2 dx \\
&\quad + \int_{B(R)} \left[\gamma_6 N w^{1/2} + \gamma_7 \left(w^{\frac{\mu(x)+2}{2}} + w^{\frac{\mu(x)-2}{2}} \right) \right] \nu^2 w^{1/2} \eta(w) \zeta^2 dx.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx \\
& \leq \left(\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(R)} \gamma \nu^2 w^{(2\mu-p+2)/2} \eta(w) \zeta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \gamma \int_{B(R)} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx.
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \int_{B(R)} B(x, u, \nabla u) [\phi_{x_i}] dx \\
& \leq \eta \left(\int_{B(R)} \nu^2 w^{(p-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) \eta(w) \zeta^2 \right) + \eta^{-1} \left(\int_{B(R)} \gamma \nu^2 w^{(2\mu-p+2)/2} \eta(w) \zeta^2 \right) \\
& \quad + \gamma \int_{B(R)} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx.
\end{aligned}$$

En regroupant les termes en $\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2$ dans $I(R)$, défini dans (4.24), avec le choix $\eta = 1/2$, l'estimation (4.27) devient

$$\begin{aligned} I(R) &\leq \gamma \int_{B(R)} w^{(p-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \nu \left(\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla \zeta| \right) dx \\ &\quad + \gamma \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\ &\quad + \gamma \int_{B(R)} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} + w^{(2\mu-p+2)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\ &\quad + \int_{B(R)} \left(w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2} \right) \eta(w) \nu \left[\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla \zeta| \right] dx. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Le lemme suivant dérive d'une application du Lemme 4.1.4, avec un choix particulier de $\eta(\cdot)$.

Lemme 4.1.5. *Supposons que les hypothèses $[A_1]$ - $[A_7]$ sont vérifiées, et que*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min\{\mu(x) - 1, 2\mu(x) - p(x) + 2\} \\ \max\{\mu(x) + 3, 2\mu(x) - p(x) + 2\} &\leq p(x) + 2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Alors, pour toute solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de (4.5), on a

$$I(R) \leq \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \left[\zeta^2 + |\nabla \zeta|^2 \right] dx + \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3s)/2} |\nabla \zeta|^2 dx. \quad (4.37)$$

Démonstration. Dans (4.35), posons $\eta(w) = w^{(3s+1)/2}$ ($s \geq 0$).

D'après (4.22), l'inégalité de Hölder discrète

$$\left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \leq \left(N \sum_{i=1}^N u_{x_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{N} w^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.38)$$

et l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} &\int_{B(R)} w^{(p(x)-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \nu \left[\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla \zeta| \right] dx \\ &\leq \delta \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p(x)-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) w^{(3s+1)/2} \zeta^2 dx \\ &\quad + \gamma^2 \delta^{-1} \int_{B(R)} w^{(p(x)-2)/2} w w^{(3s+1)/2} \left[\zeta^2 + \nu^2 |\nabla \zeta|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Remarquons que, d'après les hypothèses sur ν, ζ et $|\nabla \zeta|$, il est vrai que

$$\begin{aligned} \gamma^2 \delta^{-1} \int_{B(R)} w^{(p(x)-2)/2} w w^{(3s+1)/2} \left[\zeta^2 + \nu^2 |\nabla \zeta|^2 \right] dx &\leq \gamma \left(\int_{B(R) \cap \{w \geq 1\}} w^{(p(x)+3s+1)/2} \left[\zeta^2 + \nu^2 |\nabla \zeta|^2 \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(R) \cap \{w < 1\}} w^{(p(x)+3s+1)/2} \left[\zeta^2 + \nu^2 |\nabla \zeta|^2 \right] dx \right) \\ &\leq \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \zeta^2 dx + \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3)/2} + \gamma. \end{aligned}$$

Ici, sur l'ensemble $\{w \geq 1\}$, on a juste majoré les termes en ζ^2 (resp. $|\nabla\zeta|^2$) par $w^{(p+3+3s)/2}$ (resp. $w^{(p+3s)/2}$), alors que sur l'ensemble $\{w < 1\}$, on a majoré tous les termes en w par 1. Par conséquent, on déduit de (4.39) et (4.38) que

$$\begin{aligned} & \int_{B(R)} w^{(p(x)-2)/2} \left| \sum_{i,j=1}^N u_{x_i} u_{x_i x_j} \right| \eta(w) \nu [\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla\zeta|] dx \\ & \leq \delta \int_{B(R)} \nu^2 w^{(p(x)-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) w^{(3s+1)/2} \zeta^2 dx \\ & \quad + \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \zeta^2 dx + \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3)/2} + \gamma. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aussi, d'après (4.35), avec le choix indiqué de $\eta(\cdot)$ et (4.36), on obtient en suivant le même raisonnement que précédemment, et en remarquant que $\eta'(w) = [(3s+1)/2]w^{(3s-1)/2}$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \int_{B(R)} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\ & + \int_{B(R)} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} + w^{(2\mu-p+2)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\ & = \int_{B(R) \cap \{w \geq 1\}} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\ & + \int_{B(R) \cap \{w < 1\}} \nu^2 \left(w^{(p-2)/2} \eta(w) + w^{p/2} \eta'(w) \right) [w+1]^2 \zeta^2 dx \\ & \quad + \int_{B(R) \cap \{w \geq 1\}} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} + w^{(2\mu-p+2)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\ & \quad + \int_{B(R) \cap \{w < 1\}} \left(w + w^{(\mu+3)/2} + w^{(\mu-1)/2} + w^{(2\mu-p+2)/2} \right) \nu^2 \eta(w) \zeta^2 dx \\ & \leq \gamma[3s+1] \int_{\Omega} w^{(p+3+3s)/2} \zeta^2 dx + \gamma. \end{aligned} \quad (4.41)$$

De façon similaire, d'après (4.35), et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu [\zeta^2 + \nu \zeta |\nabla\zeta|] dx \\ & \leq \int_{B(R)} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \left[\zeta^2 + \nu \left\{ \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} |\nabla\zeta|^2 \right\} \right] dx \\ & = \gamma \left(\int_{B(R) \cap \{w \geq 1\}} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \left[\zeta^2 + \nu \left\{ \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} |\nabla\zeta|^2 \right\} \right] dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B(R) \cap \{w < 1\}} (w^{(p+1)/2} + w^{(p-1)/2}) \eta(w) \nu \left[\zeta^2 + \nu \left\{ \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} |\nabla\zeta|^2 \right\} \right] dx \right) \\ & \leq \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} [\zeta^2 + |\nabla\zeta|^2] dx + \gamma. \end{aligned} \quad (4.42)$$

En regroupant les termes en $\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2$ de (4.39) dans (4.24), avec le choix $\delta = 1/2$, et en combinant les termes restants de (4.39) avec les dernières inégalités de (4.41), (4.42), dans (4.35), on obtient finalement l'estimation

$$I(R) \leq \gamma[3s+1] \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} [\zeta^2 + |\nabla\zeta|^2] dx + \gamma \int_{B(R)} w^{(p+3s)/2} |\nabla\zeta|^2 dx.$$

Remarquons ici que l'on a juste majoré tous les termes en $w^{(p+3+3s)/2}$ par $[3s+1]$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Le lemme suivant utilise les itérations de Moser pour prouver la bornitude locale du gradient de la solution a priori de (4.5).

Lemme 4.1.6. *Supposons que les hypothèses $[A_1]$ - $[A_7]$ sont vérifiées, et que les conditions (4.34) et (4.36) sont valides. Supposons aussi l'existence d'une constante $M > 0$, indépendante de la solution, telle que*

$$\int_{\Omega} w^{p(x)/2} dx < M. \quad (4.43)$$

Alors, pour toute solution $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ de (4.5), on a

$$|\nabla u| \in L_{loc}^q(\Omega), \quad \forall q \in (1, \infty).$$

Démonstration. Appliquons le Lemme 4.1.3, avec la notation $w = [\varepsilon + |\nabla u|^2]$, et posons $\xi = w^{(3s+1)/4}\zeta$. De ce fait, en remarquant que

$$\begin{aligned} |\nabla[w^{(3s+1)/4}\zeta]|^2 &\leq 2 \left(|\nabla[w^{(3s+1)/4}]|^2 \zeta^2 + w^{(3s+1)/2} |\nabla \zeta|^2 \right) \\ &= 2[(3s+1)/4]^2 |\nabla w|^2 w^{(3s-3)/2} \zeta^2 + 2w^{(3s+1)/2} |\nabla \zeta|^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \zeta^2 dx \\ &\leq \gamma R^{2\beta} \int_{B(R)} \left\{ w^{(p(x)-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) w^{(3s+1)/2} \zeta^2 + w^{p(x)/2} |\nabla[w^{(3s+1)/4}\zeta]|^2 \right\} dx \\ &+ \varepsilon \int_{B(R)} w^{p(x)/2} w^{(3s+1)/2} \zeta^2 dx \\ &\leq \gamma R^{2\beta} \int_{B(R)} \left\{ w^{(p(x)-2)/2} \left(\sum_{i=1}^N |\nabla u_{x_i}|^2 \right) w^{(3s+1)/2} \zeta^2 + [(3s+1)/4]^2 w^{p(x)/2} |\nabla w|^2 w^{(3s-3)/2} \zeta^2 \right\} dx \\ &+ \gamma R^{2\beta} \int_{B(R)} w^{p(x)/2} w^{(3s+1)/2} |\nabla \zeta|^2 dx + \varepsilon \int_{B(R)} w^{p(x)/2} w^{(3s+1)/2} \zeta^2 dx \\ &\leq \gamma [3s+1]^2 R^{2\beta} I(R) + (\gamma R^{2\beta} + \varepsilon) \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+1)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+1)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx &= \int_{B(R) \cap \{w \geq 1\}} w^{(p(x)+3s+1)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx \\ &+ \int_{B(R) \cap \{w < 1\}} w^{(p(x)+3s+1)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx \\ &\leq \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+3)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx + \gamma. \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'après le Lemme 4.1.5, (4.44), et (4.45), on déduit que

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \zeta^2 dx &\leq \gamma[3s+1]^2 R^{2\beta} \left([3s+1] \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+3)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s)/2} |\nabla \zeta|^2 dx + \gamma \right) \\ &\quad + (\gamma R^{2\beta} + \varepsilon) \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+3)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx + \gamma, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \zeta^2 dx &\leq (\gamma R^{2\beta} + \varepsilon) [3s+1]^3 \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+3)/2} (|\nabla \zeta|^2 + \zeta^2) dx \\ &\quad + \gamma[3s+1]^2 \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s)/2} |\nabla \zeta|^2 dx + \gamma[3s+1]^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Supposons que $\varepsilon > 0$ est assez petit, et considérons une suite de nombre décroissants $\{R_s\}$, telle que

$$R_0 = (2\gamma)^{-1/\beta}.$$

Définissons les boules concentriques $B(R_s)$ et $B(R_{s+1})$. Si $x \rightarrow \zeta_s(x)$ est une fonction de troncature à support dans B_{R_s} , qui vaut 1 dans $B(R_{s+1})$, on a $|\nabla \zeta_s|^2 \leq R_0^{-2}(s+2)^{8/\beta}$. Par conséquent, (4.46) devient

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} w^{(p+3+3s)/2} \zeta_s^2 dx &= \int_{B(R_{s+1})} w^{(p+3+3s)/2} dx \\ &\leq (\gamma R_s^{2\beta} + \varepsilon) [3s+1]^3 \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s+3)/2} (|\nabla \zeta_s|^2 + \zeta_s^2) dx \\ &\quad + \gamma[3s+1]^2 \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s)/2} |\nabla \zeta_s|^2 dx + \gamma[3s+1]^2 \\ &\leq 2R_s^\beta (3s+1)^3 (s+2)^{8/\beta} \int_{B(R_{s+1})} w^{(p+3+3s)/2} dx \\ &\quad + \gamma[3s+1]^2 R_0^{-2} (s+2)^{8/\beta} \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s)/2} dx + \gamma[3s+1]^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Posons

$$R_s = \frac{1}{2} R_0^3 (3s+1)^{-3/\beta} (s+2)^{-8/\beta}. \quad (4.48)$$

D'après (4.47), et (4.48), on a

$$\begin{aligned} \int_{B(R_{s+1})} w^{(p+3+3s)/2} dx &\leq \frac{1}{2} \int_{B(R_{s+1})} w^{(p+3+3s)/2} dx \\ &\quad + \gamma[3s+1]^2 R_0^{-2} (s+2)^{8/\beta} \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s)/2} dx + \gamma[3s+1]^2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

En regroupant les termes en $w^{(p+3+3s)/2}$ dans le membre de gauche de (4.49), on obtient finalement l'inégalité

$$\int_{B(R_{s+1})} w^{(p+3+3s)/2} dx \leq 2\gamma[3s+1]^2 R_0^{-2} (s+2)^{8/\beta} \int_{B(R)} w^{(p(x)+3s)/2} dx + 2\gamma[3s+1]^2, \quad (4.50)$$

où γ est une constante, indépendante de R_0 et s . En itérant (4.50) sur s , en commençant par $s = 0$, on obtient une borne locale pour la quantité $\int_{\Omega'} w^q dx$ sur un compact $\Omega' \subset \Omega$, dépendant uniquement des données et de (4.43).

Ceci achève la démonstration. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 4.1.1.

4.1.6 Preuve du Théorème 4.1.1

D'après l'inégalité de Hölder, la dernière intégrale de (4.23) peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned} & \gamma \int_{B(R)} w^{p+1} \left(1 + \nu^2 + \nu^{2-\alpha} + \nu^{2(1-\alpha)}\right) \chi(v > k) \zeta^2 dx \\ & \leq \gamma(\nu) \left(\int_{B(R)} w^{N(p(x)+1)/(2-N\kappa)} dx \right)^{(2-N\kappa)/N} \left(\text{meas } A_{k,R}^+ \right)^{1-(2/N)+\kappa}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

où $\kappa \in (0, 1/N]$ et $A_{k,R}^+ = \{x \in B(R) \mid v(x) > k\}$. Si $\mathcal{K}$ est un sous-domaine de Ω adéquat, on sait, grâce au Lemme 4.1.6, que la quantité

$$\left(\int_{\mathcal{K}} w^{N(p(x)+1)/(2-N\kappa)} dx \right)^{(2-N\kappa)/N}$$

est bornée uniformément en ε par une constante γ , dépendant uniquement des données et de $\text{dist}(\mathcal{K}, \partial\Omega)$. Supposons que $B(R) \subset \mathcal{K}$. Par conséquent, d'après le Lemme 4.1.2 et (4.51), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(R-\sigma R)} \nu^2 |\nabla(v-k)^+|^2 dx & \leq \gamma(\nu) (\sigma R)^{-2} \int_{B(R)} (v-k)^{+2} dx \\ & \quad + \gamma(\nu) \left(\text{meas } A_{k,R}^+ \right)^{1-(2/N)+\kappa}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

D'après le théorème de la Valeur Moyenne (Théorème 1.4.1), et la bornitude de ν , il existe une constante $\nu^* \in [\nu^-, \nu^+]$, telle que

$$\int_{B(R-\sigma R)} \nu^2 |\nabla(v-k)^+|^2 dx = \nu^{*2} \int_{B(R-\sigma R)} |\nabla(v-k)^+|^2 dx.$$

En supposant que $\nu^- > 0$, et en divisant (4.52) par ν^{*2} , on obtient finalement l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_{B(R-\sigma R)} |\nabla(v-k)^+|^2 dx & \leq \gamma(\nu^*) (\sigma R)^{-2} \int_{B(R)} (v-k)^{+2} dx \\ & \quad + \gamma(\nu^*) \left(\text{meas } A_{k,R}^+ \right)^{1-(2/N)+\kappa}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le lemme découle de (4.53) et du Lemme C.0.6. Ceci achève la démonstration.

4.1.7 Perspective

Grâce au Théorème 4.1.1, nous disposons d'une estimation du gradient de la solution de tout problème de la forme (4.2), sous la condition (4.3), à l'intérieur du domaine Ω . Il s'agirait par la suite d'établir une telle estimation dans un voisinage du bord de Ω , ce qui pourrait être fait selon [LU68], à moins de disposer d'une estimation du gradient de la solution sur le bord. Nous poursuivrons donc dans cette direction après la thèse.

4.2 Sur- et sous-solutions pour un système convectif sans singularités

4.2.1 Introduction

Dans cette section, on s'intéresse à la localisation des solutions du problème de Dirichlet elliptique suivant

$$\begin{cases} \Delta_{p_1(x)} u_1 = c(x) u_1 |u_1|^{\alpha-1} |u_2|^{\beta+1} + d_1(x) |\nabla u_1|^{\gamma_1(x)} & \text{dans } \Omega, \\ \Delta_{p_2(x)} u_2 = c(x) |u_1|^{\alpha+1} u_2 |u_2|^{\beta-1} + d_2(x) |\nabla u_2|^{\gamma_2(x)} & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.54)$$

où $p_i \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ($i = 1, 2$), α, β sont des constantes strictement positives et $c, d_i \gamma_i \in C(\overline{\Omega})$ ($i = 1, 2$) sont des fonctions positives et bornées.

Dans le Chapitre 1, on a prouvé, au moyen du degré topologique de Berkovits, que, sous certaines conditions des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le problème (4.54) admet au moins une solution non-triviale (voir Théorème 1.5). Une autre approche que l'on pourrait exploiter est de prouver l'existence d'une solution pour (4.54) via le théorème de point fixe de Schauder et la méthode des sous-et-sur-solutions. L'avantage d'une telle approche serait, en plus de l'existence, de connaître le comportement asymptotique de la solution dans Ω . Aussi, nous proposons une méthode de construction de sous-et-sur-solutions adaptées au problème (4.54), quelque peu différente de celle employée dans le Chapitre 2. Elle suit un raisonnement établi par Vélin dans [Vé16], et repose sur la construction de fonctions radiales.

Dans la suite, on note $R_0 = \sup\{r > 0 \mid B(0, r) \subset \Omega\}$, où $B(0, r)$ désigne la boule centrée en l'origine et de rayon $r > 0$. Remarquons qu'un tel $R_0 > 0$ existe car Ω est supposé être un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$.

4.2.2 Hypothèses et données empiriques

Dans toute la suite de la section, nous définirons un certain nombre de données empiriques afin de construire nos sur-et-sous-solutions de type radial. Ces données sont :

- $C_s = \left(\frac{N+1}{R_0}\right)^{\gamma_s-1} \left(\frac{NR_0}{N+1}\right)^{\gamma_s-1} \theta_{s^-}^{\frac{1}{s^-}},$
- $B_s = \frac{R_0}{N+1} \left(\frac{NR_0}{N+1}\right)^{\gamma_s-1} + \left(\frac{NR_0}{N+1}\right)^{\gamma_s},$
- $\gamma_s \geq \frac{s^-}{s^- - 1},$
- $0 < \theta_s < \min \left(\frac{1}{\gamma_s^{s^-} \left(\frac{NR_0}{N+1}\right)^{s^-(\gamma_s-1)}}, \frac{1}{(N+1)^{s^-(\gamma_s-1)}(NR_0)^{s^-(\gamma_s-1)}} \right),$
- $\left[\frac{\inf_{0 \leq r \leq \frac{NR_0}{N+1}} |r^{\gamma_s} - B_s|^{\alpha-1} |r^{\gamma_{p_1}} - B_s|^{\beta+1} \left(- \left(\frac{NR_0}{N+1}\right)^{\gamma_s} + B_s \right)}{(N+s^+)\gamma_s^{s^-} \left(\frac{NR_0}{N+1}\right)^{(\gamma_s-1)(p_1^- - 1) - 1}} \|c\|_\infty \right]^{\frac{1}{d}},$
- $d = \left[1 - \left(\frac{\alpha+1}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-} \right) \right]^{-1}.$
- $\sigma_{p_1} = \frac{p_{1,0} [p_{2,0} - (\beta+1)] + p_{2,0}(\beta+1)}{p_{1,0}p_{2,0} - p_{1,0}(\beta+1) - p_{2,0}(\alpha+1)},$
- $\sigma_{p_2} = \frac{p_{2,0} [p_{1,0} - (\alpha+1)] + p_{1,0}(\alpha+1)}{p_{1,0}p_{2,0} - p_{1,0}(\beta+1) - p_{2,0}(\alpha+1)},$
- $p_{1,0} = \begin{cases} p_1^- & \text{si } R_0 < 1 \\ p_1^+ & \text{si } R_0 > 1 \end{cases},$
- $p_{2,0} = \begin{cases} p_2^- & \text{si } R_0 < 1 \\ p_2^+ & \text{si } R_0 > 1 \end{cases},$
- $0 < \varepsilon < \min \left[\left(\frac{1}{\sigma_{p_1}} R_0^{\sigma_{p_1}-1} \right)^{p_1^-}, \left(\frac{\|c\|_\infty}{R_0^{p_{1,0}}(p_1^+ - 1)(\sigma_{p_1} - 1)} \right)^d, \left(\frac{1}{\sigma_{p_2}} R_0^{\sigma_{p_2}-1} \right)^{p_2^-}, \right.$
- $\left. \left(\frac{\|c\|_\infty}{R_0^{p_{2,0}}(p_2^+ - 1)(\sigma_{p_2} - 1)} \right)^d \right],$
- $d = \left[1 - \left(\frac{\alpha+1}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-} \right) \right]^{-1}.$
- $a \geq \inf \left(\left[\frac{\|c\|_\infty e^{R_0(\alpha+\beta+1)}}{\frac{N-1}{R_0} + p_1^- - 1} \right]^d, 1 \right),$
- $d = \left[1 - \left(\frac{\alpha+1}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-} \right) \right]^{-1}.$

Ici, N est un entier naturel qui désigne la dimension de Ω .

4.2.3 Construction des sous-solutions pour le système (4.54)

Soit $\chi_{\Omega_+}, \chi_{\Omega_-}$ et $\chi_{\Omega_+^-}$ désignent les fonctions caractéristiques des ensembles des sous-ensembles de Ω suivants

$$\begin{aligned}\Omega_- &= \{x \in \Omega \mid c(x) = -\|c\|_\infty\} \\ \Omega_+ &= \{x \in \Omega \mid c(x) = \|c\|_\infty\} \\ \Omega_+^- &= \{x \in \Omega \mid -\|c\|_\infty < c(x) < \|c\|_\infty\},\end{aligned}\tag{4.55}$$

où c correspond au coefficient des termes d'interaction dans le système (4.54).

On note u_0 et v_0 les fonctions définies sur Ω par

$$\begin{cases} u_0(\cdot) = \psi_{1,p_1}(\|\cdot\|) \chi_{\Omega_+} + \psi_{2,p_1}(\|\cdot\|) \chi_{\Omega_-} + \psi_{3,p_1}(\|\cdot\|) \chi_{\Omega_+^-} \\ v_0(\cdot) = \psi_{1,p_2}(\|\cdot\|) \chi_{\Omega_+} + \psi_{2,p_2}(\|\cdot\|) \chi_{\Omega_-} + \psi_{3,p_2}(\|\cdot\|) \chi_{\Omega_+^-}, \end{cases}\tag{4.56}$$

où les fonctions radiales $\psi_{i,s} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$ et $s = p_1, p_2$) sont définies, pour $r = |x|$, par

$$\begin{aligned}\psi_{1,s}(r) &= \begin{cases} -\theta_s^{\frac{1}{s-1}} (r^{\gamma_s} - B_s) & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{NR_0}{N+1}, \\ C_s (R_0 - r)^{\gamma_s} & \text{si } \frac{NR_0}{N+1} < r < R_0, \\ 0 & \text{si } R_0 \leq r, \end{cases} \\ \psi_{2,s}(r) &= \begin{cases} -\varepsilon_s^{\frac{1}{s-1}} (R_0 - r)^{\sigma_s} & \text{si } 0 \leq r \leq R_0, \\ 0 & \text{si } R_0 < r, \end{cases} \\ \psi_{3,s}(r) &= \begin{cases} -a_s^{\frac{1}{s-1}} (e^{R_0} - e^r) & \text{si } 0 \leq r \leq R_0, \\ 0 & \text{si } R_0 \leq r. \end{cases}\end{aligned}\tag{4.57}$$

Ici, nous présentons un résultat qui nous sera utile pour la construction de la paire de sous-solutions adaptée au problème (4.54).

Proposition 4.2.1 (see [Vé16] Proposition 3.3). *La paire (u_0, v_0) , définie dans (4.56), satisfait les inégalités suivantes :*

$$\begin{cases} \Delta_{p_1(x)} u_0 + c(x) u_0 |u_0|^{\alpha-1} |v_0|^{\beta+1} + d(x) \geq 0 \\ \Delta_{p_2(x)} v_0 + c(x) v_0 |v_0|^{\beta-1} |u_0|^{\alpha+1} + f(x) \geq 0. \end{cases}\tag{4.58}$$

Dans le corollaire suivant, nous prouvons que la paire (u_0, v_0) , définie dans (4.56), constitue une sous-solution adaptée au problème (4.54).

Corollaire 4.2.1. *Considérons les hypothèses de la Proposition 4.2.1.*

Alors la paire (u_0, v_0) , définie dans (4.56), satisfait les inégalités

$$\begin{cases} \Delta_{p_1(x)} u_0 + c(x) u_0 |u_0|^{\alpha-1} |v_0|^{\beta+1} + d(x) |\nabla u_0|^\gamma \geq 0 \\ \Delta_{p_2(x)} v_0 + c(x) |u_0|^{\alpha+1} v_0 |v_0|^{\beta-1} + f(x) |\nabla v|^\delta \geq 0. \end{cases}\tag{4.59}$$

Démonstration. Cela provient directement de la Proposition 4.2.1, et du fait que $d(x) |\nabla u_0|^{\gamma_1(x)} > 0$ et $f(x) |\nabla v_0|^{\gamma_2(x)} > 0$. $\square$

4.2.4 Construction des sur-solutions pour le système (4.54)

Soit u^0 et v^0 les fonctions définies sur Ω par

$$\begin{cases} u^0(.) = A^{\frac{1}{p_1^-}} \left[(R^0 - \delta r)^{\mu_0-1} + 1 \right] \\ v^0(.) = A^{\frac{1}{p_2^-}} \left[(R^0 - \delta r)^{\mu_0-1} + 1 \right], \end{cases} \quad (4.60)$$

avec $0 < \delta < 1$, et R_0 une constante positive telle que $0 \leq \|x\| \leq R_0$.

Ici, nous présentons un résultat qui nous sera utile pour la construction de la paire de sur-solutions adaptée au problème (4.54).

Proposition 4.2.2 (see [Vél16] Proposition 3.3). *Il existe une constante positive A^0 , dépendant de $\mu^0, R^0, p_1, p_2, \delta, N, c$, telle que, pour tout $A \geq A^0$, on ait*

$$\Delta_{p_1(x)} u^0 + c(x) u^0 |u^0|^{\alpha-1} |v^0|^{\beta+1} + d(x) \leq 0. \quad (4.61)$$

Aussi, en posant $a_{p_1} = A^{\frac{1}{p_1^-}}$, il existe $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $0 \leq \|x\| \leq R$, on ait

$$\Delta_{p_1(x)} u^0(x) + c(x) u^0(x) |u^0(x)|^{\alpha-1} |v^0(x)|^{\beta+1} \leq \mathcal{K} A^{\frac{p_1^- - 1}{p_1^-}} + \bar{\mathcal{K}} A^{\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-}}, \quad (4.62)$$

où la paire (u^0, v^0) est définie dans (4.60), et avec

$$\bar{\mathcal{K}} = \|c\|_\infty \left(\{R_0\}^{\mu_0-1} + 1 \right)^\alpha \left(\{R_0\}^{\mu_0-1} + 1 \right)^{\beta+1}. \quad (4.63)$$

Dans le corollaire suivant, nous prouvons que la paire (u^0, v^0) , définie dans (4.60), constitue une sur-solution adaptée au problème (4.54).

Corollaire 4.2.2. *Considérons les hypothèses de la Proposition 4.2.2.*

Si

$$0 \leq \gamma_i(x) \leq p_i^- - 1 \quad i = 1, 2, \quad (4.64)$$

alors il existe une constante positive $a_{p_1}^0$, dépendant de μ^0, R^0, p_i ($i = 1, 2$), γ_1, N, c , telle que, pour tout $A \geq a_{p_1}^0$, on ait

$$\Delta_{p_1(x)} u^0 + c(x) u^0 |u^0|^{\alpha-1} |v^0|^{\beta+1} + f(x) |\nabla u^0|^{\gamma_1} \leq 0. \quad (4.65)$$

Aussi, il existe une constante positive $A_{p_2}^0$, dépendant de μ^0, R^0, p_i ($i = 1, 2$), δ, N, c , telle que, pour tout $A \geq A_{p_2}^0$, on ait

$$\Delta_{p_2(x)} v^0 + c(x) |u^0|^{\alpha+1} v^0 |v^0|^{\beta-1} + g(x) |\nabla v^0|^{\gamma_2} \leq 0. \quad (4.66)$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.2.2, en posant $a_{p_1} = A^{\frac{1}{p_1^-}}$, on obtient, pour $0 \leq r \leq R$, l'inégalité suivante :

$$\Delta_{p_1(x)} u^0 + c(x) u^0 |u^0|^{\alpha-1} |v^0|^{\beta+1} \leq -\mathcal{K} A^{\frac{p_1^- - 1}{p_1^-}} + \bar{\mathcal{K}} A^{\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-}}. \quad (4.67)$$

De plus, comme

$$u^0(.) = A^{\frac{1}{p_1^-}} \left[(R^0 - \delta r)^{\mu^0 - 1} + 1 \right], \quad (4.68)$$

alors

$$\nabla u^0 = -\delta (\mu^0 - 1) A^{1/p_1^-} (R^0 - \delta r)^{\mu^0 - 2}, \quad (4.69)$$

et

$$\begin{aligned} f(x) |\nabla u^0|^{\gamma(x)} &= f(x) \delta^{\gamma_1(x)} (\mu^0 - 1)^{\gamma_1(x)} A^{\gamma_1/p_1^-} (R^0 - \delta r)^{\gamma_1(x) \mu^0 - 2\gamma_1(x)} \\ &\leq \|f\|_\infty \delta^{\gamma_1(x)} (\mu^0 - 1)^{\gamma_1(x)} A^{\gamma_1(x)/p_1^-} \{R^0 (1 - \delta)\}^{\gamma_1(x) \mu^0 - 2\gamma_1(x)} \\ &\leq \tilde{\mathcal{K}} A^{\frac{\gamma_1(x)}{p_1^-}}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta_{p_1(x)} u^0 + c(x) u^0 |u^0|^{\alpha-1} |v^0|^{\beta+1} + f(x) |\nabla u^0|^{\gamma_1(x)} \\ \leq -\mathcal{K} A^{\frac{p_1^- - 1}{p_1^-}} + \bar{\mathcal{K}} A^{\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-}} + \tilde{\mathcal{K}} A^{\frac{\gamma_1(x)}{p_1^-}} \\ \leq A^{\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-}} \left[\bar{\mathcal{K}} - \mathcal{K} A^{\frac{1}{d}} + \tilde{\mathcal{K}} A^{\frac{1}{s(x)}} \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

avec

$$\frac{1}{d} = 1 - \left[\frac{\alpha + 1}{p_1^-} + \frac{\beta + 1}{p_2^-} \right], \quad (4.72)$$

et

$$\frac{1}{s(x)} = \frac{\gamma_1(x)}{p_1^-} - \left[\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta + 1}{p_2^-} \right]. \quad (4.73)$$

Par ailleurs, comme $0 \leq \gamma_1(x) \leq p_1^- - 1 < p_1^-$, il dérive que $\frac{1}{s(x)} \leq \frac{1}{d}$. Il s'ensuit que $\frac{\gamma_1 - \alpha}{p_1^-} + \frac{\beta + 1}{p_2^-} \leq \frac{p_1^- - 1 - \alpha}{p_1^-} + \frac{\beta + 1}{p_2^-}$, ce qui signifie, après transformation, que $\frac{\gamma_1(x)}{p_1^-} - \left[\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta + 1}{p_2^-} \right] \leq 1 - \left[\frac{\alpha + 1}{p_1^-} + \frac{\beta + 1}{p_2^-} \right]$. Pour conclure, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \Delta_{p_1(x)} u^0 + c(x) u^0 |u^0|^{\alpha-1} |v^0|^{\beta+1} + f(x) |\nabla u^0|^{\gamma_1(x)} \\ \leq A^{\frac{\alpha}{p_1^-} + \frac{\beta+1}{p_2^-}} \left[\bar{\mathcal{K}} - A^{\frac{1}{d}} (\tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}) \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Finalement, en choisissant A tel que $A > A^0 = \left(\frac{\bar{\mathcal{K}}}{\bar{\mathcal{K}} - \mathcal{K}} \right)^d$, on obtient effectivement que

$$\Delta_{p_1(x)} u^0 + c(x) u^0 |u^0|^{\alpha-1} |v^0|^{\beta+1} + f(x) |\nabla u^0|^{\gamma_1(x)} \leq 0. \quad (4.75)$$

□

4.2.5 Perspective

Maintenant que nous avons pu établir l'existence d'une paire de sous-et-sur-solutions pour le problème (4.54), il reste à appliquer le théorème de point fixe de Schauder, suivant la même démarche adoptée dans le Chapitre 2. C'est dans cette direction que nous poursuivrons après la thèse.

- [ABG89] N.D. Alikakos, P.W. Bates, and C.P. Grant. Blow up for a diffusion-advection equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 113(3-4) :181–190, 1989.
- [AE16] R. Ayazoglu and I. Ekinoglu. Electrorheological fluids equations involving variable exponent with dependence on the gradient via mountain pass techniques. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 37(9) :1144–1157, 2016.
- [AGMQ12] S. Alarcon, J. Garcia-Melian, and A. Quaas. Keller-osserman type conditions for some elliptic problems with gradient terms. *Journal of Differential Equations*, 252(2) :886–914, 2012.
- [AGW20] R. Arora, J. Giacomoni, and G. Warnault. Doubly nonlinear equation involving $p(x)$ -homogeneous operators : Local existence, uniqueness and global behaviour. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 487(2) :124009, 2020.
- [AJB95] B. Abu-Jdayil and P.O. Brunn. Effects of nonuniform electric field on slit flow of an electrorheological fluid. *Journal of Rheology*, 39(6) :1327–1341, 1995.
- [AJB96] B. Abu-Jdayil and P.O. Brunn. Effects of electrode morphology on the slit flow of an electrorheological fluid. *Journal of non-Newtonian fluid mechanics*, 63(1) :45–61, 1996.
- [AJB97] B. Abu-Jdayil and P.O. Brunn. Study of the flow behavior of electrorheological fluids at shear-and-flow mode. *Chemical Engineering and Processing : Process Intensification*, 36(4) :281–289, 1997.
- [AL87] A. Anane and J.L. Lions. Simplicité et isolation de la première valeur propre du p -laplacien avec poids. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 305(16) :725–728, 1987.
- [AM71] H. Amman and J. Moser. On the existence of positive solutions of non-linear elliptic boundary value problems. *Indiana University Mathematics Journal*, 21(2) :125–146, 1971.
- [AM18] C.O. Alves and A. Moussaoui. Existence and regularity of solutions for a class of singular $(p(x), q(x))$ -laplacian systems. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 63(2) :188–210, 2018.
- [Ban63] D. Banks. An integral inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5(14) :823–828, 1963.

- [Ber07a] J. Berkovits. Extension of the lera-y-schauder degree for abstract hammerstein type mappings. *Journal of Differential Equations*, 234(1) :289–310, 2007.
- [Ber07b] J. Berkovits. Extension of the lera-y-schauder degree for abstract hammerstein type mappings. *Journal of differential equations*, 234(1) :289–310, 2007.
- [BF14] L. Brasco and G. Franzina. Convexity properties of dirichlet integrals and picone-type inequalities. *Kodai Mathematical Journal*, 37(3) :769–799, 2014.
- [BG96] C. Bandle and E. Giarrusso. Boundary blow-up for semilinear elliptic equations with non-linear gradient terms. *Advances in Differential Equations*, 1(2) :133–150, 1996.
- [BGHa89] P. Bailey, D.G. Gillies, D.M. Heyes, and al. Experimental and simulation studies of electrorheology. *Molecular simulation*, 4(1-3) :137–151, 1989.
- [BGO97] L. Boccardo, T. Gallouët, and L. Orsina. Existence and nonexistence of solutions for some non-linear elliptic equations. *Journal d’Analyse Mathématique*, 73 :203–223, 1997.
- [Bre83a] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*. Édition Masson, 1983.
- [Bre83b] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [Bro11] L. E .J. Brouwer. Über abbildungen von mannigfaltigkeiten. *Mathematische annalen*, 71(1) :97–115, 1911.
- [Bro83a] F. E. Browder. Fixed point theory and non-linear problems. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 9(1) :49–87, 1983.
- [Bro83b] F.E. Browder. Fixed point theory and non-linear problems. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 9(1) :1–39, 1983.
- [CBL72] Y. Choquet-Bruhat and J. Leray. Sur le problème de dirichlet quasilinéaire d’ordre 2. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série A*, 274 :81–85, 1972.
- [Cha86] K. C. Chang. *Critical point theory and its applications*. Shanghai Kexue Jishu Chubanshe, Shanghai, 1986.
- [CLM07] S. Carl, V.K. Le, and D. Motreanu. *Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparison principles and applications*. Springer Monographs in Mathematics, New York, 2007.
- [CLM20] P. Candito, R. Livrea, and A. Moussaoui. Singular quasilinear elliptic systems involving gradient terms. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 55 :103142, 2020.
- [CLR06] Y. Chen, S. Levine, and R. Rao. Functionals with $p(x)$ -growth in image restoration. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 66(4) :1383–1406, 2006.
- [CM83] E.A. Cox and M.P. Mortell. The evolution of resonant oscillations in closed tubes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 34(6) :845–866, 1983.
- [CM15a] S. Carl and D. Motreanu. Extremal solutions for nonvariational quasilinear elliptic systems via expanding trapping regions. *Monatshefte für Mathematik*, 182(4) :801–821, 2015.
- [CM15b] A. Cianchi and V. Maz’ya. Global gradient estimates in elliptic problems under minimal data and domain regularity. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 14(1) :285, 2015.

- [DF08] D. G. De Figueiredo. Quasilinear equations with dependence on the gradient via mountain pass techniques in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Differential Equations*, 203(14-18) :1, 2008.
- [DFGM04] D. G. De Figueiredo, M. Girardi, and M. Matzeu. Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain pass technique. *Journal of Differential Equations*, 17(1-2) :119–126, 2004.
- [DHHR11] L. Diening, P. Hästö, P. Harjulehto, and M. Ruzicka. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Springer, Lecture Notes in Mathematics, 2011.
- [DHN04] L. Diening, P. Hästö, and A. Nekvinda. Open problems in variable exponent lebesgue and sobolev spaces. *FSDONA04 proceedings*, pages 38–58, 2004.
- [Dib82] E. Dibenedetto. $C(1 + \alpha)$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Wisconsin Univ-Madison Mathematics Research Center*, 1982.
- [Die04a] L. Diening. Maximal function on generalized lebesgue spaces $l^{p(\vec{u})}$. *Mathematical Inequalities and Applications*, 7(2) :245–254, 2004.
- [Die04b] L. Diening. Riesz potential and sobolev embeddings of generalized lebesgue and sobolev spaces $l^{p(\vec{u})}$ and $w^{k,p(\vec{u})}$. *Mathematische Nachrichten*, 263(1) :31–43, 2004.
- [DKM20] H. Didi, B. Khodja, and A. Moussaoui. Singular quasilinear elliptic systems with (super-) homogeneous condition. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics*, 13(2) :1–9, 2020.
- [DS87] J. I. Díaz and J. E. Saá. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences Série I Mathématiques*, 305(12) :521–524, 1987.
- [Eva98] L.C. Evans. *Partial differential equations*. Graduate studies in mathematics, vol. 19, 1998.
- [Fan07] X. Fan. Global $C^{1,\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form. *Journal of Inequalities and Applications*, 235(2) :397–417, 2007.
- [FIN97] N. Fukagai, M. Ito, and K. Narukawa. A bifurcation problem of some non-linear degenerate elliptic equations. *Advances in Differential Equations*, 2(6) :895–926, 1997.
- [FMM14] L.F.O. Faria, O.H. Miyagaki, and D. Motreanu. Comparison and positive solutions for problems with (p, q) -laplacian and convection term. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 57(3) :687–698, 2014.
- [FZ99] X. Fan and D. Zhao. A class of de giorgi type and hölder continuity. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 36(3) :295–318, 1999.
- [FZ01] X. Fan and D. Zhao. On the spaces $l^{p(x)}(\omega)$ and $w^{m,p(x)}(\omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263(2) :424–446, 2001.
- [FZ03] X.-L. Fan and Q.-H. Zhang. Existence of solutions for $p(x)$ -laplacian dirichlet problem. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 52(8) :1843–1852, 2003.
- [FZZ03] X. Fan, Y. Zhao, and Q. Zhang. A strong maximum principle for $p(x)$ -laplace equations. *Chinese Journal of Contemporary Mathematics*, 24(3) :277–282, 2003.
- [FZZ05] X.L. Fan, Q.-H. Zhang, and D. Zhao. Eigenvalues of $p(x)$ -laplacian dirichlet problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 302(2) :306–317, 2005.

- [Gia00] E. Giarrusso. Asymptotic behaviour of large solutions of an elliptic quasilinear equation in a borderline case. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I Mathématique*, 331(10) :777–782, 2000.
- [GM72] A. Gierer and H. Meinhardt. A theory of biological pattern formation. *Kybernetik*, 12(1) :30–39, 1972.
- [GM21] U. Guarnatto and S.A. Marano. Infinitely many solutions to singular convective neumann systems with arbitrarily growing reactions. *Journal of Differential Equations*, 271 :849–863, 2021.
- [Gra07] K. A. Grasse. Mapping properties that preserve convergence in measure on finite measure spaces. *Mathematical Analysis and Applications*, 326(2) :1116–1123, 2007.
- [GST07] J. Giacomoni, I. Schlinder, and P. Takac. Sobolev versus hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 6(1) :117–158, 2007.
- [GT98] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic and differential equations of second order*. Springer, 1998.
- [HAL19] M. A. Hammou, E. Azroul, and B. Lahmi. Topological degree methods for a strongly non-linear $p(x)$ -elliptic problem. *Revista Colombiana de Matematicas*, 53(1) :27–39, 2019.
- [HHK05] P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Koskenoja. Hardy’s inequality in variable exponent sobolev space. *Georgian Mathematical Journal*, 12(3) :431–432, 2005.
- [HM92] T.C. Halsey and J.E. Martin. Rheology of electrorheological fluids. *Physical Review Letters*, 68(10) :1519, 1992.
- [Hä05] P. A. Hästö. The $p(x)$ -laplacian and applications. *J. Anal*, 15 :53–62, 2005.
- [IL07] L. Iturriaga and S. Lorca. Existence and multiplicity results of degenerate elliptic equations with dependence on the gradient. *Boundary Value Problems*, 12 :1–12, 2007.
- [JWZ19] P.X. Jiang, Y. Wang, and Y. Zhu. Differential global reaction model with variable stoichiometric coefficients for thermal cracking of n-decane at supercritical pressures. *Energy & Fuels*, 33(8) :7244–7256, 2019.
- [Kel69] H. B. Keller. Elliptic boundary value problems suggested by non-linear diffusion processes. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 35(5) :363–381, 1969.
- [KK78] J.L. Kazdan and R.J. Kramer. Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31(5) :619–645, 1978.
- [KR91] O. Kovacik and J. Rakosnik. On spaces $l^{p(x)}$ and $w^{1,p(x)}$. *Czechoslovak mathematical journal*, 41(116) :592–618, 1991.
- [Kra78] R.J. Kramer. Sub-and super-solutions of quasilinear elliptic boundary value problems. *Journal of Differential Equations*, 28(2) :278–283, 1978.
- [KWZ10a] Y.-H. Kim, L. Wang, and C. Zhang. Global bifurcation for a class of degenerate elliptic equations with variable exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2) :624–637, 2010.

- [KWZ10b] Y.-H. Kim, L. Wang, and C. Zhang. Global bifurcation for a class of degenerate elliptic equations with variable exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2) :624–637, 2010.
- [LLV85] S. Ladde, V. Lakshmikantham, and A.S. Vatsla. *Monotone Iterative Technique for Nonlinear Differential Equations*. Pitman, Boston, 1985.
- [LM91] A. C. Lazer and P. J. McKenna. On a singular non-linear elliptic boundary-value problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 111(3) :721–730, 1991.
- [LS34] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 51 :45–78, 1934.
- [LU68] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, 1968.
- [LZZ14] Y. Liang, Q.-H. Zhang, and C. Zhao. On the boundary blow-up solutions of $p(x)$ -laplacian equations with gradient terms. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 18(12) :599–632, 2014.
- [MM00] M. Montenegro and M. Montenegro. Existence and nonexistence of solutions for quasilinear elliptic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 245(2) :303–316, 2000.
- [MMZ17] D. Motreanu, A. Moussaoui, and Z. Zhang. Positive solutions for singular elliptic systems with convection term. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19(3) :2165–2175, 2017.
- [MVV18] D. Motreanu, C. Vetro, and F. Vetro. Systems of quasilinear elliptic equations with dependence on the gradient via subsolution-supersolution method. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, 11(2) :309, 2018.
- [Nak50] H. Nakano. *Modulated semi-ordered linear spaces*. Maruzen Company, Tokyo, 1950.
- [Orl31] W. Orlicz. Über konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, 3(1) :200–211, 1931.
- [Pao92] V. Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Press, New York, 1992.
- [Per97] I. Peral. Multiplicity of solutions for the p -laplacian. *International Center for Theoretical Physics Lecture Notes*, 1997.
- [PS99] V.S. Pugachev and I.N. Sinitsyn. *Lectures on functional analysis and applications*. World Scientific, 1999.
- [RADW12] L. Rongy, P. Assemat, and A. De Wit. Marangoni-driven convection around exothermic autocatalytic chemical fronts in free-surface solution layers. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Non-linear Science*, 22(3) :037106, 2012.
- [Rui04] D. Ruiz. A priori estimates and existence of positive solutions for strongly non-linear problems. *Journal of Differential Equations*, 199(1) :96–114, 2004.
- [Ruz04] M. Ruzicka. Modeling, mathematical and numerical analysis of electrorheological fluids. *Mechanics Research Communications*, 49(6) :565–609, 2004.
- [Sam98] S. Samko. Convolution and potential type operators in $l^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. *Integral Transforms and Special Functions*, 7(3-4) :261–284, 1998.
- [Sam00] S. Samko. *Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^N)$* , volume 5. Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics. International Society for Analysis, Applications and Computation, Springer, Boston, MA, 2000.

- [SDHa07] L. Sebestikova, J. D’Hernoncourt, M.J.B. Hauser, and al. Flow-field development during finger splitting at an exothermic chemical reaction front. *Physical Review E*, 75(2) :026309, 2007.
- [Sha79] I. I. Sharapudinov. Topology of the space $l^{p(t)}([0; 1])$. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 26(4) :796–806, 1979.
- [SV14] O. Saifia and J. Vélin. Existence and nonexistence of solutions to non-linear gradient elliptic systems involving $(p(x), q(x))$ -laplacian operators. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(163) :1–22, 2014.
- [SWW17] G.Q. Sun, C.H. Wang, and Z.Y. Wu. Pattern dynamics of a gierer–meinhardt model with spatial effects. *Nonlinear Dynamics*, 88(2) :1385–1396, 2017.
- [Tan13] M. Tanaka. Existence of a positive solution for quasilinear elliptic equations with a non-linearity including the gradient. *Boundary Value Problems*, 173(1) :1–11, 2013.
- [Tar07] Luc Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [TG20] P. Takac and J. Giacomoni. A $p(x)$ -laplacian extension of the diaz-saa inequality and some applications. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 150(1) :205–232, 2020.
- [Tol84] P. Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *Journal of Differential equations*, 51(1) :126–150, 1984.
- [Tur90] A. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Bulletin of mathematical biology*, 52(1) :153–197, 1990.
- [Vé16] J. Vélin. Existence result for a gradient-type elliptic system involving a pair of $p(x)$ and $q(x)$ -laplacian operators. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 61(5) :644–681, 2016.
- [WB00] T. Wunderlich and P.O. Brunn. Pressure drop measurements inside a flat channel-with flush mounted and protruding electrodes of variable length-using an electro-rheological fluid. *Experiments in fluids*, 25(5) :455–461, 2000.
- [Whi90] M. Whittle. Computer simulation of an electrorheological fluid. *Journal of non-Newtonian fluid mechanics*, 37(2-3) :233–263, 1990.
- [Zei86] E. Zeidler. *Non-linear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Zha05] Q. Zhang. A strong maximum principle for differential equations with nonstandard $p(x)$ - growth conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 312(1) :24–32, 2005.
- [Zha06] Z. J. Zhang. Boundary blow-up elliptic problems with non-linear gradient terms. *Journal of Differential Equations*, 228(2) :661–684, 2006.
- [Zha07] Q. Zhang. Existence and asymptotic behavior of positive solutions to $p(x)$ -laplacian equations with singular non-linearities. *Journal of Inequalities and Applications*, 2007 :1–9, 2007.

ANNEXE A

PROPRIÉTÉ LIÉE À LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DU $P(X)$ -LAPLACIEN

L'isolation de la première valeur propre du $p(x)$ -Laplacien, lorsque $p(\cdot) \equiv p$ (constant), fait l'objet d'une vaste littérature, et fut connue depuis les travaux de Annane et Lions[AL87]. Cependant, à notre connaissance, il n'a pas encore été prouvé de résultat d'isolation dans le cas où p est une fonction. Considérons les hypothèses suivantes :

- (p) • $p \in C^1(\overline{\Omega})$ et $1 < p_- := \min_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_+ := \max_{x \in \Omega} p(x) < \infty$.
- ($\mathcal{A}_1$) • $A(x, t\xi) = t^{p(x)} A(x, \xi)$ pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ et p.p. $x \in \Omega$.
- ($\mathcal{A}_2$) • $A \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N) \cap C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ et $a_i = \frac{1}{p} \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
- ($\mathcal{A}_3$) • $\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x, \xi) \cdot \eta_i \eta_j \geq \gamma |\xi|^{p(x)-2} |\eta|^2$ pour une certaine constante $\gamma \in (0, \infty)$.
- ($\mathcal{A}_4$) • $\sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| \leq \Gamma |\xi|^{p(x)-2}$ pour une certaine constante $\Gamma \in (0, \infty)$.

Dans cette section, nous utiliserons l'inégalité de type Diaz et Saa, rappelée dans le Lemme suivant.

Lemme A.0.1 (Inégalité de Diaz et Saa, voir [DS87] Lemme 2). *Pour $i = 1, 2$, soient $w_i \in L^\infty(\Omega)$ telles que $w_i \geq 0$ p.p. sur Ω , $w_i^{\frac{1}{p}} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Delta_p w_i^{\frac{1}{p}} \in L^\infty(\Omega)$ et $w_1 = w_2$ sur $\partial\Omega$. Alors on a,*

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\Delta_p w_1^{1/p}}{w_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/p}}{w_2^{(p-1)/p}} \right) (w_1 - w_2) dx \geq 0. \quad (\text{A.1})$$

si l'on suppose que $(w_i/w_j) \in L^\infty(\Omega)$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

Dans la littérature, une généralisation de l'inégalité (A.1) est la suivante

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\operatorname{div}(a(x, \nabla u_1(x)))}{u_1(x)^{r-1}} + \frac{\operatorname{div}(a(x, \nabla u_2(x)))}{u_2(x)^{r-1}} \right) (u_1^r - u_2^r) dx \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

où $r \in [1, \infty)$, $u_i = w_i^{1/r}$ ($i = 1, 2$), p est une fonction satisfaisant $(\mathbf{p})$ et $a(x, \xi) = \frac{1}{p(x)} \nabla_\xi A(x, \xi)$, avec A une fonction convexe pour tout $x \in \Omega$ fixé, satisfaisant $(\mathcal{A})$. L'inégalité (A.2) est appelée *inégalité de type Diaz et Saa*, et a été établie par les auteurs :

- Arora, Giacomoni et Warnault en 2020 (voir [AGW20, Lemme 2.1]), dans le cas où $1 \leq r < p^-$,
- Giacomoni et Takac en 2020 (voir [TG20, Théorème 2.4]), dans le cas où $1 \leq r \leq p^-$.

Dans [AGW20], les auteurs ont établi leur inégalité de type de Diaz et Saa en utilisant des identités de Picone adaptées aux opérateurs à croissance non standard (voir [AGW20, Théorème 1.4]). Ces identités de Picone sont une extension au cas d'exposants variables de celles obtenues par Brasco et Franzina dans le cas d'exposants constants (voir [BF14, Proposition 2.9]).

Ici, nous proposons une version de l'inégalité (A.2) (voir Lemme A.3.2), dans le cas où $a(x, \xi) = |\xi|^{p(x)-2} \xi$ et $r = p^+$.

Grâce à l'adaptation et l'application du théorème de la valeur moyenne, nous établissons que le sous-espace associé à une valeur propre du $p(x)$ -Laplacien est de dimension 1. Ainsi, nous affirmons le théorème suivant

Théorème A.0.1 (Isolation de la première valeur propre). *La première valeur propre, notée λ_1 , du problème (3.2), est isolée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $a > \lambda_1$, telle que λ_1 est l'unique valeur propre de (3.2) dans l'intervalle $[0, a]$.*

Dans toute la suite, nous considérerons l'hypothèse suivante :

(H_p) $p \in C^1(\overline{\Omega})$ est une fonction satisfaisant $1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < N$, et il existe $x \notin \overline{\Omega}$, tel que, pour tout $(t, w) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^N$, la fonction $p(x + tw)$ est monotone.

A.1 État du sous-espace propre associé à une valeur propre du $p(x)$ -Laplacien.

Dans le but de prouver le théorème A.0.1, on aura besoin du lemme suivant, qui assure que le problème de valeur propre (3.2) est homogène par rapport à toute constante positive C .

Lemme A.1.1. *Soit (v, λ) une solution propre du problème (3.2), au sens faible, alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}_+$ la paire $(C.v, \lambda)$ est aussi une solution de (3.2).*

Démonstration. D'après le Théorème B.3.1, en posant $f(x) = C^{p(x)-1}$, il s'ensuit que pour toute solution (v, λ) de (3.2) et pour toute constante $C \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(|\nabla(C.v)|^{p(x)-2} \nabla(C.v) \nabla \phi - \lambda |C.v|^{p(x)-2} (C.v) \phi \right) dx \\ &= \int_{\Omega} C^{p(x)-1} \left(|\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla \phi - \lambda |v|^{p(x)-2} v \phi \right) dx \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.3}$$

pour toute fonction test $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Ceci achève la démonstration. $\square$

A.2 Invariance du signe des premières fonctions propres

Le lemme suivant affirme que toute fonction propre, associée à la première $\lambda_{1,p(\cdot)}$, est de signe constant sur Ω . Ce résultat est d'une importance capitale pour la suite.

Lemme A.2.1. *Soit (u_1, λ_1) une première solution propre de (3.2), alors u_1 ne change pas de signe sur Ω .*

Démonstration. Étant donné que u_1 est une solution de (3.2), alors il en est de même pour $|u_1|$. Par conséquent, en appliquant le Théorème C.0.2, il existe, pour tout sous-ensemble compacte non vide $K \subset \Omega$, une constante positive c telle que $|u| \geq c$ p.p. dans K . Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, il s'ensuit que $u < 0$ dans Ω , ou $u > 0$ dans Ω . $\square$

A.3 Une inégalité de type Diaz et Saa

Suivant le même raisonnement que [DS87, Lemme 1], nous établissons que la fonctionnelle énergie

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \quad \text{with } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \quad \text{et } F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt$$

est convexe par rapport à la variable $w = u^{p^+}$. De ce fait, on conclut que l'opérateur

$$w \mapsto \frac{(-\Delta_{p(x)} w^{1/p^+})}{w^{1/p^+}}$$

est monotone.

Lemme A.3.1. *Soit l'application $J : L^1(\Omega) \rightarrow (-\infty, +\infty]$, définie par*

$$\begin{cases} J(w) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla w^{1/p^+}|^{p(x)} dx & \text{si } w \geq 0 \text{ et } w^{1/p^+} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, J est convexe.

Démonstration. Soient $w_1, w_2 \in A$, avec l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ w \in L^1(\Omega) \mid w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, w \neq 0, w^{1/p^+} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \right\},$$

et soit $z_i = w_i^{1/p^+}$ ($i = 1, 2$), et $z_3 = (tw_1 + (1-t)w_2)^{1/p^+}$, avec $t \in (0, 1)$. Remarquons que

$$\begin{aligned} z_3^{p^+-1} |\nabla z_3| &= \frac{1}{p^+} |\nabla z_3^{p^+}| = \frac{1}{p^+} |\nabla (tw_1 + (1-t)w_2)| = \frac{1}{p^+} |t \nabla w_1 + (1-t) \nabla w_2| \\ &= \frac{1}{p^+} \left| t p^+ z_1^{p^+-1} \nabla z_1 + p^+ (1-t) z_2^{p^+-1} \nabla z_2 \right| \leq t z_1^{p^+-1} |\nabla z_1| + (1-t) z_2^{p^+-1} |\nabla z_2|. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Fixons $x \in \Omega$, et définissons l'espérance modulaire $\mathbb{E} [|\cdot|^{s(x)}]$, par $\mathbb{E} [|Z|^{s(x)}] = t z_1^{s(x)} + (1-t) z_2^{s(x)}$, pour tout $Z \in \mathbb{R}^2$, et pour toute fonction s telle que $1 \leq s^-$. Dans ce cas, la forme discrète de l'inégalité de Hölder implique que

$$\mathbb{E} [|XY|^{r(x)}]^{\frac{1}{r(x)}} \leq \mathbb{E} [|X|^{p(x)}]^{\frac{1}{p(x)}} \mathbb{E} [|Y|^{q(x)}]^{\frac{1}{q(x)}}, \tag{A.5}$$

avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)}$ pour tout $x \in \Omega$. D'après (A.4) et (A.5), on peut écrire que

$$\begin{aligned} z_3^{p^+-1} |\nabla z_3| &\leq \mathbb{E} \left[\left| \{z_1^{p^+-1}, z_2^{p^+-1}\} \right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \right]^{\frac{p(x)-1}{p(x)}} \mathbb{E} \left[|\{|\nabla z_1|, |\nabla z_2|\}|^{p(x)} \right]^{\frac{1}{p(x)}} \\ &= \left(t z_1^{\frac{(p^+-1)p(x)}{p(x)-1}} + (1-t) z_2^{\frac{(p^+-1)p(x)}{p(x)-1}} \right)^{\frac{p(x)-1}{p(x)}} \left(t |\nabla z_1|^{p(x)} + (1-t) |\nabla z_2|^{p(x)} \right)^{\frac{1}{p(x)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Remarquons que, puisque $\frac{p(x)}{p^+} \frac{p^+-1}{p(x)-1} \geq 1$, pour tout $x \in \Omega$, alors $t \mapsto t^{\frac{p(x)}{p^+} \frac{p^+-1}{p(x)-1}}$ est convexe, et on a

$$\frac{\left(t z_1^{p^+} + (1-t) z_2^{p^+} \right)^{\frac{p(x)}{p^+} \frac{p^+-1}{p(x)-1}}}{t z_1^{\frac{(p^+-1)p(x)}{p(x)-1}} + (1-t) z_2^{\frac{(p^+-1)p(x)}{p(x)-1}}} \leq 1. \quad (\text{A.7})$$

Par conséquent, en élevant les deux membres de (A.6) à la puissance $p(x)$ ($x \in \Omega$ fixé), on obtient, d'après (A.7), l'inégalité

$$|\nabla z_3|^{p(x)} \leq t |\nabla z_1|^{p(x)} + (1-t) |\nabla z_2|^{p(x)}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \quad (\text{A.8})$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{1}{p(x)}$ et en intégrant sur Ω ,

$$J(tw_1 + (1-t)w_2) \leq tJ(w_1) + (1-t)J(w_2).$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Dans le lemme qui suit, on donne une extension, au cas d'exposant variable, de l'inégalité de Diaz et Saa.

Lemme A.3.2. *Soit $p : \Omega \rightarrow (1, \infty)$ une fonction continue, satisfaisant $1 \leq p^-$. Alors, l'inégalité suivante*

$$\int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta_{p(x)} u_1}{u_1^{p^+-1}} + \frac{\Delta_{p(x)} u_2}{u_2^{p^+-1}} \right) (u_1^{p^+} - u_2^{p^+}) dx \geq 0$$

est vérifiée, au sens des distributions, pour tous $u_1, u_2 \in L^\infty$, tels que $u_1, u_2 > 0$ et $\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_2}{u_1} \in L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. D'après le Lemme A.3.1, on sait que la fonction $w \mapsto J(w)$ est convexe. Par conséquent la dérivée directionnelle de J par rapport à w_1 , dans la direction $w_2 - w_1$, entraîne

$$\begin{aligned} dJ(w_1; w_2 - w_1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(w_1 + t(w_2 - w_1)) - J(w_1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J((1-t)w_1 + tw_2) - J(w_1)}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t)J(w_1) + tJ(w_2) - J(w_1)}{t} = J(w_2) - J(w_1). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

De façon similaire, la dérivée directionnelle de J par rapport à w_2 , dans la direction $w_1 - w_2$, entraîne

$$dJ(w_2; w_1 - w_2) \leq J(w_1) - J(w_2). \quad (\text{A.10})$$

Considérons les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$, et $h : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, définies de la façon suivante

$$\begin{aligned} f &: r \mapsto |r|^{p(x)}, \quad x \in \Omega \text{ fixé,} \\ g &: s \rightarrow \nabla s \\ h &: t \rightarrow t^{1/p^+}. \end{aligned}$$

Posons $\Phi = f \circ g \circ h$, c'est-à-dire, par définition,

$$\Phi(w) = \left| \nabla w^{1/p^+} \right|^{p(x)} \quad \text{pour tout } w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

La dérivée directionnelle de Φ par rapport à w , dans la direction $\xi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, est

$$d\Phi(w; \xi) = d\Phi_w(\xi) = df_{g(h(w))} \circ dg_{h(w)} \circ dh_w(\xi) = df \{g(h(w)); dg[h(w); dh(w; \xi)]\}. \quad (\text{A.11})$$

D'après le théorème des accroissements finis, le calcul de $dh_w(\xi_1) = dh(w; \xi_1)$ donne

$$dh(w; \xi_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(w + t\xi_1)^{1/p^+} - w^{1/p^+}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0, c_t \rightarrow 0} \frac{(w + c_t\xi_1)^{1/p^+-1} t\xi_1}{p^+ t} = \frac{1}{p^+} w^{1/p^+-1} \xi_1.$$

De façon similaire, le calcul de $dg_{h(w)}(\xi_2) = dg(h(w); \xi_2)$ donne

$$dg(h(w); \xi_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla(h(w) + t\xi_2) - \nabla(h(w))}{t} = \nabla \xi_2,$$

et le calcul de $df_{g(h(w))}(\xi_3) = df(g(h(w)); \xi_3)$ donne

$$\begin{aligned} df(g(h(w)); \xi_3) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|g(h(w)) + t\xi_3|^{p(x)} - |g(h(w))|^{p(x)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, c_t \rightarrow 0} \frac{p(x) |g(h(w)) + c_t\xi_3|^{p(x)-2} t (g(h(w)) + c_t\xi_3) \xi_3}{t} \\ &= p(x) |g(h(w))|^{p(x)-2} g(h(w)) \xi_3 = p(x) \left| \nabla w^{1/p^+} \right|^{p(x)-2} \nabla w^{1/p^+} \xi_3. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

On pose $\xi_3 = dg(h(w); dh(w; \xi))$ dans (A.12). D'après les précédents calculs et (A.11), on obtient

$$\begin{aligned} d\Phi(w; \xi) &= df(g(h(w)); \xi_3) = p(x) \left| \nabla w^{1/p^+} \right|^{p(x)-2} \nabla w^{1/p^+} dg(h(w); dh(w; \xi)) \\ &= p(x) \left| \nabla w^{1/p^+} \right|^{p(x)-2} \nabla w^{1/p^+} \nabla dh(w; \xi) = p(x) \left| \nabla w^{1/p^+} \right|^{p(x)-2} \nabla w^{1/p^+} \nabla \left(\frac{1}{p^+} w^{1/p^+-1} \xi \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Maintenant, soit la fonctionnelle J , définie par

$$J(w) = \int_{\Omega} \frac{p^+}{p(x)} \Phi(w) dx = \int_{\Omega} \frac{p^+}{p(x)} \left| \nabla w^{1/p^+} \right|^{p(x)} dx \quad \text{pour tout } w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et (A.13), la dérivée directionnelle de J par rapport à w , dans la direction ξ , donne

$$\begin{aligned}
dJ_w(\xi) &= dJ(w; \xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{p^+}{p(x)} \frac{\Phi(w + t\xi) - \Phi(w)}{t} dx = \int_{\Omega} \frac{p^+}{p(x)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(w + t\xi) - \Phi(w)}{t} dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{p^+}{p(x)} d\Phi(w; \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{p^+}{p(x)} p(x) |\nabla w^{1/p^+}|^{p(x)-2} \nabla w^{1/p^+} \nabla \left(\frac{1}{p^+} w^{1/p^+-1} \xi \right) dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla w^{1/p^+}|^{p(x)-2} \nabla w^{1/p^+} \nabla (w^{1/p^+-1} \xi) dx = \int_{\Omega} \frac{-\Delta_{p(x)} w^{1/p^+}}{w^{(p^+-1)/p^+}} \xi dx.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Par conséquent, en combinant (A.9) et (A.10), on obtient, d'après (A.14), en posant $\xi = w_1 - w_2$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq dJ(w_1; w_1 - w_2) - dJ(w_2; w_1 - w_2) \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta_{p(x)} w_1^{1/p^+}}{w_1^{(p^+-1)/p^+}} + \frac{\Delta_{p(x)} w_2^{1/p^+}}{w_2^{(p^+-1)/p^+}} \right) (w_1 - w_2) dx,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant le changement de variable $w_i^{1/p^+} = u_i$ ($i = 1, 2$),

$$0 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta_{p(x)} u_1}{u_1^{p^+-1}} + \frac{\Delta_{p(x)} u_2}{u_2^{p^+-1}} \right) (u_1^{p^+} - u_2^{p^+}) dx.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

A.4 Un résultat lié à l'isolation

Le lemme suivant est la généralisation partielle de [Per97, Lemme 1.4.6].

Lemme A.4.1. *Soit (w, λ) une solution propre du problème (3.2), avec $\lambda \neq \lambda_1$, où λ_1 désigne la première valeur propre. Alors, w change de signe dans Ω , c'est à dire que $w^+ \neq 0$, et $w^- \neq 0$. De plus, il existe $x_0, x_1 \in \Omega$, tels que*

$$|\Omega^-| \geq \left(C_{\Omega} \lambda^{-p(x_1)} \right)^{\frac{p^*(x_0)p(x_0)}{p^*(x_0)-p(x_0)}},$$

où $\Omega^- = \{x \in \Omega | w(x) < 0\}$, C_{Ω} est une constante (indépendante de w), et $p^*(x_0) = \frac{p(x_0)N}{N-p(x_0)}$ (resp. $p^*(x_0) = 2p(x_0)$) si $1 < p^- \leq p^+ < N$ (resp. si $N \leq p^-$).

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons que w ne change pas de signe dans Ω . Sans perte de généralité, supposons que $w > 0$ (resp. $w < 0$) dans Ω , et choisissons une paire (u_1, λ_1) , solution de (3.2), telle que $u_1 > 0$ (resp. $u_1 < 0$). D'après le Lemme A.2.1, un tel choix est toujours possible. De plus, en vertu du Lemme A.3.2, puisque $\frac{u_1}{w}, \frac{w}{u_1} \in L^{\infty}(\Omega)$, et $u_1^{1/p^+}, w^{1/p^+} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on sait que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta_{p(x)} u_1}{u_1^{p^+-1}} + \frac{\Delta_{p(x)} w}{w^{p^+-1}} \right) (u_1^{p^+} - w^{p^+}) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda_1 u_1^{p(x)-1}}{u_1^{p^+-1}} - \frac{\lambda w^{p(x)-1}}{w^{p^+-1}} \right) (u_1^{p^+} - w^{p^+}) dx \\
&= \int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda) u_1^{p(x)-p^+} (u_1^{p^+} - w^{p^+}) dx + \int_{\Omega} \lambda_1 (u_1^{p(x)-p^+} - w^{p(x)-p^+}) (u_1^{p^+} - w^{p^+}) dx.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Naturellement, on a

$$\int_{\Omega} \lambda_1 \left(u_1^{p(x)-p^+} - w^{p(x)-p^+} \right) \left(u_1^{p^+} - w^{p^+} \right) dx < 0. \quad (\text{A.16})$$

Aussi, remarquons que, si (w, λ) est une solution de (3.2), alors il en est de même pour $(k.w, \lambda)$, pour tout $k \in \mathbb{R}_+$ (voir Lemme A.1.1). Replaçons w par $k.w$ dans le premier terme de la dernière égalité de (A.15). Puisque $u_1^{p(x)} \in L^\infty(\Omega)$, d'après le théorème de la Valeur Moyenne (Théorème 1.4.1), il existe $x_0 \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda) u_1^{p(x)-p^+} \left(u_1^{p^+} - (kw)^{p^+} \right) dx &= (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u_1^{p(x)} dx - (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u_1^{p(x)-p^+} (kw)^{p^+} dx \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \left[\int_{\Omega} u_1^{p(x)} dx - k^{p^+} u_1(x_0)^{p(x_0)} \int_{\Omega} \frac{u_1^{p^+}}{w^{p^+}} dx \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Remarquons que $\int_{\Omega} \frac{u_1^{p^+}}{w^{p^+}} dx < \infty$, puisque $\frac{u_1}{w} \in L^\infty(\Omega)$. Aussi, choisissons k suffisamment petit, de sorte que

$$\min\{1, \|u_1\|_{p(x)}\} \geq k \max\{1, \|u_1\|_{\infty}^{p^+}\} \left\| \frac{u_1}{w} \right\|_{L^{p^+}(\Omega)}.$$

Alors, d'après [Fan07, Théorème 1.3], et la dernière égalité de (A.17), on obtient, pour une telle constante k , que

$$\int_{\Omega} (\lambda_1 - \lambda) u_1^{p(x)-p^+} \left(u_1^{p^+} - (kw)^{p^+} \right) dx < 0, \quad (\text{A.18})$$

la négativité étant due au fait que $\lambda_1 < \lambda$. La combinaison de (A.15) avec (A.16) et (A.18) entraîne

$$0 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda_1 u_1^{p(x)-1}}{u_1^{p^+-1}} - \frac{\lambda w^{p(x)-1}}{w^{p^+-1}} \right) \left(u_1^{p^+} - w^{p^+} \right) dx < 0,$$

ce qui est une contradiction. Alors w doit obligatoirement changer de signe dans Ω .

Maintenant, évaluons le problème (3.2) en la solution $(k.w, \lambda)$, où $k = \left(\int_{\Omega} |\nabla w^{-}|^{p(x)} dx \right)^{-1}$, et multiplions l'égalité obtenue par la fonction test $k.w^{-}$. De ce fait, on obtient

$$1 = \int_{\Omega} |\nabla(k.w^{-})|^{p(x)} dx = \lambda \int_{\Omega} |k.w^{-}|^{p(x)} dx. \quad (\text{A.19})$$

D'après le théorème de la Valeur Moyenne (Théorème 1.4.1), il existe $x_0, x_1 \in \Omega$, tels que $\int_{\Omega} |\nabla(k.w^{-})|^{p(x)} dx = \|\nabla(k.w^{-})\|_{p(x)}^{p(x_0)}$ et $\int_{\Omega} |k.w^{-}|^{p(x)} dx = \|k.w^{-}\|_{p(x)}^{p(x_1)}$. Par conséquent, d'après (A.19), on obtient

$$1 = \|\nabla(k.w^{-})\|_{p(x)}^{p(x_0)} = \|\nabla(k.w^{-})\|_{p(x)}^{p(x_1)} = \lambda \|k.w^{-}\|_{p(x)}^{p(x_1)}. \quad (\text{A.20})$$

En considérant l'inégalité de Sobolev suivante

$$\|\nabla(k.w^{-})\|_{p(x)} \geq C_{\Omega} \|k.w^{-}\|_{p^*(x)} \quad \text{où } p^*(x) = \begin{cases} \frac{p(x)N}{N-p(x)} & \text{si } 1 < p^- \leq p^+ < N \\ 2p(x) & \text{si } N \leq p^-, \end{cases}$$

on obtient, d'après (A.20), et l'inégalité de Hölder,

$$C_{\Omega}^{p(x_1)} \|k.w^{-}\|_{L^{p^*(x)}(\Omega)}^{p(x_1)} \leq \|\nabla(k.w^{-})\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p(x_1)} = \lambda \|k.w^{-}\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p(x_1)} \leq \lambda \|k.w^{-}\|_{L^{p^*(x)}(\Omega)}^{p(x_1)} \|1\|_{L^{\frac{p^*(x)p(x)}{p^*(x)-p(x)}}(\Omega^-)}^{p(x_1)},$$

c'est-à-dire,

$$\|1\|_{L^{\frac{p^*(x)p(x)}{p^*(x)-p(x)}}(\Omega^-)} \geq C_{\Omega} \lambda^{-p(x_1)}.$$

D'après le théorème de la Valeur Moyenne (Théorème 1.4.1), il existe $x_0 \in \Omega$, tel que

$$\|1\|_{L^{\frac{p^*(x)p(x)}{p^*(x)-p(x)}}(\Omega^-)} = |\Omega^-|^{\frac{p^*(x_0)-p(x_0)}{p^*(x_0)p(x_0)}},$$

d'où l'affirmation

$$|\Omega^-| \geq \left(C_{\Omega} \lambda^{-p(x_1)}\right)^{\frac{p^*(x_0)p(x_0)}{p^*(x_0)-p(x_0)}}.$$

Ceci achève la démonstration. □

Nous sommes maintenant en position de prouver le Théorème A.0.1.

A.5 Preuve du Théorème A.0.1

Soit $\lambda \geq 0$ une valeur propre du problème (3.2), et v la fonction propre associée. Par définition de la première valeur propre λ_1 on a que $\lambda \geq \lambda_1$. Ainsi, λ_1 est isolée à gauche. Maintenant, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de valeurs propres (λ_k) , $\lambda_k \neq \lambda_1$, convergeant vers λ_1 . Soit (u_k) la suite des fonctions propres associée avec $\|u_k\|_{p(x)} = 1$. Remarquons que, d'après le Lemme A.1.1, un tel choix est toujours possible, en posant $k = \|u_k\|_{p(x)}^{-1}$.

On peut, par conséquent, considérer une sous-suite, notée encore (u_k) , qui converge faiblement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, fortement dans $L^{p(x)}(\Omega)$, et presque partout dans Ω , vers une fonction $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Puisque $u_k = \left(-\Delta_{p(x)}\right)^{-1} \left(\lambda_k |u_k|^{p(x)-2} u_k\right)$, la sous-suite (u_k) converge fortement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, et, par conséquent, la limite u est une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 , avec une norme égale à 1. D'où, en appliquant le Théorème C.0.1, (u_k) converge uniformément vers u à l'extérieur d'un ensemble de mesure arbitrairement nulle. Ainsi, il existe une portion de Ω , de mesure arbitrairement nulle, en dehors de laquelle u_k est positive, pour k suffisamment grand, ce qui contredit le Lemme A.4.1.

ANNEXE B

THÉORÈME DE LA VALEUR MOYENNE

Dans cette annexe, nous établissons deux résultats importants liés au Théorème de la Valeur Moyenne et au sous-espace propre de la valeur propre du $p(x)$ -Laplacien. Ces résultats sont directement inspirés de [Ban63].

Dans toute la suite, nous supposons que :

$$p \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad 1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < N. \quad (\text{B.1})$$

B.1 Un théorème de la Valeur Moyenne

Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = h(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

pour toute fonction $h \in L^\infty(\Omega)$, non-négative, et non-nulle presque partout.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème B.1.1 (Théorème de la Valeur Moyenne). *Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ une solution du problème (B.2). Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\overline{\Omega})$, positive et bornée satisfaisant $0 \leq m \leq f(x) \leq M < \infty$.*

Considérons une fonction test $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, non-négative. Alors, il existe un réel $\gamma(\phi) \in [m, M]$, tel que

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx = \gamma(\phi) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx. \quad (\text{B.3})$$

Afin de démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'un certain nombre d'outils, dont le Lemme B.1.1, décrits dans la sous-section suivante.

B.1.1 Résultats préliminaires

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\overline{\Omega})$, positive et bornée. Considérons l'ensemble

$$\Omega(y) = \{s \in \Omega \mid f(s) \leq y\}, \quad y \in [m, M], \quad (\text{B.4})$$

où $m = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ et $M = \sup_{x \in \Omega} f(x)$. Considérons une suite de fonctions $\Psi_\epsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ($\epsilon > 0$), appelée suite régularisante, définie par

$$\Psi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \Psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{B.5})$$

où $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bosse, satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\bullet \quad \Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*; \quad (\text{B.6})$$

$$\bullet \quad \text{supp}(\Psi) \subset B_1(0); \quad (\text{B.7})$$

$$\bullet \quad \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(x) dx = 1; \quad (\text{B.8})$$

$$\bullet \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) dx = 0, \quad i \in \{1, N\}; \quad (\text{B.9})$$

où $B_1(0)$ désigne la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Un exemple typique de fonction satisfaisant les propriétés (B.6)-(B.9) est la fonction suivante

$$\Psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } x \in B_1(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Ici, la convolution de Ψ_ϵ avec la fonction indicatrice sur l'ensemble $\Omega(y)$ est définie par

$$\mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\Omega(y)}(x-z) \Psi_\epsilon(z) dz, \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Cette convolution satisfait la propriété suivante

$$\text{supp}(\mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_\epsilon) \subset \text{supp}(\mathbb{1}_{\Omega(y)}) + \text{supp}(\Psi_\epsilon) \subset \Omega(y) + B_\epsilon(0),$$

où le symbole $+$ fait référence à l'addition de Minkowski, définie pour tout ensemble A et B par

$$A + B := \{a + b, \quad a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Maintenant, considérons les fonctionnelles $\tilde{F}_\epsilon, F_\epsilon : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, définies par

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\epsilon(y) &= \begin{cases} \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_\epsilon \right\} \phi \right) dx, & y \in (m, M] \\ 0, & y = m \end{cases} \\ F_\epsilon(y) &= \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_\epsilon \right\} \phi \right) dx, & y \in (m, M] \\ 0, & y = m, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

pour toute fonction test $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, où u désigne la solution du problème (B.2). Il est à remarquer que, d'après les observations précédentes, $\left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_\epsilon \right\} \phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (voir Lemme C.0.1), ce qui justifie que les fonctionnelles $\tilde{F}_\epsilon$ et F_ϵ sont bien définies. Afin d'établir le théorème de la Valeur Moyenne annoncé, on démontre le lemme intermédiaire suivant.

Lemme B.1.1. *Supposons que f est une fonction de classe $C^1(\overline{\Omega})$, avec $-\infty < m \leq f(x) \leq M < \infty$. Supposons aussi que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Alors, les fonctionnelles $F_\epsilon, \tilde{F}_\epsilon$, définies dans (B.10), satisfont*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_m^M d\tilde{F}_\epsilon(y) - \int_m^M y dF_\epsilon(y) \right| = 0. \quad (\text{B.11})$$

Démonstration. Soit $P_n = \{m = y_0 < \dots < y_n = M\}$ une partition de l'intervalle $[m, M]$, telle que $\mathcal{N} = y_k - y_{k-1} = \delta < \eta$. Soit $y'_k \in [y_{k-1}, y_k]$.

On montre que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n [\tilde{F}_\epsilon(y_k) - \tilde{F}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [F_\epsilon(y_k) - F_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left[\int_\Omega f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{\Omega(y_k)} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx - \int_\Omega f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{\Omega(y_{k-1})} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx \right] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n y'_k \left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{\Omega(y_k)} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{\Omega(y_{k-1})} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx \right] \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_\Omega (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{[\mathbb{1}_{\Omega(y_k)} \star \Psi_\epsilon] - [\mathbb{1}_{\Omega(y_{k-1})} \star \Psi_\epsilon]\} \phi) dx \right|. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Il est à noter que

$$\begin{aligned} \{\mathbb{1}_{\Omega(y_k)} \star \Psi_\epsilon\}(x) - \{\mathbb{1}_{\Omega(y_{k-1})} \star \Psi_\epsilon\}(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbb{1}_{\Omega(y_k)} - \mathbb{1}_{\Omega(y_{k-1})})(x-z) \Psi_\epsilon(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\{x \in \Omega \mid y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}}(x-z) \Psi_\epsilon(z) dz \\ &= \mathbb{1}_{\{x \in \Omega \mid y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}} \star \Psi_\epsilon. \end{aligned}$$

D'après (B.12), en posant $A_k = \{x \in \Omega \mid y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n [\tilde{F}_\epsilon(y_k) - \tilde{F}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [F_\epsilon(y_k) - F_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_\Omega (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx \right|. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Il est à observer que

$$\text{supp} \left((f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon\} \phi) \right) \subset ([A_k + B_\epsilon(0)] \cap \Omega) \cup \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N} = \{x \in \Omega \mid \phi(x) = +\infty\} \cup \{x \in \Omega \mid |\nabla \phi(x)| = +\infty\}$. Aussi, on peut remarquer que

$$\int_{\mathcal{N}} (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx = 0.$$

En effet, on montre que $\mathcal{N}$ est un ensemble de mesure nulle, sinon cela contredit le fait que $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$. Aussi, puisque $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on sait, d'après [Fan07, Théorème

1.2], qu'il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\mathcal{N}} (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon\} \phi) dx \right| \\ &\leq (M - m) \max\{1, \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}^{p^+-1}\} \|\mathbb{1}_{\mathcal{N}}\|_{p'(x)} \|\nabla (\{\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon\} \phi)\|_{p(x)} = 0. \end{aligned}$$

D'après (B.13), cela permet d'écrire que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^n [\tilde{F}_\epsilon(y_k) - \tilde{F}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [F_\epsilon(y_k) - F_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \int_{[A_k + B_\epsilon(0)] \cap \Omega} (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \{\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon\} \nabla \phi dx \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^n \int_{[A_k + B_\epsilon(0)] \cap \Omega} (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \phi \nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon) dx \right|. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Dans un premier temps, pour tout $x \in [A_k + B_\epsilon(0)] \cap \Omega$, il existe $(y, z) \in A_k \times B_\epsilon(0)$, tel que $x = y + z$. On en déduit, d'après le Théorème des Accroissements finis, et le fait que $f \in C^1(\overline{\Omega})$, que

$$\begin{aligned} |f(x) - y'_k| &= |f(y + z) - f(y) + f(y) - y'_k| \leq |f(y + z) - f(y)| + |f(y) - y'_k| \\ &\leq \left(\sup_{x \in \Omega} |\nabla f(x)| \right) |z| + |y_k - y_{k-1}| \\ &\leq C\epsilon + \eta. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Dans un deuxième temps, puisque $\mathbb{1}_{\Omega(y_0)} = \mathbb{1}_{\Omega(m)} = 0$, et $\mathbb{1}_{\Omega(y_n)} = \mathbb{1}_{\Omega(M)} = \mathbb{1}_\Omega$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(x - z) \Psi_\epsilon(z) dz = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n [\mathbb{1}_{\Omega(y_k)} - \mathbb{1}_{\Omega(y_{k-1})}] (x - z) \Psi_\epsilon(z) dz \\ &= \int_{\Omega} [\mathbb{1}_{\Omega(y_n)} - \mathbb{1}_{\Omega(y_1)}] (x - z) \Psi_\epsilon(z) dz \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_\Omega(x - z) \Psi_\epsilon(z) dz = \mathbb{1}_\Omega \star \Psi_\epsilon, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

En utilisant (B.15) et (B.16) dans le second membre de l'estimation (B.14), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^n [\tilde{F}_\epsilon(y_k) - \tilde{F}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [F_\epsilon(y_k) - F_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ &\leq (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \phi| \{\mathbb{1}_\Omega \star \Psi_\epsilon\} dx \\ &\quad + (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} \phi \sum_{k=1}^n |\nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon)| dx. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

En vertu de (B.5) et (B.9), on vérifie que, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{A_k}(z) \frac{\partial}{\partial x_i} [\Psi_\epsilon(x-z)] dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{A_k}(z) \frac{\partial}{\partial x_i} [\Psi_\epsilon(x-z)] dz - \mathbb{1}_{A_k}(x) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i} [\Psi_\epsilon(x-z)] dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbb{1}_{A_k}(z) - \mathbb{1}_{A_k}(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} [\Psi_\epsilon(x-z)] dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbb{1}_{A_k}(z) - \mathbb{1}_{A_k}(x)) \frac{1}{\epsilon^{N+1}} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \left(\frac{x-z}{\epsilon} \right) dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathbb{1}_{A_k}(x-\epsilon y) - \mathbb{1}_{A_k}(x)}{\epsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y) dy.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Aussi, puisque que l'ensemble $\{A_k, k = 1, \dots, n\}$ forme une partition de Ω , pour tout $x \in \Omega$ fixé, il existe un unique $k_x \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in A_{k_x}$. Par conséquent, d'après (B.18), on peut écrire que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n |\nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon)| (x) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon) \right| (x) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathbb{1}_{A_k}(x-\epsilon y) - \mathbb{1}_{A_k}(x)}{\epsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y) dy \right| \\
&\leq N \|\nabla \Psi\|_\infty \int_{B_1(0)} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\mathbb{1}_{A_k}(x-\epsilon y) - \mathbb{1}_{A_k}(x)}{\epsilon} \right| dy \\
&= N \|\nabla \Psi\|_\infty \int_{B_1(0)} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_x}}^n \left| \frac{\mathbb{1}_{A_k}(x-\epsilon y) - \mathbb{1}_{A_k}(x)}{\epsilon} \right| + \left| \frac{\mathbb{1}_{A_{k_x}}(x-\epsilon y) - \mathbb{1}_{A_{k_x}}(x)}{\epsilon} \right| \right) dy \\
&= N \|\nabla \Psi\|_\infty \int_{B_1(0)} \left(\frac{\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_{k_x}}(x-\epsilon y)}{\epsilon} + \left| \frac{\mathbb{1}_{A_{k_x}}(x-\epsilon y) - 1}{\epsilon} \right| \right) dy.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

En regroupant les estimations (B.17) et (B.19), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^n [\tilde{F}_\epsilon(y_k) - \tilde{F}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [F_\epsilon(y_k) - F_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\
&\leq (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \phi| \{ \mathbb{1}_\Omega \star \Psi_\epsilon \} dx \\
&+ K(C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} \phi \left(\int_{B_1(0)} \left[\frac{\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_{k_x}}(x-\epsilon y)}{\epsilon} + \left| \frac{\mathbb{1}_{A_{k_x}}(x-\epsilon y) - 1}{\epsilon} \right| \right] dy \right) dx.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

D'après les propriétés (B.6)-(B.8) et [Eva98, Théorème 7 p.714], on sait que, pour tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_\Omega \star \Psi_\epsilon(x) = \mathbb{1}_\Omega(x) = 1. \tag{B.21}$$

Aussi, pour tout $x \in \Omega$ fixé, en posant $A_x = \{z \in \Omega \mid f(z) = f(x)\}$, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} (C\epsilon + \eta) \left(\int_{B_1(0)} \left[\frac{\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_{k_x}}(x - \epsilon y)}{\epsilon} + \left| \frac{\mathbb{1}_{A_{k_x}}(x - \epsilon y) - 1}{\epsilon} \right| \right] dy \right) \\ &= C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{B_1(0)} \left[\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_x}(x - \epsilon y) + |\mathbb{1}_{A_x}(x - \epsilon y) - 1| \right] dy \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{B.22}$$

On peut donc conclure, d'après (B.20), (B.21), (B.22) et le TCD, que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n [\tilde{F}_\epsilon(y_k) - \tilde{F}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [F_\epsilon(y_k) - F_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ & \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[(C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \phi| \{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} dx \right] \\ & + K \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[(C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} \phi \left(\int_{B_1(0)} \left[\frac{\mathbb{1}_{\Omega \setminus A_{k_x}}(x - \epsilon y)}{\epsilon} + \left| \frac{\mathbb{1}_{A_{k_x}}(x - \epsilon y) - 1}{\epsilon} \right| \right] dy \right) dx \right] \\ & = 0. \end{aligned} \tag{B.23}$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Grâce au Lemme B.1.1, nous sommes en position de démontrer le théorème de la Valeur Moyenne que nous avons annoncé, dont la preuve est inspirée de [Ban63, Théorème 5].

B.2 Preuve du Théorème B.3.1

En faisant une intégration par partie, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_m^M y dF_\epsilon(y) &= \int_m^M d[yF_\epsilon(y)] - \int_m^M F_\epsilon(y) dy \\ &= [MF_\epsilon(M) - mF_\epsilon(m)] - \int_m^M F_\epsilon(y) dy. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Autrement dit, d'après le Lemme B.1.1 et (B.24),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \left(\tilde{F}_\epsilon(M) - \tilde{F}_\epsilon(m) \right) - \left(MF_\epsilon(M) - mF_\epsilon(m) - \int_m^M F_\epsilon(y) dy \right) \right| = 0. \tag{B.25}$$

D'après la définition de F_ϵ et $\tilde{F}_\epsilon$ dans (B.10), il est clair que $F_\epsilon(m) = \tilde{F}_\epsilon(m) = 0$, et que

$$\begin{aligned} F_\epsilon(M) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} \phi) dx \\ \tilde{F}_\epsilon(M) &= \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} \phi) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, (B.25) devient

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} \phi) dx - M \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} \phi) dx \right. \\ & \left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_\epsilon \} \phi) dx \right] dy \right| = 0. \end{aligned} \tag{B.26}$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{1}_{\Omega \setminus \Omega(y)}(x) = \mathbb{1}_{\Omega}(x) - \mathbb{1}_{\Omega(y)}(x)$ ($x \in \Omega$), on vérifie que

$$\begin{aligned} & \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \right] dy \\ &= (M - m) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \\ & - \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega \setminus \Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \right] dy. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

De (B.26) et (B.27), on déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx - m \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \right. \\ & \left. - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega \setminus \Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \right] dy \right| = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Pour finir, puisque u est solution du problème (B.2), et d'après l'hypothèse de non-négativité des fonctions h et ϕ , on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \right] dy \quad (\text{B.29})$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_m^M \left[\int_{\Omega} h(x) \{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi dx \right] dy \geq 0. \quad (\text{B.30})$$

De la même façon, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega \setminus \Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \right] dy \geq 0. \quad (\text{B.31})$$

En combinant (B.26) avec (B.29), et (B.28) avec (B.31), on aboutit à

$$\begin{aligned} m \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx \\ &\leq M \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

En procédant comme dans (B.19), et en utilisant le fait que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on montre, pour tout $x \in \Omega$, que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\nabla (\mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon})(x)| = 0$. D'après le TCD, cela implique que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

De la même façon, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon} \} \phi \right) dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx. \quad (\text{B.34})$$

En vertu de (B.32), (B.33) et (B.34), on en déduit que

$$m \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx \leq \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx \leq M \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx.$$

On aboutit donc à l'existence de $\gamma(\phi) \in [m, M]$, tel que

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx = \gamma(\phi) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx.$$

Ceci achève la démonstration.

B.3 État du sous-espace propre associé à la valeur propre du $p(x)$ -Laplacien

Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{p(x)-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

où λ est un réel strictement positif, et $p \in C^1(\overline{\Omega})$ est tel que la fonction $p(x + tw)$ est monotone pour tout $(t, w) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^N$, pour un certain $x \notin \overline{\Omega}$.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème B.3.1. *Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ une solution du problème (B.35). Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\overline{\Omega})$, positive et bornée satisfaisant $-\infty < m \leq f(x) \leq M < \infty$. Alors, pour toute fonction test $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \phi dx = 0. \quad (\text{B.36})$$

La démonstration de ce théorème nécessite un certain nombre d'outils, dont le Lemme B.3.1, décrits dans la sous-section suivante.

B.3.1 Résultats préliminaires

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, positive et bornée. Considérons l'ensemble $\Omega(y)$, défini dans (B.4), ainsi que la fonction bosse $\Psi_{\epsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, définie dans (B.5), pour un paramètre $\epsilon > 0$ fixé, supposé très petit. Considérons aussi les fonctionnelles $\tilde{G}_{\epsilon}, G_{\epsilon} : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, définies par

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\epsilon}(y) &= \begin{cases} \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \right\} \phi \right) dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \right\} \phi dx, & y \in (m, M] \\ 0, & y = m \end{cases} \\ G_{\epsilon}(y) &= \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \left(\left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \right\} \phi \right) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \left\{ \mathbb{1}_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon} \right\} \phi dx, & y \in (m, M] \\ 0, & y = m, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

pour toute fonction test $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, où u désigne la solution du problème (B.2). Nous énonçons le lemme intermédiaire suivant

Lemme B.3.1. *Supposons que f est une fonction de classe $C^1(\overline{\Omega})$, avec $-\infty < m \leq f(x) \leq M < \infty$.*

Alors, les fonctionnelles $G_\epsilon, \tilde{G}_\epsilon$, définies dans (B.37), satisfont

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_m^M d\tilde{G}_\epsilon(y) - \int_m^M y dG_\epsilon(y) \right| = 0. \quad (\text{B.38})$$

Démonstration. Le raisonnement suit la même démarche que la preuve du Lemme B.1.1, donc certaines explications seront omises.

Soit $P_n = \{m = y_0 < \dots < y_n = M\}$ une partition de l'intervalle $[m, M]$, telle que $\mathcal{N} = y_k - y_{k-1} = \delta < \eta$. Soit $y'_k \in [y_{k-1}, y_k]$.

En posant $A_k = \{x \in \Omega \mid y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}$, on montre que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n [\tilde{G}_\epsilon(y_k) - \tilde{G}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [G_\epsilon(y_k) - G_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left[\int_{\Omega} (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon) \phi \, dx \right] \right. \\ & \quad \left. + \lambda \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega} (f(x) - y'_k) |u|^{p(x)-2} u \{ \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon \} \phi \, dx \right] \right| \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Soit $\mathcal{N} = \{x \in \Omega \mid \phi(x) = +\infty\} \cup \{x \in \Omega \mid |\nabla \phi(x)| = +\infty\}$, on peut observer que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{N}} (f(x) - y'_k) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon) \phi \, dx \\ & + \lambda \int_{\mathcal{N}} (f(x) - y'_k) |u|^{p(x)-2} u \{ \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon \} \phi \, dx = 0. \end{aligned}$$

En effet, $\mathcal{N}$ est un ensemble de mesure nulle, sinon cela contredit le fait que $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$. Aussi, on sait, d'après [FZ99, Théorème 4.2] et [Fan07, Théorème 1.2], qu'il existe $\alpha \in (0, 1)$, tel que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{N}} |f(x) - y'_k| |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon) \phi| \, dx + \lambda \int_{\mathcal{N}} |f(x) - y'_k| |u|^{p(x)-1} \{ \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon \} |\phi| \, dx \\ &\leq 2M \max\{1, \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}^{p^+-1}\} \|\mathbb{1}_{\mathcal{N}}\|_{p'(x)} \left(\|\nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon) \phi\|_{p(x)} + \lambda \|\{ \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon \} \phi\|_{p(x)} \right) = 0. \end{aligned}$$

D'après (B.39) et (B.15), (B.16), on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n [\tilde{G}_\epsilon(y_k) - \tilde{G}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [G_\epsilon(y_k) - G_\epsilon(y_{k-1})] \right| \\ &\leq (C\epsilon + \eta) \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} \sum_{k=1}^n \{ \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon \} |\nabla \phi| \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\phi| \sum_{k=1}^n |\nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon)| \, dx \right] \\ &+ \lambda (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} \sum_{k=1}^n \{ \mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon \} |\phi| \, dx \\ &= (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} \{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} |\nabla \phi| \, dx + (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\phi| \sum_{k=1}^n |\nabla (\mathbb{1}_{A_k} \star \Psi_\epsilon)| \, dx \\ &+ \lambda (C\epsilon + \eta) \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} \{ \mathbb{1}_{\Omega} \star \Psi_\epsilon \} |\phi| \, dx \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Pour finir, en faisant $\eta \rightarrow 0$, puis $\epsilon \rightarrow 0$, on aboutit à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n [\tilde{G}_\epsilon(y_k) - \tilde{G}_\epsilon(y_{k-1})] - \sum_{k=1}^n y'_k [G_\epsilon(y_k) - G_\epsilon(y_{k-1})] \right| = 0.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Grâce aux Lemme B.3.1, nous sommes en position de démontrer le théorème de la Valeur Moyenne que nous avons annoncé, dont la preuve est similaire à celle du Théorème B.1.1.

B.4 Preuve du Théorème B.3.1

En procédant à une intégration par partie, on montre, comme dans (B.25), que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \left(\tilde{G}_\epsilon(M) - \tilde{G}_\epsilon(m) \right) - \left(MG_\epsilon(M) - mG_\epsilon(m) - \int_m^M G_\epsilon(y) dy \right) \right| = 0. \quad (\text{B.41})$$

D'après la définition de G et $\tilde{G}_\epsilon$ dans (B.37), il est clair que $G(m) = \tilde{G}_\epsilon(m) = 0$, et que

$$\begin{aligned} G(M) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \\ \tilde{G}_\epsilon(M) &= \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, (B.41) devient

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \right] \right. \\ & - M \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \right) \\ & \left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_m^M \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \right] dy \right| \\ & = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Pour finir, puisque u est solution du problème (B.35), on a

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx = 0, \quad (\text{B.43})$$

et

$$\int_{[m, M]} \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega(y)} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \right] dy = 0. \quad (\text{B.44})$$

En combinant (B.42) avec (B.43) et (B.44), on aboutit à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \right| = 0. \quad (\text{B.45})$$

En procédant comme dans (B.34), on montre que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (\{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \{1_{\Omega} \star \Psi_{\epsilon}\} \phi dx \right) \\ &= \int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \phi dx. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

On peut donc conclure, d'après (B.45) et (B.46), que

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{p(x)-2} u \phi dx = 0.$$

Ceci achève la démonstration.

ANNEXE C

AUTRES RÉSULTATS DE BASE

Théorème C.0.1 (Egorov, voir [Bre83a] Théorème IV.28). *On suppose que $|\Omega| < \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. sur } \Omega \quad (\text{avec } |f(x)| < \infty \text{ p.p.}).$$

Alors

$$\forall \epsilon > 0 \exists A \subset \Omega \text{ mesurable tel que } |\Omega \setminus A| < \epsilon \text{ et } f_n \rightarrow f \text{ uniformément sur } A.$$

Considérons l'équation de type $p(x)$ -Laplace suivante

$$- \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) + d(x)|u|^{q(x)-2}u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{C.1})$$

où Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p(\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) > 1$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $q(\cdot) \in C^0(\overline{\Omega})$, $p(x) \leq q(x) < p^*(x)$ (où $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$, si $p(x) < N$; $p^*(x) = +\infty$, si $p(x) \geq N$), $d(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$, $d(x) \geq 0$ p.p. dans Ω . Sous ces hypothèses nous énonçons le principe de maximum fort suivant.

Théorème C.0.2 (Principe du maximum fort, voir [FZZ03] Théorème 1.1). *Soit u une solution faible du problème (C.1), $u \geq 0$ p.p. dans Ω , et u non identiquement nulle dans Ω . Alors, pour tout sous-ensemble compact non-vide $K \subset \Omega$, il existe une constante positive c telle que $u \geq c$ p.p. dans K .*

Lemme C.0.1 (voir [Tar07] Lemme 7.6). (i) *Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$, et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$ on a $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ (et $\|uv\|_{1,r} \leq C\|u\|_{1,p}\|v\|_{1,q}$).*
(ii) *Si $1 \leq p, q, s < N$ et $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$, alors pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$ on a $uv \in W_{loc}^{1,s}(\Omega)$.*

Considérons l'équation elliptique de type divergence avec condition de bord de Dirichlet

$$\begin{cases} - \operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Hypothèse (p_H). p est Hölder continu sur $\overline{\Omega}$, qui est noté par $p \in C^{0,\beta_1}(\overline{\Omega})$, i.e. il existe une constante positive L et un exposant $\beta_1 \in (0, 1)$ tels que

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^{\beta_1} \quad \text{pour } x_1, x_2 \in \overline{\Omega}.$$

Hypothèse (A^k). $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in C(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N$. Pour tout $(x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $A(x, u, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$, et il existe une constante non-négative $k \geq 0$, une fonction continue non-croissante $\lambda : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ et une fonction continue non-décroissante $\Lambda : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ telle que pour tout $x, x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $u, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\bullet A(x, u, 0) = 0, \quad (C.3)$$

$$\bullet \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial A_j}{\partial \eta_i}(x, u, \eta) \xi_i \xi_j \geq \lambda(|u|)(k + |\eta|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} |\xi|^2, \quad (C.4)$$

$$\bullet \sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial A_j}{\partial \eta_i}(x, u, \eta) \right| \leq \Lambda(|u|)(k + |\eta|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}} |\xi|^2, \quad (C.5)$$

$$\bullet |A(x_1, u_1, \eta) - A(x_2, u_2, \eta)| \leq \Lambda(\max\{|u_1|, |u_2|\}) (|x_1 - x_2|^{\beta_1} + |u_1 - u_2|^{\beta_2}) \\ \times \left[(k + |\eta|^2)^{\frac{p(x_1)-2}{2}} + (k + |\eta|^2)^{\frac{p(x_2)-2}{2}} \right] |\eta| \left(1 + \left| \log(k + |\eta|^2) \right| \right) \quad (C.6)$$

Hypothèse (B). $B \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $B(x, u, \eta)$ est mesurable en x et est continue en (u, η) , et

$$|B(x, u, \eta)| \leq \Lambda(|u|) (1 + |\eta|^{p(x)}), \quad \forall (x, u, \eta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (C.7)$$

où Λ est comme dans l'hypothèse (A^k).

Supposons qu'il existe une constante positive M telle que pour la solution généralisée u du problème (C.2) on a

$$\sup_{\Omega} |u(x)| := \text{esssup}_{\Omega} |u(x)| \leq M. \quad (C.8)$$

Théorème C.0.3 (voir [Fan07] Théorème 1.2). *Soient les hypothèses (p_H), (A^k) et (B), aussi supposons que le bord $\partial\Omega$ de Ω est de classe $C^{1,\gamma}$ et $g \in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$, $\gamma \in (0, 1)$. Si $u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une solution généralisée bornée du problème (C.2) et satisfait (C.8), alors $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, où α et $|u|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}$ dépendent seulement de p^- , p^+ , $N, \lambda(M), \Lambda(M), M, L, \beta_1, \beta_2, \gamma, |\gamma|_{C^{1,\gamma}(\partial\Omega)}$ et Ω .*

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u := -\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (C.9)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, $1 < p(x)$, et $p(x) \in C(\overline{\Omega})$.

Théorème C.0.4 (voir [FZ99] Théorème 4.2). *Si $f(x, u) = (x)$, $f \in L^{\alpha(x)}$, où $\alpha \in C_+(\overline{\Omega})$, satisfait $\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{p^*(x)}$, alors (C.9) admet une unique solution faible.*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sous-ensemble mesurable et $\text{meas } \Omega > 0$. On pose

$$E = \{u : u \text{ est une fonction mesurable dans } \Omega\}.$$

Soit $p \in E$. On adopte les notations suivantes :

$$\bullet \phi(x, s) = s^{p(x)}, \quad \forall x \in \Omega, s \geq 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\bullet \rho(u) = \rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} \phi(x, |u|) dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx, \quad (\text{C.11})$$

$$\bullet L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in E : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \right\}, \quad (\text{C.12})$$

$$\bullet L_0^{p(x)}(\Omega) = \{u \in E : \rho(u) < \infty\}, \quad (\text{C.13})$$

$$\bullet L_1^{p(x)}(\Omega) = \{u \in E : \forall \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}, \quad (\text{C.14})$$

$$\bullet L_+^{\infty}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\infty}(\Omega) : \text{ess inf}_{\Omega} u \geq 1 \right\}. \quad (\text{C.15})$$

Considérons le cas où $p \in L_+^{\infty}(\Omega)$, i.e.

$$1 \leq p^- := \text{ess inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq \sup_{x \in \Omega} p(x) := p^+ < \infty.$$

Par simplicité, on écrit $E_p = L^{p(x)}(\Omega) = L_0^{p(x)}(\Omega) = L_1^{p(x)}(\Omega)$, et on introduit la norme $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ sur E_p (notée $\|u\|_{\rho}$) comme

$$\|u\|_{\rho} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}. \quad (\text{C.16})$$

Théorème C.0.5 ([FZ01] Théorème 1.2). *Soit $u \in E_p \setminus \{0\}$, alors $\|u\|_{\rho} = 0$ si et seulement si $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$.*

Théorème C.0.6 ([FZ01] Théorème 1.4). *Soient $u, u_k \in E_p$, $k = 1, 2, \dots$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{\rho} = 0;$
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k - u) = 0;$
- 3) u_k converge vers u dans Ω en mesure et $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(u_k) = \rho(u).$

Théorème C.0.7 (voir [Gra07] Théorème 8). *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de mesure finie, soit Y un espace métrique, soit (f_n) une suite d'applications arbitraires de X dans Y , et soit $f : X \rightarrow Y$ une application $\mathcal{M}$ -mesurable telle que $f_n \rightarrow f$ en mesure. Si Z est un espace métrique séparable et si $g : Y \rightarrow Z$ est une application borélienne et continue en tout point de $f(X)$, alors $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ en mesure.*

Théorème C.0.8. *Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble compact et convexe d'un espace de Banach $\mathcal{B}$, et soit T une application continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même. Alors T admet un point fixe, i.e. $Tx = x$ pour un certain $x \in \mathcal{S}$.*

Lemme C.0.2 (voir [Fan07] page 431). *Soient $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ (au sens de la notation (C.12), alors l'inégalité de Hölder suivante est réalisée :*

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_{\rho(x)} \|v\|_{\rho(q(x))}.$$

au sens de la notation (C.16).

Théorème C.0.9 (voir [HHK05] Théorème 3.3). *Soit Ω un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ une fonction log-Hölder continue dans Ω , avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Supposons qu'il existe une constante $b > 0$ telle que*

$$|B(z, r) \cap \Omega^c| \geq b |B(z, r)|$$

pour tout $z \in \partial\Omega$ et $r > 0$. Alors il existe des constantes C et a_0 dépendant seulement de p, n et b telles que l'inégalité suivante

$$\left\| \frac{u(x)}{d(x)^{1-a}} \right\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u(x) d(x)^a\|_{p(x)}$$

est vérifiée pour tout $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ et tout $0 \leq a < a_0$.

On considère ϕ_1 une fonction propre associée à la plus petite valeur propre λ_1 du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est une constante, et que $\phi_1 > 0$ dans Ω .

Lemme C.0.3 (voir [LM91] page 726).

$$\int_{\Omega} \phi^r dx < \infty$$

si et seulement si $r > -1$.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda u^{\gamma(x)} & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

où $\lambda > 0$ est une constante et $-1 < \gamma^- \leq \gamma^+ < 0$.

Lemme C.0.4 (voir [AM18] Lemme 1). *Soit u la solution de (C.17) donnée dans [Zha07] pour λ suffisamment grand. Alors, pour $\delta > 0$ suffisamment petit,*

$$\min\{\delta, d(x)\} \leq u(x) \leq C \lambda^{\frac{1}{p^- - 1}} \quad \text{dans } \Omega,$$

où $C, \delta > 0$ sont des constantes indépendantes de λ .

Lemme C.0.5 (voir [LU68] Chapitre 2 Lemme 5.1). *Soit $u(x)$ une fonction mesurable dans Ω . Supposons que pour tout paramètre $k \geq k_0 > 0$, on a*

$$\int_{A_k} (u - k) dx \leq \gamma k^\alpha \text{mes}(A_k)^{1+\epsilon}, \quad (\text{C.18})$$

où A_k désigne l'ensemble des points $x \in \Omega$ pour lesquels $u(x) > k$, et où γ , α et ϵ sont des constantes telles que

$$\begin{cases} 0 < \epsilon, \\ 0 \leq \alpha \leq 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Alors le maximum essentiel $u(x)$ n'excède pas une certaine constante qui dépend uniquement de γ , α , ϵ , k_0 et $\|u\|_{L^1(A_{k_0})}$.

Plus précisément, en notant $k_{\max}$ le maximum essentiel de $u(x)$, et en posant $f(k) = \|u - k\|_{L^1(A_k)}$, on a

$$\begin{cases} k_{\max}^{1-\frac{\alpha}{1+\epsilon}} \leq k_0^{1-\frac{\alpha}{1+\epsilon}} + \gamma^{\frac{1}{1+\epsilon}} \frac{1+\epsilon-\alpha}{\epsilon} f^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(k_0), & \alpha < 1 + \epsilon \\ \ln(k_{\max}) \leq \ln(k_0) + \gamma^{\frac{1}{1+\epsilon}} \frac{1+\epsilon}{\epsilon} f^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(k_0), & \alpha = 1 + \epsilon. \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

On désigne par K_ρ les sphères de rayon $\rho > 0$ centrées dans $\bar{\Omega}$.

Lemme C.0.6. *Supposons que K_{ρ_0} est inclus dans Ω . Supposons, pour un paramètre k arbitraire plus grand qu'un certain $\hat{k}$, et pour des sphères, arbitraires K_ρ et $K_{\rho-\sigma\rho}$, concentriques avec K_{ρ_0} , où $\rho_0 - \sigma_0\rho_0 \leq \rho - \sigma\rho < \rho \leq \rho_0$, que la fonction $u(x)$ satisfasse les inégalités :*

$$\int_{A_k \cap K_{\rho-\sigma\rho}} |\nabla u|^m dx \leq \gamma \left[(\sigma\rho)^{-m} \int_{A_k \cap K_\rho} (u - k)^m dx + \rho^{-\epsilon N} k^\alpha \text{mes}(A_k \cap K_\rho)^{1-\frac{m}{N}+\epsilon} \right],$$

où σ_0, γ, α et ϵ sont des constantes et où $\sigma_0 < 1$, $\epsilon \leq \frac{m}{N}$, et $m \leq \alpha < \epsilon m + m$. Alors, dans la sphère $K_{\rho_0 - \epsilon_0\rho_0}$, le maximum essentiel $\max(u(x))$ est borné supérieurement par une constante dépendant uniquement de $\sigma_0, \hat{k}, N, m, \gamma, \epsilon, \alpha$, et la quantité centre

$$a = \rho_0^{-N} \int_{A_{\hat{k}} \cap K_{\rho_0}} (u(x) - \hat{k})^m dx.$$