Aix*Marseille université
Socialement engagée

NNT/NL : 2020AIXM0001/001ED000

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 09 décembre 2021 par

Vincent CHAMBOULEYRON

Optimisation de l'analyse de surface d'onde par filtrage de Fourier pour les systèmes d'optique adaptative à hautes performances

Discipline
Physique et sciences de la matière

Spécialité
Astrophysique et Cosmologie

École doctorale
ED 352

Laboratoire/Partenaires de recherche
Laboratoire d'Astrophysique de Marseille
ONERA

Composition du jury

Jean-Pierre VÉRAN University of Victoria	Rapporteur
David MOUILLET IPAG	Rapporteur
Charlotte BOND UKATC	Examinatrice
Frantz MARTINACHE Laboratoire Lagrange	Examinateur
Magali DELEUIL LAM	Présidente du jury
Henri BONNET ESO	Invité
Thierry FUSCO ONERA/LAM	Directeur de thèse
Benoît NEICHEL LAM	Co-directeur de thèse
Olivier FAUVARQUE LAM/IFREMER	Co-encadrant de thèse

LAM LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE DE MARSEILLE

ONERA THE FRENCH AEROSPACE LAB

RÉGION SUD PROVENCE ALPES CÔTE D'AZUR

Affidavit

Je soussigné, Vincent Chambouleyron, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Thierry Fusco, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Marseille le 02 octobre 2021

Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Remerciements

Avant toute chose, je remercie ma famille et surtout mes parents d'avoir su m'encourager chaque instant à poursuivre ma passion des étoiles.

Mon exploration du monde de l'astronomie professionnelle a débuté plusieurs années avant le début de cette thèse. Je remercie tous les gens qui m'ont aidé et guidé avant que je débute les travaux présentés ici. Merci à Ichikawa-sensei au Japon qui m'a accompagné dans ma première immersion au sein d'un laboratoire d'astrophysique. Un immense merci aux personnes du département d'astrophysique du CEA, avec qui j'ai pu entre-voir certaines facettes du monde de l'astronomie très différentes de celles qui seront évoquées dans cette thèse : Jérôme Rodriguez, Vincent Réveret, Louis Rodriguez, et bien sûr Diana qui m'a appris tant de choses et m'a finalement ouvert sur la voie de l'instrumentation ! Mille mercis du côté du Canada, avec Stéphane Courteau qui m'aura donné la sublime occasion de découvrir pour la première fois l'optique adaptative grâce à un cours dans les quartiers généraux du CFHT. Je finis ces pré-remerciements avec l'équipe du bâtiment 12 du LESIA, je ne pouvais pas espérer mieux pour mettre le pied à l'étrier dans l'univers de la correction du front d'onde ! Merci entre autres à Gérard, Eric, Fabrice, mais aussi à Vincent qui m'a parlé avec tant de passion et pour la première fois d'un mystérieux objet que l'on nomme pyramide... C'est donc grâce à vous tous que j'ai pu débuter cette thèse dans les meilleurs conditions, je ne l'oublie pas.

Merci au LAM, l'ONERA et l'AMU, et tout particulièrement à Thierry et Benoît mes directeurs de thèse. Votre encadrement a été plus que irréprochable. L'attention et le dévouement que vous mettez dans l'accompagnement de vos étudiants sont d'une aide absolument précieuse et sont sûrement le facteur primordial qui m'a permis de mener ma thèse sereinement. Merci aussi d'avoir su redoubler d'attention lors des moments plus compliqués, où nous étions tous loin du laboratoire, confinés entre quatre murs. Merci bien sûr à Jeff, tu n'es pas officiellement mon encadrant de thèse, mais ton engagement a été comme tel. Merci pour ta grande disponibilité, et le temps que tu donnes si généreusement à tant d'étudiants !

La liste de remerciements qui suit pourrait être infinie... Tout d'abord merci à Pierre qui m'a formé sur toute la partie expérimentale de ma thèse, j'ai rarement vu quelqu'un capable de résoudre des problèmes aussi rapidement. Il semble que l'adage "la simulation c'est bien, mais tout est plus compliqué en réalité" ne s'applique pas vraiment à toi... Un grand merci à Yoyo pour les discussions passionnantes, les histoires farfelues, et les souvenirs impérissables d'errements dans les rues de Marseille tard le soir. Merci au reste de la fabuleuse équipe du "Zanzibar" qui a tant égayé ma première partie de thèse : Lucie pour ton enthousiasme, dommage que tu sois partie si peu de temps après mon arrivée. Sabri pour ta bonne humeur et pour certains de tes jeux de mots (pas tous), Mélanie pour la douce révolte en toi et qui m'a éclairé sur pleins de sujets, Taïssir dont la thèse extrêmement grande (3 pays en 3 ans tout de même) avait simplement la taille de ta gentillesse, et bien sûr Kelly : je ne pouvais pas espérer mieux comme camarade de thèse, puis colocataire.

Tes rires ont ponctué mes journées pendant 3 ans !

Merci aussi à tant d'autres personnes. Merci à Frédéric : le cadre de ta porte de bureau s'est transformé en un lieu de riches discussions scientifiques. Je cherche toujours à trouver une question pour laquelle tu ne pourras pas me répondre : "ah ben oui je connais, j'ai déjà travaillé sur ça !". Merci aussi à Kjetil d'avoir eu la patience d'écouter et commenter mes tribulations autour du senseur de Zernike. Merci à Carlos qui a joué un rôle crucial dans mon début de thèse en me partageant avec entrain ses connaissances, et merci encore pour nos moments à Hawaï. Merci aussi à mes co-bureau : Lauren, Olivier B.M, et puis Zibo, avec qui le partage et la bonne humeur ont toujours été au rendez-vous. Un grand merci à Max et Mona, vos arrivées ont soufflé un vent de d'air frais dans les couloirs du laboratoire. Merci à tous les autres membres de l'équipe PAPYRUS, pour vous être laissé tenter par l'aventure. Notamment merci à Idir pour ton engagement et ta motivation sans faille : la palme du meilleur stagiaire te revient ! Gracias à Felipe et Spassiba à Eduard pour votre rigueur et votre implication dans ce projet. Un merci tout particulier à la relève : Nico et Mahawa, bon vent à vous deux et je resterai dans les parages pour suivre vos belles avancées. Puis pleins de mercis "en vrac" : Vincent (et Tonio) pour les escapades dans les calanques et les moments dans votre cabanon, Pierre J. pour les discussions amusantes de physique, Amandine pour ton aide sur de nombreux sujets, Mich' pour ton énergie, Thib' pour ton côté artistique, Ghislain pour ta présence d'esprit et les discussions sympas sur les carburateurs, Steven pour la joie et le sens de la fête.

Il est temps de remercier ceux qui ne pourraient même pas expliquer ce qu'est un front d'onde, et qui ont pourtant intimement contribué à cette thèse : mes colocataires. Notre histoire se lit entre les lignes de toutes les pages qui suivent. Cette histoire, c'est la charpente qui tient tout car c'est celle qui m'a permis de m'épanouir à Marseille. Je vous embrasse fort : Nicolas, Romane, Matouk, Goodbid, Matt et toute la bande qui vous entoure. Vous êtes ma plus belle trouvaille, continuez à briller comme jaja.

Enfin, alors que je pensais que Marseille m'avait déjà livré le plus beau de ce qu'elle a dans les entrailles, la ville m'a offert la plus délicate des surprises. Je finis donc ces remerciement avec Marguerite : merci pour tous ces moments, et ceux à venir !

Ah, j'oubliais : Oliv'. Ta présence à mes côtés a radicalement changé la trajectoire de ma thèse. On a vécu les choses intensément. Les grandes victoires, les fausses victoires, les petites victoires, les grandes défaites : on est passé par tellement d'émotions ! Tu dis souvent qu'on a bien travaillé. En tout cas, on a travaillé avec les tripes. Tout ce que tu m'a transmis sur le monde de l'optique adaptative et de l'analyse de front d'onde est peu de chose par rapport à la chose la plus essentielle que tu m'as enseigné : pendant des années on m'a appris à faire de la science, tu m'as appris à la vivre. Merci.

Résumé

Avec les projets titanesques des "*extremely large telescopes*", l'astronomie mondiale va bientôt se doter d'outils à la puissance inégalée pour sonder l'univers. Ces télescopes suivent la trace de leurs compagnons de taille plus modeste, les télescopes de classe 8 m, dont les prouesses éclairent déjà le paysage scientifique depuis plus d'une vingtaine d'années. Ces télescopes au sol, présents ou futurs, se trouvent pourtant tous amputés d'une partie de leurs capacités dès leur mise en fonctionnement : la turbulence atmosphérique brouille les fronts d'onde de la lumière parvenant des astres, réduisant la résolution angulaire de ces géants à celle de simples télescopes amateurs. Pour lutter contre ce flou qui entache les images du cosmos, les scientifiques ont mis au point une technique appelée optique adaptative (OA). À l'aide d'optiques déformables, cette technique permet de compenser en temps réel les altérations de la lumière dues à l'atmosphère. Cette méthode équipe aujourd'hui tous les plus grands télescopes au sol, et est devenue indispensable pour un grand nombre d'applications astrophysiques. Motivé notamment par la chasse aux exoplanètes, des systèmes d'OA repoussant les limites de performances sont aujourd'hui mis au point. Les limites fondamentales de tels instruments reposent sur la qualité des mesures fournies par le dispositif optique au cœur de cette technique : l'analyseur de surface d'onde (ASO), dont l'objectif est d'estimer les formes imprégnées par la turbulence sur les fronts d'onde. Cette qualité des mesures est définie par deux grands aspects, la sensibilité et la dynamique.

Cette thèse se concentre sur une classe très large d'ASO, appelée ASO à filtrage de Fourier. En s'appuyant sur un formalisme mathématique développé dans des travaux précédents, on y développe une meilleure compréhension de leur sensibilité grâce à l'étude de la propagation des différents bruits présents dans leurs mesures. Forts de cette interprétation, on mène une comparaison précise et inédite des différents éléments qui composent cette famille d'ASO. On en profite aussi pour proposer de nouveaux concepts de filtrage de Fourier permettant d'atteindre des sensibilités inégalées auparavant, avec une efficacité d'utilisation des photons très proche de la limite fondamentale possible pour l'analyse de front d'onde en général.

Malheureusement, la sensibilité seule ne suffit pas pour définir les performances d'un ASO. La dynamique, mise à rude épreuve lors de la boucle d'OA, est tout autant cruciale pour assurer le bon fonctionnement des opérations. Pour sonder la dynamique des ASO étudiés, on utilise une approche bien particulière qui permet d'évaluer les non-linéarités tout en restant dans un formalisme matriciel : l'approche des systèmes à paramètres linéaires variants. Ainsi, on interprète les non-linéarités du système en considérant plus simplement leur effet sur les mesures comme une source de changement de régime de linéarité. Cette approche, déjà présentée dans des travaux précédents, permet de définir le concept essentiel des gains optiques. On pousse ici leur utilisation en proposant un suivi à haute cadence, à l'échelle de chaque mesure de l'ASO. On fournit aussi une façon pratique de réaliser ce suivi grâce au concept d'ASO à filtrage de Fourier assisté par imagerie plan focal et l'introduction de la *Gains Scheduling Camera*. Cette solution, consistant à fusionner les données d'une image plan focal et les signaux délivrés par l'ASO, semble s'imposer comme

une solution pratique de la gestion des non-linéarités très prometteuse.

Une partie plus expérimentale vient étayer tous ces travaux avec l'implémentation des nouveaux masques à filtrage de Fourier proposés sur le banc LOOPS au LAM d'un côté, et le développement du projet PAPYRUS visant à mettre sur ciel un analyseur pyramide assistée par imagerie en plan focal de l'autre.

Mots clés : Optique adaptative, Analyse de surface d'onde, optique de Fourier, Analyseur pyramide.

Abstract

With the huge projects of "*extremely large telescopes*", world astronomy will soon acquire tools of unequaled power to probe the universe. These telescopes follow in the footsteps of their smaller companions, the 8 m class telescopes, whose feats have already illuminated the scientific landscape for more than twenty years. These ground-based telescopes, present or future, are however loosing a part of their capacities as soon as they are put into operation : atmospheric turbulence scrambles the light wavefronts coming from the stars, reducing the angular resolution of these giant instruments to the one of simple amateur telescopes. To combat this blur that taints images of the cosmos, scientists have developed a technique called Adaptive Optics (AO). Using deformable optics, this technique makes possible to compensate for alterations caused by the atmosphere in real time . This method equips all the largest ground-based telescopes today, and has become essential for a large number of astrophysical applications. Motivated in particular by the hunt for exoplanets, AO systems pushing the limits of performance are now being developed. The fundamental limits of such instruments are based on the quality of the measurements provided by the optical device at the heart of this technique : the wavefront sensor (WFS), whose objective is to estimate the shapes impregnated by the turbulence on wavefronts. This quality of measurements is defined by two main aspects, sensitivity and dynamics.

This thesis focuses on a very large class of WFS, called Fourier-filtering WFS. By relying on a mathematical formalism developed in previous works, we develop a better understanding of their sensitivity thanks to the study of the propagation of the different noises present in their measurements. Armed with this interpretation, we conduct a precise and unprecedented comparison of the different elements that belong to this WFS family. We also take the opportunity to propose new concepts of Fourier filtering achieving previously unmatched sensitivities, with an photon efficiency very close to the fundamental limit possible for wavefront sensing in general.

Unfortunately, sensitivity alone is not enough to define the performance of a WFS. The dynamics, strongly affected during the AO loop, are also crucial to ensure the smooth running of operations. To probe the dynamics of the studied WFS, we use a very specific approach which allows to evaluate the non-linearities while remaining in a matrix formalism : the linear varying parameters systems approach. Thus, the non-linearities of the system are interpreted by considering their effects on the measurements more simply as a source of change in the linearity regime. This approach, already presented in previous works, allows to define the essential concept of optical gains. Their use is pushed here by offering high-speed monitoring, on the scale of each WFS measurement. A practical way of performing this tracking is also provided through the concept of Fourier filtering WFS assisted by focal plane imaging and the introduction of the *Gains Scheduling Camera*. This solution, consisting of merging the data of a focal plane image and the signals delivered by the WFS, seems to impose itself as a very promising practical solution for the management of non-linearities.

A more experimental part comes to support all this work with the implementa-

tion of the new Fourier filtering masks proposed on the LOOPS bench at LAM and the development of the PAPYRUS project aiming at testing on sky a focal plane assisted pyramid wavefront sensor.

Key words : Adaptive Optics, Wavefront sensing, Fourier optics, Pyramid wavefront sensor.

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **7**

Notations et acronymes **13**

Introduction **15**

1 Principes généraux **19**
1.1 Formation d'image au sein des télescopes 20
1.1.1 Les rôles d'un télescope 20
1.1.2 Turbulence atmosphérique 23
1.2 L'optique adaptative 32
1.2.1 Généralités sur l'OA 32
1.2.2 L'OA extrême 39
1.3 Analyse de surface d'onde 43
1.3.1 Généralités sur l'analyse de surface d'onde 43
1.3.2 Les grandes familles d'analyseurs de surface d'onde 45
1.3.3 Spécificités propres à l'optique adaptative 49

2 Analyse de surface d'onde par filtrage de Fourier **53**
2.1 Structure du système optique 54
2.1.1 Principe de base 54
2.1.2 Version ASO 55
2.2 Opération sur les intensités et encodage de la phase 59
2.2.1 Traitement des intensités 59
2.2.2 Matrice d'interaction 60
2.3 Formalisme mathématique 61
2.3.1 Modèle linéaire 62
2.3.2 Modèle convolutif 65
2.3.3 Cadre des simulations numériques 70
2.4 Un exemple d'ASO à filtrage de Fourier : l'analyseur pyramide 71
2.4.1 Explication géométrique : du test de Foucault à l'analyseur Pyramide 71
2.4.2 Description simplifiée du comportement ondulatoire 76
2.4.3 Le modèle convolutif appliqué à la 4PWFS 78

3 Critères de performance pour étudier les ASO à filtrage de Fourier **83**
3.1 Sensibilité et propagation du bruit 84
3.1.1 Les différents types de bruit 84
3.1.2 Propagation du bruit dans le reconstructeur 85
3.1.3 Critères de sensibilité 85

3.1.4 Estimations des sensibilités à un bruit uniforme à travers le modèle convolutif . . . 90
3.1.5 Interprétation en terme de performances d'OA . . . 90
3.1.6 Une autre métrique intéressante pour décrire la sensibilité . . . 92
3.2 Dynamique : comportement non linéaire . . . 93
3.2.1 Seuil de linéarité et gamme de capture . . . 93
3.2.2 Matrice de transfert optique et gains optiques . . . 95
3.3 Récapitulatif . . . 102

4 Comparaison et optimisation des d'analyseurs à filtrage de Fourier 104
4.1 Classe des ASO pyramide . . . 105
4.1.1 Principe et description . . . 105
4.1.2 Comparaison en sensibilité . . . 106
4.1.3 Comparaison en dynamique . . . 116
4.1.4 Conclusion sur l'étude de la classe des ASO pyramide . . . 125
4.2 Classe des analyseurs de Zernike . . . 128
4.2.1 Principe et description physique . . . 128
4.2.2 Comparaison en sensibilité . . . 129
4.2.3 Comparaison en dynamique . . . 135
4.2.4 Conclusion sur la classe des ASO de Zernike . . . 137
4.2.5 Vers une modulation pour l'ASO de Zernike ? . . . 138
4.3 Une méthode d'optimisation de la sensibilité via le modèle convolutif 143
4.3.1 Description de la méthode : modèle convolutif et optimisation numérique . . . 143
4.3.2 Vers des ASO optimaux en sensibilité . . . 145
4.3.3 Perspectives pour cette méthode d'optimisation des ASO . . . 152

5 Gestion des non linéarités : stratégies d'estimation des gains optiques 160
5.1 Écarts à l'étalonnage et contrôle du front d'onde . . . 161
5.1.1 Généralités sur les écarts à l'étalonnage . . . 161
5.1.2 Impact des gains optiques sur le contrôle du front d'onde . . . 163
5.2 Estimation des gains optiques via le modèle convolutif . . . 169
5.2.1 Méthodes existantes . . . 169
5.2.2 Compréhension des gains optiques via le modèle convolutif . . . 170
5.2.3 Une nouvelle méthode d'estimation des gains optiques . . . 171
5.3 Un nouveau senseur : la pyramide assistée par plan focal . . . 177
5.3.1 Vers une estimation trame à trame . . . 177
5.3.2 La "Gains Scheduling Camera" . . . 179
5.3.3 Un point sur les hypothèses . . . 186
5.3.4 Exemple d'applications de la GSC . . . 188
5.4 La GSC, au-delà des équations du modèle convolutif . . . 195
5.4.1 La matrice d'interaction impulsionnelle . . . 195
5.4.2 Nouvelle méthode de détermination des gains optiques . . . 198
5.4.3 Conclusion sur cette approche . . . 199

6 De la théorie et la simulation vers la démonstration expérimentale 204
6.1 Le banc LOOPS : un démonstrateur expérimental . . . 205
6.1.1 Principe du banc et objectifs scientifiques . . . 205
6.1.2 Spatial Light Modulators, éléments clefs du banc . . . 207
6.1.3 Études de sensibilité . . . 210
6.1.4 Conclusion et perspectives . . . 218
6.2 Mise en oeuvre d'un système Pyramide sur ciel : le projet PAPYRUS 221
6.2.1 Objectifs scientifiques et motivations . . . 221
6.2.2 Caractéristiques de l'instrument . . . 222
6.2.3 État d'avancement du projet . . . 226
6.2.4 Conclusion . . . 229

Conclusion et perspectives 232

ANNEXES 235

A Autres pistes de compensations optiques des non-linéarités 236
A.1 Influence de la longueur d'onde d'analyse sur les gains optiques . . . 236
A.2 Filtrage en plan focal . . . 240

B L'interféromètre de shearing 243
B.1 Formalisme mathématique . . . 243
B.2 Sensibilité et dynamique . . . 244
B.2.1 Cas $\rho << 1$ . . . 245
B.2.2 Cas ρ grand . . . 246
B.3 Le shearing, un ASO à filtrage de Fourier ? . . . 249
B.4 L'interféromètre de shearing rotationnel, une idée de pétalomètre ? . . . 251

C Calcul du gradient de la fonction score pour l'optimisation des masques 253
C.1 Cadre de travail . . . 253
C.2 Calcul du gradient . . . 253

Liste des publications 257

Bibliographie 257

Papiers publiés 265

Notations et acronymes

	Définition
$\widehat{\cdot}$	Opérateur transformation de Fourier
$< \cdot \vert \cdot >$	Produit scalaire
$f_{\vert x,y}$	Fonction f évaluée aux coordonnées x et y
$\bar{x}$	Complexe conjugué de x
$\mathrm{Im}(x)$	Partie imaginaire de x
$\vert\vert x\vert\vert_2$	Norme 2 de x
$\vert\vert x\vert\vert_1$	Norme 1 de x
$x \star y$	Convolution continue de x par y
$< x >_\tau$	Espérance de la variable aléatoire x
A^t	Transposée de la matrice A
$A^\dagger$	Pseudo-inverse de la matrice A
D	Diamètre du télescope
ϕ	Phase du champ électromagnétique
$\mathbb{I}_p$	Fonction de transmission de la pupille
λ	Longueur d'onde
$\mathcal{D}$	Matrice d'interaction
r_0	Paramètre de Fried
$D_{\phi_{res}}$	Fonction de structure des phases résiduelles
SR	Rapport de Strehl
PSF	*Point Spread Function*
Ω_ϕ	Image courte pose associée à la phase ϕ
σ_ϕ	Écart type de la phase ϕ
m	Masque de filtrage
Δ	Phase du masque de filtrage : $m = e^{i\Delta}$
ΔI	Intensités réduites
I_0	Intensités correspondantes à un front d'onde plan
w	Fonction de poids de modulation
ω	Fonction de poids de modulation effective
IR	Réponse impulsionnelle
TF	Fonction de transfert
a_{seuil}	Seuil de linéarité
a_c	Gamme de capture
OA	Optique adaptative
XOA	Optique adaptative extrême
ELT	*Extremely-Large Telescope*
DM	Miroir déformable
RTC	*Real-Time Computer*
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
PWFS	Classe des analyseurs pyramide
ZWFS	Classe des analyseurs de Zernike
OWFS	Classe des analyseurs optimisés

Introduction

À la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, Newton découvre que la lumière visible blanche est composée d'une multitude de couleurs élémentaires. On comprend plus tard qu'une fois séparées, ces différentes longueurs d'ondes peuvent livrer des informations sur la composition chimique des objets ayant émis ou réfléchis la lumière. Cette découverte, appelée spectroscopie, permet de faire basculer l'astronomie dans une toute autre dimension. L'observation des astres, cantonnée à des mesures de positions et de luminosité depuis des dizaines de siècles, peut enfin prendre un nouvel essor. Il est désormais possible de connaître les éléments chimiques qui constituent les objets célestes. On peut dès lors tenter d'établir des modèles qui régissent leurs descriptions et leurs évolutions, puis éprouver ces modèles face aux observations astronomiques : l'**astrophysique** est née.

Une autre révolution accompagne l'utilisation de la spectroscopie en astronomie : on découvre que la gamme de longueur d'onde du spectre électromagnétique s'étend largement au-delà des longueurs d'ondes visibles par l'oeil humain. Tous ces états de la lumière sont autant de fenêtres sur l'univers qui ouvrent la possibilité d'observer des phénomènes très variés. Ainsi, les rayons gamma permettent d'explorer les évènements les plus violents et les plus énergétiques de l'univers, tandis que les ondes radio sont plutôt utilisées pour sonder les zones les plus froides de l'univers.

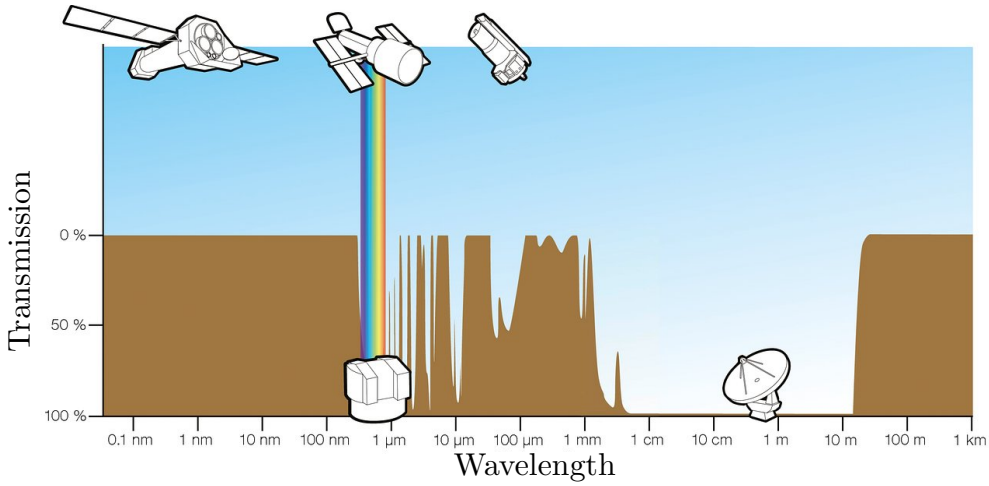


FIGURE 1 – **Taux de transmission de l'atmosphère terrestre suivant les longueurs d'onde.** *Crédits : ESO.*

L'observation de l'intégralité du spectre électromagnétique depuis le sol terrestre est malheureusement rendue impossible par la présence de l'atmosphère, qui filtre une grande partie des rayonnements (voir figure 1). L'observation *multi-spectrale* sur l'ensemble des longueurs d'onde n'est alors possible qu'à l'aide de télescopes spatiaux.

Encore plus récemment, l'astrophysique a encore connu une révolution cruciale avec l'avènement des observations *multi-messagers* : la lumière n'est plus la seule entité exploitée pour obtenir de l'information sur les phénomènes astrophysiques. Il est aujourd'hui possible de détecter des particules telles que les rayons cosmiques et les neutrinos, ou tout dernièrement : mesurer directement des ondes gravitationnelles se propageant dans l'espace-temps.

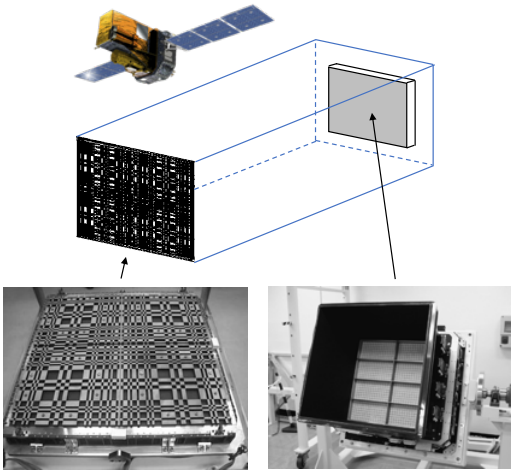
Toutes ces révolutions scientifiques, accompagnées nécessairement de fabuleuses percées technologiques, ont permis de repousser plus que jamais l'horizon des connaissances. Cela a naturellement entraîné l'émergence d'une avalanche de nouvelles questions astrophysiques. Certaines d'entre elles poussent dans leurs retranchements les modèles qui constituent les piliers de la physique contemporaine. On peut notamment évoquer les grandes interrogations cosmologiques avec les questionnements liés à l'énergie sombre ou encore la fameuse matière noire : matière invisible dont la trace peut être décelée dans des images comme celle fournie figure 2. Une autre grande question majeure est la présence, ou non, de vie extra-terrestre. Cette question scientifique fondamentale est abondamment nourrie par les récentes découvertes d'exoplanètes : ces mondes qui orbitent autour d'autres étoiles que le soleil. La réponse n'a jamais été aussi proche...

FIGURE 2 – **Anneaux d'Einstein visibles dans les images champ profond du Hubble space telescope et permettant de déduire la présence d'une masse invisible : la matière noire.** *Crédits : HST deep field.*

Avec l'astronomie *multi-spectrale* et *multi-messagers*, la définition même du **télescope** est bousculée. Instrument de mesure privilégié de l'astronome, celui-ci peut désormais prendre de multiples apparences. On présente figure 3 l'exemple de deux télescopes observant dans des gammes spectrales distinctes, dont le principe de fonctionnement est radicalement différent.

Révolutions en marche pour l'astronomie au sol

Comme le montre la figure 1, l'astronomie au sol est limitée à certaines plages de longueurs d'onde précises, dont celle qui est exclusivement abordée dans cette thèse : l'**observation visible et proche infrarouge** s'étendant des longueurs d'ondes de



IBIS instrument - INTEGRAL space telescope

APEX telescope - Chile

FIGURE 3 – **Deux télescopes aux principes de fonctionnement très différents. Gauche :** instrument IBIS fonctionnant avec un masque codé pour détecter les rayonnements X. *Crédits : ISDC.* **Droite :** le télescope sub-millimétrique et millimétrique APEX. *Crédits : ESO.*

la centaine de nanomètres à la dizaine de micromètres. Cette plage de longueur d'onde est en passe de connaître un bond technologique avec l'avènement des "*extremely large telescopes*", ces futurs instruments qui promettent de livrer les images les plus précises jamais enregistrées et d'apporter les briques élémentaires qui permettront, peut-être, de répondre aux grandes questions astrophysiques du siècle.

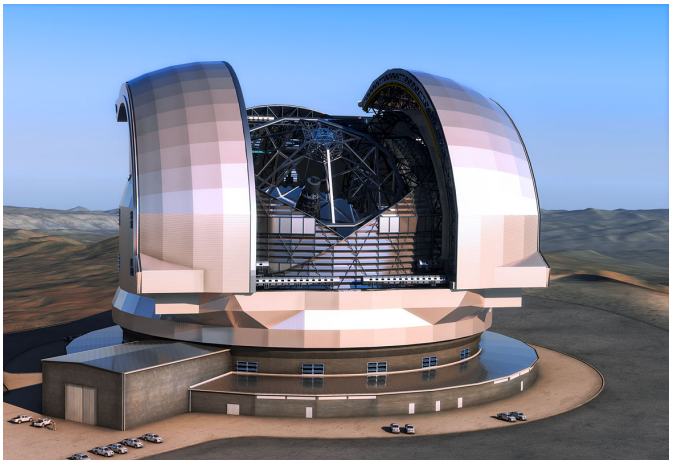
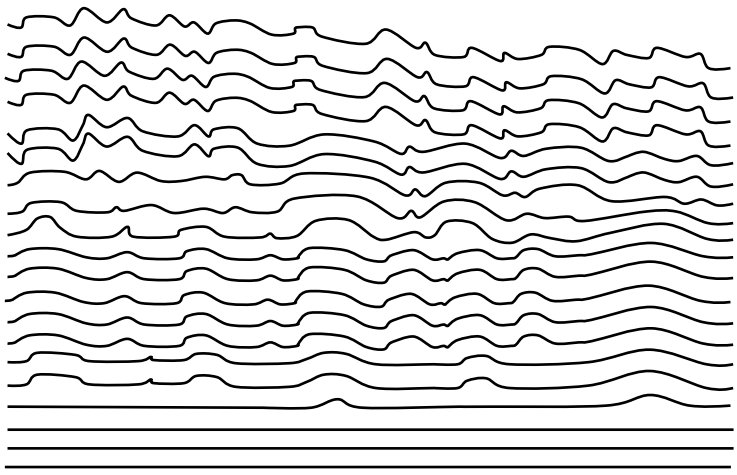


FIGURE 4 – **Le futur Extremely-Large Telescope de l'ESO.** *Crédits : ESO.*

On l'a évoqué, la recherche d'autres planètes dans la galaxie est une motivation de choix. Mais même pour ces télescopes géants, arriver à imager directement une exoplanète est une tâche hautement compliquée car il faut s'affranchir de deux obstacles majeurs : la turbulence de l'atmosphère qui brouille les images

enregistrées, et la lumière de l'étoile hôte qui vient polluer le signal de la planète. Pour affronter la turbulence, les astronomes se reposent sur un système permettant de compenser ses effets en temps réel, appelé **optique adaptative**. La correction apportée par ce système doit alors atteindre des performances extrêmes afin d'offrir ensuite la possibilité de rejeter la lumière de l'étoile au profit de celle de la planète, à l'aide d'un montage optique appelé coronographe. Avec les progrès actuels, les limites fondamentales des systèmes d'optique adaptative tendent à se reporter sur la qualité des mesures fournies par le dispositif optique au cœur de cette technique : l'**analyseur de surface d'onde**, dont l'objectif est d'estimer les formes imprégnées par la turbulence sur la lumière des étoiles. Cette qualité des mesures est définie par deux grandes notions, la sensibilité et la dynamique. On va étudier dans cette thèse une large classe d'analyseur de surface d'onde aux propriétés à la fois diverses et avantageuses, nommée classe des analyseurs à **filtrage de Fourier**.

Le premier chapitre de cette thèse présente les principes généraux de l'optique adaptative et de l'analyse de surface d'onde. Dans un second temps, je présente plus en détail la classe des analyseurs de surface d'onde à filtrage de Fourier. Ensuite, la thèse s'articule de la façon suivante : je mets en place un certain nombre de critères quantitatifs qui vont permettre d'évaluer les performances en terme de sensibilité et dynamique de chaque analyseur. Armé de ces outils, je mène alors une comparaison et une optimisation de différents éléments de la classe des analyseurs à filtrage de Fourier. Enfin, j'aborde la problématique complexe de la dynamique à travers la mise en place d'une stratégie pour compenser les erreurs liées aux non-linéarités. Je termine enfin sur un chapitre plus expérimental qui sera l'occasion de mettre en oeuvre certains concepts développés au cours de cette thèse.



Chapitre 1

Principes généraux

Résumé

J'introduis dans ce premier chapitre les concepts de base et les thématiques scientifiques autour desquels gravite cette thèse. Je présente notamment l'effet de la turbulence sur la résolution des télescopes et le système qui permet de compenser cet effet : l'optique adaptative. Je m'attarde ensuite plus précisément sur le sujet central de cette thèse : l'analyse de surface d'onde.

Sommaire

1.1 Formation d'image au sein des télescopes 20
1.1.1 Les rôles d'un télescope 20
1.1.2 Turbulence atmosphérique 23
1.2 L'optique adaptative 32
1.2.1 Généralités sur l'OA 32
1.2.2 L'OA extrême 39
1.3 Analyse de surface d'onde 43
1.3.1 Généralités sur l'analyse de surface d'onde 43
1.3.2 Les grandes familles d'analyseurs de surface d'onde 45
1.3.3 Spécificités propres à l'optique adaptative 49

1.1 Formation d'image au sein des télescopes

1.1.1 Les rôles d'un télescope

Un télescope est un instrument optique qui permet de voir plus précisément les scènes astronomiques. Mais ce "précisément" cache deux notions différentes et pourtant très complémentaires.

Nombre de photons collectés. Voir plus précisément, c'est parvenir à collecter le plus de lumière possible provenant d'une scène astronomique. Toute mesure optique est entachée d'un bruit fondamental dont il est impossible de s'affranchir : le bruit de photon. Il vient du fait que, de part la nature quantique de la lumière, on peut identifier le nombre de photons provenant d'une source à flux constant enregistré par un pixel durant un intervalle Δt à une loi de Poisson de moyenne $E(N) = \eta\Delta t$ et d'écart type $\sigma(N) = \sqrt{\eta\Delta t}$ où N est le nombre de photon et η est proportionnel au flux de la source. Le rapport signal à bruit (SNR) lié au bruit de photon croît ainsi proportionnellement à $\sqrt{N}$. Toute détection liée à une observation est donc tributaire d'un SNR suffisant, afin de pouvoir considérer la mesure comme fiable. Le nombre de photons N collectés peut être augmenté de deux manières conjointes : en accroissant le temps d'intégration de l'instrument qui enregistre la scène, et en améliorant le pouvoir collecteur du télescope. Augmenter le pouvoir collecteur d'un télescope permet ainsi d'obtenir des détections fiables plus rapidement. Cette capacité à récupérer plus de photons est proportionnelle à la surface du miroir primaire du télescope, et croît donc en D^2 avec D le diamètre. Il est par conséquent très bénéfique de construire des télescope à grand diamètres. Du haut de ces 39 mètres de diamètre, l'Extremely Large Telescope (ELT) [Gilmozzi and Spyromilio, 2007] de l'European Southern Observatories (ESO) actuellement en construction aura par exemple un pouvoir collecteur deux fois plus grand que celui de tous les télescopes de classe 8 mètres au monde réunis.

Résolution angulaire. Voir plus précisément, c'est aussi parvenir à observer des détails fins dans une scène astronomique : c'est ce que l'on appelle la résolution angulaire. Cette résolution dépend de longueur d'onde λ d'observation et s'améliore théoriquement de manière inversement proportionnelle au diamètre du télescope. Cette limite théorique de résolution, décrite plus en détail dans le paragraphe suivant, est en réalité fortement compromise pour les télescopes sur Terre et peut-être approchée seulement au prix d'efforts considérables. Cette thèse s'inscrit de manière générale dans le domaine de l'instrumentation pour l'astrophysique consistant à développer un ensemble de techniques permettant de s'approcher *au mieux* de cette limite théorique de résolution pour un télescope donné.

1.1.1.1 Diffraction et théorie de la formation d'image

Imagerie plan focal

Lorsqu'une onde plane rencontre la pupille du système, elle est diffractée. Il est possible d'utiliser l'approximation du champ lointain pour dériver la forme du champ à une distance très éloignée après sa rencontre avec cet obstacle. Un élément focalisant joue le même rôle et ramène la figure de diffraction à une distance finie, dans son plan focal (figure 1.1).

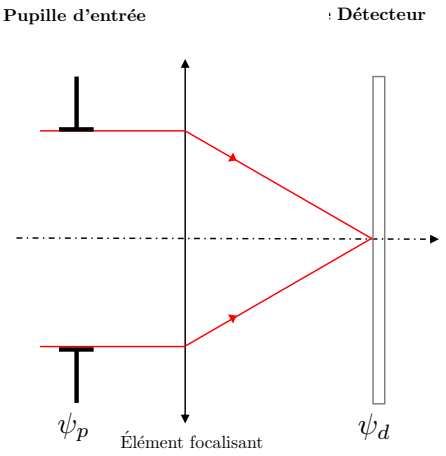


FIGURE 1.1 – **Imagerie en plan focal.**

On note le champ électromagnétique en entrée de la pupille :

$$\psi_{p|x,y} = \mathbb{I}_{p|x,y} e^{i\phi_{|x,y}} \tag{1.1}$$

où $\mathbb{I}_p$ est la fonction de transmission de la pupille et ϕ la phase du champ. En considérant une onde monochromatique de longueur d'onde λ et un élément focalisant de distance focale f, on peut exprimer simplement le champ électromagnétique ψ_d au niveau du plan du détecteur en fonction du champ en entrée ψ_p :

$$\psi_{d|x,y} = \frac{1}{(\lambda f)^2} \widehat{\psi_p}_{|\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}} \tag{1.2}$$

avec $\widehat{\cdot}$ l'opérateur transformée de Fourier. En négligeant les facteurs de dilatation liés à la longueur d'onde et à la longueur focale, on exprimera simplement la relation entre les champs pupille et plan focal :

$$\psi_d = \widehat{\psi_p}, \tag{1.3}$$

On peut alors exprimer les intensités sur le détecteurs $I_d = |\psi_d|^2$ dans le cas d'un front d'onde plan (c'est à dire dans le cas d'une observation d'une source ponctuelle à l'infini) comme suit :

$$I_d = PSF = |\widehat{\mathbb{I}_p}|^2 \tag{1.4}$$

La figure d'intensité ainsi générée à partir de la fonction de transmission de la pupille s'appelle la fonction d'étalement du point (PSF - *Point Spread Function*). Pour le cas d'une pupille circulaire pleine, les intensités sur le détecteur forment une figure de diffraction bien connue, appelée tâche d'Airy et illustrée figure 1.2.

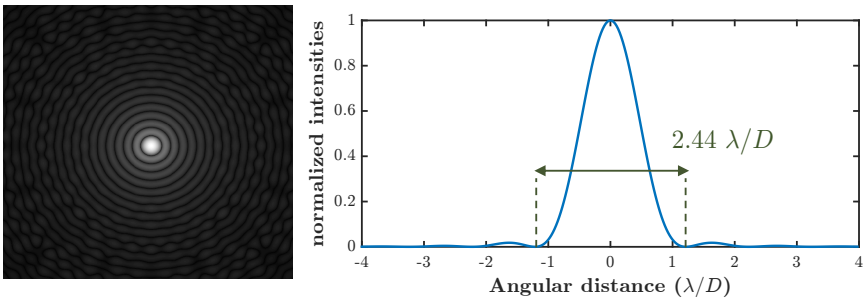


FIGURE 1.2 – **PSF dans le cas d'une pupille circulaire pleine.** La figure de diffraction obtenue est communément appelée tâche d'Airy.

Chaque point de la scène observée va produire cette même figure de diffraction, de sorte que l'image obtenue sur le détecteur $\mathcal{I}$ est une convolution entre la scène "vraie" $\mathcal{O}$ et la PSF :

$$\mathcal{I} = \mathcal{O} \star PSF \tag{1.5}$$

Le télescope floute ainsi la scène observée avec un filtre possédant une taille caractéristique inversement proportionnellement à son diamètre : la PSF nous permet donc de quantifier le pouvoir de résolution du télescope considéré. Il est pratique de considérer l'équation 1.6 dans l'espace des fréquences spatiales de la scène :

$$\widehat{\mathcal{I}} = \widehat{\mathcal{O}} \times \widehat{PSF} \tag{1.6}$$

La transformée de Fourier de la PSF est aussi appelée fonction de transfert optique (FTO, cette fonction n'est pas forcément réelle). Cette fonction permet donc de quantifier l'impact du système optique considéré sur les fréquences spatiales de la scène astronomique. On représente classiquement la fonction de transfert de modulation (FTM) qui en est la valeur absolue, ainsi : $FTM = |\widehat{PSF}|$.

On constate qu'un télescope agit tel un filtre passe-bas, en filtrant complètement toutes les fréquences spatiales supérieures à D/λ ($FTO = 0$ pour ces cas là).

Valeur de la résolution angulaire d'un télescope. Malgré les définitions claires de la PSF et de la FTO, il n'est pas facile de fournir une valeur évidente pour décrire la résolution angulaire d'un télescope. En effet, si l'on définit assez logiquement la résolution angulaire comme étant la distance angulaire minimale à partir de laquelle un télescope peut distinguer deux objets ponctuels, cette distance peut théoriquement être infiniment petite. Cette affirmation ne rentre pas en conflit avec le filtrage complet des fréquences supérieures à D/λ, car une scène astronomique composée de deux sources ponctuelles porte une infinité de fréquences dont une

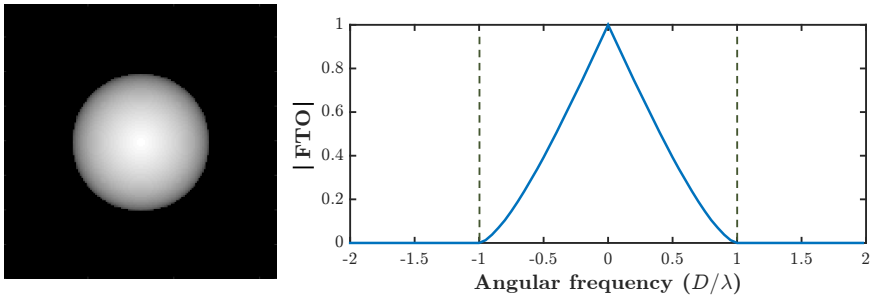


FIGURE 1.3 – **FTM dans le cas d'une pupille pleine.** On constate une coupure totale pour les fréquences angulaires supérieures à D/λ.

partie n'est pas filtrée par le télescope. On donne une illustration de ce propos figure 1.4.

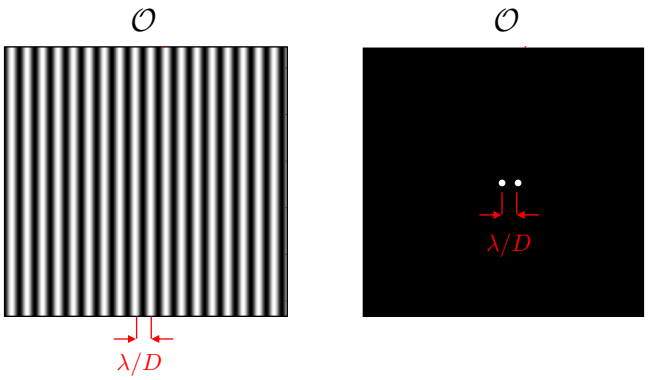


FIGURE 1.4 – **Résolution angulaire d'un télescope. Gauche :** scène astronomique constituée de la plus petite fréquence spatiale entièrement filtrée par le télescope. **Droite :** scène astronomique constituée de deux sources ponctuelles, et donc filtrée que partiellement.

On note tout de même qu'en pratique deux sources très proches ne seront pas discernables à partir d'une certaine séparation, à cause des bruits présents dans la mesure. Un critère finalement assez arbitraire a été donné par Rayleigh pour définir la valeur de la résolution angulaire est le suivant : elle est définie comme la distance entre deux sources ponctuelles telles que les valeurs maximales de leurs PSF correspondantes tombent dans le première annulation l'une de l'autre, soit $\theta = 1.22\lambda/D$.

1.1.2 Turbulence atmosphérique

La lumière provenant des sources astronomiques traverse des milliards de kilomètres sans incident majeur avant d'atteindre l'atmosphère terrestre. Cette dernière

traversée va affecter profondément la forme des fronts d'ondes et venir réduire considérablement le pouvoir de résolution des télescopes au sol.

1.1.2.1 Explication physique et description statistique

L'atmosphère terrestre est composée de volumes d'air froid et chaud qui se mélangent entre eux par convection, générant des phénomènes turbulents. La description physique de ces phénomènes turbulents a été proposée par Kolmogorov en 1941 [Kolmogorov, 1941]. Cette description, appelée théorie des cascades, repose sur l'idée que les cellules convectives d'une taille L_0 de l'ordre de la dizaine de mètres (appelée échelle externe) instables se fractionnant en cellules de plus petites tailles, qui vont elles-mêmes se scinder en des cellules plus petites. Cette cascade de fragmentation des cellules se poursuit jusqu'à que ces dernières atteignent une taille caractéristique l_0 de l'ordre du millimètre (appelée échelle interne) et se dissipent par viscosité. Ce phénomène vient former des gradients de températures qui modifient l'indice de réfraction n. L'énergie de cette turbulence est dépendante de l'altitude, avec des couches de très basses altitudes (une centaine de mètres) concentrant généralement la majorité de la turbulence.

Description statistique

Pour une couche à une altitude h donnée, on peut décrire le comportement statistique de l'indice de réfraction n. Cette description se fait à l'aide d'une fonction appelée fonction de structure. Si l'on note $\boldsymbol{\rho}$ la coordonnée en deux dimensions d'un point situé dans la couche considérée, cette fonction s'écrit :

$$D_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}) = \left\langle [n(\boldsymbol{\rho}) - n(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{r})]^2 \right\rangle_\tau \tag{1.7}$$

où $\boldsymbol{r}$ est aussi une coordonnée en deux dimensions dans la couche et $< . >_\tau$ l'espérance sur les réalisations aléatoires de n. La fonction D_n permet ainsi de quantifier la corrélation statistique entre les fluctuations d'indice en un point $\boldsymbol{\rho}$ et les points situés dans son voisinage. On peut en réalité simplifier cette fonction en faisant l'hypothèse que le processus aléatoire est stationnaire. La fonction de structure ne dépend alors plus de la position $\boldsymbol{\rho}$ du point dans la couche et la corrélation entre les différents points ne dépend pas non plus de la direction considérée $\boldsymbol{r}$, mais seulement de la distance $r = ||\boldsymbol{r}||$. On écrit alors la fonction de structure pour la couche d'altitude h [Oboukhov, 1962] :

$$D_n(r, h) = C_n^2(h) r^{\frac{2}{3}} \tag{1.8}$$

où la fonction C_n^2 est la constante de structure de l'indice de réfraction, caractérisant la force de la turbulence à l'altitude h.

Effet sur la phase

On peut donc maintenant sonder l'effet de ces fluctuations d'indice sur la propagation d'une onde électromagnétique à travers l'atmosphère. L'onde récupérée au niveau de la pupille voit son amplitude et sa phase affectées par la turbulence. On fait

l'approximation que seule la phase $\phi(\boldsymbol{\rho})$ est affectée [Roddier, 1981]. On peut alors écrire le déphasage induit par un point $\boldsymbol{r}$ d'une couche d'altitude h et d'épaisseur δh par rapport à une propagation dans le vide :

$$\phi(\boldsymbol{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{h}^{h+\delta h} (n(\boldsymbol{r}, h') - 1) \mathrm{d}h' \tag{1.9}$$

En injectant dans cette équation les propriétés statistiques de l'indice de réfraction via sa fonction de structure à l'altitude h et en intégrant sur toute l'atmosphère, on retrouve la **fonction de structure de la phase turbulente** [Tatarskii, 1961] :

$$D_{\phi}(r) = 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \tag{1.10}$$

où r_0 est le paramètre de Fried [Fried, 1966], qui permet d'estimer la force de la turbulence sur toute une colonne d'air. Son expression est la suivante :

$$r_0 = \left[0.423 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos(\gamma)} \int_0^{\infty} C_n^2(h) \mathrm{d}h \right]^{-\frac{3}{5}} \tag{1.11}$$

où γ est l'angle zénital. Le paramètre de Fried est un paramètre fondamental pour décrire la force de la turbulence en une donnée scalaire. On verra dans le paragraphe suivant son importance en terme de formation d'image.

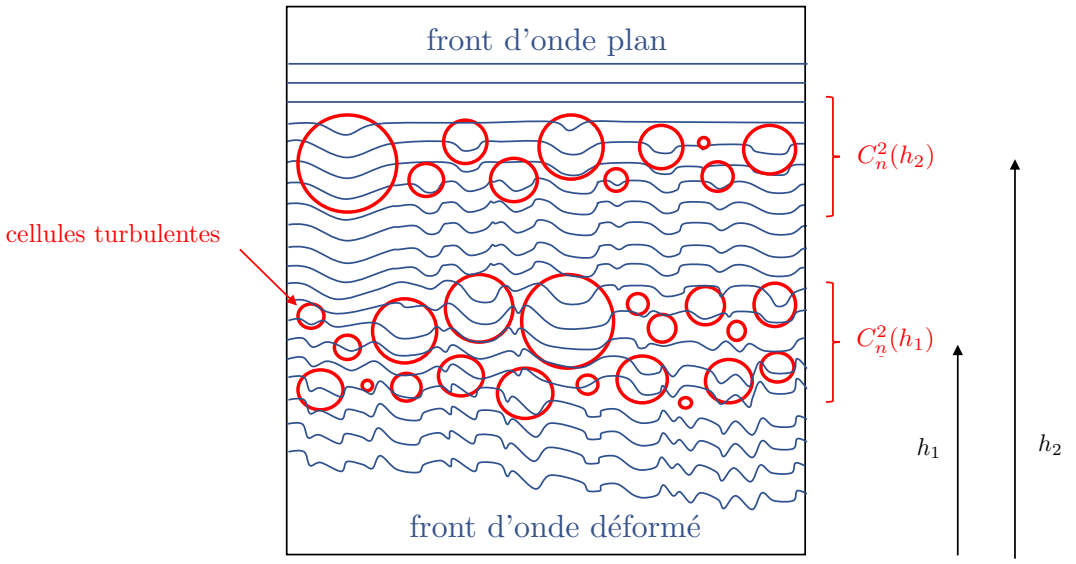


FIGURE 1.5 – **Illustration de la propagation du front d'onde au travers d'une cascade de cellules de convection.** *Inspiré d'une illustration de L. Demailly.*

On peut aussi s'intéresser à une autre quantité statistique de la phase turbulente : sa **densité spectrale de puissance** (PSD - *Power Spectral Density*) en fonction de

la norme de la fréquence spatiale f. Dans le cas de la fonction de structure explicitée équation 1.10, on peut en déduire la PSD correspondante :

$$C_\phi(f) = 0.023 \times r_0^{-\frac{5}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \tag{1.12}$$

Cette PSD correspond au spectre de Kolmogorov. Cette formulation présente l'inconvénient majeur de diverger pour $f \to 0$. Une expression corrigée de cette singularité et prenant en compte l'échelle externe L_0 a été proposée par Von-Karman [von Kármán, 1948] :

$$C_\phi(f) = 0.023 \times r_0^{-\frac{5}{3}} \left(f^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-\frac{11}{6}} \tag{1.13}$$

Dans cette formulation, on comprend que l'échelle externe L_0 joue un rôle important sur les basses fréquences : un L_0 faible entraîne un contribution plus faible de la turbulence au niveau des basses fréquences.

Cohérence temporelle

Un autre paramètre important de la turbulence est la notion de cohérence temporelle. On a décrit jusqu'à maintenant les propriétés statistiques spatiales de la phase, mais il est aussi important de considérer ses variations temporelles. En faisant l'hypothèse que l'évolution temporelle des structures des cellules de convection est très faible par rapport à la vitesse du vent au niveau de chaque couche turbulente (hypothèse dîte de *frozen flow*), on peut calculer le temps caractéristique correspondant à l'évolution de la phase sur une zone de taille r_0 [Fried, 1990]. On obtient :

$$\tau_0 = 0.314 \times \frac{r_0}{\bar{v}} \tag{1.14}$$

avec $\bar{v}$ la vitesse moyenne du vent pondérée par les puissances de chaque couche turbulente :

$$\bar{v} = \left[\frac{\int_0^\infty v(h)^{\frac{5}{3}} C_n^2(h) \mathrm{d}h}{\int_0^\infty C_n^2(h) \mathrm{d}h} \right]^{\frac{3}{5}} \tag{1.15}$$

Les paramètres r_0 et τ_0 sont ainsi des paramètres qui permettent d'obtenir une estimation des conditions d'observation à un temps donné. Dans cette thèse, on s'intéressera au paramètre r_0 qui aura un rôle central dans les études menées.

1.1.2.2 Effet sur la formation d'image

On a rappelé le formalisme permettant de décrire l'impact statistique de la turbulence atmosphérique sur la phase d'un champ électromagnétique. On peut maintenant se pencher sur l'effet dans le processus de formation d'image. Si l'on prend une image courte pose d'une source ponctuelle à l'infini dont la phase a été déformée par la turbulence, on obtient des images où la PSF se retrouve morcelée (figure 1.6), avec l'apparition de tavelures (*speckles* en anglais) : des zones de lumière cohérentes

de tailles caractéristiques λ/D. En prenant une image longue pose, on converge vers une nouvelle tâche image de taille angulaire caractéristique θ appelée *seeing*, bien plus large que la PSF liée à la diffraction du télescope et synonyme d'une perte d'une partie du pouvoir de résolution du télescope. On relie le seeing au paramètre de Fried :

$$\theta = \frac{\lambda}{r_0} \tag{1.16}$$

L'équation 1.11 explicite la dépendance de r_0 en fonction de la longueur d'onde : $r_0 \propto \lambda^{\frac{6}{5}}$. r_0 est donc un paramètre fortement chromatique, qu'il convient d'expliciter en précisant la longueur d'onde d'expression. En revanche le seeing est faiblement chromatique avec une dépendance en $\lambda^{-\frac{1}{5}}$. Ainsi, on donne souvent la valeur du seeing dans le domaine visible sans en préciser la longueur d'onde : de l'ordre de $0.5''$ pour des conditions très favorables au sein des grands sites d'observation astronomique.

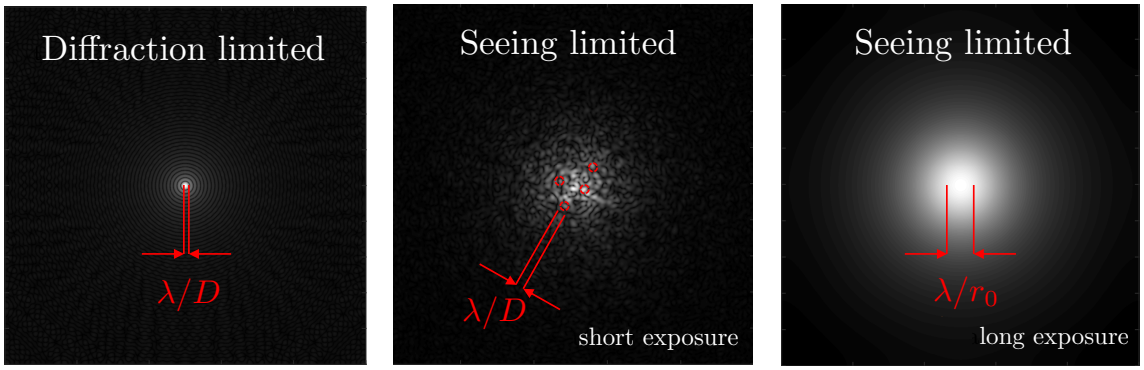


FIGURE 1.6 – **Effet de la turbulence sur la PSF**. Pour cet exemple : $D/r_0 = 20$.

On peut évaluer l'effet de la turbulence sur les images longue pose en terme de filtrage des fréquences angulaires $\boldsymbol{f}$. On peut démontrer que la fonction de transfert optique du télescope est modifiée de la façon suivante :

$$FTO_{turbu}(\boldsymbol{f}) = FTO(\boldsymbol{f}) \times e^{-\frac{1}{2}D_\phi(\lambda \boldsymbol{f})} \tag{1.17}$$

On représente les FTO pour un télescope de diamètre D, le même télescope limité par le seeing et un télescope de diamètre r_0 figure 1.7. On constate sur cette figure la similarité entre les FTO de la turbulence longue pose et celle d'un télescope possédant un diamètre r_0. C'est d'ailleurs pour cela que le paramètre de Fried, bien que ce ne soit pas rigoureusement sa définition mathématique, est souvent décrit comme représentant le diamètre d'un télescope travaillant à la diffraction dont les performances en résolution sont équivalentes au télescope $D > r_0$ limité par la turbulence. On va voir que cette façon de décrire r_0 s'éloigne tout de même fortement de la réalité au paragraphe suivant.

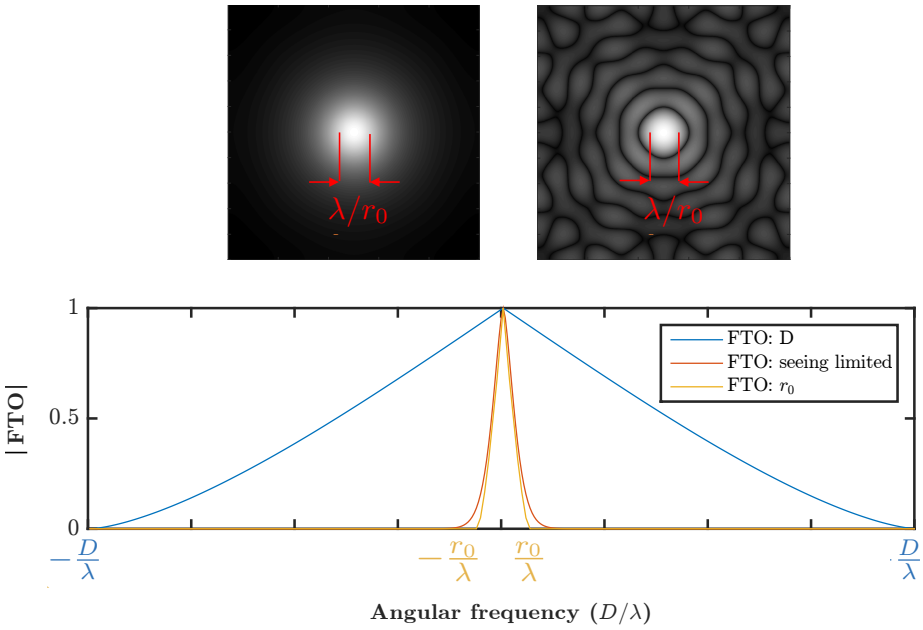


FIGURE 1.7 – **Effets de la turbulence sur l'imagerie longue pose. Haut :** PSF longue pause à travers la turbulence et PSF à la diffraction pour télescope de diamètre r_0. **Bas :** Comparaison entre les différentes FTO pour un télescope de diamètre D, le même télescope limité par le seeing et un télescope de diamètre r_0. Pour cet exemple : $D/r_0 = 20$.

Variance de la phase turbulente et rapport de Strehl

Il est possible de calculer la variance spatiale moyenne de la phase turbulente ϕ en rad^2 en fonction du diamètre du miroir D et du paramètre de Fried r_0 dans le cas d'un spectre de Kolmogorov :

$$< \sigma_\phi^2 >_\tau = 1.03 \times \left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} \tag{1.18}$$

Cette équation nous donne alors une définition plus rigoureuse du paramètre r_0 : c'est le diamètre d'un télescope pour lequel la turbulence engendre une variance spatiale moyenne de phase de 1.03 rad^2 dans le cas d'une turbulence de type Kolmogorov.

Le rapport de Strehl (noté SR pour *Strehl ratio*) est un critère de performance très utile pour la suite qui permet de mesurer l'effet des aberrations de phase en plan focal. On le définit comme étant le rapport des intégrales des valeurs absolues des FTO pour un télescope avec des aberrations de phase et pour un télescope parfait.

$$SR = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} |FTO_{aberr}(\boldsymbol{f})| \mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\int_{\mathbb{R}^2} |FTO(\boldsymbol{f})| \mathrm{d}\boldsymbol{f}} \tag{1.19}$$

Cela revient aussi à mesurer le rapport entre le maximum de la PSF aberrante et le maximum de la PSF du télescope parfait. Pour des raisons de normalisation

suivant le champ de vue, on préférera en pratique utiliser la formulation à l'aide des FTO. Dans le cas de faibles phases aberrantes ($\sigma_\phi^2 < 1\ rad^2$), on peut utiliser la formule de Maréchal pour relier variance et SR [Mahajan, 1983] :

$$SR = e^{-\sigma_\phi^2} \tag{1.20}$$

On revient un instant sur la compréhension du paramètre de Fried r_0 à l'aide du critère du rapport de Strehl. On donne figure 1.8 un graphique qui compare le SR longue pose pour le cas d'un télescope limité par le seeing (spectre Von-Karman $L_0 = 30\ m$) avec le cas d'un télescope limité par la diffraction dont le diamètre serait de taille r_0 (Les rapports de Strehl étant normalisés par rapport au télescope de diamètre D). On constate que l'association du paramètre de Fried à la taille caractéristique d'un télescope à la diffraction présentant des performances équivalentes est très approximative, et dépend d'ailleurs du rapport r_0/D.

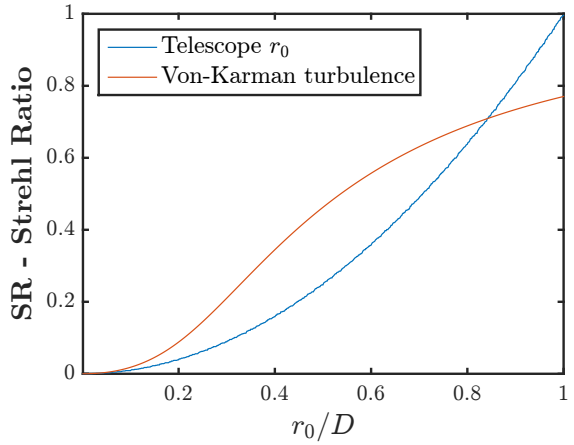


FIGURE 1.8 – **Évolution du SR par rapport à un télescope de diamètre D pour deux cas :** télescope limité par le seeing (spectre Von-Karman $L_0 = 30\ m$) et télescope à la diffraction avec un diamètre $d = r_0$.

1.1.2.3 Décomposition de la phase sur des bases modales

La phase ϕ du champ électromagnétique ψ_p dans la pupille d'entrée appartient à un espace vectoriel dont la dimension dépend du nombre de points dans la pupille permettant de décrire cette phase. A l'instar de tout espace vectoriel, on peut définir des bases qui permettent de générer toute phase aberrante donnée. Parmi la multitude de bases possibles, on s'intéressera notamment aux bases orthonormées pour le produit scalaire suivant dans l'espace des phases :

$$< f|g >= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}\rho\ f(\rho,\theta) g(\rho,\theta) \tag{1.21}$$

Ce produit scalaire définit une norme appelée norme RMS (*root-mean-square*) : $||.||_2 = \sqrt{< .|. >}$. Une base orthonormée composée d'un jeu de modes ϕ_i sera donc

unitaire au sens de cette norme. En disposant d'une telle base, dont on note les modes ϕ_i, on peut alors définir une phase ϕ en la décomposant sur les ϕ_i :

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \phi_i(\boldsymbol{r}) \tag{1.22}$$

La norme RMS de la phase ϕ s'écrit alors simplement comme :

$$||\phi||_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2} \tag{1.23}$$

On explicite ici deux bases orthonormées remarquables : la base des polynômes de Zernike et la base des KL atmosphériques.

Base des polynômes de Zernike

Cette base a été proposée par Zernike [Zernike, 1934b]. Elle est composée de modes ordonnés selon leur degré radial n et leur degré azimutal m, tels que $m \leq n$ et m de même parité que n. Leur dépendance radiale est décrite par le polynôme suivant :

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k!\left(\frac{n+m}{2}-k\right)!\left(\frac{n-m}{2}-k\right)!} \rho^{n-2k} \tag{1.24}$$

avec ρ une coordonnée radiale qui prend des valeurs entre 0 et 1. Leur dépendance azimutale suit quant à elle la règle de construction suivante :

$$\begin{aligned} Z_n^m(\rho,\theta) &= R_n^m(\rho)\cos(m\theta) \\ Z_n^{-m}(\rho,\theta) &= R_n^m(\rho)\sin(m\theta) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Avec θ la coordonnée azimutale comprise entre 0 et 2π. On passe cette définition à une pupille de diamètre D par simple homothétie de ces modes. Ces polynômes sont souvent représentés sur un graphique dont l'axe des ordonnées code le degré radial et l'axe des abscisses le degré azimutal. On obtient une représentation en forme de pyramide, présentée figure 1.9. On explicite la formulation mathématique des six premiers modes de cette base :

$$\begin{aligned} Z_0^0(\rho,\theta) &= 1 \\ Z_1^1(\rho,\theta) &= 2\rho\cos(\theta) \\ Z_1^{-1}(\rho,\theta) &= 2\rho\sin(\theta) \\ Z_2^0(\rho,\theta) &= \sqrt{3}(\rho^2-1) \\ Z_2^2(\rho,\theta) &= \sqrt{6}\rho^2\cos(2\theta) \\ Z_2^{-2}(\rho,\theta) &= \sqrt{6}\rho^2\sin(2\theta) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Tous ces modes sont définis de sorte à être à moyenne nulle, sauf le mode Z_0^0 qui représente le mode piston pur.

Cette base modale est très utilisée car les modes de bas ordres représentent les aberrations optiques les plus courantes. Ainsi Z_2^0 représente par exemple le mode focus, Z_2^2 et Z_2^{-2} codant l'astigmatisme.

Inconvénients. On liste en revanche quelques inconvénients liés à l'utilisation de cette base.

- Pour le cas des pupilles qui ne sont pas parfaitement circulaires et pleines (obstructions centrales, larges spiders, etc...) , cette base n'est plus orthonormée.
- Les modes hauts ordres radiaux présentent rapidement une concentration de l'énergie au niveau des bords de la pupille car on a toujours $R_n^m(\rho = 1) = 1$ quelque soit m et n.
- Les coefficients des modes de Zernikes ne sont pas statistiquement indépendants vis à vis de la turbulence.
- Cette base n'est pas parfaitement ordonnée vis à vis des fréquences spatiales pures de la phase : pour un degré radial n donné, le mode $m = 0$ porte un contenu fréquentiel bien plus bas ordres que les autres polynômes de même n. Les études présentées dans cette thèse auront tendance à privilégier des bases mieux ordonnées en terme de fréquences, et on utilisera ainsi la base des modes de Zernike pour sonder seulement des comportements vis à vis des modes très bas ordres.

Base des Karhunen-Loève atmosphériques

La base des Karhunen-Loève (KL) est une base qui s'affranchit des inconvénients de la base des polynômes de Zernike cités plus haut. Cette base est fabriquée à partir de la matrice de covariance spatiale de la phase turbulente dans la pupille du télescope. Pour deux points $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r'}$ de la phase cette matrice de covariance est calculée de la façon suivante :

$$Cov_\phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \left\langle \mathbb{I}_p(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\mathbb{I}_p(\boldsymbol{r'})\phi(\boldsymbol{r'}) \right\rangle_\tau \tag{1.27}$$

où on rappelle que $\mathbb{I}_p$ est la fonction de transmission de la pupille. La base des modes de KL est construite en calculant les modes propres de cette matrice. On obtient ainsi une base dont les modes sont statistiquement indépendants vis à vis de la turbulence [Dai, 1995]. De plus cette base est orthonormée pour la pupille considérée et présente une énergie adoucie aux bords. Enfin, cette base s'avère être mieux ordonnée fréquentiellement : cette propriété, pratique pour nos études, fera de cette base une base privilégiée dans les développements qui suivront. On notera le seul inconvénient de cette base : il n'y a pas de formules analytiques associées.

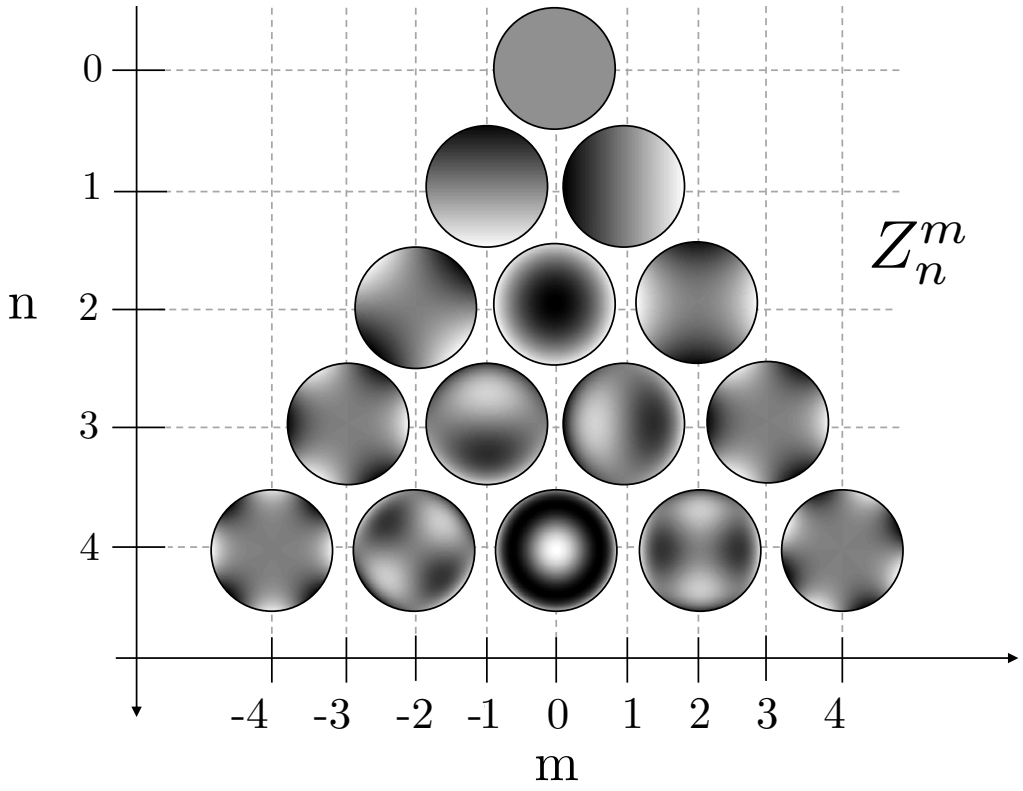


FIGURE 1.9 – **Premiers degrés radiaux de la base des polynômes de Zernike : n** est le degré radial et **m** le degré azimutal.

1.2 L'optique adaptative

On a mis en avant l'effet de la turbulence atmosphérique sur les fronts d'ondes, laissant les grands télescopes amputés d'une majeure partie de leur pouvoir de résolution. Il existe heureusement une technique permettant de rendre partiellement leur résolution théorique aux télescopes : l'Optique Adaptative (OA).

1.2.1 Généralités sur l'OA

1.2.1.1 Une brève histoire

Avec l'avènement de la classe des télescopes de plusieurs mètres de diamètre au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle, la volonté de pouvoir contrer l'altération des images par la turbulence commence à se faire sentir. Dans un article considéré comme fondateur [Babcock, 1953], Babcock décrit en 1953 la possibilité de compenser l'effet de la turbulence à l'aide d'un senseur de phase et d'une optique déformable qui viendrait "redresser" le front d'onde en temps réel : l'OA est née. On peut citer une phrase du fameux papier de Babcock lorsqu'il décrit le concept pour la mesure de la phase aberrante, dont le lecteur·rice pourra apprécier le côté avant-gardiste en lisant la suite de cette thèse :

"*[...] the light is again brought to a focus in the plane of a rotating knife-edge*"

La première démonstration du concept d'OA aura lieu en 1977 [Hardy et al., 1977] dans le cadre d'observations militaires de satellites. Il faudra finalement attendre 1989 pour une première démonstration à des fins astronomiques avec le banc COME-ON sur le télescope T152 de l'Observatoire de Haute Provence (OHP) [Rousset et al., 1990] (télescope dont on aura l'occasion de reparler plus tard dans cette thèse) puis à la Silla au Chili [Rigaut et al., 1991]. Les systèmes d'OA commencent finalement à équiper les télescopes de classe 8 m au début des années 2000 [Wizinowich et al., 2006].

Aujourd'hui, l'utilisation de systèmes d'OA s'est démocratisée, et pratiquement tous les plus grands télescopes sur Terre en sont équipés.

1.2.1.2 Principe de fonctionnement

On décrit ici plus précisément le fonctionnement d'un système d'OA dans sa configuration la plus simple, la seule que l'on étudie au cours de cette thèse : le mode *Single-Conjugated Adaptive Optics* (SCAO).

On distingue trois grands composants qui forment les briques élémentaires d'un système d'OA :

L'analyseur de surface d'onde (ASO) : c'est un senseur qui permet de mesurer la phase aberrante dans la pupille. L'étude d'une famille d'ASO est au coeur de cette thèse, on dédie donc la section suivante à la présentation de ce type senseurs.

Le calculateur temps réel (RTC) : c'est la machine qui permet de traiter les données de l'ASO pour calculer les commandes à envoyer à l'optique déformable. Le terme RTC signifie aussi bien le contenant, c'est à dire la machine physique à proprement parler, que le contenu algorithmique permettant le traitement des mesures et l'envoi des commandes.

Le miroir déformable (DM) : c'est l'optique déformable qui permet de compenser la déformation du front d'onde en temps réel.

Ces différents système s'imbriquent de la façon suivante (schéma figure 1.11) : la lumière provenant du champ observé atteint le DM puis est séparée par une lame dichroïque (composant optique qui sépare les longueurs d'ondes) en deux voies. L'une de ces voies est la voie scientifique dans laquelle est placé l'instrument qui vient effectuer les mesures astrophysiques (Imageur, spectromètre, Integral-Field-Unit, etc...). La seconde voie, dite voie ASO, récupère alors les photons à d'autres longueurs d'ondes. Dans cette voie, la lumière d'une étoile du champ (appelée étoile guide) est analysée par l'ASO pour remonter à la phase dans la pupille d'entrée du télescope afin de commander le DM. On précise ici le point suivant : pour pouvoir faire une mesure correcte, les ASO ont besoin d'un certain nombre de photons. L'étoile guide doit donc posséder une luminosité suffisante. On note sur le schéma 1.11 que l'ASO est placé après le DM et voit les **phases résiduelles**, c'est à dire les phases turbulentes corrigées par le DM. Le système d'OA fonctionne donc en

boucle fermée. La plupart du temps, la voie scientifique se trouve dans le proche infrarouge alors que l'analyse de surface d'onde s'effectue à des longueurs d'onde plus courtes (Mais ce n'est pas toujours le cas [McDermid, 2019]).

On notera que cette stratégie de compensation de l'effet de la turbulence est rendue pertinente par les deux approximations évoquées précédemment que l'on peut faire concernant l'effet de la turbulence sur le champ électromagnétique : on néglige les effets de scintillation et l'on considère que l'atmosphère imprègne une différence de marche identique pour toutes les longueurs d'ondes.

Zone de correction

La technologie des DM utilisés aujourd'hui varie suivant les fabricants, mais on y retrouve quasiment toujours la structure suivante : une fine membrane continue est déformée par des actionneurs (piezo-électriques, inductifs, etc...), afin de produire la forme voulue dans le plan pupille. La caractéristique principale d'un DM est son nombre d'actionneurs dans le diamètre de la pupille. Comme le champ dans le plan pupille est relié à celui dans le plan focal par une transformée de Fourier, un nombre d'actionneurs élevé dans la pupille impliquera une zone d'influence du DM, appelée zone de correction, étendue dans le plan focal (voir figure 1.10). On a vu que la turbulence étale la tâche image sur une taille caractéristique comparable au paramètre de Fried r_0, ainsi les systèmes d'OA sont généralement conçus pour avoir une distance inter-actionneurs de taille r_0 à la longueur d'onde de la voie science.

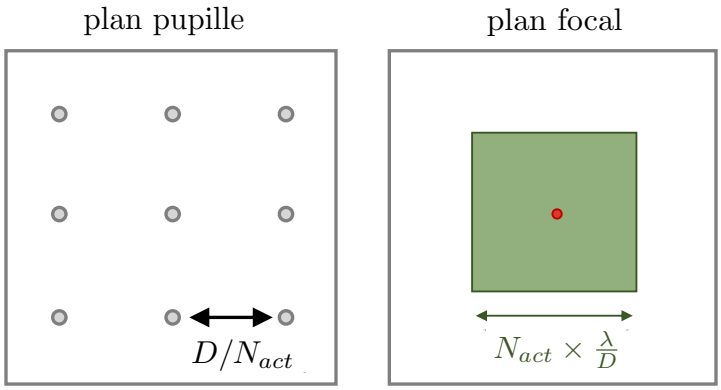


FIGURE 1.10 – **Zone de correction suivant le nombre N_{act} d'actionneurs dans le diamètre D de la pupille.**

Vitesse de boucle

La fréquence de la boucle d'OA est un paramètre crucial pour réaliser une compensation efficace de la turbulence sur la qualité des images. Pour des conditions d'observations classiques, la fréquence de la boucle doit être au minimum de l'ordre de la centaine de Hz et les systèmes les plus performants sur ciel atteignent aujourd'hui des fréquences de l'ordre de 3 kHz [Jovanovic et al., 2015]. Sans rentrer dans

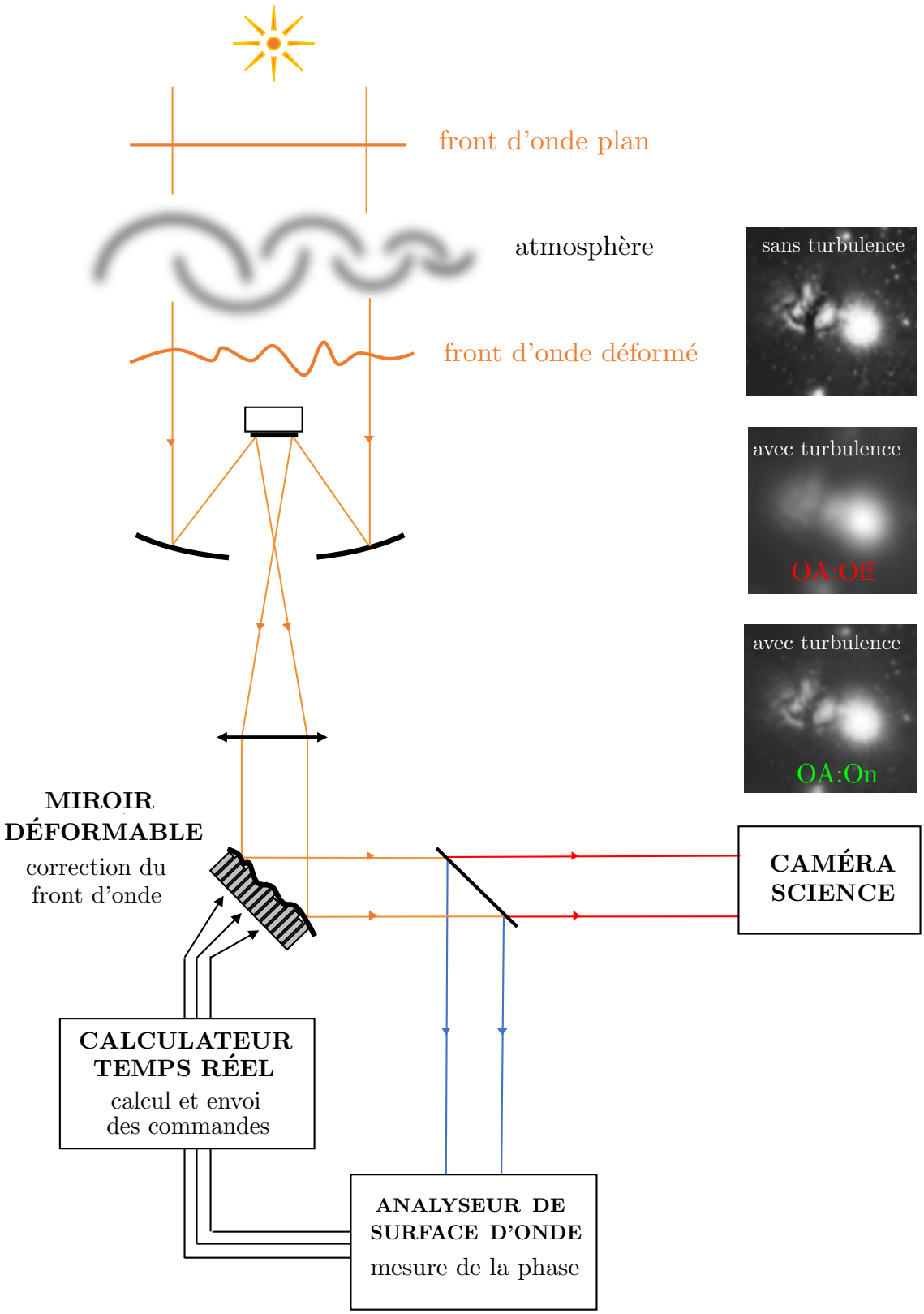


FIGURE 1.11 – **Principe de fonctionnement d'un système d'OA (en mode SCAO).**

les détails, une boucle fermée d'OA implique d'avoir recours aux techniques du domaine de l'automatique pour contrôler le système. Le plus souvent les commandes de la boucle d'OA sont gérées via un contrôle de type intégrateur, les commandes C envoyées au DM sont alors incrémentées à chaque trame de la façon suivante :

$$C_n = C_{n-1} - g \times c_n \tag{1.28}$$

où n est l'index de la trame, c_n les commandes correspondantes à la phase résiduelle mesurée par l'ASO et g un gain de boucle dont la valeur est donnée par la théorie de l'automatique. Le gain de boucle permettant d'atteindre les performances idéales oscille entre 0.2 et 0.5. Dans cette thèse, on considérera seulement un contrôle type intégrateur pour les boucles fermées, bien que de plus en plus de techniques de contrôle plus complexes qu'un simple intégrateur sont mises en service [Kulcsár et al., 2006, Petit et al., 2004].

1.2.1.3 Budget d'erreur

La qualité de correction du système d'OA peut se juger par la variance des phases résiduelles. Cette quantité va dépendre de plusieurs termes d'erreur qui s'ajoutent quadratiquement, et forment le concept crucial de **budget d'erreur** du système d'OA [Veran et al., 1997] :

$$\sigma^2_\phi = \sigma^2_{fitting} + \sigma^2_{aliasing} + \sigma^2_{temp} + \sigma^2_{noise} + \sigma^2_{nl} + \sigma^2_{calib} + \sigma^2_{aniso} + \sigma^2_{NCPA} \tag{1.29}$$

exprimée en rad^2 pour la longueur d'onde de la voie scientifique. On explicite les termes de ce budget d'erreur.

L'erreur de fitting $\sigma_{fitting}$: c'est l'erreur liée aux possibilités mêmes du DM. Celui-ci possède un nombre fixé d'actionneurs, et ne va donc pouvoir corriger qu'une portion du plan focal. Les hauts ordres de la turbulence ne seront pas corrigés, laissant leur empreinte dans la variance des phases résiduelles. Pour un miroir avec une disposition des actionneurs en grille carrée [Hudgin, 1977], on a :

$$\sigma^2_{fitting} = 0.23 \times \left(\frac{d_{act}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \tag{1.30}$$

où d_{act} est la distance inter-actionneurs.

L'erreur d'aliasing $\sigma_{aliasing}$: tous les hauts ordres non-mesurés par l'ASO se replient sur la mesure des bas ordres, et faussent en partie leur estimation.

L'erreur de temporelle σ_{temp} : elle est à la fois liée à la vitesse de la boucle, mais aussi à la latence : c'est à dire le nombre de trame de retard avec laquelle la correction est appliquée sur le DM pour une mesure de l'ASO. Cette erreur est donc intrinsèquement liée aux performances offertes par le RTC et des lois de contrôle

choisies, mais aussi aux conditions d'observations via la vitesse du vent.

L'erreur de bruit σ_{noise} **:** cette erreur trouve son origine dans les bruits de mesures qui affectent le signal mesuré par l'ASO. On aura l'occasion d'y revenir abondamment dans cette thèse.

L'erreur de non-linéarité σ_{nl} **:** les mesures de l'ASO peuvent présenter des non-linéarités, qui faussent la reconstruction de la phase.

L'erreur d'étalonnage σ_{calib} **:** cette erreur encode tous les écarts entre les conditions d'étalonnage de l'ASO et ses conditions de fonctionnement sur ciel. Une liste détaillée est donnée au début du chapitre 5.

L'erreur d'anisoplanétisme σ_{aniso} **:** cette erreur apparaît lorsque l'objet observé s'éloigne angulairement de l'étoile guide utilisée pour l'OA. Plus cet écart angulaire augmente et moins le volume de turbulence traversé est commun, comme illustré figure 1.12. Cet effet force ainsi à observer des astres proches de l'étoile guide (quelques arsec).

L'erreur des *Non-Common Path Aberration* (NCPA) σ_{NCPA} **:** encode les différences d'aberrations optiques entre la voie science et le voie ASO. Ce terme d'erreur est décrit plus en détail chapitre 5.

Tout conception d'une solution d'OA pour un télescope s'accompagne alors d'une estimation précise de la contribution de chacun de ces termes.

1.2.1.4 Les différents types d'OA

L'une des grandes limitations de la SCAO est l'*anisoplanétisme*, dont le terme d'erreur devient très vite prédominant dans l'équation 1.29 lorsque la séparation entre l'objet d'intérêt scientifique et l'étoile guide augmente. L'impact sur les possibilités offertes par la SCAO est alors doublement néfaste :

— La correction se fait dans un champ de vue réduit, il est alors impossible de profiter d'une correction sur l'ensemble de scènes astrophysiques grand champ.

— Les objets observés doivent toujours être à forte proximité d'une étoile de faible magnitude. Ce n'est bien sûr pas toujours le cas, ainsi la SCAO peut-être mise en œuvre sur une petite portion du ciel seulement : la **couverture de ciel** est réduite.

Il existe d'autres types de systèmes d'OA dont l'objectif est justement de s'affranchir de ces effets. Cependant, toute amélioration vient toujours au détriment des performances sur l'axe vis à vis de la SCAO.

LTAO : Laser Tomography Adaptive Optics. Plusieurs lasers sont tirés depuis le télescope à des positions différentes du ciel, afin de servir d'étoiles guides artificielles [Baranec et al., 2006]. Chaque LGS (*laser guide star*) est accompagné

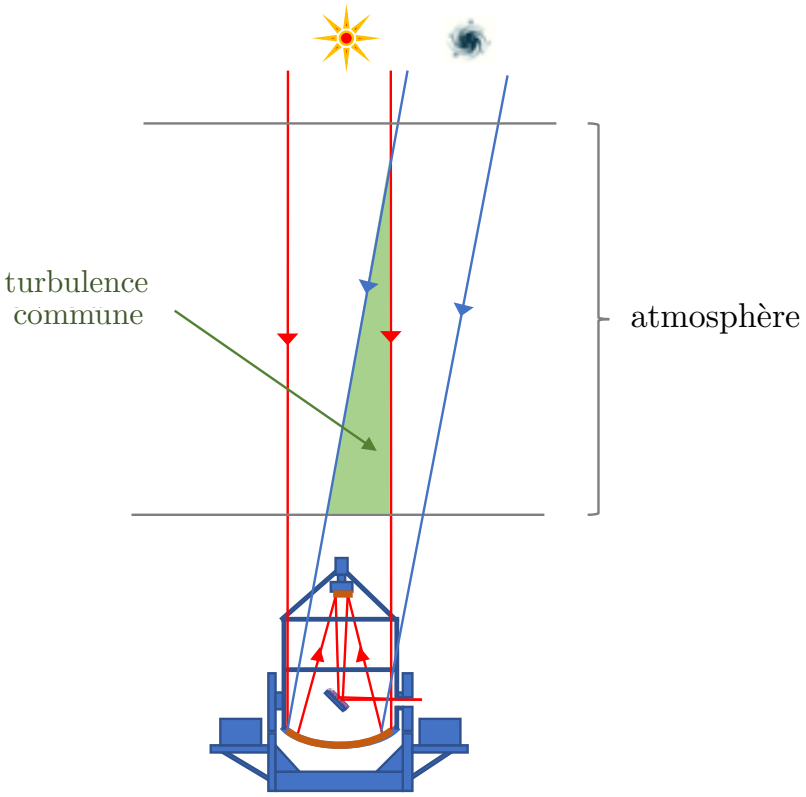


FIGURE 1.12 – **Anisoplanétisme pour le mode SCAO.**

d'un ASO travaillant soit en boucle ouverte ou soit en boucle fermée suivant les systèmes. Le volume turbulent est reconstruit par tomographie, permettant de venir corriger le front d'onde de n'importe quelle étoile située dans la zone couverte par les LGS à l'aide d'un seul DM. On notera donc que cette technique permet d'améliorer la couverture du ciel, mais la correction se fait tout de même sur un seul axe et ne permet donc pas de faire de l'OA grand champ.

MCAO : Multi-Conjugate Adaptive Optics. À l'instar de la LTAO, cette technique implique l'utilisation de LGS chacune combinée avec un ASO fonctionnant en boucle ouverte [Ellerbroek, 1994]. Cette technique utilise en revanche plusieurs DM conjugués à des couches turbulentes différentes. Cette technique permet à la fois d'améliorer la couverture de ciel, mais aussi de faire de l'OA grand champ [Rigaut and Neichel, 2020].

GLAO : Ground Layer Adaptive Optics. Cette technique est une version simplifiée de la MCAO, qui se compose toujours de LGS associées à leurs propres ASO et où l'on utilise un seul DM conjugué à la couche turbulente au niveau du sol [Rigaut, 2002]. La GLAO permet une correction dans tout le champ, mais une correction partielle seulement car les couches en haute altitude ne sont pas prises en compte.

MOAO : Multi-Object Adaptive Optics. Cette technique implique aussi une reconstruction tomographique à l'aide de plusieurs sources guides et ASO, avec cette fois plusieurs DM dont chacun corrige l'intégralité du volume turbulent dans une direction donnée [Hammer et al., 2002]. On peut associer cette technique à la LTAO, mais avec plusieurs zones de travail dans le même champ de vue.

1.2.2 L'OA extrême

Depuis une dizaine d'année de nouveaux instruments d'OA ont vus le jour, repoussant les limites des performances atteintes jusque là : la SCAO est entrée dans l'ère des instruments d'OA extrême (XOA). Cet effort considérable a un objectif bien spécifique : atteindre la limite de diffraction des grands télescopes au sol afin d'observer à haute résolution angulaire l'environnement très proche des étoiles, afin notamment d'étudier les zones de formations d'exoplanètes et d'imager directement ces "autres mondes".

1.2.2.1 La chasse aux exoplanètes

La majeure partie des exoplanètes découvertes à ce jour l'ont été grâce à des méthodes indirectes. Ces méthodes permettent de mettre en avant la présence de planètes extrasolaires en analysant leur influence sur leur environnement. Les méthodes les plus fructueuses sont celles des *vitesses radiales* et des *transits*, deux méthodes permettant de détecter la présence d'une planète en analysant seulement la lumière de l'étoile hôte. La détection directe d'exoplanètes, c'est à dire la mesure de photons émanant directement de ces planètes (soit par émission thermique dans le cas des géantes gazeuses, ou bien par réflexion de la lumière stellaire dans le cas des planètes telluriques) se présente comme une méthode extrêmement riche en informations [Bowler, 2016] :

- Analyse de l'orbite et de l'interaction avec l'environnement proche.
- Spectromètrie pour une analyse des la composition chimique de l'atmosphère.
- Possibilité de sonder des zones de paramètres difficilement atteignables par les méthodes indirectes (typiquement les planètes éloignées de leurs étoiles hôtes, et des planètes gravitant autour d'étoiles jeunes).

Un exemple connu de détection directe de système planétaire est livré figure 1.13 : cette détection impressionnante implique quatre planètes orbitant autour d'une étoile. La détection directe d'exoplanète est malheureusement très complexe à réaliser, car elle se trouve confrontée à deux difficultés principales. Tout d'abord les distances angulaires entre les étoiles et leurs planètes sont très faibles, le télescope utilisé doit ainsi posséder un grand pouvoir séparateur. De plus, le ratio entre la luminosité de l'étoile et celle de la planète (appelé **contraste**) est excessivement réduit : de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-10}. Par conséquent, même dans le cas d'observations à hautes résolutions angulaires, le signal de la planète se retrouve couvert par le bruit de photon de son étoile hôte.

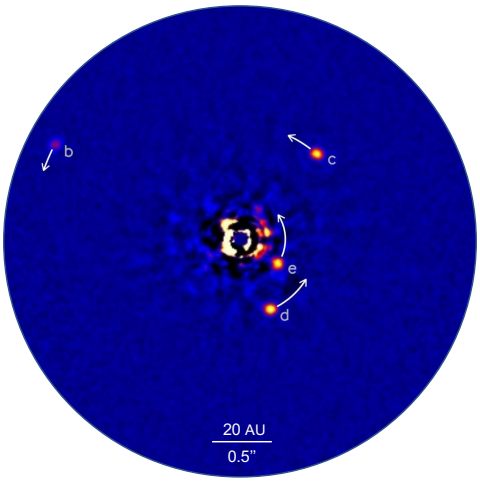


FIGURE 1.13 – **HR8799 : un système planétaire à 134 années-lumières** [Marois et al., 2008].

Vaincre le bruit de photon

La détection directe d'exoplanètes se retrouve finalement face à une limitation fondamentale : le bruit de photon de l'étoile couvrant le signal de la planète. Pour mieux appréhender cette limitation, on analyse la tentative de détection dans la configuration idéale suivante : le système Terre-Soleil situé à 15 parsecs, observé avec un télescope de classe 8 m. Les différents paramètres sont illustrés figure 1.14.

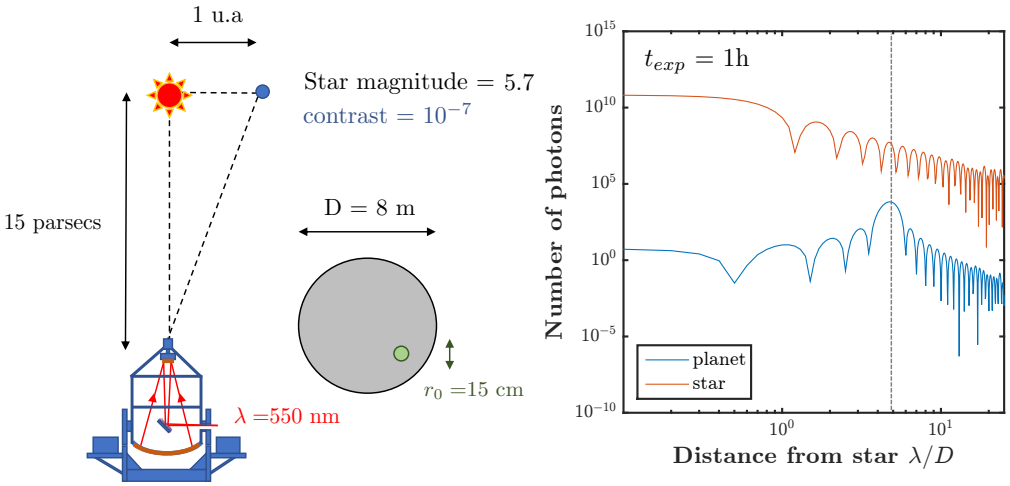


FIGURE 1.14 – **Paramètres choisis pour la simulation d'une détection d'exoplanète.** Dans ce cas, la planète se trouve à une distance angulaire $5\lambda/D$ de l'étoile.

Si l'on considère comme seule limitation instrumentale le bruit de photon (transmission parfaite, aucune présence de bruit supplémentaire), on peut alors estimer le

temps d'exposition nécessaire pour détecter la planète à un SNR = 3. Le SNR vis à vis du bruit de photons pour la détection de la planète s'écrit :

$$SNR = \frac{N_p}{\sqrt{N_s + N_p}} \tag{1.31}$$

avec N_s le nombre de photon de l'étoile à la position de la planète et N_p le nombre de photon de la planète au niveau de sa position centrale (défini sur un pixel de taille λ/D).

On compare trois configurations différentes :

1. Un cas en pleine turbulence, où la résolution du télescope est donc limitée par le *seeing*, avec un $r_0(550nm) = 15\ cm$. Dans ce cas, la tâche image du télescope est bien plus grande que la séparation angulaire entre l'étoile et sa planète. On l'a vu à la section précédente : la détection peut tout de même se faire, mais cela au prix d'une grande accumulation de photons. On trouve dans cette exemple un temps d'intégration nécessaire pour obtenir un SNR = 3 de l'ordre de 120 ans !
2. Prenons désormais un cas sans aberrations optiques, où le télescope travaille avec son pouvoir de résolution maximal. Dans ce cas, le temps d'intégration obtenu est de l'ordre de la trentaine de jours. Cette configuration idéale, pourtant affranchie de toute turbulence, reste finalement infaisable en pratique car demande un temps de télescope absolument considérable à l'échelle d'un observatoire. Il faut absolument avoir recours à une méthode pour éliminer les photons appartenant à l'étoile hôte : c'est le dernier cas présenté.
3. On étudie un cas où l'on a réussi à "éteindre" entièrement la lumière provenant de l'étoile à l'aide d'un système optique que l'on considère ici parfait, appelé **coronographe**. Dans ce cas, le SNR est limité seulement par le bruit de photon provenant de la planète elle même. On atteint alors un SNR = 3 en seulement quelques minutes de temps d'intégration.

On illustre l'évolution du SNR pour les trois cas figure 1.15. Cet exemple très simplifié résume bien l'enjeu auquel les astronomes font face lorsqu'ils tentent d'imager directement les exoplanètes avec des télescopes au sol : l'optique adaptative permettant de récupérer une partie de la résolution perdue ne suffit pas, il faut aussi avoir recours à des systèmes optiques permettant d'annuler la lumière provenant de l'étoile, appelés coronographes. Mis à part le fait que les coronographes ne permettent jamais d'éteindre entièrement la lumière de l'étoile, leur qualité de fonctionnement dépend en fait très fortement de la qualité de correction du front d'onde apportée par l'OA. C'est d'ailleurs en partie pourquoi le cas parfait qui conduirait à obtenir une détection d'une exoplanète en quelques minutes est très loin d'être approché en pratique. Il a été démontré que la distribution de la lumière de l'étoile dans le plan focal n'étant pas annulée par le coronographe peut être approximée par la PSD des phases résiduelles [Sauvage et al., 2010, Cavarroc et al., 2006]. Cette constatation définit un nouveau standard pour le système d'OA en amont du coronographe.

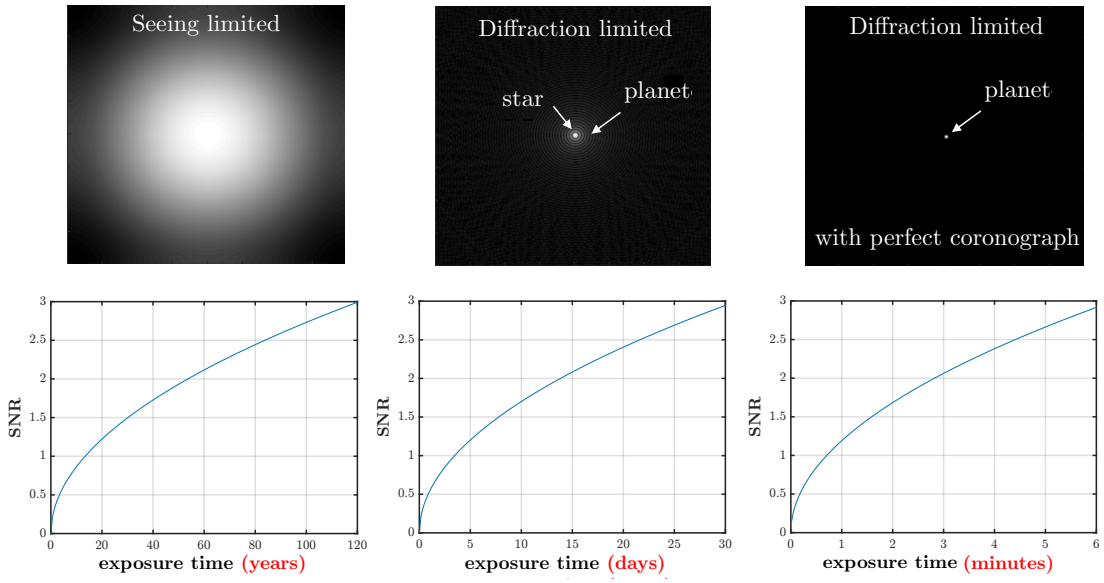


FIGURE 1.15 – **Évolution du SNR suivant le temps d'intégration pour différentes configurations.**

1.2.2.2 L'OA pour le haut contraste

L'OA mise en place sur les systèmes "chasseur de planètes" doit donc être de très haute performance, car toute phase résiduelle vient laisser son empreinte dans le plan focal et réduit fortement le contraste entre la planète et l'étoile. Pour les systèmes d'OA classiques, la mesure de performance privilégiée est la variance des phases résiduelles, dictée par le budget d'erreur présenté équation 1.29. Dans les systèmes d'OA visant à maintenir un **haut contraste** entre la lumière de la planète et la lumière de l'étoile traversant le coronographe, on ne s'intéresse plus seulement à la variance totale de ces phases résiduelles, mais aussi à leurs structures spatiales dans le plan pupille : effectuer une optimisation scalaire des termes du budget d'erreur n'est plus suffisant [Kasper, 2012]. On constate dans l'exemple de résidus d'OA donnés figure 1.16 que les PSD des différents termes d'erreurs se distribuent de manière hétérogène dans le plan focal. Ces termes sont autant de photons de l'étoile qui traversent le coronographe et viennent polluer le signal de la planète. Les systèmes d'OA conçus doivent alors repousser les limites des performances atteintes jusqu'ici et rentrer dans le domaine de la XOA : DM haute performance, rapidité de boucle décuplée, ASO très hautes sensibilités, etc...

L'ASO au coeur des limites fondamentales de la XOA. Dans le budget d'erreur présenté équation 1.29, il est possible de distinguer les verrous technologiques des limites fondamentales qui forment une barrière pour les performances ultimes des systèmes d'XOA. Les erreurs de fitting, d'aliasing et temporelle relèvent de limitations purement technologiques qui, lorsque ces verrous sont repoussés, impactent directement l'erreur liée au bruit de l'ASO (schéma 1.17). En effet, un DM de très haut ordre et un échantillonnage fin de la turbulence entraînent l'utilisation

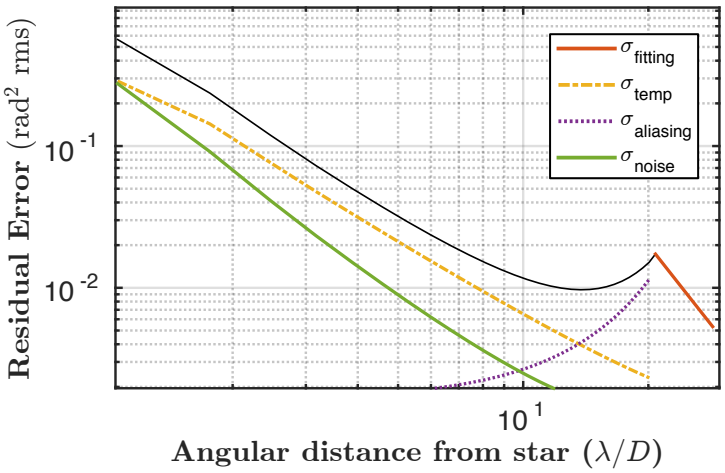


FIGURE 1.16 – **Distributions typiques des termes d'erreurs dans un système de haut contraste** .

de plus grand nombre de pixels pour la mesure, et donc une propagation du bruit de lecture plus grande. De plus, une réduction de l'erreur temporelle via des RTC très hautes performances réduit le nombre de photons disponibles pour la mesure. On voit finalement que toute progression technologique se répercute sur les performances offertes par l'ASO, dont la limitation fondamentale est dictée par le bruit de photon entachant ses mesures. **Ainsi, cette thèse se focalise entièrement sur la partie analyse de surface d'onde des systèmes d'OA, afin de mettre en avant leurs limites fondamentales.**

1.3 Analyse de surface d'onde

1.3.1 Généralités sur l'analyse de surface d'onde

Dans les longueurs d'ondes de travail pour les systèmes d'OA (visible et proche infrarouge), il n'existe pas de détecteurs permettant de mesurer électroniquement la phase de l'onde incidente. Un ASO est un système optique qui va permettre de convertir la phase du champ électromagnétique incident sous la forme d'amplitude, alors mesurable par un détecteur quadratique. Un ASO a donc pour objectif d'encoder la phase sous forme d'intensités.

Un ASO est un **senseur** au sens très général du terme : il convertit une grandeur physique en un signal mesurable. Comme tout senseur en physique, il se décrit par trois grandes caractéristiques dont on donnera des définitions plus précises chapitre 3 :

Sensibilité : encode la pertinence du signal malgré la présence de bruit dans la mesure.

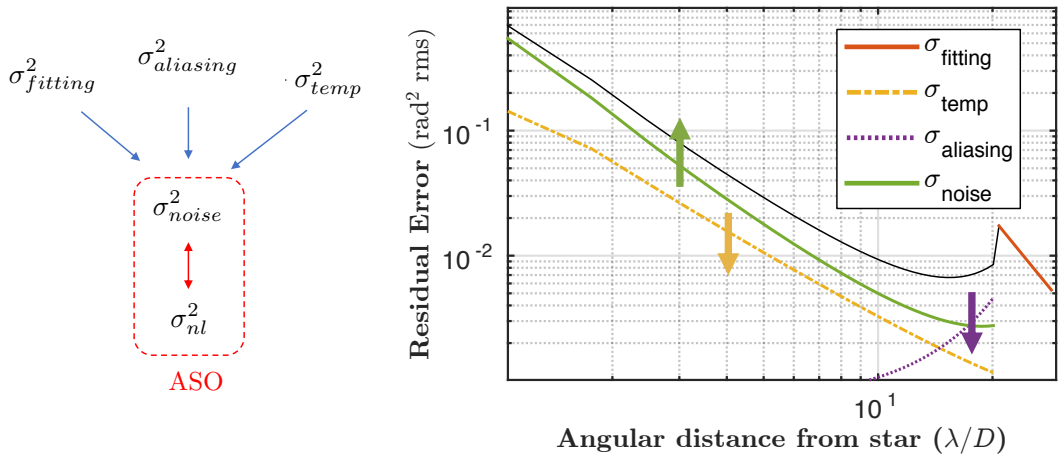


FIGURE 1.17 – **Le verrou fondamental d'un système d'XOA est dicté par la qualité des mesures fournies par l'ASO à travers sa sensibilité et sa dynamique.**

Dynamique : donne l'amplitude maximale mesurable des grandeurs physiques. Cette propriété est antagoniste avec la sensibilité.

Inversion : décrit les moyens et méthodes mises en oeuvre pour retrouver la grandeur physique à partir du signal mesuré.

Bijectivité

En notant I la fonction de l'ASO qui encode la phase en intensités et $\mathbb{E}_\phi$ l'espace des phases que l'on cherche à sonder :

$$\begin{aligned} I : \mathbb{E}_\phi &\to I(\mathbb{E}_\phi) \\ \phi &\to I(\phi) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Il est indispensable que quelque soit la sensibilité, la dynamique ou bien la technique d'inversion mise en oeuvre, la fonction I soit bijective sur une certaine plage d'amplitude de la phase. Comme l'espace d'arrivée est l'image de l'espace de départ, la surjectivité est assurée. Il suffit donc que I soit injective pour remplir le critère de bijectivité. Autrement dit, il faut que la fonction I satisfasse :

$$\forall(\phi_1, \phi_2) \in {\mathbb{E}_\phi}^2, I(\phi_1) = I(\phi_2) \implies \phi_1 = \phi_2 \tag{1.33}$$

Ce critère est absolument nécessaire, car dans le cas contraire l'ASO présente des ambiguïtés : des mêmes signaux peuvent correspondre à la mesure de phases différentes en entrée, rendant l'inversion impossible quelque soit la technique utilisée.

1.3.2 Les grandes familles d'analyseurs de surface d'onde

Il existe une multitude de systèmes optiques permettant d'effectuer de la mesure de surface d'onde. Le but de cette section est de présenter les principaux ASO utilisés dans le domaine de l'optique, sans en mener une liste exhaustive. On sépare les ASO en deux grandes catégories : les ASO nécessitant une onde de référence, et ceux qui n'en nécessitent pas.

1.3.2.1 ASO à onde de référence

Les ASO utilisant une onde de référence sont très utilisés dans le domaine de la métrologie optique. On présente les trois plus courants, leurs principes d'utilisations présentant de grandes similarités : ce sont des interféromètres à deux chemins optiques. C'est à dire qu'une partie de la lumière passe par l'un des chemins et rencontre la surface optique à analyser, tandis que le reste de la lumière passe par un autre chemin sans être altérée. Tous ces interféromètres fonctionnent avec une source monochromatique.

L'interféromètre de Twyman-Green

Cet interféromètre est une version légèrement modifiée de l'interféromètre de Michelson [Malacara, 1978]. Les modifications sont les suivantes : dans le cas d'une optique transmissive de puissance (par exemple une lentille) à tester, le miroir de renvoi de la branche analyse est remplacé par un miroir sphérique permettant de compenser la focalisation de l'onde (voir figure 1.18). De plus, le miroir plan situé dans la voie de référence est souvent modulé en position suivant son axe optique afin d'appliquer des techniques de démodulation de franges.

L'interféromètre de Mach-Zehnder

Cet interféromètre, aussi illustré 1.18, présente deux voies distinctes [Zehnder, 1891]. La surface optique à analyser est placée dans l'une d'elles. On notera que cet interféromètre, utilisé dans un régime de comptage de photon, est très prisé en mécanique quantique afin de mettre en avant expérimentalement les propriétés ondulatoire du photon [Marshman and Singh, 2016].

L'interféromètre de Fizeau

L'interféromètre de Fizeau est sûrement le plus utilisé des interféromètres de métrologie cités dans cette section [Asfour and Poleshchuk, 2006]. Contrairement aux interféromètres de Twyman-Green et de Mach-Zehnder, le chemin optique non-commun à la voie analyse et la voie de référence est très réduit. Cet interféromètre est

donc plus robuste aux erreurs d'alignement et aux défauts optiques qui pourraient entacher une voie sans affecter l'autre.

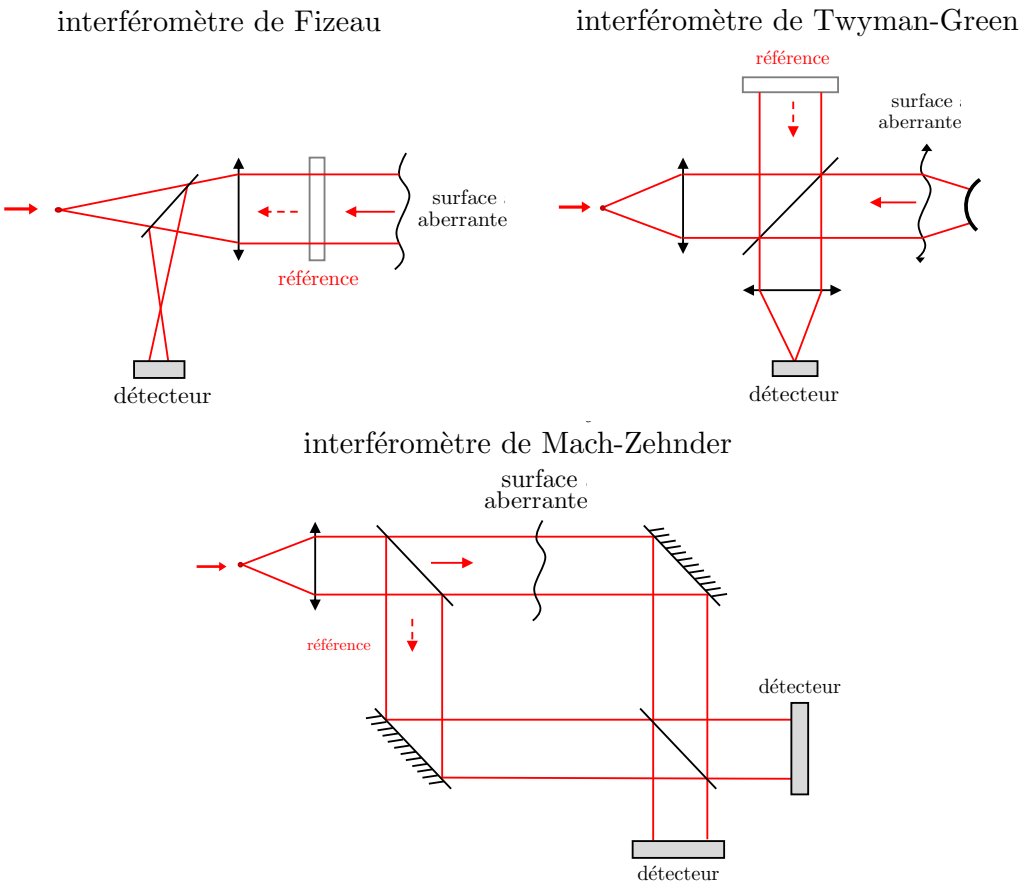


FIGURE 1.18 – **Interféromètres à double chemin optique nécessitant une voie de référence.**

1.3.2.2 ASO sans onde de référence

On présente ici les ASO dont la mesure ne dépend pas d'une onde de référence. Cette catégorie présente des senseurs beaucoup plus variés dans leurs principes de fonctionnement.

Les interféromètres

On peut lister quelques interféromètres qui fonctionnent sans le besoin d'une onde de référence.

L'interféromètre de Mach-Zehnder à pastille : c'est une version modifiée du Mach-Zehnder présenté plus haut. Dans l'une des branches (voir figure 1.19), un diaphragme placé en plan focal permet de filtrer le front d'onde et de

générer une onde de référence s'approchant d'une onde plane [Delacroix et al., 2015].

Le biprisme de Fresnel : ce montage s'aide d'un prisme pour venir superposer des portions différentes du faisceau incident. Des franges apparaissent alors à l'intersection des faisceaux émanant chacun d'une face du prisme. Une illustration est aussi présentée figure 1.19.

L'interféromètre de Sagnac : Cet interféromètre permet à la lumière de suivre le même chemin optique mais dans deux sens différents [Sagnac, 1913], avant de venir interférer au niveau du détecteur (figure 1.19.).

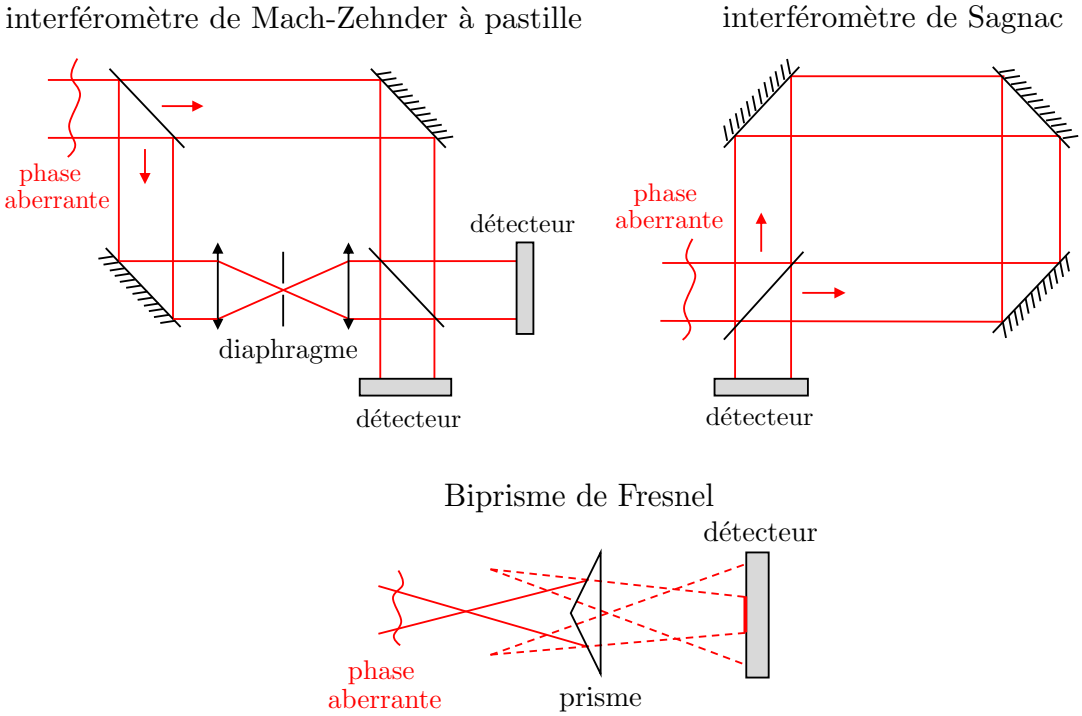


FIGURE 1.19 – **Interféromètres à chemin optique commun.**

Les interféromètres à décalage : ce type d'interféromètres consiste à séparer la pupille sur plusieurs voies pour ensuite venir les faire interférer avec un décalage. Ce décalage peut être une translation latérale, une dilatation radiale (en appliquant un facteur de grandissement à l'une des pupilles) ou bien une rotation avec un angle donné (illustration figure 1.20). Dans les cas d'un déplacement très faible, ce type d'interféromètre donnera accès au gradient de la phase suivant la direction du décalage. C'est d'ailleurs une version d'interféromètre à décalage latéral, dit interféromètre de shearing, qui a été utilisé pour la première fois dans le cadre d'un système d'OA [Hardy et al., 1977]. Cet ASO aura aussi été un temps envisagé pour équiper le VLT [Merkle and Hubin, 1992] avant d'être abandonné au profit du senseur Shack-Hartman, présenté plus loin. L'annexe B s'attarde plus longuement

sur le cas très instructif de cet ASO.

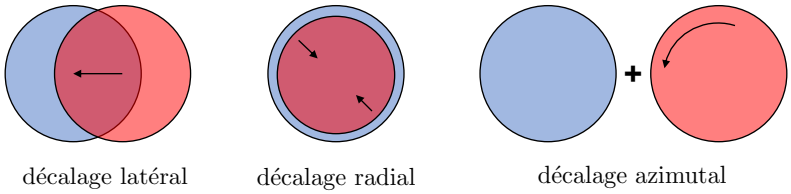


FIGURE 1.20 – **Les types d'interféromètres à décalage, dits aussi de shearing.**

L'imagerie plan focal et diversité de phase

L'imagerie plan focal a une place privilégiée en astronomie. On peut dès lors se demander la capacité à remonter à la phase du champ électromagnétique dans la pupille à partir de la donnée d'une image courte pose en plan focal. Il est clair qu'une telle image exhibe une forte dépendance avec la phase en entrée. Si ce n'était pas le cas, on ne construirait pas de systèmes d'OA ! En revanche, il est possible de montrer que l'imagerie plan focal présente une ambiguïté sur la détermination du signe des modes de phase centro-symmétriques dans la pupille : l'opération qui convertit la phase en intensité n'est donc pas bijective. Pour contrer ce problème, il existe deux solutions :

— Briser la symétrie de la pupille en mettant un masque pupillaire [Martinache et al., 2016].
— Prendre une image supplémentaire défocalisée, afin de lever l'indétermination sur le signe des modes ambigus. Cette méthode s'appelle la *diversité de phase*, et est très utilisée en pratique pour étalonner les aberrations statiques sur les bancs optiques [Mugnier et al., 2008].

L'ASO de courbure

L'ASO de courbure, introduit par Roddier en 1988 [Roddier et al., 1988] consiste à prendre une image avant le focus et une autre après celui-ci. En pratique, ce n'est pas le détecteur qui se déplace mais plutôt le point de focalisation du faisceau. Le traitement de ces deux cartes d'intensité permet de retrouver le laplacien de la phase en entrée. En prenant des distances plus ou moins éloignées du plan focal, le comportement de cet ASO peut être modifié selon les besoins du système.

L'ASO de type Shack-Hartmann

L'ASO Shack-Hartmann (SHWFS) consiste en un réseau de microlentilles placées en plan pupille et un détecteur situé au plan focal de ces lentilles [Shack, 1971]. Chaque microlentille vient imager une PSF sur le détecteur. Le centre de masse de chaque PSF sera lié au tip-tilt local dans chaque sous-pupille, la mesure de leurs

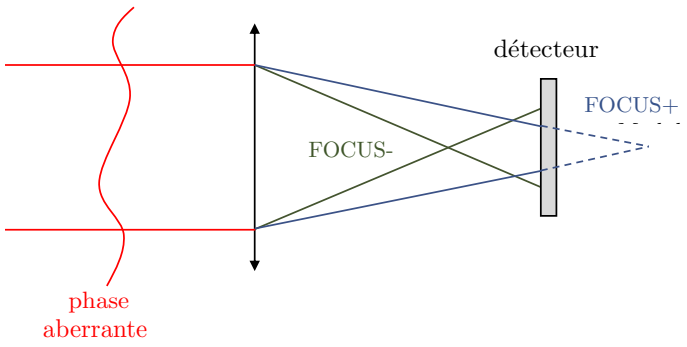


FIGURE 1.21 – **ASO à courbure.**

positions permettant ainsi de remonter au gradient de la phase. On ne détaille pas plus ce concept, très largement étudié et utilisé dans le domaine de l'OA.

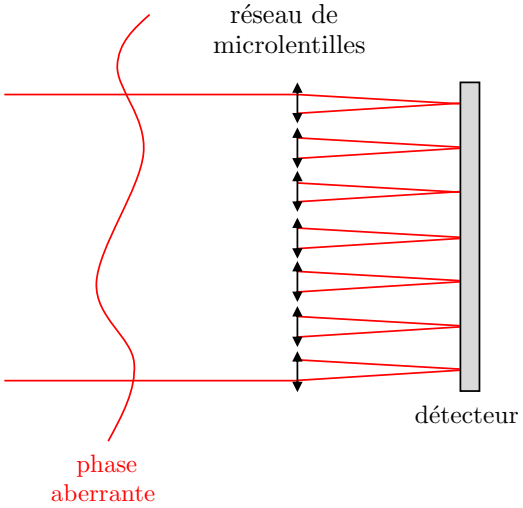


FIGURE 1.22 – **Le SHWFS :** l'ASO le plus utilisé dans le domaine de l'OA.

Les ASO à filtrage de Fourier

On termine cette liste par les ASO à filtrage de Fourier qui vont occuper tous les autres chapitres de cette thèse. On ne les introduit pas ici, et leur réserve une longue présentation dans le chapitre suivant.

1.3.3 Spécificités propres à l'optique adaptative

Avant d'exposer les besoins en terme de sensibilité, dynamique et type d'inversion pour les ASO utilisés au sein des systèmes d'OA, on explicite les spécifications optiques nécessaires pour les mesures :

— On ne possède pas d'onde plane de référence car la lumière provenant des étoiles guides (quelles soient de type LGS ou bien naturelles) est entièrement

affectée par la turbulence. On peut donc d'ores et déjà renoncer à tous les ASO de type interférométrique utilisant une onde de référence pour procéder à la mesure.

— Cohérence temporelle : les ASO en OA seront voués à un fonctionnement sur une bande spectrale non-étroite. Les ASO dont la mesure repose sur une contrainte très forte en terme de cohérence temporelle seront donc inutilisables. On aura l'occasion de présenter au cours de cette thèse des ASO fortement chromatiques, mais dont la mesure n'est pas entièrement détruite lors du passage à une bande spectrale plus large.

— Cohérence spatiale : à l'instar de la cohérence temporelle, la mesure de l'ASO doit pouvoir aussi être robuste aux présences de sources non cohérentes, une étoile guide étant rarement seule dans tout l'ensemble du champ de vue sur lequel est mené l'analyse.

Inversion des mesures de l'ASO en OA

Pour les besoins du temps réel, l'inversion des mesures doit être extrêmement rapide. Les systèmes d'OA utilisent en grande majorité un formalisme matriciel qui suppose **une relation linéaire** entre la phase mesurée et le signal fourni par l'ASO. C'est dans ce **cadre fixe**, que l'on mènera toutes les études de cette thèse. On considère ainsi que la quantité riche en information dans la mesure d'un ASO est sa dépendance linéaire avec la phase en entrée. L'approche linéaire permet une inversion simplifiée du signal de l'ASO. Cette inversion se base sur la matrice d'interaction $\mathcal{D}$, une matrice mesurée au cours d'une opération d'étalonnage (opération présentée plus en détail dans le chapitre suivant) et qui décrit le comportement linéaire de l'ASO. Cette matrice caractérise donc le problème direct, qui relie les phases en entrée avec le signal mesuré :

$$s(\phi) = \mathcal{D}\phi \tag{1.34}$$

Pour inverser le problème, on utilise alors l'inverse généralisé $\mathcal{D}^\dagger$ de la matrice $\mathcal{D}$:

$$\phi = \mathcal{D}^\dagger s(\phi) \tag{1.35}$$

où $\mathcal{D}^\dagger$ est souvent dénommée **reconstructeur** ou bien matrice de commande. Cette matrice se calcule de la façon suivante :

$$\mathcal{D}^\dagger = (\mathcal{D}^t\mathcal{D})^{-1}\mathcal{D}^t \tag{1.36}$$

Même dans le cas d'une boucle fermée en OA, où l'ASO mesure des phases résiduelles d'amplitude réduite par rapport à la turbulence, on verra que cette hypothèse de relation linéaire - sur laquelle se base l'inversion des mesures de l'ASO - est malheureusement mise à mal.

Dynamique

La mesure de front d'onde en OA se retrouve face à une forte contrainte liée à l'amplitude des phases aberrantes : dans le cas d'un ASO dit de premier étage, la

gamme de fonctionnement doit être assez grande pour parvenir à fermer la boucle sur une turbulence pleine. Dans le cas d'un système de deuxième étage, c'est à dire fonctionnant sur front d'onde préalablement corrigé, les contraintes de dynamique sont relâchées. On donnera une définition plus quantitative de la dynamique chapitre 3.

Sensibilité

Les fréquences très rapides des systèmes d'OA demandent d'avoir recours à des ASO très efficients en terme d'encodage de la phase : l'utilisation des photons doit être très efficace et doit entraîner une perte minimale de flux dans le processus. On donnera aussi une définition bien plus quantitative de la sensibilité chapitre 3.

Dans cette thèse, on va donc focaliser nos études sur un type d'ASO bien particulier : les **ASO à filtrage de Fourier**. Ce choix de concentrer nos efforts sur ce type d'ASO est motivé par plusieurs facteurs :

- Ce type de senseurs est intrinsèquement plus sensible que le SHWFS, traditionnellement utilisé en OA. Sans rentrer dans une comparaison poussée, ce gain en sensibilité s'explique par le régime de fonctionnement en **pleine pupille** des ASO à filtrage de Fourier, alors que le SHWFS "découpe" celle-ci en morceaux [Plantet, 2015]. Cet écart est d'autant plus important que le nombre de point de mesure dans la pupille augmente. Ainsi pour les systèmes d'XOA, cette différence est d'autant plus marquée.
- La démonstration de l'opérabilité sur ciel de certains ASO de cette famille a été réalisée au cours des dernières années [Ragazzoni et al., 2000, Esposito et al., 2010, Vigan, A. et al., 2019].
- Cette classe est très modulaire, avec un cadre (défini au chapitre suivant) qui permet d'englober un très grand nombre d'ASO différents. D'ailleurs, le lecteur·rice pourra par la suite remarquer le parallèle fort entre quelques interféromètres présentés ici et certains ASO à filtrage de Fourier exposés chapitre 4.
- Enfin, les outils et méthodes développés dans cette thèse peuvent aussi s'appliquer à certains ASO qui ne se décrivent pas forcément par le formalisme du filtrage de Fourier. Un exemple est donné en annexe B avec l'interféromètre de shearing.

Ce chapitre introductif a présenté les enjeux de l'OA pour l'astronomie. À l'ère de l'imagerie directe des exoplanètes, j'ai rappelé en quoi l'analyse de surface d'onde se trouve particulièrement au coeur des performances des systèmes d'XOA. Cette thèse va donc se concentrer sur les ASO, et plus particulièrement sur une famille spécifique : les ASO à filtrage de Fourier.

Chapitre 2

Analyse de surface d'onde par filtrage de Fourier

Résumé

Ce chapitre décrit le principe de fonctionnement des analyseurs à filtrage de Fourier. J'y rappelle les formules mathématiques de base permettant de décrire le lien entre la phase en entrée et les signaux mesurés. J'introduis ensuite le formalisme au coeur de cette thèse : le modèle convolutif et les différentes approximations qui permettent son utilisation. Ce chapitre est aussi l'occasion de présenter l'analyseur à filtrage de Fourier le plus utilisé en OA : l'analyseur pyramide.

Sommaire

2.1 Structure du système optique 54
2.1.1 Principe de base 54
2.1.2 Version ASO 55
2.2 Opération sur les intensités et encodage de la phase . . 59
2.2.1 Traitement des intensités 59
2.2.2 Matrice d'interaction 60
2.3 Formalisme mathématique 61
2.3.1 Modèle linéaire 62
2.3.2 Modèle convolutif 65
2.3.3 Cadre des simulations numériques 70
2.4 Un exemple d'ASO à filtrage de Fourier : l'analyseur pyramide 71
2.4.1 Explication géométrique : du test de Foucault à l'analyseur Pyramide 71
2.4.2 Description simplifiée du comportement ondulatoire . . . 76
2.4.3 Le modèle convolutif appliqué à la 4PWFS 78

2.1 Structure du système optique

2.1.1 Principe de base

Dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer, on a vu dans le chapitre précédent que le champ électromagnétique pour une longueur d'onde donnée en entrée de la pupille est relié au champ dans le plan focal par une simple transformée de Fourier (en négligeant le grandissement dépendant de la focale et de la longueur d'onde). Pour réaliser un montage optique permettant d'opérer un filtrage de Fourier, il faut décaler le détecteur dans un plan pupille après le plan focal. On obtient alors le système représenté figure 2.1. En glissant un masque dans le plan focal intermédiaire, on peut alors réaliser du filtrage dans le plan de Fourier. On précise que ce montage peut en pratique se passer du deuxième élément focalisant dans le cas où la pupille n'est pas située à l'infini par rapport au premier élément focalisant. On préférera ce montage à deux lentilles, qui permet d'avoir un faisceau collimaté arrivant sur la caméra. Quoiqu'il en soit, les équations présentées dans ce chapitre restent valables pour les deux configurations.

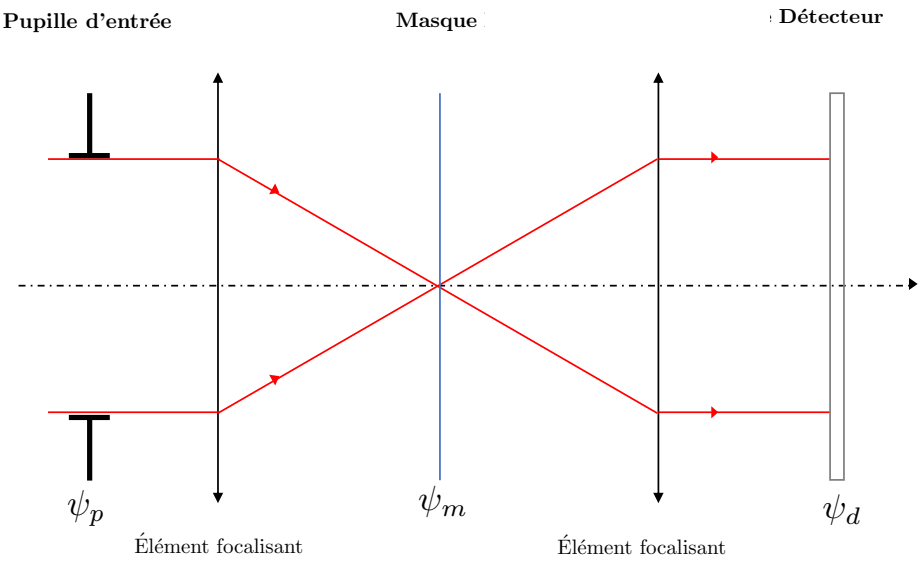


FIGURE 2.1 – **Montage optique du filtrage de Fourier**

Filtrage des fréquences

Un exemple très classique de filtrage de Fourier en optique est l'expérience d'Abbe. On illumine le plan pupille avec des intensités qui prennent la forme d'une grille. Dans ce cas, le champ en entrée est purement d'amplitude. En plaçant un masque qui laisse passer le champ seulement dans une direction (voir figure 2.2) on filtre toutes les fréquences spatiales dans l'autre direction. Les intensités sur le détecteur au plan pupille révèlent alors bien ce filtrage : toutes les fréquences spatiales filtrées par le masque ont disparu. On peut évidemment imaginer des filtres

plus complexes, comme ceux largement utilisés dans le domaine du traitement du signal : filtre passe-bas, passe-haut, passe-bandes, et autres. On donne aussi l'exemple d'un filtre passe-bas pour le cas d'une photo d'enfant figure 2.2. Dans ces exemples, on s'intéresse à un filtrage de l'amplitude du champ en entrée. Pour l'analyse de front d'onde, on va plutôt s'intéresser à l'effet de tels filtrages sur la phase du champ en entrée.

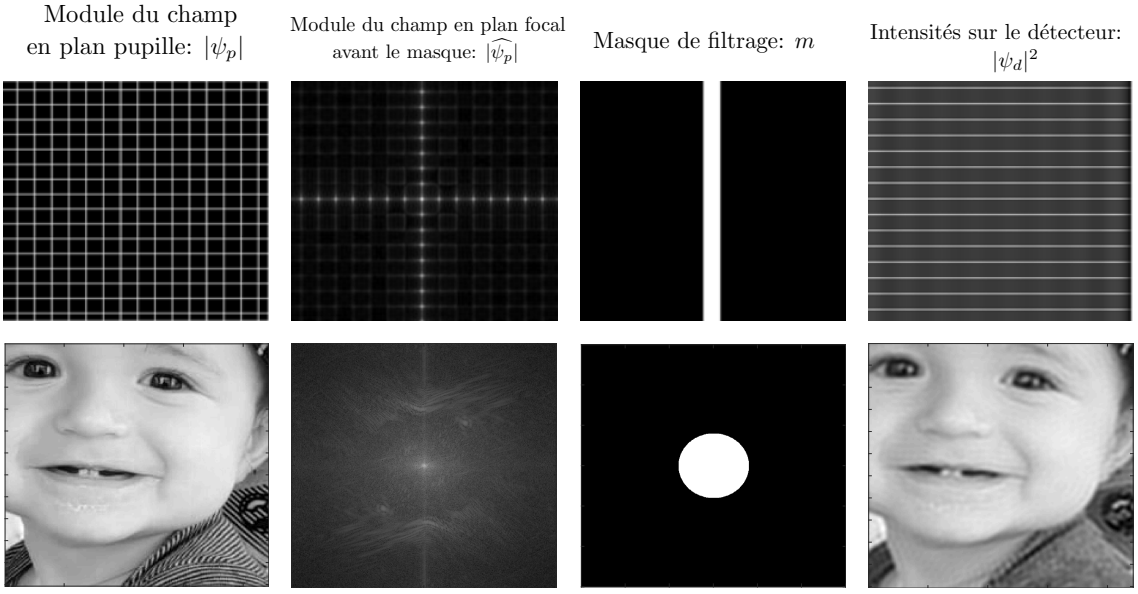


FIGURE 2.2 – **Filtrage de Fourier sur l'amplitude du champ. Haut :** expérience d'Abbe. **Bas :** filtrage passe-bas opéré sur la photographie d'un enfant. On constate la disparition des hautes fréquences présentes sur les vêtements.

2.1.2 Version ASO

C'est donc ce type de montage que l'on va étudier dans la suite de cette thèse, afin effectuer l'analyse de surface d'onde.

2.1.2.1 Filtrage optique en plan focal

Toujours en négligeant les facteurs de grandissement dans les expressions, on a donc le lien entre les champs électromagnétiques des différents plans notables du montage (notés figure 2.1) :

$$\psi_p \longrightarrow \psi_m = \widehat{\psi_p} \times m \longrightarrow \psi_d = \widehat{\psi_m} = \psi_p \star \widehat{m}$$

où m est une fonction complexe qui représente le masque. Cette fonction s'écrit pour les coordonnées (x_m, y_m) dans le plan focal :

$$m|_{x_m,y_m} = A|_{x_m,y_m} e^{i\Delta|_{x_m,y_m}} \tag{2.1}$$

où A est la carte d'amplitude du masque et Δ la phase du masque (ces deux cartes sont donc réelles). Pour des raisons de conservation de l'énergie, les valeurs de A sont comprises entre 0 et 1. On a insisté au chapitre précédent sur l'importance de conserver le maximum de photons lors de l'opération d'analyse, les masques considérés dans cette thèse seront donc des masques de phase pure : $m = e^{i\Delta}$.

2.1.2.2 Détection en plan pupille

Le détecteur placé dans le plan pupille situé après le plan focal enregistre l' intensité du champ filtré par le masque :

$$I = |\psi_d|^2 = |\psi_p \star \widehat{m}|^2 \tag{2.2}$$

Si l'on remplace l'expression du champ incident, on écrit alors la fonction qui relie les intensités en sortie avec la phase en entrée :

$$I(\phi) = |\mathbb{I}_p e^{i\phi} \star \widehat{m}|^2 \tag{2.3}$$

Cette expression est donc l'équation de base qui nous servira de point de départ pour affiner notre compréhension de la réponse des ASO à filtrage de Fourier dans le cadre de diverses approximations.

Le montage que l'on considère pour la version ASO est en réalité légèrement plus général que celui montré figure 2.1 car il présente un étage optique supplémentaire situé dans le plan pupille d'entrée : c'est l'étage de modulation. On mène la description de ce nouvel étage et introduit le formalisme mathématique qui l'accompagne dans la paragraphe suivant, mais toute son utilité pratique sera mise en lumière avec l'introduction à l'ASO pyramide dans la section suivante.

2.1.2.3 L'étage de modulation

Lorsque l'on parle de modulation en physique, l'opération consiste toujours à introduire une perturbation connue dans un signal que l'on cherche à mesurer. Très souvent cette modulation a une notion temporelle : la perturbation évolue dans le temps. C'est exactement le rôle de l'étage de modulation dans les ASO à filtrage de Fourier.

Au cours d'une acquisition du détecteur, on introduit de manière cyclique une série d'aberrations connues en plan pupille. Quelques hypothèses importantes pour la suite : on suppose au cours de cette acquisition que le champ électromagnétique en entrée reste constant et que le temps de cycle de la modulation (et donc le temps d'acquisition du détecteur) est grand devant la période d'oscillation de l'onde. On va donc sommer de manière **incohérente** les contributions pour chaque phase aberrante introduite successivement, on additionne ainsi les intensités en sortie sur le détecteur et non pas les champs. Si l'on considère que l'on module en montrant

successivement K phases différentes $(\phi_1, \phi_2..., \phi_K)$ au cours d'une acquisition en passant un temps identique sur chacune d'elle, on a alors l'expression des intensités modulées :

$$I(\phi) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} |\mathbb{I}_p e^{i\phi_k} e^{i\phi} \star \widehat{m}|^2 \tag{2.4}$$

où le facteur $1/K$ est ajouté pour des raisons de normalisation du flux. Cette description de la modulation n'est pas complète, car on pourrait vouloir présenter à l'ASO une même phase mais avec une amplitude différente au cours du cycle de modulation et être libre de passer plus de temps sur certaines configurations de phase que sur d'autres. On peut alors écrire de manière plus générale, avec T la période de modulation :

$$I(\phi) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbb{I}_p e^{il_k(t)\phi_k} e^{i\phi} \star \widehat{m}|^2 \mathrm{d}t \tag{2.5}$$

et où $l_1(t), l_2(t)..., l_K(t)$ sont des fonctions qui décrivent l'amplitude de chaque phase au cours du temps d'un cycle. Pour simplifier l'expression 2.5, on a recours à une quantité qui s'avère être très utile pour la suite : la fonction de poids modulation, introduite originellement dans [Fauvarque et al., 2016].

Fonction de poids de modulation

La fonction de poids de modulation, notée w, encode le temps passé sur chaque amplitude des phases de modulation. Cette fonction a pour espace d'entrée l'espace des phases, à travers le vecteur des amplitudes accessibles des phases de modulation $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2..., a_K)$, et pour sortie l'espace des réels positifs. Par souci de conservation de l'énergie, elle est normalisée à l'unité :

$$\int_{\mathbb{R}^K} d^K \boldsymbol{a}\ w(\boldsymbol{a}) = 1 \tag{2.6}$$

On peut alors réécrire l'expression des intensités modulées donnée équation 2.5 de manière plus simple grâce à cette fonction de poids de modulation :

$$I(\phi) = \int_{\mathbb{R}^K} d^K \boldsymbol{a}\ w(\boldsymbol{a}) |\mathbb{I}_p e^{i\phi_{mod}(\boldsymbol{a})} e^{i\phi} \star \widehat{m}|^2 \tag{2.7}$$

où l'on a :

$$\phi_{mod}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{K} a_i \phi_i \tag{2.8}$$

Le cas de la modulation tip-tilt

Un type de modulation va nous intéresser tout particulièrement pour la suite : la modulation tip-tilt. En notant (x_p, y_p) les coordonnées dans le plan pupille d'entrée, les deux phases considérées pour ce type de modulation s'écrivent :

$$\phi_1(x_p, y_p) = \frac{2\pi}{\lambda} x_p \text{ et } \phi_2(x_p, y_p) = \frac{2\pi}{\lambda} y_p \tag{2.9}$$

La fonction de modulation dépend donc des paramètres d'amplitudes $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ de ces deux phases.

$$w(\boldsymbol{a}) = w(a_1, a_2) \tag{2.10}$$

Si l'on représente en deux dimensions la fonction w pour le cas de cette modulation tip-tilt, on retrouve le trajet suivi par le champ dans le plan focal au cours d'une acquisition. Pour bien comprendre : le vecteur $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ représente les **amplitudes accessibles** par l'aberration tip-tilt. De manière équivalente, on peut voir ce vecteur comme les coordonnées de la position centrale du champ dans le plan focal. Si un couple (a_1, a_2) ne se situe pas sur le passage de la modulation, alors $w(a_1, a_2) = 0$. Un exemple de fonction de poids de modulation w est donné figure 2.3 pour le cas d'une modulation en tip-tilt circulaire.

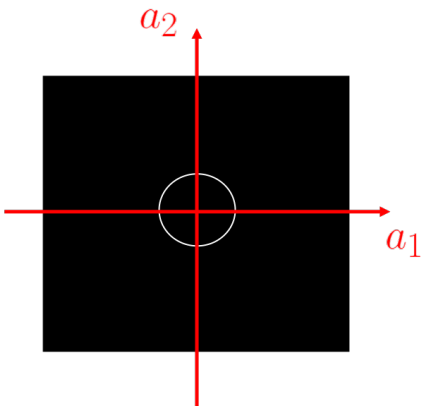


FIGURE 2.3 – **Représentation 2D de la fonction de poids de modulation w** pour le cas d'une modulation circulaire.

2.1.2.4 Modulation du masque

On pourrait généraliser la modulation au masque de filtrage : rien n'interdit d'en modifier la forme au cours d'une acquisition par le détecteur. À notre connaissance, ce genre de modulation n'est pas effectué en pratique. On ne généralise donc pas le formalisme à ce type de modulation, bien qu'un exemple concret sera évoqué plus tard dans la section 4.

2.2 Opération sur les intensités et encodage de la phase

2.2.1 Traitement des intensités

On a expliqué au chapitre précédent que les mesures des ASO en OA sont inversées de façon linéaire pour remonter à la phase. Le traitement de base des intensités que l'on va considérer dans cette thèse comprend plusieurs étapes essentielles pour pouvoir relier linéairement les mesures de l'ASO à filtrage de Fourier à la phase en entrée :

1. **Normalisation par le nombre de photons**. Cette étape est cruciale pour la simple raison que pour une aberration donnée dans la pupille, une augmentation du nombre de photon ne doit pas être analysée comme une augmentation de la phase. On note ici N le nombre de photons.
2. **Opération de tare**. On l'a abordé au chapitre précédent : on contrôle le système d'OA via des matrices, on fait donc l'hypothèse que l'ASO à filtrage de Fourier est un système linéaire. Si l'on travaille autour d'une phase de référence (généralement une phase nulle), une phase égale à cette phase de référence doit donc forcément conduire à un signal de mesure nul. Il faut ainsi soustraire des intensités normalisées le signal correspondant à la mesure du front d'onde de référence plan, que l'on nomme I_0 (carte elle-même normalisée). Les signaux obtenus sont appelés **intensités réduites** et sont notés ΔI. On les relie aux intensités sur le détecteur par l'expression suivante :

$$\Delta I(\phi) = \frac{I(\phi)}{N} - I_0 \tag{2.11}$$

3. **Opération de binning**. Dans le cas d'une configuration donnée (c'est à dire un certain nombre de pixels du détecteur par diamètre d'image de la pupille) l'opération de binning n'améliore pas le bruit et revient seulement à filtrer des modes. Elle peut tout de même être mise en place, notamment pour réduire la taille des vecteurs utilisés lors des calculs du RTC.
4. **Sélection des pixels**. Il est aussi possible d'effectuer une opération afin de garder seulement les pixels utiles. La définition de "pixels utiles" a des contours flous : ça pourrait être les pixels les plus linéaires, ou bien ceux qui ont le plus de signal, etc... Classiquement, on garde simplement les pixels les plus illuminés correspondant très généralement à ceux localisés dans les empreintes des images des pupilles sur le détecteur. Cette opération de sélection des pixels n'est pas cruciale en simulation : en effet les pixels peu illuminés jouent peu de rôle dans la reconstruction. En revanche, se défausser des pixels inutiles est très utile en pratique en terme de temps de calcul et de tailles des matrices considérées.

Suivant les masques considérés, il est possible de traiter différemment les intensités. Cependant, cette méthode de traitement se présente sous une forme très basique avec l'avantage de pouvoir être appliquée telle quelle pour n'importe

quel masque m. On utilisera donc exclusivement ce traitement comme le *traitement standard* pour toutes les études qui suivent.

Somme des intensités réduites. Une remarque sur les intensités réduites : les sommes des cartes $I(\phi)/N$ et I_0 sont normalisées à l'unité, on a ainsi $\int_{\mathbb{R}^2} \Delta I(\phi) = 0$. Ce point décrit simplement le fait que l'encodage de la phase se fait par un déplacement des photons d'un endroit du détecteur à un autre. Sans même se placer dans le cadre des ASO à filtrage de Fourier, on peut évoquer deux façons notables pour l'encodage de la phase en intensité (illustration figure 2.4) : pour une aberration de phase localisée dans la pupille, type *poke* : (i) l'encodage se fait de manière très localisée, en prélevant des photons d'un côté de cette aberration pour les déplacer d'un autre côté (senseur de type gradient de phase) sans qu'il y ait de modification de la distribution des photons dans le reste de la pupille (ii) l'encodage se fait en puisant des photons dans l'ensemble de la pupille pour les concentrer au niveau de l'aberration (senseur de phase directement). Il existe évidemment tout un spectre de comportements entre ces deux façons d'encoder la phase, dont certains seront explorés au cours de cette thèse.

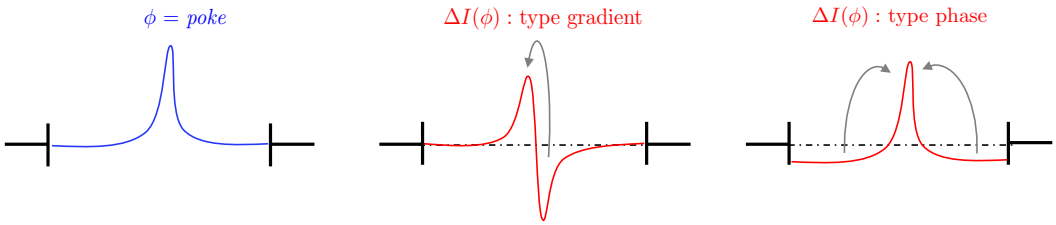


FIGURE 2.4 – **Deux formes notables d'encodage de la phase :** encodage d'un *poke* sous un type gradient ou bien phase directement. Le déplacement des photons est illustré avec des flèches.

2.2.2 Matrice d'interaction

On a présenté dans le chapitre précédent la quantité reliant le DM et l'ASO : la matrice d'interaction, notée $\mathcal{D}$. Cette matrice est déterminée grâce à une opération d'étalonnage qui consiste à enregistrer les réponses de l'ASO à une base de mode générée par le DM. En pratique, cette manoeuvre consiste autant à étalonner le DM que l'ASO, mais on va supposer tout au long de cette thèse l'utilisation d'un DM parfait, c'est à dire produisant exactement les différences de marche voulues. Ainsi, on considère la matrice d'interaction avant tout comme une matrice décrivant le comportement linéaire de l'ASO. La technique spécifique d'étalonnage que l'on considère dans cette thèse est celle dite de type *push-pull*.

Étalonnage *push-pull*. Cette technique consiste à "pousser" sur un mode ϕ_i, enregistrer la réponse de l'ASO puis à réitérer l'opération en "tirant" ce mode (exemple d'illustration figure 2.5). En procédant de cette manière avec une amplitude ϵ pour le mode ϕ_i, la quantité calculée est alors la suivante :

$$\delta I(\phi_i) = \frac{\Delta I(\epsilon\phi_i) - \Delta I(-\epsilon\phi_i)}{2\epsilon} \tag{2.12}$$

Lors de cette opération, le mode est normalisé de tel sorte que sa variance soit égale à 1 dans la pupille d'entrée. La carte ainsi mesurée pour chaque mode vient alimenter une colonne de la matrice d'interaction :

$$\mathcal{D} = (\delta I(\phi_1), \delta I(\phi_2), ..., \delta I(\phi_{N_{modes}})) \tag{2.13}$$

où N_{modes} est le nombre de modes étalonnés. On remarquera que cette opération consiste donc à mesurer la dérivée de la réponse de l'ASO au mode ϕ_i. D'ailleurs la matrice d'interaction est souvent aussi dénommée la Jacobienne du système. On doit apporter une attention toute particulière au choix de la valeur de ϵ lors de cet étalonnage. Pour un système sans bruit, comme par exemple en simulation, on choisira ϵ très petit afin de s'assurer être dans le régime linéaire de l'ASO. En revanche, on procède de manière différente en pratique : le but est de choisir ϵ assez petit pour rester dans le domaine linéaire mais assez grand pour obtenir un SNR satisfaisant lors de l'étalonnage. Pour un nombre d'itération fixé, il existe d'ailleurs des techniques d'étalonnage particulières permettant de maximiser le SNR, appelée étalonnage orienté *Hadamard* [Meimon et al., 2015, Kasper et al., 2004].

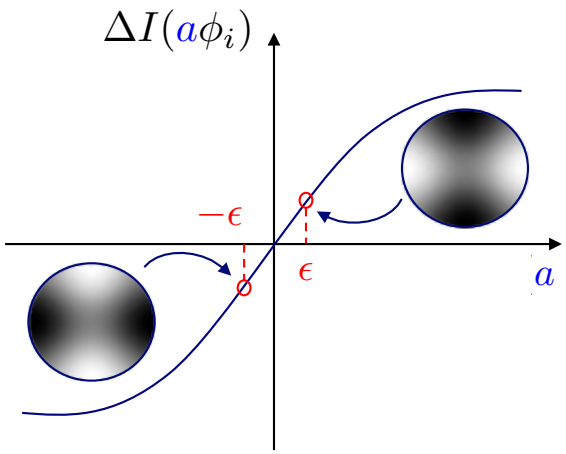


FIGURE 2.5 – **Technique d'étalonnage de type *push-pull*** pour ϕ_i = astigmatisme.

2.3 Formalisme mathématique

Dans cette section, on présente désormais le formalisme mathématique permettant de décrire les signaux délivrés par les ASO à filtrage de Fourier. On rappellera dans un premier temps leur modèle linéaire, puis on présentera le modèle au centre de cette thèse qui évolue dans un cadre d'approximations bien spécifiques : le modèle convolutif.

2.3.1 Modèle linéaire

2.3.1.1 Intensités linéaires

Pour calculer la dépendance linéaire en phase de l'expression générale des intensités livrée équation 2.3, on reformule cette expression sous la forme :

$$I(\phi) = (\mathbb{I}_p e^{i\phi} \star \widehat{m})(\mathbb{I}_p e^{-i\phi} \star \bar{\widehat{m}}) \tag{2.14}$$

On peut alors faire un développement en série entière de l'exponentielle : $e^{i\phi} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^q}{q!}$. En prenant en compte que $\mathbb{I}_p$ et ϕ sont des quantités réelles et que l'opérateur conjugué traverse le produit de convolution, on obtient le résultat suivant :

$$I(\phi) = |\mathbb{I}_p \star \widehat{m}|^2 + 2\mathrm{Im}\big[(\mathbb{I}_p \star \widehat{m})(\mathbb{I}_p \phi \star \bar{\widehat{m}})\big] + \Delta I_{q>1}(\phi^q) \tag{2.15}$$

où le premier terme représente les intensités de références pour un front d'onde plan :

$$I_0 = |\mathbb{I}_p \star \widehat{m}|^2 \tag{2.16}$$

et les termes compris dans $\Delta I_{q>1}(\phi^q)$ présentent tous des dépendances en puissance de la phase strictement supérieures à 1, et ne présentent donc pas de dépendances linéaires avec la phase.

La partie linéaire avec la phase des intensités réduites s'écrit donc [Fauvarque et al., 2016] :

$$\Delta I_{lin}(\phi) = 2\mathrm{Im}\big[(\mathbb{I}_p \star \widehat{m})(\mathbb{I}_p \phi \star \bar{\widehat{m}})\big] \tag{2.17}$$

Cette équation est fondamentale puisqu'elle décrit le comportement linéaire d'un ASO à filtrage de Fourier en fonction de son masque m et de la pupille du système $\mathbb{I}_p$. Dans une expérimentation idéale et sans bruit, c'est exactement cette quantité que l'on vient sonder pour chaque mode lorsque l'on procède à l'étalonnage de la matrice d'interaction. De plus, dans le cadre de l'approximation des petites phases $\phi << 1$, on peut assimiler les intensités réduites de l'ASO à la partie linéaire :

$$\text{Dans le cas } \phi << 1 : \Delta I(\phi) \approx \Delta I_{lin}(\phi) \tag{2.18}$$

Cas modulé

Pour le cas modulé, on somme de manière incohérente les intensités réduites linéaires pour toutes les contributions de modulation en faisant intervenir la fonction de poids de modulation. En utilisant l'équation 2.7, on obtient :

$$\Delta I_{lin}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} d^2\boldsymbol{a}\ w|_{\boldsymbol{a}}\ 2\mathrm{Im}\big[(\mathbb{I}_p e^{i\phi_{mod}(\boldsymbol{a})} \star \widehat{m})(\mathbb{I}_p e^{-i\phi_{mod}(\boldsymbol{a})} \phi \star \bar{\widehat{m}})\big] \tag{2.19}$$

2.3.1.2 Conditions nécessaires pour avoir un ASO

Si l'on considère le cas sans modulation, on peut déterminer des conditions nécessaires pour que l'ASO considéré possède des intensités linéaires. En écrivant la transformée de Fourier du masque sous sa forme complexe :

$$\widehat{m} = \widehat{m}_{\mathcal{R}} + i\widehat{m}_{\mathcal{I}} \tag{2.20}$$

où $\widehat{m}_{\mathcal{R}}$ et $\widehat{m}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^2$, on peut alors développer l'équation 2.17 :

$$\Delta I_{lin}(\phi) = 2[(\mathbb{I}_p \star \widehat{m}_{\mathcal{R}})(\mathbb{I}_p\phi \star \widehat{m}_{\mathcal{I}}) - (\mathbb{I}_p \star \widehat{m}_{\mathcal{I}})(\mathbb{I}_p\phi \star \widehat{m}_{\mathcal{R}})] \tag{2.21}$$

Pour que le masque m considéré ne possède pas d'intensités linéaires avec la phase, il suffit que :

> $\boldsymbol{\widehat{m}_{\mathcal{R}} = 0}$ **:** la transformée de Fourier du masque ne possède pas de partie réelle.
> $\boldsymbol{\widehat{m}_{\mathcal{I}} = 0}$ **:** la transformée de Fourier du masque ne possède pas de partie imaginaire.
> $\boldsymbol{\widehat{m}_{\mathcal{R}} = \pm\widehat{m}_{\mathcal{I}}}$ **:** la transformée de Fourier du masque a ses parties réelle et imaginaire égales en valeur absolue.

Ainsi, un masque vérifiant au moins l'un des trois critères ci-dessus ne sera pas un ASO.

Exemple. On peut décrire ce que ces conditions impliquent sur les propriétés du masque. Un masque réel symétrique verrait sa transformée de Fourier être réelle symétrique et vérifie donc $\widehat{m}_{\mathcal{I}} = 0$. De même : un masque purement imaginaire antisymétrique vérifie $\widehat{m}_{\mathcal{R}} = 0$. On peut préciser ce qu'est en réalité un masque purement imaginaire : c'est un masque purement réel déphasé entièrement de $\pi/2$. Autrement dit, un masque purement imaginaire est équivalent à un masque purement réel : c'est un masque d'amplitude. Ainsi, pour peu qu'il soit symétrique ou bien antisymétrique, un masque d'amplitude pur ne peut pas être un ASO.

2.3.1.3 Chromatisme

Le formalisme présenté dans les sections précédentes s'applique pour une source purement monochromatique de longueur d'onde λ. Or, en réalité, l'analyse se fait sur une bande spectrale d'une certaine taille $\Delta\lambda$. On se demandera donc systématiquement si les ASO considérés sont achromatiques ou pas. On rappelle le lien entre les phases pour deux longueurs d'ondes différentes λ_1 et λ_2 :

$$\phi_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\phi_1 \tag{2.22}$$

Un ASO est un senseur dont l'opération est de mesurer une phase : ainsi on dit naturellement d'un ASO qu'il est achromatique si, pour une phase donnée, **la mesure de cette phase ne dépend pas de la couleur des photons qui**

portent l'information.

Forme du masque. Comme les champs se dilatent proportionnellement à λ au niveau du plan focal, la condition d'achromaticité pour un masque a déjà été décrite [Fauvarque, 2017] sous la forme suivante : un masque est achromatique si et seulement si il présente une invariance d'échelle. On peut mettre cette description sous une forme mathématique, la différence de marche du masque (OPD - *Optical Path Difference*) devant ainsi s'écrire sous la forme :

$$\Delta_{OPD}(\rho, \theta) = f(\theta)\rho \tag{2.23}$$

où $f \in \mathcal{C}^0$ (f continue) sur $[0, 2\pi]$ avec $f(0) = f(2\pi)$, c'est-à-dire que le masque boucle à la même valeur. Ces conditions sur la fonction f permettent d'éviter les sauts de phases, sources de chromaticité. Cette description mathématique est illustrée figure 2.6. On n'évoque pas dans cette formulation la fabrication pratique des masques dont le choix des matériaux peuvent entraîner des phénomènes de dispersion, car il existe de nombreuses techniques pour compenser ces effets.

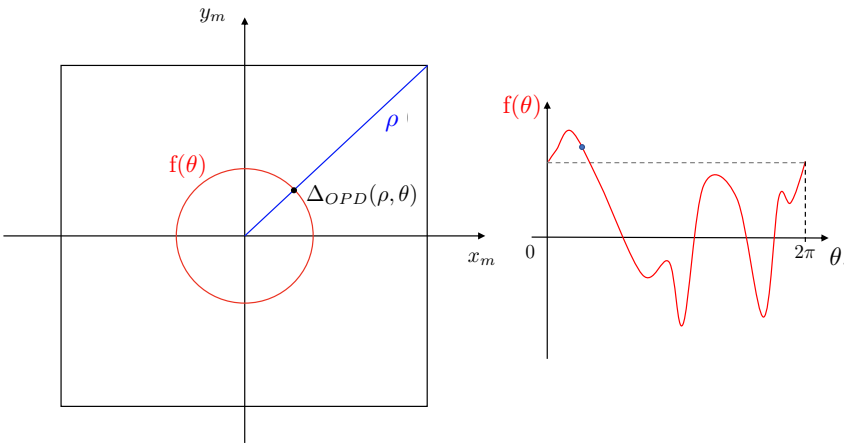


FIGURE 2.6 – **Masque achromatique** pour une fonction f quelconque.

Modulation. La phase introduite pour la modulation va être différente suivant les longueurs d'ondes (équation 2.22) : une modulation non-nulle ($\phi_{mod} \neq 0$) sera donc forcément une source de chromaticité.

Erreurs liées au chromatisme pour le cas des ASO... achromatiques

Cependant, même dans le cas d'un ASO purement achromatique, une bande spectrale étendue est source d'erreurs dans la mesure. En effet, les systèmes d'OA reposent sur le fait que les aberrations de l'atmosphère sont identiques en différence de marche, quelque soit la longueur d'onde. Ainsi, pour chaque longueur d'onde, la phase en entrée de l'ASO est différente. Schématisons de manière simplifiée la problématique : si l'on étalonne la matrice d'interaction via une source monochromatique

de longueur d'onde λ_1 avec une phase ϕ_1 donnée, la différence de marche générée sur le DM vaut $\delta_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi}\phi_1$. Ainsi toute mesure de phase ϕ_1 conduit à une compensation grâce à une commande sur le DM $-\delta_1$. Si l'on change de longueur d'onde d'analyse ($\lambda_1 \leftarrow \lambda_2$) sans modifier la matrice d'interaction, une même différence de marche δ_1 entraîne la mesure de phase suivante au niveau de l'ASO :

$$\phi_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\phi_1 \tag{2.24}$$

ce qui conduit à l'envoi au DM d'une commande $-\delta_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\delta_1 \neq \delta_1$.

Pour résumer, dans le cas d'un ASO achromatique au sein d'un système d'OA : la mesure de la phase ne dépend donc pas de la couleur des photons. En revanche la phase mesurée dépend de la longueur d'onde car le système travaille à différences de marche constantes suivant les longueurs d'onde. Une solution, malheureusement très difficile à faire en pratique, serait d'étalonner avec une source qui possède exactement le même spectre que l'étoile guide.

2.3.2 Modèle convolutif

2.3.2.1 Réponse impulsionnelle

Lorsque l'on étudie un système physique, une méthode très générale pour caractériser ce système est de sonder sa réponse à une excitation de type *impulsion de Dirac*. On dira d'un système qu'il est convolutif si l'on peut décrire sa sortie sous la forme d'une convolution de l'entrée avec une quantité appelée **réponse impulsionnelle**, qui correspond à sa réponse à une *impulsion de Dirac*. Pour une phase ϕ en entrée, un ASO représenté dans le formalisme convolutif aurait ses intensités réduites pouvant être écrites de la façon suivante :

$$\Delta I(\phi) = \mathbf{IR} \star \mathbb{I}_p\phi \tag{2.25}$$

où **IR** est donc la réponse impulsionnelle et $\star$ le produit de convolution. Cette réponse impulsionnelle décrit alors le comportement du système dans son intégralité. Pouvoir décrire un système de cette façon est donc un atout majeur. Pour un tel système, on peut aussi représenter sa **fonction de transfert**, décrivant l'influence de l'ASO sur chaque fréquence spatiale de la phase. Cette fonction de transfert est reliée à la réponse impulsionnelle par une transformée de Fourier :

$$\mathbf{TF} = \widehat{\mathbf{IR}} \tag{2.26}$$

Tout système convolutif est linéaire, mais l'inverse n'est généralement pas vrai. On peut donc légitimement se poser la question suivante : dans leur régime de linéarité, les ASO à filtrage de Fourier sont-ils aussi des systèmes convolutifs vérifiant l'équation 2.25 ? Le fait que la pupille présente des bords à une distance finie de son centre brise une des caractéristiques fondamentales des systèmes convolutifs : **l'invariance par translation**, et permet d'affirmer que les ASO à filtrage de Fourier ne sont pas des systèmes convolutifs. En effet, pour qu'un

système soit convolutif, il est nécessaire que sa réponse soit invariante suivant une translation quelconque dans l'espace d'entrée. Or, une phase située hors du support de la pupille n'est pas vue par l'ASO : la réponse est donc clairement différente suivant l'endroit où l'on regarde dans l'espace d'entrée.

Moyennant quelques approximations supplémentaires, on veut tout de même tenter de modéliser les ASO à filtrage de Fourier comme des systèmes convolutifs : on parlera alors de **modèle convolutif**. Dans la suite, on ne considère que des ASO travaillant dans leur régime de linéarité.

Approximation pupille infinie

Pour construire un modèle convolutif des ASO à filtrage de Fourier, on peut s'affranchir du problème des bords de la pupille en faisant l'approximation d'une pupille infinie. Dans ce cas, l'équation 2.25 est vérifiée. En prenant comme point de départ l'équation des intensités linéaires 2.17, on peut alors calculer l'expression de la réponse impulsionnelle en fonction du masque m et de la fonction de poids de la modulation w dans le cas d'une modulation tip-tilt (fonction qui dans ce cas représente le trajet de la PSF dans le plan focal) [Fauvarque et al., 2019] :

$$\mathbf{IR} = 2\mathrm{Im}(\bar{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w})) \tag{2.27}$$

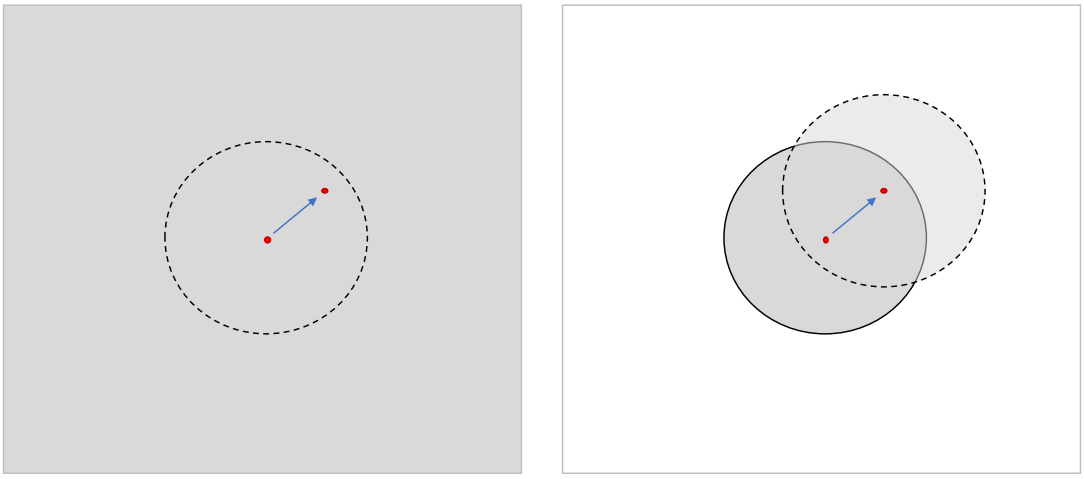
On retrouve une expression qui semble finalement assez proche de l'expression linéaire, avec tout de même une différence cruciale : la fonction de poids de modulation est intégrée à la réponse impulsionnelle sous la forme de sa transformée de Fourier. L'intégrale équation 2.19 portant sur les différents points de modulation est supprimée. En terme de simulation numérique d'un ASO à filtrage de Fourier, on relève alors l'utilité de cette expression en terme de temps de calcul : la réponse à une phase se détermine toujours à l'aide d'une seule convolution quelque soit la taille du rayon de modulation, contrairement à une simulation classique où le temps de calcul évolue linéairement avec ce rayon.

Approximation pupille glissante

La pupille infinie étant une approximation très forte, on peut donc s'attendre à obtenir des réponses à travers le modèle décrit ci-dessus assez différentes des intensités linéaires vraies. Il est possible d'avoir recours à une approximation moins contraignante : celle de la pupille glissante. Dans ce cas, on définit la réponse impulsionnelle comme étant la réponse linéaire à une *impulsion de Dirac* située au centre de la pupille. Ainsi, chaque point de phase dans la pupille est traité comme s'il était au centre de la pupille et donc à une distance identique des bords : la pupille "glisse" avec la réponse impulsionnelle (voir schéma figure 2.7). Dans ce cas, on a [Fauvarque et al., 2019] :

$$\mathbf{IR} = 2\mathrm{Im}(\bar{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w}\mathbb{I}_p)) \tag{2.28}$$

Le modèle convolutif via l'approximation de la pupille glissante est alors exact pour les points au centre de la pupille, et s'écarte de la réalité au fur et à mesure que l'on se rapproche des bords.



Pupille infinie Pupille glissante

FIGURE 2.7 – **Pupille infinie où l'*impulsion de Dirac* ne "voit" pas les bords de la pupille et Pupille glissante où l'*impulsion de Dirac* "voit" les bords, mais toujours à la même distance.**

Quelque soit l'approximation utilisée, un modèle convolutif appliqué aux ASO à filtrage de Fourier présentera toujours un problème aux bords qui, comme on l'a déjà évoqué, viennent mettre à mal l'invariance par translation. Une façon de comprendre ce problème est de montrer un piston pur au système dans le cadre du modèle convolutif, on a alors :

$$\Delta I(\phi) = \mathbf{IR} \star \mathbb{I}_p \neq 0 \tag{2.29}$$

En effet, l'espace d'entrée du modèle convolutif est l'espace des phases, et seulement celui des phases. Il n'y a donc pas de différenciation entre la valeur de la phase et le masque d'amplitude porté par le support de la pupille. Les bords sont donc vus comme des sauts de phase. On comprend donc bien la différence majeure vis à vis du modèle linéaire, pour lequel un piston conduit à des intensités réduites nulles dans tout l'espace de sortie car on rappelle que $\Delta I(\phi) = I(\phi) - I_0$, avec I_0 les intensités pour un front d'onde de référence plan.

2.3.2.2 Modification du modèle convolutif

Limites de la pupille glissante

L'approximation de la pupille glissante permet de prendre en compte la taille finie de la pupille, elle semble ainsi représenter plus fidèlement la réponse linéaire de l'ASO. Pourtant, une problématique émerge de cette formulation lorsque l'on considère une pupille obstruée : un *Dirac* au centre de la pupille est dans une zone

qui ne porte pas de photons et donc pas d'information, elle n'est par conséquent pas vue par l'analyseur. Une première solution est de décaler la pupille, afin que l'emplacement du *Dirac* de référence soit localisé dans le support de la pupille. On illustre cette solution figure 2.8, où l'on représente le point pour le *Dirac* de référence en rouge pour le cas pleine pupille et pour les cas de pupilles obstruées.

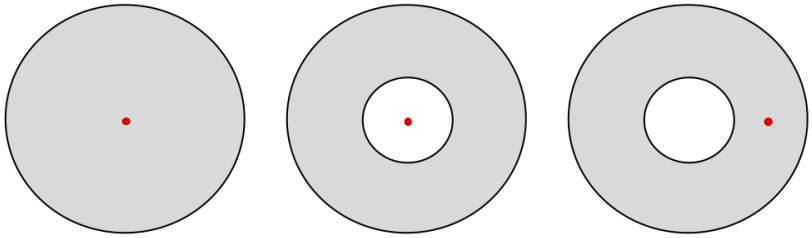


FIGURE 2.8 – **Le problème de l'approximation de la pupille glissante et sa solution dans le cas d'un télescope obstrué.**

Pour résoudre ce problème, on pourrait aussi approximer la pupille obstruée par une pupille pleine. Quoiqu'il en soit, ces solutions *ad hoc* se trouvent vite confrontées à des limitations lorsque l'on considère des pupilles plus complexes et fortement segmentées, comme par exemple la pupille du Giant Mangellan Telescope (GMT) où il devient difficile de choisir une zone de la pupille comme référence et où l'approximation par une pupille pleine s'éloigne fortement de la réalité. C'est en partie pour palier ce problème que l'on a convergé vers une nouvelle définition mathématique de la réponse impulsionnelle, dont on livre l'expression au paragraphe suivant.

Distribution d'énergie en plan focal

Pour élaborer cette nouvelle définition, on se replace dans le cadre de l'approximation de la pupille infinie, mais cette fois on modélise la fonction de poids de modulation par la distribution d'énergie en plan focal.

$$w \leftarrow w \star |\widehat{\mathbb{I}_p}|^2 \tag{2.30}$$

Ainsi, on obtient une nouvelle expression où l'on convolue le trajet de modulation par la PSF du système (figure 2.9) :

$$\mathbf{IR} = 2\mathrm{Im}(\bar{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w}\widehat{|\mathbb{I}_p|^2})) \tag{2.31}$$

Cette nouvelle expression s'appuie donc sur une nouvelle façon de prendre en compte l'effet de la forme de la pupille sur la réponse impulsionnelle : on la modélise à travers sa PSF en plan focal. L'épaississement de la modulation qui découle de la convolution avec la PSF permet de modéliser la taille finie de la pupille. Si l'on compare cette expression avec celle de la pupille glissante, on a finalement remplacé la pupille par la FTO du système :

$$\mathbb{I}_p \leftarrow \widehat{|\widehat{\mathbb{I}_p}|^2} \tag{2.32}$$

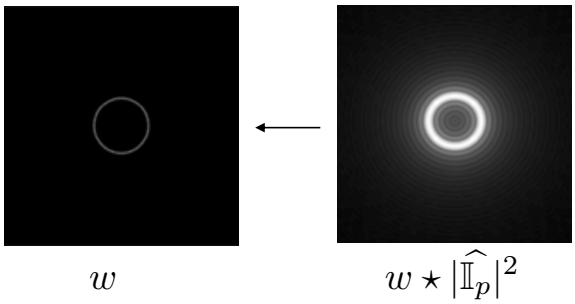


FIGURE 2.9 – **Nouvelle fonction de modulation pour le modèle convolutif modifié.** Exemple avec une modulation circulaire, très utilisée dans la suite des développement.

Cette expression permet donc de s'affranchir du problème soulevé par le concept de pupille glissante et de position du *Dirac* de référence. De plus, cette expression s'est montrée être la plus pertinente et la plus pratique pour tous les cas d'utilisation du modèle convolutif explorés au cours de cette thèse. On privilégie cette formulation pour la suite des études.

2.3.2.3 L'approche *pseudo-Dirac*

Au delà des expressions analytiques fournies précédemment, on peut aussi définir une réponse impulsionnelle empirique. On peut tout à fait générer une impulsion en phase dans la pupille (illustration figure 2.10) et étalonner la réponse de l'ASO autour de cette impulsion à l'aide de la technique *push-pull*. On appellera une telle impulsion un *pseudo-Dirac* pour ne pas la confondre avec une *impulsion de Dirac* au sens mathématique du terme, impossible à reproduire en réalité. Cette approche plus empirique pour calculer la réponse impulsionnelle s'apparente alors plutôt à la formulation pupille glissante, et vient avec la même problématique du choix de l'emplacement dans la pupille pour l'impulsion. Une mise en oeuvre expérimentale de cette méthode empirique sera présentée chapitre 6.

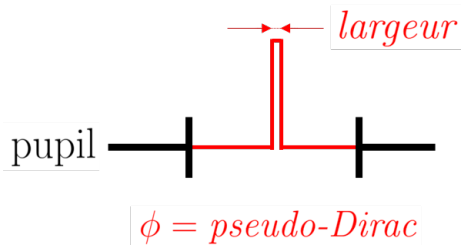


FIGURE 2.10 – **Impulsion de type pseudo-Dirac en phase dans la pupille.** Pour être le plus proche possible de la formulation mathématique, la largeur doit être la plus petite possible.

2.3.2.4 Fonction de transfert

Dans le cadre des différentes formulations du modèle convolutif évoquées ci-dessus, on peut à chaque fois en définir les fonction de transferts. Si on note ω la fonction de modulation effective, une quantité qui vaut pour les différents cas :

$$\textbf{Pupille infinie : } \omega = w$$
$$\textbf{Pupille glissante : } \omega = w \star \mathbb{I}_p$$
$$\textbf{Énergie plan focal : } \omega = w \star |\widehat{\mathbb{I}_p}|^2$$

La fonction de transfert s'écrit [Fauvarque et al., 2019] :

$$\mathbf{TF} = i(\widehat{\bar{m}} \star \overline{m\omega} - \bar{m} \star \widehat{\overline{m\omega}}) \tag{2.33}$$

Dans le cas où m et ω sont centro-symétriques, on peut simplifier l'expression de la fonction de transfert :

$$\boxed{\mathbf{TF} = 2\mathrm{Im}(m \star \overline{m\omega})} \tag{2.34}$$

Cette dernière équation sera amplement utilisée dans la suite de cette thèse car elle donne une formulation étonnamment simple et compréhensible du comportement fréquentiel d'un ASO à filtrage de Fourier. On note aussi que cette expression permet facilement de déduire la valeur maximale atteignable par la fonction de transfert. Comme le masque m présente forcément un module inférieur à 1 en tout point par conservation de l'énergie, on peut facilement dériver l'inégalité suivante :

$$\mathbf{TF} \leq 2 \tag{2.35}$$

Un éclairage utile sur le fonctionnement des ASO à filtrage de Fourier

Dans le cadre des hypothèses évoquées précédemment, l'équation 2.34 permet de livrer un éclairage puissant sur le fonctionnement des ASO à filtrage de Fourier. Dans un cas non-modulé par exemple, le support de ω est en grande partie le coeur cohérent de la PSF. Ainsi, la valeur de la fonction de transfert pour une fréquence spatiale $\mathbf{f}$ peut être vue comme l'interférence entre le centre du masque et le masque décalé à la fréquence $\mathbf{f}$. Autrement dit : tous les ASO à filtrage de Fourier fournissent une onde de référence dont les caractéristiques sont majoritairement déterminées par le centre du masque. On retrouve d'ailleurs cette notion d'onde de référence dans l'expression des intensités linéaires (équation 2.17), où l'on voit apparaître la multiplication du champ aberrant filtré par le masque avec un champ non aberrant aussi filtré, et ayant donc majoritairement vu seulement le centre du masque.

2.3.3 Cadre des simulations numériques

Les simulations effectuées dans cette thèse ont été menées à l'aide de l'outil *Object-oriented Matlab adaptive optics toolbox* (OOMAO)

[Conan and Correia, 2014]. OOMAO est une librairie MATLAB très modulable qui permet de simuler de bout-en-bout (*End-to-End* : E2E) un système d'OA :

1. Propagation à travers l'atmosphère avec la modélisation de différentes couches turbulentes. On utilise un spectre de Von-Karman avec une échelle externe $L_0 = 30\ m$ pour modéliser la turbulence. La longueur d'onde de référence est choisie dans la bande V, à $\lambda = 550\ nm$. Pour des raisons de rapidité de temps de calcul, on échantillonne la phase en entrée sur une pupille possédant 80 pixels dans son diamètre.
2. Propagation au sein du télescope. On choisit pour toutes les simulations un télescope avec un pupille circulaire pleine et avec un diamètre D = 8 m, permettant d'encoder une taille r_0 sur environ 2 pixels.
3. Modélisation de l'influence du miroir déformable sur le front d'onde.
4. Propagation optique au sein de la voie ASO et de la voie science. Sauf indication contraire, nos études se placeront dans le cas d'un système continu, en échantillonnant la phase sur la caméra ASO avec le même nombre de points qu'en entrée : c'est à dire avec 80 pixels dans le diamètre.

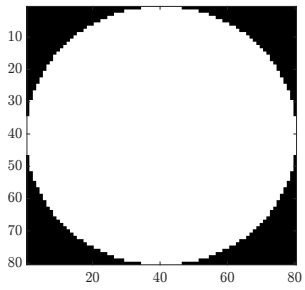


FIGURE 2.11 – **Pupille utilisée pour les simulations :** 80 pixels dans le diamètre.

2.4 Un exemple d'ASO à filtrage de Fourier : l'analyseur pyramide

De part son importance dans la communauté scientifique, son aspect historique et sa place privilégiée dans les chapitres suivants de cette thèse, on propose de mener ici la description d'un ASO particulier : la pyramide à 4 faces (4PWFS).

2.4.1 Explication géométrique : du test de Foucault à l'analyseur Pyramide

Le concept de la 4PWFS est très largement inspiré d'un procédé d'analyse de surface d'onde appelé test du couteau de Foucault adapté pour les besoins de

l'optique adaptative. On présente dans un premier temps le principe de ce test.

Le couteau de Foucault est un montage optique inventé en 1858 par Léon Foucault [Foucault, 1859] afin de contrôler la qualité des miroirs qu'il fabriquait. L'explication géométrique de ce montage est simple : lorsque un miroir parfaitement poli est illuminé avec un front d'onde plan, c'est à dire un peigne de rayons parallèles, les rayons lumineux convergent tous en son foyer. Dès lors, si un point P de la pupille est situé dans une zone sans aberration, le rayon parallèle à l'axe optique qui y est réfléchi passe par le foyer du miroir. En cas d'aberration, ce rayon est dévié avec un angle qui suit le gradient de la phase en ce point et le rayon aberrant ne passe alors plus par le foyer. Pour déterminer sa nouvelle position, on place dans le plan focal une lame que l'on déplace perpendiculairement à l'axe optique afin de venir bloquer graduellement une partie des rayons (schéma 2.12)). On peut alors observer des zones plus ou moins illuminées dans la pupille, en fonction de si les rayons sont arrêtés par le couteau ou non. Pour un point P de la pupille, on peut alors remonter à la pente locale de la phase, dans l'approximation des petits angles, en connaissant la position du couteau pour laquelle le rayon venant de P est bloqué par le couteau :

$$\begin{cases} \theta_x = \dfrac{d_x}{f} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \theta_y = \dfrac{d_y}{f} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \tag{2.36}$$

Afin de pouvoir appliquer les formules données ci-dessus, la mesure consiste à déterminer la position pour laquelle le couteau vient "croiser" le rayon émanant d'un point de la pupille (position d_x sur le schéma 2.12). Pour cela, on enregistre l'illumination de ce point pour différentes positions successives du couteau et l'on identifie le point d'inflexion de la courbe ainsi tracée (exemple figure 2.13), signe que le couteau croise effectivement à cet endroit la course du rayon. Pour déterminer la pente locale en ce point suivant l'autre axe, on doit réeffectuer cette opération avec une rotation de 90° du couteau. Ce système optique présente l'avantage considérable de ne pas nécessiter une source temporellement cohérente : on peut donc utiliser une source blanche pour mener à bien la mesure. De plus, cette méthode est assez robuste au fait que le source ne soit pas parfaitement cohérente spatialement. La mise en place de ce montage optique est donc relativement simple, ce qui fait que cette méthode est encore aujourd'hui beaucoup utilisée, que ce soit dans des applications telles que le polissage amateur de miroir [Texereau, 1951] ou bien par exemple pour la caractérisation de composants micrométriques [Zamkotsian and Dohlen, 1999].

On rappelle les critères essentiels que doit posséder un ASO pour pouvoir être utilisé dans un système d'OA : (*i*) large bande spectrale (*ii*) grande dynamique (*iii*) utilisation optimale des photons (*iv*) rapidité de la mesure. Or, la version du couteau de Foucault décrite ici ne remplit que les deux premiers de ces quatre critères. On a en effet expliqué que le montage fonctionne en lumière blanche, et la description géométrique va bien dans ce sens. De plus, on peut mesurer de grandes amplitudes d'angles pour les rayons déviés : il suffit de balayer une plage de distance assez large dans le plan focal afin d'observer le point d'inflexion de la courbe dans les

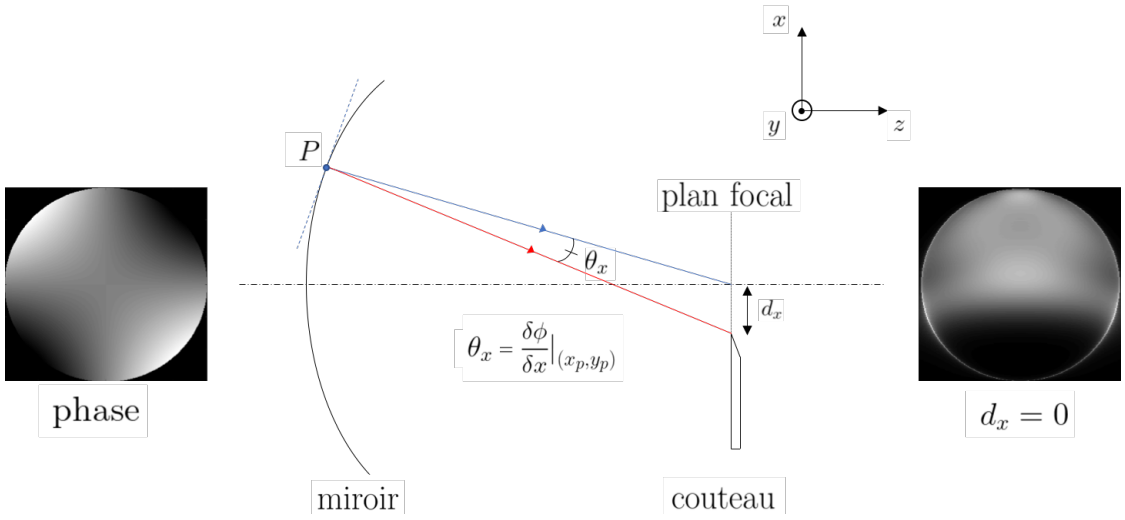


FIGURE 2.12 – **Foucaultage suivant l'axe des** x d'un miroir présentant un astigmatisme. Un foucaultgramme pour une position du couteau au niveau du foyer est représenté à droite de la figure.

mesures. Pour les autres critères essentiels, on constate en revanche que le couteau gaspille en moyenne la moitié des photons lors de l'opération de mesure. En outre, le fait d'effectuer une mesure pour chaque position du couteau rend l'opération peu réalisable pour les besoins temps réel. S'ajoute à ce dernier point le fait de devoir ré-effectuer les mesures avec une rotation du couteau à 90° pour avoir la pente de la phase suivant les deux axes (Ox) et (Oy). À partir de ces constats, on peut facilement tenter de retracer le cheminement de pensée de Roberto Raggazzoni lorsqu'il en est venu à proposer le concept de l'analyseur Pyramide [Ragazzoni, 1996] :

1. Perte de photons : au lieu d'utiliser un masque d'amplitude, on peut placer un prisme type "rooftop" qui va venir recréer deux images de la pupille. Lorsque l'on déplace le prisme dans le plan focal, aucun photon n'est perdu : ceux ne passant pas par une des faces passent par l'autre. Dans le cadre de l'approximation géométrique, on comprend d'ailleurs que les deux images de la pupille sont alors complémentaires l'une de l'autre.
2. Rapidité des mesures : au lieu d'effectuer la mesure pour chaque position du couteau, on vient intégrer la mesure sur toute la gamme de déplacement du couteau. Cela revient à mesurer l'intégrale de la courbe rouge figure 2.13. Si l'on compare cette mesure à une référence ($d = 0$, c'est à dire intégrale de la courbe bleue figure 2.13), on remonte finalement à la position du point d'inflexion. On peut alors imaginer une stratégie afin de déplacer le couteau avec un mouvement de va-et-vient à chaque itération et intégrer le flux total en chaque point de la pupille : c'est le concept de la modulation.
3. Enfin, pour régler le problème des axes de mesures, il suffit de superposer un masque qui va faire la mesure suivant x avec un masque qui fait la mesure suivant y, on obtient alors une pyramide à 4 faces.

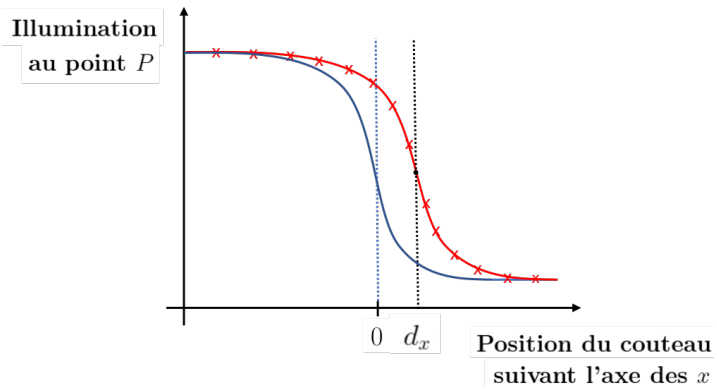


FIGURE 2.13 – **Détermination de la position du couteau** lorsque celui-ci croise la course des rayons provenant du point P de la pupille. En bleu : cas sans aberrations. En rouge : cas avec aberration.

En adaptant le couteau de Foucault aux besoins de l'OA, on obtient ainsi un ASO à filtrage de Fourier qui se décompose en deux grandes parties :

— Un prisme pyramidal en verre à 4 faces, situé dans un plan focal.
— Un miroir de modulation qui permet d'introduire un tip-tilt en plan pupille. Ce composant permet de déplacer de manière dynamique la PSF autour du sommet de la pyramide : cela revient finalement au-même que de déplacer le prisme au cours de la mesure, mais cette technique est plus facile à implanter en pratique.

Avec un tel montage, on obtient quatre images de la pupille sur le détecteur : I_i, $i \in (1,2,3,4)$. On remonte traditionnellement à l'information sur la phase à un point (x,y) de la pupille via un calcul sur les intensités, que l'on appelle "calcul des pentes" :

$$\begin{aligned} S_x(x,y) &= \frac{I_1(x,y) + I_2(x,y) - I_3(x,y) - I_4(x,y)}{\int (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)} \\ S_y(x,y) &= \frac{I_1(x,y) + I_4(x,y) - I_2(x,y) - I_3(x,y)}{\int (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)} \end{aligned} \tag{2.37}$$

où $\int (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$ est donc l'intensité moyenne sur les quatre images de la pupille. Dans le cas d'une modulation circulaire, exclusivement utilisée aujourd'hui pour moduler la pyramide, on peut retrouver l'expression de $S_x(x,y)$ (resp. $S_y(x,y)$) en fonction de θ_x (resp. θ_y). Raisonnons suivant l'axe (Ox) : on considère une modulation ayant un rayon angulaire θ_{mod} et un rayon émergeant du point (x,y) de la pupille avec un certain angle $\theta_x < \theta_{mod}$, l'éclairement correspondant à ce point dans chacune des quatre images de la pupille sera proportionnel au temps passé sur chaque face correspondante de la pyramide. D'après le schéma figure 2.14, on note t_1 le temps passé sur la partie jaune du cercle de modulation et t_2 le temps passé sur

la partie verte. Les illuminations en $I_1(x,y)$ et $I_2(x,y)$ sont alors proportionnelles à t_1 et les illuminations en $I_3(x,y)$ et $I_4(x,y)$ sont alors proportionnelles à t_2. Comme la modulation se fait à vitesse angulaire constante, le temps passé sur chaque partie du cercle de modulation est proportionnel à leurs longueurs :

$$\begin{aligned} t_1 \propto d_1 &= 2(\pi - \alpha)\theta_{mod} \\ t_2 \propto d_2 &= 2\alpha\theta_{mod} \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec α défini sur le schéma toujours figure 2.14. Finalement on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_x(x,y) = \frac{I_1(x,y) + I_2(x,y) - I_3(x,y) - I_4(x,y)}{\int (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)} &= \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} = \frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \\ \text{avec } \alpha = arccos\left(\frac{\theta_x}{\theta_{mod}}\right) & \end{aligned} \tag{2.39}$$

et donc, en utilisant la propriété $arccos(x) = \pi/2 - arcsin(x)$:

$$S_x(x,y) = \frac{2}{\pi} arcsin\left(\frac{\theta_x}{\theta_{mod}}\right) \; pour \; \theta_x < \theta_{mod} \tag{2.40}$$

Pour les angles $\theta_x \geq \theta_{mod}$, on a simplement $S_x = 1$. On se situe alors dans le régime de saturation de l'analyseur. Pour des raisons de symétries évidentes, on a des résultats identiques pour S_y et θ_y.

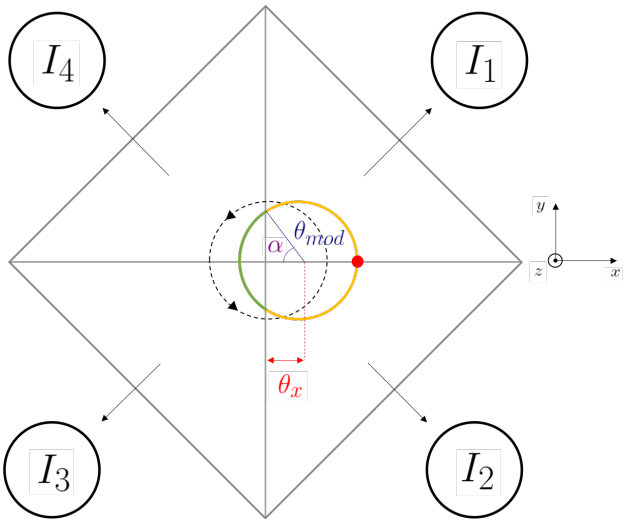


FIGURE 2.14 – **Trajet d'un rayon aberrant sur chaque face** suivant son angle d'incidence θ_x.

Cette approche géométrique décrit avec efficacité le comportement bien connu de la pyramide : si l'on augmente le rayon de modulation θ_{mod} *on gagne en dynamique tout en perdant en sensibilité*. Pourtant, cette description est insuffisante

pour décrire pleinement le comportement de la pyramide. Quiconque a déjà aligné une pyramide ou bien un couteau de Foucault peut en témoigner : le passage de motifs de diffraction de Fresnel dans les images des pupilles pour atteindre la teinte plate trahit le comportement diffractif de ce genre de système. Il va falloir prendre en compte la nature ondulatoire de la lumière et avoir recours au formalisme de Fourier.

2.4.2 Description simplifiée du comportement ondulatoire

Des développements mathématiques complexes décrivant cet analyseur abreuvent déjà largement la littérature. On mène ici une description mathématique très simplifiée et schématique de la pyramide. Les résultats exposés sont déjà bien connus, on y ajoute cependant dans cette explication une simplification au niveau du traitement de la modulation. L'objectif est de fournir au lecteur·rice une idée basique de la forme du signal délivré par la 4PWFS en prenant en compte le comportement ondulatoire de la lumière tout en se raccrochant au calcul exécuté dans le cadre de l'approximation géométrique.

On raisonne sur un masque type "rooftop", pour une fréquence spatiale suivant l'axe (Ox). On peut schématiser le fonctionnement de la pyramide comme suit : pour une perturbation en phase sinusoïdale de fréquence κ_x, si les répliques qui portent cette fréquence dans le plan focal traversent la même face, il n'y a aucune sensibilité. En revanche, si les répliques tombent chacune dans une face différente on est alors sensible à cette perturbation. Dès lors dans le cas modulé (κ_{mod}), la sensibilité à une fréquence spatiale donnée est proportionnelle au temps passé par les répliques sur des faces différentes. On distingue naturellement deux régimes différents (voir schéma figure 2.15) :

- $|\boldsymbol{\kappa_x}| > \boldsymbol{\kappa_{mod}}$: la fréquence de la perturbation sinusoïdale est en-dehors du cercle de modulation.
- $|\boldsymbol{\kappa_x}| < \boldsymbol{\kappa_{mod}}$: la fréquence de la perturbation sinusoïdale est dans le cercle de modulation.

Dans le cas où les répliques sont dans les faces différentes du rooftop, on peut calculer le signal $S_x(x,y) = (I_1(x,y) - I_2(x,y))/\int (I_1 + I_2)$ via le formalisme de Fourier introduit précédemment. Dans le cadre de l'approximation de la pupille infinie, on a [Vérinaud, 2004, Shatokhina et al., 2014] :

$$S_x[\phi](x,y) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{sin[\phi(x',y) - \phi(x,y)]}{x - x'} dx' \tag{2.41}$$

où $v.p$ est la *valeur principale de Cauchy*. Si l'on suppose le régime des petites phases, $sin(\phi) \approx \phi$ et donc :

$$S_x[\phi](x,y) = v.p. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x',y) - \phi(x,y)}{x - x'} dx' \tag{2.42}$$

Or il est facile de montrer que pour tout couple $(x, \phi(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ fixé :

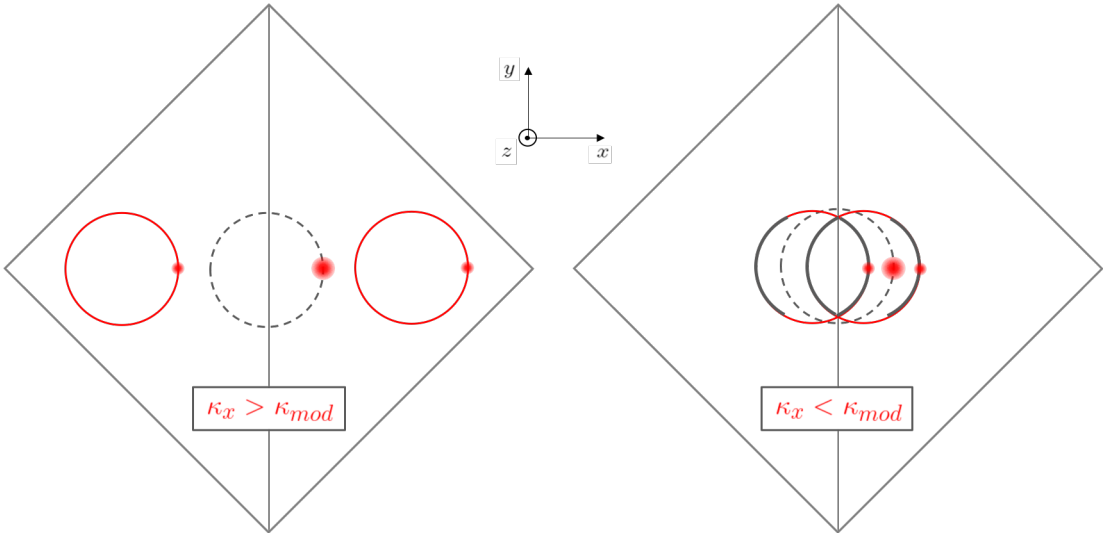


FIGURE 2.15 – **Trajets de la PSF aberrante sur un masque type rooftop dans le cas d'une phase portant une fréquence spatiale κ_x.** Dans les cas $\kappa_x > \kappa_{mod}$ et $\kappa_x < \kappa_{mod}$.

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x,y)}{x-x'} dx' = 0 \tag{2.43}$$

On a finalement :

$$S_x[\phi](x,y) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x',y)}{x-x'} dx' = -\mathcal{H}_x[\phi](x,y) \tag{2.44}$$

où $\mathcal{H}_x$ est la transformée de Hilbert suivant l'axe (Ox). Cette transformée est bien connue, et son effet sur une fréquence spatiale donnée est **un déphasage de** $\pi/2$. Ainsi la transformée de Hilbert de $sin(\kappa_x x)$ donne $cos(\kappa_x x)$. On remarque la différence notable avec l'opérateur dérivé qui transformerait $sin(\kappa_x x)$ en $\kappa_x cos(\kappa_x x)$. Pour une pure fréquence spatiale κ_x, on a alors la réponse fréquentielle de la pyramide :

Cas non modulé - $|\kappa_x| > \kappa_{mod}$. La transformée de Fourier de la carte suivant (Ox) s'écrit :

$$\widehat{S_x}[\kappa_x] = i \times sgn(\kappa_x) \tag{2.45}$$

Dans ce régime, la sensibilité est identique pour toutes les fréquences. Il est souvent dit que la pyramide se comporte comme un senseur de phase. C'est vrai en terme de sensibilité : la propagation du bruit est identique pour toutes les fréquences. En revanche, la réponse de la 4PWFS n'a pas du tout la forme de la phase en entrée. On l'a vu, dans ce régime la pyramide se contente d'avoir le rôle d'un déphaseur de $\pi/2$. Ainsi la forme de sa réponse est tout de même visuellement plus proche d'une dérivée de la phase que de la phase elle-même.

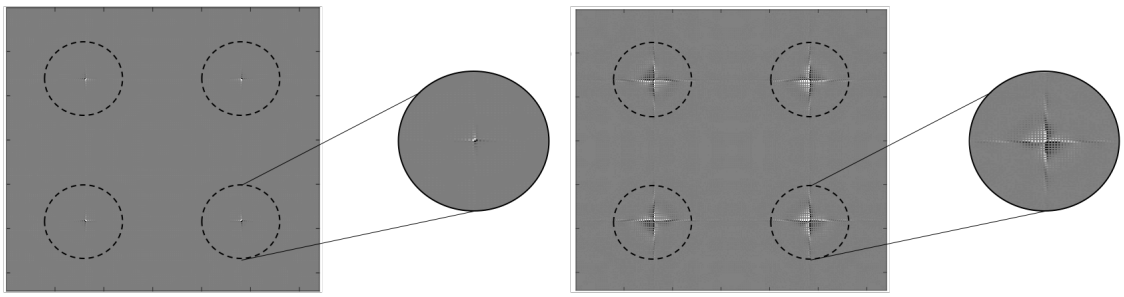
Cas modulé - $|\kappa_x| < \kappa_{mod}$. On pondère par le ratio du temps passé par les répliques dans des faces différentes. Ce calcul a été mené dans le cadre de la description géométrique. La transformée de Fourier de la carte suivant (Ox) s'écrit ainsi :

$$\widehat{S_x}[\kappa_x] = \frac{2i}{\pi} arcsin\left(\frac{\kappa_x}{\kappa_{mod}}\right) \tag{2.46}$$

Dans ce régime, la pyramide joue toujours son rôle de déphaseur tout en pondérant l'amplitude de la réponse suivant la fréquence spatiale : dans ce cas, on peut en effet dire que le comportement de la pyramide est proche d'un senseur de gradient de phase dans le cadre des hypothèses faites (pupille infinie et description en rooftop), que ce soit en terme de sensibilité ou en forme de la réponse.

2.4.3 Le modèle convolutif appliqué à la 4PWFS

Par la suite, le modèle convolutif va être appliqué de manière intensive à la 4PWFS. On propose donc une analyse de la validité de ce modèle pour le cas de la 4PWFS. On calcule la réponse impulsionnelle grâce à l'équation 2.31, en prenant comme PSF celle correspondant à une pupille pleine. On montre un exemple de réponse impulsionnelle ainsi calculée pour une modulation $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ figure 2.16. A l'instar de toute intensité réduite, la somme de la réponse impulsionnelle est nulle : on y retrouve donc des valeurs positives et négatives. On retrouve d'ailleurs une allure rappelant celle d'un senseur de gradient de phase avec un pic positif juxtaposé à un pic négatif. L'échelle contrastée nous révèle en réalité le comportement plus complexe de la 4PWFS, avec une réponse impulsionnelle qui possède une expansion importante dans l'ensemble des images de la pupille en sortie : c'est la marque de l'opérateur de Hilbert.



Échelle linéaire Échelle contrastée

FIGURE 2.16 – **Réponse impulsionnelle d'une 4PWFS pour une modulation de $r_{mod} = 3\ \lambda/D$.**

On a expliqué lors de la présentation du modèle convolutif que celui-ci souffre d'un défaut inhérent à l'hypothèse même d'un système invariant par translation : la gestion des bords. Pour preuve, en calculant la réponse convolutive de la 4PWFS modulée à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ à un piston pur on obtient les intensités réduites non nulles affichées figure 2.17.

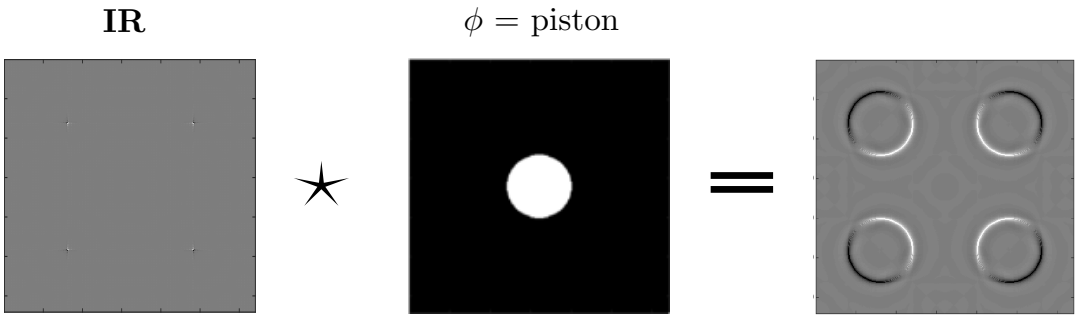


FIGURE 2.17 – **Réponse convolutive à un piston pour la 4PWFS modulée à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$.**

On montre une comparaison entre les réponses linéaires et convolutives à des modes KL de différents ordres, pour une 4PWFS modulée à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ (figure 2.18) et une 4PWFS non modulée (figure 2.19). Le modèle convolutif fournit une réponse très proche de la réponse linéaire, bien que l'on remarque comme attendu une différence marquée en bord de pupille. Cet effet affecte beaucoup plus les basses fréquences, comme on le constate sur les coupes que l'on donne figures 2.18 et 2.19. On peut l'expliquer qualitativement par le fait que les basses fréquences spatiales rencontrent plus de bords par période que les hautes fréquences spatiales : le modèle convolutif s'y écarte donc plus de la réalité. Dans le cas sans modulation, on a une sous-estimation de la réponse linéaire pour tous les modes. On y reviendra dans le chapitre 5.

On retient de cette exploitation du modèle convolutif pour la 4PWFS que, malgré des problèmes en bords de pupille notamment pour les bas ordres et un écart plus important du modèle dans le cas non-modulé, ce modèle permet de décrire simplement les réponses linéaires avec une précision très satisfaisante.

Ce chapitre introduit les ASO à filtrage de Fourier et le formalisme mathématique nécessaire à une bonne compréhension de cette thèse. J'y ai introduit le concept fondamental du modèle convolutif dont la mise en oeuvre peut être faite à travers différentes approximations. J'ai notamment exposé une nouvelle formulation de ce modèle reposant sur la distribution d'énergie en plan focal et qui sera au coeur de la grande majorité des développements effectués dans cette thèse. Enfin, j'ai explicité la pertinence de ce modèle pour la description de l'ASO à filtrage de Fourier le plus utilisé en OA pour l'astronomie : la 4PWFS.

J'ai évoqué au début de cette thèse qu'un ASO exhibe toujours deux grandes propriétés, souvent antagonistes : la sensibilité et la dynamique. Le chapitre suivant est l'occasion de donner une définition claire et quantitative de ces caractéristiques.

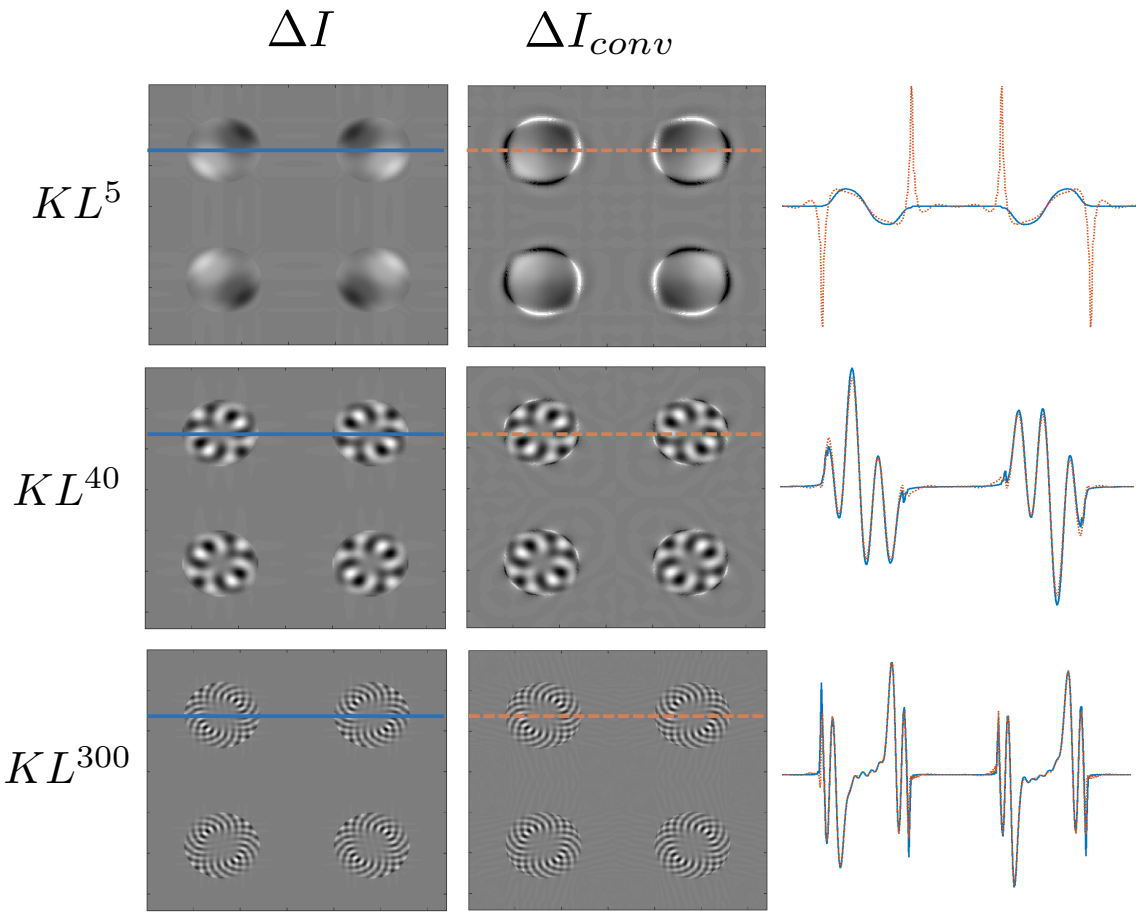


FIGURE 2.18 – **Réponses linéaires *versus* réponses convolutives pour une modulation de $r_{mod} = 3\ \lambda/D$**. Les courbes de droite sont des coupes dont le tracé correspondant est affiché sur les images.

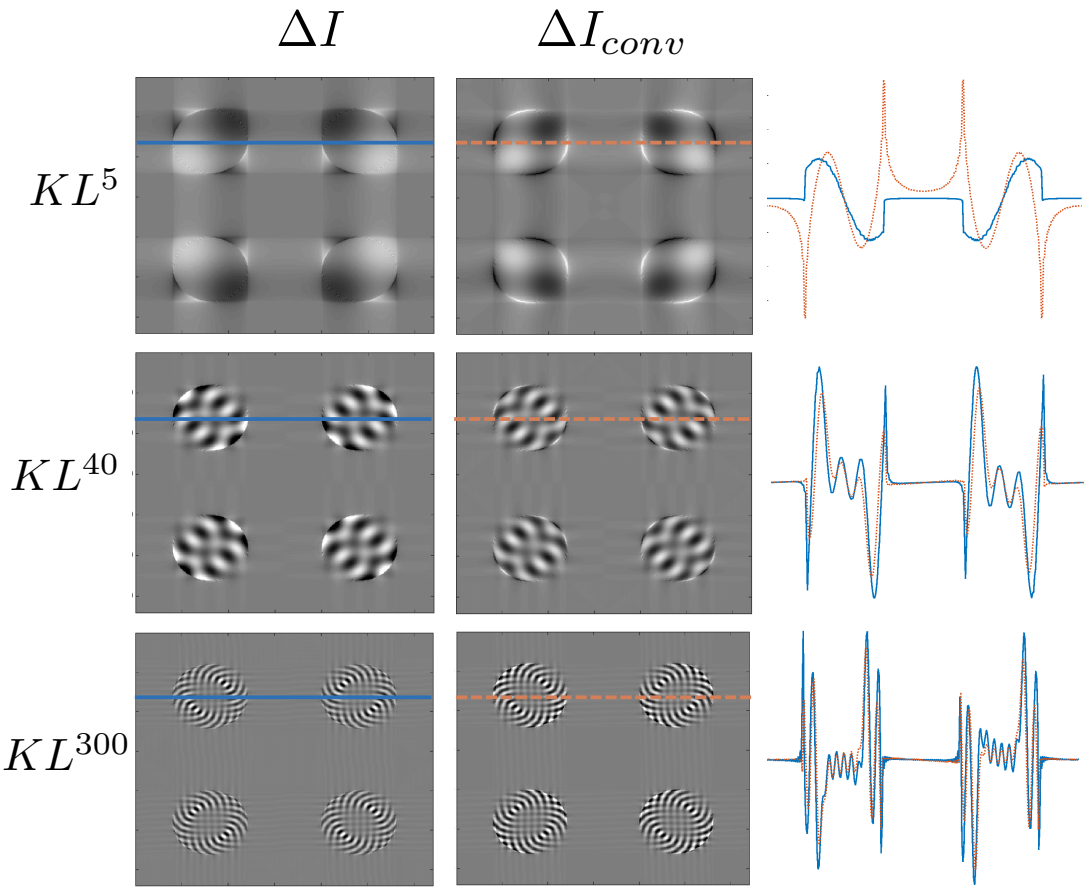


FIGURE 2.19 – **Réponses linéaires *versus* réponses convolutives pour un cas sans modulation**. Les courbes de droite sont des coupes dont le tracé correspondant est affiché sur les images.

Chapitre 3

Critères de performance pour étudier les ASO à filtrage de Fourier

Résumé

Il est essentiel d'avoir des critères permettant d'évaluer efficacement et quantitativement les performances des ASO, sans avoir à passer par de longues et fastidieuses simulations numériques bout-en-bout de boucle fermée, dont les résultats dépendraient beaucoup des paramètres choisis autre que la configuration optique de l'ASO même. C'est l'objectif de ce chapitre, où je présente des critères qui permettent de décrire précisément les caractéristiques des ASO étudiés et donc plus tard de les comparer entre eux. Ce chapitre est découpé en deux sections. La première section se concentre sur le concept de sensibilité. J'y développe un modèle de propagation de bruit simple et, à ma connaissance, inédit pour les ASO à filtrage de Fourier. Dans un deuxième temps, je m'intéresse à la notion de dynamique et aux critères quantitatifs qu'on peut lui associer. Ce chapitre permet donc de fournir les outils nécessaires et une méthode précise pour sonder les performances d'un ASO.

Sommaire

3.1 Sensibilité et propagation du bruit 84
3.1.1 Les différents types de bruit 84
3.1.2 Propagation du bruit dans le reconstructeur 85
3.1.3 Critères de sensibilité 85
3.1.4 Estimations des sensibilités à un bruit uniforme à travers le modèle convolutif 90
3.1.5 Interprétation en terme de performances d'OA 90
3.1.6 Une autre métrique intéressante pour décrire la sensibilité 92
3.2 Dynamique : comportement non linéaire 93
3.2.1 Seuil de linéarité et gamme de capture 93
3.2.2 Matrice de transfert optique et gains optiques 95
3.3 Récapitulatif 102

3.1 Sensibilité et propagation du bruit

L'un des critères essentiels d'un ASO est sa sensibilité, c'est-à-dire la qualité de ses mesures en présence de bruit. On rappelle que c'est d'autant plus vrai pour les ASO équipant les systèmes d'XOA que ceux-ci ont pour objectif de fonctionner à grande cadence, conduisant à un nombre de photons réduit et donc à des mesures à faible SNR. Il s'agit ici de décrire les différents types de bruits, la façon dont ils se propagent dans la boucle d'OA pour les ASO à filtrage de Fourier et quels sont les critères simples et pertinents permettant de définir les sensibilités des ASO face à ces bruits.

3.1.1 Les différents types de bruit

On peut diviser les bruits affectant les mesures fournies par l'ASO en deux grandes catégories : le bruit de photon, qui est non-uniforme sur le détecteur car dépendant de la distribution des intensités ; et le bruit de lecture qui est supposé uniforme sur le détecteur, c'est-à-dire avec un écart type (exprimé en rms) identique pour chaque pixel.

3.1.1.1 Bruit de lecture sur le détecteur

Le bruit de lecture du détecteur de l'ASO est plus communément connu sous son nom en anglais : *Read-Out-Noise* (RON). Ce bruit trouve son origine dans les composants électroniques permettant la lecture de l'image. Ce bruit dépend donc des caractéristiques du détecteur et de la chaîne électronique de lecture. Il s'exprime en électrons rms par pixel et par trame (e^-/pix/tr). Aujourd'hui, les caméras les plus performantes présentent des bruits de lecture de l'ordre de 0.1 e^-/pix/tr mais travaillent sur un nombre très réduit de pixels. Ce bruit est dépend seulement des caractéristiques du détecteur utilisé (et donc est indépendant du masque et la modulation), et on le suppose uniforme sur tous les pixels.

3.1.1.2 Bruit de photon

Le bruit de photon a déjà été présenté au début de cette thèse. Dans notre cas, ce bruit de photon se rattache à la distribution des intensités sur le détecteur. Il dépend ainsi de la forme du masque et de la modulation (qui donnent la forme des intensités de référence), mais aussi de la phase en entrée. Dans l'approximation des petites phases, on peut considérer que les intensités sur le détecteur sont très proches des intensités de référence :

$$I(\phi) = I_0 + \Delta I(\phi) \approx I_0, \text{ pour } \phi << 1 \tag{3.1}$$

on pourra alors faire **l'hypothèse que le bruit de photon ne dépend pas de la phase en entrée**.

3.1.2 Propagation du bruit dans le reconstructeur

Le signal délivré par la caméra de l'ASO est donc entaché de bruit :

$$I_b = I + b \tag{3.2}$$

où I_b sont les intensités bruitées, I les intensités sans bruit et b le bruit. En appliquant le traitement de base des intensités, avec N le nombre de photons, on obtient les intensités réduites bruitées :

$$\Delta I_b = \Delta I + \frac{b}{N} = \Delta I + n \tag{3.3}$$

où n est donc un rapport bruit à signal : plus cette quantité est faible, et moins les intensités réduites sont affectées par le bruit. Pour un n donné, il est crucial de comprendre comment cette quantité se propage dans la reconstruction de la phase :

$$\begin{aligned} \phi + \xi &= \mathcal{D}^\dagger(\Delta I + n) \\ \xi &= \mathcal{D}^\dagger n \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{D}^\dagger$ est le reconstructeur présenté équation 1.36, ϕ la phase estimée et où ξ est donc l'erreur d'estimation générée à cause du bruit. On s'intéresse alors à la statistique de cette erreur de phase. En notant $< . >_\tau$ l'opérateur qui permet de moyenner sur plusieurs réalisations du bruit, on peut calculer la matrice de covariance de l'erreur de phase :

$$< \xi\xi^t >_\tau = \mathcal{D}^\dagger < nn^t >_\tau \mathcal{D}^{\dagger t} \tag{3.5}$$

avec $< nn^t >_\tau$ la matrice de covariance du bruit [Rigaut and Gendron, 1992]. C'est à partir de cette équation que l'on va pouvoir définir la sensibilité des ASO à filtrage de Fourier vis-à-vis des différents types de bruits.

3.1.3 Critères de sensibilité

Comme il a été évoqué dans le chapitre précédent, l'intégralité du comportement linéaire d'un ASO est contenu dans sa matrice d'interaction. La donnée qui va nous permettre de quantifier la sensibilité doit donc émerger directement de cette matrice. Il s'agit ici de construire un modèle simplifié de propagation du bruit, pour en extraire des critères de performance facile à évaluer. Que ce soit pour un bruit de lecture ou bien le bruit de photon, les réalisations du bruit sur chaque pixel sont décorrélées et $< nn^t >_\tau$ est diagonale, ce qui permet une simplification des calculs.

3.1.3.1 Bruit de lecture sur le détecteur

Dans le cas d'un bruit uniforme de variance σ^2 sur les pixels du détecteur, on exprime la matrice de covariance du bruit de la façon suivante :

$$< nn^t >_\tau = \frac{\sigma^2}{N^2}\mathbf{I} \tag{3.6}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. On peut alors simplifier l'équation 3.5 :

$$< \xi\xi^t >_\tau = \frac{\sigma^2}{N^2}\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}^{\dagger t} = \frac{\sigma^2}{N^2}(\mathcal{D}^t\mathcal{D})^{-1} \tag{3.7}$$

Il est important de noter que cette expression est vraie si et seulement si le bruit est uniforme, elle ne s'applique donc a priori pas pour le bruit de photon. Dans le cas d'une base modale constitué des modes propres émergeant de la décomposition en valeur singulière (SVD), on a $\mathcal{D}^t\mathcal{D}$ diagonale. Si l'on fait l'approximation que cette affirmation est vraie dans le cas de toute base modale suffisamment semblable à la base des modes propres (c'est très généralement le cas pour les bases de Zernike et de KL), il est alors possible de définir la variance de chaque mode due aux erreurs d'estimations liées au bruit en prenant les termes diagonaux de l'équation 3.7, alors $\sigma^2_{\phi_i}$ pour un mode ϕ_i s'écrit :

$$\sigma^2_{\phi_i} = \frac{\sigma^2}{(\mathcal{D}^t\mathcal{D})_{i,i} \times N^2} \tag{3.8}$$

Ce qui, en écart-type donne :

$$\sigma_{\phi_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{(\mathcal{D}^t\mathcal{D})_{i,i}} \times N} \tag{3.9}$$

La propagation d'un bruit uniforme sur le mode ϕ_i est donc inversement proportionnelle à la quantité $(\mathcal{D}^t\mathcal{D})_{i,i}$. On définit alors naturellement la sensibilité $s_b(\phi_i)$ pour le mode ϕ_i telle que :

$$\boxed{s_b(\phi_i) = \sqrt{(\mathcal{D}^t\mathcal{D})_{i,i}}} \tag{3.10}$$

Cette définition de la sensibilité peut aussi s'écrire, avec $\delta I(\phi_i)$ colonne de $\mathcal{D}$ (définie équation 2.12) correspondant au mode ϕ_i :

$$s_b(\phi_i) = ||\delta I(\phi_i)||_2 = \frac{||\Delta I(\phi_i)||_2}{||\phi_i||_2} \tag{3.11}$$

Assez naturellement, on utilise ainsi comme critère de sensibilité pour un bruit uniforme la norme euclidienne du signal en sortie sur la norme euclidienne du signal en entrée. **Plus ce critère est grand, moins le bruit se propage à travers la reconstruction**.

Échantillonnage de la phase

On pourrait s'étonner de ne pas voir apparaître clairement le nombre de pixels utilisés pour l'échantillonnage de la phase dans l'expression de la propagation de bruit 3.9. Cette valeur est en fait comprise dans la mesure de sensibilité $(\sqrt{\mathcal{D}^t\mathcal{D}})_{i,i}$ pour chaque mode ϕ_i. Ainsi, la sensibilité au bruit uniforme dépend logiquement du nombre de points de mesure N_{spp} (nombre de sous-pupilles) utilisé pour encoder la phase dans la pupille. On quantifie facilement cette dépendance : pour un mode

ϕ_i échantillonné convenablement (c'est-à-dire à au moins Shannon dans l'espace des mesures) dans deux configurations d'ASO (ASO_1 et ASO_2) pour lesquelles $N_{spp}^{ASO_2} = \alpha \times N_{spp}^{ASO_1}$, on a :

$$s_b^{ASO_2}(\phi_i) = \frac{s_b^{ASO_1}(\phi_i)}{\sqrt{\alpha}} \tag{3.12}$$

Afin de coller au formalisme mathématique qui se développe dans le cas continu, on présentera tout au long de cette thèse des sensibilités normalisées par le nombre de points de mesure dans la pupille :

$$s(\phi_i) = \sqrt{N_{spp}} \times s_b(\phi_i) \tag{3.13}$$

On écrira alors la relation 3.8 de la façon suivante :

$$\sigma_{\phi_i}^2 = \frac{N_{spp} \times \sigma^2}{s(\phi_i)^2 \times N^2} \tag{3.14}$$

Bilan sur les performances

Ainsi, pour un bruit uniforme dans une configuration d'échantillonnage donné et un mode ϕ_i : un ASO présentant une sensibilité supérieure d'un facteur deux par rapport à un autre ASO induira une erreur rms sur ce mode deux fois plus petite pour le même nombre de photons en entrée. Ce critère de sensibilité s'impose donc comme une quantité clé pour comparer des ASO entre eux. On notera toutefois que cette définition condense l'information contenue dans une carte ($\delta I(\phi_i)$) en un seul scalaire : cette valeur ne donne donc aucune information sur la forme de la réponse.

3.1.3.2 Bruit de photon

La définition de la sensibilité donnée plus haut permet donc de comparer immédiatement les performances de différents ASO vis à vis d'un bruit uniforme, tel que le bruit de lecture. Pour le cas du bruit de photons, on a une expression différente de la matrice de covariance du bruit qui dépend cette fois de la distribution des intensités I sur le détecteur :

$$< nn^t >_\tau = \frac{\mathbf{diag}(I)}{N^2} \tag{3.15}$$

On l'a déjà évoqué, dans le cadre de l'approximation des faibles phases, les perturbations sont assez faibles pour que la distribution des intensités sur la caméra de l'ASO puissent être assimilées à celles des intensités de références et soient donc indépendantes de la phase en entrée. Les intensités de référence I_0 étant normalisées à 1, $\mathbf{diag}(I)$ est alors approximé par $N \times \mathbf{diag}(I_0)$. Par conséquent :

$$< nn^t >_\tau = \frac{\mathbf{diag}(I_0)}{N} \tag{3.16}$$

Ainsi :

$$< \xi\xi^t >_\tau = \frac{1}{N}\mathcal{D}^\dagger \mathbf{diag}(I_0)\mathcal{D}^{\dagger t} = \frac{1}{N}\big((\mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D})^t \mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D}\big)^{-1} \quad (3.17)$$

De manière similaire au cas d'un bruit uniforme, on peut supposer la matrice :

$$(\mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D})^t \mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D}$$

diagonale et ainsi écrire le résidu de phase pour un mode donné :

$$\sigma_{\phi_i} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D})^t \mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D}_{i,i}} \times \sqrt{N}} \quad (3.18)$$

Ainsi la sensibilité au bruit de photon pour un ASO donné s'écrit :

$$\boxed{s_\gamma(\phi_i) = \sqrt{(\mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D})^t \mathbf{diag}(1/\sqrt{I_0})\mathcal{D}_{i,i}}} \quad (3.19)$$

Avec une écriture plus simple, la sensibilité au mode ϕ_i dépend donc de $\delta I(\phi_i)$ (colonne de $\mathcal{D}$) comme suit :

$$s_\gamma(\phi_i) = \left|\left|\frac{\delta I(\phi_i)}{\sqrt{I_0}}\right|\right|_2 \quad (3.20)$$

Ainsi pour calculer la sensibilité au bruit de photon d'un mode pour un ASO à filtrage de Fourier donné, il faut diviser **terme à terme** la réponse à ce mode par la racine carré des intensités de référence avant d'en prendre la norme euclidienne. Cette description simple d'un critère de sensibilité pour le bruit de photon dans le cas des ASO à filtrage de Fourier est à notre connaissance entièrement nouvelle.

Échantillonnage de la phase

Contrairement à la sensibilité au bruit uniforme et dans le cas d'un mode bien échantillonné, la sensibilité au bruit de photon ne dépend pas du nombre de point de mesure dans la pupille. On peut faire le parallèle avec le fait bien connu qu'une réduction de l'échantillonnage n'améliore pas le bruit de photon.

Bilan sur les performances

A l'instar de la sensibilité pour des bruit uniformes, un ASO présentant une sensibilité au bruit de photon supérieure d'un facteur deux par rapport à un autre ASO induira une erreur rms sur ce mode deux fois plus petite pour le même nombre de photons en entrée. A la croisée avec le domaine des statistiques, la définition de la sensibilité au bruit de photons établie ci-dessus correspond exactement à une quantité très étudiée appelée information de Fisher. Cette quantité est utilisée dans le monde de la microscopie [Bouchet et al., 2021], mais a déjà été aussi appliquée à l'analyse de surface d'onde pour l'astronomie [Paterson, 2008, Plantet, 2015]. Il a été démontré que la valeur de cette quantité ne peut pas excéder 2.

3.1.3.3 Bases privilégiées pour le calcul des sensibilités

On distingue plusieurs bases modales utiles pour comparer les ASO en sensibilités dont certaines ont été présentées au chapitre 1 :

- La base des polynômes de Zernike, utile notamment pour comparer la sensibilité des bas ordres qui représentent des aberrations bien connues.
- Les modes de KL, mieux ordonnés fréquentiellement que les polynômes de Zernike, qui permettent de balayer toutes les fréquences spatiales plus uniformément.
- Et enfin la base des fréquences spatiales pures, composée de sinus et cosinus. Pour condenser la réponse en sensibilité d'un ASO à une pure fréquence spatiale $\mathbf{f}$, on calcule [Fauvarque et al., 2019] :

$$s_{\mathbf{f}} = \sqrt{s\left(\cos_{\mathbf{f}}\right)^2 + s\left(\sin_{\mathbf{f}}\right)^2} \tag{3.21}$$

$\mathbf{f}$ étant un vecteur en deux dimensions. Ainsi, pour pleinement représenter $s_{\mathbf{f}}$ il faudra construire des cartes de sensibilités en deux dimensions. Un schéma de la construction de cette carte 2D est présentée figure 3.1. Ce type de carte permet une comparaison très complète du comportement fréquentiel des différents ASO à filtrage de Fourier. Pour des raisons de lisibilité, on privilégiera la représentation graphique en 1D des sensibilités fréquentielles des différents ASO, via des coupes de ce type de cartes.

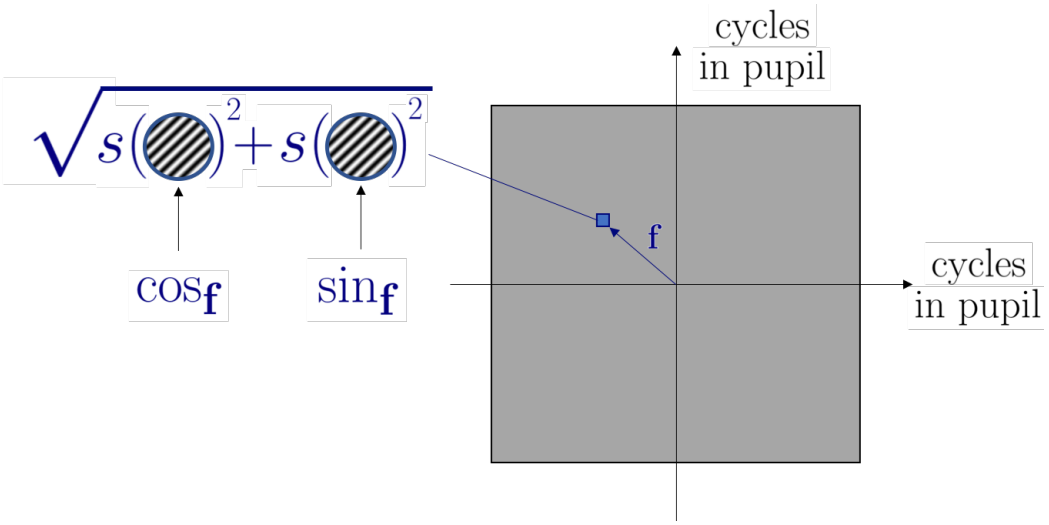


FIGURE 3.1 – **Construction d'une carte 2D de sensibilité fréquentielle.** Pour une fréquence $\mathbf{f}$ donnée, on condense l'information en sensibilité pour le cosinus et le sinus portant cette fréquence.

3.1.4 Estimations des sensibilités à un bruit uniforme à travers le modèle convolutif

Dans le cadre du modèle convolutif, on a vu au chapitre précédent (section 2.3.2.4) qu'il était possible de définir une fonction de transfert pour les ASO à filtrage de Fourier. Par définition, le module de cette fonction quantifie l'amplitude de la réponse aux différentes fréquences spatiales. Cette formulation de la fonction de transfert est donc naturellement reliée à la carte fréquentielle des sensibilités pour un bruit uniforme, à travers la formule suivante [Fauvarque et al., 2019] :

$$s_{\mathbf{f}} \approx \sqrt{|\mathbf{TF}|^2 \star PSF}\Big|_{\mathbf{f}} \tag{3.22}$$

On a par ailleurs déjà évoqué le fait que l'équation 2.34 donnant la fonction de transfert en fonction du masque m nous assure $|\mathbf{TF}| \leq 2$ (équation 2.35). On a ainsi :

$$\forall \mathbf{f},\ s_{\mathbf{f}} \leq 2\,. \tag{3.23}$$

Cette équation étant vraie pour toute les fréquences spatiales, elle est par conséquent vérifiée pour n'importe quelle phase (et donc base modale) en entrée. Ce constat permet donc de définir une limite théorique à la sensibilité d'un ASO à un bruit uniforme. Cette expression est formulée dans un cadre continu. Pour comparer les sensibilités calculées pour une configuration d'échantillonnage donnée avec cette limite, on utilisera ainsi la normalisation présentée équation 3.13.

Il sera donc très pratique de situer les sensibilités des différents ASO par rapport à ce seuil maximal valant deux, qui s'applique finalement aux deux types de sensibilités (bruit uniforme et bruit de photon) décrites précédemment.

3.1.5 Interprétation en terme de performances d'OA

Les formules proposées équations 3.9 et 3.18 donnent donc une relation entre l'erreur de phase, le nombre de photons disponibles pour la mesure et la sensibilité intrinsèque de l'analyseur considéré. Ainsi ces équations présentent un **modèle de propagation du bruit** : pour un ASO à filtrage de Fourier donné, la propagation du bruit au sein du mode ϕ_i est donc quantifiée en radian^2 par l'équation suivante :

$$\boxed{\sigma^2_{\phi_i} = \frac{N_{spp} \times \sigma^2}{s^2(\phi_i) \times N^2} + \frac{1}{s^2_\gamma(\phi_i) \times N}} \tag{3.24}$$

où le premier terme correspond donc à la propagation d'un bruit uniforme ($s(\phi_i)$ étant exprimée sous sa forme normalisée, c'est à dire avec une valeure comprise entre 0 et 2) et le second à la propagation du bruit de photon. On insiste sur le fait que les propagations des deux types de bruits peuvent avoir des facteurs multiplicatifs différents, car **il n'y a aucune raison que** $s(\phi_i)$ **soit égal à** $s_\gamma(\phi_i)$. De plus, on connaît les bornes pour ces deux quantités :

$$\boxed{\begin{cases} 0 \leq s \leq 2 \\ 0 \leq s_\gamma \leq 2 \end{cases}} \tag{3.25}$$

On remarque que les calculs menés plus haut pour dériver l'expression de ces termes de sensibilité ne se restreignent pas seulement aux ASO à filtrage de Fourier, mais à tout senseur dont la gestion du signal peut s'effectuer via le traitement des intensités réduites. On précise aussi que pour un ASO achromatique, ces sensibilités ne dépendent donc pas de la longueur d'onde.

De manière encore plus large, les travaux effectués sur l'information de Fisher nous assurent même que **ces bornes se généralisent en réalité à n'importe quel type d'ASO**. Ainsi, un ASO à filtrage de Fourier possédant la propriété $s = s_\gamma = 2$ pour l'ensemble des fréquences spatiales se verrait être un ASO idéal en terme de sensibilité pour la longueur d'onde considérée : pour un nombre de photons donnés, on ne pourrait pas trouver un autre senseur parvenant à moins propager le bruit que celui-ci (en restant dans le régime de linéarité). Dans la suite de cette thèse, notamment dans les graphiques, on appellera simplement sensibilité le terme s (car il représente naturellement la norme de la sortie sur la norme de l'entrée) et s_γ sera nommé sensibilité au bruit de photon.

Exemple. L'équation 3.24 nous permet donc d'analyser la propagation du bruit en fonction du nombre de photons pour une configuration donnée. On prend l'exemple d'un ASO à filtrage de Fourier idéal en sensibilité ($s(\phi) = s_\gamma(\phi_i) = 2$) qui échantillonne la pupille avec 40 pixels dans le diamètre et on considère un bruit de lecture de $\sigma_{RON} = 0.1\ e^-/\text{pix/tr}$. Pour cette configuration donnée, on peut ainsi estimer l'erreur de phase liée à un mode ϕ_i en fonction du nombre de photons disponibles par sous-pupilles pour la mesure. On livre les résultats figure 3.2. On y observe les courbes en $1/\sqrt{N}$ pour le bruit de photon et en $1/N$ pour le bruit de lecture. On retrouve le fait que le bruit de photon est dominant à fort flux alors que le bruit de lecture prend le pas sur l'erreur totale dans les cas avec très peu de photons disponibles par sous-pupilles. On comprend bien qu'avec des capteurs à l'état de l'art en terme de bruit de lecture, le bruit limitant est très généralement le bruit de photon.

De manière plus parlante, on peut calculer le nombre de photons pour lequel la variance due au bruit dans les mesures égalise celle due à l'erreur de fitting pour un ASO idéal. Cette étude se fait à la longueur d'onde d'analyse. On prend comme exemple un télescope de type VLT ($D = 8\ m$) avec un $r_0 = 15\ cm$. On garde toujours la valeur type d'XOA : 40 actionneurs dans le diamètre. L'erreur de fitting est donnée par la formule 1.30 : $\sigma^2_{fitting} = 0.33\ rad^2$. En choisissant une base orthonormée comprenant N_{spp} modes et en ne gardant que le bruit de photon, on peut sommer la contribution de chaque mode à la variance dû au bruit dans les mesures :

$$\sigma^2_{noise} = \frac{N_{spp}}{4 \times N} \tag{3.26}$$

Pour avoir l'égalité $\sigma^2_{noise} = \sigma^2_{fitting}$, on trouve un nombre de photon par sous-

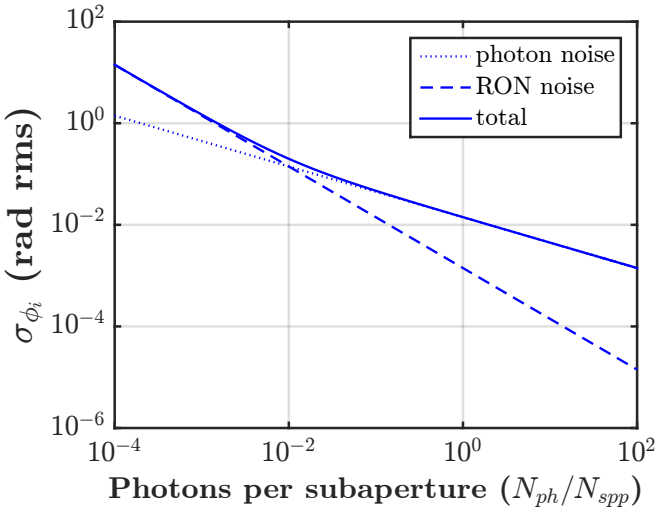


FIGURE 3.2 – **Propagation de bruit dans la mesure.** Cas d'un ASO idéal avec $s(\phi_i) = 2$ et $s_\gamma(\phi_i) = 2$.

pupille de $N/N_{spp} \approx 0.75$, soit moins d'un photon par mode dans notre exemple. Ce petit calcul permet de comprendre que dans le cas d'un ASO à filtrage de Fourier présentant une sensibilité au bruit de photon idéale, la propagation du bruit est si réduite qu'il faut atteindre des quantité de photons extrêmement faible pour voir émerger des erreurs qui deviennent prépondérantes. À la lumière du chapitre 1, un tel ASO se présenterait donc comme un outil de choix pour l'XOA.

3.1.6 Une autre métrique intéressante pour décrire la sensibilité

Nos critères privilégiés pour évaluer les sensibilités reposent donc sur la norme euclidienne dans l'espace des mesures et se relient directement avec la propagation du bruit dans la boucle d'OA. Il est fortement instructif de sonder une autre métrique de l'espace des mesures : la norme 1 notée $||.||_1$, c'est à dire la somme des valeurs absolues des éléments. En calculant la somme des valeurs absolues des intensités réduites, on accède à une quantité intéressante : la proportion des photons déplacés. En effet, on a vu que les intensités réduites peuvent être vues comme une carte encodant les déplacements des photons due à la phase aberrante. L'excédent de photons dans une zone du détecteur n'est possible que par une perte de photon localisée dans une autre zone. Ainsi, pour une amplitude donnée du mode ϕ_i on a :

$$||\Delta I(\phi_i)||_1 = 2r \tag{3.27}$$

où r est donc la proportion de photons déplacés. Cette métrique permet donc d'évaluer la "réactivité photonique" du senseur, indépendamment de la distribution spatiale du déplacement des photons. Elle ne sera pas utilisée au cours de cette

thèse ; mais il semblait tout de même utile d'évoquer cette notion, potentiellement destinée à être exploitée dans de futurs développements.

3.2 Dynamique : comportement non linéaire

On a caractérisé les sensibilités des ASO et exhibé les performances maximales atteignables en terme de propagation de bruit dans la reconstruction de la phase. Cependant, cette analyse a été faite dans le cas où la réponse des ASO est parfaitement linéaire, ce qui n'est pas toujours le cas. On a vu dans le budget d'erreur présenté équation 1.29 qu'il existe un autre terme propre à la mesure de l'ASO et qui affecte les performances du système d'OA : l'erreur de non linéarité. Il nous faut ainsi définir désormais des critères pour comparer la dynamique des ASO, c'est à dire leur comportement en dehors de leur régime de linéarité (cette définition de la dynamique semble la plus adéquate, puisque l'on travaille dans un cadre matriciel où l'inversion du signal des ASO suppose une relation linéaire). On va vite constater que, contrairement à la sensibilité, il paraît difficile de définir des critères mathématiques clairs pour comparer les ASO en dynamique. Il faudra alors faire appel à plusieurs métriques permettant chacune une description spécifique, et donc une comparaison partielle du comportement dynamique. L'un des développements de cette thèse est l'utilisation approfondie d'une de ces métriques, appelée gains optiques, dont on va exposer les contours dans cette section.

3.2.1 Seuil de linéarité et gamme de capture

Puisque l'on mène une discussion sur comment évaluer le comportement non linéaire d'un ASO, il semble exclu de passer uniquement par sa matrice d'interaction pour en extraire des critères de dynamique, puisque celle-ci décrit son comportement linéaire.

Une quantité importante pour discuter de la dynamique d'un ASO vis à vis d'un mode donné est d'évaluer sa courbe de linéarité par rapport à ce mode. La courbe de linéarité permet de représenter l'évolution du signal associé à une phase suivant son amplitude en entrée. Il est possible de procéder de plusieurs façons pour tracer cette courbe pour un mode ϕ_i en entrée. La plus courante est de montrer le mode étudié à l'ASO avec des amplitudes croissantes. Pour chaque amplitude, on reconstruit le mode à l'aide de la matrice de commande et de la mesure de l'ASO. Une autre façon de faire, que l'on privilégiera par la suite, consiste à faire le produit scalaire entre la mesure de l'ASO pour une amplitude donnée a avec la réponse différentielle correspondant à la colonne de la matrice d'interaction associée au mode considéré :

$$\mathcal{L}_{\phi_i}(a) = \frac{< \Delta I(a\phi_i) | \delta I(\phi_i) >}{< \delta I(\phi_i) | \delta I(\phi_i) >} \tag{3.28}$$

le dénominateur étant utilisé comme normalisation. Ainsi, tant que les intensités réduites correspondant à l'amplitude a évoluent linéairement, $\mathcal{L}_{\phi_i}(a)$ évolue proportionnellement à a : $\mathcal{L}_{\phi_i}(a) = \alpha a$. Le choix de cette définition permet de ne pas avoir recours au reconstructeur dont la structure dépend des décisions faites lors

de l'inversion (filtrage de modes non vus lors de la SVD) et de travailler seulement dans l'espace des mesures. En outre, on verra un peu plus tard que l'utilisation de cette définition, qui donne des résultats similaires à ceux fournis par l'approche plus classique, permettra d'être implémentée plus simplement dans le modèle convolutif.

A partir de cette quantité, il est possible de construire deux métriques différentes permettant d'apporter chacune une information complémentaire sur le comportement non linéaire d'un ASO donné.

3.2.1.1 Seuil de linéarité

On peut dans un premier temps définir un seuil à partir duquel $\mathcal{L}_{\phi_i}(a)$ n'est plus proportionnel à a, et donc à partir duquel l'ASO sort de son régime de linéarité. On peut par exemple définir arbitrairement ce seuil lorsque $\mathcal{L}_{\phi_i}(a)$ vaut 90% de sa valeur dans le cas parfaitement linéaire, c'est à dire a_{seuil} tel que :

$$\mathcal{L}_{\phi_i}(a_{seuil}) = 0.9 \times \alpha a_{seuil} \tag{3.29}$$

Au delà de ce seuil, l'ASO peut potentiellement continuer à produire des mesures moins précises mais qui peuvent tout de même permettre à une boucle d'OA d'être stable (voir schéma 3.30).

3.2.1.2 Gamme de capture

On définit la gamme de capture par la plus petite amplitude a_c en valeur absolue telle que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\phi_i}(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a_c} = 0 \tag{3.30}$$

Ce critère permet d'évaluer quand est-ce que la mesure fournie par l'ASO commence à changer significativement. Au-delà de ce point, la monotonie sur ce mode est compromise : la bijectivité de la réponse de l'analyseur n'est plus valide, même un reconstructeur non linéaire ne peut permettre de déterminer la phase en entrée. On notera que pour un ASO donné, on a forcément $a_{seuil} \leq a_c$ (voir schéma 3.30).

Un ASO ayant un seuil a_{seuil} plus élevé qu'un autre ASO n'implique en rien que sa gamme de capture a_c le sera aussi. Un exemple d'illustration est donné Fig.3.4 où l'on a schématisé les courbes de linéarités de deux ASO fictifs pour lesquels on aurait un seuil de linéarité plus grand pour l'un, et une gamme de capture plus favorable pour l'autre. En ressort ainsi la complexité de définir une unique métrique pour décrire la dynamique d'un ASO.

Le seuil de linéarité et la gamme de capture sont deux critères permettant de donner une idée du comportement d'un ASO pour chaque mode. Il faut les appréhender autant comme des critères quantitatifs que comme des repères qualitatifs pour analyser la forme d'une courbe de linéarité. Pour certaines études on évaluera donc

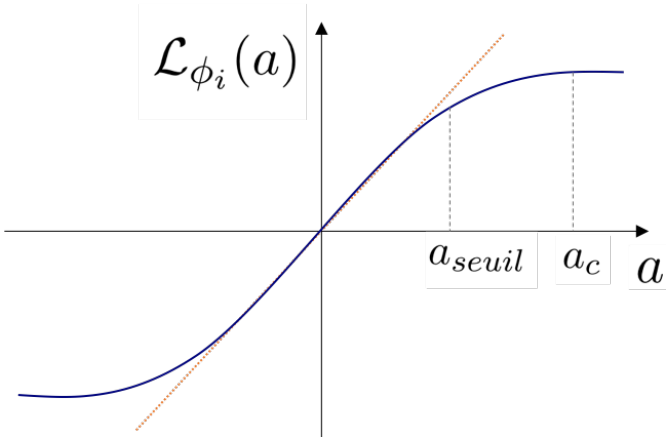


FIGURE 3.3 – **Représentation schématique du seuil de linéarité et de la gamme de capture.**

ces paramètres ou bien, à minima, on les gardera à l'esprit en comparant des courbes de linéarités. Quoiqu'il en soit, la connaissance de ces deux valeurs n'est malheureusement pas suffisante pour décrire le comportement non linéaire d'un ASO, on ne les utilisera donc pas systématiquement. Il faut en effet plutôt tenter de comprendre **comment l'ensemble des modes influe sur les mesures**, c'est à dire sur eux-même et sur les autres. On dispose pour cela d'une autre métrique, sûrement la plus complète et la plus utile pour décrire le comportement non-linéaire d'un ASO : la matrice de transfert optique et ses gains optiques.

3.2.2 Matrice de transfert optique et gains optiques

3.2.2.1 L'approche *Linear-Parameter Varying System*

On a expliqué au début de cette thèse que l'on travaille dans un cadre fixe : le **formalisme matriciel**. Dans ce formalisme, la réponse de l'ASO et la phase en entrée sont toujours reliées par une relation linéaire, décrite par une matrice. Une façon particulière de concevoir la non-linéarité est d'aborder cette relation linéaire en considérant qu'elle peut varier. Autrement dit, on va aborder le système comme étant toujours linéaire, mais avec un régime de linéarité qui est modifié avec la phase en entrée. Ainsi, la relation matricielle entre la sortie de l'ASO et la phase en entrée peut alors s'écrire :

$$\boxed{\Delta I(\phi) = \mathcal{D}_\phi.\phi} \tag{3.31}$$

où la matrice $\mathcal{D}_\phi$ est toujours une matrice, mais qui dépend de la phase à mesurer. Dans le domaine de l'automatique, cette approche est appelée *Linear-Parameter Varying System* (LPVS). Cette relation peut se montrer surprenante car pour caractériser la réponse de l'ASO et avoir une description précise du problème direct, il paraît ainsi nécessaire de connaître la phase en entrée. Ce constat est donc paradoxal dans le cadre de l'analyse de surface d'onde, où l'objectif est justement

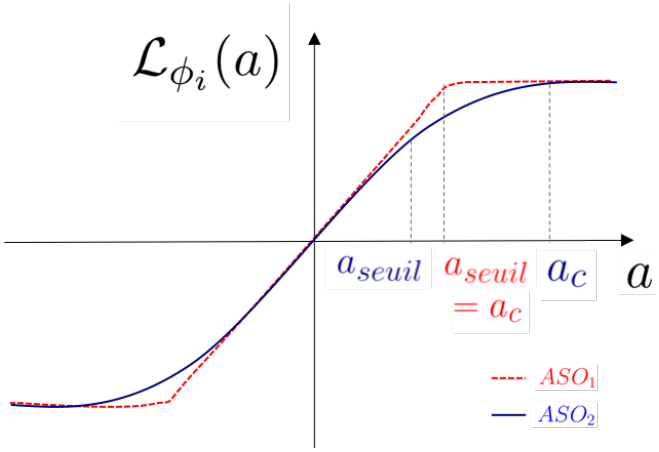


FIGURE 3.4 – **Illustration de la difficulté de définir la dynamique des ASO à l'aide d'une métrique unique**. Dans cet exemple d'illustration, l'ASO_1 à une gamme de capture plus faible que l'ASO_2, mais un seuil de linéarité supérieur.

de remonter à ϕ à partir de $\Delta I(\phi)$. On s'intéresse à la mesure de $\mathcal{D}_\phi$ en pratique par la suite, et on se restreint pour le moment à clarifier en quoi la connaissance de cette matrice est utile pour sonder la dynamique des ASO.

On peut écrire la matrice $\mathcal{D}_\phi$ à partir de la matrice calculée à l'étalonnage grâce à la technique *push-pull* (que l'on nomme désormais $\mathcal{D}_{\text{calib}}$) comme suit :

$$\mathcal{D}_\phi = \mathcal{D}_{\text{calib}}.T_\phi \tag{3.32}$$

où la matrice T_ϕ de taille $N_{\text{modes}} \times N_{\text{modes}}$ quantifie ainsi la différence entre la matrice d'interaction fabriquée à l'étalonnage et la matrice d'interaction "non-linéaire" qui dépend de la phase en entrée. C'est cette matrice T_ϕ, que l'on appelle matrice de transfert optique, qui va donc nous servir comme **quantificateur de non linéarité**. On l'obtient via l'opération :

$$T_\phi = \mathcal{D}^\dagger_{\text{calib}}.\mathcal{D}_\phi \tag{3.33}$$

Pour un système parfaitement linéaire, on a $T_\phi = \mathbf{I}$ quelque soit la phase en entrée. Dans un cas non-linéaire et pour une phase donnée en entrée, on veut par conséquent estimer l'écart à l'identité de cette matrice, et on s'intéressera particulièrement à deux aspects de T_ϕ :

(i) **Son taux de diagonalité.** Dans le cas où l'on a T_ϕ non diagonale, cela signifie que la matrice d'interaction $\mathcal{D}_{\text{calib}}$ est modifiée de la façon suivante : pour un mode donné, la réponse de l'ASO change en forme. Autrement dit, on "mélange" les réponses des modes. Pour évaluer ce taux de diagonalité en notant $t_{i,j} = T_\phi(i,j)$, on calcule le rapport de la valeur rms des éléments hors diagonaux sur la valeur rms de l'ensemble des éléments de la matrice :

$$\mathcal{T} = \sqrt{\frac{\sum_i t_{i,i}^2}{\sum_{i,j} t_{i,j}^2}} \leq 1 \tag{3.34}$$

On verra par la suite qu'un fort taux de diagonalité pour T_ϕ peut s'avérer très intéressant en pratique, notamment pour des questions de contrôle dans la boucle d'OA.

(ii) **L'amplitude de ses valeurs diagonales.** On appelle **gains optiques** les éléments sur la diagonale de T_ϕ. Dans le cas d'un fort taux de diagonalité, la valeur du gain optique $t_{i,i}$ encode alors une modification scalaire de la réponse de l'ASO au mode ϕ_i. C'est à dire que les non-linéarités ne changent pas la forme de la réponse, mais entraînent une perte de sensibilité globale pour le mode ϕ_i. On schématise cet effet figure 3.5. Dans ce cas de T_ϕ fortement diagonale ($\mathcal{T} \approx 1$) on l'approximera par sa diagonale : on appelle cette approximation **l'approximation diagonale**, et on écrit alors $T_\phi = G_\phi$ pour marquer le fait que l'on se place dans cette approximation.

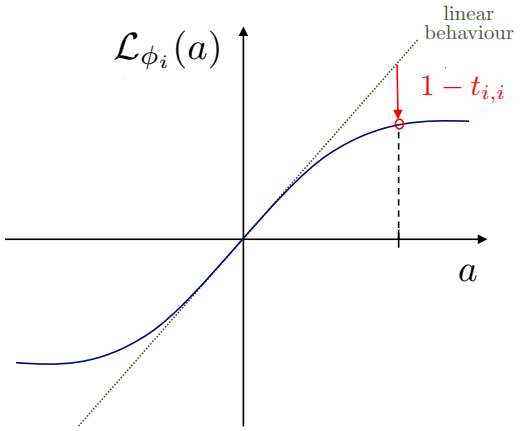


FIGURE 3.5 – **Les valeurs diagonales de T_ϕ encodent une modification de sensibilité globale sur le mode ϕ_i par rapport au comportement linéaire**.

Il nous reste cependant deux questions à résoudre afin de pouvoir utiliser ce critère en pratique : comment obtenir $\mathcal{D}_\phi$ et donc T_ϕ, et quelle phase ϕ utiliser pour comparer les différents ASO ?

3.2.2.2 Application aux phases résiduelles dans un systèmes d'OA

On veut donc pourvoir utiliser le concept de matrice de transfert optique pour comparer les performances en dynamique de différents ASO dans la boucle d'OA. Pour calculer T_ϕ, on choisit naturellement ϕ comme étant **la phase résiduelle que l'on cherche à mesurer** ϕ_{res}. Cette phase résiduelle dépendra donc du système considéré.

Reste à savoir comment obtenir $\mathcal{D}_{\phi_{res}}$. Cette tâche est complexe car même en connaissant parfaitement ϕ_{res} et $\Delta I(\phi_{res})$, on ne peut pas remonter à $\mathcal{D}_{\phi_{res}}$: c'est un problème *mal posé*. Pour pouvoir tout de même calculer cette matrice dans le cas des phases résiduelles, on veut alors procéder d'une manière qui consiste **à associer de manière moyenne $\mathcal{D}_{\phi_{res}}$ à la matrice d'interaction calculée autour de** ϕ_{res}. On justifie cette approche de la façon suivante : en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $\Delta I(\phi)$ autour de la phase résiduelle ϕ_{res}, on obtient :

$$\Delta I(\phi) = \Delta I(\phi_{res}) + (\phi - \phi_{res}) \frac{\partial \Delta I}{\partial \phi}|_{\phi_{res}} \tag{3.35}$$

où l'on rappelle que $\Delta I(\phi)$ sont les intensités réduites $I(\phi) - I_0$ avec I_0 les intensités correspondant à un front d'onde plan. On fait les hypothèses que ϕ_{res} est une variable aléatoire gaussienne centrée et que la fonction ΔI est impaire, comme schématisé figure 3.6. En moyennant sur plusieurs réalisations de ϕ_{res} l'équation précédente, on peut faire les approximations suivantes :

$$< I(\phi_{res}) >_\tau \approx I_0 \tag{3.36}$$

ainsi que :

$$< \frac{\partial \Delta I}{\partial \phi}|_{\phi_{res}} . \phi_{res} >_\tau \approx 0 \tag{3.37}$$

car le caractère impaire de la fonction ΔI nous assure que $\frac{\partial \Delta I}{\partial \phi}|_{\phi_{res}} = \frac{\partial \Delta I}{\partial \phi}|_{-\phi_{res}}$ (voir illustration 3.6).

Dans ce cas, on peut alors écrire :

$$< \Delta I(\phi) >_\tau \approx < \frac{\partial \Delta I}{\partial \phi}|_{\phi_{res}} >_\tau . \phi \tag{3.38}$$

où $< \frac{\partial I}{\partial \phi}|_{\phi_{res}} >_\tau$ correspond donc au comportement linéaire de l'ASO autour de la statistique de ϕ_{res}. De plus, la phase que l'on cherche à mesurer à chaque trame est bien $\phi = \phi_{res}$ et on peut donc écrire :

$$< \Delta I(\phi_{res}) >_\tau \approx < \frac{\partial \Delta I}{\partial \phi}|_{\phi_{res}} >_\tau . \phi_{res} \tag{3.39}$$

Cette équation peut paraître surprenante, mais ainsi formulée elle traduit simplement le fait que les phases résiduelles agissent physiquement comme une modulation qui affecte la mesure et donc le comportement linéaire de l'ASO. On peut dire que les phases résiduelles **s'automodulent**.

Calcul en pratique

Calculons ce comportement autour de ϕ_{res} à l'aide de la technique de type *push-pull*. On rappelle que pour chaque mode on construit la matrice d'interaction à l'étalonnage comme suit :

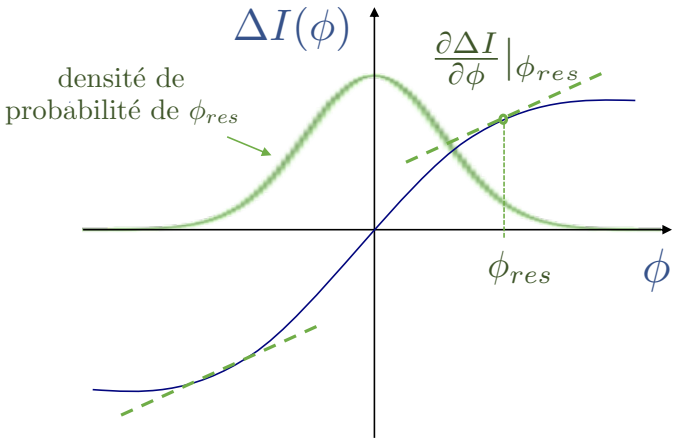


FIGURE 3.6 – **Développement limité à l'ordre 1 des intensités réduites autour du point de fonctionnement ϕ_{res}.**

$$\delta I_{\text{calib}}(\phi_i) = \frac{\Delta I_{\text{calib}}(\epsilon\phi_i) - \Delta I_{\text{calib}}(-\epsilon\phi_i)}{2\epsilon} \tag{3.40}$$

avec un étalonnage généralement fait autour d'un front d'onde plan (mais pas nécessairement). On exprime alors la réponse différentielle de l'ASO autour d'un mode ϕ_i en présence de ϕ_{res} :

$$\delta I_{\phi_{res}}(\phi_i) = \frac{\Delta I_{\phi_{res}}(\epsilon\phi_i) - \Delta I_{\phi_{res}}(-\epsilon\phi_i)}{2\epsilon} \tag{3.41}$$

avec :

$$\Delta I_{\phi_{res}}(\epsilon\phi_i) = \Delta I_{\text{calib}}(\epsilon\phi_i + \phi_{res}) \tag{3.42}$$

Lorsque ϕ_{res} est assez grande, on atteint le régime non linéaire de l'ASO, on a alors par définition même de la non linéarité :

$$\Delta I_{\text{calib}}(\epsilon\phi_i + \phi_{res}) \neq \epsilon\Delta I_{\text{calib}}(\phi_i) + \Delta I_{\text{calib}}(\phi_{res}) \tag{3.43}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \delta I_{\phi_{res}}(\phi_i) &= \frac{\Delta I_{\phi_{res}}(\epsilon\phi_i) - \Delta I_{\phi_{res}}(-\epsilon\phi_i)}{2\epsilon} \\ &= \frac{\Delta I_{\phi_{res}}(\epsilon\phi_i + \phi_{res}) - \Delta I_{\phi_{res}}(-\epsilon\phi_i + \phi_{res})}{2\epsilon} \\ &\neq \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) \end{aligned} \tag{3.44}$$

La concaténation des divers $\delta I_{\phi_{res}}(\phi_i)$ va donc former une nouvelle matrice d'interaction, différente de $\mathcal{D}_{\text{calib}}$, qui décrit le comportement linéaire autour de la phase ϕ_{res}. En répétant cette opération pour tout un jeu de phases résiduelles, on peut

alors moyenner les matrices d'interactions obtenues pour faire émerger la formulation matricielle de l'équation 3.39 :

$$\Delta I(\phi_{res}) = \mathcal{D}_{\text{res}}.\phi_{res} \tag{3.45}$$

avec $\mathcal{D}_{\text{res}} = \mathcal{D}_{<\phi_{res}>_\tau}$, notre matrice qui encode le comportement LPVS **moyen** du système. On retrouve alors la matrice de transfert optique moyenne pour la statistique des phases résiduelles considérée via :

$$\mathcal{D}_{\text{res}} = \mathcal{D}_{\text{calib}}.T_{\text{res}} \tag{3.46}$$

On signale que la formulation de cette matrice de passage qui va permettre de remonter aux gains optiques est très similaire aux formulations que l'on trouve dans la littérature [Korkiakoski et al., 2008, Deo et al., 2019, Deo, 2019].

Dans le cas de l'approximation diagonale, on peut définir une manière de calculer $T_{\text{res}} = G_{\text{res}}$ à travers ses éléments diagonaux, c'est à dire les gains optiques :

$$\boxed{t_{i,i} = \frac{< \delta I_{\text{res}}(\phi_i) | \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) >}{< \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) | \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) >}} \tag{3.47}$$

On calcule donc les gains optiques **en projetant la réponse moyenne calculée autour de la turbulence du mode ϕ_i sur la réponse du même mode calculée à l'étalonnage**, le dénominateur jouant le rôle de normalisation. On peut rapprocher fortement cette formulation des gains optiques avec l'équation permettant le calcul des courbes de linéarité 3.28. On rappelle que l'intérêt est multiple : on effectue ici l'estimation des gains optiques en restant dans l'espace des mesures seulement, sans avoir à passer par le reconstructeur dont la structure dépend des valeurs singulières conservées pour l'inversion. On constate aussi que pour calculer le gain optique $t_{i,i}$ il n'est alors pas nécessaire d'étalonner de nouveau la matrice d'interaction pour tous les modes, mais seulement pour le mode ϕ_i pour lequel on veut déterminer le nouveau comportement de l'ASO. On verra enfin chapitre 5 que cette formulation se marie bien avec le modèle convolutif. Cependant, on notera que cette formulation ne permet pas d'avoir accès aux éléments non-diagonaux de T_{res}, ce qui n'est finalement pas gênant puisque l'on utilise cette formulation des gains optiques dans le cadre de l'approximation diagonale.

Calcul de la matrice de transfert optique en simulation

Pour le calcul de la matrice de transfert optique et des gains optiques associés, on procédera en simulation, en stoppant la boucle d'OA et en effectuant un étalonnage *push-pull* autour de la phase résiduelle "gelée". On précise que cette façon de faire est très difficilement réalisable en pratique car elle requiert un étalonnage extrêmement rapide tout en maintenant la boucle fermée. De plus, afin de prendre en compte les différentes réalisations des phases résiduelles, on réalise donc plusieurs étalonnages autour d'un panel de phases résiduelles présentant les même statistiques, autrement dit ayant la même PSD (schéma figure 3.7). En moyennant les résultats obtenus pour tout le jeu de phases résiduelles, on obtient bien la matrice d'interaction $\mathcal{D}_{\text{res}} =$

$\mathcal{D}_{<\phi_{res}>_\tau}$. Ainsi, pour comparer les différentes matrices de transfert optique pour un masque et une modulation donnée :

1. On choisit une PSD pour laquelle on veut comparer les ASO. Dans le chapitre suivant, on prendra comme exemple pour les comparaison 3 types de de PSD pour le cas d'un télescope de classe 8 m et d'un $r_0(550nm) = 15\ cm$: *(i)* PSD de fitting boucle ouverte ou pleine turbulence que l'on nomme PSD_{turbu}, *(ii)* PSD de fitting d'un système d'OA "standard" avec un nombre d'actionneur $N_{act} = 20$ dans le diamètre, appelée PSD_{20} et systèmes type haut contraste avec $N_{act} = 40$ actionneurs dans le diamètre : PSD_{40}.
2. Pour de nombreuses réalisations de phases, on recalcule la matrice d'interaction autour du point de fonctionnement.
3. On moyenne l'ensemble des matrices d'interactions calculées. On peut alors calculer la matrice de transfert optique.
4. On peut alors comparer le critère de diagonalité et la valeur des gains optiques pour les différents ASO.

Le choix des PSD suggéré ici est complètement arbitraire. Il faut bien comprendre que l'on propose une **méthode** pour comparer les ASO en dynamique à travers leurs matrices de transfert optique. Ainsi pour une application donnée, on quantifiera les performances en dynamique en utilisant la PSD attendue pour notre système d'OA bien spécifique.

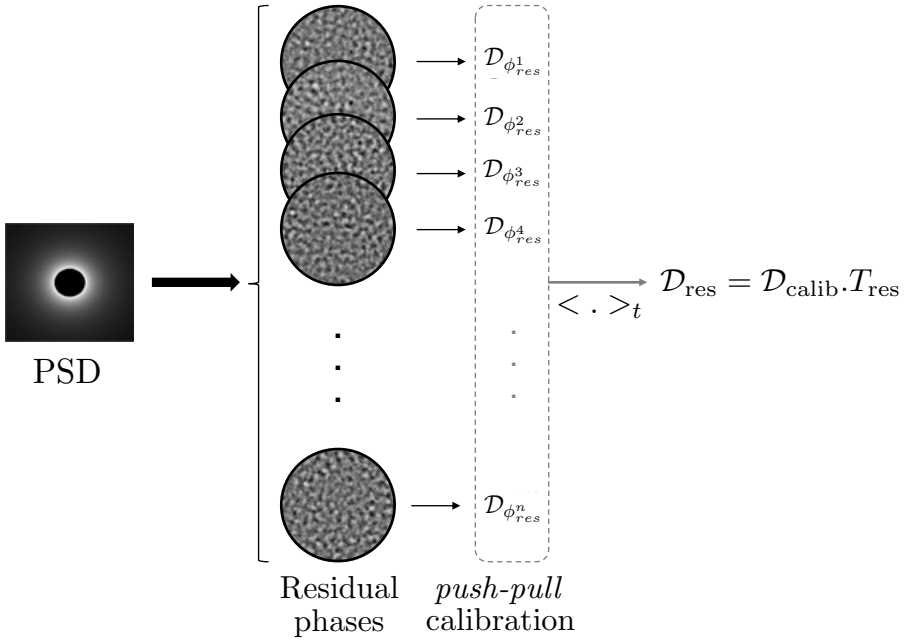


FIGURE 3.7 – **Calcul de la matrice de transfert optique moyenne en simulation.**

L'introduction des gains optiques et de la matrice de transfert optique dans cette partie a permis d'expliciter en quoi ces grandeurs sont des critères de dynamique

intéressants, permettant de saisir plus globalement l'impact du comportement non linéaire d'un ASO tout en restant dans un formalisme matriciel. On utilisera dans le chapitre suivant la notion de gains optiques comme critère de comparaison privilégié pour évaluer les performances en dynamique des différents ASO. Les gains optiques révèlent aussi un comportement très problématique en terme de contrôle de la boucle d'optique adaptative : en présence de phases résiduelles, la matrice d'interaction "vraie" dévie de celle calculée lors de l'étalonnage. Les gains optiques, qui proviennent donc du comportement non linéaire de l'ASO, sont donc bien une source d'erreur dans l'estimation de la phase. Un chapitre entier à portée plus applicative sera consacré aux stratégies d'estimations de ces gains et à la compensation de leurs effets sur le contrôle du front d'onde.

3.3 Récapitulatif

Les différents critères définis au cours de ce chapitre définissent en quelque sorte une méthode systématique à suivre lorsque l'on veut dresser le portrait robot d'un ASO :

Sensibilités : à partir de la matrice d'interaction et des intensités de référence, on peut sonder les sensibilités au bruit uniforme et au bruit de photon. Ces sensibilités nous permettent de quantifier directement la robustesse des mesures délivrées par les ASO en présence de bruit. Cependant, cette analyse suppose la linéarité.

Dynamique : on accorde une attention à la forme des courbes de linéarités, et on s'intéresse tout particulièrement aux structures de la matrice de transfert optique : c'est à dire son taux de diagonalité et les valeurs de ses gains optiques.

La liste de ces critères et leur caractéristiques principales est livrée dans le tableau ci-dessous :

Informations / Critère	Quantités requises	Hypothèses	Éq.	Val. idéale
Sensibilité bruit de lecture s	$\mathcal{D}_{\text{calib}}$	$\phi << 1$	3.10	2
Sensibilité bruit de photon s_γ	$\mathcal{D}_{\text{calib}}$, I_0	$\phi << 1$	3.19	2
Taux de diagonalité $\mathcal{T}$	$\mathcal{D}_{\text{calib}}$, $\mathcal{D}_{\text{res}}$	Aucune	3.34	1
Gains optiques G_{res}	$\mathcal{D}_{\text{calib}}$, $\mathcal{D}_{\text{res}}$	Approx. diagonale	3.47	$G_{opt} = \mathbf{I}$

TABLE 3.1 – **Tableau récapitulatif des principaux critères de performances**.

⊙

Ce chapitre a permis d'expliciter un certains nombre de critères qui vont être utilisés tout au long de cette thèse pour décrire et comparer les ASO entre eux. J'ai notamment explicité la notion de sensibilité qui doit être calculée soit vis à vis d'un bruit uniforme sur le détecteur, soit vis à vis du bruit de photon. Dans les deux cas, cette sensibilité est bornée à valeur égale à deux, aspect très pratique lorsqu'il s'agit de concevoir des ASO s'approchant des sensibilités maximales. De plus, la notion complexe

de dynamique a été abordée et j'ai introduit ici une notion fondamentale, intrinsèquement liée aux non-linéarités : celle des gains optiques.

Fort de ces critères de sensibilité et de dynamique, je mène dans le chapitre suivant une comparaison de plusieurs ASO à filtrage de Fourier, en m'attardant notamment sur deux classes principales : les ASO pyramide et les ASO de Zernike.

Chapitre 4

Comparaison et optimisation des d'analyseurs à filtrage de Fourier

Résumé

Ce chapitre consiste à mettre en oeuvre les critères de performance développés au chapitre précédent pour mener une comparaison quantitative des ASO à filtrage de Fourier, avec une étude poussée de deux grandes classes : les ASO pyramide et les ASO de Zernike. Je scinde ce chapitre en trois sections. La première se concentre sur la classe d'ASO pyramide, pour laquelle j'apporte notamment un éclairage nouveau sur leur comportement vis à vis du bruit de photon. La seconde porte sur les ASO de Zernike : en débutant sur une analyse purement analytique via le modèle convolutif, je vais apporter un regard nouveau sur le principe de fonctionnement de cette famille de senseurs et démontrer qu'il est possible d'en optimiser significativement la sensibilité pour certaines fréquences spatiales. Cette analyse a d'ailleurs fait l'objet d'une publication [Chambouleyron et al., 2021a]. Enfin, la dernière section de ce chapitre est l'occasion de proposer de nouveaux concepts d'ASO présentant des sensibilités proches de la limite fondamentale grâce à la mise au point d'une toute nouvelle technique qui permet la génération de masques optimisés.Cette technique d'optimisation est le sujet d'un papier en cours de préparation.

Sommaire

4.1 Classe des ASO pyramide 105
4.1.1 Principe et description 105
4.1.2 Comparaison en sensibilité 106
4.1.3 Comparaison en dynamique 116
4.1.4 Conclusion sur l'étude de la classe des ASO pyramide . . 125
4.2 Classe des analyseurs de Zernike 128
4.2.1 Principe et description physique 128
4.2.2 Comparaison en sensibilité 129
4.2.3 Comparaison en dynamique 135
4.2.4 Conclusion sur la classe des ASO de Zernike 137
4.2.5 Vers une modulation pour l'ASO de Zernike ? 138
4.3 Une méthode d'optimisation de la sensibilité via le modèle convolutif 143
4.3.1 Description de la méthode : modèle convolutif et optimisation numérique 143
4.3.2 Vers des ASO optimaux en sensibilité 145
4.3.3 Perspectives pour cette méthode d'optimisation des ASO . 152

4.1 Classe des ASO pyramide

Cette classe d'ASO est une des classes principales dans le bestiaire des ASO à filtrage de Fourier. Son représentant le plus connu est la 4PWFS, utilisée depuis près d'une dizaine d'année sur ciel et déjà présentée au chapitre 2.

4.1.1 Principe et description

La description de cette classe d'ASO a déjà été intensivement menée dans [Fauvarque, 2017]. On se contentera ici de revenir brièvement sur leurs propriétés fondamentales avant de débuter leur comparaison. Cette classe d'analyseurs est constituée de trois paramètres libres :

Le nombre de faces : La pyramide usuelle en a donc n = 4, mais on peut imaginer des masques possédant un nombre de faces allant de n = 3 à une infinité de faces n = ∞, on obtient dans ce cas un objet appelé axicon. On se place dans le cadre où chaque face couvre la même aire dans plan focal. Ainsi pour une pupille centro-symétrique, chaque image de la pupille possédera la même quantité d'énergie (voir figure 4.1). On notera que l'on ne s'intéresse pas au masque de type rooftop, c'est à dire avec n = 2 faces car celui-ci ne permet pas de mesurer les fréquences spatiales de la phase suivant toutes les directions.

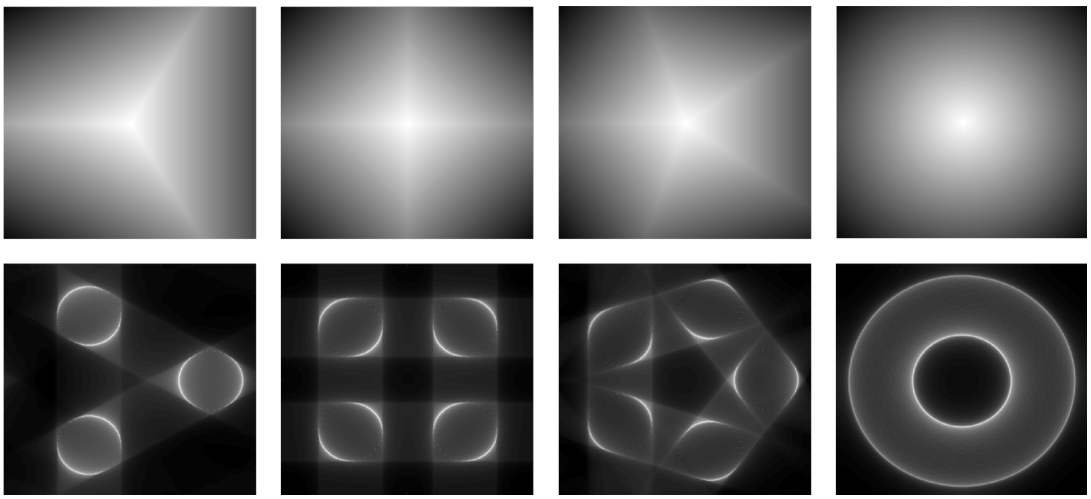


FIGURE 4.1 – **Variation du nombre de faces et intensités de référence correspondantes. Haut :** forme du masque - $arg(m)$. **Bas :** intensités de référence correspondantes ($r_{mod} = 0\ \lambda/D$).

L'angle des faces : L'autre paramètre libre de cette classe est l'angle α des faces. Cette angle influe sur la position des images des pupilles sur le détecteur de l'ASO. On distinguera deux grandes configurations (figure 4.2) :

— Angle α tel que les images des pupilles ne se superposent pas : on est dans le cas dit *classique*.

— Angle α tel que les images des pupilles se superposent : on parle alors de pyramides *aplaties*.

Dans les cas considérés dans cette thèse, toutes les faces des pyramides présentent le même angle vis à vis de la normale à l'axe optique. On pourrait tout à fait imaginer des concepts de pyramides avec des angles très différents pour chaque face.

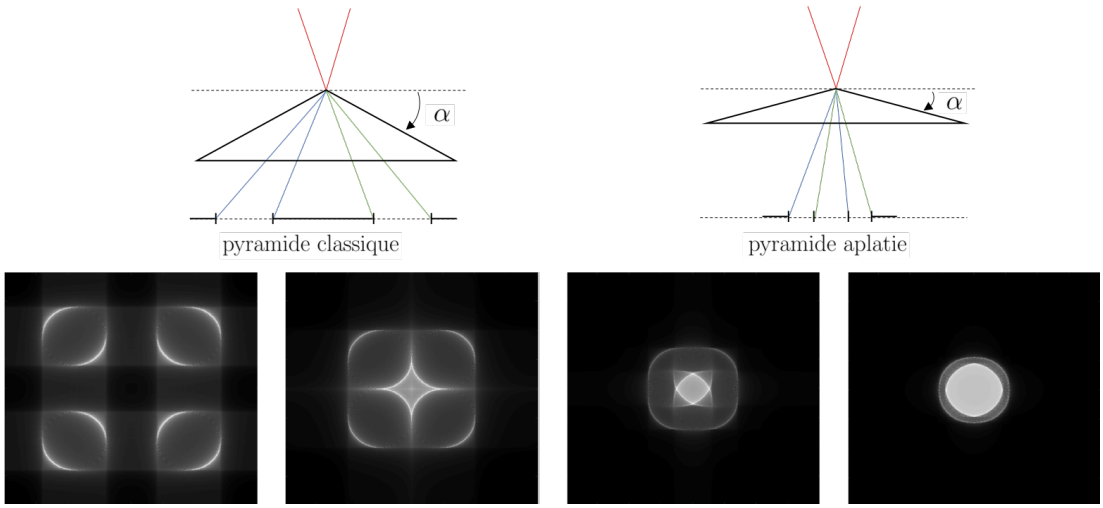


FIGURE 4.2 – **Gauche :** Les pyramides *classiques* : non-superposition des images des pupilles. **Droite :** Les pyramides *aplaties* : superposition des images pupilles.

Le rayon de modulation : L'influence de ce paramètre est bien connu et a été largement étudié [Vérinaud, 2004]. On se contentera ici de mener les comparaisons avec trois régimes de modulation différents. Sans modulation : $r_{mod} = 0\ \lambda/D$, faiblement modulé : $r_{mod} = 1\ \lambda/D$, et pour une modulation couramment utilisée sur ciel $r_{mod} = 3\ \lambda/D$. Le choix de ces trois régimes est motivé par les deux points suivants : (i) il y a une grande différence de comportement entre un cas non modulé et un cas faiblement modulé (ii) dès lors que l'on module à quelques λ/D, l'évolution du comportement n'évolue plus significativement.

On précise un point capital de cette classe : toutes les formes de pyramides telles qu'elles ont été définies ici, qu'elles soient *classiques* ou bien de formes *aplaties*, sont **achromatiques** lorsqu'elles sont non-modulées. En effet, il est clair qu'elles respectent toutes le critère d'achromaticité défini section 2.3.1.3.

4.1.2 Comparaison en sensibilité

Les deux critères de sensibilité introduits au chapitre précédent, la sensibilité à un bruit uniforme sur le détecteur et la sensibilité liée au bruit de photon, sont les éléments clefs d'un modèle de bruit qui permet d'estimer la propagation des bruits dans la reconstruction de la phase. On veut donc comparer ces deux types de sensibilités suivant les différentes configurations de masque au sein de cette classe d'ASO

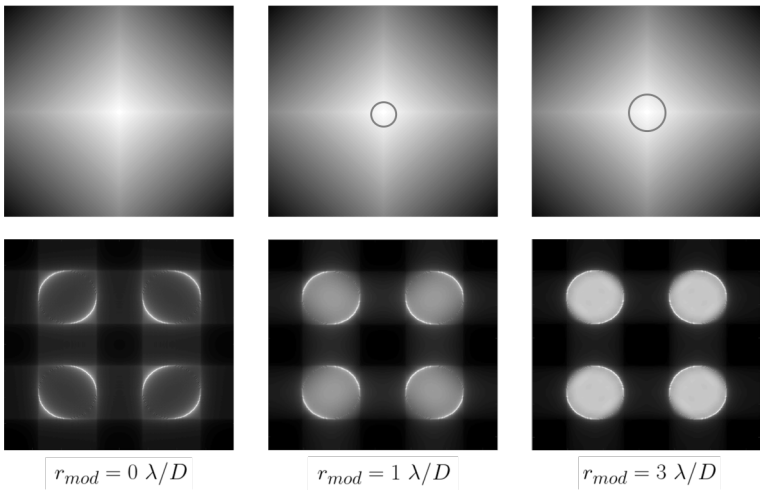


FIGURE 4.3 – **Intensités de référence pour différentes modulations** de la 4PWFS.

à filtrage de Fourier à l'aide de simulations numériques dont les caractéristiques ont été énumérées section 2.3.3.

4.1.2.1 Changement du nombre de faces

On propose tout d'abord de comparer les sensibilités en faisant varier le nombre de faces, tout en restant dans le cadre des pyramides *classiques*, c'est à dire sans superposition des images des pupilles. On compare cinq types de masques : la pyramide à 3 faces (3PWFS), la 4PWFS, la pyramide à 5 faces (5PWFS), la pyramide à 6 faces (6PWFS) et enfin l'axicon.

Bruit uniforme. Commençons cette comparaison sur les performance en sensibilité vis à vis d'un bruit uniforme sur le détecteur, type bruit de lecture. On mène cette comparaison avec la base des fréquences spatiales comme décrit dans la section 3.1.3.3 : pour chaque masque et chaque condition de modulation, on peut extraire une carte 2D donnant la sensibilité pour toutes les fréquences spatiales comprises dans un certain intervalle. Pour plus lisibilité, les résultats sont majoritairement présentés sous forme de coupes fréquentielles. La direction de la coupe a été choisie afin de ne coïncider avec aucune arête pour l'ensemble des masques considérés. Si l'on prend l'exemple de la 4PWFS non-modulée, la carte de sensibilité 2D et la coupe correspondante sont données figure 4.4 afin de mieux schématiser cette procédure.

Pour les différents nombres de faces considérés, les cartes de sensibilités 2D sont données pour un cas sans modulation figure 4.12. Pour chaque masque on y constate une sensibilité uniforme dans l'espace des fréquences, excepté sur les arêtes où l'on note un léger gain de sensibilité ainsi que pour les très basses fréquences où la sensibilité décroît pour finalement atteindre zéro dans le cas d'une fréquence nulle.

Pour mieux comparer les masque entre eux, on livre les coupes fréquentielles pour tous les cas de modulation figure 4.5. Parmi les résultats déjà connus et abondamment exploités à partir de ces courbes [Vérinaud, 2004], on retrouve bien que :

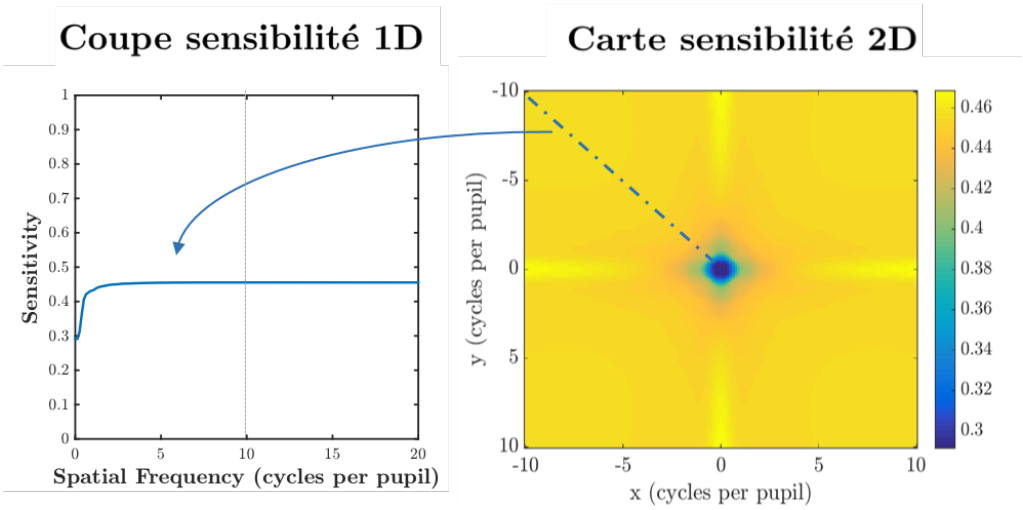


FIGURE 4.4 – **Carte 2D de sensibilité à un bruit uniforme et coupe correspondante.** On notera que les coupes sondent des fréquences plus lointaines.

(i) pour un nombre de face donné : on confirme bien que la sensibilité est identique pour toutes les fréquences spatiales lorsque l'on ne module pas excepté les très basses fréquences, et décroît fortement dans les zones de fréquences affectées par la modulation (ii) le passage à la modulation diminue légèrement la sensibilité pour toutes les fréquences.

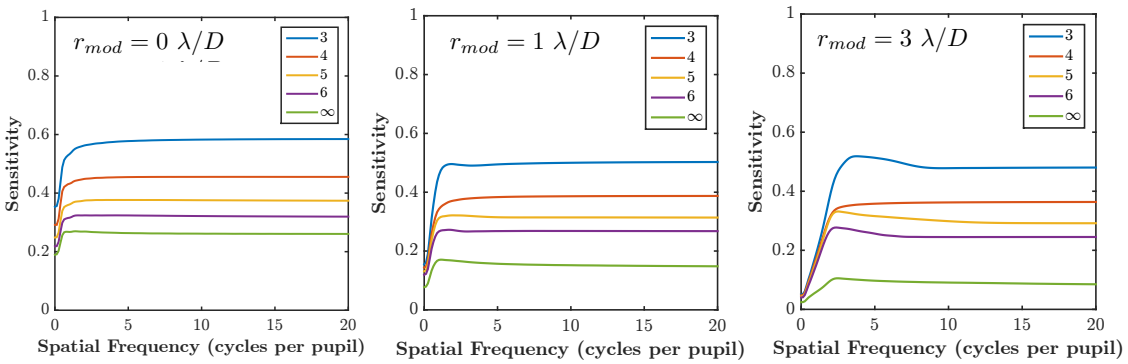


FIGURE 4.5 – **Sensibilités à un bruit uniforme** suivant le nombre de faces des ASO pyramide. Les trois graphiques présentent des résultats pour des rayons de modulation différents.

On constate en outre, et ce en l'absence ou non de modulation, que moins les masques ont de faces et plus leur sensibilité est grande. Le gain entre chaque masque est directement lié à leur proportion de pixels utiles participant efficacement à l'analyse. Ainsi, la 3PWFS est par exemple 4/3 fois plus sensible que la 4PWFS, et cette dernière présente un gain 5/4 en sensibilité vis à vis de la 5PWFS. Ce résultat corrobore l'idée assez intuitive qu'étaler le signal dégrade la sensibilité à un bruit

uniforme. C'est d'ailleurs pour cela que la 3PWFS est souvent citée comme une alternative crédible à la 4PWFS. On en donne donc ici une preuve quantifiée, qui se décline quelque soit le nombre de faces.

Enfin, la sensibilité pour un bruit uniforme de cette classe n'excède pas $s = 0.6$. Or, on rappelle que la limite théorique de la sensibilité à un bruit uniforme est de $s = 2$. Les différentes configurations de pyramides *classiques* sont donc loin d'être optimales pour ce critère de performance.

Bruit de photons. De la même manière, on compare désormais les ASO pyramide en sensibilité vis à vis du bruit de photon. (Les cartes de sensibilités 2D correspondants à un cas sans modulation sont données figure 4.13).

Comme pour un bruit uniforme, on concentre notre analyse sur les coupes fréquentielles figure 4.6. Ce nouveau critère de sensibilité à un bruit de photon ayant été introduit dans cette thèse pour la première fois, les résultats fournis ici apportent un éclairage nouveau sur le comportement de la classe pyramide vis à vis du bruit de photon. On relève les points suivants :

1. En l'absence de modulation, le nombre de faces n'influe pas sur la sensibilité au bruit de photons. Mis à part pour les très basses fréquences, cette sensibilité vaut $\sqrt{2}$ pour tous les masques. On retrouve ce comportement dans tout l'espace des fréquences, comme le montrent les cartes 2D figure 4.13. Ce résultat semble concorder avec la valeur dérivée analytiquement dans [Guyon, 2005]. On démontre ici que cette valeur est atteinte quelque soit le nombre de faces du masque. Cette performance identique pour tous les masques vis à vis du bruit de photon paraît cohérent : moins étaler le signal sur les pixels ne permet pas de gagner en bruit de photon. On rappelle qu'à l'instar de la sensibilité pour un bruit uniforme, la sensibilité maximale au bruit de photons est 2 et n'est donc pas atteinte pour cette famille d'ASO.
2. Lorsque l'on module, on retrouve un comportement très similaire à celui décrit pour le cas d'un bruit uniforme : sensibilité qui diminue fortement pour tous les modes (en plus de ceux affectés par la modulation) et hiérarchisation des masques proportionnellement à leur nombre de faces. Ce dernier résultat est très instructif : on montre que la modulation impacte différemment la sensibilité au bruit de photons suivant le nombre de faces, un point qui à notre connaissance n'a jamais été relevé auparavant. On note tout de même une différence entre chaque masque plus modeste que pour la sensibilité à un bruit uniforme.

Pour conclure cette partie sur la dépendance en performance des ASO pyramide suivant leur nombre de faces, on constate que moins l'ASO possède de faces et plus il est sensible vis à vis des bruits uniformes et du bruit de photon. Exception faite pour la sensibilité au bruit de photons identique pour tous masques non modulés. Ainsi la 3PWFS semble tirer son épingle du jeu, et présenter le jeu de performances en sensibilités le plus intéressant pour la classe d'ASO pyramide. Le gain pour la 3PWFS est surtout marqué pour les sensibilités à un bruit uniforme, où l'on note un gain de 33% par rapport à la pyramide à 4 faces. On justifie donc tout l'intérêt

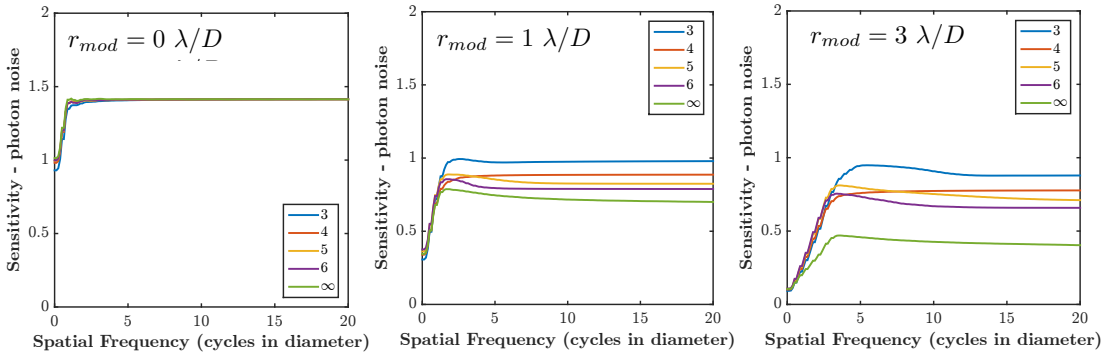


FIGURE 4.6 – **Sensibilités au bruit de photons** suivant le nombre de faces des ASO pyramide. Les trois graphiques présentent des résultats pour des rayons de modulation différents.

grandissant autour de la pyramide 3 faces, dont le fonctionnement en boucle fermée a été démontré pour la première fois à l'aide du banc LOOPS [Schatz et al., 2021].

4.1.2.2 Changement de l'angle

On va désormais s'intéresser à l'influence de l'angle des masque sur les critères de sensibilité afin de comparer pyramides *classiques* mais aussi *aplaties*. Pour cela, on se place dans le cas d'une 4PWFS, dont on va modifier l'angle. On se placera en permanence dans des cas sans modulation. On fait le choix de comparer cinq configurations d'angle, qui correspondent aux espacements entre deux images voisines de la pupille suivant :

Bruit uniforme. Il est déjà connu que dans le cas d'un bruit uniforme sur le détecteur, les pyramides *aplaties* présentent des oscillations de sensibilités [Fauvarque et al., 2015] qui dépendent de l'angle choisi (ou de manière équivalente, de l'espacement entre les images des pupilles). Ces pics de sensibilités peuvent d'ailleurs s'approcher de la sensibilité maximale $s = 2$. On rappelle la relation entre l'espacement des pupilles et les oscillations dans la carte de sensibilité à un bruit uniforme schéma 4.7 : la période d'oscillation des sensibilités dans l'espace des fréquences est inversement proportionnel à l'espacement des images des pupilles dans la direction considéré. Une nouvelle explication simple à ce comportement est apportée en annexe B. On considère ici des angles identiques pour les 4 faces de la pyramide. Sur le schéma, on a alors $\alpha_2 = \sqrt{2} \times \alpha_1$.

On présente les courbes de sensibilités fréquentielles pour les différentes configurations d'angles étudiées figure 4.8 (les cartes 2D de sensibilités sont fournies figure

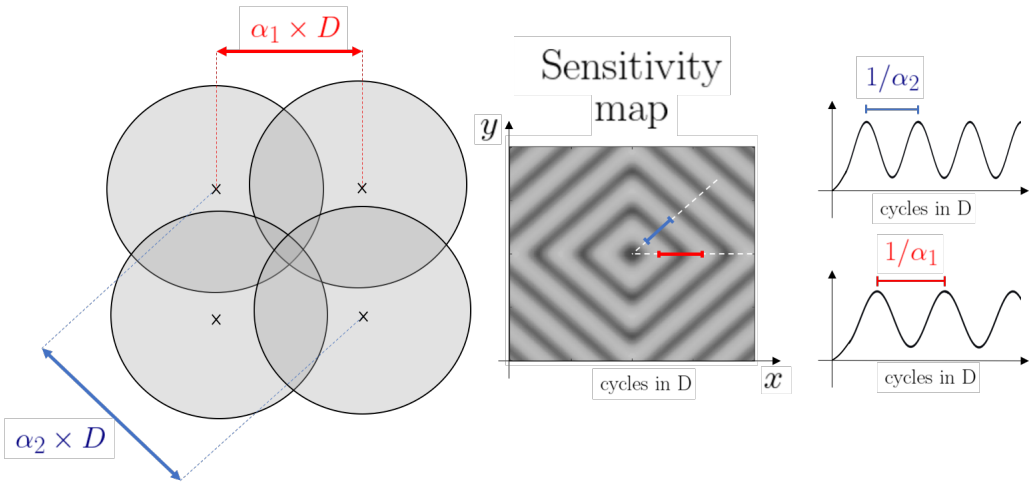


FIGURE 4.7 – **Structure des rebonds des pyramides aplaties** pour leur sensibilité à un bruit uniforme. Dans les configurations étudiées ici, $\alpha_2 = \sqrt{2} \times \alpha_1$.

4.14). On retrouve donc bien les pics de sensibilités, qui s'approchent donc de $s = 2$ dans les cas de grand recouvrement des images des pupilles. Le fait que la majorité des configurations de pyramides *aplaties* présentent une sensibilité supérieure sur toute la plage des fréquences comparé à la pyramide *classique* va dans le sens des conclusions tirées de l'étude sur le nombre de faces : une concentration du signal sur moins de pixels utiles induit un gain en sensibilité vis à vis d'un bruit uniforme. Il paraît en revanche plus difficile de prévoir les résultats de cette comparaison pour le cas de la sensibilité au bruit de photons.

Bruit de photons. Les courbes de sensibilité au bruit de photons sont données figure 4.9 (les cartes 2D de sensibilités correspondantes sont fournies figure 4.15). De même que précédemment, cette étude apporte une toute nouvelle compréhension du fonctionnement des pyramides *aplaties* face au bruit de photon. Comme pour la sensibilité au bruit uniforme, on observe des oscillations avec certaines configurations qui s'approchent de la limite fondamentale de sensibilité vis à vis du bruit de photons, c'est à dire $s = 2$. Cependant, on constate cette fois que les sensibilités au bruit de photons des pyramides *aplaties* oscillent autour de la pyramide *classique*. Autrement dit, pour l'ensemble des pyramides *aplaties* le gain en sensibilité pour certaines fréquences par rapport à la 4PWFS vient conjointement à une perte de sensibilité pour d'autres. Ce comportement rend problématique une utilisation concrète des configurations *aplaties* car elles présenteront toujours des fréquences spatiales de moins grandes sensibilités au bruit de photons que la 4PWFS.

4.1.2.3 Lien avec le budget d'erreur d'un système d'OA

On rappelle, et c'est tout l'intérêt de cette analyse en sensibilité, qu'il est possible de relier toutes les courbes de sensibilités présentées ici aux erreurs de phase associées grâce à l'équation de propagation de bruit dérivée au chapitre précédent :

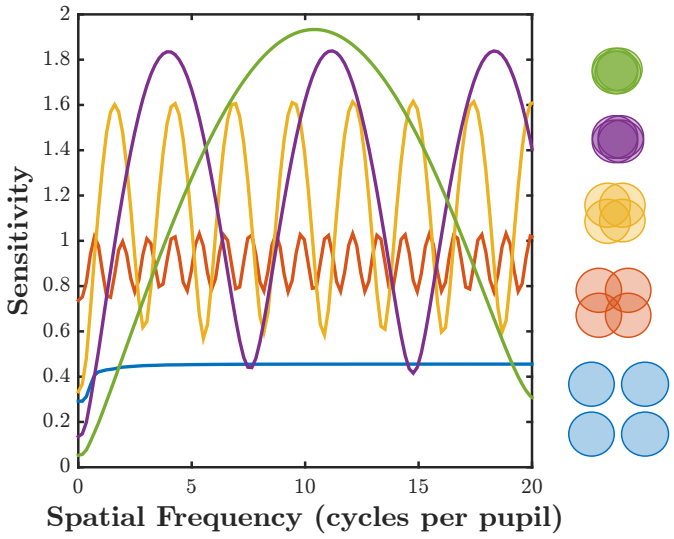


FIGURE 4.8 – **Sensibilités à un bruit uniforme** suivant l'angle de la pyramide à 4 faces.

$$\sigma^2_{\phi_i} = \frac{N_{spp} \times \sigma^2}{s^2(\phi_i) \times N^2} + \frac{1}{s^2_\gamma(\phi_i) \times N} \tag{4.1}$$

On reprend l'exemple utilisé lors de l'introduction des critères de sensibilité au chapitre précédent : un système avec un échantillonnage avec 40 sous-pupilles dans le diamètre et un bruit de lecture $\sigma_{RON} = 0.1\ e^-/\text{pix/tr}$.

Cas pour un mode donné

On prend l'exemple d'un mode ϕ_i qui porte une fréquence de 6 périodes dans la pupille, on peut comparer différents senseurs en puisant les informations en sensibilité dans les courbes montrées jusqu'à maintenant. On choisit comme exemples les quelques configurations suivantes :

3PWFS modulé à $3\lambda/D$: $s(\phi_i) = 0.5$ et $s_\gamma(\phi_i) = 1$.
4PWFS modulé à $3\lambda/D$: $s(\phi_i) = 0.37$ et $s_\gamma(\phi_i) = 0.75$.
4PWFS non modulé : $s(\phi_i) = 0.37$ et $s_\gamma(\phi_i) = \sqrt{2}$.
FPWFS - 90% : $s(\phi_i) = 1.2$ et $s_\gamma(\phi_i) = \sqrt{2}$.
Senseur idéal : $s(\phi_i) = 2$ et $s_\gamma(\phi_i) = 2$.

On trace alors l'évolution de l'erreur sur ϕ_i en fonction du nombre de photons par sous-pupilles disponibles pour la mesure figure 4.10. On note bien les différents changements de régime entre les ASO suivant leur hiérarchie en sensibilités au bruit de lecture et au bruit de photons.

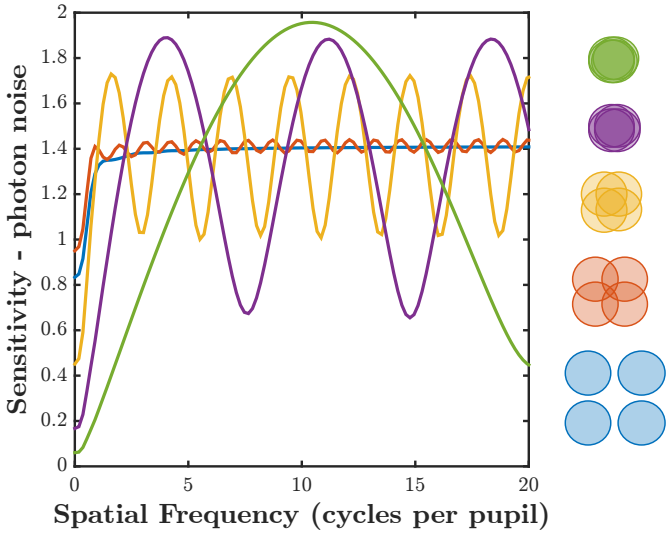


FIGURE 4.9 – **Sensibilités au bruit de photons** suivant l'angle de la pyramide à 4 faces.

Performances globales pour un nombre de photons donné

Pour un nombre de photons en entrée, on peut faire aussi l'exercice d'estimer l'effet des bruits sur l'ensemble des modes corrigés afin de comparer les performances globales en terme de propagation de bruit. On choisit ici un nombre de photons par sous-pupilles $N_{ph}/N_{spp} = 1$. D'après la figure 4.10, on peut considérer que l'on est dans un régime de bruit majoritairement limité par le bruit de photons. On considère alors un système d'OA limité par l'erreur de fitting et l'erreur liée au bruit. Les paramètres pour cet exemple, en plus de ceux décrits précédemment :

$$\text{D} = 8 \text{ m}, \lambda = 550 \text{ nm}, r_0 = 15 \text{ cm}, \text{ et } 40 \text{ actionneurs dans la pupille}$$

Pour les différentes configurations prises comme exemples, on peut extraire des coupes des PSD des phases résiduelles que l'on présente figure 4.11. On peut alors apporter plusieurs analyses cruciales quant à l'optimisation des ASO à filtrage de Fourier en terme de sensibilité aux bruits de mesures.

Rapport de Strehl. En intégrant les courbes figures 4.11, il est possible d'extraire l'erreur de phase totale et le SR correspondant. Même dans le cas d'un système de XOA comme celui considéré, l'impact sur le rapport de Strehl des erreurs dues aux bruits dans les mesures est négligeable par rapport à l'erreur de fitting, et cela pour toutes les configurations d'ASO à filtrage de Fourier considérées. Autrement dit, il est inutile d'espérer pouvoir gagner significativement en couverture de ciel ou bien en magnitude limite en changeant la forme du masque. Ce constat est vrai à deux exceptions près :

— Les cas avec extrêmement peu de photons disponibles, où l'on pourrait espérer voir les différents ASO à filtrage de Fourier se démarquer. Pour observer une

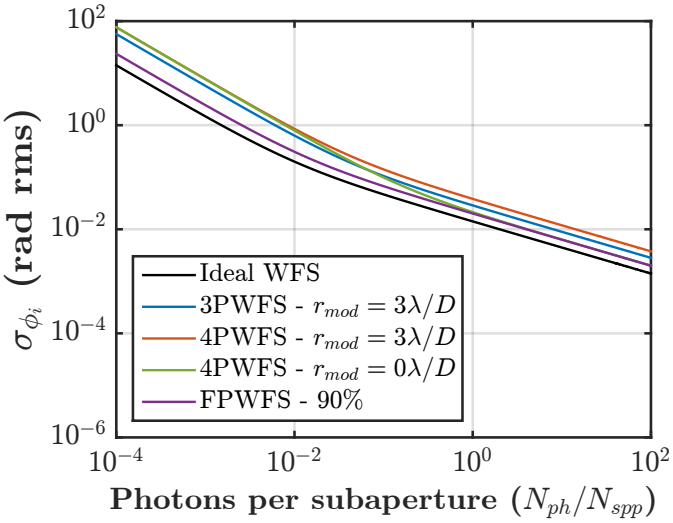


FIGURE 4.10 – **Erreur sur l'estimation de phase** pour différents exemples d'ASO à filtrage de Fourier en prenant compte le bruit de photon et le bruit de lecture.

différence significative, il faut se placer dans des cas de régimes à comptage de photons, c'est à dire avec seulement une fraction de photon disponible par sous-pupille. Cependant, maintenir une boucle d'OA dans ces configurations est difficilement faisable en pratique (au-delà du problème de propagation des bruits) et le modèle de propagation de bruit équation 4.1 ne tient plus car le nombre de photons N par trame n'est plus constant.

— Pour les configurations qui impliquent une forte modulation. Cette opération impacte énormément la propagation du bruit à basse fréquences, et s'impose comme un paramètre essentiel des ASO à filtrage de Fourier pouvant réellement modifier l'effet de la propagation du bruit sur le SR dans la boucle d'OA.

Le contraste. Pour un SR équivalent, on constate figure 4.11 que certains ASO performent bien mieux vis à vis de la propagation de bruit à l'intérieur de la zone de correction. Il faut bien comprendre que ces PSD se relient simplement avec toutes les courbes de sensibilités présentées auparavant grâce au modèle de bruit établie au chapitre précédent et rappeler équation 4.1. Comme on l'a explicité au chapitre d'introduction (figure 1.16), cette zone est cruciale pour l'imagerie haut contraste et la détection d'exoplanètes. En comparant la 4PWFS modulée et la 4PWFS non-modulée, on voit effectivement que la modulation augmente fortement les erreurs de propagation du bruit sur les basses fréquences mais aussi sur l'ensemble des fréquences. De plus, le gain en sensibilité entre la 3PWFS et la 4PWFS lorsque l'on module est bien visible sur les PSD résiduelles. Le senseur idéal présentant une sensibilité maximale de 2 au bruit de lecture et au bruit de photons établit un plancher en dessous duquel il est impossible de descendre, quelque soit les niveaux de performances des autre éléments clefs du système (RTC, DM, etc...). À l'instar des sensibilités, ces PSD résiduelles seraient plus complètes présentées sous forme

de cartes 2D : pour plus de lisibilité, on en présente ici juste des coupes.

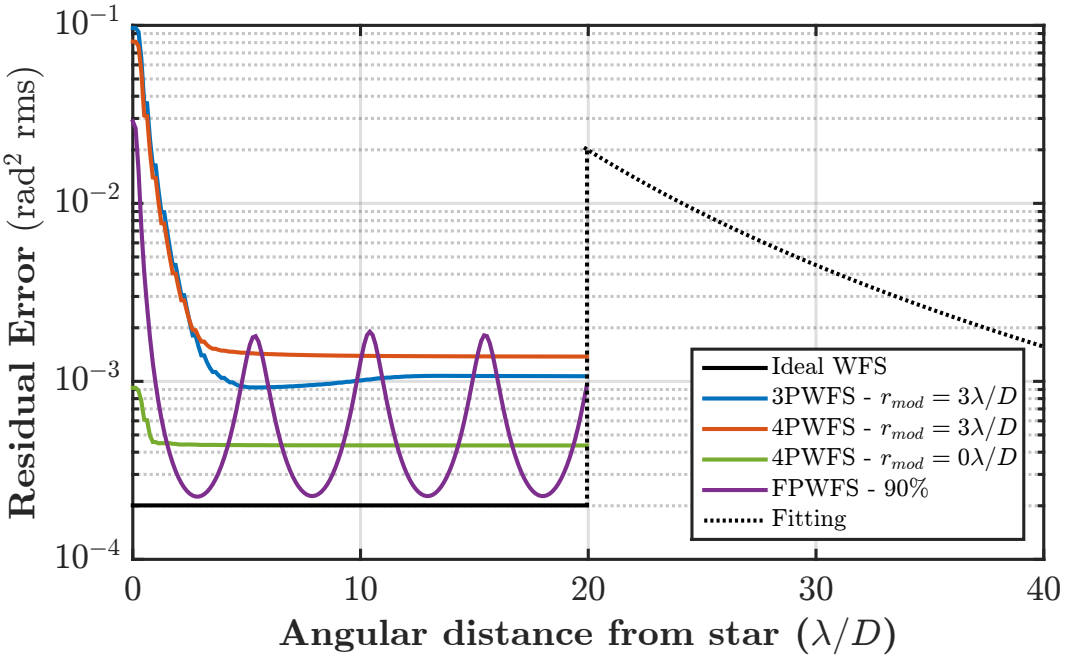


FIGURE 4.11 – **Erreur résiduelle suivant les fréquences spatiales** pour différents types d'ASO à filtrage de Fourier en prenant compte le bruit de photon et le bruit de lecture. On représente ici $\sigma^2 = \sigma^2_{noise} + \sigma^2_{fitting}$.

Et le chromatisme dans tout ça ?

Dans le cas sans modulation, on précise que les sensibilités calculées ne dépendent pas de la longueur d'onde puisque les masques sont achromatiques. Toutes les courbes et cartes de sensibilités présentées ici pour $r_{mod} = 0$ s'appliquent donc à n'importe quelle longueur d'onde. C'est aussi vrai pour le cas modulé, tant que l'on exprime la modulation en λ/D pour la longueur d'onde d'analyse donnée. Dans ces cas là, puisque la variance de phase issue du bruit dans les mesures est identique quelque soit la longueur d'onde, on comprend alors pourquoi il est préférable de mener l'analyse dans une longueur d'onde λ_{ASO} plus faible possible, car les erreurs en phases entre la voie science ($\lambda_{science}$) et la voie analyse sont reliées par l'équation suivante :

$$\sigma_{\phi_{science}} = \frac{\lambda_{ASO}}{\lambda_{science}} \sigma_{\phi_{ASO}} \tag{4.2}$$

4.1.2.4 Conclusion sur l'étude en sensibilités

On a donc explicité la comparaison de la classe des ASO pyramide au travers de leurs sensibilités, avec pour la première fois l'utilisation d'un nouveau critère étendu à n'importe quelle configuration de nombre de faces et d'angle : la sensibilité au bruit de photons, permettant de remonter à la propagation du bruit correspondant dans les mesures. Il faut désormais comparer les masques via leurs performances en terme de dynamique. On rappelle que plusieurs critères de performances ont été introduits chapitre 3 pour évaluer la dynamique des différents ASO, avec notamment le concept fondamental des gains optiques.

4.1.3 Comparaison en dynamique

Après avoir étudié le comportement en sensibilité, on s'attarde donc sur l'autre volet clé qui permet de quantifier la qualité des mesures d'un ASO : la dynamique. On utilise donc les critères définis au chapitre précédent :

— Les courbes de linéarités. On prêtera une attention particulière à la zone de linéarité et à la gamme de capture de ces courbes, sans pour autant les quantifier.
— Taux de diagonalité et courbes de gains optiques. On rappelle que ces quantités permettent de prendre en compte l'impact de tous les modes sur eux-mêmes et que pour les générer, on utilise la base des modes de KL avec pour chaque comparaison trois conditions de phases résiduelles : pour rappel $r_0 = 15\ cm$ à $550nm$ (i) PSD_{turbu} : pleine turbulence (ii) PSD_{20} : erreur de fitting avec 20 actionneurs dans la pupille (conditions OA "classique") (iii) PSD_{40} : erreur de fitting avec 40 actionneurs dans la pupille (conditions OA "extrême"). La base utilisée s'étend seulement sur 400 modes : cela est largement suffisant pour appréhender le comportement de l'ASO. Ce critère sera finalement notre critère privilégié pour conclure sur les performances en dynamique des différences ASO. On rappelle aussi que le choix des conditions pour la comparaison est arbitraire, mais permet d'exhiber quoiqu'il en soit les comportements généraux. Pour le design d'un système d'OA en particulier, il faudrait logiquement utiliser les PSD résiduelles attendues pour mener une telle étude.

4.1.3.1 Changement du nombre de faces

On débute cette comparaison en dynamique avec la variation du nombre de faces dans le cas de pyramides *classiques*.

Courbes de linéarités

Pour un nombre de faces fixé et sans modulation, on a vu que la sensibilité au bruit de lecture et au bruit de photons pour une pyramide *classique* est identique pour tous les modes (sans tenir compte du comportement le long des arêtes et à proximité de la fréquence nulle). On exploite une courbe de linéarité, calculée sans

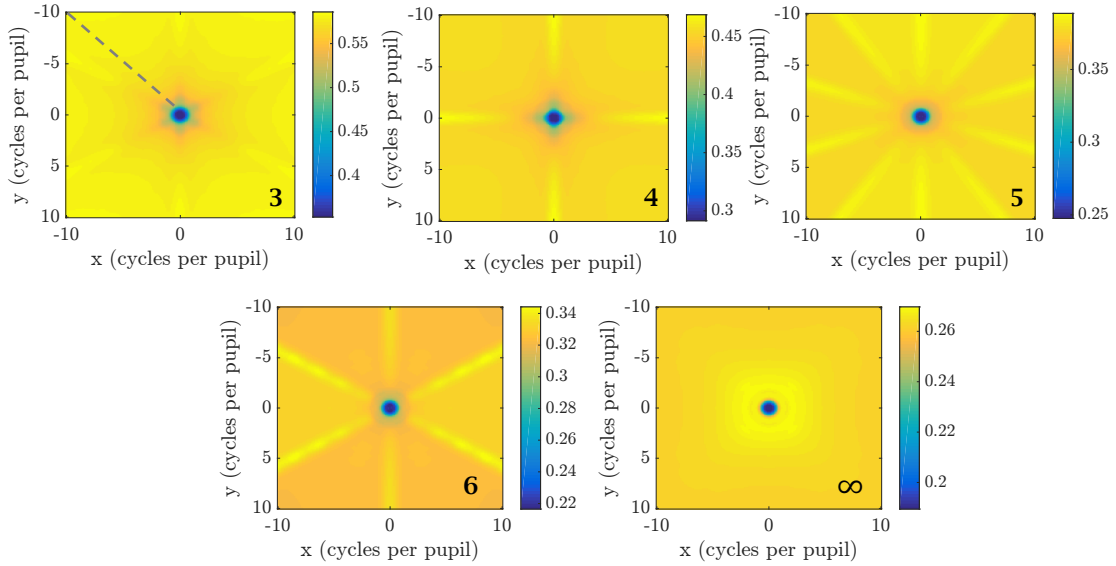


FIGURE 4.12 – **Cartes 2D de sensibilités à un bruit uniforme** suivant le nombre de faces des ASO pyramide. Le plan de coupe utilisé pour les graphique 1D est marqué en pointillés sur la première carte.

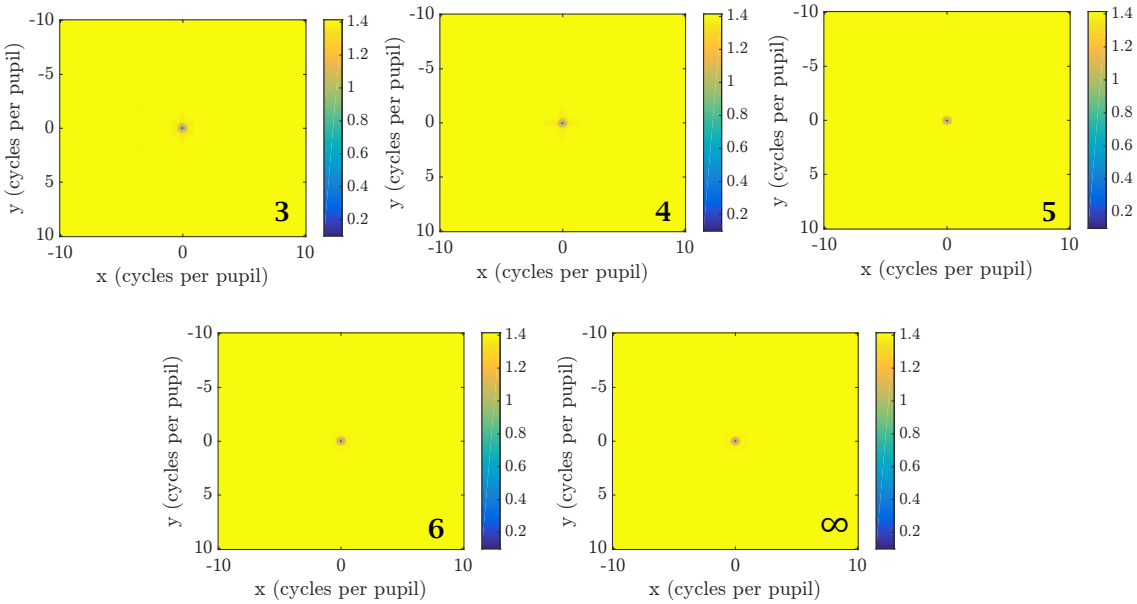


FIGURE 4.13 – **Cartes 2D de sensibilités au bruit de photons** suivant le nombre de faces des ASO pyramide. Le plan de coupe utilisé pour les graphique 1D est marqué en pointillés sur la première carte.

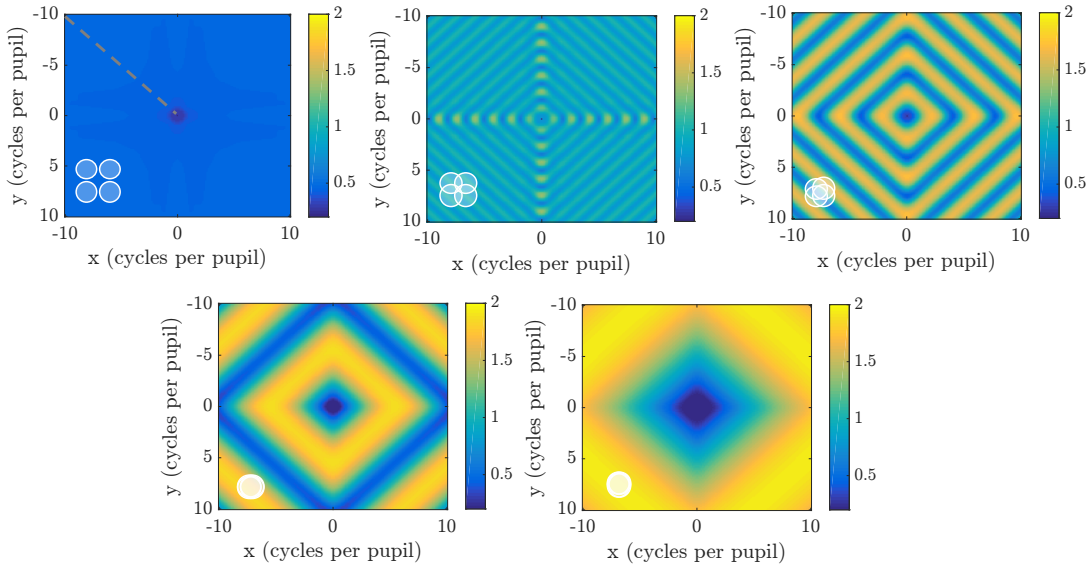


FIGURE 4.14 – **Cartes 2D de sensibilités au bruit uniforme** suivant l'angle de la 4PWFS. Le plan de coupe utilisé pour les graphique 1D est marqué en pointillés sur la première carte.

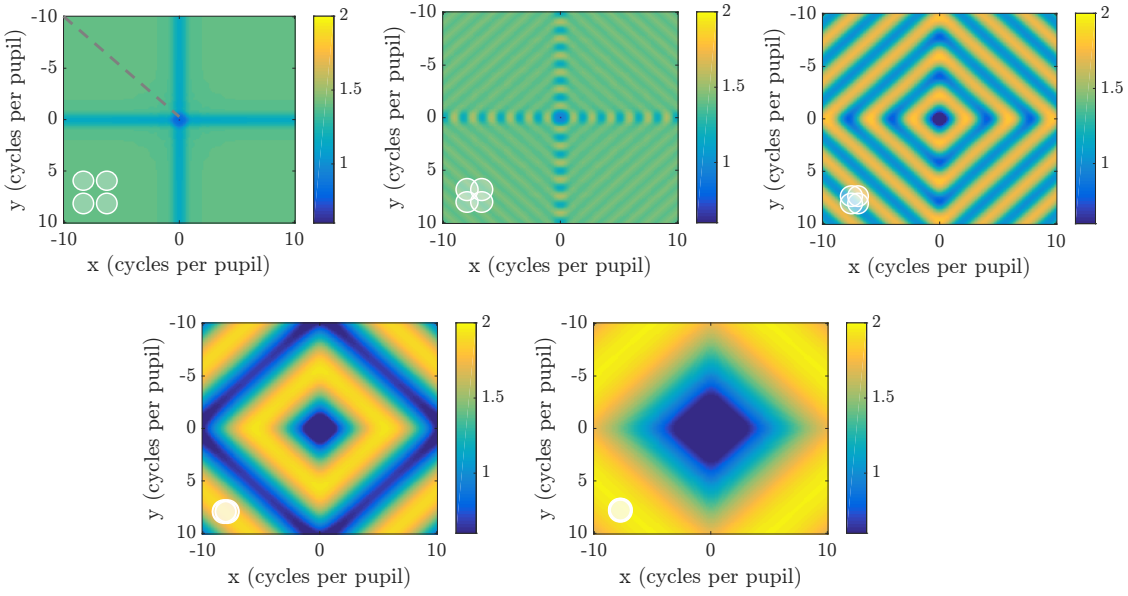


FIGURE 4.15 – **Cartes 2D de sensibilités au bruit de photons** suivant l'angle de la 4PWFS. Le plan de coupe utilisé pour les graphique 1D est marqué en pointillés sur la première carte.

modulation pour un mode cosinus correspondant à 10 cycles dans la pupille. On précise que le résultat serait identique en prenant un mode sinus. Il en serait aussi de même en choisissant une autre fréquence située sur le plateau de sensibilité. Figure 4.16, on constate que le comportement en dynamique est bien antagoniste avec la sensibilité : plus on augmente le nombre de face et plus le seuil de linéarité et la gamme de capture augmentent. Ce n'est en revanche pas le cas pour une des configurations étudiées : l'axicon. Cette petite analyse est tout de même limitée, et ne permet pas vraiment de prédire le comportement dynamique de l'ASO en boucle fermée, en présence de phases résiduelles. Pour mieux comprendre le comportement non-linéaire de ces différentes configurations, on décide donc de passer rapidement au critère des gains optiques.

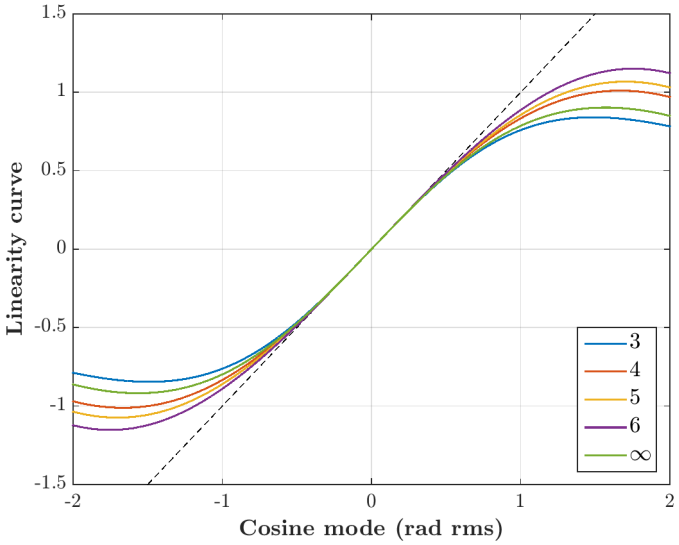


FIGURE 4.16 – **Courbes de linéarité pour différents nombres de faces dans un cas sans modulation**. Le mode de phase choisi pour ces courbes est un cosinus portant 10 cycles dans la pupille.

Matrices de transfert optique : Gains optiques et diagonalité

Le concept de matrice de transfert optique qui a été décrit au chapitre précédent est une quantité qui nous permet de quantifier le comportement non-linéaire d'un ASO en présence de phases résiduelles. On a expliqué qu'il était possible de dresser le portrait de cette matrice au travers de deux quantités données équations 3.34 et 3.47 : son taux de diagonalité et la valeur de ses éléments diagonaux, appelés gains optiques. Avant de mener toute comparaison entre les masques, il est nécessaire de fournir une compréhension plus concrète de ces critères au travers du système suivant : une 4PWFS modulée à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ pour l'exemple de la PSD_{20}. En calculant la matrice d'interaction en présence de phases résiduelles $\mathcal{D}_{res}$ et en moyennant des étalonnages effectués autour de 50 réalisations de phases, on retrouve la matrice de transfert optique suivant la formule donnée au chapitre précédent :

$$T_{\text{opt}} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\text{calib}}.\mathcal{D}_{\text{res}} \tag{4.3}$$

Dans notre cas, la matrice ainsi trouvée est représentée figure 4.17. Sa forte diagonalité apparente est confirmée par un taux de diagonalité de $\mathcal{T} = 87\%$. Pour le système considéré, on peut alors en déduire l'impact moyen des phases résiduelles : elles affectent l'amplitude des réponses à chaque mode, sans en changer significativement la forme.

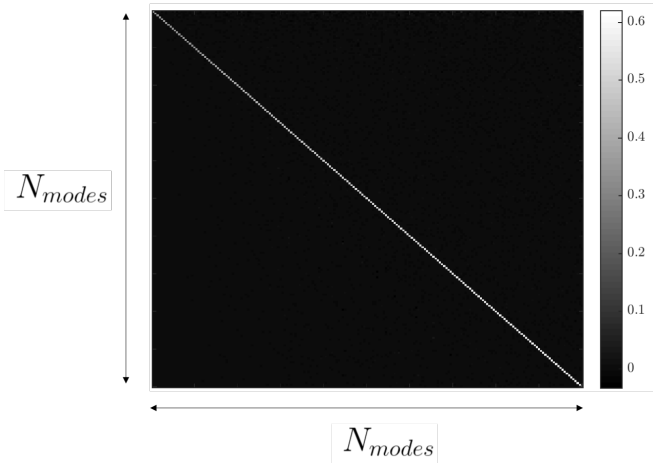


FIGURE 4.17 – **Matrice de transfert optique moyenne**, pour la configuration PSD_{20}.

Si l'on prend comme exemple un mode ϕ_i correspondant à un mode KL d'ordre 70, la réponse de la 4PWFS à la diffraction et en présence de phases résiduelles sont donc très similaires. On illustre ce point figure 4.18, où l'on a extrait des matrices $\mathcal{D}_{\text{calib}}$ et $\mathcal{D}_{res}$ les colonnes relatives au mode choisi. On constate bien que dans les deux régimes la réponse est similaire en forme. En revanche pour passer d'une réponse à l'autre, il faut à peu près multiplier par un scalaire. C'est ce *à peu près* qui forme l'**approximation diagonale**.

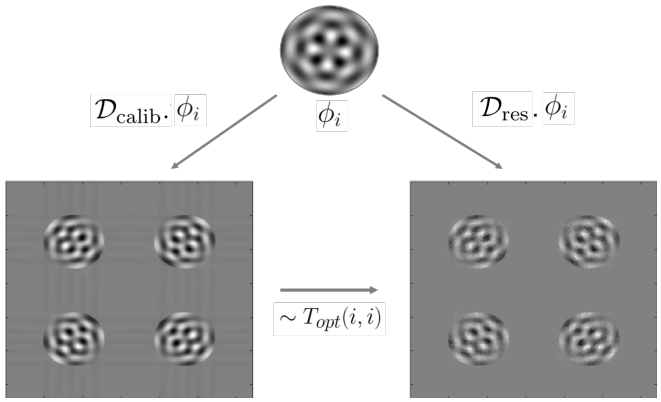


FIGURE 4.18 – **Approximation diagonale pour l'exemple d'un mode KL[70].**

Le scalaire qui relie les deux cartes est donc le gain optique correspondant à ce mode. Si l'on représente la valeur de chacun de ces gains en fonction des modes, on obtient la courbe figure 4.19. Ce genre de courbe va se retrouver tout au long de cette thèse, on s'attarde donc ici en détail sur ce que l'on y observe.

Description d'une courbe de gains optiques. Chaque valeur de gain optique encode la perte de sensibilité. Sur cette courbe on reprend l'exemple du mode KL^{70}, qui présente un gain optique à 0.4 : cela implique donc une perte de sensibilité de 60% entre le régime d'étalonnage à la diffraction et le régime de fonctionnement moyen autour des phases résiduelles. De plus, cette courbe a un forme très caractéristique de *virgule*. Les points minimums correspondent aux modes localisés au niveau du rayon de modulation dans le plan focal. Ce creux se déplace donc vers les hauts ordres lorsque l'on augmente la modulation, et vers les bas ordres lorsqu'on la réduit. Enfin, les gains optiques s'améliorent avec les modes de plus hauts ordres : ceux-ci sont moins affectés par les phases résiduelles. Pour mieux comprendre cette forme si spécifique, on représente la sensibilité (à un bruit uniforme) de la 4PWFS en présence de phases résiduelles par rapport à la sensibilité à la diffraction figure 4.20. Les gains optiques peuvent aussi être compris comme le rapport de ces deux courbes [Korkiakoski et al., 2008]. On constate que la sensibilité moyenne en présence de phase résiduelle affiche toujours la fameuse pente due à la modulation pour les bas ordres, mais présente ensuite une pente supplémentaire pour les hauts ordres.

Une démarche logique est d'essayer de décrire l'effet des phases résiduelles en terme de **modulation équivalente** : dans notre exemple, on serait tenté de modéliser celle-ci par un rayon de modulation à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ comme à l'étalonnage, combiné à un rayon de modulation bien plus grand mais qui étrangement entraînerait une perte de sensibilité limitée par rapport à une modulation classique. Ce n'est en réalité pas la bonne interprétation, et on comprendra comment décrire exactement ce comportement en terme de modulation équivalente au chapitre suivant.

Comparaison entre les masques. Les courbes de gains optiques sont la moyenne pour chaque courbe de 50 réalisations de phases décorrélées. Comme pour les sensibilités, elles sont données pour trois conditions de modulation : $r_{mod} = 0\ \lambda/D$, $r_{mod} = 1\ \lambda/D$ et $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ et pour les différentes conditions de phases résiduelles, PSD_{turbu} figure 4.21, PSD_{20} : figure 4.22 et système d'OA extrême PSD_{40} : figure 4.23. On fournit les taux de diagonalité correspondants pour les deux configurations PSD_{turbu} et PSD_{20} table 4.1.

On répète de nouveau la façon de comprendre les courbes données : pour un mode de KL, plus le gain optique s'approche de 1, et moins la mesure de ce mode est affectée par la présence de phases résiduelles. Au contraire, les modes pour lesquels les gains optiques s'approchent de 0 exhibent une très forte perte de sensibilité en présence de phases résiduelles. À partir de ces figures, plusieurs constats s'imposent :

1. Pour les différentes configurations de PSD étudiées, les gains optiques et taux de diagonalité s'améliorent comme attendu avec les phases résiduelles plus faibles. On note en revanche que même dans le régime type XOA de

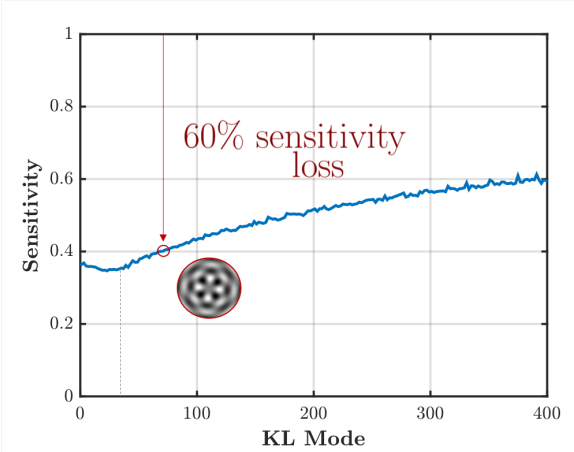


FIGURE 4.19 – **Gains optiques en plein turbulence pour différents rayons de modulation**, $D = 8\ m$ et $r_0 = 15\ cm$

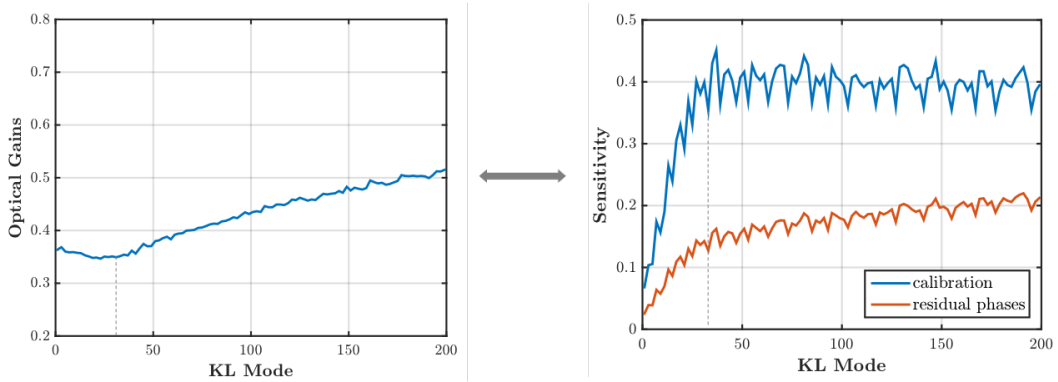


FIGURE 4.20 – **Gauche :** courbe de gains optiques. **Droite :** sensibilité à l'étalonnage et sensibilité moyenne autour des phases résiduelles.

la PSD_{40} les gains optiques restent inférieurs à 1. Ce phénomène de "saturation" des gains optiques à une valeur inférieure à 1 provient du fait que même en régime très corrigé, l'erreur de fitting reste présente. Pour un jeu de phases résiduelles donné, la modulation permet de réhausser les gains optiques : c'est parfaitement logique. La modulation augmente la linéarité de l'ASO et les gains optiques sont une métrique de non-linéarité. En terme de taux de diagonalité (table 4.1), l'impact de la modulation est donc aussi très bénéfique. Pour le cas PSD_{40}, le tableau correspondant n'est pas représenté, car tous les cas étudiés présentent un taux de diagonalité très conséquent de $\mathcal{T} = 0.99$. Au risque de prendre un peu d'avance sur le chapitre suivant, cette amélioration prévisible du taux de diagonalité avec la modulation soulève un point important : dans le cas où l'on arriverait à compenser les gains optiques quelque soit le paramètre de modulation, l'approximation diagonale s'avère tout de même moins valide dans les cas faiblement modulés.

2. En terme de comparaison entre les différentes configurations, les courbes sont très similaires sauf pour l'axicon. Pour celui-ci, les gains optiques sont toujours nettement inférieurs aux autres masques, trahissant un comportement non-linéaire plus important. On avait déjà pressenti au travers des courbes de linéarité que celui-ci présentait un comportement particulier par rapport aux autres masques. En terme de taux de diagonalité, il est largement en deçà des autres masques pour le cas pleine turbulence mais les talonne dans le cas de phases résiduelles corrigées. Finalement on peut conclure que le masque axicon est à la fois le moins sensible de la classe des ASO pyramide et présente une dynamique moins favorable : cette configuration semble donc à proscrire par rapport aux autres.
3. On constate aussi que dans les cas modulés à 3 λ/D, la 3PWFS performe légèrement moins bien en terme de gains optiques. On peut expliquer ce phénomène par son comportement qui exhibe une sensibilité, à la fois pour un bruit uniforme et pour le bruit de photons, supérieure aux autres masques lorsque modulé (figure 4.6). Cette explication va dans le sens d'une opposition des propriétés sensibilité/dynamique, comme le révèle clairement l'opération de modulation. En revanche son taux de diagonalité est légèrement supérieur aux autres configurations, ce qui est donc un bon point en terme de dynamique pour cette configuration.

On conclura cette étude par le constat général suivant : les PWFS ont des comportements très similaires en terme de dynamique, mis à part la configuration type axicon qui marque fortement le pas en terme de performances.

faces \ r_{mod}	0 λ/D	1 λ/D	3 λ/D
n = 3	0.51	0.66	0.76
n = 4	0.46	0.62	0.70
n = 5	0.45	0.60	0.70
n = 6	0.42	0.59	0.66
n = ∞	0.26	0.40	0.45

faces \ r_{mod}	0 λ/D	1 λ/D	3 λ/D
n = 3	0.78	0.85	0.91
n = 4	0.75	0.82	0.87
n = 5	0.75	0.82	0.87
n = 6	0.75	0.80	0.84
n = ∞	0.82	0.83	0.82

TABLE 4.1 – **Taux de diagonalité pour les PWFS. Gauche :** PSD_{turbu}. **Droite :** PSD_{20}

4.1.3.2 Changement de l'angle

On passe désormais à l'influence de l'angle sur la dynamique, dans le contexte des pyramides *aplaties*.

Courbes de linéarités

L'étude des courbes de linéarité est peu concluante, on ne les présente donc pas ici. On aurait pu s'attendre à voir des courbes de linéarités évoluant de pair avec les oscillations en sensibilités : on n'a rien observé de significatif dans ce sens. Seul

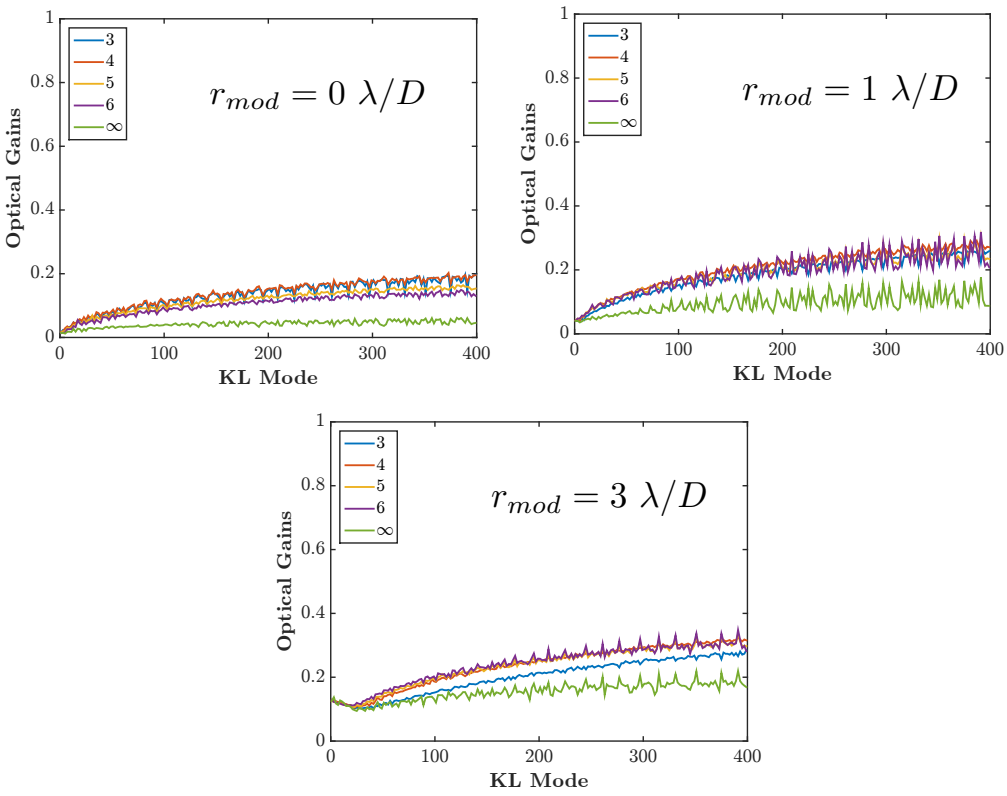


FIGURE 4.21 – **Gains optiques en plein turbulence pour différents rayons de modulation**, $D = 8\ m$ et $r_0 = 15\ cm$

constat attendu et bien visible : la pyramide *classique* présente un seuil de linéarité et une gamme de capture plus élevée. On s'en remet une nouvelle fois aux critères des gains optiques pour potentiellement départager les différentes configurations.

Gains optiques

Les gains optiques sont calculés sans modulation. On réutilise les trois conditions de phases résiduelles exploitées depuis le début de ces études pour générer la figure 4.24. Les taux de diagonalité pour les différents jeux de phases résiduelles sont donnés table 4.2. Les résultats mènent aux constats suivants :

1. Comme attendu, la pyramide à 4 faces a une dynamique plus importante et présente ainsi des gains optiques favorables dans toutes les conditions de phases résiduelles.
2. Pour les configurations de recouvrement des images des pupilles à 35% et 50%, on retrouve de légères oscillations dans les gains optiques.
3. De manière surprenante, pour les configurations de recouvrement des images des pupilles à 90% et 98%, on ne retrouve pas du tout les oscillations présentes dans les courbes de sensibilités. D'autre part, leurs gains optiques présentent des valeurs plus élevées que les deux autres configurations de pyramide *apla-*

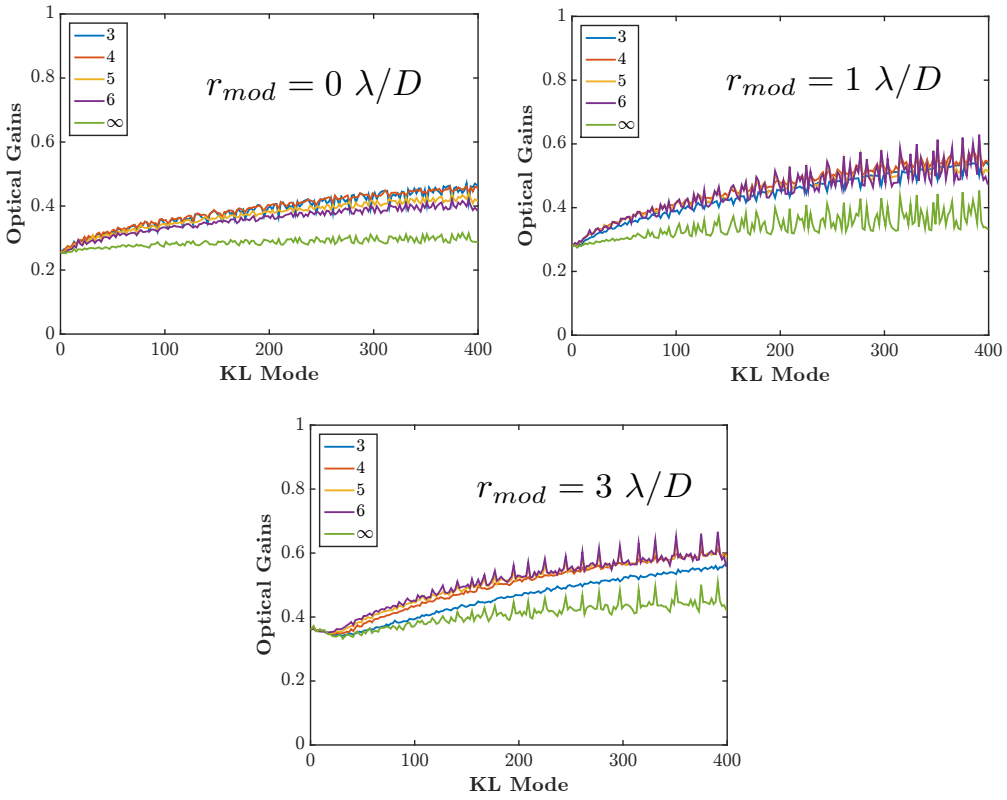


FIGURE 4.22 – **Gains optiques pour la PSD_{20} pour différents rayons de modulation.** Attention aux échelles qui ne débutent pas à 0 suivant l'axe de y car adaptées pour une meilleure visualisation.

ties. De plus la configuration avec le plus grand recouvrement exhibe des taux de diagonalité très élevés par rapport aux autres configurations. Finalement, de par cette étude de la dynamique pour les pyramides *aplaties*, il semblerait que les pyramides à taux de recouvrement assez faible aient un léger désavantage en terme de dynamique. Un piste d'explication pour ce comportement est le fait que les FPWFS à taux de recouvrement inférieur à 50% présentent une forme de réponse très particulière avec une partie de la pupille qui voit la zone d'interférence et une autre partie qui ne voit aucune superposition des pupilles. Ces deux zones présentent des sensibilités différentes, et donc potentiellement des dynamiques distinctes. Cela pourrait donc influer la diagonalité de la matrice de transfert optique.

4.1.4 Conclusion sur l'étude de la classe des ASO pyramide

Pour résumer ces études concernant la classe des ASO pyramide, on liste les résultats marquants qui semblent pousser un peu plus la compréhension de cette classe :

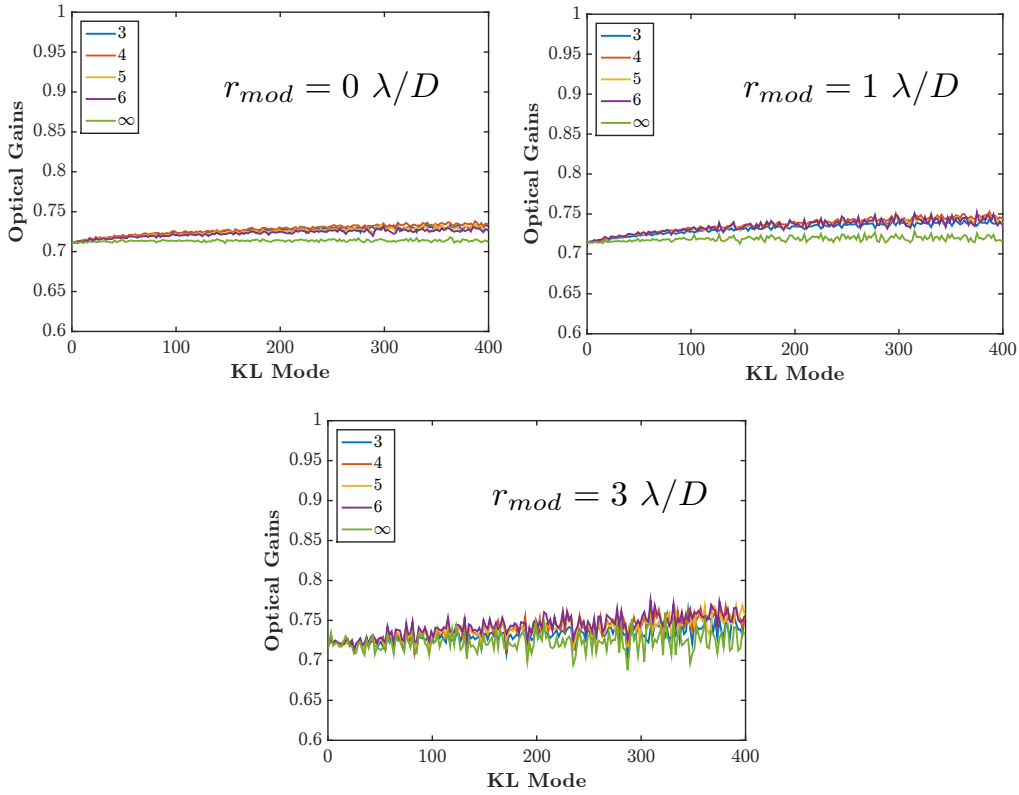


FIGURE 4.23 – **Gains optiques pour la PSD_{40} pour différents rayons de modulation.** Attention aux échelles qui ne débutent pas à 0 suivant l'axe de y car adaptées pour une meilleure visualisation.

actionneurs / angle	PSD_{turbu}	PSD_{20}	PSD_{40}
0%	0.47	0.74	0.99
35%	0.31	0.74	0.98
50%	0.35	0.79	0.97
90%	0.38	0.70	0.98
98%	0.62	0.89	0.99

TABLE 4.2 – **Taux de diagonalité pour les FPWFS.**

La 3PWFS, la pyramide sous son meilleur profil ? Comme largement prédit par la communauté, la 3PWFS présente un gain en sensibilité au bruit uniforme conséquent face aux autres pyramides. Plus surprenant, cette configuration présente aussi un gain en sensibilité vis à vis du bruit de photons lorsque l'on module. De plus, malgré des gains optiques légèrement moins favorables que la 4PWFS, elle présente des taux de diagonalité très compétitifs. Cette configuration est logiquement à envisager pour de futurs développements.

L'axicon, une mauvaise idée ? L'axicon a prouvé être à la fois moins sen-

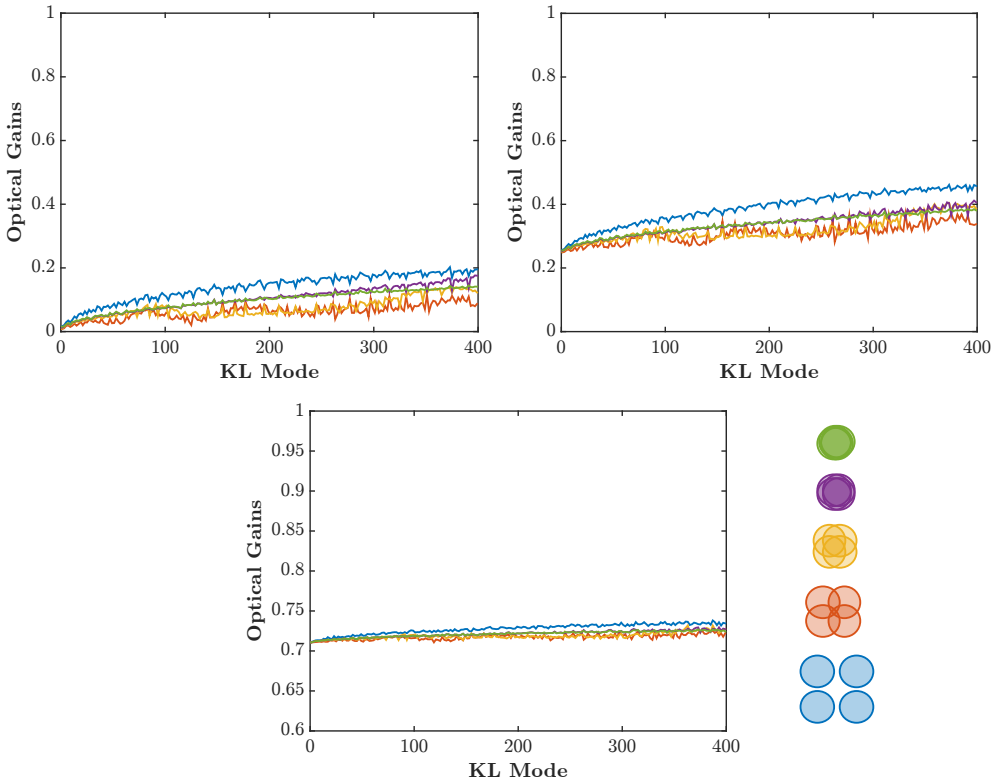


FIGURE 4.24 – **Gains optiques des FPWFS pour différentes conditions de phases résiduelles**. **Haut gauche :** PSD_{turbu}. **Haut droite :** PSD_{20}. **Bas :** PSD_{40}.

sible et moins dynamique que les autres pyramides. Il semblerait donc que cette configuration soit à proscrire.

La pyramide aplatie, légère contre-performance ? Les sensibilités à un bruit uniforme de la classe des pyramides *aplaties* sont épatantes à bien des égards : oscillations frôlant la limite fondamentale de sensibilité et configurations pour lesquelles la sensibilité est nettement supérieure aux pyramides *classiques* pour toutes fréquences spatiales. Malheureusement, l'analyse de la sensibilité vis à vis du bruit de photon montre un autre visage : les courbes des pyramides *aplaties* oscillent autour de celle des pyramides *classiques*. Un gain en sensibilité pour certaines fréquences entraîne nécessairement une perte pour d'autres. Cette analyse apporte un regard complètement nouveau sur cette classe de pyramide.

4.2 Classe des analyseurs de Zernike

La classe des ASO de Zernike est une autre grande classe des ASO à filtrage de Fourier, connue pour sa grande sensibilité venant malheureusement avec une dynamique très réduite.

4.2.1 Principe et description physique

Cette classe trouve son origine dans le principe d'imagerie à contraste de phase [Zernike, 1934a], inventé par Fritz Zernike en 1934 pour la microscopie, afin d'améliorer les observations de milieux transparents. Cette invention eut un tel impact pratique, notamment dans le domaine de l'observation d'échantillons biologiques, que Zernike obtint pour celle-ci le prix Nobel de physique en 1953.

4.2.1.1 Principe

Le principe de cette technique telle qu'elle fut mise au point par Zernike consiste à illuminer un échantillon avec une lumière cohérente. On fait alors interférer la lumière qui a traversé l'échantillon avec une onde plane de référence, décalée de $\pi/2$ en phase afin d'obtenir des interférences constructives. Dans le cadre d'un ASO pour l'OA, on rappelle que l'on ne dispose pas d'onde plane de référence pour mener à bien la mesure de front d'onde. L'astuce est donc de créer l'onde de référence à partir de la lumière provenant de l'étoile de référence. Dans ce but, on utilise une pastille déphasante placée au centre du masque qui diffracte le coeur cohérent de la PSF. L'onde ainsi créée va venir interférer avec toutes les autres portions de la PSF, qui portent l'information sur les perturbations en phase. Logiquement, le déphasage est choisi pour être de $\pi/2$ à la longueur d'analyse, comme pour l'imagerie à contraste de phase. Ce masque à filtrage de Fourier est appelé masque de Zernike. Les caractéristiques usuelles de ce masque utilisé aujourd'hui pour l'OA appliquée au domaine du haut contraste [N'Diaye et al., 2016, Jensen-Clem et al., 2012, Ruane et al., 2020] sont présentées figure 4.25.

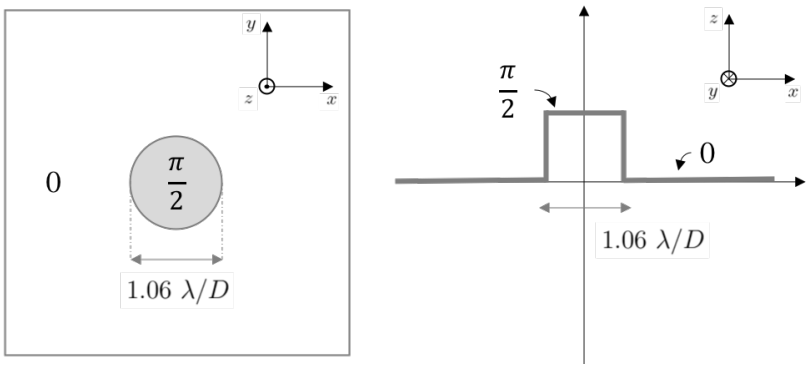


FIGURE 4.25 – **Phase du masque de Zernike** tel qu'il est largement adopté dans la communauté haut contraste.

Plusieurs explications sont généralement avancées pour justifier le choix du diamètre à 1.06 λ/D de cette configuration. Dans un premier temps, cette configuration permet d'égaliser l'intégrale du champ électro-magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la pastille : ce design, par analogie aux interférences à deux ondes, est censé fournir un contraste de frange maximal et donc une sensibilité optimale. De plus, cette configuration fait parfaitement écho à celle utilisée en coronographie avec le cornographe de Roddier & Roddier dont le masque a le même diamètre avec en revanche un déphasage de π afin de générer des interférences destructives [Roddier, 1997]. Dernier argument pour le choix de cette configuration : les intensités de références générées sont uniformes dans la pupille. On va démontrer par la suite qu'une partie de ces arguments ne tient pas, et que la configuration présentée ici n'est pas optimale en terme de sensibilité. Dans la suite de cette section, on décide d'étudier les ASO de Zernike dans toutes leurs configurations possibles, cette classe possédant deux paramètres libres :

Le diamètre de la pastille p : Classiquement, on a ainsi $p = 1.06\ \lambda/D$.

Le déphasage de la pastille δ : Celui-ci est donc généralement fixé à $\pi/2$.

4.2.2 Comparaison en sensibilité

Pour comparer en sensibilité les différents éléments de la classe des ASO de Zernike, on va procéder en deux étapes : on développe tout d'abord une description analytique simplifiée de cette classe, puis on poursuivra l'étude grâce à des simulations, comme fait précédemment.

4.2.2.1 Description à l'aide du modèle convolutif

Leur formalisme théorique de cette classe a aussi été grandement étudiée dans la thèse [Fauvarque, 2017]. On relève une information importante qu'il faut garder à l'esprit tout au long de cette étude : il a été démontré que le support linéaire de cet ASO (c'est à dire la localisation du signal linéaire avec la phase en entrée) est la pupille. Tous les photons en dehors de cette zone ne servent donc pas à l'analyse.

On pousse ici plus loin l'étude de la classe des ASO de Zernike à l'aide de modèle convolutif. En effet, on va voir que la simplicité des masques de Zernike permet de prévoir analytiquement (et de manière qui s'avère très fidèle à la réalité) leur comportement en terme de sensibilité. Cette étude analytique va logiquement mener à proposer des variations du masque classique de Zernike afin de gagner en sensibilité. Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet d'une lettre [Chambouleyron et al., 2021a].

On rappelle sur la sensibilité à un bruit uniforme pour une fréquence spatiale s'écrit dans le cadre du modèle convolutif :

$$s_{\mathbf{f}} \approx \sqrt{|\mathbf{TF}|^2 \star PSF}\Big|_{\mathbf{f}} \tag{4.4}$$

où **TF** est la fonction de transfert de l'ASO. On sait aussi que dans le cas où ω et m sont centro-symétriques, ce qui est entre autre valide pour les ASO de Zernike dans le cas d'une pupille circulaire pleine, on peut écrire :

$$\mathbf{TF} = 2\mathrm{Im}\left[m \star \overline{m\omega}\right] \tag{4.5}$$

À partir de cette équation, on peut simplement calculer le comportement de la classe des ASO de Zernike. Pour cela, on simplifie le problème :

1. On se place en 1D pour simplifier les calculs : le masque et la PSF étant à symétrie de révolution, on ne s'écarte qu'assez peu du cas 2D. De plus comme m est un masque purement de phase, on peut l'écrire sous la forme $m = e^{i\Delta}$. Dans ce cadre, l'équation 4.5 se simplifie :

$$\mathbf{TF}|_f = 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{du}\ \omega|_{\mathrm{u}} \sin\left(\Delta|_{\mathrm{u}} - \Delta|_{f-\mathrm{u}}\right) \tag{4.6}$$

2. Dans le cas 1D, on approxime la PSF par une fonction porte de taille caractéristique a. On peut alors écrire :

$$\omega|_u = \frac{1}{a}\mathbb{I}_{[-a/2;a/2]}\Big|_u \tag{4.7}$$

Pour un masque de Zernike en 1D de diamètre p et de déphasage δ, Δ dans l'équation 4.6 s'écrit :

$$\Delta|_{\mathrm{u}} = \delta \times \mathbb{I}_{[-p/2;p/2]}\Big|_u \tag{4.8}$$

Ces simplifications nous permettent alors de calculer analytiquement la fonction de transfert **TF** en 1D. Les détails du calcul sont donnés en annexe de la lettre [Chambouleyron et al., 2021a]. La représentation graphique de la fonction **TF** ainsi calculée se trouve figure 4.26.(b). On remarque que ce calcul 1D de la fonction de transfert des ASO Zernike permet de distinguer deux grandes configurations :

Cas $p \geq a$: On observe dans ce cas plusieurs régimes. Les fréquences inférieures à $(p-a)/2$ ne sont pas vues pas l'ASO. La sensibilité croit ensuite linéairement pour finalement atteindre un plateau à partir de la fréquence $f = (p+a)/2$. Ce plateau se situe à $2 \times \sin(\delta)$.

Cas $p < a$: Dans ce cas, toutes les fréquences sont vues par l'ASO. La sensibilité croit linéairement de la fréquence nulle jusqu'à $f = p$ pour atteindre cette fois un plateau à $\frac{2p}{a} \times \sin(\delta)$.

Cette description analytique confirme tout d'abord des caractéristiques déjà bien connues des ASO de Zernike : dans le cas $\delta = \pi$, la fonction de transfert, et donc la sensibilité, est nulle pour toute les fréquences, on est dans un régime coronographique où les interférences entre les ondes passant dedans et en-dehors de la pastille sont destructives. De plus, on remarque que le maximum de sensibilité est atteint comme

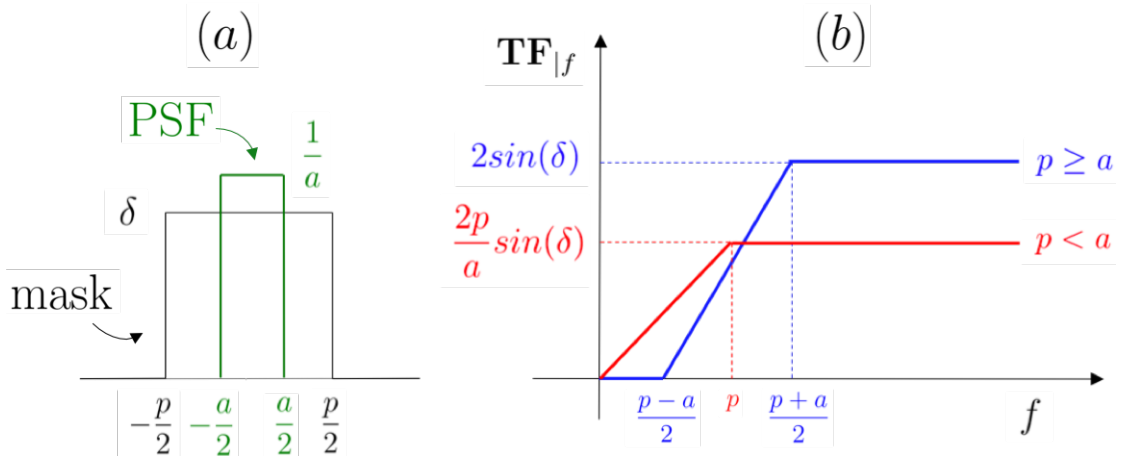


FIGURE 4.26 – **Évolution théorique de la fonction de transfert de l'ASO Zernike 1D en fonction des paramètres du masque.**

prévu pour $\delta = \pi/2$, on retrouve le principe de contraste de phase mis au point par Fritz Zernike.

Cependant, les résultats figure 4.26.(b) mettent en avant un comportement beaucoup moins connu de la classe des ASO de Zernike : l'influence du diamètre de la pastille sur la sensibilité. Un cas qui semble être naturellement intéressant en terme de sensibilité est le cas $p = a$ où le diamètre de la pastille est proche de la taille caractéristique de la PSF. On rappelle que ici le calcul a été mené avec une PSF simplifiée représentée par une fonction porte. On peut tout de même associer la fonction porte à une PSF plus réaliste : la taille a correspondrait alors plutôt à la première annulation de la PSF, soit a ayant une valeur aux alentours de 2 λ/D. Cela suggérerait que le diamètre $p = 1.06\ \lambda/D$ de l'ASO de Zernike classique serait un cas s'approchant de $p = a/2$, avec donc une sensibilité dans le cas $\delta = \pi/2$ non optimale car atteignant un plateau proche de 1. Pour confirmer cette prédiction purement théorique, basée sur une compréhension des ASO de Zernike via le modèle convolutif, on propose de mener des tests en simulations de la même manière que pour la classe des ASO pyramide étudiée précédemment.

4.2.2.2 Confirmation de la description théorique

Bien que le calcul analytique réalisé précédemment ne s'applique qu'à la sensibilité à un bruit uniforme, on tâchera de mener les analyses en simulation pour la sensibilité à un bruit uniforme mais aussi pour la sensibilité au bruit de photons. Comme le support de la pupille est aussi le support des pixels utiles à l'analyse, on peut s'attendre à voir les deux types de sensibilités évoluer de paire.

On fixe logiquement le déphasage à $\delta = \pi/2$ et l'on fait varier le diamètre de la pastille de $p = 0\ \lambda/D$ à $p = 5\ \lambda/D$. Dans un premier temps, on s'intéresse à la sensibilité pour une fréquence spatiale située loin de la pastille lorsque l'on modifie le diamètre du masque. On choisit arbitrairement une fréquence spatiale de

6 périodes dans la pupille, ce qui est assez éloigné du diamètre maximal de la pastille ($p = 5\ \lambda/D$ soit un rayon de 2.5 λ/D). Cette configuration est illustrée figure 4.27.

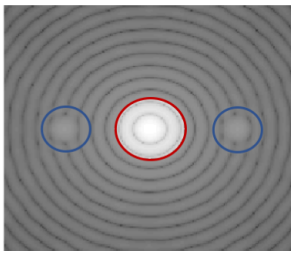


FIGURE 4.27 – **PSF correspondante à la fréquence spatiale choisie** pour étudier l'influence du diamètre de la pastille sur la sensibilité.

Les sensibilités pour un bruit uniforme et pour le bruit de photons pour cette fréquence spatiale en fonction du diamètre de la pastille sont représentées figure 4.28. Comme prévu par le modèle convolutif, la sensibilité à un bruit uniforme augmente avec le diamètre de la pastille. On constate d'ailleurs que cette courbe de sensibilité est très fortement liée à la proportion d'énergie comprise dans la pastille. Ces courbes confirment au passage le fait que le comportement pour la sensibilité au bruit de photons évolue de manière très similaire à celle pour un bruit uniforme.

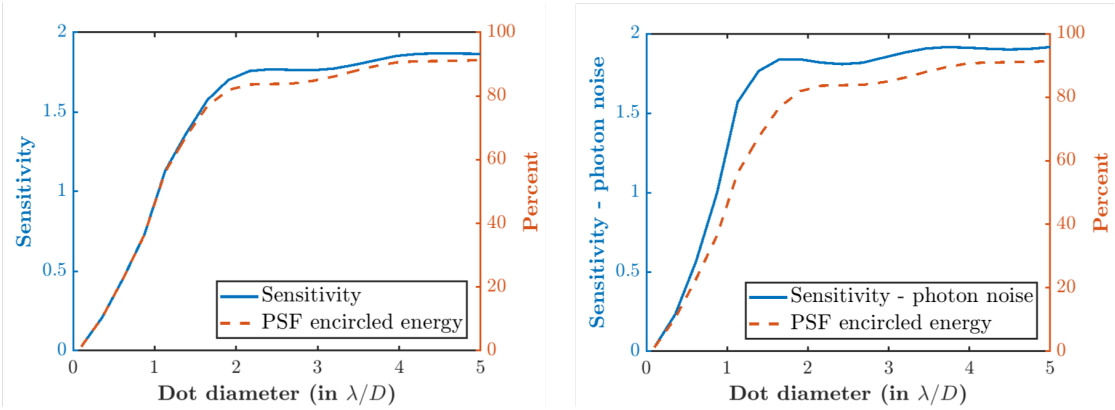


FIGURE 4.28 – **Évolution des sensibilités avec l'augmentation de la taille de la pastille** pour une fréquence spatiale en dehors de la pastille pour toutes les configurations étudiées.

Ce nouveau éclairage sur le comportement des ASO de Zernike vient mettre à mal l'argument d'égalisation des flux et la maximisation du contraste de franges associée. On constate que la part d'énergie contenue dans la pastille doit être la plus grande possible afin d'atteindre des sensibilités proches de la limite théorique. Ainsi, on serait tenter de vouloir concevoir un senseur de Zernike avec un diamètre très important, mais on rappelle que le calcul théorique explicite aussi une perte totale de sensibilité pour les fréquences situées à l'intérieur de la pastille. Il semblerait qu'on soit donc confronté au choix d'un compromis. Pour mieux cerner ce comportement,

on simule les sensibilités à toutes les fréquences pour trois diamètres de pastille différents :

$$p = 1.06\ \lambda/D,\ p = 2\ \lambda/D, \text{ et } p = 5\ \lambda/D$$

On constate que la courbe de sensibilité à un bruit uniforme figure 4.29 est en accord avec l'approche analytique figure 4.26. Le fort gain en sensibilité pour les hautes fréquences se fait au détriment des basses fréquences, l'exemple $p = 5\ \lambda/D$ illustre très bien ce point. En revanche, le senseur de Zernike $p = 2\ \lambda/D$, que l'on nomme dorénavant Z2WFS, semble être un compromis très intéressant car il présente un très fort gain en sensibilité vis à vis du Zernike classique au détriment seulement des fréquences spatiales les plus basses.

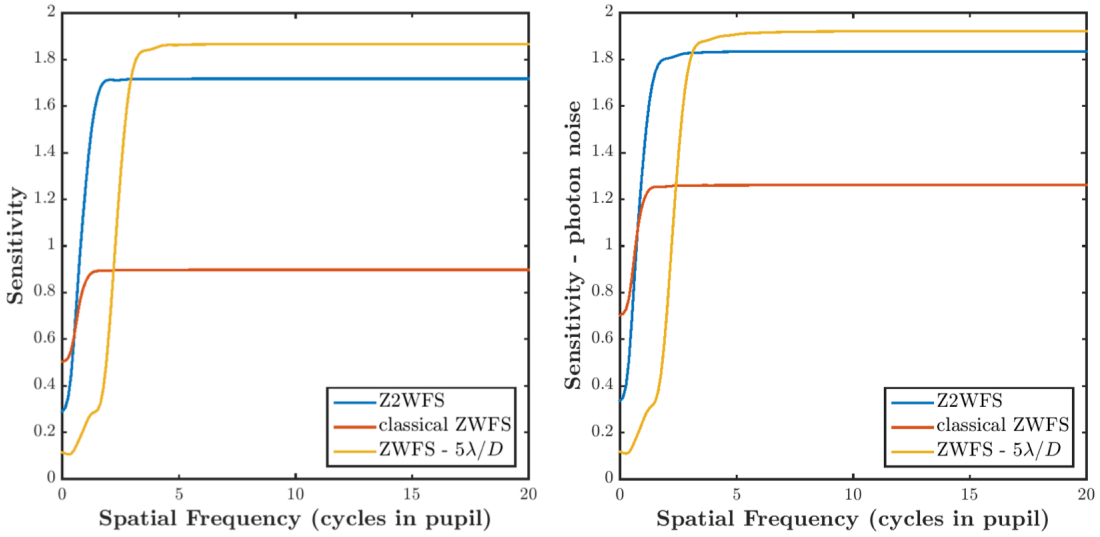


FIGURE 4.29 – **Courbes de sensibilités fréquentielles** pour trois configurations de diamètre de pastille : 1.06 λ/D, 2 λ/D et 5 λ/D.

Pour comprendre plus précisément le comportement de la classe des ASO de Zernike aux basses fréquences, on utilise les modes de Zernike bas ordres : aberration *tip-tilt*, *focus*, *astigmatisme* et enfin *coma*. On analyse les sensibilités en fonction du diamètre de la pastille pour chacun de ces modes. Les résultats sont donnés figure 4.30, où le ZWFS classique et le Z2WFS sont représentés en pointillés. On constate que le Z2WFS présente un déficit de sensibilité par rapport au ZWFS seulement sur les modes tip-tilt. Il est ensuite plus sensible pour tous les autres modes. On remarque aussi que même pour les bas ordres, la configuration $p = 1.06\lambda/D$ n'est finalement pas la configuration optimale.

Intensités de référence et forme de la réponse

Il a été présenté l'impact du diamètre de la pastille sur les sensibilités. On s'attarde plus longuement dans ce paragraphe sur la modification de forme de la réponse

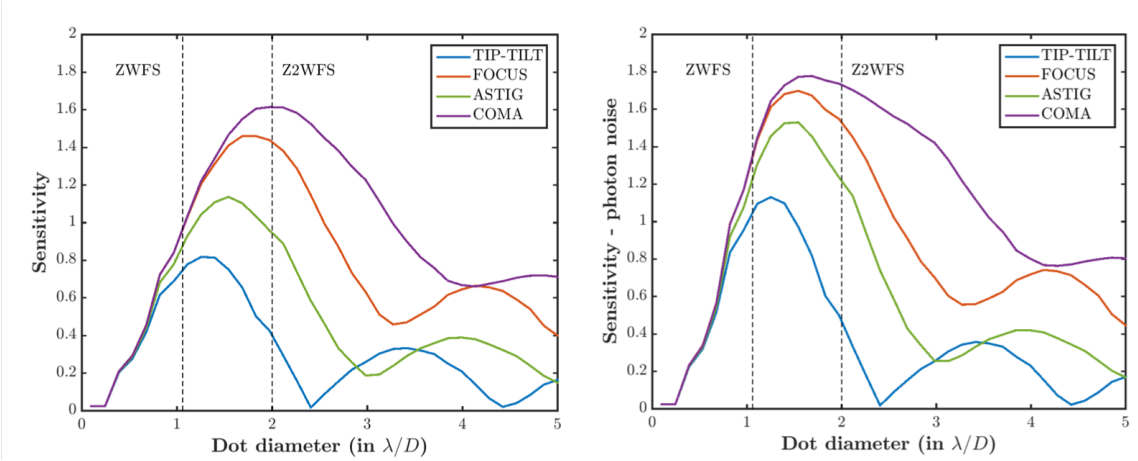


FIGURE 4.30 – **Influence du diamètre de la pastille** sur les sensibilités des modes de Zernike bas ordres.

lorsque l'on augmente le diamètre. Pour cela, on étudie les intensités de références et la réponse à un cosinus de phase avec une période de 10 cycles dans la pupille (choix arbitraire). Les images correspondantes pour le ZWFS classique, le Z2WFS et le ZWFS avec $p = 5\ \lambda/D$ sont visibles figure 4.31.

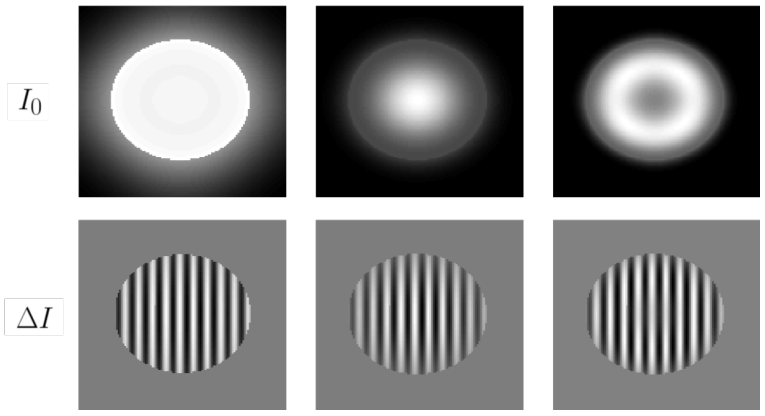


FIGURE 4.31 – **Intensités de références et forme des réponses à un mode sinus. Gauche :** ZWFS classique. **Milieu :** Z^{2}WFS. **Droite :** ZWFS avec $p = 5\ \lambda/D$.

On remarque que pour les dérivés du ZWFS classique, les intensités de références ne sont plus uniformes. La structure de leurs intensités de référence se retrouve imprimée dans leurs réponses au cosinus de phase. Cette perte d'uniformité ne représente en rien un problème dans le traitement du signal de l'ASO. En pratique, le seul inconvénient qui semble émerger est potentiellement celui de la dynamique du détecteur utilisé pour l'analyse. De plus, l'avantage du ZWFS classique qui donne la phase "un pour un" se retrouve avec les autres variations du senseur : il suffit de diviser leurs intensités réduites par la racine carré de leurs intensités de

référence, afin de s'affranchir de la structure de leurs intensités uniformes :

$$\Delta I_{uniform} = \frac{\Delta I}{\sqrt{I_0}} \tag{4.9}$$

On donne aussi une coupe des intensités de référence figure 4.32. On constate bien que le ZWFS classique à $p = 1.06\ \lambda/D$ a des intensités très uniformes, en revanche une grande partie du flux se trouve en dehors de l'empreinte de la pupille. Ces photons sont donc des photons perdus, qui ne seront pas utilisés pour l'analyse : cela explique tout simplement la non optimalité du ZWFS classique en terme de sensibilités.

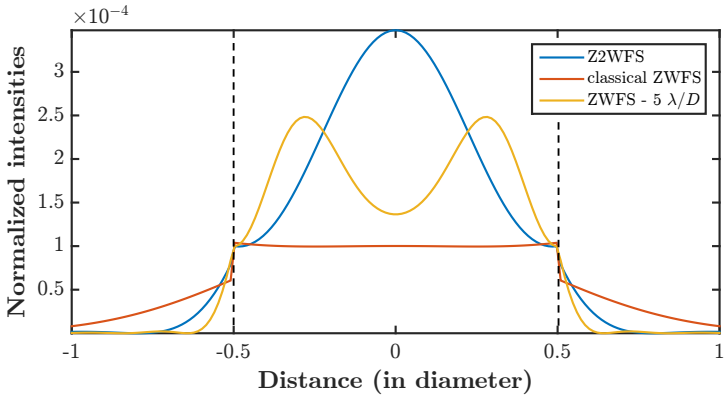


FIGURE 4.32 – **Coupe des intensités de référence de plusieurs ASO de Zernike.** Les bords de la pupille sont marqués en pointillés noirs.

4.2.2.3 Comparaison avec la classe d'ASO pyramide

On peut comparer les résultats établis précédemment avec une pyramide 4 faces dans plusieurs configurations : *classique non modulée*, *classique modulée* et *aplatie* à 80%. Grâce à notre définition de la sensibilité au bruit de photon, on peut faire le constat suivant : **le senseur de Zernike classique est légèrement moins sensible vis à vis du bruit de photon que la pyramide non modulée**. À notre connaissance, ce résultat est totalement nouveau et apporte une comparaison inédite entre la classe des ASO pyramide et celle des ASO de Zernike. Le lecteur·rice ne doit pas être surpris par ce point : on a évoqué juste précédemment le fait que le ZWFS classique n'utilise que la moitié des photons pour l'analyse.

4.2.3 Comparaison en dynamique

On a donc démontré qu'il est possible d'augmenter de manière significative la sensibilité du ZWFS en augmentant la taille de la pastille. On cherche maintenant à savoir si ce gain en sensibilité vient au détriment de la dynamique du senseur.

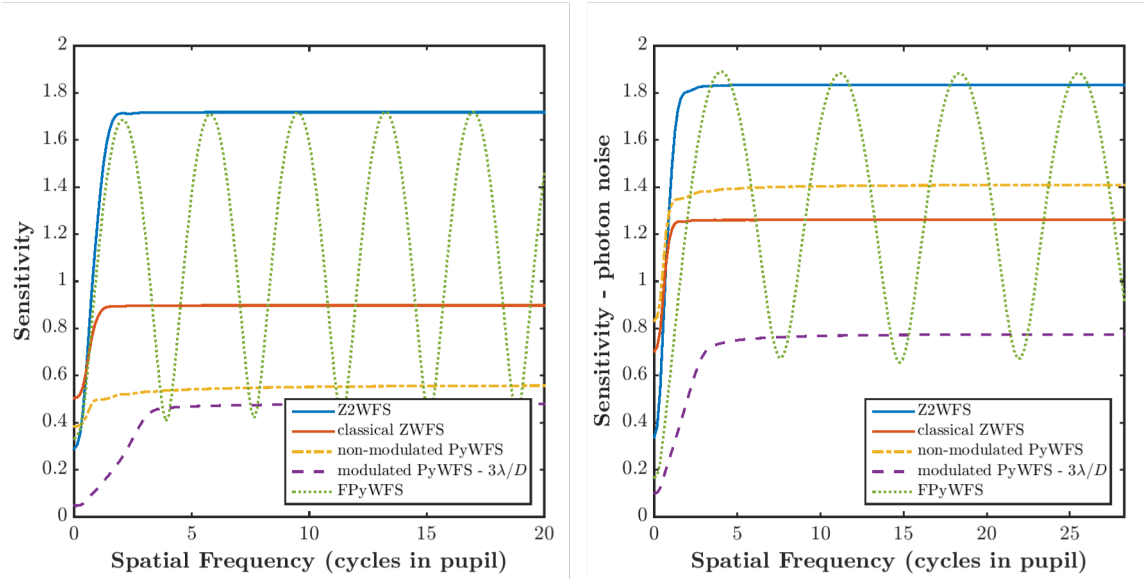


FIGURE 4.33 – **Comparaison avec différentes configuration de la 4PWFS.**

4.2.3.1 Courbes de linéarités

Comme pour la classe des ASO pyramide, on commence l'étude de la dynamique des ASO de Zernike par l'étude de leurs courbes de linéarités. On utilise le critère de gamme de capture (section 3.2.1.2) afin d'évaluer si le gain en sensibilité pour les hautes fréquences dans le cas des ASO de Zernike à pastille agrandie entraîne une perte de dynamique. On constate que ce n'est pas le cas et la dynamique reste alors inchangée pour les fréquences situées sur le plateau de sensibilité (voir figure 4.34). En comparant avec la classe pyramide, on constate le fait connu que la gamme de capture des ASO de Zernike est plus faible que la pyramide, même dans le cas non-modulé.

4.2.3.2 Étude des gains optiques

Les résultats fournis par les calculs de gammes de capture nous laissent prévoir un comportement similaire en terme de gains optiques pour les différentes configurations du ZWFS. On applique exactement la même méthode que celle explicitée pour les ASO pyramide. On présente les résultats figure 4.35. Le comportement des différents ASO de Zernike vis à vis des gains optiques sont très similaires, et on remarque par ailleurs que les gains optiques sont identiques pour tous les modes. Les taux de diagonalité sont aussi très proches entre les différentes configurations. À titre de comparaison avec la classe pyramide (table 4.1) : $\mathcal{T} = 0.1$ pour la configuration PSD_{turbu}, $\mathcal{T} = 0.86$ pour la PSD_{20} et enfin $\mathcal{T} = 0.99$ pour la PSD_{40}. Finalement, l'étude de la gamme de capture conjointement avec celle des gains optiques laisse conclure que le gain en sensibilité ne vient pas au détriment de la dynamique : en augmentant le diamètre, **on effectue juste une utilisation plus efficace des photons**.

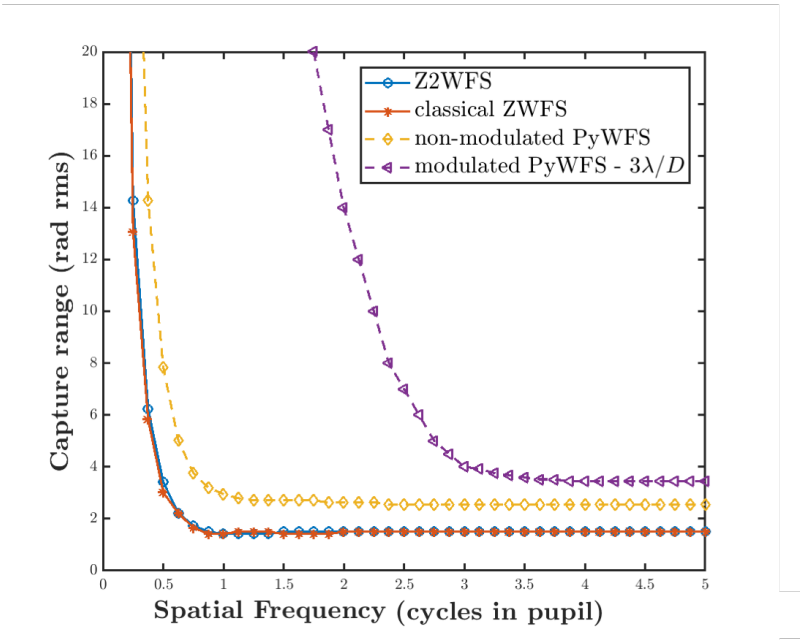


FIGURE 4.34 – **Gamme de capture pour différents ASO** pyramide et de Zernike.

4.2.4 Conclusion sur la classe des ASO de Zernike

Pour conclure cette analyse des ASO de Zernike, la mise en place d'une description purement analytique de cette classe de senseur a conduit à proposer des dérivés particulièrement avantageux du ZWFS classique qui possèdent des sensibilités très proches des valeurs optimales atteignables pour la majorité des fréquences spatiales. On évoque notamment le senseur Z2WFS qui limite fortement la perte de sensibilité aux basses fréquences tout en présentant un gain considérable sur le reste des fréquences. Reste néanmoins deux grands défauts de cette classe d'analyseur, sur lesquels on insiste lourdement :

Dynamique : leur faible dynamique reste nettement inférieure à la classe des ASO pyramide non-modulée. Cela exclu, pour le moment, toute utilisation comme senseur de premier étage pour les système d'OA. Il est tout de même possible d'imaginer une amélioration de cette caractéristique grâce à des stratégies de modulation, dont on propose un exemple dans la section suivante.

Chromatisme : sûrement le point le plus problématique - leur double chromaticité qui se retrouve dans le diamètre et la profondeur de la pastille, empêchant une utilisation large bande. Or, si l'on néglige le bruit de lecture, on rappelle que le Z2WFS possède un facteur $\sqrt{2}$ en sensibilité au bruit de photon par rapport à la pyramide non-modulée. Mais l'erreur liée au bruit de photon décroît en $1/\sqrt{N}$, il suffit donc en pratique d'utiliser une 4PWFS non modulée avec une bande spectrale 2 fois plus large par rapport au Z2WFS pour finalement retomber sur des performances semblables vis à vis du bruit de photon (dans le cas d'une source spectralement uniforme). Ainsi, même dans le cadre d'un système d'extrême OA de deuxième étage pour lequel la

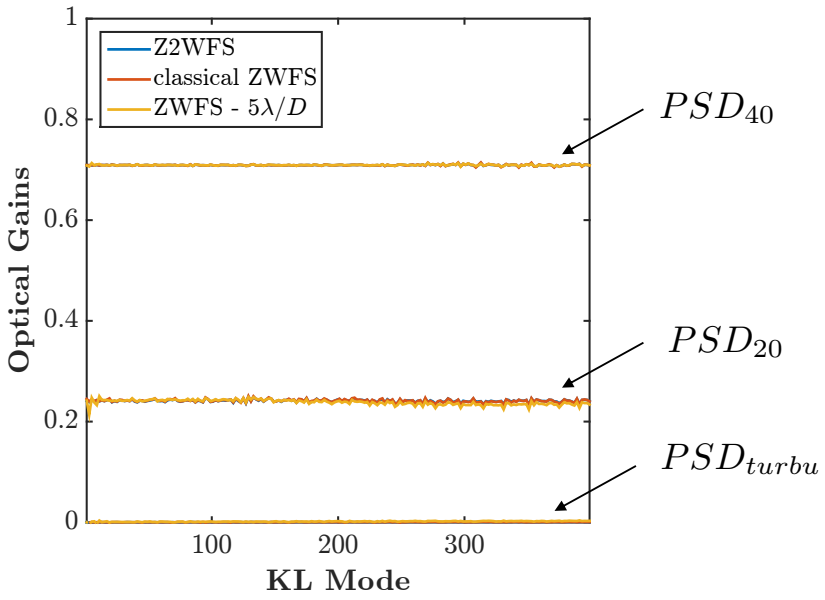


FIGURE 4.35 – **Gains optiques pour la classe des ZWFS.** La valeur des gains optiques est très similaire suivant les diamètres de la pastille.

classe des ASO de Zernike verrait sa dynamique suffisante pour fonctionner de manière efficace, le choix face à un ASO pyramide n'est pas automatique : **tout dépend de la gamme spectrale disponible**.

4.2.5 Vers une modulation pour l'ASO de Zernike ?

Tout comme pour la classe des ASO pyramide, on peut tenter de réfléchir à une façon d'augmenter la faible dynamique des ASO de Zernike grâce une modulation du masque. On a vu que dans le cas des ASO pyramide, la modulation consiste à déplacer le masque transversalement au cours d'une acquisition (ou bien en pratique, déplacer la PSF à l'aide d'un miroir de modulation) : pour une fréquence spatiale donnée, la mesure va être la somme incohérente de positions pour lesquelles l'ASO est parfois sensible à l'aberration et parfois pas (voir description de la 4PWFS réalisée au chapitre 2). Un schéma d'illustration est fourni figure 4.36 : on y schématise pour la PSF correspondant à une fréquence spatiale donnée la configuration des masques pyramide et Zernike pour lesquelles on a, ou pas, une sensibilité. Par analogie avec la pyramide, on peut alors imaginer une possible modulation pour les ASO de Zernike : on propose de faire varier le diamètre de la pastille au cours d'une acquisition. La sensibilité pour une fréquence traversée par la pastille sera le ratio du temps passé à l'extérieur de la pastille sur le temps total d'intégration. On peut alors espérer que, à l'instar de la pyramide, les fréquences spatiales ainsi affectées verront leur dynamique s'accroître.

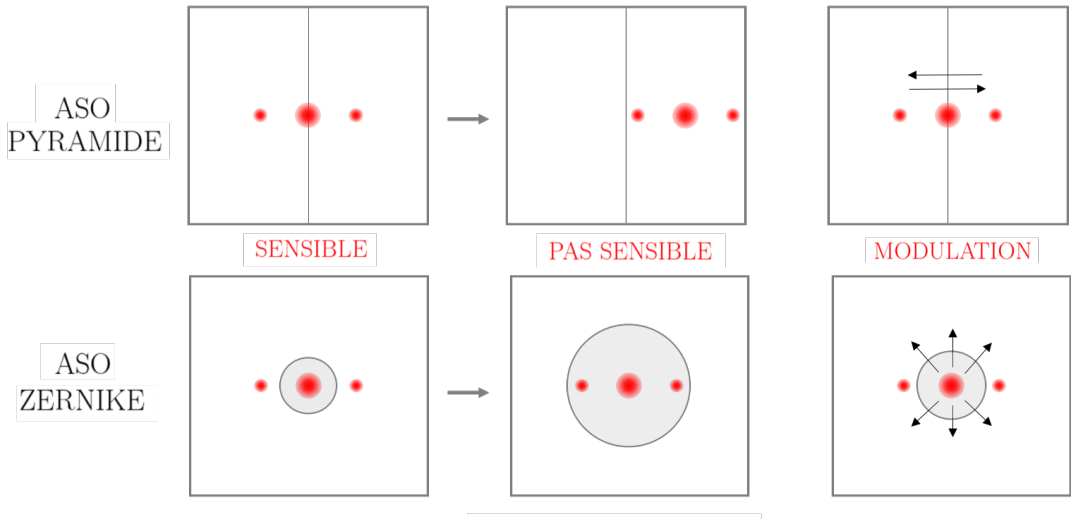


FIGURE 4.36 – **Modulation de l'ASO Zernike**, analogie avec la modulation de la classe pyramide représentée ici avec un masque type rooftop. La PSF représentée correspond à celle produite par une fréquentielle spatiale donnée dans la pupille (cosinus ou bien sinus).

Mise en place pratique

La mise en place d'une telle modulation semble très peu réalisable en pratique. On rappelle que la modulation doit avoir un cycle d'une durée égale au temps d'acquisition de l'ASO : c'est à dire de l'ordre du kHz. Au lieu de tenter de fabriquer un masque de Zernike qui viendrait changer de forme très rapidement au cours du temps, on peut plutôt imaginer un changement rapide du rapport d'ouverture. La taille physique de la PSF serait donc changée au cours de l'intégration, et celle-ci verrait un masque plus ou moins grand. Pour réaliser une telle opération sans changer la position du masque suivant l'axe optique, on pourrait utiliser une configuration optique de type télescope avec focales variables en amont du masque permettant ainsi de changer le grandissement au cours du temps. Il faudrait alors avoir un système identique après le masque, afin de ne pas modifier la taille de la pupille sur le détecteur. Un schéma de cette possible implémention pratique est donné figure 4.37. On l'accorde volontiers : cette proposition pratique semble compliquée à mettre en place, mais loin d'être infaisable. À l'époque, moduler la 4PWFS à l'ordre du kHz devait aussi sembler tâche impossible.

Impact sur la sensibilité et la dynamique

Pour tester cette nouvelle proposition de modulation en simulation on prend comme cas d'étude un ASO de Zernike que l'on module de 1 λ/D à 6 λ/D en diamètre. C'est-à-dire qu'au cours d'une intégration de la caméra de l'ASO, la pastille voit son rayon croître de 1 λ/D jusqu'à 6 λ/D puis décroître pour revenir de nouveau à 1 λ/D. On considère que cette taille évolue linéairement, bien qu'il serait possible d'imaginer des modulations où l'on passerait plus de temps dans certaines

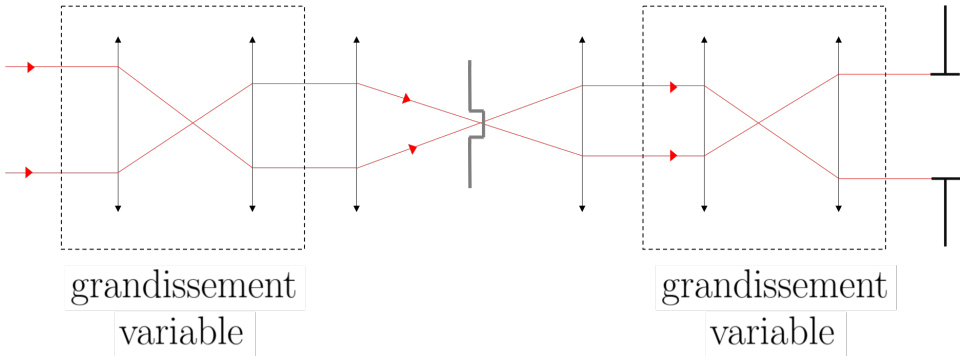


FIGURE 4.37 – **Exemple de système optique permettant de moduler l'ASO de Zernike.**

configurations de pastille que dans d'autres. Pour le senseur de Zernike modulé de cette façon, on trace les courbes de sensibilités fréquentielles, données figure 4.38. Tout comme la pyramide modulée (tracée en comparaison), on constate bien la perte de sensibilité pour les fréquences inférieures à 3 cycles par pupille.

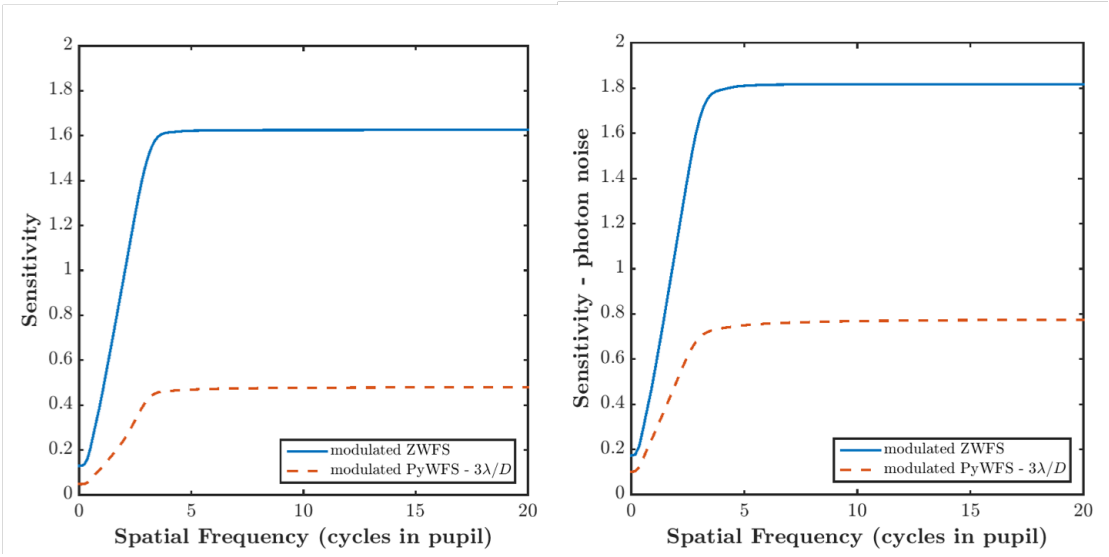


FIGURE 4.38 – **Courbes de sensibilités fréquentielles** pour la 4PWFS modulée et le Zernike modulée.

Il faut désormais déterminer si cette perte en sensibilité conduit à un gain en dynamique sur les basses fréquences, c'est en tout cas l'objectif. Pour répondre à cette question, on propose simplement d'utiliser la base de Zernike et de comparer leurs courbes de linéarités respectives. Le résultat de cette étude est donné figure 4.39. On a tracé les courbes de linéarité du ZWFS classique, du ZWFS modulé, de la PWFS non modulée et de la PWFS modulée à 3 λ/D, et ce pour les modes de Zernike suivants : *tip*, *focus*, *astigmatisme*, *coma*, et le mode Z^{50}. On constate bel et bien un gain en dynamique pour le ZWFS modulé face au

ZWFS classique pour les modes de faibles ordres situés à l'intérieur de la zone de modulation. Pour le mode Z^{50} la courbe de linéarité se rapproche de celle du ZWFS classique. Malheureusement, on peut aussi voir que le gain en dynamique est assez réduit, et se trouve très loin de concurrencer la pyramide modulée. De plus, contrairement à la classe des ASO pyramide, il s'avère que le gain en dynamique plafonne très vite avec le diamètre de modulation et l'exemple donné ici atteint pratiquement déjà la limite de cette extension de dynamique. Néanmoins, ce gain en dynamique pourrait permettre une extension du domaine d'utilisation des ASO de Zernike. Quoiqu'il en soit la proposition décrite ici démontre que le principe de modulation permettant un gain en dynamique au détriment de la sensibilité ne s'applique pas seulement à la classe des ASO pyramide et qu'il est possible d'imaginer des stratégies complètement neuves pour les différents ASO à filtrage de Fourier.

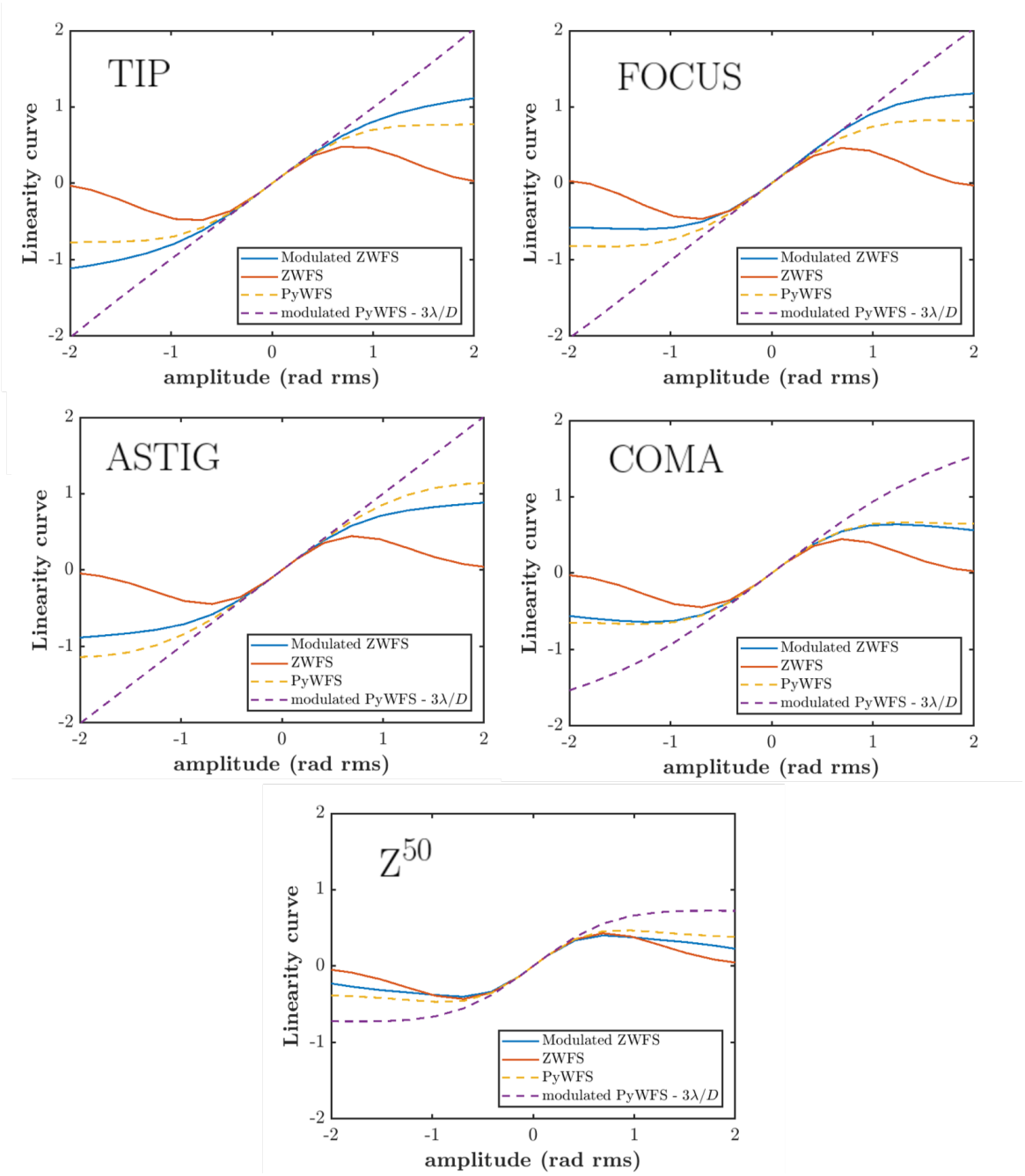


FIGURE 4.39 – **Courbes de linéarités** pour quelques modes de Zernike.

4.3 Une méthode d'optimisation de la sensibilité via le modèle convolutif

Au cours de ce chapitre, l'objectif était principalement de comparer différents ASO à filtrage de Fourier afin d'exhiber les masques les plus intéressants en terme de sensibilité et dynamique. Ces études ont aussi conduit à proposer de nouveaux types d'ASO de Zernike ayant une sensibilité optimisée. Dans cette section, on présente une nouvelle méthode permettant la création de masques complètement originaux aux propriétés extrêmement intéressantes. Cette technique ouvre de vastes possibilités, dont juste une partie seulement a pu être abordée au cours de ces travaux de thèse et fait d'ailleurs l'objet d'un papier en cours de préparation.

4.3.1 Description de la méthode : modèle convolutif et optimisation numérique

On rappelle de nouveau que le modèle convolutif fourni une relation très intéressante entre la forme du masque et sa carte de sensibilité fréquentielle :

$$s \approx \sqrt{|\mathbf{TF}|^2 \star PSF} \tag{4.10}$$

avec l'expression de **TF** fournie équation 2.33. Grâce au modèle convolutif, on rappelle que l'on possède donc une fonction qui décrit entièrement la sensibilité (à un bruit uniforme) d'un masque donné. Cette fonction prend en entrée 2 cartes :

- ω la fonction de modulation. Dans le cas sans modulation, $\omega = PSF$.
- m le masque de l'ASO.

On rappelle aussi que c'est grâce à cette fonction qu'on a réussi à établir une compréhension fine du comportement des ASO de Zernike. Pour une PSF donnée, et donc une pupille d'entrée donnée, on propose maintenant d'optimiser numériquement la carte de sensibilité fournie par l'équation 4.10, qui dépend alors seulement de m : $s = s(m)$. On nomme s_{cible} la carte de sensibilité cible. Grâce à des techniques d'optimisations numériques, il est alors possible d'inverser le problème : à partir d'une sensibilité cible, on retrouve le masque correspondant. Cette technique est schématisée figure 4.40.

Le critère des moindres carrés est utilisé pour l'optimisation et la fonction score, c'est à dire la fonction à minimiser, s'écrit alors :

$$\mathcal{F}(m) = ||s_{cible} - s(m)||_2 \tag{4.11}$$

On remarque que la fonction $\mathcal{F}$ est bien une fonction de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ où k est le nombre de paramètres d'optimisation du masque. Il est donc possible de mettre en oeuvre des méthodes d'optimisation numérique non-linéaires afin de trouver un minimum de cette fonction score. Il n'est en revanche pas évident que cette fonction soit convexe : elle peut ainsi exhiber plusieurs minima locaux, et il sera par conséquent difficile de s'assurer avoir trouvé le minimum global à la fin d'un processus

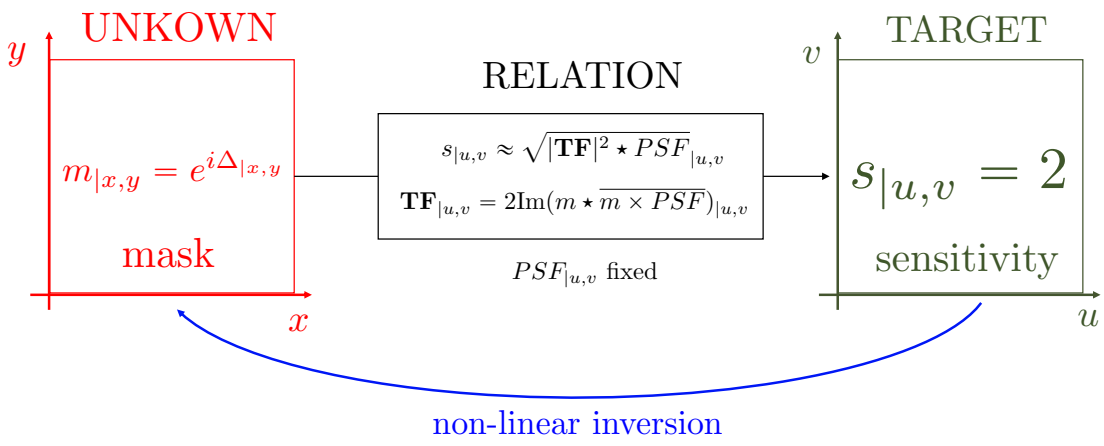


FIGURE 4.40 – **Optimisation des masques.** La carte de sensibilité cible est choisie comme étant maximale sur une certaine étendue fréquentielle (u, v).

d'optimisation. Pour mener cette optimisation numérique, on utilise la fonction *lsqnonlin* de MATLAB qui est un solveur de problème de moindres carrés non-linéaires utilisant l'algorithme de *Levenberg-Marquardt*. Cet algorithme est basé sur des méthodes classiques de descente de gradient. On cherche ici à construire un masque ayant une sensibilité optimale, on prend donc pour sensibilité cible une carte valant 2 en chaque point : $s_{cible} = 2$. Notre fonction score devient ainsi :

$$\mathcal{F}(m) = ||2 - s(m)||_2 \tag{4.12}$$

Un point important : on optimisera donc ici sur la sensibilité vis à vis d'un bruit uniforme, car c'est celle pour laquelle le modèle convolutif nous donne une formule explicite.

Zone d'optimisation

On a pu le constater avec l'étude approfondie de l'ASO Zernike : l'optimisation pour les hautes fréquences vient avec une perte de sensibilité pour les très basses fréquences. Ainsi, l'étendue en fréquence de la zone sur laquelle on optimise a une certaine importance : comme on travaille avec le critère des moindres carrés, une sensibilité cible étendue sur une grande plage de fréquence va tendre à diminuer l'importance des basses fréquences lors de l'optimisation, et inversement. On pourrait aussi imaginer travailler avec toujours la même plage de fréquence, et utiliser comme critère d'optimisation des moindres carrés pondérés.

Paramètres réduits pour les masques

La description du masque m est faite avec un nombre de points qui dépend de la résolution choisie dans le plan focal et de son extension dans ce plan. Mener une optimisation sur l'intégralité des points de phases d'un masque peut s'avérer fastidieux en temps de calcul. On peut alors imaginer des stratégies pour réduire les paramètres décrivant le masque : nombre de faces, angle, diamètre de pastille,

etc... On utilisera notamment le fait que l'on peut considérer le problème à symétrie de révolution et faire une optimisation radiale, ce qui réduit considérablement le nombre de pixels en entrée et en sortie. Bien entendu, cette stratégie ne s'applique que pour les pupilles à symétrie de révolution et produira des masques optimisés qui sont eux-mêmes à symétrie de révolution. De manière générale, on sera tout de même vigilant à trouver pour un problème donné des symétries permettant une réduction des paramètres à optimiser.

4.3.2 Vers des ASO optimaux en sensibilité

On commence par mettre en place la stratégie d'optimisation dans le cadre d'une pupille à symétrie de révolution dont on va étudier deux variantes : la pupille circulaire pleine et la pupille circulaire obstruée. On prend comme sensibilité cible, la sensibilité maximale $s_{cible} = 2$. De plus, on considère seulement les masques de phases $m = e^{i\Delta}$ afin de ne pas générer de masques d'amplitude ce qui entraînerait une perte de photons. Finalement la fonction score s'écrit, en élevant au carré les cartes de sensibilités :

$$\mathcal{F}(\Delta) = ||4 - |2\mathrm{Im}\big(e^{i\Delta} \star (e^{-i\Delta} PSF)\big)|^2 \star PSF||_2 \tag{4.13}$$

Pour toutes les optimisations, on génère un masque de phase nul $\Delta = 0$ comme point de départ pour l'optimisation non-linéaire de MATLAB. On commence les optimisations pour le cas d'une PSF correspondant à une tâche d'Airy, pour le cas d'une pupille pleine.

4.3.2.1 Cas d'une pupille pleine

Pour cette première optimisation, on se place dans le cas d'un pupille pleine. Les paramètres de simulations sont les suivants : 80 pixels dans la pupille avec un échantillonnage dans le plan focal à deux fois le critère de Shannon (*i.e.* 4 pixels par λ/D).

Structure du masque optimisé

On fait l'optimisation sur toutes les fréquences spatiales : c'est à dire dans un rayon de 40 λ/D dans le plan focal. On obtient le masque en phase Δ figure 4.41. On appelle le masque ainsi créé le OWFS (pour Optimized-WFS). On constate que ce masque a une structure très similaire à la PSF. On note la similarité avec la classe des ASO de Zernike : la masque possède une zone déphasante au centre d'une taille d'environ 2 λ/D. Mais au lieu d'être une marche, cette pastille est d'une certaine manière apodisée. De plus, le masque créé ne se contente pas d'avoir juste une zone de déphasage localisée au centre, mais dispose aussi des zones de déphasages qui coïncident avec la distribution d'énergie dans le plan focal. Cette concordance entre zones de déphasage du masque et distribution d'énergie dans la PSF est très visible sur la coupe fournie figure 4.41-Droite.

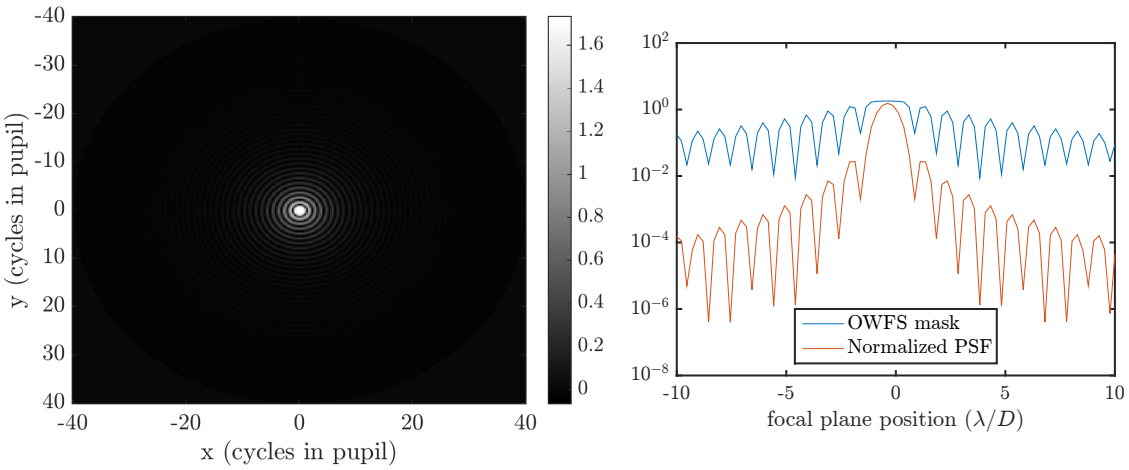


FIGURE 4.41 – **Masque optimisé en sensibilité pour une pupille pleine. Gauche :** visualisation en phase du masque. **Droite :** coupe du masque par rapport à la PSF normalisée - échelle log.

Intensités de référence et forme de la réponse

Regardons la forme de la réponse donnée par ce masque. Les intensités de références et la réponse à un cosinus dans la pupille sont données figure 4.42.

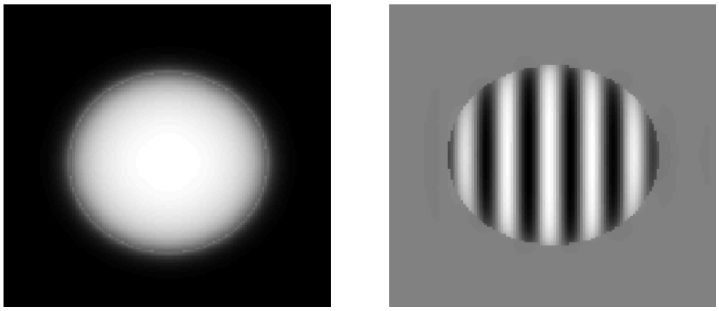


FIGURE 4.42 – **Gauche :** intensités de référence. **Droite :** réponse à un cosinus de phase.

On constate que la réponse est très proche des réponses produites par les ASO de Zernike : le masque créé est un senseur de phase. Si l'on regarde plus précisément les intensités de référence (figure 4.43), on conclut que celles du OWFS sont beaucoup plus uniformes dans la pupille que celles du Z2WFS.

Sensibilités

On compare en simulation les performances en sensibilités du masque ainsi généré avec la classe des ASO de Zernike. Les résultats sont donnés figure 4.44. On voit que la sensibilité de cet analyseur arrive à atteindre celle d'un ASO de Zernike à grande

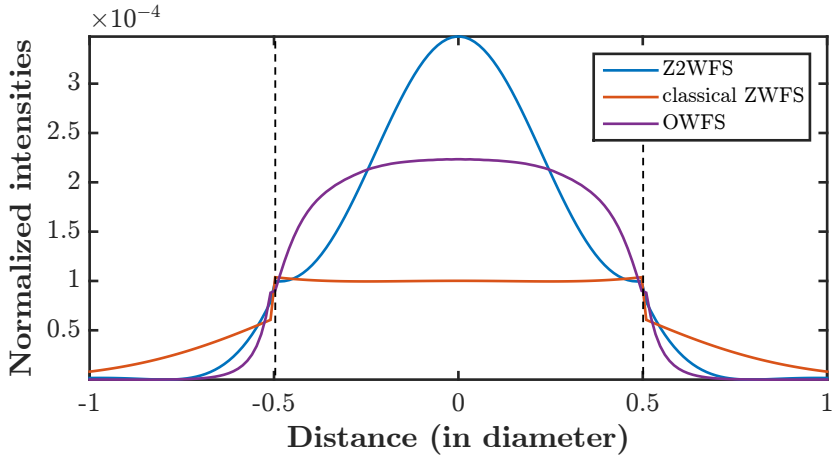


FIGURE 4.43 – **Coupe des intensités de référence de plusieurs ASO.** Les bords de la pupille sont marqués en pointillés noirs.

pastille (diamètre de 5 λ/D en pointillé jaune sur la figure) tout en conservant une grande sensibilité aux basses fréquences (très similaire à celle du Z2WFS, en pointillé bleu). Sur la plage de fréquence choisie, ce senseur est donc en effet le plus sensible développé à ce jour. On constate par ailleurs le même comportement pour la sensibilité au bruit de photon : à l'instar des ASO de Zernike, il y a une corrélation entre les deux types de sensibilités.

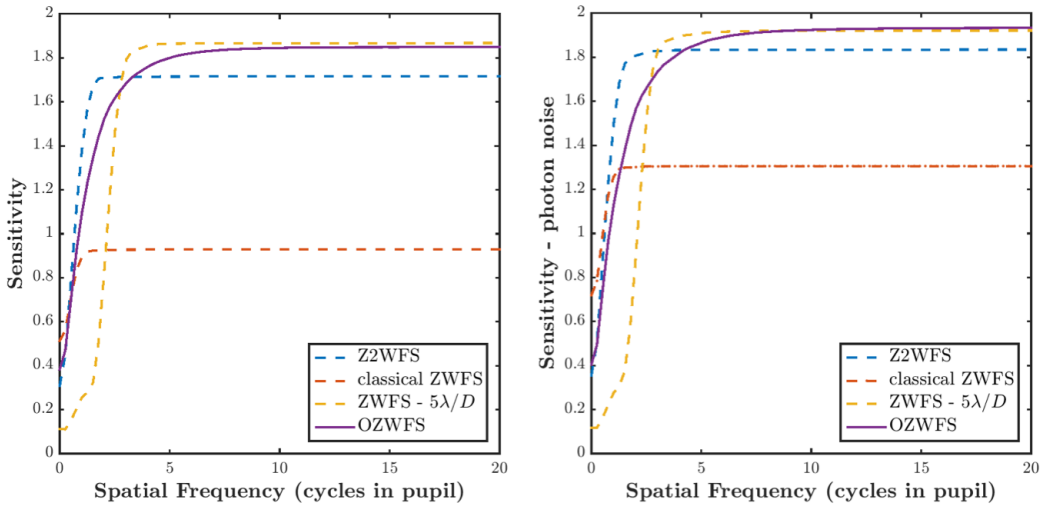


FIGURE 4.44 – **Courbes de sensibilités fréquentielles pour le senseur optimisé** par rapport à la classe des ASO de Zernike.

On rappelle que le résultat de l'optimisation au sens des moindres carrés est sensible à la zone dans l'espace des fréquences sur laquelle on optimise. On peut ainsi réduire cette zone d'optimisation, afin de plus valoriser les basses fréquences

dans le processus d'optimisation. Si l'on effectue exactement la même optimisation, mais sur les fréquences comprises dans un rayon de 5 λ/D au lieu de 40 λ/D, on obtient les courbes de sensibilités figure 4.45. Comme attendu, on constate que pour la sensibilité à un bruit uniforme (sur laquelle on mène l'optimisation) on a rehaussé les basses fréquences vis à vis des hautes fréquences. Cette fois en terme de sensibilité pour un bruit uniforme, le senseur ainsi optimisé égale le ZWFS classique pour les basses fréquences tout en ayant une sensibilité équivalente au Z2WFS pour les hautes fréquences : on s'est clairement affranchi de toute contre-partie sur les basses fréquences. Pour le bruit de photon, la courbe de sensibilité ne suit pas exactement la même tendance que celle pour un bruit uniforme : ce n'est pas surprenant, on sait que celle-ci dépend aussi de la structure des intensités de référence.

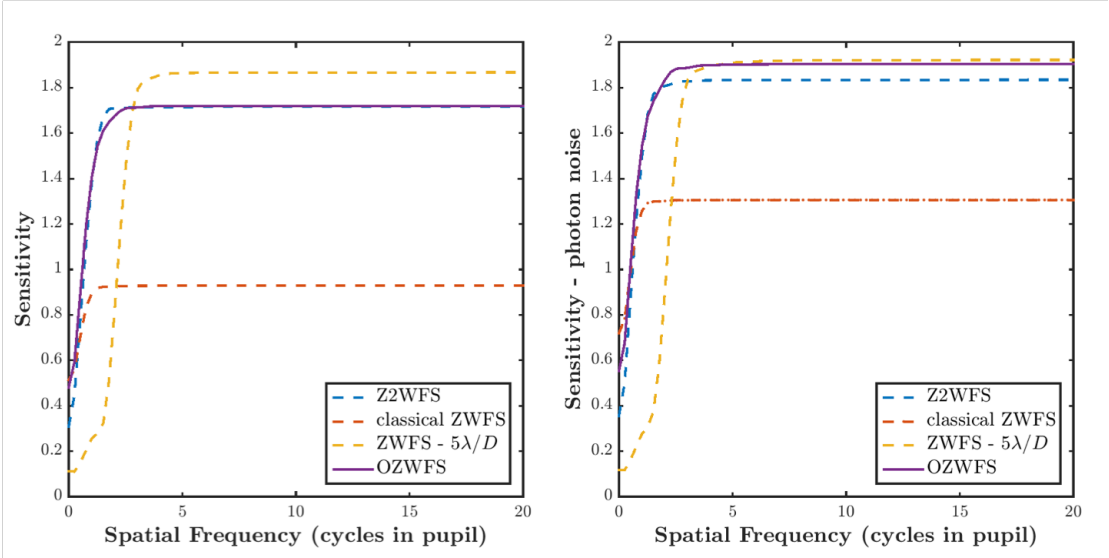


FIGURE 4.45 – **Courbes de sensibilités fréquentielles pour le senseur optimisé sur une zone de fréquence réduite** par rapport à la classe des ASO de Zernike.

La technique d'optimisation mise au point ici est donc très efficace car elle a permis de mettre au point un masque très sensible aux hautes fréquences tout en conservant une bonne sensibilité aux basses fréquences. En outre, on constate que les intensités de référence produites par ce masque sont bien plus uniformes que celles produites dans le cas du Z2WFS. Tout comme la classe des ASO de Zernike, le grand défaut de ce masque reste finalement sa très forte chromaticité.

4.3.2.2 Cas d'une pupille obstruée

On se place dans les même conditions que précédemment, mais cette fois la pupille considérée possède une obstruction centrale de 30% du diamètre.

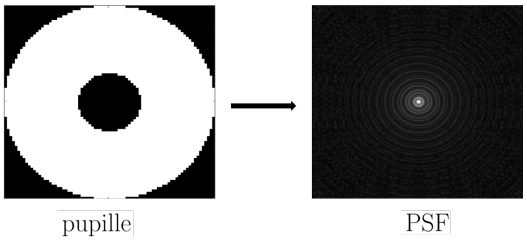


FIGURE 4.46 – **Pupille obstruée à 30% et PSF correspondante**

Structure du masque optimisé

Après optimisation, on trouve le masque présenté figure 4.47. De nouveau on constate bien que l'optimisation converge vers un masque où les zones de déphasage coïncident avec la distribution d'énergie en plan focal. Dans le cas d'une pupille obstruée, il est bien connu que la PSF présente un premier rebond important : cette structure se retrouve clairement dans le masque optimisé.

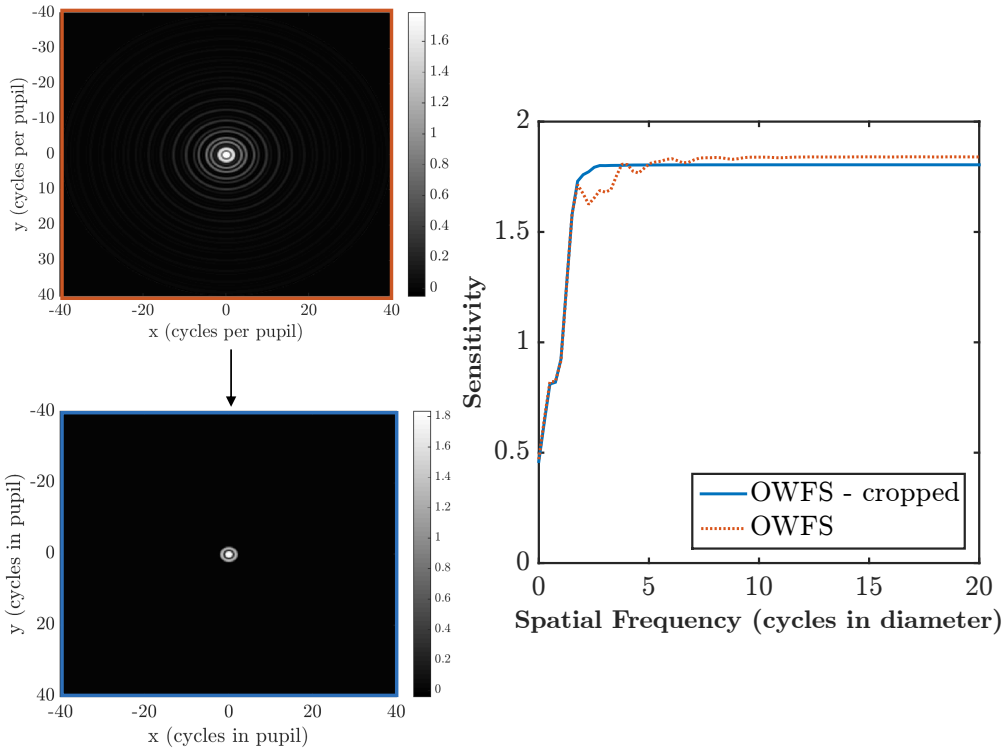


FIGURE 4.47 – **Phases des masques optimisés pour une pupille obstruée.**

Avec ce masque, on constate que le sensibilité fréquentielle présente des rebonds aux alentours de 5 λ/D (figure 4.47). Cette structure est produite par les parties éloignées du centre du masque formées lors de l'optimisation : celles-ci apparaissent car elles optimisent légèrement les hautes fréquences avec cette forme de pupille donnée. On décide alors de mettre à 0 les points de phase du masque loin du centre,

afin de garder que sa partie centrale déphasante : on perd alors très légèrement sur les hautes fréquences, tout en annulant ce comportement erratique autour des fréquences 5 λ/D. Cette opération est assez similaire à optimiser sur une plage de fréquence plus petite. Le masque ainsi généré possède une forme beaucoup plus simple.

Intensités de référence et forme de la réponse

Les intensités de référence et la réponse à un cosinus pour ce masque sont données figure 4.48.

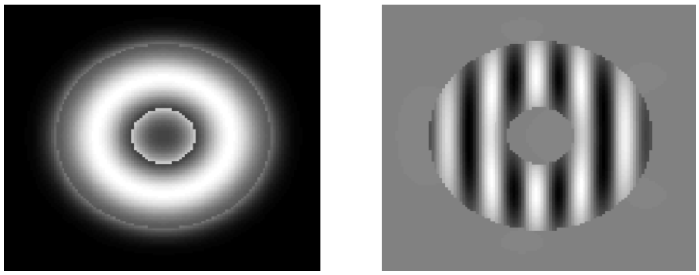


FIGURE 4.48 – **Gauche :** intensités de référence. **Droite :** réponse à un cosinus de phase.

La coupe des intensités de référence (figure 4.49) du masque révèle un comportement très intéressant : contrairement au cas du Z2WFS ou bien du ZWFS classique, peu de flux est présent dans l'obstruction centrale. Or dans les cas des ASO de Zernike, on rappelle que le support des pixels linéaires est la pupille. Ainsi tous les photons situés dans l'obstruction centrale ne participent pas à l'analyse. Le OWFS pour une pupille obstruée semble déjà présenter un certain avantage à travers ses intensités de référence.

Sensibilités

Comme précédemment, comparons notre nouvel analyseur aux ASO de Zernike (figure 4.50). Le gain observé dans le cas pleine pupille précédent se retrouve aussi ici. Le fort gain pour la sensibilité vis à vis du bruit de photon dans le cas du masque optimisé s'explique par le surplus de photons disponibles dans l'empreinte de la pupille par rapport au cas des ASO de Zernike, pour lesquels on a une perte d'énergie dans l'obstruction centrale.

Tous les grands télescopes possédant des obstructions centrales, le cas étudié ici nous paraît crucial : il définit **une nouvelle forme de masque référence pour une analyse à haute sensibilité sur ce genre de pupille**.

4.3.2.3 Cas de pupilles plus complexes

Comme on l'a démontré, notre algorithme d'optimisation permet de s'adapter aux formes de pupilles différentes. Dans les cas précédents, la symétrie de révolution

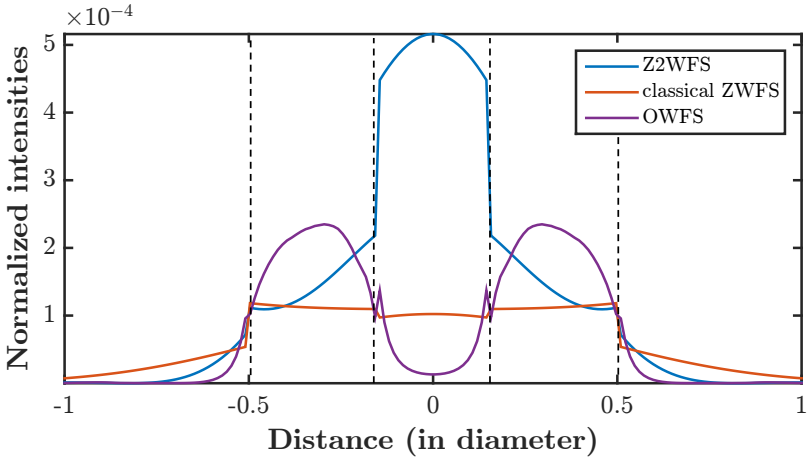


FIGURE 4.49 – **Coupe des intensités de référence de plusieurs ASO pour une pupille obstruée.** pour le cas d'une pupille obstruée, dont les bords sont marqués en pointillés noirs.

était d'une grande aide en terme de convergence et de temps de calcul. On peut désormais tenter d'optimiser nos masques pour des pupilles aux formes plus compliquées, où la symétrie de révolution n'est plus respectée. On choisit un exemple : une pupille dans le style de la pupille du *Large-Binocular Telescope* (LBT), c'est à dire composée de deux miroirs primaires juxtaposés (figure 4.51) [Hill et al., 2012].

On optimise sur une plage de fréquence $\pm 10\lambda/D$ dans l'espace des fréquences. Les optimisations prennent beaucoup de temps car elles sont menées sur chaque point du masque et il est compliqué de travailler avec des tableaux plus grands que 100×100. Ici, on travaille avec 40 pixels dans la pupille et un échantillonnage à deux fois Shannon. On utilise les symétries du système pour optimiser sur un quart du plan focal. La forme du masque ainsi généré et sa sensibilité fréquentielle à un bruit uniforme sont données figure 4.52. Comme dans les exemples précédents, on retrouve le fait que la forme du masque suit la distribution d'intensité dans le plan focal. Cette optimisation démontre donc le bon fonctionnement de cette méthode pour des pupilles aux formes plus compliquées que celles à symétrie de révolution.

Cette méthode pourrait être appliquée aux grandes pupilles segmentées de la classe des ELT, telle que celle du *Giant Magellan Telescope* (GMT) [Johns et al., 2014]. Il faudrait tout de même fournir un effort en terme d'amélioration du temps de calcul pour pouvoir travailler avec des tableaux plus grands. On voit deux pistes à explorer :

1. Réduction des paramètres grâce aux symétries : dans le cas précédent, la symétrie de révolution n'est pas valide mais pour des raisons de redondances, l'optimisation a pu se faire sur un quart du masque seulement.
2. Amélioration de l'algorithme : la fonction *lsqnonlin* calcul le gradient de la fonction score à l'aide de méthodes de type éléments finis. Une façon d'améliorer ce processus est de calculer analytiquement le gradient de la fonction

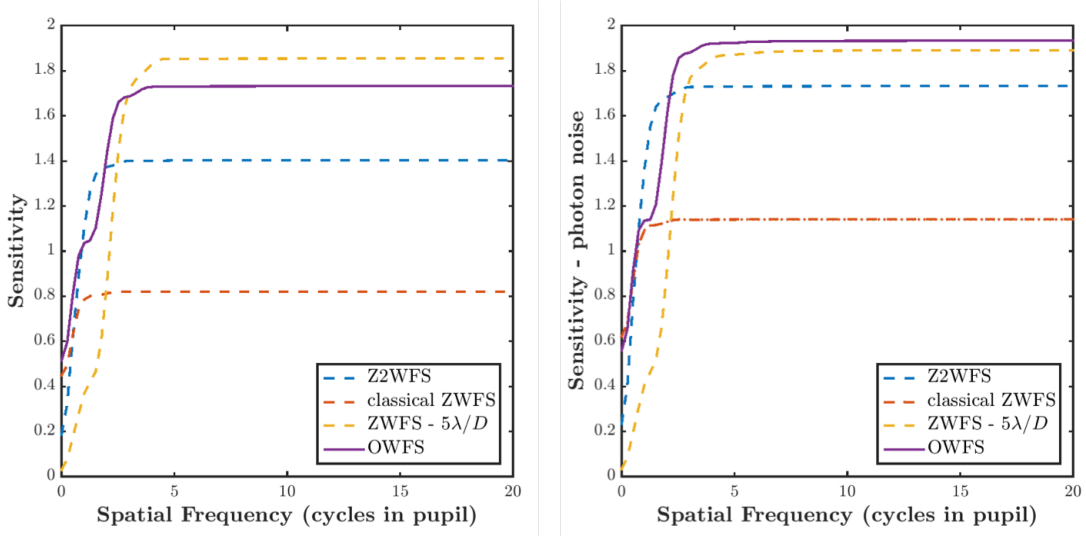


FIGURE 4.50 – **Courbes de sensibilités fréquentielles pour le senseur optimisé sur pupille obstruée** par rapport à la classe des ASO de Zernike.

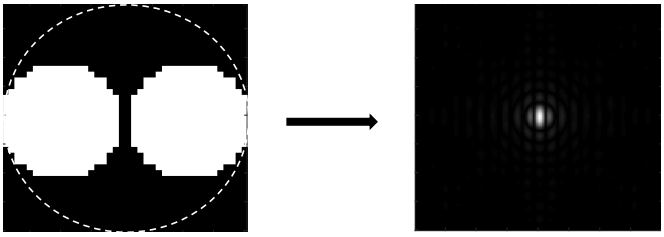


FIGURE 4.51 – **Pupille type LBT et PSF correspondante.**

score, afin d'en implémenter le résultat directement dans l'algorithme d'optimisation. Ce calcul a été réalisé (en annexe C de cette thèse) mais pas encore implémenté au sein de la méthode.

4.3.3 Perspectives pour cette méthode d'optimisation des ASO

Cette nouvelle approche qui consiste à optimiser les masques via des approches d'optimisation non-linéaires est à notre connaissance entièrement nouvelle, et ouvre ainsi de nombreuses perspectives dans l'étude des ASO à filtrage de Fourier. On liste ici quelques possibilités ouvertes par cette stratégie d'optimisation et qui sont jugées pertinentes à poursuivre, mais qui n'ont pas été poussées de manière extensive au cours de cette thèse.

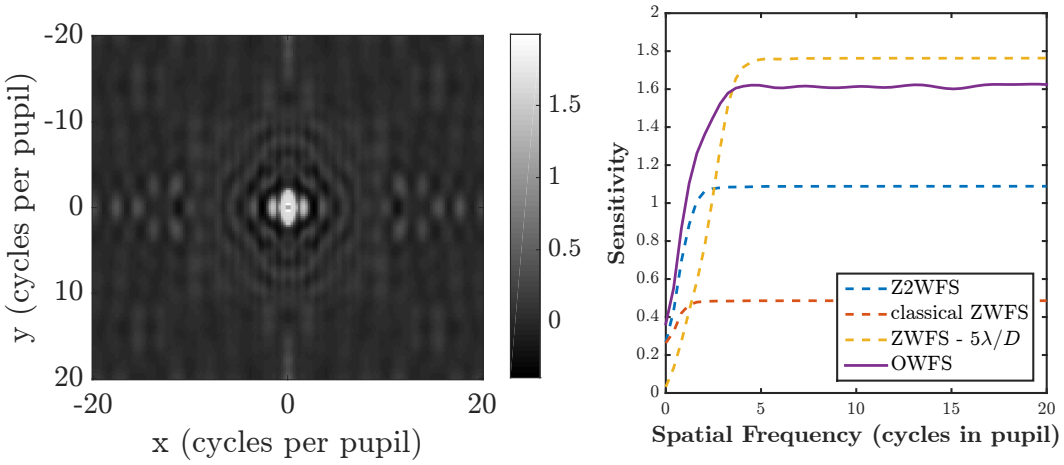


FIGURE 4.52 – **Phase du OWFS pour une pupille type LBT et courbe de sensibilité.** On voit clairement apparaître la structure de la PSF du LBT dans la forme du masque.

Optimisation sous contraintes

Les algorithmes d'optimisation disponibles livrent aussi des techniques d'optimisation sous contraintes. Il est alors possible d'optimiser une fonction score tout en contraignant un autre critère. Cela peut s'avérer utile pour optimiser une caractéristique du masque tout en contraignant une sensibilité élevée.

On prend ici un exemple : dans le cas de la pupille pleine, on cherche à créer un masque qui uniformise au maximum les intensités de référence tout en gardant une très bonne sensibilité. On connaît l'expression des intensités de référence en fonction du masque : $I_0 = |\mathbb{I}_p \star \widehat{m}|^2$. On veut donc que I_0 ait la forme plus proche de $\mathbb{I}_p$ possible. Avec un masque de phase pure, la nouvelle fonction score est la suivante :

$$\mathcal{F}(\Delta) = ||\mathbb{I}_p - |\mathbb{I}_p \star \widehat{e^{i\Delta}}|^2||_2 \tag{4.14}$$

Une solution triviale qui minimise notre fonction score est $\Delta = 0$, c'est à dire aucun masque de phase en plan focal. C'est donc pour cela qu'il faut contraindre la minimisation, afin que le masque produit reste un masque avec une sensibilité non-nulle. La contrainte s'écrit comme une fonction $\mathcal{C}$ dont on oblige la valeur à être inférieure à 0 au cours de l'optimisation. La fonction de contrainte $\mathcal{C}$ sur la sensibilité du masque peut s'écrire :

$$\mathcal{C}(\Delta) = ||4 - |2\mathrm{Im}\big(e^{i\Delta} \star e^{-i\Delta} PSF\big)|^2 \star PSF||_2 - X < 0 \tag{4.15}$$

où X est un paramètre qui nous permet de choisir le niveau de contrainte que l'on met sur la sensibilité du masque.

On effectue cette optimisation sous contraintes à l'aide de la fonction *fmincon* de MATLAB. On est donc de nouveau dans le cas de la pleine pupille, avec une symétrie de révolution. Le masque produit est donné figure 4.53.

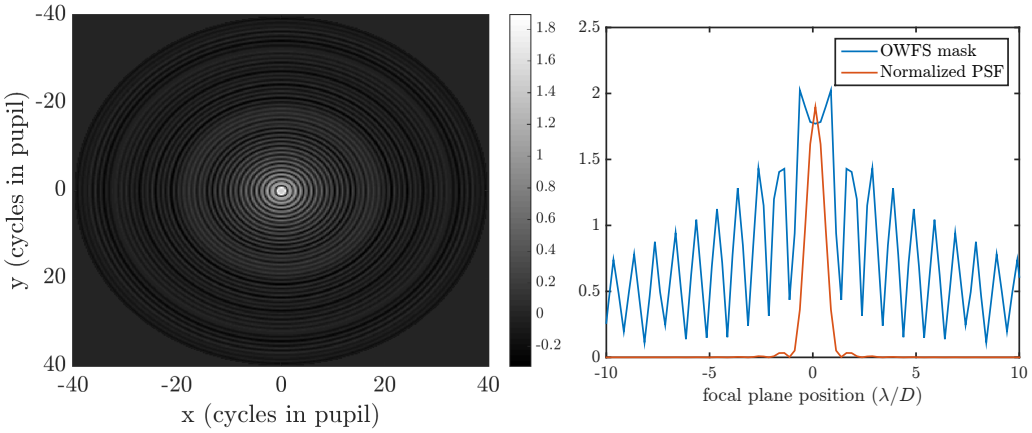


FIGURE 4.53 – **Phase du masque optimisé sous contraintes** afin d'avoir des intensités de références uniformes.

Le masque présente une déplétion au centre, avec des rebonds assez conséquents. Les intensités de référence sont présentées figure 4.54. L'optimisation a bien convergé vers un masque dont les intensités de références sont très uniformes.

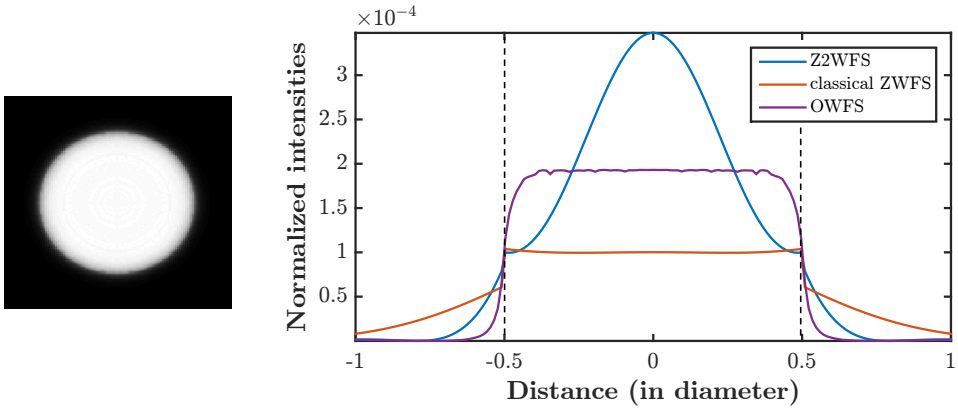


FIGURE 4.54 – **Intensités de références pour le masque optimisé sous contraintes.** Les bords de la pupille sont marqués en pointillés noirs.

Il faut désormais s'assurer que la sensibilité a été peu affectée. On le confirme avec les courbes de sensibilités présentées figure 4.55. Cet exemple donne un bon aperçu des possibilités offertes par ce genre d'optimisation, qui permet un large contrôle des caractéristiques du masque.

Masques achromatiques

Tous les masques produits ici sont des masques hautement chromatiques : on le constate car ils épousent très clairement la forme de la PSF, générée pour une seule longueur d'onde. Lorsque l'on définit les paramètres réduits des masques pour

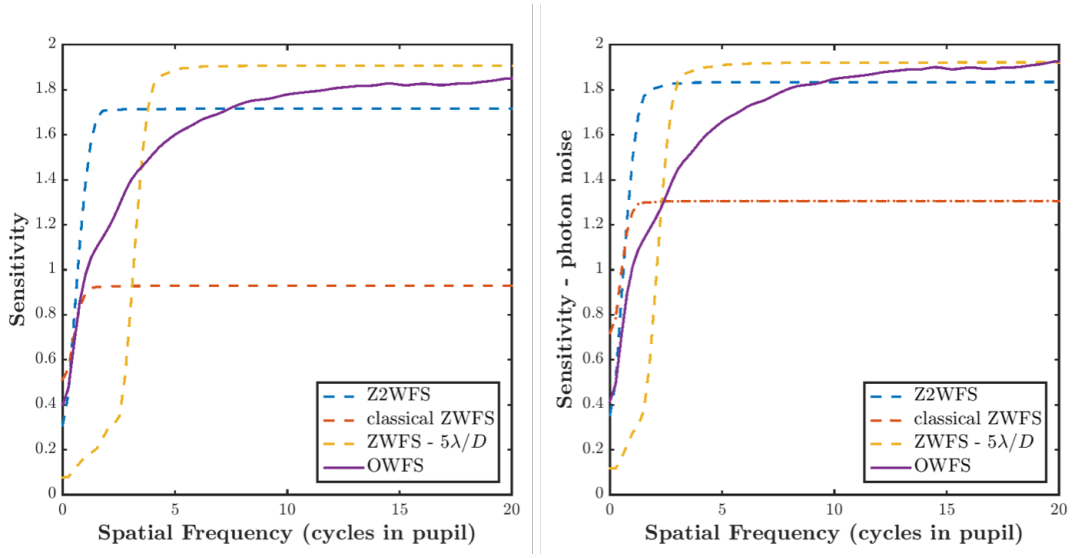


FIGURE 4.55 – **Sensibilités du masque optimisé sous contraintes**, une seuil de sensibilité ayant été utilisée comme contrainte dans l'optimisation.

l'optimisation, on pourrait contraindre leur forme à être achromatique. On sait que pour qu'un masque soit achromatique, il doit être invariant d'échelle : la forme du masque "vu" par des PSF de tailles différentes doit être toujours identique. Mathématiquement, on a vu qu'on peut définir cette propriété en définissant le masque Δ en OPD sous la forme suivante :

$$\Delta_{OPD}(\rho, \theta) = f(\theta)\rho \tag{4.16}$$

où $f \in \mathcal{C}^0$ (f continue) sur $[0, 2\pi]$ avec $f(0) = f(2\pi)$. On peut exprimer cette relation en terme de phase à la longueur d'onde λ :

$$\Delta(\rho, \theta) = \frac{2\pi}{\lambda} f(\theta)\rho \tag{4.17}$$

Grâce à cette définition des masques, on pourrait donc lancer l'optimisation sur la fonction f qui décrit intégralement la forme du masque : on obtiendrait des masques optimisés... achromatiques ! La partie compliquée de l'implémention consiste à forcer f à être continue. Une stratégie possible est d'optimiser f sur un nombre limité de points puis interpoler les valeurs entre chaque point optimisé. Cette méthode n'est encore pas aboutie et demande de nombreux développements supplémentaires, on fournit tout de même ici un résultat préliminaire particulièrement instructif. On mène l'optimisation sur une pupille circulaire pleine définie sur un tableau de 50×50 pixels, avec un échantillonnage à deux fois Shannon. Le masque optimisé ainsi que les intensités de références correspondantes sont donnés figure 4.56. Le masque produit, malgré quelques zones de forte pente pour la fonction f, ressemble particulièrement à un axicon aplati. En effet le masque est structuré avec des cercles concentriques et les sauts de phases écartés nous indiquent une faible pente suivant la direction radiale.

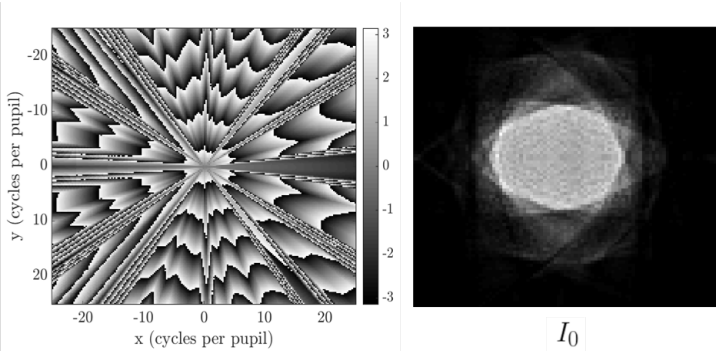


FIGURE 4.56 – **Phase du masque achromatique et intensités de référence correspondantes.**

On présente la sensibilité (à un bruit uniforme, on rappelle que c'est bien sur celle là que l'on optimise) du masque ainsi produit figure 4.57. À l'instar des pyramides *aplaties*, on constate la présence d'oscillations qui poussent d'autant plus le parallèle fait avec l'axicon aplati, dont la sensibilité pour une configuration proche est aussi affichée. Une remarque à la vue de ces courbes : l'optimisation n'est pas optimale et a convergé vers un minimum local, car l'axicon aplati servant de comparaison présente de meilleures performances globales.

Une conclusion tout de même tentante, mais qui reste à démontrer et donc à prendre avec prudence : ce résultat préliminaire semblerait donc exposer le fait qu'il n'existe pas de masque achromatique évident ayant une sensibilité à un bruit uniforme plafonnant à 2 pour une grande plage de fréquences, tels que les masques chromatiques présentés précédemment. De plus, la classe des pyramides *aplaties* engendrant une oscillation dans les sensibilités serait alors une façon assez naturelle d'optimiser la sensibilité de manière achromatique, mais que pour certaines fréquences seulement.

Optimisation de la modulation

On revient sur le fait que la formule du modèle convolutif utilisée pour décrire la sensibilité fréquentielle possède deux paramètres : le masque m et la fonction de modulation ω. Dans ce qui a été suggéré précédemment, on a fixé ω pour optimiser la forme du masque. On peut imaginer faire l'inverse : pour un masque fixé, on peut optimiser la forme de la modulation pour accroître la sensibilité à certaines fréquences. Une application concrète serait par exemple l'optimisation de stratégies de modulation pour améliorer la sensibilité de l'ASO pyramide 4 faces au piston différentiel, comme proposé dans [Bertrou-Cantou et al., 2020].

Optimisation de la dynamique ?

L'outil développé nous permet donc d'avoir un grand contrôle sur la sensibilité des masques. On aimerait logiquement pouvoir optimiser les masques aussi au niveau

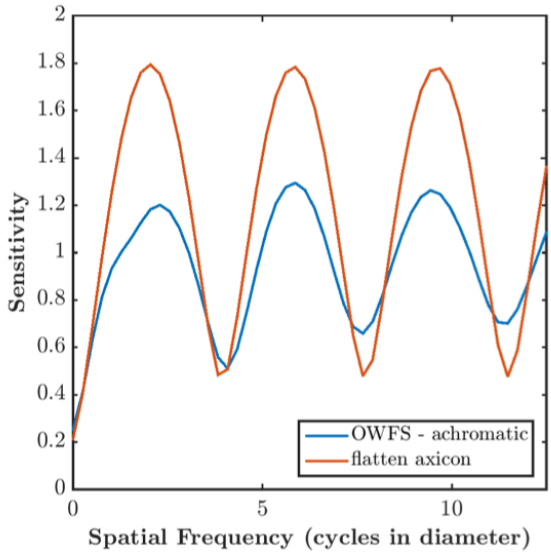


FIGURE 4.57 – **Sensibilité du OWFS achromatique comparée à un axicon plat.**

de leur dynamique. On comprendra au chapitre suivant que le modèle convolutif a aussi un rôle à jouer de ce côté là. Cette possibilité n'a été que brièvement explorée, sans résultat probant pour le moment : cette piste est à examiner bien plus largement car elle parait très prometteuse pour tenter de construire des ASO à haute dynamique tout en ayant une grande sensibilité via l'optimisation sous contraintes.

⊙

À l'aide des critères de performances établis dans le chapitre précédent, j'ai apporté une comparaison exhaustive et quantitative des ASO à filtrage de Fourier de type pyramide et de Zernike. Certains critères développés dans le chapitre précédent ont permis d'apporter un éclairage totalement neuf sur le comportement des ASO, même ceux largement étudiés auparavant comme la classe des ASO pyramide. A été aussi apporté une toute nouvelle compréhension de la classe des ASO de Zernike dont on peut optimiser la sensibilité en jouant sur la taille de la pastille déphasante, conduisant à des propositions de configurations extrêmement sensibles et qui ont fait l'objet d'un publication [Chambouleyron et al., 2021a]. Enfin, j'ai mis au point une technique d'optimisation des masques qui permet de construire des masques optimaux en sensibilité. Cette technique d'optimisation se présente comme un nouvel outil d'amélioration des ASO à filtrage de Fourier, et semble apporter la promesse de nombreuses avancées dans la construction de masques optimaux. Cette technique sera présentée à la communauté dans un papier en cours de préparation.

Finalement, l'un des points clefs de ce chapitre a été de montrer qu'il était possible d'améliorer fortement les performances des masques en terme de sensibilités. Quand est-il des performances en terme de dynamique ? Aujourd'hui, toutes les 4PWFS sur ciel fonctionnent en régime modulé : preuve incontestable que la dynamique reste un problème majeur des ASO à filtrage de Fourier en pratique, au point que les scientifiques de l'OA sont prêts à y sacrifier lourdement la sensibilité. J'ai beaucoup évoqué la notion de gains optiques comme métrique de non linéarité, mais les gains optiques sont en réalité bien plus que ça : ils peuvent être utilisés de façon à améliorer la dynamique des ASO. Cette idée est au coeur même du chapitre suivant.

Chapitre 5

Gestion des non linéarités : stratégies d'estimation des gains optiques

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus profondément aux non linéarités qui affectent les ASO à filtrage de Fourier. La notion des gains optiques sera au centre au centre des développements présentés. Ce concept, utilisé jusqu'à maintenant comme un critère de dynamique, peut être employé pour compenser en partie les effets des non-linéarités sur les mesures. Je propose dans ce chapitre une façon originale de pouvoir suivre ces gains optiques au cours d'une observation. Une fois de plus dans cette thèse, la méthode proposée s'articulera autour du formalisme convolutif. Dans le première section de ce chapitre, je rappelle les différents écarts à l'étalonnage qui peuvent affecter les mesures du front d'onde. Je mets en avant l'écart à l'étalonnage principal affectant les signaux délivrés par les ASO à filtrage de Fourier : les phases résiduelles qui font sortir ces senseurs de leurs régimes de linéarité. Dans la deuxième section, j'explique alors comment on peut utiliser le modèle convolutif pour estimer les gains optiques. Enfin la troisième et quatrième section se penchent sur un concept d'analyseur innovant qui permet de mettre en oeuvre une méthode de suivi des gains optiques trame à trame. Les travaux présentés dans ce chapitre ont conduit à deux publications : [Chambouleyron et al., 2020, Chambouleyron et al., 2021b]

Sommaire

5.1 Écarts à l'étalonnage et contrôle du front d'onde 161
5.1.1 Généralités sur les écarts à l'étalonnage 161
5.1.2 Impact des gains optiques sur le contrôle du front d'onde . 163
5.2 Estimation des gains optiques via le modèle convolutif . 169
5.2.1 Méthodes existantes 169
5.2.2 Compréhension des gains optiques via le modèle convolutif 170
5.2.3 Une nouvelle méthode d'estimation des gains optiques . . 171
5.3 Un nouveau senseur : la pyramide assistée par plan focal 177
5.3.1 Vers une estimation trame à trame 177
5.3.2 La "Gains Scheduling Camera" 179
5.3.3 Un point sur les hypothèses 186
5.3.4 Exemple d'applications de la GSC 188
5.4 La GSC, au-delà des équations du modèle convolutif . . 195
5.4.1 La matrice d'interaction impulsionnelle 195
5.4.2 Nouvelle méthode de détermination des gains optiques . . 198
5.4.3 Conclusion sur cette approche 199

Ce chapitre s'intéresse à un problème concret et bien connu, auquel sont confrontés tous les utilisateurs d'ASO à filtrage de Fourier : les gains optiques, c'est à dire la baisse de sensibilité lors d'un fonctionnement en présence de phases résiduelles (comme on a pu le voir au chapitre 3 et 4). On focalise tout au long de ce chapitre les études sur exclusivement un seul analyseur : la 4PWFS *classique*, car c'est de loin l'ASO à filtrage de Fourier le plus utilisé en OA pour l'astronomie. On n'utilisera plus qu'une seule base modale pour nos travaux : la base des KL atmosphériques. Les stratégies développées ici pourraient néanmoins être transposées telles qu'elles à d'autres configurations d'OA que celles choisies comme exemples pour ce chapitre, et avec un peu d'effort à d'autres types d'ASO à filtrage de Fourier.

5.1 Écarts à l'étalonnage et contrôle du front d'onde

5.1.1 Généralités sur les écarts à l'étalonnage

On l'a déjà évoqué, l'étalonnage est une étape clef de la mise en place d'un ASO permettant de construire la matrice d'interaction. Cette matrice décrit le problème direct linéaire qui relie la forme du DM aux mesures de l'ASO. Au cours d'une observation, tout écart de fonctionnement par rapport à cette matrice entraîne nécessairement des erreurs dans le contrôle du front d'onde. On liste ici les principales sources d'écart à l'étalonnage :

- **Les désalignements entre le DM et l'ASO**. Tout mouvement différentiel entre le DM et l'ASO entraîne un déplacement de la position des actionneurs sur le détecteur de l'ASO, pouvant rendre complètement caduque la matrice d'interaction. Ce problème est pris très au sérieux, notamment dans le cadre de l'ELT où le DM est placé très tôt dans le chemin optique : un grand nombre d'éléments optiques le sépare alors de l'ASO [Heritier et al., 2018].
- **L'étendue spectrale de la source**. L'étalonnage est généralement fait avec une source monochromatique, or l'étoile guide possède un spectre étendu sur la bande spectrale où l'on mène l'analyse. Cela a été précisé au chapitre 2 : même dans le cas d'un senseur achromatique, c'est une source d'écart à l'étalonnage. Pour compenser parfaitement cet effet, il faudrait mener l'étalonnage avec une source ayant un spectre identique à celui de l'étoile guide.
- **Différence entre la pupille d'étalonnage et la pupille vraie**. En effet, la source d'étalonnage ne voit généralement pas le miroir primaire : elle est située quelque part dans le train optique en amont du DM. Il en résulte souvent que l'étalonnage est fait sur une pupille simplifiée par rapport à la pupille vraie. Par exemple pour la SCAO du télescope Keck II, l'étalonnage de la 4PWFS est faite sur une pupille circulaire pleine (absence de la structure en créneau due aux miroirs hexagonaux en bord, des spiders et de l'obstruction centrale) [Bond et al., 2020].
- **Structure spatiale de la source**. On a un écart à l'étalonnage si la source de référence est étendue, ou bien plus généralement s'il y a d'autres sources lumineuses dans le champ de vue de l'ASO.
- **Les phases résiduelles**. À cause du comportement non-linéaire de l'ASO,

on a déjà introduit le fait que les phases résiduelles entraînent une perte globale de sensibilité par rapport à l'étalonnage.

Tous ces effets conduisent donc à une différence entre l'étalonnage et le régime de fonctionnement "vrai" du système, ou autrement dit à une mauvaise connaissance du problème direct. Dans le cadre de ce chapitre, on s'intéresse à **une seule de ces sources d'écart à l'étalonnage : celle due aux phases résiduelles**, car c'est celle qui domine dans le cas de la 4PWFS [Esposito and Riccardi, 2001]. Il est cependant utile de préciser que la notion de gain optique et plus globalement de matrice de transfert optique définie plus tôt dans cette thèse pourrait s'appliquer à la majorité des problèmes listés ci-dessus, on reviendra sur ce point en fin de chapitre.

Comparaison entre le SHWFS et la 4PWFS

On rajoute un commentaire qui paraît très important sur cette liste d'écarts à l'étalonnage, très peu évoqué lorsque l'on compare le SHWFS avec la 4PWFS : on constate assez facilement que ces écarts sont majoritairement peu problématiques pour le cas SHWFS. Pour preuve :

- La différence entre la pupille d'étalonnage et la pupille vraie. Dans le cas du SH, cet effet a une incidence limité car c'est le réseau de micro-lentilles qui imprègne la forme du signal sur le détecteur. Les seules sources d'écarts viennent à la rigueur des sous-pupilles en bord de pupille.
- Étendue spectrale de la source. La mesure de chaque sous-pupille est un tip-tilt local : le spectre de la source ne change pas le centre de masse de chaque PSF créée par le réseau de micro-lentilles.
- Structure spatiale de la source : le centre de masse tronqué permet de s'affranchir en grande partie de l'impact des autres étoiles ou structures lumineuses dans le champ.
- Les phases résiduelles : ce point est en revanche très connu et bien identifié, le SHWFS est bien plus linéaire que la 4PWFS.

Au delà de la notion de dynamique, on constate que le SHWFS semble ainsi présenter une robustesse vis à vis des écarts à l'étalonnage plus grande que la 4PWFS dans sa façon même d'encoder la phase.

Le cas spécifique des phases résiduelles comme source d'écart à l'étalonnage

On rappelle que si l'on nomme $\mathcal{D}_{\text{calib}}$ la matrice d'interaction calculée à l'étalonnage, on a défini la matrice de transfert optique T_{res} la matrice qui permet de passer de $\mathcal{D}_{\text{calib}}$ à la matrice d'interaction $\mathcal{D}_{\text{res}}$ correspondant au comportement moyen en présence de phases résiduelles (chapitre 3).

$$\mathcal{D}_{\text{res}} = \mathcal{D}_{\text{calib}}.T_{\text{res}} \tag{5.1}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, on se place dans **l'approximation diagonale** : c'est à dire que l'on considère T_{res} diagonale (cf. 3.2.2.1). Dans ce cas, on écrit $T_{\text{res}} = G_{\text{res}}$. Si l'on ne tente pas de compenser cet écart à l'étalonnage, une

telle modification de la matrice d'interaction va avoir un effet néfaste sur différentes facettes du contrôle de front d'onde.

5.1.2 Impact des gains optiques sur le contrôle du front d'onde

Les gains optiques, en affectant la matrice d'interaction, brouillent ainsi le lien entre la phase mesurée et le signal délivré par l'ASO, avec logiquement des conséquences sur beaucoup d'aspects du contrôle de front d'onde. On détaille ici quelques applications concrètes où les gains optiques engendrent des problèmes significatifs.

5.1.2.1 Effet sur les performances en boucle fermée

L'impact le plus évident de la présence de gains optiques est une baisse des performances de la boucle d'OA. La matrice d'interaction calculée à l'étalonnage permet d'inverser le signal fourni par la 4PWFS. On a :

$$\Delta I_{res} = \mathcal{D}_{\text{res}}.\phi \tag{5.2}$$

Si on utilise le reconstructeur $\mathcal{D}^{\dagger}_{\text{calib}}$ pour calculer une estimation $\tilde{\phi}$ de la phase :

$$\tilde{\phi} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\text{calib}}.\mathcal{D}_{\text{res}}.\phi = T_{\text{res}}.\phi \tag{5.3}$$

On constate que la phase estimée présente une erreur qui dépend de la matrice de transfert optique. On l'a déjà évoqué auparavant : si l'on décompose ϕ sur une base modale pour laquelle on est dans l'approximation diagonale, **chaque mode est donc sous-estimé de la valeur du gain optique correspondant à ce mode**. On a ainsi une erreur spatiale très conséquente sur l'estimation de phase : on a par exemple vu que dans un cas de phases résiduelles correspondant à une erreur de fitting pour un système d'OA classique idéal sur un télescope type VLT ($D = 8\ m$, $r_0 = 15\ cm$ et 20 actionneurs dans le diamètre de la pupille) les gains sont aux alentours de 0.5. Soit une sous-estimation d'un facteur 2 ! On note tout de même que la phase est toujours sous-estimée (gains optiques inférieures à 1) et non sur-estimée : le cas contraire mènerait à de conséquents problèmes de stabilité de boucle.

Dans le cas de la boucle fermée, l'impact des gains optiques pour chaque mode a exactement le même effet que si l'on avait utilisé un gain de boucle trop faible (par rapport au gain de boucle idéal) pour ce mode. Ainsi les contributions d'une erreur temporelle accrue à cause d'un choix erroné de gains temporels modaux (on les note G_{temp}) d'un côté et l'erreur spatiale de reconstruction due aux gains optiques de l'autre sont très compliquées à démêler (voir schéma bloc 5.1). Par conséquent, si l'on essaie de compenser les gains optiques au sein de la boucle dans le but de converger vers des performances optimales, il n'est pas assuré que le jeu de gains optiques utilisé soit le bon : on aura juste trouvé la configuration G_{temp}/G_{res} idéale minimisant le front d'onde résiduel. C'est d'ailleurs la tâche que réalise certaines méthodes telles que CLOSE [Deo et al., 2019]. La configuration idéale dépendra donc à la fois des gains optiques de la 4PWFS mais aussi des gains temporels optimaux, qui dépendent

du système et des conditions de vent et de bruit. Ainsi à cause de cette ambiguïté, les performances en boucle fermée ne représentent pas nécessairement un critère de bonne estimation des gains optiques.

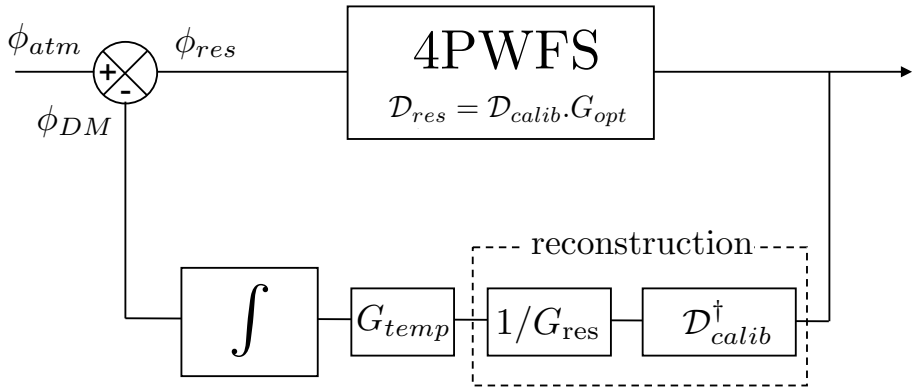


FIGURE 5.1 – **Diagramme bloc de la boucle fermée en présence de gains optiques.** Les gains de boucle mêlent la contribution des gains temporels et des gains optiques.

Se pose alors la question suivante : la connaissance des gains optiques est-elle finalement importante en terme de contrôle de front d'onde, du moment où l'on dispose d'outils pour optimiser les performances de la boucle d'OA sans démêler les gains temporels des gains optiques ? On donne ici quelques exemples de problématiques de contrôle de front d'onde où la connaissance des gains optiques est effectivement cruciale, en commençant par l'un des plus importants : la gestion des *Non-Common Path Aberrations* (NCPA).

5.1.2.2 Effet sur les NCPA

Descriptions des NCPA

Lorsque la lumière de l'étoile guide se propage dans l'instrument, on peut distinguer deux grandes parties dans le trajet optique :

Le chemin commun (*common path*) : c'est la partie de l'instrument en amont de la lame dichroïque, venant séparer le faisceau entre la voie science et la voie ASO. Toutes les aberrations optiques localisées dans cette partie seront présentes de manière identique sur la voie science et la voie analyse. Ainsi, un front d'onde plan sur l'ASO correspondra aussi à un front d'onde plan sur la voie science.

Les chemins non communs (*non-common path*) : ce sont les trajets optiques après la dichroïque, un pour la voie science et l'autre pour la voie analyse. Ces trajets là ne sont plus constitués des mêmes éléments optiques et leurs aberrations propres n'ont plus aucune raison d'être identiques. Si l'ASO converge vers un front d'onde plan, on aura alors sur la voie science les aberrations de la voie science plus l'opposé de celles sur la voie ASO. C'est ce cumul d'aberrations que l'on

appelle les NCPA : $\phi_{\text{NCPA}} = \phi_{science} - \phi_{ASO}$. On comprend bien leur dénomination : toutes les aberrations communes aux deux branches seront supprimées, restant seulement les aberrations non communes. Sans restriction de généralités et pour plus de simplicité, on va considérer par la suite que toutes ces aberrations non-communes sont présentes dans une seule voie, on choisit arbitrairement la voie ASO.

La problématique des NCPA est schématisée figure 5.2, où l'on se place dans un exemple sans aberrations communes : On illustre alors la configuration boucle ouverte où toutes les NCPA sont dans la voie ASO et la configuration boucle fermée où l'on converge vers un front d'onde plan au niveau de l'ASO, répercutant ainsi l'opposé des NCPA sur la voie science. La gestion de ces NCPA est donc un point capital, surtout depuis l'avènement de l'XOA et le contrôle de front d'onde très haute précision.

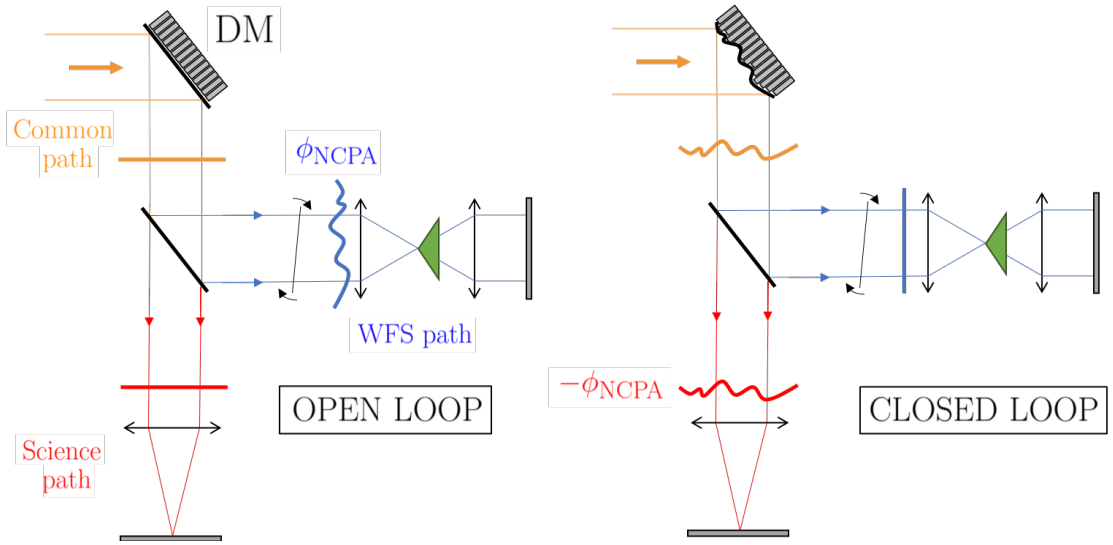


FIGURE 5.2 – **Explication schématique des NCPA.**

Gestions des NCPA

Il existe alors deux façons de gérer les NCPA. Ces deux façon demandent nécessairement d'avoir estimé ces NCPA au préalable. On peut tout d'abord résoudre le problème optiquement, en plaçant un élément optique dédié dans l'une des branches science ou ASO pour compenser les NCPA. Cet élément peut être par exemple une lame de phase [Clénet et al., 2019] qui a l'inconvénient d'être statique ; de manière plus ambitieuse mais plus risquée, on peut utiliser un DM [Dohlen et al., 2018] qui aura l'avantage de pouvoir suivre une possible évolution des NCPA. L'autre façon de faire qui nous intéresse particulièrement ici consiste à appliquer sur l'ASO un signal de référence non-nul qui correspond à la mesure de la phase des NCPA. Le front d'onde dans la voie ASO va ainsi converger vers ce signal de référence et mener à un front d'onde plan dans la voie science. Pour mieux comprendre cette méthode de gestion des NCPA, écrivons, dans le cas classique d'un contrôleur intégral, les commandes envoyées au DM à la trame t :

$$c|_t = c|_{t-1} - G_{temp}.\mathcal{D}^{\dagger}_{calib}.\Big[\Delta I(\phi_{res}|_t) - \Delta I(\phi_{\text{NCPA}})\Big] \tag{5.4}$$

où l'on rappelle que G_{temp} une matrice diagonale dont les valeurs sont idéalement les gains temporels modaux optimaux. On constate bien dans cette équation que la boucle va converger vers $\phi_{res} = \phi_{\text{NCPA}}$, situation pour laquelle la forme du DM n'est pas modifiée. Il est important de préciser que la détermination de $\Delta I(\phi_{\text{NCPA}})$ est généralement obtenue en déterminant la forme précise des NCPA et en les montrant à l'ASO, dans les conditions d'étalonnage (source monochromatique à la diffraction). Cette façon de procéder, largement utilisée avec le SHWFS, fonctionne très bien lorsque le comportement de l'ASO est très proche de celui calculé à l'étalonnage. C'est à dire lorsque le senseur est très linéaire et que le signal délivré pour une phase ϕ vaut $\Delta I(\phi) = \Delta I_{calib}(\phi)$.

Influence des gains optiques sur les intensités de référence

On sait qu'à cause de ses non linéarités, le signal moyen délivré par la 4PWFS en boucle fermée est $\Delta I(\phi) = \Delta I_{res}(\phi) \neq \Delta I_{calib}(\phi)$. L'équation 5.4 devient alors :

$$c|_t = c|_{t-1} - \frac{G_{temp}}{G_{\text{res}}}.\mathcal{D}^{\dagger}_{calib}.\Big[\Delta I_{res}(\phi_{res}|_t) - \Delta I_{res}(\phi_{\text{NCPA}})\Big] \tag{5.5}$$

Dans cette équation, si $\Delta I_{res}(\phi_{res}|_t)$ est bien la mesure de l'ASO à l'instant t, $\Delta I_{res}(\phi_{\text{NCPA}})$ est fourni par l'utilisateur. Or cette valeur est reliée à ϕ_{NCPA} dans l'approximation diagonale selon :

$$\Delta I_{res}(\phi_{\text{NCPA}}) = \mathcal{D}_{res}.\phi_{\text{NCPA}} = \mathcal{D}_{calib}.G_{\text{res}}.\phi_{\text{NCPA}} \tag{5.6}$$

Ainsi, on constate que l'utilisateur doit nécessairement avoir accès à la matrice G_{res} afin d'effectuer un **recalage des signaux de référence** et mener à bien le contrôle des NCPA. Dans ce cas là, la connaissance G_{res} indépendamment de G_{temp} est requise.

La catastrophe des NCPA

On propose ici d'analyser le cas où l'on tenterait de compenser des NCPA sans se préoccuper du recalage des signaux de références par les gains optiques. On utilise ainsi $\Delta I_{calib}(\phi_{\text{NCPA}})$ au lieu de $\Delta I_{res}(\phi_{\text{NCPA}})$ dans l'équation 5.5.

Dans ce cas, aucune commande n'est envoyée au DM lorsque l'on atteint :

$$\Delta I_{res}(\phi_{res}|_t) - \Delta I_{calib}(\phi_{\text{NCPA}}) = 0 \tag{5.7}$$

en développant :

$$\mathcal{D}_{calib}.G_{\text{res}}.\phi_{\text{NCPA}} = \mathcal{D}_{calib}.\phi_{\text{NCPA}} \tag{5.8}$$

Ainsi la boucle converge vers :

$$\phi_{res}|_t = \frac{\phi_{\text{NCPA}}}{G_{\text{res}}} > \phi_{\text{NCPA}} \tag{5.9}$$

car les gains optiques sont toujours inférieurs à 1. On va simplifier ce problème en considérant que les optiques sont identiques pour tous les modes portés par ϕ_{NCPA} : $G_{\text{res}} = g_{opt}\mathbf{I}$ (avec $\mathbf{I}$ la matrice identité). Dans ce cadre simplifié, il est alors facile d'appréhender le comportement en boucle fermée. Distinguons deux cas :

$1 \geq g_{opt} \geq 0.5$: la boucle converge autour d'une phase statique qui surestime les NCPA d'un facteur 1 à un facteur 2. Dans le pire des cas ($g_{opt} = 0.5$, facteur 2), la boucle converge vers des aberrations dans la voie science qui sont l'opposé des NCPA d'origine, entraînant des performances finalement similaires par rapport au cas sans compensation. Les autres cas entraînent tout de même un gain en performance, avec bien entendu une compensation idéale des NCPA dans le cas sans gains optiques ($g_{opt} = 1$).

$g_{opt} < 0.5$: la boucle converge autour d'une phase statique plus de deux fois supérieure à l'opposé des NCPA, on dégrade ainsi les performances par rapport au cas sans compensation.

En réalité, le problème peut s'avérer légèrement plus compliqué dans les cas où l'on a un gain optique faible avec une NCPA de grande amplitude à gérer. Dans ce cas, la boucle peut très vite converger vers une aberration statique très grande (qui sera présente dans la voie science et la voie ASO) qui va venir elle même créer des gains optiques ! la valeur de g_{opt} va encore plus décroître car elle cumulera l'effet des phases résiduelles et de la phase statique générée. À la trame suivante, cette aberration statique va donc être d'autant plus grande que g_{opt} a diminué : on se retrouve alors piégé dans une boucle de rétro-action positive où à chaque trame (voir schéma 5.3), le gain optique augmente entraînant la formation d'une phase statique toujours plus grande. La boucle diverge inexorablement : c'est ce qu'on appelle la catastrophe des NCPA. Ces affirmations basées sur une analyse simplifiée des NCPA seront étayées par des simulations bout-en-bout plus tard dans ce chapitre.

L'exemple des NCPA est donc un exemple qui expose de manière claire les problématiques nouvelles liées à la présence de gains optiques dans les mesures de la 4PWFS.

5.1.2.3 Autres effets

La connaissance des gains optiques s'avère finalement très utile pour toutes les applications où l'on a besoin d'avoir une connaissance fiable du lien entre mesure de l'ASO et phase vraie en entrée du système.

Apodisation en phase dans le plan pupille : on a vu que la gestion des signaux de référence s'avère compliquée. Or, la mise en place de signaux de références non-nuls sur la voie ASO n'est pas seulement utilisée pour la compensation de NCPA.

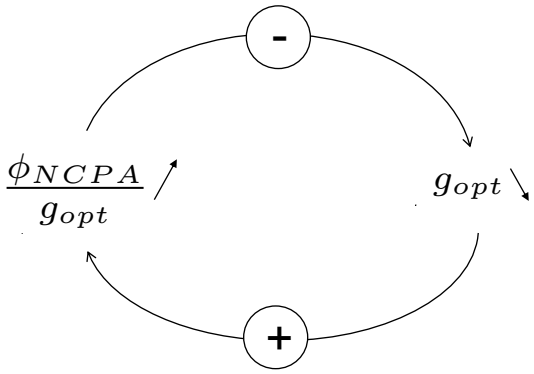


FIGURE 5.3 – **Boucle de rétro-action positive** qui mène à la catastrophe des NCPA

On peut vouloir mettre en place des apodisations en phase de la pupille à l'aide du DM, pour par exemple générer des *dark holes* dans le domaine du haut-contraste.

Contrôle prédictif : cette technique très prometteuse consiste, via la connaissance des phases calculées par l'ASO sur quelques itérations précédentes, à prédire la forme de la turbulence à la trame suivante afin de réduire l'erreur temporelle du système. Cette méthode est à ses débuts et commence à être testée sur ciel [Jensen-Clem et al., 2019]. Pour mener à bien cette méthode, il est crucial d'avoir une bonne estimation des phases mesurées par l'ASO.

Reconstruction de PSF : les données post OA fournies par les télescopes peuvent être améliorées en post-traitement, via principalement des techniques de déconvolution [Beltramo-Martin et al., 2019, Fétick et al., 2019]. Pour cela, il faut utiliser les données de télémétrie afin d'estimer la forme de la PSF au cours de l'observation. Encore une fois, il important de remonter au plus proche des phases mesurées.

Gestion des gains temporels : On a évoqué une technique récente (CLOSE) permettant une optimisation globale des performances de la boucle. Cette méthode prometteuse n'a pas encore été démontrée sur ciel. Les techniques bien éprouvées pour optimiser les gains de la boucle ont quant à elles besoin d'avoir une estimation la plus linéaire possible entre l'ASO et les mesures [Gendron and Lena, 1994].

On espère avoir réussi à démontrer l'utilité d'estimer $\mathcal{D}_{\text{res}}$ pour éviter l'écart à l'étalonnage dans un système d'OA basé sur un ASO 4PWFS. Cela revient donc, dans l'approximation diagonale, à trouver une moyen de suivre les gains optiques dus aux phases résiduelles. Il serait envisageable d'estimer toute la matrice de transfert optique pour une compensation *dense* des non linéarités [Deo, 2019], mais cette possibilité plus compliquée paraît pour le moment hors de portée. La suite de ce chapitre est donc dédiée à la mise en place d'une stratégie d'estimation des gains optiques.

5.2 Estimation des gains optiques via le modèle convolutif

5.2.1 Méthodes existantes

On a montré que la contrainte des gains optiques pose des problèmes majeurs pour le contrôle de front d'onde, et il existe donc d'ores et déjà des études ayant conduit à l'élaboration de stratégies pour compenser cet effet. On les classe en trois grandes catégories.

Étalonnage sur ciel : la première stratégie consiste à étalonner la 4PWFS sur ciel. Cette opération doit être réalisée assez rapidement pour "geler" la turbulence lors de l'étalonnage de chaque mode. L'opération est répétée plusieurs fois, afin de sommer les matrices d'interaction obtenues et obtenir donc une matrice d'interaction moyennée du fonctionnement sur ciel. Cette méthode présente les inconvénients d'être invasive pour les observations scientifiques (puisque l'on génère des modes sur le DM) et de prendre un certain temps à effectuer. De plus, si les conditions d'observations changent durant la nuit, il faut réitérer le processus. En revanche, effectuer une série d'étalonnage sur ciel permet d'obtenir des matrices d'interactions fidèles au comportement sur ciel du senseur, qui prennent en compte des effets potentiellement non pris en compte dans les modèles.

Contrôle d'un jeu de modes : cette stratégie opte pour une solution moins invasive pour la voie science. Elle consiste à sonder seulement quelques modes représentant chacun une plage de fréquence. En modulant sinusoïdalement chacun de ses modes dans le temps, on peut retrouver le signal dans les mesures de la 4PWFS. Comme on connaît l'amplitude de la sinusoïde en entrée, il est possible d'en déduire les gains optiques correspondants aux modes excités. Ces mesures peuvent être faites tout en continuant les acquisitions sur la voie science, dont elles ne dégradent que légèrement les performances. Cette technique testée sur ciel au LBT, utilise seulement trois modes et évalue ainsi les courbes de gains optiques pour trois valeurs seulement : on obtient alors un gain optique basses fréquences, un gain optique moyennes fréquences et un gain optique hautes fréquences [Esposito et al., 2020].

Contrôle d'un jeu de modes et recours à des abaques : cette stratégie est une version plus élaborée que celle décrite précédemment. On sonde juste quelques modes, mais au lieu d'utiliser seulement les valeurs de quelques gains optiques, on extrapole la valeur des autres gains pour les modes non sondés [Deo et al., 2019]. Cette extrapolation se base sur des abaques générées en simulation pour une liste exhaustive de conditions d'observations.

On remarque que toutes les stratégies listées ici sont plus ou moins invasives pour la voie science et doivent être réitérées en cas de changement des conditions d'observation. On verra que la méthode d'estimation des gains optiques que nous allons développer dans le reste de ce chapitre se démarque fortement de celles présentées

ici.

5.2.2 Compréhension des gains optiques via le modèle convolutif

Le modèle convolutif, dont l'utilisation s'est montré fructueuse dans le chapitre précédent, offre un autre tour de force essentiel pour la suite : il permet de décrire physiquement comment le comportement d'un ASO est modifié en moyenne par la présence de phase résiduelles. Pour un fonctionnement autour d'un front d'onde plan, on rappelle que la réponse impulsionnelle s'écrit :

$$\mathbf{IR}_{\text{calib}} = 2Im(\bar{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w|\mathbb{I}_p|^2})) \tag{5.10}$$

En présence de phases résiduelles, en supposant que celles-ci soient stationnaires et isotropes, il a été montré que la réponse est modifiée de telle sorte que la fonction de modulation effective devient [Fauvarque et al., 2019] :

$$w \star |\widehat{\mathbb{I}_p}|^2 \leftarrow w \star |\widehat{\mathbb{I}_p}|^2 \star \widehat{e^{-\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\phi_{res}}}} \tag{5.11}$$

où $\mathrm{D}_{\phi_{res}}$ est la fonction de structure des phases résiduelles. On peut alors ré-écrire la réponse impulsionnelle moyenne affectée par les phases résiduelles :

$$\mathbf{IR}_{\text{res}} = 2Im(\bar{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w \star |\mathbb{I}_p|^2 e^{-\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\phi_{res}}}})) \tag{5.12}$$

On a déjà évoqué que les phases résiduelles agissent comme un surplus de modulation dans le système, et on avait même tenté d'en déduire naïvement la modulation correspondante (section 4.1.3.1). Cette équation permet de décrire et de quantifier précisément ce changement. On comprend finalement avec cette formulation que travailler autour de phases résiduelles est **équivalent en moyenne à épaissir la modulation**, avec un facteur d'épaississement dépendant de la statistique des phases résiduelles à travers leur fonction de structure $\mathrm{D}_{\phi_{res}}$. Pour être plus précis, on constate que la PSF à la diffraction dans $\mathbf{IR}_{\text{calib}}$ est simplement remplacée par son expression longue pause dans $\mathbf{IR}_{\text{res}}$.

Le fait de pouvoir modéliser l'impact moyen d'une gamme de phases par un jeu de tip-tilt incohérents qui pavent le plan focal ne doit pas surprendre le lecteur·rice : cela provient de l'opération de moyenne. Un calcul très similaire, bien connu dans le domaine de la formation d'image , est celui de l'estimation analytique d'une PSF longue pose à travers la turbulence atmosphérique.

Commentaires sur l'approche zonale

C'est un effet bien connu, et confirmé par l'approche convolutive : la perte de sensibilité dépend de la fréquence. On commente ici le fait qu'il est parfois suggéré qu'en basculant sur une base zonale, les gains optiques prennent la forme d'un simple scalaire. Ce n'est absolument pas le cas, et on le prouve très facilement. Raisonnons par l'absurde : si les gains optiques étaient représentés par un scalaire

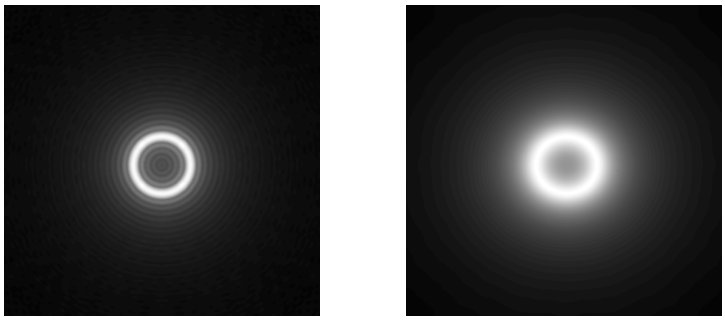


FIGURE 5.4 – **Épaississement de la fonction de modulation en présence de phases résiduelles**. Ici, exemple avec une fonction de modulation circulaire, utilisée classiquement pour la 4PWFS.

pour une base zonale, on pourrait par définition construire n'importe quelle base modale par combinaison linéaire des éléments de cette base zonale. Dans ce cas, les gains optiques associés à cette nouvelle base seraient eux aussi un scalaire. Or, on a vu que ce n'était à minima pas le cas pour la base des KL. Il est donc impossible que les gains optiques puissent être caractérisés par un scalaire, même dans l'approche zonale.

Au-delà de cette démonstration élémentaire, il peut sembler assez intuitif que deux *pokes* dans la pupille présentent la même perte sensibilité pour des conditions de phases résiduelles données. C'est d'ailleurs de ce constat qu'émerge la confusion d'un possible gain optique scalaire au niveau d'une base zonale. En réalité, cette affirmation est quasiment vraie pour deux actionneurs très proches dans la pupille. Dès lors que les actionneurs considérés sont éloignés, leurs contenus fréquentiels ne sont plus identiques, car ils sont situés à des endroits différents de la pupille. Ainsi les gains optiques dépendent de la position de l'actionneur considéré par rapport aux bords. Il serait ainsi possible de construire une carte zonale de gains optiques mais on y préfère une description fréquentielle : description dont on a constaté l'adéquation avec le type d'ASO étudiés dans cette thèse.

5.2.3 Une nouvelle méthode d'estimation des gains optiques

On a vu que le modèle convolutif offre une description simple de l'influence des phases résiduelles sur la réponse de la 4PWFS. On va utiliser cette description pour construire notre méthode d'estimation des gains optiques.

5.2.3.1 De la réponse impulsionnelle aux gains optiques

On suppose connue la statistique de phases résiduelles, et donc la valeur de leur fonction de structure. L'équation 5.12 nous délivre donc la nouvelle réponse impulsionnelle moyenne en présence de ces phases résiduelles. On rappelle que pour le mode ϕ_i, le gain optique s'écrit comme la projection de la réponse moyennée en

présence de phases résiduelles sur la réponse à l'étalonnage, le tout normalisé :

$$G_{\text{res}}(\phi_i) = \frac{\langle \delta I_{\text{res}}(\phi_i) | \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) \rangle}{\langle \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) | \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) \rangle} \tag{5.13}$$

où $\delta I_{\text{res}}(\phi_i)$ est la réponse moyennée sur le jeu de phases résiduelles et, pour rappel, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire. On peut alors ré-écrire cette formule, mais dans le cadre du modèle convolutif :

$$G^{\mathbf{conv}}_{\text{res}}(\phi_i) = \frac{\langle \mathbf{IR}_{\text{res}} \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i \rangle}{\langle \mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i \rangle} \tag{5.14}$$

Avec la connaissance de la fonction de structure des phases résiduelles, il semblerait ainsi que l'on puisse estimer la valeur des gains optiques correspondants. Un schéma de la méthode est donné figure 5.5 : avec la donnée de $D_{\phi_{res}}$, on calcule la nouvelle réponse impulsionnelle. Ensuite, il faut ensuite convoluer tous les modes avec cette nouvelle réponse pour appliquer la formule ci-dessus.

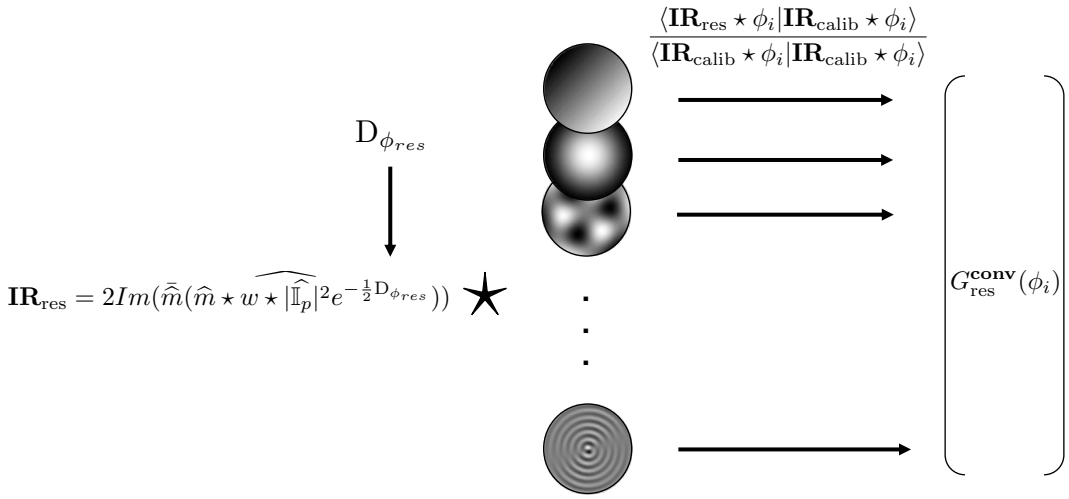


FIGURE 5.5 – **Stratégie d'estimation des gains optiques grâce au modèle convolutif**. Il est nécessaire d'obtenir d'une façon ou d'une autre une estimation de $D_{\phi_{res}}$.

Optimisation du temps de calcul

Au cours de cette thèse, il n'a pas spécialement été recherché à optimiser le temps de calcul de cette méthode, bien que cette étape sera sûrement nécessaire lors de sa mise en place pratique. On propose tout de même de simplifier l'expression 5.14 pour gagner facilement un facteur proche de N_{modes} en temps calcul.

Dans cette équation, l'opération la plus limitante en temps de calcul est le produit de convolution (largement supérieure que pour le produit scalaire ou bien la division). Pour un système donné, on connaît par avance $\mathbf{IR}_{\text{calib}}$ et la base modale

des ϕ_i que l'on contrôle. Par conséquent pour chaque mode, on peut pré-calculer le dénominateur $\langle \mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i \rangle$ ainsi que le terme du numérateur valant $\mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i$ dans l'équation 5.14. Lorsque l'on veut calculer un jeu de gains optiques correspondant à une fonction de structure donnée $D_{\phi_{res}}$, il nous reste alors à calculer N_{modes} produits de convolution : $\mathbf{IR}_{\text{res}} \star \phi_i$:

$$\mathbf{IR}_{\text{res}} \star \phi_i \rightarrow N_{modes} \textbf{ convolutions}$$

Or, on peut remarquer qu'il est possible d'arranger le numérateur à l'aide d'une opération dans le produit scalaire. Il est en effet possible de montrer que :

$$\langle \mathbf{IR}_{\text{res}} \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\text{calib}} \star \phi_i \rangle = \langle \mathbf{IR}_{\text{res}} \star \widehat{\widehat{\mathbf{IR}}}_{\text{calib}} | \phi_i \star \widehat{\widehat{\phi}}_i \rangle \tag{5.15}$$

Dans ce cas là, le terme $\phi_i \star \widehat{\widehat{\phi}}_i$ peut être pré-calculé. Dans le calcul d'un jeu de gains optiques, il reste alors à calculer seulement une seule convolution :

$$\mathbf{IR}_{\text{res}} \star \widehat{\widehat{\mathbf{IR}}}_{\text{calib}} \rightarrow 1 \textbf{ convolution}$$

Cette petite astuce mathématique permet donc d'obtenir un sérieux gain en temps de calcul. On ne s'attardera pas plus longuement sur l'optimisation temporelle de cette méthode au cours de la suite de cette thèse.

5.2.3.2 Précision de la méthode

Maintenant que la stratégie d'estimation des gains optiques mise en place, il faut déterminer si le modèle convolutif va permettre de déterminer précisément les gains optiques. Pour cela, on teste la méthode sur plusieurs configurations de 4PWFS et de phases résiduelles. Les résultats calculés par le modèle convolutif seront systématiquement comparés à ceux fournis par les simulations bout-en-bout. Les résultats donnés ici ont fait l'objet d'une publication [Chambouleyron et al., 2020].

Configurations étudiées

Pour un jeu de phases résiduelles donné, on calcule les gains optiques moyens de la 4PWFS en simulation exactement de la même manière que dans les chapitres précédents. Ce modèle a été testé pour plusieurs configurations afin de sonder la robustesse du modèle à différentes conditions. On fournit ici des résultats pour seulement quelques configurations, choisies de manière à représenter des conditions assez différentes :

— Deux rayons de modulation : $r_{mod} = 3\ \lambda/D$ et $r_{mod} = 5\ \lambda/D$.
— Deux configurations de phases résiduelles : pleine turbulence et phases résiduelles d'un régime d'OA avec 20 actionneurs dans le diamètre. Chacune de ces configurations vient pour deux r_0 différents : $r_0 = 12\ cm$ et $r_0 = 20\ cm$ (à 550 nm).

Les résultats des comparaisons pour toutes ces conditions, avec à chaque fois un calcul en bout-en-bout sur 20 phases décorrélées sont donnés : figure 5.6 pour les cas pleine turbulence et figure 5.7 pour les phases résiduelles de système d'OA. Pour

chacune des courbes fournies, on y observe : la moyenne des gains optiques calculés en simulation bout-en-bout, la gamme de valeurs prises par les gains optiques pour toutes les réalisations de phases considérées et enfin, les gains optiques calculés via le modèle convolutif. Ces courbes montrent que, à condition de connaître la fonction de structure des phases résiduelles, on peut bel et bien estimer précisément les gains optiques à l'aide du modèle convolutif.

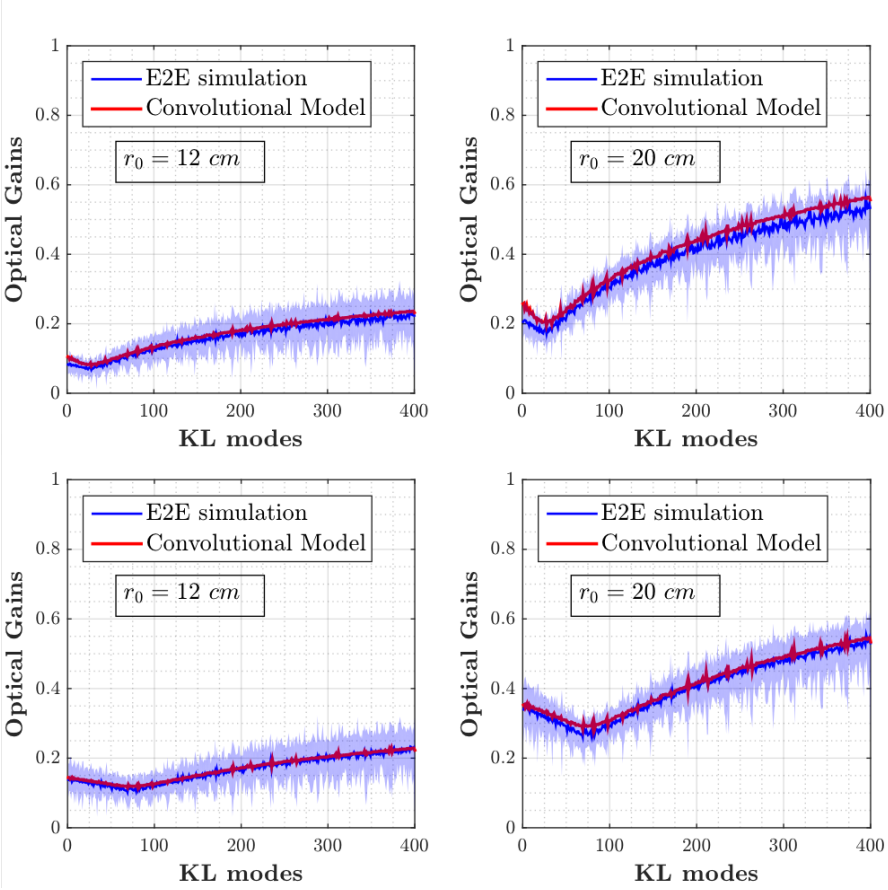


FIGURE 5.6 – **Précision de l'estimation des gains optiques pleine turbulence grâce au modèle convolutif. Haut :** $r_{mod} = 3\lambda/D$. **Bas :** $r_{mod} = 5\lambda/D$

La méthode décrite pour estimer les gains optiques prend en entrée une fonction que l'on a supposée connue jusqu'à maintenant : la fonction de structure $D_{\phi_{res}}$ des phases. Or estimer ce paramètre n'est pas évident, et relève finalement du domaine de reconstruction de la PSF. On estime généralement ce paramètre avec les données de télémétrie de l'ASO. Cependant dans notre cas, les données de télémétrie sont entachées des gains optiques et on veut justement avoir accès à cette fonction de structure afin de pouvoir corriger le signal délivré par l'ASO.

Limitations du modèle

Limite de validité du modèle convolutif pour la 4PWFS. On sonde le comportement du modèle convolutif vis à vis de la modulation en traçant les courbes

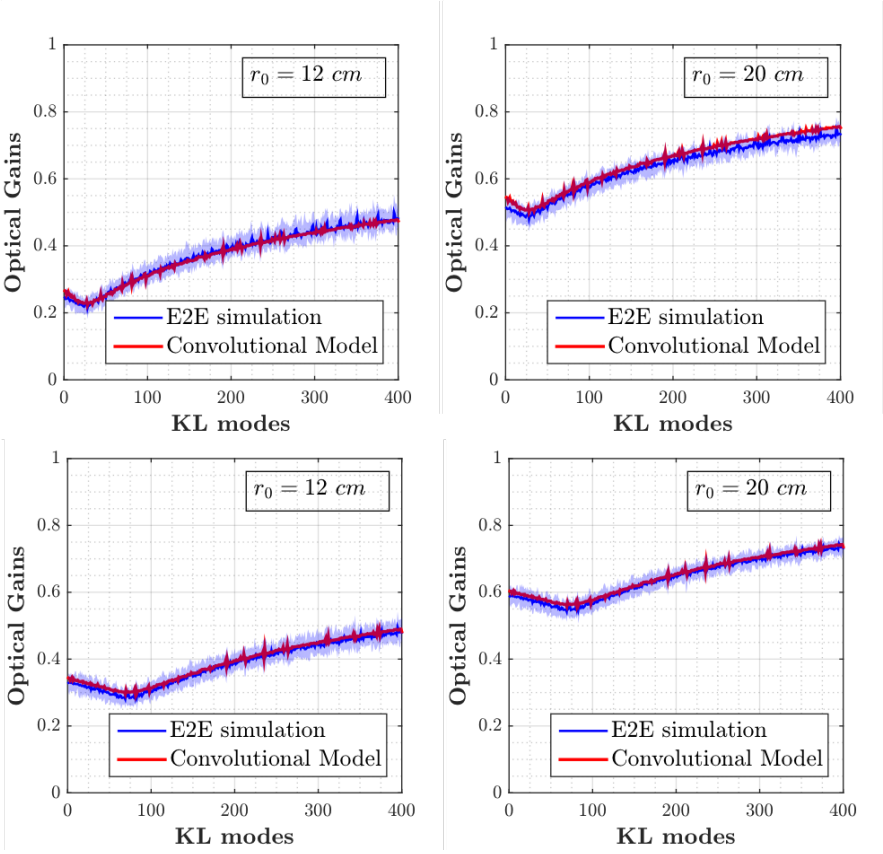


FIGURE 5.7 – **Précision de l'estimation des gains optiques pour une configuration de résidus en boucle fermée d'OA pour $N_{act} = 20$ dans le diamètre grâce au modèle convolutif. Haut : $r_{mod} = 3\lambda/D$. Bas : $r_{mod} = 5\lambda/D$**

de sensibilités linéaires et convolutives pour différents cas de modulation : les résultats sont fournis figure 5.8. Ces graphiques résument bien les deux défauts du modèle convolutif appliqué à la 4PWFS déjà abordés chapitre 2 :

— Le modèle s'éloigne du comportement linéaire lorsque l'on ne module pas. Comme la majorité des 4PWFS sont aujourd'hui utilisées en présence modulation, cet inconvénient n'est pas rédhibitoire. D'autant plus que les réponses fournies par le modèle restent tout de même assez proches du modèle linéaire. On traitera par la suite seulement les cas de 4PWFS modulées. Il reste néanmoins que l'utilisation du modèle convolutif à la 4PWFS non modulée demandera un effort supplémentaire.

— La réponse aux modes à l'intérieur du rayon de modulation est légèrement déformée à cause des bords de la pupille. On le constate sur les courbes de sensibilités, pour lesquelles un écart modeste est marqué avec le modèle linéaire pour ces modes.

Ces deux inconvénients viennent tous les deux du problème en bord de pupille, auquel le lecteur·rice a déjà eu plusieurs mises en garde. On pourrait imaginer des

stratégies qui minimisent cet effet, par exemple en utilisant des phases qui seraient présentées au modèle convolutif dans des pupilles légèrement plus grandes et apodisées en bords. L'objectif ici n'est pas d'avoir un modèle qui décrit précisément la réponse de la 4PWFS, mais plutôt le changement de son comportement en présence de phases résiduelles. Or on a vu que cet inconvénient n'est pas limitant pour cette tâche dans les cas de fonctionnement usuels de la 4PWFS, puisque l'on arrive à estimer de manière précise les gains optiques.

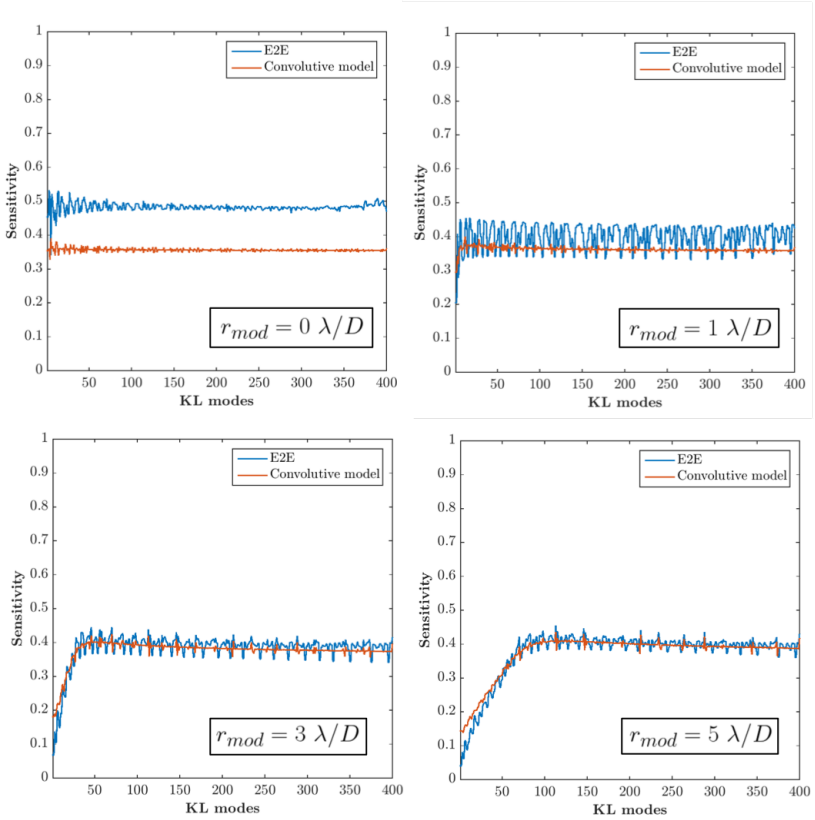


FIGURE 5.8 – **Sensibilité à un bruit uniforme : modèle linéaire *versus* modèle convolutif**

Estimation de $D_{\phi_{res}}$. Finalement, la grande limitation de cette méthode est l'accès à une mesure fiable permettant d'estimer la fonction de structure. On a vu qu'il est exclu de passer directement par le signal de la 4PWFS, puisque c'est justement ces mesures que l'on veut corriger. Cette question motive en partie les développements présentés dans la section suivante.

5.3 Un nouveau senseur : la pyramide assistée par plan focal

5.3.1 Vers une estimation trame à trame

5.3.1.1 État moyen : erreur dans l'estimation

Jusqu'à maintenant, $\mathcal{D}_{\text{res}}$ a été calculé comme étant une moyenne de multiples matrices d'interaction calculées autour de phases résiduelles. Malheureusement une telle approche présente une limitation : les gains optiques varient d'une trame à l'autre, et estimer un état moyen n'assure pas d'avoir les bons gains optiques pour une trame donnée. Ce point est illustré figure 5.9. On y présente le calcul des gains optiques trame à trame pour 1000 réalisations de phases résiduelles en boucle fermée, et ce pour deux conditions de *seeing* : $r_0 = 12$ cm et $r_0 = 18$ cm. On y voit donc une grande variabilité des gains optiques, d'autant plus importante que les phases résiduelles sont grandes. Ainsi, en utilisant seulement une estimation moyenne des gains optiques, on peut atteindre des erreurs de l'ordre de la dizaine de pourcent. Ce chiffre est par ailleurs sous-estimé car on se place dans le **cas idéal** où le paramètre r_0 est fixé dans nos simulations.

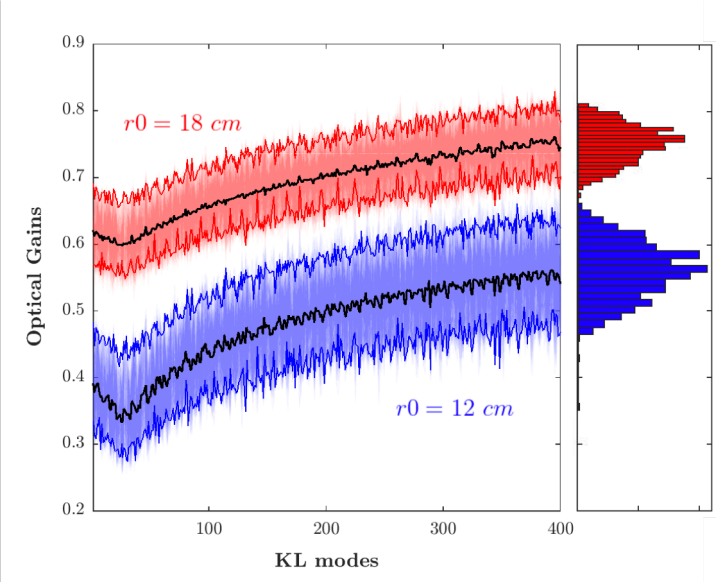


FIGURE 5.9 – **Variabilité des gains optiques en boucle fermée**. On calcule G_ϕ pour 1 000 réalisations de phases dans deux configurations de seeing : $r0 = 18$ cm et $r0 = 12$ cm ($N_{act} = 20$ dans le diamètre). La variabilité des gains optiques trame à trame est bien visible dans les histogrammes figure de droite.

La figure 5.9 justifie à elle seule la volonté de faire une estimation des gains optiques sur une échelle de temps plus courte, voire trame à trame. Pourtant cette tâche n'a jamais encore été proposée dans la littérature, car il semble très difficile de pouvoir la réaliser en pratique. Au vu de la variabilité des gains optiques, il paraît

très néfaste de tenter de mener une estimation avec des gains qui ne soient pas bien synchronisée temporellement avec les mesures.

5.3.1.2 Retour sur l'approche LPVS

On a vu section 3.2.2.1 qu'il est possible de définir la réponse de l'ASO avec une matrice d'interaction qui dépend non pas de la statistique des phases résiduelles, mais plus généralement de la phase elle-même. C'est l'approche LPVS (les systèmes linéaires à paramètres variants) :

$$\Delta I(\phi) = \mathcal{D}_{\phi}.\phi \tag{5.16}$$

Autrement dit, le **comportement linéaire de l'ASO dépend de la phase à mesurer**. Le système est identifié à un système linéaire dont les paramètres varient alors à chaque mesure (schéma figure 5.10).

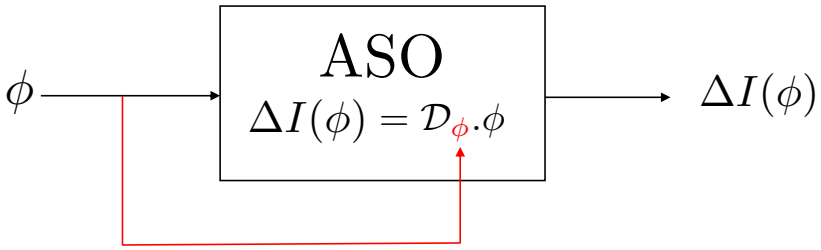


FIGURE 5.10 – **Une façon LPVS de voir la non-linéarité : la matrice d'interaction dépend de la phase en entrée.**

On rappelle que l'on a montré au chapitre 3 qu'il était possible, dans le cadre de phases résiduelles d'un système d'OA, d'associer en moyenne cette matrice à la matrice d'interaction calculée autour de la statistique de ϕ_{res} : $\mathcal{D}_{\text{res}} = \mathcal{D}_{<\phi_{res}>_{\tau}}$. Ici, on propose de pousser cette approche en associant $\mathcal{D}_{\phi}$ à la matrice d'interaction calculée autour de la phase à mesurer ϕ. En procédant de la sorte, si l'on se réfère aux calculs de la section 3.2.2.2, on obtient en réalité pas exactement $\mathcal{D}_{\phi}$ car on n'opère plus l'opération de moyenne. On justifie quand même cette approche par deux arguments :

— On ne connaît pour le moment aucune autre façon d'obtenir $\mathcal{D}_{\phi}$ autrement et cette approche sera finalement récompensée *en pratique* par sa mise en oeuvre fructueuse dans des simulations bout-en-bout.
— On va voir dans la sous-section suivante que cette approche est tout de même légitimée par l'approche convolutive.

En gardant le cadre de l'approximation diagonale, on écrira :

$$\mathcal{D}_{\phi} = \mathcal{D}_{\text{calib}}.G_{\phi} \tag{5.17}$$

où G_ϕ est la matrice diagonale de gain optique liée à la présence de la phase ϕ. Si l'on suit le formalisme des systèmes linéaires à paramètres variants, il faut donc trouver un moyen de suivre l'évolution des paramètres (ici les gains optiques) à chaque trame au cours du temps. En anglais, on parle de *gains scheduling*. Une légère modification de la méthode convolutive proposée plus haut pour estimer les gains optiques va nous permettre de réaliser une telle tâche.

5.3.1.3 Les gains optiques trame à trame via le modèle convolutif

Pour basculer de la réponse impulsionnelle moyennée à une réponse impulsionnelle trame à trame permettant de suivre le régime linéaire de la 4PWFS à chaque mesure, il suffit d'exprimer la version courte pose de l'équation 5.12 :

$$\mathbf{IR}_\phi = 2\mathrm{Im}(\overline{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{\Omega_\phi})) \tag{5.18}$$

avec Ω_ϕ est l'image courte pose la PSF modulée :

$$\Omega_\phi = w \star \mathrm{PSF}_\phi = w \star |\widehat{\mathbb{I}_p e^{i\phi}}|^2 \tag{5.19}$$

On comprend donc que la phase que l'on doit mesurer est elle-même source de modulation : les phases en entrée de la 4PWFS **s'auto-modulent aussi à l'échelle de la trame**. Lorsque la PSF modulée est moyennée sur plusieurs réalisations de phase, on retrouve bien la version du modèle convolutif proposée équation 5.12 :

$$\mathrm{PSF}_{<\phi_{res}>_\tau} = |\widehat{\mathbb{I}_p}|^2 \star \widehat{e^{-\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\phi_{res}}}} \tag{5.20}$$

De la même façon que pour le calcul des gains optiques moyennés, on peut ainsi estimer les gains optiques trame à trame à partir de $\mathbf{IR}_\phi$ de la façon suivante :

$$G_\phi^{\mathbf{conv}}(\phi_i) = \frac{\langle \mathbf{IR}_\phi \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\mathrm{calib}} \star \phi_i \rangle}{\langle \mathbf{IR}_{\mathrm{calib}} \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\mathrm{calib}} \star \phi_i \rangle} \tag{5.21}$$

La visualisation schématique de notre méthode pour l'estimation trame à trame des gains optiques est présentée figure 5.11.

On récapitule la différence entre l'approche moyennée et l'approche trame à trame figure 5.12.

Pour obtenir la réponse impulsionnelle correspondante à la mesure de la phase ϕ, il faut donc avoir accès à la PSF modulée associée à cette phase. On propose logiquement d'effectuer cette mesure à l'aide d'une caméra en plan focal dédiée, que l'on appelle la *Gains Scheduling Camera* (GSC). Ce concept a fait l'objet d'une publication [Chambouleyron et al., 2021b].

5.3.2 La "Gains Scheduling Camera"

5.3.2.1 Montage optique

On cherche à obtenir une image de la PSF modulée au sommet de la pyramide, l'emplacement d'une caméra dédiée à cette tâche est alors toute trouvée : on propose

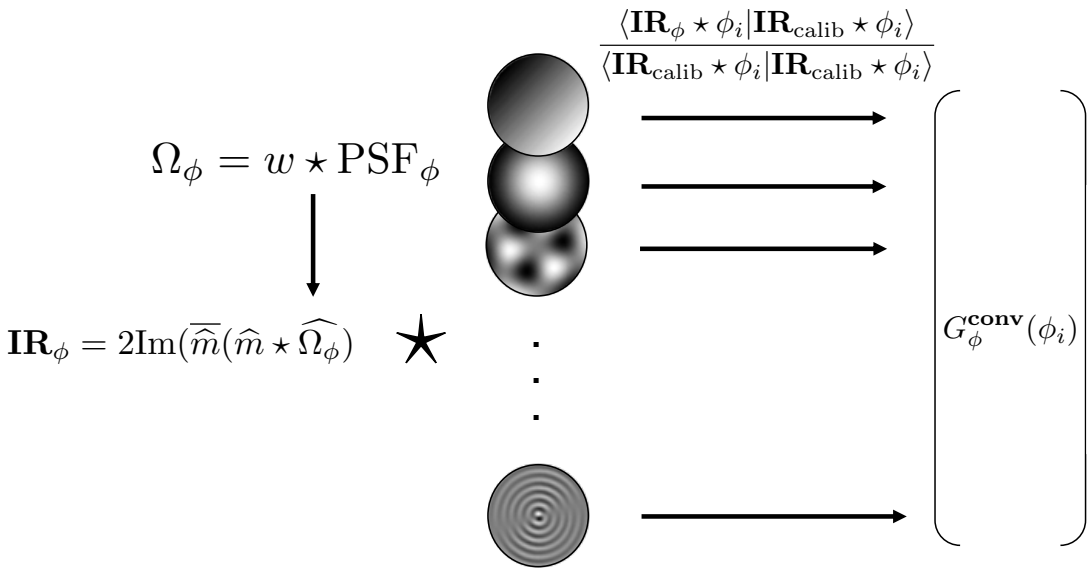


FIGURE 5.11 – **Stratégie d'estimation des gains optiques trame à trame grâce au modèle convolutif**. Il faut cette fois trouver une façon de récupérer la PSF courte pose modulée.

de placer une lame séparatrice avant le sommet de la 4PWFS, afin d'avoir une voie d'imagerie en plan focal. Le dispositif est illustré figure 5.13.

Dans ce montage, la quantité observée par la caméra est bien la PSF modulée. On donne un exemple des signaux délivrés par la GSC figure 5.14. Ces images sont des courtes poses et on remarque que dans le cas de phases résiduelles, le signal prend une forme bien spécifique : on y voit la présence de speckles modulés hors de la zone de correction.

Le temps d'exposition de la caméra vient alors définir la gamme temporelle sur laquelle on va moyenner les gains optiques. Dans le cas d'une acquisition synchronisée avec les mesures de la 4PWFS, le signal délivré par la GSC permet donc un calcul des gains optiques trame à trame via la stratégie schématisée figure 5.11. Il est important de préciser aussi qu'il n'y a en théorie pas de trame de retard : la mesure de la GSC correspond bien à la mesure effectuée par la 4PWFS au même moment. Sous condition d'une mise en œuvre assez rapide du calcul convolutif, la donnée fournie par la GSC peut être utilisée pour traiter le signal délivré par la 4PWFS au même moment.

Ce montage optique, fusionnant les données de deux senseurs (la GSC et la 4PWFS) pour mener l'estimation du front d'onde, peut être vu comme un nouveau senseur totalement inédit : **la pyramide assistée par plan focal**. Il permet d'apporter une solution à la problématique posée par l'approche LPVS schématisée figure 5.10, c'est à dire le besoin d'obtenir une information supplémentaire sur la phase afin de "nourrir" le modèle de l'ASO.

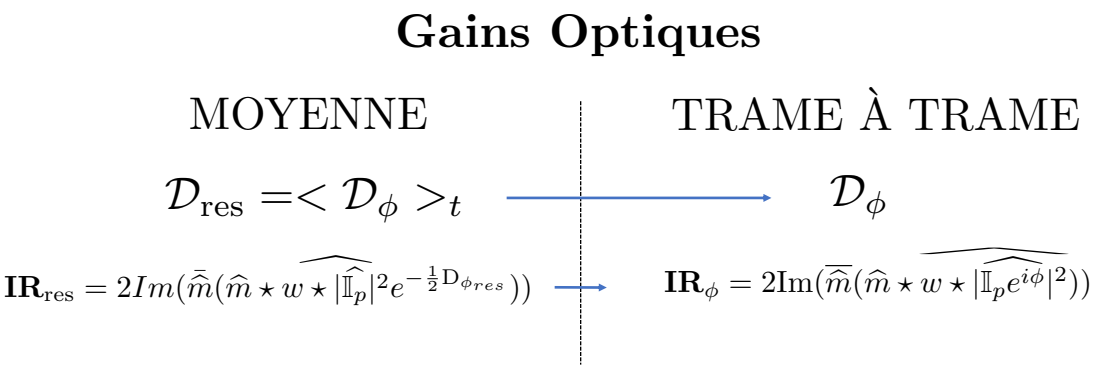


FIGURE 5.12 – **Passage aux gains optiques trame à trame.**

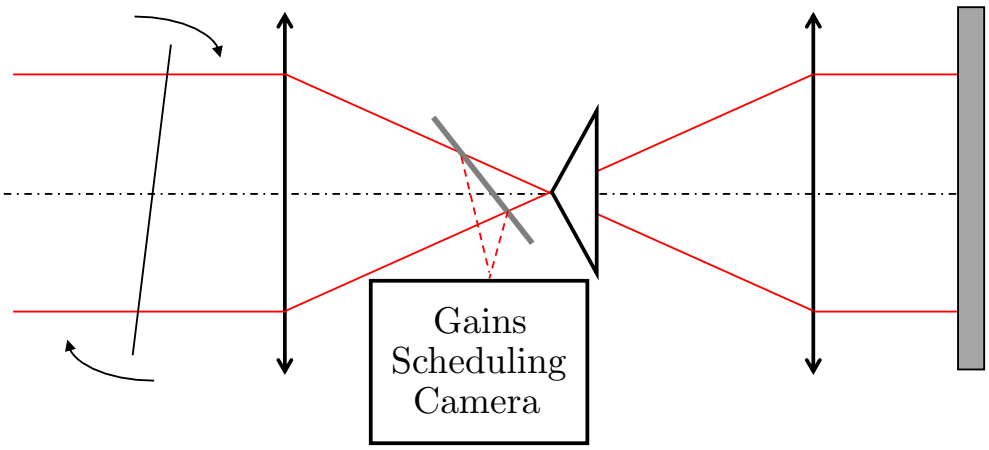


FIGURE 5.13 – **Montage optique de la Gains Scheduling Camera.**

Précision de la nouvelle méthode

On teste cette approche de la même manière que précédemment, mais cette fois on mesure les gains optiques pour une seule réalisation de phase, dans de multiples conditions. Les résultats sont donnés figure 5.15. On y voit que la méthode fonctionne tout aussi bien pour estimer les gains optiques sur une trame. Les estimations sont en effet très proches des simulations bout-en-bout. On observe quelques différences : comme prévu pour une modulation assez faible, les gains optiques estimés des bas-ordres dévient légèrement par rapport à leur calcul bout-en-bout. De plus on constate que les courbes de gains optiques calculées via le modèle convolutif sont bien plus lisses : cela s'explique par le modèle convolutif en lui-même. La convolution lisse la réponse de la 4PWFS, même dans le cas où l'on utilise une image plan focal courte pose en entrée.

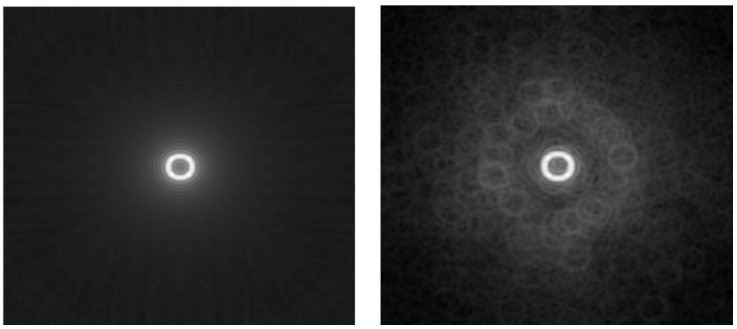


FIGURE 5.14 – **Exemple de signaux délivrés par la GSC**. **Gauche :** image de la GSC pour un front d'onde plan en entrée. Le cercle est produit par la modulation en amont de la 4PWFS. **Droite :** image de la GSC pour une phase résiduelle d'un système d'OA.

5.3.2.2 Paramètres clefs du montage

La méthode que l'on propose ici présente tout de même un inconvénient majeur : elle demande de prélever des photons dans la voie ASO à l'aide d'une lame séparatrice, privant la 4PWFS de photons pour l'analyse. On présente ici les résultats d'une étude permettant de quantifier quelques grands paramètres clefs du montage de la 4PWFS assistée par GSC : le pourcentage de photons nécessaires pour la voie GSC, les caractéristiques de la GSC (taille et nombre de pixels) et l'impact d'aberrations propres à la voie GSC.

Robustesse au bruit de photon

Le but de cette étude est de montrer que l'estimation des gains optiques est peu affectée par le bruit de photon sur la GSC, laissant espérer de pouvoir suivre les gains optiques rapidement sans avoir à prélever un trop grand pourcentage de photons avant la 4PWFS. Pour ce faire, on injecte du bruit de photon dans le signal de la GSC et on estime l'impact sur l'estimation des gains optiques.

On utilise les caractéristiques suivantes pour l'étude : une longueur d'onde d'analyse $\lambda_c = 550\ nm$ avec une bande spectrale $\Delta\lambda = 90\ nm$ et une transmission idéale de 100%. Le temps d'exposition de la GSC est de 2 millisecondes (framerate de la boucle) et elle utilise 10% des photons de la voie ASO. L'échantillonnage est à Shannon pour la PSF limitée par la diffraction. On regarde alors l'effet du bruit de photon sur l'estimation des gains optiques pour une phase résiduelle donnée de boucle fermée ($r_0 = 14\ cm$ et $r_{mod} = 3\ \lambda/D$). La PSF modulée non-bruitée correspondante est donnée figure 5.16 Haut-(a). Les autres PSF modulées représentées sur cette figure sont : (b) étoile de référence de magnitude $mag = 8$, (c) étoile de référence de magnitude $mag = 10$, et (c) étoile de référence de magnitude $mag = 12$. Pour ces trois configurations (mag = 8,10 et 12) on réalise le calcul des gains optiques pour 500 réalisations différentes du bruit de photon et on compare les résultats obtenus avec le cas sans bruit. On constate que le bruit de photon biaise l'estimation des

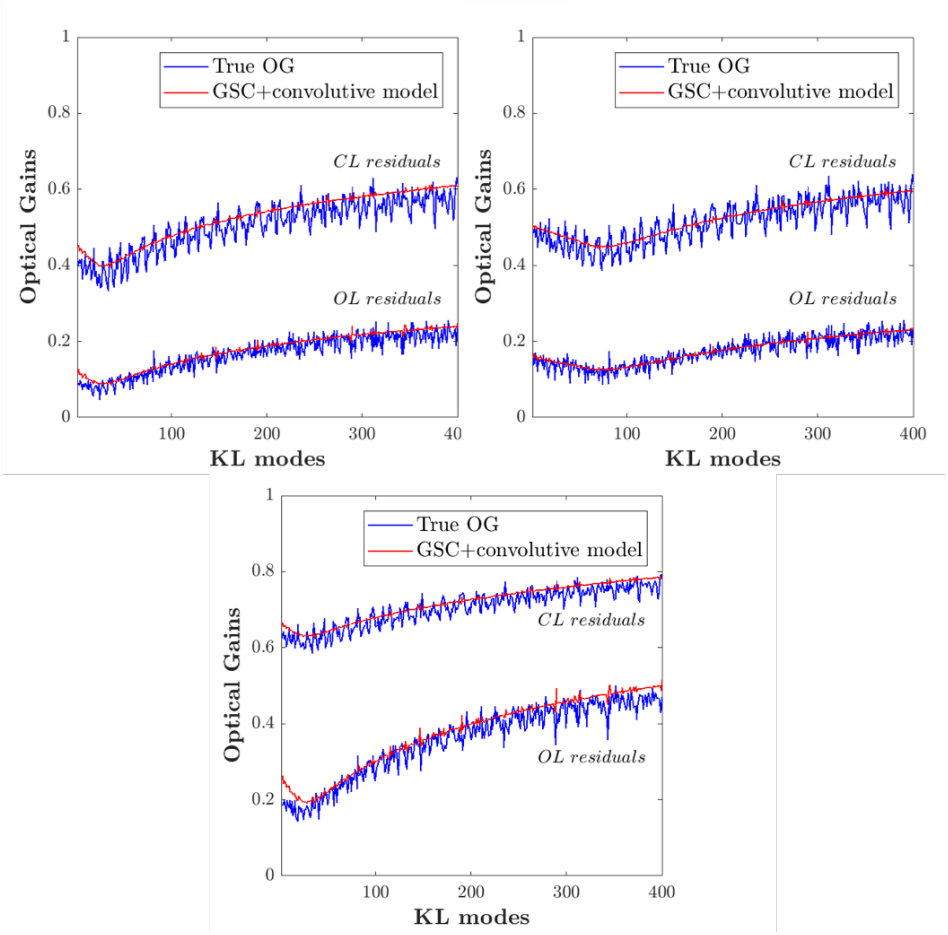


FIGURE 5.15 – **Gains optiques pour des trames individuelles**. OL : phases boucle ouverte (open loop), et CL : résidus boucle fermée (closed-loop). **Haut-gauche :** $r0 = 12\ cm$ et $r_{mod} = 3\lambda/D$. **Haut-droit :** $r0 = 12\ cm$ et $r_{mod} = 5\lambda/D$. **Bas :** $r0 = 18\ cm$ et $r_{mod} = 3\lambda/D$.

gains optiques, et que ce biais est inversement proportionnel au SNR : $\sqrt{N_{ph}}$.

Finalement cette brève étude semble révéler un comportement plutôt favorable du comportement de la GSC vis à vis du bruit de photon : on peut remonter fidèlement aux gains optiques en prélevant seulement une petite fraction des photons, même pour des étoiles de faibles magnitudes. De plus, on a toujours un levier qui permet de diminuer cette erreur au détriment d'un suivi temporel fin : le temps d'intégration de la GSC.

Échantillonnage de la PSF

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux caractéristiques que doit posséder la GSC : le champ de vue et l'échantillonnage. Ces deux quantités peuvent fournir un portrait robot du type de caméra utilisable pour cette application.

En terme de champ de vue, l'idéal est d'avoir un champ de la GSC identique à

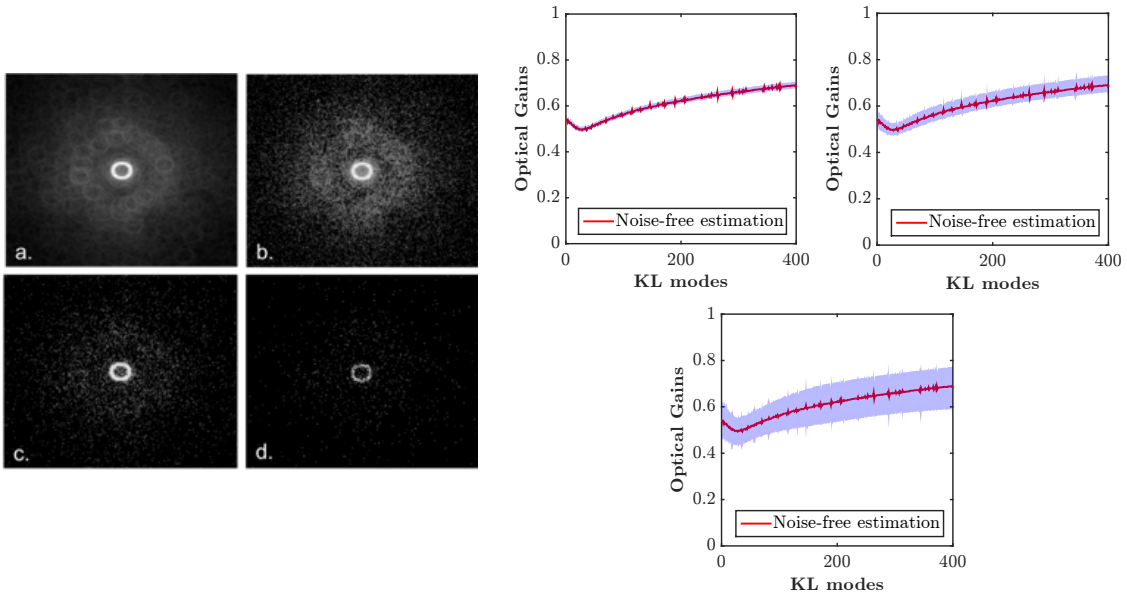


FIGURE 5.16 – **Erreurs d'estimation des gains optiques liées au bruit de photon dans les mesures de la GSC.**

celle de la 4PWFS car on veut logiquement avoir accès à toutes les perturbations vues par la pyramide. On s'intéresse ainsi plus précisément à l'échantillonnage nécessaire pour une bonne estimation des gains optiques. En utilisant la même phase résiduelle que pour le paragraphe précédent, on calcule les résultats de l'algorithme pour différentes configurations d'échantillonnage. Les résultats sont présentés figure 5.17. On constate alors qu'un échantillonnage sous le critère de Shannon est possible sans impact substantiel dans l'estimation des gains optiques. Ce résultat dépend en fait du rayon de modulation r_{mod}, et on observe que l'estimation des gains optiques n'est impactée que de manière réduite tant que la taille des pixels d_{px} respecte le critère de Shannon pour le rayon de modulation :

$$d_{px} \leq r_{mod}/2 \tag{5.22}$$

Si ce critère n'est pas respecté, le cercle de modulation est alors vu comme un disque et l'estimation des gains optiques pour les basses fréquences commence à être affectée (figure 5.17).

Pour prendre un exemple concret, ces résultats montrent que si l'on utilise la GSC pour un cas ELT à $\lambda_c = 800\ nm$ avec un champ de vue de 2 arcsec avec un échantillonnage à Shannon/4, on peut alors utiliser une caméra ne dépassant pas les $250 \times 250\ pixels$. Pour ce genre de dimensions, il est possible d'utiliser des caméras présentant des bruits de lecture extrêmement faibles.

Aberrations propres à la voie GSC

On propose de réaliser le prélèvement d'une partie du flux pour la voie GSC à l'aide d'une lame séparatrice. Ce genre de composant optique introduit généralement

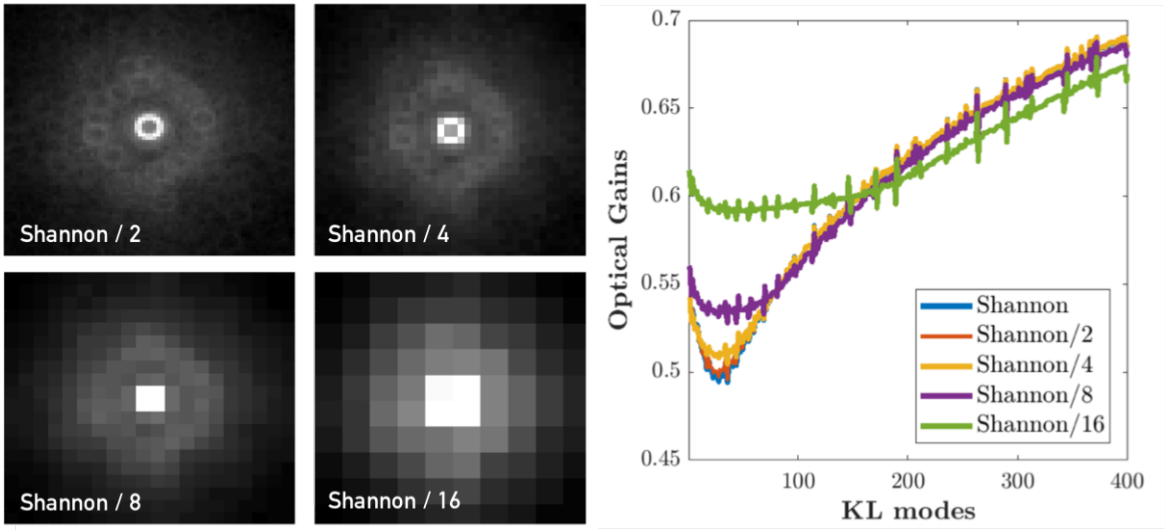


FIGURE 5.17 – **Effet de l'échantillonnage de la GSC sur l'estimation des gains optiques.**

de l'astigmatisme. On cherche donc à évaluer l'effet d'un astigmatisme dans la voie GSC sur l'estimation des gains optiques. Pour cette étude, on prend les configurations d'un astigmatisme de 100 nm rms et de 200 nm rms introduit par la lame séparatrice sur la voie GSC. La configuration 100 nm rms est représentée à titre d'exemple figure 5.18.

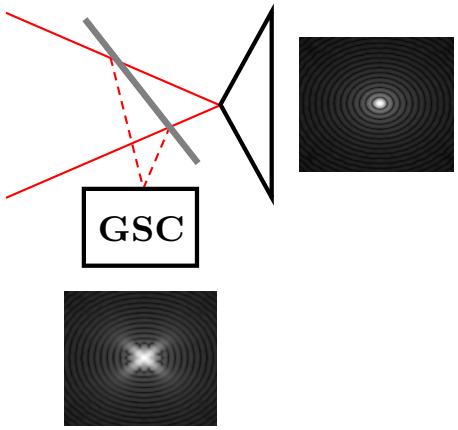


FIGURE 5.18 – **Astigmatisme induit par la lame séparatrice dans la voie GSC.** Configuration avec un astigmatisme de 100 nm rms pour cette aberration.

Pour comparer les estimations de gains optiques réalisées en présence des astigmatismes entachant la voie GSC, on utilise de nouveau des phases résiduelles d'exemple qui correspondent à des phases résiduelles boucle fermée pour deux cas de turbulence : $r_0 = 12\ cm$ et $r_0 = 18\ cm$. On livre les résultats figure 5.19. On constate que dans les deux cas, les estimations des gains optiques sont peu modifiées. On remarque une légère modification pour les basses fréquences où le

creux "typique" associé à la modulation est atténué. Il est attendu que ce soient les basses fréquences qui soient impactées : l'astigmatisme est vu comme une modulation bas-ordres additionnelle dans le modèle généré grâce aux données de la GSC. On explique l'impact limité de l'astigmatisme sur l'estimation par le fait que les gains optiques encodent une modification de la réponse entre l'étalonnage et le régime soumis au non-linéarités. Ainsi, l'astigmatisme est à la fois présent dans l'étalonnage et dans le calcul du régime de fonctionnement en présence de phases résiduelles : l'effet est donc limité.

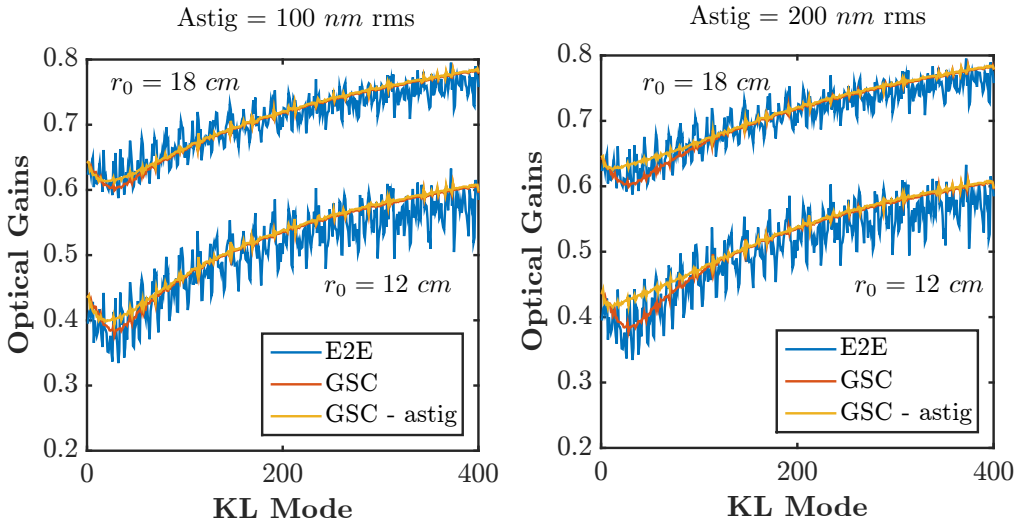


FIGURE 5.19 – **Effet de l'astigmatisme induit par la lame séparatrice dans la voie GSC sur l'estimation des gains optiques.**

Ainsi, au travers des différentes analyses menées sur les paramètres de la GSC, on a démontré que ce système est robuste au bruit de photon et aux aberrations supplémentaires créées par la lame séparatrice. Enfin, on a aussi montré que le détecteur requis peut posséder un nombre de pixel limité, permettant une mise en place pratique à l'aide de caméras très bas bruit de lecture.

5.3.3 Un point sur les hypothèses

Avant de passer à quelques exemples d'application de notre nouvelle méthode d'estimation des gains optiques, on liste ici les différentes couches concernant les approches, les hypothèses et les approximations qui nous permettent de suivre le comportement non-linéaire de la 4PWFS à l'aide de la GSC. On récapitule leurs effets successifs sur l'expression des intensités réduites de la 4PWFS figure 5.20

1. On traite les non-linéarités comme une modification du comportement linéaire de l'ASO : on traite la 4PWFS comme un LPVS. On définit ainsi à chaque trame une matrice d'interaction qui dépend du signal à mesurer $\mathcal{D}_\phi$.

Cette astuce nous permet de continuer à composer avec des matrices, bien que l'on soit confronté à des comportements non-linéaires. Cette étape n'est pas vraiment une hypothèse, mais plutôt un cadre de travail. Dans ce cadre, on fait en revanche l'hypothèse que la matrice d'interaction décrivant le comportement de la 4PWFS à une trame donnée peut être associée à la matrice d'interaction calculée autour de la phase que l'on cherche à mesurer.

2. On se place dans l'approximation diagonale : on suppose que la matrice de passage entre $\mathcal{D}_\phi$ et $\mathcal{D}_{\text{calib}}$ est diagonale.

3. On utilise le modèle convolutif qui ne colle pas parfaitement à la réalité afin de calculer les gains optiques.

Ainsi, le comportement non linéaire de la 4PWFS est **en partie** estimé et maîtrisé, mais pas totalement. Pour y arriver, on peut imaginer des techniques qui s'affranchissent de certaines des hypothèses : compensation *dense* des gains, étalonnage des gains via un modèle encore plus précis que le modèle convolutif, méthode d'inversion des intensités réduites faisant appel à des algorithmes de *machine learning*, etc... Si l'on garde un formalisme purement matriciel, on doit alors forcément composer dans le cadre du formalisme LPVS.

Mais peu importe la méthode utilisée, dans certains cas le système présente des ruptures de bijectivité (dépassement de la gamme de capture) qui entraînent des **pertes d'informations irréversibles**. Dans ces cas, le seul moyen connu aujourd'hui est d'agir en apportant une modification des paramètres optiques de l'ASO : par exemple à travers une modulation plus grande, ou bien en jouant sur d'autres paramètres optiques du montage tels que la longueur d'onde ou bien potentiellement en s'appuyant sur un filtrage spatial (ces points sont évoqués en annexe A).

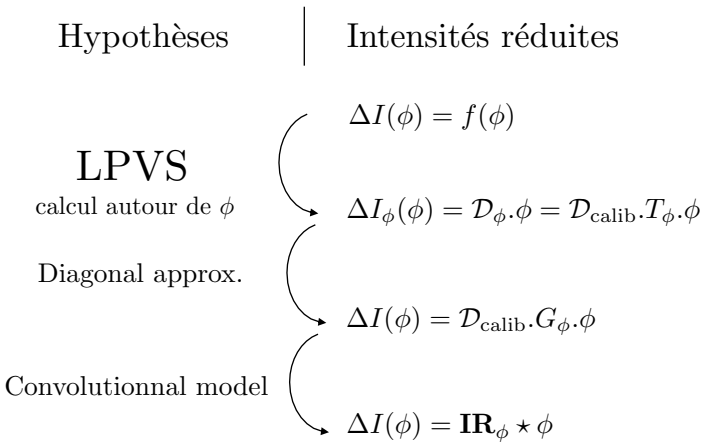


FIGURE 5.20 – **Les différentes étapes pour la mise en place de l'estimation des non linéarités avec la GSC et le modèle convolutif.**

5.3.4 Exemple d'applications de la GSC

Après avoir exposé une nouvelle méthode de détermination des gains optiques à l'aide la GSC, on met ici en évidence son utilité pour des problèmes concrets de contrôle de front d'onde évoqués au début de ce chapitre, à travers des simulations dont on liste les caractéristiques principales table 5.1

Résolution	80 pixels dans le diamètre du télescope.
Télescope	D = 8 m - pas d'obstruction centrale.
Atmosphère	Von-Karman PSD - 3 couches. $L_0 = 30\ m$ et $r_0(550nm) = 15\ cm$.
Miroir déformable	Génération d'une base de Karhunen-Loève (KL) : 400 modes.
Voie ASO	$\lambda = 550\ nm$ - 40 sous-pupilles dans D. Correction à 500 Hz avec 2 trames de retard.

TABLE 5.1 – **Paramètres de simulation.**

5.3.4.1 Bootstrap

La fermeture de boucle (*bootstrap*) est une étape cruciale pour un système d'OA car c'est le moment où l'ASO est confronté aux phases aberrantes les plus importantes, les non-linéarités y sont très élevées : les premières itérations de boucle sont donc celles pour lesquelles les gains optiques ont les valeurs les plus faibles. La technique de suivi de gains optiques permettant une estimation trame à trame, il est alors possible de l'appliquer sur les toutes premières trames de la boucle. On expose le calcul des gains optiques pour quelques trames lors d'une fermeture de boucle figure 5.21, et les images de la GSC associées. On constate sur ces résultats que la GSC permet de suivre fidèlement l'évolution des gains optiques au cours du bootstrap : les gains otiques démarrent à des valeurs faibles en régime pleine turbulence, puis augmentent au fur et à mesure que les phases résiduelles s'améliorent au sommet de la 4PWFS, preuve que le DM est en train de corriger la turbulence atmosphérique. Une fois la boucle fermée, on atteint un régime pour lesquelles les gains optiques oscillent autour d'une valeur moyenne (voir figure 5.9). De toutes les techniques de suivis de gains optiques proposées dans la littérature, celle proposée ici est la seule permettant d'estimer les gains optiques lors d'une fermeture de boucle.

On voit que pour la première trame, la phase en entrée est sous-estimée d'environ un facteur 10. Cette forte perte de sensibilité peut d'ailleurs dans certains cas empêcher de fermer la boucle. Une solution bien connue pour contrer ce problème serait d'augmenter le rayon de modulation. La connaissance de ces gains optiques peut nous permettre d'améliorer l'étape de bootstrap en compensant la phase estimée. L'équation 5.17 nous permet d'écrire le reconstruteur en fonction de la matrice d'interaction à l'étalonnage et des gains optiques :

$$\mathcal{D}_{\phi}^{\dagger} = G_{\text{opt}}^{-1}.\mathcal{D}_{\text{calib}}^{\dagger} \tag{5.23}$$

On peut alors fermer la boucle en utilisant le reconstructeur compensé des gains optiques. Un exemple de simulation pour une fermeture de boucle avec et sans

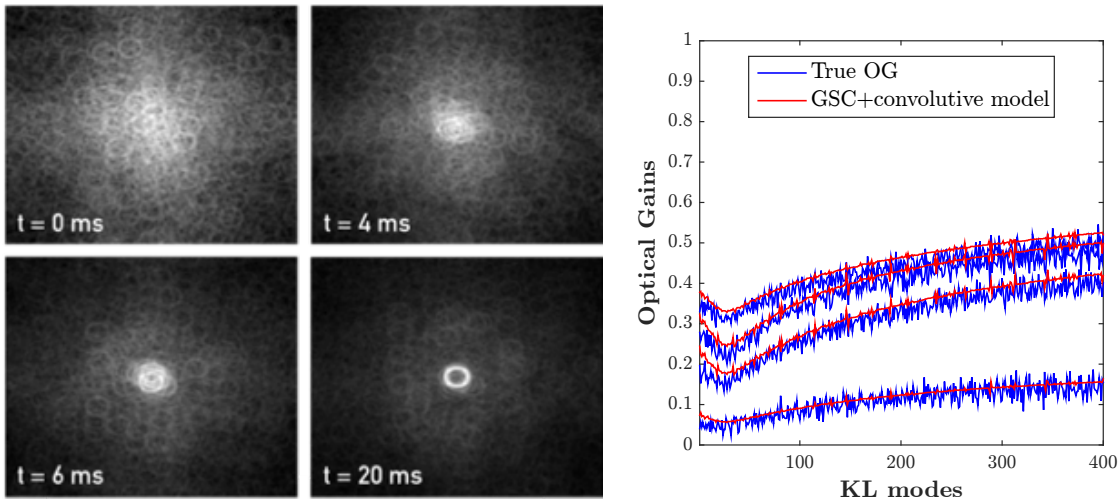


FIGURE 5.21 – **Estimation des gains optiques trame à trame lors d'une fermeture de boucle. Gauche :** images de la GSC. **Droite :** gains optiques correspondants.

compensation des gains est présenté figure 5.22. On constate que le bootstrap est beaucoup plus rapide dans le cas des gains optiques compensé. Cet exemple, bien que peu utile en pratique, révèle la possibilité de compenser (ou au moins suivre) de fortes fluctuations de phases sur des échelles temporelles très faibles grâce à la GSC.

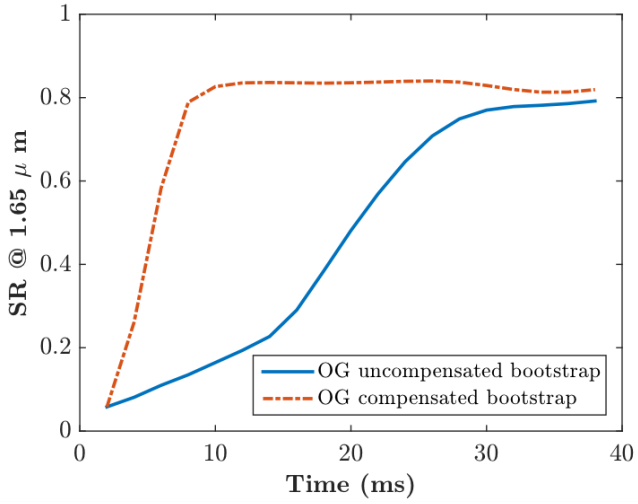


FIGURE 5.22 – **SR lors d'une fermeture de boucle :** cas gains optiques compensés par la GSC contre cas gains optiques non compensés.

5.3.4.2 Gestion des NCPA

On a décrit le problème lié à la gestion des NCPA au début de ce chapitre. Parvenir à maintenir une NCPA sur la voie 4PWFS est une vraie démonstration de bonne gestion des gains optiques. On propose donc ici de mettre en oeuvre en simulation la technique GSC pour ce problème.

Pour le système d'OA considéré (caractéristiques résumées table 5.1), on modélise des NCPA de la façon suivante : on génère un écran de phase sur les 25 premiers modes de KL, excepté tip-tilt et focus (en effet, ces modes peuvent être compensé sans avoir recours au DM). La distribution sur les modes de KL suit une loi en f^{-2} pour une NCPA présentant une amplitude totale de 200 nm rms. La PSF correspondante dans la voie de la 4PWFS, à la longueur d'onde d'analyse donc, est présentée figure 5.23. L'objectif de la compensation des NCPA est d'avoir cette PSF sur le sommet de la 4PWFS : dans ce cas, on a un front d'onde plan au niveau de la voie science.

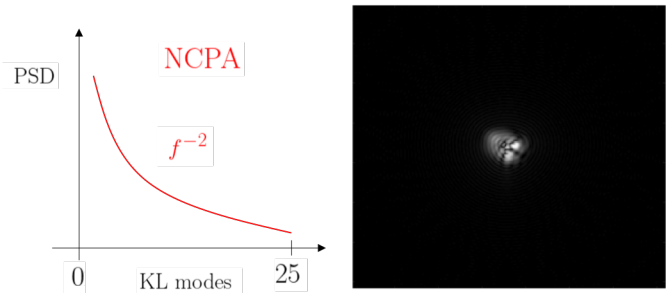


FIGURE 5.23 – **NCPA dans la voie 4PWFS. Gauche :** Distribution selon les modes de KL. **Droite :** PSF correspondant aux NCPA dans la voie 4PWFS.

La simulation se déroule alors de la façon suivante : on ferme la boucle sur la turbulence sans NCPA dans un premier temps, et après 5 secondes on injecte les NCPA dans le système. La présence des NCPA est alors gérée suivant plusieurs stratégies, dont les performances globales sont illustrées figure 5.24 avec pour comparaison le cas sans NCPA. Les conclusions suivant les différentes méthode de gestion des NCPA sont les suivantes :

- Lorsque l'on ne compense pas les NCPA, la boucle converge vers un front d'onde plan sur la 4PWFS et répercute l'opposé des NCPA sur la voie science. Le SR est donc fortement impacté.
- Lorsque l'on met comme intensités de référence de la 4PWFS celles correspondant aux NCPA calculées à l'étalonnage sans compenser les gains optiques, la boucle diverge. On est dans le cas de la catastrophe des NCPA, dont le processus menant à la divergence a été décrit au début de ce chapitre.
- Quand on compense la référence par les gains optiques moyennés sur les 5 premières secondes de la boucle, on stabilise les performances et la catastrophe des NCPA est évité. On atteint un SR d'environ 82% dans ce cas.
- En compensant par les gains optiques calculés sur chaque trame, on atteint un SR de 86%. Cette solution surclasse la solution précédente pour deux

raisons : les fluctuations trame à trame des gains optiques sont mieux absorbées, et on encaisse aussi l'effet sur les gains optiques liés à la NCPA même sur le sommet de la 4PWFS.

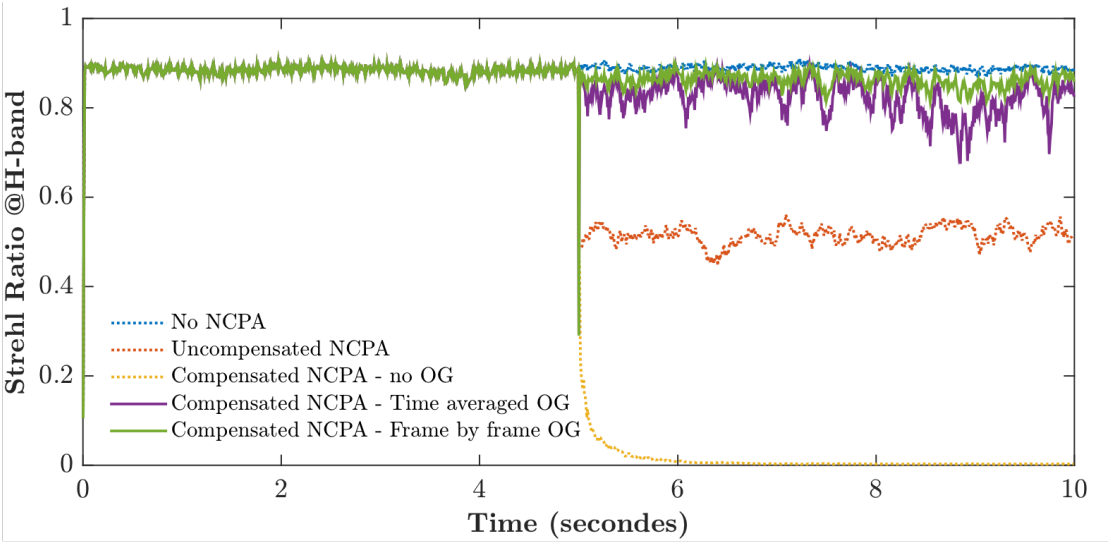


FIGURE 5.24 – **SR pour différentes configurations de gestion des NCPA.**

On présente figure 5.25 le signal que l'on veut avoir sur la GSC pour atteindre des performances maximales sur la voie science (c'est à dire la PSF des NCPA modulée) et une image de la GSC en boucle fermée pour une trame dans le cas de correction des intensités de références par les gains optiques estimés trame à trame. On constate que l'on arrive bien à converger vers la PSF modulée cible. On constate tout de même en comparant les performances avec le cas sans NCPA que l'on ne compense pas parfaitement les aberrations. Cela s'explique par les multiples couches d'hypothèses et approximations établies pour le calcul de la matrice G_{res}, que l'on a résumé figure 5.20.

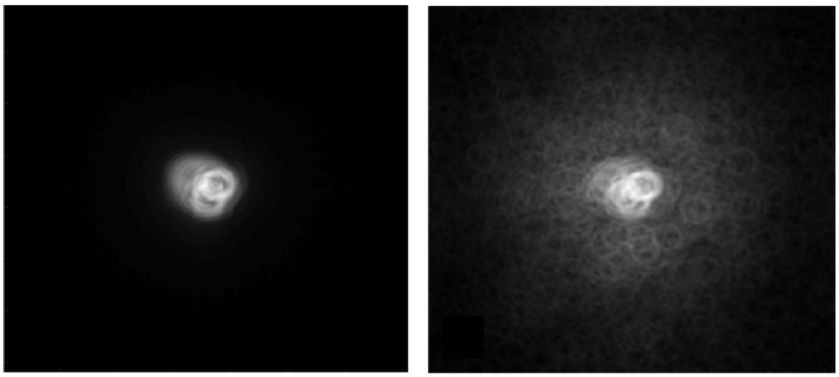


FIGURE 5.25 – **Maintient d'une NCPA dans la voie 4PWFS.**

Enfin, on peut voir figure 5.26 l'effet des NCPA sur les gains optiques. On y présente les gains optiques calculés pour deux trames données : l'une avant injection des NCPA, et l'une après injection et compensation des NCPA sur la 4PWFS. La différence est notamment plus marquée pour les bas ordres, avec un creux plus important au niveau de la modulation. On remarque donc que le modèle convolutif arrive aussi à suivre les gains optiques correspondant à cette erreur statique.

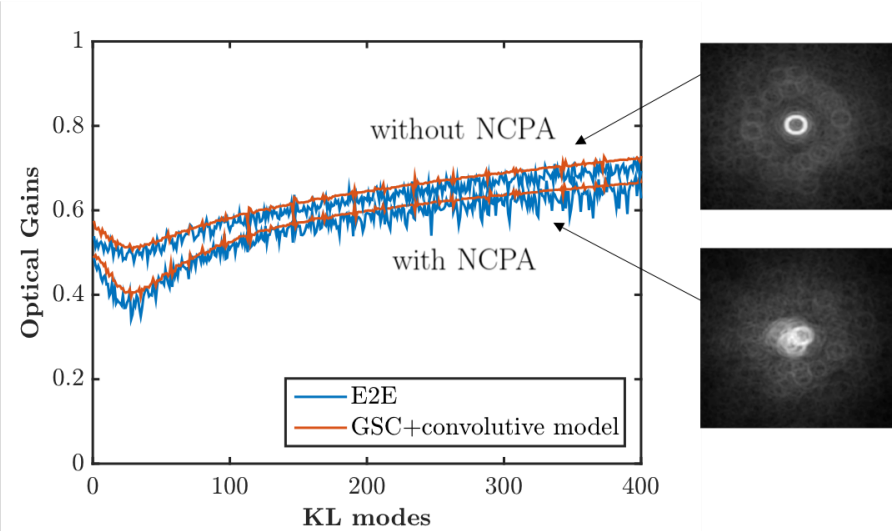


FIGURE 5.26 – **Gains optiques dans la voie 4PWFS.**

5.3.4.3 Au-delà des phases résiduelles

On a évoqué au début de ce chapitre le fait que l'impact des non-linéarités sur les lois de commande de la boucle d'OA peuvent être classées dans une problématique plus large : les écarts à l'étalonnage. On propose ici d'utiliser la méthode de la GSC pour un type d'écart à l'étalonnage qui n'est pas dû à des non-linéarités, mais à la présence d'une source de référence n'étant pas ponctuelle. On prend l'exemple d'une étoile guide s'avérant être une étoile binaire. Ce cas n'est pas choisi au hasard : on estime qu'une large partie des étoiles de la Voie Lactée sont en réalité des étoiles binaires. L'étalonnage étant fait avec une source ponctuelle, la pyramide va donc travailler dans un régime différent : pour gérer cette problématique, on applique exactement le même formalisme que celui mis en place précédemment. On parlera ainsi de matrice de transfert optique et de gains optiques.

Configurations étudiées

Le but de cette section n'est pas d'être exhaustif en sondant en détail l'influence d'une étoile binaire sur les performances en boucle fermée de la 4PWFS. On veut simplement montrer que la GSC peut être utilisée pour estimer l'écart à l'étalonnage de la 4PWFS en présence d'une étoile binaire. Pour cela, on simule une 4PWFS

modulée à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$. On prend comme exemple trois configurations d'étoiles binaires :

1. **Séparation** $= 10\ \lambda/D$ **et angle** $= 45°$, de sorte à ce que les cercles de modulation de chaque source ne se recouvrent pas.
2. **Séparation** $= 4\ \lambda/D$ **et angle** $= 45°$, de sorte à ce que cette fois les cercles de modulation se chevauchent.
3. **Séparation** $= 10\ \lambda/D$ **et angle** $= 0°$, de sorte à ce que les étoiles se retrouvent alignées avec une arête.

On utilise des cas pour lesquels les étoiles ont la même intensité lumineuse. Ces configurations sont représentée par rapport aux arêtes de la 4PWFS figure 5.27.

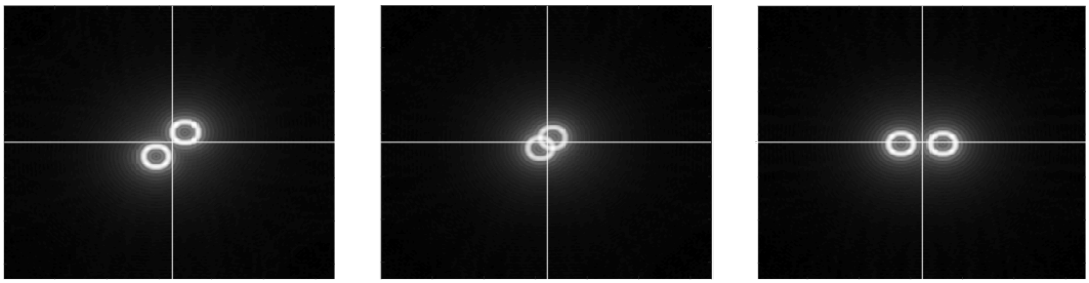


FIGURE 5.27 – **PSF modulées dans le cas d'étoiles binaires.**

En menant un nouvel étalonnage autour de ces cas de sources binaires, on mesure la matrice d'interaction binaire $\mathcal{D}_{\text{binary}}$ et on en déduit la matrice de transfert optique pour chaque configuration : les taux de diagonalité pour les différentes configurations qui fluctuent entre 80% et 95%. On calcule aussi les gains optiques, que l'on compare avec ceux trouvés grâce à la technique de la GSC. Pour ce cas, la GSC est utilisée de la façon suivante : on calcule la réponse impulsionnelle à la diffraction avec une source ponctuelle, puis on injecte l'image à la diffraction avec l'étoile binaire pour calculer la nouvelle réponse impulsionnelle et estimer les gains optiques. On ne rajoute pas de phases résiduelles dans cet exemple. Les résultats sont donnés figure 5.28. On commente brièvement la forme de ces courbes. On relève juste le fait notable que dans certains cas, les gains optiques dépassent 1. Cela n'est pas surprenant, par exemple pour la configuration séparation $= 4\ \lambda/D$ et angle $= 45°$, le trajet de la modulation se retrouve à passer plus longtemps au centre de la 4PWFS : on gagne alors en sensibilité pour les bas ordres. Pour les autres cas, on observe des pics pour certains modes bien particuliers. Ces pics dépassent parfois 1, on invoque là le même argument que précédemment. Le fait que ces pics soient présents pour certains modes spécifiques relève du contenu fréquentiel de chaque mode : dans nos cas, la symétrie de révolution est brisée et la direction des fréquences spatiales devient cruciale. Il est alors logique de voir apparaître des modes fréquentiellement proches affectés d'une manière complètement différente.

Plus important pour notre démonstration, on remarque ainsi que notre technique fonctionne aussi avec des étoiles binaires, avec de légères différences pour les bas ordres. On démontre donc ici l'étendue de la GSC : il est possible d'estimer **des**

écarts à l'étalonnage d'un type différent que seulement ceux produits par la présence de phases résiduelles. On pourrait aussi imaginer une utilisation de la GSC pour sonder la perte de sensibilité lorsque la source de référence est étendue suivant l'axe optique, comme pour le cas des LGS.

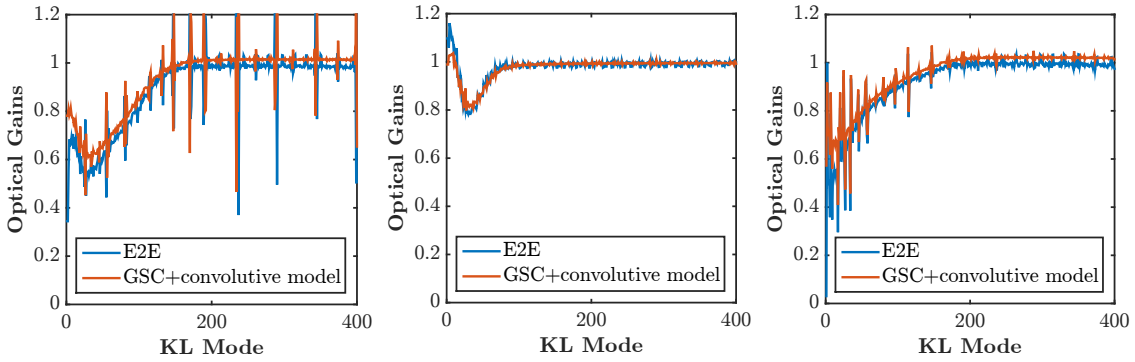


FIGURE 5.28 – **Gains optiques liés aux configurations d'étoiles binaires présentées figure 5.27.**

Intensités de références

On l'a précisé au début de ce paragraphe : l'objectif n'est pas d'expliquer précisément comment modifier les lois de commandes pour gérer une étoile binaire en tant que source de référence. On s'arrête tout de même un instant sur la problématique des intensités de référence. Dans le cas d'une étoile binaire formant un angle de 45° avec les arêtes de la 4PWFS et avec une séparation de 10 λ/D, le signal sur le détecteur pour un front d'onde plan est livré figure 5.29 - droite. Lorsque l'on traite les intensités via le calcul dit des "pentes", on constate que ce signal vaut 0, il n'est alors pas nécessaire de modifier les pentes de références. Pour le cas des intensités réduites, la question suivante se pose : faut-il modifier les intensités de références pour éviter que la 4PWFS ne converge vers un front d'onde aberrant ? En réalité le signal pour une étoile binaire montré figure 5.29 ne correspond à aucune aberration de phase en entrée de la 4PWFS, ce qui conduit ce signal à appartenir au noyau du reconstructeur. Autrement dit, pour ce signal sur le détecteur de la 4PWFS, aucune commande n'est envoyée au DM. On en vient à la conclusion suivante : il n'est donc pas la peine d'essayer de modifier les intensités de références.

Conclusion sur les écarts à l'étalonnage vus par la GSC

Au travers de cet exemple, on a donc montré la possibilité de décrire les écarts à l'étalonnage comme source de gains optiques et de les estimer avec la GSC. Cela marche avec le passage à une source étendue, mais ça pourrait potentiellement apporter une estimation des autres types d'écarts dont l'impact est visible en plan focal : étendue spectrale de la PSF, changement de pupille entre étalonnage et fonctionnement sur ciel, etc... Au-delà de son rôle pour l'ajustement des mesures de la

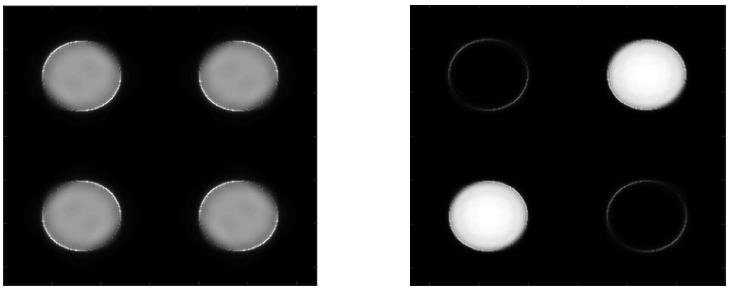


FIGURE 5.29 – **Intensités de références pour $r_{mod} = 3\ \lambda/D$. Gauche :** cas d'une source ponctuelle. **Droite :** cas d'une étoile binaire formant un angle de 45° avec les arêtes de la 4PWFS et avec une séparation de 10 λ/D.

4PWFS, on pourrait même imaginer des rôles supplémentaires pour la GSC, comme par exemple son utilisation pour sonder des phases mal vues tels que les modes "pétales" attendus sur l'ELT [Bertrou-Cantou et al., 2020].

5.4 La GSC, au-delà des équations du modèle convolutif

Cette dernière section introduit une façon particulière d'utiliser le montage 4PWFS combiné avec la GSC. La méthode qui va être présentée ici permet de s'affranchir des équations du modèle convolutif et de proposer un étalonnage naturel pour la 4PWFS assistée par plan focal.

5.4.1 La matrice d'interaction impulsionnelle

Pour les développement qui suivent, on considère que les cartes étudiées ont les dimensions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{IR}_\phi : N_{mesures} \times N_{mesures} \\ \Omega_\phi : N_{GSC} \times N_{GSC} \end{cases} \tag{5.24}$$

où l'on rappelle que Ω_ϕ est le signal fourni par la GSC. En revenant sur l'expression mathématique de la réponse impulsionnelle équation 5.18, on constate que $\mathbf{IR}_\phi$ est linéaire avec la distribution d'énergie en plan focal Ω_ϕ. En effet, si on décompose Ω_ϕ en une somme de N_{GSC}^2 cartes valant chacune 0 partout sauf sur le pixel (i,j), on peut écrire :

$$\Omega_\phi = \sum_{(i,j)} \Omega_\phi^{(i,j)} = \sum_{(i,j)} a_\phi^{(i,j)} \delta^{(i,j)} \tag{5.25}$$

où $\delta^{(i,j)}$ est donc une carte qui vaut 0 de partout sauf sur le pixel (i,j) où elle vaut 1, et les $a_\phi^{(i,j)}$ sont des scalaires qui dépendent de la phase. On a ainsi décomposé

le signal de la GSC pixel par pixel. Par linéarité de la transformée de Fourier et du produit de convolution :

$$\mathbf{IR}_\phi = \sum_{(i,j)} a_\phi^{(i,j)} \mathbf{IR}^{(i,j)} \tag{5.26}$$

où $\forall (i,j) \in [1, N_{GSC}]^2$:

$$\mathbf{IR}^{(i,j)} = 2\mathrm{Im}(\widehat{\overline{m}}(\widehat{m} \star \widehat{\delta^{(i,j)}})) \tag{5.27}$$

On peut ré-écrire l'équation 5.26 sous forme matricielle. En mettant sous forme de vecteur colonne les différents **IR** et Ω_ϕ on obtient :

$$\mathbf{IR}_\phi = \boldsymbol{\mathcal{IR}}.\Omega_\phi \tag{5.28}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{IR}}$ est une matrice qui porte la collection des $\mathbf{IR}^{(i,j)}$. On appellera cette matrice la **matrice d'interaction impulsionnelle**. Pour plus clarté, cette écriture matricielle avec les tailles de tableau correspondantes est schématisée figure 5.30.

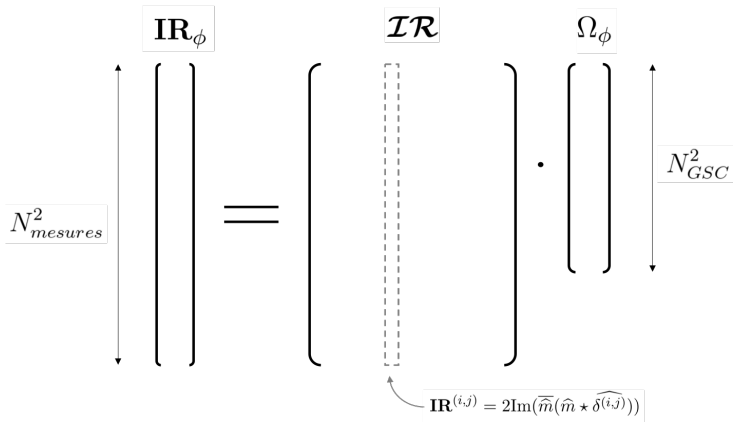


FIGURE 5.30 – **Une approche matricielle pour le modèle convolutif**. On appelle $\boldsymbol{\mathcal{IR}}$ la matrice d'interaction impulsionnelle.

Si l'on calcule $\boldsymbol{\mathcal{IR}}$, on peut alors retrouver la même $\mathbf{IR}_\phi$ que celle calculée via l'équation 5.18. L'intérêt de cette écriture matricielle semble donc limitée. Pourtant, on peut se poser la question suivante : est-il possible d'étalonner $\boldsymbol{\mathcal{IR}}$, sans avoir recours aux équations mathématiques du modèle convolutif ?

Étalonnage de la matrice d'interaction impulsionnelle

On a explicité une solution permettant de calculer la réponse impulsionnelle d'un ASO sans avoir recours aux équations mathématiques du modèle convolutif : l'approche *pseudo-Dirac* (chapitre 2). On propose donc d'étalonner la matrice d'interaction impulsionnelle de la façon suivante :

1. Génération un *pseudo-Dirac* de phase au centre de la pupille.

2. Enregistrement de la réponse associée autour d'un tip-tilt qui permet d'envoyer la PSF (à la diffraction) au pixel (i, j) de la GSC. Cette mesure est faite sans modulation.
3. La carte obtenue (réponse impulsionnelle autour du point (i, j)) vient alimenter une colonne de la matrice d'interaction impulsionnelle, que l'on appelle $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$.
4. Répétition de l'opération pour tous les points de la GSC : $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$ est alors entièrement remplie.

On remarquera que les réponses impulsionnelles $\mathbf{IR}_{\perp}^{(i,j)}$ calculées de cette façon s'apparentent plutôt à :

$$\mathbf{IR}_{\perp}^{(i,j)} = 2\mathrm{Im}(\widehat{\overline{m}}(\widehat{m} \star \widehat{\delta^{(i,j)} \star PSF})) \tag{5.29}$$

où l'on constate la contribution de la PSF à la diffraction. Autrement dit : lors d'une mesure de réponse de la 4PWFS à une excitation *pseudo-Dirac* autour d'une position de tip-tilt donnée, le signal sur la GSC n'est pas juste un point : on y observe la PSF à la diffraction décalée au point (i, j). Pour un tel cas, on illustre le signal sur la GSC et la réponse impulsionnelle correspondante figure 5.31). Finalement, le cas donné équation 5.27 correspond en réalité à une pupille infinie.

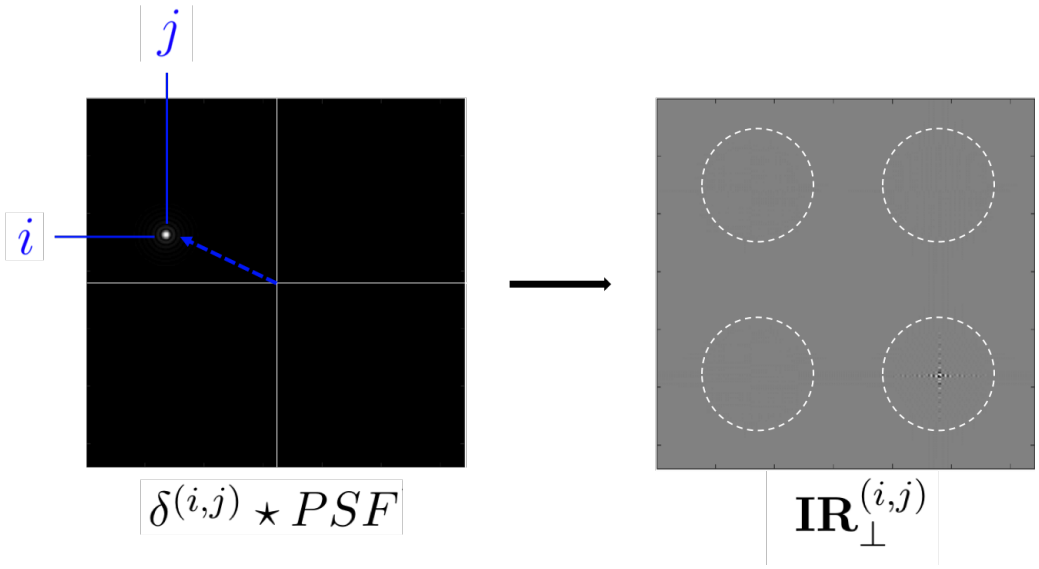


FIGURE 5.31 – **Construction d'une colonne de la matrice d'interaction impulsionnelle.**

Si l'on veut se rapprocher au maximum de l'équation 5.28, il faut alors plutôt calculer $\mathbf{IR}_{\phi}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{IR}_{\phi} = \boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}.(\Omega_{\phi} \star^{-1} PSF) \tag{5.30}$$

C'est-à-dire que l'on doit, en principe, utiliser la donnée fournie par la GSC déconvoluée par la PSF pour le calcul matriciel. On va démontrer que ce n'est

finalement pas la peine de passer par cette étape en pratique, et cela s'explique par deux raisons : (i) on a vu que l'on peut sous-échantillonner la PSF avec la GSC dans une certaine mesure sans impacter l'estimation des gains optiques. On peut mettre cette opération de sous-échantillonnage en parallèle avec une convolution avec un filtre qui viendrait flouter l'image : la non déconvolution par la PSF semble donc beaucoup moins critique qu'un échantillonnage plusieurs fois sous le critère de Shannon (ii) Comme on utilisera $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$ pour aussi calculer la réponse impulsionnelle à l'étalonnage ($\phi = 0$), l'erreur commise en ne déconvoluant pas par la PSF sera aussi présente dans la réponse impulsionnelle calculée à l'étalonnage et s'équilibre lors du calcul des gains optiques.

5.4.2 Nouvelle méthode de détermination des gains optiques

La nouvelle méthode décrite ci-dessus est donc testée pour estimer les gains optiques. Pour les raisons évoquées précédemment, on ne déconvolue pas l'image de la GSC par la PSF. On présente les résultats des tests de cette méthode pour quelques phases résiduelles données et pour des cas pleine turbulence, avec deux configurations d'échantillonage différentes sur la GSC. Les résultats pour une configuration à Shannon sont présentés figure 5.32 et ceux pour une configuration de la GSC à Shannon / 4 figure 5.33. Le cas faiblement échantillonné entraîne naturellement une réduction drastique du temps de calibration et de la taille de $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$. On constate que les estimations fournies par l'approche matrice d'interaction impulsionnelle sont très similaires à l'approche utilisant les formules analytiques du modèle convolutif : cette nouvelle méthode fonctionne, dans le cas d'une GSC à échantillonnée Shannon ou bien sous-échantillonné.

Influence de la largeur du *pseudo-Dirac*. Pour ces simulations, on a généré un *pseudo-Dirac* de phase en poussant sur un pixel dans la pupille qui en compte 80 dans mes simulations. La largeur du *pseudo-Dirac* est donc d'environ 1.2% de la taille de la pupille. On cherche à savoir ici s'il est possible d'agrandir cette largeur sans dégrader l'estimation des gains optiques. Il serait notamment très pratique que l'activation d'un actionneur au centre de la pupille puisse être suffisant pour mener la calibration de $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$. Ainsi, on applique de nouveau cette méthode en étalonnant $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$ avec des largeurs du *pseudo-Dirac* de phase différentes : 13%, 26% et 50%. Les nouveaux gains optiques estimés sont donnés figure 5.34 dans le cas d'un échantillonnage de la GSC à Shannon/4 pour la même phase résiduelle en boucle fermée considérée juste avant. Il est assez surprenant de voir que les gains commencent à être impactés de manière significative seulement pour des excitations exhibant des largeurs extrêmes. Cela s'explique par la présence de bords francs : la réponse générée s'éloigne fortement de la réponse impulsionnelle de la 4PWFS, mais l'estimation des gains se fait toujours car on sonde tout de même toutes les fréquences spatiales.

Cas d'un *poke* au centre de la pupille. Les résultats précédents nous poussent donc à tester non plus une excitation en phase à bord franc pour l'étalonnage de $\boldsymbol{\mathcal{IR}}_{\perp}$, mais un *poke* d'un actionneur situé au centre de la pupille. On réitère l'esti-

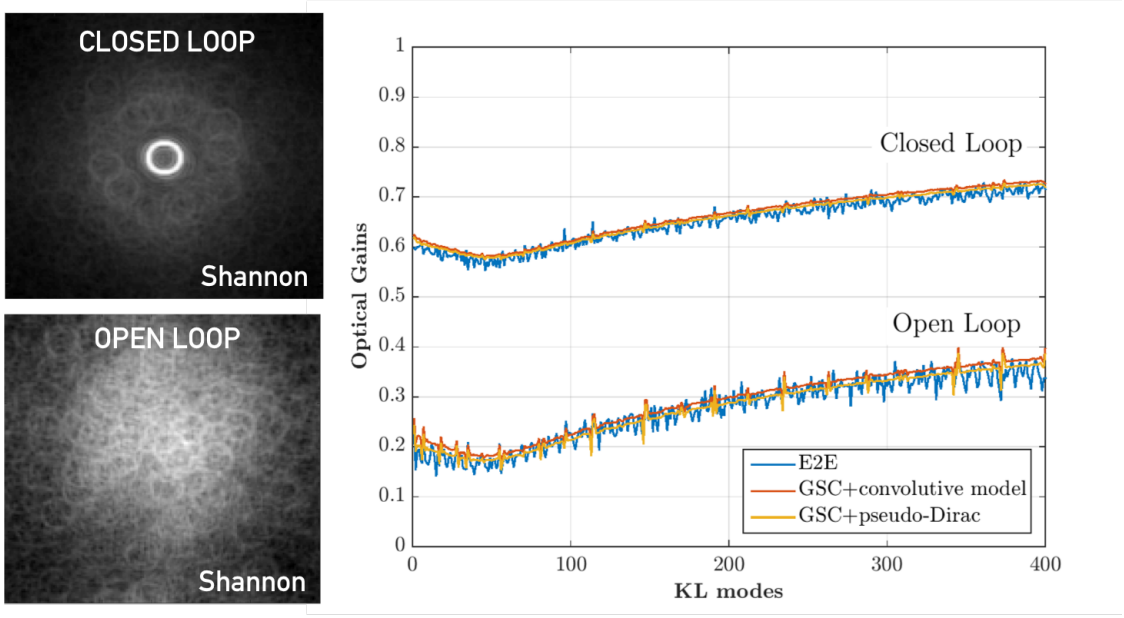


FIGURE 5.32 – **Gains optiques via la matrice d'interaction impulsionnelle**. Échantillonnage à Shannon sur la GSC.

mation des gains optiques pour les configurations boucle ouverte et boucle fermée dans les deux cas d'échantillonnage de la GSC considérés auparavant. Les résultats, exposés figure 5.35, montrent qu'il est en réalité tout à fait possible de mener la calibration à l'aide des actionneurs. Ce résultat a un fort impact en pratique, il implique que la mise en œuvre de cette méthode ne nécessite en réalité pas d'éléments optiques supplémentaires pour générer le *pseudo-Dirac*.

5.4.3 Conclusion sur cette approche

Cette façon de déterminer les gains optiques en s'affranchissant de toute formule mathématique démontre une nouvelle fois **l'intérêt de décrire et d'imaginer la 4PWFS comme un système convolutif, au delà même des équations**. On conclut la présentation de cette nouvelle façon d'utiliser la GSC par un bilan des avantages et des inconvénients qui émergent de l'approche avec la matrice d'interaction impulsionnelle.

Inconvénients. L'étalonnage prend beaucoup de temps, et la matrice construite possède une taille conséquente. Cet effet peut être réduit dans le cas d'une GSC sous-échantillonnée, où le nombre de pixels à balayer est moins important. De plus, on se retrouve confronté aux problèmes inhérents à l'approximation pupille glissante exposés section 2.3.2.1. Dans le cas d'une pupille obstruée, il faut ainsi étalonner avec une pupille pleine pour pouvoir y placer le *pseudo-Dirac* de phase au centre. Si l'on veut absolument garder une pupille identique pour l'étalonnage et les observations, on pourrait imaginer de générer le *pseudo-Dirac* non pas au centre, mais dans une zone de la pupille assez éloignée des bords.

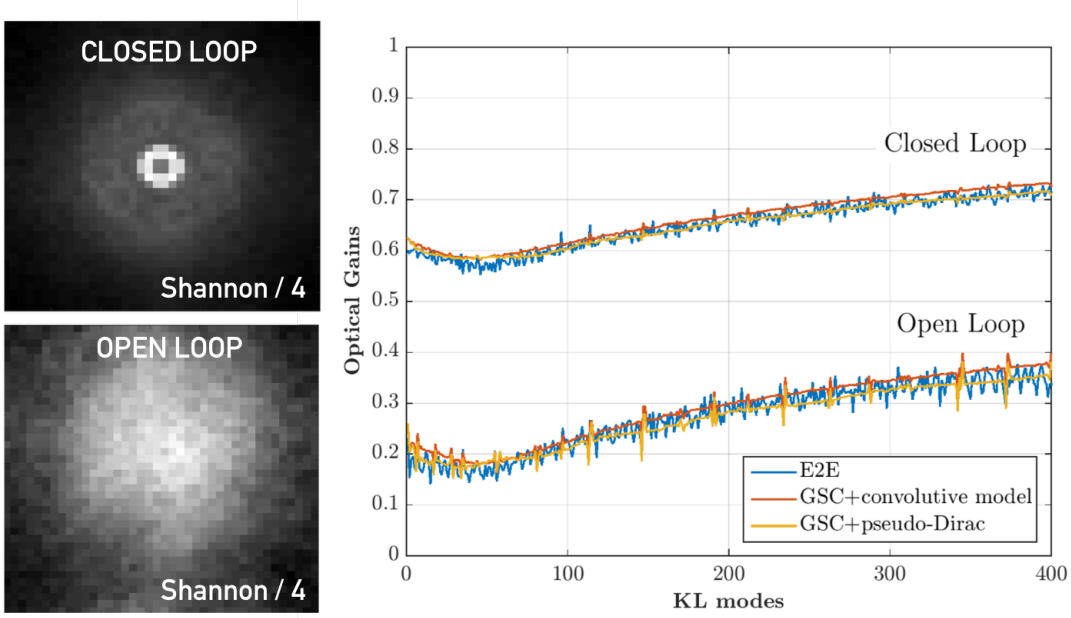


FIGURE 5.33 – **Gains optiques via la matrice d'interaction impulsionnelle**. Échantillonnage à Shannon / 4 sur la GSC. $r_{mod} = 4\ \lambda/D$

Avantages. La procédure d'étalonnage nous permet d'avoir une réponse impulsionnelle très proche du vrai système. Dans le cas des différentes SCAO pour les instruments première lumière de l'ELT, on rappelle qu'il n'y aura pas de source de d'étalonnage. La construction d'une telle matrice lors des phases d'AIT apporterait un complément très utile aux stratégies envisagées aujourd'hui (matrices d'interaction pseudo-synthétiques, [Heritier et al., 2018]). Si l'on regarde le temps d'étalonnage nécessaire pour le cas d'une caméra 250 × 250 pixels, cela va prendre environ 15 fois plus de temps que pour l'étalonnage d'une matrice d'interaction correspondant à 4000 modes (le cas pour l'ELT). En revanche, cet étalonnage est robuste dans le temps, puisqu'il établi un modèle de la 4PWFS qui, malgré des déplacements dans le système optique au cours des jours, n'affectera pas spécialement l'estimation des gains. Il faut juste s'assurer que la GSC reste bien alignée avec l'axe optique.

Le passage par la matrice d'interaction impulsionnelle semble se présenter comme une façon très naturelle d'étalonner le binôme 4PWFS/GSC. Cette méthode peut d'ailleurs être vue comme la plus intéressante pour une validation expérimentale de la GSC, validation qui n'a malheureusement pas pu être menée au cours de cette thèse mais dont la mise en place est actuellement en cours comme on va le voir dans le chapitre suivant.

⊙

Ce chapitre s'est concentré sur le développement d'une stratégie d'estimation des gains optiques pour la 4PWFS. Après avoir mis en lumière

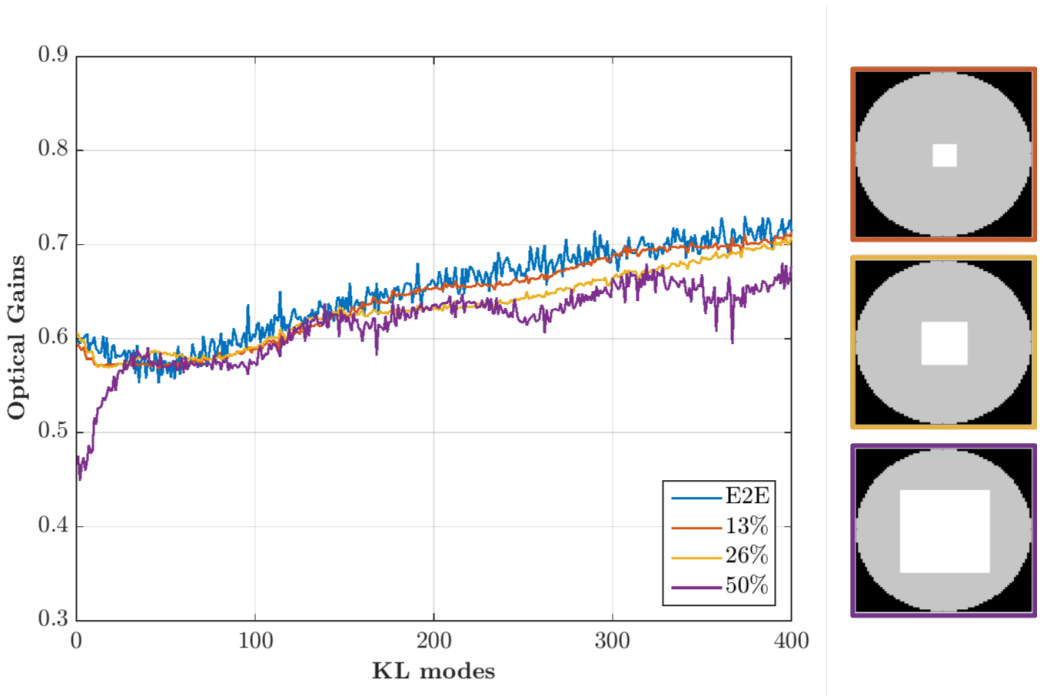


FIGURE 5.34 – **Estimation des gains optiques pour différentes largeurs de *pseudo-Dirac*.** Les *pseudo-Dirac* de phase dans la pupille correspondants aux courbes sont montré à droite.

l'aspect crucial de ces gains sur les différentes facettes du contrôle de front d'onde dans la boucle d'OA, j'ai développé une technique de suivi originale basée sur l'approche des *Linear-parameters Varying Systems* : on suppose le comportement de la 4PWFS comme étant toujours descriptible comme une réponse linéaire, mais avec une linéarité qui change suivant le signal mesuré en entrée. Je pousse ce formalisme de façon à proposer un suivi des gains optiques trame à trame. Dans ce cas, il est nécessaire d'obtenir une information supplémentaire sur la phase à chaque mesure, afin d'estimer le bon régime de fonctionnement. Pour remplir cette tâche, je propose un montage optique qui utilise les données d'une caméra en plan focal, je l'ai nommé la *Gains Scheduling Camera*, pour apporter la connaissance supplémentaire nécessaire. Cette solution très prometteuse a démontré sa précision en simulation, et reste à valider expérimentalement.

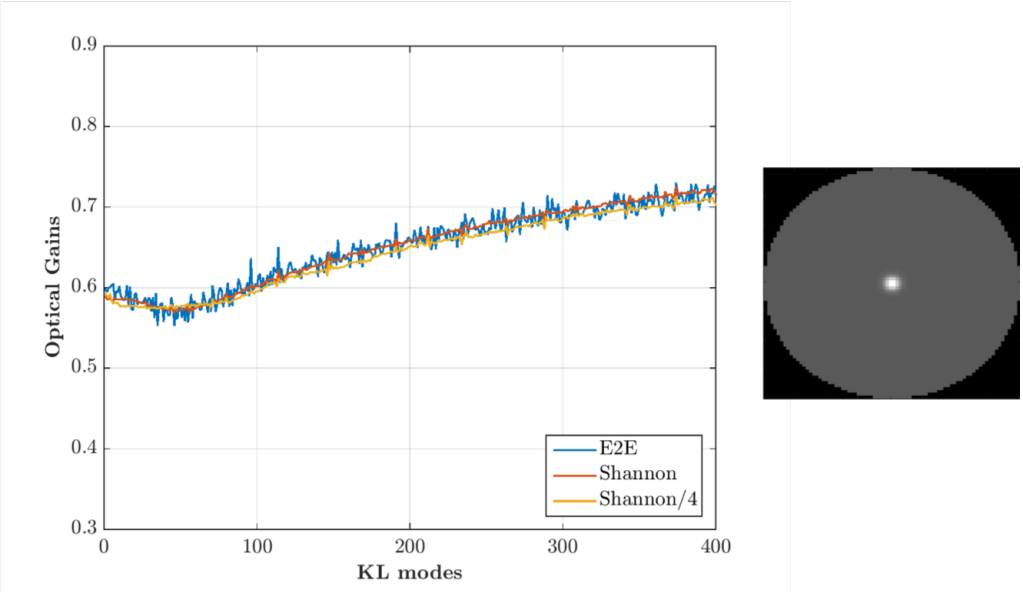


FIGURE 5.35 – **Estimation des gains optiques pour un étalonnage de la réponse impulsionnelle fait à l'aide d'un *poke*** pour deux configuration d'échantillonnage sur la GSC.

Chapitre 6

De la théorie et la simulation vers la démonstration expérimentale

Résumé

Ce chapitre présente le côté plus expérimental de ma thèse. Les travaux se divisent en deux parties. Je présente d'abord les études expérimentales menées sur le banc LOOPS au LAM. Ce banc offre la possibilité de pouvoir générer n'importe quel masque de phase en plan focal. J'utilise donc cette propriété pour tester une partie des différents ASO étudiés au chapitre 4. Je m'attarde ensuite sur un second projet expérimental qui a occupé une partie de cette thèse : le projet PAPYRUS. Ce projet vise à installer sur ciel une 4PWFS assistée par plan focal.

Sommaire

6.1 Le banc LOOPS : un démonstrateur expérimental 205
6.1.1 Principe du banc et objectifs scientifiques 205
6.1.2 Spatial Light Modulators, éléments clefs du banc 207
6.1.3 Études de sensibilité 210
6.1.4 Conclusion et perspectives 218
6.2 Mise en oeuvre d'un système Pyramide sur ciel : le projet PAPYRUS 221
6.2.1 Objectifs scientifiques et motivations 221
6.2.2 Caractéristiques de l'instrument 222
6.2.3 État d'avancement du projet 226
6.2.4 Conclusion 229

6.1 Le banc LOOPS : un démonstrateur expérimental

6.1.1 Principe du banc et objectifs scientifiques

LOOPS (LAM-Onera On-sky System) est un banc optique hébergé au LAM, originellement conçu pour tester sur banc optique la 4PWFS [El Hadi et al., 2014, Bond et al., 2015] et permettant aujourd'hui de tester expérimentalement tout type de masque de phase à filtrage de Fourier dans des configurations d'OA très variées [Janin-Potiron et al.,]. L'originalité de ce banc repose sur l'utilisation de deux Spatial Light Modulators (SLM) localisés pour l'un en plan pupille et pour l'autre en plan focal. Avant d'expliquer plus précisément le principe de fonctionnement et les possibilités offertes par les SLM, on décrit la disposition des différents composants optiques du banc LOOPS.

Le schéma optique du banc est donné figure 6.1. Ce banc dispose d'une source laser fibrée à $\lambda = 633\ nm$ dont le faisceau est dans un premier temps collimaté, puis rencontre un diaphragme qui forme la pupille du télescope. Cette pupille est ensuite ré-imagée à l'aide de lentilles sur différents composants optiques (les images de la pupille sont représentées en orange sur le schéma 6.1). On liste les plans pupille notables du système :

— **SLM :** ce plan pupille permet de générer à la fois la turbulence, mais aussi le DM pour la correction ou bien la génération de modes afin d'étalonner les ASO étudiés (Modèle : *Hamamatsu - SLM LCOS série 13138*).
— **Miroir de modulation :** ce miroir permet d'effectuer l'opération de modulation nominalement jusqu'à une vitesse de 500 Hz pour différents rayons de modulation (Modèle : *Prototype de chez PI*).
— **Caméra voie ASO :** cette caméra est donc située dans un plan pupille, en aval de l'opération de filtrage de Fourier (Modèle : *FLI : OCAM2K*).

On note aussi les plans focaux remarquables :

— **Caméra voie science :** ce plan focal est situé dans la voie science (Modèle : *Hamamtsu : ORCA-FLASH 2.0*).
— **Caméra de modulation :** située dans la voie ASO, cette caméra permet de contrôler la forme de la modulation. Elle peut être aussi utilisée dans le rôle de GSC (Modèle : *Thorlab : Thorcam - USB 2.0*).
— **SLM :** partie essentielle du banc où l'on génère les masques à filtrage de Fourier (Modèle : *Hamamatsu - SLM LCOS série 13138*).

Pour les résultats présentés ici, on utilise un configuration légèrement différente du banc, permettant d'avoir un échantillonnage plus important dans le plan pupille de la voie ASO : la caméra ASO utilisée est l'*ORCA* au lieu de l'*OCAM2K*. On utilise alors la caméra de modulation *Thorcam* pour enregistrer les PSF.

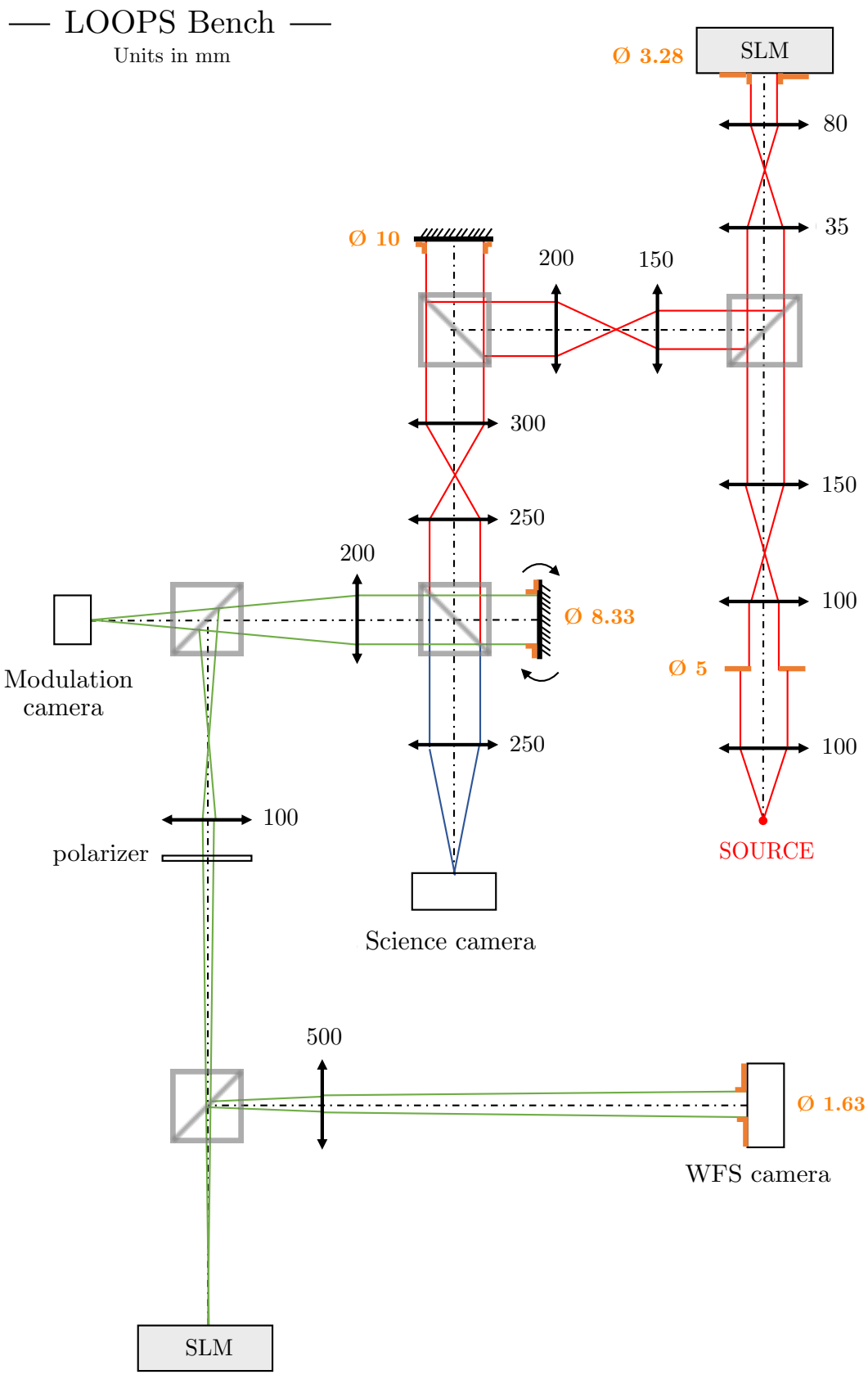


FIGURE 6.1 – **Schéma du banc optique LOOPS.**

6.1.2 Spatial Light Modulators, éléments clefs du banc

6.1.2.1 Masques de phase reprogrammables

Les SLM sont des composants optroniques constitués d'une matrice de pixels dont chacun d'eux peut-être contrôlé afin d'imprimer sur le faisceau un déphasage donné. Les SLM utilisés sur LOOPS ont les caractéristiques suivantes :

Taille pixel : 12.5 μm × 12.5 μm - **Nombre de pixels :** 1024×1280.

Le fonctionnement de ces SLM est basé sur des cristaux liquides et sur le principe de **biréfringence**. Chaque pixel est constitué d'une cavité remplie de cristaux liquides dont l'orientation est contrôlée par l'application d'une tension. Tous ces pixels sont placés devant un miroir et pour la polarisation adéquate, l'orientation des cristaux influe directement sur l'indice optique de la cavité qui forme le pixel. Ainsi le déphasage induit par un pixel sur le front d'onde s'écrit :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n(\lambda, V) \times 2d \tag{6.1}$$

où d est la taille de la cavité (voir figure 6.2), λ la longueur d'onde, n l'indice optique et V la commande en tension appliquée au pixel. Les SLM fonctionnent ainsi en lumière polarisée et sont des composants fortement monochromatiques, que ce soit en phase ou bien en différence de marche induite sur le front d'onde.

Vitesse de rafraîchissement. L'envoi des commandes aux SLM se fait par câble *DVI*, permettant une communication jusqu'à des fréquences de 60 Hz. En pratique, les temps de réponse des cristaux liquides permettent plutôt une utilisation de l'ordre de la dizaine de Hz. Le banc est donc contraint de fonctionner au "ralenti".

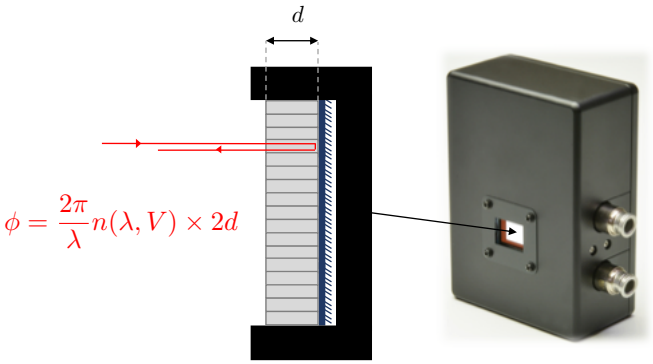


FIGURE 6.2 – **Fonctionnement d'un SLM**.

Amplitude maximale des aberrations. La phase générée sur le SLM est repliée entre 0 et 2π et l'amplitude atteignable des aberrations dépend donc du nombre pixels disponibles dans la pupille. Dans nos cas d'utilisation, nous sommes très loin des amplitudes maximales atteignables.

6.1.2.2 Inconvénients

Les SLM permettent donc un contrôle très fin de la phase, et cela avec des amplitudes très grandes. Il est néanmoins important de préciser les inconvénients qui empêchent (avec les technologies actuelles) leur utilisation pour des expériences sur ciel comme éléments correcteurs de turbulence par exemple :

- **Monochromatisme :** l'indice optique dépend de la longueur d'onde et entraîne un chromatisme en phase et en différence de marche.
- **Polarisation :** les cristaux fonctionnent avec de la lumière polarisée, il faut ainsi sacrifier la moitié du flux. On pourrait tout de même imaginer un système composé de deux SLM travaillant sur des polarisations orthogonales.
- **Vitesse :** les SLM sont des systèmes qui fonctionnent très lentement. Ce point est en constante progression, avec l'apparition sur le marché de SLM qui ont des fréquences de rafraîchissement de l'ordre de la centaine de Hz.

6.1.2.3 Contrôle de la phase en plan pupille

Le premier SLM est placé en plan pupille. On dispose alors de :

Diamètre de la pupille : 268 pixels

On dispose donc de 268 points de contrôle de phase dans la pupille. Dans l'état actuel du banc, cet échantillonnage est amplement suffisant, mais on rappelle tout de même qu'il serait possible d'échantillonner jusqu'à environ 1000 pixels dans le diamètre en couvrant toute l'aire effective du SLM.

Gestion de la lumière non déphasée. La lumière non affectée par le déphasage induit par les cristaux est constituée de : (i) la mauvaise polarisation, celle orthogonale aux cristaux (ii) la bonne polarisation qui s'est propagée dans les espaces morts entre les pixels du SLM (environ 5% de la surface). L'utilisation d'un polariseur n'est donc pas suffisant pour retirer complètement la lumière non déphasée. Pour séparer entièrement la lumière modulée par le SLM de l'ordre 0 (non modulé), on applique un tip-tilt mécanique sur la monture du SLM que l'on compense en phase avec les cristaux liquides. Cette opération est schématisée figure 6.3 : on voit alors qu'un simple diaphragme en plan focal permet de filtrer la lumière modulée de l'ordre 0.

Contrôle en amplitude. Bien que le SLM permet seulement un contrôle en phase sur la pupille, il est possible de créer des masques d'amplitude binaires (c'est à dire 0 ou bien 1). Pour cela, il suffit de ne pas compenser le tip-tilt mécanique sur la monture du SLM dans les zones où l'on veut éjecter la lumière [Taheri et al., 2020]. Cette opération permet de créer des pupilles obstruées, avec présence de spiders, ou bien même des pupilles plus exotiques telle que celle du LBT. On présente figure 6.4 diverses configurations de masque d'amplitude pour la pupille, avec les images acquises par la caméra ASO en l'absence de masque de filtrage et les PSF expérimentales correspondantes.

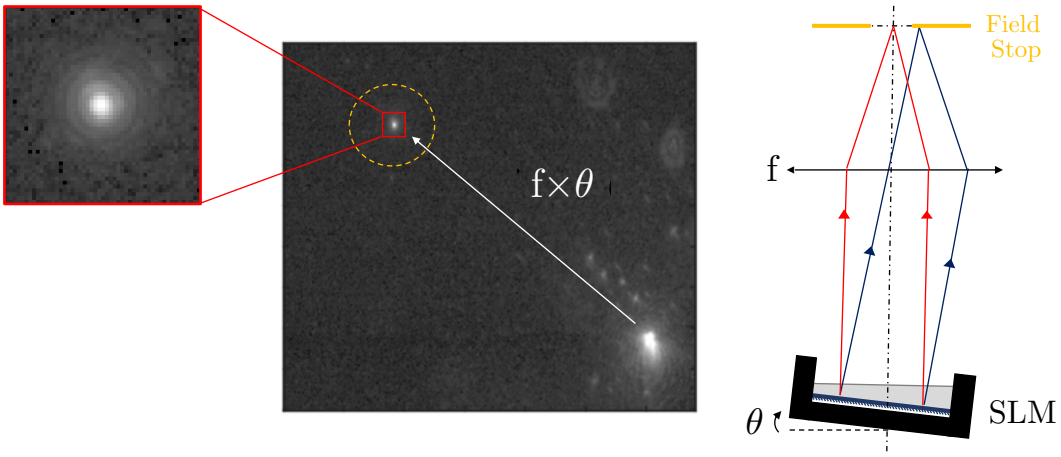


FIGURE 6.3 – **LOOPS : Séparation de l'ordre 0 et de l'ordre 1.**

Stratégie d'alignement. La position de l'empreinte de la pupille sur le SLM doit être déterminée avec précision. La possibilité de génération de masques d'amplitude avec la méthode décrite ci-dessus permet une stratégie pour retrouver précisément le centre de la position de la pupille ainsi que son rayon. Il suffit pour cela de générer une obstruction centrale très grande : on peut alors facilement contrôler la position de cette obstruction et sa taille relative dans la pupille, et ajuster la position des pixels (centrage et rayon) pour obtenir l'obstruction voulue.

6.1.2.4 Contrôle de la phase en plan focal

La grande particularité du banc LOOPS est son SLM en plan focal. Ce montage permet de créer n'importe quel masque de phase pour effectuer du filtrage de Fourier. Le système est monté de la sorte à avoir un nombre conséquent de pixels dans la tâche de diffraction :

$$\textbf{Échantillonnage de la diffraction} = 15 \text{ pixels par } \lambda/D$$

Pour obtenir une telle configuration, il faut un f-ratio très élevé dans cette branche du banc (figure 6.1). On expliquera par la suite comment on peut vérifier expérimentalement cette valeur.

Gestion de la lumière non déphasée. Afin de s'affranchir de l'ordre 0, on effectue la même méthode que celle présentée pour le SLM en plan pupille : on place un tip-tilt mécanique sur la monture du SLM, que l'on compense par un déphasage des cristaux. Cette fois aucun filtrage n'est nécessaire, on garde juste la portion qui correspond à la zone d'intérêt.

Après cette brève description, on propose d'utiliser ce banc pour confirmer expérimentalement les résultats du chapitre 4 sur le calcul des sensibilités des différents analyseurs. On mettra aussi en application le formalisme convolutif à

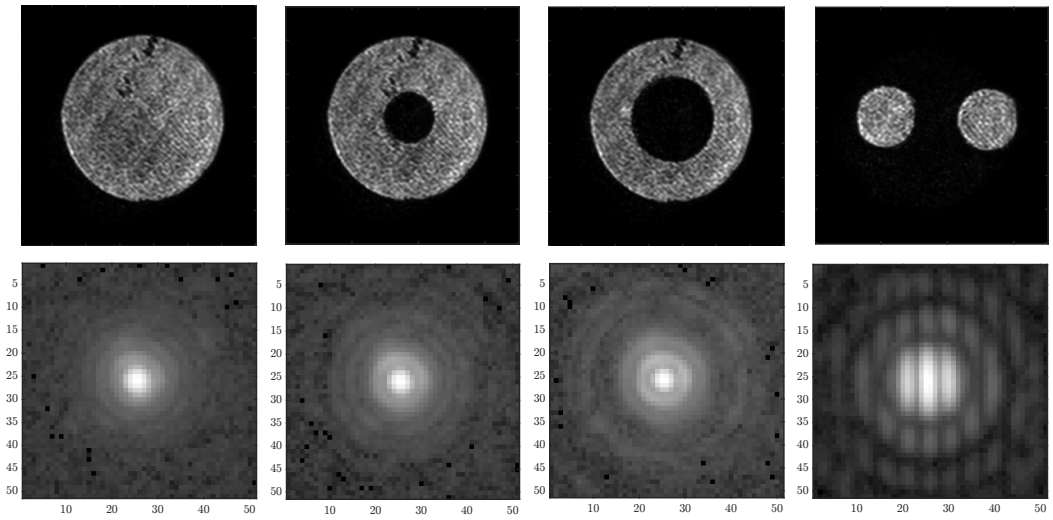


FIGURE 6.4 – **LOOPS : Masques d'amplitudes générés avec le SLM en plan pupille**. **Haut :** pupilles enregistrées par la caméra ASO en l'absence de filtrage. **Bas :** PSF correspondantes au niveau de la caméra de modulation.

travers la génération d'excitations de phase de type *pesuo-Dirac* et le calcul des fonctions de transfert correspondantes.

6.1.3 Études de sensibilité

Il s'agit donc ici de calculer des courbes de sensibilités extraites des matrices d'interactions pour différentes configurations de masques générées avec la SLM plan focal, comme cela a été fait en simulation au chapitre 4. On utilise la base des KL pour générer les courbes de sensibilités.

6.1.3.1 Courbes de sensibilités

En suivant l'approche présentée chapitre 4, on sépare l'analyse en mesurant les deux types de sensibilités : la sensibilité au bruit uniforme et la sensibilité au bruit de photons.

Sensibilité à un bruit uniforme

Cas non modulés. On calcule les courbes de sensibilité aux modes de KL présentées pour différents types d'ASO à filtrage de Fourier non-modulés. On présente comme exemple les intensités de référence correspondant à la 4PWFS non modulé figure 6.6.

Toutes les autres intensités de références pour les différentes configurations de masques sont livrées plus loin, figure 6.20. On rappelle que les sensibilités à un bruit uniforme sont calculées en prenant la norme euclidienne des colonnes de la matrice d'interaction, que l'on normalise par le nombre de sous-pupilles encodant la phase.

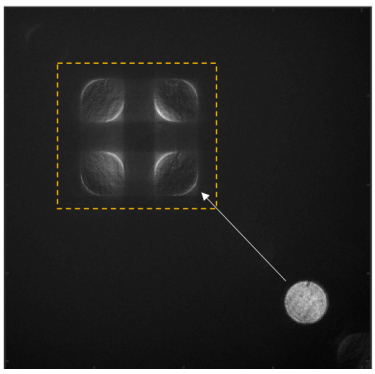


FIGURE 6.5 – **LOOPS : Séparation de l'ordre 0 et de l'ordre 1 dans le cadre d'une 4PWFS non-modulée sur le SLM plan focal**.

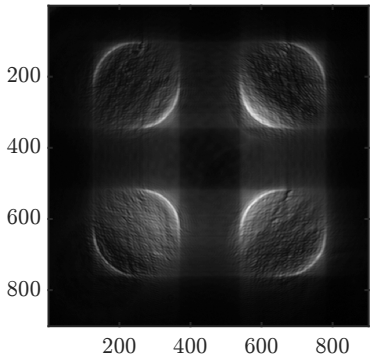


FIGURE 6.6 – **LOOPS : Intensités de référence pour la 4PWFS non modulée**

Ici on dispose de 250 pixels dans le diamètre des images des pupilles. Le facteur de normalisation est donc le suivant :

$$\sqrt{N_{spp}} = \sqrt{\pi \times (\tfrac{250}{2})^2} \approx 222.$$

Les courbes ainsi mesurées sont données figure 6.7. On retrouve les résultats principaux présentés au chapitre 4 (en notant FPWFS la classe des pyramides **aplaties**) :

- **PWFS :** Hiérarchie en sensibilité suivant leur nombre de faces. On rappelle que ce résultat est assez intuitif : moins on utilise de pixels pour encoder le signal, et plus on gagne en sensibilité vis à vis des bruits uniformes sur le détecteur.
- **FPWFS :** Rebonds dans les sensibilités suivant le taux de superposition des images des pupilles. Cette caractéristique, prévue par [Fauvarque et al., 2016], est démontrée ici expérimentalement pour la première fois.
- **ZWFS :** Gain en sensibilité sur tous les hauts ordres par rapport au ZWFS classique et perte de sensibilité au niveau des bas ordres pour les configurations à grande pastille. Ce résultat vient confirmer expérimentalement les courbes purement théoriques figure 4.29.

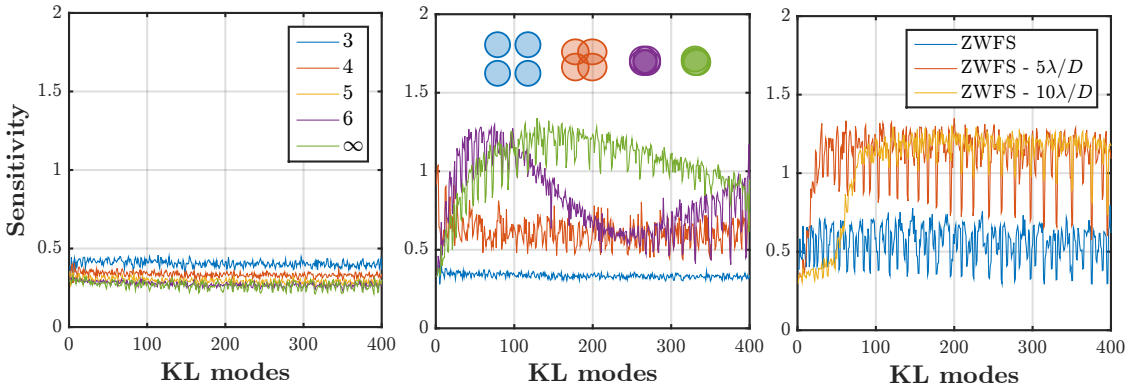


FIGURE 6.7 – **LOOPS : Sensibilités à un bruit uniforme pour différents ASO non-modulés.**

On remarque que ces courbes sont plus éloignées de la valeur maximale $s = 2$ que celles calculées théoriquement ou bien en simulation. Une explication vraisemblable de ce phénomène est la présence de réflexions résiduelles atteignant le détecteur, apportant une certaine quantité de photons ne participant pas à l'analyse tout en étant pris en compte dans la normalisation requise pour le calcul des intensités réduites. On relève aussi que les basses fréquences atteignent des planchers assez hauts en sensibilité.

OWFS. On implémente aussi le masque du OWFS (Optimized-WFS) généré pour une pupille pleine en le mettant à l'échelle du SLM par simple homothétie. On obtient ainsi les intensités de référence figure 6.8.

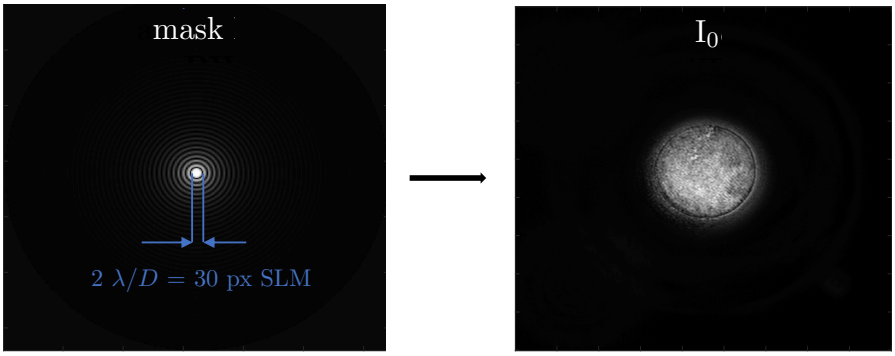


FIGURE 6.8 – **LOOPS : phase du masque et intensités de référence du OWFS.**

La courbe de sensibilité à un bruit uniforme du OWFS, avec pour comparaison des configurations de ZWFS, est présentée figure 6.9. On valide expérimentalement le comportement du OWFS qui vient récupérer la sensibilité aux basses fréquences, perdues dans le cas de ZWFS grande pastille. Les creux de sensibilité pour certains KL correspondent aux modes concentrant une majorité de leur énergie en bord de

pupille, où le OWFS présente une sensibilité moindre. Un masque optimisé pour avoir des réponses plus uniformes (section 4.3.3) permettrait de s'affranchir de cet effet.

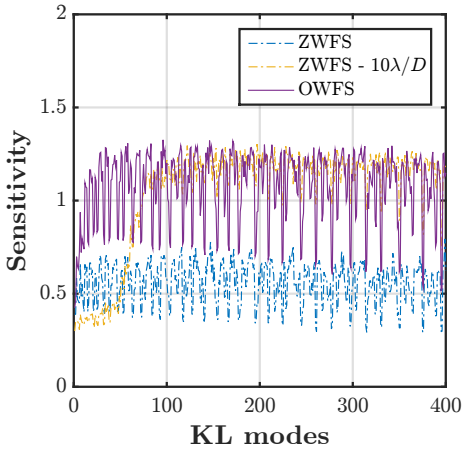


FIGURE 6.9 – **LOOPS : Sensibilité à un bruit uniforme pour le OWFS.**

Cas modulé. On prend l'exemple de la 4PWFS modulée à $7\lambda/D$. Le signal enregistré par la caméra de modulation et la courbe de sensibilité à un bruit uniforme sont donnés figure 6.10. On observe bien le phénomène attendu de perte de sensibilité marquée pour les bas ordres accompagnée d'une perte plus légère mais uniforme sur tous les modes au-delà de la modulation.

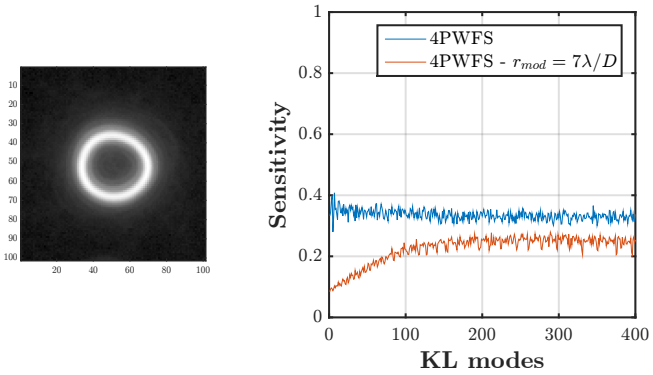


FIGURE 6.10 – **LOOPS : PSF modulée à $7\lambda/D$ et courbe de sensibilité à un bruit uniforme pour la 4PWFS non-modulé et modulée à $7\lambda/D$.**

Sensibilité au bruit de photons

On effectue de même avec les sensibilités au bruit de photon, données figure 6.11. On rappelle que pour le calcul de ces sensibilités, il faut diviser chaque réponse aux

modes par $\sqrt{I_0}$ avant d'en prendre la norme euclidienne.

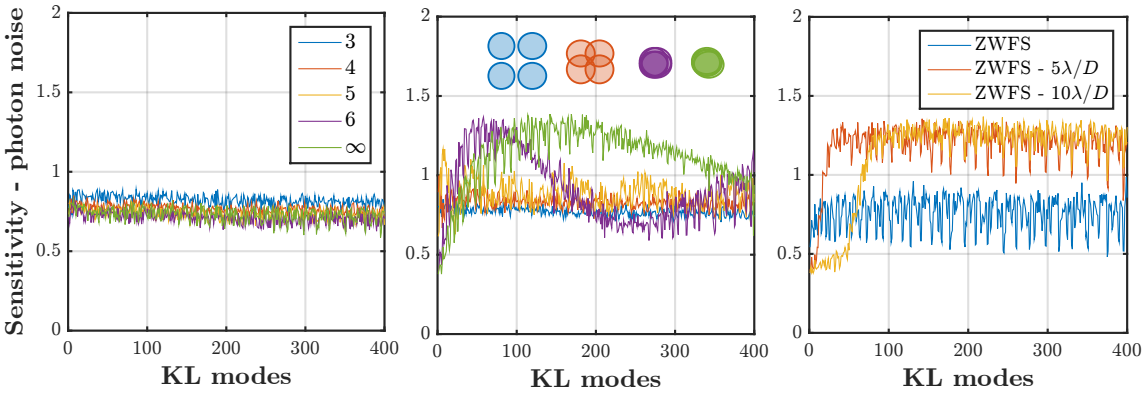


FIGURE 6.11 – **LOOPS : Sensibilités au bruit de photons pour différents ASO non-modulés.**

De même que précédement, on retrouve les résultats principaux présentés au chapitre 4 :

— **PWFS :** Comportement très similaire entre les faces, avec ici un léger surplus de sensibilité pour la 3PWFS.
— **FPWFS :** Rebonds qui oscillent autour de la 4PWFS *classique*.
— **ZWFS :** Même constat que pour les sensibilités à un bruit uniforme : les grandes pastilles perdent leur sensibilité pour les bas ordres.

De la même manière que pour les sensibilités à un bruit uniforme, on note un facteur entre les courbes données en simulation et les courbes calculées ici.

OWFS. La courbe de sensibilité au bruit de photon du OWFS, avec de nouveau pour comparaison des configurations de ZWFS, est présentée figure 6.12. On confirme bien le comportement attendu du OWFS en terme de bruit de photon.

Cas modulés. On mesure les sensibilités au bruit de photon pour la classe des PWFS modulées à $r_{mod} = 7\ \lambda/D$. Les résultats sont données figure 6.13. On confirme expérimentalement un des résultats importants présentés au chapitre 4 : lorsque les PWFS sont modulées, on retrouve une hiérarchie en terme de sensibilités au bruit de photon suivant le nombre de faces.

La mise en pratique des calculs des différents types de sensibilités sur le banc LOOPS confirme donc expérimentalement l'ensemble des résultats livrés au chapitre 4.

6.1.3.2 Fonctions de transfert

***Pseudo-Dirac* et champ de vue du SLM plan focal**

Le but de ce paragraphe est de mettre en oeuvre expérimentalement la technique d'estimation de la réponse impulsionnelle et de la fonction de transfert des ASO en

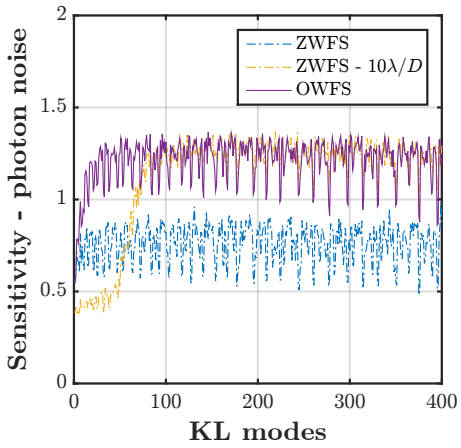


FIGURE 6.12 – **LOOPS : Sensibilité au bruit de photons pour le OWFS.**

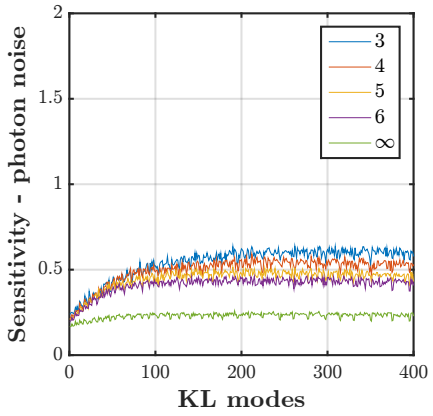


FIGURE 6.13 – **LOOPS : Sensibilités au bruit de photons pour les PWFS modulés à** $r_{mod} = 7\ \lambda/D$**.**

passant par une excitation de type *pseudo-Dirac*, introduite section 2.3.2.3. Pour cela, on génère au centre de la pupille une excitation de phase portée par 2×2 pixels du SLM plan pupille. On calcule alors la carte de réponse associée grâce à la technique de *push-pull*. Un exemple est donné figure 6.14 pour la 4PWFS. On en déduit la fonction de transfert en calculant la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. On constate alors que la carte ainsi générée a un support bien défini (figure 6.14 - droite). Ce support représente en fait le champ de vue du SLM plan focal dans l'espace des fréquences : à l'instar d'un filtre passe-bas, le SLM coupe les fréquences spatiales se trouvant en dehors de sa surface effective.

La donnée de cette fonction de transfert nous permet de calculer précisément le champ de vue du SLM plan focal en λ/D. En effet, le *pseudo-Dirac* généré vient sonder l'espace des fréquences sur un carré de diagonale 134 λ/D (illustration figure 6.15). Or, la caméra ASO échantillonne la pupille avec 250 pixels, soit un champ de vue de 250 λ/D dans le plan focal. On peut alors retrouver le champ de vue

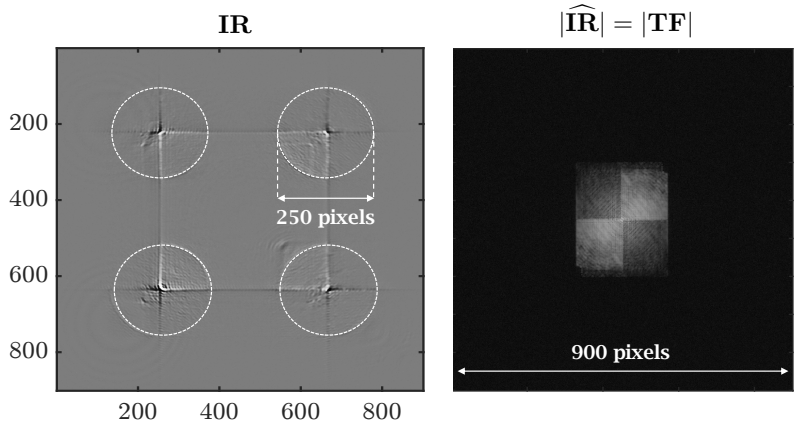


FIGURE 6.14 – **LOOPS : Réponse impulsionnelle et valeur absolue de la fonction de transfert associée pour la 4PWFS.**

du SLM en mesurant l'étendue du support de la fonction de transfert en pixel. On trouve 240 pixels dans le sens de la largeur, correspondant à environ 67 λ/D. On peut alors remonter à la taille pixel du SLM en plan focal en divisant cette valeur par 1024 (nombre de pixel) : on retombe bien sur les 15 pixels par λ/D annoncés précédemment. Au-delà de son utilité pour l'étude comparative des ASO à filtrage de Fourier qui va être présentée ensuite, cette brève analyse montre l'intérêt de l'approche *pseudo-Dirac* comme outil efficace pour la caractérisation de tels systèmes.

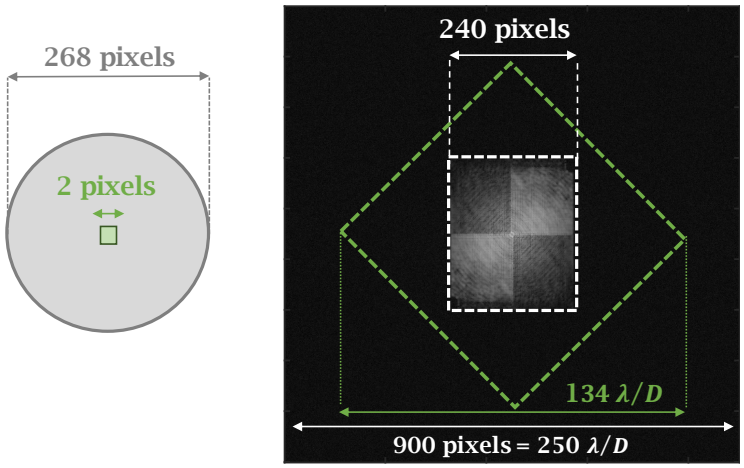


FIGURE 6.15 – **LOOPS : Calcul du champ de vue du SLM plan focal.**

Fonction de transferts pour les différents masques

De la même manière, on calcule expérimentalement les fonctions de transfert des différents masques considérés au cours de cette thèse. Pour rendre la comparaison plus simple, on précise que toutes les cartes de réponses impulsionnelles et de fonctions de transfert montrées ici ont la même échelle de visualisation.

PWFS. On débute l'analyse avec la classe des PWFS non modulées. Les mesures des fonctions de transfert sont livrées figure 6.16. On sait grâce aux équations du modèle convolutif que les formes des fonctions de transfert sont étroitement liées à la transformée de Fourier du masque $\widehat{m}$, et on retrouve bien les structures mesurées en simulation chapitre 4. On remarque la présence de portions plus intenses : cette inhomogénité provient d'un léger dé-centrage de la PSF au sommet des PWFS. On livre aussi la fonction de transfert pour une 4PWFS modulée figure 6.17.

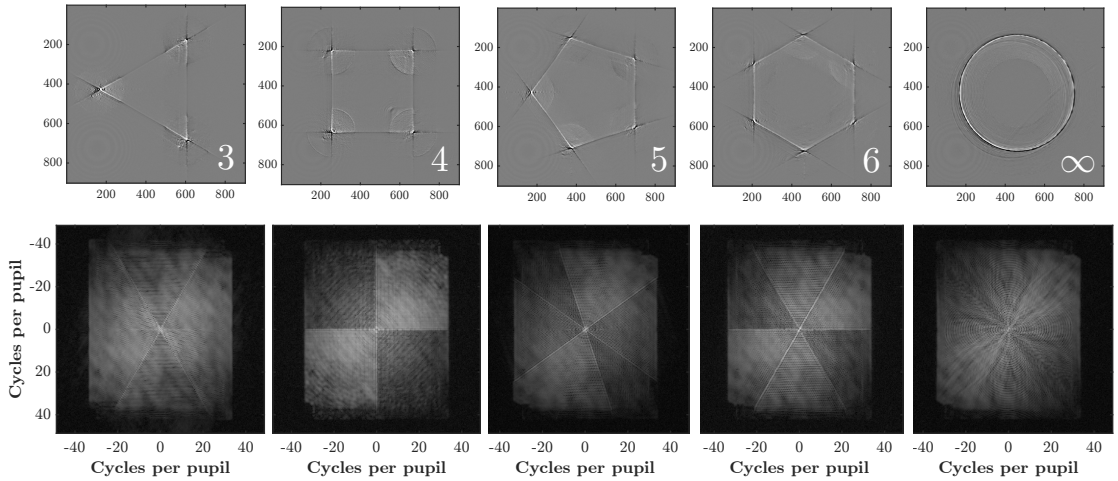


FIGURE 6.16 – **LOOPS : Réponses impulsionnelles et valeurs absolues des fonctions de transfert associées pour la classe des PWFS.**

FPWFS. On effectue la même opération avec la classe des FPWFS (figure 6.18). On voit alors apparaître les oscillations en sensibilité, dont la période est inversement proportionelle à l'écartement des images des pupilles. En comparant avec la classe des PWFS, on constate bien que les pics de sensibilités sont plus importants.

ZWFS. On passe à la classe des ZWFS (figure 6.19). Les fonctions de transfert livrent des cartes avec de hautes valeurs uniformément distribuées. On remarque une baisse sur les bords du support que l'on peut expliquer par l'étendue spectrale (spatiale) du *pseudo-Dirac* envoyé (figure 6.15, dans laquelle on présente aussi la fonction de transfert associée au OWFS). On confirme aussi que pour le cas grande pastille, les fréquences à l'intérieur deviennent non-vues.

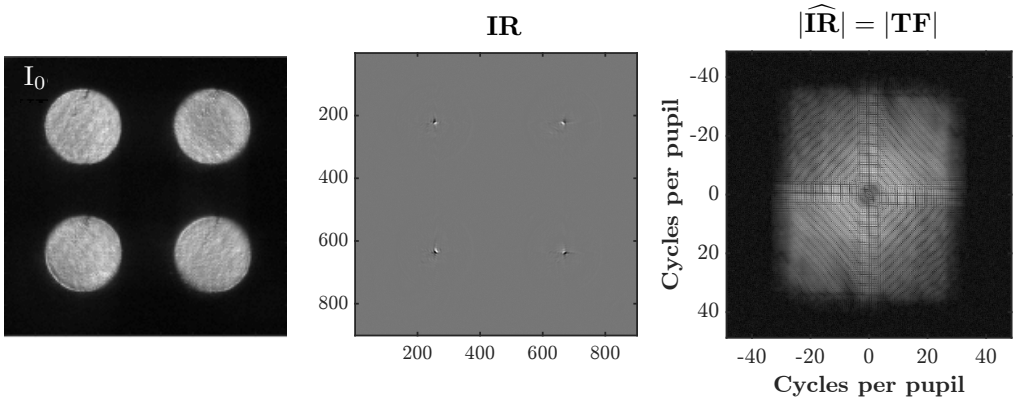


FIGURE 6.17 – **LOOPS : Réponse impulsionnelle et valeur absolue de la fonction de transfert pour une 4PWFS modulée à** $r_{mod} = 7\ \lambda/D$

6.1.4 Conclusion et perspectives

Le banc LOOPS a donc permis de valider les résultats présentés au cours de cette thèse sur les sensibilités des différents ASO à filtrage de Fourier. Aucune démonstration en boucle fermée n'a été envisagée car on a montré que la différence entre les multiples ASO à filtrage de Fourier peut-être mise en évidence seulement dans le cas de régimes très bas flux dans le cadre d'imagerie haut contraste, conditions ne convenant pas aux performances atteignables par ce banc.

On a pu aussi mettre en pratique pour la première fois expérimentalement le concept de l'approche convolutive avec la détermination de réponses impulsionnelles et des fonctions de transferts associées. Au delà de tous les bénéfices que l'on a exposé au cours de cette thèse, cette approche paraît aussi très prometteuse en pratique pour les étalonnages et les caractérisations des systèmes, comme le démontre la simple étude du champ de vue du SLM en plan focal.

Enfin, la validation expérimentale de la GSC sur LOOPS a débuté sans résultats probant à ce stade et donc non présentés ici. L'étude se heurte aux limites de stabilité du banc dont les vibrations sont elles-même source considérable de gains optiques. Mais la mise en oeuvre expérimentale de la GSC se fera à travers un autre projet expérimental que j'ai eu l'occasion de mener au cours de cette thèse et que je présente ensuite : le projet PAPYRUS.

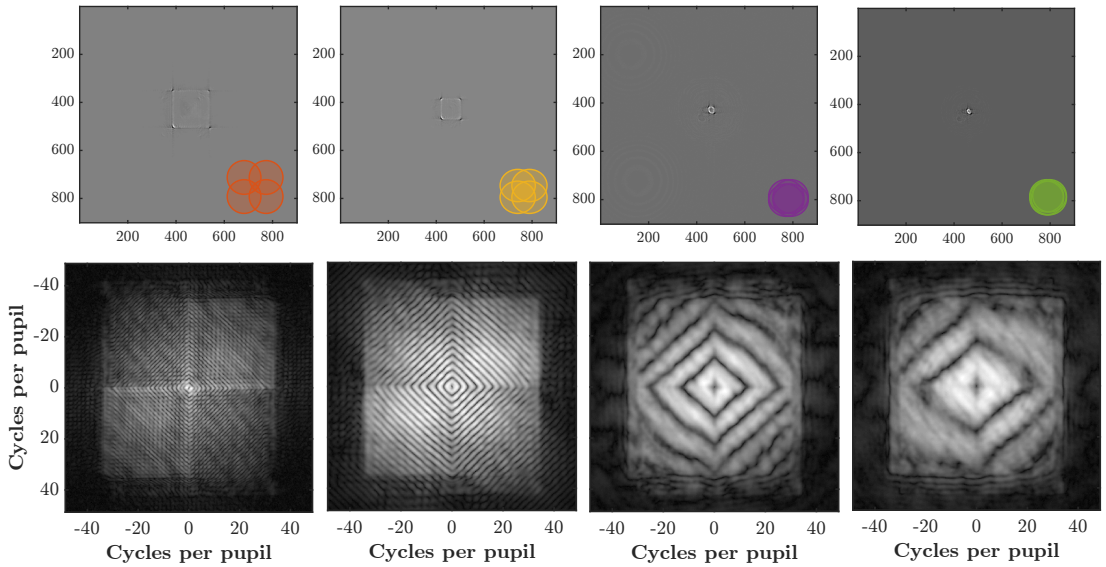


FIGURE 6.18 – **LOOPS : Réponses impulsionnelles et valeurs absolues des fonctions de transfert associées pour la classe des FPWFS.**

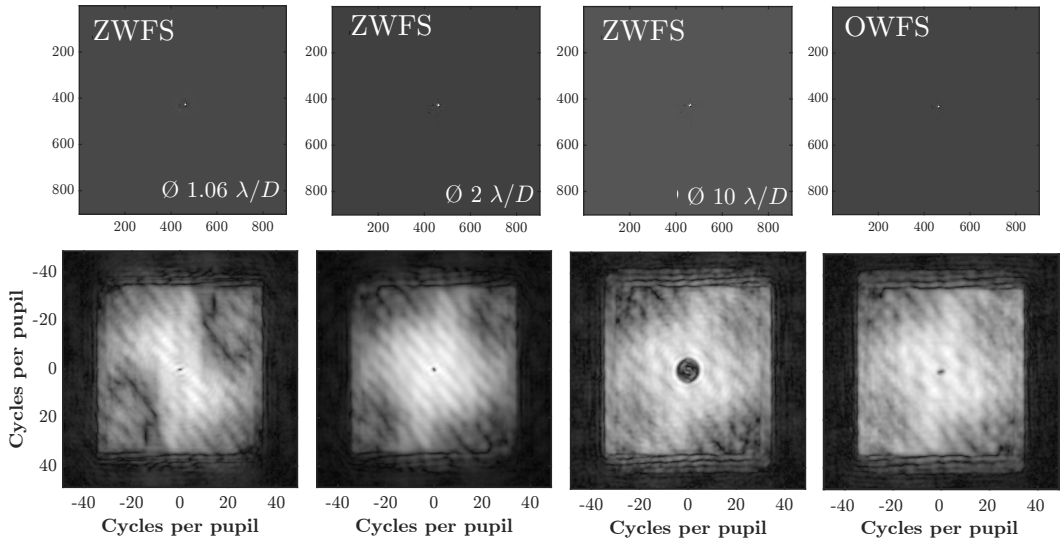


FIGURE 6.19 – **LOOPS : Réponses impulsionnelles et valeurs absolues des fonctions de transfert associées pour la classe des ZWFS et pour le OWFS.**

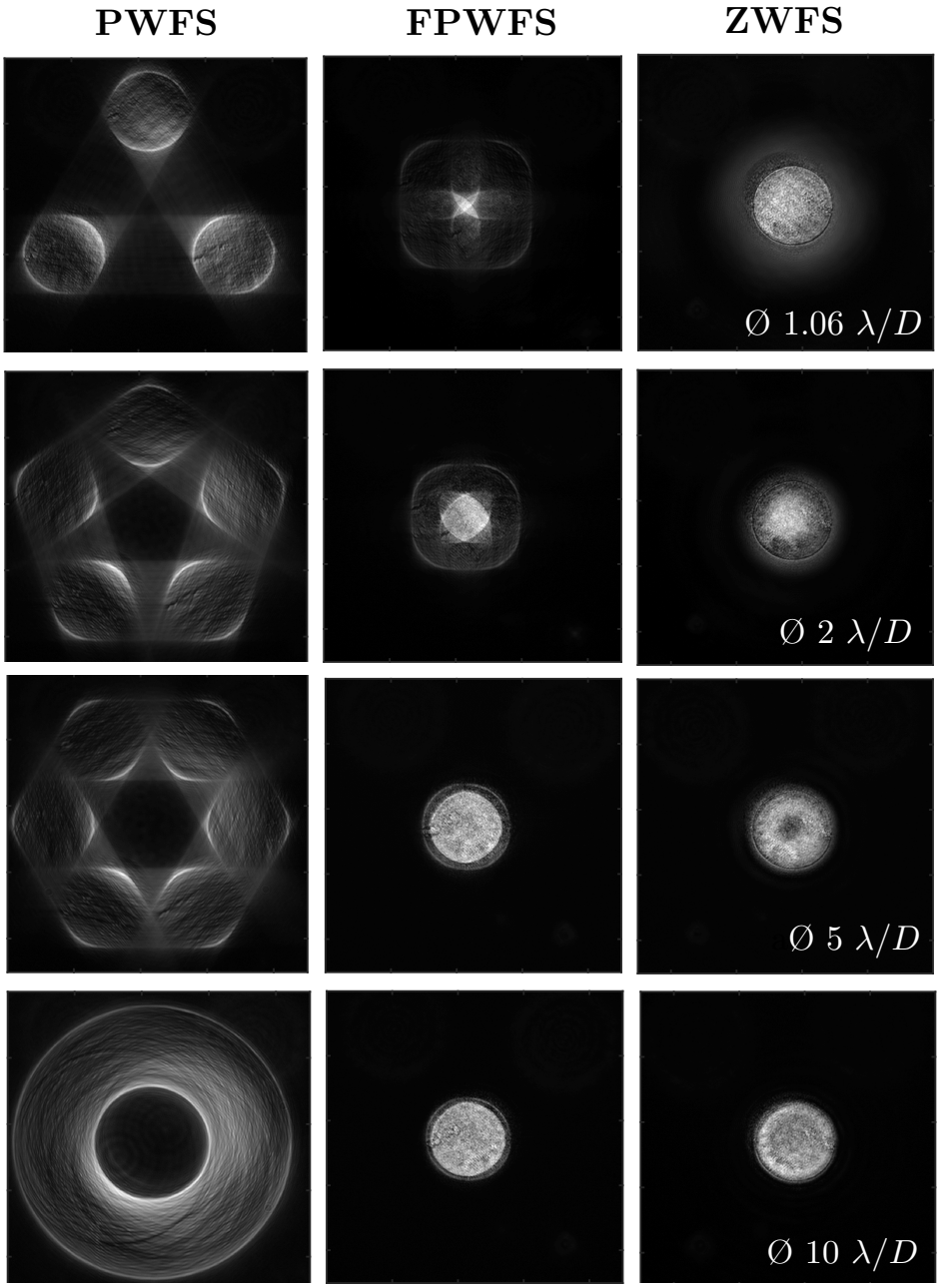


FIGURE 6.20 – **LOOPS : Intensités de référence pour différents types d'ASO à filtrage de Fourier non-modulés.**

6.2 Mise en oeuvre d'un système Pyramide sur ciel : le projet PAPYRUS

Le projet PAPYRUS est un projet porté par le LAM et l'ONERA qui consiste à mettre au point et installer un système d'OA basé sur un ASO de type 4PWFS au télescope T152 de l'Observatoire de Haute-Provence (OHP). Ce projet est majoritairement porté par des étudiants en thèse ou bien en contrat post-doctoral au sein du groupe GRD du LAM, travaillant donc tous dans le domaine de l'optique pour l'astrophysique et balayant un large champ de compétences. Je m'inscris dans cette équipe comme PI du projet ainsi que comme la personne en charge du design de la partie OA. L'aventure PAPYRUS a débuté en janvier 2020 et l'instrument devrait voir sa première lumière fin 2021/ début 2022. Le but de cette section est de résumer les objectifs du projet, les caractéristiques principales de l'instrument et de décrire l'état d'avancement.

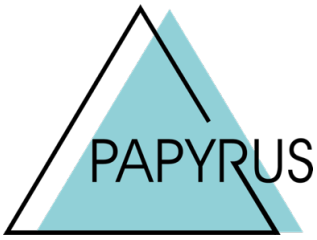


FIGURE 6.21 – **Logo du projet PAPYRUS.** *Crédit : Justine Lopez.*

6.2.1 Objectifs scientifiques et motivations

6.2.1.1 Principaux objectifs

Ce projet possède des objectifs multiples, listés ci-dessous :

R&D sur la 4PWFS : Le LAM a acquis une expertise solide sur l'analyse de surface d'onde par les ASO à filtrage de Fourier, et plus particulièrement avec la 4PWFS. Les travaux dans lesquels ma thèse s'inscrit ont été menés sur une dizaine d'années au sein du laboratoire et couvrent des études théoriques, des simulations et des tests expérimentaux sur banc optique (LOOPS et ses versions antérieures). Aujourd'hui, il manque à ce large panel d'outils des tests sur ciel auprès d'un télescope. Le projet PAPYRUS a donc pour objectif de palier ce manque d'expertise, et va permettre de tester les différentes techniques mises au point par le groupe. Le banc PAPYRUS sera notamment équipé d'une GSC.

Banc d'OA pédagogique : Ce banc a aussi pour objectif d'être utilisé par les nombreux étudiants se rendant chaque année à l'OHP pour des écoles d'été ou bien des stages de Master. Il serait à notre connaissance le premier banc d'OA disposant d'une 4PWFS à pouvoir être utilisé à des fins pédagogiques.

Observations astrophysiques : Une fois mis en service, le banc PAPYRUS permettra d'obtenir des PSF limitées par la diffraction dans le visible sur un télescope de 152 cm. Ces performances attendues pourraient ouvrir la voie à de multiples campagnes d'observations.

6.2.1.2 PAPYRUS : composants déjà disponibles

L'une des grandes motivations de ce projet est la possibilité de pouvoir construire cet instrument à coût réduit, grâce à des composants déjà disponibles au LAM :

- DM - ALPAO 17×17 : prêté par l'ONERA, les actionneurs de ce DM possèdent une zone de linéarité de $\pm 6\ \mu m$ et peuvent fournir des déformations jusqu'à $\pm 10\ \mu m$. Il peut fonctionner convenablement jusqu'à une fréquence d'environ 1 kHz.
- Caméra ASO - OCAM2K (FLI) : EMCCD avec un capteur 240×240 pixels avec un pas pixel de $24\ \mu m$. Cette caméra possède un bruit de lecture très bas : 0.1 e^-/pix/tr rms.
- Caméra science - ORCA Flash (HAMAMATSU) : CMOS 2048×2048 avec un pas pixel de $6.5\ \mu m$.
- Pyramide en verre simple.

Le reste des composants (table optique, modulateur, support, miroirs, etc...) sont financés grâce à l'ANR WOLF, des financements propres au LAM, et via l'Action Spécifique Haute-Résolution Angulaire (ASHRA).

6.2.2 Caractéristiques de l'instrument

Le télescope prêt à accueillir PAPYRUS est un télescope à foyer Coudé possédant les caractéristiques suivantes :

Miroir primaire : 1.52 m, **Obstruction centrale :** 34%, **Rapport f/D :** 28

Ce télescope présente la disponibilité très élevée d'environ 300 nuits par an, un autre instrument déjà en place au foyer Coudé étant utilisé une cinquantaine de nuits dans l'année. Le paramètre de Fried médian à l'OHP est mesuré à environ $r_0(\lambda = 635nm) = 6\ cm$. On utilisera cette valeur pour présenter les performances attendues du système.

6.2.2.1 Système d'OA

Pour des raisons de coût, de simplicité et de matériel disponible, la voie scientifique et la voie ASO travaillent toutes les deux dans les longueurs d'ondes visibles autour de $\lambda = 635\ nm$ (longueur d'onde d'étalonnage).

DM. Le DM est donc un miroir de chez ALPAO avec 17 actionneurs dans le diamètre, conduisant à 241 points de corrections dans la pleine pupille. Le SR correspondant à l'erreur de fitting pour la valeur de $r_0(\lambda = 635nm) = 6\ cm$ sera donc de 55%.

4PWFS. Le miroir de modulation permet une modulation jusqu'à 10 λ/D à 500 Hz. La voie ASO est prévue pour fonctionner avec une bande spectrale d'environ $\Delta\lambda = 100$ nm car il n'y a pas de correcteur de dispersion atmosphérique et la pyramide en verre n'est pas une pyramide double : elle est dispersive. Cette pyramide présente aussi un défaut de type "rooftop" à son sommet (voir figure 6.22), dont la taille correspond à l'extension physique de la PSF à la longueur d'onde centrale d'analyse (extension malheureusement non-modifiable pour des raisons impliquant l'angle de la pyramide et la taille physique de miroir de modulation). L'effet sur les mesures, visible dans un cas sans modulation, se réduit avec la modulation. On précise aussi que l'échantillonnage est largement sur-dimensionné avec 70 pixels dans le diamètre de chaque image de la pupille. Ce choix, qui entraîne un facteur 4 sur la propagation du bruit de lecture par rapport à une géométrie de Fried est motivé par plusieurs facteurs : (*i*) l'OCAM2K possède un bruit de lecture très bas, qui permet une contribution très limitée du bruit de lecture dans le budget d'erreur (*ii*) le banc PAPYRUS n'a pas pour objectif de travailler sur des étoiles à magnitudes élevées, le bruit n'est donc pas le facteur limitant dans le budget d'erreur (*iii*) Cela permet une mesure des perturbations du front d'onde jusqu'à des fréquences très élevées. L'étalonnage avec un simulateur de télescope (décrit plus tard) permet de construire une matrice d'interaction très hauts ordres pour reconstruire les modes non contrôlés par le DM.

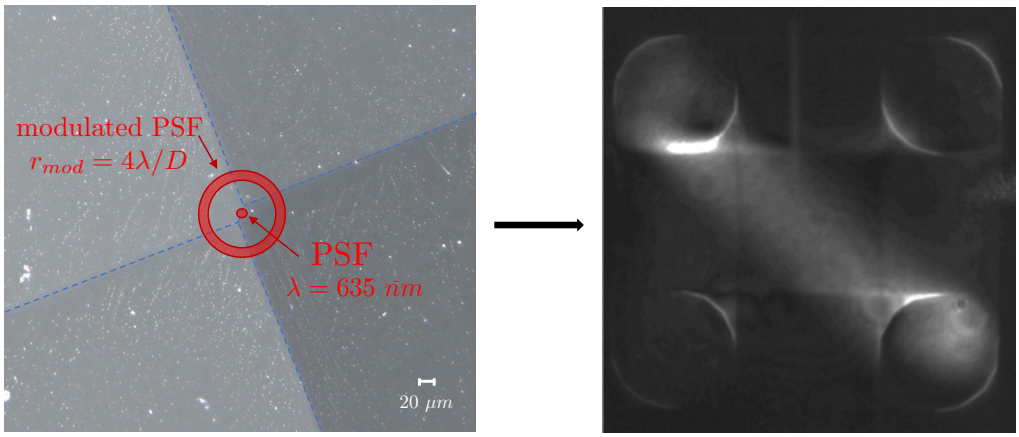


FIGURE 6.22 – **PAPYRUS : Image du sommet de la pyramide en "rooftop" et effet sur les intensités de référence non-modulées.**

GSC. Dans la version actuelle de PAPYRUS, la caméra choisie est la caméra Thorlab *Zelux - CS165MU*. Son coût réduit et sa compacité ont motivé le choix de ce composant. La PSF y sera échantillonnée à 1.5 fois Shannon, avec un champ de vue de plus de 300 λ/D. Cette caméra permettra un suivi des gains optiques de manière faiblement moyennée, avec des temps d'intégration de l'ordre de la dizaine de fois le temps de boucle.

RTC. C'est le point limitant du système PAPYRUS en l'état actuel. Les premiers développement sont faits sur MATLAB, à l'aide du logiciel OOMAO qui permet

de viser une fréquence de boucle aux alentours de 300 Hz. Dans ce cas, l'erreur temporelle domine largement dans le budget d'erreur du système. Pour passer à une version plus satisfaisante à 500 Hz et préparer une amélioration de PAPYRUS à 1000 Hz, une collaboration avec la compagnie ALPAO est en cours. Cette collaboration permettrait d'atteindre les performances voulues grâce à un RTC développé par cette entreprise. À titre d'exemple, on présente des résultats de simulations bout-en-bout dans les cas 300 Hz, 500 Hz, et 1000 Hz. Ces simulations sont faites avec les conditions typiques enregistrées à l'OHP : avec un $r_0(\lambda = 635nm) = 6\ cm$, un vent de 5 m/s, pour une 4PWFS modulée à $r_{mod} = 5\ \lambda/D$, sans bruit et avec 2 trames de retard (dont la trame d'exposition). Les PSF longues poses correspondantes aux trois cas sont données figure 6.23. On y constate le fort intérêt à avoir une version améliorée du RTC actuellement utilisé pour les développements.

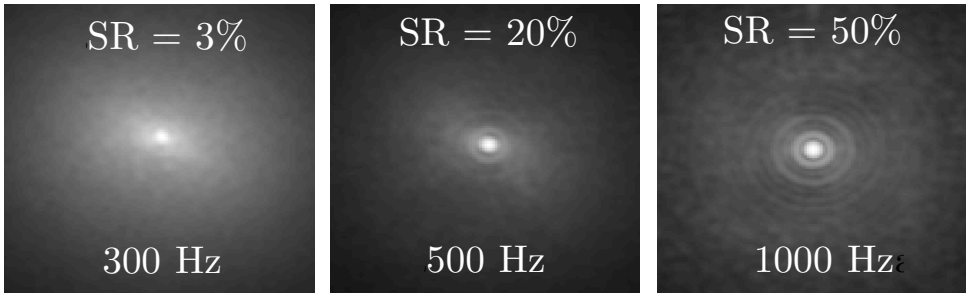


FIGURE 6.23 – **PAPYRUS : PSF corrigées longues poses pour différents cas de fréquences de la boucle. Gauche :** version actuelle. **Milieu :** objectif. **Milieu :** version améliorée.

Il est aussi intéressant de regarder les gains optiques moyennés correspondants aux trois différentes conditions évoquées. Leur calcul via le modèle convolutif est donné figure 6.24 sur une base des KL comprenant 241 modes. La faible taille du miroir primaire vis à vis de la turbulence ($D/r_0 = 25$) par rapport aux cas typiques VLT ($D/r_0 = 50$) résulte en la génération de gains optiques modestes par rapport à des exemples ayant pu être montrés dans les chapitre précédents, même dans le cas d'une fréquence de boucle à seulement 300 Hz.

6.2.2.2 Design optique

Pour des raisons budgétaires, le design optique présente la contrainte principale de devoir utiliser seulement des composants "sur étagère", c'est à dire que l'on peut trouver dans les catalogues des divers fabriquants. Afin de minimiser les aberrations chromatiques, et laisser l'opportunité d'une voie scientifique dans l'infrarouge, l'équipe PAPYRUS a opté pour un design tout réflectif dans la voie commune grâce à l'utilisation de paraboles hors-axe. Le schéma optique détaillé est donné figure 6.26, et un modèle 3D de l'ensemble du design opto-mécanique est présenté figure 6.25. On liste les fonctionnalités principales de ce montage :

1. Un périscope permettant un interfaçage agile entre la lumière provenant du télescope et l'instrument.

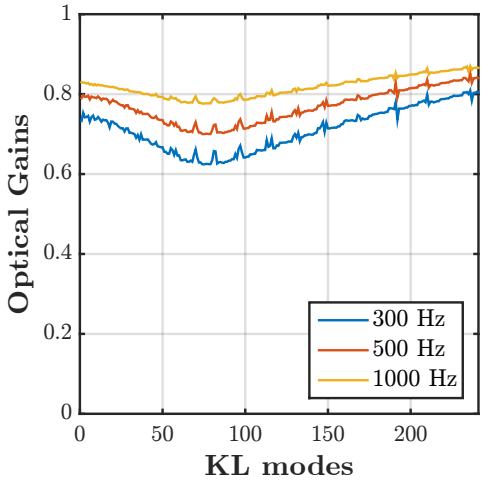


FIGURE 6.24 – **PAPYRUS : Gains optiques attendus suivant les différentes performances du RTC.**

2. Un premier relais composé de deux OAPs permettant d'imager la pupille sur un miroir *slow tip-tilt* qui permettra d'effectuer le pointage et de compenser les erreurs de suivi.
3. Un deuxième relais composé de deux OAPs permettant d'imager la pupille sur le DM.
4. Un cube séparateur envoyant 50% de la lumière dans la voie science et l'autre moitié dans la voie ASO.
5. Voie science : la caméra se retrouve avec un champ de vue de ± 2 *arcmin*.
6. Voie ASO : la pupille est ré-imagée sur le modulateur *fast tip-tilt*.
7. Voie ASO : le faisceau est refocalisé sur la voie 4PWFS ainsi que sur une voie GSC.
8. Voie ASO : dans la branche 4PWFS, une lentille de relais permet de récupérer les quatre images des pupilles sur l'OCAM2K.

Unité d'étalonnage et simulateur de télescope

Une branche supplémentaire de l'instrument sera installée afin d'être utilisée comme source d'étalonnage et simulateur de télescope dont le design exact reste à déterminer. On décrit ses deux fonctionnalités :

Unité d'étalonnage. On injecte la lumière provenant d'une source LASER 635 nm dans l'instrument grâce au déplacement d'un miroir plan (voir schéma optique 6.26). Cette lumière illumine le DM puis la branche ASO, permettant d'étalonner le système.

Simulateur de télescope. La branche qui injecte la lumière de la source d'étalonnage dans l'instrument dispose d'un SLM en plan pupille. Pour l'étalonnage, ce SLM délivre un front d'onde plan mais peut être utilisé pour générer de la turbulence

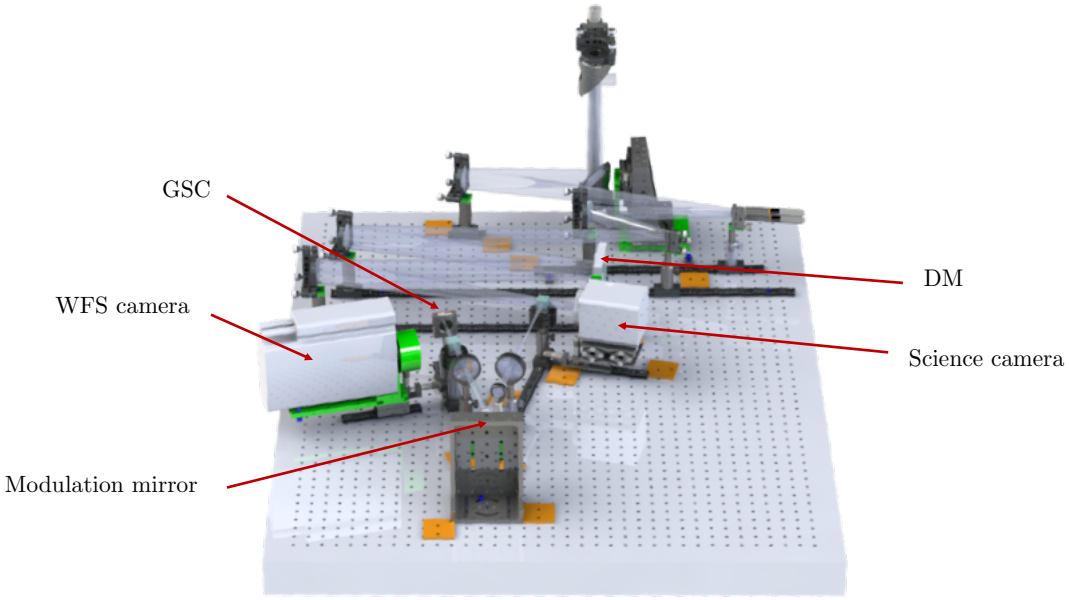


FIGURE 6.25 – **Rendu 3D du design opto-mécanique du banc PAPYRUS.**

ou bien des DM hauts ordres afin d'effectuer des mesures sans utiliser la lumière du télescope. Les intérêts sont multiples : génération de *pseudo-Dirac* pour caractériser le montage, utilisation du système par les étudiants même en cas de conditions d'observations défavorables, étalonnage haut ordres pour remonter aux modes de la turbulence non contrôlés, etc... On dispose de 700 pixels du SLM dans le diamètre de la pupille.

6.2.3 État d'avancement du projet

PAPYRUS doit observer ces premières lumières début 2022. On dresse ici un état d'avancement du projet. Le but est dans un premier temps de monter et d'aligner le banc sur sa propre table optique au LAM, puis de déplacer cette table à l'OHP en retirant les composants critiques (DM et caméras) pour le transport.

6.2.3.1 Alignement et tests au LAM

Les différents composants électroniques (Caméras, modulateur, DM, miroir de pointage) ont tous été interfacés avec le RTC MATLAB et leurs performances validées.

Le dernier point important à résoudre au niveau du projet PAPYRUS est la conception et la fabrication du support mécanique qui viendra maintenir l'instrument au niveau du foyer Coudé du télescope, situé à environ 1m80 du sol. Les dimensions de la table optique sur laquelle reposeront les composants optiques dépendra de la solution choisie pour ce support mécanique. L'alignement du banc a d'ores et déjà débuté, mais cet alignement se fait donc sur une table optique qui ne

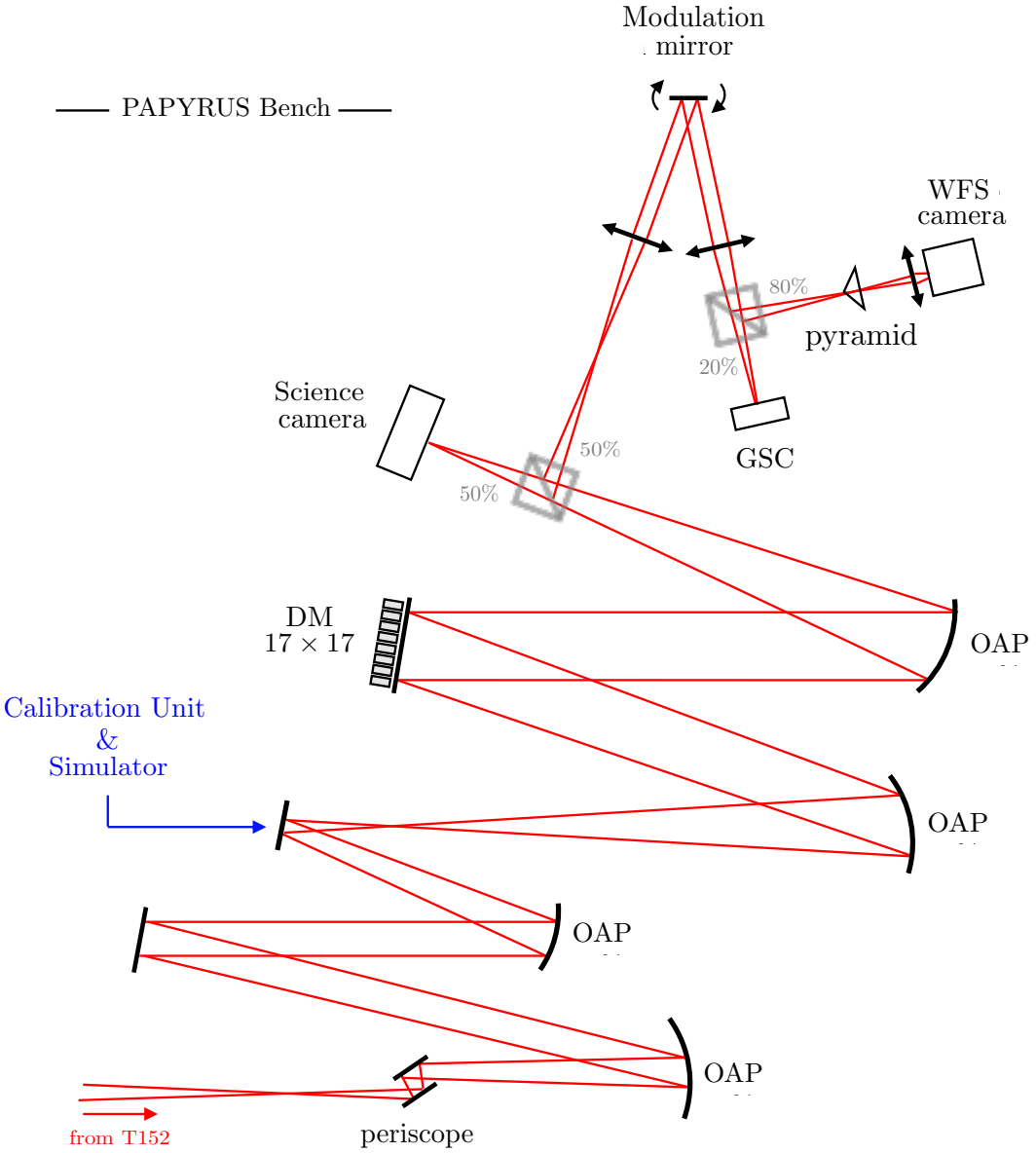


FIGURE 6.26 – **Schéma du banc optique PAPYRUS.**

sera pas la table finale de l'instrument. Cet alignement, voué à être répété sur la table optique finale, permet notamment de mettre au point des stratégies d'alignement pour les OAPs et de mesurer les aberrations des différents composants optiques. Ces alignements ont mis par exemple en évidence la présence d'aberrations de type tréfoil élevées sur les OAPs.

6.2.3.2 Tests au T152 de l'OHP

L'équipe PAPYRUS a pu mener en juillet 2021 des tests sur le télescope T152 de l'OHP. Ces tests se sont étalés sur deux nuits, avec les objectifs suivants :

- Découverte du fonctionnement et prise en main du télescope.
- Analyse des mouvements de la pupille au cours des observations.
- Évaluation de la précision de pointage et du mouvement de la PSF lors du suivi.

Le montage optique apporté par l'équipe pour les études est présenté figure 6.27. Ce montage permet d'imager simultanément la pupille (sur la caméra ORCA) et la PSF (sur la caméra Thorcam).

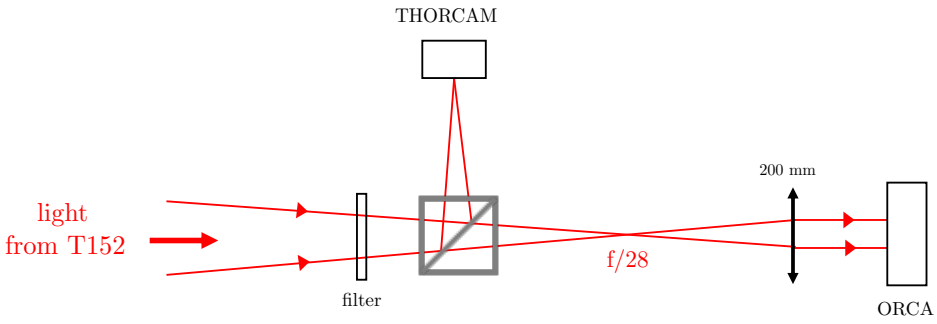


FIGURE 6.27 – **Design optique du banc de test pour le T152 de l'OHP.**

Quelques images acquises au cours de ces observations sont présentées figure 6.28. On résume les différents résultats d'analyses menées sur les données obtenues :

- Pupille : stable en position et en grandissement (mouvements inférieurs au pourcent). Observation de phénomènes de scintillation conséquents, notamment dans un endroit localisé de la pupille (voir figure 6.28 - gauche). L'origine exacte de cette forte scintillation en bord de pupille semble venir de déplacement de masses d'air à l'intérieur de télescope, ce point sera à confirmer lors des prochaines expériences.
- PSF : précision de pointage de l'ordre de l'arc minute, avec un mouvement dû au suivi de l'ordre de l'arc minute toutes les 15 minutes.

Opération de *foucaultage* sur Jupiter

Au cours des observations menées à l'OHP, l'accès à un plan focal en amont de l'imagerie pupillaire nous a permi de réaliser un dispositif de *foucaultage*. Pour des raisons de simplicité au niveau du montage optique, cette opération a été réalisée sur

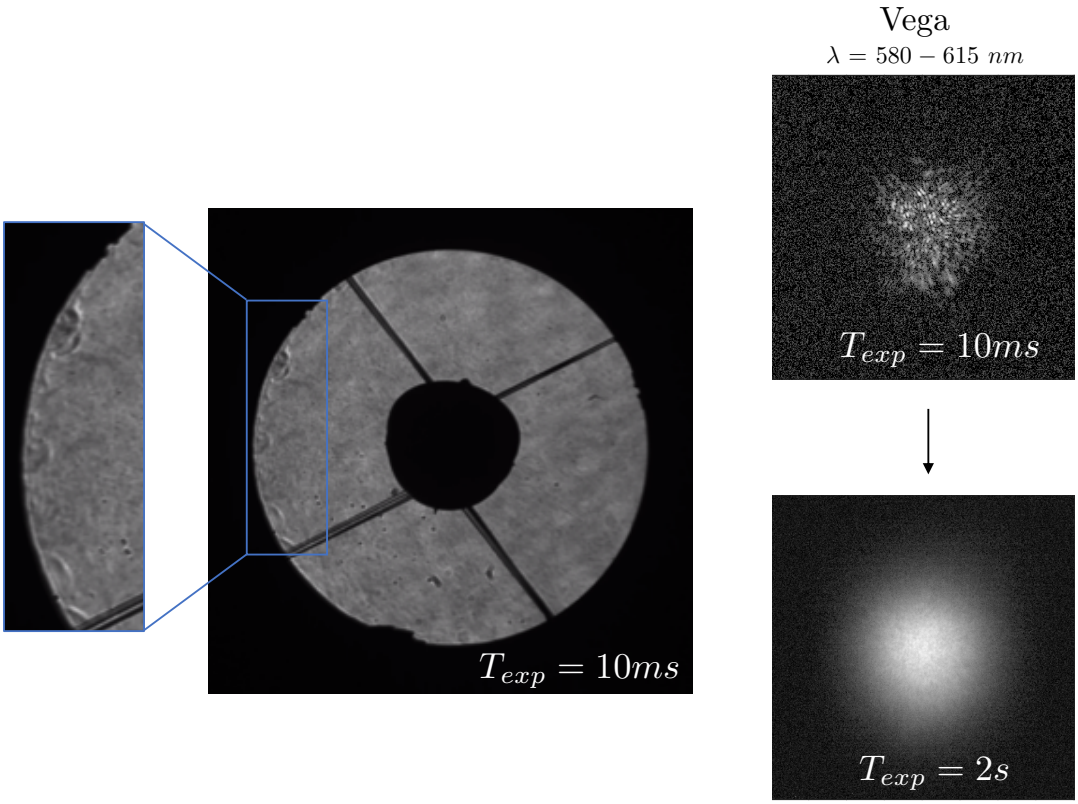


FIGURE 6.28 – **PAPYRUS : Mesures prises au T152. Gauche :** image de la pupille, avec une zone de scintillation forte sur l'un des bords de la pupille. **Droite :** PSF courte et longue pose avec filtre sur l'étoile Véga de magnitude 0.

source étendue : Jupiter. On rappelle que cette expérience, très similaire à la mesure de front d'onde à l'aide d'une PWFS, consiste à cacher une partie de la lumière en plan focal à l'aide d'une lame opaque appelée couteau de Foucault. Sans mener d'analyse quantitative, on montre l'image de la pupille dans le cas sans et avec le couteau de Foucault en plan focal figure 6.29. L'image de la pupille prise dans le cas du *foucaultage* encode donc la phase aberrante. Cette simple opération permet de valider le fait que la forte scintillation observée dans un bord de la pupille trouve bien son origine dans des aberrations de phases très importantes au niveau de cette zone.

6.2.4 Conclusion

Le projet PAPYRUS sera l'occasion idéale pour mener les activités expérimentales sur le contrôle fin de la 4PWFS et sur la gestion des gains optiques. Ce projet offre au LAM et à l'ONERA une expérience avec la 4PWFS sur ciel inédite. La branche GSC permettra de mener une démonstration expérimentale d'abord en mode "télescope simulateur" puis sur ciel du concept.

Dans le futur, ce banc facilement modulable sera voué à évoluer au grès des

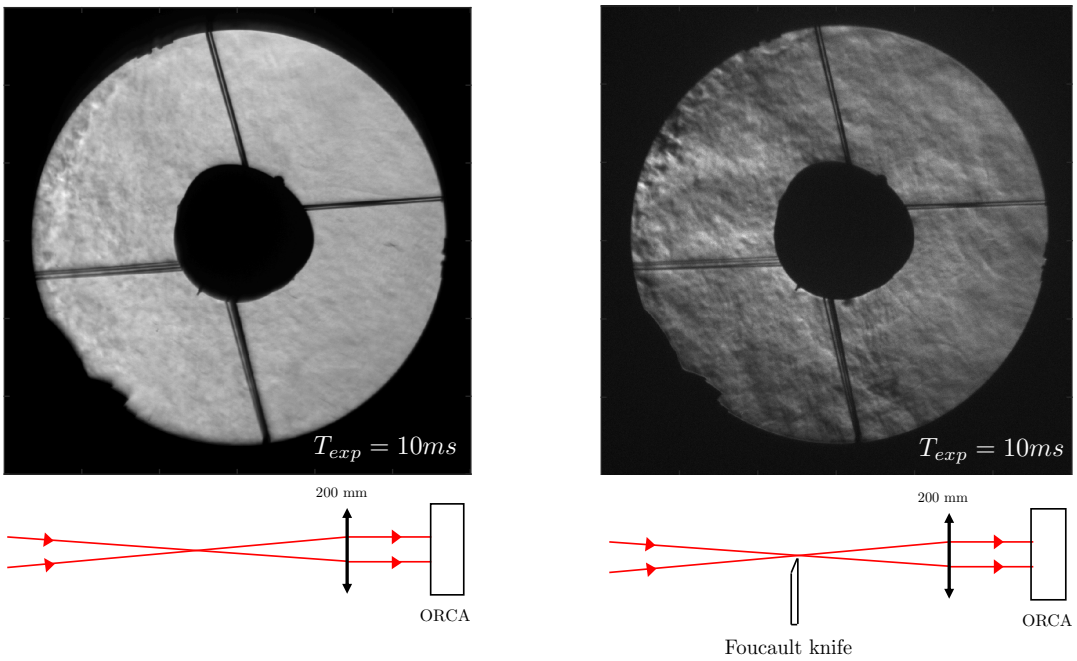


FIGURE 6.29 – **PAPYRUS : opération de *foucaultage* sur Jupiter. Gauche :** image de la pupille sans le *foucaultage*. **Droite :** image de la pupille avec *foucaultage* en place.

avancées sur les ASO à filtrage de Fourier.

⊙

Cette partie plus expérimentale de la thèse, a permis de mener de premiers tests expérimentaux sur les nouveaux concepts de masques proposés au cours de cette thèse. A été aussi mis en avant l'intérêt expérimental de l'approche *pseudo-Dirac* et du modèle convolutif pour la caractérisation des masques.

Le projet PAPYRUS visant à mettre une 4PWFS assisté par imagerie plan focal sur ciel permettra quant à lui de tester expérimentalement la stratégie de gestion des non-linéarités via la GSC. Il représente une partie beaucoup plus appliquée, avec l'objectif d'une mise en oeuvre de certains concepts présentés au cours de cette thèse sur un télescope à l'OHP.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Pour de nombreuses observations astronomiques, les systèmes d'Optique Adaptative (OA) représentent un outil absolument indispensable permettant de récupérer une partie du pouvoir de résolution des grands télescopes, perdu à cause de la turbulence atmosphérique. On a présenté un cas d'application où l'OA doit être poussée à ses extrêmes limites : l'imagerie directe d'exoplanètes. À l'aube de l'ère des "*extremely large telescopes*" et de progrès technologiques toujours plus grands, le plafond fondamental des performances délivrées par ces systèmes tendent à se reposer sur la qualité des mesures fournies par leur Analyseur de Surface d'Onde (ASO), sous-système sur lequel ce sont portés les travaux de cette thèse. Pour l'application spécifique de l'OA, l'analyse de surface d'onde doit se faire sans onde de référence et à grande cadence, en utilisant de manière la plus efficace possible les photons, tout en ayant des propriétés convenables en terme de dynamique. Côté inversion du signal, le formalisme de base utilisé en OA est le formalisme matriciel qui repose sur l'hypothèse de linéarité entre phases mesurées et signaux délivrés par l'ASO. C'est dans ce cadre que l'on a effectué l'ensemble des développements de cette thèse et on a défini ainsi logiquement la dynamique comme tout ce qui attrait au comportement non-linéaire des ASO. On a concentré les efforts sur l'exploration d'une classe spécifique, mais très large, d'ASO : les ASO à filtrage de Fourier.

Dans une volonté de pouvoir établir des critères de performances efficaces pour ces analyseurs, on a développé un modèle de propagation de bruit simple qui met en avant deux sensibilités dont les valeurs peuvent être bien différentes : la sensibilité à un bruit uniforme sur le détecteur, et la sensibilité au bruit de photons. La sensibilité au bruit de photons, cruciale car encodant une limite fondamentale, est présentée pour la première fois sous une forme claire permettant une comparaison entre l'ensemble des configurations possibles d'ASO à filtrage de Fourier (et même plus largement tout ASO dont les signaux peuvent être traités sous la forme des intensités réduites). Cela nous a permi de mettre en avant des comportements jusqu'alors peu analysés : on cite par exemple le fait que pour les pyramides modulées le nombre de faces a un impact sur les sensibilités au bruit de photon, ou bien la démonstration que le senseur de Zernike sous sa forme classique présente une sensibilité au bruit de photon moindre que les pyramides non-modulées. Concernant la dynamique, on a mis en avant la difficulté d'avoir un critère simple permettant de comparer les différents ASO. On utilise tout de même une métrique qui nous semble particulièrement pertinente : la matrice de transfert optique. Cette quantité émerge d'une façon particulière de concevoir les effets des non-linéarités sur les mesures en considérant que les systèmes sont toujours linéaires, mais que leurs régimes de linéarité changent en fonction de l'amplitude des phases en entrée. Cette approche permet de rester dans un formalisme matriciel et fait apparaître le concept bien connu des gains optiques, que l'on utilise dans un premier temps comme un moyen

efficace pour comparer la dynamique des ASO.

L'utilisation d'un formalisme convolutif développé dans des travaux précédents, auquel on apporte une légère modification, nous a ensuite permis d'ajouter un tout nouvel éclairage à la classe particulière des ASO de Zernike. On a notamment mis en avant le fait que la configuration usuelle du senseur de Zernike utilisée en haut contraste n'utilise que la moitié des photons disponibles pour l'analyse. On a exploité cette compréhension fine du fonctionnement des senseurs de Zernike pour exhiber de nouvelles configurations qui s'approchent des sensibilités optimales lorsque l'on augmente le diamètre de la pastille, tout en mettant en avant le choix d'un compromis en sensibilité entre basses et hautes fréquences. Toujours à l'aide de ce modèle convolutif, on a développé une façon inédite d'optimiser numériquement la forme des masques de filtrage de Fourier afin d'obtenir des sensibilités extrêmes. A été ainsi créée une toute nouvelle famille d'ASO à filtrage de Fourier, ayant une forme très corrélée à la forme de la PSF. Cette nouvelle famille exhibe des sensibilités inégalées et s'approche d'une utilisation optimale des photons pour encoder la phase. Outre leur dynamique limitée, on leur relève tout de même un défaut conséquent (à l'instar de la classe de senseurs de Zernike) : ces masques présentent des structures fortement chromatiques. Finalement, il semble y avoir un compromis à trouver entre achromatisme, sensibilité, et dynamique : le choix d'un masque en particulier ne se fera donc jamais indépendamment des paramètres propres au système qui l'héberge. En ça, les masques optimisés apportent de nouvelles alternatives très prometteuses, notamment pour les applications haut contraste avec par exemple leur potentielle utilisation en tant que second étage de systèmes d'OA extrêmes. Enfin, on a utilisé le banc LOOPS au LAM pour démontrer expérimentalement les résultats de simulation sur les sensibilités.

Enfin, on revient sur le concept des gains optiques, avec cette fois une approche différente : on ne les utilise plus comme métrique de dynamique mais comme moyen de compensation des non-linéarités. Là où les études précédentes se restreignent à une définition moyenne de ces gains pour pouvoir les compenser dans différentes facettes du contrôle du front d'onde, on propose une toute nouvelle approche à travers un suivi à la cadence de la boucle. Cette estimation trame à trame des gains optiques considérée jusqu'alors impossible, est permise via l'utilisation des équations du modèle convolutif, mais aussi grâce à la proposition d'un tout nouveau concept : les ASO à filtrage de Fourier assistés par plan focal. Cette technique consiste à utiliser une *Gains Scheduling Camera*, une caméra imageant la PSF modulée courte pose au niveau du masque, afin de sonder le régime de linéarité à chaque mesure de la boucle. De plus, on a montré que ce montage, qui permet de fusionner des données acquises en plan focal et en plan pupille pour mener à bien l'analyse de surface d'onde, peut même se passer de toute équation grâce à l'étalonnage d'une quantité naturelle qui relie les deux plans : la matrice d'interaction impulsionnelle. La précision et la robustesse de notre méthode, validées en simulation, restent à démontrer expérimentalement. C'est notamment dans ce but qu'est né le projet PAPYRUS consistant à installer sur ciel un analyseur pyramide assisté par imagerie plan focal début 2022, et dont la mise en place et la coordination aura occupé une

partie de cette thèse.

Perspectives

De manière générale, les travaux présentés ici construisent un pont entre une thèse précédente très formelle et de futurs développements voués à être bien plus appliqués. Les études livrées ici restent tout de même assez conceptuelles, et achèvent en partie de construire un formalisme solide concernant les ASO à filtrage de Fourier. C'est sur ce socle que vont pouvoir s'appuyer de futurs étudiants pour mettre en oeuvre certaines solutions ou concepts proposés dans le cadre de systèmes d'OA concrets.

On évoque aussi la *Gains Scheduling Camera* dont seuls les tests expérimentaux à venir en laboratoire puis grâce au projet PAPYRUS viendront confirmer la possibilité de sa mise en place comme stratégie de compensation des non-linéarités. À plus long terme, l'idée d'ASO assisté par imagerie en plan focal ouvre une toute nouvelle façon de mener l'analyse de surface d'onde au travers du concept d'une fusion de données réalisée trame à trame dans la boucle. Cette combinaison des mesures, menée ici grâce à l'approche convolutive, pourrait montrer de tout autres visages dans le futur en étant exploitée d'une manière différente. On évoque par exemple l'application croissante d'algorithmes de *machine learning* dans la communauté OA.

Les propositions de masques adaptés à des formes de pupilles données et s'approchant de la limite optimale pour l'encodage de la phase par les photons pourraient avoir un impact déterminant sur les propositions de stratégies d'analyse de surface d'onde au cœur des futurs systèmes d'XOA. Cette méthode ouvre tout d'abord de nombreuses pistes à explorer en terme de conception et de compréhension des ASO à filtrage de Fourier. Parmi elles, on cite :

- Tentative d'améliorer la dynamique à travers la forme du masque et/ou modulation tout en minimisant l'impact sur la sensibilité. Cet axe de travail pourrait venir tester les limites des propriétés antagonistes entre sensibilité et dynamique.
- Conception de masques adaptés à des problèmes de contrôle de front d'onde spécifiques, on pense par exemple à la gestion des effets "pétale" pour les grands télescopes segmentés.
- Sonder le lien entre la propriété d'achromatisme des masques et leurs sensibilités : est-il vraiment impossible pour un masque achromatique de voir ses sensibilités optimisés sur toute une plage de fréquences étendue ?

De plus, il faudra continuer la mise en place expérimentale de ces masques commencée sur LOOPS. Il faudra réfléchir à concevoir des masque plus simplifiés (on a vu qu'il est largement possible de ne garder que le comportement au centre du masque sans impacter de manière significative les sensibilités) dont la fabrication pourrait être ainsi rendue plus facile en pratique.

Enfin à plus long terme, on pourrait imaginer utiliser de tels algorithmes pour parvenir à concevoir des systèmes optiques agissant comme des coronographes, mais

aussi comme des ASO grâce une dépendance "linéaire" avec la phase de la lumière éjectée.

Pour finir, l'approche *Linear-Parameters Varying System* permet d'avoir une approche matricielle pour la gestion des non-linéarités. On pourrait aussi concevoir des inversions qui s'affranchiraient complètement du formalisme matriciel. On notera que même dans ce cas là, la dépendance linéaire en phase des ASO sera toujours au cœur des mesures et tous les senseurs développés ou bien analysés dans cette thèse ne sauraient devenir obsolètes.

Annexe A

Autres pistes de compensations optiques des non-linéarités

Les non-linéarités peuvent être gérées dans la configuration même du montage optique. Il existe une solution évidente et déjà largement présentée pour diminuer les non-linéarités pour la 4PWFS : la modulation. On a finalement présenté aussi une façon plus sophistiquée, à travers le montage optique de la GSC. Cette annexe fournie quelques **pistes de réflexion** concernant deux autres moyens permettant de réduire la contribution des gains optiques dans le système :

— Changement de longueur d'onde d'analyse.
— Filtrage du champ électromagnétique à l'aide d'un diaphragme en plan focal.

A.1 Influence de la longueur d'onde d'analyse sur les gains optiques

Si on revient au budget d'erreur lié aux mesures de l'ASO, on l'a exprimé chapitre 1 comme la somme des erreurs dues au bruits et aux non-linéarités :

$$\sigma^2_{WFS} = \sigma^2_{noise} + \sigma^2_{nl} \tag{A.1}$$

Finalement, le choix des conditions de fonctionnement d'un ASO (au sein des contraintes du système) devrait se faire par l'optimisation conjointe de ses deux termes. On sait déjà que augmenter la longueur d'onde d'analyse de la 4PWFS est délétère en terme de sensibilité et donc de propagation du bruit : la perte en SNR est **proportionnel à la longueur d'onde** (section 4.1.2.3). On se demande donc ici ce qu'il en est en terme de dynamique, à travers l'évolution des gains optiques suivant la longueur d'onde.

Pour cette étude, on reprend comme exemple d'analyse la configuration PSD_{20}. Pour rappel, cette configuration correspond à la PSD de fitting pour : D = 8 m, $r_0(550nm) = 15\ cm$, et $N_{act} = 20$ dans le diamètre. On considère deux modes (bas-ordres : tip-tilt, hauts-ordres : KL^{300}) sur lesquels le calcul des gains optiques moyennés est effectué avec 10 phases résiduelles pour des longueurs d'ondes variant de $\lambda = 300\ nm$ à $\lambda = 2\ \mu m$. Les résultats sont donnés figure A.1 pour deux cas de rayon de modulation $r_{mod} = 0\ \lambda/D$ et $r_{mod} = 3\ \lambda/D$.

Premiers constats déjà présentés dans le chapitre 4 :

— La modulation rehausse les courbes de gains optiques pour toutes les longueurs d'ondes. On précise que la modulation est bien générée proportionnellement à λ, afin de ne pas être source de chromatisme dans les réponses.

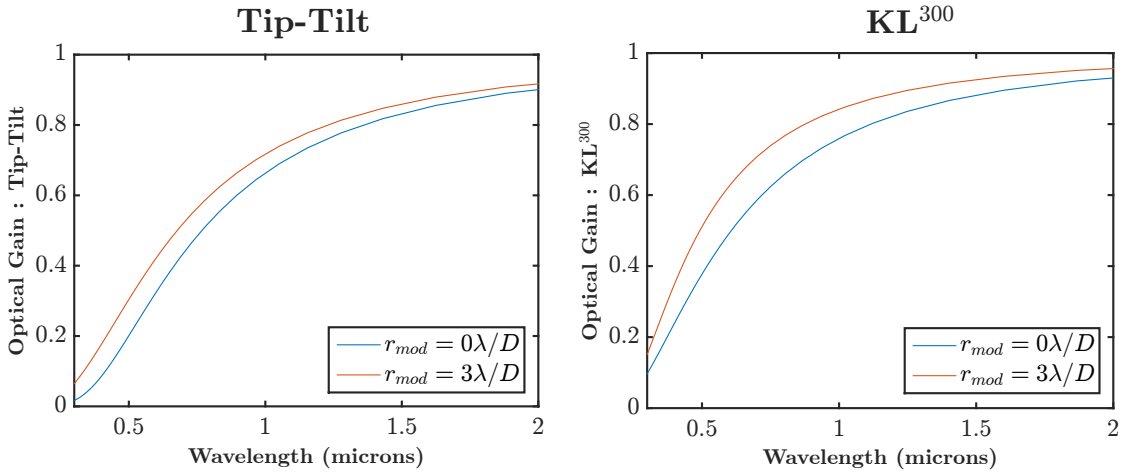


FIGURE A.1 – **Gains optiques pour le mode tip-tilt et un mode hauts-ordres suivant la longueur d'onde.** Le jeu de phases résiduelles générées pour cette étude correspond à la configuration PSD_{20}.

— Les courbes sont plus favorables pour le mode de haut-ordre.

On remarque aussi que les gains optiques évoluent favorablement avec la longueur d'onde. Ce comportement est aussi très prévisible, puisque **les phases résiduelles diminuent avec la longueur d'onde**. Une analyse plus fine demande alors plutôt de tracer ces courbes d'évolution du gains optiques en fonction du rms de la phase en entrée. Ces courbes sont livrées figure A.2 dans un cas sans modulation afin d'en simplifier l'analyse.

Comportement à λ grand (faible rms). Le comportement de ces courbes aux longueurs d'onde plus élevées (rms faible) s'explique par le fait que l'on s'approche progressivement du régime de linéarité de la 4PWFS et que par conséquent la différence en dynamique entre deux longueurs d'onde est de moins en moins marquée. Une façon claire de comprendre ce point est d'imaginer deux longueurs d'onde assez grandes (et donc rms de phase assez faibles) pour permettre aux phases mesurées d'être dans le régime de linéarité de la 4PWFS : quelque soit la différence entre ces longueurs d'onde, les gains optiques valent 1. Cette courbe se "tasse" donc nécessairement avec les longueurs d'ondes élevées (et les rms faibles).

Comportement à λ moyen (rms moyen). La diminution des gains optiques est proportionnel à l'écart type de la phase en entrée. Le coefficient de proportionnalité varie suivant le mode choisi (la modulation est aussi un paramètre qui modifie la valeur de ce coefficient).

Comportement à λ petit (grand rms). Dans ce cas, les courbes connaissent un nouveau changement de régime. La cassure des courbes de gains optiques aux alentours de 1 radian rms correspond au régime où la phase commence à

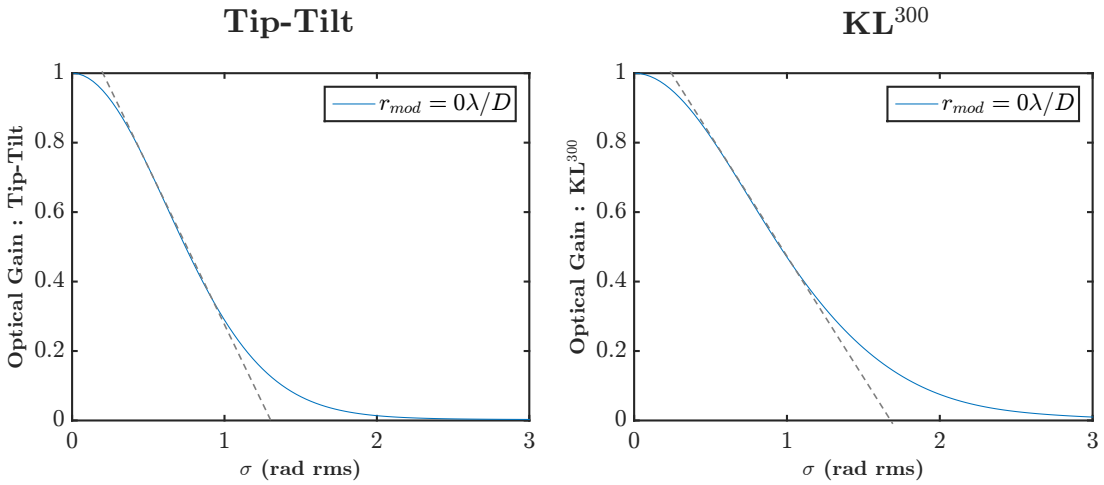


FIGURE A.2 – **Gains optiques pour le mode tip-tilt et un mode hauts-ordres suivant l'écart type de la phase en entrée.** Le jeu de phases résiduelles générées pour cette étude correspond à la configuration PSD_{20}.

se replier. La réponse en est fortement affectée et on s'éloigne de l'approximation diagonale : les gains optiques calculés n'encodent plus vraiment une perte de sensibilité mode à mode et sont largement insuffisants pour décrire les non-linéarités.

Une étude simplifiée sur la sensibilité effective

À la lumière des courbes présentées précédemment, **on peut tenter d'optimiser l'équation A.1 suivant la longueur d'onde de manière très schématique**. Pour cette description schématique on suppose que :

- Que l'approximation diagonale est parfaitement vérifiée quelque soit la longueur d'onde (ce qui est en réalité de moins en moins valide au fur et à mesure que l'on diminue λ)
- On arrive à estimer parfaitement les gains optiques et donc reconstruire correctement le signal malgré les non-linéarités.
- On travaille sans modulation pour plus de simplicité : dans ce la 4PWFS est parfaitement achromatique et sa sensibilité ne dépend pas de la longueur d'onde.

Avec ce cadre très simplifié, on peut alors considérer que le terme σ^2_{nl} affecte les mesures seulement de la façon suivante : il induit une perte de sensibilité de l'analyseur, proportionnelle aux gains optiques. La 4PWFS présente alors une **sensibilité effective** qui est sa sensibilité (définie dans le régime linéaire, on le rappelle) pondérée par les gains optiques. On peut alors réécrire l'équation A.1 pour un mode ϕ_i présentant un gain optique g autour du point de fonctionnement considéré :

$$\sigma^2_{WFS}(\phi_i) = \frac{1}{g}\sigma^2_{noise}(\phi_i) \tag{A.2}$$

Pour ce mode là, on peut écrire la propagation du bruit à la longueur d'onde scientifique $\lambda_{science}$:

$$\sigma^2_{science}(\phi_i) = \frac{\lambda_{WFS}}{\lambda_{science}} \frac{1}{g(\lambda_{WFS})} \sigma^2_{noise}(\phi_i) \tag{A.3}$$

avec g qui dépend de λ comme on l'a constaté sur les figures A.1. Le facteur :

$$b(\lambda_{WFS}) = \frac{\lambda_{WFS}}{g(\lambda_{WFS})} \tag{A.4}$$

encode donc le facteur de propagation de bruit suivant la longueur d'onde. Dans le cas parfaitement linéaire et pour un ASO achromatique ont a bien $b(\lambda_{WFS}) = \lambda_{WFS}$.

Dans le cadre de la 4PWFS modulée à 0 λ/D, pour ϕ_i étant le mode tip-tilt, et un point de fonctionnement autour de la PSD_{20}, on trace b en fontion de λ_{WFS} figure A.3. On remarque que contrairement à la 4PWFS non-modulée qui n'aurait aucun problème de linéarité (courbe $y = x$), le paramètre b de la pyramide n'est pas proportionnel à la longueur d'onde. Il semble ainsi rentable de travailler avec des longueurs d'ondes plus élevées où les problèmes de linéarité sont moins importants, et cela sans une perte significative de sensibilité. Le paradigme de l'analyse de surface d'onde "*plus la longueur d'onde est faible et plus on est sensible*" dans un cas parfaitement linéaire est mis à mal par cette analyse. On relèvera toute fois que cette étude est très simplifiée, mais a le mérite d'établir une première base pour l'optimisation du terme d'erreur σ_{WFS} en prenant en compte les non-linéarités suivant les longueurs d'onde.

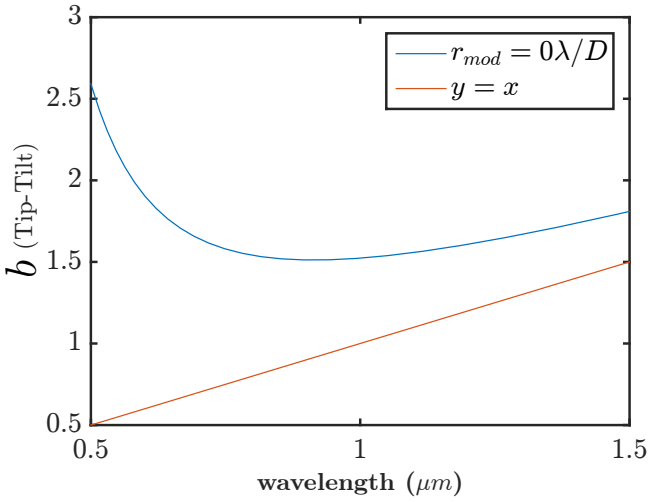


FIGURE A.3 – **Évolution du facteur de propagation du bruit suivant la longueur d'onde** pour le mode tip-tilt est dans les conditions détaillée dans le texte. Le cas parfaitement linéaire est représenté par la droite $y = x$.

A.2 Filtrage en plan focal

On s'attarde ici sur une étude préliminaire concernant la question de l'impact d'une réduction du **champ de vue** sur les gains optiques. De premier abord, cette opération est très attrayante car un filtrage passe-bas en plan focal pourrait permettre de réduire les non linéarités dues aux hauts ordres présents dans la turbulence.

Pour étudier l'influence du champ de vue sur les gains optiques, on prend un cas très parlant : celui pour lequel on a comme phase résiduelle une erreur de fitting pure. Pour cela, on génère des phases résiduelles avec un $r_0 = 15\ cm$, auxquelles on retire systématiquement les 400 premiers modes de KL. Pour ce jeu de phases résiduelles, on mesure les gains optiques moyens (50 phases résiduelles) pour différentes tailles de champ de vue, illustrées par rapport à la PSF résiduelle longue pose figure A.4 (droite). On précise que le champ de vue est coupé après la modulation, fixée à $r_{mod} = 3\ \lambda/D$. Avant de commenter les résultats, on apporte des précisions sur les deux configurations de champ de vue les plus étroites :

— Leurs courbes de gains optiques présentées figure A.4 ne s'étalent pas sur les 400 modes de KL : pour ces configurations il y a des modes non vus ou bien très peu sensibles, la réduction du champ de vue jouant tout simplement le rôle de filtre passe-bas. C'est le cas pour le champ de vue à l'intérieur de la zone de correction mais aussi pour celui localisé à la limite de cette zone : comme on module, tous les modes en bordure de la zone de correction présentent aussi une grande perte de sensibilité. Ainsi on présente pour ces configuration seulement les gains optiques pour les modes où le système reste aussi sensible que dans les configurations plus larges champ de vue.

— On présente des phases résiduelles corrigées pour les 400 premiers modes de KL : il est surprenant d'avoir considéré des configurations qui sont insensibles à une partie de ces modes. Pour un système d'OA simple, ces configurations sont bien sûr impossibles car il faut que l'ASO soit sensible aux modes pour que le système les corrige. Mais ces dispositions sont entièrement pertinentes pour des systèmes d'OA deuxième étage dont le but serait de contrôler moins de modes que le premier étage.

Regardons donc plus en détail les résultats présentés dans les courbes figure A.4. Ces courbes peuvent paraître surprenantes. Lorsque le champ de vue décroît, on observe une amélioration systématique des gains optiques pour les bas ordres alors que les gains optiques en bords de zone de correction commencent par se dégrader pour finalement de nouveau s'améliorer.

Comportement basses fréquences. On constate une évolution des gains optiques vers des valeurs favorables (c'est à dire proches de 1) pour une PSF identique, avec seulement le champ de vue modifié. Il est très important de comprendre que cette amélioration des gains optiques n'entraîne pas forcément une amélioration de la sensibilité effective (notion introduite dans la section précédente), car **on supprime une partie des photons utiles à l'analyse**. En effet, si l'on

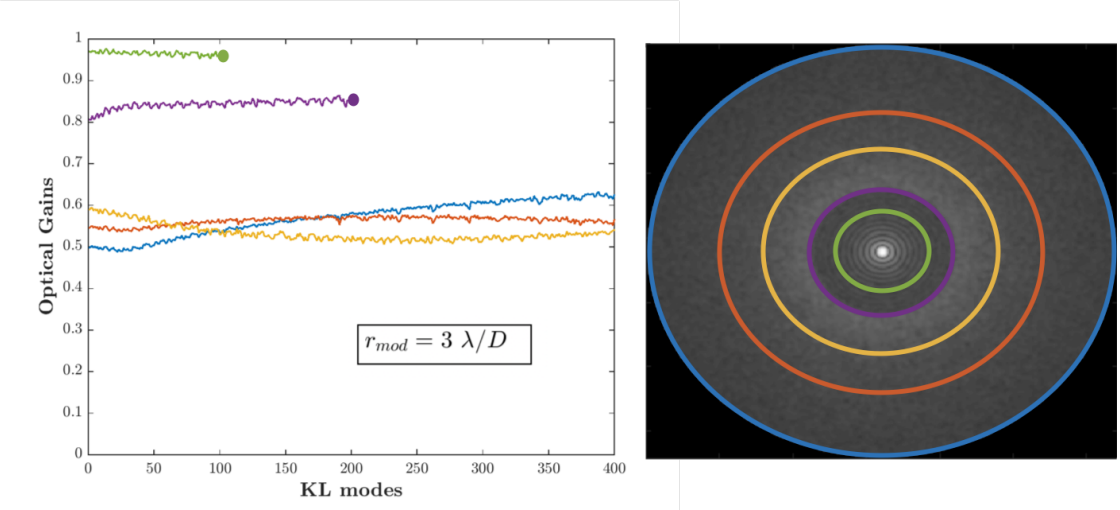


FIGURE A.4 – **Impact du champ de vue sur les gains optiques. Gauche :** Courbes de gains optiques. **Droite :** Les différentes champs de vue représentés sur la PSF résiduelle longue pose. La diminution du champ de vue impacte fortement la valeur des gains optiques.

prend l'exemple du tip-tilt : on comprend bien qu'une portion des photons située en dehors de la zone de correction participe quand même à l'analyse.

Comportement moyennes et hautes fréquences. Suivant l'endroit où l'on coupe le champ de vue, on constate une dégradation des gains optiques pour certains ordres. Une piste d'explication pour ce phénomène consiste à voir la réduction du champ de vue comme une re-normalisation de la PSF. En effet, on rappelle que le traitement des intensités réduites passe obligatoirement par une normalisation par le flux reçu. En réduisant le champ de vue, le flux est normalisé sur une zone plus faible ce qui entraîne une contribution plus importante pour certaines zones de la PSF. Notamment on "rehausse" la partie centrale, mais aussi les ailes de la PSF situées juste après la zone de correction. Cela serait une piste pour expliquer le comportement des gains optiques moyens et grandes fréquences figure A.4. La compréhension exacte et quantitative de cet effet est encore largement à développer.

Les constats suivants sont à prendre avec précaution, et doivent être confirmés par des études supplémentaires. Une configuration intéressante pour un filtrage en plan focal pourrait être une configuration d'OA second étage, où l'on a un champ de vue plus petit que le zone de correction du premier étage. En régime très corrigé, on constate que dans ce cas les gains optiques se rapprochent de 1. On rappelle que ce comportement avantageux ne doit pas forcément être vu comme un gain en sensibilité effective. Pourtant il permet d'avoir des gains optiques moins sujet à la forme de la turbulence hors de la zone de correction et semble relâcher ainsi fortement les contraintes sur la précision de l'estimation des gains optiques. Cette analyse est largement incomplète et doit être poursuivie, mais semble être une piste

prometteuse, au moins pour les systèmes d'XOA second étage.

Annexe B

L'interféromètre de shearing

On s'intéresse ici à l'interféromètre à décalage latéral, dit de shearing, présenté très brièvement au chapitre 1. Pour rappel : cet ASO consiste à faire interférer deux images identiques de la pupille avec un décalage suivant un axe et fut celui utilisé pour les premiers systèmes d'OA dans les années 1970.

B.1 Formalisme mathématique

Les intensités enregistrée sur le détecteur correspondent à la somme des champs décalés de la quantité $\boldsymbol{\rho}$:

$$I(\phi)_{|\boldsymbol{r}} = |\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I}_{p|\boldsymbol{r}}e^{i\phi_{|\boldsymbol{r}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I}_{p|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho}}e^{i\phi_{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho}}}|^2 \tag{B.1}$$

Pour simplifier, on suppose le cas d'une pupille infinie et un décalage suivant une seule direction. Les intensités sur le détecteur deviennent :

$$I(\phi)_{|r} = \frac{1}{2}|e^{i\phi_{|r}} + e^{i\phi_{|r+\rho}}|^2 \tag{B.2}$$

On donne une illustration figure B.1.

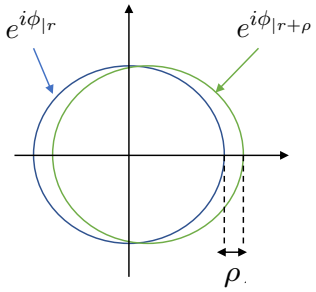


FIGURE B.1 – **Interféromètre de shearing : deux champs décalés interfèrent.**

L'équation B.2 peut être simplifiée :

$$I(\phi)_{|r} = 1 + \cos(\phi_{|r} - \phi_{|r+\rho}) \tag{B.3}$$

On constate que cette expression à un grand défaut : la fonction cosinus ne présente pas de dépendance linéaire avec la phase. Ainsi dans le régime des petites phases, aucun signal de sera délivré : l'interféromètre présenté ici n'est pas un ASO. On peut régler ce problème en déphasant la pupille décalée de $\pi/2$. Ainsi on obtient :

$$I(\phi)_{|r} = \frac{1}{2}|e^{i\phi_{|r}} + e^{i(\phi_{|r+\rho}+\frac{\pi}{2})}|^2 = 1 + \sin(\phi_{|r} - \phi_{|r+\rho}) \tag{B.4}$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus correspond aux intensités de référence : $I_0 = 1$. On a donc les intensités réduites :

$$\Delta I(\phi)_{|r} = \sin(\phi_{|r} - \phi_{|r+\rho}) \tag{B.5}$$

Cas $\rho << 1$. Si l'on suppose ρ très petit, on peut simplifier l'équation précédente de façon à faire apparaître le gradient de la phase :

$$\Delta I(\phi)_{|r} = \sin\left(\rho \frac{\partial \phi_{|r}}{\partial \rho}\right) \tag{B.6}$$

Cette équation est très intéressante car elle met en avant analytiquement le **comportement antagoniste entre la sensibilité et la dynamique**. Une diminution de ρ entraîne une moins grande sensibilité mais une plus grande dynamique, comme illustré figure B.2.

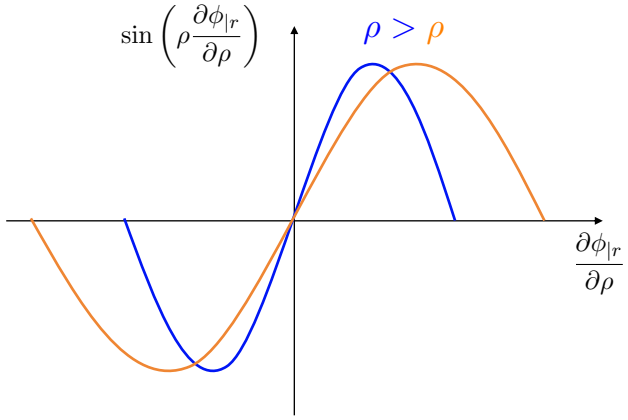


FIGURE B.2 – **Cas $\rho << 1$: influence du paramètre ρ sur la réponse.**

B.2 Sensibilité et dynamique

Bien que ce ne soit pas un ASO à filtrage de Fourier, le traitement des intensités fournies par le shearing peuvent donc être analysées via le traitement des intensités réduites. On peut ainsi appliquer les différents critères de performances (sensibilités et dynamique) présentés au cours de cette thèse tels quels à cet ASO.

Un point pratique : pour que les mesures soient faites suivants les axes (Ox) et (Oy), il faut en réalité former quatre images de la pupille et les faires interférer deux à deux comme illustré figure B.3. C'est cette configuration que l'on étudie, avec la même amplitude ρ pour le décalage suivant (Ox) et (Oy), et on rappelle que chaque couple de pupille interfère avec un déphasage de $\pi/2$ entre elles. On note $\rho = \alpha \times D$ avec D le diamètre de la pupille.

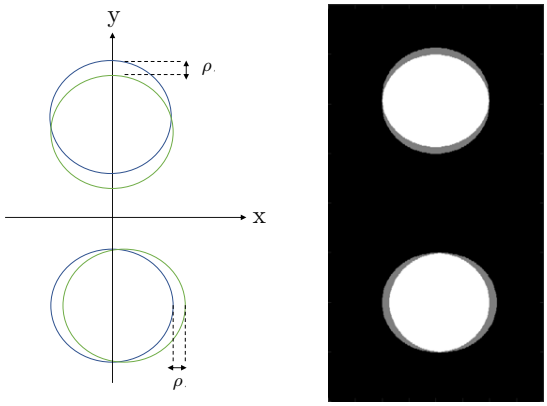


FIGURE B.3 – **Le shearing en pratique : mesures suivant les axes** (Ox) **et** (Oy)**.**

B.2.1 Cas $\rho << 1$

On a vu que ce cas particulier permet de mettre en avant simplement la sensibilité et la dynamique. On simule cette configuration afin de confirmer ce comportement. Dans nos simulation, la pupille est simulée avec 200 pixels dans le diamètre.

Sensibilités

On calcule les courbes de sensibilités fréquentielles suivant la direction (Ox), pour différent décalage de pupille ρ donnés en pourcentage de la pupille. Les résultats sont donnés figure B.4. On retrouve bien le comportement décrit par l'équation B.6, c'est à dire un senseur de gradient (la sensibilité augmente avec les fréquences) qui présente une augmentation de sensibilité proportionnelle à ρ. On commence à voir un écart au comportement "senseur de gradient" pour $\rho = 0.02 \times D$.

Dynamique

On utilise le critère des gains optiques pour comparer les différentes configurations $\rho << 1$ en dynamique. On utilise la cas d'un télescope de $D = 8\ m$ et $r_0 = 15\ cm$ à la longueur d'analyse. On utilise un jeu de phases pleine turbulence, et un jeu de phase résiduelles de *fitting* pour un cas avec 20 actionneurs dans le diamètre. On trouve bien une anti-corrélation entre les courbes de sensibilités présentées figure B.4 et les résultats des calculs de gains optiques, donnés figure B.5. On en conclu que, comme prévu par l'équation B.6, le paramètre ρ qui augmente entraîne bien un fort gain en sensibilité tout en conduisant à une forte perte en dynamique. On remarquera que pour ce cas $\rho << 1$, cet ASO présente la propriété intéressante d'avoir des courbes de gains optiques plates, tout comme la classe des ZWFS.

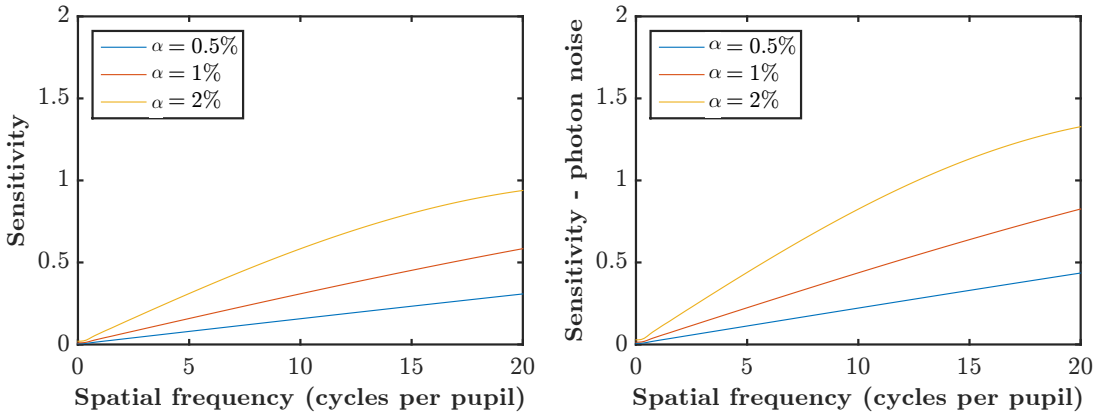


FIGURE B.4 – **Sensibilités à un bruit uniforme et au bruit de photon pour des cas ρ faibles.** $\rho = \alpha \times D$.

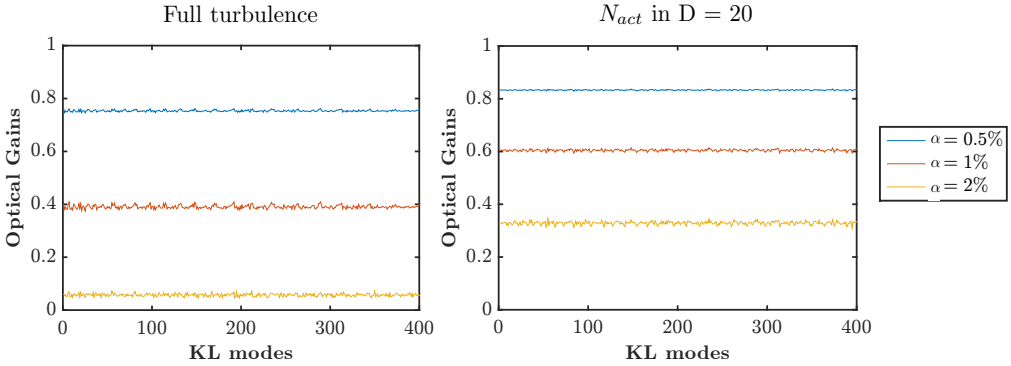


FIGURE B.5 – **Exemples de gains optiques pour les cas ρ faibles.** $D = 8\ m$ et $r_0 = 15\ cm$.

B.2.2 Cas ρ grand

Sensibilités

On calcule de nouveau les courbes de sensibilités, mais pour des ρ plus grand. Les résultats sont présentés figure B.6. On trouve des sensibilités qui exhibent des **oscillations** à l'instar de la classe des pyramides *aplaties*. De plus, la dépendance de la période de ces oscillations par rapport à l'écartement des pupilles coïncide exactement avec celle observée pour le cas des pyramides *aplaties*.

On peut expliquer ces oscillations en sensibilités à l'aide de l'équation B.5 qui donne l'expression des intensités réduites. On note que ici la pupille a été divisée en quatre et non en deux, on a donc un facteur 2 qui apparaît dans les intensités réduites par rapport à la formulation dérivée précédemment. Dans le régime des petites phases $\phi << 1$, on peut écrire :

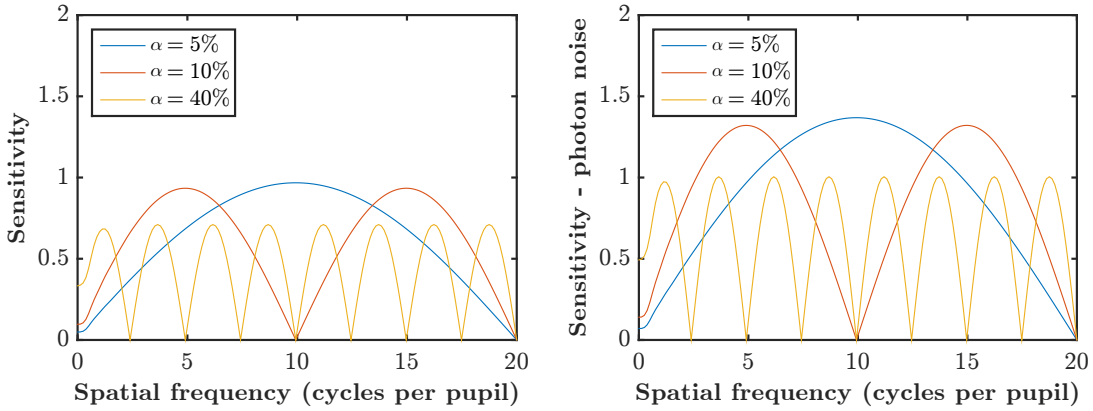


FIGURE B.6 – **Sensibilités à un bruit uniforme et au bruit de photon pour des cas ρ grands.** $\rho = \alpha \times D$.

$$\Delta I(\phi)_{|r} = \frac{1}{2}(\phi_{|r} - \phi_{|r+\rho}) \tag{B.7}$$

Prenons le cas de la sensibilité à un bruit uniforme. Pour la phase ϕ, on rappelle que cette sensibilité s'écrit :

$$s(\phi) = ||\Delta I(\phi)||_2 \tag{B.8}$$

avec $||\phi||_2 = 1$. Si on injecte l'équation B.7, on trouve alors :

$$s(\phi) = \frac{1}{2}||\phi - \phi_\rho||_2 \tag{B.9}$$

Avec ϕ_ρ la notation pour la carte de phase décalée de ρ. Prenons alors l'exemple d'une phase ϕ qui porte une fréquence spatiale de période T dans la pupille suivant l'axe (Ox) :

$$\phi_{|x} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \tag{B.10}$$

La quantité $||\phi - \phi_\rho||_2$ va être maximale lorsque ϕ et ϕ_ρ sont en **opposition de phase** comme illustré figure B.7, autrement dit pour :

$$\rho = (2k+1) \times \frac{T}{2} \tag{B.11}$$

avec k un entier naturel.

Dans ce cas d'opposition de phase, on a $\phi_\rho = -\phi$ et donc :

$$s(\phi) = \frac{1}{2}||\phi - \phi_\rho||_2 = \frac{1}{2}||2\phi||_2 = 1 \tag{B.12}$$

car on rappelle que $||\phi||_2 = 1$. On peut noter que dans cet exemple on n'atteint que la moitié de la valeur maximale possible, puisque l'on a choisi une fréquence

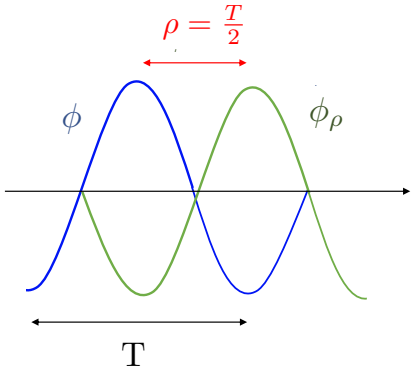


FIGURE B.7 – **Opposition de phase entre ϕ et ϕ_ρ.**

spatiale suivant l'axe (Ox) et que par conséquent les deux pupilles codant la variation de phase suivant l'axe (Oy) ne portent pas de signal.

En notant f la fréquence spatiale en cycles par pupille ($f = D/T$) , on trouve alors les fréquences exhibant des pics de sensibilité pour un α (pourcentage de décalage des pupilles) donné :

$$f_k = \frac{1}{2\alpha} + \frac{k}{\alpha} \tag{B.13}$$

On remarque que pour les sensibilités uniforme figure B.6, on atteint pas exactement la valeur 1 pour les pics de sensibilité : c'est parfaitement normal, on rappelle que les calculs menés ici l'ont été dans le cadre de l'approximation de la pupille infinie. Par analogie, cette analyse permet ainsi de comprendre simplement le comportement ondulatoire de la classe des pyramides *aplaties*. On remarquera que dans le cas des pyramides *aplaties*, la sensibilité ne tombe pas à 0. On l'explique par le portion non recouverte des pupilles, qui contrairement au shearing, fournit une analyse de la phase associée à la pyramide *classique*.

Approche convolutive. On remarquera que les calculs précédents sont encore plus simplifiés par l'approche convolutive. L'équation B.7 permet de calculer la réponse impulsionnelle très simplement :

$$\mathbf{IR} = \frac{1}{2}(\delta - \delta_\rho) \tag{B.14}$$

Le calcul de la fonction transfert donne ainsi directement le comportement sinusoïdal dont la période dépend de ρ dans l'espace des fréquences.

Dynamique

De manière identique que pour les cas ρ faibles, on calcule les gains optiques pour les configurations présentées dans les courbes de sensibilités figure B.6. Les résultats sont affichés figure B.8, où l'on ne présente que les gains optiques pour

les phases résiduelles, les gains plein turbulence étant à valeurs nulles pour les trois configurations. Comme attendu, on remarque que ces configurations présentent des dynamiques bien inférieures à celles correspondantes à des ρ petits.

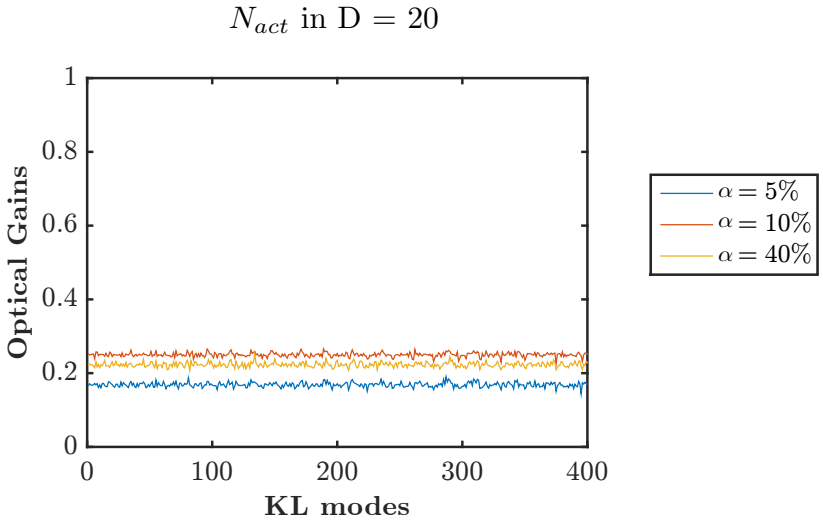


FIGURE B.8 – **Exemples de gains optiques pour les cas ρ grands.** $D = 8\ m$ et $r_0 = 15\ cm$.

B.3 Le shearing, un ASO à filtrage de Fourier ?

On a exploré le comportement de l'ASO de shearing, sans expliciter de façon concrète pour fabriquer un tel analyseur. L'étude du comportement de cet ASO à mis en avant sa grande similarité avec la classe des pyramides *aplaties*. On peut donc se poser la question suivante : existe t-il un masque m qui permette de générer l'ASO de shearing sous la forme d'un ASO à filtrage de Fourier ? La réponse est oui, et on propose le masque m illustré figure B.9 pour effectuer cette opération. De part sa structure périodique, ce masque de **phase pure** ressemble fortement à un réseau. Chaque cellule élémentaire est composée de quatre faces ayant chacune une angle en tip-tilt donné, et imageant chacune la pupille à un endroit donné du détecteur. La taille de ces cellules élémentaire doit être inférieure à λ/D. À cause de la diffraction dû à ce maillage serré, le masque aura l'inconvénient de présenter une perte significative de photons. Il ne s'impose ainsi pas comme la façon la plus pertinente pour fabriquer cet ASO en pratique. Reste néanmoins que ce masque permet donc bien de produire l'ASO de shearing par filtrage de Fourier, et peut être vu comme une généralisation des pyramides *aplaties* : celle-ci sont en effet obtenues en agrandissant la taille des cellules élémentaires.

Par ailleurs, ce masque présente une propriété intéressante qu'aucun masque présenté précédemment dans cette thèse possède : il est **invariant par translation**. On pourrait alors s'attendre à ce que ce masque soit d'un intérêt particulier pour le

guidage sur sources étendues en xy dans le plan focal. Plus généralement, la recherche de masques avec des propriétés adaptés à des sources de guidage non ponctuelles est un axe de recherche très pertinent avec notamment le cas des systèmes d'OA travaillant avec des LGS.

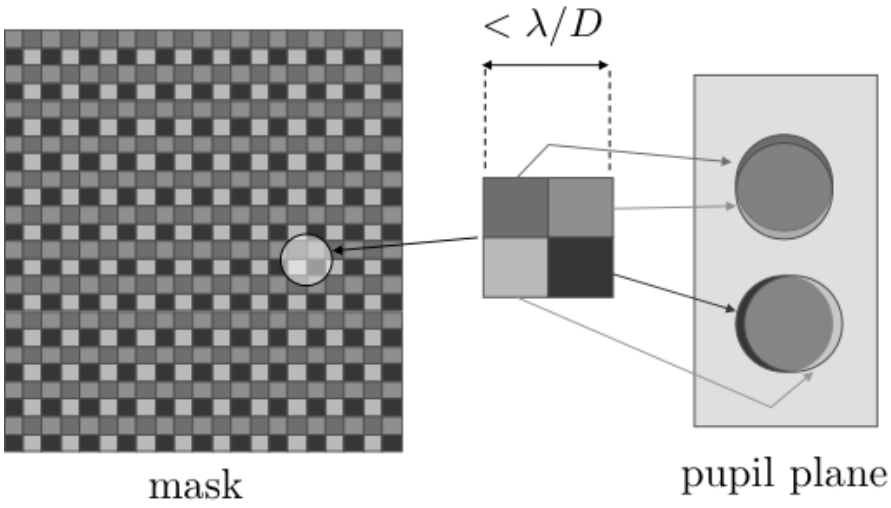


FIGURE B.9 – **Un masque à filtrage de Fourier permettant de générer l'ASO de shearing.**

Ce principe de masque a été testé avec succès sur le banc LOOPS, des exemples de réponses mesurées étant présentées figure B.10.

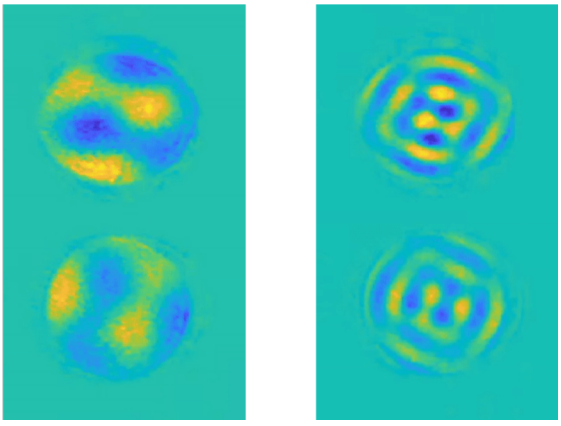


FIGURE B.10 – **LOOPS : réponses expérimentales à un mode de KL bas-ordre et un mode de KL haut-ordre pour un masque de shearing généré sur le SLM en plan focal.**

B.4 L'interféromètre de shearing rotationnel, une idée de pétalomètre ?

À la vue des équations très simples développé ci-dessus, on peut s'intéresser à l'interferomètre de shearing rotationnel. Comme on va le voir, celui-ci pourrait facilement servir de "pétalomètre" : un senseur dédié à la mesure des pistons différentiels présents entre les segments et/ou portions séparées par les spiders sur les grands télescopes. L'enjeu crucial d'une telle mesure n'est pas évoqués ici. Pour plus d'informations, voir [Bertrou-Cantou et al., 2020].

Prenons l'exemple d'un miroir dont on essaie de phaser les quatre quadrants séparés par des spiders. En faisant interférer la pupille avec elle-même tournée de $\theta = 90°$ (et le rajout d'un déphasage de $\pi/2$!), on peut de la même façon que précédemment écrire les intensités linéaires sur le détecteur :

$$\Delta I(\phi) = \phi - \phi_\theta \tag{B.15}$$

Avec ϕ_θ la notation pour la carte de phase tournée d'un angle θ. Cette configuration est illustrée figure B.11. On notera que le facteur un-demi précédemment utilisé disparaît car on travaille de nouveau avec juste l'image de deux pupilles.

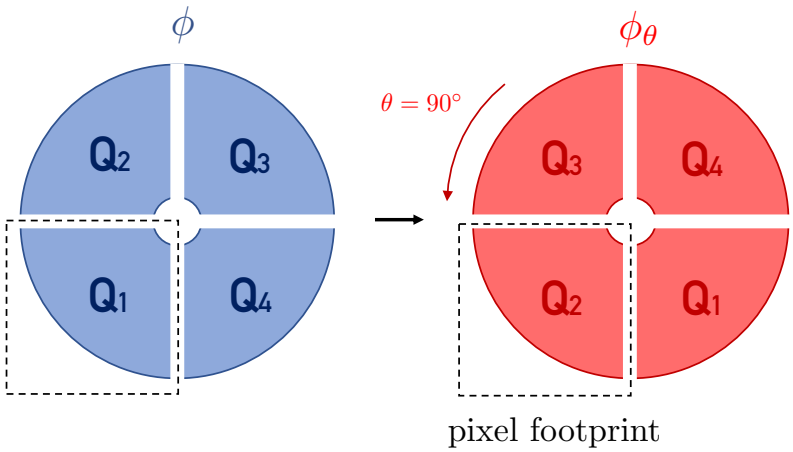


FIGURE B.11 – **Le shearing rotationnel : un pétalomètre intuitif.**

Si l'on utilise un seul pixel par cadrant sur le détecteur, la mesure de pixel correspondant au cadrant Q_{1-2} (c'est à dire celui qui représente la superposition de Q_1 et Q_2, voir toujours schéma B.11) :

$$\Delta I(\phi)_{1-2} = \int_{Q_{1-2}} (\phi_{|\boldsymbol{r}} - \phi_{\theta|\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{Q_1} \phi_{|\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{Q_2} \phi_{|\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{B.16}$$

et donc :

$$\Delta I(\phi)_{1-2} = \phi_{1-2} \tag{B.17}$$

où ϕ_{1-2} est directement le piston différentiel global entre le quadrant Q_1 et le cadrant Q_2. Sans l'hypothèse $\phi << 1$, on vu que les intensités réduites s'écrivent :

$$\Delta I(\phi) = \sin(\phi - \phi_\theta) \tag{B.18}$$

Cette équation permet d'appréhender comment la mesure du piston équation B.17 sera impactée en présence de phases résiduelles, et tout l'intérêt de faire de la mesure de piston à de grandes longueurs d'ondes pour s'affranchir des non-linéarités.

On conclut cette étude sur l'ASO de shearing en rappelant que cet analyseur, de part la simplicité des équations qui décrivent sa réponse, est un cas d'étude très instructif pour mieux comprendre la sensibilité des ASO tel que la classe des pyramides *aplaties*, mais aussi pour mieux appréhender le lien antagoniste entre dynamique et sensibilité.

Annexe C

Calcul du gradient de la fonction score pour l'optimisation des masques

Le but de cette annexe est de calculer analytiquement le gradient de la fonction score au cœur de l'optimisation non linaire des masques à filtrage de Fourier. La quantité dérivée ici pourrait permettre à l'avenir de générer des algorithmes beaucoup plus performants et à convergence plus rapide pour cette optimisation.

C.1 Cadre de travail

On rappelle la formulation de la fonction de transfert dans le cadre du modèle convolutif, sans hypothèse aucune sur la forme du masque m et la fonction de poids de modulation ω dont l'expression dépend de l'approximation choisie (pupille infinie, glissante ou bien formulation énergie en plan focal). On note $\mathcal{F}[m]_{|\mathbf{v}}$ la fonction de transfert associée au masque m évalué à la fréquence spatiale $\mathbf{v}$.

$$\mathcal{F}[m]_{|\mathbf{v}} = i(\widehat{\widehat{m}} \star \overline{m\omega} - \overline{m} \star \widehat{\widehat{m\omega}}) \tag{C.1}$$

On prend m comme étant un masque de phase pur, ainsi :

$$m = e^{i\Delta} \tag{C.2}$$

où Δ est donc une carte réelle. La sensibilité du masque en $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$s_{|\mathbf{v}} = \sqrt{|\mathcal{F}[\Delta]|^2 \star PSF}|_{\mathbf{v}} \tag{C.3}$$

où l'on sait que pour toute fréquence $\mathbf{v}$, on a $s_{|\mathbf{v}} \leq 2$.

Comme expliqué section 4.3.2, la fonction score à minimiser pour optimiser un masque est :

$$\mathcal{E}_\Omega[\Delta] = \sum_{\mathbf{v}\in\Omega} (4 - |\mathcal{F}[\Delta]|^2 \star PSF|_{\mathbf{v}})^2 \tag{C.4}$$

où Ω est la zone de minimisation de la fonction score dans l'espace des fréquences.

C.2 Calcul du gradient

On cherche donc à calculer le gradient de la fonction score $\mathcal{E}_\Omega[\Delta]$ par rapport au masque Δ. Dans le cadre d'un masque de phase pur :

$$\mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}} = i(\widehat{\widehat{e^{i\Delta}}} \star \overline{e^{i\Delta}\omega} - \overline{e^{i\Delta}} \star \widehat{\widehat{e^{i\Delta}\omega}}) \tag{C.5}$$

On peut simplifier :

$$\mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}} = i(\widehat{\widehat{e^{i\Delta}}} \star e^{-i\Delta}\overline{\omega} - e^{-i\Delta} \star \widehat{\widehat{e^{i\Delta}\omega}}) \tag{C.6}$$

Première étape :

Calculons d'abord le gradient de la fonction de transfert :

$$\frac{\partial \mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} i(\widehat{\widehat{e^{i\Delta}}} \star e^{-i\Delta}\overline{\omega} - e^{-i\Delta} \star \widehat{\widehat{e^{i\Delta}\omega}}) \tag{C.7}$$

Ce qui donne, en développant les convolutions :

$$\frac{\partial \mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} i\Big[\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\mathbf{r}\ e^{i\Delta_{|-\mathbf{r}}} e^{-i\Delta_{|\mathbf{v}-\mathbf{r}}} \overline{\omega}_{|\mathbf{v}-\mathbf{r}} - \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\mathbf{r}\ e^{-i\Delta_{|\mathbf{r}}} e^{-i\Delta_{|\mathbf{r}-\mathbf{v}}} \omega_{|\mathbf{r}-\mathbf{v}} \Big] \tag{C.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = e^{i(\Delta_{|\mathbf{u}} - \Delta_{|\mathbf{u}+\mathbf{v}})}(\omega_{|\mathbf{u}} - \overline{\omega}_{|\mathbf{u}+\mathbf{v}}) + e^{i(\Delta_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}} - \Delta_{|\mathbf{u}})}(\overline{\omega}_{|\mathbf{u}} - \omega_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}}) \tag{C.9}$$

Deuxième étape :

Calculons la quantité suivante :

$$\frac{\partial |\mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}|^2}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = 2\Re\Big[\frac{\partial \mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} \overline{\mathcal{F}[\Delta]}_{|\mathbf{v}}\Big] \tag{C.10}$$

ω est une fonction réelle, on a donc :

$$\frac{\partial |\mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}|^2}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = 2\Big[\cos(\Delta_{|\mathbf{u}} - \Delta_{|\mathbf{u}+\mathbf{v}})(\omega_{|\mathbf{u}} - \omega_{|\mathbf{u}+\mathbf{v}}) + \cos(\Delta_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}} - \Delta_{|\mathbf{u}})(\omega_{|\mathbf{u}} - \omega_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}}) \Big] \mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}} \tag{C.11}$$

Troisième étape :

On peut donc maintenant calculer le gradient de la fonction score :

$$\mathcal{E}_\Omega[\Delta] = \sum_{\mathbf{v}\in\Omega} (4 - |\mathcal{F}[\Delta]|^2 \star PSF|_{\mathbf{v}})^2 \tag{C.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\Omega[\Delta]}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = \sum_{\mathbf{v}\in\Omega} \frac{\partial}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} (4 - |\mathcal{F}[\Delta]|^2 \star PSF|_{\mathbf{v}})^2 \tag{C.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\Omega[\Delta]}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} = 2\sum_{\mathbf{v}\in\Omega} (4 - |\mathcal{F}[\Delta]|^2 \star PSF|_{\mathbf{v}}) (\frac{\partial |\mathcal{F}[\Delta]|^2}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}} \star PSF|_{\mathbf{v}}) \tag{C.14}$$

où le terme $\frac{\partial |\mathcal{F}[\Delta]_{|\mathbf{v}}|^2}{\partial \Delta_{|\mathbf{u}}}$ est donné équation C.11.

Liste des publications

En premier auteur

1. **Chambouleyron, V.**, O. Fauvarque, P. Janin-Potiron, C. Correia, J. F. Sauvage, N. Schwartz, B. Neichel, and T. Fusco. Pyramid wavefront sensor optical gains compensation using a convolutional model. , 644:A6, December 2020

2. **Chambouleyron, V.**, O. Fauvarque, J. F. Sauvage, B. Neichel, and T. Fusco. Focal-plane-assisted pyramid wavefront sensor: Enabling frame-by-frame optical gain tracking. , 649:A70, May 2021

3. **Chambouleyron, V.**, O. Fauvarque, J. F. Sauvage, K. Dohlen, N. Levraud, A. Vigan, M. N'Diaye, B. Neichel, and T. Fusco. Variation on a Zernike wavefront sensor theme: Optimal use of photons. , 650:L8, June 2021

Dans la liste d'auteurs

1. Olivier Fauvarque, Pierre Janin-Potiron, Carlos Correia, Yoann Brûlé, Benoit Neichel, **Vincent Chambouleyron**, Jean-Francois Sauvage, and Thierry Fusco. Kernel formalism applied to fourier-based wave-front sensing in presence of residual phases. *J. Opt. Soc. Am. A*, 36(7):1241–1251, Jul 2019

2. Pierre Janin-Potiron, **Vincent Chambouleyron**, Lauren Schatz, Olivier Fauvarque, Charlotte Z. Bond, Yannick Abautret, Eduard Muslimov, Kacem El-Hadi, Jean-François Sauvage, Kjetil Dohlen, Benoît Neichel, Carlos M. Correia, and Thierry Fusco. Adaptive optics with programmable fourier-based wavefront sensors: a spatial light modulator approach to the loops testbed, 2019

3. Carlos Correia, Olivier Fauvarque, Charlotte Bond, **Chambouleyron, Vincent**, Jean-Francois Sauvage, and Thierry Fusco. Performance limits of adaptive-optics/high-contrast imagers with pyramid wave-front sensors. *astro-ph.IM*, March 2020

4. Benjamin L. Gerard, **Chambouleyron, Vincent**, Rebecca Jensen-Clem, and Jean-François Sauvage. The Bright Pyramid Wavefront Sensor. *arXiv e-prints*, page arXiv:2107.13105, July 2021

5. Lauren Schatz, Jared R. Males, Carlos Correia, Benoit Neichel, **Chambouleyron, Vincent**, Johanan Codona, Olivier Fauvarque, Jean-François Sauvage, Thierry Fusco, Michael Hart, Pierre Janin-Potiron, Robert Johnson, Joseph Long, and Mala Mateen. The Three-Sided PyramidWavefront Sensor. I. Simulations and Analysis for Astronomical Adaptive Optics. *arXiv e-prints*, page arXiv:2109.06386, September 2021

Bibliographie

[Asfour and Poleshchuk, 2006] Asfour, J.-M. and Poleshchuk, A. G. (2006). Asphere testing with a Fizeau interferometer based on a combined computer-generated hologram. *Journal of the Optical Society of America A*, 23(1) :172–178.

[Babcock, 1953] Babcock, H. W. (1953). The Possibility of Compensating Astronomical Seeing. , 65(386) :229.

[Baranec et al., 2006] Baranec, C., Lloyd-Hart, M., Milton, N. M., Stalcup, T., Snyder, M., and Angel, R. (2006). Tomographic reconstruction of stellar wavefronts from multiple laser guide stars. In Ellerbroek, B. L. and Bonaccini Calia, D., editors, *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 6272 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 627203.

[Beltramo-Martin et al., 2019] Beltramo-Martin, O., Correia, C. M., Ragland, S., Jolissaint, L., Neichel, B., Fusco, T., and Wizinowich, P. L. (2019). Prime : Psf reconstruction and identification for multiple-source characterization enhancement – application to keck nirc2 imager. 487(4) :5450–5462.

[Bertrou-Cantou et al., 2020] Bertrou-Cantou, A., Gendron, E., Rousset, G., Ferreira, F., Sevin, A., Vidal, F., Clénet, Y., Buey, T., and Karkar, S. (2020). Petalometry for the ELT : dealing with the wavefront discontinuities induced by the telescope spider. In *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 11448 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 1144812.

[Bond et al., 2015] Bond, C., El Hadi, K., Sauvage, J. F., Correia, C., Fauvarque, O., Rabaud, D., Neichel, B., and Fusco, T. (2015). Experimental implementation of a Pyramid WFS : Towards the first SCAO systems for E-ELT. In *Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes IV (AO4ELT4)*, page E6.

[Bond et al., 2020] Bond, C. Z., Cetre, S., Lilley, S., Wizinowich, P., Mawet, D., Chun, M., Wetherell, E., Jacobson, S., Lockhart, C., Warmbier, E., Ragland, S., Alvarez, C., Guyon, O., Goebel, S., Delorme, J.-R., Jovanovic, N., Hall, D. N., Wallace, J. K., Taheri, M., Plantet, C., and Chambouleyron, V. (2020). Adaptive optics with an infrared pyramid wavefront sensor at Keck. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 6 :039003.

[Bouchet et al., 2021] Bouchet, D., Dong, J., Maestre, D., and Juffmann, T. (2021). Fundamental bounds on the precision of classical phase microscopes. *Phys. Rev. Applied*, 15 :024047.

[Bowler, 2016] Bowler, B. P. (2016). Imaging Extrasolar Giant Planets. , 128(968) :102001.

[Cavarroc et al., 2006] Cavarroc, C., Boccaletti, A., Baudoz, P., Fusco, T., Martinez, P., and Rouan, D. (2006). Limitations on Earth-like planet detection with perfect and real coronagraphs on ELTs. In Cullum, M. J. and Angeli, G. Z., editors, *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 6271 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 62710I.

[Chambouleyron et al., 2020] Chambouleyron, V., Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., Sauvage, J. F., Schwartz, N., Neichel, B., and Fusco, T. (2020). Pyramid wavefront sensor optical gains compensation using a convolutional model. 644 :A6.

[Chambouleyron et al., 2021a] Chambouleyron, V., Fauvarque, O., Sauvage, J. F., Dohlen, K., Levraud, N., Vigan, A., N'Diaye, M., Neichel, B., and Fusco, T. (2021a). Variation on a Zernike wavefront sensor theme : Optimal use of photons. , 650 :L8.

[Chambouleyron et al., 2021b] Chambouleyron, V., Fauvarque, O., Sauvage, J. F., Neichel, B., and Fusco, T. (2021b). Focal-plane-assisted pyramid wavefront sensor : Enabling frame-by-frame optical gain tracking. , 649 :A70.

[Clénet et al., 2019] Clénet, Y., Buey, T., Gendron, E., Hubert, Z., Vidal, F., Cohen, M., Chapron, F., Sevin, A., Fédou, P., Barbary, G., Borgo, B., Huet, J.-M., Blin, A., Dupuis, O., Gaudemard, J., Ben Nejma, S., Gratadour, D., Deo, V., Ferreira, F., Thijs, S., Lapeyrère, V., Raffard, J., Chemla, F., Le Ruyet, B., Bertrou-Cantou, A., Rozel, M., Younès, Y., Rousset, G., Zins, G., Diolaiti, E., Ciliegi, P., Garrel, V., Rabien, S., Schubert, J., Hartl, M., Hörmann, V., and Davies, R. (2019). MICADO-MAORY SCAO Preliminary design, development plan & calibration strategies. In *Proceedings of the AO4ELT6 conference*, page E3.

[Conan and Correia, 2014] Conan, R. and Correia, C. (2014). Object-oriented Matlab adaptive optics toolbox. In Marchetti, E., Close, L. M., and Vran, J.-P., editors, *Adaptive Optics Systems IV*, volume 9148 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 91486C.

[Dai, 1995] Dai, G.-M. (1995). Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loeve functions. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(10) :2182–2193.

[Delacroix et al., 2015] Delacroix, C., Langlois, M. P., Loupias, M., Thiébaut, E., Adjali, L., Leger, J., and Tallon, M. (2015). Development of an ELT XAO testbed using a Mach-Zehnder wavefront sensor : calibration of the deformable mirror. In Dolne, J. J., Karr, T. J., and Gamiz, V. L., editors, *Unconventional Imaging and Wavefront Sensing 2015*, volume 9617 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 96170G.

[Deo, 2019] Deo, V. (2019). *Analyse et mise en œuvre de l'analyseur pyramide pour l'optique adaptative à très hauts ordres des ELT*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Rousset, Gérard et Gendron, Eric Physique. Astronomie et astrophysique Université de Paris (2019-....) 2019.

[Deo et al., 2019] Deo, V., Gendron, É., Rousset, G., Vidal, F., Sevin, A., Ferreira, F., Gratadour, D., and Buey, T. (2019). A telescope-ready approach for modal compensation of pyramid wavefront sensor optical gain. 629 :A107.

[Deo et al., 2019] Deo, V., Rozel, M., Bertrou-Cantou, A., Moura Ferreira, F., Vidal, F., Gratadour, D., Sevin, A., Clénet, Y., Rousset, G., and Gendron, E. (2019). Close : a self-regulating, best-performance tracker for modal integrator based ao loops. In *Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes conference, 6th edition.*

[Dohlen et al., 2018] Dohlen, K., Morris, T., Piqueras Lopez, J., Calcines-Rosario, A., Costille, A., Dubbeldam, M., El Hadi, K., Fusco, T., Llored, M., Neichel, B., Pascal, S., Sauvage, J.-F., Vola, P., Clarke, F., Schnetler, H., Bryson, I., and Thatte, N. (2018). Opto-mechanical designs for the HARMONI adaptive optics systems. In Close, L. M., Schreiber, L., and Schmidt, D., editors, *Adaptive Optics Systems VI*, volume 10703 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 107033X.

[El Hadi et al., 2014] El Hadi, K., Fusco, T., Sauvage, J. F., and Neichel, B. (2014). High speed and high precision pyramid wavefront sensor : In labs validation and preparation to on sky demonstration. In Marchetti, E., Close, L. M., and Vran, J.-P., editors, *Adaptive Optics Systems IV*, volume 9148 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 91485C.

[Ellerbroek, 1994] Ellerbroek, B. L. (1994). First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes. *Journal of the Optical Society of America A*, 11(2) :783–805.

[Esposito et al., 2020] Esposito, S., Puglisi, A., Pinna, E., Agapito, G., Quirós-Pacheco, F., Véran, J. P., and Herriot, G. (2020). On-sky correction of non-common path aberration with the pyramid wavefront sensor. , 636 :A88.

[Esposito and Riccardi, 2001] Esposito, S. and Riccardi, A. (2001). Pyramid Wavefront Sensor behavior in partial correction Adaptive Optic systems. 369 :L9–L12.

[Esposito et al., 2010] Esposito, S., Riccardi, A., Fini, L., Puglisi, A. T., Pinna, E., Xompero, M., Briguglio, R., Quirós-Pacheco, F., Stefanini, P., Guerra, J. C., Busoni, L., Tozzi, A., Pieralli, F., Agapito, G., Brusa-Zappellini, G., Demers, R., Brynnel, J., Arcidiacono, C., and Salinari, P. (2010). First light AO (FLAO) system for LBT : final integration, acceptance test in Europe, and preliminary on-sky commissioning results. In Ellerbroek, B. L., Hart, M., Hubin, N., and Wizinowich, P. L., editors, *Adaptive Optics Systems II*, volume 7736 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 773609.

[Fauvarque, 2017] Fauvarque, O. (2017). *Optimisation des analyseurs de front d'onde à filtrage optique de Fourier*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Fusco, Thierry et Neichel, Benoît Physique et sciences de la matière. Astrophysique et cosmologie Aix-Marseille 2017.

[Fauvarque et al., 2019] Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., Brûlé, Y., Neichel, B., Chambouleyron, V., Sauvage, J.-F., and Fusco, T. (2019). Kernel formalism applied to fourier-based wave-front sensing in presence of residual phases. *J. Opt. Soc. Am. A*, 36(7) :1241–1251.

[Fauvarque et al., 2015] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., and Sauvage, J.-F. (2015). Variation around a pyramid theme : optical recombination and optimal use of photons. *Opt. Lett.*, 40(15) :3528–3531.

[Fauvarque et al., 2016] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., and Girault, O. (2016). General formalism for fourier-based wave front sensing. *Optica*, 3(12) :1440–1452.

[Fétick et al., 2019] Fétick, R. J. L., Fusco, T., Neichel, B., Mugnier, L. M., Beltramo-Martin, O., Bonnefois, A., Petit, C., Milli, J., Vernet, J., Oberti, S., and Bacon, R. (2019). Physics-based model of the adaptive-optics-corrected point spread function. Applications to the SPHERE/ZIMPOL and MUSE instruments. 628 :A99.

[Foucault, 1859] Foucault, L. (1859). Memoire sur la construction des telescopes en verre argente. *Annales de l'Observatoire de Paris*, 5 :197–237.

[Fried, 1966] Fried, D. L. (1966). Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 56(10) :1372.

[Fried, 1990] Fried, D. L. (1990). Time-delay-induced mean-square error in adaptive optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 7(7) :1224–1227.

[Gendron and Lena, 1994] Gendron, E. and Lena, P. (1994). Astronomical adaptive optics. I. Modal control optimization. , 291(1) :337–347.

[Gilmozzi and Spyromilio, 2007] Gilmozzi, R. and Spyromilio, J. (2007). The European Extremely Large Telescope (E-ELT). *The Messenger*, 127 :11.

[Guyon, 2005] Guyon, O. (2005). Limits of adaptive optics for high-contrast imaging. *The Astrophysical Journal*, 629(1) :592–614.

[Hammer et al., 2002] Hammer, F., Sayède, F., Gendron, E., Fusco, T., Burgarella, D., Cayatte, V., Conan, J.-M., Courbin, F., Flores, H., Guinouard, I., Jocou, L., Lançon, A., Monnet, G., Mouhcine, M., Rigaud, F., Rouan, D., Rousset, G., Buat, V., and Zamkotsian, F. (2002). The FALCON Concept : Multi-Object Spectroscopy Combined with MCAO in Near-IR. In Bergeron, J. and Monnet, G., editors, *Scientific Drivers for ESO Future VLT/VLTI Instrumentation*, page 139.

[Hardy et al., 1977] Hardy, J. W., Lefebvre, J. E., and Koliopoulos, C. L. (1977). Real-time atmospheric compensation. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 67 :360–369.

[Heritier et al., 2018] Heritier, C. T., Esposito, S., Fusco, T., Neichel, B., Oberti, S., Briguglio, R., Agapito, G., Puglisi, A., Pinna, E., and Madec, P. Y. (2018). A new calibration strategy for adaptive telescopes with pyramid WFS. , 481(2) :2829–2840.

[Hill et al., 2012] Hill, J. M., Green, R. F., Ashby, D. S., Brynnel, J. G., Cushing, N. J., Little, J. K., Slagle, J. H., and Wagner, R. M. (2012). The Large Binocular Telescope. In Stepp, L. M., Gilmozzi, R., and Hall, H. J., editors, *Ground-based and Airborne Telescopes IV*, volume 8444 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 84441A.

[Hudgin, 1977] Hudgin, R. (1977). Wave-front compensation error due to finite corrector-element size. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 67 :393–395.

[Janin-Potiron et al.,] Janin-Potiron, P., Chambouleyron, V., Schatz, L., Fauvarque, O., Bond, C. Z., Abautret, Y., Muslimov, E., El-Hadi, K., Sauvage, J.-F.,

Dohlen, K., Neichel, B., Correia, C. M., and Fusco, T. Adaptive optics with programmable fourier-based wavefront sensors : a spatial light modulator approach to the loops testbed.

[Jensen-Clem et al., 2019] Jensen-Clem, R., Bond, C. Z., Cetre, S., McEwen, E., Wizinowich, P., Ragland, S., Mawet, D., and Graham, J. (2019). Demonstrating predictive wavefront control with the Keck II near-infrared pyramid wavefront sensor. In *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 11117 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 111170W.

[Jensen-Clem et al., 2012] Jensen-Clem, R., Wallace, J. K., and Serabyn, E. (2012). Characterization of the phase-shifting zernike wavefront sensor for telescope applications. In *2012 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–7.

[Johns et al., 2014] Johns, M., Hull, C., Muller, G., Irarrazaval, B., Bouchez, A., Chylek, T., Smith, C., Wadhavkar, A., Bigelow, B., Gunnels, S., McLeod, B., and Buleri, C. (2014). Design of the Giant Magellan Telescope. In Stepp, L. M., Gilmozzi, R., and Hall, H. J., editors, *Ground-based and Airborne Telescopes V*, volume 9145 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 91451F.

[Jovanovic et al., 2015] Jovanovic, N., Martinache, F., Guyon, O., Clergeon, C., Singh, G., Kudo, T., Garrel, V., Newman, K., Doughty, D., Lozi, J., Males, J., Minowa, Y., Hayano, Y., Takato, N., Morino, J., Kuhn, J., Serabyn, E., Norris, B., Tuthill, P., Schworer, G., Stewart, P., Close, L., Huby, E., Perrin, G., Lacour, S., Gauchet, L., Vievard, S., Murakami, N., Oshiyama, F., Baba, N., Matsuo, T., Nishikawa, J., Tamura, M., Lai, O., Marchis, F., Duchene, G., Kotani, T., and Woillez, J. (2015). The Subaru Coronagraphic Extreme Adaptive Optics System : Enabling High-Contrast Imaging on Solar-System Scales. , 127(955) :890.

[Kasper, 2012] Kasper, M. (2012). Adaptive optics for high contrast imaging. In Ellerbroek, B. L., Marchetti, E., and Véran, J.-P., editors, *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 84470B.

[Kasper et al., 2004] Kasper, M., Fedrigo, E., Looze, D. P., Bonnet, H., Ivanescu, L., and Oberti, S. (2004). Fast calibration of high-order adaptive optics systems. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(6) :1004–1008.

[Kolmogorov, 1941] Kolmogorov, A. (1941). The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 30 :301–305.

[Korkiakoski et al., 2008] Korkiakoski, V., Vérinaud, C., and Louarn, M. L. (2008). Applying sensitivity compensation for pyramid wavefront sensor in different conditions. In Hubin, N., Max, C. E., and Wizinowich, P. L., editors, *Adaptive Optics Systems*, volume 7015, pages 1422 – 1431. International Society for Optics and Photonics, SPIE.

[Kulcsár et al., 2006] Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., Petit, C., Conan, J.-M., and Viaris de Lesegno, P. (2006). Optimal control, observers and integrators in adaptive optics. *Optics Express*, 14(17) :7464.

[Mahajan, 1983] Mahajan, V. N. (1983). Strehl ratio for primary aberrations in terms of their aberration variance. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 73 :860.

[Malacara, 1978] Malacara, D. (1978). *Twyman-Green Interferometer*, page 47.

[Marois et al., 2008] Marois, C., Macintosh, B., Barman, T., Zuckerman, B., Song, I., Patience, J., Lafrenière, D., and Doyon, R. (2008). Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799. *Science*, 322(5906) :1348.

[Marshman and Singh, 2016] Marshman, E. and Singh, C. (2016). Interactive tutorial to improve student understanding of single photon experiments involving a Mach-Zehnder interferometer. *European Journal of Physics*, 37(2) :024001.

[Martinache et al., 2016] Martinache, F., Jovanovic, N., and Guyon, O. (2016). Closed-loop focal plane wavefront control with the SCExAO instrument. , 593 :A33.

[McDermid, 2019] McDermid, R. (2019). MAVIS : A new MCAO-Assisted Visible Imager and Spectrograph for the Very Large Telescope. In *Linking Galaxies from the Epoch of Initial Star Formation to Today*, page 34.

[Meimon et al., 2015] Meimon, S., Petit, C., and Fusco, T. (2015). Optimized calibration strategy for high order adaptive optics systems in closed-loop : the slope-oriented Hadamard actuation. *Optics Express*, 23(21) :27134.

[Merkle and Hubin, 1992] Merkle, F. and Hubin, N. (1992). Adaptive optics for the ESO Very Large Telescope. In *Adaptive Optics for Large Telescopes Topical Meeting*, pages 63–66.

[Mugnier et al., 2008] Mugnier, L. M., Sauvage, J. F., Fusco, T., Cornia, A., and Dandy, S. (2008). On-Line Long-Exposure Phase Diversity : a Powerful Tool for Sensing Quasi-Static Aberrations of Extreme Adaptive Optics Imaging Systems. *Optics Express*, 16(22) :18406.

[N'Diaye et al., 2016] N'Diaye, M., Vigan, A., Dohlen, K., Sauvage, J.-F., Caillat, A., Costille, A., Girard, J. H. V., Beuzit, J.-L., Fusco, T., Blanchard, P., Le merrer, J., Le Mignant, D., Madec, F., Moreaux, G., Mouillet, D., Puget, P., Zins, G., Marchetti, E., Close, L., and Véran, J.-P. (2016). ZELDA, a Zernike wavefront sensor for the fine measurement of quasi-static aberrations in coronagraphic systems : concept studies and results with VLT/SPHERE. In *SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation*, volume 9909, page 99096S, Edinburgh, United Kingdom.

[Oboukhov, 1962] Oboukhov, A. M. (1962). Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 13 :77–81.

[Paterson, 2008] Paterson, C. (2008). Towards practical wavefront sensing at the fundamental information limit. *Journal of Physics : Conference Series*, 139 :012021.

[Petit et al., 2004] Petit, C., Quiros-Pacheco, F., Conan, J.-M., Kulcsár, C., Raynaud, H.-F., and Fusco, T. (2004). Kalman filter based control for Adaptive Optics. In Combes, F., Barret, D., Contini, T., Meynadier, F., and Pagani, L., editors, *SF2A-2004 : Semaine de l'Astrophysique Francaise*, page 189.

[Plantet, 2015] Plantet, C. (2015). Revisiting the comparison between the Shack-Hartmann and the pyramid wavefront sensors via the Fisher information matrix. *Optics Express*, 23(22) :28619.

[Ragazzoni, 1996] Ragazzoni, R. (1996). Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of Modern Optics*, 43(2) :289–293.

[Ragazzoni et al., 2000] Ragazzoni, R., Ghedina, A., Baruffolo, A., Marchetti, E., Farinato, J., Niero, T., Crimi, G., and Ghigo, M. (2000). Testing the pyramid wavefront sensor on the sky. In Wizinowich, P. L., editor, *Adaptive Optical Systems Technology*, volume 4007 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pages 423–430.

[Rigaut, 2002] Rigaut, F. (2002). Ground Conjugate Wide Field Adaptive Optics for the ELTs. In *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, volume 58 of *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, page 11.

[Rigaut and Gendron, 1992] Rigaut, F. and Gendron, E. (1992). Laser guide star in adaptive optics : the tilt determination problem. , 261 :677–684.

[Rigaut and Neichel, 2020] Rigaut, F. and Neichel, B. (2020). Multiconjugate Adaptive Optics for Astronomy. *arXiv e-prints*, page arXiv :2003.03097.

[Rigaut et al., 1991] Rigaut, F., Rousset, G., Kern, P., Fontanella, J. C., Gaffard, J. P., Merkle, F., and Léna, P. (1991). Adaptive optics on a 3.6-m telescope - Results and performance. , 250(1) :280–290.

[Roddier, 1997] Roddier (1997). Stellar coronograph with phase mask. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109 :815.

[Roddier, 1981] Roddier, F. (1981). The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progess in Optics*, 19 :281–376.

[Roddier et al., 1988] Roddier, F., Roddier, C., and Roddier, N. (1988). Curvature Sensing : A New Wavefront Sensing Method. In Morris, G. M., editor, *Statistical optics*, volume 976 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pages 203–209.

[Rousset et al., 1990] Rousset, G., Fontanella, J. C., Kern, P., Gigan, P., and Rigaut, F. (1990). First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. , 230(2) :L29–L32.

[Ruane et al., 2020] Ruane, G., Wallace, J. K., Steeves, J., Prada, C. M., Seo, B.-J., Bendek, E., Coker, C., Chen, P., Crill, B., Jewell, J., and et al. (2020). Wavefront sensing and control in space-based coronagraph instruments using zernike's phase-contrast method. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 6(04).

[Sagnac, 1913] Sagnac (1913). L'ether lumineux demontre par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme.

[Sauvage et al., 2010] Sauvage, J. F., Mugnier, L. M., Rousset, G., and Fusco, T. (2010). Analytical expression of long-exposure adaptive-optics-corrected coronagraphic image First application to exoplanet detection. *Journal of the Optical Society of America A*, 27(11) :A157.

[Schatz et al., 2021] Schatz, L., Males, J. R., Correia, C., Neichel, B., Chambouleyron, V., Codona, J., Fauvarque, O., Sauvage, J.-F., Fusco, T., Hart, M., Janin-Potiron, P., Johnson, R., Long, J., and Mateen, M. (2021). The Three-Sided PyramidWavefront Sensor. I. Simulations and Analysis for Astronomical Adaptive Optics. *arXiv e-prints*, page arXiv :2109.06386.

[Shack, 1971] Shack, R. V. (1971). Production and use of a lenticular hartmann screen. *J. Opt. Soc. Amer.*

[Shatokhina et al., 2014] Shatokhina, I., Obereder, A., and Ramlau, R. (2014). Fast algorithm for wavefront reconstruction in XAO/SCAO with pyramid wavefront sensor. In Marchetti, E., Close, L. M., and Vran, J.-P., editors, *Adaptive Optics Systems IV*, volume 9148 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 91480P.

[Taheri et al., 2020] Taheri, M., Janin-Potiron, P., Neichel, B., Andersen, D., Veran, J.-P., Sauvage, J.-F., Chambouleyron, V., El Hadi, K., and Fusco, T. (2020). Injecting pupil binary intensity map into the laboratory adaptive optics bench using phase-only LCoS-SLM device. In *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, volume 11448 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 114486G.

[Tatarskii, 1961] Tatarskii, V. I. (1961). *Wave Propagation in Turbulent Medium.*

[Texereau, 1951] Texereau, J. (1951). La construction d'un télescope amateur.

[Veran et al., 1997] Veran, J. P., Rigaut, F., Maitre, H., and Rouan, D. (1997). Estimation of the adaptive optics long-exposure point-spread function using control loop data. *Journal of the Optical Society of America*, 14(11) :3057–3069.

[Vérinaud, 2004] Vérinaud, C. (2004). On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor. *Optics Communications*, 233(1-3) :27–38.

[Vigan, A. et al., 2019] Vigan, A., N´Diaye, M., Dohlen, K., Sauvage, J.-F., Milli, J., Zins, G., Petit, C., Wahhaj, Z., Cantalloube, F., Caillat, A., Costille, A., Le Merrer, J., Carlotti, A., Beuzit, J.-L., and Mouillet, D. (2019). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a zernike phase-mask sensor - iii. on-sky validation in vlt/sphere. *A&A*, 629 :A11.

[von Kármán, 1948] von Kármán, T. (1948). Progress in the Statistical Theory of Turbulence. *Proceedings of the National Academy of Science*, 34(11) :530–539.

[Wizinowich et al., 2006] Wizinowich, P. L., Le Mignant, D., Bouchez, A. H., Campbell, R. D., Chin, J. C. Y., Contos, A. R., van Dam, M. A., Hartman, S. K., Johansson, E. M., Lafon, R. E., Lewis, H., Stomski, P. J., Summers, D. M., Brown, C. G., Danforth, P. M., Max, C. E., and Pennington, D. M. (2006). The W. M. Keck Observatory Laser Guide Star Adaptive Optics System : Overview. , 118(840) :297–309.

[Zamkotsian and Dohlen, 1999] Zamkotsian, F. and Dohlen, K. (1999). Surface Characterization of Micro-optical Components by Foucault s Knife-edge Method : The Case of a Micromirror Array. , 38(31) :6532–6539.

[Zehnder, 1891] Zehnder, L. (1891). Ein neuer interferenzrefraktor. *Book, Berlin : Springer.*

[Zernike, 1934a] Zernike, F. (1934a). Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method. , 94 :377–384.

[Zernike, 1934b] Zernike, v. F. (1934b). Beugungstheorie des schneidenver-fahrens und seiner verbesserten form, der phasenkontrastmethode. *Physica*, 1(7) :689–704.

A&A 644, A6 (2020)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202037836
© V. Chambouleyron et al. 2020

Astronomy & Astrophysics

Pyramid wavefront sensor optical gains compensation using a convolutional model

V. Chambouleyron[1,2], O. Fauvarque[1,3], P. Janin-Potiron[2,1], C. Correia[4], J-F. Sauvage[2,1], N. Schwartz[5], B. Neichel[1], and T. Fusco[2,1]

[1] Aix Marseille Univ, CNRS, CNES, LAM, Marseille, France
e-mail: vincent.chambouleyron@lam.fr
[2] ONERA The French Aerospace Laboratory, 92322 Châtillon, France
[3] IFREMER, Laboratoire Detection, Capteurs et Mesures (LDCM), Centre Bretagne, ZI de la Pointe du Diable, CS 10070, 29280 Plouzane, France
[4] W. M. Keck Observatory, 65 – 1120 Mamalahoa Hwy., Kamuela, HI 96743, USA
[5] UK Astronomy Technology Centre, Blackford Hill, Edinburgh EH9 3HJ, UK

Received 27 February 2020 / Accepted 26 May 2020

ABSTRACT

Context. Extremely large telescopes are overwhelmingly equipped with pyramid wavefront sensors (PyWFS) over the more widely used Shack–Hartmann wavefront sensor to perform their single-conjugate adaptive optics (SCAO) mode. The PyWFS, a sensor based on Fourier filtering, has proven to be highly successful in many astronomy applications. However, this sensor exhibits non-linear behaviours that lead to a reduction of the sensitivity of the instrument when working with non-zero residual wavefronts. This so-called optical gains (OG) effect, degrades the closed-loop performance of SCAO systems and prevents accurate correction of non-common path aberrations (NCPA).

Aims. In this paper, we aim to compute the OG using a fast and agile strategy to control PyWFS measurements in adaptive optics closed-loop systems.

Methods. Using a novel theoretical description of PyWFS, which is based on a convolutional model, we are able to analytically predict the behaviour of the PyWFS in closed-loop operation. This model enables us to explore the impact of residual wavefront errors on particular aspects such as sensitivity and associated OG. The proposed method relies on the knowledge of the residual wavefront statistics and enables automatic estimation of the current OG. End-to-end numerical simulations are used to validate our predictions and test the relevance of our approach.

Results. We demonstrate, using on non-invasive strategy, that our method provides an accurate estimation of the OG. The model itself only requires adaptive optics telemetry data to derive statistical information on atmospheric turbulence. Furthermore, we show that by only using an estimation of the current Fried parameter r_0 and the basic system-level characteristics, OGs can be estimated with an accuracy of less than 10%. Finally, we highlight the importance of OG estimation in the case of NCPA compensation. The proposed method is applied to the PyWFS. However, it remains valid for any wavefront sensor based on Fourier filtering subject from OG variations.

Key words. instrumentation: adaptive optics – atmospheric effects

1. Introduction

The pyramid wavefront sensor (PyWFS) is an optical device used to perform wavefront sensing, which was first proposed in 1996 (Ragazzoni 1996). Inspired by the Foucault knife test, the PyWFS is a pupil plane wavefront sensor (WFS) performing optical Fourier filtering thanks to a glass pyramid located in the focal plane (see Fig. 1). This pyramid splits the electromagnetic (EM) field into four beams, each producing four different filtered images of the entrance pupil. This filtering operation converts phase information at the entrance pupil into amplitude information at a pupil plane where a quadratic sensor is used to record the signal. The PyWFS usually includes an additional optical device called a modulation mirror. This mirror moves the point spread function (PSF) around the apex of the pyramid, which allows for an increase in the linearity range of the device at the expense of sensitivity.

The PyWFS displays higher sensitivity than the Shack–Hartmann wavefront sensor (SHWFS) and is therefore a key element for present and future adaptive optics (AO) systems. As an example, this device will be used to perform the single-conjugate adaptive optics (SCAO) mode of all European extremely large telescope (ELT) first light instruments (Neichel et al. 2016; Davies et al. 2018; Hippler et al. 2019). Unfortunately, the PyWFS exhibits non-linear behaviours and the relationship between the produced signal and the incoming wavefront is not as straightforward as with the SHWFS. The complexity and the limited knowledge on the nature of the PyWFS measurements has led to extensive studies of this device (Vérinaud 2004; Guyon 2005; Korkiakoski et al. 2007; Hutterer et al. 2019) in order to analytically describe its linear response. However, it is possible to describe the PyWFS as a convolutional system that can be fully characterised by the knowledge of its impulse response, as is widely done for many physical systems. The advantages of such a convolutional description are numerous: it allows for a fast numerical computation of the response of a sensor to a given input phase and gives the frequency-dependent sensitivity through the transfer

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

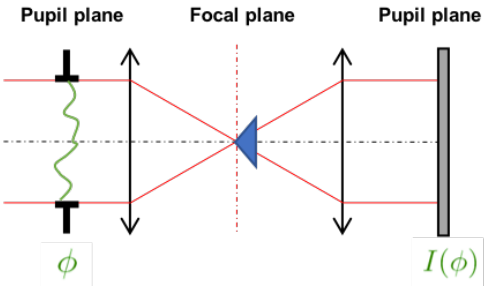


Fig. 1. Diagram of PyWFS, Fourier filtering WFS. A pyramidal mask is placed at a focal plane to achieve optical filtering. The output signal $I(\phi)$ shows a relationship to the entrance phase ϕ.

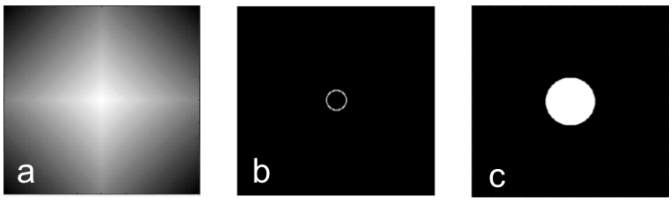


Fig. 2. *Panel a*: shape of the pyramid mask – arg(m). *Panel b*: modulation function – w. *Panel c*: pupil shape – $\mathbb{I}_p$.

function of the system. A first step in that direction was proposed by Hutterer et al. (2019), but the model suffers from strong approximations; for example, the PyWFS is described as two rooftop masks and some terms are neglected to simplify calculations. To the best of our knowledge, the most complete study to date of the PyWFS as a convolutional system has been proposed by Fauvarque et al. (2019). In this model, the PyWFS is simply described by its three main properties: the shape of the pyramid mask m, the modulation function w, and the entrance pupil geometry $\mathbb{I}_p$ (see Fig. 2). According to this description, the impulse response of the system is given by the following equation:

$$\mathbf{IR} = 2\mathbf{Im}(\bar{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w}\mathbb{I}_p)), \tag{1}$$

where **Im** is the imaginary part, $\widehat{\ }$ the Fourier transform operator, and $\star$ the convolution symbol.

Now that the PyWFS has captured the interest of AO scientists, one of its major limitations needs to be handled, namely its strong non-linear behaviour which leads to a spatial frequency-dependent loss of sensitivity during on-sky operations. This loss of sensitivity can be captured in a quantity called optical gains (OG) (Korkiakoski et al. 2008; Deo et al. 2019a). Tracking the OG during on-sky operations has therefore become one of the key priorities to fully control PyWFS measurements.

Optical gains originating from non-linear behaviours have already been recognised in other WFSs, such as the quad-cells SHWFS (Véran & Herriot 2000) or the Zernike WFS (Vigan et al. 2019). The main impact of OG in closed-loop operation is to introduce an error in the wavefront reconstruction. This error becomes predominant in the case of bad seeing conditions or when pointing at extended objects. There are new robust strategies available for on-the-fly optimisation of the loop gains to mitigate the reconstruction error impacted by OGs (Deo et al. 2019b). However, these techniques do not give direct access to the actual OG values (see Sect. 4). In fact, knowledge of OG is essential for non-common path aberrations (NCPA) correction, which is emerging as a critical step in wavefront control for systems based on PyWFS (Esposito et al. 2015). Knowledge of OG is also a key issue in PSF reconstruction, where accurate analysis of loop telemetry data is paramount. The objective of this paper is to present a new strategy based on a physical description of the PyWFS to quickly and accurately compute the OGs independently from temporal loop gains.

In Sect. 2, we present the definition of the OG and ways to better understand the physical nature of OG, which are generated by residual phases on the PyWFS. In Sect. 3, we show that it is possible to use the convolutional model to accurately compute OG, provided there is some statistical information on the shape of the residual phases. Finally, in the last section of this paper, we demonstrate the superiority of our method for NCPA compensation.

2. Definition of optical gains and application to PyWFS in presence of residual phases

2.1. Interaction matrix as a linear model of the PyWFS

The WFS can be described by a matrix that fully encodes the linear behaviour of the system. This so-called interaction matrix (IM) is computed through a calibration process by recording the slopes of the linear responses of the WFS to a set of incoming phases ϕ_i. Combined, these wavefronts represent the basis of the phase space we want to control. For each mode, the slopes of the linear response $\delta I_{\text{calib}}(\phi_i)$ (Fig. 3) can be computed through the following operation, often referred to as "push-pull":

$$\delta I_{\text{calib}}(\phi_i) = \frac{I_{\text{calib}}(a\phi_i) - I_{\text{calib}}(-a\phi_i)}{2a}, \tag{2}$$

where I_{calib} is the recorded intensity on the WFS detector. A reference signal, corresponding to a flat wavefront in the pupil plane, is also subtracted from this value. In this paper, we use the full-frame definition for the PyWFS signal, however this work can easily and straightforwardly be applied to the slope-like definition of the PyWFS measurements. In the previous equation, a represents the amplitude of the mode used for calibration. The quantity a should be as small as possible in order to stay within the linear regime of the sensor. But in reality, we want it to be large enough to ensure a satisfactory signal-to-noise ratio, while at the same time staying within the linearity regime. This maximisation of signal-to-noise ratio during calibration can be helped by using optimal calibration strategies, such as the Hadamard approach (Meimon et al. 2015). The IM computed during the calibration process IM_{calib} is then the concatenation the slopes recorded for all modes, that is

$$\text{IM}_{\text{calib}} = (\delta I_{\text{calib}}(\phi_1), \ldots, \delta I_{\text{calib}}(\phi_i), \ldots, \delta I_{\text{calib}}(\phi_N)). \tag{3}$$

In the well-known inverse problems framework, this calibration step is actually a way to compute the linear forward operator of our system, associating the incoming wavefront with pyramid measurements.

2.2. Optical gains: An offset between calibration regime and on-sky regime

The IM_{calib} is computed in a specific regime that we call the calibration regime. The calibration is usually done using a point-like source around a flat wavefront (no reference phase) and for a given modulation radius.

During operation, which we call the on-sky regime, the WFS differs inevitably from the calibration regime, if nothing else because we cannot reach the perfect diffraction limit of the telescope. Because of the non-linear nature of the PyWFS, this leads

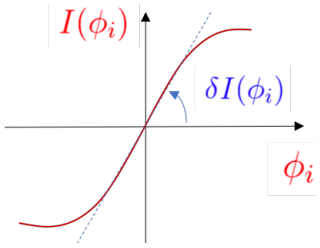


Fig. 3. Sketch of the PyWFS response curve for a given mode ϕ_i. The push-pull method around a null-phase consists in computing the slope of this curve for $a = 0$.

to a change in the behaviour of the sensor. It is possible to account for these non-linearities by considering the PyWFS as a sensor with a varying linear behaviour that depends on the current sensing regime. We therefore hypothesise that the behaviour of the sensor in the on-sky regime can be described by an IM that we call $\mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}}$. In that case, the linear behaviour has to be measured again for an accurate description of the direct problem, that is

$$\delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i) = \frac{I_{\mathrm{onSky}}(a\phi_i) - I_{\mathrm{onSky}}(-a\phi_i)}{2a}. \tag{4}$$

When the PyWFS is working around a non-null reference phase, we have the following relationship:

$$I_{\mathrm{onSky}}(a\phi_i) = I_{\mathrm{calib}}(a\phi_i + \phi_{\mathrm{res}}) \tag{5}$$

because of the non-linear behaviour of the PyWFS, we have $I_{\mathrm{calib}}(a\phi_i + \phi_{\mathrm{res}}) \neq I_{\mathrm{calib}}(a\phi_i) + I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{res}})$ and therefore

$$\begin{aligned}\delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i) &= \frac{I_{\mathrm{onSky}}(a\phi_i) - I_{\mathrm{onSky}}(-a\phi_i)}{2a} \\ &= \frac{I_{\mathrm{calib}}(a\phi_i + \phi_{\mathrm{res}}) - I_{\mathrm{calib}}(-a\phi_i + \phi_{\mathrm{res}})}{2a} \\ &\neq \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i),\end{aligned} \tag{6}$$

which naturally leads to offsets between $\mathrm{IM}_{\mathrm{calib}}$ and $\mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}}$.

We define the optical transfer matrix T_{opt} as the transfer matrix describing the offsets between the on-sky regime and the calibration regime. This matrix is a square matrix of size $N_{\mathrm{modes}} \times N_{\mathrm{modes}}$, where

$$\mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}} = \mathrm{IM}_{\mathrm{calib}} \cdot T_{\mathrm{opt}}. \tag{7}$$

To obtain the correct linear description of the sensor in a given sensing regime, we therefore need to adjust the IM computed during calibration by the optical transfer matrix.

From the equation above, we can write the exact definition of the optical transfer matrix as follows:

$$T_{\mathrm{opt}} = \mathrm{IM}^{\dagger}_{\mathrm{calib}} \cdot \mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}}. \tag{8}$$

2.3. Diagonal approximation and OG definition in the PyWFS measurement space

The diagonal approximation can strongly simplify the computation of T_{opt}. This approximation consists in assuming that T_{opt} is a diagonal matrix (Deo et al. 2019a), meaning there is no cross-talk between modes when we are switching from the calibration regime to the on-sky (or sensing) regime. In other words, the slope of the linear behaviour for each mode ϕ_i is increased or reduced by a scalar factor $G(\phi_i)$ called the modal OG.

In the case of the diagonal approximation, we can define the modal OG $G(\phi_i)$ without having to use the pseudo-inverse $\mathrm{IM}^{\dagger}_{\mathrm{calib}}$ (which depends on the condition number): we propose the use of the scalar product $\langle\cdot|\cdot\rangle$ defined in the measurement space to compare $\delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i)$ and $\delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i)$ for each mode ϕ_i as follows:

$$G(\phi_i) = \frac{\langle \delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i) | \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i) \rangle}{\langle \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i) | \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i) \rangle}. \tag{9}$$

The expression $\langle \delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i) | \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i) \rangle$ represents the projection of the measurement in the sensing regime onto the measurement in the calibration regime and $\langle \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i) | \delta I_{\mathrm{calib}}(\phi_i) \rangle$ is a normalisation term. The definition of OG given in this work differs slightly from those previously given in the literature (Korkiakoski et al. 2008; Deo et al. 2019a), and has the advantage of being independent of the reconstructor. This is a description in measurement space only. An equivalent formulation of Eq. (9) in terms of matrices is the following:

$$G_{\mathrm{opt}} = \frac{\mathrm{diag}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}} \cdot \mathrm{IM}_{\mathrm{calib}})}{\mathrm{diag}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{IM}_{\mathrm{calib}} \cdot \mathrm{IM}_{\mathrm{calib}})}, \tag{10}$$

where G_{opt} is a vector containing all the $G(\phi_i)$ for $i \in [1, N_{\mathrm{modes}}]$.

2.4. Impact of residual phases on the PyWFS impulse response

The offset experienced by $\mathrm{IM}_{\mathrm{calib}}$ changes at each measurement because ϕ_{res} is a time-varying quantity. That is to say that $\mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}}$ is changing at every iteration, depending on the content of ϕ_{res}. Although it seems hard to determine the state of $\mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}}$ at each instant, we can find a way to compute the averaged state of the sensing regime $\langle \mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}} \rangle_t$, which gathers $\langle \delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i) \rangle_t$ for each mode. This averaged state is written as

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{IM}_{\mathrm{onSky}} \rangle_t = (&\langle \delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_1) \rangle_t, \ldots, \\ &\langle \delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_i) \rangle_t, \ldots, \langle \delta I_{\mathrm{onSky}}(\phi_N) \rangle_t).\end{aligned} \tag{11}$$

In this regard, we rely on the convolutional formalism of the PyWFS proposed by Fauvarque et al. (2019). Within the framework of this model, it is possible to compute an analytic function to take into account the impact of residual phases on PyWFS measurements. The sensing regime is then described by a PyWFS for which the modulation function (see Eq. (1)) is changed according to this formula:

$$w \leftarrow w \star \widehat{e^{-\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\phi_{\mathrm{res}}}}}, \tag{12}$$

where $\mathrm{D}_{\phi_{\mathrm{res}}}$ is the residual phase structure function. This equation provides a fundamental insight into PyWFS measurements in the presence of residual phases. It was well-known that residual phases act as an extra modulation that lowers the sensitivity of the pyramid. We are now able to quantify this loss: the impact depends on residual phases statistics through the structure function, and therefore through the power spectral density (PSD). It is then possible to define its new impulse response in the averaged sensing regime assuming isotropy and stationarity of the residual phases as follows:

$$\mathbf{IR}_{\mathbf{onSky}} = 2\mathbf{Im}(\widehat{\bar{m}}(\widehat{m} \star \widehat{w}\mathbb{I}_{\mathrm{p}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{D}_{\phi_{\mathrm{res}}}})). \tag{13}$$

We note that the modulation function is the only quantity affected here. This means that the impact of residual phases can be described as a collection of incoherent tip-tilt offsets

during one measurement cycle. Changing from an apparently coherent offset to an incoherent offset comes from the time averaging operation. This is very well understood in the image formation field through the derivation of the atmospheric transfer function Roddier (1981). By averaging over time, we can derive an analytic formulation for the long-exposure seeing limited PSF, which cannot be fully described using a coherent phase aberration in the pupil plane.

In this section, we presented a new measurement space based definition for the OG. We also explained how they naturally emerge from PyWFS non-linearities when working with offsets between calibration and sensing regimes. In the following part, we propose a new method based on the convolutional model to perform a fast and accurate computation of the OG.

3. New strategy to compute PyWFS modal optical gains through the convolutive model

3.1. Convolutional formalism: A path to optical gains computation

In case of OG introduced by residual phase, the diagonal approximation ensures that the knowledge of the diagonal elements of G_{opt} is sufficient to compute IM_{onSky}. The expression of $G(\phi_i)$ given Eq. (9) can be rewritten within the convolutional model using the impulse responses of the calibration regime and the sensing regime as follows:

$$G_{\mathbf{conv}}(\phi_i) = \frac{\langle \mathbf{IR_{onSky}} \star \phi_i | \mathbf{IR_{calib}} \star \phi_i \rangle}{\langle \mathbf{IR_{calib}} \star \phi_i | \mathbf{IR_{calib}} \star \phi_i \rangle}. \tag{14}$$

We now have the means to compute the modal OG by knowing the following system parameters: the shape of the mask m, the modulation function w, the shape of the pupil $\mathbb{I}_{\text{p}}$, and the residual phase structure function $\text{D}_{\phi_{\text{res}}}$. In order to identify whether the convolutional model used here is sufficiently accurate to provide a good estimation of the modal OG (i.e. whether $G_{\mathbf{conv}}(\phi_i)$ is a good estimate of $G(\phi_i)$ or not), we compared the predictions of the model with end-to-end simulations. The results of this study are presented in the next section.

3.2. Convolutional model versus end-to-end simulations

The end-to-end simulations were performed via the OOMAO MATLAB toolbox (Conan & Correia 2014), considering a 8 m class telescope. The resolution in the pupil diameter is 90 pixels across. We used a Karhunen-Loève basis composed of 400 modes to compute all our interaction matrices and OG. The wavefront sensing was carried out in the visible ($\lambda = 550$ nm).

Sensitivity curves

We used the convolutional model to compute the well-known sensitivity curves of the PyWFS where the sensor behaves as a slope sensor for the frequencies lower than the modulation radius and as a phase sensor for the frequency above. For the chosen system configuration, we present results for two different modulation radii in Fig. 4. For each mode, the sensitivity is given by

$$s(\phi_i) = \|\delta I_{\text{calib}}(\phi_i)\|_2 = \sqrt{\langle \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) | \delta I_{\text{calib}}(\phi_i) \rangle}. \tag{15}$$

We note a small offset between the model and the end-to-end simulations for the low-order modes. This can be explained by the hypothesis of the sliding pupil used in the derivation of the convolutional model. This issue was presented in Fauvarque et al. (2019).

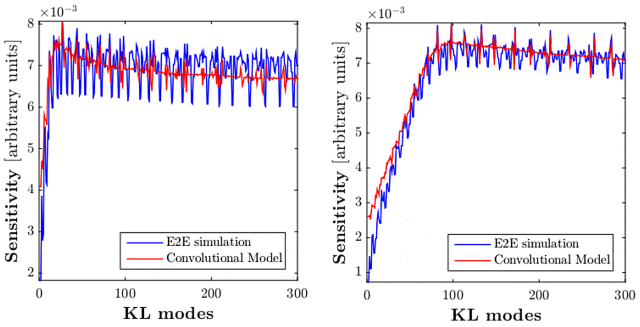


Fig. 4. Well-known pyramid sensitivity curves. *Left*: modulation radius $r_{\text{mod}} = 2\lambda/D$. *Right*: modulation radius $r_{\text{mod}} = 5\lambda/D$.

Modal optical gains

We carried out the study by computing modal OG through end-to-end simulations in multiple system configurations. We then compared those OG results to those predicted through the convolutional model. We suppose that we know the turbulence statistics. In other words, we have access to the PSD or the structure function of the residual phases. We focus on how to get this data in a practical way later in this paper.

End-to-end simulations. We proceeded in the following way: Given a PSD, we generated 20 decorrelated phases. We then computed the interaction matrices IM_{onSky} around each of these phases (using a push-pull method) and we used Eq. (10) to compute the OG. The averaged values for each different PSD chosen are presented Figs. 5 and 6; the shaded areas represent the maximum and minimum values found for the OG for 20 phase realisations.

Convolutional model. We used the same PSD used for the end-to-end simulations to compute the $\mathbf{IR_{onSky}}$ Eq. (13) and we retrieved the OG thanks to Eq. (14).

We can define two main PSD configurations around which we can compute the OG

- Full turbulence OG: in this case, the PyWFS works in open loop and wavefront sensing is done on a seeing-limited EM field at the apex of the pyramid. In the vast majority of systems, this is the case for the first loop iteration and before the loop is closed. After a few closed-loop iterations, the EM field seen by the pyramid is no longer seeing-limited because we are in closed-loop operation. We then reach the second configuration described below. Tracking and compensating the OG in the full turbulence can be interesting when the system has convergence issues under strong turbulence or when we want to close the loop using low modulation radii. The results of the comparison for this configuration are given Fig. 5: we note the strong agreement between the convolutional model and the end-to-end simulations.
- Residual phases OG: the AO loop is closed and the OG are introduced by the imperfect wavefront correction. This case is the most interesting because it can allow us to enhance the closed-loop performance. For this setting, the results are given Fig. 6: we still have a good match between our model and the end-to-end simulations.

By testing our model for various system configurations (multiple modulation radii, multiple r_0, and open- or closed-loop residual

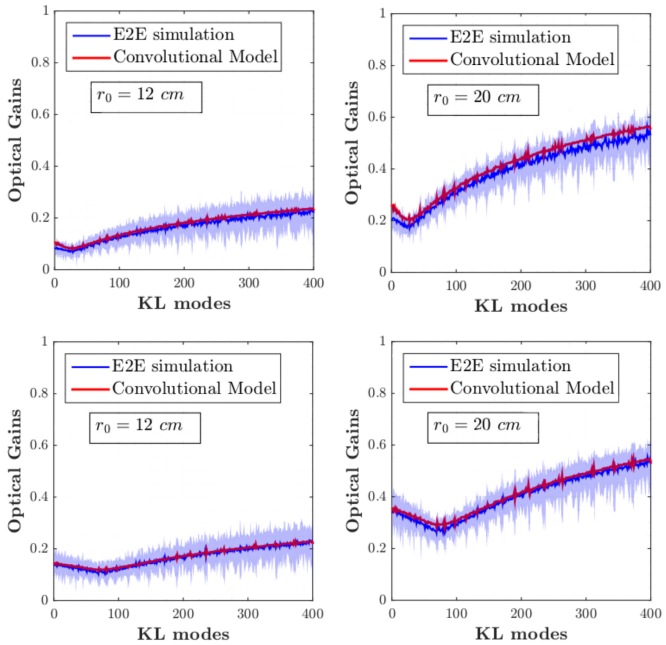


Fig. 5. Computed OG on full turbulence screens for multiple r_0. The convolutional model fits well with the OG computed by E2E simulations. The shaded area represents the maximum and minimum values found for the OG for 20 phase realisations. *Top*: $r_{\text{mod}} = 3\lambda/D$. *Bottom*: $r_{\text{mod}} = 5\lambda/D$.

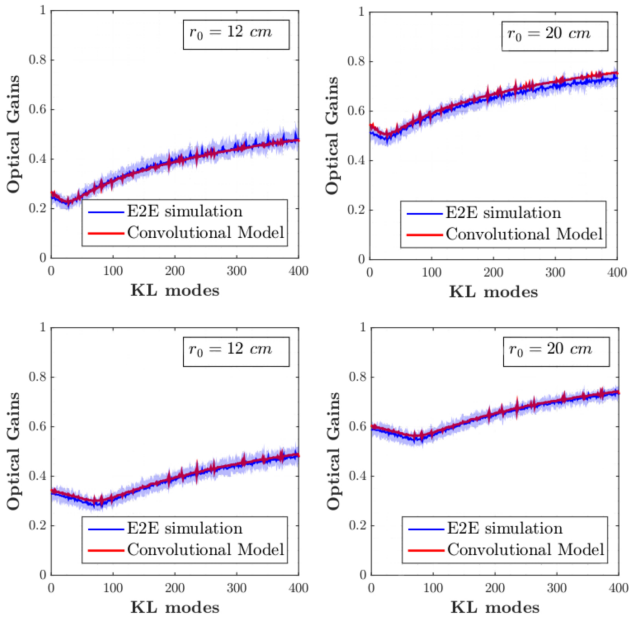


Fig. 6. Closed-loop residual phases OG. Number of actuators in the pupil: 20. *Top*: $r_{\text{mod}} = 3\lambda/D$. *Bottom*: $r_{\text{mod}} = 5\lambda/D$.

phases) we demonstrated that the convolutional model can be used to predict the OG with sufficient accuracy to remain in their statistical variability range. It therefore provides a fast and agile way to track OG, provided we have knowledge of the residual PSD. In the next section, we hence focus on how to get this information in a practical way.

3.3. Obtaining the residual PSD

We propose to obtain the residual PSD from the telemetry data. It is a non-invasive method that is already deeply investigated in the PSF reconstruction field (Beltramo-Martin et al. 2019). We note that the residual phase PSD can be split into two parts (Rigaut et al. 1998): the corrected frequencies (area A Fig. 7) and the uncorrected frequencies (area B Fig. 7). These two areas are separated by a deformable mirror (DM) cut-off frequency, which depends on the position and number of actuators. The PSD estimation process works in the following two steps.

(1) By recording the integrated commands sent to the DM, we can assess the shape of the turbulence. In other words, we are able to estimate the Fried parameter r_0 and therefore have an estimation of the shape of the PSD outside the correction zone. The estimation of r_0 thanks to telemetry data is usually not perfectly accurate and the Fried parameter is often overestimated. However, it has been shown that an AO system can be characterised well to correct for this offset (Fétick et al. 2019).

(2) Recording the residual commands provide information on the residual PSD inside the correction area. This method is not ideal, because all the commands sent to the DM are already tainted by the OG problem. It is possible to overcome this issue using models describing the analytical PSD inside the correction area, provided a simple set of parameters describing the system (Rigaut et al. 1998; Correia et al. 2020).

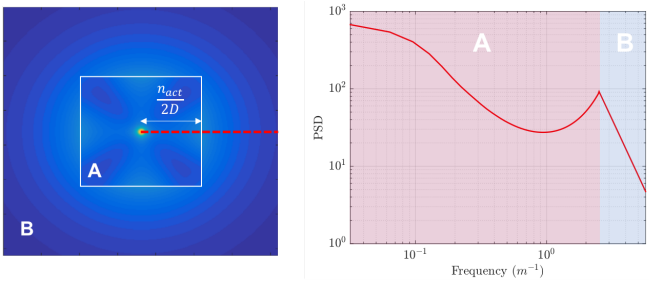


Fig. 7. *Left*: example of a residual PSD for a 40×40 actuators system with a Cartesian geometry. In the frequency space, the correction zone is the area labelled A: it is a square with each side of $n_{\text{act}} = 40/D$ in m^{-1}. The B area represents the space of uncorrected frequencies. *Right*: radial cut of the PSD in log scale.

The next step is to understand what level of accuracy is required when computing the residual phase PSD using telemetry data combined with an analytical model of our system. Using the convolutional model, we propose a brief study to analyse the contribution of the different parts of residual PSD on the OG morphology. As we mentioned earlier, we can split the contribution of the residual phases into two parts: the fitting PSD and the PSD inside the correction zone. It is therefore interesting to study the OG for each of these contributors.

For that purpose we chose two system configurations: an 8 m telescope given a $r_0 = 15$ cm with either 20 actuators (NAOS-like configuration on the VLT) or 40 actuators within the same pupil diameter (SPHERE-like configuration on the VLT: Beuzit et al. 2019). We used the typical residual PSD of these systems to compute the OG thanks to the convolutional model. In Fig. 8, we show the results for which the OG are computed for the full PSD, for the fitting part of the PSD and for the PSD inside the correction area only. For these chosen configurations, it is clear that OG gains are dominated by the energy which lies in the fitting PSD, even for the high-contrast configuration (40×40 actuators in the pupil) where the residual energy is equally distributed between the corrected and the uncorrected

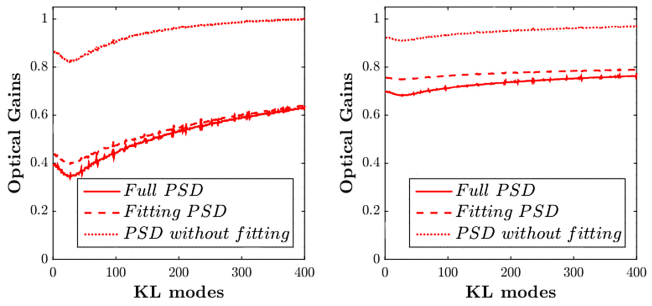


Fig. 8. Contribution of the corrected and uncorrected part of a closed-loop PSD (r_0 = 15 cm) to the OG. *Left*: for 20 actuators in the pupil – NAOS configuration. *Right*: for 40 actuators in the pupil – SPHERE configuration.

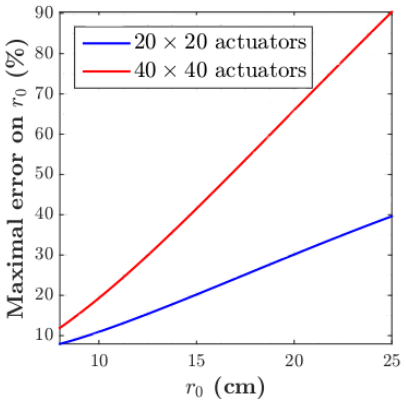


Fig. 9. Maximum acceptable error (in percent) on the estimation of r_0 to ensure an error on the computed OG under ±10% for two system configurations.

zone (Fig. 8). Therefore the previous statement often tends to be verified (all the more because we are considering residual phases at the wavefront sensing wavelengths). Yet, it is clear that for a very noisy AO system, the fitting error could be overcome by the error inside the correction zone. In that case, the error on the OG computation is constrained by the estimation of the residual PSD inside the correction zone. Nevertheless, we can conclude that in the vast majority of the observations and for present and future AO systems (the E-ELT will also be in a fitting-error-limited AO configuration), the OG morphology is mainly constrained by the Fried parameter r_0, and that the knowledge of this parameter only would suffice to derive a sufficiently accurate model of the OG. Thus, estimating r_0 during closed-loop operation is a crucial step for PyWFS OG tracking. To assess the accuracy on r_0 that needs to reached, we probe what impact an error in the estimation of r_0 has on the computation of OG in Fig. 9. In this plot, and for both configurations studied, we present the maximal acceptable error on the estimation of r_0 to maintain an error on computed OG below ±10%. To retrieve OG with an error below ±10%, we see that we need to be more accurate for bad seeing conditions and for AO systems with less DM actuators in the pupil. Overall, the values presented in this figure show that we do not need an incredibly high precision on the Fried parameter to accurately compute the OG using the presented method.

4. Applying the convolutional model to NCPA correction

The aim of this section is to demonstrate the importance of estimating OGs for the correct control of the AO system by focussing on the specific issue of NCPA correction. The NCPA appear in AO systems when the aberrations between the WFS path and science path are different. In that case, if nothing is done, the AO loop converges towards a flat wavefront on the WFS and the NCPA remain uncorrected on the science camera. This effect can be mitigated by using a non-null wavefront reference target on the WFS, corresponding to the NCPA (Fig. 10). To do so, we propose to proceed with the following three calibration steps:

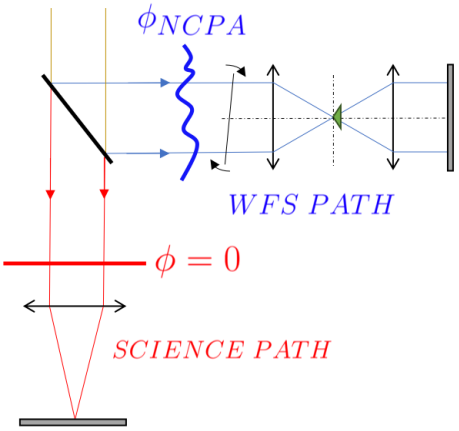


Fig. 10. Schematic view of NCPA correction in an AO system.

1. Determination of the NCPA wavefront (using techniques such as phase diversity, for instance Blanc et al. 2003).
2. Computation of the $\mathrm{IM}_{\mathrm{calib}}$ around the NCPA wavefront. Because NCPA are not a zero-mean stationary wavefront, they cannot be described by the convolutional model through a structure function as is stated Eq. (13). Furthermore, the diagonal approximation (Sect. 2.3) is not necessarily verified in the case of NCPA. Hence, it is better to calibrate the WFS as close as possible to its working point: the NCPA wavefront.
3. Computation of the WFS response to the NCPA wavefront $I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{NCPA}})$.

Subsequently, the reference WFS intensities correspond to the NCPA. Given a residual phase ϕ_{res}, the signal to be reconstructed is then $I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{res}}) - I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{NCPA}})$. However, using this strategy for PyWFS in presence of residual phase OG is unfortunately problematic and can lead to critical loop instabilities.

4.1. NCPA *catastrophe*

For a WFS working around its reference position, the signal to be reconstructed is $I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{res}})-I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{NCPA}})$. In the case of a classical integral controller, the commands sent to the DM at each frame t is written as

$$c(t) = c(t-1) - G_{\mathrm{temp}} \cdot \mathrm{IM}^{\dagger}_{\mathrm{calib}} \cdot [I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{res}}(t)) - I_{\mathrm{calib}}(\phi_{\mathrm{NCPA}})], \quad (16)$$

where G_{temp} is a diagonal matrix, ideally constituted of the optimised temporal modal gains of the loop. This equation works for a perfectly linear WFS. As previously presented in this paper, the PyWFS exhibits OG. Therefore, the on-sky PyWFS measurements are written as

$$\mathrm{PyWFS} : \phi \rightarrow I_{\mathrm{onSky}}(\phi); \quad (17)$$

thus, the Eq. (16) becomes

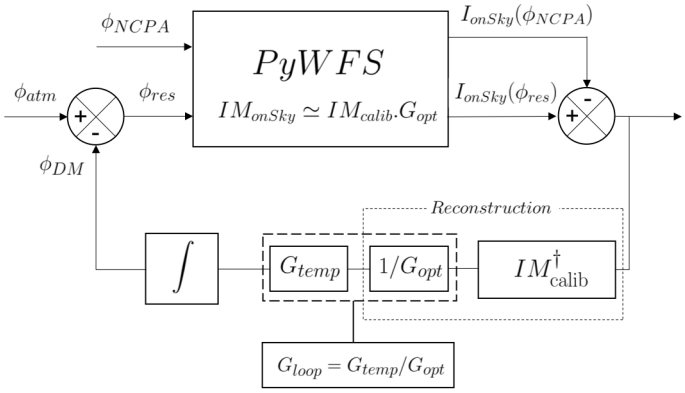


Fig. 11. Schematic view of the AO closed loop in presence of compensated NCPA. The feedback loop can be otpimized by computing the quantity $G_{\rm loop}$ without disentangling $G_{\rm temp}$ from $G_{\rm opt}$. However, to properly compensate for the NCPA in the forward loop, the value $G_{\rm opt}$ is needed.

$$c(t) = c(t-1) - G_{\rm temp} \cdot {\rm IM}^{\dagger}_{\rm onSky} \cdot [I_{\rm onSky}(\phi_{\rm res}(t)) - I_{\rm onSky}(\phi_{\rm NCPA})], \quad (18)$$

which gives in the OG diagonal approximation

$$c(t) = c(t-1) - G_{\rm temp} \cdot \frac{{\rm IM}^{\dagger}_{\rm calib}}{G_{\rm opt}} \cdot [I_{\rm onSky}(\phi_{\rm res}(t)) - I_{\rm onSky}(\phi_{\rm NCPA})], \quad (19)$$

where $G_{\rm loop} = G_{\rm temp}/G_{\rm opt}$ is therefore a diagonal matrix used to apply different gains on each of the controlled modes. As we mentioned in the introduction, very efficient methods are available that can optimise this matrix (Deo et al. 2019b), but without differentiating between $G_{\rm temp}$ and $G_{\rm opt}$. However, it is important to note in this equation that the intensity to be removed is $I_{\rm onSky}(\phi_{\rm NCPA})$ and not $I_{\rm calib}(\phi_{\rm NCPA})$ (see Fig. 11). These two quantities are linked through the following equation:

$$\begin{aligned} I_{\rm onSky}(\phi_{\rm NCPA}) &= {\rm IM}_{\rm onSky} \cdot \phi_{\rm NCPA} \\ I_{\rm onSky}(\phi_{\rm NCPA}) &= {\rm IM}_{\rm calib} \cdot G_{\rm opt} \cdot {\rm IM}^{\dagger}_{\rm calib} \cdot I_{\rm calib}(\phi_{\rm NCPA}). \end{aligned} \quad (20)$$

We see from this equation that we need to get $G_{\rm opt}$ to be able to properly compensate for the NCPA.

We wondered what would happens if we were just to use $I_{\rm calib}(\phi_{\rm NCPA})$ in Eq. (20). To answer this question, we performed end-to-end simulations with the same parameters as before, that is to say for an 8 m telescope with 400 controlled KL modes and a Fried parameter $r_0 = 15$ cm. We chose the H band to be the wavelength of the science path. Because NCPA are usually composed low-order modes, we chose the following arbitrary distribution for the NCPA: a combination of the modes KL5 to KL25, following a f^{-2} law (see Fig. 12).

We ran several closed-loop simulations while increasing the NCPA amplitudes, and we recorded the Strehl ratio over 16 s of closed-loop integration. The results are given Fig. 15. The dashed line shows the impact of increasing NCPA in the case in which we did not try to compensate for them. When we tried to compensate the NCPA by applying reference intensities on the PyWFS without compensating for the OG, we observed a degradation of performance (Fig. 13). This is not surprising: when subtracting the NCPA reference intensities to the PyWFS measurements, the mode $\phi_{{\rm NCPA},i}$ is reconstructed as

$$\widetilde{\phi}_{{\rm NCPA},i} = {\rm IM}^{\dagger}_{\rm onSky} \cdot I_{\rm calib}(\phi_{{\rm NCPA},i}) = \frac{\phi_{{\rm NCPA},i}}{g_{\rm opt}(\phi_{{\rm NCPA},i})}, \quad (21)$$

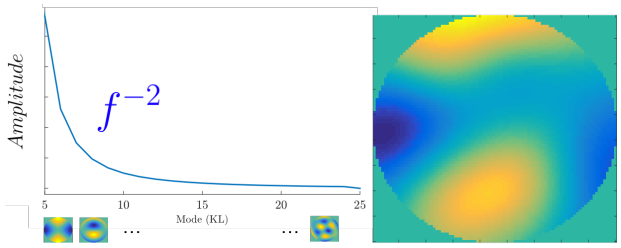


Fig. 12. NCPA distribution over a modal basis. NCPA phase chosen for our simulations is a linear combination of 20 low-order KL modes following a f^{-2} law in rms amplitude.

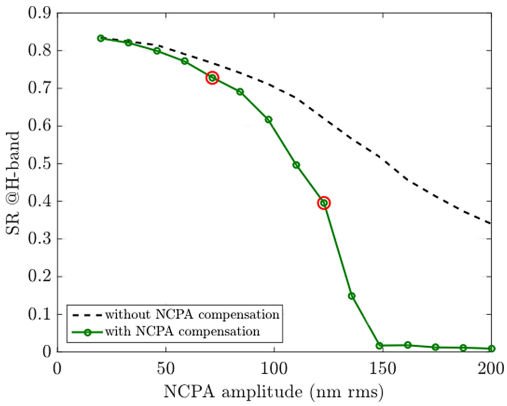


Fig. 13. Strehl ratio for increasing NCPA amplitude, in the case of no NCPA compensation and of no OG compensation on the NCPA reference intensities. For NCPA amplitudes that are too while when the reference intensities are not updated with OG, the loop diverges, which we call the NCPA catastrophe. The static aberrations of the two configurations denoted by a red circle are plotted Fig. 14.

where $g_{\rm opt}(\phi_{{\rm NCPA},i}) < 1$ is the OG associated with the mode $\phi_{{\rm NCPA},i}$, and so we have

$$\widetilde{\phi}_{{\rm NCPA},i} > \phi_{{\rm NCPA},i}. \quad (22)$$

This emphasises the fact that if we do not compensate for OG, the reference intensities produce an excess of NCPA proportional to the OG in the loop. This effect is shown Fig. 14 for two cases highlighted by red circles Fig. 15.

When the amplitude of the NCPA is sufficiently high, producing too much NCPA creates additional OG that adds to those already generated by the residual phases. By lowering the OG, this leads to an increase of NCPA correction according to Eq. (22). The increase in NCPA correction significantly changes the OG and leads to ever higher NCPA correction levels. This makes the loop diverge, which we label the NCPA catastrophe. We can clearly see this effect in our simulations starting from 130 nm rms and above of NCPA (Fig. 15).

4.2. NCPA *compensation using the convolutional model*

If we assume the residual phase PSD a known quantity, we can use the convolutional model to compute the OG and to update the reference intensities according to Eq. (20). By doing so, we obtain the upper curve in Fig. 15. Performance is significantly improved, but there is still a built up of static aberrations during the closed-loop operation, preventing the system from maintaining its maximum Strehl ratio irrespective of NCPA amplitude (which would correspond to a flat curve Fig. 15). This can be explained by two phenomena:

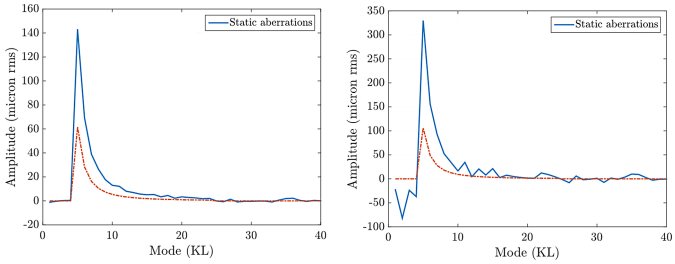


Fig. 14. Static aberrations in the AO loop in the case of no OG compensation on the NCPA reference intensities. *Left*: for NCPA of 70 nm rms. *Right*: for NCPA of 120 nm rms.

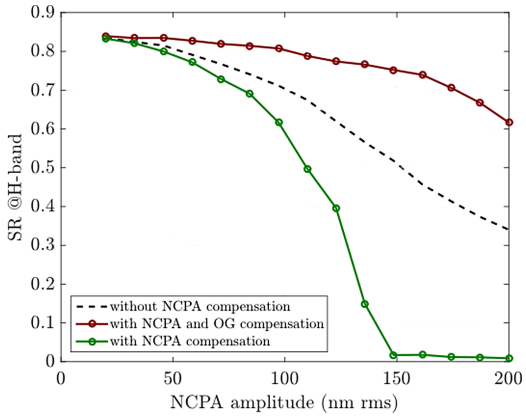


Fig. 15. Strehl ratio for increasing NCPA amplitude in the case of OG compensation on the NCPA reference intensities, compared to the previous cases presented before. The performance is increased and the NCPA catastrophe avoided. Nonetheless, a noticeable impact on performance is visible as the NCPA amplitude is increased.

- The way the OG has been defined corresponds to an average state of the system (Eq. (11)). At each frame, the current OG can be higher or lower than the averaged value, introducing an error on the NCPA reference intensities. The ideal strategy would be to have the means to estimate the OG at each frame.
- The convolutional model characterises the offset between PyWFS measurements when the calibrating around a null-phase and when in the presence of residual phases. But it does not take in account the presence of NCPA in the shape of the computed OG. Therefore, with higher NCPA amplitudes the error on the OG computed with the convolutional model is increased. This explains why performance is decreased with increasing NCPA amplitudes in Fig. 15. Further analysis of this problem is beyond the scope of this paper, but we are currently working on a solution that requires further analytical developments on the convolutional model.

This section highlights the importance of estimating the PyWFS OG for NCPA compensation in closed-loop operation. The OG estimation based on the convolutional model has proven to be efficient for typical NCPA amplitudes (below 100 nm rms) encountered in AO systems. However, handling stronger NCPA amplitudes will require further analytical developments to take into account the modification of OG by the NCPA themselves.

5. Conclusions

The work presented in this paper offers a new method for computing the PyWFS OG. Our approach relies on a physical description of the WFS through a convolutional model, which allows us to analytically compute the impact of residual phases on PyWFS measurements. We have demonstrated the accuracy of this method by comparing results to end-to-end simulations for multiple system configurations.

The presented method requires knowledge of the residual phase statistical characteristics to compute the OG. We presented a practical implementation to estimate residual phase statistics using AO telemetry data in a similar to what is done for PSF reconstruction. We showed that the most important aspect is the knowledge of the turbulence strength through the Fried parameter r_0. We also demonstrated that from this r_0 parameter alone, a good approximation of the OG could be achieved. In other words, any AO system using a pyramid WFS and capable of providing an on-line estimate of r_0 could benefit from estimating the OG using the method we presented in this paper.

Finally, we demonstrated that OG play a crucial part when trying to compensate NCPA with a PyWFS. To avoid what we have labelled the NCPA catastrophe, proper handling of the OG is mandatory. We proposed a way to mitigate the impact of OG on NCPA by computing them using the method we presented in this paper. This work can also be applied to any type of WFS based on Fourier filtering and provides a new insight into the understanding of OG in Fourier-filtering WFS and how to manage these gains.

Acknowledgements. This document has been prepared as part of the activities of OPTICON H2020 (2017–2020) Work Package 1 (Calibration and test tools for AO assisted E-ELT instruments). OPTICON is supported by the Horizon 2020 Framework Programme of the European Commission's (Grant number 730890). This work was supported by the Action Spécifique Haute Résolution Angulaire (ASHRA) of CNRS/INSU co-funded by CNES. This work also benefited from the support of the WOLF project ANR-18-CE31-0018 of the French National Research Agency (ANR).

References

Beltramo-Martin, O., Correia, C. M., Ragland, S., et al. 2019, MNRAS, 487, 5450
Beuzit, J. L., Vigan, A., Mouillet, D., et al. 2019, A&A, 631, A155
Blanc, A., Fusco, T., Hartung, M., Mugnier, L., & Rousset, G. 2003, A&A, 399, 373
Conan, R., & Correia, C. 2014, Proc. SPIE – Int. Soc. Opt. Eng., 9148, 91486C
Correia, C. M., Fauvarque, O., Bond, C. Z., et al. 2020, MNRAS, 495, 4380
Davies, R., Alves, J., Clénet, Y., et al. 2018, Proc. SPIE, 10702, 107021S
Deo, V., Gendron, É., Rousset, G., et al. 2019a, A&A, 629, A107
Deo, V., Rozel, M., Bertrou-Cantou, A., et al. 2019b, Proc. AO4ELT6
Esposito, S., Pinna, E., Puglisi, A., et al. 2015, in Non Common Path Aberration Correction with Non Linear WFSs, Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes 4 – Conference Proceedings
Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., et al. 2019, J. Opt. Soc. Am. A, 36, 1241
Fétick, R. J. L., Fusco, T., Neichel, B., et al. 2019, A&A, 628, A99
Guyon, O. 2005, ApJ, 629, 592
Hippler, S., Feldt, M., Bertram, T., et al. 2019, Exp. Astron., 47, 65
Hutterer, V., Ramlau, R., & Shatokhina, I. 2019, Inv. Prob., 35, 045007
Korkiakoski, V., Verinaud, C., Louarn, M., & Conan, R. 2007, Appl. Opt., 46, 6176
Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Louarn, M. L. 2008, in Adaptive Optics Systems, eds. N. Hubin, C. E. Max, & P. L. Wizinowich, International Society for Optics and Photonics (SPIE), 7015, 1422
Meimon, S., Petit, C., & Fusco, T. 2015, Opt. Express, 23, 27134
Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., et al. 2016, Adapt. Opt. Syst. V, 9909, 990909
Ragazzoni, R. 1996, J. Mod. Opt., 43, 289
Rigaut, F. J., Veran, J.-P., & Lai, O. 1998, in Adaptive Optical System Technologies, eds. D. Bonaccini, & R. K. Tyson, International Society for Optics and Photonics (SPIE), 3353, 1038
Roddier, F. 1981, Prog. Opt., 19, 281
Véran, J.-P., & Herriot, G. 2000, J. Opt. Soc. Am. A, 17, 1430
Vérinaud, C. 2004, Opt. Commun., 233, 27
Vigan, A., N'Diaye, M., Dohlen, K., et al. 2019, A&A, 629, A11

A&A 649, A70 (2021)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202140354
© V. Chambouleyron et al. 2021

Astronomy & Astrophysics

Focal-plane-assisted pyramid wavefront sensor: Enabling frame-by-frame optical gain tracking

V. Chambouleyron[1,2], O. Fauvarque[3], J.-F. Sauvage[2,1], B. Neichel[1], and T. Fusco[2,1]

[1] Aix Marseille Univ, CNRS, CNES, LAM, Marseille, France
e-mail: vincent.chambouleyron@lam.fr
[2] DOTA, ONERA, Université Paris Saclay, 91123 Palaiseau, France
[3] IFREMER, Laboratoire Detection, Capteurs et Mesures (LDCM), Centre Bretagne, ZI de la Pointe du Diable, CS 10070, 29280 Plouzane, France

Received 15 January 2021 / Accepted 1 March 2021

ABSTRACT

Aims. With its high sensitivity, the pyramid wavefront sensor (PyWFS) is becoming an advantageous sensor for astronomical adaptive optics (AO) systems. However, this sensor exhibits significant non-linear behaviours leading to challenging AO control issues.
Methods. In order to mitigate these effects, we propose to use in addition to the classical pyramid sensor a focal plane image combined with a convolutive description of the sensor to fast track the PyWFS non-linearities, the so-called optical gains (OG).
Results. We show that this additional focal plane imaging path only requires a small fraction of the total flux while representing a robust solution to estimating the PyWFS OG. Finally, we demonstrate the gain that our method brings with specific examples of bootstrapping and handling non-common path aberrations.

Key words. instrumentation: adaptive optics – telescopes

1. Introduction

The pyramid wavefront sensor (PyWFS), which was proposed for the first time in 1996 by Ragazzoni (1996), is an optical device used to perform wavefront sensing. Inspired by the Foucault knife test, the PyWFS is a pupil plane wavefront sensor performing optical Fourier filtering with a glass pyramid with four sides that is located at the focal plane. The purpose of this glass pyramid is to split the electromagnetic (EM) field into four beams producing four different filtered images of the entrance pupil. This filtering operation allows the conversion of phase information at the entrance pupil into amplitude at the pupil plane, where a quadratic sensor is used to record the signal (Vérinaud 2004, Guyon 2005). Recently, the PyWFS has gained the interest of the astronomical community because it offers a higher sensitivity than the classical Shack-Hartmann wave-front sensor (WFS) that is commonly used in adaptive optics (AO) systems (Esposito & Riccardi 2001). However, the PyWFS exhibits non-linearities that prevents a simple relation between the incoming phase and the measurements, leading to control issues in the AO loop. Previous studies (Korkiakoski et al. 2008, Deo et al. 2019a) have demonstrated that one of the most striking effect of this undesirable behaviour is a time-averaged frequency-dependent loss of sensitivity when the PyWFS is working in presence of non-zero phase. This detrimental effect can be mitigated by providing an estimation of the so-called optical gains (OG), which are a set of scalar values encoding the loss of sensitivity with respect to each component of the modal basis. The goal of this paper is to present a novel way of measuring the OG. In the first section we introduce the concept of the linear parameter-varying system (LPVS) to describe the PyWFS, which opens the possibility of estimating the OG frame by frame instead of considering a time-averaged quantity. In the second section, we present a practical implementation of the method, enabling frame-by-frame OG tracking. Finally, we illustrate this OG tracking strategy in the context of closed-loop bootstrapping and handling non-common path aberrations (NCPAs).

2. PyWFS seen as a linear parameter-varying system

2.1. PyWFS non-linear behaviour and optical gains

In the following, we call s the output of the PyWFS. This output can be defined in different ways. The two main definitions are called 'full frame' or 'slope maps'. In the first case, s is obtained by recording the full image of the WFS camera, for which a reference image corresponding to a reference phase has been removed (Fauvarque et al. 2016). In the second case, the WFS image is processed to reduce the useful information to two pupil maps usually called 'slope maps' (Ragazzoni 1996). The work presented here remains valid for full-frame or slope-map computation, and we decided to use the full-frame definition throughout.

When described with a linear model, the PyWFS outputs are linked with the incoming phase ϕ through an interaction matrix called M. This interaction matrix can be built with a calibration process that consists of sending a set of phase maps (usually a modal or a zonal basis) to the WFS with the deformable mirror (DM) and then record the derivative $\delta s(\phi_i)$ of the PyWFS response for each component of the basis (Fig.1). This operation is most commonly performed with the so-called push-pull method, consisting of successively sending each mode with a positive and then negative amplitude a to compute the slope of

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

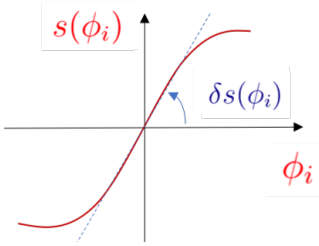


Fig. 1. Sketch of the PyWFS response curve for a given mode ϕ_i. The push-pull method around a null-phase consists of computing the slope of this curve at $\phi_i = 0$.

the linear response,

$$\delta s(\phi_i) = \frac{s(a\phi_i) - s(-a\phi_i)}{2a}. \quad (1)$$

The interaction matrix (also called Jacobian matrix) is then the collection of the slopes recorded for all modes,

$$M = (\delta s(\phi_1), \ldots, \delta s(\phi_i), \ldots, \delta s(\phi_N)). \quad (2)$$

In this linear framework, we can then link the measured phase with the output of the PyWFS by the relation

$$s(\phi) = M.\phi. \quad (3)$$

This matrix computation formalism has interesting properties that are required in the AO control loop. However, the PyWFS exhibits substantial non-linearities that make the equation above only partially true. Mathematically, the deviation from linearity is expressed with the following inequality: $s(a\phi_i + \phi) \neq s(a\phi_i) + s(\phi)$, where ϕ is a non-null given phase. When working around ϕ, the slope of the linear response of the sensor is therefore modified,

$$\delta s_\phi(\phi_i) = \frac{s(a\phi_i + \phi) - s(-a\phi_i + \phi)}{2a} \neq \delta s(\phi_i). \quad (4)$$

During AO observation, the sensor is working around a non-null phase ϕ corresponding to the residual phase of the system. As a consequence of Eq. (4), the response of the system is modified. Previous studies suggested updating the response slopes to mitigate this effect by relying on two main concepts. The first concept is the stationarity of the residual phases (Rigaut et al. 1998). For a given system and fixed parameters (seeing, noise, etc.), we can compute an averaged response slope for each mode. It has been proven (Fauvarque et al. 2019) that under this stationarity hypothesis, the averaged response slope depends on the behaviour of the statistical residual phases through their structure function (D_ϕ), $\langle \delta s_{\phi(\phi_i)} \rangle = \delta s_{D_\phi}(\phi_i)$.The second concept is the diagonal approximation (Korkiakoski et al. 2008). This approximation implies considering no cross-talk between the modes, which means that the response slopes are only modified by a scalar value for each mode. This value is known as the OG. We then have $\delta s_{D_\phi}(\phi_i) = t^i_{D_\phi}.\delta s(\phi_i)$, where $t^i_{D_\phi}$ is the OG associated with the mode i for a given residual phase perturbation statistics characterised by the structure function D_ϕ. In this approximation, the shape of the response is left unchanged.

Finally, the interaction matrix is updated by multiplying by a diagonal matrix T_{D_ϕ} called the OG matrix, whose diagonal components are $t^i_{D_\phi}$,

$$\begin{aligned} s(\phi) &= \langle M_\phi \rangle.\phi \\ &= M_{D_\phi}.\phi \\ &\approx M.T_{D_\phi}.\phi. \end{aligned} \quad (5)$$

We used the scalar product presented in Chambouleyron et al. (2020) to calculate the diagonal components of this matrix,

$$T_{D_\phi} = \frac{\mathrm{diag}(M^t_{D_\phi} M)}{\mathrm{diag}(M^t M)}. \quad (6)$$

Several approaches to practically compute this matrix can be found in the literature. They can be split into two categories: those that are invasive for the science path, consisting of sending some probe modes to the DM to return to the OG (Esposito et al. 2015, Deo et al. 2019a), and those that rely on the knowledge of the statistics of the residual phases through the telemetry data to estimate the OG (Chambouleyron et al. 2020). In all the proposed methods, the OG can be seen as an evaluation of a time-averaged loss of sensitivity of the sensor. Being able to accurately retrieve OG allows compensating for the sensitivity loss.

2.2. LPVS approach

As described by Eq. (4), the PyWFS outputs are affected by the incoming phase. The time-averaged definition of the interaction matrix M_{D_ϕ}, is limited to a statistical behaviour of the PyWFS, even though it has good properties. We propose a framework that addresses the non-linearities in real time, with an interaction matrix that is updated at every frame. To do so, we first assumed that the diagonal hypothesis holds. Then, and inspired by the automatic field domain, the PyWFS is now considered as an LPVS (Rugh & Shamma 2000): Its linear behaviour encoded by the interaction matrix is modified at each frame according to the incoming phase. Under this framework, the new expression of the PyWFS output can be written as

$$s(\phi) = M_\phi.\phi \approx M.T_\phi.\phi, \quad (7)$$

where T_ϕ is the OG matrix for the given measured phase ϕ. Assuming the diagonal approximation holds, we can extract T_ϕ from the interaction matrix computed around ϕ,

$$T_\phi = \frac{\mathrm{diag}(M^t_\phi M)}{\mathrm{diag}(M^t M)}. \quad (8)$$

For a given system, repeating this operation on a set of different phases will eventually lead to the time-averaged definition of the OG matrix,

$$\langle T_\phi \rangle = T_{D_\phi}. \quad (9)$$

To illustrate the difference between the time-averaged response and a single realisation, we performed the simulation presented in Fig. 2. These simulations were made with parameters consistent with an 8m telescope and for two seeing conditions. All results showed in this paper rely on end-to-end simulations performed with the *OOMAO* MATLAB toolbox (Conan & Correia 2014). The exact conditions and parameters are summarised in Table 1. In the simulation, we can compute the exact PyWFS response by freezing the entrance phase and performing a calibration process around this working point. We therefore computed T_ϕ for 1000 residual phase realisations, and show the OG variability for two seeing conditions in Fig. 2. This represents an optimistic context where the Fried parameter $r0$ is fixed through the complete simulation. By estimating the T_ϕ with a time-averaging strategy, the errors on the OG corresponding to a given residual phase can reach more than some dozen percent (OG exhibiting a maximum deviation from the averaged value are highlighted. This result illustrates the potential gain

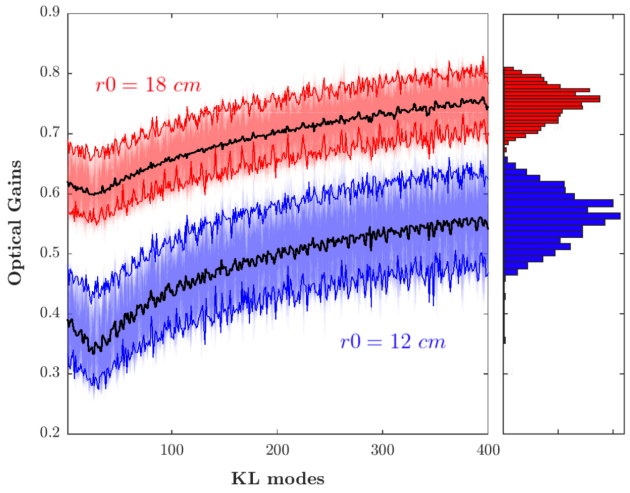


Fig. 2. Variability of closed-loop OG. For given system parameters we compute T_ϕ for 1 000 phase realisations in two seeing configurations: $r0 = 18$ cm and $r0 = 12$ cm. The variability of the frame-by-frame OG is shown in the histogram in the right panel and by the highlighted extreme OG curves for each $r0$ case.

Table 1. Simulation parameters.

Resolution	80 pixels in telescope diameter
Telescope	$D = 8$ m – no central obstruction
Atmosphere	Von-Karman PSD – 3 layers
Deformable mirror	Generating atmospheric Karhunen-Loéve (KL) basis: 400 modes
Sensing Path	$\lambda = 550$ nm – 40 subpupils in D

of performing a frame-by-frame estimation of the OG instead of a time-averaged one. In the next section, a practical means for performing this frame-by-frame gain-scheduling operation is presented.

3. Gain-scheduling camera

3.1. Principle

Obtaining an estimate of the OG values (the diagonal of T_ϕ) requires obtaining additional information describing the working point of the PyWFS at each moment, independently of the PyWFS measurements themselves. To this end, a specific sensor called gain-scheduling camera (GSC) is implemented.

Empirically, it is well known that the PyWFS sensitivity depends on the structure of the EM field when it reaches the pyramid mask. For instance, the more this field is spread over the pyramid mask, the less sensitive the PyWFS. In addition, because sensitivity and dynamic range are opposing properties, a well-known technique used to increase the PyWFS dynamic range consists of modulating the EM field around the pyramid apex. In order to keep track of the sensor regime, we therefore suggest probing this EM field by acquiring a focal plane image synchronously with the Pyramid WFS data. This can be achieved by placing a beam splitter before the pyramid mask and recording the signal with a focal plane camera that has the same field of view as the pyramid (Fig. 3).

In this configuration, the focal plane camera, hereafter called the GSC, records the intensity of the modulated EM field seen by the pyramid. By using the same exposure time and frame rate as the WFS camera, the signal observed is then an instantaneous AO-corrected point-spread function (PSF) convolved with

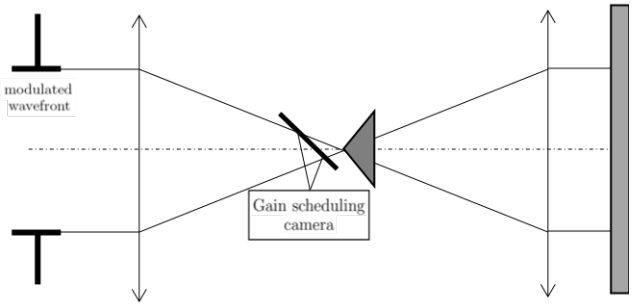


Fig. 3. Gain scheduling camera: A focal plane camera that records the intensities of the modulated EM field with the same pyramid field of view. This operation requires using part of the flux from the pyramid path.

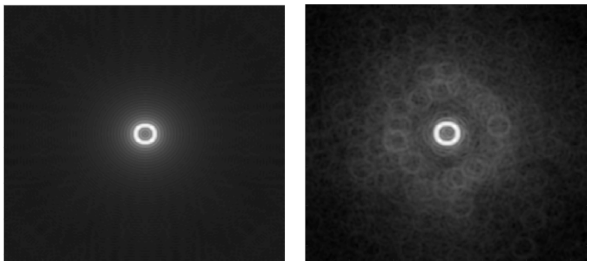


Fig. 4. *Left*: gain scheduling camera image for a flat wavefront. The white circle is produced by the tip-tilt modulation of the pyramid signal. *Right*: gain scheduling camera image for a given closed-loop residual phase.

the circle of modulation. This is illustrated in Fig. 4, where the modulation circle is shown on the left, and the replicas of this modulation circle by the focal plane speckles are shown on the right. By denoting Ω_ϕ the GSC signal, we can therefore write

$$\Omega_\phi = \mathrm{PSF}_\phi \star \omega, \tag{10}$$

where ω is the modulation weighting function. This function can be thought of as a map of the incoherent positions reached by the EM field on the pyramid during one integration time of the WFS camera. This function is thus a circle for the circularly modulated PyWFS (Fig. 5 right). Ω_ϕ has to be understood as the effective modulation weighting function: The phase to be measured produces its own modulation, leading to PyWFS loss of sensitivity, and the GSC is therefore a way to monitor this additional modulation.

The next step is now to link this focal plane information with the PyWFS optical gains and merge the GSC and PyWFS signal in one final set of WFS outputs. In a previous work (Chambouleyron et al. 2020), we demonstrated that the convolutive model of the PyWFS developed by Fauvarque et al. (2019) can be used to predict the averaged OG if the statistical behaviour of the residual phases (through the knowledge of their structure function) is known. In Eq. (11) we recall the expression of the PyWFS output in this convolutive framework,

$$s(\phi) = \mathbf{IR} \star (\mathbb{I}_p \phi), \tag{11}$$

where **IR** is the impulse response of the sensor and the star denotes the convolutive product. In the framework of the infinite pupil approximation, the impulse response around a flat wavefront can be expressed through two quantities, the mask complex function m and the modulation function ω (Fig. 5),

$$\mathbf{IR} = 2\mathrm{Im}(\overline{\widehat{m}}(\widehat{m} \star \widehat{\omega})). \tag{12}$$

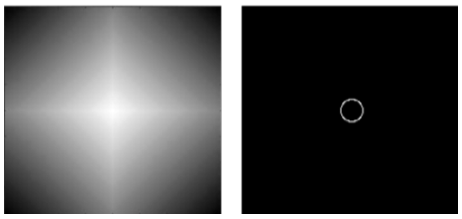


Fig. 5. *Left*: arg(m), the shape of the pyramid phase mask in the focal plane. *Right*: ω, the modulation weighting function: Different positions reached by the EM field during one integration time.

We propose here to combine this model with the signal delivered by the GSC in order to compute the impulse response $\mathbf{IR}_\phi$ of the PyWFS around each individual phase realisation. To do this, we replaced ω by the GSC data as described in Eq. (13),

$$\mathbf{IR}_\phi = 2\mathrm{Im}(\widehat{\overline{m}}(\widehat{m} \star \widehat{\Omega_\phi})). \tag{13}$$

This new way to compute the impulse response can be considered as using the impulse response given for an infinite pupil system (Eq. 12) for which we replaced the modulation weighting function by the energy distribution at the focal plane, including both the modulation and the residual phase.

Now that we are able to compute $\mathbf{IR}_\phi$ at each frame, we can estimate the OG matrix $\widetilde{T}_\phi$ through the following computation of its diagonal components as described in Chambouleyron et al. (2020),

$$\tilde{t}^{\,i}_{D_\phi} = \frac{\langle \mathbf{IR}_\phi \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\mathrm{calib}} \star \phi_i \rangle}{\langle \mathbf{IR}_{\mathrm{calib}} \star \phi_i | \mathbf{IR}_{\mathrm{calib}} \star \phi_i \rangle}, \tag{14}$$

where $\mathbf{IR}_{\mathrm{calib}}$ is the impulse response computed for the calibration state, most commonly for $\phi = 0$ (Fig. 4, left).

3.2. Accuracy of the estimation

It is now possible to test the accuracy of our estimator by comparing $\widetilde{T}_\phi$ and T_ϕ. To do this, we computed the true T_ϕ through end-to-end simulations by proceeding through the ideal way described in section above: An interaction matrix was computed around each given residual phase, from which the OG matrix was derived (Eq. 8). This provides the ground truth to which the gains estimated with the GSC are compared.

First results are shown in Fig. 6 for different seeing and modulation conditions. As illustrated in Fig. 6, the real and estimated OG agree well, demonstrating the accuracy of the proposed method.

For the parameters used in our simulations, the estimation remains accurate regardless of whether we are in open loop or closed loop. The ripples seen in the ground-truth OG curves are smoothed in the convolutive framework. The convolutive product given in Eq. (11) tends to smooth the output of the PyWFS even when the impulse response is computed around a non-zero phase. Figure 6 also shows a slight deviation for low-order modes for a low-modulation regime and a strong entrance phase (open loop here).

3.3. Robustness to noise

The GSC has shown to be a reliable way to perform a fast OG tracking, but it requires using a fraction of the photons available in the sensing path. This inevitably competes with the gain of sensitivity provided by the PyWFS. The goal of this section is then to demonstrate that our GSC approach is only weakly affected by photon noise and therefore requires only a small number of photons while performing an accurate frame-by-frame OG estimation. To this end, we propose to inject noise in the data delivered by the GSC and to probe the effect on the OG estimation.

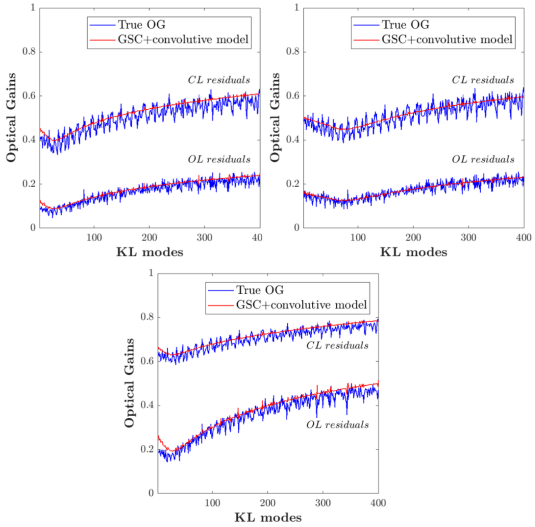


Fig. 6. OG estimation for given residual phases thanks to the GSC are compared with end-to-end simulation for different parameters (same framework as in Fig. 2). OL: Open loop, and CL: closed-loop residual phases. *Left*: $r0 = 12$ cm and $r_{\mathrm{mod}} = 3\lambda/D$. *Middle*: $r0 = 12$ cm and $r_{\mathrm{mod}} = 5\lambda/D$. *Right*: $r0 = 18$ cm and $r_{\mathrm{mod}} = 3\lambda/D$.

We ran simulations with the same parameters as described above. The sensing path works around the central wavelength $\lambda_c = 550$ nm with the given bandwidth $\Delta\lambda = 90$ nm and an ideal transmission of 100%. The exposure time of the GSC is 2 milliseconds (frame rate of the loop), and 10% of the photons are used by the GSC camera. The GSC pixel size corresponds to Shannon sampling of the diffraction-limited PSF. In this given configuration, the data recorded by the GSC for a given closed-loop residual phase ($r0 = 14$ cm, $r_{\mathrm{mod}} = 3\ \lambda/D$) are presented in Fig. 7 (top) for *(a.)* a noise-free system, *(b.)* a guide-star magnitude equal to 8 *(c.)* a guide-star magnitude equal to 10, and *(d.)* a guide-star magnitude equal to 12. For these three noise configurations (mag = 8, 10, and 12), we estimated the OG for 500 realisations of the noise. The results are given Fig. 7 (bottom part). The introduction of noise leads to an increased OG estimation error, which logically scales with the signal-to-noise ratio (S/N) according to $\sqrt{n_{\mathrm{ph}}}$. However, the GSC approach also still performs a satisfactory OG estimation even for low-magnitude guide stars. For even fainter guide stars, the noise effect might be mitigated by integrating the GSC data over several frames. A trade-off between noise propagation and OG error would then be required.

These results are crucial because they demonstrate that the GSC can be used with only a small fraction of WFS photons, leading to a limited repercussion on the S/N on the PyWFS. We therefore have a way to estimate the OG, and to some extent increase the linearity of the sensor while having a reduced effect on its sensitivity.

3.4. GSC spatial sampling

Another aspect is the sampling of the GSC detector with respect to the modulated PSF. If an under-sampling could be

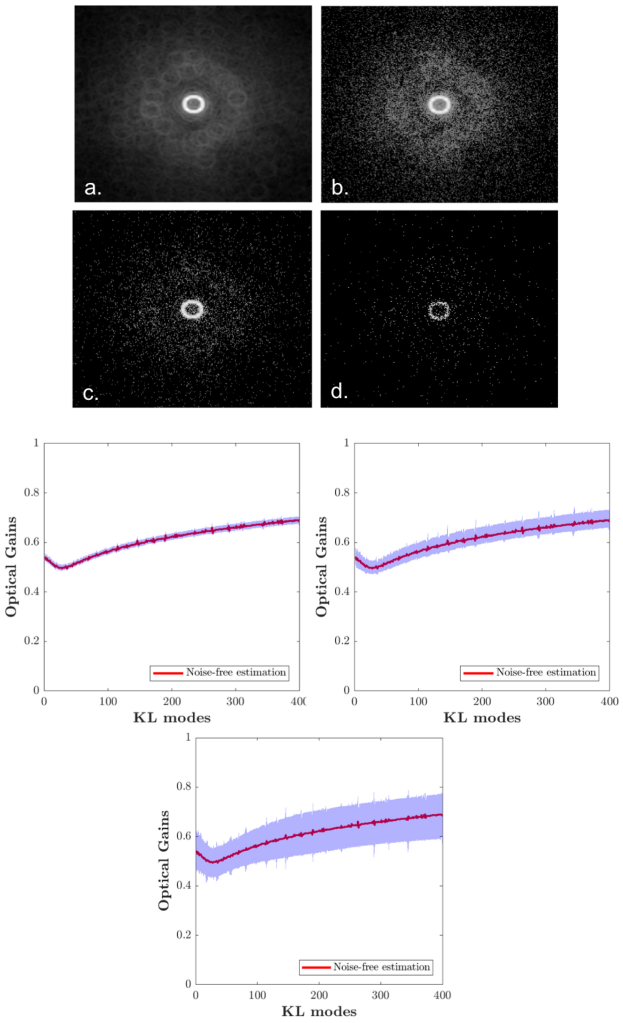


Fig. 7. *Top*: closed-loop GSC images for different entrance fluxes. In the chosen configuration, the exposure time is 2 ms, and we collect 10% of the photons in the sensing path. *a*: infinite number of photons. *b*: Guide-star magnitude = 8 ($n_{\rm ph}$ = 55 000 on the GSC). *c*: Guide-star magnitude = 10 ($n_{\rm ph}$ = 9000 on the GSC). *d*: Guide-star magnitude = 12 ($n_{\rm ph}$ = 1400 on the GSC). *Bottom*: OG estimate for the noise-free system compared with the three noisy configurations.

considered, it would reduce the number of pixels required by the GSC, and consequently reduce the practical implementation complexity. To test this, we ran our algorithm for various samplings of the GSC in order to see the effect on the OG estimation. The results for a given closed-loop residual phase ($r0$ = 14 cm, $r_{\rm mod}$ = 3) are given in Fig. 8. The sampling of the PSF can go below the Shannon sampling (2 pixels per λ/D) without significant effect on the estimate. This result depends on the modulation radius $r_{\rm mod}$ used, and we note that the OG estimate is not affected as long as the pixel size $d_{\rm px}$ satisfies the Shannon criterion for the modulation radius,

$$d_{\rm px} \leq r_{\rm mod}/2. \quad (15)$$

When this criterion is not respected, the undersampled modulation circle is seen as a disc (Fig. 8), which affects the OG estimate for low-order modes.

As a concrete example, a PyWFS for the Extremely Large Telescope (ELT) working at λ = 800 nm with a field of view of 2 arcsecs and with a sampling of Shannon/4 on the GSC would require a GSC camera with no more than 250 × 250 px. This

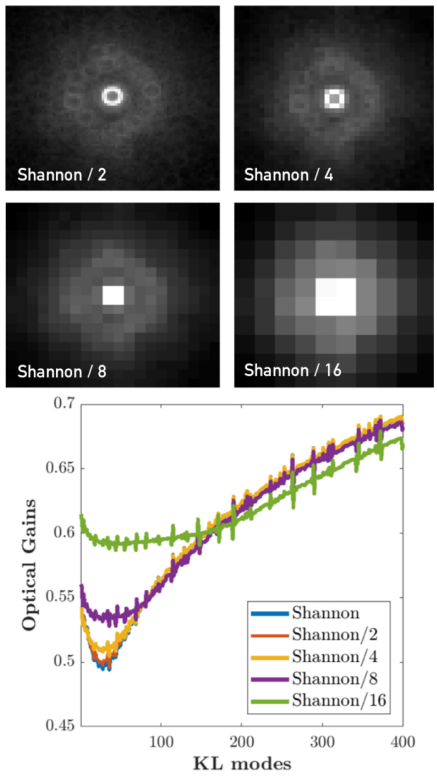


Fig. 8. Effect of the GSC sampling on OG estimate for a given closed-loop residual phase ($r0$ = 14 cm, $r_{\rm mod}$ = 3). *Top*: images delivered by the GSC with different samplings. *Bottom*: effect on the OG estimate.

limited size allows for the use of low-readout noise cameras such as GSC, and remaining in a photon-noise limited regime.

To conclude this section, we have shown that it is possible to perform OG fast-tracking by using an image of the modulated EM field at the focal plane. Our method uses a so-called GSC providing non-biased information on the working point of the PyWFS, and the subsequent OG estimate using a convolutive model. We demonstrated that the GSC can work with a limited number of photons and pixels, which makes the practical implementation fully feasible. The next section is dedicated to quantifying the performance benefits of OG fast tracking with the GSC.

4. Application to specific AO control issues: Bootstrapping and NCPA handling

As shown in the previous sections, the GSC allows tracking the PyWFS OG frame by frame and compensating for these non-linearities. We illustrate here two possible situations in which the GSC can significantly improve the performance: bootstrapping and NCPA handling.

4.1. Bootstrapping

During the AO loop bootstrap, the PyWFS faces large amplitude wavefronts (due to uncorrected turbulence), leading to significant non-linearities that may prevent the loop from closing. Therefore this step is critical because it corresponds to the moment at which the OGs are the most important. Monitoring them frame by frame in order to update the reconstructor helps closing the AO loop. Because of the timescales involved in the AO loop bootstrap, this problem cannot be tackled by other OG

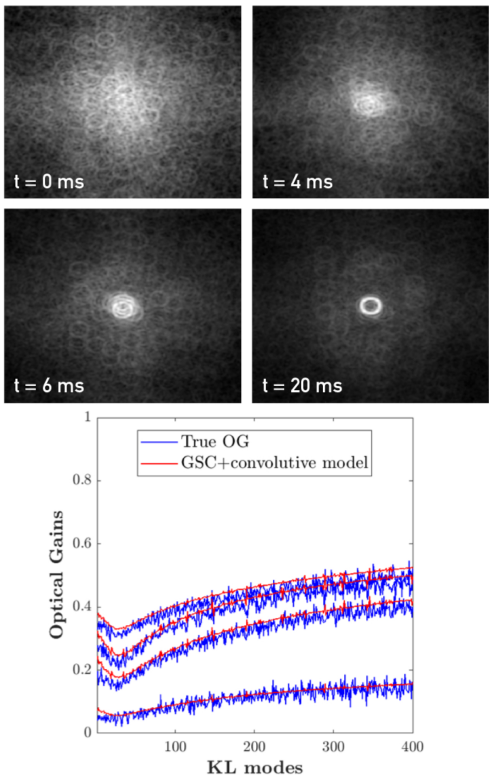


Fig. 9. Bootstrapping with the help of the GSC. *Top*: images delivered by the GSC at a time. $t = 0$ represents the beginning of the servo-loop. The frame rate of the AO loop is still fixed at 2 ms with $r0 = 12$ cm and $r_{\rm mod} = 3\lambda/D$. *Bottom*: OG estimate during bootstrapping for the corresponding images on the left. Lower OG corresponds to higher residuals on the pyramid, hence to the first frames of loop closure.

handling techniques that were previously studied in the literature. The best solutions already proposed endures necessarily delays of a few frames (Deo et al. 2019b). Here, we can estimate the OG corresponding to the current measurement frame: This is an unprecedented feature. We show different images delivered by the GSC during the bootstrap operation in Fig. 9. The corresponding estimated OGs are also plotted, compared with the end-to-end computation giving the true OG values. While the loop is closing, the OG varies from low values to higher values, indicating that the residual phases reaching the PyWFS decrease: The loop is closing, and the DM is starting to correct the atmospheric aberrations. Our technique performs a precise OG follow-up during all the steps of the process, at the frame rate of the loop.

We can use our frame by frame OG estimation to update the reconstructor while the loop is closing. The reconstructor is the pseudo-inverse of the interaction matrix. We can therefore relate it to the OG matrix and the calibration interaction matrix through the following formula:

$$M_\phi^\dagger = T_\phi^{-1} M_{\rm calib}^\dagger. \tag{16}$$

By doing so, we show that it is possible to close the loop faster. A simulation example is presented by comparing a loop bootstrap with and without OG compensation by the GSC camera (Fig. 10). This example, with a limited benefit in practice, shows how a fast OG tracking combined with the corresponding update of the reconstructor can be applied to mitigate all types of short-timescale residual variations, such as seeing bursts.

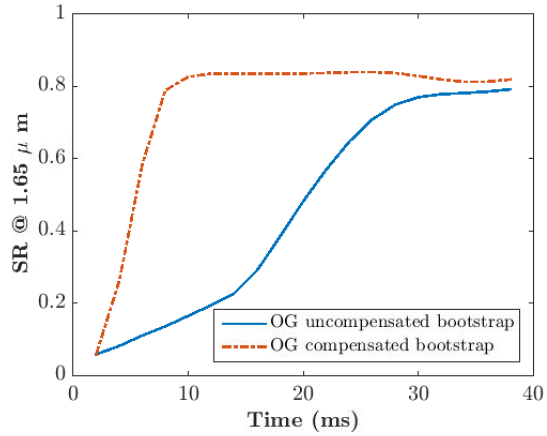


Fig. 10. OG-compensated bootstrap vs. OG-uncompensated bootstrap.

4.2. NCPA handling

Handling NCPA is emerging as one of the main issues due to PyWFS OG, as was demonstrated for instance on the Large Binocular Telescope (Esposito et al. 2015). How to handle this issue while having an accurate OG estimation was discussed in a previous paper (Chambouleyron et al. 2020). We briefly recall the main problem. The NCPA reference measurements are recorded around a diffraction-limited PSF and need to be re-scaled by the OG while working on sky: $s(\phi_{\rm NCPA}) \hookleftarrow s_\phi(\phi_{\rm NCPA})$. To compute $s_\phi(\phi_{\rm NCPA})$, we need to have estimate T_ϕ ,

$$\begin{aligned} s_\phi(\phi_{\rm NCPA}) &= M_\phi.\phi_{\rm NCPA} \\ &= M_{\rm calib}.T_\phi.\phi_{\rm NCPA}. \end{aligned} \tag{17}$$

We show here the results of a simulation in which we used the GSC to handle NCPA in the AO loop. We retained the same simulations parameters as before (caption of Fig. 2). The PyWFS modulation radius was $r_{\rm mod} = 3\,\lambda/D$ and $r0 = 14$ cm. The interaction matrix was computed around a flat wavefront. We injected 200 nm rms of NCPA into our system, distributed with a f^{-2} power law on the first 25 KL modes (except for tip-tilt and focus). In this configuration and for a flat wavefront in the science path (H band), the PSF in the wavefront sensing path (V band) is given in Fig. 11a and the signal $\Omega_{\phi_{\rm NCPA}}$ seen by the GSC is shown in Fig. 11b.

We then proceeded in the following way: We closed the loop on the turbulence, and after 5 s of closed-loop operation, the NCPA was added to the system. These NCPAs were then handled with different configurations, and the results were compared with the NCPA-free case. Figure 12 illustrates the results. The main conclusions from Fig. 12 are listed below.

1. When the NCPA is not compensated for (orange plot), the loop converges toward a flat wavefront in the sensing path. This induces a high loss of Strehl ratio (SR) in the science path, corresponding to the NCPA.
2. When a reference map $s(\phi_{\rm NCPA})$ in the PyWFS measurement is used without updating it by the OG, this leads to a divergence of the loop (so-called NCPA catastrophe, yellow plot). This can be explained by the fact that because of the OG, the PyWFS introduces too much NCPA, creating an even stronger aberrated wavefront. This aberrated wavefront increases the OG in the next frame, which continues to increase the aberration, and so on. This quickly causes the loop to diverge.
3. When the reference map is compensated for by the time-averaged OG computed in the first 5 s of the loop by a

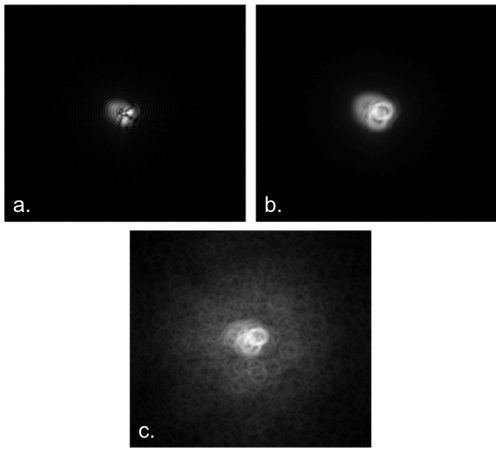


Fig. 11. *a*: PSF on the pyramid apex when a flat wavefront is set in the science path. *b*: GSC signal when there are no residual phases and for a flat wavefront in the science path. *c*: GSC signal during closed-loop around NCPA.

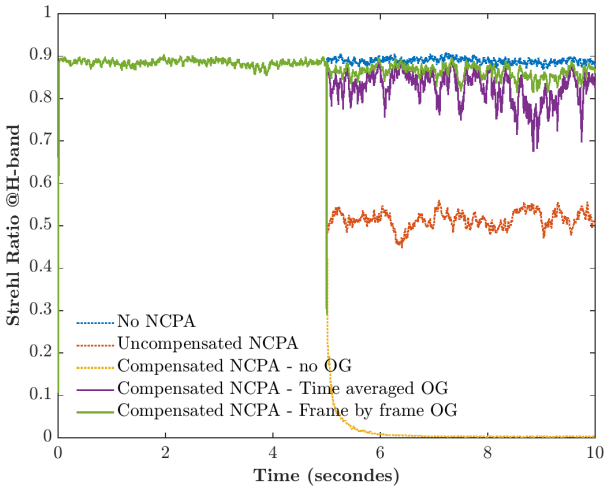


Fig. 12. Strehl ratio for different cases of NCPA handling. In this simulation context, the case for which we compensate for NCPA without scaling by the OG leads to a diverging loop.

long-exposure image of the GSC (purple plot), no NCPA catastrophe appears, and the final performance reaches an averaged SR of 82%.

4. When the reference map is compensated for by the OG computed at each frame, using the GSC camera (green plot), the final performance reaches an averaged SR of 86%. This solution is better than the previous one because we monitor the OG at each frame, and we also take the effect of the NCPA themselves on the OG into account. To illustrate this, we show the GSC image for a given closed-loop residual when the NCPA is compensated for in Fig. 11c.

This study is a clear demonstration that our strategy can solve the AO control issue due to PyWFS OG. It also shows that even if the OGs are compensated for on a frame-by-frame basis, the ultimate performance (without NCPA) cannot be reached. This limitation is mainly due to the LPVS approach, which is characterized by a linear description of the whole sensing problem. Improving the performance further would probably mean starting to consider other non-linear (second- or third-order description) solutions, which goes beyond the computation framework of a simple matrix.

5. Conclusion

The PyWFS is a complex optical device exhibiting strong non-linearities. One way to deal with this behaviour while keeping a matrix computation formalism is to consider the PyWFS as a LPVS. To probe the sensing regime of this system at each measurement, a gain scheduling loop needs to be implemented that gives information on the sensor regime at every moment. With this perspective, the OG compensation can be deployed on a frame-by-frame basis. We provided here an innovative solution to this end: the GSC combined with a convolutive model. As such, the PyWFS data synchronously merged on a frame-by-frame basis with GSC data can be thought of as a single WFS combining images from different light-propagation planes. It therefore provides an efficient way to compensate for non-linearities at each AO loop frame without any delay, and it significantly improves the final performance of the AO loop in terms of sensitivity and dynamic range as well as robustness. It also allows unambiguously disentangling the effect of OG from the full AO loop gain, which is a fundamental advantage for NCPA compensation. The GSC solution has now to be implemented on the AO facility bench LOOPS at the LAM for an experimental demonstration (Janin-Potiron et al. 2019).

Acknowledgements. This work benefited from the support of the WOLF project ANR-18-CE31-0018 of the French National Research Agency (ANR). It has also been prepared as part of the activities of OPTICON H2020 (2017-2020) Work Package 1 (Calibration and test tools for AO assisted E-ELT instruments). OPTICON is supported by the Horizon 2020 Framework Programme of the European Commission's (Grant number 730890). Authors are acknowledging the support by the Action Spécifique Haute Résolution Angulaire (ASHRA) of CNRS/INSU co-funded by CNES. Vincent Chambouleyron PhD is co-funded by "Région Sud" and ONERA, in collaboration with First Light Imaging. Finally, part of this work is supported by the LabEx FOCUS ANR-11-LABX-0013.

References

Chambouleyron, V., Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., et al. 2020, A&A, 644, A6
Conan, R., & Correia, C. 2014, Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng., 9148, 91486C
Deo, V., Gendron, É., Rousset, G., et al. 2019a, A&A, 629, A107
Deo, V., Rozel, M., Bertrou-Cantou, A., et al. 2019b, Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes conference, 6th edn. Québec, France
Esposito, S., & Riccardi, A. 2001, A&A, 369, L9
Esposito, S., Pinna, E., Puglisi, A., et al. 2015, Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes 4-Conference Proceedings, 1
Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., et al. 2019, J. Opt. Soc. Am. A, 36, 1241
Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016, Optica, 3, 1440
Guyon, O. 2005, ApJ, 629, 592
Janin-Potiron, P., Chambouleyron, V., Schatz, L., et al. 2019, Adaptive Optics with Programmable Fourier-based Wavefront Sensors: a Spatial Light Modulator Approach to the LOOPS Testbed
Korkiakoski, V., Vérinaud, C., & Louarn, M. L. 2008, in Adaptive Optics Systems, eds. N. Hubin, C. E. Max, & P. L. Wizinowich, Int. Soc. Opt. Photonics (SPIE), 7015, 1422
Ragazzoni, R. 1996, J. Mod. Opt., 43, 289
Rigaut, F. J., Veran, J. P., & Lai, O. 1998, in Adaptive Optical System Technologies, eds. D. Bonaccini, & R. K. Tyson, Int. Soc. Opt. Photonics (SPIE), 3353, 1038
Rugh, W. J., & Shamma, J. S. 2000, Automatica, 36, 1401
Vérinaud, C. 2004, Opt. Commun., 233, 27

A&A 650, L8 (2021)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202140870
© V. Chambouleyron et al. 2021

Astronomy & Astrophysics

LETTER TO THE EDITOR

Variation on a Zernike wavefront sensor theme: Optimal use of photons

V. Chambouleyron[1,2], O. Fauvarque[3], J-F. Sauvage[2,1], K. Dohlen[1], N. Levraud[2,1], A. Vigan[1], M. N'Diaye[4], B. Neichel[1], and T. Fusco[2,1]

[1] Aix Marseille Univ, CNRS, CNES, LAM, Marseille, France
e-mail: vincent.chambouleyron@lam.fr
[2] DOTA, ONERA, Université Paris Saclay, 91123 Palaiseau, France
[3] IFREMER, Laboratoire Detection, Capteurs et Mesures (LDCM), Centre Bretagne, ZI de la Pointe du Diable, CS 10070, 29280 Plouzane, France
[4] Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France

Received 24 March 2021 / Accepted 17 May 2021

ABSTRACT

Aims. The Zernike wavefront sensor (ZWFS) is a concept belonging to the wide class of Fourier-filtering wavefront sensors (FFWFSs). The ZWFS is known for its extremely high sensitivity and low dynamic range, which makes it a unique sensor for second stage adaptive optics systems or quasi-static aberration calibration sensors. This sensor is composed of a focal plane mask made of a phase shifting dot that is fully described by two parameters: its diameter and depth. We aim to improve the performance of this sensor by changing the diameter of its phase shifting dot.
Methods. We begin with a general theoretical framework, providing an analytical description of the FFWFS properties. We then predict the expected ZWFS sensitivity for different configurations of dot diameters and depths. The analytical predictions are then validated with end-to-end simulations. From this, we propose a variation of the classical ZWFS shape that exhibits extremely appealing properties.
Results. We show that the ZWFS sensitivity can be optimized by modifying the dot diameter and it can even reach the optimal theoretical limit, though with the trade-off of low spatial frequency sensitivity. As an example, we show that a ZWFS with a 2 λ/D dot diameter (where λ is the sensing wavelength and D the telescope diameter), hereafter called a Z2WFS, exhibits a sensitivity twice higher than the classical 1.06 λ/D ZWFS for all the phase spatial components except for tip-tilt modes. Furthermore, this gain in sensitivity does not impact the dynamic range of the sensor, and the Z2WFS exhibits a similar dynamical range as the classical 1.06 λ/D ZWFS. This study opens the path to the conception of a diameter-optimized ZWFS.

Key words. instrumentation: adaptive optics – telescopes

1. Introduction

The role of a wavefront sensor (WFS) is to encode the phase information at the entrance of an optical system into intensities on a detector. For ground-based astronomy, WFSs are mostly used for active or adaptive optics (AO) in conjunction with a wave-front control strategy in order to compensate for optical aberrations induced by the atmosphere or the telescope itself. In the context of astronomy, one of the main drivers for a WFS design is its sensitivity, or in other words, its ability to provide an accurate measurement in the presence of noise. Sensitivity is therefore a useful metric for assessing WFS performance in terms of photon noise, which is related to key quantities in the AO field: loop speed and sky-coverage. Existing WFSs can be separated into two main categories, usually defined as focal plane WFSs, for which the measurements are done in a focal plane (such as the Shack-Hartmann WFS), and pupil plane WFSs, for which the measurements are done in a pupil plane. Among this latter category, the Fourier filtering WFS (FFWFS) represents a wide class of sensors of particular interest thanks to their superior sensitivity. From a general point of view, an FFWFS consists of a phase mask located in an intermediate focal plane that performs an optical Fourier filtering. As such, the Zernike phase mask (Zernike & Stratton 1934; Bloemhof & Wallace 2003; Dohlen et al. 2006; Wallace et al. 2011) forms an FFWFS, hereafter a Zernike WFS (ZWFS). In this case, the filtering element is a phase shifting dot that is, for a given substrate, fully described by two parameters: its diameter and its depth (or phase shift). In a classical implementation, the ZWFS phase dot has a diameter of 1.06 λ/D (where λ is the sensing wavelength and D the telescope diameter) and a phase shift of $\pi/2$. This ZWFS is known to be one of the most sensitive WFSs (Guyon 2005). Its drawback being its limited dynamic range, it has therefore been mostly implemented as a second-stage WFS or as a quasi-static aberration calibration sensor, such as on VLT/SPHERE (N'Diaye et al. 2016; Vigan et al. 2019). In this paper we show that the classical implementation of the ZWFS with a phase dot diameter of 1.06 λ/D is actually not optimal: by using a larger dot diameter, the sensitivity of the ZWFS can be significantly improved, at the expense of lower spatial frequency sensitivity, and can even reach a performance close to the theoretical limit. For this reason, Sect. 2 starts

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

from a theoretical study of the ZWFS based on a general convolutional formalism for FFWFSs (Fauvarque et al. 2016). This analytical work shows that the sensitivity of the ZWFS can be improved by increasing its dot diameter. We then confirm the theoretical results with end-to-end simulations in Sect. 3, and we show that a gain in sensitivity by a factor of two can be reached without impacting the dynamic range of the sensor. Conclusions are given in Sect. 4.

2. Theoretical analysis of the ZWFS sensitivity with a convolutional approach

2.1. Definition of FFWFS sensitivity

Following the formalism introduced by Fauvarque et al. (2016), the raw intensities recorded by an FFWFS are processed with a return-to-reference operation. This simply consists in removing from the FFWFS recorded intensities map $I(\phi)$ the one corresponding to the reference phase I_0 (usually a flat wavefront). We also posit that all the intensities are normalized by the number of photons. The resulting quantity is called the tared intensities:

$$\Delta I(\phi) = I(\phi) - I_0. \tag{1}$$

One of the most important performance criteria for a sensor is its behavior in terms of noise propagation. This criteria is encoded in a quantity called sensitivity, which depends on the energy in the columns of the interaction matrix (IM; Rigaut & Gendron 1992). For a given WFS, each column of the IM is built as the linear response of the sensor to a given mode ϕ_i, which is usually obtained experimentally through a "push-pull" method:

$$\delta I(\phi_i) = \frac{I(\epsilon\phi_i) - I(-\epsilon\phi_i)}{2\epsilon}, \tag{2}$$

where ϵ is the amplitude of the mode. The sensitivity s for a given mode ϕ_i is then defined through the Euclidean norm:

$$s(\phi_i) = \frac{||\delta I(\phi_i)||_2}{||\phi_i||_2}. \tag{3}$$

For a given uniform noise distribution σ_n, the noise propagation coefficient σ_WFS for a mode ϕ_i is then related to the sensitivity by the following relationship:

$$\sigma^2_\mathrm{WFS} = \sigma^2_\mathrm{n} s(\phi_i)^{-2}. \tag{4}$$

For ground-based astronomy, where WFSs are usually implemented within an AO loop, the sensitivity is a critical metric as it describes how the system performs in the presence of noise. Optimizing the WFS sensitivity has always been one of the main motivations in the conception of new WFSs.

Finally, it should be noticed that we chose to visualize the FFWFS sensitivity as a two-dimensional map along the spatial frequencies of the wavefront. This consisted in calculating sensitivity with respect to the Fourier modes ϕ_i (close to what was done in Jensen-Clem et al. 2012), which are simply defined by the sum of a cosine and a sine carrying a given spatial frequency $\boldsymbol{f}$. The following quantity then encodes the sensitivity:

$$s_{\boldsymbol{f}} = \sqrt{s\Big(\cos_{\boldsymbol{f}}\Big)^2 + s\Big(\sin_{\boldsymbol{f}}\Big)^2}. \tag{5}$$

2.2. A convolutional approach to computing FFWFS sensitivity

The FFWFS sensitivity can be computed based on a convolutional model, as described in Fauvarque et al. (2019). This model assumes that the sensor can be fully characterized by an impulse response IR that links the entrance phase to the measured tared intensities:

$$\Delta I(\phi) \approx \mathrm{IR} \star \phi, \tag{6}$$

where $\star$ stands for the classical convolutional product. A convenient aspect of the convolutional approach is the fact that one can compute the transfer function TF of an FFWFS. FFWFSs can be described by two parameters: their phase masks m and their weighting functions ω, which describe the energy distribution in the focal plane during one acquisition time of the sensor. We note that this function is normalized to 1 in order to ensure energy conservation. Assuming that ω is a real function and that ω and m are both centro-symmetric, which is generally the case for most of the known FFWFSs, TF is expressed through the following simple formula:

$$\mathrm{TF} = 2\mathrm{Im}[m \star \overline{m\omega}], \tag{7}$$

where Im is the imaginary part and the bar is the complex conjugate operator. From the knowledge of an FFWFS transfer function, it is then possible to compute the sensitivity with respect to spatial frequencies thanks to the formula given in Fauvarque et al. (2019):

$$s_{\boldsymbol{f}} \approx \sqrt{|\mathrm{TF}|^2 \star \mathrm{PSF}}\Big|_{\boldsymbol{f}}, \tag{8}$$

where the quantity PSF is the point spread function of the system. Its energy corresponds to the incoming flux and is normalized to 1.

At this point, it is important to note that the sensitivity is bounded. Since the mask transmission, $|m|$, cannot be greater than 1 ($|m| \leq 1$), Eq. (7) implies that $\mathrm{TF}|_{\boldsymbol{f}} \leq 2$. Hence, given Eq. (8), we conclude that, in the frame of our normalizations, the sensitivity cannot be greater than 2:

$$\forall \boldsymbol{f},\ s_{\boldsymbol{f}} \leq 2. \tag{9}$$

This is an important result as it defines the theoretical limit for the sensitivity of an FFWFS.

2.3. Application to the ZWFS

The convolutional formalism introduced in the previous section was then applied to the ZWFS in order to find a simple formula of its sensitivity according to the mask parameters. As previously mentioned, the ZWFS mask is defined by two free parameters. The first is the depth (phase shift) of the dot δ; for the classical ZWFS, $\delta = \pi/2$. The second is its diameter p; for the classical ZWFS, $p = 1.06\,\lambda/D$. As described in N'Diaye et al. (2013), the dot diameter value was chosen in order to get an equivalent flux inside and outside the focal plane dot. This configuration with $p = 1.06\,\lambda/D$ also allows a uniform reference intensity distribution to be obtained. The purpose of this section is to demonstrate that this choice of $p = 1.06\,\lambda/D$ is actually not optimal, and that the sensitivity can be improved with a larger dot.

For the sake of clarity, we carried out this study in one dimension. As such, the spatial frequency vector $\boldsymbol{f}$ becomes the scalar frequency f. We further assumed that the weighting function ω,

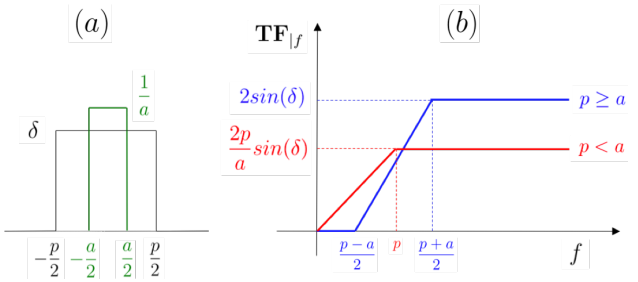


Fig. 1. Simplified description of the ZWFS. (a): simplified one-dimensional framework for convolutional derivations; in black, the dot diameter is equal to p and the phase shift is equal to δ. In green, the PSF is approximated by a normalized top-hat function with a diameter a. (b): transfer function of the ZWFS for two cases; in red the dot size is smaller than the PSF, and in blue the dot is larger than the PSF. The optimal case appears for $p = a$ and not $p = a/2$, as done for the classical ZWFS.

which corresponds to the PSF, can be described as a top-hat function of diameter radius a. This simplified geometry is summarized by Fig. 1a. From this simplified geometry, we then computed $\mathrm{TF}|_f$ and plot this quantity in Fig. 1b. The full derivation can be found in Appendix B.

From Fig. 1b one can distinguish two cases. The first is $p \geq a$ (i.e., the dot diameter is larger than the PSF characteristic size). Frequencies above $(p + a)/2$ reach the sensitivity $2\sin(\delta)$. Frequencies below $(p - a)/2$ are at 0. The second is $p < a$: the dot diameter is smaller than the PSF size. Frequencies over p have a value of $2p/a \times \sin(\delta)$, which is smaller than the theoretical limit of 2.

From this simplified model one can first conclude that a phase shift of $\delta = \pi/2$ will maximize the sensitivity, as expected. But surprisingly, it shows that for this phase shift a dot radius of $p = a$ offers a sensitivity of the optimal value for almost all the modes. At this point it is important to remember that the value of $\mathrm{TF}|_f$ directly sets the sensor sensitivity through Eq. (8). It is therefore possible to design a ZWFS that reaches the theoretical sensitivity value. As a comparison, the classical ZWFS configuration (N'Diaye et al. 2013) uses $p = a/2$, which leads to a suboptimal TF value of 1 for frequencies above p.

Although this simplified study uses strong assumptions, it shows that the ZWFS can be further optimized compared to its classical form. In the next section we demonstrate that these simplified results are accurate and will enable us to build the most sensitive sensor ever proposed.

3. Toward an optimal ZWFS

Following the results from the convolutional approach, the goal of this section is to make use of numerical simulations to confirm the sensitivity of the ZWFS with respect to its dot diameter, and eventually to propose an optimal configuration. For that, we consider different configurations for a dot diameter ranging from 0 to 5 λ/D. The phase shift is set to $\delta = \pi/2$ for the rest of this Letter.

3.1. Impact of the dot diameter on the ZWFS sensitivity

As a first step, we want to illustrate the impact of the dot diameter on sensitivity for a spatial frequency located outside of the dot (horizontal part of the curves in Fig. 1b). For that purpose, we arbitrary chose a spatial frequency with six cycles over the pupil (left insert of Fig. 2), which is far enough from the

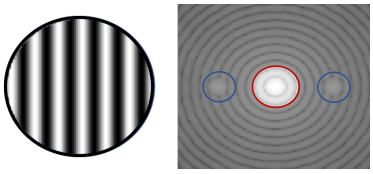


Fig. 2. Cosine phase (*left insert*, linear scale) corresponding to a spatial frequency of six cycles in D and its corresponding PSF speckles (*right insert*, logarithmic scale, in blue). This frequency lies outside of the dot footprint, here 5 λ/D (in red).

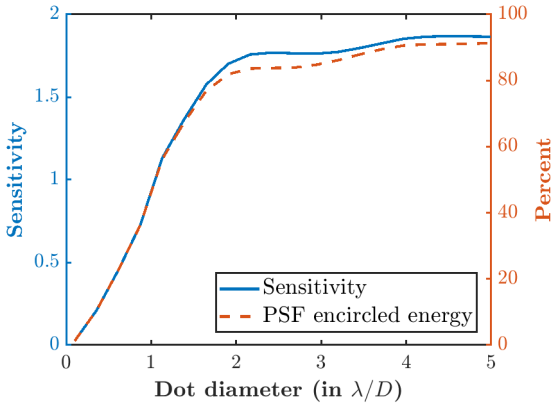


Fig. 3. Sensitivity evolution for a frequency outside of the dot with increasing dot diameter. The sensitivity is in strong accordance with the proportion of the PSF energy located inside the dot, as predicted by the convolutional approach.

maximum diameter dot value (5 λ/D, i.e., a radius of 2.5 λ/D). This configuration is illustrated in the right insert of Fig. 2. The sensitivity results for this spatial frequency are shown in Fig. 3.

As predicted by the convolutional approach, Fig. 3 shows that the sensitivity for a high spatial frequency increases with the dot diameter. This behavior has been discussed briefly in previous literature (Ruane et al. 2020) without further analysis. It is explained here thanks to the convolutional model. It is also interesting to notice that the sensitivity growth closely follows the PSF encircled energy in the dot diameter, confirming the analytical results presented in Fig. 1. For a classical ZWFS, with a dot diameter of 1.06 λ/D, the sensitivity is actually far from optimal.

However, one cannot just increase the dot diameter inconsiderately because the sensitivity to frequencies lying inside the dot would drop to 0 (Fig. 1). We illustrate this effect in Fig. 4, where we plot the sensitivity curves with respect to a wide range of spatial frequencies for the three dot diameter configurations $p = 1.06$, 2, and $5\lambda/D$. For $p = 5\lambda/D$, the sensitivity to high-spatial frequencies (those larger than five cycles per pupil) almost reaches the theoretical limit of 2; however, the sensitivity becomes close to 0 for low-spatial frequencies (those smaller than three cycles per pupil). There is therefore a trade-off between enhanced sensitivity and unseen modes. In the following, we propose the configuration with $p = 2\lambda/D$ and call this specific configuration the Z2WFS.

As a remark, we also emphasize that the reference intensities (i.e., the intensity distribution for a flat wavefront) change with the value of p. This is illustrated in Fig. 5 for the previous three different values of p. The classical ZWFS shows a flat reference illumination, while the Z2WFS appears to be less uniform. This spatial distribution could involve practical issues in terms of detector dynamics or for complex pupil shapes, such as

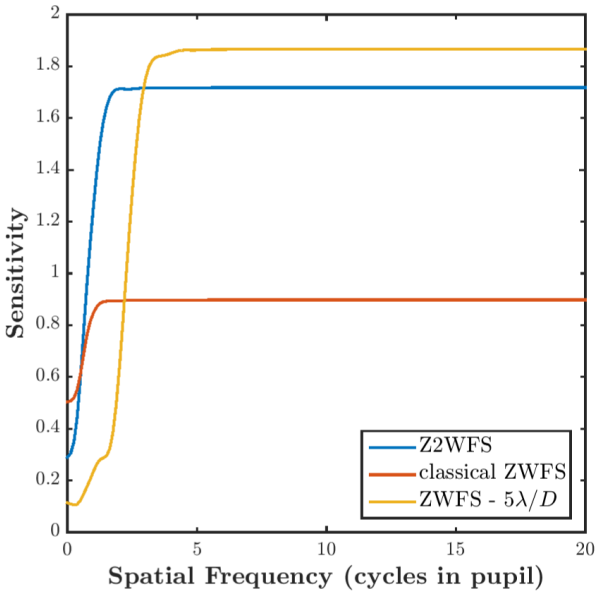


Fig. 4. Sensitivity curves for different dot diameters. This figure has to be compared with the convolutional approach in Fig. 1.

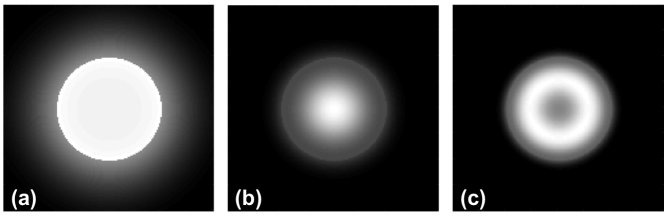


Fig. 5. Reference intensities of the ZWFS for different dot diameters. (*a*) $p = 1.06\ \lambda/D$. (*b*) $p = 2\ \lambda/D$. (*c*) $p = 5\ \lambda/D$.

central obscuration or spiders. These potential practical implementation issues are beyond the scope of this paper. In this Letter we only assume a full aperture pupil with monochromatic light for the sake of clarity. It is to be noted that there is no sticking point here; the formalism and results developed here are maintained with a central obscuration in the pupil.

3.2. Comparison with other FFWFSs

In this section we compare the Z2WFS with other well-know FFWFSs: the classical ZWFS with $p = 1.06\ \lambda/D$, the non-modulated pyramid WFS (PyWFS) (Ragazzoni 1996), the modulated PyWFS (here with a modulation radius of 3 λ/D), and a flattened pyramid WFS (FPyWFS) proposed by Fauvarque et al. (2015) with a pupil overlapping rate of 75%. Spatial frequencies basis (i.e., Fourier basis) was chosen for this comparison. Results are given in Fig. 6. First, we retrieved well-know results, such as the gain of around a factor of two in sensitivity between the classical ZWFS and the PyWFS. We can also highlight the behavior of the FPyWFS, which shows oscillating sensitivity and peaks for some specific frequencies, as described in Fauvarque et al. (2015). (The explanation of the PyWFS class behavior through to the convolutional approach is also given in Appendix C.) The Z2WFS is clearly the most sensitive sensor, except for extremely low frequencies. As expected from Fig. 3, it has a sensitivity twice better than the classical ZWFS for almost all modes and is four times more sensitive than the non-modulated PyWFS.

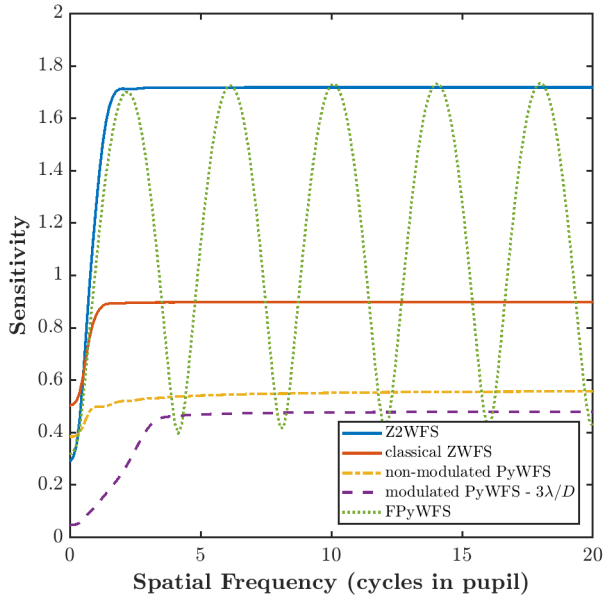


Fig. 6. Sensitivity curves for different FFWFSs. We can distinguish the ZWFS class and the PyWFS class. The Z2WFS overtakes all the other sensors.

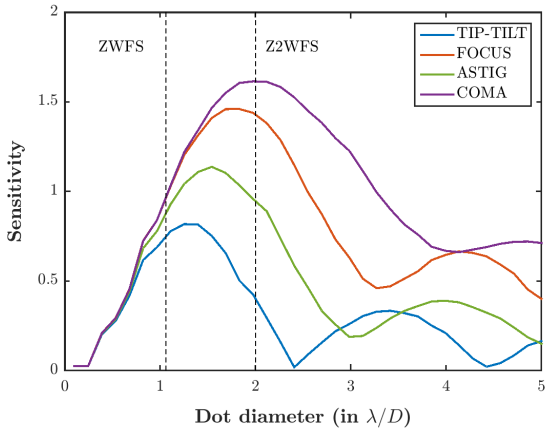


Fig. 7. Evolution of the low order Zernike mode sensitivities with respect to the dot diameter. We can see that the Z2WFS sensitivity is lower for the tip-tilt modes but higher for all the others. The classical ZWFS is not even optimized for the tip-tilt modes.

The behavior at low spatial frequencies deserves some further analysis: we plot in Fig. 7 the sensitivity with respect to the tip-tilt and focus modes (which are the lowest frequency Zernike modes) for the ZWFS class with a dot diameter ranging from 0 to 5 λ/D. For the tip-tilt modes, the Z2WFS is half as sensitive as the classical ZWFS, but the Z2WFS provides better results for the focus. Even if the Z2WFS is less sensitive for tip-tilt than the classical ZWFS, it is important to note that it remains as sensitive as the non-modulated PyWFS, which is around 0.4. As a remark, it is interesting to see that the sensitivity curve for the tip-tilt follows the PSF shape: for the edge of the dot lying on a dark area of the PSF, the sensitivity drops to 0. By taking a Z1.5WFS ($p = 1.5\ \lambda/D$), one could have a better sensitivity for all the frequencies compared to the classical ZWFS, but a lower gain overall compared to a Z2WFS.

We have demonstrated that a Z2WFS has significantly improved sensitivity and approaches the ideal FFWFS behavior. When compared to the classical ZWFS, the gain in sensitivity

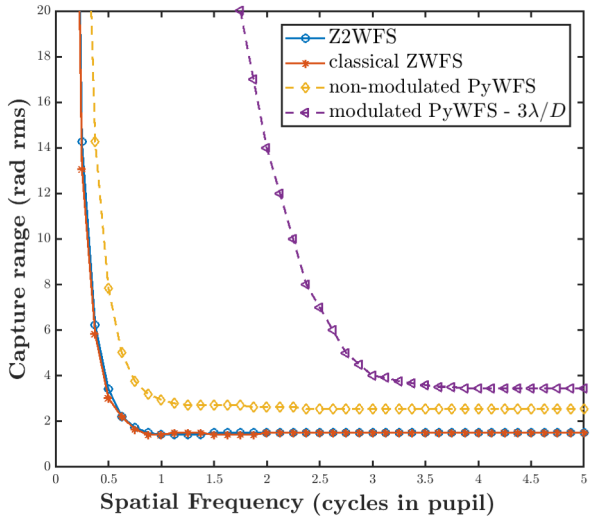


Fig. 8. Capture range of different FFWFSs. The Z2WFS has the same capture range as the classical ZWFS.

for all modes, except the tip-tilt, is a factor of two. In the next section we investigate if this gain in sensitivity comes at the cost of dynamic range.

3.3. Dynamic range

To complete our study we now compare the dynamic range of the Z2WFS with the classical ZWFS. A drastic loss in dynamic range with increasing dot diameter could indeed prevent a practical utilization of the Z2WFS. To calculate this quantity with respect to a given mode ϕ_i, we evaluated its capture range C_{ϕ_i}. To calculate it, we looked at the lowest amplitude value (in absolute value) such that:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Delta I(a\phi_i)}{\mathrm{d}a}\right|_{a_0} = 0\,. \tag{10}$$

We then defined the capture range as $C_{\phi_i} = 2a_0$, where the factor 2 allows one to take negative and positive amplitudes into account in the capture range calculation.

The capture range can be larger than the pure linearity regime. However, we decided to use this definition for two reasons: first because it defines the amplitude below which we are ensured that a closed loop system will eventually converge. Indeed, even if the measurement is no longer linear, there is still a one-to-one correspondence with the input signal. Secondly, the ZWFS measurements are often processed through nonlinear reconstructors (N'Diaye et al. 2013; Steeves et al. 2020) that can be perfectly applied to a Z2WFS or other variations of the ZWFS.

Capture range values for cosine phase modes at frequencies ranging from zero to five cycles in diameter are given in Fig. 8 for Zernike and python WFSs. The PyWFS class has a better capture range over all spatial frequencies, matching the fact that sensitivity and dynamic range are competing properties. This graph also confirms the great benefit in terms of dynamic range provided by the modulation of the PyWFS. More importantly, we see that the Z2WFS exhibits the same capture range as the classical ZWFS for high frequencies and is even higher for the lowest frequencies where the Z2WFS sensitivity falls below that of the classical ZWFS. The Z2WFS is therefore more sensitive than the classical ZWFS while exhibiting the same capture range.

4. Conclusion

In this paper we have provided a physical description of the sensitivity behavior for the ZWFS class, and in particular we have studied the sensitivity evolution for different dot diameters. We have shown that it is possible to significantly improve the current sensitivity of the ZWFS, at the expense of the lower spatial frequencies, simply by increasing the dot diameter. The resulting sensitivity can even almost reach the fundamental limit of FFWFSs. We further studied the specific case of a dot diameter of 2 λ/D, called a Z2WFS, which exhibits an average factor of two gain in sensitivity (with a loss in sensitivity compared to the classical ZWFS only for the tip-tilt modes), without any loss in the dynamic range with respect to the classical ZWFS. This new sensor thus becomes the most sensitive WFS available for ground-based astronomy. It still exhibits the low dynamic range of the ZWFS, but, as for the PyWFS, modulation schemes can be imagined. For instance, one way to increase its linearity range is to dynamically change the dot diameter during one integration time of the sensor camera. Future studies will investigate its practical implementation and the impact of chromaticity on wavefront sensing.

Acknowledgements. This work benefited from the support of the WOLF project ANR-18-CE31-0018 of the French National Research Agency (ANR). It has also been prepared as part of the activities of OPTICON H2020 (2017–2020) Work Package 1 (Calibration and test tools for AO assisted E-ELT instruments). OPTICON is supported by the Horizon 2020 Framework Programme of the European Commission's (Grant number 730890). Authors are acknowledging the support by the Action Spécifique Haute Résolution Angulaire (ASHRA) of CNRS/INSU co-funded by CNES. Vincent Chambouleyron PhD is co-funded by "Région Sud" and ONERA, in collaboration with First Light Imaging. AV acknowledges funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 757561). Finally, part of this work is supported by the LabEx FOCUS ANR-11-LABX-0013, and received the support of Action Spécifique Haute Résolution Angulaire ASHRA.

References

Bloemhof, E. E., & Wallace, J. K. 2003, in Astronomical Adaptive Optics Systems and Applications, eds. R. K. Tyson, & M. Lloyd-Hart, SPIE Conf. Ser., 5169, 309
Dohlen, K., Langlois, M., & Lanzoni, P. 2006, in Ground-based and Airborne Telescopes, ed. L. M. Stepp, SPIE, 6267, 1093
Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., & Sauvage, J.-F. 2015, Opt. Lett., 40, 3528
Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., & Girault, O. 2016, Optica, 3, 1440
Fauvarque, O., Janin-Potiron, P., Correia, C., et al. 2019, J. Opt. Soc. Am. A, 36, 1241
Guyon, O. 2005, ApJ, 629, 592
Jensen-Clem, R., Wallace, J. K., & Serabyn, E. 2012, in 2012 IEEE Aerospace Conference, 1
N'Diaye, M., Dohlen, K., Fusco, T., & Paul, B. 2013, A&A, 555, A94
N'Diaye, M., Vigan, A., Dohlen, K., et al. 2016, SPIE Astron. Telescopes Instr., 9909, 99096S
Ragazzoni, R. 1996, J. Mod. Opt., 43, 289
Rigaut, F., & Gendron, E. 1992, A&A, 261, 677
Ruane, G., Wallace, J. K., Steeves, J., et al. 2020, J. Astron. Telescopes Instr. Syst., 6, 045005
Steeves, J., Wallace, J. K., Kettenbeil, C., & Jewell, J. 2020, Optica, 7, 1267
Vérinaud, C. 2004, Opt. Commun., 233, 27
Vigan, A., N'Diaye, M., Dohlen, K., et al. 2019, A&A, 629, A11
Wallace, J. K., Rao, S., Jensen-Clem, R. M., & Serabyn, G. 2011, in Optical Manufacturing and Testing IX, eds. J. H. Burge, O. W. Fähnle, & R. Williamson, SPIE, 8126, 110
Zernike, F., & Stratton, F. 1934, MNRAS, 94, 377

Appendix A: Convolutional approach: General framework

In the infinite pupil approximation and assuming that the weighting function (energy distribution at the focal plane) ω is a real centro-symmetric function and that the focal-plane mask function m is also centro-symmetric, the transfer function of an FFWFS may be written as:

$$\mathrm{TF} = 2\mathrm{Im}[m \star \overline{m\omega}]\,. \tag{A.1}$$

We only consider in this formalism a pure phase mask for the Fourier filter function m because the global context is the search for WFS sensitivity; as such, we did not consider amplitude-mask, which would result in a waste of photons. Therefore, they are pure phase masks that can be written as $m = e^{i\Delta}$. Moreover, we continued to carry out these mathematical developments in one dimension. The previous Eq. (A.1) becomes:

$$\mathrm{TF}|_f = 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u\ \omega|_u \sin\left(\Delta|_u - \Delta|_{f-u}\right), \tag{A.2}$$

where u is expressed in units of λ/D. We chose to approximate the weighting function as a rectangular and normalized function with a diameter a:

$$\omega|_u = \frac{1}{a}\mathbb{I}_{[-a/2;a/2]}\Big|_u\,. \tag{A.3}$$

The normalization allows one to respect the energy conservation. Furthermore, a may be seen as the characteristic size of the energy distribution at the focal plane. Here, a is therefore the typical size of the modulation of the PyWFS class and corresponds to the PSF characteristic length when modulation is inactive. In other words, the weighting function allows us to take the finite size of the pupil into account despite the "infinite pupil approximation" needed in the convolutional approach.

Appendix B: Zernike WFS class

For the ZWFS, we consider the following mask: a centered dot with a diameter of p and a depth δ. Thus, the phase of the filtering mask equals:

$$\Delta|_u = \delta\,\mathbb{I}_{[-p/2;p/2]}\Big|_u\,. \tag{B.1}$$

The problem being symmetric, the derivation of Eq. (A.2) is only done for positive frequencies, $f \geq 0$. We can distinguish two cases: when the size of the dot is bigger than the PSF (i.e., $p \geq a$) or not (i.e., $p < a$).

Case 1. The dot is larger than the PSF: $p \geq a$.

Case 1.1 $f \geq \frac{p+a}{2}$.

We have $\Delta|_u = \delta$ and $\Delta|_{f-u} = 0$.

$$\mathrm{TF}|_f = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}u \sin\left(\Delta|_u - \Delta|_{f-u}\right) = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}u = 2\sin(\delta)\,. \tag{B.2}$$

Case 1.2 $f < \frac{p+a}{2}$.

In this case, $\Delta|_u - \Delta|_{f-u}$ depends on f. We get:

$$\mathrm{TF}|_f = \max\left(2\sin(\delta) - \frac{1}{a}(p+a-2f)\sin(\delta), 0\right) \tag{B.3}$$

$$= \max\left(\left(2f + 1 - \frac{p}{a}\right)\sin(\delta), 0\right)\,. \tag{B.4}$$

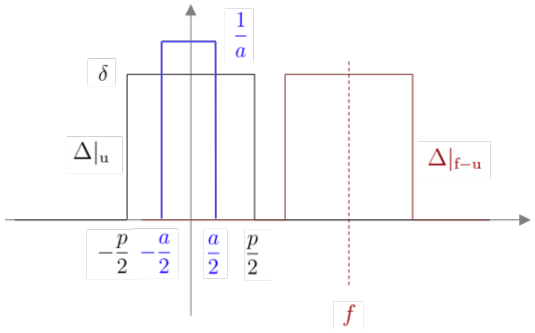


Fig. B.1. ZWFS mask in one dimension with a uniform modulation representing the PSF (in blue), the centered mask $\Delta|u$ (black), and the shifted mask $\Delta|_{f-u}$ (red).

Case 2. The dot is smaller than the PSF: $p < a$.

Case 2.1: $f \geq p$.

We again have $\Delta|_u = \delta$ and $\Delta|_{f-u} = 0$. Consequently, the transfer function equals:

$$\mathrm{TF}|_f = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}u \sin\left(\Delta|_u - \Delta|_{f-u}\right) \tag{B.5}$$

$$= \frac{2}{a}\int_{-p/2}^{p/2} \mathrm{d}u \sin(\delta) = \frac{2p}{a}\sin(\delta)\,. \tag{B.6}$$

Case 2.2: $f < p$.

The $\Delta|_u - \Delta|_{f-u}$ still depends on f. Equation (A.2) becomes:

$$\mathrm{TF}|_f = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}u \sin\left(\Delta|_u - \Delta|_{f-u}\right) \tag{B.7}$$

$$= \frac{2}{a}\int_{-f}^{f} \mathrm{d}u \sin(\delta) = \frac{2f}{a}\sin(\delta)\,. \tag{B.8}$$

The plot corresponding to these results is given earlier in the Letter (Fig. 1).

Appendix C: Pyramid WFS class

We derived Eq. (A.2) for the PyWFS class once more. The phase of the filtering mask now equals:

$$\Delta|_u = \alpha|u|\,. \tag{C.1}$$

Here, α equals $2\pi\theta/\lambda$, where θ is the pyramid apex angle and λ is the sensing wavelength. Equation (A.2) then becomes:

$$\mathrm{TF}|_f = 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u\ \omega|_u \sin\left(\alpha(|u| - |f-u|)\right). \tag{C.2}$$

In the sine, we have:

$$\alpha(|u| - |f-u|) = \begin{cases} -\alpha f & u \in]-\infty; 0] \\ \alpha(2u - f) & u \in]0; f[\\ \alpha f & u \in [f; \infty[\end{cases}. \tag{C.3}$$

Moreover, ω is centro-symmetric so it is possible to reduce the integration interval:

$$\mathrm{TF}|_f = 2\int_{-f}^{f} \mathrm{d}u\ \omega|_u \sin\left(\alpha(|u| - |f-u|)\right). \tag{C.4}$$

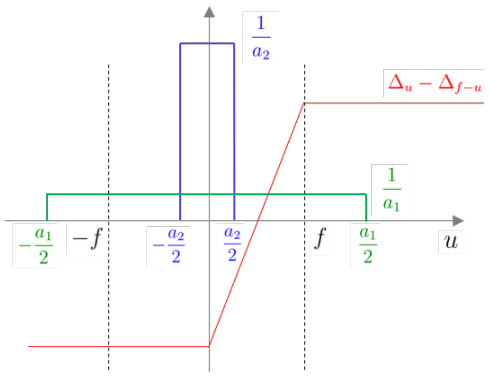


Fig. C.1. In blue (resp. green): case of a weighting function with a small (resp. large) characteristic length; in red, the function of Eq. (C.3).

Figure C.1 allows us to visualize the functions involved in the previous equation. Notably, it appears that the value of the characteristic length of the weighting function over two (i.e., $a/2$, the modulation radius when this device is active) plays a major role in the integration and can be seen as a cutoff frequency. Equation (C.4) becomes:

$$\mathrm{TF}|_f = \frac{2}{a}\left[\int_{-\min(a/2,f)}^{0} \sin(-\alpha f)\mathrm{d}u + \int_{0}^{\min(a/2,f)} \sin\left(\alpha(2u-f)\right)\mathrm{d}u\right] \tag{C.5}$$

$$= \frac{2}{a}\left[\frac{\sin(\alpha \min(a/2,f))\sin[(\min(a/2,f)-f)\alpha]}{\alpha} - \min(a/2,f)\sin(\alpha f)\right]. \tag{C.6}$$

Finally, we get the transfer function of the pyramid class depending on its two optical parameters, namely the pyramid apex angle and the weighting function characteristic size.

$$\mathrm{TF}|_f = \begin{cases} \frac{-2f\sin(\alpha f)}{a} & f \le a/2 \\ \mathrm{sinc}(\alpha a/2)\sin[(a/2-f)\alpha] - \sin(\alpha f) & f > a/2 \end{cases}. \tag{C.7}$$

We can now use this formula to explain the sensitivity with respect to the spatial frequencies of the PyWFS class.

Firstly, we are interested in the influence of the apex angle parameter on the sensitivity. In other words, we studied the difference between classical and flattened pyramids. To do so, we assumed that the modulation is inactive. Consequently, the parameter a is related to the PSF size. Considering a pupil diameter of D, a sensing wavelength of λ, and a imaging focal of f_{oc}, we have:

$$a = \frac{\lambda f_{\mathrm{oc}}}{D}. \tag{C.8}$$

To distinguish between flattened and classical pyramids, we just have to identify the limit apex angle θ_{limit} that allows the pupil images to be totally separated. It can be linked with the pupil diameter and the imaging system focal length via the following formula:

$$\theta_{\mathrm{limit}} = \frac{D}{f_{\mathrm{oc}}}. \tag{C.9}$$

Consequently, if θ is below θ_{limit}, there is an overlap of the pupil images and the pyramid is therefore a flattened one, whereas a

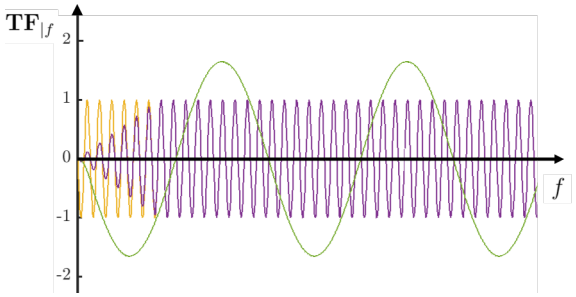


Fig. C.2. Graphical visualization of the transfer function, i.e., Eq. (C.7), for the PyWFS configurations of Fig. 6: non-modulated PyWFS in yellow, modulated PyWFS in purple, and FPyWFS in green.

θ above θ_{limit} implies a complete separation of the pupil images and thus a classical pyramid. If we use the a and α variables, these two cases can be summarized in the following way:

$$a\alpha < \pi \quad \text{Flattened pyramid} \tag{C.10}$$

$$a\alpha \ge \pi \quad \text{Classical pyramid.} \tag{C.11}$$

Such a distinction allows us to explain why the sensitivity of the flattened pyramid may be larger in absolute value than that of the classical pyramid. As a matter of fact, the sinc function in Eq. (C.7) may be significant for some frequencies when $a\alpha$ is small (i.e., for flattened pyramids). Keeping in mind that the sensitivity is linked with the TF via the convolution product of Eq. (8), this shows why the FPyWFS sensitivity may reach 2 when the classical pyramid optimally attains 1. Moreover, the small α implies large oscillations with respect to the spatial frequencies (see the green curve in Fig. C.2). This is relevant regarding the observed sensitivity, which does oscillate (dotted green curve in Fig. 6).

By contrast, if $a\alpha$ is large (i.e., if pupil images are completely separated), the sinc function can be neglected and the transfer function summarized as:

$$\mathrm{TF}|_f = \begin{cases} \frac{-2f\sin(\alpha f)}{a} & f \le a/2 \\ -\sin(\alpha f) & f > a/2 \end{cases}. \tag{C.12}$$

This function can be seen as the transfer function of the classical pyramid. We notice that it oscillates more rapidly than the flattened pyramid one (yellow and purple curves in Fig. C.2). However, these oscillations disappear when we look at the corresponding sensitivity curves (Fig. 6). Such a peculiarity can be explained by Eq. (8): to get the sensitivity curve, the transfer function is convoluted with the PSF, which in this case is larger than the oscillation period. As a result, the transfer function is smoothed and the sensitivity follows the TF envelope.

Concerning this envelope, we can observe two regimes. The first one goes from the null spatial frequency to the modulation radius $a/2$; it is linear with f. The second corresponds to spatial frequencies above the modulation radius; it is constant and equal to 1. We identify here the typical behavior of the classical pyramid (modulated or not) with its two regimes, slope and phase sensors, separated by a cutoff frequency corresponding to the modulation radius (Vérinaud 2004).

The convolutional approach therefore demonstrates its capability to describe the sensitivity of pyramid sensors. It indeed allows a unique formula to be obtained, which explains both the enhanced and oscillating sensitivity of the FPyWFS and the dual behavior slope-phase sensors of the classical modulated PyWFS.