université
PARIS-SACLAY

Méthode de couplage surfacique pour modèles non-compatibles de matériaux hétérogènes : approche micro-macro et implémentation non-intrusive

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n°579,
Sciences Mécaniques et Énergétiques, Matériaux et Géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : Mécanique des Solides

Unité de recherche : LMT - Laboratoire de Mécanique et Technologie (UMR 8535)
Référent : École Normale Supérieure Paris-Saclay

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 12 février 2020, par

Maxence WANGERMEZ

Composition du Jury :

Samuel FOREST Professeur, MINES ParisTech	Président
Jean-Charles PASSIEUX Professeur, INSA Toulouse	Rapporteur & Examinateur
Julien YVONNET Professeur, Université Paris-Est	Rapporteur & Examinateur
Christian REY Professeur, Safran Tech	Examinateur
Olivier ALLIX Professeur, Université Paris-Saclay	Directeur de thèse
Pierre-Alain GUIDAULT Maître de conférences, Université Paris-Saclay	Co-Encadrant
Oana CIOBANU Docteur-Ingénieur, Safran Tech	Co-encadrante

Thèse de doctorat

NNT : NNT2020UPASN001

Avant-propos

Remerciements

Je débute, comme à l'accoutumée, ce mémoire en témoignant ma reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail de recherche.

En particulier, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Olivier ALLIX pour son accompagnement sans faille et particulièrement idoine tout au long de ces trois années. Je témoigne également toute ma reconnaissance à Pierre-Alain GUIDAULT et Oana CIOBANU pour leur suivi quotidien ainsi que leur implication et leur disponibilité constante et essentielle. Je tiens également à remercier Christian REY qui m'a ouvert les portes de Safran Tech pour rejoindre son équipe.

J'exprime aussi toute ma gratitude aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux de thèse. En particulier à Jean-Charles PASSIEUX et Julien YVONNET pour leurs rapports que j'ai eu un immense plaisir à lire ainsi qu'à Samuel FOREST pour avoir présidé le jury pendant la soutenance de thèse.

Impossible de citer tout le monde mais mes remerciements vont également à tous les membres du LMT - agents, chercheurs, gestionnaires, ingénieurs, techniciens - qui nous fournissent des conditions de travail exceptionnelles pour mener à bien nos thèses. Je remercie en particulier les membres du secteur Structures et Systèmes et de l'UTR Décomposition de Domaine pour avoir suivi mes travaux et pour leur aide lorsque j'en ai eu besoin, ainsi que les six permanent.e.s, deux ingénieurs, sept doctorants et le stagiaire qui sont venus assister à mes pré-soutenances. Merci aussi à mes co-bureau de 211 et de Satie ainsi qu'aux équipes successives qui font vivre le bar du LMT et qui en font un lieu de vie convivial. Je tenais également, dans ces quelques lignes, à rendre un hommage à Frisou qui nous a quitté l'an dernier.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à l'ensemble des personnes du pôle Modélisation & Simulation du centre de R&T Safran Tech, et en particulier aux membres de l'équipe Computational Applied Mathematics ainsi qu'à la fine équipe de doctorants que j'ai eu le formidable plaisir de côtoyer. Je voudrais également exprimer toute ma gratitude à l'équipe de l'Aérogarage qui s'affaire à construire un lieu d'expression hors du commun.

Je remercie évidemment tous les gens qui continuent de m'accompagner, au quotidien et depuis bien longtemps, pêle-mêle les ami.e.s et la famille, celles et ceux qui m'accompagnent en musique, en cuisine et en brassage, celles qui m'accompagnent depuis la maternelle, celles et ceux qui m'ont fait l'immense plaisir de venir à ma soutenance, parfois de loin. Une pensée toute particulière pour ma mère, ma compagne Manon, ma sœur Laurence et ma belle-sœur Stéphanie qui ont eu la lourde tâche de relire mon manuscrit.

Enfin, je souhaite témoigner toute mon affection à Manon qui m'a accompagné au quotidien et qui a su être un pilier pendant ces travaux en m'apportant protection et réconfort lorsque cela était nécessaire.

Version numérique du manuscrit



http://www.theses.fr/s169062

Table des matières

Avant-propos i

Table des matières iii

Liste des figures vii

Liste des tableaux xi

Introduction 1

Partie I : Études bibliographiques 7

1 Hétérogénéités et homogénéisation : rappels et cas de l'homogénéisation périodique au second gradient 9
- 1.1 Introduction . . . 10
- 1.2 Généralités sur les matériaux hétérogènes . . . 10
  - 1.2.1 Définitions . . . 10
  - 1.2.2 Notion d'échelles . . . 11
  - 1.2.3 Notion de propriétés effectives . . . 12
  - 1.2.4 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER) . . . 12
- 1.3 Simulation des matériaux hétérogènes . . . 13
  - 1.3.1 Détermination des propriétés effectives d'une microstructure . . . 13
  - 1.3.2 Construction de modèles numériques de microstructures . . . 14
  - 1.3.3 Construction d'un milieu homogène équivalent « classique » . . . 14
  - 1.3.4 Construction d'un milieu homogène équivalent à partir de la théorie du second gradient . . . 15

2 Calculs de structures avec matériaux hétérogènes : des approches multiéchelles aux méthodes global/local 23
- 2.1 Introduction . . . 24
- 2.2 Méthodes multiéchelles pour le calcul de structures hétérogènes . . . 24
  - 2.2.1 Microstructures avec échelles faiblement couplées . . . 24
  - 2.2.2 Microstructures avec échelles moyennement couplées . . . 25
  - 2.2.3 Microstructures avec échelles fortement couplées . . . 26
- 2.3 Méthodes global/local pour le calcul de structures hétérogènes . . . 27
  - 2.3.1 Méthodes de condensation statique et de réanalyse structurale . . . 28
  - 2.3.2 Approches par superposition . . . 29
  - 2.3.3 Approches descendantes . . . 29
  - 2.3.4 Approches par sous-structuration . . . 30
  - 2.3.5 Approches non-intrusives . . . 32
- 2.4 Raccords entre modèles pour des problèmes de sous-structuration . . . 33
  - 2.4.1 Méthode mortar pour les éléments finis . . . 35

2.4.2 Méthode basée sur la séparation micro-macro des quantités d'interface . . . 38

Partie II : Nouveau raccord pour le couplage de modèles incompatibles 53

3 Motivations pour un raccord de modèles non-compatibles et problèmes de référence 55
3.1 Introduction . . . 56
3.2 Définition d'un problème couplé avec modèles non-compatibles . . . 58
3.2.1 Formulation variationnelle du problème sous-structuré . . . 58
3.2.2 Conditions de raccord entre les modèles . . . 59
3.2.3 Problème de référence et définition d'un outil de comparaison . . . 60
3.2.4 Cellules élémentaires et comportements matériaux . . . 60
3.3 Solutions avec les algorithmes global/local de la littérature . . . 61
3.3.1 Problème modèle en dimension 2 . . . 61
3.3.2 Problème modèle en dimension 3 . . . 71
3.4 Conclusions . . . 72

4 Méthode de couplage en présence de champs macroscopiques constants 75
4.1 Introduction . . . 76
4.2 Analyses des quantités d'interface . . . 76
4.2.1 Séparation micro-macro des quantités d'interface . . . 77
4.2.2 Lien avec l'homogénéisation au premier ordre . . . 78
4.3 Méthode de couplage pour des modèles non-compatibles . . . 79
4.3.1 Rappel de la formulation du problème sous-structuré . . . 79
4.3.2 Proposition des conditions de couplage avec séparation des échelles sur les interfaces . . . 80
4.3.3 Exemples . . . 81
4.3.4 Analyses et limitations de la méthode de couplage proposée . . . 84
4.4 Conclusion . . . 85

5 Méthode de couplage en présence de champs macroscopiques lentement variables 87
5.1 Introduction . . . 88
5.2 Une cinématique basée sur l'homogénéisation au second ordre . . . 88
5.2.1 Séparation micro-macro des quantités d'interface . . . 88
5.2.2 Lien avec l'homogénéisation au second gradient . . . 91
5.2.3 Proposition de conditions modifiées pour résoudre le BVP . . . 93
5.3 Méthode de couplage pour des modèles non-compatibles . . . 99
5.3.1 Rappel de la formulation du problème sous-structuré . . . 99
5.3.2 Proposition des conditions de couplage avec séparation des échelles sur les interfaces . . . 99
5.3.3 Exemples . . . 101
5.4 Conclusion . . . 108

Partie III : Résolution numérique et adaptation non-intrusive 111

6 Mise en œuvre des techniques de couplage pour des modèles non-compatibles par la méthode des éléments finis 113
6.1 Introduction . . . 114
6.2 Espaces d'approximation des solutions par la méthode des éléments finis . . . 114
6.2.1 Discrétisation des quantités d'interfaces . . . 115
6.2.2 Discrétisation des projecteurs . . . 116
6.3 Discrétisation des conditions de couplage et résolution . . . 116
6.3.1 Discrétisation des conditions de couplage . . . 116

6.3.2 Discrétisation du problème de point-selle . . . 117
6.3.3 Méthodes de résolution . . . 118
6.4 Conclusion . . . 122

7 Adaptation non-intrusive du problème de couplage de modèles non-compatibles 125
7.1 Introduction . . . 126
7.2 Formulation du problème de couplage par un algorithme de point fixe . . . 126
7.2.1 Décomposition de domaine global et local . . . 127
7.2.2 Calcul des efforts d'interface . . . 128
7.3 Mise en œuvre de l'algorithme global/local non-intrusif . . . 131
7.3.1 Environnement logiciel . . . 131
7.3.2 Architecture mise en place pour la résolution . . . 132
7.3.3 Détails d'implémentation . . . 132
7.3.4 Exemples d'application . . . 133
7.4 Conclusion . . . 138

Conclusions et perspectives 141

Annexes I

A Détails de calcul des opérateurs de couplage issus de la méthode Mortar III
A.1 Intégration numérique des opérateurs de couplage . . . IV
A.2 Condition Inf-Sup en pratique . . . V
A.2.1 Cadre formel . . . V
A.2.2 En pratique . . . V

B Problème de point-selle dans les espaces de Hilbert VII
B.1 Espace Dual et théorème de représentation de Riesz . . . VII
B.2 Existence et unicité des formulations mixtes sur des espaces de Hilbert . . . VII
B.3 Existence et unicité pour un problème de point-selle « perturbé » . . . VIII

C Construction d'une base macroscopique quadratique à partir des déplacements d'interface XI
C.1 Définition de la base . . . XI
C.2 Orthonormalisation des fonctions de la base macroscopique . . . XIII
C.2.1 Propriétés d'orthonormalisation des composantes de translation . . . XIII
C.2.2 Propriétés d'orthonormalisation des composantes linéaires . . . XIII
C.2.3 Propriétés d'orthonormalisation des composantes quadratiques . . . XIV

D Exemple de mise en données pour l'implémentation non-intrusive du couplage de modèles non-compatibles XVII

E Liste des acronymes XXIII

Liste des figures

1 Photographie d'une aube LEAP-1A prête pour le contrôle interne de son tissage 3D par tomographie . . . 1
2 Illustration de la problématique autour du zoom structural pour des modèles non-compatibles . . . 4

1.1 Exemple de matériau hétérogène comprenant plusieurs phases . . . 10
1.2 Illustration technique 3D d'un moteur LEAP-1A . . . 11
1.3 Notations des vecteurs positions associés à une cellule élémentaire . . . 16

2.1 Domaine d'étude et conditions aux limites . . . 30
2.2 Illustration d'un couplage surfacique et d'un couplage volumique . . . 31
2.3 Exemple de fonctions de pondération . . . 34
2.4 Illustration de la discrétisation d'une interface avec des maillages non-conformes . . . 36
2.5 Espaces discrétisés des multiplicateurs de Lagrange et des déplacements de bord . . . 36
2.6 Sous-structures et interfaces voisines . . . 38

3.1 Illustration du principe d'acquisition d'une microstructure par tomographie . . . 56
3.2 Trois modélisations différentes d'une structure hétérogène . . . 57
3.3 Maillages périodiques de cellules élémentaires 2D et 3D . . . 60
3.4 Maillages associés à deux modélisations d'une plaque trouée décrite à des échelles différentes . . . 62
3.5 Maillage de référence d'une plaque perforée modélisée à l'échelle microscopique . . . 63
3.6 Maillage déformé du problème de référence soumis à un chargement de déformation macroscopique uniforme . . . 64
3.7 Maillages déformés du problème avec couplage SBD soumis à un chargement de déformation macroscopique uniforme . . . 65
3.8 Maillage déformé du problème avec couplage mortar soumis à un chargement de déformation macroscopique uniforme . . . 65
3.9 Maillages déformés du problème avec zoom global/local soumis à un chargement de déformation macroscopique uniforme . . . 66
3.10 Courbe de convergence de l'algorithme global/local non-intrusif et courbe de l'erreur en norme énergétique locale maximale . . . 67
3.11 Maillage déformé de la structure de référence sous le chargement imposé de déformation macroscopique linéaire . . . 67
3.12 Maillage de référence d'une plaque composite stratifiée pour une modélisation à l'échelle microscopique . . . 71
3.13 Carte d'erreur en norme énergétique sur la structure locale pour deux techniques de couplage de la littérature . . . 72

4.1 Illustration de la déformée d'une cellule unitaire périodique . . . 77
4.2 Maillage déformé du problème avec couplage en moyenne pour des modèles non-compatibles sous un chargement macroscopique uniforme . . . 82
4.3 Maillage déformé du problème avec couplage en moyenne pour des modèles non-compatibles sous un chargement macroscopique linéaire . . . 82

5.1 Illustration des coordonnées locales de la face droite d'une cellule élémentaire à partir du centre de la cellule et du centre de masse de la face 89
5.2 Carte des contraintes de von Mises de la plaque déformée, pour un chargement de tension-flexion, sous l'hypothèse des petites déformations 93
5.3 Cellule élémentaire rectangulaire avec une proposition d'orientation des vecteurs principaux d'inertie de ses faces 95
5.4 Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour des modèles non-compatibles sous un chargement macroscopique uniforme 103
5.5 Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour des modèles non-compatibles sous un chargement macroscopique linéaire 103
5.6 Maillage d'un problème couplé avec la structure locale sur le bord de la structure globale 105
5.7 Distribution locale de l'erreur en norme énergétique dans le cadre du couplage proposé pour des modèles non-compatibles soumis à un chargement macroscopique uniforme et avec un bord soumis à des conditions aux limites en déplacement . . . 107
5.8 Distribution locale de l'erreur en norme énergétique dans le cadre d'une résolution par couplage de type mortar pour des modèles non-compatibles soumis à un chargement macroscopique linéaire et avec un bord soumis à des conditions aux limites en déplacement 107
5.9 Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour des modèles non-compatibles sous un chargement macroscopique uniforme 107
5.10 Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour des modèles non-compatibles sous un chargement macroscopique linéaire 108

6.1 Degrés de liberté concernés par les conditions périodiques microscopiques pour éviter les redondances 120

7.1 Illustration d'un modèle modifié par une découpe dans la zone de zoom 127
7.2 Effort nodal accessible depuis une sortie standard d'un code éléments finis et Contributions de chacune des faces à l'effort nodal dans un coin 130
7.3 Schéma de l'écosystème numérique mis en place pour la résolution de l'algorithme non-intrusif 132
7.4 Illustration des domaines maillés global, local et auxiliaire d'une plaque composite 2D 134
7.5 Courbes de convergence de l'algorithme global/local non-intrusif pour modèles non-compatibles 135
7.6 Erreur en norme énergétique pour un chargement macroscopique uniforme. Échelle de couleur saturée pour une erreur supérieure à 25% 135
7.7 Erreur en norme énergétique pour un chargement macroscopique uniforme. 135
7.8 Erreur en norme énergétique pour un chargement macroscopique linéaire. Échelle de couleur saturée pour une erreur supérieure à 25%. 136
7.9 Illustration des domaines maillés de référence, global, local et auxiliaire d'une plaque composite tissée en 3D 137
7.10 Courbe de convergence de l'algorithme itératif proposé pour le problème de la plaque composite 3D 137
7.11 Cartes d'erreur relative en norme énergétique entre la solution de référence et les solutions locales issues de la méthode de couplage proposée mise en œuvre de manière non-intrusive pour le problème de la plaque composite 3D 138
7.12 Cartes d'erreur relative en norme énergétique entre la solution de référence et les solutions locales issues de la méthode de zoom global/local non-intrusif pour le problème de la plaque composite 3D 138

A.1 Domaine d'étude sous-structuré avec interface de couplage surfacique et conditions aux limites associées III
A.2 Illustration de la projection d'un nœud esclave sur un élément maître IV

C.1 Illustrations d'une interface unidimensionnelle issue d'un problème 2D et d'une interface bidimensionnelle issue d'un problème 3D XI

D.1 Illustration de l'interfaçage Z-set/Python sur l'exemple du problème global XX

Liste des tableaux

3.1 Principes de résolution d'algorithmes global/local issus de la littérature 59
3.2 Caractéristiques de deux cellules élémentaires 2D et 3D 61
3.3 Distribution locale de l'erreur en fonction de la méthode de couplage employée et du raffinement du maillage de la structure globale pour un chargement macroscopique uniforme 68
3.4 Distribution locale de l'erreur en fonction de la méthode de couplage employée et du raffinement du maillage de la structure globale pour un chargement macroscopique linéaire 70

4.1 Distribution locale de l'erreur en norme énergétique en fonction du chargement et du raffinement du maillage de la structure globale pour le couplage au premier ordre de modèles non-compatibles 83

5.1 Distribution locale de l'erreur en norme énergétique en fonction du chargement et du raffinement du maillage de la structure globale pour le couplage au second ordre de modèles non-compatibles 104

Introduction

Le groupe Safran ambitionne de participer à travers ses recherches à la diminution des émissions de dioxyde de carbone et d'oxydes d'azote ainsi que des niveaux sonores des aéronefs. Des leviers importants pour atteindre ces objectifs sont la réduction de la masse des structures et l'augmentation de leurs performances via l'utilisation de matériaux composites. Ces matériaux de nouvelle génération évoluent avec les architectures des tissages et nécessitent un recours croissant à la simulation numérique afin de minimiser les essais physiques et d'optimiser les structures. Ces différents vecteurs de progrès se traduisent directement en gains économiques mais également en gains écologiques significatifs.

A titre d'exemple, le moteur LEAP, développé par Safran Aircraft Engines et General Electric au sein de CFM International, est annoncé comme ayant une consommation de carburant 15% inférieure à celle des moteurs des générations précédentes. Il permettrait également un gain de masse de 450 kg par avion ainsi qu'une diminution des émissions de CO2 de 15%, des émissions de NOx jusqu'à 50% et du niveau sonore de 15 dB. Ces progrès ont pu être réalisés, entre autres améliorations, en utilisant des matériaux composites tissés 3D pour les aubes de soufflante. Plus grandes mais plus durables et moins nombreuses que dans le cas des moteurs CFM56 (18 contre 24 à 36), elles ont des profils optimisés par le recours intensif à la simulation numérique et ont permis d'augmenter le diamètre du moteur tout en réduisant sa masse.

Avec la croissance du carnet de commandes qui induit une montée en cadence de la production, des nouvelles technologies de contrôle basées sur la microtomographie ont été mises en place (**Figure 1**). Elles offrent des outils d'inspection et d'analyse santé matière non-destructive pour les pièces en matériau-structure tissé à architecture 3D. En cas de mise en évidence d'anomalies, il convient d'évaluer la nocivité des non-conformités. Un axe d'amélioration de ce proces-

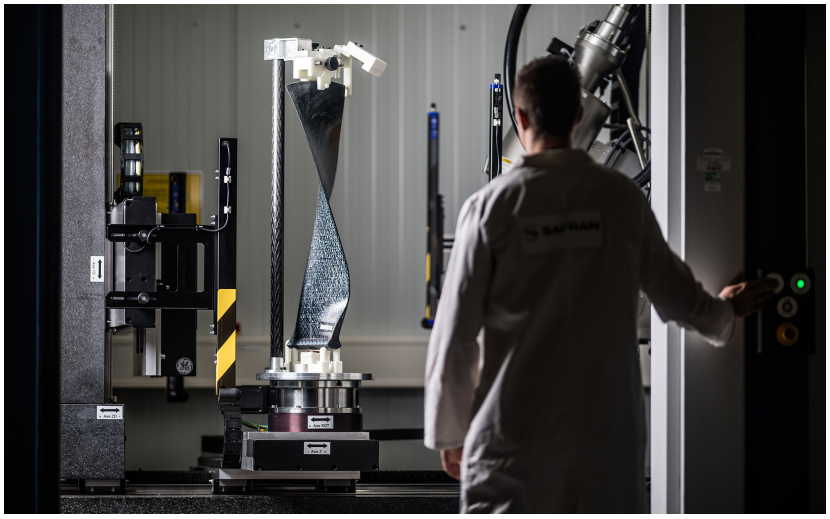


FIGURE 1 – Photographie d'une aube LEAP-1A prête pour le contrôle interne de son tissage 3D par tomographie. © 2016 Adrien Daste / Safran

sus discriminant dans lequel Safran investit est l'évaluation précise de l'impact de ces variations à l'échelle de la pièce. Par exemple, une simulation numérique de la géométrie réelle du tissage avec ses singularités permettrait d'en connaitre les influences et d'en déduire si la pièce serait viable ou

non. Il serait ainsi possible d'assurer une simulation individualisée des pièces en sortie de chaine de production. Pour Safran, l'objectif est alors de pouvoir calculer précisément l'influence du tissage réel, mesuré par exemple par tomographie et modélisé directement à partir de celle-ci, sur la tenue des pièces en composites tissés. L'enjeu est de taille puisque la simulation numérique pièce par pièce permettrait de lever certains conservatismes via la mise en place d'outils d'aide à sanction de dérogation. In fine, le but est d'élargir les tolérances d'acceptation au juste besoin de tenue mécanique de la pièce.

Les défis associés à la modélisation et la simulation d'un tissage réel sont nombreux. A l'échelle fine, un calcul sur une tomographie complète est prohibitif en matière de puissance de calcul et de données à stocker. Il peut aussi manquer de pertinence lorsque l'on cherche à capturer des phénomènes à l'échelle d'une pièce entière. En effet, la tenue des structures composites est déterminée par la détérioration plus ou moins progressive du matériau à différentes échelles : macroscopique, mésoscopique ou même microscopique. L'idée est alors d'introduire un modèle représentatif de la géométrie réelle uniquement dans des zones d'intérêts où des singularités notables par rapport au tissage nominal ont été détectés. Pour tenir compte à la fois de l'ensemble de la pièce et des effets de son chargement, une méthode de simulation à plusieurs échelles semble être un bon compromis. On cherche donc à partir d'un calcul complet à l'échelle macroscopique, modélisé à partir des données géométriques de CAO, à introduire des détails structuraux mésoscopiques modélisés directement depuis une tomographie.

Quelle que soit la méthode envisagée pour introduire le modèle mésoscopique dans le modèle macroscopique, il s'agit, *in fine*, de coupler un modèle éléments finis continu, correspondant à une géométrie macrostructurale (maillages compatibles avec les temps de calcul en bureaux d'étude), avec un modèle adapté de façon précise à la géométrie mésoscopique de zones susceptibles d'être critiques. L'enjeu est alors de coupler ces deux modèles bien qu'ils ne soient pas compatibles en matière de précision, de description, de maillage et de comportements. Bien évidemment, le degré de finesse des modèles va croissant et le caractère prédictif attendu des modèles aux petites échelles est bien meilleur, notamment dans les situations de forts gradients où les approches macroscopiques peuvent être mises en défaut. En outre, d'un point de vue pratique, le développement de méthodes et d'outils de manière intrusive présente l'inconvénient majeur de restreindre fortement leurs utilisations et donc leurs diffusions dans les bureaux d'étude.

Une approche alternative et flexible, bien adaptée au problème traité dans ses principes est celle des méthodes de couplage non-intrusives. En effet, elles sont par essence très prisées des industriels car elles s'inscrivent au plus près des pratiques des bureaux d'études. L'enjeu de ces méthodes est de permettre l'utilisation d'un code standard pour traiter n'importe quel problème de structure en conjonction avec des outils adaptés, non nécessairement inclus dans le code, pour l'analyse des zones critiques. En d'autres termes, il s'agit de pouvoir faire dialoguer un code expert avec n'importe quel code industriel. Le principe maître est de ne toucher ni au modèle ni au maillage éléments finis du problème global mais de substituer itérativement le modèle local à la partie correspondante dans le modèle global. Ces méthodes visent donc à fournir aux industriels de nouveaux outils pour tester facilement des nouveaux modèles et conduire rapidement des calculs précis sur des structures de taille significative.

Dans ce contexte, l'objectif de ce travail de thèse est d'être à même de remplacer, de façon non-intrusive, une partie du modèle éléments finis global macroscopique par un modèle local mésoscopique issu par exemple d'une mesure par tomographie ou de toute autre technique.

Les questions que soulèvent cet objectif sont nombreuses et font l'objet des développements de ce travail de thèse. Une première question concerne la définition elle-même d'un couplage "optimal" des modèles. L'objectif est d'obtenir un raccord évitant la création de singularités, ou de sur-contraintes artificielles, à l'interface entre les modèles, dues à la différence de modélisation intrinsèque à chaque modèle. Une deuxième question porte sur les techniques utilisées pour le traitement numérique du problème de couplage et la gestion des maillages très hétérogènes, relatifs à chacun des modèles. L'objectif est de transférer des informations cohérentes d'un modèle à

l'autre en limitant l'impact des hétérogénéités de maillage sur la solution obtenue. Finalement, la dernière question est relative à la possibilité d'obtenir une formulation non-intrusive du couplage et de son traitement. L'objectif est de fournir une méthode applicable directement dans une suite logiciel disponible dans un bureau d'étude. Pour répondre à ces questions, différents aspects de la mécanique numérique disponible dans la littérature ont été étudiés. Les deux premières questions sont traitées à travers des outils de modélisation multiéchelle et la troisième question à travers des outils de résolution non-intrusive.

Dans la littérature, les matériaux hétérogènes sont, en général, décrits par des modèles multiéchelles. Ceci est dû au fait que les échelles auxquelles interviennent les hétérogénéités sont plus petites que celles auxquelles il est pertinent, d'un point de vue de la mécanique des structures, de donner une réponse prédictive. Dès lors, il est impossible de donner une réponse mécanique macroscopique fiable sans modéliser les hétérogénéités à une échelle plus fine. Tout l'enjeu des méthodes multiéchelles est alors de définir différentes échelles de modélisation puis de les coupler. Des panoramas intéressants sur les méthodes multiéchelles sont proposés dans BELYTSCHKO et SONG [2010]; WEINAN et collab. [2007]. Bien que les méthodes multiéchelles soient efficaces pour modéliser des réponses mécaniques de matériaux hétérogènes, elles souffrent d'une lourdeur nécessaire qui les rend inapplicables sur des simulations de grandes pièces de structure.

Pour pallier ce problème, des méthodes dites global-local ont été développées et c'est dans cette lignée de méthode que s'inscrit ce travail de thèse. Cette terminologie regroupe un grand nombre de méthodes qui sont définies par Noor dans NOOR [1986] comme des méthodes de modélisation hybride et/ou techniques d'analyses hybrides qui ont pour objectif de faire des analyses de structures complexes, les plus précises possibles, avec des ressources informatiques données. Les méthodes global-local permettent de coupler dans une même analyse différentes descriptions dans plusieurs zones d'un même domaine, en les connectant entre elles, soit par des zones de couplage avec recouvrement, c'est par exemple le cas de la méthode Arlequin introduite dans BEN DHIA [1998]; BEN DHIA et RATEAU [2002, 2005]; RATEAU [2003], soit par des zones de couplage sans recouvrement en utilisant des techniques de couplage de type mortar ou de type micro-macro (DAGHIA et LADEVÈZE [2012]; GUIDAULT et collab. [2007]; LADEVÈZE et collab. [2001, 2007]). Les méthodes global-local bien que efficaces et robustes, mettent en jeu des formulations complexes et intrusives vis-à-vis des pratiques de résolutions éléments finis des bureaux d'études. En conséquence, elles ne sont pas applicables simplement sur les architectures logiciels utilisées en bureau d'étude.

Néanmoins, dans cet éventail très vaste de techniques, certaines se démarquent car elles sont, à l'heure actuelle, déjà utilisées en bureau d'étude. Par exemple, les méthodes de zoom structural telles que définies dans KELLEY [1982] et WHITCOMB [1991] fournissent des outils de transfert d'informations entre modèles sous le nom de submodeling. Elles permettent d'introduire localement et à moindre coût, des détails géométriques ou des modèles de comportement plus riches au sein d'une structure de grande taille de manière non-intrusive. Cependant, ces méthodes bien que facilement implémentables et légères en coût de calcul, traitent des problèmes multiéchelles sans réelle séparation d'échelle ce qui peut engendrer des sur-contraintes au niveau des zones de couplage entre les modèles. Elles sont donc peu adaptées aux analyses sur matériaux hétérogènes. Ces problèmes sont d'ailleurs évoqués dans le manuel utilisateur de Ansys [1], en vertu du principe de Saint-Venant, ces méthodes donneraient des résultats satisfaisants à condition que la zone de couplage entre les modèles se situe assez loin des zones de concentration de contraintes. En pratique, ce critère de distance n'est pas défini et il est préconisé à l'utilisateur de vérifier, en post-traitement, que les champs de contraintes au niveau de l'interface de couplage soient en accord entre les deux modèles. Or, comme il est montré à travers ce travail de recherche, les erreurs commises par les techniques de zoom structural lorsqu'elles sont employées avec des modèles de matériaux incompatibles sont relativement importantes et ne sont pas si localisées que cela, même dans des cas de chargements simples. Il en résulte des contraintes fictives, plutôt localisées

1. Ansys Mechanical APDL Advanced Analysis Guide, chap. 7.1 : "if the boundaries of the submodel are far enough away from the stress concentration, reasonably accurate results can be calculated in the submodel."

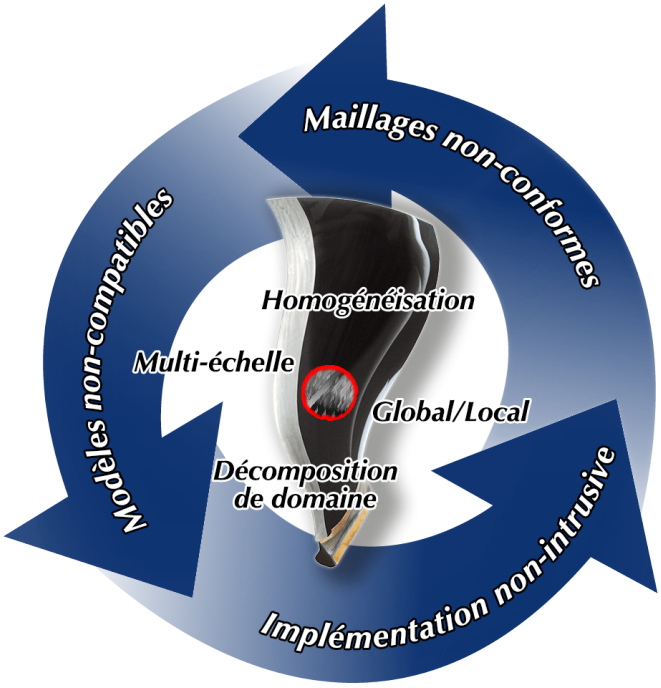


FIGURE 2 – Illustration de la problématique autour du zoom structural pour des modèles non-compatibles.

au niveau des interfaces (mais pas seulement), qui peuvent avoir des conséquences importantes sur l'analyse des résultats de la simulation. Par exemple, dans un cas d'analyse avec modèle d'endommagement, un critère d'endommagement peut s'amorcer depuis l'interface de couplage, et rendre l'ensemble de la simulation non pertinente.

Le concept de résolution non-intrusive, tel qu'il est considéré dans ces travaux, concerne non-seulement la possibilité d'utiliser un code de résolution éléments finis, sans modification de ce dernier, mais aussi sans modification des maillages sur lesquels vont être menées les analyses éléments finis en question. En effet, comme il est évoqué dans BOGGS et collab. [2005], la création d'un maillage d'une pièce de structure, même à l'échelle macroscopique, représente un temps ingénieur considérable dans la durée totale de la simulation de la pièce. C'est tout l'objet des travaux de GENDRE [2009] qui sont adaptés ici dans un cadre multiéchelle.

En somme, plusieurs champs de la mécanique numérique ont été utilisés pour répondre au mieux à l'objectif que nous nous sommes fixé. La **Figure 2** illustre l'imbrication de cette problématique triple autour des incompatibilités de maillages et de modèles ainsi que la nécessité de développer une méthode non-intrusive. Les méthodes issues de ces domaines ont donc fait l'objet d'une étude bibliographique qui sera présentée dans la première partie de ce manuscrit.

Par rapport aux précédents travaux de la littérature, la démarche que nous avons suivie combine trois techniques. Une technique de zoom structural bidirectionnel avec couplage surfacique, une technique de résolution itérative non-intrusive et une approche micro-macro basée sur les théories de l'homogénéisation. Nous nous sommes orienté vers une méthode de couplage surfacique car les outils disponibles en bureau d'étude sont en quasi-totalité développés sur ce principe.

Ce manuscrit comporte trois grandes parties, chacune composée de plusieurs chapitres. La première partie est consacrée aux études bibliographiques. Nous tâchons d'y donner des rappels théoriques sur les méthodes d'homogénéisation numérique, puis un état de l'art des méthodes de simulation multiéchelle usuelles. Cette partie constitue une base de connaissances nécessaire pour appréhender la suite du document : les outils de la littérature utilisés dans ces travaux de recherche y sont systématiquement détaillés. Le chapitre 1 présente une revue des méthodes d'homogénéisation numérique. Il donne dans un premier temps des définitions relatives aux maté-

riaux hétérogènes, puis explicite les méthodes de calcul des comportements homogénéisés sur ce types de matériaux. Le chapitre 2 est consacré aux techniques de simulation multiéchelle ainsi qu'aux méthodes global/local de la littérature, appliquées à des modèles de matériaux hétérogènes.

Dans la deuxième partie du manuscrit, une méthode de couplage adaptée à des modèles présentant de fortes incompatibilités en matière de maillages et de comportements est développée. Tout d'abord, le chapitre 3 illustre des résultats de couplage de modèles de matériaux hétérogènes, par des techniques de la littérature utilisables en bureau d'étude. Puis, dans le chapitre 4, une version simplifiée de la méthode de couplage proposée dans le cadre de ces travaux de recherche est exposée. Si son intérêt principal réside dans sa simplicité de mise en œuvre, elle présente cependant des limites qui ont conduit à en proposer une amélioration dans le chapitre 5. Ce dernier présente une méthode de couplage plus adaptée à des cas industriels concrets puisqu'elle est applicable dans des cas de chargements macroscopiques variables. La méthode y est détaillée et comparée aux techniques de couplage des chapitres 3 et 4.

Finalement, la troisième partie du manuscrit donne les détails techniques relatifs à la mise en œuvre de cette méthode dans un cadre éléments finis. Le chapitre 6 présente les conditions de couplage discrétisées ainsi qu'une méthode de résolution intrusive implémentée dans un code académique. Enfin, de manière à faciliter l'utilisation de cette méthode de couplage dans un cadre industriel, un algorithme de résolution non-intrusif itératif est développé au chapitre 7.

Références

BELYTSCHKO, T. et J.-H. SONG. 2010, «Coarse-graining of multiscale crack propagation», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, nº 5, doi :10.1002/nme.2694, p. 537–563, ISSN 1097-0207. 3

BEN DHIA, H. 1998, «Problèmes mécaniques multi-échelles : La méthode Arlequin», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol. 326, nº 12, doi : 10.1016/S1251-8069(99)80046-5, p. 899–904, ISSN 1287-4620. 3

BEN DHIA, H. et G. RATEAU. 2002, «Application of the Arlequin method to some structures with defects», *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 11, nº 2-4, doi :10.3166/reef.11.291-304, p. 291–304, ISSN 1250-6559. 3

BEN DHIA, H. et G. RATEAU. 2005, «The Arlequin method as a flexible engineering design tool», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, nº 11, doi :10.1002/nme. 1229, p. 1442–1462, ISSN 1097-0207. 3

BOGGS, P. T., A. E. E. ALTHSULER, A. R. E. E. LARZELERE, E. J. WALSH, R. L. CLAY et M. F. S. N. L. HARDWICK. 2005, «DART system analysis», cahier de recherche SAND2005-4647, Sandia National Laboratories, doi :10.2172/876325. 4

DAGHIA, F. et P. LADEVÈZE. 2012, «A micro–meso computational strategy for the prediction of the damage and failure of laminates», *Composite Structures*, vol. 94, nº 12, doi :10.1016/j. compstruct.2012.05.028, p. 3644–3653, ISSN 0263-8223. 3

GENDRE, L. 2009, *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*, thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. 4

GUIDAULT, P.-A., O. ALLIX, L. CHAMPANEY et J. NAVARRO. 2007, «A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures», *Computational Structures Technology*, vol. 85, nº 17–18, doi :10.1016/j.compstruc.2006.08.085, p. 1360–1371, ISSN 0045-7949. 3

KELLEY, F. 1982, «Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method», dans *Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*, p. 39–42. 3

LADEVÈZE, P., O. LOISEAU et D. DUREISSEIX. 2001, «A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, nº 1-2, doi :10.1002/nme.274, p. 121–138. 3

LADEVÈZE, P., D. NÉRON et P. GOSSELET. 2007, «On a mixed and multiscale domain decomposition method», *Domain Decomposition Methods : recent advances and new challenges in engineering*, vol. 196, nº 8, doi :10.1016/j.cma.2006.05.014, p. 1526–1540, ISSN 0045-7825. 3

NOOR, A. K. 1986, «Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2, nº 4, doi :10.1016/0168-874X(86)90020-X, p. 333–346, ISSN 0168-874X. 3

RATEAU, G. 2003, *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris. 3

WEINAN, E., B. ENGQUIST, X. LI, W. REN et E. VANDEN-EIJNDEN. 2007, «Heterogeneous Multiscale Methods : A Review», *Communications in Computational Physics*, vol. 2, nº 3, p. 367–450. 3

WHITCOMB, J. D. 1991, «Iterative global/local finite element analysis», *Computers & Structures*, vol. 40, nº 4, doi :10.1016/0045-7949(91)90334-I, p. 1027–1031, ISSN 0045-7949. 3

Partie I : Études bibliographiques

Chapitre 1

Hétérogénéités et homogénéisation : rappels et cas de l'homogénéisation périodique au second gradient

Sommaire

1.1 Introduction 10
1.2 Généralités sur les matériaux hétérogènes 10
1.2.1 Définitions 10
1.2.2 Notion d'échelles 11
1.2.3 Notion de propriétés effectives 12
1.2.4 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER) 12
1.3 Simulation des matériaux hétérogènes 13
1.3.1 Détermination des propriétés effectives d'une microstructure 13
1.3.2 Construction de modèles numériques de microstructures 14
1.3.3 Construction d'un milieu homogène équivalent « classique » 14
1.3.4 Construction d'un milieu homogène équivalent à partir de la théorie du second gradient 15

1.1 Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est d'introduire des notions de base relatives à la description de matériaux hétérogènes et de présenter une vision générale des méthodes de modélisation associées. Le but est de donner au lecteur un panorama des méthodes de modélisation existantes et de tracer le lien logique vers la théorie du second gradient utilisée dans ces travaux.

Pour cela, la **Section 1.2** s'attache plutôt à décrire les matériaux hétérogènes d'un point de vue phénoménologique. Par exemple, la notion d'échelle, intrinsèquement liée à ce type de matériau, y est introduite. Cette notion est primordiale dans l'analyse et la modélisation du comportement des matériaux hétérogènes. C'est pourquoi elle sert de fil conducteur pour présenter les techniques de modélisations de ces matériaux dans l'ensemble de ces travaux. La **Section 1.3**, quant à elle, dresse un panorama des techniques d'homogénéisation numérique et détaille celle relative à la théorie du second gradient proposée par KOUZNETSOVA, VARVARA [2002] et son utilisation dans le cadre de milieux de Cauchy proposée par OTERO et collab. [2016].

1.2 Généralités sur les matériaux hétérogènes

1.2.1 Définitions

Un matériau est dit hétérogène lorsqu'il possède au moins deux phases, caractérisées par un changement brutal de leurs propriétés physiques (**Figure 1.1**). Ces phases peuvent être composées d'un seul constituant dans des états différents (par exemple les matériaux composites SiC/-SiC) ou bien de vides, on parle alors de matériaux poreux ou de mousses dans le cas d'un matériau avec une porosité très élevée (en général 70-95% du volume). L'avantage essentiel de ce type de matériaux est de tirer parti des propriétés physiques de ses différents constituants pour obtenir un matériau final adapté à des besoins spécifiques. Dans ce cas, le matériaux est dit *architecturé* (ASHBY [2013]). Il peut s'agir par exemple de l'amélioration des caractéristiques mécaniques (rigidité, amortissement, légèreté etc...), ou des propriétés physiques (perméabilité, conductivité thermique, permittivité électrique) voire même, la création de propriétés insolites avec par exemple des coefficients de Poisson négatifs.



FIGURE 1.1 – Exemple de matériau hétérogène comprenant plusieurs phases : mie, fruits, bulles d'air, croûte.

Les exemples sont légion dans les secteurs industriels qui ont su tirer parti de ce type de matériaux pour leurs applications avec notamment les matériaux poreux ou granulaires, les mousses

métalliques ou céramiques... Cependant, les secteurs industriels n'ont pas l'apanage des matériaux hétérogènes puisque une grande partie des matériaux du vivant présentent également ces caractéristiques. Les exemples, traditionnellement les plus cités sont le bois et les tissus osseux qui sont un assemblage de cellulose et lignine pour le premier, et de collagène et hydroxyapatite pour les seconds. Finalement, cette logique peut être poussée jusqu'à dire que tous les matériaux sont hétérogènes puisqu'il existe une échelle à partir de laquelle des hétérogénéités apparaissent.

Un type de matériaux hétérogènes est largement utilisé dans l'industrie et en particulier dans les industries nautique, aéronautique et spatiale. Il s'agit des matériaux composites. Ce type de matériaux consiste à associer une phase rigide discontinue appelée *renfort* avec une phase, généralement continue, appelée *matrice*. Les renforts, qui peuvent être ordonnés ou non, à fibres longues ou courtes, ou de type particulaire, servent principalement à la tenue mécanique du matériau composite. La matrice quant à elle, assure le transfert des charges entre les renforts mais permet aussi de garantir l'intégrité physique des renforts en servant par exemple de bouclier thermique ou chimique (oxydation).

L'emploi des matériaux composites s'est considérablement généralisé dans de nombreux secteurs industriels grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques intéressantes mais aussi grâce à leur grande résistance aux dilatations thermiques ou aux agressions chimiques. Par exemple, dans le transport aérien la proportion des matériaux composites utilisés dans les avions de ligne est passée de 10% en masse dans les années 1990 à plus de 50% pour les avions les plus récents. Le même constat est fait dans l'industrie spatiale où la présence de composites était inférieure à 5% pour la première version du lanceur Ariane contre environ 33% dans la future version Ariane 6.

L'arrivée de ces nouveaux matériaux a d'abord représenté un changement important dans les techniques de conception et de calcul, mais aujourd'hui, la maturité technologique sur ces matériaux est telle qu'ils sont utilisés pour la fabrication de pièces de structure critiques. Un des exemples les plus parlants est celui du moteur LEAP (Figure 1.2) fabriqué par CFM International (General Electric et Safran).



FIGURE 1.2 – Illustration technique 3D d'un moteur LEAP-1A.
© 2017 Antonio Gomez / Safran

1.2.2 Notion d'échelles

La plupart des matériaux hétérogènes possèdent, par nature, un caractère multiéchelle. C'est-à-dire que les tailles des constituants de chacune des phases qui constituent le matériau sont inférieures à la taille de la structure fabriquée à partir de ce matériau. Il est alors commode de définir une échelle macroscopique pour caractériser le matériau à l'échelle de la structure et une échelle microscopique pour caractériser les constituants du matériau. Parfois, l'échelle microscopique ca-

ractérise les constituants de chacune des phases et une échelle mésoscopique est introduite pour qualifier les constituants du matériau.

D'un point de vue mécanique, un matériau hétérogène peut donc être décrit d'après ces différentes échelles par :

- une échelle macroscopique où le comportement est homogène,
- éventuellement, une échelle mésoscopique (intermédiaire) où le comportement est hétérogène (mais peut être homogénéisé à l'échelle supérieure le plus souvent, pour les stratifiés par exemple, à l'aide de théorie de plaques ou de coques),
- une échelle microscopique où le comportement est hétérogène (mais peut être homogénéisé à l'échelle supérieure. La théorie la plus rigoureuse pour le faire est, dans le cas des matériaux périodiques, la théorie de l'homogénéisation asymptotique proposée par SANCHEZ-PALENCIA [1974]).

Ce type de description particulièrement adaptée à la nature multiéchelle de ces matériaux permet de décrire des phénomènes physiques aux différentes échelles, permettant ainsi de caractériser le matériau à l'échelle de la structure ou de ses constituants. Dans la suite, il ne sera plus fait référence à l'échelle mésoscopique qui n'est pas nécessaire dans ces travaux.

Les échelles sont dites séparées lorsque les dimensions caractéristiques des hétérogénéités sont largement inférieures aux dimensions de la structure. Les conséquences sont que, d'une part, les influences des hétérogénéités sont très localisées, si bien qu'elles n'ont pas d'influence à l'échelle macroscopique, et que, d'autre part, le chargement macroscopique peut être considéré comme homogène à l'échelle des hétérogénéités. En d'autres termes, des longueurs caractéristiques macroscopique et microscopique peuvent être associées à chacune des échelles, afin de décrire des phénomènes mécaniques à différentes longueurs d'onde. Cette hypothèse n'est souvent pas satisfaite dans le cas de matériaux architecturés dont les composants ont des dimensions relativement importantes. Par exemple, dans certains types de matériaux tissés, les renforts parcourent la pièce entière.

1.2.3 Notion de propriétés effectives

La notion de propriété effective d'un matériau hétérogène est relative à l'influence de la microstructure sur la réponse macroscopique du matériau. En d'autre termes, il s'agit des propriétés macroscopiques équivalentes d'un matériau, pour un échantillon de volume de matière statistiquement représentatif de la microstructure.

En fonction de la méthode utilisée pour estimer les propriétés effectives (macroscopiques) d'un milieu, il est nécessaire de connaitre certaines des propriétés locales de chaque constituant et un certain nombre d'informations sur la microstructure, telle que la fraction volumique de chaque phase.

Dans certaines conditions, typiquement, lorsqu'il existe un *Volume Élémentaire Représentatif* (VER) de la microstructure, le matériau hétérogène peut être remplacé par un milieu homogène équivalent qui est représentatif de la microstructure sans la décrire précisément.

1.2.4 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER)

La définition du VER d'une structure est cruciale dans la détermination des propriétés effectives d'un matériau architecturé. Dans l'idéal, sa taille caractéristique doit être d'une part d'un ordre de grandeur inférieure à celle de la structure qui est caractérisée et d'autre part, d'un ordre de grandeur supérieur aux tailles caractéristiques des hétérogénéités. Ces conditions assurent que la structure et le VER peuvent être vus comme des milieux continus. Néanmoins, cette définition requiert une bonne séparation des échelles.

Lorsque les propriétés macroscopiques sont déterminées sur un volume V inférieur au VER, elles sont plutôt qualifiées de propriétés apparentes. Ces dernières convergent vers les propriétés effectives jusqu'à ce que $V \geq V_{RVE}$. En pratique, la définition d'un VER n'est pas évidente et certains critères basés sur des considérations physiques et géométriques permettent de valider ou non

des dimensions d'échantillon (KANIT et collab. [2003]). Néanmoins, dans le cadre de matériaux architecturés, bien souvent, le VER peut être représenté par une cellule élémentaire *unit-cell* de petite taille.

1.3 Simulation des matériaux hétérogènes

La nécessité de simuler des structures à microstructures hétérogènes est bien sûr très présente dans les milieux industriels et fait encore l'objet de travaux de recherche importants dans la communauté académique. Trois grandes tendances se dégagent lorsqu'il s'agit de simuler des matériaux hétérogènes :

- La simulation à l'échelle microscopique (*Direct Numerical Simulation* (DNS)). Cela consiste à modéliser entièrement la microstructure avec ses différents constituants. Souvent ces simulations sont effectuées par des méthodes parallèles détaillées dans la **Section 2.2.3**. Ce type de modélisation donne lieu à des modèles extrêmement complexes et lourds à l'échelle d'une structure complète. Cette méthode est donc prohibitive en matière de temps de calcul et de ressources numériques. De plus, les solutions obtenues sont complexes à traiter pour en tirer des informations pertinentes d'un point de vue ingénieur.
- La simulation à l'échelle macroscopique. La structure est modélisée par un milieu continu dont les propriétés effectives sont déterminées, *a priori*, à partir d'un VER. En général, ces propriétés sont difficiles à obtenir de manière phénoménologique et de nombreuses méthodes mathématiques ou numériques s'attachent à proposer des approximations des propriétés effectives d'un matériau à partir de descriptions de ses constituants.
- La simulation multiéchelle. Le terme multiéchelle est employé de façon large pour désigner des méthodes qui pour traiter le problème à une échelle donnée intègrent des informations à une ou plusieurs échelles inférieures. Elles sont donc basées de façon plus ou moins explicites sur des approches d'homogénéisation. Si ces méthodes sont très efficaces pour des problèmes linéaires elles peuvent devenir très coûteuses dans le cas non-linéaire. En effet, comme dans la méthode FE2 (FEYEL [2003]; FEYEL et CHABOCHE [2000]), leur application conduit souvent à résoudre, à chaque pas de temps et en chaque point de Gauss, un problème non-linéaire sur le VER, ce qui est vite prohibitif.

La simulation numérique à l'échelle macroscopique a connu un essor considérable car elle est souvent suffisante pour de nombreux problèmes d'ingénierie et s'adapte bien à des méthodes de résolution par éléments finis. En effet, les structures décrites par un milieu équivalent de Cauchy peuvent être simulées sans difficultés dans les codes de calcul industriel actuels. Néanmoins, dans certains cas, ces méthodes montrent leurs limites et ne sont pas assez précises. C'est notamment le cas lorsqu'il y a une mauvaise séparation des échelles. Dans tous les cas, ces théories doivent être complétées au voisinage des bords et des singularités géométriques ou de chargement.

Dans le cadre de ces travaux, l'objectif est d'introduire une description microscopique dans un milieu homogène équivalent décrit à l'échelle macroscopique. Pour cela, deux méthodes d'homogénéisation numérique sont introduites dans le cadre de l'élasticité linéaire. Pour un panorama plus large sur les méthodes d'homogénéisation, le lecteur est invité à se référer par exemple à KANOUTÉ et collab. [2009].

1.3.1 Détermination des propriétés effectives d'une microstructure

De nombreuses méthodes analytiques ou semi-analytiques permettent de déterminer les propriétés effectives d'une cellule élémentaire (HASHIN et SHTRIKMAN [1963]; HILL [1952]; REUSS [1929]; VOIGT [1889]). Néanmoins, ces méthodes proposent des approximations des champs locaux qui les rendent peu pertinentes dans le cas de microstructures complexes.

A contrario, les méthodes numériques permettent de calculer des champs locaux de manière relativement précise. Dans le cadre de ces travaux, les approches numériques sont favorisées car elles permettent de déterminer des propriétés effectives de microstructures complexes.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour le calcul de propriétés effectives d'un matériau. La plus répandue est basée sur l'utilisation d'un modèle éléments finis classique d'une cellule unitaire (*unit-cell method*). C'est la méthode utilisée dans le cadre de ces travaux.

BOUHALA et collab. [2014]; MOËS et collab. [2003] proposent une méthode basée sur des discrétisations éléments finis enrichies de type X-FEM (*eXtended Finite Element Method* par MOËS et collab. [1999]), et GFEM (*Generalized Finite Element Method* par STROUBOULIS et collab. [2001]).

D'autres méthodes, basées sur les travaux de MOULINEC et SUQUET [1994, 1995] utilisent la transformée de Fourier rapide (*Fast-Fourier-Transform* (FFT)) pour déterminer les propriétés effectives d'une microstructure donnée. Ces méthodes permettent d'évaluer directement les propriétés homogénéisées d'une cellule à partir d'images de microstructures sans utiliser de modèles éléments finis. Elles ont été développées, entre autres, dans le cadre de l'élasticité linéaire WILLOT et collab. [2008], et non-linéaire LEBENSOHN [2001]; MOULINEC et SUQUET [1998] ou de la propagation de fissure LI et collab. [2012]. D'après MICHEL et collab. [1999], cette méthode est particulièrement bien adaptée, dans des cas d'élasticité linéaire, sans hétérogénéités trop importantes (inclusions rigides ou vides). Une méthode FFT alternative a été proposée par YVONNET [2012], dans laquelle les opérateurs ne sont pas calculés dans le domaine fréquentiel.

1.3.2 Construction de modèles numériques de microstructures

Quelque soit la méthode envisagée pour simuler le comportement d'un matériau architecturé, il est nécessaire de construire un modèle numérique de la microstructure. La construction d'un modèle numérique à l'échelle microscopique peut se faire par différents moyens en fonction du type de problème traité. Par exemple dans le cas de microstructures aléatoires, elles peuvent être générées informatiquement en utilisant des algorithmes aléatoires. Une synthèse des méthodes de génération de VER en trois dimensions a été proposée par BARGMANN et collab. [2018].

Des microstructures peuvent également être générées à partir de microstructures réelles. Dans ce cas, il est nécessaire de capturer des images volumiques de la microstructure, par exemple à l'aide d'un tomographe. Un ensemble d'étapes intermédiaires est alors nécessaire afin de reconstruire des modèles numériques à partir des images tomographiques en trois dimensions (BÉNÉZECH et COUÉGNAT [2019]; COUÉGNAT et collab. [2013]; MENDOZA et collab. [2019]).

Finalement, les modèles de microstructures périodiques sont intéressants pour deux raisons. La première est que les matériaux architecturés présentent généralement des arrangements périodiques. La deuxième raison est que ces structures peuvent être entièrement décrites par un unique VER dupliqué dans l'espace. Pour ces raisons, dans le cadre de ces travaux, les différentes microstructures étudiées ont été générées, à l'échelle d'une cellule unitaire, par des mailleurs éléments finis classiques pour les maillages simples et par TexGen [1] pour les tissages.

1.3.3 Construction d'un milieu homogène équivalent « classique »

La construction d'un milieu homogène équivalent repose sur une approximation de la loi de comportement à l'échelle de la microstructure. Le principe consiste à exprimer une loi de comportement prenant en compte les hétérogénéités mais sans les représenter. Pour cela, les grandeurs microscopiques sont liées aux grandeurs macroscopiques par une relation de moyenne sur le VER :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.1}$$

Les définitions de ces moyennes ont initialement été introduites par HILL [1963]. Elles donnent des conditions d'admissibilité cinématique ou statique sur la solution cherchée.

La relation de comportement entre $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}$ est alors obtenue par le respect de l'équivalence énergétique entre les échelles macroscopique et microscopique. Cette équivalence est appelée

1. https://github.com/louisepb/TexGen

condition de Hill-Mandel (HILL [1963]; SUQUET [1985]). Elle s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \tag{1.2}$$

et donne lieu à la résolution d'un problème aux limites (*Boundary Value Problem* (BVP)) qui est défini sur une cellule élémentaire de VER.

En pratique, plusieurs choix de conditions dans la résolution du BVP satisfont la condition de Hill-Mandel (1.2). Il s'agit des conditions homogènes au contour de type cinématique (*Kinematic Uniform Boundary Condition* (KUBC)), ou de type statique (*Static Uniform Boundary Condition* (SUBC)) qui s'écrivent respectivement :

- $\underline{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} \cdot \underline{x}$ sur $\partial\Omega$
- $\boldsymbol{\sigma}\underline{n} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\underline{n}$ sur $\partial\Omega$

où $\underline{x}$ est le vecteur des coordonnées du VER et $\underline{n}$ la normale unitaire sortante sur le bord $\partial\Omega$ du VER. Ou bien, il s'agit de conditions de type périodique (*Periodic Boundary Condition* (PBC)), où le champ de déplacement solution est cherché sous la forme :

$$\underline{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^{0} \cdot \underline{x} + \underline{w} \tag{1.3}$$

avec $\underline{w}$ périodique sur $\partial\Omega$.

Le choix des conditions aux limites avec lesquelles le BVP est résolu influe sur les paramètres effectifs du matériau. Ainsi, il a été montré par exemple dans HUET [1990], en fonction de la taille de la cellule, que les conditions aux limites KUBC donnent une borne supérieure dans l'estimation du comportement homogénéisé d'une cellule et des conditions SUBC donnent une borne inférieure. Dans AMIEUR et collab. [1995]; HAZANOV et HUET [1994] ces bornes sont comparées à des conditions mixtes plus représentatives des conditions d'essai en laboratoire. Des conditions PBC, particulièrement bien adaptées à des microstructures périodiques, donnent une estimation du comportement homogénéisé qui se situe également entre ces deux bornes.

Il se trouve que les conditions PBC donnent également les meilleures estimations du comportement effectif de microstructures non-nécessairement périodiques. En effet, dans KANIT et collab. [2003]; TERADA et collab. [2000], il est montré que les conditions PBC convergent plus vite, en fonction de la taille du VER, vers les propriétés effectives d'un matériau avec une morphologie aléatoire. Il est également montré que pour un volume de VER suffisamment grand, les propriétés effectives estimées par les différentes conditions convergent vers la même valeur.

Comme évoqué précédemment, les simulations numériques à l'échelle macroscopique basées sur ces approches de propriétés effectives sont souvent suffisantes. Cependant, leurs limites apparaissent dans des cas de mauvaises séparations des échelles.

1.3.4 Construction d'un milieu homogène équivalent à partir de la théorie du second gradient

Si les hypothèses de l'homogénéisation classique ne sont plus valides, c'est le cas lorsque les sollicitations ne sont plus constantes à l'échelle du VER ou bien lorsque la microstructure est de taille non-négligeable face aux dimensions de la structure, les techniques d'homogénéisation par des milieux continus généralisés permettent de rendre compte de certains effets d'échelle. L'enjeu est alors d'étendre la validité de la théorie classique de l'homogénéisation à des cas où la séparation des échelles n'est plus tout à fait valide.

En pratique, les milieux continus généralisés représentent une extension des milieux de Cauchy. Par rapport à ces derniers, deux classes de méthodes se distinguent :

- les milieux d'ordre supérieur dans lesquels des degrés de liberté sont ajoutés au champ de déplacement classique des milieux de Cauchy. Les milieux de Cosserat (ou micropolaire) des frères COSSERAT et COSSERAT [1909] ou les milieux micromorphes (ERINGEN et SUHUBI [1964]; GERMAIN [1973]; MINDLIN [1964]) en sont des exemples typiques ;

- les milieux de degrés supérieurs pour lesquels des gradients d'ordre supérieur sont utilisés pour évaluer les déformations. La théorie du second gradient (MINDLIN et ESHEL [1968]; TOUPIN [1962, 1964]), en fait partie.

Il est intéressant de noter que des liens existent entre ces méthodes. Par exemple, les milieux micromorphes peuvent décrire des milieux de Cosserat ou des milieux du second gradient dans des cas particuliers. D'autres méthodes combinent les deux approches, c'est notamment le cas des théories multipolaires (GREEN et RIVLIN [1964]).

Dans ces travaux, la deuxième classe de méthodes a été retenue dans la mesure où les codes industriels ne proposent pas de degrés de liberté supplémentaires. Les théories d'homogénéisation basées sur les milieux du second gradient consistent à considérer un volume élémentaire de matériau Ω et à généraliser les conditions aux limites utilisées classiquement à des sollicitations non-homogènes à l'échelle du VER. Si les premiers travaux semblent remonter à GOLOGANU et collab. [1997] et FOREST [1998], la méthode d'homogénéisation proposée par KOUZNETSOVA, VARVARA [2002] s'est montrée particulièrement adaptée aux besoins de cette étude.

1.3.4.1 Liens entre les quantités cinématiques macroscopique et microscopique

Lorsque les échelles macroscopique et microscopique ne sont pas clairement séparées, le champ de déplacement solution à l'échelle du VER Ω peut être cherché comme la somme d'une contribution macroscopique, issue d'un développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage du centre géométrique $\underline{X}_c$ du VER, et d'une contribution microscopique $\underline{w}$. En notant $\underline{u}_C = \underline{x}_C - \underline{X}_C$ le déplacement du centre de la cellule, le champ de déplacement $\underline{u}$ sur le VER au voisinage de $\underline{X}_C$ s'écrit alors :

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = \underline{u}_C + \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right)\cdot\Delta\underline{X} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^M : \Delta\underline{X}\otimes\Delta\underline{X} + \underline{w}(\Delta\underline{X}) \tag{1.4}$$

où $\mathbf{F}^M = \frac{\partial\underline{\underline{\phi}}(\underline{X}_c)}{\partial\underline{X}}$ et $\mathbf{G}^M = \frac{\partial}{\partial\underline{X}}\left(\frac{\partial\underline{\underline{\phi}}(\underline{X}_c)}{\partial\underline{X}}\right)$ sont respectivement des tenseurs d'ordre deux et trois, $\Delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_c$ et $\Delta\underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_c$.

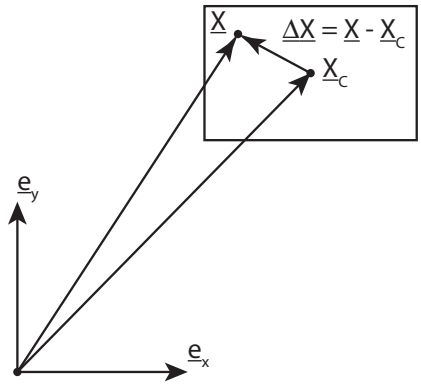


FIGURE 1.3 – Notations des vecteurs positions associés à une cellule élémentaire.

En cherchant à relier les grandeurs macroscopiques et microscopiques par des relations de moyennes sur le VER comme dans le cas classique (voir (1.1)), les quantités macroscopiques $\mathbf{F}^M$ et $\mathbf{G}^M$ sont définies *a priori* par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{F}^M(\underline{X}_C) & = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \mathbf{F}(\underline{X}_C,\underline{X})\,d\Omega \\ \mathbf{G}^M(\underline{X}_C) & = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \mathbf{G}(\underline{X}_C,\underline{X})\,d\Omega \end{array}\right. \tag{1.5}$$

où $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont respectivement le gradient de la transformation et le gradient du gradient de la transformation définis par :

$$\mathbf{F} = \nabla\underline{x} = \mathbf{F}^M + \mathbf{G}^M\cdot\Delta\underline{X} + \nabla\underline{w} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{G} = \nabla(\nabla\underline{x}) = \mathbf{G}^M + \nabla(\nabla\underline{w})$$

et V_Ω le volume du VER Ω.

Si $\underline{X}_c$ est le centre géométrique du VER, ce qui est le cas ici, alors la première relation $(1.5)_1$ est satisfaite pour tout champ $\underline{w}$ tel que :

$$\int_\Omega \nabla \underline{w} \, d\Omega = \mathbf{0}$$

Cette condition d'admissibilité cinématique est identique au cas classique et il est possible de montrer que des conditions KUBC ou PBC la satisfont.

La deuxième relation $(1.5)_2$ est plus problématique dans la mesure où elle nécessite d'écrire des conditions d'admissibilité cinématique sur les dérivées de la fluctuation sur le bord du VER. En effet, la relation $(1.5)_2$ est satisfaite pour :

$$\int_\Omega \nabla(\nabla \underline{w}) \, d\Omega = \mathbf{0}$$

qui peut s'écrire sur le bord d'après le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \underline{w} \otimes \underline{N} \, d\Gamma = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

Pour garder un BVP dont les constituants sont décrits par un milieu de Cauchy, une solution donnée par KOUZNETSOVA et collab. [2002]; KOUZNETSOVA, VARVARA [2002] consiste à écrire une relation entre les quantités macroscopiques et microscopiques à partir du moment du gradient de la transformation $\mathbf{F}$:

$$\int_\Omega \mathbf{F} \otimes \Delta\underline{X} \, d\Omega = \mathbf{F}^M \otimes \int_\Omega \Delta\underline{X} \, d\Omega + \mathbf{G}^M \cdot \int_\Omega \Delta\underline{X} \otimes \Delta\underline{X} \, d\Omega + \int_\Omega \nabla \underline{w} \otimes \Delta\underline{X} \, d\Omega$$

Il est alors possible de montrer que :

$$\mathbf{G}^M \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^M : \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}_d = \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes \Delta\underline{X} \otimes \underline{N} \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \underline{w} \otimes \Delta\underline{X} \otimes \underline{N} \, d\Gamma$$

La relation $(1.5)_2$ est alors remplacée par la relation suivante :

$$\mathbf{G}^M \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^M : \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}_d = \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes \Delta\underline{X} \otimes \underline{N} \, d\Gamma$$

avec la conditions d'admissibilité cinématique associée qui porte sur la composante normale du moment de la fluctuation $\underline{w}$ sur le bord :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{w} \otimes \Delta\underline{X} \otimes \underline{N} \, d\Gamma = \mathbf{0}$$

1.3.4.2 Condition de Hill-Mandel généralisée et équation d'équilibre du BVP

Pour écrire une équivalence énergétique entre les échelles macroscopique et microscopique, une version généralisée de la condition de Hill-Mandel est formulée (KACZMARCZYK et collab. [2008]; KOUZNETSOVA et collab. [2002]). Elle s'exprime comme l'égalité de la variation locale du travail à l'échelle macroscopique (FLECK et HUTCHINSON [1997]) avec la moyenne volumique de la variation du travail sur le VER à l'échelle microscopique :

$$\boldsymbol{\sigma}_M : \delta\mathbf{F}^M + \mathbf{Q}_M \vdots \delta\mathbf{G}^M = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{F} \, d\Omega \tag{1.7}$$

Cette relation doit être satisfaite pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible (1.4), le deuxième terme de (1.7) s'écrit alors :

$$\frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{F} \, d\Omega = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega : \delta\mathbf{F}^M + \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \otimes \Delta\underline{X} \, d\Omega \vdots \delta\mathbf{G}^M + \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta\underline{w}) \, d\Omega \tag{1.8}$$

Afin de satisfaire la condition de Hill-Mandel, il est alors nécessaire de définir un tenseur des contraintes homogénéisées d'après la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega$$

ainsi qu'un tenseur des contraintes homogénéisé à l'ordre deux :

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\otimes\Delta\underline{\mathrm{X}}\,\mathrm{d}\Omega$$

et finalement, le dernier terme de (1.8) doit être nul. Il donne, sous une forme variationnelle, l'équation d'équilibre sur le VER qui doit être satisfaite pour tout champ admissible $\underline{w}$:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta\underline{w})\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

Cette dernière équation constitue l'équilibre local à l'échelle microscopique pour la formulation du BVP.

1.3.4.3 Le cas d'un milieu de Cauchy comme milieu homogénéisé de substitution

La relation (1.7) est donnée pour un milieu homogénéisé de substitution de type second gradient. Comme évoqué précédemment, ce type de modèle n'est en général pas accessible dans les codes de calcul industriel. Dans Otero [2016]; Otero et collab. [2016], une alternative est proposée pour conserver un milieu de substitution homogénéisé classique. Pour cela, la condition de Hill-Mandel est donnée en moyenne volumique également à l'échelle macroscopique sur un domaine homogène de substitution Ω_{H} de volume V_{H} :

$$\frac{1}{\mathrm{V}_{\mathrm{H}}}\int_{\Omega_{\mathrm{H}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{H}} : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{F}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.9}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{H}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy sur le modèle homogène de substitution et $\mathbf{F}_{\mathrm{H}}$ le tenseur du gradient de la transformation à l'échelle macroscopique qui s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\mathrm{H}} = \mathbf{F}^{\mathrm{M}} + \mathbf{G}^{\mathrm{M}}\cdot\Delta\underline{\mathrm{X}}$$

Cette relation doit être satisfaite pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible (1.4), la relation (1.9) donne donc les deux relations de couplage suivantes :

$$\frac{1}{\mathrm{V}_{\mathrm{H}}}\int_{\Omega_{\mathrm{H}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathrm{V}_{\mathrm{H}}}\int_{\Omega_{\mathrm{H}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{H}}\otimes\Delta\underline{\mathrm{X}}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\mathrm{V}_\Omega}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\otimes\Delta\underline{\mathrm{X}}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.10}$$

ainsi que l'équation d'équilibre locale identique au cas précédent :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta\underline{w})\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1.11}$$

Dans le cadre de ces travaux, il est pratique de définir les relations (1.10) et (1.11) en terme d'efforts d'interface pour $\mathrm{V}_\Omega = \mathrm{V}_{\mathrm{H}}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int_{\partial\Omega_{\mathrm{H}}} \Delta\underline{\mathrm{X}}\otimes\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{d}\Gamma & = & \int_{\partial\Omega} \Delta\underline{\mathrm{X}}\otimes\underline{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \int_{\partial\Omega_{\mathrm{H}}} \Delta\underline{\mathrm{X}}\otimes\Delta\underline{\mathrm{X}}\otimes\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{H}}\,\mathrm{d}\Gamma & = & \int_{\partial\Omega} \Delta\underline{\mathrm{X}}\otimes\Delta\underline{\mathrm{X}}\otimes\underline{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ 0 & = & \int_{\partial\Omega} \underline{\mathrm{F}}\cdot\delta\underline{w}\,\mathrm{d}\Gamma \end{array}\right. \tag{1.12}$$

où $\underline{\mathrm{F}} = \boldsymbol{\sigma}\underline{\mathrm{N}}$ est le vecteur contraintes sur le bord du VER et $\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{H}}\underline{\mathrm{N}}$ le vecteur contraintes sur le bord d'un domaine homogène de substitution qui a les mêmes dimensions que le VER.

Références

AMIEUR, M., S. HAZANOV et C. HUET. 1995, «Numerical and Experimental Assessment of the Size and Boundary Conditions Effects for the Overall Properties of Granular Composite Bodies Smaller than the Representative Volume», dans *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics*, édité par D. F. Parker et A. H. England, Solid Mechanics and Its Applications, Springer Netherlands, Dordrecht, ISBN 978-94-015-8494-4, p. 149–154, doi : 10.1007/978-94-015-8494-4_21. 15

ASHBY, M. 2013, «Designing architectured materials», *Scripta Materialia*, vol. 68, nº 1, doi :10.1016/j.scriptamat.2012.04.033, p. 4–7, ISSN 1359-6462. 10

BARGMANN, S., B. KLUSEMANN, J. MARKMANN, J. E. SCHNABEL, K. SCHNEIDER, C. SOYARSLAN et J. WILMERS. 2018, «Generation of 3D representative volume elements for heterogeneous materials : A review», *Progress in Materials Science*, vol. 96, doi :10.1016/j.pmatsci.2018.02.003, p. 322–384, ISSN 0079-6425. 14

BÉNÉZECH, J. et G. COUÉGNAT. 2019, «Variational segmentation of textile composite preforms from X-ray computed tomography», *Composite Structures*, vol. 230, doi :10.1016/j.compstruct.2019.111496, ISSN 0263-8223. 14

BOUHALA, L., Y. KOUTSAWA, A. MAKRADI et S. BELOUETTAR. 2014, «An advanced numerical method for predicting effective elastic properties of heterogeneous composite materials», *Composite Structures*, vol. 117, doi :10.1016/j.compstruct.2014.06.028, p. 114–123, ISSN 0263-8223. 14

COSSERAT, E. M. P. et F. COSSERAT. 1909, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et fils, Paris. OCLC : 422394228. 15

COUÉGNAT, G., H. AYADI, C. SAURAT et E. ROHMER. 2013, «Towards realistic geometric modeling of woven fabrics», dans *19th International Conference on Composite Materials (ICCM19), Montréal, Canada*, Montréal, Canada. 14

ERINGEN, A. C. et E. S. SUHUBI. 1964, «Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I», *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, nº 2, doi :10.1016/0020-7225(64)90004-7, p. 189–203, ISSN 0020-7225. 15

FEYEL, F. 2003, «A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly nonlinear structures using generalized continua», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, nº 28, doi :10.1016/S0045-7825(03)00348-7, p. 3233–3244, ISSN 0045-7825. 13

FEYEL, F. et J.-L. CHABOCHE. 2000, «FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, nº 3, doi :10.1016/S0045-7825(99)00224-8, p. 309–330, ISSN 0045-7825. 13

FLECK, N. et J. HUTCHINSON. 1997, «Strain gradient plasticity», *Advances in applied mechanics*, vol. 33, p. 296–361. 17

FOREST, S. 1998, «Mechanics of generalized continua : Construction by homogenization», *Le Journal de Physique IV*, vol. 08, nº PR4, doi :10.1051/jp4:1998405, p. Pr4–39–Pr4–48, ISSN 1155-4339. 16

GERMAIN, P. 1973, «The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2 : Microstructure», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 25, nº 3, doi :10.1137/0125053, p. 556–575, ISSN 0036-1399. 15

GOLOGANU, M., J.-B. LEBLOND, G. PERRIN et J. DEVAUX. 1997, «Recent Extensions of Gurson's Model for Porous Ductile Metals», dans *Continuum Micromechanics*, édité par P. Suquet, International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Vienna, ISBN 978-3-7091-2662-2, p. 61–130, doi :10.1007/978-3-7091-2662-2_2. 16

GREEN, A. E. et R. S. RIVLIN. 1964, «Multipolar continuum mechanics», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17, nº 2, doi :10.1007/BF00253051, p. 113–147, ISSN 1432-0673. 16

HASHIN, Z. et S. SHTRIKMAN. 1963, «A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, nº 2, doi :10.1016/0022-5096(63)90060-7, p. 127–140, ISSN 0022-5096. 13

HAZANOV, S. et C. HUET. 1994, «Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42, nº 12, doi :10.1016/0022-5096(94)90022-1, p. 1995–2011, ISSN 0022-5096. 15

HILL, R. 1952, «The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate», *Proceedings of the Physical Society. Section A*, vol. 65, nº 5, doi :10.1088/0370-1298/65/5/307, p. 349, ISSN 0370-1298. 13

HILL, R. 1963, «Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, nº 5, doi :10.1016/0022-5096(63)90036-X, p. 357–372, ISSN 0022-5096. 14, 15

HUET, C. 1990, «Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38, nº 6, doi :10.1016/0022-5096(90)90041-2, p. 813–841, ISSN 0022-5096. 15

KACZMARCZYK, Ł., C. J. PEARCE et N. BIĆANIĆ. 2008, «Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, nº 3, doi :10.1002/nme.2188, p. 506–522, ISSN 1097-0207. 17

KANIT, T., S. FOREST, I. GALLIET, V. MOUNOURY et D. JEULIN. 2003, «Determination of the size of the representative volume element for random composites : Statistical and numerical approach», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, nº 13, doi :10.1016/S0020-7683(03)00143-4, p. 3647–3679, ISSN 0020-7683. 13, 15

KANOUTÉ, P., D. P. BOSO, J. L. CHABOCHE et B. A. SCHREFLER. 2009, «Multiscale Methods for Composites : A Review», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 16, nº 1, doi :10.1007/s11831-008-9028-8, p. 31–75, ISSN 1886-1784. 13

KOUZNETSOVA, V. G., M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS. 2002, «Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, nº 8, doi :10.1002/nme.541, p. 1235–1260, ISSN 1097-0207. 17

KOUZNETSOVA, VARVARA. 2002, *Computational Homogenization for the Multi-Scale Analysis of Multi-Phase Materials*, thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven. 10, 16, 17

LEBENSOHN, R. A. 2001, «N-site modeling of a 3D viscoplastic polycrystal using Fast Fourier Transform», *Acta Materialia*, vol. 49, nº 14, doi :10.1016/S1359-6454(01)00172-0, p. 2723–2737, ISSN 1359-6454. 14

LI, J., S. MENG, X. TIAN, F. SONG et C. JIANG. 2012, «A non-local fracture model for composite laminates and numerical simulations by using the FFT method», *Composites Part B : Engineering*, vol. 43, nº 3, doi :10.1016/j.compositesb.2011.08.055, p. 961–971, ISSN 1359-8368. 14

MENDOZA, A., J. SCHNEIDER, E. PARRA, E. OBERT et S. ROUX. 2019, «Differentiating 3D textile composites : A novel field of application for Digital Volume Correlation», *Composite Structures*, vol. 208, doi :10.1016/j.compstruct.2018.10.008, p. 735–743. 14

MICHEL, J. C., H. MOULINEC et P. SUQUET. 1999, «Effective properties of composite materials with periodic microstructure : A computational approach», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 172, nº 1, doi :10.1016/S0045-7825(98)00227-8, p. 109–143, ISSN 0045-7825. 14

MINDLIN, R. D. 1964, «Micro-structure in linear elasticity», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, nº 1, doi :10.1007/BF00248490, p. 51–78, ISSN 0003-9527, 1432-0673. 15

MINDLIN, R. D. et N. N. ESHEL. 1968, «On first strain-gradient theories in linear elasticity», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 4, nº 1, doi :10.1016/0020-7683(68)90036-X, p. 109–124, ISSN 0020-7683. 16

MOËS, N., M. CLOIREC, P. CARTRAUD et J. F. REMACLE. 2003, «A computational approach to handle complex microstructure geometries», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, nº 28, doi :10.1016/S0045-7825(03)00346-3, p. 3163–3177, ISSN 0045-7825. 14

MOËS, N., J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO. 1999, «A finite element method for crack growth without remeshing», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, nº 1, doi : 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J, p. 131–150, ISSN 1097-0207. 14

MOULINEC, H. et P. SUQUET. 1994, «A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites», *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, vol. 318, nº 11, p. 1417–1423. 14

MOULINEC, H. et P. SUQUET. 1995, «A FFT-Based Numerical Method for Computing the Mechanical Properties of Composites from Images of their Microstructures», dans *IUTAM Symposium on Microstructure-Property Interactions in Composite Materials*, édité par R. Pyrz, Solid Mechanics and Its Applications, Springer Netherlands, Dordrecht, ISBN 978-94-011-0059-5, p. 235–246, doi :10.1007/978-94-011-0059-5_20. 14

MOULINEC, H. et P. SUQUET. 1998, «A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 157, nº 1, doi :10.1016/S0045-7825(97)00218-1, p. 69–94, ISSN 0045-7825. 14

OTERO, F. 2016, *Multiscale numerical modelling of microstructured reinforced composites*, http ://-purl.org/dc/dcmitype/Text, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). 18

OTERO, F., S. OLLER et X. MARTINEZ. 2016, «Multiscale Computational Homogenization : Review and Proposal of a New Enhanced-First-Order Method», *Archives of Computational Methods in Engineering*, doi :10.1007/s11831-016-9205-0, p. 1–27, ISSN 1134-3060, 1886-1784. 10, 18

REUSS, A. 1929, «Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle», *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 9, nº 1, doi :10.1002/zamm.19290090104, p. 49–58, ISSN 1521-4001. 13

SANCHEZ-PALENCIA, E. 1974, «Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques heterogenes», *International Journal of Engineering Science*, vol. 12, nº 4, doi :10.1016/0020-7225(74)90062-7, p. 331–351, ISSN 0020-7225. 12

STROUBOULIS, T., K. COPPS et I. BABUŠKA. 2001, «The generalized finite element method», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, nº 32, doi :10.1016/S0045-7825(01)00188-8, p. 4081–4193, ISSN 0045-7825. 14

SUQUET, P. M. 1985, «Local and Global Aspects in the Mathematical Theory of Plasticity», *Plasticity Today*, p. 279–309. 15

TERADA, K., M. HORI, T. KYOYA et N. KIKUCHI. 2000, «Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, nº 16, doi :10.1016/S0020-7683(98)00341-2, p. 2285–2311, ISSN 0020-7683. 15

TOUPIN, R. A. 1962, «Elastic materials with couple-stresses», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 11, nº 1, doi :10.1007/BF00253945, p. 385–414, ISSN 0003-9527, 1432-0673. 16

TOUPIN, R. A. 1964, «Theories of elasticity with couple-stress», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17, nº 2, doi :10.1007/BF00253050, p. 85–112, ISSN 1432-0673. 16

VOIGT, W. 1889, «Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper», *Annalen der Physik*, vol. 274, nº 12, doi :10.1002/andp.18892741206, p. 573–587, ISSN 1521-3889. 13

WILLOT, F., Y.-P. PELLEGRINI, M. I. IDIART et P. P. CASTANEDA. 2008, «Effective-medium theory for infinite-contrast, 2D-periodic, linear composites with strongly anisotropic matrix behavior : Dilute limit and cross-over behavior», *Physical Review B*, vol. 78, nº 10, doi :10.1103/PhysRevB.78.104111, p. 104 111, ISSN 1098-0121, 1550-235X. 14

YVONNET, J. 2012, «A fast method for solving microstructural problems defined by digital images : A space Lippmann–Schwinger scheme», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 92, nº 2, doi :10.1002/nme.4334, p. 178–205, ISSN 1097-0207. 14

Chapitre 2

Calculs de structures avec matériaux hétérogènes : des approches multiéchelles aux méthodes global/local

Sommaire

2.1 Introduction 24
2.2 Méthodes multiéchelles pour le calcul de structures hétérogènes 24
2.2.1 Microstructures avec échelles faiblement couplées 24
2.2.2 Microstructures avec échelles moyennement couplées 25
2.2.3 Microstructures avec échelles fortement couplées 26
2.3 Méthodes global/local pour le calcul de structures hétérogènes 27
2.3.1 Méthodes de condensation statique et de réanalyse structurale 28
2.3.2 Approches par superposition 29
2.3.3 Approches descendantes 29
2.3.4 Approches par sous-structuration 30
2.3.5 Approches non-intrusives 32
2.4 Raccords entre modèles pour des problèmes de sous-structuration 33
2.4.1 Méthode mortar pour les éléments finis 35
2.4.2 Méthode basée sur la séparation micro-macro des quantités d'interface . 38

2.1 Introduction

Les matériaux hétérogènes représentent, encore à l'heure actuelle, des défis majeurs dans le domaine de la mécanique des structures. En effet, pour certifier leur intégrité vis-à-vis d'un chargement donné ou pour prédire leur durée de vie, une analyse de l'évolution de la microstructure est souvent nécessaire. Cette analyse n'est bien souvent pas réalisable, à l'échelle d'une pièce entière, tant les ressources numériques à mettre en place sont importantes. De plus, elles ne sont pas compatibles avec les durées de développement actuelles des industries.

Diverses techniques multiéchelles ont été développées pour simuler le comportement de ces matériaux à plusieurs échelles et ainsi faciliter leur modélisation. Elles demeurent néanmoins gourmandes lorsque les analyses nécessitent beaucoup de précision. D'autres méthodes d'analyse, les méthodes global/local, ont été développées dans le but d'augmenter localement la précision des simulations en optimisant les ressources numériques. Cependant, ces méthodes ont été majoritairement développées pour des applications sur des matériaux autres que hétérogènes.

L'objectif de ces travaux, est de développer une technique d'analyse global/local adaptée aux matériaux hétérogènes. Pour cela, dans une première partie, une synthèse des méthodes de simulation multiéchelle est proposée en fonction du degré de validité de l'hypothèse de séparation des échelles pour une microstructure donnée. Puis, dans une deuxième partie, un panorama des méthodes de couplage global/local, appliquées aux matériaux hétérogènes est dressé. Enfin, dans une troisième partie, des détails concernant des méthodes de couplage de modèles, applicables aux approches global/local, sont développés.

2.2 Méthodes multiéchelles pour le calcul de structures hétérogènes

D'après BELYTSCHKO et SONG [2010]; XU et collab. [2010], deux grands principes de méthodes multiéchelles existent : les méthodes hiérarchiques et les méthodes concurrentes. A grands traits, en ce qui concerne les matériaux hétérogènes, le principe des méthodes hiérarchiques est de faire passer des informations de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. L'objectif est d'obtenir une solution à l'échelle macroscopique en tenant compte d'informations provenant de la microstructure. Les deux échelles sont faiblement couplées. *A contrario,* pour les méthodes concurrentes, la solution cherchée concerne la microstructure. Les échelles microscopique et macroscopique sont fortement couplées. En général, ces méthodes peuvent être vues comme des méthodes de décomposition de domaine avec de fortes interactions entre les échelles.

De nombreuses méthodes hybrides existent entre ces deux grandes familles et il est parfois difficile de les catégoriser. Pour cette raison, le choix a été fait de présenter les méthodes multiéchelles en fonction de leur applicabilité vis-à-vis de la séparation des échelles.

2.2.1 Microstructures avec échelles faiblement couplées

Les méthodes multiéchelles applicables lorsque les hypothèses de séparation des échelles sont vérifiées sont généralement basées sur les théories de l'homogénéisation. L'objectif est de rendre compte du comportement macroscopique à partir de la microstructure.

2.2.1.1 Méthodes basées sur le comportement homogénéisé d'une cellule unitaire

La méthode la plus simple consiste à déterminer le comportement homogénéisé d'une cellule élémentaire (**Section 1.3.1**) représentative de la microstructure, et d'appliquer ce comportement à l'échelle macroscopique. Dans ce cas, le comportement homogénéisé est déterminé une fois pour toute, pour une microstructure donnée. Il n'est pas nécessaire de faire appel au problème à l'échelle microscopique pour résoudre le problème macroscopique qui est écrit sous forme close. Le comportement homogénéisé peut être calculé de manière analytique (DEVRIES et collab. [1989]) ou bien à partir d'une solution éléments finis classique (BAO et collab. [1991]; CHRISTMAN

et collab. [1989]; J. M. SMIT et collab. [1999]; VAN DER SLUIS et collab. [1999]) ou G/XFEM (MALEKAN et BARROS [2016]).

2.2.1.2 Méthodes multi-niveaux FE2

Une extension des méthodes basées sur la connaissance explicite du comportement d'une cellule unitaire, consiste à évaluer la réponse du problème macroscopique à partir de problèmes élémentaires microscopiques. Pour cela, un calcul à l'échelle microscopique, formulé sur une cellule élémentaire ou sur un VER, est résolu en chaque point d'intégration du problème grossier. Il s'agit donc de calculer des contraintes macroscopiques, à partir de déformations macroscopiques appliquées sur la microstructure. Chaque problème microscopique s'écrit comme un BVP dont les conditions aux limites sont calculées à partir de la déformation macroscopique et satisfont la condition de Hill-Mandel (voir **Chapitre 1**) de manière à avoir un équilibre des travaux entre les deux échelles. A cet effet, une méthode éléments finis multi-niveaux (FE^2) a été proposée dans FEYEL [1998].

Les problèmes aux différentes échelles sont résolus par des problèmes éléments finis séparés. Cette méthode générale a été reprise et développée dans de très nombreux travaux. Par exemple, des travaux ont été menés par SMIT et collab. [1998] sous des hypothèses de grandes déformations avec matériaux visco-élastiques aux deux échelles ou encore par MIEHE et collab. [1999] avec prise en compte de plasticité. Des développements dans le cadre de non-linéarités à l'échelle locale ont été menés par TERADA et KIKUCHI [2001].

Bien que ces méthodes soient coûteuses en temps de calcul, elles demeurent très génériques et sont largement parallélisables puisque les problèmes à l'échelle microscopique sont indépendants (FEYEL [1999]; FEYEL et CHABOCHE [2000]).

Des extensions aux milieux généralisés ont été proposés, par exemple, par FEYEL [2003]; FOREST et SAB [1998] pour des milieux de Cosserat et par KOUZNETSOVA et collab. [2002, 2004] pour des milieux du second gradient ainsi que par PHAM et collab. [2013] avec la prise en compte de forces de volume. Ces méthodes permettent de rendre compte des effets d'échelles via le comportement matériaux homogénéisé mais nécessitent des codes éléments finis non-standards.

2.2.2 Microstructures avec échelles moyennement couplées

Lorsque la séparation des échelles n'est pas tout à fait vérifiée, il est nécessaire de modéliser des couplages entre les échelles. Pour cela, des méthodes alternatives aux méthodes multi-niveaux existent et prennent en compte la taille de la microstructure à l'échelle macroscopique. Le principe n'est plus nécessairement d'évaluer le comportement macroscopique à partir de la microstructure. Il s'agit plutôt de corriger la solution macroscopique par de l'information issue de l'échelle microscopique. En ce sens, ces méthodes peuvent être vues comme des méthodes d'enrichissement hiérarchique à partir d'une séparation micro/macro des quantités d'intérêt : le champ solution u peut s'écrire comme la somme d'une solution à l'échelle macroscopique avec une solution plus fine à l'échelle microscopique : $u = u^{\mathrm{M}} + u^{m}$.

Pour les méthodes présentées ci-dessous, la solution microscopique est évaluée sur chaque élément grossier, la correction est calculée au niveau des éléments. De ce fait le couplage des échelles n'est pris en compte qu'à l'échelle des éléments et reste donc relativement localisé.

2.2.2.1 Projection de Dirichlet Homogénéisée

La méthode de Projection de Dirichlet Homogénéisée ou HDPM (Homogenized Dirichlet Projection Method) a été proposée par ODEN et collab. [1999]; ODEN et ZOHDI [1997]; ZOHDI et collab. [1996] dans le cadre de l'élasticité linéaire pour des modèles fortement hétérogènes. Cette méthode consiste à construire un estimateur d'erreur de modèles *a posteriori* basé sur les tenseurs de rigidité sur chacune des échelles. L'erreur est alors estimée sur un ensemble de sous-domaines de la structure définis selon une grille régulière. Lorsque l'erreur est supérieure à une valeur, la

solution du problème macroscopique est corrigée dans le sous-domaine en question. La correction est calculée à partir d'une solution à l'échelle microscopique dont les conditions aux limites dépendent du problème à l'échelle macroscopique.

La méthode a été améliorée par ZOHDI et WRIGGERS [1999] avec un raccord en effort et par ZOHDI et collab. [2001] avec une technique de correction globale basée sur les sauts d'efforts entre cellules.

2.2.2.2 Méthode Multi-Échelle Variationnelle

La Méthode Multi-Échelle Variationnelle (ou Variational MultiScale Method) proposée par HUGHES [1995]; HUGHES et collab. [1998] consiste à corriger la solution macroscopique par une solution microscopique analytique évaluée à partir du résidu d'équilibre du problème macroscopique et de la fonction de Green du problème considéré. En pratique, la fonction de Green est approximée par des fonctions « bulles » et la solution microscopique est condensée sur les éléments du problème macroscopique.

Bien que cette méthode soit potentiellement efficace, il ne semble pas y avoir, dans la littérature, d'utilisation de cette méthode dans le cas de matériaux hétérogènes. En effet, la difficulté consiste à calculer une bonne approximation de la fonction de Green qui est non-locale et qui n'a en général pas de solution analytique. C'est pourquoi, de manière générale, cette méthode est peu utilisée dans le domaine de la mécanique des structures.

2.2.2.3 Méthode Mesh-In-ELement

Une méthode pour tenir compte de la taille de la microstructure à l'échelle macroscopique a été développée par IBRAHIMBEGOVIĆ et MARKOVIČ [2003]; MARKOVIČ et IBRAHIMBEGOVIĆ [2004] sous le nom de MIEL (*Mesh-In-ELement*). Elle se rapproche de la Méthode Multi-Échelle Variationnelle mais le rôle de la fonction de Green est joué par un problème éléments finis à l'échelle microscopique évalué sur un VER. Elle met donc en jeu des problèmes éléments finis aux deux échelles.

A chaque élément fini macroscopique correspond un VER de taille identique. Le modèle microscopique est beaucoup plus fin que le modèle à l'échelle macroscopique. Les échelles sont alors couplées de manière volumique et non plus au niveau des points d'intégration comme dans la méthode FE^2. Un processus itératif assure l'équilibre aux deux échelles et leur évolution simultanée. Une méthode de sélection automatique entre une méthode FE^2 ou MIEL a été proposée par ZUPAN et KORELC [2018], à partir d'une analyse de sensibilité sur les conditions aux limites.

2.2.2.4 Méthode par filtrage

Une méthode de caractérisation des propriétés homogénéisées de matériaux linéaires très hétérogènes par filtrage a été proposée par YVONNET et BONNET [2014a,b]. Le modèle non-local qui en découle repose sur le filtrage des quantités mécaniques à l'échelle microscopique pour ne garder que des champs à grande longueur d'onde. Pour l'implémenter dans un cadre éléments finis classique, une formulation de la méthode à partir des déplacements a été proposé par TOGNEVI et collab. [2016].

Des développements récents autour de cette méthode ont été proposés par YVONNET [2019] dans le but de réaliser des simulations sur des grandes structures élastiques. Le principe consiste à combiner les méthodes non-locales de YVONNET et BONNET [2014a,b] avec des méthodes de décomposition de domaine.

2.2.3 Microstructures avec échelles fortement couplées

Lorsque les échelles sont fortement couplées, sans informations sur ce couplage, il est nécessaire de résoudre le problème à l'échelle microscopique. Souvent ces simulations sont effectuées

par des méthodes parallèles qui, pour être extensibles, intègrent des aspects plus ou moins multiéchelles. Il s'agit des méthodes de *Domain Decomposition Method* (DDM) multiéchelles, et sont parfois qualifiées de méthodes « multiéchelles concurrentes », en lien avec les méthodes concurrentes évoquées à la **Section 2.2**. Les plus courantes sont : la méthode FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) proposée par FARHAT et ROUX [1991], et la méthode BDD (*Balancing Domain Decomposition*) de MANDEL [1993]. La méthode FETI est dite *duale* car elle utilise comme inconnues principales les inter-efforts entre les sous-domaines. La méthode BDD est dite *primale* puisqu'elle utilise les déplacements d'interface entre les sous-domaines.

Au *Laboratoire de Mécanique et Technologie* (LMT) beaucoup de travaux ont porté sur une méthode multiéchelle mixte : la méthode LaTIn multiéchelle. Elle est qualifiée de *mixte* car elle ne privilégie pas une inconnue principale mais traite les déplacements et inter-efforts d'interface de manière égalitaire.

Le principe de cette méthode est de coupler les sous-domaines par des quantités d'interface avec un fort contenu mécanique. Le problème est alors résolu par une stratégie basée sur la méthode LaTIn, assurant alors la continuité et l'équilibre des quantités d'interface entre les sous-domaines. Des développements autour de cette méthode sont proposés dans DAGHIA et LADEVÈZE [2012]; GUIDAULT et collab. [2008, 2007]; LADEVÈZE et DUREISSEIX [2000]; LADEVÈZE et collab. [2001]; LADEVÈZE et NOUY [2002].

Cette méthode est intéressante dans le cadre de ces travaux de recherche car elle propose une méthode de couplage par interface sur deux échelles basée sur une séparation des déplacements et des efforts d'interface. La construction des opérateurs d'extraction des quantités d'interface est détaillée dans LADEVÈZE et DUREISSEIX [1999, 2000] à partir des déplacements d'interface et dans LADEVÈZE et collab. [2001] à partir des efforts d'interface. Elle est rappelée en détail dans la **Section 2.4.2**, à partir des déplacements d'interface.

2.3 Méthodes global/local pour le calcul de structures hétérogènes

Bien entendu, les méthodes présentées à la **Section 2.2** sont de plus en plus coûteuses à mesure que l'échelle microscopique est prise en compte dans le modèle multiéchelle. Sans difficulté, il est possible d'imaginer associer plusieurs de ces méthodes pour augmenter la précision d'une analyse dans certaines zones d'intérêt, sans augmenter outre mesure le coût du calcul.

C'est l'objectif des méthodes *global/local* d'après NOOR [1986]. En effet, l'auteur les définit comme des méthodes de modélisation hybride et/ou techniques d'analyses hybrides qui visent à avoir un maximum de précision pour un minimum de coût de calcul. Cela comprend bien sûr les méthodes multiéchelles présentées à la **Section 2.2** mais aussi la mise en données du problème (NOOR et collab. [1987]; NOOR et PETERS [1985, 1987]) et l'utilisation d'algorithmes de résolution adaptés tels que les méthodes multigrille (HACKBUSCH et TROTTENBERG [1982]), les techniques *operator splitting*, les techniques de relaxation dynamique, les techniques *Element by Element* (HUGHES et collab. [1984]) ou bien l'utilisation d'algorithmes de résolution parallèle (MIKLOSKO et KOTOV [1984]; PADDON [1984]; SCHENDEL [1984]).

D'autres auteurs définissent les méthodes global/local différemment mais de manière plus ciblée. Par exemple, pour RANSOM et KNIGHT [1990], il s'agit d'affiner un calcul dans une région donnée à partir d'une analyse globale indépendante. Ou encore pour FELIPPA [2004] les méthodes global/local sont, dans un cadre d'analyse éléments finis, des méthodes multiéchelles limitées à deux étapes d'analyse : une étape globale et une étape locale. Ces définitions sont incluses dans celle de Noor.

La littérature sur les méthodes global/local est considérable dans le sens où il s'agit souvent d'associer plusieurs méthodes entre elles. Il serait très difficile d'en dresser une synthèse exhaustive tant les combinaisons entre méthodes et techniques de résolution sont nombreuses. Dans ces travaux, les principales méthodes global/local sont présentées dans un cadre de résolution éléments finis appliquée à des analyses dans le domaine de la mécanique des structures.

La situation est telle que deux modèles éléments finis doivent être combinés. Un modèle élé-

ments finis « global », correspondant à une géométrie macrostructurale. Et un modèle éléments finis « local » adapté de façon précise à une géométrie microstructurale. La question centrale est alors de définir un raccord entre ces modèles sans introduire d'artefact numérique. Une revue de la littérature est donc dressée en ce sens.

2.3.1 Méthodes de condensation statique et de réanalyse structurale

Les méthodes de condensation statique et de réanalyse structurale ont vu le jour notamment pour pallier les problèmes de manque de mémoire des ordinateurs. Il semble que ces méthodes ne soient pas appliquées dans des cas de modèles local et global multi-matériaux ou dans des cas de maillages non-conformes. Leur intérêt est donc limité dans le cadre de ces travaux. Néanmoins, une rapide synthèse de ces méthodes est dressée.

2.3.1.1 Condensation statique (ou super-élément)

La méthode de condensation statique (ou de super-élément) est une méthode éléments finis qui consiste à traiter un ensemble d'éléments finis et à prendre en compte leur effet, de manière exacte, sur un bord. Cette méthode est basée sur le calcul du complément de Schur de la partie de la structure condensée (CLOUGH et WILSON [1979]; TAO-YANG et ABEL [1985]; WILKINS [1983]).

Dans un cadre d'analyse global/local, si la zone locale est connue *a priori*, le modèle global peut être condensé sur les bords du domaine local. Dès lors, la simulation éléments finis peut être réalisée uniquement sur la partie locale, réduisant les coûts de calcul, par exemple, dans un processus d'optimisation de la géométrie de la zone concernée.

2.3.1.2 Réanalyse structurale

Le problème des méthodes de condensation statique, dans le cadre des méthodes global/local est que la zone locale doit être connue *a priori*. Les méthodes de réanalyse structurale ont pour vocation d'évaluer la réponse d'une structure qui a été modifiée sans calculer l'intégralité du problème et surtout à partir d'une solution sur la structure non-modifiée. Des synthèses de ces méthodes sont proposées par ABU KASSIM et TOPPING [1987]; ARORA [1976]. Les descriptions condensées ci-dessous, sont largement inspirées de ces deux ouvrages ainsi que de celui plus récent de KIRSCH [2008].

Les méthodes de réanalyse structurale peuvent être grossièrement classifiées en deux catégories : les méthodes directes (ou exactes) et les méthodes itératives (ou approchées). Elles peuvent être formulées en effort (« force » ou « flexibility »), en déplacement (« stiffness » ou « displacement ») ou encore de manière mixte (« mixed methods »).

Méthodes directes ou exactes – Le principe des méthodes exactes est de calculer l'influence de manière exacte sur la solution finale comme si elle venait de la structure modifiée. Pour ce faire, une multitude de méthodes ont été proposées depuis les années 1940 à partir d'outils mathématiques ou de méthodes matricielles.

La méthode qui semble être la plus répandue, due à sa non-intrusivitée potentielle, consiste à modifier l'inverse de la matrice de raideur de la structure initiale. La correction est effectuée à partir des formules de Sherman-Morrison et de Woodbury (SHERMAN et MORRISON [1950]; WOODBURY [1950]).

En pratique, la méthode est intéressante quand les modifications dans la matrice de raideur sont de rang faible, en particulier quand les modifications sur la structure sont localisées. Il est montré dans AKGÜN et collab. [2001] que pour des modifications de rang faible, trois méthodes de réanalyses structurales majeures sont équivalentes et peuvent s'exprimer à partir de la formule de Sherman-Morrison-Woodbury. Il s'agit des méthodes de distorsion virtuelle (*Virtual Distrosion Méthode*), de variation structurelle (*Second Theorem of Structural Variation*) et des approximations

combinées (*combined approximations*). Les deux premières étant formulées à partir de pseudo-efforts (*pseudo-load*) appliqués aux éléments modifiés de la structure.

Méthodes itératives et approchées – Les méthodes de réanalyses structurales approchées sont plus adaptées dans des cas de modifications de la structure d'origine dans des zones plus étendues. Elles peuvent être basées sur des méthodes de minimisation (BEST [1963]; DAS [1978]), de développement en série de Taylor (BEST [1945]; KIRSCH [1981]; NOOR et LOWDER [1974]) ou de bases réduites (DING et GALLAGHER [1985]; FOX et MIURA [1971]; KAVANAGH [1972]).

Les méthodes approchées peuvent être classées en trois catégories, les méthodes d'approximations locales (*single-point approximations*), les méthodes d'approximations globales (multi-point approximations) et les méthodes des approximations combinées (CA) déjà citées précédemment car ces dernières sont équivalentes à des méthodes exactes pour des modifications de rang faible. Le choix d'une des méthodes parmi les autres est dirigé par la qualité de l'approximation cherchée, par sa facilité d'implémentation ou bien par l'efficacité de la méthode en matière de coût de calcul.

2.3.1.3 Zoom exact

HIRAI et collab. [1985, 1983] proposent une méthode dite de "zoom exact" qui permet de faire plusieurs niveaux de réanalyses imbriqués. Dans HIRAI et collab. [1983] les auteurs utilisent une méthode de réanalyse structurale couplée à une méthode de condensation statique. Dans HIRAI et collab. [1985], l'utilisation d'une matrice de rigidité « étendue » permet de prendre en compte la réponse dans toute la structure sans avoir besoin d'une étape de réanalyse structurale. Les changements dans la matrice de rigidité du modèle global sont restreints à la zone de zoom.

2.3.2 Approches par superposition

Les approches par superposition, aussi appelées s-méthodes, introduites par FISH [1992]; FISH et GUTTAL [1996]; FISH et MARKOLEFAS [1992] consistent à superposer un patch local avec la macrostructure globale. Elles permettent par exemple d'insérer un détail de structure sans modifier les modèles existants qui ont souvent demandé de longues périodes de mise en données. En ce sens, ces méthodes se rapprochent des méthodes non-intrusives. De plus les maillages des deux structures sont compléments indépendants.

Des développements autour de ces méthodes ont donné lieu à des couplages de modèles principalement dans des cas 2D avec des couplages de modèles plaque et coque (FISH [1992]; FISH et GUTTAL [1996]), de différents modèles de laminés (REDDY [1993]; REDDY et ROBBINS [1994]) et plus récemment pour simuler des phénomènes de propagation de fissure (OKADA et collab. [2007]).

2.3.3 Approches descendantes

Les méthodes descendantes sont probablement les techniques global/local les plus utilisées dans l'industrie. L'objectif est de raffiner localement les maillages afin par exemple de calculer des concentrations de contraintes au niveau des singularités (qui n'apparaissent pas sur le maillage global). Elles consistent à réaliser une analyse globale dont la solution sert de donnée d'entrée pour l'analyse locale. Cette stratégie ne donne qu'une approximation de la solution car l'effet des nouveaux nœuds n'est pas pris en compte dans le système complet mais uniquement dans le modèle local. De ce fait cette méthode n'est pas une méthode "exacte" et il ne sert donc à rien de faire plusieurs étapes de zoom pour améliorer la solution. Il n'est pas non plus possible de trouver une mesure pour quantifier la précision finale du calcul.

Le choix le plus simple et le plus courant est de piloter l'analyse locale à partir des déplacements solution extraits du problème global. Cette méthode, proposée dans le cadre de l'élasticité linéaire, par KELLEY [1982]; SCHWARTZ [1981] sous le nom de *Specified Boundary Displacement* (SBD), ou *cut-boundary displacement method* est présente, aujourd'hui, dans la plupart des codes

éléments finis du commerce sous le nom de « *submodeling* ». Cette méthode a ensuite été développée dans de nombreux travaux tels que GRIFFIN et VIDUSSONI [1988]; HARYADI et collab. [1998]; KAPANIA et collab. [1997] sur des plaques composites, dans RANSOM [1992] pour des non-linéarités matérielles et géométriques. Dans RANSOM et KNIGHT [1990] les déplacements sont évalués avec interpolation par des fonctions spline.

Le modèle local peut également être piloté en effort (KITAMURA et GU [2001]; KITAMURA et collab. [2003]) ou bien par des efforts corrigés qui prennent en compte la rigidité des éléments d'interface. Cette dernière méthode a été introduite par JARA-ALMONTE et KNIGHT [1988]. Elle est cependant difficilement implémentable dans des codes commerciaux car elle nécessite d'avoir accès à la rigidité des éléments d'interface.

Ces méthodes ont l'avantage d'être peu coûteuses, non-intrusives et facilement implémentables. Cependant, une de leurs critiques principales est que l'influence du problème local n'est pas pris en compte dans la solution du problème global. Ce défaut a été levé par des approches itératives proposées par MAO et SUN [1991]; WHITCOMB [1991] et étendues à des problèmes de non-linéarités géométriques dans WHITCOMB et WOO [1993a,b].

2.3.4 Approches par sous-structuration

Lorsqu'il est nécessaire de prendre en compte l'effet de la structure locale sur la structure globale, les approches par sous-structurations peuvent être utilisées. Le principe consiste à lier deux sous-domaines, avec ou sans recouvrement partiel, par des conditions de couplage (**Section 2.4**) dans la zone de raccord.

Les techniques de résolution de ce type de problème sont intimement liées aux choix du raccord utilisé. Il est donc difficile de présenter l'un sans l'autre. Néanmoins, pour être cohérent avec le plan du chapitre, dans cette section, un panorama des techniques de résolution d'un problème sous-structuré est dressé, dans le sens où ces méthodes peuvent être vues comme des méthodes global/local. Par ailleurs, dans la **Section 2.4**, des exemples de formulation de raccord entre modèles, qui ne sont pas, en soit, des méthodes global/local, sont détaillés.

2.3.4.1 Cadre général

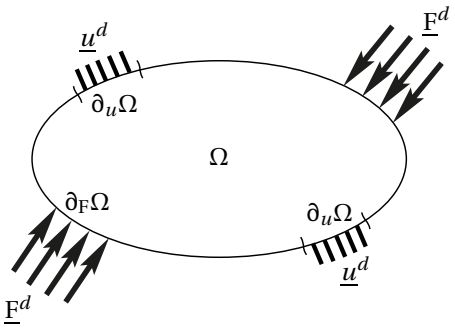


FIGURE 2.1 – Domaine d'étude et conditions aux limites associées.

Le problème suivant est considéré : un domaine Ω est soumis à des conditions aux limites en déplacement $\underline{u}^d$ sur le bord $\partial_u\Omega$ et à des conditions aux limites en effort $\underline{F}^d$ sur le bord $\partial_F\Omega$ (**Figure 2.1**). Dans un cadre d'élasticité linéaire, le problème mécanique s'écrit sous forme forte :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d & \text{sur } \partial_F\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^s(\underline{u}) & \text{dans } \Omega \\ \underline{u}_{|\partial_u\Omega} = \underline{u}^d & \text{sur } \partial_u\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\underline{u}$ est suffisamment régulier, $\mathbf{K}$ est le tenseur d'élasticité du domaine Ω et $\underline{n}$ est la normale sortante au domaine Ω.

Le problème sous-structuré correspondant consiste à séparer la structure Ω en deux (ou plus) sous-structures Ω_1 et Ω_2 telles que $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ avec $\partial_u\Omega = \partial_u\Omega_1 \bigcup \partial_u\Omega_2$ et $\partial_F\Omega = \partial_F\Omega_1 \bigcup \partial_F\Omega_2$ (**Figure 2.2**).

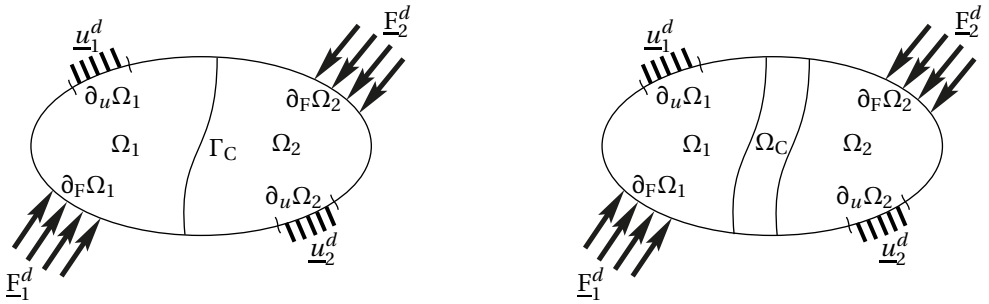


FIGURE 2.2 – Domaine d'étude sous-structuré et conditions aux limites associées. Illustration d'un couplage surfacique (a) et d'un couplage volumique (b).

Dans le cas d'un couplage volumique (**Figure 2.2b**), les domaines Ω_1 et Ω_2 sont partiellement recouvrants et la zone de couplage est notée $\Omega_C = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Dans le cas d'un couplage surfacique (**Figure 2.2a**), les domaines Ω_1 et Ω_2 sont non-recouvrants et leur interface commune est notée Γ_C. Dans ce cas, la restriction du problème (2.1) à la sous-structure $\Omega_\jmath$ avec $\jmath \in \{1,2\}$ s'écrit sous la forme forte suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_\jmath = \mathbf{K}_\jmath : \boldsymbol{\varepsilon}_\jmath & \text{dans } \Omega_\jmath \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_\jmath) = \underline{0} & \text{dans } \Omega_\jmath \\ \boldsymbol{\sigma}_\jmath \cdot \underline{n}_\jmath = \underline{F}_\jmath^d & \text{sur } \partial_F\Omega_\jmath \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\jmath = \boldsymbol{\nabla}^s(\underline{u}_\jmath) & \text{dans } \Omega_\jmath \\ \underline{u}_{|\partial_u\Omega} = \underline{u}_\jmath^d & \text{sur } \partial_u\Omega_\jmath \end{cases} \tag{2.2}$$

avec les conditions de raccord suivantes sur l'interface Γ_C :

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = \underline{u}_2 & \text{sur } \Gamma_C \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \underline{n}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \underline{n}_2 = \underline{0} & \text{sur } \Gamma_C \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\underline{u}_\jmath$ est la restriction de $\underline{u}$ à $\Omega_\jmath$, $\mathbf{K}_\jmath$ est la restriction du tenseur d'élasticité à $\Omega_\jmath$ et $\underline{n}_\jmath$ sont la normale sortante au domaine $\Omega_\jmath$. Le système (2.2)-(2.3) est alors équivalent au système (2.1).

2.3.4.2 Techniques de résolution

La résolution d'un problème sous-structuré fait appel à des méthodes de résolution par décomposition de domaine (DDM). Les premières semblent avoir été proposées par SCHWARZ [1869], à partir d'une formulation de couplage sur une interface volumique. Plus tard, des variantes ont été proposées, par exemple par LIONS [1990], à partir d'une formulation de couplage sur une interface surfacique.

En général, les DDM se distinguent suivant le type d'interface (surfacique **Figure 2.2a** ou volumique **Figure 2.2b**) ainsi que suivant le choix des inconnues principales. Les principes des méthodes classiques, avec couplage surfacique, sont présentés dans ce qui suit. Le lecteur intéressé pourra se référer à GOSSELET et REY [2006] pour plus de détails. Naturellement, certaines des méthodes présentées ci-dessous ont déjà été citées à la **Section 2.2.3**, dans un contexte de résolution de problèmes multiéchelles par décomposition de domaine, puisqu'elles font appel aux mêmes techniques de résolution.

Méthodes primales – En introduisant une inconnue principale $\underline{u}_0$ qui vérifie *a priori* la relation $(2.3)_1$ ($\underline{u}_0 = \underline{u}_1 = \underline{u}_2$), le système (2.2)-(2.3) est reformulé à partir de cette inconnue principale. Une vérification partielle de la relation d'équilibre $(2.3)_2$ est alors cherchée. Cette approche est à la base des méthodes primales qui ont par exemple été développées dans MANDEL [1993]; PRZEMIENIECKI [1963]; TALLEC [1994]; TALLEC et collab. [1991]. En pratique, pour des problèmes de grande taille, le système obtenu est résolu de manière itérative. Par exemple, la méthode BDD (MANDEL [1993]) consiste à résoudre le système primal par une méthode de gradient conjugué préconditionné projeté où le projecteur est obtenu par une méthode de Krylov.

Méthodes duales – En introduisant $\underline{\lambda}$ comme une inconnue principale qui vérifie *a priori* la relation $(2.3)_2$ ($\underline{\lambda} = \pm\boldsymbol{\sigma}_\mathcal{J} \cdot \underline{n}_\mathcal{J}$ avec $\mathcal{J} \in \{1,2\}$), le système (2.2)-(2.3) est reformulé à partir de cette inconnue principale. Une vérification partielle de la relation de continuité $(2.3)_1$ est alors cherchée. Cette approche est à la base des méthodes duales qui ont par exemple été développées dans FARHAT [1992]; FARHAT et ROUX [1991]; ROUX [1990]. A l'instar des méthodes primales, les méthodes duales sont en général résolues de manière itérative pour des problèmes de grande taille. Par exemple, la méthode FETI (FARHAT et ROUX [1991]) consiste à résoudre le système dual par un algorithme de Gradient conjugué pré-conditionné projeté où le projecteur est obtenu par une méthode de Krylov.

Méthodes mixtes – En ne satisfaisant *a priori* aucune des relations de (2.3) au sens fort mais en cherchant une condition de vérification partielle basée sur les deux relations de (2.3), la méthode est dite « mixte ». Plusieurs techniques de résolution existent dans ce cadre. Par exemple, dans FORTIN et GLOWINSKI [1983]; GLOWINSKI et LE TALLEC [1990]; TALLEC [1994] des algorithmes de résolution, de type Uzawa, basés sur une formulation par Lagrangiens augmentés sont proposés. D'autres formalismes existent, par exemple dans LADEVÈZE [1990], une méthode de résolution à deux directions de recherches alternées, basée sur l'approche LaTIn développée au LMT, est proposée.

2.3.5 Approches non-intrusives

Si les techniques de couplage de modèles par sous-structuration permettent de coupler des modèles différents, elles restent intrusives car s'appliquent sur un modèle global modifié. Pour répondre à cette problématique, ALLIX et collab. [2011]; GENDRE [2009]; GENDRE et collab. [2009] ont proposé une méthode de couplage non-intrusive basée sur les travaux de WHITCOMB [1991]. Cette méthode permet de modifier localement un problème global à partir des modèles éléments finis non-modifiés des structures global et local.

Une des conséquences principales de cette méthode est la modularité qu'elle offre vis-à-vis des problèmes à résoudre, car ceux-ci peuvent être résolus dans des codes différents. De plus, cette méthode a été développée pour être utilisée avec des codes commerciaux, ce qui la rend très intéressante d'un point de vue industriel.

Des développements autour de cette méthode et du couplage de modèles ont été menés par GUPTA et collab. [2012]; PASSIEUX et collab. [2013] dans le cadre de propagation de fissure ou de rupture de composites par DAGHIA et LADEVÈZE [2012]. Aussi, un couplage de modèles déterministe/stochastique a été proposé par CHEVREUIL et collab. [2013]. BOUCLIER et collab. [2016] a développé un raccord entre des modèles de discrétisations différentes et GUGUIN et collab. [2014] un raccord 2D/3D. Un ensemble d'applications à la mécanique non-linéaire a été apporté par BLANCHARD [2018]; BLANCHARD et collab. [2019]; DUVAL [2016]; DUVAL et collab. [2016]; GENDRE et collab. [2011] et des contributions en dynamique transitoire ont été apportées par BETTINOTTI et collab. [2013]; CHANTRAIT [2014]; CHANTRAIT et collab. [2014]

2.4 Raccords entre modèles pour des problèmes de sous-structuration

Dans cette section, plusieurs méthodes de couplage de modèles sont détaillée. Comme évoqué précédemment, elles sont étroitement liées aux approches par sous-structuration (**Section 2.3.4**) mais aussi aux approches non-intrusives (**Section 2.3.5**) dans le sens où elles permettent de calculer les opérateurs de couplage entre les modèles (sous-structures). L'objectif de cette section est de détailler certains outils utilisés dans ces travaux de recherche.

Dans ce qui suit, le formalisme des approches « duales », appliquées à deux sous-structures, est utilisé pour présenter la méthode de couplage de la **Section 2.4.1**. Un formalisme « mixte », appliqué à un problème de décomposition de domaine, est ensuite adopté pour présenter la méthode de la **Section 2.4.2**.

Les approches numériques de simulation en calcul des structures privilégient les approches en déplacement (par exemple les méthodes éléments finis sont formulées en déplacement). Aussi, la plupart des méthodes de couplage accordent la continuité de la « cinématique » entre modèles. Dans le cadre du couplage de modèles continus, il s'agit généralement d'imposer la continuité des déplacements entre les modèles dans la zone de couplage surfacique Γ_C ou volumique Ω_C :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_2 \quad \text{sur } \Gamma_C \text{ ou } \Omega_C \tag{2.4}$$

Remarque 1 *Pour des couplages de modèles avec « cinématiques » différentes, il est nécessaire, suivant les cas, de construire un relèvement du champ de déplacement (*ALLIX *et* DUPLEIX-COUDERC *[2010]) ou dans le cas du couplage de modèles continu/discret, un interpolant continu du modèle discret (ex : interpolant MLS* GUIDAULT *et* BELYTSCHKO *[2009]). Une fois cet interpolant ou relèvement construit, Il s'agit ensuite généralement d'imposer la continuité de la « cinématique » illustrée par la relation* (2.4) *dans le cas d'une continuité en déplacement.*

Le choix de cette « cinématique » étant fait, différentes méthodes existent pour imposer cette condition de continuité :

- soit au sens fort, en écrivant *a priori* explicitement les relations entre les deux grandeurs cinématiques sous leur forme discrétisée généralement ;
- soit au sens faible, c'est-a-dire au sens d'un produit scalaire, par l'introduction de grandeurs duales associées (multiplicateurs de Lagrange λ) telles que :

$$\forall \underline{\lambda} \in \mathscr{M}, \quad (\underline{\lambda}, \underline{u}_1 - \underline{u}_2)_\diamond = 0$$

où $\mathscr{M}$ est l'espace des multiplicateurs de Lagrange et $(\cdot,\cdot)_\diamond$ représente un produit scalaire sur un espace à définir. Des choix particuliers de l'espace discrétisé $\mathscr{M}^h \subset \mathscr{M}$ donnent lieu à différentes méthodes de couplage. Pour certains choix, il est possible de faire des liens entre les deux approches.

Le problème (2.2)-(2.3) est réécrit sous sa forme faible avec comme inconnue d'interface principale λ : une solution $(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \in \mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_2$ avec $\lambda \in \mathscr{M}$ et $\boldsymbol{\sigma}_\jmath = \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}_\jmath$ ($\jmath \in \{1,2\}$) est cherchée telle que :

$$\begin{cases} \forall \underline{u}_1^* \in \mathscr{U}_1^0, & \displaystyle\int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_1^*) d\Omega + (\underline{\lambda}, \underline{u}_1^*)_\diamond = \int_{\Omega_1} \beta_1 \underline{f}^d \underline{u}_1^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_1} \underline{F}^d \underline{u}_1^* d\Gamma \\ \forall \underline{u}_2^* \in \mathscr{U}_2^0, & \displaystyle\int_{\Omega_2} \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_2^*) d\Omega - (\underline{\lambda}, \underline{u}_2^*)_\diamond = \int_{\Omega_2} \beta_2 \underline{f}^d \underline{u}_2^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_2} \underline{F}^d \underline{u}_2^* d\Gamma \\ \forall \underline{\lambda}^* \in \mathscr{M}, & (\underline{\lambda}^*, \underline{u}_1 - \underline{u}_2)_\diamond = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathscr{U}_1^0 = \{\underline{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega_1) \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega_1\} \\ \mathscr{U}_2^0 = \{\underline{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega_2) \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega_2\} \\ \mathscr{M} \text{ un espace des multiplicateurs à choisir} \end{cases}$$

et où $(\cdot,\cdot)_\diamond$ représente un produit scalaire à déterminer pour coupler les deux modèles. Les fonctions de pondération $\alpha_\jmath$ et $\beta_\jmath$ avec $\jmath \in \{1,2\}$ sont introduites pour le couplage volumique (BEN DHIA [1998]), afin de ne pas compter l'énergie de déformation et le travail des forces de volume en double dans Ω_C. Elles définissent une partition de l'unité telle que :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 = 1 & \text{dans } \Omega_1 \backslash \Omega_C \\ \alpha_2 = \beta_2 = 1 & \text{dans } \Omega_2 \backslash \Omega_C \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1 & \text{dans } \Omega_C \end{cases}$$

La **Figure 2.3**, issue de GUIDAULT et BELYTSCHKO [2007], montre des exemples de fonctions de pondération. Dans le cas d'un couplage surfacique, elles sont unitaires.

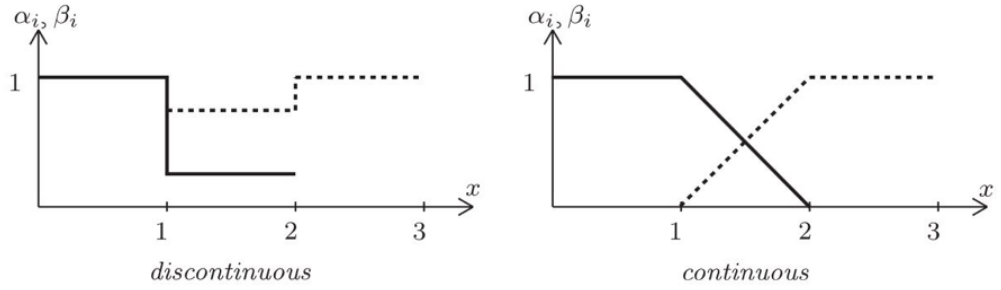


FIGURE 2.3 – Exemple de fonctions de pondération étudiées par GUIDAULT et BELYTSCHKO [2007] dans le cadre d'une méthode de couplage volumique.

A ce stade, plusieurs choix de produits scalaires sont possibles et la qualité du raccord dépend de ce choix, mais cette qualité a bien souvent un coût. Toute la difficulté réside donc dans la formulation de conditions de raccord pertinentes vis-à-vis du problème traité.

Dans ces travaux, qui privilégient les méthodes de couplages surfaciques, le produit scalaire sur l'espace L^2 a été choisi dans un souci de simplicité d'implémentation. Dans ce cas, $(\underline{\lambda},\underline{u}_1^*)_{L^2}$ et $(\underline{\lambda},\underline{u}_2^*)_{L^2}$ représentent respectivement les travaux des efforts $\underline{\lambda}$ sur les sous-structures Ω_1 et Ω_2 au travers de l'interface Γ_C.

D'autres choix sont possibles, par exemple dans DESMEURE [2016], une méthode de raccord surfacique est formulée à partir du produit scalaire sur l'espace $H^{1/2}$. Dans GUIDAULT et BELYTSCHKO [2007], des produits scalaires sur L^2 et sur H^1 sont comparés dans le cadre d'un raccord volumique.

Finalement, le choix de discrétisation de l'espace $\mathscr{M}^h$ donne lieu à différentes méthodes de couplage. Des exemples sont donnés ci-dessous en fonction du type de raccord.

Raccord surfacique – Pour des interfaces surfaciques, les relations entre les quantités d'intérêts peuvent être déterminées par simple interpolation linéaire ou par raccord faible de type mortar (BELGACEM [1999]; BERNARDI et collab. [1994]) ou Nitsche (HANSBO et HANSBO [2002]). Ces types de raccord ont l'avantage de bien s'implémenter dans les codes éléments finis via des relations *MultiPoint Constraint* (MPC) par exemple. La méthode mortar est détaillée à la **Section 2.4.1** suivante car elle sert de méthode de référence dans ces travaux.

Raccord volumique – Pour des interfaces volumiques, les relations de couplage peuvent être calculées à partir de la méthode Arlequin. Cette dernière, développée par BEN DHIA [1998], est dédiée à la détermination des conditions de couplage dans le cas d'un raccord volumique de domaines sous-structurés. Elle a été implémentée dans le code de calcul industriel Code_Aster par BEN DHIA et RATEAU [2002, 2005]; RATEAU [2003].

Des développements ont été proposés dans des problèmes de statique pour le couplage de modèles de composites (HE et collab. [2011]; HU [2006]; HU et collab. [2008, 2010]), de modèles

discrets/continus (BAUMAN et collab. [2008]; PRUDHOMME et collab. [2008]), de modèles atomistiques/continus (BAUMAN et collab. [2009]; CHAMOIN et collab. [2010]; GUIDAULT et BELYTSCHKO [2009]; PRUDHOMME et collab. [2009]), ou encore, de modèles déterministes/stochastiques (COTTEREAU et collab. [2011]) et de modèles granulaires/continus (WELLMANN et WRIGGERS [2012]). Elle a aussi été utilisée pour propager de l'endommagement et des fissures (BEN DHIA et JAMOND [2010]; JAMOND [2011]).

Certains développements ont également été proposés autour de la propagation d'ondes à hautes fréquences (BEN DHIA et ZAMMALI [2004]), du couplage de modèles SPH/éléments finis (CALEYRON et collab. [2011]; CHUZEL-MARMOT et collab. [2011]) et de couplages dynamiques moléculaires/éléments finis (XIAO et BELYTSCHKO [2004]).

2.4.1 Méthode mortar pour les éléments finis

La méthode mortar a été développée à la fin des années 1980, la communauté des mathématiques appliquées, pour décrire des géométries complexes avec des discrétisations spectrales. Des applications de couplage entre discrétisations spectrales ont été développées dans ANAGNOSTOU et collab. [1990]; MADAY et collab. [1988] et des applications de couplage entre discrétisations spectrale/éléments finis dans BERNARDI et collab. [1987]; DEBIT et MADAY [1989]. Cependant son champ d'application est bien plus large puisqu'elle permet de coupler n'importe quel type de formulation discrétisée de sous-domaines sans recouvrements. Dans cette section, c'est sa version appliquée à des discrétisations éléments finis qui est détaillée.

Dans le cadre de ces travaux, la forme discrète du problème (2.5) est obtenue par la méthode de Galerkin. Une discrétisation éléments finis standard permet de définir les champs $\mathscr{U}_1^h$ et $\mathscr{U}_2^h$ espaces d'approximation des champs $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$. L'interpolation des déplacements d'interface sur $\Gamma_C^{h,\mathscr{s}}$ représentant discrétisé de Γ_C (**Figure 2.4**) avec $\mathscr{s} \in \{1,2\}$ s'écrit :

$$\underline{u}^h_{1|\Gamma_C^{h,1}} = \sum_{k=1}^{n_1} \varphi_1^{(k)}(\xi_1,\eta_1)\underline{u}_1^{(k)} \tag{2.6}$$

$$\underline{u}^h_{2|\Gamma_C^{h,2}} = \sum_{l=1}^{n_2} \varphi_2^{(l)}(\xi_2,\eta_2)\underline{u}_2^{(k)} \tag{2.7}$$

où les déplacements nodaux du nœud k, sur la sous-structure $\mathscr{s}$, s'écrivent $\underline{u}_{\mathscr{s}}^{(k)}$. Les fonctions de forme φ_1 et φ_2 sont définies pour respecter l'espace paramétrique éléments finis standard dans lequel les coordonnées paramétriques sont notées ξ_i pour les problèmes à deux dimensions (c'est-à-dire une interface 1D) et $\underline{\xi}_i = (\xi_i,\eta_i)$ pour les problèmes à trois dimensions (c'est-à-dire une interface à deux dimensions). Le nombre total de nœuds du coté $\Gamma_C^{h,1}$ est noté n_1 et le nombre total de nœuds du coté $\Gamma_C^{h,2}$ est noté n_2.

La méthode nécessite, pour chaque interface, le choix arbitraire entre un « côté mortar » et un côté « non-mortar ». Ce choix est en général fixé à l'appréciation de l'utilisateur et n'est donc pas unique. Par exemple, ici, le côté mortar est choisi du côté de $\Gamma_C^{h,2}$. Par conséquent, les éléments de $\Gamma_C^{h,1}$ sont du côté non-mortar.

Remarque 2 *Dans les problèmes de contact, les termes consacrés sont plutôt « côté maître » et « côté esclave » (AKULA [2019]; POPP [2012]).*

La discrétisation des multiplicateurs de Lagrange est basée sur l'espace d'approximation $\mathscr{M}^h$ de $\mathscr{M}$. Les fonctions de forme associées sont notées $\psi^{(j)}$, $j = 1 \dots m_1$.

$$\underline{\lambda}^h = \sum_{j=1}^{m_1} \psi^{(j)}(\xi_1,\eta_1)\underline{\lambda}^{(j)} \tag{2.8}$$

Le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange discrétisé est crucial pour les propriétés mathématiques et l'efficacité numérique de la formulation mortar résultante. La littérature est riche

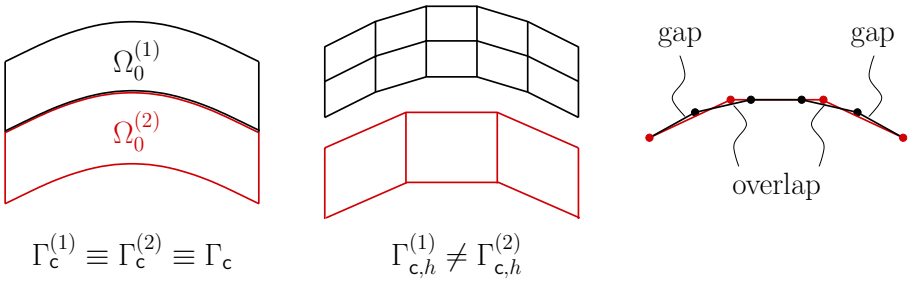


FIGURE 2.4 – Illustration de la discrétisation d'une interface avec des maillages non-conformes proposée par POPP [2012].

en ce qui concerne des caractéristiques pertinentes associées au choix de $\mathscr{M}^h$. Il s'agit par exemple de la stabilité à la condition Inf-Sup de la formulation mixte sous-jacente (voir l'**Annexe A**), ou des bornes optimales de l'erreur *a priori*. Le lecteur intéressé pourra par exemple se référer aux travaux de BELGACEM [1999]; BERNARDI et collab. [1994]; SESHAIYER et SURI [2000]; WOHLMUTH [2000].

Dans les approches classiques, les multiplicateurs de Lagrange sont habituellement discrétisés à partir du même support que l'espace des déplacements $\mathscr{W}_1^h \subset \mathscr{W}_1$ du côté non-mortar de l'interface (voir par exemple LACOUR et MADAY [1997]; WOHLMUTH [2000]). Ce choix est illustré à la **Figure 2.5** où le support des fonctions de forme est identique entre les multiplicateurs de Lagrange et les déplacements d'interface du côté non-mortar. Cependant, comme le montre la **Figure 2.5**, les fonctions de forme, ne sont pas nécessairement choisies identiques, notamment au niveau du bord de l'interface. Ce traitement particulier du bord des interfaces intervient en présence de nœuds communs à plusieurs interfaces, ce qui arrive lorsque une structure est décomposée en plus de deux sous-structures.

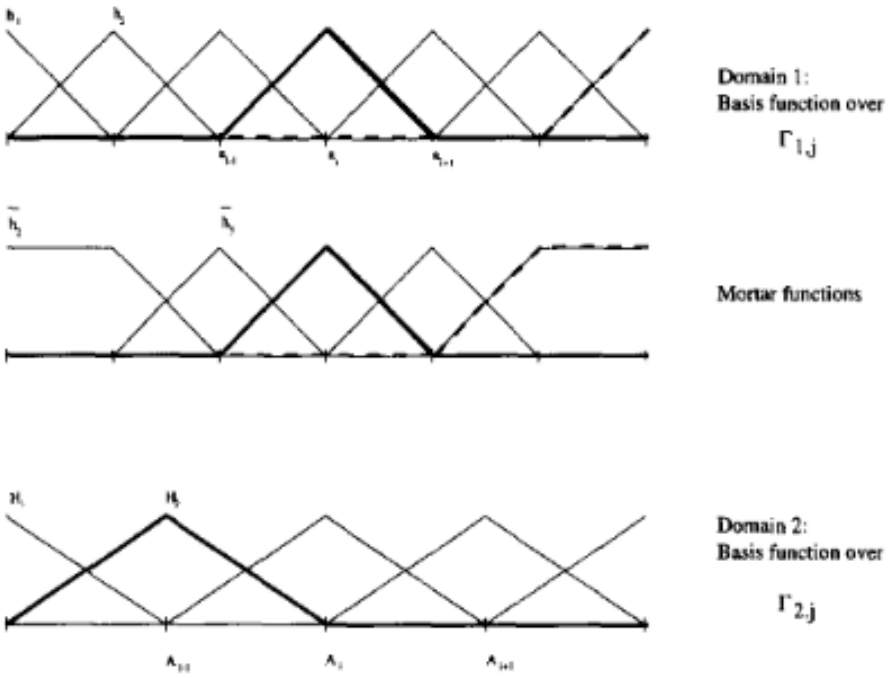


FIGURE 2.5 – Illustration de fonctions de base utilisées pour décrire les espaces discrétisés des multiplicateurs de Lagrange et des déplacements de bord sur une interface plane (LACOUR et MADAY [1997]).

Dans POPP [2012], la distinction est faite entre deux types de famille de multiplicateurs de Lagrange qui sont nommées *standard Lagrange multipliers* ou *dual Lagrange multipliers* (WOHLMUTH [2000]) :

- les multiplicateurs standards représentent l'approche classique des méthodes mortar ;
- les *dual Lagrange multipliers* sont pris dans un espace orthogonal à l'espace des déplacements du bord mais sur le même support. Ils vérifient la condition de bi-orthogonalité suivante :

$$\int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(j)} \varphi_1^{(k)} dS = \delta_{jk} \int_{\Gamma_C^{h,1}} \varphi_1^{(k)} dS$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker.

Dans ces travaux, le calcul des opérateurs de couplage par la méthode mortar a été fait par des multiplicateurs de Lagrange standard. De plus, en suivant ce qui est proposé dans LACOUR et MADAY [1997]; WOHLMUTH [2000] une discrétisation des multiplicateurs de Lagrange a été prise identique à celle du côté non-mortar. En outre, les fonctions de forme ont été choisies identiques à celles des déplacements du côté non-mortar : $\psi^j = \varphi_1^j$. En effet, dans le cadre des analyses global/local menées dans ces recherches, l'introduction d'une sous-structure dans une autre n'a pas généré qu'une seule interface de couplage, il n'était donc pas nécessaire de traiter des points multiples. Le côté non-mortar a alors été choisi systématiquement du côté de la structure globale.

Dans la suite, les détails de construction des opérateurs de couplage issus de la méthode mortar sont donnés et des détails sur le calcul numérique des termes de couplage sont donnés dans l'**Annexe A**. En introduisant (2.6), (2.7) et (2.8) dans (2.5) il est possible d'écrire :

$$\int_{\Gamma_C} \underline{\lambda}(\underline{u}_1^* - \underline{u}_2^*) d\Gamma = \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{n_1} \underline{\lambda}^{(j)^T} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(j)} \varphi_1^{(k)} dS\right)}_{C_1^{(j,k)}} \underline{u}_1^{*(k)} - \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{l=1}^{n_2} \underline{\lambda}^{(j)^T} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(j)} (\varphi_2^{(l)} \circ \chi_h) dS\right)}_{C_2^{(j,l)}} \underline{u}_2^{*(l)}$$

$$\int_{\Gamma_C} \underline{\lambda}^*(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) d\Gamma = \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{n_1} \underline{\lambda}^{*(j)^T} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(j)} \varphi_1^{(k)} dS\right)}_{C_1^{(j,k)}} \underline{u}_1^{(k)} - \sum_{j=1}^{m_1}\sum_{l=1}^{n_2} \underline{\lambda}^{*(j)^T} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(j)} (\varphi_2^{(l)} \circ \chi_h) dS\right)}_{C_2^{(j,l)}} \underline{u}_2^{(l)}$$

où $\chi_h : \Gamma_C^{h,1} \to \Gamma_C^{h,2}$ définit un opérateur de projection discret du maillage de l'interface du côté non-mortar vers le maillage de l'interface du côté mortar. Un tel opérateur est en général nécessaire si les surfaces $\Gamma_C^{h,1}$ et $\Gamma_C^{h,2}$ ne sont pas égales (**Figure 2.4**). Dans ce qui suit, l'interface de couplage Γ_C est considérée plane donc les supports de $\Gamma_C^{h,1}$ et $\Gamma_C^{h,2}$ sont égaux ($\chi_h = Id$). En notant les vecteurs :

$$[U] = \left[\underline{u}^{(1)}\, \underline{u}^{(2)}\, \underline{u}^{(3)} \dots\right]^T = \left[u^{(1)}\, v^{(1)}\, u^{(2)}\, v^{(2)}\, u^{(3)}\, v^{(3)} \dots\right]^T$$

et en notant $[\Gamma_{C_1}]$ et $[\Gamma_{C_2}]$ les opérateurs de trace discrétisés, il est possible d'écrire les relations linéaires suivantes :

$$[U_1^*]^T [\Gamma_{C_1}]^T [C_1]^T [\Lambda] - [U_2^*]^T [\Gamma_{C_2}]^T [C_2]^T [\Lambda] = [U^*]^T \underbrace{\begin{pmatrix} [\Gamma_{C_1}]^T [C_1]^T \\ -[\Gamma_{C_2}]^T [C_2]^T \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_m^T} [\Lambda]$$

et :

$$[\Lambda^*]^T [C_1] [\Gamma_{C_1}] [U_1] - [\Lambda^*]^T [C_2] [\Gamma_{C_1}] [U_2] = [\Lambda^*]^T \underbrace{\begin{bmatrix} [C_1][\Gamma_{C_1}] & -[C_2][\Gamma_{C_2}] \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_m} [U]$$

où :

$$[C_1] = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)} \varphi_1^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)} \varphi_1^{(2)} dS & 0 & \cdots \\ 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)} \varphi_1^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)} \varphi_1^{(2)} dS & \cdots \\ \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)} \varphi_1^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)} \varphi_1^{(2)} dS & 0 & \cdots \\ 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)} \varphi_1^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)} \varphi_1^{(2)} dS & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

et :

$$[C_2] = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)}\varphi_2^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)}\varphi_2^{(2)} dS & 0 & \cdots \\ 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)}\varphi_2^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(1)}\varphi_2^{(2)} dS & \cdots \\ \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)}\varphi_2^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)}\varphi_2^{(2)} dS & 0 & \cdots \\ 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)}\varphi_2^{(1)} dS & 0 & \int_{\Gamma_C^{h,1}} \psi^{(2)}\varphi_2^{(2)} dS & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Les équations (2.5) s'écrivent alors sous forme discrétisée :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_1][U_1] + [\Gamma_{C_1}]^T[C_1]^T[\Lambda] & = [F_1] \\ [\mathbf{K}_2][U_2] - [\Gamma_{C_2}]^T[C_2]^T[\Lambda] & = [F_2] \\ [C_1][\Gamma_{C_1}][U_1] - [C_2][\Gamma_{C_2}][U_2] & = [0] \end{cases} \tag{2.9}$$

Le système associé s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_1] & [0] & [\Gamma_{C_1}]^T[C_1]^T \\ [0] & [\mathbf{K}_2] & -[\Gamma_{C_2}]^T[C_2]^T \\ [C_1][\Gamma_{C_1}] & -[C_2][\Gamma_{C_2}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [\Lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \\ [0] \end{bmatrix}$$

ou bien sous forme condensée :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{B}_m]^T \\ [\mathbf{B}_m] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U] \\ [\Lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [0] \end{bmatrix}$$

avec :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_1] & [0] \\ [0] & [\mathbf{K}_2] \end{bmatrix} ; [\mathbf{B}_m] = \begin{bmatrix} [C_1][\Gamma_{C_1}] - [C_2][\Gamma_{C_2}] \end{bmatrix} ; [U] = \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_2] \end{bmatrix} ; [F] = \begin{bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \end{bmatrix}$$

Les détails techniques en ce qui concerne le calcul de la matrice $[\mathbf{B}_m]$ sont donnés à l'**Annexe A**.

2.4.2 Méthode basée sur la séparation micro-macro des quantités d'interface

Dans le cadre de la méthode LaTIn multiéchelle, une méthode de raccord entre sous-domaines basée sur une séparation micro-macro des quantités d'interface est proposée. Comme cela a été évoqué précédemment, la démarche est développée ci-après dans un formalisme « mixte », c'est-à-dire sans favoriser d'inconnue principale sur les interfaces.

Une sous-structure Ω_E avec $E \in \mathbf{E}$, est en interaction avec son environnement défini par ses interfaces voisines. Les quantités d'interface sont définies par des distributions d'efforts $\underline{F}_E$ et des déplacements $\underline{W}_E$ (**Figure 2.6**).

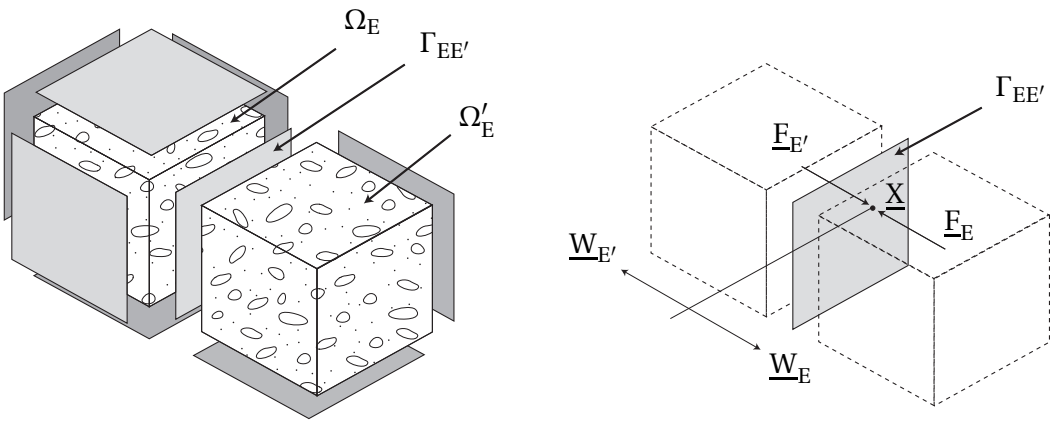


FIGURE 2.6 – Sous-structures et interfaces voisines.

Sur une interface $\Gamma_{EE'}$, les déplacements d'interface $\underline{W}_{EE'} = \underline{W}_{E|_{\Gamma_{EE'}}}$ et les inter-efforts $\underline{F}_{EE'} = \underline{F}_{E|_{\Gamma_{EE'}}}$ appartiennent respectivement à $\mathscr{W}_{EE'}$ et à $\mathscr{F}_{EE'}$. La forme bilinéaire « travail » suivante est introduite :

$$(\underline{W}_{EE'},\underline{F}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} \mapsto \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{W}_{EE'} \cdot \underline{F}_{EE'}\, d\Gamma \tag{2.10}$$

Elle est définie sur $\mathscr{W}_{EE'} \times \mathscr{F}_{EE'}$, et est relative au travail mécanique des quantités d'interface.

Séparation des déplacements d'interface en composantes macroscopique et microscopique – Soit un champ de déplacement d'interface $\underline{W}_{EE'} \in \mathscr{W}_{EE'}$ défini sur $\Gamma_{EE'}$. La partie macroscopique de ce champ de déplacement $\underline{W}^{M}_{EE'}$, est définie comme la projection sur le sous-espace de dimension finie $\mathscr{W}^{M}_{EE'}$ de $\mathscr{W}_{EE'}$ avec sa dimension notée $n_M = \dim(\mathscr{W}^{M}_{EE'})$. Le projecteur sur ce sous-espace est défini tel que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}^{M,W}_{EE'} : \mathscr{W}_{EE'} &\to \mathscr{W}^{M}_{EE'} \\ \underline{W}_{EE'} &\mapsto \boldsymbol{\Pi}^{M,W}_{EE'}(\underline{W}_{EE'}) = \underline{W}^{M}_{EE'} \end{aligned}$$

La partie microscopique $\underline{W}^{m}_{EE'}$, de $\underline{W}_{EE'}$ appartient au sous-espace complémentaire $\mathscr{W}^{m}_{EE'}$ de $\mathscr{W}_{EE'} = \mathscr{W}^{M}_{EE'} \oplus \mathscr{W}^{m}_{EE'}$ tel que :

$$\underline{W}^{m}_{EE'} = \underline{W}_{EE'} - \underline{W}^{M}_{EE'} = (I_d - \boldsymbol{\Pi}^{M,W}_{EE'})(\underline{W}_{EE'})$$

de manière à pouvoir écrire la décomposition suivante du déplacement d'interface : $\underline{W}_{EE'} = \underline{W}^{M}_{EE'} + \underline{W}^{m}_{EE'}$.

La partie microscopique $\underline{F}^{m}_{EE'}$ et la partie macroscopique $\underline{F}^{M}_{EE'}$ des distributions d'effort $\underline{F}_{EE'} (= \underline{F}^{M}_{EE'} + \underline{F}^{m}_{EE'})$ sont définies telles que les contributions, de chaque échelle, au travail des quantités d'interface, soient découplées :

$$(\underline{W}_{EE'},\underline{F}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} = (\underline{W}^{M}_{EE'},\underline{F}^{M}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} + (\underline{W}^{m}_{EE'},\underline{F}^{m}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} \tag{2.11}$$

En conséquence, l'effort macroscopique $\underline{F}^{M}_{EE'} \in \mathscr{F}^{M}_{EE'}$ est défini par :

$$\forall \underline{W}^{M*}_{EE'} \in \mathscr{W}^{M}_{EE'},\ (\underline{W}^{M*}_{EE'},\underline{F}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} = (\underline{W}^{M*}_{EE'},\underline{F}^{M}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} \tag{2.12}$$

$\mathscr{W}^{M}_{EE'}$ et $\mathscr{F}^{M}_{EE'}$ ont par conséquent la même dimension : n_M.

Remarque 3 *La même méthodologie peut être répétée pour définir les déplacements macroscopiques $\underline{W}^{M}_{EE'} \in \mathscr{W}^{M}_{EE'}$ à partir des distributions d'efforts comme cela est présenté dans* Ladevèze *et collab. [2001] :*

$$\forall \underline{F}^{M*}_{EE'} \in \mathscr{F}^{M}_{EE'},\quad (\underline{W}_{EE'},\underline{F}^{M*}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} = (\underline{W}^{M}_{EE'},\underline{F}^{M^*}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} \tag{2.13}$$

En résumé, comme cela est présenté dans Ladevèze et Nouy [2002]; Nouy [2003], une séparation micro-macro des quantités d'interface, qui respecte la séparation des travaux (2.11), est définie par la **Définition 1** et la **Définition 2** ci-dessous.

Définition 1 *Les parties macroscopiques des quantités d'interface $(\underline{W}^{M}_{EE'},\underline{F}^{M}_{EE'}) \in \mathscr{W}^{M}_{EE'} \times \mathscr{F}^{M}_{EE'}$ extraites de $(\underline{W}_{EE'},\underline{F}_{EE'}) \in \mathscr{W}_{EE'} \times \mathscr{F}_{EE'}$ sont définies telles que :*

$$\begin{aligned} \forall \underline{W}^{M*}_{EE'} \in \mathscr{W}^{M}_{EE'},&\quad (\underline{W}^{M*}_{EE'},\underline{F}^{M}_{EE'} - \underline{F}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} = 0 \\ \forall \underline{F}^{M*}_{EE'} \in \mathscr{F}^{M}_{EE'},&\quad (\underline{W}^{M}_{EE'} - \underline{W}_{EE'},\underline{F}^{M*}_{EE'})_{\Gamma_{EE'}} = 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que : $\underline{W}^{M}_{EE'}$ (resp. $\underline{F}^{M}_{EE'}$) est la projection de $\underline{W}_{EE'}$ (resp. $\underline{F}_{EE'}$) sur $\mathscr{W}^{M}_{EE'}$ (resp. $\mathscr{F}^{M}_{EE'}$) parallèlement à $[\mathscr{F}^{M}_{EE'}]^{\perp}$ (resp. $[\mathscr{W}^{M}_{EE'}]^{\perp}$) où $[\,\cdot\,]^{\perp}$ est le complément orthogonal vis-à-vis de la forme bilinéaire travail.

Définition 2 *Les parties microscopiques* $(\underline{\mathrm{W}}^m_{\mathrm{EE}'},\underline{\mathrm{F}}^m_{\mathrm{EE}'}) \in \mathscr{W}^m_{\mathrm{EE}'} \times \mathscr{F}^m_{\mathrm{EE}'}$ *de* $(\underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'},\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{EE}'}) \in \mathscr{W}_{\mathrm{EE}'} \times \mathscr{F}_{\mathrm{EE}'}$ *sont définies telles que :*

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{W}}^m_{\mathrm{EE}'} &= \underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} \\ \underline{\mathrm{F}}^m_{\mathrm{EE}'} &= \underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{EE}'} - \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} \end{aligned}$$

avec $\mathscr{W}^m_{\mathrm{EE}'} = [\mathscr{F}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]^{\perp}$ *et* $\mathscr{F}^m_{\mathrm{EE}'} = [\mathscr{W}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]^{\perp}$.

Définition des projecteurs macroscopiques – Soit $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}$, une base du sous-espace $\mathscr{W}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} \subset \mathscr{F}_{\mathrm{EE}'} \cap \mathscr{W}_{\mathrm{EE}'}$: $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon} = \left(\{\underline{e}^i_{\Upsilon}\}_{k=1\ldots n_{\mathrm{M}}}\right)$. Alors, il est possible de montrer que la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}$ est un produit scalaire sur le sous-espace engendré par la base $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}$ et :

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M,W}}_{\mathrm{EE}'}(\underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'}) = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} (\underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'},\underline{e}^{\mathrm{M}}_k)_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}\, \underline{e}^{\mathrm{M}}_k = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_k\, \underline{e}^i_{\Upsilon} = \mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_{\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}}$$

où la k-ième composante de $\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}$ dans $\underline{e}^i_{\Upsilon}$ est dans ce cas $[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_k = (\underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'},\underline{e}^i_{\Upsilon})$. Le vecteur des n_{M} composantes macroscopiques dans la base $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}$ est noté $[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_{\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}}$. De plus, comme $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}$ est aussi une base de $\mathscr{F}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}$, il vient :

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M,F}}_{\mathrm{EE}'}(\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{EE}'}) = \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} (\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{EE}'},\underline{e}^i_{\Upsilon})_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}\, \underline{e}^i_{\Upsilon}$$

et :

$$(\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'},\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'})_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}}\sum_{j=1}^{n_{\mathrm{M}}} [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_k (\underline{e}^i_{\Upsilon},\underline{e}^j_{\Upsilon})_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}\, [\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_j$$

Si la base $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}$ est orthonormale au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}$ sur le sous-espace engendré par la base $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}$, alors le travail macroscopique sur l'interface s'écrit comme simple produit scalaire des composantes :

$$(\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'},\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'})_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}} = [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]^{\mathrm{T}}_{\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}}[\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_{\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\Upsilon}}$$

et finalement, le projecteur macroscopique défini pour les déplacements, $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M,W}}_{\mathrm{EE}'}$, est identique à celui défini pour les distributions d'effort : $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M,W}}_{\mathrm{EE}'} = \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M,F}}_{\mathrm{EE}'} = \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}(\underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'}) = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_k\, \underline{e}^i_{\Upsilon} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} (\underline{\mathrm{W}}_{\mathrm{EE}'},\underline{e}^i_{\Upsilon})_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}\, \underline{e}^i_{\Upsilon} \tag{2.14}$$

et :

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}(\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{EE}'}) = \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} [\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{EE}'}]_k\, \underline{e}^i_{\Upsilon} = \sum_{k=1}^{n_{\mathrm{M}}} (\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{EE}'},\underline{e}^i_{\Upsilon})_{\Gamma_{\mathrm{EE}'}}\, \underline{e}^i_{\Upsilon} \tag{2.15}$$

Différents choix de bases macroscopiques peuvent être faits. Par exemple dans GUIDAULT et collab. [2007]; LOISEAU [2001], l'espace macroscopique des déplacements d'interface est défini à partir de fonctions polynomiales et dans GUIDAULT et collab. [2008] à partir de fonctions discontinues.

Références

ABU KASSIM, A. M. et B. H. V. TOPPING. 1987, «Static Reanalysis : A Review», *Journal of Structural Engineering*, vol. 113, n° 5, doi :10.1061/(ASCE)0733-9445(1987)113:5(1029), p. 1029–1045. 28

AKGÜN, M. A., J. H. GARCELON et R. T. HAFTKA. 2001, «Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the Sherman–Morrison–Woodbury formulas», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, nº 7, doi :10.1002/nme.87, p. 1587–1606, ISSN 1097-0207. 28

AKULA, B. R. 2019, *Extended Mortar Method for Contact and Mesh-Tying Applications*, thèse de doctorat, Université Paris-Sciences-et-Lettres. 35

ALLIX, O. et C. DUPLEIX-COUDERC. 2010, «A plate theory as a mean to compute precise 3D solutions including edge effects and related issues», dans *New Trends in Thin Structures : Formulation, Optimization and Coupled Problems*, édité par P. Mattos Pimenta et P. Wriggers, Springer Vienna, Vienna, ISBN 978-3-7091-0231-2, p. 1–28. 33

ALLIX, O., L. GENDRE, P. GOSSELET et G. GUGUIN. 2011, «Non-intrusive Coupling : An Attempt to Merge Industrial and Research Software Capabilities», dans *Recent Developments and Innovative Applications in Computational Mechanics*, édité par D. Mueller-Hoeppe, S. Loehnert et S. Reese, Springer, Berlin, Heidelberg, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-642-17484-1, p. 125–133, doi :10.1007/978-3-642-17484-1_15. 32

ANAGNOSTOU, G., Y. MADAY, C. MAVRIPLIS et A. PATERA. 1990, «On the mortar element method : Generalizations and implementation», dans *International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, 3 Rd, Houston, TX*, p. 157–173. 35

ARORA, J. 1976, «Survey of structural reanalysis techniques», *ASCE J Struct Div*, vol. 102, p. 783–802. 28

BAO, G., J. W. HUTCHINSON et R. M. MCMEEKING. 1991, «Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep», *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 39, nº 8, doi : 10.1016/0956-7151(91)90156-U, p. 1871–1882, ISSN 0956-7151. 24

BAUMAN, P. T., H. BEN DHIA, N. ELKHODJA, J. T. ODEN et S. PRUDHOMME. 2008, «On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models», *Computational Mechanics*, vol. 42, nº 4, doi :10.1007/s00466-008-0291-1, p. 511–530, ISSN 1432-0924. 35

BAUMAN, P. T., J. T. ODEN et S. PRUDHOMME. 2009, «Adaptive multiscale modeling of polymeric materials with Arlequin coupling and Goals algorithms», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, nº 5, doi :10.1016/j.cma.2008.10.014, p. 799–818, ISSN 0045-7825. 35

BELGACEM, F. B. 1999, «The Mortar finite element method with Lagrange multipliers», *Numerische Mathematik*, vol. 84, nº 2, doi :10.1007/s002110050468, p. 173–197, ISSN 0029-599X, 0945-3245. 34, 36

BELYTSCHKO, T. et J.-H. SONG. 2010, «Coarse-graining of multiscale crack propagation», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, nº 5, doi :10.1002/nme.2694, p. 537–563, ISSN 1097-0207. 24

BEN DHIA, H. 1998, «Problèmes mécaniques multi-échelles : La méthode Arlequin», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol. 326, nº 12, doi : 10.1016/S1251-8069(99)80046-5, p. 899–904, ISSN 1287-4620. 34

BEN DHIA, H. et O. JAMOND. 2010, «On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, nº 21, doi :10.1016/j.cma.2009.11.014, p. 1403–1414, ISSN 0045-7825. 35

BEN DHIA, H. et G. RATEAU. 2002, «Application of the Arlequin method to some structures with defects», *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 11, nº 2-4, doi :10.3166/reef.11.291-304, p. 291–304, ISSN 1250-6559. 34

BEN DHIA, H. et G. RATEAU. 2005, «The Arlequin method as a flexible engineering design tool», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, nº 11, doi :10.1002/nme.1229, p. 1442–1462, ISSN 1097-0207. 34

BEN DHIA, H. et C. ZAMMALI. 2004, «Level-Sets and Arlequin framework for dynamic contact problems», *Revue Européenne de Mécanique Numérique/European Journal of Computational Mechanics*, vol. 13, nº 5-6-7, doi :10.3166, p. 403–414. 35

BERNARDI, C., N. DEBIT, Y. MADAY et J.-L. LIONS. 1987, «Couplage de méthodes spectrales et d'éléments finis : premiers résultats d'approximation», *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, vol. 305, nº 8, p. 353–356, ISSN 0764-4442. 35

BERNARDI, C., Y. MADAY et A. PATERA. 1994, «A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar element method», Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, 11 (Paris, 1989–1991), Longman Sci. Tech., Harlow, p. 13–51. 34, 36

BEST, G. C. 1945, «The Stress-Area Method of Designing Beams», *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 12, nº 3, doi :10.2514/8.11248, p. 298–304. 29

BEST, G. C. 1963, «A method of structural weight minimization suitable for high-speed digital computers», *AIAA Journal*, vol. 1, nº 2, doi :10.2514/3.1570, p. 478–479, ISSN 0001-1452. 29

BETTINOTTI, O., O. ALLIX et B. MALHERBE. 2013, «A coupling strategy for adaptive local refinement in space and time with a fixed global model in explicit dynamics», *Computational Mechanics*, doi :10.1007/s00466-013-0917-9, p. 1–14. 32

BLANCHARD, M. 2018, *Méthode global/local non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires*, thèse de doctorat, Université Paris-Saclay. 32

BLANCHARD, M., O. ALLIX, P. GOSSELET et G. DESMEURE. 2019, «Space/time global/local noninvasive coupling strategy : Application to viscoplastic structures», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 156, doi :10.1016/j.finel.2019.01.003, p. 1–12. 32

BOUCLIER, R., J.-C. PASSIEUX et M. SALAÜN. 2016, «Local enrichment of NURBS patches using a non-intrusive coupling strategy : Geometric details, local refinement, inclusion, fracture», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 300, p. 1–26, ISSN 0045-7825. 32

CALEYRON, F., Y. CHUZEL-MARMOT et A. COMBESCURE. 2011, «Modeling of reinforced concrete through SPH-FE coupling and its application to the simulation of a projectile's impact onto a slab», *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, vol. 27, nº 6, doi : 10.1002/cnm.1341, p. 882–898, ISSN 2040-7947. 35

CHAMOIN, L., S. PRUDHOMME, H. BEN DHIA et T. ODEN. 2010, «Ghost forces and spurious effects in atomic-to-continuum coupling methods by the Arlequin approach», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, nº 8-9, doi :10.1002/nme.2879, p. 1081–1113, ISSN 1097-0207. 35

CHANTRAIT, T. 2014, *Approche multiéchelle en espace et en temps pour la prévision des endommagements dans les structures composites soumises à un impact de faible énergie*, thèse de doctorat, INSA de Lyon. 32

CHANTRAIT, T., J. RANNOU et A. GRAVOUIL. 2014, «Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 86, doi :10.1016/j.finel.2014.03.011, p. 23–33, ISSN 0168-874X. 32

CHEVREUIL, M., A. NOUY et E. SAFATLY. 2013, «A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 255, doi :10.1016/j.cma.2012.12.003, p. 255–274, ISSN 0045-7825. 32

CHRISTMAN, T., A. NEEDLEMAN et S. SURESH. 1989, «An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites», *Acta Metallurgica*, vol. 37, nº 11, doi :10.1016/0001-6160(89)90339-8, p. 3029–3050, ISSN 0001-6160. 24

CHUZEL-MARMOT, Y., R. ORTIZ et A. COMBESCURE. 2011, «Three dimensional SPH–FEM gluing for simulation of fast impacts on concrete slabs», *Computers & Structures*, vol. 89, nº 23, doi :10.1016/j.compstruc.2011.06.002, p. 2484–2494, ISSN 0045-7949. 35

CLOUGH, R. W. et E. L. WILSON. 1979, «Dynamic analysis of large structural systems with local nonlinearities», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17-18, doi :10.1016/0045-7825(79)90084-7, p. 107–129, ISSN 0045-7825. 28

COTTEREAU, R., D. CLOUTEAU, H. BEN DHIA et C. ZACCARDI. 2011, «A stochastic-deterministic coupling method for continuum mechanics», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, nº 47, doi :10.1016/j.cma.2011.07.010, p. 3280–3288, ISSN 0045-7825. 35

DAGHIA, F. et P. LADEVÈZE. 2012, «A micro–meso computational strategy for the prediction of the damage and failure of laminates», *Composite Structures*, vol. 94, nº 12, doi :10.1016/j.compstruct.2012.05.028, p. 3644–3653, ISSN 0263-8223. 27, 32

DAS, P. C. 1978, «Reanalysing structures with small modifications», *Computer-Aided Design*, vol. 10, nº 6, doi :10.1016/0010-4485(78)90113-6, p. 371–379, ISSN 0010-4485. 29

DEBIT, N. et Y. MADAY. 1989, «The coupling of spectral and finite element methods for the approximation of the Stokes problem», *Computational Mathematics and Applications, Pavia*, p. 139–163. 35

DESMEURE, G. 2016, *Une stratégie de décomposition de domaine mixte et multiéchelle pour le calcul des assemblages.*, thesis, Paris Saclay. 34

DEVRIES, F., H. DUMONTET, G. DUVAUT et F. LENE. 1989, «Homogenization and damage for composite structures», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 27, nº 2, doi :10.1002/nme.1620270206, p. 285–298, ISSN 1097-0207. 24

DING, H. et R. H. GALLAGHER. 1985, «Approximate force method reanalysis techniques in structural optimization», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, nº 7, doi :10.1002/nme.1620210706, p. 1253–1267, ISSN 1097-0207. 29

DUVAL, M. 2016, *Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures*, thèse de doctorat. 32

DUVAL, M., J.-C. PASSIEUX, M. SALAÜN et S. GUINARD. 2016, «Non-intrusive Coupling : Recent Advances and Scalable Nonlinear Domain Decomposition», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 23, nº 1, doi :10.1007/s11831-014-9132-x, p. 17–38, ISSN 1134-3060, 1886-1784. 32

FARHAT, C. 1992, «A saddle-point principle domain decomposition method for the solution of solid mechanics problems», dans *Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, édité par D. E. Keyes, T. F. Chan, G. Meurant, J. Scroggs et R. G. Voigt, SIAM Philadelphia, PA, p. 271–292. 32

FARHAT, C. et F.-X. ROUX. 1991, «A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, nº 6, doi :10.1002/nme.1620320604, p. 1205–1227, ISSN 1097-0207. 27, 32

FELIPPA, C. A. 2004, «Introduction to Finite Element Methods», *Course Notes, Department of Aerospace Engineeing Sciences, University of Colorado at Boulder, available at http ://www. colorado. edu/engineering/Aerospace/CAS/courses. d/IFEM. d.* 27

FEYEL, F. 1998, *Application Du Calcul Parallèle Aux Modèles à Grand Nombre de Variables Internes*, Thesis, ENSMP. 25

FEYEL, F. 1999, «Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures», *Computational Materials Science*, vol. 16, nº 1, doi :10.1016/S0927-0256(99)00077-4, p. 344–354, ISSN 0927-0256. 25

FEYEL, F. 2003, «A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, nº 28, doi :10.1016/S0045-7825(03)00348-7, p. 3233–3244, ISSN 0045-7825. 25

FEYEL, F. et J.-L. CHABOCHE. 2000, «FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, nº 3, doi :10.1016/S0045-7825(99)00224-8, p. 309–330, ISSN 0045-7825. 25

FISH, J. 1992, «The s-version of the finite element method», *Computers & Structures*, vol. 43, nº 3, doi :10.1016/0045-7949(92)90287-A, p. 539–547, ISSN 0045-7949. 29

FISH, J. et R. GUTTAL. 1996, «The s-version of the finite element method for laminates composites», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, nº 21, doi : 10.1002/(SICI)1097-0207(19961115)39:21<3641::AID-NME17>3.0.CO;2-P, p. 3641–3662, ISSN 1097-0207. 29

FISH, J. et S. MARKOLEFAS. 1992, «The s-version of the finite element method for multilayer laminates», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, nº 5, doi : 10.1002/nme.1620330512, p. 1081–1105, ISSN 1097-0207. 29

FOREST, S. et K. SAB. 1998, «Cosserat overall modeling of heterogeneous materials», *Mechanics Research Communications*, vol. 25, nº 4, doi :10.1016/S0093-6413(98)00059-7, p. 449–454, ISSN 0093-6413. 25

FORTIN, M. et R. GLOWINSKI. 1983, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*, Studies in Mathematics and Its Applications, Elsevier Science, ISBN 978-0-08-087536-1. 32

FOX, R. L. et H. MIURA. 1971, «An approximate analysis technique for design calculations», *AIAA Journal*, vol. 9, nº 1, doi :10.2514/3.6141, p. 177–179, ISSN 0001-1452. 29

GENDRE, L. 2009, *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*, thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. 32

GENDRE, L., O. ALLIX et P. GOSSELET. 2011, «A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 87, nº 9, doi :10.1002/nme.3142, p. 889–905, ISSN 1097-0207. 32

GENDRE, L., O. ALLIX, P. GOSSELET et F. COMTE. 2009, «Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity», *Computational Mechanics*, vol. 44, nº 2, doi :10.1007/s00466-009-0372-9, p. 233–245, ISSN 1432-0924. 32

GLOWINSKI, R. et P. LE TALLEC. 1990, «Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwarz alternating method», dans *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), Philadelphia, p. 224–231. 32

GOSSELET, P. et C. REY. 2006, «Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 13, nº 4, doi :10.1007/BF02905857, p. 515–572, ISSN 1134-3060, 1886-1784. 31

GRIFFIN, O. H. et M. A. VIDUSSONI. 1988, «Global/local finite element analysis of composite materials», dans *Computer Aided Design in Composite Material Technology*, Southampton, United Kingdom. 30

GUGUIN, G., O. ALLIX, P. GOSSELET et S. GUINARD. 2014, «Nonintrusive coupling of 3D and 2D laminated composite models based on finite element 3D recovery», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 98, nº 5, doi :10.1002/nme.4630, p. 324–343, ISSN 1097-0207. 32

GUIDAULT, P.-A., O. ALLIX, L. CHAMPANEY et C. CORNUAULT. 2008, «A multiscale extended finite element method for crack propagation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, nº 5, doi :10.1016/j.cma.2007.07.023, p. 381–399. 27, 40

GUIDAULT, P.-A., O. ALLIX, L. CHAMPANEY et J. NAVARRO. 2007, «A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures», *Computational Structures Technology*, vol. 85, nº 17–18, doi :10.1016/j.compstruc.2006.08.085, p. 1360–1371, ISSN 0045-7949. 27, 40

GUIDAULT, P.-A. et T. BELYTSCHKO. 2007, «On the L2 and the H1 couplings for an overlapping domain decomposition method using Lagrange multipliers», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, nº 3, doi :10.1002/nme.1882, p. 322–350, ISSN 1097-0207. 34

GUIDAULT, P.-A. et T. BELYTSCHKO. 2009, «Bridging domain methods for coupled atomistic-continuum models with L2 or H1 couplings», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, nº 11, doi :10.1002/nme.2461, p. 1566–1592, ISSN 1097-0207. 33, 35

GUPTA, P., J. P. PEREIRA, D. J. KIM, C. A. DUARTE et T. EASON. 2012, «Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems : A non-intrusive approach using a generalized finite element method», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 90, doi :10.1016/j.engfracmech.2012.04.014, p. 41–64, ISSN 0013-7944. 32

HACKBUSCH, W. et U. TROTTENBERG, éd.. 1982, *Multigrid Methods : Proceedings of the Conference Held at Köln-Porz, November 23-27, 1981*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-540-11955-5. 27

HANSBO, A. et P. HANSBO. 2002, «An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, nº 47, doi :10.1016/S0045-7825(02)00524-8, p. 5537–5552, ISSN 0045-7825. 34

HARYADI, S. G., R. K. KAPANIA et R. T. HAFTKA. 1998, «Global/local analysis of composite plates with cracks», *Composites Part B : Engineering*, vol. 29, nº 3, doi :10.1016/S1359-8368(97)00034-6, p. 271–276, ISSN 1359-8368. 30

HE, Q. Z., H. HU, S. BELOUETTAR, G. GUINTA, K. YU, Y. LIU, F. BISCANI, E. CARRERA et M. POTIER-FERRY. 2011, «Multi-scale modelling of sandwich structures using hierarchical kinematics», *Composite Structures*, vol. 93, nº 9, doi :10.1016/j.compstruct.2011.03.026, p. 2375–2383, ISSN 0263-8223. 34

HIRAI, I., Y. UCHIYAMA, Y. MIZUTA et W. D. PILKEY. 1985, «An exact zooming method», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, nº 1, doi :10.1016/0168-874X(85)90008-3, p. 61–69, ISSN 0168-874X. 29

HIRAI, I., B. P. WANG et W. D. PILKEY. 1983, «An efficient zooming method for finite element analysis», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, nº 9, doi : 10.1002/nme.1620200910, p. 1671–1683, ISSN 1097-0207. 29

HU, H. 2006, *Modélisation Multi-Échelle Des Structures Sandwich*, Thesis, Metz. 34

HU, H., S. BELOUETTAR, M. POTIER-FERRY et E. M. DAYA. 2008, «Multi-scale modelling of sandwich structures using the Arlequin method Part I : Linear modelling», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 45, nº 1, doi :10.1016/j.finel.2008.07.003, p. 37–51, ISSN 0168-874X. 34

HU, H., S. BELOUETTAR, M. POTIER-FERRY, E. M. DAYA et A. MAKRADI. 2010, «Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the Arlequin method», *Composite Structures*, vol. 92, nº 2, doi :10.1016/j.compstruct.2009.08.051, p. 515–522, ISSN 0263-8223. 34

HUGHES, T. J., A. RAEFSKY, A. MULLER, J. WINGET et I. LEVIT. 1984, «A progress report on EBE solution procedures in solid mechanics», *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, vol. 2, p. 18–109. 27

HUGHES, T. J. R. 1995, «Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, nº 1, doi :10.1016/0045-7825(95)00844-9, p. 387–401, ISSN 0045-7825. 26

HUGHES, T. J. R., G. R. FEIJÓO, L. MAZZEI et J.-B. QUINCY. 1998, «The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 166, nº 1, doi :10.1016/S0045-7825(98)00079-6, p. 3–24, ISSN 0045-7825. 26

IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et D. MARKOVIČ. 2003, «Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, nº 28, doi :10.1016/S0045-7825(03)00342-6, p. 3089–3107, ISSN 0045-7825. 26

JAMOND, O. 2011, *Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multi-modèles*, thèse de doctorat. 35

JARA-ALMONTE, C. C. et C. E. KNIGHT. 1988, «The specified boundary stiffness/force SBSF method for finite element subregion analysis», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, nº 7, doi :10.1002/nme.1620260708, p. 1567–1578, ISSN 1097-0207. 30

KAPANIA, R. K., S. G. HARYADI et R. T. HAFTKA. 1997, «Global/local analysis of composite plates with cutouts», *Computational Mechanics*, vol. 19, nº 5, doi :10.1007/s004660050187, p. 386–396, ISSN 1432-0924. 30

KAVANAGH, K. T. 1972, «An approximate algorithm for the reanalysis of structures by the finite element method», *Computers & Structures*, vol. 2, nº 5, doi :10.1016/0045-7949(72)90033-8, p. 713–722, ISSN 0045-7949. 29

KELLEY, F. 1982, «Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method», dans *Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*, p. 39–42. 29

KIRSCH, U. 1981, «Approximate structural reanalysis based on series expansion», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 26, nº 2, doi :10.1016/0045-7825(81)90095-5, p. 205–223, ISSN 0045-7825. 29

KIRSCH, U. 2008, *Reanalysis of Structures : A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems*, Solid Mechanics and Its Applications, Springer Netherlands, ISBN 978-1-4020-8197-2. 28

KITAMURA, M. et H. GU. 2001, «Submodeling Analysis Using Recovered Stresses by Superconvergent Patch Recovery Method as Driven Variables : Application in Large Deformation Problems», *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, vol. 2001, nº 190, doi :10.2534/jjasnaoe1968.2001.190_663, p. 663–670. 30

KITAMURA, M., H. OHTSUBO, A. AKIYAMA et H. BANDOH. 2003, «Submodeling Analysis of Ship Structure With Superconvergent Patch Recovery Method», *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, vol. 13, nº 03, ISSN 1053-5381. 30

KOUZNETSOVA, V. G., M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS. 2002, «Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, nº 8, doi : 10.1002/nme.541, p. 1235–1260, ISSN 1097-0207. 25

KOUZNETSOVA, V. G., M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS. 2004, «Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : A nested finite element solution strategy», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, nº 48, doi : 10.1016/j.cma.2003.12.073, p. 5525–5550, ISSN 0045-7825. 25

LACOUR, C. et Y. MADAY. 1997, «Two different approaches for matching nonconforming grids : The Mortar Element method and the Feti Method», *BIT Numerical Mathematics*, vol. 37, nº 3, doi :10.1007/BF02510249, p. 720–738, ISSN 0006-3835, 1572-9125. 36, 37

LADEVÈZE, P. 1990, «Une nouvelle méthode pour l'analyse des structures massives», *Note technique AEROSPATIALE, STS*, vol. 3, p. 45. 32

LADEVÈZE, P. et D. DUREISSEIX. 1999, «A new micro-macro computational strategy for structural analysis», *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy*, vol. 327, nº 12, p. 1237–1244. 27

LADEVÈZE, P. et D. DUREISSEIX. 2000, «A micro / macro approach for parallel computing of heterogeneous structures», *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, vol. 1, p. 18–28. 27

LADEVÈZE, P., O. LOISEAU et D. DUREISSEIX. 2001, «A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, nº 1-2, doi :10.1002/nme.274, p. 121–138. 27, 39

LADEVÈZE, P. et A. NOUY. 2002, «A multiscale computational method with time and space homogenization», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 330, nº 10, doi :10.1016/S1631-0721(02)01514-0, p. 683–689. 27, 39

LIONS, P. L. 1990, «On the Schwarz alternating method III : A variant for nonoverlapping subdomains», dans *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Domain Decomposition Methods - International Symposium, Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 202. 31

LOISEAU, O. 2001, *Une Stratégie de Calcul Multiéchelle Pour Les Structures Hétérogènes*, thèse de doctorat, ENS de Cachan. 40

MADAY, Y., C. MAVRIPLIS et A. PATERA. 1988, «Nonconforming mortar element methods : Application to spectral discretizations», . 35

MALEKAN, M. et F. B. BARROS. 2016, «Well-conditioning global–local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics», *Computational Mechanics*, vol. 58, nº 5, doi :10.1007/s00466-016-1318-7, p. 819–831, ISSN 1432-0924. 25

MANDEL, J. 1993, «Balancing domain decomposition», *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, nº 3, doi :10.1002/cnm.1640090307, p. 233–241, ISSN 1099-0887. 27, 32

MAO, K. M. et C. T. SUN. 1991, «A refined global-local finite element analysis method», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, nº 1, doi :10.1002/nme.1620320103, p. 29–43, ISSN 1097-0207. 30

MARKOVIČ, D. et A. IBRAHIMBEGOVIĆ. 2004, «On micro–macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, nº 48, doi :10.1016/j.cma.2003.12.072, p. 5503–5523, ISSN 0045-7825. 26

MIEHE, C., J. SCHRÖDER et J. SCHOTTE. 1999, «Computational homogenization analysis in finite plasticity Simulation of texture development in polycrystalline materials», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 171, nº 3, doi :10.1016/S0045-7825(98)00218-7, p. 387–418, ISSN 0045-7825. 25

MIKLOSKO, J. et V. J. KOTOV, éd.. 1984, *Algorithms, Software and Hardware of Parallel Computers*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-662-11108-6. 27

NOOR, A. K. 1986, «Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2, nº 4, doi :10.1016/0168-874X(86)90020-X, p. 333–346, ISSN 0168-874X. 27

NOOR, A. K., C. M. ANDERSEN et J. A. TANNER. 1987, «Exploiting symmetries in the modeling and analysis of tires», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 63, nº 1, doi : 10.1016/0045-7825(87)90123-X, p. 37–81, ISSN 0045-7825. 27

NOOR, A. K. et H. E. LOWDER. 1974, «Approximate techniques of strctural reanalysis», *Computers & Structures*, vol. 4, nº 4, doi :10.1016/0045-7949(74)90046-7, p. 801–812, ISSN 0045-7949. 29

NOOR, A. K. et J. M. PETERS. 1985, «Model-size reduction technique for the analysis of symmetric anisotropic structures», *Engineering Computations*, doi :10.1108/eb023626, ISSN 0264-4401. 27

NOOR, A. K. et J. M. PETERS. 1987, «Model-size reduction for the non-linear dynamic analysis of quasi-symmetric structures», *Engineering Computations*, doi :10.1108/eb023696, ISSN 0264-4401. 27

NOUY, A. 2003, *Une Stratégie de Calcul Multiéchelle Avec Homogénéisation En Temps et En Espace Pour Le Calcul de Structures Fortement Hétérogènes*, thèse de doctorat, Ecole normale supérieure, Cachan. Thèse de doctorat dirigée par Ladevèze, Pierre Génie mécanique Cachan, 2003 2003DENS0041. 39

ODEN, J. T., K. VEMAGANTI et N. MOËS. 1999, «Hierarchical modeling of heterogeneous solids», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 172, nº 1, doi :10.1016/S0045-7825(98)00224-2, p. 3–25, ISSN 0045-7825. 25

ODEN, J. T. et T. I. ZOHDI. 1997, «Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 148, nº 3, doi :10.1016/S0045-7825(97)00032-7, p. 367–391, ISSN 0045-7825. 25

OKADA, H., S. ENDOH et M. KIKUCHI. 2007, «Application of s-Version Finite Element Method to Two-Dimensional Fracture Mechanics Problems», *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, vol. 1, nº 5, doi :10.1299/jmmp.1.699, p. 699–710. 29

PADDON, D. J. 1984, «Supercomputers and parallel computation», . 27

PASSIEUX, J.-C., J. RÉTHORÉ, A. GRAVOUIL et M.-C. BAIETTO. 2013, «Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver», *Computational Mechanics*, vol. 52, nº 6, p. 1381–1393. 32

PHAM, K., V. G. KOUZNETSOVA et M. G. D. GEERS. 2013, «Transient computational homogenization for heterogeneous materials under dynamic excitation», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 61, nº 11, doi :10.1016/j.jmps.2013.07.005, p. 2125–2146, ISSN 0022-5096. 25

POPP, A. 2012, *Mortar Methods for Computational Contact Mechanics and General Interface Problems*, thèse de doctorat, Universitätsbibliothek der TU München. 35, 36

PRUDHOMME, S., H. BEN DHIA, P. T. BAUMAN, N. ELKHODJA et J. T. ODEN. 2008, «Computational analysis of modeling error for the coupling of particle and continuum models by the Arlequin method», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, nº 41, doi :10.1016/j.cma.2008.03.014, p. 3399–3409, ISSN 0045-7825. 35

PRUDHOMME, S., L. CHAMOIN, H. BEN DHIA et P. T. BAUMAN. 2009, «An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, nº 21, doi :10.1016/j.cma.2008.12.026, p. 1887–1901, ISSN 0045-7825. 35

PRZEMIENIECKI, J. S. 1963, «Matrix structural analysis of substructures», *AIAA Journal*, vol. 1, nº 1, doi :10.2514/3.1483, p. 138–147, ISSN 0001-1452. 32

RANSOM, J. B. et N. F. KNIGHT. 1990, «Global/local stress analysis of composite panels», *Computers & Structures*, vol. 37, nº 4, doi :10.1016/0045-7949(90)90027-Y, p. 375–395, ISSN 0045-7949. 27, 30

RANSOM, J. B. M. 1992, «Computational methods for global/local analysis», cahier de recherche. 30

RATEAU, G. 2003, *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris. 34

REDDY, J. N. 1993, «An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates», *Composite Structures*, vol. 25, nº 1, doi :10.1016/0263-8223(93)90147-I, p. 21–35, ISSN 0263-8223. 29

REDDY, J. N. et J. ROBBINS, D. H. 1994, «Theories and Computational Models for Composite Laminates», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, nº 6, doi :10.1115/1.3111076, p. 147–169, ISSN 0003-6900. 29

ROUX, F.-X. 1990, «Méthodes de résolution par sous-domaines en statique», *Méthodes de résolution par sous-domaines en statique*, , nº 1, p. 37–48, ISSN 0034-1223. 32

SCHENDEL, U. 1984, *Introduction to Numerical Methods for Parallel Computers*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, ISBN 978-0-470-20091-9. 27

SCHWARTZ, D. J. 1981, «Practical Analysis of Stress Raisers in Solid Structures», *SAE Transactions*, vol. 90, p. 4102–4106, ISSN 0096-736X. 29

SCHWARZ, H. A. 1869, «Ueber einige Abbildungsaufgaben.», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 70, p. 105–120, ISSN 0075-4102; 1435-5345/e. 31

SESHAIYER, P. et M. SURI. 2000, «HP submeshing via non-conforming finite element methods», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189, nº 3, doi :10.1016/S0045-7825(99)00414-4, p. 1011–1030, ISSN 0045-7825. 36

SHERMAN, J. et W. J. MORRISON. 1950, «Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix», *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 21, nº 1, p. 124–127, ISSN 0003-4851. 28

J. M. SMIT, R., W. A. M. BREKELMANS et H. E. H. MEIJER. 1999, «Prediction of the large-strain mechanical response of heterogeneous polymer systems : Local and global deformation behaviour of a representative volume element of voided polycarbonate», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 47, nº 2, doi :10.1016/S0022-5096(98)00089-1, p. 201–221, ISSN 0022-5096. 25

SMIT, R. J. M., W. A. M. BREKELMANS et H. E. H. MEIJER. 1998, «Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, nº 1, doi :10.1016/S0045-7825(97)00139-4, p. 181–192, ISSN 0045-7825. 25

TALLEC, P. L. 1994, *Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics*, Elsevier Science publishers. 32

TALLEC, P. L., Y. H. D. ROECK et M. VIDRASCU. 1991, «Domain decomposition methods for large linearly elliptic three-dimensional problems», *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 34, nº 1, doi :10.1016/0377-0427(91)90150-I, p. 93–117, ISSN 0377-0427. 32

TAO-YANG, H. et J. F. ABEL. 1985, «Adaptive substructuring techniques in elasto-plastic finite element analysis», *Computers & Structures*, vol. 20, nº 1, doi :10.1016/0045-7949(85)90067-7, p. 181–192, ISSN 0045-7949. 28

TERADA, K. et N. KIKUCHI. 2001, «A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, nº 40, doi :10.1016/S0045-7825(01)00179-7, p. 5427–5464, ISSN 0045-7825. 25

TOGNEVI, A., M. GUERICH et J. YVONNET. 2016, «A multi-scale modeling method for heterogeneous structures without scale separation using a filter-based homogenization scheme», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, nº 1, doi :10.1002/nme.5200, p. 3–25, ISSN 1097-0207. 26

VAN DER SLUIS, O., P. J. G. SCHREURS et H. E. H. MEIJER. 1999, «Effective properties of a visco-plastic constitutive model obtained by homogenisation», *Mechanics of Materials*, vol. 31, nº 11, doi :10.1016/S0167-6636(99)00028-9, p. 743–759, ISSN 0167-6636. 25

WELLMANN, C. et P. WRIGGERS. 2012, «A two-scale model of granular materials», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 205-208, doi :10.1016/j.cma.2010.12.023, p. 46–58, ISSN 0045-7825. 35

WHITCOMB, J. D. 1991, «Iterative global/local finite element analysis», *Computers & Structures*, vol. 40, nº 4, doi :10.1016/0045-7949(91)90334-I, p. 1027–1031, ISSN 0045-7949. 30, 32

WHITCOMB, J. D. et K. WOO. 1993a, «Application of iterative global/local finite-element analysis. Part 1 : Linear analysis», *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, nº 9, doi :10.1002/cnm.1640090905, p. 745–756, ISSN 1099-0887. 30

WHITCOMB, J. D. et K. WOO. 1993b, «Application of iterative global/local finite-element analysis. Part 2 : Geometrically non-linear analysis», *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, nº 9, doi :10.1002/cnm.1640090906, p. 757–766, ISSN 1099-0887. 30

WILKINS, D. J. 1983, «A preliminary damage tolerance methodology for composite structures», . 28

WOHLMUTH, B. I. 2000, «A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier», *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 38, nº 3, p. 989–1012. 36, 37

WOODBURY, M. A. 1950, *Inverting Modified Matrices*, SRG Memorandum Report; 42, Princeton, NJ : Department of Statistics, Princeton University. 28

XIAO, S. P. et T. BELYTSCHKO. 2004, «A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, nº 17, doi :10.1016/j.cma.2003.12.053, p. 1645–1669, ISSN 0045-7825. 35

XU, M., R. GRACIE et T. BELYTSCHKO. 2010, «Concurrent coupling of atomistic and continuum models», dans *Multiscale Methods : Bridging the Scales in Science and Engineering*, Oxford University Press on Demand, p. 93–133. 24

YVONNET, J. 2019, «When Scales Cannot Be Separated : Direct Solving of Heterogeneous Structures with an Advanced Multiscale Method», dans *Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements*, édité par J. Yvonnet, Solid Mechanics and Its Applications, Springer International Publishing, Cham, ISBN 978-3-030-18383-7, p. 145–160, doi : 10.1007/978-3-030-18383-7_8. 26

YVONNET, J. et G. BONNET. 2014a, «A consistent nonlocal scheme based on filters for the homogenization of heterogeneous linear materials with non-separated scales», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, nº 1, doi :10.1016/j.ijsolstr.2013.09.023, p. 196–209, ISSN 0020-7683. 26

YVONNET, J. et G. BONNET. 2014b, «Nonlocal/coarse graining homogenization of linear elastic media with non-separated scales using least-square polynomial filters», *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, vol. 12, nº 5, doi :10.1615/IntJMultCompEng.2014010414, p. 375–395, ISSN 1543-1649, 1940-4352. 26

ZOHDI, T. et P. WRIGGERS. 1999, «A domain decomposition method for bodies with heterogeneous microstructure basedon material regularization», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, nº 17, doi :10.1016/S0020-7683(98)00124-3, p. 2507–2525, ISSN 0020-7683. 26

ZOHDI, T. I., J. T. ODEN et G. J. RODIN. 1996, «Hierarchical modeling of heterogeneous bodies», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 138, nº 1, doi :10.1016/S0045-7825(96)01106-1, p. 273–298, ISSN 0045-7825. 25

ZOHDI, T. I., P. WRIGGERS et C. HUET. 2001, «A method of substructuring large-scale computational micromechanical problems», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, nº 43, doi :10.1016/S0045-7825(01)00189-X, p. 5639–5656, ISSN 0045-7825. 26

ZUPAN, N. et J. KORELC. 2018, «Unified Approach to Sensitivity Analysis Based Automation of Multi-scale Modelling», dans *Multiscale Modeling of Heterogeneous Structures*, édité par J. Sorić, P. Wriggers et O. Allix, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer International Publishing, Cham, ISBN 978-3-319-65463-8, p. 113–127, doi :10.1007/978-3-319-65463-8_6. 26

Partie II : Nouveau raccord pour le couplage de modèles incompatibles

Chapitre 3

Motivations pour un raccord de modèles non-compatibles et problèmes de référence

Sommaire

3.1 Introduction 56
3.2 Définition d'un problème couplé avec modèles non-compatibles 58
3.2.1 Formulation variationnelle du problème sous-structuré 58
3.2.2 Conditions de raccord entre les modèles 59
3.2.3 Problème de référence et définition d'un outil de comparaison 60
3.2.4 Cellules élémentaires et comportements matériaux 60
3.3 Solutions avec les algorithmes global/local de la littérature 61
3.3.1 Problème modèle en dimension 2 61
3.3.2 Problème modèle en dimension 3 71
3.4 Conclusions 72

3.1 Introduction

Les procédés de fabrication et de mise en forme de pièces quelles qu'elles soient amènent avec eux des défauts inévitables. Les matériaux composites ne font pas exception. Au-delà des problèmes de tolérancement, il peut s'agir, par exemple, de bulles d'air provoquant une porosité localisée, de défauts de tissage ou encore de délaminage causé par le processus de démoulage. Ces défauts, souvent invisibles à l'œil nu, peuvent ou non affecter la tenue mécanique de la pièce ainsi que sa durée de vie. Une solution pour garantir la conformité des pièces, vis-à-vis de leur durée de vie, consiste à déclarer inutilisables les pièces présentant des défauts jugés trop importants. Cette approche conservative a l'inconvénient d'envoyer au rebut certaines pièces, qui pourraient être conformes, par manque de connaissance de l'impact du défaut sur la tenue mécanique de la pièce. Afin de détecter les éventuels défauts présents dans les pièces en matériaux composites, de nombreuses méthodes de *contrôle non-destructif* (CND), telle que l'analyse par tomographie ou *Computed Tomography* (CT-scan) (**Figure 3.1**) ou par ultrasons ont vu le jour. Ces dernières permettent de caractériser et même d'avoir une idée de la morphologie des défauts internes sans avoir à sacrifier les pièces analysées. Par la suite, des simulations numériques basées sur ces analyses permettent de mieux appréhender l'impact des défauts sur des zones localisées. Pour aller plus loin, des simulations sur pièces entières seraient nécessaires afin d'appréhender leurs impacts sur des zones plus étendues voire à l'échelle des pièces entières. Cependant, étant donnée

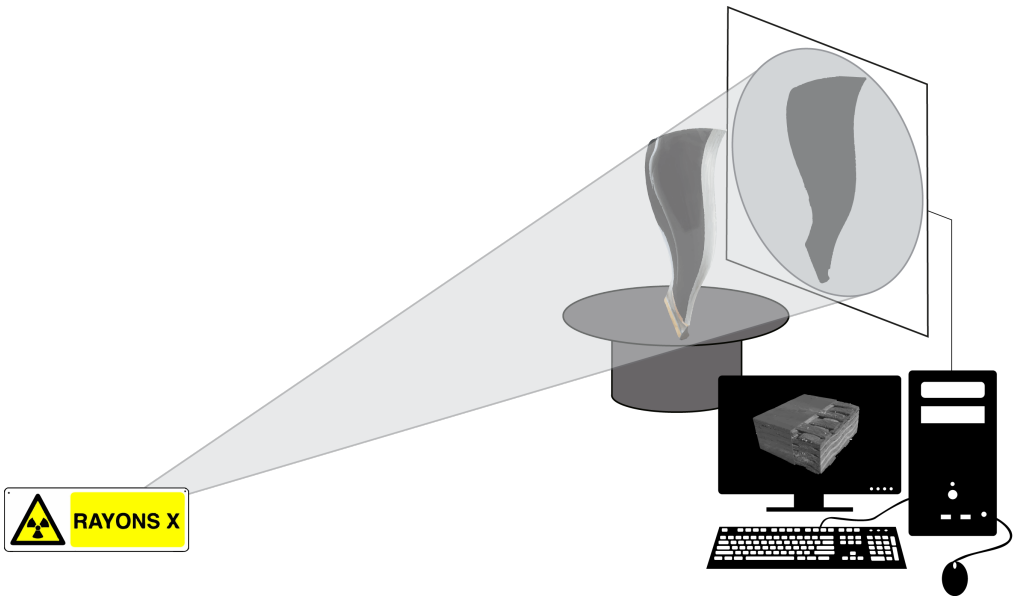
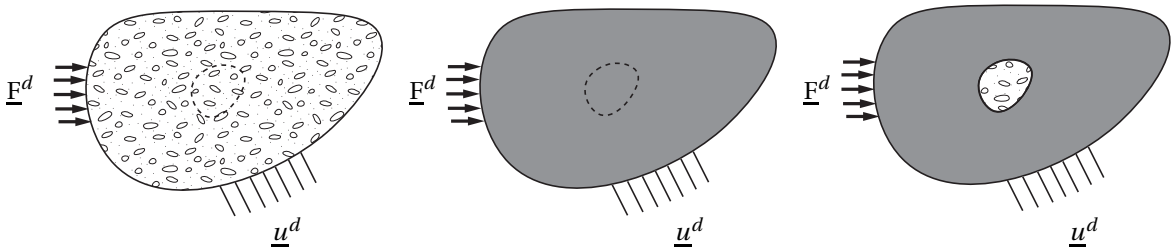


FIGURE 3.1 – Illustration du principe d'acquisition d'une microstructure par tomographie aux rayons X.

la taille des défauts recherchés (qui peuvent ne mesurer que quelques micro-mètres), les informations provenant de CT-scan complet sur des grandes pièces sont considérables. De ce fait, une simulation mécanique à partir de ces données est encore, à l'heure actuelle, inenvisageable du point de vue des ressources numériques. De plus, une analyse complète à l'échelle microscopique manquerait certainement de pertinence puisque les phénomènes physiques qui doivent être caractérisés pour évaluer la tenue mécanique d'une pièce, évoluent, en général, à des échelles macroscopiques (supérieures). Par ailleurs, c'est à ces échelles macroscopiques, dans lesquelles les matériaux sont considérés comme homogènes, que la plupart des calculs éléments finis sont actuellement réalisés dans les bureaux d'études. Il y a donc aujourd'hui, un besoin ingénieur autour de l'intégration d'un modèle (local) décrit à l'échelle microscopique dans un modèle classique (global) décrit à l'échelle macroscopique.

Cette problématique peut être illustrée par les schémas de la **Figure 3.2**. Le premier schéma (**Figure 3.2a**) représente un problème mécanique, décrit à l'échelle microscopique, pour lequel la microstructure pourrait être modélisée à partir des données d'un CT-scan. Comme évoqué précé-

demment, ce problème, nommé DNS dans la littérature, n'est en pratique pas simulé car nécessite une puissance de calcul considérable et n'est pas compatible avec les pratiques des bureaux d'études du point de vue des durées de simulation. Le deuxième schéma (**Figure 3.2b**) représente les problèmes mécaniques tels qu'ils sont traditionnellement abordés en bureau d'étude, c'est-à-dire, avec une pièce réputée parfaite, issue d'un fichier CAD, modélisée par un comportement matériau homogénéisé et sans détails structuraux. Cette approche a l'avantage d'exploiter des modèles éléments finis relativement légers mais manque de pertinence pour modéliser des détails structuraux ou des effets d'échelle localisés. Finalement, quand un détail microscopique doit être analysé, une solution consisterait à insérer un modèle de ce détail, décrit à l'échelle microscopique, dans un modèle global homogénéisé, comme l'illustre le troisième schéma (**Figure 3.2c**). Dans cette situation, les modèles local et global sont *non-compatibles* vis-à-vis de leur comportement.



(a) Description d'un domaine microscopique partout.

(b) Description d'un domaine homogénéisé partout.

(c) Domaines couplées : modèle homogénéisé et modèle microscopique.

FIGURE 3.2 – Trois modélisations différentes d'une structure hétérogène, décrite à différentes échelles, soumise à des conditions aux limites. Le problème (c) présente une incompatibilité de modèles.

Bien que les méthodes global/local, dont un état de l'art a été présenté au **Chapitre 2**, soient particulièrement bien adaptées à ce type de problématique, très peu d'entre elles ont été développées avec l'idée que les modèles local et global pouvaient être non-compatibles (**Figure 3.2c**). Ce dernier point est notamment abordé dans les travaux de VOLETI et collab. [1996] et des méthodes spécifiques ont été développées par BEN DHIA [1998]; FISH et WAGIMAN [1993]. Cependant, ces formulations donnent lieu à des problèmes et des raccords non-standard qui ne sont pas implémentés dans les codes industriels. Un des paris de ces travaux de recherche est de formuler un raccord pour le couplage de modèles non-compatibles par des approches éléments finis standard.

Afin d'illustrer le besoin d'un couplage pour modèles non-compatibles, trois techniques de référence issues de la littérature sur les méthodes de couplage global/local ont été sélectionnées. Il s'agit :

- de la méthode descendante en déplacement SBD (**Section 2.3.3**) ;
- d'une méthode par sous-structuration (**Section 2.3.4**) dont les conditions de raccord sont calculés à partir d'une technique mortar (**Section 2.4.1**), nommée par la suite *méthode de couplage mortar* ;
- d'une méthode non-intrusive (**Section 2.3.5**), nommée par la suite *méthode de zoom global/local*

Ces techniques ont été retenues car elles présentent des formulations relativement standard et sont potentiellement utilisables en bureau d'étude. En effet, la technique SBD est proposée nativement dans les codes de calcul commerciaux sous le nom *submodeling*, et des développements sur l'intégration des méthodes mortar et de zoom global/local dans Z-set et Abaqus sont proposés respectivement dans AKULA [2019]; BLANCHARD [2018]; BLANCHARD et collab. [2019]. Comme présenté dans la **Section 2.3**, les méthodes de couplage mortar et de zoom global/local ont l'avantage, sur la technique SBD, de tenir compte de l'influence du modèle local sur la solution du modèle global.

Pour montrer les limites de ces techniques de couplage sur des modèles non-compatibles,

une famille de *problèmes modèles* est définie dans la suite de ce chapitre. Il s'agit de problèmes académiques qui visent à quantifier l'erreur engendrée par les techniques de couplage étudiées, dans des cas particuliers où la théorie de l'homogénéisation peut être raisonnablement appliquée. Dans une première partie, le problème mécanique de couplage de deux structures avec modèles non-compatibles est formulé dans un cadre général. Deux exemples de microstructures élémentaires sont également détaillées, afin d'introduire les paramètres nécessaires à la définition des problèmes modèles considérés. Dans une deuxième partie, les solutions associées à chacune des techniques de couplage en fonction du problème modèle étudié sont détaillées.

3.2 Définition d'un problème couplé avec modèles non-compatibles

Une famille de problèmes correspondant au schéma de la **Figure 3.2c** est ici décrite. Il s'agit de coupler un modèle microscopique local, noté $\Omega_{\mathscr{L}}$, défini par une ou plusieurs cellule·s VER périodique·s avec un modèle macroscopique global $\Omega_{\mathscr{G}}$, dont le comportement homogénéisé est calculé à partir du modèle local. L'hypothèse est donc faite que le comportement global décrit bien le comportement macroscopique du modèle local.

Les deux modèles sont supposés géométriquement coïncidents au niveau de la zone de raccord et leur interface commune est notée Γ. Les frontières de la sous-structure globale sont notées $\partial\Omega_{\mathscr{G}} = \partial_u\Omega_{\mathscr{G}} \cup \partial_F\Omega_{\mathscr{G}}$ et celles de la sous-structure locale $\partial\Omega_{\mathscr{L}} = \partial_u\Omega_{\mathscr{L}} \cup \partial_F\Omega_{\mathscr{L}}$ où les parties ∂_u sont associées aux conditions aux limites de Dirichlet et ∂_F aux conditions aux limites de Neumann.

3.2.1 Formulation variationnelle du problème sous-structuré

La formulation faible du système d'*Équations aux Dérivées Partiels* (EDP) relative au problème à deux sous-structures (voir **Figure 3.2c**) s'écrit :

$$\begin{cases} \forall \underline{u}^*_{\mathscr{G}} \in \mathscr{U}^0_{\mathscr{G}}, & \displaystyle\int_{\Omega_{\mathscr{G}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathscr{G}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_F\Omega_{\mathscr{G}}} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{G}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{F}_{\mathscr{G}} \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{G}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{u}^*_{\mathscr{L}} \in \mathscr{U}^0_{\mathscr{L}}, & \displaystyle\int_{\Omega_{\mathscr{L}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathscr{L}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_F\Omega_{\mathscr{L}}} \underline{F}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{L}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{F}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{L}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{X} \in \Gamma, & \mathscr{R}(\underline{W}_{\mathscr{G}}(\underline{X}), \underline{F}_{\mathscr{G}}(\underline{X}), \underline{W}_{\mathscr{L}}(\underline{X}), \underline{F}_{\mathscr{L}}(\underline{X})) = \underline{0} \end{cases} \tag{3.1}$$

avec la relation de couplage $\mathscr{R} = \underline{0}$, sur l'interface Γ, détaillée dans la **Section 3.2.2** suivante.

Les champs de déplacements inconnus sur les structures globale et locale sont respectivement notés $(\underline{u}_{\mathscr{G}}, \underline{u}_{\mathscr{L}}) \in \mathscr{U}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{U}_{\mathscr{L}}$, et les tenseurs symétriques des contraintes de Cauchy sur chacun des modèles sont respectivement notés $(\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}}) \in \mathscr{S}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{S}_{\mathscr{L}}$. Les espaces $\mathscr{U}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{U}_{\mathscr{L}}$ et $\mathscr{S}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{S}_{\mathscr{L}}$ sont les espaces produits respectivement des déplacements cinématiquement admissibles et des contraintes statiquement admissibles.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} = \mathbf{K}_{\mathscr{L}}(\underline{X}) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathscr{L}}$ avec $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}(\underline{X})$ le tenseur des rigidités du modèle local hétérogène et $\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} = \mathbf{K}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathscr{G}}$ avec $\mathbf{K}_{\mathscr{G}} = \mathbf{K}^{\mathrm{H}}_{\mathscr{L}}$ le tenseur des rigidités macroscopique du modèle local sous des hypothèses d'homogénéisation périodique au premier ordre. Les espaces des champs de déplacement cinématiquement admissibles sont définis pour $\mathscr{I} \in \{\mathscr{G}, \mathscr{L}\}$ tels que :

$$\mathscr{U}_{\mathscr{I}} = \{\underline{u}_{\mathscr{I}} \in \mathscr{H}^1(\Omega_{\mathscr{I}}) \mid \underline{u}_{\mathscr{I}} = \underline{u}^d \text{ sur } \partial_u\Omega_{\mathscr{I}}\} \tag{3.2}$$

et

$$\mathscr{U}^0_{\mathscr{I}} = \{\underline{u}_{\mathscr{I}} \in \mathscr{H}^1(\Omega_{\mathscr{I}}) \mid \underline{u}_{\mathscr{I}} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u\Omega_{\mathscr{I}}\} \tag{3.3}$$

où $\underline{u}^d$ et $\underline{F}^d$ sont respectivement les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

3.2.2 Conditions de raccord entre les modèles

La relation de couplage au niveau de la zone de raccord dépend du comportement souhaité sur l'interface Γ entre les deux modèles. Elle peut être formulée comme une relation entre les déplacements d'interface notés $\underline{W}_{\mathscr{G}} = \underline{u}_{\mathscr{G}_{|\Gamma}}$ et $\underline{W}_{\mathscr{L}} = \underline{u}_{\mathscr{L}_{|\Gamma}}$ et/ou les efforts d'interface notés $\underline{F}_{\mathscr{G}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} \cdot \underline{n}_{\mathscr{G}}$ et $\underline{F}_{\mathscr{L}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{n}_{\mathscr{L}}$ avec $\underline{n}_{\mathscr{G}}$ et $\underline{n}_{\mathscr{L}}$ les normales sortantes à chacune des structures sur Γ. Cette relation peut être écrite pour tout $\underline{X}$ de l'interface Γ sous la forme :

$$\mathscr{R}(\underline{W}_{\mathscr{G}}(\underline{X}),\underline{F}_{\mathscr{G}}(\underline{X}),\underline{W}_{\mathscr{L}}(\underline{X}),\underline{F}_{\mathscr{L}}(\underline{X})) = \underline{0} \tag{3.4}$$

avec $\mathscr{R}$ la relation qui lie les inconnues d'interface. Par exemple, pour assurer la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts entre les modèles, la relation (3.4) s'écrit :

$$\mathscr{R} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{W}_{\mathscr{G}} - \underline{W}_{\mathscr{L}} = \underline{0} \quad \text{(continuité des déplacements)} \\ \text{et} \\ \underline{F}_{\mathscr{G}} + \underline{F}_{\mathscr{L}} = \underline{0} \quad \text{(équilibre des efforts)} \end{cases} \tag{3.5}$$

La plupart des méthodes global/local assurent, au moins en un sens faible, les deux conditions de la relation (3.5). C'est le cas des méthodes de zoom global/local et de couplage mortar utilisées dans ces travaux. Il sera d'ailleurs montré que ces deux méthodes sont équivalentes à convergence. D'un point de vue algorithmique, la méthode de couplage mortar peut être vue comme une méthode de résolution monolithique du problème (3.1) avec les conditions de couplage (3.5), alors que la méthode de zoom global/local peut être vue comme une méthode de résolution itérative du même problème. Les deux conditions de la relation (3.5) peuvent aussi s'exprimer à partir d'une condition mixte, dont il a été montré dans GENDRE [2009], que cette dernière améliore la convergence de l'algorithme de zoom global/local.

D'autres méthodes global/local ne satisfont qu'une seule condition sur les deux. Par exemple la méthode SBD, ne satisfait, en un certain sens faible, que la condition de continuité en déplacement $(3.5)_1$. Concrètement, la solution n'est pas obtenue à partir d'un problème de minimisation sous contraintes mais par une résolution en deux étapes. La première étape est un pré-calcul sur la structure globale. La deuxième étape consiste à résoudre le problème local avec des conditions aux limites post-traitées à partir du problème global. Il en résulte, comme cela a été illustré dans GENDRE [2009], que le champ de contrainte est discontinu au niveau de l'interface. D'un point de vue algorithmique, une méthode SBD peut être vue comme la première itération d'une méthode de zoom global/local.

Le **Tableau 3.1** résume les principes de résolution des trois méthodes de la littérature mises en avant.

SBD	**Étape 1** : Pré-calcul d'une solution globale **Étape 2** : Calcul d'une solution locale avec $\underline{W}_{\mathscr{L}} = \underline{W}_{\mathscr{G}}$
Mortar	Résolution du problème de minimisation sous contraintes (3.1) avec les conditions de couplage (3.5).
Zoom global/local	Résolution du problème (3.1) avec (3.5), de manière itérative : **Initialisation** : Pré-calcul d'une solution globale **Itérations** : Calcul d'une solution locale avec $\underline{W}_{\mathscr{L}} = \underline{W}_{\mathscr{G}}$ Calcul d'une solution globale avec correction en effort Test de convergence

TABLEAU 3.1 – Principes de résolution d'algorithmes global/local issus de la littérature.

3.2.3 Problème de référence et définition d'un outil de comparaison

Afin d'analyser les solutions obtenues par chacune des approches global/local étudiées, un problème de référence associé à la **Figure 3.2a** est défini par $(\underline{u}_{\text{REF}}, \boldsymbol{\sigma}_{\text{REF}}) \in \mathscr{U}_{\text{REF}} \times \mathscr{S}_{\text{REF}}$ tel que :

$$\forall \underline{u}^*_{\text{REF}} \in \mathscr{U}^0_{\text{REF}}, \int_{\Omega_{\text{REF}}} \boldsymbol{\sigma}_{\text{REF}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\text{REF}}) \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\text{F}}\Omega_{\text{REF}}} \underline{\text{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\text{REF}} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{3.6}$$

où $\mathscr{U}_{\text{REF}}$ et $\mathscr{U}^0_{\text{REF}}$ sont définis par (3.2) et (3.3) avec $\mathscr{J} = \text{REF}$ et où $\boldsymbol{\sigma}_{\text{REF}} = \mathbf{K}_{\text{REF}}(\underline{\text{X}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\text{REF}})$. Le comportement $\mathbf{K}_{\text{REF}}(\underline{\text{X}})$ est alors construit à partir du comportement du modèle local $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}(\underline{\text{X}})$.

Pour comparer les solutions issues du problème de référence et du problème couplé, une erreur énergétique locale est définie telle que :

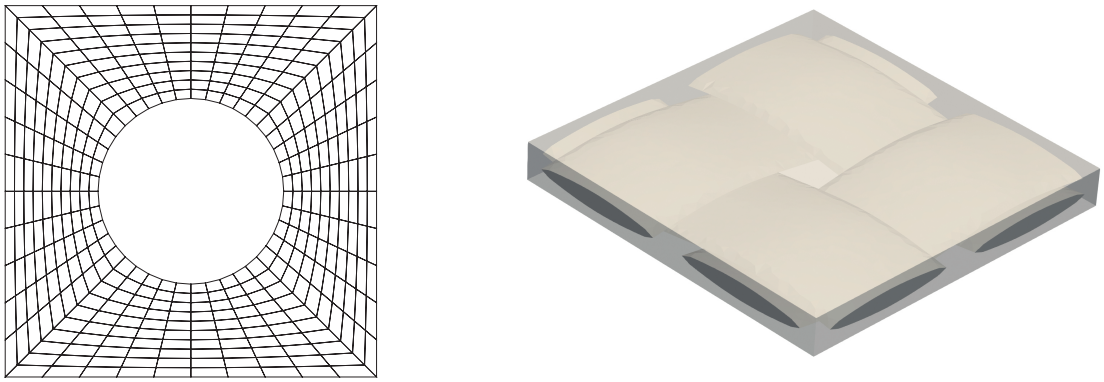
$$e_{\text{E}} = \frac{\|\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}\|_{\text{E},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}}{\|\underline{u}_{\text{ref}}\|_{\Omega_{\mathscr{L}},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}} \tag{3.7}$$

où E est la zone, par exemple un élément fini, sur laquelle est calculée l'erreur e_{E}, avec $\underline{u}_{\mathscr{L}}$ le déplacement solution du modèle local, $\underline{u}_{\text{ref}}$ le déplacement solution de référence, et avec la norme énergétique suivante : $\|\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}\|^2_{\text{E},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}} = \frac{1}{2\text{vol(E)}} \int_{\text{E}} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}) : \mathbf{K}_{\mathscr{L}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}) \, \mathrm{d}\Omega$. La valeur moyenne de e_{E} sur la sous-structure locale est notée $e^{\text{moy}}_{\text{E}}$ et sa valeur maximale est notée :

$$e^{\text{max}}_{\text{E}} = \max_{\text{E} \in \Omega_{\mathscr{L}}} e_{\text{E}}$$

3.2.4 Cellules élémentaires et comportements matériaux

Deux maillages éléments finis de VER sont présentés à la **Figure 3.3**. Il s'agit dans les deux cas de maillages périodiques discrétisés par des éléments linéaires. Le **VER1** (**Figure 3.3a**) représente une cellule élémentaire carrée 2D d'une plaque trouée en acier. Il mesure 2 mm de côté et est modélisé par les paramètres matériaux suivants : un module d'Young E = 210 GPa et un coefficient de Poisson ν = 0,3. Ses caractéristiques ainsi que son comportement macroscopique au sens de l'homogénéisation périodique au premier ordre sont résumés dans le **Tableau 3.2**.



(a) **VER1** : Cellule élémentaire 2D d'une plaque trouée.

(b) **VER2** : Cellule élémentaire 3D d'un composite stratifié Carbone/Époxy.

FIGURE 3.3 – Maillages périodiques d'une cellule élémentaire 2D et d'une cellule élémentaire 3D à partir d'éléments linéaires.

Le **VER2** (**Figure 3.3b**) représente une cellule élémentaire parallélépipédique 3D d'un composite stratifié Carbone/Époxy. Il mesure 2 mm dans les directions $\underline{x}$ et $\underline{y}$ et 0,22 mm dans la direction $\underline{z}$. La matrice époxy est caractérisée par un module d'Young E = 5 GPa et un coefficient de Poisson ν = 0,3. Les paramètres matériaux des fibres de carbone sont les suivants : E_{L} = 194,4 GPa, $\text{E}_{\text{T}} = \text{E}_{\text{T}'}$ = 8,2 GPa, $\nu_{\text{LT}} = \nu_{\text{LT}'}$ = 0,30, $\nu_{\text{TT}'}$ = 0,33, $\text{G}_{\text{LT}} = \text{G}_{\text{LT}'}$ = 7 GPa et $\text{G}_{\text{TT}'}$ = 3,1 GPa où les indices

L, T et T' se réfèrent respectivement à la direction longitudinale et aux directions transversales de la fibre. Les ondulations des fibres ne sont pas prises en compte dans le modèle de comportement du **VER2**. Ses caractéristiques et ses paramètres matériaux homogénéisés sont également résumés dans le **Tableau 3.2**.

	VER1 (**Figure 3.3a**)	**VER2** (**Figure 3.3b**)
dimensions	$L_x = L_y = 2$ mm	$L_x = L_y = 2$ mm $L_z = 0{,}22$ mm
nombre et type d'éléments	400 QUA4	50667 TET4
nombre de degrés de liberté	880	31815
modèle de comportement matériaux	$E = 210$ GPa $\nu = 0{,}3$	Fibres : $E_L = 194{,}4$ GPa $E_T = E_{T'} = 8{,}2$ GPa $G_{LT} = G_{LT'} = 7$ GPa $G_{TT'} = 3{,}1$ GPa $\nu_{LT} = \nu_{LT'} = 0{,}30$ $\nu_{TT'} = 0{,}33$ Matrice : $E = 5$ GPa $\nu = 0{,}3$
modèle de comportement homogénéisé (périodique)	$E_x = 130{,}2$ GPa $E_y = 130{,}2$ GPa $G_{xy} = 39{,}8$ GPa $\nu_{xy} = 0{,}27$	$E_x = E_y = 45{,}8$ GPa $E_z = 7{,}6$ GPa $G_{xy} = 4{,}2$ GPa $G_{xz} = G_{yz} = 2{,}9$ GPa $\nu_{xy} = 0{,}067$ $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0{,}37$

TABLEAU 3.2 – Caractéristiques des **VER1** et **VER2** dont les maillages sont illustrés à la **Figure 3.3**.

3.3 Solutions avec les algorithmes global/local de la littérature

Le problème avec modèles couplés (3.1) est résolu par discrétisation éléments finis. Pour les problèmes en dimension 2, les différentes méthodes ont été implémentées dans le code *SCo-FiElDD*, développé au LMT. Pour les problèmes en dimension 3, la suite *Z-set* a été utilisée et notamment l'algorithme global/local non-intrusif, développé par GENDRE [2009], et implémenté dans l'infrastructure logiciel de Safran Tech.

Dans ce travail de recherche, la compatibilité des modèles global et local en matière de discrétisation éléments finis est assurée par une interpolation linéaire des déplacements pour la méthode SBD et par des projecteurs de type mortar (voir **Section 2.4.1**), en prenant comme espace intermédiaire celui des déplacements d'interface du modèle global, pour les méthodes de couplage mortar et de zoom global/local.

3.3.1 Problème modèle en dimension 2

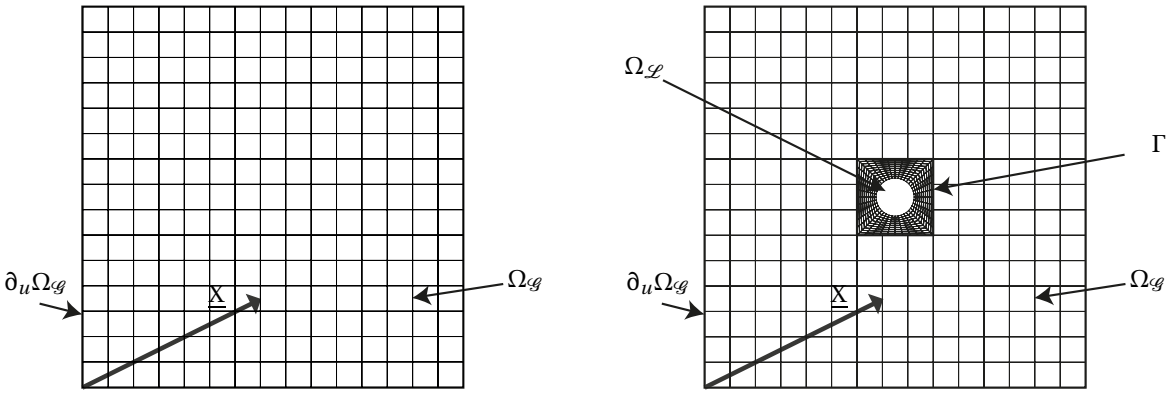
Dans cette section, un exemple de problème de couplage de modèles non-compatibles est défini et résolu par des techniques global/local de la littérature. Plusieurs types de conditions aux limites et de maillages sont définis afin de mettre en évidence, dans les cas considérés, les erreurs causées par ce type de couplages par rapport à la solution dite de référence.

3.3.1.1 Définition du problème couplé

Dans cet exemple, le modèle local est constitué d'un seul **VER1**. Ses caractéristiques sont donc données dans la colonne correspondante du **Tableau 3.2**. Pour l'analyse global/local, il est localisé

au centre du modèle global tel qu'illustré sur la **Figure 3.4b**.

Le modèle global est une plaque homogène de dimension $5L_x \times 5L_y$ et dont le comportement matériau homogénéisé, calculé à partir du modèle local, est donné dans la première colonne du **Tableau 3.2**. Différentes discrétisations du modèle global sont considérées afin d'en analyser l'influence. Il s'agit de quatre maillages structurés nommés **maillage 1**, **maillage 2**, **maillage 3** et **maillage 4**, constitués respectivement de 25, 100, 225 et 2500 éléments linéaires QUA4. Par exemple, le **maillage 3** est donné à la **Figure 3.4a**.



(a) Maillage de la structure globale modélisée à l'échelle macroscopique par un comportement homogénéisé.

(b) Maillage du problème couplé avec la structure locale $\Omega_{\mathscr{L}}$ à l'échelle microscopique située au centre de la structure globale $\Omega_{\mathscr{G}}$ homogénéisée.

FIGURE 3.4 – Maillages associés à deux modélisations d'une plaque trouée décrite à des échelles différentes.

3.3.1.2 Conditions limites

Les théories de l'homogénéisation au premier et second-ordre sont formulées pour des structures périodiques soumises à des déformations macroscopiques respectivement constantes et linéaires à l'échelle du VER. De ce fait, deux types de sollicitations sont considérées ici. Il s'agit d'imposer un état de déformation macroscopique constant ou linéaire sur la structure globale. Dans les deux cas, les conditions aux limites de Dirichlet imposées sur $\partial_u\Omega_{\mathscr{G}}$ s'écrivent :

$$\forall \underline{X} \in \partial_u\Omega_{\mathscr{G}} \qquad \underline{u}^d = \underline{u}_C + \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right)\cdot\underline{X} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^M : \underline{X}\otimes\underline{X} \tag{3.8}$$

où $\underline{u}_C$ est un vecteur constant, $\mathbf{F}^M$ est un tenseur d'ordre deux constant, $\mathbf{G}^M$ un tenseur d'ordre trois constant et $\underline{X}$ le vecteur des coordonnées de la structure globale (voir **Figure 3.4**). Il est alors possible de montrer que la solution en déformation sur la structure homogène $\Omega_{\mathscr{G}}$ est linéaire et s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\mathscr{G}}) = \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right) + \mathbf{G}^M\cdot\underline{X}$$

Cas de chargement I (macroscopique uniforme) – Afin d'imposer une déformation macroscopique constante sur la structure globale, les quantités cinématiques macroscopiques prescrites sont choisies telles que :

$$\underline{u}_C = \begin{bmatrix}0{,}05\\0{,}05\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right) = \begin{bmatrix}0{,}002 & 0{,}01\\0{,}01 & 0{,}02\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^M = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

Cas de chargement II (macroscopique linéaire) – De même, un chargement macroscopique linéaire est imposé sur la structure globale, en choisissant les quantités cinématiques macroscopiques telles que :

$$\underline{u}_C = \underline{0} \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right) = \begin{bmatrix}0{,}002 & 0\\0 & -0{,}002\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^M \neq \mathbf{0} \tag{3.10}$$

où les composantes non-nulles de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ sont : $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxy} = 2\mathrm{E}^{-3}$, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxy} = 4\mathrm{E}^{-4}$, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyy} = -7{,}7\mathrm{E}^{-4}$, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxx} = -3{,}9\mathrm{E}^{-3}$. Elles sont choisies de manière à ce que les éléments bilinéaires QUA 4, qui sont incomplets dans la partie quadratique, puissent décrire cet état de déformation macroscopique, et telles que $\mathrm{div}(\mathbf{K}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^d)) = \underline{0}$ dans $\Omega_{\mathscr{G}}$.

3.3.1.3 Définition du problème de référence

Le problème de référence associé correspond à une plaque micro-perforée dont le maillage, illustré à la **Figure 3.5**, a été généré à partir du **VER1** et dont les dimensions sont identiques à celles de la structure globale : $5\mathrm{L}_x \times 5\mathrm{L}_y$. Ses paramètres matériaux sont les mêmes que ceux du **VER1**. Sa cellule centrale Ω_{ref} correspond à la zone dans laquelle est effectué le zoom dans le domaine global.

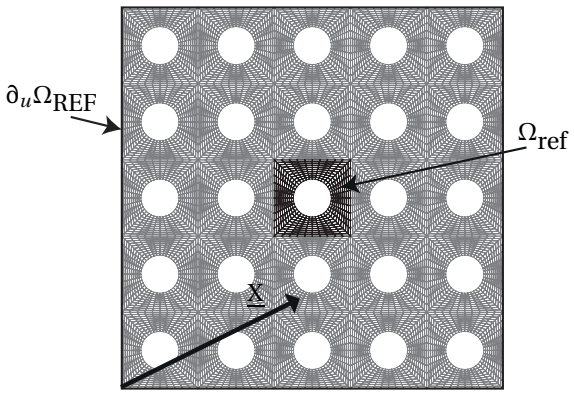


FIGURE 3.5 – Maillage de référence d'une plaque perforée modélisée à l'échelle microscopique.

Les conditions aux limites appliquées sur la structure de référence sont les mêmes que celles appliquées sur la structure globale du problème correspondant, c'est-à-dire la relation (3.9) sur $\partial_u\Omega_{\mathrm{REF}}$ pour le **chargement I** et la relation (3.10) sur $\partial_u\Omega_{\mathrm{REF}}$ pour le **chargement II**.

3.3.1.4 Observations et analyse des résultats

Dans cette section, un certain nombre de résultats concernant le couplage de modèles non-compatibles sont détaillés. Aussi, dans un souci de clarté, l'essentiel des résultats est regroupé dans le **Tableau 3.3** pour le **chargement I** et dans le **Tableau 3.4** pour le **chargement II**. Il s'agit de tableaux regroupant des cartes d'erreur en énergie qui est définie par la relation (3.7). Ces erreurs sont calculées en fonction des solutions du problème local et du problème de référence. Elles sont tracées sur la structure locale déformée, en fonction de la méthode de couplage utilisée et du raffinement du maillage de la structure globale.

Les résultats sont analysés comme suit : dans un premier temps, pour chacun des chargements introduits à la **Section 3.3.1.2**, la solution correspondant au problème de référence est présentée et discutée. Puis, dans un second temps, les solutions associées au problème couplé, résolu par les différentes techniques de la littérature citées en introduction de ce chapitre, sont examinées.

Chargement I

Problème de référence et discussions autour des conditions aux limites – Le maillage déformé de la structure de référence sous le **chargement I** est présenté à la **Figure 3.6**. Ce cas de référence permet de mettre en évidence des résultats bien connus des problèmes d'homogénéisation.

En effet, la solution en déplacement qui se développe sur le VER central de la structure de référence semble périodique. Cependant, les conditions aux limites, imposées sur le bord du domaine

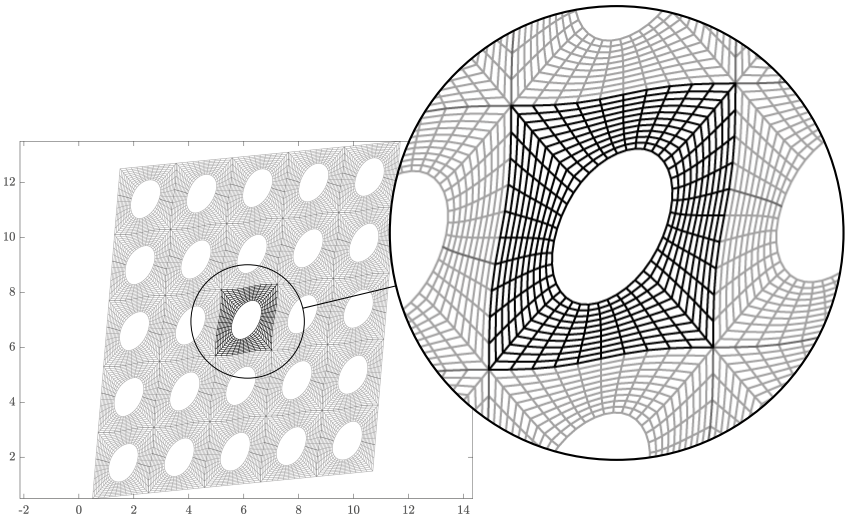


FIGURE 3.6 – Maillage déformé de la structure de référence soumis au chargement imposé de déformation macroscopique uniforme (3.9).

de référence, n'étant pas compatibles avec une solution périodique sur l'ensemble des VER, des effets de bord apparaissent au voisinage de $\partial_u\Omega_{\text{REF}}$.

Ces effets de bord ont un effet sur le comportement macroscopique de la structure. En effet, la déformation macroscopique sur l'ensemble de la structure est conforme, en moyenne, à celle qui a été prescrite par la relation (3.9) mais elle ne l'est pas à l'échelle de chaque VER. De ce fait, elle n'est pas constante sur chacun des VER. Par exemple, il est possible de calculer la déformation macroscopique de la cellule du centre de la structure à partir du comportement homogénéisé avec la relation :

$$< \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\text{ref}}) >_{\text{ref},(\mathbf{K}^{\text{H}}_{\mathscr{L}})^{-1}} = (\mathbf{K}^{\text{H}}_{\mathscr{L}})^{-1} : < \boldsymbol{\sigma}_{\text{ref}} >_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} 0{,}002\underline{0002} & 0{,}010\underline{152} \\ 0{,}010\underline{152} & 0{,}020\underline{039} \end{bmatrix}$$

où $< \boldsymbol{\sigma}_{\text{ref}} >_{\text{ref}} = \frac{1}{\text{vol(ref)}} \int_{\text{ref}} \boldsymbol{\sigma}_{\text{ref}} \, \mathrm{d}\Omega$. Ces valeurs sont légèrement différentes de celles imposées à la relation (3.9) et cet écart augmente d'autant plus que le VER, sur lequel est calculée la déformation macroscopique, est proche du bord.

Ces résultats mettent en évidence le fait qu'imposer la même relation (3.9) sur une structure homogénéisée et une structure avec microstructure n'est, bien sûr, pas équivalent.

Pour éviter ces effets de bords, il faudrait supposer la structure plongée dans un milieu périodique infini, et donc le champ de déplacement solution sur le problème de référence devrait être cherché dans l'espace admissible suivant :

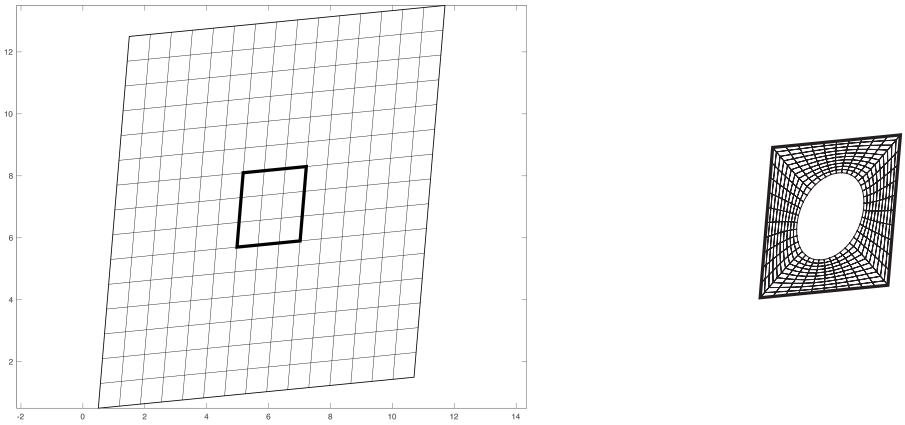
$$\mathscr{U}^{\text{per}}_{\Omega_{\text{REF}}} = \{\underline{u}_{\Omega_{\text{REF}}} \in \mathscr{H}^1(\Omega_{\text{REF}}) \mid \underline{u}_{\Omega_{\text{REF}}}(\underline{\text{X}}^+) - \underline{u}_{\Omega_{\text{REF}}}(\underline{\text{X}}^-) = \underline{u}^d \text{ où } (\underline{\text{X}}^+, \underline{\text{X}}^-) \in (\partial_u\Omega_{\text{REF}})^2\}$$

où les composantes X^+_i et X^-_i de $\underline{\text{X}}^+$ et $\underline{\text{X}}^-$ sont telles que $\text{X}^+_i \geq \text{X}^-_i$.

Chercher une solution dans cet espace est cohérent avec les hypothèses d'homogénéisation périodique et permet d'avoir une déformation macroscopique constante sur toute la structure de référence mais ne correspond pas au problème posé. De ce fait, le choix a été fait de garder comme référence la solution du problème (3.6) cherchée dans $\mathscr{U}_{\Omega_{\text{REF}}}$.

Couplage SBD – La solution de la première étape du couplage SBD est illustrée **Figure 3.7a**. Il s'agit du maillage déformé du problème global avec un coefficient d'amplification de 10. À partir de cette solution, le champ de déplacement, extrait de l'interface Γ, sert de conditions aux limites au problème local (**Figure 3.7b**). Les discrétisations des modèles étant non-conformes, une interpolation linéaire permet de reconstruire le champ de déplacement sur tous les nœuds du maillage local.

Bien que la solution du problème global soit exacte, puisque les éléments QUA4 suffisent à décrire la solution théorique uniforme en déformation, des erreurs très importantes sont observées



(a) Première étape : problème global. (b) Deuxième étape : problème local (échelle x2).

FIGURE 3.7 – Maillages déformés du problème avec couplage SBD sous le **chargement I**.

sur les cartes du **Tableau 3.3**. Ces cartes montrent des écarts importants entre les solutions locales et la solution de référence dans les coins puisque les zones rouges correspondent à une saturation de l'échelle de couleur pour des erreurs supérieures à 25%.

L'erreur maximale locale est de l'ordre de 60% et est invariante avec le raffinement du maillage global. De plus, ce dernier n'a aucun impact sur la solution locale, car l'interpolation linéaire, utilisée pour le couplage, reconstruit le champ de déplacement exact au passage du modèle global au modèle local.

Couplage mortar – La solution du problème couplé avec un couplage mortar est donnée à la **Figure 3.8**. En comparant la déformée avec celle de la **Figure 3.7a** il est possible de voir que la

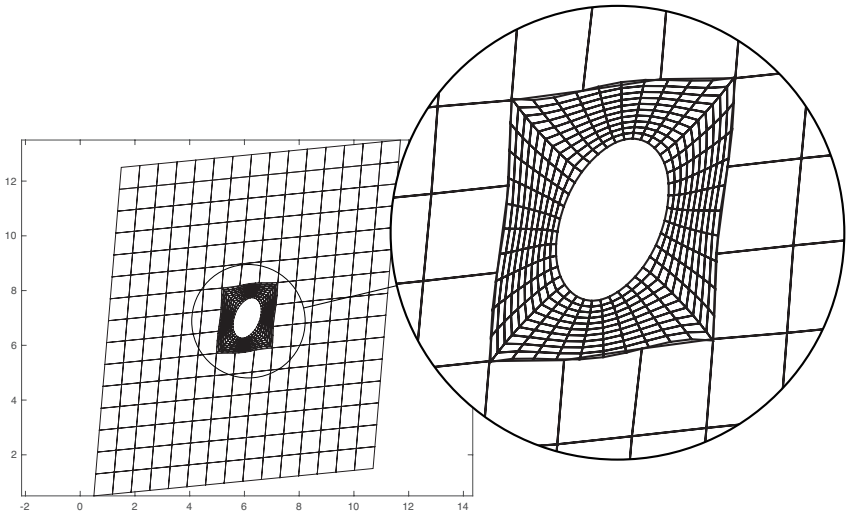


FIGURE 3.8 – Maillage déformé du problème avec couplage mortar sous le **chargement I**.

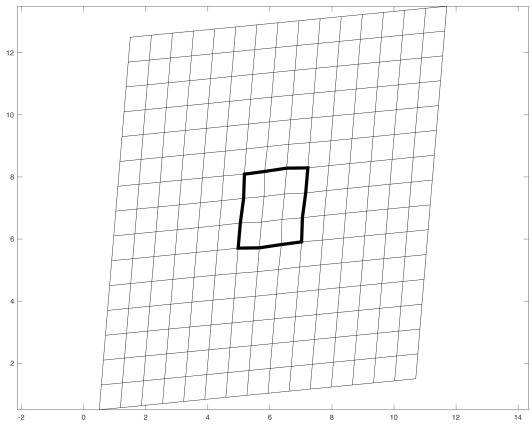
rigidité de la structure locale a bien été prise en compte dans la résolution. En effet, le déplacement solution n'est plus linéaire au voisinage de l'interface de couplage mais la solution restreinte à la structure globale n'est alors plus exacte vis-à-vis du chargement considéré.

Les erreurs en énergie sont données dans le **Tableau 3.3** en fonction du maillage de la structure globale. Il apparait que la solution obtenue n'est toujours pas équivalente à la solution de référence. En effet, quelle que soit la discrétisation, une erreur est faite, même dans le cas de maillages conformes, mais elle décroit avec la finesse du maillage global et est minimale pour des maillages conformes.

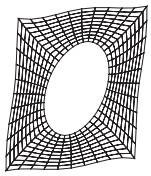
Par rapport à la méthode SBD, à l'exception du **maillage 1**, les résultats montrent une certaine amélioration de la solution sur la structure locale tout en dégradant la solution sur le modèle global.

Zoom global/local – Pour la résolution de ce problème, le critère de convergence de l'algorithme global/local a été fixé à $1E^{-6}$. L'algorithme converge en 8, 11, 14 et 36 itérations, respectivement pour les **maillage 1**, **maillage 2**, **maillage 3** et **maillage 4**.

La solution convergée sur la structure globale est donnée à la **Figure 3.9a** et celle sur la sous-structure locale à la **Figure 3.9b** pour le **maillage 3**. Il apparait qu'à convergence, l'influence de la sous-structure locale est bien prise en compte dans la structure globale via les efforts de corrections. En effet, en comparant les solutions globales sur la **Figure 3.7a** et sur la **Figure 3.9a**, des différences sont visibles au niveau de la zone du zoom. Il est à noter que la solution obtenue à convergence est identique à celle de la méthode mortar précédemment décrite.



(a) Couplage global/local : solution convergée du problème global.



(b) Couplage global/local : solution convergée du problème local (échelle x2).

FIGURE 3.9 – Maillages déformés du problème avec zoom global/local sous le **chargement I**.

D'après le **Tableau 3.3** les erreurs obtenues par une méthode de zoom global/local sont identiques à celles obtenues par une méthode de couplage mortar. L'explication vient du fait que, dans ces travaux, les opérateurs de couplage choisis pour l'implémentation de ces deux méthodes sont identiques, seule la manière de résoudre le système diffère. Ainsi, pour un critère de convergence suffisamment faible, les solutions sont identiques entre les deux méthodes. Dans ces travaux, la méthode de zoom global/local peut donc être vue comme l'implémentation non-intrusive du couplage mortar.

À titre d'illustration, la **Figure 3.10** montre en trait continu le résidu de convergence de l'algorithme global/local, et en traits pointillés, l'écart maximum local entre la méthode de zoom global/local et la méthode mortar d'après la relation suivante :

$$e_{\mathrm{E}} = \frac{\|\underline{u}_{\mathrm{zgl}} - \underline{u}_{\mathrm{mortar}}\|_{\mathrm{E},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}}{\|\underline{u}_{\mathrm{mortar}}\|_{\Omega_{\mathscr{L}},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}}$$

où $\underline{u}_{\mathrm{zgl}}$ et $\underline{u}_{\mathrm{mortar}}$ sont les champs de déplacement solutions sur $\Omega_{\mathscr{L}}$ des méthodes de zoom global/local et de couplage mortar. Il apparait bien que l'écart entre les solutions des deux méthodes diminue avec le nombre d'itérations de l'algorithme de zoom global/local.

Chargement II – Les résultats associés au second chargement (relation (3.10)) sont présentés, comme précédemment, dans un premier temps pour le problème de référence puis dans un deuxième temps pour les différentes techniques de couplage.

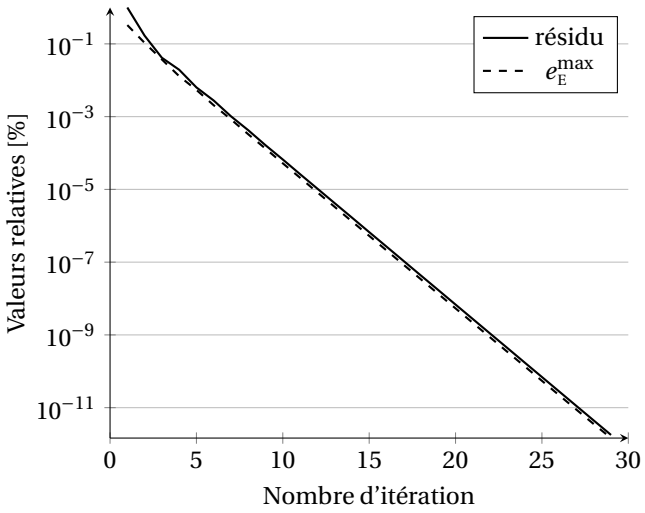


FIGURE 3.10 – Courbe de convergence de l'algorithme global/local non-intrusif et courbe de l'écart maximal en norme énergétique sur $\Omega_{\mathscr{L}}$ entre la méthode global/local et la méthode mortar en fonction du nombre d'itérations pour le **maillage 3**.

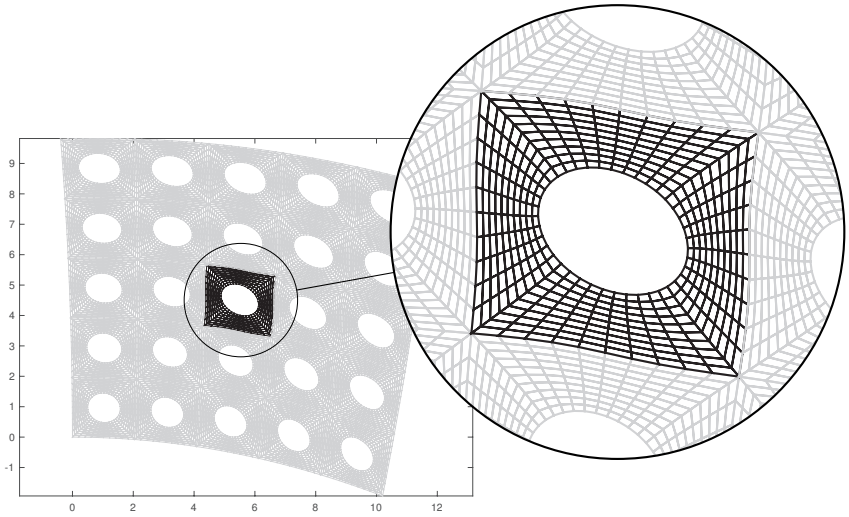


FIGURE 3.11 – Maillage déformé de la structure de référence sous le chargement imposé de déformation macroscopique linéaire (3.9).

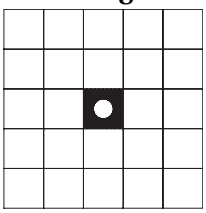
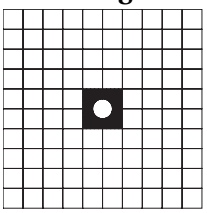
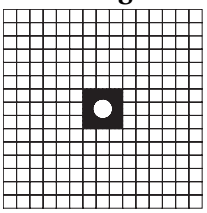
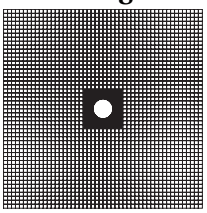
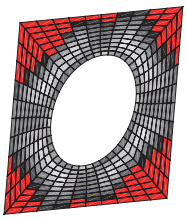
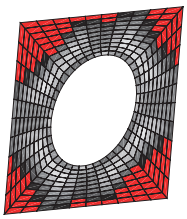
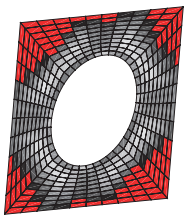
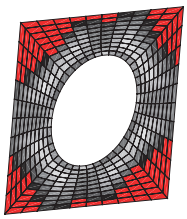
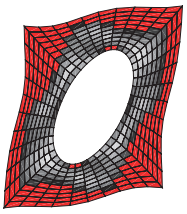
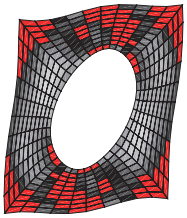
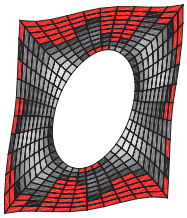
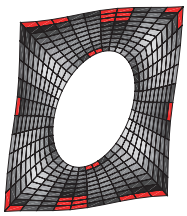
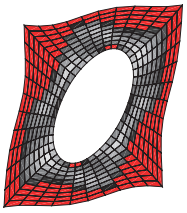
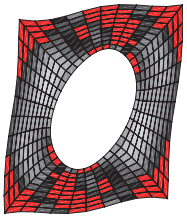
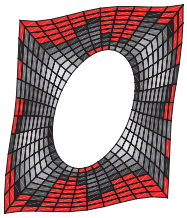
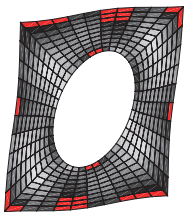
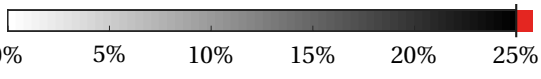
	maillage 1	**maillage 2**	**maillage 3**	**maillage 4**
Maillages				
Méthode de couplage SBD				
erreur max.	$e_E^{max} = 62{,}5\%$	$e_E^{max} = 62{,}5\%$	$e_E^{max} = 62{,}5\%$	$e_E^{max} = 62{,}5\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 18{,}1\%$	$e_E^{moy} = 18{,}1\%$	$e_E^{moy} = 18{,}1\%$	$e_E^{moy} = 18{,}1\%$
Méthode de couplage mortar				
erreur max.	$e_E^{max} = 68{,}6\%$	$e_E^{max} = 58{,}8\%$	$e_E^{max} = 54{,}6\%$	$e_E^{max} = 30{,}8\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 25{,}5\%$	$e_E^{moy} = 20{,}3\%$	$e_E^{moy} = 19{,}8\%$	$e_E^{moy} = 14{,}6\%$
Méthode de zoom global/local				
erreur max.	$e_E^{max} = 68{,}6\%$	$e_E^{max} = 58{,}8\%$	$e_E^{max} = 54{,}6\%$	$e_E^{max} = 30{,}8\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 25{,}5\%$	$e_E^{moy} = 20{,}3\%$	$e_E^{moy} = 19{,}8\%$	$e_E^{moy} = 14{,}6\%$
échelle de couleur				

TABLEAU 3.3 – Distribution locale de l'erreur (3.7) en fonction de la méthode de couplage employée et du raffinement du maillage de la structure globale pour le **chargement I**.

Problème de référence et discussions autour des conditions aux limites – La solution du problème de référence est illustrée à la **Figure 3.11**. Comme dans le cas précédent, une solution périodique se développe sur la cellule centrale alors que les VER proches du bord $\partial_u\Omega_{\text{REF}}$ sont cinématiquement admissibles avec les conditions aux limites. Des effets de bord sont donc également présents dans ce cas là.

Couplage SBD – Le champ de déplacement solution, calculé sur la structure globale, est cette fois-ci approximé puisque les éléments quadrangulaires linéaires ne permettent pas de décrire la solution exacte attendue. En effet, le champ de déplacement solution est linéaire sur les arrêtes des éléments donc il est nécessaire de raffiner le maillage pour approximer au mieux la solution sur la structure globale.

Comme le montrent les cartes du **Tableau 3.4**, la solution locale obtenue par la méthode de couplage SBD donne des résultats fortement entachés d'erreurs. L'erreur moyenne, de l'ordre de 20%, décroit avec le raffinement du maillage global. L'erreur maximale locale, de l'ordre de 70%, est maximale pour le maillage le plus fin de la structure globale (**maillage 4**). Il y a donc, en moyenne, une amélioration de la solution avec le raffinement de maillage global mais une erreur localement plus importante.

A l'exception du maillage le plus grossier, les solutions obtenues par cette méthode de couplage montrent des écarts importants par rapport à la solution de référence. Ces zones où l'erreur est supérieure à 25% sont localisées à proximité des coins de la cellule, mais sont également présentes au niveau du centre de la cellule, à proximité du trou, pour le maillage le plus grossier.

Couplage mortar – Dans le cas où la solution locale est obtenue par une méthode de couplage mortar, les erreurs obtenues par rapport à la solution de référence sont fortement dépendantes de la discrétisation du maillage global.

Comme le montre le **Tableau 3.4**, les erreurs sont importantes et dépassent localement les 25% pour les quatre maillages. Les zones dont l'erreur dépasse les 25% sont relativement étendues mais décroissent avec la finesse du maillage global. La solution avec le **maillage 4** est meilleure qu'avec les autres maillages puisque les zones d'erreur supérieures à 25% sont moins étendues et que l'erreur maximale locale est de l'ordre de 35% contre 60% au minimum avec les autres maillages. Les tendances observées dans ce cas sont donc identiques à celles observées dans le cas du **chargement I**.

Zoom global/local – Les mêmes observations que dans le cas du **chargement I** peuvent être faites, c'est-à-dire que les opérateurs de couplage étant identiques entre les méthodes de zoom global/local et de couplage mortar, les solutions obtenues avec les deux méthodes sont équivalentes. Les erreurs tracées dans le **Tableau 3.4** sont donc égales.

La technique de zoom global/local converge respectivement en 8, 11, 14 et 35 itérations pour les **maillage 1**, **maillage 2**, **maillage 3** et **maillage 4**, pour un résidu de convergence de 1E^{-6}. La tendance est donc identique à celle du **chargement I**, c'est-à-dire que l'algorithme converge plus lentement pour des maillages plus riches.

3.3.1.5 Interprétations

Les trois techniques de couplage testées dans cette section, donnent des solutions locales qui ne sont pas équivalentes à la solution de référence. En effet, des écarts importants par rapport à la solution de référence apparaissent dans tous les cas. Ces erreurs ne sont pas dues aux techniques de couplage utilisées, qui sont très efficaces pour coupler des maillages incompatibles, mais viennent du fait, qu'ici, l'incompatibilité réside aussi dans la définition des modèles eux-mêmes.

Les solutions obtenues convergent vers un problème de substitution du modèle local dans le modèle global, illustré à la **Figure 3.2c**, et non pas vers le problème de référence, illustré à la

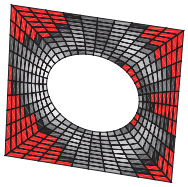
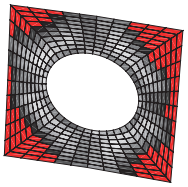
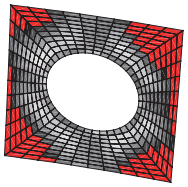
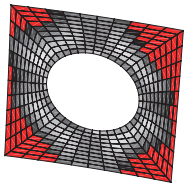
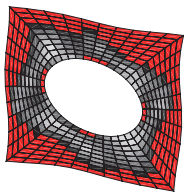
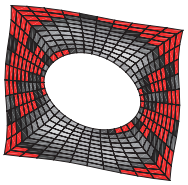
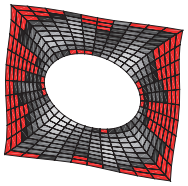
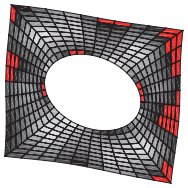
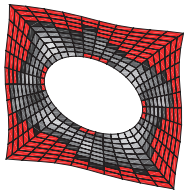
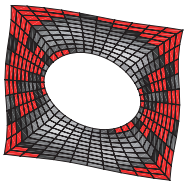
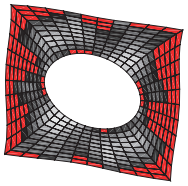
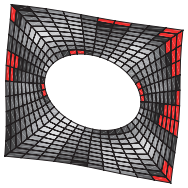
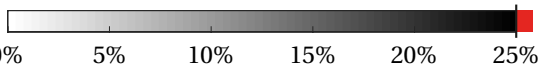
Maillages	**maillage 1**	**maillage 2**	**maillage 3**	**maillage 4**
Méthode de couplage SBD				
erreur max.	$e_E^{max} = 67{,}8\%$	$e_E^{max} = 63{,}4\%$	$e_E^{max} = 66{,}8\%$	$e_E^{max} = 71{,}3\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 19{,}3\%$	$e_E^{moy} = 17{,}9\%$	$e_E^{moy} = 17{,}8\%$	$e_E^{moy} = 17{,}7\%$
Méthode de couplage mortar				
erreur max.	$e_E^{max} = 75{,}3\%$	$e_E^{max} = 67{,}4\%$	$e_E^{max} = 60{,}0\%$	$e_E^{max} = 34{,}9\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 26{,}4\%$	$e_E^{moy} = 21{,}1\%$	$e_E^{moy} = 21{,}0\%$	$e_E^{moy} = 15{,}2\%$
Méthode de zoom global/local				
erreur max.	$e_E^{max} = 75{,}3\%$	$e_E^{max} = 67{,}4\%$	$e_E^{max} = 60{,}0\%$	$e_E^{max} = 34{,}9\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 26{,}4\%$	$e_E^{moy} = 21{,}1\%$	$e_E^{moy} = 21{,}0\%$	$e_E^{moy} = 15{,}2\%$
échelle de couleur				

TABLEAU 3.4 – Distribution locale de l'erreur (3.7) en fonction de la méthode de couplage employée et du raffinement du maillage de la structure globale pour le **chargement II**.

Figure 3.2a. Ces méthodes de couplage ne semblent donc pas adaptées pour coupler des modèles non-compatibles. Si toutefois une de ces méthodes devait être utilisée pour coupler deux modèles non-compatibles décrits à différentes échelles, l'utilisation d'un maillage global avec des éléments linéaires de la taille du VER est déconseillée.

Pour finir, avec les méthodes de couplage mortar et de zoom global/local, des perturbations apparaissent dans la structure globale à cause de la prise en compte du comportement de la structure locale. Des « effets de bords » apparaissent donc au niveau de la zone de couplage, aussi du côté du modèle global. Les cartes d'erreur sur le modèle global n'ont pas été montrées.

3.3.2 Problème modèle en dimension 3

Dans cette section, un exemple de problème 3D de couplage de modèles non-compatibles est résolu pour confirmer les tendances relevées dans le cas 2D. Ainsi, un seul type de conditions aux limites et un seul maillage sont considérés. De plus seules les méthodes de couplage SBD et de zoom global/local sont évaluées.

3.3.2.1 Définition du problème couplé

A l'instar du problème jouet 2D, le modèle local est constitué d'un seul VER représenté à la **Figure 3.3b**, localisé au centre de la structure globale. La structure globale est modélisée par une plaque homogène de dimension $5L_x \times 5L_y \times 5L_z$. Son comportement matériau homogénéisé, calculé à partir du modèle local, est donné dans la deuxième colonne du **Tableau 3.2**.

3.3.2.2 Conditions limites

Le cas de chargement du problème 3D est défini tel que les composantes non-nulles de la relation (3.8) soient $F^M_{xx} = 1{,}1$ et $F^M_{yy} = 0{,}9$ ainsi que $G^M_{yyy} = -0{,}00138$, $G^M_{yxx} = -0{,}036$ et $G^M_{xxy} = 0{,}024$. Il s'agit donc d'un chargement avec des composantes de déformation uniforme et linéaire en traction dans les directions x et y, et une composante de déformation linaire en cisaillement dans la direction x.

3.3.2.3 Définition du problème de référence

Le problème de référence 3D a été généré à partir du **VER2**. Il correspond à une plaque stratifiée de carbone/époxy dont le maillage (**Figure 3.12**) a été généré, de la même manière que dans le cas en dimension 2, à partir de la translation de la cellule élémentaire. La plaque est donc un assemblage de cinq VER dans les trois directions $\underline{x}$, $\underline{y}$ et $\underline{z}$. Elle a les mêmes dimensions que la structure globale : $5L_x \times 5L_y \times 5L_z$. Ses paramètres matériaux sont les mêmes que ceux du **VER2** (voir le **Tableau 3.2**) et sa cellule centrale Ω_{ref} est située au centre de la plaque.

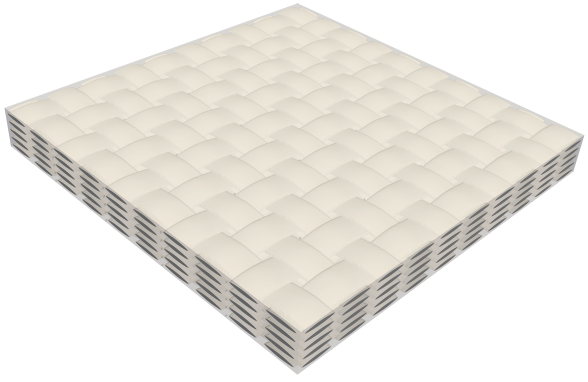


FIGURE 3.12 – Maillage de référence d'une plaque en matériaux composites stratifiés pour une modélisation à l'échelle microscopique.

Les conditions aux limites appliquées sur la structure de référence sont les mêmes que celles appliquées sur la structure globale.

3.3.2.4 Analyse des résultats

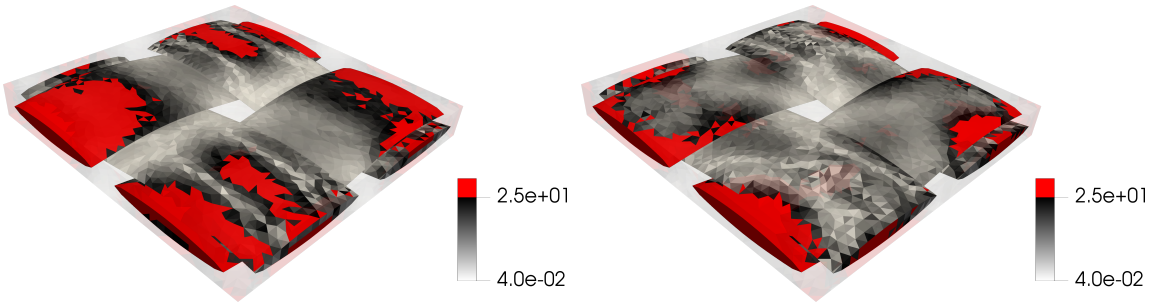
A partir des solutions éléments finis issues de la résolution par chacune des méthodes global/-local, les cartes d'erreur calculées à partir de la relation (3.7) sont présentées à la **Figure 3.13** où la matrice époxy est visible en semi-transparence. La même échelle de couleur que celle du cas 2D est utilisée, c'est-à-dire que les valeurs au delà de 25% d'erreur sont tronquées et apparaissent en noir.

Les éléments linéaires du maillage ne permettent pas de décrire un état de déformation linéaire. La solution sur la structure globale est donc approchée et dépendante du maillage global.

Couplage SBD – La carte d'erreur sur la structure locale, relative au couplage par la méthode SBD, est présentée **Figure 3.13a**. Il apparait des zones d'erreur supérieure à 25%. Elles sont relativement étendues et présentes sur les fibres du VER. Les résultats sont conformes à ce qui a été décrit dans le problème 2D.

Couplage Zoom global/local – La convergence pour la méthode de zoom global/local a été atteinte en 16 itérations pour un critère d'arrêt de $1E^{-8}$. La carte d'erreur, sur la structure locale, de la solution convergée est donnée à la **Figure 3.13b**.

Des zones d'erreurs supérieurs à 25% sont présentes, mais leurs zones d'influence sont moins étendues qu'avec la méthode SBD. Ces observations sont également conformes avec les tendances observées dans le cas du problème 2D.



(a) Couplage SBD : erreur sur la structure locale.

(b) Couplage global/local : erreur sur la solution convergée de la structure locale.

FIGURE 3.13 – Carte d'erreur en norme énergétique sur la structure locale pour deux techniques de couplage de la littérature.

3.4 Conclusions

En conclusion, les trois techniques de couplage SBD, de couplage mortar et de zoom global/-local, développées pour le couplage de modèles compatibles, se montrent relativement inadaptées pour le couplage de modèles non-compatibles puisqu'elles engendrent des erreurs en norme énergétique supérieures à 30%, pour des chargements académiques simples, dans tous les cas considérés. Un tel niveau d'erreur n'est pas compatible avec des usages en bureaux d'études, en particulier pour des calculs de grande précision avec plusieurs incréments d'autant plus que ces niveaux ne décroissent pas forcément avec la finesse des maillages.

La méthode de couplage SBD occasionne des erreurs importantes et semble à proscrire dans des analyses avec modèles non-compatibles. Les méthodes de couplage mortar ou de zoom global/local qui sont identiques à convergence dans les cas présentés ici, assurent un couplage de

meilleure qualité dans la zone locale en dégradant légèrement la solution du côté de la structure globale. Bien que les erreurs maximales locales commises soient supérieures à 25%, leurs zones d'influence sont moins importantes et plutôt localisées vers les interfaces. En revanche, la solution est dépendante de la discrétisation du modèle grossier.

Bien que ces exemples soient simples et éloignés de cas industriels, ils sont révélateurs de phénomènes qui peuvent arriver dans des problèmes plus significatifs et qui peuvent causer d'importantes erreurs de calcul. Par exemple, dans le cas d'une analyse avec dommage, ces techniques peuvent amorcer des critères d'endommagement au voisinage des zones de couplage à cause de sur-contraintes fictives dues au couplage de modèles. De même, le niveau de déformation macroscopique appliquée à la zone d'intérêt peut être très erroné.

Dans le chapitre suivant, une technique de couplage par interface est proposée afin de coupler des modèles non-compatibles de manière plus saine d'un point de vue mécanique.

Références

AKULA, B. R. 2019, *Extended Mortar Method for Contact and Mesh-Tying Applications*, thèse de doctorat, Université Paris-Sciences-et-Lettres. 57

BEN DHIA, H. 1998, «Problèmes mécaniques multi-échelles : La méthode Arlequin», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol. 326, nº 12, doi : 10.1016/S1251-8069(99)80046-5, p. 899–904, ISSN 1287-4620. 57

BLANCHARD, M. 2018, *Méthode global/local non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires*, thèse de doctorat, Université Paris-Saclay. 57

BLANCHARD, M., O. ALLIX, P. GOSSELET et G. DESMEURE. 2019, «Space/time global/local noninvasive coupling strategy : Application to viscoplastic structures», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 156, doi :10.1016/j.finel.2019.01.003, p. 1–12. 57

FISH, J. et A. WAGIMAN. 1993, «Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium», *Computational Mechanics*, vol. 12, nº 3, doi :10.1007/BF00371991, p. 164–180, ISSN 1432-0924. 57

GENDRE, L. 2009, *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*, thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. 59, 61

VOLETI, S. R., N. CHANDRA et J. R. MILLER. 1996, «Global-local analysis of large-scale composite structures using finite element methods», *Computers & Structures*, vol. 58, nº 3, doi :10.1016/0045-7949(95)00172-D, p. 453–464, ISSN 0045-7949. 57

Chapitre 4

Méthode de couplage en présence de champs macroscopiques constants

Sommaire

4.1 Introduction 76
4.2 Analyses des quantités d'interface 76
4.2.1 Séparation micro-macro des quantités d'interface 77
4.2.2 Lien avec l'homogénéisation au premier ordre 78
4.3 Méthode de couplage pour des modèles non-compatibles 79
4.3.1 Rappel de la formulation du problème sous-structuré 79
4.3.2 Proposition des conditions de couplage avec séparation des échelles sur les interfaces 80
4.3.3 Exemples 81
4.3.4 Analyses et limitations de la méthode de couplage proposée 84
4.4 Conclusion 85

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur ce qui a été, de manière chronologique, le premier couplage développé durant ces travaux de recherche. La problématique était alors de retrouver des solutions proches de l'homogénéisation au premier ordre par une méthode de couplage par interface.

La résolution de ce problème a été très utile, d'une part pour comprendre les liens entre les modèles aux différentes échelles, et d'autre part pour proposer une méthode de couplage efficace et peu intrusive entre ces modèles. Par ailleurs, il s'est avéré, au cours de plusieurs discussions à l'issue de présentations en conférences, que ce couplage avait suscité beaucoup d'intérêt.

Si les développements les plus complets de ces travaux de thèse se situent au chapitre suivant et que le couplage proposé dans le chapitre actuel souffre de limitations assez importantes, surtout vis-à-vis de cas de chargements complexes plus représentatifs de cas industriels, il semblait pertinent, pour les raisons évoquées ci-dessus, de lui consacrer un chapitre complet de ce manuscrit. Ce chapitre permet donc d'avoir une bonne compréhension de la démarche proposée et sert de chapitre introductif à une généralisation de la méthode de couplage, proposée dans le **Chapitre 5**.

Dans le **Chapitre 3**, il a été mis en évidence que les méthodes classiques de couplage par interface ne sont pas adaptées à des modèles non-compatibles. En effet, ces méthodes engendrent des erreurs systématiques importantes par rapport à une solution de référence obtenue par calcul direct (DNS). Ces erreurs dépendent non seulement du chargement du problème considéré mais aussi de la qualité des maillages mis en jeu. De plus, il a été montré que dans certaines situations, pour diminuer ces erreurs, il est préférable de déraffiner le maillage, ce qui peut paraitre contre-intuitif.

Les techniques classiques de couplage par interface s'appuient sur la continuité des champs au niveau de l'interface. Cette continuité n'a pas de sens au passage d'un modèle à l'autre puisque bien que les modèles décrivent une même physique, ils le font à des échelles différentes. Il n'y a donc pas de raison *a priori* pour que les champs soient continus sur l'interface. De ce fait, il semble que la qualité d'une solution dépende avant tout de la pertinence des quantités transférées d'un modèle à l'autre. Dans les cas étudiés dans le chapitre précédent, les quantités échangées ne sont pas adaptées.

Afin d'écrire des relations de couplage cohérentes vis-à-vis de chacun des modèles mis en jeu, une nouvelle technique de couplage basée sur l'analyse des quantités d'interface est proposée. Ce chapitre développe une méthode de couplage pour modèles non-compatibles dans le cas idéal de l'homogénéisation périodique au premier ordre. C'est-à-dire dans le cas où la taille de la cellule élémentaire est petite par rapport au gradient de déformation macroscopique. L'objectif de ce couplage est d'obtenir, en une seule étape, la solution locale à l'échelle microscopique telle qu'elle serait obtenue par un processus de relocalisation dans une approche de type homogénéisation, et la solution globale à l'échelle macroscopique telle qu'elle serait obtenue par un calcul homogénéisé complet. La méthode proposée présente l'avantage de ne pas nécessiter la construction explicite de l'opérateur homogénéisé sous forme close.

4.2 Analyses des quantités d'interface

Au premier ordre, la solution en déplacement d'un problème d'homogénéisation périodique s'écrit comme la somme d'une solution macroscopique et d'une correction périodique $\underline{w}$ sous la forme :

$$\underline{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \underline{\mathrm{X}} + \underline{w} \tag{4.1}$$

La **Figure 4.1** illustre les solutions microscopique et macroscopique du problème d'homogénéisation périodique au premier ordre sur le **VER1** présenté à la **Section 3.2.4**. Pour cet exemple, les

valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ sont choisies telles que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

Le bord du VER est divisé en faces élémentaires γ telles que $\bigcup_{\gamma\in\mathcal{Q}} \gamma = \partial\Omega$, avec $\mathcal{Q} = \{d,r,t,l,f,b\}$ pour des problèmes 3D et $\mathcal{Q} = \{d,r,t,l\}$ pour des problèmes 2D (voir la **Figure 4.1**). La trace des déplacements d'interface ainsi que ses composantes macroscopique et microscopique sont extraites, par exemple, de la face d et sont tracées à la **Figure 4.1**. D'après la relation (4.1), il serait instinctif de penser que pour imposer une déformation macroscopique constante $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ à un VER, à partir des déplacements d'interface, il soit nécessaire de fixer les composantes linéaires du champ de déplacement sur les faces γ. Cette assertion n'est pas si évidente, en effet, il est possible d'observer sur le bord d (voir la **Figure 4.1**) que la partie linéaire de u est différente de celle de la composante macroscopique du champ de déplacement $\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \underline{\mathrm{X}}$. La fluctuation $\underline{w}$ périodique contient donc une composante linéaire qui n'est pas connue *a priori*. Par ailleurs, il est possible d'observer que la composante moyenne de la trace de $\underline{u}$ est identique à la moyenne de la composante macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \mathrm{X}$. Ces observations sont analogues sur toutes les faces de $\mathcal{Q}$ pour des problèmes 2D et des problèmes 3D. A partir de ce constat, une séparation des quantités d'interface est proposée de manière à transmettre des informations pertinentes d'un modèle à l'autre à partir des quantités d'interface.

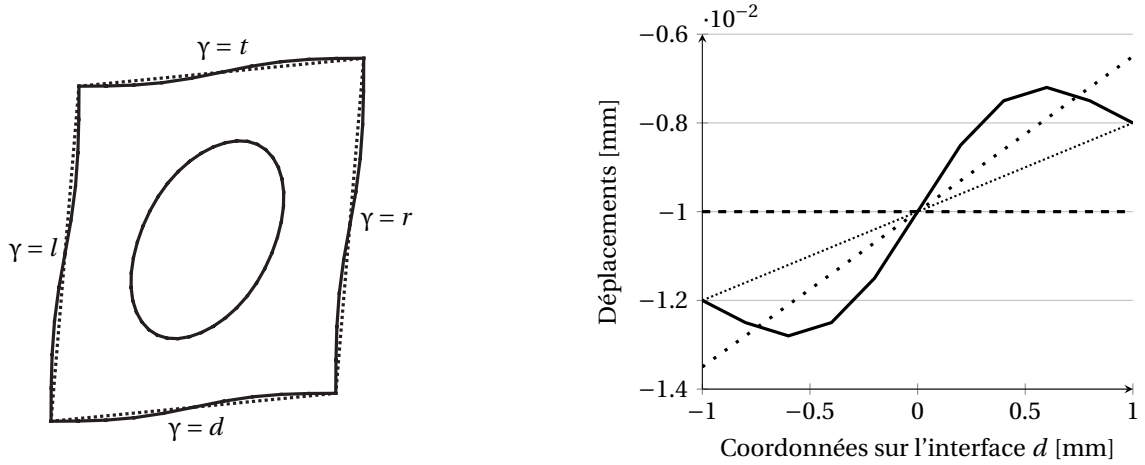


FIGURE 4.1 – Illustration de la déformée d'une cellule unitaire périodique : solution complète u (——), composante macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \mathrm{X}$ de u (·····), composante moyenne de la trace de u (- - -), composante linéaire de la trace de u (· · ·).

4.2.1 Séparation micro-macro des quantités d'interface

Les modèles étant non-compatibles, les informations à échanger d'un modèle à l'autre doivent être pertinentes. Pour cela, une séparation micro-macro est réalisée sur les quantités d'interface. Les champs d'interface sont alors écrits comme une somme de quantités macroscopique et microscopique :

$$\underline{\mathrm{W}}_\gamma = \mathrm{W}_\gamma^{\mathrm{M}} + \mathrm{W}_\gamma^{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_\gamma = \mathrm{F}_\gamma^{\mathrm{M}} + \mathrm{F}_\gamma^{m}$$

où W_γ et F_γ sont respectivement les déplacements et les distributions d'efforts sur les faces γ et les exposants ^{M} et ^{m} sont associés aux quantités macroscopique et microscopique.

Les déplacements macroscopiques $\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}}$ sont définis comme la moyenne des déplacements sur le bord du VER tels que :

$$\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}} = \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\underline{\mathrm{W}}_\gamma) = \frac{1}{\mathrm{L}_\gamma}\int_\gamma \underline{\mathrm{W}}_\gamma \, \mathrm{d}\Gamma \tag{4.2}$$

Les déplacements microscopiques $\underline{\mathrm{W}}_\gamma^m$ sont quant à eux définis comme le complémentaire du déplacement macroscopique :

$$\underline{\mathrm{W}}_\gamma^m = \underline{\mathrm{W}}_\gamma - \underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}} \tag{4.3}$$

La relation (4.1) s'écrit alors en termes de composantes micro-macro sur une face γ :

$$\underline{\mathrm{W}}_\gamma = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\underline{\mathrm{X}}) + \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\underline{w})}_{\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \underline{\mathrm{X}} + \underline{w} - \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\underline{\mathrm{X}}) + \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\underline{w})}_{\underline{\mathrm{W}}_\gamma^m}$$

Par rapport à la méthode de séparation micro-macro proposée par Ladevèze et Nouy [2002]; Nouy [2003] et détaillée à la **Section 2.4.2**, un parallèle peut être fait en prenant comme base macroscopique $\mathbf{e}_\gamma^{\mathrm{M}}$, celle des translations de corps rigide des interfaces. Dans la séparation micro-macro présentée ici, les quantités macroscopiques peuvent donc être interprétées comme des translations de corps rigide des faces γ.

De même, en suivant les travaux de Ladevèze et Nouy [2002]; Nouy [2003], il est possible de définir des inter-efforts macroscopiques $\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}$ et microscopiques $\underline{\mathrm{F}}^m$ tels qu'il y ait une séparation des travaux sur chacune des échelles sur chaque interface γ :

$$(\underline{\mathrm{W}}_\gamma, \underline{\mathrm{F}}_\gamma)_\gamma = (\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}}, \underline{\mathrm{F}}_\gamma^{\mathrm{M}})_\gamma + (\underline{\mathrm{W}}_\gamma^m, \underline{\mathrm{F}}_\gamma^m)_\gamma \tag{4.4}$$

où $(\cdot,\cdot)_\gamma$ est associé au travail des quantités d'interface :

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)_\gamma : \quad \mathscr{W}_\gamma \times \mathscr{F}_\gamma &\to \mathbb{R} \\ (\underline{\mathrm{W}}_\gamma, \underline{\mathrm{F}}_\gamma)_\gamma &\mapsto \int_\gamma \underline{\mathrm{W}}_\gamma \cdot \underline{\mathrm{F}}_\gamma \, \mathrm{d}\Gamma \end{aligned}$$

4.2.2 Lien avec l'homogénéisation au premier ordre

Sur la base de ce qui a été observé à la **Figure 4.1**, la proposition est faite d'imposer, sur chacune des faces γ, la moyenne des déplacements d'interface $\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}}$ égale à la moyenne du déplacement macroscopique sur le bord :

$$\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}} = \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \underline{\mathrm{X}}) \tag{4.5}$$

En d'autres termes, la fluctuation $\underline{w}$ est supposée à moyenne nulle sur chaque face γ, c'est-à-dire que :

$$\Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\underline{w}) = \underline{0} \tag{4.6}$$

Il est alors possible de montrer que la condition d'admissibilité cinématique (1.6) de l'homogénéisation au premier ordre, rappelée ci-dessous, est satisfaite :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{w} \otimes \underline{\mathrm{N}} \, \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \underline{w} \otimes \underline{\mathrm{N}} \, \mathrm{d}\Gamma &= \sum_{\gamma \in \mathscr{Q}} \int_\gamma \underline{w} \otimes \underline{\mathrm{N}}_\gamma \, \mathrm{d}\Gamma \\ &= \sum_{\gamma \in \mathscr{Q}} \Big(\int_\gamma \underline{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \underline{\mathrm{X}} \, \mathrm{d}\Gamma \otimes \underline{\mathrm{N}}_\gamma \Big) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathscr{Q}} \Big(\mathrm{L}_\gamma \underbrace{(\underline{\mathrm{W}}_\gamma^{\mathrm{M}} - \Pi_\gamma^{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \underline{\mathrm{X}}))}_{=\underline{0} \text{ d'après (4.5)}} \, \mathrm{d}\Gamma \otimes \underline{\mathrm{N}}_\gamma \Big) \end{aligned}$$

Des conditions cinématiques sur les composantes microscopiques $\underline{\mathrm{W}}^m$ des déplacements d'interface sont ensuite choisies de manière à respecter les conditions d'homogénéisation périodique :

$$\underline{\mathrm{W}}^m(\underline{\mathrm{X}}^+) - \underline{\mathrm{W}}^m(\underline{\mathrm{X}}^-) = \underline{0} \tag{4.7}$$

où $\underline{\mathrm{X}}^+$ et $\underline{\mathrm{X}}^-$ sont les coordonnées de deux points en vis-à-vis sur les interfaces du VER. Il est alors possible de montrer que, pour une cellule parallélépipédique, les relations (4.5) et (4.7) donnent le même saut de déplacement qu'à partir de la relation (4.1). Ces conditions permettent donc de satisfaire les conditions d'admissibilité cinématique d'un problème d'homogénéisation périodique au premier ordre (PBC).

Les conditions d'admissibilité cinématique (4.5) et (4.7) peuvent, par exemple, être imposées par multiplicateurs de Lagrange. Il est alors possible de montrer que, à partir de la formulation variationnelle du BVP avec les conditions (4.5) et (4.7), ainsi que la séparation des travaux micro-macro aux interfaces, les conditions d'admissibilité statique se traduisent par l'anti-périodicité des parties microscopiques des inter-efforts sur le bord du VER :

$$\underline{\mathrm{F}}^m(\underline{\mathrm{X}}^+) + \underline{\mathrm{F}}^m(\underline{\mathrm{X}}^-) = \underline{0} \tag{4.8}$$

où $\underline{\mathrm{X}}^+$ et $\underline{\mathrm{X}}^-$ sont les coordonnées de deux points en vis-à-vis sur les interfaces du VER. Il est intéressant de noter que dans cette formulation, aucune condition n'est imposée sur la partie macroscopique des inter-efforts alors que dans le cas classique, la condition d'anti-périodicité porte sur le champ complet.

La condition de Hill-Mandel, qui assure l'égalité des travaux entre un milieu homogénéisé et le VER microstructuré, est bien respectée par le BVP avec les conditions (4.5), (4.7) et (4.8). En effet, le respect de cette condition peut s'écrire sur le contour :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{w} \, \mathrm{d}\Gamma = 0$$

Ce dernier terme est bien nul car en séparant les déplacements d'interface en contributions micro-macro d'après les relations (4.2), (4.3) et (4.4), il vient :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{w} \, \mathrm{d}\Gamma &= \sum_{\gamma\in\partial\mathscr{Q}} \int_{\Upsilon} \underline{\mathrm{F}} \cdot (\underline{w}^{\mathrm{M}} + \underline{w}^m) \, \mathrm{d}\Gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\partial\mathscr{Q}} \int_{\Upsilon} \underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{w}^{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}\Gamma + \sum_{\gamma\in\partial\mathscr{Q}} \int_{\Upsilon} \underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{w}^m \, \mathrm{d}\Gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\partial\mathscr{Q}} \int_{\Upsilon} \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}} \cdot \underline{w}^{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}\Gamma + \sum_{\gamma\in\partial\mathscr{Q}} \int_{\Upsilon} \underline{\mathrm{F}}^m \cdot \underline{w}^m \, \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned}$$

où le premier terme s'annule d'après (4.6) et le deuxième terme s'annule car $\underline{w}^m$ et $\underline{\mathrm{F}}^m$ sont respectivement périodique et anti-périodique sur $\partial\Omega$.

4.3 Méthode de couplage pour des modèles non-compatibles

A partir de la séparation micro-macro proposée à la section précédente, un couplage pour modèles non-compatibles est proposé en supposant que le modèle global $\Omega_{\mathscr{G}}$ représente le comportement macroscopique du modèle local $\Omega_{\mathscr{L}}$ au sens de l'homogénéisation périodique.

4.3.1 Rappel de la formulation du problème sous-structuré

La formulation faible du système d'EDP relative au problème à deux sous-structures, illustré à la **Figure 3.2c**, est donnée en (3.1). Pour des raisons pratiques, elle est rappelée ici. Une solution

$(\underline{u}_{\mathcal{G}},\underline{u}_{\mathcal{L}})$ est cherchée dans $\mathcal{U}_{\mathcal{G}} \times \mathcal{U}_{\mathcal{L}}$ (définis par (3.2)) avec :

$$\begin{cases} \forall \underline{u}^*_{\mathcal{G}} \in \mathcal{U}^0_{\mathcal{G}}, & \displaystyle\int_{\Omega_{\mathcal{G}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathcal{G}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathcal{G}}} \underline{\mathrm{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathcal{G}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{G}} \cdot \underline{u}^*_{\mathcal{G}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{u}^*_{\mathcal{L}} \in \mathcal{U}^0_{\mathcal{L}}, & \displaystyle\int_{\Omega_{\mathcal{L}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{L}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathcal{L}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathcal{L}}} \underline{\mathrm{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathcal{L}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{L}} \cdot \underline{u}^*_{\mathcal{L}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{\mathrm{X}} \in \Gamma, & \mathscr{R}(\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{G}}(\underline{\mathrm{X}}),\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{G}}(\underline{\mathrm{X}}),\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}}),\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}})) = \underline{0} \end{cases}$$

Les tenseurs symétriques des contraintes de Cauchy sur chacun des modèles sont respectivement notés $(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{G}},\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \times \mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ où $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{L}} = \mathbf{K}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}}) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{L}}$ avec $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}})$ le tenseur des rigidités du modèle local hétérogène et $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{G}} = \mathbf{K}_{\mathcal{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{G}}$ avec $\mathbf{K}_{\mathcal{G}} = \mathbf{K}^{\mathrm{H}}_{\mathcal{L}}$ le tenseur de rigidité macroscopique du modèle local sous des hypothèses d'homogénéisation périodique au premier ordre. Les espaces des champs de déplacement cinématiquement admissibles à zéro sont définis par la relation (3.3). La relation de couplage $\mathscr{R} = \underline{0}$, sur l'interface Γ est définie dans la section suivante.

4.3.2 Proposition des conditions de couplage avec séparation des échelles sur les interfaces

En supposant que le problème global décrive le comportement macroscopique du modèle local, la solution en déplacement du problème local $\underline{u}_{\mathcal{L}}$ s'écrit comme la somme de la solution du problème global $\underline{u}_{\mathcal{G}}$ et d'une correction périodique $\underline{w}$:

$$\underline{u}_{\mathcal{L}} = \underline{u}_{\mathcal{G}} + \underline{w} \quad \text{dans } \Omega_{\mathcal{L}} \tag{4.9}$$

A partir de la séparation micro-macro des quantités d'interface, présentée à la **Section 4.2.1**, les champs d'interface des modèles local et global s'écrivent comme la somme d'une quantité macro et d'une quantité micro sur chaque $\gamma \in \Gamma$:

$$\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{I},\gamma} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{I},\gamma} + \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathcal{I},\gamma}$$

où $\mathcal{I} \in \{\mathcal{G},\mathcal{L}\}$ et où ^{M} et ^{m} se réfèrent respectivement aux quantités macroscopiques et microscopiques définies par les relations (4.2) et (4.3).

Afin d'assurer que la solution sur le modèle local soit compatible avec une solution d'homogénéisation au premier ordre, les conditions de couplage par interface suivantes sont proposées. D'une part, sur chaque interface γ, les composantes macro entre les modèles sont telles que :

$$\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{L},\gamma} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{G},\gamma} \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{L},\gamma} + \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{G},\gamma} = \underline{0} \tag{4.10}$$

et d'autre part, les composantes micro sont imposées périodiques sur le modèle local :

$$\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}}^+) - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}}^-) = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}}^+) + \underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathcal{L}}(\underline{\mathrm{X}}^-) = \underline{0} \tag{4.11}$$

D'après (4.9) et (4.11), les composantes microscopiques des déplacements d'interface sont donc aussi périodiques sur le modèle global. Les composantes microscopiques des inter-efforts sur le modèle global sont donc anti-périodiques :

$$\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathcal{G}}(\underline{\mathrm{X}}^+) - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathcal{G}}(\underline{\mathrm{X}}^-) = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathcal{G}}(\underline{\mathrm{X}}^+) + \underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathcal{G}}(\underline{\mathrm{X}}^-) = \underline{0} \tag{4.12}$$

Finalement, les conditions de couplage (4.10)-(4.12) sont les conditions de couplage proposées entre deux modèles non-compatibles dans un cas de sollicitation conforme avec de l'homogénéisation au premier ordre. La relation (4.10) est une condition de couplage entre les quantités macroscopiques d'interface de chacun des modèles. D'après les travaux de LADEVÈZE et collab. [2002] la relation $(4.10)_1$ peut être vue comme la continuité des translations de corps rigide des faces γ entre les deux modèles et la relation $(4.10)_2$ peut être vue comme l'équilibre des résultantes

entre les deux modèles. Les relations (4.11) et (4.12) sont des conditions d'admissibilité cinématique sur les composantes microscopiques des quantités d'interface. Ces composantes microscopiques contiennent, entre autre, les rotations et extensions des interfaces. Fixer ces composantes à être périodiques limite donc la cinématique macroscopique du VER à des modes de déformation en tension et cisaillement exclusivement. Des modes macroscopiques de type sablier sont par exemple exclus de l'espace d'admissibilité cinématique limitant ainsi le comportement macroscopique de la cellule à des chargements spécifiques, comme cela est illustré dans la **Section 4.3.3**.

Cette proposition de couplage permet de respecter la condition de Hill-Mandel pour un état de sollicitation macroscopique constant à l'échelle du VER. En effet si l'état de déformation du modèle global $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathscr{G}} = \nabla^s \underline{u}_{\mathscr{G}}$ est constant sur la zone où le modèle global est substitué par le modèle local et que $\mathbf{K}_{\mathscr{G}} = \mathbf{K}^{\mathrm{H}}_{\mathscr{L}}$, la condition de Hill-Mandel se résume à :

$$\int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{w} \, \mathrm{d}\Gamma = 0$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{w} \, \mathrm{d}\Gamma &= \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}} \int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot (\underline{w}^{\mathrm{M}} + \underline{w}^m) \, \mathrm{d}\Gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}} \int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{w}^{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}\Gamma + \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}} \int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{w}^m \, \mathrm{d}\Gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}} \int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{M}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{w}^{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}\Gamma + \sum_{\gamma \in \mathcal{Q}} \int_\Gamma \underline{\mathrm{F}}^m_{\mathscr{L}} \cdot \underline{w}^m \, \mathrm{d}\Gamma \\
&= 0
\end{aligned}$$

car le premier terme est nul puisque sur chaque face γ, $\underline{w}^{\mathrm{M}} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathscr{G}} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathscr{L}} = 0$ d'après (4.9) et $(4.10)_1$ et le deuxième terme est également nul car $\underline{w}^m$ et $\underline{\mathrm{F}}^m_{\mathscr{L}}$ sont respectivement périodique et antipériodique sur Γ.

4.3.3 Exemples

La résolution du problème sous-structuré avec la relation de couplage $\mathscr{R} = \underline{0}$, sur l'interface Γ qui satisfait les relations (4.10)-(4.12) est proposée **Chapitre 6** dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis. Une adaptation non-intrusive de la méthode de couplage est également proposée **Chapitre 7**, pour une éventuelle implémentation dans des codes « fermés ».

Les solutions obtenues par la méthode des éléments finis sont données dans cette section afin d'analyser les performances du couplage proposé et de les comparer avec les méthodes de la littérature. Les conditions de couplage (4.10)-(4.12) sont appliquées sur les problèmes couplés définis à la **Section 3.3.1**. Pour rappel, le modèle local est constitué d'un seul **VER1** situé au centre du modèle global et ses caractéristiques sont données dans le **Tableau 3.2**.

Le modèle global est une plaque homogène de dimension $5\mathrm{L}_x \times 5\mathrm{L}_y$ et dont le comportement matériau homogénéisé est calculé à partir du modèle local. Les différentes discrétisations qui lui sont associées sont nommées **maillage 1**, **maillage 2**, **maillage 3** et **maillage 4**. Il s'agit de maillages structurés constitués respectivement de 25, 100, 225 et 2500 éléments linéaires QUA4.

Les deux cas de chargement considérés sont les mêmes que ceux de la **Section 3.3.1**. Dans les deux cas, ils s'écrivent à partir des conditions aux limites de Dirichlet suivantes, appliquées sur le bord extérieur du modèle global :

$$\forall \underline{\mathrm{X}} \in \partial_u \Omega_{\mathscr{G}} \qquad \underline{u}^d = \underline{u}_{\mathrm{C}} + \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right) \cdot \underline{\mathrm{X}} + \frac{1}{2} \mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \underline{\mathrm{X}} \otimes \underline{\mathrm{X}}$$

avec, pour le **chargement I**, les termes non-nuls suivants qui permettent d'imposer une déformation macroscopique uniforme sur la structure globale : $\underline{u}^x_{\mathrm{C}} = \underline{u}^y_{\mathrm{C}} = 0{,}05$ mm ainsi que $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xx} = 1{,}002$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{yy} = 1{,}02$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xy} = \mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{yx} = 0{,}01$. Et pour le **chargement II**, les termes non-nuls suivants qui permettent d'imposer une déformation macroscopique linéaire sur la structure globale : $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xx} = 1{,}002$

et $F^M_{yy} = 0{,}998$ ainsi que $G^M_{xxy} = 2E^{-3}$ mm^{-1}, $G^M_{yxy} = 4E^{-4}$ mm^{-1}, $G^M_{xyy} = -7{,}7E^{-4}$ mm^{-1} et $G^M_{yxx} = -3{,}9E^{-3}$ mm^{-1}. Les composantes de $\mathbf{G}^M$ sont choisies de manière à éviter les modes de déformation mal représentés par les éléments QUA4 et telles que $\text{div}(\mathbf{K}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^d)) = \underline{0}$ dans $\Omega_{\mathscr{G}}$.

Les solutions obtenues sont comparées à la solution du problème de référence également définie à la **Section 3.3.1**. Pour rappel, il s'agit d'une plaque perforée, générée à partir du **VER1** et dont les dimensions sont identiques à celles de la structure globale : $5L_x \times 5L_y$.

Les **Figure 4.2** et **Figure 4.3** présentent les maillages des problèmes couplés dans les cas de **chargement I** et **chargement II** respectivement. Les erreurs en normes énergétiques associées à ces solutions sont regroupées dans le **Tableau 4.1**. Pour rappel, la norme énergétique utilisée est définie à la **Section 3.2.3** et s'écrit :

$$e_E = \frac{\|\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}\|_{E,\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}}{\|\underline{u}_{\text{ref}}\|_{\Omega_{\mathscr{L}},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}} \tag{4.13}$$

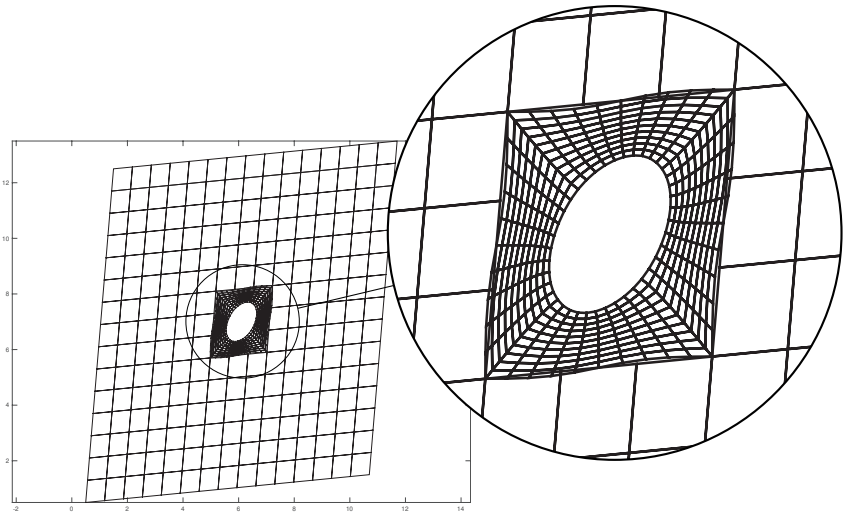


FIGURE 4.2 – Maillage déformé du problème avec couplage en moyenne pour modèles non-compatibles sous le **chargement I**.

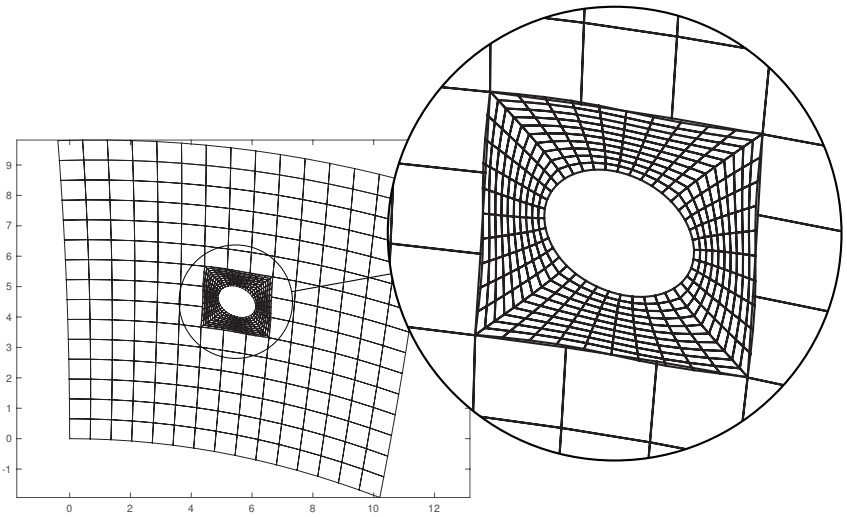


FIGURE 4.3 – Maillage déformé du problème avec couplage en moyenne pour des modèles non-compatibles sous le **chargement II**.

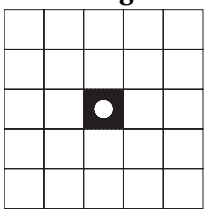
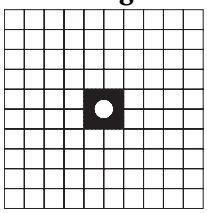
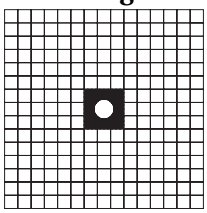
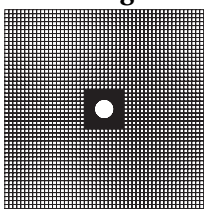
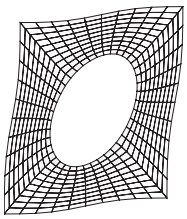
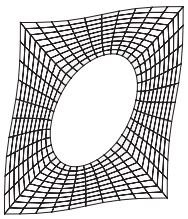
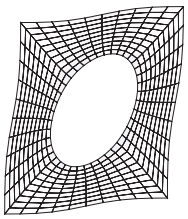
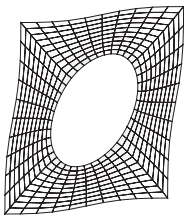
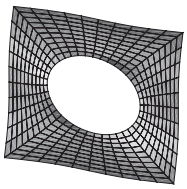
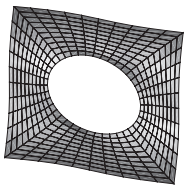
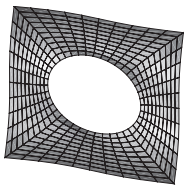
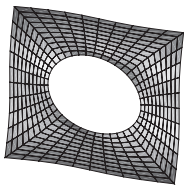
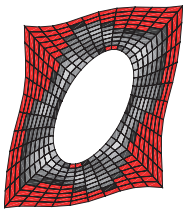
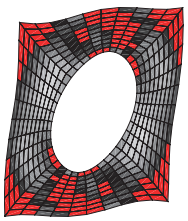
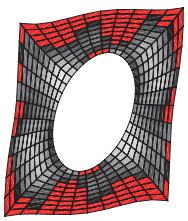
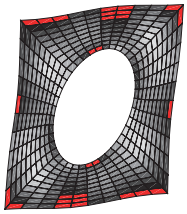
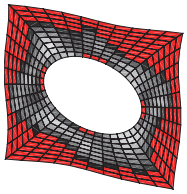
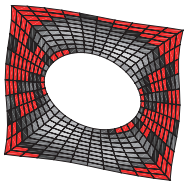
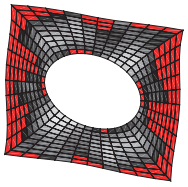
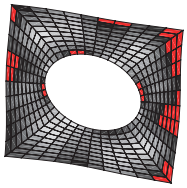
	maillage 1	**maillage 2**	**maillage 3**	**maillage 4**
Maillages				
Chargement I				
erreur max.	$e_E^{max} = 1{,}56\%$	$e_E^{max} = 1{,}56\%$	$e_E^{max} = 1{,}56\%$	$e_E^{max} = 1{,}56\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$
Chargement II				
erreur max.	$e_E^{max} = 19{,}17\%$	$e_E^{max} = 19{,}17\%$	$e_E^{max} = 19{,}36\%$	$e_E^{max} = 19{,}43\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 10{,}70\%$	$e_E^{moy} = 9{,}52\%$	$e_E^{moy} = 9{,}56\%$	$e_E^{moy} = 9{,}58\%$
échelle de couleur	 0% 5% 10% 15% 20% 25%			
Extrait du **Tableau 3.3** Méthode mortar **Chargement I**				
erreur max.	$e_E^{max} = 68{,}6\%$	$e_E^{max} = 58{,}8\%$	$e_E^{max} = 54{,}6\%$	$e_E^{max} = 30{,}8\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 25{,}5\%$	$e_E^{moy} = 20{,}3\%$	$e_E^{moy} = 19{,}8\%$	$e_E^{moy} = 14{,}6\%$
Extrait du **Tableau 3.4** Méthode mortar **Chargement II**				
erreur max.	$e_E^{max} = 75{,}3\%$	$e_E^{max} = 67{,}4\%$	$e_E^{max} = 60{,}0\%$	$e_E^{max} = 34{,}9\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 26{,}4\%$	$e_E^{moy} = 21{,}1\%$	$e_E^{moy} = 21{,}0\%$	$e_E^{moy} = 15{,}2\%$

TABLEAU 4.1 – Distribution locale de l'erreur (4.13) en fonction du chargement et du raffinement du maillage de la structure globale pour le couplage au premier ordre de modèles non-compatibles.

4.3.4 Analyses et limitations de la méthode de couplage proposée

Chargement I – Ce chargement est idéal du point de vue de l'homogénéisation au premier ordre car il permet de simuler une situation de sollicitation macroscopique uniforme dans la zone de zoom.

Par ailleurs, les éléments QUA4 suffisent à décrire exactement la solution cherchée qui est linéaire en déplacement sur $\Omega_{\mathscr{G}}$. Le maillage est donc adapté à la situation, au moins en ce qui concerne le domaine global. Cette première situation offre donc des conditions idéales pour quantifier les erreurs faites par la méthode de couplage proposée puisque le chargement et le maillage permettent de s'affranchir des erreurs de modèle ou de discrétisation dans le domaine global.

Le couplage proposé dans ce chapitre offre des conditions de couplage conformes avec les théories de l'homogénéisation au premier ordre. En effet, il est possible de vérifier que la solution $\underline{u}_{\mathscr{G}}$ est équivalente à une solution obtenue par une approche par relocalisation.

Dans cette situation la condition de Hill-Mandel est satisfaite car le comportement du modèle global est lui même formulé à partir des hypothèses de l'homogénéisation au premier ordre. Ainsi, les travaux sur la cellule locale sont équivalents en moyenne aux travaux de la cellule homogène qu'elle remplace. Par exemple, les travaux calculés sur le problème homogénéisé complet ou sur le problème couplé sont identiques avec :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega = 3{,}77\,\mathrm{J}$$

Par rapport au problème de référence, les cartes d'erreur locale du **Tableau 4.1** montre une erreur inférieure à 2% en norme énergétique et indépendante de la discrétisation du domaine global. Pour rappel, les erreurs obtenues par les couplages issues de la littérature sur ce type de problème se situent entre 30% et 70% en fonction du maillage global. Les cartes d'erreur en norme énergétique associées à une méthode de couplage mortar sont redonnées dans le bas du **Tableau 4.1**.

L'erreur résiduelle, de l'ordre de 2%, est due aux effets de bords sur le problème de référence, déjà décrits dans la **Section 3.3.1.4**. En effet, cette erreur décroît avec des structures plus grandes, éloignant ainsi la cellule centrale des bords (WANGERMEZ et collab. [2020]). A titre d'exemple, pour des structures de taille $11\mathrm{L}_x \times 11\mathrm{L}_y$ soumises au **chargement I** l'erreur maximale en norme énergétique baisse à 0,55% sur le modèle local.

Le couplage proposé est indépendant de la discrétisation du maillage global car, pour ce chargement, la solution globale est exacte quelque soit le maillage proposé. Les quantités macroscopiques échangées entre les domaines sont donc identiques quelle que soit la discrétisation du maillage global.

Bien qu'idéal d'un point de vue théorique, le **chargement I** est loin d'être représentatif de cas de chargement de type industriel.

Chargement II – Plus complexe, ce chargement sort du cadre théorique pour lequel a été proposé ce couplage. En effet, la déformation macroscopique est non-constante dans la zone de zoom mais varie linéairement. De plus, les éléments QUA4, bi-linéaires et incomplets, ne suffisent pas à décrire exactement la solution cherchée qui est quadratique en déplacement sur $\Omega_{\mathscr{G}}$. Une erreur de discrétisation est donc faite dans le domaine global.

Des erreurs locales importantes sont observables par rapport à la solution de référence. En effet, les cartes d'erreur du **Tableau 4.1** montrent que l'erreur peut atteindre localement 20%. Ce **chargement II** a été proposé afin de s'éloigner du cadre idéal de l'homogénéisation classique au premier gradient. Il n'est donc pas étonnant d'obtenir des erreurs plus importantes que dans le cas de **chargement I**.

Ces erreurs sont dans tous les cas non-localisées, ce qui montre une mauvaise estimation de l'état macroscopique de la cellule locale. En effet, le **chargement II** met en jeu des composantes de rotation et d'extension des interfaces qui ne sont pas transmises par le couplage proposé. Bien que les solutions obtenues semblent meilleures que celles obtenues par les techniques de couplage de la littérature (**Section 3.3.1.4**), certaines composantes macroscopiques ne sont pas transmises d'un modèle à l'autre et engendrent des erreurs sur l'ensemble de la cellule. Les méthodes

de couplage de la littérature génèrent quand à elles des erreurs plus importantes mais fortement localisées au niveau des interfaces de couplage.

4.4 Conclusion

Un couplage pour modèles non-compatibles a été proposé à partir des quantités d'interface de chacun des modèles. Sa formulation est basée sur la théorie de l'homogénéisation classique et permet de satisfaire le critère de Hill-Mandel dans des cas où le gradient de déformation est nul dans la zone de zoom.

Lorsque le gradient de déformation sur le domaine global n'est pas nul, les erreurs locales engendrées sont importantes. Bien que les erreurs maximales soient inférieures à celles obtenues par les méthodes de couplage de la littérature, elles sont significatives d'un mauvais état de déformation macroscopique et ne sont donc pas localisées.

Le couplage proposé permet donc de réaliser un zoom local à partir d'un modèle global homogénéisé uniquement dans des zones à faible gradient ou pour des zones locales peu étendues, de sorte que la sollicitation macroscopique soit quasi-homogène dans la zone du zoom.

Références

LADEVÈZE, P. et A. NOUY. 2002, «A multiscale computational method with time and space homogenization», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 330, nº 10, doi :10.1016/S1631-0721(02)01514-0, p. 683–689. 78

LADEVÈZE, P., A. NOUY et O. LOISEAU. 2002, «A multiscale computational approach for contact problems», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, nº 43, doi :10.1016/S0045-7825(02)00406-1, p. 4869–4891, ISSN 0045-7825. 80

NOUY, A. 2003, *Une Stratégie de Calcul Multiéchelle Avec Homogénéisation En Temps et En Espace Pour Le Calcul de Structures Fortement Hétérogènes*, thèse de doctorat, Ecole normale supérieure, Cachan. Thèse de doctorat dirigée par Ladevèze, Pierre Génie mécanique Cachan, 2003 2003DENS0041. 78

WANGERMEZ, M., O. ALLIX, P.-A. GUIDAULT, O. A. CIOBANU et C. REY. 2020, «Interface coupling method for the global-local analysis of heterogeneous models : A second-order homogenization-based strategy», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 84

Chapitre 5

Méthode de couplage en présence de champs macroscopiques lentement variables

Sommaire

5.1 Introduction 88
5.2 Une cinématique basée sur l'homogénéisation au second ordre 88
5.2.1 Séparation micro-macro des quantités d'interface 88
5.2.2 Lien avec l'homogénéisation au second gradient 91
5.2.3 Proposition de conditions modifiées pour résoudre le BVP 93
5.3 Méthode de couplage pour des modèles non-compatibles 99
5.3.1 Rappel de la formulation du problème sous-structuré 99
5.3.2 Proposition des conditions de couplage avec séparation des échelles sur les interfaces 99
5.3.3 Exemples 101
5.4 Conclusion 108

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une technique de couplage pour modèles non-compatibles a été proposée. Cette dernière permet d'introduire une cellule micro-structurée au sein d'un modèle global homogène équivalent et de satisfaire les conditions d'admissibilité cinématique de l'homogénéisation au premier ordre. Si les résultats obtenus sont très bons dans des cas de sollicitations macroscopiques uniformes, cette technique de couplage présente néanmoins des lacunes pour des cas non-uniformes puisque les champs moyens sur la cellule VER ne sont pas complètement transmis au passage du modèle homogénéisé au modèle micro-structuré. Son utilisation est donc restreinte à des cas de chargement uniforme, ou bien, à des tailles de zoom suffisamment restreintes pour considérer les champs macroscopiques constants. Ces restrictions sont les mêmes que celles que l'on peut trouver dans des méthodes de résolution multiéchelles basées sur les théories de l'homogénéisation au premier ordre.

La technique de couplage du chapitre précédent s'appuie sur le transfert de quantités macroscopiques moyennes sur les interfaces. En faisant l'analogie avec les travaux de LADEVÈZE et collab. [2002], la méthode de couplage consiste à imposer la continuité des déplacements de translations de corps rigide des interfaces ainsi que l'équilibre des résultantes d'interface entre les modèles global et local. Les composantes microscopiques des quantités d'interfaces sont alors choisies *a priori* pour satisfaire des conditions périodiques, limitant ainsi, les modes de déformations macroscopiques du VER à de la tension et du cisaillement uniforme.

Le cœur de ces travaux de recherche porte sur la formulation d'une méthode de couplage pour des champs macroscopiques variables. A l'instar des méthodes d'homogénéisation à l'ordre deux (FOREST [1998]; GOLOGANU et collab. [1997]; KACZMARCZYK et collab. [2008]; KOUZNETSOVA et collab. [2001]; OTERO et collab. [2016]), le couplage proposé au chapitre précédent est généralisé pour des déplacements macroscopiques non plus linéaires mais quadratiques sur la cellule élémentaire.

5.2 Une cinématique basée sur l'homogénéisation au second ordre

L'idée à la base de l'homogénéisation au second ordre, introduite par KOUZNETSOVA, VARVARA [2002], consiste à corriger, dans la configuration courante, le développement de Taylor à l'ordre deux d'un vecteur matériel $\Delta\underline{x}$ au voisinage d'un point $\underline{\mathrm{X}}_c$ par une fluctuation microscopique $\underline{w}$:

$$\Delta\underline{x} = \mathbf{F}^{\mathrm{M}} \cdot \Delta\underline{\mathrm{X}} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \Delta\underline{\mathrm{X}} \otimes \Delta\underline{\mathrm{X}} + \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \tag{5.1}$$

où $\mathbf{F}^{\mathrm{M}} = \frac{\partial\phi(\underline{\mathrm{X}}_c)}{\partial\underline{\mathrm{X}}}$ et $\mathbf{G}^{\mathrm{M}} = \frac{\partial}{\partial\underline{\mathrm{X}}}(\frac{\partial\phi(\underline{\mathrm{X}}_c)}{\partial\underline{\mathrm{X}}})$ sont respectivement des tenseurs d'ordre deux et trois. $\Delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_c$ et $\Delta\underline{\mathrm{X}} = \underline{\mathrm{X}} - \underline{\mathrm{X}}_c$ avec $\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{C}}$ le centre géométrique d'un VER. Les conventions utilisées dans la définition des tenseurs relatifs au gradient de la transformation sont celles introduites par exemple dans OTERO et collab. [2016]. Par rapport aux conventions utilisées dans KOUZNETSOVA, VARVARA [2002], les deux premiers indices de $\mathrm{F}_{\mathrm{M}_{ij}}$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{M}_{ijk}}$ sont inversés.

En notant $\underline{u}_{\mathrm{C}} = \underline{x}_{\mathrm{C}} - \underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{C}}$, le champ de déplacement $\underline{u}$ sur le VER au voisinage de $\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{C}}$ s'écrit à partir de la relation (5.1) :

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{\mathrm{X}} = \underbrace{\underline{u}_{\mathrm{C}} + \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right) \cdot \Delta\underline{\mathrm{X}} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \Delta\underline{\mathrm{X}} \otimes \Delta\underline{\mathrm{X}}}_{=\underline{u}^{\mathrm{M}}} + \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \tag{5.2}$$

où $\underline{u}^{\mathrm{M}}$ correspond à la composante macroscopique du champ de déplacement.

5.2.1 Séparation micro-macro des quantités d'interface

De la même manière que dans le chapitre précédent, le bord du VER est divisé en faces élémentaires γ telles que $\bigcup_{\gamma\in\mathcal{Q}}\gamma = \partial\Omega$, avec $\mathcal{Q} = \{d,r,t,l,f,b\}$ pour des problèmes 3D et $\mathcal{Q} = \{d,r,t,l\}$ pour des problèmes 2D (voir **Figure 5.1**).

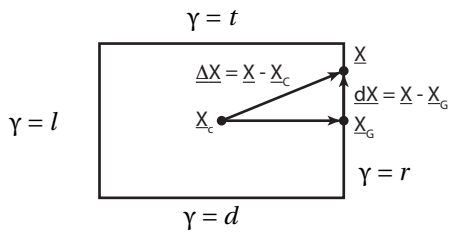


FIGURE 5.1 – Illustration des coordonnées locales $d\underline{X}$ de la face droite r d'une cellule élémentaire à partir du centre de la cellule $\underline{X}_C$ et du centre de masse de la face $\underline{X}_G$.

A partir de la relation (5.2), il est alors possible d'exprimer, pour $\underline{X}$ sur n'importe quelle face γ, le déplacement $\underline{W}_\gamma$ sur le bord du VER sous la forme :

$$\underline{W}_\gamma = \underbrace{\underline{u}^*_G + \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right)\cdot d\underline{X} + \mathbf{G}^M : \Delta\underline{X}_G \otimes d\underline{X} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^M : d\underline{X}\otimes d\underline{X}}_{=\underline{\beta}_\gamma} + \underline{w} \tag{5.3}$$

avec, $\Delta\underline{X}_G = \underline{X}_G - \underline{X}_C$ comme illustré sur la **Figure 5.1**, $\underline{\beta}_\gamma$ la trace du déplacement macroscopique $\underline{u}^M$ sur γ et :

$$\underline{u}^*_G\left(\underline{X}_G,\underline{X}_C\right) = \underline{u}_C(\underline{X}_C) + \left(\mathbf{F}^M - \mathbf{I}_d\right)\cdot\Delta\underline{X}_G + \frac{1}{2}\mathbf{G}^M : \Delta\underline{X}_G\otimes\Delta\underline{X}_G$$

D'après la relation (5.3), les déplacements d'interface sont linéaires et quadratiques en $d\underline{X}$ (le vecteur des coordonnées locales de l'interface) et dépend de la fluctuation $\underline{w}$. Ainsi, sur chaque face γ, une séparation micro-macro des quantités d'interface est proposée.

En suivant la même démarche que dans LADEVÈZE et collab. [2001], qui est détaillée dans la **Section 2.4.2**, il est possible de projeter les quantités d'interface dans des sous-espaces de dimensions finies $\mathscr{W}^M_\gamma \in \mathscr{W}_\gamma$ et $\mathscr{F}^M_\gamma \in \mathscr{F}_\gamma$, tous deux de dimension n_M. Les projecteurs sur ces sous-espaces sont construits à partir d'une base macroscopique $\mathbf{e}^M_\gamma$, tels que :

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma : & \mathscr{W}_\gamma & \to & \mathscr{W}^M_\gamma \\ & \underline{W}_\gamma & \mapsto & \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma(\underline{W}_\gamma) = \underline{W}^M_\gamma \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma : & \mathscr{F}_\gamma & \to & \mathscr{F}^M_\gamma \\ & \underline{F}_\gamma & \mapsto & \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma(\underline{F}_\gamma) = \underline{F}^M_\gamma \end{array}$$

Pour faciliter la lecture, les détails concernant la construction et l'orthogonalisation de la base macroscopique $\mathbf{e}^M_\gamma$ sont donnés dans l'**Annexe C**. Les quantités macroscopiques d'interface s'écrivent donc sous la forme suivante, à partir des vecteurs de la base macroscopique $\mathbf{e}^M_\gamma$:

$$\boldsymbol{\Pi}^M_\gamma(\underline{W}_\gamma) = \sum_{i=1}^{n_M}(\underline{W}_\gamma,\underline{e}^i_\gamma)_{\Gamma_\gamma}\,\underline{e}^i_\gamma \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma(\underline{F}_\gamma) = \sum_{i=1}^{n_M}(\underline{F}_\gamma,\underline{e}^i_\gamma)_{\Gamma_\gamma}\,\underline{e}^i_\gamma$$

où les $\underline{e}^i_\gamma$, définis dans l'**Annexe C**, sont les vecteurs orthonormés de la base $\mathbf{e}^M_\gamma$, à partir du produit scalaire :

$$(\underline{F}_\gamma,\underline{W}_\gamma)_{\Gamma_\gamma} \mapsto \int_{\Gamma_\gamma}\underline{F}_\gamma\cdot\underline{W}_\gamma\,d\Gamma$$

Les parties microscopiques des quantités d'interface $\underline{W}^m_\gamma$ de $\underline{W}_\gamma$ et $\underline{F}^m_\gamma$ de $\underline{F}_\gamma$ appartiennent aux sous-espaces complémentaires $\mathscr{W}^m_\gamma$ de $\mathscr{W}_\gamma = \mathscr{W}^M_\gamma \oplus \mathscr{W}^m_\gamma$ et $\mathscr{F}^m_\gamma$ de $\mathscr{F}_\gamma = \mathscr{F}^M_\gamma \oplus \mathscr{F}^m_\gamma$ tels que :

$$\underline{W}^m_\gamma = (\mathrm{I}_d - \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma)(\underline{W}_\gamma) \qquad \text{et} \qquad \underline{F}^m_\gamma = (\mathrm{I}_d - \boldsymbol{\Pi}^M_\gamma)(\underline{F}_\gamma)$$

Les quantités d'interface respectent alors une séparation micro-macro des travaux d'interface telle que :

$$(\underline{W}_\gamma,\underline{F}_\gamma)_{\Gamma_\gamma} = (\underline{W}^M_\gamma,\underline{F}^M_\gamma)_{\Gamma_\gamma} + (\underline{W}^m_\gamma,\underline{F}^m_\gamma)_{\Gamma_\gamma}$$

Soit $(\mathscr{W}_\Upsilon^q)_{q\in\{\mathrm{T,L,Q}\}}$ une famille de trois sous-espaces de $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$. Ils sont orthogonaux deux à deux et $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$ se décomposent en somme directe telle que :

$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}} = \bigoplus_{q\in\{\mathrm{T,L,Q}\}} \mathscr{W}_\Upsilon^q$$

La famille de projecteurs orthogonaux associée à cette décomposition est notée $(\mathbf{\Pi}_\Upsilon^q)_{q\in\{\mathrm{T,L,Q}\}}$, où $\forall q \in \{\mathrm{T,L,Q}\}$, $\mathbf{\Pi}_\Upsilon^q$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\mathscr{W}_\Upsilon^q$. Pour tout champ de déplacement macroscopique $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$ de $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$, il est donc possible d'écrire :

$$\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{M}} = \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{T}} + \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{L}} + \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}$$

où, $\forall q \in \{\mathrm{T,L,Q}\}$, les composantes $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^q$ sont définies par $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^q = \mathbf{\Pi}_\Upsilon^q(\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon)$.

Finalement, le champ de déplacement d'interface $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon = \underbrace{\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{T}} + \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{L}} + \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}}_{\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{M}}} + \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{m} \tag{5.4}$$

où $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{T}}$, $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{L}}$ et $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}$ sont respectivement les parties constantes, linéaires et quadratiques des déplacements, d'interface d'après les décompositions suivantes.

- Dans un cas 2D, d'après l'**Annexe C**, la famille de 6 vecteurs $(\underline{e}_\Upsilon^i(\underline{x}))_{1\leqslant i\leqslant 6}$ avec $x \in \Upsilon$, forme une base orthonormale $\mathbf{e}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$, de $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$. D'après la relation (C.3), les deux premiers vecteurs engendrent l'espace des translations de corps rigide de l'interface (parties constantes), c'est-à-dire :
$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{T}} = \mathrm{Vect}((\underline{e}_\Upsilon^i)_{1\leqslant i\leqslant 2})$$
Puis l'espace de la rotation de corps rigide et de l'extension de l'interface (parties linéaires) est défini tel que :
$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{L}} = \mathrm{Vect}((\underline{e}_\Upsilon^i)_{i\in\{3\leqslant i\leqslant 4}})$$
Et finalement, l'espace $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}$, qui n'a pas nécessairement de signification physique, est engendré par les deux derniers vecteurs de $\mathbf{e}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$:
$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{Q}} = \mathrm{Vect}((\underline{e}_\Upsilon^i)_{5\leqslant i\leqslant 6})$$
- Dans un cas 3D, en suivant la démarche de l'**Annexe C**, $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$ est engendré par une famille de 18 vecteurs $(\underline{e}_\Upsilon^i(\underline{x}))_{1\leqslant i\leqslant 18}$ avec $x \in \Upsilon$. Ces 18 vecteurs forment une base orthonormale de $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$. D'après la relation (C.2), les 3 premiers vecteurs engendrent l'espace des translations de corps rigide de l'interface (parties constantes)
$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{T}} = \mathrm{Vect}((\underline{e}_\Upsilon^i)_{1\leqslant i\leqslant 3})$$
Les 6 vecteurs suivants engendrent l'espace des déformations constantes de l'interface :
$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{L}} = \mathrm{Vect}((\underline{e}_\Upsilon^i)_{4\leqslant i\leqslant 9})$$
Et les 9 derniers vecteurs engendrent l'espace $\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}$:
$$\mathscr{W}_\Upsilon^{\mathrm{Q}} = \mathrm{Vect}((\underline{e}_\Upsilon^i)_{10\leqslant i\leqslant 18})$$

Pour faciliter les notations par la suite, la notion de Composante Macroscopique d'Interface (CMI) est introduite. La CMI, notée $[\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon]_{\underline{e}_\Upsilon^i}$, correspond à la composante du champ de déplacement d'interface $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon$, projetée sur le vecteur $\underline{e}_\Upsilon^i$, et exprimée dans la base macroscopique $\mathbf{e}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$. Elle est définie par :

$$[\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon]_{\underline{e}_\Upsilon^i} = \int_{\Gamma_\Upsilon} \underline{e}_\Upsilon^i \cdot \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon \,\mathrm{d}\Gamma = (\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon, \underline{e}_\Upsilon^i)_{\Gamma_\Upsilon}$$

Les parties macroscopiques des déplacements d'interface $\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$ s'écrivent donc :

$$\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{M}} = \underbrace{\boldsymbol{\Pi}_\Upsilon^{\mathrm{T}}(\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon)}_{\text{constant}} + \underbrace{\boldsymbol{\Pi}_\Upsilon^{\mathrm{L}}(\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon)}_{\substack{\text{linéaire} \\ \text{en } d\underline{\mathrm{X}}}} + \underbrace{\boldsymbol{\Pi}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}(\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon)}_{\substack{\text{quadratique} \\ \text{en } d\underline{\mathrm{X}}}} \tag{5.5}$$

avec :

$$\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{\Pi}_\Upsilon^{\mathrm{M}}(\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{M}}} \underline{e}_\Upsilon^i \, [\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon]_{\underline{e}_\Upsilon^i}$$

où n_{M} correspond au nombre de vecteurs de la base $\mathbf{e}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$ et $[\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon]_{\underline{e}_\Upsilon^i}$ est la i-ème CMI.

Une décomposition similaire sur l'espace $\mathscr{F}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$, des efforts macroscopiques d'interface, définie par la somme directe :

$$\mathscr{F}_\Upsilon^{\mathrm{M}} = \bigoplus_{q \in \{\mathrm{T,L,Q}\}} \mathscr{F}_\Upsilon^q$$

permet d'écrire les efforts d'interface $\underline{\mathrm{F}}_\Upsilon$ sous la forme $\underline{\mathrm{F}}_\Upsilon = \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{\mathrm{T}} + \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{\mathrm{L}} + \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{\mathrm{Q}} + \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{m}$ où, $\forall q \in \{\mathrm{T,L,Q}\}$, les composantes $\underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^q$ sont définies par $\underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^q = \boldsymbol{\Pi}_\Upsilon^q(\underline{\mathrm{F}}_\Upsilon)$. Les travaux d'interface vérifient alors la décomposition suivante :

$$\int_{\Gamma_\Upsilon} \underline{\mathrm{W}}_\Upsilon \cdot \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon \, \mathrm{d}\Gamma = (\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon, \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon)_{\Gamma_\Upsilon} = (\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{T}}, \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{\mathrm{T}})_{\Gamma_\Upsilon} + (\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{L}}, \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{\mathrm{L}})_{\Gamma_\Upsilon} + (\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{\mathrm{Q}}, \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{\mathrm{Q}})_{\Gamma_\Upsilon} + (\underline{\mathrm{W}}_\Upsilon^{m}, \underline{\mathrm{F}}_\Upsilon^{m})_{\Gamma_\Upsilon}$$

5.2.2 Lien avec l'homogénéisation au second gradient

A partir de la relation (5.2) et en suivant ce qui est fait classiquement, par exemple dans KACZMARCZYK et collab. [2008]; KOUZNETSOVA et collab. [2002]; OTERO et collab. [2016], il est possible d'écrire, sur la fluctuation $\underline{w}$, les relations d'admissibilité cinématique (5.6). Ces relations sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\partial\Omega_{\mathrm{RVE}}} \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \otimes \underline{\mathrm{N}}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \, \mathrm{d}\Gamma &= 0 \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega_{\mathrm{RVE}}} \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \otimes \Delta\underline{\mathrm{X}} \otimes \underline{\mathrm{N}}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \, \mathrm{d}\Gamma &= 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

avec $\underline{\mathrm{N}}$ le vecteur normal sortant sur les bords du VER. Il est intéressant de noter que, dans le cadre de l'homogénéisation au premier ordre, seule la première relation $(5.6)_1$ doit être vérifiée.

Classiquement, les relations (5.6) sont satisfaites pour des hypothèses particulières sur $\underline{w}$ donnant lieu à des conditions de périodicité (PBC) ou à des conditions uniformes au bord (conditions KUBC ou SUBC) généralisées à la théorie du second gradient.

Pour un VER parallélépipédique, sous des hypothèses de périodicité de la fluctuation $\underline{w}$, les conditions (5.6) sont satisfaites pour tout $\underline{w}$ tel que :

$$\begin{cases} \underline{w} \text{ est périodique sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\Upsilon \in \mathcal{Q}} \underline{w} \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Ces conditions sont par exemple utilisées par GEERS et collab. [2001]; KOUZNETSOVA et collab. [2001]; OTERO et collab. [2016] pour résoudre le BVP. En pratique, les relations (5.7) sont assurées à partir de relations sur et entre les faces élémentaires γ (voir la **Figure 5.1**) telles que :

$$\begin{cases} \underline{w}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}) = \underline{0} \\ \underline{w}_{\Upsilon^+} = \underline{w}_{\Upsilon^-} \\ \displaystyle\int_{\Upsilon^-} \underline{w} \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

La première condition $(5.8)_1$, qui assure que la valeur de la fluctuation est nulle dans un coin $\underline{A}$ du VER, est vérifiée dans tous les coins d'un VER pour des raisons de périodicité de la fluctuation $\underline{w}$. La deuxième condition $(5.8)_2$ assure la périodicité de la fluctuation entre deux bords du VER en vis-à-vis et la troisième condition $(5.8)_3$, qui assure que la fluctuation est à moyenne nulle sur les bords γ^-, est satisfaite sur les bords γ^+ par periodicité.

Dans ces travaux dédiés au couplage de modèles non-compatibles, des conditions d'admissibilité cinématiques équivalentes au système (5.8) sont données à partir du formalisme micro-macro introduit à la **Section 5.2.1**.

5.2.2.1 Formulation du BVP à partir des déplacements macroscopiques d'interface

A partir de la définition de $\underline{w}$ donnée en (5.3) et en remarquant que le terme $1/2\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : d\underline{X} \otimes d\underline{X}$ de $\underline{\beta}_{\gamma}$ est périodique, il est possible de montrer que le système (5.8) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{X}_{\mathrm{A}}) = \beta(\underline{X}_{\mathrm{A}}) \\ \underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{T}} = \mathbf{\Pi}_{\gamma}^{\mathrm{T}}(\underline{\beta}_{\gamma}) \\ \underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{L}}(\underline{X}^+) - \underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{L}}(\underline{X}^-) = \mathbf{\Pi}_{\gamma}^{\mathrm{L}}(\underline{\beta}_{\gamma}(\underline{X}^+)) - \mathbf{\Pi}_{\gamma}^{\mathrm{L}}(\underline{\beta}_{\gamma}(\underline{X}^-)) \\ \underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{Q}}(\underline{X}^+) - \underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{Q}}(\underline{X}^-) = \underline{0} \\ \underline{W}_{\gamma}^{m}(\underline{X}^+) - \underline{W}_{\gamma}^{m}(\underline{X}^-) = \underline{0} \end{cases} \tag{5.9}$$

Les trois premières équations du système (5.9) peuvent alors être vues comme des conditions aux limites et les deux dernières comme des conditions d'admissibilité cinématique à imposer sur une cellule élémentaire afin de résoudre le BVP dans un problème d'homogénéisation au second ordre.

Les conditions d'admissibilité cinématique (5.9) peuvent, par exemple, être imposées par multiplicateurs de Lagrange. Il est alors possible de montrer que, à partir de la formulation variationnelle du BVP et à partir de la séparation des travaux micro-macro aux interfaces, sur chacune des échelles, les conditions d'admissibilité statique se traduisent par l'anti-périodicité des parties linéaires, quadratiques et microscopiques des inter-efforts sur le bord du VER :

$$\underline{F}_{\gamma}^{\mathrm{L}}(\underline{X}^+) + \underline{F}_{\gamma}^{\mathrm{L}}(\underline{X}^-) = \underline{F}_{\gamma}^{\mathrm{Q}}(\underline{X}^+) + \underline{F}_{\gamma}^{\mathrm{Q}}(\underline{X}^-) = \underline{F}_{\gamma}^{m}(\underline{X}^+) + \underline{F}_{\gamma}^{m}(\underline{X}^-) = \underline{0}$$

où $\underline{X}^+$ et $\underline{X}^-$ sont les coordonnées de deux points en vis-à-vis sur les interfaces du VER.

En outre, il est intéressant de remarquer que les équations $(5.9)_4$ et $(5.9)_5$ pourraient être rassemblée dans une seule équation si les quantités microscopiques d'interface $\underline{W}_{\gamma}^{m}$ contenaient aussi les déplacements quadratiques. La séparation micro-macro serait alors définie par la relation ci-dessous à la place de la relation (5.4) :

$$\underline{W}_{\gamma} = \underbrace{\underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{T}} + \underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{L}}}_{\underline{W}_{\gamma}^{\mathrm{M}}} + \underline{W}_{\gamma}^{m}$$

Cette alternative permet d'éviter la construction des vecteurs de base des composantes quadratiques. Cependant, dans ces travaux, il est intéressant d'introduire les composantes quadratiques afin de relâcher certaines contraintes du système (5.9). En effet, comme cela est montré dans la **Section 5.2.3**, d'un point de vue macroscopique, certaines conditions du système sont redondantes et peuvent être relâchées, sans que cela n'ait d'incidence sur la solution macroscopique. L'intérêt est de satisfaire une cinématique macroscopique compatible avec le second gradient, lorsque cela est nécessaire, mais de laisser le plus de liberté possible au système, pour des cas généraux.

5.2.2.2 Validation de l'approche par la résolution du BVP sur une cellule élémentaire

Afin de comparer les conditions (5.9) proposées pour résoudre le BVP à des conditions classiques de la littérature, un exemple numérique tiré des travaux de KOUZNETSOVA et collab. [2004] a été repris. Un exemple de BVP est résolu sur une plaque perforée périodique composée d'un assemblage de 3×3 RVE. Le même problème est considéré ici à l'exception près que l'hypothèse des petites déformations a été considérée à la place de l'hypothèse des grandes déformations. La solution du BVP a donc été reconstruite, sous l'hypothèse des petites déformations, en suivant la démarche proposée dans KOUZNETSOVA et collab. [2004], c'est-à-dire en imposant les déplacements dans les 4 coins du VER, les conditions de fluctuation nulles en moyenne sur deux bords adjacents et les contraintes de sauts de déplacements linéaires, sur des faces opposés du VER. La solution obtenue a alors été comparée à celle obtenue à partir du système (5.9).

Le cas test est identique à celui proposé par KOUZNETSOVA et collab. [2004] : la largeur du VER est de 10 μm, le comportement de la plaque est supposé linéaire élastique et ses paramètres matériaux sont pris tels que son module d'Young $E = 210$ GPa et son coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$. La plaque est soumise au même chargement de déformation sous un mode de traction-flexion défini par les quantités cinématiques macroscopiques non nulles suivantes : $F^M_{xx} = 1{,}1$ et $F^M_{yy} = 0{,}9$ ainsi que $G^M_{yxx} = -18\ \text{mm}^{-1}$, $G^M_{xxy} = G^M_{xyx} = 12\ \text{mm}^{-1}$ et $G^M_{yyy} = -8\ \text{mm}^{-1}$.

La **Figure 5.2** montre une carte de contraintes de von Mises, sur la structure déformée élastiquement par le chargement macroscopique prescrit ci-dessus. Les solutions obtenues en fonction de la méthode utilisée sont quasiment identiques. En effet, d'après la norme énergétique définie par la relation (3.7), la différence maximale locale entre la solution obtenue par le système micro-macro (5.9) et la solution obtenue par la méthode prescrite dans KOUZNETSOVA et collab. [2004] est inférieure à $6{,}5E^{-3}$%.

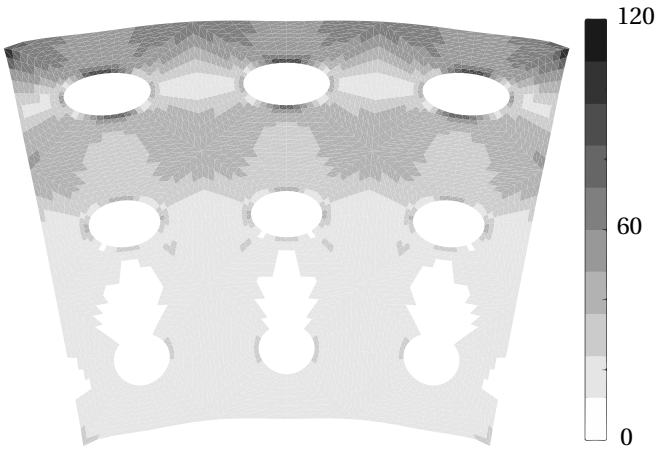


FIGURE 5.2 – Carte des contraintes de von Mises (en GPa) de la plaque déformée, pour un chargement de tension-flexion, sous l'hypothèse des petites déformations et satisfaisant la relation (5.9).

5.2.3 Proposition de conditions modifiées pour résoudre le BVP

L'objectif de ces travaux n'est pas de définir le comportement homogénéisé d'une cellule mais d'introduire une cellule de matériau micro-structuré au sein d'une structure homogène par une technique global/local par interface. Pour cela, l'état de déformation macroscopique d'une cellule doit pouvoir être exprimé en fonction de ses déplacements d'interface. L'enjeu est alors de définir le nombre exact de conditions à respecter sur les bords pour avoir une cinématique de type second gradient dans la cellule.

D'un point de vue macroscopique, certaines conditions du système (5.9) sont automatiquement satisfaites par le fait que les CMI soient extraites du bord du VER qui est une surface fermée.

De ce fait, bien que les différentes parties $\underline{W}^{T}_{\gamma}$, $\underline{W}^{L}_{\gamma}$, $\underline{W}^{Q}_{\gamma}$ et $\underline{W}^{m}_{\gamma}$ du champ de déplacement ne soient pas continues entre deux faces γ adjacentes, leur somme, $\underline{W}_{\gamma}$, l'est par construction.

Les équations en surnombre sont compatibles avec une cinématique de type second gradient. Les retirer du système n'a donc pas d'influence sur la solution macroscopique dans un cas pur, ce qui n'est pas vrai dans le cas général. De plus, le choix des équations à éliminer n'étant pas unique, elles doivent être choisies en fonction des cas à traiter.

La discussion qui suit porte sur l'identification des paramètres du déplacement macroscopique $\underline{u}^{M}$, à partir des CMI calculées depuis les interfaces d'une cellule homogène. Le système d'équation est détaillé dans le cas 2D, au contraire du cas 3D, où seules les conclusions sont données. Dans les deux cas, des choix sont proposés en ce qui concerne les conditions du système (5.9) à éliminer et à garder.

Dans le cas 2D, une solution macroscopique $\underline{u}^{M}$ (voir (5.2)) est définie par 12 quantités macroscopiques $\underline{u}_c$, $\mathbf{F}^{M}$ et $\mathbf{G}^{M}$. Par ailleurs, 24 CMI peuvent être définies au total, sur l'ensemble des faces $\gamma \in \mathcal{Q} = \{d,r,t,l\}$ du VER, à partir de la base macroscopique $\mathbf{e}^{M}_{\gamma}$. Les 24 CMI dépendent de $\underline{u}_c$, $\mathbf{F}^{M}$ et $\mathbf{G}^{M}$ et sont cinématiquement admissibles avec $\underline{u}^{M}$. Ainsi, il est possible d'écrire un système de 24 équations dont une moitié dépend de $\underline{u}_c$, $\mathbf{F}^{M}$ et $\mathbf{G}^{M}$ et l'autre moitié concerne des conditions d'admissibilité cinématique entre les CMI.

Les relations $(5.9)_1$-$(5.9)_3$ donnent au total 14 relations entre les CMI et les quantités $\underline{u}_c$, $\mathbf{F}^{M}$ et $\mathbf{G}^{M}$: 2 relations provenant de $(5.9)_1$, 8 relations de $(5.9)_2$ et 4 relations de $(5.9)_3$. Les 4 relations provenant de $(5.9)_4$, supplémentées des 8 relations de continuité entre les faces adjacentes dans les coins du VER donnent alors au total, 12 conditions d'admissibilité cinématique entre les CMI. A première vue, le système est donc surdéterminé mais est compatible avec une cinématique de type second gradient. Pour éliminer la condition en trop, il est possible d'expliciter les 14 relations provenant de $(5.9)_1$-$(5.9)_3$ qui lient les CMI avec $\underline{u}_c$, $\mathbf{F}^{M}$ et $\mathbf{G}^{M}$.

Pour cela, les conventions d'orientations de la **Figure 5.3** sont utilisées et, de manière à condenser les notations, les relations suivantes sont définies, par exemple pour les CMI 2 et 4 :

$$\begin{aligned}
\left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_2} \right\rangle_{n\gamma^+/m\gamma^-} &= n[\underline{W}^{M}_{\gamma^+}]_{e^{M}_2} + m[\underline{W}^{M}_{\gamma^-}]_{e^{M}_2} \\
\left[[\underline{W}^{M}]_{e^{M}_4} \right]_{n\gamma^+/m\gamma^-} &= n[\underline{W}^{M}_{\gamma^+}]_{e^{M}_4} - m[\underline{W}^{M}_{\gamma^-}]_{e^{M}_4}
\end{aligned}$$

La relation $(5.9)_2$ donne 8 relations impliquant les 10 quantités suivantes : u^{C}_x, u^{C}_y, F^{M}_{xx}, F^{M}_{yy}, F^{M}_{xy}, F^{M}_{yx}, G^{M}_{xxx}, G^{M}_{yyy}, G^{M}_{xyy} et G^{M}_{yxx} sur les 12 à définir. Parmi ces 8 relations, il est possible de définir complètement les composantes de $\mathbf{F}^{M}$ avec :

$$\left\{\begin{aligned}
F^{M}_{xx} - 1 &= \frac{1}{L_x\sqrt{L_y}} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_2} \right\rangle_{1r/1l} \\
F^{M}_{yy} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{L_x}L_y} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_2} \right\rangle_{1t/1d} \\
F^{M}_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{L_x}L_y} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_1} \right\rangle_{1t/1d} \\
F^{M}_{yx} &= -\frac{1}{L_x\sqrt{L_y}} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_1} \right\rangle_{1r/1l}
\end{aligned}\right. \tag{5.10}$$

ou en décomposant $(\mathbf{F}^{M} - \mathbf{I}_d)$ en une partie symétrique $\boldsymbol{\varepsilon}^{M}$ et une partie antisymétrique $\boldsymbol{\Omega}^{M}$ pour faire apparaitre la déformation et la rotation de la cellule :

$$\left\{\begin{aligned}
\varepsilon^{M}_{xx} &= \frac{1}{L_x\sqrt{L_y}} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_2} \right\rangle_{1r/1l} \\
\varepsilon^{M}_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{L_x}L_y} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_2} \right\rangle_{1t/1d} \\
\varepsilon^{M}_{xy} &= \frac{1}{2L_xL_y} \left(\sqrt{L_x} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_1} \right\rangle_{1t/1d} - \sqrt{L_y} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_1} \right\rangle_{1r/1l} \right) \\
\omega^{M} &= -\frac{1}{2L_xL_y} \left(\sqrt{L_x} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_1} \right\rangle_{1t/1d} + \sqrt{L_y} \left\langle [\underline{W}^{M}]_{e^{M}_1} \right\rangle_{1r/1l} \right)
\end{aligned}\right.$$

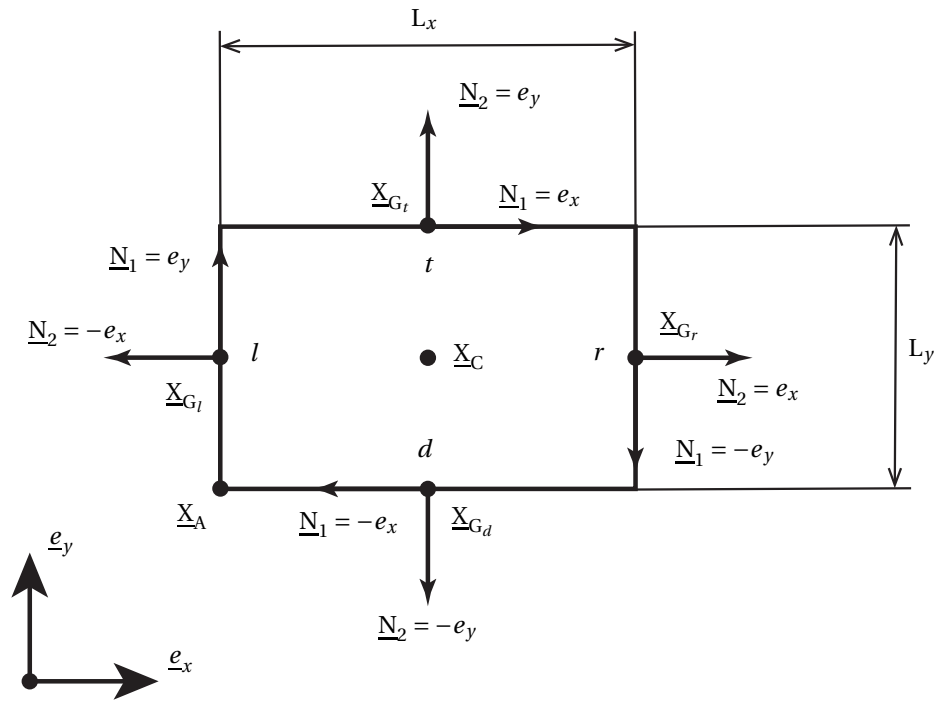


FIGURE 5.3 – Cellule élémentaire rectangulaire avec une proposition d'orientation des vecteurs principaux d'inertie de ses faces.

avec ω^M tel que :

$$\mathbf{\Omega}^M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^M \\ \omega^M & 0 \end{pmatrix}$$

Les 4 relations restantes permettent par exemple d'écrire les composantes $\underline{u}^M$, en fonction des CMI moyennes, de G^M_{xyy} et de G^M_{yxx} telles que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u^C_x &=& -\dfrac{L_y^2}{6} G^M_{xyy} + \dfrac{1}{4\sqrt{L_x L_y}} \left(3\sqrt{L_y} \left[[\underline{W}^M]_{e_1^M} \right]_{1t/1d} - \sqrt{L_x} \left[[\underline{W}^M]_{e_2^M} \right]_{1r/1l} \right) \\ u^C_y &=& -\dfrac{L_x^2}{6} G^M_{yxx} - \dfrac{1}{4\sqrt{L_x L_y}} \left(\sqrt{L_y} \left[[\underline{W}^M]_{e_2^M} \right]_{1t/1d} + 3\sqrt{L_x} \left[[\underline{W}^M]_{e_1^M} \right]_{1r/1l} \right) \end{array} \right. \tag{5.11}$$

ainsi que les composantes G^M_{xxx} et G^M_{yyy} :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} G^M_{xxx} &=& \left(\dfrac{L_y}{L_x} \right)^2 G^M_{xyy} - \dfrac{6}{\sqrt{L_x^5 L_y}} \left(\sqrt{L_y} \left[[\underline{W}^M]_{e_1^M} \right]_{1t/1d} - \sqrt{L_x} \left[[\underline{W}^M]_{e_2^M} \right]_{1r/1l} \right) \\ G^M_{yyy} &=& \left(\dfrac{L_x}{L_y} \right)^2 G^M_{yxx} + \dfrac{6}{\sqrt{L_x L_y^5}} \left(\sqrt{L_x} \left[[\underline{W}^M]_{e_1^M} \right]_{1r/1l} + \sqrt{L_y} \left[[\underline{W}^M]_{e_2^M} \right]_{1t/1d} \right) \end{array} \right. \tag{5.12}$$

Il est intéressant de remarquer que d'après (5.10), $\mathbf{F}^M$ est complètement déterminé par les parties moyennes des déplacements d'interface et qu'il ne manque que deux relations pour déterminer complètement G^M_{xxx}, G^M_{yyy}, G^M_{xyy}, G^M_{yxx} et $\underline{u}^M$. D'autre part, pour $\mathbf{G}^M = \mathbf{0}$, c'est-à-dire pour une cinématique du premier ordre, $\underline{u}_c$ et $\mathbf{F}^M$ sont complètement déterminés à partir des parties moyennes des déplacements d'interface. Ce résultat a été illustré dans le chapitre précédent.

Les 4 relations de $(5.9)_3$ ne mettent en jeu que les composantes G^M_{xxy}, G^M_{yxy} G^M_{xyx} et G^M_{yyx} de $\mathbf{G}^M$ qui sont absentes de (5.11) et (5.12). Elles permettent donc de déterminer les composantes

suivantes de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxy} & = & -\dfrac{1}{\mathrm{L}_x}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_y^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} \\ \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxy} & = & \dfrac{1}{\mathrm{L}_y}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_x^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} \end{array}\right. \tag{5.13}$$

et :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyx} & = & \dfrac{1}{\mathrm{L}_y}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_x^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_4^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} \\ \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yyx} & = & \dfrac{1}{\mathrm{L}_x}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_y^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_4^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} \end{array}\right. \tag{5.14}$$

D'après les propriétés de symétrie de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$, les composantes ci-dessus ne sont pas indépendantes car $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxy} = \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyx}$ et $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxy} = \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yyx}$. De ce fait, les 4 relations (5.13) et (5.14) ne déterminent que deux composantes indépendantes de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$. Il convient alors de choisir deux relations parmi (5.13) et/ou (5.14). Les deux relations restantes deviennent alors des conditions d'admissibilité cinématique entre les CMI qui s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\dfrac{1}{\mathrm{L}_x}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_y^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} & = & \dfrac{1}{\mathrm{L}_y}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_x^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_4^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} \\ \dfrac{1}{\mathrm{L}_x}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_y^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_4^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} & = & \dfrac{1}{\mathrm{L}_y}\sqrt{\dfrac{12}{\mathrm{L}_x^3}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} \end{array}\right. \tag{5.15}$$

Ces relations portent donc à 14 le nombre de conditions d'admissibilité cinématique sur les 12 nécessaires pour satisfaire une cinématique du type second gradient. Il convient alors de n'en choisir que 4 parmi les 6 explicitées par les relations $(5.9)_4$ et (5.15).

Ici, le choix est fait de déterminer les composantes de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ à partir de la relation (5.13) et de garder l'intégralité des conditions $(5.9)_4$. Les conditions (5.15) ne sont alors pas explicitement imposées mais dans le cas d'une cinématique second gradient, cette dernière est automatiquement satisfaite. Dans un cas général, ce choix plurivoque de 4 conditions d'admissibilité parmi les 6 disponibles aura une influence sur la solution macroscopique.

Finalement, à partir des deux conditions données par $(5.9)_1$, il est possible de déterminer les dernières composantes de (5.11) et (5.12). En effet, la condition $(5.9)_1$ lie toutes les composantes de $\underline{u}^{\mathrm{M}}$, $\mathbf{F}^{\mathrm{M}}$ et $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$. Le choix du coin sur lequel appliquer cette condition n'est une nouvelle fois pas unique. Si ce choix ne fait pas de différence dans ce cas, ce n'est pas vrai dans un cas général.

Ici, le coin inférieur gauche de la cellule élémentaire est choisi comme illustré sur la **Figure 5.3**. Les composantes du champ de déplacement sont notées $u^{\mathrm{A}}_x = \underline{u}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}) \cdot \underline{e}_x$ et $u^{\mathrm{A}}_y = \underline{u}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}) \cdot \underline{e}_y$. Les composantes de $\underline{u}^{\mathrm{M}}$ s'écrivent alors :

$$u^{\mathrm{C}}_x = -\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{L}_y}}\left(4\sqrt{3}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} + \left\langle[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_2^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1r/7l} + \sqrt{\frac{\mathrm{L}_y}{\mathrm{L}_x}}\left\langle[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_1^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1t/7d} + 8\sqrt{\mathrm{L}_y}u^{\mathrm{A}}_x\right)$$

$$u^{\mathrm{C}}_y = \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{L}_x}}\left(4\sqrt{3}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} - \left\langle[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_2^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1t/7d} + \sqrt{\frac{\mathrm{L}_x}{\mathrm{L}_y}}\left\langle[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{e_1^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1r/7l} - 8\sqrt{\mathrm{L}_x}u^{\mathrm{A}}_y\right)$$

ce qui permet de déterminer les dernières composantes de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$:

$$\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxx} = \frac{6}{\mathrm{L}_x^2\sqrt{\mathrm{L}_y}}\left(\left\langle [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_2^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1r/1l} + \sqrt{3}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} + 2\sqrt{\frac{\mathrm{L}_y}{\mathrm{L}_x}}[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_d]_{\underline{e}_1^{\mathrm{M}}} + 2\sqrt{\mathrm{L}_y}u_x^{\mathrm{A}}\right)$$

$$\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yyy} = \frac{6}{\mathrm{L}_y^2\sqrt{\mathrm{L}_x}}\left(\left\langle [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_2^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1t/1d} - \sqrt{3}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} - 2\sqrt{\frac{\mathrm{L}_x}{\mathrm{L}_y}}[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_l]_{\underline{e}_1^{\mathrm{M}}} + 2\sqrt{\mathrm{L}_x}u_y^{\mathrm{A}}\right)$$

$$\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyy} = \frac{6}{\sqrt{\mathrm{L}_x}\mathrm{L}_y^2}\left(\left\langle [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_1^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1t/1d} + \sqrt{\frac{3\mathrm{L}_x}{\mathrm{L}_y}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1r/1l} + 2\sqrt{\mathrm{L}_x}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}_y}}[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_l]_{\underline{e}_2^{\mathrm{M}}} + u_x^{\mathrm{A}}\right)\right)$$

$$\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxx} = -\frac{6}{\sqrt{\mathrm{L}_y}\mathrm{L}_x^2}\left(\left\langle [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_1^{\mathrm{M}}}\right\rangle_{1r/1l} + \sqrt{\frac{3\mathrm{L}_y}{\mathrm{L}_x}}\left[[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}]_{\underline{e}_3^{\mathrm{M}}}\right]_{1t/1d} - 2\sqrt{\mathrm{L}_y}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}_x}}[\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_d]_{\underline{e}_2^{\mathrm{M}}} + u_y^{\mathrm{A}}\right)\right)$$

Finalement, les conditions (5.9) imposées comme conditions cinématiques pour résoudre le BVP peuvent être modifiées en libérant une contrainte sur les conditions linéaires. La relation $(5.9)_3$ est alors remplacée par la condition suivante :

$$\underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{+}) - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{-}) = \mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\beta}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{+})) - \mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\beta}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{-})) \tag{5.16}$$

où :

$$\mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}) = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma} = \underline{e}^{3}_{\gamma}\,[\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}]_{\underline{e}^{3}_{\gamma}}$$

Sans détailler les calculs, la même démarche peut être adoptée pour les conditions à appliquer au BVP d'un problème 3D. Le champ de déplacement macroscopique d'une cellule 3D est défini par 30 quantités indépendantes provenant des quantités $\underline{u}_{\mathrm{C}}$, $\mathbf{F}^{\mathrm{M}}$ et $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ (voir (5.2)). La base quadratique produit 108 CMI sur les 6 faces $\gamma \in \mathcal{Q} = \{d,r,t,l,f,b\}$ de la cellule élémentaire. Sur ces 108 composantes, 33 uniquement sont indépendantes car il est possible d'écrire 75 relations de continuité sur les arêtes du VER. Il y a donc 33 relations à écrire à partir du système (5.9) dont 3 équations d'admissibilité cinématique.

Les 18 conditions en moyenne $(5.9)_2$ sur les 6 faces du cube ainsi que les 3 conditions $(5.9)_1$ donnent 21 relations. Les conditions linéaires $(5.9)_3$ donnent 18 relations dont 9 doivent être imposées pour déterminer toutes les composantes macroscopiques du champ de déplacement. Il y a donc 9 conditions d'admissibilité entre les CMI linéaires et 27 entre les CMI quadratiques qui viennent de la relation $(5.9)_4$. Le choix de 3 conditions d'admissibilité cinématique parmi les 36 disponibles n'est encore une fois pas unique.

Ici, le choix est fait de satisfaire les conditions sur toutes les interfaces du VER à partir d'un nombre réduit de vecteur. Les relations linéaires $(5.9)_3$ sont alors satisfaites uniquement sur les composantes 4, 5 et 9. Les autres composantes sont laissées libres. La relation $(5.9)_3$ est alors remplacée par la condition suivante :

$$\underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{+}) - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{-}) = \mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\beta}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{+})) - \mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\beta}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{-})) \tag{5.17}$$

où :

$$\mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}) = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\gamma} = \underline{e}^{4}_{\gamma}\,[\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}]_{\underline{e}^{4}_{\gamma}} + \underline{e}^{5}_{\gamma}\,[\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}]_{\underline{e}^{5}_{\gamma}} + \underline{e}^{9}_{\gamma}\,[\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}]_{\underline{e}^{9}_{\gamma}}$$

Pour finir les conditions d'admissibilité cinématique des parties quadratiques sont satisfaites uniquement sur la composante 17 de la base macroscopique, les autres étant laissées libres. La relation $(5.9)_4$ est alors remplacée par la condition suivante :

$$\underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{+}) - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{X}}^{-}) = \underline{0} \tag{5.18}$$

où :

$$\mathbf{\Pi}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\gamma}(\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}) = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\gamma} = \underline{e}^{17}_{\gamma}\,[\underline{\mathrm{W}}_{\gamma}]_{\underline{e}^{17}_{\gamma}}$$

En conclusion, le système (5.9) est remplacé par le système équivalent suivant qui prend en compte le fait que les CMI donnent par construction des déplacements continus sur le bord des faces γ du VER :

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{X}_A) = \beta(\underline{X}_A) \\ \underline{W}_\gamma^T = \mathbf{\Pi}_\gamma^T(\underline{\beta}_\gamma) \\ \underline{W}_\gamma^{\overline{L}}(\underline{X}^+) - \underline{W}_\gamma^{\overline{L}}(\underline{X}^-) = \mathbf{\Pi}_\gamma^{\overline{L}}(\underline{\beta}_\gamma(\underline{X}^+)) - \mathbf{\Pi}_\gamma^{\overline{L}}(\underline{\beta}_\gamma(\underline{X}^-)) \\ \underline{W}_\gamma^{\overline{Q}}(\underline{X}^+) - \underline{W}_\gamma^{\overline{Q}}(\underline{X}^-) = \underline{0} \\ \underline{W}_\gamma^m(\underline{X}^+) - \underline{W}_\gamma^m(\underline{X}^-) = \underline{0} \end{cases} \tag{5.19}$$

où les conditions $(5.19)_3$ et $(5.19)_4$ sont données par les relations (5.16), (5.17) et (5.18) en fonction de la dimension du problème.

Comme cela a été évoqué précédemment, dans un cas de cinématique second gradient pure, la transformation du système (5.9) en (5.19) n'a pas de conséquence à l'échelle macroscopique. Cependant, elle en a à l'échelle microscopique. En effet, il est possible de montrer que la fluctuation $\underline{w}$ dans ce cas n'est plus périodique et que la relation $(5.8)_2$ s'écrit alors :

$$\underline{w}_{\gamma^+} - \underline{w}_{\gamma^-} = \mathbf{\Pi}_\gamma^L(\underline{w}_{\gamma^+} - \underline{w}_{\gamma^-}) + \mathbf{\Pi}_\gamma^Q(\underline{w}_{\gamma^+} - \underline{w}_{\gamma^-}) \tag{5.20}$$

où les projecteurs $\mathbf{\Pi}_\gamma^L$ et $\mathbf{\Pi}_\gamma^Q$ sont définis tels que :

$$\mathbf{\Pi}_\gamma^L = \mathbf{\Pi}_\gamma^{\overline{L}} + \mathbf{\Pi}_\gamma^L \quad \text{et} \quad \mathbf{\Pi}_\gamma^Q = \mathbf{\Pi}_\gamma^{\overline{Q}} + \mathbf{\Pi}_\gamma^Q$$

Les conditions d'admissibilité statique qui peuvent être déduites de la formulation variationnelle du BVP avec les relations (5.20) sont également modifiées. Dans ce cas, les conditions de périodicité portent sur les composantes suivantes :

$$\underline{F}_\gamma^{\overline{L}}(\underline{X}^+) + \underline{F}_\gamma^{\overline{L}}(\underline{X}^-) = \underline{F}_\gamma^{\overline{Q}}(\underline{X}^+) + \underline{F}_\gamma^{\overline{Q}}(\underline{X}^-) = \underline{F}_\gamma^m(\underline{X}^+) + \underline{F}_\gamma^m(\underline{X}^-) = \underline{0} \tag{5.21}$$

alors que les composantes qui ont été « relâchées » sont nulles :

$$\mathbf{\Pi}_\gamma^L(\underline{F}_\gamma) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{\Pi}_\gamma^Q(\underline{F}_\gamma) = 0 \tag{5.22}$$

Malgré ces modifications, la condition de macro-homogénéité proposée par Otero et collab. [2016], qui assure l'égalité de la variation des travaux en moyenne sur le milieu homogène équivalent classique et sur le VER est satisfaite. En effet, cette dernière qui peut s'écrire sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} \underline{F} \cdot \underline{w} \, d\Gamma = 0$$

où $\underline{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{N}$ avec $\underline{N}$ la normale sortante au VER, est satisfaite d'après la définition (5.3) et les relations (5.19)-(5.22). Intuitivement, il parait normal de satisfaire cette condition car, dans la mesure où les quantités macroscopiques sont conservées à l'échelle du VER par le système modifié (5.19), les travaux macroscopiques le sont également. Les travaux microscopiques sont eux différents localement mais n'ont pas d'influence en moyenne, à l'échelle du VER. Les conditions $(5.19)_3$ et $(5.19)_4$ peuvent donc être vues comme des conditions d'homogénéisation mixtes, entre périodicité et traction uniforme sur les parties linéaires et/ou quadratiques des quantités d'interface.

Pour les mêmes raisons, d'autres conditions microscopiques $(5.19)_5$, par exemple, $\underline{W}^m(\underline{X}) = 0$ ou $\underline{F}^m(\underline{X}) = 0$ pour $\underline{X} \in \partial\Omega$, associées aux relations macroscopiques $(5.19)_1$-$(5.19)_4$, permettraient de satisfaire des conditions homogènes au contour du type KUBC ou SUBC, en conservant des travaux macroscopiques inchangés.

L'avantage d'une telle formulation réside dans sa versatilité. En effet, en fonction du problème traité, il peut être intéressant de satisfaire une condition plutôt qu'une autre. La contrepartie est que le choix des conditions n'est pas unique. Une perspective intéressante à ce niveau serait d'automatiser le choix des équations à garder. Par exemple, à partir des informations sur les quantités d'interface ou bien sur la base d'un critère de minimisation sur l'ensemble des équations en surnombre.

5.3 Méthode de couplage pour des modèles non-compatibles

Bien que ce chapitre soit dédié à la formulation d'un couplage avec une cinématique de type second gradient, l'objectif de la méthode est de proposer une technique de zoom à partir d'une structure globale modélisée par un comportement homogénéisé au premier ordre. Le modèle global $\Omega_{\mathscr{G}}$ représente donc le comportement macroscopique du modèle local $\Omega_{\mathscr{L}}$ au sens de l'homogénéisation périodique au premier ordre.

5.3.1 Rappel de la formulation du problème sous-structuré

La formulation faible du système d'EDP relative au problème à deux sous-structures, illustré à la **Figure 3.2c**, est donnée en (3.1). Pour des raisons pratiques, elle est rappelée ici. Une solution $(\underline{u}_{\mathscr{G}},\underline{u}_{\mathscr{L}})$ est cherchée dans $\mathscr{U}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{U}_{\mathscr{L}}$ (définis par (3.2)) avec :

$$\begin{cases} \forall \underline{u}^*_{\mathscr{G}} \in \mathscr{U}^0_{\mathscr{G}}, & \displaystyle\int_{\Omega_{\mathscr{G}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathscr{G}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathscr{G}}} \underline{\mathrm{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{G}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{G}} \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{G}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{u}^*_{\mathscr{L}} \in \mathscr{U}^0_{\mathscr{L}}, & \displaystyle\int_{\Omega_{\mathscr{L}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathscr{L}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathscr{L}}} \underline{\mathrm{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{L}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{L}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{\mathrm{X}} \in \Gamma, & \mathscr{R}(\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{G}}(\underline{\mathrm{X}}),\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{G}}(\underline{\mathrm{X}}),\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{X}}),\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{X}})) = \underline{0} \end{cases} \tag{5.23}$$

où les conditions aux limites en effort sur $\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathscr{L}}$ sont notées $\underline{\mathrm{F}}^d$ et les distributions d'efforts sur Γ sont définies par $\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{G}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_{\mathscr{G}}$ et $\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_{\mathscr{L}}$. Les tenseurs symétriques des contraintes de Cauchy sur chacun des modèles sont respectivement notés $(\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}},\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}}) \in \mathscr{S}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{S}_{\mathscr{L}}$ où $\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} = \mathbf{K}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{X}}) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathscr{L}}$ avec $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{X}})$ le tenseur des rigidités du modèle local hétérogène et $\boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} = \mathbf{K}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathscr{G}}$ avec $\mathbf{K}_{\mathscr{G}} = \mathbf{K}^{\mathrm{H}}_{\mathscr{L}}$ le tenseur des rigidités macroscopiques du modèle local sous des hypothèses d'homogénéisation périodique au premier ordre. Les espaces des champs de déplacement cinématiquement admissibles à zéro sont définis par (3.3).

5.3.2 Proposition des conditions de couplage avec séparation des échelles sur les interfaces

En supposant que le problème global décrive le comportement macroscopique du modèle local, la solution en déplacement du problème local $\underline{u}_{\mathscr{L}}$ s'écrit comme la somme de la solution du problème global $\underline{u}_{\mathscr{G}}$ et d'une correction périodique $\underline{w}$:

$$\underline{u}_{\mathscr{L}} = \underline{u}_{\mathscr{G}} + \underline{w} \quad \text{dans } \Omega_{\mathscr{L}} \tag{5.24}$$

A partir de la séparation micro-macro des quantités d'interface proposée à la **Section 5.2.1**, les champs d'interface des modèles local et global s'écrivent comme la somme de quantités macroscopiques et d'une quantité microscopique sur chaque $\gamma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{I},\gamma} &= \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{I},\gamma} + \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{I},\gamma} + \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{I},\gamma} + \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{I},\gamma} \\ \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{I},\gamma} &= \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{I},\gamma} + \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{I},\gamma} + \underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{I},\gamma} + \underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathscr{I},\gamma} \end{aligned}$$

où $\mathscr{I} \in \{\mathscr{G},\mathscr{L}\}$ et où les exposants $^{\mathrm{T\ L\ Q}}$ et ^{m} se réfèrent respectivement aux parties moyennes, linéaires, quadratiques et microscopiques des quantités d'interface, définies par les vecteurs de la

base macroscopique $\mathbf{e}_\Upsilon^{\mathrm{M}}$ dont la construction est détaillée à la **Section C**. Les quantités macroscopiques et microscopiques sont construites de manière à ce que les travaux d'interface vérifient la décomposition suivante, sur chaque domaine Ω_ϑ pour tout $\vartheta \in \{\mathscr{G},\mathscr{L}\}$:

$$(\underline{\mathrm{W}}_{\vartheta,\Upsilon},\underline{\mathrm{F}}_{\vartheta,\Upsilon})_{\Gamma_\Upsilon} = (\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\vartheta,\Upsilon},\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}_{\vartheta,\Upsilon})_{\Gamma_\Upsilon} + (\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\vartheta,\Upsilon},\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{L}}_{\vartheta,\Upsilon})_{\Gamma_\Upsilon} + (\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\vartheta,\Upsilon},\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{Q}}_{\vartheta,\Upsilon})_{\Gamma_\Upsilon} + (\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\vartheta,\Upsilon},\underline{\mathrm{F}}^{m}_{\vartheta,\Upsilon})_{\Gamma_\Upsilon}$$

où $(\cdot,\cdot)_\Upsilon$ est associée au travail des quantités d'interface définies sur les sous-espaces $\mathscr{W}_{\vartheta,\Upsilon}$ pour les déplacements d'interface et $\mathscr{F}_{\vartheta,\Upsilon}$ pour les inter-efforts :

$$(\cdot,\cdot)_\Upsilon : \quad \mathscr{W}_{\vartheta,\Upsilon} \times \mathscr{F}_{\vartheta,\Upsilon} \to \mathbb{R} \tag{5.25}$$

$$(\underline{\mathrm{W}}_{\vartheta,\Upsilon},\underline{\mathrm{F}}_{\vartheta,\Upsilon})_\Upsilon \mapsto \int_\Upsilon \underline{\mathrm{W}}_{\vartheta,\Upsilon} \cdot \underline{\mathrm{F}}_{\vartheta,\Upsilon} \, \mathrm{d}\Gamma \tag{5.26}$$

5.3.2.1 Définition des conditions de couplage global-local

Afin d'assurer que la solution sur le modèle local soit compatible avec une solution d'homogénéisation au second ordre, les conditions de couplage par interface suivantes sont proposées. Tout d'abord, d'après le relation $(5.19)_2$, les parties moyennes des déplacements d'interface du modèle local ($\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\Upsilon}$) sont imposées égales à celles du modèle global ($\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\Upsilon}$) pour toutes les faces $\Upsilon \in \mathcal{Q}$:

$$\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\Upsilon} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\Upsilon}$$

Ensuite, d'après la relation $(5.19)_3$, le saut des parties linéaires des déplacements d'interface entre le modèle local et le modèle global doit satisfaire la relation suivante pour une paire d'interfaces Υ^+/Υ^-.

$$\underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}$$

La dernière équation de couplage entre les modèles local et global, d'après $(5.19)_1$, impose les relations suivantes sur les champs complets dans un coin du VER $\underline{\mathrm{A}}$:

$$\underline{u}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}) = \underline{u}_{\mathscr{G}}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}})$$

Afin que le modèle local satisfasse une cinématique de type second gradient, une première équation d'admissibilité cinématique, d'après $(5.19)_4$, portant sur les parties quadratiques des déplacements d'interface du domaine local, est définie par la relation suivante :

$$\underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{0}$$

Une deuxième équation d'admissibilité cinématique, portant sur les parties micro des déplacements d'interfaces, est définie par la relation suivante :

$$\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{0}$$

D'après (5.24), les composantes quadratiques et microscopiques des déplacements d'interface sont périodiques sur le modèle global donc :

$$\underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} = \underline{0} \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} = \underline{0}$$

En conclusion, les conditions de couplage proposées pour des modèles non-compatibles en présence de champs macroscopiques linéaires s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{u}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}) = \underline{u}_{\mathscr{G}}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}) \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\Upsilon} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\Upsilon} \\ \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} \\ \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} = \underline{0} \\ \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} = \underline{0} \end{cases} \tag{5.27}$$

Les relations cinématiques (5.27) peuvent être imposées, par exemple, par multiplicateurs de Lagrange. La séparation micro-macro des quantités d'interface permet d'en déduire les relations entre les inter-efforts aux différentes échelles. Ces relations s'interprètent en terme d'équilibre des résultantes et des moments entre chacun des domaines sur chaque face γ :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{F}^{T}_{\mathscr{L},\gamma} + \underline{F}^{T}_{\mathscr{G},\gamma} = \underline{0} \\ \underline{F}^{\overline{L}}_{\mathscr{L},\gamma} + \underline{F}^{\overline{L}}_{\mathscr{G},\gamma} = \underline{0} \end{array}\right. \tag{5.28}$$

Sur chaque paire d'interface γ^+/γ^-, des relations de périodicité interviennent sur les composantes linéaires, quadratiques et microscopiques sur chaque domaine $\Omega_\mathscr{I}$ pour $\mathscr{I} \in \{\mathscr{G},\mathscr{L}\}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{F}^{\overline{L}}_{\mathscr{I},\gamma^+} + \underline{F}^{\overline{L}}_{\mathscr{I},\gamma^-} = \underline{0} \\ \underline{F}^{\overline{Q}}_{\mathscr{I},\gamma^+} + \underline{F}^{\overline{Q}}_{\mathscr{I},\gamma^-} = \underline{0} \\ \underline{F}^{m}_{\mathscr{I},\gamma^+} + \underline{F}^{m}_{\mathscr{I},\gamma^-} = \underline{0} \end{array}\right. \tag{5.29}$$

Et, finalement, pour les composantes de déplacements linéaires et quadratiques laissées libres, les efforts associés sont nuls :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{F}^{\underline{L}}_{\mathscr{I},\gamma} = \underline{0} \\ \underline{F}^{\underline{Q}}_{\mathscr{I},\gamma} = \underline{0} \end{array}\right. \tag{5.30}$$

5.3.2.2 Égalité des travaux micro-macro

Les relations (5.27)-(5.30) permettent de satisfaire, en moyenne, l'égalité de la variation des travaux, entre le modèle local et la portion de modèle global qu'il remplace, dans la zone de zoom. En effet, les moyennes volumiques de la variation du travail sur le modèle local et sur la partie du modèle global correspondante vérifient, en termes de quantités d'interfaces :

$$\int_\Gamma \underline{F}_\mathscr{L} \delta \underline{u}_\mathscr{L} \, d\Gamma = -\int_\Gamma \underline{F}_\mathscr{G} \delta \underline{u}_\mathscr{G} \, d\Gamma \tag{5.31}$$

où $\underline{F}_\mathscr{L} = \boldsymbol{\sigma}_\mathscr{L} \cdot \underline{N}_\mathscr{L}$ et $\underline{F}_\mathscr{G} = \boldsymbol{\sigma}_\mathscr{G} \cdot \underline{N}_\mathscr{G}$ avec $\underline{N}_\mathscr{L}$ et $\underline{N}_\mathscr{G}$ les vecteurs sortants de chacun des modèles sur le bord Γ.

A partir de la séparation micro-macro des travaux d'interface (5.25), il est possible d'écrire sur chacune des échelles $q \in \{T,\overline{L},\underline{L},\overline{Q},\underline{Q},m\}$:

$$\int_\Gamma \underline{F}^q_\mathscr{L} \delta \underline{u}^q_\mathscr{L} \, d\Gamma = -\int_\Gamma \underline{F}^q_\mathscr{G} \delta \underline{u}^q_\mathscr{G} \, d\Gamma$$

Cette dernière relation est satisfaite pour $q \in \{T,\overline{L}\}$ d'après les relations $(5.27)_{2-3}$, (5.28) et $(5.29)_1$ ainsi que pour $q \in \{\underline{L},\overline{Q},\underline{Q},m\}$, d'après les relations $(5.27)_{4-5}$ et $(5.29)_2$-(5.30), car sur ces composantes, le travail en moyenne est nul dans la zone de zoom sur chacun des modèles.

Finalement, les conditions de couplage (5.27)-(5.30) sont les conditions de couplage $\mathscr{R} = \underline{0}$ du système (5.23), proposées entre deux modèles non-compatibles dans un cas de sollicitation conforme avec une cinématique de type second ordre. Parmi elles, les relations $(5.27)_{1-3}$ et (5.28) sont des relations de couplage entre les quantités macroscopiques d'interface des modèles local et global. Les relations $(5.27)_{4-5}$, (5.29) et (5.30) sont des conditions d'admissibilité cinématique entre les composantes linéaires, quadratiques et microscopiques des quantités d'interface de chacun des modèles.

5.3.3 Exemples

La résolution du problème sous-structuré avec la relation de couplage $\mathscr{R} = \underline{0}$, sur l'interface Γ qui satisfait les relations (5.27)-(5.30) est proposée **Chapitre 6** dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis. Une adaptation non-intrusive de la méthode de couplage est également proposée au **Chapitre 7**, pour une éventuelle implémentation dans des codes « fermés ».

5.3.3.1 Problèmes modèles en dimension 2

Afin d'analyser les performances du couplage proposé et de les comparer avec les méthodes de la littérature, les solutions du problème sous-structuré défini à la **Section 3.3.1** avec les conditions de couplage (5.27)-(5.30) sont données dans cette section. Pour rappel, le modèle local est constitué d'un seul **VER1** situé au centre du modèle global et ses caractéristiques sont données dans le **Tableau 3.2**.

Le modèle global est une plaque homogène de dimension $5L_x \times 5L_y$ et dont le comportement matériau homogénéisé est calculé à partir du modèle local. Les différentes discrétisations qui lui sont associées sont nommées **maillage 1**, **maillage 2**, **maillage 3** et **maillage 4**. Il s'agit de maillages structurés constitués respectivement de 25, 100, 225 et 2500 éléments linéaires QUA4.

Les deux cas de chargement considérés sont les mêmes que ceux de la **Section 3.3.1**. Il s'agit d'imposer un état de déformation macroscopique constant ou linéaire sur la structure globale. Dans les deux cas, ils sont obtenus à partir des conditions aux limites de Dirichlet suivantes, appliquées sur le bord du modèle global :

$$\forall \underline{X} \in \partial_u \Omega_{\mathscr{G}} \qquad \underline{u}^d = \underline{u}_{\mathrm{C}} + \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right) \cdot \underline{X} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \underline{X} \otimes \underline{X}$$

Cas de chargement I (macroscopique uniforme) – A partir des conditions aux limites de Dirichlet ci-dessus, un état de déformation uniforme est obtenu sur la structure globale à partir des termes non-nuls suivants : $\underline{u}^x_{\mathrm{C}} = \underline{u}^y_{\mathrm{C}} = 0{,}05$ mm ainsi que $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xx} = 1{,}002$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{yy} = 1{,}02$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xy} = \mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{yx} = 0{,}01$.

Cas de chargement II (macroscopique linéaire) – De même, un état de déformation linéaire sur la structure globale est obtenu à partir des termes non-nuls suivants : $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xx} = 1{,}002$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{yy} = 0{,}998$ ainsi que $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxy} = 2\mathrm{E}^{-3}$ mm^{-1}, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxy} = 4\mathrm{E}^{-4}$ mm^{-1}, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyy} = -7{,}7\mathrm{E}^{-4}$ mm^{-1} et $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxx} = -3{,}9\mathrm{E}^{-3}$ mm^{-1}. Les composantes de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ sont choisies de manière à éviter les modes de déformation mal représentés par les éléments QUA4 et telles que $\mathrm{div}(\mathbf{K}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^d)) = \underline{0}$ dans $\Omega_{\mathscr{G}}$.

Les solutions obtenues sont comparées à la solution du problème de référence également définie à la **Section 3.3.1**. Pour rappel, il s'agit d'une plaque perforée qui a été générée à partir du **VER1** et dont les dimensions sont identiques à celles de la structure globale : $5L_x \times 5L_y$.

Les **Figure 5.4** et **Figure 5.5** présentent les maillages des problèmes couplés dans les cas de **chargement I** et **chargement II** respectivement. Les erreurs en normes énergétiques associées à ces solutions sont regroupées dans le **Tableau 4.1**. Pour rappel, la norme énergétique utilisée est définie à la **Section 3.2.3** et s'écrit :

$$e_{\mathrm{E}} = \frac{\|\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\mathrm{ref}}\|_{\mathrm{E},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}}{\|\underline{u}_{\mathrm{ref}}\|_{\Omega_{\mathscr{L}},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}} \tag{5.32}$$

5.3.3.2 Analyses et limitations de la méthode de couplage proposée

Chargement I – Comme décrit dans la **Section 4.3.4**, ce chargement est idéal du point de vue de l'homogénéisation au premier ordre car il permet de simuler une situation de sollicitation macroscopique uniforme dans la zone de zoom.

Les solutions calculées à partir de la méthode de couplage proposée dans ce chapitre sont identiques à celles obtenues avec la méthode de couplage proposée dans le **Chapitre 4**. Elle offre des conditions de couplage conformes aux théories de l'homogénéisation au premier ordre et la solution $\underline{u}_{\mathscr{L}}$ est équivalente à une solution obtenue par relocalisation. Il est intéressant de noter que dans ce cas, le choix des conditions associées au projecteur $\boldsymbol{\Pi}^{\overline{\mathrm{L}}}_{\Upsilon}$ donne des solutions identiques. En effet, il est possible de montrer que la relation (5.20) est nulle d'après (5.13) et (5.14) car $\mathbf{G}^{\mathrm{M}} = \mathbf{0}$.

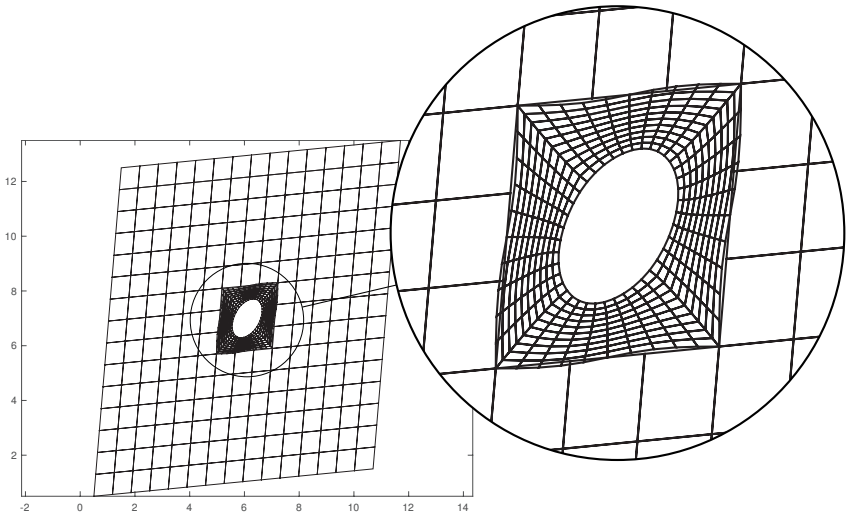


FIGURE 5.4 – Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour modèles non-compatibles sous le **chargement I**.

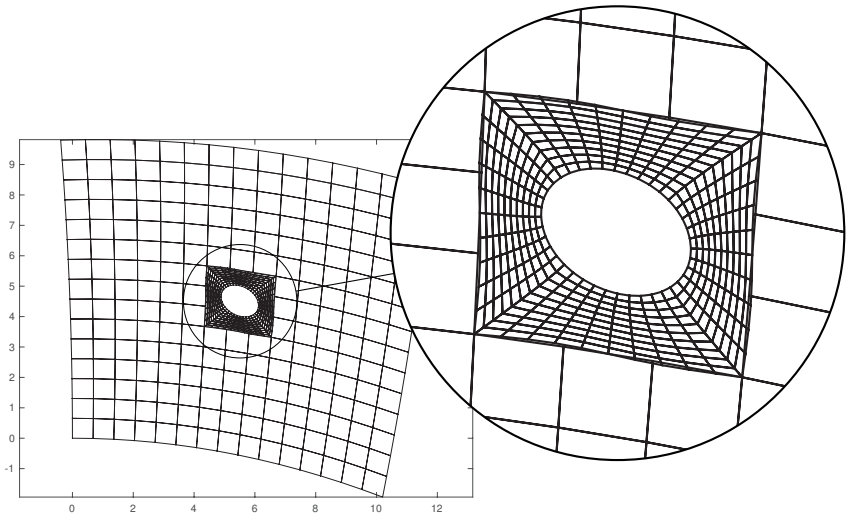


FIGURE 5.5 – Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour modèles non-compatibles sous le **chargement II**.

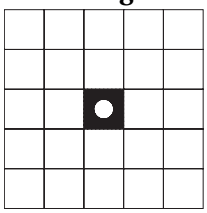
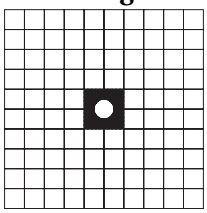
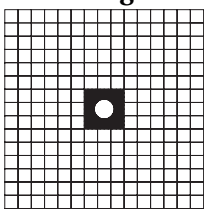
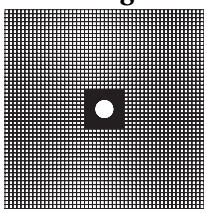
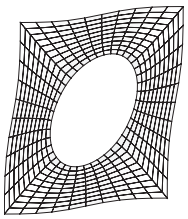
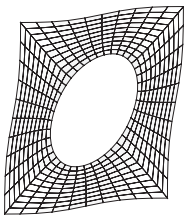
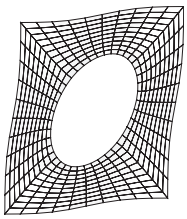
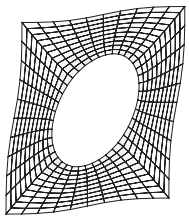
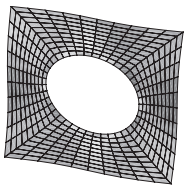
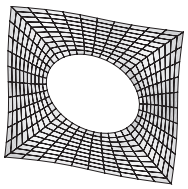
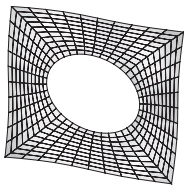
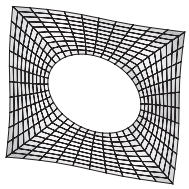
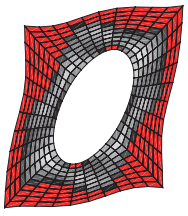
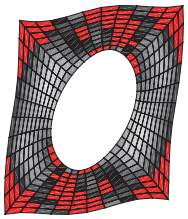
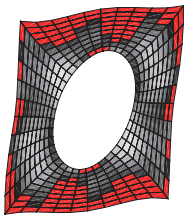
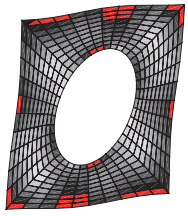
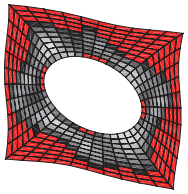
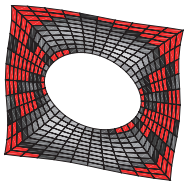
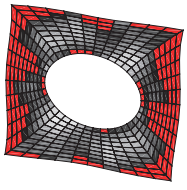
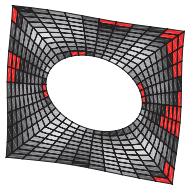
	maillage 1	**maillage 2**	**maillage 3**	**maillage 4**
Maillages				
Chargement I				
erreur max.	$e_E^{max} = 1{,}56\%$	$e_E^{max} = 1{,}56\%$	$e_E^{max} = 1{,}56\%$	$e_E^{max} = 1{,}56\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$	$e_E^{moy} = 0{,}70\%$
Chargement II				
erreur max.	$e_E^{max} = 15{,}37\%$	$e_E^{max} = 6{,}77\%$	$e_E^{max} = 6{,}80\%$	$e_E^{max} = 7{,}54\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 8{,}36\%$	$e_E^{moy} = 2{,}73\%$	$e_E^{moy} = 2{,}60\%$	$e_E^{moy} = 2{,}54\%$
échelle de couleur	 0% 5% 10% 15% 20% 25%			
Extrait du **Tableau 3.3** Méthode mortar **Chargement I**				
erreur max.	$e_E^{max} = 68{,}6\%$	$e_E^{max} = 58{,}8\%$	$e_E^{max} = 54{,}6\%$	$e_E^{max} = 30{,}8\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 25{,}5\%$	$e_E^{moy} = 20{,}3\%$	$e_E^{moy} = 19{,}8\%$	$e_E^{moy} = 14{,}6\%$
Extrait du **Tableau 3.4** Méthode mortar **Chargement II**				
erreur max.	$e_E^{max} = 75{,}3\%$	$e_E^{max} = 67{,}4\%$	$e_E^{max} = 60{,}0\%$	$e_E^{max} = 34{,}9\%$
erreur moy.	$e_E^{moy} = 26{,}4\%$	$e_E^{moy} = 21{,}1\%$	$e_E^{moy} = 21{,}0\%$	$e_E^{moy} = 15{,}2\%$

TABLEAU 5.1 – Distribution locale de l'erreur (5.32) en fonction du chargement et du raffinement du maillage de la structure globale pour le couplage au second ordre de modèles non-compatibles.

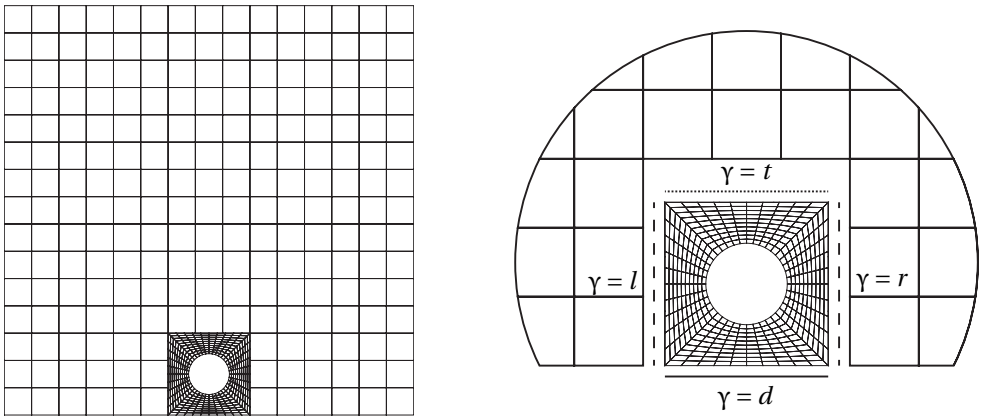


FIGURE 5.6 – Maillage d'un problème couplé avec la structure locale $\Omega_{\mathscr{L}}$ sur le bord de la structure globale $\Omega_{\mathscr{G}}$. Le traitement des conditions sur la face d (——), sur les faces r et l (- - -) et sur la face t (·····) est différent.

Chargement II – L'intérêt du couplage proposé dans ce chapitre apparait avec le **chargement II** qui impose une déformation macroscopique linéaire dans la zone de zoom. Comme au chapitre précédent, les éléments QUA4 ne suffisent pas à décrire exactement la solution cherchée qui est quadratique en déplacement sur $\Omega_{\mathscr{G}}$. Une erreur de discrétisation est donc faite dans le domaine global.

Néanmoins, les erreurs locales données dans le **Tableau 5.1** montrent une nette amélioration des solutions obtenues. En effet, à l'exception du maillage le plus grossier, les erreurs sont inférieures à 8% contre au mieux, 35% d'erreur avec une méthode pour modèles compatibles. La solution locale obtenue à partir du **maillage 1** présente des erreurs plus importantes car, avec un seul élément QUA4 sur les faces γ, la solution quadratique en déplacement est interpolée par une fonction linéaire sur l'interface de couplage. Les maillages doivent donc être suffisamment convergés sur l'interface de couplage pour décrire la base macroscopique $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\gamma}$.

Deux sources ont été identifiées en ce qui concerne l'erreur résiduelle de l'ordre de 7% sur les **maillages 2**, **3** et **4** dans le cas du **chargement II**. Une première source d'erreur, vient, comme dans le cas précédent, des effets de bords obtenus à partir de la solution de référence. En effet, dans WANGERMEZ et collab. [2020] il a été montré que cette erreur diminue lorsque, à taille de zoom identique, la taille de la structure globale (et donc de la structure de référence) augmente.

Une deuxième source d'erreur vient de l'utilisation d'un modèle de comportement au premier ordre dans la structure globale. En effet, sous un chargement linéaire, le comportement macroscopique du VER est mal représenté par un modèle de comportement au premier ordre.

5.3.3.3 Modèle local sur le bord du domaine global

L'intérêt de choisir une méthode de couplage sur les faces γ plutôt que sur une interface Γ entre les modèles global et local, réside dans le traitement indépendant des conditions de couplage sur chaque face. Ainsi, dans le cas où le modèle local n'est pas complètement immergé dans le modèle global, la méthode proposée offre une grande versatilité dans le traitement des conditions de couplage.

Par exemple, dans le cas de la **Figure 5.6**, le modèle local $\Omega_{\mathscr{L}}$ a un bord commun avec le modèle global. Les **Figure 5.9** et **Figure 5.10** présentent les solutions du problème couplé sous chargement macroscopique constant (**chargement I**) et sous chargement macroscopique linéaire (**chargement II**). Pour cela, les conditions de couplage (5.27) présentées à la **Section 5.3** ont été modifiées dans la mesure où des conditions de périodicité entre les bords t et d ne semblent pas pertinentes. En effet, la fluctuation $\underline{w}$ n'étant pas périodique sur ces bords, les relations (5.27) ne sont plus valables. Des modifications ont été proposées de manière à minimiser l'erreur commise et sont détaillées dans ce qui suit.

La face d (——) est traitée de manière à satisfaire les conditions aux limites appliquées normalement sur le modèle global :

$$\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},d} = \underline{u}^{d}(\underline{\mathrm{X}}) \tag{5.33}$$

La relation (5.33) détermine complètement les 6 CMI du bord d et lèvent 6 inconnues relatives à l'état de déformation macroscopique de la cellule. Il reste donc 6 relations de couplage à définir sur les autres faces et 4 relations d'admissibilité cinématique. Les 6 relations de couplage sont assurées par les composantes moyennes sur les faces de Γ communes à $\Omega_{\mathscr{G}}$ et $\Omega_{\mathscr{L}}$:

$$\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\gamma} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma} \quad \text{pour } \gamma \in \{r,t,l\}$$

Les faces r et l (- - -) peuvent être traitées de manière classique comme une paire d'interfaces γ^+/γ^-. Les conditions d'admissibilité cinématique suivantes sont donc imposées sur les faces r et l (- - -) :

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{L},r} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{L},l} = \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{G},r} - \underline{\mathrm{W}}^{\overline{\mathrm{Q}}}_{\mathscr{G},l} = \underline{0} \\ \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},r} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},l} = \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},r} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},l} = \underline{0} \end{cases}$$

Du point de vue de l'état de déformation macroscopique, la première condition assure deux relations d'admissibilité cinématique sur chaque domaine pour les CMI quadratiques. Et la seconde assure la périodicité des quantités d'interface microscopiques sur les faces r et l.

La face t (·····) peut être traitée de différentes manières, soit par des conditions homogènes $\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{I},t} = \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{I},t} = \underline{0}$ ou $\underline{\mathrm{F}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{I},t} = \underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathscr{I},t} = \underline{0}$ pour $\mathscr{I} \in \{\mathscr{L},\mathscr{G}\}$, soit par des conditions précalculées, par exemple, à partir d'une solution obtenue par relocalisation $\underline{u}_{\text{pré}}(\underline{\mathrm{X}})$. Dans ce dernier cas, la **Figure 5.7** illustre les erreurs locales obtenues dans le cas des **chargement I** et **chargement II** pour les conditions suivantes sur la face t :

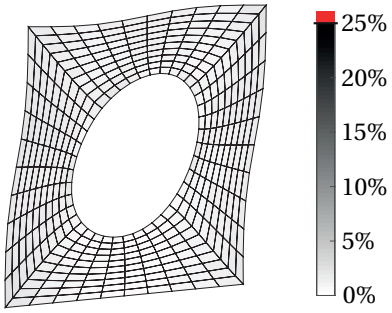
$$\begin{cases} \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{I},t} = \underline{u}^{\mathrm{Q}}_{\text{pré}}(\underline{\mathrm{X}}) \quad \text{pour} \mathscr{I} \in \{\mathscr{L},\mathscr{G}\} \\ \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},t} = \underline{u}^{m}_{\text{pré}}(\underline{\mathrm{X}}) \\ \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},t} = \underline{0} \end{cases}$$

La première condition assure les deux dernières relations d'admissibilité cinématique sur chaque domaine. La deuxième condition spécifie que le déplacement d'interface microscopique du domaine local est extrait de la solution précalculée. Et la troisième condition fixe le déplacement d'interface microscopique du domaine global nul.

Avec ces conditions modifiées, l'erreur locale maximale est de l'ordre de 3,31% dans le cas du **chargement I** contre 54% pour un couplage de type mortar et de l'ordre de 15,95% dans le cas du **chargement II** contre 84% pour un couplage de type mortar (voir **Figure 5.7**).

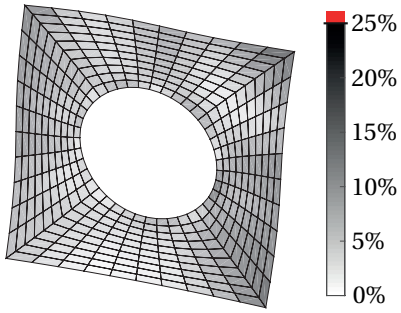
Remarque 4 A priori, *les composantes* $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxy} = \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyx}$ *et* $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxy} = \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yyx}$ *de* $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ *sont complètement déterminées par la relation* (5.33)*, il est donc inutile d'imposer des conditions sur les parties linéaires. Cette hypothèse peut être vérifiée* a posteriori *et le saut des parties linéaires entre les modèles global et local vérifient bien la relation suivante :*

$$\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^-}$$



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 3\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 1{,}6\%$

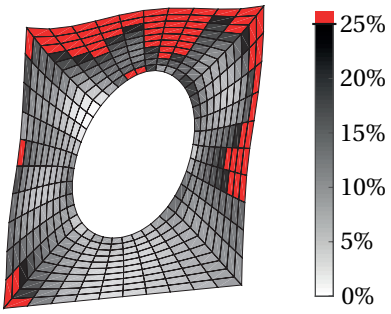
(a)



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 16\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 6{,}5\%$

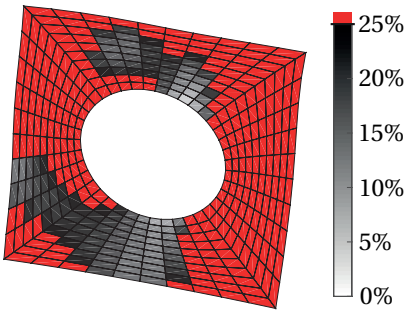
(b)

FIGURE 5.7 – Distribution locale de l'erreur (5.32), (a) pour le **chargement I** et (b) pour le **chargement II** dans le cadre du couplage proposé pour modèles non-compatibles avec un bord soumis à des conditions aux limites en déplacement.



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 54\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 15\%$

(a)



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 84\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 36\%$

(b)

FIGURE 5.8 – Distribution locale de l'erreur (5.32), (a) pour le **chargement I** et (b) pour le **chargement II** dans le cadre d'une résolution par couplage de type mortar avec un bord soumis à des conditions aux limites en déplacement.

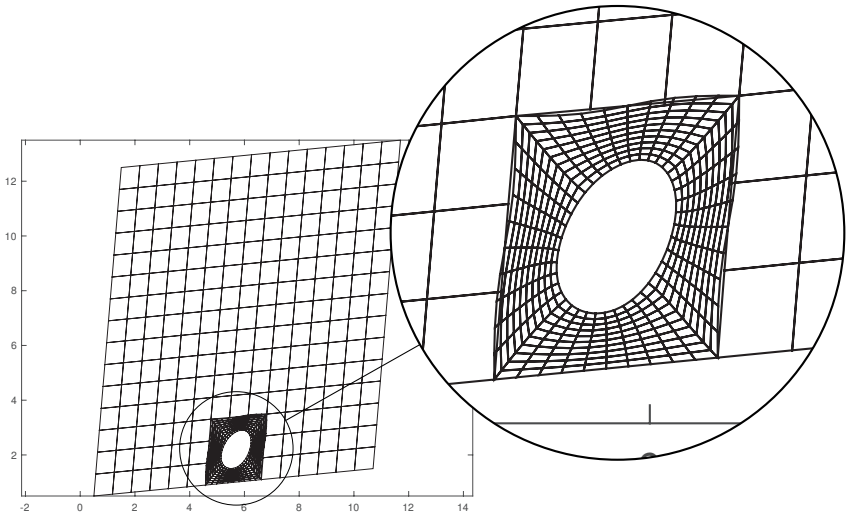


FIGURE 5.9 – Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour des modèles non-compatibles sous le **chargement I**.

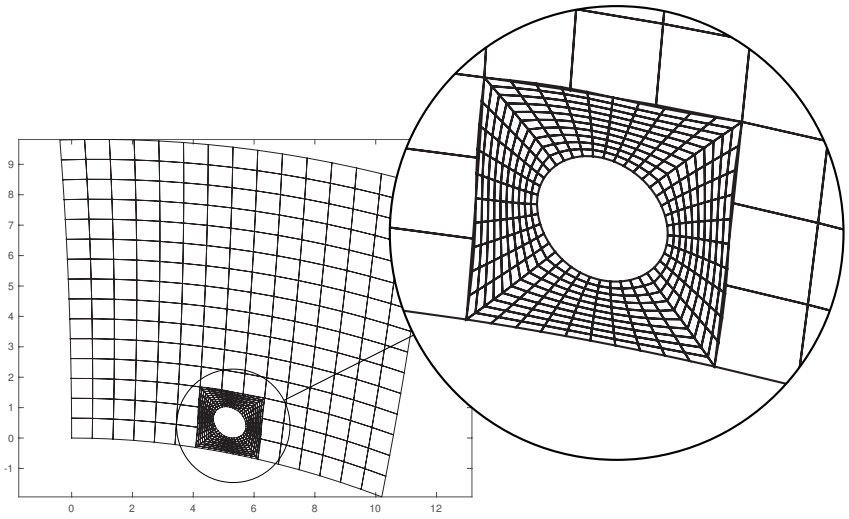


FIGURE 5.10 – Maillage déformé du problème avec couplage second ordre pour modèles non-compatibles sous le **chargement II**.

5.4 Conclusion

Un couplage par interface pour modèles non-compatibles a été proposé. Sa formulation basée sur des techniques d'homogénéisation à l'ordre deux permet une cinématique macroscopique du VER plus riche que pour le couplage proposé au **Chapitre 4**. Les solutions calculées à partir du couplage amélioré donne des résultats satisfaisants, par rapport à un calcul de référence DNS, pour des champs macroscopiques non-constants.

Les solutions obtenues sont bien meilleures que celles obtenues par les techniques de la littérature qui ont été étudiées dans ces travaux. Des erreurs demeurent néanmoins, notamment à cause du modèle de la structure globale qui ne permet pas de rendre compte du comportement macroscopique du VER. Ce modèle de comportement homogénéisé a été choisi dans ces travaux car ils sont largement utilisés dans les codes de calcul industriels or la méthode de couplage proposée s'appuie sur les informations macroscopiques données par ce modèle. Si ces informations sont peu précises, des erreurs inévitables sont induites dans la solution locale obtenue par la méthode de couplage.

Si la méthode de couplage proposée dans ce chapitre permet de réaliser un zoom local à partir d'un modèle global dans des zones à champs moyens variables, elle permet aussi de proposer des conditions d'homogénéisation hybrides sur chaque face du VER. Ainsi, il est possible de choisir des zones de zoom, par exemple, localisées sur des bords du domaine global.

Références

FOREST, S. 1998, «Mechanics of generalized continua : Construction by homogenization», *Le Journal de Physique IV*, vol. 08, n° PR4, doi :10.1051/jp4:1998405, p. Pr4–39–Pr4–48, ISSN 1155-4339. 88

GEERS, M. G. D., V. KOUZNETSOVA et W. A. M. BREKELMANS. 2001, «Gradient-enhanced computational homogenization for the micro-macro scale transition», *Le Journal de Physique IV*, vol. 11, n° PR5, doi :10.1051/jp4:2001518, p. Pr5–145–Pr5–152, ISSN 1155-4339. 91

GOLOGANU, M., J.-B. LEBLOND, G. PERRIN et J. DEVAUX. 1997, «Recent Extensions of Gurson's Model for Porous Ductile Metals», dans *Continuum Micromechanics*, édité par P. Suquet, International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Vienna, ISBN 978-3-7091-2662-2, p. 61–130, doi :10.1007/978-3-7091-2662-2_2. 88

KACZMARCZYK, Ł., C. J. PEARCE et N. BIĆANIĆ. 2008, «Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 74, nº 3, doi :10.1002/nme.2188, p. 506–522, ISSN 1097-0207. 88, 91

KOUZNETSOVA, V., W. A. M. BREKELMANS et F. P. T. BAAIJENS. 2001, «An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials», *Computational Mechanics*, vol. 27, nº 1, doi :10.1007/s004660000212, p. 37–48, ISSN 0178-7675, 1432-0924. 88, 91

KOUZNETSOVA, V. G., M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS. 2002, «Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, nº 8, doi :10.1002/nme.541, p. 1235–1260, ISSN 1097-0207. 91

KOUZNETSOVA, V. G., M. G. D. GEERS et W. A. M. BREKELMANS. 2004, «Size of a Representative Volume Element in a Second-Order Computational Homogenization Framework», *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, vol. 2, nº 4, doi :10.1615/IntJMultCompEng.v2.i4.50, ISSN 1543-1649, 1940-4352. 93

KOUZNETSOVA, VARVARA. 2002, *Computational Homogenization for the Multi-Scale Analysis of Multi-Phase Materials*, thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven. 88

LADEVÈZE, P., O. LOISEAU et D. DUREISSEIX. 2001, «A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, nº 1-2, doi :10.1002/nme.274, p. 121–138. 89

LADEVÈZE, P., A. NOUY et O. LOISEAU. 2002, «A multiscale computational approach for contact problems», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, nº 43, doi :10.1016/S0045-7825(02)00406-1, p. 4869–4891, ISSN 0045-7825. 88

OTERO, F., S. OLLER et X. MARTINEZ. 2016, «Multiscale Computational Homogenization : Review and Proposal of a New Enhanced-First-Order Method», *Archives of Computational Methods in Engineering*, doi :10.1007/s11831-016-9205-0, p. 1–27, ISSN 1134-3060, 1886-1784. 88, 91, 98

WANGERMEZ, M., O. ALLIX, P.-A. GUIDAULT, O. A. CIOBANU et C. REY. 2020, «Interface coupling method for the global-local analysis of heterogeneous models : A second-order homogenization-based strategy», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 105

Partie III : Résolution numérique et adaptation non-intrusive

Chapitre 6

Mise en œuvre des techniques de couplage pour des modèles non-compatibles par la méthode des éléments finis

Sommaire

6.1 Introduction 114
6.2 Espaces d'approximation des solutions par la méthode des éléments finis . . . 114
6.2.1 Discrétisation des quantités d'interfaces 115
6.2.2 Discrétisation des projecteurs 116
6.3 Discrétisation des conditions de couplage et résolution 116
6.3.1 Discrétisation des conditions de couplage 116
6.3.2 Discrétisation du problème de point-selle 117
6.3.3 Méthodes de résolution 118
6.4 Conclusion 122

6.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, des conditions de couplage par interface entre modèles non-compatibles ont été proposées. Ces conditions de couplage donnent lieu à des problèmes de minimisation sous contraintes qui, dans le cadre de ces travaux de recherche, doivent être résolus par une approche éléments finis dans un code industriel dit *standard*.

Les codes éléments finis standard sont des outils optimisés et extrêmement performants pour résoudre des problèmes classiques. Cependant, les sources de ces codes étant inaccessibles, il est bien souvent impossible d'y implémenter des techniques de calcul plus spécifiques. Dans ce cas, le développement de méthodes et d'outils non-standards présente l'inconvénient majeur de restreindre fortement leur utilisation et donc leur diffusion dans les bureaux d'étude.

Une approche alternative et flexible bien adaptée aux problèmes traités dans ces travaux de recherche est celle des méthodes de couplage non-intrusives. L'enjeu de ces méthodes est de permettre l'utilisation d'un code standard pour traiter n'importe quel problème de structure en conjonction avec des outils adaptés, non nécessairement inclus dans le code, pour les zones critiques. Elles visent à fournir aux industriels de nouveaux outils pour tester facilement de nouveaux modèles et conduire rapidement des calculs précis sur des structures de tailles significatives. Une de leur originalité est d'être facilement interfaçables avec un ou plusieurs codes industriels.

Bien entendu, le caractère non-intrusif d'une méthode dépend des codes avec lesquels elle est associée et de l'importance des modifications nécessaires à sa mise en place par rapport aux données du problème traité. Le point de départ des travaux présentés dans cette partie du manuscrit a donc consisté à fixer des limites techniques à l'implémentation de la méthode de couplage proposée pour définir le caractère non-intrusif de la méthode.

Dans ces travaux, il a donc été décidé que, d'une part, les problèmes éléments finis global et local seraient résolus avec la suite logiciel Z-set. Et que, d'autre part, ni le modèle, ni le maillage éléments finis du problème global ne devraient être modifiés.

L'implémentation non-intrusive de la technique de couplage proposée est donc détaillée, en deux étapes. La première étape, détaillée dans le présent **Chapitre 6**, porte sur la résolution éléments finis du problème de minimisation sous contraintes ainsi que sur les stratégies de résolution adoptées pour se ramener à un problème standard soluble dans le logiciel Z-set.

La deuxième étape, présentée dans le **Chapitre 7**, porte sur la résolution du problème éléments finis sans modification du modèle et du maillage du problème global.

6.2 Espaces d'approximation des solutions par la méthode des éléments finis

Le problème sous-structuré, avec modèles non-compatibles, initial, défini à la **Section 3.2.1** est rappelé ici sous sa forme faible :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}_{\mathscr{G}},\underline{u}_{\mathscr{L}}) \in \mathscr{U}_{\mathscr{G}} \times \mathscr{U}_{\mathscr{L}} \text{ tels que :} \\ \forall \underline{u}^*_{\mathscr{G}} \in \mathscr{U}^0_{\mathscr{G}}, \displaystyle\int_{\Omega_{\mathscr{G}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathscr{G}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathscr{G}}} \underline{\mathrm{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{G}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{G}} \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{G}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \forall \underline{u}^*_{\mathscr{L}} \in \mathscr{U}^0_{\mathscr{L}}, \displaystyle\int_{\Omega_{\mathscr{L}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathscr{L}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*_{\mathscr{L}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial_{\mathrm{F}}\Omega_{\mathscr{L}}} \underline{\mathrm{F}}^d \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{L}}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma} \underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}} \cdot \underline{u}^*_{\mathscr{L}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ \mathscr{R}(\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{G}},\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{G}},\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L}},\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}}) = \underline{0} \end{cases}$$

où $\mathscr{R}$ est la relation de couplage entre les quantités d'interface des modèles global $\Omega_{\mathscr{G}}$ et local $\Omega_{\mathscr{L}}$.

Les espaces d'approximation éléments finis $\mathscr{U}^h_{\mathscr{S}} \subset \mathscr{U}_{\mathscr{S}}$ et $\mathscr{U}^{0,h}_{\mathscr{S}} \subset \mathscr{U}^0_{\mathscr{S}}$ sont définis tels que les déplacements discrétisés de la structure $\mathscr{S} \in \{\mathscr{G},\mathscr{L}\}$ s'écrivent :

$$\underline{u}^h_{\mathscr{S}}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_{\mathscr{S}}} \varphi^{(k)}_{\mathscr{S}}(\underline{x})\,\underline{u}^{(k)}_{\mathscr{S}} \quad (\text{pour } \underline{x} \in \Omega^h_{\mathscr{S}})$$

où $\varphi_{\mathcal{I}}^{(k)}(\underline{x})$ sont les fonctions de formes éléments finis, $\underline{u}_{\mathcal{I}}^{(k)}$ les valeurs nodales du champ de déplacement et $k = 1,\ldots,\mathrm{N}_{\mathcal{I}}$ sont les numéros globaux des nœuds du maillage. De manière équivalente, le champ de déplacement discrétisé est noté :

$$\underline{u}_{\mathcal{I}}^{h} = [\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{I}}][\mathrm{U}_{\mathcal{I}}]$$

où $[\mathrm{U}_{\mathcal{I}}]$ est le vecteur d'inconnues nodales de la structure $\mathcal{I}$ et où les fonctions de formes éléments finis sont disposées dans la matrice $[\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{I}}]$.

6.2.1 Discrétisation des quantités d'interfaces

Les conditions de couplage $\mathscr{R} = \underline{0}$ étant définies sur les interfaces γ entre les domaines global et local, une discrétisation dédiée aux degrés de liberté d'interface est définie telle que les déplacements discrétisés de la structure $\mathcal{I}$ sur l'interface γ s'écrivent :

$$\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{I},\gamma}^{h}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_\gamma} \psi_{\mathcal{I},\gamma}^{(k)}(\underline{x})\, \underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{I},\gamma}^{(k)} \quad (\text{pour } \underline{x} \in \Omega_{\mathcal{I}|\gamma})$$

où $\psi_{\mathcal{I},\gamma}^{(k)}(\underline{x})$ sont les fonctions de forme, de la méthode éléments finis, associées à la discrétisation de γ du côté de la structure $\mathcal{I}$, $\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{I},\gamma}^{(k)}$ les valeurs nodales du champ de déplacement d'interface et $k = 1,\ldots,\mathrm{N}_\gamma$ les numéros des nœuds du maillage associé à l'interface γ du côté de la structure $\mathcal{I}$. Sous forme matricielle, le champ de déplacement d'interface est noté de manière équivalente :

$$\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{I},\gamma}^{h} = [\boldsymbol{\Psi}_{\mathcal{I},\gamma}][\mathrm{W}_{\mathcal{I},\gamma}]$$

avec $[\mathrm{W}_{\mathcal{I},\gamma}]$ le vecteur d'inconnues nodales des déplacements d'interface et $[\boldsymbol{\Psi}_{\mathcal{I},\gamma}]$ la matrice des fonctions de forme de l'interface.

Dans un souci de généralité et pour anticiper les problèmes de maillages non-périodiques, les faces γ sont discrétisées avec des fonctions de formes $\underline{\psi}_{\mathcal{I},\gamma}^{(k)}(\underline{x})$, qui ne sont pas nécessairement égales à la restriction sur le bord des fonctions de forme à l'intérieur du domaine : $\underline{\varphi}_{\mathcal{I}|\gamma}$.

Ainsi, l'admissibilité cinématique entre les déplacements d'interface $\underline{\mathrm{W}}_{\mathcal{I},\gamma}^{h}(\underline{x})$ et la trace des déplacements au bord $\underline{u}_{\mathcal{I}|\gamma}^{h}(\underline{x})$ peut être discrétisée de la manière suivante :

$$[\mathbf{N}_{\mathcal{I},\gamma}][\mathbf{B}_{\mathcal{I},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{I}}] = [\mathbf{M}_{\mathcal{I},\gamma}][\mathrm{W}_{\mathcal{I},\gamma}]$$

où $[\mathbf{B}_{\mathcal{I},\gamma}]$ est l'opérateur trace discrétisé de la structure $\mathcal{I} \in \{\mathscr{G},\mathscr{L}\}$ sur le bord γ, qui restreint le vecteur d'inconnues nodal $[\mathrm{U}_{\mathcal{I}}]$ aux degrés de liberté de l'interface γ. Les matrices $[\mathbf{N}_{\mathcal{I},\gamma}]$ et $[\mathbf{M}_{\mathcal{I},\gamma}]$ sont définies telles que leurs coefficients s'écrivent :

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}_{\mathcal{I},\gamma}]_{ij} &= \int_\gamma \psi_{\mathcal{I},\gamma}^{(i)}\, \varphi_{\mathcal{I}|\gamma}^{(j)}\, \mathrm{d}\Gamma \\ [\mathbf{M}_{\mathcal{I},\gamma}]_{ij} &= \int_\gamma \psi_{\mathcal{I},\gamma}^{(i)}\, \psi_{\mathcal{I},\gamma}^{(j)}\, \mathrm{d}\Gamma \end{aligned}$$

La matrice $[\mathbf{M}_{\mathcal{I},\gamma}]$ est inversible et les déplacements d'interface s'écrivent alors :

$$[\mathrm{W}_{\mathcal{I},\gamma}] = [\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{I},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{I}}] \tag{6.1}$$

avec $[\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{I},\gamma}] = [\mathbf{M}_{\mathcal{I},\gamma}]^{-1}[\mathbf{N}_{\mathcal{I},\gamma}][\mathbf{B}_{\mathcal{I},\gamma}]$.

Une attention particulière devra être portée aux choix des espaces des déplacements d'interface de manière à respecter la condition LBB (BABUŠKA [1973]).

6.2.2 Discrétisation des projecteurs

Les vecteurs de la base macroscopique $\mathbf{e}^{\mathrm{M}}_{\gamma}$, définis dans l'**Annexe C**, sont également discrétisés sur la même base éléments finis que les déplacements d'interface. Ainsi, le k-ième vecteur discrétisé de la base macroscopique s'écrit :

$$\underline{e}^{k,h}_{\mathcal{J},\gamma}(\underline{x}) = [\boldsymbol{\Psi}_{\mathcal{J},\gamma}][e^{k}_{\mathcal{J},\gamma}]$$

En introduisant la matrice de la base macroscopique discrétisée $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}]$ de dimension $\mathrm{N}_{\gamma} \times n_{\mathrm{M}}$ telle que :

$$[\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{1}_{\mathcal{J},\gamma}],[e^{2}_{\mathcal{J},\gamma}],\ldots,[e^{n_{\mathrm{M}}}_{\mathcal{J},\gamma}]]$$

où la colonne l correspond au l-ième vecteur discrétisé de la base macroscopique $[e^{l}_{\mathcal{J},\gamma}]$, il est possible de montrer (voir LOISEAU [2001]) que le projecteur macroscopique $\Pi^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}$ s'écrit sous sa forme discrète :

$$[\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}][\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathcal{J},\gamma}]$$

Il est alors possible d'en déduire les déplacements macroscopique et microscopique discrétisés :

$$\left\{\begin{array}{rcl} [\mathrm{W}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}] & = & [\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathrm{W}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}]_{e^{\mathrm{M}}} = [\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{J}}] \\ [\mathrm{W}^{m}_{\mathcal{J},\gamma}] & = & \left([\mathbf{I}_{\boldsymbol{d}}] - [\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}]\right)[\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{J}}] \end{array}\right. \tag{6.2}$$

où $[\mathrm{W}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}]_{e^{\mathrm{M}}}$ est le vecteur des n_{M} composantes de $\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}$ évalué dans la base macroscopique discrétisée $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{\mathcal{J},\gamma}]$. Les vecteurs d'inter-effort $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{J},\gamma}$ sont discrétisés de la même manière. Les vecteurs de la base macroscopique étant orthogonaux, la matrice de la base macroscopique discrétisée satisfait l'équation suivante :

$$[\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{s_{\gamma}}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{s_{\gamma}}][\boldsymbol{e}^{\mathrm{M}}_{s_{\gamma}}] = [\mathbf{I}_{\boldsymbol{d}}] \tag{6.3}$$

Les projecteurs sur les sous-espaces $\mathscr{W}^{\mathrm{T}}_{\gamma}$, $\mathscr{W}^{\mathrm{L}}_{\gamma}$ et $\mathscr{W}^{\mathrm{Q}}_{\gamma}$, définis à la **Section 5.2.1**, et relatifs aux parties moyennes, linéaires et quadratiques des déplacements d'interface, sont donc définis tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{J},\gamma}]^{t}[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathbf{M}_{\mathcal{J},\gamma}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{J}}] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{J},\gamma}]^{t}[\boldsymbol{e}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathbf{M}_{\mathcal{J},\gamma}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{J}}] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{Q}}_{\mathcal{J},\gamma}]^{t}[\boldsymbol{e}^{\mathrm{Q}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathbf{M}_{\mathcal{J},\gamma}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},\gamma}][\mathrm{U}_{\mathcal{J}}] \end{array}\right. \tag{6.4}$$

où, pour un problème 2D, $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{1}_{\mathcal{J},\gamma}],[e^{2}_{\mathcal{J},\gamma}]]$, $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{3}_{\mathcal{J},\gamma}],[e^{4}_{\mathcal{J},\gamma}]]$ et $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{Q}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{5}_{\mathcal{J},\gamma}],[e^{6}_{\mathcal{J},\gamma}]]$ et pour un problème 3D, $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{1}_{\mathcal{J},\gamma}],[e^{2}_{\mathcal{J},\gamma}],[e^{3}_{\mathcal{J},\gamma}]]$, $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{L}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{4}_{\mathcal{J},\gamma}],\ldots,[e^{9}_{\mathcal{J},\gamma}]]$ et $[\boldsymbol{e}^{\mathrm{Q}}_{\mathcal{J},\gamma}] = [[e^{10}_{\mathcal{J},\gamma}],\ldots,[e^{18}_{\mathcal{J},\gamma}]]$.

6.3 Discrétisation des conditions de couplage et résolution

6.3.1 Discrétisation des conditions de couplage

Les conditions de couplage $\mathscr{R}(\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{G}},\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{G}},\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L}},\underline{\mathrm{F}}_{\mathscr{L}}) = \underline{0}$ sont rappelées ici. Afin de transmettre l'état de déformation macroscopique second-gradient d'un modèle à l'autre, il faut assurer la continuité du champ de déplacement total dans un coin, la continuité des déplacements moyens sur chaque interface γ et l'égalité des sauts de déplacement linéaire sur chacune des structures.

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{u}_{\mathscr{L}}(\underline{\mathrm{A}}) = \underline{u}_{\mathscr{G}}(\underline{\mathrm{A}}) \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\gamma} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma} \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\gamma^{+}} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\gamma^{-}} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^{+}} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^{-}} \end{array}\right.$$

Sous leur forme discrétisée, ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} [\mathbf{B}_{\mathscr{G}_A}][\mathrm{U}_{\mathscr{G}}] - [\mathbf{B}_{\mathscr{L}_A}][\mathrm{U}_{\mathscr{L}}] = [0] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\Upsilon}] - [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\Upsilon}] = [0] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+}] - [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}] - ([\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+}] - [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-}]) = [0] \end{cases} \tag{6.5}$$

A ces trois premières conditions s'ajoutent des conditions d'admissibilité cinématique sur chacune des structures. Il s'agit de la périodicité des composantes quadratiques de la base macroscopique et des composantes microscopiques :

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} = \underline{0} \\ \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^-} = \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^-} = \underline{0} \end{cases}$$

qui s'écrivent sous forme discrétisée :

$$\begin{cases} [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+}] - [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}] = [0] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+}] - [\underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-}] = [0] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^+}] - [\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}] = [0] \\ [\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^+}] - [\underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\Upsilon^-}] = [0] \end{cases} \tag{6.6}$$

6.3.2 Discrétisation du problème de point-selle

En insérant les quantités discrétisées dans le problème de point-selle (3.1), le problème peut être décrit par le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{C}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{P}]^{\mathrm{T}} \\ [\mathbf{C}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathrm{U}] \\ [\Lambda_{\mathrm{C}}] \\ [\Lambda_{\mathrm{P}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathrm{F}] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

où :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}] \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{U}] = \begin{bmatrix} [\mathrm{U}_{\mathscr{G}}] \\ [\mathrm{U}_{\mathscr{L}}] \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{F}] = \begin{bmatrix} [\mathrm{F}_{\mathscr{G}}] \\ [\mathrm{F}_{\mathscr{L}}] \end{bmatrix}$$

avec $[\mathbf{K}_{\mathscr{G}}]$ et $[\mathbf{K}_{\mathscr{L}}]$ les matrices de rigidité des modèles global et local, $[\mathrm{U}_{\mathscr{G}}]$ et $[\mathrm{U}_{\mathscr{L}}]$ les vecteurs d'inconnues nodales, $[\mathrm{F}_{\mathscr{G}}]$, $[\mathrm{F}_{\mathscr{L}}]$ les vecteurs nodaux des efforts généralisés. Et $[\Lambda_{\mathrm{C}}]$, $[\Lambda_{\mathrm{P}}]$ les multiplicateurs de Lagrange discrétisés associés aux relations (6.5) et (6.6).

L'opérateur de couplage discrétisé $[\mathbf{C}]$ du système (6.7) est défini par :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G}}] & -[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L}}] \\ [\mathbf{P}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G}}] & -[\mathbf{P}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L}}] \\ [\mathbf{B}_{\mathscr{G}_A}] & -[\mathbf{B}_{\mathscr{L}_A}] \end{bmatrix}$$

avec, les opérateurs définis sur chaque interface de la structure $\mathscr{s} \in \{\mathscr{L},\mathscr{G}\}$:

$$[\mathbf{C}^p_{\mathscr{s}}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{e}^p_{\mathscr{s},d}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathscr{s},d}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{s},d}] \\ [\boldsymbol{e}^p_{\mathscr{s},r}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathscr{s},r}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{s},r}] \\ [\boldsymbol{e}^p_{\mathscr{s},t}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathscr{s},t}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{s},t}] \\ [\boldsymbol{e}^p_{\mathscr{s},l}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathscr{s},l}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{s},l}] \end{bmatrix}$$

et les opérateurs de sauts entre deux interfaces en vis-à-vis γ^+/γ^- :

$$[\mathbf{P}_s^p] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{e}_{\mathcal{J},t}^p]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathcal{J},t}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},t}] - [\boldsymbol{e}_{\mathcal{J},d}^p]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathcal{J},d}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},d}] \\ [\boldsymbol{e}_{\mathcal{J},r}^p]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathcal{J},r}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},r}] - [\boldsymbol{e}_{\mathcal{J},l}^p]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathcal{J},l}][\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},l}] \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

où $p \in \{\mathrm{T},\mathrm{L},\mathrm{Q}\}$. L'opérateur trace discrétisé $[\mathbf{B}_{\mathcal{J},\mathrm{A}}]$, sur la structure $\mathcal{J}$, restreint les inconnues nodales du vecteur $[\mathrm{U}_{\mathcal{J}}]$ au coin A.

L'opérateur de périodicité $[\mathbf{P}]$ du système (6.7) est défini par :

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}^{\mathrm{Q}}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}^{m}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}^{\mathrm{Q}}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}^{m}] \end{bmatrix}$$

où les opérateurs $[\mathbf{P}_{\mathcal{J}}^{\mathrm{Q}}]$ sont définis par (6.8) et les opérateurs $[\mathbf{P}_{\mathcal{J}}^{m}]$ par :

$$[\mathbf{P}_{\mathcal{J}}^{m}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{\mathcal{J},t}]\left([\mathbf{I}_{\boldsymbol{d}}] - [\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{J},t}]\right)[\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},t}] - [\mathbf{M}_{\mathcal{J},d}]\left([\mathbf{I}_{\boldsymbol{d}}] - [\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{J},d}]\right)[\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},d}] \\ [\mathbf{M}_{\mathcal{J},r}]\left([\mathbf{I}_{\boldsymbol{d}}] - [\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{J},r}]\right)[\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},r}] - [\mathbf{M}_{\mathcal{J},l}]\left([\mathbf{I}_{\boldsymbol{d}}] - [\boldsymbol{\Pi}_{\mathcal{J},l}]\right)[\overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{J},l}] \end{bmatrix}$$

pour $\mathcal{J} \in \{\mathscr{L},\mathscr{G}\}$.

6.3.3 Méthodes de résolution

Le problème (6.7) a une structure de problème de point-selle classique. Or les opérateurs discrétisés $[\mathbf{P}_{\mathscr{G}}^{m}]$ et $[\mathbf{P}_{\mathscr{L}}^{m}]$ présentent des conditions redondantes pour les degrés de liberté qui appartiennent à plusieurs faces γ (dans les coins et les arrêtes pour les cas 3D). La conséquence est que ces opérateurs ne sont pas injectifs, c'est-à-dire que leurs noyaux ne sont pas vides. Plusieurs solutions sont alors possibles pour inverser le système (6.7), stabiliser ou éliminer les conditions redondantes.

La première solution donne lieu à un système « perturbé » dont les conditions nécessaires et suffisantes de résolution sont données dans Boffi et collab. [2013]. Dans ce cas un terme additionnel pour stabiliser le noyau de $[\mathbf{P}]^{\mathrm{T}}$ est ajouté au système. Cette stratégie donne lieu à des méthodes de résolution par pénalisation détaillées par la suite dans les **Section 6.3.3.1** et **Section 6.3.3.2**. Lorsque l'ajout d'un terme de pénalisation n'est pas possible, plusieurs voies pour éliminer les conditions redondantes ont été explorées et sont détaillées dans les **Section 6.3.3.3** et **Section 6.3.3.4**.

6.3.3.1 Stratégie de résolution par une méthode de pénalisation

A partir des travaux de Boffi et collab. [2013], le problème de point-selle modifié suivant est proposé pour approximer la solution du problème (6.7) :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{C}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{P}]^{\mathrm{T}} \\ [\mathbf{C}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\epsilon}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathrm{U}] \\ [\Lambda_{\mathrm{C}}] \\ [\Lambda_{\mathrm{P}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathrm{F}] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Le terme de pénalisation $[\boldsymbol{\epsilon}]$, est ajouté au système (6.7) de manière à satisfaire la périodicité des déplacements microscopiques et est défini par :

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & -\varepsilon[\mathbf{M}_{\mathscr{G}}^{m}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & -\varepsilon[\mathbf{M}_{\mathscr{L}}^{m}] \end{bmatrix}$$

où $\varepsilon > 0$ et les matrices $[\mathbf{M}_{\mathcal{J}}^{m}]$ pour $\mathcal{J} \in \{\mathscr{L},\mathscr{G}\}$ sont définies par :

$$[\mathbf{M}_{\mathcal{J}}^{m}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{\mathcal{J},d}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}_{\mathcal{J},l}] \end{bmatrix}$$

La solution en déplacement [U], du problème modifié (6.9), converge vers la solution du problème initial (6.7) pour des valeurs de ε suffisamment petites. La solution $[\Lambda_P]$ relative aux conditions modifiées n'est, quant à elle, connue qu'à un élément du noyau de $[\mathbf{P}]^T$ près. Cette dernière restriction n'est pas un problème car les valeurs de $[\Lambda_P]$ ne sont pas utilisées.

6.3.3.2 Stratégie de résolution par une méthode itérative

La méthode de pénalisation proposée dans la **Section 6.3.3.1** a l'inconvénient d'être dépendante du paramètre ε. Une solution donnée par BOFFI et collab. [2013] pour s'affranchir de l'erreur de pénalisation, consiste à utiliser l'algorithme *augmented Lagrangian* introduit, au même moment, par HESTENES [1969] et POWELL [1969].

A partir des travaux de ces derniers, l'algorithme itératif proposé ici s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{C}]^T & [\mathbf{P}]^T \\ [\mathbf{C}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}] & [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\epsilon}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]^{n+1} \\ [\Lambda_C]^{n+1} \\ [\Lambda_P]^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [0] \\ [\boldsymbol{\epsilon}][\Lambda_P]^n \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

où $n \geqslant 0$ et $[\Lambda_P]^0 = [0]$. L'itération 0 correspond donc à une initialisation de l'algorithme itératif par la méthode de pénalisation présentée dans la section précédente. La convergence est déterminée par le critère de stagnation :

$$\|[\Lambda_P]^{n+1} - [\Lambda_P]^n\|_{L^2} < \eta$$

En fonction de la valeur de ε choisie, deux ou trois itérations de l'algorithme sont en général suffisantes, pour éliminer l'erreur due au terme de pénalisation. L'intérêt de cette méthode est de ne pas avoir besoin de choisir un ε petit *a priori*.

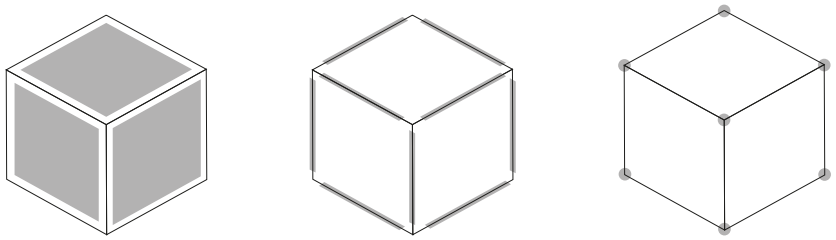
Bien entendu, le terme de pénalisation des deux méthodes présentées ci-dessus a un impact négatif sur le conditionnement du système ce qui peut être problématique dans le cas où le système linéaire est résolu de manière itérative. Dans le cadre de ces travaux de recherche, ces techniques de résolution ont été implémentées dans le code SCoFiElDD, utilisé pour des problèmes 2D de petite dimension. L'inversion du système étant faite de manière directe, le terme de pénalisation n'est pas un problème.

6.3.3.3 Stratégie de résolution par élimination des conditions redondantes

Dans le cadre d'une implémentation de la méthode de couplage dans la suite Z-set, une alternative aux méthodes de pénalisation présentées ci-dessus a été proposée. Cette méthode consiste à éliminer les conditions redondantes des opérateurs assemblés $[\mathbf{P}^m_{\mathscr{G}}]$ et $[\mathbf{P}^m_{\mathscr{L}}]$. Cette dernière méthode est plus adaptée à une implémentation dans des codes commerciaux car elle ne nécessite d'écrire que des relations linéaires entre les degrés de liberté des interfaces. De plus, elle a l'avantage d'être exacte mais est plus fastidieuse à mettre en place dans l'assemblage des opérateurs. Cela revient à résoudre le système modifié suivant :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{C}]^T & [\boldsymbol{p}]^T \\ [\mathbf{C}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\boldsymbol{p}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U] \\ [\Lambda_C] \\ [\Lambda_p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

où la matrice $[\boldsymbol{p}]$ est assemblée de manière à éviter les conditions de périodicité microscopique redondantes. Pour cela, les conditions microscopiques sont écrites sur les degrés de liberté internes aux interface de couplage (**Figure 6.1a**) puis sur les bords des interfaces privés des coins (**Figure 6.1b**) et finalement sur les coins (**Figure 6.1c**). Cette méthode ressemble à ce qui est fait pour imposer les conditions aux limites d'un BVP pour un problème d'homogénéisation, mais ici, chaque condition porte sur l'ensemble des degrés de liberté des interfaces. Il vient alors que l'image de $[\boldsymbol{p}]$ a la dimension du nombre de degrés de liberté sur $\bigcup_{\gamma\in\Gamma^-}\gamma$ alors que l'image de $[\mathbf{P}]$ a la dimension du nombre de degrés de liberté sur $\sum_{\gamma\in\Gamma^-}\gamma$.



(a) Faces internes (b) Arrêtes (c) Coins

FIGURE 6.1 – Degrés de liberté concernés par les conditions périodiques microscopiques pour éviter les redondances.

Une difficulté supplémentaire a été rencontrée pour l'implémentation de ces conditions dans la suite Z-set. En effet, de telles conditions requièrent d'imposer des conditions MPC entre les degrés de liberté des modèles. Dans Z-set, la commande ***free* permet d'écrire une relation linéaire entre un degré de liberté esclave s et un ensemble de degrés de liberté maîtres $m^{(i)}$ telle que :

$$s = \sum_i \alpha^{(i)} m^{(i)} + c$$

où c est une constante. L'utilisation de cette commande nécessite un pré-traitement des conditions de couplage afin d'éviter des relations circulaires entre les degrés de liberté, non-gérées par Z-set. C'est-à-dire qu'un degré de liberté « esclave » est lié à un degré de liberté « maître » qui a lui même était défini par le premier degré de liberté en question. Ce cas de figure se présente dès lors qu'un opérateur de couplage plein doit être appliqué entre deux ensembles de degrés de liberté. Pour éviter cela, les conditions de couplage doivent être réécrites de manière à avoir une structure de matrice échelonnée réduite (LAY [1993]; MEYER [2000]) :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & & \dots & \alpha_{1q} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & \dots & \alpha_{pq} \end{bmatrix}$$

Cette factorisation, sous forme échelonnée réduite, peut être obtenue directement avec des bibliothèques logicielles telles que LAPACK[1] ou SymPy[2]. Cependant, de tels algorithmes sont peu stables numériquement et coûteux en temps de calcul. Si la faisabilité de cette méthode a été validée sur des maillages 2D ou 3D extrêmement simples, des tests sur des maillages plus complexes tels que celui de la **Figure 3.3b** n'ont pas abouti. D'autres types de factorisation sous forme échelonnée réduite à partir de factorisation LU ou QR n'ont également pas abouti à cause de problèmes de stabilité numérique (pivots dont les valeurs sont proches de zéro) pour des maillages complexes 3D tels que celui du **VER2** introduit au **Chapitre 3** (voir la **Figure 3.3b**).

6.3.3.4 Stratégie de résolution avec conditions sur champs complets

L'idée est toujours de modifier les conditions de couplage dans (6.7) de manière à éviter les redondances associées aux conditions de périodicité microscopique sur chacune des structures

1. https://netlib.org/lapack/
2. https://github.com/sympy/sympy

global et local. Les équations cinématiques du couplage sont rappelées ici sur γ^+ et γ^- :

$$\begin{cases} \underline{u}_{\mathscr{L}}(\mathrm{A}) = \underline{u}_{\mathscr{G}}(\mathrm{A}) \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\gamma^+} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^+} \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{0} \\ \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{0} \\ \underline{0} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{0} = \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\gamma^-} \end{cases}$$

Ce dernier système d'équations est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \underline{u}_{\mathscr{L}}(\mathrm{A}) = \underline{u}_{\mathscr{G}}(\mathrm{A}) \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^-} + \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{0} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{0} = \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{m}_{\mathscr{G},\gamma^-} \end{cases} \tag{6.12}$$

pour lequel l'équation $(6.12)_3$ est donnée sur le champ de déplacement d'interface complet de la structure locale. Il est alors plus facile d'éviter les conditions redondantes puisque $(6.12)_3$ n'est pas écrite en termes de composantes microscopiques d'interface. Cette condition de saut est équivalente à la condition de saut imposé sur un VER pour résoudre le BVP dans un calcul d'homogénéisation pour laquelle la valeur du saut τ est donnée par le modèle global :

$$\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \tau = \tau(\underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{G}})$$

La dernière condition $(6.12)_5$ est écrite en termes de composantes microscopiques. Compte tenu du fait que les composantes microscopiques des déplacements d'interface de la structure globale sont négligeables, le choix a été fait de les laisser libres et d'imposer des efforts microscopiques nuls sur toutes les interfaces de la structure globale : $\underline{\mathrm{F}}^{m}_{\mathscr{G},\gamma} = 0$. Abandonner les conditions de périodicité des parties microscopiques sur le modèle global, dont le maillage n'est pas censé représenter des quantités microscopiques « insolubles [3] », semble être une hypothèse raisonnable. De plus les quantités microscopiques d'interface ne travaillant pas avec les quantités macroscopiques transférées entre les modèles, elles ne perturberont pas ce qui se passe dans la zone locale.

Ce faisant, le système non-équivalent, mais implémentable comme démonstrateur dans Z-set qui en découle, s'écrit en termes de déplacements :

$$\begin{cases} \underline{u}_{\mathscr{L}}(\mathrm{A}) = \underline{u}_{\mathscr{G}}(\mathrm{A}) \\ \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}_{\mathscr{L},\gamma^-} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\gamma^-} + \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \\ \underline{0} = \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\gamma^+} - \underline{\mathrm{W}}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G},\gamma^-} \end{cases} \tag{6.13}$$

Les autres conditions en effort associées au problème ne sont pas détaillées mais peuvent être déduites facilement à partir de la formulation variationnelle du problème.

3. HUGHES [1995]

Le problème de point-selle discrétisé qui en résulte donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{C}_{\mathscr{G}}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}]^{\mathrm{T}} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}] & -[\mathbf{C}_{\mathscr{L}}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{C}_{\mathscr{G}}] & -[\mathbf{C}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{\mathscr{G}}] \\ [\mathbf{U}_{\mathscr{L}}] \\ [\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{C}}] \\ [\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{P}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_{\mathscr{G}}] \\ [\mathbf{F}_{\mathscr{L}}] \\ [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

où :

$$[\mathbf{P}_{\mathscr{G}}] = [\mathbf{P}^{\mathrm{Q}}_{\mathscr{G}}]$$

$$[\mathbf{C}_{\mathscr{L}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{\mathscr{L}_{\mathrm{A}}}] \\ [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-}]^{\mathrm{T}} [\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-}] \\ [\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{L},\Upsilon^+}] - [\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{L},\Upsilon^-}] \end{bmatrix}$$

et :

$$[\mathbf{C}_{\mathscr{G}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{\mathscr{G}_{\mathrm{A}}}] \\ [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{M}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}] [\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}] \\ [\mathbf{\Pi}_{\Upsilon^+}] [\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{G},\Upsilon^+}] - [\mathbf{\Pi}_{\Upsilon^-}] [\overline{\mathbf{B}}_{\mathscr{G},\Upsilon^-}] \end{bmatrix}$$

avec : $[\mathbf{\Pi}_{\Upsilon}] = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{L},\Upsilon}][\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{G},\Upsilon}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathscr{G},\Upsilon}] + [\boldsymbol{e}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{L},\Upsilon}][\boldsymbol{e}^{\mathrm{L}}_{\mathscr{G},\Upsilon}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}_{\mathscr{G},\Upsilon}]$ pour tout $\gamma \in \mathcal{Q}$.

Le système (6.14) est à la base du démonstrateur Z-set avec lequel sont donnés les résultats 3D de ces travaux. Il est cependant limité à des cinématiques de type second gradient car la relation $(6.13)_3$ impose des conditions sur toutes les composantes macroscopiques linéaires et quadratiques de la structure locale. Ces conditions sur toutes les composantes macroscopiques sont compatibles avec une cinématique de type second gradient telle qu'imposée dans la **Section 5.2** mais dans le cas général, elles contraignent trop le système si les sollicitations extérieures s'éloignent d'une déformation macroscopique linéaire.

L'implémentation dans Z-set des conditions de couplage plus génériques donnée à la **Section 5.2** reste, à ce jour, une question ouverte.

6.4 Conclusion

En conclusion, le problème de couplage présenté à la **Section 5.2** a été écrit dans le cadre d'une méthode de résolution éléments finis. Plusieurs stratégies de résolution ont été proposées. Si ces stratégies ont donné des systèmes linéaires facilement implémentables dans des codes académiques, la tâche s'est montrée plus difficile dans des codes industriels.

Des choix motivés ont permis de modifier le système linéaire pour le rendre implémentable de manière non-intrusive dans le code Z-set. Ces modifications sont valables pour des cas de sollicitations macroscopiques linéaires stricts. Un démonstrateur a alors été développé et implémenté à partir de conditions de couplage qui sont compatibles avec une cinématique de type second gradient mais qui rigidifient artificiellement les structures globale et locale dans un cas général.

Une solution pour éviter ces problèmes consisterait à utiliser un code pour lequel des conditions MPC peuvent être imposées entre les degrés de liberté $\mathrm{u}^{(i)}$ d'un modèle éléments finis, de manière plus générique par une relation du type :

$$\sum_i \alpha^{(i)} \mathrm{u}^{(i)} + \mathrm{c} = 0$$

plutôt associée à un formalisme de résolution par multiplicateurs de Lagrange.

Le système (6.14) est donné avec un opérateur de rigidité de la structure globale modifiée. En effet, l'opérateur est défini pour une structure présentant un vide dans la zone du zoom. L'objet du chapitre suivant est de proposer une approche non-intrusive du problème de couplage avec modèles non-compatibles, en utilisant un opérateur de rigidité non-modifié de la structure globale.

Références

BABUŠKA, I. 1973, «The finite element method with Lagrangian multipliers», *Numerische Mathematik*, vol. 20, nº 3, doi :10.1007/BF01436561, p. 179–192, ISSN 0029-599X, 0945-3245. 115

BOFFI, D., F. BREZZI et M. FORTIN. 2013, *Mixed Finite Element Methods and Applications*, *Springer Series in Computational Mathematics*, vol. 44, Springer, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-36518-8. 118, 119

HESTENES, M. R. 1969, «Multiplier and gradient methods», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 4, nº 5, doi :10.1007/BF00927673, p. 303–320, ISSN 1573-2878. 119

HUGHES, T. J. R. 1995, «Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 127, nº 1, doi :10.1016/0045-7825(95)00844-9, p. 387–401, ISSN 0045-7825. 121

LAY, D. C. 1993, «Subspaces and Echelon Forms», *The College Mathematics Journal*, vol. 24, nº 1, doi :10.2307/2686433, p. 57–62, ISSN 0746-8342. 120

LOISEAU, O. 2001, *Une Stratégie de Calcul Multiéchelle Pour Les Structures Hétérogènes*, thèse de doctorat, ENS de Cachan. 116

MEYER, C. D. 2000, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, ISBN 978-0-89871-454-8. 120

POWELL, M. J. D. 1969, «A Method For Nonlinear Constraints In Minimization Problems», dans *Optimization*, édité par R. Fletcher, Academic Press, p. 283–298. 119

Chapitre 7

Adaptation non-intrusive du problème de couplage de modèles non-compatibles

Sommaire

7.1 Introduction 126
7.2 Formulation du problème de couplage par un algorithme de point fixe 126
7.2.1 Décomposition de domaine global et local 127
7.2.2 Calcul des efforts d'interface 128
7.3 Mise en œuvre de l'algorithme global/local non-intrusif 131
7.3.1 Environnement logiciel 131
7.3.2 Architecture mise en place pour la résolution 132
7.3.3 Détails d'implémentation 132
7.3.4 Exemples d'application 133
7.4 Conclusion 138

7.1 Introduction

Le dernier volet de ces travaux de recherche concerne la formulation dite non-intrusive du couplage de modèles non-compatibles proposé précédemment. D'après le dictionnaire Collins, intrusif est relatif à « quelque chose qui perturbe [...] de manière indésirable ». Par extension une méthode non-intrusive peut être vue comme une méthode qui ne nécessite pas de modifications indésirables. De ce fait, plusieurs sources d'intrusivité peuvent être identifiées pour une même méthode. Par ailleurs, certaines modifications peuvent être intrusives dans un cadre donné mais pas dans un autre. Le terme non-intrusif n'est donc pas inhérent à une méthode mais est aussi relatif au cadre dans lequel elle s'intègre.

Deux contraintes relativement courantes dans les bureaux d'études peuvent être identifiées. La première concerne la non-intrusivité par rapport aux architectures logiciels. En effet, les logiciels métiers sont utilisés comme des « boîtes noires » avec des données d'entrées/sorties standards, car en général les utilisateurs sont tributaires des éditeurs logiciels nombreux et n'ont pas, ou n'ont qu'un accès très limité au code source (mise à disposition via des interfaces en général). La seconde concerne la non-intrusivité par rapport à certains jeux de données initiaux. Par exemple, il a été mis en évidence dans BOGGS et collab. [2005], que le temps alloué à la génération du maillage d'une pièce, dans un processus de simulation numérique, était très important. C'est pourquoi les méthodes de réanalyses structurales favorisées par les industriels sont des méthodes qui ne nécessitent pas de modifications des modèles éléments finis d'origine (**Figure 7.1**).

Une classe de méthodologies qui répond à ces problématiques est celle des méthodes de couplage non-intrusives développées par GENDRE et collab. [2009]. Elles permettent de prendre en compte des modifications locales sur un modèle éléments finis existant, en utilisant des données d'entrées/sorties standards d'un code donné, et sans modifier les opérateurs initiaux. Un de leurs avantages principaux est de permettre l'utilisation d'un code standard pour traiter n'importe quel problème de structure, en conjonction avec des outils adaptés, non nécessairement inclus dans le code, pour les zones critiques. En d'autres termes elles permettent d'analyser des phénomènes locaux particuliers avec des codes dédiés spécifiques, à partir d'analyses à l'échelle industrielle, provenant de logiciels généralistes. Bien entendu, ces méthodes peuvent être mises en œuvre à partir d'un seul logiciel, l'intérêt est alors de procéder à des réanalyses locales sans modifier les maillages initiaux.

Jusqu'ici les techniques de couplages non-intrusives ont été développées pour des modèles compatibles, même si parfois les maillages étaient non-conformes. L'extension au couplage non-intrusif de modèles non-compatibles pose un certain nombre de difficultés, au moins dans le cadre du code Z-set/Zébulon. Ce sont à ces difficultés que ce chapitre est consacré. Pour essayer de les résoudre, une version intrusive de ces couplages a été étudiée aux **Chapitre 4** et **Chapitre 5**. Ces couplages étaient du type décomposition de domaine au sens où le maillage initial était modifié pour en retirer la partie locale. C'est la formulation associée qui est ensuite modifiée pour aboutir à un algorithme de résolution non-intrusif proposé dans ce chapitre.

7.2 Formulation du problème de couplage par un algorithme de point fixe

La mise en œuvre du couplage pour modèles non-compatibles, par une méthode éléments finis, proposée dans le **Chapitre 6**, nécessite l'utilisation d'un opérateur de rigidité du modèle global altéré (**Figure 7.1a**), dans le sens où ce dernier est découpé dans la zone de zoom afin d'y insérer le modèle local.

De manière générale, les couplages par interface proposés dans les **Section 6.3.3.3** et **Sec-**



(a) Modèle global altéré $\Omega_{\mathscr{G}}$ et modèle auxiliaire $\Omega_{\mathscr{A}}$

(b) Modèle global non altéré Ω et modèle local $\Omega_{\mathscr{L}}$

FIGURE 7.1 – Illustration d'un modèle modifié par une découpe dans la zone de zoom.

tion 6.3.3.4 peuvent se ramener au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}_{\mathscr{G}}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}] & -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]^{\mathrm{T}} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]^{\mathrm{T}} \\ [\mathbf{Q}_{\mathscr{G}}] & -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathrm{U}_{\mathscr{G}}] \\ [\mathrm{U}_{\mathscr{L}}] \\ [\Lambda_{\mathrm{C}}] \\ [\Lambda_{\mathscr{G}}] \\ [\Lambda_{\mathscr{L}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathrm{F}_{\mathscr{G}}] \\ [\mathrm{F}_{\mathscr{L}}] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

où $[\mathrm{U}_{\mathscr{G}}]$ et $[\mathrm{U}_{\mathscr{L}}]$ sont les degrés de liberté, respectivement, des structures globale et locale et où les vecteurs $[\mathrm{F}_{\mathscr{G}}]$ et $[\mathrm{F}_{\mathscr{L}}]$ sont relatifs aux efforts extérieurs sur chaque sous-structure. Les opérateurs relatifs à la structure $\Omega_{\mathscr{L}}$ sont notés avec un indice $\mathscr{L}$ et ceux associés à la structure $\Omega_{\mathscr{G}}$ altérée (**Figure 7.1a**) sont notés avec un indice $\mathscr{G}$. Ainsi les opérateurs de rigidité sur chacun des domaines sont notés $[\mathbf{K}_{\mathscr{G}}]$ pour la structure globale altérée et $[\mathbf{K}_{\mathscr{L}}]$ pour la structure locale. Les opérateurs $[\mathbf{Q}_{\mathscr{G}}]$ et $[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]$ sont associés aux conditions de couplage entre les modèles éléments finis avec les multiplicateurs de Lagrange discrétisés associés $[\Lambda_{\mathrm{C}}]$. Les conditions d'admissibilité cinématique sur chacun des modèles sont notés $[\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]$ et $[\mathbf{P}_{\mathscr{G}}]$ avec leurs multiplicateurs de Lagrange discrétisés associés $[\Lambda_{\mathscr{G}}]$ et $[\Lambda_{\mathscr{L}}]$.

7.2.1 Décomposition de domaine global et local

Le point de départ des méthodes de couplage non-intrusives est de résoudre un système équivalent au système (7.1) par une méthode de point fixe. L'idée est de procéder par décomposition de domaine et de résoudre des sous-problèmes sur $\Omega_{\mathscr{G}}$ et $\Omega_{\mathscr{L}}$. La solution est obtenue à partir de l'**Algorithme 1** dans lequel les problèmes global et local sont résolus alternativement jusqu'à convergence de l'algorithme. Classiquement, deux variantes de l'algorithme existent, en fonction des conditions aux limites utilisées pour piloter le problème local. Ici, le choix a été fait de piloter le problème local par les déplacements macroscopiques d'interface, extraits du problème global. L'autre alternative consisterait à piloter le problème local par des conditions de Robin formulées à partir des conditions de couplage décrites à la **Section 5.3.2**.

Le problème global de l'**Algorithme 1** est écrit sur le modèle global modifié $\Omega_{\mathscr{G}}$ (**Figure 7.1a**). Cet algorithme ne répond donc pas au besoin de non-intrusivité par rapport au jeu de données initial. Pour répondre à cette problématique, en suivant ce qui est fait par exemple dans DUVAL et collab. [2016]; GENDRE et collab. [2009], le problème global est réécrit à partir de son modèle éléments finis non-altéré $\Omega = \Omega_{\mathscr{G}} \bigcup \Omega_{\mathscr{A}}$ (**Figure 7.1b**) où $\Omega_{\mathscr{A}}$ correspond à la partie qui a été retirée du modèle global non-altéré. L'opérateur de rigidité non modifié $[\mathbf{K}]$ du modèle global d'origine s'écrit alors :

$$[\mathbf{K}][\mathrm{U}] = [\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathscr{G}}][\mathrm{U}] + [\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathscr{A}}][\mathrm{U}] \tag{7.2}$$

où $[\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathscr{I}}]$ est la matrice de rigidité de la structure $\mathscr{I} \in \{\mathscr{G},\mathscr{A}\}$ prolongée sur tout le domaine Ω et $[\mathrm{U}]$ le vecteur des inconnues nodales des déplacements $[\mathrm{U}_{\mathscr{G}}]$ prolongé sur Ω tel que, en notation

Algorithme 1 Résolution intrusive du problème de couplage pour modèles non-compatibles par une méthode de point fixe

Entrée(s) : ε

Initialisation : $k=0$, $r \leftarrow 1$, $[\Lambda_C]^0 \leftarrow [0]$

1: **tant que** $r > \varepsilon$ **faire**

2: **Problème global :**

$$[F_{corr}]^k = [\mathbf{Q}_{\mathscr{G}}]^T [\Lambda_C]^k$$
$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}]^T \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_{\mathscr{G}}]^{k+1} \\ [\Lambda_{\mathscr{G}}]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{\mathscr{G}}] - [F_{corr}]^k \\ [0] \end{bmatrix}$$

3: **Problème local :**

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}] & -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]^T & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]^T \\ -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_{\mathscr{L}}]^{k+1} \\ [\Lambda_C]^{k+1} \\ [\Lambda_{\mathscr{L}}]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{\mathscr{L}}] \\ -[\mathbf{Q}_{\mathscr{G}}][U_{\mathscr{G}}]^{k+1} \\ [0] \end{bmatrix}$$

4: **Test de convergence :**

$$r = \frac{\| [F_{corr}]^k - [F_{corr}]^{k+1} \|}{\sqrt{\|\underline{F}\|^2 + \|\underline{F}_{\mathscr{L}}\|^2}}$$

5: **fin tant que**

continue : $\underline{u}_{|\Omega_{\mathscr{G}}} = \underline{u}_{\mathscr{G}}$ et $\underline{u}_{|\Omega_{\mathscr{A}}} = \underline{u}_{\mathscr{A}}$. De même les efforts nodaux sont définis tels que : $\underline{F} = \underline{\widetilde{F}}_{\mathscr{G}} + \underline{\widetilde{F}}_{\mathscr{A}}$. Le problème global de l'**Algorithme 1** s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathscr{G}}]^T \\ [\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]^{k+1} \\ [\Lambda_{\mathscr{G}}]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\widetilde{F}_{\mathscr{G}}] - [\widetilde{\Lambda}_{\mathscr{A}}]^k - [\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathscr{G}}]^T [\Lambda_C]^k \\ [0] \end{bmatrix}$$

avec $[\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathscr{G}}]$ et $[\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathscr{G}}]$ les opérateurs prolongés sur tout Ω et $[\widetilde{\Lambda}_{\mathscr{A}}]^{k+1} = ([\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathscr{A}}][U]^{k+1} - [\widetilde{F}_{\mathscr{A}}])_{|\Gamma}$. Le problème local s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}] & -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]^T & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]^T \\ -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_{\mathscr{L}}]^{k+1} \\ [\Lambda_C]^{k+1} \\ [\Lambda_{\mathscr{L}}]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{\mathscr{L}}] \\ -[\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathscr{G}}][U]^{k+1} \\ [0] \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Ces formulations des problèmes local et global donnent lieu à l'**Algorithme 2** qui présente la méthode de couplage, pour modèles non-compatibles, sous sa forme non-intrusive du point de vue du jeu de données initial.

En pratique, résoudre des problèmes de point-selle (avec multiplicateurs de Lagrange) n'est pas possible dans la plupart des codes commerciaux. Les relations cinématiques sont généralement prises en compte par des relations MPC entre les degrés de liberté. Dans ce cas, la prise en compte des conditions de couplage entre les problèmes global et local peut être réalisée de la même manière que dans le cas du problème monolithique (6.7). C'est-à-dire en écrivant des relations linéaires entre les degrés de liberté, soit à partir d'une matrice échelonnée réduite, comme cela a été proposé à la **Section 6.3.3.3**, soit à partir de conditions sur les champs complets comme cela a été proposé à la **Section 6.3.3.4**.

7.2.2 Calcul des efforts d'interface

La résolution de l'**Algorithme 2** nécessite le calcul d'un effort de correction $[F_{corr}]$. Cet effort s'exprime à partir des efforts intérieurs $[\widetilde{\Lambda}_{\mathscr{A}}]$ du modèle global sur l'interface de couplage et des

Algorithme 2 Version **non-intrusive** du problème de couplage pour modèles non-compatibles

Entrée(s) : ε

Initialisation : $k=0$, $r \leftarrow 1$, $[\Lambda_C]^0 \leftarrow [0]$, $[\Lambda_{\mathscr{A}}]^0 \leftarrow [0]$

1: **tant que** $r > \varepsilon$ **faire**

2: **Problème global :**

$$[F_{corr}]^k = [\widetilde{\Lambda}_A]^k + [\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathscr{G}}]^T [\Lambda_C]^k$$
$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathscr{G}}]^T \\ [\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathscr{G}}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]^{k+1} \\ [\Lambda_P]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] - [F_{corr}]^k \\ [0] \end{bmatrix}$$

3: **Problème local :**

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}] & -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]^T & [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]^T \\ -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_{\mathscr{L}}]^{k+1} \\ [\Lambda_C]^{k+1} \\ [\Lambda_{\mathscr{L}}]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{\mathscr{L}}] \\ -[\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathscr{G}}][U]^{k+1} \\ [\mathbf{0}] \end{bmatrix}$$

4: **Test de convergence :**

$$r = \frac{\|[F_{corr}]^k - [F_{corr}]^{k+1}\|}{\sqrt{\|\underline{F}\|^2 + \|\underline{F}_{\mathscr{L}}\|^2}}$$

5: **fin tant que**

efforts relatifs aux conditions de couplage $[\Lambda_C]$. La construction de ces derniers est développée dans la **Section 7.2.2.1** pour les premiers et dans la **Section 7.2.2.2** pour les seconds.

7.2.2.1 Efforts intérieurs du modèle global sur la zone de couplage

Le vecteur $[\widetilde{\Lambda}_{\mathscr{A}}]$ des efforts nodaux du domaine global sur l'interface de couplage peut être reconstruit à partir de la solution éléments finis du problème global. Si ces efforts ne sont pas accessibles de manière standard dans le code utilisé, leur calcul nécessite la reconstruction de fonctions de formes éléments finis dans le domaine global, ce qui peut être coûteux en fonction de la taille des modèles considérés.

Une alternative pratique et peu coûteuse pour évaluer ces efforts d'interface a été proposée dans GENDRE [2009]. Elle consiste à définir un problème auxiliaire qui est une restriction du modèle global d'origine à la zone d'intérêt. Un domaine $\Omega_{\mathscr{A}}$ est donc maillé comme la restriction de Ω à la zone de zoom. Les déplacements du domaine global sur la zone de couplage sont alors appliqués comme conditions aux limites en déplacement sur le bord du problème auxiliaire. Ce dernier, ainsi défini, permet de calculer des efforts de réaction qui sont égaux aux efforts intérieurs du domaine global sur la zone de couplage. Comme dans la plupart des codes, les efforts de réaction à un déplacement imposé, sont donnés comme une sortie standard (ce qui n'est pas nécessairement le cas des efforts intérieurs), cette alternative est celle qui a été retenue dans ces travaux.

Dans la pratique, le problème auxiliaire a un coût de calcul négligeable devant les problèmes global et local. Le problème sur la structure auxiliaire s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\mathscr{A}}] & [\mathbf{B}_{\mathscr{A}}]^T \\ [\mathbf{B}_{\mathscr{A}}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_{\mathscr{A}}]^{k+1} \\ [\Lambda_{\mathscr{A}}]^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{\mathscr{A}}] \\ [\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathscr{G}}][U]^{k+1} \end{bmatrix}$$

où $[U_{\mathscr{A}}]^{k+1}$ est le vecteur des inconnues nodales relatives au champ de déplacement $\underline{u}_{\mathscr{A}}$ et $[\mathbf{B}_{\mathscr{A}}]$ l'opérateur trace discrétisé qui isole les degrés de liberté du bord de la structure auxiliaire.

7.2.2.2 Calcul des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux conditions de couplage

Pour une itération donnée, le calcul du vecteur $[\Lambda_C]$, relatif aux inter-efforts, pose plus de difficultés. En effet, ce dernier est associé à des composantes macroscopiques d'inter-effort d'interface dont la reconstruction à partir des efforts nodaux n'est pas unique. Le problème vient du fait que sur des nœuds appartenant à plusieurs faces (c'est-à-dire dans un coin ou sur une arrête), l'effort nodal obtenu par la sortie standard d'un code éléments finis, donne la somme des contributions de chacune des faces.

La problématique est illustrée à la **Figure 7.2**. Des efforts nodaux $(\hat{F}_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ sont représentés sur cinq nœuds des faces γ_1 et γ_2 dans le coin d'une structure 2D. L'effort nodal $\hat{F}_3$ obtenu par une sortie standard éléments finis appartient aux deux faces γ_1 et γ_2. Les contributions $\hat{F}_{3,\gamma_1}$ et $\hat{F}_{3,\gamma_2}$ ne sont pas données par une sortie standard d'un code éléments finis.

Si dans certains cas particuliers (typiquement à partir d'éléments linéaires), il est possible de calculer les contributions de chaque face, à partir de la solution éléments finis et des fonctions de forme éléments finis du modèle, une méthode générale de reconstruction n'a pas pu être proposée de cette manière.

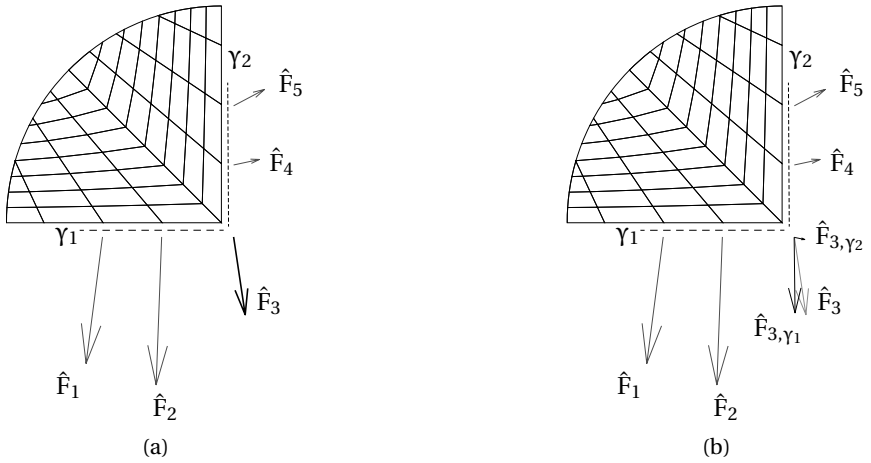


FIGURE 7.2 – (a) Effort nodal $\hat{F}_3$ accessible depuis une sortie standard d'un code éléments finis. (b) Contributions $\hat{F}_{3,\gamma_1}$ et $\hat{F}_{3,\gamma_2}$ de chacune des faces γ_1 et γ_2 à l'effort nodal $\hat{F}_3$.

Une méthode alternative consiste à reconstruire le vecteur $[\Lambda_C]$ à partir des opérateurs de couplage du système local. En supposant que le problème (7.3) soit bien posé, et que l'opérateur

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} -[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}] \\ [\mathbf{P}_{\mathscr{L}}] \end{bmatrix}$$

soit de rang plein, il est possible, en s'appuyant sur les travaux de AINSWORTH [2001], de construire l'opérateur $[\mathbf{R}]$ suivant :

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{C}]^{\mathrm{T}}([\mathbf{C}][\mathbf{C}]^{\mathrm{T}})^{-1}$$

AINSWORTH [2001] montre alors qu'il est possible de calculer $[\Lambda]$ tel que :

$$[\Lambda] = [\mathbf{R}]^{\mathrm{T}}([\mathrm{F}_{\mathscr{L}}] - [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}][\mathrm{U}_{\mathscr{L}}])$$

où la composante $[\Lambda_C]$ peut être déduite de $[\Lambda]$ d'après la relation suivante :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} [\Lambda_C] \\ [\Lambda_{\mathscr{L}}] \end{bmatrix}$$

Remarque 5 *La matrice* $[\mathbf{C}]$ *est prise sous cette forme car les opérateurs* $[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]$ *et* $[\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]$ *ne vérifient pas* a priori $[\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}][\mathbf{P}_{\mathscr{L}}]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$. *En effet, toujours d'après* AINSWORTH *[2001], le choix d'une matrice* $[\mathbf{C}] = [\mathbf{Q}_{\mathscr{L}}]$, *pour calculer directement la composante* $[\Lambda_C]$, *conduirait à une mauvaise évaluation des efforts macroscopiques de couplage.*

Remarque 6 *L'opérateur* $[\mathbf{C}]$ *a une taille relativement importante. Comme il ne porte que sur les degrés de liberté d'interface, il est possible de réduire la taille des opérateurs mis en jeu dans le calcul de* $[\Lambda]$ *en réécrivant le système* (7.3) *à partir des contributions des degrés de liberté internes (notées i) et des degrés de liberté sur le bord* Γ *(notées b). Il est alors possible d'écrire :*

$$\begin{aligned}[\Lambda] &= [\mathbf{R}]_b^{\mathrm{T}}([\mathrm{F}_{\mathscr{L}}]_b - [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}]_{bb}[\mathrm{U}_{\mathscr{L}}]_b - [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}]_{bi}[\mathrm{U}_{\mathscr{L}}]_i) \\ &= [\mathbf{R}]_b^{\mathrm{T}}([\mathrm{F}_{\mathscr{L}}] - [\mathbf{K}_{\mathscr{L}}][\mathrm{U}_{\mathscr{L}}])_{|\Gamma}\end{aligned}$$

où $[\mathbf{R}]_b = [\mathbf{C}]_b^{\mathrm{T}}([\mathbf{C}]_b[\mathbf{C}]_b^{\mathrm{T}})^{-1}$ *et où* $[\mathbf{C}]_b$ *est la restriction de* $[\mathbf{C}]$ *aux degrés de liberté d'interface.*

7.3 Mise en œuvre de l'algorithme global/local non-intrusif

L'algorithme global/local non-intrusif pour modèles non-compatibles a été implémenté dans le cadre des problèmes 2D et 3D. Les problèmes global, local et auxiliaire sont résolus avec le même code : Z-set. L'échange de données à l'interface de raccord entre les problèmes global, local et auxiliaire est fait à l'aide du paquet *MPI for Python*.

7.3.1 Environnement logiciel

7.3.1.1 Le code de calcul Z-set/Zébulon

Z-set [1] est une suite logicielle dédiée à l'analyse du comportement des matériaux et des structures par éléments finis. Elle est formée de modules indépendants, dont une bibliothèque matériaux pour la définition de lois de comportement (Z-mat), un solveur séquentiel et parallèle implicite (Zébulon), un module de simulation de la propagation de fissures (Z-cracks), un module de post-traitement (Z-post), une interface graphique (Z-master) permettant de faire du pré/post traitement. De plus, le solveur de Z-set dispose d'une API python pour accéder et modifier directement les objets en mémoire du code et son comportement au cours du calcul ce qui permet de s'affranchir de toute écriture de fichiers pendant un calcul.

Le code Z-set, a été choisi car, d'une part, il est disponible dans le groupe Safran, et d'autre part, Safran Tech participe activement au développement de ce logiciel. Les sources du code sont donc accessibles au sein de Safran Tech ce qui offre, la cas échéant, la possibilité d'être intrusif vis-à-vis du code. Cependant, dans cette étude, le code Z-set est considéré comme une « boîte noire » afin de garder le caractère non-intrusif de la méthode global/local proposée. De plus, il permet :

- d'être piloté par fichiers d'entrées de données (fichiers avec l'extension .inp),
- d'accéder aux forces de réactions nodales sur des bords extérieurs après chaque incrément,
- d'utiliser une interface de programmation ou *Application Programming Interface* (API) Python pour accéder et modifier directement les objets en mémoire du code.

7.3.1.2 Interface Z-set/Python

L'API Python de Z-set a été développée pour répondre au besoin de modifier à la volée certains paramètres d'un calcul éléments finis, tout en étant efficace et sans modifier le cœur du code Z-set (C++). Elle est développée conjointement par l'Onera et Safran Tech. Elle permet la modification du maillage, des données de sortie et de plusieurs étapes du calcul, tel que le début (initialisation) du calcul, le début d'incrément, le début d'itération, la fin d'itération, la fin d'incrément, la fin de calcul, etc.

7.3.1.3 Couplage des codes

Les quantités pertinentes pour le couplage des problèmes global, local et auxiliaire sont récupérées avec l'API Python et échangées via le paquet *MPI for Python*, qui permet d'utiliser le protocole d'échange standard MPI à travers des scripts Python (voir l'**Annexe D**).

1. co-propriété Onera / Ecoles de Mines ParisTech

7.3.2 Architecture mise en place pour la résolution

Chaque problème (global, local et auxiliaire) est résolu dans un calcul Z-set à partir d'une mise en données classique. Elle est réalisée à partir de fichiers « inp » dont des exemples sont détaillés dans l'**Annexe D**. Les trois fichiers *global.inp*, *local.inp* et *aux.inp*, relatifs à chacun des problèmes, font appel à trois maillages éléments finis indépendants (global.geof, local.geof et aux.geof) relatifs à chacun des problèmes. Des illustrations de maillages sont données à la **Figure 7.4** pour un exemple 2D et à la **Figure 7.9** pour un exemple 3D.

Des scripts Python (*G_script.py*, *L_script.py* et *A_script.py*), relatifs à chacun des problèmes global, local et auxiliaire permettent de dialoguer avec les problèmes Z-set en cours de calcul (**Figure 7.3**). Ils sont appelés par chacun des problèmes Z-set auxquels ils sont associés et ne dialoguent qu'avec eux via l'API Python/Z-set. Dans ces travaux, des modifications et des échanges d'informations sont effectués à l'initialisation des problèmes, au début et à la fin de chaque incrément.

Le problème global communique avec les problèmes local et auxiliaire par des communications *MPI for Python*. Ces communications permettent d'échanger les quantités d'interface, de chacun des problèmes, nécessaires à l'implémentation non-intrusive du problème de couplage de modèles non-compatibles (**Algorithme 2**). Les détails associés à ces communications et à chacun des scripts Python sont donnés dans l'**Annexe D** en fonction des étapes de calcul.

Finalement, le problème global, via son script Python, gère également le calcul du résidu de convergence de l'**Algorithme 2**. C'est donc ce dernier qui détermine si une nouvelle itération de l'algorithme non-intrusif est nécessaire et si la convergence a été atteinte.

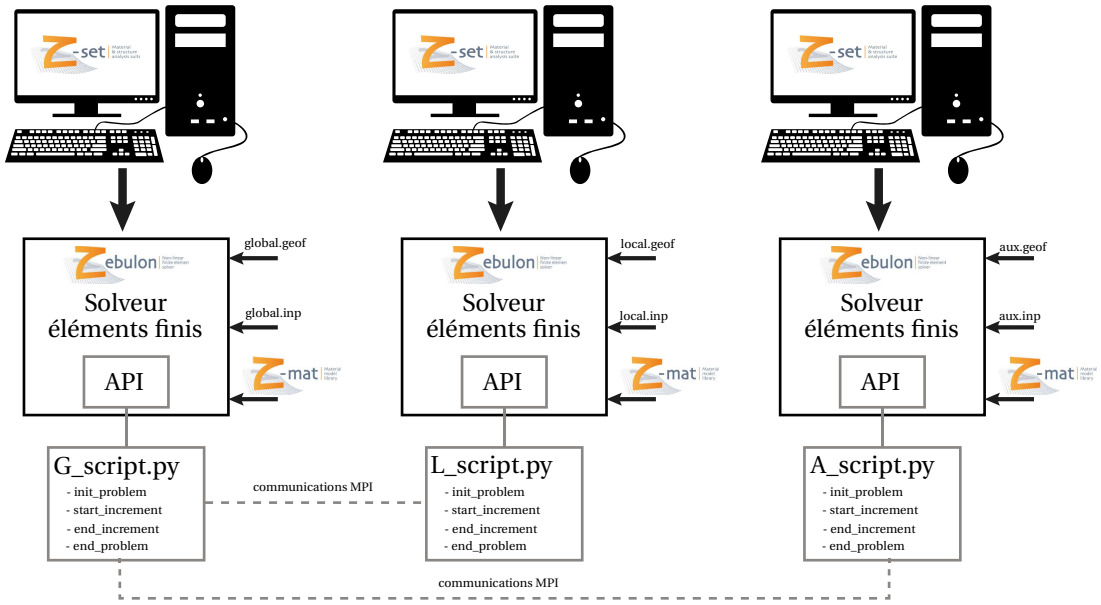


FIGURE 7.3 – Schéma de l'écosystème numérique mis en place pour la résolution de l'algorithme non-intrusif.

7.3.3 Détails d'implémentation

Localisation de la zone de zoom – La zone d'intérêt (domaine du zoom) est souvent connue et localisée en amont du calcul. Il est aussi possible de détecter les zones critiques par un post-traitement d'un premier calcul global (ODEN et ZOHDI [1997]; TIRVAUDEY et collab. [2019]). Cela n'a pas été envisagé dans ces travaux, mais des développements autour d'un estimateur d'erreur de modèle ont été menés dans Z-set par Mouad FERGOUG lors de son stage de fin d'étude, réalisé entre Safran Tech et l'École des Mines ParisTech.

Construction des opérateurs de couplage – La base macroscopique définie au **Chapitre 6** sur chaque interface, est construite à partir des vecteurs de la base principale d'inertie. Cette dernière est obtenue à partir des matrices de masse du maillage de chaque face. Pour la construction des matrices de masse, les coordonnées des nœuds du maillage d'interface sont récupérées via l'API Python/Z-set puis les maillages de peau sont reconstruits et intégrés à l'aide des outils BasicTools [2], développés par Safran Tech mais dont les sources sont disponibles librement. Néanmoins, d'autres librairies pourraient être utilisées, telle que, FEniCS [3]. Lorsque cela est nécessaire, si la discrétisation de l'interface est différente de celle du maillage de peau, les mêmes outils peuvent être utilisés pour calculer les matrices de transfert de champs définies à la **Section 6.2.1**.

Pour assurer la cohérence des opérateurs de couplage, il est pratique que les bases principales d'inertie impliquées dans leur construction aient les mêmes orientations par face. De ce fait, les bases principales d'inertie sur chaque interface du domaine global sont calculées à l'initialisation puis transférées aux interfaces correspondantes du domaine local. Ceci implique une communication MPI supplémentaire entre le processus traitant le problème global et celui traitant le problème local, faite lors de l'étape d'initialisation des calculs. Le problème auxiliaire n'a pas besoin de ces informations puisqu'aucun opérateur macroscopique n'est défini sur ce problème.

Maillages éléments finis – Les types d'éléments suivants ont été testés pour le couplage : tétraèdres, hexaèdres ou mixtes, de degré 1 (linéaires). Pour rappel, les éléments de la base quadratique ne sont calculés exactement que pour des éléments de degré 2 or ces éléments n'étaient pas disponibles dans BasicTools au moment de la fin de ces travaux.

Traitement des incompatibilités des maillages – Les incompatibilités de maillages entre les domaines global et local sont entièrement traitées par les opérateurs de couplage via la construction de la base macroscopique. Aucune librairie d'interpolation des maillages n'est utilisée pour le couplage. Ces outils sont nécessaires uniquement pour imposer les conditions de périodicité entre des faces en vis-à-vis, si les maillages des deux faces ne sont pas identiques. Il est alors nécessaire de définir un maillage d'interface, commun aux deux faces, dont la discrétisation est différente de celle du maillage de peau d'au moins une des deux faces. Des matrices de transfert de champs, définies à la **Section 6.2.1**, doivent alors être construites par exemple à partir des outils BasicTools.

7.3.4 Exemples d'application

Dans cette section, plusieurs exemples de résolution du problème de couplage, à partir de son implémentation non-intrusive, sont donnés. Afin d'analyser les solutions obtenues à partir de l'implémentation non-intrusive de la méthode de couplage proposée, un problème de référence DNS calculé à l'échelle fine est défini pour chacun des problèmes étudiés. Sa solution en déplacement est notée $\underline{u}_{\text{ref}}$.

Pour comparer les solutions issues du problème de référence et du problème couplé, une erreur énergétique locale est définie telle que :

$$e_{\text{E}} = \frac{\|\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}\|_{\text{E},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}}{\|\underline{u}_{\text{ref}}\|_{\Omega_{\mathscr{L}},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}}} \tag{7.4}$$

où E est la zone, par exemple un élément fini, sur laquelle est calculée l'erreur e_{E}, avec $\underline{u}_{\mathscr{L}}$ le déplacement solution du modèle local et avec la norme énergétique suivante : $\|\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}\|^2_{\text{E},\mathbf{K}_{\mathscr{L}}} = \frac{1}{2\text{vol}(\text{E})} \int_{\text{E}} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}}) : \mathbf{K}_{\mathscr{L}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_{\mathscr{L}} - \underline{u}_{\text{ref}})\, \text{d}\Omega$. La valeur maximale de e_{E} sur la sous-structure locale est notée :

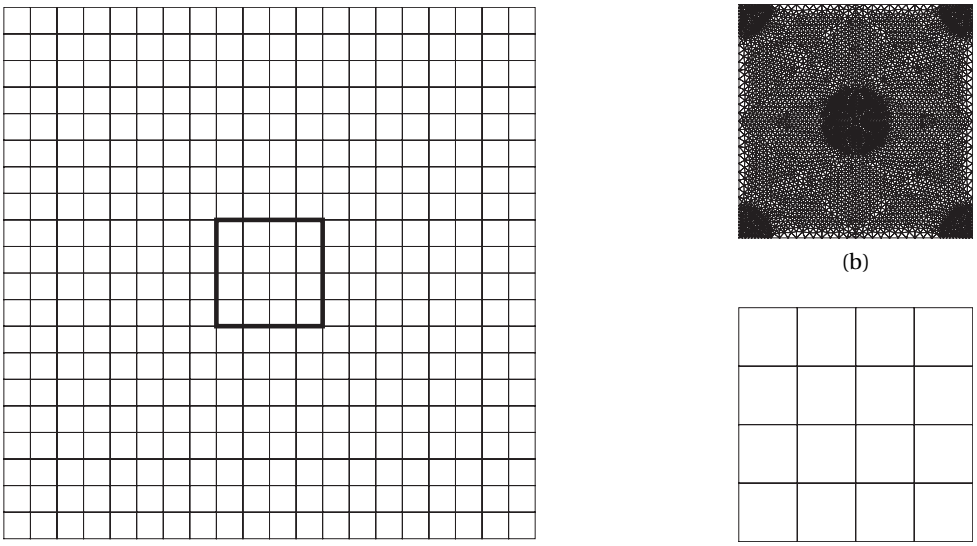
$$e^{\max}_{\text{E}} = \max_{\text{E}\in\Omega_{\mathscr{L}}} e_{\text{E}}$$

2. https://gitlab.com/drti/basic-tools
3. https://fenicsproject.org/

7.3.4.1 Applications 2D

Pour des microstructures identiques à celles présentées au **Chapitre 4** et au **Chapitre 5**, les solutions obtenues, par une résolution avec des multiplicateurs de Lagrange, dans le code *SCo-FiElDD*, ou par le schéma non-intrusif implémenté dans le code Z-set, sont identiques à convergence. Le choix a donc été fait de proposer une microstructure différente pour le VER 2D. Elle est illustrée à la **Figure 7.6b**.

L'algorithme itératif est illustré ici dans le cas d'une plaque composite 2D, en élasticité linéaire, soumise tout d'abord à un chargement macroscopique uniforme (**chargement I**) puis à un chargement macroscopique linéaire (**chargement II**).



(a) (b) (c)

FIGURE 7.4 – Illustration des domaines maillés global (a), local (b) et auxiliaire (c) d'une plaque composite 2D.

Cas de chargement uniforme – Dans un premier cas, une plaque composite 2D illustrée à la **Figure 7.4** est soumise à un chargement macroscopique uniforme (**chargement I**). Des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur le bord extérieur du domaine gobal tels que :

$$\underline{u}^d = \underline{u}_{\mathrm{C}} + \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right) \cdot \underline{\mathrm{X}} + \frac{1}{2}\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \underline{\mathrm{X}} \otimes \underline{\mathrm{X}} \tag{7.5}$$

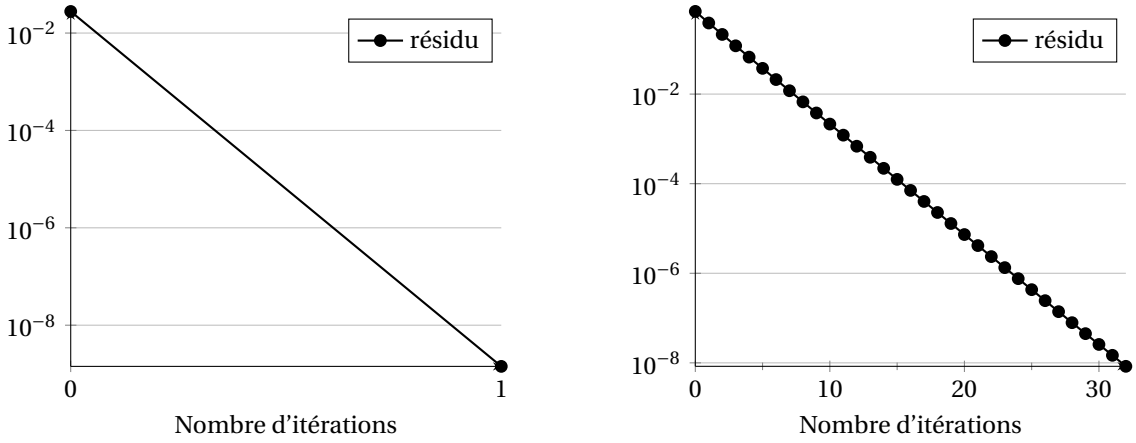
avec :

$$\underline{u}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right) = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^{\mathrm{M}} = \mathbf{0}$$

La solution du problème de référence est calculée sur le maillage constitué de 5×5 cellules élémentaires (**Figure 7.4**).

La courbe de convergence de l'algorithme est tracée à la **Figure 7.5a**. La convergence est obtenue en 1 itération car la solution à l'issue de l'itération 0 est déjà exacte.

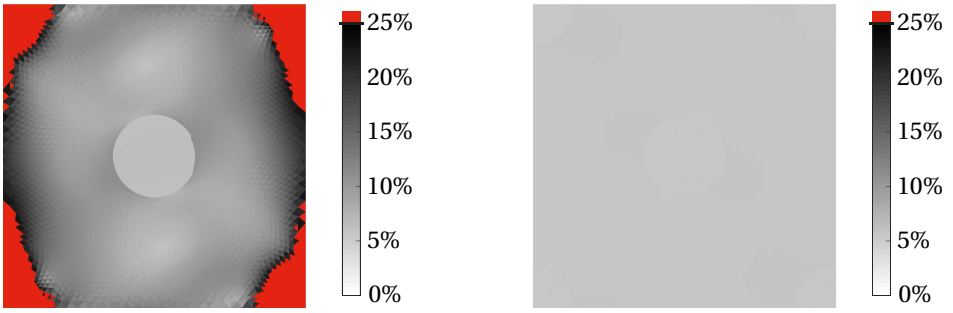
A convergence, une comparaison avec l'algorithme de couplage de type raccord en déplacement (SBD) du code Z-set est donnée à la **Figure 7.6** par rapport à la solution de référence. La méthode proposée donne, une erreur locale (7.4) inférieure à 0,33% par rapport à la solution de référence, alors qu'avec la méthode SBD, l'erreur maximale commise est supérieure à 1000% près des bords.



(a) Chargement macroscopique uniforme.

(b) Chargement macroscopique linéaire.

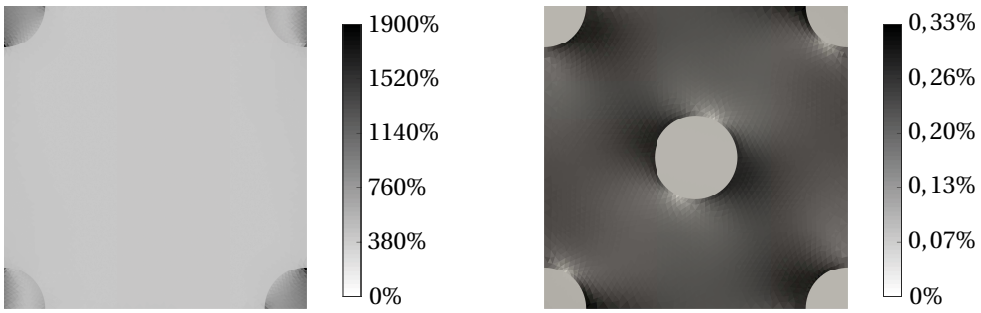
FIGURE 7.5 – Courbes de convergence de l'algorithme global/local non-intrusif pour modèles non-compatibles.



(a) Couplage SBD du code Z-set. Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 1900\%$

(b) Couplage global/local pour modèles non-compatibles. Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 0{,}33\%$

FIGURE 7.6 – Erreur en norme énergétique pour un chargement macroscopique uniforme. Échelle de couleur saturée pour une erreur supérieure à 25%.



(a) Couplage SBD du code Z-set.

(b) Couplage global/local pour modèles non-compatibles.

FIGURE 7.7 – Erreur en norme énergétique pour un chargement macroscopique uniforme.

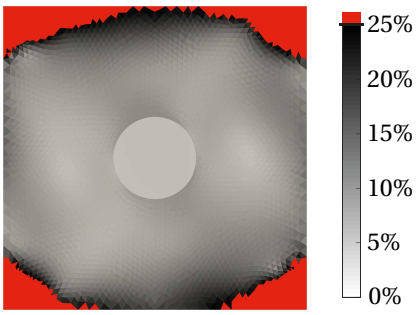
Cas de chargement linéaire – Dans un deuxième cas, la même plaque composite 2D, illustrée à la **Figure 7.4**, est soumise à un chargement macroscopique linéaire (**chargement II**). La solution de référence est calculée sur le maillage constitué de 5×5 cellules élémentaires. Les quantités macroscopiques des conditions aux limites de Dirichlet imposées sur le bord sont choisies telles que :

$$\underline{u}_{\mathrm{C}} = \underline{0} \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right) = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 0 \\ 0 & -0{,}002 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^{\mathrm{M}} \neq \mathbf{0}$$

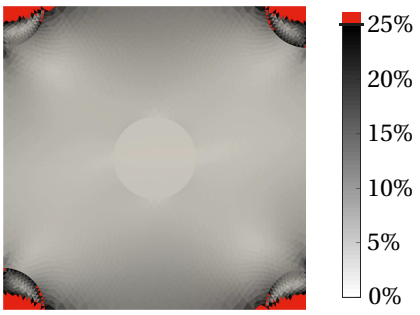
où les composantes non-nulles de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ sont : $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xxy} = 2\mathrm{E}^{-3}$ mm^{-1}, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxy} = 4\mathrm{E}^{-4}$ mm^{-1}, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{xyy} = -7{,}7\mathrm{E}^{-4}$ mm^{-1} $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxx} = -3{,}9\mathrm{E}^{-3}$ mm^{-1}. Les composantes de $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$ sont choisies de manière à éviter les modes de déformation mal représentés par les éléments QUA4 et telles que $\mathrm{div}(\mathbf{K}_{\mathscr{G}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^d)) = \underline{0}$ dans $\Omega_{\mathscr{G}}$.

La courbe de convergence de l'algorithme est donnée à la **Figure 7.5b**. Dans ce cas, la solution n'est pas obtenue en une itération comme dans le cas précédent mais nécessite une vingtaine d'itérations car le modèle global, qui est un milieu homogénéisé du premier gradient, peine à rendre compte du comportement macroscopique de la microstructure sous un chargement macroscopique variable. Plusieurs étapes de correction sont donc nécessaires pour atteindre la convergence.

A convergence, une comparaison avec l'algorithme de couplage de type raccord en déplacement (SBD) du code Z-set a été faite par rapport à la solution de référence correspondante. Les cartes d'erreur tronquées pour des erreurs locales supérieures à 25% sont données à la **Figure 7.8**. La méthode proposée donne une solution relativement médiocre par rapport à la solution de référence. En effet l'erreur maximale locale atteint 83%, et semble être due à la présence des inclusions rigides dans les coins du VER. Pourtant la solution obtenue est de meilleure qualité qu'avec le raccord en déplacement qui donne une erreur locale maximale supérieure à 2000%.



(a) Couplage SBD du code Z-set. Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 2000\%$



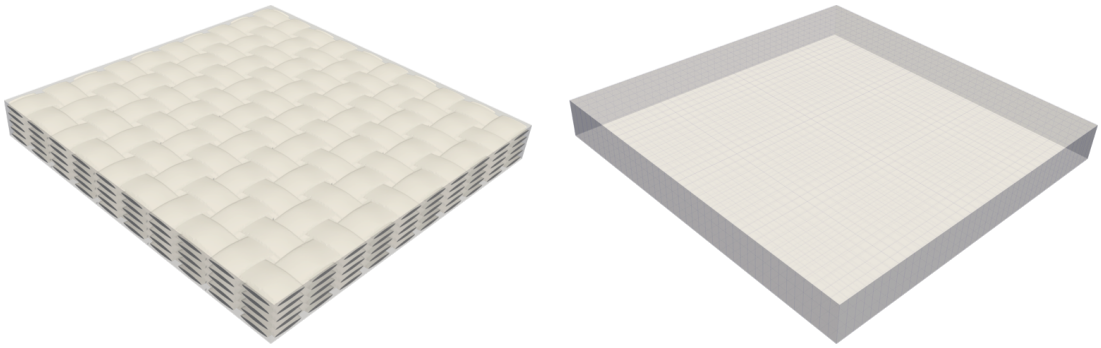
(b) Couplage global/local pour modèles non-compatibles. Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\max} \approx 83\%$

FIGURE 7.8 – Erreur en norme énergétique pour un chargement macroscopique linéaire. Échelle de couleur saturée pour une erreur supérieure à 25%.

7.3.4.2 Applications 3D

La validation de l'algorithme non-intrusif est faite ici dans le cas d'une plaque composite tissée à motif panier, soumise à un chargement de déformation macroscopique linéaire. Les domaines de calcul sont illustrés à la **Figure 7.9**. Les maillages utilisés étant d'environ 3 millions de degrés de liberté pour le maillage du problème de référence, contre environ 20000 (maillage global) et 30000 (maillage local) degrés de liberté pour le problème couplé.

Le cas de chargement du problème 3D est défini tel que les composantes non-nulles de la relation (7.5) sont $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{xx} = 1{,}1$ et $\mathrm{F}^{\mathrm{M}}_{yy} = 0{,}9$ ainsi que $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yyy} = -0{,}00138$ mm^{-1}, $\mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{yxx} = -0{,}036$ mm^{-1} et



(a) Maillage du modèle de référence (environ 3 millions de degrés de libertés).

(b) Maillage du modèle global (environ 20000 degrés de libertés).

(c) Maillage du modèle local (environ 30000 degrés de libertés).

(d) Maillage du modèle auxiliaire (300 degrés de libertés).

FIGURE 7.9 – Illustration des domaines maillés de référence (a), global (b), local (c) et auxiliaire (d) d'une plaque composite tissée en 3D.

$G^{M}_{xxy} = 0{,}024\ \text{mm}^{-1}$. Il s'agit donc d'un chargement avec des composantes de déformation uniforme et linéaire en traction dans les directions x et y, et une composante de déformation linéaire en cisaillement dans la direction x.

La courbe de convergence de l'algorithme est tracée à la **Figure 7.10**. Une dizaine d'itérations sont nécessaires pour atteindre un résidu de convergence de 5E^{-6} mais la solution obtenue à l'issue de la première itération est déjà relativement bonne. En effet, la **Figure 7.11** présente les cartes d'erreur locale. Les différences en matière d'erreur énergétique, entre la première itération (**Figure 7.11a**) et la dernière itération (**Figure 7.11b**) pour l'algorithme proposé, ne sont presque pas perceptibles pour le chargement considéré. L'erreur en norme énergétique maximale est de l'ordre de 12% dès la première itération.

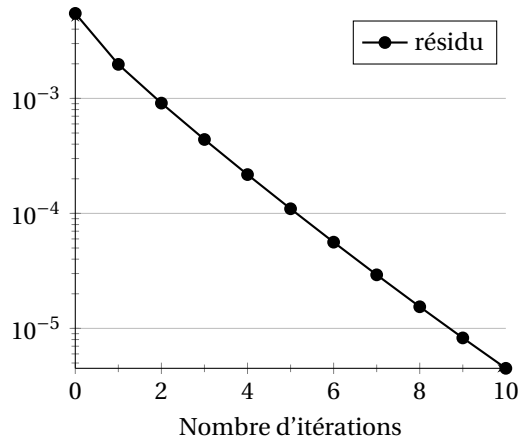
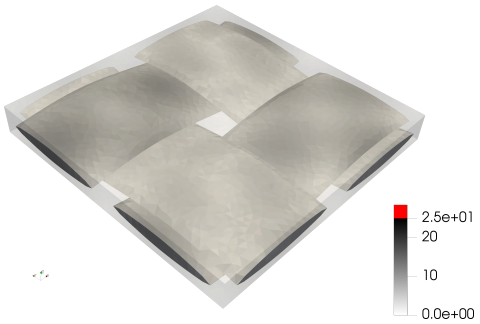


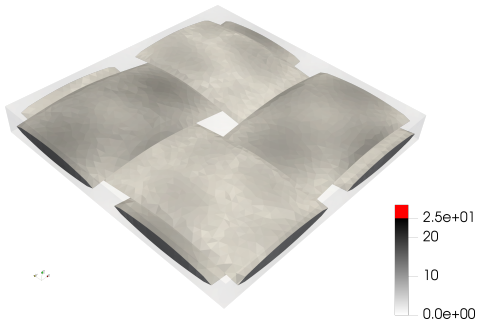
FIGURE 7.10 – Courbe de convergence de l'algorithme itératif proposé pour le problème de la plaque composite 3D.

Une comparaison des résultats obtenus par la résolution du problème couplé avec une méthode de couplage non-intrusive (zoom global/local) est illustrée à la **Figure 7.12**. La méthode de zoom global/local est équivalente, à convergence, à une méthode par sous-structuration avec un couplage mortar dont l'espace des multiplicateurs de Lagrange est égal à l'espace des déplacements d'interface du côté du maillage global. Dans ce cas d'application, l'utilisation de la méthode



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{max}} \approx 11{,}5\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 5{,}3\%$

(a) Iteration 1 : méthode de couplage non-intrusive proposée pour modèles non-compatibles.

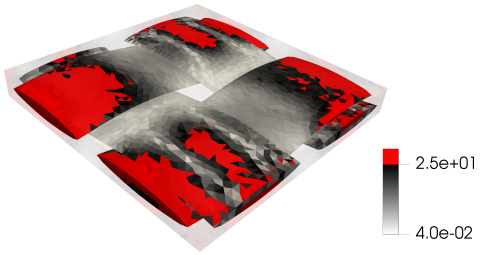


Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{max}} \approx 12{,}5\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 5{,}4\%$

(b) Iteration finale : méthode de couplage non-intrusive proposée pour modèles non-compatibles.

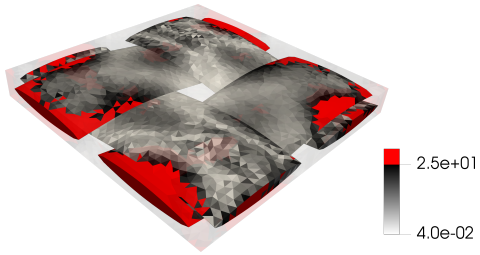
FIGURE 7.11 – Cartes d'erreur relative en norme énergétique entre la solution de référence et les solutions locales issues de la méthode de couplage proposée mise en œuvre de manière non-intrusive pour le problème de la plaque composite 3D.

de zoom global/local mène, à convergence, à une erreur en norme énergétique jusqu'à 135%, qui est notamment concentrée autour des interfaces de raccord.



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{max}} \approx 173\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 15\%$

(a) Iteration 1 : zoom global/local non-intrusif.



Erreur maximale : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{max}} \approx 135\%$
Erreur moyenne : $e_{\mathrm{E}}^{\mathrm{moy}} \approx 17\%$

(b) Iteration finale : zoom global/local non-intrusif.

FIGURE 7.12 – Cartes d'erreur relative en norme énergétique entre la solution de référence et les solutions locales issues de la méthode de zoom global/local non-intrusif pour le problème de la plaque composite 3D.

7.4 Conclusion

L'algorithme de couplage non-intrusif proposé a été implémenté dans le code de calcul Z-set et testé dans différents cas. Ces derniers sont limités à des chargements macroscopiques uniformes ou linéaires car, comme évoqué au **Chapitre 6**, le couplage implémenté dans le code Z-set force une cinématique macroscopique linéaire sur toutes les composantes macroscopiques d'interface, induisant une rigidité supplémentaire artificielle des domaines global et local dans le cas général.

Dans les différents cas proposés, l'algorithme fourni des solutions de qualité bien supérieure à celles obtenues avec des méthodes de couplage de la littérature. Cependant, des erreurs importantes subsistent en fonction des cas. Bien sûr, ces erreurs sont d'autant plus importante que le maillage du domaine global est de mauvaise qualité.

L'algorithme itératif non-intrusif proposé pour mettre en œuvre la méthode de couplage pour modèles non-compatibles, n'a en pratique besoin que d'un faible nombre d'itérations pour ob-

tenir une solution locale proche de la solution du calcul de référence. Si les quantités d'intérêt se situent dans le modèle local, les itérations ne sont donc pas indispensables pour obtenir une solution qualitative. Si les quantités d'intérêt se situent également dans le modèle global, des itérations sont bien-sûr nécessaires pour prendre en compte l'influence du modèle local à l'échelle de la pièce entière.

En pratique le critère de stagnation de l'algorithme décroit relativement lentement vis-à-vis de la qualité de la solution obtenue. Un résidu de convergence défini à partir des quantités macroscopiques des interfaces semblerait plus pertinent pour accélérer la convergence de l'algorithme.

Par ailleurs, à l'instar des méthodes global/local non-intrusives, la méthode proposée converge pour un opérateur d'itération contractant. Cette condition se manifeste, en pratique, par un faible taux de matériaux rigide traversant les interfaces de couplage. Pour les modèles locaux qui ne respectent pas cette condition, les méthodes de relaxation telles que celles présentées dans DUVAL et collab. [2016]; GENDRE et collab. [2009]; GOSSELET et collab. [2018] et adaptées à la technique de couplage proposée dans ces travaux, permettraient de lever cette restriction.

Références

AINSWORTH, M. 2001, «Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, nº 48, doi : 10.1016/S0045-7825(01)00236-5, p. 6323–6339, ISSN 0045-7825. 130

BOGGS, P. T., A. E. E. ALTHSULER, A. R. E. E. LARZELERE, E. J. WALSH, R. L. CLAY et M. F. S. N. L. HARDWICK. 2005, «DART system analysis», cahier de recherche SAND2005-4647, Sandia National Laboratories, doi :10.2172/876325. 126

DUVAL, M., J.-C. PASSIEUX, M. SALAÜN et S. GUINARD. 2016, «Non-intrusive Coupling : Recent Advances and Scalable Nonlinear Domain Decomposition», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 23, nº 1, doi :10.1007/s11831-014-9132-x, p. 17–38, ISSN 1134-3060, 1886-1784. 127, 139

GENDRE, L. 2009, *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*, thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. 129

GENDRE, L., O. ALLIX, P. GOSSELET et F. COMTE. 2009, «Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity», *Computational Mechanics*, vol. 44, nº 2, doi :10.1007/s00466-009-0372-9, p. 233–245, ISSN 1432-0924. 126, 127, 139

GOSSELET, P., M. BLANCHARD, O. ALLIX et G. GUGUIN. 2018, «Non-invasive global–local coupling as a Schwarz domain decomposition method : Acceleration and generalization», *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, vol. 5, nº 1, doi :10.1186/s40323-018-0097-4, p. 4, ISSN 2213-7467. 139

ODEN, J. T. et T. I. ZOHDI. 1997, «Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 148, nº 3, doi :10.1016/S0045-7825(97)00032-7, p. 367–391, ISSN 0045-7825. 132

TIRVAUDEY, M., L. CHAMOIN, R. BOUCLIER et J.-C. PASSIEUX. 2019, «A posteriori error estimation and adaptivity in non-intrusive couplings between concurrent models», *Manuscript submitted for publication*. 132

Conclusions et perspectives

Le pari fait à l'aube de ces travaux de recherche était d'être à même de substituer localement un modèle homogénéisé, par un modèle microstructuré. Les applications visées, à terme, étant celles de l'analyse rapide de l'effet d'une variation de microstructure par rapport à la microstructure nominale. La méthode développée devait être la plus directe et la moins intrusive possible afin de faciliter son déploiement en bureau d'étude. La stratégie adoptée a donc été de faire des choix pragmatiques dans le but de réaliser un démonstrateur final performant.

Dans ce cadre, une nouvelle méthode pour l'analyse global/local de grandes structures, en matériaux architecturés, a été proposée dans le but d'analyser l'influence, à l'échelle macroscopique, de modifications faites sur la microstructure. Il s'agit d'une méthode de couplage entre un modèle global homogénéisé et un modèle local, représentatif de la microstructure. Les modèles sont donc incompatibles en terme de discrétisation et de comportement. La méthode est basée sur une technique de raccord avec séparation micro-macro des quantités d'interface (déplacements et inter-efforts). L'approche permet de prendre en compte des gradients de déformation macroscopiques à l'échelle du modèle local et permet d'obtenir, dans la zone locale, une solution microscopique proche de celle qui serait obtenue par une technique d'homogénéisation au second gradient, avec l'avantage de ne pas nécessiter la construction de grandeurs homogénéisées. Afin de faciliter son utilisation dans des bureaux d'études, une implémentation non-intrusive de la méthode a été proposée et mise en place dans le code Z-set/Zébulon. Des exemples bidimensionnels sur des structures hétérogènes simples ou tridimensionnelles de composites tissés ont été étudiés dans le cadre de problèmes de statique, en élasticité linéaire, avec des zones locales parallélépipédiques. Leurs solutions ont été systématiquement comparées à des solutions de référence obtenues à partir de simulations DNS. Elles ont également été comparées à des solutions issues de techniques de couplage classiquement utilisables en bureaux d'études, comme le *submodeling* ou les méthodes de zoom structural avec un couplage mortar « classique ».

Contrairement aux méthodes de couplage classiques par interface, la méthode proposée dans ce manuscrit s'attache à identifier les conditions de couplage cinématiques minimales à imposer, afin de transmettre le bon état de déformation macroscopique à l'échelle de la zone d'intérêt. Dans le cas de gradients de déformation linéaire, des relations sur les parties constantes et sur les sauts des parties linéaires des déplacements d'interface sont à imposer. Plus généralement des relations linéaires sont à écrire entre les composantes macroscopiques des parties polynomiales (constante, linéaire, quadratique, cubique) des quantités d'interface. En d'autres termes, il s'agit d'écrire des relations linéaires entre les coefficients des monômes d'une approximation polynomiale des quantités d'interface. Pour cela, il est nécessaire de définir un projecteur macroscopique qui extrait ces composantes, ce qui peut être fait pour toute discrétisation dès lors que celle-ci peut décrire le polynôme désiré. Le type de relation obtenu est facilement implémentable dans la majorité des codes de calcul éléments finis du commerce. Ces derniers doivent alors disposer d'une API par laquelle, les relations linéaires peuvent être initialisées en début de calcul, et leurs valeurs modifiées d'une itération à l'autre. L'API doit également être capable de fournir les résultats standards du calcul à chaque itération. Dans ce cas, la mise en place de scripts externes permet de calculer les relations linéaires à imposer aux degrés de liberté d'interface des modèles global et local.

Les solutions obtenus présentent des résultats très satisfaisants dans des cas de sollicitations

macroscopiques constantes et linéaires pour un modèle local complètement englobé dans le modèle global. Dans d'autres cas, la versatilité de la méthode permet de faire varier les conditions de couplage et de les adapter, par exemple, à des conditions de bords libres ou de bords avec conditions imposées. Naturellement, dans ces cas, qui s'écartent des hypothèses de l'homogénéisation, les résultats obtenus se dégradent mais restent équivalents voire meilleurs que les solutions obtenues avec des techniques de couplage classiques. Il a également été mis en évidence que la qualité du modèle global avait une importance non-négligeable, dans les résultats d'une simulation. La méthode proposée ne doit donc pas être considérée comme une correction absolue du modèle global mais doit être utilisée en parallèle d'un modèle homogénéisé pertinent. De plus, les conditions de couplage, calculées à partir des hypothèses de l'homogénéisation, limitent l'utilisation de la méthode proposée dans des cas proches de ces hypothèses, c'est-à-dire, dans des cas de gradients macroscopiques lentement variables ou pour des zones de zoom peu étendues. Au-delà, les solutions se dégradent et font apparaître des erreurs, particulièrement localisées dans les coins du domaine local. De même, lorsque des variations microscopiques doivent être introduites dans le modèle local, elles ne doivent pas faire varier, de manière significative, le comportement macroscopique de la cellule locale, sous peine d'engendrer des erreurs importantes. La méthodologie proposée peut cependant être étendue sur le même principe, à des situations de gradients de déformation macroscopique plus élevés si nécessaire.

Ce travail de recherche ouvre la voie à de nombreuses perspectives. Trois axes principaux peuvent être dégagés. Un premier axe, qui peut-être vu comme des perspectives à court terme, concerne l'amélioration de points techniques autour de la mise en données du problème et du schéma d'implémentation non-intrusif. Un deuxième axe, qui peut-être vu comme des perspectives à moyen terme, concerne les conditions de couplage elles-mêmes. Et finalement un troisième axe, pour des perspectives à plus long terme, concerne l'extension de la méthode à des cas d'application différents de l'élasticité linéaire.

Pour le premier axe qui concerne la mise en données et le schéma d'implémentation non-intrusif, plusieurs voies d'amélioration peuvent être dégagées. En effet, pour l'instant, une mise en données manuelle de chacun des problèmes est nécessaire. Cette mise en données est fastidieuse et nécessite la création d'une multitude de groupes relatifs aux interfaces de couplage afin de définir sur chaque domaine global et local, les coins des zones de couplage, puis les arrêtes privées des coins puis les faces privées des arrêtes et des coins. Une première voie d'amélioration consisterait à automatiser et à faciliter cette procédure. Une deuxième voie d'amélioration concerne la limitation inhérente au code Z-set liée au pré-traitement des conditions de couplages qui ne sont pas adaptées, dans le format, à une méthode de résolution par élimination. Par ailleurs, il apparait que le traitement d'un très grand nombre de conditions MPC, avec des opérateurs pleins, entraîne une augmentation considérable du temps de calcul par le solveur Zébulon à cause d'une étape de pré-analyse de la matrice du système alors que son inversion est faite dans un temps raisonnable. Des travaux autour de pré-conditionnement des conditions de couplage et du traitement des conditions MPC dans Zébulon doivent donc être envisagés. Du point de vue du schéma non-intrusif lui-même, il a été montré que pour des microstructures présentant des rigidités importantes sur les interfaces, l'algorithme ne converge pas forcément. Dans ce cas, une troisième voie d'amélioration peut être envisagée, par exemple, en modifiant artificiellement le comportement homogénéisé correspondant, dans le domaine global. Finalement, une dernière voie d'amélioration concerne l'utilisation de techniques d'accélération pour réduire le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme non-intrusif. En effet, des techniques d'accélération classiques existent pour ce type d'algorithme et pourraient être adaptées dans le cadre de ces travaux.

En ce qui concerne le deuxième axe, au sujet des conditions de couplage, plusieurs voies d'amélioration sont également possibles. A l'heure actuelle, la sélection des conditions de couplage, sur chaque interface, parmi toutes celles possibles, est faite *a priori*. De plus, dans le cas 3D, aucune étude d'influence de ce choix n'a été menée. Une première amélioration consisterait à automatiser ce choix, par exemple, à partir de critères cinématiques. En effet, une analyse des

déplacements d'interface du domaine global, permettrait de déterminer les interfaces les plus à même de transmettre des quantités macroscopiques pertinentes au domaine local, laissant libres les quantités les moins pertinentes. Par ailleurs, comme évoqué précédemment, dans des cas de chargements quelconques, des erreurs apparaissent principalement dans les coins. En effet, les conditions de couplage proposées font intervenir une condition singulière dans un coin de l'interface. Cette condition permet de lever des inconnues cinématiques macroscopiques, mais, la remplacer par une condition de couplage non-locale serait une amélioration significative. Plusieurs alternatives peuvent alors être discutées, en accord avec les objectifs de ces travaux. Par exemple, il serait envisageable de définir une condition de couplage basée sur un critère de minimisation sur l'ensemble des déplacements de l'interface entre les domaines global et local.

Pour le troisième et dernier axe qui concerne les cas d'application, l'utilisation de la méthode en parallèle de techniques d'acquisition et de segmentation a été envisagée mais n'a pas abouti par manque de temps. Néanmoins, des cas d'application sur des couplages de modèles provenant de micro-tomographies sont à finaliser. Les résultats préliminaires semblent montrer une bonne stabilité de l'algorithme, avec des maillages d'interface légèrement chahutés mais pour des cellules toujours strictement parallélépipédiques. Les résultats n'ont cependant pas été confrontés à des calculs de référence. Une voie d'amélioration concerne donc l'utilisation de l'algorithme sur des cas d'analyse avec des modèles locaux représentatifs de microstructures réelles, comprenant des interfaces quelconques et dont la géométrie s'écarte d'une forme parallélépipédique stricte. Par ailleurs, des extensions à des cas avec non-linéarités matériau pourraient être envisagées afin de résoudre, par exemple, des problèmes avec endommagement aux deux échelles. D'autres pistes concernent l'extension au cadre de la dynamique pour la simulation classique de l'impact localisé d'une structure composite par exemple, ou encore l'extension à une méthode adaptative pour le suivi de la propagation du dommage dû à un défaut détecté.

Annexes

Annexe A

Détails de calcul des opérateurs de couplage issus de la méthode Mortar

Soit le problème sous-structuré élastique linéaire suivant, où les domaines Ω_1 et Ω_2 sont non-recouvrants et leur interface commune est notée Γ_C (**Figure A.1**) : une solution $(\underline{u}_1,\underline{u}_2) \in \mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_2$ avec $\lambda \in \mathscr{M}$ et $\boldsymbol{\sigma}_\mathcal{J} = \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}_\mathcal{J}$ ($\mathcal{J} \in \{1,2\}$) est cherchée telle que :

$$\begin{cases} \forall \underline{u}_1^* \in \mathscr{U}_1^0, & \displaystyle\int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_1^*) d\Omega + (\underline{\lambda}, \underline{u}_1^*)_{\Gamma_C} = \int_{\Omega_1} \underline{f}^d \underline{u}_1^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_1} \underline{F}^d \underline{u}_1^* d\Gamma \\ \forall \underline{u}_2^* \in \mathscr{U}_2^0, & \displaystyle\int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_2^*) d\Omega - (\underline{\lambda}, \underline{u}_2^*)_{\Gamma_C} = \int_{\Omega_2} \underline{f}^d \underline{u}_2^* d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_2} \underline{F}^d \underline{u}_2^* d\Gamma \\ \forall \underline{\lambda}^* \in \mathscr{M}, & (\underline{\lambda}^*, \underline{u}_1 - \underline{u}_2)_{\Gamma_C} = 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathscr{U}_1^0 &= \{\underline{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega_1) \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega_1\} \\ \mathscr{U}_2^0 &= \{\underline{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega_2) \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial_u \Omega_2\} \\ \mathscr{M} &\text{ un espace des multiplicateurs à choisir} \end{aligned}$$

et où $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_C}$ représente un produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\Gamma_C)$, $\underline{u}_\mathcal{J}$ est la restriction de $\underline{u}$ à $\Omega_\mathcal{J}$, $\mathbf{K}_\mathcal{J}$ est la restriction du tenseur d'élasticité à $\Omega_\mathcal{J}$ et $\underline{n}_\mathcal{J}$ sont la normale sortante au domaine $\Omega_\mathcal{J}$.

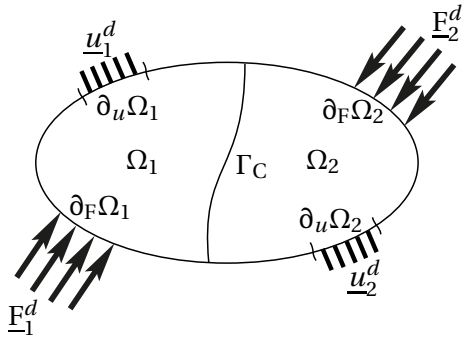


FIGURE A.1 – Domaine d'étude sous-structuré avec interface de couplage surfacique et conditions aux limites associées.

A partir d'un choix particulier de l'espace des multiplicateurs $\mathscr{M}^h$, le problème éléments finis associé à (A.1) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{B}_m]^{\mathrm{T}} \\ [\mathbf{B}_m] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathrm{U}] \\ [\Lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathrm{F}] \\ [0] \end{bmatrix}$$

avec :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_1] & [0] \\ [0] & [\mathbf{K}_2] \end{bmatrix} ; [\mathbf{B}_m] = \left[[\mathrm{C}_1][\Gamma_{\mathrm{C}_1}] - [\mathrm{C}_2][\Gamma_{\mathrm{C}_2}] \right] ; [\mathrm{U}] = \begin{bmatrix} [\mathrm{U}_1] \\ [\mathrm{U}_2] \end{bmatrix} ; [\mathrm{F}] = \begin{bmatrix} [\mathrm{F}_1] \\ [\mathrm{F}_2] \end{bmatrix}$$

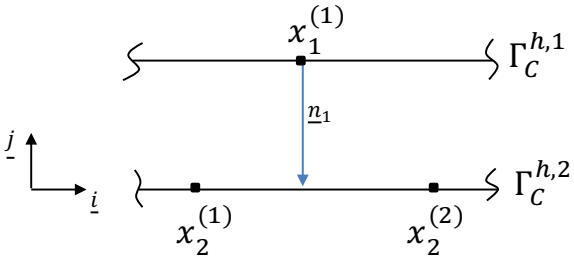


FIGURE A.2 – Illustration de la projection d'un nœud esclave $x_1^{(1)}$ sur un élément maître e composé des nœuds $x_2^{(1)}$ et $x_2^{(2)}$.

A.1 Intégration numérique des opérateurs de couplage

Si le choix est fait de prendre $\psi = \varphi_1$, la matrice C_1 est carrée et n'est calculée qu'avec des quantités du domaine non-mortar. La matrice C_2 est elle rectangulaire et est calculée à partir des produits de fonctions de forme. Pour cela il est nécessaire de projeter les éléments d'un maillage à l'autre, afin d'évaluer les fonctions de forme dans un même espace discrétisé afin d'en calculer le produit. La projection d'un nœud esclave $x_1^{(k)}$ sur un élément maître e composé des nœuds x_2^l avec $l = 1,\dots,n_m^e$ s'écrit :

$$\left[\left(\sum_{l=1}^{n_m^e} \varphi_2^{(l)}(\xi_2)\underline{x}_2^{(l)}\right) - \underline{x}_1^{(k)}\right] \wedge \underline{n}_k = \underline{0}$$

où ξ_2 est la coordonnée projetée sur e inconnue et n_m^e le nombre de nœuds de e.

Par exemple pour des éléments bords linéaires L2 pour deux maillages tels que définis figure A.2 il vient :

$$\xi_2 = \frac{2x_1^{(1)} - x_2^{(1)} - x_2^{(2)}}{x_2^{(2)} - x_2^{(1)}}$$

De la même manière, la projection d'un nœud maître $x_2^{(l)}$ sur un élément esclave e composé des nœuds $x_1^{(k)}$ avec $k = 1\dots n_s^e$ s'écrit :

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n_s^e} \varphi_1^{(k)}(\xi_1)\underline{x}_1^{(k)}\right) - \underline{x}_2^{(l)}\right] \wedge \left[\sum_{k=1}^{n_s^e} \varphi_1^{(k)}(\xi_1)\underline{n}_k\right] = \underline{0}$$

où ξ_1 est la coordonnée projetée sur l'élément esclave inconnue.

Le terme $\sum_{k=1}^{n_s^e} \varphi_1^{(k)}(\xi_1)\underline{n}_k$ consiste en une interpolation des normales sur le côté non-mortar pour avoir une normale continue. Plus de détails sont données dans POPP [2012]. Si l'interface de couplage est supposée droite, les normales ne présentent pas de discontinuités. Les composantes élémentaires de C_1 et C_2 s'écrivent alors :

$$C_{1,(s,m)}^{(j,k)} = \sum_{g=1}^{n_{gp}} w_g \psi^{(j)}\left(\xi_1(\eta_g)\right)\varphi_1^{(k)}\left(\xi_1(\eta_g)\right)\mathbf{J}_{seg}$$

$$C_{2,(s,m)}^{(j,l)} = \sum_{g=1}^{n_{gp}} w_g \psi^{(j)}\left(\xi_1(\eta_g)\right)\varphi_2^{(l)}\left(\xi_2(\eta_g)\right)\mathbf{J}_{seg}$$

avec :

$$\mathbf{J}_{seg} = \mathbf{J}(\xi_1(\eta_g))\frac{\xi_1^{(b)} - \xi_1^{(a)}}{2}$$

Elles sont ensuite assemblées sur l'interface Γ_C.

A.2 Condition Inf-Sup en pratique

A.2.1 Cadre formel

Le choix des espaces discrétisés peut entrainer des problèmes sur le calcul des quantités d'interface. Or les méthodes de résolution itérative se servent de ces quantités d'interface pour assurer l'équilibre global de la structure. Il est donc primordial d'avoir une bonne estimation de ces quantités d'interface pour favoriser la convergence des *solveurs* itératifs et pour diminuer les erreurs commises par la méthode de résolution.

Un des choix possibles concernant l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le respect de la condition Inf-Sup. Pour exprimer cette condition, le système (A.1) est réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1^*) + b_1(\lambda,\mathbf{u}_1^*) = l_1(\mathbf{u}_1^*) \\ a_2(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2^*) + b_2(\lambda,\mathbf{u}_2^*) = l_2(\mathbf{u}_2^*) \\ c(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,\lambda^*) = 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

ou bien par sous domaine sous la forme suivante avec $\jmath \in \{1,2\}$:

$$\begin{cases} a_\jmath(\mathbf{u}_\jmath,\mathbf{u}_\jmath^*) + b_\jmath(\lambda,\mathbf{u}_\jmath^*) = l_\jmath(\mathbf{u}_\jmath^*) \\ c(\mathbf{u}_\jmath,\lambda^*) = g_\jmath(\lambda^*) \end{cases} \tag{A.3}$$

où $a_\jmath$ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $\mathcal{U}_\jmath \times \mathcal{U}_\jmath$. Et où $b_\jmath$ est une forme bilinéaire, continue sur $\mathcal{M} \times \mathcal{U}_\jmath$. Et où $l_\jmath$ et $g_\jmath$ sont deux formes linéaires respectivement continues sur $\mathcal{U}_\jmath$ et $\mathcal{M}$. Le problème est bien posé si $b_\jmath$ vérifie la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) ([Babuška, 1971], [Brezzi, 1974]) ou condition Inf-Sup si et seulement s'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\inf_{\lambda \in \mathcal{M}} \sup_{\mathbf{u}_\jmath \in \mathcal{U}_\jmath} \frac{b_\jmath(\lambda,\mathbf{u}_\jmath)}{\|\lambda\|_{\mathcal{M}} \|\mathbf{u}_\jmath\|_{\mathcal{U}_\jmath}} > \beta > 0$$

Cette condition doit être respectée dans le cadre discrétisé pour obtenir une bonne approximation de la solution par la méthode des éléments finis. Après discrétisation par la méthode de Galerkin, le problème discrétisé doit vérifier une condition Inf-Sup analogue, sur les espaces (de dimension finie) d'approximation des solutions : $\mathcal{M}^h$ et $\mathcal{U}_\jmath^h$:

$$\inf_{\lambda^h \in \mathcal{M}^h} \sup_{\mathbf{u}_\jmath^h \in \mathcal{U}^h} \frac{b_\jmath(\lambda^h,\mathbf{u}_\jmath^h)}{\|\lambda^h\|_{\mathcal{M}}^h \|\mathbf{u}_\jmath^h\|_{\mathcal{U}_\jmath}^h} > \beta^h > 0$$

Ainsi, il est possible de vérifier, *a priori*, si le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange permet la convergence et une estimation d'erreur optimale du calcul (Boffi et collab. [2013a]; Brezzi et Fortin [1991]). Nous allons voir dans la section suivante une méthode de vérification de la condition Inf-Sup en pratique après discrétisation.

A.2.2 En pratique

Brezzi et Marini [2005] propose une méthodologie pragmatique de vérification de la condition Inf-Sup. Nous retiendrons que sa vérification revient à étudier le comportement de la plus petite valeur propre du système aux valeurs propres généralisé suivant :

$$[\mathbf{B}_\jmath][\mathbf{Q}_\jmath]^{-1}[\mathbf{B}_\jmath]^{\mathrm{T}} \underline{m}_\jmath = \Lambda[\mathbf{R}_\jmath]\underline{m}_\jmath \tag{A.4}$$

où

$$
\begin{aligned}
&\underline{m}_\mathcal{J} \in \mathscr{M}^h_\mathcal{J} \\
&(\mathrm{B}_\mathcal{J})_{i,j} = \int_{\Gamma_\mathrm{C}} \phi_i^{(\mathcal{J})} \psi_j^{(\mathcal{J})} d\Gamma \\
&(\mathrm{R}_\mathcal{J})_{i,r} = \sum_{\mathrm{T} \in \mathrm{K}^h_{\mathcal{J}|\Gamma_\mathrm{C}}} \int_{\Gamma_\mathrm{C}} \frac{h_\mathrm{T}}{\mu} \psi_i^{(\mathcal{J})} \psi_r^{(\mathcal{J})} d\Gamma \\
&(\mathrm{Q}_\mathcal{J})_{j,s} = \sum_{\mathrm{T} \in \mathrm{K}^h_{\mathcal{J}|\Gamma_\mathrm{C}}} \int_{\Gamma_\mathrm{C}} \frac{\mu}{h_\mathrm{T}} \phi_j^{(\mathcal{J})} \phi_s^{(\mathcal{J})} d\Gamma
\end{aligned}
$$

avec h_T, la taille de l'élément T et μ le coefficient de Lamé associé au matériau de la sous-structure.

Si la plus petite valeur propre Λ de l'équation A.4 est nulle ou tend vers zéro pour des raffinements simultanés des maillages de $\Omega_\mathcal{J}$ et Γ_C, alors la condition Inf-Sup n'est pas respectée. Cette procédure doit être effectuée sur les deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 pour avoir une bonne approximation au sens des éléments finis du problème étudié.

En pratique, cela signifie que le maillage de Γ_C doit être plus grossier que la « réunion » des maillages induits par Ω_1 et Ω_2 sur Γ_C (ou le degré des fonctions de forme doit être réduit sur Γ_C). Une autre condition porte sur le nombre de degrés de liberté de $\mathscr{U}^h_\mathcal{J}$ sur Γ_C qui doit être plus important que le nombre de degrés de liberté de $\mathscr{M}^h$ sur Γ_C. En pratique cela peut être obtenu en prenant localement des fonctions de formes sur $\mathscr{M}^h$ d'un degré inférieur à celles de $\mathscr{U}^h_\mathcal{J}$ au voisinage de Γ_C. En ce sens, une méthode de discrétisation saine, des inter-efforts, est proposée par exemple dans NOUY [2003].

Annexe B

Problème de point-selle dans les espaces de Hilbert

Cette annexe synthétise les principaux résultats au sujet de l'existence et l'unicité de problèmes de point-selle « perturbés », évoqué au **Chapitre 6**. Le lecteur intéressé peut trouver des détails sur ces aspects dans les travaux de BOFFI et collab. [2013b]; BREZZI et FORTIN [1991] dont sont tirés les développement ci-dessous.

B.1 Espace Dual et théorème de représentation de Riesz

Soit $\mathscr{V}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni de sa norme euclidienne $\|x\|_{\mathscr{V}} = \sqrt{(x,x)_{\mathscr{V}}}$ associée à son produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{V}}$. L'ensemble des *formes linéaires* sur $\mathscr{V}$ est appelé *espace dual* de $\mathscr{V}$ et est noté $\mathscr{V}' \equiv \mathscr{L}(\mathscr{V},\mathbb{R})$. L'espace $\mathscr{V}'$ est lui-même un espace de Hilbert dont la norme (souvent appelée norme duale de $\|\cdot\|_{\mathscr{V}}$) est notée : $\|\cdot\|_{\mathscr{V}'}$. Le théorème de représentation de Riesz (ou parfois Fréchet-Riesz), permet d'identifier l'espace bi-dual de $\mathscr{V}$ à lui-même :

Théorème 1 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $\mathscr{V}$ un espace de Hilbert, et $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}$ l'opérateur de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}'$ qui pour tout $z \in \mathscr{V}$ associe la forme linéaire $f_z = \mathrm{R}_{\mathscr{V}} z$ telle que :*

$$\langle f_z, v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}} = (z,v)_{\mathscr{V}} \quad \forall\, v \in \mathscr{V}$$

alors, $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}$ est injective, et $\|\mathrm{R}_{\mathscr{V}}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{V}')} = \|\mathrm{R}_{\mathscr{V}}^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{V}',\mathscr{V})} = 1$. De plus, $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}^{-1} = \mathrm{R}_{\mathscr{V}'}$.

B.2 Existence et unicité des formulations mixtes sur des espaces de Hilbert

Soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{Q}$ deux espaces de Hilbert munis, respectivement, de leur produit scalaire euclidien $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{V}}$ et $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{Q}}$. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{V}\times\mathscr{V}'}$ (resp. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{Q}\times\mathscr{Q}'}$) le crochet de dualité entre $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{Q}$) et son espace dual $\mathscr{V}'$ (resp. $\mathscr{Q}'$). Soient $a(\cdot,\cdot) : \mathscr{V}\times\mathscr{V} \to \mathbb{R}$ et $b(\cdot,\cdot) : \mathscr{V}\times\mathscr{Q} \to \mathbb{R}$ deux formes bilinéaires continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient le problème de point-selle classique suivant :

Problème 1 (Problème de point-selle) *Soient $f \in \mathscr{V}'$ et $g \in \mathscr{Q}'$, une solution $(u,\lambda) \in \mathscr{V}\times\mathscr{Q}$ est cherchée telle que :*

$$\left\{\begin{array}{lcll} a(u,v) + b(v,\lambda) & = & \langle f,v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}, & \forall\, v \in \mathscr{V} \\ b(u,\mu) & = & \langle g,\mu\rangle_{\mathscr{Q}'\times\mathscr{Q}}, & \forall\, \mu \in \mathscr{Q} \end{array}\right. \tag{B.1}$$

En utilisant les opérateurs linéaires $\mathrm{A} : \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ et $\mathrm{B} : \mathscr{V} \to \mathscr{Q}'$, associés respectivement à $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$, et définis par :

$$\left\{\begin{array}{lcccll} \langle \mathrm{A}u, v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}} & = & \langle u, \mathrm{A}^t v\rangle_{\mathscr{V}\times\mathscr{V}'} & = & a(u,v), & \forall\,(u,v) \in \mathscr{V}\times\mathscr{V} \\ \langle \mathrm{B}v, \mu\rangle_{\mathscr{Q}'\times\mathscr{Q}} & = & \langle u, \mathrm{B}^t v\rangle_{\mathscr{Q}\times\mathscr{Q}'} & = & b(v,\mu), & \forall\,(v,\mu) \in \mathscr{V}\times\mathscr{Q} \end{array}\right.$$

Le système (B.1) du **Problème 1** peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{A}u+\mathrm{B}^t\lambda &=& f \\ \mathrm{B}u &=& g \end{array}\right. \tag{B.2}$$

L'existence et l'unicité de la solution du **Problème 1** se montrent pour tout $(f,g)\in\mathscr{V}'\times\mathscr{Q}'$ si $\mathrm{I}m\,\mathrm{B}=\mathscr{Q}'$. Et si $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur $\mathrm{K}\equiv\mathrm{K}er\,\mathrm{B}$.

B.3 Existence et unicité pour un problème de point-selle « perturbé »

Soit le problème de point-selle classique défini ci-dessus par le **Problème 1**. En introduisant une forme bilinéaire continue $c(\cdot,\cdot)$ sur $\mathscr{Q}\times\mathscr{Q}$, il est possible de définir le problème « perturbé » suivant :

Problème 2 (Problème de point-selle « perturbé ») *Soient $f\in\mathscr{V}'$ et $g\in\mathscr{Q}'$, une solution $(u,\lambda)\in\mathscr{V}\times\mathscr{Q}$ est cherchée telle que :*

$$\left\{\begin{array}{lcll} a(u_\varepsilon,v)+b(v,\lambda_\varepsilon) &=& \langle f,v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}, & \forall\, v\in\mathscr{V} \\ b(u_\varepsilon,\mu)-c(\lambda_\varepsilon,\mu) &=& \langle g,\mu\rangle_{\mathscr{Q}'\times\mathscr{Q}}, & \forall\,\mu\in\mathscr{Q} \end{array}\right. \tag{B.3}$$

Des conditions suffisantes qui assurent que le **Problème 2** est bien posé sont données dans le chapitre 4 de Boffi et collab. [2013b]. En particulier :

Proposition 1 *Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive et elliptique sur $\mathrm{K}\equiv\mathrm{K}er\,\mathrm{B}$. Soit $f\in\mathscr{V}'$ et $g\in\mathrm{I}m\,\mathrm{B}$ avec $\mathrm{I}m\,\mathrm{B}$ un fermé de $\mathscr{Q}'$. Soit (u^*,p^*) la solution dans $\mathscr{V}\times\mathrm{H}^\perp$ avec $\mathrm{H}\equiv\mathrm{K}er\,\mathrm{B}^t$ du problème :*

$$\left\{\begin{array}{lcll} a(u^*,v)+b(v,\lambda^*) &=& \langle f,v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}, & \forall\, v\in\mathscr{V} \\ b(u^*,\mu) &=& \langle g,\mu\rangle_{\mathscr{Q}'\times\mathscr{Q}}, & \forall\,\mu\in\mathscr{Q} \end{array}\right. \tag{B.4}$$

Soit, de plus, $\varepsilon>0$, $(u_\varepsilon,\lambda_\varepsilon)$ la solution dans $\mathscr{V}\times\mathscr{Q}$ du problème perturbé :

$$\left\{\begin{array}{lcll} a(u_\varepsilon,v)+b(v,\lambda_\varepsilon) &=& \langle f,v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}, & \forall\, v\in\mathscr{V} \\ b(u_\varepsilon,\mu)-c(\lambda_\varepsilon,\mu) &=& \langle g,\mu\rangle_{\mathscr{Q}'\times\mathscr{Q}}, & \forall\,\mu\in\mathscr{Q} \end{array}\right. \tag{B.5}$$

Alors,

$$\|u^*-u_\varepsilon\|_{\mathscr{V}}+\|\lambda^*-\lambda_\varepsilon\|_{\mathscr{Q}}\leqslant\mathrm{C}\varepsilon$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* α, $\|a\|$ *et* β *avec :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \|a\| &:=& \displaystyle\sup_{u\in\mathscr{V},v\in\mathscr{V}}\frac{|a(u,v)|}{\|u\|_{\mathscr{V}}\,\|v\|_{\mathscr{V}}} \\[2ex] a(v,v) &\geqslant& \alpha\|v\|^2_{\mathscr{V}} \quad \forall\, v\in\mathrm{K} \quad \textit{avec}\ \alpha>0 \\[2ex] \beta &=& \displaystyle\inf_{\lambda\in\mathrm{H}^\perp}\sup_{v\in\mathscr{V}}\frac{b(v,\lambda)}{\|\lambda\|_{\mathscr{Q}}\,\|v\|_{\mathscr{V}}}=\inf_{v\in\mathrm{K}^\perp}\sup_{\lambda\in\mathscr{Q}}\frac{b(v,\lambda)}{\|\lambda\|_{\mathscr{Q}}\,\|v\|_{\mathscr{V}}}>0 \end{array}\right.$$

La solution du problème perturbé converge dans $\mathscr{V}\times\mathscr{Q}/\mathrm{K}er\,\mathrm{B}^t$ lorsque ε tend vers zero, vers la solution du **Problème B.1** non-perturbé.

En pratique, $c(\cdot,\cdot)$ est coercive et symétrique et s'écrit $c(\lambda,\mu)=\varepsilon(\lambda,\mu)_{\mathscr{Q}}$ avec $\varepsilon\geqslant 0$. En notant $\mathrm{R}_{\mathscr{Q}}:\mathscr{Q}\to\mathscr{Q}'$ l'isomorphisme entre $\mathscr{Q}$ et son dual $\mathscr{Q}'$ associé au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathscr{Q}}$ (**Théorème 1**), le **Problème 2** peut être écrit de la façon suivante :

$$a(u_\varepsilon,v)+\frac{1}{\varepsilon}\langle\mathrm{R}^{-1}_{\mathscr{Q}}\mathrm{B}u_\varepsilon,\mathrm{B}v\rangle_{\mathscr{Q}\times\mathscr{Q}'}=\langle f,v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}+\frac{1}{\varepsilon}\langle\mathrm{R}^{-1}_{\mathscr{Q}}g,\mathrm{B}v\rangle_{\mathscr{Q}\times\mathscr{Q}'}$$

Puisque $\mathrm{R}_{\mathscr{Q}}^{-1} \equiv \mathrm{R}_{\mathscr{Q}'}$, le **Problème 2** avec $c(\lambda,\mu) = \varepsilon(\lambda,\mu)_{\mathscr{Q}}$ et $\varepsilon > 0$ est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a(u_\varepsilon,v) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\mathrm{B}u_\varepsilon,\mathrm{B}v)_{\mathscr{Q}'} & = & \langle f,v\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}} + \dfrac{1}{\varepsilon}(g,\mathrm{B}v)_{\mathscr{Q}'}, \quad \forall\, v \in \mathscr{V} \\ \lambda & = & \dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{R}_{\mathscr{Q}'}(g - \mathrm{B}u_\varepsilon) \end{array}\right. \tag{B.6}$$

La première équation $(\mathrm{B.6})_1$ peut être résolue par elle-même et la solution u_ε peut servir à exprimer λ d'après $(\mathrm{B.6})_2$.

Ce type de problème découle classiquement de méthodes de pénalisation appliquées à des problème sous contraintes. En effet, le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{\mathrm{B}u=g} \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f,u\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}$$

peut s'écrire :

$$\inf_u \left[\frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2\varepsilon}(\mathrm{B}u-g,\mathrm{B}u-g)_{\mathscr{Q}'} - \langle f,u\rangle_{\mathscr{V}'\times\mathscr{V}}\right]$$

De ce fait, de la même manière que pour le système (B.2), le **Problème 2** peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{A}u_\varepsilon + \mathrm{B}^t\lambda_\varepsilon & = & f \\ \mathrm{B}u_\varepsilon - \varepsilon\mathrm{R}_{\mathscr{Q}}\lambda_\varepsilon & = & g \end{array}\right. \tag{B.7}$$

Ce problème perturbé est vu classiquement comme une technique de stabilisation par pénalisation.

Remarque 7 *Ce résultat peut être appliqué à un problème discrétisé (*Boffi *et collab. [2013b]). Comme le terme de pénalisation* $1/\varepsilon(\mathrm{B}u_\varepsilon,\mathrm{B}v)_{\mathscr{Q}'}$ *a un impact négatif sur le conditionnement de l'opérateur discrétisé lorsque* ε *tend vers zéro, les méthodes de pénalisation ne sont en général pas recommandé lorsque des méthodes itératives sont utilisées pour la résolution de systèmes linéaires.*

Remarque 8 *Le problème perturbé ainsi défini peut être résolu par un algorithme de type Uzawa (*Fortin *et* Glowinski *[1983];* Glowinski *et* Le Tallec *[1989]). Dans ce cas l'erreur due au terme de pénalisation peut être éliminée en quelques itérations et l'on obtient à convergence la solution du problème de point-selle initial non perturbé (**Section 6.3.3.2**).*

Annexe C

Construction d'une base macroscopique quadratique à partir des déplacements d'interface

C.1 Définition de la base

Dans cette section, la construction d'une base orthonormée $\mathbf{e}_\gamma^{\mathrm{M}}$ appartenant à $\mathscr{F}_\gamma \cap \mathscr{W}_\gamma$ est proposée. Pour ce faire, une base orthonormée $(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est introduite sur chaque face γ (voir **Figure C.1**). La décomposition du tenseur $\left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}}(\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{C}}) - \mathbf{I}_d\right)$ en une partie symétrique $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}$, et une

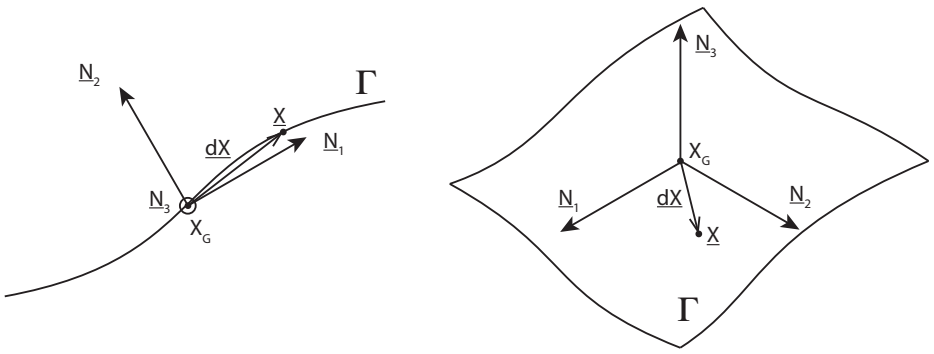


FIGURE C.1 – Illustrations (a) d'une interface unidimensionnelle issue d'un problème 2D et (b) d'une interface bidimensionnelle issue d'un problème 3D.

partie anti-symétrique $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{M}}$, permet d'écrire la relation (5.3) sous la forme suivante, sur une face γ :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{W}}_\gamma(\underline{\mathrm{X}}) &= \underline{u}_{\mathrm{G}}^* + \left(\mathbf{F}^{\mathrm{M}} - \mathbf{I}_d\right)\cdot d\underline{\mathrm{X}} + \mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} + 1/2\,\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : d\underline{\mathrm{X}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} + \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \\
&= \underline{u}_{\mathrm{G}}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}\cdot d\underline{\mathrm{X}} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{M}}\cdot d\underline{\mathrm{X}} + \mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} + 1/2\,\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : d\underline{\mathrm{X}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} + \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}}) \\
&= \underbrace{\underline{u}_{\mathrm{G}}^*}_{\text{translation}} + \underbrace{\underline{\omega}_{\mathrm{M}} \wedge d\underline{\mathrm{X}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}\cdot d\underline{\mathrm{X}} + \mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} \otimes d\underline{\mathrm{X}}}_{\text{rotation/extension}} + \underbrace{1/2\,\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : d\underline{\mathrm{X}} \otimes d\underline{\mathrm{X}}}_{\text{quadratique}} + \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}})
\end{aligned}$$

où ω_{M} est défini dans la base $(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$ tel que :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{M}} := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3^{\mathrm{M}} & \omega_2^{\mathrm{M}} \\ \omega_3^{\mathrm{M}} & 0 & -\omega_1^{\mathrm{M}} \\ -\omega_2^{\mathrm{M}} & \omega_1^{\mathrm{M}} & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)} \quad \text{avec} \quad \underline{\omega}_{\mathrm{M}} = \omega_i^{\mathrm{M}}\,\underline{\mathrm{N}}_i$$

Les vecteurs $d\underline{\mathrm{X}}$, $\Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}}$ et $\underline{\omega}_{\mathrm{M}}$ sont exprimés dans la base $(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$ tels que $d\underline{\mathrm{X}} = s_i\,\underline{\mathrm{N}}_i$, $\Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} = a_i\,\underline{\mathrm{N}}_i$ et $\underline{\omega}_{\mathrm{M}} = \omega_i^{\mathrm{M}}\,\underline{\mathrm{N}}_i$. A partir des propriétés de symétrie des tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}$ et $\mathbf{G}^{\mathrm{M}}$, exprimés dans la base

$(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$, il est possible d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} \cdot d\underline{\mathrm{X}} &= 1/2\, \varepsilon_{\mathrm{M},ij} \left(s_j \underline{\mathrm{N}}_i + s_i \underline{\mathrm{N}}_j \right) \\
\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : \Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} &= 1/2\, \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{ijk} (a_j s_k + a_k s_j) \underline{\mathrm{N}}_i \\
\mathbf{G}^{\mathrm{M}} : d\underline{\mathrm{X}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} &= \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{ijk} (s_j s_k) \underline{\mathrm{N}}_i
\end{aligned}$$

En conséquence, le champ de déplacement d'interface peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{W}}_\gamma(\underline{\mathrm{X}}) = u^*_{\mathrm{G},i} \underline{\mathrm{N}}_i + \omega^{\mathrm{M}}_i (\underline{\mathrm{N}}_i \wedge s_j \underline{\mathrm{N}}_j) + 1/2\, \varepsilon^{\mathrm{M}}_{ij} \left(s_j \underline{\mathrm{N}}_j + s_i \underline{\mathrm{N}}_i \right) \\
+ 1/2\, \mathrm{G}^{\mathrm{M}}_{ijk} \left(a_j s_k + a_k s_j + s_j s_k \right) \underline{\mathrm{N}}_i + \underline{w}(\Delta\underline{\mathrm{X}})
\end{aligned} \tag{C.1}$$

et la base macroscopique non-orthogonale suivante peut être utilisée pour extraire de $\underline{\mathrm{W}}_\gamma$ les composantes quadratiques des déplacements sur chaque face γ :

$$\widetilde{\mathbf{e}}^{\mathrm{M}}_\gamma = \left(\underline{\mathrm{N}}_i \,,\, \underline{\mathrm{N}}_i \wedge d\underline{\mathrm{X}} \,,\, 1/2((d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_i)\underline{\mathrm{N}}_j + (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_j)\underline{\mathrm{N}}_i) \,,\, (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_j)(d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_k)\underline{\mathrm{N}}_i \right)_{i,j,k=1,2,3}$$

En effet, les composantes $(\Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} \otimes d\underline{\mathrm{X}} + \left(\Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} \otimes d\underline{\mathrm{X}}\right)^{\mathrm{T}})\underline{\mathrm{N}}_i$ sont générées par les fonctions qui décrivent l'espace des déplacements linéaires de $\underline{\mathrm{W}}_\gamma$: $(\underline{\mathrm{N}}_i \wedge d\underline{\mathrm{X}} \,,\, (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_i)\underline{\mathrm{N}}_j + (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_j)\underline{\mathrm{N}}_i)_{i,j=1,2,3}$.

Remarque 9 *Le sous-espace généré par la base* $(\underline{\mathrm{N}}_i \,,\, \underline{\mathrm{N}}_i \wedge d\underline{\mathrm{X}})_{i=1,2,3}$ *qui décrit les translations et rotations des déplacements d'interface, appartient à* $\mathscr{F}_\gamma \cap \mathscr{W}_\gamma$. *Elle décrit donc également l'espace des résultantes et des moments des distributions d'effort sur* γ. *En effet, les résultantes et moments exprimés au point* X_{G} *de la face* γ *s'écrivent respectivement :*

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{R}} &\overset{def}{=} \int_\gamma \underline{\mathrm{F}} \,\mathrm{d}\Gamma \\
\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} &\overset{def}{=} \int_\gamma d\underline{\mathrm{X}} \wedge \underline{\mathrm{F}} \,\mathrm{d}\Gamma
\end{aligned}$$

Leurs projections sur $\underline{\mathrm{N}}_i$ *s'écrivent donc :*

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{R}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_i &= \int_\gamma \underline{\mathrm{F}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_i \,\mathrm{d}\Gamma \\
\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_i &= \int_\gamma \left(d\underline{\mathrm{X}} \wedge \underline{\mathrm{F}} \right) \cdot \underline{\mathrm{N}}_i \,\mathrm{d}\Gamma = \int_\gamma \underline{\mathrm{F}} \cdot \left(\underline{\mathrm{N}}_i \wedge d\underline{\mathrm{X}} \right) \mathrm{d}\Gamma
\end{aligned}$$

Ainsi, pour extraire les composantes des résultantes et des moments d'une distribution d'effort $\underline{\mathrm{F}}$ *sur* γ, *la base* $(\underline{\mathrm{N}}_i \,,\, \underline{\mathrm{N}}_i \wedge d\underline{\mathrm{X}})_{i=1,2,3}$ *peut également être proposée.*

Dans le cadre d'un problème 3D, comprenant des faces bidimensionnelles γ planes, les coordonnées d'interface s'écrivent $d\underline{\mathrm{X}} = s_1\underline{\mathrm{N}}_1 + s_2\underline{\mathrm{N}}_2$ et $\Delta\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{G}} = a_1\underline{\mathrm{N}}_1 + a_2\underline{\mathrm{N}}_2 + a_3\underline{\mathrm{N}}_3$. Ainsi, les vecteurs $\widetilde{\mathbf{e}}^{\mathrm{M}}_\gamma = (\widetilde{e}^{\mathrm{M}}_i)_{i=1\ldots n_{\mathrm{M}}}$ de la base quadratique des déplacements d'interface s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_i &=& \underline{\mathrm{N}}_i \quad \text{pour } i = 1,2,3 \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_4 &=& \underline{\mathrm{N}}_1 \wedge d\underline{\mathrm{X}} = (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_2)\underline{\mathrm{N}}_3 \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_5 &=& \underline{\mathrm{N}}_2 \wedge d\underline{\mathrm{X}} = -(d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)\underline{\mathrm{N}}_3 \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_6 &=& \underline{\mathrm{N}}_3 \wedge d\underline{\mathrm{X}} = (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)\underline{\mathrm{N}}_2 - (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_2)\underline{\mathrm{N}}_1 \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_7 &=& (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)\underline{\mathrm{N}}_1 \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_8 &=& (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_2)\underline{\mathrm{N}}_2 \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_9 &=& 1/2\, ((d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)\underline{\mathrm{N}}_2 + (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_2)\underline{\mathrm{N}}_1) \\
\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_i &=& (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_j)(d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_k)\underline{\mathrm{N}}_i \quad \text{pour } i = 1,2,3 \text{ et } j,k = 1,2 \text{ tels que } k \geq j
\end{array} \right. \tag{C.2}$$

Cette base macroscopique $\widetilde{\mathbf{e}}^{\mathrm{M}}_\gamma$ contient 18 fonctions macroscopiques $\widetilde{\underline{e}}^{\mathrm{M}}_i$. A l'image de ce qui a été proposé par VIOLEAU [2007], les 9 premières fonctions macroscopiques de (C.2) correspondent à

une base macroscopique linéaire pour une interface bidimensionnelle plane. Le cas d'une interface non-plane a également été décrit dans VIOLEAU [2007].

Dans le cadre d'un problème 2D comprenant des faces unidimensionnelles planes, sur chaque face γ, la base macroscopique quadratique contient 6 fonctions macroscopiques définies par les fonctions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \underline{\widetilde{e}}_1^{\mathrm{M}} & = & \underline{\mathrm{N}}_1 \\ \underline{\widetilde{e}}_2^{\mathrm{M}} & = & \underline{\mathrm{N}}_2 \\ \underline{\widetilde{e}}_3^{\mathrm{M}} & = & \underline{\mathrm{N}}_3 \wedge d\underline{\mathrm{X}} = (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)\underline{\mathrm{N}}_2 \\ \underline{\widetilde{e}}_4^{\mathrm{M}} & = & (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)\underline{\mathrm{N}}_1 \\ \underline{\widetilde{e}}_5^{\mathrm{M}} & = & (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)^2\underline{\mathrm{N}}_1 \\ \underline{\widetilde{e}}_6^{\mathrm{M}} & = & (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)^2\underline{\mathrm{N}}_2 \end{array}\right. \tag{C.3}$$

Comme cela a été montré par LOISEAU [2001], les 4 premières fonctions macroscopiques de (C.3) correspondent à une base macroscopique linéaire pour une interface unidimensionnelle plane.

A partir de la définition de $\widetilde{\mathbf{e}}_\gamma^{\mathrm{M}}$, il est possible de définir une base macroscopique $\mathbf{e}_\gamma^{\mathrm{M}}$, orthonormale au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\gamma$. Le procédé d'orthonormalisation est détaillé à la **Section C.2** ci-dessous.

Dans le cas d'un problème 2D par exemple, si $\mathrm{X_G}$ est le centre géométrique de γ et $(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$ ses axes principaux d'inertie, la base macroscopique $\mathbf{e}_\gamma^{\mathrm{M}}$ orthonormée au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\gamma$ s'écrit :

$$\mathbf{e}_\gamma^{\mathrm{M}} = \left(\frac{\underline{\mathrm{N}}_1}{\sqrt{\mathrm{L}}},\frac{\underline{\mathrm{N}}_2}{\sqrt{\mathrm{L}}},\frac{s_1\underline{\mathrm{N}}_2}{\sqrt{\mathrm{L}^3/12}},\frac{s_1\underline{\mathrm{N}}_1}{\sqrt{\mathrm{L}^3/12}},\sqrt{\frac{180}{\mathrm{L}^5}}\left(s_1^2-\frac{\mathrm{L}^2}{12}\right)\underline{\mathrm{N}}_1,\sqrt{\frac{180}{\mathrm{L}^5}}\left(s_1^2-\frac{\mathrm{L}^2}{12}\right)\underline{\mathrm{N}}_2\right) \tag{C.4}$$

avec $s_1 = (d\underline{\mathrm{X}} \cdot \underline{\mathrm{N}}_1)$ et L la longueur γ.

C.2 Orthonormalisation des fonctions de la base macroscopique

Il a été proposé, à la **Section 2.4.2**, d'utiliser une base orthonormée afin de définir les projecteurs macroscopiques (2.14) et (2.15). Cette section décrit la construction d'une base orthonormée $\mathbf{e}_\gamma^{\mathrm{M}}$ à partir de la base $\widetilde{\mathbf{e}}_\gamma^{\mathrm{M}}$.

C.2.1 Propriétés d'orthonormalisation des composantes de translation

Les trois premiers éléments $(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$ de la base sont orthogonaux au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\gamma$. Afin de les orthonormaliser au sens de ce produit scalaire, les notations suivantes sont utilisées :

$$\forall\, i = 1,2,3 \quad \mathrm{mes}(\gamma) = (\underline{\widetilde{e}}_i^{\mathrm{M}},\underline{\widetilde{e}}_i^{\mathrm{M}}) = \int_\gamma \mathrm{d}\Gamma \tag{C.5}$$

Ainsi, à partir de la base orthonormée $(\underline{\mathrm{N}}_1,\underline{\mathrm{N}}_2,\underline{\mathrm{N}}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la base suivante :

$$(\underline{e}_1^{\mathrm{M}},\underline{e}_2^{\mathrm{M}},\underline{e}_3^{\mathrm{M}}) = \left(\frac{\underline{\mathrm{N}}_1}{\sqrt{\mathrm{mes}(\gamma)}},\frac{\underline{\mathrm{N}}_2}{\sqrt{\mathrm{mes}(\gamma)}},\frac{\underline{\mathrm{N}}_3}{\sqrt{\mathrm{mes}(\gamma)}}\right)$$

est orthonormée au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\gamma$.

C.2.2 Propriétés d'orthonormalisation des composantes linéaires

Afin d'orthonormaliser les composantes linéaires de la base, il est possible de montrer les propriétés suivantes :

Proposition 2 *Si le point* $\mathrm{X_G}$ *est le centre géométrique de la face* γ*, alors :*

$$\forall\, i,j = 1,2,3 \quad \int_\gamma \underline{\mathrm{N}}_i \cdot (\mathrm{N}_j \wedge d\underline{\mathrm{X}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0$$

La démonstration est triviale pour des interfaces planes, dans la mesure où $\int_\gamma \underline{N}_i \cdot (N_j \wedge d\underline{X})\,d\Gamma = (\underline{N}_j \wedge \underline{N}_i) \cdot \int_\gamma d\underline{X}\,d\Gamma$ et par définition $\int_\Gamma d\underline{X}\,d\Gamma = 0$ si X_G est le centre géométrique de γ.

Proposition 3 *Les trois éléments* $\left(\underline{N}_1 \wedge d\underline{X}\,,\,\underline{N}_2 \wedge d\underline{X}\,,\,\underline{N}_3 \wedge d\underline{X}\right)$ *sont orthogonaux au sens du produit scalaire* $(\cdot,\cdot)_\gamma$ *si* $(\underline{N}_1,\underline{N}_2,\underline{N}_3)$ *sont les axes principaux d'inertie de* γ.

En effet :

$$\begin{aligned}\forall\, i,j = 1,2,3 \quad (i \neq j) \quad \int_\gamma (\underline{N}_i \wedge d\underline{X}) \cdot (\underline{N}_j \wedge d\underline{X})\,d\Gamma &= \underline{N}_i \cdot \int_\gamma d\underline{X} \wedge (\underline{N}_j \wedge d\underline{X})\,d\Gamma \\ &= \underline{N}_i \cdot \underline{J}_0(\gamma,\underline{N}_j) \\ &= 0\end{aligned}$$

où $\underline{J}_0(\gamma,\cdot)$ est l'opérateur d'inertie au point X_G de la face γ. En notant I_i le moment d'inertie de γ par rapport à l'axe $(\underline{X}_G,\underline{N}_i)$, il vient :

$$\forall\, i = 1,2,3 \quad I_i = \underline{N}_i \cdot \underline{J}_0(\gamma,\underline{N}_i)$$

Proposition 4 *Si* $\underline{X}_G$ *est le centre de masse de* γ *et si* $(\underline{N}_1,\underline{N}_2,\underline{N}_3)$ *sont les axes principaux d'inertie de* γ, *alors la base suivante :*

$$\left(\underline{e}_1^M,\underline{e}_2^M,\underline{e}_3^M,\underline{e}_4^M,\underline{e}_5^M,\underline{e}_6^M\right) = \left(\frac{\underline{N}_1}{\sqrt{\mathrm{mes}(\gamma)}},\frac{\underline{N}_2}{\sqrt{\mathrm{mes}(\gamma)}},\frac{\underline{N}_3}{\sqrt{\mathrm{mes}(\gamma)}},\frac{\underline{N}_1 \wedge \underline{OM}}{\sqrt{I_1}},\frac{\underline{N}_2 \wedge \underline{OM}}{\sqrt{I_2}},\frac{\underline{N}_3 \wedge \underline{OM}}{\sqrt{I_3}}\right)$$

est orthonormale au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\gamma$.

La démonstration est triviale à partir de la **Proposition 2** et de la **Proposition 3**.

Ainsi, d'après la **Proposition 4**, les vecteurs $(\underline{N}_1,\underline{N}_2,\underline{N}_3)$ doivent être choisis comme les axes principaux d'inertie de la face γ et X_G comme le centre géométrique de γ.

Remarque 10 *Le choix de la base macroscopique* $\mathbf{e}_\gamma^M$ *est arbitraire. D'autres choix pourraient être faits en ce qui concerne la description des quantités macroscopiques. En suivant la même démarche, une base par exemple affine, cubique, quadratique ou biquadratique aurait pu être proposée. Le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de* LADEVÈZE *et collab. [2001];* LOISEAU *[2001] pour d'autres choix, ou encore à* GUIDAULT *et collab. [2008] pour un choix de base macroscopique discontinue.*

C.2.3 Propriétés d'orthonormalisation des composantes quadratiques

Si le point $\underline{X}_G$ est le centre de masse de la surface γ et si $(\underline{N}_1,\underline{N}_2,\underline{N}_3)$ sont les axes principaux d'inertie de la surface γ, il est possible de montrer, à partir de la **Proposition 2** et de la **Proposition 3** que $\left(\underline{e}_1^M,\underline{e}_2^M,\underline{e}_3^M\right)$ est orthogonale à $\left(\underline{\tilde{e}}_4^M,\ldots,\underline{\tilde{e}}_9^M\right)$, que $\left(\underline{e}_4^M,\underline{e}_5^M,\underline{e}_6^M\right)$ est orthogonale à $\left(\underline{\tilde{e}}_{10}^M,\ldots,\underline{\tilde{e}}_{18}^M\right)$ et que $\left(\underline{\tilde{e}}_7^M,\ldots,\underline{\tilde{e}}_9^M\right)$ est orthogonale à $\left(\underline{\tilde{e}}_{10}^M,\ldots,\underline{\tilde{e}}_{18}^M\right)$. Pour les composantes macroscopiques restantes il vient, $\forall\, i,j,k,l,m,n = 1,2,3$,

$$\begin{aligned}(\underline{e}_{1\ldots3}^M,\underline{e}_{10\ldots18}^M)_\gamma = \int_\gamma \underline{N}_i \cdot \left((d\underline{X}\cdot\underline{N}_j)(d\underline{X}\cdot\underline{N}_k)\underline{N}_l\right) d\Gamma &= \delta_{il}M_{jk} \\ (\underline{e}_{4\ldots6}^M,\underline{e}_{7\ldots9}^M)_\gamma = \int_\gamma (\underline{N}_i \wedge d\underline{X}) \cdot \left((d\underline{X}\cdot\underline{N}_j)\underline{N}_k\right) d\Gamma &= \delta_{mk}\varepsilon_{ilm}M_{lj} \\ (\underline{e}_{7\ldots9}^M,\underline{e}_{7\ldots9}^M)_\gamma = \int_\gamma \left((d\underline{X}\cdot\underline{N}_i)\underline{N}_j\right) \cdot \left((d\underline{X}\cdot\underline{N}_k)\underline{N}_l\right) d\Gamma &= \delta_{jl}M_{ik} \\ (\underline{e}_{10\ldots18}^M,\underline{e}_{10\ldots18}^M)_\gamma = \int_\gamma \left((d\underline{X}\cdot\underline{N}_i)(d\underline{X}\cdot\underline{N}_j)\underline{N}_k\right) \cdot \left((d\underline{X}\cdot\underline{N}_l)(d\underline{X}\cdot\underline{N}_m)\underline{N}_n\right) d\Gamma &= \delta_{kn}B_{ijlm}\end{aligned}$$

où $\mathbf{M}_G = \int_\gamma d\underline{X}\otimes d\underline{X}\,d\Omega$ et où $\mathbf{B}_G$ est un tenseur d'ordre 4 défini tel que : $\mathbf{B}_G = \int_\gamma d\underline{X}\otimes d\underline{X}\otimes d\underline{X}\otimes d\underline{X}\,d\Omega$.

Dans le cas particulier d'un problème 2D avec des interfaces unidimensionnelles planes de longueur L, les coordonnées locales s'écrivent $s_1 = (d\underline{X} \cdot \underline{N}_1)$, et $\mathbf{M}_G = \int_\gamma d\underline{X} \otimes d\underline{X}\, d\Omega$, écrit dans la base $(\underline{N}_1,\underline{N}_2,\underline{N}_3)$, est diagonale ($(\mathbf{M}_G)_{ij} = \delta_{ij} M_{ij}$ avec $M_{ii} = I_i$). Ainsi, la base quadratique sur la face γ définie par (C.3) a les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} (\underline{e}^i_\gamma, \underline{e}^i_\gamma)_\gamma &= \text{mes}(\gamma) = L, & \text{pour } i = 1,2 \\ (\underline{e}^i_\gamma, \underline{e}^i_\gamma)_\gamma &= I_1 = \dfrac{L^3}{12}, & \text{pour } i = 3,4 \\ (\underline{e}^i_\gamma, \underline{e}^i_\gamma)_\gamma &= \dfrac{L^5}{80}, & \text{pour } i = 5,6 \\ (\underline{e}^i_\gamma, \underline{e}^j_\gamma)_\gamma &= I_1 = \dfrac{L^3}{12}, & \text{pour } (i,j) = (1,5) \text{ et } (i,j) = (2,6) \\ (\underline{e}^i_\gamma, \underline{e}^j_\gamma)_\gamma &= 0, & \text{autrement} \end{cases} \tag{C.6}$$

Seules les deux paires de fonctions $(\underline{e}^M_1, \underline{e}^M_5)$ et $(\underline{e}^M_2, \underline{e}^M_6)$ ne sont pas orthogonales au sens du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\gamma$. Les fonctions $\underline{e}^M_5$ et $\underline{e}^M_6$ peuvent par exemple être orthogonalisées par un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, comme cela a été proposé par LADEVÈZE et collab. [2001] ou LOISEAU [2001] :

$$\underline{\tilde{e}}^M_5 = \underline{e}^M_5 - \frac{(\underline{e}^M_5, \underline{e}^M_1)}{\|\underline{e}^M_1\|} = \left((d\underline{X} \cdot \underline{N}_1)^2 - \frac{L^2}{12} \right) \underline{N}_1 \tag{C.7}$$

$$\underline{\tilde{e}}^M_6 = \underline{e}^M_6 - \frac{(\underline{e}^M_6, \underline{e}^M_2)}{\|\underline{e}^M_2\|} = \left((d\underline{X} \cdot \underline{N}_1)^2 - \frac{L^2}{12} \right) \underline{N}_2 \tag{C.8}$$

Annexe D

Exemple de mise en données pour l'implémentation non-intrusive du couplage de modèles non-compatibles

Le **Script D.1** (resp. **Script D.2** et **Script D.3**) présente un exemple de mise en données Z-set pour un maillage éléments finis défini dans le fichier global.geof (resp. local.geof et aux.geof). Les propriétés matériaux (mot clé `***material`), les conditions aux limites en déplacement (mot clé `**impose_nodal_dof`) ou en effort (mot clé `**pressure`) et la méthode de résolution (mot clé `***resolution`) sont décrits dans le fichier global.inp (resp. local.inp et aux.inp).

```
****calcul

 ***mesh                     % Maillage
  **file global.geof         %

 ***linear_solver mumps      % Solveur
 ***resolution               %
  **sequence                 %
   *time 1.                  %
   *increment 1              %
   *iteration 10             %
   *ratio 1e-6               %
   *algorithm p1p2p3         %

 ***python3                  % Appel API Python
    G_script.py             %

 ***bc                       % Conditions aux limites
  **impose_nodal_dof         %
    left  U1 0. time         %
    left  U2 0. time         %
    left  U3 0. time         %
  **pressure                 %
    right 50. tab            %
 ***table                    %
  **name tab                 %
   *time  0.   1.            %
   *value 0.   1.            %

 ***material                 % Comportement materiau
   *file periodic_equiv.mat  %

****return
```

Script D.1 – Exemple de fichier global.inp de mise en données Z-set.

Les trois problèmes sont exécutés en simultané via une architecture de calcul parallèle telle qu'illustrée à la **Figure 7.3** et initialisée sur 3 processus par une commande MPI du type :
`mpirun -n 1 Zrun global.inp : -n 1 Zrun local.inp : -n 1 Zrun aux.inp`
Ici, chaque problème est traité par un processus unique mais il serait possible de résoudre, par exemple, le problème local, par une méthode de décomposition de domaine sur plusieurs nœuds de calcul.

```
****calcul

 ***mesh                    % Maillage
  **file local.geof         %

 ***linear_solver mumps     % Solveur
 ***resolution              %
  **sequence                %
   *time 1.                 %
   *increment 1             %
   *iteration 10            %
   *ratio 1e-6              %
   *algorithm p1p2p3        %

 ***python3                 % Appel API Python
    L_script.py             %

 ***table                   %
  **name tab                %
   *time  0.   1.           %
   *value 0.   1.           %

 ***material                % Comportements materiaux
  **elset YARN0             %
   *file torons.mat         %
  **elset YARN1             %
   *file torons.mat         %
  **elset YARN2             %
   *file torons.mat         %
   *rotation 0. 0. 90.      %
  **elset YARN3             %
   *file torons.mat         %
   *rotation 0. 0. 90.      %
  **elset MATRIX            %
   *file linear_epoxy.mat   %

****return
```

Script D.2 – Exemple de fichier local.inp de mise en données Z-set.

Dans ces exemples, les modèles local et auxiliaire ne sont soumis à aucune condition aux limites. Pour autant, les problèmes sont bien posés car il faut distinguer deux types de conditions :

- les conditions issues du calcul mécanique : conditions en déplacements imposés, pressions ou forces centrifuges, etc. (ces conditions sont en général communes aux problèmes global, local et auxiliaire) ;
- les conditions de raccords entre le problème global et local ou auxiliaire : conditions en déplacements imposés sur le problème local et auxiliaire et conditions (de correction) en efforts imposés sur l'interface intérieure du problème global.

Les conditions issues du calcul mécanique sont à renseigner par l'utilisateur, et définies dans les fichiers input (extension .inp pour Z-set). Les conditions de couplage sont pilotées par l'API Python de Z-set. Les conditions de couplage sur les modèles local et auxiliaire concernent des conditions en déplacement calculées à partir du problème global, donc si le problème global est bien posé, les modèles local et auxiliaire le sont aussi. Le mot clé `***python` indique qu'un script Python *G_script.py* (resp. *L_script.py* et *A_script.py*) est exécuté via l'API Z-set/Python.

```
****calcul

 ***mesh                      % Maillage
  **file aux.geof             %

 ***linear_solver mumps       % Solveur
 ***resolution                %
  **sequence                  %
   *time 1.                   %
   *increment 1               %
   *iteration 10              %
   *ratio 1e-6                %
   *algorithm p1p2p3          %

 ***python3                   % Appel API Python
    A_script.py               %

 ***table                     %
  **name tab                  %
   *time  0.   1.             %
   *value 0.   1.             %

 ***material                  % Comportement materiau
   *file periodic_equiv.mat   %

****return
```

Script D.3 – Exemple de fichier aux.inp de mise en données Z-set.

Les scripts Python *G_script.py*, *L_script.py* et *A_script.py* appelés par l'API modifient le début et la fin de chaque incrément, ainsi que le début et la fin des calculs. La **Figure D.1** illustre l'interfaçage Z-set/Python dans le cadre du problème global. Les 4 étapes de calcul interfacées avec les scripts Python sont données ci-dessous en fonction du problème global, local ou auxiliaire :

- initalize() - récupérer le maillage ; construire les bases principales d'inertie des interfaces ; calculer les opérateurs de couplage ; initialiser les conditions de raccord à l'interface entre le domaine global (initialiser le champ des efforts), local et auxiliaire (initialiser le champ des déplacements) ; imposer les conditions d'admissibilité cinématique entre les interfaces pour les domaines global et local ;
- start_increment() - récupérer et imposer les déplacements pour les domaines local et auxiliaire, ne rien faire pour le domaine global ;
- end_increment(ir) - pour le domaine global, envoyer les déplacements aux domaines local et auxiliaire, récupérer les efforts et imposer un chargement correctif sur le problème global, vérifier le critère de convergence (valeur de ir) ; pour les domaines local et auxiliaire, récupérer et calculer les efforts macroscopiques et les envoyer vers le problème global, ;
- end_problem() – fin de calcul, libérer la mémoire.

Seules des communications MPI Python suffisent pour échanger toutes les informations nécessaires à la résolution du l'algorithme de couplage. Ces communications MPI sont mises en place entre les problèmes global et local ainsi qu'entre les problèmes global et auxiliaire (voir la **Figure 7.3**). Des exemples de communications MPI sont donnés à la **Figure D.1** depuis un squelette du script Python *G_script.py*. L'avantage des communications MPI Python réside dans leur facilité d'utilisation. Il suffit d'initialiser un communicateur MPI, puis de renseigner le numéro du processus vers (ou depuis) qui la communication est faite. La gestion du type et de la taille de l'objet échangé est faite automatiquement contrairement à des communications C++ par exemple.

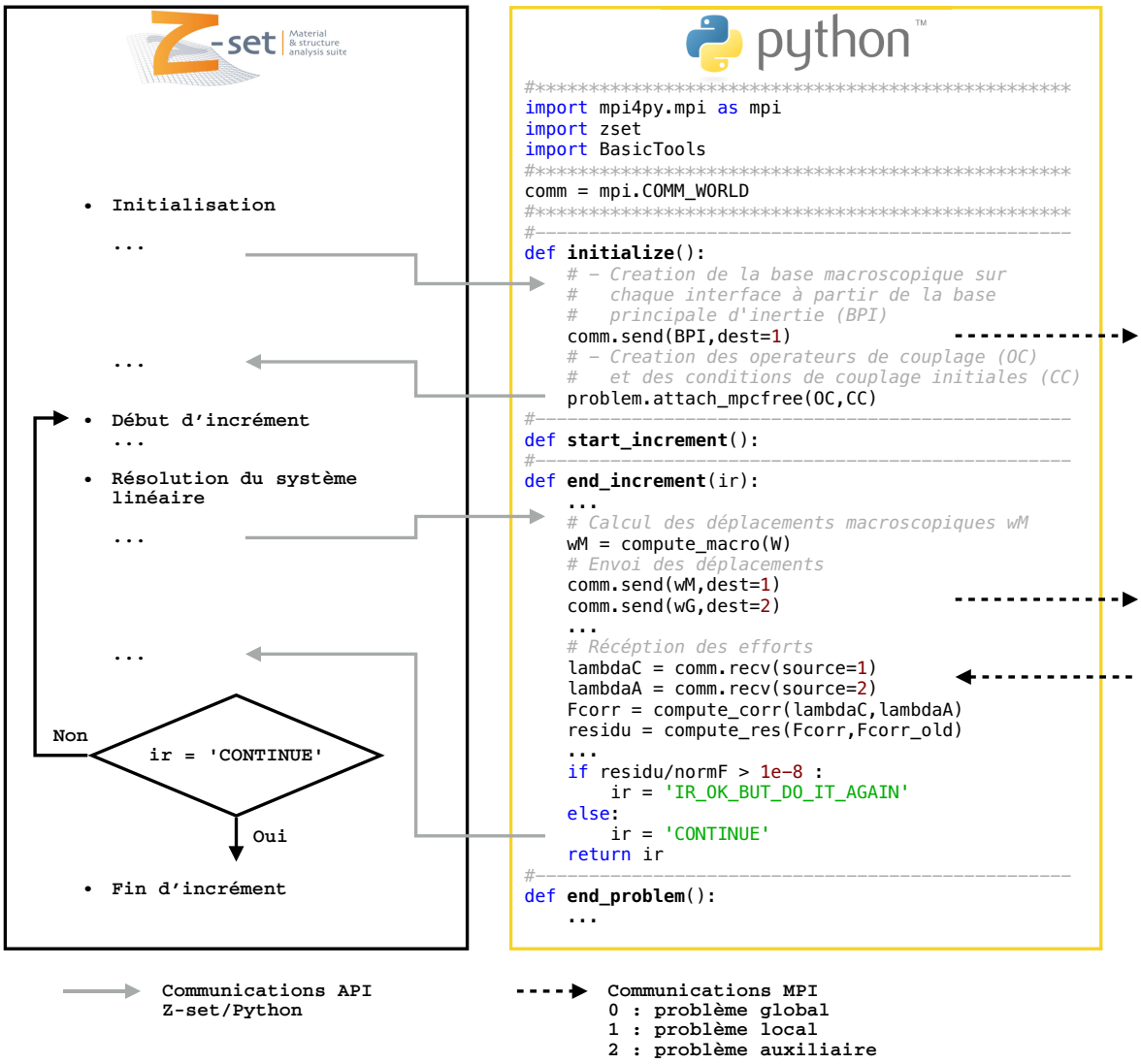


FIGURE D.1 – Illustration de l'interfaçage Z-set/Python sur l'exemple du problème global.

Références

BABUŠKA, I. 1971, «Error-bounds for finite element method», *Numerische Mathematik*, vol. 16, nº 4, doi :10.1007/BF02165003, p. 322–333, ISSN 0029-599X, 0945-3245. V

BOFFI, D., F. BREZZI et M. FORTIN. 2013a, «Approximation of Saddle Point Problems», dans *Mixed Finite Element Methods and Applications*, Springer, p. 265–335. V

BOFFI, D., F. BREZZI et M. FORTIN. 2013b, *Mixed Finite Element Methods and Applications*, *Springer Series in Computational Mathematics*, vol. 44, Springer, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-36518-8. VII, VIII, IX

BREZZI, F. 1974, «On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers», *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, vol. 8, nº R2, p. 129–151, ISSN 0764-583X. V

BREZZI, F. et M. FORTIN. 1991, «Approximation of Saddle Point Problems», dans *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, p. 36–88. V, VII

BREZZI, F. et L. D. MARINI. 2005, «The three-field formulation for elasticity problems», *GAMM-Mitteilungen*, vol. 28, nº 2, doi :10.1002/gamm.201490016, p. 124–153, ISSN 1522-2608. V

FORTIN, M. et R. GLOWINSKI. 1983, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*, Studies in Mathematics and Its Applications, Elsevier Science, ISBN 978-0-08-087536-1. IX

GLOWINSKI, R. et P. LE TALLEC. 1989, *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*, Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), ISBN 978-1-61197-083-8. IX

GUIDAULT, P.-A., O. ALLIX, L. CHAMPANEY et C. CORNUAULT. 2008, «A multiscale extended finite element method for crack propagation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, nº 5, doi :10.1016/j.cma.2007.07.023, p. 381–399. XIV

LADEVÈZE, P., O. LOISEAU et D. DUREISSEIX. 2001, «A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, nº 1-2, doi :10.1002/nme.274, p. 121–138. XIV, XV

LOISEAU, O. 2001, *Une Stratégie de Calcul Multiéchelle Pour Les Structures Hétérogènes*, thèse de doctorat, ENS de Cachan. XIII, XIV, XV

NOUY, A. 2003, *Une Stratégie de Calcul Multiéchelle Avec Homogénéisation En Temps et En Espace Pour Le Calcul de Structures Fortement Hétérogènes*, thèse de doctorat, Ecole normale supérieure, Cachan. Thèse de doctorat dirigée par Ladevèze, Pierre Génie mécanique Cachan, 2003 2003DENS0041. VI

POPP, A. 2012, *Mortar Methods for Computational Contact Mechanics and General Interface Problems*, thèse de doctorat, Universitätsbibliothek der TU München. IV

VIOLEAU, D. 2007, *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés*, thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan. XII, XIII

Annexe E

Liste des acronymes

API *Une interface de programmation est une façade clairement délimitée par laquelle un logiciel offre des services à d'autres logiciels. L'objectif est de fournir une porte d'accès à une fonctionnalité en cachant les détails de la mise en œuvre*[1]. 131–133, 141, XIV, XV

BDD Méthode primale de résolution de problème par décomposition de domaine. 27, 32

BVP Problème mécanique écrit sur la cellule élémentaire qui permet de faire le lien entre les descriptions macroscopique et microscopique d'un VER. 14, 15, 17, 18, 25, 79, 91–93, 97, 98, 119, 121

CMI Correspond à la composante macroscopique d'une quantité d'interface exprimée dans la base macroscopique elle-même. 90, 91, 93–98, 106

CND Contrôle Non-Destructif (CND). 56

CT-scan Technique de contrôle non-destructif qui consiste à mesurer l'absorption des rayons X par la matière puis, par traitement informatique, à numériser et reconstruire des images 2D ou 3D des structures à contrôler. vii, 56

DDM Méthode de résolution par décomposition de domaine. 27, 31

DNS Problème résolu à l'échelle microscopique sans technique d'homogénéisation. 13, 56, 76, 108, 133, 141

EDP Équations aux dérivées partiels. 58, 79, 99

FETI Méthode duale de résolution de problème par décomposition de domaine. 27, 32

FFT transformation de Fourier rapide. 14

KUBC Condition d'homogénéisation avec déformation homogène au contour. 15, 16, 91, 98

LMT Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT). Le LMT créé en 1975 est une unité mixte de recherche, commune à l'École Normale Supérieure de Cachan, au CNRS (Département des Sciences et Technologies de l'information et de l'Ingénierie, UMR 8535) et à l'Université Pierre et Marie Curie (UPMC). 27, 32, 61

MPC Relations linéaires entre plusieurs degrés de liberté d'un modèle éléments finis. 34, 120, 122, 128, 142

PBC Condition d'homogénéisation périodique. 15, 16, 79, 91

SBD méthode de submodeling en déplacement : *Specified Boundary Displacement* (SBD), ou *cut-boundary displacement method*. vii, 29, 57, 59, 61, 64–66, 68–72, 134–136

1. Martin Reddy, API Design for C++, Elsevier - 2011, (ISBN 9780123850041)

SUBC Condition d'homogénéisation avec contraintes homogènes au contour. 15, 91, 98

VER Volume Élémentaire Représentatif. vii, viii, 12–18, 25, 26, 58, 60, 62–64, 69, 71, 72, 77, 79, 81, 88, 89, 91–94, 97, 98, 100, 105, 108, 121, 134, 136

université PARIS-SACLAY

ÉCOLE DOCTORALE N°579
Sciences Mécaniques et Énergétiques, Matériaux et Géosciences (SMEMaG)

Titre : Méthode de couplage surfacique pour modèles non-compatibles de matériaux hétérogènes : approche micro-macro et implémentation non-intrusive

Mots clés : Analyse multiéchelle, Algorithme non-intrusif, Méthode global/local, Couplage de modèles non-compatibles, Homogénéisation numérique au second ordre, Approche micro-macro

Résumé : Un des objectifs prioritaires des industries aéronautiques est la réduction de la masse des structures, tout en permettant l'amélioration de leurs performances. Ceci passe notamment par l'utilisation de matériaux composites et le recours croissant à la simulation numérique, permettant la minimisation du nombre d'essais physiques et l'optimisation des structures.

L'enjeu de ces travaux est de pouvoir calculer précisément, sur des matériaux architecturés, l'influence de la microstructure, modélisée par exemple directement par tomographie, sur la tenue de pièces complètes. Pour prendre en compte à la fois l'ensemble de la pièce et les effets de son chargement, une approche global/local multiéchelle semble adaptée tant du point de vue des méthodes de calcul que des modèles matériaux utilisés.

Pour répondre à cette problématique, une méthode de couplage entre des modèles qui décrivent une même structure, mais à des échelles différentes, a été développée. Elle repose sur une séparation micro-macro des quantités d'interface, dans la zone de raccord surfacique entre les deux modèles. Pour faciliter son utilisation dans les bureaux d'étude, une technique de résolution itérative non-intrusive est également présentée. Elle permet de mettre en œuvre la méthode de couplage proposée dans un environnement logiciel industriel qui utilise bien souvent des codes éléments finis commerciaux fermés. La méthode est systématiquement comparée à d'autres méthodes de couplage de la littérature et la qualité des solutions est quantifiée par comparaison à une solution de référence obtenue par un calcul direct à l'échelle fine.

Les principaux résultats sont encourageants dans la mesure où ils montrent, dans des cas d'étude représentatifs bidimensionnels et tridimensionnels, sous des hypothèses d'élasticité linéaire, des solutions cohérentes avec les théories de l'homogénéisation au premier et second ordre. De fait, les solutions obtenues sont systématiquement de meilleure qualité avec la méthode proposée qu'avec les méthodes de la littérature, non-adaptées à des cas de couplage pour modèles non-compatibles.

Finalement, les perspectives sont multiples en raison des différentes alternatives de la méthode qui, dans un contexte industriel, pourrait offrir un véritable outil d'analyse visant à introduire un modèle local décrit à l'échelle fine dans un modèle global macroscopique homogénéisé.

Title: A surface-based coupling method for heterogeneous material models: micro-macro approach and non-intrusive implementation

Keywords: Multiscale analysis, Non-intrusive algorithm, Global/Local methodology, Non-conforming coupling formulations, Second-Order Computational Homogenization, Micro-macro approach

Abstract: One of the priority objectives of the aeronautics industry is to reduce the mass of structures while improving their performances. This involves the use of composite materials and the increasing use of digital simulation to optimize structures.

The major challenge of this project is to be able to accurately calculate the local variations of the microstructure - for instance detected by tomography and directly modelled from tomogram - on the behavior of an architectured material part. In order to take into account the whole structure and its load effects, a multi-scale approach seems to be a natural choice. Indeed, the related models to the part and its microstructure might use different formalisms according to each scale.

In this context, a coupling formulation was proposed in order to replace, in a non-intrusive way, a part of a homogenized macroscopic finite-element model by a local one described at a microscopic level. It is based on a micro-macro separation of interface quantities in the coupling area between the two models. To simplify its use in design offices, a non-intrusive iterative resolution procedure has also been proposed. It allows the implementation of the proposed coupling method in an industrial software environment that often uses closed commercial finite element codes. Different mechanical problems under linear elasticity assumption are proposed. The proposed method is systematically compared with other coupling methods of the literature and the quality of the solutions is quantified compared to a reference one obtained by direct numerical simulation at a fine scale.

The main results are promising as they show, for representatives test cases under linear elasticity assumption in two and three-dimensions, solutions that are consistent with first- and second-order homogenization theories. The solutions obtained with the proposed method are systematically the best approximations of the reference solution whereas the methods of the literature are less accurate and shown to be unsuitable to couple non-compatible models.

Finally, there are many perspectives due to the different alternatives of the method which could become, in an industrial context, a real analytic tool that aims to introduce a local model described at a fine scale, into a homogenized macroscopic global one.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France