UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES HUMAINES ET SOCIALES (555)

THÈSE EN CO-TUTELLE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LIBANAISE

Discipline : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Et

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Discipline : *MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET SCIENCES SOCIALES*

Spécialité : Didactique des Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement par

Elise ABDALLAH

Le 14 décembre 2020

Les mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur : une approche épistémologique et didactique

Thèse dirigée par M. **Amine EL SAHILI**, **Université Libanaise**

Et par Mme **Cécile OUVRIER-BUFFET**, **Université Paris-Est Créteil**

JURY

M. Sylvain GRAVIER,	**Directeur de Recherche CNRS,**	**Université Grenoble Alpes,**	**Président**
M. Amine EL SAHILI,	Professeur des Universités,	Université Libanaise,	**Co-Directeur de thèse**
Mme Cécile OUVRIER-BUFFET,	Professeur des Universités,	Université Paris-Est Créteil,	**Co-Directeur de thèse**
Mme Nina HAYFA,	Professeur des Universités,	Université Libanaise,	**Co-encadrant**
Mme Viviane DURAND-GUERRIER,	Professeur des Universités,	Université de Montpellier,	**Rapporteur**
M. Naim ROUADI,	Professeur des Universités,	Université de Balamand,	**Examinateur**

Remerciements

La fin de la thèse ! Mais dans la vie, chaque fin annonce le début d’un nouveau départ !

Tout d’abord je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Cécile Ouvrier-Buffet et Amine El Sahili pour avoir accepté d’encadrer ce travail en co-tutelle ainsi que pour leur disponibilité et leur soutien durant ces années. Jamais décourageants mes questionnements, toujours passionnés et enthousiastes, sans vous, je n’aurais probablement pas eu le plaisir de vivre cette aventure.
Merci encore à Cécile pour le suivi, pour m’avoir formée dans la recherche et pour m’avoir consacrée de longs moments de réflexion et de discussion ; et merci aussi pour tout le reste : les chocolats délicieux ainsi que les appels téléphoniques rassurants ces derniers mois.

Je ne me serais sans doute pas lancée dans ce travail de thèse sans les encouragements de Nina Hayfa . Grâce à elle, j’ai découvert la didactique des mathématiques dans un cours de Master au Liban et j’ai eu l’opportunité de travailler sur une thèse en co-tutelle. Je vous remercie sincèrement Nina pour avoir co-encadré ma thèse et pour tout le soutien que vous m’avez apporté.

Je remercie Viviane Durand-Guerrier et Sylvain Gravier, qui ont accepté d’être rapporteurs de cette thèse. Leurs lectures attentives et leurs remarques me seront précieuses. Merci à Naim Rouadi d’avoir accepté d’être examinateur lors de la soutenance.

Je remercie sincèrement Hussein Sabra pour son accompagnement toutes ces années et duquel j’ai beaucoup appris. Merci encore à Hussein et à Suzane El Hage pour leur accueil bienveillant à Reims et pour tous les bons moments partagés ensemble dont j’en garde de jolis souvenirs.

Une partie de mes recherches s’est appuyée sur des entretiens avec des chercheurs et des enquêtes et je remercie ici plus de vingt enseignants chercheurs pour le temps et l’attention qu’ils m’ont consacrés. Je salue par ailleurs tous les chercheurs rencontrés dans les différents séminaires, conférences et colloques nationaux et internationaux avec qui j’ai eu la chance d’échanger pendant ces cinq années. Leurs qualités humaines et scientifiques m’ont permis d’agrandir mon champ de perception en tant qu’humain avant tout.

Un grand merci à tous mes amis qui m’ont soutenue et encouragée en France et au Liban, en particulier Thérésia, pour toutes nos voyages, promenades, soirées de travail et de non-travail, nos discussions scientifiques, ludiques ! Merci aussi à Suzane pour ta présence, les journées de Golf, la cueillette, et tout le reste…

Je remercie finalement ma famille à qui je dois beaucoup et particulièrement mes parents. Sans la curiosité scientifique, le goût d’apprendre, l’esprit critique et la persévérance que m’ont transmis mes parents, je n’aurai pu mener à bien cette thèse. Je ne peux ici que les remercier infiniment pour tout ce qu’ils ont fait pour moi.
Enfin, je ne peux tourner cette page et terminer cette aventure sans remercier ma petite famille. Un seul mot peut résumer ce que Rabih a fait pour nous et particulièrement pour moi ces derniers mois : TOUT. S’occuper de Jane bien sûr et de la gestion du quotidien mais surtout me supporter et m’épauler à toute épreuve. Je l’ai beaucoup sollicité et il a toujours été présent. Pour tout ce qu’il m’apporte depuis que nous nous sommes rencontrés, je le remercie infiniment. Pour finir, une pensée pour notre fille, Jane, qui m’a permis de garder un contact avec le monde réel durant cette dernière année de thèse, de m’échapper de la rédaction et de tenir le coup dans les moments les plus difficiles.

Les mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur : une approche épistémologique et didactique

Notre thèse est centrée principalement sur l'étude et l'analyse épistémologiques et didactiques des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur avec un focus sur la théorie des graphes. Identifier les potentialités d'enseignement en mathématiques discrètes pour le supérieur est une question peu explorée en didactique des mathématiques. Nous nous interrogeons ainsi sur les points suivants : Comment les recherches en didactique des mathématiques étudient les mathématiques discrètes ? Quelle est l'épistémologie sous-jacente dans des ouvrages en mathématiques discrètes utilisés dans le supérieur ? Pour mener à bien notre étude, nous avons conduit un état de l'art en didactique des mathématiques. Nous avons ensuite organisé une exploration contemporaine de nature épistémologique, en interrogeant des chercheurs en mathématiques discrètes. Nous avons également utilisé une approche praxéologique et mobilisé la dialectique outil/objet pour analyser trois grands types de problèmes en théorie des graphes dans une sélection d'ouvrages universitaires. L'ensemble des résultats des expérimentations a été confronté à l'état de l'art. Les résultats de la thèse mettent en évidence une richesse du domaine en termes de bloc « logos », notamment au niveau des preuves, algorithmes et modélisation, des complexités de différentes natures, ainsi qu'une hétérogénéité suivant les ouvrages universitaires. Les résultats de cette recherche représentent un pas vers la construction d'une didactique des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur.

Mots clés : mathématiques discrètes, enseignement supérieur, épistémologie contemporaine, théorie des graphes, praxéologie

Discrete Mathematics at university level: an epistemological and didactical approach

Our thesis revolves around the epistemological and didactic study and analysis of discrete mathematics in higher education with a focus on graph theory. Identifying the teaching potential in discrete mathematics for higher education has shown to be little explored in the field of mathematics education. We are therefore interested in the following questions: How does research in mathematics education study discrete mathematics? What is the underlying epistemology in discrete mathematics used in higher education? To carry out our study, we conducted a state of the art in didactics of mathematics. We then conducted a contemporary exploration of an epistemological nature, by interviewing researchers in discrete mathematics. We also used a *praxeological* approach and mobilized the *outil/objet* dialectic to analyze three major groups of problems in graph theory in a selection of academic books. The results of our experimentations were compared to those of the state of the art. The results of the thesis highlight the richness of the field in terms of the "logos" block, particularly in terms of proofs, algorithms, modeling, and complexities of different nature, as well as a heterogeneity among the academic books. The results of this research represent a step towards the construction of didactics of discrete mathematics in higher education.

Key words : discrete mathematics, higher education, contemporary epistemology, graph theory, praxeology

Discipline *:* MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET SCIENCES SOCIALES

Spécialité : Didactiques des mathématiques

Université Libanaise

Ecole Doctorale des lettres et sciences humaines et sociales (EDLS)

Sin El Fil- Liban

Université de Reims Champagne-Ardenne

CEREP - EA 4692

57 rue Pierre Taittinger – 51100 REIMS

Table des Matières

Liste de Figures

Liste de Tableaux

Liste d'algorithmes

1 Introduction - Positionnement de la problématique et des choix théoriques

Ce chapitre constitue une introduction permettant de fixer les objectifs de nos travaux et de bien présenter le contexte de notre recherche.

1.1.1 Argumentaire général

1.1.2 Les mathématiques discrètes

Mais que veut dire « discret » ? Si le mot ne correspond pas à une notion mathématique précise, nous pouvons tout de même dire qu'il est le contraire du mot « continu ». Nous savons que l'ensemble des nombres réels constitue un ensemble continu. L'ensemble des nombres entiers, bien qu'infini, nous apporte la notion de « discret » dans le sens où les entiers sont « éloignés » les uns des autres, dans une acception naturelle. De fait, il est établi que nous vivons dans un monde « discret », depuis que nous savons que la matière possède un nombre fini d'atomes, et que nos mouvements, bien que continus, sont un ensemble des mouvements discrets (Sebö, 2006). Par ailleurs, la plupart des théories mathématiques classiques présentées dans les programmes scolaires traitent seulement du « continu », en tant que sciences de l'infini. Sebö (2006) précise ainsi que « les mathématiques discrètes veulent traiter de ce qui est discret (fini ?), mais trop complexe pour être traité "à la main", sans outils mathématiques ».
Le fait est que les mathématiques discrètes sont ancrées à la fois dans les mathématiques et dans les applications contemporaines. Plusieurs coopérations antérieures franco-libanaises ont eu lieu dans le cadre du projet européen Biohead-Citizen (FP6), du projet CEDRE-Ema2S, et du projet DOCENS. Le projet CEDRE dans lequel s'inscrit cette thèse avait pour vocation de penser de nouvelles modalités d'enseignement et d'apprentissage dans le supérieur, et de formuler des recommandations sur « l'assurance qualité » dans l'enseignement supérieur. En France et au Liban, l'étude des évolutions dans l'enseignement supérieur, menée à un niveau institutionnel, se doit de porter une attention particulière aux questions liées à la discipline elle-même.

La thèse développée ici porte sur les mathématiques du supérieur, situées au carrefour de l'informatique et des mathématiques, et en particulier sur le champ des mathématiques discrètes à un niveau épistémologique et didactique. Il est important de souligner aujourd'hui la nécessité, dans les recherches en didactique des mathématiques, de développer une didactique de l'enseignement supérieur (en plein essor au niveau international depuis quelques années), et plus particulièrement une didactique des mathématiques discrètes. En effet, quelques initiatives existent au niveau international (nous les présenterons plus amplement dans l'état de l'art), mais le champ de la didactique des mathématiques discrètes n'est pas encore délimité, alors qu'il existe des didactiques de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, etc., et que les contenus de l'enseignement supérieur intègrent également des éléments de mathématiques discrètes, parfois en lien avec l'informatique. Cette thèse propose ainsi une étude épistémologique pour construire les premières bases d'une didactique des mathématiques discrètes. Elle se situe donc à un niveau épistémologique de définition des contenus mathématiques, et à un niveau didactique d'étude des apprentissages dans le supérieur. Nous étudierons en particulier la manière dont les concepts et les raisonnements propres aux mathématiques discrètes sont définis, afin de caractériser plus précisément ce dernier domaine.

1.1.3 Constats généraux

Ces vingt dernières années ont coïncidé avec une augmentation des recherches dans le domaine de l'éducation autour des trois thèmes suivants : les mathématiques discrètes, la preuve, et la question des mathématiques du XXI^{e} siècle. Un fait consécutif aux développements numériques dans le monde entier, et à la nécessité de s'adapter à ces changements dans le but de bien former les étudiants à ce monde dynamique. Dans ce contexte, nous avons listé les travaux autour de ce thème au cours des vingt dernières années et nous présentons ci-dessous trois constats de différentes natures relatifs au champ des mathématiques discrètes :

1. Un constat sociétal : l'évolution de nos sociétés accorde une place grandissante aux mathématiques discrètes (dans différents domaines tels que l'informatique, les moyens de communication, l'imagerie médicale …). De plus, l'articulation entre différentes disciplines est avérée (mathématiques, informatique, mais aussi biologie, médecine, économie, etc.) (Hart & Martin, 2016; Ouvrier-Buffet, 2014; DIMACS, 2001).
2. Un constat épistémologique : les mathématiques discrètes constituent un champ des mathématiques jeune qui se structure et entre en interaction avec d'autres branches des mathématiques ; les objets et les modes de raisonnement des mathématiques discrètes sont spécifiques (DIMACS, 2001).
3. Un constat didactique : les mathématiques discrètes proposent des objets faciles d'accès, et créent un enjeu de vérité fort de par les objets et conjectures possibles ; nous observons par ailleurs que les curricula (du secondaire en particulier) évoluent avec l'arrivée d'éléments relatifs aux mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998; Cartier, 2008; Goldin G. , 2010).

Pour conclure, nous souhaitons rappeler que les mathématiques discrètes, bien que constituant une théorie mathématique pouvant apparaître facile d'accès par la nature de ses objets, demeurent un objet complexe en raison du travail mathématique de modélisation, de preuve, qu'elles impliquent. Nous constatons alors qu'il est nécessaire de faire des analyses épistémologiques et didactiques. L'enseignement des mathématiques discrètes est relativement peu étudié en didactique des mathématiques ; les travaux sur l'enseignement supérieur, dans lequel s'inscrit notre recherche, sont encore moins nombreux. Identifier les potentialités d'enseignement en mathématiques discrètes pour le supérieur est une question non explorée en didactique des mathématiques. La caractérisation de ce qui est effectivement enseigné en mathématiques discrètes dans le supérieur, des ressources utilisées, des épistémologies sous-jacentes, est aussi à établir (nous nous limitons ici au Liban et à la France).

1.1.4 Les mathématiques discrètes dans les *curricula* : aperçu de quelques cas

Au cours de ces trente dernières années, la place des mathématiques discrètes a considérablement évolué dans plusieurs pays, notamment les États-Unis, la France et la Hongrie. Les recherches concernant son développement sont en cours. Nous cherchons en particulier à mieux comprendre les intérêts qui justifient l'intégration des mathématiques discrètes dans les *curricula* de ces pays. Nous présentons dans cette partie les contextes et les raisons expliquant son intégration, en étudiant quatre cas (États-Unis, France, Hongrie, Liban).

1.1.4.1 Cas des États-Unis

Au début des années 1980, l'Association mathématique américaine (MAA) crée un comité dont l'objet est d'aider à concevoir un cours sur les mathématiques discrètes qui réponde aux besoins de l'informatique et qui s'intègre bien dans le programme traditionnel de mathématiques. Ce comité (dont les membres sont : Martha J. Siegel ; Alfs Berztiss ; Donald Bushaw ; Jerome

Goldstein ; Gerald Isaacs ; Stephen Maurer ; Anthony Ralston ; John Schemeelk) publie un rapport dans lequel il présente plusieurs recommandations (Ralston, 1989). Nous les résumerons ainsi :

- Les mathématiques discrètes devraient faire partie des deux premières années du programme de mathématiques dans toutes les universités ;
- Les cours de mathématiques discrètes devraient être des cours d'une durée d'un an qui peuvent être suivis indépendamment des cours d'analyse ;
- Les principaux thèmes des cours de mathématiques discrètes devraient être les notions de preuve, de récurrence, d'induction, de modélisation et de la pensée algorithmique ;
- Les mathématiques discrètes devraient être distinguées des mathématiques finies ;
- Les mathématiques discrètes devraient être enseignées par les mathématiciens ;
- Tous les étudiants en sciences et en ingénierie devraient suivre quelques cours de mathématiques discrètes. Les filières de mathématiques doivent comprendre au moins un cours en mathématique discrète ;
- Une attention particulière devrait être accordée à l'enseignement de l'analyse ; une intégration des méthodes des mathématiques discrètes dans les cours d'analyse, ainsi que l'utilisation d'opérateurs symboliques, devraient être envisagés ;
- Les lycées devraient introduire de nombreux concepts de mathématiques discrètes dans leur programme pour aider les élèves à améliorer leurs compétences de résolution de problèmes, et faciliter leur transition vers les études supérieures.

À la suite à ces recommandations, le rapport propose des pistes de contenus pouvant être inclus dans un cours des mathématiques discrètes :

- Ensembles : ensembles finis, notations, opérations sur les ensembles, sous-ensembles, parties d'un ensemble, ensembles des paires ordonnées, produits cartésiens d'ensembles finis, introduction à des ensembles indéfiniment dénombrables ;
- Système de numération : nombres naturels, entiers, les rationnels, les réels, le $\mathbb{Z}n$, les nombres premiers, les nombres composés, introduction sur les opérations et sur l'algèbre ;
- La nature de la preuve : utilisation des exemples pour démontrer une preuve directe, preuve indirecte, réciproque et contraposition, introduction à la récurrence, les algorithmes ;
- Logique formelle : analyse propositionnelle, règles de logique, quantificateurs et leurs propriétés, algorithmes et logique, simplification des expressions ;
- Fonctions et relations : relations d'ordre, propriétés de relations d'ordre, relations d'équivalence et partitions, fonctions et leurs propriétés, injection, surjection, bijection, inverses, composition des fonctions, équivalence des ensembles, récursivité, suites, preuves par récurrence ;
- Combinatoire : permutations, combinaisons, coefficients binomiaux et trinomiaux, ensembles dénombrables à partir d'autres ensembles (« *counting sets formed from other sets* ») ; principe des cages à pigeons, algorithmes pour générer des combinaisons et des permutations, équations de récurrence pour le dénombrement ;
- Relations de récurrence : exemples, modèles, algorithmes, preuves, paradigme de la récurrence, équations aux différences (« *difference equations* ») ;
- Graphes et digraphes : définitions, applications, représentations matricielles dans un graphe, algorithmes de problèmes de parcours, circuits, connectivité, graphes hamiltoniens et eulériens, relations d'ordre (ordre partiel et linéaire), éléments minimaux et maximaux, graphes orientés ;
- Arbres : arbres binaires, problèmes de recherche, arbres couvrant minimal, algorithmes des graphes ;
- Structures algébriques : algèbre de Boole, semi-groupes, monoïdes, groupes, exemples, applications et preuves ;

- Probabilités discrètes ou statistiques descriptives : évènement, affecter des probabilités, calcul des probabilités, probabilités conditionnelles, diagramme d'arbres, loi des grands nombres, statistique descriptive.

En 2004, un numéro spécial de ZDM[1] (2004) consacré aux mathématiques discrètes[2] et à la preuve note dans son introduction qu'au cours des vingt-cinq années qui viennent de s'écouler (fin des années 1970/début des années 1980), les mathématiques discrètes ont rapidement évolué dans leurs méthodologies, dans la manière dont elles sont perçues par les mathématiciens, et tout particulièrement dans la gamme de leurs applications. De surcroît, les mathématiques discrètes sont devenues un outil très important pour la recherche et développement dans des domaines comme la biologie, la chimie et l'informatique, par exemple.
Les mathématiques discrètes plongent leurs racines dans différentes domaines mathématiques, notamment la théorie des groupes, la géométrie, la théorie des nombres, la combinatoire algébrique, la théorie des graphes et la cryptographie. En conséquence, ce champ a été influencé par une grande variété de résultats mathématiques, de méthodes et de représentations. Les questions sur la place et le rôle de la preuve, et sa validité dans le champ des mathématiques discrètes, étaient également posées (Heinze, Anderson, & Reiss, 2004).
Depuis 2000, les mathématiques discrètes ont été intégrées dans les *curricula* aux États-Unis (avec comme sujets : « *combinatorics, iteration, and recursion, and vertex-edge graphs…* ») comme des objets mathématiques au niveau scolaire (K-12[3]) (NCTM, 2000, p. 31). Elles ne sont pas complètement présentes dans toutes les écoles, mais de nombreux enseignants utilisent dans leurs cours des objets qui sont issus des mathématiques discrètes. Les enseignants ont été formés à des sujets de mathématiques discrètes via des activités de développement professionnel. Les contenus font partie de plusieurs ouvrages, et de plusieurs « *standard textbook series* ». Cette introduction était en grande partie la conséquence, d'une part, du « Curriculum and Evaluation Standards » (1989) de la NCTM, qui recommandait d'inclure les mathématiques discrètes comme un « *standard* » ; et, d'autre part, du « Principles and Standards of School Mathematics » (2000) qui précisait qu'en tant que branche des mathématiques contemporaines, les mathématiques discrètes devraient faire partie du programme mathématiques scolaire (Rosenstein, 2016).
La monographie d'ICME-13 témoigne bien de la volonté des sociétés savantes de promouvoir l'enseignement des mathématiques discrètes au niveau scolaire (Hart & Martin, 2016). Néanmoins, celles-ci se sont rendu compte que les étudiants ont des difficultés en analyse et avec les mathématiques de base. De ce fait, les « Common Core State Standards » (CCSS), élaborés en 2009 et adoptés par la plupart des États n'accordent pas une place importante aux mathématiques discrètes. Rosenstein (2016) évoque ce phénomène dans sa communication dans ICME-13, et explique pourquoi les mathématiques discrètes ont été exclues des *curricula* :

> « The mistake that has been made is that the focus has shifted from college-readiness to calculus-readiness ».

Ce phénomène a conduit à la situation suivante : les programmes scolaires aux États-Unis mettent au second plan la pratique des mathématiques discrètes avec les élèves, au profit des mathématiques de base.

---

[1] Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.
[2] Les pays concernés dans ce numéro spécial sont variés : États-Unis, Allemagne, Canada, Royaume Unis, et les Pays-Bas. De plus, les articles recouvrent le niveau secondaire et supérieur (Licence) (« high school and undergraduate »)
[3] 4 ans à 18 ans.

1.1.4.2 Cas de la Hongrie

La Hongrie est un pays culturellement marqué par les mathématiques discrètes, et qui a vu naître des spécialistes célèbres des mathématiques discrètes, à l'instar de Paul Erdös. Il faut également citer Eugene Egerváry, qui peut tout à fait être considéré comme l'un des pères fondateurs de ce qui est appelé aujourd'hui l'optimisation combinatoire. Prolongeant les travaux antérieurs de Dénes Kőnig, Egerváry a décrit le théorème de dualité pour le *« weighted bipartite matching problem »* — aujourd'hui connu sous le nom de problème d'affectation. Il a démontré le résultat intégral, et a développé l'idée sous-jacente du premier algorithme de type « primal-dual » qui est appelé dans toute la littérature la « méthode hongroise ». Les idées d'Egerváry ont engendré un énorme corpus de recherches ultérieures dans des domaines tels que les flots de réseau, la programmation linéaire, l'optimisation matroïde ou la théorie des correspondances. Des groupes de recherche ont été établis au sein de l'Académie des sciences hongroise pour suivre la tradition établie par Egerváry et pour travailler sur des problèmes d'optimisation combinatoire et d'algorithmes[4].
La réforme de l'enseignement des mathématiques en Hongrie s'est passé comme suit : en 1962, Tamás Varga propose des pistes pour une réforme de l'enseignement des mathématiques dans un colloque international de l'UNESCO organisé à Budapest. Il commence à mener ses expérimentations en 1963, lesquelles mènent à un projet de réforme élaboré en 1972. La réforme est mise en place au niveau national en 1978 (Gosztonyi, 2012).
Selon Gosztoyni (2012), les mathématiciens de « l'École hongroise » pensent qu'il faut apprendre aux élèves à « penser mathématiquement ». Mais cette « pensée mathématique » ne se limite pas, pour les membres de cette « école », à la démonstration et à l'organisation du savoir : ils accordent une grande importance aux méthodes de la découverte qui, sans être sûres ou universelles, peuvent être développées par l'enseignement. Ainsi, il faut donner aux élèves l'opportunité d'accumuler de nombreuses expériences variées ; et l'enseignant a le rôle de les guider à travers une série de problèmes raisonnablement organisée. L'enseignement doit donc prendre la forme d'un dialogue entre l'enseignant et la classe, lors d'un processus de redécouverte collective des mathématiques. Ce processus doit être alimenté par la curiosité naturelle des élèves, par leurs questions, par leur envie ludique et leur goût artistique. L'apprentissage des mathématiques devient ainsi un processus plaisant, tenant compte des personnalités diverses des élèves, mais permet également de les éduquer à une pensée autonome, de former leur esprit critique.
Toujours selon Gosztonyi (2012), la réforme hongroise s'inspirait des réflexions épistémologiques approfondies des mathématiciens qui intervenaient à l'époque. Ces réflexions sont liées aux questions épistémologiques que pose le développement des mathématiques au XXe siècle dans le temps, mais entretiennent également des rapports avec la pratique de recherche de leurs concepteurs. Dans le cas hongrois, ces pratiques sont plutôt axées sur la logique, l'informatique, les probabilités et les mathématiques discrètes (Gosztonyi, 2012). La réforme hongroise menée par Varga a apporté de nouveaux contenus mathématiques. Le programme de 1978 regroupe le contenu mathématique en cinq grands thèmes : ensembles, logique ; arithmétique, algèbre ; relations, fonctions, séries ; géométrie, mesure ; combinatoire, probabilités, statistiques. Pour Varga, il existe une articulation entre ces différents domaines : au lieu qu'un seul domaine assure la cohérence des mathématiques étudiées, ils s'alimentent mutuellement. Une spécificité thématique distingue le programme de Varga : l'enseignement de la combinatoire et des probabilités. De fait, la combinatoire et les probabilités représentent deux centres d'intérêt traditionnels des recherches en mathématiques hongroises.
Cet aperçu historique montre que la place des mathématiques discrètes et de la preuve est tout à fait remarquable en Hongrie, au niveau scolaire. Cette situation est plus précisément due au

[4] https://web.cs.elte.hu/egres/

fait que le pays a, très tôt, développé une culture d'enseignement des mathématiques discrètes et de la preuve.

1.1.4.3 Cas de la France

En 1999, à l'initiative du ministère de l'Éducation Nationale, une commission de réflexion sur l'enseignement de mathématiques (CREM) est créée à la demande de plusieurs associations. Sa mission : « conduire, en amont du Conseil national des programmes et du groupe d'experts chargés d'élaborer les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire, une réflexion globale et à long terme sur l'enseignement des mathématiques de l'école élémentaire à l'université ». Cette commission était en majorité composée d'enseignants en mathématiques et de chercheurs. Le CREM produira quatre rapports d'étape : « La géométrie et son enseignement » ; « Informatique et enseignement des mathématiques » ; « Calcul » ; « Statistiques et probabilités », tous les quatre publiés ; puis un cinquième rapport intitulé « Formation des maîtres et recommandations associées ». L'introduction d'éléments de la théorie des graphes est essentiellement motivée par la volonté d'introduire un enseignement d'informatique dans l'enseignement des sciences mathématiques (Cartier, 2008). Le rapport « Informatique et enseignement des mathématiques » est le seul traitant explicitement les graphes. On trouvera ci-dessous une liste non-exhaustive des arguments liés à cette introduction :

> « un très grand nombre des problèmes ou de situations peuvent être modélisées par des graphes (un plan de métro, une carte routière) […] ; le graphe est sans doute un des exemples les plus simples pour lesquelles plusieurs représentations d'un même objet sont naturelles (un graphe peut être défini par la liste des sommets et de ses arêtes mais aussi par la liste de ses sommets et pour chacun d'eux la liste des successeurs ou bien encore par sa matrice d'adjacence) […] ; on peut illustrer l'influence du choix d'une structure de donnée particulière sur les algorithmes et initier à la notion de complexité en tentant de répondre à des questions simples comme : « deux sommets données sont-ils voisins ? » ou « combien y a-t-il de chemins de longueur donnée entre deux sommets donnés ? » […] ; les graphes se prêtent parfaitement bien à une introduction naturelle et progressive des structures de contrôles de base (si…alors…sinon…, tant que…faire…, boucles pour) et des types de données (tableaux, listes chaînées) présentes dans tout langage évolué » (Cartier, 2008, p. 31)

À partir de ces différents rapports, la Conseil national des programmes (CNP) rédige une lettre de cadrage préparatoire à la rédaction de nouveaux programmes mathématiques dans le secondaire par le Groupe d'experts pour les programmes scolaires (GEPS). Cette lettre de cadrage émet le souhait que des éléments de la théorie des graphes apparaissent dans les programmes de terminale économique et sociale (ES). Le choix de cette filière est cohérent avec un héritage historique : la théorie des graphes s'est développée au sein de la communauté des sciences économiques ; de plus, il offre à cette filière ES une spécificité dans l'enseignement des mathématiques par rapport à la filière scientifique. Le GEPS est responsable de la première transposition de la théorie des graphes dans l'enseignement secondaire en France. En 2000-2001, il rédige donc un nouveau programme pour la spécialité mathématiques de la termine ES, incluant des éléments de théorie des graphes. Ceci représente une entrée officielle des mathématiques discrètes en tant que telles dans les classes du secondaire (Cartier, 2008).
Après une douzaine d'années, les évaluations nationales, ainsi que l'enquête internationale Pisa (Programme internationale pour le suivi des acquis des élèves), montre bien que les résultats des élèves ne cessent de se dégrader, y compris pour les meilleurs d'entre eux (Villani & Torossian, 2018). Parmi les raisons invoquées, la souffrance des professeurs, et la disproportion entre les moyens investis et les résultats. La pression sociétale conduit à la mise en place d'une mission nationale portant sur l'enseignement des mathématiques. Cette mission propose vingt-et-une mesure principale et trente-deux recommandations complémentaires, organisées en sept grands chapitres.

La mission propose notamment de « repenser les branches des mathématiques dans les programmes ». Comme les contenus mathématiques enseignés évoluent avec le temps long, il est nécessaire de mettre en place une formation permanente des enseignants. Dans ce contexte, les mathématiques discrètes sont explicitement citées :

> « Les mathématiques discrètes, par exemple, sont trop marginales dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, alors qu'elles constituent, d'une part, un lien avec la recherche contemporaine et l'informatique et d'autre part un champ dans lequel il est permis de raisonner et prendre du plaisir sur des problèmes motivants avec des connaissances mathématiques minimales. » (Villani & Torossian, 2018, p. 36)

Le rapport soutient fortement que la modélisation ne doit pas être remplacé par les « contextualisation stérile » dont l'enseignement des mathématiques a souffert. Au contraire, elle doit représenter un enjeu primordial de la formation des enseignants et des élèves, avec le but de nourrir les « filières universitaires porteuses d'emplois de haute qualification ». Ces enseignements (modélisation, statistiques, mathématiques discrètes, géométrie) sont considérés par le rapport comme une source « infinie » pour conduire des projets interdisciplinaires qui nouent des liens avec l'informatique, comme les TPE (Travaux personnels encadrés), le Grand oral, ou le PPCP (projet pluridisciplinaire à caractère professionnel) en lycée professionnel. Plusieurs recommandations ont été émises autour de ces aspects, parmi lesquels nous retiendrons les suivantes :

> « Assurer, dans les projets disciplinaires ou interdisciplinaires (EPI, TPE, PPCP, Grand oral, etc.), une place importante aux mathématiques et à l'informatique. Veiller, dans les futurs programmes du lycée, à respecter les équilibres entre les branches des mathématiques. Veiller à construire des programmes cohérents et concis. […] Développer et renforcer les échanges entre les autres disciplines et les mathématiques […] ; Expérimenter, financer et évaluer sous trois ans, dès septembre 2018, dans au moins cinq établissements et un campus des métiers par académie, la mise en place de laboratoires de mathématiques en lien avec l'enseignement supérieur et conçus comme autant de lieux de formation et de réflexion (disciplinaire, didactique et pédagogique) des équipes. » (Villani & Torossian, 2018, pp. 37-49)

Cette présentation permet de mieux comprendre l'évolution de l'enseignement des mathématiques discrètes, mais également l'échelle institutionnelle des décisions en France. Quant aux recommandations émises par cette mission, nous n'avons pas pu encore constater la manière dont elles étaient appliquées. Et si nous possédons des donnés sur l'enseignement des mathématiques discrètes dans le secondaire, il n'existe pas d'informations spécifiques pour l'enseignement supérieur. Il existe cependant des collaborations entre mathématiciens et des didacticiens, à l'image des travaux menés par exemple par Denise Grenier, Charles Payan et Sylvain Gravier au sein de la Fédération de Recherche *Maths à Modeler*[5] et nous exploiterons ces travaux.

1.1.4.4 Cas du Liban

Le *curriculum* libanais a été profondément influencé par le curriculum français, jusqu'en 1997, date de publication des nouveaux programmes de ce pays francophone. Les mathématiques discrètes y sont présentes notamment au travers de l'arithmétique (entiers, nombres premier), ainsi que des statistiques et probabilités (au niveau du secondaire). L'étude des *curriculas* du secondaire au Liban serait à approfondir mais ce n'est pas notre propos ici.

Cette thèse s'inscrivant dans une coopération franco-libanaise, nous nous intéressons de près aux spécificités existantes dans les deux pays. De nombreuses recherches menées en France (notamment les travaux de Claude Berge (1963) et Adrian Bondy (2008)) ont connu des prolongements au Liban (travaux d'Amine el Sahili[6] et de Mohamed Kobaissy). De ce fait, et en raison de l'influence des sociétés de mathématiques avancées, des cours de mathématiques discrètes et de théorie des graphes ont fait en 2015-2016 leur apparition au sein des cursus de l'Université libanaise. Cette introduction des mathématiques discrètes prend la forme d'un

5 http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/recherches.html

6 http://www.aminalsahili.net/science/public.php

chapitre sur la théorie des graphes qui fait partie d'un cours avec plusieurs composantes de première année (L1) du parcours « mathématiques pures » ainsi qu'un cours sur la théorie des graphes en deuxième année (L2) du même parcours.
Pour le Liban comme pour la France, nous ne possédons pas suffisamment d'informations sur l'enseignement des mathématiques discrètes au supérieur. Nous réaliserons un questionnaire afin de recenser les éléments de mathématiques discrètes enseignés.

1.1.4.5 Synthèse

Les exemples qui précèdent montrent bien l'existence d'une culture construite sur des dizaines d'années. En Hongrie, des mathématiciens célèbres sont à l'origine de l'intégration des mathématiques discrètes dans les *curricula*. On constate également une volonté manifestée par des sociétés savantes, comme aux États-Unis, avec des réussites, et des échecs. En France et au Liban, ce sont des commissions (Kahane, 2000; Villani & Torossian, 2018) qui recommandent de réaliser une activité de mathématiques discrètes. La question de l'algorithmique discutée dans le rapport de la commission Kahane (2000) est à reprendre.
Il faut insister sur le fait que la place des mathématiques discrètes dans les *curricula* varie beaucoup suivant les pays, leur culture et leur histoire scientifique, leur relation propre à ce domaine. Tous ces éléments ont certainement un impact sur les *curricula*. Nous notons que la question de l'opposition entre informatique et mathématique n'est pas toujours tranchée. Qui est « responsable » de l'enseignement des mathématiques discrètes ? Cette question demeure sans réponse, en particulier aux États-Unis, pays dans lequel les informaticiens ont leur place dans les discussions sur l'enseignement des mathématiques discrètes. Dans l'enseignement supérieur américain, ce sont les mathématiciens qui ont pris en charge les mathématiques discrètes : cela se lit aux auteurs d'ouvrages destinés aux étudiants et aux recommandations du rapport mentionné précédemment (Ralston, 1989).
En effet, les mathématiques discrètes constituent une branche peu explorée en didactique et particulièrement dans l'enseignement supérieur, ce que l'on constate en notant le faible nombre d'articles portant sur l'enseignement des mathématiques discrètes au supérieur. Le champ des mathématiques discrètes a ses frontières ; mais il se trouve aussi à l'intersection d'autres domaines (tels que l'informatique et l'algèbre). Plusieurs questions se posent au niveau épistémologique et didactique (en termes d'enseignement et d'apprentissage). Essayer d'y répondre constitue une contribution à la délimitation de ce champ des mathématiques.

1.1.5 Contexte et premiers questionnements

Au cours des trente dernières années, les mathématiques discrètes se sont singulièrement développées. En raison de leurs applications, elles sont porteuses d'un fort enjeu sociétal. Mais au-delà de celles-ci, les travaux en mathématiques discrètes contribuent, comme toute recherche scientifique, à l'accroissement du domaine des connaissances. Les mathématiques discrètes touchent divers champs des mathématiques. Dressons-en une liste qui ne saurait bien sûr être exhaustive : la combinatoire, les fonctions booléennes, la théorie des graphes, les géométries finies, l'algèbre finie, les vecteurs et matrices binaires, certains aspects de la théorie des nombres, l'arithmétique et la machinerie des corps finis, les séquences binaires, la complexité des algorithmes, la logique, la théorie des langages, etc. Les structures discrètes sont des configurations que l'on peut décrire par un ensemble fini ou dénombrable de relations, et les objets discrets sont ceux que l'on peut décrire par des éléments finis ou dénombrables. Mais c'est aussi, et surtout, une façon de considérer un objet mathématique (Grenier & Payan, 1998).
Ce champ des mathématiques s'est certes nourri des autres, mais il a également développé des modes de raisonnement et de construction d'objets spécifiques : en effet, si les mathématiques discrètes partagent l'épistémologie des mathématiques « classiques », elles mettent aussi en jeu

des objets et des types de raisonnements spécifiques (Grenier & Payan, 1998; Ouvrier-Buffet, 2008; Payan, 1995)
Ces mathématiques, présentes dans les cursus de mathématiques et d'informatique au travers de contenus variables font partie du paysage de l'enseignement supérieur. Étudier l'épistémologie et la didactique de ces mathématiques contemporaines est un enjeu pour l'enseignement supérieur, d'autant plus que ces mathématiques sont maintenant présentes dans les *curricula* de l'enseignement secondaire, parfois de manière diffuse.

Mathématiques discrètes, théorie des graphes, ou combinatoire sont des synonymes pour certains, couvrent des notions différentes d'après d'autres ; mais la partie commune de ces domaines est certainement très grande : peut-on rédiger un problème combinatoire qui ne peut pas être reformulé en termes de graphes ? Il est vrai aussi qu'il existe des méthodes plus « graphiques » que d'autres.
Nous avons aussi observé en 1.1.4 que les raisons pour lesquelles les mathématiques discrètes sont intégrées dans les *curricula* des différents pays sont variées (raisons culturelles, historiques, et politiques). Il n'existe pas un recensement de ce qui est enseigné dans les instituts du supérieur autour des mathématiques discrètes. Les travaux de recherche autour de l'enseignement des mathématiques discrètes sont relativement peu nombreux, notamment pour ce qui est de l'enseignement supérieur. En France, des collaborations ont été engagées entre les mathématiciens et les didacticiens. Devant ces observations, certaines questions se dégagent à ce stade du travail :

- Comment les recherches qui existent en didactique des mathématiques étudient les mathématiques discrètes, en particulier au niveau du supérieur ?
- Quelle est l'épistémologie sous-jacente des ouvrages de mathématiques discrètes utilisés dans le supérieur ?
- Quels sont les intérêts des mathématiques discrètes pour l'enseignement supérieur (*curricula*) ?

Ces interrogations générales nous permettrons de composer nos questions de recherche. Auparavant, nous aurons présenté, dans la section suivante, le cadre théorique que nous avons choisi pour mener nos travaux.

1.2 Présentations des cadres théoriques utilisés

Nous nous appuyons dans ce travail sur plusieurs cadres théoriques pour conduire nos analyses. Nous présentons, dans ce chapitre, les aspects fondamentaux des cadres théoriques qui nous seront utiles tout au long de notre travail de thèse pour répondre aux questions de recherche. De plus amples précisions seront faites respectivement dans les chapitres qui suivent. Afin de traiter les questions de recherche générale, nous nous plaçons dans le cadre d'une épistémologie contemporaine (Gardes M.-L. , 2013) pour avoir accès à des représentations de chercheurs sur les mathématiques discrètes (niveau épistémologique) au sein de l'enseignement supérieur (niveau didactique). Nous nous appuyons également sur des cadres théoriques didactiques qui nous permettent d'analyser des ouvrages universitaires tels la dialectique outil/objet de Douady (1992) et les praxéologies de Chevallard (1998).

1.2.1 Épistémologie contemporaine

Les mathématiques discrètes sont un domaine jeune au niveau de la recherche. Nous faisons l'hypothèse qu'il se situe à l'intersection de la recherche et de l'enseignement à l'université, ce qui justifie notre choix de l'épistémologie contemporaine. L'épistémologie contemporaine consiste ici à interroger des chercheurs en mathématiques discrètes avec une méthodologie spécifique et des visées didactiques. Une étude d'épistémologie contemporaine a été réalisée dans la thèse de Marie-Line Gardes (2013) et reprise par plusieurs personnes en France (Modeste, 2012; Yvain-Prébiski, 2018; Ouvrier-Buffet, 2013). Dans son travail de thèse, Gardes (2013) a utilisé l'adjectif contemporain qui renvoie à sa méthodologie particulière. L'épistémologie contemporaine consiste, outre les travaux de recherches contemporains sur la didactique des mathématiques discrètes, et notre propre travail mathématique sur les contenus choisis, à conduire des entretiens avec des enseignants-chercheurs. Ces entretiens portent sur l'expérience et les pratiques de ces derniers (en termes de recherche et d'enseignement). Notre objectif est de réinterroger la littérature existante, d'étudier la cohérence avec les pratiques contemporaines de chercheurs en mathématiques discrètes, et d'identifier d'autres composantes épistémologiques. Nous nous inscrivons dans ce type de réflexion car nous cherchons à caractériser les mathématiques discrètes « telles qu'elles se font » pour enrichir l'épistémologie qui, à son tour, influence la didactique du supérieur.

1.2.2 Dialectique outil/objet

Tout d'abord, notons que le cadre outil-objet de Douady (1992) trouve l'une de ses origines dans l'observation des pratiques des mathématiciens. Ce cadre forme donc la première entrée par laquelle nous abordons la question de l'épistémologie sous-jacent aux mathématiques discrètes dans les ouvrages universitaires. Dans ce contexte, nous émettons l'hypothèse que les problèmes en mathématiques discrètes possèdent plusieurs caractéristiques épistémologiques. Plus précisément, nous interrogeons l'existence d'une dialectique outil-objet des objets discrets. Nous nous proposons d'explorer plusieurs caractéristiques épistémologiques d'un ensemble de « problèmes », et nous posons la question de l'efficacité des mathématiques discrètes en tant qu'objet et en tant qu'outil, au sens de Douady (1992). Douady (1992) précise la distinction entre les deux termes dans le passage suivant :

> « Un concept est un **outil** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un outil est engagé par quelqu'un dans un contexte problématique à un moment donné. […] Par **objet**, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est défini indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » (Douady, 1992, p. 134)

1.2.3 Organisation praxéologique

Les praxéologies de Chevallard (1998) constituent la deuxième entrée dans l'analyse des ouvrages universitaires. Les problèmes de mathématiques discrètes que nous cherchons à analyser, et dont le public est varié, possèdent certaines caractéristiques qui font partie des éléments qui guident les choix institutionnels au niveau des programmes et du *curriculum* universitaire. Nous émettons l'hypothèse que plusieurs problèmes sont présents dans plusieurs ouvrages mais que leur traitement ne se fait pas de la même manière. Nous interrogeons ces aspects afin de pouvoir analyser les ouvrages universitaires au prisme de la théorie anthropologique de Chevallard (Chevallard, 1998).

La théorie anthropologique du didactique (notée TAD) propose la notion de praxéologie pour décrire un processus didactique dynamique dans sa nature. À la racine de cette notion de praxéologie, et en ignorant provisoirement la question de sa dynamique, se trouve les notions solidaires de *tâche*, *t*, et de *type de tâches*, *T*. Pour chaque type de tâche, une praxéologie relative à T précise une manière de faire, τ, une *technique*. Elle contient ainsi un bloc $\Pi = [T, \tau]$, qui s'appelle le bloc praxique ou bloc pratico-technique. D'une manière naturelle, ce bloc peut être rapproché d'un « *savoir-faire* ». Le deuxième bloc d'une praxéologie est le bloc du logos $\Lambda = [\theta, \Theta]$. Ce bloc est appelé le bloc technologico-théorique qui correspond dans notre langage courant au *« savoir »*. Ce bloc est identifié par la *technologie*, θ, qui correspond à un discours rationnel sur la technique ayant pour objet premier de justifier *« rationnellement »* la technique, τ. À son tour, la technologie est justifiée par un niveau supérieur de justification, celui de la théorie, Θ.
Pour terminer la présentation de ce modèle aussi appelé « organisation praxéologique » ou « modèle des quatre T », précisons que chaque praxéologie engagée dans une action humaine admet bien ces quatre composantes [T/τ/θ/Θ]. Dans notre travail, nous cherchons plus particulièrement à développer une organisation mathématique[7] autour du contenu existant dans les ouvrages des mathématiques discrètes (plus particulièrement autour de la théorie des graphes). En conséquence, nous souhaitons présenter l'ensemble $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

[7] Nous la proposerons en perspectives.

1.3 Questions de recherche et méthodologie de travail

1.3.1 Questions de recherche

Notre thèse porte principalement sur l'étude et l'analyse didactique et épistémologique des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur et nous ferons un focus sur la théorie des graphes. Dans le premier chapitre, nous avons donné une illustration des pays qui intègrent les mathématiques discrètes dans leurs *curricula* respectifs, ainsi que leurs justifications variées. Nous avons constaté que les mathématiques discrètes représentent un domaine qui se situe à l'intersection d'autres domaines mathématiques : leur présence est donc diffuse, leur place n'est pas toujours visible. L'enseignement des mathématiques discrètes constitue un défi : le processus de choix et d'intégration des contenus dans une offre de formation est complexe. Nous cherchons à caractériser les mathématiques discrètes au niveau épistémologique à partir des recherches en didactique des mathématiques. Comprendre la manière dont les chercheurs utilisent et interrogent les mathématiques discrètes constitue donc l'objectif de la première question de recherche :

Q1- Comment les recherches en didactique des mathématiques étudient-elles les mathématiques discrètes, en particulier au niveau de l'enseignement supérieur ?

a. Quelles sont les spécificités épistémologiques des mathématiques discrètes traitées dans les recherches en didactique des mathématiques, et plus particulièrement dans l'enseignement supérieur ?
b. Quels sont les types de problèmes et concepts étudiés ?

Même s'il existe des caractéristiques épistémologiques explicites dans les travaux en didactique, nous émettons l'hypothèse qu'il existe des caractéristiques implicites dans l'épistémologie des chercheurs, caractéristiques implicites que nous souhaitons explorer d'une manière approfondie, notamment lorsque des chercheurs sont des mathématiciens et font des préconisations didactiques. D'où notre question :

c. Quels implicites au niveau épistémologique existent dans les travaux en didactique ?

Étant donné que l'enseignement des mathématiques discrètes est relativement peu étudié en didactique des mathématiques, nous cherchons à décrire les caractéristiques du domaine au niveau didactique (la place de la preuve, la modélisation, les algorithmes), toujours dans le contexte de l'épistémologie contemporaine. Ce qui nous conduit à formuler notre deuxième question de recherche :

Q2- Quelles sont les caractéristiques actuelles de la discipline qui pourraient être utiles au développement des travaux en didactique des mathématiques discrètes ?

Troisièmement, et toujours dans le cadre de l'épistémologie contemporaine, comme nous ne disposons pas de recensement sur les mathématiques discrètes actuellement enseignés dans le supérieur (comment et quels choix), nous posons la troisième question de recherche :

Q3- Quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées dans le supérieur ? Comment les choix sont-ils opérés ?

1.3.2 Méthodologie de travail

Nous présentons dans cette partie (cf. Figure 1-1) les moyens théoriques et méthodologiques pour répondre à nos questions de recherches. Des méthodologies plus fines seront discutées dans les parties qui suivent.

Pour répondre à la question Q1 (a & b), nous conduisons un état de l'art qui nous éclaire sur les spécificités épistémologiques des mathématiques discrètes, en faisant un focus notamment sur les processus des types de problèmes, la spécificité des concepts et les démarches de preuve étudiées. Pour cela, nous présentons dans le Chapitre 3.1 une grille d'analyse. Le cadre théorique que nous mobilisons dans ce contexte est la dialectique outil-objet (Douady, 1992), afin de préciser l'efficacité des objets discrets et leur rôle en tant qu'outil et/ou objet.

Pour traiter les questions Q1 (c) et Q2, nous conduisons des entretiens avec des chercheurs en mathématiques discrètes dans le cadre d'une épistémologie contemporaine. Nous interrogeons des chercheurs et enseignants-chercheurs en mathématiques discrètes (plusieurs sous-domaines). Le choix des enseignants-chercheurs interrogés est orienté : nous avons choisi des spécialistes du domaine au sein de l'enseignement supérieur libanais et français. Nous présentons dans le Chapitre 3.1.2 et 0 la méthodologie retenue et les résultats.

Notre question Q3 nous amène à étudier ce qui existe dans les ouvrages universitaires, avec l'objectif de repérer les types de mathématiques discrètes actuellement enseignés dans le supérieur, et la manière dont ils sont enseignés. Nous précisons dans le Chapitre 3.5.1 les critères d'après lesquels nous avons choisi certains ouvrages universitaires. Ce choix d'ouvrages recouvre une variété d'auteurs, avec un public-cible également varié. Cette analyse d'ouvrages universitaires (transposition externe) se base sur les praxéologies (Chevallard, 1998). Nous avons ajouté une partie au projet initial de thèse qui contribuera à répondre à la question Q3 en donnant un éclairage sur l'état actuel de l'enseignement des mathématiques discrètes au supérieur (quels choix de contenus, quels types de raisonnements, et quels liens avec d'autres disciplines). Un questionnaire a été diffusé dans plusieurs universités en France et au Liban (et au sein de différents parcours de licences : mathématiques, informatique, et mathématiques-informatique). Les résultats de ce questionnaire nous permettent d'effectuer des liens avec les déclarations des enseignants-chercheurs lors des entretiens.

En termes méthodologiques, notre travail est de nature exploratoire, fondé sur une méthodologie qualitative. Nous pouvons distinguer trois niveaux méthodologiques :

- Le recueil des données : la conduite des entretiens avec des enseignants-chercheurs et la complétion du questionnaire auprès des universités en France et au Liban ;
- Le traitement des données : en faisant l'analyse et la réduction des données qualitatives (analyse descriptive et analyse compréhensive) ;
- L'interprétation globale des résultats en fonction de nos cadres théoriques.

De surcroît, pour assurer la validité interne de cette recherche qualitative, nous recourons à la triangulation des méthodes de collecte. Nous conduisons une triangulation des outils de recueil des données (entretiens, analyse des ouvrages universitaires) ainsi qu'une triangulation des chercheurs (points de vue de plusieurs chercheurs).

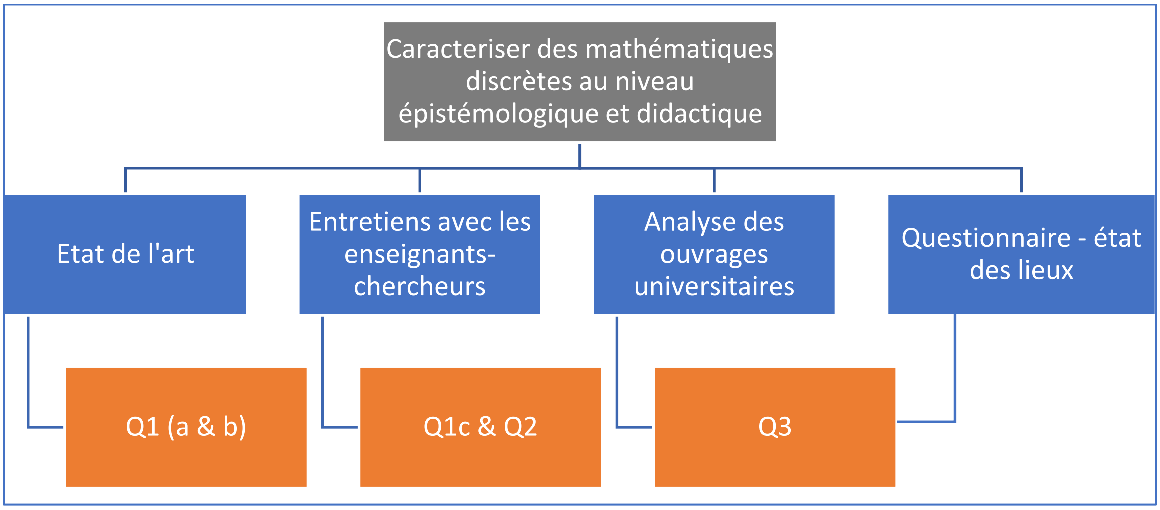


Figure 1-1: Méthodologie de recherche

Notre travail de thèse possède donc trois volets :

1. Un volet mathématique, qui consiste à réaliser une présentation mathématique des contenus (définitions, théorèmes, propriétés, preuves, algorithmes) que nous étudions, afin de réaliser des analyses d'ouvrages universitaires ; ceci est d'autant plus nécessaire que notre thèse a été rédigée pour les personnes qui ne connaissent pas nécessairement le domaine de la théorie des graphes ;

2. Un volet épistémologique, qui consiste à étudier les spécificités des contenus, les types de problèmes et les types de preuves ; à préciser les particularités de la preuve, de la modélisation, et des algorithmes ; et à caractériser les liens avec autres domaines (l'informatique, l'arithmétique, la théorie des nombres) ;

3. Un volet didactique qui consiste à étudier la place et le rôle des mathématiques discrètes dans l'articulation secondaire-supérieur ; à proposer des pistes pour l'intégration des mathématiques discrètes dans l'enseignement ; et à enquêter sur le processus d'évaluation des concepts et procédures propre aux mathématiques discrètes.

Dans le Chapitre 2 nous proposons une délimitation du champ afin de commencer nos enquêtes et expérimentations. Nous donnons des éléments pour préciser la définition du domaine des mathématiques discrètes, les particularités de la preuve et de l'algorithmique, ainsi que les interfaces existant avec d'autres disciplines.

2 Définition du domaine des « mathématiques discrètes »

Afin de pouvoir conduire notre état de l'art et nos expérimentations, nous devons tout d'abord définir le domaine des mathématiques discrètes, et ce que nous entendons par objets discrets.

2.1 Absence de consensus sur les définitions

Les mathématiques discrètes constituent une branche des mathématiques relativement jeune, sans définition conventionnelle partagée par les mathématiciens (Maurer, 1997). Plusieurs tentatives de définition du champ ont été proposées. Nous pouvons distinguer les initiatives pour introduire les mathématiques discrètes dans les *curricula* prises par des mathématiciens, par exemple aux États-Unis (DeBellis & Rosenstein, 2004; Maurer, 1997; Hart & Martin, 2016), d'autres initiatives proposées plus spécifiquement par des chercheurs en didactique des mathématiques, par exemple en France, pour arriver à la construction d'ingénieries didactiques des mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998). Ces essais de définition des mathématiques discrètes sont liés à la posture épistémologique de leurs auteurs (mathématiciens, didacticiens) et à la fonction que l'on donne à une définition : définition pour les mathématiciens afin de définir un champ, ou pour des didacticiens, afin de caractériser un domaine de recherche, ou pour des enseignants, afin de présenter une partie des mathématiques. Nous décrivons dans cette partie les consensus qui existent au sein de la littérature, ainsi que les quelques points de controverse.

Nous commencerons par exposer plusieurs définitions montrant les différents aspects communs ; nous interrogerons ensuite les divergences. Nous prenons comme base de départ une définition « naïve » ou « naturelle » des mathématiques discrètes : le discret par opposition au continu.

2.1.1 Pour les chercheurs en didactique des mathématiques

Pour des chercheurs en didactiques des mathématiques, enseigner les mathématiques discrètes conduit à étudier des structures mathématiques qui sont « discrètes » par opposition aux structures « continues ». Les structures discrètes sont définies comme des configurations qui peuvent être caractérisées par un ensemble fini ou dénombrable de relations. Un ensemble dénombrable est un ensemble ayant la même cardinalité (nombre d'éléments) qu'un sous-ensemble de l'ensemble des nombres naturels ℕ (Grenier & Payan, 1998; Ouvrier-Buffet, 2014). Les objets discrets sont des objets qui peuvent être décrits par des éléments finis ou dénombrables. Ce champ des mathématiques traite aussi des objets qui ne peuvent avoir que des valeurs distinctes et séparées. Le champ des mathématiques discrètes est fortement lié à la théorie des nombres, la théorie des graphes, la combinatoire, la cryptographie, la théorie des jeux, l'algorithmique, la probabilité discrète, la théorie des groupes, les structures algébriques, la topologie et la géométrie.

2.1.2 Sur le site Wolfram*8*

> « Discrete mathematics is the branch of mathematics dealing with objects that can assume only distinct, separated values. The term "discrete mathematics" is therefore used in contrast with "continuous mathematics," which is the branch of mathematics dealing with objects that can vary smoothly (and which includes, for example, calculus). Whereas discrete objects can often be characterized by integers, continuous objects require real numbers. » (Wolfram Research, Inc., 2020)

[8] Le site Wolfram est une encyclopédie créée, développée, et mise à jour par un équipe des chercheurs experts, d'où sa pertinence.

Le site Wolfram discute du lien entre les mathématiques discrètes et l'informatique. Il précise que les mathématiques discrètes constituent le langage mathématique de l'informatique, et qu'en conséquence son importance a considérablement augmenté au cours des dernières décennies. Grenier et Payan (1998) ajoutent que les mathématiques discrètes représentent une manière de considérer un objet mathématique.

2.1.3 Pour les mathématiciens

Le mathématicien Steven Maurer (1997) a rédigé un article sur les définitions possibles des mathématiques discrètes, dans lequel il précise qu'elles peuvent être définies de deux façons :

1. Par la précision des propriétés :
   a. « Discrete mathematics is finite mathematics, that is the mathematics of situations that can be described by finite sets;
   b. Discrete mathematics is the mathematics of discrete sets, that is sets that have holes between any two elements, as do the natural numbers and the rational numbers;
   c. Discrete mathematics is any mathematics that doesn't involve limits;
   d. Discrete mathematics is whatever mathematics that can be done in a finite number of steps. » (Maurer, 1997, pp. 122-123).

2. Par l'énumération de ses sujets :
   A. « Typical for discrete structures course aimed at computer science majors in college,
   B. Is for algorithm-oriented course,
   C. Is for finite mathematics course aimed at college, students interested in social science and business,
   D. Is from books of high school courses.
   E. Is from books of high school courses. » (Maurer, 1997, p. 123).

Maurer (1997, p. 124) spécifie les sujets dont les mathématiques discrètes traitent suivant les domaines d'études au supérieur comme le montre le Tableau 2-1 :

List A	List B	List C	List D	List E
Logic and circuits	Algorithms and algorithmic language	Logic	Election Theory	Logic
Sets, relations, functions	Induction, iteration, recursion	Counting (elementary)	Fair Division	Integers and polynomials
Induction	Graph Theory	Finite Probability	Matrices	Combinatorics
Counting (combinatorics, recurrences, generating functions)	Difference Equations	Linear Programming and games	Graphs	Graphs and circuits
Graph Theory	Probability	Statistics	Counting	Vectors
Boolean Algebra	Logic	Social Science and business applications	Probability	
Automata	Linear Algebra	Modelling	Recursion	
Abstract Algebra	Analysis and verification of algorithms			
Partially ordered sets	Sequences and limits			
	Numerical Analysis			

Tableau 2-1: Liste des sujets (Maurer, 1997, p. 124)

Ce type de définitions peut largement être débattu, notamment en ce qui concerne l'aspect « fini ». Par ailleurs, Maurer (1997) souligne les intérêts de certains aspects des mathématiques discrètes pour l'enseignement (essentiellement primaire et secondaire), notamment : l'introduction de preuves, le travail sur l'abstraction, l'introduction d'algorithmes et de propriétés récursives, l'introduction d'un travail sur la modélisation (Maurer, 1997, p. 125). Il insiste également sur l'attractivité de ce champ mathématique pour les étudiants, car proche d'applications concrètes, et ouvrant aux élèves et étudiants la possibilité de faire de la recherche.

Plus récemment, dans ICME-13 (13th International Congress of Mathematical Education), le *Topic Study Group 17 (TSG-17)*, dédié à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques discrètes (Teaching and Learning of Discrete Mathematics), a défini les mathématiques discrètes comme suit (Hart & Martin, 2016) :

> « […] a comparatively young branch of mathematics with no agreed-upon definition but with old roots and emblematic problems. It is a robust field with applications to a variety of real-world situations, and as such takes on growing importance in contemporary society. We take discrete mathematics to include a wide range of topics, including logic, game theory, algorithms, graph theory (networks), discrete geometry, number theory, discrete dynamical systems, fair decision making, cryptography, coding theory, and counting. Crosscutting themes include discrete mathematical modeling, algorithmic problem solving, optimization, combinatorial reasoning, and recursive thinking. » (Hart & Martin, 2016, pp. 14-15)

Plus précisément, dans leur article du monographie du TSG-17, intitulé « Discrete Mathematics is Essential Mathematics in a 21st Century School Curriculum » Martin et Hart (2016) proposent la définition suivante :

> « Discrete Mathematics is a collection of mathematical concepts and methods that help us solve problems that involve a countable (often finite) number of elements or processes and connections among them » (Hart & Martin, 2016, p. 15)

Martin et Hart (2016) ont classé les problèmes qui existent en mathématiques discrètes en cinq catégories formant les cinq chapitres du monographie: « *enumeration, sequential step-by- step change, relationships among a finite number of elements, in- formation processing, and fair decision-making* ».

La définition proposée par Martin et Hart (2016) nous semble très intéressante en ce qu'elle ne limite pas les mathématiques discrètes à un ensemble d'objets et de méthodes, mais qu'elle précise le rôle de ces objets et de ces méthodes pour la résolution des problèmes. Ces problèmes concernent un nombre fini ou dénombrable d'éléments et processus, tout en rendant compte des connections entre eux. Nous interrogeons la nature des liens entre ces objets et ces méthodes : quels liens permettent de faire de cet ensemble le champ des mathématiques discrètes ? Quelles en sont les limites ? Quelle en est la portée ? Ces questions nous permettent de mieux délimiter le champ des mathématiques discrètes.

2.1.4 Des aspects controversés

Les points de convergence concernant la nature des objets discrets ne doivent pas dissimuler l'existence de plusieurs points de vue controversés. Nous commencerons par évoquer la place du fini dans les mathématiques discrètes. Maurer (1997) précise que les mathématiques discrètes ont pour propriété, entre autres, de constituer les mathématiques du fini, et de concerner les mathématiques pouvant être résolues en un nombre fini d'étapes. Nous souhaitons questionner ces affirmations, en particulier la place du dénombrable infini. Le point évoqué par Martin et Hart (2016) est très intéressant : il ne suffit pas d'avoir des concepts et des méthodes ; il faut en particulier prêter attention aux types de liens qui existent entre eux. Il nous semble très important de caractériser ces liens, et les différentes relations qui existent. Si nous nous plaçons en particulier dans le domaine de l'arithmétique et de la théorie des nombres, nous remarquons qu'elle est incluse dans plusieurs définitions comme partie des mathématiques discrètes (Ouvrier-Buffet, 2014; Hart & Martin, 2016; Wolfram Research, Inc., 2020). Toutefois, il n'existe pas de consensus concernant cette affirmation.

2.1.4.1 Les objets discrets dans des classifications

Sur le site de l'AMS des classifications mathématiques utilisées par les éditeurs des revues majeures en mathématiques (MR et Zbl), les mathématiques discrètes[9] comprennent les thématiques suivants (cette liste ne saurait être exhaustive) : combinatoire, combinatoire des mots, théorie des graphes, fonctions discrètes, géométrie discrète, probabilité discrète, recherche opérationnelle, programmation, théorie des jeux, sciences sociales et comportemental (« *behavioral sciences* »).

Sur le site http://mathworld.wolfram.com, les sujets inclus dans un cours de mathématiques discrètes sont les suivants : « *cellular automata, coding theory, combinatorics, computational systems, computer science, division problems, experimental mathematics, finite groups, general discrete mathematics, graph theory, informational theory, packing problems, point lattices, recurrence equations, umbrella calculus* ».

Ces différentes classifications des concepts des mathématiques discrètes, pour la recherche ou pour l'enseignement, nous ramènent à des discussions sur la définition de ce champ des mathématiques.

2.1.5 Discussion

Nous constatons d'après ce qui précède que les mathématiques discrètes constituent un champ mathématique regroupe plusieurs domaines ne reposant pas sur la notion de nombre réel (ou plus généralement, de continuité). C'est le cas, par exemple, de la combinatoire, de la logique, et d'une bonne partie de l'algèbre et de l'arithmétique. Cependant, il n'existe pas de consensus sur la définition exacte des mathématiques discrètes. Nous pouvons proposer une première définition à partir d'un point de convergence entre plusieurs chercheurs, qui considèrent que les mathématiques discrètes comprennent « *toutes les configurations descriptibles par un ensemble fini ou dénombrable de relations* » (Grenier & Payan, 1998; Hart & Martin, 2016; Ouvrier-Buffet, 2014). La question du "*fini*" n'est pas entièrement délimitée, étant donné que l'ensemble des objets étudiés en mathématiques discrètes peut être fini ou infini. Voici une liste de contenus liés au champ des mathématiques discrètes : la théorie des nombres, la théorie des graphes, la combinatoire, la cryptographie, la théorie des jeux, l'algorithmique, la probabilité discrète, la théorie des groupes, les structures algébriques, la topologie, la logique, la récursivité, la recherche opérationnelle, la programmation et la géométrie. La place de l'arithmétique, et en particulier celle de la théorie des nombres, en mathématiques discrètes demeure source de questions. Nous ne discutons pas de cet aspect dans notre thèse, mais nous nous concentrerons sur les objets (entier, graphes) et sur les processus (modélisation, preuves notamment).

Les mathématiques discrètes ne sont pas seulement une manière de considérer un objet mathématique ; elles représentent également une collection de concepts, d'objets et de méthodes (Hart & Martin, 2016) permettant de résoudre des problèmes dans plusieurs domaines (scientifiques ou pas). Les mathématiques discrètes permettent l'introduction de preuves, un travail sur l'abstraction, l'introduction d'algorithmes et de propriétés récursives, un travail sur la modélisation. De plus, nous pouvons répondre à plusieurs questions de la vie réelle au travers des mathématiques discrètes.

[9] https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html?t=68Rxx&btn=Current

Nous souhaitons approfondir les spécificités des concepts et des preuves dans le domaine des mathématiques discrètes, aux niveaux épistémologique et didactique, et montrer les spécificités de ce champ des mathématiques par rapport aux autres. Nous souhaitons construire une représentation des mathématiques discrètes en rendant compte de la connaissance actuelle de ce domaine, notamment par ses concepts, ses types de problèmes, ses processus de recherche et de preuve, et en allant au-delà des exposés concernant les mathématiques discrètes que l'on pourrait trouver dans des ouvrages présentant ce domaine.

Nous cherchons ainsi à définir épistémologiquement le champ des mathématiques discrètes, et à caractériser l'activité mathématique spécifique à ce champ, en étudiant les processus de construction de connaissances, les types de problèmes, la spécificité des concepts, et les démarches de preuve, mais aussi étudier les liens de ce champ mathématique avec d'autres disciplines. Nous souhaitons spécifier « toutes » les caractéristiques épistémologiques et les potentialités didactiques du champ des mathématiques discrètes. Cette définition aura deux fonctions principales : délimiter le domaine mathématique des mathématiques discrètes (niveau épistémologique), et ouvrir les possibilités d'implémentation de ce champ dans l'enseignement (niveau didactique). Ainsi, il s'agit tout d'abord de délimiter le champ des mathématiques discrètes, par ses contenus, mais aussi par ses types de problèmes, et de mettre en évidence la spécificité du travail sur la preuve par rapport aux autres domaines mathématiques. La question de la place et du rôle de la modélisation en mathématiques discrètes sera également prise en compte. Les mathématiques discrètes interagissant avec d'autres champs mathématiques, il nous faudra aussi caractériser les liens entre les mathématiques discrètes et l'arithmétique, la théorie des nombres, l'algèbre, etc. Par ailleurs, la définition épistémologique des mathématiques discrètes étant liée à celle de l'informatique (notamment via les problèmes de tri et de combinatoire), nous préciserons les liens et interactions entre ces deux domaines scientifiques, en nous appuyant explicitement sur l'épistémologie contemporaine, c'est-à-dire les problèmes qui se posent et les interactions qui se jouent actuellement entre mathématiques discrètes et informatique. Enfin, nous intégrerons dans notre définition une perspective didactique forte en étudiant la place et le rôle des mathématiques discrètes, à l'articulation entre le secondaire et le supérieur, et plus spécifiquement dans l'enseignement supérieur et la formation des enseignants. Nous interrogerons également les processus d'évaluation conduits dans le supérieur sur les concepts et les démarches propres aux mathématiques discrètes. La finalité est bien de pouvoir proposer des schémas de conceptions de séquences d'enseignement à un niveau donné, avec une forte cohérence épistémologique.

2.2 Interfaces avec d'autres disciplines

Les mathématiques discrètes se situent à l'intersection de différentes disciplines en raison de ses applications très diverses dans des domaines scientifiques et non scientifiques. Plusieurs questions peuvent être abordées par des éléments tirés des mathématiques discrètes, telles que : comment éviter les conflits lors de la planification de réunions ; comment attribuer des fréquences aux stations de radio ; comment planifier le temps de réalisation le plus court possible pour un projet ; comment décider équitablement entre des alternatives concurrentes, comme par exemple des candidats à une élection ; comment diviser ou répartir équitablement des objets, sièges de congrès ou biens d'un héritage ; comment garantir l'exactitude, la sécurité et l'efficacité des transactions numériques (transfert de fichiers, achats en ligne, publication sur les réseaux sociaux, etc.) ; combien de numéros d'identification personnelle (PIN), d'adresses IP ou de pizzas avec différentes garnitures sont-ils possible ; et comment modéliser et analyser les processus de changement séquentiel (Hart & Martin, 2016). Comme mentionné dans le monograph d'ICME-13, les mathématiques discrètes est un domaine « *robust* » comportant plusieurs applications dans la vie réelle (« *information processing, dynamical systems in ecology, networks in industry and the humanities, and discrete optimization* »). Elles recouvrent plusieurs sujets, tels que la récursivité, l'algorithmique, la théorie des graphes, la théorie des jeux. Les mathématiques discrètes constituent un outil et un objet nécessaires dans les recherches en biologie, en chimie, et dans les sciences humaines (commerce, ingénierie, économie), ce qui est aussi la conséquence de l'évolution des sociétés.

2.2.1 « Computational Thinking »

Bagley et Rabin (2016) ont conduit une étude dans laquelle ils présentent la place et le rôle du « *computational thinking* » dans l'algèbre linéaire au niveau supérieur. Leur travail consistait à explorer la manière dont les étudiants appliquent et font les liens entre trois modes de pensée : « *computational, abstract, and geometric* ». Leurs résultats montrent que la pensée « *computational* » semble particulièrement forte chez les étudiants. Pour les auteurs, cela s'explique par les raisons suivantes :

1. L'élaboration d'un exemple pour approcher un problème qui n'était pas familier ;
2. La recherche d'un algorithme connu qui s'applique à une situation donnée, ou évaluer l'applicabilité d'un algorithme connu ;
3. La clarification d'une approche plus générale à partir d'un exemple générique ;
4. La mise en œuvre de choix pour simplifier les raisonnements et les calculs.

Nous nous interrogeons sur ces caractéristiques, sur leur nature informelle dans le cadre du « *computational thinking* » et sur leurs liens avec les mathématiques discrètes. Certains aspects de « *computational thinking* », et même de l'arithmétique (comme la descente infinie présentée dans Battie (2009)) nous apparaissent comme des éléments très intéressants, qui montrent les potentialités des mathématiques discrètes en tant que domaine proposant des outils de raisonnement transversaux à l'activité mathématique. Plus précisément, ce domaine cherche à améliorer les capacités à raisonner et à développer plusieurs visions de la preuve. Quel rôle jouent les heuristiques ? Comment catalyser les liens entre l'action de conjecturer, l'utilisation d'un exemple générique, et le raisonnement à partir d'exemples ? Il nous semble très pertinent d'explorer ces éléments afin de pouvoir décrire la nature d'un terrain favorable à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques discrètes.

2.2.2 L'informatique

Les mathématiques discrètes représentent une partie très importante du *curriculum* universitaire en informatique. Elles constituent en particulier les fondements des enseignements suivants : langages de programmation, « *database theory* », structures des données, études des algorithmes, cryptographie. Les recommandations des informaticiens pour enseigner des mathématiques discrètes indiquent que la maîtrise des concepts des mathématiques discrètes par les étudiants est indispensable pour leur formation (Epp, 2016). Les préparations des *curricula* par la « Joint Task Force » (2013) mise sur pied par les sociétés ACM (Association for Computing Machinery) et IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) font des mathématiques discrètes une des deux principales composantes du programme (quarante-et-une heures de cours) dans le « core body of knowledge » pour les tous les étudiants en informatique. Le rapport justifie ce choix par les raisons suivantes : les structures discrètes sont omniprésentes dans les domaines des structures de données et des algorithmes ; elles apparaissent également ailleurs en informatique : la capacité de créer et de comprendre une preuve (une preuve symbolique formelle, ou un argument moins formel mais toujours mathématiquement rigoureux) est nécessaire dans presque tous les domaines de l'informatique, y compris les bases de données et la cryptographie. Les concepts de la théorie des graphes sont également utilisés dans les réseaux, dans les systèmes d'exploitation et dans les compilateurs. Les concepts de la théorie des ensembles sont par ailleurs utilisés en génie logiciel et dans les bases de données. La théorie des probabilités est, quant à elle, utilisée dans les systèmes intelligents, dans les réseaux et dans plusieurs applications informatiques.

2.3 Les mathématiques discrètes : un terrain propice à l'apprentissage de la preuve

L'activité de preuve est effectivement une activité centrale en mathématiques discrètes (en particulier dans le cas de la Hongrie, tel que nous l'avons vu dans le chapitre 1). Comme nous nous intéressons aux processus engagés dans le champ de mathématiques discrètes, nous avons souhaité regarder les travaux de synthèse sur la preuve, avec l'objectif d'identifier jusqu'à quel point les mathématiques discrètes sont utilisées, par les chercheurs en didactique et pour des situations d'apprentissage, pour travailler sur la didactique de la preuve. Nous faisons l'hypothèse que les didacticiens utilisent largement les objets discrets pour l'apprentissage de la preuve et nous cherchons à confirmer cette hypothèse avec une méthodologie adaptée.
Pour cela, nous avons choisi deux références : l'ouvrage de Reid & Knipping (2010)et l'étude ICMI (2009), deux documents de synthèse autour de la preuve. Pour chaque ouvrage, nous avons identifié les objets travaillés et nous les avons classés (suivant une norme de classification internationale : Mathematics Subject Classification de 2010[10]), afin de produire une conclusion sur les objets discrets utilisés dans les recherches en didactique sur la preuve. Nous décrivons plus précisément notre méthodologie et présentons les résultats obtenus dans les sous-parties suivantes.

2.3.1 Dans l'ouvrage de Reid & Knipping

Dans leur ouvrage, Reid et Knipping (2010) donnent un aperçu de ce qui existe dans le monde de la recherche, de l'enseignement, et de la manière dont la didactique des mathématiques envisage l'apprentissage de la preuve. Deux chapitres de cet ouvrage sont dédiés à la présentation de types de raisonnement (« *Types of Reasoning* ») et à la classification des preuves et des arguments « *Classifying Proofs and Arguments* ». Dans ces deux chapitres, les auteurs présentent plusieurs classifications du raisonnement, de la preuve, et de l'argumentation. De surcroît, ils présentent les idées parfois opposées dans les recherches, et donnent des pistes d'approfondissement. Dans notre travail, nous présentons (en Annexe A), la liste des preuves proposée par cet ouvrage. Pour chaque preuve, nous précisons les objets en jeu, les types de preuve mobilisés par l'ouvrage, ainsi que le contexte (justification) suivant les auteurs. Nous avons ensuite classé les preuves par domaine mathématique à l'aide du Mathematics Subject Classification de 2010 : https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html

Objets en jeu	**Pourcentage (sur 28 preuves)**
Droites fini (segment)	3.5 % (1 sur 28)
Polygones (triangles, losanges, triangle rectangle)	38 % (10 sur 28)
Nombres (Nombres premiers, entiers, nombres négatifs)	39 % (11 sur 28)
Droites particulières dans un triangle	7 % (2 sur 28)
Fractions	3.5 % (1 sur 28)
Matrices	3.5 % (1 sur 28)
Variables	3.5% (1 sur 28)

Tableau 2-2: Objets en jeu dans les preuves (Reid & Knipping, 2010)

Comme nous avons noté qu'il n'existait pas de consensus sur la définition des mathématiques discrètes et la nature de ses contenus, nous partons de cette définition de départ : « les

[10] C'est une classification faite par des « experts reviewers » et affilié à une large gamme des revues et journaux scientifiques.

mathématiques discrètes s'intéressent à toutes les configurations descriptibles par un ensemble fini ou dénombrable de relations. Ses objets sont des objets discrets par opposition aux objets continus, c'est-à-dire qu'on peut les caractériser par un nombre fini ou dénombrable d'éléments » (Grenier & Payan, 1998).
En conséquence, d'après le Tableau 2-2, les objets discrets représentent environ 40 % des exemples utilisés dans cet ouvrage sur la preuve. Parmi ces objets discrets, se trouvent les nombres premiers, les entiers, les entiers négatifs, les droites finies. Si nous ajoutons les polygones (triangles et losanges) en les considérant comme des graphes particuliers (même s'ils appartiennent à la géométrie), plus de 60 % des objets traités pourraient s'inscrire dans les mathématiques discrètes.
Ce résultat semble très intéressant et ouvre un questionnement sur les spécificités des objets discrets, en particulier dans le cadre des réflexions sur la preuve. Il nous semble que la présentation de ces preuves dans un chapitre qui discute des types de preuves et des arguments en mathématiques n'est pas due au hasard ; nous faisons l'hypothèse qu'il existe des justifications pour ce choix. Nous sommes intéressés par cette question de la particularité des preuves dans le domaine des mathématiques discrètes : Quelle puissance portent-elles ? Quelles sont les raisons qui justifient le choix des auteurs d'inclure ces preuves en particulier, et pas d'autres ?

2.3.2 Dans l'étude ICMI-19

En didactique des mathématiques, nous cherchons à identifier la place occupée par les mathématiques discrètes dans les recherches portant sur la preuve. Dans les actes d'ICMI-19 (2009)(numéro consacré à la preuve), les auteurs présentent plusieurs exemples et plusieurs illustrations autour de trois thèmes principaux : « *teachers views and beliefs, teachers' preparation and professional development, & curriculum materials and their role in supporting instruction* ». Dans ce contexte, plusieurs études parlent d'un lien spécifique avec la preuve. En termes méthodologiques, après la consultation des exemples proposés dans les quatre-vingt-treize articles, nous présentons (en Annexe B) la liste des articles comprenant des exemples tirés des mathématiques discrètes. Pour chaque exemple, nous décrivons le contexte du travail de l'auteur ; nous classons ensuite chaque exemple suivant la norme internationale, en nous appuyant sur Mathematics Subject Classification 2010, https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html) et en utilisant Wolfram Mathworld pour plus de clarifications : http://mathworld.wolfram.com

Classification	Nb d'articles (sur 93)
Arithmétique et la théorie des nombres	20
Mathématiques discrètes	1
Combinatoire	1
Preuves sans mot	1
Jeux (Puzzles et autre)	2

Tableau 2-3: Classifications des preuves par domaine ICMI Study 19 (2009)

D'après leTableau 2-3, nous remarquons que 24 articles sur 93 (26 %) portent sur des exemples issus des mathématiques discrètes (nous faisons ici l'hypothèse que l'arithmétique et la théorie des nombres font partie des mathématiques discrètes). Pour davantage de précisions nous donnons la liste des objets en jeu derrière cette classification (nous ne recherchons pas l'exhaustivité) : nombres, arbres, entiers, nombres premiers, polygones, et groupes. Ces objets font partie des exemples/illustrations dans les articles ayant plusieurs contextes. Nous présentons ci-dessous une synthèse des arguments utilisés par les auteurs :

- Montrer le lien avec le numérique en utilisant « digitally-assisted proofs » (Borwein, 2009) ;

- Faciliter l'élaboration de preuves qui ne sont pas réalisables formellement, (Wanko, 2009) ;
- Étudier les transitions entre le secondaire et la supérieur (Battie V. , 2009) ;
- Montrer la dialectique entre « *indoor games* » et « *outdoor games* » dans le sens d'Intikka (Barrier, Durand-Guerrier, & Blossier, 2009);
- Analyser la preuve et les techniques de preuves (Yevdokimov, 2009; Lin C.-C. , 2009) ;
- Présenter différents types de preuves et de raisonnements (Wanko, 2009; Battie V. , 2009);
- Étudier les défis du développement de la preuve (Healy, Jahn, & Frant, 2009) ;
- Explorer l'indépendance entre la validation et la preuve (Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Tabach, & Barkai, 2009) ;
- Analyser l'usage de la quantification existentielle (Epp, 2009) ;
- Présenter des preuves accessibles par un large public, dont les solutions comportent des aspects techniques très minimes (Greer, De Bock, & Van Dooren, 2009);
- Explorer les preuves visuelles, c'est-à-dire les preuves basées sur des raisonnements visuels en l'absence de textes et d'arguments déductifs (Kondratieva, 2009);
- Présenter des preuves génériques qui peuvent faciliter la compréhension des preuves plus difficiles (Leron & Zaslavsky, 2009) ;
- Comprendre l'articulation entre sémantique et syntaxique (Mamona-Downs & Downs, 2009);
- Encadrer l'enseignement et l'apprentissage de la preuve (*Habermas' construct*) (Morselli & Boero, 2009) ;
- Montrer les aspects dialectiques et algorithmiques de la preuve (Healy, Jahn, & Frant, 2009);
- Créer des contextes d'enseignement favorisant la construction et l'évaluation de la preuve (Stylianides & J., 2009).

Cette liste permet de remarquer l'existence d'une variabilité dans les déclarations des auteurs, ce qui témoigne bien de la richesse du discret pour étudier la preuve (voir la liste pour les différentes rôles possibles). Il nous semble pertinent d'examiner la cohérence entre les déclarations des auteurs dans ces articles de recherche et ce qui existe dans les ouvrages universitaires. Nous explorerons davantage cet aspect dans le Chapitre 3.5. Ces résultats montrent que les mathématiques discrètes sont intéressantes pour regarder la preuve ; une étude spécifique de ces objets et des types de preuves est nécessaire, à la fois pour les recherches en didactiques des mathématiques discrètes elles-mêmes, mais aussi pour enrichir les travaux en didactique de la preuve.

Nous présentons dans les sous-parties qui suivent (2.4 jusqu'à 2.6) un rapide panorama consacré aux questions de la récurrence, de l'algorithmique, et de la modélisation, aux relations qu'ils entretiennent avec les mathématiques discrètes, et surtout aux interrogations qu'elles suscitent. Nous utiliserons ces questionnements au cours de notre analyse des ouvrages universitaires.

2.4 La récurrence

Dans cette sous-partie, nous présentons un état de l'art consacrée au raisonnement par récurrence dans l'activité mathématique, avec un focus sur les spécificités de ce type de raisonnement, et sur les liens entre la récurrence et les mathématiques discrètes, particulièrement la théorie des graphes. Il nous semble intéressant d'étudier ce raisonnement car il s'applique à des objets discrets. Tout d'abord, commençons par préciser quelques termes de vocabulaires que nous utiliserons par la suite :

- Itération sous-entend souvent la notion de boucle ou de répétition (tant que ou pour tout) ;
- Récursion renvoie à l'idée d'appel récursif, et donc à une fonction qui s'appelle elle-même. Il peut aussi faire référence à la notion de structure des données récursives, par exemple une liste, qu'elle soit une liste vide, ou un élément suivi d'une liste ;
- « *Recursive thinking* » est une manière plus générale de parler de ces notions dans le cadre de la résolution de problèmes.

Dans notre travail, nous utilisons le terme récurrence comme équivalent de l'anglais « *induction* », souvent appelé « *principle of mathematical induction* » ou « *method of induction* ». Nous réservons le terme de raisonnement inductif à la définition de l'activité intellectuelle qui a pour objectif essentiel de généraliser une propriété connue pour quelques objets particuliers à un ensemble d'objets (Reid & Knipping, 2010). Nous commençons par une présentation des aspects épistémologiques du concept. Nous étudions ensuite la récurrence dans l'enseignement (difficultés des étudiants et contenu des ouvrages). Enfin, nous terminons en indiquant des propositions de didacticiens et des pistes de réflexion.

2.4.1 Qu'est-ce que la récurrence ?

En mathématiques, le raisonnement par récurrence s'applique aux ensembles bien ordonnés (muni d'un ordre tel que toute partie non vide admet un plus petit élément), le plus usuel étant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. La définition de $\mathbb{N}$ peut être faite au moyen des axiomes de Peano, lesquels constituent des axiomes fondateurs pour l'utilisation quotidienne des propriétés de $\mathbb{N}$. Nous reprenons ci-dessous les cinq axiomes cités dans (Grenier, 2012):

1. L'élément appelé zéro et note 0, est un entier naturel
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $S(n)$ ou S_n.
3. Il n'existe pas d'entier naturel dont le successeur est 0.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Le cinquième axiome est souvent appelé dans certains textes « axiome de récurrence » ; sa formulation est très semblable à celle utilisée dans les preuves par récurrences au lycée et à l'université (Grenier, 2012, p. 28) :

> « Principe de récurrence :
> S'il existe $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, alors pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie. »

Ernest (1984) précise qu'un usage correct du principe de la récurrence (« *principle of mathematical induction* ») suit une forme particulière ayant quatre composantes. Selon lui, les deux premières composantes ne représentent pas un risque pas la validité de la preuve :

(1) La déclaration du théorème à démontrer ;
(2) L'invocation du principe de récurrence ;
(3) L'initialisation de la récurrence — « *basis of induction* » (vérifier que la propriété est vraie au rang initial) ;
(4) L'hérédité — « *inductive step* » (montrer que si la propriété est vraie à un rang — hypothèse de la récurrence — alors elle est vraie au rang suivant.

Grenier (2012) montre qu'on trouve plus souvent le principe de récurrence dans les ouvrages d'enseignement sous une forme qui distingue deux étapes concernant respectivement le rang initial et l'hérédité :

> Étape 1 : Il existe $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vraie.
> Étape 2 : Pour tout $n \epsilon \mathbb{N}, n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie

Au niveau épistémologique, Grenier (2012) souligne qu'il est nécessaire de clarifier le concept de la récurrence afin de pouvoir comprendre le sens de ce principe, et de le discuter au niveau didactique :

- Les quantificateurs « il existe » et « pour tout » sont indispensables pour comprendre le sens de ce principe ; ils sont souvent implicites dans l'enseignement, et parfois remplacés par des formulations inadéquates (Grenier, 2012). De surcroît, l'implication doit être compris au sens de la logique mathématique. Par exemple $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ peut être vraie pour des valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ est faux ((Grenier, 2012; Dogan, 2016). C'est-à-dire qu'une propriété peut être héréditaire à partir d'un certain rang, et n'être cependant jamais vraie. La vérification de « l'initialisation » est donc nécessaire (Grenier, 2012).
- Le rapport du principe de récurrence avec l'infini est souvent une source de difficultés. Pour Grenier (2012), la complexité est due au fait que l'on prétend démontrer une propriété relative à un nombre fini d'éléments, mais en étudiant seulement une valeur générique n. En fait, ce rapport avec l'infini n'est pas l'essentiel des obstacles à sa compréhension ; on peut l'aborder autrement (Grenier, 2012), plus particulièrement par la « descente infinie » (Battie V. , 2003). Le principe de descente infinie, dit « de Fermat », est donné classiquement sous l'une des deux formes suivantes :

  F1. Tout ensemble non vide $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

  F2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$.

  L'équivalence de F1 et F2 est facile ; le principe de Fermat induit une donc formalisation de la récurrence dite « par descente infinie » pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est fausse pour tout n, ou que non $P(n)$ est vraie :

  Si pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$,tel que $P(n)$ est vraie, il existe $m \epsilon \mathbb{N}$ tel que $m < n$ et $P(m)$ est vraie, alors pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$, $P(n)$ est faux.

  Cette formulation est particulièrement importante, et il est nécessaire de la reconnaître tout particulièrement en raison du fait que certains problèmes ne se résolvent que par la descente infinie (Grenier, 2012).
- Pour démontrer l'hérédité, il faut instancier $P(n)$ « pour un n quelconque » qualifié très souvent d'« hypothèse de récurrence ». Cette expression induit plusieurs difficultés dans la compréhension de l'hérédité comme l'implication, car dans une preuve par raisonnement déductif, une hypothèse est une donnée. De fait, il est nécessaire de savoir ce qu'est l'implication pour comprendre l'hérédité du principe de récurrence ; il faut, en particulier, savoir distinguer « $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie » de « $(P(n) vraie \Rightarrow P(n+1)$ vraie », cette dernière phrase constituant une instanciation de la première. Or des études (Fabert & Grenier, 2011; Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Dogan, 2016) montrent que l'implication n'est pas bien comprise, même par les étudiants en licence scientifique.

2.4.2 Analyse de manuels

Le raisonnement par récurrence a deux spécificités : il permet la construction d'objets, et il constitue un outil de preuve fondateur de nombreux résultats en mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998). Néanmoins, sa compréhension n'est pas évidente, et cette double spécificité se révèle absente des conceptions des étudiants de filières scientifiques à l'université, et même des enseignants de mathématiques (Grenier, 2012). Le concept de récurrence est souvent réduit à une technique de preuve (Grenier, 2012). Plusieurs études présentent des éléments d'analyse de ce phénomène, sa représentation dans les manuels, les difficultés des étudiants, ainsi que des propositions susceptibles de construire les différents aspects de ce concept.

Le raisonnement par récurrence, dans sa forme usuelle, nécessite la compréhension de la différence entre la vérité d'une implication $A \Rightarrow B$ et la vérité de la proposition « A est vrai $\Rightarrow$ B est vraie », puisque la première peut permettre d'établir l'hérédité d'une propriété pour tout entier n, alors même que cette propriété est toujours fausse (Grenier, 2012; Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Dogan, 2016).

Ce type de raisonnement met en jeu d'une manière imbriquée les modes inductif et déductif, la preuve par récurrence étant en effet une preuve dans laquelle le raisonnement déductif est établi (Grenier, 2012; Dogan, 2016; Ernest, 1984).

> « Prenons un schéma classique de raisonnement par récurrence : il s'agit d'étudier si une propriété dépendant d'un entier n, notons-la $P(n)$, est vraie ou fausse, sans préjuger de sa véracité. Souvent, la résolution de la question pour quelques valeurs de n permet de faire une conjecture. Le cas qui nous intéresse ici est celui où la conjecture « $P(n)$ est vraie pour tout n à partir d'un certain rang r » relève d'une généralisation à partir de l'étude de quelques cas particuliers. Pour étudier cette conjecture et tenter de la prouver, la technique dite de « preuve par récurrence » va consister à établir l'hérédité de la propriété, puis une valeur r à partir de laquelle on a à la fois l'hérédité et $P(r)$ vraie. L'hérédité s'écrit « $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ » et sera établie la plupart du temps par un raisonnement déductif « direct ». Il reste à trouver le « rang initial » r, sans lequel rien n'est prouvé ! » (Grenier, 2012, p. 32)

En France, la récurrence est « mal » présentée dans les manuels scolaires, mais également dans les ouvrages universitaires (Grenier, 2012). Évoquant l'un des ouvrages, Grenier écrit :

> « …Inacceptable pour un ouvrage de ce niveau : aucun quantificateur, aucune implication, le rang initial est 0, l'hérédité a disparu, la définition est donnée sur un exemple ! » (Grenier, 2012, p. 34)

Une analyse a été menée sur l'état des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence, avec l'intention de poursuivre cette étude au niveau de la transition du lycée à l'université (Gardes, Gardes, & Grenier, 2016). Celle-ci comprend dans sa première partie des analyses de manuels scolaires, de corrigés des exercices du baccalauréat ou de productions des élèves. Dans la seconde partie, les auteurs étudient la présentation du raisonnement par récurrence dans quatre manuels scolaires utilisés couramment en classe de terminale, ainsi que dans dix-sept corrigés d'un même exercice de Bac S, avec l'objectif d'identifier des éléments qui peuvent être sources de difficultés pour comprendre et mettre en œuvre un raisonnement par récurrence.

Dans leur première partie, pour analyser le raisonnement par récurrence à travers l'étude des manuels scolaires et des différents corrigés d'un même exercice de baccalauréat, Gardes, Gardes, et Grenier (2016) ont déterminé cinq critères. Ces critères sont construits à partir d'une étude épistémologique et didactique du principe de récurrence. Les cinq critères sont : structure du raisonnement, explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel n, initialisation, implication et quantification, et structure de la conclusion. La deuxième partie, qui consiste à étudier les corrigés d'un exercice de baccalauréat avec l'objectif d'analyser la manière dont les enseignants rédigent un raisonnement par récurrence pour leurs élèves, s'appuie sur l'exercice suivant, tiré du sujet de mathématiques du baccalauréat libanais (filière scientifique), en date du 28 mai 2013 (Gardes, Gardes, & Grenier, 2016, p. 10):

On considère la suite numérique (v_n) definie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$ 3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

Nous listons ci-dessous les écueils (communs aux manuels scolaires et aux corrigés) de la présentation du principe de récurrence et de la rédaction, par les enseignants, d'un raisonnement par récurrence, écueils qui peuvent être sources de difficultés pour les élèves (Gardes, Gardes, & Grenier, 2016) :

- Une explicitation de la propriété dépendant de n insuffisamment précise quant à sa notation, son domaine de définition ou la nature de la variable n ;
- Une initialisation toujours proposée en première étape du raisonnement et souvent réduite à deux valeurs de $n(n = 0$ ou $n = 1)$, valeur donnée par l'énoncé ;
- Des erreurs dans la formalisation de l'hérédité notamment sur la quantification et l'implication ;
- Une conclusion du raisonnement de récurrence qui ne fait appel ni au principe de récurrence, ni aux étapes d'initialisation et d'hérédité, et qui surtout ne fait pas le lien entre ces deux étapes. On observe même parfois une absence de conclusion dans les corrigés.

Cette étude montre bien la nécessité de regarder plus profondément ce qui existe dans les manuels de l'enseignement. Nous étudierons, quant à nous, des ouvrages universitaires, en théorie des graphes.

2.4.3 Difficultés des étudiants

La méthode de récurrence fait partie du programme universitaire des filières de mathématiques ou/et de mathématiques appliquées. Pour beaucoup d'étudiants, cette méthode est difficile à comprendre et à maîtriser (Ernest, 1984; Grenier, 2012; Stylianides, Stylianides, & Philoppou, 2007; Dogan, 2016). Baker (1996) signalait qu'une compréhension conceptuelle de la récurrence représentait un sujet largement négligé par les recherches antérieures. De fait, son étude ne concluait qu'aucun de ses élèves du secondaire, et que seulement 23 % de ses étudiants universitaires, étaient capables de démontrer une compréhension conceptuelle du principe de la récurrence. Ces difficultés sont aussi très visibles lorsque les élèves rencontrent le raisonnement par récurrence pour la première fois, au lycée (Grenier, 2012).
Nous présenterons dans un premier temps les difficultés des élèves au stade du lycée ; nous prolongeons cette illustration en nous penchant ensuite sur l'enseignement supérieur.

2.4.3.1 Transition du lycée vers le supérieur

Dans leur étude, Gardes, Gardes et Grenier (2016) évoquent plusieurs difficultés des étudiants dans leur analyse d'un questionnaire comportant trois parties, difficultés qui concernent : la rédaction d'une preuve par récurrence (l'exercice du baccalauréat (Liban 2003, déjà énoncé) ; l'examen de quatre cas (calculs de dérivée, inégalités, existence de solutions) pour lesquels des élèves doivent étudier l'existence d'une preuve par récurrence ; l'analyse de la validité d'une preuve donnée par récurrence ; et aborder un cas où la propriété est héréditaire à partir de $n = 2$. Leurs résultats les conduisent aux constats suivants :

- Les élèves structurent le raisonnement de récurrence en deux étapes (initialisation et hérédité) et n'écrivent pas de conclusion ;
- Les élèves énoncent très rarement d'une manière explicite la propriété à étudier ; son domaine de définition et la nature de la variable ne sont pas toujours mentionnés ;
- La nature entière de la variable n'est presque jamais mentionnée, et ne constitue pas un critère pour envisager un raisonnement par récurrence ;
- Le raisonnement par récurrence est lié exclusivement, pour un grand nombre d'élèves, aux suites. Par conséquent, si les élèves ne reconnaissent pas une suite, ils affirment qu'une preuve par récurrence n'est pas envisageable ;
- Le raisonnement par récurrence est lié à la preuve d'inégalités ;
- La forme binaire ou ternaire (initialisation, hérédité et éventuellement conclusion) est, pour les élèves, un indicateur très fort de la présence d'un raisonnement par récurrence ;
- Les élèves utilisent l'hypothèse de récurrence dès le début ;

- Les élèves rencontrent des difficultés pour reconnaître un raisonnement par récurrence lorsque l'enseignant change de lettre pour l'hérédité.

Cette étude est consacrée à l'état des connaissances sur le raisonnement par récurrence à l'étape de la transition entre lycée et université. Les résultats présentés ci-dessus concernent les élèves de terminale S. Ils seront prolongés grâce à l'extension de l'étude à la première année d'université : ce travail de recherche est actuellement en cours. Ces expérimentations nous semblent très intéressantes, et ouvrent des questions pertinentes quant à l'enseignement et l'apprentissage de la récurrence. Cette étude est limitée au niveau de la terminale, classe dans laquelle le traitement des suites est surtout arithmétique et algébrique ; pourtant, lors des études supérieures, le rapport des étudiants avec l'écriture formelle, les quantificateurs et les connecteurs de logique sera plus avancé. Leurs connaissances quant au raisonnement par récurrence ne seront donc pas adaptées. Nous approfondissons la réflexion sur les études supérieures dans la partie suivante.

2.4.3.2 Supérieur

À une échelle plus large, plusieurs études ont été menées sur la récurrence au niveau de l'enseignement supérieur. Nous notons que plusieurs difficultés remarquées dès le niveau secondaire sont également observées au niveau supérieur. Trois types de difficultés ont été identifiés : la relation problématique entre l'argumentation inductive et la démonstration par récurrence ; les difficultés techniques de développement d'une preuve par récurrence ; et des difficultés conceptuelles dans la compréhension de la structure et dans l'utilisation de la récurrence (Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Avital & Libeskind, 1978; Léon & Modeste, 2020). Suivant ces trois catégories, nous présentons ci-dessous une synthèse de ces difficultés.

2.4.3.2.1 Relation problématique entre l'argumentation inductive et la démonstration par récurrence

Une grande source de difficultés réside dans l'incompréhension par les étudiants de la différence entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif (Michaelson, 2008). Par conséquent, les étudiants ne perçoivent pas la validité de la récurrence en tant qu'elle est une technique de preuve (Ernest, 1984) ; de plus, il existe une confusion entre la récurrence (« *induction* ») et le raisonnement inductif « *inductive reasoning* » (Dogan, 2016). De fait, la récurrence semble se limiter à une manipulation algébrique et mécanique des étapes (Harel, 2002); elle devient ainsi une technique qui permet d'obtenir des résultats généraux à partir d'un nombre de cas particuliers (Harel, 2001; Dogan, 2016; Harel, 2002).

2.4.3.2.2 Difficultés techniques pour développer une preuve par récurrence

Au niveau technique, une des difficultés discutées par de nombreux chercheurs se situe au cœur de l'étape de l'initialisation. Les étudiants ont l'habitude de travailler sur des problèmes où l'initialisation est souvent établie pour $n = 0$ ou $n = 1$; ils n'ont pas l'habitude de se confronter à des valeurs plus grandes (Larson & Pettersson, 2018; Grenier, 2012; Avital & Libeskind, 1978; Davis, 1981). Par exemple, le cas de $n^2 < 2^n$ (Avital & Libeskind, 1978) est vrai pour $n = 1$ et non pour $n = 2,3, et 4$. Dans ce cas, les étudiants complètent les étapes sans reconnaître que l'initialisation doit être établie pour tout $n \geq 5$. Plusieurs études montrent que beaucoup d'étudiants, et parfois même les enseignants, estiment que l'étape d'initialisation ne s'avère pas nécessaire, et la plupart de temps, elle n'apparaît pas dans leur preuve (Ernest, 1984; Dogan, 2016; Stylianides, Sandefur, & Watson, 2016; Stylianides, Stylianides, & Philoppou, 2007; Harel, 2002; Alcock, 2009). Pour Dogan (2016), cet état de fait témoigne d'une faiblesse très évidente dans leur raisonnement déductif.

Le changement de variable et l'utilisation d'une variable fictive dans l'étape de l'induction (comme $n = k$) pose aussi problème aux étudiants car ils sont habitués à l'utilisation de la variable n (Gardes, Gardes, & Grenier, 2016; Larson & Pettersson, 2018).

2.4.3.2.3 Difficultés conceptuelles dans la compréhension de la structure et dans l'utilisation de la récurrence

Commençons par la première difficulté, qui se situe au niveau du principe lui-même. Ernest (1984) indique qu'un grand nombre d'étudiants ont du mal à comprendre la propriété de bon ordre des nombres naturels (le cinquième axiome de Peano). Maîtriser cette propriété s'avère indispensable pour le travail d'initialisation et pour celui de l'hérédité ; or la relation entre la récurrence et l'ensemble des entiers naturels bien ordonné n'est pas bien illustrée dans les explications données par les enseignants (Ernest, 1984). Stylianides, Sandefur, et Watson (2016) ont remarqué que la récurrence semble être une preuve qui vérifie davantage qu'une preuve qui explique. Leur travail en cours consiste à investiguer les conditions nécessaires pour que la preuve par récurrence soit explicative. Nous n'approfondirons pas le rôle du raisonnement par récurrence, comme il ne s'agit pas de l'objet de notre étude ; si nous nous limitons à présenter les difficultés et les sources d'incompréhensions, nous interrogeons le rôle de la preuve par récurrence, car son incompréhension peut être un facteur de difficulté pour les étudiants. Une autre difficulté conceptuelle concerne l'usages des quantificateurs de logique (Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Ernest, 1984): les étudiants ne maîtrisent pas le sens des quantificateurs, ni leur interaction avec les manipulations des variables dans le travail déductif.

Autre difficulté : l'incompréhension du sens de l'implication. En fait, il n'est pas nécessaire que $P(n)$ soit vraie pour que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ soit aussi vraie (Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Grenier, 2012; Ernest, 1984; Dogan, 2016). Il est possible de déduire qu'une implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie même si chacune de ses composantes est fausse, comme le dit Dogan (2016). Dans les faits, beaucoup d'étudiants refuse l'utilisation de $P(n)$ quand sa valeur de vérité est fausse (Dogan, 2016).

Les types d'exemples mobilisés lorsqu'on raisonne par récurrence occupent une place très importante dans la compréhension de ce principe (Dreyfus & Ron, 2004; Ernest, 1984). Ernest (1984) mentionne qu'une source d'incompréhension prépondérante dans le travail de la récurrence en mathématiques est son exclusivité aux sommes des séries finies. Il précise qu'il est important d'indiquer que la récurrence ne sert pas uniquement à démontrer des résultats sur les séries finies. Le raisonnement par contre-exemple minimal semble peu présent dans l'enseignement. Une des justifications possibles de cet état de fait est qu'il présente des difficultés pour les étudiants (Grenier, 2012).

2.4.4 Proposition de didacticiens

Avant de préciser des propositions qui peuvent favoriser la compréhension de la récurrence par des étudiants, nous nous proposons de clarifier quelques éléments de nature épistémologique et didactique émis par les chercheurs du supérieur.

2.4.4.1 Éclaircissements épistémologiques et didactiques nécessaires pour vaincre les difficultés

La méthode inductive est une méthode heuristique ayant pour but d'arriver à une généralité donnée sous forme de conjectures décrivant une suite finie d'exemples (Ernest, 1984). Ernest affirme que la méthode de la récurrence est bien une forme rigoureuse de preuve déductive. Pour éviter cette confusion, Ernest (1984) propose que la différence entre la méthode inductive heuristique et la méthode de preuve par récurrence soit soigneusement expliquée, et que la première méthode soit appelée méthode de généralisation (ou qu'elle apparaisse en tout cas sous un autre nom que celui de « raisonnement inductif »).
Concernant l'incompréhension par les étudiants de la structure d'une preuve par récurrence et, en particulier, leur incompréhension de l'implication ou de la preuve d'une implication, deux précautions peuvent être prises selon Ernest (1984). Premièrement, il est essentiel que l'étudiant apprenne à la fois le sens et les méthodes pour prouver une implication ; deuxièmement, le principe de la récurrence doit être exprimé sous une forme à deux variables. Gardes, Gardes et Grenier (2016) soutiennent que les enseignants qui le pratiquent pensent parfois à aider les élèves à bien distinguer la variable générique de la variable quantifié universellement, mais ils précisent que les enseignants doivent se rendre compte qu'ils créent un indicateur non-pertinent de validité du raisonnement par récurrence (Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Gardes, Gardes, & Grenier, 2016).

Un élément nous semble très intéressant : il est fortement recommandé de pratiquer la méthode de la récurrence pour la résolution d'une variété de problèmes plus large, non-classiques, qui donnent l'opportunité aux étudiants de regarder les choses autrement, et de ne pas se restreindre à l'arithmétique et aux séries finies ((Ernest, 1984; Grenier, 2012; Dreyfus & Ron, 2004). Dogan (2016) affirme la nécessité de trouver des modèles qui permettent de mieux visualiser l'aspect déductif d'une preuve par récurrence. Plus précisément, il propose que ces problèmes soient très difficiles au niveau de calcul, afin que les étudiants se rendent compte, à chaque étape, de la nécessité de la récurrence (Dogan, 2016). De surcroît, pour améliorer de manière satisfaisante la compréhension du sens du concept et de la propriété de bon ordre des nombres naturels, plusieurs analogies sont recommandées comme portes d'entrée à la compréhension de ce principe : les dominos (Ernest, 1984; Dreyfus & Ron, 2004; Dogan, 2016), ou le tour de Hanoi ((Dreyfus & Ron, 2004; Dogan, 2016).

D'après ce qui précède, les chercheurs proposent plusieurs pistes qui peuvent améliorer le rapport à la récurrence. Nous nous interrogeons sur la nature de ces modèles, sur le lien qu'ils entretiennent avec les mathématiques discrètes, et en particulier sur leurs spécificités.

2.4.4.2 Propositions des didacticiens

L'existence de nombreuses incompréhensions des étudiants quant à la récurrence a conduit les chercheurs à émettre des propositions pour l'enseignement, comme nous l'avons vu dans la partie précédente. Nous proposons ci-dessous une liste des pistes possibles, selon l'étude de Gardes, Gardes et Grenier (2016) sur la transition entre le lycée et le supérieur, qui peuvent soulever certaines ambiguïtés au sein du raisonnement par récurrence :
- Préciser son domaine de définition avant son énoncé et non pas après ;
- Différencier la propriété $P(n)$ de « l'hypothèse de récurrence », si ce vocabulaire est employé ;
- Ne pas donner systématiquement le rang initial n_0 mais proposer aux élèves de le déterminer ;
- Choisir des exemples de propriétés pour lesquelles n_0 ni 1, ni même le rang à partir duquel l'hérédité sera établie ;

- Faire chercher l'hérédité avant de déterminer cette valeur n_0;
- Expliciter le quantificateur « quel que soit » ou « pour tout » devant l'implication ;
- Expliciter l'implication : l'hérédité consiste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$; distinguer l'écriture de l'hérédité (qui est « pour tout n, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) ;
- Varier les schémas pour établir l'implication en un n générique : partir de l'écriture de $P(n)$ et l'introduire dans l'écriture de $P(n+1)$ en la supposant vraie, ou alors écrire d'abord $P(n+1)$ et modifier cette écriture en utilisant l'hypothèse de récurrence «$P(n) vraie$»;
- Écrire toutes les implications dans le travail pour établir l'hérédité : par exemple, si la propriété est une inégalité, il faut raisonner par « conditions suffisantes », et ne pas remplacer les implications par des équivalences, même si celles-ci sont vraies – pour garder le sens de ce que l'on fait ;
- Formuler complètement la conclusion de l'étape « hérédité », pas seulement la deuxième partie de l'implication « donc $P(n+1)$est vraie » ; autrement dit écrire « Donc, pour tout n supérieur ou égale à n_0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$est vraie » ;
- Faire référence au principe de récurrence pour la rédaction de la conclusion.

Gardes, Gardes, et Grenier (2016) font l'hypothèse que les difficultés rencontrées par les élèves pour mettre en œuvre et rédiger un raisonnement par récurrence sont liées aux ambiguïtés de rédactions repérées dans les manuels scolaires et dans les corrigés rédigés par les enseignants. Ceci révèle un manque de compréhension de principe de récurrence.

2.4.5 Types de problèmes mobilisant la récurrence

Nous avons évoqué dans les parties précédentes les propositions des chercheurs quant à la mobilisation, au niveau supérieur, de modèles et de cas non classiques permettant de favoriser la compréhension de la récurrence et de son écriture. Nous détaillons ci-dessous quelques types de problèmes mobilisant la récurrence.

2.4.5.1 La descente infinie

Grenier (2012) propose quelques exemples qui peuvent améliorer la compréhension du concept de récurrence par les élèves. Par exemple, en ce qui concerne la preuve de la non-rationalité de $\sqrt{3}$, son fondement se trouve selon Grenier dans l'axiome de récurrence. Battie (2003) évoque ce point dans sa thèse ; elle propose deux preuves : une preuve par descente infinie, et une preuve par l'absurde et minimalité.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

De même que dans la preuve dite classique, on montre que a et b sont pairs.

Ainsi à partir du couple (a,b) on obtient le couple (a',b') d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}.$$

$$a' < a$$

$$b' < b$$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante (en considérant par exemple la suite des abscisses des couples obtenus), ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

Figure 2-1: Preuve par descente infinie (Battie V. , 2003, p. 233)

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, l'ensemble E des entiers naturels a tels qu'il existe b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ n'est pas vide. Ainsi, cet ensemble admet un plus petit élément que l'on note a_0.

Comme dans la preuve dite classique, on montre que a_0 et b_0 sont pairs.

On obtient donc a_0' appartenant à E tel que $a_0' < a_0$, ce qui contredit le caractère minimal de a_0.

Figure 2-2: Preuve par l'absurde et minimalité (Battie V. , 2003, p. 233)

Selon Battie, nous pouvons réécrire la preuve par descente infinie en expliquant l'ensemble E pour mettre en évidence le lien avec la preuve par l'absurde et minimalité. De plus, elle soutient que nous pouvons écrire une démonstration par récurrence en prenant pour hypothèse de récurrence :

$P(n)$: « Il n'existe pas d'élément x de l'ensemble E tel que $x < n$. »

La propriété fondamentale que tout nombre rationnel admet une écriture p/q irréductible se démontre en utilisant cet axiome de récurrence. Selon Grenier (2012) cette propriété n'est jamais explicite dans l'enseignement. Battie (2003) distingue deux dimensions au sein du raisonnement en arithmétique dans sa thèse intitulée *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Elle les présente dans sa première partie (analyse épistémologique) et dans son étude de la preuve de Frenicle (« *Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré* ». Elle présente deux dimensions pour organiser la pensée mathématique et aborder la démonstration, qu'elle choisit d'appeler « *dimension organisatrice* » et « *dimension opératoire* ». Dans la démonstration présentée par Battie, la dimension organisatrice s'identifie à la descente infinie. Elle étudie également le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par récurrence mathématique (équivalent à la descente infinie), le raisonnement par disjonction de cas et par recherche exhaustive. En ce qui concerne la descente infinie-récurrence, Battie (2003) précise que la descente infinie peut être réécrite sous la forme d'une démonstration par récurrence (initialisation de la récurrence, preuve du caractère héréditaire de la propriété$P(n)$, en conclusion $P(n)$est vraie pour tout entier$n$). La descente infinie et la récurrence sont regroupées dans la même catégorie parce qu'elles constituent deux modes de raisonnement pour aborder la propriété de bon ordre de l'ensemble N.

2.4.5.2 Modifications des problèmes classiques

La modification des exemples peut parfois améliorer la compréhension de la récurrence. Par exemple, Grenier (2012) étudie ainsi ce qu'apporte une modification de l'énoncé 1 (exemple classique des manuels de terminale S et de L1 sciences) en énoncé 2 et énoncé 3 :

Énoncé 1 : Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $P(n)\colon 2^n > n^2$.
Énoncé 2 : Étudier par récurrence la propriété $Q(n)\colon 2^n \geq (n+1)^2$.

Dans l'énoncé 1, l'hérédité de $P(n)$ s'établit par un raisonnement par conditions suffisantes et par un travail algébrique sur les inégalités, qui aboutit à la conclusion que $P(n)$ est héréditaire pour $n \geq 3$. Or $P(3)$ est faux, mais $P(4)$ est vraie. Le principe de récurrence permet donc d'affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout n ≥ 4. On peut ensuite vérifier directement que $P(n)$ est vraie pour $n = 0, 1\ et\ 2$.

Dans le deuxième énoncé, dans l'étude de $Q(n)$, nous pouvons facilement vérifier que $Q(0)$ est vraie. Cependant, $Q(1)$ est faux et $Q(2)$ est faux. Étudions alors l'hérédité : le travail mathématique, couplé à un raisonnement par conditions suffisantes (souvent écrit de manière erronée par les étudiants d'après Grenier), conduisent à obtenir que P est héréditaire dès que $n \geq 2$. En voici les détails :

> « Pour tout n entier, on a $2^{n+1} = 2n \cdot 2$.
> Si $2^n \geq (n+1)^2$, alors $2^{n+1} \geq 2(n+1)^2$; et pour que $2^{n+1} \geq (n+2)^2$, il suffit que $2 \cdot (n+1)^2 \geq (n+2)^2$. On obtient ainsi que pour que
> $2^{(n+1)} \geq (n+2)^2$, il suffit que $n \geq 2$.
> Ce qui établit que, pour tout entier, $n \geq 2$, $Q(n) \Longrightarrow Q(n+1)$ est vraie. » (Grenier, 2012, p. 40)

Selon Grenier (2012), nous avons prouvé que $Q(n)$ est héréditaire pour $n \geq 2$. Mais $Q(2)$ est fausse. Pour Grenier, les manuels ne permettent pas d'aboutir à une conclusion. De fait, $Q(n)$ est vraie pour $n = 0$, fausse pour $n = 1, 2, 3, 4\ et\ 5$ et vraie pour $n = 6$. On peut maintenant répondre à la question posée. $Q(n)$ étant héréditaire à partir de $n = 2$ et $Q(6)$ étant vraie, le principe de récurrence permet d'affirmer que $Q(n)$ est vraie pour tout n ≥ 6 (et par ailleurs pour $n = 0$). Ce qui conduit à penser qu'il peut être intéressant de poser les trois questions suivantes, qui admettent trois réponses distinctes.

Énoncé 3 : On considère la propriété définie pour tout entier naturel n,

$$Q(n)\colon 2^n \geq (n+1)^2.$$

a) Pour quelles valeurs de n l'implication $Q(n) \Longrightarrow Q(n+1)$ est-elle vraie ?
   (réponse : n ≥ 1 car Q(1) étant faux, $Q(1) \Longrightarrow Q(2)$ est vraie).

b) Quel est le n_0 du principe de récurrence ? (réponse : $n_0 = 6$, et non pas 0).
c) Pour quelles valeurs de n la propriété $Q(n)$ est-elle vraie ? (réponse : $n = 0$ ou $n \geq 6$

Grenier (2012) soutient que les énoncés 2 et 3 permettent de mettre en évidence :
- La distinction entre le « rang initial » et les valeurs pour n, pour lesquelles l'hérédité est vraie, et l'origine de ce « rang initial », souvent issue de l'étude de l'hérédité ;
- Le principe de récurrence comme étude de conjectures ;
- L'hypothèse de récurrence comme une supposition qui peut se révéler fausse par la suite, sans que cela remette en question la conclusion sur l'hérédité de la propriété.

3. Pavage d'un polyomino carré de taille 2^n avec des triminos en L

Autres exemples favorisant le travail sur la récurrence, l'ensemble des problèmes où P est une propriété non exprimée comme une fonction algébrique de n mais concerne pourtant un ensemble (fini) d'objets indicé par n (Grenier, 2012). C'est une propriété de type « géometrico-combinatoire », pour reprendre son terme. Elle présente l'exemple du pavage d'un polyomino carré de taille 2^n avec des triminos en L. La preuve en récurrence liée à ce problème met en jeu des aspects de la récurrence non-usuels dans l'enseignement, comme par exemple :

- $P(n)$ est une propriété d'une « classe d'objets de taille n » et non une fonction (algébrique) de n;
- La valeur initiale de récurrence se déduit naturellement de l'étude de l'hérédité ;
- La récurrence est constructive ; la preuve fournit en effet un algorithme de pavage, ce qui permet de parvenir à l'objectif souhaité sans recourir au hasard.

Grenier mentionne deux autres exemples de géométrie combinatoire dont les preuves sont basées sur la récurrence et la « descente infinie » de Fermat (Grenier, 2012), et soutient que ces preuves sont d'une étonnante efficacité. De plus, l'objet « arbre », dont il existe plusieurs définitions, peut permettre de comprendre certains aspects de la récurrence rarement présentés dans l'enseignement (Grenier, 2012). Le fait que l'objet « arbre » possède différentes définitions permet de montrer différents aspects constructifs et dynamiques de la récurrence. Elle indique aussi que l'objet « graphe », omniprésent dans les schémas comme outil de représentation ou de résolution, est rarement étudié comme un objet ; c'est donc une occasion de l'explorer.

Parmi les méthodes qui jouent un rôle central en mathématiques discrètes mais qui semblent également posséder une portée générale, citons la décomposition/recomposition et la structuration des objets (par la coloration ou le principe des cages à pigeons par exemple), qui se situent dans le contexte des raisonnements combinatoires (Grenier & Payan, 1998). On rejoint ici les champs du raisonnement par récurrence et du sens de l'implication. En mathématiques discrètes, la construction des preuves par récurrence ne semble pas être classique ; Grenier et Payan (1998) l'évoque ainsi :

- On raisonne par l'absurde : il existe un contre-exemple de taille n;
- Soit un contre-exemple minimal (de taille n_0) : en utilisant la propriété : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ;
- La considération d'un objet plus petit permet d'aboutir à une contradiction (cet objet plus petit est assez fréquemment obtenu en « cassant » l'objet initial : on enlève des sommets d'un graphe, on partitionne un polyomino)

Dans plusieurs études, la prise en compte de toutes ces notions est indispensable à une bonne compréhension de ce principe (Grenier, 2012; Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018). D'où la nécessité d'étudier en profondeur, et particulièrement au niveau supérieur, l'enseignement de ce principe.

2.4.6 Induction Structurelle

Le TSG-17 (Topic Study Group) de la conférence ICME-13 a réalisé un focus sur les mathématiques discrètes. La partie III de la monographie se concentre notamment sur les contenus et les pratiques mobilisés autour des notions de récursivité et d'induction structurelle (« *recursive thinking* »).

La récursivité et l'induction structurelle semblent être des stratégies très efficaces de modélisation et de résolution de problèmes mathématiques en général, et de problèmes de mathématiques discrètes en particulier (Sandefur, Somers, & Dance, 2016). Leurs avantages ont été discutés dans deux études consacrées aux systèmes dynamiques discrets des équations de différence — « *difference equations* (Hart & Sandefur, 2016).

2.4.7 Synthèse sur la récurrence

La place de la récurrence dans l'enseignement entraîne plusieurs difficultés et contraintes : au niveau des manuels ; au niveau des difficultés des étudiants ; et, plus important encore, au niveau de l'épistémologie de la récurrence elle-même. Nous pensons que tenir la récurrence pour une méthode de preuve ne donne pas forcément les mêmes observations qu'étudier la récurrence comme un concept à part entière. Nous constatons l'existence de nombreuses et profondes incompréhensions du concept de récurrence par les étudiants, tout autant que du principe de démonstration associé. Plusieurs erreurs d'utilisation sont citées dans la littérature, ce qui témoigne de la nécessité d'étudier le principe de récurrence pour lui-même, dans toute sa complexité.
Nous remarquons que les exemples en mathématiques discrètes, et plus particulièrement les exemples tirés de la théorie des graphes, entretiennent un lien spécifique avec la preuve par récurrence. Comment les exemples de théorie des graphes peuvent-ils améliorer la compréhension et la mise en œuvre du concept de récurrence dans l'enseignement ?

Lorsque l'on se situe dans des domaines de l'analyse où les propriétés locales des fonctions (continuité, dérivabilités, limites, études locales, infiniment petits) sont concernées, le raisonnement par récurrence semble, du point de vue épistémologique, étranger, car il s'applique sur les ensembles bien ordonnés dénombrables. Grenier introduit pourtant une question de didactique en analysant le cas où la majorité des problèmes utilisant la technique de la récurrence ne relève pas, du point de vue épistémologique, de l'axiome de récurrence ; dans ce cas-là, la récurrence liée à cette propriété de dénombrabilité de $\mathbb{N}$ doit être développé (Grenier, 2012).

Les données mobilisées par Grenier (2012) dans son étude dérivent d'analyses de réponses à des questionnaires et de résolutions de problèmes proposés pendant de nombreuses années à des étudiants de licence et de master, et à des enseignants lors de formations qu'elle a elle-même assurées. Ses données étaient empiriques, mais relevées de manière identique chaque année. En faisant les liens — de cause à effet — avec ce qui a été relevé dans les manuels, les résultats ont montré les « théorèmes-en-acte » suivants :
- La récurrence est un principe, pas un concept ;
- La récurrence ne construit pas d'objets mathématiques ;
- L'hérédité est souvent rédigée d'une manière telle que l'énoncé devient une tautologie ;
- L'initialisation est une étape première obligatoire ;
- Le rang initial est la valeur de n à partir de laquelle l'hérédité est vraie ;
- Les élèves ne savent pas reconnaître une preuve par récurrence.

Nous pouvons donc inférer, d'après ce qui précède concernant l'état des lieux de l'enseignement et les connaissances mathématiques du concept de récurrence, qu'un grand travail reste à entreprendre pour modifier ces conceptions et développer une connaissance plus pertinente du concept de récurrence. La place des mathématiques discrètes dans le développement de ce concept est clairement substantielle ; nous nous pencherons plus amplement sur cet aspect.

2.5 La place et le rôle de l'algorithmique en mathématiques discrètes

Nous présentons dans cette partie une étude épistémologique sur l'objet « algorithme », sa place et son rôle en mathématiques discrètes. La notion d'algorithme tire son nom d'al-

Khawarizmi, fondateur du domaine de l'algèbre, ce qui rappelle que l'algorithme est un objet mathématique originel avant d'être un objet associé à l'informatique et, plus précisément, à la programmation. L'algorithme joue un rôle très important au centre d'une discipline propre, « l'algorithmique[11] » mais il se situe également à l'intersection des mathématiques et de l'informatique (Gravier, Ouvrier-Buffet, & Modeste, 2010).

Pour la suite de notre travail, nous avons choisi d'utiliser la définition proposée par Modeste (2012), définition simple qui met tout à fait en évidence les points communs majeurs de toutes les définitions existantes consultées par Modeste.

> « Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non- ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. » (Modeste, 2012, p. 25)

2.5.1 Preuves d'algorithmes

Pour s'assurer de la validité d'un algorithme, celui-ci peut être démontré ; la preuve d'un algorithme tient en deux dimensions : (1) preuve de correction, qui assure que quelle que soit l'entrée de l'algorithme, l'algorithme produit une réponse valide ; (2) preuve de terminaison qui assure que quelle que soit l'entrée de l'algorithme, l'algorithme produit une réponse après un nombre fini d'étapes.
Les deux preuves (de correction et de terminaison) s'appuient souvent sur « l'explicitation d'un invariant », lequel est une propriété reliant différents éléments de l'algorithme. Cette propriété est vraie au début de l'algorithme, et demeure vraie tout au long de son exécution. Cette propriété de l'invariant contribue souvent à la démonstration de la preuve de correction. Pourtant nous pouvons aussi désigner un « variant », sous la forme d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ calculée à chaque étape de l'algorithme, et dont la valeur diminue strictement au cours de l'exécution. Cette méthode sert principalement à réaliser la preuve de terminaison.

Un algorithme s'exprime en utilisant un type particulier de variable : la variable informatique. Il s'agit de manipuler le contenu d'une variable informatique par un processus nommé affectation (ou assignation) d'une nouvelle valeur à la variable. Sa notation est souvent représentée par « var : = val » ou « var←val », dans le but d'affecter la valeur « val » à la variable « var ». Plusieurs langages de programmation utilisent parfois différents symboles pour le représenter. Nous notons que l'opération d'affectation d'une valeur à une variable n'est pas symétrique, et qu'elle se trouve donc en opposition avec l'opérateur « = » parfois utilisé en tant que symbole par certains langages de programmation.

2.5.2 Cinq aspects de l'algorithme

Modeste a défini un premier modèle épistémologique du concept d'algorithme, constitué de cinq aspects (Modeste, 2012) que nous reproduisons ci-dessous :

2.5.2.1 L'aspect problème :

L'aspect problème se manifeste par le fait qu'un algorithme résout un problème. Les critères de cet aspect sont les notions d'entrée et de sortie, la notion d'instance d'un problème auquel répond l'algorithme, et le fait que l'algorithme réponde à une question pour toutes les instances du problème.

[11] L'algorithmique est la science dont l'objet d'étude est l'algorithme.

2.5.2.2 *L'aspect effectivité :*

L'aspect effectivité se base sur le fait qu'un algorithme apporte une solution effective et se manifeste par les points suivants :

- Un algorithme peut être mis en œuvre par un opérateur quelconque ;
- Un algorithme est exécutable par un ordinateur ou une machine ;
- Un algorithme peut être exprimé sous forme d'un programme ;
- Un algorithme agit sur des données finies ;
- Un algorithme s'exécute en un nombre fini d'étapes ;
- La description des étapes ne souffre d'aucune ambiguïté ;
- Un algorithme permet de décrire des formules, des programmes de calcul ou des constructions.

2.5.2.3 *L'aspect preuve :*

Pour vérifier qu'un algorithme résout un problème, nous devons tout d'abord donner une démonstration. Ces preuves d'algorithmes s'appuient sur la notion d'un « invariant » ou d'un « variant » dans les cas de correction et de terminaison. En général, ce sont des preuves « constructives », telle que la preuve par induction, qui conduisent à la construction d'un algorithme. Les preuves d'algorithme sont souvent liées aux problèmes « d'existence » des objets ou de « reconnaissance » d'une classe d'objets (les cycles eulériens). Les points importants, selon Modeste, sont :

- La preuve de correction ;
- La preuve de terminaison ;
- La notion d'invariant ;
- L'utilisation d'algorithmes dans des preuves ;
- La preuve d'existence ;
- La preuve d'une propriété ;
- Les preuves algorithmiques, par récurrence, par induction ;
- Un algorithme avec sa preuve équivaut à une preuve constructive ;
- La preuve d'optimalité de la solution.

2.5.2.4 *L'aspect complexité :*

Le travail sur l'algorithmique s'accompagne souvent de questions sur la complexité des algorithmes. La complexité des algorithmes s'intéresse au comportement de l'algorithme en fonction de ses entrées (Modeste, 2012). Nous reprenons les deux formes de complexités précisées dans la thèse de Modeste. Nous parlons d'une complexité en temps lorsque nous étudions le nombre d'étapes d'opérations élémentaires nécessaires à la résolution du problème, et d'une complexité en espace lorsqu'il s'agit d'étudier la quantité de mémoire nécessaire. Le nombre peut être calculé pour le pire des cas ou pour la moyenne de cas. Le pire des cas représente le nombre maximum d'opérations effectuées pour une instance d'une taille fixée, tandis que la moyenne des cas constitue le nombre moyen d'opérations effectuées pour les instances d'une taille fixée

Il existe plusieurs outils pour étudier avec précision la complexité des algorithmes. Plusieurs outils et techniques sont développés en algorithmiques ; certains types de complexités peuvent être définis avec des modèles théoriques (avec les classes P et NP[12]), ainsi qu'avec d'autres outils. Concernant certains problèmes pour lesquels il n'existe pas d'algorithmes efficaces, nous pouvons rechercher des heuristiques qui sont

5 Ce sont des classes de problèmes. P représente les problèmes pour lesquels il existe un algorithme de résolution en temps polynomial en fonction de la taille de l'instance. NP représente l'ensemble des problèmes pour lesquels étant données une instance et une solution au problème pour cette instance, on peut vérifier en temps polynomial que la solution est valide. On sait que P $\subset$ NP, mais P=NP reste un des grands problèmes mathématiques actuels. (Modeste, 2012)

des algorithmes apportant des solutions approximatives (et dont nous connaissons les erreurs possibles).

Les points importants pour l'aspect complexité sont :

- La complexité en temps, en espace ;
- La complexité calculée au pire, en moyenne ;
- La recherche d'algorithmes optimaux ;
- Les heuristiques d'approximation de solution.

2.5.2.5 L'aspect des modèles théoriques :

Cet aspect proposé par Modeste répond aux questions de classification des algorithmes. Ces modèles théoriques permettent de mettre en évidence ce qu'est un algorithme, mais aussi que tous les problèmes ne sont pas algorithmiquement résolubles (décidabilité ou indécidabilité). Dans le cas de problèmes résolubles algorithmiquement, ces modèles permettent une classification selon leur complexité.

Pour Modeste, les points importants sont les suivants :

- Les machines de Turing, fonctions récursives et autres modèles ;
- Les classes de complexité (P, NP, etc…) ;
- La notion d'indécidabilité.

2.5.3 L'optimalité d'une solution algorithmique

La comparaison des solutions algorithmiques est en cours de développement. Elle occupe une place importante, et l'aspect complexité s'avère utile. Mais pour un critère fixé, la science d'algorithmique essaye de trouver le meilleur algorithme pour résoudre un problème (Modeste, 2012). La notion de complexité permet alors de classer les problèmes mathématiques. Pour certains problèmes, prouvés difficiles, il n'existe pas d'algorithme pouvant donner une solution exacte et raisonnable. Dans ce cas, les questions sur « le meilleur algorithme » deviennent fondamentale et constitue l'objet d'étude des disciplines « optimisation combinatoire » et « recherche opérationnelle », dans lesquelles les algorithmes jouent un rôle central (Modeste, 2012).

2.5.4 La dualité outil-objet de l'algorithme

Parmi les différents aspects d'un algorithme, certains font référence à l'outil et d'autres à l'objet. Nous pouvons donc regarder l'algorithme à travers deux prismes : le prisme de l'outil et celui de l'objet. Regarder l'algorithme en tant qu'outil revient à effectuer un focus sur son utilisation pour la résolution des problèmes. Regarder l'algorithme en tant qu'objet revient plutôt à se concentrer sur les questions de bon fonctionnement, de domaine de validité, de complexité et de description de l'algorithme (Gravier, Ouvrier-Buffet, & Modeste, 2010). Les aspects qui font référence à l'outil sont les aspects problème et effectivité ; les aspects preuve, complexité et modèles théoriques se réfèrent à l'objet.

Gravier, Ouvrier-Buffet & Modeste (2010) précisent que l'algorithmique se trouve en lien direct avec la preuve (preuve de correction et preuve de terminaison). Les preuves constructives, par exemple l'induction, peuvent donner lieu à un algorithme. Ils indiquent que ce type de preuves constructives concerne le plus souvent les problèmes d'existence d'objets ou de reconnaissance d'une classe d'objets.

2.5.5 Synthèse sur les algorithmes

Dans notre travail, il nous semble pertinent d'investiguer plus profondément les spécificités qui relient les algorithmes et les objets discrets. Existe-il une particularité ? Si oui, de quelle nature est-elle ? En ce qui concerne plus particulièrement les preuves d'algorithmes : quels types de raisonnements sont les plus fréquents dans ces preuves ? Nous faisons l'hypothèse qu'il existe un lien particulier avec la récurrence et les preuves de correction. Notre étude épistémologique et notre analyse des ouvrages universitaires nous éclaireront et nous donneront davantage d'éléments de réponse à ces différentes questions. Nous prendrons appui sur les éléments théoriques ci-dessus et conclusions précédentes pour nos analyses.

2.6 La modélisation

L'intégration de la modélisation mathématique dans l'enseignement fait aujourd'hui l'objet d'un consensus dans le monde entier (Kaiser, 2014). Cependant, au-delà de ce consensus sur la pertinence de la modélisation, il reste à savoir comment intégrer la modélisation mathématique dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Diverses approches sont discutées ; nous constatons un manque de preuves empiriques solides sur les effets de l'intégration des exemples de modélisation dans la pratique scolaire.
Dans notre étude, nous cherchons à bien explorer la place et le rôle de la modélisation en mathématiques discrètes, particulièrement dans la théorie des graphes. Clarifions tout d'abord ce que nous entendons par modélisation. Il existe plusieurs approches pour représenter le processus de modélisation ; celles-ci sont présentées dans la synthèse réalisée par Kaiser (2014). La quasi-intégralité de ces approches décrit le processus idéalisé de modélisation mathématique comme un processus cyclique, comprenant différentes étapes ou phases, pour résoudre des problèmes réels en utilisant les mathématiques.

Nous avons fait le choix d'adopter le dernier modèle réalisé par Blum (2011). Celui-ci se présente en sept étapes que nous avons traduit ainsi :

1. Comprendre la tâche ;
2. Développer, simplifier et structurer le modèle réel (en tenant compte des paramètres d'influence) ;
3. Développer un modèle mathématique à partir du modèle réel ;
4. Faire les mathématiques ;
5. Interpréter des résultats ;
6. Valider des résultats ;
7. Présenter des résultats dans la situation réelle, et les remettre en question.

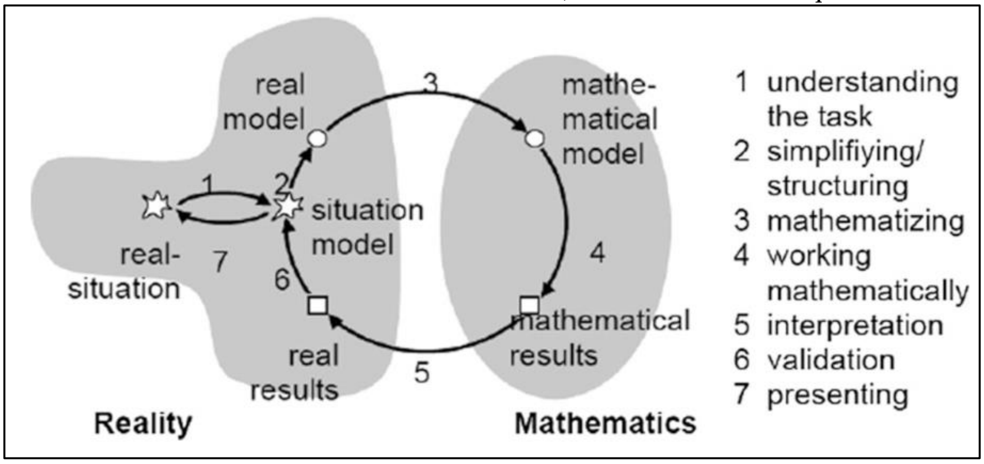


Figure 2-3: Processus de modélisation (Blum, 2011)

Notre travail cherche à vérifier l'existence de tels modèles ou leur absence. Les modélisations réalisées dans les problèmes tirés de la théorie des graphes sont-ils des modèles dans le sens de Blum, ou ne sont-ils que des supports de représentation (pas de transformation) ? Nos analyses des ouvrages universitaires nous aideront à répondre à cette question.

3 Méthodologie de recherche et expérimentations

3.1 État de l'art des travaux en didactique portant sur les mathématiques discrètes

3.1.1 Introduction et justification du choix des articles

La problématique de ce travail de thèse pose la question générale suivante : comment les recherches en didactique des mathématiques étudient les mathématiques discrètes, en particulier au niveau supérieur ? Nous avons raffiné cette interrogation en des questions de recherches plus précises :

a. Quelles sont les spécificités épistémologiques des mathématiques discrètes traitées dans les recherches en didactique des mathématiques discrètes, et plus particulièrement dans l'enseignement supérieur ?
b. Quelles sont les types de problèmes et concepts étudiés ?
c. Quels implicites au niveau épistémologique existent dans les travaux en didactique ?

En ce qui concerne cette dernière question, nous émettons l'hypothèse qu'il existe des implicites épistémologiques dans les travaux en didactique des mathématiques discrètes et nous cherchons à les déterminer. L'état de l'art et les entretiens avec les enseignants-chercheurs nous serviront d'outil pour identifier ces implicites.

Les objectifs de notre état de l'art sont les suivants :

- Montrer les potentialités des mathématiques discrètes dans l'enseignement à partir de travaux existants, conduits par différents chercheurs (didacticiens, mathématiciens, informaticiens), et leurs liens avec d'autres disciplines scientifiques ;
- Montrer la place des mathématiques discrètes dans l'enseignement pratiqué dans différents pays ;
- Souligner les manques de ces travaux ;
- Montrer comment la didactique des mathématiques a traité la question de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques discrètes, les outils théoriques qu'elle a mobilisés, les concepts et les processus qu'elle a définis ;
- Préciser la nature des travaux sur les mathématiques discrètes au supérieur, discuter de leurs spécificités et étudier les liens que les mathématiques discrètes entretiennent avec l'informatique, ainsi qu'avec d'autres champs.

Nous avons recherché tous les travaux réalisés autour de ce thème durant les dernières vingt années. Nous présentons ci-dessous un aperçu de ces travaux :
En 2004, un numéro spécial de ZDM en deux volumes, dont les articles essaient de répondre aux questions suivantes :

- Quels aspects des mathématiques discrètes ont été développés dans les dernières années ?
- Comment ces aspects peuvent-ils être utilisés pour rendre les mathématiques discrètes plus importantes dans les programmes scolaires ?
- Comment enseigner les mathématiques discrètes le plus efficacement possible ?
- De quelle manière les mathématiques discrètes peuvent-elles contribuer à une compréhension des structures mathématiques ?
- De quelle manière le rôle de la preuve a-t-il changé durant ces dernières années, et comment ces changements doivent-ils être reflétés dans l'enseignement des mathématiques ?

- Les mathématiques discrètes peuvent-elles apporter une contribution particulière à l'apprentissage de l'argumentation et de la preuve en classe ?

L'ICME-11 (*International Congress on Mathematical Education*) s'est tenu au Mexique en 2008. Le TSG 15 (*Topic Study Group*) s'y est concentré sur les recherches et les développements de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques discrètes. À l'issue de l'ICME-13, qui s'est tenu à Hambourg en 2016, une sélection d'articles du TSG 17 (*Topic Study Group*) sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques discrètes est synthétisée dans une monographie intitulée « *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide : Curriculum and Research* ». Cette monographie aborde des exemples de mathématiques discrètes dans les programmes scolaires, notamment dans les domaines de la théorie des graphes, de la récursivité et des systèmes dynamiques discrets, de la combinatoire, de la logique, de la théorie des jeux et des mathématiques de l'équité. En outre, il décrit les initiatives prises par les programmes de différents pays pour inclure les mathématiques discrètes, et présente les recherches en cours, en particulier dans les domaines du raisonnement combinatoire et de la dimension affective de l'apprentissage des mathématiques discrètes.

La plupart des travaux existants concerne l'enseignement et les *curricula* au niveau scolaire. Mais nous avons pu consulter les publications d'un nouveau réseau de recherche lancé à Montpellier, l'« *International Network for Didactic Research in University Mathematics* » (INDRUM), qui s'intéresse notamment à l'enseignement supérieur. Parmi ses deux premières publications en 2016 et en 2018, nous avons pu trouver quelques articles sur les mathématiques discrètes qui démontrent le besoin de mener une recherche approfondie sur le niveau supérieur, articles qui suscitent plusieurs questions.

Nous construisons une bibliographie « boule de neige », qui nous conduit à intégrer des articles référencés dans notre bibliographie primaire. Les articles choisis sont les actes de colloques internationaux reconnus dans le domaine des « *Mathematics Education* » abordant la thématique des mathématiques discrètes (ICME-11 et ICME-13), des numéros spéciaux de revues (ZDM et DIMACS), des thèses francophones étudiant les spécificités des *curricula*. De plus, notre travail bibliographique nous a amené à rechercher des articles spécifiques sur des thématiques particulières en lien avec les mathématiques discrètes ; nous les présenterons dans un chapitre à part.

3.1.2 Méthodologie d'analyse des résultats

Nous avons élaboré une grille qui comprend les critères sur lesquelles nous développerons les analyses et les résultats. Le tableau ci-dessus présente d'une part les critères retenus, d'autre part les arguments justifiant notre choix :

Critère	**Justification**
Auteur ; année ; pays	L'objectif est de définir le profil de l'auteur et de dénombrer les articles par pays et par année. Ce qui nous aidera à bien préciser la durée (en intervalles) des travaux consultés.
Spécialité	Nous observons que la liste des auteurs ne comprend pas uniquement des didacticiens, mais également des mathématiciens, des informaticiens, et parfois des représentants d'autres domaines. Préciser la spécialité des auteurs nous permet de distinguer les discours de chacune, et les tendances existantes.

Niveaux de classe	Comme plusieurs articles portent sur les *curricula* et l'enseignement scolaire, il nous semble pertinent de bien préciser le niveau concerné (scolaire, supérieur, formation des enseignants).
Objet d'étude de l'article	Ce critère est très important : soit les articles discutent des mathématiques discrètes en général (objectif théorique, transversal), soit ils étudient des problèmes (des expérimentations par exemple).
Questionnements traités (dichotomie didactique / épistémologie)	Nous cherchons à comprendre la nature des questions traitées dans les articles, dans l'objectif de caractériser les études : études de cas, analyses d'ouvrages ou de manuels, études sur les pratiques, caractérisations des mathématiques discrètes ou de la preuve, études des processus scientifiques (preuves, modélisations, algorithmiques, etc.).
Cadres didactiques issus de la didactique des mathématiques utilisés dans les articles	Ce critère nous intéresse pour dénombrer les cadres théoriques utilisés dans les travaux, le type de contenus de mathématiques discrètes étudié, et pour repérer ce qui existe dans la littérature.
Concepts mathématiques étudiés	Nous souhaitons regrouper les concepts mathématiques étudiés dans les articles par domaines mathématiques (théorie des graphes, arithmétique / théorie des nombres, théorie des jeux, combinatoire, etc.) Ce critère nous servira pour délimiter le champ des mathématiques discrètes.
Types de problèmes	L'existence d'une grande variété de problèmes au sein des mathématiques nous a amenés à bien préciser ceux qui apparaissent dans les travaux de mathématiques discrètes, et à vérifier s'il existe des convergences ou des divergences. Les types de problèmes existants sont : des problèmes ouverts ou fermés, des situations de recherches, des problèmes issus de la recherche mathématique, des problèmes posés lors des compétitions (rallyes) de mathématiques, des conjectures. Nous pouvons également préciser des catégories spécifiques de problèmes, par exemple au sein de la théorie des graphes : problèmes de parcours, de coloration, etc.
Types de preuves évoqués dans l'article	Nous faisons l'hypothèse que les preuves en mathématiques discrètes possèdent un statut particulier et nous analysons la manière dont les preuves sont explicitement traitées et discutées dans les articles (absurde, contraposée, récurrence, etc.).
Caractérisation des mathématiques discrètes	Nous cherchons à délimiter le champ des mathématiques discrètes par la recherche des aspects qui caractérisent le champ, ses spécificités, et les liens qui les unissent à d'autres domaines.

Tableau 3-1: Critères d'analyse de l'état de l'art

3.1.3 Résultats de l’état de l’art

3.1.3.1 Éléments statistiques

Nous présentons ci-dessous quelques statistiques remarquables concernant le nombre d’articles que nous avons consultés en fonction du pays, de l’année de publication, du contexte de publication (conférence ou revue) et de l’auteur. Nous distinguons les articles selon que leurs auteurs sont des mathématiciens, des didacticiens, ou mixtes entre les deux spécialités. Précisons que les tableaux excluent les thèses francophones et l’article de Maurer paru dans DIMACS (*Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*) en 1997.

3.1.3.1.1 Nombres d’articles par pays

Pays	Nb d’articles
France	7
Êtas Unis	12
Italie	2
Pays Bas	1
Allemagne	6
Hongrie	1
Chile	1
Russie	1
Êtas unis et le pays bas	1
Allemagne et Royaume unis	1
Israël	1
Inde	1
Brésil	1
Iran	1
Singapore	1

Tableau 3-2: Nombre d'articles par pays

3.1.3.1.2 Nombre d’articles par année

Année de publication	Nb d’articles
2004	7
2008	13
2016	17
2018	2

Tableau 3-3: Nombre d'articles par année

3.1.3.1.3 Nombre d’articles par revue, colloque, ouvrages, et thèses

Publication	Nb d’articles
Revues[13]	7
Actes de colloques[14]	32
Ouvrages[15]	1
Thèses	5

Tableau 3-4: Nombre d'articles par publication[16]

[13] ZDM
[14] INDRUM (2016- 1 article et 2018- 2 articles) ; ICME (2008- 13 articles et 2016- 16 articles)
[15] DIMACS
[16] Nous notons par publication ici le sens large du mot : article de revue, actes de colloque, ouvrages, thèses

Publié en 2004, le volume 36 de ZDM était consacré aux mathématiques discrètes. Nous en avons consulté sept articles.

3.1.3.1.4 Nombre d'articles par auteur

Il est important de mentionner ici l'existence de plusieurs coauteurs pour plusieurs articles. Nous avons fait le choix de mentionner le nom de chaque auteur, indépendamment du fait qu'il ait co-écrit l'article ou qu'il en soit l'unique signataire.

No	Auteur	Nb d'articles
1	Aaron Gaio	1
2	Aiso Heinze	1
3	Ambat Vijayakumar	1
4	Andreas Schuster	1
5	Antoine Meyer	1
6	Benedetto Di Paola	1
7	Boey Kok Leong	1
8	Bram van Asch	1
9	Cécile Ouvrier-Buffet	2
10	Daniela Ferrarelo	1
11	David Pengelley	1
12	Denise Grenier	1
13	Desh Ranjan	1
14	Dong Fengming	1
15	Eleonóra Stettner	1
16	Elise Lockwood	2
17	Eliza Beregszászi	1
18	Eric. W. Hart	1
19	Frits Hof	1
20	Gerald Goldin	2
21	Guram Bezhanishvili	1
22	György Emese	1
23	Hanna Burian	1
24	Hans-Georg Weigand	1
25	Hing Leung	1
26	Ian Anderson	2
27	Jack van Lint	1
28	James Sandefur	1
29	Janet Barnett	1
30	Jerry Lodder	1
31	Joseph G. Rosenstein	2
32	Judit Szitányi	1
33	Julien Moncel	1
34	Karina Höveler	1
35	Kay Somers	1
36	Kristina Reiss	1
37	Lea Cartier	1
38	Lisa Rougetet	1
39	Mani Rezaie	1
40	Margaret (Midge) Cozzens	1

41	Maria Flavia Mammana	1
42	Marie-Line Gardes	1
43	Michel Spira	1
44	Nellie Verhoef	1
45	Nicolas Giroud	1
46	Ödön Vancsó	1
47	Pratik Koirala	1
48	Quek Khiok Seng	1
49	Robert L. Devaney	1
50	Rosalie Dance	1
51	Simon Modeste	1
52	Sol Garfunkel	1
53	Stephan Haußman	1
54	Stephen R. Campbell	1
55	Tay Eng Guan	1
56	Thierry Dana-Picard	1
57	Toh Tin Lam	1
58	Tom Coenen	1
59	Ulrich Kortenkamp	2
60	Valerie A. Debellis	1
61	Viviane Durand-Guerrier	1
62	Vladimir I. Igoshin	1
63	W. Gary Martin	1
64	Ximena Colipan	1
65	Zackery Reed	2

Tableau 3-5: Nombre d'articles par auteur

3.1.3.1.5 Nombres d'articles écrits par des mathématiciens, didacticiens, collaborations[17]

Spécialité	Nombre d'articles
Mathématiciens	8 (20.5%)
Didacticiens	16 (41%)
Mixtes entre mathématiciens/informaticiens et didacticiens	11 (28.2%)
Mixtes entre mathématiciens et informaticiens	3 (7.8%)
Mixtes entre didacticiens et autres domaines	1 (2.5%)

Tableau 3-6: Nombre d'articles par spécialité

Les tableaux (Tableau 3-2 jusqu'à Tableau 3-6) présentés ci-dessus montrent bien la répartition des articles par pays, auteurs, conférences, et spécialités. Ces quelques remarques soulignent le contexte spécifique à notre état de l'art :

- Il existe une grande diversité de pays impliqués dans les recherches en mathématiques discrètes, avec une place particulière pour les États-Unis (12 articles), la France (7 articles) et l'Allemagne (6 articles) ;

[17] Nous avons effectué la catégorisation des auteurs suivant leur domaine de spécialisation selon leur curriculum vitae, leurs pages/espaces personnels, et de leurs laboratoires d'affiliation sur ligne.

- Il existe aussi une grande diversité d'auteurs, avec soixante-cinq auteurs différents pour trente-neuf articles ; seuls sept auteurs ont publié au moins deux articles consacrés aux mathématiques discrète ;
- La diversité de spécialités des auteurs est aussi remarquable : ces écrits ne sont pas uniquement signés de didacticiens (41 %) mais aussi l'œuvre de mathématiciens (20.5 %), de mathématiciens / informaticiens et de didacticiens (28.2 %), de mathématiciens et d'informaticiens (7.8 %), ou enfin de didacticiens et de chercheurs issus de domaines variés (sciences politiques, sciences sociales) (2.5 %).

3.1.3.2 Éléments par rapport aux critères

Notre état de l'art comprend environ une quarantaine d'articles, dont les auteurs sont de nationalités très variées : française, américaine, hongroise, italienne, russe, mexicaine, chilienne, espagnole, allemande, indienne, iranienne, brésilienne, singapourienne et hollandaise. Cette grande diversité témoigne du fait qu'il est intéressant d'étudier le domaine des mathématiques discrètes lorsque celui-ci existe en tant que thème de recherche et de contenu mathématique (actuel ou potentiel) dans les *curricula* scolaires de son pays.

Les dates de publications s'échelonnent de 1997 à 2018. Une vingtaine d'années marquée par de grands progrès au niveau des outils numériques et technologiques, qui fait appel à de nouveaux savoirs ; des outils qu'il faut enseigner pour préparer les nouvelles générations à la vie réelle : ceci peut expliquer l'augmentation des études sur les « *big data* » et la « *computation* », champs dans lesquels Hart & Martin voient les « *new drivers of mathematics* » (2016).

> « A recent publication that looks to the future of mathematics, *The Mathematical Sciences in 2025* (Committee on the Mathematical Sciences 2025, 2013), states that "over the years there have been important shifts in the level of activity in certain subjects — for example, the growing significance of probabilistic methods, the rise of discrete mathematics, and the growing use of Bayesian statistics" (p. 72). The book identifies two new drivers of mathematics – computation and big data, and for both of these drivers it describes how discrete mathematics plays an important role. For example, discrete mathematics algorithms for information processing, dynamical systems in ecology, networks in industry and the humanities, and discrete optimization (p. 77). » (Hart & Martin, 2016, p. 15)

La liste des auteurs (environ soixante-cinq auteurs différents) témoigne d'une représentation diversifiée des domaines de recherche et de spécialités. Presque 41 % des articles consultés sont écrits par des chercheurs en didactique des mathématiques ou en « *mathematics education* » ; les 59 % restant se divisent entre chercheurs en mathématiques, pour 20.5 %, et chercheurs exerçant dans des domaines variés comme l'épistémologie, les sciences sociales, la logique et l'informatique, soit 38.5 %. L'importance de cette deuxième catégorie montre clairement l'intérêt qu'éprouvent les chercheurs issus de ces domaines à s'impliquer dans le domaine de la didactique des mathématiques et dans le monde de l'éducation. Nous remarquons ainsi que le travail sur les mathématiques discrètes n'intéresse pas que des didacticiens, mais aussi d'autres spécialités (logiciens, mathématiciens, informaticiens, épistémologues et autres). Cette diversité montre l'existence d'un intérêt pour travailler et pour étudier les mathématiques discrètes dans des branches et des filières différentes, ce qui nous ramène à la question de la caractérisation des mathématiques discrètes à travers la délimitation de son champ propre, et l'étude des liens qui l'unissent à d'autres disciplines. Plusieurs questions peuvent se poser sur les positions implicites des auteurs au niveau épistémologique lorsqu'ils abordent des éléments issus des mathématiques discrètes.

3.1.3.2.1 Niveaux de classe

Niveau de classe	Nb d'articles
Primaire	1
Complémentaire	3
Primaire et complémentaire	1
Complémentaire et secondaire	2
Primaire, complémentaire, et secondaire	2
Secondaire	11
Supérieur	8
Curriculum scolaire	5
Curriculum scolaire et formation des enseignants	1
Secondaire et formation des enseignants	2
Formation des enseignants	2
Situations « *hors curriculum* » (SiRC)	1

Tableau 3-7: Nombre d'articles par niveau

La diversité que nous avons décrite dans la partie précédente concerne aussi les niveaux de classes étudiés, présentés dans le tableau ci-dessus. Notons ainsi que plus que la moitié des articles étudient le niveau scolaire (51%) sous ses trois aspects : primaire, complémentaire et secondaire[18]. Ajoutons-y cinq articles qui discutent des *curricula* scolaires d'une manière plus générale, soit 64% des articles consultés autour des thématique scolaire. Onze articles se focalisent seulement sur le secondaire, quand huit articles (Lockwood & Reed, 2018; Lockwood & Reed, 2016; Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018; Ouvrier-Buffet, 2008; Vijayakumar, 2008; Rezaie, 2008; Grenier, 2008) parmi les trente-neuf recensés ont choisi pour cadre d'étude l'enseignement supérieur. La formation des enseignants constitue un des objets de plusieurs études (Khiok Seng, Tin Lam, Kok Leong, Eng Guan, & Fengming, 2008; Cartier & Moncel, 2008; Campbell, 2008; Igoshin, 2016). Colipan (2016) a choisi de travailler sur les situations de recherches en classe (SiRC) en tant que situations a-didactiques. Cette diversité des niveaux de classe nous ramène à notre problématique et à notre objet d'étude : quelle est la place des mathématiques discrètes dans le supérieur ?

3.1.3.2.1.1 Situation du supérieur, une spécificité ?

No	Liste des auteurs	Spécialité	Nb d'articles
1	Cécile Ouvrier-Buffet	Didactique des mathématiques	2
2	Antoine Meyer	Informatique	1
3	Simon Modeste	Didactique des mathématiques	1
4	Elise Lockwood	Mathematics Education	2
5	Zackery Reed	Mathematics Education	2
6	Janet Barnet	Mathematics	1
7	Guram Bezhanishvili	Mathematics	1
8	Hing Leung	Computer science	1
9	Jerry Lodder	Computer science	1
10	David Pengelley	Mathematics	1
11	Desh Ranjan	Computer science	1
12	Denise Grenier	Didactiques des mathématiques	1
13	Ambat Vijayakumar	Mathematics	1
14	Mani Rezaie	Mathematics Education	1

Tableau 3-8: Liste des auteurs[19] du supérieur

[18] Primaire (5 ans-11 ans) ; complémentaire (11 ans- 14 ans) et secondaire (15ans- 18 ans)
[19] Cette liste présente les 14 auteurs des 8 articles.

Spécialité des auteurs	Nb des auteurs
Didactique des mathématiques/ Mathematics Education	6 (43%)
Mathématiques	4 (28.5%)
Informatique/computer science	4 (28.5%)

Tableau 3-9: Nombre des auteurs par spécialité

Spécialité des auteurs	Nb d'articles
Didacticiens des mathématiques	5
Mathématiciens	1
Mixtes entre mathématiciens/informaticiens et didacticiens	1
Mixtes entre mathématiciens et informaticiens	1

Tableau 3-10: Nombre d'articles par spécialité des auteurs

Concepts étudiés / contenus	Objet d'étude de l'article
Droites discrètes ; « *exponentiation by squaring* » ; algorithmes (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018)	Discussion sur les mathématiques discrètes en général et analyse de deux exemples de situations, avec un focus sur l'interface mathématiques-informatique
Combinatoire (Lockwood & Reed, 2018)	Présentation des méthodes pour développer des compétences dans le contexte combinatoire (« *combinatorial thinking* »)
Combinatoire (Lockwood & Reed, 2016)	Expérimentation de l'effet d'une activité autour des tâches combinatoires sur le développement de l'apprentissage et la résolution des problèmes chez les étudiants du supérieur.
Induction ; combinatoire (Barnett, et al., 2008)	Présentation de deux projets historiques et de leurs potentialités pour le développement des outils modernes et des techniques de preuves s'ils sont travaillés en classe.
Arbres ; droites discrètes (Ouvrier-Buffet, 2008)	Discussion de la problématique existante entre le discret et le continu et émergence d'un champ mathématique (les « mathématiques discrètes ») à part entière, et en même temps un champ expérimental, qui peut également questionner des concepts, des connaissances et des compétences d'autres champs mathématiques.
Principe de case à pigeons ; « *finite induction principle* » ; « *tiling polyminos* » (Grenier, 2008)	Présentation du « principe de case à pigeons » et de la « *finite induction principle* » comme outils pour initier les étudiants au cours des mathématiques discrètes, initier l'énumération, et pour développer des activités de modélisation et des preuves.

Théorie des graphes et combinatoire (Vijayakumar, 2008)	Présentation du statut des mathématiques discrètes en Inde, où plusieurs aspects des mathématiques discrètes sont enseignés au niveau supérieur depuis les années 1960. Plusieurs activités soutiennent les recherches en mathématiques discrètes en Inde, et le développement de ce champ.
Théorie des graphes ; combinatoire ; théorie des nombres ; jeux combinatoires. (Rezaie, 2008)	Expérimentation sur la nature et le sens de la pensée combinatoire (« *combinatorial thinking* ») à travers l'étude du lien entre les réponses des étudiants et le « *theoretical knowledge* » de l'auteur.

Tableau 3-11: Concepts étudiés et objet d'étude des articles du supérieur

Les études autour des mathématiques discrètes dans l'enseignement scolaire témoignent de nombreuses caractéristiques et spécificités dont nous parlerons ultérieurement. Son intégration dans les *curricula* de plusieurs pays (États-Unis, France, Hongrie, Iran, Inde, Italie, Allemagne…) a fait l'objet de plusieurs articles. Concernant le supérieur, voici quelques remarques à partir des articles que nous avons consultés :

- La première remarque est **le nombre insuffisant d'articles** sur le supérieur. Huit articles seulement ont été recensés au cours des vingt dernières années, ce qui semble très peu pour ce domaine très présent dans la vie courante, et qui a connu sur cette période d'importants développements.
- Des **spécialistes de différents domaines** ont consacré un article aux mathématiques discrètes. 43 % des auteurs sont des didacticiens des mathématiques (terme qui recouvre les chercheurs en « *mathematics éducation* »). Les 57 % restant se divisent entre mathématiciens et informaticiens (nous incluons sous ce dernier intitulé les spécialistes de « *computer science* »). Cette thématique n'intéresse donc pas que les didacticiens, mais également les mathématiciens et les informaticiens ce qui est intéressant car cela implique des collaborations.
- Les contenus mathématiques cités par ces articles recouvrent dans la plupart des cas la **combinatoire** et quelques études sur la théorie des graphes. Cependant, des travaux mettent aussi en évidence les **nombreuses potentialités des mathématiques discrètes** en tant que domaine émergeant possédant de multiples liens avec l'informatique, mais aussi avec d'autres champs mathématiques (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018; Ouvrier-Buffet, 2008).

Le travail mené par Ouvrier-Buffet, Meyer & Modeste (2018) précise des éléments importants concernant le statut des mathématiques discrètes dans le supérieur, tout particulièrement en France. L'introduction des mathématiques discrètes dans les *curricula* mathématiques y accusent des difficultés. L'existence de plusieurs défis didactiques a conduit à la naissance d'un réseau nommé DEMIPS (Didactique et Epistémologie des Mathématiques, lien avec l'Informatique et la Physique dans le Supérieur), à la fois pour disposer d'un lien d'échanges sur ces questions et pour mettre en lumière ces enjeux. L'étude d'Ouvrier-Buffet, Meyer & Modeste montre bien le besoin actuel de construire des ressources partagées concernant les mathématiques discrètes au supérieur.
Si l'on constate donc que des travaux essentiellement didactiques existent bien aujourd'hui, ils sont encore peu nombreux à porter spécifiquement sur les mathématiques discrètes. Celles-ci constituent une branche peu explorée en didactique, en particulier pour l'enseignement supérieur. Il est nécessaire de développer des recherches en didactique des mathématiques discrètes, d'étudier ses articulations avec d'autres domaines mathématiques et même d'autres disciplines (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018).

3.1.3.2.2 Questionnements traités (dichotomie épistémologie / didactique)

Il nous était difficile de classer les questionnements traités dans les articles vu la variété de questions (au niveau épistémologique et didactique). De ce fait, nous avons regroupé les questions traitées dans les articles en les classant en cinq grandes catégories, présentées ci-dessous :

- Études consacrées aux mathématiques discrètes :
    - ♦ Panorama sur les mathématiques discrètes et son enseignement, avec une focalisation sur l'interface mathématiques-informatique ;
    - ♦ Opportunités données par les mathématiques discrètes, particulièrement dans le domaine affectif ;
    - ♦ Présentation des sujets (avec exemples, théorèmes et définitions) issus du domaine des mathématiques discrètes ;
    - ♦ Problématique de la distinction entre le discret et le continu ;
    - ♦ Choix de problèmes non-classiques qui favorisent l'apprentissage des mathématiques discrètes ;
    - ♦ Étude sur les mathématiques discrètes elles-mêmes, sur la manière dont elles différent d'autres champs mathématiques ;

- Études consacrées aux intérêts d'inclure les mathématiques discrètes dans les *curricula :*
    - ♦ Incorporation des mathématiques discrètes dans les *curricula* scolaires aux États-Unis ;
    - ♦ Motifs expliquant l'absence des mathématiques discrètes dans les *curricula* aux États-Unis, les constats que l'on peut en tirer ;
    - ♦ Intérêts d'insérer les mathématiques discrètes dans les *curricula* scolaires en Italie ;
    - ♦ Pourquoi et comment les mathématiques discrètes ont été inclus dans les *curricula* scolaires et dans la formation des enseignants à Singapour ;

- Pratiques des mathématiciens :
    - ♦ Présentation des méthodes permettant de développer la capacité à faire des généralisations dans le contexte combinatoire ;
    - ♦ L'éducation qui met l'accent sur le « *relational understanding* » a davantage de valeur que celle qui se focalise sur l'« *instrumental instruction* » ;
    - ♦ Méthodes mises en œuvre pour inviter les étudiants à résoudre des problèmes de la vie réelle en se basant sur des modélisations par des graphes de compétition et d'intervalles ;
    - ♦ Il est indispensable de préparer les futurs enseignants aux cours de logique ;
    - ♦ Description d'une nouvelle approche pour enseigner les mathématiques discrètes en utilisant un « *interactive geometry software* » ;
    - ♦ Étude de situations d'apprentissage en classe à partir de problèmes de mathématiques discrètes ;

- Des pratiques des étudiants :
    - ♦ Difficultés des étudiants à résoudre correctement des problèmes de combinatoire ;
    - ♦ Place des outils numériques (ordinateurs) dans le travail des étudiants sur le concept de suites numériques ;

- ♦ Conceptions et difficultés des étudiants explorant le problème du pont de Königsberg avec des expérimentations ;

- Des processus/projets spécifiques :
  - ♦ Étude sur l'effet d'un « *gesture* » particulier pour développer chez les étudiants les heuristiques, puis la preuve et la démonstration ;
  - ♦ Relation entre les stratégies des étudiants et celles des axiomes mathématiques ;
  - ♦ Étude sur le contexte d'un projet de recherche et d'enseignement du combinatoire mené en Hongrie ;
  - ♦ Compréhension de l'algèbre traditionnel après l'introduction du sujet discret de la récursion au sein du *curriculum* d'algèbre ;
  - ♦ Une approche de la théorie des graphes travaillée à l'école, en Italie ;
  - ♦ La place et le rôle de l'optimisation combinatoire dans l'enseignement des mathématiques et de l'informatique, en Allemagne ;
  - ♦ Exemples d'utilisation de modèles discrets pour la résolution des problèmes ;
  - ♦ Place des « *playful games* » dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ;
  - ♦ Place des activités de jeux (jeux de Nim) et opportunités présentées par leur intégration dans les *curricula* ;
  - ♦ Utilisation de techniques expérimentales dans les classes de mathématiques ;
  - ♦ Présentation historique des mathématiques discrètes et de l'informatique, place de ces problèmes dans les classes, possibilités existantes ;
  - ♦ Utilisation de plusieurs représentations (graphique et algébrique) et transition entre celles-ci ;
  - ♦ Efficacité des deux principes de base en arithmétique : principe de case à pigeons et principe de l'induction ;
  - ♦ La nature et le sens de la pensée combinatoire.

3.1.3.2.3 Objet d'étude des articles

Si certains articles portent uniquement sur une expérimentation menée en classe, d'autres discutent d'une manière plus générale des mathématiques discrètes (de son importance, de ses caractéristiques et de ses potentialités, mais aussi des incitations à en faire un élément des *curricula*). Nous émettons l'hypothèse que, par-delà les discussions en didactique, il existe des justifications de nature épistémologique qui ne sont pas explicitées dans les travaux : on peut l'observer dans les conclusions et les résultats des articles.

3.1.3.2.4 Concepts mathématiques étudiés

Les concepts mathématiques étudiés dans les articles de notre état de l'art sont trop larges pour être énumérer. Nous avons donc fait le choix de les regrouper par domaines mathématiques, et de les découper en classes de concepts. Nous nous sommes appuyées sur la classification utilisée par les revues internationales en mathématiques (https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html).

Domaine mathématique	Nombre d'articles
Théorie des graphes (graphes, arbres, matrices d'adjacence, multigraphes, parcours)	10
Théorie des nombres/arithmétique (cryptographie, théorie des codes, suites, divisibilité, principe de la récurrence, descente infinie, le nombre)	6
Algorithmes (outil/objet)	4
Combinatoire (principe de case à pigeons, pavage des polyminos, jeux combinatoires, principe de bijection)	11
Théorie des jeux (jeu de Nim)	2
Logique	1
Systèmes dynamiques discrètes (géométrie fractale)	1
Récursivité	1
Problèmes discrèts d'équitable division	1
Géométrie discrète (droites discrètes)	2
Mathématiques discrètes en générale[20]	6

Tableau 3-12: Nombre d'articles par domaine mathématique

Le tableau ci-dessus montre que la théorie des graphes est très présente (10 articles), dépassée de peu par le domaine du combinatoire (11 articles). L'algorithmique occupe une place remarquable dans plusieurs articles, en tant qu'outil (Gaio & Di Paola, 2016; Kortenkamp, 2008; Giroud, 2008)ou en tant qu'objet (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018). La diversité des domaines étudiés s'explique par le fait que le champ recouvre une vaste liste de sujets et de concepts — diversité particulièrement intéressante à observer au niveau universitaire.

3.1.3.2.5 Cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques utilisés dans les articles

Une grande partie des articles constituent seulement des synthèses de projets, ou des analyses mathématiques sans travail méthodologique. Les cadres théoriques sont cités dans certains cas. Goldin (2004) évoque par exemple les processus heuristiques « modeling the general from the particular » impliqués dans plusieurs domaines au niveau affectif. De son côté, Hußmann (2008) s'appuie sur un « social-constructive paradigm » pour créer un environnement et construire des situations dans lesquels l'apprentissage représente une « self-regulated activity » qui ne peut pas être contrôlé par l'extérieur (dont le professeur), mais seulement encouragé au maximum. Vergnaud (1991) était la référence choisie par Cartier et Moncel (2008) pour étudier les conceptions des étudiants. Les travaux de Maths à Modeler (Giroud, 2008; Godot, 2005) mobilisent la théorie des situations didactique (Brousseau).

3.1.3.2.6 Types de problèmes

Problème (réf. de l'article)	Place et rôle de la preuve ?	Place et rôle de la modélisation	Problème ouvert ?
Problème non résolu de la conjecture de Erdös-Straus (Gardes	Dans ce problème, la preuve est un objet qui sert au développement des heuristiques.	Aucun travail de modélisation.	Oui.

[20] Tels les travaux de (Campbell, 2008; DeBellis & Rosenstein, 2004) qui ont écrit des articles transversaux et qui ne font pas une expérimentation.

& Durand-Guerrier, 2016)			
Problème algorithmique (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018)	La preuve est un objet ; discussion des preuves d’algorithmes (terminaison, correction, complexité).	Aucun travail de modélisation.	Non.
Problème combinatoire (« Horse Race Problem ») (Lockwood & Reed, 2018)	Le problème n’est pas une preuve explicite. Les étudiants doivent le résoudre dans l’objectif de développer des généralisations sur les problèmes combinatoires	Aucun travail de modélisation.	Non.
Jeux (exemple de théorie des jeux) (Goldin G. A., 2016)	Il n'existe pas de travail sur la preuve. Néanmoins, la résolution du problème permet de développer la compréhension du domaine affectif.	Aucun travail de modélisation, mais Goldin indique que les étudiants peuvent créer des représentations.	Non.
Problème combinatoire (Coenen, Hof, & Verhoef, 2016)	Il n'existe pas de travail spécifique sur la preuve. Néanmoins, la résolution du problème permet de faire un focus sur le « mathematical thinking » des élèves (Four attention levels, Mason, 2004).	Aucun travail de modélisation explicite. Les étudiants utilisent des tableaux et des graphes comme représentations pour faciliter la résolution.	Non.
Problème combinatoire (Höveler, 2016)	Le travail sur la preuve n’est pas évoqué. Comparaison entre les stratégies utilisées par les élèves et les axiomes de combinatoire.	Aucun travail de modélisation.	Non.

Problème combinatoire (« passwords activity ») (Lockwood & Reed, 2016)	Le travail sur la preuve n'est pas évoqué. Les stratégies de résolution donnent des opportunités pour développer l'« understanding about fundamental combinatorial ideas, and those that fostered meaningful mathematical practices ».	Aucun travail de modélisation explicite. La résolution par les étudiants témoigne de l'utilisation de multiples représentations (tableaux, dessins).	Non.
Tâches ouvertes autour du combinatoire (« open-type questions ») (Vancsó, et al., 2016)	Ces tâches font partie des outils proposés pour l'enseignement du combinatoire. Les stratégies de résolution ne comprennent pas de preuves. L'étude prend pour objet le développement des raisonnements.	Aucun travail de modélisation explicite. Des représentations géométriques et des transformations sont utilisées pour certaines questions.	Oui.
Jeu du chaos (Devaney, 2016)	Ce jeu n'est pas expérimenté. Le texte présente des stratégies de construction algorithmique et de transformations en géométrie destinées à obtenir de belles images.	Aucun travail de modélisation, mais des constructions en géométrie.	Non.
Problèmes représentés par des relations récursives (récursivité) (Sandefur, Somers, & Dance, 2016)	L'objet de l'étude est la récursion. Le texte discute de l'apport de la récursivité à l'apprentissage de l'algèbre. (« Constant change ; linear change ; proportional change »)	Aucun travail de modélisation. Des « flow diagram » sont construits comme outil de représentation des problèmes et pour comprendre la relation de récursivité	Non.
Problème de modélisation d'un « foodweb » pour répondre à des questions et réaliser des caractérisations. (Cozzens & Koirala, 2016)	Le problème ne nécessite pas une preuve.	Un travail de modélisation est effectué avec des graphes d'intervalles, des graphes de compétition et des graphes pondérés.	Non.

Problème des ponts de Königsberg ; représentation des connexions des compagnies aériennes par des graphes ; trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des parcours (différents niveaux scolaires) (Ferrarrello & Mammana, 2016)	Ces activités ont pour objectif de développer des conjectures et des hypothèses sur les caractéristiques des graphes, d'appliquer des algorithmes pour trouver des chemins, et d'utiliser les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour résoudre des problèmes. Il nous semble que la preuve est un objet de travail.	Un travail de modélisation est effectué avec des graphes.	Non ; oui si l'on considère les conjectures comme des problèmes ouverts.
Problème d'héritage (Garfunkel, 2016)	Présentation d'un travail sur le raisonnement concernant les différentes méthodes et les modélisations. Les modes de raisonnements sont donc des objets d'étude.	Un travail de modélisation est effectué, avec des tableaux, et la création de représentations multiples.	Non.
Jeu du chocolat. (Situations de recherche en classe) (Colipan, 2016)	Les preuves sont des objets. Le travail consiste à formuler des hypothèses et à valider des résultats, à développer des exemples génériques, des arguments mathématiques.	Le travail de modélisation prend la forme d'exemples et de contre-exemples, de représentations par des schémas et des dessins.	Oui.
Problèmes sur les suites (Weigand H.-G. , 2004)	Il s'agit d'un travail sur les preuves, et en particulier sur les heuristiques. Il est demandé de faire appel aux aspects intuitifs des concepts lors de l'expérimentation.	Un travail de modélisation est effectué avec l'ordinateur.	Non.
Problème du voyageur de commerce (problème d'arbre couvrant minimum) ; (Schuster, 2004)	Le travail de la preuve constitue ici un outil pour la résolution ; il s'agit d'une preuve constructive (trouver un algorithme)	Un travail de modélisation est effectué avec des graphes.	Oui, NP-complet.

Problème non classique (Goldin G. A., 2004)	Il ne s'agit pas d'un travail sur la preuve, mais Goldin présente des aspects heuristiques qui peuvent être évoqués dans la résolution de ce type de problèmes (« modeling the general on the particular »).	Un travail de modélisation est effectué avec des graphes.	Non.
Construction géométrique (« construct a regular 4-gon in hyperbolic geometry ») (Kortenkamp, 2008)	Un travail sur la preuve est mené, en vue de la validation d'une construction à l'aide de théorèmes en géométrie.	Un travail de modélisation est effectué avec des outils numériques.	Non.
« Treatise on the arithmetical triangle » (Barnett, et al., 2008)	Un travail sur la preuve d'une des conséquences de la construction du triangle est mené, ce qui montre selon les auteurs le principe de l'induction. La preuve est ici un outil.	Aucun travail de modélisation.	Non.
« Counting triangulations of a polygon » (Barnett, et al., 2008)	Le travail de la preuve est un outil.	Aucun travail de modélisation.	Non.
Déplacement discret sur une grille (Ouvrier-Buffet, 2008)	Le travail sur la preuve est un outil pour démontrer le théorème et réaliser la construction.	Aucun travail de modélisation, mais des représentations sur la grille.	Non.
Problème sur les isomorphismes des graphes (Dana-Picard, 2008)	Le travail sur la preuve est un outil qui permet de faire un focus sur le rôle des outils numériques.	Un travail de transition entre représentation graphique et représentation algébrique est réalisé.	Non.
Problème de la poignée de mains, et un problème sur la division euclidienne (Grenier, 2008)	La preuve est un objet d'étude (le principe de case à pigeons)	Aucun travail de modélisation.	Non.

« What is the smallest equilateral triangle in which k disks of diameter 1 can fit? » (Grenier, 2008)	Aucun travail sur la preuve.	Un travail de modélisation graphique est réalisé.	Non.
Preuve par induction (Grenier, 2008)	Le travail de la preuve par induction est un objet. Cette étude a pour objectif d'identifier les aspects importants de la preuve par induction.	Aucun travail de modélisation.	Non.
Pavage des polyminos (géométrie combinatoire) (Grenier, 2008)	Le travail sur la preuve est discuté et représente un objet de travail.	Aucun travail de modélisation.	Non.
Preuve d'irrationalité de $\sqrt{3}$ (Grenier, 2008)	Le travail sur la preuve est un objet, et concerne en particulier la méthode de descente infinie.	Aucun travail de modélisation.	Non.
Problème sur les parcours eulériens (Kortenkamp, 2008)	Un travail sur la preuve en tant qu'outil de vérification est réalisé, avec l'aide des outils numériques.	Un travail de modélisation avec des outils numériques	Non.
Problème du pont de Königsberg (Cartier, 2008)	La preuve dans ce travail est un objet d'étude. Les élèves sont amenés à construire des solutions, former des conjectures, effectuer des vérifications, et développer des argumentations en vue de prouver la validité de leur résolution.	Un travail de modélisation et de représentation est effectué avec des graphes.	Non.
Problèmes combinatoires (autour de principe de bijection) (Spira, 2008)	Les preuves travaillées sont des outils de résolution des exemples.	Aucun travail de modélisation.	Non.
Jeu d'obstruction (Giroud, 2008)	Le travail de preuve consiste à suivre une démarche expérimentale (questionner et prouver).	Il existe un travail de représentations et des modélisations.	Non.

Problème combinatoire (« We color the four corners of square with the two colors. How many different colorings are there if we allow the square to move around? » (Rezaie, 2008)	Les preuves dans ce travail sont des outils dans l'objectif de développer la pensée combinatoire.	Aucun travail de modélisation.	Non.

Tableau 3-13: Place de la preuve et modélisation par type de problèmes

D'après Tableau 3-13, nous avons pu catégoriser les preuves faites en se basant sur la dialectique outil/ objet de Douday (1992) et en fonction de l'objet d'étude de l'article (étude de la preuve en tant que telle ou pour la résolution des problèmes). Ce tableau nous permet de présenter un deuxième tableau en fonction des preuves et des modélisations. :

Travail sur la preuve		**Travail sur la modélisation**	
Outil	**Objet**	**Oui**	**Non**
7 problèmes	15 problèmes	17 problèmes	9 problèmes

Tableau 3-14: preuves et modélisations en tant qu'outil/objet

Après la consultation des problèmes et des activités évoqués dans nos articles, nous avons fait le choix de préciser pour chacun d'entre eux la place de la preuve et de la modélisation, dans l'objectif de répondre à nos questions sur les caractéristiques épistémologiques des mathématiques discrètes, en particulier la place de la preuve et la modélisation.

Nous nous appuyons sur la dialectique outil-objet de Douady (1992) pour décrire les aspects de preuve évoqués dans les articles que nous présentons dans cet état de l'art. Rappelons ce que Régine Douady entend par outil et objet :

> « Un concept est un **outil** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un outil est engagé par quelqu'un dans un contexte problématique à un moment donné. […] Par **objet**, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est défini indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » (Douady, 1992, p. 134)

Nous avons choisi d'exclure de notre comptage les articles transversaux qui traitent des mathématiques discrètes en général (de son importance et des raisons de son inclusion dans les curricula), ne portent pas sur des problèmes particuliers, et ne réalisent pas d'expérimentations. Les articles présentent les problèmes et les discutent, mais n'abordent pas les stratégies de résolution. Une grande partie des articles porte sur les spécificités de l'enseignement des mathématiques discrètes au niveau scolaire ; nous cherchons à savoir si ces spécificités sont identiques au niveau supérieur.

Dans sa présentation sur l'importance des mathématiques discrètes, Rosenstein (2016) cite des exemples de problèmes et de modes de raisonnements, comme l'utilisation des tableaux, des arbres, des graphes, le principe de dénombrement, l'action de lister, de compter, de classifier, l'étude des graphes et la génération d'algorithmes. L'article de Anderson, van Ash et van Lint (2004) listent des sujets qui, selon les auteurs, sont rattachés aux mathématiques discrètes ; chaque catégorie est illustrée par des exemples de problèmes de la vie réelle. Remontant dans leur étude jusqu'au milieu des années 1980, Hart et Martin (2016) précisent que les problèmes de mathématiques discrètes peuvent être classés en cinq grandes catégories pertinentes pour les curricula scolaires : « enumeration, sequential step-by-step change, relationships among a finite number of elements, information processing, and fair decision making. » Toujours selon Hart & Martin, ces cinq catégories comprennent les domaines des mathématiques discrètes suivants : « combinatorics, recursion, graph theory, informatics, and the mathematics of voting and fair division (which can be viewed as « game theory»). »

Les tableaux présentés dans cette partie permettent de préciser plusieurs aspects épistémologiques. Parmi les articles qui discutent des preuves, la preuve constitue un objet d'étude pour seize problèmes ; elle est considérée comme un outil de travail pour sept problèmes. Cette différence flagrante montre bien que la preuve occupe une place remarquable au sein des travaux en mathématiques discrètes, en tant que concept et objet d'enseignement. Nous questionnons cependant les raisons épistémologiques implicites qui motivent ce choix des chercheurs. Nous remarquons aussi que le travail de la modélisation est très commun dans les articles (dix-sept problèmes comprenant des modélisations, neuf problèmes sans travail de modélisation). Nous précisons dans la partie suivante les types de preuves travaillés et les formes de modélisations.

3.1.3.2.7 Types de preuves

Nous pouvons lister plusieurs types de preuves étudiées par les auteurs :
- Les heuristiques[21] (Gardes & Durand-Guerrier, 2016; Weigand H.-G. , 2004; Goldin G. A., 2004);
- Preuves d'algorithmes (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018; Devaney, 2016; Ferrarrello & Mammana, 2016);
- Effectuer des généralisations (Lockwood & Reed, 2018);
- La récursivité/induction (Sandefur, Somers, & Dance, 2016; Grenier, 2008);
- Effectuer des conjectures et des hypothèses (Cartier & Moncel, 2008; Ferrarrello & Mammana, 2016; Colipan, 2016) ;
- Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes (Ferrarrello & Mammana, 2016);
- Développer des exemples et des exemples génériques (Colipan, 2016) ;
- Principe des cases à pigeons (Grenier, 2008) ;
- La descente infinie (Grenier, 2008).

Le travail de modélisation présenté dans les articles comprend une variété de modélisations/représentations, comme la montre la liste ci-dessous :
- Représentations par des tableaux, des dessins et des graphiques (Coenen, Hof, & Verhoef, 2016; Lockwood & Reed, 2016; Garfunkel, 2016; Colipan, 2016; Dana-Picard, 2008; Grenier, 2008; Giroud, 2008) ;
- Représentations géométriques (Vancsó, et al., 2016; Devaney, 2016);
- Diagrammes (Sandefur, Somers, & Dance, 2016) ;
- Modélisation avec des graphes (Cartier & Moncel, 2008; Cozzens & Koirala, 2016; Ferrarrello & Mammana, 2016; Schuster, 2004; Goldin G. A., 2004);
- Modélisation avec l'ordinateur et des outils numériques (Weigand H.-G. , 2004; Kortenkamp, 2008) ;

21 « recognising the epistemic status of a conjecture and the role of examples and counterexamples in the development of proof and proving » (Gardes & Durand-Guerrier, 2016) et « recognizing the general from the particular » (Goldin G. A., 2004)

Nous faisons l'hypothèse que ces types de preuves sont transversaux à l'activité mathématique mais nous posons la question de la spécificité des types de preuves dans le domaine des mathématiques discrètes. Les types de preuves, que l'on retrouve, possèdent de réelles spécificités en lien avec les objets et leur nature discrète.

Dans la plupart des articles, le travail sur la preuve n'est pas explicite. Plusieurs études décrivent leur position concernant la preuve en général, ou en particulier la preuve dans le contexte des mathématiques discrètes. Le développent des heuristiques a été analysé par Goldin (2004; 2016) et Gardes & Durand-Guerrier (2016). Durand-Guerrier & Gardes étudient la nature épistémique d'une conjecture, et les rôles que jouent exemples et contre-exemples dans le développement des processus de démonstration de la preuve autour de la conjecture de Erdös-Straus.

Les preuves utilisant des algorithmes apparaissent dans plusieurs travaux de cet état de l'art (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018; Devaney, 2016; Ferrarrello & Mammana, 2016; Garfunkel, 2016; Rougetet, 2016; Schuster, 2004; Hußmann, 2008). Si les contextes varient, les auteurs affirment de manière générale que les algorithmes favorisent l'apprentissage des mathématiques discrètes. La modélisation par des graphes, la coloration des graphes, et le développement d'algorithmes constituent des stratégies de preuve discutées implicitement pour plusieurs exemples et problèmes (Hart & Martin, 2016; Cozzens & Koirala, 2016; Kortenkamp, 2008). La distinction entre une condition nécessaire et une condition suffisante apparaît dans les expérimentations de Cartier et Moncel (2008) sur les types de preuves obtenu par les étudiants lors leur exploration du problème des ponts de Königsberg.

« Minimal generator sets » est un concept évoqué par Ouvrier-Buffet dans le contexte de déplacement discrète dans une grille (Ouvrier-Buffet, 2008) et l'aspect « minimal » fait l'objet de la preuve. Pourtant, nous nous posons la question de sa place en tant qu'outil si nous demandons de sa forme généralisée. Le principe de case à pigeons et le principe de l'induction représentent aussi des types de preuves particuliers selon Grenier (2008), qui les utilise souvent avec ses étudiants en cours d'introduction aux mathématiques discrètes, pour initier l'énumération et développer des activités de modélisation et d'élaboration des preuves.

Même si plusieurs études affirment qu'il existe une particularité de la preuve en mathématiques discrètes, cette singularité reste à encore explorer, tant au niveau épistémologique qu'au niveau didactique. Dans le supérieur, cet approfondissement prend une autre dimension que dans l'enseignement primaire ou secondaire : en effet, nous pouvons faire l'hypothèse que la proximité théorique entre les mathématiques discrètes issues de la recherche contemporaine et leur enseignement dans le supérieur est plus grande que dans l'enseignement primaire ou secondaire. Cela nous ramène à des questions relatives à des transpositions didactiques qui potentiellement peuvent revêtir différents aspects, selon le niveau considéré et les objectifs d'apprentissages, curriculaires ou transversaux. Nous allons donc maintenant approfondir les caractérisations du domaine des mathématiques discrètes proposées dans les articles considérés dans cette étude.

3.1.3.2.8 Caractérisation des mathématiques discrètes

3.1.3.2.8.1 Éléments sur les spécificités des mathématiques discrètes

Les recherches en mathématiques discrètes plongent leurs racines de recherche dans différents domaines des mathématiques, principalement la théorie des groupes, la géométrie, la théorie des nombres, la combinatoire algébrique, la théorie des graphes et la cryptographie. En conséquence, elles ont été influencées par une grande variété de résultats, de méthodes et de représentations mathématiques. Leur combinaison et leur intégration dans une théorie approfondie sont essentielles à la recherche en mathématiques discrètes. L'utilisation de l'informatique, en particulier, a non seulement influencé les résultats mathématiques, mais également les méthodes mathématiques (Heinze, Anderson, & Reiss, 2004; Goldin G. A., 2016). Goldin a précisé que ce qui est commun entre ces sujets est plus profond du fait qu'ils sont discrets (dans le sens où les objets possèdent des valeurs discrètes et non continues). Ils possèdent, pour la plupart ou pour tous, les caractéristiques suivantes:

1. "They are topics that can be motivated directly by posing problems set in familiar, potentially intriguing situations: elections, children's games, art and coloring books, sharing, or counting combinations;
2. There are often mathematically easy special cases that can be thought up and explored;
3. Various natural representations can be constructed, and accessible, interesting questions can be asked about the mathematical structures implicit in the results of exploration and representation;
4. The problem explorations typically involve few mathematical prerequisites – they do not require much, if any, algebra, formal or analytic geometry, trigonometry, or calculus, or even the arithmetic of fractions" (Goldin G. A., 2016, p. 87)

Les structures discrètes peuvent favoriser une compréhension plus profonde des mathématiques, car elles sont parfois plus faciles à comprendre que les structures continues (Hußmann, 2008; Weigand H. , 2001). De surcroît, les problèmes de mathématiques discrètes peuvent jouer un rôle spécifique dans l'apprentissage et l'enseignement des preuves (Grenier & Payan, 1998; Cartier & Moncel, 2008). Les aspects heuristiques, conceptuels et applicatifs sous-jacents aux mathématiques discrètes peuvent plus facilement être traduits en problèmes élémentaires (qui ne sont toutefois pas forcément faciles à résoudre). Hart & Martin (2016) soulignent les potentialités des mathématiques discrètes pour le développement des compétences d'argumentation, de communication, de résolution des problèmes et de modélisation, mais également des habitudes mentales, comme la pensée algorithmique pour la résolution des problèmes, le raisonnement combinatoire et la pensée récursive. Ils précisent que les mathématiques discrètes représentent un outil puissant au niveau empirique (pour la modélisation et la résolution des problèmes contemporaine) et pédagogiques (pouvant être utilisés simultanément dans les curricula comme des outils, des objets et des objets affectifs). Rosenstein (2016) soutient que les contenus de mathématiques discrètes sont nécessaires pour tous les publics, au contraire de l'analyse ; il développe cette idée dans son article.

Une des tendances marquées dans notre état de l'art est l'appel à intégrer les mathématiques discrètes dans les curricula. Plusieurs caractéristiques justifient la proposition d'intégrer certains éléments de ce domaine (Gaio & Di Paola, 2016; Khiok Seng, Tin Lam, Kok Leong, Eng Guan, & Fengming, 2008):

- Le sujet est riche et accessible ;
- Le sujet est engageant, innovant, ludique, et améliore la compréhension des mathématiques dans la vie quotidienne ;
- Les élèves sont directement impliqués dans la résolution des problèmes et dans la logique ;
- Le sujet développe la communication et la créativité ;
- Le sujet améliore le « computational thinking » chez les élèves ;
- Le sujet soutient le développement de compétences en « computer science » qui seront très utile dans les classes avancées ;
- Le sujet permet des activités de type « stand-alone » ;
- « Education should prepare young people for jobs that do not yet exist, using technologies that have not yet been invented, to solve problems of which we are not yet aware » par Richard Riley.[22]

[22] Dans (Gaio & Di Paola, 2016, p. 72)

3.1.3.2.8.2 Éléments sur la combinatoire

Nous présentons quelques éléments particuliers sur la combinatoire en raison du fait qu'elle constituait l'objet d'étude d'une grande partie des textes que nous avons consultés dans cet état de l'art. Les jeux combinatoires occupent une place très remarquable dans le domaine des mathématiques discrètes (Schuster, 2004), comme par exemple les jeux de Nim. Ceux-ci font appel à différents types de connaissances, soulignés par Rougetet (2016): des connaissances non-institutionnelles, à l'image des notions particulières aux jeux comme les « winning and losing position and winning strategy » ; et des connaissances institutionnelles, comme les propriétés des entiers ou la récursion. Elle indique qu'en fonction de ces types de connaissances, l'usage des jeux combinatoires dans les classes aide à l'apprentissage de notions fondamentales dans un contexte ludique. Les jeux de Nim en particulier peuvent s'avérer très utiles pour développer la pensée abstraite, introduire l'énumération et aborder la théorie des graphes à partir des jeux d'arbres (Rougetet, 2016).

Plus généralement, les jeux combinatoires permettent la création de situations de recherches au travers d'une approche expérimentale (Giroud, 2011); stimulent une interaction avec un environnement qui aide à développer des « mathematical practices : discovery phases, conjectures, trial and error periods, reformulation, proof arguments » (Hart & Sandefur, 2016). Les jeux combinatoires aident les étudiants à devenir autonome et améliorent leur rapport aux mathématiques :

- Elles conduisent impérativement les étudiants, quel que soit leur âge, à explorer des situations de problèmes réels et à utiliser des techniques issues des mathématiques et de l'informatique (Schuster, 2004) ;
- Ces sujets s'avèrent complémentaires de l'éducation mathématique traditionnelle parce qu'ils mettent en avant des concepts et des aspects techniques qui n'ont pas été travaillés auparavant ;
- L'optimisation combinatoire participe largement au développement des heuristiques ;
- Les problèmes de l'optimisation combinatoire sont en lien avec plusieurs domaines de recherche opérationnelle et d'économie, et avec des sujets mathématiques classiques, comme l'analyse ou la géométrie analytique.

Cette présentation sur la combinatoire témoigne des spécificités des mathématiques discrètes en général et montre bien le lien très particulier existant entre les mathématiques discrètes et plusieurs domaines mathématiques et non-mathématiques.

3.1.3.2.8.3 Quelques éléments sur la théorie des graphes

Ferrarrello et Mammana (2016) soutiennent que la théorie des graphes constitue un très bon outil pour modéliser des problèmes. Bien qu'elle constitue une branche relativement nouvelle des mathématiques, la théorie des graphes a occupé une place très importante au sein des mathématiques en raison de son usage pour des applications multiples, dans les domaines du transport ou de la télécommunication, et pour des expérimentations scientifiques. Dans le domaine des « mathematics education », la théorie des graphes comporte plusieurs avantages : elle permet les étudiants de voir les applications des mathématiques, et de renforcer leurs compétences en argumentation et en raisonnement. Ces avantages sont dûs au fait que la théorie des graphes est facile à comprendre, amusante à utiliser et intéressante pour modéliser des situations réelles ; elle peut être utile pour développer « a situable vision of mathematics, not reduced to a set of rules to be memorized and applied, but recognized as a framework to address significant questions, to explore and preceive relationships and structures recurring in nature and in the creation of mankind » (Ferrarrello & Mammana, 2016, p. 262).

Malgré l'existence de l'objet graphe dans plusieurs endroits de nos études, la théorie des graphes en tant que partie fondamentale des mathématiques reste un sujet peu exploré en didactique des mathématiques. Il est néanmoins largement enseigné, ce qui nous renforce nos interrogations sur les aspects actuellement enseignés des mathématiques discrètes.

3.1.4 Conclusion de la partie 3.1

Nous présentons dans ce paragraphe une synthèse des résultats de l'état de l'art, avec les apports des thèses francophones autour de notre thématique. Commençons par le fait qu'il n'existe pas, pour la didactique, de consensus sur une définition des mathématiques discrètes. La délimitation de ce champ, en précisant les liens qui existent avec les autres domaines, doit encore être réalisé. L'état de l'art apporte plusieurs réponses à notre questionnement de départ. Les caractéristiques épistémologiques des mathématiques discrètes montrent bien l'existence de spécificités intéressantes ; la question de son enseignement au niveau supérieur reste posée et appelle davantage d'approfondissements.

L'état de l'art montre plusieurs variations suivant les nationalités des auteurs, les objets d'étude, et les questions traitées, diversité qui témoigne que les auteurs abordent les mathématiques avec un large champ d'intérêt. Il nous semble aussi pertinent de parler d'un point commun des problèmes en mathématiques discrètes, cité par plusieurs auteurs : leur aspect « ludique ». Celui-ci semble un point fort au niveau épistémologique car il donne aux mathématiques discrètes une portée plus large, les rend facilement accessible par un large public. Cet aspect explique le fait que les mathématiques discrètes constituent les mathématiques du jeu. On note un fort dissensus sur cette question. Plusieurs auteurs ont souligné le lien particulier entre la preuve et les mathématiques discrètes, et celui entre la modélisation et les mathématiques discrètes.

L'insuffisance de travaux sur les problèmes et les preuves en mathématiques discrètes au niveau de l'enseignement supérieur renforce la nécessité de regarder ce qui se passe sur le terrain, et dans les ouvrages universitaires, autour de ce champ. Pour arriver à ce but, nous préciserons notre objet d'étude dans la partie qui suit.

3.2 Choix d'un focus sur la théorie des graphes

Nous avons fait le choix de centrer notre étude sur la théorie des graphes pour plusieurs raisons :

La théorie des graphes occupe une place notable dans la recherche et dans l'enseignement. Le champ des mathématiques discrètes possède une grande importance dans la recherche, non seulement en tant que champ mathématique à part entière au niveau axiomatique et théorique, mais aussi en tant que champ possédant des liens avec d'autres domaines mathématiques. La théorie des graphes est un domaine très récent en mathématiques. Elle permet l'enseignement de mathématiques vivantes, pour lesquelles des questions ouvertes compréhensibles existent. Les obstacles notionnels y sont souvent moins importants que dans d'autres branches des mathématiques. Cette discipline possède de riches applications concrètes, dont on peut voir les résultats à l'œuvre dans la vie courante, que ce soit le routage dans les réseaux de télécommunication, la régulation du trafic aérien, l'allocation de fréquences, la gestion des files d'attente pour les distributeurs automatiques ou le calcul d'itinéraires routiers (Cartier, 2008; Epp, 2011; Rosen, 2012).

La théorie des graphes est souvent considérée comme une discipline « ludique » au sein des mathématiques. Plusieurs livres de « recréations mathématiques » proposent des problèmes de graphes ou, du moins, des problèmes que l'on peut modéliser et résoudre à l'aide de graphes. Cet aspect ludique conduit à transformer l'enseignement des graphes ou des mathématiques discrètes en une compilation d'énigmes et de casse-tête auxquelles on ne cherche qu'une réponse locale (Cartier, 2008).

L'enseignement d'éléments de la théorie des graphes est aussi considéré comme une façon d'introduire les élèves aux notions d'algorithmique. De fait, la plupart des nombreuses applications pratiques des graphes sont algorithmiques. Les algorithmes développés par les mathématiciens discrets se prêtent bien à l'implémentation informatique, dans la mesure où le graphe est un objet discret aisément représentable de façon matricielle ou par des listes chaînées par exemple (Cartier, 2008).

Enfin, l'enseignement de la théorie des graphes existe dans l'enseignement supérieur, lieu de notre investigation.

3.3 Entretiens avec les enseignants-chercheurs

3.3.1 Introduction et justification de ce choix d'expérimentation

Notre méthodologie de travail pour traiter la première question de recherche (« comment caractériser au niveau épistémologique les mathématiques discrètes ? ») est une méthodologie contemporaine qui prend appui sur des entretiens avec les mathématiciens. Notre revue de littérature en didactique nous a permis de lister plusieurs affirmations (non-démontrées) sur les caractéristiques des mathématiques discrètes. Notre objectif est de réinterroger cette littérature, d'évaluer la cohérence avec les pratiques des chercheurs en mathématiques discrètes et d'identifier d'autres composantes épistémologiques. Ces entretiens nous aideront à questionner les affirmations de la littérature, et à observer, au niveau de l'épistémologie des chercheurs, les convergences ou les divergences critiques. Les réponses à ce questionnaire nous permettront de mieux connaître la nature de cette discipline aujourd'hui. Ces réponses sont-elles en cohérence ou en contradiction avec l'état de l'art ? Permettent-elles de lever des implicites ?

Nous avons tout d'abord fait le choix d'interroger des chercheurs et enseignants-chercheurs en mathématiques discrètes (plusieurs sous-domaines). Comme nous avons précisé notre objet d'étude autour la théorie des graphes, nous avons interrogé des enseignants-chercheurs engagés dans ce domaine de recherche.

3.3.2 Construction de la grille d'entretien

L'objectif du travail présenté dans cette partie est de tenter d'apporter des éléments de réponses à notre question de recherche Q1. Pour mener concrètement cette enquête, nous avons suivi le plan suivant : dans un premier temps, nous avons construit un questionnaire à destination des enseignants chercheurs en France et au Liban autour de domaine des mathématiques discrètes en général, et de la théorie des graphes en particulier. Ce questionnaire était piloté avec deux enseignants-chercheurs implantés dans les deux pays, afin de tester notre grille et de compléter notre vision quant à certains aspects du questionnaire. Tous les entretiens ont été enregistrés et transcrits.

Dans la deuxième partie, nous présentons le questionnaire que nous avons élaboré. Dans la troisième partie, nous définissons nos critères d'analyses en fonction des résultats de notre état de l'art et des apports théoriques. Dans la quatrième partie, nous procédons à l'extraction et à l'analyse des réponses obtenues, et nous présentons notre dernière partie de synthèse.

3.3.2.1 Le questionnaire- guide de l'entretien

Nous présentons ici en détail notre questionnaire, dont le titre est « les mathématiques discrètes dans le supérieur, enseignement et recherche » (consultable en intégralité en Annexe C). Nous avons conduit les entretiens en personne avec la plupart des personnes interviewées, et en vidéo-conférence dans les cas où la rencontre n'était pas possible. Le choix des enseignants-chercheurs était orienté, puisque nous avons repéré certains spécialistes du domaine au Liban et en France.

3.3.2.1.1 Partie 1- Éléments personnels et professionnels

Dans la première partie, intitulée « Partie 1. Éléments personnels et professionnels », les dix questions posées (numérotées 1-a jusqu'à 1-j) ont pour objectif d'obtenir des informations élémentaires sur les caractéristiques relatives à l'individu et à sa place dans l'institution : domaine de recherche (a), parcours de formation universitaire (b), nombre d'années d'expérience dans l'enseignement (c), nombre d'année d'expérience dans la recherche (d), nom de l'université (e), statut de l'individu (f), département de l'enseignement (g), Niveau(x) et module(s) enseigné(s) (h), nombre d'heures d'enseignement (i), pays (j).

3.3.2.1.2 Partie 2- Conception sur la définition des mathématiques discrètes

La deuxième partie, intitulée « Partie 2. Conception sur la définition des mathématiques discrètes », comporte trois questions (numérotés 2, 3, 9), dont l'objectif est d'obtenir des éléments permettant de délimitation le champ des mathématiques discrètes — leur définition, comme nous l'avons constaté avec notre état de l'art, n'étant pas encore bien stabilisée ((Maurer, 1997). Nous cherchons à identifier les manques éventuels dans notre revue de littérature.

La question 2 (« comment définissez-vous le champ de mathématiques discrètes (dans la recherche et dans l'enseignement) ? ») nous permet de repérer des caractéristiques épistémologiques partagées par les enseignants-chercheurs pour savoir s'ils sont d'accord sur ce que sont les mathématiques discrètes (identifier nos implicites de l'état de l'art) et de caractériser l'activité mathématique en mathématiques discrètes (le niveau didactique).

Avec la question 3 (« quels sont les objets issus des mathématiques discrètes présents dans votre cours ? »), nous cherchons à dresser une liste des objets de mathématiques discrètes enseignés. Pour davantage de précision, nous demandons aux chercheurs en mathématiques discrètes s'ils utilisent leurs connaissances en mathématiques discrètes pour enrichir leur cours et, si oui, comment.

La question 9 (« "Les objets discrets possèdent plusieurs définitions, de différentes natures" est une affirmation faite par un chercheur en didactique des mathématiques ; Qu'en pensez-vous ? ») est liée aux questions 4, 5, et 6. Le but de cette question est de connaître les croyances des enseignants-chercheurs quant aux spécificités des objets discrets. Quand leur avis était favorable, nous avons détaillé notre questionnement afin de vérifier si les enseignants-chercheurs travaillaient le changement de statut avec les étudiants (9-a).

3.3.2.1.3 Partie 3- Conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes

D'après les travaux de littérature, la récurrence semble être une des méthodes de raisonnement importantes en mathématiques discrètes. Ce qui nous conduit à la troisième partie (« Conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes »), qui comporte une question (numérotée 4) permettant d'observer les convergences et les divergences avec l'état de l'art en ce qui concerne l'activité de preuve en mathématiques discrètes. Notre état de l'art a montré l'existence d'une grande variété de types de preuves. Nous cherchons à comprendre en quoi la preuve en mathématiques discrètes est particulière pour les enseignants-chercheurs (dans leur activité de recherche et dans l'enseignement).

La question 4 (« comment concevez-vous l'activité de preuve en mathématiques discrètes ? ») s'intéresse aux différents types de preuves qui existent au sein de la recherche et de l'enseignement. Cette question nous permet de savoir s'il existe une distinction entre les deux, et si les preuves possèdent un statut particulier en mathématiques discrètes. Nous avons demandé des exemples aux enseignants-chercheurs ayant répondu de manière affirmative à cette question.

3.3.2.1.4 Partie 4- La place et le rôle du travail sur la modélisation en mathématiques discrètes

La quatrième partie, intitulée « La place et le rôle du travail sur la modélisation en mathématiques discrètes », doit nous renseigner quant à la place et au rôle de la modélisation, dont nous savons qu'elle a joué un rôle moteur dans la genèse des mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998).

Ceci nous conduit à la question 5 (« Quels sont la place et le rôle du travail de la modélisation en mathématiques discrètes ? ») que nous avons posé en distinguant la recherche de l'enseignement et en demandant des exemples en appui. Cette question étant en lien avec l'activité de preuve, l'interviewé a pu répondre en évoquant cette dernière : dans ce cas-là, nous l'avons invité à développer sa réponse.

3.3.2.1.5 Partie 5- Lien(s) entre les mathématiques discrètes et autres disciplines

Notre cinquième partie, intitulée « Lien(s) entre les mathématiques discrètes et autres disciplines », revient au fait que les mathématiques discrètes se situent, d'après notre état de l'art à l'intersection, de plusieurs domaines, parmi lesquels l'informatique, mais aussi de nombreux autres champs (Grenier & Payan, 1998; DeBellis & Rosenstein, 2004; Maurer, 1997).
À travers notre question 6 (« Comment caractérisez-vous le lien entre les mathématiques discrètes et autres disciplines (scientifiques et non-scientifiques ?), nous cherchons à connaître les domaines d'intégration pluridisciplinaire et interdisciplinaire, la manière dont le domaine est introduit dans les cours universitaires. Lorsque nous n'avons pas obtenu de réponse claire ou d'exemples, nous avons demandé aux enseignants-chercheurs s'ils intégraient les démarches ou les objets issus des mathématiques discrètes.

3.3.2.1.6 Partie 6- Apprentissage des mathématiques discrètes

La dernière partie, intitulée « Apprentissage des mathématiques discrètes » comporte trois questions (numéroté 7, 8, et 10) qui concernent plusieurs aspects de l'apprentissage des mathématiques discrètes.

La question 7 (« Quelles sont les résultats d'apprentissage dans votre cours (objectif générale et objectifs spécifiques) ?) nous permet de bien préciser ce qui est important selon les enseignants : mettent-ils l'accent sur les syntaxes ou sur le temps nécessaire pour le développement des concepts (Alcock, 2009) ?
La question 8 (« Quel type de compétence et quel savoir souhaitez-vous développer chez les étudiants ? ») nous permet de savoir comment les enseignants jugent leurs évaluations, et

comment celles-ci orientent le choix du contenu enseigné. Cette question se situe dans le cadre de notre recherche sur les conformités entre les choix d'enseignement et l'évaluation.
La question 10 (« Quel est le comportement des étudiants lorsque vous travaillez avec les mathématiques discrètes ? ») nous permet d'analyser des caractéristiques au niveau affectif, de mieux comprendre les difficultés d'apprentissage et les perceptions de l'enseignant sur le comportement des étudiants. De plus, nous posons des questions sur les actions menées pour réduire les difficultés. Cette question est inspirée du travail de Goldin (2004), qui affirme que les questions en mathématiques discrètes développent des processus heuristiques et affectifs chez les apprenants.

3.3.3 Méthodologie d'analyse des entretiens

Le développement des critères d'analyse des entretiens est fonction des résultats de l'état de l'art, discutés brièvement dans la partie précédente. Nous nous appuyons sur quelques éléments théoriques qui nous permettent de réaliser une analyse plus fine des résultats. Les questions posées aux enseignants-chercheurs peuvent donc nous servir de guide pour construire une grille d'analyse de conceptions, en particulier les questions sur la conception par les enseignants-chercheurs des mathématiques discrètes, de leurs caractéristiques, de la place et du rôle de la preuve, de la place de la modélisation. Dans ce qui suit, nous groupons nos critères de la même façon que nous avons groupé nos questions d'entretiens.

3.3.3.1 Critères — Niveau 1

Pour la première partie (« Éléments personnels et professionnels ») nous étudions la manière dont les enseignants-chercheurs se répartissent en utilisant quelques critères concernant leur formation antérieure et leur profil (éléments repérés dans la première question — voir le tableau ci-dessous). Nous présentons ensuite plusieurs tableaux pour représenter nos critères descriptifs et pour en extraire des synthèses.

Critères- Niveau 1- Éléments personnels et professionnels
• Domaine de recherche • Parcours de formation universitaire • Nombres d'années d'expérience dans l'enseignement • Nombres d'années d'expérience dans la recherche • Degré d'implication dans la recherche (utilisation des objets/problèmes qui viennent de l'activité de recherche) • Nom de l'université (précision si public ou privée) • Statut de l'individu • Département de l'enseignement • Niveau(x) et module(s) enseigné(s) • Nombres d'heures d'enseignement • Pays • Reference particulière proposé pour les mathématiques discrètes

Tableau 3-15: Niveau 1- éléments personnels et professionnels

3.3.3.2 Critères — Niveau 2

Plusieurs chercheurs en didactique ont proposé différentes caractéristiques épistémologiques des mathématiques discrètes, comme l'accessibilité des objets discrets et des énoncés (Grenier & Payan, 1998; DeBellis & Rosenstein, 2004; Maurer, 1997) et avancent que la plupart des problèmes classiques peuvent être compris par des non-spécialistes (Grenier & Payan, 1998). Nous avons relevé des affirmations fortes : les objets discrets possèdent plusieurs définitions, de différentes natures (Grenier & Payan, 1998; Maurer, 1997), les exemples des mathématiques discrètes soutiennent le développement sémantique des concepts mathématiques et des compétences de preuve, facilitent la compréhension de celle-ci (Alcock, 2009).

Lorsque les enseignants-chercheurs évoquaient des questions d'épistémologie, nous leur demandions la nature du référent épistémologique implicite fondant leur réponse. La partie 2 de notre questionnaire « Conception sur la définition des mathématiques discrètes » cherche à trouver des réponses quant à la nature de ces implicites. Nous cherchons à caractériser les spécificités de concepts, les processus de construction des connaissances, et les types de problèmes propres au mathématiques discrètes chez les enseignants-chercheurs interviewées, et à les comparer avec les aspects apparents dans la littérature. Nous cherchons plus précisément les particularités qui distinguent les mathématiques discrètes d'autres domaines. Nous avons donc précisé les critères (dans le tableau ci-dessous) à partir desquels nous analysons les discours des enseignants-chercheurs. Nous remarquons que, dans cette partie et dans les quatre parties suivantes, nous distinguons deux pôles dans les réponses des enseignants-chercheurs : (1) pôle épistémologique, est en lien avec leur activité de recherche ; (2) pôle didactique, en lien avec l'enseignement et l'apprentissage. Cette distinction orientera nos analyses.

Critères- Niveau 2- Conception sur la définition des mathématiques discrètes

• Caractéristique(s) particulière(s) des mathématiques discrètes liée(s) à l'enseignement- [D]
• Caractéristique(s) particulière(s) des mathématiques discrètes dans la recherche [E]
• Particularité(s) qui fait la distinction des mathématiques discrètes par rapport aux autres domaines
• Objets mathématiques présents dans les cours enseignés [D]
• Existence des méthodologies (objets, problèmes) qui viennent de l'activité de recherche (dans le cas où l'EC enseigne quelque chose diffèrent de son activité de recherche)
• Conception sur l'affirmation disant que les objets discrets possèdent plusieurs définitions de différentes natures
  o Conception
  o Si d'accord, comment le changement de statut est travaillé en classe

Tableau 3-16: Niveau 2- conception sur les définitions des mathématiques discrètes

3.3.3.3 Critères — Niveau 3

Nous avons remarqué qu'une grande partie des articles consultés dans notre état de l'art souligne l'existence d'un lien très particulier entre les problèmes en mathématiques discrètes et la preuve (Hart & Martin, 2016; DeBellis & Rosenstein, 2004; Maurer, 1997; Grenier & Payan, 1998; Goldin G. A., 2004). D'après les travaux de Balacheff (1987), Hanna (2007), Reid & Knipping (2010) et Sierpinska (1994), nous pouvons analyser les perceptions de la preuve par les enseignants-chercheurs en fonction du domaine mathématiques en les définissant, catégorisant, et en cherchant les convergences et les divergences. De surcroît, la question du fonctionnement de la preuve en tant qu'outil de résolution des problèmes ou en tant qu'objet d'étude nous amène à utiliser la dialectique outil/objet de Douady (1992)pour affiner nos analyses. De ce fait, dans notre troisième partie (« Conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes »), nous cherchons à repérer des éléments sur les critères suivants afin de les trier, de les compter et de les analyser :

Critères- Niveau 3- Conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes
• Particularité(s) dans l'enseignement des preuves en mathématiques discrètes [D] • Particularité(s) preuves en mathématiques discrètes (dans la recherche) [E] • Technique(s) de preuves utilisées en mathématiques discrètes • Exemple(s) cité(s) lors de la discussion sur la preuve

Tableau 3-17: Niveau 3- conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes

3.3.3.4 Critères — Niveau 4

Comme l'écrivent Grenier et Payan (1998), le concept de modélisation a joué un rôle moteur dans la genèse des mathématiques discrètes, plus particulièrement dans le domaine de la théorie des graphes. L'état de l'art affirme bien l'existence d'une variété de modalisations et de représentations au sein du travail de la théorie des graphes : que modélisations graphiques, géométriques, diagrammes, graphes, outils numériques, etc. En mathématiques discrètes, l'existence de différents modèles rend nécessaire un travail de modélisation. Nous souhaitons en connaître davantage sur les modèles permettant, ou non, de mieux comprendre les mathématiques discrètes (en particulier la théorie des graphes), et vérifier la validité des modèles utilisés. En conséquence, pour notre partie 3 (« La place et le rôle du travail sur la modélisation en mathématiques discrètes »), nous avons élaboré dans le tableau suivant un quatrième niveau de critères à repérer lors des entretiens, afin de procéder ensuite à des descriptions quantitative et qualitative des types de modélisations et des exemples :

Critères- Niveau 4- La place et le rôle du travail sur la modélisation en mathématiques discrètes

• Description du travail sur la modélisation dans l'enseignement [D]
    o C'est fait ou pas (oui/non)
    o Types de modélisations/représentations
    o Exemples
• Description du travail sur la modélisation dans la recherche [E]
    o Types de modélisations
    o Exemple(s)

Tableau 3-18: Niveau 4- La place et le rôle du travail sur la modélisation en mathématiques discrètes

3.3.3.5 Critères — Niveau 5

Dans notre cinquième partie de l'entretien (« Lien(s) entre les mathématiques discrètes et d'autres disciplines »), nous cherchons à obtenir davantage de précisions en ce qui concerne les liens entre les mathématiques discrètes et d'autres disciplines. Ces liens sont fortement présents dans l'état de l'art : des liens très spécifiques entre les mathématiques discrètes et l'informatique, la résolution des problèmes, l'analyse, la recherche opérationnelle, les algorithmes, les mathématiques expérimentales (DeBellis & Rosenstein, 2004; Maurer, 1997; Hart & Martin, 2016). Dans ce contexte, nous avons précisé les critères qui nous permettront d'identifier plus précisément les liens (scientifiques et non-scientifiques), de vérifier si ces liens sont travaillés dans les classes, en notant les exemples déclarés par les enseignants-chercheurs. Notons que nous distinguons toujours nos deux pôles, épistémologique et didactique.

Critères- Niveau5- Lien(s) entre les mathématiques discrètes et autres disciplines

• Disciplines scientifiques mentionnée (s)
• Disciplines non-scientifiques mentionnée (s)
• Descriptions des liens dans l'enseignement
  ○ Travaillé(s) ou pas
  ○ Exemples
• Descriptions des liens dans la recherche
  ○ Exemples

Tableau 3-19: Niveau 5- Lien(s) entre les mathématiques discrètes et autres disciplines

3.3.3.6 Critères — Niveau 6

Notre dernière partie (« Apprentissage des mathématiques discrètes ») nous permet de repérer les intérêts des enseignants-chercheurs au niveau de l'apprentissage. Nous faisons l'hypothèse que certains contenus ne sont pas enseignés uniquement parce qu'il est impossible de les évaluer ; nous nous demandons si les enseignants-chercheurs mettent l'accent sur les démarches ou sur les concepts. De plus, nous cherchons à savoir ce que les enseignants évaluent, et ce qui guide leurs choix d'évaluation. Dans le même contexte, nous nous posons la question de la nature des difficultés d'apprentissage : sont-elles liées aux notions, aux raisonnements, à la modélisation, ou à d'autres aspects ? Quelles mesures sont prises pour les réduire ? Goldin (2004)indique que les mathématiques discrètes favorisent le développement des heuristiques et le côté affectif ; nous interrogeons également cette vision. Nous avons élaboré ainsi une liste de critères d'après lesquels classer et analyser les discours des enseignants-chercheurs interrogés :

Critères- Niveau 6- Apprentissage des mathématiques discrètes

• Objectifs d'apprentissage
• L'évaluation de l'apprentissage
  ○ Que ce qui est évalué (mettre l'accent sur quoi ?)
  ○ Comment évaluer ?
• Difficulté(s) d'apprentissage observée(s) avec les étudiants
• Action pour réduire ces difficultés
• Comportement des étudiants lorsqu'ils travaillent les mathématiques discrètes

Tableau 3-20: Niveau 6- Apprentissage des mathématiques discrètes

La construction de la grille des questions vise bien à repérer ces éléments.

3.3.4 Analyse et résultats des entretiens

Après avoir présenté en détail dans le paragraphe précédent le questionnaire qui représente l'enquête de terrain dans notre travail, nous nous intéressons ici aux réponses obtenues. Pour cela, nous nous appuyons sur les six parties du questionnaire, dans l'idée de donner un éclairage sur les conceptions portées par les enseignants-chercheurs dans leurs recherches et dans leur enseignement des mathématiques discrètes, et afin de fournir des éléments de réponse à notre question de recherche Q1.

3.3.4.1 Éléments personnels et professionnelles

Tout d'abord, voyons comment se répartissent les treize enseignants-chercheurs en utilisant quelques critères concernant leur formation et leurs affiliations institutionnelles.

Les premiers critères descriptifs des enseignants-chercheurs (EC) correspondent à leurs différents statuts. Nous pouvons les catégoriser en deux catégories : dix maîtres de conférences (77 %) et trois Professeurs des universités (23 %). Du côté des pays d'exercice, sept enseignants- chercheurs sont rattachés à des institutions libanaises (54 %), cinq à des institutions françaises (38 %). Signalons enfin qu'un enseignant-chercheur libanais (8 %) travaille dans une institution suisse. Nous pouvons donc remarquer l'existence d'une variété de statuts et de pays d'exercice.

Nous précisons ensuite les domaines de recherche cités par les enseignants-chercheurs. Nous notons que le même enseignant-chercheur travaille parfois sur plusieurs domaines de recherche, ce qui explique que la somme des pourcentages soit supérieure à 100 % dans le diagramme ci-dessous.

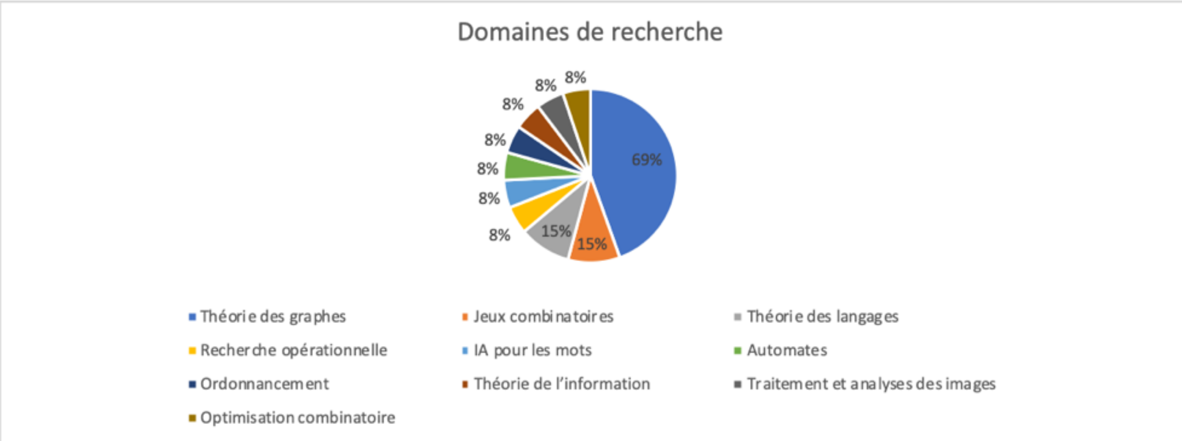


Figure 3-1: Domaines de recherche cités par les enseignants chercheurs

Il s'avère que la théorie des graphes est dominante parmi les domaines représentés. La diversité de ces domaines de recherche permet d'enrichir grandement notre analyse.

Les deux diagrammes ci-dessous montrent la distribution des enseignants- chercheurs selon le nombre d'années d'enseignement, et le nombre d'années de recherche. Nous remarquons que, dans les deux cas, une majorité des enseignants- chercheurs présente plus de cinq années d'expérience. Ceci donne plus de crédibilité à leurs réponses, présentées dans les parties qui suivent.

Figure 3-2: Nombre des années d'expérience des enseignants chercheurs dans l'enseignement et dans la recherche

Concernant les spécialités des enseignants-chercheurs lors de leur parcours de formation, nous remarquons qu'elles se distribuent en trois catégories (voir le tableau suivant) :

Spécialité/ Formation	**%**
Théorie des graphes	31%
Mathématiques appliquées à l'informatique	46%
Informatique	23%

Tableau 3-21: Parcours de formation des enseignants chercheurs

Les pourcentages nous indiquent que la distribution est plus ou moins homogène entre la théorie des graphes, les mathématiques appliquées à l'informatique et l'informatique.
Le tableau présenté ci-dessous met en lumière une certaine diversité dans le rattachement institutionnel des enseignants-chercheurs, surtout au sein du département des mathématiques appliqués, ce dernier comprenant trois départements différents : maths-info, département QLIO (Qualité, Logistique Industrielle et Organisation), sciences économiques et gestion. Nous précisons qu'un des enseignants- chercheurs que nous avons interrogé a le statut de directeur de recherche de CNRS et effectue peu d'heures d'enseignement.

Département/ Laboratoire	**%**
Mathématiques- (4/13)	31%
Informatique- (5/13)	38%
Mathématiques appliquées- (3/13)	23%
Divers- (1/13)	8%

Tableau 3-22: Rattachement institutionnel des enseignants chercheurs

Enfin, en ce qui concerne les niveau(x) et module(s) enseignés, après avoir repéré les éléments, nous avons construit les tableaux suivants :

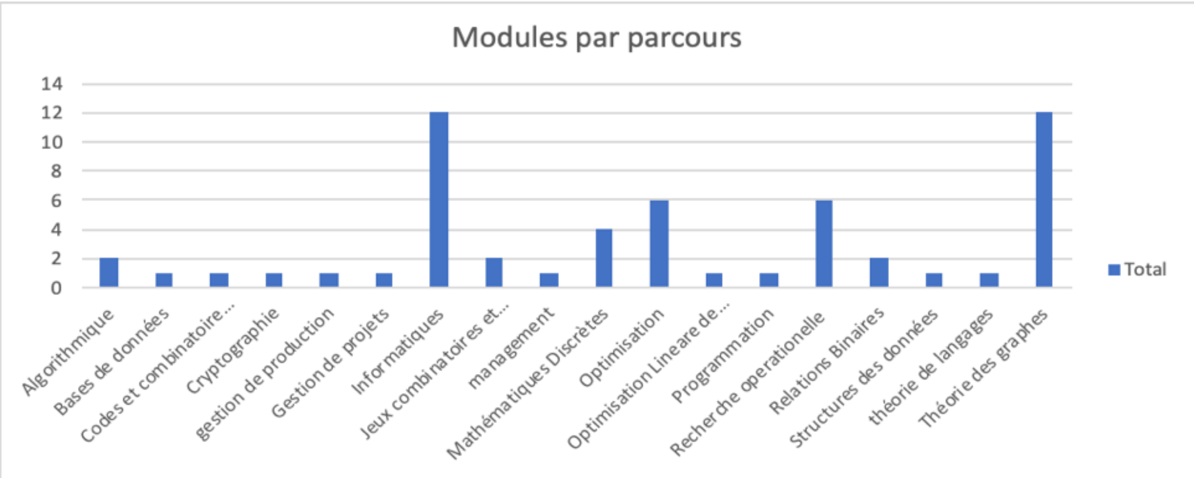


Figure 3-3: Modules enseignés par parcours

	Théorie des graphes	Informatique	Recherche Opérationnelle	Optimisation	Mathématiques Discrètes
	Informatique	Informatique	Gestion d'entreprises et des administration	Informatique	Mathématiques
	Mathématiques	Mathématiques appliqués	Gestion Industrielle	Mathématiques appliqués	
	Mathématiques-appliqués	Maths-info	Informatique de Gestion	Maths-info	
	Maths-info		Informatique		
	Module Optionnel		Statistiques		
	Statistiques				

Tableau 3-23: Modules enseignés par parcours

Nous observons, en nous fondant sur les assertions des EC, que les modules de la théorie des graphes, de la recherche opérationnelle, de l'optimisation et des mathématiques discrètes sont enseignés dans plusieurs parcours de formation. Le deuxième tableau nous renseigne plus précisément sur ces derniers. Ainsi, le module des « mathématiques discrètes » est enseigné à des étudiants de L2 dans un parcours de mathématiques ; il comprend une sélection de thématiques liées au mathématiques discrètes. Ce résultat est conforme avec notre revue de littérature, qui indique bien le fait que les mathématiques discrètes se situent à une intersection non-vide avec plusieurs domaines ; elles sont en effet enseignées dans des modules différents.

Nous abordons dans la partie suivante la présentation des résultats qualitatifs de notre entretien. Pour obtenir ces derniers, nous avons sélectionné, en fonction des critères établis en amont, certaines déclarations des enseignants- chercheurs interrogés. Ces déclarations étaient inférées à des moments différents de notre entretien.

3.3.4.2 Conception sur la définition des mathématiques discrètes

3.3.4.2.1 Caractéristique(s) particulière(s) des mathématiques discrètes lié(s) à l'enseignement- [D]

EC	Déclaration
A1[23]	Par rapport à l'enseignement, il y a le coté modélisation, le coté programmation. On va apprendre beaucoup des choses non seulement sur les preuves donc du coté maths, on va apprendre beaucoup de choses sur l'informatique (manipuler structures de donnés, écrire correctement un algorithme, et faire en sorte que l'algorithme fonctionne face qu'en lui demande). Donc interface maths-info (L95)
A2	Dans l'enseignement, en France il est présent essentiellement en informatique(L190) et quand il est présent, ce qu'ils enseignement c'est pas mal d'exercices d'algorithmes. Parfois il y a des modules sur la théorie des graphes, calculs de complexité d'algorithmes.
A3	Ce sont les problèmes qui peuvent s'exprimer avec des variables entières et réelles (L64)
A4	Dans l'enseignement, on a plus tendance de parler de maths pour l'informatique (L56). On va travailler sur par exemple des relations binaires sur un domaine fini (L77).
A5	Les grands domaines qui sont traditionnellement enseignés à mon sens c'est l'optimisation linéaire, l'algorithme du simplex, et la théorie des graphes, les flots, les plus courts chemins et les choses comme ça (L75).
B1	Les mathématiques du fini (algèbre classique fini, algèbre abstrait structures algébriques, arithmétique discret) […] il y a l'arithmétique et plusieurs volé de l'arithmétique aussi (L99), on peut être infini mais en même temps les objets, les éléments peuvent être manipulés séparément (L106) ; le combinatoire, la théorie des relations dans sa forme plus élaboré qui est devenue la théorie des graphes (L110)
B2	Et concernant l'enseignement des mathématiques discrètes, en 2ème année on fait un cours qui fait juste une introduction pour les trois : l'arithmétique, la relation de récurrence, et la théorie des graphes. Ils sont des cours indépendantes, pas de similarités. L'arithmétique ressemble beaucoup à mon avis à l'algèbre (mais aucune similarité à la théorie des graphes). Ce qui est commun dans toutes les mathématiques discrètes est tout ce qui est discret à mon avis. (L31)
B3	On peut décrire les maths discrètes en décrivant les objets dont il contient (théorie des graphes, les relations, la théorie des jeux, ce genre d'objets principalement (L44)
B4	C'est la logique, les cours sur les graphes, les relations sur les graphes, les relations binaires, les booléens, tout cette sorte-là, je l'appelle mathématiques discrètes (L44), c'est un domaine varié (L49), Rien que la logique vient partout dans les mathématiques discrètes et par la logique c'est la façon de raisonner (L53) ;
B5	Problems in discrete mathematics have very simple statements, but if you go through the proof, you will find that every proof has its own way of thinking (L87). A characteristic in graph theory is that is it strongly related to our daily life (network, friends, Facebook) (L94). It has a lot of applications like Eulerian graphs, the four-color problem, chemical bonds, airplane flights, airports, Hamiltonian graphs in telecommunications. Graph theory can provide proofs for theorems in algebra. (L132). The fact of having different definitions for the same object I think this happens only in discrete math. (L184)

[23] Nous avons divisé les interviewés en deux catégories : A les enseignants-chercheurs en France et B ceux du Liban. La numérotation était fait d'une façon aléatoire.

B6	L'enseignement des mathématiques discrètes oriente vers l'application (L145), on voit des modèles des figures et on les étudie facilement (L152)
B8	Ils sont des problèmes où il n'existe pas un algorithme pour les résoudre (en parlant de son cours de l'optimisation combinatoire) On utilise ce qu'on appelle des méta-heuristiques qui sont basés sur les heuristiques. (L81)

Tableau 3-24: caractéristique(s) particulière(s) des mathématiques discrètes lié(s) à l'enseignement

Nous commençons par décrire les caractéristiques des mathématiques discrètes tel qu'ils apparaissent dans les discours portés par les enseignants-chercheurs sur leur l'activité d'enseignement. Leurs réponses étaient variées (voir le tableau ci-dessus) ; nous avons pu les grouper selon les domaines de recherches des enseignants-chercheurs. Ce choix s'explique par notre volonté de comparer les caractéristiques des mathématiques discrètes selon l'expérience des mathématiciens et des informaticiens, et, plus largement, de comparer les points de vue des chercheurs en mathématiques pures et ceux des chercheurs en mathématiques appliquées (informatique et gestion inclus).

Nous remarquons que les mathématiciens définissent les mathématiques discrètes à partir des objets qu'elles comprennent. La liste des objets et des sous-domaines évoqués comprend : l'algèbre classique finie, l'algèbre abstraite, les structures algébriques, l'arithmétique discrète, la combinatoire, la théorie des relations, la théorie des graphes, la relation de récurrence, la théorie des jeux. B1 précise que les mathématiques discrètes contiennent plusieurs aspects arithmétiques, et que s'il est possible de travailler dans l'infini, les objets doivent être manipulés séparément.

D'autre part, les chercheurs en informatique et en mathématiques appliquées soulignent que l'enseignement des mathématiques discrètes concerne les domaines de la programmation, de la modélisation, de l'informatique (exercices d'algorithmes, correction et complexité, algorithme du simplexe), de l'optimisation linéaire, de la théorie des graphes, le problème du plus court chemin. Cette vision oriente clairement vers l'application plutôt que vers la théorie. Il est également intéressant de noter que pour B8 (présentant alors son cours d'optimisation combinatoire), les problèmes qu'il présente dans son cours sur l'optimisation combinatoire ne peuvent être résolus par des algorithmes. L'EC utilise donc ce qu'il appelle des méta-heuristiques, lesquelles sont basées sur les heuristiques.

3.3.4.2.2 Caractéristique(s) particulière(s) des mathématiques discrètes dans la recherche [E]

EC	Déclaration
A1	Les mathématiques discrètes, il y a la distance entre les objets qu'on regarde (L61). Ils ne sont pas tous coller l'un à l'autre.
A2	Assez difficile à définir, souvent on le définit par ce qu'elles ne sont pas (L81) ; d'une certaine manière c'est complémentaire des mathématiques de continu (L83) ; au sens étymologiquement le terme discret peut dire séparable (L85). Il y a une bonne partie de la théorie des nombres (L104) ce sont les mathématiques discrètes, les graphes, tout ce qui concerne la géométrie discrète, les maths finis (discutable), questions de maths infinie et de densité, les relations d'ordre, relations d'équivalence. Aussi on dit souvent que les mathématiques discrètes sont au cœur fondements de l'informatique.
A3	Toutes les qui ne touchent pas au continu (L52), la définition du discret c'est voilà, tous ce qui peut être exprimé par uniquement des variables entières (L53),
A4	Ça évoque tout ce qui est structures discrètes par rapport au continues, et puis certaines caractéristiques communes :la récursivité, la récurrence, l'induction, l'usage de l'ensemble de nombres entiers (L72)
A5	Le thème de la théorie de jeux combinatoires (L81)
B1	Parfois c'est plus facile de définir ce qui n'est pas discret. (L70) […] Si vous faites une recherche dans la littérature, vous n'allez pas trouver une définition définitive et ça c'est normal parce que quand il s'agit d'une nouvelle branche […] il y a toujours la zone non-définie. (L77) ; on peut être infini mais en même temps les objets, les éléments peuvent être manipulés séparément (L106)

B2	Ce n'est pas très facile à définir. Oui c'est vrai, c'est vrai, ce n'est pas facile à définir, si quelque chose est discret oui, mais comment discret (L407). Dans les mathématiques discrètes, il y a beaucoup des cours (ça comprend plusieurs cours). Il y a l'arithmétique, la théorie des graphes, la récurrence, la relation de récurrence (résoudre les suites comme la relation de récurrence), l'arithmétique dans Z et dans N(L81). Tout ce qui est mathématiques discrètes c'est tout ce qui est discret. La théorie des graphes c'est discret par ce qu'il y a des points et on fait des liens. Donc il y a des points et il n'y a pas des liens continues entre les points. Et toute chaine qui est dans cette direction, pas continu, discrètes, les choses qui sont séparable se sont des mathématiques discrètes.
B4	Les mathématiques discrètes c'est vrai que c'est difficile de les définir (L103) ; On peut définir delà cette définition, c'est un cours de maths, est ce que c'est un cours d'informatique, en fait c'est entre les deux Tous les gens prends des maths discrètes (L307)
B5	Discrete mathematics is a branch that studies discrete objects, for example sets, logic, graphs, integers, all objects that can be enumerated. It excludes everything continuous (L57). Combinatorics, graph theory.
B6	Les mathématiques discrètes, si je prends un exemple en nombre relatifs, il n'y a pas quelque chose entre les deux (L125) ; les mathématiques discrètes rentrent dans plusieurs domaines, cryptographie, informatique, théorie des graphes. Les mathématiques discrètes c'est commencé on peut dire moitié du 20ieme siècle (L130).
B7	anything that has to do with countable sets; any structure that is defined on countable sets (L80) for example graph theory, matroid theory;

Tableau 3-25: Caractéristique(s) particulière(s) des mathématiques discrètes dans la recherche

Nous commençons par lister les réponses qui propose des descriptions en termes de liste d'objets/thématiques appartenant au domaine des mathématiques discrètes. Nous présentons ci-dessous la liste qui ressort de notre tableau, en distinguant les réponses des mathématiciens spécialisés en théorie des graphes, et les chercheurs en mathématiques appliquées :

Mathématiciens	Mathématiques appliqués
Théorie de nombres ; Géométrie discrète ; Mathématiques du fini (discutable) ; Mathématiques de l'infini et de densité ; Relations d'ordre ; Relations d'équivalence ; Arithmétique ; Théorie des graphes ; Récurrence ; Ensembles ; Combinatoire	La récurrence ; L'induction ; La récursivité ; Théorie de jeux combinatoire ; Cryptographie ; Théorie des matroides

Tableau 3-26: Objets mathématiques qui font partie des mathématiques discrètes

L'activité de recherche des enseignants-chercheurs montre bien la grande variété des thématiques comprises dans le cadre des mathématiques discrètes. Nous avons demandé aux enseignants- chercheurs davantage de précision ; leurs réponses témoignent d'une convergence vers une affirmation partagée par les informaticiens comme les mathématiciens : il est difficile de définir les mathématiques discrètes. Les enseignants- chercheurs étaient néanmoins proches d'un accord sur l'aspect de la « séparabilité », qui semble caractéristique des éléments issus des mathématiques discrètes :

> « Les mathématiques discrètes, si je prends un exemple en nombres relatifs, il n'y a pas quelque chose entre les deux » (B6)
> « Les choses qui sont séparables, ce sont des mathématiques discrètes » (B2)
> « Les éléments peuvent être manipulés séparément » (B1)
> « Au sens étymologique, le terme discret peut dire séparable » (A2)
> « La définition du discret c'est, voilà, tout ce qui peut être exprimé uniquement par des variables entières » (A3)
> « Il y a la distance entre les objets qu'on regarde. Ils ne sont pas tous collés l'un à l'autre. » (A1)

Nous avons aussi remarqué que certains enseignants- chercheurs définissent le discret en opposition par rapport au continu (ce qui n'est pas discret). Cette proposition nous semble intéressante pour la délimitation du champ, et nous a amené à leur demander des précisions. Pour un enseignant-chercheur qui travaille sur l'interface entre maths et informatique, les mathématiques discrètes se situent quelque part entre l'informatique et les mathématiques ; cette déclaration a également attiré notre attention.

3.3.4.2.3 Particularité(s) créant la distinction des mathématiques discrètes par rapport aux autres domaines

EC	Déclaration
A1	Ce qui caractérise les maths discrètes c'est que c'est très proche de l'informatique (L74). Les techniques de preuves qui sont spécifiques, des preuves constructives pour montrer qu'un objet existe marche très bien en théorie des graphes, il y a aussi le coté très visuel des graphes. C'est quand même des objets qu'on prend en maths très rapidement (L79).
A2	(L209) c'est un voyeur des problèmes qui sont facilement énonçables, qu'on peut comprendre facilement, qui peut avoir un caractère ludique. On peut aborder des questions qui sont pas du tout évidentes à aborder dans l'enseignement (par ex la distinction entre la condition nécessaire et la condition suffisante à travers par ex le jeu chasse à la bête) (L219) ; Il y a des problèmes qui sont facile d'accès, donc on peut mettre en posture des chercheurs sur les activités et en leur proposant des problèmes qui ont l'aspect ludique (L330)
A3	ils sont des problèmes qu'on peut présenter à n'importe qui (L98), après les méthodes de résolution sont souvent très difficile et ça fait appel à des mathématiques complexes (L99) ; il y a plein de résultats qu'on peut obtenir (L105) ; c'est une façon de découvrir la recherche en mathématiques sans avoir beaucoup des prérequis (L106) ; la recherche en mathématiques discrètes est assez particulière et différente par rapport à l'informatique parce qu'on n'a pas besoin forcement d'un ordinateur (L163) ;
A5	C'est une discipline où on peut particulièrement travailler sur l'aspect raisonnement finalement(L98). En maths discrètes ce que j'aime bien, c'est qu'on peut souvent présenter des questions très simples, il ne nécessite pas de prérequis, qui ne nécessite pas de connaissances préalables […] (L129). Ce qui va nous aider à agir à la question ce n'est pas l'application d'une formule ou une technique on a utilisé par ailleurs on va essayer de l'utiliser, mais tout simplement du raisonnement (L138).
B1	Pourquoi c'est discret, parce que ça se base toujours sur que […] dans le sens on peut isoler chaque sommet et parler de chaque élément a part (L128)
B3	Chaque branche a une particularité, maths discrètes est différent par rapport aux objets qu'il contient (L59)
B4	On peut traiter un ensemble fini (il y a des relations, il y a des relations binaires, il y a des relations de transitivité et tout ça rentre dans les mathématiques discrètes) (L120) ;
B5	There are no expectations for the next step. (L244) […] Every problem can be started in a way different than the other. (L248)
B6	Avec les mathématiques discrètes je peux modéliser des phénomènes difficiles à comprendre par des modèles faciles parfois (L168) (par exemple circulation d'embouteillages utilisant les graphes, trouver le plus court chemin, savoir combien de temps pour terminer un projet)
B7	discrete math needs different kinds of intuition (L99); in many problems of discrete math, they're very easy to describe but very difficult to solve (L105); you can find discrete math much more in computer science for example, in many courses in theoretical computer science (L125), in communication.
B8	C'est vraiment donner un modèle, un modèle qui est bien démontré dans les maths et on peut l'utiliser pour résoudre des problèmes en informatique (par exemple le problème de quatre couleurs) (L120).

Tableau 3-27: Distinctions entre les mathématiques discrètes et d'autres domaines

Le tableau ci-dessus nous permet de voir que les déclarations des enseignants-chercheurs quant à la particularité distinguant les mathématiques discrètes d'autres domaines convergent vers trois grands titres.

Le premier titre concerne le fait que les mathématiques discrètes sont très proches de l'informatique. Cette particularité se manifeste, selon les chercheurs, par la génération de modèles pour résoudre des problèmes difficiles en informatique et pour modéliser, avec des graphes, plusieurs phénomènes, tels que la recherche du plus court chemin et le problème des quatre couleurs.

Une deuxième particularité apparaît lors des discussions : les mathématiques discrètes possèdent des techniques de preuves spécifiques, telles que les preuves constructives et l'induction. De plus, les chercheurs précisent que ce n'est pas l'application d'une formule ou d'une technique déjà utilisées quelque part, mais le raisonnement, qui permet la résolution des problèmes en mathématiques discrètes. Cet aspect de l'entraînement au raisonnement est flagrant. Pour B7, certains problèmes nécessitent une intuition distincte pour être résolus ; ce qui constitue l'une des particularités des mathématiques discrètes.

La troisième caractéristique, très remarquable, est partagée par la plupart des enseignants-chercheurs : les problèmes en mathématiques discrètes sont facilement énonçables, très faciles à comprendre, et peuvent être présenté à n'importe qui. Les enseignants-chercheurs sont cependant tous d'accord pour dire que ces problèmes sont difficiles à résoudre et qu'ils font appel à des mathématiques complexes. A2 indique que, pour les problèmes faciles d'accès, les étudiants peuvent être mis en situation de chercheurs. Ils peuvent se voir proposer des problèmes d'aspect ludique. Nous voyons ainsi que les mathématiques discrètes donnent des pistes supplémentaires pour travailler sur l'aspect ludique, et pour rendre les problèmes beaucoup plus intéressants en incitant à effectuer un travail de recherche.

3.3.4.2.4 Objets mathématiques présents dans les cours enseignés [D]

Plusieurs enseignants-chercheurs enseignent dans des structures de licence ou de filières différentes. Pour bien visualiser les objets mathématiques présents dans les cours enseignés, nous avons donc groupés (selon le cours enseigné et la structure de licence) les objets déclarés dans les réponses des enseignants-chercheurs. Nous vous présentons les tableaux suivants afin d'interpréter les résultats. Nous notons que cette présentation est cohérente avec celle du questionnaire (Chapitre 3.4) diffusé aux universités ; nous disposons donc d'éléments de comparaison entre les déclarations des chercheurs et ce qui est actuellement enseigné dans les institutions supérieures.

IUT (2 EC)		
	Cours enseignés	
Objet	**Gestion industrielle**	**Informatique**
arbres couvrant de poids minimum	1	0
coloration	1	0
flots	1	0
graphe	1	1
jeux combinatoires	0	1
ordonnancement de la production	1	0
plus court chemin	1	0
programmation linéaire	1	0
simplex	1	0

Tableau 3-28: Objets enseignés- IUT

Licence Informatique (4 EC)		
	Cours enseignés	
Objet	**Info**	**Maths**
cryptographie	1	0
division euclidienne	1	0
ensemble	1	0
optimisation combinatoire	1	0
plus court chemin	1	0
structure des données	1	0
théorie des nombres	1	0
entiers	1	0
ensemble	1	0
fonctions	1	0
liste n-uplets	1	0
logique	1	0
logique du prédicat	1	0
logique propositionnelle	1	0
chaines de Markov	0	1
graphe	0	1
théorie des jeux	0	1

Tableau 3-29: Objets enseignés- Licence Informatique

Licence info-stat (1 EC)	
Objet	**maths**
chaines de Markov	1
Graphe	1
théorie des jeux	1

Tableau 3-30: Objets enseignés- Licence Informatique- statistiques

Licence Informatique de gestion (1 EC)	
Objet	**Informatique**
Cryptographie	1
division euclidienne	1
Ensemble	1
plus court chemin	1
théorie des nombres	1

Tableau 3-31: Objets enseignés- licence Informatique de gestion

Licence de mathématiques (5 EC)		
	cours enseignés	
Objet	**cours de Maths**	**cours d'Informatique**
"covering"	1	0
"cut vertex"	1	0
arbre	2	0
arête	1	0
bloc	1	0
chemin	3	0
coloration	1	0
congruence	1	0
couplage	1	0
cycle	3	0
degré	1	0
dénombrement	1	0
digraphe	2	0
distance	1	0
division euclidienne	1	0
ensemble	1	1
entiers	0	1
fonctions	0	1
foret	1	0
graphe	5	0
graphe bipartie	2	0
graphe complet	1	0
liste n-uplets	0	1
logique	1	1
logique du prédicat	0	1
logique propositionnelle	0	1
m-connectivity	1	0
nombre chromatique	1	0
nombre premiers	1	0
nombre stable	1	0
pgcd- ppcm	1	0
relation de récurrence	2	0
relation de récurrence	1	0
relations	1	0
relations binaires	1	0
sommets	1	0
stable	1	0
tournois	2	0

Tableau 3-32: Objets enseignés- Licence de mathématiques

Licence Mathématiques-Informatique (1 EC)		
	cours enseignés	
Objet	**Maths**	**Maths-Info**
algorithmes	1	1
arbre	1	1
biparties	1	1
chemin	1	1
coloration	1	1
couplage	1	1
flots	1	1
parcours de graphes	1	1
plus court chemin	1	0

Tableau 3-33: Objets enseignés- Licence Mathématiques-Informatique

Licence statistiques (1 EC)	
Objet	**Maths**
chaines de Markov	1
graphe	1
théorie des jeux	1

Tableau 3-34: Objets enseignés- licence statistiques

Master Informatique (3 EC)		
	cours enseignés	
Objet	**Info**	**maths-Info**
algorithmes	1	1
arbre	1	1
biparties	1	1
chemin	1	1
coloration	1	1
couplage	1	1
flots	1	1
graphe	1	0
jeux combinatoires	1	0
optimisation combinatoire	1	0
parcours de graphes	1	1
plus court chemin	0	1
structure des données	1	0

Tableau 3-35: Objets enseignés- Master Informatique

Master Ingénieurs (1 EC)	
Objet	**Gestion Industrielle**
arbres couvrant de poids minimum	1
Coloration	1
Flots	1
Graphe	1
ordonnancement de la production	1
plus court chemin	1
programmation linéaire	1
Simplex	1

Tableau 3-36: Objets enseignés- Master Ingénieurs

Master Mathématiques (3 EC)	
Objet	**Maths**
"covering"	1
"cut vertex"	1
Arbre	3
Arête	1
Bloc	1
Chemin	3
Coloration	2
Congruence	1
Connectivité	1
Couplage	2
Cycle	3
Degré	1
Digraphe	2
Distance	1
division euclidienne	1
Foret	1
Graphe	3
graphe bipartie	2
graphe complet	1
graphes eulériens	1
graphes hamiltoniens	1
graphes planaires	1
m-connectivity	1
nombre chromatique	1
nombre premiers	1
nombre stable	1
pgcd- ppcm	1
relation de récurrence	1
relations binaires	1
Sommets	1
Stable	1
Tournois	2

Tableau 3-37: Objets enseignés- Master Mathématiques

Master Mathématiques- Informatique (1 EC)		
	cours enseignés	
Objet	**Maths**	**Maths-Info**
algorithmes	1	1
arbre	1	1
biparties	1	1
chemin	1	1
coloration	1	1
couplage	1	1
flots	1	1
parcours de graphes	1	1
plus court chemin	0	2

Tableau 3-38: Objets enseignés- Master Mathématiques-Informatique

Les tableaux ci-dessus nous donnent une liste non-exhaustive des objets présents dans les cours donnés par les enseignants-chercheurs que nous avons interrogés. Nous ne revendiquons pas l'exhaustivité, en raison du fait que certains enseignants-chercheurs évoquent les graphes d'une façon implicite.

Nous cherchons à repérer les objets mathématiques les plus fréquents dans l'enseignement. Les tableaux ci-dessus nous permettent de remarquer que le graphe (avec tous les objets qu'il comprend) est l'objet le plus fréquent dans les différentes structures de licence. Il est mentionné dans les :

L'objet graphe dans les différentes filières		
Licence	**Master**	**Autres**
Mathématiques, Informatique, Mathématiques-Informatique, Statistiques, Informatique-Statistiques,	Mathématiques, Ingénierie, Mathématiques-Informatique, Informatique	IUT

Tableau 3-39: L'objet graphe par filière

Le tableau montre bien que le graphe est un objet très puissant, car il est le plus fréquent dans les structures de licence, de master, et en IUT. Le graphe est donc également est un savoir transversal à l'activité mathématique, présent dans les mathématiques pures et les mathématiques appliquées à l'informatique, mais aussi dans la gestion industrielle et la statistique. Cet élément semble cohérent avec ce que présente notre littérature sur la puissance de l'objet graphe en tant qu'objet enseigné, et en tant qu'outil de résolution des problèmes et de modélisation. Nous notons aussi l'existence de plusieurs objets dans la zone commune entre les mathématiques théoriques et les mathématiques appliquées, telle la division euclidienne et le problème du plus court chemin, ainsi que les objets plus particuliers des graphes.

En ce qui concerne les algorithmes, nous cherchons également à étudier leur place dans les différentes filières. Les entretiens nous indiquent que l'algorithme est étudié dans la licence de mathématiques-informatique, dans le master de mathématiques-informatique, et dans le master d'informatique. Nous notons que l'algorithme n'est pas enseigné en licence ni en master de mathématiques pures. Nous nous interrogeons sur les motifs qui justifient cette absence.

3.3.4.2.5 Existence de méthodologies (objets, problèmes) issues de l'activité de recherche (dans le cas où l'EC enseigne quelque chose de différent de son activité de recherche)

EC	Déclaration
A1	Oui, d'abord je prends beaucoup d'étude de cas ou des exercices qui viennent de mon travail de recherche ; si jamais j'ai un contrat avec un industriel je vais prendre un problème simplifié pour le montrer aux étudiants (L206) ;
A3	Oui surement, tout ce qu'il a mentionné viennent de la recherche et il le travail en classe (les jeux aux seines de Maths à modeler). Plus précisément, il y a des idées beaucoup très riche et du coup avec les étudiants j'essaye de les mettre en place : la façon de les faire réfléchir (L167)
A5	Oui effectivement mes activités de recherche permettent d'irriguer et d'enrichir cette activité d'enseignement. Il y a des choses que j'enseigne aujourd'hui que j'enseigne par ce que ce sont des éléments que j'ai découvert à travers mes recherches (L219). Par exemple certains sujets de l'ordonnancement)
B1	C'est inévitable d'avoir cet impact (l141) ; J'ai mêlé la méthodologie des maths discrètes avec ce que j'enseigne en général, je peux dire que dans les cours que j'ai fait oui pas mal de fois j'ai essayé surtout dans les exercices ; par exemple quand j'ai enseigné les relations je suis adressé à un exemple que j'ai fait dans ma thèse, les graphes fonctionnels (L147)

Tableau 3-40: Lien(s) avec la recherche

Plusieurs enseignants-chercheurs sont impliqués dans des groupes de recherche et dans des travaux à l'extérieur de leurs instituts d'enseignement. C'est le cas d'A1, qui travaille avec des industriels et essaie de proposer à ses étudiants des problèmes dans une version simplifiée. A3 fait partie d'un groupement de recherche : il utilise les jeux au sein de cette équipe pour enrichir le travail avec les étudiants, développer leur raisonnement, et les inciter à faire de la recherche. A5 déclare qu'il a pu intégrer à ses cours de nouveaux savoirs et beaucoup d'exemples grâce à ses activités de recherche, qui portent entre autres sur le sujet de l'ordonnancement.

3.3.4.2.6 Les objets discrets possèdent plusieurs définitions de différentes natures : comment les Enseignants- chercheurs perçoivent cette affirmation.

EC	Oui/non	Élaboration	Comment c'est travaillé en classe
A3	Oui	Différentes représentations, ou bien des caractérisations différentes. Par exemple un graphe peut être représenté d'une façon géométrique, algébrique, matricielle. C'est en fonction de ce qu'on veut faire. (L410) par exemple la représentation géométrique est pratique pour faire des preuves (L417). Les gens qui font de l'algèbre ont des résultats très élégants, théorie des matroides et des choses comme ça (L 419).	Il a tendance à avoir une représentation géométrique mais quand il cherche à implémenter les résultats avec les étudiants, ils font une représentation matricielle (L 436). Mais quand il était à Grenoble en M1 et M2, il a eu des cours où ils font des graphes en représentations algébriques.
B4	oui	Ça peut être très bien mais pour moi ils sont tous équivalentes (L336). On peut avoir des livres avec le graphe comme un ensemble des points reliés avec des arcs alors que dans un autre endroit, un graphe c'est l'ensemble à deux entités : V, l'ensemble des sommets et E, la relation binaire sur l'ensemble des sommets. L'ensemble des arcs est une relation binaire (L342). Et ce n'est pas une particularité des objets discrets, on peut voir partout dans les maths (L346).	
B7	Yes	I think this applies to other things; this is not unique to discrete structures (L103)	
B3	oui	In many cases we have equivalent definitions (L221); For example, we can describe a tree as a connected a-cyclic graph or it is a connected graph of n vertices with n-1 edges (L224)	Yes, for example a relation can be viewed as a digraph and can be viewed as a matrix

B6	oui	Par exemple les automates on passe d'un état à l'autre (L409)	Oui, il a donné plusieurs exemples, comme la théorie des files d'attente (L463).
A1	Oui	Les graphes, les définir ce n'est pas très difficile	
B2	Oui		
A2	Oui	Non seulement plusieurs, et parfois ces définitions sont contradictoires (L1086). C'est parce qu'on définit l'objet en fonction de ce que l'on veut faire (L1088). Par exemple l'arbre un graphe connexe sans cycle et après on peut dire que c'est un graphe connexe qui n'a pas plus de (n-1) arêtes (L1124)	En Master, ça peut arriver qu'a des moments différents, un objet qui est défini d'une autre façon (L1143).
A4	Oui	Un exemple des graphes (L273). Donc sur les graphes passer de la représentation dessiné, graphique à une représentation matricielle […] ou alors une notation ensembliste […] on peut même envisager dans une direction plus informatique, d'autres représentations par exemple sous forme d'une liste d'adjacence. Et passer d'une représentation à l'autre c'est un des objectifs très fort du travail informatique	Pour moi, être capable de passer d'une représentation à l'autre, ça fait partie des choses qu'on traite avec les étudiants (L274). On ne va pas forcement les faire dans les jours-là mais en programmation et algorithmes oui.
B5	yes	Yes, different ways to define. You can find in some books that a graph is defined as the graph of a binary relation, in other books it is defined as the set of vertices and a set of edges as a defined graph (L179).	
A5	oui	Je dirai plutôt beaucoup d'objets discrets peuvent être défini de plusieurs façons (L570). Je pense aux graphes par exemple […] Il y a une façon géométrique basé sur une représentation graphique, […] une vision plus ensemble […] un graphe c'est une certaine forme d'une relation binaire […] encore une autre définition, le lien entre les graphes et les matrices par exemple (L591)	Oui notamment, ça peut être quelque chose qui va apparaitre dans l'enseignement. La multiplicité des façons de faire les choses. Tout à fait (L602)
B1	oui	Oui c'est vrai mais quand même on peut raffiner plus cette définition en disant que même ce qui est apparemment différent sur le plan de définition peut être regroupé (L354)	Oui oui tout à fait, par exemple un graphe est une matrice et là vous êtes en train de suivre, a quoi ça sert de voir la matrice via un graphe ou inversement donc quand on change de regard ça montre (L364)

Tableau 3-41: Plusieurs définitions des objets discrets

Il nous semble intéressant de repérer l'avis de nos enseignants chercheurs concernant cette affirmation, et de leur demander s'ils travaillent ce changement de statut avec les étudiants. Nous avons obtenu des réponses variées, mais toutes les personnes interrogées étaient en accord avec cette affirmation. En répondant de manière plus précise à cette question, les chercheurs ont évoqué plusieurs exemples ; les deux exemples les plus connus sont ceux du graphe et de l'arbre.

Au niveau de l'enseignement, ce changement de statut ne se manifeste pas dans les classes. Les raisons n'ont pas toujours été évoquées lors des entretiens. A2, par exemple, précise qu'on définit les objets discrets en fonction de ce qu'on en veut faire. Ce qui peut expliquer des allers-retours entre différents modes de représentation.

Il nous semble pertinent de souligner la réponse de B7, qui considère que cette affirmation est vraie, mais pas uniquement pour les structures discrètes. Il ne s'agirait donc pas d'une particularité distinguant les mathématiques discrètes d'autres domaines mais d'une caractéristique intéressante.

3.3.4.3 Conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes

L'entraînement au raisonnement et à la preuve en mathématiques discrètes a été évoqué par plusieurs enseignants-chercheurs lors de nos entretiens. Nous avons posé des questions spécifiques sur la preuve, avec l'objectif de repérer ses particularités et d'obtenir une liste des techniques les plus fréquemment utilisées pour des problèmes de mathématiques discrètes.

3.3.4.3.1 Particularité(s) dans l'enseignement des preuves en mathématiques discrètes [D]

EC	Déclaration
A1	Ce que j'aime beaucoup en maths discrètes et sur les arbres justement c'est qu'on peut faire très proprement des preuves par induction et vraiment très visuels (L163) ; c'est un outil où je trouve la preuve par induction est bien visible (L167)
A2	Et ce n'est pas comme ça que c'est enseigné (L394) (en parlant sur les preuves en MD) ; c'est une catastrophe comment c'est enseigné ; Il y a aussi les trucs qui sont à la fois des objets étudiés et à la fois des techniques de preuves, par exemple la notion d'invariant (L456). Par exemple le jeu du solitaire (avec une élaboration). Dans ces problèmes, c'est un état d'esprit qui est complètement diffèrent et qui n'est pas habituel du tout dans l'enseignement (L491) ; Il y a des objets comme les graphes qui sont des outils de modélisation…ils ont aussi un intérêt a des choses qui relèvent des mathématiques appliqués (L502) ; Il a donné l'exemple de l'emploie de temps (L516) et a présenté le lien avec la théorie des graphes. Dans le cas de problèmes difficile en termes de complexité algorithmique, on va développer des méthodes qui ne trouvent pas des solutions exactes mais une solution approchée, et ce genre d'approches c-à-d. heuristiques (541). Il y a plus d'heuristiques dans la démarche d'investigation, dans le sens expérimental de l'activité de preuve, Donc de se placer dans un autre contexte. (il a mentionné plusieurs exemples, emploie de temps, empilement, pavage, coloration des graphes.)
A3	L'idée c'est de travailler sur les petits cas pour essayer de deviner ce qui se passe (L234). C'est plus dans la construction, le fait de faire émerger des résultats qui est un peu différent, après dans la façon de prouver, de récurrence (L266) ; on peut trouver un résultat sans parler (286) juste en montrant un dessin.
A4	C'est assez important pour nous surtout quand on aborde les la notion des ensembles, les relations. Comme les objets sont simples, on espère que ça peut permettre de mieux faire transmettre les types de raisonnements (L100).
A5	Dans les mathématiques continu, l'informatique et l'algorithmique c'est mieux comme un outil d'obtention d'un résultat numérique alors que dans les mathématiques discrètes, il y a beaucoup des situations où on en fait l'algorithme n'est pas un outil qu'on utilise pour calculer une valeur numérique mais c'est un outil de preuve aussi (L336).
B1	Dans les preuves en maths discrètes, il s'intéresse beaucoup à l'illustration (L105). Il a dit qu'illustrer les idées, faire un sketch c'est très important. Mais aussi il faut se méfier des illustrations par ce que ça risque d'être un obstacle à bien voir les choses avec toute la généralité demandée. Il y a des astuces qui demandent chaque fois de créer une sorte de tableau à plusieurs dimensions différentes et parfois il y aura des résultats (L217) …Dans l'enseignement de la preuve en mathématiques discrètes il y a quand même un minimum d'outil qui aide à avoir des astuces. Donc c'est bien de les présenter explicitement.
B2	Dans la théorie des graphes, il faut avoir une idée originale, pas une méthode (on fait ça et on fait ça). Ce n'est pas classique.
B5	Most of the time proofs are by induction as we are dealing with discrete objects. In graph theory, most proofs are by contradiction (L161)
B6	On donne juste l'utilité du modèle (à la faculté du gestion sciences économiques), mais après la preuve reste au mathématiciens (L243). Dans mon travail, on travail des algorithmes (L255) ; et après on peut trouver des résultats qui sont fiable, demi fiable. On fait des tests et des scenarios et après des simulations en des logiciels (L260)

Tableau 3-42: Particularité des preuves dans l'enseignement

Concernant le contexte d'enseignement, nous avons pu extraire des caractéristiques très intéressantes :

1. Les mathématiques discrètes donnent l'opportunité de travailler des preuves très visuelles, en particulier l'induction (avec l'objet arbre par exemple) (A1, A3, B1, B5) ;
2. Certains objets constituent à la fois des objets étudiés et des techniques de preuves (par exemple l'objet invariant (A2) ; l'algorithmique occupe aussi un statut particulier

: dans certaines situations, il ne sert pas seulement d'outil pour calculer une valeur numérique, mais représente aussi un outil de preuve (A6) ;

3. Les problèmes de la théorie des graphes nécessitent un état d'esprit qui n'est pas du tout habituel dans l'enseignement (par exemple les problèmes de l'emploi de temps, empilement, pavage, coloration des graphes) (A2) ;
4. Certains objets, comme le graphe, sont des outils de modélisation (A2) ;
5. Pour les problèmes difficiles en termes de complexité algorithmique, il est possible développer des méthodes qui ne permettent pas d'obtenir une solutions exacte, mais proche : les heuristiques (A2) ; il est nécessaire de développer une idée originale, ce qui n'est pas une attitude classique (A2, B1, B2)

Ces aspects mentionnés par les enseignants chercheurs lors des entretiens confirment ce que nous avons rencontré dans la littérature, en particulier avec Rosenstein (2016), qui met l'accent sur l'importance des mathématiques discrètes pour l'utilisation des tableaux, des graphes, et pour la génération des algorithmes (Rosenstein, 2016). Les heuristiques occupent une place très importante dans le travail de Goldin (2004), ce qui converge avec les assertions des enseignants chercheurs (A2, B1, et B2).

3.3.4.3.2 Particularité(s) des preuves en mathématiques discrètes (dans la recherche) [E]

EC	Déclaration
A1	Je fais beaucoup de preuves d'analyse de complexité, preuves d'optimalité d'un algorithme, d'approximation (L198)
A2	La récurrence alors quelque chose qui est un peu spécifique aux maths discrètes je pense (L397) ; Ce qui est plus spécifique aux mathématiques discrètes, c'est lié au fait que c'est des maths du fini, et que c'est aussi le fait que les problèmes n'ont pas d'outils qui permettent de répondre à la question, donc on est amené à faire beaucoup d'analyse par cas (L401).
A3	Les preuves en maths discrets se font assez très bien par des dessins. Ils peuvent être très visuels (L284) […]
A4	C'est une vraie prépondérance de la récurrence, ce que je trouve le plus frappant, la récurrence (L123). C'est vraiment le type de preuve qu'on rencontre le plus.
A5	Les choses sont plus difficiles au côté recherche (L276), c'est un domaine où il y a assez peu des grands résultats généraux, il y a assez de formule par exemple. […] si je change un peu mon paramètre je perds tout quelque part, je ne peux pas réutiliser ce que j'ai dit au paravent. Donc ça c'est une particularité, je ne pas peu réutiliser ce que j'ai dit au paravent (L285). Quelque part au milieu du 20ieme siècle, donc un historique beaucoup moins long (L314). Les mathématiques discrètes sont un champ d'investigation quelque part qui sont intrinsèquement liées avec ce qu'on appelle l'algorithmique (L326).
B1	C'est quelque chose difficile, les preuves en mathématiques discrètes ne sont pas faites l'une sur les autres (L161). Donc avec un peu de conditions on veut construire toute une image (L173). Les preuves ne sont pas vraiment faciles et ça s'incarne (ça se trouve partout en mathématiques et dans les mathématiques discrètes ça se trouve d'une manière affreuse(L176). Il y a rassembler la plupart des fois des éléments apparemment très séparés. Les liens cachés jouent un rôle très important dans les mathématiques discrètes (L180). La plupart des fois les preuves en mathématiques discrètes sont des preuves astucieuses. L'énoncé très simple, et malheureusement c'est un danger sérieux en mathématiques discrètes (L190).
B2	Les preuves en théorie des graphes sont différentes que dans l'algèbre ou dans l'analyse (L270).
B5	Induction of course, because you are dealing with discrete objects. Contradiction or direct implication this is not very special. Most proofs in mathematics are by contradiction or direct implication (L172)
B7	Building some intuition, and this intuition helps you in order to find proofs. Let's say each field has its own spirit, kind of, and the proofs have their own style. But if you want to compare discrete mathematics to fields that are non-discrete math, I would say in every proof you find a new spirit in discrete math (L152).
B8	Dans les preuves je sais qu'ils travaillent par l'absurdité et il y a l'induction (L181)

Tableau 3-43: Particularité des preuves dans la recherche

Concernant la ou les particularité(s) des preuves dans la recherche, les enseignants-chercheurs indiquent que la situation n'est pas très différente de celle qui prévaut pour l'enseignement. Ils soulignent également l'importance de l'intuition, qui semble être une des caractéristiques de résolution des problèmes en mathématiques discrètes ; ces problèmes sont, pour une majorité des enseignants- chercheurs interrogés, difficiles à résoudre et ne peuvent être résolus par des stratégies classiques. C'est un aspect intéressant, notamment parce qu'il n'était pas évoqué dans la littérature. Dans quel contexte ces problèmes sont-ils difficiles ? Cet aspect sera exploré plus profondément dans notre analyse des ouvrages.

Deuxième point commun relevé dans les réponses à cette question, l'accord sur la prépondérance de méthode de récurrence (A1, A2, A4, A5, B8) : les enseignants- chercheurs indiquent que c'est une technique très particulière de preuve mobilisée en raison de la nature discrète des objets manipulés. Nous présentons un développement sur les techniques de preuves évoquées dans la partie suivante.

A5 évoque une idée très intéressante qui précise les observations de la littérature en ce qui concerne les raisonnements en mathématiques discrètes, et leurs spécificités. Il explique que le domaine des mathématiques discrètes, compte assez peu de grands résultats généraux et de formule : en conséquence, un petit changement de paramètre peut conduire à l'échec. Nous constatons ici une particularité des mathématiques discrètes : elles obligent à utiliser de nouvelles idées à chaque fois que l'on s'y confronte. Ce constat coïncide avec le discours de B1, indiquant que les preuves en mathématiques discrètes ne se font pas les unes sur les autres. Les mathématiques discrètes posent ainsi d'une façon générale des problèmes astucieux, non classiques.

3.3.4.3.3 Technique(s) de preuves utilisées en mathématiques discrètes

	Techniques	**Exemples si cités / problèmes**
A1	Preuves par induction, preuves algorithmiques, preuves par contre-exemple maximale, preuves par contre-exemple minimale, preuves par l'absurde mais pas beaucoup (L178)	Montrer que dans un arbre il y a un sommet de degré 1(algorithmes) ; problème des mariages stable,
A2	Preuves par l'absurde, preuves par récurrence, l'induction surtout en disant façon descendante (L379). Les heuristiques (L566)	Problème des taupes (L562), d'emploi de temps, type de pavage, jeu de solitaire ; le problème de pavage par les dominos (L633)
A3	Récurrence, preuves par absurde, par études de cas (souvent dans la théorie des graphes) (L257) ; expérimentations informatiques pour prouver des régularités dans les mots infinis avec un alphabet ; des programmes et il lancera sur les machines et puis arrive à deviner leur conjectures (L301)	Combinatoire des mots, théorème de quatre couleurs (L304)
A4	Preuves par double inclusion, double implication. Un peu moins disjonction des cas. Des démonstrations par récurrence, par induction, induction structurelle (L112). On va plus souvent rencontrer des preuves constructives et des preuves d'existence par exemple (L144).	En logique propositionnelle, définir ce que c'est une formule (raisonner par induction sur la structure de la formule). (L131)
A5	Même si chaque problème est a priori unique, il y a une prééminence assez forte des techniques qui utilise l'induction qui est une généralisation de preuve par récurrence (L256) ; beaucoup d'études de cas. Il y a pas mal des preuves en mathématiques discrètes qui consiste à considérer un algorithme ou à définir un algorithme et ensuite essayer de prouver ces propriétés, des invariants de cet algorithme (L340).	L'algorithme du simplex
B1	Parfois les méthodes qui nous servent c'est des méthodes purement combinatoires, parfois c'est des méthodes qui se basent sur les applications, parfois c'est des structures algébriques, parfois c'est théorie des ensemble (L170).	
B2	Dans la théorie des graphes on utilise beaucoup la méthode de récurrence « induction ». Mais ce n'est pas seulement ça, dans la théorie des graphes,	

	il faut avoir une idée originale, pas une méthode (on fait ça et on fait ça). Ce n'est pas classique (L281).	
B3	En lien avec les mathématiques discrètes, on utilise les méthodes de dénombrement « counting techniques » parfois et parfois on utilise la probabilité mais c'est rare (seulement dans les masters et plus). En principe on utilise le dénombrement. Parfois on utilise « induction » mais dans induction on utilise counting (L91) ; algorithmes (L145)	Exemple dans la chimie: find the minimum set of edges or find the minimum set of binds whose removal makes all atoms unattached by a bond (L141)
B4	L'induction sont intéressantes (L131)	
B5	Most proofs are by induction as we are dealing with discrete objects. In graph theory most proofs are by contradiction (L161)	
B6	Algorithmes (L255)	
B7	Intuition, induction. We use them a lot, and somehow its more natural to see them in discrete math compared to other fields because we are talking about finite structures, and so when you talk about finite structures, then this structure has a size so one technique to use by induction on the size of the structure for example (L166)	
B8	On ne fait pas des preuves, on d'applications directes des algorithmes. (L169) ; Dans le domaine de l'informatique, on travaille sur les arbres comme en java. Dans java il y a des arbres comme techniques (L274) ; les algorithmes de recherche en profondeur, des boites de recherches en largeur dans les arbres de recherche ça existe.	

Tableau 3-44: Techniques de preuves utilisées en mathématiques discrètes

Nous présentons tout d'abord une liste non-exhaustive des techniques de preuves évoquées lors des entretiens avec les enseignants chercheurs :

Technique	Enseignants-chercheurs
Algorithmes	B8, B6, B3, A5, A1
Induction	B7, B5, B4, B3, B2, A5, A3, A2, A1
Contradiction	B5
Dénombrement	B3
Méthodes combinatoire	B1
Méthodes de la théorie des ensembles	B1
Méthodes algébriques	B1
Induction structurelle	A4
Preuves constructives	A4
Preuves d'existence	A4
Absurde	A3, A2, A1
Étude de cas	A3
Heuristiques	B8[24], A2[25]
Contre-exemple maximal	A1
Contre-exemple minimal	A1

Tableau 3-45: Nombre d'enseignants-chercheurs par technique de preuve

Ce tableau montre l'existence de plusieurs techniques ; la prédominance de la méthode de l'induction et des algorithmes pour les preuves en mathématiques discrètes est toutefois très claire, constat homogène aux résultats de notre état de l'art (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018; Devaney, 2016; Ferrarrello & Mammana, 2016; Garfunkel, 2016; Rougetet, 2016; Schuster, 2004; Hußmann, 2008), dont de nombreux articles évoquent les preuves d'algorithmes qui favorisent l'apprentissage des mathématiques discrètes.

[24] Pour B8 : « heuristiques sont des algorithmes génériques. C'est à dire qu'on peut les adapter à des problèmes qui ont euhh qui sont NP complet, c'est à dire euhh la complexité est très grande. »
[25] Pour A2 : « on va développer des méthodes qui ne trouvent pas forcement une solution exacte, mais une solution approchée »

Le principe de case à pigeons et le principe de l'induction représentent aussi des types de preuves particulières selon Grenier (2008), qui les utilisent fréquemment pour introduire les étudiants au cours de mathématiques discrètes, pour initier l'énumération, et pour développer des activités des modélisation et d'élaboration des preuves. Cette prépondérance de l'induction dans l'état de l'art est confirmée par les entretiens : elle est en effet la technique de preuve la plus citée. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2.4 plus particulièrement sur la récurrence.

3.3.4.4 La place et le rôle du travail sur la modélisation en mathématiques discrètes

Avant de décrire les réponses des enseignants-chercheurs, précisons que cette question est en lien avec l'activité de preuve ; si les interviewés en avaient parlé auparavant, nous leur avons demandé de développer ; nous avons posé cette question dans le cas inversé. Cette question nous permet de bien explorer la validité des modèles utilisés, et l'existence de modèles permettant (ou pas) de mieux comprendre les mathématiques discrètes.

3.3.4.4.1 Description du travail sur la modélisation dans l'enseignement [D]

	Oui/ non	**Type/Forme**	**Exemple si cité**
A1	Oui	J'aime beaucoup en maths toujours la modélisation (L226) ; on va modéliser avec un graphe et on va essayer de mettre des choses sur ce graphe (L233) ; On par toujours d'un problème pratique par ce que j'aime bien, c'est mon thème de recherche (L241)	Les flots (L227) ; distribution de courriel ou des poubelles (L234)
A2	oui	Les graphes comme des outils de modélisation	Problème de l'emploie de temps
A3	Oui	Quand on fait de programmation linéaire on a un problème concret en entreprise, et puis on peut modéliser ça avec un nombre fini de variable et puis par les équations linéaires. Et cette modélisation et celle que j'enseigne et celle que je peux utiliser parfois dans mes recherches pour faire des preuves (L320) ; mon jeu le transforme en un problème sur un graphe et après je raisonne sur mon modèle qui est mon graphe (L336). Dans l'enseignement je fais apprendre aux étudiants que ce modèle existe et mon but est de leur faire découvrir ça pour qu'après il réutilise oui (L340), Ce sont donc des applications concrètes dans les problèmes de la théorie des graphes et le modèle de graphe est pertinent (L349)	La programmation linéaire (L316) ; des jeux (L333) ; problèmes d'affectations de stages (L344)
A4	Pas assez	On va avoir une activité de modélisation au sens qu'il faut décider comment remettre, coder, représenter les données de la situation donne début d'un problème début d'un jeu (L161).	Dans les cours de maths pour l'info on en fait moins (L163)
A5	Oui	On a un problème concret on a un problème industriel et on doit le modéliser comme un problème d'optimisation linéaire en variable réelle ou en variable en nombre entier (L387) ; Aussi avec des graphes un peu moins en termes de volume par ce qu'on fait plus rapidement le tour des problèmes qu'on peut modéliser avec des graphes à mon avis (L393)	Pour tous les enseignements qui concerne l'optimisation linéaire (L382) ; modéliser des conflits dans les problèmes d'emploi de temps, des activités qui ne peuvent pas être planifiés en même temps, graphe de conflits (L413)
B1		La modélisation en mathématiques discrètes c'est très important surtout dans l'enseignement (L247) ; N'importe quel graphe peut être un modèle de cet exemple-là (la théorie des amitiés) (L253) ;	Théorie des amitiés (L250)
B2	Non	Maintenant non, on donne la théorie des graphes pures	
B3	Non	En premières années on n'utilise pas ça (L109)	
B4	Pas trop	Je suis utilisateur des modèles (L162) mais je ne fais pas mes propres.	La programmation linéaire c'est dans la théorie des graphes, le simplex, le plus court

			chemin, tous les algorithme de graphes […] on peut le modéliser si on a besoin de le programmer (L242)
B5	Non	No, we don't do modeling	
B6	Oui	Dans l'optimisation on fait des modèles. On met toujours des fonctions objectives, des contraintes et après on vérifie est-ce que les contraintes sont vérifié, est-ce qu'il y a des relations de quelques contraintes, de passer d'un mode à l'autre (L279); On créent notre propre modèle mais notre propre modèle mais notre modèle normalement est basé sur ce qu'ils ont fait les mathématiciens (L282) ;	Dans les applications, je donne des exemples toujours (L291) ; autoroute ; le GPS (L310),
B8	oui	On essaye de donner des problèmes qui existe au marché (L223) ; Dans le domaine de l'informatique, on travaille sur les arbres comme en java. Dans java il y a des arbres comme techniques (L274) ;	

Tableau 3-46: La modélisation dans l'enseignement

La place de la modélisation dans le contexte de l'enseignement est très importante selon les enseignants-chercheurs. Nous pouvons déduire d'après notre tableau ci-dessus qu'un grand nombre d'enseignants-chercheurs utilise des formes différentes de modélisations. La modélisation par les graphes, par exemple, est la plus utilisée dans les formations de mathématiques appliquées et dans les formations d'informatique, ce qui est aussi convergent avec la littérature. Nous étudions ici sur les déclarations selon lesquelles le graphe représente un outil de modélisation pour la résolution des problèmes comme par exemple : le problème de l'emploi de temps (A2, A5), de la distribution des poubelles ou du courriel (A1), des problèmes d'affectation des stages (A3), des graphes de conflits (A5), la théorie des amitiés (B1), et le GPS (B6).

Nous inférons d'après les résultats des entretiens que la modélisation n'est pas assez présente dans les formations mathématiques (une seule déclaration sur la modélisation avec les graphes) en comparaison avec sa présence dans les formations de mathématiques appliquées et d'informatique. C'est un résultat qui complète l'état de l'art, et qui nous amène à mener davantage d'investigation sur le rapport entre le module d'enseignement et les cours enseignés, en se demandant notamment les motivations et les contraintes qui guident les choix des enseignants.

3.3.4.4.2 Description du travail de modélisation dans la recherche [E]

	Description	**Exemple si cité**
A1	Je fais aussi pas mal de modélisation ; avec les industriels (L248)	C'est comment résoudre des problèmes pratiques. Donc on part de problèmes pratiques on essaye de les amener vers un problème théorique de voir ce qui existe autour des preuves théoriques et voir s'il y a des problèmes scientifiques et intéressant autour de ce problème théorique. Soit c'était déjà résolu on revient à l'industriel soit elle n'était pas résolue on abstrait, on fait des choses et on revient vers la solution industriel
A2	Il y a une chose qui me semble assez différent (L646) de la modélisation en maths appli où une certaine manière le modèle est désigné en avance.	Le problème de l'emploie de temps

	[…] Alors que si je prends le problème de l'emploie de temps, le graphe il n'est pas désigné en avance. On regarde la démarche, et on regarde ce qui est pertinent par rapport à notre problème on le met dans une classe d'objets sur lesquels on sait dire les choses, ici c'est les graphes (L658)	
A3	Quand on fait de programmation linéaire on a un problème concret en entreprise, et puis on peut modéliser ça avec un nombre fini de variable et puis par les équations linéaires. Et cette modélisation et celle que j'enseigne et celle que je peux utiliser parfois dans mes recherches pour faire des preuves (L320) ; les modèles que je présente aux étudiants sont les modèles que j'utilise dans mes recherches (L365)	
A4	Il y a plusieurs étapes de modélisation, il y a identifier quelles sont les valeurs qui caractérisent mathématiquement une situation. […] puis après il y a une modélisation plus informatique, je sais quelle sont les données comment moi je les représente dans ma machine, comment je les manipule avec mon langage de programmation par exemple. (L174) […] quand on travaille sur un ce qu'on appelle un modèle de calcul, il est s'en représenté quelque chose, une section de programme ou quelque chose comme ça. Et ensuite une fois qu'on a le modèle, on travaille dessus d'une manière plus abstraite. Mais pour certains chercheurs, on a que la partie de travailler sur l'objet théorique mais pour d'autres d'intéresse plus à la partie modélisation. (L188)	
A5	En termes de recherche pas vraiment, pas vraiment de modélisation (L379)	
B1	Vous voyez quand on modélise les sociétés, les circuits électroniques, […] cela devint un modèle un graphe en mathématiques discrètes, il y a pas mal des preuves et des résultats qui deviennent géniales dans le processus d'application (L272)	
B3	Dans la recherche je n'ai pas travaillé la modélisation et dans les premières années. Mais je suis sûr il y a des modélisations de beaucoup des problèmes qui peuvent être modélisé par des graphes, une relation (L113) ; une application de la théorie des graphes dans la chimie (L136)	Dans la théorie des graphes qui s'appelle « mariage préférence théorème » qui peut être modélisé par un « bipartite graph » (L116) ; application de la théorie des graphes dans la chimie (L136)
B5	Yes, a lot of researches in graph theory, especially for example in algebra […] they work in modeling but here we only deal with simple graphs and digraphs, it is more theoretical, no applications (L197); In topology, it is the way that a topological space is represented by a graph, and they use the properties of the graph to get some results, also in algebra it is the same(L220)	
B6		On peut aussi modéliser l'être humain par un graphe (L314) ; aussi graphes et chimie (L321) ;dans la théorie des décisions lorsqu'on a plusieurs contraintes et on va prendre une décision, parfois on fait ce qu'on appelle « tree » arbre de décision (L324) ; Google par exemple c'est un graphe des réseau sociaux aussi
B7	When we talk about modeling, we talk about applied discrete math (L179); yes, I say that the role of modeling is important in the applied part of math let's say but not in the pure math, yes but when we do applied math, yes then modeling is very important. We have some real phenomenon that we would like to understand, or we would like to build some system that does a certain function and in order to do, we use some mathematical models (L189)	

Tableau 3-47: La modélisation dans la recherche

La plupart des enseignants chercheurs ne font pas de distinction entre l'activité de modélisation dans leur enseignement et dans leur recherche. Nous avons cependant obtenu quelques réponses assez intéressantes. A5 précise une distinction entre les modélisations utilisées en mathématiques appliqués et les modélisations avec les graphes (dans le contexte de son exemple sur le problème de l'emploi de temps). Ceci s'explique par le fait que, dans les modélisations avec les graphes, le graphe n'est pas désigné en avance. A2 indique ainsi : « On regarde la démarche, on regarde ce qui est pertinent par rapport à notre problème, et on le met dans une classe d'objets pour lesquels on sait dire les choses : ici, les graphes ». Nous constatons que, pour certains enseignants-chercheurs, la modélisation est au cœur de l'activité mathématique des mathématiques discrètes, et pas seulement un outil de résolution désigné en avance.

Les enseignants-chercheurs en informatique ne portent pas le même regard sur la modélisation. Certaines enseignants-chercheurs, comme B4 et B7, utilisent des modèles déjà construits par les mathématiciens. Plus précisément, pour B7 la modélisation en mathématiques est intéressante dans le domaine des mathématiques appliquées (ici les mathématiques discrètes appliquées), domaine où l'on construit un modèle pour comprendre un phénomène de la vie réelle, et où ce modèle a une fonction précise. Nous trouvons pertinent, d'après ces déclarations, de poser les questions suivantes : quel lien existe-t-il entre les travaux des mathématiciens et ceux des informaticiens en particulier dans le cas de la modélisation, et en général dans le cas de la théorie des graphes. Existe-t-il une opposition ou une complémentarité ? Ces deux dynamiques sont-elles dépendantes du pays (France et le Liban) ?

3.3.4.5 Lien(s) entre les mathématiques discrètes et d'autres disciplines

3.3.4.5.1 Descriptions des liens dans l'enseignement

	Oui/ non	**Exemple**
A1	oui	Avec les industriels et les faire comprendre les graphes qui sont derrière ou les maths discrètes qui sont derrière un problème (L263) […] ; moi j'étais dans maths à modeler, donc allez voir les gens et puis dans l'écoles utiliser des jeux pour faire comprendre des notions un petit peux avancés des mathématiques. (L273) ; une fois on a fait une formation continue et on avait eu des gens en microélectronique de gestion des stock étaient venue apprendre des graphes avec nous (L295).
A2	oui	Je n'ai pas travaillé réellement sur des vrais problèmes, il y a quelques collaborations avec des collègues. L'exemple de trinquer (L810)
A3	oui	Des liens pour moi c'est des liens de modèles effectivement parce qu'on a plein de problèmes dans d'autres disciplines, on va assez souvent pouvoir modéliser ces problèmes-là par des problèmes des maths discrètes (L374) ; mais dans les autres cours plus appliqués j'utilise des algorithmes, ils cherchent des solutions approchées, par exemple s'ils font les réseaux sociaux, leur graphe est gigantesque. Ils ont besoin de savoir quelle est le diamètre du graphe. […] ils s'enfichent d'avoir la solution parfaite, c'est ce qu'ils values c'est des me2thodes approchés (L403)
A4	oui	On essaye de leur en faire conscience (L215), liens entre l'informatique et maths discrètes. On essaye sans arrêt de faire ce jeu de passer entre l'objet concret, le programme, la situation, a des objets abstraits qui permet de raisonner sur ces objets concrets (L223)
A5	oui	Il y a trois liens forts, il y a le lien avec les mathématiques du continu, c'est plutôt un lien d'opposition. […] Ensuite il y a les liens avec l'informatique dont on a déjà discuté, et en particulier l'algorithmique qui peut soit être un outil de preuve comme on a dit mais soit effectivement dans certains cas un outil de résolution de calcul (L432) ; un troisième domaine qui est assez peu enseigné aussi que j'appellerai plutôt la logique mathématique, et pourquoi je fais ce lien, naturellement tout ce qu'il touche le raisonnement, faire une preuve par l'absurde, faire la distinction entre la condition nécessaire et la condition suffisante (L440)
B1	Oui	Dans l'enseignement on fait pas mal des liens entre l'algèbre par exemple et mathématiques discrètes (L283)
B2	Non	

B3	oui	J'ai choisi pour leur examen final quelques questions, c'était une application de la théorie des graphes dans la chimie. « We have a molecule and we need to eliminate the minimum number of atoms so that when they are eliminated no bond appears between the atoms that are left ». And the problem in graph theory language can be stated as follows: « find the minimum cover » we can use repeatedly the augmenting path algorithm. This algorithm finds a minimum vertex cover and also a maximum matching. (L136)
B4	oui	Pour les étudiants en informatique, quand je donne un algorithme, pour les gens de stat, le même cours mais j'adapte un peu. Je ne rentre pas dans les algorithmiques (L223) ;
B5	No	We barely have the time to finish the program. […] in some years before a researcher from France […] gave a course about applications of graph theory in telecommunications (L208)
B6	oui	Lorsque les situations sont par exemple gestion, je donne par exemple gestion de projet, informatique, j'essaye d'expliquer ça, de faire des applications. (L335)
B8	Non	Dans le domaine de l'informatique, on travaille sur les arbres comme en java. Dans java il y a des arbres comme techniques (L274) ; les algorithmes de recherche en profondeur, des boites de recherches en largeur dans les arbres de recherche ça existe. On enseigne ça, mais on fait jamais le lien avec les mathématiques discrètes

Tableau 3-48: Lien(s) dans l'enseignement

Plusieurs liens ont été évoqués lors de nos entretiens. Nous pouvons les regrouper en deux grands domaines d'intégration :

1. Domaines scientifiques : industrie, cours de mathématiques appliquées, informatique, logique, mathématiques du continu, algèbre, chimie, télécommunications ;
2. Domaines non-scientifiques : jeux (maths à modeler), réseaux sociaux, gestion de projets.

Dans le contexte de l'enseignement, ces liens sont intégrés dans les cours de différentes façons :

6. En utilisant les techniques qui viennent des mathématiques discrètes comme les arbres, les algorithmes ;
7. Sous la forme d'exemples, d'exercices et d'applications ;
8. À travers des collaborations avec des collègues, et des collaborations entre des chercheurs dans les universités ;
9. A travers des questions d'évaluation.

Cette catégorisation montre bien que l'intégrations se produit à deux niveaux différents : dans la démarche et dans les objets. Par exemple, l'informaticien A8 indique qu'il travaille sur les arbres en tant que techniques de résolution (objets de travail) et qu'il travaille sur les algorithmes de recherche en profondeur (démarche). Le lien entre la théorie des graphes et la chimie se manifeste sous la forme d'une stratégie pour résoudre des problèmes (modéliser avec un graphe). Un lien intéressant avec l'algorithmique est cité par A5 :

> « […] qui peut soit être un outil de preuve, comme on a dit, mais soit effectivement, dans certains cas, un outil de résolution de calcul »

Même le lien avec la logique prend la forme d'un objet de travail, notamment à travers le travail sur les preuves par l'absurde et la nécessité de faire la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante (A5). Ces exemples montrent bien la puissance des mathématiques discrètes, et de la théorie des graphes en particulier, intégrées à la fois en tant que démarche et en tant qu'objet.

3.3.4.5.2 Descriptions des liens dans la recherche

EC	Déclaration
A1	On a fait des applications en biologie en microélectronique […] pour le design des puces électroniques ; Donc là c'est des problèmes des graphes aussi on a travaillé avec des micro électroniciens pour qui n'ont pas des cultures suffisant en graphes pour améliorer soit le test soit la conception des cellules (L268)
A2	Existence des liens avec l'informatique, l'algèbre, la géométrie (problème de polyèdre qui a un gros enjeu) ; un lien assez naturel avec la branche de recherche opérationnelle, c'est eux qui sont l'interface avec les vraies problèmes, de la vrai vie (L727)[…] ex optimisation combinatoire, il y a tout ce qui concerne les réseaux sociaux, la structure des site web, les communautés sur le net, les pages Facebook d'une communauté qui sont très interconnectés entre elles, il y a beaucoup des liens , ce qu'on appelle

	un peu les graphes denses (L761) ; Liens relatives aux systèmes dynamiques…[…] on fait des choses relativement au diagnostic (L836)
A3	En Informatique, quand on fait du big data, quand on fait des bases de données […] les gens qui font la reconnaissance des images (maintenant leurs images sont modélisées par des graphes), les gens qui travaille sur les services web, les gens qui bossent sur les réseaux sociaux font des graphes (L384)
A4	Le travail sur les nombres, l'énumération. Pour parler les plus simples, les entiers clairement quelque chose qui interviennent dans tous les domaines des maths et d'autres sciences d'ailleurs (L202).
A5	Donc je vois ces trois domaines, maths continues en opposition, informatique un lien fort coté applications et aussi coté raisonnement avec l'algorithmique, et la logique mathématique pour l'aspect raisonnement et preuve (L448) ; On peut éventuellement évoquer le domaine des jeux, les jeux de société. Ce lien se fait à travers les jeux combinatoires qui sont une branche des mathématiques discrètes et qui étudie les stratégies dans, dans une catégorie de jeux société (L454).
B1	Il y a le lien entre la théorie des graphes des mathématiques discrètes et la géométrie (L282) […] Il y a la théorie des graphes topologiques ; Il y a les études sociales, il y a les études psychologiques (L294) ; la théorie des graphes et crimes (le travail de Claude Berge) (L302). Il y a un lien étroit entre les mathématiques discrètes et autres disciplines, par ce que les mathématiques discrètes ne se basent pas sur les définitions élaborées. C'est des définitions très simples, on a besoin d'un ensemble, d'une application, et d'une relation pour démarrer le travail de mathématiques discrètes (L288).
B2	Maintenant non, je donne la théorie des graphes purs. Mais il y a une fois que j'ai donné la théorie des graphes à l'Université de Balamand. Ils m'ont demandé de faire un peu d'applications. Et dans ce cours, j'ai introduit quelques algorithmes sur comment trouver le plus court chemin dans un graphe « Bellman-Ford Algorithm », « Dijkstra Algorithm », ce sont des algorithmes qui donne une méthode pour trouver les plus courts chemins. C'est juste donner l'algorithme, on analyse les algorithmes et comment ils donnent le plus court chemin. Il faut la démonstration, pour démontrer que cet algorithme il marche bien, et il donne le plus court chemin. Mais à l'université libanaise on fait que des maths pures.
B3	Je pense when you transform a problem from a graph theory point of view, I think things will be clearer and proofs will be simpler […] When speaking about non-Lebesgue measurable sets in R, you know R is a continuous set. We create a bipartite graph and prove that one of the bipartite sets is not Lebesgue measurable (L158). Il y a aussi un exemple dans la théorie des groupes (L160).
B4	Surement il y en a mais pas dans mon travail.
B5	It has a lot of applications like Eulerian graphs, the four-color problem, chemical bonds, airplane flights, airports, Hamiltonian graphs in telecommunications. Graph theory can provide proofs for theorems in algebra. (L132). It has applications in topology, there's a field called topological graph theory, differential geometry in graph theory, algebraic graph theory. […] Also you know in computer science, physics, chemistry. (L215)
B6	Lorsqu'on utilise le GPS, il est basé sur la théorie des graphes pour trouver le chemin le plus court (L311), On peut aussi modéliser l'être humain par un graphe (L314) ; aussi graphes et chimie (L321) ; dans la théorie des décisions lorsqu'on a plusieurs contraintes et on va prendre une décision, parfois on fait ce qu'on appelle « tree » arbre de décision (L324) ; Google par exemple c'est un graphe des réseau sociaux aussi.
B7	In terms of engineering, […] discrete mathematics a lot and it is applied very frequently. This is one link: in discrete math, we have these mathematical objects that we construct like graphs, matroids, etc. and we study them, and at some point in other fields, engineering let's say we found some problem which can be modeled by discrete structures and then discrete math can help us study these models… (L215); computer science & communication […]you have to build a pure mathematical theory to solve this problem. So the link I mean is not that math influences other topics, it is also the other way around other topics influence math in the sense that sometimes we find a problem and if we want to model it, we come up with some structure which may or may not be defined (L224)
B8	En général, dans la recherche ça existe.

Tableau 3-49: Lien(s) dans la recherche

Du côté des travaux de recherche, le tableau ci-dessus montre clairement les liens divers existant entre les mathématiques discrètes et plusieurs autres domaines scientifiques et non-scientifiques. En plus des domaines déjà évoqués dans la liste sur le niveau didactique, voici d'autres domaines concernés par les mathématiques discrètes :

1. Domaines scientifiques, disciplinaires : ingénierie, GPS, graphes eulériens, graphes hamiltoniens, télécommunications, problème des quatre couleurs, géométrie, topologie, biologie, microélectronique, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, systèmes dynamiques.

2. Domaines non-scientifiques : modélisation de l'être humain, études sociales, structure de site web, pages Facebook,

Nous concluons à l'existence d'un champ d'intégration très large dans la recherche. Si on se situe ainsi dans le contexte de l'ingénierie, l'étude des objets discrets, tels que les graphes et les matroïdes, donne l'exemple d'un lien au niveau des objets (B7). Résoudre des problèmes de graphes pour le design des puces électroniques (utilisation de l'objet graphe) (A1) représente un deuxième lien au niveau de la démarche. Au niveau informatique, les liens sont évidents tant au niveau des objets que des démarches : les graphes sont utilisés pour modéliser des systèmes et pour comprendre des propriétés.

3.3.4.6 Apprentissage des mathématiques discrètes

3.3.4.6.1 Objectifs d'apprentissage

EC	Déclaration
A1	Avoir des techniques de preuve ; avoir une culture en graphes, une culture sur les algorithmes de graphes ; être capable de modéliser un problème décrit en langage naturelle vers un problème de graphe, d'utiliser de bonne type pour le résoudre ; être capable de programmer puisque moi j'ai les maths-info et les info, être capable de programmer une solution et dire est-ce que la solution est optimale, est-ce que le temps est raisonnable, […] je veux aussi qu'ils ai un culture sur les graphes (L306)
A2	En master c'est autour du savoir, autour des colorations et théorie des graphes (L847) L'objectif c'est de former le raisonnement mathématique effectivement par extrapolation à l'esprit critique. (L877) Les heuristiques de recherches, que ça soit par l'expérimentation notamment autour des petits cas en vue de généralisation, d'être capable de formuler ce qui n'est pas du tout évident […] de formuler un résultat, et de formuler un raisonnement, c'est encore pire (L892)
A3	Il y a deux classes de compétences : premier chose c'est le bon modèle à choisir, est-ce que c'est un modèle de programme linéaire, est- ce que c'est un modèle des graphe et autre chose, un problème de logique, […] donc il y a le choix du modèle, travailler la dessus, présenter des modèles différences ; la deuxième compétence … sont les méthodes pour résoudre un tel problème et pour l'optimiser. (L484) modélisation et ensuite résolution (L487)
A4	De réussir à donner une espèce de sens formelle de bases sur les objets dont on parle, pas être effraye quand on entend parler d'un ensemble, relation binaire, d'une fonction etcetera (L231) ; réussir à utiliser ces outils là pour réfléchir à leur activité dans les autres disciplines, dans les autres matières, en programmation, en algorithmique, en théorie des graphes. (L237)
A5	Se familiariser avec le vocabulaire, les résultats généraux ; être capable de modéliser des situations concrètes par des modèles discrets que ce soit graphes ou des programmes linéaires, être capable aussi d'utiliser des logiciels de résolution (L476) ; être capable d'utiliser le logiciel et d'interpréter les résultats de logiciel et d'obtenir une solution optimale a un problème concret ; objectifs aussi autour des raisonnements; être capable de produire un raisonnement sur un cas qui est raisonnablement proche de ce qu'on a déjà vu dans le cours (L490)
B1	Passer les idées de base […] j'aime bien que les étudiants soient cultivés au niveau de la connexité et non connexité des graphes et puis aussi pour le recouvrement de quelques applications et puis je m'intéresse à enseigner aussi les colorations des graphes (L326)
B2	To introduce students to the course; letting them know it's a new branch, a nice branch, if you are interested you ca no do a lot of work inside it. And a lot of applications. ((L340)
B3	In general, making proofs, constructing proofs, how to proceed by a proof correctly, mathematically. See the relation between discrete math and computer science. Apply some results of discrete math in computer science (L188)
B4	Connaitre les graphes et leurs applications (L283) ; faire les preuves sur les graphes, faire marcher quelques algorithmes sur les graphes, le plus court chemin, l'arbre couvrant minimum et les flots (L290)
B5	First of all know that there is a branch in mathematics called discrete […] get a new way of thinking which is to think freely, not to be limited to formulas (L227)
B6	Cette matière se trouve dans le tronc commun(L361) ; donc avoir une idée que ce que c'est les mathématiques discrètes, c'est quoi la logique, c'est quoi la théorie des graphes pour après. Quand ils vont continuer leurs études pour comprendre (L383) ; en informatique pour programmer et faire des algorithmes […] en gestion c'est bien de comprendre le projet est quoi ; sciences ; biologie, chimie […] même la logique, on peut étudier la logique partout (L373)

B7	Let the students understand the topic and have working understanding of it. […] It depends on the course, in the theoretical courses, the main purpose is just to let the students understand the theory. […]With applied courses we do the same and if possible we give the projects to make sure that they know how to apply them. (L338) I always try to give the motivations behind the definitions and the intuition behind the, and also in proofs, I try to give the intuition why we came up with the proof this way. (L346)
B8	Avoir une très bonne connaissance de sujet. Donc le sujet peut être en informatique par exemple le langage de programmation […] ou bien les réseaux […] Et avoir une capacité ou les compétences pour travailler dans ce domaines (L197) ; Après il faut qu'il sache bien comment transformer ce cours en une application directe dans le marché (L200)

Tableau 3-50: Objectifs d'apprentissage

Nous commençons par présenter les objectifs d'apprentissage. Nous nous intéressons ici aux contenus des mathématiques discrètes (dans leur diversité), et nous divisons les objectifs en deux catégories en suivant la focalisation (sur la démarche, ou sur les objets) choisie par les enseignants-chercheurs dans leur enseignement.

1. Approches syntaxiques (focus sur les méthodes) : disposer de techniques de preuves (A1, B4, B3) ; posséder les compétences pour travailler dans ces domaines (B8) ; appliquer concrètement les connaissances tirées de ce cours (B8, B7, B5, B3) ; programmer (B6, A1) ; réaliser des algorithmes (B6, B4) ; connaître les applications des graphes (B4) ; modéliser des situations par des modèles discrets (A1, A5, A3) ; utiliser des logiciels (A5) ; être capable de produire un raisonnement (A5, A3, A2) ; utiliser les outils pour réfléchir à leur activité dans les autres disciplines, dans les autres matières, en programmation, en algorithmique, en théorie des graphes (A4) ;
2. Approches sémantiques (développement des concepts) : posséder une très bonne connaissance de sujet, maîtriser ses principes de bases (B8, B7, B6, B2, B4, B1, A4, A3, A2) ; se familiariser avec le vocabulaire (A5) ; interpréter les résultats des logiciels et obtenir une solution optimale (A5)
3. Autres : avoir une culture en graphes (A1, B2) ; comprendre ce nouveau domaine et cette nouvelle façon de penser (B5, B2) ;

3.3.4.6.2 Objets et principes de l'évaluation

EC	Déclaration
A1	Connaissent des notions importantes du cours, être capable d'adapter ce qu'on a vu dans le cours, je leur donne des éléments et je leur dire compléter la preuve alors est-ce qu'ils sont capables de réinvestir ça et dire et de le remettre pour faire une preuve complète […] après décrire une preuve tout seule ; est-ce qu'ils sont capables de programmer un algorithme (L335). Tout ce qui est enseigné est évalué (L337)
A2	Si je dis tout ce qu'on propose c'est que mon opinion sur l'évaluation elle n'est pas trop[…] De manière générale je pense qu'elle ne veut quasiment rien dire pour 90% des personnes évalués, elle veut dire pour les 5% bons et 5% mauvais et pour le reste, elle ne veut rien dire (L956) ; je fais de contrôle continu […] il fait travailler en groupe […] de faire un mini mémoire écrit en binôme […] pour les évaluation et on leur demande de faire une présentation orale dans le cadre des dernières séances, donc on évalue la production ça, c'est l'examen si vous voulez, on examine la production écrite (L989). Tous les objets mathématiques enseignés sont évalués (L1042)
A3	Deux examens papiers et puis un TP (L492) ; le cours est divisé en deux parties et à chaque fois on essaye de couvrir un peu tout oui (L498).
A4	Je suis une structure assez traditionnelle avec un contrôle continue et examen finale ; on fait aussi beaucoup des travaux pratiques sur machine (L262)
A5	On essaye de tout évaluer ; les types d'évaluations alors peuvent être variable bien sur le grand classique : c'est le devoir sur table en temps limité avec et sans document, devoir en temps limité sur machine […] lectures des articles de recherche et résumés de cet article de recherche à travers un exposé orale (L512) ; il y a aussi le devoir maison (L514)
B2	Je donne beaucoup des choses qui sont entrés dans les théorèmes, les démonstrations, et il l'analysé, il va répondre bien. Et il y a une partie bien sûr dans l'examen où j'évalue l'analyse de l'étudiant. Ça veut dire quelque chose qu'ils n'ont pas vu dans le cours directement mais ils vont analyser, réfléchir lui-même à répondre à cette question (L368) ; Bien sûr tu ne peux pas évaluer tout. Chaque fois je choisis

	des parties particulières tu connais, mais en total je donne de chaque chapitre, il y a des idées. Tous les chapitres ils sont dans l'examen. (L376)
B3	For example, this semester we have to do exam 1, exam 2, quiz 1, quiz 2, attendance, participation, and final exam. For sur every topic in each lesson the student will be examined about it. (L205)
B4	Évaluations écrites (L392)
B5	Solving problems in groups, homework (L233); students are given time to solve problems themselves and each problem is like a challenge to solve the problem. There are no expectations for the next step. (L244) […] Every problem can be started in a way different than the other. (L248). I think it is wrong that the student gets evaluated from the exam (L262); For M2 we give them articles and they should write a proof in a new way, in their own way, and many find new results. (L302)
B6	Par des examens écrits et après parfois pas toujours ça dépend du temps. Je fais des partis d'applications, la gestion des projets. (L394)
B7	Typically, we have exams don't cover everything so they cover randomly the topics from the course and the students are evaluated according to how they do on the exam. This is the conventional way to do. For pure math. But for applied, you can do more, and then take some average of whatever they did on everything. (L405)
B8	On évalue les examens. Donc il y a partiel, final ; Et les questions […] on peut rapprocher la question à quelque chose qui existe dans la marche (L214)

Tableau 3-51: L'évaluation

Les cours enseignés sont en grande partie évalués par des productions écrites en temps limité (A1, A2, A3, A4, A5, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8). Quelques réponses témoignent que des travaux pratiques sont intégrés aux évaluations (A1, A3, A4, A5). A2 et B5 déclarent que l'évaluation peut prendre la forme d'un travail en groupe. A5 et B5 incluent une activité intéressante : l'évaluation propose aux étudiants de lire des articles de recherches, de résumer leur lecture dans un exposé oral, ou d'essayer de rédiger la preuve d'une nouvelle manière.

L'ensemble des enseignants-chercheurs déclare que tout ce qui est enseigné est évalué. S'il n'est pas possible, dans quelques cas, d'inclure tous les sujets enseignés, une sélection est réalisée permettant d'inclure tous les chapitres enseignés.

3.3.4.6.3 Difficulté(s) d'apprentissage observée(s) avec les étudiants et action(s) entreprise(s) pour réduire ces difficultés

	Difficulté(s)	**Action pour réduire les difficultés**
A1	La preuve de Dijkstra pose des problèmes aux étudiants (L349) ; les Informatique ils ont un peu peur des maths, et dans les matheux il y en a qui ont vraiment du mal avec les preuves (L363) ; ils vont avoir des petits problèmes en programmation pas trop […] après tout ce qui est combinatoire, complexité d'algorithme, ça c'est dur (L373)	On se met au tableau pour ceux qui ont besoin, et on reprend les preuves […] on les réécrit, on essaye de faire autre chemins (L369)
A2	Reconnaître l'objet dans un problème, rendre compte qu'ils travaillent sur la bonne propriété (L1155), faire un travail sur l'équivalence de définitions. En master, je prends la question de coloration (L116) ; c'est l'équivalence des objets ; (L1190), on va démontrer qu'un objet est unique ; montrer l'impossibilité ce n'est pas évident du tout (L1201)	L'algorithmique justement aide (L1212)
A3	Les preuves en maths ils n'aiment pas. (L511) ; je trouve qu'ils manquent de rigueur mathématique, finn le fait d'organiser une preuve lorsqu'on démontre un théorème […] je trouve qu'ils n'ont pas la rigueur nécessaire pour plancher les étapes (L530) ; je trouve qu'il y a un travail à faire là-dessus (L532)	Je peux même [as leur vouloir par ce que je n'enseigne pas dans un master de maths. (L513) ; ils sont devant la feuille et une fois ils discutent avec leur voisin et puis laisser leurs avis et puis c'est quelque chose de très classique (L525) ;
A4	Il y a clairement une méfiance et parfois une appréhension quand il s'agit de faire des raisonnements formels, des preuves des choses comme ça. Donc il faut réussir à les faire dépasser	

	ce truc-là. Mais ça c'est clairement très difficile. (L292) ; des que un travail un pur formellement il y a une réticence, une angoisse de pas arriver ou ne pas comprendre. (L295)	
A5	Je pense que la difficulté principale oui c'est sur le raisonnement, parce qu'ils rendent compte qu'ils ne savent pas raisonner, ou qu'ils savent mal raisonner et le stresse que les connecteurs logiques […] ils se rendent compte qu'il y a un grand flou. (L609) Bon je porte personnellement un regard assez critique sur l'enseignement des mathématiques à l'école au collège au lycée etcetera ou je trouve qu'il y a peu de choses sur le raisonnement (L624)	Dans mes cours je passe de temps à montrer des raisonnements, montrer en quoi un raisonnement sur un cas ne se transporte pas nécessairement sur un cas qui semble très similaire (L485) ; montrer aussi que parfois les idées sous-jacentes dans un certain raisonnement peuvent être adapté à d'autres problèmes (L487) ; il y a déjà une difficulté linguistique de comprendre est-ce que raconte l'article (L507). Je pose des problèmes, je les laisse réfléchir à des problèmes, ensuite je montre des méthodes de raisonnement de résolution des problèmes et ensuite j'essaye de passer beaucoup de temps à changer quelques paramètres et essaye de leur faire comprendre qu'on ne peut pas copier-coller. Des fois ça marche, parfois ça ne marche pas (L642) ; Et après j'ai un certain nombre d'activités […] ce qu'on peut appeler problèmes ouvert ou situation de recherche. C'est-à-dire ils ont un énoncé, ils comprennent quelles est le problème, là où on va arriver beaucoup de temps et laisser à essayer de trouver des choses, essayer de construire une réponse commune à l'intérieur d'un groupe par exemple (L656)
B1	Il y a deux difficultés, la première difficulté c'est de comprendre les idées et la deuxième difficulté c'est de pouvoir rédiger, de bien expliquer les idées (L330) ; mais je trouve encore une fois qu'en mathématiques discrètes ces deux tâches :de trouver une idée, rédiger une idée, sont vraiment deux tâches séparées, parfois on trouve l'idée mais on n'arrive pas à la rédiger (L334). […] Tout ce qui est basé sur l'illustration et ;'astuce c'est un défi pour les étudiants. Ils ont toujours une difficulté apparente dans l'apprentissage de ce qui se base sur l'illustration (L371). Toujours il y a des preuves qui se basent sur la découverte des liens cachés […] Il se sentent très bien, ils comprennent tout ce qu'on propose mais ils se sentent incapables de reproduire (L381)	A force de suivre de bons exemples de rédaction on devient auteur, donc j'essaye toujours de les inviter à écrire. A monter au tableau, à résoudre des exercices et a m'écrire. J'essaye toujours de passer voir les travaux, les devoirs (L342). […] et je leur donne des textes modèles, je leur parle toujours des textes modèles, des livres (L346) ; je ne sais pas […] avec le temps j'arrive à les attirer, à les convaincre vraiment (L405).
B2	Quand je donne des définitions, ahh c'est très facile […] mais quand je commence les théorèmes, les démonstrations et des choses comme ça, ils trouvent que dans la théorie des graphes, c'est un peu diffèrent la mode de démonstration, de pensée, c'est nouveaux pour eux, c'est une méthode de pensée nouveau, donc ils trouvent au début que c'est très intéressant, c'est très joli, mais quand tu rentres plus dans les détails et au fond, ils trouvent que ce n'est pas facile (L427) ;	Je leur donne le sens […] ce n'est pas quelque chose traditionnel mais attends un peu c'est au début. Et après, peu de peu, ils aiment peu de peu : ah oui c'est joli mais il faut juste un peu de temps, savoir comment penser tout ça (L461)
B3	First year, they see the process is easy, but they find exercises difficult (L249), maybe because they have to use new techniques, they have to use complicated techniques, they have to create something new (L261)	There are in the textbook very difficult exercises for the level of first year. I solve them, and all of the other instructors solve them and, in some exercises, we have to introduce a new technique. (L273)
B4	Il y a une appréhension des étudiants surtout sur les graphes, est-ce que c'est quoi un cours de maths ou	Les étudiants vont s'adapter (L311)

	quoi. (L301) ; C'est en général comment raisonner. (L314)	
B5	Many students get depressed in the course because they consider themselves being asked riddles and we don't have the method of solution(L257). The student who is used to memorize the formula, will not directly get used to analysis. (L261)	I believe the more we give students time to solve an exercise the more they get better results. (L261)
B6	Pas grandes difficultés. Par ce que lorsqu'on enseigne l'analyse […] je ne vois pas exactement dans la vie comment je peux utiliser ça […] en gestion à quoi ça sert l'algorithme. Mais par contre lorsqu'on enseigne les mathématiques discrètes on peut toujours donner des exemples alors là on ne trouve pas des difficultés, pour dire aux étudiants là ça sert etc. Mais l'analyse c'est plus difficile. (L488) ; On peut dire qu'il y a exception de quelques étudiants n'aime pas la logique. Qui sont très faible en logique, soit qu'ils n'aiment pas les mathématiques en général soit c'est mathématique je ne veux pas. (L495)	
B7	I haven't spotted let's say very particular difficulties with…with areas related to discrete math compared to other, to other topics. (L646)	I always try to give the motivations behind the definitions and the intuition behind them, and also in proofs, I try to give the intuition why we came up with the proof this way. (L346)
B8	Ce genre de problèmes ne sont pas faciles (arbres, algorithmes en parlant de la modélisation) (L287) ; Et puis ils préfèrent plutôt des applications, des applications informatiques voilà directes car les problèmes liés aux mathématiques discrètes nécessitent pus de travail plus de recherche (L290) ;	Et toujours je donne des exemples ou est-ce qu'on peut utiliser ce qu'on apprend là dans le marché (L202)

Tableau 3-52: Les difficultés d'apprentissage

Nous pouvons déduire des activités proposées des enseignants-chercheurs que les difficultés des étudiants concernent les aspects suivants :

1. Preuves, raisonnements formels, logique, rigueur mathématique (A1, A2, A3, A4, A5, B2, B3, B4, B5, B6) ;
2. Programmation (A1) ;
3. Combinatoire (A1) ;
4. Algorithmique (A1) ;
5. Reconnaître l'objet dans un problème (A1) ;
6. Se rendre compte qu'ils travaillent sur la bonne propriété (A2) ;
7. Coloration (A2) ;
8. Démontrer qu'un objet est unique (A2) ;
9. Comprendre les idées, difficultés linguistiques (B1, A5) ;
10. Savoir rédiger (B1) ;
11. Apprentissage de ce qui se base sur l'illustration (B1) ;
12. Difficultés dans les exercices (B3) ;

Des actions variées sont entreprises par les enseignants-chercheurs pour réduire cette difficulté :

1. Écrire au tableau (A1, A5, B1) ;
2. Reprendre les preuves et essayer de montrer un autre chemin (A1, A5, B1, B2, B7) ;
3. Utiliser des algorithmes (A2) ;
4. Discuter avec les collègues (A3, B1) ;
5. Proposer des problèmes ouverts et des situations de recherches, donner plus de temps aux étudiants (A5, B5) ;
6. Leur donner des textes modèles (B1) ;
7. Résoudre des exercices difficiles (B3) ;

8. Les motiver pour écrire, leur donner les intuitions derrière les preuves et les définitions (B1).

3.3.4.6.4 Comportement des étudiants face au travail des mathématiques discrètes

EC	Déclaration
A1	Ils trouvent que c'est quelque chose très intéressant […] à chaque fois j'ai fait des graphes avec les étudiants ça se passe très bien, par ce qu'il y a le côté pratique, le coté objet qu'on peut dessiner (L411) ; même pour les étudiants faibles quand ils font des énigmes, il y en a qui viennent me poser des questions […] sa leur plait (L416)
A2	La entre les Licence et master ça change, les Masters sont bon[…] il y a notamment quand même notamment en Licence, c'est quand même très ludique ce que je propose, donc il y a quand même toujours cette idée que le problèmes devient à eux plus rapidement possible, donc c'est représenter d'une façon ludique et tout, donc en général ils jouent le jeu, après ce qui se passe c'est comme je les fais chercher, et qu'il y a une grosse phase de frustration dans la recherche, c'est à dire qu'on ne trouve pas forcement d'une façon spontanée. (L1230)
A3	Ils veulent des trucs qui marchent quelque part ; ils vont directement à l'application. Ils utilisent les résultats mathématiques pour faire les applications (L545).
A4	Ça peut être des gens qui viens chez nous avec l'espoir de faire des Informatique très appliqués et qui se trouve à faire des maths est pas vraiment prévu ça (L305).
A5	C'est souvent une matière qui suscite des réactions très différentes, et parfois extrêmes (L520) ; alors vous avez du côté positif, une frange de la population étudiante alors ça c'est qu'on retrouve surtout dans les écoles Ingénieurs qui est très contente de retrouver un module de formation où on refait des choses qui les ont intéressés a une certaine époque de leur vie. (L524) Inversement il y a des réactions d'hostilité assez fortes aussi. Alors soit d'étudiants qui […] n'ont pas un bagage mathématique très fort et pour qui cette matière c'est une matière trop mathématique (L537) ; alors il y a aussi des étudiants qui sont entre guillemets forts en maths, c'est-à-dire qui ont eu un cursus ou en sciences ils ont toujours eu une bonne note et ils ont toujours eu de la réussite. Mais cette réussite ils la devait essentiellement a un travail très scolaire basé sur la répétition des méthodes, bien apprendre sa leçon. (L548)
B1	Ils sont surpris, ils ne connaissent pas […] comme c'est nouveau. La réputation générale une génération transmet à l'autre : méfiez-vous ça c'est difficile […] Les élites sont très contentes et sont façonnés par ce genre de mathématiques. Ils n'attendent pas à voir ce genre d'idées engendrées par une quantité minime des donnés (L399).
B2	Quand je donne des définitions, ahh c'est très facile […] mais quand je commence les théorèmes, les démonstrations et des choses comme ça, ils trouvent que dans la théorie des graphes, c'est un peu diffèrent la mode de démonstration, de pensée. (L427) ; L'arithmétique c'est quelque chose dans les mathématiques discrètes, mais c'est quelque chose avec les nombres et on travaille avec les nombres dès qu'on est petit, donc dans la psychologie c'est facile […] même s'il y a des théorèmes et des preuves qui sont compliqués (L437) ; La théorie des graphes ils trouvent qu'ils sont contents avec les graphes, avec la figure, mais avec les théorèmes et les démonstrations ils trouvent nouveau (L439) ; La moitié d'étudiants […] même s'ils trouvent un peu difficile […] ils trouvent très intéressant et ils aiment (L443) ; Il n y a pas des gens qui sont au milieu, ou indifférents comme ça, C'est dot tu adore la matière, soit tu déteste de tout ton cœur (L451)
B3	First year, they see the process is easy, but they find exercises difficult […] maybe because they have to use new techniques, they have to use complicated techniques. They have to create something new (L258)
B4	Au début c'est toujours la même chose, c'est un cours de maths ou un cours d'informatique, après ça va comme tous les autres (L321)
B5	Many students who felt depressed from math having a lot of memorization can find themselves in graph theory (L235) Why because there is a freedom to think in graphs, it doesn't need a background like other subjects. It is an independent course (L238); Many students get depressed in the course because they consider themselves being asked riddles and we don't have a method of solution (L258) Other students excel because they know how to analyze and here self-confidence plays a role, that I can solve this. (L259)
B6	Comportement toujours positif en mathématiques discrètes. On peut dire qu'il y a exception de quelques étudiants n'aime pas la logique. Qui sont très faible en logique, soit qu'ils n'aiment pas les mathématiques en général soit c'est mathématique je ne veux pas. (L495)
B8	Ils ne sont pas très motivés (L285) ; Les étudiants que j'ai enseignés, je trouve toujours que les étudiants essaient de s'éloigner de tout ce qui est mathématiques. Je ne sais pas, peut-être il y aura peur […] Donc les étudiants n'acceptent pas facilement des matières informatiques où il y a les maths. (L311)

Tableau 3-53: Comportements des étudiants

Nous pouvons diviser les comportements des étudiants dans le tableau ci-dessus en deux catégories : (a) avis favorable et (b) avis défavorable :

(a) Avis favorable :

- Le sujet est très intéressant (graphes, dessins, énigmes), même pour les étudiants faibles en mathématiques (A1) ;
- L'aspect ludique intéresse les étudiants (A2) ;
- Une frange de la population, surtout dans les écoles d'ingénieurs, sont très contents de travailler ce sujet (A5)
- Les étudiants les plus brillants sont satisfaits par cet enseignement (B1)
- La moitié des étudiants, même s'ils trouvent le sujet un peu difficile, affirment l'apprécier et y prêtent intérêt (B2)
- Certains élèves sont amenés à exceller grâce à leurs compétences, leurs capacités d'analyse, et leur confiance en soi élevée (B5)
- Le comportement des élèves confrontés aux mathématiques discrètes est toujours positif, à l'exception des étudiants qui n'apprécient pas la logique (B6)

(b) Avis défavorable :

- La recherche peut être frustrante en l'absence de résolution spontanée (A2)
- Les étudiants aiment aller directement à l'application (A3)
- Les étudiants venus dans l'espoir de faire de l'informatique très appliqué se retrouvent à « faire des maths » et en sont mécontents (A4, B8)
- Les étudiants qui n'ont pas un bagage mathématique très fort manifestent une réaction d'hostilité, tandis que les étudiants « forts en maths » fondent leur réussite sur la répétition des méthodes (A5)
- Les étudiants ne se montrent pas indifférents : soit ils adorent la matière, soit ils la détestent de tout leur cœur (B2)
- Les étudiants trouvent les exercices difficiles (B3)
- Durant les premiers cours, les étudiants se demandent s'ils suivent un cours de mathématiques ou un cours d'informatique (B4)
- Certains étudiants sont « déprimés » par le fait que certaines questions se présentent sous la forme d'énigme, et qu'ils ne possèdent pas de méthodes exactes pour parvenir à une solution (B5)

Nous remarquons ainsi que les réactions des étudiants sont assez différentes, et qu'elles peuvent même recouvrir deux extrêmes opposés. Ces éléments nous donnent des indices qui contribuent à la recherche des caractéristiques des mathématiques discrètes au niveau didactique.

3.3.5 Conclusion de la partie 3.3 et nouvelle question de recherche

La présentation des résultats des entretiens et les analyses nous ont fourni plusieurs pistes de réflexion. D'abord, le paradoxe entre le « facile d'accès » et le « difficile à résoudre » est aussi présent dans les entretiens. Les mathématiques discrètes ont ainsi un double rôle. Ensuite, toujours concernant les particularités des mathématiques discrètes, l'aspect de la preuve est bien discuté (en particulier les preuves par induction). Notons également que les enseignants chercheurs s'accordent sur le fait que les mathématiques discrètes forment un champ qui entraîne au raisonnement, ce qui converge avec les déclarations de la littérature. Cependant, nous remarquons que le travail de modélisation dans l'enseignement est insuffisant par rapport au travail de modélisation au niveau recherche, en particulier au sein des parcours mathématiques. D'où la nécessité d'étudier les ouvrages universitaires, pour confirmer ces observations et mieux comprendre quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées au niveau supérieur. Et aussi nous nous intéressons de voir comment la dualité « facile d'accès » / « complexité » est transposée dans le supérieur.

3.4 Questionnaire

3.4.1 Pourquoi ce questionnaire ?

L'état de l'art témoigne d'une grande variabilité selon les pays (France, États-Unis, Hongrie, Liban). Nous cherchons dans cette thèse à développer la didactique des mathématiques discrètes et à faire des propositions pour les *curricula*. De plus, les résultats de ce questionnaire nous permettent d'effectuer des liens avec les déclarations des enseignants-chercheurs lors des entretiens.
Dans ce cadre nous avons ajouté une partie à notre projet initial de thèse, qui contribuera à la réponse de la question Q3 (quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées dans le supérieur ? Et comment (quels choix) ?), en apportant un éclairage sur l'état actuel de l'enseignement des mathématiques discrètes au supérieur (choix de contenus, types de raisonnements, liens avec d'autres disciplines).

3.4.2 Construction et passation du questionnaire

Le questionnaire a été élaboré par Cécile Ouvrier-Buffet, Aviva Szpirglas, relu par Simon Modeste et Jacques Wolfmann dans le cadre d'un travail prospectif au sein de la commission enseignement de la SMF (Société Mathématiques en France). Nous avons exploité les résultats de ce questionnaire en France, organisé sa traduction en anglais, sa diffusion, et le recueil de données au Liban. Le questionnaire est composé de vingt-et-une questions (quinze à choix multiples et six questions ouvertes) autour des types de contenus, des types de raisonnements, et des liens avec autres disciplines.

Le questionnaire a été diffusé dans plusieurs universités en France et au Liban (dans différentes structures de licences : mathématiques, informatique, et mathématiques-informatique) à l'aide de la plateforme LimeSurvey. Au Liban, le questionnaire couvre quatre universités différentes (francophones et anglophones) ; en France, le questionnaire couvre plus de dix universités et plus de trois IUT (Institut universitaire de technologie). Nous assurons l'anonymat des participants, qui était distribués de la façon suivante :

Distribution des parcours par Pays		
Type de Licence/ Pays	**Liban**	**France**
Licence Mathématiques	4	16
Licence Maths-Info	3	2
Licence Informatique	3	3
MIASHS	N/A	1
DUT	N/A	1
DUT Réseaux et communications	N/A	1
DUT Informatique	N/A	2
DUT génie civil	N/A	1
IUT Informatique	N/A	1
Nombre total	10	28

Tableau 3-54: Distribution des parcours par Pays

3.4.3 Analyse et résultats du questionnaire

Nous présentons dans un premier temps les résultats de la première partie du questionnaire (les questions à choix multiples), puis les résultats de la deuxième partie (les questions ouvertes). Pour la première partie du questionnaire, nous avons fait le choix de présenter les objets enseignés (et dans quels cours) pour chaque type de licence. Les graphes des résultats seront donnés entièrement en Annexe D. Nous présentons ici les éléments pertinents pour conduire nos analyses. Nous commençons par présenter les résultats obtenus au Liban, puis ceux obtenus en France. Ce travail nous permettra d'effectuer des comparaisons avec les résultats des entretiens.

3.4.3.1 Résultats et analyse de la première partie du questionnaire

3.4.3.1.1 Cas du Liban

3.4.3.1.1.1 Théorie des graphes

Tout d'abord, comme nous avons précisé l'objet de notre étude sur la théorie des graphes, nous cherchons en particulier à regarder sa place au sein de l'enseignement supérieur. Le questionnaire génère les graphiques suivants :

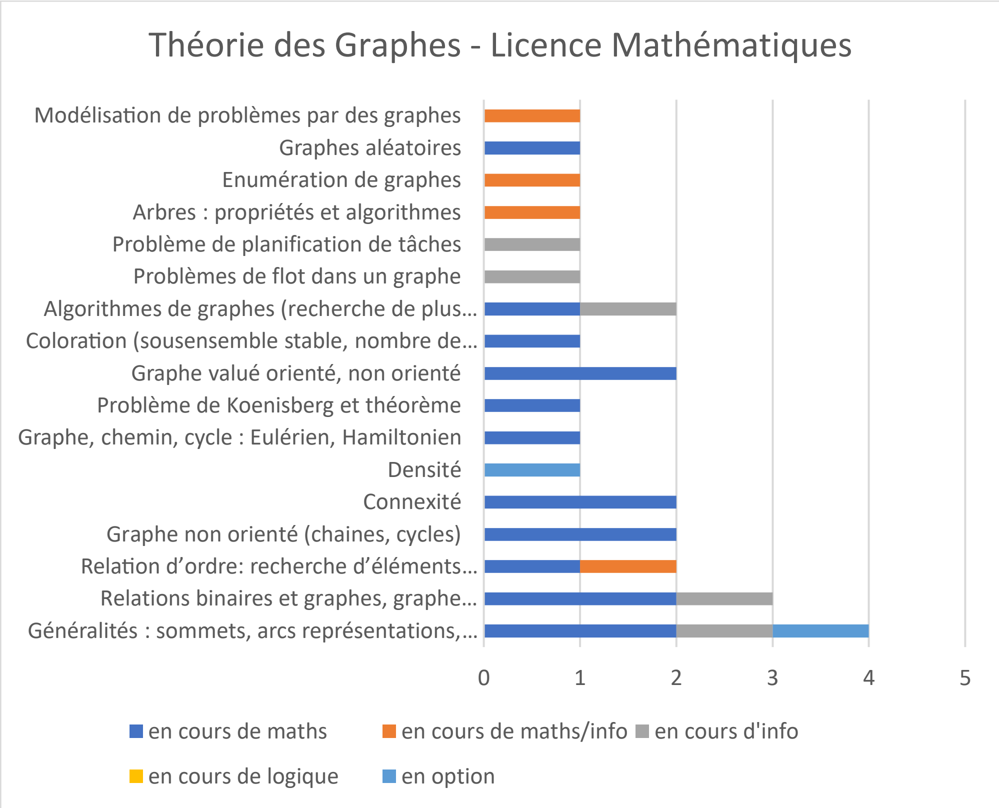


Figure 3-4: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques – Liban

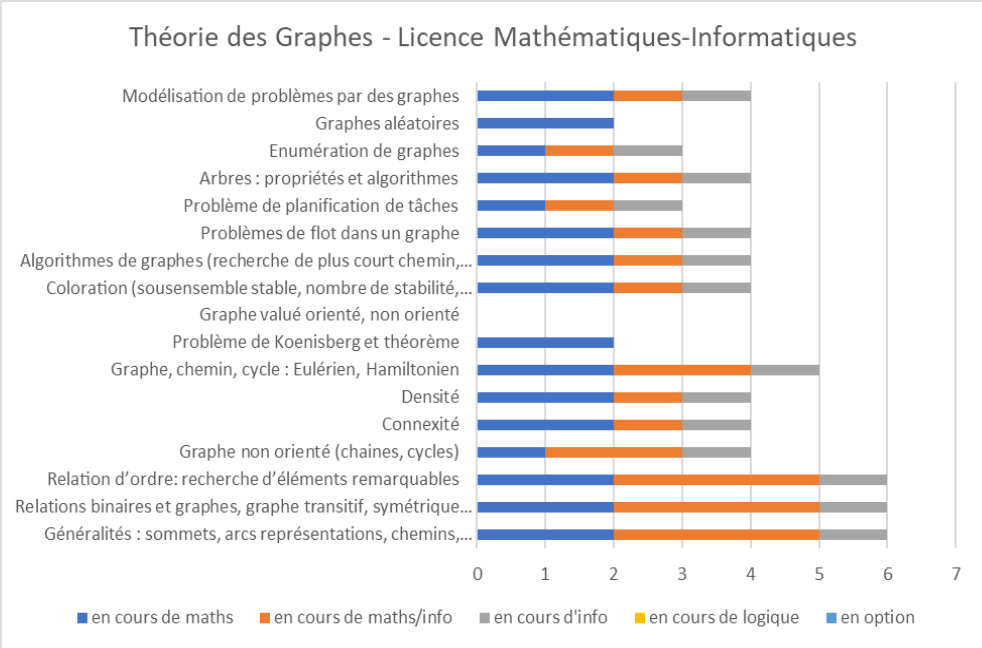


Figure 3-5: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques-Informatique – Liban

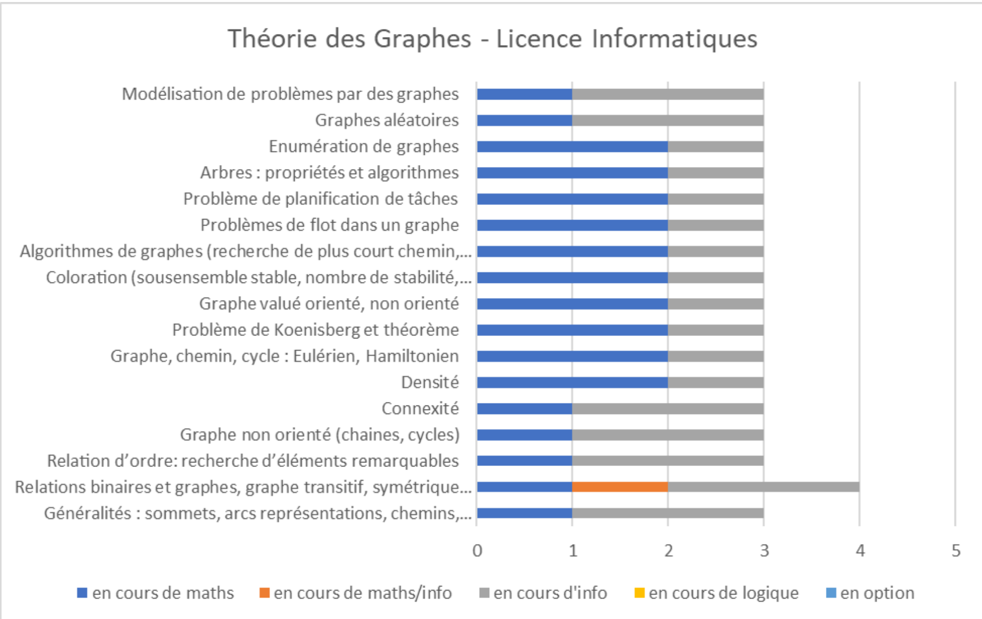


Figure 3-6: Théorie des Graphes - Licence Informatique – Liban

Les trois figures ci-dessus (Figure 3-4 jusqu'à Figure 3-6) nous fournissent plusieurs éléments intéressants. Premièrement, nous remarquons que la théorie des graphes est enseignée dans les trois types de licence, ce qui confirme les déclarations des enseignants-chercheurs, ainsi que les résultats de l'état de l'art. Plus précisément, nous voyons que dans les trois types de licence, les objets de la théorie des graphes sont enseignés dans diverse cours (cours de mathématiques, cours d'informatique, cours de mathématiques-informatique, et parfois dans un cours d'option). Cette homogénéité entre les types de licence ne doit pas dissimuler l'existence d'une variabilité qui apparaît dans la répartition différente des cours présentant ces objets. Par exemple, dans la licence d'Informatique, les objets sont enseignés dans les cours de maths et les cours d'informatique. Un seul enseignant déclare qu'il étudier les « relations binaires et graphes, graphe transitif, symétrique etc. » en cours de mathématiques-informatique. Les deux autres types de licence présente une répartition plus variée.

3.4.3.1.1.2 Les différents types de raisonnements

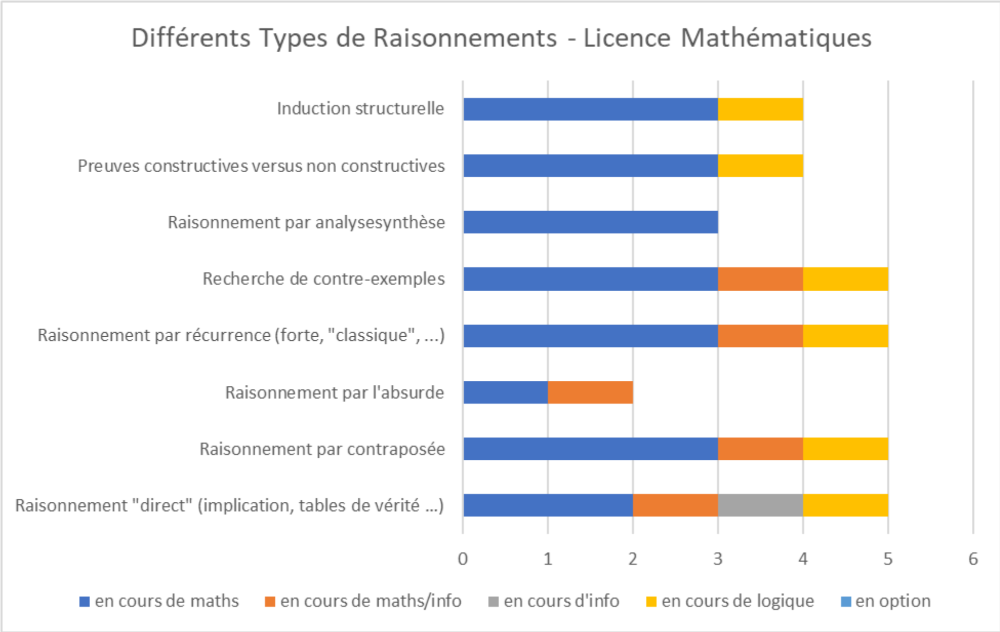


Figure 3-7: Différents Types de Raisonnements - Licence Mathématiques – Liban

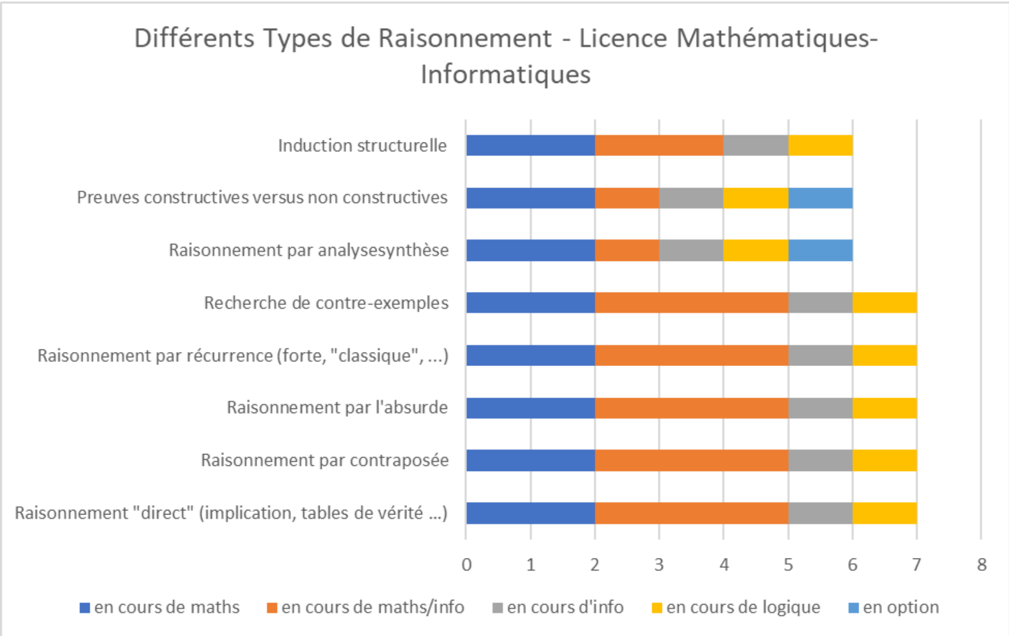


Figure 3-8: Différents Types de Raisonnement - Licence Mathématiques-Informatique – Liban

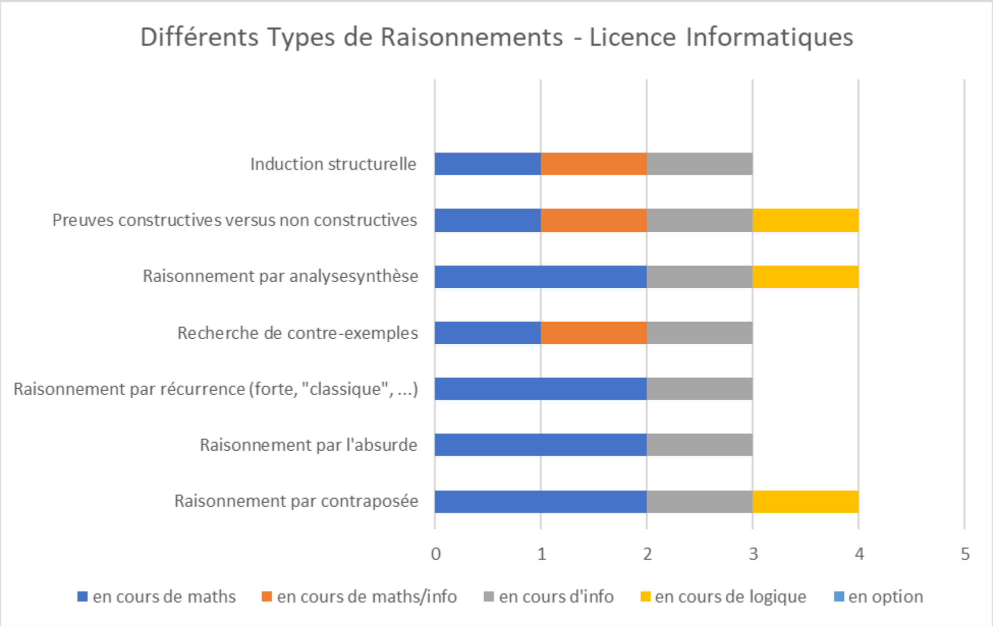


Figure 3-9: Différents Types de Raisonnements - Licence Informatique – Liban

En ce qui concerne les différents types de raisonnement (Figure 3-7 jusqu'à Figure 3-9), nous remarquons qu'il n'existe pas de différence apparente entre les trois structures de licence, qui présentent chacune une variété de types de raisonnement. Cette variété se manifeste plus particulièrement dans la licence de mathématiques-informatique, où les différents types de raisonnements sont introduits dans toutes les cours (mathématiques, mathématiques-informatique, informatique, logique, et en option). De plus, nous notons que tous les modes de raisonnement proposés dans le questionnaire sont enseignés dans les cours de mathématiques (dans tous les types de licence). Cette observation montre que nous sommes bien dans le domaine des mathématiques. Nous cherchons à regarder l'usage de la récurrence car par nature celle-ci mobilise des objets discrets : en nous focalisant sur la place du raisonnement par récurrence dans les trois types de licence, nous constatons qu'elle existe clairement dans tous les cours, avec une répartition variée.

3.4.3.1.1.3 L'algorithmique

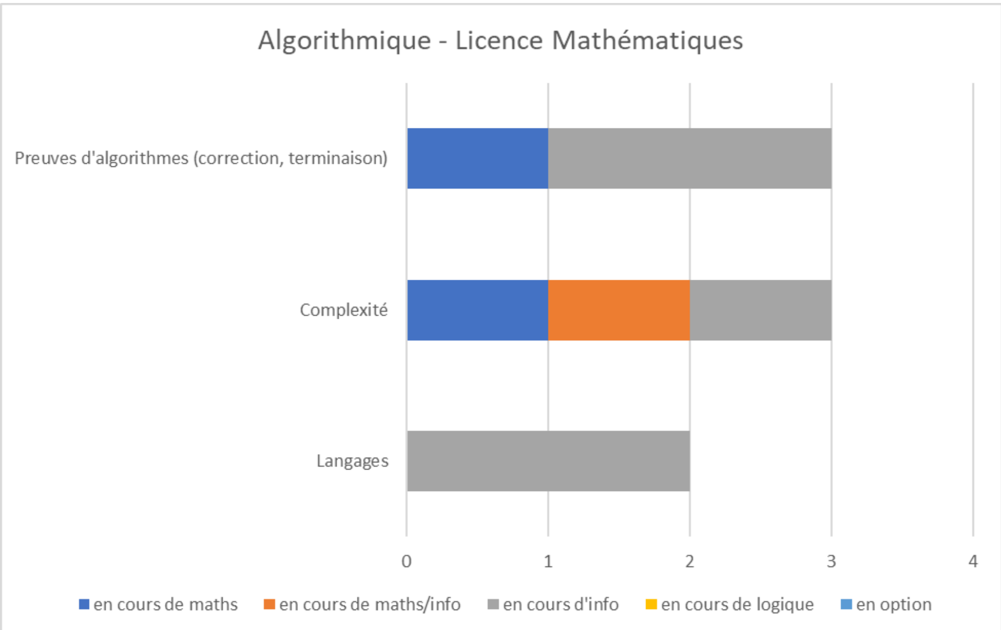


Figure 3-10: Algorithmique - Licence Mathématiques – Liban

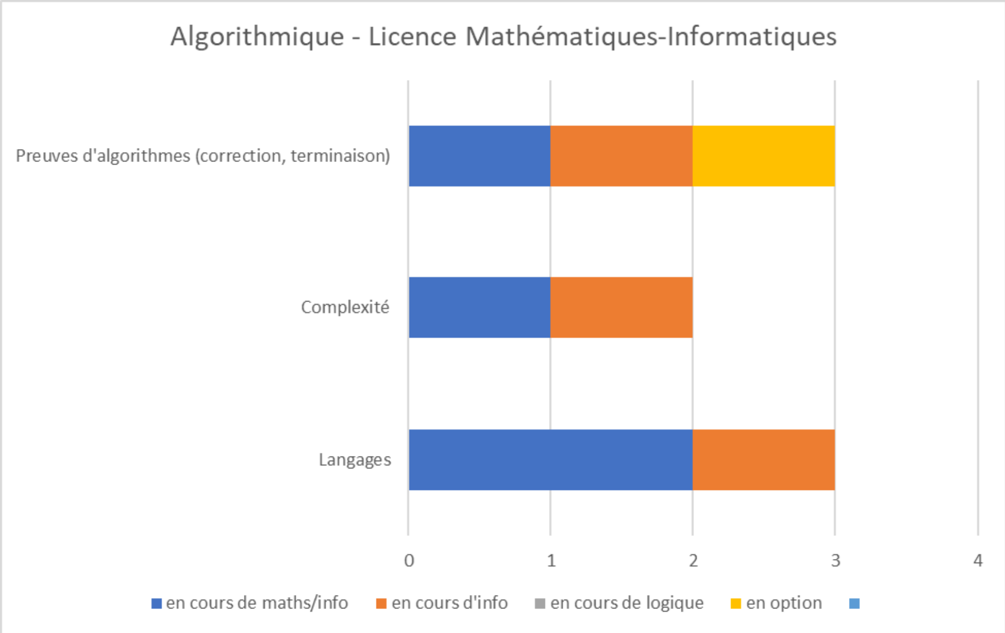


Figure 3-11: Algorithmique - Licence Mathématiques-Informatique – Liban

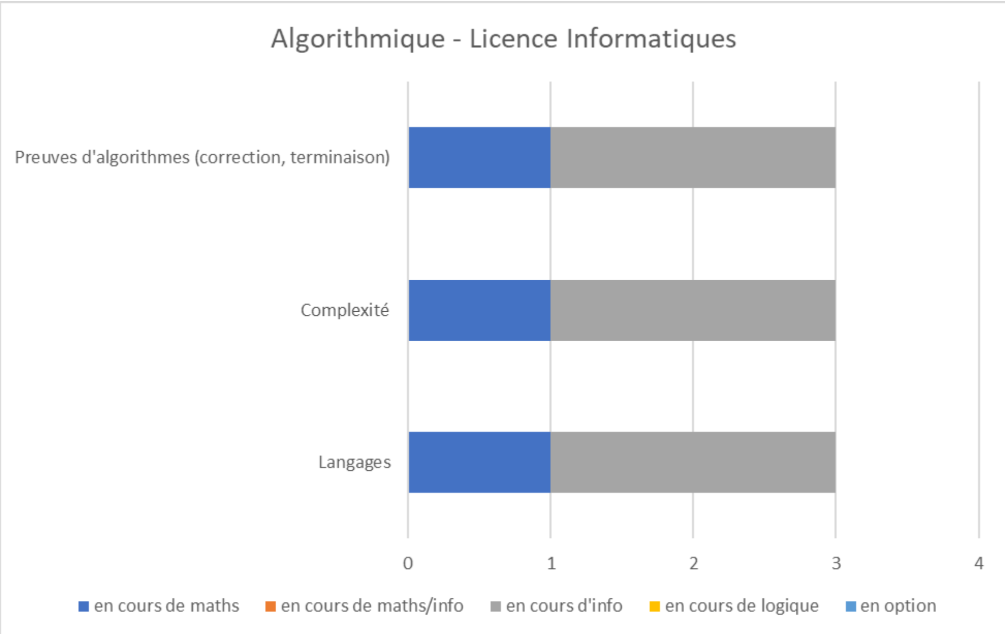


Figure 3-12: Algorithmique - Licence Informatique – Liban

La place de l'algorithmique (Figure 3-10 jusqu'à Figure 3-12), et particulièrement sa place dans les cours enseignés est variée en fonction des trois filières. Dans la licence de mathématiques, les preuves d'algorithmes et la complexité sont enseignées par seulement un enseignant (sur quatre) dans les cours de mathématiques. Les algorithmes n'apparaissent pas du tout dans les cours de mathématiques de la licence de mathématiques-informatique. Dans la licence d'informatique, ils sont enseignés par un enseignant (sur trois) en cours de mathématiques. Ces observations montrent une variabilité suivant les filières. Cette observation est homogène avec les résultats des entretiens et l'état de l'art : elle renforce notre constat selon lequel la place de l'algorithmique dans l'enseignement supérieur n'est pas bien délimitée, et que des recherches supplémentaires doivent être menées sur ce sujet en particulier.

3.4.3.1.2 Cas de la France

Plusieurs institutions françaises, comme des IUT et des DUT, ont participé à cette enquête. Nous avons choisi de restreindre la présentation aux trois types de licence universitaire pour simplifier l'analyse et les comparaisons.

3.4.3.1.2.1 La théorie des graphes

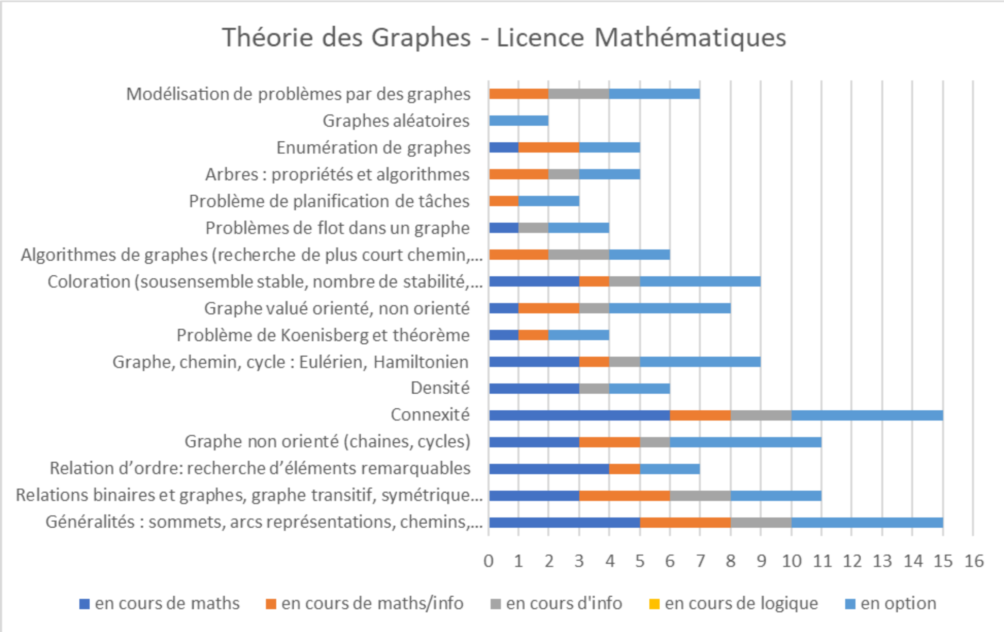


Figure 3-13: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques – France

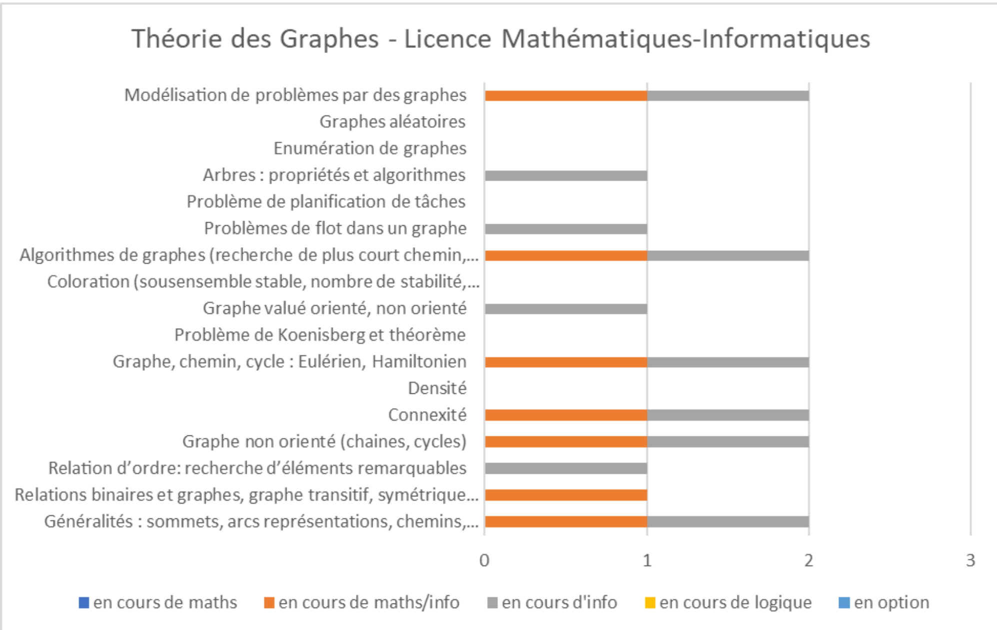


Figure 3-14: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques-Informatique – France

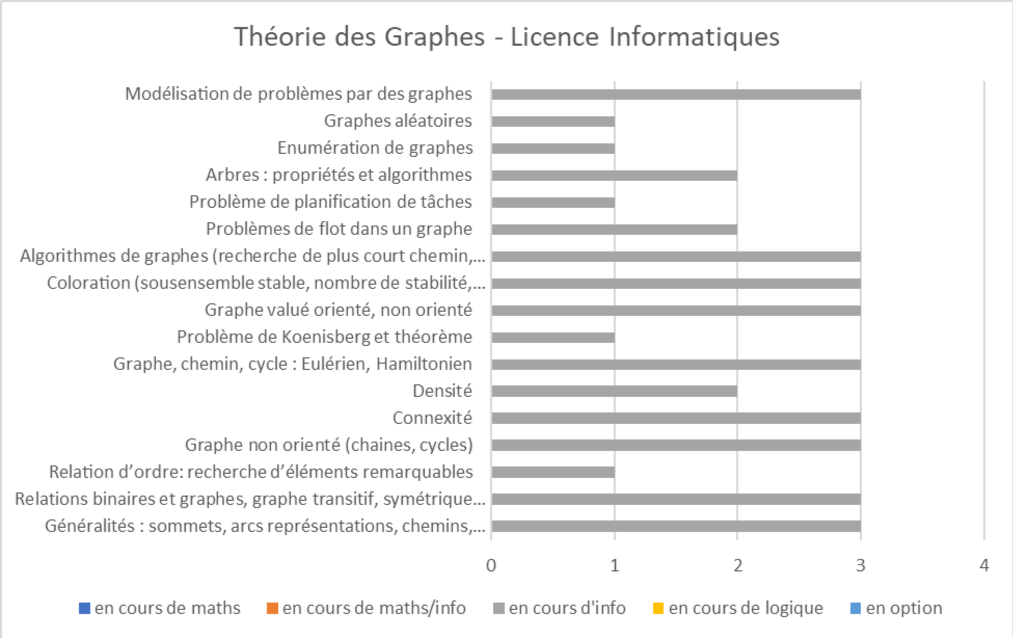


Figure 3-15: Théorie des Graphes - Licence Informatique – France

La théorie des graphes est très fréquemment enseignée en licence de mathématiques (Figure 3-13 jusqu'à Figure 3-15). Parmi les vingt-huit enseignants qui ont participé à cette enquête, seize s'inscrivent dans une licence de mathématiques. Il est aussi remarquable que les différents sujets de la théorie des graphes sont répartis de manière variée y compris dans la licence de mathématiques : la plupart des contenus sont enseignés en cours d'informatique, de mathématiques-informatique et en option, ce qui constitue un deuxième point intéressant quant à la variabilité de l'enseignement de la théorie des graphes. En ce qui concerne la licence de mathématiques-informatique, la théorie des graphes est enseignée dans les deux cours de mathématiques-informatique et dans les cours d'informatique. Elle est absente des cours de mathématiques. Nous observons aussi que certains sujets de la théorie des graphes n'apparaissent pas dans cette formation, tels que les graphes aléatoires, la coloration, la planification des tâches, et le problème des ponts de Königsberg. Cette observation pose question, d'autant que ces sujets se situent à la frontière des mathématiques et de l'informatique, d'après l'état de l'art et les déclarations des enseignants-chercheurs lors des entretiens. Troisièmement, au sein de la licence d'Informatique, il nous semble remarquable que la théorie des graphes (et tous les sujets qui la constituent) est enseignée seulement en cours d'informatique, alors qu'au Liban elle est également enseignée dans des cours de mathématiques. Ces observations nous conduisent à affirmer que la place de la théorie des graphes au niveau universitaire n'est pas identique suivant les parcours. Par quoi ces choix sont-ils guidés ?

3.4.3.1.2.2 Différents types de raisonnement

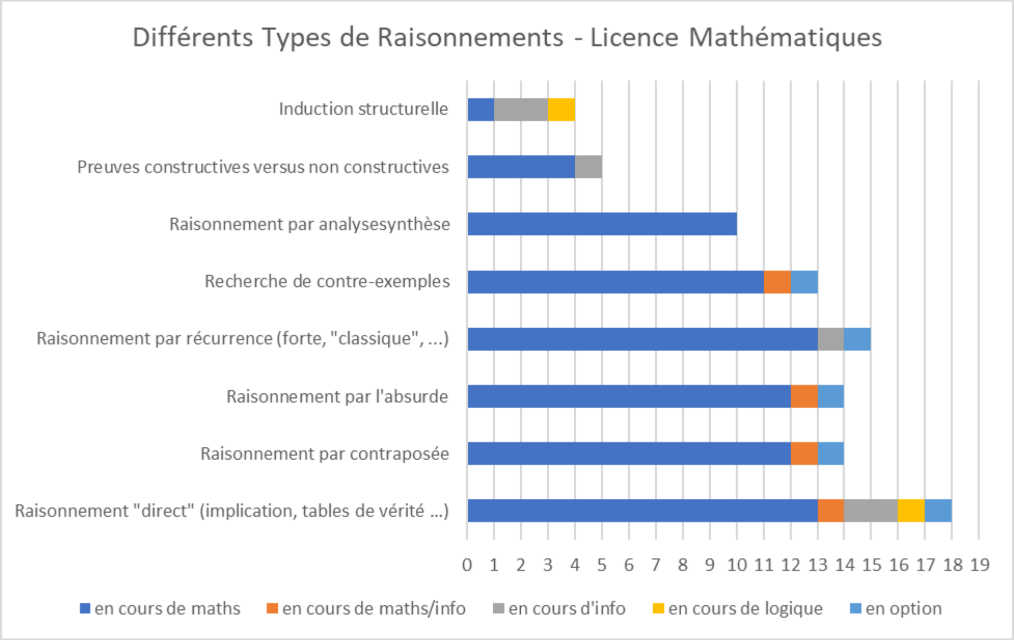


Figure 3-16: Différents Types de Raisonnements - Licence Mathématiques – France

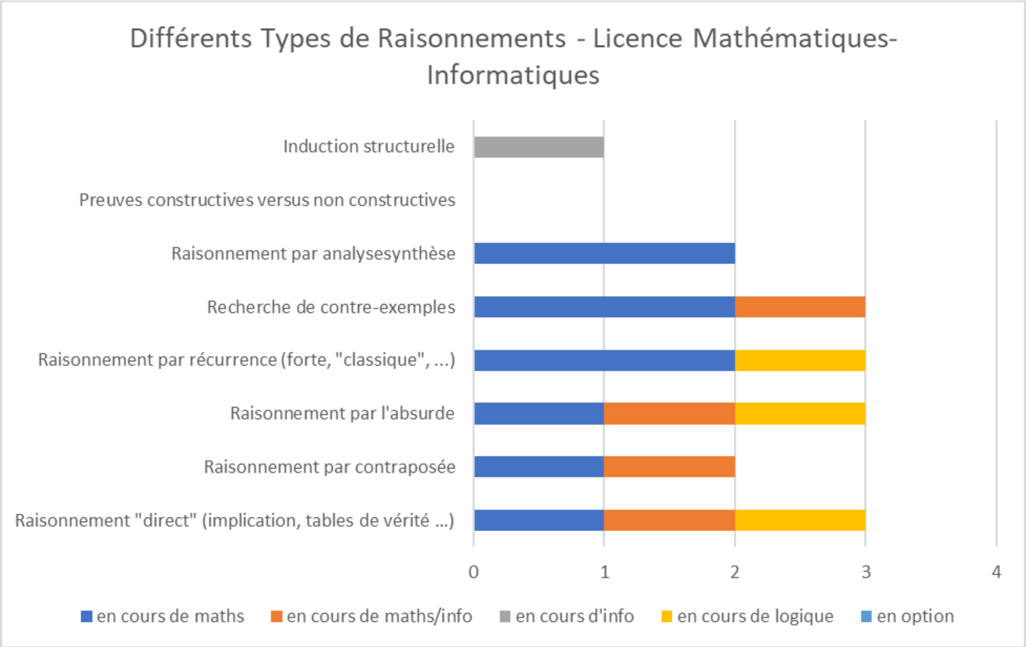


Figure 3-17: Différents Types de Raisonnements - Licence Mathématiques-Informatique – France

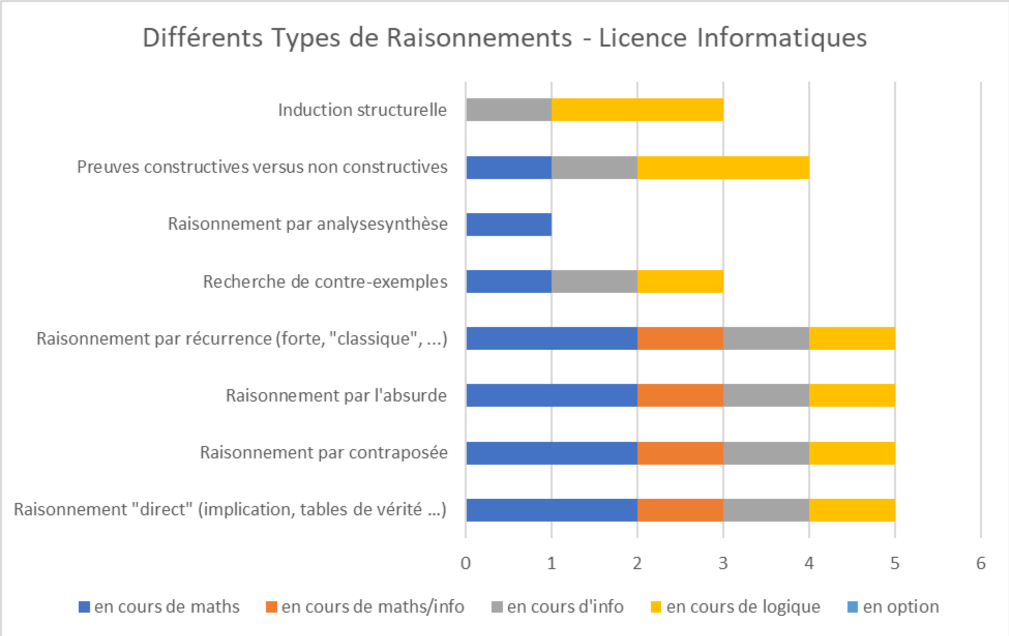


Figure 3-18: Différents Types de Raisonnements - Licence Informatique – France

En France, les différents types de raisonnement apparaissent dans les trois types de licence (Figure 3-16 jusqu'à Figure 3-18) avec une répartition variée suivant les cours. La licence de mathématiques inclut ces modes de raisonnement dans tous les cours (cours de mathématiques, cours d'informatique, cours de mathématiques-informatique, cours de logique, et en option), contrairement aux autres types de licence. Nous avons réalisé un focus sur le raisonnement par récurrence : les figures montrent bien que celui-ci est largement enseigné au sein de la licence d'informatique (en cours de mathématiques, de mathématiques-informatique, d'informatique, et de logique). Dans la licence de mathématique-informatique, la récurrence n'est enseignée que dans les cours de mathématiques et de logique. Dans la licence de mathématiques, le raisonnement par récurrence est enseigné en cours de mathématiques (treize enseignants sur vingt-huit), cours d'informatique (un enseignant sur vingt-huit) et en option (un enseignant sur vingt-huit). Ces observations indiquent clairement que la récurrence est travaillée dans les trois types de licence, et dans plusieurs cours, ce qui est également le cas d'autres modes de raisonnement.

3.4.3.1.2.3 Algorithmique

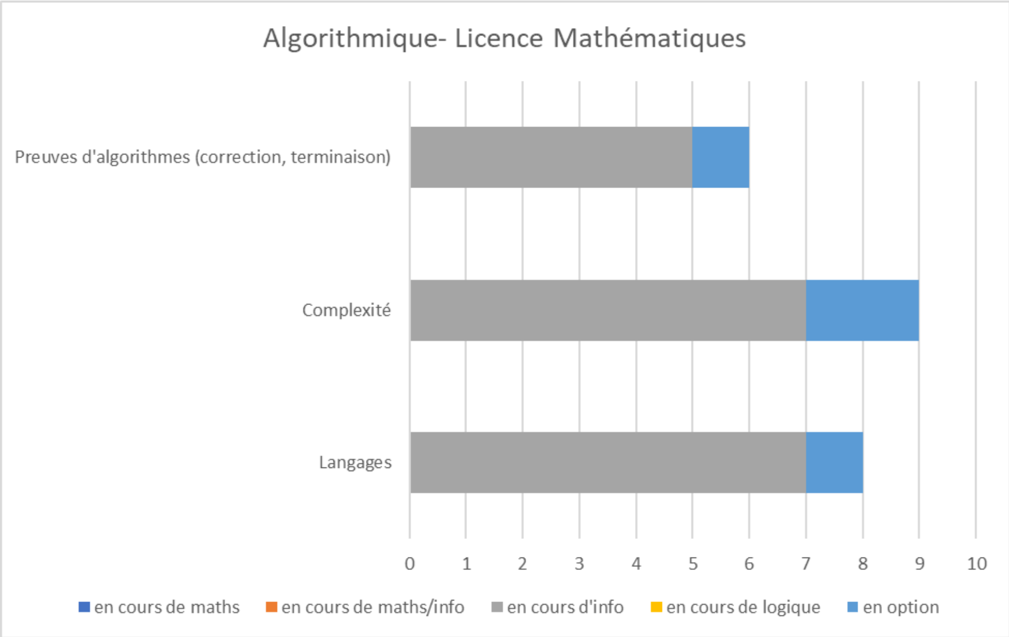


Figure 3-19: Algorithmique- Licence Mathématiques – France

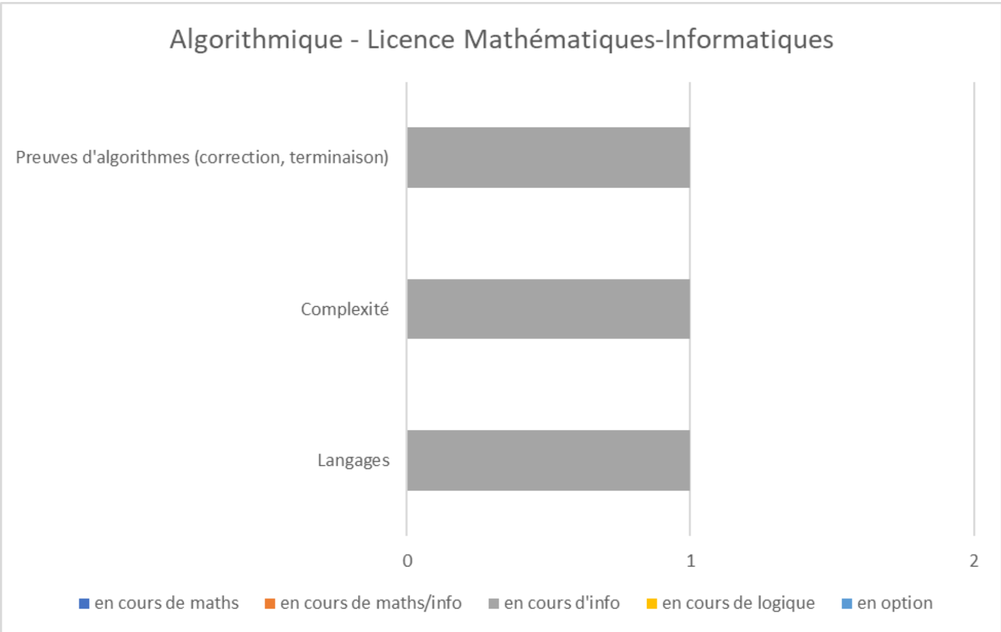


Figure 3-20: Algorithmique - Licence Mathématiques-Informatique – France

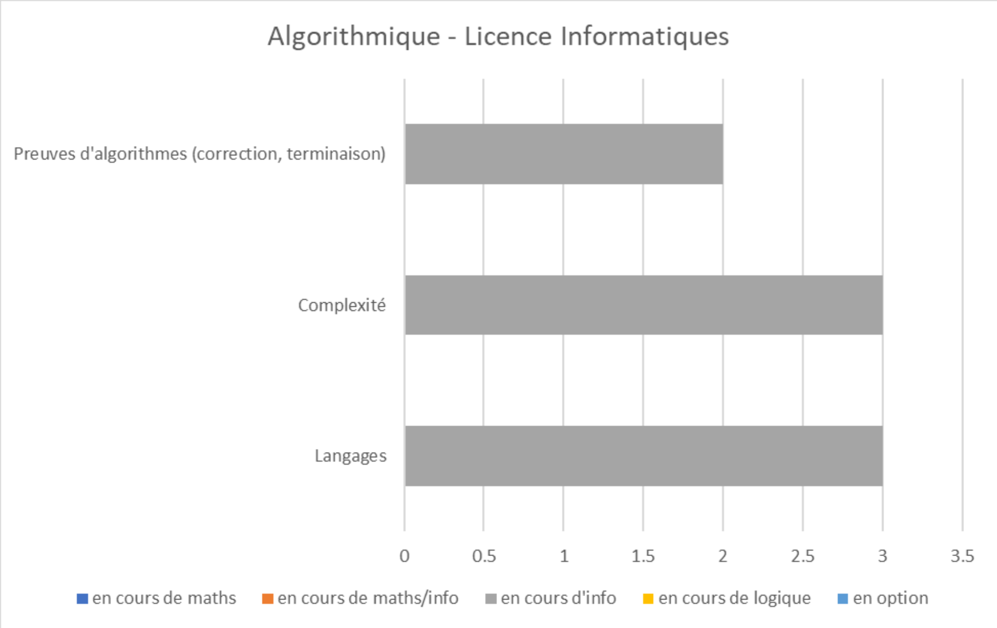


Figure 3-21: Algorithmique - Licence Informatique – France

Les trois figures (Figure 3-19 jusqu'à Figure 3-21) nous montrent bien que l'algorithmique est un sujet enseigné dans les cours d'informatique dans chacune des trois licences, ce qui contraste avec la pratique observée au Liban. L'algorithmique est complètement absente des cours de mathématiques pour les trois types de licence ce qui est également une observation remarquable. La place de l'algorithmique dans les cours de mathématiques est une question qui reste à explorer.

3.4.3.2 Analyse et résultats des questions ouvertes

3.4.3.2.1 Cas du Liban

Réponses aux questions ouvertes- Liban			
Type de licence	**Mathématiques**	**Mathématique-Informatique**	**Informatique**
Autres Contenus	Cardinality of sets ; basic number theory ; advanced counting techniques ; pigeonhole principle ; inclusion exclusion law.	N/A	N/A
Relation avec autres disciplines	Computer science (graph theory, combinatorics, theory of languages) ; statistics (discrete random variables).	N/A	N/A
Enseigner les mathématiques discrètes	Introduction to the beauty and applications of mathematics ; fundamental course for the development of reasoning and problem-solving skills ; attractive theoretical aspect.	Heart of the computer science ; many mathematical models in other fields use discrete mathematics.	Discrete mathematics revolves around logical thinking.
Lien recherche enseignement	Recreational mathematics.	N/A	Programming.

Tableau 3-55: Réponses aux questions ouvertes- Liban

3.4.3.2.2 Cas de la France (Universités)

Réponses aux questions ouvertes- France (1)				
Type de Licence	**Mathématiques**	**Mathématique-Informatique**	**Informatique**	**MIASHS**
Autres Contenus	Arithmétique ; jeux ; numération.	Énumération.	N/A	N/A
Relation avec d'autres disciplines	Informatique ; cours de logistique (optimisation et recherche opérationnelle).	Informatique ; algèbre.	Analyse de données ; sécurité informatique ; compilation.	N/A
Enseigner les mathématiques discrètes	Oui : incontournable en algèbre pour présenter les exemples utiles en théorie des ensembles ; pour conceptualiser les liens entre mathématiques et informatique ; il est difficile de faire des mathématiques de haut niveau sans savoir manipuler les entiers naturels.	Oui : incontournable, parce qu'elles développent l'abstraction et le raisonnement ; permet des démarches expérimentales beaucoup plus poussées que d'autres domaines, avec des manipulations à la main (papier-crayon, objets) ou par de la programmation.	N/A	N/A
Lien recherche enseignement	« Modélisation et analyse des systèmes complexes », dont une des principales composantes est la « logistique, en particulier portuaire » qui permet souvent d'illustrer des concepts de mathématiques discrètes (en particulier pour les cours de graphes).	Fournit des exemples, des situations d'exploration et de recherche, des liens avec d'autres branches des sciences.	N/A	N/A

Tableau 3-56: Réponses aux questions ouvertes- France (1)

3.4.3.2.3 Cas de la France (IUT)

Réponses aux questions ouvertes- France (2)					
Type de Licence	**DUT**	**DUT Réseaux et télécommunications**	**DUT Informatique**	**DUT Génie civil**	**IUT Informatique**
Autres Contenus	N/A	N/A	N/A	N/A	
Relation avec autres disciplines	N/A	Informatique et réseaux.	N/A	N/A	Théorie des langages.
Enseigner les mathématiques discrètes	N/A	N/A	Avoir une approche algorithmique de chaque notion.	N/A	Oui : incontournable, surtout s'agissant de la logique pour un informaticien.

Lien recherche enseignement	N/A	N/A	Cryptographie ; les étudiants sont surpris de rencontrer des résultats relativement récents qui ne sont pas nécessairement difficiles d'accès. Leur vision de la recherche mathématique en est modifiée. L'idée commune naïve (« il n'y a plus rien à trouver en mathématique ») en est modifiée.	N/A	N/A

Tableau 3-57: Réponses aux questions ouvertes- France (2)

Les résultats des questions ouvertes (Tableau 3-55 jusqu'à Tableau 3-57) confortent ceux que nous avons obtenus dans notre recherche, particulièrement en ce qui concerne les liens entre les mathématiques discrètes et les autres disciplines. Fait remarquable, nous constatons un accord total des enseignants (ceux qui ont répondu à la question) sur le fait qu'enseigner les mathématiques discrètes est incontournable pour le développement de la logique, de l'abstraction, du raisonnement et de la démarche expérimentale.

3.4.4 Conclusion de la partie 3.4

Avant de rentrer dans les points de synthèses, il nous semble très important de noter que les résultats obtenus en France ne sont pas forcément représentatifs du pays, étant donné que le nombre de participants est relativement faible. De ce fait, nous ne pouvons pas les comparer avec les entretiens ; ce questionnaire pourra donc être utilisé lors d'une étude qui recouvrira une sélection représentative d'universités.

Nous pouvons néanmoins indiquer quelques tendances d'après les résultats de ce questionnaire :

1. La théorie des graphes est un module effectivement enseigné dans tous les types de licence. Pourtant, sa place dans la formation mathématique reste la plus variée, dans le sens où les contenus peuvent faire partie des cours de mathématiques, d'informatique, de mathématiques-informatique, de logique, ou en option. Ce n'est pas le cas des autres formations où la théorie des graphes est l'objet principal des cours d'informatique ou de mathématiques-informatique. Nous remarquons qu'au Liban, la théorie des graphes fait partie des cours de maths, y compris pour les licences de mathématiques-informatique et d'informatique. Ce n'est pas le cas en France, où la théorie des graphes est enseignée au sein des cours de mathématiques-informatique et d'informatique dans les licences de mathématiques-informatique et d'informatique, mais absente des cours de mathématiques.
2. Concernant les différents types de raisonnement, ils sont présentés de façon variée selon les types de licence et selon les cours.
3. La question de l'algorithmique reste ouverte. Il faudrait approfondir ce sujet, d'autant qu'il représente une partie fondamentale de l'informatique, notamment en France. Il nous semble nécessaire de poser la question de la place de l'algorithmique dans la formation de mathématiques, ainsi que dans les cours de mathématiques des différentes formations (mathématiques, informatique, mathématiques-informatique ou autres).

Les résultats de ce questionnaire ne sont certes pas complets, mais ils nous donnent des informations (des tendances) supplémentaires qui nous permettent de poser plusieurs questions (qui ne sont pas nécessairement traitées dans notre travail mais qui peuvent ouvrir des pistes additionnelles de recherche) :

- Quelles mathématiques pour la formation en mathématiques ; en informatique ; et en mathématiques-informatique ? Quels choix de contenus et quelles différences pour les différents parcours de formation ?
- En termes institutionnels, quels facteurs guident les choix des concepteurs de programmes à l'université quant aux contenus à enseigner ?
- Quels sont la place et le rôle des mathématiques discrètes à la transition du lycée et d'université ?

Nous interrogeons ces aspects et nous obtenons de premiers résultats dans la partie 5.5, à travers l'analyse des ouvrages universitaires, qui permettra de mieux comprendre le type de mathématiques enseigné au niveau supérieur.

3.5 Analyse des ouvrages universitaires

3.5.1 Justification des choix d'ouvrages et des thèmes mathématiques

Notre question de recherche Q3 (« Quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées dans le supérieur et comment (quels choix) ? »), nous amène à étudier ce qui existe dans les ouvrages universitaires. Le choix de ces ouvrages universitaires est lié aux propositions des enseignants-chercheurs lors des entretiens. Nous avons choisi quelques ouvrages emblématiques en mathématiques discrètes supplémentaires. Les enseignants chercheurs que nous avons interrogés ont émis les propositions d'ouvrages universitaires suivantes :

1. Pearls in Graph Theory (Hartsfield & Ringel, 1994)
2. Algorithms (Dasgupta, Papadimitriou, & Vazirani, 2006)
3. Graph Theory with Applications (Bondy & Murty, 1982)
4. Discrete Mathematics and its Applications (Rosen, 2012)
5. Introduction to Graph Theory (West, 2002)

Nous remarquons que ces propositions ne recouvrent pas une variété de publics et d'auteurs ; nous avons donc fait le choix de ne pas accepter toutes les propositions. Nous avons laissé de côté Algorithms (Dasgupta, Papadimitriou, & Vazirani, 2006)ouvrage lié au domaine de l'informatique, lequel ne constitue pas notre objet d'étude. Nous avons choisi une édition plus récente du livre de Bondy et Murty (Bondy & Murty, 2008). Nous avons remplacé Discrete Mathematics and its Applications (Rosen, 2012)par l'ouvrage de Susanna S. Epp, Discrete Mathematics with Applications (Epp, 2011) pour les raisons suivantes : son implication dans les sociétés savantes d'informatique, son engagement au sein de la MAA (Mathematical Association of America), et le fait que son livre soit cité par plusieurs références. Nous notons qu'Epp a notamment travaillé sur les liens entre mathématiques discrètes et informatique. De plus, nous avons choisi d'analyser Graph Theory (Diestel, 2005), ouvrage rédigé par un mathématicien qui s'intéresse aux mathématiques discrètes et à la théorie des nombres à l'intention d'un public d'étudiants en mathématiques pures. Ces choix nous permettent de disposer d'une plus grande variété dans le profil des auteurs (mathématiciens, théoriciens des graphes, informaticiens) comme dans le profil du public (étudiants en mathématiques, en informatique, chercheurs, étudiants en ingénierie et en « mathematics education »).

Ouvrage	*Spécialité de l'auteur*[26]	*Nature du public* [27]
Graph Theory (Bondy & Murty, Graph Theory, 2008)	Bondy : mathématicien et chercheur en théorie des graphes ; Murty : mathématicien et chercheur en combinatoire et optimisation	Étudiants de mathématiques et de l'Informatique ; introduction à la théorie des graphes
Pearls in Graph Theory, a comprehensive introduction (Hartsfield & Ringel, 1994)	Mathématiciens et Chercheurs en théorie des graphes	Pas précisé (ouvrage transversal)
Introduction to Graph Theory (West, 2002)	Théoricien des graphes	Pas précisé (ouvrage transversal)
Discrete Mathematics with Applications (Epp, 2011)	Mathématicienne qui s'intéresse en mathématiques discrètes, à la logique et la preuve	Étudiants de mathématiques, ingénierie, Informatique, et même « mathematics education »
Graph Theory (Diestel, 2005)	Mathématicien et chercheur en théorie des graphes	Étudiants en mathématiques pures

Tableau 3-58: Liste des ouvrages universitaires

Nous avons choisi d'étudier trois grands types de problèmes : la recherche des parcours, les plus petits parcours, et la coloration. Ces types de problèmes illustrent des manières de raisonner en théorie des graphes que l'on peut considérer comme représentative du domaine. Ce choix est cohérent avec l'état de l'art, les entretiens, et les questionnaires. Dans chaque catégorie, les problèmes génèrent des définitions, des théorèmes, des propriétés, des preuves et des modélisations. Nous approfondirons l'étude des liens qui les unissent. Nous souhaitons étudier plus particulièrement les types de preuves utilisés, les modélisations possibles, et montrer les questions qui en découlent. Nous préciserons notamment les modélisations et les supports de représentations qui sont proposés par les étudiants.

Plusieurs problèmes sont présents dans plusieurs ouvrages, mais ils ne sont pas traités de la même manière. Nous interrogeons ces aspects afin de pouvoir analyser les ouvrages universitaires. Ces caractéristiques font partie des éléments qui guident les choix institutionnels au niveau des programme et des curricula universitaires. Ceci prouve que le contenu de la théorie des graphes n'est pas stable ; il est donc nécessaire d'explorer la question des particularités et de la validité de la preuve et de la modélisation.

3.5.2 Présentation mathématique

3.5.2.1 Introduction

Cette partie constitue une présentation mathématique des trois « grands types de problèmes » en théorie des graphes (la recherche des parcours, les plus petits parcours et la coloration) destinée à conduire les analyses des ouvrages universitaires.

Nous allons explorer dans cette partie plusieurs caractéristiques épistémologiques qui montrent l'efficacité de la théorie des graphes en tant qu'objet et en tant qu'outil. Nous avons précisé pour chaque « type de problèmes » des définitions de départ et un aperçu historique. Nous développons ensuite les questions mathématiques qui se posent dans certaines contextes (la recherche de différents types de preuves, les algorithmes, les modélisations et les applications). Ainsi, cette présentation mathématique comporte plusieurs objectifs : permettre au lecteur d'appréhender le domaine de mathématique étudié, préciser le lexique anglais/ français (car la

[26] Pour repérer les spécialités des auteurs, nous avons consultés : leurs pages personnels sur ligne, leur curriculum vitae, et leurs profiles dans les laboratoires d'affiliation.
[27] Nous présentons la nature du public comme présenté dans la préface de l'ouvrage.

plupart des ouvrages analysés sont en langue anglaise), poser de premières questions en termes de choix réalisés dans les ouvrages universitaires, et ainsi préparer l'analyse praxéologique. Pour arriver à ce but, nous nous appuyons ici sur des ouvrages de référence autour des mathématiques discrètes en général et de la théorie des graphes en particulier (Bondy & Murty, 2008; Berge, 1963; Wilson, 1996; Rosen, 2012; Epp, 2011) et sur la thèse de Cartier (2008) qui présente des éléments épistémologiques dans le cadre de son étude autour de l'objet graphe comme « outil pour enseigner la preuve et la modélisation ».

3.5.2.2 Recherche des parcours

Voyager le long des bords d'un graphe en commençant par un sommet et y revenir en parcourant exactement une fois chaque bord du graphe, ou voyager le long des bords d'un graphe en commençant par un sommet et en y revenir tout en visitant exactement une fois chaque sommet du graphe constitue l'un des problèmes de parcours d'un graphe. Bien que ces questions semblent similaires, la première, qui demande si un graphe a un cycle eulérien, peut être facilement résolue en examinant les degrés des sommets du graphe, alors que la deuxième, qui demande si un graphe a un cycle hamiltonien, est NP-complet[28].

3.5.2.2.1 Parcours eulériens

3.5.2.2.1.1 Aperçu

La ville prussienne de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad — exclave de la fédération de Russie), a été divisée en quatre zones par les branches du fleuve Pregel. Ces quatre sections comprenaient les deux régions situées sur les rives du Pregel, l'île Kneiphof et la région comprise entre les deux branches du fleuve. Au XVIIIe siècle, sept ponts reliaient ces différents secteurs. Les habitants de la ville, effectuant de longues promenades à travers la ville le dimanche, se demandaient s'il était possible de commencer la promenade à un endroit de la ville, de traverser tous les ponts une fois sans traverser deux fois le même pont et de revenir au point de départ. Le mathématicien suisse Leonhard Euler a résolu ce problème. Sa solution, publiée en 1736, peut être considérée comme la première utilisation de la théorie des graphes. Euler a étudié ce problème en utilisant le multigraphe[29] obtenu lorsque les quatre régions sont représentées par des sommets et les ponts par des arêtes (Rosen, 2012)

Un parcours qui traverse chaque arête d'un graphe est appelé parcours eulérien, du fait qu'Euler a été le premier à étudier l'existence de tels parcours. Dans la plus ancienne publication connue en théorie des graphes, il a montré qu'il était impossible de croiser chacun des sept ponts de Königsberg une seule fois au cours d'une marche à travers la ville.

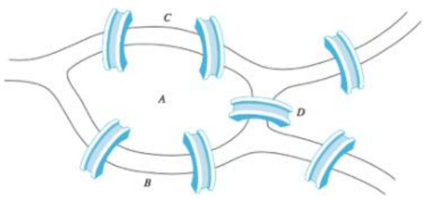


Figure 3-22: Les sept ponts du Königsberg

28 NP-Complet: la catégorie de problèmes qualifié de NP-complet sont considérés parmi les problèmes clés qui permettent de performer la complexité des problèmes.
29 "Graphs that may have multiple edges connecting the same vertices" (Rosen, 2012, p. 642)

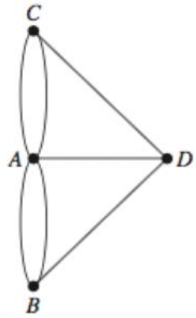


Figure 3-23: Un multigraphe de la ville de Königsberg

3.5.2.2.1.2 Définitions de départ

Après avoir consulté les ouvrages mathématiques, nous avons fait le choix de nous appuyer sur l'ouvrage de Bondy et Murty (2008) pour présenter les définitions de départ et le contenu. Ce choix est dû au fait que le langage utilisé par les auteurs est simple, et que l'ouvrage a été traduit en langue française par F. Havet (2008), ce nous facilite la présentation des définitions au lecteur en version français/ anglais et réduit le risque d'ambiguïté pouvant résulter de l'utilisation des termes distincts. Les références choisies pour ces définitions concernent toute la présentation mathématique (pas uniquement les problèmes de parcours).

- *Graphe/ graph* : un couple $(V\ (G), E(G))$ composé d'un ensemble $V\ (G)$ de *sommets* et d'un ensemble $E(G)$, disjoint de $V\ (G)$, d'*arêtes*, accompagné d'une fonction d'*incidence* ψ_G qui associe à chaque arête de G une paire de sommets (pas nécessairement distincts) de G / an ordered pair $V(G), E(G))$ consisting of a set $V(G)$ of vertices and a set $E(G)$, disjoint from $V(G)$, of edges, together with an incidence function ψ_G that associates with each edge of G an unordered pair of (not necessarily distinct) vertices of G.
- *Extrémités de e*/ends of e : Si e est une arête et u et v les sommets tel que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, alors on dit que e relie u et v, et les sommets u et v sont appelés les *extrémités* de e/ If e is an edge and u and v are vertices such that $\psi_G(e) = \{u, v\}$, then e is said to join u et v, and the vertices u and v are called the *ends* of e.
- *Ordre/ order* : nombre de sommets de G noté $v(G)$/ number of vertices in G.
- *Taille/ size* : Nombre des arêtes de G noté $e(G)$ / number of edges in G.
- *Adjacents/ adjacent* : Deux sommets incidents à une même arête ou deux arêtes qui sont incidents à un même sommet/ two vertices which are incident with a common edge or two edges which are incident with a common vertex.
- *Voisins/ Neighbors* : deux sommets distincts et adjacents/ two distinct adjacent vertices.
- *Boucle/ loop* : une arête dont les extrémités sont identiques/ an edge with identical ends.
- *Lien/ link* : une arête dont les extrémités sont distinctes/ an edge with distinct ends.
- *Arêtes parallèles/ parallel edges:* deux liens ou plus ayant le même pair d'éxtrémités/ Two or more links with the same pair of ends.
- *Graphe simple/ simple graph* : un graph qui n'a ni boucle ni arêtes parallèles / a graph that has no loops or parallel edges.
- *Graphe complet/ complete graph* : un graphe simple dans lequel deux sommets quelconques sont toujours adjacents/ a simple graph in which any two vertices are adjacent.
- *Graphe connexe/ connected graph* : si, pour toute partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles non-vides X et Y, il y a une arête avec une extrémité dans X et une extrémité dans Y ; dans le cas contraire, le graphe est *séparé*/ if for every partition of its vertex set into two nonempty sets X and Y, there is an edge with one end in X and one end in Y ; otherwise the graph is *disconnected*.

- *Graphe bipartie/bipartite graph* : un graphe avec son ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X et Y de facon que toute arete ait une extrémité dans X et un extrémité dans Y/ if its vertex set can be partitioned into two subsets X and Y so that every edge has one end in X and one end in Y
- *Degré d'un sommet/ degree of a vertex* : le nombre d'arêtes de G incidentes avec v, chaque boucle comptant comme deux arêtes/ the number of edges of G incident with v, each loop counting as two edges.
- *Matrice d'incidence/ incidence matrix* : Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E. La matrice d'incidence de G est la matrice $n \times m \;\; M_G \coloneqq (m_{ve})$, où m_{ve} est le nombre de fois $(0\ ,1, ou\ 2)$ où le sommet v et l'arête e sont incidents/ Let G be a graph, with vertex set V and edge set E. The incidence matrix of G is the $n \times m \;\; matrix\ M_G \coloneqq (m_{ve})$, where m_{ve} is the number of times $(0\ ,1, or\ 2)$ that vertex v and edge e are incident.
- *Chemin/path* : un graphe simple dont les sommets peuvent être rangés suivant un ordre linéaire de telle manière que deux sommets sont adjacents s'ils sont consécutifs dans l'ordre, et non adjacents sinon/ a simple graph whose vertices can be arranged in a linear sequence in such a way that two vertices are adjacent if they are consecutive in the sequence and are nonadjacent otherwise.
- *Longueur d'un chemin ou d'un cycle/ length of a path* or *cycle*: son nombre d'arêtes / number of its edges.
- *Cycle/ cycle* : un cycle sur trois sommets ou plus est un graphe simple dont les sommets peuvent être rangés suivant un ordre cyclique de telle manière que deux sommets sont adjacents s'ils sont consécutifs dans l'ordre, et non-adjacents sinon ; un cycle sur un sommet consiste en un unique sommet muni d'une boucle, et un cycle à deux sommets consiste en deux sommets reliés par une paire d'arêtes parallèles/ a cycle on three or more vertices is a simple graph whose vertices can be arranged in a cyclic sequence in such a way that two vertices are adjacent if they are consecutive in the sequence, and are nonadjacent otherwise ; a cycle on one vertex consists of a single vertex with a loop, and a cycle on two vertices consists of two vertices joined by a pair of adjacent edges.
- *Parcours eulérien/euler trail* : un parcours qui traverse chaque arête d'un graphe/ *a trail that traverses every edge of a graph*
- *Tour/tour :* un tour d'un graphe connexe G est une marche fermée qui traverse chaque arête de G au moins une fois/a tour of a connected graph G is a closed walk that traverses each edge of G at least once.
- *Tour eulérien/ : une* marche fermée qui traverse chaque arête exactement une fois (autrement dit un parcours eulérien fermé). Un graphe est eulérien s'il admet un tour eulérien. / a tour that traverses each edge exactly once (in other word it is a closed Euler trail). A graph is eulerian if it admits an Euler tour.

Nous remarquons qu'il existe un ensemble de définitions « globales », mais également d'autres définitions, plus détaillées, avec un langage et des représentations spécifiques. Nous nous interrogeons sur la manière dont les objets sont introduits dans les ouvrages (avec des exemples ou théoriquement). Il nous semble pertinent de questionner la nature du travail généré à partir de la définition choisie. La question des choix de définitions particulières dans certains ouvrages, et leurs motifs, doit être explorée. Nous présentons ci-dessous des propriétés suivies de leurs preuves tel présentés dans (Bondy & Murty, 2008).

3.5.2.2.1.3 Propriété 1

« *Pour tout graphe* G, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ » (Bondy & Murty, 2008, p. 7)

Considérons la matrice d'incidence **M** de G. La somme des entrées dans la ligne correspondant au sommet v est exactement $d(v)$. Par conséquent $\sum_{v\varepsilon V} d(v)$ est la somme de toutes les entrées de **M**. Mais cette somme vaut également $2m$, car la somme des entrées de chacune des m colonnes de **M** vaut 2, use arête ayant deux extrémités (Bondy & Murty, 2008, p. 7). ■

3.5.2.2.1.4 Propriété 2

« Dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair. » (Bondy & Murty, 2008, p. 7)

Considérons l'équation (propriété 1) modulo 2. Nous avons

$$d(v) \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2 \text{ si } d(v)\ est\ impair, \\ 0 \pmod 2 \text{ si } d(v)\ est\ pair. \end{cases}$$

Ainsi, modulo 2, le membre gauche de l'égalité est congru au nombre de sommets de degré impair, et le membre droit vaut zéro modulo 2 (Bondy & Murty, 2008, p. 7). ■

3.5.2.2.1.5 Algorithme pour la construction d'un cycle eulérien

Plusieurs ouvrages ont évoqué l'existence d'un algorithme de construction d'un cycle eulérien (Rosen, 2012; Epp, 2011). Un deuxième algorithme, celui de Fleury, est aussi donné dans certains ouvrages, dans le but de tracer directement le cycle eulérien (Berge, 1963; Bondy & Murty, 2008; Rosen, 2012). Le langage de la rédaction varie entre les auteurs. Nous présentons ci-dessous les deux algorithmes : celui de Fleury (Bondy & Murty, 2008) et celui de la construction d'un cycle eulérien (Modeste, 2012).

Algorithme 3.3 ALGORITHME DE FLEURY

ENTRÉE : un graphe connexe pair G et un sommet u de G
SORTIE : un tour eulérien W de G commençant (et finissant) en u

poser $W := u,\ x := u,\ F := G$
tant que $\partial_F(x) \neq \emptyset$ ***faire***
  choisir une arête $e := xy \in \partial_F(x)$, *tel que* e *n'est pas une arête séparatrice de* F *sauf s'il n'y a pas d'alternative*
  remplacer uWx *par* $uWxey$, x *par* y, *et* F *par* $F \setminus e$
fin de tant que
retourner W

Algorithme 1: Algorithme de Fleury (Bondy & Murty, 2008, p. 92)

Données : $G = (V, E)$ un graphe
`Cycle-eulérien`(G)=
(On va construire un cycle eulérien $\mathcal{C} = [u_1, \dots, u_m]$ *avec* $u_i \in V$*)*
s un sommet de G
$\mathcal{C} := [s]$
tant que *il existe* $(q, t) \in E$ *avec* q *le dernier sommet de* $\mathcal{C}$ *et* $(q, t) \notin \mathcal{C}$ **faire**
  ajouter t à $\mathcal{C}$
(on a un cycle de G*)*
pour chaque *composante connexe* G_i *de* G *privé des arêtes de* $\mathcal{C}$ **faire**
  $\mathcal{C}_i$:=`Cycle-eulérien`(G_i)
parcourir $\mathcal{C}$ et insérer $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}$ au premier sommet de G_i rencontré
Résultat : $\mathcal{C}$

Algorithme 2: Construction d'un cycle Eulérien

3.5.2.2.1.6 Condition nécessaire et suffisante pour l'existence des cycles eulériens

La validité de l'algorithme de Fleury fournit donc une caractérisation des graphes eulériens : « Un graphe connexe est eulérien si et seulement s'il est pair » (Bondy & Murty, 2008, p. 93). Le dernier n'a pas donnée la preuve du théorème d'Euler dans son ouvrage. Pourtant nous avons pu trouver le théorème suivant dans Berge (1963) pour lequel il a prouvé la condition est nécessaire et suffisante.

« Un multigraphe G admet une chaine eulérienne si et seulement si il est connexe (à des points isoles près), et si le nombre des sommets de degré impair est 0 ou 2. » (1963, p. 160). Berge donne la démonstration de la nécessité et de la suffisance de la condition.

La condition est nécessaire par ce que « s'il existe une chaine eulérienne μ, le graphe G est évidemment connexe. Par ailleurs si les deux sommets terminaux de μ (s'ils sont distincts) sont seuls à avoir un degré impair : il ne peut donc y avoir que 0 ou 2 sommets de degré impair » (Berge, 1963, p. 160).
La condition est suffisante. Berge a démontré plus précisément la formulation suivante : « s'il y a deux sommets de degré impaire a et b, il existe une chaîne eulérienne partant de a et finissant en b : s'il n'y a pas de points de degré impair, il existe un cycle eulérien »
« Nous allons supposer que cet énoncé est vrai pour des graphes de moins de m arêtes, et nous allons démontrer qu'il est encore vrai pour un graphe G de m arêtes. Pour fixer les idées, nous supposerons que G admet deux sommets de degré impair a et b.Un voyageur, partant de a dans une direction quelconque, et ne devant pas parcourir deux fois la même arête, va nous définir la chaine μ. S'il arrive en un sommet $x \neq b$, le voyageur aura utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x, donc il pourra repartir par une arête vierge ; quand il ne pourra plus repartir, il sera donc nécessairement en b. Néanmoins, dans ce trajet arbitraire μ qui va de a à b, il est possible que toutes les arêtes n'aient pas été utilisées ; il restera alors un graphe partiel G' dont tous les sommets sont de degré pair.
Soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$ les composantes de G' admettant au moins une arête ; par hypothèse, elles admettent des cycles eulériens $\mu_1, \mu_2, \dots$; comme G est connexe, la chaine μ rencontre successivement toutes les C_i, disons en des sommets $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \dots, x_k \in C_k$(dans cet ordre).
Considérons alors la chaine :

$$\mu[a, x_1] + \mu_1 + \mu[x_1, x_2] + \mu_2 + \cdots + \mu[x_k, b]$$

C'est bien une chaine eulérienne allant de a à b. (Berge, 1963, p. 130)■

Nous présentons ci-dessous un troisième algorithme, un algorithme de reconnaissance, qui se base sur la caractérisation des graphes contenant un cycle eulérien ; il sert donc à vérifier que chaque sommet est de degré pair et que le graphe est connexe.

Données : $G = (V, E)$ un graphe
(on construit l'ensemble T des sommets qui sont dans la même composante connexe et de degré pair)
s un sommet de G
$T := \{s\}$
si $deg(s)$ *impair* **alors**
  Résultat : $faux$
sinon
  tant que *il existe* $(u, v) \in E$, $u \in T$, $v \notin T$ *et* $deg(v)$ *pair* **faire**
    ajouter v à T
si $T = E$ **alors**
  Résultat : $vrai$
sinon
  Résultat : $faux$

Algorithme 3: Test de l'existence d'un cycle Eulérien

Il existe plusieurs preuves du théorème d'Euler qui ont été donné dans plusieurs ouvrages. Nous les présentons en Annexe E1. Nous souhaitons étudier l'aspect des preuves d'algorithme (preuves de correction et preuves de terminaison) et leur présence (ou leur absence) dans les ouvrages, ainsi que le rôle des algorithmes (s'ils remplacent les preuves ou non). Nous développerons plus profondément cet aspect dans notre analyse des ouvrages.

3.5.2.2.1.7 Applications et modélisations des parcours eulériens

Les chemins et les cycles eulériens peuvent être utilisés pour résoudre de nombreux problèmes de la vie réelle. Par exemple, plusieurs applications cherchent à trouver d'un chemin ou un cycle qui traverse exactement une fois chaque rue dans un quartier, chaque route dans un réseau de transport, chaque connexion dans une grille de services publics, ou chaque lien dans un réseau de communications. Trouver un chemin ou un cycle eulérien dans le graphe approprié peut permettre de résoudre de tels problèmes.

Par exemple, si un facteur peut trouver un chemin eulérien dans le graphe représentant les rues qu'il doit couvrir, ce chemin produit une route qui traverse chaque rue de l'itinéraire une seule fois. Si aucun chemin d'Euler n'existe, certaines rues devront être traversées plus d'une fois. Le problème visant à trouver un cycle dans un graphe est connu sous le nom de problème du postier chinois. Les exemples de musées, de dominos, de parcours sans lever le stylo, la disposition des cycles, la multidiffusion en réseau, la biologie moléculaire, le séquençage de l'ADN se modélisent à l'aide de graphes et peuvent être réduits à la recherche des chemins eulériens dans un graphe. Le problème se modélise par un graphe, rendant aisé la recherche de l'existence de parcours eulériens ou, comme dans le cas du problème des ponts de Königsberg, la démonstration de son impossibilité.

3.5.2.3 Parcours Hamiltoniens

3.5.2.3.1 Aperçu

La terminologie trouve son origine dans un jeu, le puzzle Icosien, inventé en 1857 par un mathématicien irlandais, sir William Rowan Hamilton. Le jeu se compose d'un dodécaèdre en bois (un polyèdre dont les faces sont douze pentagones réguliers), avec une cheville à chaque sommet du dodécaèdre, et une ficelle. Les vingt sommets du dodécaèdre ont été étiquetés avec différentes villes du monde (Figure 3-24). L'objectif du puzzle est de partir d'une ville et de voyager le long des bords du dodécaèdre, en visitant exactement une fois chacune des dix-neuf autres villes, pour revenir enfin à la première ville. Il est important de préciser que les graphes

Eulériens et Hamiltoniens se situent d'un côté et de l'autre de la frontière entre les classes P et NP-complet (grande complexité). Si de bonnes caractérisations existent pour reconnaître un graphe eulérien, le problème de graphe hamiltonien est pour sa part difficile à repérer.

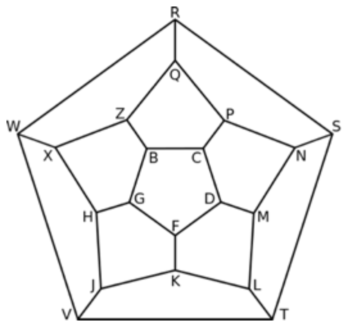


Figure 3-24: Voyage autour du monde (Hamilton)

3.5.2.3.2 Définitions

Les définitions requises dans cette catégorie sont les suivantes, toujours selon (Bondy & Murty, 2008; Bondy & Murty, 2008):

- Chemin(cycle) hamiltonien/ hamilton path (cycle) : chemin (cycle) qui passe par tous les sommets d'un graphe/ a path (cycle) which contains every vertex of a graph
- Graphe Traçable/ Traceable graph : un graphe qui contient un chemin Hamiltonien/ a graph that contains a Hamilton path
- Graphe hamiltonien/ Hamiltonian Graph : graphe qui contient un cycle hamiltonien/ a graph that contains a Hamilton cycle.

3.5.2.3.3 Conditions d'existence des cycles de Hamilton

Il n'existe pas de critère pour déterminer si un graphe admet un cycle hamiltonien d'une manière analogue à celle des cycles eulériennes, ni même un algorithme efficace pour trouver un tel cycle. Il existe cependant une technique pour montrer qu'un graphe n'admet pas un cycle hamiltonien que nous donnons en Annexe E2.

Il n'existe en fait aucun critère simple, nécessaire et suffisant pour l'existence des cycles Hamiltoniens. Bien que l'on ne connaisse aucune condition nécessaire et suffisante pour l'existence des cycles de Hamilton, il existe cependant des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour l'existence de telles cycles (Rosen, 2012). Nous notons que plus un graphe possède d'arêtes, plus la probabilité qu'il comporte un cycle de Hamilton est élevée. De surcroît, ajouter des arêtes (mais pas des sommets) à un graphe avec un cycle hamiltonien produit un graphe avec le même cycle hamiltonien. En conséquence, comme nous ajoutons des arêtes à un graphe, surtout quand nous nous assurons d'ajouter des arêtes à chaque sommet, nous rendons de plus en plus probable l'existence d'un cycle hamiltonien dans ce graphe. Les conditions suffisantes pour l'existence d'un cycle hamiltonien dépendent ainsi de la largeur des degrés des sommets. Les deux théorèmes portant sur ces conditions suffisantes sont les théorèmes d'Ore et de Dirac :

3.5.2.3.3.1 Théorème d'Ore (1960)

If G is a simple graph with n (≥ 3) vertices, and if $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ for each pair of non-adjacent vertices v and w, then G is Hamiltonian. (Wilson, 1996, p. 36)

Nous présentons la preuve qui existe dans Wilson (1996, p. 36) :

« We assume the theorem false, and derive a contradiction. So let G be a non-Hamiltonian graph with n vertices, satisfying the given condition on the vertex degrees. By adding extra edges if necessary, we may assume that G is 'only just' non-Hamiltonian, in the sense that the addition of any further edge gives a Hamiltonian graph. (Note that adding this extra edge does not violate the condition on the vertex degrees) It follows that G contains a path $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ passing through every vertex. But since G is non-Hamiltonian, the vertices v_1 and v_n are not adjacent, and so $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$. It follows that there must be some vertex v_i adjacent to v_1 with the property that v_{i-1} is adjacent to v_n (see Fig. 7.5). But this gives us the required contradiction since
$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots v_{i+1} \to v_i \to v_1$ is then a Hamiltonian cycle. ■

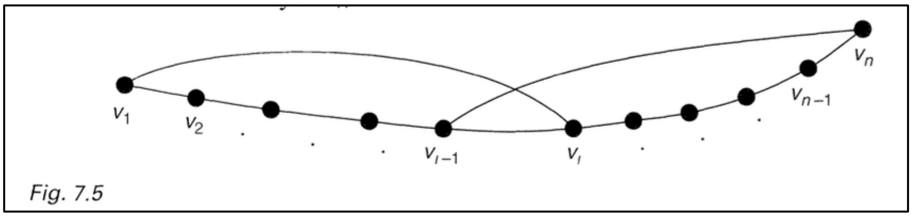


Figure 3-25: Fig. 7.5 de Wilson (1996, p. 36)

Nous avons constaté que parfois certains exercices des ouvrages comportent une question sur la démonstration du théorème. Par exemple, la preuve du théorème D'Ore était présentée sous forme d'un grand problème, avec six sous-parties (Rosen, 2012, p. 707). La démonstration a suit aussi un raisonnement par l'absurde (Rosen, 2012, pp. S-65). Nous cherchons à connaître les raisons, et notamment les raisons épistémologiques, expliquant l'absence de ce théorème dans les autres ouvrages.

3.5.2.3.3.2 Théorème de Dirac (1952)

« If G is a simple graph with $n(\geq 3)$ vertices, and if $\deg(v) \geq n/2$ for each vertex v, then G is Hamiltonian » (Wilson, 1996, p. 36)

Le théorème de Dirac peut être démontré comme un corolaire du théorème d'Ore car $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ pour chaque pair de sommets v et w (adjacents ou pas). Les théorèmes d'Ore et de Dirac fournissent des conditions suffisantes pour qu'un graphe simple connexe ait un cycle hamiltonien. Cependant, ces théorèmes ne fournissent pas les conditions nécessaires pour l'existence d'un tel cycle.

Il nous semble nécessaire de noter que l'absence des algorithmes pour la recherche des parcours de Hamilton est liée au fait que les meilleurs algorithmes pour trouver un cycle hamiltonien, ou pour déterminer sa non-existence, sont d'une grande complexité (NP-complet).

3.5.2.3.4 Applications et modélisations des cycles Hamiltoniens

Les chemins et les cycles de Hamilton peuvent être utilisés pour résoudre plusieurs problèmes réels. De nombreuses applications demandent un chemin ou un cycle qui visite une seule fois chaque intersection de routes dans une ville, chaque endroit où les canaux se croisent dans un réseau de distribution, ou chaque nœud dans un réseau de communications. Trouver un chemin ou un cycle hamiltonien dans le graphe approprié peut permettre de résoudre de tels problèmes.

Le fameux problème du voyageur de commerce constitue en la recherche le plus court chemin qu'un voyageur doit faire pour visiter un ensemble de villes. Ce problème se réduit à trouver un cycle hamiltonien dans un graphe complet de sorte que le poids total de ses bords soit aussi léger que possible. Ce problème est considéré NP-complet ; il n'en existe pas une solution optimale. Certains algorithmes, ainsi que des algorithmes heuristiques, en donnent des solutions rapprochées. En recherche opérationnelle, plusieurs problèmes nécessitent de déterminer un chemin hamiltonien, comme la recherche du meilleur ordre pour effectuer un nombre d'actions.

L'exemple de la course du cavalier sur l'échiquier peut être modélisé par un graphe sur lequel on doit rechercher un parcours hamiltonien. La course du cavalier sur l'échiquier est une application qui propose de déplacer un cavalier sur un échiquier de sorte que le cavalier passe une fois et une seule sur chacune des cases au cours de son parcours. Ce problème revient à chercher un chemin hamiltonien dans un graphe symétrique. Il existe plusieurs solutions, et les méthodes employées sont innombrables (Berge, 1963).

3.5.2.4 Synthèse sur les problèmes de parcours

Nous présentons dans cette sous-partie une synthèse de nos observations autour des problèmes de parcours. Il existe trois techniques de preuves possibles pour la démonstration du théorème d'Euler, par maximalité, par récurrence et par l'absurde (voir l'Annexe E1 pour les techniques supplémentaires). Ces preuves sont présentées dans plusieurs ouvrages universitaires destinés aux étudiants de mathématiques, mais aussi d'informatique et d'ingénierie. De surcroît, nous pouvons remarquer l'existence des algorithmes pour tester l'existence des cycles eulériens et pour construire telles cycles. De nombreux problèmes et applications demandent à vérifier l'existence de parcours eulériens dans des graphes ; la modélisation par des graphes est nécessaire afin de pouvoir résoudre le problème. Ainsi, nous avons bien une variété des techniques dans les ouvrages et la question qui se pose dans ce cas sera : existe-il un lien particulier entre le public des ouvrages et les choix des auteurs ?

Pourtant, dans la recherche des parcours hamiltoniens, nous remarquons l'absence de certaines preuves des théorèmes (en particulier dans les ouvrages de Rosen et d'Epp (2011)). Nous nous interrogeons sur les raisons motivant cette absence. La grande complexité de ces problèmes a-t-elle contribué aux décisions des auteurs ? Nous remarquons qu'ils font appel au théorème d'Ore et le corollaire de Dirac dans la solution des exercices. Nous cherchons là aussi à comprendre le motif de ces choix, d'où plusieurs questions se découlent. Visent-ils à renforcer la culture des étudiants ? Ces preuves possèdent-elles des spécificités intéressantes ? Les raisons sont-elles praxéologiques ou théoriques ? Il nous semble pertinent d'interroger les modélisations utilisées par les ouvrages. Quelles sont la place et le rôle de ces modélisations ? Ont-ils pour objectif de donner un support visuel, ou constituent-ils un modèle sur lequel les auteurs agissent afin de résoudre les problèmes ?

3.5.2.5 Recherche du plus court chemin

Dans les problèmes de parcours, nous avons cherché l'existence de parcours eulériens et hamiltoniens. Ces parcours ne sont pas nécessairement les plus courts. Cette catégorie de problèmes tisse de nombreux liens avec l'informatique ; plusieurs questions portent sur l'optimisation. Dans la recherche du plus court chemin dans les graphes, il est possible de trouver à chaque fois des algorithmes, et il est donc aussi possible de trouver leurs preuves. Il existe deux types de preuves d'algorithmes : des preuves de correction et des preuves de terminaison. Nous explorerons ces aspects et nous interrogerons également la question de la complexité des algorithmes.

3.5.2.5.1 Le plus court chemin — Algorithme de Dijkstra

3.5.2.5.1.1 Aperçu

Edsger Dijkstra (1930-2002) est un mathématicien et informaticien néerlandais. Il est connu pour le développement de l'algorithme permettant de rechercher des plus courts chemins dans un graphe, algorithme qui a conservé son nom. De plus il est connu pour sa contribution au développent du langage de programmation Algol, pour avoir remporté le prix Turing en 1972, ou encore pour ses aphorismes.

3.5.2.5.1.2 Définitions

Nous présentons quelques définitions utilisées dans cette partie.

- *Graphe orienté (digraphe)/ directed graph*: un couple $\big(V(D), A(D)\big)$ formé d'un ensemble $V \coloneqq V(D)$ de sommets et d'un ensemble $A \coloneqq A(D)$, disjoint de $V(D)$, d'arcs, accompagné d'une fonction d'incidence ψ_D qui associe à chaque arc de D un couple de sommets (pas nécessairement distincts) de D/ an ordered pair $\big(V(D), A(D)\big)$ consisting of a set $V \coloneqq V(D)$ of vertices and a set $A \coloneqq A(D)$, disjoint from $V(D)$, of arcs, together with an indicence fucntion ψ_D that associates with each arc of D an ordered pair of (not necessarily distinct) vertices of D.
- *Poids d'une arête/weight of an edge:* un réel $w(e)$, appelé coût/ a real number $w(e)$
- *Graphe valué/ weighted graph :* Le graphe G ainsi muni de poids sur ces arêtes, noté (G, w) . / The G together with these weights on its edges is called a weighted graph
- *Longueur/length* : poids d'un chemin dirigé dans un digraphe valué/ weight of a directed path in a weighted digraph.
- *Distance/ distance* : la longueur du plus court $xy - chemin$. S'il n'y a pas de chemin connectant x et y, nous posons $d_G(x, y) \coloneqq \infty$/ the length of the shortest path is called the distance between x and y and denoted by $d_G(x, y)$. If there is not such path connecting x and y, we set $d_G(x, y) = \infty$
- *Plus court* (x, y)*- chemin dirigé/ shortest directed* $(x, y) - path$: (x, y)- chemin de poids minimum et ce poids est la distance de x à y noté $d(x, y)$ / path of minimum weight and this weight is the distance from x to y denoted $d(x, y)$

3.5.2.5.1.3 L'algorithme de Dijkstra

Plusieurs formes de cet algorithme apparaissent dans les ouvrages consultés. Nous avons choisi de présenter celle d'un digraphe valué de poids strictement positifs.

« Entrée : un digraphe valué (D, w) de poids strictement positifs et un sommet r
Sortie : un r-branchement dans D avec sa fonction prédécesseur p, et une fonction $l : V \to \mathbb{R}^+$ telle que $l(v) = d_D(r, v)$ pour tout $v \in V$

1 : *poser* $p(v) \coloneqq \emptyset, v \in V, l(r) \coloneqq 0,$ *et* $l(v) \coloneqq \infty, v \in V \setminus \{r\}$
2 : ***tant que il*** *y a un sommet non-coloré u tel que* $l(u) < \infty$ ***faire***
3 : *choisir un tel sommet u pour lequel* $l(u)$ *est minimum*
4 : *colorer u en noir*
5 : ***pour*** *tout voisin sortant non-coloré* v *de* u *tel que* $l(v) > l(u) + w(u, v)$ ***faire***
6 : *remplacer* $p(v)$ par u et $l(v)$ par $l(u) + w(u, v)$
7 : ***fin de pour***
8 : ***fin de tant que***
9 : renvoyer (p, l) » (Bondy & Murty, 2008, p. 158)

Cet algorithme se situe dans le contexte de la résolution du problème du plus court chemin. Nous donnons une version plus vulgarisée de cet algorithme sur un graphe simple non-orienté qui a été présenté dans la thèse de Cartier (2008) en Annexe E3. L'algorithme de Dijkstra est très célèbre : il est présenté dans de nombreux ouvrages. Les preuves de cet algorithme nous intéressent tout particulièrement. Nous cherchons en particulier à repérer la preuve de correction et la preuve de terminaison. Cartier (2008) a réalisé la preuve de correction (sans la nommer). Certains ouvrages universitaires présentent l'algorithme de Dijkstra, mais ne donnent les preuves de correction et de terminaison qu'après un exemple d'application de l'algorithme (Rosen, 2012) ; d'autres font les preuves d'algorithmes explicitement, à l'instar d'Epp (2011, pp. 713-714) qui effectue la preuve de correction par récurrence ainsi que la preuve de terminaison. Dans Epp (2011), cet algorithme est présenté dans la section du chapitre « Minimum Spanning Trees and Shortest Paths », sans exemple. D'autres ouvrages proposent aux étudiants un exercice consistant à faire la preuve de l'algorithme tel Bondy & Murty (2008).

3.5.2.5.1.4 Applications et modélisations de l'algorithme de Dijkstra

Plusieurs problèmes demandent de rechercher les plus courts chemins dans des graphes pondérés. Le problème du voyageur de commerce est un des exemples présentés dans cette catégorie, étant donné que sa résolution fait appel à un algorithme d'approximation. Celui-ci ne donne pas une solution exacte mais rapprochée, ce qui montre le lien étroit avec l'informatique. Dans le cas du problème du voyageur de commerce, l'algorithme représente un outil de résolution, et pas seulement un objet mathématique à étudier en lui-même. Cet élément ouvre la discussion sur la dialectique outil-objet dans la théorie des graphes. Plusieurs applications sont discutées par Berge, comme par exemple le problème du labyrinthe (Berge, 1963, p. 64) et le problème du loup, de la chèvre et du chou (Berge, 1963, pp. 65-66), lesquels requièrent une analyse de la situation, puis la réalisation d'une modélisation avec un graphe afin de pouvoir construire l'algorithme propre à la résolution du problème. Cependant la généralisation du problème du loup, de la chèvre et du chou est un problème ouvert dans la recherche en mathématiques. La modélisation, dans ce cas, fait appel à de nouveaux outils, comme les algorithmes, qui nécessitent un travail de construction.

3.5.2.5.2 Arbres couvrant de poids minimum

3.5.2.5.2.1 Aperçu

Le problème visant à trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe est certainement résoluble. Une solution consiste à lister tous les arbres couvrant le graphe, à calculer le poids total de chacun et à en choisir un pour lequel ce total est le minimum. Cependant, cette solution nécessite beaucoup de temps de calcul vu que le nombre d'arbres couvrant est très large. Par exemple, un graphe complet avec n sommets a n^{n-2} arbres couvrants. Même en utilisant les ordinateurs les plus rapides, trouver tous ces arbres dans un graphe demanderait énormément de temps.

3.5.2.5.2.2 Définitions

Commençons par quelques définitions en lien avec notre discussion (Bondy & Murty, 2008).

- *Arbre/tree* : un graphe connexe acyclique (qui ne contient pas de cycle) / a connected acyclic (one that has no cycles) graph.
  Le arbres ont été bien étudié ; nous avons établi les propriétés équivalentes, soit H un graphe d'ordre $n > 1$:

(1) H est connexe et sans cycles ;
(2) H est sans cycles et admet $n-1$ arêtes ;
(3) H est connexe et admet $n-1$ arêtes ;
(4) H est sans cycles et, en ajoutant une arête entre deux sommets non adjacents, on crée un cycle (et un seul) ;
(5) H est connexe et, en supprimant une arête quelconque, il n'est plus connexe ;
(6) Tout couple de sommets est relié par une chaîne et une seule.

L'équivalence entre les propriétés suivantes est démontrée par Berge (1963, pp. 146-147) et par Cécile Ouvrier-Buffet (2003) qui a même proposé dix définitions de l'arbre et a fait la démonstration de l'équivalence entres elles.

- *Sous-graphe/ subgraph*: un graphe F est un sous-graphe d'un graphe G si $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$, et ψ_F est la restriction de ψ_G à $E(F)$/ F is called a subgraph of a graph G if $(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$, and ψ_F is the restriction of ψ_G to $E(F)$
- *Sous-graphe couvrant/ spanning subgraph* : un sous-graphe couvrant d'un graphe G est un sous-graphe obtenu par suppressions d'arêtes uniquement. Autrement dit, c'est un sous-graphe don't l'ensemble de sommets de G dans son entier/ a spanning subgraph of a graph G is a subgraph obtained by edge deletions only, in other words, a subgraph whose vertex set is the entire vertex set of G.
- *Sous-arbre/ subtree* : un sous-graphe qui est un arbre/ a subgraph which is a tree
- *Arbre couvrant / spanning tree* : sous arbre qui est un sous-graphe couvrant/ a subtree that is a spanning subgraph

Avant d'aborder la question de trouver l'arbre couvrant minimum, nous soulignons que le lecteur peut consulter l'Annexe E4 dans lequel nous présentons quelques propriétés vulgarisées qui nous semble indispensable pour sa faciliter compréhension (Epp, 2011)[traduit par nos soins].

3.5.2.5.2.3 L'algorithme de Jarník-Prim

Le problème de l'arbre couvrant de poids minimum peut être résolu par une technique de parcours due à Jarník (1930) et Prim(1957). L'algorithme fait pousser un arbre couvrant minimum en ajoutant au sous-arbre T déjà construit une nouvelle branche parmi les arêtes de poids minimum joignant un sommet de T à un sommet qui n'est pas dans ce dernier. L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets du graphe sont dans T.

« Entrée : un graphe value connexe (G, w)
Sortie : un arbre optimal T de G avec sa fonction prédécesseur p, son poids $w(T)$
1 : posons $P(v) := \emptyset$ et $c(v) \coloneqq \infty, v \in V$, et $w(T) \coloneqq 0$
2 : choisir un sommet r (comme racine)
3 : remplacer $c(r)$ par 0
*4 : **tant que** il y a un sommet non-coloré **faire***
5 :   *choisir un tel sommet u de coût minimum $c(u)$*
6 :   *colorer u en noir*
7 :   ***pour** chaque sommet non-coloré v tel que $w(uv) < c(v)$ **faire***
8 :   *remplacer $p(v)$ par u* et $c(v)$ $w(uv)$
9 :   *remplacer $w(T)$ par $w(T) + c(u)$*
10 :   ***fin de pour***
*11 : **fin de tant que***
12 : renvoyer $(p, w(T))$ » (Bondy & Murty, 2008, p. 153)

La preuve de correction de l'algorithme de Jarník-Prim est une preuve basée sur le raisonnement par l'absurde dans l'ouvrage d'Epp (2011, pp. 708-709). Elle est aussi présentée dans Bondy & Murty (2008, p. 155) suivant un raisonnement par récurrence. Il est important de noter que dans les ouvrages d'Epp et de Bondy & Murty (2008), les exemples sont utilisés pour illustrer l'action de l'algorithme. Il nous semble important d'investiguer la nature des preuves de ces algorithmes (particulièrement les preuves de correction et de terminaison).

3.5.2.5.2.4 L'algorithme de Borůvka-Kruskal

Dans l'algorithme de Borůvka-Kruskal, les arêtes dans un graphe connexe pondéré sont examinées une par une par ordre de poids croissant. À chaque étape, l'arête examinée est ajoutée à ce qui deviendra l'arbre recouvrant minimum, à condition que cet ajout ne crée pas un cycle. Après l'ajout de $n-1$ arêtes (où n est le nombre de sommets du graphe), ces arêtes, avec les sommets du graphe, forment un arbre couvrant minimum pour le graphe.

« Entrée : un graphe valué connexe $G(G, w)$
Sortie : un arbre optimal $T = (V, F)$ de G, et son poids $w(F)$
1 : *poser* $F \coloneqq \emptyset, w(F) \coloneqq 0$ *(F désigne l'ensemble d'arêtes de la forêt courante)*
2 : ***tant que*** *il y a une arête* $e \in E \setminus F$ *telle que* $F \cup \{e\}$ *soit l'ensemble d'arêtes d'une forêt* ***faire***
3 : *choisir une telle arête e de poids minimum*
4 : remplacer F *par* $F \cup \{e\}$ *et* $w(F)$ *par* $w(F) + w(e)$
5 : ***fin de tant que***
6 : *renvoyer* $((V, F), w(F))$ » (Bondy & Murty, 2008, p. 205)

Comme le graphe G est supposé connexe, la foret[30] (V, F) renvoyé par l'algorithme de Borůvka-Kruskal est un arbre couvrant de G. Les preuves de correction et de terminaison de cet algorithme sont présentées dans Epp (2011, pp. 706-707); la preuve de correction suit un raisonnement par l'absurde. Bondy& Murty (2008) donne la preuve en exercice.

Procédons à quelques remarques sur les principes de fonctionnement de ces deux algorithmes. Dans celui de Borůvka-Kruskal, une fois qu'une arête a été traitée, l'algorithme ne revient pas dessus. De plus, le choix effectué à chaque étape est un choix optimal. Ces deux caractéristiques font que cet algorithme est un algorithme glouton. Dans l'algorithme de Jarník-Prim, contrairement à l'algorithme de Borůvka-Kruskal, le sous-graphe que nous construisons est à chaque étape un arbre. Lui aussi est un algorithme glouton, c'est-à-dire qu'il fait un choix optimal à chacune des étapes. Précisons que faire un choix optimal à chaque étape (locale) n'assure pas une optimalité globale.

3.5.2.5.2.5 Applications et modélisations de la recherche des arbres couvrant minimum

Mettre en place dans une ville un réseau électrique reliant plusieurs villes voisines d'une façon telle que la distance totale entre ces villes soit la plus courte possible, voici un exemple d'application nécessitant la recherche d'un arbre couvrant de poids minimum. Supposons aussi qu'une compagnie aérienne veuille desservir toutes les villes sur une carte, mais avec un système de routage qui minimise le kilométrage total : ce type de problèmes appelle à une modélisation qui, à son tour, appelle une autre construction, celle de l'algorithme qui résoudra le problème.

[30] Les graphes acycliques sont habituellement appelés des forêts (Bondy & Murty, 2008, p. 105)

3.5.2.6 Synthèse sur la recherche du plus petit chemin

Les problèmes de recherche d'un plus court chemin appellent à la construction d'algorithmes, comme nous l'avons vu dans le cas de Dijkstra, Borůvka-Kruskal, et Jarník-Prim. Les algorithmes sont suivis par des preuves de correction et de terminaison. Les preuves de correction de cet algorithme peuvent suivre un raisonnement par récurrence dans le cas de Dijkstra (Epp, 2011) et Jarník-Prim (Bondy & Murty, 2008) et par l'absurde dans le cas de Kruskal et de Prim (Epp, 2011; Rosen, 2012). Il nous semble pertinent de préciser que nous limitons l'étude des algorithmes à cet aspect des preuves de correction et de terminaison. Pour arriver à ce but, nous nous appuyons sur le travail de Modeste (2012), qui précise que la preuve d'un algorithme se fait selon deux points :

- « Preuve de correction : « quelle que soit l'entrée, l'algorithme produit une réponse valide. »
- Preuve de terminaison : « quelle que soit l'entrée, l'algorithme produit une réponse après un nombre fini d'étapes » (Modeste, 2012, pp. 23-24)

La preuve de correction est souvent faite en s'appuyant sur la notion d'un « invariant », lequel est défini ainsi par Modeste :

> « Une propriété reliant divers éléments de l'algorithme qui est vraie à la première étape de l'algorithme et reste vraie tout au long de son exécution » (Modeste, 2012, p. 24)

Pourtant, pour prouver la preuve de terminaison nous pouvons désigner un « variant » qui n'est autre qu'une :

> « Fonction dans ℕ calculé à chaque étape de l'algorithme et dont la valeur décroît strictement au cours de l'exécution » » (Modeste, 2012, p. 24)

De plus, les arbres couvrant de poids minimum posent des questions de définitions quant à ses objets : l'objet arbre, par exemple, possède plusieurs définitions (cf. page 138), qui permettent d'utiliser différents types de preuves. Nous cherchons à bien explorer quels sont les choix faits par les auteurs, et comment ses définitions se justifient en fonction des types de preuves utilisés. Nous émettons l'hypothèse que le travail sur les problèmes de plus courts chemins et sur les arbres couvrant de poids minimum présentés dans les ouvrages destinés aux futurs informaticiens (cas d'Epp (2011) et de Rosen (2012)) n'est pas pratiqué de la même manière que dans les ouvrages destinés aux mathématiciens (Berge (1963) et Diestel (2005)). Dans le premier cas, les ouvrages se focalisent sur des exemples et des preuves « faciles » ; le deuxième cas dénote plus de formalisation, avec davantage de preuves d'ordre formelle et rhétorique. Notre analyse praxéologique reviendra sur ces aspects.

3.5.2.7 La coloration

3.5.2.7.1 Aperçu

La coloration des sommets d'un graphe (qui est souvent nommée coloration de graphe) forme un champ très important de la théorie des graphes, champ actuellement en cours d'exploration par les chercheurs. Rappelons que la coloration des graphes planaires a donné à la théorie des graphes l'une de ses conjectures restée le plus longtemps irrésolue, et l'un de ses résultats les plus connus : le théorème des quatre couleurs. Il est simple à énoncer : « le nombre chromatique d'un graphe planaire est inférieur ou égal à quatre » ; sa preuve, en 1976, a nécessité l'utilisation d'un programme informatique testant près de 1500 configurations de graphes. Cette preuve a été largement controversée, surtout parce qu'il était difficile aux mathématiciens de vérifier la validité du programme informatique lui-même. Depuis, des améliorations ont été apportées à la preuve et aux tests informatiques, mais des mathématiciens cherchent toujours une preuve non-informatisée (Rosen, 2012).

Le lecteur peut trouver en Annexe E5 un bref aperçu historique sur le théorème de quatre couleurs écrit par Gonthier (2017).

3.5.2.7.2 Définitions et propriétés

Commençons par quelques clarifications et définitions quant au terme de coloration. Nous nous sommes appuyées sur plusieurs sources (Bondy & Murty, 2008) afin de donner une présentation compréhensible pour les lecteurs.

- *Graphe planaire/planar graph* : un graphe qui peut être dessiné dans le plan de telle manière que les arêtes s'intersectent uniquement en des points correspondant à leurs extrémités communes. / a graph which can be drawn in the plane in such a way that edges meet only at points corresponding to their common ends
- K-coloration/k-colouring : une application $c: V \to S$, où S est un ensemble de $k - couleurs$. Un graphe est $k - colorable$ s'il admet une $k - coloration$./ une mapping $c: V \to S$, where S is a set of $k - colours$, thus a $k - colouring$ is an assignment of k colours to the vertices of G.
- Nombre chromatique/ chromatic number : Le plus petit k pour lequel un graphe G est $k - colorable$, noté $\chi(G)$/ the minimum k for which a graoh is $k - colourable$, denoted $\chi(G)$
- *Face de G/ face of* G : un graphe plan G partitionne le reste du plan en un certain nombre d'ouverts connexes par arcs. Ces ensembles sont appelés les faces de G./ a plane graph G partitoins the rest of the plane into a number of arcwise-connected open sets. These sets are called the faces of G.
- *Stable (indépendant)/ stable set (Independent sets)* : ensemble de sommets deux à deux non-adjacents / a set of vertices no two which are adjacent
- *Clique/clique* : ensemble de sommets deux à deux adjacents/ mutually adjacent vertices

Il faut noter qu'un graphe fini peut toujours être coloré par un nombre fini de couleurs : il suffit pour cela d'utiliser n couleurs, n étant le nombre de sommets du graphe. L'objectif est de minimiser le nombre de couleurs. Remarquons qu'une coloration définit une partition de l'ensemble des sommets d'un graphe G en stables. Une coloration optimale est une coloration des sommets de G en $\chi(G)$ couleurs : c'est donc une partition des sommets de G en $\chi(G)$ stables.

3.5.2.7.3 Théorème des quatre couleurs

« Tout graphe plan sans arête séparatrice est 4-face-colorable » (Bondy & Murty, 2008, p. 302)

Ce problème possède un énoncé très simple et il a attiré l'attention de nombreux mathématiciens de l'époque. Ils avaient tous l'hypothèse qu'il était possible de colorer toute carte avec quatre couleurs, et cette hypothèse est devenue la « Conjecture de Quatre Couleurs ». Il existe une démonstration donnée récemment par Robertson et al (1997) mais ça reste toujours compliqué. La Conjecture de Quatre Couleurs possède de nombreuses formulations équivalentes consultable dans (Bondy & Murty, 2008, p. 302). Nous présentons dans la suite le théorème de cinq couleurs qui montre que tous les graphes planaires sont 5-colorables suivi par la preuve de Heawood.

3.5.2.7.4 Théorème des cinq couleurs

Tout graphe planaire sans boucle est $5 - colorable$ (Bondy & Murty, 2008, p. 307)

Il existe plusieurs démonstrations du Théorème de Cinq Couleurs. L'une d'elles est donnée dans les exercices de Bondy & Murty (2008) et une deuxième, basée sur la notion de coloration de listes, est présenté dans son Chapitre 15. Nous avons fait le choix de présenter sa démonstration qui se base sur le raisonnement par récurrence sur le nombre de sommets.

« Par récurrence sur le nombre de sommets. […] il suffit de prouver le théorème pour les triangulations[31] 3-connexes. Ainsi soit G une telle triangulation. D'après le corollaire 10.22, G a un sommet v de degré au plus 5. Considérons le graphe plan $H := G - v$.
Par récurrence, H a une 5-coloration propre. Si, dans cette coloration de H, une des cinq couleurs n'est affectée à aucun voisin de v, nous pouvons l'attribuer a v, étendant ainsi la 5-coloration propre de H en une 5-coloration propre de G. Nous pouvons supposer, par conséquent, que les cinq voisins de v reçoivent à eux tous les cinq couleurs.
Fixons les notations : soit $C \coloneqq v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_l$ le cycle facial[32] de H, dont les sommets sont les voisins de v dans G, avec v_i recevant la couleur $i, \ \leq i \leq 5$. Nous pouvons supposer que le sommet v de G est dans $\mathrm{int}(C)$, de telle sorte que les ponts de C dans H sont, des ponts extérieurs. S'il n'y a pas de pont de C dans H contenant a la fois v_1 et v_3 alors en échangeant les couleurs des sommets colorés 1 et 3 dans tous les ponts de C contenant v_1, nous obtenons une 5-coloration propre de H avec laquelle aucun sommet de C n'a la couleur 1. Cette couleur peut alors être attribuée a v, ce qui donne une 5-coloration propre de G. Ainsi nous pouvons supposer qu'il y a un pont B_1 de C dans H ayant v_2 et v_4 comme sommets d'ancrage. Mais alors les pont B_1 et B_2 se chevauchent, ce qui contredit le Théorème 10.26. » (Bondy & Murty, 2008, p. 307)

Pour réduire la complexité mathématique, le lecteur peut trouver en Annexe E5 une présentation plus vulgarisée ainsi qu'un algorithme glouton pour la coloration d'un graphe planaire en au moins six couleurs.

3.5.2.7.5 Une heuristique gloutonne de coloration

Face à la difficulté de trouver le nombre chromatique d'un graphe, nous pouvons utiliser des algorithmes efficaces qui fonctionnement raisonnablement bien. Nous présentons un algorithme pour colorer les sommets d'une manière gloutonne comme suit.

Entrée : un graphe G
Sortie : une coloration de G
1. *Ranger les sommets de G suivant un ordre total :* $v_1, v_2, \dots, v_n$.
2. *Colorer les sommets l'un après l'autre suivant cet ordre en attribuant à* v_i le plus petit entier strictement positif qui n'est attribué a aucun dès ses voisins déjà colorés. (Bondy & Murty, 2008, p. 385)

Bondy& Murty ont souligné que le nombre de couleurs utilisées par cette heuristique de coloration gloutonne dépend de l'ordre choisi pour les sommets. Plus précisément, le nombre de couleurs utilisé par l'heuristique gloutonne n'est jamais plus que $\Delta + 1$ (où Δ est le degré maximum).

Grâce à ce qui précède, nous constatons que les questions entourant la coloration d'un graphe mènent à un travail qui concerne à la fois la preuve, la modélisation et l'algorithmique. Nous pouvons approfondir notre étude en analysant le fonctionnement de l'algorithme glouton et les

[31] Triangulation : « un graphe plan simple connexe dans lequel toutes les faces sont de degré 3 » (Bondy & Murty, 2008, p. 267)
[32] Cycle facial : cycle qui borne ses régions, ou faces.

conditions d'optimalité et, en même temps, en explorant le théorème des quatre couleurs, qui pose beaucoup de questions épistémologiques importantes, en particulier concernant la validité des preuves sur l'ordinateur. Nous souhaitons examiner en profondeur la place de la démonstration formelle dans les problèmes de coloration.

3.5.2.7.6 Applications et les modélisations de la coloration

La coloration des graphes débouche sur une variété d'applications, entre autres dans l'industrie, en ingénierie de l'organisation, et en informatique. Plusieurs exemples peuvent être modélisés par une coloration des graphes, comme la planification des examens, l'attribution des fréquences sur les chaînes de télévision, le transport de produits chimiques, la régulation de la circulation, la conservation de cultures bactériennes. Le théorème des quatre couleurs est souvent énoncé en termes de coloration de carte géographique : « une carte géographique délimitant des régions sans enclave peut être colorée par quatre couleurs ». On peut en effet modéliser une carte géographique en plaçant un sommet par capitale régionale, et une arête lorsqu'il existe une frontière non réduite à un point entre deux régions. La coloration des régions de la carte correspond bien à la coloration des sommets du graphe ainsi obtenu. Nous nous interrogeons également sur ces modélisations : quelles sont les objets qu'elles mobilisent, et quel type de construction est faite par les étudiants afin de pouvoir résoudre tel ou tel problème ? La place de la preuve, et de sa validation, constitue aussi un aspect à approfondir.

3.5.2.8 Synthèse sur la coloration

Les problèmes de la coloration des graphes demandent de mobiliser des capacités de raisonnement par récurrence, de raisonnement par l'absurde, et même d'utiliser un algorithme glouton. Le travail sur la coloration des graphes a fait rentrer les ordinateurs au fond des preuves. De plus le problème des quatre couleurs a été source de grandes controverses dans les sociétés de mathématique et d'informatique, et donc nous pouvons s'interroger sur le système de validation d'une preuve et, en particulier, si l'utilisation de l'informatique rende ou non une preuve acceptable. Plus précisément, dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons de repérer ce qui est présenté dans les ouvrages d'enseignement supérieur autour de ce théorème. La place de la modélisation dans la coloration des graphes est indispensable pour résoudre des problèmes et déboucher sur des applications concrètes. Nous cherchons à explorer la nature de cette modélisation et sa place dans les ouvrages universitaires. Nous nous posons donc les questions suivantes : comment ce grand type des problèmes est abordé dans les ouvrages (surtout les aspects preuves et modélisation) ? Quelles sont les points communs et les différences ?

3.5.3 Méthodologie d'analyse des ouvrages universitaires

Le module sur la théorie des graphes fait partie du programme de plusieurs filières scientifiques. Il est donc proposé à un public varié : futurs mathématiciens, futurs informaticiens, et futurs ingénieurs. Nous présentons dans cette partie la méthodologie d'analyse des ouvrages, dont l'objectif est de répondre à notre question de recherche Q3 « Quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées dans le supérieur et comment (quels choix) ? ». Les trois grands types de problèmes issus de la théorie des graphes que nous étudions sont : la recherche des parcours, le plus petit parcours, et la coloration. Dans chaque catégorie, les problèmes considérés génèrent : des définitions, des théorèmes, des propriétés, des preuves et des modélisations différentes. Ils se trouvent à l'intersection les uns des autres, et nouent des liens que nous allons décrire.

Notre cadre théorique pour conduire les analyses des ouvrages universitaires est basé sur les résultats de notre état de l'art, sur la grille d'analyse (que nous avons élaboré, et que nous présenterons ci-dessous), et sur l'organisation praxéologique de Chevallard. Nous nous servirons des entretiens que nous avons conduits avec les enseignants-chercheurs pour enrichir les analyses.

3.5.3.1 La grille d'analyse

Pour analyser les ouvrages universitaires, nous avons élaboré une grille d'analyse dont le but est de repérer des ressemblances et des différences entre les ouvrages, afin de les comparer et de conduire ultérieurement des analyses praxéologiques. Les critères ont été nourris par les résultats de l'état de l'art et par l'étude épistémologique. Cette grille contient des critères d'analyse groupés par thème. Le premier niveau de critères concerne les « spécificités de l'ouvrage » en termes d'éléments classiques de référence : le titre, l'année de publication, l'auteur de l'ouvrage, sa discipline. Nous avons fait le choix d'étudier des ouvrages destinés à des publics variés ; nous établissons donc un critère lié au public visé. Nous repérons le nombre de pages consacrées à la théorie des graphes dans le but d'identifier la posture de l'ouvrage, selon qu'il en donne une présentation générale ou qu'il la développe en profondeur.

Spécificités de l'ouvrage
• Titre de l'ouvrage • Année de publication • L'auteur de l'ouvrage • Discipline de l'auteur de l'ouvrage • Nombre de pages consacrés à la théorie des graphes • A qui est destiné l'ouvrage/public (niveau)/objectif

Tableau 3-59: Critères- Spécificités de l'ouvrage

Il existe plusieurs définitions/propriétés pour un même objet mathématique (Grenier & Payan, 1998; Ouvrier-Buffet, 2003) ce qui montre que la théorie des graphes n'est pas encore un domaine stabilisé au niveau didactique ; le choix des contenus pour l'enseignement n'est pas encore bien délimité. Afin de donner une vision claire de ce qui existe dans l'ouvrage, nous avons précisé un deuxième niveau de critère « définitions, propriétés, théorèmes ». Surtout, nous avons remarqué dans notre étude épistémologique/mathématique qu'il existe une variété d'exemples et de propriétés autour du domaine de la théorie des graphes en général. En ce qui concerne la nature de la rédaction, nous nous référons aux registres du Duval. Nous émettons l'hypothèse que les ouvrages ne présentent pas le même contenu de la même manière, et nous avons pour objectif d'investiguer davantage cet aspect.

Définitions, propriétés, théorèmes, lemmes, propositions
• Liste de définitions des objets (notions, concepts, etc.) de début (on se limite aux définitions qui sont avant le premier théorème ou la première propriété) • Nombre de définitions • Liste de conjectures • Nombre de conjectures • Liste de définitions des objets de suite • Nombre de définitions de la suite • Liste d'exemples • Nombre d'exemples • Liste de contre-exemples • Nombre des contre-exemples. • Liste des théorèmes/ propositions a) La preuve de théorème donné ou pas b) Si la preuve est donnée, en cours ou en exercice • Nombre de théorèmes • Liste des propriétés/ lemme • Nombres des propriétés/ lemmes • Liste des définitions dans la résolution des problèmes • Place des autres propriétés et théorèmes dans la résolution des problèmes • Liste de définitions, propriétés introduites dans une preuve • Nature de la rédaction (langage, formalisme ou pas, des représentations ou pas etc.)

Tableau 3-60: Critères- Définitions, propriétés, théorèmes, lemmes, propositions

L'existence d'un lien particulier avec la preuve, et le fait que les objets discrets offrent différentes visions de la preuve et du raisonnement (West, 2002; Hart & Martin, 2016)nous a conduit à définir un troisième niveau des critères : « preuves ». Son but est de préciser le nombre de preuves faites dans le cours ou dans l'exercice, les techniques de preuves déclarées par l'ouvrage, la nature de la rédaction (langage formel ou non), l'existence (ou non) des objets introduits au sein de la preuve, les propriétés en jeu dans la preuve, et la place des dessins dans la preuve. Cette présentation nous permettra de mieux comprendre la place et le rôle des preuves en théorie des graphes dans les ouvrages.

Preuves
• Nombre des preuves • Liste des techniques de preuves • Liste des preuves (lesquelles) a) Est-ce que c'est déclaré dans l'ouvrage la nature de la preuve (preuves de théorèmes/lemmes/propositions, d'un algorithme) ? b) Objets mathématiques en jeu (contenu des preuves), c) Les propriétés en jeu dans la preuve d) Technique de la preuve e) Place de la preuve (dans le cours ou dans l'exercice) f) Forme de la preuve : i. Nombre d'étapes ii. Place des dessins dans la preuve, et s'ils sont instrumentés ou pas iii. Nature de la rédaction (langage utilisé : moins de symbolisme, plus de formalité)

Tableau 3-61: Critères- Preuves

La double spécificité de la récurrence, qui permet d'une part la construction des objets, et qui constitue d'autre part un outil de preuve pour plusieurs résultats en mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 1998), nous amène à regarder comment ces spécificités apparaissent dans les ouvrages. Quel lien existe entre les mathématiques discrètes et la récurrence ? Plusieurs chercheurs soulignent le besoin de concevoir des activités « non classiques » permettant de faire émerger les erreurs des étudiants afin d'arriver à une compréhension profonde du concept de la récurrence (Carotenuto, Coppola, & Di Martino, 2018; Grenier, 2012; Ernest, 1984). C'est dans ce contexte que nous avons défini le quatrième niveau de critère. Nous y repérons le nombre de preuves par récurrence, leur place (dans les cours ou pas). Nous faisons l'hypothèse qu'il existe un lien particulier avec la récurrence, lien qui peut être dû à l'existence, chez les objets sur lesquels les étudiants agissent, de certaines caractéristiques épistémologiques. Ceci nous a conduit à introduire le critère suivant : la nature des objets sur lesquels les auteurs travaillent la récurrence. Nous posons aussi la question du lien entre la récurrence et les preuves d'algorithmes (nous en parlerons ci-dessous). Enfin, nous repérons des éléments autour de la structure de la récurrence, la notation et le langage utilisés, la manière dont la particularité du discret est évoquée, en notant les similarités et les différences entre les ouvrages.

La récurrence
• Nombres des preuves sur la récurrence • Place de la preuve (cours/exercice) • La nature des objets sur lesquels on travaille la récurrence, et la place des algorithmes • Structure de la preuve (mettre en évidence les étapes, comment on écrit la quantification) • Explicitation et notation de la propriété dépendant de l'entier naturel n a) Cette propriété est-elle énoncée clairement ? b) Quelle notation est utilisée pour la designer ? c) Le domaine de la définition et la nature de la variable sont-ils mentionnés ? i. Initialisation ii. Hérédité : 1. Présence et écriture de la quantification ; 2. Présence et écriture de l'implication ; 3. Présence et écriture de la conclusion de l'hérédité • Nature de la rédaction • Structure de la conclusion

Tableau 3-62: Critères- La récurrence

L'algorithme possède plusieurs aspects : certains font référence à l'outil, d'autres à l'objet. Regarder l'algorithme en tant qu'outil revient à se concentrer sur son utilisation pour résoudre des problèmes. Regarder l'algorithme en tant qu'objet conduit à s'intéresser aux questions de bon fonctionnement, de domaine de validité, de complexité et de description des algorithmes (Modeste, 2012). Nous avons évoqué les cinq critères qui constitue un algorithme : le problème, l'effectivité, la preuve, la complexité et les modèles théoriques. En ce qui concerne les algorithmes présentés dans les ouvrages universitaires, nous cherchons à repérer leur nombre et leur fonction dans les cours. Ces algorithmes remplacent-ils, ou non, des preuves ? Nous vérifions l'existence de l'aspect « preuve » en nous appuyant sur la dualité outil/objet de Douady (1992), c'est-à-dire que nous observons si les preuves de correction et de terminaison sont faites ou pas. Nous souhaitons interroger le lien particulier entre preuve et algorithme, dû au fait que l'algorithme fait appel à des raisonnements communs aux mathématiques et à un mode de pensée spécifique (Gravier, Ouvrier-Buffet, & Modeste, 2010).

Les algorithmes
• Nombre d'algorithmes a) Rôle de l'algorithme (Est-ce que l'algorithme remplace les preuves ?) b) Aspects présents c) Preuves d'algorithmes (preuves de correction et de terminaison) sont faites ou pas • Algorithme comme objet ou outil ?

Tableau 3-63: Critères- Les algorithmes

Nous avons défini le dernier niveau de critères « modélisations / représentations » afin d'identifier si la modélisation constitue un support visuel de représentation (ou un support de représentation qui aide à réfléchir les objets en jeu) ou s'il s'agit d'un travail de modélisation dans le sens de Kaiser : situation initiale (problème réel), action sur des objets mathématiques et enfin recontextualisation (Kaiser, 2014). Nous avons donc précisé les sous-critères suivants pour analyser l'aspect de la modélisation dans les ouvrages :

Modélisations/ représentations
• Nombre de modélisations a) Lieu de la modélisation b) Niveau de la modélisation (outil/objet) c) Nature de la modélisation (représentation ou modélisation)

Tableau 3-64: Critères- Modélisations/ représentations

3.5.3.2 Les praxéologies de Chevallard

Les problèmes que nous avons choisis sont présents dans plusieurs ouvrages, mais leur traitement ne se fait pas de la même manière. Nous avons précisé dans la partie théorique de la thèse que nous nous appuyons sur les praxéologies de Chevallard (1998) pour conduire nos analyses des ouvrages universitaires. Introduite au début des années 1990, la Théorie Anthropologique du Didactique (notée TAD dans ce qui suit) de Chevallard propose un modèle descriptif pour décrire la genèse et l'évolution des objets de savoir dans une institution, et pour décrire les rapports institutionnels et personnels à un objet de savoir des savoirs. Étant donné qu'une connaissance n'est pas une entité isolée, cette modélisation se fait en termes de praxéologie qui se décompose en *praxis* (pour décrire les savoirs en action) et en *logos* (pour expliquer les savoirs en action). Le savoir est d'abord le discours permettant de justifier et de produire des techniques. La *praxis* se réfèrent à la pratique, aux savoir-faire, tandis que le *logos* représente la théorie, les discours qui légitiment, décrivent, expliquent la *praxis*. Nous avons fait le choix de ne pas détailler ici la genèse complète de cette théorie, mais il nous semble important de préciser que ce cadre théorique est le résultat de travaux collectifs et le fruit de nombreuses interactions. Nous présentons dans ce qui suit les aspects de ce cadre théorique qui nous seront utiles tout au long de notre travail de thèse.

Pour chacune des catégories de problèmes discutées dans le paragraphe ci-dessus, nous proposons tout d'abord une analyse praxéologique, en effectuant une identification par type de tâche (T). Pour chaque type de tâche, nous donnons des exemples de tâches particulières. Nous présentons pour chacune les technique(s) (τ) de résolution que l'ouvrage élabore. Nous avons repéré la technique en vérifiant plusieurs éléments, tels que les exemples de résolution des tâches particulières, les preuves de théorèmes, et les questions d'exercices des chapitres. Quant à la technologie (θ) et la théorie (Ξ), nous verrons qu'elle n'est parfois pas présentée explicitement dans le cadre de la technique. Afin d'obtenir une analyse plus rigoureuse, nous avons utilisé plusieurs gestes permettant d'étudier le discours technologico-théorique à l'œuvre dans les ouvrages. Nous avons notamment vérifié tout le discours sur la technique, et nous avons noté les mots-clés au carrefour de la technique et de la preuve (dans le cas où la preuve constitue la technique associée à la tâche). Nous avons ensuite cherché l'endroit auquel ils ont été introduits dans l'ouvrage (à l'aide de l'index) pour former l'ensemble des définitions et propriétés justifiant la technique associée. De plus, nous avons cherché dans l'ouvrage (dans plusieurs endroits, pas nécessairement dans le même chapitre) les lemmes, théorèmes, et corolaires correspondants dans le cas où ceux-ci étaient cités par les auteurs dans leur discours technique. Pour les types de preuves, nous avons fait le choix de nous limiter à ce qui est dit explicitement par les auteurs en termes de mode de raisonnement. Les praxéologies que nous avons repérées se limitent à ce qui est présent explicitement à l'intérieur de la partie de cours des ouvrages, pour éviter des discussions sur les implicites qui pourraient masquer la compréhension du phénomène didactique observé.

Nous verrons qu'il est rare que les praxéologies soient décrites de manière exhaustive avec leurs quatre composantes (T, τ, θ, Ξ). Cette rareté peut signifier l'existence d'implicites dans les choix des auteurs ; des investigations supplémentaires seraient nécessaires pour approfondir notre analyse. Nous nous limiterons à prendre un type de tâches qui existe dans les cinq ouvrages pour pouvoir les comparer et conduire nos analyses. Un type de tâche identique n'est parfois pas traité de la même façon suivant les ouvrages. Du point de vue méthodologique, nous cherchons donc à comprendre la nature des différences entre les ouvrages au niveau praxéologique, et les constats en jeu.

De plus, nous cherchons à explorer plusieurs caractéristiques épistémologiques de notre ensemble de « problèmes », qui témoignent de l'efficacité de la théorie des graphes en tant qu'objet et en tant qu'outil (Douady, 1992). Nous avons remarqué dans notre état de l'art l'existence de différentes définitions et terminologies pour un même objet mathématique. Ceci prouve que le contenu de la théorie des graphes n'est pas encore stabilisé dans les ouvrages universitaires. La question de la particularité et de la validité de la preuve et de la modélisation sera explorée plus précisément dans l'analyse des ouvrages. Ces caractéristiques font partie des éléments qui guident les choix institutionnels au niveau de programmes et *curricula* universitaires. Nous interrogeons ces aspects afin de pouvoir analyser les ouvrages.

3.5.4 Analyse et résultats de la grille d'analyse

3.5.4.1 Niveau 1: Spécificités de l'ouvrage

Titre de l'ouvrage	**Graph Theory**	**Pearls in Graph Theory**	**Introduction to Graph Theory**	**Discrete Mathematics with Applications**	**Graph Theory**
Année de publication	2008	1994	2002	2011	2005
L'auteur	Adrian Bondy & U.S.R. Murty	Nora Hartsfield and Gerhard Ringel	Douglas West	Susanna S. Epp	Rienhard Diestel
Discipline de l'auteur[33]	Bondy : mathématicien et chercheur en théorie des graphes ; Murty : mathématicien et chercheur en combinatoire et optimisation	Mathématiciens et Chercheurs en théorie des graphes	Théoricien des graphes	Mathématicienne qui s'intéresse en mathématiques discrètes, à la logique et la preuve	Mathématicien et chercheur en théorie des graphes
Nombre de pages consacrés à la théorie des graphes	Tout l'ouvrage (651 pages)	Tout l'ouvrage (249 pages)	Tout l'ouvrage (588 pages)	92 pages	Tout l'ouvrage (410 pages)
Public / niveau	Étudiants de mathématiques et de l'informatique ; introduction à la théorie des graphes (Licence et master)	Pas précisé (Transversal)	Supérieur mais sans un public précis (Transversal)	Étudiants de mathématiques, ingénierie, Informatique, et « mathematics education » (Licence)	Étudiants en mathématiques pures (Licence et master)

Tableau 3-65: Spécificités des ouvrages

Nous pouvons grouper les ouvrages en trois grandes catégories, les ouvrages multidisciplinaires (Epp, 2011; Bondy & Murty, 2008), les ouvrages destinés aux mathématiciens (Diestel, 2005), et les ouvrages transversaux[34] (West, 2002; Hartsfield & Ringel, 1994)(afin de conduire des analyses plus fines et de pouvoir extraire des éléments de comparaisons (similarités et différences). Le choix de grouper les ouvrages en trois catégories s'effectue selon le niveau du public auquel est destiné l'ouvrage.

3.5.4.2 Niveau 2 : Définitions/ propriétés/ théorèmes/ lemmes/ propositions

Pour chaque type de problème principal, nous présentons tout d'abord un schéma qui conceptualise le contenu du cours et la temporalité des définitions, propositions, lemmes, exemples, et preuves, suivi d'une synthèse en fonction des critères.

---

[33] Nous avons recherché la discipline de l'auteur dans la préface de l'ouvrage et dans le cas où nous n'étions pas possible, nous avons recherché leurs profiles et leurs CV sur leurs pages sur ligne.

[34] Avec « transversaux » nous indiquons les ouvrages qui n'avaient pas précisé le niveau du public à qui est destiné l'ouvrage

3.5.4.2.1 Les parcours eulériens

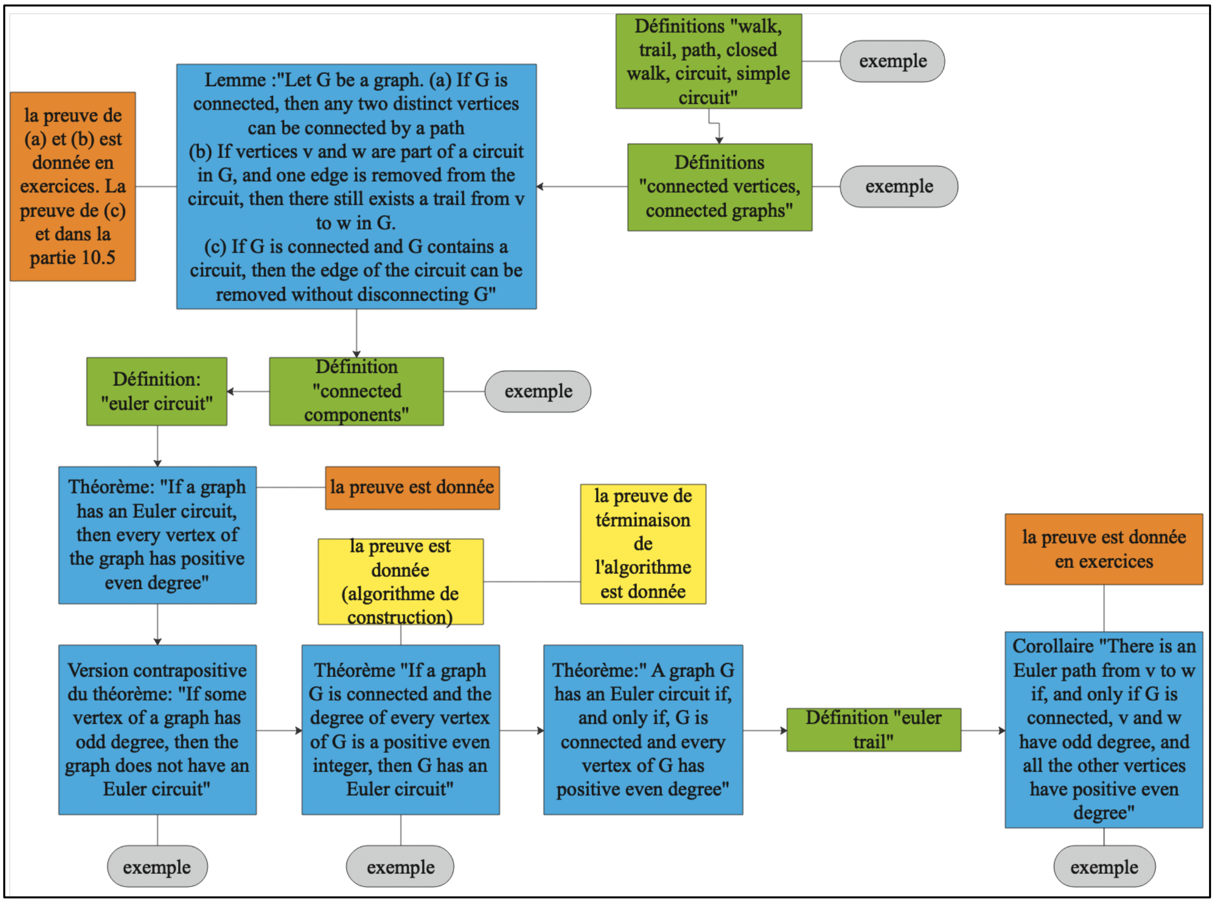


Figure 3-26: Ch. 10.2 Trails, Paths, and Circuits (Epp, 2011, pp. 642-660)

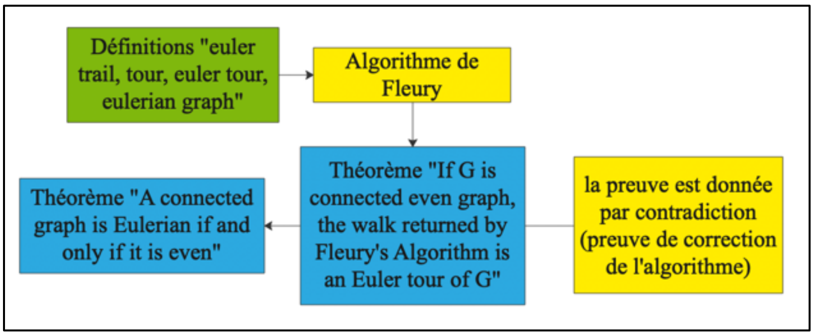


Figure 3-27: Ch. 3.3 Euler Tours (Bondy & Murty, 2008, pp. 86-90)

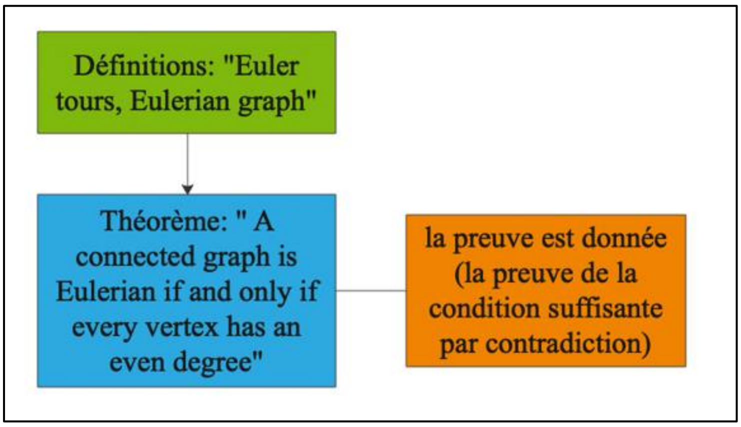


Figure 3-28: Ch1.8, Euler Tours (Diestel, 2005, p. 21)

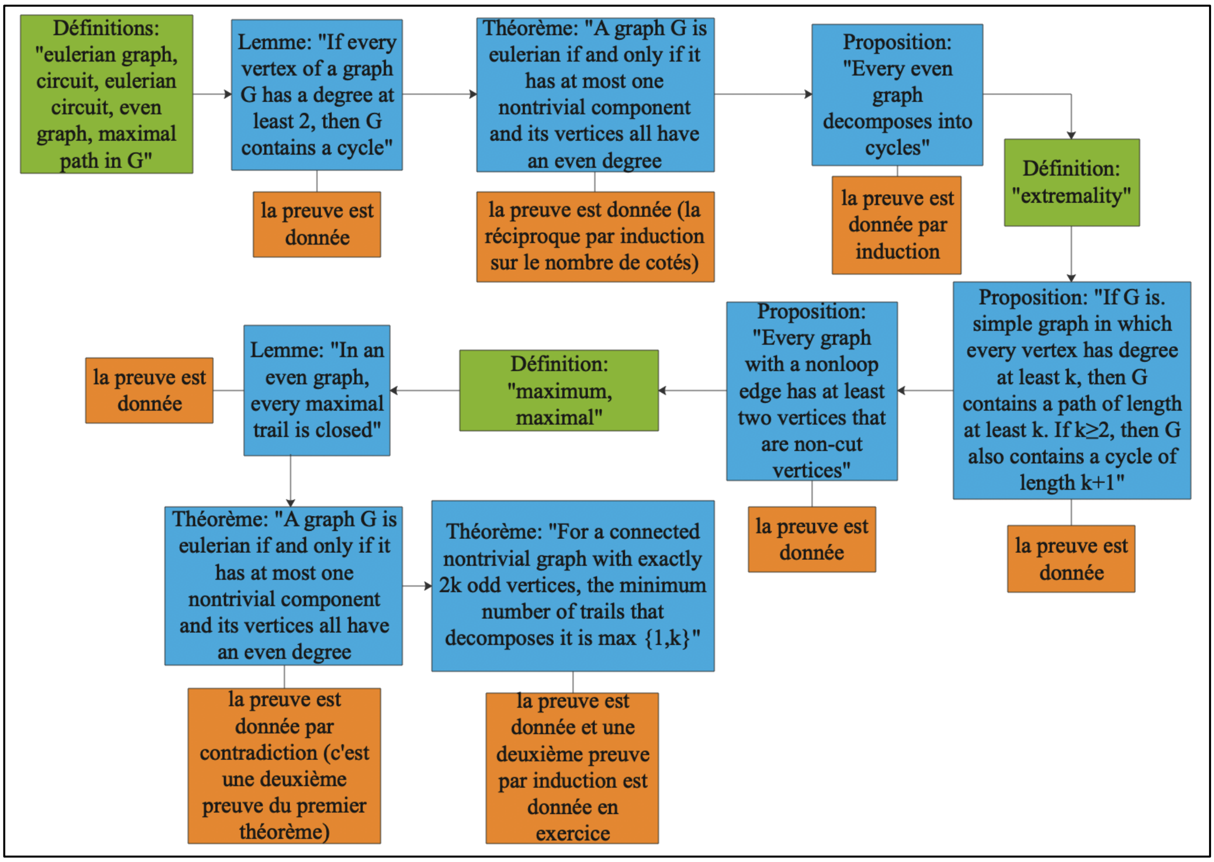


Figure 3-29: Ch.1, Fundamental Concepts- Eulerian Circuits (West, 2002, pp. 26-34)

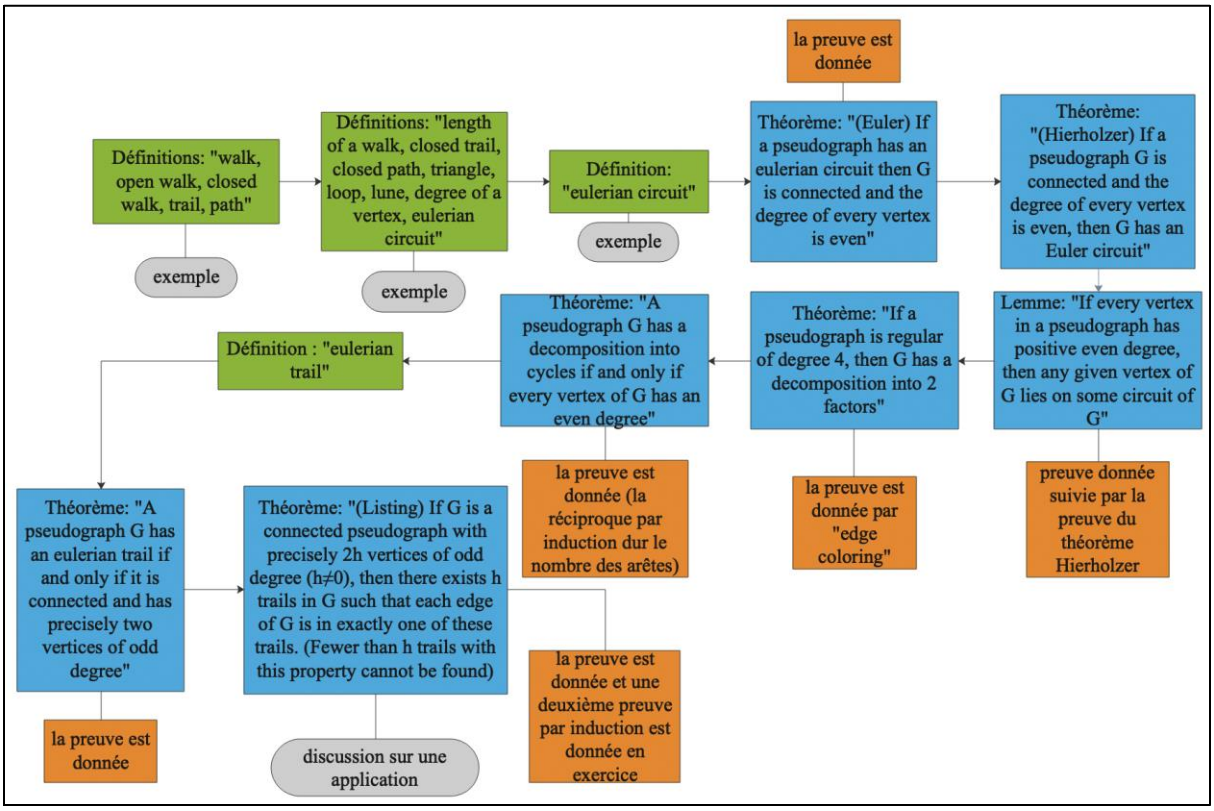


Figure 3-30: Ch. 3.1 Eulerian Circuits (Hartsfield & Ringel, 1994, pp. 49-58)

Nous remarquons d’après les schémas des parcours eulériens ci-dessus que les auteurs des cinq ouvrages ont fait le choix de commencer le chapitre par un ensemble de définitions de départ. Si ce choix était plus ou moins identique chez les auteurs, il nous semble intéressant de noter l’absence d’exemples chez West (2002), Bondy & Murty (2008) et Diestel (2005), ce qui s’explique par le fait que leurs ouvrages se focalisent sur les théorèmes et les preuves. Les seuls auteurs à inclure des exemples sont Epp (2011) (dans la catégorie multidisciplinaire) et Hartsfield & Ringel (1994) (catégorie transversale). Nous faisons l’hypothèse que le choix d’introduire des exemples peut être influencé par le type de public auquel s’adresse l’ouvrage. Plus précisément, Epp (2011) introduit ses exemples après les définitions et quelques théorèmes, tandis que l’ouvrage de Hartsfield & Ringel (1994) discute seulement des exemples, après les définitions. Les schémas nous permettent d’observer que l’introduction des objets dans les ouvrages se fait d’une façon axiomatique, sauf dans Epp (2011) qui introduit les objets nécessaires avant chaque théorème (une temporalité différente). Nous remarquons également l’existence de lemmes intermédiaires entre les théorèmes et entre les propositions chez Epp (2011), West (2002) et Hartsfield & Ringel (1994). Nous pouvons faire des hypothèses derrière le choix des auteurs, qui peuvent souhaiter vulgariser les théorèmes et les rendre plus compréhensibles en fonction du public auquel ils s’adressent. Nous notons parfois que pour certains ouvrages s’adressant au même type de public, les choix ne sont pas identiques (le cas de Epp (2011) et Bondy& Murty (2008)). Nous faisons donc l’hypothèse que cette variation peut dépendre de préférences implicites chez les auteurs.

3.5.4.2.2 Les plus petits parcours (le plus petit chemin et l'arbre couvrant de poids minimum)

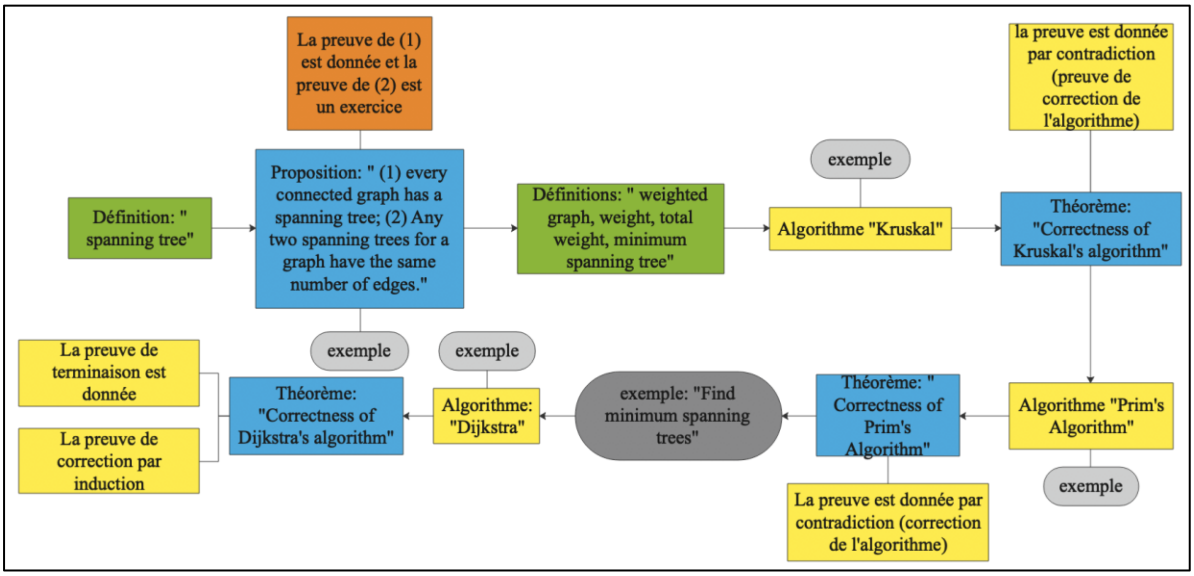


Figure 3-31: Ch. 10.7 Spanning Trees and Shortest Paths (Epp, 2011, pp. 701-716)

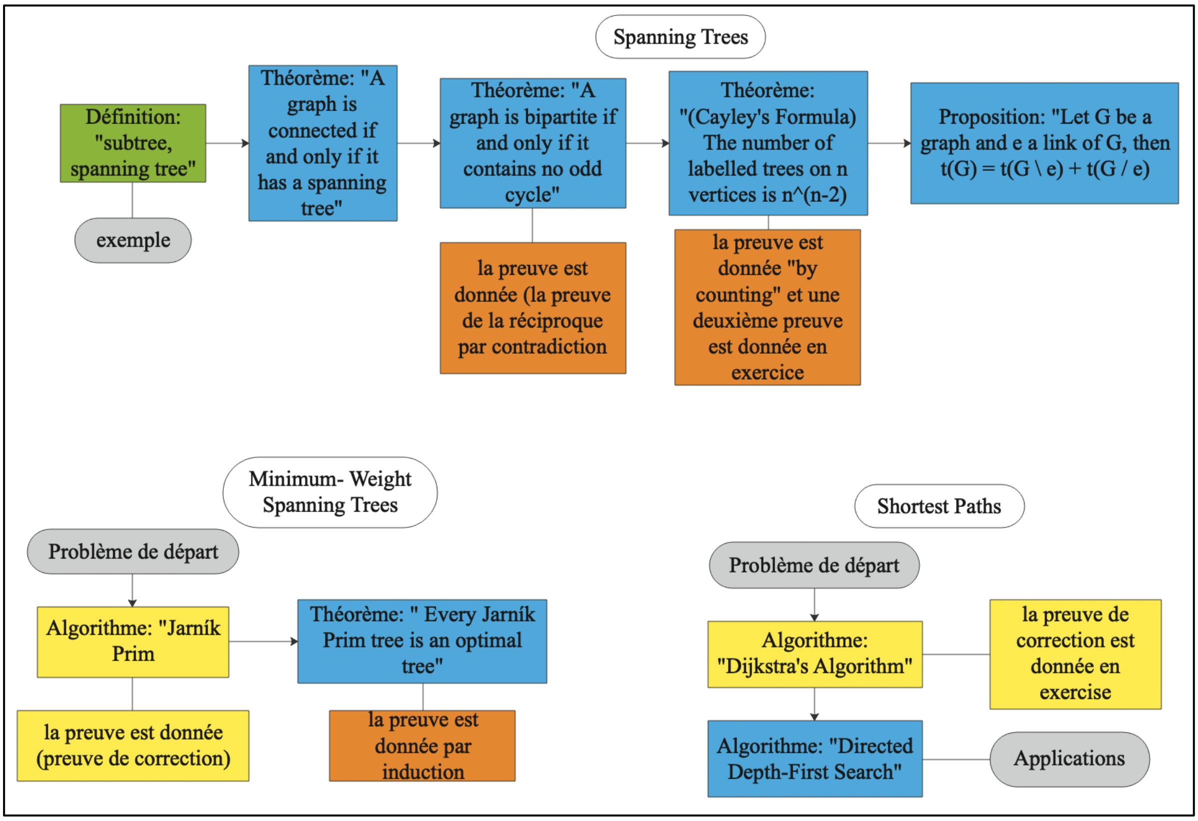


Figure 3-32: Ch. 4.2 Spanning Trees; Ch. 6.2 Minimum-Weight Spanning Trees (Bondy & Murty, 2008, pp. 105-110; 145-156)

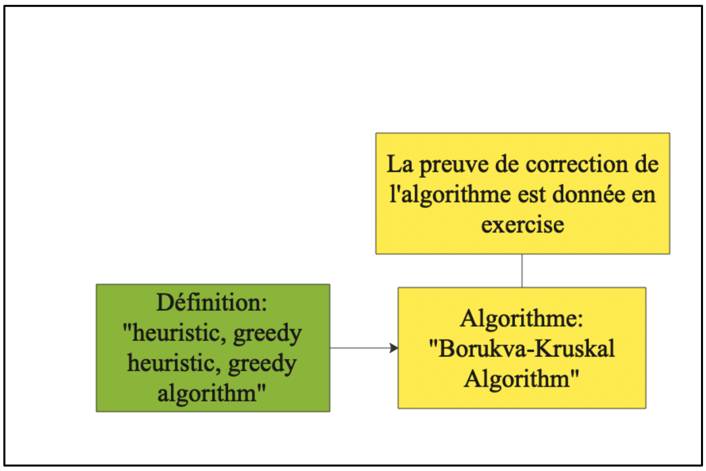


Figure 3-33: Ch. 8.5, Greedy Heuristics (Bondy & Murty, 2008, pp. 193-196)

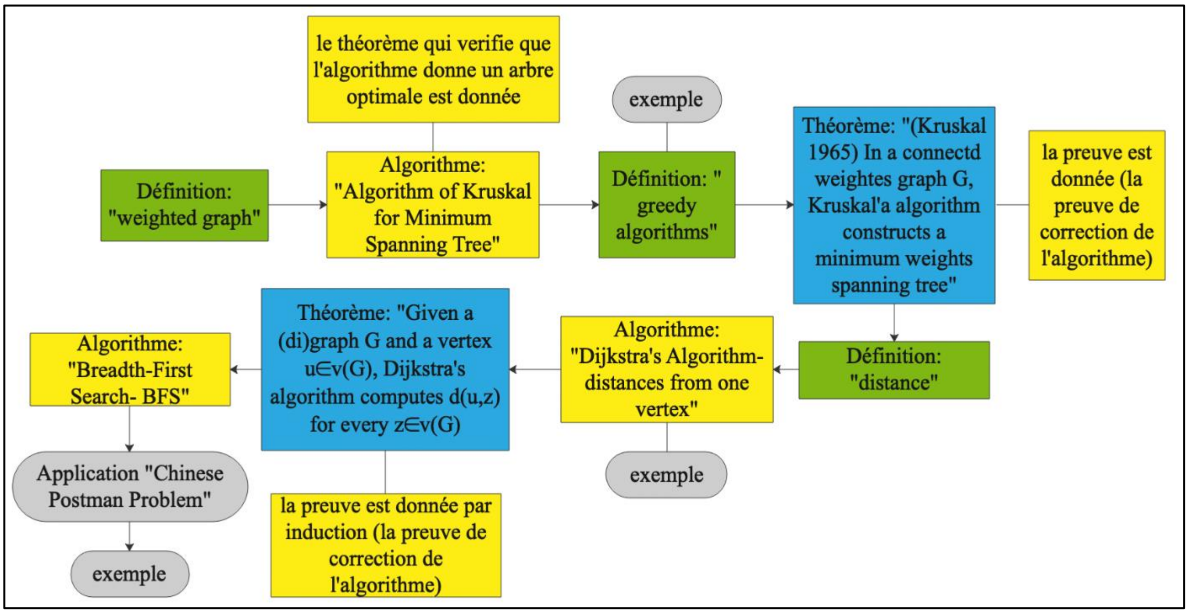


Figure 3-34: Ch. 2.3, Optimisation and Trees (West, 2002, pp. 95-100)

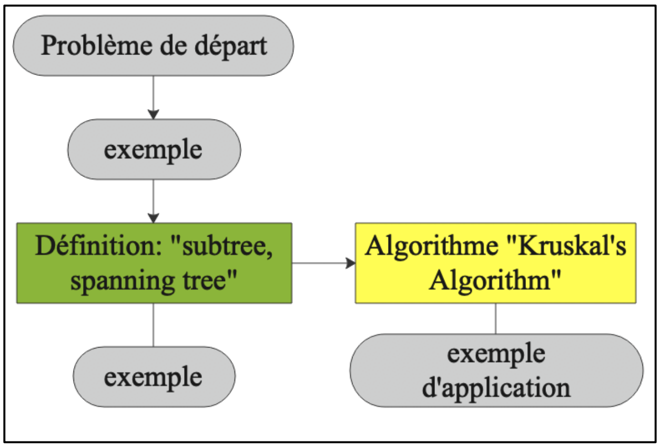


Figure 3-35: Ch. 7.1, Spanning Tree Algorithms (Hartsfield & Ringel, 1994, pp. 125-133)

Le seul ouvrage à ne pas parler de cette catégorie de problème était Diestel (2005). Nous faisons l'hypothèse que ce manque est la conséquence de l'absence d'applications, annoncé par l'auteur en préface de l'ouvrage.

> « this book offers an introduction to the theory of graphs as part of (pure) mathematics; it. contains neither algorithms nor' real world 'applications [...] serve students of computer science as much as their peers in mathematics » (Diestel, 2005, p. vii)

Pour les problèmes de type recherche de plus petit parcours, nous remarquons l'existence d'une hétérogénéité entre les choix des quatre autres ouvrages. Ces hétérogénéités concernent les choix des théorèmes, des algorithmes, des exemples et des preuves (les auteurs ne présentent pas les mêmes contenus de la même façon). La recherche du plus petit parcours se retrouve au sein de plusieurs applications de la théorie des graphes comme le montre les entretiens, l'état de l'art et la partie mathématique de cette thèse. Hart & Martin (2016) soulignent ainsi que le champ des mathématiques discrètes comprend plusieurs sujets, parmi lesquels les algorithmes : « […] *robust field with applications to a variety of real-world situations, and as such takes on growing importance in contemporary society. We take discrete mathematics to include a wide range of topics, including logic, game theory, algorithms, graph theory (networks)* […] *Crosscutting themes include discrete mathematical modeling, algorithmic problem solving, optimization, combinatorial reasoning, and recursive thinking.* » (Hart & Martin, 2016, pp. 14-15). Les enseignants-chercheurs ont bien souligné cet aspect lors des entretiens, à travers les déclarations suivantes :

« […] Et dans ce cours, j'ai introduit quelques algorithmes sur comment trouver le plus court chemin dans un graphe. « Bellman-Ford Algorithm », « Dijkstra Algorithm », ce sont des algorithmes qui donne une méthode pour trouver les plus courts chemins. (B2)

« […] faire marcher quelques algorithmes sur les graphes, le plus court chemin, l'arbre couvrant minimum et les flots » (B4)

Dans notre présentation mathématique (cf. 3.5.2), nous avons mentionné plusieurs exemples d'applications sur le plus court chemin, comme que la mise en place dans une ville d'un réseau électrique reliant plusieurs villes voisines d'une façon telle que la distance totale entre ces villes soit la plus courte possible (Epp, 2011).

D'après les schémas, les applications sur les plus petits parcours sont clairement présentes dans les quatre ouvrages concernés, et en plus grand nombre que les applications, elles aussi diverses, des parcours eulériens. Certains ouvrages donnent les exemples/applications avant d'introduire l'algorithme (Hartsfield & Ringel (1994), Bondy & Murty (2008), Epp (2011)). West (2002) a pour sa part fait le choix de donner ultérieurement une application de l'algorithme. Nous remarquons que la présence d'exemples n'est pas négligeable, ce qui s'explique par le fait que ce type de problème possède de nombreuses applications. Nous souhaitons approfondir davantage l'aspect de preuve de l'algorithme, que nous discuterons plus en détail dans la partie sur les algorithmes (cf. 0) et avec l'analyse praxéologique (cf. 0).

3.5.4.2.3 Le problème des quatre/cinq couleurs

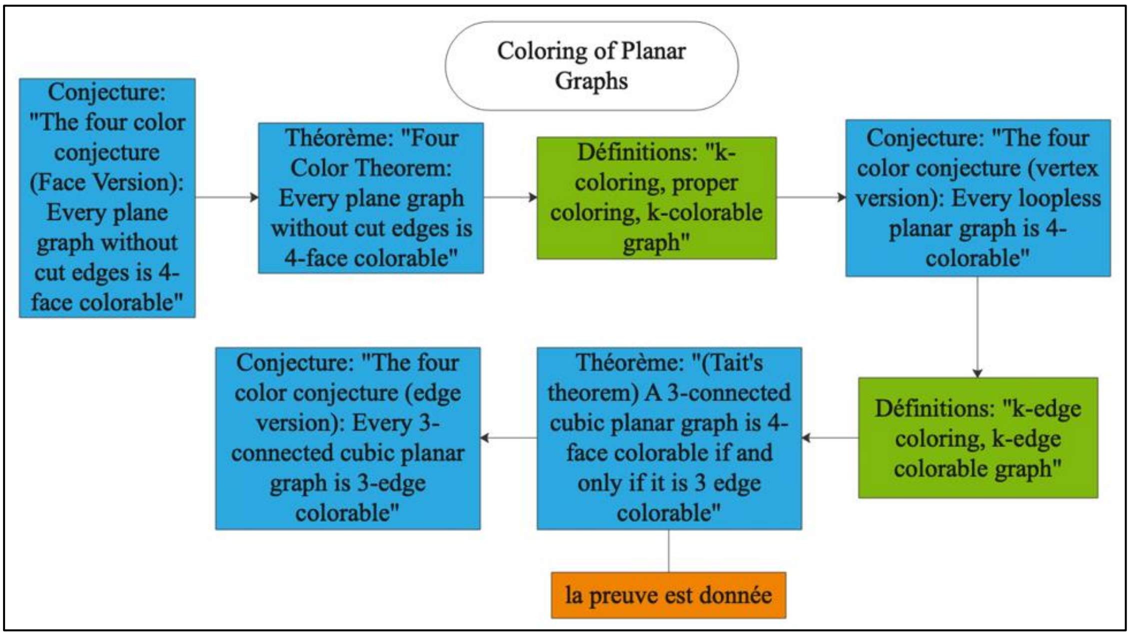


Figure 3-36: Ch. 11.1, Coloring of Planar Graphs (Bondy & Murty, Graph Theory, 2008, pp. 287-291)

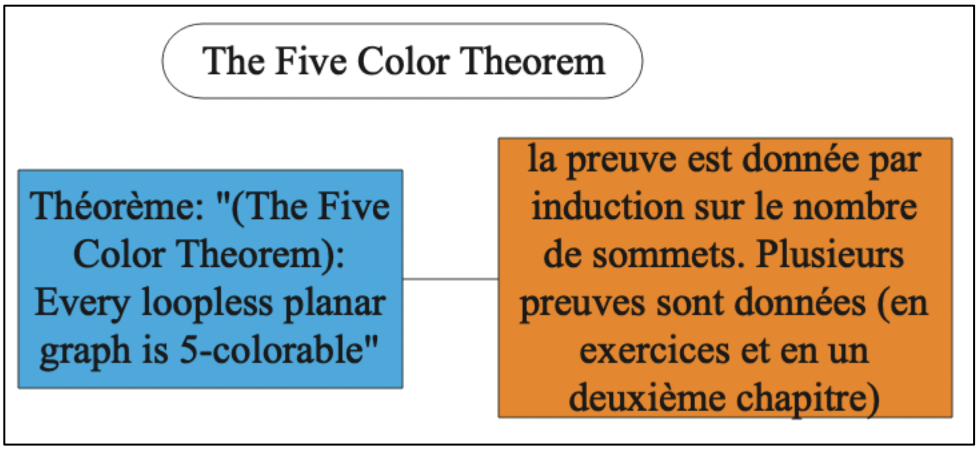


Figure 3-37: Ch11.2, The five color Theorem (Bondy & Murty, Graph Theory, 2008, pp. 291-293)

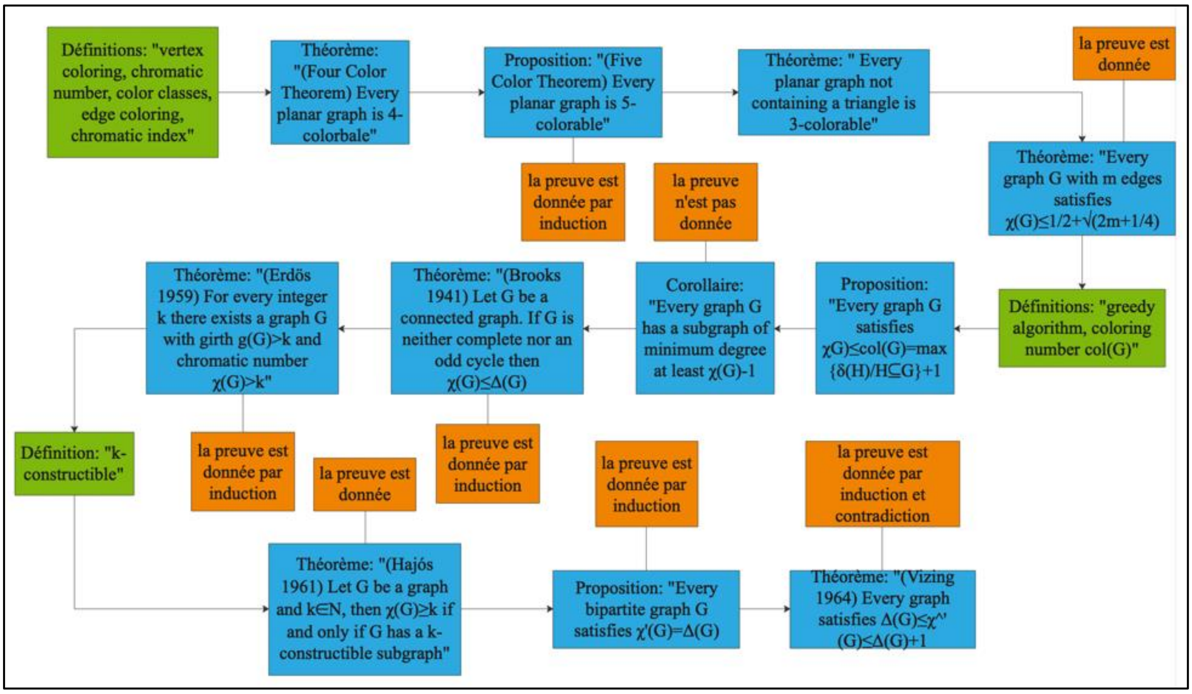


Figure 3-38: Ch. 5, Colouring (Diestel, 2005, pp. 111-121)

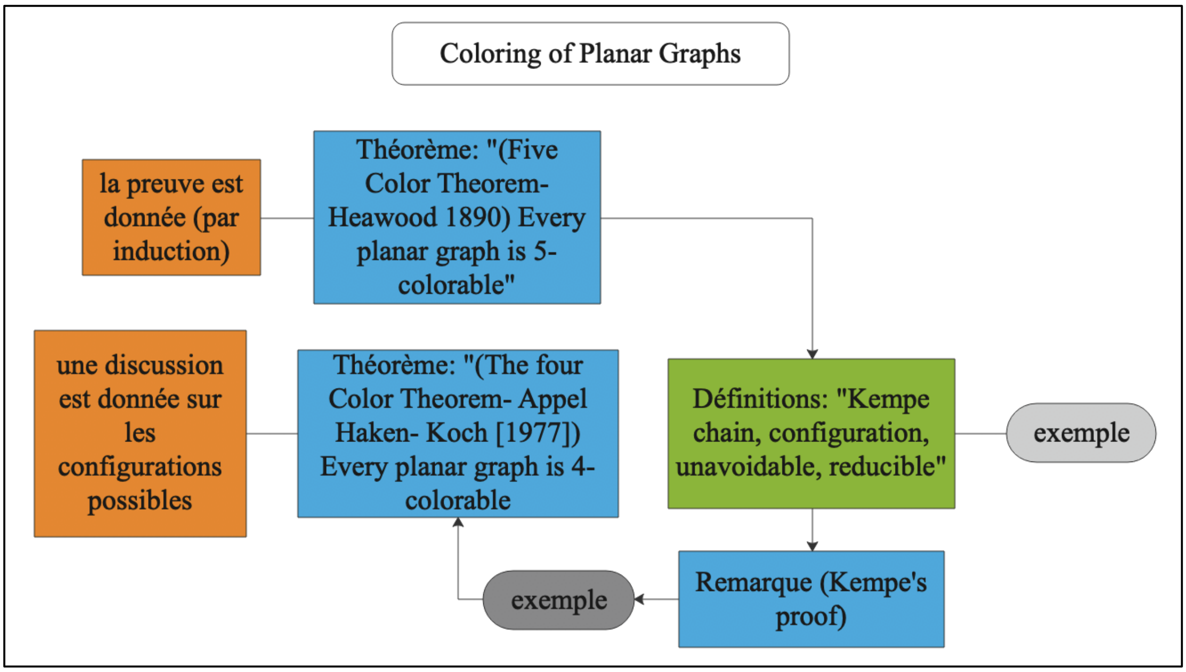


Figure 3-39: Ch. 6.3, Parameters of Planarity (West, 2002, pp. 257-260)

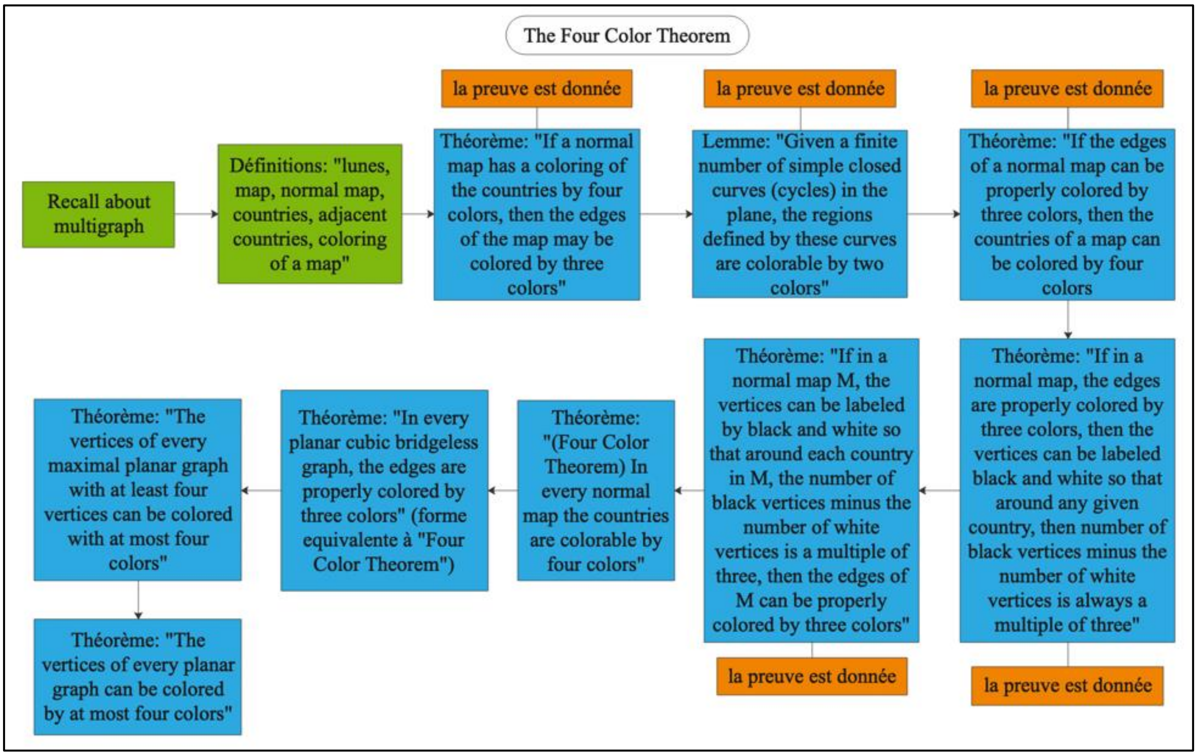


Figure 3-40: Ch. 8.2, The four Color Theorem (Hartsfield & Ringel, 1994, pp. 156-164)

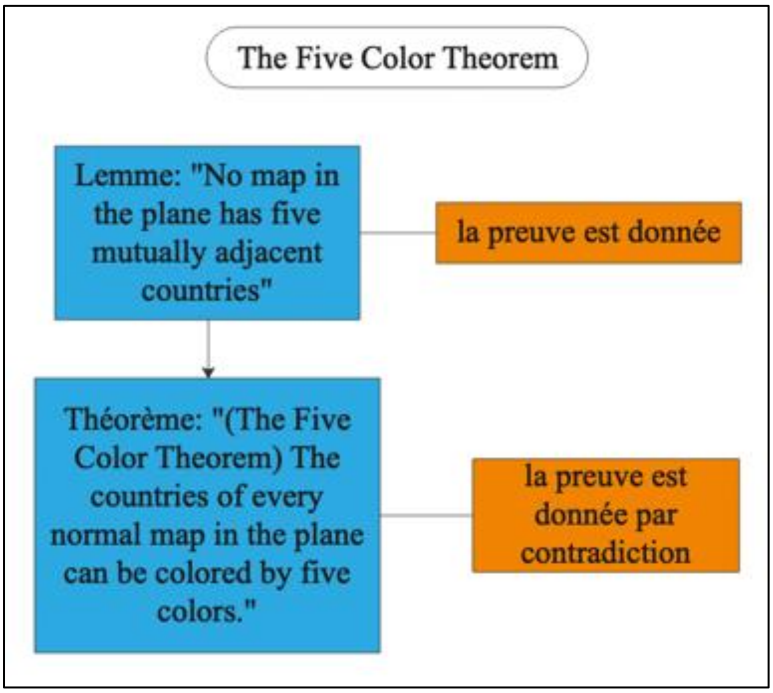


Figure 3-41: Ch. 8.3, The Five Color Theorem (Hartsfield & Ringel, 1994, pp. 162-168)

Le sujet de la coloration se présente de façon hétérogène selon les ouvrages. Un choix très large de théorèmes, de lemmes et de preuves est présenté dans les ouvrages. Certains dédient plusieurs chapitres ou parties autour de la coloration, tels que :

- Hartsfield & Ringel (Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction, 1994): Ch. 2 Colorings of Graphs (p. 23-49); Ch. 8 Drawings of Graphs (p. 149-179)
- West (Introduction to Graph Theory Second Edition, 2002): Ch. 5 Coloring of Graphs (p. 191-233); Ch. 6 Planar Graphs (partie 6.3, p. 257-273); Ch.7 Edges and Cycles (partie 7.3, 299-319)
- Bondy& Murty (Graph Theory, 2008): Ch. 11 The Four Color Problem (p. 287-295); Ch. 14 Vertex Colourings (p. 357- 391); Ch. 15 Colouring of Maps (p. 391-413); Ch. 17 Edge Colourings (p. 451-471)

L'ouvrage d'Epp (2011) n'aborde pas la coloration des graphes en tant que cours dans sa présentation mathématique. Dans la préface de son ouvrage, Epp (2011) précise que celui-ci comporte des exercices sur la coloration (exercices du Chapitre 10.1Graphs Définitions and Basic Properties (Epp, 2011, p. 642)); mais ces exercices ne sont pas dans le champ de ce travail de thèse : « *exercises were added to introduce students to graph coloring* » (Epp, 2011, p. xix). Diestel (2005) discute de la coloration dans un chapitre (sur plusieurs sous-parties). Le choix des contenus, qui est très large, montre bien que la coloration n'est pas stabilisée au niveau des ouvrages. Les théorèmes sont présentés à des endroits différents selon les ouvrages. En conséquence, nous avons fait le choix d'observer en particulier le problème de quatre couleurs et le théorème de cinq couleurs.

Les schémas montrent clairement que cette catégorie de problème a été étudiée en profondeur au cours de ces années, et qu'il existe beaucoup de théorèmes et de résultats s'y rattachant. Ils ont une caractéristique commune : le théorème (conjecture) des quatre couleurs ne possède pas une preuve mathématique formelle, contrairement au théorème des cinq couleurs. Mais, les ouvrages abordent le sujet de manière variée. Le théorème de quatre couleurs est donné sous forme de conjecture uniquement dans l'ouvrage de Bondy & Murty (2008). Ces derniers, ainsi que West (2002), donnent la formulation du problème des quatre couleurs sous forme de théorème, et discutent de l'existence d'une preuve (compliquée) obtenue par « Robertson et al ». Bondy & Murty (2008) évoque différentes formulations possibles avant de les présenter (*Vertex Coloring - Edge Coloring*). West (2002) est le seul à mentionner les configurations obtenues à l'aide des ordinateurs. L'ouvrage de Hartsfield & Ringel (1994) donne le théorème, suivi de formes équivalentes et de discussions. Diestel (2005) donne des notes sur la preuve du théorème (en fin de chapitre) et présente les différents lemmes et théorèmes qui démontrent ses propriétés et ses vérités. Contrairement au théorème des quatre couleurs, nous remarquons que le théorème de cinq couleurs est donné par les quatre ouvrages ainsi que sa preuve (par induction, sauf dans l'ouvrage de Hartsfield & Ringel (1994) qui utilise une preuve par contradiction).

3.5.4.3 Niveau 3 : Preuves

Nous présentons dans ce niveau les tableaux explicitant le nombre de preuves données dans les parties de cours des ouvrages, ainsi que celles faites dans les exercices. Nous précisons également la nature de la preuve (preuve d'un théorème, preuve d'un algorithme, ou preuve par un algorithme). Nous donnons ensuite la liste des techniques de preuves utilisées telles qu'elles sont explicitées par les auteurs. Nous n'avons regardé que les preuves pour lesquelles un type de raisonnement était mis en évidence.

3.5.4.3.1 Les parcours eulériens

Nb des preuves par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy& Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nb des preuves données (en cours)	4	1	1	8	7
Nb des preuves données en exercices	3	0	0	1[35]	1[36]
Nb des preuves qui sont des algorithmes	1	0	0	0	0
Nb des preuves des théorèmes/ propositions-lemmes	3	1	1	8	7
Nb des preuves d'un algorithme	1	1[37]	0	0	0

Tableau 3-66: Preuves- les parcours eulériens

Type de preuve par ouvrage					
Type de preuve	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Algorithme (preuve constructive)	1/ 4	N/A	N/A	N/A	N/A
Contradiction	N/A	1/ 1	1/ 1	1/ 8	N/A
Induction	N/A	N/A	N/A	2/ 8	1/ 7
« Edge coloring »	N/A	N/A	N/A	N/A	1/ 7

[35] C'est une deuxième preuve.
[36] C'est une deuxième preuve.
[37] C'est le cas où l'algorithme est présenté sous la forme d'un théorème

Tableau 3-67: Types de preuves- les parcours eulériens

Nous remarquons que l'ouvrage d'Epp (2011), ainsi que les deux ouvrages transversaux (West (2002) et Hartsfield & Ringel (1994)) donnent davantage de preuves pour ce type de problème. Nous faisons l'hypothèse que cette présence importante des preuves est la conséquence de la présence de nombreux théorèmes et lemmes dans les chapitres de ces trois ouvrages. Nous remarquons que les ouvrages de Diestel (2005) et Bondy & Murty (2008) ont fait le choix de donner uniquement le théorème d'Euler, et sa preuve, sans inclure de définitions ni de propositions supplémentaires.

3.5.4.3.2 Les plus petits parcours

Nb des preuves par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy& Murty	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nb des preuves données (en cours)	5	5	N/A	2	0
Nb des preuves données en exercices	1	2	N/A	0	0
Nb des preuves qui sont des algorithmes	0	0	N/A	0	0
Nb des preuves des théorèmes/ propositions-lemmes	1	3	N/A	2	0
Nb des preuves d'un algorithme	4	2	N/A	2[38]	0

Tableau 3-68: Preuves- les plus petits parcours

Type de preuve par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Algorithme (preuve constructive)	3/ 5	2/ 5	N/A	3/ 5	N/A
Contradiction	2/ 5	1/ 5	N/A	N/A	N/A
Induction	1/ 5	1/ 5	N/A	1/ 5	N/A

Tableau 3-69: Types de preuves- les plus petits parcours

[38] Les algorithmes sont présentés sous la forme des théorèmes

Les problèmes de plus petit parcours peuvent être divisé en deux catégories : la recherche du plus court chemin et la recherche de l'arbre couvrant de poids minimum. Ils ont été présentés d'une manière hétérogène selon les ouvrages. Epp (2011) et West (2002) ont évoqué les deux catégories dans le même chapitre. Bondy & Murty (2008) les ont séparées ; Hartsfield & Ringel (1994) ont fait le choix de présenter uniquement le problème de l'arbre couvrant de poids minimum, sans donner aucune preuve.

Pour cette catégorie de problèmes, certaines preuves étaient des preuves de théorèmes et d'autres étaient des preuves de l'algorithmes. Nous notons que les algorithmes observés ont également eux-mêmes le statut des preuves (dans le sens où ils constituent des preuves constructives des plus petits chemins, et des preuves constructives des arbres couvrant de poids minimum).
Les deux types de preuves remarquables déclarés par les auteurs sont les preuves par contradiction et les preuves par récurrence (les autres sont des preuves directes).

3.5.4.3.3 La coloration

Nb des preuves par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy& Murty	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nb des preuves données (en cours)	N/A	1	7	1	7
Nb des preuves données en exercices	N/A	2	0	0	0
Nb des preuves qui sont des algorithmes	N/A	0	0	0	0
Nb des preuves des théorèmes/ propositions-lemmes	N/A	1	7	1	7
Nb des preuves d'un algorithme	N/A	0	0	0	0

Tableau 3-70: Preuves- la coloration

Type de preuve par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Contradiction	N/A	N/A	1/ 7	N/A	1/ 7
Induction	N/A	1/ 1	5/ 7	1/ 1	N/A

Tableau 3-71: Types de preuves- la coloration

Rappelons au préalable que l'ouvrage d'Epp (2011) ne présente pas d'éléments sur la coloration. Notre discussion portera donc sur les quatre autres ouvrages. En ce qui concerne la place des preuves, nous avons remarqué que certains ouvrages donnent la preuve du théorème des cinq couleurs dans la même partie que celle du problème de quatre couleurs (ce qui explique les schémas différents selon les ouvrages). En ce qui concerne le choix des preuves, il est remarquable que Bondy & Murty (2008) n'aient pas présenté d'autres preuves, comme par exemple le théorème de Tait. Diestel (2005), West (2002), et Hartsfield & Ringel (1994) donnent davantage de preuves dans leur ouvrage. Le fait qu'il y ait de nombreuses preuves peut être dû à la présentation par les auteurs de plusieurs théorèmes dans le contexte. Il n'existe pas de preuve pour le théorème de quatre couleurs (conjecture). Cependant West (2002) a discuté des configurations possibles autour de ce problème. La comparaison entre le nombre des preuves autour de la coloration n'est pas très significative car les ouvrages ont une temporalité différente et variée. Les mêmes contenus ne se trouvent pas au même endroit, ce qui montre bien la variabilité des contenus et soutient notre hypothèse sur le besoin de conduire ultérieurement une étude didactique plus fine.

Parmi les types de preuves déclarées dans les ouvrages, la preuve par récurrence est la mieux représentée, notamment dans l'ouvrage de Diestel (2005) (5 sur 7). En ce qui concerne le théorème des cinq couleurs, toutes les preuves travaillées font appel à la récurrence, sauf Hartsfield & Ringel (1994) qui proposent une preuve par contradiction.

3.5.4.4 Niveau 4 : La récurrence

3.5.4.4.1 Les parcours eulériens

Epp (2011), Bondy & Murty (2008) et Diestel (2005) ne présentent pas de preuve par récurrence dans les cours ; nous n'avons pas d'éléments de réponse concernant la récurrence pour les parcours eulériens. West (2002) et Hartsfield & Ringel (1994) présentent deux preuves en utilisant la technique de la récurrence. Ils ont choisi de faire l'induction sur le nombre d'arêtes (ou sommets) du graphe. Ceci montre que les objets pour lesquels les auteurs utilisent la récurrence constituent bel et bien des objets discrets.

En ce qui concerne la structure de la récurrence, les deux auteurs ont clairement fait le choix de présenter les étapes de l'induction (initialisation et hérédité) avec un langage naturel (peu de symbolisme et sans usage de quantificateurs). Il nous semble pertinent de poser la question du lien entre la nature des objets abordés (les sommets du graphe ou les arêtes) et le discours de la rédaction de la récurrence. La réponse à cette question peut se croiser avec notre état de l'art sur la récurrence (partie 2.4) qui indique que certains objets de la théorie des graphes rendent le travail sur la récurrence non-classique (Grenier, 2012).

La récurrence par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nb de preuves par récurrence	0	0	0	3	1
Nature des objets	N/A	N/A	N/A	Le nombre de sommets	Le nombre des arêtes
Nature du langage	N/A	N/A	N/A	Voir fig. 3-42	Voir fig. 3-43
Place des algorithmes	N/A	N/A	N/A	Pas d'algorithmes	Pas d'algorithmes

Tableau 3-72: La récurrence- les parcours eulériens

1.2.26. Theorem. A graph G is Eulerian if and only if it has at most one nontrivial component and its vertices all have even degree.

Proof: *Necessity.* Suppose that G has an Eulerian circuit C. Each passage of C through a vertex uses two incident edges, and the first edge is paired with the last at the first vertex. Hence every vertex has even degree. Also, two edges can be in the same trail only when they lie in the same component, so there is at most one nontrivial component.

Sufficiency. Assuming that the condition holds, we obtain an Eulerian circuit using induction on the number of edges, m.

Basis step: $m = 0$. A closed trail consisting of one vertex suffices.

Induction step: $m > 0$. With even degrees, each vertex in the nontrivial component of G has degree at least 2. By Lemma 1.2.25, the nontrivial component has a cycle C. Let G' be the graph obtained from G by deleting $E(C)$.

Since C has 0 or 2 edges at each vertex, each component of G' is also an even graph. Since each component also is connected and has fewer than m edges, we can apply the induction hypothesis to conclude that each component of G' has an Eulerian circuit. To combine these into an Eulerian circuit of G, we traverse C, but when a component of G' is entered for the first time we detour along an Eulerian circuit of that component. This circuit ends at the vertex where we began the detour. When we complete the traversal of C, we have completed an Eulerian circuit of G. ■

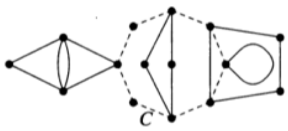


Figure 3-42: La récurrence- les parcours eulériens (West, 2002)

Theorem 3.1.5. *A pseudograph G has a decomposition into cycles if and only if every vertex of G has even degree.*

Proof. Assume that G has a decomposition into cycles. Consider one vertex A of G. If A belongs to h of these cycles, its degree must be $2h$.

Now we assume that every vertex of G has even degree. The proof of this direction is by induction on the number of edges in G. If G has all even degree vertices and only one or two edges, the theorem is true. Suppose that the theorem is true for pseudographs with fewer than n edges and all degrees of vertices even. Let G be a pseudograph with n edges and all even degrees. By Lemma 3.1.3, there exists a circuit in G. We take C to be a shortest circuit in G. Then C must be a cycle or we could shorten it by deleting all edges between repeated vertices. Now consider G minus the edges of C. The resulting graph, denoted by $G-C$, still has all even degrees and has fewer than n edges, so by the induction hypothesis $G-C$ has a decomposition into cycles. We now add back the cycle C, thus obtaining a decomposition of G into cycles. ■

Figure 3-43: La récurrence- les parcours eulériens (Hartsfield & Ringel, 1994)

3.5.4.4.2 Le plus petit parcours

La récurrence par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nb de preuves par récurrence	1	1	NA	1	0
Nature des objets	« length of the shortest path »	Poids de T $v(T)$	N/A	« least length of a path »	N/A
Nature du langage	Voir fig. 3-44	Voir fig. 3-46	N/A	Voir fig. 3-45	N/A
Place des algorithmes	Preuve de correction de l'algorithme de l'algorithme de Dijkstra	Preuve d'optimalité de l'arbre généré par l'algorithme de Prim	N/A	Preuve de correction de l'algorithme de Dijkstra	N/A

Tableau 3-73: La récurrence- les plus petits parcours

Dans cette catégorie de problèmes, les preuves par récurrence ont été avant tout utilisées pour les preuves de correction de l'algorithme de Dijkstra, à l'exception de l'ouvrage de Bondy & Murty (2008), qui a travaillé la preuve par récurrence dans une preuve d'optimalité de l'algorithme de Prim (recherche d'un arbre couvrant de poids minimum).
Il nous semble intéressant de souligner le fait que la récurrence se fait ici également sur la longueur du chemin, objet spécifique aux graphes, ce qui qui nous amène à renouveler la question, posée plus haut pour les parcours eulériens, de la nature du rapport aux objets discrets. Nous faisons l'hypothèse que les deux aspects : constructifs et dynamiques (Grenier, 2012) rend la récurrence indispensable pour le travail d'algorithmique (avec le fait que les objets sont discrets).

En ce qui concerne le langage de la rédaction de la récurrence, les trois preuves ont été écrites dans un langage naturel (pas de symbolisme et de quantificateurs). Epp (2011) énonce clairement la propriété initiale, l'initialisation, et l'implication ainsi que la conclusion, dans un langage courant, sans utilisation des quantificateurs. West (2002) présente la propriété initiale et l'initialisation, conduit « the induction step » (la fin de l'induction) mais ne rédige pas toutes les étapes ; la conclusion de l'hérédité, notamment, n'est pas explicitée. Bondy & Murty (2008) travaillent l'induction sans expliciter d'étape.
Nous nous interrogeons sur les raisons de cette différence entre les présentations, tout particulièrement si nous comparons les deux ouvrages, multidisciplinaires et destinés à un public varié, d'Epp (2011) et de Bondy & Murty (2008) : il existe des différences dans la manière de présenter les choses dans les ouvrages. Epp (2011) utilise un langage courant, quand Bondy & Murty (2008) utilisent davantage de symboles.

When a connected, simple graph with a positive weight for every edge is input to Dijkstra's algorithm with starting vertex a and ending vertex z, the output is the length of a shortest path from a to z.

Proof:

Let G be a connected, weighted graph with no loops or parallel edges and with a positive weight for every edge. Let T be the graph built up by Dijkstra's algorithm, and for each vertex u in G, let $L(u)$ be the label given by the algorithm to vertex u. For each integer $n \geq 0$, let the property $P(n)$ be the sentence

After the nth iteration of the while loop in Dijkstra's algorithm, (1) T is a tree, and (2) for every vertex v in T, $L(v)$ is the length of a shortest path in G from a to v. ← $P(n)$

We will show by mathematical induction that $P(n)$ is true for all integers n from 0 through the termination of the algorithm.

Show that P(0) is true: When $n = 0$, the graph T is a tree because it is defined to consist only of the vertex a and no edges. In addition, $L(a)$ is the length of the shortest path from a to a because the initial value of $L(a)$ is 0.

Show that for all integers $k \geq 0$, if P(k) is true then P(k + 1) is also true: Let k be any integer with $k \geq 0$ and suppose that

After the kth iteration of the while loop in Dijkstra's algorithm, (1) T is a tree, and (2) for every vertex v in T, $L(v)$ is the length of a shortest path in G from a to v. ← $P(k)$ inductive hypothesis

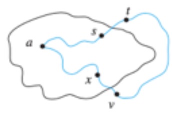
We must show that

After the $(k+1)$st iteration of the **while** loop in Dijkstra's algorithm, (1) T is a tree, and (2) for every vertex v in T, $L(v)$ is the length of a shortest path in G from a to v. ← $P(k+1)$

continued on page 714

So suppose that after the $(k+1)$st iteration of the **while** loop in Dikjstra's algorithm, the vertex v and edge $\{x, v\}$ have been added to T, where x is in $V(T)$. Clearly the new value of T is a tree because adding a new vertex and edge to a tree does not create a circuit and does not disconnect the tree. By inductive hypothesis for each vertex y in the tree before the addition of v, $L(y)$ is the length of a shortest path from a to y. So it remains only to show that $L(v)$ is the length of a shortest path from a to v.

Now, according to the algorithm, the final value of $L(v) = L(x) + w(x, v)$. Consider *any* shortest path from a to v, and let $\{s, t\}$ be the first edge in this path to leave T, where $s \in V(T)$ and $t \notin V(T)$. This situation is illustrated below.



Let $LSP(a, v)$ be the length of a shortest path from a to v, and let $LSP(a, s)$ be the length of a shortest path from a to s. Observe that

$LSP(a, v) \geq LSP(a, s) + w(s, t)$ — because the path from t to v has length ≥ 0

$\geq L(s) + w(s, t)$ — by inductive hypothesis because s is a vertex in T

$\geq L(x) + w(x, v)$ — t is in the fringe of the tree, and so if $L(s)+w(s, t)$ were less than $L(x)+w(x, v)$ then t would have been added to T instead of v.

On the other hand

$L(x) + w(x, v) \geq LSP(a, v)$ — because $L(x)+w(x, v)$ is the length of *a* path from a to v and so it is greater than or equal to the length of the shortest path from a to v.

It follows that $$LSP(a, v) = L(x) + w(x, v),$$

and, since $$L(v) = L(x) + w(x, v),$$

$L(v)$ is the length of a shortest path from a to v. This completes the proof by mathematical induction.

The algorithm terminates as soon as z is in T, and, since we have proved that the label of every vertex in the tree gives the length of the shortest path to it from a, then, in particular, $L(z)$ is the length of a shortest path from a to z.

Figure 3-44: La récurrence- preuve de correction de l'algorithme de Dijkstra (Epp, 2011)

2.3.7. Theorem. Given a (di)graph G and a vertex $u \in V(G)$, Dijkstra's Algorithm computes $d(u, z)$ for every $z \in V(G)$.

Proof: We prove the stronger statement that at each iteration,

1) for $z \in S$, $t(z) = d(u, z)$, and

2) for $z \notin S$, $t(z)$ is the least length of a u, z-path reaching z directly from S.

We use induction on $k = |S|$. Basis step: $k = 1$. From the initialization, $S = \{u\}$, $d(u, u) = t(u) = 0$, and the least length of a u, z-path reaching z directly from S is $t(z) = w(u, z)$, which is infinite when uz is not an edge.

Induction step: Suppose that when $|S| = k$, (1) and (2) are true. Let v be a vertex among $z \notin S$ such that $t(z)$ is smallest. The algorithm now chooses v; let $S' = S \cup \{v\}$. We first argue that $d(u, v) = t(v)$. A shortest u, v-path must exit S before reaching v. The induction hypothesis states that the length of the shortest path going directly to v from S is $t(v)$. The induction hypothesis and choice of v also guarantee that a path visiting any vertex outside S and later reaching v has length at least $t(v)$. Hence $d(u, v) = t(v)$, and (1) holds for S'.

To prove (2) for S', let z be a vertex outside S other than v. By the hypothesis, the shortest u, z-path reaching z directly from S has length $t(z)$ (∞ if there is no such path). When we add v to S, we must also consider paths reaching z from v. Since we have now computed $d(u, v) = t(v)$, the shortest such path has length $t(v) + w(vz)$, and we compare this with the previous value of $t(z)$ to find the shortest path reaching z directly from S'.

Section 2.3: Optimization and Trees 99

We have verified that (1) and (2) hold for the new set S' of size $k + 1$; this completes the induction step. ■

Figure 3-45: La récurrence- preuve de correction de l'algorithme de Dijkstra (West, 2002)

Theorem 6.10 *Every Jarník–Prim tree is an optimal tree.*

Proof Let T be a Jarník–Prim tree with root r. We prove, by induction on $v(T)$, that T is an optimal tree. The first edge added to T is an edge e of least weight in the edge cut associated with $\{r\}$; in other words, $w(e) \leq w(f)$ for all edges f incident with r. To begin with, we show that some optimal tree includes this edge e. Let T^* be an optimal tree. We may assume that $e \notin E(T^*)$. Thus $T^* + e$

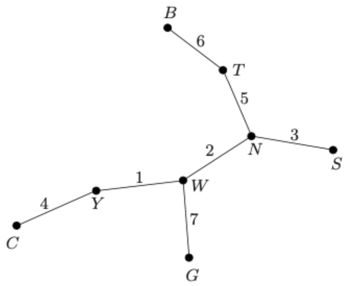


Fig. 6.6. An optimal tree returned by the Jarník–Prim Algorithm

contains a unique cycle C. Let f be the other edge of C incident with r. Then $T^{**} := (T^* + e) \setminus f$ is a spanning tree of G. Moreover, because $w(e) \leq w(f)$,

$$w(T^{**}) = w(T^*) + w(e) - w(f) \leq w(T^*)$$

As T^* is an optimal tree, equality must hold, so T^{**} is also an optimal tree. Moreover, T^{**} contains e.

Now consider the graph $G' := G / e$, and denote by r' the vertex resulting from the contraction of e. There is a one-to-one correspondence between the set of spanning trees of G that contain e and the set of all spanning trees of G' (Exercise 4.2.1a). Thus, to show that the final tree T is an optimal tree of G, it suffices to show that $T' := T / e$ is an optimal tree of G'. We claim that T' is a Jarník–Prim tree of G' rooted at r'.

Consider the *current* tree T at some stage of the Jarník–Prim Algorithm. We assume that T is not simply the root vertex r, and thus includes the edge e. Let $T' := T / e$. Then $\partial(T) = \partial(T')$, so an edge of minimum weight in $\partial(T)$ is also an edge of minimum weight in $\partial(T')$. Because the *final* tree T is a Jarník–Prim tree of G, we deduce that the final tree T' is a Jarník–Prim tree of G'. As G' has fewer vertices than G, it follows by induction that T' is an optimal tree of G'. We conclude that T is an optimal tree of G. □

Figure 3-46: La récurrence- preuve de correction de l'algorithme de Jarnìk-Prim (Bondy & Murty, Graph Theory, 2008)

3.5.4.4.3 La coloration

La récurrence par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nb de preuves par récurrence	N/A	1	5	1	0
Nature des objets	N/A	Le nombre des sommets	Coloration des sommets ; $\|G\|$, $\|\|G\|\|$	$n(G)$	N/A
Nature du langage	N/A	Voir fig. 3-48	Voir fig. 3-47	Voir fig. 3-49	N/A
Place des algorithmes	N/A	Pas d'algorithmes	Pas d'algorithmes	N/A	N/A

Tableau 3-74: La récurrence- la coloration

Pour la coloration, les preuves par récurrence sont très fréquentes, surtout chez Diestel (2005). Au carrefour de la récurrence, les objets en jeu dans cette catégorie sont le nombre des sommets et l'ordre de G, deux objets de nature discrète. Nous faisons l'hypothèse que ces objets mettent en jeu des manipulations et des utilisations de propriétés autour des graphes plus faciles à exprimer et à comprendre (tel que l'explicitation de la propriété qui n'utilise pas nécessairement l'entier naturel n), un aspect qui renforce l'état de l'art sur la puissance des objets discrets pour mener des raisonnements sur la récurrence (Grenier, 2012).

Dans les trois exemples ci-dessous, nous remarquons que la rédaction de l'initialisation et de la conclusion prend la forme d'un langage naturel (sans quantificateurs ni implication).
Il nous semble donc pertinent de poser la question suivante : quels sont les cas où les objets discrets ne nécessitent pas une écriture formelle de la récurrence ?

Proposition 5.1.2. (Five Colour Theorem)
Every planar graph is 5-colourable.

Proof. Let G be a plane graph with $n \geqslant 6$ vertices and m edges. We assume inductively that every plane graph with fewer than n vertices can be 5-coloured. By Corollary 4.2.10,

$$d(G) = 2m/n \leqslant 2(3n-6)/n < 6;$$

let $v \in G$ be a vertex of degree at most 5. By the induction hypothesis, the graph $H := G - v$ has a vertex colouring $c: V(H) \to \{1, \dots, 5\}$. If c uses at most 4 colours for the neighbours of v, we can extend it to a 5-colouring of G. Let us assume, therefore, that v has exactly 5 neighbours, and that these have distinct colours.

5.1 Colouring maps and planar graphs 113

Let D be an open disc around v, so small that it meets only those five straight edge segments of G that contain v. Let us enumerate these segments according to their cyclic position in D as $s_1, \dots, s_5$, and let vv_i be the edge containing s_i ($i = 1, \dots, 5$; Fig. 5.1.1). Without loss of generality we may assume that $c(v_i) = i$ for each i.

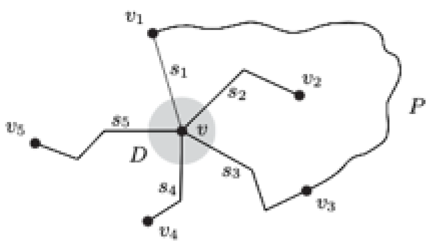


Fig. 5.1.1. The proof of the five colour theorem

Let us show first that every v_1–v_3 path $P \subseteq H$ separates v_2 from v_4 in H. Clearly, this is the case if and only if the cycle $C := vv_1Pv_3v$ separates v_2 from v_4 in G. We prove this by showing that v_2 and v_4 lie in different faces of C.

Let us pick an inner point x_2 of s_2 in D and an inner point x_4 of s_4 in D. Then in $D \setminus (s_1 \cup s_3) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus C$ every point can be linked by a polygonal arc to x_2 or to x_4. This implies that x_2 and x_4 (and hence also v_2 and v_4) lie in different faces of C: otherwise D would meet only one of the two faces of C, which would contradict the fact that v lies on the frontier of both these faces (Theorem 4.1.1).

Given $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, let $H_{i,j}$ be the subgraph of H induced by the vertices coloured i or j. We may assume that the component C_1 of $H_{1,3}$ containing v_1 also contains v_3. Indeed, if we interchange the colours 1 and 3 at all the vertices of C_1, we obtain another 5-colouring of H; if $v_3 \notin C_1$, then v_1 and v_3 are both coloured 3 in this new colouring, and we may assign colour 1 to v. Thus, $H_{1,3}$ contains a v_1–v_3 path P. As shown above, P separates v_2 from v_4 in H. Since $P \cap H_{2,4} = \emptyset$, this means that v_2 and v_4 lie in different components of $H_{2,4}$. In the component containing v_2, we now interchange the colours 2 and 4, thus recolouring v_2 with colour 4. Now v no longer has a neighbour coloured 2, and we may give it this colour. $\square$

Figure 3-47: La récurrence- preuve du théorème de cinq couleurs (Diestel, 2005)

Theorem 11.6 The Five Colour Theorem
Every loopless planar graph is 5-colourable.

Proof By induction on the number of vertices. As observed in our earlier discussion, it suffices to prove the theorem for 3-connected triangulations. So let G be such a triangulation. By Corollary 10.22, G has a vertex v of degree at most five. Consider the plane graph $H := G - v$.

By induction, H has a proper 5-colouring. If, in this colouring of H, one of the five colours is assigned to no neighbour of v, we may assign it to v, thereby

292 11 The Four-Colour Problem

extending the proper 5-colouring of H to a proper 5-colouring of G. We may assume, therefore, that the five neighbours of v together receive all five colours.

To fix notation, let $C := v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ be the facial cycle of H whose vertices are the neighbours of v in G, where v_i receives colour i, $1 \leq i \leq 5$. We may suppose that the vertex v of G lies in $\mathrm{int}(C)$, so that all the bridges of C in H are outer bridges. If there is no bridge of C in H containing both v_1 and v_3, then by swapping the colours of the vertices coloured 1 and 3 in all the bridges of C containing v_1, we obtain a proper 5-colouring of H in which no vertex of C has colour 1. This colour may now be assigned to v, resulting in a proper 5-colouring of G. Thus we may assume that there is a bridge B_1 of C in H having v_1 and v_3 as vertices of attachment. Likewise, there is a bridge B_2 of C in H having v_2 and v_4 as vertices of attachment. But now the bridges B_1 and B_2 overlap, contradicting Theorem 10.26. □

Figure 3-48: La récurrence- preuve du théorème de cinq couleurs (Bondy & Murty, 2008)

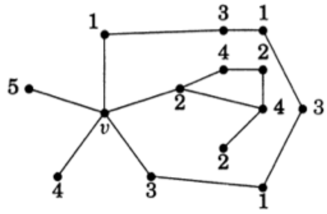
6.3.1. Theorem. (Five Color Theorem—Heawood [1890]) Every planar graph is 5-colorable.

Proof: We use induction on $n(G)$.

Basis step: $n(G) \leq 5$. All such graphs are 5-colorable.

Induction step: $n(G) > 5$. The edge bound (Theorem 6.1.23) implies that G has a vertex v of degree at most 5. By the induction hypothesis, $G - v$ is 5-colorable. Let $f\colon V(G-v) \to [5]$ be a proper 5-coloring of $G - v$. If G is not 5-colorable, then f assigns each color to some neighbor of v, and hence $d(v) = 5$. Let v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 be the neighbors of v in clockwise order around v. Name the colors so that $f(v_i) = i$.

Let $G_{i,j}$ denote the subgraph of $G - v$ induced by the vertices of colors i and j. Switching the two colors on any component of $G_{i,j}$ yields another proper 5-coloring of $G - v$. If the component of $G_{i,j}$ containing v_i does not contain v_j, then we can switch the colors on it to remove color i from $N(v)$. Now giving color i to v produces a proper 5-coloring of G. Thus G is 5-colorable unless, for each choice of i and j, the component of $G_{i,j}$ containing v_i also contains v_j. Let $P_{i,j}$ be a path in $G_{i,j}$ from v_i to v_j, illustrated below for $(i, j) = (1, 3)$.



Consider the cycle C completed with $P_{1,3}$ by v; this separates v_2 from v_4.

258 Chapter 6: Planar Graphs

By the Jordan Curve Theorem, the path $P_{2,4}$ must cross C. Since G is planar, paths can cross only at shared vertices. The vertices of $P_{1,3}$ all have color 1 or 3, and the vertices of $P_{2,4}$ all have color 2 or 4, so they have no common vertex.

By this contradiction, G is 5-colorable. ∎

Figure 3-49: La récurrence- preuve du théorème de cinq couleurs (West, 2002)

3.5.4.5 Niveau 5 : les algorithmes

3.5.4.5.1 Parcours eulériens

Les algorithmes par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nombre d'algorithme	1	1	N/A	N/A	N/A
Rôle de l'algorithme (remplace la preuve ou théorème)	Preuve de théorème (algorithme de construction)	Remplace un théorème	N/A	N/A	N/A
Preuve d'algorithmes faites (la correction et la terminaison)	Preuve de terminaison	Preuve de correction et de terminaison	N/A	N/A	N/A
Algorithme en tant qu'outil ou qu'objet	Outil de preuve	Objet	N/A	N/A	N/A

Tableau 3-75: Les algorithmes- parcours eulériens

Nous avons remarqué l'existence de deux formes d'algorithmes dans les contenus consacrés aux parcours eulériens dans les ouvrages : les algorithmes qui remplacent une preuve, et les algorithmes qui remplacent des théorèmes. L'algorithme donné par Epp (2011) est un algorithme de construction d'un circuit eulérien qui forme une preuve du théorème (voir la figure 36). Nous avons repéré le second type d'algorithme dans Bondy & Murty (2008) : il s'agit de l'algorithme de Fleury, qui remplace un théorème. Pour l'algorithme d'Epp (2011), la preuve de terminaison était seulement donnée, tandis que l'algorithme de Fleury est suivi par sa preuve de correction et terminaison. La preuve de correction prend sous la forme d'un théorème. Nous pouvons donc dire que l'algorithme d'Epp (2011) (la construction d'un circuit eulérien) est un outil de preuve mais que celui de Bondy & Murty (2008) est un objet de travail en soi. La dualité du fonctionnement d'un algorithme est clairement manifestée dans les parcours eulériens.

Theorem 10.2.3

If a graph G is connected and the degree of every vertex of G is a positive even integer, then G has an Euler circuit.

Proof:

Suppose that G is any connected graph and suppose that every vertex of G is a positive even integer. *[We must find an Euler circuit for G.]* Construct a circuit C by the following algorithm:

Step 1: Pick any vertex v of G at which to start.
[This step can be accomplished because the vertex set of G is nonempty by assumption.]

Step 2: Pick any sequence of adjacent vertices and edges, starting and ending at v and never repeating an edge. Call the resulting circuit C.
[This step can be performed for the following reasons: Since the degree of each vertex of G is a positive even integer, as each vertex of G is entered by traveling on one edge, either the vertex is v itself and there is no other unused edge adjacent to v, or the vertex can be exited by traveling on another previously unused edge. Since the number of edges of the graph is finite (by definition of graph), the sequence of distinct edges cannot go on forever. The sequence can eventually return to v because the degree of v is a positive even integer, and so if an edge connects v to another vertex, there must be a different edge that connects back to v.]

Step 3: Check whether C contains every edge and vertex of G. If so, C is an Euler circuit, and we are finished. If not, perform the following steps.

Step 3a: Remove all edges of C from G and also any vertices that become isolated when the edges of C are removed. Call the resulting subgraph G'.
[Note that G′ may not be connected (as illustrated in Figure 10.2.4), but every vertex of G′ has positive, even degree (since removing the edges of C removes an even number of edges from each vertex, the difference of two even integers is even, and isolated vertices with degree 0 were removed.)]

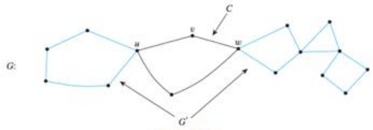


Figure 10.2.4

Step 3b: Pick any vertex w common to both C and G'.
[There must be at least one such vertex since G is connected. (See exercise 44.) (In Figure 10.2.4 there are two such vertices: u and w.)]

Step 3c: Pick any sequence of adjacent vertices and edges of G', starting and ending at w and never repeating an edge. Call the resulting circuit C'.
[This can be done since each vertex of G′ has positive, even degree and G′ is finite. See the justification for step 2.]

Step 3d: Patch C and C' together to create a new circuit C'' as follows: Start at v and follow C all the way to w. Then follow C' all the way back to w. After that, continue along the untraveled portion of C to return to v.
[The effect of executing steps 3c and 3d for the graph of Figure 10.2.4 is shown in Figure 10.2.5.]

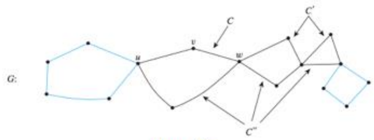


Figure 10.2.5

Step 3e: Let $C = C''$ and go back to step 3.

Since the graph G is finite, execution of the steps outlined in this algorithm must eventually terminate. At that point an Euler circuit for G will have been constructed. (Note that because of the element of choice in steps 1, 2, 3b, and 3c, a variety of different Euler circuits can be produced by using this algorithm.)

Figure 3-50: Algorithme de construction d'un circuit eulérien (Epp, 2011)

Algorithm 3.3 FLEURY'S ALGORITHM

INPUT*:* a connected even graph G and a specified vertex u of G
OUTPUT*:* an Euler tour W of G starting (and ending) at u

1: *set* $W := u,\ x := u,\ F := G$
2: **while** $\partial_F(x) \neq \emptyset$ **do**
3: *choose an edge* $e := xy \in \partial_F(x)$*, where* e *is not a cut edge of* F *unless there is no alternative*
4: *replace* uWx *by* $uWxey$*,* x *by* y*, and* F *by* $F \setminus e$
5: **end while**
6: *return* W

Figure 3-51: Algorithme de Fleury (Bondy & Murty, 2008)

Theorem 3.4 *If G is a connected even graph, the walk W returned by Fleury's Algorithm is an Euler tour of G.*

Proof The sequence W is initially a trail, and remains one throughout the procedure, because Fleury's Algorithm always selects an edge of F (that is, an as yet unchosen edge) which is incident to the terminal vertex x of W. Moreover, the algorithm terminates when $\partial_F(x) = \emptyset$, that is, when all the edges incident to the terminal vertex x of W have already been selected. Because G is even, we deduce that $x = u$; in other words, the trail W returned by the algorithm is a closed trail of G.

Suppose that W is not an Euler tour of G. Denote by X the set of vertices of positive degree in F when the algorithm terminates. Then $X \neq \emptyset$, and $F[X]$ is an

even subgraph of G. Likewise $V \setminus X \neq \emptyset$, because $u \in V \setminus X$. Since G is connected, $\partial_G(X) \neq \emptyset$. On the other hand, $\partial_F(X) = \emptyset$. The last edge of $\partial_G(X)$ selected for inclusion in W was therefore a cut edge $e = xy$ of F at the time it was chosen, with $x \in X$ and $y \in V \setminus X$ (see Figure 3.5). But this violates the rule for choosing the next edge of the trail W, because the edges in $\partial_F(x)$, which were also candidates for selection at the time, were not cut edges of F, by Theorem 2.10. □

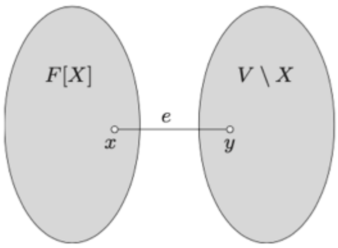


Fig. 3.5. Choosing a cut edge in Fleury's Algorithm

Figure 3-52: Preuve de correction et de terminaison de l'algorithme de Fleury (Bondy & Murty, 2008)

3.5.4.5.2 Plus court chemin

Les algorithmes par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nombre d'algorithme	1	1	N/A	1	N/A
Rôle de l'algorithme (remplace la preuve ou théorème)	Remplace le théorème	Un théorème	N/A	Théorème	N/A
Preuve d'algorithmes faites (la correction et la terminaison)	Dijkstra : preuve de correction et preuve de terminaison	Dijkstra : preuve de correction en exercices	N/A	Dijkstra : preuve do correction	N/A
Algorithme en tant qu'outil ou qu'objet	Outil de résolution de problème	Outil de résolution de problème	N/A	Outil de résolution de problème	N/A

Figure 3-53: Les algorithmes- plus court chemin

Nous commencerons par présenter les résultats de notre étude sur les algorithmes de recherche de plus court chemin et les algorithmes de recherche des arbres couvrant de poids minimum. Dans le premier cas, il est évident que l'algorithme de Dijkstra est présenté par les ouvrages comme le plus efficace pour la construction d'un tel chemin. Trois ouvrages donnent cet algorithme : Epp (2011), Bondy & Murty (2008) et West (2002). Nous rappelons que l'absence de ces algorithmes dans l'ouvrage de Diestel (2005) est liée à son discours dans la préface :

> « this book offers an introduction to the theory of graphs as part of (pure) mathematics; it. contains neither algorithms not 'real world 'applications […] serve students of computer science as much as their peers in mathematics » (Diestel, 2005, p. vii).

Hartsfield & Ringel (1994) n'évoquent pas les algorithmes de plus court chemin mais ils présentent les algorithmes autour des arbres couvrant de poids minimum dans la partie suivante.

Dans les trois ouvrages, l'algorithme est présenté avec ses applications (celles-ci apparaissent avant ou après l'algorithme), ce qui donne à l'algorithme un statut d'outil de résolution des problèmes. Les trois ouvrages donnent la preuve de correction (par récurrence), sauf Bondy & Murty (2008) qui font de la réalisation de cette preuve un sujet d'exercice. Nous remarquons aussi que cet algorithme, même s'il est un outil de résolution des problèmes, a aussi le statut d'un objet en lui-même, car il remplace parfois un théorème possédant des preuves (preuves de correction et de terminaison, parmi d'autres.)

Algorithm 10.7.3 Dijkstra

Input: G *[a connected simple graph with a positive weight for every edge]*, ∞ *[a number greater than the sum of the weights of all the edges in the graph]*, $w(u, v)$ *[the weight of edge* $\{u, v\}$*]*, a *[the starting vertex]*, z *[the ending vertex]*

Algorithm Body:

1. Initialize T to be the graph with vertex a and no edges. Let $V(T)$ be the set of vertices of T, and let $E(T)$ be the set of edges of T.
2. Let $L(a) = 0$, and for all vertices in G except a, let $L(u) = \infty$.
   [The number $L(x)$ is called the label of x.]
3. Initialize v to equal a and F to be $\{a\}$.
   [The symbol v is used to denote the vertex most recently added to T.]
4. **while** $(z \notin V(T))$

   4a. $F := (F - \{v\}) \cup \{$vertices that are adjacent to v and are not in $V(T)\}$
   [The set F is called the fringe. Each time a vertex is added to T, it is removed from the fringe and the vertices adjacent to it are added to the fringe if they are not already in the fringe or the tree T.]

   4b. For each vertex u that is adjacent to v and is not in $V(T)$,
   if $L(v) + w(v, u) < L(u)$ **then**

   $$L(u) := L(v) + w(v, u)$$

   $$D(u) := v$$

   [Note that adding v to T does not affect the labels of any vertices in the fringe F except those adjacent to v. Also, when $L(u)$ is changed to a smaller value, the notation $D(u)$ is introduced to keep track of which vertex in T gave rise to the smaller value.]

   4c. Find a vertex x in F with the smallest label
   Add vertex x to $V(T)$, and add edge $\{D(x), x\}$ to $E(T)$
   $v := x$ *[This statement sets up the notation for the next iteration of the loop.]*

   end while

Output: $L(z)$ *[$L(z)$, a nonnegative integer, is the length of the shortest path from a to z.]*

Figure 3-54: Algorithme de Dijkstra (Epp, 2011)

Algorithm 6.12 DIJKSTRA'S ALGORITHM

INPUT: a positively weighted digraph (D, w) with a specified vertex r
OUTPUT: an r-branching in D with predecessor function p, and a function $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $\ell(v) = d_D(r, v)$ for all $v \in V$

set $p(v) := \emptyset$, $v \in V$, $\ell(r) := 0$, *and* $\ell(v) := \infty$, $v \in V \setminus \{r\}$
while *there is an uncoloured vertex* u *with* $\ell(u) < \infty$ ***do***
    choose such a vertex u *for which* $\ell(u)$ *is minimum*
    colour u *black*
    for *each uncoloured outneighbour* v *of* u *with* $\ell(v) > \ell(u) + w(u, v)$ ***do***
        replace $p(v)$ *by* u *and* $\ell(v)$ *by* $\ell(u) + w(u, v)$
    end for
end while
return (p, ℓ)

Figure 3-55: Algorithme de Dijkstra (Bondy & Murty, 2008)

2.3.5. Algorithm. (Dijkstra's Algorithm—distances from one vertex.)
Input: A graph (or digraph) with nonnegative edge weights and a starting vertex u. The weight of edge xy is $w(xy)$; let $w(xy) = \infty$ if xy is not an edge.
Idea: Maintain the set S of vertices to which a shortest path from u is known, enlarging S to include all vertices. To do this, maintain a tentative distance $t(z)$ from u to each $z \notin S$, being the length of the shortest u,z-path yet found.
Initialization: Set $S = \{u\}$; $t(u) = 0$; $t(z) = w(uz)$ for $z \neq u$.
Iteration: Select a vertex v outside S such that $t(v) = \min_{z \notin S} t(z)$. Add v to S. Explore edges from v to update tentative distances: for each edge vz with $z \notin S$, update $t(z)$ to $\min\{t(z), t(v) + w(vz)\}$.

The iteration continues until $S = V(G)$ or until $t(z) = \infty$ for every $z \notin S$. At the end, set $d(u, v) = t(v)$ for all v. ■

Figure 3-56: Algorithme de Dijkstra (West, 2002)

3.5.4.5.3 Arbres couvrant de poids minimum

Les algorithmes par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nombre d'algorithme	2	2	N/A	1	1
Rôle de l'algorithme (remplace la preuve ou théorème)	Théorème	Théorème	N/A	Théorème	Théorème
Preuve d'algorithmes faites (la correction et la terminaison)	Kruskal : preuve de correction Prim : preuve de correction	Prim : preuve de correction	N/A	Kruskal : preuve de correction	N/A
Algorithme en tant qu'outil ou qu'objet	Outil de résolution des problèmes	Outil de résolution des problèmes	N/A	Outil de résolution de problème	Outil de résolution de problème

Tableau 3-76: Les algorithmes- arbres couvrant de poids minimum

En ce qui concerne les algorithmes autour de l'arbre couvrant de poids minimum, notre étude épistémologique/mathématique a montré l'existence de deux algorithmes de recherche de ces parcours (Kruskal et Prim). Les ouvrages d'Epp (2011) et de Bondy & Murty (2008) présentent ces deux algorithmes. Epp (2011) fait les preuves de correction des deux algorithmes dans les cours ; Bondy & Murty (2008) donnent uniquement la preuve de correction de Prim. Celui de Borůvka-Kruskal est demandé en exercices. Les preuves de terminaison ne sont présentées ni dans Epp (2011), ni dans Bondy & Murty (2008). D'après les schémas, nous remarquons que la présentation de l'algorithme de Kruskal était précédée par la définition d'un « *greedy algorithme* » et par les heuristiques chez West (2002) et chez Bondy & Murty (2008).

« A *heuristic* is a computational procedure, generally based on some simple rule, which intuition tells one should usually yield a good approximate solution to the problem at hand.

One particularly simple and natural class of heuristics is the class of *greedy heuristics*. Informally, a greedy heuristic is a procedure which selects the best cur- rent option at each stage, without regard to future consequences. As can be imagined, such an approach rarely leads to an optimal solution in each instance. How- ever, there are cases in which the greedy approach does indeed work. In such cases, we call the procedure a *greedy algorithm*. The following is a prototypical example of such an algorithm. » (Bondy & Murty, 2008, p. 193)

« Theorem 2.3.3 verifies that Kruskal's algorithm produces an optimal tree. Unsophisticated locally optimal heuristics are called greedy algorithms. They usually don't guarantee optimal solutions, but this one does. » (West, 2002, p. 96)

Cette observation montre bien la place des heuristiques dans la théorie des graphes pour arriver à des solutions optimales, conformément à ce que nous avons observé dans l'état de l'art.

Hartsfield & Ringel (1994) ont fait le choix de donner l'algorithme de Kruskal en le faisant suivre d'un seul exemple. Les auteurs justifient ce choix en indiquant que la preuve de cet algorithme existe dans des ouvrages consacrés aux recherches opérationnelles et aux mathématiques discrètes. Nous faisons l'hypothèse que ce choix des auteurs est lié au fait que leur ouvrage est transversal : les auteurs ne rentrent donc pas beaucoup dans les détails des algorithmes.

Il nous semble important de mentionner que tous ces algorithmes sont présentés par les auteurs dans un langage naturel, facile à comprendre, avec quelques symboles (l'affectation). Le langage de Hartsfield & Ringel (1994) et de West (2002) était très vulgarisé ; ces ouvrages ne donnent même pas de symbole d'affectation. Nous notons aussi que les trois ouvrages évoqués ci-dessus, à l'exception de celui de West (2002), ont présenté l'action de ces algorithmes sur des exemples.

Algorithm 10.7.1 Kruskal

Input: G *[a connected weighted graph with n vertices, where n is a positive integer]*

Algorithm Body:

[Build a subgraph T of G to consist of all the vertices of G with edges added in order of increasing weight. At each stage, let m be the number of edges of T.]

1. Initialize T to have all the vertices of G and no edges.
2. Let E be the set of all edges of G, and let $m := 0$.
3. **while** $(m < n - 1)$
   - 3a. Find an edge e in E of least weight.
   - 3b. Delete e from E.
   - 3c. **if** addition of e to the edge set of T does not produce a circuit
     then add e to the edge set of T and set $m := m + 1$

   end while

Output: T *[T is a minimum spanning tree for G.]*

Figure 3-57: Algorithme de Kruskal (Epp, 2011)

Algorithm 10.7.2

Input: G *[a connected weighted graph with n vertices where n is a positive integer]*

Algorithm Body:

[Build a subgraph T of G by starting with any vertex v of G and attaching edges (with their endpoints) one by one to an as-yet-unconnected vertex of G, each time choosing an edge of least weight that is adjacent to a vertex of T.]

1. Pick a vertex v of G and let T be the graph with one vertex, v, and no edges.
2. Let V be the set of all vertices of G except v.
3. **for** $i := 1$ **to** $n - 1$
   - 3a. Find an edge e of G such that (1) e connects T to one of the vertices in V, and (2) e has the least weight of all edges connecting T to a vertex in V. Let w be the endpoint of e that is in V.
   - 3b. Add e and w to the edge and vertex sets of T, and delete w from V.

   next i

Output: T *[T is a minimum spanning tree for G.]*

Figure 3-58: Algorithme de Prim (Epp, 2011)

Algorithm 8.22 THE BORŮVKA–KRUSKAL ALGORITHM

INPUT*:* a weighted connected graph $G = (G, w)$
OUTPUT*:* an optimal tree $T = (V, F)$ of G, and its weight $w(F)$

```
set F := ∅, w(F) := 0 (F denotes the edge set of the current forest)
while there is an edge e ∈ E \ F such that F ∪ {e} is the edge set of a
forest do
   choose such an edge e of minimum weight
   replace F by F ∪ {e} and w(F) by w(F) + w(e)
end while
return ((V, F), w(F))
```

Figure 3-59: Algorithme de Borůkva-Kruskal (Bondy & Murty, 2008)

Algorithm 6.9 THE JARNÍK–PRIM ALGORITHM

INPUT*:* a weighted connected graph (G, w)
OUTPUT*:* an optimal tree T of G with predecessor function p, and its weight $w(T)$

```
set p(v) := ∅ and c(v) := ∞, v ∈ V, and w(T) := 0
choose any vertex r (as root)
replace c(r) by 0
while there is an uncoloured vertex do
   choose such a vertex u of minimum cost c(u)
   colour u black
   for each uncoloured vertex v such that w(uv) < c(v) do
      replace p(v) by u and c(v) by w(uv)
      replace w(T) by w(T) + c(u)
   end for
end while
return (p, w(T))
```

Figure 3-60: Algorithme de Jarník-Prim (Bondy & Murty, 2008)

2.3.1. Algorithm. (Kruskal's Algorithm - for minimum spanning trees.)
Input: A weighted connected graph.
Idea: Maintain an acyclic spanning subgraph H, enlarging it by edges with low weight to form a spanning tree. Consider edges in nondecreasing order of weight, breaking ties arbitrarily.
Initialization: Set $E(H) = \varnothing$.
Iteration: If the next cheapest edge joins two components of H, then include it; otherwise, discard it. Terminate when H is connected. ∎

Figure 3-61: Algorithme de Kruskal (West, 2002)

Step 1. Of all the edges in the graph, select one with smallest weight. (There may be more than one edge with this weight, and the choice is then arbitrary.) Begin growing the tree with this edge.

Step 2. Again select an edge with smallest weight that is not yet in the existing forest, and add it, provided that the addition does not create a cycle.

Step 3. Check to see if you now have a spanning tree. If so, stop. If not, repeat Step 2.

Figure 3-62: Algorithme de Kruskal (Hartsfield & Ringel, 1994)

3.5.4.5.4 La coloration

Les algorithmes par ouvrage					
	Epp (2011)	Bondy & Murty (2008)	Diestel (2005)	West (2002)	Hartsfield & Ringel (1994)
Nombre d'algorithme	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Rôle de l'algorithme (remplace la preuve ou théorème)	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Preuve d'algorithmes faites (la correction et la terminaison)	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
Algorithme en tant qu'outil ou qu'objet	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A

Tableau 3-77: Les algorithmes- la coloration

Il n'existe pas d'algorithmes pour le travail sur la coloration, en particulier pour le théorème de quatre/cinq couleurs que nous étudions plus spécifiquement.

3.5.4.6 Niveau 6 : Modélisations/représentations

3.5.4.6.1 Les parcours eulériens

Les modélisations par ouvrage			
Ouvrage	Nb et l'endroit de la représentation	Nb et l'endroit de la modélisation	Nb total
Epp (2011)	7 (exemples) ; 1 (définition) ; 3 (preuves)	1 (pont de Königsberg)	11
Bondy & Murty (2008)	2 (introductions) ; 1 (preuve)		3
Diestel (2005)	1 (preuve)		1
West (2002)	4 (preuves)		4
Hartsfield & Ringel (1994)	4 (preuves)	1 (ponts du Königsberg)	5

Tableau 3-78: La modélisation- les parcours eulériens

Nous cherchons à repérer le nombre et la nature des modélisations (par des graphes) utilisés dans les chapitres consacrés aux parcours eulériens. Nous avons remarqué que, dans l'ensemble des ouvrages, des dessins qui servent à la fois d'outils de représentations et de supports graphiques des preuves, des exemples, ou des définitions. Le tableau ci-dessous présente les résultats quantitatifs de cette recherche. Nous avons distingué les modélisations dans le sens de Kaiser (modélisations qui résolvent des problèmes réels) et celles qui constituent uniquement des supports de représentations.

Précisons qu'Epp (2011) et Hartsfield & Ringel (1994) présentent un aperçu historique du problème des ponts de Königsberg pour introduire le théorème d'Euler. Dans ce contexte, et dans le sens de Kaiser, nous pouvons parler d'une « *mathematisation* » du « *real-world model* » vers le « *mathematical model* », à partir duquel les auteurs pratiquent des « *mathematical considerations* » pour obtenir des résultats, et donc interpréter la situation réelle. Ce sont donc des modélisations du niveau « objet », sur lequel les auteurs ont agi afin de revenir au problème initial. Les autres ouvrages présentaient plusieurs graphes, mais uniquement en tant que supports de représentations dépendants de leur contexte (exemple, preuve, définition).

3.5.4.6.2 Les plus petits parcours (plus court chemin et arbre couvrant de poids minimum)

Les modélisations par ouvrage			
Ouvrage	Nb et l'endroit de la représentation	Nb et l'endroit de la modélisation	Nb total
Epp (2011)	1(introduction) ; 1(définition) ; 4(exemples) ; 2(preuves)		7
Bondy & Murty (2008)	1(introduction) ; 2(algorithmes) ;		3
Diestel (2005)	N/A	N/A	N/A
West (2002)	3(exemple) ;1 (preuve)		4
Hartsfield & Ringel (1994)	5 (algorithmes)		5

Tableau 3-79: La modélisation- les plus petits parcours

Dans le cas de la recherche de plus petit parcours, nous observons uniquement des supports de représentations, à plusieurs endroits : introduction, définitions, preuves ou même exemples d'applications de l'algorithme. Nous n'avons pas remarqué l'existence de modèles dans le sens de Kaiser.

3.5.4.6.3 La coloration

Les modélisations par ouvrage			
Ouvrage	Nb et l'endroit de la représentation	Nb et l'endroit de la modélisation	Nb total
Epp (2011)	N/A	N/A	N/A
Bondy & Murty (2008)	2(introductions) ; 5(preuves)		7
Diestel (2005)	3 (preuve)		3
West (2002)	2(exemples) ; 1(preuve) ; 1(remarque)		4
Hartsfield & Ringel (1994)	6(discussions) ; 11(preuves)		17

Tableau 3-80: La modélisation- la coloration

En ce qui concerne la coloration, l'ensemble des graphes donnés renvoie à des supports de représentations ; il n'y a aucune modélisation autour d'un problème de la vie réelle, y compris, fait surprenant, dans les ouvrages multidisciplinaires comme ceux d'Epp (2011) et de Bondy & Murty (2008).

3.5.4.7 Synthèse sur l'analyse des ouvrages suivant la grille d'analyse

Nous présentons la première synthèse sur les analyses des ouvrages suivant la grille d'analyse que nous avons construit. Tout d'abord, il existe plusieurs points invariants déjà discutés : nous les expliciterons dans le paragraphe suivant.

Certains problèmes ont été traités d'une manière identique dans les ouvrages. Le premier exemple est la construction d'un circuit eulérien, faite par un algorithme dans tous les ouvrages qui abordent ce cas. Le deuxième exemple est la recherche du plus petit parcours, qui est faite par l'algorithme de Dijkstra dans tous les ouvrages qui l'ont évoquée (voir les figures 57, 58, 60). Le troisième exemple est celui du théorème des cinq couleurs : 75 % (trois sur quatre) des ouvrages utilisent la récurrence pour le démontrer. La récurrence est donc une méthode très fréquemment utilisée pour ce théorème. Suivant les ouvrages, il existe deux méthodes pour traiter la recherche d'un arbre couvrant de poids minimum : l'algorithme de Kruskal et celui de Prim. Ces méthodes sont actuellement identiques à celles nous avons présentées dans l'étude mathématique. Certains ouvrages donnent les deux algorithmes ; d'autres ne donnent que celui de Kruskal. La place des algorithmes dans les problèmes de plus petit parcours est toujours la même, malgré l'existence de temporalités différentes parmi les ouvrages.

En ce qui concerne la coloration, plusieurs déclarations, dans la littérature, dans l'étude mathématique et dans les entretiens précisent sa place pour résoudre des problèmes de la vie réelle (par exemple les problèmes d'emploi de temps). Cependant, nous n'avons remarqué aucun exemple autour de la coloration, à part dans l'ouvrage de West (2002). Nous nous interrogeons sur les raisons expliquant ces choix. Les auteurs qui donnent plusieurs exemples sur les problèmes des parcours eulériens n'ont pas présenté d'exemples autour de la coloration (particulièrement autour du théorème des cinq couleurs). Nous formulerons deux hypothèses :

un choix des auteurs de développer davantage les problèmes de chemins ; un particularisme de la coloration. Nous développons plus en profondeur ce point dans l'étude praxéologique.
Nous avons constaté, sur plusieurs points, une certaine hétérogénéité entre les ouvrages. Nous avons classé les différences en deux catégories : (1) différences de forme et (2) différences de fond.

(1) Sur la forme
Au niveau de la structure et de l'organisation des ouvrages, certains contenus sont présentés dans des parties différentes selon les ouvrages, comme la coloration et la recherche des plus courts chemins. Il serait intéressant d'étudier ce choix effectué par les auteurs, mais nous ne regardons pas le phénomène d'étalement dans notre travail de thèse — qui nécessite un travail supplémentaire sur l'ensemble de l'ouvrage. Nous nous limitons à la présentation de ce qui est présent ou non (indépendamment de sa place dans l'ouvrage).
Il existe une différence apparente dans la temporalité : nous n'avons pas remarqué de présentation uniforme des contenus. Certains auteurs font le choix de commencer par des exemples, d'autres par des théorèmes et preuves ; d'autres auteurs étalent ces éléments sur plusieurs chapitres. Nous faisons l'hypothèse que ce choix est lié aux préférences des auteurs.

(2) Sur le fond
Il existe une variété de modes de raisonnements pour chacune des catégories de problèmes présentées dans les ouvrages. Ces différents types de raisonnements mis en évidence par les auteurs utilisent trois types de preuves : les algorithmes, la preuve par contradiction, et l'induction. Ce résultat indique bien que les mathématiques discrètes, et plus particulièrement la théorie des graphes, constitue un espace où plusieurs types de preuves sont mobilisés — un constat également fait par les enseignants-chercheurs lors des entretiens, et relevé dans la littérature.

En ce qui concerne les algorithmes, nous repérons l'existence d'une variété de fonctionnement : ceux-ci sont parfois des outils de résolution des problèmes (des exemples et des applications), et parfois des objets de travail. Ce double rôle des algorithmes rejoint la dualité étudiée par Modeste. De plus, nous avons repéré une variation entre les ouvrages concernant le degré d'explicitation des preuves des algorithmes : les ouvrages ne donnent pas tous les preuves de correction et les preuves de terminaison. Cette variation montre toutefois que la preuve de l'algorithme est bien travaillée dans les ouvrages (73%, 8 sur 11), un résultat intéressant.

Le dernier aspect hétérogène porte sur la modélisation. Les auteurs n'entretiennent pas le même rapport à la modélisation. Pour les parcours eulériens notamment, deux ouvrages parmi cinq conduisent un travail de modélisation dans le sens de Kaiser (partir d'un problème réel). Les autres se limitent à donner des supports de représentations autour d'exemples, de théorèmes, et de preuves. Nous pointons ici l'existence d'un décalage avec la littérature et les entretiens, qui affirment que la théorie des graphes entretient un lien très fort avec la modélisation et la réalité (essentiellement au travers de graphes). En contrepartie, nous remarquons l'absence de questions sur les modélisations (dans le sens de Kaiser) dans les cours des ouvrages, ce qui nous a conduit à regarder les énoncés des exercices présentant des problèmes réels ; nous avons obtenu le tableau suivant :

	Parcours eulériens	Plus petit parcours	Coloration
Epp (2011)	oui	non	X
Bondy & Murty (2008)	non	non	non
Diestel (2005)	non	X	non
West (2002)	non	oui	non
Hartsfield & Ringel (1994)	oui	oui	oui

Tableau 3-81: La modélisation dans les exercises

Ce tableau montre que l'ouvrage de Hartsfield & Ringel (1994) est le seul à inclure des questions autour de la vie réelle dans les exercices ; ceux de Bondy & Murty (2008) et de Diestel (2005) n'en font pas mention. Epp (2011) et West (2002) posent partiellement des questions de la vie réelle avec des problèmes de parcours eulériens et de plus petits parcours. Nous en concluons que la modélisation et la réalité sont un aspect relativement absent, et nécessitent davantage d'approfondissement.

Dans la partie qui suit, nous présentons l'analyse praxéologique avec l'objectif de construire une base solide pour faire une organisation mathématique.

3.5.5 Analyse praxéologique des ouvrages universitaires

3.5.5.1 Étude praxéologique sur la recherche des parcours eulériens

3.5.5.1.1 Première tâche : Construction d’un circuit eulérien

Ouvrage: Discrete Mathematics with Applications (Susanna S. Epp (2011))

Nous commençons par le premier type de tâches : « construire un circuit eulérien dans un graphe ».

Epp (2011) a abordé cette tâche à travers son exemple (Exemple 10.2.6 p. 651) :
Étudier l’existence d’un circuit eulérien dans ce graphe et utiliser l’algorithme pour construire ce circuit.

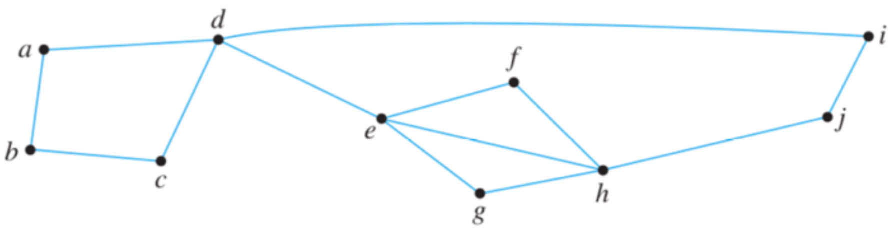


Figure 3-63: Exemple 10.2.6 (Epp, 2011, p. 651)

Dans ce qui suit, nous présentons les tâches et les techniques à mettre en œuvre, en nous appuyant sur le discours d'Epp (2011) quant à la solution de cet exemple (p. 651).
Les tâches qui en découlent sont :

- $T1$: vérifier si le graphe donné admet un circuit eulérien.
- $T2$: construire ce circuit eulérien.

La technique associée à chaque tâche est :

- Pour $T1$:
  $\tau 1$: démontrer que le graphe est connexe (vérifier que chacun des deux sommets peut être connecté par un chemin), trouver les degrés de chaque sommet et vérifier que tous les sommets du graphe sont de degré pair.

- Pour $T2$:
  $\tau 2$: trouver un algorithme de construction.

Pour le bloc technologico-théorique derrière ces techniques, nous nous appuyons sur le cours d’Epp (2011) afin de présenter l’ensemble des définitions qui justifie les techniques $\tau 1$ et $\tau 2$:

- Pour $\tau 1$: la définition d’un graphe connexe: « *a graph is connected if it is possible to travel from any vertex to any other vertex along a sequence of adjacent edges of the graph* » (p.646).
  Pour trouver les degrés de chaque sommet, il faut compter les arêtes adjacentes à chaque sommet. La justification technologique de cette technique est la définition d’un degré du sommet, qui est le nombre des arêtes adjacentes à ce sommet : « *the degree of v, denoted $deg(v)$, equals the number of edges that are incident on v, with an edge that is a loop counted twice* » (p.635).
- Pour $\tau 2$: utiliser l’algorithme (la preuve du théorème 10.2.3, p. 650) pour construire ce circuit (cet algorithme est une preuve constructive). Le théorème 10.2.3 postule que :

> « if a graph G is connected and the vertex of G is a positive even integer, then G has an Euler circuit » (p.650)

Ouvrage: Graph Theory (Bondy & Murty (2008))

Bondy & Murty (2008) mentionnent dans leur cours (section 3.3, p. 87) l'existence d'un algorithme simple qui permet de trouver un circuit eulérien dans un graphe connexe quelconque. Ils présent ensuite directement la technique pour ce type de tâches, qui consiste à trouver un algorithme (celui de Fleury). Les étapes de cette technique algorithmique sont :

> « (1) set a specific vertex, (2) examine each edge to determine it is a cut edge or no, (3) if no, then the edge is added, or else if it is a cut edge then it remains a cut edge until selected for inclusion »

Nous observons que les auteurs présentent un théorème (Théorème 3.4, p. 87) qui démontre la correction de l'algorithme de Fleury, suivi par la preuve de terminaison (p.87).

Pour construire le bloc technologico-théorique, nous avons cherché les justifications de la technique exposée : dans le chapitre 7 (p. 157), Bondy & Murty (2008) présentent un algorithme qui justifie théoriquement si une arête est un « *cut edge* » ou pas : « *to determine whether or not an edge is a cut edge or no* ». Il nous semble important de noter qu'il s'agit du seul élément théorique présent dans l'ouvrage justifiant la technique de l'algorithme de Fleury.

3.5.5.1.2 Seconde tâche : Étudier l'existence d'un circuit eulérien

Ouvrage : Discrete Mathematics with Applications (Susanna E. Epp (2011))

Ce type de tâches est présenté dans le contexte du même problème (Exemple 10.2.6 p. 651), qui comprend la tâche de construction un circuit eulérien :
Étudier l'existence d'un circuit eulérien dans ce graphe et utiliser l'algorithme pour construire ce circuit (Figure 3-63).

Comme le cas du premier problème, nous avons déterminé à partir du discours de Epp (2011) dans la solution de son exemple (p. 651) les tâches qui en découlent, ainsi que les techniques.
Tâches qui en découlent :

- $T1$: vérifier si le graphe donné admet un circuit eulérien.
- $T2$: construire ce circuit eulérien.

La technique associée à chaque tâche est :

- Pour $T1$:
  $\tau 1$: démontrer que le graphe est connexe (vérifier que chacun des deux sommets peut être connecté par un chemin), trouver les degrés de chaque sommet et vérifier que tous les sommets du graphe sont de degré pair.

- Pour $T2$:
  $\tau 2$: trouver un algorithme.

En ce qui concerne le bloc technologico-théorique derrière ces techniques, nous nous appuyons sur le cours d'Epp (2011) et sur les preuves des théorèmes pour les extraire :

- Pour $\tau 1$: la définition d'un graphe connexe : « *a graph is connected if it is possible to travel from any vertex to any other vertex along a sequence of adjacent edges of the graph* » (p.646).
  Pour trouver les degrés de chaque sommet, il faut compter les arrêts adjacents à chaque sommet ; la justification technologique derrière cette technique est la définition d'un degré du sommet, qui est le nombre des arrêts adjacents à ce sommet : « *the degree of v, denoted $deg(v)$, equals the number of edges that are incident on v, with an edge that is a loop counted twice* » (p.635).
- Pour $\tau 2$: utiliser l'algorithme (la preuve du théorème 10.2.3) pour construire ce circuit.

Ouvrage : Graph Theory (Diestel (2005))

Diestel (2005) débute le cours du chapitre 1.8 « *Euler tours* » par un très bref aperçu historique concernant la ville de Königsberg et le travail de Leonhard Euler (p. 21), dans lequel il présente quelques notions de base (« *Euler tour* » et « *Euler graph* »). Diestel (2005) n'aborde pas ce sujet en utilisant un problème qui comporterait des tâches, mais la tâche d'étudier l'existence d'un circuit eulérien fait partie de la preuve du théorème 1.8.1 suivant.

> « Theorem 1.8.1: A connected graph is eulerian if and only if every vertex has an even degree » (p. 21)

Nous avons donc pu extraire la tâche dans la preuve de la condition suffisante du théorème :
T: Prove that if a connected graph has the degrees of all the vertices even, then it is Eulerian.

La technique de résolution est une preuve par contradiction ; elle nous est présentée ainsi par le discours de la preuve (p. 22) :
τ: proof par contradiction
- Choose a generic example which is a connected graph with all degrees are even ;
- Choose a longest walk in G using no edge more than once ;
- Suppose W is not an euler tour, find a walk longer than W.

Pour former le bloc technologico-théorique derrière la technique τ, nous avons repéré l'ensemble des définitions liées au contenu de cette preuve qui existent dans le cours du chapitre 1.4 « *Connectivity* » (p. 10) :

- Définition de « *connected* »: « *a non-empty graph G is called connected if any two if its vertices are linked by a path in G* » (p. 10) ;
- Définition d'un graphe eulérien: « *a graph is eulerian if it admits an Euler tour* » (p. 21) ;
- Définition d'un « *Euler tour* »: « *a closed walk in a graph* » (p. 21).

Ouvrage : Graph Theory (Bondy & Murty (2008))

Nous avons consulté le chapitre 3.3 « *Euler Tours* » (p. 86). Pour les tâches du type « study the existence of an Euler tour in a connected graph », Bondy & Murty (2008) ont considéré par hypothèse que le graphe est connexe. Contrairement à l'ouvrage d'Epp (2011), il n'est donc pas nécessaire de démontrer la connexité du graphe. La technique τ qui justifie cette tâche consiste à trouver le degré de chaque sommet.

Le bloc technologico-théorique derrière cette technique est donné à plusieurs endroits dans le cours de Bondy & Murty (2008):

- La definition du degré d'un sommet : « *the degree of a vertex v in a graph G, denoted by $d_G(v)$, is the number of edges of G incident with v, each loop counting as two edges* » (Page 7) ;
- Propriété : « *an eulerian graph is necessarily even* » (p. 87) ;
- Propriété : « *an Euler tour traverses each edge exactly once* » (p. 86).

Ouvrage : Introduction to Graph Theory (Douglas West (2002))

West (2002) donne un très bref aperçu historique sur le problème de Königsberg, suivi de quelques définitions de départ. Il introduit ensuite le théorème (théorème 1.2.26, p. 27) : « *a graph G is eulerian if and only if it has at most one nontrivial component and its vertices all have even degree* ».

Le type de tâches en jeu ici fait donc partie de la preuve du théorème. La tâche dont nous parlons plus précisément est T: « Determine whether a graph is Eulerian. »

La technique est la preuve par induction, faite explicitement :
τ: preuve par induction sur le nombre des arêtes (condition suffisante pour prouver le théorème)

Le bloc technologico-théorique est l'ensemble des définitions et théorèmes lié au contenu de cette preuve. Ces éléments sont explicités dans le discours de la preuve.

- « *If every vertex of a graph has degree at least 2, then G contains a cycle* » (1.2.25 Lemma, p. 27) ;
- « *Each passage through a vertex uses two incident edges* » ;
- Propriété : « *two edges can be in the same trail only when they lie in the same component* » (p. 27).

Ouvrage : Pearls in Graph Theory (Nora Hartsfield & Rienhard Ringel (1994))

Dans cet ouvrage, nous remarquons l'absence de problème contenant explicitement ces tâches. Pourtant, comme West (2002) et Diestel (2005), les auteurs proposent un aperçu historique du problème de Königsberg, avant d'aborder dans le cours les théorèmes suivants :

- « *If a Pseudograph G is connected, and the degree of every vertex of G is even, then G has a eulerian circuit* » (Théorème 3.1.2, p. 52) ;
- "*A pseudograph G has an eulerian trail if and only if G is connected and has precisely two vertices of odd degree*" (Théorème 3.1.6, p. 55)

Ce type de tâches (« étudier l'existence d'un circuit eulérien ») est donc masqué ; il prend en fait la forme d'une preuve de la condition suffisante de théorème.

Nous avons pu extraire d'après les théorèmes les deux tâches suivantes (en décomposant les théorèmes en condition nécessaire et condition suffisante) :
$T1$: Determine whether a graph has an eulerian circuit.
$T2$: Determine whether a graph has an eulerian trail.

Ces deux tâches font appel aux techniques suivantes :
$\tau 1$: preuve par contradiction - par construction (la preuve d'existence du théorème)
$\tau 2$: preuve par contradiction

Nous avons repéré le bloc technologico-théorique, qui n'est autre que l'ensemble des définitions et théorèmes donné dans le discours lié au contenu de cette preuve.

Pour $\tau 1$:

- « *If every vertex in a peudograph G has a positive even degree, then any given vertex of G lies on some circuit of G* » (Lemma 3.1.3, p. 52) ;
- Définition : « *a Eulerian circuit in a pseudo graph G is a circuit that contains every edge of G.* » (p. 51)

Pour $\tau 2$

- « *If a graph is connected then adding an edge preserves connectivity* » (nous l'avons inféré de la preuve, p. 56) ;
- « *If a Pseudograph G is connected, and the degree of every vertex of G is even, then G has a eulerian circuit* » (Theorem 3.1.2, p. 52).

3.5.5.1.3 Conclusions et synthèses sur les parcours eulériens

Pour mieux comparer les ouvrages, et repérer leurs proximités et leurs différences, nous présentons les deux tableaux suivants, dans lesquels nous avons classé les ouvrages en trois niveaux : (1) niveau des mathématiques théoriques, avec l'ouvrage de Diestel (2005) ; (2) niveau multidisciplinaire, destinés à un public varié (mathématiques, informatique, ou « *mathematics education* »), avec les ouvrages d'Epp (2011) et de Bondy & Murty (2008) ; (3) niveau « transversal » sans précision la nature du public, avec les ouvrages de West (2002) et d'Hartsfield & Ringel (1994).

Tâche : construire un circuit eulérien			
	Ouvrage	**Bloc praxis**	**Bloc logos**
Multidisciplinaire	Epp (2011)	Algorithme de construction (suivi par la preuve de terminaison)	La preuve du théorème[39]
	Bondy & Murty (2008)	Algorithme de Fleury (suivi par les preuves de correction et de terminaison)	Un algorithme justifiant théoriquement si une arête est un « cut edge » (dans un autre chapitre)

Tableau 3-82: Organisation praxéologique- construire un circuit eulérien

La première tâche que nous étudions est la construction d'un circuit eulérien dans un graphe. Cette tâche a été discutée uniquement dans les deux ouvrages multidisciplinaires, qui utilisent deux techniques algorithmiques.
Première différence notable : les deux ouvrages font appel à des connaissances distinctes. Epp (2011) donne l'algorithme en tant que preuve du théorème ; Bondy & Murty (2008) présente l'algorithme en tant que théorème et font appel à la notion de « *cut edge* ». Une autre différence réside dans le fait que les justifications technologico-théoriques chez Epp (2011) sont présentées dans le même chapitre où se trouve la tâche, tandis que chez Bondy & Murty (2008), l'algorithme justifiant théoriquement l'existence du « *cut edge* » est introduit dans un autre chapitre.

Nous nous interrogeons sur les raisons de ce phénomène : nous formulons l'hypothèse que l'ouvrage de Bondy & Murty (2008), entièrement consacré à la théorie des graphes, leur donnent la possibilité d'expliciter largement les notions ; ce qui n'est pas le cas d'Epp (2011),

---

[39] If a graph *G* is connected and the degree of every vertex of *G* is a positive even integer, then *G* has an Euler circuit.

dont l'ouvrage, qui traite des mathématiques discrètes en général, ne dédie qu'une partie précise sur la théorie des graphes. Le développement technologico-théorique ne s'y fait donc pas de la même manière.

Pour la tâche de construction d'un circuit eulérien, les techniques algorithmiques sont omniprésentes, et nous montrent les liens avec l'informatique en tant qu'outil (chez Epp (2011)) et en tant qu'objet mathématique (chez Bondy & Murty (2008)).

Nous présentons ci-dessous la synthèse sur la deuxième tâche, qui consiste à étudier l'existence d'un circuit eulérien dans un graphe.

Tâche : étudier l'existence d'un circuit eulérien dans un graphe			
	Ouvrage	**Bloc praxis**	**Bloc logos**
Multidisciplinaire	Epp (2011)	Démontrer que le graphe est connexe (vérifier que n'importe quels deux sommets peuvent être connectés par un chemin) et trouver les degrés de chaque sommet et vérifier que tous les sommets du graphe ont des degrés pairs.	Définition d'un graphe connexe, le degré d'un sommet (dans le même chapitre)
	Bondy & Murty (2008)	Trouver le degré de chaque sommet	Définition du degré du sommet, deux propriétés intermédiaires
Mathématiques	Diestel (2005)	Preuve par contradiction - Choose a generic example which is a connected graph with all degrees are even; - Choose a longest walk in G using no edge more than once; - Suppose W is not an Euler tour, find a walk longer than W.	Définition de : « connected graph, eulerian graph, euler tour »
Transversal	West (2002)	Preuve par induction sur le nombre des arêtes	Lemme, deux propriétés
	Hartsfield & Ringel (1994)	Preuve par contradiction : - Let C be the longest circuit - If C does not contain every edge, we subtract the edges of C from G, and call the resulting pseudograph - Since G is connected, H and C have a vertex A in common - By Lemma 3.1.3 we obtain a circuit longer than C	Lemme et la définition d'un circuit eulérien

Tableau 3-83: organisation praxéologique étudier l'existence d'un circuit eulérien dans un graphe

En ce qui concerne la deuxième tâche (étudier l'existence des circuits eulériens dans un graphe), nous remarquons qu'elle est introduite d'une façon diversifiée. L'ouvrage d'Epp (2011) est par exemple le seul à présenter les deux tâches de construction et à étudier l'existence d'un circuit eulérien à travers un problème (qui est un exemple de départ). Les autres ouvrages utilisent le problème des ponts de Königsberg dans le cadre d'un aperçu historique en introduction du chapitre. Ils présentent ensuite les théorèmes qui contiennent les tâches dont les techniques font partie des preuves des théorèmes.

En ce qui concerne les techniques possibles pour ce type de tâches, nous pouvons les classer en deux niveaux. Le premier niveau est celui des ouvrages multidisciplinaires (Epp (2011) et Bondy &Murty), dans lequel la tâche est réalisée en trouvant le degré des sommets, ce qui sous-entend une technique relativement simple. Cependant, dans les ouvrages transversaux et dans l'ouvrage de mathématiques théoriques, la tâche est réalisée dans le contexte des preuves des théorèmes (comme la preuve par contradiction et la preuve par induction). Les deux techniques de Diestel (2005) et d'Hartsfield & Ringel (1994), bien que basées sur le raisonnement par l'absurde, ne mobilisent pas exactement les mêmes objets (« *circuits* » contre « *walk* »). Ils effectuent pourtant la même démarche. Ceci montre la richesse de la théorie des graphes en termes de piste de travail large.

L'accomplissement de la tâche « étudier l'existence d'un circuit eulérien dans un graphe » revient souvent à démontrer la connexité du graphe et à vérifier que le degré de chaque sommet est un nombre pair. Cette technique, décrite à plusieurs endroits, met en jeu les éléments de bloc technologico-théorique, comme la définition des degrés des sommets et la propriété de connexité des graphes. Au niveau du bloc technologico-théorique, c'est le théorème d'Euler (voir la partie de présentation mathématique de la thèse) qui permet de démontrer qu'un graphe connexe dont les sommets sont de degrés pairs est un graphe eulérien. En considérant cette formulation, les démonstrations du théorème et de sa réciproque font appel à de nouveaux modes de raisonnement, en particulier le raisonnement par contre-exemple minimal, et maximal dans un exemple générique. Cette technique revient à choisir un élément maximal ou minimal et à arriver à une contradiction. Dans le travail de la preuve, les techniques consistant à ajouter et à supprimer des arêtes en parcourant le graphe semblent très pertinentes pour montrer l'existence de tels circuits. Ces techniques sont développées dans les ouvrages transversaux et dans l'ouvrage de mathématiques théoriques.

Au niveau du bloc technologico-théorique, tous les ouvrages font appel au même ensemble de définitions (graphe connexe, graphe eulérien, degré). De façon remarquable, les ouvrages transversaux présentent des lemmes avant la réalisation de la tâche, ce qui n'est pas le cas dans Diestel (2005), qui limite sa présentation au théorème et à sa preuve.

Nous remarquons d'après cette description les points suivants :

- Il n'existe pas de techniques universelles pour les tâches autour des problèmes de parcours eulériens. Nous avons remarqué dans la discussion ci-dessus qu'un même type de tâche n'est pas traité de la même façon suivant les ouvrages. Les choix praxéologiques ne sont pas identiques. Un ouvrage multidisciplinaire ne mobilise pas la même praxéologie qu'un ouvrage transversal ou qu'un ouvrage mathématique. Un ouvrage multidisciplinaire se focalise sur les algorithmes et les techniques les plus simples, quand les autres ouvrages mettent en jeu l'aspect de la preuve et la démonstration. Nous nous interrogeons sur les raisons de ces variations, et sur les choix implicites des auteurs.
- Cette analyse témoigne de la richesse de la théorie des graphes en tant que domaine mathématique (variété des techniques de résolution et des techniques de preuves, richesse du bloc technologico-théorique). De surcroît, nous pouvons affirmer que les différents éléments praxéologiques montrent des différences de niveau (plus ou moins avancé) de la théorie mathématique.
- Notre état de l'art comporte plusieurs affirmations selon lesquelles les mathématiques discrètes seraient accessibles et facilement comprises par des non-

spécialistes. Cette analyse praxéologique montre bien que ce n'est pas toujours le cas : les ouvrages transversaux et les ouvrages de mathématiques théoriques mettent en jeu des praxéologies plus compliquées, comme nous l'avons montré dans la discussion et dans les tableaux de présentation.

3.5.5.2 *Étude praxéologique sur le plus court chemin*

3.5.5.2.1 Tâche : Trouver le plus petit chemin dans un graphe connexe

Ouvrage : Discrete Mathematics with Applications (Susanna S. Epp (2011))

Epp (2011) fait un lien entre le plus petit chemin dans un graphe et l'arbre couvrant de poids minimum en introduisant la notion de distance entre les sommets dans un graphe. Nous sommes donc dans le cas de la tâche :
T: Trouver le plus court chemin entre les sommets : « *...find the shortest path between a starting vertex and an ending vertex in a weighted graph in which all weights are positive* » (p. 710)

Epp (2011) présente plus précisément les deux techniques pour résoudre cette tâche d'une façon générale pour un graphe connexe quelconque :

- $\tau 1$: calculer la longueur de tous les chemins possibles et choisir la plus courte.

Epp (2011) précise que cette technique n'est pas efficace et prend beaucoup de temps (milliards d'années), y compris pour les très petits graphes. Elle propose donc la deuxième technique $\tau 2$.

- $\tau 2$: utiliser l'algorithme de Dijkstra (Algorithm 10.7.3 Dijkstra, p. 711)

Elle applique ensuite l'action de cet algorithme $\tau 2$ sur l'exemple suivant, puis présente par la preuve de correction et de terminaison. Nous notons que l'algorithme est donné dans un langage naturel.

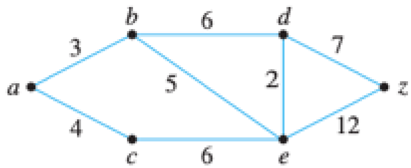


Figure 3-64: Exemple sur le plus court chemin (Epp, 2011)

En ce qui concerne le bloc technologico-théorique derrière la deuxième technique, nous repérons dans le cours d'Epp (2011) les définitions suivantes : :

- La définition d'un graphe pondéré : « *a weighted graph is a graph for which each edge has an associated positive real number weight* » (p. 704) ;
- La definition du poids total : « *the sum of the weights of all the edges is the total weight* » (p. 704)

Ouvrage : Graph Theory (Diestel (2005))

Diestel (2005) évoque uniquement une discussion sur le plus petit chemin en présentant la notion de distance dans son premier chapitre 1.3 « Paths and cycles » :
« *The distance $D_G(x, y)$ in G of two vertices x, y is the length of a shortest x~y path in G ; if no such path exists, we set* $d(x, y) := \infty$ » (p. 8)
Cette discussion se situe dans un chapitre d'introduction sur les définitions et les notions de base ; il est donc impossible d'y étudier les praxéologies en termes de praxis et logos.

Ouvrage : Graph Theory (Bondy & Murty (2008))

Bondy & Murty (2008) abordent la tâche de trouver le plus court chemin mais avec des graphes orientés pondérés (T) qui ne sont pas le type de graphes que nous étudions. Les auteurs précisent que même si les poids sont tous positifs, le problème de trouver un plus petit chemin peut être résolu avec l'algorithme de Dijkstra, qui constitue la technique (τ). Ils donnent l'algorithme dans un langage naturel. (Algorithm 6.12 Dijkstra's Algorithm, p. 151). La preuve de correction de cet algorithme est donnée en exercice (Exercice 6.3.2, p. 153)

Pour le bloc technologico-théorique de cette tâche particulière, nous avons extrait la définition suivante, liée au contenu de cette technique algorithmique :
La définition d'un graphe orienté pondéré : « *…with each edge e of G, let there be associated a real number…, called the weight. Then G, together with these weights on its edges, is called a weighted graph, denoted (G, w)* » (p. 50).

Ouvrage : Introduction to Graph theory (Douglas West (2002))

West (2002) aborde sans introduction la tâche de trouver le plus court chemin entre deux sommets dans un graphe connexe (T). La partie sur le plus court chemin est située après la partie sur les arbres couvrant (p. 97). West (2002) indique explicitement que l'algorithme de Dijkstra (p. 97) est la technique (τ) pour résoudre de ce problème d'une manière rapide et efficace. L'ouvrage ne présente ni preuve de correction, ni preuve de terminaison pour cet algorithme. Cependant West (2002) déclare que cet algorithme fonctionne également pour les graphes orientés, pour lesquelles il propose une application avec l'exemple suivant (Figure 7) ; il en donne la preuve de correction sous la forme d'un théorème (2.3.7 Theorem, p. 98).

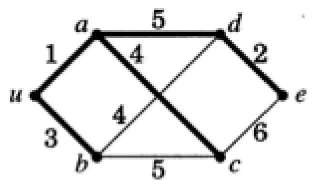


Figure 3-65: Exemple sur le plus court chemin (West, 2002)

Pour le bloc technologico-théorique, nous avons cherché dans le cours de West (2002) l'ensemble des définitions servant de supports théoriques à l'algorithme de Dijkstra :

- La définition de distance : « *the distance in a weighted graph is the minimum sum of the weights on the edges in a* $u, z - path$ *(we consider only non-negative weights)* » (p. 97)
- La définition d'un graphe pondéré : « *a weighted graph is a graph with numerical labels on the edges* » (p. 95)

Ouvrage : Pearls in Graph Theory (Nora Hartsfield & Rienhard Ringel (1994))

Dans cet ouvrage les auteurs ont fait le choix de ne pas présenter la tâche de trouver le plus court chemin dans un graphe. Leur discussion sur les chemins concerne uniquement les problèmes de parcours.

3.5.5.2.2 Conclusions et synthèses sur la recherche du plus court chemin

Tâche : trouver le plus petit chemin dans un graphe connexe			
	Ouvrage	**Bloc praxis**	**Bloc logos**
Multidisciplinaire	Epp (2011)	τ 1: calculer la longueur de tous les chemins possibles et choisir la plus courte. τ 2 : utiliser l'algorithme de Dijkstra.	La définition d'un graphe pondéré, du poids total.
	Bondy & Murty (2008)	Algorithme de Dijkstra	La définition d'un graphe orienté pondéré
Mathématiques	Diestel (2005)	Pas évoqué	Pas évoqué
Transversal	West (2002)	Algorithme de Dijkstra	La définition d'une distance, définition d'un graphe pondéré
	Hartsfield & Ringel (1994)	Pas évoqué	Pas évoqué

Tableau 3-84: organisation praxéologique trouver le plus court chemin dans un graphe

Pour le type de tâche « trouver le plus petit chemin dans un graphe connexe », les ouvrages utilisent l'algorithme de Dijkstra sauf deux d'entre eux (Diestel (2005) et Hartsfield & Ringel (1994)). Cet algorithme construit le chemin cherché en choisissant à chaque itération de l'algorithme un sommet de graphe parmi ceux qui n'ont pas encore été traités, De sorte que la longueur connue provisoirement du plus court chemin aille du sommet initial à chaque sommet rencontré.

Au niveau technologico-théorique, il est impératif de maîtriser les notions de distance dans un graphe pondéré et de finitude d'un graphe connexe. Ces deux notions théoriques sont discutées dans les ouvrages, ce qui nous amène à faire l'hypothèse qu'il existe une homogénéité de bloc technologico-théorique qui soutient cette technique algorithmique dans les différents ouvrages.

Pour les problèmes du plus court chemin, très connus dans la théorie des graphes et qui connaît de vastes applications dans de multiples domaines, les techniques algorithmiques semblent dominantes, à l'exception des ouvrages de Diestel (2005) et de Hartsfield & Ringel (1994) : nous nous interrogeons sur les raisons justifiant cette absence. Nous avons pu trouver une réponse dans la préface de l'ouvrage de Diestel (2005) :

> « this book offers an introduction to the theory of graphs as part of (pure) mathematics; it. contains neither algorithms not 'real world 'applications […] serve students of computer science as much as their peers in mathematics » (Diestel, 2005, p. vii)

Hartsfield & Ringel (1994) ne donnent pas de justification dans leur ouvrage ; en ce qui les concerne, la question reste donc ouverte, mais nous pouvons formuler l'hypothèse de raisons de praticité : ils présentent dans la partie suivante la tâche de trouver l'arbre couvrant de poids minimum, qui est un cas plus général de la recherche du plus court chemin.

Le deuxième point intéressant à discuter dans cette synthèse est le fait que les définitions et théories derrière les techniques algorithmiques sont très similaires et constituent un ensemble de notions de base relativement simple.

3.5.5.3 Étude praxéologique sur l'arbre couvrant de poids minimum

3.5.5.3.1 Tâche : Trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe

Ouvrage : Discrete Mathematics with Applications (Susanna S. Epp (2011))

Epp (2011) a décidé de travailler ce type de tâche à travers un exemple (Exemple 10.7.3, p. 703) : une compagnie aérienne veut trouver une route qui joint toutes les villes avec une distance totale minimale : « … *the airline company wants to serve all the cities shown, but with a route system that minimizes the total mileage* ».

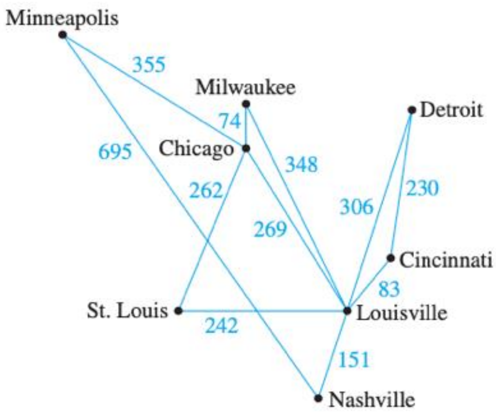


Figure 3-66: Exemple sur l'arbres couvrant de poids minimum (Epp, 2011)

La tâche en jeu est donc :
T: Trouver un arbre couvrant de poids minimum T dans un graphe G (Figure 52).

Epp (2011) précise dans son cours plusieurs techniques pour trouver un arbre couvrant de poids minimum.

- $\tau 1$ (p. 704):
    - Lister tous les arbres couvrants du graphe ;
    - Calculer le poids total de chacun ;
    - Choisir celui de poids total minimum.

Selon Epp (2011), cette technique n'est pas efficace car le nombre total des arbres couvrants distincts sera très large et que le calcul des poids respectifs est particulièrement long. Les deux autres techniques proposées sont deux techniques algorithmiques très efficaces, selon Epp (2011), pour la construction des arbres couvrant de poids minimum.

- $\tau 2$ (Algorithm 10.7.1 Kruskal, p. 704) :

La deuxième technique consiste à trouver un algorithme (algorithme de Kruskal) qui examine toutes les arêtes d'un graphe connexe en ordre de poids croissant. À chaque étape de l'algorithme, l'agorithme ajoute l'arête examinée pour obtenir l'arbre couvrant de poids minimum, à condition qu'il n'obtienne pas de circuit.

- $\tau 3$ (Algorithm 10.7.2, p. 707) :

La troisième technique est aussi algorithmique (algorithme de Prim). L'algorithme commence avec un seul sommet puis à chaque étape, ajoute une arête de poids minimum ayant exactement une extrémité dans l'arbre en cours de construction.

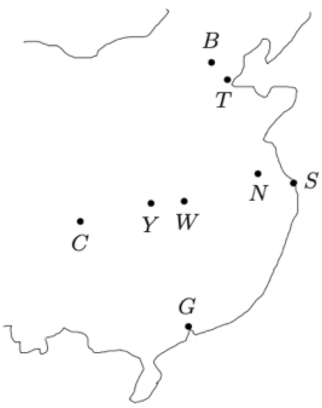
Ces deux algorithmes $\tau 2$ et $\tau 3$ sont suivis respectivement par une application sur l'exemple d'Epp (2011) (Figure 8) et par les preuves de correction. Nous notons que ces deux preuves de correction sont des preuves constructives, et qu'elles suivent un raisonnement par l'absurde.

Nous avons pu repérer le bloc technologico-théorique derrière ces techniques algorithmiques en consultant le cours d'Epp (2011) sur leurs mots-clés :
Pour $\tau 2$ et $\tau 3$:

- La définition d'un graphe pondéré : « *a weighted graph is a graph for which each edge has an associated positive real numbered weight* » (p. 704) ;
- La définition d'un graphe connexe : « *a graph is connected if it is possible to travel from any vertex to any other vertex along a sequence of adjacent edges of the graph* » (p.646) ;
- La définition d'un arbre couvrant : « *a spanning tree for a graph G that contains every vertex of G is a tree* » (p. 702) ;
- La définition d'un arbre couvrant de poids minimum : « *a minimum spanning tree for a connected weighted graph is a spanning tree that has the least possible weight compared to all spanning trees for the graph* » (p. 704).

Ouvrage : Graph Theory (Bondy & Murty (2008))

Bondy & Murty (2008) ont fait le même choix qu'Epp (2011) : celui d'aborder le sujet des arbres couvrant de poids minimum dans leur chapitre 6.2 (p. 145) à travers un problème de départ (The China hydro-electric problem, Fig. 6.5, p. 145) qui nécessite de connecter un réseau électrique avec une distance totale minimale.



	C	G	N	S	T	W	Y
B	1457	1892	901	1078	111	1057	1117
C	–	978	1199	1430	1442	750	473
G	–	–	1133	1197	1820	837	867
N	–	–	–	267	800	459	727
S	–	–	–	–	970	681	962
T	–	–	–	–	–	988	1080
W	–	–	–	–	–	–	285

Figure 3-67: Exemple arbres couvrant de poids minimum (Bondy & Murty, 2008)

Les auteurs ont ensuite abordé le sujet en proposant un algorithme afin de résoudre l'exemple ci-dessus. Il s'agit donc de la tâche :
T: Trouver un arbre couvrant de poids minimum T dans un graphe G.

Les auteurs donnent les techniques explicitement :

- $\tau 1$: l'algorithme de Jarník-Prim (Algorithm 6.9 The Jarník-Prim Algorithm, p. 146) suivi de sa preuve de correcton (Theorem 6.10, p. 147)
- $\tau 2$: l'algorithme de Borůkva-Kruskal (Algorithm 8.22 The Borůkva-Kruskal Algorithm, p. 194) suivi lui aussi par un théorème qui démontre sa correction (Theorem 8.23, p. 195) ; la preuve de ce dernier est demandée en exercice.

Nous avons cherché dans le cours l'ensemble des définitions et théorèmes lié au contenu de ces algorithmes pour construire le bloc technologico-théorique justifiant chacune de ces deux techniques. Ces éléments théoriques sont présentés dans des endroits différents de l'ouvrage, et pas seulement dans le même chapitre.
Pour $\tau 1$ et $\tau 2$:

- La définition d'un graphe connexe : « *a graph is connected if, for every partition of its vertex set into two nonempty sets X and Y, there is an edge with one end in X and one end in Y…* » (p. 5) ;
- La définition d'un sous-graphe couvrant : « *a spanning subgraph of a graph G is a subgraph obtained by edge deletions only, in other words, a subgraph whose vertex set is the entire vertex set of G* » (p. 46) ;
- La définition d'un sous-arbre : « *a subtree of a graph is a subgraph which is a tree* » (p. 105) ;
- La définition d'un arbre couvrant : « *a subtree of a graph is a subgraph which is a tree. If this tree is a spanning subgraph, it is called a spanning tree* » (p. 105).

Ouvrage : Introduction to Graph theory (Douglas West (2002))

West (2002) présente le sujet d'une façon directe sans aperçu historique ni exemple de départ. Il donne d'abord les définitions de base et aborde ensuite directement la tâche :
T: trouver un arbre couvrant du poids minimum (ou maximum) dans un graphe connexe et pondéré. La tâche est incarnée dans la discussion du texte : « *in a connected weighted graph of possible communication links, all spanning trees have* $n - 1$ *edges, we seek one that minimizes or maximizes the sum of the edge weights* » (p. 95)

Pour ce type de tâche, la technique qui, d'après West (2002), en découle est :
τ: l'algorithme de Kruskal (2.3.1 Algorithm, Kruskal's Algorithm-for minimum spanning tree, p. 95), suivi par sa preuve de correction (Theorem 2.3.3, p. 96). West (2002) mentionne l'existence de l'algorithme de Prim qui peut aussi répondre à cette tâche, mais il l'a demandé dans l'exercice (Exercise 2.3.10, p. 104).

Nous avons cherché dans le cours de West (2002) l'ensemble des définitions et des théorèmes lié au contenu de cet algorithme :

- La définition d'un graphe pondéré : « *a weighted graph is a graph with numerical labels on the edges* » (2.3.1 Optimisation and Trees, p. 95) ;
- La définition d'un sous-graphe couvrant acyclique: « *a graph with no cycle is acyclic… A spanning subgraph of G is a subgraph with vertex set V(G)* ». (2.1 Basic Properties, p. 67) ;
- La définition d'un arbre couvrant : « *a spanning tree is a spanning subgraph that is a tree* » (2.1 Basic Properties, p. 67)

Ouvrage : Pearls in Graph Theory (Nora Hartsfield & Rienhard Ringel)

Dans ce dernier ouvrage, les auteurs ont fait le choix d'aborder la question de trouver un arbre couvrant de poids minimum à travers un exemple réel (Figure 7.1.4, p. 129).

Suppose that an amusement park is to be built. The sites of the various rides are determined beforehand, and the builder must also construct a paved walkway that provides access to all the rides. The builder would like to minimize the amount of paving, thus reducing his costs. In the graph of Figure 7.1.4, the vertices represent the rides, and the edges are labeled with the distances between the rides. Where edges are missing, there is some obstruction.

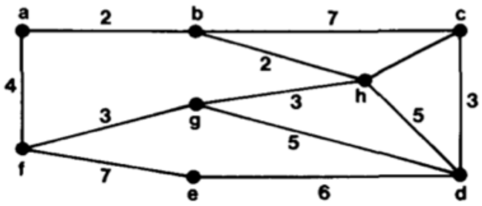


Figure 3-68: Exemple sur arbre couvrant de poids minimum (Hartsfield & Ringel, 1994)

Nous obtenons donc la tâche particulière suivante :
T: trouver un arbre couvrant ayant de poids minimum dans un graphe pondéré donné.

La technique τ proposé explicitement par les auteurs est l'algorithme de Kruskal, présenté dans un langage naturel ; la preuve de correction de cet algorithme est absente de l'ouvrage. Nous avons cherché dans plusieurs endroits du cours le bloc technologico-théorique pour cette technique. Il s'agit de :

- La définition d'un graphe connexe : « *a graph G is connected if for any two vertices a and b there is a path from a to b* » (p. 17) ;
- La définition d'un graphe pondéré : « *... graphs whose edges are labeled with numbers* » (p. 129) ;
- La définition d'un sous-graphe couvrant : « *a spanning subgraph of graph G is a subgraph H of G such that H contains all the vertices of G ; in other words, V(H)=V(G)* » (p. 20) ;
- La définition d'un arbre couvrant : « *a spanning tree of G is a spanning subgraph of G that is a tree* » (p. 20).

3.5.5.3.2 Conclusions et synthèses sur la recherche des arbres couvrant de poids minimum

Tâche : trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe connexe pondéré			
	Ouvrage	**Bloc praxis**	**Bloc logos**
Multidisciplinaire	Epp (2011)	$\tau 1$: Lister tous les arbres couvrants du graphe ; calculer le poids total de chacune ; choisir celle de poids total minimum. $\tau 2$ Algorithm de Kruskal $\tau 3$ Algorithm de Prim	Définition d'un graphe pondéré, définition d'un graphe connexe, définition d'un arbre couvrant, définition d'un arbre couvrant du poids minimum. (Même chapitre)
	Bondy & Murty (2008)	$\tau 1$: l'algorithme de Jarník Prim ; $\tau 2$: l'algorithme de Borukva-Kruskal	Définition d'un graphe connexe, définition d'un sous graphe couvrant, définition d'un sous arbre (endroits différents dans l'ouvrage)
Mathématiques	Diestel (2005)	Pas évoqué	Pas évoqué
Transversal	West (2002)	$\tau 1$: l'algorithme de Borukva-Kruskal	Définition d'un graphe pondéré, définition d'un sous graphe couvrant acyclique, définition d'un arbre couvrant. (endroits différents dans l'ouvrage)
	Hartsfield & Ringel (1994)	Algorithme de Kruskal	Définition d'un graphe connexe, définition d'un graphe pondéré, définition d'un sous graphe couvrant, définition d'un arbre couvrant.

Tableau 3-85: organisation praxéologique- trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe connexe pondéré

Nous avons consulté les cinq ouvrages afin de conduire l'étude praxéologique sur les arbres couvrant de poids minimum : le seul ouvrage qui ne l'évoque pas est celui de Diestel (2005). Le type de tâche commun aux quatre autres ouvrages consiste à trouver l'arbre couvrant de poids minimum dans un graphe connexe pondéré (« *Find the minimum spanning tree in a connected weighted graph* »)

Nous remarquons que les deux techniques de réalisation de cette tâche sont des techniques algorithmiques : (1) l'algorithme de Kruskal ; (2) l'algorithme de Jarnìk-Prim.

(1) Le premier algorithme, celui de Kruskal, trouve un arbre couvrant minimum en sélectionnant des arêtes par poids croissant ; si l'arête ne crée pas de cycle, l'algorithme la sélectionne.

- L'algorithme part d'un sous-graphe contenant initialement les n sommets du graphe mais ne possédant aucune arête ; il ajoute des arêtes une par une.
- Pour cela, au début de chaque itération, l'algorithme cherche l'arête de poids minimum parmi celles non encore traitées.
- Si l'ajout de cette arête dans le sous-graphe en construction crée un cycle simple, il faut l'abandonner et passer à l'arête suivante ; sinon, il faut l'ajouter.
- L'algorithme est terminé dès que le sous-graphe possède $n - 1$ arêtes.

(2) Le deuxième algorithme, celui de Prim, consiste à construire un arbre à partir d'un sommet.
- L'algorithme part d'un sous-graphe ne contenant initialement qu'un seul sommet, celui-ci étant choisi arbitrairement parmi ceux du graphe. Il construira l'arbre recherché à partir de ce sommet, en ajoutant au fur et à mesure sommets et arêtes.
- Pour cela, au début de chaque itération, l'algorithme ajoute à l'arbre en construction l'arête de poids minimum reliant un sommet de l'arbre à un sommet n'y appartenant pas encore. Il ajoute ce sommet à l'arbre. Puis il repart sur une nouvelle itération.
- L'algorithme est terminé dès que le sous-graphe possède $n - 1$ arêtes ou de façon équivalente n sommets.

Ces deux algorithmes sont donnés dans les deux ouvrages d'Epp (2011) et de Bondy & Murty (2008). L'ouvrage de West (2002) donne l'algorithme de Kruskal dans son cours et fait de celui de Prim l'objet d'une question dans les exercices du chapitre. L'ouvrage de Hartsfield & Ringel (1994) se limite à discuter l'algorithme de Kruskal, comme nous l'avons vu dans notre partie décrivant les praxéologies.

Au niveau du bloc technologico-théorique, ce type de tâche fait appel à des méthodes algorithmiques qui sont des techniques simples, aux notions théoriques très basiques. Par exemple, la connexité du graphe est une condition nécessaire pour faire fonctionner l'algorithme et l'aspect « fini » d'un graphe connexe assure que l'algorithme se termine. Une deuxième propriété très nécessaire pour le fonctionnement des algorithmes de Kruskal et de Prim est la propriété du bon ordre des entiers (« *the well-ordering principle of integers* »), laquelle forme un support théorique pour ajouter les arêtes ayant un poids minimum au cours de la construction de l'arbre couvrant.

Il nous semble très intéressant de mentionner que pour ce type de tâches, un consensus apparaît à la consultation des ouvrages : tous considèrent que les techniques algorithmiques sont pertinentes pour trouver un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe connexe pondéré, et qu'elles possèdent de nombreuses applications dans la vie réelle
Ceci nous montre les liens très forts entre la théorie des graphes et l'informatique, ce qui confirme les observations de notre état de l'art.

3.5.5.4 Étude praxéologique sur la coloration

La coloration est un domaine très large de la théorie des graphes, qui occupe une grande partie des ouvrages. Par exemple, dans West (2002) et Diestel (2005), un chapitre est consacré à la coloration des graphes. Dans Bondy et Murty, on compte trois chapitres sur ce sujet. Dans Hartsfield & Ringel (1994), on compte deux chapitres consacrés à la coloration. Parmi les ouvrages que nous avons consultés, l'ouvrage d'Epp (2011) est le seul à ne pas contenir une partie sur la coloration. Nous avons fait le choix d'étudier les tâches autour du problème des quatre couleurs.
Deux tâches sont communes aux ouvrages. La première découle du théorème des quatre couleurs :

Théorème des quatre couleurs : quatre couleurs suffisent pour colorer un graphe planaire.

La tâche qui se présente est localisée dans la preuve de ce théorème, et peut être formulé comme ce qui suit :
T: démontrer que quatre couleurs suffisent pour colorer un graphe planaire.

Nous avons remarqué que tous les auteurs mentionnent que ce théorème n'a pas de preuve mathématique formelle (il reste une conjecture) ; les auteurs évoquent et analysent plusieurs simplifications de ce théorème, ainsi que des configurations faites à l'aide de l'ordinateur (plusieurs heures sont nécessaires pour la résolution). Nous avons alors deux cas à considérer pour le bloc technologico-théorique :

- Un ensemble de théories et de définitions complexes (très étalées, donc difficile à repérer dans les ouvrages)
- Un ensemble de configurations à l'aide d'outils informatiques.

Nous avons remarqué une deuxième tâche commune aux quatre ouvrages, sous la forme d'un théorème : il s'agit cette fois du théorème de cinq couleurs. La preuve de ce théorème constitue notre tâche commune (T) : démontrer que chaque graphe planaire peut être coloré avec cinq couleurs. Nous présentons les techniques (τ) données selon les ouvrages:

Ouvrage : Graph Theory (Diestel (2005))

- Induction sur le nombre des sommets (p. 112) ;

Ouvrage : Graph Theory (Bondy & Murty (2008))

- Induction sur le nombre des sommets (p. 291) ;
- Contradiction

Nous notons que Bondy & Murty (2008) ont mentionné dans leurs cours qu'il existe plusieurs preuves pour le théorème des cinq couleurs. Une de ces techniques est donnée dans l'un des exercices (exercice 11.2.6, p. 292) ; une deuxième preuve est donnée dans un autre chapitre (chapitre 14, p. 357)

Ouvrage : Introduction to Graph theory (Douglas West (2002))

- Induction sur le nombre des sommets (p. 257) ;
- Contradiction

Ouvrage : Pearls in Graph Theory (Nora Hartsfield & Rienhard Ringel)

- Preuve par contradiction avec un raisonnement par l'absurde (p.174) ;
- Analyse par cas (« *countries* »)

En ce qui concerne le bloc technologico-théorique, nous notons que ce dernier n'est pas nécessairement identique selon les ouvrages. Nous avons cherché dans les ouvrages l'ensemble des définitions, propriétés, et théorèmes lié au contenu de ces techniques, et nous les présentons ci-dessous :

Ouvrage : Graph Theory (Diestel (2005))

- Planar graphs : « *draw the graph in such a way that no two edges meet in a point other than the common end* » (p. 83) ;
- « *A plane graph with* $n \geq 3$ *vertices has at most* $3n - 6$ *edges. Every plane triangulation with* n*vertices has* $3n - 6$ *edges* » (Corollaire 4.2.10, p. 91) :

Ouvrage : Graph Theory (Bondy & Murty (2008))

- Theorem of 3-connected triangulations : « *By corollary 10.21, a planar embedding of such a graph is 3-connected triangulation* » (« *such* » renvoi à « *simple connected planar graphs* ») (p. 288) ;
- « *Every simple planar graph has a vertex of degree at most five* » (Corollary 10.22, p. 260) ;

- Corollary 10.21 : « *Let G be a simple planar graph on at least three vertices. Then* $m \leq 3n - 6$. *Furthermore,* $m = 3n - 6$ *if and only if every planar embedding of* G *is a triangulation.* » (p. 260) ;
- Proper coloring : « *the coloring is proper if no two adjacent vertices are assigned the same color* » (p. 288) ;
- Bridges : « In the study of planar graphs, certain subgraphs, called bridges » (p. 263) ;
- Theorem 10.26 : « Inner (outer) bridges avoid one another (p. 265)

Ouvrage : Introduction to Graph theory (Douglas West (2002))
- The edge upper bound : « *If G is a simple planar graph with at least three vertices, then* $e(G) \leq 3n(G) - 6$. *If also G is triangle-free, then* $e(G) \leq 2n(G) - 4$» (Theorem 6.1.23, p. 241) ;
- Proper coloring : « *A k-coloring is proper is the adjacent vertices have different labels* » (p. 191) ;
- Induced subgraph: « *An induced subgraph is a subgraph obtained by deleting a set of vertices* » (p. 23) ;
- Jordan Curve Theorem

Ouvrage : Pearls in Graph Theory (Nora Hartsfield & Rienhard Ringel)
- Définitions :
  - Lune : « *a plane drawing of a multigraph may contain regions that have only two edges, called lunes* » (p. 156) ;
  - Country : « *in a graph, regions are called countries* » (p. 157) ;
  - Bridge : « *a bridge in a connected graph G is an edge of G whose removal disconnects G in two subgraphs* » (p. 44) ;
  - Map : « *a plane drawing of a connected, bridgeless, planar multigraph is called a map* » (p. 156) ;
  - Normal map: « *If the multigraph is cubic in addition to the above properties, the drawing is called a normal map* » (p.156) ;
- Lemme : « Lemma 8.3.1 : *No map in the plane has mutually adjacent countries* » (p. 164).
- Théorème : « *Theorem 8.1.1: Euler's Polyhedral Formula, if a plane drawing of a connected graph with p vertices and q edges has r regions then* $p - q + r = 2$ » (p. 151).

3.5.5.4.1 Conclusions et synthèses sur la coloration

Tâche : démontrer que chaque graphe planaire peut être coloré par cinq couleurs			
	Ouvrage	**Bloc praxis**	**Bloc logos**
Multidisciplinaire	Epp (2011)	Pas évoqué	Pas évoqué
	Bondy & Murty (2008)	Induction sur le nombre de sommets et contradiction	Corolaires, définition du « proper coloring », « bridges », théorème
Mathématiques	Diestel (2005)	Induction sur le nombre de sommets	Définition de graphes planaires, un corollaire
Transversal	West (2002)	Induction sur le nombre de sommets et contradiction	Théorèmes, définition du « proper coloring », « induced subgraph »
	Hartsfield & Ringel (1994)	Preuve par contradiction avec un raisonnement par l'absurde ; et analyse par cas « countries »	Définitions de « lune, country, bridge, map, normal map, 5-colorable », lemme, théorème,

Tableau 3-86: organisation praxéologique- démontrer que chaque graphe planaire peut être coloré par cinq couleurs

Il nous semble important de noter que l'induction est la technique de preuve utilisée dans les trois ouvrages et Diestel (2005), Bondy & Murty (2008) et West (2002). Seuls Hartsfield & Ringel (1994) ont fait le choix de travailler sur un raisonnement par l'absurde. Nous posons donc la question de la particularité de la méthode d'induction en ce qui concerne la coloration. Nous ajoutons que, pour la même tâche (démontrer le théorème de cinq couleurs), le bloc technologico-théorique n'est pas identique selon les auteurs. Un choix large de définitions et de théorèmes est évoqué dans les ouvrages. Nous renvoyons aux analyses par critères, qui témoignent de ce choix large et du fait que la coloration a été évoquée dans plusieurs chapitres. En ce qui concerne le théorème de quatre couleurs, le travail de la preuve s'inscrit dans les heuristiques et dans des configurations à l'aide des outils informatiques. Cet aspect doit être analysé plus profondément, car il pose de nombreuses questions sur la validité de la preuve informatique.

Nous nous interrogeons sur les raisons expliquant l'absence de partie sur la coloration dans l'ouvrage d'Epp (2011). Est-ce dû au fait que la coloration fait appel à des mathématiques plus complexes ?
L'existence de visions très variées dans le bloc technologico-théorique pour la tâche de prouver le théorème de cinq couleurs témoigne de la richesse des technologies et des théories qui soutiennent cette technique.

Nous avons montré dans notre revue de littérature que la coloration est un outil très intéressant de résolution pour plusieurs problèmes qui peuvent être modélisés par des graphes. Nous n'avons pas remarqué de problèmes (parmi notre sélection) pouvant être résolu par la coloration. Nous posons alors la question des raisons expliquant l'absence de la coloration en tant qu'outil, et les implicites qui guident les choix des auteurs. En revanche, l'aspect « objet » de la coloration existe fortement, comme dans les problèmes de quatre et de cinq couleurs, pour lesquels il s'agit d'étudier la coloration en tant qu'objet.

3.5.5.5 Synthèse sur l'étude praxéologique des ouvrages universitaires

Nous avons pu extraire des éléments homogènes et d'autres hétérogènes. Sur plusieurs aspects, les résultats se croisent avec les résultats des entretiens menés avec les enseignants-chercheurs. Nous présentons ci-dessous quelques éléments de réflexion :

Un enseignant caractérise les mathématiques discrètes en disant qu'elles sont « proches de l'informatique » (A1), et nous remarquons la prépondérance des techniques algorithmiques dans l'analyse des ouvrages (Dijkstra, Prim, Fleury, et Kruskal). Il s'agit d'une convergence et d'une confirmation.
A5 indique que les problèmes en mathématiques discrètes peuvent permettre de faire un focus sur l'aspect du raisonnement. Notre étude praxéologique des ouvrages montre clairement une domination parmi les preuves de l'induction et du raisonnement par l'absurde (preuves d'algorithmes inclus). Cet aspect semble particulier aux grandes catégories de problèmes que nous étudions. Il montre que l'aspect « discret » tisse un lien particulier avec ces types de preuves, ce qui renforce les déclarations de la littérature.

Certains enseignants-chercheurs affirme que les mathématiques discrètes sont « difficiles à comprendre » et que « les méthodes de résolution sont souvent très difficiles, elles font appel à des mathématiques complexes ». En observant l'ouvrage d'Epp (2011), nous remarquons un vrai décalage, en particulier lorsqu'elle présente des algorithmes comme l'algorithme de construction d'un circuit eulérien et l'algorithme de Dijkstra dans un langage naturel et d'une façon très simple, en les faisant suivre d'une application. Epp (2011) montre que ces mathématiques peuvent être facilement comprises. En revanche, lorsque nous observons l'ouvrage de Diestel (2005), qui ne présente pas d'algorithmes dans sa partie de cours et qui donne des techniques et justifications d'ordre théorique, il est évident que ces sujets représentent des mathématiques plus compliquées. Le fondement mathématique est toujours identique, mais la façon dont les savoirs sont abordés varie énormément selon les ouvrages : suivant les auteurs, nous notons une approche de mathématique théorique ou une approche informatique et pragmatique.

Nous notons que la preuve de cinq couleurs est faite par récurrence par tous les auteurs (sauf Hartsfield & Ringel (1994)). Elle est cependant variée en termes de bloc de *logos* (la technique fait appel à des technologies très différentes et variés). Nous faisons l'hypothèse que cette richesse au niveau technologico-théorique a une double fonction : d'un côté, elle témoigne de la richesse du domaine mathématique lui-même ; d'un autre côté, elle peut constituer l'une des cause des difficultés des étudiants autour de la coloration, comme l'ont évoqué des enseignants-chercheurs lors des entretiens (A2).

3.5.6 Conclusion sur l'analyse des ouvrages universitaires (conclusion de la partie 3.5)

L'analyse des ouvrages universitaires (analyse par rapport à la grille et par rapport à l'étude praxéologique) nous éclaire sur la nature des mathématiques discrètes enseignées au supérieur. Plusieurs aspects ont été discutés dans nos synthèses. Nous présentons ici quelques tendances générales :

- Certains auteurs ont fait le choix d'inclure davantage d'exemples et d'applications, mais avec des variations selon trois catégories de problèmes que nous avons regardés.

Cet aspect met en évidence que certains sujets de la théorie des graphes n'ont pas le même statut que les autres. Par exemple, la coloration fait appel à des praxéologies plus compliquées (Tableau 3-86). Nous faisons l'hypothèse que cette complexité explique les difficultés rencontrées par les étudiants (et déclarées par les enseignants-chercheurs) face aux problèmes de coloration.

- Les résultats des entretiens montrent une prépondérance de déclarations sur les méthodes de preuves, comme l'induction, et sur les algorithmes, parmi une variété d'autre méthodes. Cette variété était aussi présente dans les ouvrages, qui évoquent en particulier l'induction, la contradiction et les algorithmes. La dominance de l'induction dans les ouvrages, ainsi que dans les entretiens, apporte des éléments intéressants à la littérature au niveau des caractéristiques du domaine, d'autant que celle-ci n'a que peu traité l'enseignement des mathématiques discrètes au niveau supérieur.
- La question de la complexité des preuves est largement discutée lors des entretiens : une grande partie des interviewés affirme qu'il s'agit de problèmes difficiles à résoudre, pour lesquels il n'existe pas de stratégies de résolution classiques. Plus précisément, les enseignants chercheurs indiquent que les preuves en mathématiques discrètes « ne se font pas les unes sur les autres » et que « si nous effectuons un petit changement de paramètre, nous perdrons tout quelque part ». Ces déclarations témoignent d'une particularité des preuves en mathématiques discrètes (surtout au sein la théorie des graphes) ; les enseignants-chercheurs s'appuient sur leur expérience dans l'enseignement supérieur. Comme la littérature comporte peu de travaux sur l'enseignement des mathématiques discrètes, cette complexité est peu documentée, sauf au travers de l'étude de la récurrence par Gardes, Gardes, et Grenier (2016). L'analyse des ouvrages universitaires (schémas et étude praxéologique) montre bien une diversité d'objet et une richesse variée du bloc du *logos* suivant les ouvrages. Nous faisons l'hypothèse que la nature de ces praxéologies soutient la complexité des preuves.
- Nous notons la présence d'une variation des exigences, en particulier autour des contenus de la théorie des graphes. Il existe d'une part des contenus, comme la recherche des plus petits parcours, qui font appel à des techniques algorithmiques simples, ainsi qu'à un bloc de *logos* dont les technologies/théories sont basiques et facilement comprises. D'autre part, certains problèmes, comme la coloration, font appel à des praxéologies plus complexes (bloc théorique plus riche et plus important). Nous faisons l'hypothèse que cette manifestation justifie les déclarations des enseignants-chercheurs et la littérature, qui mentionnent que les objets et les énoncés sont faciles d'accès, mais mettent également l'accent sur les difficultés des preuves et l'existence de modes de raisonnement complexes.
- Les algorithmes que nous avons décrits se présentent avec une double fonction (outil et objet), ce qui est mentionné par plusieurs enseignants chercheurs lors des entretiens. Il existe une variation dans la présentation des preuves des algorithmes.
- La place de la modélisation dans la théorie des graphes a été largement abordée dans la littérature et lors des entretiens. Néanmoins, elle semble être presque absente des cours des ouvrages universitaires consultés. Il n'existe qu'une seule forme de modélisation, pratiquée sur l'exemple des sept ponts de Königsberg (dans deux ouvrages sur cinq et seulement pour la catégorie de problèmes invitant à rechercher des parcours eulériens). Nous avons examiné les énoncés des exercices des ouvrages, qui posent quelques questions sur cette forme de modélisation. Nous pouvons faire l'hypothèse que c'est à l'enseignant d'effectuer des choix à partir des ouvrages, mais les ressources dans les ouvrages ne traitent pas beaucoup de cet aspect de la modélisation. Ce décalage entre les déclarations des chercheurs et des enseignants-chercheurs et ce qui trouve dans les ouvrages appelle une étude plus approfondie.

- Les praxéologies de la coloration sont variées, ce qui montre bien que l'offre de formation peut aussi être très variée. Cette observation est homogène de même avec la variation dans les résultats de questionnaire.
- La dualité entre facile d'accès et la complexité nous envoie vers la question de la transition secondaire-supérieur.

4 Conclusion et perspective de recherche

L'étude que nous avons menée dans cette thèse a permis de réaliser un certain nombre de constats sur les volets épistémologiques et didactiques des mathématiques discrètes au supérieur. L'originalité de notre recherche réside dans le fait que c'est un travail inédit, qu'il constitue un premier pas vers la construction d'une didactique des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur, et particulièrement de la théorie des graphes. Notre questionnement initial portait sur les enseignements en mathématiques discrètes qu'il serait pertinent de développer dans l'enseignement supérieur pour favoriser l'activité mathématique des étudiants. Deux hypothèses primordiales sous-tendent notre travail. D'une part, la théorie des graphes en tant que partie des mathématiques discrètes est assez proche de la recherche et de l'enseignement (choix complexe de contenus pour l'enseignement, applications diverses). D'autre part, la théorie des graphes possède plusieurs caractéristiques épistémologiques, parfois implicites dans la recherche, que nous avons essayé de mieux comprendre grâce aux expérimentations (entretiens et analyses praxéologiques des ouvrages universitaires).

Nous avons appuyé notre recherche sur la littérature en didactique des mathématiques/ *mathematics education* au niveau international, en utilisant en particulier trois références principales : les préconisations de la conférence de DIMACS (2001) ; un numéro spécial de ZDM (2004) (2004) consacré aux mathématiques discrètes (« Discrete Mathematics and Proof in High School Education ») ; une monographie d'IMCE-13 (Hart & Sandefur, 2016) intitulé « Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide ». Nous avons mis en évidence la nécessité, au niveau épistémologique, de préciser notre objet d'étude et, au niveau didactique, d'identifier comment le champ des mathématiques discrètes est délimité/interprété par les didacticiens. Nous avons ainsi formulé nos questions de recherche, que nous rappelons ci-dessous :

Q1- Comment les recherches en didactique des mathématiques discrètes étudient-elles les mathématiques discrètes ? (en particulier au supérieur)

a. Quelles sont les spécificités épistémologiques des mathématiques discrètes traitées dans les recherches en didactique des mathématiques, plus particulièrement pour le supérieur ?
b. Quels sont les types de problèmes et concepts étudiés ?
c. Quels implicites au niveau épistémologique dans les travaux en didactique ?

Q2- Quelles sont les caractéristiques de la discipline aujourd'hui qui pourraient être utiles au développement des travaux en didactique des mathématiques discrètes ?

Q3- Quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées dans le supérieur ? Et comment (quels choix) ?

Pour y répondre, nous avons développé une méthodologie de recherche portant sur quatre formes d'expérimentations (état de l'art en didactique, entretiens avec les enseignants-chercheurs, état des lieux sur ce qui est enseigné, ou non, à l'université, et comparaison des ouvrages universitaires pour le supérieur). Nous argumentons les résultats de nos expérimentations dans la suite. Notre recherche était de nature exploratoire, basée sur une méthodologie qualitative. Nous nous sommes inscrits dans le cadre d'une épistémologie contemporaine qui nous a permis d'accéder à des conceptions des enseignants-chercheurs sur les mathématiques discrètes. Du point de vue théorique, nous nous sommes appuyées sur la dialectique outil/objet de Régine Douady (1992) et sur la notion d'organisation praxéologique de Chevallard (1998) pour conduire nos analyses des ouvrages universitaires.

Nous avons présenté en détail puis synthétisé, dans chacun des chapitres de cette thèse, les résultats de notre exploration et de notre expérimentation.

Dans cette partie de conclusions, nous articulons en 4.1, 4.2, et 4.3 les résultats principaux de ces enquêtes et expériences, afin d'apporter des éléments de réponses à nos questions de recherche. Dans la partie 4.4, nous présentons quelques perspectives pour l'avenir de nos travaux.

4.1 Comment les recherches en didactique des mathématiques étudient les mathématiques discrètes (en particulier au niveau du supérieur) ?

Pour cette première question de recherche, nous avons conduit un état de l'art sur les travaux (articles, actes de colloques, numéros spéciaux de revues, thèses) consacrés aux mathématiques discrètes au niveau supérieur durant ces vingt dernières années. Nous avons construit une bibliographie « boule de neige » d'une manière systématique, en recherchant des critères bien précis à l'avance. Nous rappelons des critères que nous avons identifiés dans les articles : spécialité des auteurs ; niveaux ; objet d'étude ; questionnements traités ; cadres théoriques utilisés ; concepts mathématiques étudiés ; types de problèmes et types de preuves évoqués ; et aspects caractérisant les mathématiques discrètes. Le but était de bien identifier la manière dont les recherches en mathématiques étudient les mathématiques discrètes (particulièrement au niveau supérieur). Les résultats de cette première enquête se divise entre éléments statistiques et éléments descriptifs. Nous présentons ainsi les résultats obtenus pour cette première question de recherche (Q1- a, b, c)

4.1.1 Insuffisance de travail sur le supérieur

L'état de l'art nous a bien montré que les mathématiques discrètes ne se limite pas à être le centre d'intérêt de nombreuses recherches, et que ce sujet connaît une variabilité qui dépasse les seules frontières des pays, et s'illustre dans la diversité des nationalités des auteurs, des niveaux des classes, et dans le champ très large de thématiques étudiés. Cependant, nous avons remarqué que la place des mathématiques discrètes au supérieur n'est pas suffisamment étudiée dans les travaux en didactiques des mathématiques ; 23.5 % (huit sur trente-quatre) des recherches portent sur l'enseignement supérieur, ce qui nous semble étonnant étant donné qu'il s'agit d'un domaine très impliqué dans la vie courante et dans les mathématiques actuelles. La question du supérieur reste donc ouverte.

4.1.2 Apports des mathématiques discrètes pour l'enseignement : plusieurs caractéristiques (épistémologiques et didactiques) mais aussi plusieurs implicites

Nous résumons ci-dessous les grandes lignes des arguments sur les caractéristiques des mathématiques discrètes tels qu'elles ont été soulignées dans les travaux recherchés :

- Il n'existe pas de consensus sur la définition des mathématiques discrètes au service de la didactique ; de ce fait, la question de la définition des mathématiques discrètes au service de la didactique reste sans réponse (Maurer, 1997; Sebö, 2006) ;
- Les sujets en mathématiques discrètes sont riches et facilement accessibles ; ils peuvent être abordés par des non-spécialistes du domaine (Gaio & Di Paola, 2016; Khiok Seng, Tin Lam, Kok Leong, Eng Guan, & Fengming, 2008);
- Au sein des mathématiques discrètes, les algorithmes sont particulièrement intéressants à enseigner, car ils permettent notamment de développer l'apprentissage de la preuve (Ouvrier-Buffet, Meyer, & Modeste, 2018; Devaney, 2016; Ferrarrello & Mammana, 2016; Garfunkel, 2016; Rougetet, 2016; Schuster, 2004; Hußmann, 2008);
- Les problèmes en mathématiques discrètes peuvent jouer un rôle moteur dans l'apprentissage et l'enseignement des preuves. Plus précisément, les mathématiques discrètes permettent une introduction à la modélisation et au processus de preuve, ainsi

qu'à l'optimisation et à la recherche opérationnelle, favorisant une démarche de « mathématiques expérimentales » (Cartier & Moncel, 2008; Grenier & Payan, 1998; Giroud, 2011; Hart & Martin, 2016);
- Les mathématiques discrètes constituent une réelle opportunité pour les élèves en difficulté, mais également un défi pour les autres (DeBellis & Rosenstein, 2004; Goldin G. A., 2004; Goldin G. A., 2016). Goldin (2004) précise que les mathématiques discrètes sont formateurs pour les enseignants, notamment ceux du primaire.

Ces apports étant soulignés, ils ne pointent pas explicitement la nature des justifications épistémologiques derrière les déclarations didactiques (surtout les articles écrits par des mathématiciens). Nous avons émis l'hypothèse qu'il existe des implicites épistémologiques qu'il est nécessaire d'approfondir. La place des caractéristiques implicites des recherches en didactique fait partie de la réponse à la question de recherche Q1 (c). Ceci nous a conduit à réaliser des entretiens avec des enseignants-chercheurs exerçant dans le supérieur (sur cet aspect parmi d'autres -voir 4.2). Nous avons noté plusieurs déclarations selon lesquelles le champ des mathématiques discrètes favorise le développement du raisonnement mathématique, ce qui coïncide avec les résultats de l'état de l'art. Néanmoins, les entretiens ont fourni des nouveaux éléments, comme l'existence du paradoxe entre le « facile d'accès » et le « difficile à résoudre », les mathématiques discrètes faisant appel à des stratégies « difficiles » de résolution de problèmes. Nous interrogeons ces aspects dans notre deuxième enquête, les entretiens avec les enseignants-chercheurs.

4.2 Quelles sont les caractéristiques de la discipline aujourd'hui qui pourrait être utiles au développement des travaux en didactique des mathématiques discrètes ?

Nous rappelons qu'en termes méthodologiques, nous avons développé une liste de critères (à six niveaux — voir partie 3.3.3) en se basant sur les résultats de notre état de l'art, afin de poursuivre les analyses des entretiens dans le cadre d'une épistémologie contemporaine. Au cours de notre analyse des entretiens auprès des enseignants-chercheurs (français et libanais), nous avons recueilli plusieurs éléments pour décrire la nature de la discipline d'aujourd'hui (les mathématiques discrètes en général, et la théorie des graphes en particulier, dans la recherche mathématique ainsi que dans l'enseignement). Pour mieux comprendre les caractéristiques contemporaines, nous avons donc posé les questions en suivant six niveaux de critères (1) éléments personnels et professionnels ; (2) conception sur la définition des mathématiques discrètes ; (3) conception sur l'activité de preuve en mathématiques discrètes ; (4) place et rôle du travail sur la modélisation en mathématiques ; (5) lien(s) entre les mathématiques et d'autres disciplines ; et (6) apprentissage des mathématiques discrètes. Nous passons en revue les six niveaux, et indiquons ce que notre étude a pu apporter comme précisions concernant la nature de la discipline.

4.2.1 Éléments personnels et professionnels experts du domaine

Concernant les éléments personnels et professionnels, nous observons une répartition relativement conforme entre les pays et les statuts. La majorité (84,6 %) des interviewés (enseignants-chercheurs en mathématiques discrètes dans des formations différentes en mathématiques et en mathématiques appliquées) possède plus de cinq ans d'expérience dans l'enseignement et dans la recherche. De surcroît, la théorie des graphes constitue le domaine de recherche prédominant pour les enseignants-chercheurs. Tous les participants à cette enquête sont rattachés à des laboratoires (mathématiques, informatique ou mathématiques appliquées).

4.2.2 Caractéristiques du domaine — des convergences et des points critiques

En ce qui concerne les différentes définitions des mathématiques discrètes, nous avons pu différencier les réponses du côté de l'enseignement de celles du côté de la recherche. Dans le premier cas, les mathématiques discrètes ont été définies d'après les objets qu'elles comprennent. Les chercheurs en mathématiques et les chercheurs en mathématiques appliquées ont défini les mathématiques discrètes à partir des objets qu'elles comprennent. Du côté de la recherche, nous avons noté que les mathématiques discrètes se caractérisent par la propriété « séparable » dans la plupart des réponses (voir 3.3.4) : « […] si je prends un exemple en nombre relatifs, il n'y a pas quelque chose entre les deux […] ; Les […] choses qui sont séparables, ce sont des mathématiques discrètes […] ; […] Les éléments peuvent être manipulés séparément […] ; […] Au sens étymologique, le terme discret peut dire séparable […] ; […] Il y a la distance entre les objets qu'on regarde. Ils ne sont pas tous collés les uns aux autres. »

Les particularités des mathématiques discrètes exposées lors des entretiens complètent la vision donnée par l'état de l'art ; elles comportent trois caractéristiques principales : les mathématiques discrètes sont un outil de génération des modèles pour résoudre des problèmes en informatique ; les mathématiques discrètes possèdent des techniques spécifiques de preuves, et mobilisent en particulier des preuves constructives et par induction ; les mathématiques discrètes sont facilement comprises, possèdent différentes représentations, **mais** font parfois appel à des mathématiques plus complexes. Plus précisément, du côté de l'enseignement, nous avons pu extraire beaucoup de caractéristiques des preuves : la place des preuves visuelles, les algorithmes, la notion d'invariant, les graphes (en tant qu'outils de modélisation), les heuristiques[40], et la récurrence (cité par neuf interviewés sur treize). La place de la modélisation est remarquable du côté de l'enseignement, en particulier les modélisations par des graphes pour la résolution d'une gamme de problèmes (emploi de temps, affectation des stages, graphes de conflits, théorèmes des amitiés). Le travail de modélisation est davantage présent dans les formations en mathématiques appliquées et en informatique que dans les formations mathématiques. Cependant, pour un enseignant-chercheur en mathématiques appliquées, la modélisation se situe au cœur de l'activité mathématique (il distingue les modélisations utilisées en mathématiques appliquées et les modélisations avec les graphes où le graphe n'est pas désigné en avance). Cette posture n'est pas identique à celles d'autres enseignants-chercheurs, parmi lesquels certains utilisent des modèles déjà construits par les mathématiciens pour résoudre des problèmes. Nous remarquons donc que la posture des enseignants-chercheurs est variée au niveau des contenus enseignés eux-mêmes. Les résultats que nous présentons dans 4.3 complètent ces aspects.

En ce qui concerne les liens entre les mathématiques discrètes et les autres disciplines, nous avons distingué les liens dans l'activité de recherche des enseignants-chercheurs, et ceux de l'enseignement. Dans le contexte de l'enseignement, les liens se manifestent *via* plusieurs formes (exemples, exercices, évaluations) et à deux niveaux (en tant que techniques et en tant qu'objets de travail). Ces liens peuvent être regroupés en deux catégories (scientifiques et non-scientifiques). Ils sont bien travaillés avec les étudiants (selon neuf interviewés sur treize). Dans la recherche, les liens s'expriment au travers de collaborations entre collègues et de projets personnels.

Pour le dernier niveau (« apprentissage des mathématiques discrètes »), nous constatons que les objectifs d'apprentissage des enseignants-chercheurs représentent un mixte entre des

[40] Nous avons considéré la notion d'heuristiques présentée dans Ouvrier-Buffet (2013) : « Lakatos a repris la motion d'heuristiques de Pólya qui recouvre toute "astuce" et processus permettant d'obtenir des conjectures et idées d'une preuve, dans le cadre du raisonnement plausible. » (Ouvrier-Buffet, 2013 p.15)

approches syntaxiques et des approches sémantiques ; les évaluations du cours sont faites par des productions écrites en temps limité. Nous n'avons obtenu que quelques réponses sur les travaux pratiques (4 sur 13). Une de nos questions portait sur les difficultés des étudiants ; nous avons obtenu des réponses très variées. De manière générale, les preuves, le raisonnement formel, la logique, et la rigueur mathématique sont les sources principales des difficultés des élèves. Ces affirmations sont partagées par la plupart des interviewés. Nous leur avons donc demandé quelles sont les actions entreprises pour réduire ces difficultés. Les réponses comprennent des stratégies « classiques » : poser au tableau ; faire autrement ; organiser une discussion ; des textes modèles. Néanmoins, certains enseignants-chercheurs ont proposé des méthodes non-classiques : utiliser des algorithmes, donner des problèmes ouverts, résoudre des exercices difficiles. Ces stratégies (algorithmes et problèmes ouverts) coïncident avec les résultats de l'état de l'art quant à la question de l'algorithmique et aux situations de recherches en classes (SiRC) (Grenier & Payan, 1998). Enfin, nous remarquons que le comportement des étudiants lors l'apprentissage des mathématiques discrètes se divise entre deux catégories : un comportement favorable, ou une frustration, qui s'exprime en particulier dans le raisonnement et les exercices. Ce résultat nous rappelle l'affirmation de Goldin (2004) selon laquelle les mathématiques discrètes favorisent le développement « affectif » chez les apprenants (qui peuvent aussi bien être des élèves que des enseignants ou de futurs enseignants).

Pour conclure sur cette question de recherche, revenons sur le paradoxe suivant : les mathématiques discrètes au supérieur semblent très facilement comprises et abordées par les étudiants ; et pourtant, elles ne sont pas très facilement résolues. Cet aspect peut être dû en grande partie à la dimension théorique des mathématiques discrètes en tant que domaine des mathématiques. En conséquence, lorsque nous posons la question de la nature de ces modes de résolution, nous revenons à des mathématiques complexes en termes de théorie, d'heuristiques et d'intuition. Nous avons étudié spécifiquement cet aspect lors de l'analyse des ouvrages.

4.3 Quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées dans le supérieur ? Et comment (quels choix) ?

Afin d'étudier quelles mathématiques discrètes sont actuellement enseignées au supérieur, nous avons fait le choix de préciser notre objet d'étude autour de la théorie des graphes. Nous avons choisi cinq ouvrages[41] (un choix lié aux propositions des enseignants-chercheurs lors des entretiens, complété par des ouvrages emblématiques en mathématiques discrètes) destinés à un public varié afin de conduire une analyse de trois grands types de problèmes (la recherche des parcours, les plus petits parcours, et la coloration) en théorie des graphes. Notre analyse est divisée en deux volets : le premier suit une liste de critères (la temporalité, les preuves, la récurrence, les algorithmes, et la modélisation) que nous avons développés ; le deuxième est une étude praxéologique autour de ces types de problèmes.

La diversité des temporalités, des exemples et des applications entre les ouvrages met en évidence l'impact de la posture de l'auteur dans son ouvrage. Nous notons aussi une variation dans la profondeur et le degré d'étalement de certains chapitres et contenus. Certains ouvrages font le choix d'intégrer un ensemble d'exemples et de d'applications (Epp, 2011; Hartsfield & Ringel, 1994); pour d'autres, comme Diestel (2005), l'approche est davantage liée aux mathématiques théoriques. Enfin, certains ouvrages ont fait le choix de donner des exemples d'une manière différente selon les chapitres (Bondy & Murty, 2008; West, 2002). La question de la complexité des preuves n'a pas été suffisamment étudiée dans les travaux de l'état de l'art mais elle a été discutée lors des entretiens. L'analyse des ouvrages universitaires montre

[41] Les ouvrages sont : (Epp, 2016 ; Bondy & Murty, 2008 ; Diestel, 2005 ; West, 2002 ; Hartsfield & Ringel, 1994)

(d'après les schémas et d'après l'étude praxéologique) l'existence d'une richesse en termes de bloc de *logos* (technologie et théorie) (voir 0). Nous faisons l'hypothèse que cette richesse et cette diversité de notions technologiques et théoriques soutiennent l'aspect de complexité des preuves. De plus, l'étude praxéologique autour de la coloration (le théorème des quatre couleurs et le théorème des cinq couleurs) a recouvert une complexité au niveau théorique. Ces observations consolident l'existence du paradoxe entre « facile d'accès » et « difficile à résoudre ». Les algorithmes sont présentés pour certains types de problèmes, mais la question des preuves d'algorithmes reste relativement peu abordée dans les ouvrages universitaires. Plus précisément, les algorithmes ne sont pas traités par les mathématiciens ; ils le sont quand le public de l'ouvrage est plus large. Concernant la modélisation, elle existe au sein les ouvrages dans sa forme intra-mathématiques ; seuls deux ouvrages (Epp, 2011; Hartsfield & Ringel, 1994) prennent en compte la modélisation extra-mathématique (dans le sens du problème concret). Cette observation nous semble très surprenante, d'autant que l'aspect modélisation (à partir de la vie réelle) est largement évoqué dans les travaux sur les mathématiques discrètes en général, et dans la théorie des graphes plus particulièrement.

Pour terminer, la théorie des graphes constitue un domaine considéré comme facile d'accès et possédant un caractère ludique, surtout au niveau secondaire. Pourtant, notre étude montre qu'au niveau supérieur, la théorie des graphes est bâtie sur une organisation mathématique plus complexe.

Après avoir apporté des éléments de réponse à nos trois questions de recherche, nous présentons dans une dernière partie 4.4 les perspectives et prolongements possibles de nos travaux.

4.4 Les perspectives et prolongements possibles de notre travail

Au cours de notre recherche, nous avons articulé plusieurs approches méthodologiques pertinentes pour la réalisation de notre travail. Cependant, parmi les différentes expérimentations menées, la précision de certaines d'entre elles se trouve restreinte par le temps qu'il est envisageable d'accorder à une thèse de doctorat. Dans cette partie, nous présentons les perspectives de cette recherche et les prolongements possibles pour des travaux ultérieurs.

Tout d'abord, nous souhaitons souligner que, si cette étude a conduit des expérimentations en France et au Liban, l'analyse comparative n'était pas son objet ; elle pourrait être l'objet d'une étude à part entière. L'épistémologie contemporaine (Gardes M.-L. , 2013) semble très utile pour décrire la nature de la discipline d'aujourd'hui et construire des situations et analyses didactiques, avec une méthodologie spécifique ; nous voyons que certains prolongements dans d'autres pays peuvent apporter des éléments enrichissants au domaine des mathématiques discrètes. Il serait nécessaire d'actualiser les recherches sur les travaux de l'état de l'art ; domaine vivant et en développement rapide, les mathématiques discrètes ne cessent de se renouveler : nouvelles approches théoriques, nouveaux questionnements, nouveaux objets, nouveaux types de preuves, nouveaux contextes curriculaires, etc.

Bien que la récurrence ne constitue pas en elle-même un sujet d'étude de notre thèse, nous avons présenté dans le chapitre 4 un état de l'art détaillé sur celle-ci. Nous avons noté sa place remarquable à la fois au sein de l'état de l'art, des entretiens et des analyses praxéologiques. Ce développement important nécessite d'aller voir de près et avec plus de profondeur les potentialités de la récurrence. De plus, les travaux récents de Léon & Modeste (2020) sur les pratiques d'experts autour de la récurrence et de la récursivité invitent à un suivi, étant donné que son analyse mathématique *a priori* s'est révélé utile pour montrer le rôle que peuvent jouer certaines notions, ainsi que pour anticiper certaines stratégies adoptées par les chercheurs (Léon & Modeste (2020) font l'hypothèse que ces stratégies sont des invariants opératoires).

Nous avons obtenu des praxéologies très variées autour de la coloration : il nous semble que ce résultat indique nettement que l'offre de formation peut aussi être variée. L'analyse du questionnaire a bien montré cette variété dans les trois types de licence (mathématiques, mathématiques-informatique et informatique). Nous rappelons que l'analyse du questionnaire que nous avons ajouté au projet initial de thèse n'est pas forcement représentatif car le nombre de participants au questionnaire en France est réduit. Il faudrait disposer de davantage d'éléments au niveau des universités françaises : ceci faire l'objectif d'une étude systématique, à partir de ce questionnaire.

Pour traiter la question des mathématiques discrètes à l'intersection des mathématiques et de l'informatique, la question de l'optimalité des algorithmes nous amène à regarder l'algorithme glouton. Si l'algorithme glouton est souvent utilisé (notamment dans les formations des enseignants au secondaire), nous faisons l'hypothèse que c'est en raison de la facilité à l'expliquer et à le mettre en œuvre. Il recouvre de nombreux domaines d'applications, mais il ne donne pas assurément une solution optimale. Ce qui pose des questions sur les algorithmes eux-mêmes : on retrouve une dualité entre facile d'accès et complexité de résolution. Nous remarquons que dans les Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, les algorithmes gloutons sont largement travaillés[42] : observer cette pratique pourrait constituer un approfondissement intéressant.

Les praxéologiques ont bien montré qu'au niveau universitaire, les praxéologies sont complexes (surtout pour le bloc technologico-théorique), ce qui n'est pas le cas au niveau secondaire (comme le montre l'état de l'art). Cette observation nous conduit à interroger la transition entre le secondaire et le supérieur avec l'objectif de développer une organisation mathématique autour des mathématiques discrètes (plus particulièrement autour de la théorie des graphes). Nous proposons en conséquence à ZDM de réaliser une analyse des ouvrages universitaires en comparaison avec une analyse des manuels du secondaire : cela permettra d'identifier les tâches et contextes permettant une transition secondaire-supérieur, au regard des critères mis en évidence dans cette thèse, et de définir les organisations mathématiques et didactiques nécessaires pour faciliter cette transition.

[42] Voir par exemple http://math.univ-lyon1.fr/irem/

Bibliographie

Alcock, L. (2009). Teaching Proof to Undergraduates: Semantic and Syntactic Approaches. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 29-34. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Anderson, I., van Ash, B., & van Lint, J. (2004). Discrete Mathematics in the High School Curriculum. *ZDM, 36*(3), 105-116.

Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues. *Educational Studies in Mathematics, 9*(4), 429-438.

Bagley, S., & Rabin, J. M. (2016). Students' Use of Computational thinking in Linear Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*, 83-104.

Baker, J. (1996). *Students' difficulties with proof by mathematical induction.* New York.

Balacheff, N. (1987). Processus de Preuve et Situations de Validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Barnett, J., Bezhanishvili, G., Leung, H., Lodder, J., Pengelley, D., & Ranjan, D. (2008). Historical Projects in Discrete Mathematics and Computer Science. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-10). Mexico.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V., & Blossier, T. (2009). Semantic and Game-Theoretical Insignt into Argumentation and Proof. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 77-82. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot- Paris VII. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00141080

Battie, V. (2009). Proving in Number Theory at the Transition from Secondary to Tertiary Level: Between Organizing and Operative Dimensions. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 71-76. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Berg, C. V. (2009). A contextualiszed Approach to Proof and Proving in Mathematics Education: Focus on the Nature of Mathematical Tasks. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 100-105. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Berge, C. (1963). *Theorie des graphes et ses Applications* (éd. 2ème). Paris: Dunod.

Blum, W. (2011). Can modeling be taught and learnt? Some answers from empirical research. Dans G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (dir.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling* (pp. 15-30). New York: Springer.

Bondy, J. A., & Murty, U. (1982). *Graph Theory with Applications.* New York: Elsevier Science Publishing.

Bondy, J., & Murty, U. (2008). *Graph Theory.* New York: Springer.

Bondy, J., & Murty, U. T. (2008). *Théorie des Graphes.* (F. Havet, Trad.) New York: Elsevier Science Publishing Co. Inc.

Borwein, J. M. (2009). Digitally assisted discovery and proof. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 3-11. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Brauner, N., & al, e. (2017, aout). Récupéré sur caseine: http://caseine.org/

Campbell, S. R. (2008). Reflections on Teaching Elementary Arithmetic: Implications for Understanding Number Theory and Discrete Mathematics. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-9). Mexico.

Carotenuto, G., Coppola, C., & Di Martino, P. (2018). Mathematical Induction at the Tertiary Level: Looking Behind Appearances. Dans E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (dir.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, pp. 219-226. Umeå, Sweden.

Cartier, L. (2008). *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modelisation.* Mathematiques. Grenoble: Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00416598v2

Cartier, L., & Moncel, J. (2008). Learners' conceptions in different class situations around Königsberg's bridges problem. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-9). Mexico.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des Pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique.* Marseille: IUFM d'Aix-Marseille.

Chin, E.-T., Liu, C.-Y., & Lin, F.-L. (2009). Taiwanese Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 118-123. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Coenen, T., Hof, F., & Verhoef, N. (2016). Combinatorial Reasoning to Solve Problems. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 104-118). Hamburg: Springer.

Colipan, X. (2016). Student Research in Mathematics Classroom via Combinatorial Games. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 302-320). Hamburg: Springer.

Cozzens, M. (., & Koirala, P. (2016). Food Webs, Competition Graphs and a 60-Year Old Unsolved Problem. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 239-260). Hamburg: Springer.

Dana-Picard, T. (2008). Graph Isomorphisms, matrices and a Computer Algebra System: switching between representations. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-10). Mexico.

Dasgupta, S., Papadimitriou, C., & Vazirani, U. (2006). *Algorithms.* Boston: McGraw-Hill Higher Education.

Davis, P. (1981). Are there coincidences in mathematics? *American Mathematical Monthly, 88*, 311-320.

DeBellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM, 36 (2)*, 46-55.

Devaney, R. L. (2016). Discrete Dynamical Systems, A Pathway for Students to Become Enchanted with Mathematics. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worlwide, An ICME-13 Monograph* (pp. 200-211). Hamburg: Springer.

Dierker, P. F., & Voxman, W. L. (1986). *Discrete Mathematics.* San Diego: Harcourt Brace Jovanovich.

Diestel, R. (2005). *Graph Theory* (éd. 3ème). New York: Springer-Verlag Heidelberg.

DIMACS. (2001, August 12). *Educational Programs at DIMACS.* Récupéré sur Center for Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science: http://dimacs.rutgers.edu/Education/

Dogan, H. (2016). Mathematical Induction: deductive logic perspective. *European Journal of Science and Mathematics Education, 4*(3), 315-330.

Douady, R. (1992, Janvier). Des apports de la didactique des Mathématiques à l'enseignement. *Irem de Paris VII*, pp. 132-158.
Dreyfus, T., & Ron, G. (2004). The Use of Models in Teaching Proof by Mathematical Induction. Dans M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (dir.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mahematics Education*, *4*, pp. 113-120. Bergen, Norway.
Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2009). Analysis of Mathematical Proofs: Some Questions and First Answers. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 148-153. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal Univeristy.
Epp, S. S. (2009). Proof Issues with Existential Quantification. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 154-159. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
Epp, S. S. (2011). *Discrete Mathematics with Applications* (éd. 4ème). Boston: Richard Stratton.
Epp, S. S. (2016). Discrete mathematics for computer science. Dans G. Kaiser (dir.), *13th International Congress on Mathematical Education- TSG 17* (pp. 1-8). Hamburg: Springer.
Ernest, P. (1984). Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 173-189.
Fabert, C., & Grenier, D. (2011). Une etude didactique de quelques elements de raisonnement mathematique et de la logique. *Petit x*, *87*, 31-52.
Ferrarrello, D., & Mammana, M. F. (2016). Graph Theory in Primary, Middle, and High School. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 261-284). Hamburg: Springer.
Gaio, A., & Di Paola, B. (2016). Situation and Possibilities in Italy. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 67-82). Hamburg: Springer.
Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2016). Etat des connaissances des eleves de terminale S sur le raisonnement par recurrence. *Petit x*, *100*, 67-98.
Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres.* Lyon: Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01145845
Gardes, M.-L., & Durand-Guerrier, V. (2016). Designantion at the core of the dialectic between experimentation and proving: a study in number theory. Dans E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (dir.), *Proceedings of INDRUM 2016 First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 286-295). Montpellier: University of Montpellier and INDRUM.
Garfunkel, S. (2016). Fairness. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 286-301). Hamburg: Springer.
Giroud, N. (2008). Learning the experimental approach by a discrete mathematics problem. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-11). Mexico.
Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Grenoble: Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00649159
Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs.* Grenoble: Thèse de doctorat,

Univérsité Joseph-Fourier- Grenoble 1. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00102171

Goldin, G. (2010). Problem Solving Heuristics, affect, and discrete mathematics. Dans B. Siraman, & E. L. (dir.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 241-250). Berlin: Springer.

Goldin, G. A. (2004). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *ZDM, 36 (2),* 56-60.

Goldin, G. A. (2016). Discrete Mathematics and the Affective Dimension of Mathematical Learning and Engagement. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide* (pp. 83-102). Hamburg: Springer.

Gonthier, G. (2017, aout 12). *Le théorème des quatre couleurs*. Consulté le August 5, 2018, sur https://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Georges.Gonthier/pi2000/pro/gonthier/

Gosztonyi, K. (2012). *Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des 'mathématiques modernes': le cas de la Hongrie et de la France.* Université Paris Diderot Sorbonne Paris Cité et Université de Szeged.

Gravier, S., Ouvrier-Buffet, C., & Modeste, S. (2010, avril). Algorithmique et Apprentissage de la Preuve. *Repères- IREM, 79*, 51-72.

Greer, B., De Bock, D., & Van Dooren, W. (2009). The ISIS Problem and Pre-service Teachers' Ideas about Proof. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 184-189. Taipei: The Department of Mathematics, National Naiwan Normal University.

Grenier, D. (2008). Some specific concepts and tools of Discrete Mathematics. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-12). Mexico.

Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x, 88*, 27-47.

Grenier, D., & Payan, C. (1998). *Specifités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes.* Grenoble: Département de Mathématiques Discrètes, Laboratoire LEIBNIZ, Université Joseph Fourier.

Hanna, G. (2007). The Ongoing Value of Proof. Dans P. Boero, *Theorems in School: From History, Epistemology, and Cognition to Classroom Practice* (pp. 3-16). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G. (2001). The development of Mathematical Induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. Dans S. Campbell, & R. Zaskis (dir.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction* (pp. 185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. (2002). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. Dans S. Campbell, & R. Zaskis (dir.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Hart, E. W., & Martin, W. G. (2016). Discrete Mathematics is Essential Mathematics in a 21st Century School Curriculum. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 14-38). Hamburg: Springer.

Hart, E. W., & Sandefur, J. (2016). *Teaching and learning liscrete mathematics in the school curriculum worldwide, an ICME-13 monograph.* (E. W. Hart, & J. Sandefur, dir.) Hamburg: Springer.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction.* San Diego: Harcourt Brace & Company.

Healy, L., Jahn, A. P., & Frant, J. B. (2009). Developing Cultures of Proof Practices Amongst Brazilian Mathematics Teachers. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 196-201. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Heinze, A., Anderson, I., & Reiss, K. (2004). Discrete mathematics and Proof in the High School, Introduction. *ZDM, 36 (2)*, 44-45.

Hemmi, K., & Jaworski, B. (2009). Transparency in a Tutor-Student Interaction Concerning the Converse of Lagrange's Theorem. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 202-207. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Höveler, K. (2016). Children's Combinatorial Counting Strategies and their Relationship to Conventional Counting Principles. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 119-136). Hamburg: Springer.

Hsu, H.-Y., Wu Yu, J.-Y., & Chen, Y.-C. (2009). Fostering 7th Grade Students' Understanding of Validity: An Instructional Experiment. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 214-219. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Hußmann, S. (2008). Doing Mathematics- authentically and discrete. A perspective for teacher training. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-9). Mexico.

Igoshin, V. I. (2016). Mathematics and Logic- Their Relationship in the Teaching of Mathematics. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 352-380). Hamburg: Springer.

Kahane, J. P. (2000). *Comission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, informatique et enseignement des mathématiques.* http://smf.emath.fr/Enseignement/Commis- sionKahane/.

Kaiser, G. (2014). *Mathematical Modelling and Applications in Education.* Dans S. Lerman, (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrecht: Springer Science + Business Media.

Khiok Seng, Q., Tin Lam, T., Kok Leong, B., Eng Guan, T., & Fengming, D. (2008). Teaching of Discrete Mathematics at Advanced Level in Singapore: Teachers' Perspective. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-10). Mexico.

Kondratieva, M. (2009). Geometrical Sophisms and Understanding of Mathematical proofs. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 3-8. Taipei: The Department of Mathematics: National Taiwan Normal University.

Kortenkamp, U. (2008). A technology-based Approach tp Discrete Mathematics in the Classroom. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-7). Mexico.

Larson, N., & Pettersson, K. (2018). Proof by Induction- A Comparative Study. Dans E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (dir.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*, p. 97. Umeå, Sweden.

Léon, N., & Modeste, S. (2020). Récurrence et Récursivité à interface des mathématiques et de l'informatique. *Reperes- IREM, 119*, 45-63.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2009). Generic Proving: Reflections on Scope and Method. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 53-58. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan University.

Lin, C.-C. (2009). How can the Game of Hex be used to Inspire Students in Learning Mathematical Reasoning. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 37-40. Taipei: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Lin, F.-L., Hseih, F.-J., Hanna, G., & de Villiers, M. (dirs.). (2009). ICMI Study 19- Proofs and Proving in Mathematics Education. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education.* Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Lockwood, E., & Reed, Z. (2016). Reinforcing Mathematical Concepts and Developing Mathematical Practices through Combinatorial Activity. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 137-163). Hamburg: Springer.

Lockwood, E., & Reed, Z. (2018). Leveraging Specific Contexts and Outcomes to Generalize in Combinatorial Settings. Dans V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, & N. M. Hogstad (dir.), *Proceedings of INDRUM 2018 Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 244-254). Kristiansand: University of Agder and INDRUM.

Longo, G. (2009). Theorems as Constructive Visions. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 1*, pp. 13-25. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2009). Proof Status from a Perspective of Articulation. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 94-99. Taipei: The Mathematics Department, National Taiwan Normal University.

Maurer, S. (1997). What is Discrete Mathematics? The many answers. Dans J. G. Rosenstein, D. S. Flanzblau, & F. S. Roberts (dir.), *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* (Vol. 36, pp. 121-132). American Mathematical Society.

Michaelson, M. T. (2008). A literature Review of Pedagogical Research on Mathematical Induction. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 57-62.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?* Grenoble: Thèse de doctorat, Université de Grenoble. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294

Morselli, F., & Boero, P. (2009). Haberma's Construct of Rational Behaviour as a Comprehensive Frame for Research on the Teaching and Learning of Proof. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 100-105. Taipei: The Mathematics Department, National Taiwan Normal University.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions/ construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Grenoble: Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier- Grenoble 1. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515

Ouvrier-Buffet, C. (2008). Discrete Mathematics: a mathematical field in itself but also a field of experiments. A case study: displacements on a regular grid. *papier soutenu à ICME 11,* (pp. 1-8). Mexico.

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve Étude épistémologique et enjeux didactiques.* Paris: Note de synthèse, HDR, Université Paris-Diderot- Paris VII. Récupéré sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00964093

Ouvrier-Buffet, C. (2014). Discrete mathematics teaching and learning. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrecht: Springer.

Ouvrier-Buffet, C., Meyer, A., & Modeste, S. (2018). Discrete Mathematics at university level Interfacing mathematics, computer science, and arithmetic. Dans V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, & N. M. Hogstad (dir.), *Proceedings of INDRUM 2018 Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 255-264). Kristiansand: University of Agder and INDRUM.

Payan, C. (1995). La géométrie entre les lignes (aspects combinatoires sous-jacentes). *Séminaire Didactech no168* (pp. 111-125). Univérsité Joseph Fourier.

Ralston, A. (1989). Discrete Mathematics in the First Two Years. (A. Ralston, dir.) *MAA Notes 15*.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Rezaie, M. (2008). What do I mean by Combinatorial Thinking? *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-7). Mexico.

Robertson, N., Sanders, D., & Seymour, P. T. (1997). The four-colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*(70), 166-183.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and its Applications* (éd. 7ème). New York: Mc Graw-Hill.

Rosenstein, J. G. (2016). The absence of discrete mathematics from primary and secondary education in the united states... and why that is counter positive. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 39-66). Hamburg: Springer.

Rougetet, L. (2016). Machines Designed to Play Nim Games (1940-1970)- A possible (re)use in the modern French mathematics curriculum. Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 321-350). Hamburg: Springer.

Sandefur, J., Somers, K., & Dance, R. (2016). How Recursion Supports Algebraic Understanding. *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide*, Dans E. W. Hart, & J. Sandefur (dir.), *An ICME-13 Monograph* (pp. 212-237). Hamburg: Springer.

Schuster, A. (2004). About Traveling Salesmen and Telephone Networks - Combinatorial Optimization Problems at High School. *ZDM, 36 (2)*, 77-81.

Sebö, A. (2006, Octobre 15). *Images des Mathématiques.* Récupéré sur CNRS: https://images.math.cnrs.fr/Le-charme-discret-des-mathematiques-253.html?lang=fr

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: UK: Falmer Press.

Siu, M.-K. (2009). The Algorithmic and Dialectic Aspects in Proof. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Poving in Mathematics Education. 2*, pp. 160-165. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Spira, M. (2008). The bijection principle on the teaching of combinatorics. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-12). Mexico.

Stylianides, G. J., & J., S. A. (2009). Ability to Construct Proofs and Evaluate One's Own Constructions. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 166-171. Taipei: The Mathematics Department, National Taiwan Normal University.

Stylianides, G. J., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for Proving by Mathematical Induction to be Explanatory. *The Journal of Mathematical Behavior, 43*, 20-34.
Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philoppou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 145-166.
The Joint Task Force on Computing Curricula, Association for Computing Machinery (ACM), IEEE Computer Society. (2013). *Computer Science Curricula 2013.* ACM publication.
Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Tabach, M., & Barkai, R. (2009). Is this Verbal Justification a Proof? Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 208-213. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
Vancsó, Ö., Beregszászi, E., Burian, H., Emese, G., Stettner, E., & Szitányi, J. (2016). Complex Mathematics Education in the 21st Century. Dans E. W. Hart, & S. James (dir.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics in the School Curriculum Worldwide- An ICME-13 Monograph* (pp. 164-198). Hamburg: Springer.
Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mahématiques, 10*(2/3), 133-169.
Vijayakumar, A. (2008). Teaching and learning of Discrete Mathematics- Indian scenario. *papier soutenu à ICME 11*, (pp. 1-7). Mexico.
Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 Mesures pour L'enseignement des Mathématiques.* Paris: Ministère de L'éducation Nationale.
Wanko, J. J. (2009). Talking Points: Experiencing Deductive Reasoning Through Puzzle Discussions. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 263-267. Taipei: The Mathematics Department, National Taiwan Normal University.
Weigand, H. (2001). Diskrete Mathematik und Tabellenkalkulation: Zur Einführung. *Der Mathe-matikunterricht, 47*(3), 3.
Weigand, H.-G. (2004). Sequences-Basic Elements for Discrete Mathematics. *ZDM, 36*(3), 91-97.
West, D. B. (2002). *Introduction to Graph Theory* (éd. deuxième). Delhi: Pearson Education.
Wilson, R. J. (1996). *Introduction to Graph Theory* (éd. quatrième). Harlow, England: Addison Wesley Longman.
Wittmann, E. C. (2009). Operative Proof in Elementary Mathematics. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 251-256. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
Wolfram Research, Inc. (2020, aout 1). *Wolfram MathWorld*. Consulté le August 6, 2018, sur MathWorld Wolfram Web site: http://mathworld.wolfram.com/DiscreteMathematics.html
Yevdokimov, O. (2009). Higher Order Reasoning Produced in Proof Construction: How Well do Secondary School Students Explain and Write Mathematical Proofs? Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (dir.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education. 2*, pp. 280-285. Taipei: The Mathematics Department, National Taiwan Normal University.
Yvain-Prébiski. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.* Montpellier: Thèse de doctorat, Université de Montpellier.

Annexes

A. Classifications de preuves dans Reid & Knipping

No	Titre et énoncé du preuve	Pg.	Contenu (Objets)	Type de preuve discuté	Justification du choix de cet exemple suivant les auteurs	Notre Classification
1	Elements, Book I Poposition 1	5	Droites fini	Déductive	Présenter le principe de logique (par Euclid) dans le premier chapitre « History of Proof »	Geometry
2	Figure reconstructed on the basis of Liu Hui's commentary on Jiuzhang Suanshu	12	triangles	Visual proof, « non verbal arguments »	Présenter les preuves en Chine dans Ch.1. et poser la question de la fiabilité des preuves visuelles « readable figures ». C'était un contexte pour présenter des différents points de vues et les raisons pour lesquels les preuves ont été rejetées par beaucoup d'historiens de mathématiques dû au fait qu'elles sont trompeuses.	Geometry
3	Elements Book I Proposition 4	17	triangles	« make use of physical manipulations »	Cette preuve est discutée dans ch.1 dans le contexte des preuves dans lesquelles il y a un manque d'explicitation des notions, postulats et définitions. (Une méthode pointée par Euclide où nous avons besoin d'appeler à nos imaginations et de faire des correspondances). Ceci est argumenté de ne pas être la méthode déductive d'Aristote.	Geometry
4	Elements Book IX Proposition 20 *"Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers"*	19	Nombres premiers	Preuves avec un exemple générique	Aussi dans ch. 1, cette preuve est présentée comme illustration des preuves avec des diagrammes. Cette discussion est liée au fait que la place des diagrammes dans les preuves grecques est très essentielle, même s'il n'y ait pas de besoin de les prouver.	Number Theory
5	Proof that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees	44	triangle	Preformal proof (semi-formal)	Cette preuve est une illustration des preuves dans ch.3. C'est une illustration d'une preuve performée par des actions physiques (ou parfois imaginées) qui font	Geometry

					référence à des postulats de référence.	
6	Textbook proof from Chazan, 1993, p. 365	96	triangles	Preuve déductive	Dans le cadre du raisonnement inductif (ch. 6), Chazan a présenté ces deux exemples dans une expérimentation avec des étudiants de classes diverses. L'objectif était de comprendre les points de vues des étudiants concernant l'utilisation des exemples en mathématiques. Particulièrement, c'est dû au fait que dans le chapitre 4, les résultats de recherche montrent les affirmations suivantes: plusieurs élèves acceptent des exemples comme vérification et les étudiants aussi présentent des exemples empiriques pour vérifier un argument.	Geometry
7	Empirical Argument from Chazan, 1993, p.366	97	triangles	Argument basé sur quatre exemples particulier		Geometry
8	The sum of the first n integers (by MI) The sum of the first n positive integers is $n(n+1)/2$	99	entiers	induction	Les auteurs ont utilisé cet exemple pour illustrer la relation entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif. C'est en fait pour montrer que cette se base sur un raisonnement déductif et pas inductif. Ils ont argumenté de cette confusion entre les deux terminologies	Number Theory
9	The perpendicular bisectors of a triangle meet in a point	119	bissectrice	Raisonnement par analogie d'une preuve déductive	Les auteurs ont utilisé cet exemple pour illustrer le raisonnement par analogie « analogy going from one deductive proof-text to another »	Geometry
10	The medians meet in a single point, physics proof	122	medians	Raisonnement par analogie d'une preuve déductive	Pour présenter aussi une illustration d'un raisonnement par analogie mais partant d'un exemple de la physique	Geometry
11	The Goldbach conjecture	131	nombre	Enumération simple	Cette illustration s'est inscrite dans le cadre des arguments empiriques (non-repesentational examples) et plus particulièrement dans la sous-catégorie d'énumération simple. C'est dans Ch. 7.	Number Theory
12	Product of negatives	132	Nombres négatifs	« Extending a pattern »	Dans Ch.7, cet exemple est inscrit dans la sous-	Number Theory

					catégorie « extending a pattern » des arguments empiriques « non-representational examples ».	
13	Try it with 15	132	polygone	Crucial experiment	C’est un argument qui illustre le type « crucial experiment » parmi la classification les arguments empiriques.	Number Theory
14	The diagonals of a rhombus are congruent	133	losange	« Perceptual pr oof scheme »	Parmi les arguments empiriques « non-representational examples » , c’est une ilustration de la sous-categorie « the perceptual proof scheme »	Geometry
15	There are 14 possibilitie s and all fit	134	entiers	« Proof by exhaustion »	C’est une illustration d’une sous-catégorie des arguments considérés entre les arguments empiriques et génériques. C’est appelé « proof by exhaustion »	Number Theory
16	Not all prime numbers are odd	134	entiers	« Proof by counter example »	C’est une illustration d’une sous-catégorie des arguments considérés entre les arguments empiriques et génériques. C’est appelé « proof by counter example »	Number Theory
17	Numeric Gauss proof	134	entiers	« Numeric generic examples »	C’est une sous-catégorie des preuves génériques « examples as representations » appelé « numeric generic examples »	Number Theory
18	Divisibility by 9	135	entiers	« Numeric generic examples »	C’est une sous-catégorie des preuves génériques « examples as representations » appelé « numeric generic examples »	Number Theory
19	Action proof of the commutati vity of multiplicati on	136	entiers	« action proof »	Dans Ch. 7 « Classifying proofs and arguments », c’est une représentation d’une sous-catégorie appelé : « concrete generic examples : action proofs ».	Number Theory
20	Behold!	137	Right triangle	« pictorial generic examples : visual proofs »	Cet exemple illustre un type d’arguments génériques « examples as representations ». la sous-categorie est « pictorial generic examples : visual proofs »	Geometry
21	Schorle proof	138	fractions	« Reality oriented proof »	Les « situational generic examples : reality oriented proofs » sont une sous-catégorie des preuves	Arithmetics and Number Theory

					génériques « examples as representations »	
22	Two column proof for the triangle-angle sum	139	triangle	« Proofs between the generic and the symbolic »	C'est un exemple présenté dans la catégorie « Proofs between the generic and the symbolic ». Dans cette catégorie le diagramme joue un rôle majeur dans la preuve	Geometry
23	Symbolic Gauss proof	140	entiers	Symbolic proofs : words and symbols as representations	Cette preuve est une illustration des preuves de la catégorie : « symbolic proofs : words and symbols as representations »	Number Theory
24	Infinitude of primes	140	entiers	narrative	C'est une catégorie dans « symbolic proofs : words and symbols as representations » mais en fait seulement des mots sont utilisés et pour cela cette preuve est appelé narrative.	Number Theory
25	The product of two diagonal matrices is diagonal	140	matrices	symbolic	C'est une catégorie dans « symbolic proofs : words and symbols as representations » mais en fait il y a plus de symboles que des mots et pour cela cette preuve est appelé symbolique.	Number Theory
26	Proof of an algebraic identity	141	variables	« Between the symbolic and the formal »	Cet exemple est présenté dans la catégorie « proofs between the symbolic and the formal » Les auteurs ont argumenté que c'est le type de preuves le plus utilisé dans le curriculum national anglais. Tall les a appelées « manipulative proofs » dans lesquelles il existe des manipulations significatives mais sans des déductions logiques.	Algebra
27	A formal proof	142	Pas de contenu	Formal arguments : non-representational symbols	C'est une représentation d'un argument formel : « formal argument : non-representational symbols »	Pas de contenu, juste un schéma abstrait pour représenter ce type de preuve
28	A transformational proof	148	triangles	Transformational proof	Cet exemple illustre une des classifications de Harrel &Sowder (Harrel and Sowder Proof schemes). Il l'a appelée transformational proof scheme. Mais Reid les a considérées « less formulated reasoning »et pas des types d'arguments ou de preuves.	Geometry

B. Preuves présentes dans les actes d’ICMI-19

Volume 1

1. **Digitally- Assisted Discovery and Proof, Jonathan Michael Borwein** (Borwein, 2009)
   In this article, the author focuses on the changing nature of mathematical knowledge and asks the questions of why do we wish to prove things and how to teach the what and the why to students. He presents the following three examples to illustrate that the boundaries between mathematics and the natural sciences and between the inductive and deductive reasoning are blurred and getting blurrier. In his text he indicates that we live in a world that is rich in information, poor in judgment, and therefore we have to teach judgment when it comes to using what is already possible digitally. Hence the examples he presents below clearly reveal the importance and benefits of digitally assisted proofs and the highlights the links with computer science.

   1) Data Mining: Calcul de la valeur de $\alpha = 1.433127426722312 \ldots$ (Number Theory)
   2) Instrumental Computing: Pi and 22/7. The evaluation of the integral:
   $$0 < \int_0^1 \frac{(1-x)^4 x^4}{1+x^2}\, dx = \frac{22}{7} - \pi$$
   (Calculus)
   3) Concretization, some matrices conquered. The author needed to obtain the closed form partial fraction decomposition for:
   $$\frac{1}{x^s(1-x)^t} = \sum_{j\geq 0} \frac{a_j^{s,t}}{x^j} + \sum_{j\geq 0} \frac{b_j^{s,t}}{(1-x)^j}$$
   (Number theory)

2. **Theorems as Constructive Visions, Giuseppe Longo** (Longo, 2009)
   (Examples are little Gauss Proof and discussion on examples from number theory)
   The article is theoretical and takes examples through the discussion.

   1) Little Gauss Proof: Discussion on how Gauss proved his theorem: To produce the result of the sum of the first n integers which is: $\sum_1^n i = \frac{n\,(n+1)}{2}$
   The author clarified that such a proof is not by induction. Gauss had proved this by writing on the first line the increasing sequence from $1 \ldots n$ then below it and he inverted the same sequence and then added the vertical lines. He added that being given the formula; it will become very easy to prove by induction. But Little Gauss did the actual proof. The context of this discussion is to highlight an interesting idea about proving theorems v/s proving already given formula.
   2) Discussion on the Friedman Finite Form (FFF) of the Kruskal Theorem (KT), a well-known theorem on “finite trees” in infinite combinatorics.
   This discussion is about some combinatorial and interesting properties of number theory that can be proven true but their proofs cannot be given within its formal counterpart, PA. A particularly relevant case is Friedman Finite Form (FFF) of the Kruskal Theorem (KT), a well-known theorem about “finite trees” in “infinite combinatorics” (and with many applications). The difficult part as discussed is the proof of the unprovability of FFF in PA; however what they were interested in is the proof that FFF holds over the structure of natural numbers.

3. **Proving in Number Theory at the Transition from Secondary to Tertiary Level: Between Organizing and Operative Dimensions, Veronique Battie** (Battie V. , 2009)
The example presented by Battie lies in the context of her didactical studies related to the transition to university and the ruptures that take place at the level of the autonomy devolved to grade 12 students. She characterized this autonomy by exploring the distinction between two levels of reasoning, the organizing dimension and the operative dimension and the existing interactions among them. She studied this on proofs from number theory since this is a common topic studies start at the secondary classes and is also studied at the university level.

(Number Theory) The example was: a particular case of the Chinese remainder factor theorem:

Solve in Z the following system of congruences in unknown n: $(E)\begin{cases} n \equiv 3\ (mod 7) \\ n \equiv 0\ (mod 16) \end{cases}$

1) Prove that 7 and 16 are coprime and write a corresponding Bézout's identity
2) What is the set of integers both multiple of 7 and 16
3) By using Bézout's identity, find an integer n_0 multiple of 16 and checking $n_0 = 3(mod\ 7)$. Deduce a solution of the system (E).
4) Deduce from the two previous questions the set of solutions of (E).

4. **Semantic and Game-Theoretical Insight into Argumentation and Proof, Th. Barrier, V. Durand-Guerrier, Th. Blossier** (Barrier, Durand-Guerrier, & Blossier, 2009)
(Number Theory)

In this paper, the authors used examples coming from number theory in order to illustrate that the emergence of a proof lies in the back and forth process of indoor and outdoor games (H (Barrier, Durand-Guerrier, & Blossier, 2009)'s sense). They consider proof as a special case of the argumentation process. Indoor games represent the choice of the statements and the strategies and the outdoor game represents the intervention between the objects. In this paper, the examples chosen argue that there is a neglect in the outdoor games in the proof process and their inclusion is very important specially that they are concerned with the content of propositions (the objects, properties, and their relations). Examples from number theory can highlight this.

1) an example inspired by Barallobres (2007) around the statement
"$for\ all\ natural\ number\ n, 10(n+4)+5=10n+45$"
2) Barrier (2008) also is references for the example of an outdoor game played by pupils dealing with the statement
"$for\ all\ natural\ numbers\ a\ and\ b, if\ a\ and\ b\ are\ coprime\ then\ a^2\ and\ b^2\ are$"
3) They also used an experiment from Inglis & al. (2007) with the conjecture:
"$if\ n\ is\ a\ perfect, then\ kn\ is\ abundant, for\ any\ k \in \mathbb{N}$"

5. **A contextualized approach to proof and proving in mathematics education: Focus on the Nature of Mathematical Tasks, Claire V. Berg,** (Berg, 2009)
(Example about Vivani's Theorem)
1) Vivani's theorem says that in an equilateral triangle, the sum of the distances from a point within the triangle to the sides is equal to the height of the triangle
2) (Number Theory) Another experiment is a group collaboratively engaging in exploring the divisibility of four digit palindromes by 11.

This example lies in the context of showing the effect of the nature of mathematical tasks in the elaboration of a proof. In her experiment, she aimed at having the teachers develop their algebraic thinking in order to generalize numerical patterns. This example is believed to help understand the teachers' different approach to the elaboration of a proof.

6. **Taiwanese Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra, Erh-Tsung Chin, Chi-Yen Liu, and Fou-Lai Lin** (Chin, Liu, & Lin, 2009) (Arithmetic/Number Theory):

   The work done in this paper is to be compared with the study of Healy and Hoyles (2000), and the content of the questionnaire comes from the domains of arithmetic/algebra. This choice of this topic was not discussed. The purpose of this study is to document students'' views of proof and the relationship between their views and approaches to proof.

   1) $Prove\ that\ when\ you\ add\ any\ two\ odd\ numbers\ your\ answer\ is\ always\ even,$
   2) $Prove\ that\ if\ p\ and\ q\ are\ any\ two\ odd\ numbers, (p+q)x(p-q)\ is\ always\ a\ multiple\ of\ 4.$

7. **Analysis of mathematical Proof: Some questions and First Answers, Viviane Durand-Guerrier, Gilbert Arsac** (Durand-Guerrier & Arsac, 2009) (Plane geometry and number theory)
   1) Classical proof attributed to Pythagoras that the sum of the angles in a triangle is equal to two right angles.
   2) (Number Theory) The second example is discussing the proofs of the statement: "the sequence of primes does not end".
      This example is presented in her document about analyzing proof. Proof analysis, according to the authors has three main functions: to control validity, to understand the proving strategy of the author of the proof, and to contribute to the understanding and the appropriation of proofs. The second presented example in the article serves as a good illustration since it indicated that to the fact that a good knowledge of objects is necessary and answering a logical question depends on the mathematical objects concerned.

8. **Proof Issues with Existential Quantification, Susanna S. Epp** (Epp, 2009)

   According to Epp, when talking about the use of existential quantification in mathematics proofs, many examples of common incorrect proofs are presented in her article. Among these examples to be discussed are the following that come from number theory, and they have been characterized as a source of incorrect proofs at the tertiary level because misuse of existential instantiation and the dependence rule.

   (Number theory among others)
   1) Prove that the sum of any even integer and any odd integer is odd
      In this example, the problem with students lied in the violation of the principle of existential instantiation.
   2) $If\ n\ is\ any\ odd\ integer, then\ n^2\ is\ odd.$
   3) $The\ square\ of\ any\ odd\ integer\ is\ odd$
      In this example, it is important not to violate the dependence rule.

4) If f is any subjective function from X to Y and g is any subjective function from Y to Z, then the composition $g \circ f$ is surjective.

9. The ISIS Problem and Pre-service Teachers' Ideas about Proof, Brian Gree, Dirk De Bock, and Wim Van Dooren (Greer, De Bock, & Van Dooren, 2009)

This problem chosen here by the authors is particular since according to authors its solution requires minimal technical mathematics and is accessible to a wide number of students. It is also special since it uses a variety of proofs (empirically grounded, algebraic, and geometrical) using different forms of argument and their associated representations. The purpose of this is to explore the students' ideas about proofs.

(ISIS problem- Number Theory)
The ISIS problem asks: "Find which rectangles with sides of integral length (in some unit) have area and perimeter (numerically) equal, and prove the result"

10. Developing Cultures of proof Practices Amongst Brazilian Mathematics Teachers, Lulu Healy, Ana Paula Jahn, Janete Bolite Frant (Healy, Jahn, & Frant, 2009)
(Generic example from number theory in the discussion of results)
The example is: when you add any two even numbers, the answer is always even

This article lies in the context of examining the (Healy, Jahn, & Frant, 2009) associated with the development of cultures of proof practices among Brazilian Math teachers. Among the presentation of the activities, a brief discussion was given concerning number theory and showed how teachers understood the property of evens and how this helped presenting a more (Wanko, 2009) argument.

11. Transparency in a tutor-students interaction concerning the converse of Lagrange's Theorem, Kristi Hemmi , Barbara Jaworski (Hemmi & Jaworski, 2009)

In this article, the choice of this example highlights that sometimes some notions are not clearly visible to students giving responsibility to tutors. For example, when the tutor wanted the students to be convinced that the converse of the Lagrange's theorem was not true, students did not understand the idea of the counter example. The authors highlighted that what was less visible was the logical structure of an "if… then". The role of the tutor seemed to be very important in highlighting these elements (presenting them and demonstrating them) that he missed.

(Example from abstract algebra about the converse of Lagrange's Theorem)
(Number Theory) The converse of Lagrange's theorem is that: Given a finite group G, where $o(G)$ means the order of G, if H is a subgroup of a finite group G then $o(H)$ is a factor of $o(G)$, and then also
For any factor of $o\ (G)$, we can find a subgroup whose order is that factor.

12. Fostering 7th Grade students' understanding of validity: An Instructional Experiment, Hui-Yu Hsu, Jya-Yi Wu Yu, Yi-Chu Chen (Hsu, Wu Yu, & Chen, 2009)

(Discrete Mathematics) The example is to observe the independence between validity and truth, and in this paper the authors took the tower of Hanoi as an example to illustrate phases of the intervention. The three phases were:

1) Observing recursive pattern through empirical exploration
2) Inferring the moves of disks by applying the formulated rule
3) Facing a conflict situation in order to observe the independence between validity and truth of premises and conclusions

Volume 2

1. **Geometrical Sophisms and understanding of Mathematical Proofs, Margo Kondratieva** (Kondratieva, 2009)
(Examples on geometry and visual illusions)

   This example is interesting since the author presents such types of proofs called sophisms so that students understand the nature and purpose of proofs. In particular, it is because by using proofs with no words, they can focus on the essence and details of proving process rather than on the truthfulness of a statement.

   1) (Visual proofs) To explain the paradox of the visual proof that 65=64, by rearrangement of the parts of an 8x8 square into a 5x13 rectangle.

The visual "proof" that 64=65 attracted a lot of attention from my students.

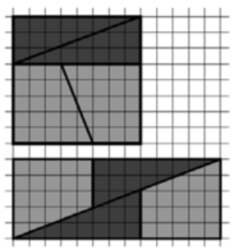


Figure 1: Visual "proof" that 64=65 by rearrangement of the parts of an 8X8 square into a 5X13 rectangle

   2) The second paradox used as an example here is to prove that all triangles are isosceles

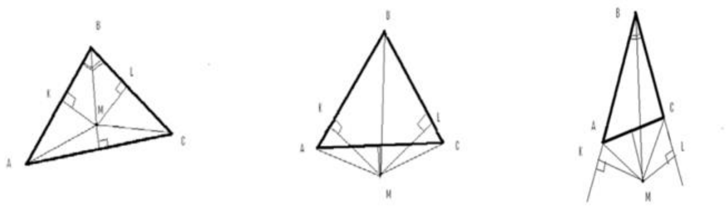


Figure 2: Proof that all triangles are isosceles. M lies inside or outside the triangle.

2. **How can the game of hex be used to inspire students in learning a Mathematical reasoning, Chun-Chi Lin** (Lin C.-C. , 2009)
(Example on the game of Hex- games)

The author chooses this example to talk about proofs so that students can put together two types of mathematical arguments, proofs by contradiction and constructive proofs.

The example used in this paper is the game of HEX. Each game often takes 10 min on an 11x11 board size. Players put their pieces on empty hexagons of the board in turn. It is played with two persons, a black versus white. The first turn is usually the Black's. Black wins as he/she connects the opposite black sides of the board with a chain of black pieces. Similarly, white wins when she/he connects the opposite white sides of the board with a chain of white pieces.

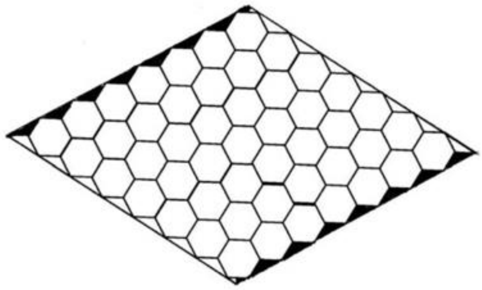


Figure 1: The Hex Board of Size 7×7

3. **Generic Proving: Reflections on Scope and Method, Uri Leron and Orit Zaslavsky** (Leron & Zaslavsky, 2009)

In this article, the authors discuss the role of generic proofs to help students access difficult proofs more easily and naturally. The authors made the choice of presenting the two below examples to illustrate that these particular categories and their choice is justified by many implicit factors. What is important is to notice that proves amenable to generic proofs, according to authors, should involve an act of construction (of a mathematical object or procedure, a decomposition or formalization).

1) First example is from number theory: A natural number, which is a perfect square (i.e., the square of another natural number), has an odd number of factors.
2) Second example is from group theory: Every permutation has a unique decomposition as a product of disjoint cycles.

4. **Proof Status From a Perspective Articulation, J. Mamona-Downs, Martin Downs** (Mamona-Downs & Downs, 2009)
(Example about number theory)

The example chosen lies in the context of investigating the presence of an articulation between: having a convincing argument that produces correct answers and constituting proofs. The examples highlight that more refining is required for the semantic and syntactic thinking (bringing out the duality in informal and formal reasoning in proof production).

The subject at the project at hand concerned the calculation or the application of the greatest power of a natural number dividing another given natural.

5. **Habermas' Construct of Rational Behaviour as a Comprehensive Frame For research on the teaching and Learning of proof, Francesca Morselli and Paolo Boero** (Morselli & Boero, 2009)
(Examples from number theory)

This example is presented in a document discussing a framework for framing the teaching and learning of proof. The below examples presented were at tertiary level regarding conjecturing and proving processes.

Students were given the problem: What can you tell about the divisors of two consecutive numbers?

6. **The Algorithmic and Dialectic Aspects in Proof and Proving, Man-Keung Siu** (Siu, 2009)

The authors used the following examples in order to portray the algorithmic and dialectic aspects of proof and proving, and revealed their pedagogical implication focusing on both aspects that complement and support each other in this mathematical activity.

The examples discussed were:
1) (Arithmetic) Clay tablet dating from the 18th century B.C. on which was inscribed a square and its two diagonals with numbers (in cuneiform expressed in sexagesimal system) 30 on one side and 1.4142129…and 42.426388… on one diagonal. There is no mistaking its meaning, namely, the calculation of the square root of 2 and hence the length of the diagonal of a square with side length of 30.
2) (Number theory) Second example is the Chinese remainder theorem. The source of the result and thence its name is a well-known-problem in Sunzi Suanjing [Master Sun's Mathematical Manual], compiled in the 4th century, that amounts to solving, in modern terminology, the system of simultaneous linear congruence equations
$x \equiv 2(mod\ 3), \quad x \equiv 3\ (mod\ 5), \quad x \equiv 2\ (mod\ 7)$

7. **Ability to construct Proofs and evaluate One's Own Constructions, Gabriel J. Stylianides and Andreas J. Stylianides** (Stylianides & J., 2009)
(Examples from number theory)

The authors chose these examples as rich experiences with proof and examine their ability to construct proofs and to evaluate their own constructions. The Prospective teachers knew the concepts involved in these tasks but the conjectures were unfamiliar to them.

The two tasks were:
1) Students explored what happens when two consecutive odd numbers are added together
2) Students explored different relationships with odd numbers and multiples of numbers.

8. **Is this verbal Justification a proof?, Pessia Tsamir, Dina Tirosh, Tommy Dreyfus, Michal Tabach, and Ruthi Barkai** (Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Tabach, & Barkai, 2009)
(Examples about number theory)

In this paper, the purpose is to examine the position of high school teachers with regard to verbal proofs. Teachers were asked to evaluate given justifications to statements, and the topics from the topic of number theory.

The task was given to teachers who were asked to assess whether each of the six statements was true or false and to produce a proof (validation or refutation).

Predicate / Quantifier	Always true	Sometimes true	Never true
Universal	**S1**: The sum of any 5 consecutive natural numbers is divisible by 5. *True - General proof*	**S2**: The sum of any 3 consecutive natural numbers is divisible by 6. *False - Counter example*	**S3**: The sum of any 4 consecutive natural numbers is divisible by 4. *False - Counter example*
Existential	**S4**: There exists a sum of 5 consecutive natural numbers that is divisible by 5. *True - Supportive Example*	**S5**: There exists a sum of 3 consecutive natural numbers that is divisible by 6. *True - Supportive Example*	**S6**: There exists a sum of 4 consecutive natural numbers that is divisible by 4. *False - General proof*

Table 1: Classification of the statements

9. **Teachers' Knowledge of Students Correct and Incorrect Proof Constructions, Michal Tabach, Esther Levenson, Ruthi Barkai, Pessia Tsamir, Dina Tirosh, and Tommy Dreyfus** (Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Tabach, & Barkai, 2009)
(Examples on number theory)
Same as the above content but the study had a different objective. For each of the six statements, teachers were requested to present correct and incorrect proofs that in their opinion students would give to these statements.

10. **Operative proof in Elementary mathematics, Erich Ch. Wittmann** (Wittmann, 2009)

This article discusses what he called operative proofs and chooses an example in which the specific features of operative proofs are clearly used.
(Number theory)The example is for grade 1 students and decomposed into two exercises:

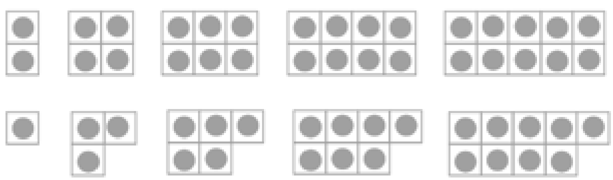


Fig. 1

These above patterns are painted on cardboard and cut off so that children can operate with the pieces and form sums of numbers.

1) The first task is to make children familiar with the material
2) The next exercise asks for finding sums with an even result. This is a first suggestion to look at the structure more carefully.
3) The subsequent task is more direct: Children are asked to reflect on the results of the four packages of sums in fig.2 (below): What do you notice? Can you explain it?

$4+6=$	$5+1=$	$2+1=$	$1+8=$
$6+8=$	$7+3=$	$4+3=$	$3+6=$
$8+4=$	$9+5=$	$6+5=$	$5+4=$
$10+2=$	$5+7=$	$8+7=$	$7+2=$

Fig. 2

11. Talking Points: Experiencing deductive Reasoning Through Puzzle Discussions, Jeffrey J. Wanko (Wanko, 2009)

The examples presented in this document represent opportunities in which the discovery of deductive reasoning that can happen beyond the classroom can be revisited in the classroom. By discussing the ideas collectively, the class typically devises some elementary solution strategies and individuals begin to explore more complex approaches. The process students developed closely modeled that of de Villiers in describing the roles of mathematical proof. That is since students:

- Modeled verification as they analyzed a possible move in a puzzle against the predetermined rules that were set
- Practiced explanation as they constructed and made arguments with their classmates
- Discovered patterns in the placement of numbers in Nurikabe puzzles that resulted in classifying sections of a puzzle similar to ones they discovered in other problems
- Practiced early forms of systematization as they refined solution strategies and moved from informal series or correct steps to an almost algorithmic approach to starting each puzzle before finding a new wrinkle
- Engaged and describes the process of social interactions that were made when students persuaded others of their strategies
- Worked towards finding a final solution and intrinsic reward of solving a puzzle

This example shows that the approach of collaborative work on developing solution strategies for LILPs has a merit in increasing deductive reasoning skills that are applicable to mathematical proofs and other logical reasoning situations.

(Games) This article discussed examples of Laguage-Independent Logic Puzzles (LILPs) such as Kakuro, Nurikabe, Masyu, Shikaku, and Sudoku. In the article more focus is on the Shikaku and the Nurikabe

12. Higher Order reasoning Produced in Proof Construction: How well do Secondary School Students Explain and Write Mathematical Proofs?, Oleksiy Yevdokimov (Yevdokimov, 2009)

The examples presented below are about proof by induction and by contradiction. This choice is discussed by the authors for the purpose of highlighting student difficulties in proving and possible ways of their resolving.

(Examples from number theory)
Some examples discussed:

1) Euler
   Prove that for each positive integer $n \geq 3$, a number 2^n can be represented as $2^n = 7x^2 + y^2$ where x and y are both odd numbers.

Natural numbers from 1 to 99 (not necessarily distinct) are written on 99 cards. It is given that the sum of the numbers on subset of cards (including the set of all the cards) is not divisible by 100. Prove that all the cards contain the same number.

C. Le questionnaire – guide de l'entretien avec les enseignants-chercheurs

1) Quels sont votre statut et spécialité mathématique ? (enseignants-chercheurs ou enseignants ?) Si chercheur, quel est votre domaine de recherche ? Concernant votre recherche, quels sont les objectifs ? les résultats ?

2) Comment définissez-vous le champ de mathématiques discrètes ? Qu'entendez-vous par « mathématiques discrètes » ? (en recherche et dans l'enseignement)

3) Quels sont les objets mathématiques présents dans votre cours ?

4) Comment concevez-vous l'activité de preuve en mathématiques discrètes ?

5) Quels sont la place et le rôle du travail de la modélisation en mathématiques discrètes ?

6) Comment caractérisez-vous le lien entre les mathématiques discrètes et autres disciplines (scientifiques et non-scientifiques) ? (aspect recherche et l'aspect enseignement) Travaillez-vous ce lien avec vos étudiants ? Si oui, comment ?

7) Quelles sont les résultats d'apprentissage dans votre cours (objectif générale et objectifs spécifiques) ?

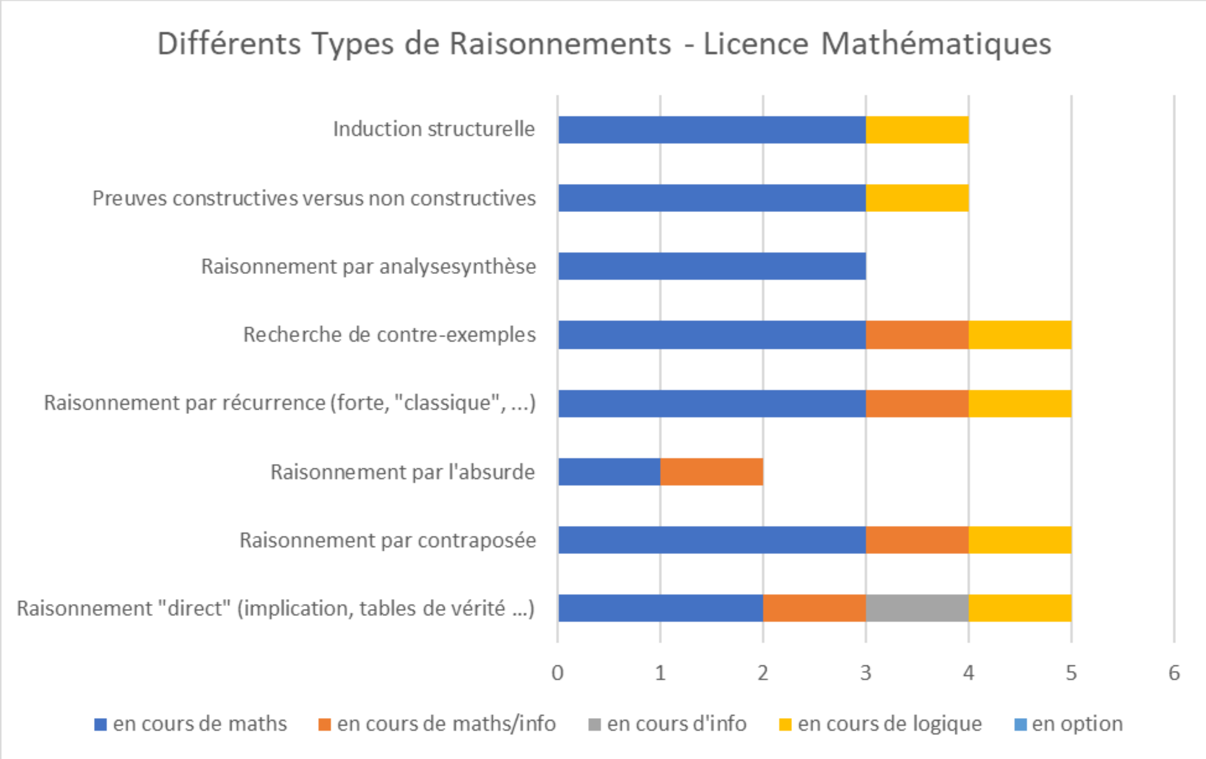
8) « Les objets discrets possèdent plusieurs définitions, de différentes natures » est une affirmation faite par un chercheur en didactique des mathématiques ; Qu'en pensez-vous ?

9) D'après vos expériences quelles sont les difficultés d'apprentissage observés avec vos étudiants ?

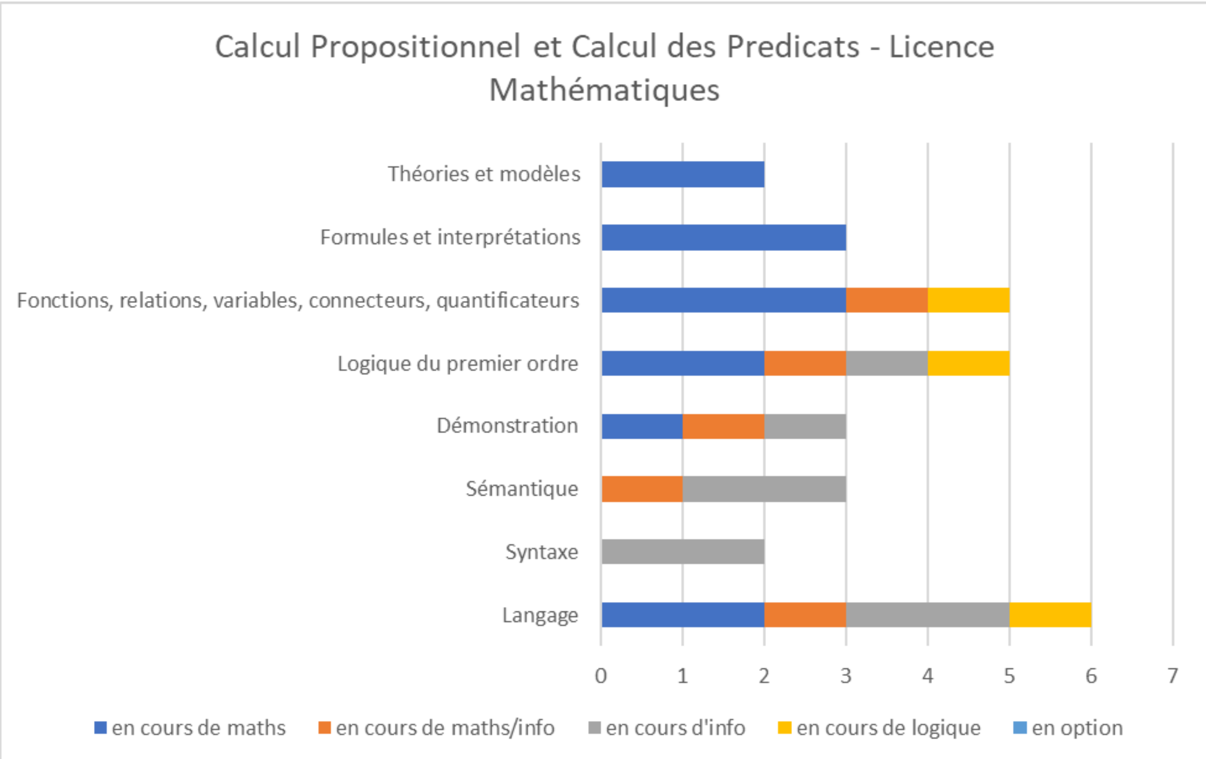
10) Quel est le comportement des étudiants lorsque vous travaillez avec les mathématiques discrètes ?

D. Résultats du questionnaire (État des lieux en France et le Liban)

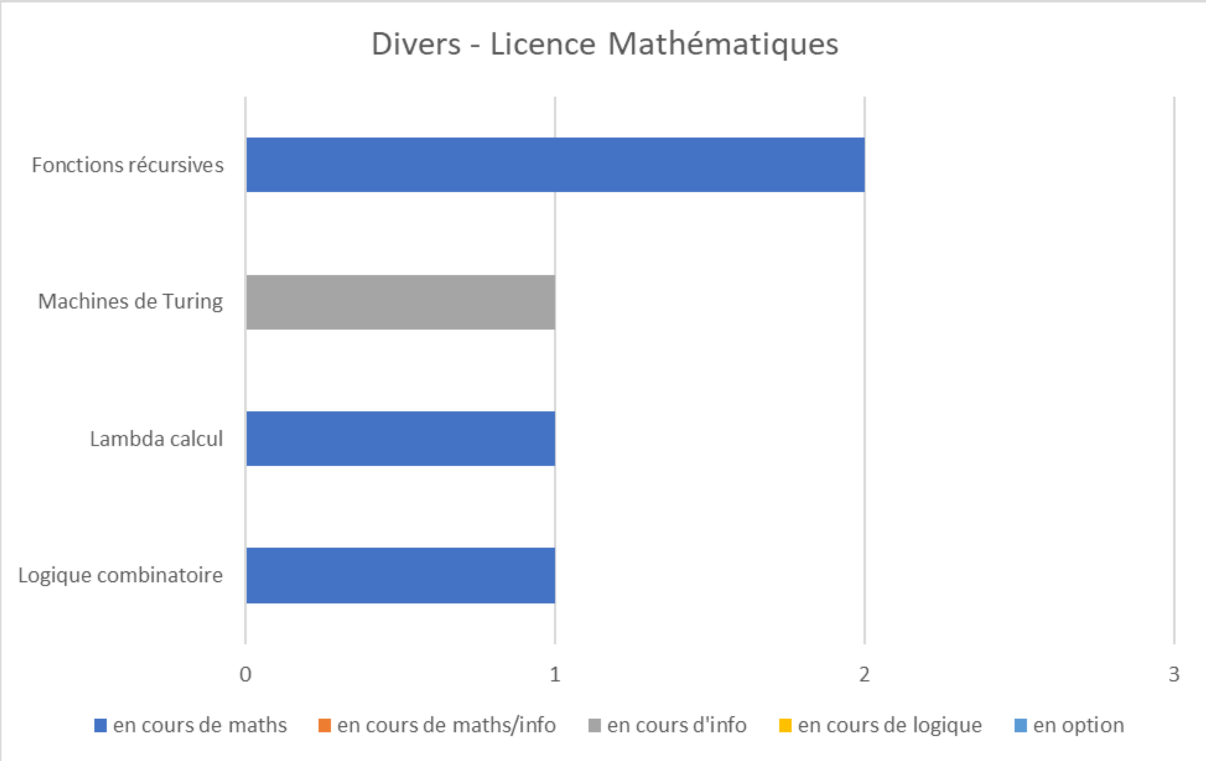
D1.Résultats du Liban



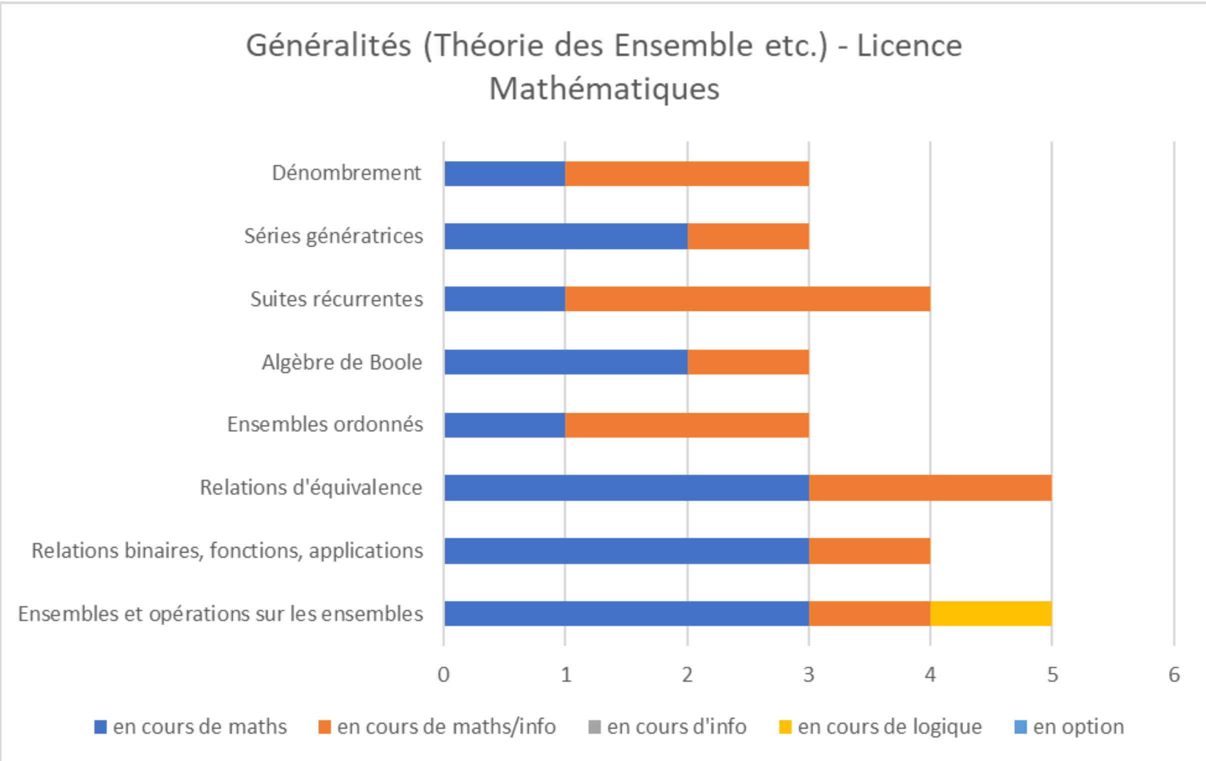
Annexe-Figure 1: Différents Types de Raisonnements - Licence Mathématiques – Liban



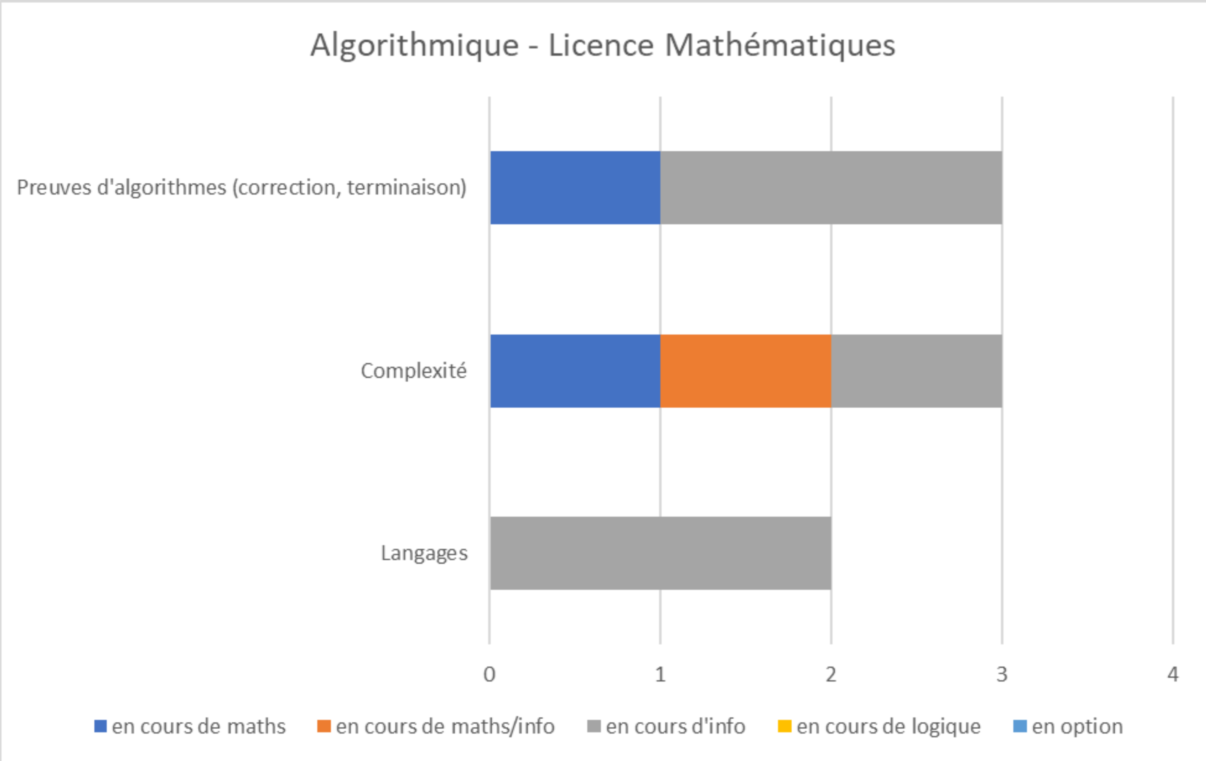
Annexe-Figure 2: Calcul Propositionnel et Calcul des Prédicats - Licence Mathématiques – Liban



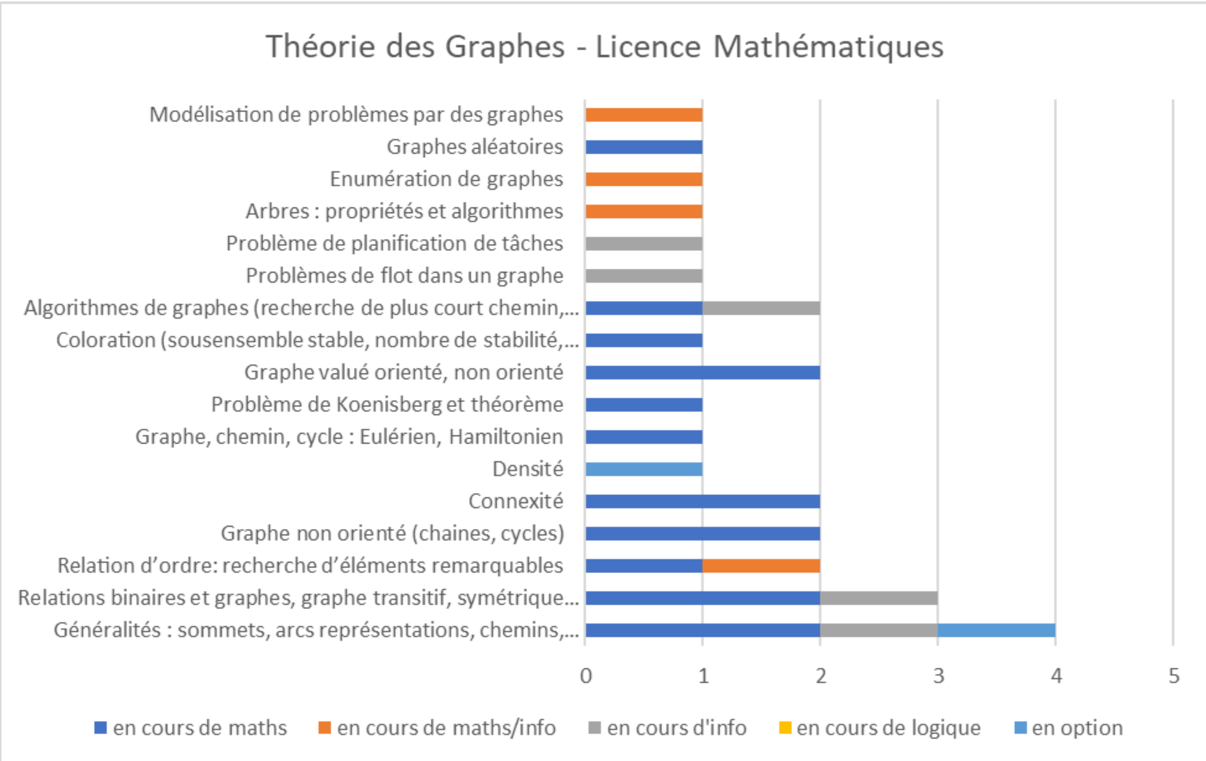
Annexe-Figure 3: Divers - Licence Mathématiques – Liban



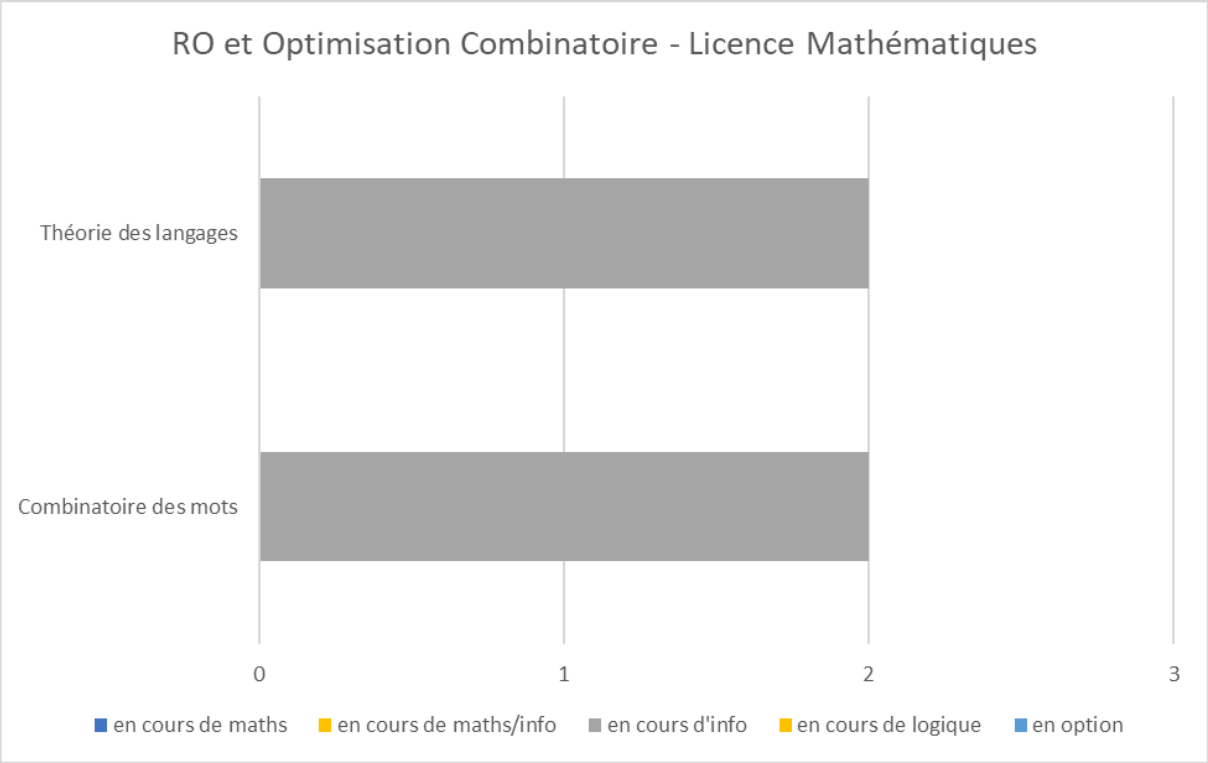
Annexe-Figure 4: Généralités (Théorie des Ensemble etc.) - Licence Mathématiques – Liban



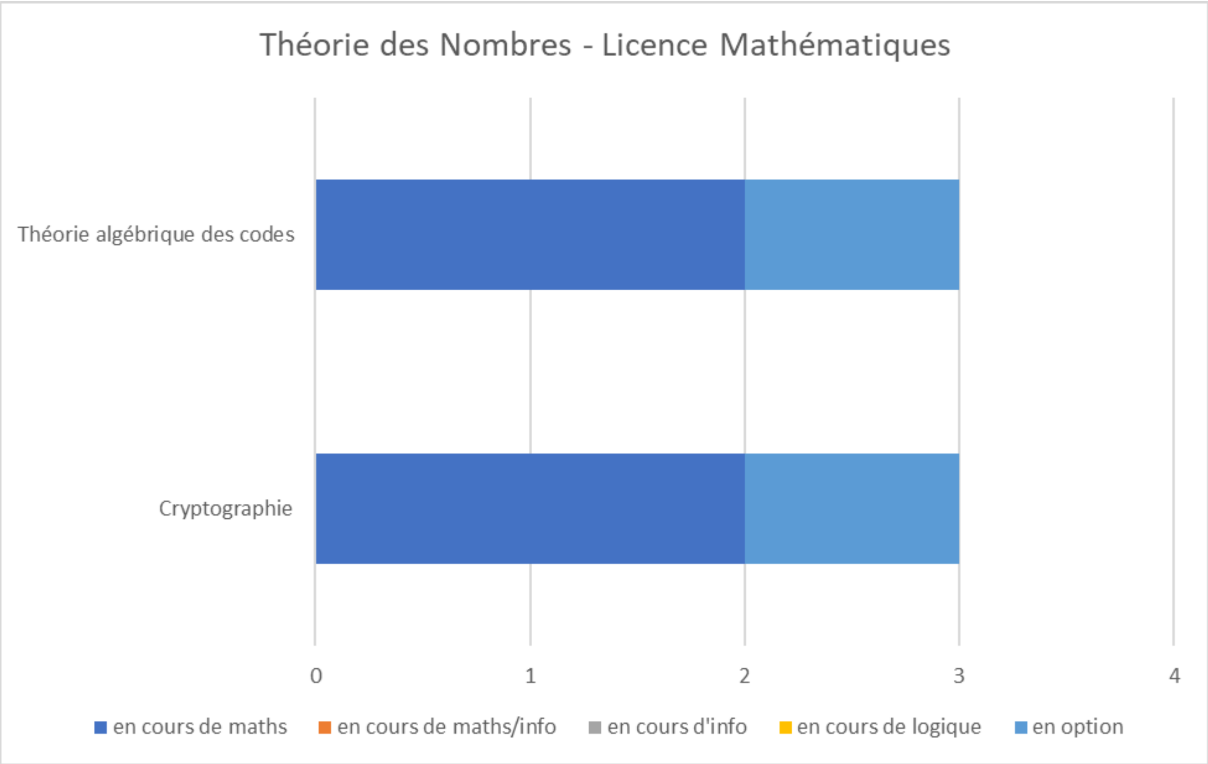
Annexe-Figure 5: Algorithmique - Licence Mathématiques – Liban



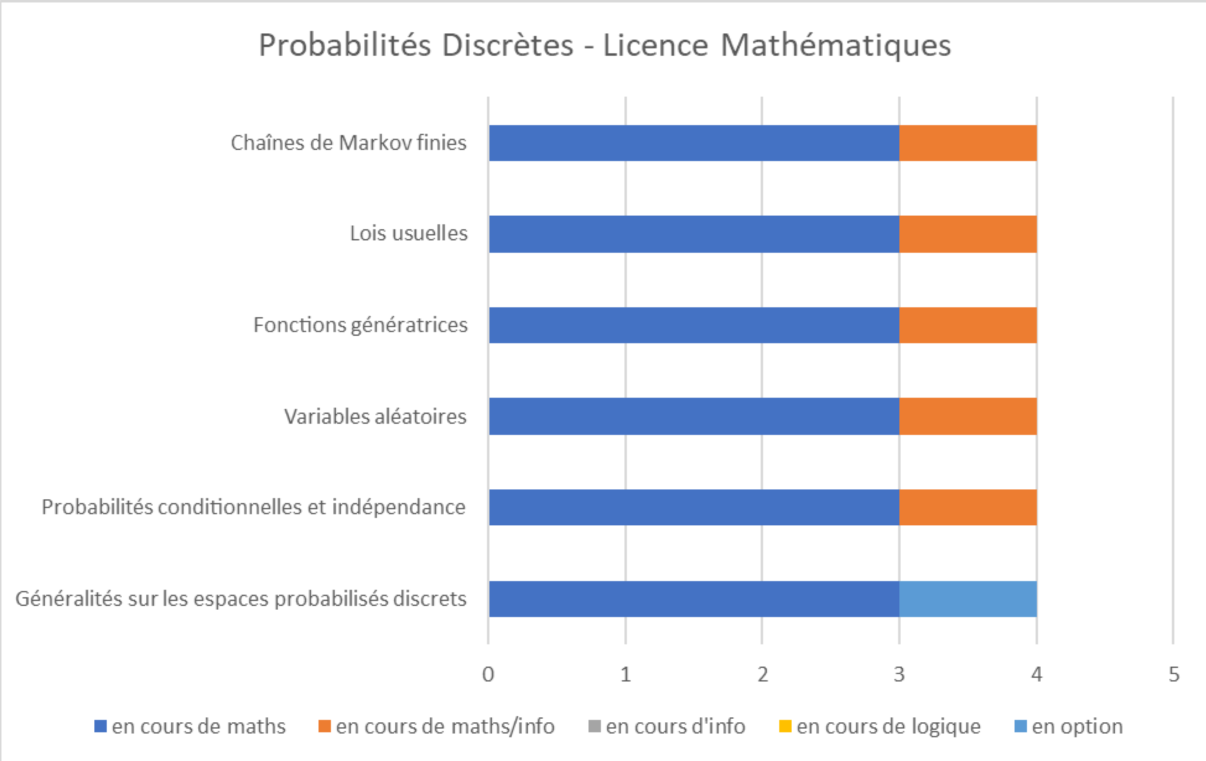
Annexe-Figure 6: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques – Liban



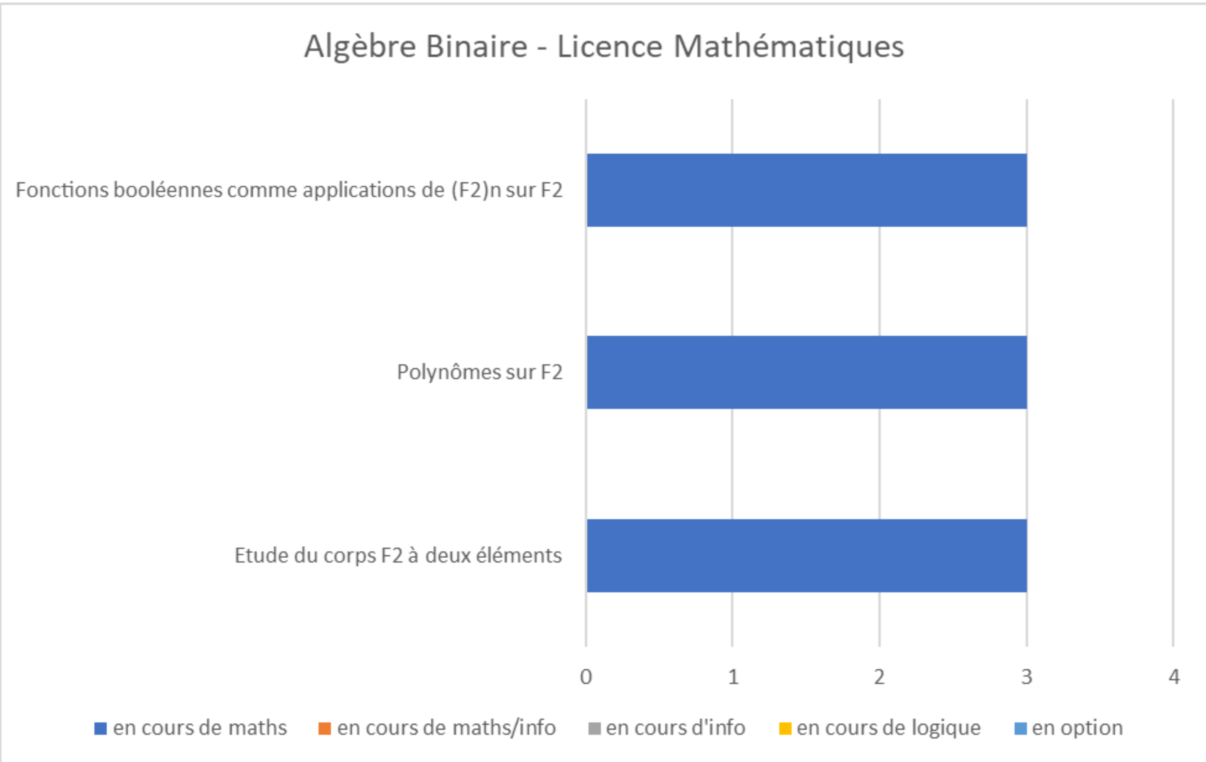
Annexe-Figure 7: RO et Optimisation Combinatoire - Licence Mathématiques – Liban



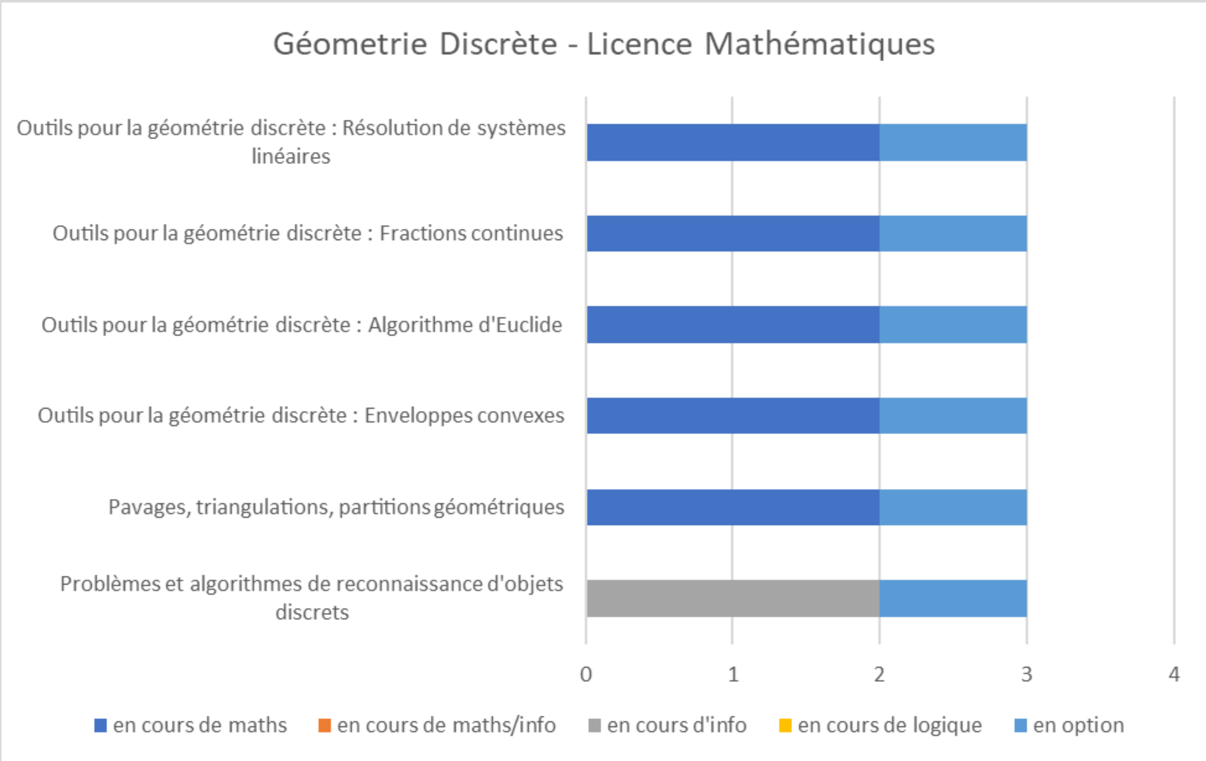
Annexe-Figure 8: Théorie des Nombres - Licence Mathématiques – Liban



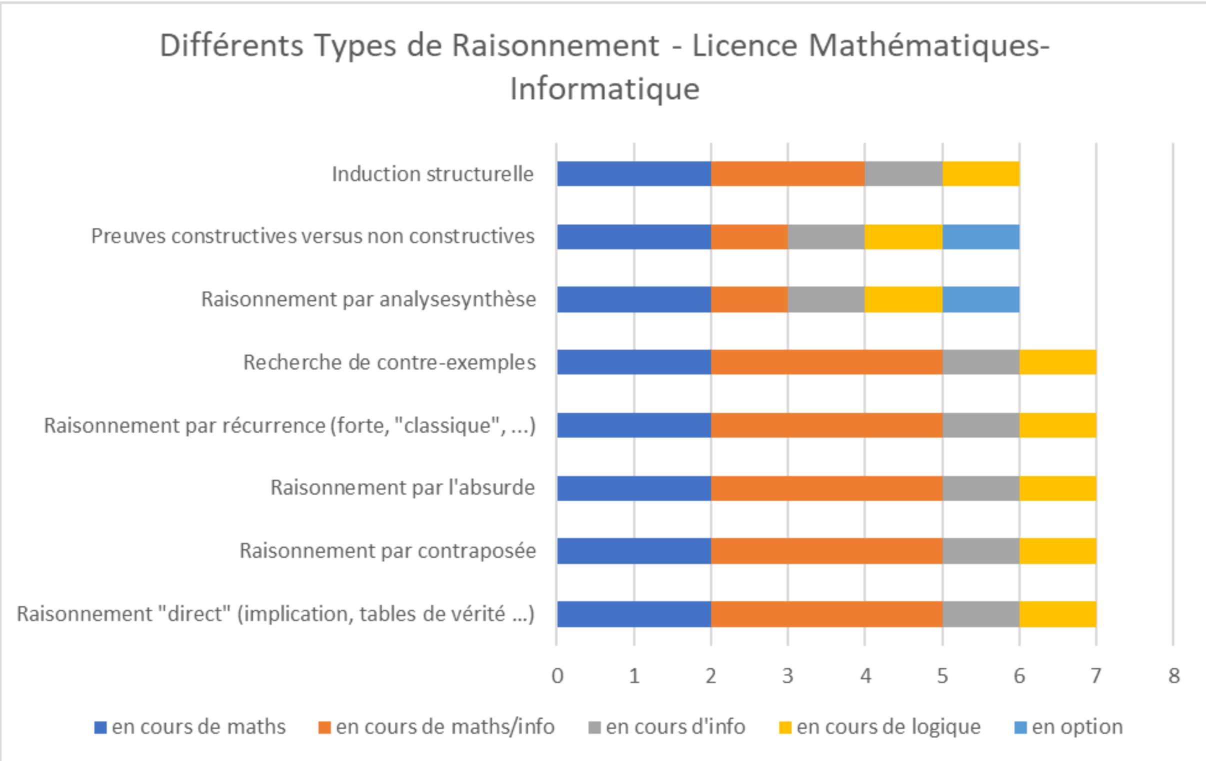
Annexe-Figure 9: Probabilités Discrètes - Licence Mathématiques - Liban



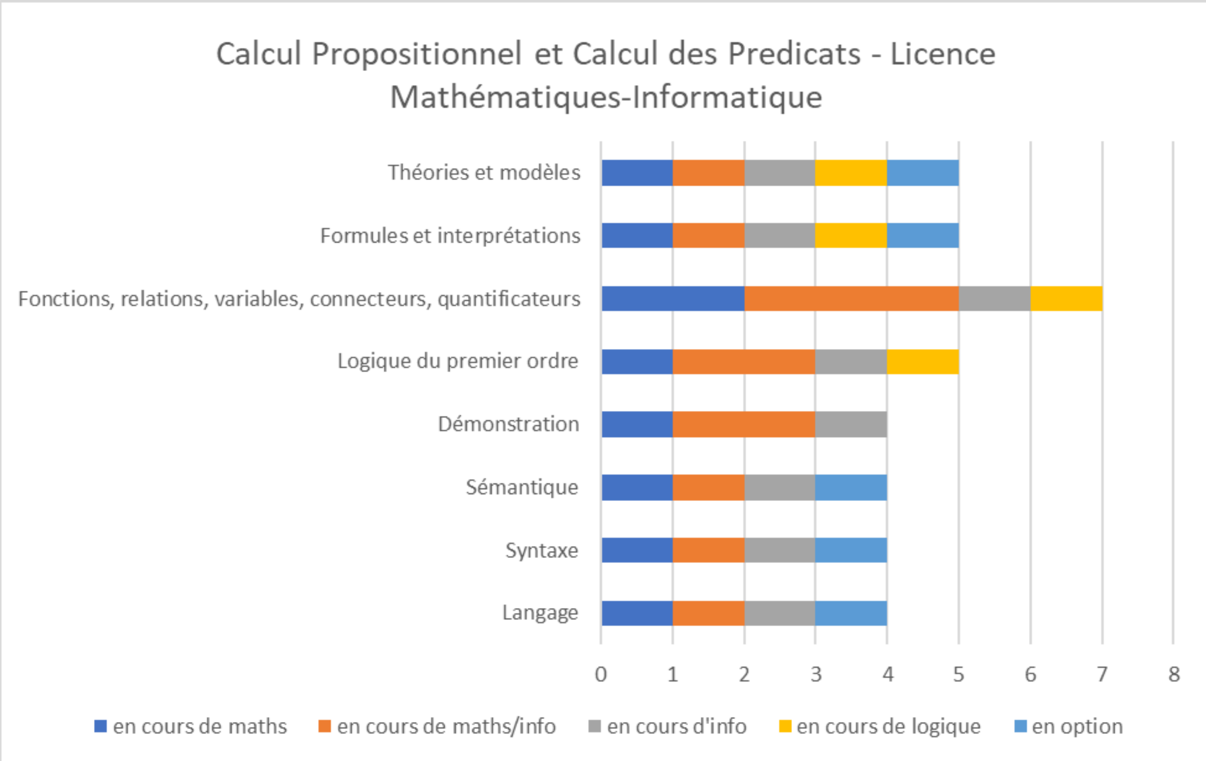
Annexe-Figure 10: Algèbre Binaire - Licence Mathématiques – Liban



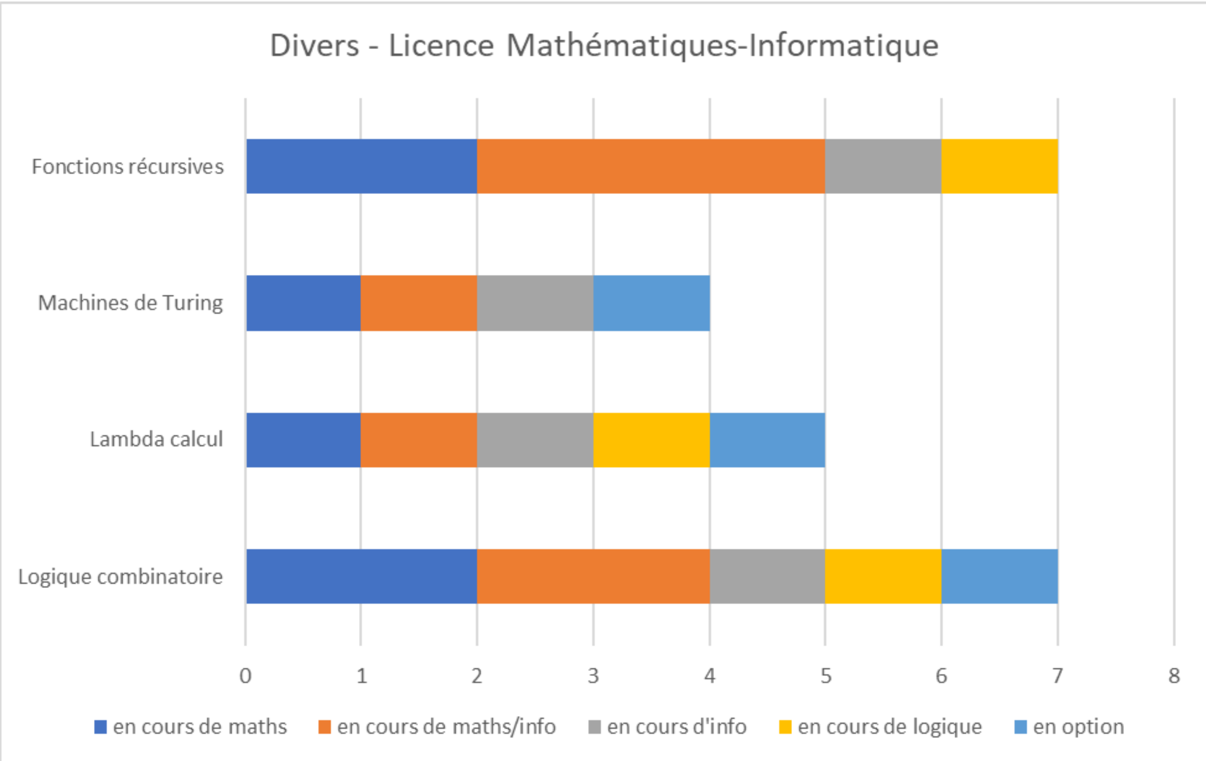
Annexe-Figure 11: Géometrie Discrète - Licence Mathématiques – Liban



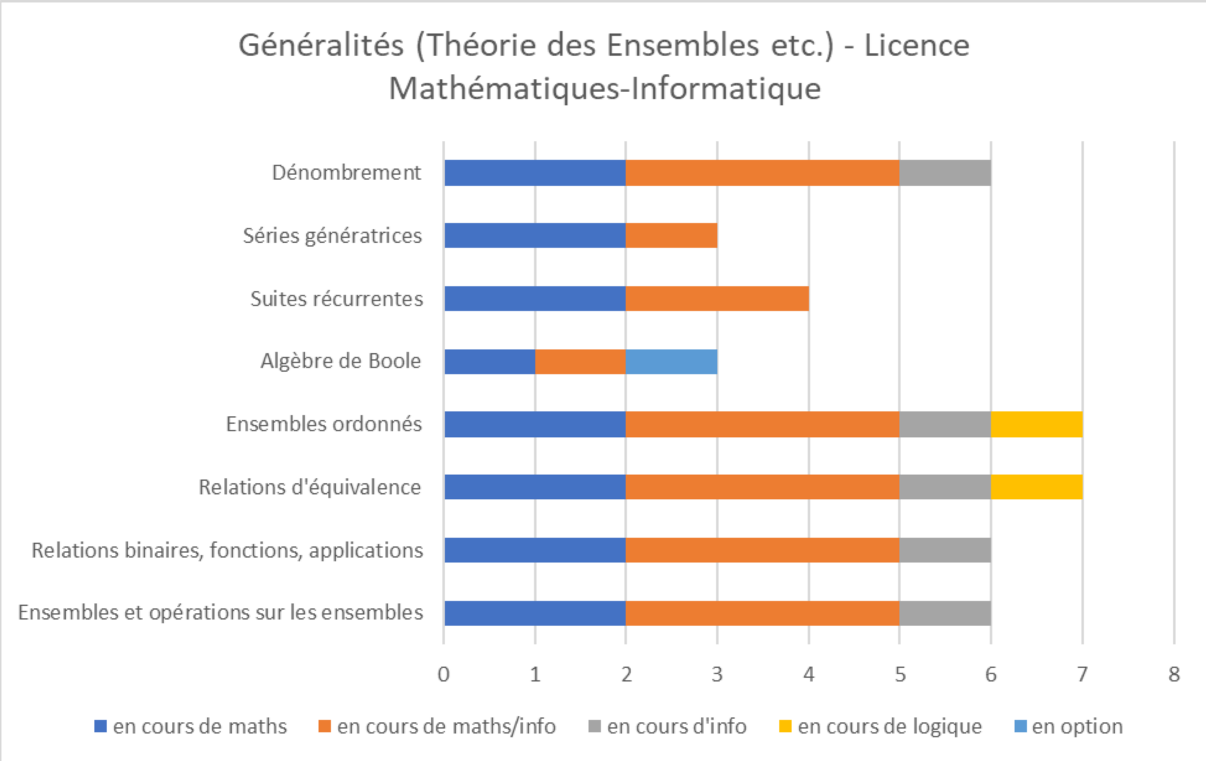
Annexe-Figure 12: Différents Types de Raisonnement - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



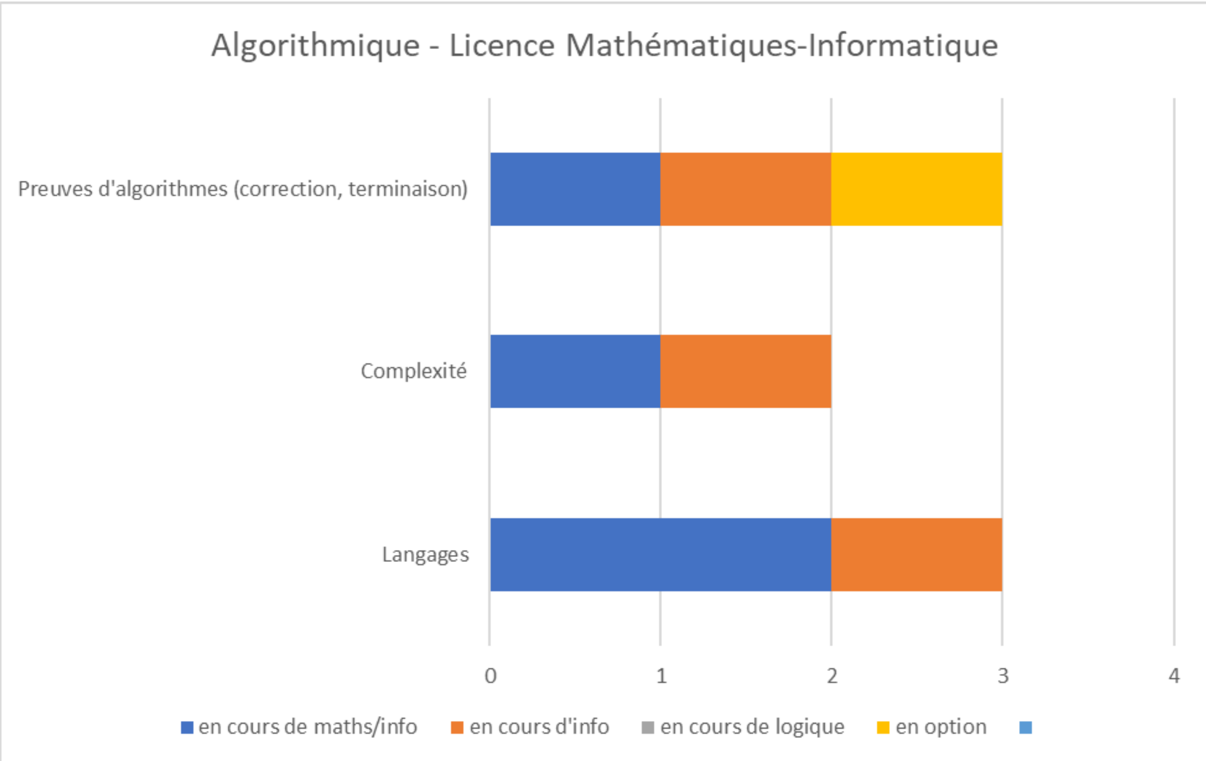
Annexe-Figure 13: Calcul Propositionnel et Calcul des Prédicats - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



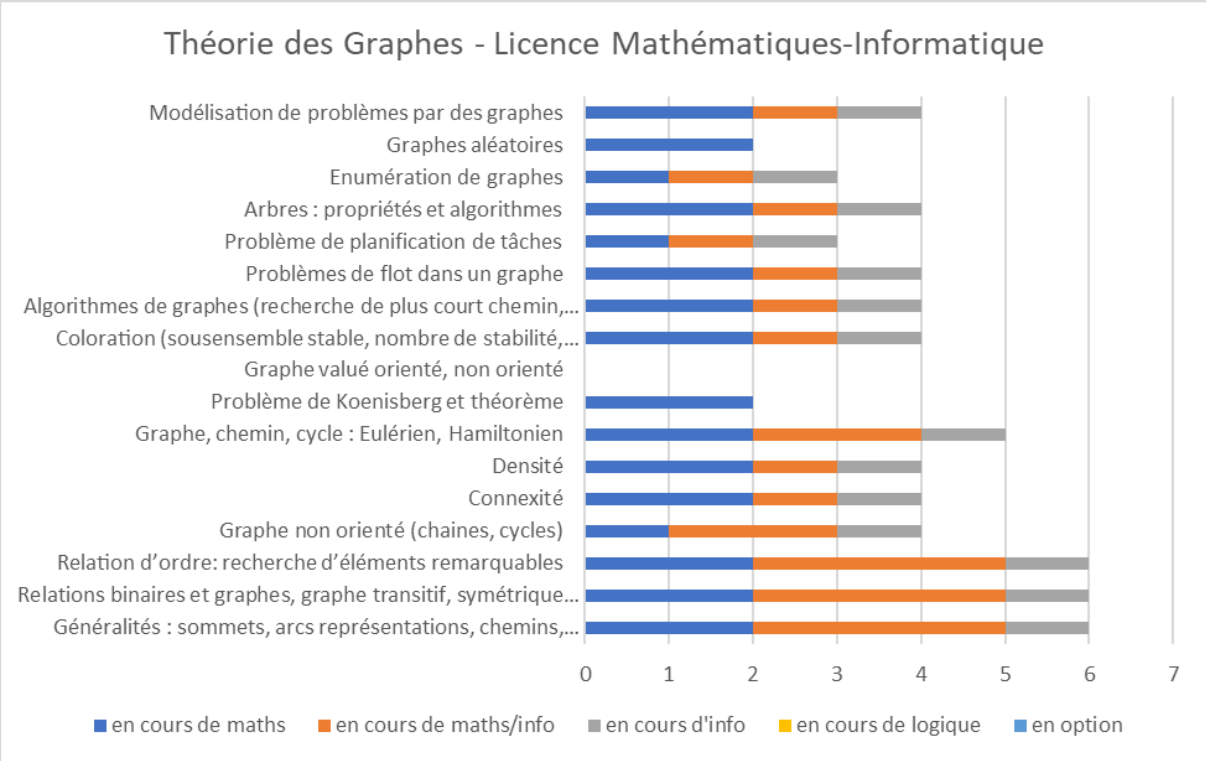
Annexe-Figure 14: Divers - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



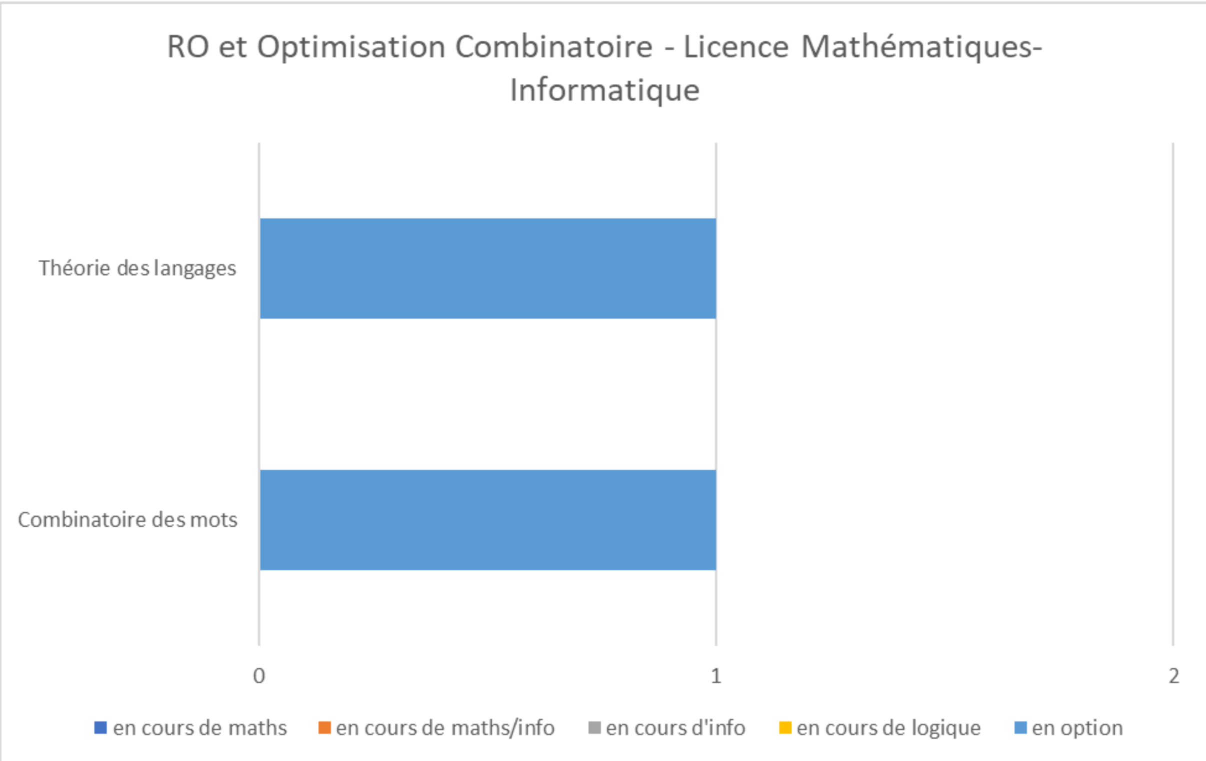
Annexe-Figure 15: Généralités (Théorie des Ensembles etc.) - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



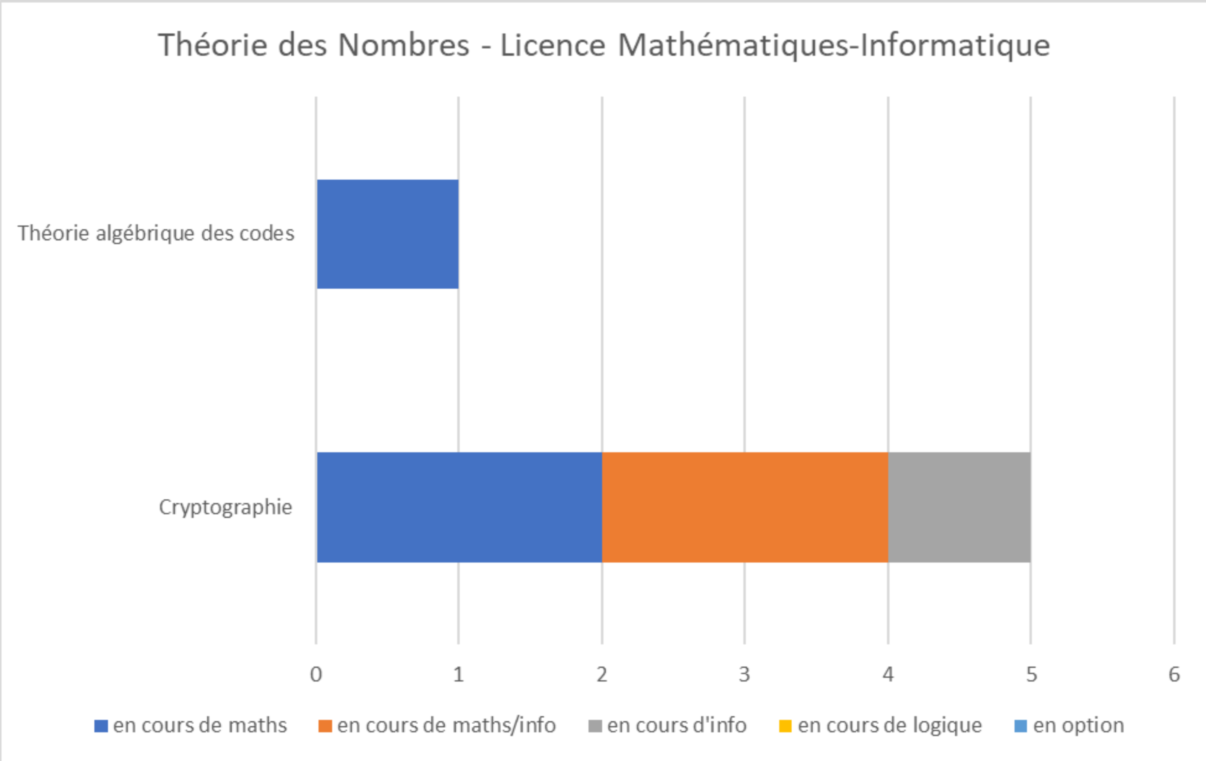
Annexe-Figure 16: Algorithmique - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



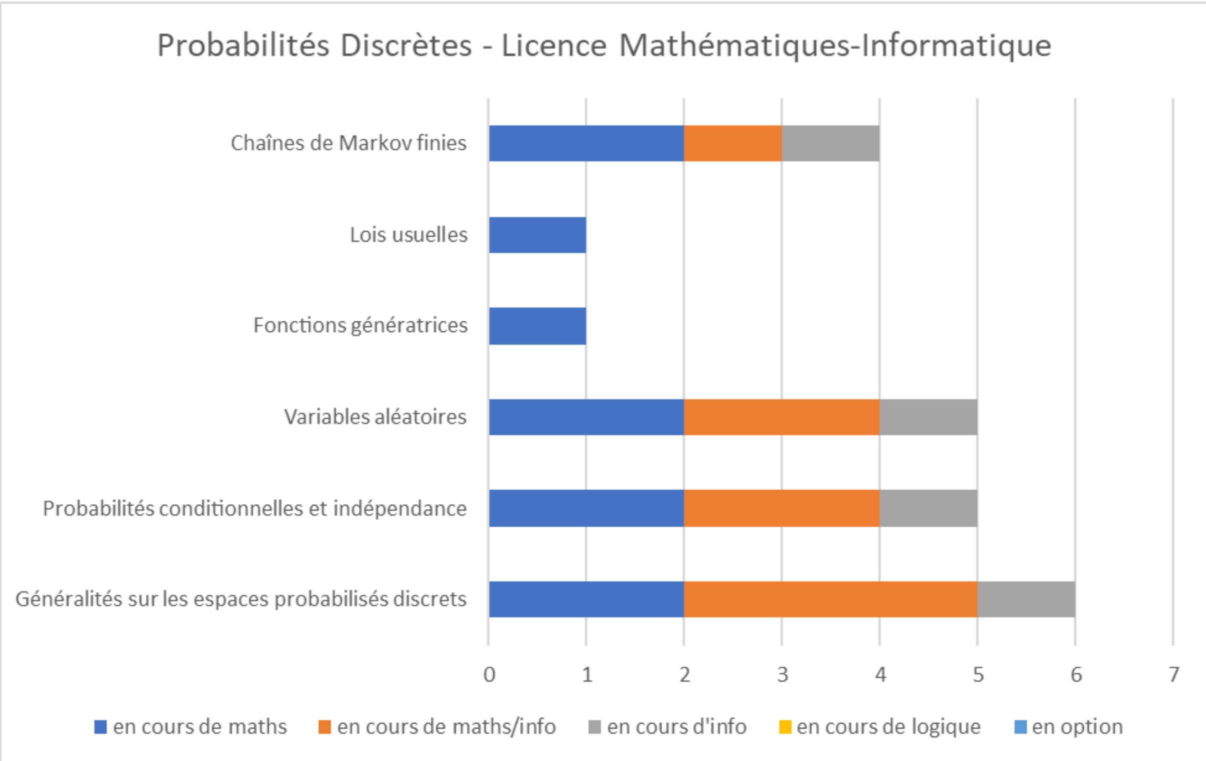
Annexe-Figure 17: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



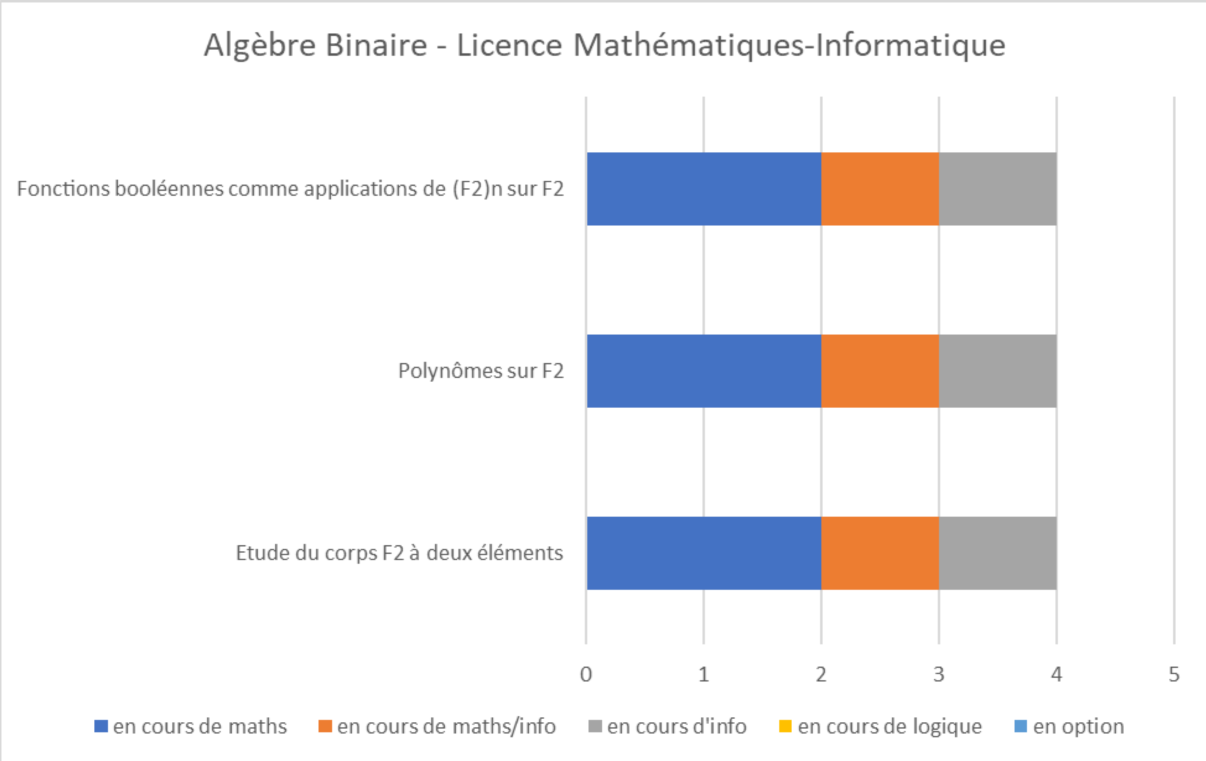
Annexe-Figure 18: RO et Optimisation Combinatoire - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



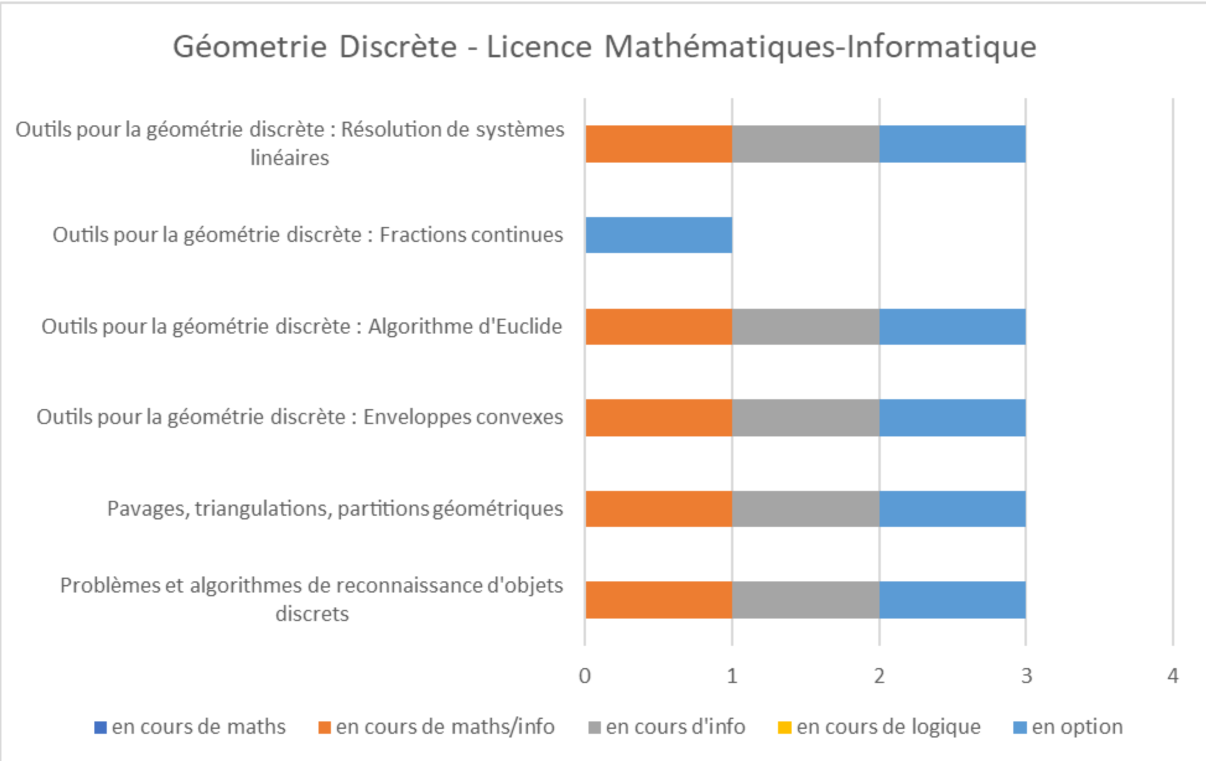
Annexe-Figure 19: Théorie des Nombres - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



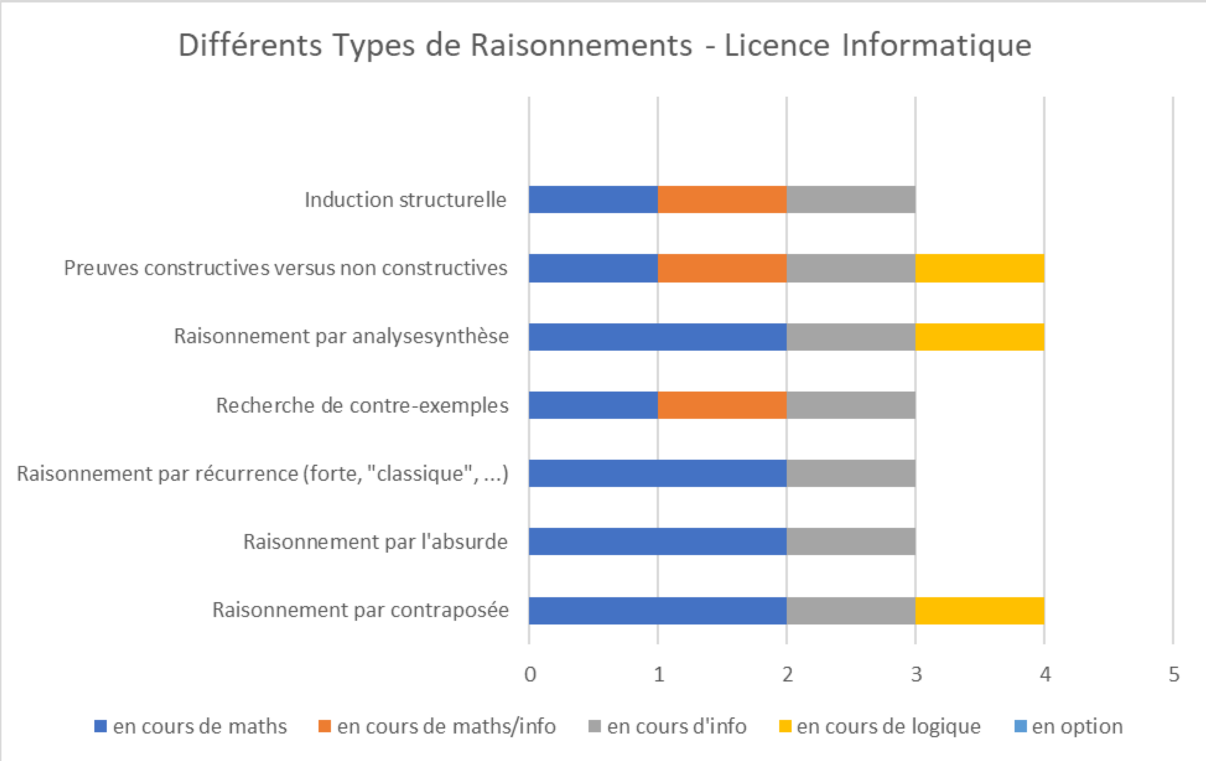
Annexe-Figure 20: Probabilités Discrètes - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



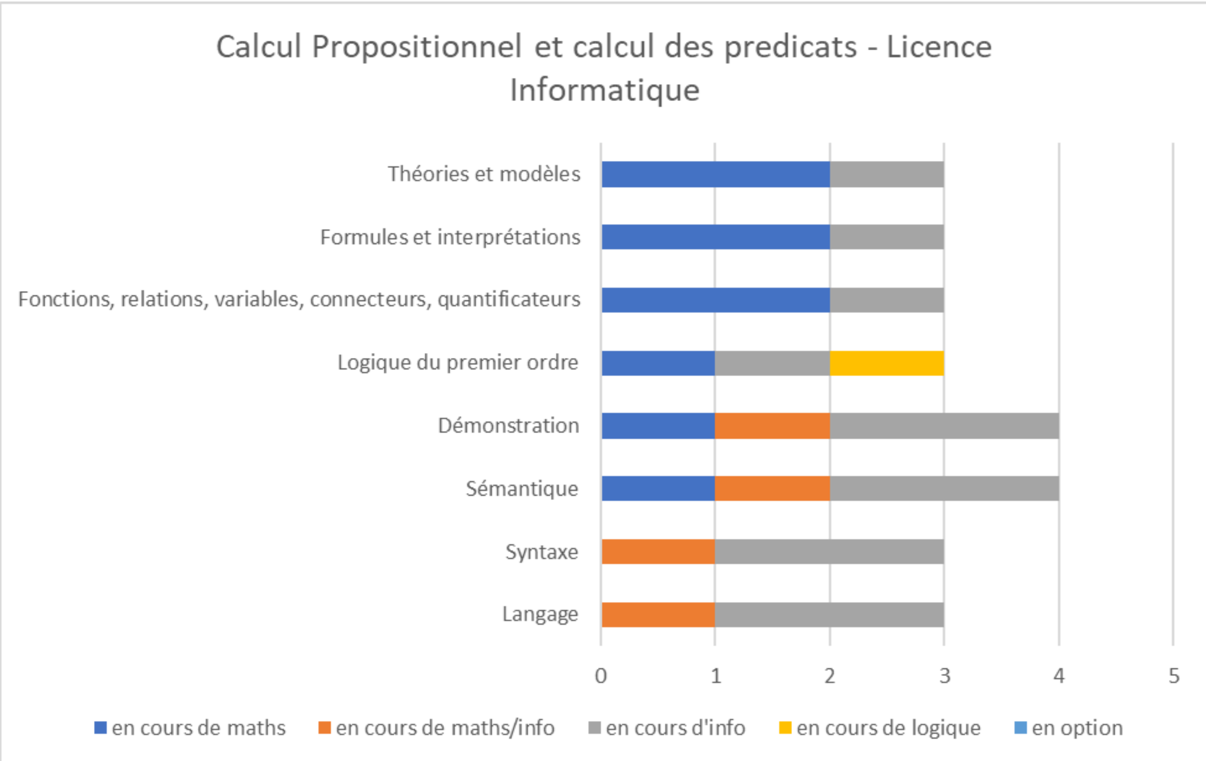
Annexe-Figure 21: Algèbre Binaire - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



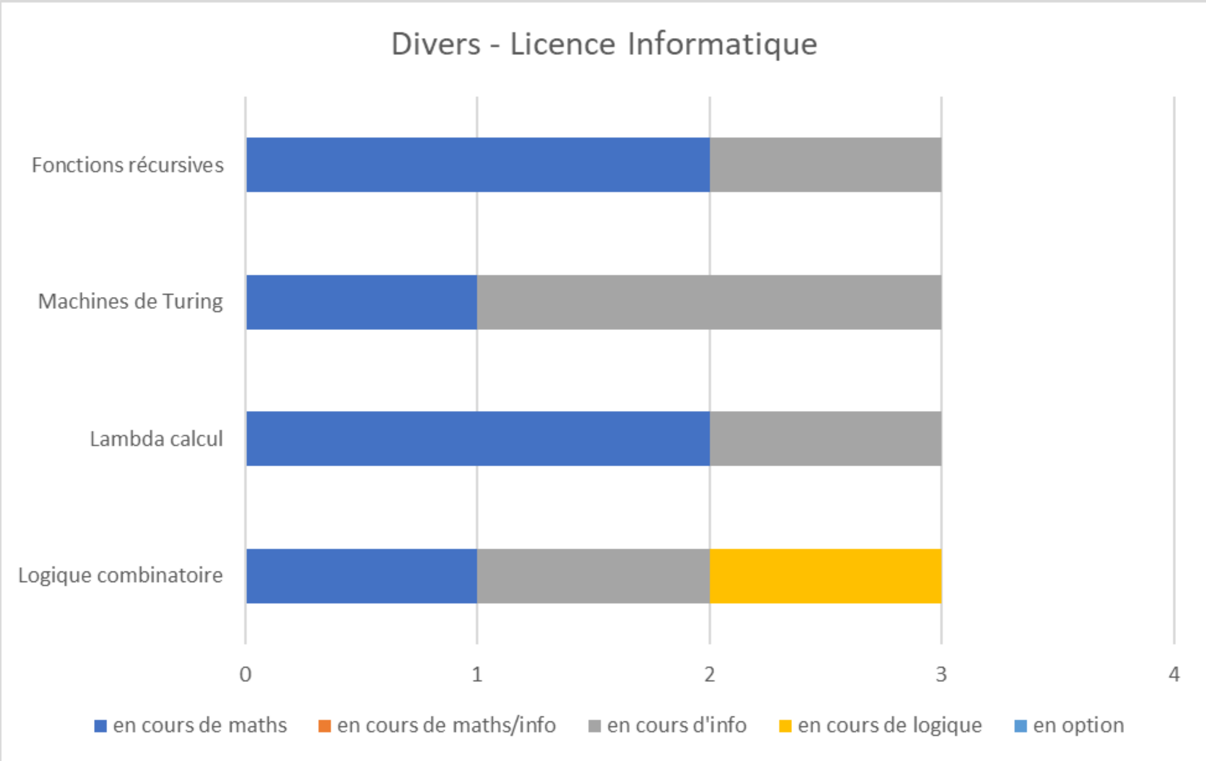
Annexe-Figure 22: Géometrie Discrète - Licence Mathématiques-Informatique – Liban



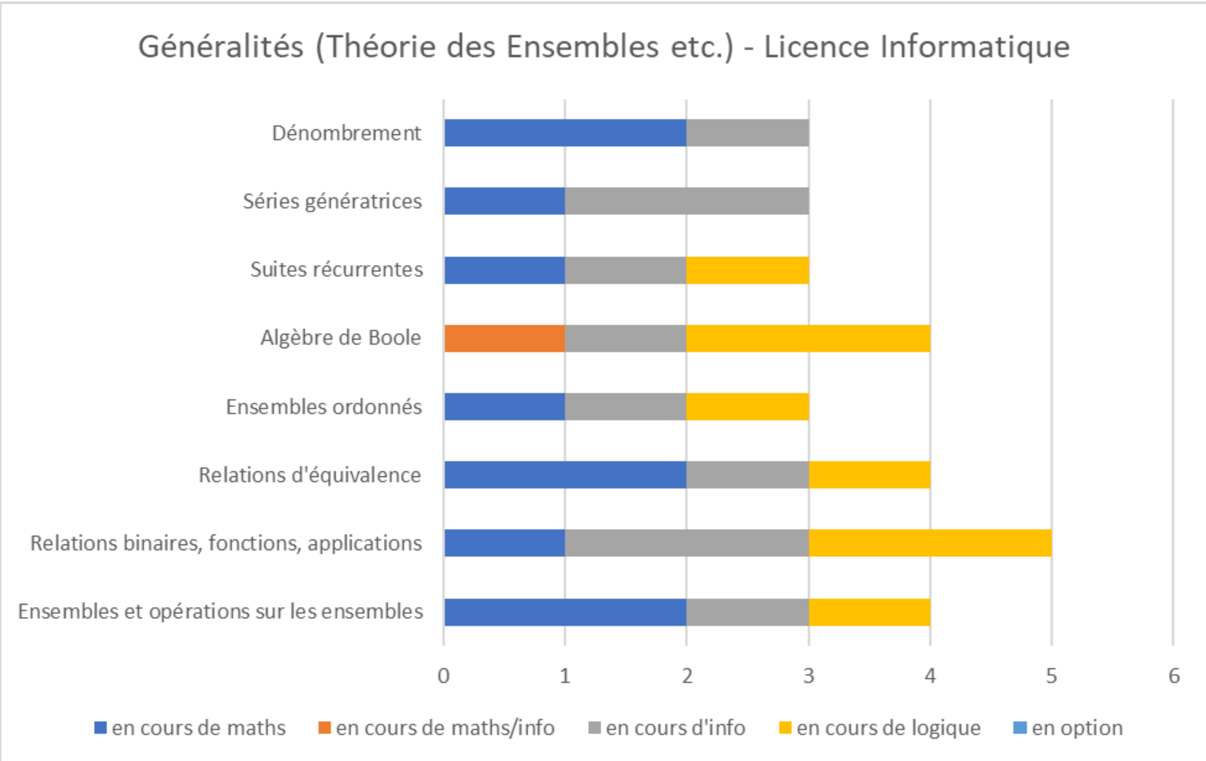
Annexe-Figure 23: Différents Types de Raisonnements - Licence Informatique – Liban



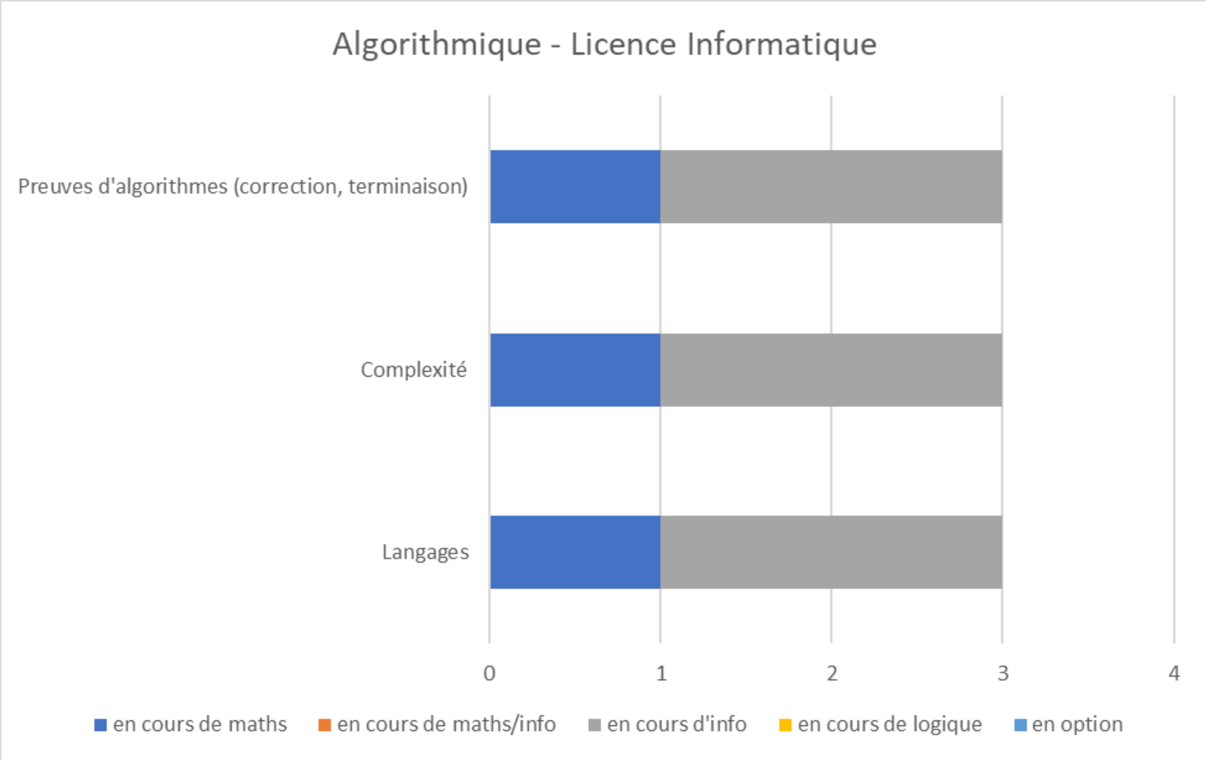
Annexe-Figure 24: Calcul Propositionnel et calcul des Prédicats - Licence Informatique – Liban



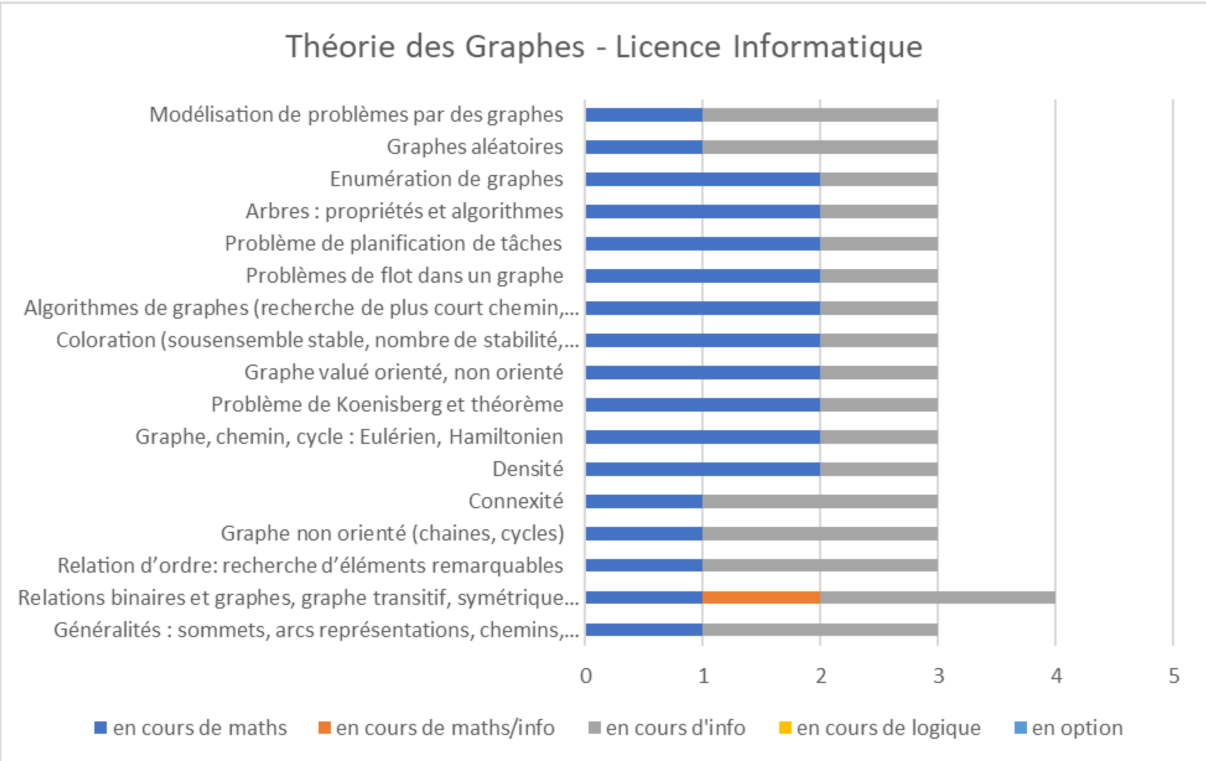
Annexe-Figure 25: Divers - Licence Informatique – Liban



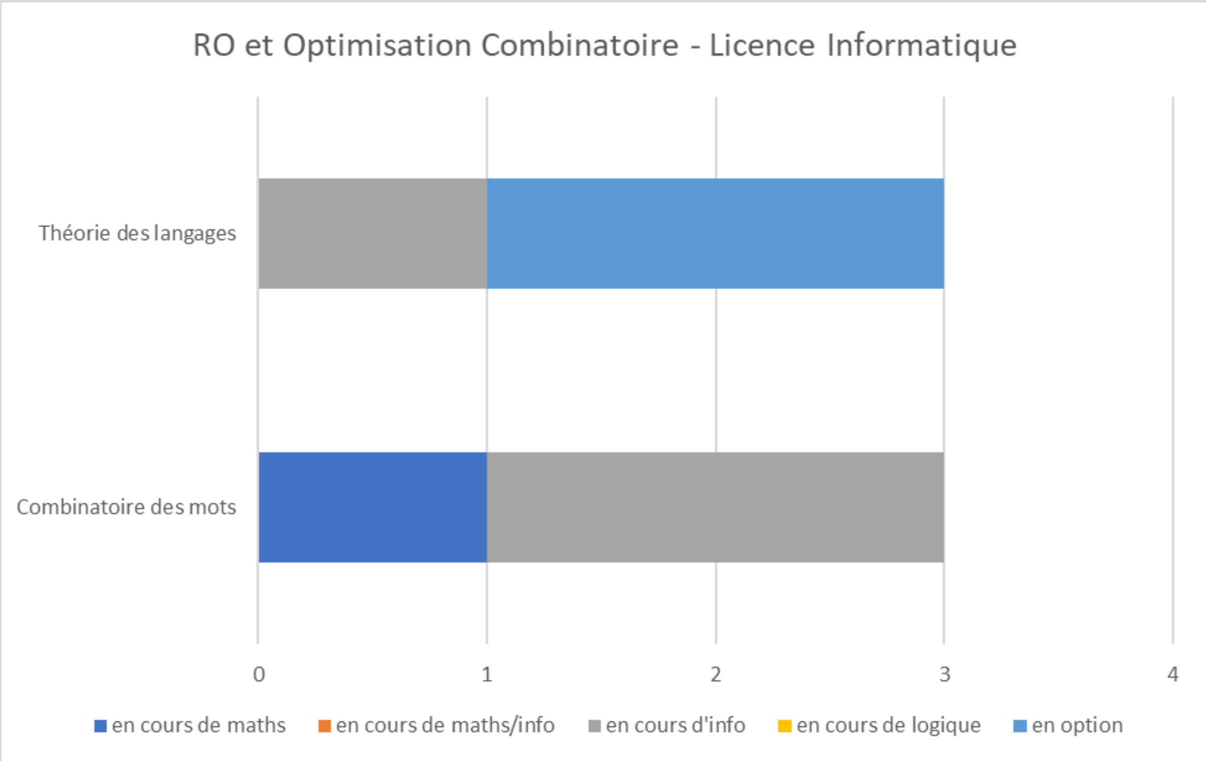
Annexe-Figure 26: Généralités (Théorie des Ensembles etc.) - Licence Informatique – Liban



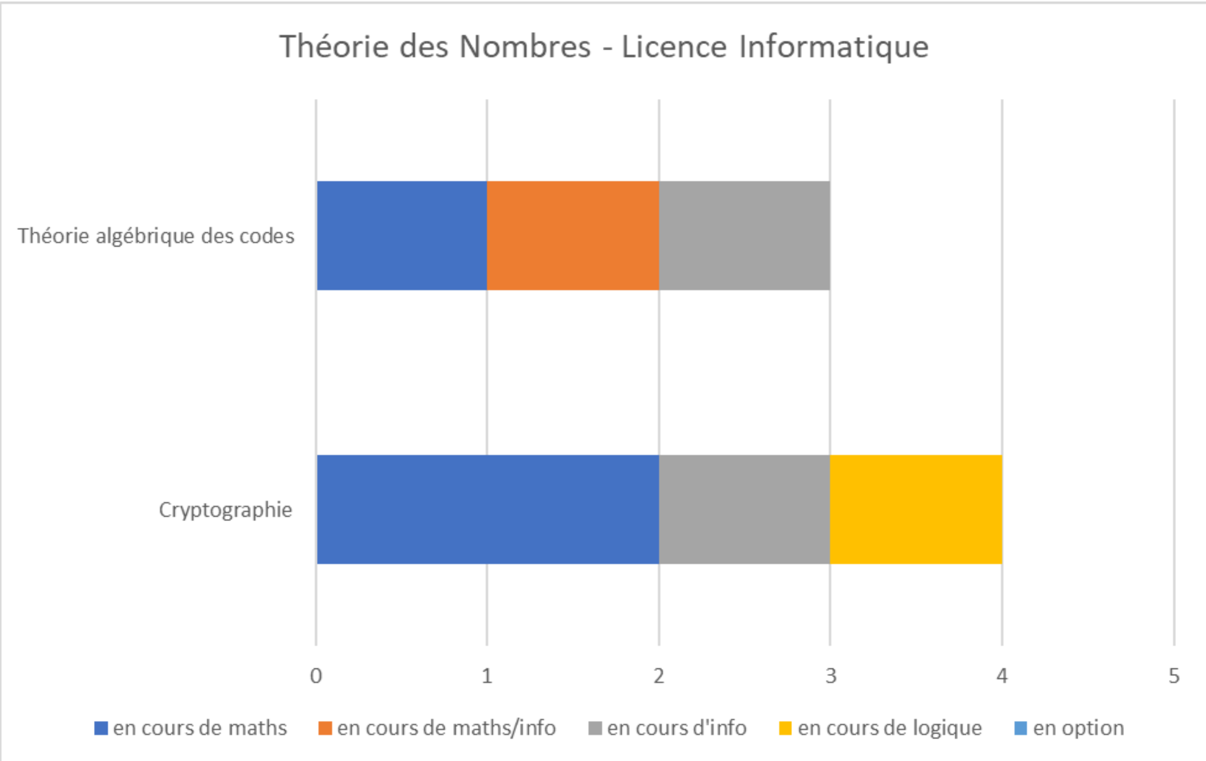
Annexe-Figure 27: Algorithmique - Licence Informatique – Liban



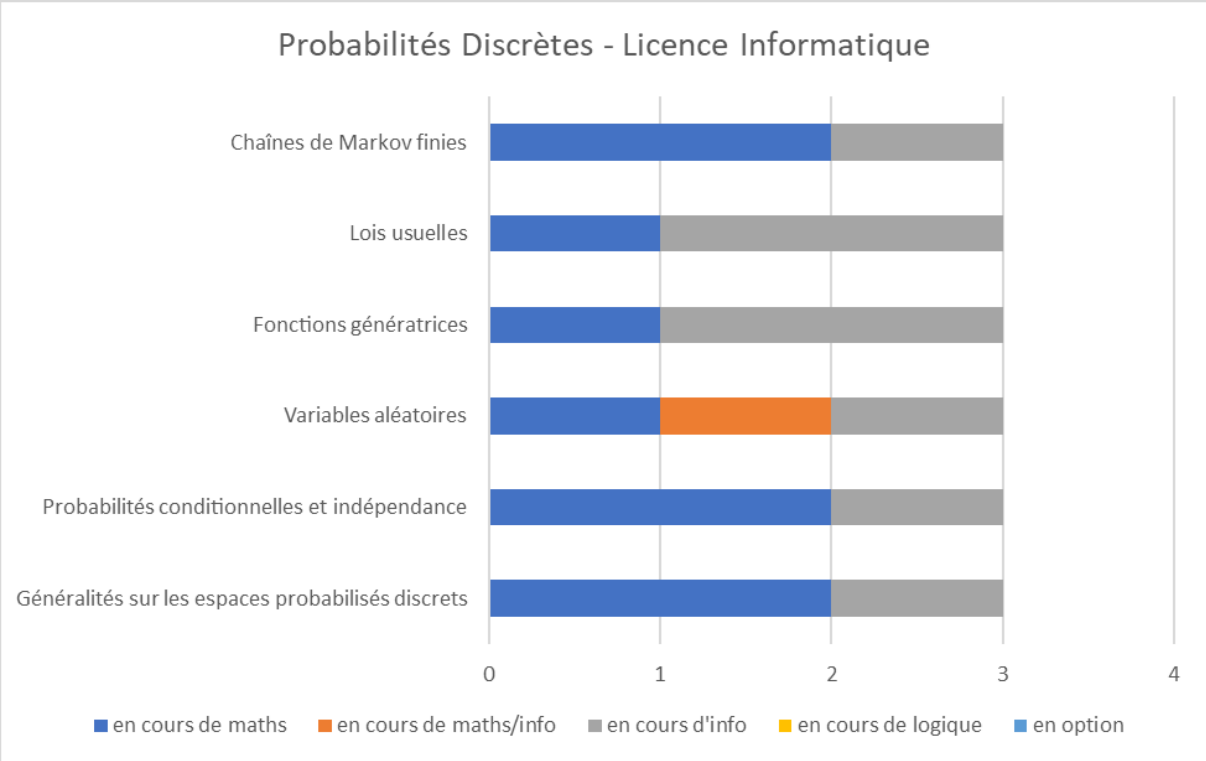
Annexe-Figure 28: Théorie des Graphes - Licence Informatique – Liban



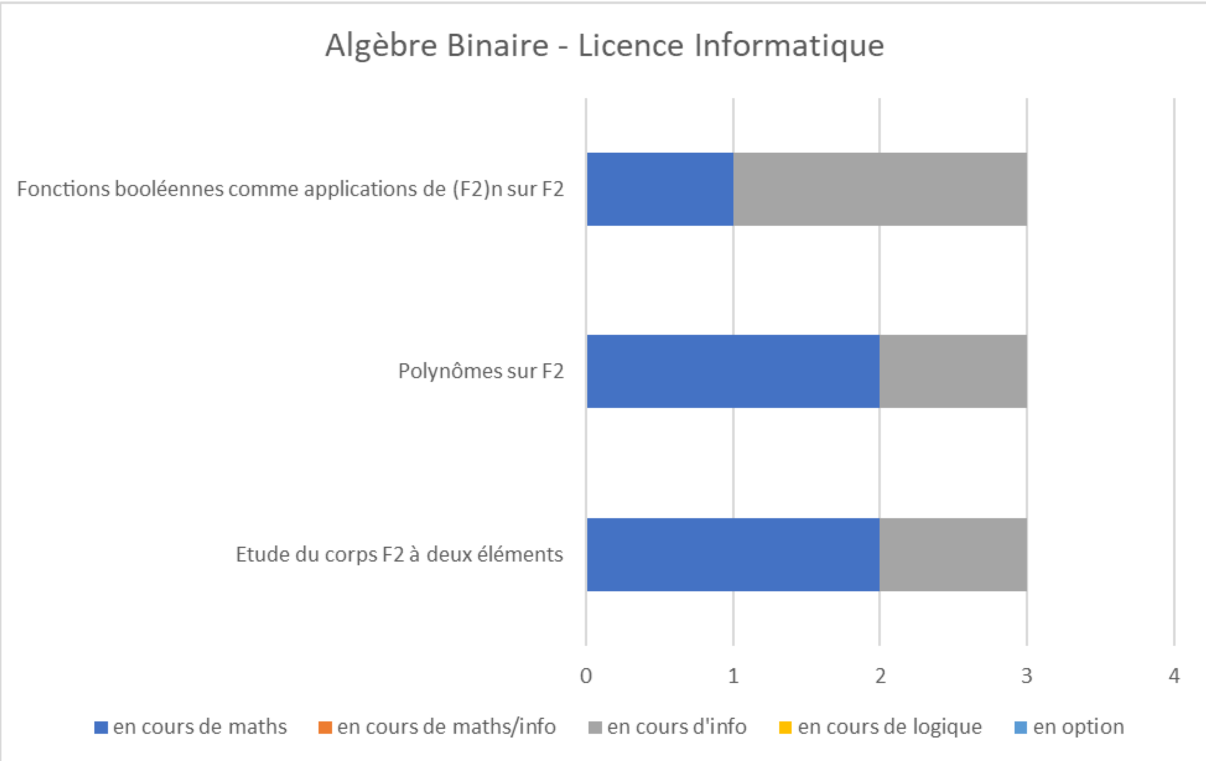
Annexe-Figure 29: RO et Optimisation Combinatoire - Licence Informatique – Liban



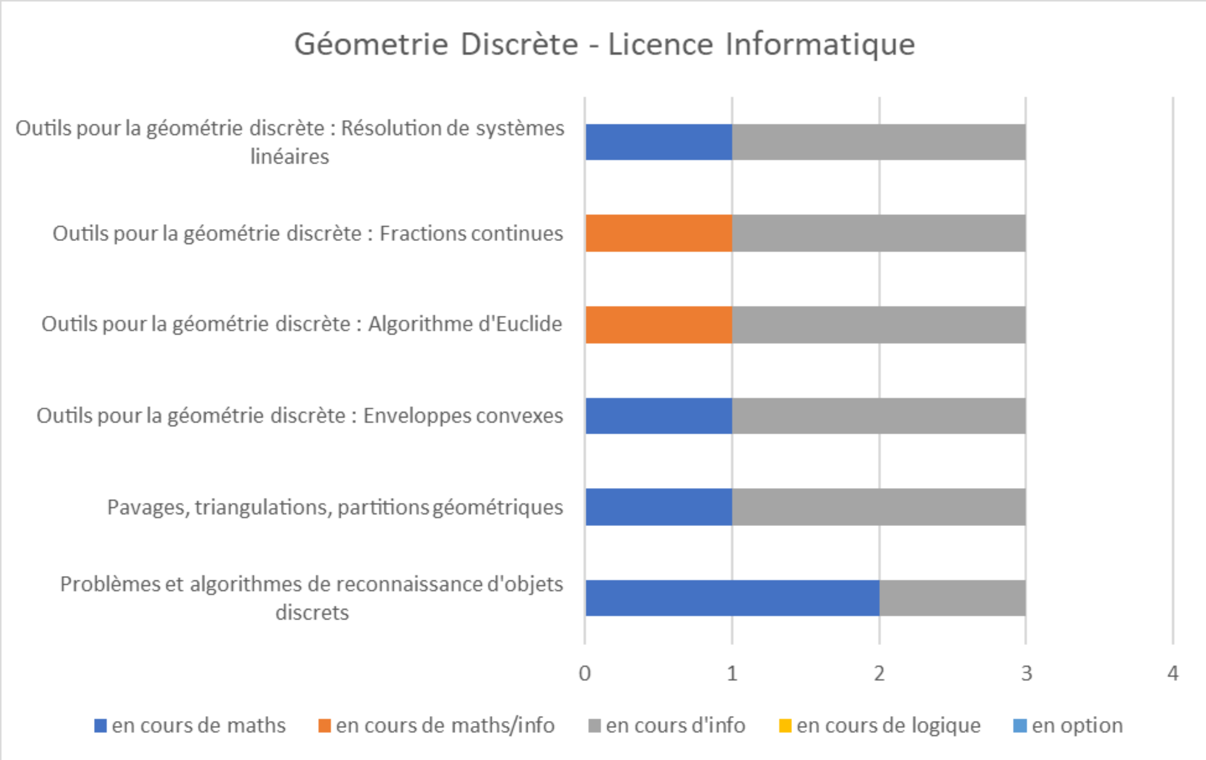
Annexe-Figure 30: Théorie des Nombres - Licence Informatique – Liban



Annexe-Figure 31: Probabilités Discrètes - Licence Informatique – Liban



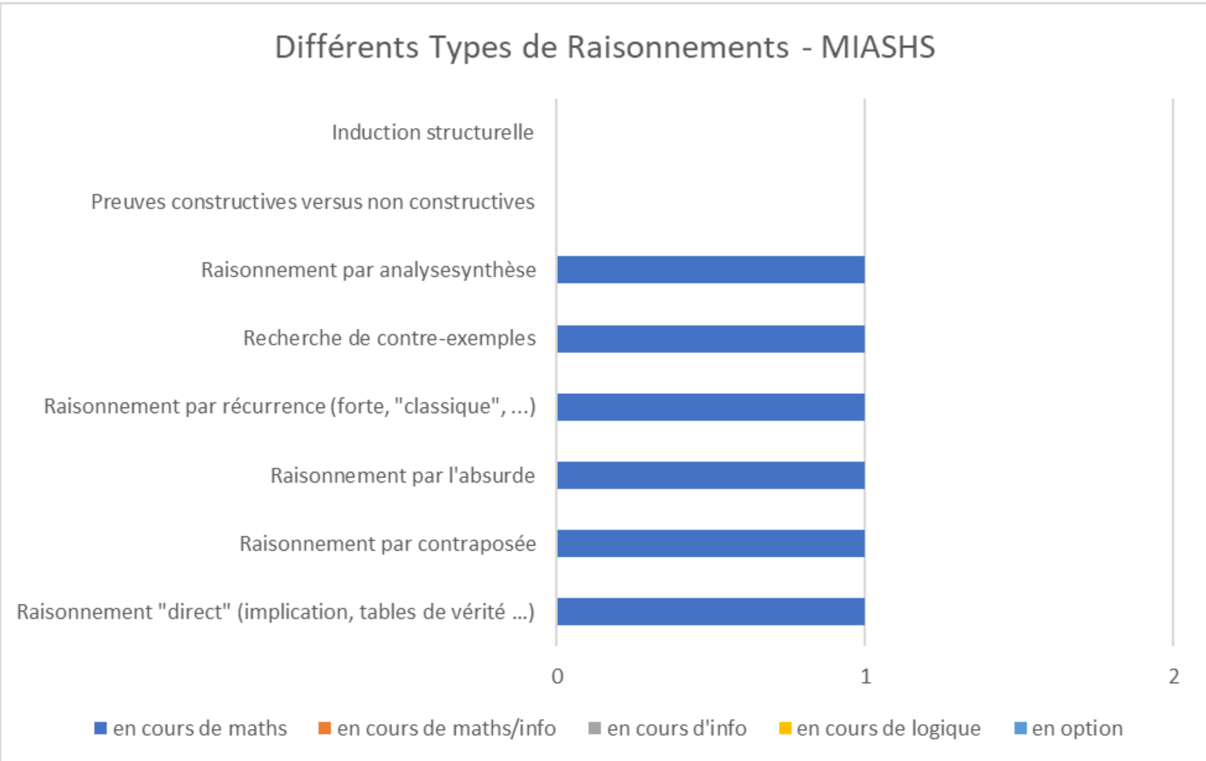
Annexe-Figure 32: Algèbre Binaire - Licence Informatique – Liban



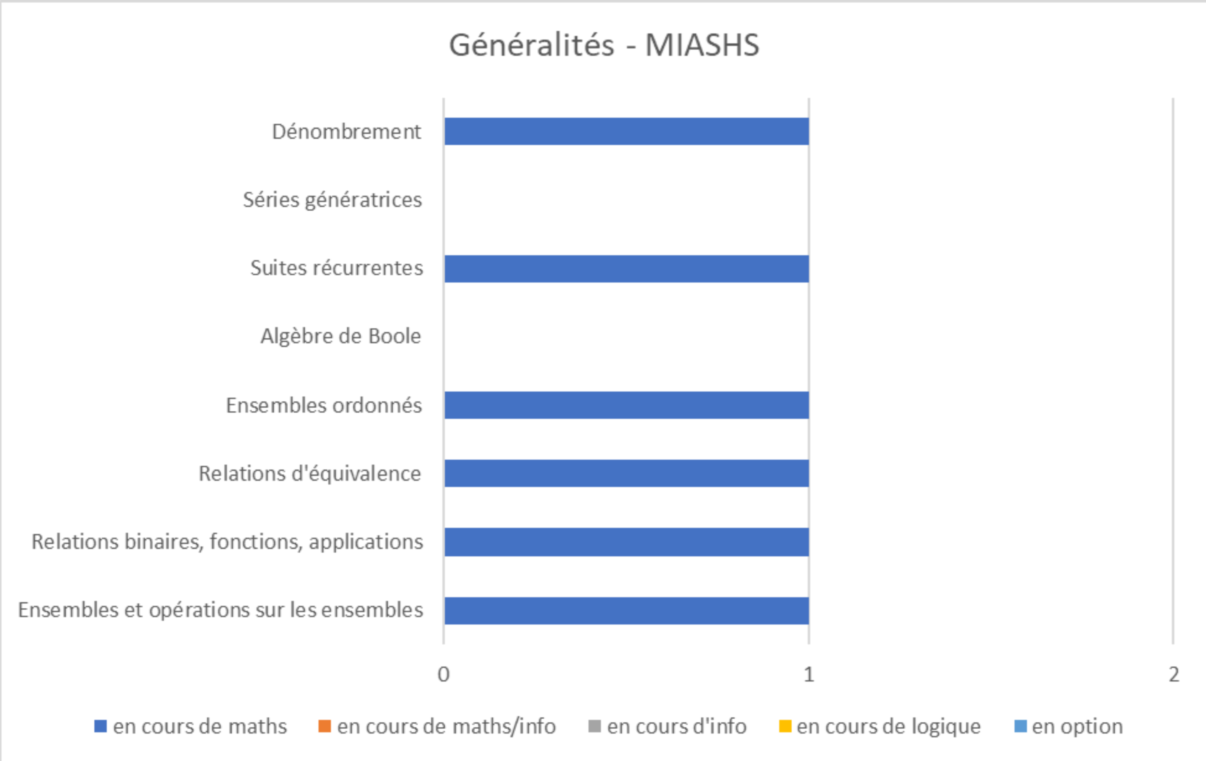
Annexe-Figure 33: Géometrie Discrète - Licence Informatique - Liban

D2.Résultats de la France

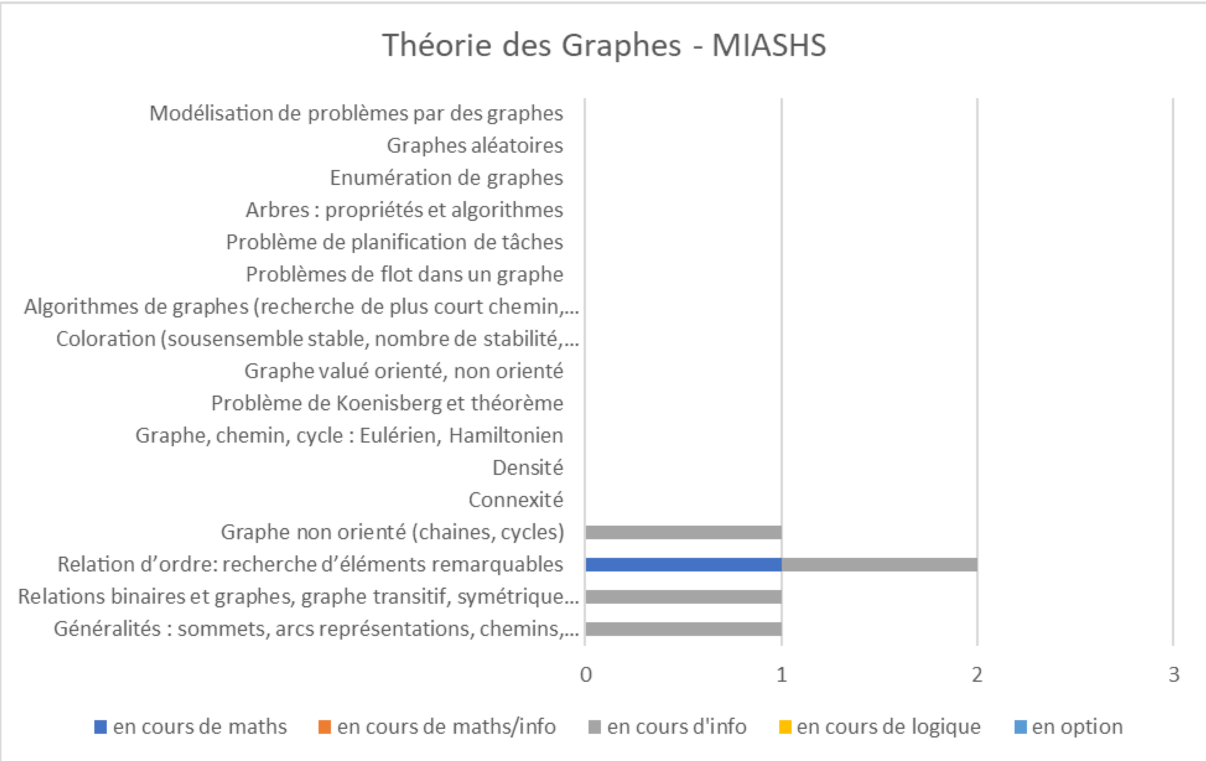
D2. 1. Universités



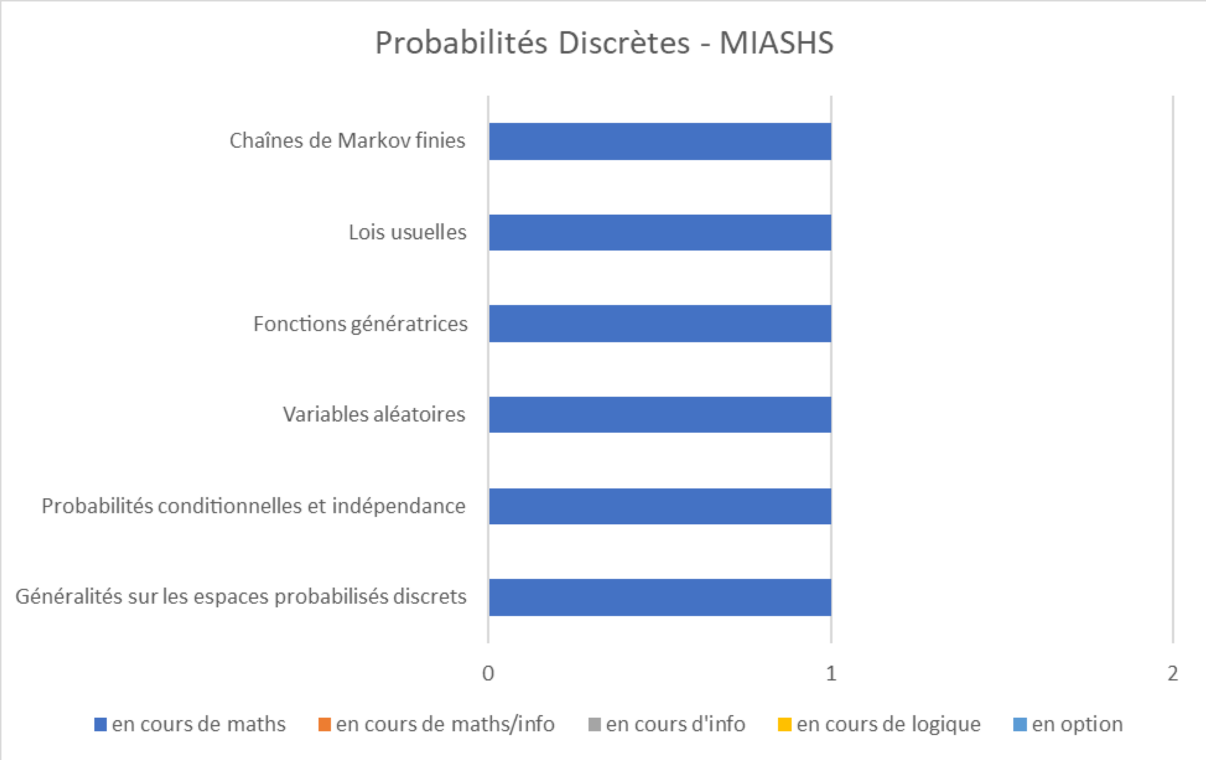
Annexe-Figure 34: Différents Types de Raisonnements - MIASHS – France



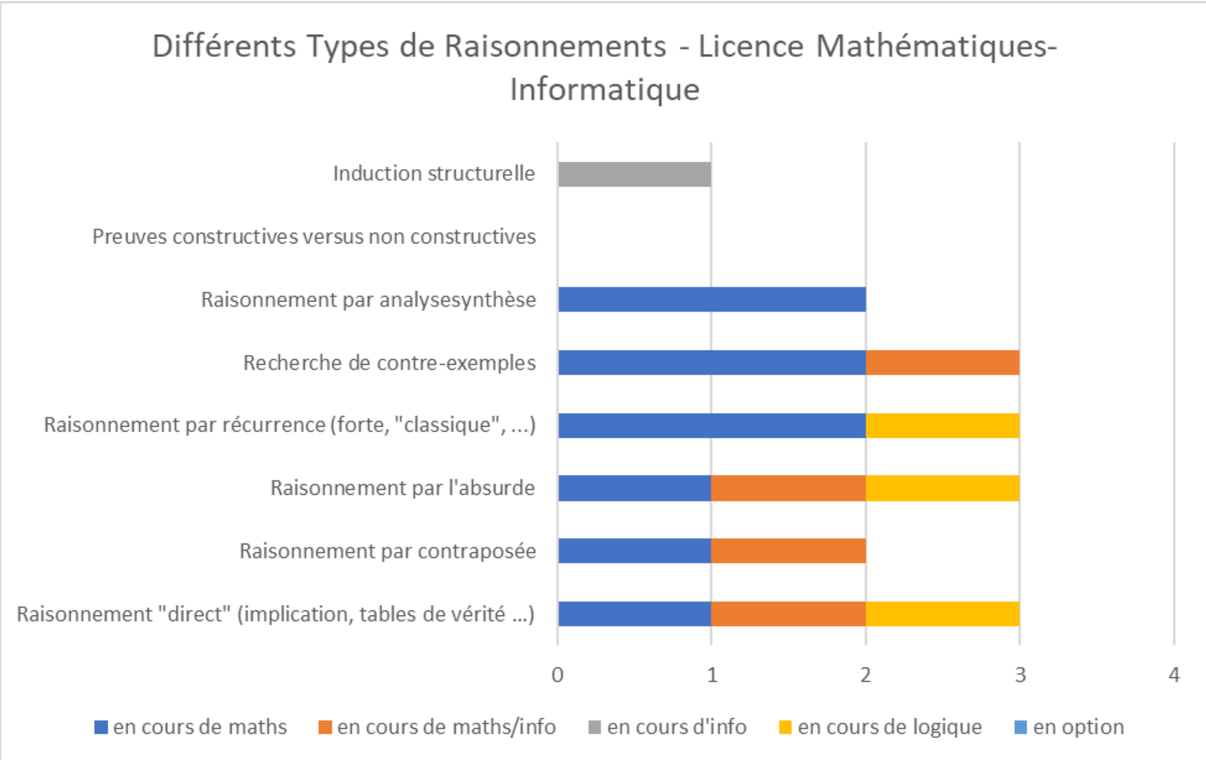
Annexe-Figure 35: Généralités - MIASHS – France



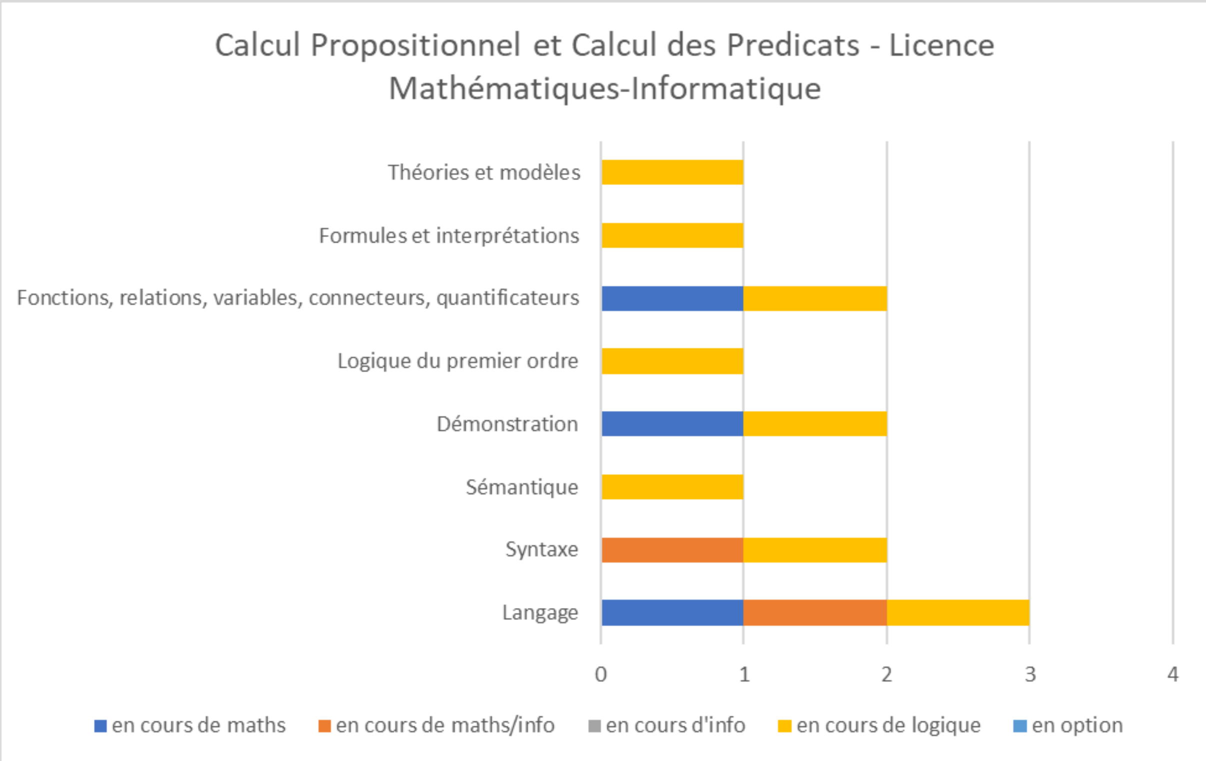
Annexe-Figure 36: Théorie des Graphes - MIASHS – France



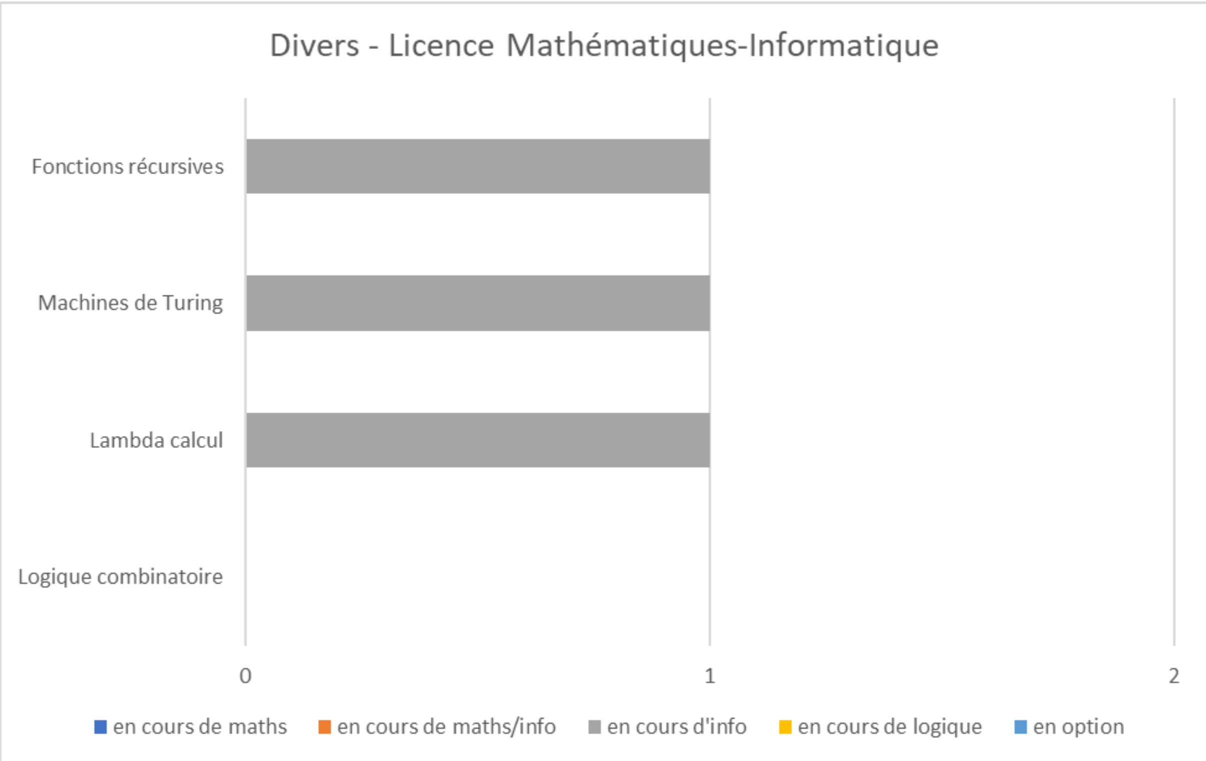
Annexe-Figure 37: Probabilités Discrètes - MIASHS – France



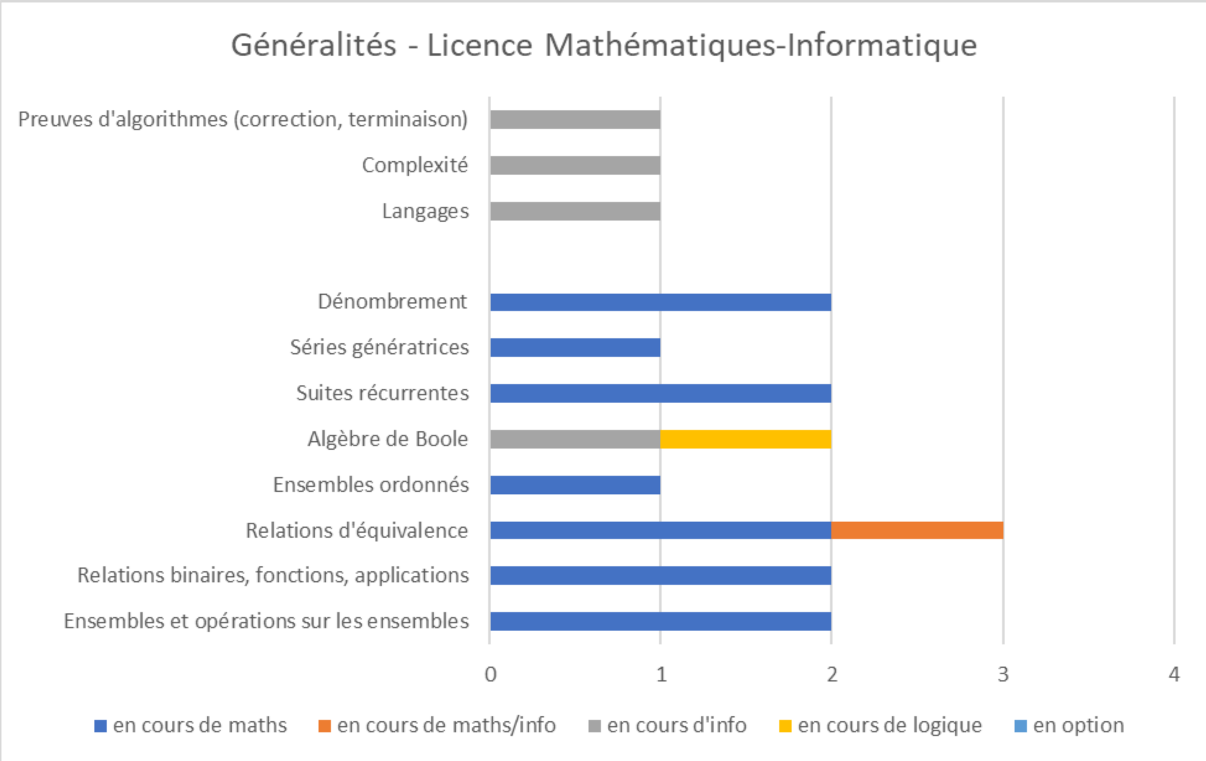
Annexe-Figure 38: Différents Types de Raisonnements - Licence Mathématiques-Informatique – France



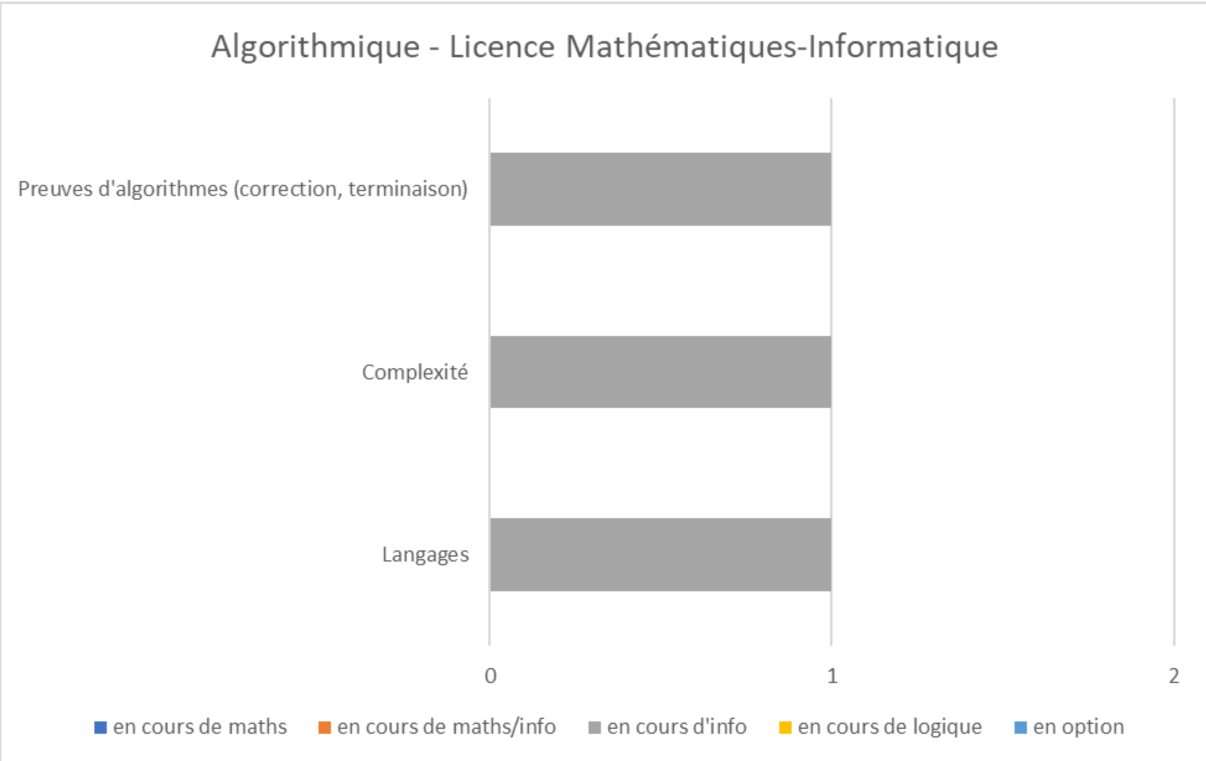
Annexe-Figure 39: Calcul Propositionnel et Calcul des Prédicats - Licence Mathématiques-Informatique – France



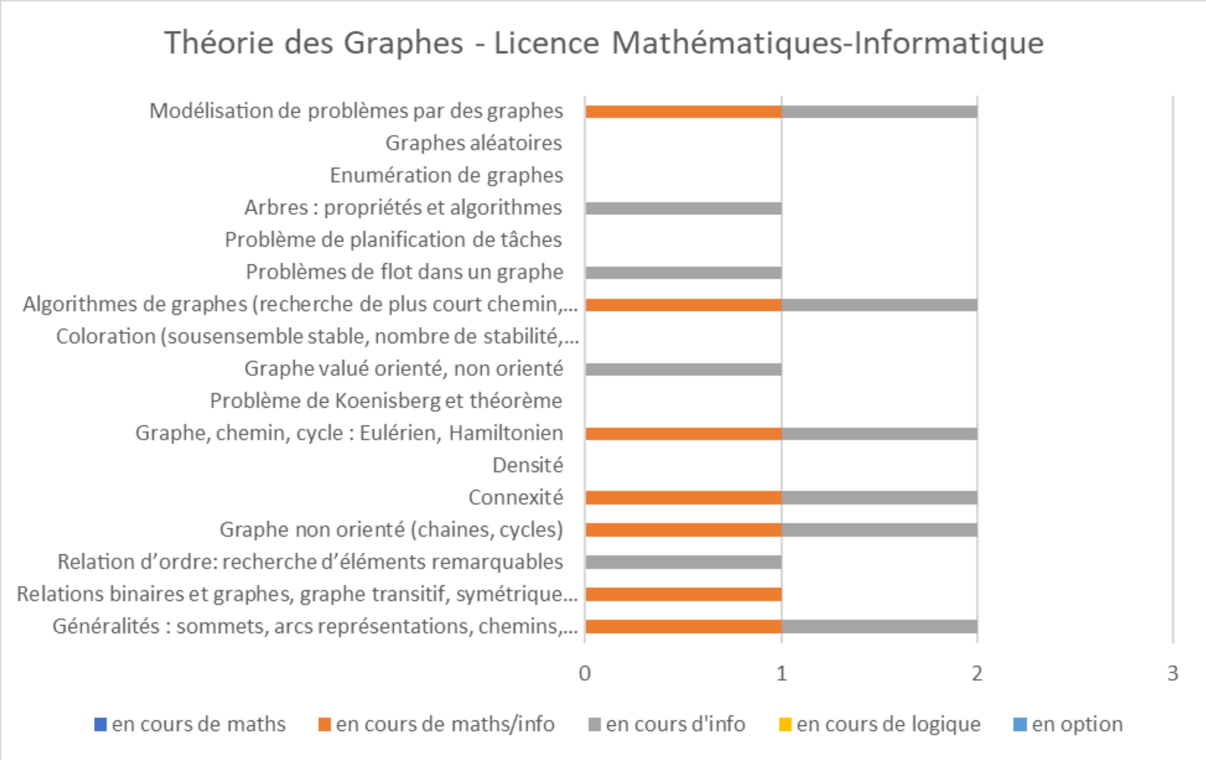
Annexe-Figure 40: Divers - Licence Mathématiques-Informatique – France



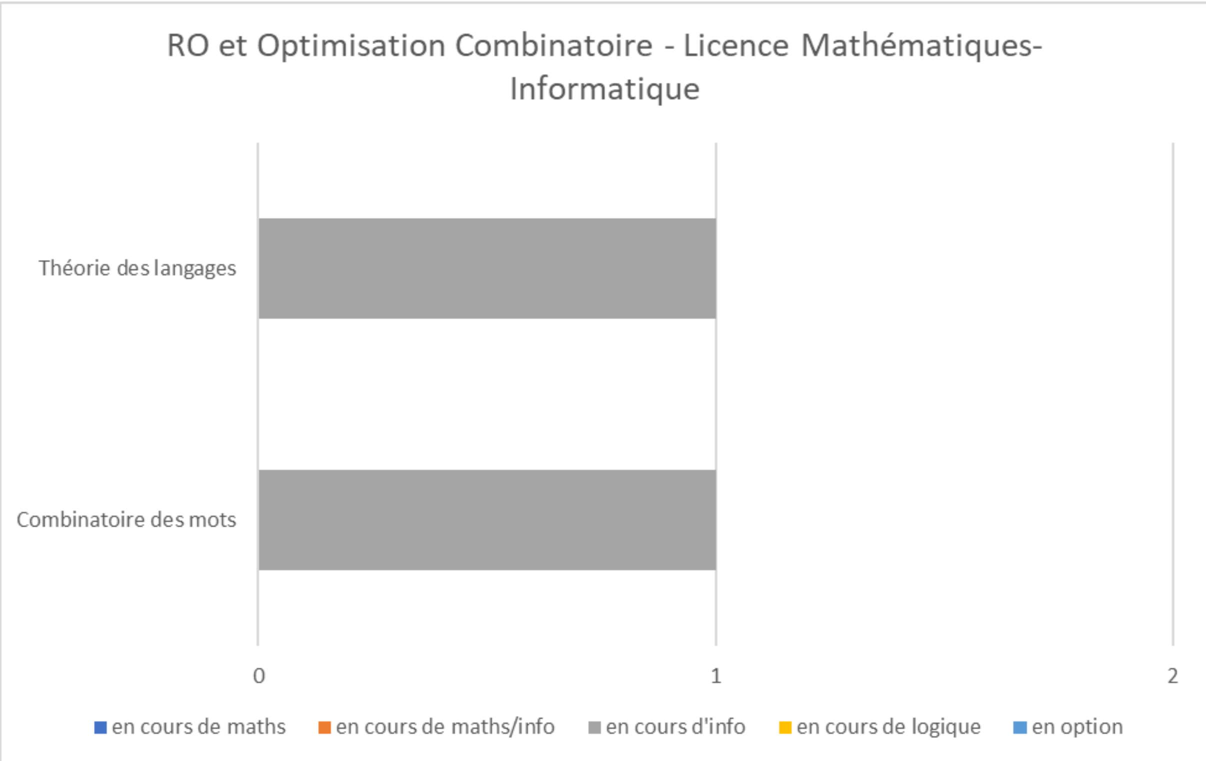
Annexe-Figure 41: Généralités - Licence Mathématiques-Informatique – France



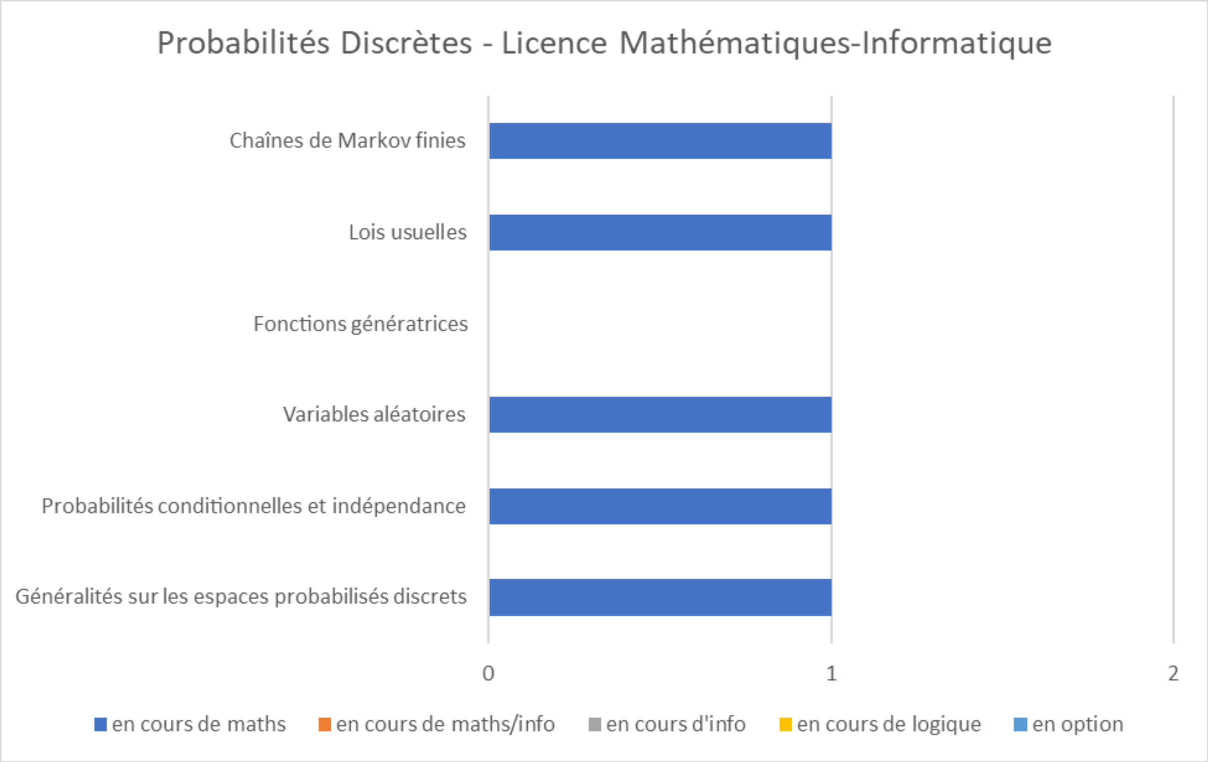
Annexe-Figure 42: Algorithmique - Licence Mathématiques-Informatique – France



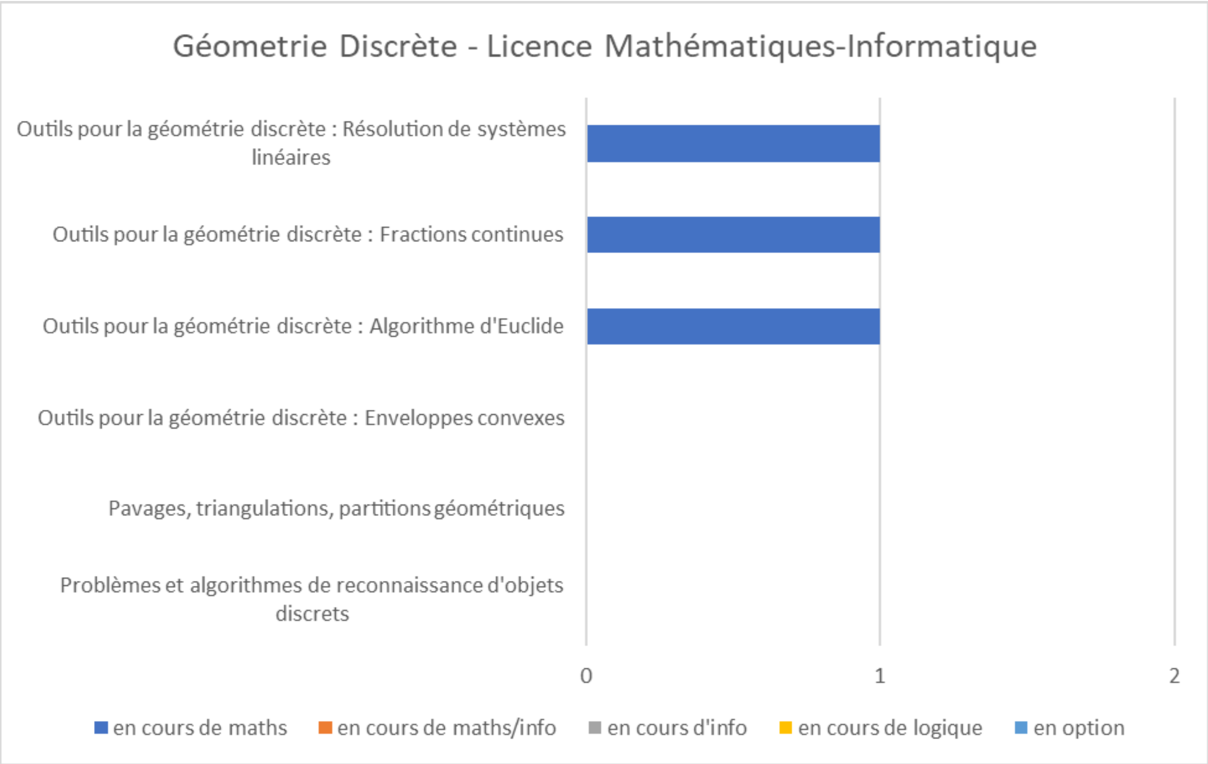
Annexe-Figure 43: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques-Informatique – France



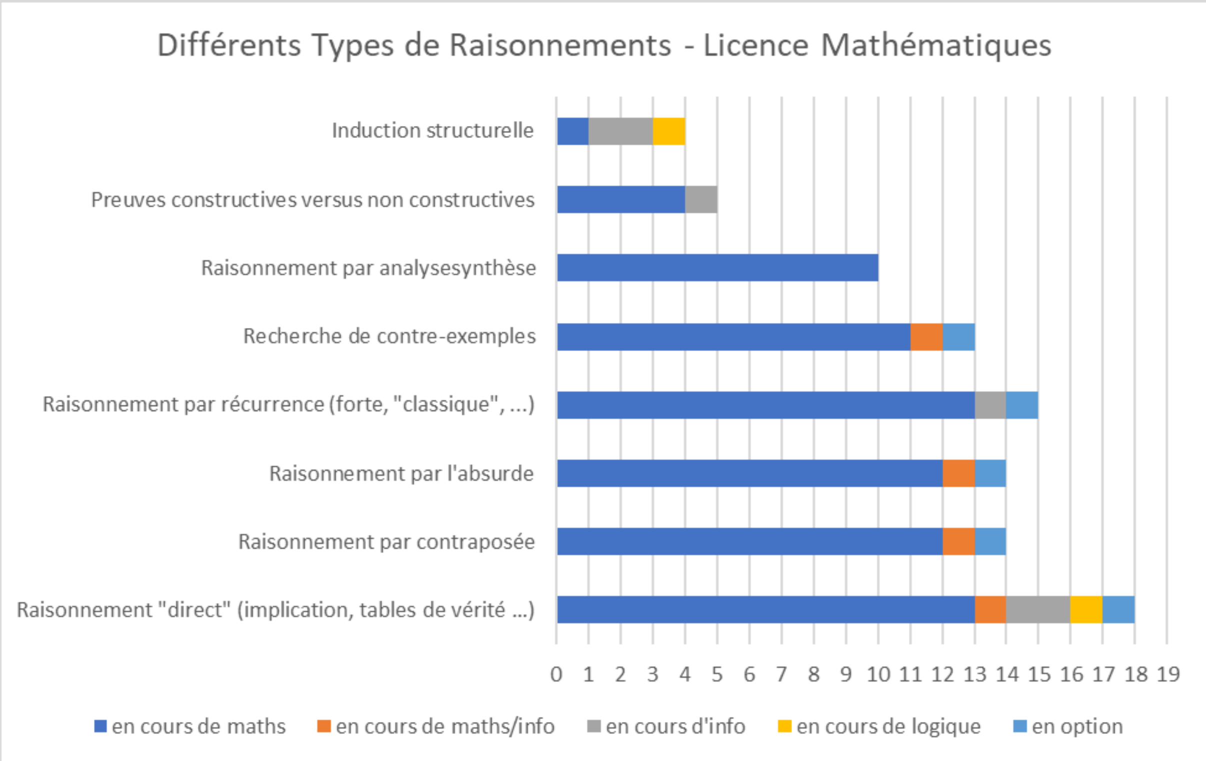
Annexe-Figure 44: RO et Optimisation Combinatoire - Licence Mathématiques-Informatique – France



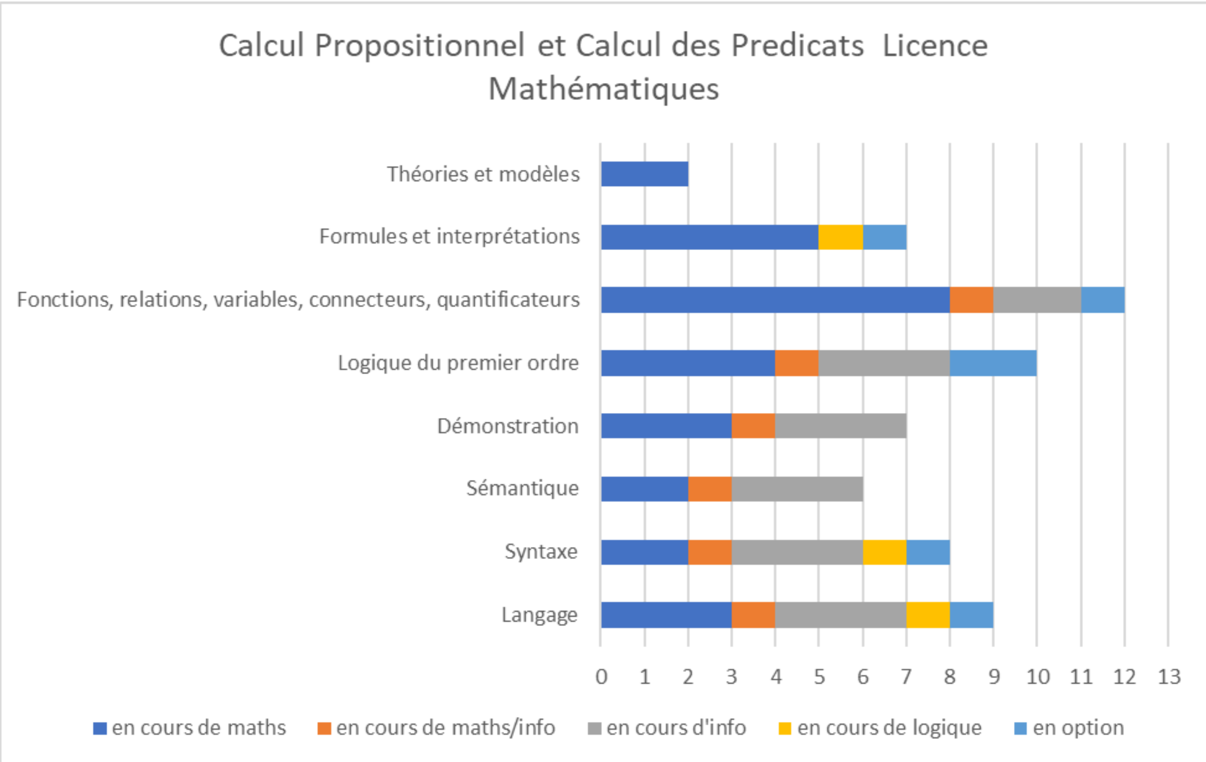
Annexe-Figure 45: Probabilités Discrètes - Licence Mathématiques-Informatique – France



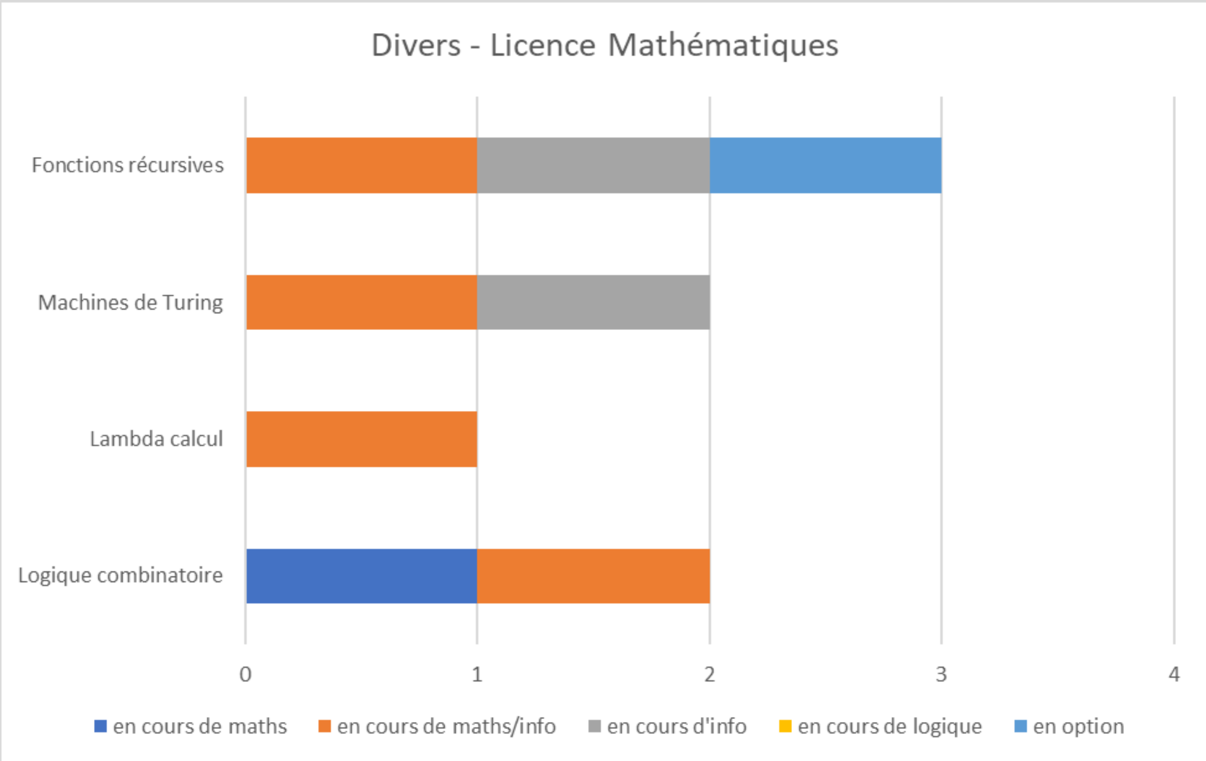
Annexe-Figure 46: Géometrie Discrète - Licence Mathématiques-Informatique - France



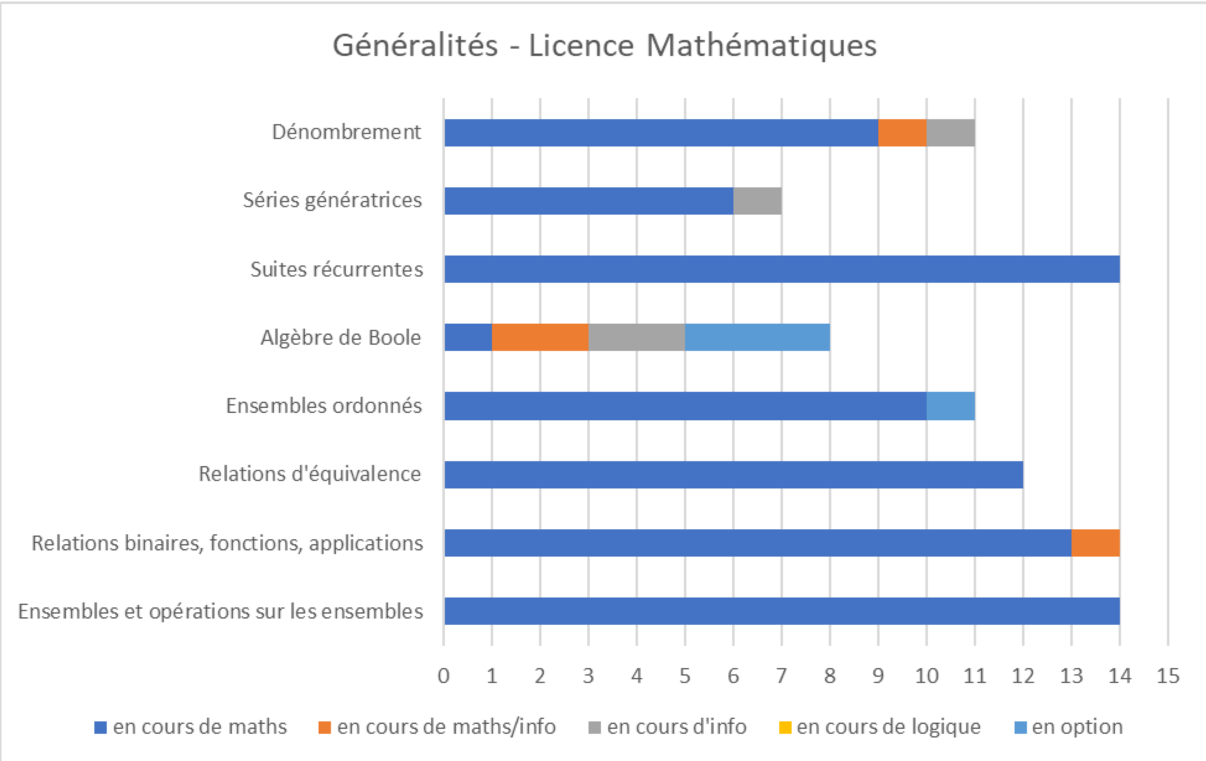
Annexe-Figure 47: Différents Types de Raisonnements - Licence Mathématiques – France



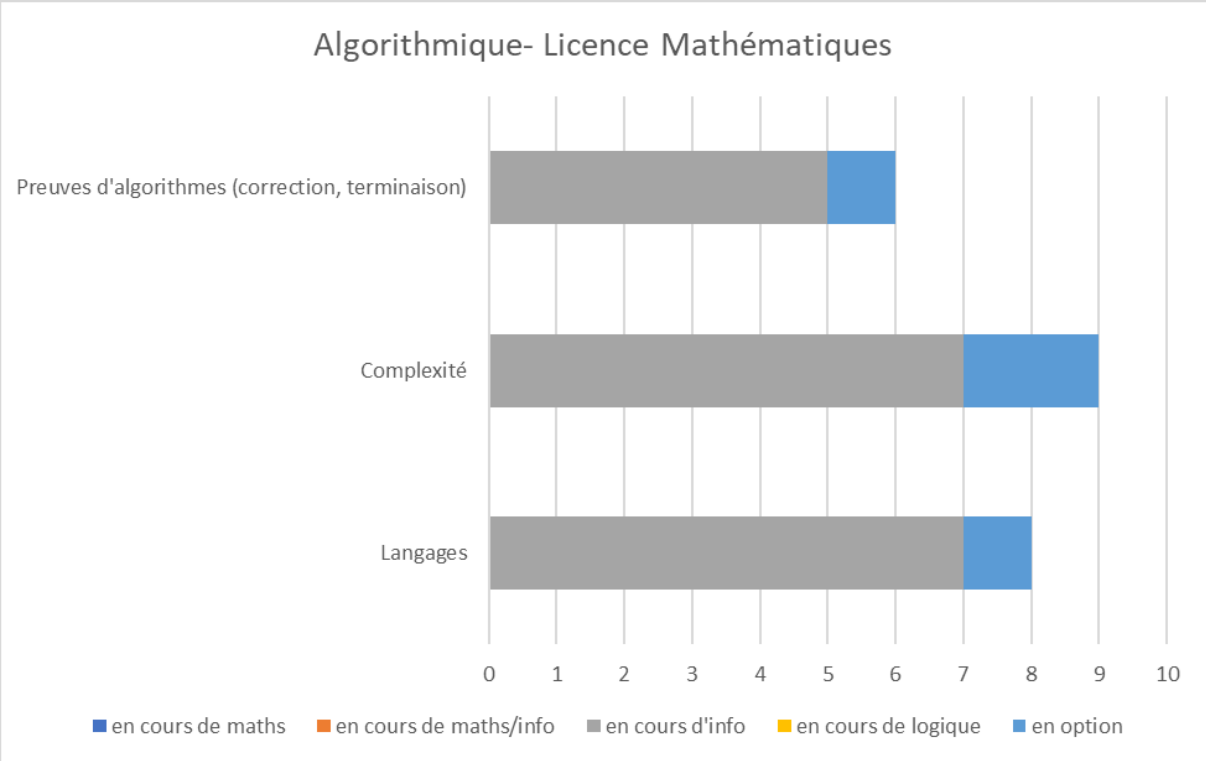
Annexe-Figure 48: Calcul Propositionnel et Calcul des Prédicats Licence Mathématiques – France



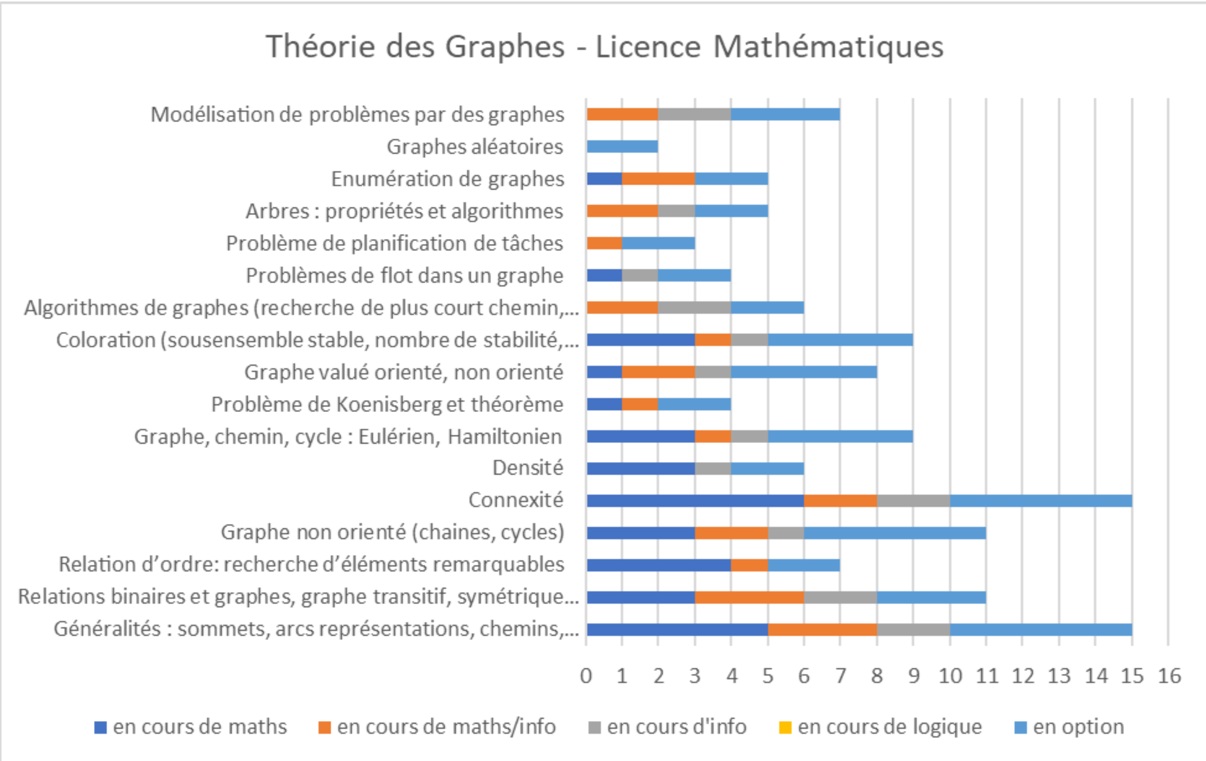
Annexe-Figure 49: Divers - Licence Mathématiques – France



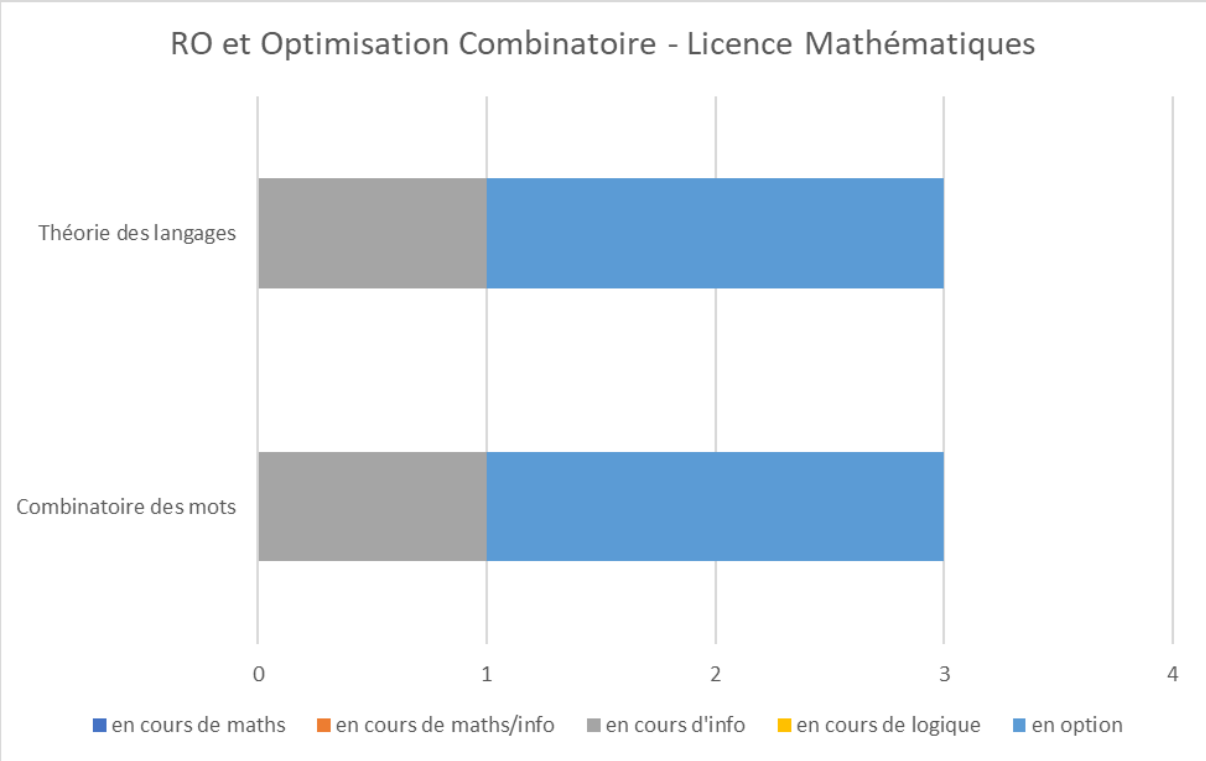
Annexe-Figure 50: Généralités - Licence Mathématiques – France



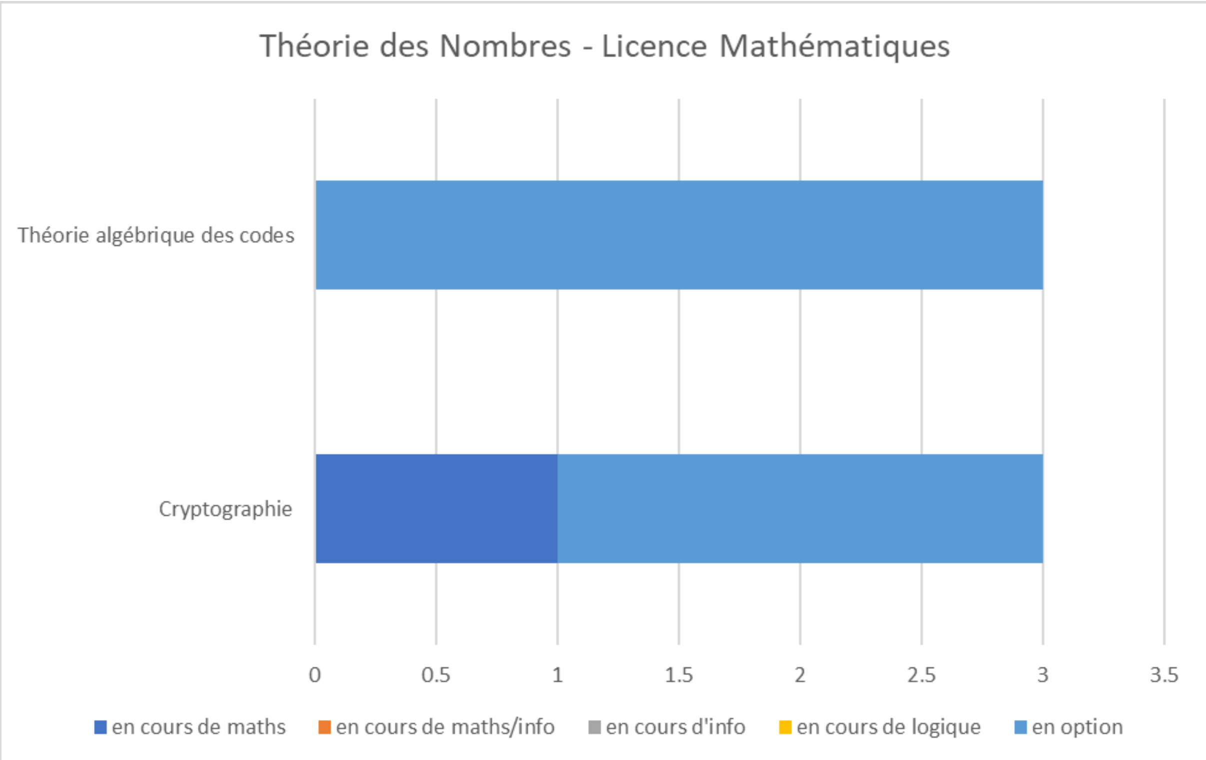
Annexe-Figure 51: Algorithmique- Licence Mathématiques – France



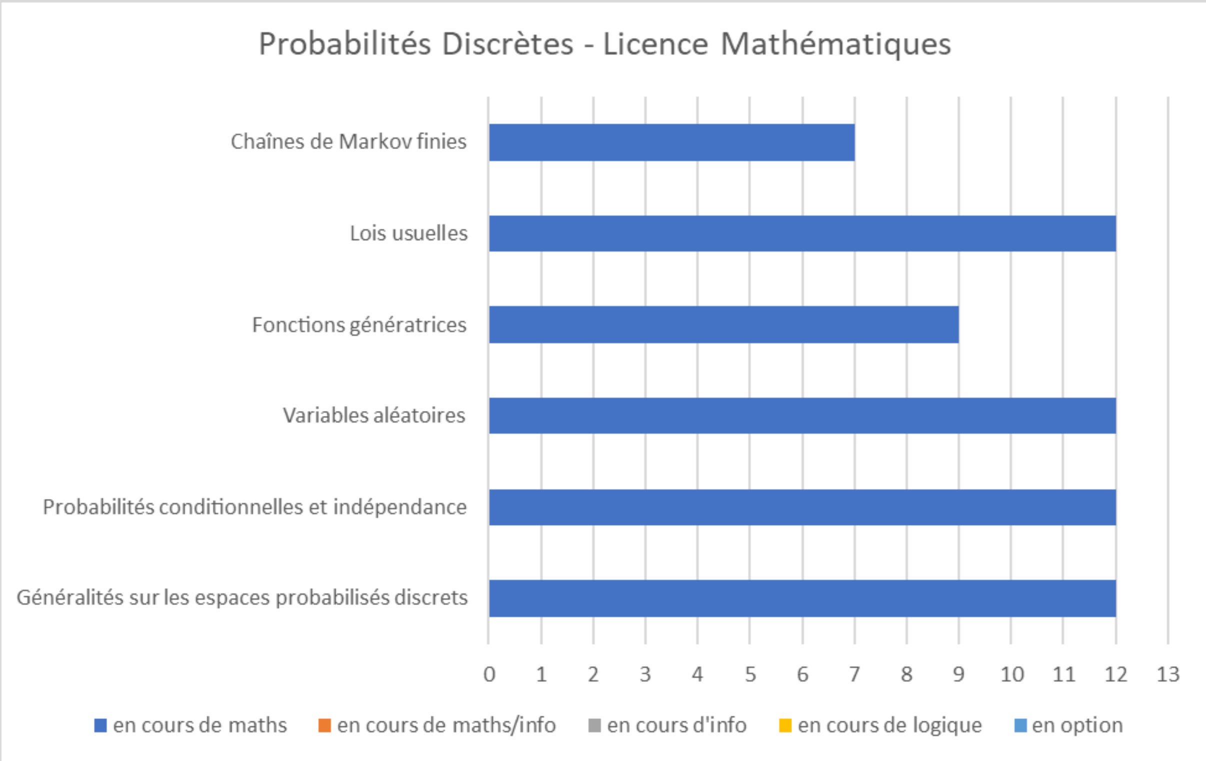
Annexe-Figure 52: Théorie des Graphes - Licence Mathématiques – France



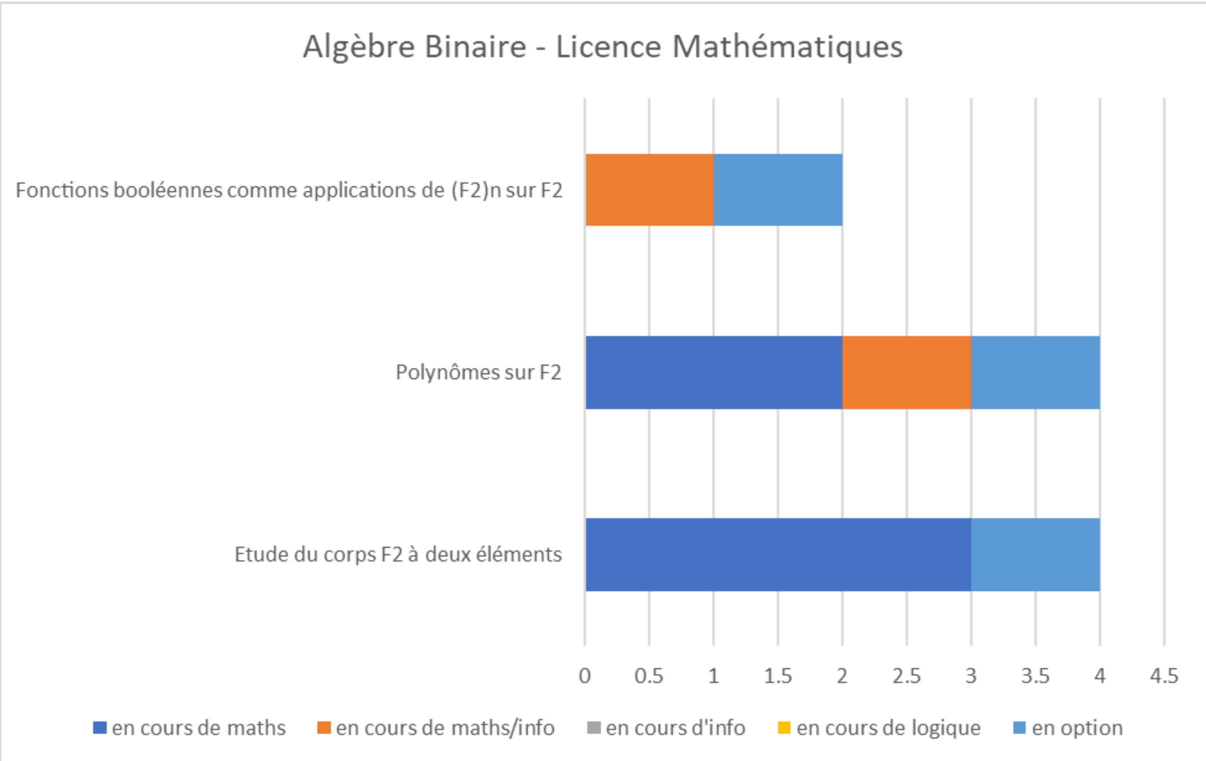
Annexe-Figure 53: RO et Optimisation Combinatoire - Licence Mathématiques – France



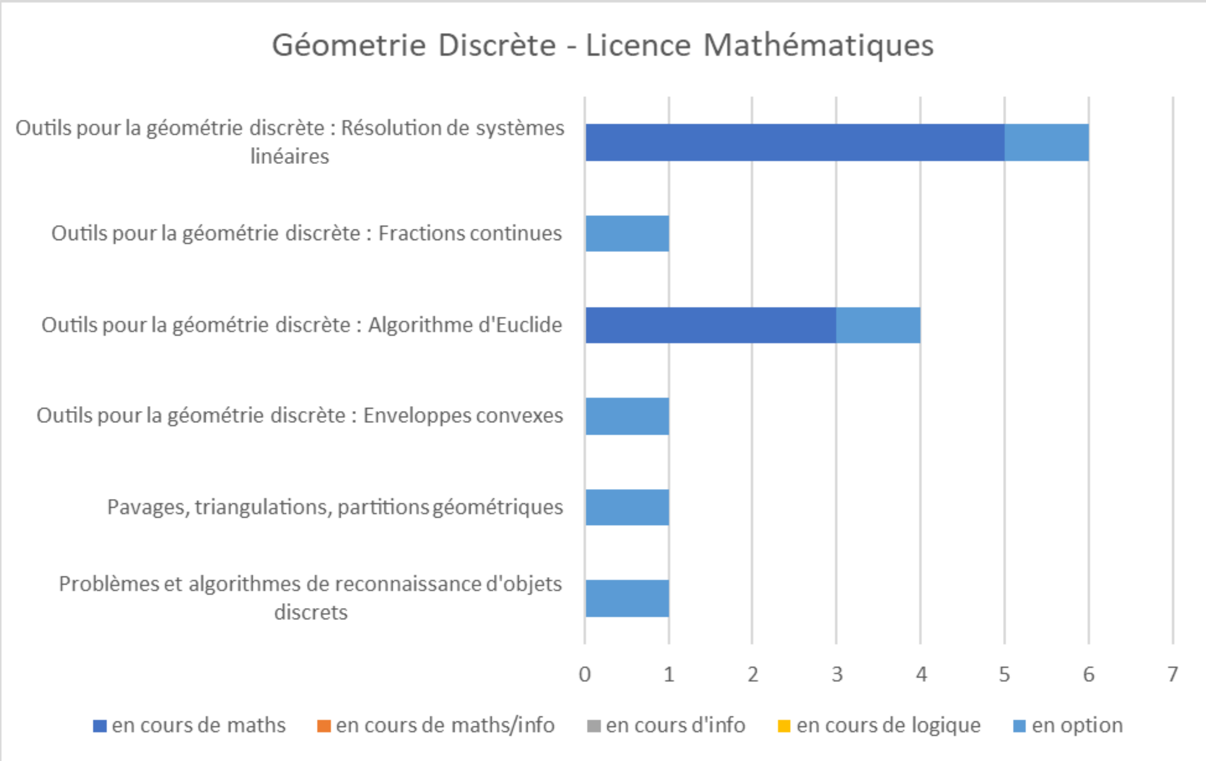
Annexe-Figure 54: Théorie des Nombres - Licence Mathématiques – France



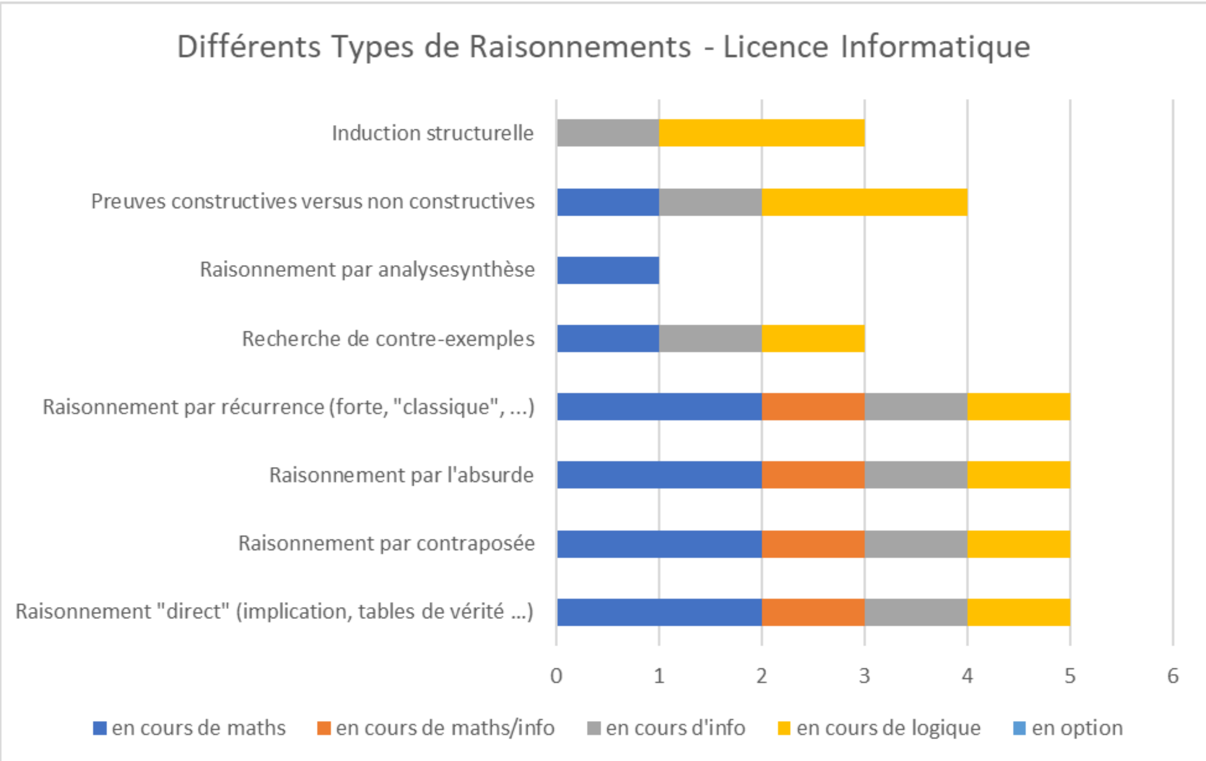
Annexe-Figure 55: Probabilités Discrètes - Licence Mathématiques – France



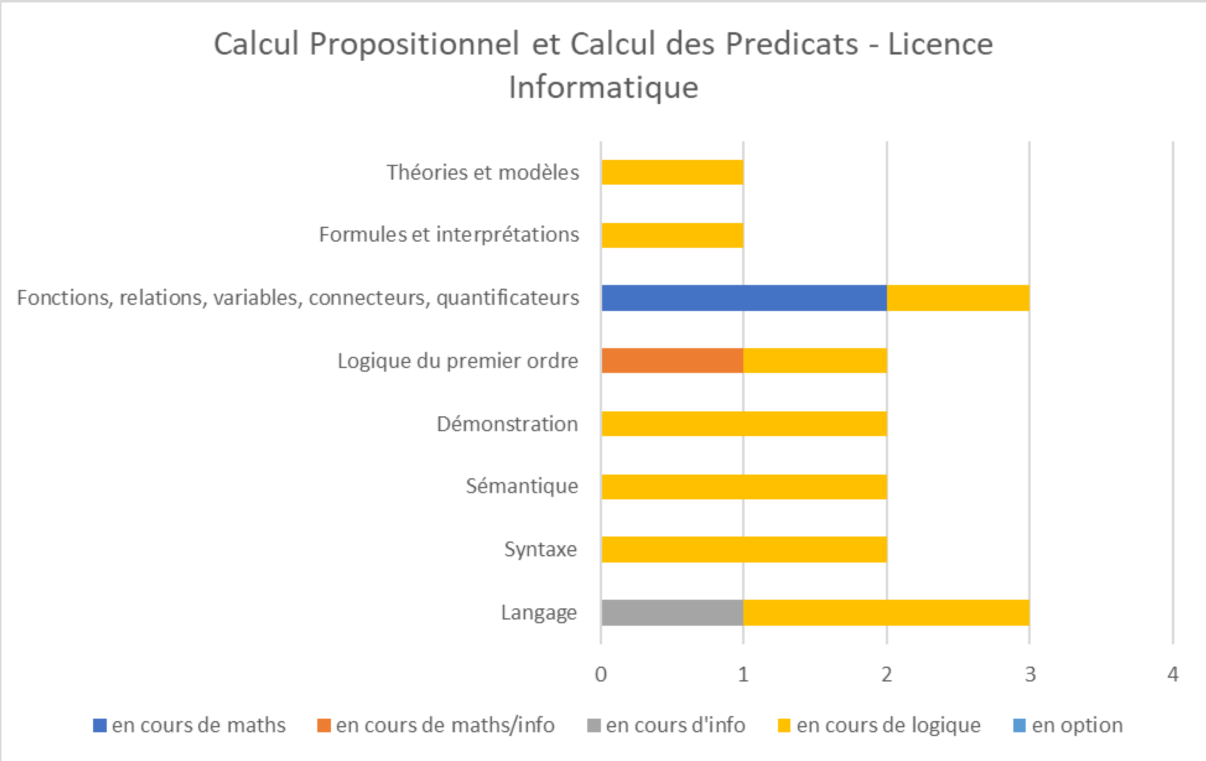
Annexe-Figure 56: Algèbre Binaire - Licence Mathématiques – France



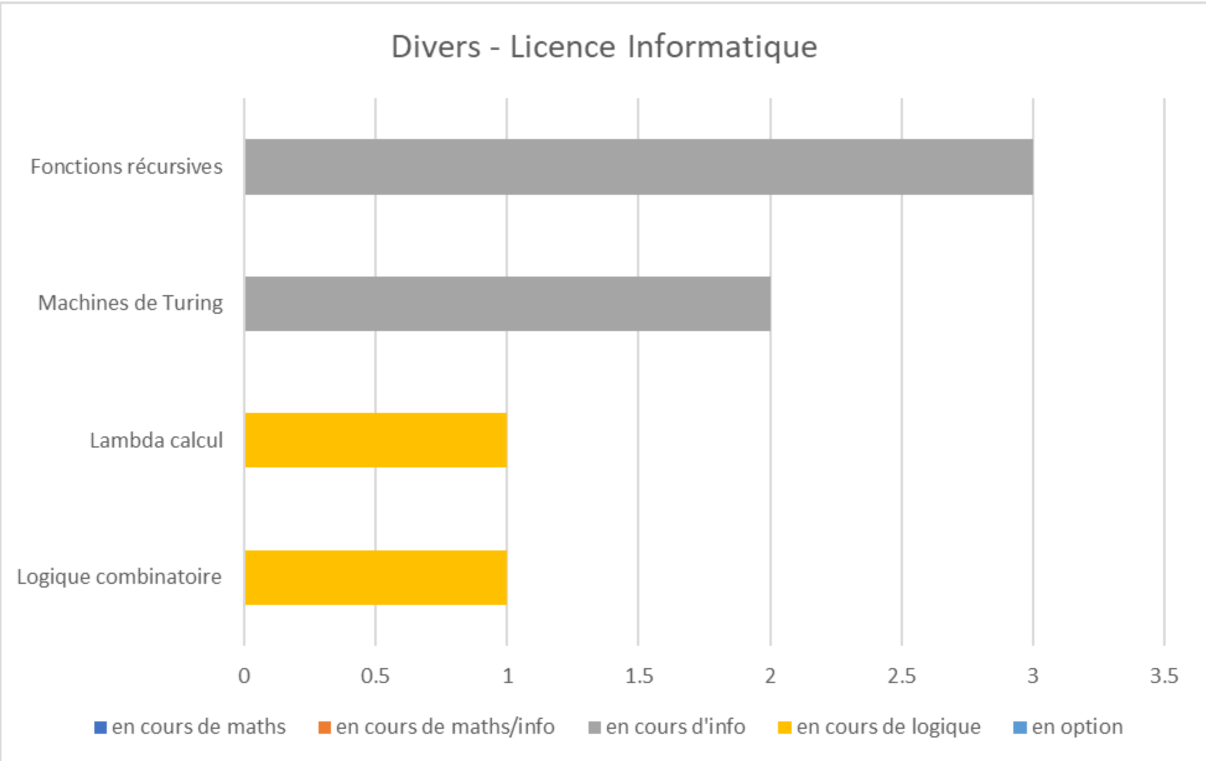
Annexe-Figure 57: Géométrie Discrète - Licence Mathématiques – France



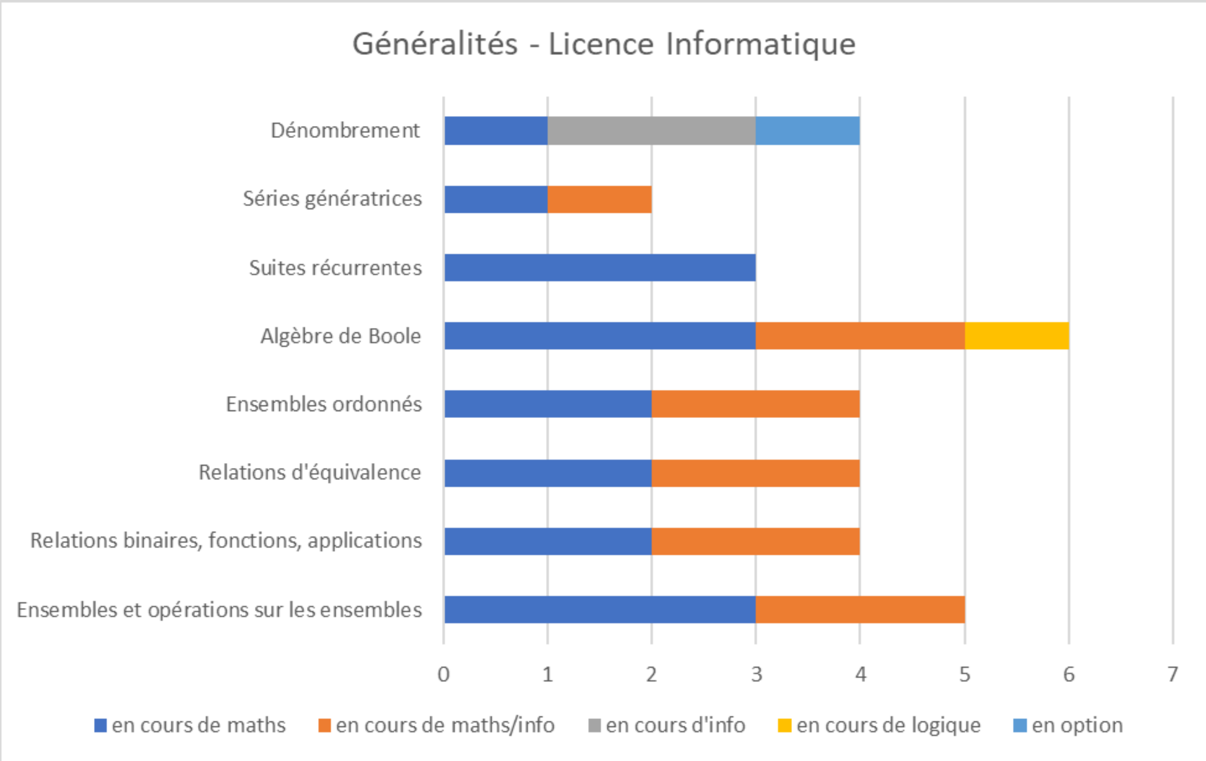
Annexe-Figure 58: Différents Types de Raisonnements - Licence Informatique – France



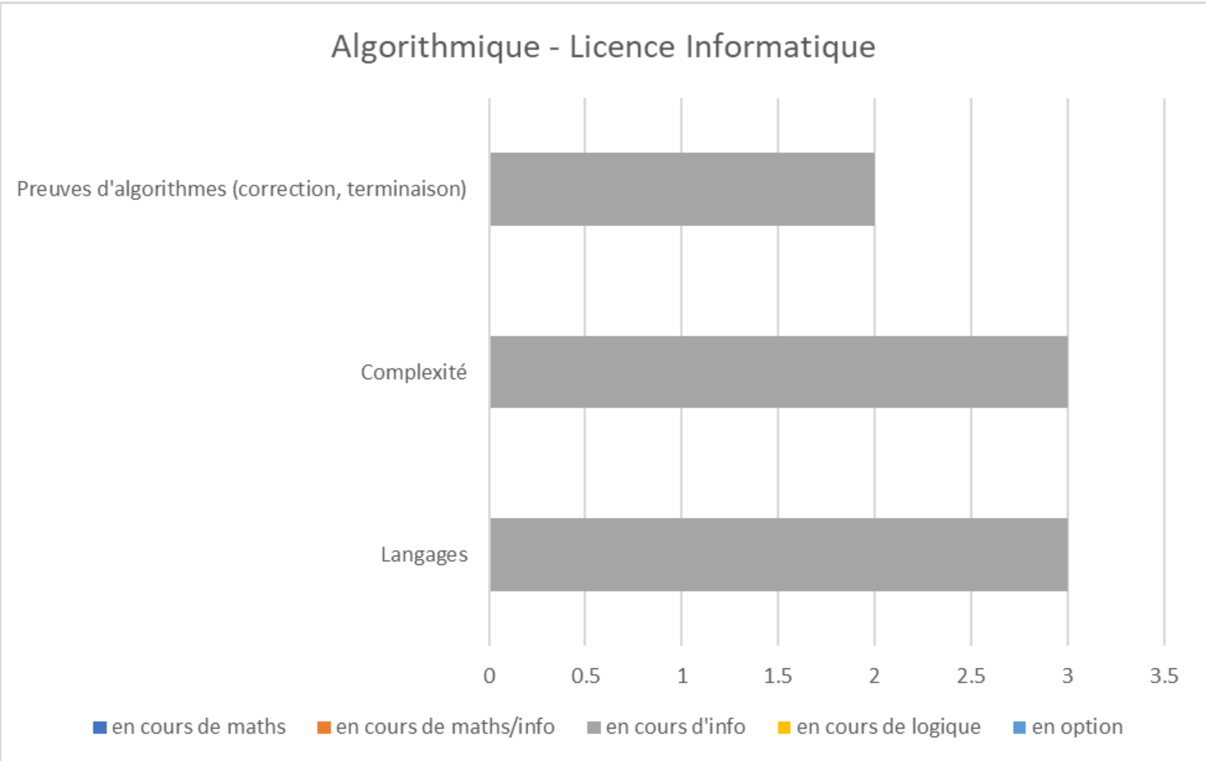
Annexe-Figure 59: Calcul Propositionnel et Calcul des Prédicats - Licence Informatique – France



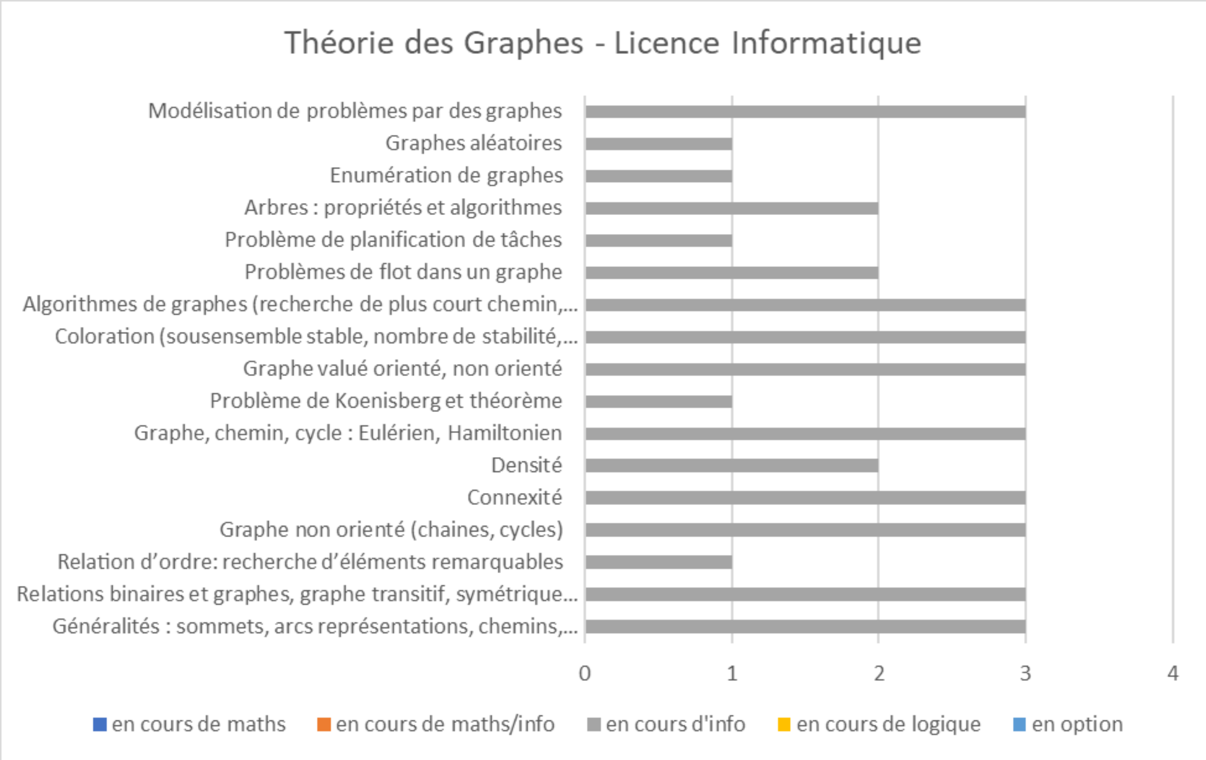
Annexe-Figure 60: Divers - Licence Informatique – France



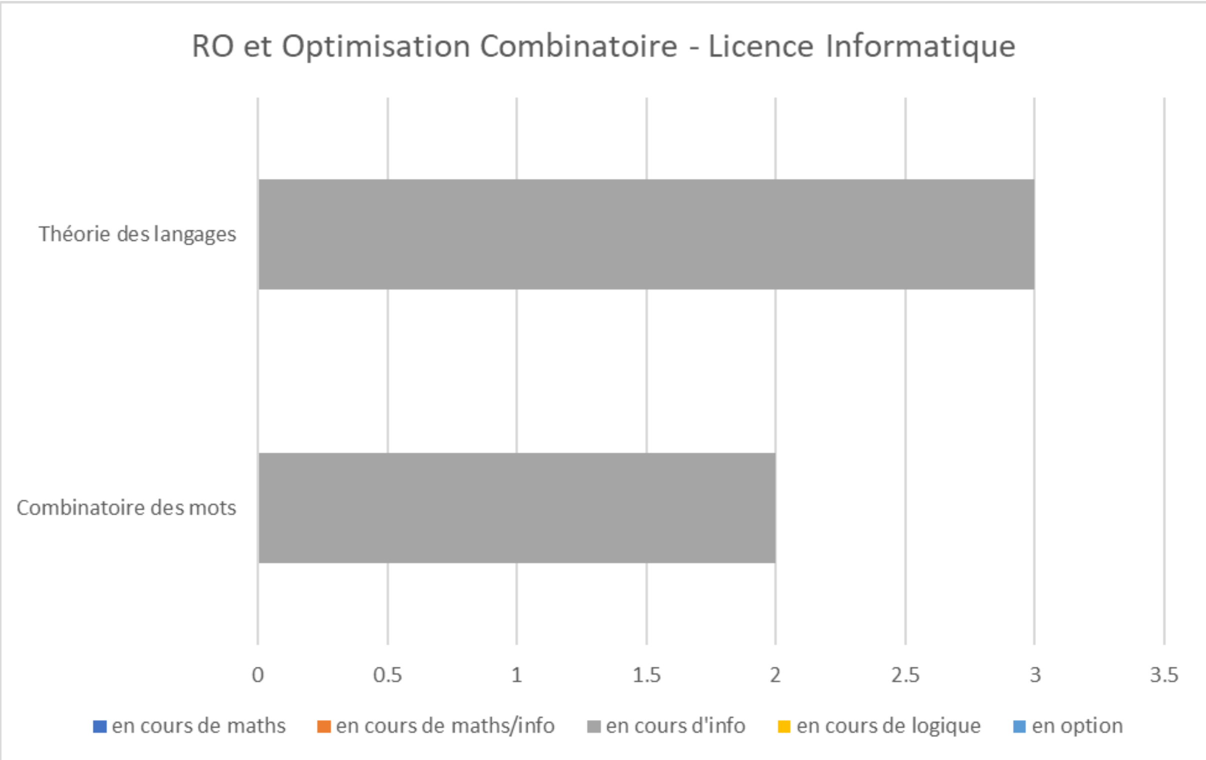
Annexe-Figure 61: Généralités - Licence Informatique – France



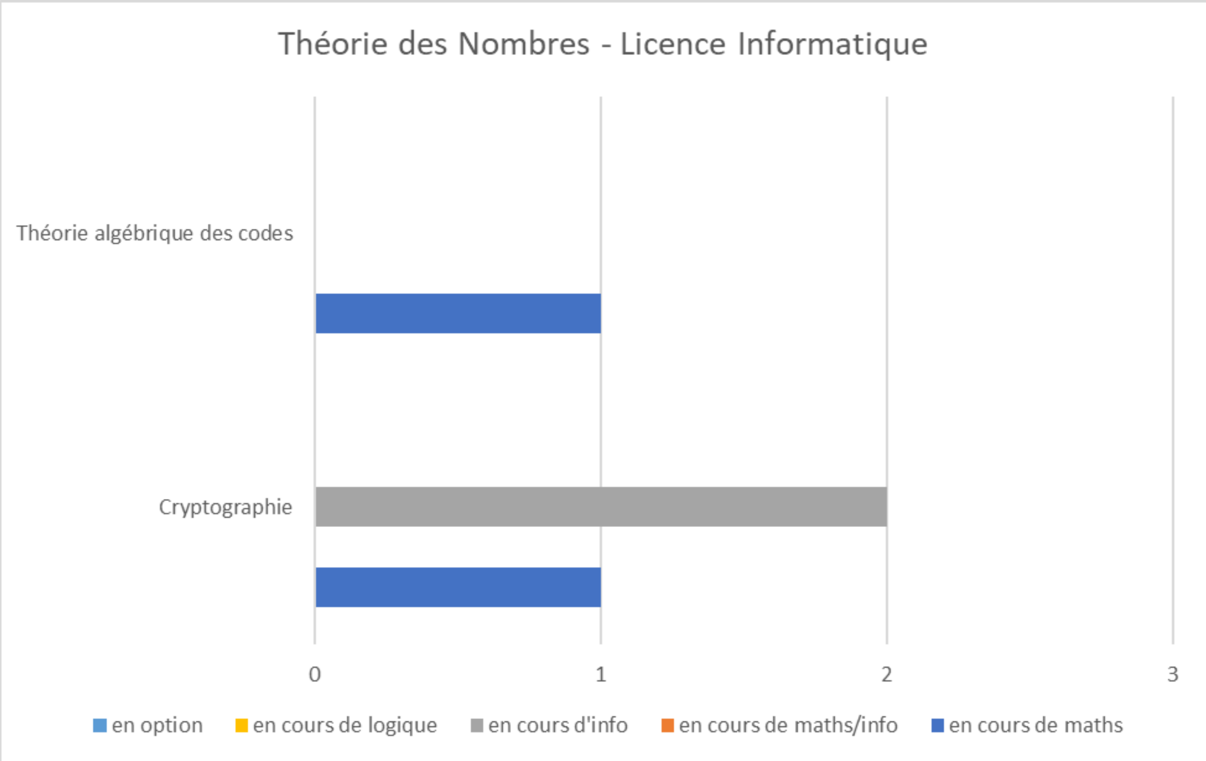
Annexe-Figure 62: Algorithmique - Licence Informatique – France



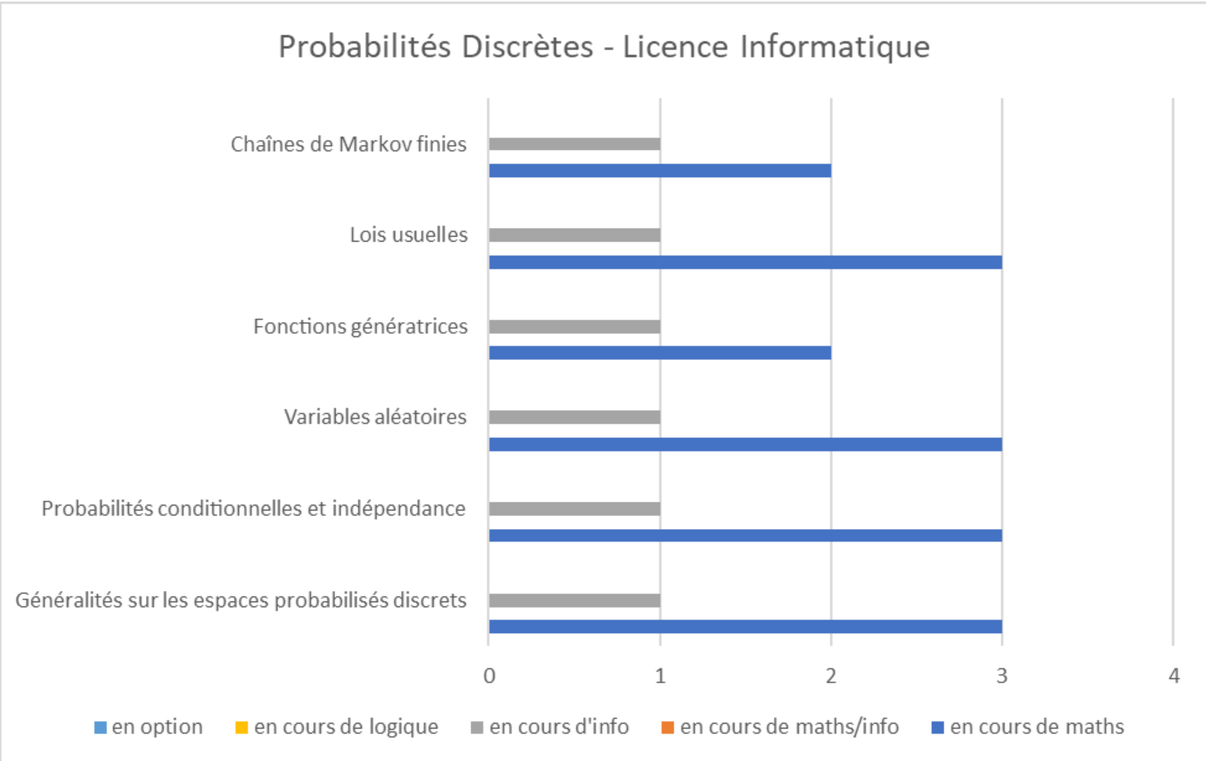
Annexe-Figure 63: Théorie des Graphes - Licence Informatique – France



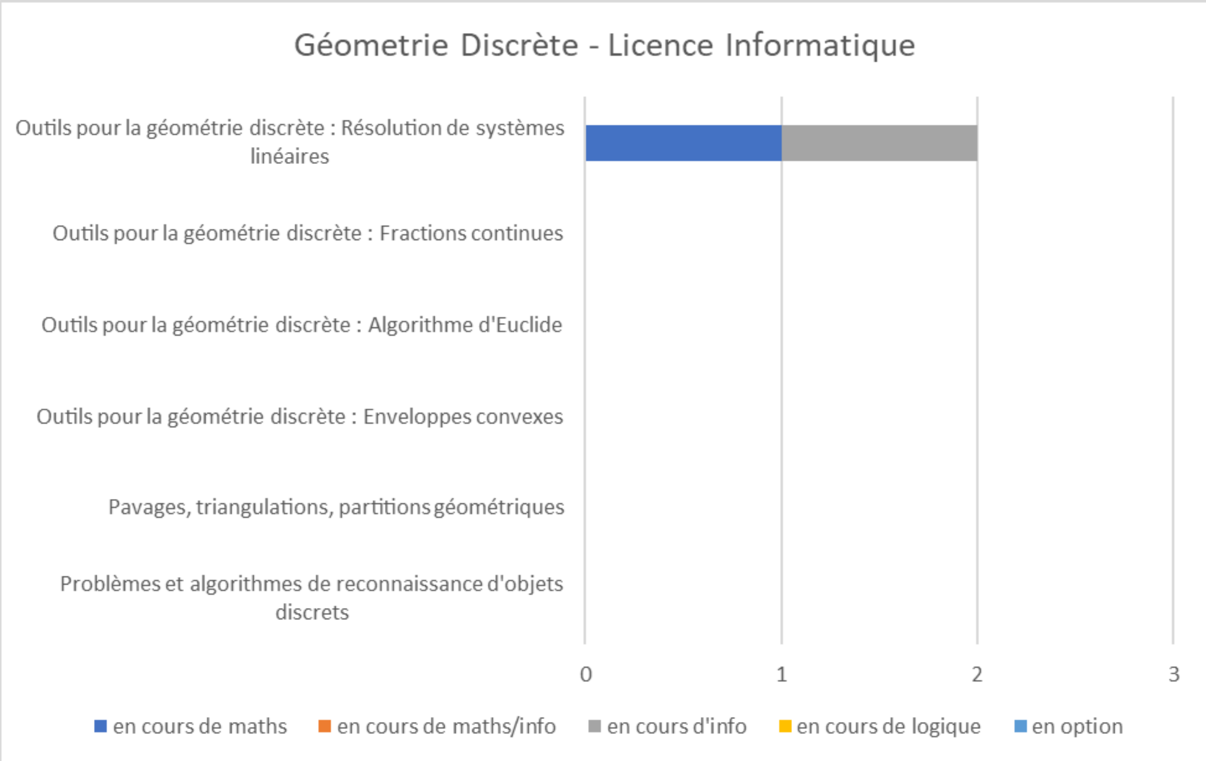
Annexe-Figure 64: RO et Optimisation Combinatoire - Licence Informatique – France



Annexe-Figure 65: Théorie des Nombres - Licence Informatique – France

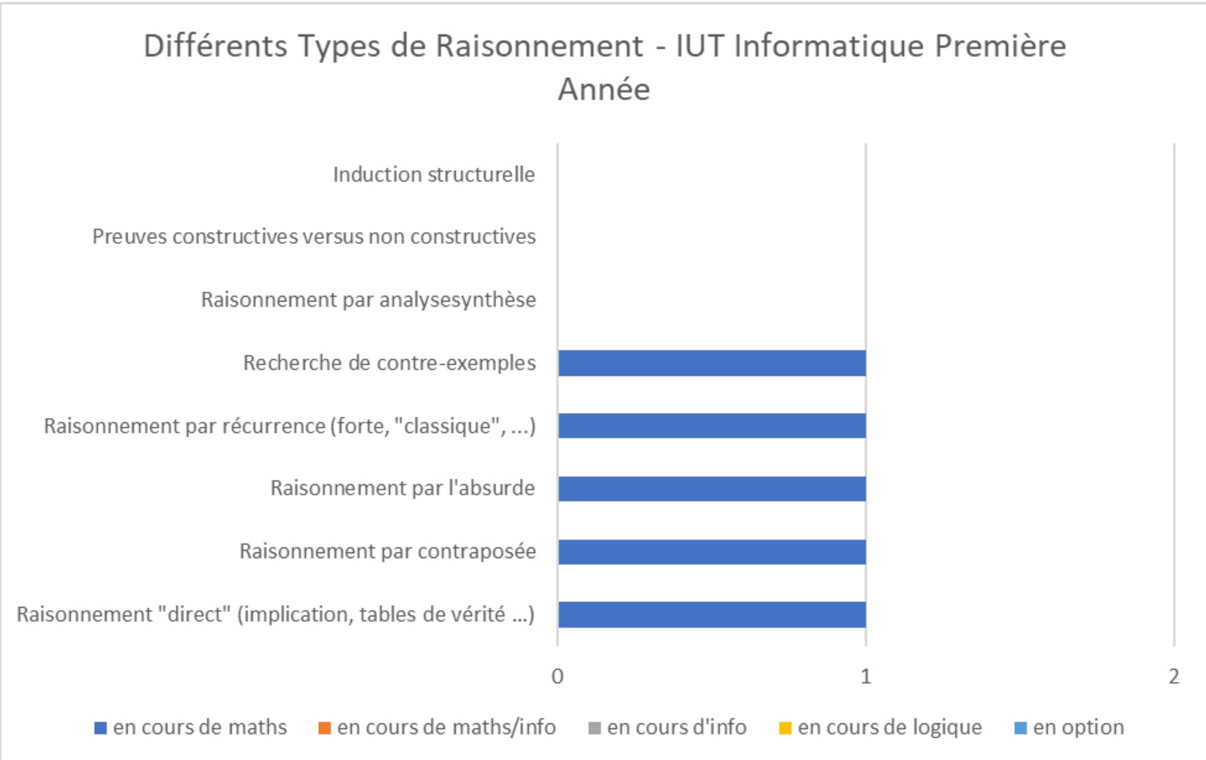


Annexe-Figure 66: Probabilités Discrètes - Licence Informatique – France

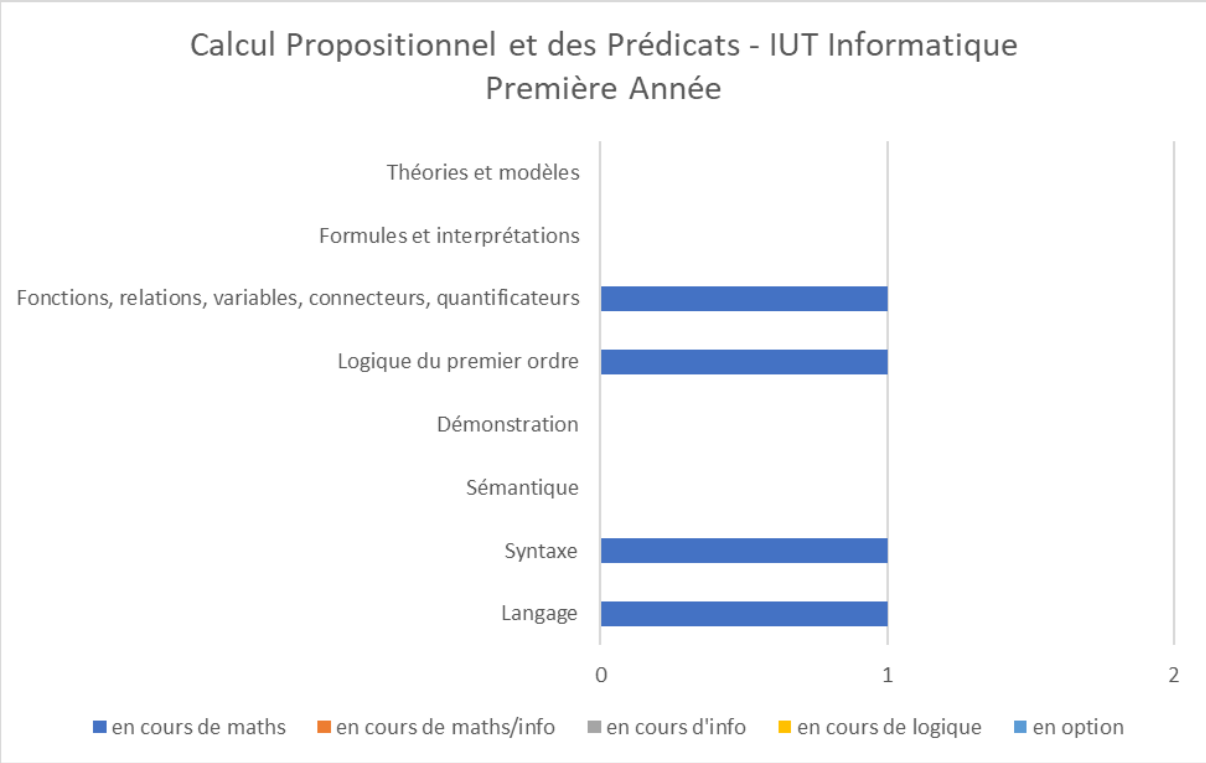


Annexe-Figure 67: Géométrie Discrète - Licence Informatique - France

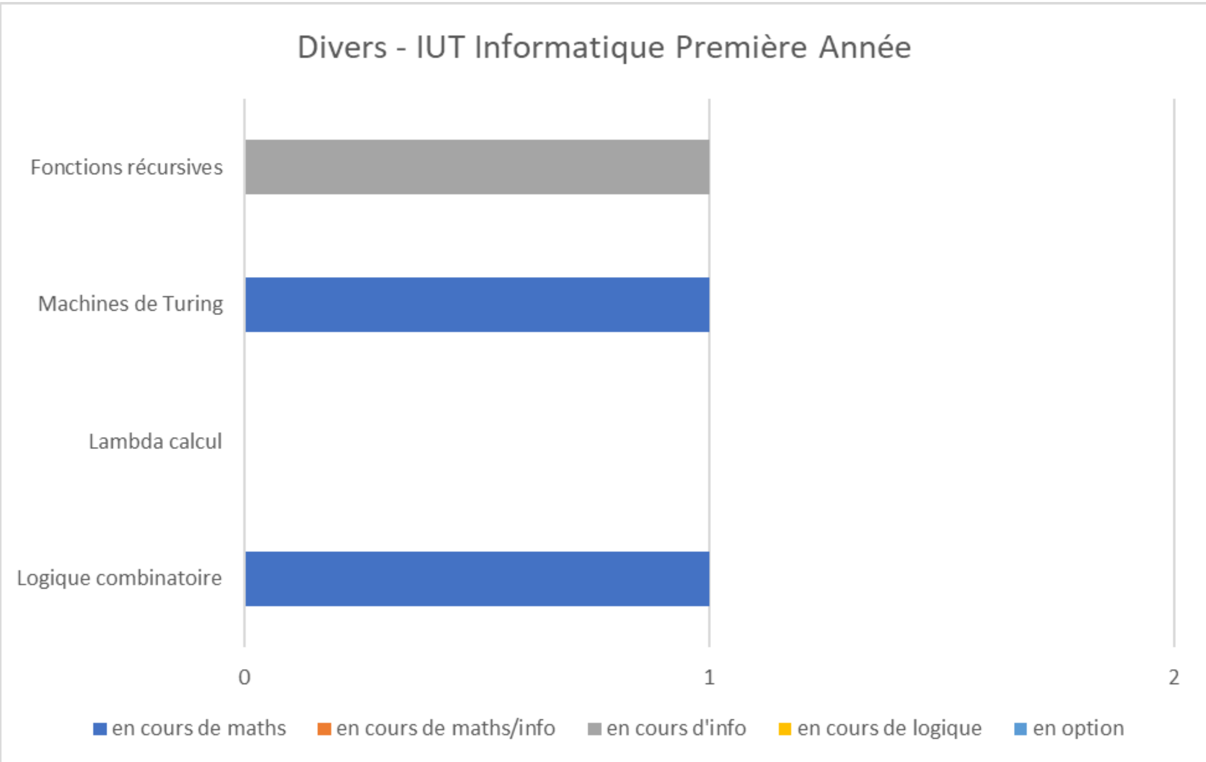
D2. 2. IUT



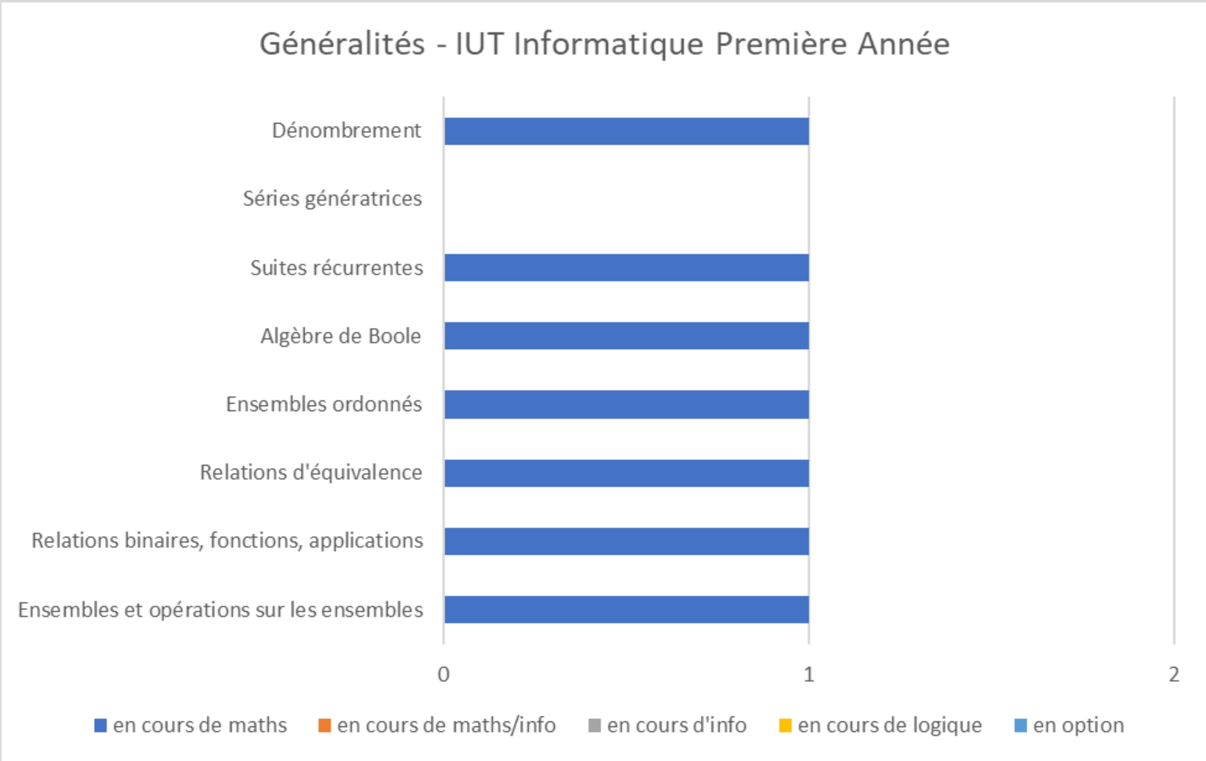
Annexe-Figure 68: Différents Types de Raisonnement - IUT Informatique Première Année – France



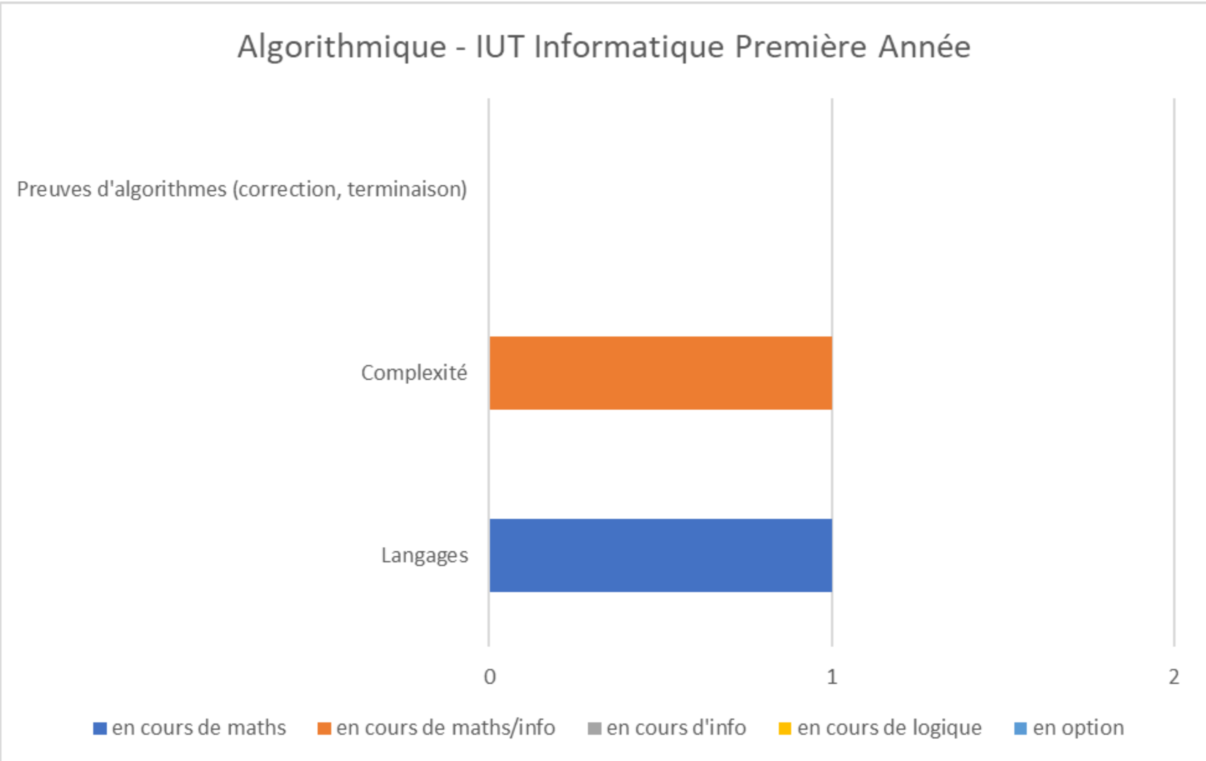
Annexe-Figure 69: Calcul Propositionnel et des Prédicats - IUT Informatique Première Année – France



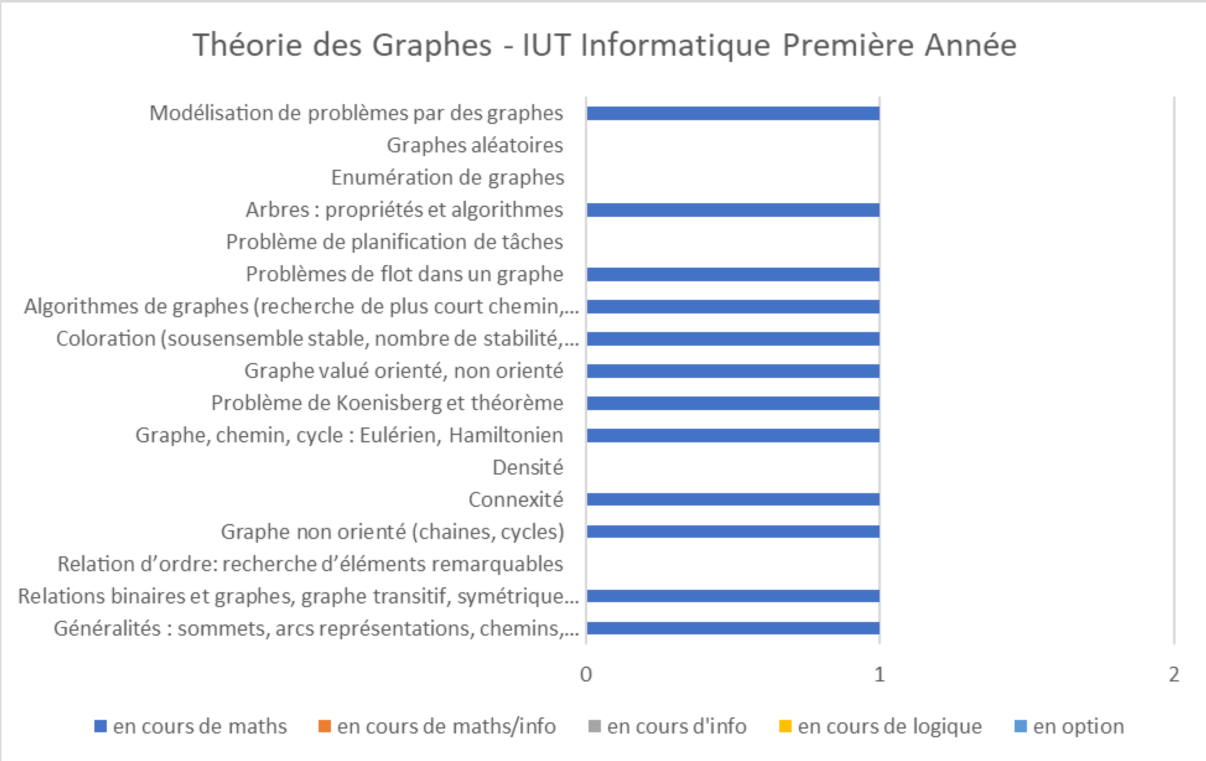
Annexe-Figure 70: Divers - IUT Informatique Première Année - France



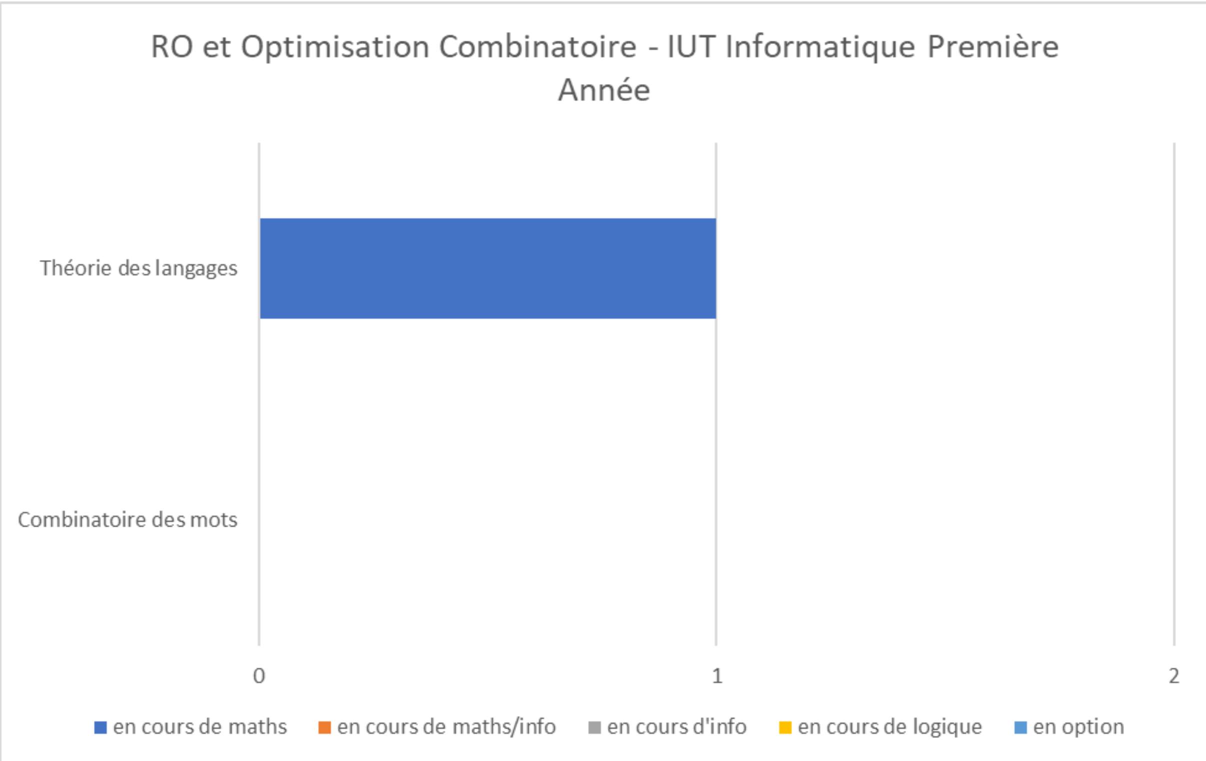
Annexe-Figure 71: Généralités - IUT Informatique Première Année – France



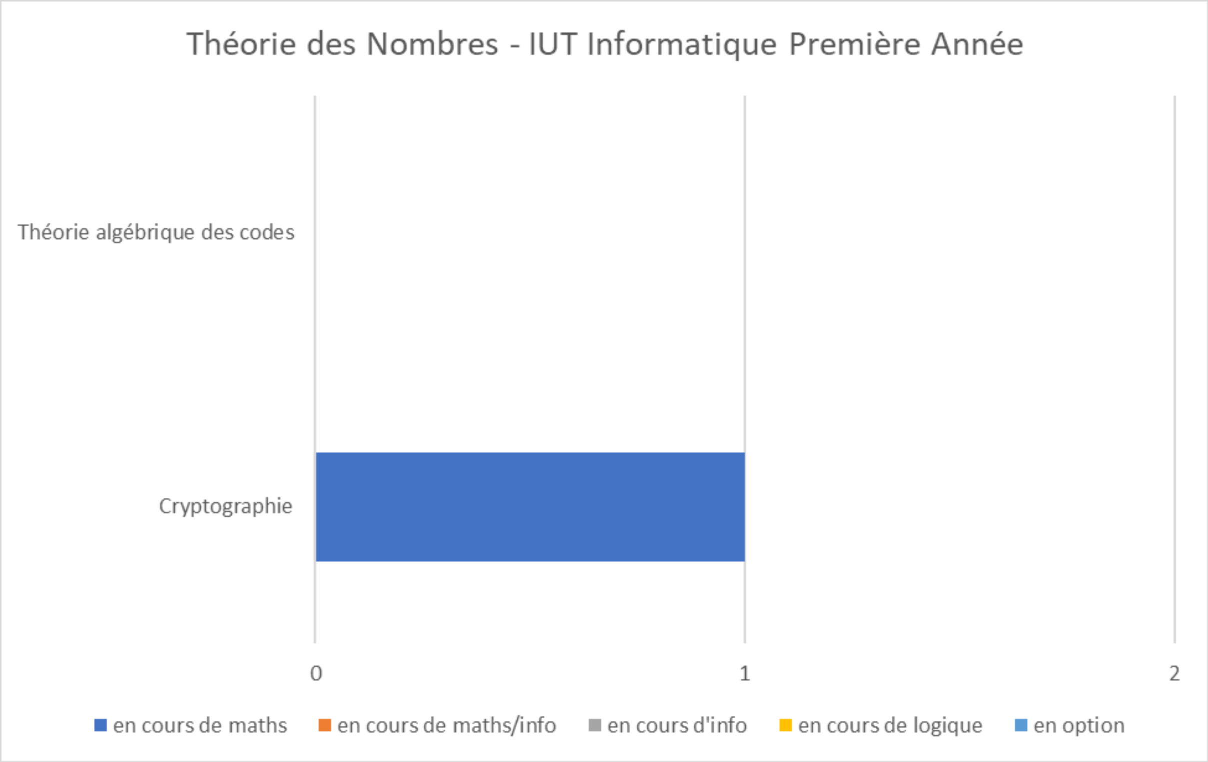
Annexe-Figure 72: Algorithmique - IUT Informatique Première Année – France



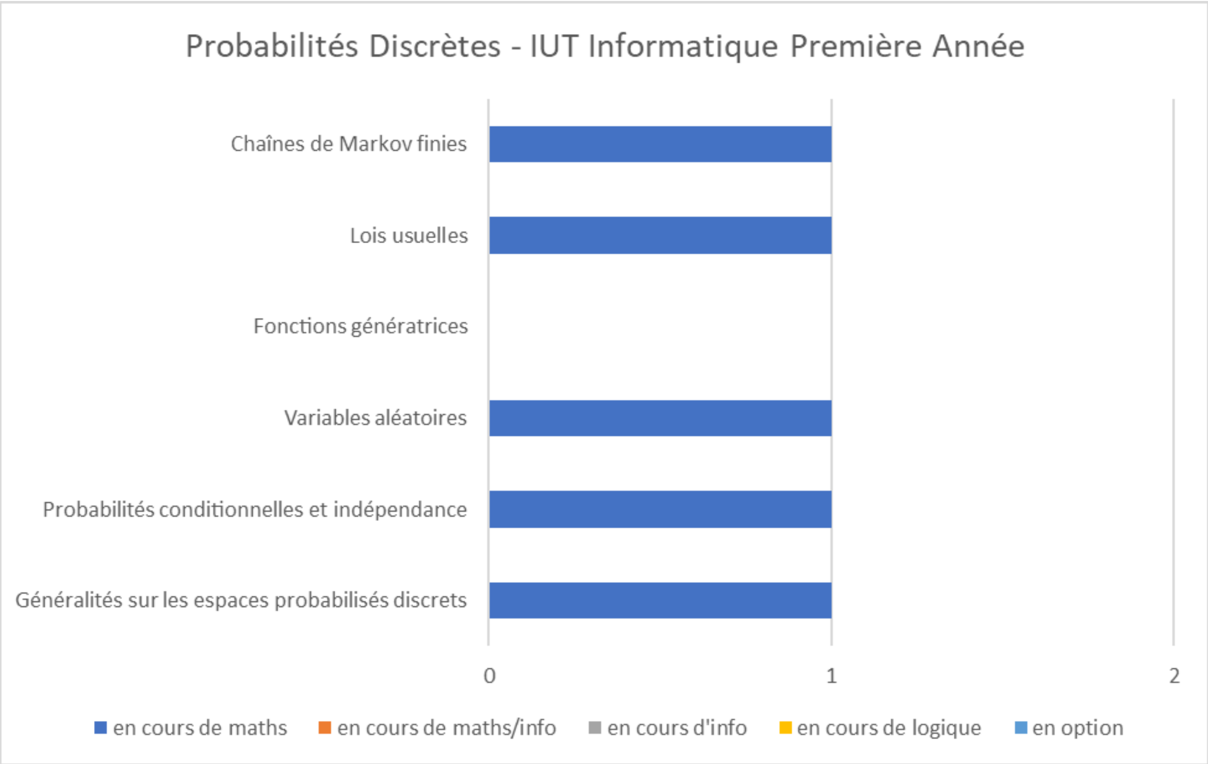
Annexe-Figure 73: Théorie des Graphes - IUT Informatique Première Année – France



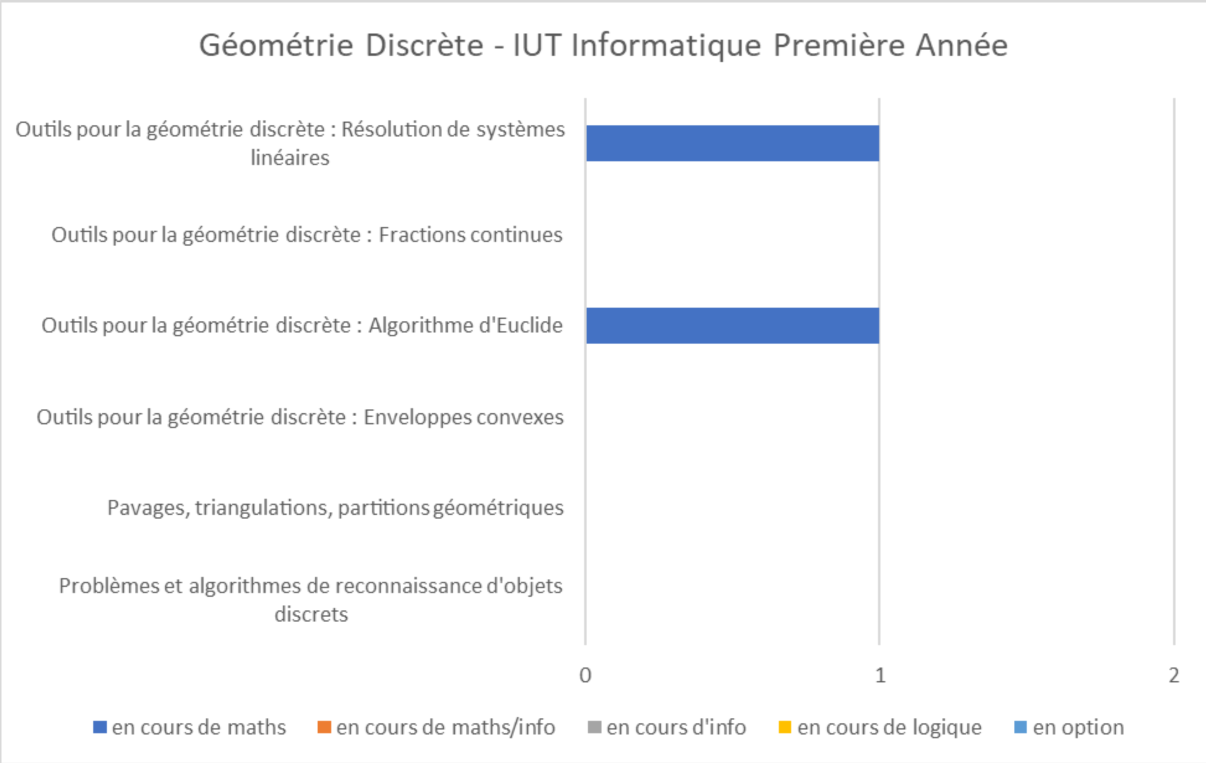
Annexe-Figure 74: RO et Optimisation Combinatoire - IUT Informatique Première Année – France



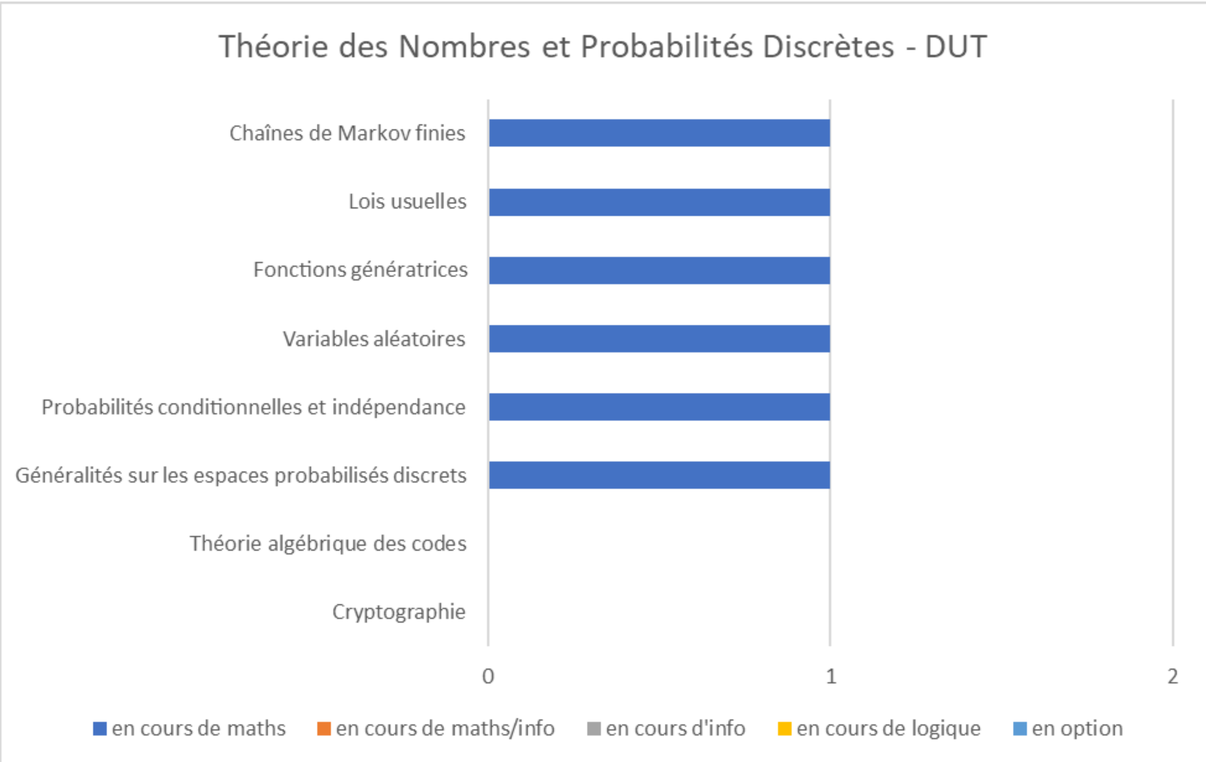
Annexe-Figure 75: Théorie des Nombres - IUT Informatique Première Année – France



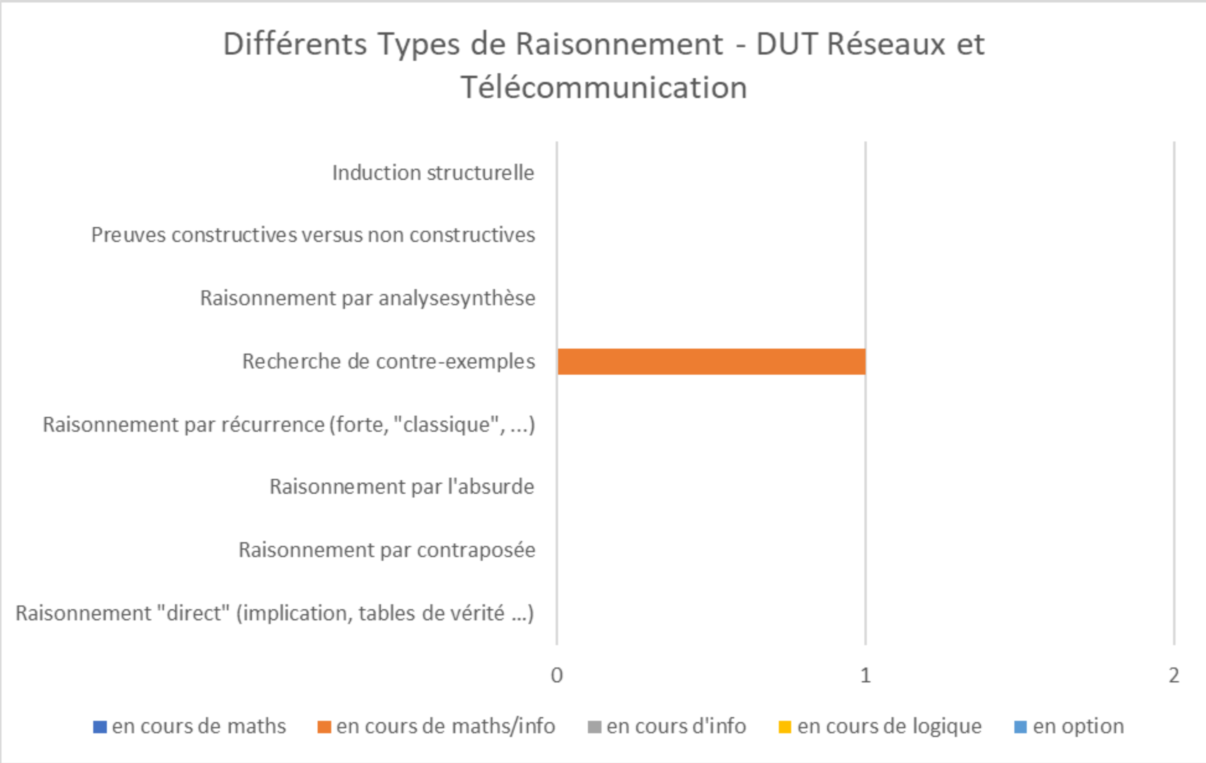
Annexe-Figure 76: Probabilités Discrètes - IUT Informatique Première Année – France



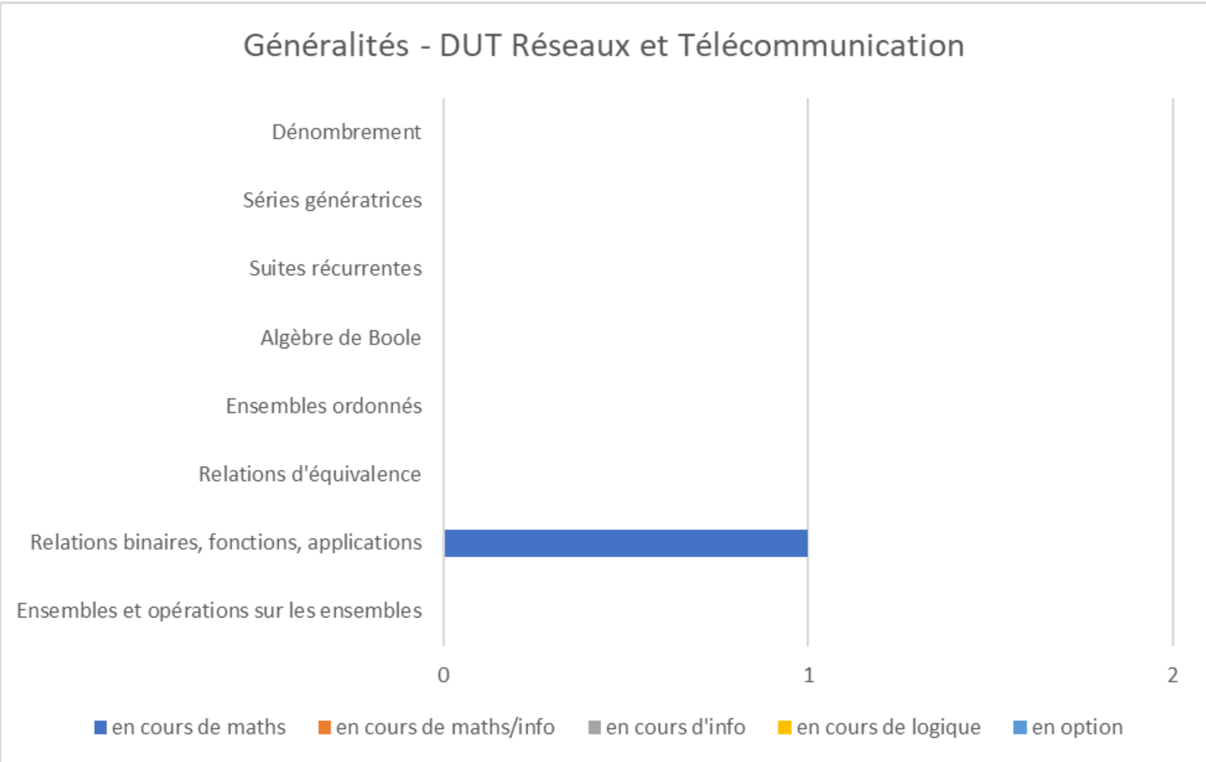
Annexe-Figure 77: Géométrie Discrète - IUT Informatique Première Année – France



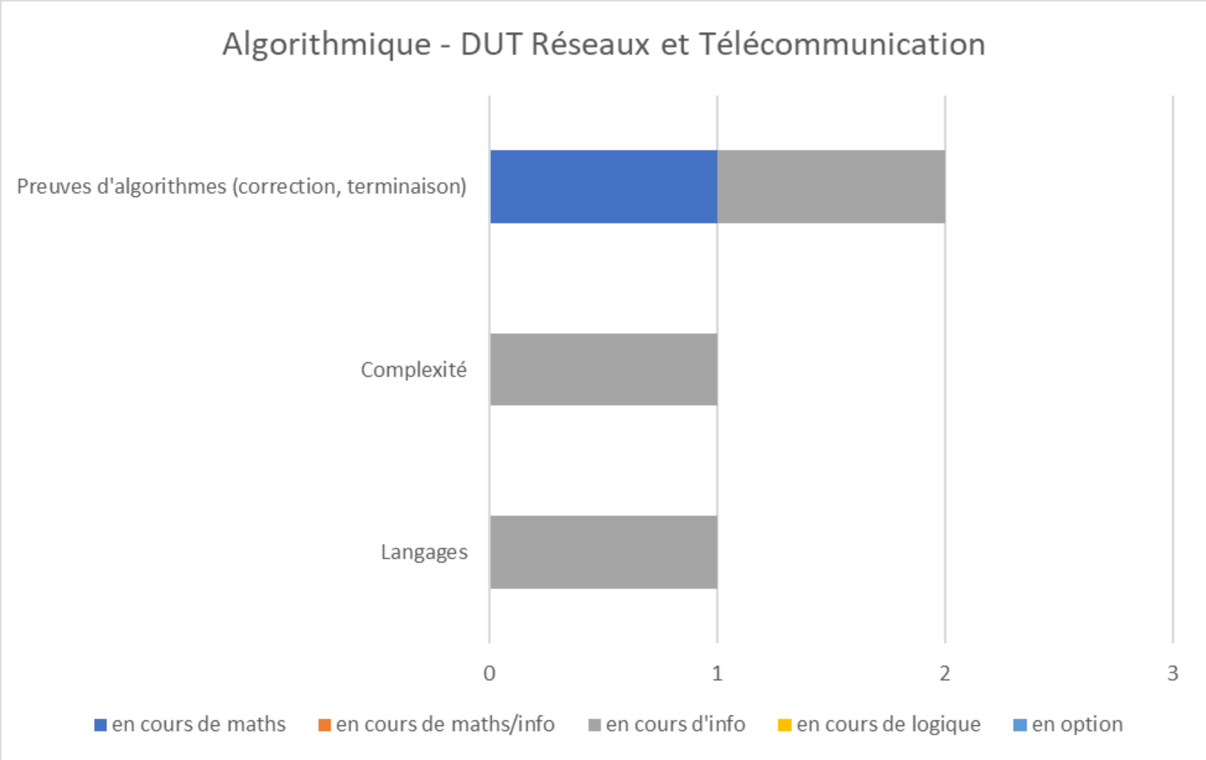
Annexe-Figure 78: Théorie des Nombres et Probabilités Discrètes - DUT – France



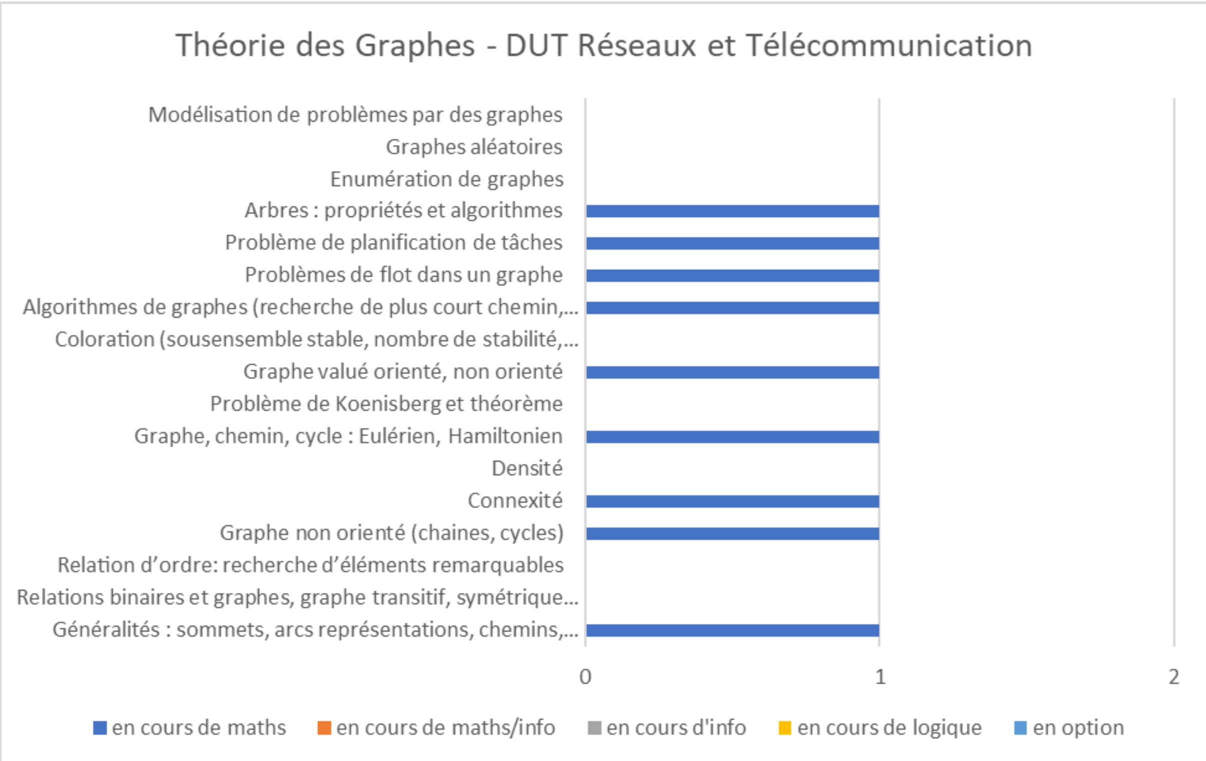
Annexe-Figure 79: Différents Types de Raisonnement - DUT Réseaux et Télécommunication – France



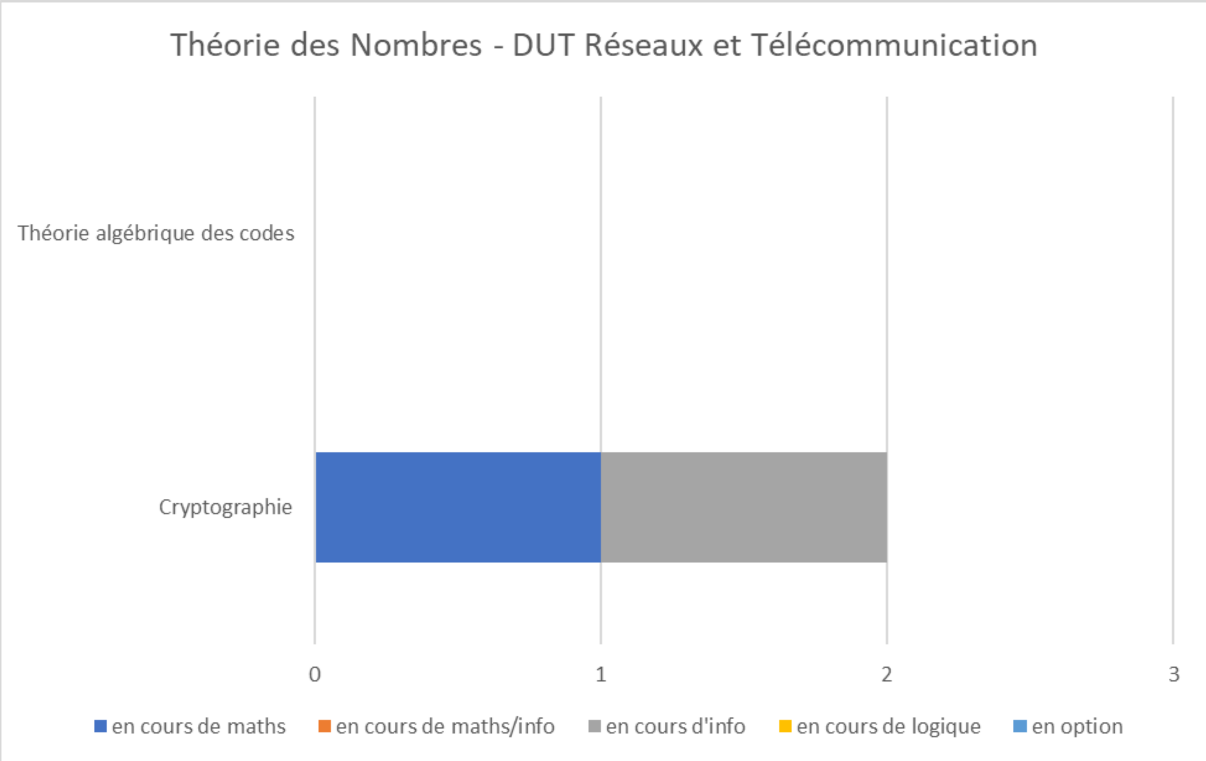
Annexe-Figure 80: Généralités - DUT Réseaux et Télécommunication – France



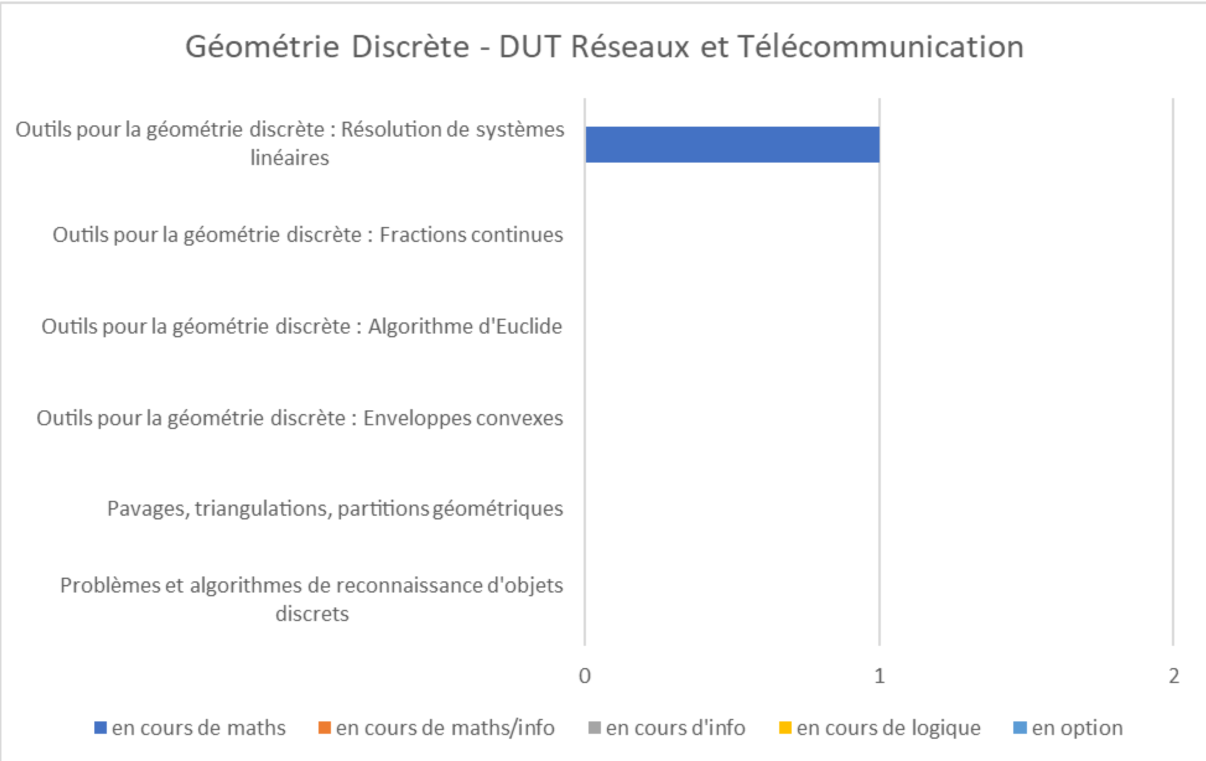
Annexe-Figure 81: Algorithmique - DUT Réseaux et Télécommunication – France



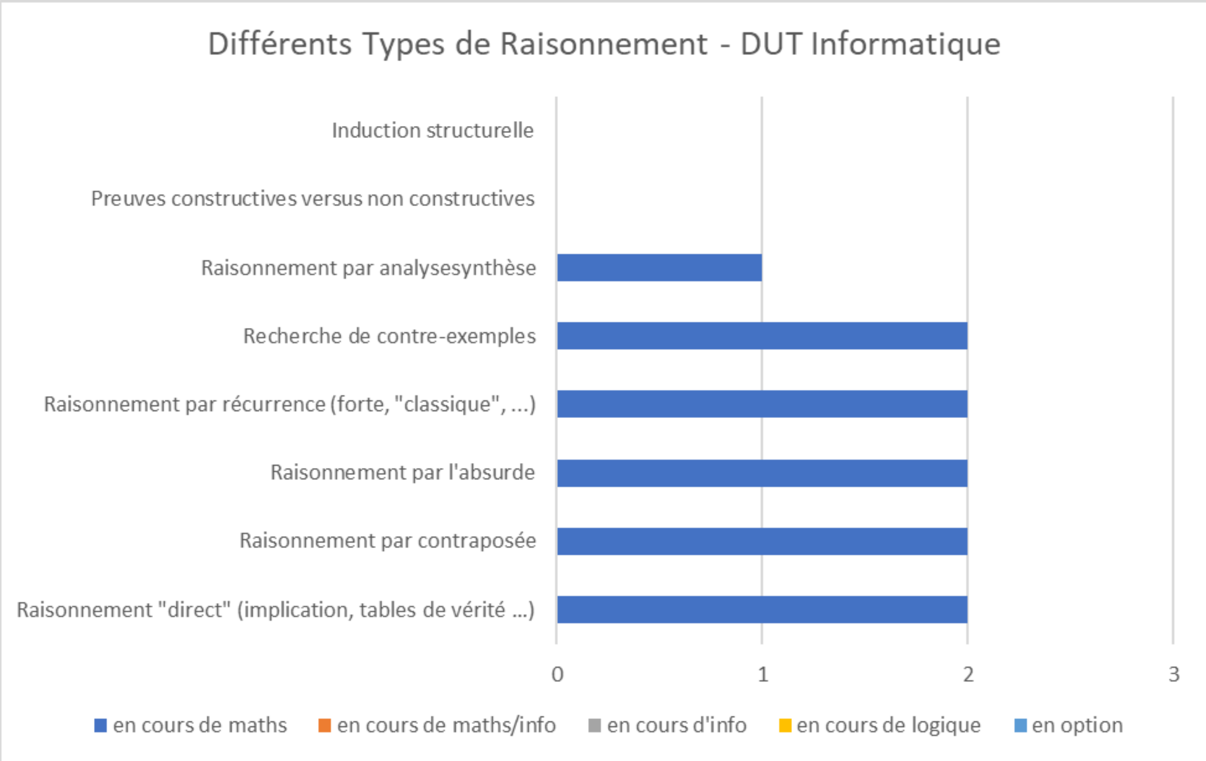
Annexe-Figure 82: Théorie des Graphes - DUT Réseaux et Télécommunication – France



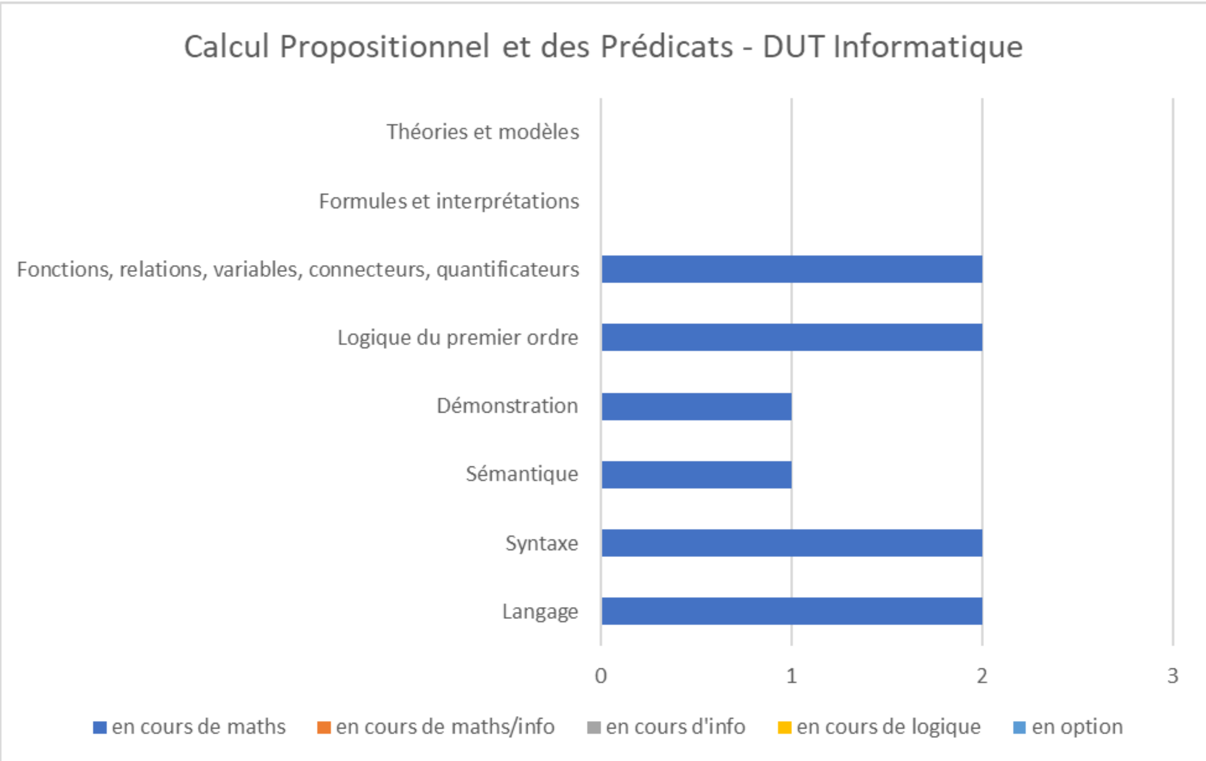
Annexe-Figure 83: Théorie des Nombres - DUT Réseaux et Télécommunication – France



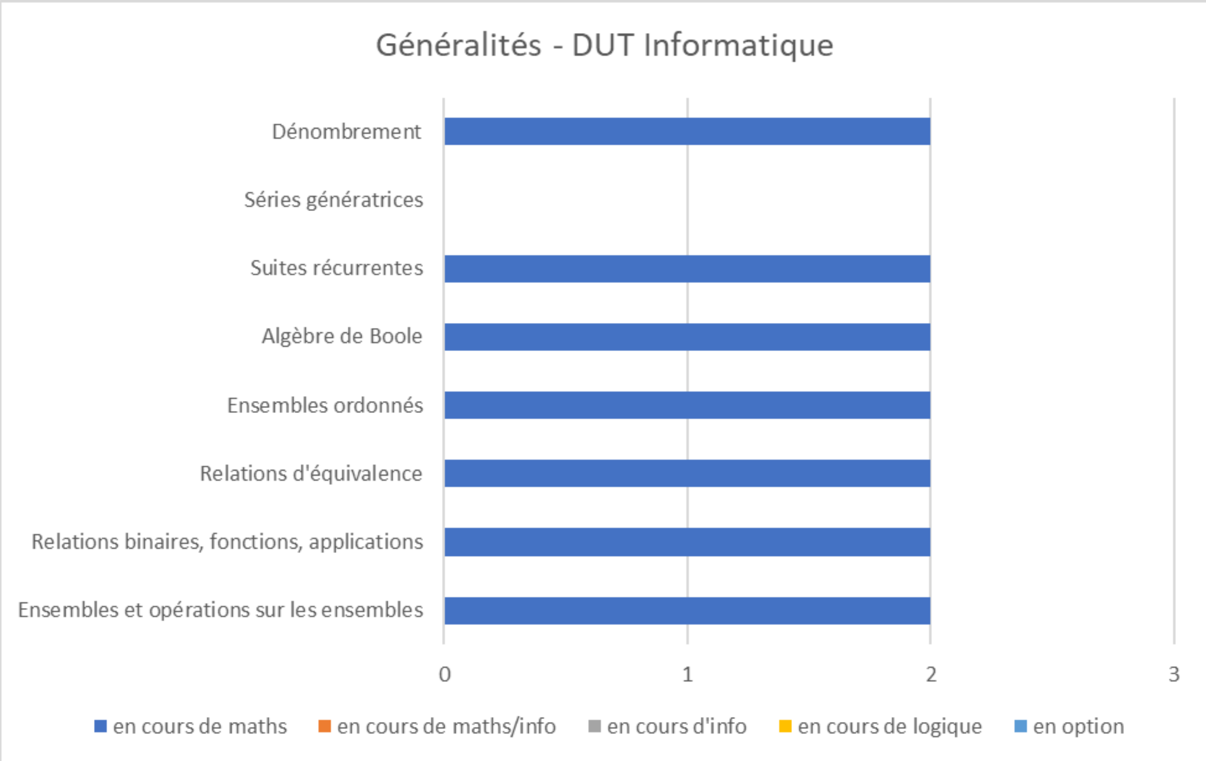
Annexe-Figure 84: Géométrie Discrète - DUT Réseaux et Télécommunication – France



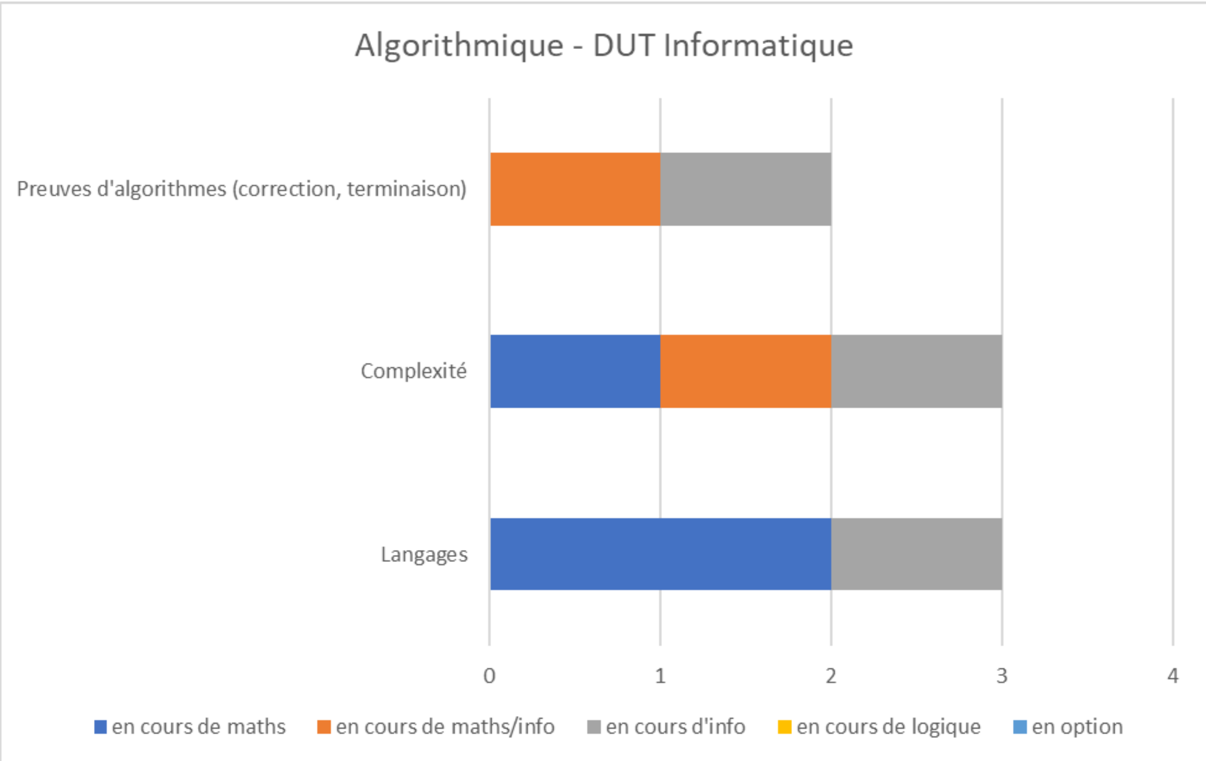
Annexe-Figure 85: Différents Types de Raisonnement - DUT Informatique – France



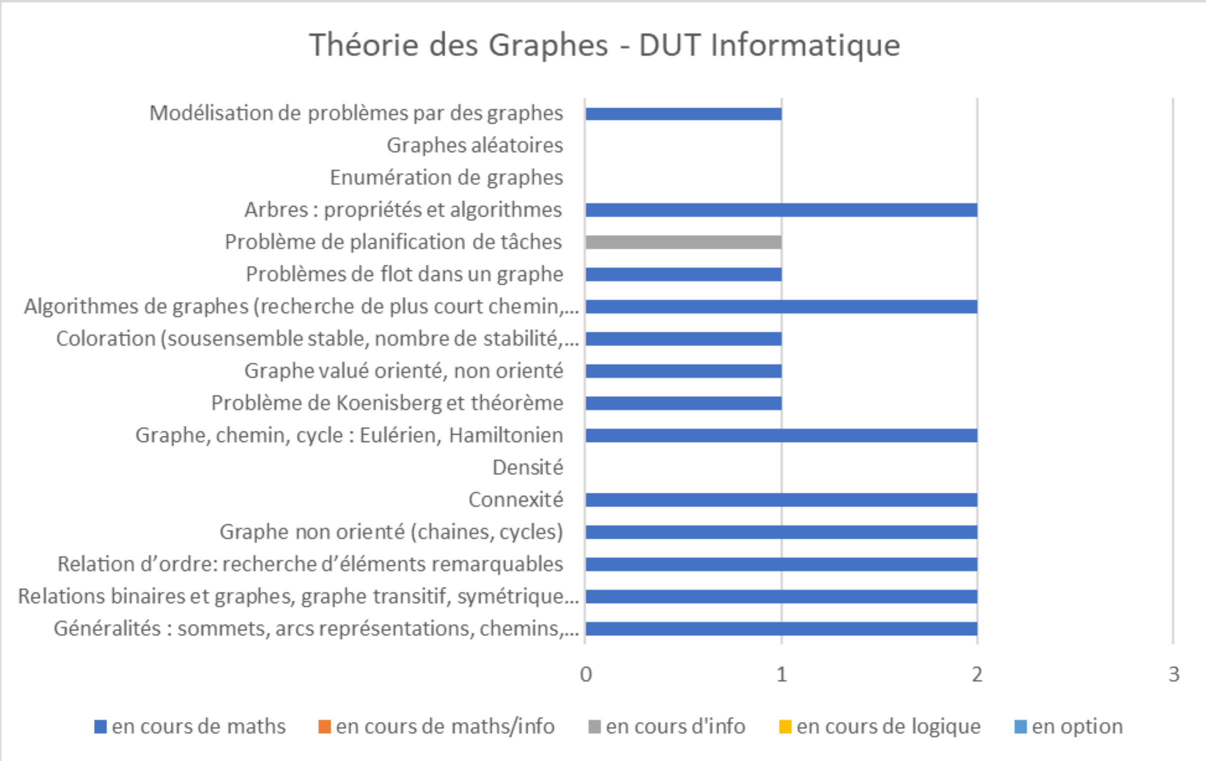
Annexe-Figure 86: Calcul Propositionnel et des Prédicats - DUT Informatique – France



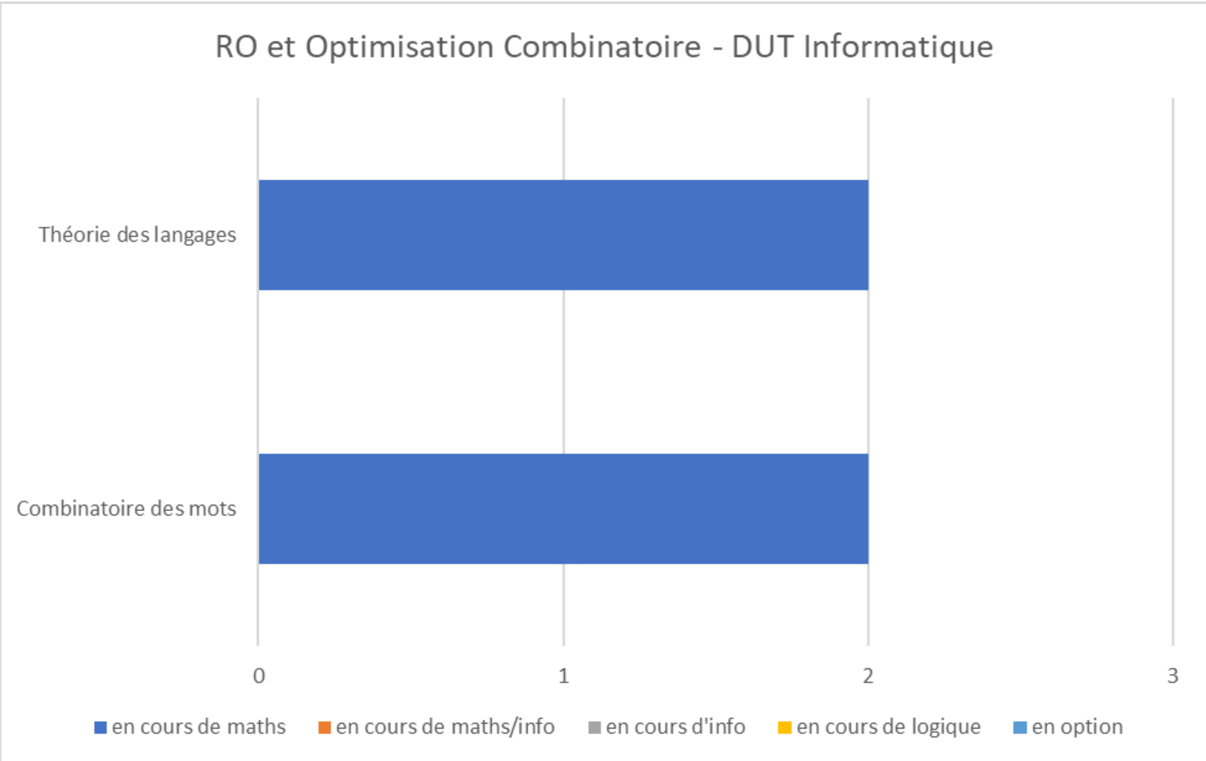
Annexe-Figure 87: Généralités - DUT Informatique – France



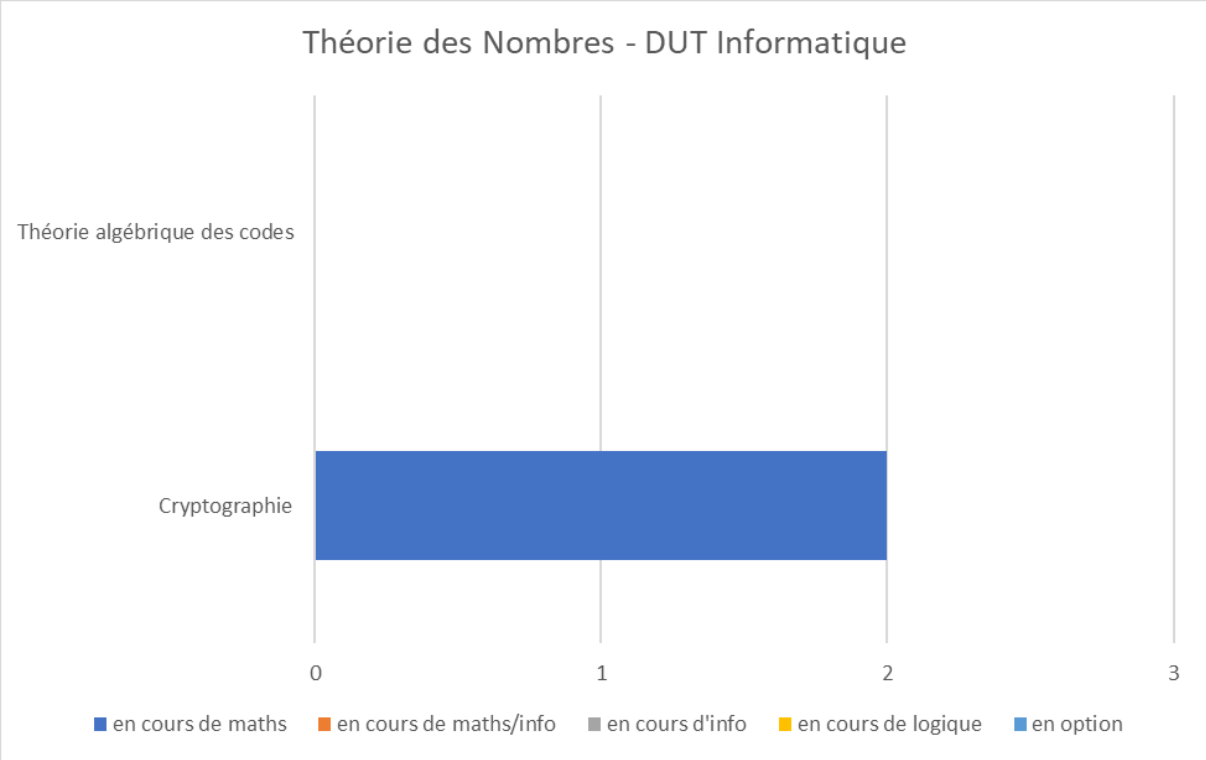
Annexe-Figure 88: Algorithmique - DUT Informatique – France



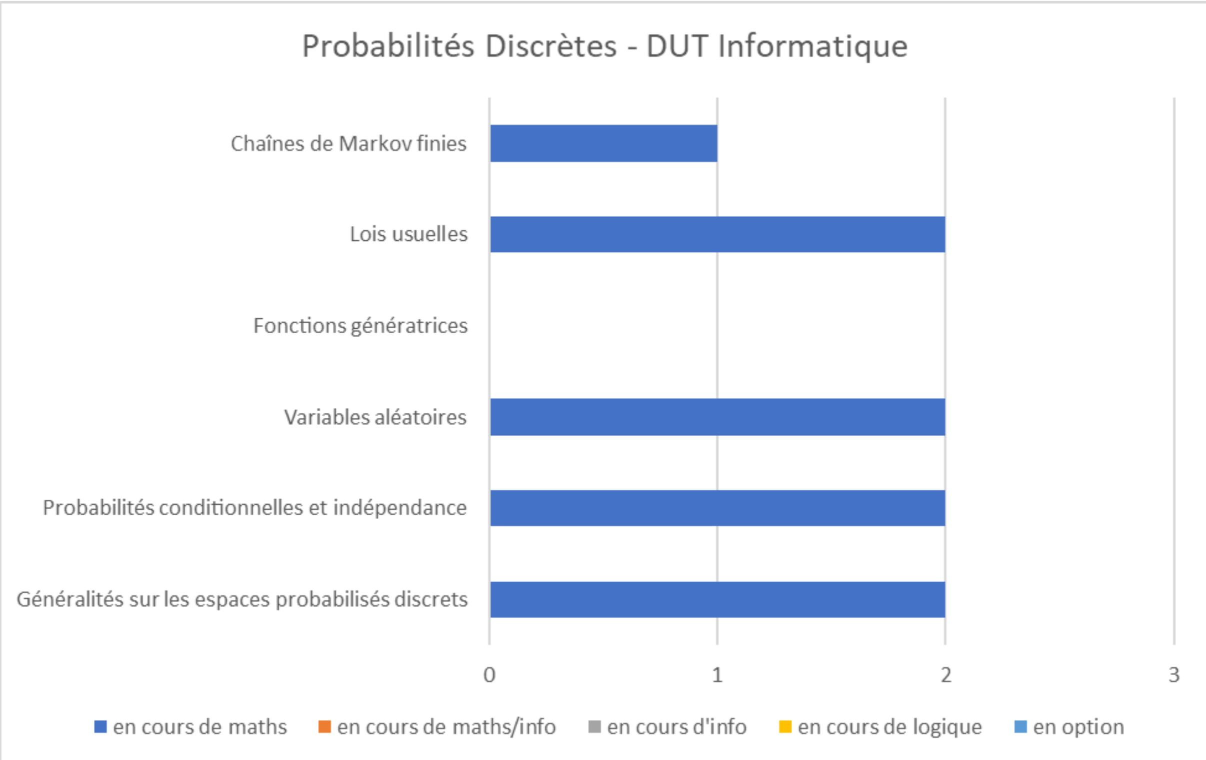
Annexe-Figure 89: Théorie des Graphes - DUT Informatique – France



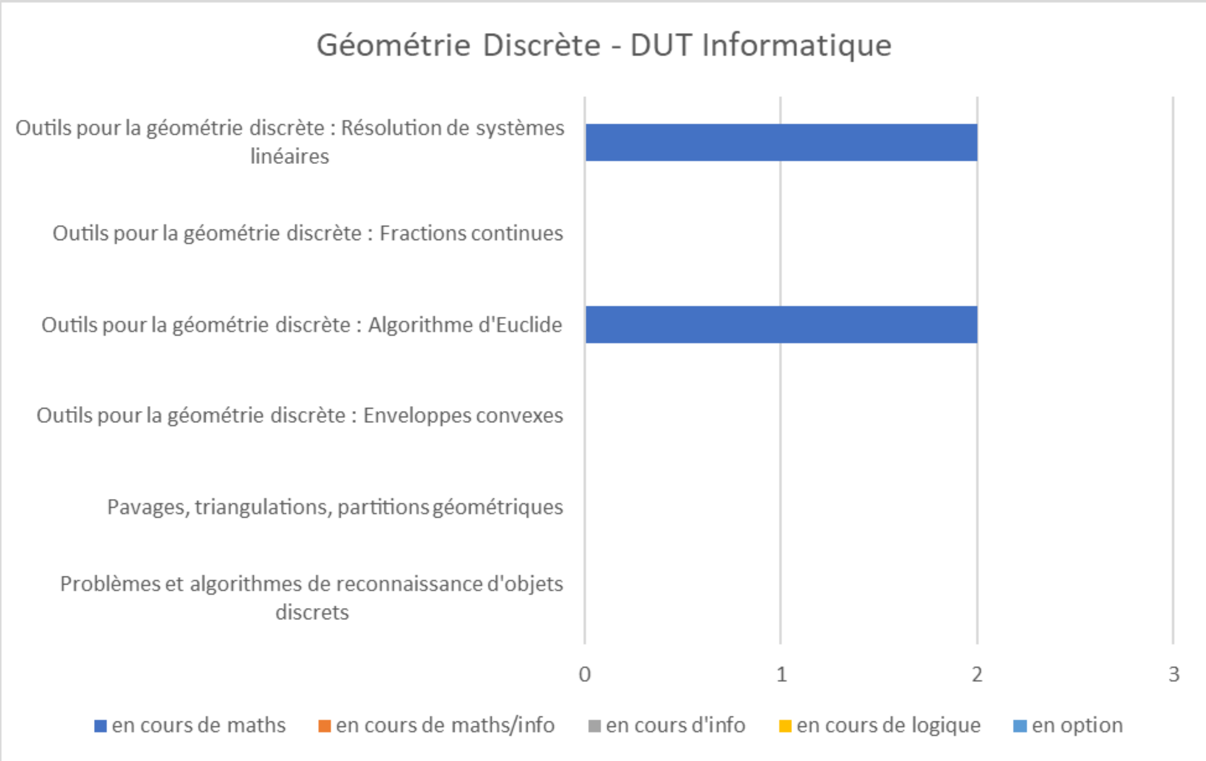
Annexe-Figure 90: RO et Optimisation Combinatoire - DUT Informatique – France



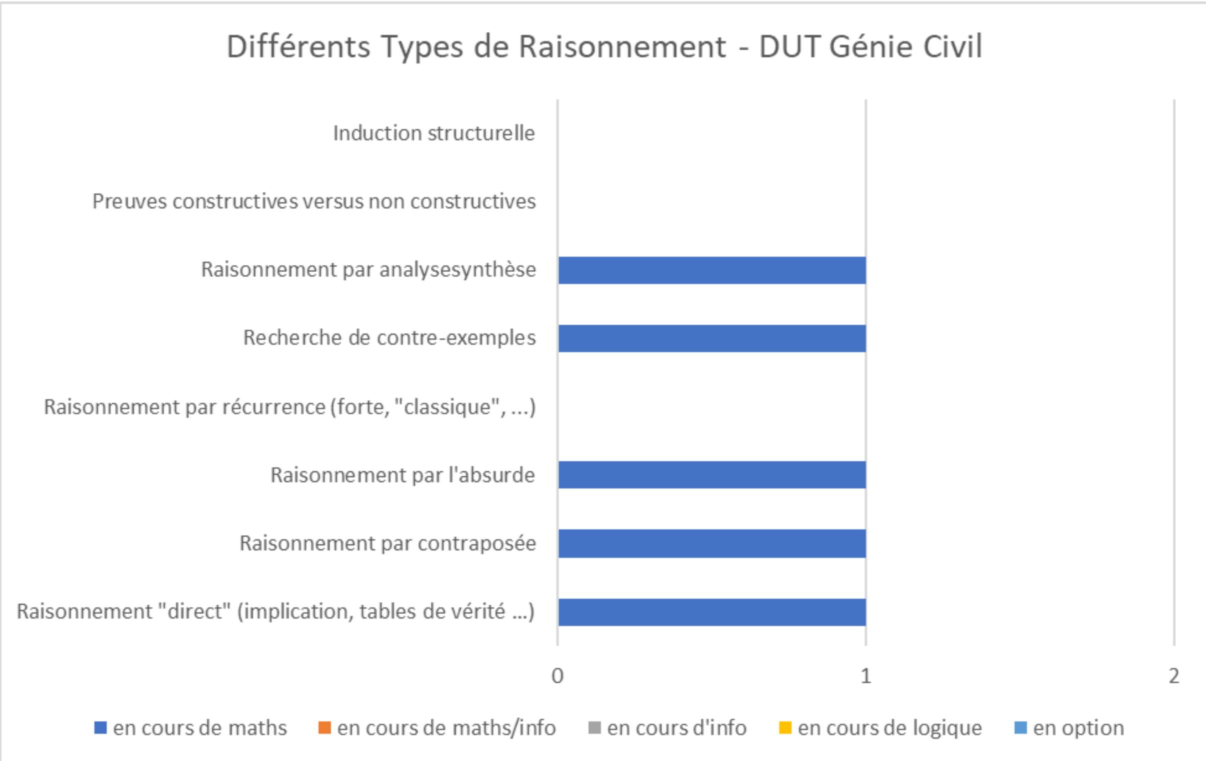
Annexe-Figure 91: Théorie des Nombres - DUT Informatique – France



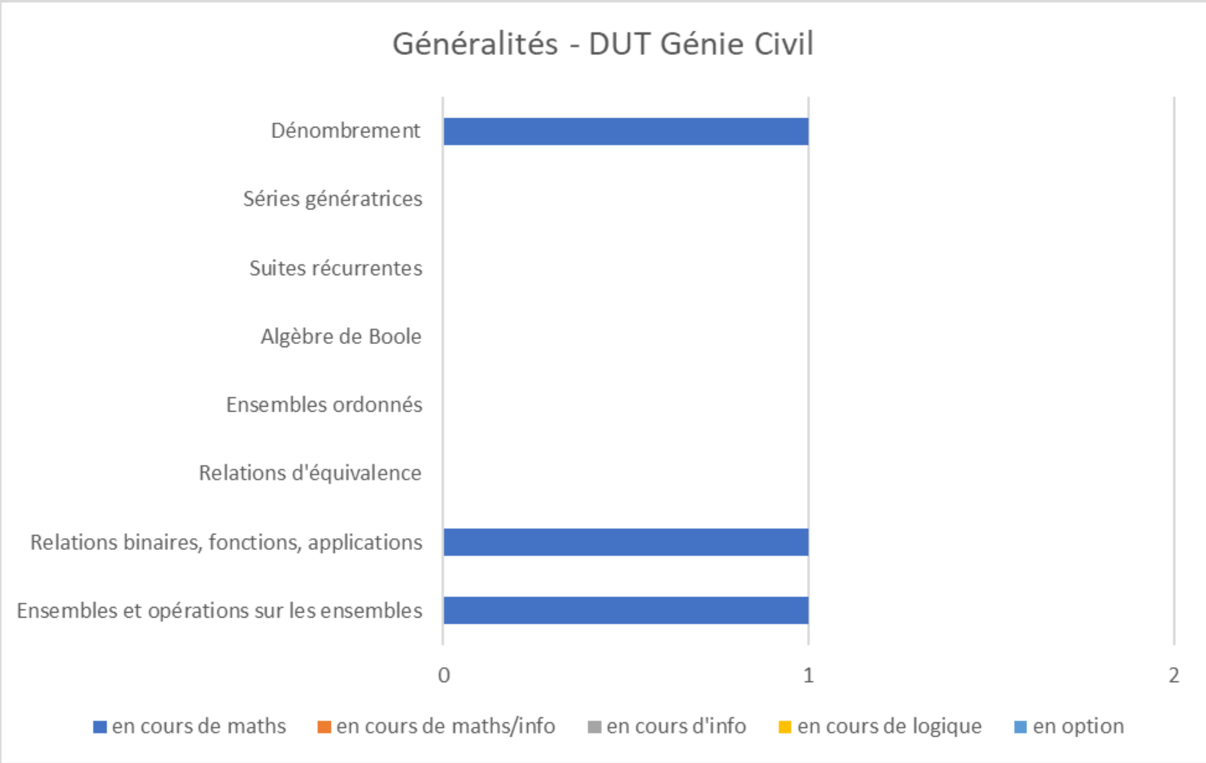
Annexe-Figure 92: Probabilités Discrètes - DUT Informatique – France



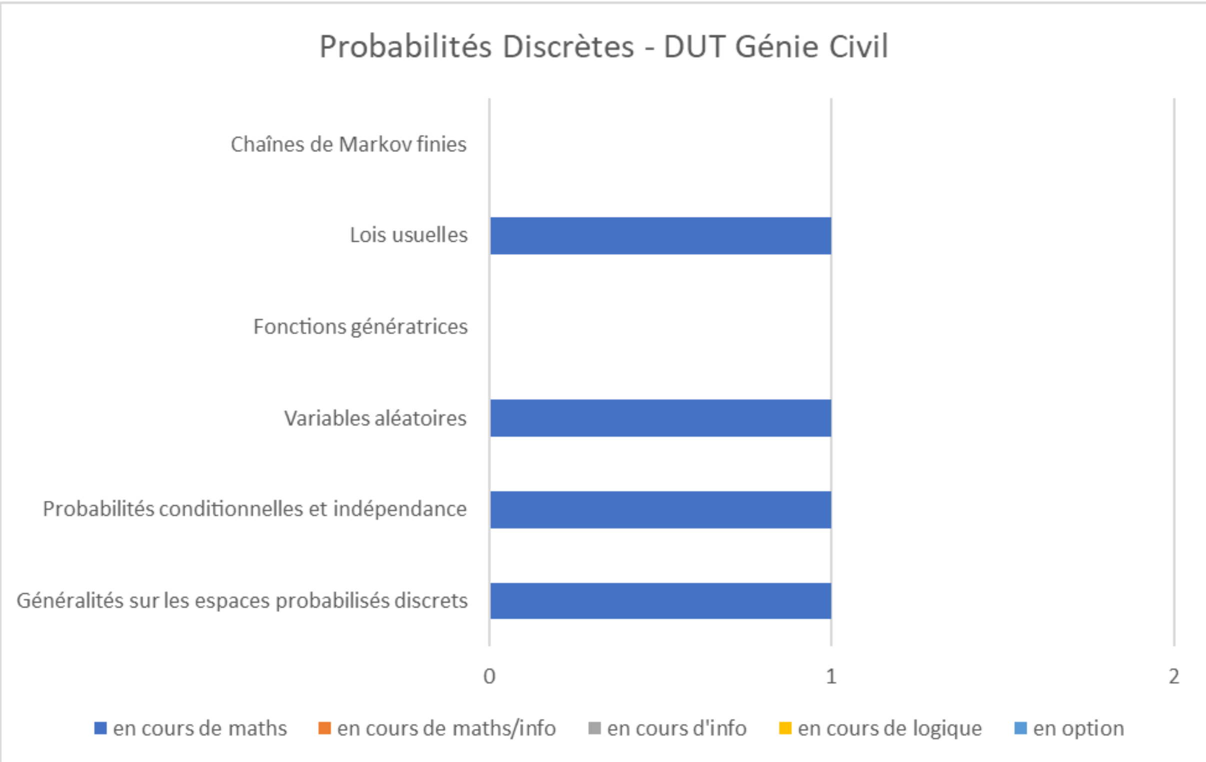
Annexe-Figure 93: Géométrie Discrète - DUT Informatique – France



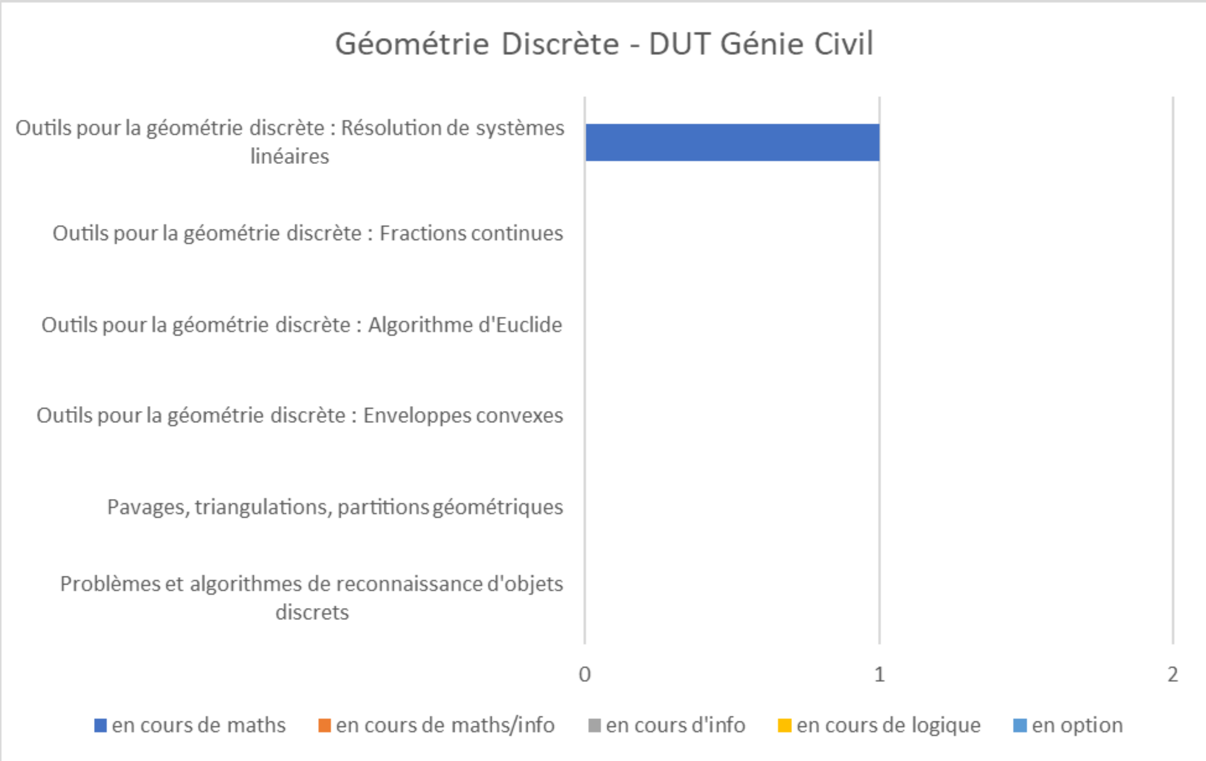
Annexe-Figure 94: Différents Types de Raisonnement - DUT Génie Civil – France



Annexe-Figure 95: Généralités - DUT Génie Civil – France



Annexe-Figure 96: Probabilités Discrètes - DUT Génie Civil – France



Annexe-Figure 97: Géométrie Discrète - DUT Génie Civil - France

E. Présentations Mathématiques

E1. Recherche de parcours Eulériens

Propriétés

Nous présentons ci-dessous des propriétés suivies de leurs preuves. Nous nous appuyons sur l'étude épistémologique de Cartier (2008), qui les a présentées en tant qu'éléments intermédiaires permettant une réflexion mathématique sur le théorème d'Euler.

Propriété 1

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe

Rappelons que le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont une les extrémités est ce sommet. Ainsi, à chaque arête sont associes deux sommets, dons deux unités dans la somme des degrés, ce qui vérifie le résultat. ■

Propriété 2
Un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à deux contient un chemin fermé

> « Considérons un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à deux. Il est facile de voir qu'un tel graphe contient nécessairement un chemin fermé. On peut s'imaginer se promener dans le graphe en partant d'un sommet quelconque. Ce sommet étant de degré au moins deux, on peut en ressortir. De la même façon, le sommet suivant, de degré au moins égal à deux, permet la ressortie, et ainsi de suite jusqu'à nécessairement, revenir en un sommet *s* déjà rencontré. […] Ceci implique en particulier qu'un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair contient un chemin fermé » (Cartier, 2008) ■

Propriété 3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

> « Considérons un graphe quelconque, la somme des degrés des sommets d'un graphe quelconque est le double du nombre d'arêtes de ce graphe. Donc, la somme des degrés est un nombre pair. Nous pouvons déduire que le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair. » (Cartier, 2008)■

Propriété 4

Dans un graphe connexe, un chemin eulérien est possible seulement si deux sommets au plus soient de degré impair.

> « Soit G un graphe connexe.
> Montrons qu'un chemin eulérien est possible seulement si deux sommets au plus (c'est-à-dire 0 ou 2 sommets) sont de degré impair.
>
> Plaçons-nous-en un sommet quelconque du graphe. Parcourir le graphe de façon eulérienne amènera à « entrer » puis « sortir » de ce sommet jusqu'à ce que toutes les arêtes partant de ce sommet soient parcourues. Si ce sommet est de degré impair, alors il faudra que ce sommet soit une extrémité du chemin sinon au moins une arête incidente à ce sommet ne sera pas parcourue. Pour

qu'un chemin eulérien existe dans le graphe, il est donc nécessaire que deux sommets au plus soient de degrés impairs. Si le graphe comporte plus de deux sommets de degré impair, alors aucun chemin eulérien ne sera possible.

Montrons maintenant qu'il suffit de montrer la réciproque sur un graphe dont tous les sommets sont de degré pair pour le prouver pour un graphe ayant deux sommets de degré impair.

Supposons que nous avons montré qu'un graphe ayant tous ses sommets de degré impair soit un graphe eulérien. Soit G un graphe connexe dont deux sommets, s_1 et s_2, sont de degré impair. Ajoutons une arête entre les deux sommets[43]. Leur degré est maintenant pair ainsi que tous les autres sommets du graphe. Le théorème étant supposé vraie pour les graphes ayant tous leurs sommets de degré pair, il existe donc un chemin eulérien fermé dans ce graphe. Ce chemin étant fermé, il peut commencer en n'importe quel sommet et terminer par toute arête menant à ce sommet. Il peut par exemple commencer en s_1 et revenir en s_1 par l'arête s_2s_1. Il suffit maintenant de supprimer cette arête fictive entre s_1 et s_2 pour obtenir un chemin eulérien ouvert[44] dans le graphe qui commence en s_1 et termine par s_2.

Montrons maintenant que la condition de parité de tous les degrés des sommets d'un graphe suffit à garantir l'existence d'un chemin eulérien fermé dans le graphe. » (Cartier, Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modelisation, 2008) ■

Preuves du théorème d'Euler

Nous cherchons dans ce paragraphe à illustrer les différentes preuves de ce théorème. Nous avons d'abord présenté le théorème d'une façon classique, puis d'une façon plus simplifiée, afin de faciliter le suivi des preuves par le lecteur.

Théorème d'Euler (1736) :
Un graphe connexe admet un chemin eulérien si et seulement si deux sommets au plus (c'est à dire 0 ou 2 sommets) sont de degré impair.

Pour être plus précis, nous pouvons décomposer ce théorème en deux parties :
1. Un graphe connexe admet un cycle eulérien (chemin eulérien fermé) si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair (c'est à dire s'il n'y a aucun sommet de degré impair)
2. Un graphe connexe admet un chemin eulérien ouvert si et seulement si tous ses sommets sauf deux sont de degré pair (il y a deux sommets de degré impair, l'origine de la chaine est l'un de ces sommets et l'extrémité est l'autre sommet).

Preuve de la première partie du théorème (Cartier, 2008) :
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair (c'est à dire s'il n'y a aucun sommet de degré impair)

Preuve de la condition nécessaire (⇒)   (preuve de l'implication)

Si G est un graphe connexe admettant un chemin fermé alors tous les sommets sont de degré pair
C'est une preuve directe et facile. Supposons que G est un graphe connexe et C est un chemin eulérien fermé (cycle eulérienne) dans G, alors soit v un sommet quelconque. Comme C

[43] Les graphes dont Cartier considère sont des multigraphes : « graphe où il peut exister plusieurs arêtes pour une même paire de sommets » (Cartier, 2008)
44 Un chemin ouvert commence en un sommet et termine par un sommet diffèrent (Cartier, 2008)

contient toutes les arêtes alors elle contient tous les arrêts incidents à v. Donc comme on traverse le cycle sur C alors les arêtes incidentes à v existent en couples et donc le degré de v doit être un multiple de deux d'où le résultat que tous les sommets sont de degrés pairs. ■

Preuve de la condition suffisante (⇐) (preuve de la réciproque)

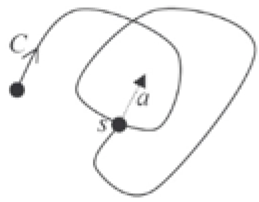
Si G est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair alors G admet un chemin eulérien fermé

Il existe plusieurs preuves pour cette partie du théorème. La preuve de la partie suffisante peut être abordée par différentes approches, comme par exemple la preuve par maximalité, la preuve par récurrence et la preuve par l'absurde. Nous présentons ci-dessous ces preuves.

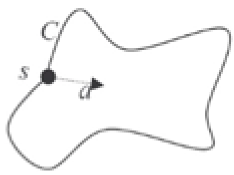
Preuve par maximalité :

« Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Nous prenons C un plus grand chemin dans G. Si C contient toutes les arêtes de G, alors le problème est résolu. Sinon, G contient au moins une arête de plus que C et alors nous avons deux cas possibles :

- C est ouvert. Les sommets à l'extrémité de C sont donc de degré pair dans G (par l'hypothèse) mais de degré impair dans C. Il existe donc dans G une arête incidente a à s (s étant l'un des extrémités de C : voir la figure 3) qui n'a pas été parcouru dans C. Nous pouvons donc l'ajouter à la suite de chemin de C qui n'est donc pas le plus grand chemin dans G, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de C.



- C est fermé. On peut donc commencer le chemin à partir d'un sommet quelconque. Car G est connexe, alors il existe un sommet s dans C interceptant une arête a non couvert par C. Nous choisissons ce sommet comme le sommet de départ du chemin. Alors C commençant et se terminant par s peut être prolongé par l'arête a. C n'était donc pas le plus grand chemin dans G, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de C.

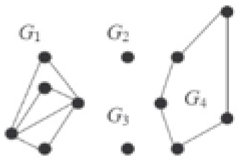


Le plus grand chemin C dans G contient donc toutes les arêtes de G, c'est un chemin eulérien. » (Cartier, 2008)■

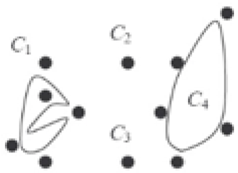
Preuve par récurrence :

« Démontrons par récurrence sur le nombre d'arêtes, que tout graphe G connexe dont tous les sommets sont de degré pair admet un cycle eulérien.

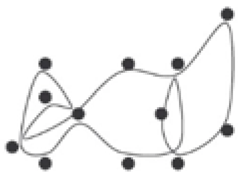
Si G ne contient pas d'arête alors il ne contient qu'un seul sommet[45], et admet un cycle eulérien. Sinon tous les sommets de G sont de degré égal ou supérieur à 2. Il existe alors un chemin ferme C dans G comme nous l'avons déjà montré en propriété (Un graphe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à deux contient un chemin fermé).
En enlevant les arêtes de C de graphe G, nous obtenons un sous-graphe[46] G' dont tous les sommets sont de degré pair et qui est formé d'un ensemble de composantes connexes[47] $\{G_1, G_2, \dots G_p\}$.



Chaque composante connexe G_i de G' a un nombre d'arêtes strictement plus petit que celui de G. Tous les sommets de G_i sont de degré pair et, par induction, G_i contient un chemin ferme C_i contenant toutes les arêtes de G_i (notons que G_i et donc C_i peuvent ne contenir aucune arête).



Il nous reste à construire le graphe G à partir de ces composantes connexes. Pour cela, parcourons C, lorsque nous rencontrons un sommet s appartenant à G_i ajoutons à notre chemin C le chemin C_i si celui-ci n'a pas déjà été parcouru. Nous obtenons alors un cycle eulérien dans G, ce qu'il nous fallait démontrer. » (Cartier, 2008) ■

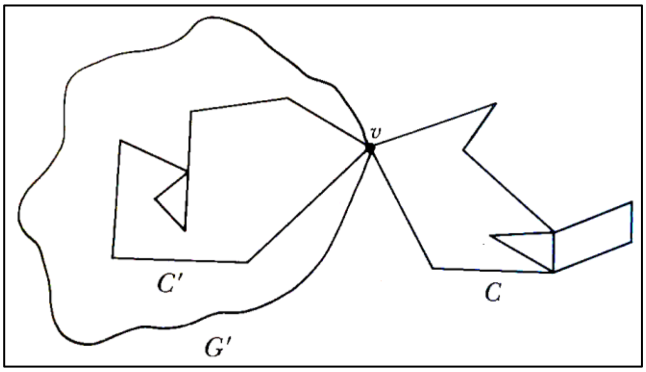


Preuve par contradiction (avec la sélection d'un contre-exemple minimale) (Dierker & Voxman, 1986)

[…] If the converse is false, then there is a graph that does not contain an Euler tour, but that does have each vertex of even degree. Of all such graphs, choose one with the least number of edges (such a selection is called a *minimal counter example*), and label it G. […] G must contain a tour. Choose the longest tour C in G. Since G is not Eulerian, C will not include all of the edges of G, and hence $E(G) \setminus E(C) = \emptyset$
Let G' be a component of the graph formed by removing the edges (not the vertices) of C from G. Since $E(G) \setminus E(C) = \emptyset$, it follows that $E(G') = \emptyset$. Moreover, since C itself is Eulerian, it must be the case that each vertex of C has even degree, from which it follows that every vertex of G' has even degree. Recall that G was selected the minimal counterexample. Thus since

[45] Sinon il ne serait pas connexe ou ne contiendrait pas de sommet
[46] Tout sous graphe peut être obtenu par application successive des opérations élémentaires de suppression d'arêtes ou de sommets.
[47] Une composante connexe dans un graphe est un sous-graphe connexe induit maximal par inclusion, i.e. un sous graphe connexe induit qui n'est contenu dans aucun sous-graphe induit autre que lui-même.

$|E(G')| < |E(G)|$, and since every vertex of G' has even degree and G' is connected we conclude that G' has an Euler tour C'. Since G is connected, C and C' must have a vertex in common.[…]
The tour formed by starting at v, traversing C and then traversing C' is a tour that is longer than C. However, C was chosen as the tour of maximal length in G. This contradiction implied that G is Eulerian. (Dierker & Voxman, 1986, pp. 169-170) ■



Annexe-Figure 98: Preuve de la condition suffisante (Dierker & Voxman, 1986, p. 170)

Pour la deuxième partie du théorème :

Un graphe connexe admet un chemin eulérien ouvert si et seulement si tous ses sommets sauf deux sont de degré pair (il y a deux sommets de degré impair, l'origine du chemin est l'un de ces sommets et l'extrémité est l'autre sommet).

Preuve du premier sens (⇒)
Si G est un graphe connexe qui admet un chemin eulérien ouvert, alors il y a deux sommets de degré impair.

Preuve analogue à celle de l'implication de la première partie du théorème.

Preuve du deuxième sens (⟸)
Si G est un graphe connexe dont deux sommets sont de degré impair, alors G admet un chemin eulérien ouvert.

Utilisons le raisonnement par l'absurde : si nous rajoutons une arête reliant les deux sommets de degré impair, tous les sommets sont alors de degré pair. Il existe un chemin eulérien fermé parcourant de nouveau le graphe. En enlevant maintenant l'arête supplémentaire, on obtient un chemin eulérien ouvert sur le graphe de départ. ■

E2. Recherche de parcours Hamiltoniens

Il existe une technique pour démontrer qu'un graphe n'admet pas un circuit eulérien. Cela découle des considérations suivantes, d'après Epp (2011) traduit par nos soins :
Supposons qu'un graphe G avec au moins deux sommets ait un circuit hamiltonien C donné de façon C: $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$. Puisque C est un circuit simple, tous les sommets et les arêtes sont distincts sauf que $v_0 = v_n$. Soit H le sous-graphe de G qui est formé en utilisant les sommets et les arêtes de C.
H a le même nombre d'arêtes que ses sommets puisque ses n arêtes et ses n sommets sont distincts. De même, par définition d'un circuit hamiltonien, chaque sommet de G est un sommet de H, et H est connexe puisque deux de ses sommets se trouvent sur un circuit. De plus, chaque

sommet de H a un degré 2. La raison en est qu'il y a exactement deux arêtes incidentes sur un sommet quelconque. Ce sont e_i et e_{i+1} pour tout sommet v_i sauf $v_0 = v_n$, et ils sont e_1 et e_n pour $v_0(= v_n)$. Ces observations ont établi la vérité de la proposition suivante dans tous les cas où G a au moins deux sommets.

> Si un graphe G admet un circuit hamiltonien, alors G admet un sous-graphe H ayant les propriétés suivantes :
> 1. H comprend chaque sommet de G
> 2. H est connexe
> 3. H a le même nombre des sommets et des arêtes
> 4. Le degré de chaque sommet de H est 2

Notons que si G ne contient qu'un sommet et que G a un circuit hamiltonien, alors le circuit a la forme vev, où v est le sommet de G et e est un front incident sur v. Dans ce cas, le sous-graphe H constitué de v et e satisfait les conditions.
La contraposée d'une proposition est logiquement équivalente à la proposition ; dans ce cas, la contraposée dit que si un graphe G n'a pas de sous-graphe H avec les propriétés 1-4, alors G n'admet pas de circuit hamiltonien.

E3. Recherche du plus court chemin

Nous utilisons dans ce qui suit la présentation de Cartier (2008). Voici la description faite par Cartier, suivie de son algorithme :

> « Notons S l'ensemble de ses sommets. Nommons l'un des sommets $s_{entrée}$ et un autre s_{sortie}. Le but de l'algorithme est de fournir un nombre positif correspondant à la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets.
> Nous affectons à chaque sommet un couple de valeurs. La première de ces valeurs est l'étiquette du sommet, c'est un entier positif $+\infty$ qui nous donnera la longueur du chemin menant au sommet d'entrée. La seconde valeur est un marqueur de fin pouvant prendre les deux valeurs × ou • selon si le sommet sera, respectivement à nouveau parcouru par l'algorithme ou non.
> Le sommet $s_{entrée}$ sera initialisé à $(0,\times)$ (la distance à lui-même est nulle, il sera parcouru par l'algorithme). Les autres sommets sont initialisés à $(+\infty,\ \times)$.
> L'idée de l'algorithme est de choisir, parmi les sommets non marques • , un sommet x dont l'étiquette est minimale. On regarde tous les voisins de x marques ×. Si leur étiquette est strictement supérieure à la somme de l'étiquette de x avec le poids de l'arête qui les relie à x, alors on modifie leur étiquète. Sinon, on la conserve. Une fois tous les voisins de x marqués × explorés, on modifie la marque de x : l'étiquette de x correspond à s distance au sommet $s_{entrée}$, il ne sera plus exploré par l'algorithme.
> Nous utiliserons un booléen b dans cet algorithme. La valeur de b va servir à certifier l'existence d'un chemin entre $s_{entrée}$ et s_{sortie}, et à éviter à l'algorithme de « boucler »
> Si ce n'est pas le cas : si le booléen prend la valeur NON, l'algorithme s'arrêtera, et nous saurons qu'il n'existe pas de chemin entre les deux sommets. »

Entrées : G un graphe pondéré par des entiers positifs, S l'ensemble de ses sommets, $s_{entrée}, s_{sortie} \in S$

Sorties : la longueur d'un plus court chemin entre $s_{entrée}$ et s_{sortie}

Initialisation des variables :

$s_{entrée} \leftarrow (0, \times)$

pour tout $s \in S \setminus \{s_{entrée}\}$ **faire**

  $s \leftarrow (+\infty, \times)$

fin pour

$b \leftarrow OUI$

Cœur de l'algorithme :

tant que $marque(s_{sortie}) = \times$ **et** $b = OUI$ **faire**

  si $étiquette(s) = +\infty$ pour tout s tel que $marque(s) = \times$ **alors**

    $b \leftarrow NON$

  sinon

    pour s tel que $marque(s) = \times$ **et** $étiquette(s)$ est minimum **faire**

      $marque(s) \leftarrow \bullet$

    fin pour

    pour tout s' voisin de s tel que $marque(s') = \times$ **faire**

      si $étiquette(s') > étiquette(s) + poids(ss')$ **alors**

        $étiquette(s') \leftarrow étiquette(s) + poids(ss')$

      fin si

    fin pour

  fin si

fin tant que

Retourner $étiquette(s_{sortie})$.

Annexe-Figure 99: Algorithme Dijkstra première version (Cartier, 2008, p. 172)

Notons que Cartier (2008) a émis plusieurs remarques sur cet algorithme afin de proposer une deuxième version, que nous donnons ci-dessous.

- « L'algorithme tel qui l'est écrit permet de donner la distance entre un sommet et un autre. On peut avoir besoin de connaître la longueur des plus courts chemins d'un sommet à tous les autres. Il suffit pour cela de créer un ensemble, vide au départ, et auquel on ajoute chaque sommet que l'on marque •. Les deux conditions d'arrêt de l'algorithme sont l'identité de cet ensemble à l'ensemble des sommets du graphe, ou le fait que tous les sommets sont marqués • aient l'étiquette $+\infty$. Si tous les sommets non marqués ont $+\infty$ pour étiquette, et dans ce cas seulement, le booléen sera à l'état NON, et on pourra affirmer que le graphe n'est pas connexe.
- Cet algorithme peut être adapté pour les graphes orientés. Il suffit de modifier « arête » par « arc », et algorithme et preuve sont identiques.
- Cet algorithme à l'état, ne donne que la distance entre deux sommets donnés. Il peut être légèrement modifié pour donner un chemin correspondant à cette distance. Pour cela, il suffit d'affecter à chaque sommet un triplet $(eiquete, marque, predecesseur)$. Les deux premières valeurs sont les mêmes que précédemment ; la dernière correspond au nom du sommet d'où l'on vient, et que l'on modifie chaque fois que l'on modifie l'étiquette du sommet. On pourra lire le chemin parcouru par l'algorithme en partant d'un sommet final et en remontant la chaine des prédécesseurs jusqu'au sommet de départ. »

Entrées : G un graphe pondéré par des entiers positifs, S l'ensemble de ses sommets, $s_{entrée} \in S$, Σ un ensemble de sommets de G

Sorties : la longueur d'un plus court chemin entre $s_{entrée}$ et tous les autres sommets du graphe

---

Initialisation des variables :

$s_{entrée} \leftarrow (0, \bullet, X)$

pour tout $s \in S \setminus \{s_{entrée}\}$ **faire**

  $s \leftarrow (+\infty, \times, X)$

fin pour

$b \leftarrow OUI$

$\Sigma \leftarrow \{s_{entrée}\}$

Cœur de l'algorithme :

tant que $\Sigma \neq S$ **et** $b = OUI$ **faire**

  si $étiquette(s) = +\infty$ pour tout s tel que $marque(s) = \times$ **alors**

    $b \leftarrow NON$

  sinon

    pour s tel que $marque(s) = \times$ **et** $étiquette(s)$ est minimum **faire**

      $marque(s) \leftarrow \bullet$

      $\Sigma \leftarrow \Sigma \cup \{s\}$

    fin pour

    pour tout s' voisin de s tel que $marque(s') = \times$ **faire**

      si $étiquette(s') > étiquette(s) + poids(ss')$ **alors**

        $étiquette(s') \leftarrow étiquette(s) + poids(ss')$

        $prédécesseur(s') \leftarrow nom(s)$

      fin si

    fin pour

  fin si

fin tant que

Annexe-Figure 100: Algorithme Dijkstra seconde version (Cartier, 2008, p. 186)

E4. Arbre couvrant de poids minimum

Propriétés :

Propriété 5

Soit G un graphe connexe et C est un cycle dans G ; alors en supprimant une arête quelconque de G le graphe reste connexe.

Cette proposition est liée au fait que pour n'importe quels deux sommets d'un cycle il existe deux chemins distincts qui les relient. Il est possible de dessiner le graphe de telle sorte que l'un d'eux chemins parte dans les sens opposés (Epp, 2011). ■

Propriété 6

Tout arbre connexe contient un arbre couvrant.

Soit G un graphe connexe. Si G est sans cycle, alors G est son propre arbre couvrant et c'est terminé. Sinon, alors G a au moins un cycle C_1. D'après la première propriété, le sous-graphe de G obtenu en supprimant une arête de C_1 est connexe. Si ce sous-graphe est sans cycle, alors c'est un arbre couvrant et nous avons terminé. Sinon, alors il a au moins un cycle C_2, et, comme ci-dessus, une arête peut être supprimé de C_2 pour obtenir un sous-graphe connexe. En continuant de cette façon, nous pouvons supprimer des arêtes successives des cycles, jusqu'à nous obtenions un sous-graphe connexe T de G. De plus, T contient tous les sommets de G car aucun sommet de G n'a été enlevé lors de sa construction. Donc T est un arbre couvrant pour G (Epp, Discrete Mathematics with Applications, 2011). ■

Propriété 7

Deux arbres couvrant quelconque ont le même nombre des arêtes. ((Epp, 2011)

E5. La coloration

Aperçu historique

« Le théorème des quatre couleurs est l'un des résultats les plus célèbres des mathématiques combinatoires. Malgré un énoncé simple, le théorème est resté une conjecture pendant plus d'un siècle, durant lequel il fut abordé par les plus grands mathématiciens, parfois avec des résultats erronés. En outre, sa résolution, en 1976, comportait un long calcul sur ordinateur, rendant celle-ci très controversée, la plupart des mathématiciens n'étant pas capables de vérifier l'exactitude des programmes utilisés.
Le géographe Francis Guthrie aurait constaté en 1852 que la carte des régions d'Angleterre pouvait être coloriée avec seulement quatre couleurs, de telle sorte que deux régions voisines se voient attribuer des couleurs différentes. Il demande donc à son frère Frederick, mathématicien, si cette propriété ne serait pas vraie en général pour toute carte plane ; celui-ci communique la conjecture à De Morgan ; en 1878, Cayley la publie. En 1879, Kempe trouve une première « preuve » de la conjecture, mais onze ans plus tard Heawood y trouvera une faille majeure ; il parviendra toutefois à en sauver un théorème des cinq couleurs. En 1913, G. D. Birkhoff formule la notion de configuration réductible et démontre la conjecture pour toutes les cartes comportant moins de vingt-six régions à colorier. Cette borne est améliorée au cours du XXe siècle ; en 1969, Heesch trouve des conditions « presque » nécessaires et suffisantes pour qu'une configuration soit réductible, et une méthode générale pour trouver un ensemble inévitable de configurations. Finalement, en 1976, Appel et Haken réalisent le programme de Heesch, et montrent, dizaines de milliers de figures à l'appui, que toute carte non 4-coloriable doit contenir l'une de 1 478 configurations, et, avec 1 200 heures de calcul, que chacune de ces configurations sont réductibles. Enfin, en 1995, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas mettent à profit la formidable accélération des ordinateurs pour trouver une réalisation nettement plus simple du programme de Heesch, avec seulement 633 configurations ; de plus, ils automatisent également la preuve d'inévitabilité. » (Gonthier, 2017)

Théorème

Soit G planaire, alors $\chi(G) \leq 6$

Il existe plusieurs démonstrations : nous présenterons une première démonstration en suivant un raisonnement par récurrence sur le nombre de sommets, et une deuxième démonstration en suivant un raisonnement par l'absurde ; nous présentons ensuite un algorithme pour la coloration d'un graphe planaire en au moins six couleurs.

Preuve par récurrence sur le nombre de sommets (Brauner & al, 2017) :
$H(n)$: G planaire à n sommets, alors, $\chi(G) \leq 6$; $n = 1$ (même $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

A démontrer : $H\ (n)\ \Rightarrow H(n+1)$
Supposons $H\ (n)$ vraie pour $n\ \geq\ 1$.
Soit G planaire d'ordre $n\ +\ 1$. Par le lemme, il existe x sommet tel que $d\ (x)\ \leq\ 5$.
$G[V/\{x\}]$ est planaire à n sommets donc $\chi\ (G[V/\{x\}])\ \leq\ 6$.
Comme $d\ (x)\ \leq\ 5$, quelle que soit la $6-coloration$ de $G\ [V/\{x\}]$ il reste au moins une couleur disponible pour $x\ \Rightarrow\ \chi(G)\ \leq\ 6$ ■

<u>Preuve par absurde</u> (Cartier, 2008):

Soit G un graphe simple, planaire et connexe, et montrons par l'absurde que G a toujours un sommet de degré inférieur ou égal à 5. Autrement dit, nous allons démontrer que G est $5-dégénéré$

Supposons que tous les sommets de G soient de degré supérieur ou égal à 6.

Si F est le nombre de faces de G, A son nombre d'arêtes et S son nombre des sommets, la formule d'Euler nous donne : $F-A+S=2$.

Étant donné qu'une arête su plus deux faces, et que chaque face est délimitée par 3 arêtes au moins, on a nécessairement :

$$2A \geq 3F$$

ce qui équivaut à $F \leq \frac{2A}{3}$

De plus une arête étant incidente à deux sommets et chaque sommet étant de degré supérieur ou égal à 6, on a :

$$6S \leq 2A$$

ce qui équivaut à $S \leq \frac{A}{3}$

Nous obtenons l'inégalité suivante :

$$F-A+S \leq \frac{2A}{3} - A + \frac{A}{3} = 0$$
$$F-A+S \leq 0$$

Cette inégalité contredit la formule d'Euler. Un graphe planaire est donc 5-degeneré, et comme un graphe k-dégénéré a un nombre chromatique inférieur ou égale à $k+1$. Donc six couleurs suffisent donc à colorer un graphe planaire. ■

<u>Algorithme</u>

Algorithme de coloration d'un graphe planaire en moins de 6 couleurs

```
// Trouve un ordre des sommets par degré croissant
// puis colorie dans l'ordre inverse
i = 0
tant que il existe un sommet non numéroté faire
    choisir x non numéroté de plus petit degré dans le graphe des
     sommets non numérotés
    numéroter x par i
    i++
on note x[i] le sommet numéroté i ;
pour i = n à 1 faire
    affecter à x[i] la plus petite couleur non affectée à ses voisins
```

Annexe-Figure 101: Algorithme glouton de coloration d'un graphe planaire (<6 couleurs) (Brauner & al, 2017)

Les mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur : une approche épistémologique et didactique

Notre thèse est centrée principalement sur l'étude et l'analyse épistémologiques et didactiques des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur avec un focus sur la théorie des graphes. Identifier les potentialités d'enseignement en mathématiques discrètes pour le supérieur est une question peu explorée en didactique des mathématiques. Nous nous interrogeons ainsi sur les points suivants : Comment les recherches en didactique des mathématiques étudient les mathématiques discrètes ? Quelle est l'épistémologie sous-jacente dans des ouvrages en mathématiques discrètes utilisés dans le supérieur ? Pour mener à bien notre étude, nous avons conduit un état de l'art en didactique des mathématiques. Nous avons ensuite organisé une exploration contemporaine de nature épistémologique, en interrogeant des chercheurs en mathématiques discrètes. Nous avons également utilisé une approche praxéologique et mobilisé la dialectique outil/objet pour analyser trois grands types de problèmes en théorie des graphes dans une sélection d'ouvrages universitaires. L'ensemble des résultats des expérimentations a été confronté à l'état de l'art. Les résultats de la thèse mettent en évidence une richesse du domaine en termes de bloc « logos », notamment au niveau des preuves, algorithmes et modélisation, des complexités de différentes natures, ainsi qu'une hétérogénéité suivant les ouvrages universitaires. Les résultats de cette recherche représentent un pas vers la construction d'une didactique des mathématiques discrètes dans l'enseignement supérieur.

Mots clés : mathématiques discrètes, enseignement supérieur, épistémologie contemporaine, théorie des graphes, praxéologie

Discrete Mathematics at university level: an epistemological and didactical approach

Our thesis revolves around the epistemological and didactic study and analysis of discrete mathematics in higher education with a focus on graph theory. Identifying the teaching potential in discrete mathematics for higher education has shown to be little explored in the field of mathematics education. We are therefore interested in the following questions: How does research in mathematics education study discrete mathematics? What is the underlying epistemology in discrete mathematics used in higher education? To carry out our study, we conducted a state of the art in didactics of mathematics. We then conducted a contemporary exploration of an epistemological nature, by interviewing researchers in discrete mathematics. We also used a *praxeological* approach and mobilized the *outil/objet* dialectic to analyze three major groups of problems in graph theory in a selection of academic books. The results of our experimentations were compared to those of the state of the art. The results of the thesis highlight the richness of the field in terms of the "logos" block, particularly in terms of proofs, algorithms, modeling, and complexities of different nature, as well as a heterogeneity among the academic books. The results of this research represent a step towards the construction of didactics of discrete mathematics in higher education.

Key words : discrete mathematics, higher education, contemporary epistemology, graph theory, praxeology

Discipline ***:*** MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET SCIENCES SOCIALES

Spécialité : Didactique des mathématiques

Université Libanaise

Ecole Doctorale des lettres et sciences humaines et sociales (EDLS)

Sin El Fil- Liban

Université de Reims Champagne-Ardenne

CEREP - EA 4692

57 rue Pierre Taittinger – 51100 REIMS