

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue à Aix-Marseille Université
le 07.07.2021 par

Daria KOLIESNIKOVA

Raffinement adaptatif automatique de maillage à précision contrôlée dans un contexte multiéchelle pour la mécanique des solides non linéaire

Discipline

Sciences pour l'ingénieur

Spécialité

Mécanique des Solides

École doctorale

SCIENCES POUR L'INGENIEUR :
Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique

Laboratoire/Partenaires de recherche

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA)

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA)

Composition du jury

• Pierre GOSSELET	Examineur
• Chargé de recherche à l'École Polytechnique Universitaire de Lille	
• Vincent FAUCHER	Examineur
• Ingénieur-Chercheur au CEA Cadarache	
• Frédéric LEBON	Directeur de thèse
• Professeur à Aix-Marseille Université	
• Jean-Charles PASSIEUX	Rapporteur
• Professeur à l'INSA Toulouse	
• Isabelle RAMIÈRE	Encadrante
• Ingénieur-Chercheur au CEA Cadarache	
• Alain RASSINEUX	Rapporteur
• Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne	
• Martin VOHRALÍK	Examineur
• Directeur de recherche à l'INRIA	



Je soussignée, Daria KOLIESNIKOVA, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Frédéric LEBON, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Aix-en-Provence le 3 Mai 2021

Daria Koliesnikova



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Remerciements

Ce travail est le résultat d'une collaboration extrêmement enrichissante avec Isabelle Ramière et Frédéric Lebon – mes encadrants auxquels je voudrais exprimer toute ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier Isabelle pour sa présence, sa disponibilité et ses réponses réactives sur whatsapp (même pendant les week-ends et congés). Sa rigueur scientifique et sa capacité de placer la barre très haut me poussaient constamment à dépasser mes propres limites et m'ont permis d'accomplir avec succès cette thèse. Je la remercie également pour sa gentillesse, son grand coeur et ses rappels réguliers de commit (que je regrette d'avoir parfois esquivé).

Je souhaite aussi exprimer toute ma gratitude à Frédéric pour ses encouragements et son implication. Je le remercie pour ses conseils judicieux et pour nos discussions, dont chacune a été très instructive et fascinante. Je vous remercie tous les deux pour votre confiance en moi, ainsi que pour votre soutien qui m'a été si précieux surtout dans les moments les plus difficiles.

Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance à Jean-Charles Passieux et Alain Rassineux pour m'avoir fait l'honneur de bien voulu rapporter ce travail de thèse. Je remercie également les autres membres du jury, Pierre Gosselet, Martin Vohralík et Vincent Faucher, d'avoir accepté de participer à mon jury. J'ai pris beaucoup de plaisir d'avoir pu échanger avec vous sur différentes questions si passionnantes et souvent ouvertes.

Un autre mot de gratitude va à tous mes collègues du CEA et LMA avec qui j'ai eu la chance de partager de nombreux moments conviviaux ainsi que d'innombrables cafés. Je remercie chacun de vous pour avoir contribué à créer une atmosphère accueillante, pour votre professionnalisme, ainsi que le soutien moral que vous m'avez apporté.

J'aimerais remercier plus particulièrement Bruno Collard, Mireille Bauer et Carole Valot pour avoir suivi mon travail tout au long de ma thèse et de m'avoir permis de finaliser ma thèse dans les meilleures conditions. Merci également à Régine Bousquet et Laure Imbert pour votre bienveillance et votre aide avec de (très) nombreuses démarches administratives.

Mes remerciements vont aussi aux doctorants et aux autres "jeunes" avec qui j'ai eu un immense plaisir de partager tant de choses dont chacune restera gravée dans mon coeur. Merci à Plamen, Jullien, Joane, Thomas, Camille, Jules, Luc, Marie, Akram, Veronica, Piotr, Simon, Issrae, Héla, Allan, Vincent, Didier, Paul, Marie, Youssera, Christelle, Léo, Louis, Aldo pour votre support et votre amitié.

Je voudrais également exprimer toute ma gratitude à mes filles, Hakima, Alina, Daria, Anastasia, Anna, avec qui nous avons partagé de très très nombreux moments (souvent accompagnés de spritz et de la dancing queen). Merci d'être toujours présentes pour moi. Je me considère très heureuse de vous avoir dans ma vie.

Un éternel merci à ma famille qui est toujours là pour moi malgré des milliers de kilomètres qui nous séparent. Leur foi en moi et leur amour me donnent la force d'avancer tout les jours et sont les piliers fondateurs de la personne que je suis aujourd'hui. Je suis de tout mon coeur reconnaissante à mes parents. Sans leur présence, leur soutien et leur amour inconditionnel, rien n'aurait été possible. C'est à eux que je dédie cette thèse.

Résumé

Cette thèse a pour but de proposer une méthode efficace de raffinement adaptatif de maillage (AMR) permettant d'effectuer des calculs de mécanique quasi-statique non linéaire. Dans ce contexte nous nous appuyons sur un algorithme générique AMR entièrement automatique grâce à l'utilisation d'un estimateur d'erreur *a posteriori*. Une attention particulière est portée sur la vérification non seulement de l'erreur de discrétisation globale, mais également de celle locale (élémentaire) qui est importante pour des applications réelles, mais très peu étudiée dans la littérature. Nous nous focalisons sur le raffinement adaptatif de maillages uniquement composés d'éléments quadrilatéraux (2D) ou hexaédriques (3D). Nous introduisons dans le cadre algorithmique AMR adopté les modules de résolution et de raffinement hiérarchique spécifiques à chaque méthode de raffinement local de pas de maillage considérée : méthodes de raffinement *h*-adaptatif, conformes et non-conformes, et méthodes multigrilles locales ou multiniveaux de type Local Defect Correction (LDC). Une étude numérique comparative poussée dans le cas élastostatique permet de mettre en évidence les grandes potentialités de la méthode multigrille locale LDC en terme de temps de calcul pour une précision donnée. L'atout majeur de la méthode LDC réside dans la résolution séparée de problèmes de taille limitée sur l'ensemble des niveaux de maillages.

Nous nous sommes également intéressés dans cette thèse au cadre plus général du couplage numérique multiéchelle. Dans ce cadre, nous avons introduit un formalisme unifié de résolution de problèmes multiéchelles basée sur un couplage itératif multiniveau. Le formalisme proposé permet de définir les liens algorithmiques et conceptuels forts entre les approches AMR multiniveaux et les méthodes d'homogénéisation numérique (de type éléments finis au carré, EF²). Nous montrons que la méthode LDC peut être vue comme une méthode de méso-homogénéisation applicable à des problèmes à faible séparation d'échelles où les approches fondées sur la théorie d'homogénéisation sont limitées.

Finalement, nous proposons une extension algorithmique de la méthode multiniveau LDC à des problèmes de mécanique quasi-statique non linéaire. Nous mettons en évidence l'efficacité de la méthode LDC dans ce contexte et montrons sa capacité naturelle à générer une hiérarchie de maillages qui suit dynamiquement l'évolution en temps du phénomène étudié. Les questions génériques liées au transfert des champs entre les pas de temps ainsi que la problématique du contrôle de l'erreur de discrétisation sur l'ensemble de l'historique sont également abordées. La solution proposée reposant sur la prise en compte du déséquilibre initial sous forme de résidu du problème permet d'efficacement contrôler cette erreur et de ne raffiner le maillage que si nécessaire.

Abstract

The aim of this thesis is to propose an efficient adaptive mesh refinement (AMR) method aiming to solve complex nonlinear mechanical quasi-static problems. In this context, we rely on a fully automatic generic AMR algorithm based on the use of an *a posteriori* error estimator. A particular attention is devoted to the fulfillment not only of the global discretization error, but also of the local (element-wise) one which is important for real applications, but very little studied in the literature. We focus on the adaptive refinement of meshes composed exclusively of quadrilateral ($2D$) or hexahedral ($3D$) elements. We introduce into the adopted algorithmic AMR framework the modules related to the problems resolution and hierarchical mesh refinement associated to each local mesh-step refinement method considered here : h -adaptive methods, conforming and non-conforming, and local multigrid or multilevel Local Defect Correction (LDC) method. A comparative numerical study in the elastostatic context permits to highlight the great potentialities of the local multigrid LDC method in terms of computational time for a given precision. The key advantage of the LDC method lies in the separate resolution of problems of limited sizes on each mesh level.

In this thesis, we are also interested in a more general numerical multiscale framework. In this framework, we have introduced a unified multiscale formalism for methods based on multilevel iterative coupling. The proposed formalism permits to define strong algorithmic and conceptual links between multilevel AMR approaches and numerical homogenization methods (e.g. finite element square FE^2 approach). We show that the LDC method can be seen as a meso-homogenization approach suitable to low-scale separation problems where homogenization-based techniques are limited.

Finally, we propose an algorithmic extension of the LDC multilevel method to nonlinear quasi-static mechanical problems. We highlight the efficiency of the LDC method in this context and show its natural ability to generate a hierarchy of meshes that dynamically follows the evolution over time of the studied phenomenon. Generic questions related to fields transfer between time steps as well as to the discretization error control over time are also addressed. The proposed strategy lies on the introduction of the initial non equilibrated residual as a source term of the problem which enables us to efficiently control the error and adapt the mesh when needed.

Table des matières

Introduction	13
1 Objectifs de la thèse et état de l'art	15
1.1 Contexte industriel	17
1.1.1 Réacteur à eau pressurisée	17
1.1.2 Crayon combustible	19
1.1.3 Modélisation et simulation de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine	21
1.2 Motivations de l'étude	22
1.3 Raffinement adaptatif de maillage (AMR)	23
1.3.1 Généralités sur les méthodes de raffinement adaptatif	23
1.3.2 Maillages quadrilatéraux/hexaédriques	24
1.3.3 Méthodes adaptatives	25
1.3.4 Méthodes multigrilles locales	29
1.3.5 Choix d'une méthode de raffinement	32
1.4 Automatisation du processus de raffinement : estimation d'erreur	33
1.4.1 Problème modèle et notations	34
1.4.2 Estimation d'erreur	35
1.4.3 Choix d'un estimateur d'erreur	40
1.5 Contributions de la thèse	41
2 Algorithme générique AMR intégrant les méthodes de raffinement local de pas de maillage	45
2.1 Introduction : algorithme générique AMR	47
2.2 Résolution du problème : module SOLVE	48
2.2.1 Méthodes <i>h</i> -adaptatives	48
2.2.2 Méthode Local Defect Correction	49
2.3 Estimation d'erreur : module ESTIMATE	52
2.4 Détection des éléments à raffiner : module MARK	53
2.4.1 Sous-module OPTIMALITY	54
2.4.2 Sous-module DETECT	56
2.5 Critères d'arrêt : module STOP	56
2.6 Raffinement du maillage : module REFINE	57
2.6.1 Ratio de raffinement : sous-module RATIO	57
2.6.2 Introduction de zone de sécurité : sous-module SAFE_ZONE	59
2.6.3 Correction du ratio de raffinement : sous-module UPDATE_RATIO	60
2.6.4 Division d'éléments : sous-module DIVIDE	65

2.6.5	Nouveau maillage : sous-module <code>NEW_MESH</code>	67
2.7	Remarques sur la parallélisation	67
2.8	Bilan du chapitre	68
3	Comparaison numérique des méthodes de raffinement de pas de maillage	69
3.1	Introduction	71
3.2	Généralités	71
3.2.1	Problème considéré	72
3.2.2	Détails pratiques de la mise en œuvre des méthodes AMR	72
3.2.3	Post-traitement des résultats	73
3.3	Benchmark académique : plaque trouée	75
3.3.1	Définition du problème	75
3.3.2	Illustrations numériques	76
3.4	Cas test industriel : Interaction mécanique Pastille-Gaine	87
3.4.1	Définition du problème	87
3.4.2	Exemple bidimensionnel	89
3.4.3	Exemple tridimensionnel	92
3.5	Conclusions de l'étude comparative	98
4	Positionnement de la méthode Local Defect Correction dans un contexte d'homogénéisation	101
4.1	Introduction	103
4.2	Modélisation multiéchelle	103
4.3	Problème non linéaire de référence	105
4.4	Méthodes Local Defect Correction et EF ² -hybride	107
4.4.1	Méthode Local Defect Correction	108
4.4.2	Méthode d'homogénéisation numérique EF ²	112
4.5	Cadre unifié pour des méthodes multiniveaux	113
4.6	Bilan du chapitre	116
5	Extension de la méthode Local Defect Correction à des problèmes non linéaires	117
5.1	Introduction	119
5.2	Aspects pratiques de la résolution des problèmes quasi-statiques non linéaires	119
5.2.1	Algorithme de résolution en temps	119
5.2.2	Calcul pratique du résidu LDC non linéaire	120
5.2.3	Transfert des champs	121
5.3	Problème élastique quasi-statique avec un chargement évolutif	125
5.3.1	Stratégie de rééquilibrage	126
5.3.2	Adaptation dynamique du maillage	128
5.4	Optimisation du processus de raffinement et contrôle de la précision	130
5.5	Contrôle de l'erreur sur l'historique : modèle élasto-plastique	133
5.6	Application de la méthode LDC au problème d'IPG avec comportement visco-plastique	139
5.7	Bilan du chapitre	144

Conclusions et perspectives	145
Annexes	147
A Techniques de lissage de contraintes pour l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz et Zhu	147
Liste des algorithmes	151
Liste des figures	152
Liste des tableaux	155
Bibliographie	157

Introduction générale

Les dernières décennies ont été marquées par un progrès significatif du calcul scientifique qui a eu un impact important sur l'ensemble des domaines scientifiques, de la recherche à l'industrie. Actuellement, les scientifiques s'appuient de plus en plus dans leurs développements sur les modélisations et simulations numériques qui sont devenues les deux étapes inhérentes à pratiquement tout domaine.

Un rôle crucial dans l'industrie contemporaine est joué par le développement d'algorithmes et de méthodes numériques sophistiqués permettant de trouver des solutions rapides et fiables à des problèmes de plus en plus complexes afin de modéliser et prédire au mieux les phénomènes réels.

En parallèle, l'évolution constante de la modélisation et la simulation numérique est accompagnée par la croissance des capacités de calcul. Le Calcul Haute Performance (*High Performance Computing* ou *HPC* en anglais) est devenu un outil fondamental de la recherche scientifique, technologique et industrielle. À l'échelle internationale, le CEA ¹ fait figure de pionnier dans le domaine du HPC et en est l'un des principaux acteurs. Le CEA héberge les deux supercalculateurs ² les plus puissants dédiés à la recherche en France.

Malgré les avancées des méthodes numériques et la croissance récente des capacités de calcul, de nombreux problèmes restent exigeants en coût de calcul ou voire insolubles numériquement. Trouver une solution numérique à un problème faisant intervenir de nombreux phénomènes localisés à différentes échelles (microstructures hétérogènes, fissures, concentrations ou singularités de contraintes, ...), tout en intégrant plusieurs non-linéarités (matérielles, géométriques, d'interfaces, ...) en est un excellent exemple.

Dans le domaine du nucléaire, la compréhension de l'ensemble des phénomènes se produisant lors de l'irradiation, notamment avec le recours à leur simulation numérique précise, est une approche qui prend de plus en plus d'importance vis-à-vis des démarches de sûreté et de conception. Ce travail s'inscrit dans le cadre des études du comportement des combustibles nucléaires. Dans ce contexte, un des phénomènes examinés est le contact localisé entre la pastille de combustible et la gaine l'entourant, phénomène appelé Interaction mécanique Pastille-Gaine (IPG ou IMPG). Afin de garantir l'intégrité de la gaine, première barrière de confinement des produits de fission, ce phénomène doit être étudié et simulé avec la meilleure précision. Pour ce faire, un maillage avec des éléments de taille d'un micromètre localement est nécessaire pour une pastille de l'ordre du centimètre, soit un rapport de 10000. L'utilisation d'un maillage fin uniforme conduirait à des simulations très coûteuses, voire même numériquement inabordables actuellement. De plus, l'un des défis majeurs est de pouvoir simuler numériquement de façon précise et efficace l'évolution en temps du phénomène de l'IPG.

Par conséquent, il a été décidé de s'appuyer sur des méthodes de raffinement adaptatif de maillage

1. Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA), www.cea.fr

2. Supercalculateurs Tera-1000-2 et Joliot-Curie, cf. *TOP500* (www.top500.org) – liste de 500 systèmes informatiques les plus puissants disponibles sur le marché

(AMR), permettant de réduire l'effort de calcul en adaptant automatiquement le maillage dans des régions localisées autour des zones d'intérêt (ici les zones de concentration de contraintes). L'utilisation de ces approches permettrait de suivre l'évolution du contact entre la pastille et la gaine au cours du temps en s'appuyant sur un maillage dynamique raffiné localement. L'objectif de cette thèse est alors de proposer un outil numérique performant qui permettrait d'effectuer des calculs mécaniques non linéaires précis localement et ainsi dépasser des limitations auxquelles la simulation du comportement des combustibles nucléaires est confrontée actuellement.

Cette thèse se place à l'interface de deux mondes : le monde académique à travers des développements théoriques et méthodologiques et le monde industriel via l'applicabilité de l'outil développé à la problématique nucléaire. Le caractère générique et transverse de l'ensemble de contributions théoriques, algorithmiques et pratiques construit durant cette thèse dépasse largement le domaine du combustible nucléaire. En effet, les méthodes de raffinement adaptatif trouvent leur intérêt dans de nombreux domaines, comme l'aéronautique, l'automobile, le génie civil, etc.

Ces travaux sont réalisés dans le cadre du projet SICOM (SIMulation COMbustible) dédié au développement de la plateforme PLEIADES³ – la plateforme de simulation multiphysique et multiéchelle du comportement des combustibles nucléaires (de différentes filières de réacteurs) sous irradiation, en situation normale, incidentelle et accidentelle.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des liens étroits existants entre le CEA Cadarache et le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du CNRS, en particulier à travers le laboratoire sans mur MISTRAL (Modelling Inspection and characterization of materials and STRuctures for Advanced Low carbon energies), commun entre le CEA, le LMA, Aix-Marseille Université et l'École Centrale Marseille.

3. Plateforme Logicielle pour les Éléments Irradiés dans les Assemblages en Démonstration, en Expérimentation ou en Service, co-développée depuis 2003 par CEA, EDF (Électricité de France, www.edf.fr) et FRAMATOME (ex-AREVA, www.framatome.com)

Chapitre 1

Objectifs de la thèse et état de l'art

Ce chapitre consiste à positionner les travaux de la thèse dans un contexte industriel lié à la simulation du comportement des combustibles nucléaires mais aussi à donner des éléments bibliographiques quant aux méthodes qui seront utilisées par la suite. L'objectif de ce chapitre est alors de fournir des pistes pour répondre à la problématique industrielle qui s'articule autour de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine – un des phénomènes se produisant lors de l'irradiation du combustible d'un Réacteur à Eau Pressurisée.

Sommaire

1.1	Contexte industriel	17
1.1.1	Réacteur à eau pressurisée	17
1.1.2	Crayon combustible	19
1.1.3	Modélisation et simulation de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine	21
1.2	Motivations de l'étude	22
1.3	Raffinement adaptatif de maillage (AMR)	23
1.3.1	Généralités sur les méthodes de raffinement adaptatif	23
1.3.2	Maillages quadrilatéraux/hexaédriques	24
1.3.3	Méthodes adaptatives	25
1.3.4	Méthodes multigrilles locales	29
1.3.5	Choix d'une méthode de raffinement	32
1.4	Automatisation du processus de raffinement : estimation d'erreur	33
1.4.1	Problème modèle et notations	34
1.4.2	Estimation d'erreur	35
1.4.3	Choix d'un estimateur d'erreur	40
1.5	Contributions de la thèse	41

1.1 Contexte industriel

Selon les données de l'*International Energy Agency*¹, la part du nucléaire en France constitue 71% de l'électricité produite (chiffres 2019), comme illustré sur la Figure 1.1, ce qui en fait un pays fortement axé autour de l'énergie nucléaire. L'énergie nucléaire est très attractive non seulement grâce à un fonctionnement sans émission de CO₂, mais aussi grâce au fait qu'elle possède une exceptionnelle densité d'énergie. Pour donner un ordre de grandeur, 1 gramme d'uranium produit la même quantité d'électricité que 2 tonnes de fioul ou 3 tonnes de charbon.

L'industrie nucléaire, néanmoins, fait l'objet de nombreux débats notamment suite à l'accident de Tchernobyl en 1986 et de Fukushima en 2011. La maîtrise de sa sûreté est très exigeante et implique un renforcement des normes vis-à-vis de la conception et gestion des centrales nucléaires, le traitement des déchets considérés comme dangereux, etc.

Dans cette optique, la compréhension de l'ensemble des phénomènes se produisant à l'intérieur d'un réacteur nucléaire en service ou lors de stockage de déchets, est un enjeu majeur. L'impossibilité d'expérimenter certains phénomènes physiques due à la non faisabilité technique (par exemple le comportement des installations nucléaires en situation accidentelle) ou le coût financier exige le recours à leur modélisation et simulation numérique. La modélisation/simulation est alors un outil indispensable pour guider la conception, le dimensionnement, la prévision ou encore l'optimisation des réacteurs ou des centres de stockage.

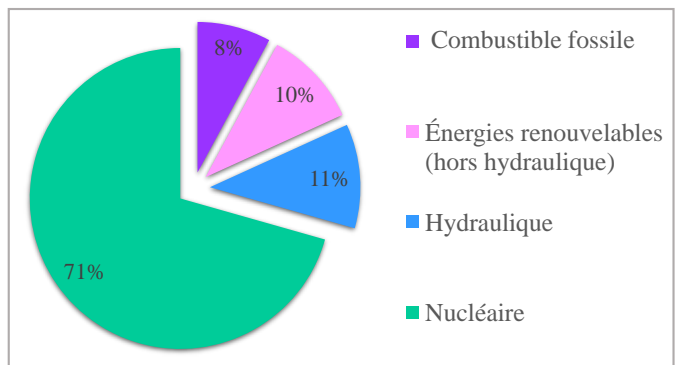


Figure 1.1: Production d'électricité en 2019, source : IEA

1.1.1 Réacteur à eau pressurisée

À l'échelle mondiale, plus de 80% du parc électro-nucléaire en fonctionnement est constitué des réacteurs de la filière où l'eau joue le rôle de fluide caloporteur et de modérateur, avec une part des Réacteurs à Eau Pressurisée (abrégé REP) de 69%. Quant à la France, la totalité du parc électro-nucléaire français est composé de REP, avec 56 réacteurs en service, répartis sur 18 sites. Nous nous focaliserons dans ce document sur la filière des Réacteurs à Eau Pressurisée dont le fonctionnement est brièvement rappelé ici. Nous exposons également quelques généralités sur le crayon combustible qui sera au cœur des problématiques de cette thèse. Ces travaux sont cependant directement applicables aux combustibles des réacteurs bouillants ou encore RNR-Na.

Le schéma de principe du fonctionnement d'une centrale nucléaire de type REP est illustré sur la Figure 1.2. Un REP est composé de 3 circuits :

1. International Energy Agency (IEA), www.iea.org

Le circuit primaire. Les réactions de fission en chaîne, source d'énergie, se produisent dans les assemblages de combustibles au cœur du réacteur. La fission consiste à casser des noyaux lourds sous l'effet d'une collision avec un neutron. Cela conduit à la division en deux atomes plus petits, l'émission de neutrons, et s'accompagne de la libération d'énergie. Cette énergie est récupérée sous forme de chaleur par l'eau, qui atteint plus de 300°C, maintenue sous forme liquide grâce à une forte pression de 155 bars.

Le circuit secondaire. La transmission de la chaleur de l'eau du circuit primaire à l'eau du circuit secondaire est effectuée à l'aide d'un échangeur de chaleur – le générateur vapeur. Étant soumise à une plus faible pression (70 bars), l'eau secondaire va entrer en ébullition. La vapeur ainsi produite entraîne la rotation d'une turbine qui est à son tour couplée au turboalternateur qui convertit l'énergie mécanique en énergie électrique.

Le circuit de refroidissement. La vapeur est ensuite retransformée en eau à l'aide d'un condenseur, refroidi par de l'eau de mer ou de rivière.

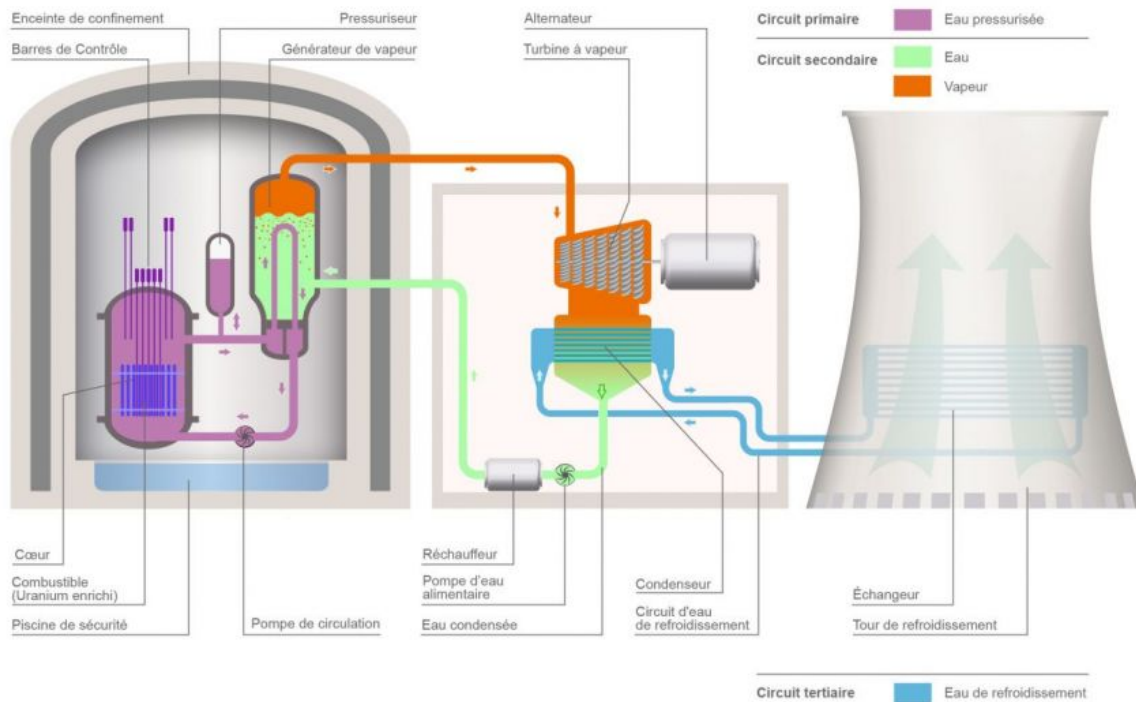


Figure 1.2: Principe de fonctionnement d'un Réacteur à Eau Pressurisé, source : *Connaissance des Énergies*

Les trois barrières de confinement des produits de fission sont contenues dans le bâtiment du réacteur. La première est la gaine enveloppant les crayons combustibles qui a pour le but de retenir les produits radioactifs créés lors de la réaction de fission. La seconde est une enveloppe métallique autour du circuit primaire. La troisième est une enceinte de confinement du réacteur en béton de forte épaisseur.

1.1.2 Crayon combustible

Gaine et pastille combustible

À titre d'exemple, le cœur d'un REP d'une puissance de 900 MWe est constitué de 157 assemblages de combustibles, ce qui correspond à environ 41000 crayons chacun contenant environ 300 pastilles de combustible (environ 11 millions de pastilles au total). Un cœur de la dernière génération EPR, le réacteur pressurisé européen, contient 241 assemblages correspondant à environ 19 millions de pastilles.

Les crayons combustibles (cf. Figure 1.3) sont constitués de tubes appelés aussi gaine d'une hauteur approximative de 4 mètres, de 9.5 mm de diamètre extérieur et d'environ 0.6 mm d'épaisseur.

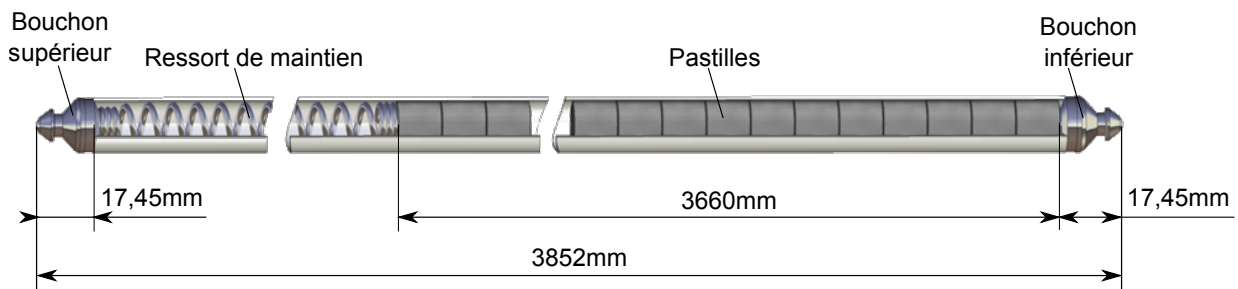


Figure 1.3: Schéma d'un crayon combustible

La gaine, constituant la première barrière d'étanchéité aux matières radioactives, doit être résistante à la corrosion de l'eau, avoir une grande transparence aux neutrons, une grande conductivité thermique et disposer d'un bon comportement mécanique en particulier sous irradiation. Ces raisons ont conduit au choix du zirconium ou de ses alliages (zircaloy), comme matériau de gaine. La durée de vie d'un assemblage en cœur REP est de 4 à 5 ans en moyenne.

Les pastilles de combustible, composées de dioxyde d'uranium (UO_2) enrichi en noyaux fissiles (uranium 235) ou d'un mélange d'uranium et de plutonium appelé MOX (Mixed Oxide), sont empilées dans les crayons.

Afin d'alimenter la réaction de fission, la proportion de noyaux fissiles (uranium 235) dans le combustible UO_2 est généralement enrichie entre 3% et 5% (contre 0.7% dans l'uranium naturel). Le MOX est un mélange de 5% à 7% de plutonium (issu de retraitement de combustible utilisé) mélangé au dioxyde d'uranium non enrichi.

Le combustible se présente sous forme de pastilles cylindriques d'une hauteur de 13.5 mm et de 8.2 mm de diamètre. Les caractéristiques géométriques d'une pastille sont présentées sur la Figure 1.4. Une pastille

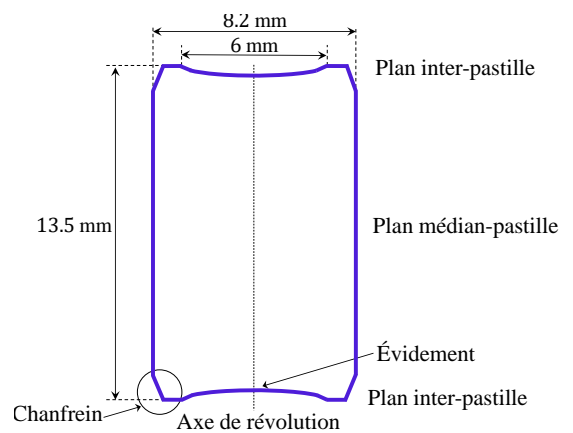


Figure 1.4: Dimensions d'une pastille de combustible d'un REP 900 MWe

présente un évidement hémisphérique à ses deux extrémités dont l'objectif est de compenser l'excès de dilatation thermique du centre de la pastille. Un chanfrein permet de faciliter l'introduction de celle-ci à l'intérieur de la gaine et est destiné à accommoder une partie de la déformation en forme de diabolo induite par un fort gradient thermique.

Interaction Pastille-Gaine

Lors de l'irradiation, on assiste à deux phénomènes caractérisant l'Interaction mécanique Pastille-Gaine, voir Figure 1.5 :

- Dès le début de l'irradiation, les pastilles combustibles se fissurent et subissent le gonflement dû à la rétention des gaz de fission. D'autre part, la gaine flue sous la pression du fluide caloporteur. Cela provoque la fermeture du jeu pastille/gaine (initialement de l'ordre de $80\ \mu\text{m}$) et ainsi conduit progressivement au contact entre la pastille et la gaine au bout de quelques mois de fonctionnement (typiquement une vingtaine de mois).
- Le fort gradient de température entre le cœur de la pastille et sa périphérie conduit à un phénomène de déformation sous forme de diabolo. Dû à cette forme de diabolo le contact entre la pastille et la gaine apparaît d'abord en face du plan inter-pastille.

L'ensemble de ces phénomènes induit une concentration des contraintes importante dans la gaine au niveau des plans inter-pastilles, en particulier en face des fractures radiales de la pastille. Cette zone de la gaine, appelée point triple, se retrouve exposée à l'initiation et au développement de fissures. La présence des contraintes et des déformations maximales au niveau du point triple a été confirmée par les études expérimentales [1] et numériques [2, 3].

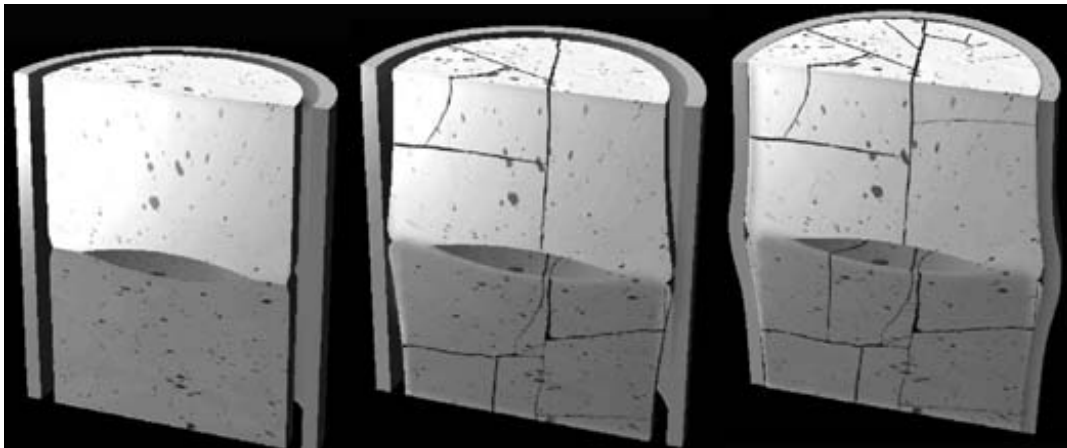


Figure 1.5: Illustration de la fracturation des pastilles, de la déformation en diabolo et de l'évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de l'irradiation

Durant le fonctionnement normal, l'IPG ne provoque pas la défaillance de la gaine. Néanmoins, la maîtrise de l'IPG pour tous les transitoires d'exploitation (classe 1) et pour tous les transitoires incidentels (classe 2, probabilité d'occurrence supérieure à 1% par réacteur et par an) est cruciale vis-à-vis de la démarche de sûreté de l'élément combustible des REP. La connaissance encore plus

fine des mécanismes conduisant à l'IPG permettrait de prédire plus précisément le comportement du crayon en différentes situations, d'optimiser la robustesse du combustible et du cœur d'un réacteur.

1.1.3 Modélisation et simulation de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine

Dans le domaine de la modélisation du combustible nucléaire, le CEA figure au premier plan à l'échelle internationale. L'application ALCYONE [4, 5], destinée à la simulation du comportement des combustibles de la filière REP, est développée par le CEA et ses partenaires à l'intérieur de la plateforme logicielle PLEIADES [6, 7]. Ce logiciel a été établi à base des développements mis au point dans les antérieurs METEOR [8] et TOUTATIS [9], et permet d'intégrer un ensemble des phénomènes complexes de nature très variée (neutronique, thermique, mécanique, physico-chimie, etc.) se produisant lors de l'irradiation des combustibles de REP.

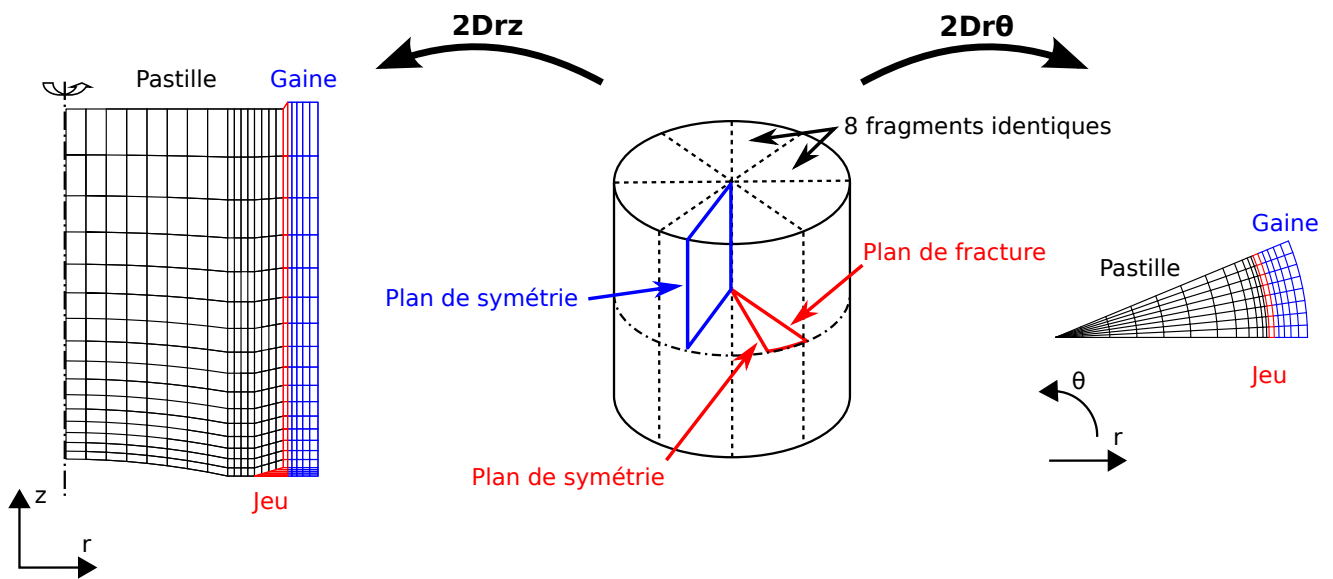


Figure 1.6: Modélisations 2D d'une pastille de combustible nucléaire et de la partie de gaine correspondante dans ALCYONE

Dans ALCYONE, deux modélisations 2D sont généralement utilisées pour étudier le comportement du combustible, cf. [2, 4]. Deux phénomènes (la déformation en diabolisme et la fragmentation des pastilles) caractérisant l'IPG, sont représentés séparément, voir Figure 1.6 :

- Une configuration 2D axisymétrique, ou $2D(r, z)$, consiste à modéliser la déformation en diabolisme de la pastille, cf. partie gauche de la Figure 1.6. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la hauteur de la pastille est représentée.
- Une configuration 2D sous l'hypothèse des déformations planes, ou $2D(r, \theta)$, représente l'effet de la fissuration de la pastille sur le chargement de la gaine, cf. la partie droite de la Figure 1.6.

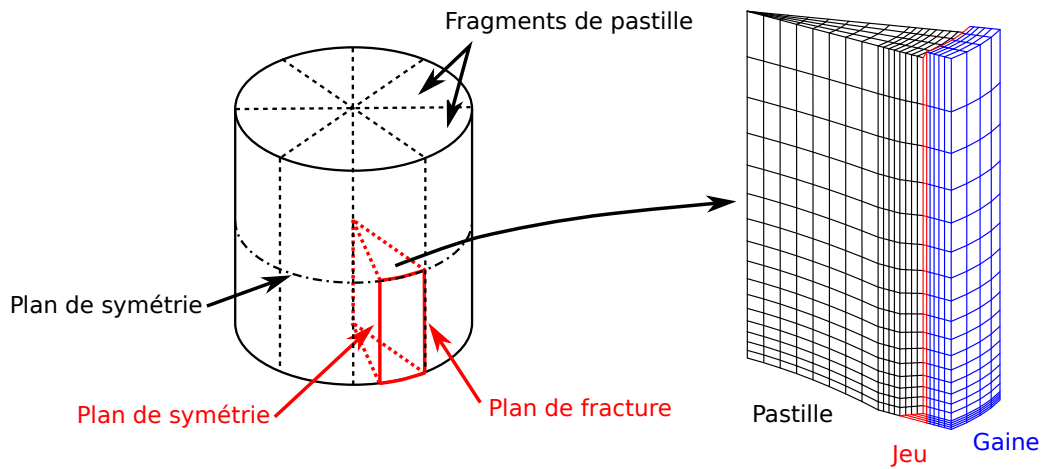


Figure 1.7: Modélisation 3D d'une pastille de combustible nucléaire et de la partie de gaine correspondante dans ALCYONE

Seul 1/16-ème du plan inter-fragment est modélisé, car la pastille est supposée se fissurer de manière régulière, cf. [10].

La modélisation 3D regroupe ces deux phénomènes, voir Figure 1.7. Cette modélisation s'appuie sur les mêmes hypothèses géométriques que les deux modélisations 2D. Ainsi, on modélise une représentation géométrique d'1/32ème de la pastille et de la partie de la gaine l'entourant.

1.2 Motivations de l'étude

La problématique industrielle à adresser consiste à améliorer l'approche utilisée actuellement pour la simulation de l'IPG. En effet, il a été montré dans de nombreuses études qu'un maillage fin avec des éléments de l'ordre d'un micromètre dans chaque direction est nécessaire afin de capturer avec précision la concentration de contraintes au point triple dans le cas tridimensionnel (cf. Figure 1.7). L'approche actuellement utilisée dans ALCYONE consiste à s'appuyer sur un maillage conforme généré *a priori* avec des éléments plus fins concentrés autour du point triple, cf. un exemple du maillage sur la Figure 1.7. Un tel maillage est alors non-uniforme avec une distribution d'éléments effectuée de façon à concentrer les éléments au mieux dans la zone critique. Cependant, la taille d'éléments atteinte localement n'est pas suffisamment fine. De plus, comme ce maillage est construit de façon manuelle *a priori*, il ne tient potentiellement pas compte de la zone critique réelle et ne permet pas de suivre l'évolution du contact pastille-gaine en temps. Un autre défaut important est qu'un tel maillage implique des éléments dégénérés, très étirés et aplatis, ce qui détériore le conditionnement des systèmes et conduit à une convergence très lente voire à des erreurs d'approximation.

L'objectif de cette thèse est de se doter d'un algorithme de raffinement adaptatif de maillage dépassant les limitations auxquelles la simulation mécanique du comportement du combustible nucléaire est actuellement confrontée. L'approche proposée doit permettre d'utiliser un maillage évolutif (suit l'évolution de phénomène étudié en temps) et raffiné localement permettant d'atteindre la précision voulue, tout en limitant le coût de calcul.

Ce travail s'inscrit dans une réflexion générale autour de la mise en place de stratégies de raffinement adaptatif de type multiniveau initiée dans les travaux [11, 12] menés au sein du Laboratoire de Simulation du Comportement des Combustibles du CEA Cadarache. Motivés par l'applicabilité des méthodes multigrilles locales sur des comportements élastiques linéaires [11] et des non linéarités de type contact-frottement [12], nous nous focalisons sur la justification de leur intérêt industriel en mécanique quasi-statique, mais également sur l'extension de ces méthodes pour des comportements non linéaires des matériaux.

La simulation de phénomènes localisés aux échelles macroscopique ou mésoscopique nécessitant souvent des calculs locaux plus fins est une problématique qui dépasse largement le domaine du combustible nucléaire et concerne de nombreux domaines d'applications (aéronautique, automobile, naval, etc.). Par conséquent, un grand soin a été apporté dans cette thèse pour rendre les algorithmes proposés génériques et applicables à une large classe de problèmes.

1.3 Raffinement adaptatif de maillage (AMR)

1.3.1 Généralités sur les méthodes de raffinement adaptatif

Dans de nombreux domaines, la modélisation et la simulation numériques des problèmes faisant intervenir des phénomènes complexes localisés à différentes échelles restent toujours des enjeux. Pour ces problèmes, une solution locale précise est souvent indispensable afin de bien capturer le phénomène étudié. Il est illusoire de penser pouvoir simuler ces problèmes en utilisant un maillage uniforme de taille de mailles fine nécessaire pour capturer tous les phénomènes les plus fins. Une approche alternative est de s'appuyer sur une méthode de couplage multiéchelle. Le choix de l'approche numérique à appliquer est généralement régi par le paramètre de séparation d'échelles entre la dimension de la structure et le phénomène que l'on cherche à représenter.

Dans le cas de notre étude, nous nous intéressons à des problèmes à faible séparation d'échelles. Ces problèmes intègrent des phénomènes localisés à l'échelle proche de celle de la structure, comme notamment des comportements des matériaux non linéaires, des géométries complexes, des conditions aux limites discontinues, ou des fissures.

Parmi de nombreuses imprécisions et erreurs accompagnant inévitablement la modélisation et la simulation numérique (par exemple, l'erreur de modélisation, l'erreur de discrétisation ou encore l'erreur numérique) [13], dans cette étude nous cherchons à maîtriser l'*erreur de discrétisation*. L'erreur de discrétisation se produit en raison de l'approximation de la solution en utilisant une technique de discrétisation (différences finies, éléments finis, volumes finis, etc.). Nous nous focalisons dans cette thèse sur l'erreur de discrétisation spatiale. La discrétisation spatiale (ou le maillage), support des

calculs, joue un rôle important et conditionne le rapport qualité de la solution/coût de calculs. Par conséquent, un maillage bien choisi permet d'atteindre la précision souhaitée tout en limitant le coût de calcul.

Afin de bien représenter les phénomènes localisés étudiés, un maillage avec des éléments suffisamment fins doit être utilisé. Les méthodes de raffinement adaptatif de maillage (AMR) permettent d'ajuster automatiquement le maillage lors de calculs en l'enrichissant localement dans des régions critiques où la solution est moins régulière et l'erreur de discrétisation est élevée. Ces approches permettent alors d'atteindre une précision souhaitée à un coût numérique généralement attractif. Une méthode AMR se base sur deux aspects clés : génération de maillage raffiné et résolution du problème donné sur ce maillage. L'idée des approches AMR consiste à générer un maillage raffiné localement afin de réduire l'erreur de discrétisation en $\mathcal{O}(h^p)$. Le raffinement est effectué soit par la réduction locale du pas de maillage h , soit via l'augmentation de degré des fonctions d'interpolation p , soit les deux combinées. Les spécificités du maillage raffiné généré avec une méthode AMR conditionnent la procédure de résolution.

Parmi de nombreuses méthodes AMR développées, deux groupes principaux peuvent être distingués : les méthodes adaptatives et les méthodes multigrilles locales.

1.3.2 Maillages quadrilatéraux/hexaédriques

Actuellement, les maillages dits conformes aux frontières (*boddy-fitted mesh* en anglais) restent majoritaires dans l'industrie. Ces maillages s'appuient sur le domaine physique d'étude et donc prennent en compte la géométrie du domaine. Les maillages structurés ou non-structurés, composés par exemple des triangles/rectangles en $2D$, des tétraèdres/hexaèdres en $3D$, ou de leur mélange, sont générés en fonction de la géométrie du domaine.

Les maillages composés d'éléments quadrilatéraux/hexaédriques (également couramment appelés les *maillages quad/hexa*) sont souvent utilisés en pratique pour simuler différents phénomènes physiques (mécanique des solides, dynamique des fluides, ...). La génération robuste et efficace des maillages quad/hexa pour de vraies géométries industrielles reste toujours une question ouverte. Cependant, les maillages quad/hexa sont intéressants pour leur structure de type produit tensoriel (matrices à faible taille de bande, efficacité, flexibilité de raffinement [14, 15, 16]) et offrent des propriétés de modélisation remarquables [17, 18, 19], pas de difficulté particulière pour gérer les relations de contact unilatéral [20, 2] ou la plasticité [21]. Les éléments quad/hexa bénéficient en plus d'une approximation d'ordre plus élevé permettant de mieux saisir les variations d'ordre supérieur, et de plus, d'éviter les phénomènes de verrouillage rencontrés avec les triangles/tétraèdres [22].

Motivé par un intérêt croissant pour les maillages quad/hexa et par leurs avantages, il a été décidé dans cette étude de traiter exclusivement ce type d'éléments.

Le panorama des méthodes AMR issues de deux classes mentionnées précédemment est explicités par la suite pour les maillages quad/hexa considérés dans cette thèse.

1.3.3 Méthodes adaptatives

Le but des techniques adaptatives est de fournir un maillage global (couvrant l'ensemble du domaine de calcul) raffiné localement. Nous allons introduire dans cette partie certaines méthodes adaptatives les plus connues, se différenciant par la façon dont le maillage est raffiné.

Méthode *h*-adaptative

Les stratégies basées sur l'ajustement de la taille h des éléments, ou méthodes *h*-adaptatives [23, 24, 25], semblent être les méthodes adaptatives les plus connues. Elles consistent à ajouter des éléments plus fins dans des zones d'intérêt, tout en conservant le type d'interpolation. La popularité des méthodes *h*-adaptatives provient de leur simplicité et leur efficacité. Ces méthodes permettent d'obtenir des taux de convergence optimaux, en particulier lorsque des singularités sont présentes [26].

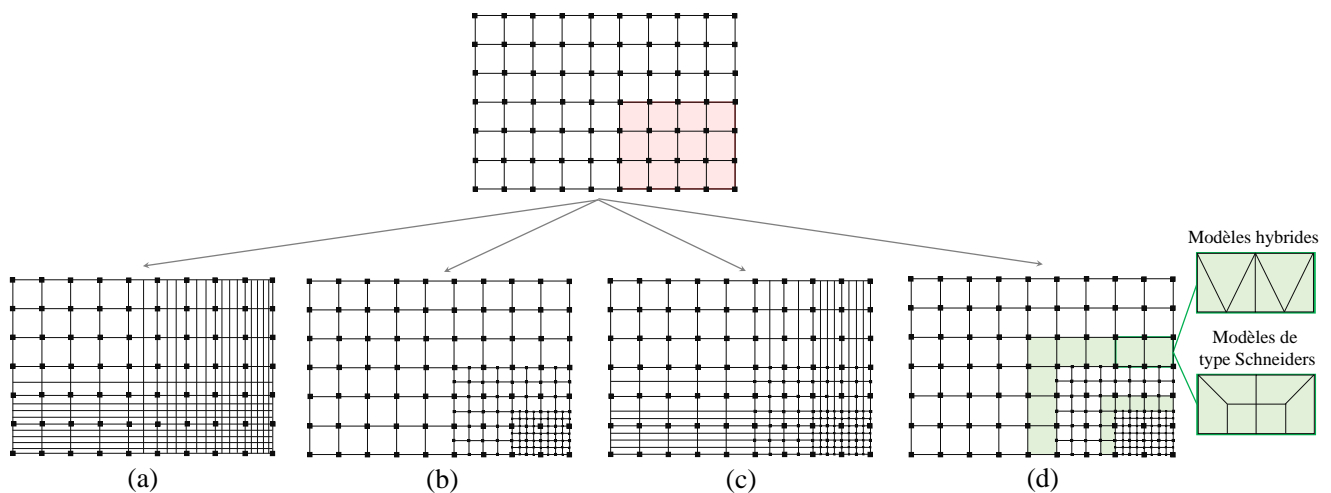


Figure 1.8: Maillages raffinés générés avec différentes stratégies *h*-adaptatives

Dans le cadre du raffinement de type *h*-adaptatif, deux procédures pour générer un maillage raffiné sont généralement considérées [27, 28]. La première procédure repose sur le remaillage complet du domaine. Ce schéma de raffinement prend en entrée une distribution estimée de pas de maillage et produit un maillage raffiné (généralement conforme) à l'aide d'un générateur de maillage (mailleur), cf. Figure 1.8a. Le maillage raffiné obtenu est, cependant, difficilement contrôlable par l'utilisateur et peut être loin de la distribution prescrite [28].

La deuxième procédure, également appelée le raffinement hiérarchique, consiste à enrichir le maillage existant se basant sur la division des éléments qui nécessitent le raffinement en plusieurs éléments. Contrairement à la stratégie de remaillage complet, l'approche hiérarchique est générique et permet de mieux contrôler le raffinement/déraffinement grâce à une structure de données hiérarchique explicite.

On peut distinguer quelques techniques de raffinement hiérarchique. La stratégie la plus simple consiste à ne subdiviser que les éléments nécessitant le raffinement (voir Figure 1.8b). Cette ap-

proche conduit généralement (surtout pour des maillages quad/hexa) à des maillages non-conformes (avec des nœuds non-conformes ou *hanging nodes* en anglais). Ces approches requièrent certaines modifications algorithmiques permettant de maintenir la continuité de la solution. Il existe plusieurs approches pour gérer les relations de non-conformité (par exemple [29, 30, 31, 32, 33]).

D'autre part, la génération de maillages quad/hexa conformes raffinés de façon hiérarchique peut être une tâche complexe. Plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature. On peut nommer une classe d'approches basée sur des *sheet operations* (voir l'article de synthèse de [34]). Ces techniques consistent à substituer certaines couches (dites feuilles, ou *sheets* en anglais) d'éléments par des couches constitués d'éléments plus raffinés. Parmi ces stratégies on peut nommer les algorithmes dits *dicing* [35], *pillowing* [36] ou *matching* [37]. Un exemple d'un maillage conforme hiérarchique associé est illustré sur la Figure 1.8c. Ces approches peuvent être facilement implémentées dans un code de calcul existant et permettent de conserver la structure (topologie géométrique) du maillage d'origine. Cependant, les zones raffinées sont naturellement étendues.

Une autre classe de techniques est basée sur des modèles (ou *templates*) de raffinement, comme l'approche de Schneiders [38] pour les maillages structurés et son extension à des maillages non-structurés [39]. Un exemple de ce type de modèles est donné sur la Figure 1.8d bas. Ces stratégies n'intègrent que les éléments quad/hexa et permettent de conserver le caractère local du raffinement. Cependant, elles sont assez loin d'être triviales à mettre en œuvre et donc nécessitent un générateur de maillage dédié. Une autre stratégie consiste à utiliser des maillages hybrides (mélange des éléments, triangles et quadrangles par exemple) pour rendre le maillage conforme [40], cf. Figure 1.8d haut. Cette technique nécessite un solveur pouvant traiter les différents types d'éléments.

Méthode p -adaptative

L'idée de la stratégie p -adaptative [41, 42] est de garder le maillage initial fixe et d'augmenter localement le degré d'interpolation des fonctions de forme, cf. Figure 1.9.

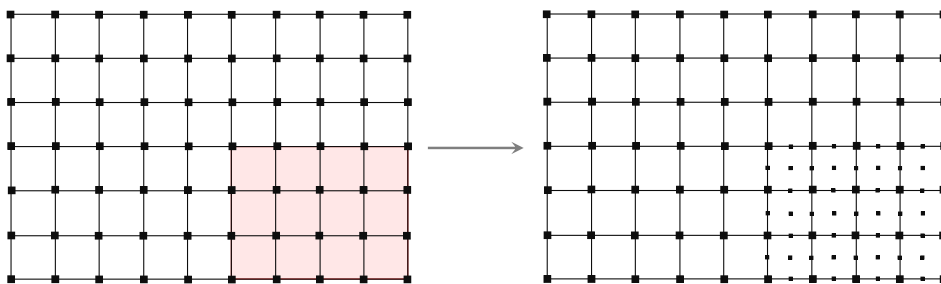


Figure 1.9: Maillages raffinés générés avec la stratégie p -adaptative

Souvent, des fonctions de formes hiérarchiques sont utilisées lors de la mise en œuvre du raffinement p -adaptatif [43, 44], cf. Figure 1.10. Cela consiste à ajouter des fonctions de forme d'ordre supérieur aux fonctions de formes existantes afin d'obtenir le degré d'approximation souhaité. Évidemment, toute fonction représentable par la base standard peut également être représentée par l'ensemble des fonctions de base hiérarchiques.

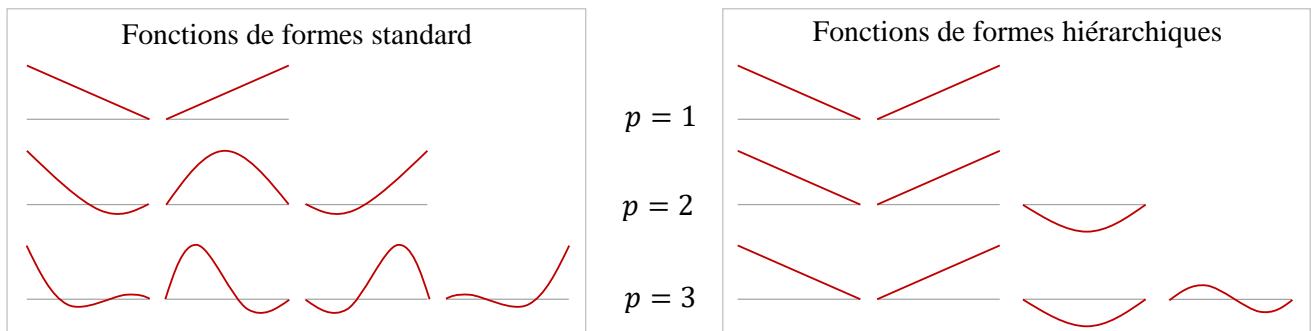


Figure 1.10: Fonctions de formes unidimensionnelles standard et hiérarchiques

Il a été montré dans les années 1980 que la version p des méthodes adaptatives converge exponentiellement dans la norme énergie pour des problèmes linéaires elliptiques avec une solution suffisamment régulière [45]. Malgré ces propriétés de convergence très attractives, son applicabilité à des problèmes complexes rencontrés en mécanique des solides a été mise en doute depuis longtemps, car le raffinement p -adaptatif ne semblait pas réalisable dans certains cas [46] : structures minces (coques), ou encore problèmes non linéaires élastoplastiques, par exemple. En effet, les éléments d'ordre élevé sont assez rarement employés en pratique au sein de la communauté de la mécanique des solides en raison du manque de régularité de la solution sous-jacente et de l'effet de verrouillage potentiel [47]. Par conséquent, la plupart des solveurs d'éléments finis industriels actuels impliquent généralement des formulations avec des éléments d'ordre $p = 2$ maximum.

Méthode r -adaptative

La méthode r -adaptative [48, 49] se base sur la relocalisation des nœuds vers les zones d'intérêt, cf. Figure 1.11. La position des nœuds est ainsi optimisée de façon à minimiser l'erreur. L'application de cette approche conduit à la résolution d'un problème d'optimisation où les coordonnées des nœuds sont les variables. La connectivité, la topologie du maillage, le type d'interpolation et le nombre de nœuds restent inchangés.

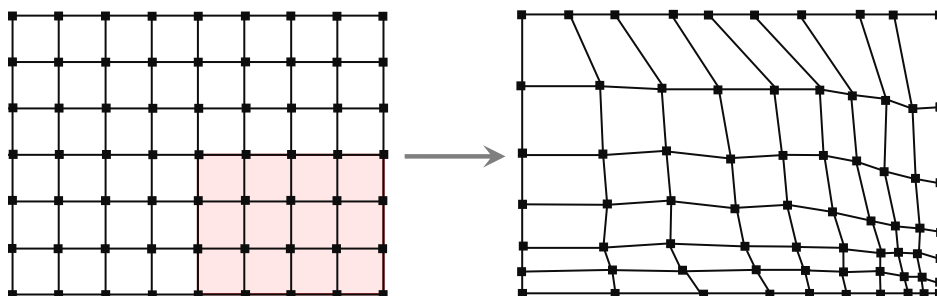


Figure 1.11: Maillages raffinés générés avec la stratégie r -adaptative

La méthode r -adaptative est peu coûteuse du fait du nombre fixé d'éléments utilisés ainsi que

de la connectivité inchangée. Étant relativement simple à mettre en œuvre, le principal inconvénient de l'approche r -adaptative est la limitation du nombre de nœuds conditionnée par la discrétisation initiale. Dans le cas où le maillage initial est assez grossier, la précision qui peut être atteinte par la méthode r -adaptative est vite limitée. De plus, le déplacement des nœuds conduit souvent à une distorsion des éléments, ce qui peut également limiter la précision. Cette approche est alors assez peu utilisée en pratique.

Méthode s -adaptative

La méthode s -adaptative consiste à ajouter un ensemble de niveaux de maillages de plus en plus raffinés dans les zones critiques [50, 51], cf. Figure 1.12. Un problème composite complet défini sur tous les niveaux est assemblé et ensuite résolu. Le traitement spécifique des relations d'interface (type accrochage) entre les niveaux de maillage est évidemment nécessaire. Le couplage des degrés de liberté de tous les niveaux dans un seul problème composite conduit à résoudre un système d'équations d'une grande dimension.

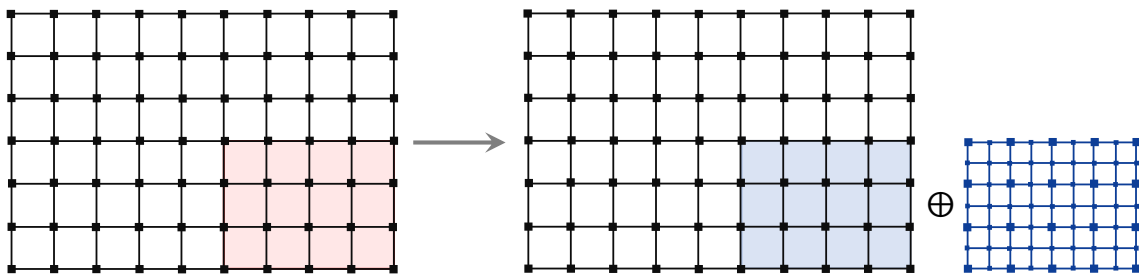


Figure 1.12: Maillages raffinés générés avec la stratégie s -adaptative

Méthodes combinées

Le taux de convergence et l'efficacité des techniques AMR peuvent être augmentés de manière significative en couplant différentes méthodes mentionnées précédemment.

Parmi les méthodes combinées, la méthode hp -adaptative est la plus connue [52, 53, 30, 54, 55]. Cette approche vise à combiner la version p de raffinement au raffinement local du pas de maillage de type h -adaptatif, permettant d'atteindre des taux de convergence exponentiels pour certains problèmes. Ces méthodes nécessitent par ailleurs des critères indiquant le type de raffinement à appliquer sur les éléments.

On peut également mentionner des méthodes hr -adaptatives [56, 57, 58], rp -adaptatives [59, 60] ou encore rs -adaptatives [61]. Ces différentes versions ont été développées avec l'objectif évident d'atteindre une plus grande précision avec un coût de calcul limité.

Méthode CHARMS

Une approche alternative à la version p des méthodes adaptatives est celle basée sur une division hiérarchique des fonctions de base [62, 63, 64]. Ces techniques sont connues sous le nom de *CHARMS* – *Conforming Hierarchical Adaptive Refinement MethodS* en anglais. La méthode CHARMS consiste à raffiner les fonctions de base de manière hiérarchique conforme à travers une combinaison linéaire de fonctions de base du même ordre (p inchangé) déterminée sur les éléments raffinés. Le maillage raffiné généré est conforme par construction quelle que soit la dimension de l'espace ou l'ordre des fonctions de base [64], mais cette technique nécessite de développer un solveur dédié, dont la mise en œuvre vis-à-vis des codes de calculs industriels existants peut être intrusive.

1.3.4 Méthodes multigrilles locales

Une classe de méthodes alternatives à des approches de type h -adaptatives ou encore à des stratégies multiniveaux s -adaptatives sont les méthodes multigrilles locales [65, 66, 67, 68]. Ces méthodes sont également appelées en anglais *Multi-Level Adaptive Techniques* (cf. les travaux de Brandt [65]) ou *Locally adaptive multigrid methods* (cf. l'étude [69]).

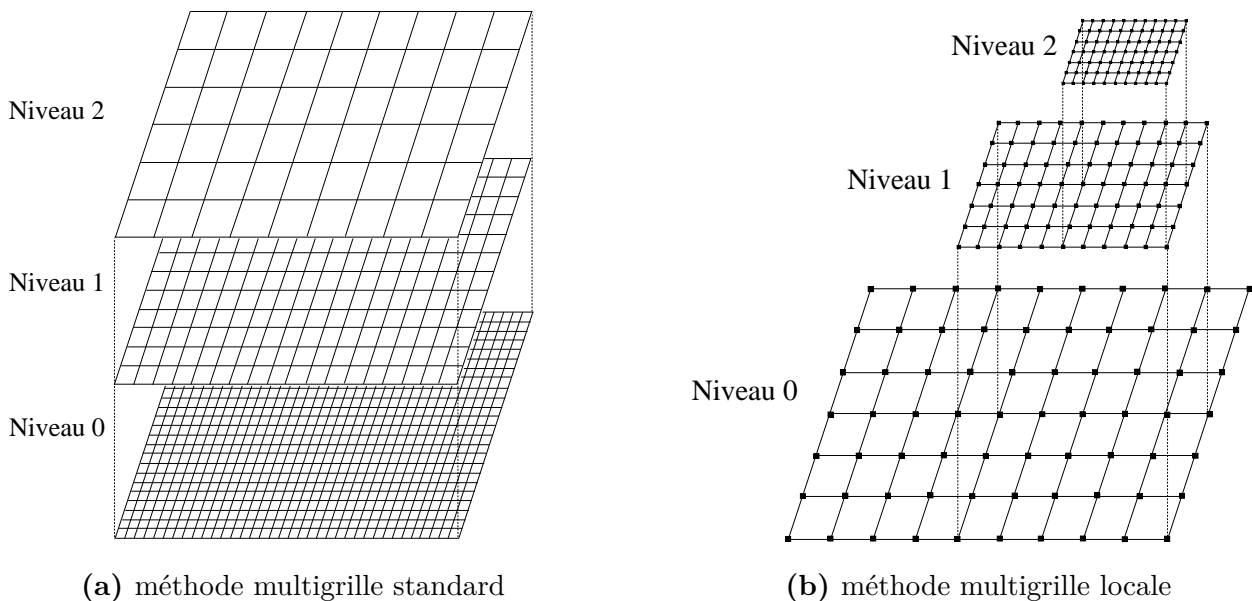


Figure 1.13: Hiérarchie de grilles : (a) méthode multigrille standard ; (b) méthode multigrille locale

Ces approches sont inspirées des méthodes multigrilles standards qui consistent à accélérer la convergence d'un calcul sur un maillage très fin en utilisant une hiérarchie des maillages globaux déraffinés, cf. Figure 1.13a. Les solutions sur ces différents niveaux couvrant l'ensemble du domaine de calcul sont successivement lissées, jusqu'à atteindre la convergence sur la grille initiale la plus fine. Ces approches exploitent une résolution itérative basée sur les opérateurs de transfert : l'opérateur de restriction permet de transmettre un résidu d'un niveau fin vers un niveau grossier, tandis que

l'opérateur de prolongement consiste à transmettre une correction d'un niveau grossier vers un niveau fin.

Les méthodes multigrilles locales exploitent une hiérarchie de grilles inverse, cf. Figure 1.13b. Introduites dans un contexte de raffinement de maillage multiniveau, l'idée des méthodes multigrilles locales est de fournir une possibilité pour "zoomer" le domaine de calcul dans les régions d'intérêt et ainsi d'améliorer localement la précision de la solution tout en corrigeant la solution grossière. Partant d'un maillage grossier initial couvrant tout le domaine Ω , ces techniques consistent à ajouter des niveaux de maillages avec des éléments de plus en plus fins uniquement dans les régions où une précision plus élevée est requise, voir Figure 1.13b. Étant générique et flexible, les méthodes AMR multiniveaux permettent de changer le ratio de raffinement, le modèle, le solveur, le maillage (les niveaux de maillages pas forcément hiérarchiques), etc. entre chaque niveau (voir par exemple [70, 71]).

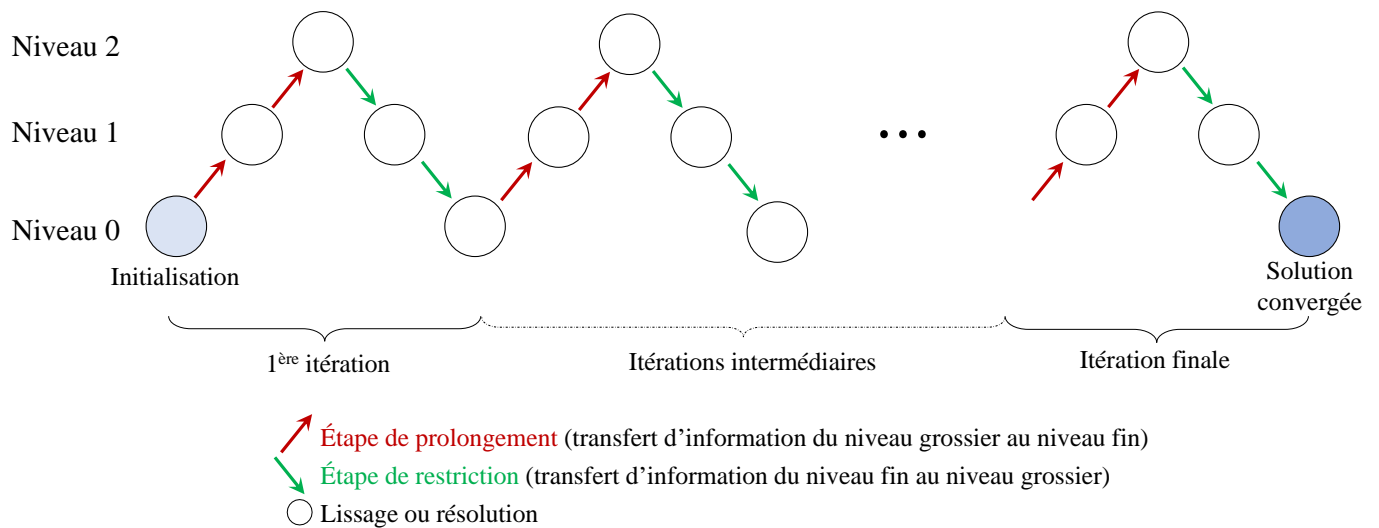


Figure 1.14: Algorithme itératif multigrille local basé sur sur Λ -cycles avec trois sous-niveaux de maillages et les opérateurs de transfert

Ces techniques se basent sur une combinaison du raffinement adaptatif et de la résolution itérative de type multigrille sur plusieurs niveaux. Contrairement à des méthodes h ou s -adaptatives, la résolution multigrille locale consiste à résoudre les problèmes locaux définis sur chaque niveau séparément et de relier les solutions avec un processus itératif de type multigrille [67], voir Figure 1.14. Ce processus implique des opérateurs de transfert n'agissant que comme pré- et post-traitements rendant la mise en œuvre des méthodes multigrilles locales non-intrusive vis-à-vis des solveurs existants. À l'instar des méthodes multigrilles standard, deux types d'opérateurs de transfert sont utilisés. L'opérateur dit de prolongement sert à définir les conditions aux limites (généralement de type Dirichlet) du problème fin à partir du problème grossier. L'opérateur dit de restriction a pour but de calculer un résidu du problème grossier à partir de la solution fine restreinte. De nombreuses méthodes de raffinement multigrilles locales, différant par l'étape de restriction [68], ont été proposées. Nous en

présentons ici les plus connues.

Fast Adaptive Composite

La méthode Fast Adaptive Composite (FAC) [72, 73] introduit un problème composite intermédiaire entre deux niveaux de grille. Cette grille composite contient à la fois l'ensemble des nœuds de la grille fine complétée par des nœuds de la grille grossière. L'opération de restriction consiste à calculer un résidu composite sur ce problème intermédiaire, qui est utilisé pour corriger simultanément les solutions fine et grossière. La méthode FAC se prête bien à la parallélisation, comme le confirment les études [74, 75, 76]. Le principal inconvénient de la méthode réside dans le fait de devoir traiter un problème composite.

Flux Interface Correction

La méthode Flux Interface Correction (FIC) [77] s'appuie sur la conservation des flux entre les niveaux de raffinement. Cette approche permet de corriger la solution de chaque niveau par un résidu en flux. Ce résidu est obtenu sur chaque face des volumes de contrôle du niveau grossier à partir de la différence de flux sur ces faces entre le niveau immédiatement plus fin et le niveau grossier.

Étant généralement utilisée dans le cadre de schémas de discrétisation conservatifs (méthode des volumes finis, par exemple), cette approche a été quasi exclusivement utilisée pour des problèmes de mécanique des fluides [78, 79, 80].

Local Defect Correction

La méthode Local Defect Correction a été proposée dans [70]. Pour la méthode LDC, l'étape de restriction consiste à corriger la solution du niveau grossier via un résidu (également appelé *défaut*) obtenu à partir de la solution immédiatement plus fine restreinte sur le niveau grossier sur la zone de recouvrement. Il a été montré dans [70] que contrairement à la méthode multigrille standard, l'opérateur de restriction local n'a pas besoin d'être le transposé de l'opérateur de prolongement pour assurer la convergence. L'analyse théorique de la méthode LDC a été faite dans [81].

L'algorithme LDC étant très générique, il a été appliqué avec succès sur diverses méthodes de discrétisation pour résoudre un large spectre de problèmes. Par exemple, en utilisant la discrétisation par différences finies, la méthode LDC a été appliquée à la combustion en [82], ou à des problèmes de convection-diffusion dans [83]. L'utilisation de l'approche LDC dans le cadre de la méthode des volumes finis est adressée dans [84, 85], et son applicabilité à la méthode d'élément de frontière est montrée dans [86]. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, elle a été utilisée pour des problèmes de mécanique des fluides, voir par exemple [87, 14], et récemment pour des problèmes de mécanique des solides dans [88, 89, 20].

Local Full MultiGrid

La méthode Local Full MultiGrid (FMG) [90, 91, 21] consiste à relier les niveaux locaux de raffinement générés avec un processus itératif de type Full MultiGrid [67]. Chaque nouveau sous-niveau est ajouté après convergence du processus itératif sur des sous-niveaux établis précédemment

(cf. Figure 2.3 dans le chapitre suivant). Ainsi, les niveaux plus fins ne sont ajoutés que si la solution déjà convergée n'est pas suffisamment précise. Ce processus itératif est basé sur une suite de M -cycles. La méthode FMG locale est assez proche de l'approche LDC. La principale différence réside dans l'opérateur de prolongement, qui, pour la méthode FMG, vise à définir une estimation initiale de la solution fine à partir de l'interpolation de la solution grossière. L'opérateur de restriction est identique à celui de la méthode LDC.

Contexte multimodèle

Il faut noter que les méthodes multigrilles locales peuvent être facilement exploitées dans un contexte multimodèle. Le concept multiniveau des méthodes multigrilles locales permet d'utiliser des modèles différents sur différents niveaux : des modèles locaux appropriés sont utilisés dans les zones critiques où le modèle global n'est plus représentatif.

L'extension dans un contexte multimodèle s'avère intéressante dans le cas où le problème présente des zones localisées particulières. Une série de techniques, appelées méthodes globales/locales non intrusives (ou *non intrusive global/local coupling methods* en anglais) ont été développées pour traiter des problèmes avec des phénomènes localisés, tels que les non-linéarités géométriques [92], régions de plasticité locale [93], fissures [94], etc. Ces techniques se rapprochent des méthodes de décomposition de domaine [95] généralement avec recouvrement, et exploitent différents outils de transfert d'informations entre les niveaux : par exemple entre des niveaux de modèles de différentes dimensions [96], maillages incompatibles via l'approche de [97] ou de type zoom structural [98]. Généralement, le couplage entre les niveaux est effectué de façon itérative avec des conditions aux limites imposées sur les interfaces entre les niveaux. Une autre stratégie dont la philosophie est assez proche est la méthode de type s -adaptative appelée Arlequin [99, 100, 101]. La formulation Arlequin consiste à obtenir sur la zone de recouvrement une solution qui peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des solutions obtenues sur chaque niveau.

1.3.5 Choix d'une méthode de raffinement

Afin de répondre à la problématique industrielle posée dans cette thèse, la méthode de raffinement adoptée doit offrir la meilleure précision pour des problèmes dont la solution manque de régularité dans des régions très localisées à l'échelle de la structure (singularités locales, zones de plasticité localisées, etc.). Une autre contrainte de ce travail consiste à utiliser le solveur industriel en "boîte noire", ce qui impose à la méthode retenue de permettre une implémentation la moins intrusive possible. Cela concerne les deux aspects, le raffinement de maillage ainsi que la résolution du problème sur le maillage généré.

Les méthodes basées sur le raffinement local du pas de maillage (par exemple méthodes h -, r -, s -adaptatives, CHARMS et multigrilles locales) semblent être les plus adaptées dans notre contexte. L'applicabilité des approches p -adaptatives en présence des singularités et leur mise en œuvre dans des solveurs industriels (généralement conçus pour traiter des éléments d'ordre deux maximum) sont limités. Le principal inconvénient de l'approche r -adaptative est la limitation du nombre de nœuds

régie par la discrétisation initiale. Dans la méthode s -adaptative, tous les degrés de liberté des niveaux de maillages générés sont résolus simultanément, ce qui rend cette technique similaire à une technique de type h -adaptatif mais plus coûteuse vis-à-vis des résolutions implicites considérées dans ce travail. À son tour, la technique CHARMS nécessite de développer un solveur dédié, dont la mise en œuvre peut être intrusive.

Il faut également noter que nous adoptons dans cette étude la stratégie de raffinement hiérarchique, où le maillage initial (qui peut être issu du modèle CAD, effectué avec un générateur de maillage, ...) est raffiné en divisant les éléments nécessaires. Cette approche semble être plus générique et robuste comparée à la stratégie basée sur le remaillage complet. Par ailleurs, comme il a été décidé de traiter les maillages composés exclusivement d'éléments quad/hexa, les approches faisant intervenir les éléments d'autres types (maillages hybrides) ne seront pas considérées par la suite.

Par conséquent, dans ce travail nous choisissons de nous appuyer sur les deux classes de méthodes AMR visant le raffinement local du pas de maillage h mais qui exploitent des processus de résolution conceptuellement différents : stratégies h -adaptatives et méthodes multigrilles locales.

Parmi les techniques de type h -adaptatif, les deux approches suivantes sont considérées : technique h -adaptative hiérarchique *non-conforme* (cf. Figure 1.8b) et technique h -adaptative hiérarchique *conforme* (cf. Figure 1.8c). Le raffinement avec la méthode h -adaptative non-conforme conduit à des maillages non-conformes qui nécessitent des contraintes supplémentaires pour maintenir la continuité de la solution. La technique conforme adoptée ici vise à conserver la conformité du maillage grâce au raffinement basé sur des opérations sur des couches [34].

Parmi les méthodes multigrilles locales, la méthode Local Defect Correction (LDC), appliquée précédemment avec succès à des problèmes de mécanique avec singularité locales [88, 89, 20, 102], semble être la technique de raffinement multiniveau la plus appropriée. La méthode LDC peut être vue comme une méthode h -adaptative non-conforme où chaque sous-niveau est résolu séparément de façon conforme (grâce au processus itératif).

1.4 Automatisation du processus de raffinement : estimation d'erreur

Indépendamment de la méthode AMR choisie, il est nécessaire de pouvoir détecter les zones à raffiner. Lorsque le problème et le phénomène étudiés sont bien connus, les zones à raffiner peuvent être déterminées *a priori* grâce aux connaissances de l'utilisateur. Une approche alternative plus automatique consiste à utiliser un estimateur d'erreur – un outil permettant d'évaluer la qualité de la solution numérique et ainsi détecter de façon plus précise les zones critiques où le raffinement est nécessaire (régions où l'erreur de discrétisation est importante).

Nous introduisons ici un problème modèle élastostatique linéaire à partir duquel la majorité des estimateurs disponibles pour la mécanique des solides a été développée. Ce problème nous servira alors de référence pour présenter la notion d'estimation d'erreur.

1.4.1 Problème modèle et notations

Problème élastostatique linéaire

Nous introduisons ici un problème classique de mécanique élastostatique. Soit D la dimension de l'espace physique. Un solide élastique occupe dans sa configuration de référence un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Les bords $\Gamma_{\mathbf{D}}$ et $\Gamma_{\mathbf{N}}$ forment la frontière $\partial\Omega$ de Ω et vérifient $\Gamma_{\mathbf{D}} \cup \Gamma_{\mathbf{N}} = \partial\Omega$ et $\Gamma_{\mathbf{D}} \cap \Gamma_{\mathbf{N}} = \emptyset$.

Soient \mathbf{u} le champ de déplacements, $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ les champs des contraintes et de déformations, respectivement, \mathbf{f} la densité volumique d'efforts définis sur Ω , et \mathbf{C} le tenseur des modules d'élasticité d'ordre 4. Le problème à résoudre s'écrit :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathbf{D}} & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{D}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_{\mathbf{N}} & \text{sur } \Gamma_{\mathbf{N}} \end{cases} \quad (1.1)$$

Les conditions aux limites de type Dirichlet (un déplacement donné $\mathbf{u}_{\mathbf{D}}$) sont imposées sur $\Gamma_{\mathbf{D}} \neq \emptyset$, tandis que les conditions aux limites de Neumann sont appliquées sur $\Gamma_{\mathbf{N}}$, avec \mathbf{n} vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de Ω et $\mathbf{F}_{\mathbf{N}}$ la force exercée. Le problème est alors bien posé au sens où l'existence et l'unicité de la solution en déplacements et en contraintes sont garanties.

La solution exacte $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ du problème donné est le couple de champ de déplacement cinématiquement admissible satisfaisant les relations de compatibilité de (1.1) et défini comme

$$\mathbf{u}_{CA} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \text{ continu et régulier dans } \Omega \text{ et } \mathbf{v} = \mathbf{u}_{\mathbf{D}} \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{D}}\} \quad (1.2)$$

et de champ des contraintes statiquement admissible satisfaisant

$$\boldsymbol{\sigma}_{SA} = \{\boldsymbol{\tau}; -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \text{ et } \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \mathbf{F}_{\mathbf{N}} \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{N}}\} \quad (1.3)$$

Formulation variationnelle

Soit $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par :

$$H^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega); \partial_i \mathbf{v} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, D\} \quad (1.4)$$

où $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable.

Soit \mathcal{V}^0 l'espace vectoriel des champs de déplacements admissibles à 0 défini tel que :

$$\mathcal{V}^0 = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^D; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{D}}\} \quad (1.5)$$

ainsi que l'ensemble associé \mathcal{V} des champs cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^D; \mathbf{v} = \mathbf{u}_{\mathbf{D}} \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{D}}\} \quad (1.6)$$

La formulation variationnelle est obtenue en multipliant l'équation d'équilibre, première expression de (1.1), par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0$, en l'intégrant sur le domaine Ω et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$(\mathcal{PV}) : \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \end{cases} \quad (1.7)$$

avec les définitions suivantes de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et linéaire $\ell(\cdot)$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ \ell(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\mathbf{N}}} \mathbf{F}_{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_{\mathbf{N}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le problème (1.7) admet une solution unique selon le théorème de Lax-Milgram – l'un des fondements de la méthode des éléments finis.

Approximation par la méthode des éléments finis

Afin de résoudre numériquement le problème présenté, dont la formulation variationnelle (1.7) est de dimension infinie, il est nécessaire de se ramener à un problème de dimension finie. La méthode la plus employée dans le cadre de la mécanique des structures, et celle adoptée dans ce document, est la méthode des éléments finis (EF) [103, 104, 43]. Dans ce document, on considérera la méthode des EF de Lagrange en déplacements.

On cherche alors une approximation $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$ de la solution $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, avec $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ étant de dimension finie. L'espace \mathcal{V}_h^0 , $\mathcal{V}_h^0 \subset \mathcal{V}^0$, est également de dimension finie. Le problème (1.7) approché s'écrit :

$$(\mathcal{PV}_h) : \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^0 \end{cases} \quad (1.9)$$

En se basant sur la méthode des éléments finis en déplacements, le champ \mathbf{u}_h est cinématiquement admissible (satisfait donc l'expression (1.2)). En ce qui concerne le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_h$, il est obtenu à partir des déplacements \mathbf{u}_h en utilisant la relation de comportement (la deuxième équation de (1.1)) et vérifie alors la relation de comportement. Cependant, $\boldsymbol{\sigma}_h$ n'est généralement pas statiquement admissible localement (ne satisfait pas (1.3)).

1.4.2 Estimation d'erreur

Nous allons présenter les techniques utilisées afin de quantifier l'erreur de discrétisation. L'erreur de discrétisation peut être définie comme $\mathbf{e}^u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ en terme de déplacements, ou de façon similaire, comme $\mathbf{e}^\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h$, en terme de contraintes. On s'appuie généralement sur les normes Hilbertiennes (norme L^2 , norme H^1 , semi-norme H^1 ou encore la norme énergie) afin de mesurer ces erreurs.

Estimateurs d'erreur a priori

Les analyses fonctionnelles de la méthode des éléments finis [103, 104] s'apparentent à des premières estimations de l'erreur de discrétisation. Ces premiers estimateurs ne nécessitent pas le calcul de la solution approchée du problème et sont donc qualifiés d'*estimateurs d'erreur a priori*. Ils consistent, sous certaines hypothèses, à évaluer l'erreur et à prédire le taux de convergence de l'erreur commise par le calcul par éléments finis.

On montre l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^\alpha \quad (1.10)$$

avec $\|\cdot\|$ une norme sur les champs de déplacements, et les constantes C et α regroupant plusieurs paramètres.

Ces estimateurs apportent des informations importantes sur le taux de convergence, cependant, ils ne sont pas suffisants pour estimer avec précision l'erreur de discrétisation. Cela s'explique par le fait qu'en pratique les valeurs de C et de α sont souvent difficiles à évaluer. La constante C dépend du problème (solution exacte, propriétés de la solution exacte, conditions aux limites, etc.), alors que le paramètre $\alpha = \min(q, p)$ où p est l'ordre des fonctions d'interpolation utilisées et q dépend de la nature du problème à résoudre. Ainsi, pour des problèmes présentant des singularités, la valeur de q correspond à l'ordre de ces singularités (par exemple, en présence d'une fissure $q = \frac{1}{2}$).

Il faut également noter que ces estimations sont globales et ne donnent pas la possibilité d'accéder à des contributions locales (par zones ou éléments). Cela rend ces estimateurs difficilement exploitables dans le contexte de raffinement adaptatif du maillage. Néanmoins, l'utilisation de ces informations s'avère utile afin de déterminer une distribution de la taille d'éléments (du pas de maillage) lors du raffinement de maillage.

Estimateurs d'erreur a posteriori

Par l'opposition à l'estimation *a priori*, les *estimateurs d'erreur a posteriori* bénéficient de la solution approchée calculée pour estimer l'erreur de discrétisation. Leur application succède alors la résolution d'un problème par une méthode de discrétisation choisie.

Une fonction $\zeta(\mathbf{u}_h, h, d)$ faisant intervenir la solution approchée du problème \mathbf{u}_h , la discrétisation h et les données du problème d , est qualifiée d'une estimation d'erreur *a posteriori* globale si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq \zeta(\mathbf{u}_h, h, d) \quad (1.11)$$

où $\zeta(\mathbf{u}_h, h, d)$ est une quantité calculable.

On peut également représenter cette fonction globale (définie sur tout le maillage \mathcal{G}) avec des contributions locales (par élément $T \in \mathcal{G}$) :

$$\zeta(\mathbf{u}_h, h, d) = \left(\sum_{T \in \mathcal{G}} \zeta_T^2(\mathbf{u}_h, d) \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

Dans le cadre de l'adaptation de maillage, cette distribution élémentaire de l'erreur de discrétisation est exploitée afin d'automatiser le raffinement de maillage.

Le principe des estimateurs *a posteriori* est d'associer au couple de solutions calculées $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)$ un couple, noté $(\mathbf{u}_h^*, \boldsymbol{\sigma}_h^*)$, qui est considéré comme étant une meilleure approximation de la solution réelle. Les différentes stratégies proposées pour estimer l'erreur se ramènent à la construction de ce nouveau couple de solutions.

Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques.

La technique d'estimation d'erreur basée sur les bases hiérarchiques [105, 106, 21] semble être la technique la plus simple. Son principe consiste à comparer deux solutions du même problème obtenues en utilisant deux schémas de discrétisation de précisions différentes.

La solution "améliorée" \mathbf{u}_h^* est obtenue en résolvant un même problème sur un maillage avec des éléments plus raffinés ou des fonctions de forme d'ordre plus élevé. L'erreur de discrétisation est ainsi évaluée comme la différence entre la solution enrichie \mathbf{u}_h^* et l'originelle \mathbf{u}_h .

Cette approche est très attractive grâce à son applicabilité à une large classe de problèmes et sa simplicité. Il est cependant évident que son inconvénient majeur est le sur-coût de calcul induit par la résolution d'un problème de dimension ou de complexité supérieure.

Estimateurs basés sur l'analyse duale.

L'analyse duale [107] est considérée comme étant la première solution à la problématique de l'évaluation d'erreur. L'idée de s'appuyer sur des principes de l'analyse duale pour évaluer l'erreur de discrétisation a été proposée initialement dans [108, 109].

Cette approche repose sur la comparaison de deux solutions issues de différentes analyses éléments finis du même problème : l'une obtenue en se basant sur la formulation en déplacement (solution cinématiquement admissible) et l'autre sur la formulation en contraintes (solution statiquement admissible).

En sus de l'analyse complémentaire du même problème engendrant un coût de calcul additionnel, la difficulté de cette approche est liée au calcul du champ des contraintes statiquement admissible via une formulation en effort. Ces estimateurs sont assez peu répandus et n'existent quasiment pas dans des codes de calculs industriels.

Il faut noter que dans les cas linéaires, cette approche s'appuie sur la même base théorique que celle des estimateurs en relation de comportement. Les mesures d'erreur obtenues avec ces deux types d'estimateurs sont donc équivalentes. Cette approche peut être vue comme un cas particulier des estimateurs impliquant la loi de comportement où le champ des contraintes statiquement admissible est obtenu d'une façon différente.

Estimateurs basés sur la relation de comportement.

Ces estimateurs d'erreur ont été initiés par Ladevèze [110, 13]. Cette classe d'estimateurs se base sur le fait que le couple de solutions $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)$ issu de la résolution éléments finis en déplacement est cinématiquement admissible, mais qu'il n'est pas statiquement admissible localement. De façon similaire aux estimateurs basés sur l'analyse duale, l'idée de ce type d'estimateurs est de construire un

couple déplacement-contrainte où le champ de contraintes est statiquement admissible. Contrairement à l'utilisation de la formulation duale pour calculer la contrainte statiquement admissible, l'estimateur d'erreur basé sur la loi de comportement consiste plutôt à post-traiter la solution éléments finis en déplacement obtenue.

La démarche adoptée est donc basée sur la séparation des équations du problème donné en deux classes : relations d'admissibilité – le groupe des équations plus fiables qui doivent être vérifiées exactement ; et relation de comportement. Un couple $(\mathbf{u}_h^*, \boldsymbol{\sigma}_h^*)$ vérifiant les conditions d'admissibilité, avec $\mathbf{u}_h^* = \mathbf{u}_h$ cinématiquement admissible et $\boldsymbol{\sigma}_h^*$ statiquement admissible, est alors construit. Cependant, ce couple de solutions ne vérifie pas forcément la relation de comportement réelle du matériau. Ainsi, l'erreur est mesurée en comparant les deux champs de contraintes : $\boldsymbol{\sigma}_h$ et $\boldsymbol{\sigma}_h^*$. Plusieurs techniques ont été proposées afin de construire le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_h^*$, cf. [110, 111, 13, 112, 113].

Ce type d'estimateur fournit une estimation asymptotiquement exacte de l'erreur réelle. De plus, ces estimateurs sont génériques et attractifs pour des comportements non linéaires, car ils s'appliquent à tout type de comportement. Néanmoins, ces estimateurs exigent la construction d'un champ de contraintes admissible qui est difficile et coûteuse à mettre en œuvre en pratique.

Estimateurs basés sur le résidu d'équilibre.

Ce type d'estimateurs a été introduit dans des travaux pionniers de Babuška et Rheinboldt [114]. Ces techniques se basent sur le fait de la non-vérification de l'équation d'équilibre intérieure. L'erreur commise sur le champ de contraintes est estimée à partir des résidus d'équilibre sur chaque élément.

Deux types d'estimateurs basés sur les résidus d'équilibre peuvent être distingués : les techniques explicites et implicites. Les estimateurs qualifiés d'explicites – *Global Explicit Residual Based Error Estimator* [114] – se basent directement sur la solution calculée du problème pour obtenir une estimation globale d'erreur dans une certaine norme. Les estimateurs de ce type ont de fortes bases mathématiques [115, 116], et sont relativement simples de mettre en œuvre. Ils sont néanmoins peu implémentés dans des codes de calculs. Cela s'explique par la complexité d'évaluer avec précision des constantes impliquées dans les expressions de l'estimateur d'erreur [117].

Afin d'éviter le calcul de constantes nécessaires pour les versions explicites de l'estimateur, les approches implicites ont été proposées. L'idée sous-jacente des estimateurs implicites est de rechercher une estimation à travers la résolution de problèmes de petites tailles formulés sur les éléments, méthode appelée *Element Residual Method* [118, 119], ou des patches d'éléments, appelées *Subdomain Residual Method* [120, 121, 122]. Ces estimateurs permettent l'évaluation plus précise de l'erreur comparé à des estimateurs explicites, mais ils souffrent également de plusieurs inconvénients liés notamment à la formulation de problèmes locaux.

Les principes des estimateurs implicites ont été revisités plus récemment avec le but de contourner leurs défauts. Cette nouvelle technique, appelée *Flux-free error estimate* [123, 124, 125], permet d'éviter le calcul des flux à imposer au bord des patches et conduit à résoudre une série de problèmes auto-équilibrés.

Estimateurs basés sur la reconstruction des flux équilibrés.

L'idée de la technique d'estimation d'erreur basée sur les flux équilibrés est de résoudre un problème local dans chaque patch formulé en termes de flux reconstruit localement conservatif (équilibré) [126, 127, 128, 129]. À l'instar des estimateurs basés sur le résidu d'équilibre, dans le cadre de problèmes élastiques linéaires ces estimateurs exploitent le fait que le tenseur de contraintes discret résultant de la méthode des éléments finis n'est pas continu à travers les interfaces des éléments, et que sa divergence n'est pas localement en équilibre avec le terme source sur les éléments de maillage (non-vérification de l'équation d'équilibre). Les techniques d'équilibrage du flux sur les patch en se basant sur une approximation par éléments finis de type Raviart-Thomas ont été introduites dans [126, 127]. Des reconstructions utilisant l'espace des éléments finis mixtes de type Arnold-Falk-Winther ou de type Arnold-Winther ont été proposées dans [130, 131]. Cet estimateur s'applique à toute discrétisation numérique (éléments finis, volumes finis, Galerkin discontinue, ...) et à de nombreux problèmes.

Cette approche peut être assez coûteuse mais elle conduit à des estimations de bonne qualité. Cette stratégie a l'avantage de pouvoir distinguer les différentes composantes d'erreur correspondant à la résolution du problème telles que : discrétisation en espace et en temps, linéarisation d'un problème non linéaire, erreur associée au solveur algébrique, etc. Ces informations peuvent être exploitées pour le raffinement adaptatif de maillage en espace/temps, pour la définition de critères d'arrêt adaptatifs pour des solveurs itératifs afin de réduire l'erreur numérique et le coût de calcul.

Estimateurs basés sur le défaut de régularité.

Ces estimateurs sont fondés sur le fait que le gradient de la solution approximée avec une méthode de discrétisation est discontinu sur les interfaces entre les éléments, d'où le défaut de régularité. Cette classe d'estimateurs, proposée par Zienkiewicz et Zhu [132, 133, 134], consiste alors à reconstruire le gradient (ici le champ de contraintes) plus régulier qui constituerait une meilleure approximation du gradient réel.

On appelle la démarche de reconstruction du champ de contraintes *le lissage de contraintes*. Plusieurs techniques de lissages ont été proposées dans la littérature : approche basée sur la projection, *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) ou encore *Recovery by Equilibrium in Patches* (REP). Quelle que soit la stratégie de lissage, l'erreur est estimée comme la différence entre la contrainte lissée σ_h^* et celle calculée par EF σ_h .

Les estimateurs basés sur le défaut de régularité sont en général peu coûteux et offrent un rapport qualité/coût remarquable. Ils possèdent de nombreux avantages, comme la simplicité de mise en œuvre, le coût de calcul limité et l'applicabilité à tout type de problème. Ils sont ainsi très populaires et répandus dans l'ingénierie et largement utilisés dans le cadre de raffinement adaptatif de maillage, cf. par exemple [135, 136, 137].

Estimateurs d'erreur en quantité d'intérêt.

Souvent, lors du dimensionnement des structures en particulier, il est nécessaire d'évaluer l'erreur

associée à une quantité d'intérêt : quantités ayant un sens physique comme par exemple l'état de déformation ou de contrainte en un point ou une zone, moyenne du déplacement dans une région précise, ou fréquence propre pour l'analyse modale. Cette quantité est définie par une fonctionnelle appliquée à la solution $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)$, cf. l'approche par extracteurs. Les techniques en quantité d'intérêt, ou *Goal-oriented error estimates* en anglais, introduits dans [138, 139, 140, 141], peuvent être couplées à des estimateurs en relation de comportement présentés précédemment, des techniques multi-objectives [142, 143], etc..

Il semble que l'utilisation de tels estimateurs soit spécifique à des quantités qu'on cherche à estimer et donc à des problèmes traités. Le manque de généralité de ces approches limite leur utilisation actuelle dans le cadre de l'adaptation de maillage.

1.4.3 Choix d'un estimateur d'erreur

On dispose de nombreux critères permettant de juger des performances et de l'efficacité des estimateurs d'erreur. Afin de choisir un estimateur adapté dans le cadre de l'adaptation de maillage, on doit s'interroger sur des caractéristiques suivantes :

Fiabilité. Un estimateur d'erreur est considéré comme étant fiable si l'erreur estimée suit l'erreur réelle lorsque h tend vers zéro. Ce comportement se traduit par l'existence de deux constantes C_1 et C_2 vérifiant la relation suivante [13] :

$$C_1 \mathbf{e}^{\text{est}} \leq \mathbf{e}^{\text{ex}} \leq C_2 \mathbf{e}^{\text{est}} \quad (1.13)$$

avec l'erreur estimée notée \mathbf{e}^{est} et celle réelle \mathbf{e}^{ex} . Ces deux constantes dépendent généralement des données du problème, mais pas des caractéristiques du maillage. D'un point de vue fiabilité, il est évidemment avantageux que ces constantes soient proches de 1.

Indice d'efficacité. L'estimation d'erreur doit être asymptotiquement exacte dans le sens où avec l'augmentation de la densité de maillage, l'erreur estimée doit tendre vers zéro au même taux que l'erreur réelle. On s'appuie sur l'indice d'efficacité permettant de mesurer le comportement asymptotique d'un estimateur d'erreur [43]. Un estimateur d'erreur est dit asymptotiquement exact (ou consistant) si son indice d'efficacité, noté θ , tend vers un alors que le pas de maillage h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = 1 \quad (1.14)$$

L'indice d'efficacité est défini comme le rapport entre deux erreurs globales relatives : l'erreur estimée et celle réelle en une norme choisie :

$$\theta = \frac{\mathbf{e}^{\text{est}}}{\mathbf{e}^{\text{ex}}} \quad (1.15)$$

Il faut noter qu'en pratique, il est souhaitable que l'estimateur d'erreur utilisé surestime l'erreur réelle, ce qui se traduit par la condition $\theta \geq 1$.

Estimation locale. Pour une adaptation du maillage, un estimateur d’erreur utilisé doit fournir une distribution (précise) élémentaire de l’erreur de discrétisation.

Généricité. Afin d’être le plus générique possible, un estimateur d’erreur devrait être étendu à de nombreux domaines d’application.

Critères économiques. En général, on entend par ce critère la simplicité de la mise en œuvre d’un estimateur d’erreur et son coût numérique. Ces critères s’avèrent important lors de la mise en œuvre afin de limiter l’effort d’implémentation, ainsi que lors de l’exécution afin de ne pas polluer le temps de calcul.

De nombreuses études portant sur l’analyse et la comparaison de différents estimateurs d’erreurs ont été menées [144, 145, 146, 117, 147]. On peut en tirer plusieurs conclusions :

- dépendance de la qualité d’un estimateur à la topologie du maillage et aux propriétés de la solution exacte (régularité, ...),
- possibilité de récupérer la convergence asymptotique (se traduisant par $\theta \rightarrow 1$, cf. expression (1.15)) seulement pour certains types de maillages (conformes, uniformes, éléments non-aplatés, ...).

Ces éléments impliquent une complexité associée au choix d’un estimateur qui soit générique et efficace pour de nombreux problèmes, discrétisations choisies, etc.. Il faut noter qu’un estimateur d’erreur idéal qui répond à tous les exigences mentionnées ci-dessus n’existe toujours pas [117]. Le problème crucial associé au choix d’un estimateur d’erreur est de trouver un compromis entre coût et précision, avec ces deux aspects dépendant clairement de l’objectif du calcul.

Dans le cadre d’adaptation de maillage, l’estimation d’erreur doit être effectuée plusieurs fois afin de générer un maillage satisfaisant des exigences fixées sur l’erreur. Par conséquent, l’estimateur d’erreur doit être le moins coûteux possible. Parmi les estimateurs disponibles dans la littérature, celui basé sur le défaut de régularité semble être le plus utilisé dans le contexte du raffinement de maillage grâce à sa simplicité de mise en œuvre, son rapport qualité/coût et ses bonnes performances. Il est, par ailleurs, implémenté dans de nombreux logiciels de simulation. C’est pourquoi dans cette thèse nous adopterons ce type d’estimateur d’erreur.

Grâce à l’étude comparative, détaillée dans la Section A des Annexes, qui vise à choisir une procédure de lissage de contraintes, dans cette thèse, la stratégie de reconstruction basée sur la projection [132] sera considérée.

1.5 Contributions de la thèse

Dans le chapitre 2 l’objectif est de proposer un cadre algorithmique générique pour la mise en place de méthodes AMR. Les aspects théoriques et algorithmiques de la mise en œuvre de l’ensemble de modules intégrés dans le processus de raffinement adaptatif est exposé façon détaillée.

L’algorithme AMR considéré est complètement automatique (grâce notamment à l’utilisation d’un estimateur d’erreur *a posteriori*) et vise à satisfaire une précision définie par l’utilisateur en vérifiant

les tolérances fixées sur l'erreur. Grâce à l'algorithme proposé, nous pouvons contrôler non seulement l'erreur de discrétisation globale, mais aussi celle locale qui est importante pour des applications industrielles, mais très peu étudiée dans la littérature. Suite à l'étude bibliographique effectuée dans le chapitre 1, nous avons intégré dans le cadre AMR générique trois méthodes de raffinement qui visent le raffinement du pas de maillage h mais se basent sur des processus de résolutions conceptuellement différents : les deux méthodes h -adaptatives (techniques conforme et non-conforme) et la méthode multiniveau de type Local Defect Correction. Un des points clés de ce chapitre consiste en l'intégration de la méthode itérative AMR multiniveau dans le cadre algorithmique adopté, ce qui n'a jamais été formalisé auparavant.

Un apport important de ce travail consiste en l'établissement des algorithmes détaillés associés à chacune des méthodes AMR. Il faut noter que la construction ergonomique, robuste et performante de maillages raffinés reste toujours un domaine de recherche ouvert. Cela explique une difficulté (voire impossibilité) de trouver dans la littérature les aspects techniques liés à la génération de maillages raffinés avec différentes méthodes AMR. Nous introduisons dans ce chapitre 2 les algorithmes de raffinement hiérarchique de maillages quadrilatéraux/hexaédriques (non-conforme, conforme ou multiniveau). Un grand soin a été apporté pour proposer des algorithmes génériques (applicables aux différentes géométries, dimensions, etc.) et facilement implémentables dans les codes de calculs industriels.

Nous explicitons, par ailleurs, les stratégies de raffinement associées à la détection des éléments à raffiner ainsi que des ratios de raffinement à appliquer.

Le chapitre 3 est consacré à la mise en œuvre pratique et à l'étude comparative numérique des méthodes de raffinement adaptatif de maillage choisies via le formalisme algorithmique introduit au chapitre 2. L'ensemble des développements a été implémenté sous Cast3m, – le solveur éléments finis développé par le CEA. Le cadre théorique du chapitre 2 ainsi que la mise en œuvre informatique permettent une comparaison numérique la plus rigoureuse, objective et pertinente possible des performances des différentes méthodes AMR. Elle facilite également la reproductibilité et l'interprétation des résultats. Les méthodes considérées (stratégies h -adaptatives et multigrille locale) sont assez proches au niveau théorique, mais n'ont jamais été comparées auparavant, ce qui souligne l'intérêt de l'étude effectuée.

Pour cette comparaison nous nous sommes placés dans un contexte élastostatique linéaire et avons choisi des applications 2D et 3D avec des complexités différentes : benchmarks académiques, ainsi que cas tests issus de la problématique nucléaire représentant l'IPG. Cette étude nous permet de mettre en évidence les grandes potentialités de la méthode multigrille locale LDC qui apparaît clairement comme la stratégie la plus puissante en termes de mesures de précision et d'efficacité considérées (erreurs atteintes, dimension des systèmes à résoudre, besoins de stockage, temps CPU, ...). Lors de cette étude nous déterminons également la stratégie combinant critère d'optimalité du maillage et ratio de raffinement la plus efficace numériquement pour des maillages quadrangulaires/hexaédriques.

L'ensemble des développements théoriques et algorithmiques, ainsi que l'étude numérique présentés dans les chapitres 2 et 3 ont fait l'objet de la publication [148] intitulée "A unified framework for the computational comparison of adaptive mesh refinement strategies for all-quadrilateral and

all-hexahedral meshes : Locally adaptive multigrid methods versus h-adaptive methods” publiée dans le *Journal of Computational Physics*.

Dans le chapitre 4 nous proposons un formalisme unifié de résolution de problèmes multiéchelles basée sur un couplage itératif multiniveau. Nous proposons une extension de la méthode multigrille Local Defect Correction pour la mécanique quasi-statique non linéaire et effectuons une étude théorique permettant de définir les liens algorithmiques et conceptuels entre la méthode LDC et les méthodes d’homogénéisation numérique (de type EF²). Le cadre générique proposé permet de représenter plusieurs méthodes numériques dédiées à la résolution multiniveau de problèmes multiéchelles (avec différents facteurs de séparation d’échelles) disponibles dans la littérature. Il est clairement montré que malgré leur vocation initiale différente, les approches LDC et EF² révèlent de nombreuses caractéristiques communes. La principale différence conceptuelle reposant sur la condition de séparation d’échelles a finalement une influence limitée sur les aspects algorithmiques. Cette étude analytique montre que la méthode LDC peut être vue comme une stratégie de “*méso-homogénéisation*” applicable à des problèmes à faible séparation d’échelles où les approches fondées sur la théorie d’homogénéisation sont limitées.

L’étude effectuée dans le chapitre 4 a donné lieu à l’article [149] intitulé “Analytical comparison of two multiscale coupling methods for nonlinear solid mechanics” publié dans le Journal of Applied Mechanics.

Le chapitre 5 est dédié à l’adaptation dynamique temporelle de la méthode LDC pour traiter des problèmes quasi-statiques avec lois de comportement non linéaires et chargements évolutifs. Nous discutons ici des aspects pratiques de l’implémentation de l’algorithme LDC tel que introduit au chapitre 4, et proposons sa validation sur des benchmarks académiques et industriels, en 2D et 3D, avec différents types de comportements (loi de comportement plastique et loi de fluage de Norton). Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence l’efficacité de la méthode LDC dans ce contexte ainsi que sa capacité naturelle à générer une hiérarchie de maillage qui suit dynamiquement l’évolution en temps du phénomène étudié.

Nous nous intéressons également à des problématiques génériques associées au raffinement adaptatif et dynamique de maillage, notamment les questions liées au transfert des variables entre les pas de temps, étape très délicate surtout pour celles calculées aux points d’intégration, et au contrôle de l’erreur de discrétisation sur l’ensemble de l’historique. Nous proposons alors une stratégie reposant sur la prise en compte du déséquilibre initial sous forme de résidu du problème non linéaire qui permet de s’assurer de la non-accumulation de l’erreur due au transfert des champs et donc contrôler de façon efficace la précision sur l’ensemble des pas de temps. Un autre apport de ce chapitre est de proposer une optimisation du processus de raffinement permettant de limiter le nombre de remaillages en temps, tout en garantissant la vérification des tolérances prescrites sur les erreurs globales et locales. Nous introduisons un indicateur de remaillage basé notamment sur la vérification de l’erreur locale permettant de s’assurer que les zones critiques sont bien capturées.

Chapitre 2

Algorithme générique AMR intégrant les méthodes de raffinement local de pas de maillage

Dans ce chapitre nous présentons un algorithme générique de raffinement adaptatif de maillage (AMR). Nous intégrons différentes méthodes AMR, stratégies pour détecter les éléments à raffiner et ratios de raffinement dans ce cadre algorithmique unifié. L'algorithme AMR est entièrement automatique grâce à l'utilisation d'un estimateur d'erreur *a posteriori* et permet de générer des maillages raffinés respectant la précision *prescrite par l'utilisateur*. Nous exposons en détails les aspects clés, théoriques et techniques, impliqués dans l'algorithme considéré pour différentes méthodes basées sur le raffinement local du pas de maillage pour des éléments quadrangulaires/hexaédriques.

La majorité de ce travail a été publiée dans [148].

Sommaire

2.1	Introduction : algorithme générique AMR	47
2.2	Résolution du problème : module SOLVE	48
2.2.1	Méthodes <i>h</i> -adaptatives	48
2.2.2	Méthode Local Defect Correction	49
2.3	Estimation d'erreur : module ESTIMATE	52
2.4	Détection des éléments à raffiner : module MARK	53
2.4.1	Sous-module OPTIMALITY	54
2.4.2	Sous-module DETECT	56
2.5	Critères d'arrêt : module STOP	56
2.6	Raffinement du maillage : module REFINE	57
2.6.1	Ratio de raffinement : sous-module RATIO	57
2.6.2	Introduction de zone de sécurité : sous-module SAFE_ZONE	59
2.6.3	Correction du ratio de raffinement : sous-module UPDATE_RATIO	60
2.6.4	Division d'éléments : sous-module DIVIDE	65
2.6.5	Nouveau maillage : sous-module NEW_MESH	67
2.7	Remarques sur la parallélisation	67
2.8	Bilan du chapitre	68

2.1 Introduction : algorithme générique AMR

L'objectif de ce chapitre est de proposer un cadre algorithmique unifié permettant de mettre en œuvre et comparer différentes méthodes de raffinement adaptatif de maillage. Même si les méthodes considérées, à savoir les stratégies h -adaptatives, conforme et non-conforme, et la méthode multi-grille de type LDC, ne sont pas nouvelles, elles n'ont jamais été rigoureusement comparées surtout dans le cadre de maillages quad/hexa. Par ailleurs, nous proposons formellement des algorithmes de raffinement de pas de maillage respectant plusieurs contraintes (conformité du maillage ou nombre limité de nœuds non-conformes) liées à l'utilisation de maillages quad/héxa. Le formalisme AMR adopté est celui déjà classiquement utilisé dans la littérature, cf. par exemple [150, 151]. Il représente un processus itératif dont une itération, $i = 0, \dots, k$, est composée de l'ensemble de modules illustré sur la Figure 2.1.

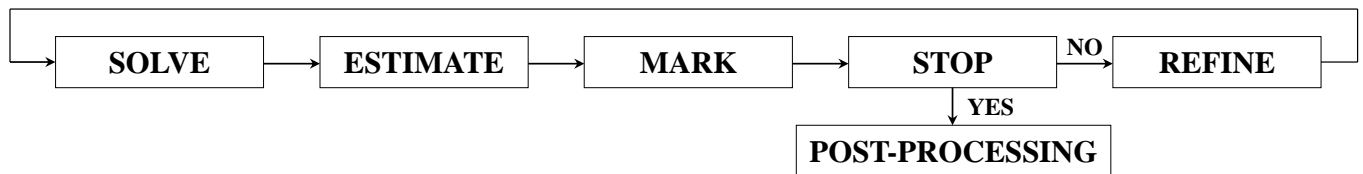


Figure 2.1: Illustration d'une itération de l'algorithme générique AMR.

Ainsi, à partir d'une discrétisation initiale \mathcal{G}_0 d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, une série de maillages globaux $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^k$ de plus en plus raffinés localement est produite. Les sous-maillages notés $\hat{\mathcal{G}}_i$, $1 \leq i \leq k$, ($\hat{\mathcal{G}}_i \subset \mathcal{G}_i$) rassemblent les éléments raffinés à l'itération de raffinement i . On note T^i un élément du maillage \mathcal{G}_i , $0 \leq i \leq k$. Le processus de raffinement consiste à générer une suite de solutions approchées $\{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^k$ qui vise à converger vers une solution acceptable \mathbf{u}_k approximée sur la dernière grille \mathcal{G}_k visant à satisfaire les exigences de précision.

L'algorithme de raffinement générique proposé ici, cf. Algorithme 1, s'appuie sur les étapes communes illustrées en Figure 2.1.

Nous détaillons dans ce chapitre l'ensemble de modules permettant de mettre en œuvre les différentes méthodes de raffinement, les estimateurs d'erreur, stratégies de détection des éléments à raffiner, etc..

Une méthode AMR intègre deux modules **SOLVE** et **REFINE**. Les spécificités des méthodes AMR liées à la résolution du problème donné sont prises en compte dans le module **SOLVE_{METHOD}**, cf. section 2.2. Les algorithmes de la génération des maillages raffinés quad/hexa associés à chaque méthode AMR considéré (module **REFINE_{METHOD}**) sont proposés dans la section 2.6.

Le module **ESTIMATE** est utilisé afin de rendre la procédure de raffinement automatique grâce à un estimateur d'erreur *a posteriori*, cf. section 2.3. Le module **MARK** consiste à détecter les éléments à raffiner, cf. section 2.4. Le module **STOP** vise à vérifier à chaque itération de raffinement la satisfaction des précisions définies par l'utilisateur, cf. section 2.5. Ces modules sont communs et indépendants de méthode AMR appliquée.

Algorithm 1 Algorithme générique de raffinement adaptatif de maillage

Entrée : Tolérance sur l'erreur globale fixée par l'utilisateur ϵ_Ω , paramètre de contrôle de l'erreur locale δ , grille initiale \mathcal{G}_0
Sortie : Solution convergée
Initialisation : $i = 0$, $\hat{\mathcal{G}}_0 \leftarrow \mathcal{G}_0$, booléen **stop** = faux
tant que stop = faux **faire**

- $\mathbf{u}_i = \text{SOLVE}_{\text{METHOD}}(\mathcal{G}_i \text{ ou } \{\hat{\mathcal{G}}_g\}_{g=0}^i)$
- $\{\xi_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i} = \text{ESTIMATE}(\mathbf{u}_i, \mathcal{G}_i)$
- $\mathcal{M}_i^0 = \text{MARK}(\mathbf{u}_i, \{\xi_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}, \mathcal{G}_i)$
- **stop** = **STOP**($\{\xi_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}, \mathcal{M}_i^0, \epsilon_\Omega, \delta$)
 si stop = vrai **alors** quitter **fin si**
- $\mathcal{G}_{i+1}, \hat{\mathcal{G}}_{i+1} = \text{REFINE}_{\text{METHOD}}(\mathcal{M}_i^0, \{\beta_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}, \mathcal{G}_i, \hat{\mathcal{G}}_i)$
- $i \leftarrow i + 1$

fin tant que

2.2 Résolution du problème : module SOLVE

L'algorithme 1 n'est pas spécifique à un type de physique. Considérons alors un problème générique (2.1) écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

avec \mathcal{L} un opérateur différentiel (non linéaire *a priori*) et \mathbf{f} un second membre. Tout type de conditions aux limites est considéré sur $\partial\Omega$ tant que le problème (\mathcal{P}) est bien posé.

Après discrétisation, le problème suivant doit être résolu sur un maillage noté \mathcal{G}_i :

$$(\mathcal{P}_i) : \begin{cases} \mathcal{L}_i(\mathbf{u}_i) = \mathbf{f}_i & \text{dans } \mathcal{G}_i \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\mathcal{G}_i \end{cases} \quad (2.2)$$

La résolution numérique du problème discret (2.2) avec le module $\text{SOLVE}_{\text{METHOD}}$ est effectuée soit sur une grille globale raffinée localement \mathcal{G}_i pour les méthodes *h*-adaptatives, soit sur un ensemble de grilles locales $\{\hat{\mathcal{G}}_g\}_{g=0}^i$ pour les méthodes multigrilles locales :

$$\mathbf{u}_i = \text{SOLVE}_{\text{METHOD}}(\mathcal{G}_i \text{ ou } \{\hat{\mathcal{G}}_g\}_{g=0}^i) \quad (2.3)$$

2.2.1 Méthodes *h*-adaptatives

Les méthodes *h*-adaptatives consistent à générer des maillages globaux (couvrant tout le domaine) raffinés localement dans des zones d'intérêt. Les éléments plus raffinés sont ainsi concentrés dans des zones où une plus grande précision est nécessaire. La section 2.6.3 est dédiée à la génération de maillages raffinés. Dans cette partie nous introduisons les modules SOLVE consacrés à la résolution

d'un problème donné sur un maillage raffiné généré par une méthode h -adaptative.

Méthode h -adaptative hiérarchique non-conforme : module **SOLVE_{NCHAM}**

Le module **SOLVE_{NCHAM}** dédié à la méthode h -adaptative hiérarchique non-conforme (*non-conforming hierarchical h-adaptive method*, abrégé *NCHAM* en anglais), décrit dans l'Algorithme 2. Comme l'apparition de nœuds non-conformes est inévitable avec des maillages quad/hexa, cette méthode nécessite l'utilisation d'un solveur dédié aux maillages non-conformes. Elle consiste à introduire tout d'abord les relations de non-conformité afin de maintenir la continuité de la solution, et ensuite de résoudre le problème (\mathcal{P}_i) défini sur le maillage \mathcal{G}_i .

Algorithm 2 Module **SOLVE_{NCHAM}**

Entrée : Grille \mathcal{G}_i , données du problème

Sortie : Solution \mathbf{u}_i dans \mathcal{G}_i

- Introduction des relations de non-conformité dans (\mathcal{P}_i) avec une méthode choisie
 - Résolution du problème modifié (\mathcal{P}_i) dans \mathcal{G}_i pour obtenir \mathbf{u}_i
-

Méthode h -adaptative hiérarchique conforme : module **SOLVE_{CHAM}**

La méthode h -adaptative hiérarchique conforme (*conforming hierarchical h-adaptive method*, abrégé *CHAM*, en anglais) vise à générer un maillage conforme raffiné localement à chaque itération de raffinement i . Le module **SOLVE_{CHAM}** (cf. Algorithme 3) repose sur la résolution standard d'un problème discret sur le maillage conforme raffiné \mathcal{G}_i .

Algorithm 3 Module **SOLVE_{CHAM}**

Entrée : Grille \mathcal{G}_i , données du problème

Sortie : Solution \mathbf{u}_i dans \mathcal{G}_i

- Résolution du problème (\mathcal{P}_i) dans \mathcal{G}_i pour obtenir \mathbf{u}_i
-

2.2.2 Méthode Local Defect Correction

La méthode Local Defect Correction est une méthode de raffinement local multiniveau basée sur une résolution itérative de type multigrille. Partant d'une discrétisation initiale (grossière) du domaine Ω , des sous-niveaux avec des maillages fins sont ajoutés uniquement localement dans les zones où la solution n'est pas suffisamment précise. Les problèmes discrets 2.2 définis sur une séquence de sous-niveaux sont résolus de façon récursive jusqu'à ce que la solution sur le maillage grossier ait convergé. La résolution de type multigrille se base sur des opérateurs de transfert – opérateurs de prolongement et de restriction, entre les grilles.

Dans sa version initiale [70, 88, 20], le processus itératif de la méthode LDC est celui traditionnellement représenté par une suite de \wedge -cycles, cf. Figure 1.14. Cela consiste premièrement à générer l'ensemble de sous-niveaux, sur lequel, par la suite, le processus itératif multigrille est appliqué.

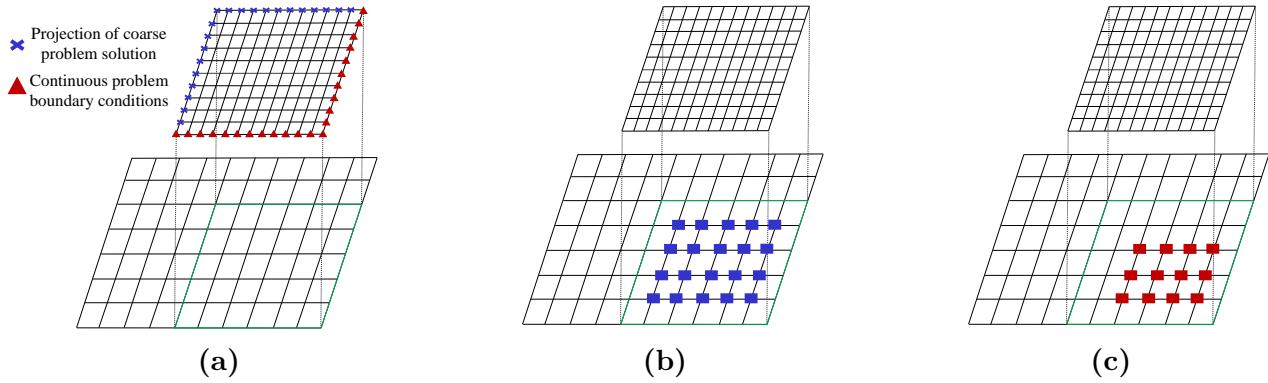


Figure 2.2: Méthode Local Defect Correction avec deux niveaux de maillages : (a) Conditions aux limites ; (b) Ensemble de nœuds de restriction A_i ; (c) Ensemble de nœuds de correction \hat{A}_i

Intégrée dans le processus AMR générique (Algorithme 1), la résolution itérative multigrille LDC est effectuée sur une séquence de sous-maillages locaux $\{\hat{\mathcal{G}}_g\}_{g=0}^i$ à chaque étape de raffinement i . Le module **SOLVE_{LDC}** est détaillé dans Algorithme 4. On peut noter que l'exécution de l'algorithme LDC basé sur les Λ -cycles tel que représenté sur la Figure 1.14 à chaque itération i de l'Algorithme 1, conduit à une version de la méthode LDC basée sur les M -cycles, comme proposé dans [90], cf. Figure 2.3.

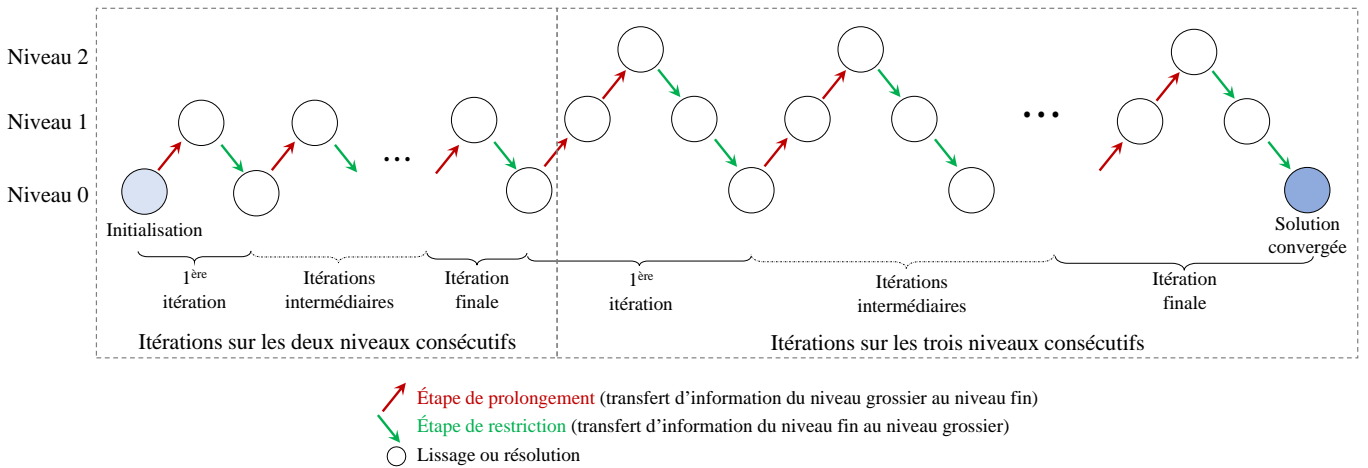


Figure 2.3: Algorithme itératif multigrilles locales basé sur des M -cycles avec trois sous-niveaux de maillages $\{\hat{\mathcal{G}}_i\}_{i=0}^2$ et les opérateurs de transfert

Dans Algorithme 4, nous notons f_g^0 la discrétisation du terme source du problème continu $f|_{\Omega_g}$ sur $\hat{\mathcal{G}}_g$. La solution grossière initiale u_0^0 est obtenue en résolvant (\mathcal{P}_0) sur $\hat{\mathcal{G}}_0 (\equiv \mathcal{G}_0)$. Nous notons j l'itération du processus itératif multigrille.

Algorithm 4 Module **SOLVE_{LDC}**

Entrée : Sous-grilles $\{\hat{\mathcal{G}}_g\}_{g=0}^i$, données du problème, paramètre de convergence τ

Sortie : Solutions $\{\mathbf{u}_g\}_{g=0}^i$ sur $\{\hat{\mathcal{G}}_g\}_{g=0}^i$

si $i = 0$, $\hat{\mathcal{G}}_0 \leftarrow \mathcal{G}_0$

Résolution du problème (\mathcal{P}_0) sur $\hat{\mathcal{G}}_0$ avec le second membre \mathbf{f}_0^0 pour obtenir \mathbf{u}_0

si non

Itération LDC $j = 1$, booléen *convergence* = faux

tant que *convergence* = faux **faire**

$\mathbf{u}_0^j = \mathbf{u}_0^{j-1}$ avec $\mathbf{u}_0^0 = \mathbf{u}_0$

pour $g = 1, \dots, i$

si ($j = 1$ et $g < i$) **alors** $\mathbf{f}_g^1 = \mathbf{f}_g$ **si non** $\mathbf{f}_g^j = \mathbf{f}_g^{j-1}$ **fin si**

fin pour

• **Étape de prolongement.** Résolution sur les sous-grilles fines $\hat{\mathcal{G}}_g$

pour $g = 1, \dots, i$

◦ Application des conditions aux limites sur le bord de sous-grilles $\partial\hat{\mathcal{G}}_g$:

– conditions aux limites du problème continu sur $\partial\hat{\mathcal{G}}_g \cap \partial\Omega$;

– et conditions aux limites de Dirichlet imposées sur le bord interne fictif

$\Gamma_g^f = \partial\hat{\mathcal{G}}_g \setminus (\partial\hat{\mathcal{G}}_g \cap \partial\Omega)$. Valeurs de Dirichlet sont dérivées à partir de solutions directement plus grossières :

$$\mathbf{u}_{g,\Gamma_g^f}^j = \mathcal{P}_{g-1}^g(\mathbf{u}_{g-1}^j)|_{\Gamma_g^f} \quad (2.4)$$

avec \mathcal{P}_{g-1}^g l'opérateur de prolongement

◦ Résolution du problème (\mathcal{P}_g) sur $\hat{\mathcal{G}}_g$ avec le second membre \mathbf{f}_g^j pour obtenir \mathbf{u}_g^j

• **Étape de restriction.** Correction sur les grilles grossières $\hat{\mathcal{G}}_g$

pour $g = i - 1, \dots, 0$

◦ Calcul du déplacement fin restreint \mathbf{u}_{g+1}^j dans A_g :

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^j(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{R}_{g+1}^g(\mathbf{u}_{g+1}^j) \right)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A_g \quad (2.5)$$

avec \mathcal{R}_{g+1}^g ($\neq (\mathcal{P}_g^{g+1})^T$) l'opérateur de restriction

◦ Calcul du résidu dans \hat{A}_g :

$$\mathbf{r}_g^j(\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{L}_g \tilde{\mathbf{u}}_g^j - \mathbf{f}_g^0 \right)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \hat{A}_g \quad (2.6)$$

◦ Correction du second membre \mathbf{f}_g^j du problème dans $\hat{\mathcal{G}}_g$:

$$\mathbf{f}_g^j = \mathbf{f}_g^0 + \chi_{\hat{A}_g} \mathbf{r}_g^j(\mathbf{u}) \quad (2.7)$$

avec $\chi_{\hat{A}_g}$ la fonction caractéristique de \hat{A}_g : $\chi_{\hat{A}_g} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \hat{A}_g \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \hat{A}_g \end{cases}$

◦ Résolution du problème (\mathcal{P}_g) sur $\hat{\mathcal{G}}_g$ avec le second membre corrigé \mathbf{f}_g^j pour mettre à jour \mathbf{u}_g^j

• **Vérification de convergence :** si $\frac{\|\mathbf{u}_0^j - \mathbf{u}_0^{j-1}\|}{\|\mathbf{u}_0^j\|} \leq \tau$ **alors** *convergence* = vrai

$j \leftarrow j + 1$

fin tant que

fin si

$\mathbf{u}_g \leftarrow \mathbf{u}_g^j$ et $\mathbf{f}_g \leftarrow \mathbf{f}_g^j \quad \forall g = 0, \dots, i$

L'opérateur de prolongement LDC consiste à prescrire les conditions aux limites de type Dirichlet sur la frontière fictive du niveau fin $\hat{\mathcal{G}}_g$, $1 \leq g \leq i$, défini comme $\partial\hat{\mathcal{G}}_g \setminus \partial\Omega$ (voir Figure 2.2a). Les valeurs de Dirichlet sont obtenues à partir de la solution immédiatement plus grossière sur $\hat{\mathcal{G}}_{g-1}$.

L'opérateur de restriction LDC permet d'obtenir une restriction de la solution fine sur le maillage immédiatement plus grossier. En pratique, la solution fine est restreinte sur un ensemble de nœuds $A_g \in \hat{\mathcal{G}}_g$, avec A_g constitué de l'ensemble des nœuds de $\hat{\mathcal{G}}_g$ strictement inclus dans le domaine discrétisé par la grille fine $\hat{\mathcal{G}}_{g+1}$ (cf. Figure 2.2b). Cette solution restreinte sert à obtenir un résidu (également appelé défaut) agissant comme un second membre supplémentaire sur le problème grossier permettant de corriger la solution grossière.

L'idée fondamentale de la méthode LDC est de faire tendre le déplacement du problème grossier vers le déplacement restreint du problème immédiatement plus fin ($\mathbf{u}_g^j \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_g^j$) au sens faible via le résidu défini sur la zone de recouvrement. La méthode LDC est basée sur la notion d'erreur de troncature, en supposant que la solution fine peut être vue comme une solution de référence. Afin de ne pas être pollué par les conditions de Dirichlet fictives imposées sur Γ_g^f , le résidu est calculé sur un sous-ensemble \mathring{A}_g de $A_g \cup (\partial\hat{\mathcal{G}}_g \cap \partial\Omega)$ (cf. Figure 2.2c). L'ensemble \mathring{A}_g est l'ensemble des nœuds intérieurs de la zone de restriction au sens du schéma de discrétisation : $\mathbf{x} \in A_g \cup (\partial\hat{\mathcal{G}}_g \cap \partial\Omega)$ est appelé intérieur si $\mathcal{L}_g(\mathbf{u}_g(\mathbf{x}))$ n'implique que $\mathbf{u}_g(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} \in A_g \cup (\partial\hat{\mathcal{G}}_g \cap \partial\Omega)$.

Remarque 2.2.1. L'expression (2.7) se base sur l'hypothèse que le résidu du problème fin $\hat{\mathbf{r}}_{g+1}^j = \hat{\mathcal{R}}_{g+1}^g(\mathcal{L}_{g+1}(\mathbf{u}_{i+1}^j) - \mathbf{f}_{g+1}^j)$, avec $\hat{\mathcal{R}}_{g+1}^g$ un opérateur de restriction assurant la conservation des efforts, est négligeable devant \mathbf{r}_i^j :

$$\|\hat{\mathbf{r}}_{g+1}^j\| \ll \|\mathbf{r}_i^j\| \tag{2.8}$$

Cela implique que la résolution au niveau fin est suffisamment précise, cf. [68].

Remarque 2.2.2. En général, même pour des applications assez complexes, il est observé par de nombreux auteurs, voir par exemple [82, 81, 71, 88, 102], que quelques itérations sont généralement suffisantes pour atteindre la convergence.

Notez que les opérateurs de transfert (l'opérateur de prolongement et de restriction) de la méthode LDC affectent uniquement le second membre ce qui permet de conserver les factorisations des matrices lors du processus itératif. Ainsi, le processus multigrille local est numériquement efficace et peut être implémenté sans difficulté et de manière non-intrusive dans n'importe quel solveur existant. De plus, des sous-grilles régulières et (quasi)-uniformes peuvent être utilisées à chaque niveau conduisant à des problèmes locaux bien conditionnés.

2.3 Estimation d'erreur : module ESTIMATE

Dans Algorithme 1, l'outil permettant de piloter automatiquement l'adaptation du maillage est l'estimateur d'erreur *a posteriori*. Le module **ESTIMATE**, dédié à l'estimation d'erreur, permet à

partir de la solution discrète \mathbf{u}_i sur le maillage \mathcal{G}_i d'obtenir une distribution élémentaire de l'erreur estimée :

$$\{\xi_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i} = \mathbf{ESTIMATE}(\mathbf{u}_i, \mathcal{G}_i) \quad (2.9)$$

Comme argumenté au chapitre 1, dans cette thèse nous adoptons l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu [132, 133], appelé souvent l'estimateur d'erreur ZZ.

Avec cet estimateur, la distribution élémentaire de l'erreur estimée $\{\xi_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ est évaluée en fonction de la différence entre un gradient lissé (ici, le champ de contraintes) $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ et le champ discret $\boldsymbol{\sigma}_i$ (obtenu à partir du calcul).

Pour la reconstruction du gradient lissé, nous considérons la procédure introduite dans [132], cf. argumentation dans l'Annexe A. Le champ de contraintes lissé $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ est obtenu par projection sur les fonctions de base primales (celles des déplacements ici). La distribution d'erreur élément par élément dans la norme d'énergie est estimée comme :

$$\xi_{T^i} = \|\mathbf{e}\|_{T^i} \simeq \left(\int_{T^i} (\boldsymbol{\sigma}_i^* - \boldsymbol{\sigma}_i) : (\boldsymbol{\varepsilon}_i^* - \boldsymbol{\varepsilon}_i) dT^i \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{G}_i \quad (2.10)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}_i^*$ le champ de déformation associé au champ de contraintes lissé $\boldsymbol{\varepsilon}_i^* = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i^*$. Cette distribution de l'erreur par éléments est exploitée par la suite afin de détecter des éléments à raffiner.

L'erreur estimée absolue globale est alors obtenue en additionnant les contributions élémentaires :

$$\xi_{\mathcal{G}_i} = \left(\sum_{T^i \in \mathcal{G}_i} \xi_{T^i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

2.4 Détection des éléments à raffiner : module **MARK**

La stratégie de détection des éléments à raffiner (étape de marquage ou *marking stage* en anglais) se base soit sur une utilisation qualitative ou quantitative de la distribution élémentaire de l'erreur estimée.

Approche qualitative. L'approche qualitative repose sur une détection paramétrique des éléments à raffiner, voir [55, 152, 153, 154] par exemple. Le choix optimal de paramètres n'est pas évident car il n'est pas directement lié à la précision souhaitée et peut dépendre du problème [89]. Des valeurs empiriques sont souvent utilisées, ce qui nécessite souvent un processus de raffinement non-imbriqué afin d'atteindre la précision prescrite par l'utilisateur. Dans ce cas, le maillage final raffiné n'est généralement pas optimal en terme de degrés de liberté.

Approche quantitative. Dans cette étude, nous nous concentrons sur une procédure de marquage quantitative reposant sur l'utilisation des critères d'optimalité du maillage. Cette approche consiste à définir une erreur élémentaire maximale permise en fonction de différentes considérations sur la distribution de l'erreur dans un maillage optimal, voir [102, 111, 132, 155, 132] par exemple.

Généralement dans la littérature (voir par exemple [111, 155, 156]), le maillage est supposé acceptable lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{\xi_{\mathcal{G}_i}}{\epsilon_\Omega \omega_{\mathcal{G}_i}} = 1 \tag{2.12}$$

avec ϵ_Ω la tolérance prescrite sur l'erreur globale et $\xi_{\mathcal{G}_i}$ l'erreur estimée définie avec (2.11).

Pour l'estimateur d'erreur ZZ [132], l'erreur absolue estimée est pondérée par l'énergie de déformation globale $\omega_{\mathcal{G}_i}$ obtenue en sommant les contributions élémentaires ω_{T^i} :

$$\omega_{\mathcal{G}_i} = \left(\sum_{T^i \in \mathcal{G}_i} \omega_{T^i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

avec

$$\omega_{T^i} = \|\mathbf{w}\|_{T^i} \simeq \left(\int_{T^i} \boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{\varepsilon}_i \, dT^i + \int_{T^i} (\boldsymbol{\sigma}_i^* - \boldsymbol{\sigma}_i) : (\boldsymbol{\varepsilon}_i^* - \boldsymbol{\varepsilon}_i) \, dT^i \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{G}_i \tag{2.14}$$

Dans de nombreuses situations (régions de plasticité localisées, zones de contact, ...) un contrôle particulier de la précision de calcul est nécessaire. Une solution suffisamment précise dans ces régions est généralement requise et doit être vérifiée afin de bien quantifier ces phénomènes locaux. Par conséquent, dans notre étude nous accordons une attention spéciale au contrôle de l'erreur locale et de la zone critique associée où cette erreur peut être élevée. Donc, une vérification de la précision imposée localement (par élément) est effectuée. Ainsi, nous souhaitons construire un maillage visant également à atteindre la précision prescrite par l'utilisateur ϵ_Ω sur chaque élément $T^i \in \mathcal{G}_i$:

$$\frac{\xi_{T^i}}{\epsilon_\Omega \omega_{T^i}} = 1 \tag{2.15}$$

2.4.1 Sous-module OPTIMALITY

Le sous-module **OPTIMALITY** consiste alors à définir l'erreur maximale élémentaire permise $\{\xi_{T^i}^{max}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ pour un critère d'optimalité du maillage considéré. Cette erreur maximale permise est, en outre, fonction de la tolérance fixée par l'utilisateur ϵ_Ω .

Dans cette étude, nous considérons les critères d'optimalité du maillage introduits par Zienkiewicz et Zhu dans [132] (appelé *critère ZZ*), Oñate et Bugeda dans [157] (appelé *critère OB*), et par Ramière et al. dans [102] (appelé *critère LOC*).

Critère ZZ : Distribution égale de l'erreur global.

Suivant l'idée des auteurs, dans le maillage optimal l'erreur doit être répartie de manière égale entre les éléments ($\xi_{T^i}^{max} = const. \forall T^i \in \mathcal{G}_i$), voir [132]. L'erreur absolue globale $\xi_{\mathcal{G}_i}^{max}$ est alors définie comme :

$$\xi_{\mathcal{G}_i}^{max} = \left(\sum_{T^i \in \mathcal{G}_i} (\xi_{T^i}^{max})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\#\mathcal{G}_i)^{\frac{1}{2}} \xi_{T^i}^{max} \tag{2.16}$$

Comme dans un maillage optimal, la condition imposée sur l'erreur globale $\xi_{\mathcal{G}_i}^{max} = \epsilon_{\Omega} \omega_{\mathcal{G}_i}$ (dérivée de la condition (2.12)) doit être satisfaite, l'erreur maximale permise $\{\xi_{T^i}^{max,ZZ}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ fournie par le sous-module **OPTIMALITY_{ZZ}** s'écrit :

$$\xi_{T^i}^{max,ZZ} = \frac{\epsilon_{\Omega} \omega_{\mathcal{G}_i}}{(\#\mathcal{G}_i)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall T^i \in \mathcal{G}_i \quad (2.17)$$

Le critère d'optimalité de maillage ZZ, reposant sur le principe d'équidistribution de l'erreur, est probablement le critère le plus connu dans la littérature. Cependant, il vise à satisfaire uniquement la précision globale (2.12). Comme nous nous intéressons en particulier à la satisfaction de l'erreur locale, ce critère n'est pas d'intérêt pour nos besoins. De plus, comme déjà discuté dans [157], ce critère peut conduire à un processus de raffinement oscillatoire incohérent de certaines régions du maillage (pour les méthodes h -adaptatives). Ce critère a été testé sur l'ensemble des exemples numériques traités dans le chapitre 3 et un tel comportement a également été observé. Par conséquent, les résultats obtenus avec ce critère ne seront pas présentés par la suite.

Contrairement au critère ZZ, les critères OB et LOC, ciblent à satisfaire à la fois la précision globale (2.12) ainsi que locale (2.15). Les performances de ces critères sont comparés numériquement dans le chapitre 3.

Critère OB : Distribution égale de l'erreur spécifique.

Dans [157, 158], les auteurs postulent que la distribution optimale de l'erreur élémentaire devrait être régie par les mesures des éléments. Le rapport entre le carré de l'erreur élémentaire et la mesure de l'élément doit être constant sur tout le maillage et égal au rapport entre le carré de l'erreur globale et la mesure du domaine :

$$\frac{(\xi_{T^i}^{max})^2}{\mu(T^i)} = \frac{(\xi_{\mathcal{G}_i}^{max})^2}{\mu(\Omega)} \quad \forall T^i \in \mathcal{G}_i \quad (2.18)$$

avec $\mu(T^i)$ la mesure de l'élément T^i et $\mu(\Omega)$ la mesure totale du domaine. En posant la condition d'optimalité globale de maillage $\xi_{\mathcal{G}_i}^{max} = \epsilon_{\Omega} \omega_{\mathcal{G}_i}$ (Eq. (2.12)), l'erreur maximale élémentaire permise $\{\xi_{T^i}^{max,OB}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ fournie par le sous-module **OPTIMALITY_{OB}** s'écrit :

$$\xi_{T^i}^{max,OB} = \epsilon_{\Omega} \omega_{\mathcal{G}_i} \left(\frac{\mu(T^i)}{\mu(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{G}_i \quad (2.19)$$

Critère LOC : Erreur locale respectant le seuil.

Un critère local alternatif a été brièvement mentionné dans [157] mais effectivement introduit et exploité dans [102, 20] dans le contexte des problèmes de mécanique des structures. Il consiste à prescrire la précision souhaitée directement sur l'erreur élémentaire (Eq. (2.15)), donc l'erreur maximale permise $\{\xi_{T^i}^{max,LOC}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ fournie par le sous-module **OPTIMALITY_{LOC}** s'écrit :

$$\xi_{T^i}^{max,LOC} = \epsilon_{\Omega} \omega_{T^i} \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{G}_i \quad (2.20)$$

Comme prouvé dans [102], cela implique automatiquement le respect de la précision globale prescrite ($\frac{\xi_{\mathcal{G}_i}}{\epsilon_{\Omega} \omega_{\mathcal{G}_i}} \leq 1$).

2.4.2 Sous-module DETECT

Le sous-module **DETECT** prend en entrée la distribution d'erreur estimée par élément $\{\xi_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ ainsi que l'erreur maximale tolérée $\{\xi_{T^i}^{max}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ définie par le sous-module présenté précédemment **OPTIMALITY**. Il délivre l'ensemble des éléments marqués \mathcal{M}_i^0 :

$$\mathcal{M}_i^0 = \{T^i \in \mathcal{G}_i; \quad \xi_{T^i} > \xi_{T^i}^{max}\} \tag{2.21}$$

Il faut noter que pour l'approche LDC ou toute stratégie de raffinement impliquant des zones de raffinement imbriquées, les éléments à raffiner sont sélectionnés dans la sous-grille $\hat{\mathcal{G}}_i$, de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_i^0 \subset \hat{\mathcal{G}}_i \quad \forall i \tag{2.22}$$

Notons que les quantités impliquant \mathcal{G}_i pour la définition de $\xi_{T^i}^{max}$ ($\omega_{\mathcal{G}_i}$, $\#\mathcal{G}_i$, etc.) sont évaluées sur le maillage global (éventuellement composite) \mathcal{G}_i .

Remarque 2.4.1. *L'utilisation d'une stratégie de marquage quantitatif conduit le plus souvent naturellement à des régions raffinées imbriquées, construites pour une tolérance d'erreur donnée ϵ_Ω , sans pénaliser les performances des méthodes h-adaptatives.*

2.5 Critères d'arrêt : module STOP

Le module **STOP** retourne un booléen *stop* qui indique si les critères d'arrêt choisis ont été satisfaits ou non.

Dans le scénario idéal, un processus de raffinement devrait atteindre :

$$\mathcal{M}_i^0 = \emptyset \tag{2.23}$$

Cependant, comme la solution peut converger très lentement près d'une singularité, le respect de la condition (2.23) peut conduire à un raffinement coûteux. Ainsi, une pratique courante consiste à imposer d'autres critères d'arrêt qui permettent d'arrêter le processus de raffinement une fois que le maillage est considéré acceptable.

Dans la littérature, on trouve souvent des critères d'arrêt du processus de raffinement indépendants de la précision souhaitée. Ces critères sont imposés *a priori* et permettent d'arrêter le raffinement quand le nombre d'itérations de raffinement i atteint une valeur définie, cf. [55, 89, 159, 160], ou le nombre d'éléments à raffiner ($\#\mathcal{M}_i^0$) est égal à un nombre minimal prédéfini, cf. [88].

Dans cette étude, nous nous intéressons à la vérification de la précision globale et locale. Les deux critères d'arrêt suivants doivent donc être satisfaits pour arrêter le processus de raffinement :

Critère global. Le respect de la précision globale est vérifié avec la condition suivante :

$$\frac{\xi_{\mathcal{G}_i}}{\epsilon_\Omega \omega_{\mathcal{G}_i}} \leq 1 \tag{2.24}$$

Critère local. Le respect de la précision locale est vérifié en se basant sur le critère d'arrêt local, initialement proposé dans [102]. Il consiste à contrôler la zone où la précision locale n'est pas respectée :

$$\frac{\mu(\Omega_{\mathcal{M}_i^0})}{\mu(\Omega)} \leq \delta \quad (2.25)$$

avec $\mu(\Omega_{\mathcal{M}_i^0})$ la mesure de la zone détectée $\Omega_{\mathcal{M}_i^0} = \{\cup \bar{T}^i; T^i \in \mathcal{M}_i^0\}$ et δ le paramètre de contrôle de l'erreur locale prescrit par l'utilisateur ($\delta \leq 1$).

L'application du critère d'arrêt (2.25) permet de respecter le critère d'optimalité du maillage considéré sur $(1 - \delta) \times 100\%$ du domaine. Ce critère d'arrêt est intéressant car il permet de déterminer automatiquement une approximation discrète de la région critique (zone de singularité), voir [102] pour plus de détails.

Remarque 2.5.1. *En imposant $\delta = 1$, uniquement le respect du critère d'arrêt global (2.12) est garanti, alors qu'en choisissant $\delta = 0$, la condition (2.23) pourrait être atteinte.*

Si les deux critères d'arrêt sont satisfaits, nous attribuons au booléen **stop** la variable *vrai*, ce qui permet d'arrêter le processus de raffinement.

2.6 Raffinement du maillage : module **REFINE**

2.6.1 Ratio de raffinement : sous-module **RATIO**

Le sous-module **RATIO** est utilisé pour calculer le ratio de raffinement $\beta_{T^i}^0 \in \mathbb{N}^+$ pour $T^i \in \mathcal{M}_i^0$. Ce ratio est appliqué aux éléments détectés afin de générer le maillage raffiné. Dans ce travail, l'influence de différents choix de ratios de raffinement est étudiée. Nous considérons ici trois façons possibles d'obtenir le ratio de raffinement $\beta_{T^i}^0$.

Ratio de raffinement uniforme fixé.

La stratégie la plus simple consiste à raffiner les éléments marqués avec un ratio de raffinement uniforme fixé :

$$\beta_{T^i}^{0,fix} = const \quad \forall T^i \in \mathcal{M}_i^0, \forall i \quad (2.26)$$

Cette approche permet de raffiner progressivement le maillage.

Dans cette étude, la valeur suivante est choisie :

$$\beta_{T^i}^{0,fix} = 2 \quad (2.27)$$

C'est un choix naturel dans les simulations industrielles (voir par exemple [88, 20, 40, 161]).

Ratio de raffinement ajusté.

La seconde approche vise à minimiser le nombre d'étapes de raffinement (nombre maximal de i dans l'Algorithme 1) en utilisant un ratio de raffinement ajusté.

Pour calculer le ratio de raffinement ajusté $\beta_{T^i}^{0,adj}$, un ansatz de l'estimation d'erreur locale *a priori* [132] obtenu en se basant sur l'estimation d'erreur globale *a priori* [103], cf. l'expression (1.10), est généralement utilisé :

$$\xi_{T^i} = \mathcal{O}(C_{T^i} h_{T^i}^\alpha) \quad (2.28)$$

avec C_{T^i} une constante dépendante du pas de maillage et $\alpha = \min(q, p)$ avec q le paramètre dépendant du problème et p le degré des fonctions d'interpolation éléments finis, cf. Eq. (1.10). Cependant, comme le paramètre q est difficile à évaluer et est propre à un problème traité, il est commun de choisir $\alpha = p$ avec p connu *a priori*. De plus, afin de déterminer facilement $\beta_{T^i}^{0,adj}$, dans la littérature la constante C_{T^i} est supposée indépendante de l'élément T^i : $C_{T^i} \simeq C$.

Le ratio de raffinement ajusté est défini comme suit :

$$\beta_{T^i}^{0,adj} = \frac{h_{T^i}}{h_{T^{i+1}}} \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{M}_i^0 \quad (2.29)$$

avec $h_{T^{i+1}}$ et h_{T^i} étant respectivement le pas du maillage raffiné souhaité et le pas du maillage courant.

Par définition, l'erreur élémentaire ξ_{T^i} requise pour le maillage \mathcal{G}_{i+1} est égale à l'erreur maximale permise $\xi_{T^i}^{max}$ obtenue avec le sous-module **OPTIMALITY**. En considérant les expressions (2.28) et (2.29), nous obtenons le résultat suivant :

$$\beta_{T^i}^{0,adj} = \left\lceil \left(\frac{\xi_{T^i}}{\xi_{T^i}^{max}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\rceil \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{M}_i^0 \quad (2.30)$$

où $\lceil \cdot \rceil$ consiste à arrondir la valeur obtenue vers l'entier supérieur la plus proche.

En utilisant l'expression de $\xi_{T^i}^{max}$ donnée par les équations (2.17), (2.19) et (2.20) pour les critères ZZ, OB et LOC, respectivement, les ratios de raffinement ajustés sont respectivement :

$$\beta_{T^i}^{0,ZZ} = \left\lceil \left(\frac{\xi_{T^i}}{\epsilon_\Omega \omega_{\mathcal{G}_i}} (\#\mathcal{G}_i)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\rceil \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{M}_i^{0,ZZ} \quad (2.31)$$

$$\beta_{T^i}^{0,OB} = \left\lceil \left(\frac{\xi_{T^i}}{\epsilon_\Omega \omega_{\mathcal{G}_i}} \left(\frac{\mu(\Omega)}{\mu(T^i)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\rceil \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{M}_i^{0,OB} \quad (2.32)$$

$$\beta_{T^i}^{0,LOC} = \left\lceil \left(\frac{\xi_{T^i}}{\epsilon_\Omega \omega_{T^i}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\rceil \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{M}_i^{0,LOC} \quad (2.33)$$

Remarque 2.6.1. Dans cette thèse des éléments finis bi- ou trilinéaires sont utilisés pour discrétiser les problèmes. L'ordre polynomial des fonctions d'interpolation est alors $p = 1$.

Remarque 2.6.2. La stratégie du ratio de raffinement ajusté ne correspond pas à la philosophie de la méthode LDC (génération de sous-grilles (quasi)-uniformes) et reviendrait à appliquer une approche h -adaptative sur chaque sous-grille, ce qui n'est pas le but de cette étude. Afin de maintenir la stratégie LDC inchangée, le ratio ajusté ne sera pas couplé à la méthode LDC.

Ratio de raffinement moyen ajusté.

Le but de cette troisième approche est de conserver un raffinement progressif du maillage, mais en appliquant un ratio de raffinement automatiquement réajusté à chaque étape de raffinement. Le ratio de raffinement moyen ajusté est obtenu par pondération des valeurs des ratios ajustés par rapport aux mesures des éléments :

$$\bar{\beta}_{T^i}^0 = \left[\frac{1}{\mu(\Omega_{\mathcal{M}_i^0})} \sum_{T^i \in \mathcal{M}_i^0} \beta_{T^i}^{0,adj} \cdot \mu(T^i) \right] \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{M}_i^0 \quad (2.34)$$

où $\beta_{T^i}^{0,adj}$ représente un ratio de raffinement ajusté (cf. équations (2.31), (2.32) et (2.33)), $\mu(T^i)$ la mesure d'élément T^i et $\mu(\Omega_{\mathcal{M}_i^0})$ la mesure totale de la zone détectée.

2.6.2 Introduction de zone de sécurité : sous-module **SAFE_ZONE**

Afin de nous assurer que les zones de raffinement capturent correctement les phénomènes d'intérêt, nous introduisons une zone dite de sécurité. Ce processus consiste à agrandir la zone marquée \mathcal{M}_i^0 en ajoutant des couches supplémentaires d'éléments, quelle que soit la stratégie de raffinement. Cette pratique est courante dans la littérature (cf. [162, 102]).

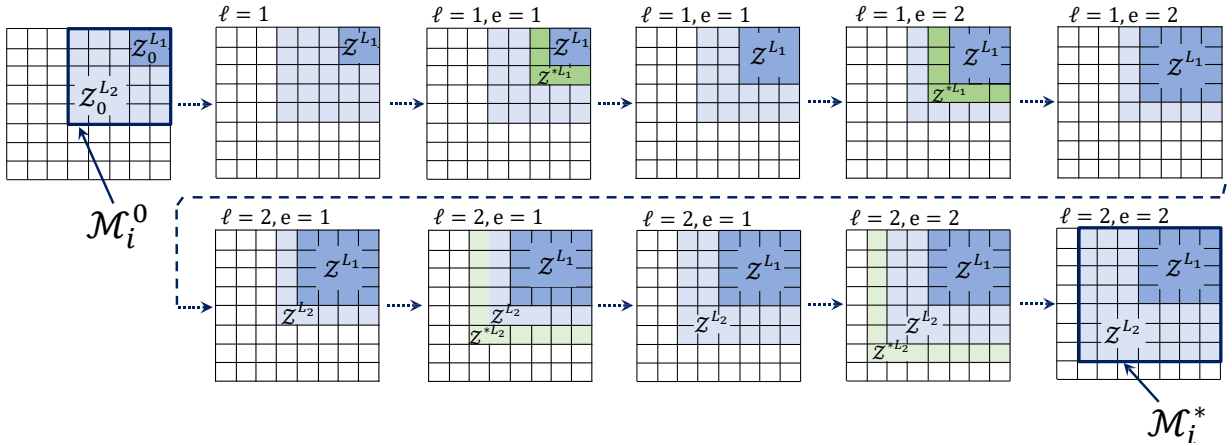


Figure 2.4: Illustration du sous-module **SAFE_ZONE**. Maillage \mathcal{G}_i et zone marquée $\mathcal{M}_i^0 = \mathcal{Z}_0^{L1} \cup \mathcal{Z}_0^{L2}$ avec $\beta_{T^i \in \mathcal{Z}_0^{L1}}^0 = L_1$ et $\beta_{T^i \in \mathcal{Z}_0^{L2}}^0 = L_2$ avec $L_1 > L_2$. Alors, $L = \{L_1, L_2\}$ et $\ell = 1, \dots, \#L$ se réfèrent à $\ell^{\text{ème}}$ zone de raffinement (avec $\beta^0 = L_\ell$). L'index $e = 1, \dots, nb_{safe}$ indique la couche d'éléments ajoutée (ici $nb_{safe} = 2$). Génération de la zone de sécurité \mathcal{Z}^{*L1} et \mathcal{Z}^{*L2} . Maillage \mathcal{G}_i et zone marquée élargie \mathcal{M}_i^*

En appliquant un ratio de raffinement uniforme ($\beta_{T^i}^{0,fix}$ ou $\bar{\beta}_{T^i}^0$), des couches d'éléments avec le même ratio de raffinement sont simplement ajoutées à l'ensemble \mathcal{M}_i^0 . En appliquant le ratio ajusté $\beta_{T^i}^{0,adj}$, chaque sous-ensemble d'éléments de \mathcal{M}_i^0 ayant le même ratio de raffinement est élargi individuellement (voir Figure 2.4).

Le sous-module **SAFE_ZONE**, détaillé dans Algorithme 5, donne en sortie la zone marquée élargie \mathcal{M}_i^* ainsi que les ratios de raffinement correspondants $\{\beta_{T^i}^*\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^*}$. On note que si $nb_{safe} = 0$ est choisi, on définit $\mathcal{M}_i^* := \mathcal{M}_i^0$ et $\{\beta_{T^i}^*\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^*} := \{\beta_{T^i}^0\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^0}$.

Définition 2.6.3. Voisin par sommet. Dans les Algorithmes 5 et 6, un élément est appelé voisin par sommet à T^i s'il partage au moins un sommet avec T^i .

Algorithm 5 Sous-module **SAFE_ZONE**

Entrée : Nombre des couches d'éléments à ajouter dans la zone de sécurité nb_{safe} , zone marquée \mathcal{M}_i^0 , ratio de raffinement $\{\beta_{T^i}^0\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^0}$, grille $\tilde{\mathcal{G}}_i = \mathcal{G}_i$ pour les méthodes h -adaptatives ou $\tilde{\mathcal{G}}_i = \hat{\mathcal{G}}_i$ pour la méthode LDC

Sortie : Zone marquée élargie \mathcal{M}_i^* et l'ensemble de ratios de raffinement $\{\beta_{T^i}^*\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^*}$

Initialisation :

Stockage des valeurs uniques des éléments de $\{\beta_{T^i}^0\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^0}$ dans une liste L

$$\mathcal{M}_i^* = \mathcal{M}_i^0$$

$$\beta_{T^i}^* = \beta_{T^i}^0 \quad \forall T^i \in \mathcal{M}_i^*$$

pour $\ell = 1, \dots, \#L$ faire

L_ℓ la $\ell^{\text{ème}}$ valeur de la liste L

$$\mathcal{Z}^{L_\ell} = \{T^i \in \mathcal{M}_i^*; \beta_{T^i}^* = L_\ell\}$$

$$\mathcal{Z}^{-L_\ell} = \{T^i \in \mathcal{M}_i^*; \beta_{T^i}^* < L_\ell\} \cup \{\tilde{\mathcal{G}}_i \setminus \mathcal{M}_i^*\}$$

pour $e = 1 \dots nb_{safe}$ faire

$$\mathcal{Z}_i^{*L_\ell} = \{T^i \in \mathcal{Z}^{-L_\ell}; T^i \text{ est le voisin par sommet à au moins un élément de } \mathcal{Z}^{L_\ell}\}$$

$$\beta_{T^i}^* = L_\ell \quad \forall T^i \in \mathcal{Z}_i^{*L_\ell}$$

Mise à jour :

$$\mathcal{Z}^{L_\ell} \leftarrow \mathcal{Z}^{L_\ell} \cup \mathcal{Z}_i^{*L_\ell}$$

$$\mathcal{Z}^{-L_\ell} \leftarrow \mathcal{Z}^{-L_\ell} \setminus \mathcal{Z}_i^{*L_\ell}$$

$$\mathcal{M}_i^* \leftarrow \mathcal{M}_i^* \cup \mathcal{Z}_i^{*L_\ell}$$

fin pour

fin pour

2.6.3 Correction du ratio de raffinement : sous-module **UPDATE_RATIO**

Durant cette thèse un effort particulier a été consacré afin de proposer des algorithmes de génération de maillages génériques afin qu'ils soient applicables à différentes géométries (problèmes bi- ou tridimensionnels), maillages de départ, etc.. Dans le module de raffinement **REFINE**, le sous-module appelé ici **UPDATE_RATIO**, joue un rôle crucial.

En effet, dans de nombreuses situations, dues aux caractéristiques méthodologiques d'une méthode AMR donnée, certains éléments du maillage peuvent être affectés par le raffinement des éléments voisins. Autrement dit, le raffinement d'éléments non-marqués initialement, ou la modification du ratio de raffinement de certains éléments peuvent être nécessaires. Cela se produit notamment lorsqu'il faut rendre le maillage conforme (h -adaptivité conforme), ou lors de la restriction du degré

d'irrégularité du maillage (h -adaptivité non-conforme).

Naturellement, le raffinement hiérarchique de maillage repose sur une division isotrope des éléments, visant à diviser uniformément un élément T^i en $\beta_{T^i}^D$ éléments. Pour ce faire, chaque arête de l'élément T^i est uniformément divisé en β_{T^i} segments. Cependant, la stratégie h -adaptative conforme impose un raffinement anisotrope dans certaines régions conduisant à imposer des ratios de raffinement non-uniformes aux bords de l'élément T^i .

Définition 2.6.4. Groupe d'arêtes. Nous considérons une partition des bords d'un élément T^i en D groupes d'arêtes noté $\mathcal{E}_{T^i}^d$, $d = 1, \dots, D$. Chaque groupe d'arêtes est composé de 2^{D-1} arêtes qui ne partagent aucun sommet (également appelés bords topologiquement parallèles dans la littérature [37, 163]), voir Figures 2.6 et 2.7.

Ainsi, par souci de généralité, nous supposons une formulation générique du ratio de raffinement associé à un élément T^i . Soit $\underline{\beta}_{T^i}$ un ensemble de D ratios de raffinement :

$$\underline{\beta}_{T^i} = \{\beta_{T^i}^d\}_{d=1}^D \quad (2.35)$$

où le rapport de raffinement $\beta_{T^i}^d$ est assigné au $d^{\text{ème}}$ groupe d'arêtes $\mathcal{E}_{T^i}^d$.

Les sous-modules **UPDATE_RATIO_METHOD** dédiés à chaque technique AMR considérée fournissent les zones finales à raffiner \mathcal{M}_i et les ratios de raffinement associés. Nous présentons par la suite ces sous-modules pour chaque méthode AMR considérée.

Sous-module **UPDATE_RATIO_LDC**

La philosophie de la méthode LDC consiste à générer des sous-grilles locales (quasi)-uniformes à chaque étape de raffinement. Ainsi, seul les ratios de raffinement uniformes seront appliqués à tous les éléments marqués (cf. ratio de raffinement uniforme fixé ou moyen ajusté). Le sous-module **UPDATE_RATIO_LDC** ne fournit donc aucune modification de la zone marquée ni du ratio de raffinement définis précédemment. Nous avons :

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^* \quad (2.36)$$

et

$$\underline{\beta}_{T^i} = \{\beta_{T^i}^d\}_{d=1}^D, \text{ avec } \beta_{T^i}^d = \beta_{T^i}^{*,fix} \text{ ou } \bar{\beta}_{T^i}^* \quad \forall d = 1, \dots, D \text{ et } \forall T^i \in \mathcal{M}_i \quad (2.37)$$

Sous-module **UPDATE_RATIO_NCHAM**

Pour la méthode h -adaptative hiérarchique non-conforme (NCHAM), nous adoptons la *one-irregularity rule* (également appelé *one-hanging node rule*) argumenté dans [119, 151], qui est largement utilisée dans la littérature. Il en résulte une restriction du nombre de nœuds irréguliers sur

chaque bord. Une telle restriction présente de nombreux avantages : elle permet d’assurer un raffinement progressif (avec des éléments voisins n’ayant pas de tailles très différentes), de garantir que chaque élément est le support d’un nombre limité de fonctions de base, ainsi que d’assurer la précision de la solution.

Pour sa mise en œuvre, nous imposons uniquement les valeurs du ratio de raffinement $\beta_{T^i} = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, les valeurs de ratio de raffinement calculées sont d’abord corrigées :

$$\beta_{T^i}^{corr} = 2^{\min(\text{argmin}|2^m - \beta_{T^i}^*|)} \text{ pour } T^i \in \mathcal{M}_i^* \tag{2.38}$$

Nous définissons ensuite le niveau de raffinement total, noté \mathcal{B}_{T^i} , pour chaque élément de maillage comme :

$$\mathcal{B}_{T^i} = \mathcal{B}_{T^{i-1}} \beta_{T^i}^{corr} \tag{2.39}$$

avec $\mathcal{B}_{T^{-1}} := 1$ et $\beta_{T^i}^{corr} = 1$ pour $T^i \in \mathcal{G}_i \setminus \mathcal{M}_i^*$. La règle *one-irregularity rule* est garantie si le rapport entre le niveau total de raffinement de deux éléments voisins (plus grande valeur de \mathcal{B}_{T^i} sur plus petite valeur) est égale à 2. La correction des ratios de raffinement des éléments n’obéissant pas à cette exigence est effectuée. Cela peut potentiellement entraîner l’élargissement de l’ensemble des éléments marqués \mathcal{M}_i^* , comme illustré sur la Figure 2.5.

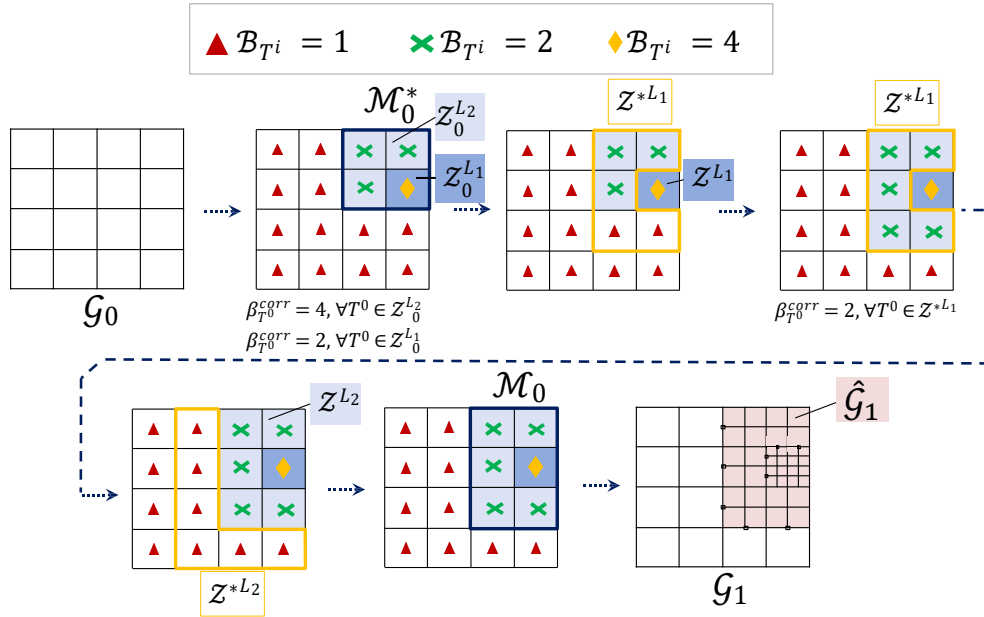


Figure 2.5: Illustration du sous-module `UPDATE_RATIO_NCHAM`. Maillage initial \mathcal{G}_0 . Zone marquée sur la grille \mathcal{G}_0 : $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{Z}_0^{L_1} \cup \mathcal{Z}_0^{L_2}$ avec $\mathcal{B}_{T^0 \in \mathcal{Z}_0^{L_1}} = L_1$ et $\mathcal{B}_{T^0 \in \mathcal{Z}_0^{L_2}} = L_2$ avec $L_1 > L_2$. Alors, $L = \{L_1, L_2\}$. Maillage \mathcal{G}_0 avec la zone à raffiner \mathcal{M}_0 incluant la zone de transition. Maillage global raffiné \mathcal{G}_1 et sous-maillage $\hat{\mathcal{G}}_1$

L’algorithme 6 fournit les détails d’implémentation de la méthode *h*-adaptative non-conforme tenant compte de la règle *one-irregularity rule* décrite précédemment.

Algorithm 6 Sous-module **UPDATE_RATIO_{NCHAM}**

Entrée : Zone marquée \mathcal{M}_i^* , ratios de raffinement $\{\beta_{T^i}^*\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^*}$, grille \mathcal{G}_i

Sortie : Zone à raffiner \mathcal{M}_i et ratios de raffinement associés $\{\underline{\beta}_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}$

si $i = 0$ alors $\mathcal{B}_{T^{-1}} = 1$ fin si

si il existe une valeur unique de $\{\beta_{T^i}^*\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^*}$ et $\mathcal{G}_i \setminus \mathcal{M}_i^* = \emptyset$

$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^*$

$\beta_{T^i}^{corr} = \beta_{T^i}^*$

si non

Initialisation :

$\beta_{T^i}^* = 1 \forall T^i \in \mathcal{G}_i \setminus \mathcal{M}_i^*$

Correction du ratio de raffinement :

$$\beta_{T^i}^{corr} = 2^{\min(\text{argmin}|2^m - \beta_{T^i}^*|)}$$
 (2.40)

Calcul du niveau total de raffinement $\mathcal{B}_{T^i} \forall T^i \in \mathcal{G}_i$:

$$\mathcal{B}_{T^i} = \mathcal{B}_{T^{i-1}} \beta_{T^i}^{corr} \quad \text{avec } T^i \subset T^{i-1} \text{ et } T^{i-1} \in \mathcal{G}_{i-1}$$
 (2.41)

Stockage des valeurs uniques des éléments de $\{\mathcal{B}_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$ dans une liste L

$\ell = 1$

tant que $\ell \neq \#L$ **faire**

$\mathcal{Z}^{L_\ell} = \{T^i \in \mathcal{G}_i; \mathcal{B}_{T^i} = L_\ell\}$

$\mathcal{Z}^{-L_\ell} = \{T^i \in \mathcal{G}_i; \mathcal{B}_{T^i} < L_\ell\}$

$\mathcal{Z}_i^{*L_\ell} = \{T^i \in \mathcal{Z}^{-L_\ell}; T^i \text{ est le } \textit{voisin par sommet} \text{ à au moins un élément de } \mathcal{Z}^{L_\ell}\}$

pour tout $T^i \in \mathcal{Z}_i^{*L_\ell}$ tel que $\mathcal{B}_{T^i} \neq L_\ell/2$ **faire**

$\mathcal{B}_{T^i} = L_\ell/2$ et $\beta_{T^i}^{corr} = \lceil \mathcal{B}_{T^i} / \mathcal{B}_{T^{i-1}} \rceil$ pour $T^i \subset T^{i-1}$ et $T^{i-1} \in \mathcal{G}_{i-1}$

si $\mathcal{B}_{T^i} \notin L$ **alors** introduire \mathcal{B}_{T^i} dans la liste L et mettre à jour $\#L$ **fin si**

$\ell \leftarrow \ell + 1$

fin pour

fin tant que

$\mathcal{M} = \{T^i \in \mathcal{G}_i; \beta_{T^i}^{corr} > 1\}$

fin si

$\underline{\beta}_{T^i} = \{\beta_{T^i}^d\}_{d=1}^D$, avec $\beta_{T^i}^d = \beta_{T^i}^{corr} \quad \forall d = 1, \dots, D$ et $\forall T^i \in \mathcal{M}_i$

Sous-module UPDATE_RATIO_{CHAM}

La méthode h -adaptative hiérarchique conforme (CHAM) consiste à conserver la conformité du maillage pendant tout le processus de raffinement. Lors du raffinement hiérarchique de maillage ne faisant intervenir que des éléments quadrangulaires ou hexaédriques, les nœuds non-conformes sont éliminés en propageant la subdivision des éléments au-delà de l'ensemble des éléments marqués \mathcal{M}_i^* .

Comme mentionné précédemment, nous nous appuyons ici sur le raffinement h -adaptatif hiérarchique conforme inspiré par des techniques basées sur *sheets operations* [34, 35]. Plus précisément, nous adoptons une approche de type *dicing* visant à restaurer la conformité du maillage grâce au raffinement par couches.

Le sous-module UPDATE_RATIO_{CHAM} est détaillé dans l'Algorithme 7.

Algorithm 7 Sous-module UPDATE_RATIO_{CHAM}

Entrée : Zone marquée \mathcal{M}_i^* , ratios de raffinement $\{\beta_{T^i}^*\}_{T^i \in \mathcal{M}_i^*}$, grille \mathcal{G}_i

Sortie : Zone à raffiner \mathcal{M}_i et ratios de raffinement associés $\{\underline{\beta}_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}$

Initialisation :

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^*$$

Rangement des éléments T^i de \mathcal{M}_i^* dans un ensemble \mathcal{S} triés par $\beta_{T^i}^*$ dans l'ordre décroissant

$$\beta_{T^i}^d = 1, \quad \forall d = 1, \dots, D \text{ et } \forall T^i \in \mathcal{G}_i \setminus \mathcal{M}_i^*$$

$$\mathcal{F} \leftarrow \emptyset$$

pour $j = 1, \dots, \#\mathcal{S}$

$T^{*i} = j^{\text{ème}}$ élément de \mathcal{S}

pour $d = 1, \dots, D$

si $\mathcal{E}_{T^{*i}}^d \notin \mathcal{F}$ **alors**

$$\beta_{T^{*i}}^d = \beta_{T^{*i}}^*$$

$$\mathcal{L}_j^d = T^{*i}$$

$$\mathcal{F}_j^d = \mathcal{E}_{T^{*i}}^d$$

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{E}_{T^i}^k; k \in \{1, \dots, D\}, T^i \in \mathcal{G}_i \setminus T^{*i}, \mathcal{E}_{T^i}^k \cap \mathcal{E}_{T^{*i}}^d \neq \emptyset\}$$

tant que $\mathcal{N} \neq \emptyset$ **faire**

$$\beta_{T^i}^k = \beta_{T^{*i}}^* \quad \forall \{k, T^i\} \text{ tel que } \mathcal{E}_{T^i}^k \in \mathcal{N}$$

$$\mathcal{F}_j^d \leftarrow \mathcal{F}_j^d \cup \mathcal{N}$$

$$\mathcal{L}_j^d \leftarrow \mathcal{L}_j^d \cup \{T^i \in \mathcal{G}_i \setminus \mathcal{L}_j^d, \mathcal{E}_{T^i}^k \in \mathcal{N}\}$$

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{E}_{T^i}^k; k \in \{1, \dots, D\}, \mathcal{E}_{T^i}^k \notin \mathcal{F}_j^d, \mathcal{E}_{T^i}^k \cap \mathcal{F}_j^d \neq \emptyset\}$$

fin tant que

$$\mathcal{M}_i \leftarrow \mathcal{M}_i \cup \mathcal{L}_j^d$$

$$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_j^d$$

fin si

fin pour

fin pour

$$\underline{\beta}_{T^i} = \{\beta_{T^i}^d\}_{d=1}^D, \quad \forall d = 1, \dots, D \text{ et } \forall T^i \in \mathcal{M}_i$$

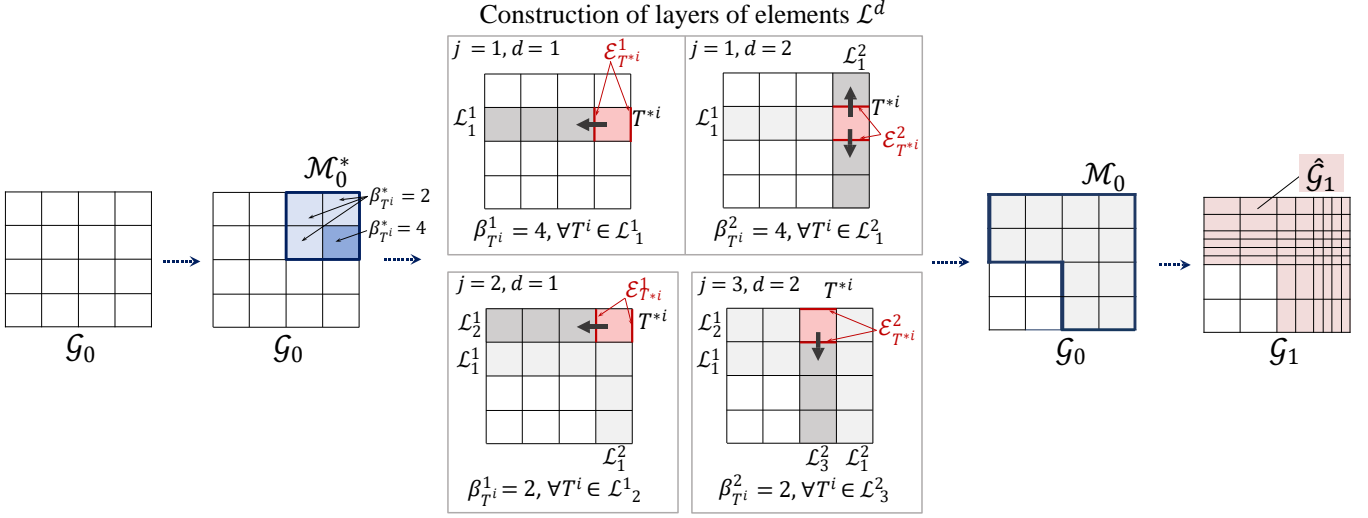


Figure 2.6: Illustration du sous-module **UPDATE_RATIO_{CHAM}**. Maillage initial \mathcal{G}_0 . Zone marquée sur la grille \mathcal{G}_0 : \mathcal{M}_0^* avec $\beta_{T^i}^*$. Construction des couches d'éléments \mathcal{L}_j^d et correction de ratios de raffinement assignés aux groupes des arêtes $\mathcal{E}_{T^i}^d$ des éléments $\forall T^i \in \mathcal{L}_j^d$. Maillage avec la zone à raffiner \mathcal{M}_0 incluant la zone de transition et maillage raffiné $\hat{\mathcal{G}}_1$

Dans ce qui suit on décrit le principe général de l'Algorithme 7. On construit récursivement des couches (ou feuilles) \mathcal{L}_j^d d'éléments associés au groupe d'arêtes $\mathcal{E}_{T^{*i}}^d$ du $j^{\text{ème}}$ élément marqué T^{*i} dans \mathcal{M}_i^* . D'abord tous les éléments partageant au moins une arête de $\mathcal{E}_{T^{*i}}^d$ sont ajoutés dans la couche. On identifie alors les groupes d'arêtes associés aux éléments de la couche. Ces nouveaux groupes d'arêtes sont ensuite utilisés pour étendre la couche d'éléments jusqu'à ce qu'aucun nouvel élément partageant les arêtes identifiés soit trouvé. La construction de telles couches est représentée sur la Figure 2.6 pour un cas bidimensionnel et en Figure 2.7 pour un cas tridimensionnel.

Sur les groupes d'arêtes identifiés associés à la couche, nous attribuons le rapport maximal de raffinement des éléments $T^i \in \mathcal{L}_j^d$. Par souci d'optimalité, dans l'algorithme 7 (et illustré dans la Figure 2.6) l'ensemble des éléments marqués \mathcal{M}_i^* est donc initialement trié par $\beta_{T^i}^*$ dans l'ordre décroissant.

L'algorithme 7 peut être facilement implémenté dans n'importe quel code de calcul existant et permet de conserver la structure d'origine (topologie géométrique) du maillage. Cet algorithme est générique, en particulier il peut traiter des maillages non-structurés et des couches qui se croisent. Cependant, cette stratégie est surtout intéressante pour des maillages cartésiens structurés, car l'algorithme peut alors être simplifié puisque l'indice k est dans ce cas égal à l'indice d représentant la direction du maillage (cf. produit tensoriel sous-jacent des maillages cartésiens), voir Figures 2.6 et 2.7. Notons qu'en utilisant un tel algorithme, le déraffinement du maillage est simplifié.

2.6.4 Division d'éléments : sous-module **DIVIDE**

Le raffinement des éléments est effectué avec le sous-module **DIVIDE**($T^i, \underline{\beta}_{T^i}$) qui prend en entrée un élément T^i avec le l'ensemble des ratios de raffinement correspondant $\underline{\beta}_{T^i}$ et produit l'ensemble

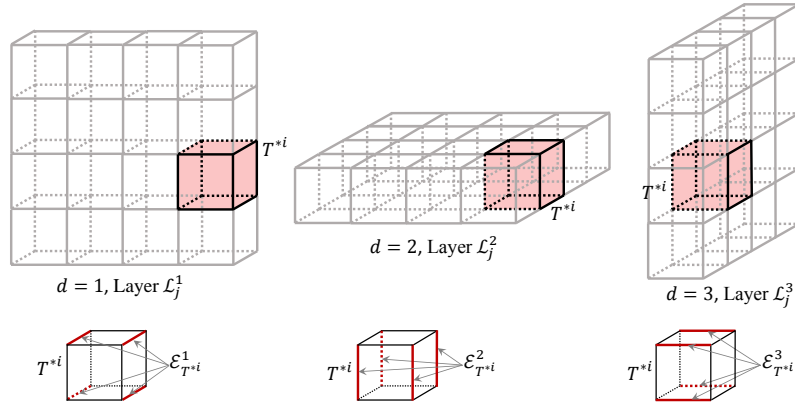
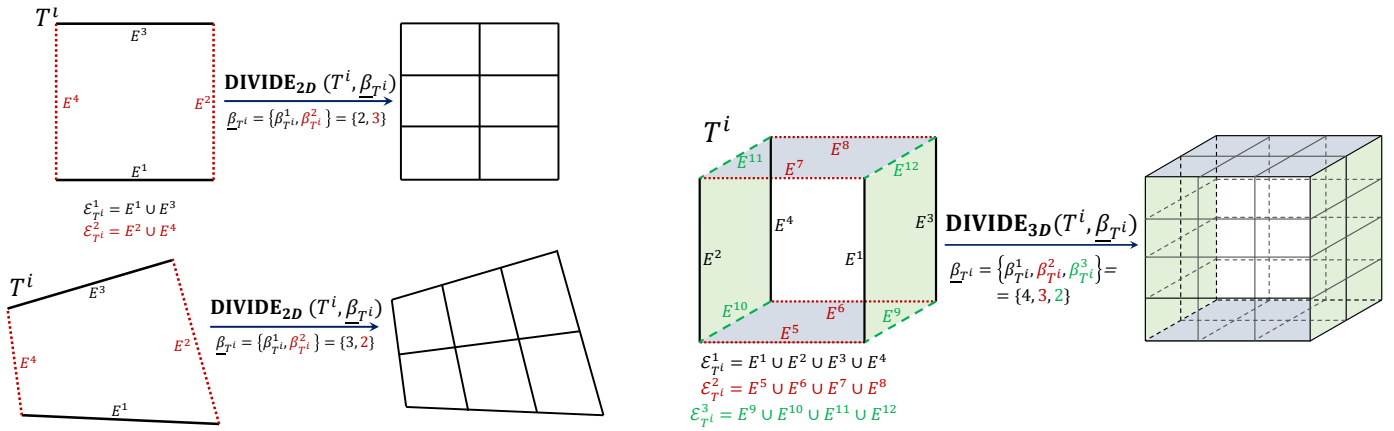


Figure 2.7: Illustration des couches des éléments \mathcal{L}_j^d et de groupes des arêtes $\mathcal{E}_{T^i}^d$ pour un cas 3D

des éléments raffinés. Ce sous-module vise à diviser uniformément chaque arête des groupes d'arêtes $\{\mathcal{E}_{T^i}^d\}_{d=1}^D$ d'un élément T^i en $\beta_{T^i}^d$ ($d = 1, \dots, D$) segments égaux. L'ensemble des éléments raffinés est ensuite généré en rejoignant les nœuds opposés obtenus, faisant un pavage en éléments quadrilatères (2D) ou hexaédriques (3D) de l'élément d'origine T^i . Le sous-module **DIVIDE** est représenté sur la Figure 2.8a pour le cas bidimensionnel et sur la Figure 2.8b pour le cas tridimensionnel.



(a) **DIVIDE_{2D}** avec l'ensemble de ratios de raffinement $\underline{\beta}_{T^i} = \{\beta_{T^i}^1, \beta_{T^i}^2\} = \{2, 3\}$

(b) **DIVIDE_{3D}** avec l'ensemble de ratios de raffinement $\underline{\beta}_{T^i} = \{\beta_{T^i}^1, \beta_{T^i}^2, \beta_{T^i}^3\} = \{4, 3, 2\}$

Figure 2.8: Exemple du sous-module **DIVIDE**($T^i, \underline{\beta}_{T^i}$) pour un éléments T^i et l'ensemble des éléments raffinés résultant $\cup T^{i+1} \subset T^i$; (a) **DIVIDE_{2D}** et (b) **DIVIDE_{3D}**

Le sous-module **DIVIDE** appliqué sur une zone s'écrit de manière suivante :

$$\mathbf{DIVIDE}(\mathcal{M}_i, \{\underline{\beta}_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}) = \bigcup_{T^i \in \mathcal{M}_i} \mathbf{DIVIDE}(T^i, \underline{\beta}_{T^i}) \tag{2.42}$$

2.6.5 Nouveau maillage : sous-module `NEW_MESH`

Le sous-module `NEW_MESH` génère une sous-grille locale notée $\hat{\mathcal{G}}_{i+1}$ correspondant au raffinement de \mathcal{M}_i , et un maillage global raffiné localement noté \mathcal{G}_{i+1} couvrant tout le domaine de calcul Ω . Ce dernier correspond au nouveau maillage pour les méthodes h -adaptative et à la grille composite pour la méthode LDC.

$$\mathcal{G}_{i+1}, \hat{\mathcal{G}}_{i+1} = \text{NEW_MESH}(\mathcal{M}_i, \{\underline{\beta}_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}, \mathcal{G}_i, \hat{\mathcal{G}}_i) \quad (2.43)$$

avec la sous-grille raffinée $\hat{\mathcal{G}}_{i+1}$:

$$\hat{\mathcal{G}}_{i+1} = \text{DIVIDE}(\mathcal{M}_i, \{\underline{\beta}_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}) \quad (2.44)$$

et la grille globale (composite) \mathcal{G}_{i+1} :

$$\mathcal{G}_{i+1} = \{\mathcal{G}_i \setminus \mathcal{M}_i\} \cup \{\hat{\mathcal{G}}_{i+1}\} \quad (2.45)$$

Remarque 2.6.5. Dans le cas de zones raffinées imbriquées, la grille \mathcal{G}_{i+1} peut être également définie comme :

$$\mathcal{G}_{i+1} = \left\{ \bigcup_{l=0, \dots, i} \hat{\mathcal{G}}_l \setminus \mathcal{M}_i \right\} \cup \{\hat{\mathcal{G}}_{i+1}\} \quad (2.46)$$

2.7 Remarques sur la parallélisation

Dans le contexte actuel de déploiement du calcul haute performance, une des questions importantes à aborder concerne le fonctionnement en environnement parallèle de l'ensemble des modules présentés précédemment.

Certaines stratégies étudiées ne sont pas triviales vis-à-vis de la parallélisation (méthode h -adaptative conforme, ratio ajusté pour l'approche h -adaptative non-conforme). Pour ces approches la question de la parallélisation est toujours ouverte. D'un autre côté, l'approche h -adaptative non-conforme avec le ratio fixé et la méthode LDC semblent être bien adaptées pour fonctionner dans un environnement parallèle. De plus, ces derniers semblent être les plus attrayants en terme d'efficacité.

Pour l'approche h -adaptative conforme, tout type de ratio de raffinement appliqué conduit au raffinement non-local. Les parties éloignées du maillage doivent être traitées ensemble (voir sous-module `UPDATE_RATIO_CHAM`). Cela induit un nombre important de communications ainsi que de méta-données créées pour générer le maillage raffiné. Cette méthode impliquerait sûrement de construire un algorithme parallèle dédié pour pallier ce problème de communication.

Des ratios de raffinement ajustés peuvent avoir un impact sur la mise en œuvre parallèle de l'approche h -adaptative non-conforme uniquement si la règle *one-irregularity rule* doit être respectée, voir module `UPDATE_RATIO_NCHAM`. Cela s'explique par le fait que les ratios de raffinement de certains éléments doivent être modifiés en fonction des ratios de raffinement assignés aux éléments voisins. Dans le cas où la règle *one-irregularity rule* ne doit pas être respectée, les différentes parties de maillages peuvent être traitées séparément. Toutefois, si le ratio maximal autorisé est limité (à 8 par exemple), le nombre de pas de synchronisation sera également limité.

La méthode LDC ne pose pas de problème de parallélisation du côté de la génération de maillage car `UPDATE_RATIOLDC` n'implique pas de modification des ratios de raffinement.

Quelle que soit l'approche AMR et le ratio de raffinement, le sous-module **DIVIDE** est entièrement parallélisable. Il peut être appliqué par éléments ou par groupes d'éléments une fois que les ratios de raffinement sont assignés à tous les éléments du maillage. Seul l'assemblage final du maillage est à effectuer sur le processeur maître. La possibilité de s'appuyer sur le (re)maillage parallèle est très bénéfique dans le sens où il est souvent impossible stocker et de manipuler les maillages en utilisant la mémoire d'un ordinateur seulement.

2.8 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons mis sous un même formalisme AMR des méthodes de raffinement local de pas de maillage basées sur des algorithmes de résolution et de raffinement conceptuellement différents. Nous avons alors proposé des algorithmes associés à la mise en œuvre des techniques h -adaptatives et de la méthode multigrille locale LDC. Les spécificités des processus de génération de maillages quadrilatéraux/hexaédriques raffinés hiérarchiquement sont détaillées pour chaque méthode AMR. Malgré le fait que ces méthodes AMR exploitent le raffinement du pas de maillage h , le raffinement des maillages est soumis à de nombreuses contraintes : soit de conserver la conformité, soit de restreindre le degré de la non-conformité, soit de générer les maillages sur plusieurs niveaux. Les spécificités des maillages générés conditionnent les processus de résolution qui ont été également explicités dans ce chapitre.

Au-delà des méthodes AMR, nous avons présenté de façon détaillée les modules auxiliaires permettant d'exécuter l'algorithme de raffinement adaptatif de maillage. Le raffinement est effectué automatiquement de façon à satisfaire les précisions (erreurs globales et locales) prescrites par l'utilisateur. Le formalisme adopté permet d'intégrer et d'étudier plusieurs options : estimateur d'erreur, critères de raffinement (détection des éléments à raffiner et ratios de raffinement) et critères d'arrêt.

Le chapitre suivant est dédié à la mise en œuvre pratique des algorithmes exposés dans ce chapitre, permettant une comparaison numérique objective des performances des différentes méthodes AMR.

Chapitre 3

Comparaison numérique des méthodes de raffinement de pas de maillage

L'objectif de ce chapitre est de mettre en œuvre informatiquement l'algorithme de raffinement proposé dans le chapitre 3 intégrant plusieurs options (méthodes AMR, stratégies de détection des éléments à raffiner, ratios de raffinement, etc.). Nous nous focalisons ici sur une étude comparative des performances des méthodes de raffinement de pas de maillage sur un problème élastostatique.

Pour cette comparaison nous avons choisi des applications $2D$ et $3D$ avec des complexités différentes : benchmark académique, ainsi que cas test issus de la problématique nucléaire représentant l'IPG.

La majorité des résultats présentés dans ce chapitre a été publiée dans dans [148].

Sommaire

3.1	Introduction	71
3.2	Généralités	71
3.2.1	Problème considéré	72
3.2.2	Détails pratiques de la mise en œuvre des méthodes AMR	72
3.2.3	Post-traitement des résultats	73
3.3	Benchmark académique : plaque trouée	75
3.3.1	Définition du problème	75
3.3.2	Illustrations numériques	76
3.4	Cas test industriel : Interaction mécanique Pastille-Gaine	87
3.4.1	Définition du problème	87
3.4.2	Exemple bidimensionnel	89
3.4.3	Exemple tridimensionnel	92
3.5	Conclusions de l'étude comparative	98

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une étude comparative de la méthode multiniveau Local Defect Correction avec les méthodes AMR les plus utilisées dans la littérature – les méthodes h -adaptatives. D'un point de vue théorique, la méthode LDC peut être vue comme une stratégie h -adaptative non-conforme où chaque sous-niveau est résolu séparément de façon conforme (processus itératif) [81]. Ces approches ont alors le même estimateur d'erreur *a priori* : elles convergent avec le même ordre en pas de maillage grossier et fin. Malgré ces caractéristiques théoriques très proches la méthode LDC n'a jamais été comparée à des méthodes h -adaptatives auparavant.

Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur un algorithme de raffinement de maillage (introduit au chapitre 2) entièrement automatique visant à satisfaire les exigences de précision fixées. La mise en scène des trois méthodes AMR sous un même formalisme algorithmique permet une comparaison la plus objective possible.

Motivés par l'intérêt et les potentialités offertes par les maillages quad/hexa (cf. section 1.3.2), nous effectuons l'étude comparative avec des éléments finis Q_1 (donc interpolation bi ou trilineaire est utilisée).

Une étude auxiliaire portant sur le choix des différentes stratégies de détection des éléments à raffiner, ainsi que des ratios de raffinement est également menée. Les stratégies les plus performantes numériquement sont alors déterminées pour des maillages quad/hexa.

Nous avons intentionnellement choisi d'effectuer cette étude sur le benchmark académique connu de la plaque trouée souvent utilisé dans la littérature pour tester les performances de méthodes numériques. Les applications issues de la problématique industrielle du nucléaire, à savoir le phénomène de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine, cf. section 1.1.2 sont également considérées. L'ensemble des cas test représentant l'IPG sont des défis réalistes qui nécessitent l'application d'outils numériques efficaces afin de pouvoir les résoudre. Il est donc intéressant de tester les approches AMR dans ce contexte.

3.2 Généralités

Le processus générique de raffinement adaptatif de maillage intégrant l'ensemble de modules introduits au chapitre 2 a été implémenté via le logiciel Cast3M [164] – solveur par éléments finis développé par le CEA. L'implémentation est effectuée de façon séquentielle. Les calculs ont été effectués sur un cluster de 240 Go de RAM afin de permettre d'avoir le plus de résultats possibles sur des maillages fins, notamment pour la méthode h -adaptative conforme.

3.2.1 Problème considéré

Pour cette étude, on se place dans un cadre élastostatique linéaire. Nous rappelons ici le problème considéré présenté dans la section 1.4.1 :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbb{I} \right) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

avec E le module de Young, ν le coefficient de Poisson, “tr” l’opérateur de trace et \mathbb{I} la matrice identité.

Pour cette étude comparative, chaque problème linéaire discret associé défini soit sur le maillage global \mathcal{G}_i ou sur chaque sous-maillage $\hat{\mathcal{G}}_i$ est résolu avec le même solveur linéaire direct (basé ici sur une factorisation de Crout). Un solveur direct est utilisé, notamment dans le but de pouvoir à terme traiter plus facilement des problèmes de contact. L’utilisation du même solveur linéaire pour les systèmes issus des trois méthodes AMR permet à la comparaison d’être la plus juste possible.

3.2.2 Détails pratiques de la mise en œuvre des méthodes AMR

La résolution du problème avec l’**approche h -adaptative conforme**, cf. module **SOLVE_{CHAM}** et l’Algorithme 3 associé, n’implique pas de difficultés particulières comme les maillages conformes sont générés.

Les aspects liés à la résolution du problème avec l’**approche h -adaptative non-conforme** sont pris en compte dans le module **SOLVE_{NCHAM}**, cf. l’Algorithme 2. Pratiquement, nous imposons aux déplacements sur les *hanging nodes* à suivre une combinaison linéaire des déplacements de la face de l’élément grossier sur laquelle il se situe. Une raideur associée à ces relations est construite. Cette raideur est ensuite prise en compte via des multiplicateurs de Lagrange [29] au moment de l’assemblage des matrices de rigidité. Une condensation statique des multiplicateurs de Lagrange et des inconnues non-conformes associées est effectuée pour éviter la résolution d’un problème de point-selle. Nous illustrons sur la Figure 3.1 les relations de compatibilité pour les cas bi- et tridimensionnels.

Concernant la **méthode Local Defect Correction**, la résolution itérative de type multigrille est effectuée avec le module **SOLVE_{LDC}**, cf. l’Algorithme 4. Cette résolution itérative repose sur les opérateurs de restriction et de prolongement, donc le choix de ces opérateurs doit être effectué avec soin. Comme montré dans [81], à condition que les opérateurs de transfert soient bien choisis et l’erreur de pollution soit limitée (bonne détection des zones à raffiner), l’erreur composite de la méthode LDC converge comme l’erreur de discrétisation liée au pas de maillage le plus fin. L’ordre des opérateurs doit alors être cohérent avec l’ordre d’approximation éléments finis choisis.

Dans nos applications, nous choisissons pour l’opérateur de prolongement \mathcal{P}_{i-1}^i une interpolation basée sur les fonctions de forme (bi- ou trilinéaire), cf. Figure 3.2. La restriction canonique \mathcal{R}_{i+1}^i ,

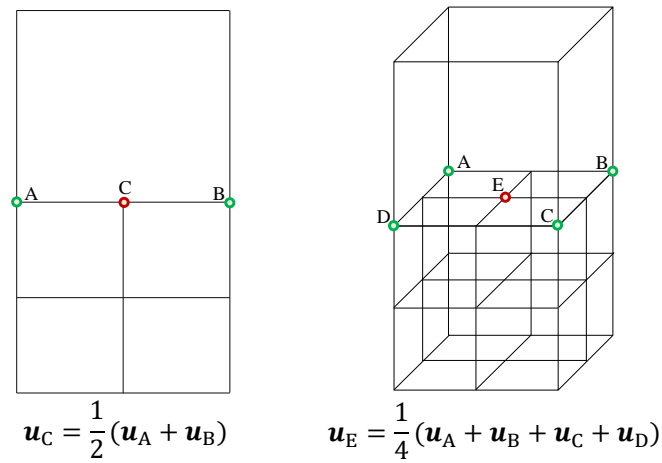


Figure 3.1: Imposition de la compatibilité aux nœuds non-conformes

cf. Figure 3.2, est utilisée car nous nous appuyons sur un raffinement hiérarchique. Ce choix des opérateurs est en accord avec la précision au premier ordre attendue pour la méthode LDC, ce qui a été confirmé dans [89]. Le paramètre de convergence est fixé à $\tau = 10^{-7}$ et la norme euclidienne est utilisée.

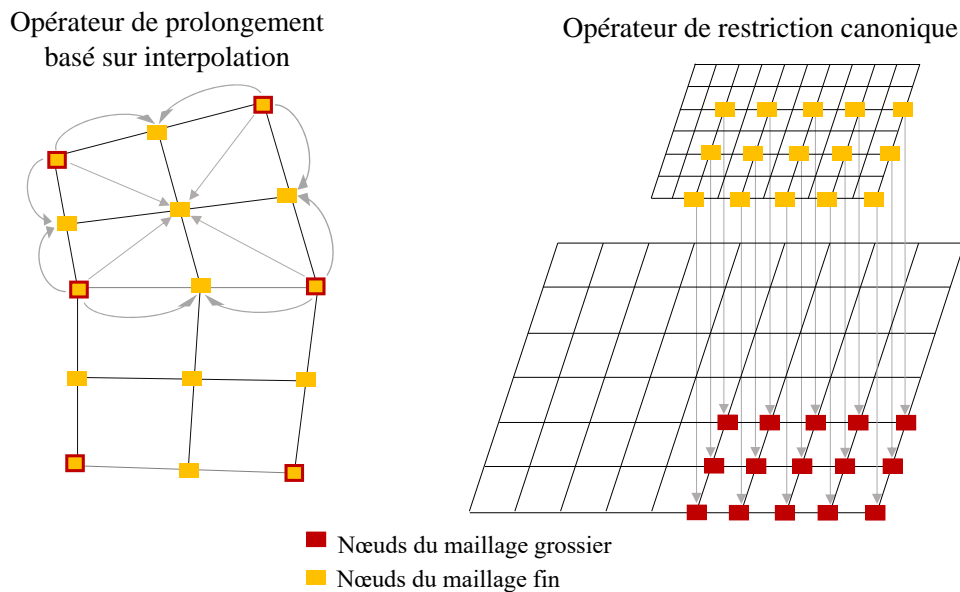


Figure 3.2: Opérateurs de transfert pour la méthodes LDC basée sur un raffinement hiérarchique

3.2.3 Post-traitement des résultats

Pour tous les exemples numériques, les résultats obtenus sont post-traités de la même manière. Nous vérifions le respect des précisions globale et locale fixées pour toutes les méthodes AMR consi-

dérées, les critères d'optimalité du maillage et les ratios de raffinement. Afin d'illustrer la distribution de l'erreur locale (3.4) et d'identifier les zones critiques, les cartes d'erreur locales sont données pour chaque méthode AMR, critères d'optimalité du maillage et certains ratios de raffinement. Pour la méthode LDC, les cartes de l'erreur locale obtenue après convergence du processus itératif sont présentées sur chaque sous-grille $\{\hat{\mathcal{G}}_i\}_{i=0}^k$ séparément et sur la grille composite \mathcal{G}_k . À titre comparatif, dans certains cas les résultats obtenus avec un raffinement uniforme hiérarchique sont également fournis.

Les performances des méthodes AMR, critères d'optimalité du maillage et de ratios de raffinement vis-à-vis des mesures présentées par la suite sont discutées.

Mesures de précision. Les précisions globales et locales obtenues sont vérifiées à l'aide des mesures suivantes :

- *Nombre d'itérations de raffinement* effectuées k (nombre maximal d'itérations i dans l'Algorithme 1).
- *Erreur globale relative en norme énergie* :

$$\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}} = \frac{\xi_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}}{\omega_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}} \quad (3.2)$$

avec $\xi_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ et $\omega_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ calculés avec les équations (2.11) et (2.13) respectivement, en utilisant la solution analytique ou de référence (sur un maillage très fin uniformément raffiné) : $\sigma_k^s = \sigma_k^{\text{ex}}$ et $\varepsilon_k^s = \varepsilon_k^{\text{ex}}$.

Le maillage satisfaisant $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}} \leq \epsilon_\Omega$ est considéré comme *acceptable* vis-à-vis de la précision globale. Le maillage *optimal* globalement est celui qui remplit cette condition avec le nombre minimum de nœuds.

- *Erreur locale relative*, évaluée quantitativement avec la mesure suivante :

$$\eta = \frac{\mu(\Omega_{\mathcal{D}_k})}{\mu(\Omega)} \quad (3.3)$$

où $\mu(\Omega_{\mathcal{D}_k})$ est la mesure de la zone $\Omega_{\mathcal{D}_k} = \{\cup \bar{T}^k; T^k \in \mathcal{D}_k\}$ avec \mathcal{D}_k l'ensemble des éléments où l'erreur locale $\mathbf{e}_{T^k}^{\text{ex}}$ dépasse la tolérance prescrite : $\mathcal{D}_k = \{T^k \in \mathcal{G}_k; \mathbf{e}_{T^k}^{\text{ex}} > \epsilon_\Omega\}$. L'erreur relative locale est définie comme

$$\mathbf{e}_{T^k}^{\text{ex}} = \frac{\xi_{T^k}^{\text{ex}}}{\omega_{T^k}^{\text{ex}}} \quad (3.4)$$

où $\xi_{T^k}^{\text{ex}}$ (Eq. (2.10)) et $\omega_{T^k}^{\text{ex}}$ (Eq. (2.14)) sont calculés avec $\sigma_k^s = \sigma_k^{\text{ex}}$ et $\varepsilon_k^s = \varepsilon_k^{\text{ex}}$.

La valeur η indique que l'erreur locale $\mathbf{e}_{T^k}^{\text{ex}}$ (Eq. (3.4)) respecte la précision fixée sur $(1 - \eta) \times 100\%$ du domaine de calcul.

La mesure η doit être comparée à la valeur du paramètre de contrôle de l'erreur locale défini par l'utilisateur pour le critère d'arrêt et noté δ (cf. expression (2.25)). Le maillage est dit *acceptable* vis-à-vis de la précision locale s'il satisfait $\eta \leq \delta$. Le maillage *optimal* localement est celui qui remplit cette condition avec le nombre minimum de nœuds.

Les seuils d'erreur globaux suivants sont étudiés dans cette étude : $\epsilon_\Omega = 4\%$, 2% , 1% , 0.5% . Le paramètre de contrôle de l'erreur locale δ (Eq. (2.25)) est exprimé en pourcent et est choisi égal à $\delta = 3\%$ pour tous les exemples numériques de ce chapitre.

Mesures d'efficacité Les mesures suivantes sont utilisées pour comparer l'efficacité des méthodes AMR considérées :

- *Nombre de nœuds* : le nombre total de nœuds N_{tot} est défini comme $N_{\text{tot}} = N_{\mathcal{G}_k}$ pour les méthodes h -adaptative et $N_{\text{tot}} = \sum_{i=0}^k N_{\hat{\mathcal{G}}_i}$ pour la méthode LDC, où N_* représente le nombre de nœuds de sous-grille correspondante. Pour la méthode LDC, le nombre de nœuds $N_{\mathcal{G}_k}$ correspond à celui de la grille (fictive) composite \mathcal{G}_k . Le nombre de degrés de liberté (DDL) est directement proportionnel au nombre de nœuds : $\#\text{DDL} = D \times N_*$, avec D étant la dimension du problème.
- *Système linéaire* : taille maximale du système linéaire à résoudre $((D \times N_{\text{max}}) \times (D \times N_{\text{max}}))$ avec $N_{\text{max}} = \max_i N_{\mathcal{G}_i}$ pour les méthodes h -adaptatives et $N_{\text{max}} = \max_i N_{\hat{\mathcal{G}}_i}$ pour l'approche LDC. Le déraffinement n'étant pas autorisé pendant les itérations de la boucle AMR, on a donc $N_{\text{max}} = N_{\mathcal{G}_k}$ pour les techniques h -adaptatives. Le nombre de nœuds non-conformes est explicitement indiqué pour la méthode h -adaptative non-conforme.
- *Temps CPU* : temps CPU total incluant la construction de nouveaux maillages globaux pour les approches h -adaptatives ou de sous-grilles locales pour la méthode LDC, la définition et la résolution des problèmes sur les maillages raffinés générés. Consommation de temps pour la résolution de problèmes (module **SOLVE**), estimation d'erreur et étape de marquage (les modules **ESTIMATE** et **MARK**), ainsi que le raffinement du maillage (module **REFINE**) sont explicitement données pour chaque technique AMR.

3.3 Benchmark académique : plaque trouée

3.3.1 Définition du problème

Le premier exemple numérique est le benchmark bien connu d'une plaque infinie avec un trou circulaire soumis à un chargement prescrit $\sigma_\infty = 1$ Pa dans la direction \mathbf{e}_1 (cf. Figure 3.3).

Le matériau est supposé être élastique linéaire avec le module de Young $E = 10^3$ Pa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Pour des raisons de symétrie, seul un quart de la plaque avec $a = 10$ m et rayon $R = 1$ m est considéré. Des conditions aux limites de Dirichlet exprimant la symétrie ($\mathbf{u} = 0$) sont prescrites sur les bords *I* et *IV*, tandis que les tractions calculées à partir de la solution exacte ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$), cf. expression (3.5), sont imposées aux bords *II* et *III*, voir Figure 3.3.

La solution analytique de ce problème a été fournie en coordonnées polaires (r, φ) dans [156] et

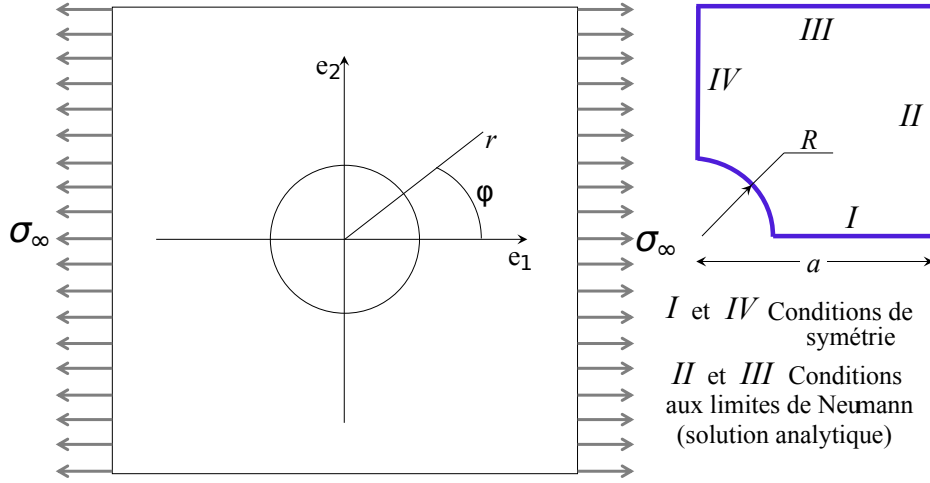


Figure 3.3: Plaque infinie avec trou circulaire central, domaine de calcul et conditions aux limites

s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(r, \varphi) &= \sigma_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\varphi + \cos 4\varphi \right) + \frac{3}{2} \frac{R^4}{r^4} \cos 4\varphi \right) \\
 \sigma_{12}(r, \varphi) = \sigma_{21}(r, \varphi) &= \sigma_{\infty} \left(-\frac{R^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \sin 4\varphi \right) + \frac{3}{2} \frac{R^4}{r^4} \sin 4\varphi \right) \\
 \sigma_{22}(r, \varphi) &= \sigma_{\infty} \left(-\frac{R^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi - \cos 4\varphi \right) - \frac{3}{2} \frac{R^4}{r^4} \cos 4\varphi \right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cette solution analytique est utilisée dans cet exemple numérique pour post-traiter les résultats obtenus, cf. section 3.2.3.

3.3.2 Illustrations numériques

Détails pratiques liés à la génération des maillages raffinés

Nous illustrons sur ce cas test les procédures de raffinement de maillages (modules **REFINE**, cf. section 2.6) avec les trois méthodes AMR considérées.

Pour cette illustration nous avons considéré le raffinement avec ratio ajusté pour les méthodes h -adaptatives et avec le ratio moyen ajusté pour la méthode LDC. Le critère d'optimalité de maillage OB a été choisi, cf. Eq. (2.32).

Méthode h -adaptative non-conforme

La Figure 3.4 présente le raffinement h -adaptatif hiérarchique non-conforme effectué avec la procédure développée. La distribution élémentaire des ratios de raffinement ajustés $\{\beta_{T^0}^0\}_{T^0 \in \mathcal{G}_0}$ calculée avec le sous-module **RATIO** est donnée sur la Figure 3.4a. Cette distribution est donnée sur le maillage de départ \mathcal{G}_0 .

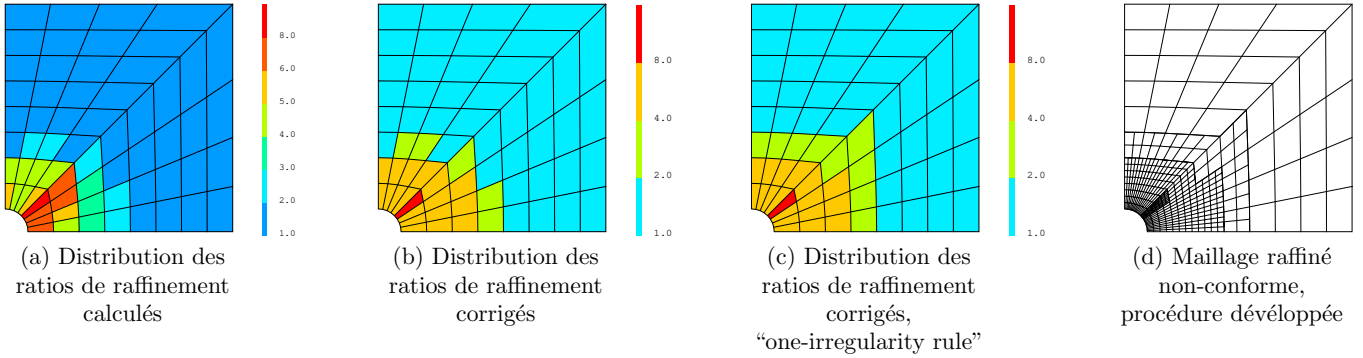


Figure 3.4: Raffinement de maillage avec la procédure h -adaptative non-conforme développée

Le sous-module `UPDATE_RATIONCHAM` est illustré sur les Figures 3.4b et 3.4c. La Figure 3.4b représente la distribution de ratios de raffinement corrigés permettant de satisfaire la condition $\beta_{T^i} = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, cf. Eq. (2.38). À son tour, la Figure 3.4c présente la distribution de ratios de raffinement obtenue afin de respecter la *one-irregularity rule*. Nous pouvons observer que pour certains éléments le ratio de raffinement, initialement égal à un, est augmenté. Finalement, le maillage raffiné non-conforme \mathcal{G}_1 obtenu est illustré sur la Figure 3.4d.

Méthode h -adaptative conforme

Le processus de raffinement h -adaptatif conforme est illustré sur la Figure 3.5. À partir de la distribution élémentaire des ratios de raffinement ajustés $\{\beta_{T^i}^0\}_{T^i \in \mathcal{G}_0}$ présentée sur la Figure 3.5a (identique à la Figure 3.4a), les couches d'éléments dans chaque direction (ici $d = 1, 2$) sont construites avec le sous-module `UPDATE_RATIOCHAM`.

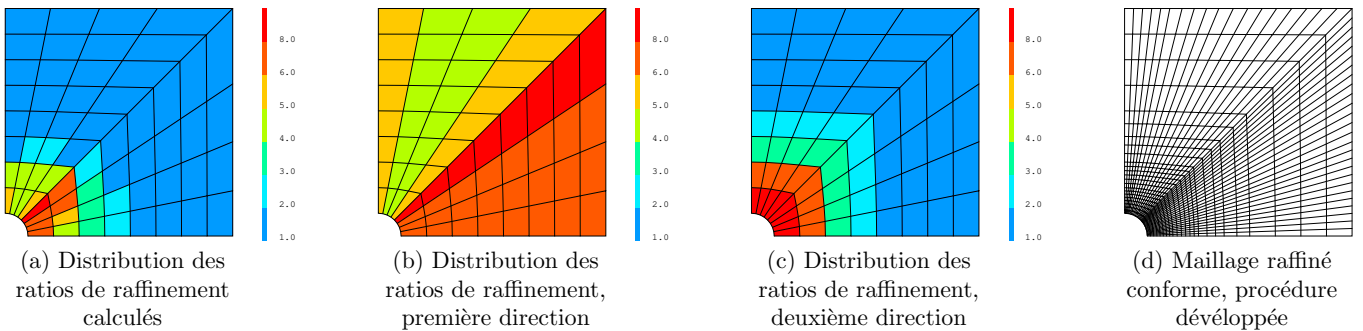


Figure 3.5: Raffinement de maillage avec la procédure h -adaptative conforme développée

Les Figures 3.5b et 3.5c présentent les ratios de raffinement corrigés obtenus dans chaque direction, $\{\beta_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{G}_0} = \{\beta_{T^i}^1, \beta_{T^i}^2\}_{T^i \in \mathcal{G}_0}$, respectivement. Le maillage raffiné généré \mathcal{G}_1 est illustré sur la Figure 3.4d. On peut observer que les ratios de raffinement les plus élevés sont concentrés à proximité du trou central, et ensuite propagés sur tout le maillage afin de rendre le maillage conforme.

Méthode Local Defect Correction

Comme précisé auparavant, la méthode LDC n'est pas combinée au ratio de raffinement ajusté. Une approche alternative associée à l'application du ratio de raffinement moyen ajusté est alors adoptée pour la méthode LDC. La génération de maillage raffiné est présentée sur la Figure 3.6.

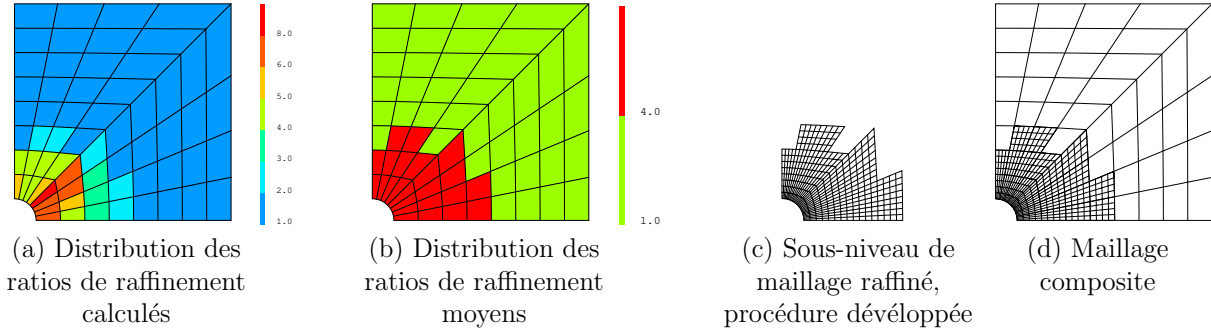
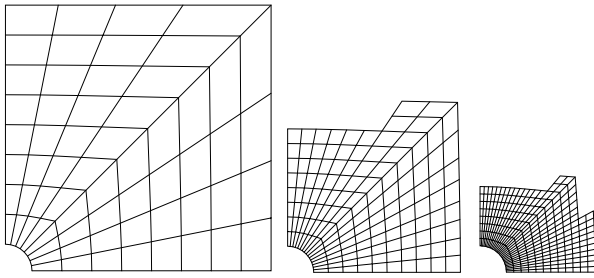


Figure 3.6: Raffinement de maillage avec la procédure LDC développée

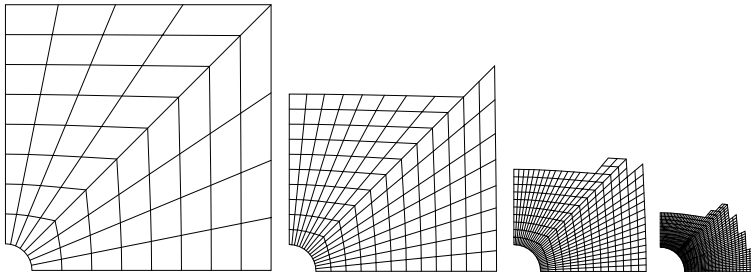
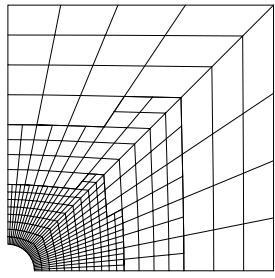
De façon similaire aux deux méthodes h -adaptatives, la Figure 3.6a présente la distribution élémentaire des ratios de raffinement ajustés $\{\beta_{T^i}^0\}_{T^i \in \mathcal{G}_i}$. Sur la Figure 3.6b nous pouvons observer la distribution du ratios de raffinement moyen ajusté calculé avec Eq. (2.34). Les Figures 3.6c et 3.6d présentent, respectivement, le sous-niveau de maillage généré $\hat{\mathcal{G}}_1$ et le maillage composite \mathcal{G}_1 .

Modification des zones raffinés en fonctions des seuils de tolérance fixés

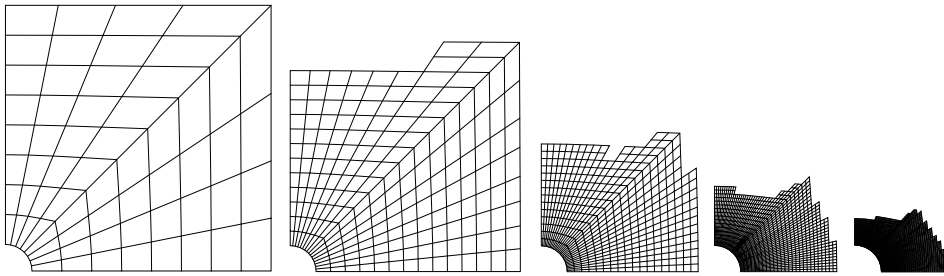
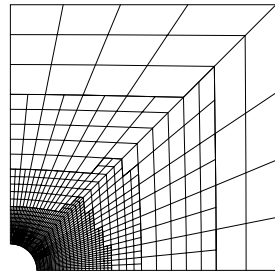
Nous illustrons sur la Figure 3.7 les sous-maillages générés avec la méthode LDC pour différentes tolérances d'erreur globale ϵ_Ω avec le ratio fixé et le critère d'optimalité LOC. La stratégie de détection des éléments à raffiner de type quantitative conduit naturellement à des zones de raffinement imbriquées. On peut remarquer sur la Figure 3.7 que la séquence de maillages générée varie avec la tolérance prescrite. Pour l'exemple choisi, on voit qu'en demandant $\epsilon_\Omega = 4\%$, une erreur réelle $\mathbf{e}_{\hat{\mathcal{G}}_k}^{\text{ex}} = 2.63\%$ est atteinte avec 2 sous-niveaux. Pour satisfaire $\epsilon_\Omega = 2\%$, des zones de raffinement plus grandes ainsi qu'un sous-niveau supplémentaire sont automatiquement générés ce qui conduit à une erreur réelle $\mathbf{e}_{\hat{\mathcal{G}}_k}^{\text{ex}} = 1.35\%$.



Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 4\%$ – erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}} = 2.63\%$, mesure de l'erreur locale $\eta = 2.36\%$



Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 2\%$ – erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}} = 1.35\%$, mesure de l'erreur locale $\eta = 2.29\%$



Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 1\%$ – erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}} = 0.75\%$, mesure de l'erreur locale $\eta = 2.31\%$

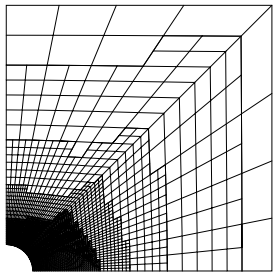
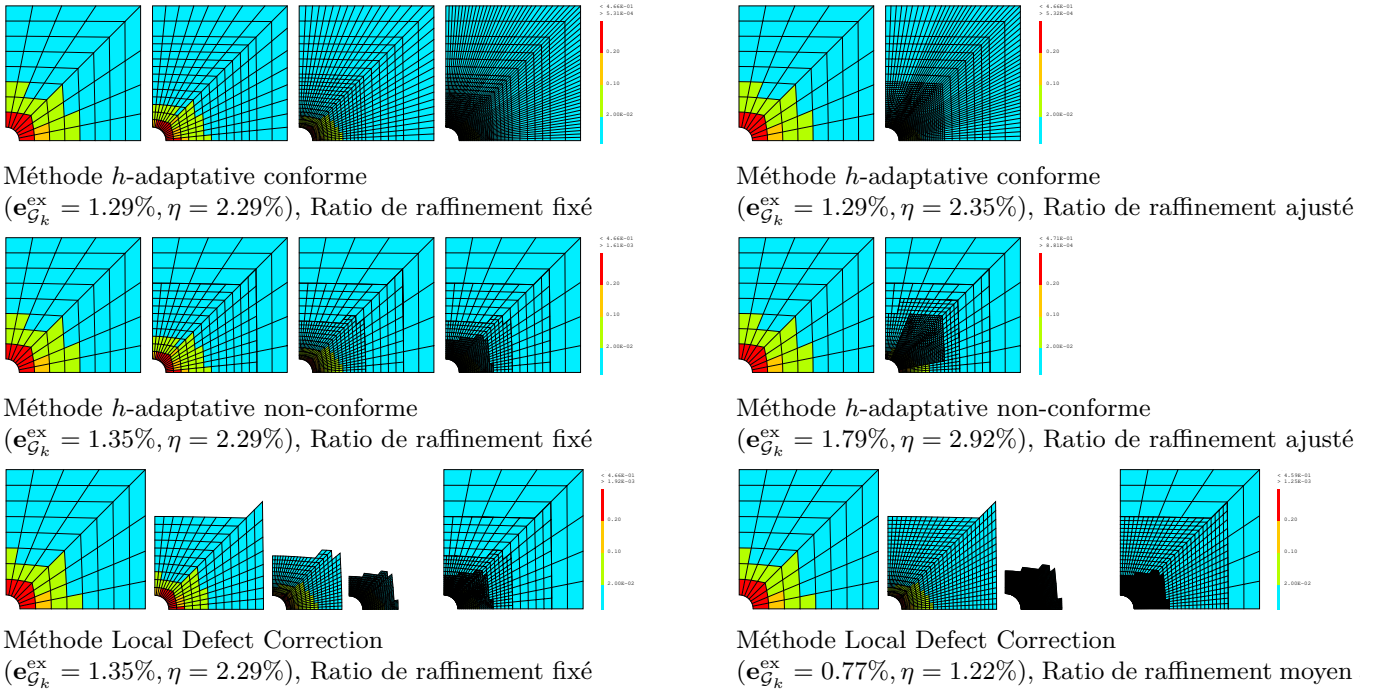


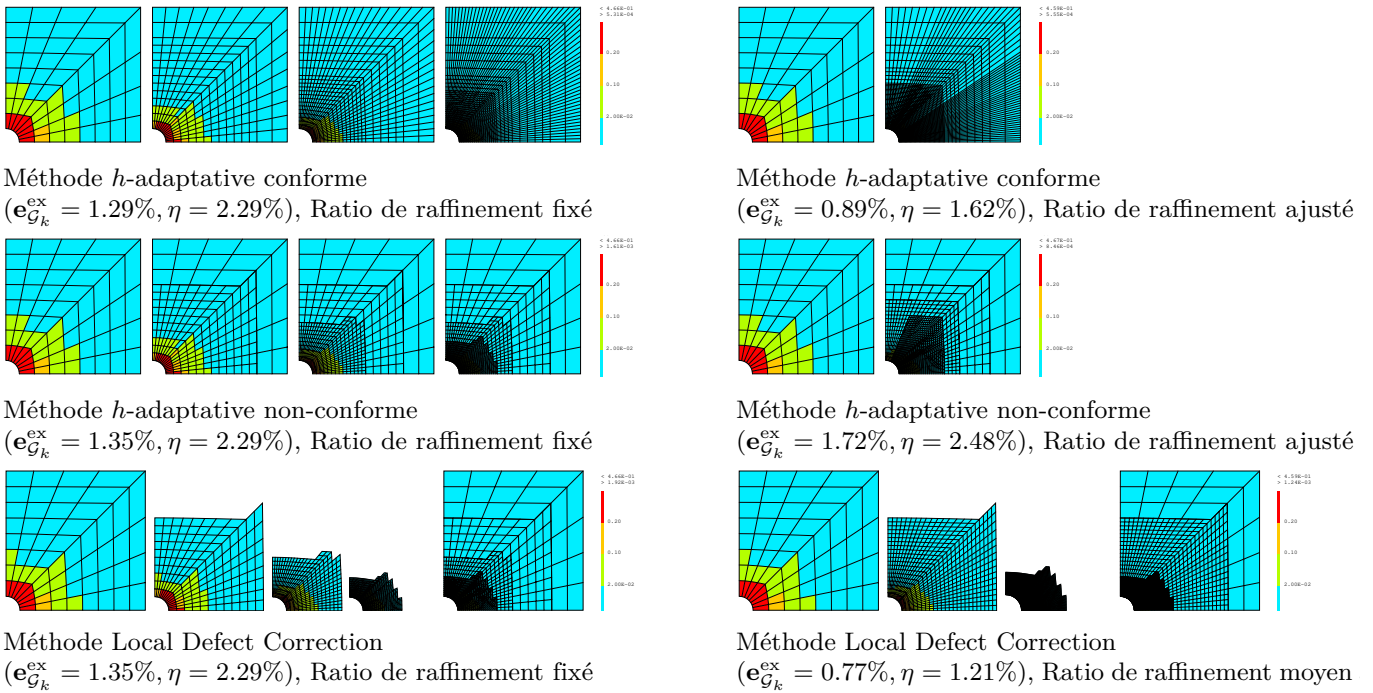
Figure 3.7: Plaque trouée – critère d'optimalité de maillage LOC – séquence de maillages $\{\hat{\mathcal{G}}_i\}_{i=0}^k$ et grille composite \mathcal{G}_k générés avec la méthode LDC pour différentes tolérances fixées sur l'erreur globale ϵ_Ω et paramètre de contrôle de l'erreur locale $\delta = 3\%$

Contrôle d'erreurs locales

La génération d'une série de maillages raffinés $\{\mathcal{G}_i\}_{i=1}^k$ part du même maillage grossier (le plus uniforme possible) \mathcal{G}_0 pour toutes les méthodes AMR. Les cartes d'erreurs locales relatives (distribution de l'erreur locale $\mathbf{e}_{T^k}^{\text{ex}}$) obtenues pour la tolérance fixée $\epsilon_\Omega = 2\%$, avec les critères d'optimalité OB et LOC, sont présentées sur les Figures 3.8a et 3.8b, respectivement. Différents ratios de raffinement sont considérés.



(a) critère d'optimalité de maillage OB



(b) critère d'optimalité de maillage LOC

Figure 3.8: Plaque trouée – cartes d'erreurs locales – tolérance fixée sur l'erreur globale – paramètre de contrôle de l'erreur locale $\delta = 3\%$; (a) critère d'optimalité de maillage OB et (b) critère d'optimalité de maillage LOC

On voit que les maillages générés automatiquement avec les trois méthodes AMR sont similaires, avec des éléments raffinés concentrés autour du trou central, comme attendu. De plus, les ensembles d'éléments \mathcal{D}_i où l'erreur locale n'est pas satisfaite sont également de plus en plus localisés autour du trou. Pour chaque cas, les valeurs de l'erreur globale relative $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ (Eq. (3.2)) ainsi que la mesure de l'erreur locale η (Eq. (3.3)) sont explicitement fournies. Quelle que soit la technique AMR considérée, l'utilisation des ratios de raffinement considérés (ratios fixes, ajustés et moyens ajustés) conduit à des résultats similaires en termes de valeurs $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ et η . On peut noter que les deux critères d'optimalité de maillage, OB et LOC, permettent d'atteindre les précisions prescrites.

La comparaison des deux critères d'optimalité du maillage est effectuée vis-à-vis de l'erreur locale. Les valeurs de la mesure de l'erreur locale η sont illustrées dans la Figure 3.9 pour les différents critères d'optimalité, ratios de raffinement et méthodes AMR. On voit que les critères OB et LOC fournissent tous deux des maillages localement acceptables satisfaisant la condition $\eta \leq \delta$, indépendamment de la technique AMR et de ratio de raffinement appliqué.

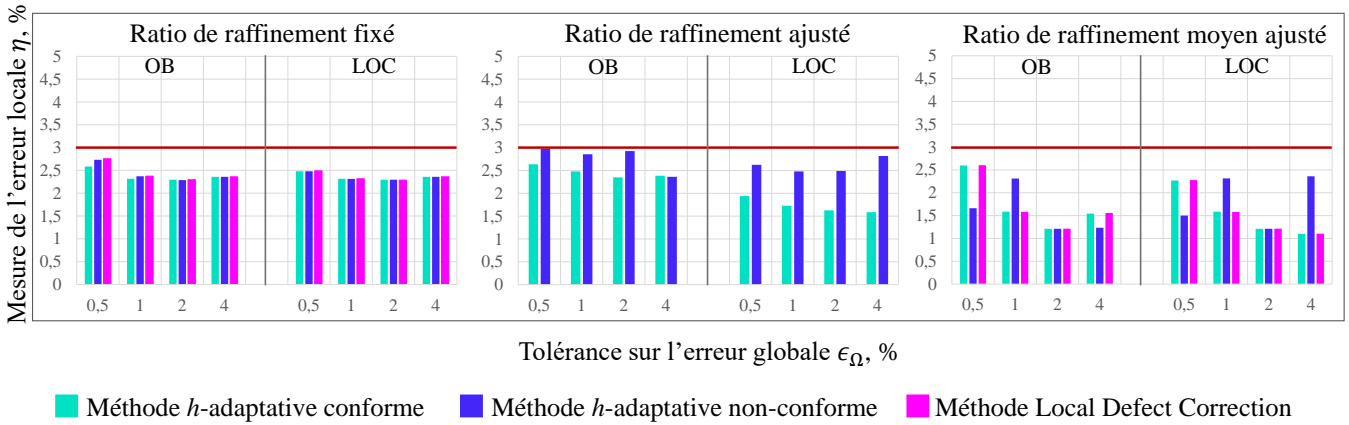


Figure 3.9: Plaque trouée – mesure de l'erreur locale η vs tolérance fixé sur l'erreur globale ϵ_Ω

Ratio de raffinement fixé

Les Figures 3.10a et 3.10b rapportent l'évolution de l'erreur relative globale $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie par rapport au nombre de nœuds $N_{\mathcal{G}_k}$ pour les critères d'optimalité OB et LOC, respectivement.

On voit que toutes les techniques de raffinement considérées, y compris le raffinement uniforme hiérarchique, ont les mêmes taux de convergence proches de l'optimum en $\mathcal{O}(N_{\mathcal{G}_k}^{-1/2})$. De plus, les convergences optimales sont déjà atteintes pour un nombre relativement limité de nœuds. On peut noter que les méthodes h -adaptative non-conformes et LDC permettent d'avoir une amélioration de la convergence en régime pré-asymptotique (pour $N_{\mathcal{G}_k} \leq 1 \cdot 10^3$). Notons que le raffinement uniforme hiérarchique conduit aussi à une convergence (presque) optimale ($\mathcal{O}(h) \approx \mathcal{O}(N_{\mathcal{G}_k}^{-1/2})$). Cela s'explique par manque de singularités dans l'exemple numérique.

La dégradation modérée de la pente pour les plus petites tolérances ($\epsilon_\Omega < 0.3\%$) est due à l'approximation grossière du trou central (sur le maillage initial).

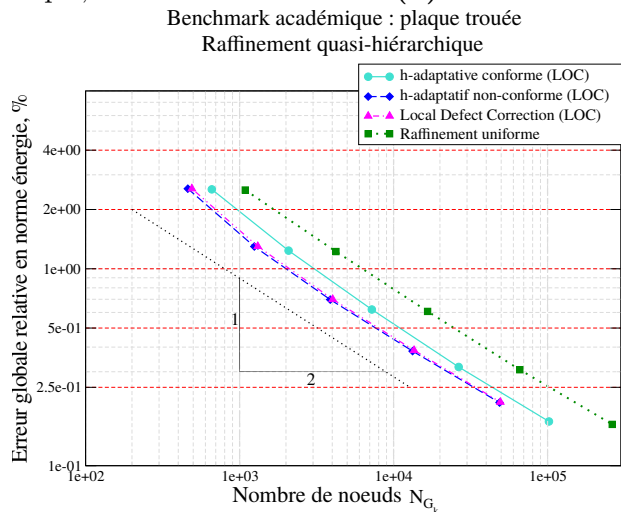
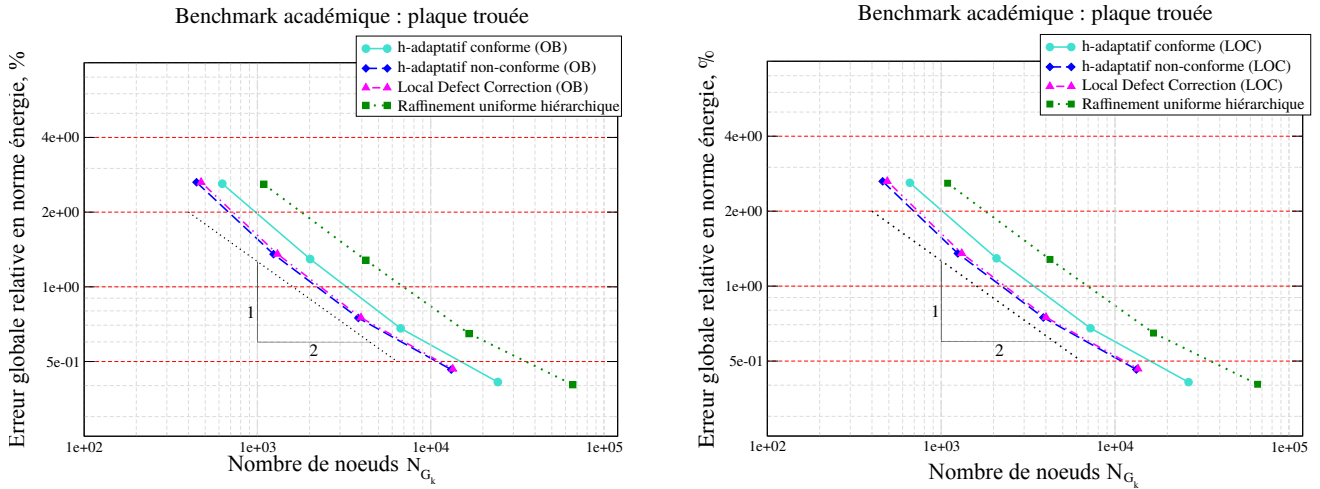


Figure 3.10: Plaque trouée – ratio de raffinement fixé – erreur globale relative $e_{G_k}^{ex}$ en norme énergie vs nombre de nœuds N_{G_k} : (a) raffinement hiérarchique, critère OB, (b) raffinement hiérarchique, critère LOC et (c) raffinement quasi-hiérarchique, critère LOC

Remarque 3.3.1. *Le raffinement hiérarchique qui consiste à diviser les éléments (cf. section 2.6.4, module **DIVIDE**) ne prévoit pas l'amélioration de l'approximation initiale de la géométrie lors du processus du raffinement. La discrétisation initiale du domaine peut donc impacter la précision de la solution finale obtenue, en particulier lorsque la géométrie du domaine est complexe et présente des surfaces courbes. Afin de pallier ce défaut du raffinement hiérarchique, une stratégie de raffinement "quasi-hiérarchique" qui consiste à déplacer les nœuds ajoutés de façon hiérarchique vers la frontière réelle du domaine (cf. Figure 3.11), peut être utilisée.*

On constate sur la Figure 3.10c qu'en appliquant la stratégie de raffinement quasi-hiérarchique, des pentes optimales sont obtenues pour toutes les méthodes AMR et ce même pour de faibles erreurs.

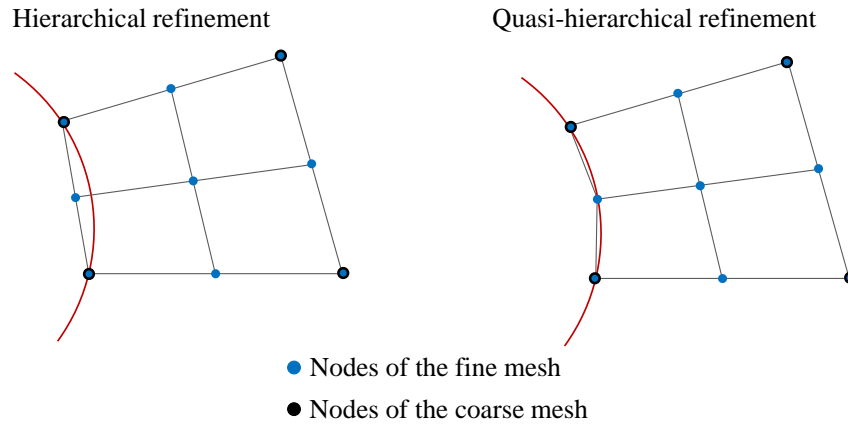


Figure 3.11: Illustration de stratégies de raffinement de maillage hiérarchiques et quasi-hiérarchiques

Par la suite, ce raffinement "quasi-hiérarchique" n'est plus considéré car il n'affecte vraiment que les très faibles erreurs.

La Figure 3.12 représente l'erreur relative globale $e_{\mathcal{G}_k}^{ex}$ en norme d'énergie en fonction du temps de calcul total pour toutes les tolérances ϵ_Ω . Globalement, pour toutes les tolérances d'erreur prescrites ϵ_Ω , les critères OB et LOC conduisent à des résultats similaires en terme de temps CPU total. On peut observer que toutes les méthodes AMR permettent de satisfaire la précision fixée sur l'erreur globale avec les temps CPU inférieurs comparés à un raffinement uniforme hiérarchique. De plus, l'approche LDC semble clairement être la stratégie de raffinement la plus efficace.

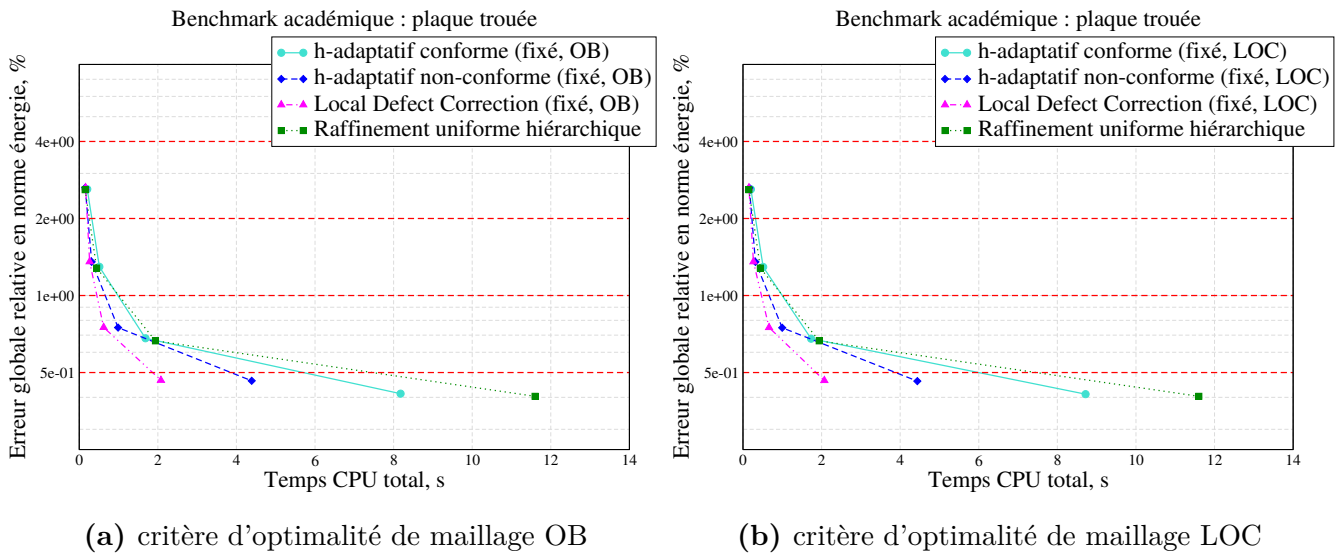


Figure 3.12: Plaque trouée – ratio de raffinement fixé ; erreur globale relative $e_{\mathcal{G}_k}^{ex}$ en norme énergie vs temps CPU total : critère d'optimalité de maillage (a) OB et (b) LOC

Dans la Table 3.1, nous présentons d'une manière plus détaillée les résultats de comparaison des

méthodes de raffinement pour la tolérance $\epsilon_\Omega = 0.5\%$. Premièrement, nous pouvons voir que toutes les méthodes AMR permettent d'atteindre des erreurs globales et locales similaires à celles obtenues avec un raffinement uniforme hiérarchique mais de manière plus efficace en temps de calcul et nombre de nœuds. Les différences suivantes entre les techniques AMR peuvent être remarquées. Pour une tolérance donnée, l'approche LDC est plus efficace en temps CPU que les techniques h -adaptatives et conduit à des nombres similaires de nœuds totaux $N_{\mathcal{G}_k}$ que la stratégie h -adaptative non-conforme. Cependant, le nombre total de nœuds stockés N_{tot} est entre les nombres de nœuds N_{tot} des deux méthodes h -adaptatives, non-conforme et conforme. La taille maximale du système d'équations à résoudre avec l'approche LDC est plus limitée comparée à celles des méthodes h -adaptatives, ce qui explique le gain important en terme de temps de calcul, en particulier lorsqu'un solveur direct est utilisé.

Table 3.1: Plaque trouée – ratio de raffinement fixé

$\epsilon_\Omega = 0.5\%, \delta = 3\%$	Raffinement uniforme	h -adaptatif conforme		h -adaptatif non-conforme		Local Defect Correction	
		OB	LOC	OB	LOC	OB	LOC
k	5	5	5	5	5	5	5
$\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}, \%$	0.40	0.41	0.41	0.46	0.46	0.46	0.46
$\eta, \%$	2.4	2.6	2.4	2.7	2.5	2.7	2.5
$N_{\mathcal{G}_k}$	66049	24415	26471	13134	13257	13421	13555
N_{tot}						17712	17880
N_{max}						10429	10543
$N_{\text{hanging_nodes}}$				285	296		
CPU total	11.6s	8.2s	8.7s	4.4s	4.4s	2.1s	2.1s
CPU (SOLVE)	4.7s	1.8s	2.1s	3.2s	3.2s	0.9s	0.9s
CPU (EST.+MARK)	-	1.0s	1.0s	0.5s	0.5s	0.6s	0.6s
CPU (REFINE)	6.9s	5.4s	5.6s	0.7s	0.7s	0.5s	0.5s

Ratios de raffinement ajusté et moyen ajusté

La Figure 3.13 présente l'erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en fonction du temps CPU total obtenu avec le ratio de raffinement ajusté appliqué aux deux méthodes h -adaptatives. On observe que l'application du ratio de raffinement ajusté pour les méthodes h -adaptatives conduit à un temps CPU similaire (technique non-conforme) ou plus limité (technique conforme) comparé à la stratégie avec ratio de raffinement fixé.

En fait, si une seule itération de raffinement suffit pour atteindre les précisions prescrites, l'utilisation du ratio de raffinement ajusté peut être bénéfique en termes de temps CPU, même si des maillages plus raffinés sont générés. En effet, le principal avantage du ratio de raffinement ajusté est la possibilité de réduire le nombre d'itérations de raffinement. On peut remarquer que la technique h -adaptative non-conforme nécessite plus de temps que la stratégie conforme, en raison soit du nombre élevé de nœuds non-conformes à gérer, soit de la correction des ratios due à la *one-irregularity rule*. Nous observons également que le critère d'optimalité LOC conduit à des temps totaux légèrement

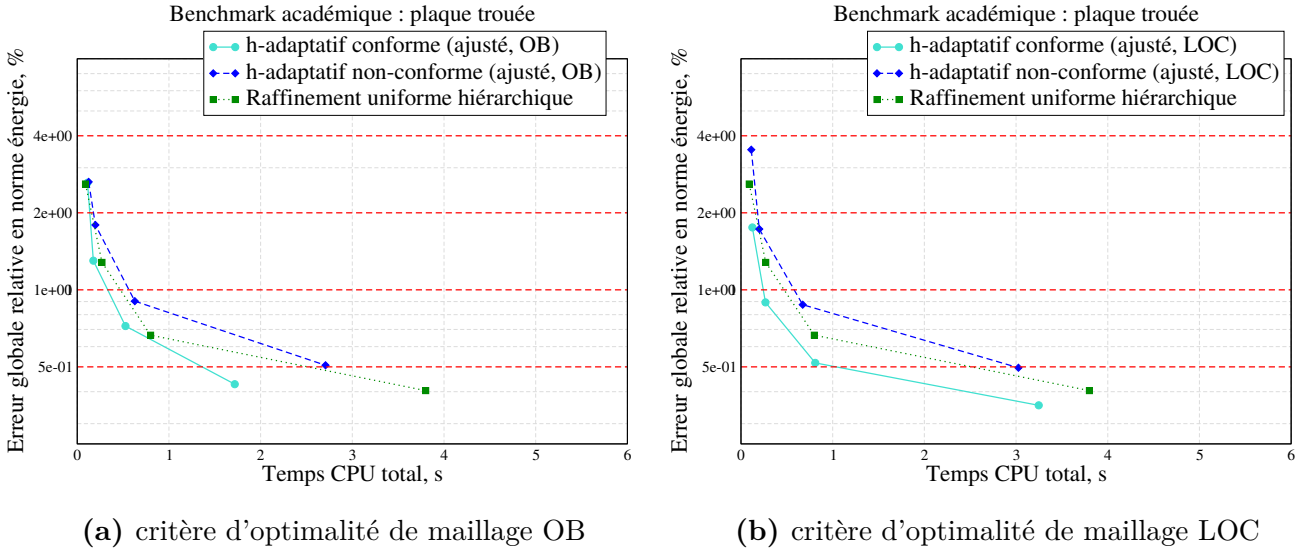


Figure 3.13: Plaque trouée – ratio de raffinement ajusté; erreur globale relative $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs temps CPU total : (a) critère OB, (b) critère LOC

plus élevés, tout en permettant naturellement d'atteindre des erreurs (globales et locales) plus faibles, par rapport au critère OB.

Afin de rendre cette étude la plus objective possible, le ratio de raffinement moyen ajusté a également été testé sur des techniques h -adaptatives. La Figure 3.14 présente l'erreur globale relative $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en fonction du temps CPU total pour les trois méthodes AMR couplées avec le ratio moyen. Pour cet exemple numérique, l'application du ratio de raffinement moyen ajusté plus progressif conduit à des calculs plus coûteux par rapport aux stratégies de ratio de raffinement fixé et ajusté (appliqué aux deux méthodes h -adaptatives). Cela peut s'expliquer par le fait que les valeurs du ratio de raffinement ajusté, à partir desquelles les ratios moyens sont calculés, peuvent être excessivement élevées et parfois inappropriées pour satisfaire la précision requise.

La Table 3.2 détaille les résultats pour $\epsilon_\Omega = 0.5\%$ obtenus avec les ratios ajusté et moyen ajusté. On peut voir que par rapport au ratio fixé, l'utilisation du ratio ajusté conduit dans presque tous les cas à des maillages plus raffinés sans amélioration significative des erreurs globales et locales. En effet, pour $\epsilon_\Omega = 0.5\%$, les maillages finaux sont presque deux fois plus raffinés que ceux obtenus avec le ratio de raffinement fixé.

Dans le cas du ratio moyen ajusté, la méthode h -adaptative non-conforme conduit à des temps de calculs très importants, dépassant même le temps d'un raffinement uniforme. En effet, une itération de raffinement en plus a été effectuée par rapport aux méthodes h -conforme et LDC. Cela est dû à la correction des ratios de raffinement pour satisfaire la *one-irregularity rule*. On peut observer que la technique LDC reste toujours la stratégie AMR la plus efficace.

Dans cet exemple numérique, le raffinement avec un ratio moyen ajusté est apparu moins efficace qu'avec un ratio ajusté pour les méthodes h -adaptatives. C'est pourquoi la Figure 3.15 présente les

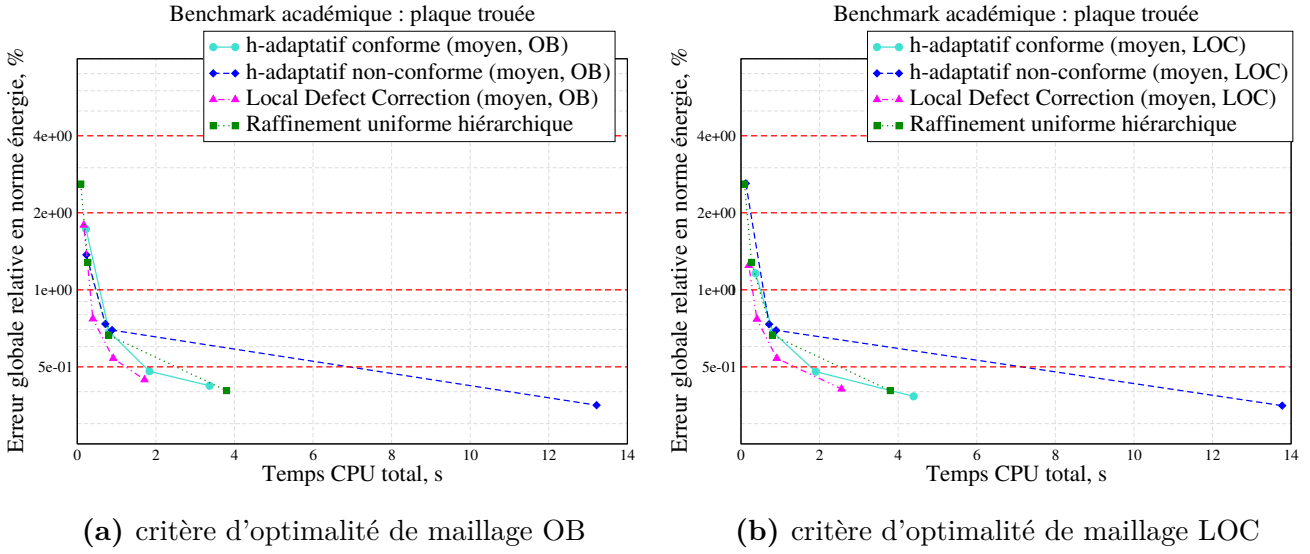


Figure 3.14: Plaque trouée – ratio de raffinement moyen ajusté ; erreur globale relative $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs temps CPU total : (a) critère OB, (b) critère LOC

Table 3.2: Plaque trouée – ratios de raffinement ajusté et moyen ajusté

$\epsilon_\Omega = 0.5\%$, $\delta = 3\%$	Raffinement uniforme	Ratio ajusté				Ratio moyen ajusté					
		h -adaptatif conforme		h -adaptatif non-conforme		h -adaptatif conforme		h -adaptatif non-conforme		Local Defect Correction	
		OB	LOC	OB	LOC	OB	LOC	OB	LOC	OB	LOC
k	1 ($\beta_{T^i} = 32$)	1	1	1	1	2	2	3	3	2	2
$e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}, \%$	0.40	0.43	0.35	0.51	0.49	0.42	0.38	0.35	0.35	0.41	0.40
$\eta, \%$	2.4	2.6	1.9	3.0	2.6	2.5	2.3	1.7	1.5	2.6	2.3
$N_{\mathcal{G}_k}$	66049	22990	42504	20549	23013	30125	44506	46493	47042	20041	28350
N_{tot}										20850	29165
N_{max}										18476	26791
$N_{\text{hanging nodes}}$				301	263			563	584		
CPU total	3.8s	1.7s	3.2s	2.7s	3.0s	3.4s	4.4s	13.2s	13.8s	1.7s	2.6s
CPU (SOLVE)	3.5s	1.1s	2.2s	2.1s	2.4s	1.8s	2.4s	10.6s	11.2s	1.1s	1.7s
CPU (EST.+MARK)	-	0.4s	0.8s	0.4s	0.4s	0.6s	0.9s	1.2s	1.2s	0.4s	0.6s
CPU (REFINE)	0.3s	0.2s	0.2s	0.2s	0.2s	1.0s	1.1s	1.4s	1.4s	0.2s	0.3s

résultats d'application du ratio ajusté aux méthodes h -adaptatives et du ratio moyen à la méthode LDC. Les Figures 3.15a et 3.15b présentent l'erreur globale relative $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en fonction du nombre de nœuds $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ pour les critères d'optimalité de maillage OB et LOC, respectivement. Globalement, les taux de convergence atteints sont proches de ceux obtenus avec le ratio de raffinement progressif fixe. Des taux (quasi) optimaux sont obtenus avec toutes les méthodes AMR, indépendamment du critère d'optimalité de maillage appliqué.

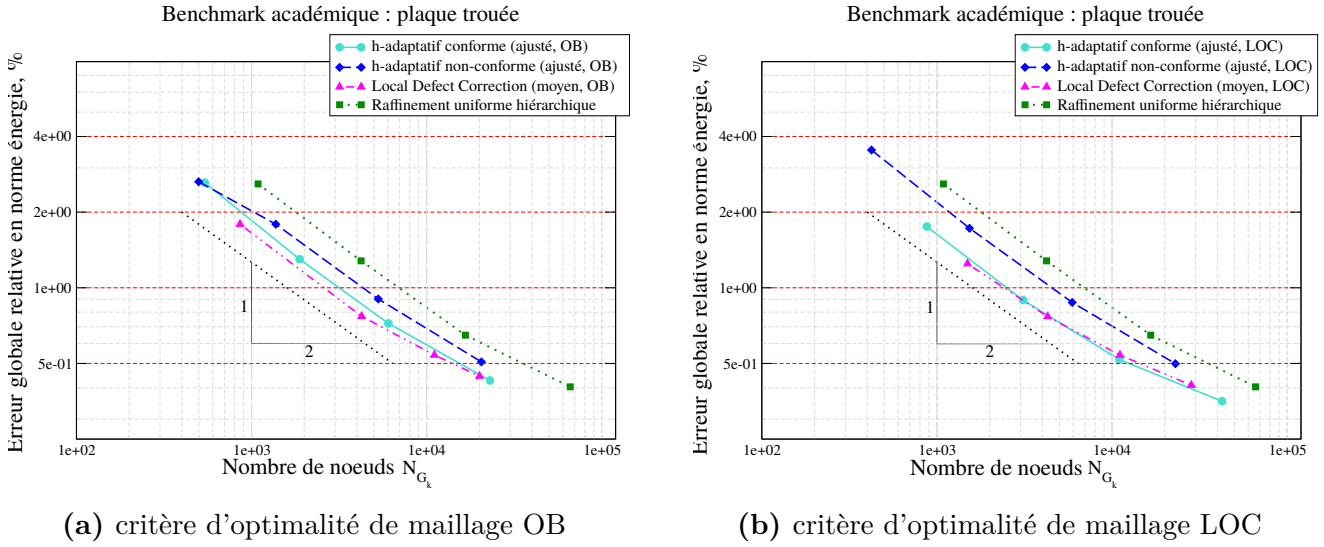


Figure 3.15: Plaque trouée – ratios de raffinement ajusté (méthodes h -adaptatives) et moyen ajusté (méthode LDC) ; erreur globale relative $e_{G_k}^{ex}$ en norme énergie vs vs nombre de nœuds N_{G_k} : (a) critère OB, (b) critère LOC

Conclusions sur le benchmark académique de la plaque trouée

- La méthode LDC apparaît comme la technique AMR la plus efficace numériquement. Cela s'explique par le fait que cette approche est basée sur la résolution de systèmes d'équations plus petits tout en limitant les besoins de stockage (similaires à la méthode h -adaptative non-conforme). Pour ce cas de test, la méthode LDC permet d'économiser de 50 à 80% du temps CPU total par rapport à l'approche h -adaptative conforme, et de 40 à 60% par rapport à l'approche h -adaptative non conforme pour une précision de solution similaire.
- Concernant la stratégie de raffinement, on observe que les deux critères d'optimalité de maillage OB et LOC permettent de construire des maillages acceptables localement et globalement pour chaque tolérance prescrite. Nous concluons également que les maillages finaux générés avec le ratio de raffinement fixé ($\beta_{T_i}^{fix} = 2$) sont optimaux en termes de nombre de nœuds.

3.4 Cas test industriel : Interaction mécanique Pastille-Gaine

3.4.1 Définition du problème

Nous nous intéressons dans cette partie à comparer les méthodes AMR sur des cas tests représentant l'Interaction mécanique Pastille-Gaine dans le contexte des REP. Le contact entre la pastille et la gaine est modélisé comme une pression discontinue appliquée sur la paroi interne de la gaine : le pic de pression vertical s'étend jusqu'à une hauteur $L_h = 0.6$ mm alors que la discontinuité de pression circonférentielle (due à l'ouverture des fragments de combustible) est placée à $\theta_f = \arctan(\frac{f}{R_{int}})$. Les

deux cas test 2D et 3D sont illustrés sur les Figures 3.16a et 5.10a, respectivement.

Le comportement de la gaine est supposé linéaire élastique de module d'Young $E = 10^{11}$ Pa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

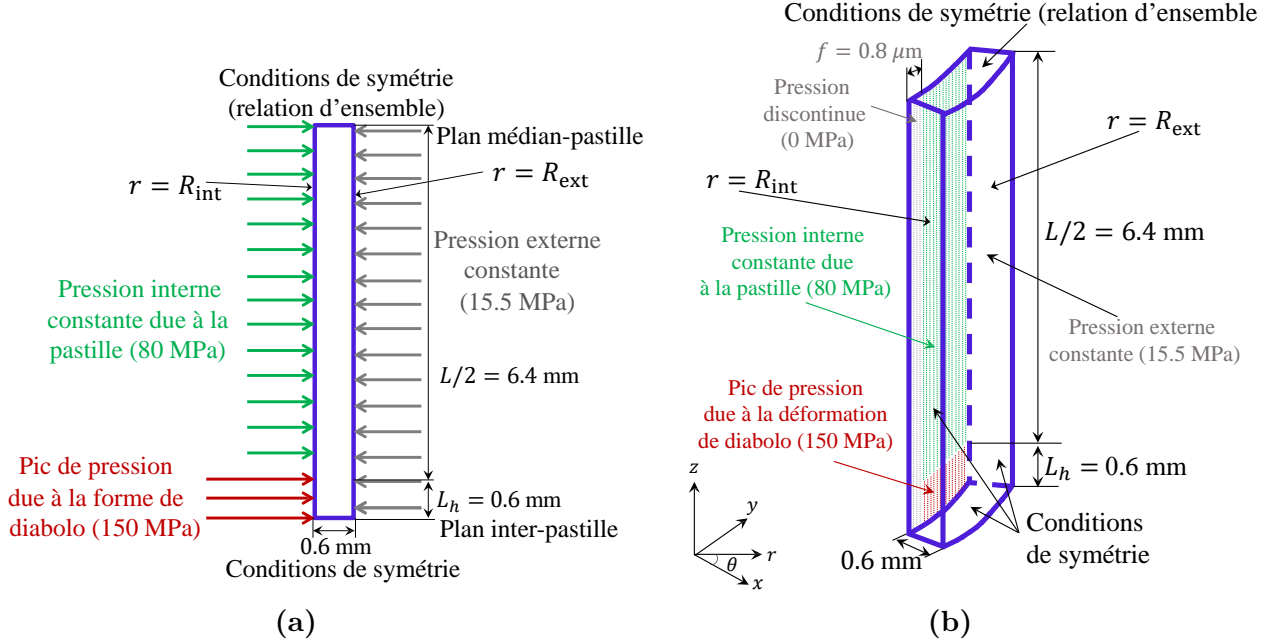


Figure 3.16: Cas test industriel : Interaction mécanique Pastille-Gaine; définitions des problèmes (a) cas test 2D(r, z) avec la singularité de pression et (b) cas test 3D multisingularité

Des conditions de symétrie permettant une modélisation partielle de la gaine sont prescrites :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur les surfaces } \theta = 0, \theta = \pi/8 \text{ et } z = 0 \quad (3.6)$$

et un déplacement normal uniforme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \text{const. sur } z = L/2, \forall \theta \text{ et } \forall r \quad (3.7)$$

Une pression interne discontinue représentant le contact avec la pastille fissurée est imposée sur $r = R_{\text{int}} = 4.1$ mm :

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n} &= 0 \text{ MPa} && \text{sur } 0 \leq \theta \leq \theta_f, \forall z \\ \sigma \mathbf{n} &= -150 \text{ MPa} && \text{sur } \theta_f < \theta \leq \pi/8 \text{ et } z \leq L_h \\ \sigma \mathbf{n} &= -80 \text{ MPa} && \text{sur } \theta_f < \theta \leq \pi/8 \text{ et } z > L_h \end{aligned} \quad (3.8)$$

La pression externe imposée sur $r = R_{\text{ext}} = 4.7$ mm vaut :

$$\sigma \mathbf{n} = -15.5 \text{ MPa } \forall \theta, \forall z \quad (3.9)$$

3.4.2 Exemple bidimensionnel

Le cas 2D étudié ici, schématiquement présenté sur la Figure 3.16a, consiste à modéliser la réponse de la gaine à la déformation en diabolo de la pastille. Cet exemple numérique révèle une singularité locale en contrainte (d'ordre 0.5) proche la zone de discontinuité de pression, voir [102].

Puisque la solution analytique de ce problème est inconnue, nous considérons comme référence une solution obtenue avec une discrétisation uniforme très fine adaptée à la discontinuité de pression avec un pas de maillage d'environ $2.8 \mu\text{m}$ ($\simeq 1 \cdot 10^6$ nœuds).

Ce cas peut être considéré comme une étude préalable au cas test tridimensionnel plus réaliste. Nous nous concentrons ici sur la détermination de la stratégie de raffinement la plus efficace en termes de critère d'optimalité du maillage et du ratio de raffinement en présence de singularité locale.

Contrôle de l'erreur locale

Les cartes de l'erreur locales relatives obtenues avec les critères d'optimalité de maillage OB et LOC pour $\epsilon_\Omega = 2\%$ sont présentées sur la Figure 3.17.

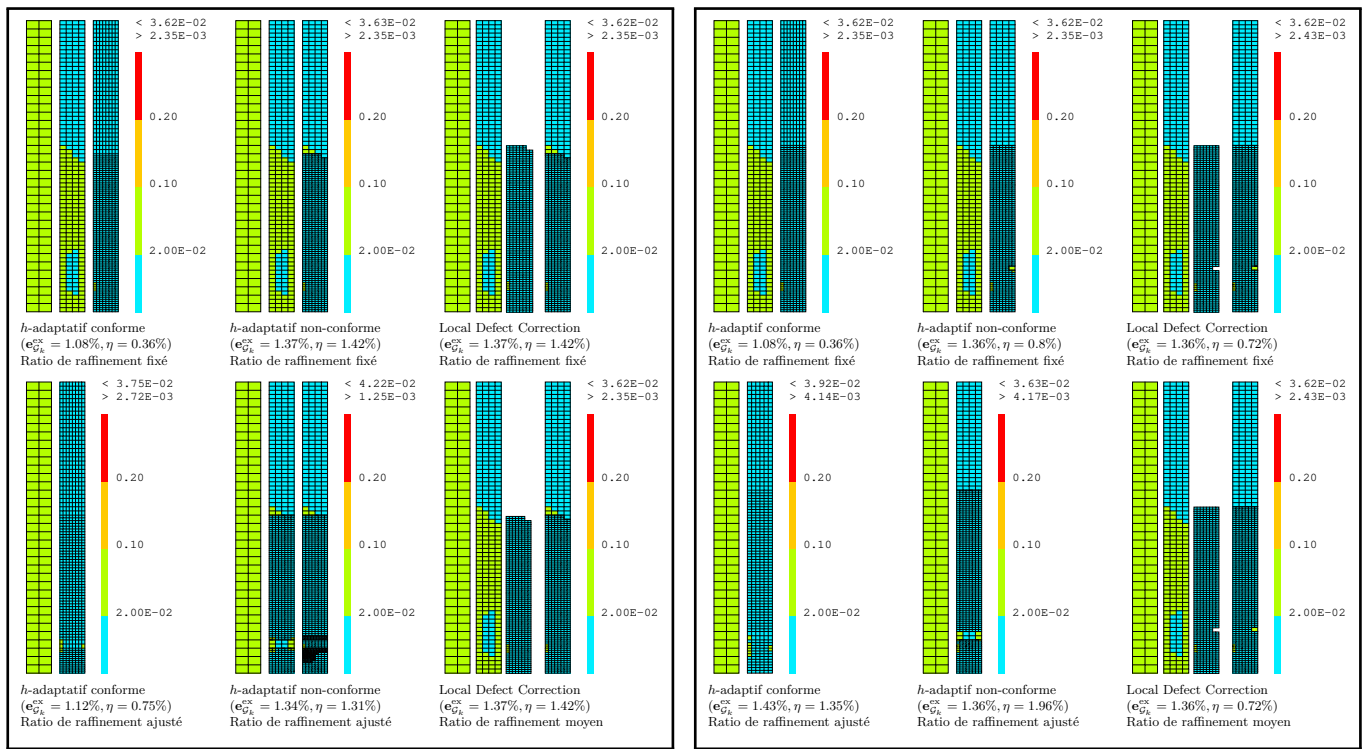


Figure 3.17: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D – cartes de l'erreur locale – tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 2\%$ – paramètre de contrôle de l'erreur locale $\delta = 3\%$; critère d'optimalité de maillage (a) OB et (b) LOC

On peut observer que quelle que soit la méthode AMR, des régions similaires sont raffinées au-

tomatiquement. On constate qu'indépendamment de la méthode AMR, du critère d'optimalité du maillage et du ratio de raffinement, la précision locale souhaitée ($\eta \leq \delta$) est atteinte pour ce seuil d'erreur globale ϵ_Ω . Dans cet exemple numérique, le critère d'optimalité du maillage LOC conduit à des simulations localement plus précises (valeurs de η plus limitées) par rapport au critère OB. On peut observer que pour les méthodes de raffinement h -adaptative non-conforme et LDC, la précision locale peut ne pas être satisfaite sur certains éléments qui n'ont pas été marqués dans les itérations de raffinement précédentes. Cela se produit principalement en raison de la sous-estimation de l'erreur réelle par l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz and Zhu. Un tel problème est compensé par l'utilisation d'un critère d'optimalité du maillage LOC plus local, conduisant à l'amélioration de la mesure de l'erreur locale η .

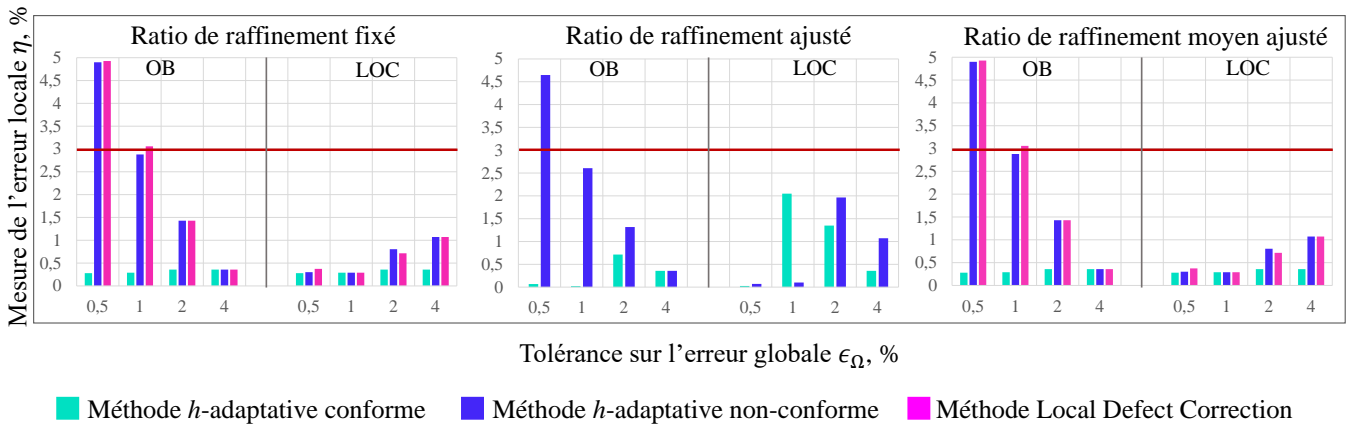


Figure 3.18: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D – mesure de l'erreur locale η vs tolérance fixée sur l'erreur globale ϵ_Ω

La mesure de l'erreur locale η est rapportée sur la Figure 3.18 pour tous les ratios de raffinement. Pour ce cas test, seul le critère LOC garantit le contrôle de la zone critique dans le maillage final ($\eta \leq \delta$) pour toutes les seuils globaux ϵ_Ω imposés, indépendamment du ratio de raffinement et de la méthode AMR. En présence d'une singularité locale, le critère OB ne permet pas de satisfaire la condition $\eta \leq \delta$, en particulier pour les faibles tolérances fixées sur l'erreur ϵ_Ω . Ainsi, le critère d'optimalité LOC semble être le critère le plus générique et va donc être utilisé dans la suite de notre étude. Comme attendu, le raffinement h -adaptatif conforme conduit à des maillages sur-raffinés et donc à des valeurs de η très petites. Les méthodes h -adaptative non-conforme et LDC conduisent naturellement au même niveau de précision locale finale.

Ratios de raffinement

La Table 3.3 détaille les résultats pour le seuil global $\epsilon_\Omega = 0.5\%$ obtenus avec le critère LOC.

On voit que l'application du ratio de raffinement ajusté aux méthodes h -adaptatives aboutit à des maillages plus raffinés et non-optimaux en termes de nombre de nœuds. De plus, le ratio de raffinement ajusté demande un temps de calcul plus élevé, en particulier pour la stratégie h -adaptative conforme. Cela est dû à une mauvaise estimation des valeurs du ratio de raffinement

Table 3.3: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D – critère d’optimalité de maillage LOC

$\epsilon_\Omega = 0.5\%, \delta = 3\%$	Ratio fixé			Ratio ajusté		Ratio moyen ajusté		
	h conf.	h non-conf.	LDC	h conf.	h non-conf.	h conf.	h non-conf.	LDC
k	4	4	4	2	2	2	2	2
$e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}, \%$	0.27	0.35	0.35	0.19	0.34	0.27	0.35	0.36
$\eta, \%$	0.28	0.31	0.37	0.02	0.07	0.28	0.30	0.37
$N_{\mathcal{G}_k}$			12075					12075
N_{tot}	14586	11965	16237	23267	12349	14586	11965	14613
N_{max}			9728					9728
$N_{\text{hanging nodes}}$		109			141		109	
CPU total	3.8s	2.2s	1.6s	5.9s	2.5s	3.3s	2.0s	1.3s
CPU (SOLVE)	0.7s	1.2s	0.7s	1.2s	1.5s	0.7s	1.2s	0.6s
CPU (EST. + MARK)	0.5s	0.4s	0.4s	0.8s	0.4s	0.4s	0.4s	0.4s
CPU (REFINE)	2.6s	0.6s	0.5s	3.9	0.6s	2.3s	0.4s	0.3s

ajusté $\beta_{T_i}^{\text{adj}}$. Dans cet exemple numérique, ces valeurs ne sont pas suffisamment élevées pour atteindre la précision prescrite par l’utilisateur en une itération de raffinement. Puisque le raffinement doit être répété, le temps CPU nécessaire à l’adaptation hiérarchique du maillage augmente. Ainsi, la technique de raffinement h -adaptative conforme devient dans ce cas vraiment inefficace, en termes à la fois d’espace mémoire et de temps CPU. Le ratio de raffinement ajusté appliqué à la méthode h -adaptative non-conforme conduit à des maillages raffinés similaires à ceux obtenus avec le ratio de raffinement moyen ajusté.

Il faut noter que pour cet exemple numérique, l’application du ratio moyen ajusté donne des résultats similaires, en termes de nombre de nœuds ainsi que de temps CPU, à ceux obtenus avec le ratio fixé à 2. En effet, pour la tolérance d’erreur $\epsilon_\Omega = 0.5\%$, le pas de maillage minimal est égal à $h_{T^2} = \frac{1}{16}h_{T^0}$ (avec $\bar{\beta}_{T_i=1,2} = \{8, 2\}$), qui est le pas de maillage minimal obtenu pour le raffinement avec ratio fixé (avec $k = 4$ itérations de raffinement). La seule différence visible entre les ratios fixé et moyen ajusté réside dans le nombre d’étapes de raffinement générées.

On peut également voir Table 3.3 qu’indépendamment de la méthode AMR et ratio de raffinement, les précisions globales et locales sont respectées grâce au critère d’optimalité de maillage local LOC.

La méthode LDC confirme être l’approche la plus efficace en terme de temps de calcul total, quel que soit le ratio de raffinement appliqué. On gagne environ 30% en temps CPU total par rapport au h -raffinement non-conforme (relations de non-conformité à gérer) et environ 60% par rapport à la technique conforme (maillages globaux conformes à construire). Concernant le nombre de nœuds, toutes les techniques AMR conduisent à des résultats similaires dans le cas d’application du ratio de raffinement fixé et moyen ajusté.

Conclusion sur les stratégies de raffinement

En se basant sur l’ensemble des exemples numériques 2D, les points clés suivants concernant les critères d’optimalité de maillage et les ratios de raffinement peuvent être tirés :

- Le ratio de raffinement fixe $\beta_{T_i}^{\text{fix}} = 2$ semble être la stratégie de raffinement la plus robuste. Cela nous permet d’améliorer progressivement le maillage et de générer à l’itération de raffinement finale le maillage optimal satisfaisant précisément la précision prescrite.

- En présence de singularités locales, seul le critère d’optimalité de maillage LOC permet de contrôler précisément l’erreur locale.

Remarque 3.4.1. *Il est à noter que le ratio de raffinement ajusté est très prometteur car il permet, dans certains cas, d’atteindre les seuils imposés en moins d’itérations de raffinement. Cependant, son utilisation directe doit être faite avec précaution, en particulier lorsqu’il s’agit de problèmes ayant des effets localisés. Cela est dû au fait que les valeurs du ratio ajusté peuvent être excessivement grandes, conduisant à des maillages sur-raffinés et des calculs coûteux. Afin de pallier ce problème, il est possible d’imposer une limite sur la valeur maximale du ratio ajusté calculé, comme proposé dans [160]. Par ailleurs, il s’avère très intéressant d’explorer de façon plus approfondie des estimateurs d’erreur a priori locaux afin d’améliorer le calcul du ratio de raffinement ajusté $\beta_{T_i}^{adj}$. L’utilisation de règle de convergence (Eq. (2.28)) avec deux hypothèses importantes (i.e., indépendance de la constante C_{T_i} du pas de maillage et équivalence entre les ordres de convergence local et global) peut être remise en question. Il semble naturel que la constante C_{T_i} puisse dépendre de la taille du maillage comme la constante de l’estimateur a priori global dépend de la mesure du domaine [103], comme déjà suggéré dans [157]. De plus, il est probable que l’ordre de convergence local puisse être modifié, par exemple près des bords du domaine ou des singularités.*

3.4.3 Exemple tridimensionnel

Le cas test tridimensionnel réunit les deux phénomènes 2D de l’IPG, cf. Section 1.1.3 et la Figure 5.10a. Pour des raisons de symétrie, seul 1/32 de la partie de la gaine en face du pastille est représenté ($0 \leq \theta \leq \pi/8, 0 \leq z \leq L/2$). Cet exemple plus réaliste de l’IPG révèle plusieurs singularités croisées des longueurs caractéristiques différentes.

Du point de vue numérique, trouver une solution précise à un tel problème tridimensionnel est une tâche difficile car cela peut nécessiter la résolution des systèmes d’équations à grande dimension (potentiellement mal conditionnés). Ainsi, ce problème représente un benchmark industriel intéressant pour étudier les méthodes AMR.

La solution de référence étant inaccessible pour ce cas test, le post-traitement est basé sur des erreurs estimées : $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}} = \frac{\xi_{\mathcal{G}_k}}{\omega_{\mathcal{G}_k}}$ et $\eta^{\text{est}} = \frac{\mu(\Omega, \mathcal{M}_k^0)}{\mu(\Omega)}$. Ces mesures d’erreurs correspondent donc directement à celles utilisées pour le module **STOP**, cf. section 2.5.

Ici, la combinaison du critère d’optimalité LOC et du ratio de raffinement fixé $\beta_{T_i}^{fix} = 2$ est choisie en raison de ses bonnes performances dans les exemples numériques précédents. La génération des maillages raffinés $\{\mathcal{G}_i\}_{i=0}^k$ commence par un maillage initial \mathcal{G}_0 avec $N_{\mathcal{G}_0} = 1596$ qui n’est pas adapté aux singularités de pression.

Exemple des sous-niveaux de grilles générés avec la méthode LDC

À titre d’exemple, la Figure 3.19 permet de visualiser les niveaux de maillages obtenus avec l’approche LDC et une tolérance fixée sur l’erreur globale $\epsilon_\Omega = 1\%$. On observe que les zones marquées

sont progressivement localisées à proximité des singularités croisées. Les singularités deviennent particulièrement bien captées dès l'étape de raffinement $i = 4$, ce qui valide la robustesse de l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz et Zhu et du critère LOC pour cet exemple numérique.

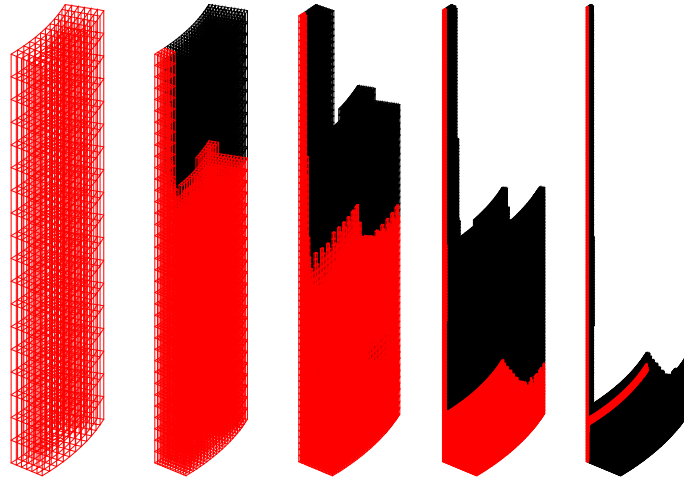
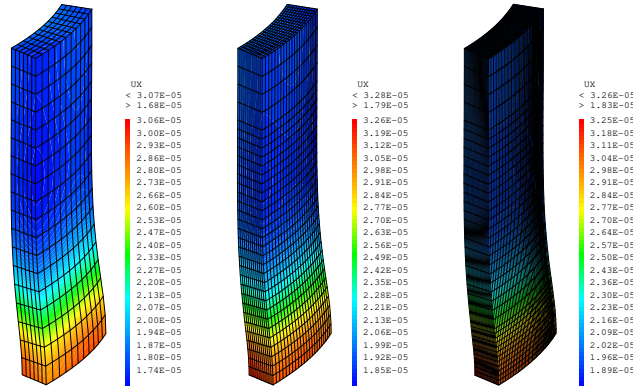


Figure 3.19: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – critère d’optimalité de maillage LOC – tolérance fixée sur l’erreur globale $\epsilon_\Omega = 1\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$; exemple de sous-maillages générés avec la méthode LDC avec l’ensemble d’éléments marqués \mathcal{M}_i^0 en rouge

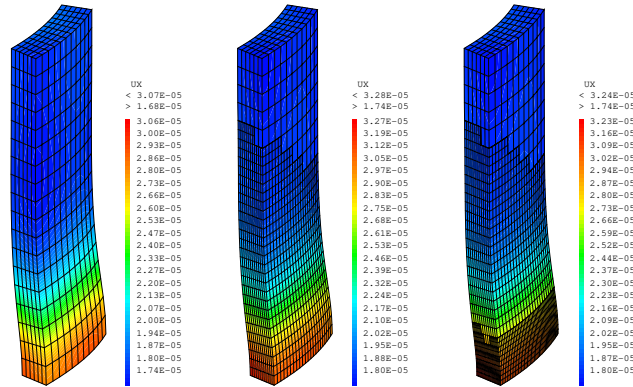
Champs de déplacement obtenus avec chaque méthode AMR

Les champs de déplacement dans la direction x (tracés sur la configuration déformée) obtenus avec chaque méthode AMR pour une tolérance de l’erreur globale $\epsilon_\Omega = 4\%$ sont présentés sur la Figure 3.20.

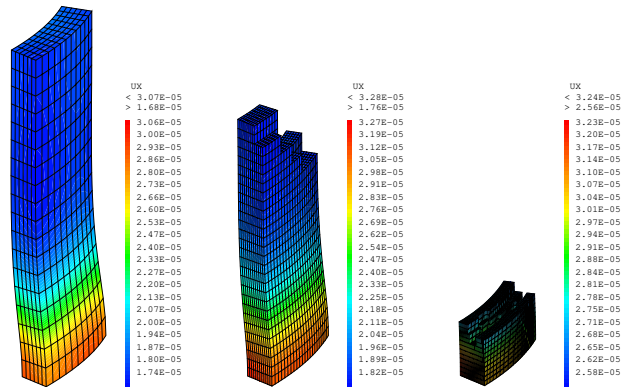
On constate que les mêmes régions sont automatiquement détectées et raffinées avec chaque méthode AMR. On peut également observer que l’erreur globale estimée finale $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}}$ est deux fois plus basse que la tolérance prescrite de $\epsilon_\Omega = 4\%$. De plus, le critère LOC permet d’atteindre des valeurs nulles de la mesure de l’erreur locale estimée η^{est} (c’est-à-dire $\mathcal{M}_k = \emptyset$), ce qui est un résultat très satisfaisant. De plus, les sous-maillages générés avec l’approche LDC ont clairement beaucoup moins d’éléments par rapport aux maillages globaux générés avec les deux méthodes h -adaptatives. Enfin, il faut noter que dans cet exemple numérique, l’utilisation des techniques h -adaptatives (en particulier de l’approche conforme) peut être très coûteuse en raison du positionnement perpendiculaire des deux singularités (voir Table 3.4 pour plus de détails).



Méthode h -adaptative conforme (erreur globale $e_{G_k}^{est} = 1.44\%$, mesure de l'erreur locale $\eta^{est} = 0\%$)



Méthode h -adaptative non-conforme (erreur globale $e_{G_k}^{est} = 1.93\%$, mesure de l'erreur locale $\eta^{est} = 0\%$)



Méthode Local Defect Correction (erreur globale $e_{G_k}^{est} = 1.95\%$, mesure de l'erreur locale $\eta^{est} = 0\%$)

Figure 3.20: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – critère d’optimalité de maillage LOC – champ de déplacement \mathbf{u}_x sur la configuration déformée – tolérance fixée sur l’erreur globale $\epsilon_\Omega = 4\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$

Contrôle des précisions globale et locale

La Figure 3.21 montre l'évolution de l'erreur globale estimée $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}}$ et de la mesure de l'erreur locale η^{est} par rapport au nombre d'itérations de raffinement pour la tolérance $\epsilon_\Omega = 2\%$.

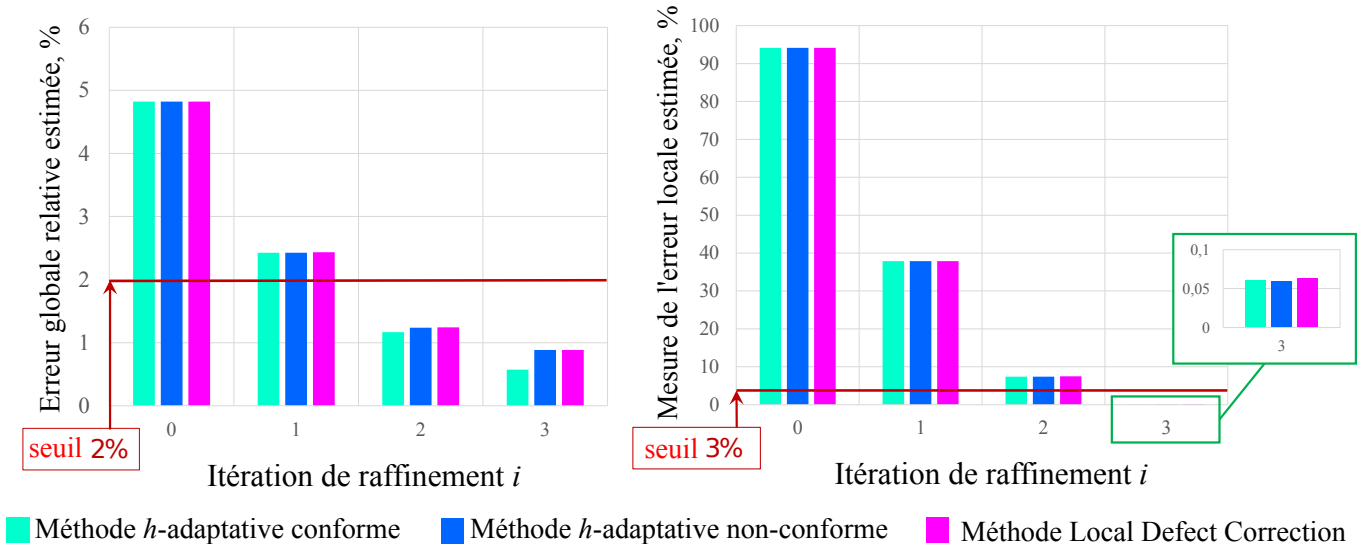


Figure 3.21: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – seuil fixé sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 2\%$ – paramètre de contrôle de l'erreur locale $\delta = 3\%$; erreur globale estimée $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}}$ en norme énergie vs itération de raffinement ; mesure de l'erreur locale estimée η^{est} vs itération de raffinement

Tout d'abord, on peut voir que le nombre d'itérations de raffinement effectuées est $k = 3$, quelle que soit la méthode AMR appliquée. On peut noter qu'une itération de raffinement en moins pourrait être effectuée si seule la précision globale était d'intérêt. Pour chaque tolérance fixée ϵ_Ω , la dernière itération est effectuée pour satisfaire la tolérance locale, c'est-à-dire le paramètre de contrôle local prescrit $\delta = 3\%$.

La Figure 3.22 fournit l'erreur globale estimée $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}}$ en fonction du nombre de nœuds $N_{\mathcal{G}_k}$ pour toutes les tolérances fixées sur l'erreur globale ($\epsilon_\Omega = 4, 2, 1\%$). Le taux de convergence optimal $\mathcal{O}(N_{\mathcal{G}_k}^{-1/3})$ est observé pour toutes les méthodes AMR. Notez que dans ce cas, le raffinement uniforme conduirait à une erreur $\mathcal{O}(N_{\mathcal{G}_k}^{-1/6})$ due à la présence d'une singularité de contraintes, voir [88]. Par conséquent, les techniques AMR permettent d'obtenir des taux de convergence optimaux vis-à-vis du nombre de nœuds. Il faut noter que pour $N_{\mathcal{G}_k} < 1 \cdot 10^5$ un ordre de convergence légèrement meilleur peut être obtenu avec. avec les méthodes h -adaptative non-conforme et LDC.

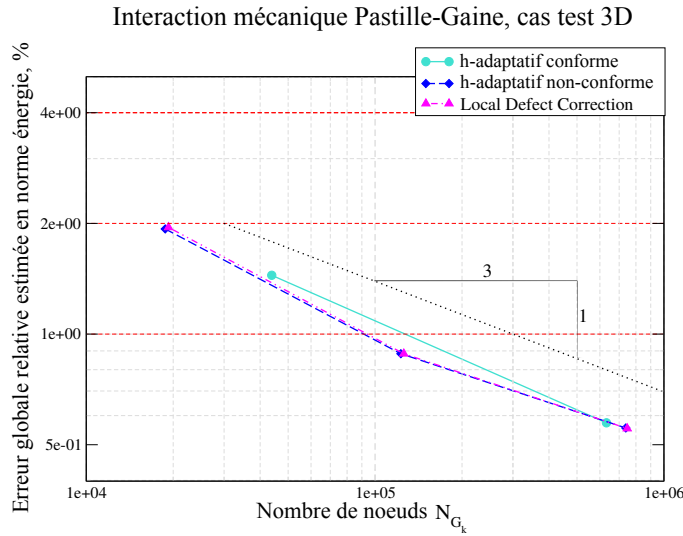


Figure 3.22: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – erreur globale estimée $e_{G_k}^{est}$ en norme énergie vs nombre de nœuds N_{G_k}

Comparaison des méthodes AMR

La Table 3.4 détaille les résultats obtenus pour les seuils d’erreur $\epsilon_\Omega = 4\%, 2\%, 1\%$, respectivement, pour toutes les méthodes AMR étudiées. Pour chaque tolérance prescrite et chaque méthode AMR, la Figure 3.23a illustre le nombre de nœuds du maillage final généré vs erreur globale finale et la Figure 3.23b donne le temps CPU total vs erreur globale finale.

On peut voir dans la Table 3.4 qu’essentiellement les mêmes précisions globale et locale estimées sont atteintes avec chaque méthode AMR.

Table 3.4: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – critère d’optimalité de maillage LOC – ratio de raffinement fixé $\beta_{T^i} = 2$ – tolérances fixée sur l’erreur globale $\epsilon_\Omega = 4, 2, 1\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$

	$\epsilon_\Omega = 4\%$			$\epsilon_\Omega = 2\%$			$\epsilon_\Omega = 1\%$		
	<i>h</i> conf.	<i>h</i> non-conf.	LDC	<i>h</i> conf.	<i>h</i> non-conf.	LDC	<i>h</i> conf.	<i>h</i> non-conf.	LDC
<i>k</i>	2	2	2	3	3	3	4	4	4
$e_{G_k}^{est}, \%$	1.45	1.93	1.95	0.57	0.88	0.88	-	0.55	0.55
$\eta^{est}, \%$	0	0	0	0.06	0.06	0.06	-	0.08	0.08
N_{G_k}			19269			125727			746236
N_{tot}	43875	18766	21722	632345	122799	142991	4961841	737789	848487
N_{max}			12739			84943			495365
$N_{hanging\ nodes}$	-	1387	-	-	7059	-	-	33767	-
CPU total	42.9s	14.1s	8.8s	3611s	239s	152s	$\approx 2 \cdot 10^5s$	12600s	4692s
CPU (SOLVE)	18.6s	10.1s	4.6s	952s	212s	51s	-	5426s	727s
CPU (EST. + MARK)	2.4s	1.1s	1.5s	50s	14s	14s	-	365s	228s
CPU (REFINE)	21.9s	2.9s	2.7s	2609s	103s	87s	-	6809s	3737s

Ce cas de test numérique 3D a permis de mettre en évidence les limites du raffinement *h*-adaptatif hiérarchique conforme, qui conduit à des maillages finaux sur-raffinés et ainsi à des calculs très

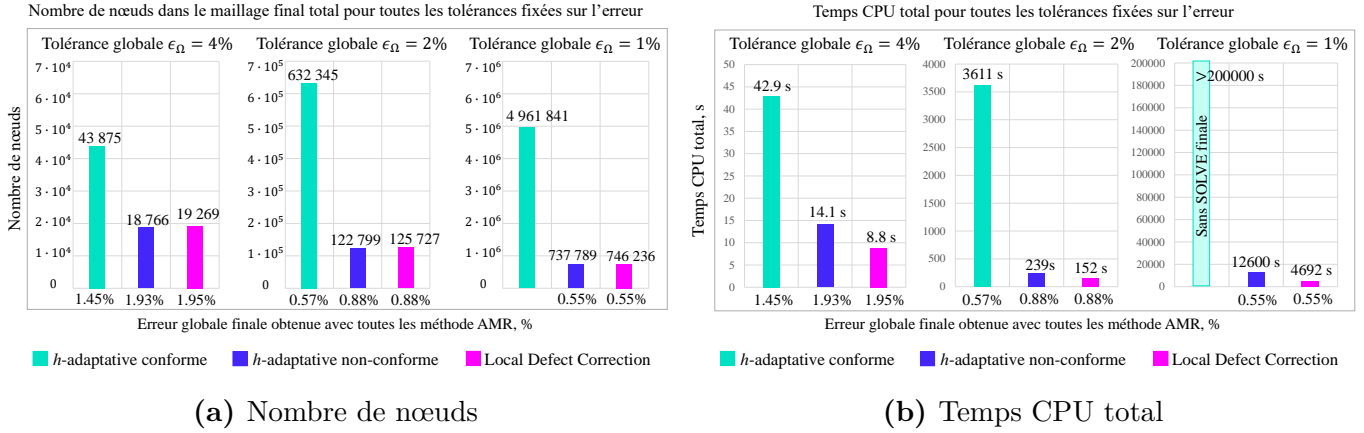


Figure 3.23: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – critère d’optimalité de maillage LOC – ratio de raffinement fixé – tolérances fixée sur l’erreur globale $\epsilon_\Omega = 4, 2, 1\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$; (a) Nombre de nœuds; (b) Temps CPU total

coûteux (voire même inabordables). En effet, le coût de calcul associé à la technique *h*-adaptative conforme devient excessivement élevé pour les faibles tolérances d’erreur ϵ_Ω , car nécessite plusieurs fois le raffinement complet de l’ensemble du domaine de calcul (par exemple pour atteindre les seuils $\epsilon_\Omega = 2\%$ et 1%). Pour $\epsilon_\Omega = 1\%$, le dernier maillage généré compte près de 5 millions de nœuds, ce qui ne nous a pas permis de résoudre le problème associé.

Concernant la méthode *h*-adaptative non-conforme, le maillage final raffiné est généralement optimal en termes de nombre de nœuds, mais sa principale difficulté réside dans la nécessité de gérer un grand nombre de nœuds irréguliers qui, de plus, nécessite l’utilisation d’un solveur dédié ou des développements intrusifs.

L’approche LDC conduit à des résultats très prometteurs : elle permet d’atteindre facilement même les tolérances d’erreur les plus faibles, pour lesquelles les méthodes *h*-adaptatives impliquent un coût de calcul beaucoup plus élevé. La méthode LDC induit un nombre de nœuds total similaire à la méthode *h*-adaptative non-conforme, mais est beaucoup plus efficace car elle procède en résolvant des systèmes d’équations de tailles limitées, voir le N_{\max} de la méthode LDC qui est presque de 30% plus petit comparé à N_{tot} de la méthode *h*-adaptative non-conforme (et de quatre à dix fois plus petit que N_{tot} de l’approche conforme). La méthode LDC permet également d’économiser le temps de pré-traitement (raffinement hiérarchique du maillage), ce qui peut être très bénéfique pour des problèmes réalistes complexes. De plus, le coût numérique associé au processus itératif multigrille est négligeable par rapport au coût de traitement des relations de non-conformité pour la stratégie *h*-adaptative non-conforme.

Enfin, en terme de temps CPU total, la méthode LDC est la plus intéressante : elle permet d’économiser de 30% à 60% du temps de calcul total par rapport à la méthode *h*-adaptative non-conforme, et plus de 85% comparé à la technique *h*-adaptative conforme.

La méthode adaptative multigrille locale LDC est vraiment séduisante malgré la consommation de l’espace mémoire supplémentaire (nécessité de stocker tous les degrés de liberté des sous-maillages générés (voir N_{tot}), factorisations des matrices de rigidité, etc.). La méthode LDC a ainsi démontré

son efficacité et sa robustesse pour résoudre des problèmes complexes.

Il faut souligner que le raffinement du maillage hiérarchique (basé sur la subdivision des éléments) affecte le temps de calcul total pour chaque méthode AMR. Le temps requis pour la construction de maillages raffinés augmente avec le nombre d'éléments à raffiner. En effet, le temps de raffinement constitue de 30 à 80% du temps CPU total. Il faut noter qu'il est possible de réduire ce temps en optimisant le processus de raffinement hiérarchique en s'appuyant par exemple sur la parallélisation du sous-module **DIVIDE** qui est évidemment possible (uniquement l'assemblage final du maillage doit être effectué sur le processeur maître).

Remarque 3.4.2. *Il faut préciser que les calculs ont été effectués sur un cluster de 240 Go de RAM. Pour cet exemple numérique 3D, il était possible d'effectuer les calculs sur un ordinateur de 60 Go de RAM avec la méthode LDC uniquement. En effet, la résolution de problèmes impliquant plus de $700 \cdot 10^3$ nœuds n'est pas accessible avec ce type de machines. Cela implique que pour le seuil d'erreur $\epsilon_\Omega = 1\%$, les résultats n'auraient pu être obtenus uniquement avec la méthode LDC (calculs inaccessibles avec les deux méthodes h -adaptatives).*

3.5 Conclusions de l'étude comparative

Dans cette partie de la thèse, la méthode multigrille locale de type Local Defect Correction a été comparée aux méthodes de raffinement h -adaptatives les plus connues dans la littérature. Cette étude a été effectuée dans le cadre de l'élasticité linéaire pour des maillages éléments finis quadrilatéraux/hexaédriques. Des exemples numériques académiques et industriels révélant des concentrations ou des singularités de contraintes ont été considérés pour effectuer cette comparaison d'une manière la plus pertinente possible. Les principales conclusions peuvent en être tirées.

Méthode multigrille Local Defect Correction. La méthode multiniveau LDC est l'outil numérique le plus attractif pour résoudre les problèmes elliptiques de complexité industrielle. Pour les cas de test étudiés, la méthode LDC a prouvé son efficacité en termes de temps CPU dû au fait que les besoins en mémoire RAM pour la résolution de problèmes sont vraiment inférieurs car les problèmes à traiter sont de taille limitée. Similairement à la technique h -adaptative non-conforme, la méthode LDC est (quasi-)optimale en termes de besoins de stockage, mais elle permet de contourner les difficultés liées aux maillages non-conformes. Enfin, il faut noter que la mise en œuvre de l'algorithme LDC est non-intrusive (uniquement les opérations de pré et post-traitement à effectuer).

Méthodes h -adaptatives. La principale difficulté de la stratégie h -adaptative hiérarchique conforme réside dans la génération des maillages raffinés pour des éléments quadrangulaires ou hexaédriques, ce qui reste toujours une question ouverte. Le raffinement basé sur les *sheet operations* testé ici est loin d'être locale, ce qui entraîne naturellement des maillages fins sur-raffinés et affecte le temps de calcul. De son côté, la complexité de la technique h -adaptative hiérarchique non-conforme réside dans la gestion des contraintes de continuité. Le système d'équations résultant à résoudre est souvent

exigeant en terme de temps de calcul.

Critères d'optimalité de maillage et ratio de raffinement. Au-delà des méthodes AMR, cette étude conduit intrinsèquement à une comparaison des stratégies de raffinement liées au critère d'optimalité du maillage et au ratio de raffinement. Nous suggérons d'utiliser le critère d'optimalité du maillage LOC car il permet de contrôler précisément l'erreur locale, surtout en présence de singularités locales. Le critère OB est moins précis localement mais reste suffisant si seule la précision globale est d'intérêt. Enfin, l'application d'un ratio de raffinement fixé égal à 2 sur les éléments détectés semble être la stratégie la plus robuste.

Les résultats vraiment prometteurs obtenus avec la méthode multigrille locale LDC ouvrent la voie à l'application de cette approche sur des problèmes de mécanique des solides non linéaire, qui sera l'objet du Chapitre 5 de ce manuscrit. Le caractère générique de l'approche LDC permettra de l'utiliser pour d'autres besoins de la plateforme numérique PLEIADES (points chauds, fissuration,...), et hors domaine combustible.

De plus, cette technique offre d'autres potentialités intéressantes à explorer, notamment la possibilité de changer le modèle (approche multimodèle) entre les niveaux de raffinement. Le positionnement de la méthode LDC dans ce contexte fait l'objet du Chapitre 4 de cette thèse.

Chapitre 4

Positionnement de la méthode Local Defect Correction dans un contexte d'homogénéisation

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un cadre unifié pour la résolution de problèmes multi-échelles basée sur un couplage itératif multiniveau. Nous nous inspirons de méthodes multi-échelles visant des problèmes à différents facteurs de séparation d'échelles : la méthode AMR de type Local Defect Correction et la stratégie d'homogénéisation numérique de type EF².

Cette étude étant effectuée dans le cadre de la mécanique des solides non linéaire, nous proposons alors une extension de la méthode LDC à ce type de problèmes. Nous discutons de l'influence du facteur de séparation d'échelles sur les aspects algorithmiques et conceptuels.

L'intégralité des résultats présentés dans cette section a fait l'objet de la publication [149].

Sommaire

4.1	Introduction	103
4.2	Modélisation multi-échelle	103
4.3	Problème non linéaire de référence	105
4.4	Méthodes Local Defect Correction et EF²-hybride	107
4.4.1	Méthode Local Defect Correction	108
4.4.2	Méthode d'homogénéisation numérique EF ²	112
4.5	Cadre unifié pour des méthodes multiniveaux	113
4.6	Bilan du chapitre	116

4.1 Introduction

Dans cette partie on s'intéresse à comparer l'approche multigrille locale LDC aux méthodes d'homogénéisation numérique dans un cadre de mécanique non linéaire. Ces deux approches numériques multiniveaux sont issues de deux familles différentes de méthodes multiéchelles mais dont la philosophie est assez proche. Elles consistent à résoudre un problème à différentes échelles ou à plusieurs niveaux de détails : un modèle global vise à représenter le comportement global d'une structure, alors que des modèles locaux offrent une compréhension plus précise des phénomènes fins. Le principal avantage de la résolution par séparation d'échelles est la possibilité d'atteindre localement la précision voulue tout en évitant de résoudre un problème complet à l'échelle fine.

Il sera clairement démontré dans ce chapitre que même en étant développées avec des vocations différentes, ces approches révèlent plusieurs caractéristiques communes. La principale différence conceptuelle reposant sur la condition de séparation de l'échelle a finalement une influence limitée sur les aspects algorithmiques. Ainsi, cette comparaison permet de mettre en évidence un cadre unifié pour les méthodes de couplage multiéchelle.

4.2 Modélisation multiéchelle

Dans de nombreuses situations d'ingénierie, il est crucial de comprendre et de modéliser précisément certains phénomènes complexes. Cela nécessite généralement de capturer plusieurs phénomènes à des échelles multiples. Dans le domaine du nucléaire, le principal enjeu est de décrire de façon la plus précise possible le comportement des combustibles à différentes échelles, cf. Figure 4.1, pour être en mesure de concevoir des combustibles sûrs et performants, de prédire leur comportement en réacteur et de contribuer au dimensionnement de ces réacteurs.

Même en tenant compte des perfectionnements des ordinateurs actuels, il est illusoire de penser pouvoir simuler précisément l'intégralité de la structure à l'échelle microscopique. Pour remédier à ce problème, une approche classique consiste à s'appuyer sur des méthodes multiéchelles permettant d'atteindre localement une précision souhaitée en évitant la nécessité de résoudre un problème complet à l'échelle fine.

Le choix de la stratégie de résolution à appliquer est régi par le rapport l/L entre la taille caractéristique associée aux phénomènes fins l et la taille caractéristique de la structure L . Généralement, deux classes de problèmes multiéchelle peuvent être distinguées [165].

Dans le cas où les effets fins sont localisés à l'échelle de la structure (niveau global ou macroscopique) ou se passent à une échelle intermédiaire (niveau mésoscopique), ce rapport (l/L) n'est pas très petit (de l'ordre de $1/4$ à $1/10$ en général). Cette classe de problèmes (voir Figure 4.2a) contient ceux caractérisés par des concentrations ou singularités locales, zones de plasticité localisées, fissures, etc. Pour traiter ce genre de problèmes, des techniques AMR de raffinement adaptatif du maillage [52, 50, 66], stratégies adaptatives et multigrilles locales (cf. Section 1.3), sont généralement bien adaptées.

Pour la seconde classe de problèmes multiéchelles (voir Figure 4.2b), le rapport l/L est très petit ($l/L \ll 1/10$) : les phénomènes locaux se produisent à l'échelle de la microstructure (matériaux hété-

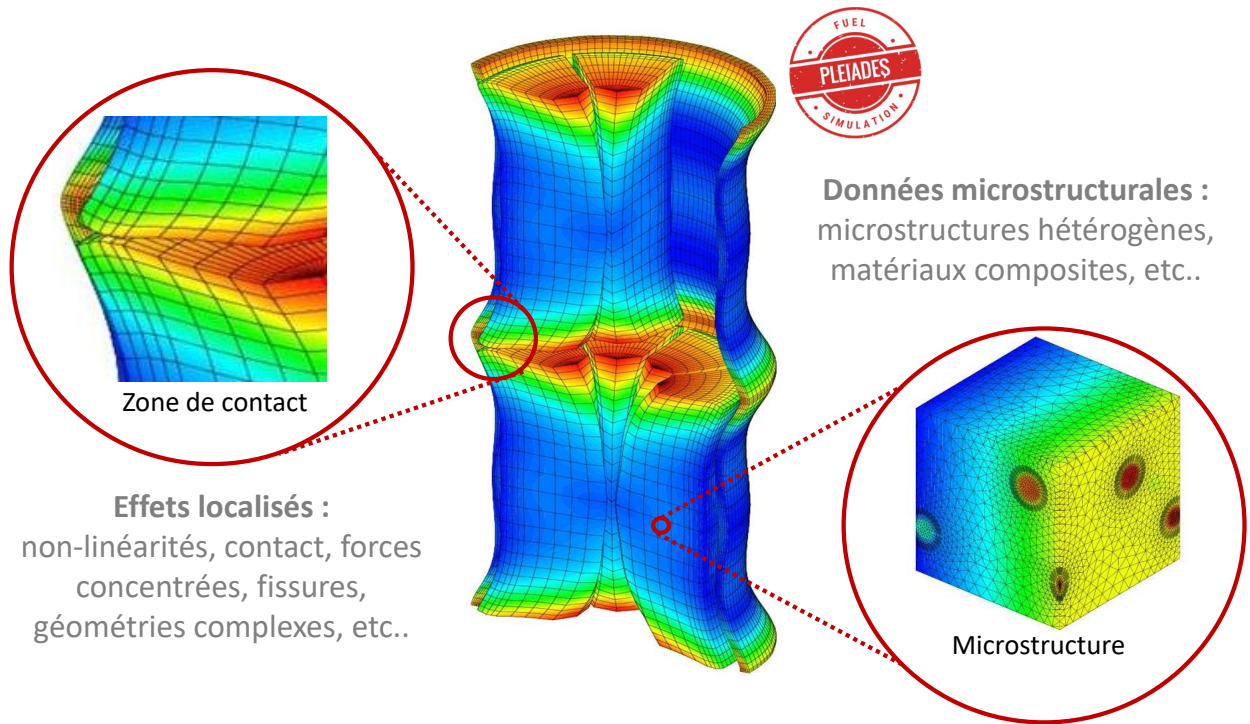


Figure 4.1: Philosophie des simulations multiéchelles pour le comportement du combustible : comportement global représenté avec un modèle à l'échelle macro ; phénomènes locaux décrits avec des modèles fins (la zone de contact pastille-gaine et la microstructure de la pastille)

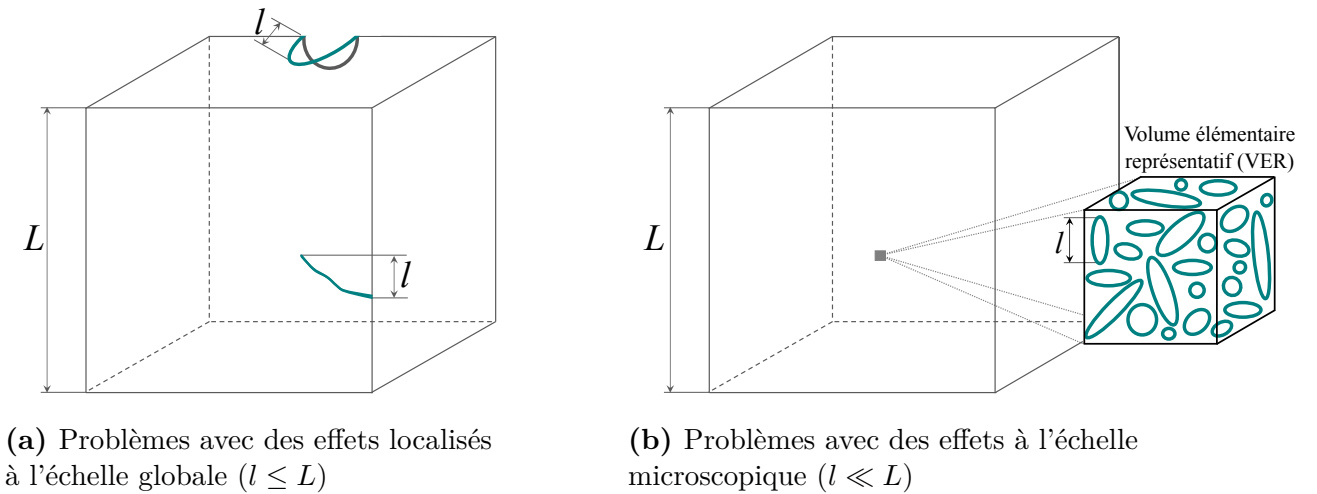


Figure 4.2: Deux classes de problèmes multiéchelles

rogènes, composites, etc.). Pour traiter efficacement ces problèmes, les méthodes d'homogénéisation analytique et numérique ont été conçues. Les méthodes d'homogénéisation analytique [166, 167] se basent sur des formulations théoriques (développement asymptotique, ...) pour obtenir le compor-

tement microscopique, cf. par exemple les modèles Hashin-Shtrikman [168] ou Mori-Tanaka [169]. L'idée des approches d'homogénéisation numérique repose sur la possibilité d'obtenir le comportement microstructural des matériaux *on-the-fly* en résolvant numériquement les problèmes à deux échelles. Les méthodes suivantes peuvent être nommées : méthode des éléments finis multiéchelles (*multi-scale finite elements method* (MsFEM) en anglais) [170, 171], méthode des éléments finis multiéchelles hétérogène (*finite elements heterogeneous multi-scale method* (FE-HMM) en anglais) [172, 173, 174], approche éléments finis au carré (FE²) [175, 176, 177, 178], techniques d'homogénéisation par ondelettes [179, 180], méthode d'analyse par champs de transformation (non-uniformes) (*(non-uniform) transformation field analysis TFA/NTFA*) [181, 182], etc.

La modélisation multiéchelle étant un sujet très riche, seules certaines approches ont donc été mentionnées ici. Pour un aperçu bibliographique plus complet des méthodes développées, le lecteur peut se référer à [165, 183] et aux références qui y figurent.

Nous nous concentrons ici sur des approches multiniveaux reposant sur la résolution d'un problème sur différents niveaux de détails, couplés dans le même schéma de calcul. Généralement, un modèle global vise à capturer le comportement global d'une structure, tandis qu'un (ou plusieurs) modèles locaux offrent une simulation plus précise des phénomènes fins. L'intérêt de l'approche multiniveau est de pouvoir appliquer la méthode numérique voulue (éléments finis, différences finies, FFT, etc.) pour résoudre les problèmes définis à chaque échelle. L'aspect clé réside dans la formulation du transfert entre les échelles (ou *scale bridging* en anglais) adapté, permettant de relier différentes échelles.

L'objectif de cette étude est de placer dans un cadre multiniveaux unifié deux méthodes multiéchelles existantes, respectivement de chacune des deux classes mentionnées précédemment.

Pour la première classe de méthodes multiéchelles, la méthode de raffinement de maillage multiniveaux de type Local Defect Correction déjà décrite au chapitre 2, est considérée ici. Pour la deuxième classe de méthodes multiéchelles, on choisit l'approche EF² [177, 175] d'homogénéisation numérique, souvent considérée comme la référence numérique pour les méthodes d'homogénéisation analytique.

Comme historiquement l'approche EF² était appliquée à des matériaux non linéaires, nous avons décidé d'effectuer cette étude comparative dans le cadre non linéaire et donc étendre l'algorithme de LDC dans ce contexte.

4.3 Problème non linéaire de référence

Nous nous plaçons pour cette étude dans un cadre général entièrement quasi-statique non linéaire. On considère un problème mécanique de la forme suivante :

$$(\mathcal{P}_{NL}) : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \dots) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_N & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (4.1)$$

Contrairement au problème traité dans les sections précédentes, la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, donnée par la troisième équation de (4.1), est non linéaire.

La méthode des éléments finis s'appuie sur la formulation variationnelle du problème (4.1) qui s'écrit :

$$(\mathcal{PV}_{NL}) : \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}), \dots) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} \mathbf{F}_N \mathbf{v} \, d\Gamma_N \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Linéarisation du problème.

La relation constitutive de (4.1) étant non linéaire, le problème (4.1) est alors non linéaire en terme de déformation, et donc en terme de déplacement. Pour résoudre le problème en déplacements, on le linéarise à l'aide d'un algorithme itératif. Généralement, un schéma itératif de type Newton est appliqué.

Cet algorithme consiste à résoudre de manière itérative une équation non linéaire de la forme $R(\mathbf{u}) = 0$, avec R non linéaire, à l'aide de l'expansion de Taylor tronquée au premier ordre :

$$R(\mathbf{u}^n) \approx R(\mathbf{u}^{n-1}) + \frac{\partial R(\mathbf{u}^{n-1})}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \quad (4.3)$$

où on cherche à annuler $R(\mathbf{u}^n)$. Un schéma itératif est ainsi obtenu :

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1} - R(\mathbf{u}^{n-1}) \left(\frac{\partial R(\mathbf{u}^{n-1})}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \quad (4.4)$$

En notant $\boldsymbol{\sigma}^{n-1} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n-1}), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{n-1}), \dots)$ et $\boldsymbol{\sigma}^{*n}$ une prédiction (linéaire) de la contrainte à l'itération n , on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}^{*n} = \boldsymbol{\sigma}^{n-1} + \mathbf{H}^{n-1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \quad (4.5)$$

avec \mathbf{H} un opérateur de linéarisation. La méthode de Newton standard consiste à choisir \mathbf{H} comme étant la matrice Jacobienne appelée matrice tangente du comportement en mécanique des solides. La méthode dite de quasi-Newton, consiste à approximer la matrice tangente par une matrice plus simple à évaluer (matrice sécante, matrice constante,...). Le choix de la matrice \mathbf{H} influence l'ordre de convergence de la méthode.

Cela permet de réécrire la forme variationnelle (4.2) sous forme de résidu :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{H}^{n-1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} \mathbf{F}_N \mathbf{v} \, d\Gamma_N - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}^{n-1} \, d\Omega \quad (4.6)$$

Le processus itératif tend à minimiser le résidu, le second membre de (4.6), où $\boldsymbol{\sigma}^{n-1}$ est réactualisé à l'aide de la relation constitutive non linéaire à chaque itération. Par souci de simplicité, nous

considérons ici une relation constitutive indépendante du taux de déformation de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^n)) \quad (4.7)$$

Nous supposons que le problème considéré est résolu en utilisant la méthode des éléments finis en déplacement. Le problème discret peut s'écrire :

$$\mathbf{K}^{n-1} \delta \mathbf{U}^n = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1}) \quad (4.8)$$

avec $\mathbf{R}^{n-1} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1})$ et $\delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}$. Numériquement, l'intégration de la relation constitutive (4.7) n'est effectuée qu'aux points d'intégration. La convergence est atteinte lorsque le résidu \mathbf{R}^n est suffisamment petit (au sens d'une norme et d'un critère donnés).

L'algorithme de résolution du problème quasi-statique non linéaire est donné dans Algorithme 8.

Algorithm 8 Résolution éléments finis d'un problème quasi-statique non linéaire

Entrée : Données du problème, solution initiale pour $n = 0$, paramètre de convergence τ

Sortie : Solution convergée

pour $n = 1$ **jusqu'à convergence faire**

- Calcul de l'équilibre en résolvant l'équation (4.8)
- Intégration de la loi de comportement (4.7) à chaque point d'intégration pour obtenir $\boldsymbol{\sigma}^n$
- Réactualisation du résidu :

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}^n) \quad (4.9)$$

- Vérification de convergence sur \mathbf{R}^n

fin pour

4.4 Méthodes Local Defect Correction et EF²-hybride

Dans ce qui suit, nous visons à réécrire les deux algorithmes multiniveaux dans un cadre unifié. Pour cette étude, nous nous limitons à deux niveaux (appelés global et local), sachant qu'il est tout à fait faisable pour les deux méthodes considérées d'augmenter le nombre de niveaux.

Sur le domaine de calcul global, nommé $\Omega_M \equiv \Omega$, un modèle global homogénéisé est défini. Nous supposons que dans la zone d'intérêt $\hat{\Omega}_M \subset \Omega_M$, un niveau local Ω_m visant à résoudre des problèmes non linéaires locaux est ajouté. Nous notons \cdot_M les quantités définies sur le niveau global, et \cdot_m celles définies sur le niveau local. La résolution non linéaire itérative à deux niveaux dérivée des deux méthodes peut être représentée de manière générale, voir Figure 4.3.

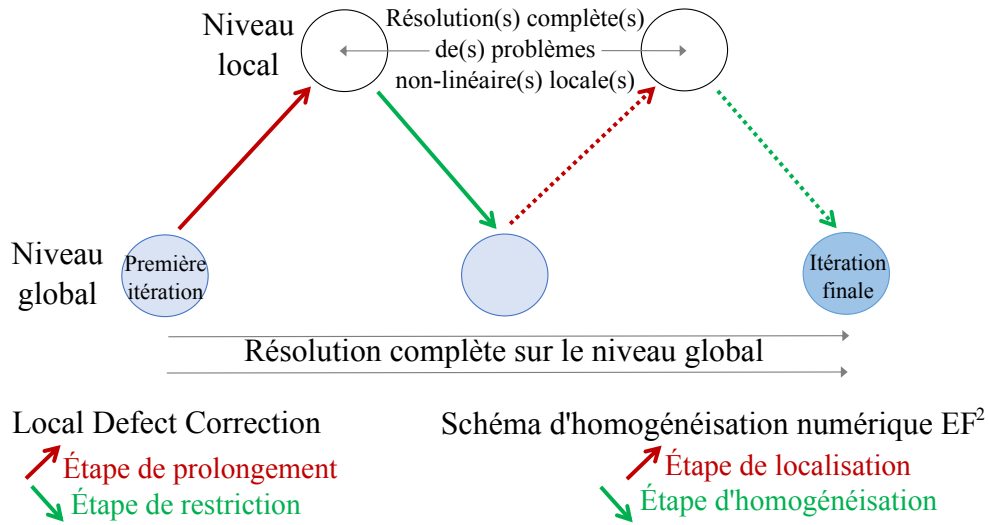


Figure 4.3: Processus itératif de résolution multiéchelle sur deux niveaux des problèmes non linéaires

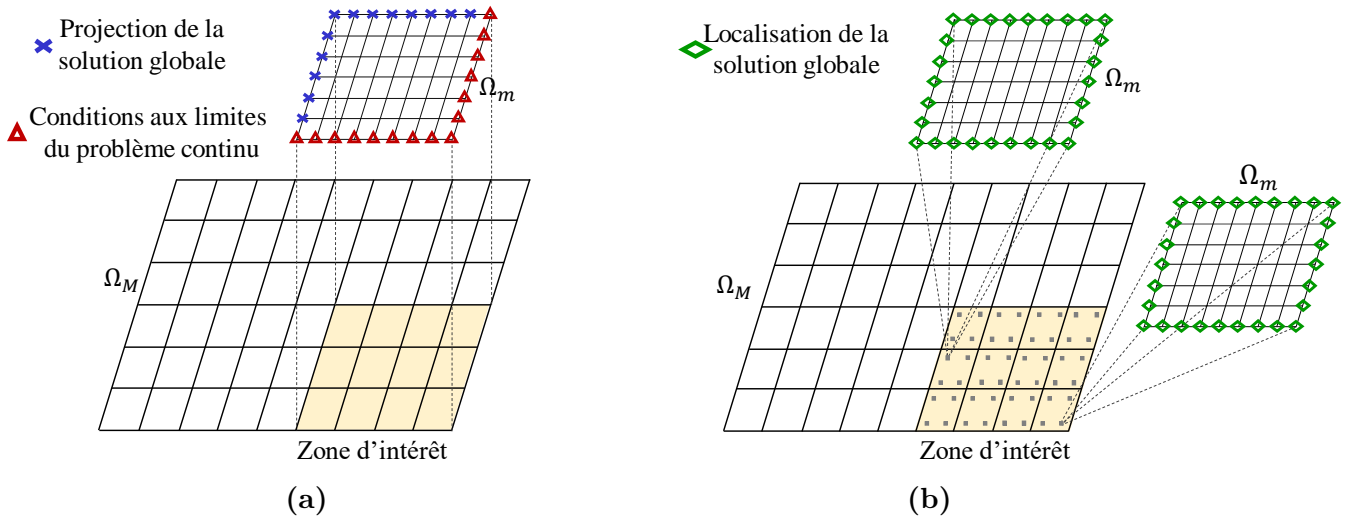


Figure 4.4: Niveau global avec la zone d'intérêt en jaune et niveau local avec les conditions aux limites pour (a) méthode LDC et (b) méthode EF²-hybride

4.4.1 Méthode Local Defect Correction

Initialement développées dans un contexte de raffinement adaptatif de maillage (cf. chapitre 1), les approches multigrilles locales peuvent cependant être facilement exploitées dans un contexte multimodèle. Elles consistent à ajouter des modèles locaux appropriés dans les zones critiques, où le modèle global n'est plus représentatif. Ces modèles locaux visent à capturer précisément les phénomènes locaux, tels que les non linéarités géométriques [92], régions de plasticité locale [93], fissures [94], etc. Dans [184, 185], les auteurs ont proposé d'adapter les méthodes multigrilles locales pour

traiter des problèmes d'homogénéisation via l'utilisation d'opérateurs de transfert appropriés basés sur l'homogénéisation. Ces opérateurs sont censés assurer la coïncidence de la matrice de rigidité locale restreinte avec la matrice globale homogénéisée.

Nous proposons ici une extension de la méthode Local Defect Correction dans un contexte multimodèle. Nous considérons dans cette étude l'approche Local Defect Correction avec un modèle homogénéisé défini sur le niveau global et un modèle fin adapté au niveau local. Le niveau local recouvre la partie critique du domaine global ($\Omega_m = \hat{\Omega}_M$), voir Figure 4.4a.

Comme mentionnée dans l'introduction de ce chapitre, afin de positionner la méthode LDC vis-à-vis des méthodes d'homogénéisation, historiquement développées pour des comportements non linéaire, l'extension de l'algorithme LDC dans ce contexte est effectuée. À notre connaissance, seul dans [89] l'application de la méthode LDC a été faite dans le cadre de la mécanique non linéaire.

La première question à se poser lors de l'extension de l'algorithme LDC dans le contexte non linéaire, consiste à choisir la meilleure façon d'imbriquer les deux processus itératifs : la résolution non linéaire de type Newton et la résolution multiniveaux LDC. La première possibilité consiste à intégrer les itérations LDC dans l'algorithme de (quasi-)Newton. Cette approche implique la résolution de problèmes linéarisés à chaque niveau, permettant de garder les développements réalisés dans le contexte élasto-statique mais consiste à ne résoudre le comportement non linéaire qu'au niveau grossier. La deuxième possibilité est d'appeler le schéma de type Newton à l'intérieur de l'algorithme LDC. Il en résulte la résolution de problèmes non linéaires à tous les niveaux, comme illustré sur la Figure 4.3. Dans ce travail, nous nous concentrons sur ce deuxième schéma d'imbrication des processus itératifs. Cette stratégie permet de bénéficier de la résolution du problème non linéaire au niveau fin pour corriger la solution globale dans les itérations de Newton. En outre, ce schéma se rapproche des méthodes d'homogénéisation numérique.

Définition du résidu de la méthode LDC non linéaire

L'idée sous-jacente de la méthode LDC est de faire tendre le déplacement global vers le déplacement local restreint ($\mathbf{u}_M^n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_M^n$) via le résidu sur $\hat{\Omega}_M$ qui s'ajoute au second membre du problème global. Pour les problèmes de mécanique non linéaire du type (4.8), deux possibilités de définir le résidu LDC, noté \mathbf{r}_{LDC}^n , peuvent être considérées.

La **première possibilité** consiste à considérer le résidu du problème non linéaire global (4.2) appliqué sur le champ de contraintes $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n$ associé au déplacement restreint $\tilde{\mathbf{u}}_M^n$:

$$\mathbf{r}_{LDC}^n = \mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n) - \mathbf{F}_M^{ext} \quad \text{sur } \hat{\Omega}_M \quad (4.10)$$

On retrouve ici la notion d'erreur de troncature comme dans la méthode LDC standard. Cela revient à résoudre

$$\mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^{n+1}) = \mathbf{F}_M^{ext} + \chi_{\hat{\Omega}_M} \mathbf{r}_{LDC}^n \quad (4.11)$$

ce qui dans la zone de recouvrement résulte à

$$\mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^{n+1}) = \mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n) \quad (4.12)$$

Après linéarisation on a

$$\mathbf{K}_M^n \delta \mathbf{U}_M^{n+1} = \mathbf{R}^n \quad (4.13)$$

avec

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n) - \mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^n) \quad (4.14)$$

La **deuxième possibilité** consiste à définir le résidu LDC en considérant le problème linéarisé (4.8) résolu sur le niveau global :

$$\mathbf{r}_{LDC}^n = \mathbf{K}_M^n (\tilde{\mathbf{U}}_M^n - \mathbf{U}_M^n) - \mathbf{F}_M^{ext} + \mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^n) \quad \text{sur } \hat{\Omega}_M \quad (4.15)$$

En utilisant l'expression de résidu (4.15), on obtient sur la zone de recouvrement :

$$\mathbf{K}_M^n \delta \mathbf{U}_M^{n+1} = \mathbf{F}_M^{ext} - \mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^n) + \mathbf{r}_{LDC}^n = \mathbf{R}^n \quad (4.16)$$

Le résidu actualisé s'écrit :

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{K}_M^n (\tilde{\mathbf{U}}_M^n - \mathbf{U}_M^n) \quad (4.17)$$

En remarquant que :

$$\mathbf{K}_M^n (\tilde{\mathbf{U}}_M^n - \mathbf{U}_M^n) = \int_{\Omega_M} \boldsymbol{\varepsilon}_M(\mathbf{v}_M) : \mathbf{H}_M^n : \boldsymbol{\varepsilon}_M(\tilde{\mathbf{u}}_M^n - \mathbf{u}_M^n) d\Omega_M \quad (4.18)$$

et en utilisant le même développement à l'ordre 1 qu'en (4.5), on retrouve que

$$\mathbf{K}_M^n (\tilde{\mathbf{U}}_M^n - \mathbf{U}_M^n) \simeq \int_{\Omega_M} \boldsymbol{\varepsilon}_M(\mathbf{v}_M) : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n - \boldsymbol{\sigma}_M^n) d\Omega_M \quad (4.19)$$

ce qui est donc équivalent à l'ordre 1 au résidu (4.14).

Nous allons donc considérer que le résidu LDC est défini par l'expression (4.10) ce qui conduit au résidu réactualisé (4.14). Cela revient à une minimisation, dans la région d'intérêt $\hat{\Omega}_M$, de la différence entre les efforts internes calculés respectivement via $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n$ et via $\boldsymbol{\sigma}_M^n$. Les forces internes à équilibrer sont maintenant $\mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n)$ qui prennent implicitement en compte les forces externes via les conditions aux limites du problème local. Nous notons que cette contrainte corrigée $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n$ n'a pas de signification physique mais permet juste de faire tendre le déplacement vers le déplacement restreint.

Nous introduisons donc dans l'Algorithme 9 une méthode LDC à deux échelles pour la mécanique des solides non linéaire.

Remarque 4.4.1. *Dans le cas de problèmes élastiques linéaires, nous avons considéré que les problèmes définis à chaque sous-niveau étaient résolus de façon suffisamment précise, et que le résidu provenant du problème fin était négligeable, cf. Remarque 2.2.1. Contrairement aux problèmes élastiques, dans le contexte non linéaire, l'hypothèse (2.8) n'est plus obligatoirement vérifiée. Néanmoins, suite au schéma d'imbrication des deux processus itératifs adopté, avec la résolution complète (jusqu'à convergence) du problème au niveau local, le résidu issu de la résolution locale est considéré négligeable.*

Algorithm 9 Méthode LDC bi-grille pour un problème quasi-statique non linéaire**Entrée : données du problème, solution initiale pour $n = 0$, paramètre de convergence****Sortie : Solutions à deux niveaux****pour $n = 1$ jusqu'à convergence**

- Calcul de l'équilibre en résolvant l'équation (4.8) dans Ω_M
- Dans la zone d'intérêt $\hat{\Omega}_M$: appel à la méthode LDC
 - Transfert d'information du niveau global au niveau local : *étape de prolongation*.
Application des conditions aux limites sur le bord du maillage local $\partial\Omega_m$ (cf. Figure 4.4a) :
 - conditions aux limites du problème continu sur $\partial\Omega_m \cap \partial\Omega_M$
 - déplacement imposé sur le bord interne fictif $\Gamma_m^f = \partial\Omega_m \setminus (\partial\Omega_m \cap \partial\Omega)$ obtenu en prolongeant le déplacement global :

$$\mathbf{u}_{\Gamma_m^f} = \mathcal{P}_M^m(\mathbf{u}_M^n) \quad (4.20)$$

avec \mathcal{P}_M^m l'opérateur de prolongement

- Problème au niveau local : résolution complète du problème non linéaire sur Ω_m avec Algorithme (8) utilisant le modèle constitutif local
- Transfert d'information du niveau local au niveau global : *étape de restriction*.
Calcul dans $\hat{\Omega}_M$ d'un déplacement fin restreint :

$$\tilde{\mathbf{u}}_M^n = \mathcal{R}_m^M(\mathbf{u}_m^n) \quad (4.21)$$

avec \mathcal{R}_m^M l'opérateur de restriction et de la contrainte associée :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n = \mathcal{F}_M(\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_M^n)) \quad (4.22)$$

- Dans Ω_M : intégration de la loi de comportement globale (Eq. (4.7)) pour obtenir $\boldsymbol{\sigma}_M^n$
- Réactualisation du résidu global :

$$\mathbf{R}^n = \begin{cases} \mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n) - \mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^n) & \text{dans } \hat{\Omega}_M \\ \mathbf{F}_M^{ext} - \mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^n) & \text{dans } \Omega_M \setminus \hat{\Omega}_M \end{cases} \quad (4.23)$$

- Vérification de convergence sur \mathbf{R}^n

fin pour

4.4.2 Méthode d'homogénéisation numérique EF²

Historiquement, les méthodes d'homogénéisation ont été largement utilisées pour traiter des problèmes caractérisés par une grande séparation d'échelles et doivent donc vérifier deux hypothèses fortes, cf. [165, 166]. La première réside dans la séparation d'échelles en termes de dimension ($l \ll L$) qui permet de considérer le comportement moyen local représentatif au premier ordre du comportement global au point considéré. La seconde hypothèse consiste à supposer l'homogénéité de déformation autour d'un point matériel global (ce qui intervient dans les conditions aux limites sur le niveau local). Cette seconde hypothèse peut rendre les méthodes d'homogénéisation non adaptées en présence d'effets localisés (fissure, concentration de contraintes, grand gradient de température). Afin de pallier ce problème des approches basées sur l'homogénéisation à l'ordre deux ont été proposées, cf. par exemple [186, 187, 188].

Contrairement aux méthodes d'homogénéisation analytique [166, 168, 169], où le comportement microscopique est obtenu en se basant sur des formulations analytiques, l'homogénéisation numérique repose sur la possibilité d'obtenir les comportements microstructuraux locaux à la volée. Ces méthodes permettent de remplacer l'intégration de la loi de comportement globale par des calculs effectués à l'échelle microscopique. Elles sont particulièrement intéressantes lorsque le comportement effectif est difficile à prédire *a priori*.

Les problèmes locaux à l'échelle microscopique sont formulés sur des volumes élémentaires représentatifs (VER) caractéristiques des microstructures [189, 190]. Il faut mentionner qu'en fonction des propriétés microstructurales des matériaux, la distribution des hétérogénéités peut être périodique ou aléatoire. Pour ce dernier cas, la construction des volumes représentatifs appropriés est abordée dans [191, 192]. On peut noter que la taille caractéristique du VER est très petite par rapport à la taille de la région d'intérêt. Les VER locaux sont attachés à des points d'intégration macroscopiques, voir Figure 4.4b. La transition entre les échelles (*scale bridging*) est donc construite sur la base point-volume.

Nous considérons dans cette étude la technique d'homogénéisation numérique EF² [177, 175] où les problèmes aux deux échelles sont résolus récursivement à l'aide de la méthode des éléments finis, cf. Figure 4.3. Basée sur la théorie de l'homogénéisation, l'étape de localisation consiste à définir des conditions aux limites sur les bords du VER. Après résolution du problème non linéaire hétérogène sur le VER, l'étape d'homogénéisation consiste à définir la contrainte globale comme la moyenne de la contrainte microscopique calculée sur le VER associé. Cette contrainte homogénéisée sert alors à mettre à jour les efforts internes à l'échelle macroscopique. Le schéma EF² permet ainsi de calculer avec précision et à la volée la contrainte globale homogénéisée ainsi que le comportement microstructural local. Il a été montré dans [177] que l'algorithme EF² converge quelles que soient les hypothèses choisies pour le couple localisation/homogénéisation.

L'approche EF² peut également être utilisée pour corriger l'opérateur de linéarisation global \mathbf{H}^{n-1} (via la matrice tangente effective obtenue à partir des calculs à l'échelle microscopique, cf. par exemple [193, 194]). Cependant, l'évaluation de la matrice tangente effective nécessite d'effectuer des calculs supplémentaires sur le VER. Cette option, coûteuse numériquement, n'est pas considérée ici. Il en

résulte une limitation de l'ordre de convergence de l'algorithme de Newton : la convergence linéaire est donc supposée, mais qui peut être accélérée par des méthodes d'accélération de point fixe [195].

Dans le cas d'applications industrielles réelles, les stratégies d'homogénéisation numériques, même étant naturellement parallélisables, s'accompagnent d'un coût de calcul important (grand nombre de problèmes locaux à résoudre). Nous nous appuyons ici sur la technique EF²-hybride [196] consistant à effectuer des calculs à l'échelle micro uniquement dans des zones d'intérêt. D'autres stratégies visant à réduire le coût de calcul microscopique existent dans la littérature, comme par exemple les techniques de préconditionnement multigrille (utilisant le modèle homogénéisé) [197, 198, 199] ou les approches de type NTFA [182].

L'algorithme de la méthode EF²-hybride sur deux échelles pour un problème quasi-statique non linéaire est présenté dans l'Algorithme 10.

Il faut noter que dans la zone d'intérêt $\hat{\Omega}_M$ le calcul de la contrainte globale σ_M^n est évité. Elle est remplacée par la contrainte locale moyenne $\tilde{\sigma}_M^n$ dans l'expression des efforts internes $\mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\sigma}_M^n)$. La contrainte évaluée grâce au calcul local est en effet plus précise car elle tient compte du comportement hétérogène réel de la microstructure. Ainsi, dans la zone d'intérêt, l'algorithme EF² vise à minimiser l'écart entre les efforts externes et les efforts internes calculés à partir de la contrainte homogénéisée.

4.5 Cadre unifié pour des méthodes multiniveaux

Au regard des similitudes des algorithmes 10 et 9 de résolution multiéchelles, nous proposons en Algorithme 11, un algorithme de couplage numérique multiéchelle unifié.

Un tel algorithme de résolution multiniveau peut être vu comme un formalisme unifié qui pourrait être utilisé pour interpréter un large éventail de méthodes multiéchelles (par exemple [172, 185]).

La principale différence algorithmique entre les approches EF²-hybride et LDC se résume au transfert d'informations entre les niveaux, qui s'effectue en fonction de la variable primale (déplacement) pour l'approche LDC, ou la variable duale (déformation/contrainte) pour la technique EF². Cela implique une évaluation légèrement différente des valeurs des conditions aux limites et du résidu global. Pour ce dernier, dans la méthode LDC, les forces externes sont remplacées par une évaluation des forces internes globales associées au déplacement local restreint à travers de contrainte globale associée (qui n'a qu'une signification algorithmique). Pour l'approche EF², les efforts internes sont remplacés par ceux dérivés de la contrainte homogénéisée (contrainte locale moyenne).

La méthode LDC peut être donc vue comme une approche de méso-homogénéisation, car les phénomènes qu'elle vise à représenter sont localisés au niveau global ou intermédiaire et donc le niveau local recouvre généralement une partie de la structure.

Les principales différences entre les méthodes sont résumées ci-après :

- Méthode LDC :
 - intégration de la loi de comportement globale sur tout le niveau global

Algorithm 10 Méthode EF²-hybride bi-grille pour un problème quasi-statique non linéaire

Entrée : données du problème, solution initiale pour $n = 0$, paramètre de convergence

Sortie : Solutions à deux niveaux

pour $n = 1$ jusqu'à convergence faire

- Calcul de l'équilibre en résolvant l'équation (4.8) dans Ω_M
- Si le point de Gauss dans la zone d'intérêt $\hat{\Omega}_M$: appel à la méthode EF²
 - Transfert d'information du niveau global au niveau local : *étape de localisation*.
Application des conditions aux limites sur le bord du maillage local $\partial\Omega_m$ (cf. Figure 4.4b) à partir du tenseur des déformations global homogène $\boldsymbol{\varepsilon}_M^n$:
 - *HSBC (homogeneous strain boundary conditions – conditions aux limites de déformation homogène)* : déplacement imposé (avec \mathbf{x}_m le point sur le bord du VER $\partial\Omega_m$) :

$$\mathbf{u}_m^n(\mathbf{x}_m) = \boldsymbol{\varepsilon}_M^n \mathbf{x}_m \quad \text{sur } \partial\Omega_m \quad (4.24)$$

- ou *PBC (periodicity boundary condition – conditions de périodicité)* sur le déplacement, qui expriment une relation linéaire entre les déplacements des faces périodiques du VER (avec \mathbf{w}_m^n un déplacement périodique sur $\partial\Omega_m$) :

$$\mathbf{u}_m^n(\mathbf{x}_m) = \boldsymbol{\varepsilon}_M^n \mathbf{x}_m + \mathbf{w}_m^n(\mathbf{x}_m) \quad \text{sur } \partial\Omega_m \quad (4.25)$$

- Problème au niveau local : résolution complète du problème non linéaire sur Ω_m avec Algorithme (8) utilisant le modèle constitutif hétérogène local
- Transfert d'information du niveau local au niveau global : *étape d'homogénéisation*.
Calcul du tenseur global de contraintes au point d'intégration considéré en faisant la moyenne sur le VER Ω_m de la contrainte locale calculée $\boldsymbol{\sigma}_m^n$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n = \langle \boldsymbol{\sigma}_m^n \rangle_{\Omega_m} = \frac{1}{|\mu(\Omega_m)|} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\sigma}_m^n \, d\Omega_m \quad (4.26)$$

avec $\mu(\Omega_m)$ la mesure du VER

- Dans $\Omega_M \setminus \hat{\Omega}_M$: intégration de la loi de comportement globale (Eq. (4.7)) pour obtenir $\boldsymbol{\sigma}_M^n$
- Réactualisation du résidu global :

$$\mathbf{R}^n = \begin{cases} \mathbf{F}_M^{ext} - \mathbf{F}_M^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^n) & \text{dans } \hat{\Omega}_M \\ \mathbf{F}_M^{ext} - \mathbf{F}_M^{int}(\boldsymbol{\sigma}_M^n) & \text{dans } \Omega_M \setminus \hat{\Omega}_M \end{cases} \quad (4.27)$$

- Vérification de convergence sur \mathbf{R}^n

fin pour

Algorithm 11 Algorithme multiéchelle unifié pour un problème quasi-statique non linéaire

Entrée : données de problème, paramètre de convergence

Sortie : Solutions à deux niveaux

pour $n = 1$ jusqu'à convergence

- Calcul de l'équilibre en résolvant l'équation (4.8)
- Dans la zone d'intérêt $\hat{\Omega}_M$: modèle local
 - Transfert d'information du niveau global au niveau local. Sur le bord du maillage local $\partial\Omega_m$: application des conditions aux limites de type Dirichlet dont les valeurs sont dérivées de la solution du problème global (déplacement ou déformation associée) ;
 - Problème(s) au niveau local : résolution(s) complète(s) des problème(s) non linéaire(s) sur Ω_m avec Algorithme 8 (peut être fait avec n'importe quelle méthode de discrétisation) ;
 - Transfert d'information du niveau local au niveau global.
- Intégration de la loi de comportement globale (Eq. (4.7)) où nécessaire
- Réactualisation du résidu global :
 - à partir des calculs au niveau fin dans la zone d'intérêt ;
 - via la procédure standard ailleurs (voir Algorithme 8)
- Vérification de convergence.

fin pour

- pas de contrainte globale corrigée : nécessité de garder le niveau local si on s'intéresse aux contraintes
- conditions aux limites appropriées imposées au problème local en présence d'effets localisés
- faible séparation d'échelles : plusieurs niveaux afin d'atteindre l'échelle de la microstructure
- Méthode EF² :
 - limitée en cas d'effets localisés à cause de l'hypothèse de séparation d'échelles (cf. conditions aux limites sur le VER)
 - ne s'applique que dans le cadre de l'homogénéisation (grande séparation d'échelles)
 - représente naturellement la microstructure

La limite en terme de séparation d'échelle entre les deux classes de méthodes multiéchelles considérées est floue. De plus, un choix parfois envisagé dans la littérature [200] est de fusionner tous les problèmes EF² locaux en un seul calcul, ce qui rendrait le niveau local de la méthode EF² encore plus proche de celui défini avec la méthode LDC. Par conséquent, il serait donc intéressant de se positionner sur la limite ou l'intersection entre ces deux classes de méthodes multiéchelles : quelle est la taille maximale pertinente de VER et quel est le niveau de détails accessible avec l'approche LDC ? Si le même niveau de détails pouvait être représenté avec les deux méthodes, obtiendrions-nous des résultats identiques et à quel coût numérique ?

4.6 Bilan du chapitre

L'étude effectuée dans ce chapitre nous a permis de placer dans un cadre unifié deux méthodes multiéchelles basées sur une résolution multiniveau mais développées pour prendre en compte différents types de facteurs d'échelles. Étant générique, le formalisme proposé ne se limite pas aux deux méthodes comparées (LDC et EF²), mais peut être utilisé pour représenter plusieurs méthodes de couplage multiéchelle. Il permet de révéler clairement de fortes similitudes conceptuelles et algorithmiques.

Par conséquent, la méthode de raffinement adaptatif multiniveau LDC peut être vue comme une méthode de méso-homogénéisation, qui travaille sur la variable primale (au lieu de la variable duale utilisée pour des techniques d'homogénéisation classiques). Cette méthode semble adaptée lorsque l'argument de la séparation d'échelles n'est plus valable.

Cette étude, ayant été menée dans un contexte non linéaire, nous a conduit à étendre l'algorithme LDC dans ce contexte. Au niveau algorithmique, cette extension de l'approche LDC n'a pas posé de difficultés. Cependant en pratique, il faudra pouvoir obtenir facilement la contrainte "fictive" restreinte ($\tilde{\sigma}_M^n$) associée au déplacement restreint. Dans le chapitre suivant, nous allons détailler la mise en œuvre pratique de l'algorithme multigrille (et non seulement bi-grille) de la méthode LDC dans un cadre de raffinement adaptatif de maillage pour des problèmes quasi-statiques non linéaires.

Chapitre 5

Extension de la méthode Local Defect Correction à des problèmes non linéaires

Ce chapitre est dédié à l'adaptation dynamique temporelle de la méthode LDC à des problèmes de mécanique quasi-statiques non linéaires. Nous montrons l'efficacité de la méthode LDC dans ce contexte et sa capacité naturelle à générer une hiérarchie de maillages qui suit dynamiquement l'évolution en temps du phénomène étudié. Les problématiques génériques associées à l'adaptation dynamique de maillage, telles que la question de transfert des champs entre les pas de temps ainsi que la problématique de contrôle de l'erreur de discrétisation, sont abordées. Nous proposons une stratégie permettant de rééquilibrer les champs transférés, stratégie qui s'avère importante afin d'éviter l'accumulation des erreurs lors de remaillages dynamiques en temps. Par ailleurs, un processus de raffinement optimisé visant à limiter le nombre de remaillages tout en vérifiant les tolérances prescrites par l'utilisateur, est proposé.

Sommaire

5.1	Introduction	119
5.2	Aspects pratiques de la résolution des problèmes quasi-statiques non linéaires	119
5.2.1	Algorithme de résolution en temps	119
5.2.2	Calcul pratique du résidu LDC non linéaire	120
5.2.3	Transfert des champs	121
5.3	Problème élastique quasi-statique avec un chargement évolutif	125
5.3.1	Stratégie de rééquilibrage	126
5.3.2	Adaptation dynamique du maillage	128
5.4	Optimisation du processus de raffinement et contrôle de la précision	130
5.5	Contrôle de l'erreur sur l'historique : modèle élasto-plastique	133
5.6	Application de la méthode LDC au problème d'IPG avec comportement visco-plastique	139
5.7	Bilan du chapitre	144

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous vérifions l'applicabilité et les performances de la méthode LDC dans le cas de problème de mécanique quasi-statiques non linéaires. Nous discutons ici les aspects pratiques de l'implémentation de l'algorithme LDC tel qu'introduit au chapitre 4, et proposons sa vérification sur plusieurs types de comportements (loi de comportement plastique et loi de fluage de Norton).

Nous abordons également la problématique du transfert des informations entre les différents maillages et pas de temps, ainsi que la question du contrôle de l'erreur de discrétisation au cours du temps. Ces deux questions sont génériques aux stratégies AMR avec remaillage dynamique, et non spécifiques aux méthodes de raffinement multiniveau.

Grâce aux résultats de l'étude effectuée dans le chapitre 3, la stratégie adoptée ici consiste à combiner la méthode LDC avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* basé sur le lissage de contraintes, le critère d'optimalité de maillage visant à vérifier à la fois l'erreur globale et locale, appelé LOC, et un ratio de raffinement fixé à 2 sur l'ensemble des éléments détectés.

5.2 Aspects pratiques de l'application de la méthode LDC à des problèmes quasi-statiques non linéaires

5.2.1 Algorithme de résolution en temps

Les problèmes quasi-statiques non linéaires de type (4.1) sont dépendants du temps notamment au travers des chargements. La résolution se fait alors en divisant l'historique de chargement en pas de temps. À chaque pas de temps, une procédure AMR peut être appliquée pour générer un maillage approprié : on parle alors de maillage évolutif ou d'adaptation dynamique de maillage.

L'algorithme de résolution d'un problème mécanique quasi-statique non linéaire sur un pas de temps avec la méthode LDC a été introduit dans la section 4.4.1, cf. Algorithme 9. Cet algorithme est appelé à l'intérieur d'une boucle externe qui se charge de balayer l'ensemble des pas de temps. L'Algorithme 12 présente alors la résolution d'un problème quasi-statique non linéaire sur l'ensemble des pas de temps avec la méthode LDC multiniveau.

Puisque la solution du problème dépend de l'historique, afin de pouvoir continuer l'analyse à partir de l'état actuel, une étape importante dans l'Algorithme 12 consiste en définition des conditions initiales (CI). Ces CI sont définies à partir de la solution convergée au pas de temps précédent. En cas de remaillage, au début du chaque pas de temps nous possédons alors des conditions initiales obtenues en transférant les champs nécessaires (déplacements, variables internes, contraintes, etc.) depuis le pas de temps précédent afin de définir l'état actuel du système sur le maillage considéré. Les généralités liées au transfert des champs entre pas de temps font l'objet de la section 5.2.3.

Algorithm 12 Méthode LDC multiniveau pour un problème quasi-statique non linéaire

Entrée : Données du problème, paramètre de convergence τ des itérations LDC, paramètre de convergence des itérations de Newton

Sortie : Solutions sur tous les niveaux des maillages pour l'ensemble des pas de temps pour $t = 1$ à nombre de pas de temps

Obtention des CI sur tous les niveaux LDC à partir de l'état final convergé du pas de temps précédent

Appel à l'Algorithme 9 pour la résolution du problème non linéaire avec la méthode LDC sur un pas de temps

fin pour

Afin de rendre l'implémentation de la méthode LDC la moins intrusive possible, dans un premier temps nous allons laisser le solveur non linéaire converger à chaque niveau de raffinement généré, contrairement à l'Algorithme 9 présenté dans la section 4.4.1 où la correction des solutions grossières se fait au cours de la résolution du problème non linéaire. Cela permet de nous assurer du bon fonctionnement de la méthode LDC dans le cas de comportements non linéaires. L'algorithme tel que décrit en Algorithme 9, ou mieux encore avec un contrôle des itérations de Newton à effectuer à l'aide d'un estimateur basé sur l'erreur algébrique (cf. par exemple [152]), permettrait alors de gagner en temps de calcul en évitant une sur-résolution de l'algorithme de Newton aux premières itérations de l'algorithme LDC. Cette amélioration est une perspective intéressante du travail présenté ici.

5.2.2 Calcul pratique du résidu LDC non linéaire

Comme nous avons pu le remarquer, le calcul du résidu de la méthode LDC tel que présenté dans l'Algorithme 9 diffère de celui utilisé dans le cadre d'un problème linéaire élastique. Il est nécessaire alors d'appliquer la loi de comportement sur le déplacement fin restreint $\tilde{\mathbf{u}}$, cf. expression 4.22, pour calculer la contrainte corrigée notée $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

En pratique, dans des codes en boîte noire, il n'est pas toujours possible d'appeler la loi de comportement de manière externe au solveur non linéaire. Nous proposons donc d'effectuer une résolution intermédiaire peu coûteuse et non intrusive pour obtenir cette contrainte "fictive" restreinte.

Après obtention du déplacement fin restreint (via l'opérateur de restriction), nous imposons ce déplacement sur la zone de restriction et résolvons le problème grossier "fictif" associé. Sur la zone de recouvrement, la résolution de ce problème se résume à l'intégration de la loi de comportement (non linéaire) et permet d'obtenir la contrainte corrigée $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

En utilisant cette contrainte corrigée, nous obtenons généralement facilement les forces internes associées $\mathbf{F}^{int}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{\Omega} \mathcal{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega$ via la matrice, généralement appelée \mathcal{B} , qui relie les déformations aux déplacements nodaux $\mathcal{B} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathcal{N} + \text{grad}^T \mathcal{N})$ où \mathcal{N} sont des fonctions de forme des éléments finis. Les efforts internes obtenus \mathbf{F}^{int} nous servent à réactualiser le résidu du problème non linéaire, cf. expression (4.23).

5.2.3 Transfert des champs

Nous nous intéressons dans cette section à la problématique du transfert des champs entre différents maillages. Cette problématique résulte du fait d'utiliser un maillage évolutif au cours du temps et est alors générique aux méthodes AMR basées sur l'adaptation dynamique de maillage et non spécifique au raffinement multiniveau (méthode LDC).

Transfert entre niveaux de raffinement

Dans notre étude nous adoptons la stratégie de transfert utilisée dans [11, 201]. Nous illustrons sur la Figure 5.1 la procédure de transfert d'informations entre deux pas de temps, notés $t - 1$ et t . Les trois niveaux de maillages, niveaux \mathcal{G}_0 , \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 , sont représentés schématiquement sur un exemple 1D.

Dans le cadre multiniveau, sur un pas de temps donné t nous procédons généralement en transférant les informations du même niveau (si elles sont disponibles), ou des niveaux plus grossiers.

Comme on observe sur la Figure 5.1, le transfert sur le niveau 0 est simple vu que les maillages \mathcal{G}_0^t et \mathcal{G}_0^{t-1} sont identiques. Sur le niveau 1, nous transférons les informations depuis le maillage \mathcal{G}_1^{t-1} (sur la partie $\mathcal{G}_1^t \cup \mathcal{G}_1^{t-1}$) et depuis le maillage plus grossier \mathcal{G}_0^{t-1} sur la partie de \mathcal{G}_1^t inexistante au pas précédent, cf. $\mathcal{G}_1^t \setminus (\mathcal{G}_1^t \cup \mathcal{G}_1^{t-1})$. Pour le transfert sur le niveau 2 nous nous servons de l'ensemble des niveaux de maillages du pas de temps précédent \mathcal{G}_0^{t-1} , \mathcal{G}_1^{t-1} et \mathcal{G}_2^{t-1} .

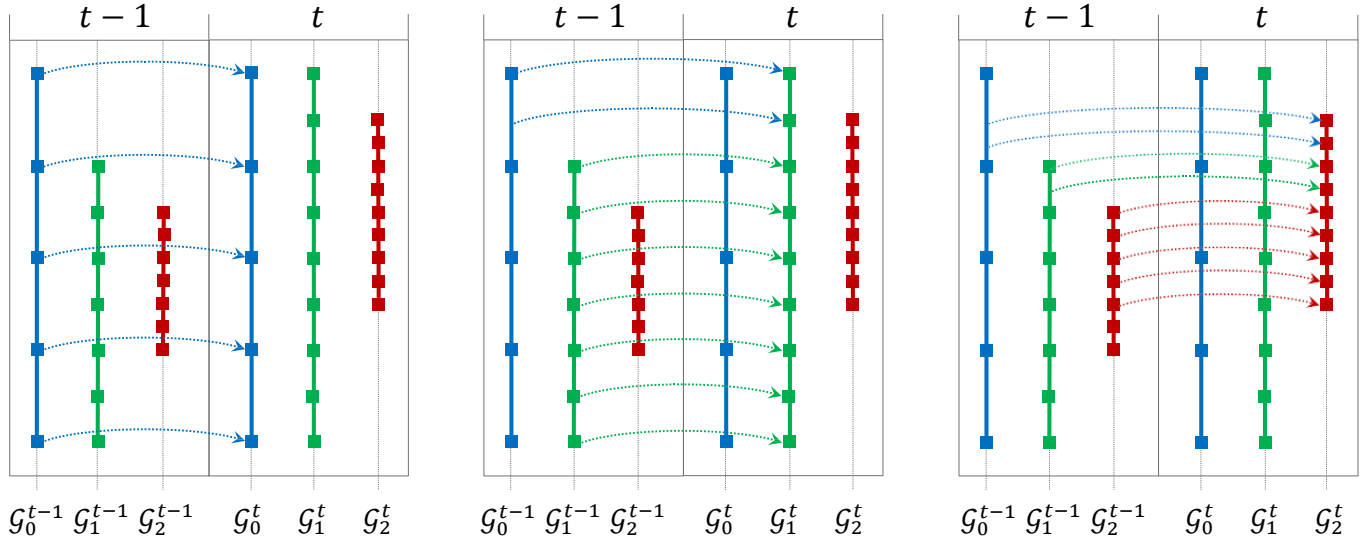


Figure 5.1: Illustration de procédure de transfert entre deux pas de temps $t - 1$ et t et différents niveaux de maillage

Stratégies de transfert

On peut distinguer deux types de champs à transférer [202, 203, 204] : les quantités définies aux nœuds du maillage (comme le déplacement ou la température) et les quantités définies aux points d'intégration (champs de contraintes ou de déformations, variables internes, gradient thermique,...).

Gestion des quantités nodales.

Pour les quantités nodales, les fonctions de forme du maillage de départ sont généralement utilisées. C'est la technique la plus simple et la plus naturelle. Cette approche est adoptée dans cette thèse.

D'autres choix sont également possibles. Par exemple, l'application de la procédure basée sur les patches (SPR) [133, 205], la technique se basant sur la génération des maillages auxiliaires [202, 206], les approches basées sur la méthode des moindres carrés [207, 208] ou encore des approches de type Mortar [204].

Gestion des quantités définis aux points d'intégration.

Le transfert des variables connues aux points d'intégrations est généralement plus complexe et nécessite l'utilisation d'opérateurs d'interpolation ou d'extrapolation dédiés.

Le choix d'un opérateur de transfert est délicat et très sensible principalement du fait que le transfert des champs peut conduire à l'introduction d'erreurs numériques artificielles, cf. [209, 210, 211]. Le premier aspect à prendre en compte est lié au compromis précision/coût : l'opérateur choisi doit être précis car ses performances déterminent la qualité de la solution projetée et avoir un coût numérique raisonnable. Il est également nécessaire de tenir compte de la problématique liée à la diffusion numérique qui peut conduire par exemple à l'étalement de la zone de plasticité ou de la bande de concentration des déformations. Il est important alors de prendre soin de minimiser ce phénomène [212]. Il faut noter que les stratégies de transfert locales (ou *element-oriented*) permettent de minimiser cette diffusion.

Certaines stratégies de transfert peuvent être nommées :

- Transfert direct des champs (souvent appelé *the closest point transfer* en anglais) [211]. Cette approche consiste à imposer aux points d'intégration du nouveau maillage la valeur du champ du point d'intégration géométriquement le plus proche du maillage de départ. Comme ce transfert est local, cette technique permet naturellement de limiter la diffusion numérique. Cette technique est schématiquement illustrée sur la Figure 5.2 pour des maillages hiérarchiques.
- Transfert des champs en passant par les nœuds de l'élément, voir [203, 213]. Cette approche est illustrée sur la Figure 5.2. Cette stratégie implique trois étapes. Tout d'abord, les champs définis aux points d'intégration de l'ancien maillage sont extrapolés aux nœuds de l'ancien maillage via les fonctions de formes EF, par la méthode des moindres carrés [214, 215], ou encore par l'approche SPR. Lors de cette étape il est important de prendre soin de rester à l'intérieur de l'élément de départ (pas d'imposition de continuité des valeurs élémentaires nodales). Deuxièmement, les fonctions de forme des éléments finis sont utilisées pour inter-

poler les champs des nœuds de l'ancien maillage aux nœuds du nouveau maillage. Enfin, une interpolation avec les fonctions de forme du nouveau maillage est effectuée pour transférer les champs des nœuds du nouveau maillage vers les points d'intégration du nouveau maillage. Cette approche est illustrée sur la Figure 5.2.

- Transfert en utilisant des points d'intégration supplémentaires [210] dont l'idée consiste à inclure les nœuds du maillage dans les points d'intégration où la loi de comportement est évaluée (quadrature de Gauss-Lobatto). Cette approche conduit à des résultats précis mais s'avère coûteuse numériquement [210].
- Transfert par moindres carrés ou moindres carrés mobiles, basé sur des techniques d'approximation diffuse (*diffuse transfer operator* en anglais), cf [216, 217] avec une amélioration proposé dans [218] visant de limiter la diffusion numérique.

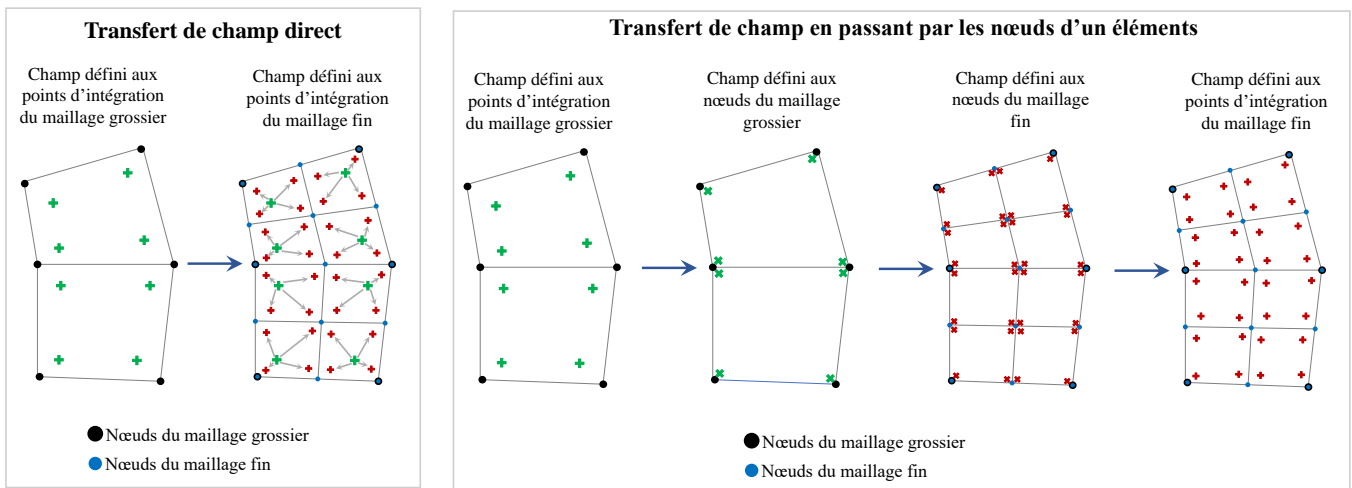


Figure 5.2: Stratégies de projection des champs définis aux points d'intégration

Il faut noter que même si de nombreuses études ont été menées afin de proposer des opérateurs de transfert génériques et efficaces, le transfert des variables entre différents maillages reste toujours une question ouverte dans la littérature [218].

Rétablissement de l'équilibre

Indépendamment de la stratégie de transfert choisie, une fois les quantités transférées, il faut assurer l'équilibre ainsi que la cohérence avec les relations constitutives, cf. [203, 210, 213].

Dans cette section nous proposons une stratégie simple pour répondre à la problématique importante associée à la remise en équilibre des champs transférés.

En supposant que le problème non linéaire est résolu de façon exacte, le premier résidu non linéaire à un pas donné t , noté \mathbf{R}_t^0 , devrait s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{R}}_t^0 = \Delta \mathbf{F}_t^{ext} = \mathbf{F}_t^{ext} - \mathbf{F}_{t-1}^{ext} \quad (5.1)$$

avec

$$\mathbf{F}_{t-1}^{ext} = \mathbf{F}^{int}(\boldsymbol{\sigma}_{t-1}) \quad (5.2)$$

Cependant en cas de transfert de champs, les contraintes considérées $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}$ sont celles issues de la projection de $\boldsymbol{\sigma}_{t-1}$ sur le nouveau maillage. Ces contraintes ne sont donc pas à l'équilibre avec les forces externes précédentes. Il existe donc un résidu de déséquilibre en début de pas de temps :

$$\mathbf{R}_{t-1}^{des} = \mathbf{F}_{t-1}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}) \quad (5.3)$$

La stratégie proposée pour ne pas cumuler les résidus de déséquilibre consiste donc à ajouter ce résidu au résidu initial :

$$\mathbf{R}_t^0 = \tilde{\mathbf{R}}_t^0 + \mathbf{R}_{t-1}^{des} \quad (5.4)$$

ce qui revient en pratique à considérer le résidu initial

$$\mathbf{R}_t^0 = \mathbf{F}_t^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}) \quad (5.5)$$

Connaissant ce premier résidu, on détermine un premier incrément de déplacement en résolvant l'équation d'équilibre, cf. l'expression (4.8). Ce déplacement nous sert à définir la contrainte par l'intégration de la loi de comportement qui va être utilisée par la suite dans le processus itératif pour mettre à jour les efforts internes de façon standard, cf. Eq. (4.8).

Remarque 5.2.1. *Dans le cas d'une résolution non exacte du problème non linéaire, étant donné que (5.2) n'est pas vérifié, un résidu initial identique à (5.5) permet de tenir compte du déséquilibre de résolution [219, 220].*

Évaluation de la précision de différentes stratégies de transfert

Dans cette section nous nous intéressons à étudier la précision de deux stratégies de transfert des champs définis aux points d'intégration : la stratégie de transfert direct et la stratégie en passant par les nœuds d'un élément, cf. Figure 5.2. Ces deux stratégies semblent être les plus simples à mettre en œuvre et ont montré leur efficacité dans de nombreuses études (cf. par exemple [11, 211, 212]). De plus, étant locales, ces stratégies limitent la diffusion numérique. Il faut noter qu'en pratique, l'étape 3 de la Figure 5.2 de droite est évitée, car il est possible d'interpoler les valeurs directement des nœuds du maillage grossier aux points d'intégration du maillage fin.

Nous nous focalisons sur le transfert de champ des contraintes. Cette étude nous servira de référence pour définir la stratégie à adopter par la suite dans le cadre non linéaire où nous serons emmenés à transférer, en outre, les variables internes.

Afin d'effectuer cette étude de façon la plus rigoureuse possible, le benchmark académique de la plaque trouée pour lequel nous possédons la solution analytique est utilisé. Nous nous référons à la section 3.3 pour le positionnement du problème ainsi que la solution analytique.

Nous évaluons alors l'erreur commise lors du transfert depuis un maillage grossier, noté \mathcal{G}_0 vers des maillages raffinés avec les ratios de raffinement $\beta_{T^0} = 2$ et $\beta_{T^0} = 4$ appliqués à l'ensemble des éléments $T^0 \in \mathcal{G}_0$. Les maillages obtenus sont notés \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 , respectivement.

Le champ des contraintes est calculé de façon analytique sur le maillage \mathcal{G}_0 afin de ne pas tenir compte de l'erreur de discrétisation. Les contraintes sont ensuite transférées du maillage \mathcal{G}_0 aux maillages \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 et comparées aux contraintes évaluées également de façon analytique sur ces maillages. L'erreur est mesurée en norme énergie.

Nous présentons dans la Table 5.1 les erreurs obtenues pour les deux stratégies de transfert étudiées. Ces deux stratégies conduisent à des erreurs du même ordre de grandeur. Il peut être observé que la stratégie de transfert en passant par les nœuds conduit à une erreur plus faible.

Table 5.1: Procédures de transfert des informations définies aux points d'intégration

	$\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0$	$\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1$	$\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_2$
Procédure de transfert direct			
Erreur en norme énergie	0.0	$5.85 \cdot 10^{-3}$	$6.03 \cdot 10^{-3}$
Procédure de transfert en passant par les nœuds des éléments			
Erreur en norme énergie	0.0	$2.01 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$

Remarque 5.2.2. *Dans notre cas, il faut noter que les bases algorithmiques de cette approche (à savoir interpolation des champs définis aux points d'intégration aux nœuds des éléments en utilisant les fonctions de forme éléments finis) sont implémentées sous Cast3M de façon optimale, ce qui en fait la stratégie la plus efficace en terme de temps de calculs.*

Dans la suite de ce document nous allons utiliser alors le transfert en passant par les nœuds des éléments lors de transfert des champs définis aux points d'intégration (champs des contraintes, variables internes, etc.).

5.3 Problème élastique quasi-statique avec un chargement évolutif

Nous nous intéressons ici à la mise en œuvre de l'algorithme LDC pour un problème quasi-statique avec un chargement de position et/ou intensité variable au cours du temps. Afin de se focaliser sur l'importance de l'adaptation dynamique (i.e. en temps) du maillage et d'évaluer la stratégie de rééquilibrage proposée dans la section 5.2.3, le comportement du matériau est supposé élastique.

Cette étude nous permet également de tester les performances des techniques de transfert de champs choisies (cf. section 5.2.3). Le problème traité étant linéaire élastique, il suffirait de transférer les déplacements entre les pas de temps et ensuite calculer le champ de contraintes en utilisant la loi de comportement (linéaire). Néanmoins, afin de valider la procédure de transfert choisie pour les champs définis aux points d'intégration sur un exemple réel, nous allons transférer également le champ des contraintes depuis le pas de temps précédent.

À titre d'illustration, nous considérons ici un problème représentant le phénomène d'IPG illustré sur la Figure 3.16a. La position de la singularité de pression $L_h = 0.6$ mm reste inchangée, ainsi que

la pression externe égale à 15.5 MPa. La pression interne suivante est imposée :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= -[80, \dots, 250] \text{ MPa} && \text{sur } z \leq L_h \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= -80 \text{ MPa} && \text{sur } z > L_h \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sur la partie $z \leq L_h$ de la gaine modélisée la pression varie alors de 80 MPa à 250 MPa, ce qui est représentatif d'un transitoire de puissance [221]. Dans l'exemple considéré, cette pression varie linéairement sur 34 pseudo pas de temps par pas de 5 MPa.

La procédure AMR avec estimateur d'erreur telle que décrite dans le chapitre 2 est appliquée à chaque pas de temps, donc les niveaux de maillages sont réactualisés à chaque pas.

Pour évaluer l'erreur commise, nous utilisons une solution de référence calculée pour chaque chargement de façon non-incrémentale (car comportement élastique) sur un maillage très fin uniforme. La tolérance fixée sur l'erreur globale est $\epsilon_\Omega = 2\%$, sur l'erreur locale nous fixons un seuil $\delta = 3\%$ (le pourcentage des éléments dont l'erreur locale est supérieure à $\epsilon_\Omega = 2\%$ ne doit pas dépasser 3%). L'erreur globale réelle relative en norme énergie $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ est calculée avec l'expression (3.2), celle locale est évaluée avec la mesure η^{ex} définie par l'expression (3.3).

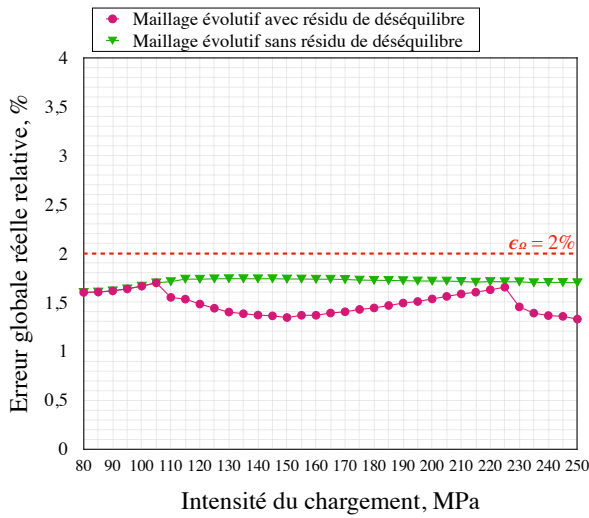
5.3.1 Stratégie de rééquilibrage

Nous nous focalisons dans un premier temps sur l'évaluation de la stratégie de rééquilibrage associée à la remise à l'équilibre suite au transfert des champs. Dans ce cas quasi-statique linéaire, comme nous n'avons pas de forces non linéaires à équilibrer, le déséquilibre est uniquement dû au transfert des champs entre les pas de temps.

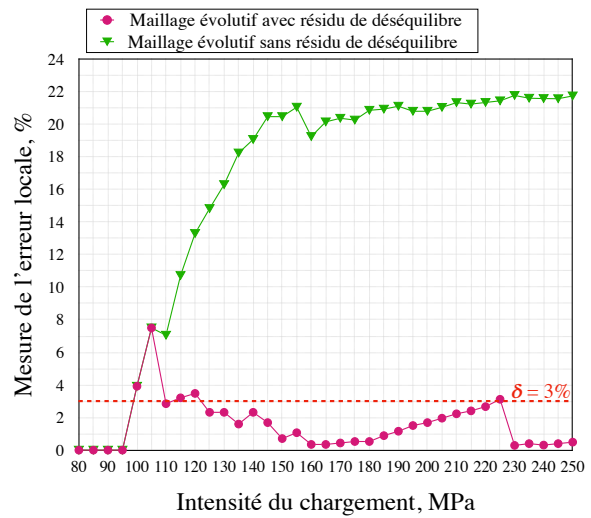
Sur les Figures 5.3a et 5.3b nous présentons les évolutions des erreurs globales et locales, respectivement, obtenues avec et sans le résidu initial de déséquilibre, cf. expression (5.5). La Figure 5.3c présente le nombre k de niveaux générés avec la méthode LDC et le nombre de nœuds des maillages fins composites \mathcal{G}_k obtenus.

Tout d'abord nous pouvons constater une accumulation des erreurs (surtout vis-à-vis de mesure de l'erreur locale) dans le cas où le rééquilibrage n'est pas effectué, cf. courbe verte sur la Figures 5.3. Il faut noter que même si la mesure de l'ensemble des éléments où l'erreur locale dépasse le seuil demandé est assez large ($\eta^{\text{ex}} \approx 22\%$ à la fin de l'historique), cf. Figure 5.3b, ces valeurs restent entre $\epsilon_\Omega = 2$ et 3% comme on peut voir sur les cartes d'erreurs locales présentées sur la Figure 5.5e. La propagation des erreurs depuis les pas de temps précédents a une influence importante sur l'adaptation de maillage. Cela conduit à la génération de maillages surraffinés (cf. Figure 5.3c) comparés au cas où on tient compte du déséquilibre initial. De plus, même si des maillages surraffinés sont générés, nous n'arrivons pas à diminuer de façon significative les erreurs. Ceci est donc bien dû au transfert des champs.

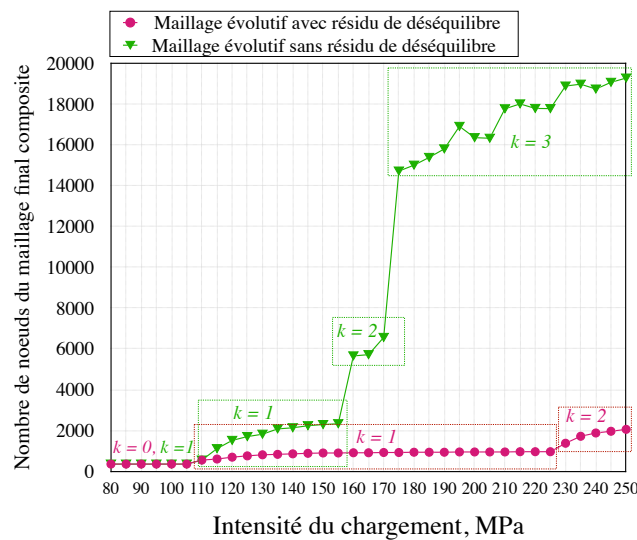
Tenant compte de ce déséquilibre, nous arrivons à contrôler les erreurs globales et locales sur tout l'historique du chargement, cf. courbe rouge sur la Figure 5.3. Nous pouvons remarquer que la génération des sous-niveaux de maillages supplémentaires (cf. Figure 5.3c) permet de corriger les erreurs de façon efficace (cf. les chutes des erreurs à la pression correspondante à 110 MPa quand le premier sous-niveau est ajouté et à 230 MPa quand on ajoute encore un sous-niveau de maillage).



(a) Erreur globale relative en norme énergie $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$



(b) Mesure de l'erreur locale η^{ex}



(c) Nombre de niveaux de maillages générés k et nombre de noeuds du maillage final composite \mathcal{G}_k

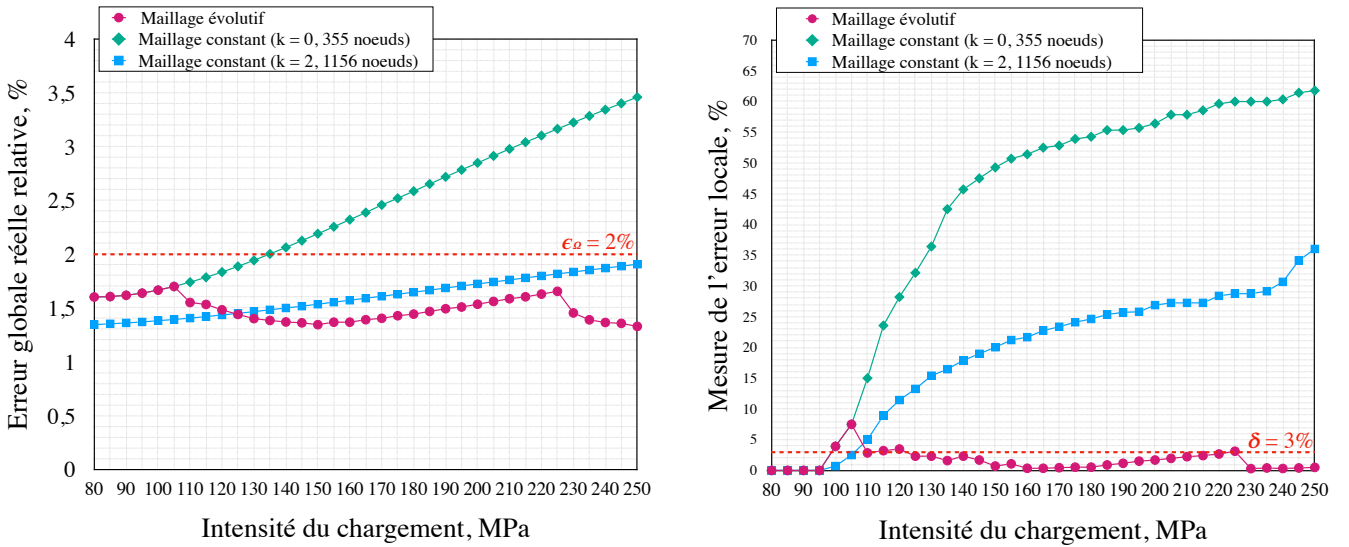
Figure 5.3: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D avec intensité du chargement variable – tolérance fixée sur l’erreur globale $\epsilon_{\Omega} = 2\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$ – évaluation de la stratégie de rééquilibrage – erreur globale et mesure de l’erreur locale et maillages générés

Nous pouvons en conclure que la stratégie de rééquilibrage proposée dans la section 5.2.3 est très efficace et permet de répondre à la problématique liée à la remise à l’équilibre des champs transférés.

5.3.2 Adaptation dynamique du maillage

Dans cette section nous visons à montrer l'importance du remaillage dynamique en temps. Nous comparons notre approche avec des sous-niveaux de maillages mobiles (cf. Figure 5.5d) à deux stratégies où le maillage est généré *a priori* et n'est pas réactualisé au cours du temps. La première stratégie consiste à utiliser un maillage uniforme ($k = 0$) choisi arbitrairement (le phénomène étudié n'est pas très bien connu), cf. Figure 5.5b, tandis que la deuxième stratégie, proche de celle actuellement utilisée lors de la simulation de l'IPG, cf. [5, 221], se base sur un maillage généré également *a priori* mais avec les éléments plus raffinés concentrés dans des zones d'intérêt potentielles $k = 2$ (position du contact pastille-gaine connue *a priori*), cf. Figure 5.5c.

Les distributions des erreurs locales sur les maillages composites obtenues avec les trois stratégies correspondantes aux maillages constants et évolutif, sont illustrées sur la Figure 5.5 pour certains pas de temps. Sur les Figures 5.4a et 5.4b nous illustrons les évolutions de l'erreur globale relative $e_{G_k}^{ex}$ et la mesure de l'erreur locale η^{ex} , respectivement, obtenues sur l'ensemble de l'historique du chargement.



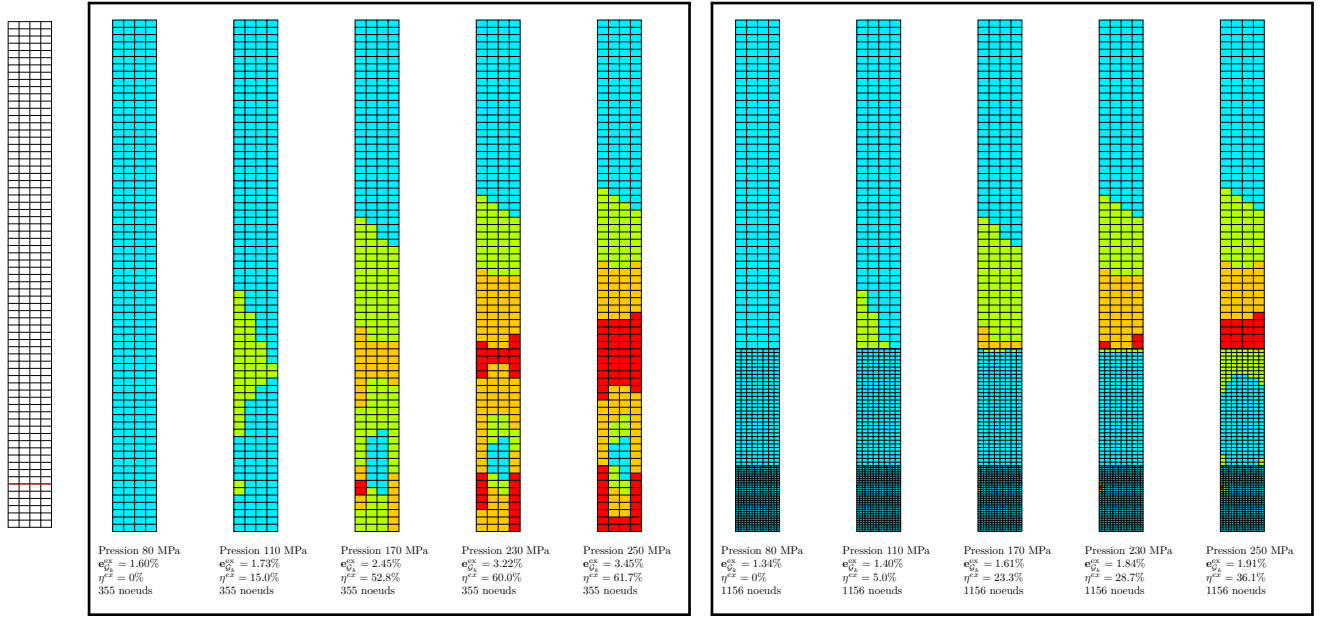
(a) Erreur globale relative en norme énergie $e_{G_k}^{ex}$

(b) Mesure de l'erreur locale η^{ex}

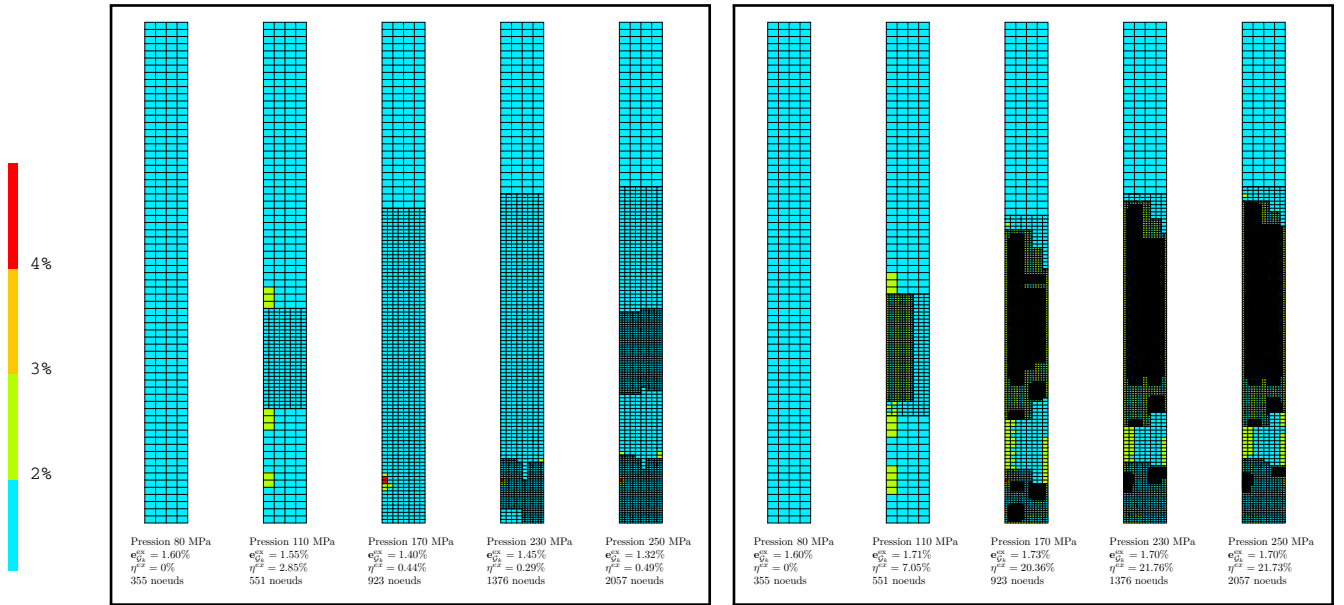
Figure 5.4: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D avec intensité du chargement variable – tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 2\%$ – paramètre de contrôle de l'erreur locale $\delta = 3\%$ – erreur globale et mesure de l'erreur locale

On peut observer qu'en s'appuyant uniquement sur le remaillage dynamique qui suit l'évolution du chargement, cf. Figure 5.4, nous arrivons à contrôler les erreurs globales et locales sur tous les pas de temps. Dans ce cas les sous-niveaux de maillages ajoutés de façon automatique permettent de bien capturer les zones où l'erreur est importante et donc améliorer considérablement les précisions.

Dans les cas où les maillages *a priori* sont utilisés, les erreurs obtenues se cumulent et dépassent assez vite les seuils fixés (surtout l'erreur locale). L'utilisation de maillages préraffinés *a priori* (Figure 5.5c) permet d'atteindre des erreurs plus basses au début de l'historique comparé au maillage



(a) (b) Maillage constant ($k = 0$, $\mathcal{G}_k = 355$ noeuds) (c) Maillage constant ($k = 2$, $\mathcal{G}_k = 1156$ noeuds)



(d) Maillage évolutif avec résidu de déséquilibre (cf. nombre de noeuds sur la Figure 5.3c) (e) Maillage évolutif sans résidu de déséquilibre (cf. nombre de noeuds sur la Figure 5.3c)

Figure 5.5: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D avec intensité du chargement variable et comportement élastique – tolérance fixée sur l’erreur globale $\epsilon_{\Omega} = 2\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$; (a) maillage initial avec la singularité de pression en rouge, (b) - (e) cartes d’erreurs locales

évolutif, mais à un coût de calcul plus élevé (maillages trop raffinés). Néanmoins, avec l'évolution du phénomène en temps, ce maillage n'est pas suffisamment raffiné aux bons endroits et ne permet donc pas de bien suivre l'évolution du phénomène. Quant au maillage à un niveau ne tenant pas compte du phénomène étudié (Figure 5.5b), nous pouvons constater qu'il devient très vite insuffisant et conduit à des erreurs élevées.

Grâce à cette étude on peut conclure que même si l'adaptation dynamique de maillage n'est pas triviale à mettre en œuvre et engendre des difficultés et éventuellement des coûts supplémentaires associés au transfert des champs entre pas de temps, son apport est nécessaire pour des problèmes fortement évolutifs.

5.4 Optimisation du processus de raffinement et contrôle de la précision

Pour des problèmes non linéaires, la procédure de raffinement optimale en terme de précision (suivi du phénomène étudié) consisterait à appliquer à chaque pas de temps l'algorithme de raffinement adaptatif tel qu'introduit au chapitre 2, cf. Algorithme 1. Ainsi, en partant d'un maillage initial grossier, les sous-grilles de la méthode LDC seraient automatiquement réactualisées à chaque pas de temps.

Cependant, parfois entre les pas de temps les zones raffinées changent de façon négligeable, ce qui n'a pas d'influence significative sur les erreurs finales obtenues. Dans ce cas, la régénération des maillages à chaque pas de temps (avec les transferts de champs associés) peut vite rendre la méthode AMR inefficace en terme de temps de calcul.

L'objectif ici est alors de proposer une approche permettant d'optimiser le processus de raffinement dans le cas de la méthode multiniveau LDC. Une stratégie possible est d'imposer le remaillage après un certain nombre de pas de temps comme effectué dans [11], mais cette approche ne permet pas de bien capturer le phénomène étudié et ne garantit pas la vérification des précisions prescrites.

Nous visons ainsi à proposer une stratégie robuste de raffinement dynamique limitant le nombre de remaillages au cours du temps, tout en garantissant la vérification des précisions prescrites par l'utilisateur sur les erreurs globales et locales.

Nous résumons dans l'Algorithme 13 le processus de raffinement optimisé. Nous notons k^{\max} le nombre d'itérations AMR effectuées (= nombre de sous-niveaux LDC) au pas de temps précédent. Notons qu'au début du premier pas de temps $k^{\max} = 0$.

Dans l'Algorithme 13, nous introduisons tout d'abord un *indicateur de remaillage*, noté **remesh**. Ce booléen prend la valeur *vrai* si le remaillage est nécessaire au pas de temps suivant, ou la valeur *faux* si nous allons garder les sous-niveaux générés. Il est initialisé à *vrai* au début de l'historique, ce qui permet de générer au premier pas de temps l'ensemble de sous-niveaux nécessaires à partir d'un maillage initial grossier.

L'indicateur de remaillage va s'appuyer sur le booléen de sortie du module **STOP** (cf. section 2.5) mais également sur la précision locale sur le maillage composite \mathcal{G}_i évaluée via :

$$\frac{\mu(\Omega_{\mathcal{D}_i^{t,\text{est}}})}{\mu(\Omega)} > \delta \quad (5.7)$$

avec $\mu(\Omega_{\mathcal{D}_i^{t,\text{est}}})$ la mesure de la zone $\Omega_{\mathcal{D}_i^{t,\text{est}}} = \{\cup \bar{T}^i; T^i \in \mathcal{D}_i^{t,\text{est}}\}$ avec $\mathcal{D}_i^{t,\text{est}}$ l'ensemble des éléments du maillage composite où l'erreur locale estimée $\frac{\xi_{T^i}^t}{\omega_{T^i}}$ dépasse la tolérance prescrite : $\mathcal{D}_i^{t,\text{est}} = \{T^i \in \mathcal{G}_i^t; \frac{\xi_{T^i}^t}{\omega_{T^i}} > \epsilon_\Omega\}$.

Ce critère indique si le maillage utilisé au pas de temps courant est suffisamment localement raffiné et permet de bien capturer les zones critiques (qui ont potentiellement évoluées par rapport aux pas de temps d'avant).

Algorithm 13 Algorithme optimisé du processus de raffinement multiniveau en temps

Paramètres : tolérance fixée sur l'erreur globale ϵ_Ω , paramètre de contrôle de l'erreur locale δ

Initialisation de la boucle en temps : $k^{\max} = 0$, booléen **remesh** = vrai

pour $t = 1$ à nombre de pas de temps

Initialisation de la boucle AMR : $i = 0$, maillage initial $\hat{\mathcal{G}}_0^t \leftarrow \mathcal{G}_0^t$, booléen **stop** = faux

tant que **stop** = faux **faire**

• $\mathbf{u}_i^t = \text{SOLVE}_{\text{METHOD}}(\mathcal{G}_i^t \text{ ou } \{\hat{\mathcal{G}}_g^t\}_{g=0}^i)$

• $\{\xi_{T^i}^t\}_{T^i \in \mathcal{G}_i^t} = \text{ESTIMATE}(\mathbf{u}_i^t, \mathcal{G}_i^t)$

• $\mathcal{M}_i^0 = \text{MARK}(\mathbf{u}_i, \{\xi_{T^i}^t\}_{T^i \in \mathcal{G}_i^t}, \mathcal{G}_i^t)$

• **stop** = **STOP**($\{\xi_{T^i}^t\}_{T^i \in \mathcal{G}_i^t}, \mathcal{M}_i^0, \epsilon_\Omega, \delta$)

si **stop** = vrai ou (**remesh** = faux et $i = k^{\max} + 1$) **alors** quitter boucle AMR **fin si**

• **si** **remesh** = vrai ou (**remesh** = faux et $i = k^{\max}$)

$\mathcal{G}_{i+1}^t, \hat{\mathcal{G}}_{i+1}^t = \text{REFINE}_{\text{METHOD}}(\mathcal{M}_i^0, \{\beta_{T^i}\}_{T^i \in \mathcal{M}_i}, \mathcal{G}_i^t, \hat{\mathcal{G}}_i^t)$

sinon

$\mathcal{G}_{i+1}^t \leftarrow \mathcal{G}_{i+1}^{t-1}$ et $\hat{\mathcal{G}}_{i+1}^t \leftarrow \hat{\mathcal{G}}_{i+1}^{t-1}$

fin si

• $i \leftarrow i + 1$

fin tant que

$k^{\max} \leftarrow i$

Mise à jour de **remesh** : **si** (le critère (5.7) est vrai ou **stop** = faux) **alors** **remesh** = vrai

sinon **remesh** = faux **fin si**

$t \leftarrow t + 1$

fin pour

Remarque 5.4.1. En cas de non-remaillage (**remesh** = faux), nous avons donné la possibilité d'ajouter un sous-niveau de maillage en plus à l'itération AMR $i = k^{\max}$ si nécessaire (si le booléen

stop = faux). Dans le cas de maillages imbriqués, la précision peut être impactée par l'erreur de pollution (erreur de discrétisation dans les zones pas suffisamment raffinées). Nous autorisons alors à ajouter uniquement un sous-niveau pour éviter un raffinement excessif non nécessaire.

Il est important de noter que comme le module **STOP** est appelé à chaque itération de la boucle AMR sur un pas de temps, cela permet de sortir du processus de raffinement une fois que les critères sont satisfaits. Cette option nous permet d'utiliser uniquement les sous-niveaux LDC nécessaires pour un pas de temps donné, ce qui peut conduire naturellement à un déraffinement par rapport au pas de temps précédent.

Il faut également noter que grâce à son côté multiniveau, la méthode LDC conduit naturellement à chaque remaillage (**remesh** = vrai) au déraffinement (allant jusqu'au maillage initial grossier) des zones non nécessaires. En effet, en cas de remaillage, les nouveaux sous-niveaux sont générés en partant du maillage grossier initial, ce qui implique possiblement le "déraffinement" des éléments raffinés au pas précédent s'ils ne sont plus recouverts par des maillages plus fins.

Remarque 5.4.2. Comme déjà précisé précédemment, dans l'Algorithme 13 le booléen **remesh** indique si le remaillage est à effectuer au pas de temps suivant en se basant sur les erreurs obtenues au pas de temps courant. Cela peut conduire au dépassement des précisions prescrites au pas de temps donné. On pourrait envisager une amélioration de l'algorithme permettant de refaire le calcul sur le même pas de temps. Pour ce faire, si **remesh** est mis à vrai à la fin d'un pas de temps donné, il suffit de refaire la boucle AMR dès le début (et donc de régénérer l'ensemble de sous-niveaux) sur le même pas. Cela permet de contrôler encore mieux les précisions, mais s'avère légèrement plus coûteux en temps de calculs. Par ailleurs, il serait intéressant d'introduire un intervalle de sécurité sur les erreurs prescrites. Dans ce cas, si les erreurs dépassent les seuils fixés mais restent "acceptables", le remaillage est évité. Cet intervalle devrait alors tenir compte de qualité de l'estimateur d'erreur utilisé (surtout s'il a tendance à sous-estimer l'erreur réelle).

Remarque 5.4.3. Nous avons vu que la méthode LDC conduisait naturellement au déraffinement de certaines zones en cas de remaillage. Cependant, comme effectué généralement dans la littérature, cf. par exemple [222, 156], ce remaillage est effectué uniquement lorsque les tolérances prescrites sur les erreurs ne sont plus satisfaites. Il pourrait être intéressant de se doter d'un indicateur de déraffinement permettant de déraffiner les maillages également si l'erreur est "trop" bien respectée. Cela éviterait de conserver sur certains problèmes des maillages trop raffinés. On pourrait facilement introduire cette option dans l'Algorithme 13 afin d'optimiser le coût de calcul.

Il faut également noter que parmi les méthodes AMR étudiées dans cette thèse, uniquement pour l'approche multiniveau LDC la procédure de déraffinement ne semble pas présenter de difficultés supplémentaires (grâce à l'utilisation des niveaux de maillages séparés à partir d'un maillage grossier). Pour les méthodes h -adaptatives le déraffinement peut s'avérer non trivial (grossissement des bandes d'éléments pour la méthode h conforme, algorithme adapté afin de respecter la règle "one-irregularity" pour h non-conforme).

5.5 Contrôle de l'erreur sur l'historique : modèle élasto-plastique

Dans un contexte non linéaire une question importante est liée au contrôle de l'erreur de discrétisation sur l'historique. Nous avons montré que grâce à l'adaptation dynamique du maillage, il est possible de bien suivre l'évolution des phénomènes en temps. Il est évident que l'efficacité du remaillage dynamique s'appuie fortement sur les performances de l'estimateur d'erreur utilisé afin de détecter les zones à raffiner.

Nous nous focalisons dans cette partie sur la comparaison des deux versions de l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz et Zhu : la version standard et la version incrémentale.

La première version de l'estimateur s'appuie sur la solution totale en contraintes (la solution obtenue sur l'ensemble de l'historique jusqu'au pas de temps courant), cf. section 2.3.

La version incrémentale a été proposée dans [222]. Comme le postulent les auteurs, si l'erreur est contrôlée jusqu'au pas de temps $t-1$, la procédure d'estimation d'erreur se réduit à contrôler l'erreur uniquement du pas de temps suivant t . Cette version de l'estimateur fait alors intervenir la solution incrémentale sur un pas de temps. L'erreur incrémentale estimée par élément s'écrit :

$$\xi_{T^i}^t = \|\mathbf{e}\|_{T^i}^t \simeq \left(\int_{T^i} |(\boldsymbol{\sigma}_i^{t,*} - \boldsymbol{\sigma}_i^t) : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{t,*} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^t)| dT^i \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{G}_i^t \quad (5.8)$$

L'erreur absolue estimée est pondérée par l'énergie de déformation $\omega_{\mathcal{G}_i^t}^t$:

$$\omega_{\mathcal{G}_i^t}^t = \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{G}_i^t}^t \simeq \int_{\mathcal{G}_i^t} |\boldsymbol{\sigma}_i^t : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^t| d\mathcal{G}_i^t \quad (5.9)$$

avec $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^t = \boldsymbol{\varepsilon}_i^t - \boldsymbol{\varepsilon}_i^{t-1}$ l'incrément de déformation.

Dans notre étude, nous utilisons le critère d'optimalité de maillage LOC visant à contrôler les erreurs globales et locales, cf. étude comparative au chapitre 3. Par conséquent, pour la version incrémentale de l'estimateur ZZ, les éléments à raffiner sont détectés en utilisant l'expression (2.21) avec l'erreur élémentaire maximale permise $\xi_{T^i}^{t,max}$ calculée avec (2.20) où $\omega_{T^i}^t$ est défini par élément :

$$\omega_{T^i}^t = \|\mathbf{w}\|_{T^i}^t \simeq \int_{T^i} |\boldsymbol{\sigma}_i^t : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^t| dT^i \quad \text{pour } T^i \in \mathcal{G}_i^t \quad (5.10)$$

Il faut noter que pour un cas non linéaire, nous allons appliquer la procédure de lissage séparément au champ de contraintes et au champ de déformations, car la loi de comportement non linéaire ne permet pas d'obtenir le champ des déformations lissé incrémentale $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{t,*}$ facilement à partir du champ des contraintes lissé $\Delta \boldsymbol{\sigma}_i^{t,*}$ (cf. $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{t,*} = \mathbf{C}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_i^{t,*}$ pour la loi de comportement linéaire élastique). Dans notre étude nous utilisons la procédure de lissage basée sur la projection pour les deux champs, cf. l'Annexe A.

Pour effectuer l'étude des deux versions de l'estimateur, nous nous plaçons ici dans le cadre d'un problème modèle élasto-plastique parfait. La relation de comportement est exprimée comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{nl}) \quad (5.11)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u})$ la déformation totale et $\boldsymbol{\varepsilon}^{nl}$ la déformation non linéaire (plastique), définie dans le cas de élasto-plasticité parfaite comme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{nl} &= 0 & \text{si } \sigma_{\text{VM}} < \sigma_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nl} &= \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma}_d & \text{si } \sigma_{\text{VM}} = \sigma_y \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec $\dot{\lambda}$ le multiplicateur plastique, σ_y la limite élastique, $\sigma_{\text{VM}} = \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\right)^{1/2}$ le champ des contraintes de Von Mises et $\boldsymbol{\sigma}_d$ le tenseur déviateur des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{D}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbb{I}_D \quad (5.13)$$

où D est la dimension, \mathbb{I}_D la matrice unité et $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^D \sigma_{ii}$ le trace du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$.

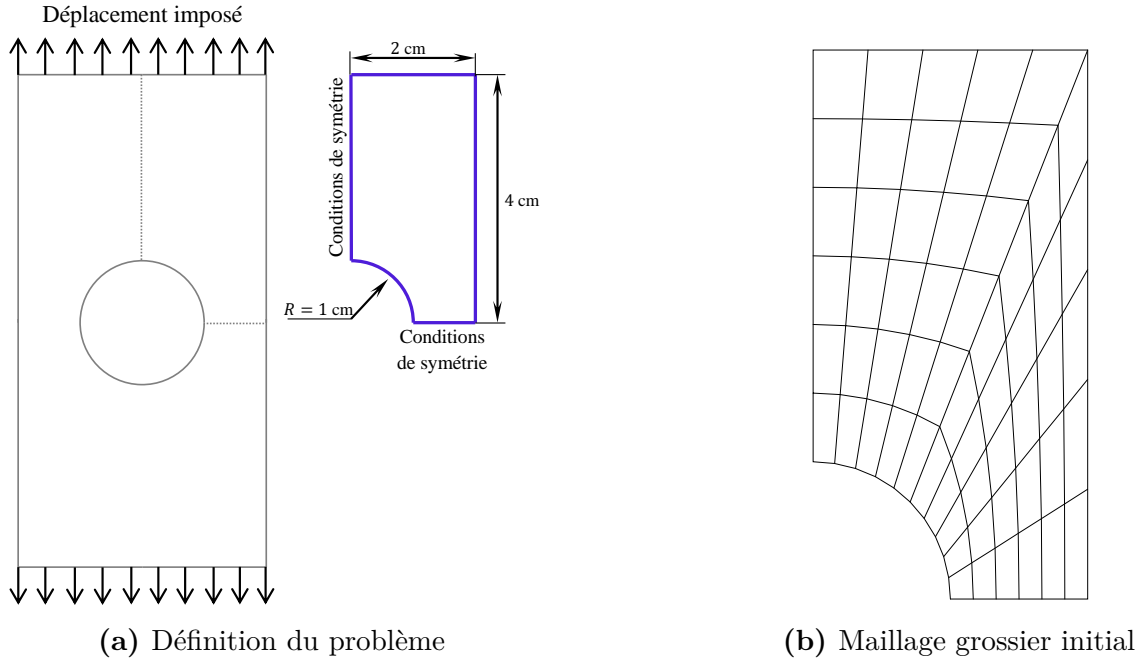


Figure 5.6: Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé – plasticité parfaite; (a) définition du problème et (b) maillage grossier initial

Le cas test utilisé ici est le benchmark d'une plaque avec un trou circulaire soumis à un déplacement imposé issu de [222]. Le problème considéré est illustré sur la Figure 5.6a. Nous considérons un module de Young $E = 9.8 \cdot 10^9$ Pa, un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et une limite élastique $\sigma_y = 9.8 \cdot 10^7$ Pa (critère de Von Mises). Pour des raisons de symétrie, seul un quart de la plaque illustrée sur la Figure 5.6a de droite est considéré. Les conditions aux limites sont également présentées sur la Figure 5.6a. Les valeurs de déplacements imposés varient de 0.01 à 0.04 cm. Dans notre étude, nous faisons varier le déplacement imposé linéairement sur 30 pas de temps par pas de 0.001

cm. Afin de minimiser l'erreur d'approximation liée à la discrétisation du cercle, nous nous appuyons sur le raffinement quasi-hiérarchique, cf. remarque 3.3.1.

Pour la suite pour quantifier l'erreur nous considérons comme solution de référence une solution calculée sur un maillage très fin quasi-uniforme (d'environ $2.5 \cdot 10^5$ nœuds). Cette solution est obtenue en utilisant les mêmes pas de chargement ce qui permet de négliger l'erreur de discrétisation temporelle.

Nous appliquons la procédure de raffinement dynamique présentée dans la section 5.4 avec l'algorithme non linéaire de la méthode LDC, cf. l'Algorithme 12.

Nous présentons ici les résultats obtenus avec les versions *totale* et *incrémentale* de l'estimateur ZZ. Pour chaque version de l'estimateur utilisée, les erreurs réelles globales (cf. Figure 5.7) et les mesures des erreurs réelles locales (cf. Figure 5.8) sont présentées. Ces erreurs sont calculées en utilisant les mêmes expressions que pour les erreurs estimées mais avec la solution de référence. Pour les deux cas, nous présentons les erreurs totales (obtenues à partir de la solution totale sur l'historique) et les erreurs incrémentales (calculées sur un pas de temps) afin de comparer au mieux les performances des deux versions de l'estimateur.

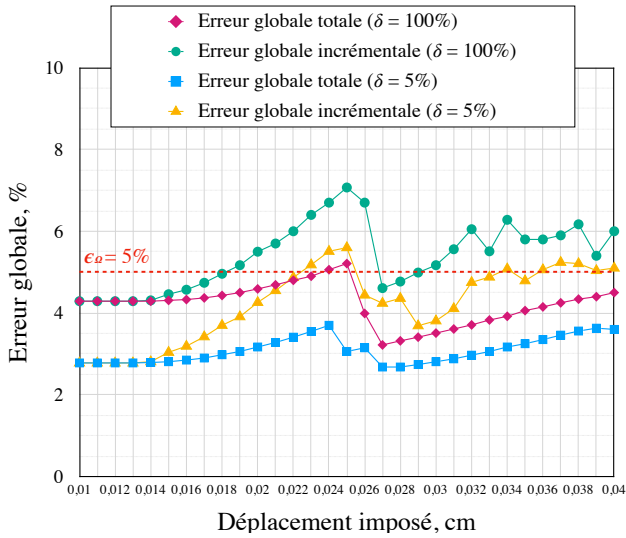
Les résultats présentés ici sont obtenus en fixant la tolérance $\epsilon_\Omega = 5\%$ sur l'erreur globale. Pour l'erreur locale nous fixons tout d'abord un seuil à $\delta = 100\%$, cf. expression (2.25), ce qui nous permet de contrôler uniquement l'erreur globale (comme dans la référence [222]). Nous vérifions également si on peut contrôler l'erreur locale en fixant $\delta = 5\%$ (contrôle de la zone critique traduit par la mesure de l'ensemble d'éléments dont l'erreur locale dépasse $\epsilon_\Omega = 5\%$).

Tout d'abord il faut noter que l'algorithme LDC s'applique bien au problème d'élasto-plasticité parfaite considéré et conduit à des résultats très satisfaisants.

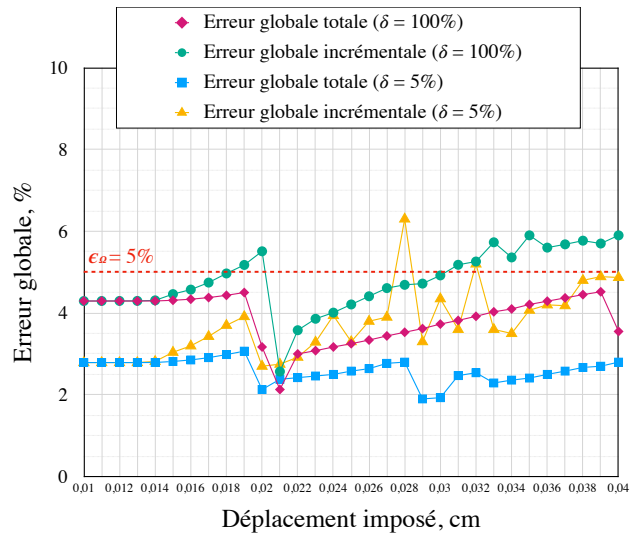
Nous pouvons observer sur les Figures 5.7a et 5.7b que les deux versions de l'estimateur permettent de bien contrôler les erreurs globales (celles *totale* et *incrémentale*). Ces erreurs globales sont autour du seuil $\epsilon_\Omega = 5\%$ demandé, avec des erreurs plus faibles atteintes en fixant un contrôle de l'erreur locale ($\delta = 5\%$). Nous pouvons également constater des oscillations de l'erreur *incrémentale* (courbes verte et jaune) au cours du temps. Ce comportement de l'erreur *incrémentale* a été également observé dans [222]. Le comportement de la solution *totale* est plus lisse car l'influence de la solution obtenue sur un incrément est limitée.

Concernant l'erreur locale, cf. Figures 5.8a et 5.8b, nous pouvons constater globalement le même comportement indépendamment de la version de l'estimateur appliquée. L'erreur locale *totale* est bien contrôlée : même en fixant $\delta = 100\%$, la mesure de l'erreur locale *totale* ne dépasse pas 25% (courbe rouge), tandis qu'avec $\delta = 5\%$ elle reste inférieure ou autour de 5% demandé (courbe bleue) ce qui est très satisfaisant.

Par contre, pour les deux versions de l'estimateur utilisées, les mesures de l'erreur locale *incrémentale* (courbes verte et jaune) oscillent de façon plus significative surtout à la fin de l'historique. Même en fixant un seuil $\delta = 5\%$, l'erreur locale *incrémentale* est difficilement contrôlable. Ce comportement est sûrement dû à l'utilisation du dénominateur local avec l'incrément de déformation, cf. l'expression (5.10), qui peut être très faible ce qui conduit à les erreurs locales très grandes.

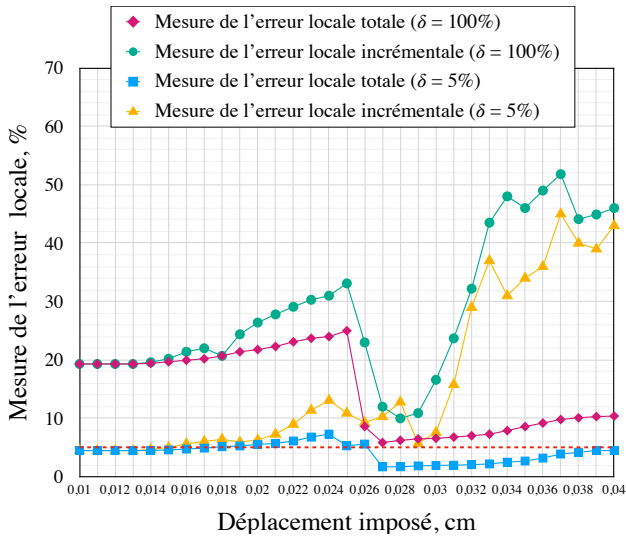


(a) Version *totale* de l'estimateur d'erreur ZZ

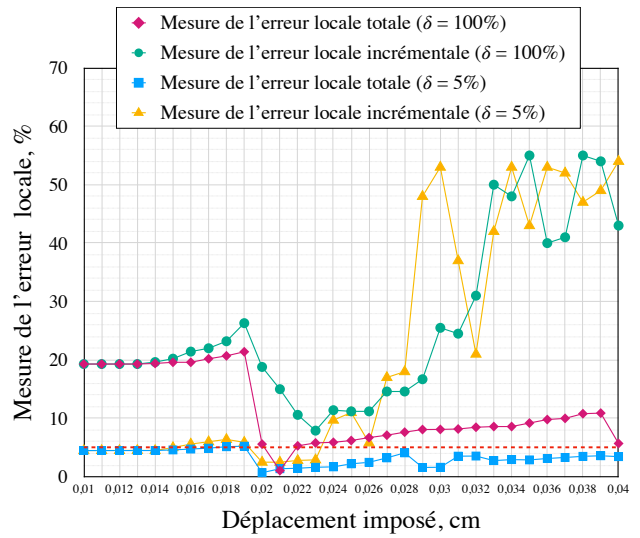


(b) Version *incrémentale* de l'estimateur d'erreur ZZ

Figure 5.7: Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – erreurs globales relatives en norme énergie $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ – tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$ et paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 100\%$ et $\delta = 5\%$



(a) Version *totale* de l'estimateur d'erreur ZZ



(b) Version *incrémentale* de l'estimateur d'erreur ZZ

Figure 5.8: Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – mesure de l'erreur locale η^{ex} – tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$ et paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 100\%$ et $\delta = 5\%$

Le nombre de sous-niveaux générés k ainsi que le nombre de nœuds des maillages finaux composites \mathcal{G}_k sont donnés dans le Table 5.2. D'un point de vue du coût de calcul, la version *incrémentale* de l'estimateur demande plus de remaillages et génère plus de sous-niveaux conduisant à des maillages plus raffinés (cf. nombre de nœuds des maillages composites \mathcal{G}_k dans la Table 5.2). En plus, l'estimateur *incrémental* conduit à un raffinement oscillatoire, qui est sûrement dû à des variations de l'incrément de déformations entre pas de temps. Avec la version *totale* de l'estimateur, cf. Table 5.2, on peut limiter le nombre de remaillages effectués et générer des maillages moins raffinés qui respectent les erreurs demandées.

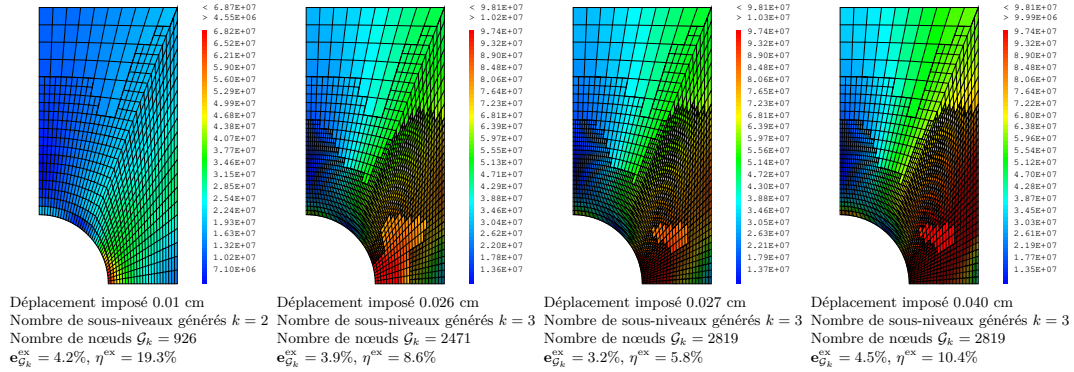
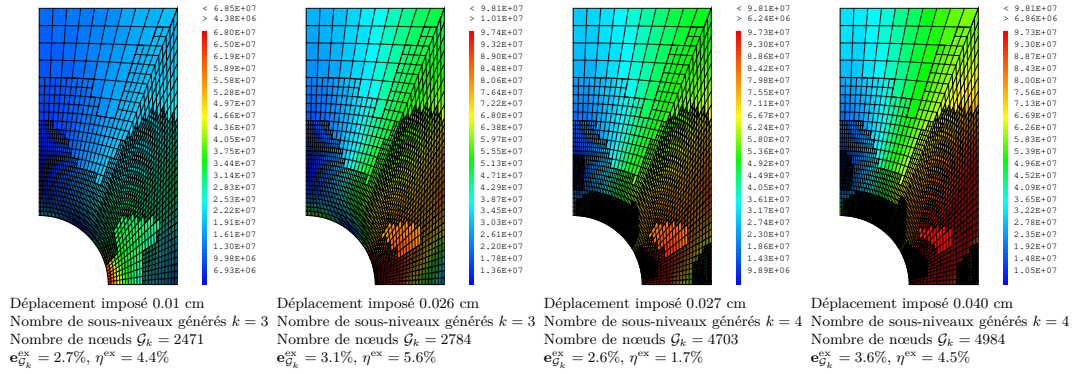
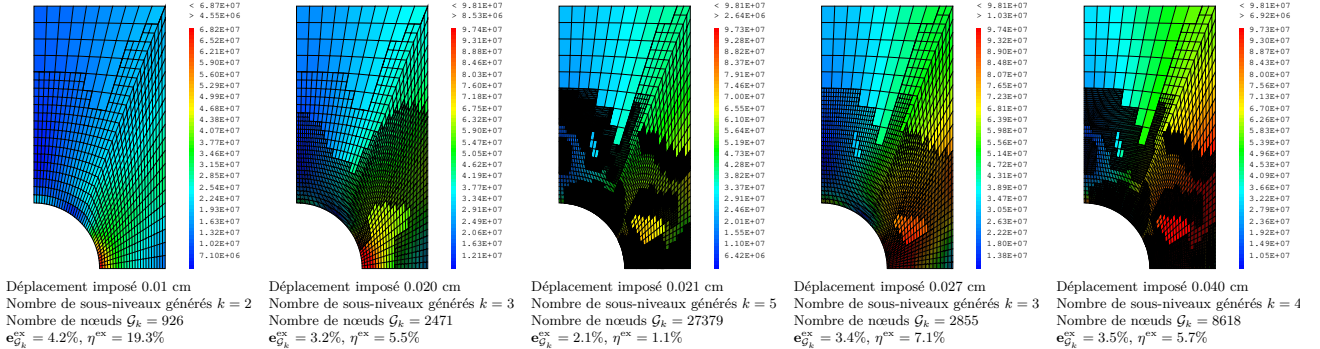
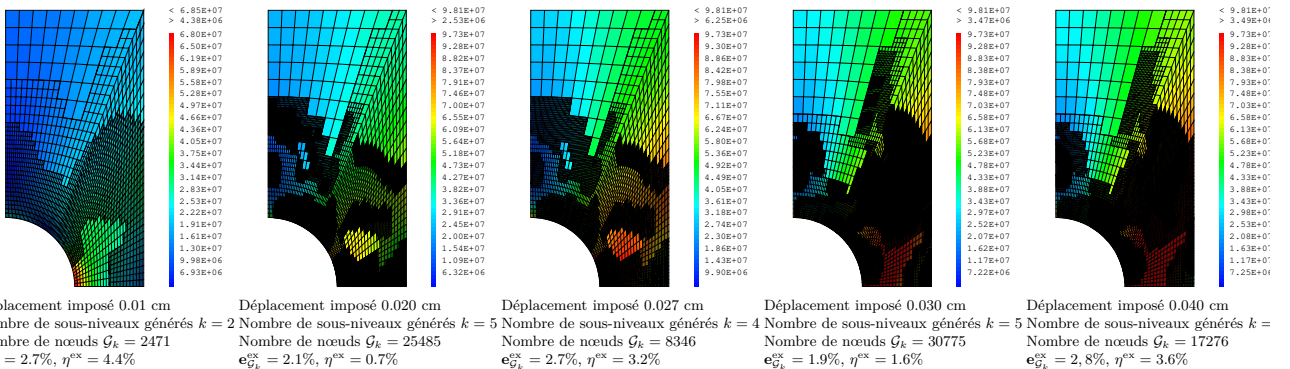
Table 5.2: Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – maillages générés

Version <i>totale</i> de l'estimateur d'erreur ZZ				
Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$ et paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 100\%$				
Déplacement imposé	0.01 → 0.025 cm	0.026 cm		0.027 → 0.04 cm
Nombre de sous-niveaux	$k = 2$	$k = 3$		$k = 3$
Nombre de nœuds \mathcal{G}_k	926	2471		2819
Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$ et paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 5\%$				
Déplacement imposé	0.01 → 0.023 cm	0.024 → 0.026 cm	0.027 cm	0.028 → 0.04 cm
Nombre de sous-niveaux	$k = 3$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 4$
Nombre de nœuds \mathcal{G}_k	2471	2784	4703	4984

Version <i>incrémentale</i> de l'estimateur d'erreur ZZ						
Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$ et paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 100\%$						
Déplacement imposé	0.01 → 0.019 cm	0.020 cm	0.021 cm	0.022 → 0.039 cm		0.040 cm
Nombre de sous-niveaux	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 3$		$k = 4$
Nombre de nœuds \mathcal{G}_k	926	2471	27379	2855		8618
Tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$ et paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 5\%$						
Déplacement imposé	0.01 → 0.019 cm	0.020 cm	0.021 → 0.028 cm	0.029 → 0.030 cm	0.031 → 0.032 cm	0.033 → 0.040 cm
Nombre de sous-niveaux	$k = 3$	$k = 5$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 4$	$k = 5$
Nombre de nœuds \mathcal{G}_k	2471	25485	8346	30775	9748	17276

Sur la Figure 5.9 nous présentons les champs des contraintes de Von Mises obtenus sur les maillages composites pour certains pas de temps obtenus avec la version *totale* et *incrémentale* de l'estimateur d'erreur.

Nous pouvons observer que les contraintes importantes se localisent au cours du temps vers la partie droite de la plaque. On constate que contrairement à [222] les zones raffinées ne se concentrent pas uniquement vers la région où la contrainte est la plus importante. Cela peut être expliqué par l'utilisation de ratio de raffinement fixé qui permet un raffinement plus progressif, cf. section 2.6.1. On peut voir que la stratégie appliquée permet de bien respecter les erreurs prescrites.

(a) Version *totale* de l'estimateur d'erreur ZZ – paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 100\%$ (b) Version *totale* de l'estimateur d'erreur ZZ – paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 5\%$ (c) Version *incrémentale* de l'estimateur d'erreur ZZ – paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 100\%$ (d) Version *incrémentale* de l'estimateur d'erreur ZZ – paramètres de contrôle de l'erreur locale $\delta = 5\%$ **Figure 5.9:** Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – champs des contraintes de Von Mises – tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 5\%$

Finalement, on peut conclure que la version *totale* de l'estimateur permet de contrôler plus précisément les erreurs totales (globale et locale) à un coût de calcul plus faible comparé à la version *incrémentale*. Nous observons également qu'avec l'estimateur *total* le même comportement des erreurs incrémentales que celui constaté avec l'estimateur *incrémental* est obtenu. Par conséquent, dans la suite de notre étude nous allons considérer la version *totale* de l'estimateur ZZ qui semble plus robuste et efficace pour contrôler l'erreur et ainsi conduire le processus AMR.

Cet exemple numérique confirme l'efficacité de la stratégie de rééquilibrage du résidu initial, cf. section 5.2.3, dans le cas du comportement élasto-plastique. De plus, couplé au processus de remaillage optimisé proposé dans la section 5.4, nous pouvons effectuer le remaillage uniquement si nécessaire (quand les erreurs estimées dépassent les seuils fixés) et donc limiter le nombre de remaillages. Nous pouvons clairement voir les chutes significatives des erreurs quand les remaillages sont effectués, cf. Figures 5.7 et 5.8.

5.6 Application de la méthode LDC au problème d'IPG avec comportement visco-plastique

Nous nous intéressons à présent à appliquer la méthode LDC à des problèmes avec une loi de comportement visco-plastique. La loi de comportement utilisée ici est une loi non linéaire à effet d'histoire. La réponse de la structure modélisée à un temps donné dépend de l'historique de chargement. Des variables internes sont alors à prendre en considération afin de caractériser l'état actuel du système.

Nous considérons ici un problème 3D représentant le phénomène d'IPG illustré sur la Figure 5.10a. Nous modélisons le transitoire de puissance [221] avec l'évolution des pressions exercées sur la partie interne de la gaine modélisée et illustrée sur la Figure 5.10. Les pressions sont supposées varier linéairement en fonction du temps, mais avec deux pentes différentes, cf. Figure 5.10b. La première pente correspond à un conditionnement de la pastille et la deuxième à un transitoire de puissance. Dans l'exemple considéré, un conditionnement de la pastille de 5 secondes et un transitoire de puissance de 30 secondes, sont considérés et simulés par pas de temps de 1 seconde.

Afin d'avoir le comportement non linéaire proche de celui de la loi de comportement de la gaine utilisée dans PLEIADES [2], nous utilisons ici une loi de comportement de type fluage de Norton sans écrouissage. La déformation non linéaire ϵ^{nl} , cf. relation de comportement (5.11), est reliée à la contrainte par l'intermédiaire de sa vitesse et définie par :

$$\dot{\epsilon}^{nl} = \left(\frac{J}{K}\right)^{n-1} \sigma_d \quad (5.14)$$

avec σ_d le tenseur déviatorique des contraintes, cf. expression (5.13), et J le second invariant de σ_d (contrainte équivalente de Von Mises). Les paramètres matériau suivants sont choisis : $n = 5$ et $K = 2.6 \cdot 10^{11} \text{ Pa}^{\frac{5}{4}} \text{ s}^{\frac{1}{4}}$.

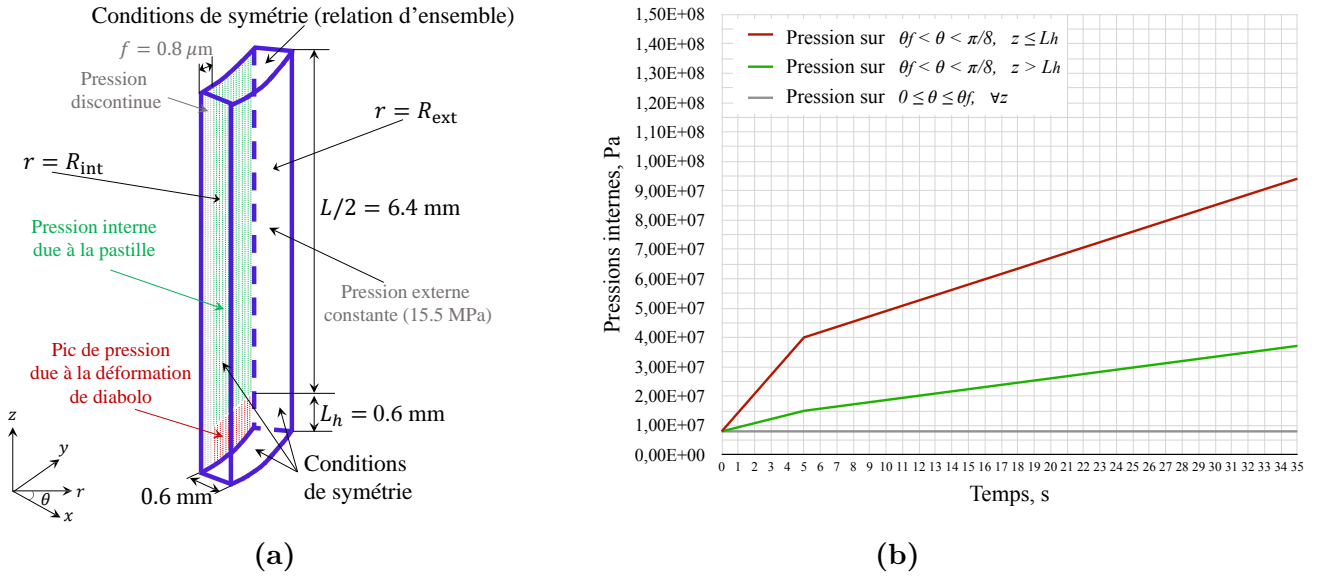


Figure 5.10: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D avec un modèle visco-plastique; (a) définitions du problème, (b) historique de chargement

Une solution de référence sur un maillage très fin étant inaccessible pour ce cas test, nous effectuons le post-traitement en se basant des erreurs estimées : $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}} = \frac{\xi_{\mathcal{G}_k}}{\omega_{\mathcal{G}_k}}$ et $\eta^{\text{est}} = \frac{\mu(\Omega, \mathcal{M}_k^0)}{\mu(\Omega)}$, cf. section 2.5. Pour cet exemple numérique, nous fixons la tolérance sur l'erreur globale égale à $\epsilon_\Omega = 10\%$ et le paramètre de contrôle de l'erreur locale égal à $\delta = 10\%$ également. Ces valeurs sont en cohérence avec les incertitudes sur les paramètres physiques.

Du point de vue numérique, la résolution de ce problème de complexité industrielle est une tâche difficile. En plus du comportement du matériau visco-plastique, nous introduisons un chargement variable en temps. La complexité majeure vis-à-vis de l'adaptation de maillage est de pouvoir concentrer des éléments raffinés suffisamment petits dans des zones critiques (ici les singularités de contraintes apparaissant progressivement en temps) pour satisfaire les tolérances prescrites. Ainsi, ce problème représente un benchmark industriel très intéressant pour vérifier l'efficacité de la méthode LDC dans un cas non linéaire complexe. Il est à noter que jusqu'à présent un maillage 3D assez grossier est utilisé [2, 5]. Un maillage grossier similaire (uniforme) est utilisé ici comme maillage de départ pour appliquer la méthode LDC.

Nous présentons sur la Figure 5.11 les champs des contraintes de Von Mises obtenus pour certains pas de temps sur les maillages LDC composites. Dans cet exemple numérique, au début de l'historique, une pression constante initiale (égale à 8 MPa) est appliquée sur la paroi interne de la gaine, cf. illustration sur la Figure 5.10b. Le raffinement n'est alors pas nécessaire pour satisfaire les seuils prescrits sur les 2 premiers pas de temps de l'historique.

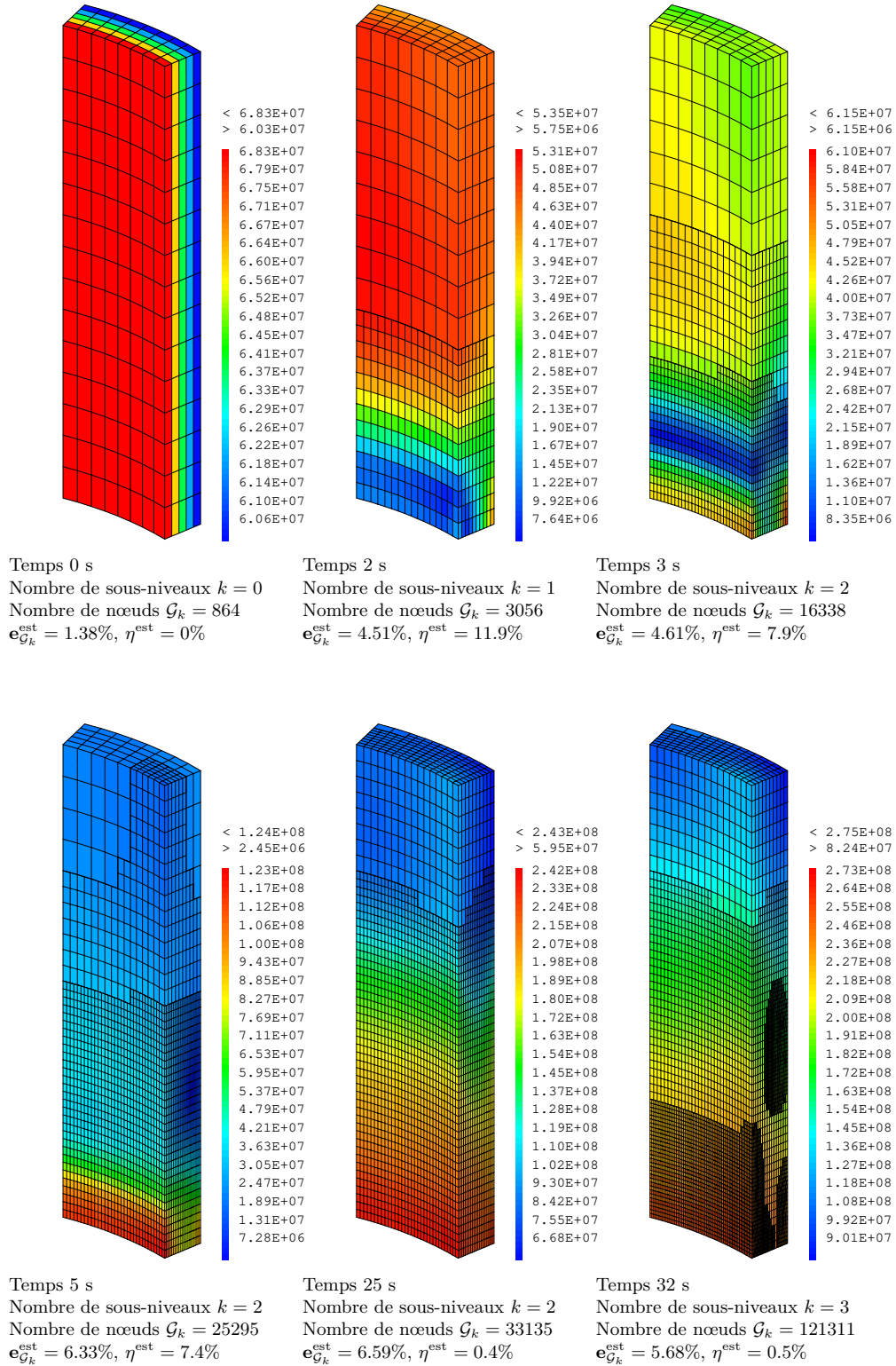


Figure 5.11: Cas test industriel 3D : Interaction mécanique Pastille-Gaine avec un modèle visco-plastique; champs des contraintes de Von Mises sur les maillages composites – tolérance fixée sur l’erreur globale $\epsilon_{\Omega} = 10\%$ – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 10\%$

Les valeurs de pressions appliquées sur les différentes zones, cf. illustration de la Figure 5.10a, augmentent avec différentes pentes, ce qui conduit à l'apparition progressive des singularités de contraintes. Nous constatons donc qu'à partir du temps égal à 2 s, les zones raffinées commencent à évoluer. Il faut noter que même en partant d'un maillage grossier initial, nous arrivons à générer automatiquement les zones permettant de capturer l'évolution du phénomène (singularité de contraintes), ce qui est très satisfaisant.

La figure 5.12 présente le champ des contraintes σ_{rr} au début du transitoire de puissance. Dans notre exemple numérique cela correspond au temps égal 5 s. Le résultat du calcul originel issu de [221], est illustré sur la Figure 5.12a. Premièrement nous pouvons noter que les allures des champs de contraintes comparés sont en bon accord. On peut constater que le maillage utilisé dans le calcul originel, cf. Figure 5.12a, est préraffiné en bas du domaine modélisé afin de capturer la singularité des contraintes. Par contre, le maillage grossier utilisé dans l'étude originelle ne permet pas de tenir compte de la singularité verticale. Dans notre cas, un maillage initial indépendant de la position de la singularité est utilisé, qui va par la suite être automatiquement raffiné afin de tenir compte des singularité de contraintes. On constate alors que la méthode LDC permet de bien capturer les deux singularités des contraintes.

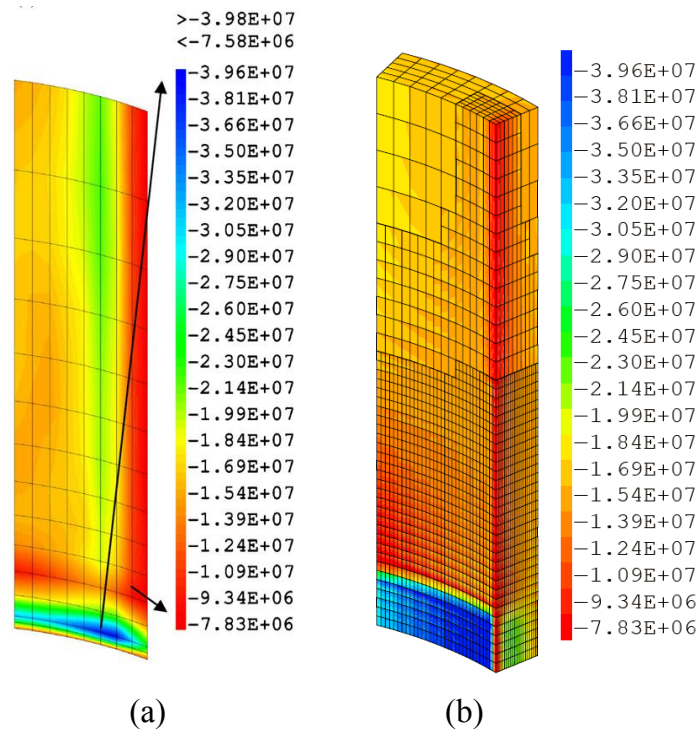


Figure 5.12: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D avec un modèle visco-plastique ; champ de contraintes σ_{rr} au début du transitoire ; (a) calcul originel de [221], (b) champ calculé avec LDC

La Figure 5.13 présente les évolutions des erreurs globales et mesures des erreurs locales en temps.

Dans la Table 5.3 nous résumons le nombre de sous-niveaux générés et nombre de nœuds des maillages composites utilisés. Nous pouvons constater sur la Figure 5.13 que globalement les seuils prescrits sur les erreurs locales et globales sont bien respectés. Nous observons que les remaillages sont réalisés directement au pas de temps suivant au pas où l'indicateur de remaillage s'appuyant sur l'expression 5.7 est vrai (l'erreur locale dépasse le seuil). Les chutes des erreurs correspondent exactement au remaillage effectué, cf. Table 5.3. Comme mentionné dans la remarque 5.4.2, une amélioration se basant sur la possibilité de refaire les calculs sur le même pas de temps peut être envisagée afin de ne pas dépasser les erreurs fixées. Néanmoins, il faut noter que le dépassement du seuil par l'erreur locale est raisonnable ici, nous arrivons à $\eta^{\text{est}} \approx 12\%$ pour $\delta = 10\%$ demandé, ce qui reste acceptable.

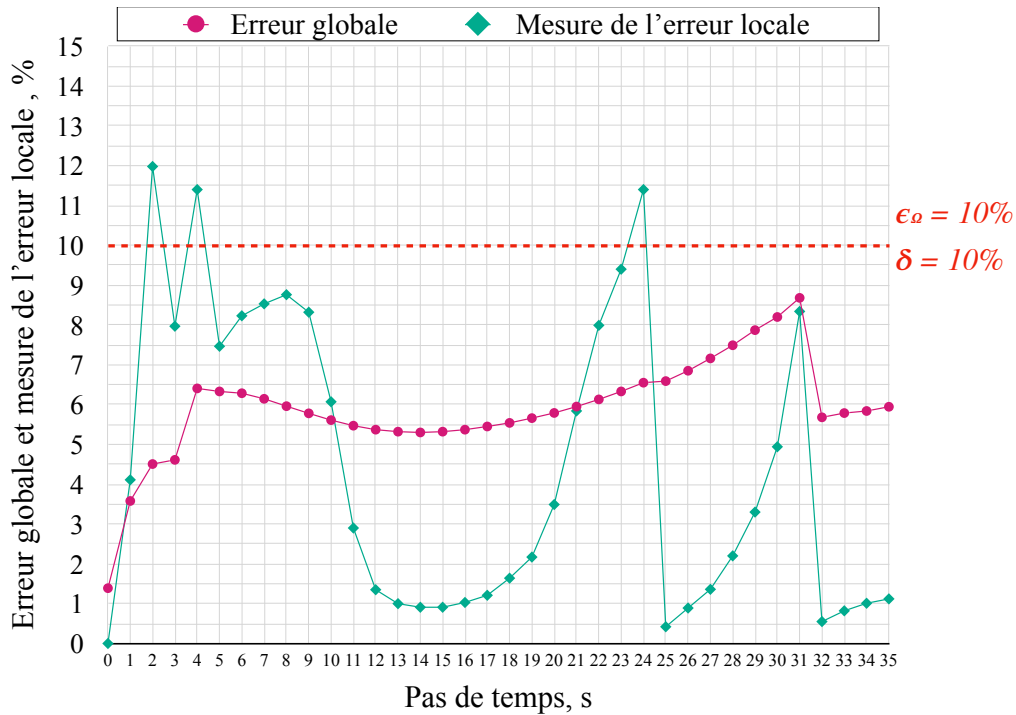


Figure 5.13: Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D avec un modèle visco-plastique – erreurs globales relatives en norme énergie $e_{\mathcal{G}_k}^{\text{est}}$ et mesure de l'erreur locale η^{est} – tolérance fixée sur l'erreur globale $\epsilon_\Omega = 10\%$ – paramètre de contrôle de l'erreur locale $\delta = 10\%$

Table 5.3: Cas test industriel 3D : Interaction mécanique Pastille-Gaine avec un modèle visco-plastique – maillages générés

Temps	0 → 1 s	2 s	3 → 4 s	5 → 24 s	25 → 31 s	32 → 35 s
Nombre de sous-niveaux	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 2$	$k = 2$	$k = 3$
Nombre de nœuds \mathcal{G}_k	864	3056	16338	25295	33135	121311

Pour conclure, cet exemple numérique 3D représentant un problème industriel réaliste confirme l'efficacité de la méthode LDC dans le cas d'un comportement non linéaire visco-plastique. Nous

constatons l'évolution des niveaux de maillages qui permettent d'efficacement suivre le phénomène étudié en temps. Même dans le cas des problèmes complexes non linéaires, la méthode LDC permet de réaliser des calculs avec des tailles de mailles locales beaucoup plus fines comparées à celles actuellement utilisées utilisées dans le logiciel PLEIADES, cf. exemple d'un maillage utilisé sur la Figure 1.7 et 5.12a.

Notons que l'algorithme de raffinement optimisé (Algorithme 13) conduit à des résultats très satisfaisants vis-à-vis du contrôle de la précision en temps avec un nombre de remaillages limité.

Nous pouvons également noter que la stratégie de transfert des champs définie aux points d'intégration basée sur le passage par les nœuds des éléments s'applique sans difficulté au transfert des variables internes.

Finalement, la stratégie de rééquilibrage des champs basée sur la prise en compte du déséquilibre initial via le résidu du problème non linéaire confirme son efficacité dans cet exemple numérique complexe. Nous pouvons à chaque fois constater que suite au remaillage, l'erreur diminue, ce qui semble indiquer que les champs transférés sur les nouveaux éléments sont remis à l'équilibre de façon efficace. Cette stratégie permet de poursuivre les calculs sans accumuler l'erreur.

5.7 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons appliqué la méthode multiniveau LDC à des problèmes quasi-statiques non linéaires. L'ensemble des développements associés à l'extension de la méthode LDC dans ce contexte, notamment le calcul pratique du résidu LDC, a été défini de manière à être obtenu numériquement de façon la moins intrusive possible. L'étude réalisée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence l'efficacité de l'approche LDC pour plusieurs comportements non linéaires, ainsi que sa possibilité de générer des maillages évolutifs en temps.

La problématique associée à l'adaptation dynamique de maillage, à savoir le transfert des champs entre différents maillages, a été traitée. Nous avons proposé une stratégie efficace de prise en compte du déséquilibre initial dû au transfert de champs qui permet de contrôler l'erreur sur l'ensemble de l'historique en cas de modification des zones de raffinement.

Nous avons également introduit un algorithme de raffinement/déraffinement optimisé permettant de mettre à jour le maillage uniquement si nécessaire, tout en garantissant la vérification des précisions.

D'un point de vue des temps de calcul, des optimisations sont encore à faire dans le cas non linéaire pour rendre la méthode LDC optimale. En effet, nous avons vu qu'au cours des itérations LDC, seuls les seconds membres étaient remis à jour. Ainsi le temps de résolution des problèmes linéaires (ou linéarisés) devient quasiment négligeable au cours des cycles LDC. Cependant, pour des comportements non linéaires, la majorité du temps de calcul est consommée par l'intégration de loi de comportement. Or l'algorithme d'intégration de la loi de comportement ne permet pas actuellement de tenir compte d'une estimation du champ de contraintes à la fin du pas de temps (provenant typiquement des itérations LDC précédentes). Cette amélioration permettrait à la méthode LDC d'être nettement plus efficace en temps de calcul.

Conclusions et perspectives

La motivation principale de ce travail consistait à proposer un outil numérique permettant de simuler de façon précise et efficace des problèmes quasi-statiques avec des phénomènes localisés à une échelle proche de celle de la structure. Un des défis majeurs consistait à la possibilité de suivre l'évolution du phénomène étudié en temps dans le cas de comportements non linéaires. Les objectifs fixés ont été atteints : l'algorithme de raffinement adaptatif de maillage (AMR en anglais) basé sur la méthode multiniveau Local Defect Correction (LDC) permet de répondre aux problématiques industrielles posées. Plusieurs contributions majeures et souvent génériques sont associées à ce travail.

Tout d'abord, un cadre algorithmique générique AMR entièrement automatique régi par des tolérances *prescrites par l'utilisateur* sur les erreurs globales et locales (élémentaires) a été proposé. Cet algorithme est dédié au raffinement hiérarchique du pas de maillage h des éléments quadrilatéraux/hexaédriques. Les modules de raffinement/résolution associés aux méthodes h -adaptatives, conforme et non-conforme, et aux méthodes multiniveaux de type LDC, ont été introduits. Ces modules tiennent compte des spécificités des méthodes AMR (conservation de conformité, restriction du degré de non-conformité, ou encore raffinement sur plusieurs niveaux). Les algorithmes proposés sont formulés de façon à être facilement implémentables dans les codes de calculs industriels, tout en étant génériques et applicables aux différentes géométries, dimensions, etc..

Une étude numérique comparative poussée a permis de mettre en évidence les potentialités de la méthode multigrille locale LDC pour des problèmes elliptiques de complexité industrielle. Sa capacité à résoudre des problèmes sur une hiérarchie de maillages de tailles limitées en fait l'approche AMR la plus performante en terme de temps de calcul pour atteindre des précisions souvent inaccessibles avec les approches h -adaptatives.

L'extension de la méthode LDC à des problèmes de mécanique quasi-statiques avec des comportements non linéaires et chargements évolutifs a également été effectuée. La méthode LDC a alors la capacité naturelle à suivre l'évolution temporelle des phénomènes étudiés. Nous avons introduit un algorithme de raffinement en temps optimisé permettant d'effectuer le remaillage uniquement si nécessaire tout en garantissant la vérification des tolérances prescrites. Afin de répondre à la problématique générique AMR liée au transfert des champs entre les pas de temps et de s'assurer de non-accumulation de l'erreur, nous avons proposé une stratégie simple et efficace reposant sur la prise en compte du déséquilibre initial sous forme de résidu du problème.

Finalement, nous avons proposé un formalisme unifié pour les méthodes numériques multiéchelles basées sur un couplage itératif multiniveau. Nous avons mis en évidence les liens algorithmiques et conceptuels forts entre les approches AMR multiniveaux et les méthodes d'homogénéisation numérique (de type éléments finis au carré, EF²). L'approche multiniveau peut alors être vue comme une méthode de méso-homogénéisation adaptée aux problèmes à faible séparation d'échelles.

L'une des perspectives à court terme de ce travail concerne l'optimisation des temps des calculs associés à la résolution d'un problème non linéaire avec la méthode LDC. Il s'agit notamment de tenir compte des estimations de la solution en contraintes lors de l'intégration de la loi de comportement. Cette optimisation devrait permettre de rendre la méthode LDC aussi compétitive vis-à-vis des autres stratégies AMR que pour des problèmes élastostatiques. Une étude comparative avec des méthodes h -adaptatives dans un cadre non linéaire, sur le modèle du cas linéaire, pourrait ensuite être menée.

Une autre amélioration envisageable réside en l'optimisation de l'intégration de l'algorithme multigrille LDC à l'intérieur du processus itératif de type Newton. Cela permettrait de corriger les solutions grossières au cours des itérations de résolution du problème non linéaire. La faisabilité algorithmique ayant été étudiée dans ce travail, la mise en œuvre numérique reste à faire. Un algorithme plus sophistiqué tenant compte de l'erreur algébrique pourrait être imaginé pour contrôler la résolution itérative du problème non linéaire. Cela permettrait d'éviter une sur-résolution de l'algorithme de Newton et donc potentiellement de gagner en temps de calcul tout en conservant une solution précise.

Une étude théorique et numérique associée au raffinement spatio-temporel pourrait être ensuite menée dans le but de pouvoir rendre la résolution d'un problème non linéaire encore plus performante.

À plus long terme, pour une modélisation complète du problème d'Interaction mécanique Pastille-Gaine, il reste à fusionner ce travail avec la stratégie LDC développée pour le contact dans une thèse précédente. Le solveur multigrille local pourrait alors être intégré dans la plateforme PLEIADES. D'autres problématiques du domaine des combustibles (points chauds, fissuration,...) pourront alors certainement être traitées.

Enfin, le grand soin porté dans cette thèse pour proposer des algorithmes génériques et transversaux, ouvre des voies d'applications à d'autres domaines scientifiques et technologiques que ceux du combustible nucléaire.

Annexes

A Techniques de lissage de contraintes pour l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz et Zhu

L'aspect clé de l'estimateur d'erreur introduit par Zienkiewicz et Zhu est la façon d'obtenir des contraintes aux nœuds. Deux méthodes principales ont été proposées : la méthode de projection [132] et la méthode 'Superconvergent Patch Recovery' (SPR) [133].

Ces deux stratégies permettent d'obtenir le champ de contraintes lissé aux nœuds $\bar{\sigma}_h^*$ qui est ensuite interpolé avec les fonctions de base primale \mathcal{N} (celles des déplacements ici) afin d'obtenir des contraintes continues sur tout le domaine. On a alors :

$$\sigma_h^* = \mathcal{N}\bar{\sigma}_h^* \quad (\text{A.1})$$

Méthode de projection.

Dans la méthode de projection proposée dans [132] les valeurs nodales de la contrainte $\bar{\sigma}_h^*$ sont déterminées par la minimisation de la fonctionnelle :

$$J(\bar{\sigma}_h^*) = \int_{\Omega} (\mathcal{N}\bar{\sigma}_h^* - \sigma_h)^2 d\Omega \quad (\text{A.2})$$

La minimisation donne :

$$\int_{\Omega} \mathcal{N}^T (\mathcal{N}\bar{\sigma}_h^* - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (\text{A.3})$$

Cela conduit à résoudre un système matriciel de la forme :

$$\mathbf{M}\bar{\sigma}_h^* = \mathbf{b} \quad (\text{A.4})$$

avec $\mathbf{M} = \int_{\Omega} (\mathcal{N}^T \mathcal{N}) d\Omega$, $\mathbf{b} = \int_{\Omega} (\mathcal{N}^T \sigma_h) d\Omega$. Le système global (A.4) est résolu pour chaque composante du champ de contraintes, en conservant la matrice \mathbf{M} inversée.

Méthode Superconvergent Patch Recovery.

La deuxième version, nommée Superconvergent Patch Recovery (SPR), a été proposée dans [133]. Elle est basée sur une approximation polynomiale sur des patches (ensemble d'éléments ayant le même sommet, cf. Figure A.1) :

$$\bar{\sigma}_h^* = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (\text{A.5})$$

avec \mathbf{P} la base de l'expansion polynomiale et \mathbf{a} le vecteur contenant les coefficients du polynôme dans le patch. Les coefficients \mathbf{a} sont définis en résolvant le système

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{c} \quad (\text{A.6})$$

avec $\mathbf{A} = \sum_{i_g=1}^{N_g} \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_{i_g})\mathbf{P}(\mathbf{x}_{i_g})$, $\mathbf{c} = \sum_{i_g=1}^{N_g} \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_{i_g})\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}_{i_g})$, N_g nombre total des points superconvergents contenus dans le patch considéré et \mathbf{x}_{i_g} leurs coordonnées. Le système (A.6) est résolu dans chaque patch, une fois pour chaque composante du champ de contraintes. Il faut noter que le système obtenu est souvent difficile à résoudre, car la matrice \mathbf{A} est mal conditionnée, voire impossible à inverser. Dans ce cas, une normalisation des coordonnées est utilisée.

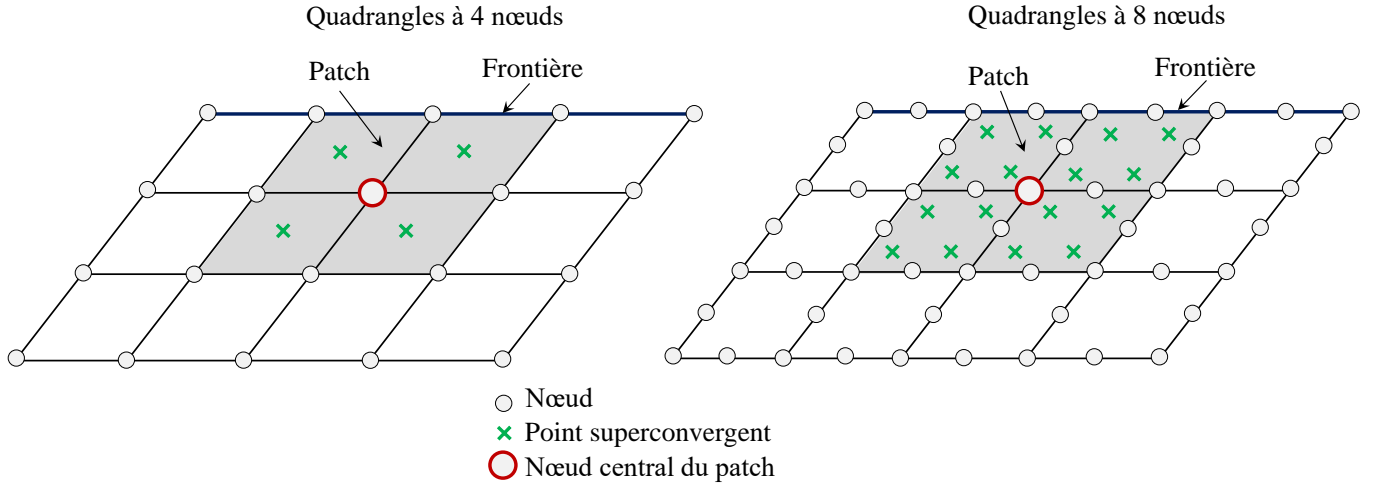


Figure A.1: Patch de la méthode SPR

Selon le choix des points où le champ de contraintes est réévalué, l'approximation peut être assez éloignée du champ réel ou quasi-exact. Il a été démontré que l'utilisation des points de Gauss-Legendre conduit à une convergence d'ordre plus élevé (au même ordre que celui des variables primales), d'où le nom – *points superconvergents*. Il faut mentionner que les propriétés de superconvergence n'ont été prouvées que dans peu de cas [223].

Choix de la procédure de lissage.

La précision asymptotique des estimateurs d'erreur basés sur le défaut de régularité a été étudiée dans [145, 224, 225]. Parmi les procédures de reconstruction testées, l'approche SPR [133] s'est avérée la plus robuste. Cependant, il a également été remarqué que la précision de cette technique peut être détériorée près des frontières. Ceci s'explique par le fait que le gradient lissé se calcule différemment près des bords par manque d'éléments voisins à inclure dans un patch, comme illustré sur la Figure A.1. La technique de reconstruction basée sur la projection n'entraîne pas un tel problème.

Afin de choisir la procédure de lissage pour nos applications, nous avons mené une étude comparative de deux procédures de lissage présentées précédemment. Le comportement asymptotique de ces deux stratégies a été testé sur le benchmark de la plaque trouée, introduit dans la Section 3.3. Ce problème possède une solution analytique qui a été utilisée pour calculer l'indice d'efficacité θ , cf. l'expression (1.15).

Les deux versions du lissage de contraintes considérées représentent un bon compromis entre la fiabilité et le coût. Ils sont facilement implémentables et robustes pour un large éventail d'applications.

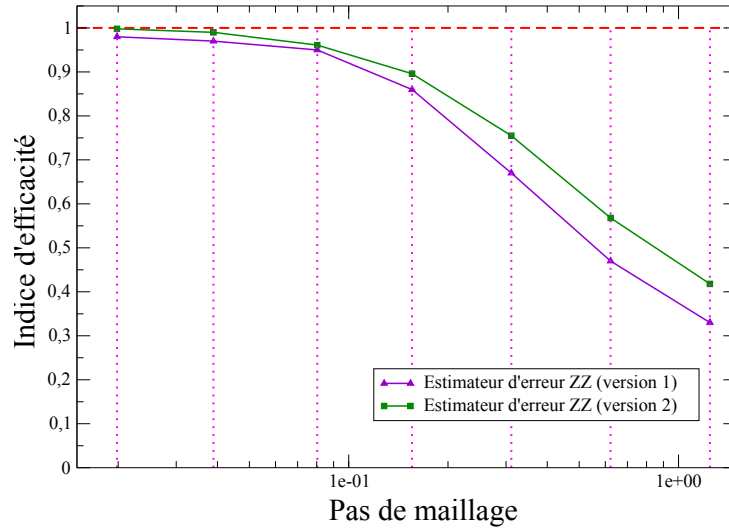


Figure A.2: Étude du comportement asymptotique des deux versions de l'estimateur d'erreur basé sur le défaut de régularité – indice d'efficacité θ vs pas de maillage h – cas test de la plaque trouée – version 1 : procédure de lissage basée sur la projection, version 2 : technique SPR

De plus, l'exactitude asymptotique a été observé avec les deux versions de lissage. Il faut noter que cet estimateur a généralement tendance à sous-estimer l'erreur réelle pour des maillages assez grossiers. Ce comportement est constaté dans le cas de la plaque trouée avec concentration de contraintes, voir Figure A.2. Néanmoins, il faut noter que dans le cas de la singularité de contraintes (problème de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine), la tendance à sous-estimer l'erreur réelle est beaucoup moins prononcée.

Nous avons pu remarquer que la stratégie SPR ne fournit qu'une légère amélioration de l'indice d'efficacité. Cependant, du point de vue numérique, la stratégie SPR s'est avérée plus coûteuse. Par conséquent, dans cette thèse, la stratégie de reconstruction basée sur la projection [132] est utilisée.

Liste des algorithmes

1	Algorithme générique de raffinement adaptatif de maillage	48
2	Module SOLVE_{NCHAM}	49
3	Module SOLVE_{CHAM}	49
4	Module SOLVE_{LDC}	51
5	Sous-module SAFE_ZONE	60
6	Sous-module UPDATE_RATIO_{NCHAM}	63
7	Sous-module UPDATE_RATIO_{CHAM}	64
8	Résolution éléments finis d'un problème quasi-statique non linéaire	107
9	Méthode LDC bi-grille pour un problème quasi-statique non linéaire	111
10	Méthode EF ² -hybride bi-grille pour un problème quasi-statique non linéaire	114
11	Algorithme multiéchelle unifié pour un problème quasi-statique non linéaire	115
12	Méthode LDC multiniveau pour un problème quasi-statique non linéaire	120
13	Algorithme optimisé du processus de raffinement multiniveau en temps	131

Liste des figures

1.1	Production d'électricité en 2019, <i>source : IEA</i>	17
1.2	Principe de fonctionnement d'un Réacteur à Eau Pressurisé	18
1.3	Schéma d'un crayon combustible	19
1.4	Dimensions d'une pastille de combustible d'un REP 900 MWe	19
1.5	Illustration de la fracturation des pastilles, de la déformation en diabolo et de l'évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de l'irradiation	20
1.6	Modélisations $2D$ d'une pastille de combustible nucléaire et de la partie de gaine correspondante dans ALCYONE	21
1.7	Modélisation $3D$ d'une pastille de combustible nucléaire et de la partie de gaine correspondante dans ALCYONE	22
1.8	Maillages raffinés générés avec différentes stratégies h -adaptatives	25
1.9	Maillages raffinés générés avec la stratégie p -adaptative	26
1.10	Fonctions de formes unidimensionnelles standard et hiérarchiques	27
1.11	Maillages raffinés générés avec la stratégie r -adaptative	27
1.12	Maillages raffinés générés avec la stratégie s -adaptative	28
1.13	Hiérarchie de grilles	29
2.1	Illustration d'une itération de l'algorithme générique AMR	47
2.2	Méthode Local Defect Correction avec deux niveaux de maillages	50
2.3	Algorithme itératif multigrilles locales basé sur des M -cycles avec trois sous-niveaux de maillages $\{\hat{\mathcal{G}}_i\}_{i=0}^2$ et les opérateurs de transfert	50
2.4	Illustration du sous-module SAFE_ZONE	59
2.5	Illustration du sous-module UPDATE_RATIO_{NCHAM}	62
2.6	Illustration du sous-module UPDATE_RATIO_{CHAM}	65
2.7	Illustration des couches des éléments \mathcal{L}_j^d et de groupes des arêtes $\mathcal{E}_{T_i}^d$ pour un cas $3D$	66
2.8	Exemple du sous-module DIVIDE	66
3.1	Imposition de la compatibilité aux nœuds non-conformes	73
3.2	Opérateurs de transfert pour la méthodes LDC basée sur un raffinement hiérarchique	73
3.3	Plaque infinie avec trou circulaire central, domaine de calcul et conditions aux limites	76
3.4	Raffinement de maillage avec la procédure h -adaptative non-conforme développée	77
3.5	Raffinement de maillage avec la procédure h -adaptative conforme développée	77
3.6	Raffinement de maillage avec la procédure LDC développée	78
3.7	Plaque trouée – séquence de maillages et grille composite générés avec la méthode LDC	79
3.8	Plaque trouée – cartes d'erreurs locales	80
3.9	Plaque trouée – mesure de l'erreur locale η vs tolérance fixé sur l'erreur globale ϵ_Ω	81

3.10	Plaque trouée – ratio de raffinement fixé – erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs nombre de nœuds $N_{\mathcal{G}_k}$	82
3.11	Illustration de stratégies de raffinement de maillage hiérarchiques et quasi-hiérarchiques	83
3.12	Plaque trouée – ratio de raffinement fixé ; erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs temps CPU total	83
3.13	Plaque trouée – ratio de raffinement ajusté ; erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs temps CPU total	85
3.14	Plaque trouée – ratio de raffinement moyen ajusté ; erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs temps CPU total	86
3.15	Plaque trouée – ratios de raffinement ajusté (méthodes h -adaptatives) et moyen ajusté (méthode LDC) ; erreur globale relative $\mathbf{e}_{\mathcal{G}_k}^{\text{ex}}$ en norme énergie vs vs nombre de nœuds $N_{\mathcal{G}_k}$	87
3.16	Cas test industriel : Interaction mécanique Pastille-Gaine ; définitions des problèmes (a) cas test $2D(r, z)$ avec la singularité de pression et (b) cas test $3D$ multisingularité	88
3.17	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $2D$ – cartes de l’erreur locale	89
3.18	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $2D$ – mesure de l’erreur locale η vs tolérance fixée sur l’erreur globale ϵ_Ω	90
3.19	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $3D$ – exemple de sous-maillages générés avec la méthode LDC	93
3.20	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $3D$ – champ de déplacement \mathbf{u}_x sur la configuration déformée	94
3.21	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $3D$ – erreurs globales et locales estimées vs itération de raffinement	95
3.22	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $3D$ – erreur globale vs nombre de nœuds	96
3.23	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $3D$ – nombre de nœuds et temps CPU total	97
4.1	Philosophie des simulations multiéchelles pour le comportement du combustible	104
4.2	Deux classes de problèmes multiéchelles	104
4.3	Processus itératif de résolution multiéchelle sur deux niveaux des problèmes non linéaires	108
4.4	Niveau global avec la zone d’intérêt en jaune et niveau local avec les conditions aux limites pour (a) méthode LDC et (b) méthode EF ² -hybride	108
5.1	Illustration de procédure de transfert entre deux pas de temps $t - 1$ et t et différents niveaux de maillage	121
5.2	Stratégies de projection des champs définis aux points d’intégration	123
5.3	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $2D$ avec intensité du chargement variable – évaluation de la stratégie de rééquilibrage	127
5.4	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $2D$ avec intensité du chargement variable – erreur globale et mesure de l’erreur locale	128
5.5	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test $2D$ avec intensité du chargement variable et comportement élastique – cartes d’erreurs locales	129

5.6	Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé – plasticité parfaite ; (a) définition du problème et (b) maillage grossier initial	134
5.7	Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – erreurs globales relatives en norme énergie $e_{G_k}^{ex}$	136
5.8	Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – mesure de l’erreur locale η^{ex}	136
5.9	Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – champs des contraintes de Von Mises	138
5.10	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D avec un modèle visco-plastique ; (a) définitions du problème, (b) historique de chargement	140
5.11	Cas test industriel 3D : Interaction mécanique Pastille-Gaine avec un modèle visco-plastique ; champs des contraintes de Von Mises sur les maillages composites	141
5.12	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D avec un modèle visco-plastique ; champ de contraintes σ_{rr} au début du transitoire	142
5.13	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D avec un modèle visco-plastique – erreurs globales et locales estimées	143
A.1	Patch de la méthode SPR	148
A.2	Étude du comportement asymptotique des deux versions de l’estimateur d’erreur basé sur le défaut de régularité	149

Liste des tableaux

3.1	Plaque trouée – ratio de raffinement fixé	84
3.2	Plaque trouée – ratios de raffinement ajusté et moyen ajusté	86
3.3	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 2D – critère d’optimalité de maillage LOC	91
3.4	Interaction mécanique Pastille-Gaine : cas test 3D – critère d’optimalité de maillage LOC – ratio de raffinement fixé $\beta_{Ti} = 2$ – tolérances fixée sur l’erreur globale $\epsilon_{\Omega} =$ 4, 2, 1% – paramètre de contrôle de l’erreur locale $\delta = 3\%$	96
5.1	Procédures de transfert des informations définies aux points d’intégration	125
5.2	Benchmark académique – plaque trouée avec déplacement imposé évolutif – plasticité parfaite – maillages générés	137
5.3	Cas test industriel 3D : Interaction mécanique Pastille-Gaine avec un modèle visco- plastique – maillages générés	143

Bibliographie

- [1] C. MOUGEL, B. VERHAEGHE, C. VERDEAU, S. LANSIART, S. BEGUIN et B. JULIEN : Power ramping in the osiris reactor : database analysis for standard UO₂ fuel with ZY-4 cladding. *Organisation for Economic Co-Operation and Development – Nuclear Energy Agency*, 2005.
- [2] B. MICHEL, C. NONON, J. SERCOMBE, F. MICHEL et V. MARELLE : Simulation of Pellet-Cladding Interaction with the PLEIADES Fuel Performance Software Environment. *Nuclear Technology*, 182:124–137, 2013.
- [3] J. SERCOMBE, J. JULIEN, F. MICHEL, B. MICHEL et E. FÉDÉRICI : 3D modelling of strain concentration due to PCI within the fuel code ALCYONE. *LWR Fuel Performance Meeting, Top Fuel 2013*, 2:712–719, 2013.
- [4] V. MARELLE, P. GOLDBRONN, S. BERNAUD, E. CASTELIER, J. JULIEN, K. NKONGA, L. NOIROT et I. RAMIÈRE : New developments in ALCYONE 2.0 fuel performance code. *Top Fuel 2016 - Light Water Reactor (LWR) Fuel Performance Meeting*, 2016.
- [5] B. MICHEL, I. RAMIÈRE, I. VIALARD, C. INTROINI, M. LAINET, N. CHAUVIN, V. MARELLE, A. BOULORE, T. HELFER, R. MASSON, J. SERCOMBE, J.C. DUMAS, L. NOIROT et S. BERNAUD : *Chapter 9 – Two fuel performance codes of the PLEIADES platform : ALCYONE and GERMINAL*, pages 207–233. Woodhead Publishing Series in Energy. Woodhead Publishing, 2021.
- [6] D. PLANCQ, G. THOUVENIN, J. RICAUD, C. STRUZIK, T. HELFER, F. BENTEJAC, P. THÉVENIN et R. MASSON : PLEIADES : a unified environment for multi-dimensional fuel performance modeling. *International meeting on LWR fuel performance, Florida*, 2004.
- [7] V. MARELLE, B. MICHEL, J. SERCOMBE, P. GOLDBRONN, C. STRUZIK et A. BOULORE : Advanced simulation of fuel behavior under irradiation in the PLEIADES. *IAEA TECDOC SERIES, Modelling of Water Cooled Fuel Including Design Basis and Severe Accidents, volume IAEA-TECDOC-CD 1775*, 2013.
- [8] Ph. GARCIA, C. STRUZIK, M. AGARD et V. LOUCHE : Mono-dimensional mechanical modelling of fuel rods under normal and off-normal operating conditions. *Nuclear Engineering and Design*, 216:183–201, 2002.
- [9] N. MARCHAL, C. CAMPOS et C. GARNIER : Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rods. *Computational Materials Science*, 45(3):821–826, 2009. Proceedings of the 17th International Workshop on Computational Mechanics of Materials.
- [10] C. NONON, S. LANSIART, C. STRUZIK, D. PLANCQ, S. MARTIN, G.M. DECROIX, O. RA-BOUILLE, S. BEGUIN et B. JULIEN : Differential PCI behaviour of PWR fuel rods under transient conditions. *Proceedings of the 2004 International Meeting on LWR Fuel Performance*, pages 311–322, 2004.

- [11] L. BARBIÉ : *Raffinement de maillage multi-grille local en vue de la simulation 3D du combustible nucléaire des Réacteurs à Eau sous Pression*. Thèse, Aix-Marseille Université, 2013.
- [12] H. LIU : *Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l'interaction mécanique Pastille-Gaine*. Thèse, Aix Marseille Université, 2016.
- [13] P. LADEVÈZE et J.P. PELLE : Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics. *Springer NY*, pages 1–428, 2004.
- [14] Isabelle RAMIÈRE, Philippe ANGOT et Michel BELLIARD : A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4):766–781, 2007.
- [15] A. DÜSTER, J. PARVIZIAN, Z. YANG et E. RANK : The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(45):3768–3782, 2008.
- [16] T. BELYTSCHKO, Ch. PARIMI, N. MOËS, N. SUKUMAR et Sh. USUI : Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(4):609–635, 2003.
- [17] E. WANG, Th. NELSON et R. RAUCH : Back to elements - tetrahedra vs. hexahedra. In *CAD-FEM GmbH, Munich, Germany*, Proceedings of the 2004 International ANSYS Conference, 2004.
- [18] R. BISWAS et R.C. STRAWN : Tetrahedral and hexahedral mesh adaptation for cfd problems. *Applied Numerical Mathematics*, 26(1):135–151, 1998.
- [19] S.H. HUO, Y.S. LI, S.Y. DUAN, X. HAN et G.R. LIU : Novel quadtree algorithm for adaptive analysis based on cell-based smoothed finite element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 106:541–554, 2019.
- [20] H. LIU, I. RAMIÈRE et F. LEBON : On the coupling of local multilevel mesh refinement and ZZ methods for unilateral frictional contact problems in elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 323:1–26, 2017.
- [21] E. BIOTTEAU, A. GRAVOUIL, T. LUBRECHT et A. COMBESCURE : Three dimensional automatic refinement method for transient small strain elastoplastic Finite Element computations. *Computational Mechanics*, 49:123–136, 2012.
- [22] S.E. BENZLEY, E. PERRY, K. MERKLEY, B. CLARK et G. SJAARDEMA : A comparison of all hexagonal and all tetrahedral Finite Element meshes for elastic and elasto-plastic analysis. In *Proceedings, 4th International Meshing Roundtable*, pages 179–191, 1995.
- [23] L. DEMKOWICZ, Ph. DEVLOO et J.T. ODEN : On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53(1):67–89, 1985.
- [24] T. BELYTSCHKO et M. TABBARA : H-adaptive Finite Element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(24):4245–4265, 1993.

- [25] P. DÌEZ et A. HUERTA : A unified approach to remeshing strategies for Finite Element h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1):215–229, 1999.
- [26] I. BABUŠKA, A. MILLER et M. VOGELIUS : Adaptive methods and error estimation for elliptic problems of structural mechanics. *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, pages 57–73, 1983.
- [27] J. Z. ZHU, E. HINTON et O. C. ZIENKIEWICZ : Mesh enrichment against mesh regeneration using quadrilateral elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(7):547–554, 1993.
- [28] J. RÓDENAS, J. ALBELDA, M. TUR et F. FUENMAYOR : A hierarchical h -adaptivity methodology based on element subdivision. *Revista UIS Ingenierías*, 16:263–280, 2017.
- [29] F. BREZZI et M. FORTIN : Mixed and Hybrid Finite Element method. *Springer Series In Computational Mathematics*, 15:1–350, 1991.
- [30] L. DEMKOWICZ, J.T. ODEN, W. RACHOWICZ et O. HARDY : Toward a universal h-p adaptive Finite Element strategy, part 1. constrained approximation and data structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77(1):79–112, 1989.
- [31] I. BABUŠKA et M. ZLÁMAL : Nonconforming elements in the finite element method with penalty. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(5):863–875, 1973.
- [32] C. BERNARDI, Y. MADAY et A. T. PATERA : *Domain Decomposition by the Mortar Element method*, pages 269–286. Springer Netherlands, Dordrecht, 1993.
- [33] J. ČERVENÝ, V. DOBREV et T. KOLEV : Nonconforming mesh refinement for high-order finite elements. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(4):C367–C392, 2019.
- [34] F. LEDOUX et J. F. SHEPHERD : Topological modifications of hexahedral meshes via sheet operations : a theoretical study. *Engineering with Computers*, 26:433–447, 2009.
- [35] D. J. MELANDER, S. E. BENZLEY et T. J. TAUTGES : Generation of multi-million element meshes for solid model-based geometries : The dicer algorithm. *In Computer Sciences*, 1997.
- [36] K. MERKLEY, C. ERNST, J. F. SHEPHERD et M. J. BORDEN : Methods and applications of generalized sheet insertion for hexahedral meshing. *In Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable. M. L. Brewer and D. Marcum*, pages 233–250, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer Berlin Heidelberg.
- [37] M. L. STATEN, J. F. SHEPHERD et K. SHIMADA : Mesh matching – creating conforming interfaces between hexahedral meshes. *In Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable. R. V. Garimella*, pages 467–484, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer Berlin Heidelberg.
- [38] R. SCHNEIDERS : Refining quadrilateral and hexahedral element meshes. *Fifth International Meshing Roundtable, Germany*, 1, 1998.
- [39] K. TCHON, J. DOMPIERRE et R. CAMARERO : Conformal refinement of all-quadrilateral and all-hexahedral meshes according to an anisotropic metric. *In 11th International Meshing Roundtable*, pages 231–242, 2002.
- [40] G. NICOLAS, T. FOUQUET, S. GENIAUT et S. CUVILLIEZAM : Improved adaptive mesh refinement for conformal hexahedral meshes. *Advances in Engineering Software*, 102:14–28, 2016.

- [41] I. BABUŠKA et B. SZABO : On the rates of convergence of the Finite Element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(3):323–341, 1982.
- [42] R.R. SALAGAME et A.D. BELEGUNDU : A simple p-adaptive refinement procedure for structural shape optimization. *Finite Element in Analysis and Design*, 24(3):133–155, 1997.
- [43] B. SZABO et I. BABUŠKA : Finite Element analysis. *Wiley : New York*, 1, 1990.
- [44] A. DÜSTER, H. BRÖKER et E. RANK : The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(7):673–703, 2001.
- [45] I. BABUŠKA et B. SZABO : On the rates of convergence of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(3):323–341, 1982.
- [46] A. DÜSTER et E. RANK : The p-version of the Finite Element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(15-17):1925–1935, 2001.
- [47] D. DAVYDOV, J-P. PELTERET, D. ARNDT, M. KRONBICHLER et P. STEINMANN : A matrix-free approach for finite-strain hyperelastic problems using geometric multigrid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(13):2874–2895, 2019.
- [48] S. GHOSH et S.K. MANNA : R-adapted Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element method in metal-forming simulation. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2(2):271–282, 1993.
- [49] W. CAO, W. HUANG et R. RUSSELL : An r-adaptive Finite Element method based upon moving mesh PDEs. *Journal of Computational Physics*, 149:221–244, 1999.
- [50] J. FISH : The s-version of the Finite Element method. *Computers & Structures*, 43(3):539–547, 1992.
- [51] Z. YUE et D.H. ROBBINS : Adaptive superposition of Finite Element meshes in elastodynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(11):1604–1635, 2005.
- [52] I. BABUŠKA et B.Q. GUO : The h, p and h-p version of the Finite Element method ; basis theory and applications. *Advances in Engineering Software*, 15(3):159–174, 1992.
- [53] O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU et N.G. GONG : Effective and practical h–p-version adaptive analysis procedures for the Finite Element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(4):879–891, 1989.
- [54] W. F. MITCHELL et M. A. MCCLAIN : A comparison of hp-adaptive strategies for Elliptic Partial Differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 41(1):1–39, 2014.
- [55] D. FOURNIER, R. HERBIN et R. Le. TELLIER : Discontinuous galerkin discretization and hp-refinement for the resolution of the neutron transport equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(2):936–956, 2013.
- [56] H. ASKES et A. RODRÍGUEZ-FERRAN : A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. formulation and linear examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(3):253–273, 2001.

- [57] M. PIGGOTT, C. PAIN, G. GORMAN, P. W. POWER et A. GODDARD : h, r, and hr adaptivity with applications in numerical ocean modelling. *Ocean Modelling*, 10:95–113, 2005.
- [58] B. A. AMMONS et M. VABLE : An hr-method of mesh refinement for boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(6):979–996, 1998.
- [59] V. NÜBEL, A. DÜSTER et E. RANK : An rp-adaptive finite element method for the deformation theory of plasticity. *Computational Mechanics*, 39(5):557–574, 2007.
- [60] D. FRANKE, A. DÜSTER, V. NÜBEL et E. RANK : Erratum to : A comparison of the h-, p-, hp-, and rp-version of the FEM for the solution of the 2d hertzian contact problem. *Computational Mechanics*, 45:513–522, 2010.
- [61] S. GHOSH et S. RAJU : R-s adapted Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element method for metal-forming problems with strain localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19):3247–3272, 1996.
- [62] H. YSERENTANT : On the multi-level splitting of finite element spaces for indefinite elliptic boundary value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23(3):581–595, 1986.
- [63] E. GRINSPUN, P. KRYSL et P. SCHRÖDER : Charms : A simple framework for adaptive simulation. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3):281–290, 2002.
- [64] P. KRYSL, E. GRINSPUN et P. SCHRÖDER : Natural hierarchical refinement for Finite Element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(8):1109–1124, 2003.
- [65] A. BRANDT : Multi-Level Adaptive Techniques (MLAT) for Partial Differential Equations : Ideas and Software. In J. R. RICE, éditeur : *Mathematical Software*, pages 277–318. Academic Press, 1977.
- [66] D. BAI et A. BRANDT : Local mesh refinement multilevel techniques. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 8(2):109–134, 1987.
- [67] A. BRANDT : Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):333–390, 1977.
- [68] K. KHADRA, Ph. ANGOT, J. P. CALTAGIRONE et P. MOREL : Concept de zoom adaptatif en architecture multigrille locale ; étude comparative des méthodes L.D.C., F.A.C. et F.I.C. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 30(1):39–82, 1996.
- [69] K. KHADRA, Ph. ANGOT et J. P. CALTAGIRONE : A comparison of locally adaptive multigrid methods : L.D.C., F.A.C, and F.I.C. In N. D. MELSON, S. F. MCCORMICK et T. A. MANTEUFFEL, éditeurs : *NASA Conference Publication 3224, 6th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, volume 1, pages 275–292, 1993.
- [70] W. HACKBUSCH : *Local Defect Correction method and Domain Decomposition techniques*, pages 89–113. Springer Vienna, Vienna, 1984.
- [71] M. GRAZIADEI, R. M. M. MATTHEIJ et J. H. M. ten THIJE BOONKKAMP : Local defect correction with slanting grids. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(1):1–17, 2004.

- [72] S. MCCORMICK : Fast Adaptive Composite Grid (FAC) Methods : Theory for the Variational Case. *Computing*, 5:115–121, 1984.
- [73] S. MCCORMICK et J. THOMAS : The fast adaptive composite grid (FAC) method for elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 46:439–439, 1986.
- [74] Z. CAI, F. LE GLAND et H. ZHANG : An Adaptive Local Grid Refinement Method for Nonlinear Filtering. Research Report RR-2679, INRIA, 1995.
- [75] J. W. THOMAS, R. SCHWEITZER, M. HEROUX, S. MCCORMICK et A. M. THOMAS : Application of the fast adaptive composite grid method to computational fluid dynamics. In F. G. ZHUANG et Y. L. ZHU, éditeurs : *Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 606–611, Berlin, Heidelberg, 1986. Springer Berlin Heidelberg.
- [76] D. RITTER, M. STÜRMER et U. RÜDE : A fast-adaptive composite grid algorithm for solving the free-space Poisson problem on the cell broadband engine. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 17(2-3):291–305, 2010.
- [77] Ph. ANGOT, J. P. CALTAGIRONE et K. KHADRA : Une méthode adaptative de raffinement local : la correction du flux à l'interface. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 315(6):739–745, 1992.
- [78] Ph. ANGOT et M. LAUGIER : The FIC method of conservative connection between nested subdomains for an ocean circulation model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 319:993–1000, 1994.
- [79] X. CORÉ, Ph. ANGOT et J.-C. LATCHÉ : A multilevel local mesh refinement projection method for low mach number flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61(3):477–488, 2003. MODELLING 2001 - Second IMACS Conference on Mathematical Modelling and Computational Methods in Mechanics, Physics, Biomechanics and Geodynamics.
- [80] I. RAMIÈRE, Ph. ANGOT et M. BELLIARD : A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel nested structured meshes. *Journal of Computational Physics*, 225(2):1347–1387, 2007.
- [81] P.J.J. FERKET et A.A. REUSKEN : Further analysis of the Local Defect Correction method. *Computing*, 56:117–139, 1996.
- [82] M. ANTHONISSEN : *Local Defect Correction Techniques Applied to a Combustion Problem*, pages 185–192. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [83] M. SIZOV, M.J.H. ANTHONISSEN et R.M.M. MATTHEIJ : Local Defect Correction with compact Finite Difference schemes for convection-diffusion equations. In *Progress in Industrial Mathematics at 13th European Conference on Mathematics for Industry. A. Di Bucchianico, R.M.M. Mattheij and M.A. Peletier*, Mathematics in Industry, pages 523–527, Germany, 2006. Springer.
- [84] M.J.H. ANTHONISSEN, B. van't HOF et A.A. REUSKEN : A Finite Volume scheme for solving elliptic boundary value problems on composite grids. *Computing*, 61(4):285–305, 1998.
- [85] W. KRAMER, R. MINERO, H.J.H. CLERCX et R.M.M. MATTHEIJ : *A Finite Volume Local Defect Correction method for solving the transport equation*. CASA-report. Technische Universiteit Eindhoven, 2006.

- [86] G. KAKUBA, R.M.M. MATTHEIJ et M.J.H. ANTHONISSEN : Local Defect Correction for the Boundary Element method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 15(3):127–136, 2006.
- [87] M. BELLIARD et M. GRANDOTTO : Local zoom computation of two-phase flows in steam generators using a Local Defect Correction method. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 43(2):111–135, 2003.
- [88] L. BARBIÉ, I. RAMIÈRE et F. LEBON : Strategies involving the Local Defect Correction multi-level refinement method for solving three-dimensional linear elastic problems. *Computers & Structures*, 130:73–90, 2014.
- [89] L. BARBIÉ, I. RAMIÈRE et F. LEBON : An automatic multilevel refinement technique based on nested local meshes for nonlinear mechanics. *Computers & Structures*, 147:14–25, 2015.
- [90] P. CAVIN, A. GRAVOUIL, A. A. LUBRECHT et A. COMBESURE : Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(11-12):1043–1055, 2005.
- [91] B. WATREMETZ, M.C. BAIETTO-DUBOURG et A.A. LUBRECHT : 2D thermo-mechanical contact simulations in a functionally graded material : A multigrid-based approach. *Tribology International*, 40(5):754–762, 2007.
- [92] J.D. WHITCOMB et K. WOO : Application of iterative global/local finite-element analysis. Part 2 : Geometrically non-linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(9):757–766, 1993.
- [93] L. GENDRE, O. ALLIX, P. GOSSELET et F. COMTE : Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44:233–245, 2009.
- [94] J.-Ch. PASSIEUX, J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL et M.-Ch. BAIETTO : Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver. *Computational Mechanics*, 52(6):1381–1393, 2013.
- [95] P.L. TALLEC : *Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics*. Computational mechanics advances. International Association for Computational Mechanics, North-Holland, 1994.
- [96] G. GUGUIN, O. ALLIX, P. GOSSELET et S. GUINARD : Nonintrusive coupling of 3D and 2D laminated composite models based on finite element 3D recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(5):324–343, 2014.
- [97] P. OUMAZIZ, P. GOSSELET, P-A. BOUCARD et S. GUINARD : A parallel non-invasive mixed domain decomposition – Implementation and applications to mechanical assemblies. *Finite Elements in Analysis and Design*, 156:24 – 33, 2019.
- [98] L. DARIDON, D. DUREISSEIX, S. GARCIA et S. PAGANO : Changement d'échelles et zoom structural. In *10e colloque national en calcul des structures*, Giens, France, 2011.
- [99] H. Ben DHIA : Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12):899–904, 1998.

- [100] H. Ben DHIA : Further Insights by Theoretical Investigations of the Multiscale Arlequin Method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6:215–232, 2008.
- [101] A. FERNIER, V. FAUCHER et O. JAMOND : Multi-model Arlequin method for transient structural dynamics with explicit time integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112(9):1194–1215, 2017.
- [102] I. RAMIÈRE, H. LIU et F. LEBON : Original geometrical stopping criteria associated to multilevel adaptive mesh refinement for problems with local singularities. *Computational Mechanics*, pages 1–17, 2019.
- [103] Ph. G. CIARLET : *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [104] A. K. AZIZ et I. BABUŠKA : *Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*. New York : Academic Press, 1972.
- [105] R. E. BANK et A. WEISER : Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44(170):283–301, 1985.
- [106] M.B. BERGALLO, C.E. NEUMAN et V.E. SONZOGNI : Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4):755–774, 2000.
- [107] B. Fraeijs de VEUBEKE : Displacement and equilibrium models in the Finite Element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(3):287–342, 2001.
- [108] J.F. DEBONGNIE, H.G. ZHONG et P. BECKERS : Dual analysis with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122(1):183–192, 1995.
- [109] M. KEMPENEERS, J.-F. DEBONGNIE et P. BECKERS : Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(4):513–536, 2010.
- [110] P. LADEVÈZE et D. LEGUILLON : Error estimate procedure in the Finite Element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509, 1983.
- [111] P. LADEVÈZE, J.P. PELLE et P. ROUGEOT : Error estimation and mesh optimization for classical Finite Elements. *Engineering Computations*, 8:69–80, 1991.
- [112] P. COOREVITS, J.-P. DUMEAU et J. PELLÉ : Error estimator and adaptivity for three-dimensional finite element analyses. *Studies in Applied Mechanics*, 47:443–457, 1998.
- [113] F. KUSS et F. LEBON : Stress based Finite Element methods for solving contact problems : comparisons between various solution methods. *Advances in Engineering Software*, 40(8):697–706, 2009.
- [114] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBOLDT : A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615, 1978.
- [115] M. AINSWORTH et J.T. ODEN : A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1):1–88, 1997.
- [116] R. VERFÜRTH : *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley, Chichester, 1996.

- [117] T. GRÄTSCH et Kl.-J. BATHE : Review : A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers & Structures*, 83(4-5):235–265, 2005.
- [118] L. DEMKOWICZ, J.T. ODEN et T. STROUBOULIS : Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part i : Variational principles and a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2):217–251, 1984.
- [119] R. BANK, H. SHERMAN et A. WEISER : Some refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement. In *Scientific Computing*, pages 3–17. R. Stepelman, Ed. Amsterdam, Netherlands : IMACS/North Holland, 1983.
- [120] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBOLDT : Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(4):736–754, 1978.
- [121] C. CARSTENSEN et S. FUNKEN : Fully reliable localized error control in the fem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21:1465–1484, 1999.
- [122] S. PRUDHOMME, F. NOBILE, L. CHAMOIN et J. T. ODEN : Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(2):165–192, 2004.
- [123] N. PARÉS, J. BONET, A. HUERTA et J. PERAIRE : The computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4):406–429, 2006.
- [124] N. PARÉS, P. DÍEZ et A. HUERTA : Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:297–323, 2006.
- [125] P. MORIN, R. NOCHETTO et K. SIEBERT : Local problems on stars : A posteriori error estimators, convergence, and performance. *Mathematics of Computation*, 72:1067–1097, 2003.
- [126] D. BRAESS et J. SCHOEBERL : Equilibrated residual error estimator for edge elements. *Mathematics of Computation*, 77:651–672, 2008.
- [127] Ph. DESTUYNDER et B. MÉTIVET : Explicit error bounds in a conforming method. *Mathematics of Computation*, 68:1379–1396, 1999.
- [128] A. ERN et M. VOHRALIK : A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48:1988–223, 2010.
- [129] A. ERN, I. SMEARS et M. VOHRALIK : Guaranteed, locally space-time efficient, and polynomial-degree robust a posteriori error estimates for high-order discretizations of parabolic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55:811–2834, 2016.
- [130] M. BOTTI et R. RIEDLBECK : Equilibrated stress tensor reconstruction and a posteriori error estimation for nonlinear elasticity. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 20(1):39–59, 2020.
- [131] R. RIEDLBECK, D. A. PIETRO, A. ERN, S. GRANET et K. KAZYMYRENKO : Stress and flux reconstruction in biot’s poro-elasticity problem with application to a posteriori error analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 73:1593–1610, 2017.
- [132] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357, 1987.

- [133] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364, 1992.
- [134] B. BORROOMAND et O. C. ZIENKIEWICZ : Recovery by equilibrium in patches (REP). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(1):137–164, 1997.
- [135] P. WRIGGERS et O. SCHERF : Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4):437–447, 1998.
- [136] M. FEISCHL, T. FÜHRER, M. KARKULIK et D. PRAETORIUS : ZZ-Type a posteriori error estimators for adaptive boundary element methods on a curve. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 38:49–60, 2014.
- [137] R. BOUSSETTA, Th. COUPEZ et L. FOURMENT : Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(48-49):6626–6645, 2006.
- [138] R. BECKER et R. RANNACHER : An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, 10(1):1–102, 2001.
- [139] J. PERAIRE et A. PATERA : Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations : Local indicators and adaptive refinement. *Studies in Applied Mechanics*, 47:199–216, 1998.
- [140] S. PRUDHOMME et J.T. ODEN : On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1):313–331, 1999.
- [141] A. BESPALOV, D. PRAETORIUS, L. ROCCHI et M. RUGGERI : Goal-oriented error estimation and adaptivity for elliptic pdes with parametric or uncertain inputs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345:951–982, 2019.
- [142] B. ENDTMAYER et Th. WICK : A partition-of-unity dual-weighted residual approach for multi-objective goal functional error estimation applied to elliptic problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 17(4):575–599, 2017.
- [143] R. HARTMANN : Multitarget Error Estimation and Adaptivity in Aerodynamic Flow Simulations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31:708–731, 2008.
- [144] T. STROUBOULIS, I. BABUŠKA, D.K. DATTA, K. COPPS et S.K. GANGARAJ : A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part I : A posteriori estimation of the error in the von Mises stress and the stress intensity factor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1):261–294, 2000.
- [145] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS et C. S. UPADHYAY : A model study of the quality of a posteriori error estimators for Finite Element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(14):2521–2577, 1997.
- [146] I. BABUŠKA, T. STROUBOULIS, C. S. UPADHYAY, S. K. GANGARAJ et K. COPPS : Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(7):1073–1123, 1994.

- [147] M. ÖZAKÇA : Comparison of error estimation methods and adaptivity for plane stress/strain problems. *Structural Engineering and Mechanics*, 15:579–608, 2003.
- [148] D. KOLIESNIKOVA, I. RAMIÈRE et F. LEBON : A unified framework for the computational comparison of adaptive mesh refinement strategies for all-quadrilateral and all-hexahedral meshes : Locally adaptive multigrid methods versus h-adaptive methods. *Journal of Computational Physics*, 437:110310, 2021.
- [149] D. KOLIESNIKOVA, I. RAMIÈRE et F. LEBON : Analytical comparison of two multiscale coupling methods for nonlinear solid mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 87(9):1–7, 2020.
- [150] R. VERFÜRTH : A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50(1):67–83, 1994.
- [151] R. H. NOCHETTO et A. VEESER : *Primer of Adaptive Finite Element Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [152] D. A. DI PIETRO, M. VOHRALIK et S. YOUSEF : An a posteriori-based, fully adaptive algorithm with adaptive stopping criteria and mesh refinement for thermal multiphase compositional flows in porous media. *Computers and Mathematics with Applications*, 68(12, B):2331–2347, 2014.
- [153] W. DÖRFLER : A convergent adaptive algorithm for poisson’s equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(3):1106–1124, 1996.
- [154] P. MORIN, K. G. SIEBERT et A. VEESER : A basic convergence result for conforming adaptive finite elements. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(05):707–737, 2008.
- [155] G. BUGEDA : A comparison between new adaptive remeshing strategies based on point wise stress error estimation and energy norm error estimation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18(7):469–482, 2002.
- [156] W. EHLERS, M. AMMANN et S. DIEBELS : H-adaptive FE methods applied to single- and multiphase problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(2):219–239, 2002.
- [157] E. OÑATE et G. BUGEDA : A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. *Engineering Computations*, 10(4):307–321, 1993.
- [158] G. BUGEDA et J. OLIVER : A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(18):3161–3185, 1993.
- [159] P. COOREVITS, P. LADEVEZE et J.-P. PELLE : An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121(1):91 – 120, 1995.
- [160] V. FAUCHER, F. CASADEI, G. VALSAMOSAND et M. LARCHER : High resolution adaptive framework for fast transient fluid-structure interaction with interfaces and structural failure – application to failing tanks under impact. *International Journal of Impact Engineering*, 127:62–85, 2018.
- [161] D. FOURNIER, R. HERBIN et R. Le TELLIER : Discontinuous Galerkin Discretization and hp-refinement for the resolution of the neutron transport equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35:A936–A956, 2013.

- [162] P. HENNIG, M. KÄSTNER, Ph. MORGENSTERN et D. PETERSEIM : Adaptive mesh refinement strategies in isogeometric analysis — a computational comparison. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316:424–448, 2017. Special Issue on Isogeometric Analysis : Progress and Challenges.
- [163] A.C. WOODBURY, J. F. SHEPHERD, M. L. STATEN et S. E. BENZLEY : Localized coarsening of conforming all-hexahedral meshes. *Engineering with Computers*, 27(1):95–104, 2011.
- [164] CEA : Cast3m. <http://www.cast3m.cea.fr>, 2021.
- [165] W. E : *Principles of multiscale modelling*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2011.
- [166] E. SANCHEZ-PALENCIA : *Homogenization method for the study of composite media*. Springer, Berlin, 1980.
- [167] M. BORNERT, T. BRETHERAU et P. GILORMINI : *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes science, 2001.
- [168] Z. HASHIN et S. SHTRIKMAN : A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140, 1963.
- [169] T. MORI et K. TANAKA : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574, 1973.
- [170] T. Y. HOU et X.-H. WU : A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, 134(1):169–189, 1997.
- [171] Y. EFENDIEV et T. HOU : Multiscale finite element methods for porous media flows and their applications. *Applied Numerical Mathematics*, 57(5):577–596, 2007. Special Issue for the International Conference on Scientific Computing.
- [172] W. E et B. ENGQUIST : The heterogeneous multiscale methods. *Communications in Mathematical Sciences*, 1:87–132, 2003.
- [173] W. E, B. ENGQUIST et Zh. HUANG : Heterogeneous multiscale method : A general methodology for multiscale modeling. *Physical Review B*, 67:92–101, 2003.
- [174] W. E, B. ENGQUIST, X. LI, W. REN et E. VANDEN-EIJNDEN : Heterogeneous multiscale methods : A review. *Communications in Computational Physics*, 2(3):367–450, 2007.
- [175] J. GUEDES et N. KIKUCHI : Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83(2):143–198, 1990.
- [176] C. MIEHE, J. SCHRÖDER et J. SCHOTTE : Computational homogenization analysis in finite plasticity simulation of texture development in polycrystalline materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171(3):387–418, 1999.
- [177] F. FEYEL et J.-L. CHABOCHE : FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. computer methods in applied mechanics and engineering 183, 309–330. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183: 309–330, 2000.
- [178] J. SCHRÖDER : A numerical two-scale homogenization scheme : the FE²-method. *Plasticity and Beyond : Microstructures, Crystal-Plasticity and Phase Transitions*, pages 1–64, 2014.

- [179] M. DOROBANTU et B. ENGQUIST : Wavelet-based numerical homogenization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(2):540–559, 1998.
- [180] Y. CAPDEBOSCQ et M. S. VOGELIUS : Wavelet Based Homogenization of a 2 Dimensional Elliptic Problem. 25 p., 2003.
- [181] G. J. DVORAK : Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings : Mathematical and Physical Sciences*, 437(1900):311–327, 1992.
- [182] J.C. MICHEL et P. SUQUET : Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25):6937–6955, 2003.
- [183] J. FISH : *Multiscale methods : bridging the scales in science and engineering*. Oxford University Press on Demand, 2010.
- [184] J. FISH et V. BELSKY : Multigrid method for periodic heterogeneous media part 1 : Convergence studies for one-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1):1–16, 1995.
- [185] J. FISH et V. BELSKY : Multi-grid method for periodic heterogeneous media part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(1):17–38, 1995.
- [186] M. WANGERMEZ, O. ALLIX, P-A. GUIDAULT, O. CIOBANU et C. REY : Interface coupling method for the global-local analysis of heterogeneous models : A second-order homogenization-based strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 365:113032, 2020.
- [187] V. KOUZNETSOVA, M.G.D. GEERS et W.A.M. BREKELMANS : Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8):1235–1260, 2002.
- [188] J. YVONNET et G. BONNET : A consistent nonlocal scheme based on filters for the homogenization of heterogeneous linear materials with non-separated scales. *International Journal of Solids and Structures*, 51(1):196–209, 2014.
- [189] R. HILL : Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5):357–372, 1963.
- [190] W.J. DRUGAN et J.R. WILLIS : A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(4):497–524, 1996.
- [191] M. OSTOJA-STARZEWSKI : Material spatial randomness : from statistical to representative volume element. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21:112–132, 2006.
- [192] M. DOŠKÁŘ, J. ZEMAN, D. JARUŠKOVÁ et J. NOVÁK : Wang tiling aided statistical determination of the Representative Volume Element size of random heterogeneous materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 70:280–295, 2018.
- [193] F. FEYEL : Multiscale FE² elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Computational Materials Science*, 16(1):344–354, 1999.
- [194] C. MIEHE, J. SCHOTTE et J. SCHRÖDER : Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Computational Materials Science*, 16(1):372–382, 1999.

- [195] I. RAMIÈRE et T. HELFER : Iterative residual-based vector methods to accelerate fixed point iterations. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(9):2210–2226, 2015.
- [196] I. RAMIÈRE, R. MASSON, B. MICHEL et S. BERNAUD : Un schéma de calcul multi-échelles de type Éléments Finis au carré pour la simulation de combustibles nucléaires hétérogènes. In *13e colloque national en calcul des structures*, Giens, France, 2017.
- [197] N. NEUSS, W. JÄGER et G. WITTUM : Homogenization and multigrid. *Computing*, 66(1):1–26, 2001.
- [198] H. GU, J. RÉTHORE, M-Ch. BAIETTO, Ph. SAINOT, P. LECOMTE-GROSBRAS, C.H. VENNER et A.A. LUBRECHT : An efficient multigrid solver for the 3D simulation of composite materials. *Computational Materials Science*, 112:230–237, 2016.
- [199] C. MIEHE et C. G. BAYREUTHER : On multiscale fe analyses of heterogeneous structures : from homogenization to multigrid solvers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(10):1135–1180, 2007.
- [200] G. PEYRE : *FE² method and hyperreduction : towards intensive computations at the micro scale*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2015.
- [201] E BIOTTEAU : *Stratégie multigrille et raffinement automatique à précision contrôlée pour la dynamique transitoire non-linéaire*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.
- [202] P.E. FARRELL, M.D. PIGGOTT, C.C. PAIN, G.J. GORMAN et C.R. WILSON : Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33-36):2632–2642, 2009.
- [203] D. PERIĆ, Ch. HOCHARD, M. DUTKO et D.R.J. OWEN : Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137(3):331–344, 1996.
- [204] D. DUREISSEIX et H. BAVESTRELLO : Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6523–6541, 2006.
- [205] O.C. ZIENKIEWICZ et J.Z. ZHU : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1365–1382, 1992.
- [206] H. D. ESPINOSA, P. D. ZAVATTIERI et G. L. EMORE : Adaptive FEM computation of geometric and material nonlinearities with application to brittle failure. *Mechanics of Materials*, 29(3): 275–305, 1998.
- [207] D. BRANCHERIE, P. VILLON et A. IBRAHIMBEGOVIC : On a consistent field transfer in non linear inelastic analysis and ultimate load computation. *Computational Mechanics*, 42:213–226, 2008.
- [208] P. BREITKOPF, H. NACEUR, A. RASSINEUX et P. VILLON : Moving least squares response surface approximation : Formulation and metal forming applications. *Computers & Structures*, 83(17):1411–1428, 2005. Advances in Meshfree Methods.

- [209] S. KUMAR, L. FOURMENT et S. GUERDOUX : Parallel, second-order and consistent remeshing transfer operators for evolving meshes with superconvergence property on surface and volume. *Finite Elements in Analysis and Design*, 93:70–84, 2015.
- [210] A. BUCHER, A. MEYER, U. GÖRKE et R. KREISSIG : A Comparison of Mapping Algorithms for Hierarchical Adaptive FEM in Finite Elasto-Plasticity. *Computational Mechanics*, 39:521–536, 2007.
- [211] P. HENNIG, M. AMBATI, L. DE LORENZIS et M. KÄSTNER : Projection and transfer operators in adaptive isogeometric analysis with hierarchical B-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 334:313–336, 2018.
- [212] S. FELD-PAYET : *Amorçage et propagation de fissures dans les milieux ductiles non locaux*. Theses, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010.
- [213] N.-S. LEE et Kl.-J. BATHE : Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 16(2):99–139, 1994.
- [214] E. HINTON et J. S. CAMPBELL : Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(3):461–480, 1974.
- [215] G. LOUBIGNAC, G. CANTIN et G. TOUZOT : Continuous stress fields in finite element analysis. *AIAA Journal*, 15(11):1645–1647, 1977.
- [216] C. LABERGÈRE, A. RASSINEUX et K. SAANOUNI : Numerical simulation of continuous damage and fracture in metal-forming processes with 2D mesh adaptive methodology. *Finite Elements in Analysis and Design*, 82:46–61, 2014.
- [217] F.M. ANDRADE PIRES, E.A. DE SOUZA NETO et D.R.J. OWEN : On the finite element prediction of damage growth and fracture initiation in finitely deforming ductile materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48):5223–5256, 2004. Advances in Computational Plasticity.
- [218] F.T. YANG, A. RASSINEUX, C. LABERGÈRE et K. SAANOUNI : A 3D h-adaptive local remeshing technique for simulating the initiation and propagation of cracks in ductile materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330:102–122, 2018.
- [219] P. VERPEAUX : Cours de DEA Pierre Verpeaux. <http://www-cast3m.cea.fr/index.php?xml=supportcours>, 2021.
- [220] B. MICHEL, T. HELFER, I. RAMIÈRE et C. ESNOUL : A new numerical methodology for simulation of unstable crack growth in time independent brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 188:126–150, 2018.
- [221] B. MICHEL, J. SERCOMBE et G. THOUVENIN : A new phenomenological criterion for pellet-cladding interaction rupture. *Nuclear Engineering and Design*, 238(7):1612–1628, 2008.
- [222] B. BORROOMAND et O.C. ZIENKIEWICZ : Recovery procedures in error estimation and adaptivity. part II : Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1):127–146, 1999.

- [223] M. F. WHEELER et J. R. WHITEMAN : Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 3(1):65–82, 1987.
- [224] M. AINSWORTH, J. Z. ZHU, A. W. CRAIG et O. C. ZIENKIEWICZ : Analysis of the zienkiewicz–zhu a-posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(9):2161–2174, 1989.
- [225] B. BOROOMAND et O. C. ZIENKIEWICZ : An improved REP recovery and the effectivity robustness test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(17):3247–3277, 1997.